МАТЕМАТИК ПРОГРАММАЛАШ

А. Қўчқоров

Ў. Мизропов

А. ҚЎЧҚОРОВ, Ў. МИЗРАПОВ

МАТЕМАТИК ПРОГРАММАЛАШ

СССР Қишлоқ хўжалик министрлигининг Олий ва ўрта қишлоқ хўжалик таълими Бош бошқармаси томонидан олий қишлоқ хўжалик ўқув юртларининг иқтисод ва бухгалтерия факультетлари студентлари учун ўқув қўлланма сифатида рухсат этилган

ТОШКЕНТ „ЎҚИТУВЧИ" 1985

Қ 97

Қўчқоров А., Мизрапов

Математик программалаш: Олий қ. х. ўқув юрт. иқтисод ва бухгалтерия фак. студ. учун ўқув қўлл. — Т.: Ўқитувчи, 1985 — 176 б

1. Автордош.

Кучкаров А., Мизрапов У. Математическое программирование: Учеб. пособие для студ. сельхозинститутов.

ББК 65.9(2)23я73+32.973

Тираж 2000
Карт. тиражи 4000

Тақризчи: педагогика фанлари
кандидати О. Абдуллаев

$К\frac{1\ 702200000-174}{353\ (04)-85}134-85$

Кириш

Коммунизмнинг моддий-техника базасини яратиш халқ хўжалигига планли раҳбарлик қилишни, ишлаб чиқариш самарадорлигини оширишни, моддий ресурсларни иқтисод қилиш ва уларни илмий асослашни талаб этади.

Жамиятимизда фан ва техниканинг тез ўсиши, ишлаб чиқариш структурасининг такомиллашуви халқ хўжалигига раҳбарлик қилишда янги методлардан юқори даражада фойдаланишни, халқ хўжалигига раҳбарлик қилишда раҳбарнинг илмий томондан юқори савияга эга бўлишини талаб этади.

Ҳозирги вақтда халқ хўжалигини планлаштириш ва бошқариш, ишлаб чиқариш жараёнини чуқур илмий таҳлил этиш, меҳнат унумдорлиги ва ишлаб чиқаришнинг рентабеллик даражасини ўстириш, ички резервларни қидириб топишда математик методлар ва электрон ҳисоблаш машиналаридан (ЭҲМ) фойдаланиш катта самаралар бермоқда.

Математик программалаш курси юқорида айтиб ўтилган муаммоларни ҳал этишда муҳим математик аппаратлардан бири ҳисобланади.

Ушбу қўлланмада шу курсга бағишланган программанинг энг муҳим масалалари ёритилди. Бунда асосан чизиқли программалаш ҳақидаги умумий тушунчалар билан биргаликда математик программалашнинг асосий масаласи—симплекс метод, иккиламчи симплекс метод ва транспорт масаласига оид бўлган бир қанча масалаларга етарлича эътибор берилиб, уларни планлаштириш ва бошқариш масалаларини ечиш билан боғлаб борилди. Бундан ташқари ўқув қўлланмада масалаларни ЭҲМ ёрдамида ечиш методикаси конкрет мисоллар ёрдамида кўрсатилди.

Ўқув қўлланма қишлоқ хўжалик институтларининг иқтисод-бухгалтерия факультети студентлари учун мўлжалланган бўлиб, ундан бошқа олий ўқув юртларининг иқтисод бўлими студентлари ҳам фойдаланишлари мумкин. Ўқув қўлланма шу соҳада ўзбек тилида нашр этилган дастлабки қўлланмалардан бири бўлганлиги туфайли унда айрим камчиликлар учраши мумкин. Муаллифлар қўлланма ҳақида билдирилган мулоҳазаларни миннатдорчилик билан қабул этадилар.

I-боб. МАТЕМАТИК ПРОГРАММАЛАШ ҲАҚИДА УМУМИЙ ТУШУНЧАЛАР

1-§. Математик программалаш ҳақида тушунча ва унинг умумий масаласи

Математик программалаш математиканинг бир тармоғи бўлиб, берилган функцияларнинг экстремал (максимум ёки минимум) қийматларини кўрилаётган соҳада чизиқли ёки чизиқли бўлмаган тенгламалар ва тенгсизликлар орқали топиш усуллари билан шуғулланади.

Математик программалаш инсон фаолиятининг турли соҳаларида, айниқса халқ хўжалиги корхоналарида ва унинг тармоқларида планлаштириш ва бошқаришнинг самарадорлигини оширишда кенг қўлланилмоқда.

Замонавий саноат корхоналарида ишлаб чиқаришни мақбул қарор бўйича планлаштириш ва бошқариш учун жуда кўп маълумотлар керак бўладики, уларни қайта ишлаш ва тегишли қарор қабул қилишни замонавий ҳисоблаш машиналарининг ёрдамисиз тасаввур этиш қийин. Айниқса энг мақбул оптимал қарорлар қабул қилишда қийинчиликларни енгиш ва ахборотларни қайта ишлаш анча мураккаблашади.

Ишлаб чиқаришнинг бирор соҳаси бўйича тегишли қарор қабул қилиш бир қанча босқичлардан иборатдир.

Биринчи босқичда қаралаётган объектга нисбатан мақсаднинг қай тартибда қўйилишига кўра зарур бўлган воқеа ва ҳодисалар (кўрсаткичлар) аниқланади. Улар орасидаги қонуниятлар ҳар томонлама таҳлил этилади.

Иккинчи босқичда қўйилган масаланинг математик модели тузилади. Масаланинг математик модели деганда, ечилаётган масаланинг ҳамма шартларини математик белгилар, тенглама ва тенгсизликлар орқали ифодалаш тушунилади. Масалани ечишда эса мақсад функциясининг характери аниқланади. Мақсад функцияси кўпинча кўрилаётган масаланинг оптималлик мезони кўринишида бўлиши мумкин.

Учинчи босқичда мақсад функциясига таъсир этувчи кўрсаткичлар аниқланиб, улар орасидаги ўзаро муносабат, таъсирлар ва асосий қонуниятлар аниқланади ва ниҳоят, тўртинчи босқичда олинган натижалар анализ қилиниб, қурилаётган реал объектга нисбатан тегишли қарор қабул қилинади.

Юқорида кўриб ўтилган босқичларни амалга ошириш, экстремал масаланинг математик моделини тузиш, ҳисоблаш ишларини электрон-ҳисоблаш машиналари (ЭҲМ) орқали амалга ошириш кабилар билан математик программалаш фани шуғулланади. Ечилаётган масаланинг ҳажмига кўра ҳисоблаш ишларини амалга оширишда бир қанча маълумотларни йиғиш ва қайта ишлашга тўғри келадики, бу эса ЭҲМ дан фойдаланишда мавжуд бўлган ёки маълум алгоритмга кўра машинавий программалар тузишга олиб келади.

Математик программалашнинг умумий масаласини қуйидагича ифодалаш мумкин.

Шундай $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ ўзгарувчилар топилсинки, мақсад функцияси $z = F(x)$ экстремал қийматларга (max ёки min) эришсин ва $Ax \leqslant B$ бажарилсин. Бу ерда $x \in M$ бўлиб, x — векторли бирор M тўпламда аниқланган ечимга эга бўлсин, $A - (m \times n)$ ўлчовли матрица, $B - n$ ўлчовли вектор.

Математик программалашнинг бир қанча бўлимлари мавжуд бўлиб, улардан энг асосийларини қисқача кўриб ўтайлик.

Чизиқли программалаш—мақсад функцияси чизиқли кўринишда бўлиб, унинг экстремал қийматлари орасидаги муносабат чизиқли тенгламалар ва тенгсизликлар орқали ифодаланади.

Чизиқли бўлмаган программалаш—мақсад функцияси ва ечим орасидаги муносабатлар чизиқсиз ифодаланади. Ўз навбатида чизиқли бўлмаган программалаш ушбу хилларга бўлинади:

Қабариқ программалаш—ечилаётган масала қабариқ тўпламда берилган бўлиб, мақсад функцияси қабариқ шаклда берилиши мумкин.

Квадратик программалаш—мақсад функцияси квадратик шаклда ифодаланиб, чегаравий шартлар чизиқли тенгламалар ва тенгсизликлар кўринишида берилади.

Бутун сонли программалаш—изланаётган ўзгарувчиларга нисбатан бутунлик шарти киритилади.

Динамик программалаш—экстремал масаланинг ечими бир неча босқичлардан иборат бўлиб, ҳар бир олдинги босқичнинг ечими кейинги босқичлар учун бошланғич маълумотлар сифатида фойдаланилса, бу программалашни қўллаш мақсадга мувофиқдир.

2- §. Математик программалашнинг оптималлик мезони ва унинг турлари

Ечилаётган экстремал масалалар математик программалашнинг қайси соҳаларида кўрилаётган бўлмасин, унда мақсад функцияси ёки оптималлик мезонининг қай тартибда қўйилиши муҳим аҳамиятга эга. Агар курилаётган масала халқ хўжалигининг тармоқ ёки корхоналарига нисбатан ечилса, масаланинг оптималлик мезонини тузиш яна ҳам аҳамиятлидир.

Оптималлик мезони—масала ечимининг мақсадига олиб келувчи кўрсаткич бўлиб, ҳар хил кўринишларда берилиши мумкин. Оптималлик мезони бутун халқ хўжалигига нисбатан қўйилса, у моддий ва маънавий фаровонлик даражасини ифодалайди Бу мезон *глобал* мезон дейилади, халқ хўжалигининг тармоқ ва корхоналарига нисбатан қўйиладиган мақсад функцияси эса *локал мезон* дейилади ва глобал мезонни амалга ошириш учун хизмат қилади.

Тармоқ ва корхоналар фаолиятини планлаштиришда ечиладиган масалаларнинг оптималлик мезони қай тартибда қўйилишининг айрим ҳолатларини кўриб ўтайлик.

Тармоқ ёки корхонанинг ишлаб чиқариши билан боғлиқ бўлган масала кўрилаётган бўлса, оптималлик мезони сифатида максимал фойда (рентабеллик) ёки минимал (сарфланган) харажатлар олиниши мумкин.

Қуйидагича масала берилган бўлсин. Бирор корхонада 300 минг тонна маҳсулот ишлаб чиқарилади. Бу ҳажмдаги маҳсулотни тўрт хил вариантда $x_i-(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ишлаб чиқариш мумкин. Бир тонна маҳсулотнинг таннархи мос равишда $c_i=(c_1, c_2, c_3, c_4)=(90, 96, 102, 105)$ ва ажратилган капитал қўйилмалар эса $x_i=(k_1, k_2, k_3, k_4)=(130, 90, 60, 50)$ бирликда бўлсин. Жами маҳсулот ишлаб чиқаришга ажратилган капитал маблағ 25 млн. сўм бўлса, масаланинг математик модели минимал таннархга кўра қуйидагича бўлади:

1) Оптималлик мезони (мақсад функцияси)

$$Z=90x_1+96x_2+102x_3+105x_4 \to \min.$$

2) Жами маҳсулот ишлаб чиқариш ҳажми

$$x_1+x_2+x_3+x_4 \geqslant 300000.$$

3) Капитал қўйилмалар бўйича

$$130x_1 + 90x_2 + 60x_3 + 50x_4 \leqslant 25000000$$

4) Ўзгарувчиларнинг манфий бўлмаслик шарти

$$x_1 > 0;\ x_2 \geqslant 0;\ x_3 > 0;\ x_4 \geqslant 0.$$

Умумий ҳолда эса

$$Z = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot x_i \to \min, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \geqslant B, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} k_i \cdot x_i \leqslant k, \tag{3}$$

$$x_i \geqslant 0\ (i = \overline{1,m}) \tag{4}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Маълумки, ишлаб чиқаришни ташкил этиш ва планлаштиришда мавжуд бўлган ресурслар (хом ашё, капитал қўйилмалар, ишчи кучи, ишлаб чиқариш қувватлари ва ҳоказолар) чегараланган. Бу эса ресурслардан янада самарали фойдаланишни тақозо этади. Шунинг учун айрим ҳолларда оптималлик мезон сифатида, яъни (1) формулада таннарх ўрнига $c_i = S_i + Ek_i$ ифода олинади. Бу ерда S—ишлаб чиқариш харажатлари, E—капитал қўйилмаларнинг самарадорлик коэффициенти. Бу коэффициент бутун халқ хўжалигига нисбатан қаралса 0,2 га тенг, айрим олинган тармоқларда ҳар хил бўлиши мумкин, k эса капитал қўйилмалар.

Ишлаб чиқаришни ташкил этишда транспортнинг роли ҳам беқиёсдир. Агар транспорт харажатлари ҳам мос равишда ҳисобга олинса, оптималлик мезонининг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$Z = \sum_{ij} (S_i + Ek + t_{ij}) \cdot x_i \to \min. \tag{5}$$

Ишлаб чиқаришни ташкил этишда фақатгина капитал қўйилмаларгина чегараланмай, ер, табиий ресурслар, камёб материаллар, ишчиларнинг айрим категориялари ва ҳоказолар ҳам чегараланган бўлиши мумкин, шунинг учун $C = S + Ek$ формула қуйидагича бўлади:

$$d_j = c_j + \sum k_j + \sum r_i \cdot s_{ij} + \sum z_e \cdot t_{ej} + \sum u_n Q_{nj} + T_j, \tag{6}$$

бу ерда d —маҳсулот бирлигига кура дифференциал харажат;

c —таннарх; k —капитал қуйилмалар; S—табиий ресурслар (ер, сув, ва ҳ. к.) дан фойдаланиш нормаси;

r —табиий ресурсларнинг тулов нормаси;

t —ишчи категорияларига кура сарфланадиган меҳнат нормаси;

τ —ишчи категорияларига кура меҳнат баҳоси;

Q —материаллар ишлатиш нормаси;

u —камёб материаллар ишлатиш нормаси;

T —транспорт харажатлари.

Юқорида куриб утилган оптималлик мезонларидан ташқари максимал келтирилган фойда

$$P_l = (S_l + \alpha_l) \to \max$$

(S —маҳсулотнинг оптимал баҳоси, α —дифференциал харажатлар), тармоқлараро мезон ва бутун халқ хужалигига нисбатан мезонни таққослаш сифатида

$$W_p = \int_0^x |S(x) - \alpha(x)|\,dx \qquad (7)$$

кўринишдаги оптимал мезонни ҳам олиш мумкин. Ҳамма тармоқларни халқ хўжалигига нисбатан қаралса, оптималлик мезони вектор сифатида ҳам берилиши мумкин.

Кўриниб турибдики, планлаштириш ва бошқариш масалаларини математик методлар ва ЭҲМ ни қуллаб ҳал этишда оптимиллик мезонини танлаш муҳим аҳамиятга эга экан.

3-§. Иқтисодий масалаларининг содда математик моделларини тузиш

а) Хом ашё масаласи. Икки хил B_1 ва B_2 маҳсулот тайёрлаш учун уч хил хом ашё S_1, S_2 ва S_3 ишлатилади. 1-жадвалда хом ашё запаси, маҳсулот бирлиги сони ва ҳар бир маҳсулот баҳоси берилган.

Буларга нисбатан шундай план тузиш зарурки, умумий етиштирилган маҳсулот реализациясидан олинадиган фойда максимал булиб, хом ашё запасидан рационал фойдаланилсин.

x_1 орқали B_1 маҳсулот бирлиги миқдорини; x_2 орқали B_2 маҳсулот бирлиги миқдорини белгилаймиз. Хом ашё

1- жадвал

Хом ашё турлари	Хом ашё запаси	Маҳсулот бирлигини тайёрлаш учун сарфланадиган хом ашё миқдори	
		в$_1$	в$_2$
S_1	30	4	5
S_2	40	3	6
S_3	60	2	6
Даромад	—	60	50

бирлиги миқдорини ва хом ашё запасини назарда тутиб, қуйидаги чекланишлар (тенгсизликлар) ни тузамиз:

$$4x_1 + 5x_2 \leqslant 30,$$
$$3x_1 + 6x_2 \leqslant 40,$$
$$2x_1 + 6x_2 \leqslant 60,$$

бунда маҳсулот ишлаб чиқариш учун кетган хом ашё умумий запасдан ошмаслиги керак. Бу ерда қуйидагича мулоҳаза юритиш мумкин. Агар B_1 маҳсулот чиқарилмаса, $x_1 = 0$, акс ҳолда $x_1 > 0$; B_2 учун ҳам худди шундай. Агар, x_1 ва x_2 ларга нисбатан манфиймаслик шартлари қуйилса, $x_1 \geqslant 0$; $x_2 > 0$ булади.

Масаланинг асосий мақсади тайёрланган маҳсулот реализация қилингандан сунг энг куп даромад олишдан иборат. Агар бирор мақсадга қаратилган тушунчани бирор функция билан алмаштириб Z билан белгиласак, у вақтда юқоридаги масала учун қуйидаги мақсад функцияси

$$Z = 60x_1 + 50x_2 \qquad (1)$$

нинг максимум қийматини қуйидаги шартлар бажарилганда топилади:

$$4x_1 + 5x_2 \leqslant 30,$$
$$3x_1 + 6x_2 \leqslant 40, \qquad (2)$$
$$2x_1 + 6x_2 \leqslant 60,$$
$$x_1 \geqslant 0; \ x_2 > 0; \qquad (3)$$

(1), (2) ва (3) шартлар биргаликда шу қуйилган масаланинг математик формада ёзилиши ёки масаланинг математик модели деб қаралади.

Юқорида куриб утилган масалани умумий ҳолда қараш, яъни n хил маҳсулот етиштириш учун m хил хом ашё турларидан фойдаланиш зарур бўлса, бу масаланинг матрицавий кўринишини жадвал шаклида кўрсатиш мумкин (2-жадвалга қаранг).

2-жадвал

Хом ашё турлари	Хом ашё запаси	Маҳсулот бирлигини тайёрлаш учун сарфланадиган хом ашё миқдори			
		B_1	B_2	...	B_n
S_1	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
S_2	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	.	...	.
	.	.	.	...	.
	.	.	.	...	.
	.	.	.	...	.
S_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}
Даромад	—	C_1	C_2	...	C_n

2-жадвалдаги символларнинг мазмуни бундай:

$S_i\ (i = \overline{1,m})$ — хом ашё турлари;

b_i — хом ашё запаслари;

B_i — маҳсулот хиллари

a_{ij} — i турдаги хом ашёдан j турдаги маҳсулотнинг бир бирлигини етиштиришга кетган хом ашё миқдори:

C_j — j турдаги маҳсулот бирлигининг баҳоси;

x_j — j турдаги маҳсулотнинг миқдори.

У ҳолда масалани математик формада қуйидагича ёзамиз:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \tag{1}$$

мақсад функциясининг максимум қийматлари қуйидаги шартларда топилсин.

$$b_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n \tag{2}$$

чегаравий шартлар ва

$$x_j \geqslant 0 \tag{3}$$

(номаълумларнинг манфий бўлмаслик шарти).

Рацион тузиш масаласи. Сигирларни боқиш учун шундай рацион тузиш керакки, унда энг камида 7 озуқа бирлиги. 92 гр фосфор, 12 мг карогин моддалари мавжуд бўлсин. Ҳар бир озуқанинг 1 килограмида қанча тўйимли модда борлиги 3- жадвалда берилган.

3- жадвал

Тўйимли озуқалар	1 кг озуқада тўйимли модда бирлиги	
	I хил озуқа	II хил озуқа
S_1	2	1
S_2	1	3
S_3	2	4

1 кг биринчи хил озуқанинг баҳоси 4 тийин, иккинчи хил озуқанинг баҳоси 5 тийин бўлса, шундай рацион тузиш керакки, натижада уларга кетган умумий харажат энг арзон бўлсин.

Юқорида келтирилганларни эътиборга олиб, мақсад функцияси билан, биринчи, иккинчи хил озуқадаги тўйимли модда миқдорларини ва ётиштириш сарфини x_1, x_2 лар билан белгилайлик. Натижада бу масаланинг математик формада ёзилиши қуйидаги кўринишни олади:

$$Z = 4x_1 + 5x_2 \tag{1}$$

функциянинг минимум қийматига қуйидаги шартларда эришилсин:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &> 7, \\ x_1 + 3x_2 &\geqslant 9, \\ 2x_1 + 4x_2 &\geqslant 12, \end{aligned} \tag{2}$$

$$x_1 > 0; \; x_2 \geqslant 0. \tag{3}$$

Бу масалани m хил тўйимли моддалари бўлган n хил озуқа учун ҳам умумлаштириш мумкин. Масалани математик формада ёзиш учун ушбу белгилашларни киритамиз:

a_{ij} — i турдаги тўйимли моддаси бўлган j турдаги бир бирлик озуқа миқдори

c_j — j турдаги бир бирлик озуқа таннархи (ҳосбан)

x_j — j турдаги озуқа миқдори.

У вақтда

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (1)$$

чизиқли функциянинг минимум қиймати қуйидаги шартларда топилсин:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\geq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\geq b_m \end{aligned} \qquad (2)$$

Бундай кўринишдаги масалаларни ечиш математик программалашнинг махсус методлари билан амалга оширилади, бу ҳақда кейинги бобларда батафсил тухталиб ўтамиз.

Транспорт масаласи. Иккита A_1 ва A_2 ишлаб чиқарувчи пунктда мос равишда a_1 ва a_2 бирлик маҳсулот мавжуд. Бу маҳсулотни учта B_1, B_2, B_3 истеъмолчи пунктларга мос равишда b_1, b_2, b_3 миқдорда жўнатиш талаб қилинади. Ишлаб чиқариш пунктларидан истеъмолчи пунктларга бир бирлик маҳсулотни ташиш учун сарфланган транспорт харажатлари (C_{ij}) 4- жадвалда берилган.

Маҳсулот (юк) ташишни шундай ташкил этиш керакки, транспорт харажатлари энг кам сарфланиб, истеъмолчилар талаблари мос равишда қондирилсин.

Бунинг учун i- ишлаб чиқариш пунктидаги маҳсулотни j- истеъмолчига етказиб бериш учун зарур бўлган юк миқдорини x_{ij} билан белгилайлик. Кўриниб турибдики, $i = \overline{1,2}$; $j = \overline{1,3}$. Бу кўринишдаги транспорт масаласининг мақсад функцияси

$$Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij}$$

бўлиб, қуйидаги шартларда у минимал қийматига эришсин:

1. $$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= a_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= a_2 \end{aligned}$$

(ишлаб чиқариш пунктларидаги маҳсулотларнинг ҳаммаси мос равишда ташилсин).

2. $$x_{11}+x_{21}=b_1,$$
$$x_{12}+x_{22}=b_2,$$
$$x_{13}+x_{23}=b_3$$

(истеъмолчилар талаблари мос равишда қондирилсин).

3. $$x_{ij}\geqslant 0,\ i=\overline{1,2};\ j=\overline{1,3}$$

(номаълумларнинг манфий бўлмаслик шарти).

Шуни эслатиб ўтиш кераккн, ишлаб чиқарувчи пунктлардаги маҳсулотлар миқдори (a_i) истеъмолчилар талаби (b_j) билан мувофиқ бўлмай қолиши (кўп ёки кам миқдорда бўлиши) ҳам мумкин. Бу ҳақда батафсил кейинроқ тўхталиб ўтамиз.

Юқоридаги транспорт масаласининг матрицавий (жадвал) кўринишини қуйидагича ифодалаш мумкин:

4- жадвал

Истеъмолчилар / Ишлаб чиқарувчилар	1 B_1	2 B_2	3 B_3	Ишлаб чиқарувчиларнинг қуввати
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	a_2
Маҳсулотга бўлган талаб	b_1	b_2	b_3	

4- жадвалдаги c_{ij} лар i- ишлаб чиқарувчидан бир бирлик маҳсулотни j- истеъмолчига ташиб бериш учун сарфланган транспорт харажатлари. x_{ij} — i- ишлаб чиқарувчи пунктдан j- истеъмолчи пунктга ташиладиган маҳсулот миқдори.

Бу жадвалдан кўриниб турибдики, берилган масаланинг математик модели қуйидагича бўлади:

1. Маҳсулотни ташиш учун сарфланадиган транспорт харажатлари энг кам бўлсин:

$$Z=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}c_{ij}\cdot x_{ij}$$

2. Истеъмолчилар талаби мос равишда қондирилсин:

$$x_{11}+x_{12}=b_1,$$
$$x_{12}+x_{22}=b_2,$$
$$x_{13}+x_{23}=b_3.$$

3. Ишлаб чиқарувчилардаги ҳамма маҳсулотлар ташилсин:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=a_1,$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=a_2.$$

4. Номаълумларнинг манфий бўлмаслик шарти:

$$x_{ij}\geqslant 0,\ i=\overline{1,2},\ j=\overline{1,3}.$$

4-§. Чизиқли программалаш масалалари моделларининг турли формалари

Чизиқли программалаш масалалари моделларининг умумий кўринишларини қуйидагича ифодалаш мумкин.

1-масала. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумларнинг шундай қийматлари топилсинки, (1) ва (2) шартлар бажарилиб, (3) мақсад функцияси экстремал (максимум ёки минимум) қийматга эришсин:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=a_1; \quad (1)$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\leqslant a_2;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\leqslant a_m;$$
$$x_1>0;\ x_2\geqslant 0,\ldots,x_n\geqslant 0; \quad (2)$$
$$Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \quad (3)$$

Маълумки, агар $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ векторнинг координаталари (1) тенгламани қаноатлантирса, у (1) нинг ечими дейилади. Агар x нинг координаталари (2) ни ҳам қаноатлантириб, (3) экстремал қийматга эришса, у ҳолда бундай векторнинг координаталари берилган масала учун оптимал ечим деб аталади.

2-масала. Қуйидаги тенгсизликлар системаси (4) ни қаноатлантирувчи $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумларнинг қийматларини уларнинг манфий бўлмаслик шарти (5) да топиш керакки,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant a_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \leqslant a_k \end{aligned} \quad (4)$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n; \ k = 1, 2, \ldots, n) \quad (5)$$

натижада чизиқли функция

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \quad (6)$$

максимум қийматга эришсин.

Бундай кўринишдаги масалаларда, агарда номаълумлар сони (x_i) иккитадан ошмаса, уларни график методда ечиш қулайроқдир.

3- масала (каноник форма). Қуйидаги n номаълумли m та тенгламалар системаси (7) ни қаноатлантирувчи x_1, x_2, ..., x_n номаълумларнинг шундай қийматларини, уларнинг манфий булмаслик шарти (8) да топиш керакки,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = a_m; \end{aligned} \quad (7)$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n) \quad (8)$$

натижада чизиқли функция (9)

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \quad (9)$$

максимум қийматга эришсин.

Моделларнинг бундай формаларида чизиқли функция Z нинг максимум қийматларини топиш талаб этилади.

Агар қўйилган масалада мақсад функциясининг минимум қийматини топиш керак бўлса, у вақтда мақсад функция Z ни $(-Z)$ билан алмаштирамиз, натижада (9) нинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$Z = -Z = -c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n.$$

Юқорида кўриб ўтилган формулаларда системалар тенгсизлик кўринишида берилган бўлса, албатта уларни тенглама кўринишига келтириш мумкин, яъни

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leqslant b_1$$

енгсизликни унинг чап томонига қўшимча номаълум x_{n+1} ни қўшиб,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b_1$$

тенглама кўринишига келтирамиз.

Манфий бўлмаган x_{n+1} номаълум ***қўшимча номаълум ўзгарувчи*** деб юритилади.

5-§. Математик программалашнинг ривожланиш тарихи

Биринчи марта чизиқли программалаш масаласининг қўйилиши, юк ташишнинг оптимал планини тузиш масаласи билан совет экономисти А. Н. Толстой (1930) шуғулланди. 1931 йили венгр математиги Б. Эгервари чизиқли программалаш масаласининг қўйилишига қараб уни математик формада ечиш методини яратди, бу методни „танлаш проблемаси" деб атади. Чизиқли программалаш масалаларини ечишда систематик текширишлар ҳамда уларни ечишда умумий методларнинг мукаммаллашуви совет олими Л. В. Канторович (1939) ишларида бошланган. У масалалар ечилишининг умумий методини таклиф қилади. Л. В. Канторович, В. С. Немчинов, В. В. Новожилов, А. Л. Лурье, А. Брудно, А. Г. Аганбегян, Д. Б. Юдин ва Е. Т. Гольштейнларнинг кейинги ишларида ҳар хил иқтисодий масалаларни ечишда чизиқли ва ночизиқли программалашнинг математик назарияси ва уларнинг татбиқлари ривожлантирилади. Чизиқли программалаш методларига кўпгина чет эллик ва айниқса америкалик олимларнинг ишлари бағишланган.

Чизиқли программалаш масалаларини ечишнинг асосий методи симплекс методи 1949 йилда Ж. Данцит томонидан яратилди.

Чизиқли ва ночизиқли программалаш методлари кейинчалик Форд, Фалкерсон, Кун, Лемке, Гасс, Чарнес, Билл ва бошқаларнинг ишларида ривожланди. Ҳозирги пайтда чизиқли программалаш методлари асосан конкрет иқтисодий масалаларни ЭҲМда ечиш учун қулайроқ алгоритмлар тузишга қаратилган. Чизиқли программалашнинг ривожланиши билан бир вақтда ночизиқли программалаш масалаларига катта эътибор берилмоқда.

Бу масалаларда мақсад функцияси чизиқли ёки ночизиқли, ёки иккаласи ҳам ночизиқли кўринишда бўлади.

1951 йилда Кун ва Паккернинг илмий ишлари яратилди, бунда ночизиқли масалаларни ечиш учун оптимал вариантнинг етарли ва қониқарли шартлари берилади. Бу иш ночизиқли программалаш бўйича кейинги ишларга асосан туртки бўлди.

1955 йилдан бошлаб квадратик программалаш бўйича кўпгина ишлар нашр этилди.

Деннис, Резен ва Зайтендейн ишларида ночизиқли программалаш масалаларининг градиент методи кўрсатилади. Ҳозирги пайтда ночизиқли программалаш масалаларининг бир қанча ечиш методлари мавжуд.

Купгина чизиқли ва ночизиқли программалаш масалаларида иқтисодий процесс вақтга, бир қанча босқичларга боғлиқ бўлиши мумкин.

Бундай масалаларни ечишда (улар кўп погонали дейилади) процесснинг куп босқичлар бўйича тақсимотини эътиборга олиш керак. Масалан: йиллар бўйича ресурслар тақсимоти. Бундай типдаги масалаларни ечиш методи динамик программалашнинг асосини ташкил этади.

Шундай қилиб, динамик программалаш кўп босқичли масалаларнинг оптимал ечимини қидиришда математик назария сифатида қаралади. Динамик программалаш мустақил фан сифатида асримизнинг элликинчи йилларида ташкил топди. Унинг ривожига америкалик олим Р. Беллман катта ҳисса қўшди.

Динамик программалаш кейинчалик чет эл олимлари Дрейфус, Робертс, Ланге, Карр, Хоув ва бошқалар ишларида равнақ топди. Ҳозирги пайтда у асосан ҳар хил погонали масалаларни ечиш татбиқида ривожланаётир. Чизиқли ва ночизиқли программалаш масалалари биргаликда математик программалаш масаласи деб юритилади.

II боб. ЧИЗИҚЛИ ПРОГРАММАЛАШ МЕТОДЛАРИНИНГ НАЗАРИЙ АСОСЛАРИ

1-§. Уч номаълумли тенгламалар системасининг ечимлари соҳаси

Икки номаълумли тенгламалар системасини ечиш ҳақида адабиётларда батафсил тўхталиб ўтилган. Энди уч номаълумли тенгламалар системасининг ечимларини топишнинг айрим томонларини кўриб ўтайлик.

Ушбу

$$
\begin{aligned}
a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &\geqslant 0,\\
a_2x + b_2y + c_2z + d &\geqslant 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\
a_mx + b_my + c_mz + d_m &\geqslant 0
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

тенгсизликлар системаси берилган бўлсин. Кўриниб турибдики, бу системада тенгламалар сони (m) номаълумлар сони (x, y, z) дан катта. Агар (1) да озод ҳадлар (d_m) нолга тенг бўлса, бу системанинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$
\begin{aligned}
a_1x + b_1y + c_1z &\geqslant 0,\\
a_2x + b_2y + c_2z &> 0,\\
\cdots\cdots\cdots&\cdots\\
a_mx + b_my + c_mz &\geqslant 0,
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Бу тенгсизликлар системасини тенгламалар системасига айлантириб ёзсак,

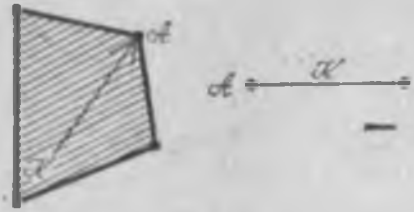
$$
\begin{aligned}
a_1x + b_1y + c_1z &= 0,\\
a_2x + b_2y + c_2z &= 0\\
\cdots\cdots\cdots&\cdots\\
a_mx + b_my + c_mz &= 0.
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

янги система ҳосил булади.

Маълумки. (x, y, z) номаълумларнинг бирон-бир қиймати тенгламалар (тенгсизликлар) системасини қаноатлантирса, номаълумларнинг бундай қиймати шу система учун ечимлар соҳасини ташкил этади. (1) системанинг ечимлари соҳаси K билан, (2) ники K_0 билан, (3) системаники эса K_1 билан белгиланган дейлик. Бу ерда шуни айтиш мумкин: юқорида қайд этилган тенгламалар системасининг ечимлари соҳаси K фазода бирор қаварик кўп ёқли соҳа ёки қаварик кўп ёқли конусда жойлашган деб тушуниш мумкин. K кўп ёқли соҳада қуйидаги ҳоллар булиши мумкин.

I-ҳол. Тенгсизликлар системаси нормал булган ҳол. Бу ерда K соҳа кесишувчи тўғри чизиқларни ўз ичига олмайди, демак, камида битта учга эга булиши мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, агар K текисликда ётса, у ҳолда K текисликдаги қаварик кўп бурчакли соҳа бўлиб, у тўғри чизиқларни ўз ичига олмайди ва шу сабабли учга эга булиши шарт. Агар K соҳа текисликда ётмаса, энди унинг чегарасини қараймиз. Бу чегара ясси ёқ-



1-расм.

лардан иборат бўлиб, бу ёқларнинг ҳар бири тўғри чизиқларни ўз ичига олмайдиган қавариқ кўпбурчак соҳа сифатида учларга эга бўлиши лозим. Лекин исталган ёқнинг учи бир вақтда K соҳанинг ҳам учи булади (1-расм). K соҳанинг ҳар бир A нуқтасида камида учта чегаравий текислик учрашади ва бирор A_i нуқтада кесишиб, у булар учун ягона умумий нуқта бўлади.

Агар бундай бўлмаганда эди, A нуқта орқали ўтадиган барча чегаравий текисликлар устма-уст тушар эди, ёки умумий тўғри чизиққа эга бўлар эди. У ҳолда A орқали ўтувчи ва умумий чегаравий текисликда ёки умумий чегаравий тўғри чизиқда ётувчи кичик кесма K га тегишли бўлар эди, бу эса учнинг аниқланишига зид.

Демак, тенгламалар системасининг ечимларини аниқлашда баъзи ўзгаришлар киритишга тўғри келади. Чунончи энди тўғри система деб

$$
\begin{gathered}
a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_mx + b_my + c_mz + d_m = 0
\end{gathered} \tag{4}
$$

кўринишдаги тенгламалар системасига айтилади.

Энди иккита тенгламадан иборат қисм системани эмас, балки уч тенгламадан иборат қисм системани (x, y, z) ечим системанинг ягона ечими деган шартда қараймиз. Тўғри қисм системани бундай тушунишда учларни излаш усули илгаригидек қолади, аммо K соҳанинг барча учларини топиш учун (4) системанинг барча тўғри қисм системаларининг ечимларини топиш ва улар орасидан дастлабки (1) системани қаноатлантирганларини ажратиб олиш лозим.

1-мисол. *Ушбу тенгсизликлар системаси ёрдамида аниқланган K соҳанинг учларини топинг:*

$$
\begin{gathered}
2x + y + z - 1 \geqslant 0, \\
x + 2y + z - 1 \geqslant 0, \\
x + y + 2z - 1 \geqslant 0, \\
x + y + z - 1 \geqslant 0.
\end{gathered} \tag{5}
$$

Мазкур ҳолда бир жинсли тенгламалар системаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$
\begin{aligned}
2x + y + z &= 0,\\
x + 2y + z &= 0,\\
x + y + 2z &= 0,\\
x + y + z &= 0.
\end{aligned} \tag{5'}
$$

Бу системанинг ягона ечими (0, 0, 0) эканлигига осон ишонч ҳосил қиламиз. Демак (5) система нормалдир.

K соҳанинг учларини топиш учун (5) системанинг учта тенгламасидан иборат барча мумкин бўлган қисм системаларини кўриб чиқамиз:

$$
\begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0, \\ x + 2y + z - 1 = 0, \\ x + y + 2z - 1 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0, \\ x + 2y + z - 1 = 0, \\ x + y + z - 1 = 0; \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0, \\ x + y + 2z - 1 = 0, \\ x + y + z - 1 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0, \\ x + y + 2z - 1 = 0, \\ x + y + z - 1 = 0. \end{cases}
$$

Бу тенгламалар системаларининг ечимлари $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0) кўринишда бўлиб, булардан биринчиси (5) системани қаноатлантирмайди, қолган учтаси эса қаноатлантиради. Демак, K соҳанинг учлари: A_1 (1, 0, 0), A_2 (0, 1, 0), A_3 (0, 0, 1) нуқталар бўлар экан.

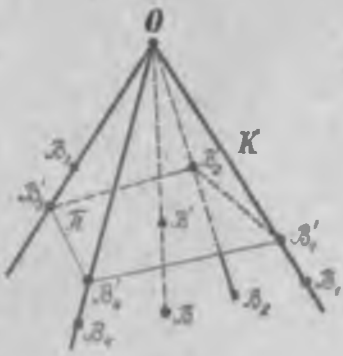
2- ҳол. Нормал бир жинсли тенгсизликлар системаси. Бу ҳолда (2) тенгсизликларнинг ҳар бири ярим фазони ифодалайди, бу ярим фазонинг чегаравий текислиги координаталар бошидан ўтади.

Мазкур ҳолда чегаравий текисликларнинг кесишмаси ягона нуқта бўлиб, у координаталар боши бўлади. Бошқача айтганда K_0 тўплам (2) системанинг ечимлари соҳаси ягона учли қавариқ кўп ёқли конусдир.

Қавариқ кўп ёқли конуслар типларига кўра K_0 соҳа ё пирамида, ёки бурчак, ёки нур, ёки битта нуқта (координаталар боши) бўлиши мумкин. Сўнгги ҳолни ҳозирча қарамаймиз.

Юқоридаги учта ҳолда K соҳанинг учлари

$$K_0 = (B_1, B_2, \ldots, B_q)$$



2- расм

кўринишда бўлади. Бу ерда $B_1, B_2, \ldots B_q$ конуснинг ҳар бир қиррасида n танлаб олинган m та нуқта. Бундай нуқталарни қуйидаги мулоҳазага асосланиб топиш мумкин. Уларнинг ҳар бири а) K_0 га тегишли, яъни (2) системани қаноатлантиради ва б) икки турли ёқларнинг кесишиш чизиғига тегишли, яъни (3) системадаги икки нопропорционал* тенгламани қаноатлантиради.

Агар а) ва б) шартларни қаноатлантирадиган ягона нуқта (0, 0, 0) топилса, у ҳолда K_0 соҳа координаталар боши билан устма-уст тушади.

2-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 2x+y+z\geqslant 0, \\ x+2y+z\geqslant 0, \\ x+y+2z\geqslant 0, \\ x+y+z\geqslant 0. \end{cases} \qquad (6)$$

тенгламалар системасининг K_0 ечимлар тупламини топиб, кейин эса системанинг ечимлар тўплами K ни топайлик.

Аввало (6) система бир жинсли бўлиб, нормал тенгсизликлар системасини ташкил этади.

Бу ҳолда икки нопропорционал тенгламадан иборат системани олтита турли усул билан тузиш мумкин:

$$\begin{cases} x+2y+z=0, \\ x+y+2z=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y+z=0, \\ x+y+z=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+y+z=0, \\ x+2y+z=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y+z=0, \\ x+y+z=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+y+z=0, \\ x+y+2z=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+2z=0, \\ x+y+z=0; \end{cases}$$

---

* $ax+by+cz=0$ ва $a'x+b'y+c'z=0$ тенгламаларни нопропорционал деб атаймиз, агар $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$ тенгламалардан камида бири бажарилмаса, бу ҳолда тегишли текисликлар тўғри чизиқ бўйича кесишади.

Бу олти системанинг ҳар бири учун ушбу иккита нолмас ечимни танлаймиз: (x, y, z) ва $(-x, -y, -z)$. Биринчи система учун $(3, -1, -1)$ ва $(-3, 1, 1)$ ни олиш мумкин. (6) тенгсизликларни бу ечимлардан фақат биринчиси қаноатлантиради. Бу ерда $B_1(3, -1, -1)$ нуқтани ҳосил қилади. Қолган бешта система учун ҳам юқоридагига ухшаб $B_2(-1, 3, -1)$ ва $B_3(-1, -1, 3)$ нуқталарни ҳосил қилиш мумкин.

Шундай қилиб, K_0 соҳа $t_1B_1 + t_2B_2 + t_3B_3 = (3t_1 - t_2 - t_3;\ -t_1 + 3t_2 - t_3;\ -t_1 - t_2 + 3t_3)$ кўринишда бўлиши мумкин, бу ерда t_1, t_2, t_3 — ихтиёрий манфиймас сонлар.

Демак, (6) тенгламалар системасининг ечимлари соҳаси K

$$(A_1, A_2, A_3) + K_0$$

кўринишда қуйидаги нуқталардан иборат бўлади:

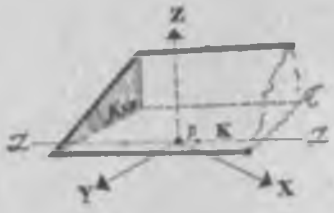
$$S_1A_1 + S_2A_2 + S_3A_3 + t_1B_1 + t_2B_2 + t_3B_3 = S_1(1, 0, 0) + S_2(0, 1, 0) + S_3(0, 0, 1) + t_1(3, -1, -1) + t_2(-1, 3, -1) + t_3(-1, -1, 3) = (S_1 + 3t_1 + t_2 - t_3; S_2 - t_1 + 3t_2 - t_3; S_3 - t_1 - t_2 + 3t_3),$$

бу ерда S_1, S_2, S_3 лар йиғиндиси 1 га тенг бўлган манфиймас сонлар.

3-ҳол. Тенгсизликлар системаси нормал бўлмаган ҳол. Бу ерда (3) бир жинсли тенгламалар системасининг ечимлар соҳаси z координаталар бошидан фарқли нуқталарни ҳам ўз ичига олади. z текисликларнинг кесишмасидан иборат бўлгани учун икки ҳол бўлиши мумкин:

1. z тўғри чизиқ. Бу ҳолда K соҳа ўзининг P нуқтаси билан бирга $p + z$ тўғри чизиқни ҳам ўз ичига олади. z га параллел бўлмаган бирор τ текисликни қарайлик. Агар биз τ текисликнинг қайси нуқталари K соҳага тегишли эканлигини билсак—бу нуқталар тўпламини K_τ билан белгилаймиз—у ҳолда K соҳанинг ўзини ҳам топа оламиз, k соҳа $K = K_\tau + z$ дир.

Аммо z тўғри чизиқ ҳар қандай бўлганда ҳам унга параллел бўлмаган τ текислик сифатида xOy, xOz ёки yOz координат текисликларидан бирини доимо танлаб олиш мумкин. Масалан, z тўгри чизиқ yOz текисликка параллел бўлмасин. Бу текисликни τ деб олсак, K_τ тўпламни энди $K_{y,z}$ билан белгилаймиз—бу yOz текислик-



3- расм.

нинг K га кирган қисмидир (3- расм). Бу тўпламни топиш учун (1) системада $x=0$ деб олиш лозим. Натижада

$$
\begin{aligned}
&d_1 y + c_1 z + d_1 \geqslant 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&d_m y + c_m z + d_m \geqslant 0
\end{aligned}
\tag{7}
$$

тенгсизликлар системасини ҳосил қиламиз, буни юқорида баён қилинган метод билан ечиш мумкин.

Бунда K_{yz} тўпламни топиб, $K = K_{yz} + z$ тенгликни (агар z тўғри чизиқ yOz текисликка параллел бўлмаса (ёза оламиз, бу эса соҳанинг тўлиқ тасвирини беради.

Эслатма. Агар K_{yz} бўш тўплам бўлса, у ҳолда K ҳам бўш тўплам бўлади. Бу эса (1) система биргаликда эмаслигини англатади.

3- мисол. Ушбу системанинг ечимлар соҳаси K ни топинг:

$$
\begin{cases}
-2x + y + z - 1 \geqslant 0,\\
-3x - y + 4z - 1 \geqslant 0,\\
-x - 2y + 3z > 0.
\end{cases}
\tag{9}
$$

(9) га мос бўлган бир жинсли тенгламалар системасини қараймиз:

$$
\begin{cases}
-2x + y + z = 0,\\
-3x - y + 4z = 0,\\
-x - 2y + 3z = 0.
\end{cases}
\tag{10}
$$

Кўриниб турибдики, учинчи тенглама биринчи икки тенгламанинг натижасидир, демак, система биринчи икки тенгламага мос келади.

Унинг ечимлари тўплами ушбу

$$-2x + y + z = 0$$

ва

$$-3x - y + 4z = 0.$$

текисликлар кесишадиган z тўғри чизиқдир.

z тўғри чизиқда координаталар бошидан фарқли бирор B нуқтани танлаб оламиз. Бунинг учун (10) системанинг биринчи икки тенгламасини қаноатлантирадиган бирор (бир вақтда нолга тенгмас) учта x, y, z сонларни топиш кифоя. Масалан, учта (1, 1, 1) сонни олайлик. Бу ҳолда $z\ OB$ тўғри чизиқдан иборат бўлиб, B нуқтанинг координаталари (1, 1, 1) га тенг бўлади.

Агар (9) системада $x = 0$ булса, y ва z га нисбатан икки номаълумли нормал

$$\begin{cases} y + z - 1 > 0, \\ -y + 4z - 1 \geqslant 0, \\ -2y + 3z > 0. \end{cases}$$

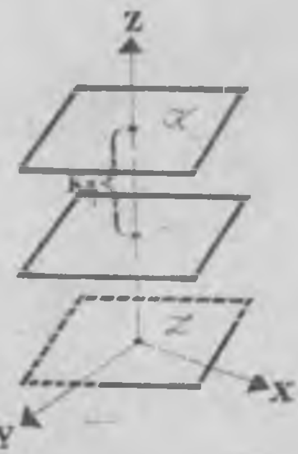
системани ҳосил қиламиз. Бу системанинг $K_{y,z}$ ечимлар соҳасини юқорида баён қилинган метод билан топиш мумкин. Кераклн ҳисоблашларни бажариб, $K_{y,z}$ тўплам битта $A\left(\frac{3}{5}; \frac{2}{5}\right)$ (yOz текисликдаги) нуқтадан иборатлигини аниқлаймиз. Демак, изланаётган K соҳа,

$$A + tB = \left(0, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right) + t\,(1, 1, 1) = \left(t; \frac{3}{5} + t; \frac{2}{5} + t\right)$$

кўринишдаги барча нуқталардан иборат бўлиб, K соҳа z тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқдир.

Агар Z текислик бўлса, у ҳолда кесувчи τ тўплам сифатида бу текисликка параллел бўлмаган бирор тўғри чизиқни ёки координата ўқларидан бирини олиш мумкин. Масалан, Z ўқ z га параллел бўлмасин. K, тўпламни Z ўқнинг K га кирган қисмини топиш учун (1) системада $x = 0$, $y = 0$ деб олиб,

$$\begin{aligned} &c_1 z + d_1 \geqslant 0, \\ &\cdots\cdots \\ &c_m z + d_m \geqslant 0 \end{aligned} \qquad (11)$$



4- расм.

тенгсизликлар системасини ҳосил қиламиз. Юқоридагидан кўриниб турибдики, K тўплам топилганидан сўнг (L текислик Z ўққа параллел эмас деган шартда) системанинг ечимларини

$$K = K_z + Z \qquad (12)$$

каби ёзиш мумкин. Бу эса K нинг тўла тасвирини беради.

Эслатма. Агар K_z бўш тўплам бўлса, у ҳолда K ҳам бўш тўпламдир. Шу сабабли (1) система биргаликда бўлмайди.

4- мисол.

$$
\begin{aligned}
x - y + z + 1 &\geqslant 0, \\
-x + y - z + 2 &\geqslant 0
\end{aligned}
\qquad (13)
$$

системанинг ечимлар соҳаси K ни топинг.
Бу системага мос бир жинсли тенгламалар системаси

$$
\begin{aligned}
x - y + z &= 0, \\
-x + y - z &= 0
\end{aligned}
\qquad (14)
$$

кўринишда бўлади. Бунда иккинчи тенглама бир нечтасининг натижасидир, шу сабабли (14) системанинг ечимлари соҳаси $x - y + z = 0$ тенглама билан аниқланади. z текисликдан иборат бўлади. Бу текисликни ягона нуқтада кесиб ўтишини кўриш осон, демак, у z ўққа параллел эмас, K_z тўпламни топамиз.

(13) системада $x = 0$, $y = 0$ десак,

$$
\begin{aligned}
z + 1 &\geqslant 0, \\
z + 2 &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

янги система ҳосил бўлади, бундан

$$-1 < z < 2 \qquad (15)$$

эканлиги келиб чиқади. Шундай қилиб, K тўплам

$$(0, 0, z) + (x, y - x + y) = (x, y, z - x + y)$$

кўринишдаги нуқталардан иборат бўлган $K_z + Z$ тўпламдан иборат, бу ерда x ва y ихтиёрий сонлар, z эса (15) тенгсизликларни қаноатлантирадиган сон.

Бу параграфни уч ўлчовли фаза учун хос бўлган икки хулоса билан якунлаймиз. Бунинг учун „текислик" сўзини „фазо" сўзига алмаштириб олиш лозим.

1. *Фазодаги исталган (бўш бўлмаган) қавариқ кўп ёқли соҳани*

$$(A_1, A_2 \ldots, A_p) + (B_1, B_2 \ldots, B_q)$$

кўринишдаги йиғинди билан ифодалаш мумкин.

2. Фазода $(A_1, A_2 \ldots, A_p) + (B_1, B_2 \ldots, B_p)$ кўриниш даги ҳар қандай йиғинди ё бутун фазонинг ўзи ёки ундаги бирор қавариқ кўп ёқли соҳадир.

2-§. Номаълумлар сони истаганча бўлган чизиқли тенгсизликлар системалари

Олдинги параграфда асосан уч номаълумли тенгсизликлар системаларини ечиш усуллари кўриб ўтилган эди. Энди тенгсизликлар системасида номаълумлар сони $n > 3$ бўлганда қандай бўлишини қисқача қараб чиқамиз.

n номаълумли чизиқли тенгсизликлар системасини геометрик талқинлаш, уларни ечиш учун n ўлчовли фазо деб аталадиган тушунчага мурожаат этишга тўғри келади. Бунда биз энг олдин унинг муҳим тушунчаларининг таърифларини келтирамиз.

n ўлчовли фазонинг нуқтаси фазо таърифига кўра у n та тартибланган сонлар набори

$$x_1, x_2 \ldots, x_n$$

билан берилади, бу сонлар фазо нуқтаси *координаталари* деб аталади. Бу гап аналитик геометриядаги асосий факт: текисликдаги нуқта сонлар жуфти орқали, фазода эса сонлар учлиги орқали аниқланади, деган фикрга асосланади. Бундан буён координаталари $x_1, x_2 \ldots, x_n$ дан иборат M нуқтани $M = (x_1, x_2 \ldots, x_n)$ ёки тўғридан тўғри $M(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ кўринишда ёзамиз. $M(0, 0, 0 \ldots\ldots)$ нуқтани координаталар боши деб қаралади.

Энди n ўлчовли фазода кесма тушунчасини қараймиз.

Фазода $M_1 \; M_2$ кесма

$$s_1M_1 + s_2M_2$$

кўринишдаги барча нуқталар тўплами сифатида характерланиши мумкин, бу ерда s_1 ва s_2 йиғиндиси 1 га тенг бўлган ҳар қандай номанфий сонлар. Уч ўлчовли фазодан n ўлчовли фазога ўтишда бу характеристикани кесманинг таърифи учун қабул қилинади.

$$M'(x_1', x_2', \ldots, x_n') \text{ ва } M''(x_1'', x_2'', \ldots, x_n'')$$

n ўлчовли фазонинг икки ихтиёрий нуқтаси бўлсин. У ҳолда $M' \; M''$ кесма деб

$$s'M' + s''M'' = (s'x'_1 + s''x''_2;\; s'x'_2 + s''x_2''; \\ \ldots, s'x'_n + s''x'') \qquad (1)$$

кўринишдаги барча нуқталар тўпламига айтилади, бу ерда s', s'' йиғиндиси 1 га тенг бўлган исталган иккита номанфий сон. $s' = 1$; $s'' = 0$ да M' нуқта, $s' = 0$; $s'' = 1$ да эса M'' нуқта ҳосил бўлади. Бу M', M'' нуқталар кесманинг учларидир. Қолган нуқталар $s' > 0$; $s'' > 0$ да ҳосил булиб, кесманинг *ички нуқталари* дейилади.

n ўлчовли фазога доир тушунчалардан бири *гипертекислик* тушунчасидир. Бу уч улчовли фазода текислик тушунчасининг умумлашмаси булиб „Гипер" қушимчаси бу ерда аниқ маънога эга. Гап шундаки, n улчовли фазода турли типдаги „текисликлар", чунончи бир ўлчовли „текисликлар" (улар „тўғри чизиқлар" деб аталади), икки ўлчовли „текисликлар" ва ҳоказо, ($n-1$ ўлчовли текисликлар мавжуд бўлиши мумкин. ($n-1$) ўлчовли текисликларни „гипертекисликлар" деб аталади.

Таъриф. n ўлчовли фазода гипертекислик деб, координаталари

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b = 0 \qquad (2)$$

биринчи даражали тенгламани қаноатлантирадиган $M(x_1 x_2, \ldots, x_n)$ нуқталар тупламига айтилади, бу ерда $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (номаълумлар олдидаги коэффициентлар) сонлардан камида бири нолдан фарқли. $n = 3$ булганда (2) тенглама $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + b_3 = 0$ кўринишни олади, бу эса оддий фазодаги текислик тенгламасидир (бу ерда координаталар одатдагича x, y, z билан эмас, балки x_1, x_2, x_3 билан белгиланган).

n ўлчовли фазо (2) гипертекисликка нисбатан икки

қисмга, яъни $$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b \geqslant 0 \qquad (3)$$

тенгсизлик бажариладиган соҳага ва

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b \leqslant 0. \qquad (4)$$

тенгсизлик бажариладиган соҳага ажралади. Бу соҳалар ярим фазолар деб аталади. Ҳар бир гипертекислик бутун фазони иккита ярим фазога ажратади, гипертекисликнинг ўзи эса бу яримфазолар учун умумий қисм булади.

Қаварик жисм тушунчаси ҳам n ўлчовли ҳол учун умумлаштирилади. Агар n ўлчовли фазодаги нуқталар тўплами ўзининг иккита M' ва M'' нуқталари билан биргаликда бутун (M' M'') кесмани ҳам уз ичига олса, у *қаварик тўплам* деб аталади.

Исталган ярим фазо қавариқ тўплам эканлигини исботлаш қийин эмас. Ҳақиқатан ҳам, $M'(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ ва $M''(x_1'', x_2'', \ldots, x_n'')$ нуқталар (3) ярим фазога тегишли бўлсин. $M' M''$ кесманинг исталган M нуқтаси ҳам бу ярим фазога тегишли бўлишини исботлаймиз. Маълумки, M нуқтанинг координаталари (1) кўринишда, ёки

$$\begin{aligned} x_1 &= sx_1' + (1-s)\,x_1'', \\ x_2 &= sx_2' + (1-s)\,x_2'', \qquad (0 \leqslant s \leqslant 1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= sx_n' + (1-s)\,x_n'' \end{aligned}$$

кўринишда ифодаланади. Бу ифодаларни (3) нинг чап томонига қўйиб топамиз

$$a_1[sx_1' + (1-s)\,x_1''] + a_2[sx_2' + (1-s)\,x_2''] + \ldots + \\ + a_n[s\cdot x_n' + (1-s)\,x_n''] + b = s(a_1x_1' + a_2x_2' + \ldots + \\ + a_nx_n') + (1-s)(a_1x_1'' + a_2x_2'' + \ldots + a_nx_n'') + sb + \\ + (1-s)\,b;$$

(бунда биз b сонини $sb + (1-s)\,b$ йиғинди билан алмаштирдик), бу эса

$$s[a_1x_1' + \ldots + a_nx_n' + b] + (1-s)[a_1x_1'' + \ldots + \\ a_nx_n'' + b],$$

га тенг. Ўрта қавсларга олинган йиғиндининг ҳар бири манфий эмас, чунки M' ва M'' нуқталарнинг иккаласи ҳам (3) ярим фазога тегишли. Демак, бу ифоданинг ўзи ҳам манфий эмас (чунки $s \geqslant 0$ ва $(1-s) \geqslant 0$). Шу билан M нуқтанинг (3) ярим фазога тегишли эканлиги, яъни бу ярим фазо қавариқ эканлиги исботланди

Энди n номаълумли чизиқли тенгсизликлар системасининг геометрик маъносини кўриб ўтайлик. Ушбу система берилган бўлсин:

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a \geqslant 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n + b \geqslant 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c \geqslant 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Бу тенгсизликларнинг ҳар бири бирор ярим фазони аниқлайди, барча тенгсизликлар эса биргаликда n ўлчовли фазода чекли сондаги ярим фазоларнинг кесишмаси бўлган бирор K соҳани аниқлайди. K соҳа қавариқдир, чунки уни ҳосил қилувчи ярим фазолардан исталгани қавариқдир.

Уч ўлчовли ҳолдагига ўхшаш n ўлчовли фазода чекли сондаги ярим фазоларнинг кесишмаси бўлган соҳани *қавариқ кўп ёқли соҳа*, бу кесишма чегараланган тўплам бўлган ҳолда эса оддий қилиб *қавариқ кўпёқ* деб атаймиз. Бу ерда „чегараланган тўплам" сўзини бундай маънода тушуниш лозим: қаралаётган соҳанинг барча нуқталарининг координаталари абсолют қиймати бўйича бирор c ўзгармас сондан катта эмас, яъни берилган соҳанинг барча нуқталари учун $|x_1| \leqslant c, \ldots, |x_n| \leqslant c$ ифода ўринли. Бунда c исталганча кичик мусбат сон.

Шундай қилиб, n ўлчовли фазонинг координаталари (5) системани қаноатлантирадиган нуқталари тўплами мазкур системанинг тенгсизликларига жавоб берадиган барча ярим фазоларнинг кесишиши натижасида ҳосил бўладиган K қавариқ кўп ёқли соҳадир.

K соҳа уч номаълумли система бўлган ҳолда K соҳа қандай усуллар билан аниқланган бўлса, шу усуллар n та номаълум бўлган ҳолга тегишли ўзгаришлар билан кўчирилади. Шу билан бирга номаълумлар сони учтадан катта бўлганда бу усуллар кам самаралидир, улардан фойдаланиш эса кўп ҳисоблашларни талаб этади.

Шуни таъкидлаб ўтиш зарурки, уч ўлчовли фазода қавариқ кўп ёқли тўпламларнинг тузилиши ҳақидаги умумий теоремалар n ўлчовли фазода ҳам ўз кучини сақлайди, лекин бунда уларнинг исботлари анча мураккабдир.

3-§. Ботиқ тўпламлар

Масалан, бирор текислик $(x_1 0 x_2)$ да A_1, A_2 кесмани аниқловчи икки нуқта $A_1\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right)$ ва $A_2\left(x_1^{(2)} x_2^{(2)}\right)$ берилган бўлсин. Берилган кесманинг ихтиёрий ички нуқтаси $A\ (x_1, x_2)$ нинг координаталарини кесма охирининг координаталари орқали топамиз:

$A_1 A = (x_1 - x_1^{(1)};\ x_2 - x_2^{(1)})$ ва $A_1 A_2 = (x_1^{(2)} - x_1^{(1)};\ x_2^{(2)} - x_2^{(1)})$ векторлар параллел ва бир томонга йўналган, шунинг учун

$A_1 A = t\,(A_1 A_2)$, бу ерда $0 \leqslant t \leqslant 1$ ёки $x_1 - x_1^{(1)} = t\,(x_1^{(2)} - x_2^{(1)})$, $x_2 - x_2^{(1)} = t\,(x_2^{(2)} - x_2^{(1)}$, бундан $x_1 = (1-t)\,x_1^{(1)} +$

$+ x_1^{(2)}, \ x_2 = (1-t)\cdot x_2^{(1)} \cdot t + t \cdot x_2^{(2)}.$

Агар $(1-t_1) = \lambda \cdot t = \lambda_2$ деб олсак:

$$x_1 = \lambda_1 \cdot x_1^{(1)} + \lambda_2 \cdot x_1^{(2)}$$
$$x_2 = \lambda_1 \cdot x_2^{(1)} + \lambda_2 \cdot x_2^{(1)} \qquad (1)$$
$$\lambda_1 \geqslant 0, \ \lambda_2 \geqslant 0, \ \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

5- расм.

(1) да A нуқтанинг координаталари A_1 ва A_2 нуқталарнинг координаталарини мос равишда λ_1 ва λ_2 сонларга купайтмасининг қўшнлишилан ҳосил булади:

$$A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2, \qquad (2)$$
$$\lambda_1 \geqslant 0; \ \lambda_2 \geqslant 0; \ \lambda_1 + \lambda_2 = 1. \qquad (3)$$

(2) ва (3) шартларни бажарадиган А нуқта A_1 ва A_2 нуқтанинг *ботиқ чизиқли комбинацияси* дейилади. Агар $\lambda_1 = 1$ ва $\lambda_2 = 0$ бўлса, A нуқта кесманинг A_1 учи билан устма-уст тушади. $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 1$ бўлса, А нуқта кесманинг A_2 учи билан устма-уст тушади.

Агар $0 < t < 1$ булса, A нуқта $A_1 A_2$ кесмани тасвирлайди. A_1 ва A_2 нуқталар $A_1 A_2$ кесманинг *шартли нуқталари* деб аталади.

Энди A нуқтанинг координаталари $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n та нуқта координаталаридан иборат бўлсин. Агар

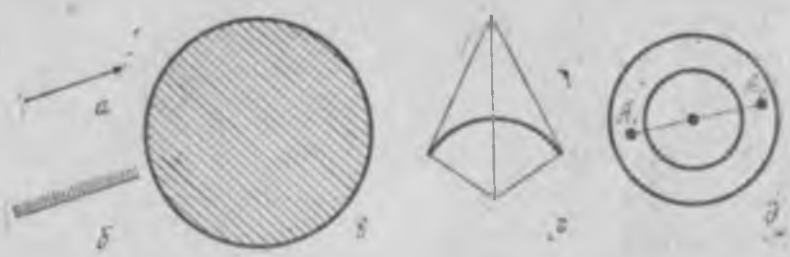
$$A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_n A_n$$
$$\lambda_i \geqslant 0; \ (i, j = 1, 2, \ldots, n); \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$$

шарт бажарилса, A нуқта нуқталарнинг ботиқ чизиқли комбинацияси ҳисобланади. Нуқталар тўплами исталган A нуқта билан бирга уларнинг ихтиёрий ботиқ чизиқли комбинациясига ҳам эга бўлса, бундай тўплам *ботиқ тўплам* деб аталади. Ботиқ тўпламларга тўғри чизиқ кесмаси, тўгри чизиқ, ярим текислик, доира, ярим фазо мисол бўла олади.

(6) расмдаги *а, б, в, г* тўпламлар ботиқ, *d* тўплам эса ботиқ эмас, чунки $A_1 A_2$ кесма тўлалигича бу тўпламга тегишли эмас.

Тўпламнинг *бурчак нуқталари* деб тўпламнинг икки ихтиёрий нуқтасининг ботиқ комбинацияси бўлмаган нуқталарига айтилади.

Масалан, доиранинг бурчак нуқталари унинг ички нуқталаридан иборат. Учбурчакнинг бурчак нуқталари



6- расм.

7- расм

унинг учидир. Шундай қилиб, ботиқ тўплам бурчак нуқталарининг сони чекли ва чексиз бўлади. Тўғри чизиқ, текислик, ярим текислик, фазо, ярим фазо бурчак нуқталарга эга эмас. Ботиқ кўпбурчак деб текисликдаги чегараланган ботиқ ёпиқ чегарали тўпламга айтилади. Бу тўплам бурчак нуқталарининг чекли сонига эга. Кўпбурчакнинг бурчак нуқталари унинг учлари дейилади. Икки учни туташтирувчи кўпбурчакнинг чегарасини ҳосил қилувчи кесмалар унинг томонлари дейилади.

Ботиқ учбурчакнинг *таянч чизиғи* деб тўғри чизиқдан бир томонда ётган кўпбурчак билан ҳеч бўлмаса битта умумий нуқтага эга бўлган тўғри чизиққа айтилади. 7- расмдаги MN ва FQ тўғри чизиқлар $ABCDF$ кўпбурчакнинг таянч тўғри чизиқларидир.

4- §. Чизиқли тенгсизликлар ва уларнинг геометрик маъноси

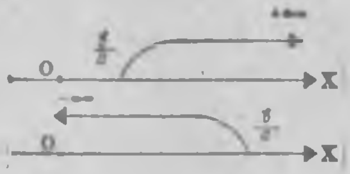
Иккита миқдор ёки икки алгебраик ифода бир-бири билан $>$ (катта) ёки $<$ (кичик) белги билан боғланиши натижасида тенгсизликлар ҳосил бўлади. Тенгсизликлар қатъий ($>$;$<$) ёки ноқатъий ($\geqslant$;$\leqslant$) бўлиши мумкин. Бир ёки кўп ўзгарувчили биринчи даражали тенгсизликлар *чизиқли тенгсизликлар* дейилади.

Ноқатъий бир ўзгарувчили чизиқли тенгсизликни бундай ёзиш мумкин:

$$ax + b \geqslant 0. \tag{1}$$

Бу тенгсизликни ечиш учун b ишорасини ўзгартириб ўнг тарафга ўтказамиз: $ax \geqslant -b$ ва (1) дан номаълум миқдор x ни топамиз:

$$x \geqslant -\frac{b}{a}, \qquad (2)$$



8- расм.

бунда $a \neq 0$ (1) тенгсизликнинг ечими x нинг (2) тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматлари тўплами бўлади.

Бу тўплам сон ўқида чап ёки ўнгдан чегараланган нурни ифодалайди

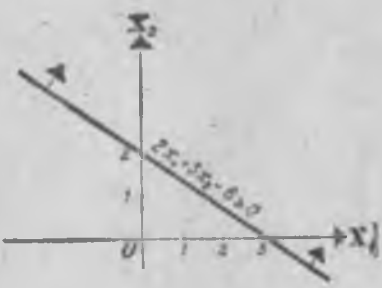
Агар номаълумларнинг бир хил қийматлари тенгсизликларни бир вақтда қаноатлантирса, бундай тенгсизликлар тенг кучли (эквивалент) тенгсизликлар дейилади. Бу ерда (1) ва (2) тенгсизликлар тенг кучлидир.

Икки номаълумли чизиқли тенгсизликларни бундай ёзиш мумкин:

$$a_1x_1 + a_2x_2 - c \geqslant 0.$$

Чизиқли тенгсизликларнинг геометрик тасвири уларга мос келувчи ярим фазо бўлади. Тенгламани тенгсизликка алмаштиргандаги тўғри чизиқ ҳосил қилган ярим текислик кўпинча икки номаълумли тенгсизликнинг ечимлари соҳасини ифодалайди. Шу ярим текисликка тегишли исталган нуқта координаталари тенгсизликни қаноатлантиради, яъни шу исталган нуқтани тенгсизлик ечими деб қараш мумкин.

Бундай нуқталарнинг тўплами эса ечимлар тўпламини ҳосил қилади. Масалан, $2x_1 + 3x_2 - 6 \geqslant 0$ тенгсизлик ечими учун 9- расмда кўрсатилган нуқталарнинг координаталарини оламиз. Агар шу нуқталар тенгсизликни қаноатлантирса, ечимлар тўплами шу ярим текисликда ётади, агар қаноатлантирмаса, қарама - қарши ярим текисликда ётади. Шундай қилиб, икки ўзгарувчили тенгсизликлар худди бир ўзгарувчили тенгсизликка ўхшаб геометрик жиҳатдан нурни эмас, фазода уч номаълумли тенгсизликни тасвирловчи тўғри чизиқ кўринишини олади ва бу



9- расм.

тенгсизлик $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3-c>0$ кўринишида ифодаланади. Тенгсизликни тенгламага алмаштириб, фазони иккига бўлувчи текисликни ҳосил қиламиз. Ҳар бир ярим текисликнинг исталган нуқтаси координаталари иккала тенгсизликни қаноатлантиради. Битта ярим фазода $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3-c\geqslant 0$ ёки $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3-c\leqslant 0$ тенгсизликлар ўринли бўлиб, керак ярим фазо танлаб олинади. Шундай қилиб, шу тенгсизликнинг ечими $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3-c=0$ тенглик ҳосил қилган ярим фазоларининг бири. Шу ярим фазодаги исталган нуқта координаталари тенгсизликнинг ечими бўлади.

Энди чизиқли тенгсизликлар системасини қараймиз. Биргаликда қаралган бир неча тенгсизликларни *чизиқли тенгсизликлар системаси* деб юритилади. Ҳамма тенгсизликларни қаноатлантирадиган ечим системанинг ечими дейилади.

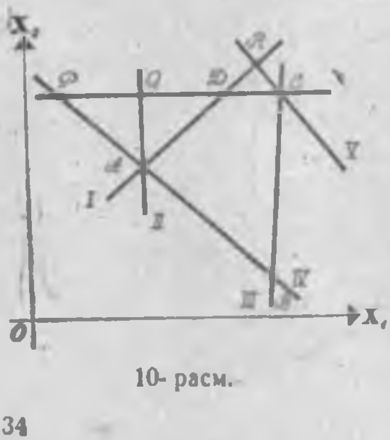
Бундай система берилган бўлсин:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{I}) \quad a_{11}x_1+a_{12}x_2-c_1\geqslant 0,\\
&(\mathrm{II}) \quad a_{21}x_1+a_{22}x_2-c_2\geqslant 0,\\
&(\mathrm{III}) \quad a_{31}x_1+a_{32}x_2-c_3\geqslant 0,\\
&(\mathrm{IV}) \quad a_{41}x_1+a_{42}x_2-c_4\geqslant 0,\\
&(\mathrm{V}) \quad a_{51}x_1+a_{51}x_2-c_5>0.
\end{aligned}$$

Ҳар бир тенгсизликнинг ечимлари тўплами бўлган ярим текисликни расмда кўрсатамиз (10- расм).

Икки номаълумли тенгсизликлар системасининг ечими кўпбурчакдан иборат эканлиги расмдан кўриниб турибди. Системанинг ечими чегараланмаган кўпбурчакдан иборат система бўлиши мумкин.

Кўпбурчакни қуйидаги тенгсизликлар орқали кўриб чиқайлик:



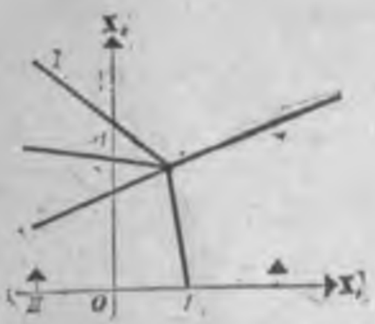
10- расм.

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{I}) \quad x_1+x_2-1\geqslant 0,\\
&(\mathrm{II}) \quad 2x_1+2x_2+1>0,\\
&(\mathrm{III}) \quad x_2>0.
\end{aligned}$$

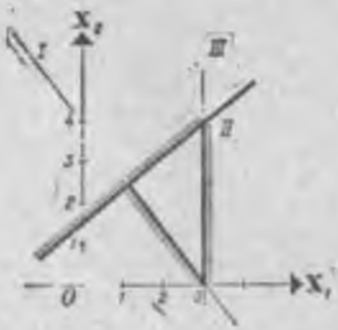
Энди бошқа системани қараймиз:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{I}) \quad 2x_1+x_2-4\leqslant 0,\\
&(\mathrm{II}) \quad 2x_1-3x_2+6\leqslant 0,\\
&(\mathrm{III}) \quad x_1-2\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Бу системанинг ечимлар тўпламини чизиб 3 та ярим



11- расм.



12- расм.

текисликка тегишли бўлган 1 та ҳам нуқта топа олмаймиз. Демак, бу система биргаликда ечимга эга эмас.

Агар уч номаълумли тенгсизликлар системасини олсак, унда ҳар бир тенгсизлик ўз ечимлар тўпламига эга бўлади. Системанинг ечими ечимлар тўпламининг кесишмасидан иборат бўлади. Бу кесишма кўп қиррали фазовий фигура бўлиши мумкин. Бу ерда турли чегараланмаган фигуралар ҳосил бўлиши мумкин ёки система ўзаро мос келмаслиги мумкин.

Ушбу n ўзгарувчили m та тенгсизликлар системасининг ечими мос ярим фазолар кесишмаси бўлади:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - c_1 \geqslant 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - c_2 \geqslant 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n - c_m \geqslant 0. \end{array} \qquad (1)$$

Бу ечимлар тўплами ҳар бир тенгсизлик ҳосил қилган гипертекислик билан чегараланади:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - c_1 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - c_2 = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n - c_m = 0. \end{array} \qquad (2)$$

Ҳар бир n та гипертекислик кесишмаси нуқтани беради. (2) системада ҳосил бўлган m тенгламанинг исталган қисм системалар сони чегараланган ва улар C_n^m ўрин алмаштиришлардан иборат бўлади. Бундан ташқари гипертекисликлар кесишмасига тегишли бўлган ҳамма нуқталар ярим фазолар кесишмасига тегишли бўлмаслиги мумкин. Бу тўпламга тегишли гипертекисликлар кесишишидан ҳосил бўлган нуқта шу текисликлар учун энг четки нуқта бўлади ва бу нуқталар сони чегараланган бўлади. Шунда юқоридаги қурилган тўплам ε^n кўп қиррали фигура бўлади. Бунинг нуқталари фигуранинг қирралари бўлади. Евклиднинг n ўлчовли фазосида бу тенгсизликлар системасининг ечими қандайдир Ω кўп қиррали фигурадан иборат бўлади. Бу фигуранинг қирралари гипертекисликларнинг бир қисми бўлади. $(n-1)$ тенгламали система кўп қиррали фигуранинг ε^n та қиррасини ҳосил қилади. Ҳақиқатан ҳам, тўғри чизиқнинг параметрик тенгламалари қуйидагича бўлади:

$$x_1 = a_1 + b_1 t,$$
$$x_2 = a_2 + b_2 t,$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_n = a_n + b_n t.$$

Шу тенгламалардан параметр t ни топамиз:

$$t = \frac{x_1 - a_1}{b_1};\quad t = \frac{x_2 - a_2}{b_2};\quad t = \frac{x_3 - a_3}{b_3};\ \ldots;\ t = \frac{x_n - a_n}{b_n}.$$

Тенгламаларнинг ўнг томонларини бир-бирига тенглаштирсак,

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2} = \frac{x_3 - a_3}{b_3} = \ldots = \frac{x_n - a_n}{b_n}$$

тенглик ҳосил бўлади.

Бу ерда $(n-1)$ та озод тенгламалар бор. Улар гипертекислик тенгламаларидир. Шу $(n-1)$ гипертекисликнинг кесишмаси кўп қиррали фигура қиррасини беради. Фигуранинг ҳар бир учида камида n та қирра бўлади, чунки кесишувчи гипертекисликларнинг $n-1$ қиррадаги сони n га тенг:

$$C_n^{n-1} = C_n^{n-1} = C_n^1 = n$$

Бунда ярим фазо ёпиқ бўлгани учун у системага тегишли Ω фигура берк бўлади. Шундай қилиб, бу фигура чегараланган ва фигуранинг исталган нуқтаси системанинг ечими бўла олади. Бундан ташқари фигура чегараланмаган бўлиши мумкин. Баъзан системанинг ечими фақат нуқта бўлади ёки система, умуман ечимга эга эмас.

Кўпинча система тўғри бўлади, аммо баъзан (1) тенгсизлик бошқаларига мос келмаслиги мумкин. Унда масалани қайтадан текшириб чиқиш керак.

5-§. Чизиқли программалаш масалаларининг геометрик тасвирлари ва уларни график метод билан ечиш

Чизиқли программалаш масалаларини геометрик метод билан ечиш икки, баъзан уч ўлчовли фазовий моделлар асосида ҳал этилади. Уч ўлчовли фазовий масалаларнинг тасвирини ҳосил қилиш кўпинча жуда қийин бўлади.

Икки ўзгарувчили чизиқли программалаш масаласи берилган: (1) нинг максимум (минимум) қийматларини (2) ва (3) шартда топиш керак.

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max(\min), \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 < b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 < b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 < b_m \end{cases} \tag{2}$$

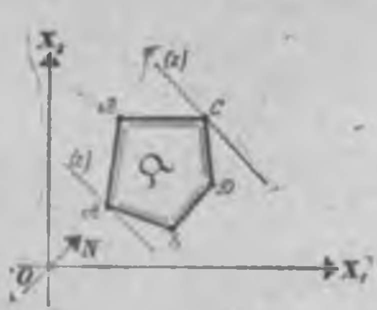
$$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 > 0. \tag{3}$$

Агар (2) система (3) шартда тўғри ва ечимлари соҳаси тўртбурчак билан чегараланган бўлса, (2) ва (3) тенгсизликларнинг ҳар бири

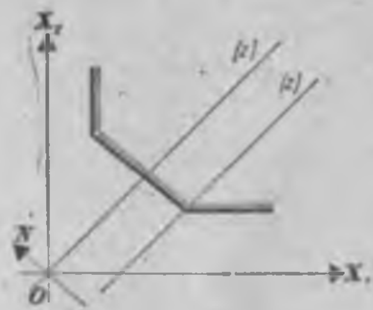
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \qquad (i = 1, 2, \dots, m) \; x_1 = 0; \; x_2 = 0$$

тўғри чизиқ билан чегараланган ярим текисликларни аниқлайди. (1) чизиқли функциянинг аниқ Z қийматида $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$ тўғри чизиқ тенгламасидир. (2) нинг кўпбурчагини ва (1) нинг $Z = 0$ даги тўғри чизиғини тузамиз. Бунда қуйидаги масала намоён бўлади.

Кўпбурчакнинг шундай нуқтасини топиш кераккн, бунда $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$ унинг асоси бўлиши керак ва Z минимал бўлиб, Z нинг қиймати N нормал бўйича усади. Шунинг учун Z тўғри чизиқни ўзига параллел ҳолда N нормал вектор йўналиши бўйича кўчирамиз. 13-расмдан кўриниб турибдики, кўпбурчак 2 та асосга эга бўлади, бу асослар A ва C нуқталардап иборат, A нуқтада функциянинг қиймати минимум бўлади, C нуқтада эса функция максимум қийматга эга бўлади.



13- расм.

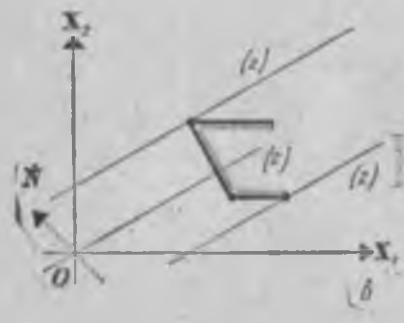


14- расм.

Агар ечим кўпбурчаги чегараланмаган бўлса, икки ҳол мавжуд бўлиши мумкин.

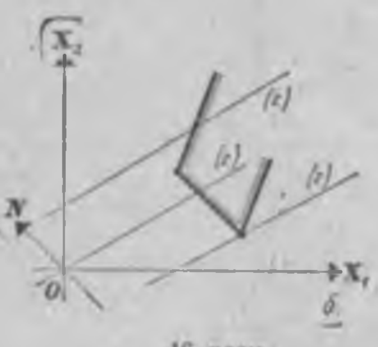
1- ҳол. $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$ тўғри чизиқ $\vec{N}$ нормал вектор бўйича кўпбурчакни кесиб ўтали ва унга нисбатан асос бўла олади. Бу ҳолда функциянинг ечими (юқорига ва пастга) чексиз кўп бўлади.

2- ҳол. Тўғри чизиқ ҳаракатлана бориб ечимлар кўпбурчагига асос бўлиб қолади. У вақтда чизиқли функция ўзининг соҳадаги вазиятига қараб юқоридан чегараланган, пастдан чегараланмаган (15- расм), пастдан чегараланган, юқоридан чегараланмаган (16- расм), ҳам юқоридан, ҳам пастдан чегараланган бўлади (17- расм).

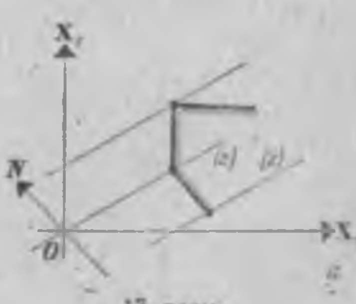


15- расм.

График метод ёрдамида масалалар ечиш усулида номаълумларнинг сони ик-



16- расм.



17- расм.

китадан кўп бўлмагандагина фойдаланиш мумкин. Бундай масалаларнинг қўйилиши қуйидагича:
Ушбу

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\leqslant a_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\leqslant a_2, \\ \cdots\cdots &\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 &\leqslant a_m \end{aligned} \qquad (1)$$

Икки номаълумли тенгсизликлар системаси берилган бўлиб, номаълумларнинг манфий бўлмаслик шарти

$$x_1 > 0; \quad x_2 \geqslant 0 \qquad (2)$$

ўринли бўлганда

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max\ (\min) \qquad (3)$$

мақсад функциясининг максимум ёки минимум қийматларини топиш талаб этилади.

(3) функциянинг максимум ёки минимум қийматларини топиш учун (1) тенгсизликлар системасини тенгликлар системасига айлантириб, унинг ечилиш соҳасини, яъни ечилиш кўпбурчагини топамиз. Ана шу кўпбурчакнинг энг юқорнги ва энг пастки нуқталарида (3) функция ўзининг максимум ёки минимум қийматига эришади.

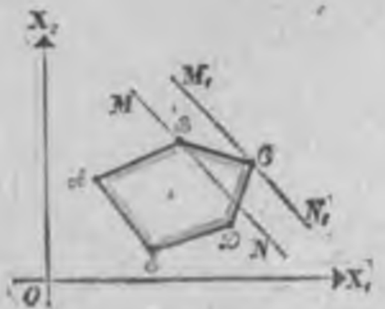
Айтайлик, чизиқли тенгсизликларнинг ечилиш соҳаси $ABCDE$ (18- расм) кўпбурчакдан иборат бўлиб, (3) функциянинг йўналиши MN тўғри чизиқ кўринишидан иборат бўлсин. Z нинг ўсишига қараб MN тўғри чизиқни ўз-ўзига шундай параллел кўчирамизки, бунда икки ҳол бўлиши мумкин.

1. Тўғри чизиқни параллел кўчирганимизда у кўпбурчакнинг энг юқори нуқтаси, яъни учидан ўтади ва функция шу нуқтада ўзининг максимум қийматига эришади.

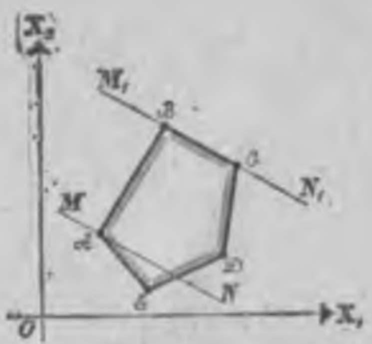
2. Тўғри чизиқ параллел кўчирилганида у кўпбурчак бирор томонининг устига тушиши мумкин. У ҳолда функция қийматининг максимуми шу томоннинг ҳамма нуқталарида ётади (19- расм).

Юқорида кўриб ўтилган чизиқли программалаш масалаларини график усулда ечишни конкрет масалаларда кўриб ўтайлик.

1- масала. Бир корхона икки хил маҳсулот ишлаб чиқариш учун тўрт хил хом ашёдан фойдаланади.



18- расм.



19- расм.

Корхонада маҳсулот ишлаб чиқариш учун талаб қилинган хом ашё бирликлари 1-жадвалда келтирилган.

1- жадвал

Хом ашё тайёрланадиган буюмлар группаси	Маҳсулот ишлаб чиқариш учун зарур бўлган бирликлар		Ишлаб чиқариладиган буюмлар жами сони
	I маҳсулот	II маҳсулот	
А	2	2	12
В	1	2	8
С	4	0	16
Д	0	4	12
Бир дона ишлаб чиқарилган буюм ҳисобига олинадиган соф даромад (минг сўм ҳисобида)	2	3	

Талаб қилинган маҳсулотни ишлаб чиқаришни шундай ташкил қилиш керакки, у корхонага максимум соф даромад келтирсин.

Берилган масалани чизиқли программалашнинг график методи бўйича ечиш учун биринчи хил маҳсулот ишлаб чиқаришга талаб қилинган хом ашёни x_1, иккинчи хил маҳсулотни ишлаб чиқариш учун талаб қилинган хом ашёни эса x_2 билан белгилаймиз. У вақтда 1- жадвал маълумотлари асосида қуйидаги чизиқли тенгсизликлар системасини тузамиз:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\leqslant 12, \\ x_1 + 2x_2 &\leqslant 8, \\ 4x_1 \qquad &\leqslant 16, \\ 4x_2 &\leqslant 12. \end{aligned} \qquad (4)$$

Бу системадаги номаълумлар қийматларининг номанфий бўлмаслик шарти бундай:

$$x_1 \geqslant 0; \qquad x_2 > 0. \tag{5}$$

Биринчи хил ишлаб чиқарилган маҳсулотнинг бир донасидан 2 минг сум, иккинчи хил маҳсулотнинг бир донасидан 3 минг сўм соф даромад олинса 1-жадвалнинг охирги қатор кўрсаткичи бўйича қуйидаги чизиқли функцияни тузамиз:

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max. \tag{6}$$

Тузилган (4), (5) ва (6) шартлар қўйилган масаланинг математик формада ёзилишидир. (4) чизиқли тенгсизликлар системасидан номаълумларнинг шундай қийматларини топиш керакки, натижада (6) чизиқли функция (максимум) қийматига эга бўлсин.

Масаланинг график ечими 19-расмдаги *ABCDE* кўпбурчакда тасвирланиши керак. Бунинг учун чизиқли тенгсизликлар системасини тенгламалар системасига айлантириш талаб этилади, чунки тенгсизликлар системаси кўринишида унинг графигини чизиб бўлмайди. Шунинг учун (4) тенгсизликлар системасини қуйидаги тенгламалар системасига келтирамиз:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 12, \\ x_1 + 2x_2 = 8, \\ 4x_1 = 16, \\ 4x_2 = 12, \end{cases} \tag{7}$$
$$x_1 = 0,$$
$$x_2 = 0.$$

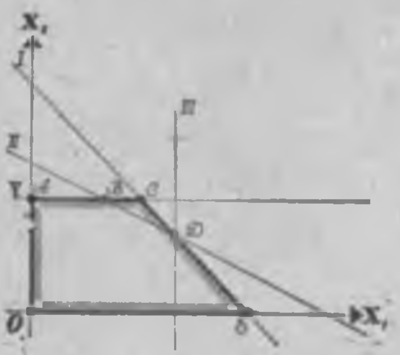
Тўғри бурчакли координаталар системасида (7) нинг графигини чизамиз.

Бунинг учун (7) системадаги ҳар бир тенгламани айрим-айрим олиб, уларнинг графигини $x_1 O x_2$ текислигида ҳосил қиламиз. Тенгламалар системасининг графиги 20-расмда кўрсатилган.

Ҳосил бўлган бу фигурадан масаланинг оптимал ечимини излаймиз.

Масаланинг оптимал ечими эса *OABCDE* кўпбурчак (20-расм) нуқталаридан бирида бўлиши керак.

Шунинг учун *OABCDE* кўпбурчакда учларнинг координаталарини топамиз. Графикдан кўринадики, *O* ва *A* нуқталарнинг координаталари мос равишда *O*



20- расм.

(0; 0); A (0; 3) ларга тенг булади. Энди C нуқтанинг координаталарини топамиз. бунинг учун (1) ва (4) тенгламалар системасини биргаликда ечамиз.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 12, \\ \qquad\quad 4x_2 = 12. \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 12 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{48 - 24}{8 - 0} =$$

$$= \frac{24}{8} = 3; \qquad x_1 = 3;$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 0 & 12 \end{vmatrix}}{8} = \frac{24 - 0}{8} = \frac{24}{8} = 3 \qquad x_2 = 3.$$

Демак, кўпбурчакдаги C нуқтанинг координаталари: C (3; 3). Шунингдек, D нуқтанинг координаталари $x_1 = 4$; $x_2 = 2$ бўлиб, D (4; 2) га, E нуқтанинг координаталари эса $x_1 = 6$; $x_2 = 0$ бўлиб, E (6; 0) га ва F нуқтанинг координаталари эса F (8; 0) га тенг. Кўпбурчакда топилган нуқталарнинг координаталари бўйича $z = 2x_1 + 3x_2$ функциянинг қийматини ҳисоблаймиз:

$Z_O = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0,$ $\qquad Z_O = 0$ минг сўм,

$Z_A = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 9,$ $\qquad Z_A = 9$ минг сўм,

$Z_C = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 15,$ $\qquad Z_C = 15$ минг сўм,

$Z_D = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 14,$ $\qquad Z_D = 14$ минг сўм,

$Z_E = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 0 = 12.$ $\qquad Z_E = 12$ минг сўм.

Функциянинг ҳамма қийматлари орасида энг каттаси 15 минг сўмга тенг бўлиб, бу қиймат C (3; 3) нуқтага тўғри келади.

Демак, масаланинг оптимал ечими, яъни максимум қиймати номаълумларнинг $x_1 = 3$ ва $x_2 = 3$ қийматларига мос келади. Бу биринчи хил маҳсулотдан 3 дона, иккинчи хил маҳсулотдан ҳам 3 дона ишлаб чиқарилганда корхона энг кўп, яъни 15 минг сўм соф даромад олишини курсатади.

2-масала. Инсон ўз соғлиғи ва иш қобилиятини йўқотмаслиги учун бир суткада 4 бирликдан кам бўлмаган B_1; 6 бирликдан кам бўлмаган B_2; 9 бирликдан кам бўлмаган B_3 ва 6 бирликдан кам бўлмаган B_4 озуқа моддалари бўлган таомни истеъмол қилиши керак.

2-жадвал

Ошхонада мавжуд бўлган таомлар

Биринчи хил таом бир порциясининг нархи 30 тийин, бу таомлар таркибида моддалар қуйидаги бирликларда мавжуд		Иккинчи хил таом бир порциясининг нархи 20 тийин бўлиб, унинг таркибида моддалар қуйидаги бирликларда мавжуд	
B_1	2	B_1	1
B_2	0	B_2	3
B_3	1	B_3	3
B_4	3	B_4	2

Танланган таомлар энг арзон бўлиши билан бирга инсоннинг иш қобилияти ва саломатлигини тула сақлаб қолиши учун ошхонада мавжуд бўлган икки хил таомнинг (2-жадвал) қайси биридан қанча бирликда истеъмол қилиш кераклиги аниқланиши зарур.

Инсон овқатланишни шундай ташкил этиши керакки, унинг бир суткалик истеъмоли учун керак бўлган таомнинг нархи энг кам бўлсин, организм эса талаб қилинган ҳамма моддалар билан сутка давомида тўла таъминлансин. Бу масалани ечишга киришишдан олдин 2-жадвал маълумотлари асосида масала шартини ўзида тўла акс эттира оладиган 3-жадвални тузамиз.

3-жадвал

Инсон организми учун талаб қилинадиган моддалар	Бир порция таомдаги мавжуд бўлган моддаларнинг миқдори		Инсоннинг бир суткада овқатланиш нормаси
B_1	2	1	4
B_2	0	3	6
B_3	1	3	9
B_4	3	2	6
Бир порци таомнинг нархи (тийин)	30	20	

Юқоридаги берилган шартларга асосан инсоннинг бир суткада истеъмол қилиши зарур бўлган моддаларни ўзида тўла сақлаган таомлардан қанча порция олиши кераклигини аниқлаш лозим. Бунинг учун инсон биринчи таомдан x_1 порция, иккинчи таомдан эса x_2 порция олиб истеъмол қилади, деб фараз қилсак, у ҳолда 3- жадвал кўрсаткичлари бўйича

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geqslant 4, \\ 3x_2 &\geqslant 6, \\ x_1 + 3x_2 &\geqslant 9, \\ 3x_1 + 2x_2 &> 6 \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

тенгсизликлар системасини ва шу системадаги номаълумларнинг

$$\left.\begin{aligned} x_1 &> 0, \\ x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}\right| \qquad (2)$$

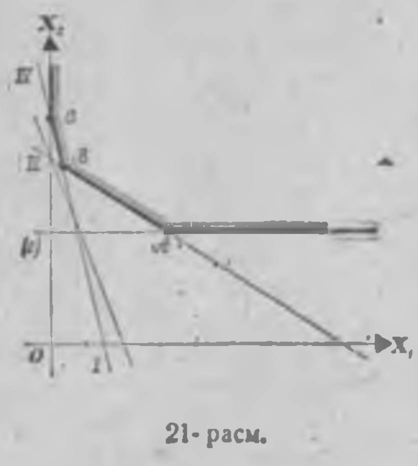
манфий бўлмаслик шарти асосида

$$Z = 30x_1 + 20x_2 \qquad (3)$$

мақсад функциясини тузамиз.

(1) тенгсизликлар системасидаги номаълумларнинг шундай қийматларини топиш керакки, натижада (3) функция минимум қийматига эришсин.

Бунинг учун тузилган тенгсизликлар системаси тенгликларга айлантириб юқоридаги масалага ўхшаш қуйидаги кўпбурчакни ҳосил қиламиз.



21- расм.

ABC кесма учларининг координаталари қуйидагича (21-расм).

$$A\ (3;\ 2),\quad B\ \left(\frac{3}{5};\ \frac{4}{5}\right),$$
$$C\ (0;\ 4).$$

Тўғри чизиқ тўртбурчакда қатнашмайди. Шунинг учун Z функциянинг қийматини A, B ва C нуқталар учун аниқлаймиз.

$$Z_A = 30 \cdot 3 + 20 \cdot 2 \;\|\; 1 \text{ сўм } 30 \text{ тийин.}$$

$$Z_B = 30 \cdot \frac{3}{5} + 20 \cdot \frac{14}{5} = 74 \text{ тийин.}$$

$$Z_C = 0 + 20 \cdot 4 = 80 \text{ тийин.}$$

Демак, биз излаган ечим 74 тийинга тенг. Шундай қилиб,инсон организми учун талаб қилинадиган моддаларни ўзида тўплаш учун бир суткада биринчи таомдан 0,6 порция, иккинчи таомдан 2,8 порция истеъмол қилишн зарур экан.

6-§. Матрицалар

а) *Матрицалар ҳақида тушунча ва унинг хоссалари.*

Бундан кейинги ишимизда зарур бўладиган яна бир муҳим тушунча—матрица тушунчасини киритамиз.

Элементлари a_{mn} бўлган қуйидаги кўринишдаги m та қатор ва n та устунга эга бўлган

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

тўғри тўртбурчак шаклида жойлашган $m \cdot n$ сондан иборат системани $m \cdot n$ ўлчовли матрица дейилади. a_{ij} сонларни эса матрицанинг элементлари дейилади.

Матрицани қисқача $\| a_{ij} \|$;(a_{ij}) каби белгиланади ёки битта бош ҳарф, масалан, A_{ij} билан белгиланади, бунда $i = 1, 2, \ldots, m$ қатор; $j = 1, 2, \ldots, n$ устун номерлари. Агар $m = 1$ бўлса, у вақтда матрица фақат битта $A = (a_{11}, a_{12} \ldots, a_{1n})$ қатордан, агарда $n = 1$ бўлса, матрица фақат битта

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

устундан иборат бўлади. Агар матрицанинг қаторлари сони билан устунлари сони бир-бирига тенг бўлса, бундай матрица *квадрат матрица* дейилади:

$$A_{n\cdot n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2}, & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрицанинг алоҳида олинган ҳар бир қаторини n ўлчовли вектор деб қараш мумкин:

$$\vec{a}_i=(a_{i1},\ a_{i2},\ \dots,a_{in}).$$

Шундай қилиб, матрица шундай векторларнинг m тасидан ташкил топган бўлади:

$$\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \dots,\ \vec{a}_m.$$

Шунга ўхшаш,матрицанинг ҳар бир устунини m ўлчовли $\vec{b}_j=(a_{1j},\ a_{2j},\ \dots,\ a_{mj})$ вектор деб ва бутун матрица n та вектордан ташкил топган деб қараш мумкин. У вақтда матрицани бундай ёзсак бўлади:

$$A=(\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\dots,\ \vec{a}_n) \text{ ёки } B=(\vec{b}_1,\ \vec{b}_2,\ \dots,\ \vec{b}_n) \quad .$$

ва аксинча ҳар бир матрицани m ўлчовли вектор қатор матрица ёки устун матрица деб қараш мумкин.

Мисоллар:

1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ матрица 3·5 ўлчовли бўлиб, 3 қатор ва 5 устундан иборат.

Бу матрицада жами $3\cdot 5=15$ та элемент мавжуд.

A матрица $(3\cdot 5)$ ўлчовли вектор қатордан ҳосил бўлган ёки $(5\cdot 3)$ ўлчовли вектор устундан ташкил топган:

$$\vec{a}_1=(2,\ 4,\ 5,\ 0,\ 1),$$
$$\vec{a}_2=(3,\ 2,\ 1,\ 6,\ 2),$$
$$\vec{a}_3=(0,\ 1,\ 2,\ 1,\ 0),$$
$$A=(\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3).$$
$$\vec{b}_1=(2,\ 3,\ 0),$$
$$\vec{b}_2=(4,\ 3,\ 1),$$
$$\vec{b}_3=(5,\ 1,\ 2),$$

$$\vec{b}_4 = (0,\ 5,\ 1),$$
$$\vec{b}_5 = (1,\ 2,\ 0),$$
$$A = (\vec{b}_1,\ \vec{b}_2,\ \vec{b}_3,\ \vec{b}_4,\ \vec{b}_5).$$

1) Агар матрицанинг ҳамма элементлари 0 га тенг бўлса, у матрица *ноль матрица* дейилади ва бундай белгиланади:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 \ldots 0 \end{pmatrix}$$

2) Квадрат матрицанинг диагоналидаги элементлари нолдан фарқли бўлиб, қолган барча элементлари нолга тенг бўлса бундай матрицалар *диагонал матрицалар* дейилади, масалан

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

3) Диагонал матрицанинг ҳамма диагонал элементлари 1 га тенг бўлса ундай матрица *бирлик матрица* деб аталади ва E ҳарфи билан белгиланади:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \end{pmatrix}$$

Бирлик матрицани $E = |\delta_{ij}|$ кўринишда ёзиш мумкин. Бу ерда

$$\delta_{ij} = \begin{cases} \text{агар } i = j \text{ бўлса, } 1, \\ \text{агар } i \neq j \text{ бўлса, } 0, \end{cases}$$

Бунда δ_{ij} — Кронеккер белгиси

4) $A = \| a_{ij} \|$ матрицани бирор k сонига кўпайтириш учун унинг ҳамма элементларини мос равишда k га кўпайтириш керак:

$$k\cdot A = Ak = \| k\cdot a_{ij} \|$$

Масалан: $$5\cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 5 \\ 5 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

5) $A = \| a_{ij} \|$ ва $B = \| b_{ij} \|$ иккита бир хил ўлчовли матрицанинг йиғиндиси ва айирмаси яна ўша ўлчовли матрицани ҳосил қилади:

$$A + B = \| a_{ij} + b_{ij} \|.$$

6) Агар бир матрицанинг устунлари сони иккинчи матрицанинг қаторлари сонига тенг бўлса, бундай икки матрицани ўзаро кўпайтириш мумкин. Масалан:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 2\cdot 3 & 2\cdot 3 + 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 4 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 3 + 1\cdot 3 & 1\cdot 3 + 2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 1\cdot 4 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 0\cdot 3 + 3\cdot 3 & 2\cdot 3 + 1\cdot 2 + 0\cdot 2 + 3\cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & 17 \\ 17 & 15 \\ 13 & 19 \end{pmatrix}.$$

7) Берилган матрицадан, унинг сатрларини устунларига алмаштириш натижасида ҳосил бўлган матрицани транспонирланган матрица дейилади. Бунда i-номерли сатр транспонирланган матрицада j номерли устунга айланади. Транспонирланган матрицани A^{T} билан белгиланади. Агар $A = \| a_{ij} \|$ бўлса, унда $a_{ij}^{T} = a_{ji}$ умумий ҳолда, агар

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

булса, у ҳолда

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{i1} & \ldots & a_{m1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1j} & a_{2j} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{mj} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{in} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Шундай қилиб, матрицани транспонирлаш сатрларни устунларга алмаштиришдан иборатдир. Хусусан, агар X матрица битта устун X $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ дан тузилган булса транспонирланган матрица битта сатр X^{T} $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дан тузилган булади.

Агар $A^{\mathrm{T}} = A$ булса, яъни транспонирланган мартица матрицанинг ўзига айнан тенг булса, матрица симметрик матрица дейилади. Симметрик матрица квадрат шаклида булади, унинг элементлари учун қуйидаги тенглик уринли: $a_{ij} = a_{ji}$.

8) Агар $a_{ij} = -a_{ji}$ тенглик бажарилса ёки $A = -A^{\mathrm{T}}$ булса, матрица қийшиқ симметрик матрица булади. Қийшиқ симметрик матрица квадрат шаклда булиб, ҳамма i, j лар учун $a_{ij} = -a_{ji}$ тенглик бажарилиши керак.

Қийшиқ симметрик матрицанинг ҳамма диагонал элементлари нолга тенг.

б) *Матрица ранги*

$(m \cdot n)$ ўлчамли матрицадан унинг исталган сатрлари ва устунларини турли методлар билан ўчириш натижасида квадрат матрица тузиш мумкин. Бундай йўл билан ҳосил қилинган матрицаларнинг детерминантлари шу матрицанинг *минорлари* деб аталади. Бу минорларнинг баъзилари нолдан фарқли бўлиши, баъзилари эса нолга тенг булиши мумкин. Минор квадрат матрицанинг детерминанти бўлгани учун мазкур квадрат матрицанинг тартибига мос тартибга эга булади. Матрицанинг ранги деб шу матрицанинг нолдан фарқли минорларининг энг юқори тартибига айтилади. Матрицанинг рангини r ҳарфи билан белгиланади. Агар матрицанинг r тартибли минорлари нолдан фарқли булиб, ундан юқори тартибли минорлари (агар, унданлари мавжуд булса) нолга тенг булса, матрица r рангга эга булади. Агар матрицанинг барча элементлари нолга тенг булса, у ноль рангли матрица булади.

Қуйида келтирилган мисоллардан матрицалар ранглари бевосита детерминант минорлари ёрдамида аниқлаймиз. Ушбу матрицалар берилган бўлса:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & -2 & -3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 8\\ -1 & -2 & -3\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix},\qquad F=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Бу матрицаларнинг детерминантларининг сон қийматлари:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=10,\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & -3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=0,$$

$$C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & -3\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}=0,\qquad F=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=0.$$

Агар матрицанинг детерминанти нолга тенг бўлса бундай матрицани *айниган матрица* дейилади. Биз қараётган матрицаларнинг биринчисидан бошқаси айниган матрицалардир. F матрицанинг ранги таърифга кўра нолга тенг. C матрицанинг барча 2-тартибли минорлари нолга тенг, матрицанинг ўзи эса нолмас матрица, демак, унинг ранги бирга тенг эканини текшириб кўриш осон. B матрицанинг 2-тартибли минорларини тузиб чиқиб, унинг бу минорларидан бири, масалан,

$$\begin{vmatrix}b_{21} & b_{22}\\ b_{31} & b_{32}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=2\neq 0$$

нолдан фарқли эканлигини, 3-тартибли минори нолга тенг эканлигини топамиз. Демак, B матрицанинг ранги иккига тенг.

Биринчи матрицанинг ранги учга тенг. Матрица рангини топишда ҳисоблашлар одатда қуйи тартибли минорлардан бошланади. Агар барча 1-тартибли минорлар (яъни матрицанинг барча элементлари) нолга тенг бўлса, у ҳолда матрица ранги ноль матрицанинг ранги таърифига кўра нолга тенг.

Энди матрицанинг ҳамма элементлари ҳам нолга тенг бўлмасин. Бу ҳолда унинг ранги бирдан кичик эмас, 2-тартибли минорлар орасидан нолга тенг бўлмаганини излаймиз. Агар матрица сатридаги икки жуфт элементлар узаро пропорционал бўлмаса, у ҳолда детерминант хоссаларига асосан матрицанинг ранги иккидан кичик булади. Агар бу ҳолда барча 3-тартибли минорлар нолга тенг бўлса, у ҳолда матрица ранги иккига тенг. Агар нолга тенг бўлмаган 3-тартибли минор мавжуд бўлса, у ҳолда 4-тартибли минорларга ўтамиз ва ҳоказо. Шундай нолга тенгмас r-тартибли минор топилиб, $(r+1)$-тартибли барча минорлар нолга тенг бўлса, у ҳолда матрица ранги r га тенг. Бунда $m \cdot n$ ўлчамли матрица учун ҳисобланиши лозим бўлган $(r+1)$ тартибли минорлар сони

$$C_m^{r+1} \cdot C_n^{r+1}$$

ифода қийматига тенг

Бу эса матрица рангини ҳисоблаш учун жуда кўп минорларни ҳисоблаш лозимлигини кўрсатади.

в) *Тескари матрицалар*

Халқ хўжалигини планлаштиришда, баланс тенгламаларини тузишда тескари матрицадан фойдаланилади. Симплекс—методнинг тескари матрицали алгоритми тескари матрицадан фойдаланиб топилади. Мавжуд тескари матрица бошқа соҳаларда ҳам кўп қўлланилади.

1. Тескари матрица нима? Бу саволга бундай жавоб берилади. n-тартибли A квадрат матрицани олайлик Агар

$$AB = BA = E$$

муносабатларни қаноатлантирадиган n-тартибли B матрица мавжуд бўлса, у ҳолда B матрица A матрицага *тескари матрица* дейилади. Бу ерда E бирлик матрица. A матрица учун унга тескари матрицани A^{-1} орқали белгилаймиз. Шундай қилиб, n-тартибли A квадрат матрица учун тескари матрица шу n-тартибли A^{-1} матрица бўлиб у $AA^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ хоссага эга. Бу ерда E—n-тартибли бирлик матрица AA^{-1} кўпайтмада, A^{-1} матрицани A матрицага нисбатан ўнг тескари матрица, $A^{-1}A$ кўпайтмада эса A матрицага нисбатан чап тескари матрица деб атаймиз.

2. Эслатиб ўтамизки, агар A квадрат матрицанинг детерминанти нолга тенг, яъни $|A|=0$ бўлса, у ҳолда у хос матрица, агар унинг детерминанти нолдан фарқли, яъни $|A|\neq 0$ бўлса, уни хос бўлмаган матрица деб аталади. Исталган хос бўлмаган матрица тескари матрицага эга, шу билан бирга бу тескари матрица ягонадир.

Хос бўлмаган матрица тескари матрицага эга эмас, хос бўлмаган матрицанинг бу матрица учун $(A)=0$ ўшандай тартибли исталган квадрат матрицага кўпайтмаси яна хос бўлмаган матрица бўлади.

Берилган матрица бирор-бир матрица учун тескари матрица бўлиш-бўлмаслигини аниқлаш учун бу матрицаларни кўпайтириб чиқиш ва бунда бирлик матрица ҳосил бўлиш-бўлмаслигини кўриш лозим.

Тескари матрицанинг асосий хоссалари: а) агар A хос бўлмаган матрица бўлса, у ҳолда у иккита тескари матрицага эга бўлиши мумкин эмас, яъни

$$AB=BA=E$$

муносабат ўринли бўладиган фақат битта B матрица мавжуд.

Буни исбот қилиш мақсадида A матрица учун иккита турли B ва C тескари матрицалар мавжуд деб фараз қиламиз. У ҳолда таърифга кўра $BA=AB=E$ ва $CA=AC=E$. Охирги тенгликни ўнг томондан B га кўпайтирамиз, у ҳолда $CAB=EB$, лекин $AB=E$, шунинг учун $CE=EB$, лекин $AB=E$, шунинг учун $CE=EB$, бундан $C=B$. Демак, берилган матрицага тескари фақат битта матрица мавжуд.

б) Агар n-тартибли A ва B матрицалар учун $AB=$ $=E$ бўлса, у ҳолда A ва B хос бўлмаган матрицалардир, шунинг билан бирга $A^{-1}=B$, $B=A$ ва $BA=E$ бўлади.

Буни исботлаш учун детерминантларнинг хоссасига кўра $|A|\cdot|B|=1$ бўлишини эслатиб ўтамиз. Бу ерда A ва B матрицаларнинг иккаласи ҳам хос бўлмаган матрица эканлиги келиб чиқади. Шундай қилиб, A^{-1} тескари матрица мавжуд экан.

$AB=E$ ни чапдан A^{-1}га кўпайтириб, $B=A^{-1}$ни ҳосил қиламиз, чунки $A^{-1}\cdot A=E$.

Таърифга кўра $AB=BA=E$, демак, $B\cdot A=E$.

в) Агар A ва B иккита хос бўлмаган n-тартибли матрица бўлса, у ҳолда квадрат матрицалар кўпайтмасининг тескари матрицаси кўпайтувчилар тескари матрицаларининг тескари тартибда олинган кўпайтмасига тенг, яъни:

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

Ҳақиқатан, $ABB^{-1} \cdot A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$. Энди A ва B нинг хоссаларидан келтирилган даъво келиб чиқади.

г) Агар A хос бўлмаган матрица бўлса, у ҳолда A^{-1}матрицага тескари матрица берилган A матрицага тенг, яъни $A^{-1} = A$ бўлади. Бу бевосита $AB = BA = E$ таърифдан келиб чиқади, чунки B матрица A матрицага тескари матрица бўлса, у ҳолда A матрица ҳам B матрицага тескари матрицадир.

д) Матрицани транспонирлаш амали учун ушбу муносабат ўринли:

$$(AB)^{T} = B^{T} A^{T}.$$

Ҳақиқатан, $(AB)^{T}$ матрицада сатр билан j-устуннинг кесишиш жойида турган элемент $\sum_{l=1}^{m} a_{jl} \cdot b_{il}$ сонига тенг. B^{T}, A^{T} матрицаларда шу жойда турган элемент ҳам ана шу сонга тенг.

е) Транспонирланган тескари матрица транспонирланган матрицанинг тескари матрицасига тенг, яъни:

$$(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}.$$

Ҳақиқатан, $A^{-1} \cdot A = E$ асосий муносабатни транспонирлаб, (d) хоссага асосан қуйидагига эга бўламиз:

$$A^{T} \, (A^{-1})^{T} = (A^{-1} \cdot A)^{T} = E^{T} = E.$$

Сўнгги тенгликни $(A^{T})^{-1}$га кўпайтириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$(A^{T})^{-1} \cdot A^{T} \cdot (A^{-1}) = (A^{T})^{-1} = E$$

ёки $(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}$, ана шуни исбот қилиш талаб қилинган эди.

ж) Тескари матрицанинг детерминанти берилган матрица детерминантининг тескари қийматига тенг.

$A^{-1}\cdot A = E$ бўлсин. Иккита квадрат матрица кўпайтмасининг детерминанти бу матрицаларнинг детерминантлари кўпайтмасига тенглигини, яъни $|A^{-1}\cdot A| = |A^{-1}|\cdot|A|$ эканлигини ҳисобга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$|A^{-1}|\cdot|A| = E = 1. \text{ Демак, } |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

3. Агар A хос бўлмаган матрица ва $AB = 0$ бўлса, у ҳолда $B = 0$.

Буни исбот қилиш учун $AB = 0$ тенгликни чапдан A^{-1} га кўпайтирамиз: $A^{-1}\cdot AB = A^{-1} - 0$; $(A^{-1}\cdot A)\ B = 0$; $B = 0$.

4. Тескари матрицани топишнинг баъзи усулларини кўрсатамиз.

Тескари матрицани детерминантлар ёрдамида топиш:

а) аввал (A) детерминантни ҳисоблаймиз ва у нолга тенг бўлмаса, A матрица детерминанти элементларининг A_{ij} алгебрик тўлдирувчиларини топамиз;

б) A_{ij} элементларни транспонирлаш йўли билан келтирилган матрица A^* ни тузамиз;

в) қуйидаги формула бўйича тескари матрицани топамиз:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*. \qquad (1)$$

Мисол.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

A матрица учун тескари матрица A^{-1} топилсин.

Олдин берилган матрицанинг детерминантини ҳисоблаймиз:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -28 \neq 0.$$

Агар бу детерминант нолга тенг бўлмаса, унинг алгебраик тўлдирувчиларини топамиз:

$$A_{11} = -7, \quad A_{21} = -7, \quad A_{31} = -7,$$
$$A_{12} = -7, \quad A_{22} = -5, \quad A_{32} = -1,$$
$$A_{13} = 14, \quad A_{23} = 6, \quad A_{33} = -10,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{28}\begin{pmatrix} 7 & 7 & -7 \\ 7 & -5 & 1 \\ -14 & 6 & -10 \end{pmatrix}$$

Текширамиз:

$$E = A \cdot A^{-1} = \frac{1}{28}\begin{pmatrix} 7 & 7 & -7 \\ 7 & -5 & 1 \\ -14 & 6 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Машқ учун мисоллар

Қуйидаги мисолларни график метод ёрдамида ечинг.

1) $2x_1 + x_2 \leqslant 11,$
$3x_1 - 2x_2 \leqslant 10,$
$3x_1 - 4x_2 \geqslant 20,$ $\qquad Z_{max} = 3x_1 + x_2 + 6.$
$x_i \geqslant 0 \ (i = 1,2),$

2) $x_1 - 3x_2 < 0,$
$x_1 + x_2 - 8 < 0,$
$3x_1 + x_2 - 10 \geqslant 0,$ $\qquad Z_{max} = 3x_1 - 3x_2 - 5.$
$7x_1 - x_2 \geqslant 0,$
$x_i > 0. \ (i = 1,2),$

3) $2x_1 - x_2 + 6 \geqslant 0,$
$6x_1 + 5x_2 - 30 \leqslant 0,$
$x_1 + 3x_2 + 3 \leqslant 0,$ $\qquad Z_{max} = 8x_1 + \frac{5}{2}x_2 - 4$
$x_i \geqslant 0 \quad (i = 1,2).$

Қуйидаги матрицаларнинг ранги ва унга тескари бўлган матрицалар топилсин:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ 2) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 4 & 7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ 4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 10 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 5 \\ 3 & -6 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & -9 & 6 \\ 9 & 10 & 11 & 13 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 8 \\ 0 & 5 & 2 \\ -3 & 10 & -10 \end{pmatrix}$ 10) $\begin{pmatrix} 4 & 15 & 7 \\ 9 & 8 & 6 \\ 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

III боб. ЧИЗИҚЛИ ПРОГРАММАЛАШНИНГ АСОСИЙ МАСАЛАСИ ВА УНИ СИМПЛЕКС МЕТОД ЁРДАМИДА ЕЧИШ

1-§. Чизиқли программалашнинг асосий масаласи— симплекс метод

Кейинги йилларда яратилган математик аппаратлар ёрдамида қишлоқ хўжалигини планлаштириш ва бошқариш билан боғлиқ бўлган иқтисодий масалаларни ечиш амалда кенг қўлланилмоқда. Бундай мураккаб масалаларни ҳал этишда амалий математиканинг муҳим қисмларидан бири —чизиқли программалаш методлари асосий ўринни эгалламоқда.

Чизиқли программалаш масалаларини ечишда асосан ҳал этилган симплекс метод, иккиламчи симплекс метод, модификацияланган симплекс метод, транспорт масалаларини ечиш методи ва чизиқли бўлмаган программалаш методлари учун махсус алгоритмлар мавжуддир. Бу алгоритмлардан фойдаланишни ҳозирги замон электрон ҳисоблаш машиналарисиз (ЭҲМ) тасаввур этиб бўлмайди, албатта Масаланинг ечимига кўра бу алгоритмларни қўллаш ЭҲМ типларига боғлиқдир. Унча қийин бўлмаган масалаларни ва тескари матрицаларни симплекс методининг тўғри алгоритми билан ечиш биринчи авлод ЭҲМ ёрдамида бажарилади. Оптимал планни ҳисоблашда модификацияланган мультипликатив алгоритмлар иккинчи авлод ЭҲМ ёрдамида ечилади. Учинчи авлод ЭҲМлар ёрдамида эса катта ўлчамдаги оптимизацион чизиқли программалаш масалаларини модификацияланган симплекс методи ёрдамида ечилади. (Бу ерда минглаб чекланишлар ва бир нечта ўн минглаб ўзгарувчилар мавжуд бўлиши мумкин.) Чизиқли программалаш масалаларини ечишда энг кўп қўлланиладиган метод бу симплекс методдир. Симплекс методнинг асосий ғояси бундай: чизиқли программалаш масаласи математик формада қуйидаги кўринишда берилган бўлсин:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leqslant b_i \ (i=1,\ 2,\ \dots,\ m_1), \qquad (1)$$

ёки

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i \ (i=m_1+1;\ m_1+2,\ \dots,\ m_2), \qquad (2)$$

ёки

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j > b_i \ (i=m_2+1;\ m_2+2,\ \dots,\ m), \qquad (3)$$

$$x_j > 0 \ (j=1,\ 2,\ \dots,\ n). \qquad (4)$$

мақсад функцияси:

$$z=\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \max\ (\min).$$

x_j нинг қийматлари топилсин.

(1), (2), (3) шартларни *чегаравий шартлар* деб юритамиз. Агар чегаравий шартлар тенгсизлик кўринишда бўлса, уларни ёрдамчи ўзгарувчиларни қўшиш билан тенгламаларга айлантириб, каноник кўринишда бундай ёзамиз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n+x_{n+2}=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j=1,\ 2,\ \dots,\ n) \qquad (2)$$

(1) ва (2) шартларда мақсад функцияси

$$z=c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n \to \max \qquad (3)$$

нинг қиймати топилсин.

Агар z нинг минимум қийматини топиш талаб этилса, мақсад функцияси бундай ёзиб олинади:

$$-z = -c_1 x_1 - c_2 x_2 - \dots - c_n x_n \to \min,$$

ёки

$$z_{\max} = -z_{\min}.$$

Агар чегаравий шартлардаги b_i озод ҳадлар манфий бўлса, у ҳолда уларни ҳар доим (-1) га кўпайтириб мусбат ҳолатга келтириш керак. Агар $x_j \geqslant 0$ шарти (1) шартни қаноатлантирса, у масаланинг *мумкин бўлган ечимлари* деб юритилади. z мақсад функциясининг минимум ва максимум қийматини топишда бу мумкин бўлган ечимлар, унинг айрим *оптимал ечими* деб юритилади.

Стандарт формадаги $x_1, x_2, \dots, x_n$ ўзгарувчилар *базис ўзгарувчилар,* қўшимча киритилган $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$; ўзгарувчилар *базис бўлмаган ўзгарувчилар* деб юритилади.

Бу ерда базисмас ўзгарувчиларни нолга тенг деб, $x_1 = b'_1$; $x_2 = b'_2$; ...; $x_m = b'_m$ базис ечимларини топамиз. Ҳосил бўлган бу базис ечимлар *биринчи базис ечимлар* бўлади. Иккинчидан топиш мумкин бўлган ечимларнинг ҳаммаси мусбат ишорага эга, яъни

$$b'_1 \geqslant 0;\ b_2 \geqslant 0;\ \dots;\ b'_m \geqslant 0$$

бўлиши керак. Бундан эса биринчи базис ечими учун: $z = C_0$. Биринчи базис ечим мақсад функция қийматига мос келади.

Чизиқли программалаш масалаларини симплекс методи билан ечиш қатор кетма-кет процессларни бажариш ёрдамида амалга оширилади. Бу ерда бир базис ечимдан иккинчи базис ечимга ўтишда z нинг қиймати узгармасдан қолиши ёки камайиши мумкин. Бундай процесслар янги базисмас ечимлар эвазига такрорланиб боради ва маълум ҳисоблашлардан сўнг биз z мақсад функциясининг минимум ёки максимум қийматига эга бўламиз, бу ечимни *оптимал ечим* деб юритилади, акс ҳолда эса масала ечимга эга бўлмайди.

2-§. Базис ва йўл қўйиладиган ечимлар

1. Чизиқли программалаш масалалари чизиқли тенгламалар системаларини тузишга олиб келади, шу билан бирга бунда тенгламалар сони одатда ўзгарувчилар

сонига тенг бўлмайди. Бундай системалар учун ($m < n$ бўлганда, $m > n$ бўлганда ҳам) чексиз кўп ечимлар мавжуд бўлади.

Ҳақиқатан, уч ўзгарувчили

$$x_1 - x_2 + x_3 = 2, \qquad 2x_1 + x_2 - x_3 = 7$$

икки тенглама системаси учун $x_1 = 3$; $x_2 = 1 + t$; $x_3 = t$; $t \geqslant 0$ қийматлар t нинг исталган қийматида иккала тенгламани ҳам қаноатлантиради.

Энди n та ўзгарувчили m та чизиқли тенгламалар системасини қараймиз ($m < n$):

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array}\right. \qquad (1)$$

(1) системанинг барча ўзгарувчиларини икки қисимга ажратамиз:

а) асосий ўзгарувчилар, буларнинг сони n та чизиқли боғлиқмас тенгламалар сони m га тенг бўлиши керак, б) асосиймас ўзгарувчилар, буларнинг сони $(n - m)$ га тенг бўлади. Бундай ажратишни индекслар (тартиб номерлари) билан боғлаймиз; у ҳолда бундай ажратишнинг турли комбинациялари сони n элементдан m тадан олиб тузилган группалашлар сонига тенг:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Масалан, биринчи m та $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ўзгарувчини асосий ўзгарувчилар деб олайлик. $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_{m+n}$ асосиймас ўзгарувчиларни ўз ичига олган ҳадларни ўнг томонга ўтказамиз; у ҳолда (1) система ушбу кўринишни олади:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 - \\ - a_{1\,m+1}x_{m+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \; a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \\ + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 - a_{2,m+1}x_{m+1} - \ldots - \\ - a_{2n}x_n, \; a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m = \\ = b_m - a_{m,m+1}x_{m+1} - \ldots - a_{mn}x_n \end{array}\right. \qquad (2)$$

Агар (2) системанинг $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ўзгарувчилар олдидаги коэффициентлардан тузилган m-тартибли детерминант нолга тенг бўлмаса ($D \neq 0$), бу системани $x_1, x_2, \ldots, x_m$ га нисбатан ечиш мумкин.

Асосиймас (эркли) ўзгарувчиларга ихтиёрий сон қийматлар бериб Крамер формулалари ёки бошқа бир усул бўйича асосий (боғлиқ) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ўзгарувчилар учун тегишли сон қийматларини ҳосил қиламиз. Шу билан берилган системанинг бирор $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ ечими ҳосил қилинади ва эркли ўзгарувчилар қийматларининг ҳар бир тупламига (1) системанинг аниқ битта ечими мос келади.

Эркли ўзгарувчилар қийматларининг турли наборларининг чексиз куп тўпламларини тузиш мумкин. Демак, (1) система биргаликда булганда аниқмас бўлади ва чексиз куп ечимларга эга бўлади. Программалашда бизни базис ечимлар деб аталадиган ечимлар қизиқтиради.

2. Ихтиёрий чизиқли тенгламалар системасининг базис ечими деб ($m < n$) асосиймас (эркли базисмас) ўзгарувчиларга ноль қийматлар берилганда ҳосил буладиган ечимга айтилади.

Юқорида таъкидлаб ўтилганидек, (1) системанинг барча ечимлари сони чексиз куп, базис ечимлари сони эса чегараланган.

Ўзгарувчиларни m та асосий (базис) ва $(n - m)$ та асосиймас (базисмас) ўзгарувчиларга ажратилгандан сўнг базис ўзгарувчилар олдидаги коэффициентлардан тузилган детерминант нолдан фарқли бўлган ҳолдагина аниқ битта базис ечим ҳосил булади.

Бундай детерминантлар орасида нолга тенг булган детерминантлар ҳам булиши мумкин, шу сабабли базис ечимлар сони n дан m тадан группалашлар сонидан, яъни C_n^m дан ортиқ булмайди.

Агар бир ёки бир нечта базис ўзгарувчиларнинг қийматлари нолга тенг булса, бундай ечим айниган базис ечим деб аталади.

Ушбу системанинг базис ечимларини топамиз:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \qquad 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3.$$

Бу системада $m = 2$; $n = 3$, шу сабабли ҳар бир комбинациясида иккита базис ўзгарувчи, битта базисмас ўзгарувчи бўлиши керак, базис ечимлар ҳаммаси булиб $C_3^2 = 3$ та бўлади.

Ўзгарувчиларнинг барча мумкин булган жуфтларини тузамиз: а) (x_1, x_2), б) (x_1, x_3) ва в) (x_2, x_3), шундан кейин уларнинг қайси бирини базис ўзгарувчилар сифатида олиш мумкинлигини аниқлаймиз. (x_1, x_2), (x_1, x_3) ва (x_2, x_3) ўзгарувчилар олдидаги коэффициентлардан тегишли детерминантларни тузиб, уларнинг биттаси ҳам нолга тенг эмаслигига ишонч ҳосил қиламиз. Демак, санаб ўтилган жуфтларнинг ҳаммасини базис ўзгарувчилар сифатида қабул қилиш мумкин.

Бу уч ҳолнинг ҳар бирида базисмас ўзгарувчиларни нолга тенглаб, базис ўзгарувчиларнинг қийматини топамиз:

а) $x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-3}{-1} = 3;\quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{1}{1} = -1;$

бундан биринчи базис ечим (3; —1; 0) экани кўринади.

б) $x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{2}{3};\quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{1}{3};$ бундан иккинчи базис ечими $\left(\frac{2}{3}; 0; \frac{1}{3}\right)$ экани кўринади,

в) $x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{2}{7};\quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{3}{7};$ бундан учинчи базис ечим $\left(0; \frac{2}{7}; \frac{3}{7}\right)$ экани кўринади.

Шундай қилиб учта базис ечими ҳосил қилинади, бунда уларнинг ҳаммаси айнимаган базис ечимлардир.

3. Агар базис ечимда базис ўзгарувчиларнинг қийматлари манфий бўлмаса, бундай ечим *йўл қўйиладиган базис ечим* деб аталади. Юқоридаги мисолда б) ва в) ҳолларда ечимлар йўл қўйиладиган базис ечимлардир.

3-§. Жорданнинг чиқариш методлари.

а) *Жорданнинг оддий чиқариш метода.*

Қуйидаги тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\left|\begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1s}x_s + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2s}x_s + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{is}x_s + \ldots + a_{in}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_r = a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots a_{rs}x_s + \ldots + a_{rn}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{ms}x_s + \ldots + a_{mn}x_n. \end{array}\right. \quad (1)$$

Бу системадан ушбу жадвални тузамиз:

1- жадвал

	x_1	x_2	$\ldots$	x_{s-1}	x_s	x_{s+1}	$\ldots$	x_n
$y_1 =$	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1s-1}	a_{1s}	a_{1s+1}	$\ldots$	a_{1n}
$y_2 =$	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2s-1}	a_{2s}	a_{2s+1}	$\ldots$	a_{2n}
$\vdots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$y_l =$	a_{l1}	a_{l2}	$\ldots$	a_{ls-1}	a_{ls}	a_{ls+1}	$\ldots$	a_{ln}
$\vdots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$y_r =$	a_{r1}	a_{r2}	$\ldots$	a_{rs-1}	a_{rs}	a_{rs+1}	$\ldots$	a_{rn}
$\vdots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$y_m =$	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{ms-1}	a_{ms}	a_{ms+1}	$\ldots$	a_{mn}

Матрица системасининг коэффициентлари шу системанинг коэффициентлари каби ўқилади. (1) тенгламалар системасидан қуйидаги r индексли тенгламани оламиз:

$$y_r = a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rs}x_s + \ldots + a_{rn}x_n$$

ва уни x_s га нисбатан ечамиз, бунда $a_{rs} \neq 0$ ни *ҳал қилувчи коэффициент* деб юритамиз.

$$x_s = \frac{1}{a_{rs}}(-a_{r1}x_1 - a_{r2}x_2 - \ldots - a_{r,s-1} + y_r - a_{r,s+1} - \ldots -$$
$$- a_m x_n) \tag{2}$$

x_s нинг топилган қийматини (1) тенгламалар системасига қўямиз. Бунда қулайлик учун y_r нинг ўрнига ўзгарувчи x_s олинган;

$$y_l = a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots + a_{l,s+1} + a_{ls}\left[\frac{1}{a_{rs}}(-a_{r1}x_1 - a_{r2}x_2 - \ldots -\right.$$
$$\left. - a_{rs-1} + y_r - a_{rs+1} - \ldots - a_{2n}x_n\right] + a_{l,s+1} + \ldots + a_{ln}x_n.$$

Қавсларни очиб, x_j қийматларини қўйиб чиққанимизда қуйидагига эга бўламиз:

$$y_l = \left(a_{l1} - \frac{a_{ls} \cdot a_{r1}}{a_{rs}}\right) \cdot x_1 + \left(a_{l2} - \frac{a_{ls} \cdot a_{r2}}{a_{rs}}\right) \cdot x_2 + \ldots +$$
$$+ \left(a_{l,s-1} - \frac{a_{ls} \cdot a_{r,s-1}}{a_{rs}}\right) \cdot x_{s-1} + \frac{a_{ls}}{a_{rs}} \cdot y_r + \left(a_{l\,s+1} - \frac{a_{ls} \cdot a_{rs+1}}{a_{rs}}\right) \cdot$$
$$\cdot x_{s+1} + \ldots + \left(a_{ln} - \frac{a_{ls} \cdot a_{rn}}{a_{rs}}\right) \cdot x_n. \tag{3}$$

(3) тенгламада номаълумларнинг коэффициентларини умумий ҳолда b_{ij} билан белгиласак:

$$b_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{is}\cdot a_{rj}}{a_{rs}}=\frac{a_{ij}\cdot a_{rs}-a_{is}\cdot a_{rj}}{a_{rs}}. \qquad (4)$$

Бу ерда $i\neq r$ ва $j\neq s$, (2) ва (3) тенгламаларни (4) тенгликни назарда тутиб бирлаштирамиз ва қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$y_1=b_{11}x_1+b_{12}x_2+\ldots+b_{1,s-1}x_{s-1}+\frac{a_{1s}}{a_{rs}}y_r+b_{1,s+1}x_{s+1}+$$
$$+\ldots+b_{1n}x_{n1},$$

. . . .

$$y_i=b_{i1}x_1+b_{i2}x_2+\ldots+b_{i,s-1}x_{s-1}+\frac{a_{is}}{a_{rs}}y_r+b_{i,s+1}x_{s+1}+$$
$$+\ldots+b_{in}x_n,$$

. . . .

$$y_{r-1}=b_{r-1,1}x_1+b_{r-1,2}x_2+\ldots+b_{r-1,s-1}x_{s-1}+\frac{b_{r-1,s}}{a_{rs}}y_r+$$
$$+b_{r-1,s+1}x_{s+1}+\ldots+b_{r-1,n}x_n,$$

. . . .

$$x_s=-\frac{a_{r1}}{a_{rs}}x_1-\frac{a_{r2}}{a_{rs}}x_2-\ldots-\frac{a_{r,s-1}}{a_{rs}}\cdot x_{s-1}+\frac{1}{a_{rs}}\cdot y_r-$$
$$-\frac{a_{r,s+1}}{a_{rs}}\cdot x_{s+1}-\ldots-\frac{a_{rn}}{a_{rs}}\cdot x_n,$$

. . . .

$$y_{r+1}=b_{r+1,1}x_1+b_{r+1,2}x_2+\ldots+b_{r+1,s-1}x_{s-1}+\frac{a_{r+1\,s}}{a_{rs}}\cdot y_r+$$
$$+b_{r+1,s+1}x_{s+1}+\ldots+b_{r+1,n}\cdot x_n,$$

. . . .

$$y_m=b_{m1}x_1+b_{m2}x_2+\ldots+b_{m,s-1}x_{s-1}+\frac{a_{ms}}{a_{rs}}\cdot y_r+$$
$$+b_{m,s+1}x_{s+1}+\ldots+b_{mn}\cdot x_n.$$

Бу системада қулайлик учун x_s нинг ўрнига y_r олинган. Демак, (5) системада (1) системага нисбатан x_s ва y_r ўзгарувчиларнинг ўринлари алмашган.

2-жадвал (5) система учун 1 марта оддий Жордан чиқариш методини қўллаш дейилади. 1-жадвалдан олинган x_s *устун бош* устун ва олинган y_r қатор *бош қатор* ва уларнинг кесишган нуқтасида турган a_{rs} сон *ҳал қилувчи элемент* деб юритилади.

(5) системани жадвал кўриниши қуйидагича бўлади:

2- жадвал

	x_1	x_2	$\dots$	x_{s-1}	y_r	x_{s+1}	$\dots$	y_n
$y_1 =$	b_{11}	b_{12}	$\dots$	$b_{1,s-1}$	$\frac{a_{1s}}{a_{rs}}$	$b_{1,s+1}$	$\dots$	b_{1n}
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$y_i =$	b_{i1}	b_{i2}	$\dots$	$b_{i,s-1}$	$\frac{a_{is}}{a_{rs}}$	$b_{i,s+1}$	$\dots$	b_{in}
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$y_{r-1} =$	$b_{r-1,1}$	$b_{r-1,2}$	$\dots$	$b_{r-1,s-1}$	$\frac{a_{r-1,s}}{a_{rs}}$	$b_{r-1,s+1}$		$b_{r-1,n}$
$x_s =$	$-\frac{a_{r1}}{a_{rs}}$	$\frac{a_{r2}}{a_{rs}}$	$\dots$	$\frac{a_{r,s-1}}{a_{rs}}$	$\frac{1}{a_{rs}}$	$\frac{a_{r,s+1}}{a_{rs}}$		$-\frac{a_{rn}}{a_{rs}}$
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$y_m =$	b_{m1}	b_{m2}	$\dots$	$b_{m,s-1}$	$\frac{a_{ms}}{a_{rs}}$	$b_{m,s+1}$		b_{mn}

Шундай қилиб, 1- марта оддий Жордан чиқариш методини қўллаш учун қуйидаги қоидаларга эътибор қилиш керак:

1. Ҳал қилувчи элемент ўзига тескари миқдорга алмаштирилади.

2. Бош устундаги қолган ҳамма элементлар ҳал қилувчи элементга бўлинади, аммо ишораси ўзгармасдан қолади.

3. Бош қатордаги қолган ҳамма элементлар ҳал қилувчи элементга бўлинади ва ишораси қарама-қаршисига алмаштирилади.

4. Янги жадвалдаги қолган элементлар қуйидаги формула билан топилади:

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is} \cdot a_{rj}}{a_{rs}} = \frac{a_{ij} \cdot a_{rs} - a_{is} \cdot a_{rj}}{a_{rs}}$$

(бунда $i \neq r$; $j \neq s$).

Мисол. Қуйидаги система берилган бўлсин:

$$\begin{aligned} y_1 &= -x_1 + 2x_2 - 3x_3, \\ y_2 &= 2x_1 - 3x_2 + x_3, \\ y_3 &= 5x_2 - x_3. \end{aligned} \qquad (A)$$

Бу системада y_1 ва x_2 га нисбатан бир марта Жорданнинг оддий чиқариш усулини қўлланг.

3- *жадвал*

	x_1	x_2	x_3
y_1	-1	2	-3
y_2	2	-3	1
y_3	0	5	-1

Бунинг учун Жордан жадвалини тузамиз:
Бу ерда фақат y_1 (биринчи қатор) ва x_2 (иккинчи устун) га нисбатан Жордан оддий чиқариш усулини бир марта қуллаймиз. Шунинг учун y_1 бош қатор x_2 эса бош устун деб юритилади. Уларнинг кесишиш жойидаги 2 сонни ҳал қилувчи элемент деб юритамиз ва уни одатда тўртбурчак ичига оламиз. Натижада юқорида келтирилган тўртта қондани назарда тутиб, янги жадвални ҳосил қиламиз. Шу билан бир вақтда (1), (2) ва (3) қондалар асосида иккинчи жадвал тўлдириб борилади. 4-формулани қўллаш учун эса 4-жадвалнинг 2- қаторидаги биринчи элемент $\frac{7}{2}$ га тенг, яъни

$A_{21}=\frac{2\cdot 2-(-3)\cdot 1}{2}=\frac{4+3}{2}=\frac{7}{2}$. Бошқалари ҳам худди шу йўл билан топилади. Демак, 4-жадвал қуйидаги системаларга тенг кучли бўлади.

4- *жадвал*

	x_2	y_1	x_3
$x_1 =$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
$y_2 =$	$\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$
$y_3 =$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{13}{2}$

$$y_2=-\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}y_1+\frac{3}{2}x_3,$$

$$y_2=\frac{7}{2}x_1-\frac{3}{2}y_1-\frac{7}{2}x_3,$$

$$y_3=-\frac{5}{2}x_1+\frac{5}{2}y_1+\frac{13}{2}x_3.$$

Бундай алмаштиришларни системанинг хоҳлаган элементлари билан бажариш мумкин, аммо бунда x ўзгарувчининг коэффициенти нолга тенг бўлмаслиги керак.

б) *Жорданнинг модификацияланган чиқариш методи.*

Бу ерда ҳам юқоридагидек (1) чизиқли тенгламалар системаси олинади:

$$y_1=a_{11}x_1+a_{12}x+\ldots+a_{1s}x_s+\ldots+a_{1n}x_n,$$
$$\vdots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_l=a_{l1}x_1+a_{l2}x_2+\ldots+a_{ls}x_s+\ldots+a_{ln}x_n,$$
$$\vdots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_r = a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rs}x_s + \ldots + a_{rn}x_n, \quad (1)$$
$$\vdots \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{ms}x_s + \ldots + a_{mn}x_n.$$

Бу системани бошқача формада ёзиб оламиз:

$$y_i = (-a_{i1})(-x_1) + (-a_{i2})(-x_2) + \ldots + (-a_{is})(-x_s) + \ldots + (-a_{in})(-x_n). \quad (2)$$

Қулайлик учун

$$-a_{ij} = a_{ij} \; (i = 1,2, \ldots, m; \; j = 1,2, \ldots, n) \quad (3)$$

деб оламиз. Шунга кўра унда (1) ва (2) система ушбу кўринишга келади:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}(-x_1) + a_{12}(-x_2) + \ldots + a_{1s}(-x_s) + \ldots + \\ &\quad + a_{1n}(-x_n), \\ y_i &= a_{i1}(-x_1) + a_{i2}(-x_2) + \ldots + a_{is}(-x_s) + \ldots + \\ &\quad + a_{in}(-x_n), \\ y_r &= a_{r1}(-x_1) + a_{r2}(-x_2) + \ldots + a_{rs}(-x_s) + \ldots + \\ &\quad + a_{rn}(-x_n), \\ y_m &= a_{m1}(-x_1) + a_{m2}(-x_2) + \ldots + a_{ms}(-x_s) + \ldots + \\ &\quad + a_{mn}(-x_n). \end{aligned} \quad (4)$$

4-системадан қуйидаги жадвални тузамиз, аммо системадаги номаълумлар олдидаги коэффициентлар минус (—) ишорали бўлгани учун юкори қатордаги номаълумлар олдига (— 1) ни ёзамиз:

5-жадвал

	$-x_1$	$-x_2$	$\ldots$	$-x_s$	$\ldots$	$-x_n$
$y_1 =$	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1s}	$\ldots$	a_{1n}
	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$y_i =$	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2s}	$\ldots$	a_{2n}
	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$y_r =$	a_{r1}	a_{r2}	$\ldots$	a_{rs}	$\ldots$	a_{rn}
	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$y_n =$	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{ms}	$\ldots$	a_{mn}

Жорданнинг оддий чиқариш методидаги мавжуд амалларни бажариб қуйидагини ҳосил қиламиз (бу ерда ишоралар алмаштирилади):

$$x_s = -\frac{1}{a_{rs}} [a_{r1}(-x_1) + a_{r2}(-x_2) + \ldots + (-y_r) + \ldots + a_{rn}(-x_n)]. \quad (5)$$

Топилган x_s ниг ҳамма қийматларини i индекси бўйича қолган ҳамма тенгламаларга қўямиз:

$$y_i = a_{i1}(-x_1) + a_{i2}(-x_2) + \ldots + a_{is}\left\{-\frac{2}{a_{rs}}\left[a_{r1}(-x_1) + \right.\right.$$
$$\left.\left.+ a_{r2}(-x_2) + \ldots + 1\cdot(-y_r) + \ldots + a_{rn}(-x_n)\right]\right\} + \ldots +$$
$$+ a_{in}(-x_n).$$

Бундан, ўхшаш ҳадларни ихчамлаб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y_i = \left(a_{i1} - \frac{a_{is}\cdot a_{r1}}{a_{rs}}\right)(-x_1) + \left(a_{i2} - \frac{a_{is}\cdot a_{r2}}{a_{rs}}\right)\cdot(-x_2) + \ldots +$$
$$+ \left(-\frac{a_{is}}{a_{rs}}\right)(-y_r) + \ldots + \left(a_{in} - \frac{a_{is}\cdot a_{rn}}{a_{rs}}\right)(-x_n). \qquad (6)$$

Олдингидек

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is}\cdot a_{rj}}{a_{rs}} = \frac{a_{ij}\cdot a_{rs} - a_{is}\cdot a_{rj}}{a_{rs}};\ (i \neq r;\ i \neq s) \qquad (7)$$

деб олсак, у вақтда (5) ва (6) формулалардан фойдаланиб системани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$y_1 = b_{11}(-x_1) + b_{12}(-x_2) + \ldots + \left(-\frac{a_{1s}}{a_{rs}}\right)(-y_r) + \ldots +$$
$$+ b_{1n}(-x_n),$$
$$y_i = b_{i1}(-x_1) + b_{i2}(-x_2) + \ldots + \left(-\frac{a_{is}}{a_{rs}}\right)(-y_r) + \ldots +$$
$$+ b_{in}(-x_n),$$
$$x_s = b_{i1}(-x_1) + b_{i2}(-x_2) + \ldots + \left(-\frac{a_{is}}{a_{rs}}\right)(-y_r) + \ldots +$$
$$+ b_{in}(-x_n),$$
$$y_m = b_m(-x_1) + b_{m2}(-x_2) + \ldots + \left(-\frac{a_{ms}}{a_{rs}}\right)(-y_r) + \ldots +$$
$$+ b_{mn}(-x_n) \qquad (8)$$

(8) системага асосан ушбу жадвални тузамиз.

6- жадвал

	$-x_1$	$-x_2$		$-y_r$		$-x_n$
$y_1 =$	b_{11}	b_{12}	...	$-\frac{a_{1s}}{a_{rs}}$	...	b_{1n}
$\vdots$						
$y_i =$	b_{i1}	b_{i2}	...	$-\frac{a_{is}}{a_{rn}}$	...	a_{in}
$\vdots$						
$x_s =$	$\frac{a_{r1}}{a_{rs}}$	$\frac{a_{r2}}{a_{rs}}$	...	$\frac{1}{a_{rs}}$	...	$\frac{a_{rn}}{a_{rs}}$
$\vdots$						
$y_m =$	b_{m1}	b_{m2}	...	$-\frac{a_{ms}}{a_{rs}}$	...	b_{mn}

Шундай қилиб, 1-марта Жорданнинг модификацияланган чиқариш методини қўллаш учун қуйидаги қоидаларга риоя қилиш керак:

1. 1 ва 4 пунктлар ўзгаришсиз қолади.

2. Бош устундаги қолган ҳамма элементлар ҳал қилувчи элементга бўлинади, ишораси қарама-қаршисига алмаштирилади.

3. Бош қатордаги қолган ҳамма элементлар ҳал қилувчи элементга бўлинади, ишораси эса ўзгаришсиз қолади.

Юқоридаги мисолга Жорданнинг модификацияланган чиқариш усулини қўллаб қуйидагини ҳосил қиламиз:

7-жадвал

	x_1	y_1	x_3
$x_2 =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
$y_2 =$	$\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$
$y_3 =$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{13}{2}$

7-жадвал қуйидаги системаларга тенг кучли:

$$x_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1 - \frac{3}{2}x_3,$$
$$y_2 = \frac{7}{2}x_1 + \frac{3}{2}y_1 - \frac{7}{2}x_3,$$
$$y_3 = -\frac{5}{2}x_1 - \frac{5}{2}y_1 + \frac{13}{2}x_3.$$

Бундай алмаштиришларни юқоридагидек системанинг хоҳлаган элементлари билан алмаштириш мумкин. Аммо ўзгарувчи x ларнинг коэффициенти нолга тенг бўлмаслиги керак.

4-§. Тенгламалар системасини ечишда Жордан-Гаусс алмаштиришлари

Ушбу

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= a_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= a_m \end{aligned} \tag{1}$$

тенгламалар системаси берилган бўлсин:

Агар бу система ақалли битта ечимга эга бўлса, у биргаликда, ақалли битта ҳам ечимга эга бўлмаса, бу система биргаликда эмас дейилади.

Чизиқли тенгламалар системасини Жордан-Гаусс методи ёрдамида ечишнинг ҳар хил методлари мавжуд.

1-метод. Олдин m номаълумли n та тенглама системаси берилган бўлсин:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=a_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=a_n. \end{array} \qquad (2)$$

(1) тенгламалар системасини қуйидаги 8-жадвал кўринишида ёзиб оламиз. Бу жадвалнинг чап бош устунига озод ҳадлар, юқоридаги қаторга эса номаълумлар ёзилади

8-жадвалдаги a_i ва a_{ij} лар маълум сонлардир.

8-жадвал

	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$a_1=$	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}
$a_2=$	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$a_n=$	a_{n1}	a_{n2}	$\ldots$	a_{nn}

9-жадвал

	a_1	a_2	$\ldots$	a_n
$x_1=$	b_{11}	b_{12}	$\ldots$	b_{1n}
$x_2=$	b_{21}	b_{22}	$\ldots$	b_{2n}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$x_n=$	b_{n1}	b_{n2}	$\ldots$	b_{nn}

8-жадвалда Жорданнинг оддий чиқариш қоидаларини мос равишда кетма-кет қўллаиб, 9-жадвалга эга бўламиз. 9-жадвалда ҳамма x лар чап бош устунга, уларнинг ўрнига эса озод ҳадлар ўтказилади. Агар системаларнинг ранги $r=n$ бўлса, у *анақланган системалар* деб юритилади ва у ягона ечимга эга бўлади. Бу жадвалдан x ларнинг ечими қуйидагича ўқилади:

$$\begin{array}{c} x_1=a_1b_{11}+a_2b_{12}+\ldots+a_nb_{1n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n=a_1b_{n1}+a_2b_{n2}+\ldots+a_nb_{nn} \end{array}$$

Мисол. Қуйидаги система берилган бўлсин:

$$\begin{array}{c} 2x_1-x_2+x_3=3, \\ x_1+3x_2-2x_3=1, \\ 0x_1+x_2+2x_3=8. \end{array}$$

Бу системадан бошланғич жадвални тузамиз ва Жорданнинг оддий чиқариш методини кетма-кет қўллаб, қуйидаги (10—13) жадвалларга келамиз. Бу ерда ҳал қилувчи элементни танлашда нолдан фарқ қиладиган ҳар қандай сон олиниши мумкин. 10-жадвалдан (3; ва x_3) ларга нисбатан оддий Жордан чиқаришини қўллаб 11-жадвални, 11-жадвалдан эса (1 ва x_1) ларга нисбатан оддий Жордан чиқаришини қўллаиб 12-жадвални ҳосил қиламиз.

10- жадвал

	x_1	x_2	x_3
3 =	2	−1	1
1 =	1	3	−2
8 =	0	1	2

11- жадвал

	x_1	x_2	3
x_3 =	−2	1	1
1 =	5	1	−2
8 =	−4	3	2

12- жадвал

	x_1	1	3
x_3 =	−7	1	3
x_2 =	−5	1	2
8 =	$\boxed{-19}$	3	8

12- жадвалдан эса (8 ва x_1) ларга нисбатан иш кўриб 13- жадвални тузамиз:

13- жадвал

	8	1	3
x_3	$\frac{7}{19}$	$-\frac{2}{19}$	$\frac{1}{19}$
x_2	$\frac{5}{19}$	$\frac{4}{19}$	$-\frac{2}{19}$
x_1	$-\frac{1}{19}$	$\frac{3}{19}$	$\frac{8}{19}$

13- жадвалдан номаълумларни тартиб билан жойлаштириб, уларнинг ягона қийматини топамиз:

$$x_1 = -\frac{1}{19}\cdot 8 + \frac{3}{19}\cdot 1 + \frac{8}{19}\cdot 3 = 1,$$

$$x_2 = 8\cdot\frac{5}{19} + 1\cdot\frac{4}{19} - 3\cdot\frac{2}{19} = 2,$$

$$x_3 = 8\cdot\frac{7}{19} - 1\cdot\frac{2}{19} + 3\cdot\frac{1}{19} = 3.$$

Демак, номаълумларнинг ягона қийматлари $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ бўлади.

2- метод. Бу методда системаларни ечиш учун (1) системани олиб уни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - a_1 &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - a_2 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n - a_n &= 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

(3) системадан қуйидаги жадвални тузамиз, бу жадвалнинг чап бош устунига ноллари қуямиз ва озод ҳадлар учун махсус қушимча устун қушиб қуйндагича ёзамиз:

14- *жадвал*

	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	1
$0 =$	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}	a_1
$0 =$	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}	a_2
$\vdots$					$\ldots$
$0 =$	a_{n1}	a_{n2}	$\ldots$	a_{nn}	a_n

14- жадвал матрицасининг ранги $r = n$ бўлса, n- марта Жордан алмаштиришларни қўллаб, охирги 15- жадвалга келамиз. Бу ерда шунга эътибор бериш керакки, ҳар бир янги жадвалга кўчганда ноль устун ташлаб кетилади. Охирги жадвалда эса тўғридан- тўғри номаълумларнинг қийматларини ёзиб олиш мумкин. Чунки 15- жадвалда ҳар бир устундаги сонларни нолга кўпайтиришга тўғри келади. Кўпайтмалар эса нолга тенг, шунинг учун ҳам уларни жадвалда ёзиб олиш билан ҳеч қандай ўзгариш содир бўлмайди; $x_1 = b_{11}\cdot 0 b_{12}\cdot 0 + + \ldots + b_{ln} + b_l$.

15- *жадвал*

	0	$\ldots$	$\ldots$	0	1
$x_1 =$	b_{11}	b_{12}	$\ldots$	b_{1n}	b_1
$x_2 =$	$\cdot$	b_{21}	$\ldots$	b_{2n}	b_2
	$\cdot$	$\cdot$		$\cdot$	$\cdot$
$\ldots$	$\cdot$	$\cdot$		$\cdot$	$\cdot$
$x_n =$	$\cdot$	$\cdot$		b_{nn}	b_n

ва ҳоказо.

Мисол. Юқоридаги мисолни олиб текширамиз. Бунинг учун системани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$0 = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3,$$
$$0 = x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 1,$$
$$0 = 0 \cdot x_1 + x_2 + 2x_3 - 8.$$

Бундан эса 1- Жордан жадвалини тузамиз ва юқорида айтилганларни кетма-кет қўлланиб, янги жадвалларга эга бўламиз. Ҳар бир оддий Жордан чиқариш методини қўллаганда албатта 0 устун ташлаб кетилиши лозим.

16- жадвал

	x_1	x_2	x_3	1
$0=$	2	-1	1	-3
$0=$	1	3	-2	-1
$0=$	0	1	2	-8

17- жадвал

	x_1	x_2	0	1
x_3	-2	1	1	3
$0=$	5	1	-2	-7
$0=$	-4	3	2	-2

18- жадвал

	x_1	0	1
$x_3=$	-7	1	10
$x_2=$	-5	2	7
$0=$	$\boxed{-19}$	3	19

19- жадвал

	0	1
$x_3=$	$\frac{7}{19}$	3
$x_2=$	$\frac{5}{19}$	2
$x_1=$	$-\frac{1}{19}$	1

19- жадвалдан номаълумларнинг қийматларини тўғридан-тўғри ёзиб оламиз.

$$x_1=1, \quad x_2=2, \quad x_3=3.$$

3-метод. Бу метод иккинчи методдагидек баён қилинади. Бунда 20- жадвалдан фойдаланамиз:

20- жадвал

	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	1
$0=$	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}	$-a_1$
$0=$	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}	$-a_2$
$\vdots$	.	.	.	.	$\vdots$
$0=$	a_{n1}	a_{n2}	$\ldots$	a_{nn}	$-a_n$

20- жадвалдан, бир марта оддий Жордан чиқариш методини қўллаб 21- жадвалга келамиз:

21- жадвал

	0	x_2	$\ldots$	x_n	1
$x_1=$	b_{11}	b_{12}	$\ldots$	b_{1n}	b_1
$0=$	b_{21}	b_{22}	$\ldots$	b_{2n}	b_2
$\vdots$	.	.	.	.	$\vdots$
$0=$	b_{n1}	b_{n2}	$\ldots$	b_{nn}	b_n

21- жадвалда ноль устунини ташлаб, номаълум қатнашган қаторни ёзиб оламиз:

$$x_1=0\cdot b_{11}+b_{12}\cdot x_2+ \\ +\ldots+b_{1n}+1\cdot b_1.$$

Худди шу йўл билан кетма-кет алмаштиришларни қўллаб (ҳар сафар ноль устун ташлаб кетилади, номаьлум қатнашган қатор ёзиб олинади), натижада энг охирги номаьлум $x_n = b_n$ эканига келамиз. Номаълумнинг бу қийматини юқоридагиларга кетма-кет қўйиш йўли билан бошқа номаълумлар қийматлари топилади.

Мисол. Системани ечинг:

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 3,$$
$$x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1,$$
$$0 \cdot x_1 + x_2 + 2x_3 = 8.$$

Бу системага юқорида айтилганларни қўллаб 22-жадвални тузамиз. 22-жадвалда (0 ва x_3) ларга нисбатан оддий Жордан чиқаришини қўлла(б), 23-жадвалга келамиз.

22-жадвал

	x_1	x_2	x_3	1
0=	2	−1	$\boxed{1}$	−3
0=	1	3	−2	−1
0=	0	1	1	−8

23-жадвал

	x_1	x_2	0	1
x_3=	−2	1	1	3
0=	5	1	−2	−7
0=	−4	3	2	−2

Ундан $x_3 = -2x_1 + x_2 + 3$ ни ёзамиз ва қолганларидан 24-жадвални тузамиз. Юқоридагиларни қўллаб, 25-жадвалга келамиз.

24-жадвал

	x_1	x_2	1
0=	5	1	−7
0=	−4	3	−2

25-жадвал

	x_1	0	1
x^2	−5	1	7
0=	−19	3	19

бундан эса $x_2 = -5x_1 + 7$ ни ёзиб оламиз ва кейинги 26-жадвални тузамиз.

26-жадвал

	x_1	1
0	−19	19

27-жадвал

	0	1
x_1=	$-\frac{1}{19}$	1

Натижада 27-жадвалда $x_1=1$ бўлади. x_1 нинг бу қийматини юқоридаги $x_2=-5x_1+7$ га қўйиб $x_2=2$ ни ва шу йўл билан $x_3=-2x_1+x_2+3$ га қўйиб $x_3=3$ ни топамиз.

5-§. Симплекс методининг алгоритми

а) *Масаланинг қўйилиши*

Ушбу

$$z=c_1x_1+c_2x_2+\ \dots\ +c_nx_n \tag{1}$$

мақсад функциясининг максимум қиймати $(m>n)$

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ \dots\ +a_{in}x_n\leqslant a_i$$

ёки

$$y_i=-a_{i1}x_1-a_{i2}x_2-\ \dots -a_{in}x_n+a_i\geqslant 0$$
$$(i=1,2,\ \dots,\ m) \tag{2}$$

ва

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ \dots,\ x_n\geqslant 0 \tag{3}$$

шартларда топилсин. Бошқача қилиб айтганда (2) системадаги $x_i(i=\overline{1,n})$ номаълумларнинг шундай манфиймас қийматларини топиш керакки, натижада (1) мақсад функцияси ўзининг энг катта қийматига эга бўлсин. Симплекс методи тўғрисида айрим мулоҳазалар 1-параграфда айтиб ўтилган, шунинг учун тўғридан-тўғри, масаланинг таянч ва оптимал ечимини топиш идеясини тушунтирамиз.

б *Масаланинг таянч ечимини топишда симплекс методи*

(2) система ва (1) мақсад функциясини қуйидаги жадвалга жойлаштирамиз:

28-жадвал

	$-x_1$	$-x_2$	$\dots-x_n$	1
$y_1=$	a_{11}	a_{12}	$\dots\ a_{1n}$	a_1
$y_2=$	a_{21}	a_{22}	$\dots\ a_{2n}$	a_2
. .	. .	. .	. . . .	
y_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots\ a_{mn}$	a_m
z	c_1	c_2	$\dots\ c_n$	0

Агар система матрицасининг ранги $r=n$ бўлса, у вақтда n марта Жорданнинг модификацияланган чиқариш методини қўллаб, қуйидаги жадвалга эга бўламиз, бунда $m>n$.

29- жадвал

	$-y_1$	$-y_2$	...	$-y_n$	1
$x_1 =$	b_{11}	b_{12}	...	b_{1n}	b_1
$x_2 =$	b_{21}	b_{22}	...	b_{2n}	b_2
$x_n =$	b_{n1}	b_{n2}	...	b_{nn}	b_n
y_{n+1}	$b_{n+1,1}$	$b_{n+1,2}$	...	$b_{n+1,n}$	b_{n+1}
.					
.					
.					
y_m	b_{m1}	b_{m2}	...	b_{mn}	b_m
z	q_1	q_2	...	q_n	Q

Бу ерда ҳал қилувчи элемент сифагида нолдан ташқари ҳар қандай сонни олиш мумкин. 29-жадвалдан номаълум (x_1, x_2, ..., x_n) ларнинг қийматларини ёзиб оламиз:

$$x_1 = -b_{11}y_1 - b_{12}y_2 - \ldots - b_{1n}y_n + b_1,$$

. . . .

$$x_n = -b_{n1}y_1 - b_{n2}y_2 - \ldots - b_{nn}y_n + b_n$$

29- жадвалнинг иккинчи қисмидан 30- жадвални ҳосил қиламиз.

30- жадвал

	$-y_1$	$-y_2$	. . .	$-y_n$	1
y_{n+1}	$b_{n+1;1}$	$b_{n+1;2}$	. . .	$b_{n+1;n}$	b_{n+1}
.	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	
.					
.	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	
$y_m =$	b_{m1}	b_{m2}	. . .	b_{mn}	b_m
z	q_1	q_2	.	q_n	Q

Бу жадвалда ($y_1 \geqslant 0$, $y_2 > 0$, ..., $y_n \geqslant 0$) шартлар бажарилса,

$$z = -q_1y_1 - q_2y_2 - \ldots - q_ny_n + Q \quad (1)$$

мақсад функциясининг максимум қиймати

$$y_i = b_{i1}y_1 - b_{i2}y_2 - \ldots - b_{in}y_n + b_i > 0 \quad (i = n+1, n+2, \ldots, m) \quad (2')$$

$$y_1 > 0;\ y_2 \geqslant 0;\ \ldots;\ y_n \geqslant 0 \quad (3')$$

шартларда топилишини кўриб ўтайлик. Бу ерда қуйидаги икки ҳолни текширамиз:

1) Ҳамма озод ҳадлар мусбат бўлсин.

Агар $b_{n+1} \geqslant 0$; $b_{n+2} > 0$; $b_m \geqslant 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0, \ldots,$ $y_n = 0$, $y_{n+1} = b_{n+1}$; $y_{n+2} = b_{n+2}$; $\ldots$, $y_m = b_m$ булса, у вақтда мақсад функцияси $z_{mak} = Q$ бўлади.

2) Озод ҳадлар устунидаги сонларнинг биттаси ёки бир нечтаси манфий бўлганда масаланинг таянч ечимини топамиз.

Агар озод ҳадлар устунидаги сонлардан биттаси ёки бир нечтаси манфий ишорали сон бўлса, у вақтда қўйилган масаланинг таянч ечимини қуйидагича излаймиз. Шу озод ҳадлар устунида манфий сонларнинг хоҳлаган бирини (b_i, $i = m + 1,1, \ldots, m$) оламиз. Агар шу манфий сон қатнашган (y_i, $i = n + 1, .1, \ldots, m$) қатордаги номаълумлар коэффицентларининг (b, $i = n + 1, 1, \ldots, m$) ҳаммаси мусбат ишорали бўлса, у вақтда қўйилган масала ечимга эга бўлмайди. Акс ҳолда шу номаълумларнинг (b_i, $i = n + 1,1$; $+ 1,2 \ldots,$ m) коэффициентларидан ҳеч бўлмаганда биттаси манфий ишорали бўлса, у вақтда шу манфий ишорали сонни вақтинча ҳал қилувчи элемент деб оламиз. Бу элемент турган устун бош устун бўлади.

Бош қаторни топиш учун озод ҳадлар устунидаги ҳамма сонларни бош устундаги мос келган сонларга (агар уларнинг ишоралари бир хил бўлса) бўламиз. Шу бўлинган сонлардан энг кичиги қатнашган қатор бош қатор (агар бундай сонлар бир нечта бўлса, уларда исталган бири олинади) деб танлаймиз. Бош қатор ва бош устуннинг кесишган жойидаги сон *ҳал қилувчи элемент* деб олинади. Натижада Жорданнинг модификацияланган чиқариш методини қўллаб, янги жадвалларни тулдирамиз. Бу процесс озод ҳадлар устунидаги сонларнинг ҳаммаси мусбат бўлгунча давом этади, акс ҳолда эса юқоридаги процесс такрорланаверади.

Мисол. Қуйидаги системанинг таянч ечими топилсин:

$$y_1 = -x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 1 \geqslant 0,$$
$$y_2 = -3x_1 - 4x_3 + 2 \geqslant 0,$$
$$y_3 = -3x_1 - x_3 + 4 \geqslant 0,$$
$$x_1 \geqslant 0; \ x_2 \geqslant 0; \ x_3 \geqslant 0.$$

Бу тенгламалар системасидан қуйидаги жадвални тузамиз.

31- жадвал

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	1	$\boxed{-2}$	3	-1
$y_2 =$	3	0	4	2
$y_3 =$	3	1	0	4

31- жадвалда озод ҳадлар устунидаги сонлар (—1, 2, 4) ичида манфий ишорали (—1) сони мавжуд. Шунинг учун ҳам берилган системанинг таянч ечимини топамиз. Демак,- шу манфий сон турган қаторни қараймиз. Агарда шу қаторда манфий ишорали сон бўлса, у вақтда қўйилган мисол ечимга эга бўлади. Акс ҳолда у ечимга эга бўлмайди. Берилган мисолда бу сон (—2) дир. Шу (—2) турган устун бош устун булади ва уни стрелка билан белгилаб қуямиз. Энди бош қаторни топамиз. Бунинг учун озод ҳадлар устунидаги сонларни, бош устундаги мос келган сонларга буламиз, яъни $\left(\frac{-1}{-2}; \frac{4}{1}\right)$ уларнинг ишораси бир хил булади. Ана шу нисбатлар ичидаги энг кичик сонни танлаймиз. $\left(\frac{1}{2} = 0{,}5; \frac{4}{1} = 4\right)$ лардан биринчиси 0,5 дир. Демак, бу сон турган қатор бош қатор деб юритилади. Натижада бош устун (x_2) ва бош қатор (y_1) ларнинг кесишгандаги элемент (—2) ҳал қилувчи элемент деб юритилади ва уни тўртбурчак ичига оламиз. Шундан кейин Жорданнинг модификацияланган чиқариш методини қўллаб янги жадвални тузамиз.

32- жадвал

	$-x_1$	$-y_1$	$-x_3$	1
$x_2 =$	$-1/2$	$-1/2$	$-3/2$	$1/2$
$y_2 =$	3	0	4	2
$y_3 =$	$7/2$	$1/2$	$3/2$	$7/2$

32- жадвалдан кўрамизки, озод ҳадлар устунида манфий ишорали сон қолмади. Биз шу билан унинг таянч ечимини топамиз: $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{1}{2}$; $x_3 = 0$ ва $y_1 = 0$; $y_2 = 2$; $y_3 = \frac{7}{2}$. Агар озод ҳадлар устунида манфий ишорали сон булганда эди, биз юқоридаги процессни давом эттирган булар эдик. Аммо бу ерда бундай соннинг йўқлиги туфайли мисолнинг таянч ечими топилган деб ҳисоблаймиз ва масаланинг оптимал ечимини излаймиз.

в) *Масаланинг оптимал ечимини топишда симплекс методи.* Мақсад функцияси (1) нинг чегаравий ва манфий бўлмаслик шартлари (2), (3) лар мавжуд бўлиб, уларнинг таянч ечими юқоридагидек топилган деб, 6-пунктдаги 30-жадвални ёзиб оламиз. Бу жадвалда масаланинг оптимал ечимини топиш учун қуйидаги икки ҳолат мавжуд бўлади:

33- жадвал

	$-y_1$	$-y_2$	. .	$-y_n$	Q
$y_{n+1}=$	$b_{n+1;\,1}$	$b_{n+1;\,2}$	. . .	$b_{n+1;\,n}$	b_{n+1}
$y_{n+2}=$	$b_{n+2;\,1}$	$b_{n+2;\,2}$	. . .	$b_{n+2;\,n}$	b_{n+2}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
y_m	b_{m1}	b_{m2}	. . .	b_{mn}	b_m
z	q_1	q_2	. .	q_n	Q

I. z қаторидаги ҳамма номаълумларнинг коэффициентлари мусбат бўлсин Айтайлик, z қаторидаги y_1, $y_2, \ldots, y_n$ номаълумларнинг коэффициентлари $q_1>0$; $q_2\geqslant 0, \ldots, q_n\geqslant 0$ бўлса ва номаълумларнинг қийматлари $y_1=0$; $y_2=0$; . . .; $y_n=0$; $y_{n+1}=b_{n+1}$; $y_{n+2}=b_{n+2}$; . . .; $y_m=b_m$ бўлганда, қуйилган масаланинг оптимал ечимига эга бўламиз, яъни $z_{max}=Q$ бўлади.

II. z қаторидаги номаълумларнинг коэффнциентларидан биттаси ёки бир нечтаси манфий бўлганда ҳал қилувчи элементни танлашда қуйидаги муносабатлар амалга ошиши мумкин. (Бу ерда масаланинг максимум қийматини топиш устида сўз юритилади.)

1) z қаторидаги номаълум ($y_1, y_2, \ldots; y_n$) ларнинг коэффициентлари $q_1, q_2, \ldots, q_n$ лардан биронтаси манфий ишорали сон бўлса, шу манфий ишорали сон тургап устун бош устун бўлади. Агар бундай манфий сонлар бир нечта бўлса, у вақтда бош устун учун манфий сонлар абсолют қийматининг энг каттаси олинади. Бу сонлар ичида, улардан бир нечтаси бир-бирига тенг бўлса, у вақтда улардан хоҳлаган бири олиниб бош устун учун танланади.

2) Бош қаторни танлаш учун озод ҳадлар устунидаги ҳамма сонларни (агар уларнинг ишораси бир хил бўлса) бош устундаги мос келган сонларга бўлиб,

улардан энг кичиги танланади. Бундай кичик сонлар бир нечта бўлса, улардан хоҳлаган бирини олиб бош қатор қилиб ёзилади.

3) Бош устун ва бош қаторнинг кесишган нуқтасидаги сон ҳал қилувчи элемент бўлади.

4) Янги жадвалдаги ҳамма сонлар Жорданнинг модификацияланган чиқариш усули ёрдамида топилади.

5) Бу процесс z қатордаги ҳамма номаълумларнинг коэффициентлари мусбат (+) булгунча давом этади.

Қуйидаги масалаларни симплекс методи ёрдамида ечишни қараймиз.

1-масала. Корхона икки турли маҳсулот ишлаб чиқариш учун тўрт хил хом ашёдан фойдаланади. Ҳар бир маҳсулотни ишлаб чиқариш учун сарфланадиган хом ашё бирликлари 34-жадвалда келтирилган.

Маҳсулот ишлаб чиқаришни, шундай ташкил этиш керакки, у корхонага максимум соф даромад келтирсин.

34-жадвал

Хом ашё турлари	Мавжуд бўлган маҳсулот бирлиги	Маҳсулот ишлаб чиқариш учун сарфланадиган бирликлар	
		I маҳсулот	II маҳсулот
A	12	2	2
B	8	1	2
C	16	4	0
D	12	0	4
Соф даромад (минг сум ҳисобида)		2	3

Ечиш. Аввало масаланинг математик моделини тузамиз, бунинг учун биринчи хил маҳсулотни x_1 билан, иккинчи хил маҳсулотни эса x_2 билан белгилаймиз.

У ҳолда 34-жадвал маълумотлари асосида қуйидаги тенгсизликлар системасини тузамиз:

$$\begin{gathered} 2x_1 + 2x_2 \leqslant 12, \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8, \\ 4x_1 \leqslant 16, \\ 4x_2 \leqslant 12. \end{gathered} \qquad (1)$$

Мақсад функцияси $z=2x_1+3x_2$ кўринишда бўлади.

(1) тенгсизликлар системасининг шундай ечимини (яъни x_1 ва x_2 нинг шундай қийматларини) топиш керакки, натижада z функциянинг энг катта қиймати топилсин. Бунинг учун тенгсизликлар системасига қўшимча номаълумлар киритиб (келгусида уларни асосий мос номаълумлар деб юритамиз), унга эквивалент бўлган тенгламалар системасига келтирамиз.

У ҳолда тенгсизликлар системаси ўрнига қуйидаги тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2+y_1&=12,\\ x_1+2x_2+y_2&=8,\\ 4x_1+y_3&=16,\\ 4x_2+y_4&=12. \end{aligned}$$

Бу тенгламалар системасини янги киритилган (y_1; y_2; y_3; y_4) номаълумларга нисбатан ечамиз:

$$\begin{aligned} y_1&=12-(2x_1+2x_2),\\ y_2&=8-(x_1+2x_2),\\ y_3&=16-4x_1,\\ y_4&=12-4x_2. \end{aligned}$$

z функцияни эса бундай кўринишда ёзамиз:

$$z=0-(-2x_1-3x_2).$$

Келтирилган системаларни симплекс методида ечиш учун уларни жадвал кўринишида ёзамиз.

Масала шартида маҳсулот етиштиришдан келадиган максимум қийматни топиш талаб этилган, шунинг учун

35-жадвал

Асосий номаълумлар	Озод ҳадлар	Асосий бўлмаган номаълумлар	
		x_1	x_2
y_1	12	2	2
y_2	8	1	2
y_3	16	4	0
y_4	12	0	$\boxed{4}$
Индекс қатори	0	−2	−3

35-жадвал индекс қаторидаги номалумлар олдидаги коэффициентлар (яъни -2 ва -3 лар) мусбат бўлиши керак. Аммо бу коэффициентларнинг иккаласи ҳам манфий ишоралидир. Шунинг учун бу сонлар ишорасини мусбат ишорага келтиришимиз керак. Бунинг учун аввало бош устунни танлаймиз, бундай танлашда индекс қаторидаги манфий ишорали сонлардан абсолют қиймати бўйича энг каттаси олинади. Жадвалда бу сон (-3) дир. Сўнгра бош қаторни танлаш керак. Бунинг учун озод ҳадлар устунидаги сонларга (агар уларнинг ишоралари бир хил бўлса), бош устундаги мос келган сонлар бўлиниб улар ичидаги энг кичиги танланади. Агар бундай бўлинмалар бир нечта бўлса, улардан хоҳлаган биттасини олиш мумкин.

Бизнинг мисолда $\left(\frac{12}{2}; \frac{8}{2}; \frac{12}{4}\right) = (6;\ 4;\ 3)$, энг кичик бўлинма 3 га тенг. Шунинг учун y_4 қатнашган қатор — бош қатор деб олинади.

Ҳал қилувчи элемент шу қатор билан бош устун кесишган жойдаги 4 сони экан. Шу ҳал қилувчи элементга нисбатан навбатдаги жадвални тўлдиришга киришилади.

Кейинги жадвални тўлдиришда бош устун ва бош қатордаги номаълумлар, бизнинг мисолда эса y_4 билан x_2 ўринларини алмаштирилади.

36-жадвал

Асосий номаълумлар	Озод ҳадлар	Асосий бўлмаган номаълумлар	
		$-x_1$	$-y_4$
y_1	6	2	$-\frac{1}{2}$
y_2	2	$\boxed{1}$	$-\frac{1}{2}$
y_3	16	4	0
y_4	3	0	$\frac{1}{4}$
z	9	-2	$\frac{3}{4}$

↑

Янги тузилган жадвал учун ёзиладиган элементлар бундай ҳисоблаб топилади:

$$b_{11} = 12 - \frac{12 \cdot 2}{4} = \frac{12 \cdot 4 - 12 \cdot 2}{4} = \frac{48 - 24}{4} = \frac{24}{4} = 6,$$

$$b_{12} = 2 - \frac{2 \cdot 0}{4} = \frac{2 \cdot 4 - 2 \cdot 0}{4} = \frac{8}{4} = 2,$$

$$b_{21} = 8 - \frac{12 \cdot 2}{4} = \frac{32 - 24}{4} = \frac{8}{4} = 2,$$

$$b_{22} = 1 - \frac{2 \cdot 0}{4} = \frac{4 - 2 \cdot 0}{4} = \frac{4}{4} = 1,$$

$$b_{31} = 16 - \frac{12 \cdot 0}{4} = \frac{16 \cdot 4 - 12 \cdot 0}{4} = \frac{64}{4} = 16,$$

$$b_{32} = 4 - \frac{0 \cdot 0}{4} = \frac{16}{4} = 4,$$

z қаторни ҳам шу йўл билан ҳисоблаймиз.

$$b_{41} = 0 - \frac{12 \cdot (-3)}{4} = \frac{36}{4} = 9,$$

$$b_{42} = -2 - \frac{0 \cdot (-3)}{4} = \frac{-8}{4} = -2,$$

36-жадвалнинг z қаторидаги номаълумларнинг коэффициенти олдидаги ишоралар мусбат бўлганда масалани ечиш тўхтатилади. Чунки мақсад функцияси максимум қийматига эришган бўлади. 36-жадвалда x_1 нинг коэффициенти манфий (-2) бўлиб қолди. Демак, масаланинг оптимал ечимига, яъни максимум қийматга эришилгани йўқ. Оптимал ечимга эришиш учун юқорида кўрсатилган алмаштиришларни яна такрорлашга тўғри келади. Бу такрорланиш z қаторидаги барча номаълумларнинг олдидаги коэффициентлар мусбат бўлгунча масаланинг шарти бўйича максимум қийматни топиш талаб этилгунча (бу коэффициентларнинг олдидаги ҳамма ишора мусбат бўлгунча) давом эттирилади. Шунинг учун навбатдаги жадвални тузишга киришамиз.

Бунда бош устун индекс қаторида (-2) қатнашган устун бўлиб, бош қатор эса озод ҳадларни мос равишда шу бош устундаги сонларга бўлиш ва чиққан бўлинмалар орасидан энг кичигини танлаб олиш билан топилади: $\left(\frac{6}{2};\ \frac{2}{1};\ \frac{16}{4}\right) = (3;\ 2;\ 4)$.

Энг кичиги y_2 қатнашган қатор экан. 1 ҳал қилувчи элемент бўлиб ҳисобланади. Қолган элементлар эса юқоридагидек ҳисоблаб топилади.

37-жадвал

Асосий номаълумлар	Озод ҳадлар	Асосий бўлмаган номаълумлар	
		$-y_3$	$-y_4$
y_1	2	-2	$\frac{1}{4}$
y_1	2	$+1$	$-\frac{1}{2}$
y_2	8	-4	$\boxed{2}$
y_2	3	0	$\frac{1}{4}$
z	13	2	$-\frac{1}{4}$

↑

Бу жадвал ҳам максимум ечимни бермайди, чунки охирги жадвалнинг z қаторидаги номаълумнинг коэффициенти $\left(-\frac{1}{4}\right)$ манфий бўлиб қолди. Шу сабабли навбатдаги жадвални тузамиз.

38-жадвал

Асосий номаълумлар	Озод ҳадлар	Асосий бўлмаган номаълумлар	
		y_3	y_2
y_1	0	-1	$-\frac{1}{4}$
x_1	4	-1	$\frac{1}{4}$
y_4	4	-2	$\frac{1}{2}$
x_2	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
z	14	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{8}$

Бу жадвалнинг z қаторидаги барча коэффициентлар мусбат бўлгани учун оптимал ечимга эга. Бу ечим максимум маҳсулот ишлаб чиқаришни таъминлайди, чунки z қатордаги номаълумларнинг олдидаги коэффициент лари мусбат бўлди. Бу шуни кўрсатадики, корхона биринчи хил маҳсулотдан $x_1 = 4$ дона, иккинчи хил маҳсулотдан $x_2 = 2$ дона ишлаб чиқарса, максимум соф даромадга эришар экан, яъни:

$$z_{max} = 2x_1 + 3x_2 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 8 + 6 = 14.$$

Демак, 14 минг сўм соф даромад олинади.

2-масала. Қуйидаги жадвалда келтирилган иқтисодий кўрсаткичлар бўйича мавжуд 8000 га майдонга буғдой ва картошка экилишининг оптимал вариантини топингки, у хўжаликка максимум фойда келтирсин. Дастлабки маълумотлар 39-жадвалда берилган.

39-жадвал

Ишлаб чиқариш ресурслари	1 га майдонни экишга кетган харажат		Ресурсларнинг ҳажми
	буғдой	картошка	
1. Механизациялашган меҳнат (трактор-смена)	0,6	4,6	10000
2. Қўл меҳнати (киши-куни)	2	22	50000
3. Ҳосилдорлик (ц/га)	20	100	—
4. Соф даромад (1 ц сўм ҳисобида)	4	3	—

Бу масалани ечишга киришишдан олдин, 1 ц ҳосил етиштириш учун кетган харажатларни топишимиз керак. Бунинг учун ҳар бир гектар майдонни, ундан олинадиган ҳосилдорликка, худди шунингдек, трактор-смена ва киши-куни ресурсларини ҳам ҳосилдорликка бўлиб, ҳисоблаш натижаларини 40-жадвалда акс эттирамиз.

40-жадвал

Ишлаб чиқариш ресурслари	1 ц ҳосил етиштириш учун сарфланадиган харажат		Ресурсларнинг ҳажми
	буғдой	картошка	
Экин майдони (га)	0,05	0,01	8000
Механизациялашган меҳнат (трактор-смена)	0,03	0,046	10000
Қўл меҳнати (киши-куни)	0,1	0,22	50000
Соф даромад (1 ц—сўм ҳисобида)	4	3	—

40-жадвалдаги маълумотлар асосида масаланинг математик моделини тузамиз. Бунинг учун етиштирилиши керак бўлган буғдой миқдорини (ц) x_1 билан, картошка етиштиришни эса x_2 билан белгилаб ушбу системага эга бўламиз.

$$\begin{cases} 0{,}05x_1 + 0{,}01x_2 \leqslant 8000, \\ 0{,}03x_1 + 0{,}046x_2 \leqslant 10000, \\ 0{,}1x_1 + 0{,}22x_2 \leqslant 50000. \end{cases} \tag{1}$$

$$z = 4x_1 + 3x_2 \to \max \tag{2}$$

Бунда (1) тенгсизликлар системаси ишлаб чиқариш ресурсларидан фойдаланишни, (2) эса мақсад функциясини ифодалайди.

Қулайлик учун (1) тенгсизликлар системасини мос равишда 100, 500, 50 сонларига кўпайтириб бутун сонларга келтирамиз:

$$\begin{aligned} &5x_1 + x_2 \leqslant 800000, \\ &15x_1 + 23x_2 \leqslant 5000000, \\ &5x_1 + 11x_2 \leqslant 2500000. \end{aligned} \tag{3}$$

Бу тенгсизликлар системасига қўшимча номаълумлар киритиб, уни тенгламалар системасига айлантирамиз.

$$\begin{aligned} &5x_1 + x_2 + y_1 = 800000, \\ &15x_1 + 23x_2 + y_2 = 5000000, \\ &5x_1 + 11x_2 + y_3 = 2500000. \end{aligned} \tag{4}$$

Ҳосил бўлган бу тенгламалардаги y_1, y_2, y_3 ларни асосий номаълумлар деб, тенгламалар системасидан шу асосий номаълумларни топсак (4) ушбу кўринишни олади:

$$\begin{aligned} &y_1 = 800000 - (5x_1 + x_2), \\ &y_2 = 5000000 - (15x_1 + 23x_2), \\ &y_3 = 2500000 - (5x_1 + 11x_2). \end{aligned} \tag{5}$$

$$z = 0 - (-4x_1 - 3x_2). \tag{6}$$

Масалани ҳал қилиш учун тузилган тенгламалар системаси ва чизиқли функция кўрсаткичлари асосида бошланғич жадвални тўлдирамиз:

Асосий номаълумлар	Озод ҳадлар	Асосий бўлмаган номаълумлар	
		$-x_1$	$-x_2$
→ y_1	800000	$\boxed{5}$	1
y_2	5000000	15	23
y_3	2500000	5	11
z	0	— 4	— 3

↑

Бу жадвалдан навбатдаги жадвалга ўтиш учун бош устун ҳамда бош қатор ва ҳал қилувчи элементларни, аниқлаймиз. Бунда энг аввало бош устунни топиш учун номаълумлар олдидаги манфий коэффициентлар абсолют қийматининг энг каттасини аниқлаймиз.

$$|-4|=4; \ |-3|=3.$$

Бунда x_1 қатнашган устун бош устун бўлади, сўнгра бош қаторни шу устундаги сонларга озод ҳадларни бўлиб (уларнинг ҳар иккаласи ҳам мусбат ёки манфий бўлса), улар орасидан энг кичигини танлаб топамиз:

$$\left(\frac{800000}{5}; \ \frac{5000000}{5}; \ \frac{2500000}{5}\right)=(160000; \ 1000000; \ 500000).$$

Бизнинг мисолда y_1 қатнашган қатор (160000) бош қатор бўлади. Бош устун ва бош қаторнинг кесишган жойидаги рақам 5 эса ҳал қилувчи элемент бўлади.

Қолган ҳамма элементларни илгаригидек топамиз. Бажарилаётган жараённи z қатордаги номаълумлар коэффициентлари мусбат бўлгунча давом эттирамиз.

42-*жадвал*

Асосий номаълумлар	Озод ҳадлар	Асосий бўлмаган номаълумлар	
		$-y_1$	$-x_2$
x_1	160000	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
y_2	2600000	3	$\boxed{20}$
y_3	17000000	—1	10
z	6400000	$\frac{4}{5}$	$-\frac{11}{5}$

Бу жадвал кўрсаткичлари оптимал ечимга эга бўлмайди. Чунки тўртинчи қаторадаги номаълум x_2 олдидаги коэффициент манфий ишорага эга. Шунинг учун юқоридаги жараённи давом эттириб 43- жадвални тузамиз:

43- *жадвал*

Асосий номаълумлар	Озод ҳадлар	Асосий бўлмаган номаълумлар	
		y_1	y_2
x_1	134000	$\frac{17}{5}$	$-\frac{1}{100}$
x_2	130000	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{20}$
y_3	8000000	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
z	926000	$\frac{21}{125}$	$\frac{11}{100}$

Бу жадвалда z функция қаторидаги кўрсаткичларнинг ишоралари мусбат Демак, изланган функциянинг қиймати максимум бўлиб, масала ечими максимум соф даромад 926000 сўмни ташкил этишини кўрсатиб турибди.

Бунинг учун буғдойдан $x_1 = 134000$ ц, картошкадан эса $x_2 = 130000$ ц етиштирилиши керак.

Юқоридаги хулосанинг тўғрилигига ишонч ҳосил қилиш учун номаълумларнинг қийматлари функцияни қаноатлантиришини текширамиз:

$$z = 4x_1 + 3x_2 = 4 \cdot 134000 + 3 \cdot 130000 =$$
$$= 536000 + 390000 = 926000$$

Бундай кўрсаткичга эришиш учун қанча майдонга бугдой ва қанча майдонга картошка экиш кераклигини аниқлаш лозим. Бунинг учун етиштирилиши лозим бўлган картошка ва бугдой миқдорини ҳар бир гектардан олиниши мумкин бўлган ҳосилдорликка бўлиш керак:

1) буғдой учун $\frac{134000}{20} = 6700$ га;

2) картошка учун $\frac{130000}{100} = 1300$ га.

Шундай қилиб, хўжаликда мавжуд 8000 га майдон нинг, 6700 гектарига буғдой, 1300 гектарига эса картошка экиш керак экан. Шу ҳолда бу экинлардан олинадиган соф даромад максимум қийматга эришади.

г) *Аралаш системаларни ечишда симплекс методи.*

Қуйидаги тенгсизликлар ва тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$a_{i1}\ x_1 + a_{i2}\ x_2 + \ldots + a_{in}\ x_n \leqslant a_i,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{k1}\ x_1 + a_{k2}\ x_2 + \ldots + a_{kn}\ x_n = a_k\ (i = 1,2,\ldots,r;\ k = r+1;\ k+2,\ldots,m) \qquad (1)$$

Бундай ҳолларда тенгсизликлар системасини

$$y_i = -a_{i1}\ x_1 - a_{i2}\ x_2 - \ldots - a_{in}\ x_n + a_i > 0,$$

функция кўринишида, тенгламалар системасини эса

$$0 = -a_{k1}\ x_1 - a_{k2}\ x_2 - \ldots - a_{kn}\ x_n + a_k$$

кўринишида ёзамиз. Шу билан бирга $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$ функция ҳам берилган бўлсин. Шуларга асосан қуйидаги жадвални тузамиз:

44 *жадвал*

	$-x_1$	$-x_2 \ldots$	$-x_n$	1
$y_1 =$	a_{11}	$a_{12}\ \ldots$	a_{1r}	a_1
.	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . .
.				
$y_r =$	a_{r1}	$a_{r2}\ \ldots$	a_{rn}	a_r
$0 =$	$a_{r+1;1}$	$a_{r+1;2}\ \ldots$	$a_{r+1;n}$	a_{r+1}
.				
.				
$0 =$	a_{m1}	$a_{m2}\ \ldots$	a_{mn}	a_m
$z =$	$-c_1$	$-c_2\ \ldots$	$-c_n$	0

Бу жадвал кўринишидаги масалаларни ечишда аввало уларнинг ноларга тенглаштирилган тенгламаларини Жордан-Гаусснинг 2-методини эътиборга олиб, Жорданнинг модификацияланган чиқариш методини қўлланишни масаланинг оптимал ечимига эришгунча давом эттириш керак.

д) *Чизиқли программалаш масаласининг минимум қийматини топишда симплекс методи.*

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \qquad (1)$$

мақсад функциясининг минимум қийматларига

$$-a_{i1} x_1 - a_{i2} x_2 - \cdots - a_{in} x_n + a_i > 0 \qquad (2)$$

шартларда эришилади.

Номаълумларнинг манфий бўлмаслиги шарти

$$(x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0; \cdots; x_n \geqslant 0) \qquad (3)$$

бўлганда тенгсизликлар системасини қаноатлантирувчи номаълумларнинг шундай қийматларини топиш кераkки, натижада z мақсад функцияси ўзининг минимум қийматига эга бўлсин.

Масала ечимининг минимум қийматини топишда (1) z мақсад функциясини z билан алмаштирамиз.

$$z = -z = -c_1 x_1 - c_2 x_2 - \cdots - c_n x_n$$

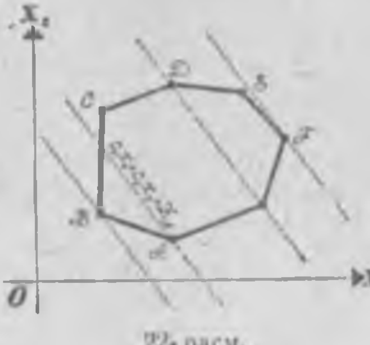
Уни бошқача айтиш ҳам мумкин: бир функциянинг максимуми иккинчи функциянинг минимумига тенг, яъни

$$z_{max} = -z_{min}$$

Масаланинг оптимал ечимини илгаригидек топаверамиз.

е) *Симплекс методининг геометрик тасвири.* Хусусий ҳолда, симплекс алмаштириш мақсад функциясининг камайиши ёки ўсишига қараб, кўпбурчакда ўзаро қўшни бурчак нуқталарининг ҳаракат тасвиридан иборат бўлади.

Берилган тенгсизликлар кўпбурчакнинг бирор қиррасини ифодаласа ва мақсад функцияси $z = c_1 x_1 + c_2 x_2$ нинг максимум қийматини топишни талаб этилса улар ўзаро қўшни бурчак деб аталади ва унинг n та ечими берилган кўпбурчакда тасвирланади (22-расм).



22- расм.

Айтайлик, чегаравий шартдаги системаларни шундай кетма-кет алмаштирайликки, унинг таянч ечими топилсин ва у кўпбурчакнинг A нуқтасига тушсин. У вақтда тўғри чизиқ $c_1 x_1 + c_2 x_2 = \text{const}$ кўпбурчакнинг A нуқтасидан ўтади ва функция $z(A)$ қийматига эга бўлади.

Агар $Q_{0j}(z_j - a_j)$ вектор тўғри чизиқ $c_1 x_1 + c_2 x_2 = \text{const}$ ни ифодалаб, у кўпбурчакдаги Q нуқтадан ўтса, z функция $z(Q)$ қийматига эга бўлади.

Натижада кетма-кет тўғри чизиқларни параллел ўтказиш натижасида чизиқли мақсад функцияси $z(F)$ қийматига эга бўлади. Функциянинг бу $z(F)$ қиймати берилган кўпбурчакда қўйилган масаланинг оптимал ечими ёки максимум қиймати деб аталади.

Шундай қилиб, қўйилган масаланинг оптимал (максимум қийматини топиш учун, кетма-кет симплекс алмаштиришлар методидан фойдаланиб, бошланғич таянч ечимини аниқлаб, уни то оптимал ечими топилгунча давом эттирамиз ёки тўғри чизиқ $c_1 x_1 + c_2 x_2 = \text{const}$ йўналишида ҳаракатлантириб, бошланғич ечимидан то оптимал ечимигача эришамиз.

Чизиқли программалашнинг масалаларини ечишда, яъни уларнинг оптимал ечимини, мақсад функциясининг экстремум қийматларини топишда Симплекс методи қўлланилади.

Бу методни универсал метод деб ҳисобланади. Чунки у масала шартида берилган ҳар хил ўлчов бирликларини (т/км, киши-куни. станок-соат, трактор-смена, баҳо ва ҳоказоларни) бир хил ўлчов бирлигига келтиришни талаб этмайди. Чунки бу бирликларни бир хил ўлчов бирлигига келтириш жуда мураккабдир. Шунинг учун ҳам у масалада қандай қўйилган бўлса, шундай ёзилади.

Кейинги вақтларда чизиқли программалашнинг асосий методлари халқ хўжалиги ва қишлоқ хўжалигига оид кўпгина масалаларни ечишда, қишлоқ хўжалигини оптимал жойлаштириш ва ихтисослаштириш, чорвачилик комплексларида озуқа рационларини топиш, машина-трактор паркидан оптимал фойдаланиш, минерал ўғитлардан самарали фойдаланиш ва бошқа соҳаларда қўлланилмоқда.

6-§. Чизиқли программалаш масаласини ечишда сунъий базис методи ёки (М-метод)

Маълумки чизиқли программалаш чекланишлари m та тенгламалар системасидан иборат бўлиб, ундаги озод ҳадларнинг манфий бўлмаслик шартларида, у бирлик матрицага эга бўлиб симплекс методи ёрдамида оптимал ечими топилар эди. Агарда чизиқли программалаш масалалари $AX \leqslant A_0$ кўринишда бўлиб $A_0 \geqslant 0$ бўлса, у вақтда система чекланишлари ҳамма вақт ҳам бирлик матрица кўринишида бўлавермайди. Бундай ҳолларда масалаларни ечиш учун сунъий базис методи қўлланилади. Чизиқли программалашнинг умумий масаласини қарайлик.

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \tag{1}$$

чизиқли функциянинг минимум қиймати

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases} \tag{2}$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

шартларда топилсин.

Бу ерда $b_i \geqslant 0$ $(i = 1,2,\ldots m)$ ва (2) тенгламалар системаси матрицаси бирлик матрица эмас. Бирлик матрица ҳосил қилиш учун (2)системадаги ҳар бир тенгламага қўшимча номаълумлар киритамиз. Умумий ҳолда $x_{n+i} \geqslant 0$ ни қўшамиз ва бу ўзгарувчиларни *сунъий ўзгарувчилар* деб юритамиз. Умумий ҳолда уларни $x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+m}$ деб белгилаймиз. Энди

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n + \\ + M x_{n+1} + M x_{n+2}, \ldots, M x_{n+m} \tag{1'}$$

кенгайтирилган мақсад функциясининг минимум қийматини

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n} x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n} x_n + x_{n+2} = b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + a_{m+n} = b_m \end{matrix} \tag{2'}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad j = 1, 2, \ldots, (n + m) \tag{3'}$$

шартлардан топамиз.

Бу ерда M исталганча катта мусбат сон. Агар масала ечимининг минимум қийматини топиш талаб этилса, у вақтда мусбат M сонини мақсад функциясига қўшамиз, аксинча масаланинг шарти максимум қийматни топишни талаб этса, у вақтда манфий M сони қўшилади. Бирлик вектор $A_{n+1}; A_{n+2}; \ldots; A_{n+m}$ лар мос сунъий ўзгарувчилар билан биргаликда *сунъий базисни* ташкил этади.

Айрим ҳолларда (1′) мақсад функцияси ўрнига кетма-кет иккита функциянинг минимум қийматини топиш қаралади:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n (-z) = 0,$$
$$d_1 x_1 + d_2 x_2 + \ldots + d_n x_n (-4) = u_0$$

Қуйидаги масалани M-метод ёрдамида ечамиз.

Масала. Чўчқачилик фермасида ҳар бир чўчқа учун ҳафталик тузиладиган озуқа рационы A моддали озуқадан 6 бирлик, B моддали озуқадан 8 бирлик, C моддали озуқадан 12 бирлик буладиган қилиб тузиш талаб этилган бўлсин. Бу озуқа рационини тузиш учун фермадаги мавжуд бўлган бир неча хил озуқабоп моддалардан фойдаланилади. Мавжуд озуқабоп моддаларнинг ҳар биридан неча бирликдан олиниши 45-жадвалда кўрсатилган.

45- жадвал

Озуқа турлари	Озуқабоп моддалар			Мавжуд бўлган озуқа бирликлари
	I	II	III	
A	2	1	3	6
B	1	2	1,5	8
C	3	4	2	12

Агар I озуқабоп модданинг 1 ц баҳоси 2 сўм, II озуқабоп модданинг 1 ц баҳоси 3 сўм, ва III C озуқабоп модданинг 1 ц баҳоси 2 сўм 50 тийиндан бўлса, чўчқалар учун энг арзон рацион тузилсин.

Берилган шартлар бўйича озуқа турларини $x_1 x_2 x_3$ лар билан белгилаб, масалага доир тенгсизликлар системасини ва мақсад функциясини тузамиз:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geqslant 6, \\ x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 \geqslant 8, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geqslant 12, \end{cases} \qquad (1)$$

$$Z_{\min} = 2x_1 + 3x_2 + 2,5x_3, \qquad (2)$$

$$x_1 \geqslant 0 \quad x_2 \geqslant 0 \quad x_3 \geqslant 0 \qquad (3)$$

(1) тенгсизликлар системасига қўшимча номаълумлар киритиб қуйидаги тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 6, \\ x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 - x_5 &= 8, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_6 &= 12. \end{aligned} \qquad (4)$$

Бу тенгламалар системасига киритилган x_4, x_5, x_6 номаълумларнинг олдидаги коэффициентлар манфий бўлиб, улар фақатгина тенгсизликларни тенгликка келтириш учун қўйилди. Шунинг учун булар мавжуд пландаги асосий номаълумлар ўрнини боса олмайди.

Шунга кўра юқоридаги тенгламалар системасига сунъий ўзгарувчилар, яъни y_1, y_7 ва y_8 ларни киритамиз.

У ҳолда (4) тенгламалар системасининг кўриниши бундай бўлади:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + y_1 &= 6, \\ x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 - x_5 + y_2 &= 8, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_6 + y_3 &= 12. \end{aligned} \qquad (5)$$

Ана шу тенгламалар системасига сунъий ўзгарувчилар киритилгани учун мақсад функциясига ҳам $(+M)$ сонини қўшамиз.

Масаланинг шарти бўйича минимум қийматни топиш талаб этилганлиги учун, M ни мусбат ишора билан, акс ҳолда эса манфий ишора билан қўшилади. Масала шартига кўра мақсад функциясининг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$Z_{\min} = 2x_1 + 3x_2 + 2,5x_3 + M(y_1 + y_2 + y_3) \qquad (6)$$

Энди y_1, y_2, y_3 сунъий ўзгарувчиларни топиш керак.

Бунинг учун (5) тенгламалар системасини y_1, y_2, y_3 ларга нисбатан ечиб, натижада ушбуга эга буламиз.

$$y_1 = 6 - (2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4),$$
$$y_2 = 8 - (x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 - x_5),$$
$$y_3 = 12 - (3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 26),$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 26 - (6x_1 + 7x_2 + 6{,}5x_3 - x_4 - x_5 - x_6)$$

Бу сунъий ўзгарувчиларнинг топилган йиғиндисини (6) га қуйсак, қуйидагича булади:

$$Z_{\min} = 2x_1 + 3x_2 + 2{,}5x_3 + M\,(y_1 + y_2 + y_3) = 2x_1 +$$
$$+ 3x_2 + 2{,}5x_3 + M\,[26 - 6\,(6x_1 + 7x_2 + 6{,}5x_3 - x_4 -$$
$$- x_5 - x_6)] = 26M - [(6M - 2)\,x_1 + (7M - 3)\,x_2 +$$
$$+ (6{,}5M + 2{,}5)\,x_3 - Mx_3 - Mx_4 - Mx_5 + Mx_6].$$

Топилган маълумотлар асосида 46-жадвални тузамиз:

46- *жадвал*

Асосий номаълумлар	Озод ҳадлар	Асосий бўлмаган номаълумлар					
		$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	x_4	x_5	x_6
y_1	6	2	1	3	−1	0	0
y_2	8	1	2	1,5	0	−1	0
$\to y_3$	12	3	$\boxed{4}$	2	0	0	−1
z	26 M	6M · 2	7M—3	6,5M−−2,5	− M	− M	−M

Масаланинг шарти бўйича минимум қийматни топиш талаб этилганлиги учун 46-жадвалдаги бош устунни топишда z қаторидаги асосий бўлмаган номаълумлар коэффициентлари орасидан энг каттасини танлаймиз ва у турган устунни бош устун деб оламиз. Мисолда энг катта мусбат сон x_2 нинг коэффициенти $+ (7M - 3)$ дир.

Бош қаторни топишда эса озод ҳадларни бош устундаги ўзларига мос келган сонларга бўлиб, шулар орасидан энг кичигини танлаймиз. Агар масалани ечиш жараёнида бир неча марта бош устун ва қаторни топиш талаб этилса, юқоридаги жараённи шунча марта такрорлаймиз. Ҳар сафар янги жадвални тўлдиришда биз илгариги усуллардан фойдаланамиз ва бу жадвалларни Жорданнинг модификацияланган чиқариш методини қўллаб, оптимал ечими топилгунича шундай давом эттирамиз. Шу аснода 47-жадвал вужудга келади.

47- жадвал

Асосий номаълумлар	Озод ҳадлар	Асосий бўлмаган номаълумлар					
		$-x_1$	y_3	$-x_2$	x_4	x_5	x_6
$\to y_1$	3	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\boxed{\frac{5}{2}}$	-1	0	$\frac{1}{4}$
y_2	2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	-1	$\frac{1}{2}$
x_3	3	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{4}$
$z =$	$5M+9$	$\frac{3M+1}{4}$	$\frac{-7M}{4}$	$3M-1$	$-M$	$-M$	$\frac{3M}{4}+\frac{3}{4}$

47-жадвалдан 48-жадвалга ўтишда улар қатнашган устунларни ташлаб кетиш ҳам мумкин, чунки буларни сунъий ўзгарувчилар деб олган эдик, булар масала ечимига ҳеч қандай таъсир этмайди.

48- жадвал

Асосий номаълумлар	Озод ҳадлар	Асосий бўлмаган номаълумлар				
		$-x_1$	$-y_1$	x_4	x_5	x_6
x_2	$\frac{6}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{10}$
$\to y_2$	$\frac{7}{5}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{5}$	$+\frac{1}{5}$	-1	$\boxed{\frac{9}{20}}$
x_3	$\frac{12}{5}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{3}{10}$
$z =$	$\frac{7M}{5}+\frac{51}{5}$	$+\frac{3M}{4}+\frac{3}{4}$	$+\frac{6M}{5}+\frac{2}{5}$	$+\frac{M}{5}\ \frac{2}{5}$	$-M\ \frac{9M}{20}$	$-\frac{13}{20}$

48-жадвалда симплекс алмаштиришни қўллаб 49-жадвалга келамиз, бу жадвални бошқа давом эттириш мумкин эмас, чунки z қаторидаги ҳамма номаълумларнинг коэффициентлари манфий ишорали.

Асосий номаълумлар	Озод ҳадлар	Асосий бўлмаган номаълумлар			
		$-x_1$	y_2	x_5	y_1
x_3	$\frac{8}{9}$	$\frac{2}{3}$	•	•	$-\frac{2}{10}$
x_6	$\frac{28}{9}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{9}$	$-\frac{20}{9}$	$\frac{20}{9}$
x_2	$\frac{10}{9}$	•	•	•	$\frac{2}{3}$
z	$\frac{110}{9}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{13}{9}$	$-M+\frac{13}{9}$

49- жадвадда изланган оптимал вариант топилди. Бу жадвал кўрсаткичлари асосида қуйидагиларга эга бўламиз.

$$x_1 = 0;\ x_2 = \frac{10}{3} = 3{,}3\text{ кг};\ x_3 = \frac{8}{9} = 0{,}9\text{ кг}.$$

Номаълумларнинг бу қийматлари шуни кўрсатадики, II моддали озуқадан 3,3 кг, III моддали озуқадан эса 0,9 кг олиб, рацион тузиш лозим. Бу ерда I моддали озуқа талабга жавоб бермаганлиги учун у рациондан чиқариб ташланади.

Топилган маълумотлар z мақсад функциясининг минимум қийматга эришганлигини кўрсатади. Бу маълумотларнинг тўғрилигини аниқлаш учун номаълумларнинг қийматларини z мақсад функциясига қўйиб кўрамиз:

$$z = 2x_1 + 3x_2 + 2{,}5x_3 = 2\cdot 0 + 3\,\frac{10}{3} + 2{,}5\,\frac{8}{9} = 0 +$$

$$10 + \frac{20}{9} = \frac{90+20}{9} = \frac{110}{9} = 12\text{ сўм }20\text{ тийин}$$

Ҳар бир чўчқа учун 12* сўм 20 тийинлик озуқа рационидан фойдаланиш лозим. Демак, масаланинг оптимал ечими $z_{\min} = 12$ сўм 20 тийин.

---

* z қаторидаги номаълумларнинг коэффициентлари манфий ишорали бўлганлиги сабабли, жадвалдаги айрим сонлар топиб ўтирилмади.

Машқ учун мисол ва масалалар

1-мисол.

$$x_1 + 2x_2 \leqslant 8, \qquad z = 4x_1 - 4x_2 + 3$$
$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 10, \qquad (\text{max ва min})$$
$$x_i \geqslant 0 \, (i = 1; 2)$$

2-мисол.

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 - 7 \geqslant 0,$$
$$-3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 8 \geqslant 0,$$
$$-3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4 \geqslant 0, \qquad z = x_1 + x_2 + x_3 - 3.$$
$$-3x + x_3 + 1 \geqslant 0, \qquad (\text{max ва min})$$
$$x_i \geqslant 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

3-мисол.

$$x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 14,$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9,$$
$$2x_1 - 2x_2 + 8x_3 + x_4 = 16,$$
$$x_i \geqslant 0, \; (i = 1, 2, 3, 4).$$
$$z = -5x_1 + 10x_2 - 7x_3 + 3x_4 + 4 \, (\text{max}).$$

1-масала. Инсон ўз соғлиги ва иш қобилиятини йўқотмаслиги учун бир суткада қуйидаги озуқа моддаларини қабул қилиши керак: ёғлар 10 бирлик, оқсил моддалари 12 бирлик, углеводлар 16 бирлик, витаминлар 1 бирлик, сувлар 100 бирлик.

Овқатланиш учун эса A_1, A_2, A_3 озуқалар мавжуд. Бу озуқаларнинг мавжуд бўлган моддалар миқдори жадвалда келтирилган.

50-жадвал

Озуқабоп моддалар	Озуқа турлари			Талаб қилинган нормалар
	A_1	A_2	A_3	
Ёғлар	1	2	3	10
Оқсил моддалар	2	1	2	12
Углеводлар	2	3	1	16
Сув	20	10	30	100
Витаминлар	1	0	0	1
1 кг озуқанинг баҳоси	A_1—2 сўм	A_2—2 сўм	A_3—2 сўм	

Овқатланишни шундай ташкил этиш кераки, организмга керакли миқдордаги озуқа моддалар етарли бўлиб, уларга кетган харажат энг кам бўлсин.

2-масала. Фермада чўчқаларни семиртириш учун ҳар бир чўчқага бериладиган ҳафталик озуқа рациони 6 бирлик ҳазмбоп A модда, 8 бирлик B модда, 12 бирлик ва C модда бўлиши талаб қилинади.

Семиртириш учун озуқанинг уч хил туридан фойдаланиш мумкин. Бир оғирлик бирлигидаги ҳазмбоп моддаларнинг қанча бўлиши қуйидаги жадвалда келтирилган.

51-жадвал

Озуқа турлари	Ҳазмбоп моддалар		
	I	II	III
A	2	1	3
B	1	2	4
C	3	1,5	2

Агар биринчи тур озуқа бирлиги 2 сўм, иккинчи тур озуқа бирлиги 3 сўм ва учинчи тур озуқа бирлиги 2 сўм 50 тийин бўлса, қандай қилиб арзон рацион тузиш мумкинлиги аниқлансин.

3-масала. Агар ҳар бир молга ҳар куни 6 бирликдан кам бўлмаган ҳазмбоп A модда, 12 бирликдан кам бўлмаган B модда ва 4 бирликдан кам бўлмаган C моддалардан иборат рацион тузиб, шу асосда озиқлантирилса, моллар яхши семиради. Агар молларга 2 хил озуқа бериб боқилса, унинг оптималлик даражаси қанча бўлади? Қуйидаги жадвалда 1 кг озуқада неча бирлик ҳазмбоп модда бўлиши кўрсатилган.

52-жадвал

Озуқа турлари	1-озуқа	2-озуқа	Нормал
A	2	1	6
B	2	4	12
C	0	4	4
1 кг озуқанинг баҳоси (тийин ҳисобида)	5	6	—

Ҳар купи қайси озуқадан қанча миқдорда ишлатиш кераклигини, бу билаң кам харажат қилган ҳолда молларга тўйимли озуқа берилиши топилсиң.

4-масала. Ҳар бирининг тирик вазни 30—40 кг бўлган чўчқаларнинг бир суткада 300—400 г семириши учун керак бўлган озуқаңинг энг самарали рационини тузиш талаб қилинади. Бундай ҳолда зоотехника нормасига кўра бир бош чўчқа учун суткасига қуйидагича миқдорда ҳазмбоп моддалар берилиши талаб қилинади:

Озуқа бирлиги — 1,6 кг;
Ҳазмбоп протеин — 200г;
Каротин — 7 мг.

Чўчқаларни семиртириш учун 3 хил озуқа туридан: арпа, ловия, хашак унидан фойдаланилади. Бундай озуқаларнинг 1 килограмида қуйидагича ҳазмбоп моддалар мавжуд:

53- *жадвал*

Ҳазмбоп моддалар	Озуқа турлари		
	Арпа	Ловия	Пичан уни (хашак)
Озуқа бирлиги (кг)	1—21	1,29	0,73
Протеин (г)	81	287	228
Каротин (мг)	1	1	110

1 кг озуқанинг баҳоси: арпа — 3 ти ин,
ловия — 4 тийин,
пичан уни — 5 тийин,

5-масала Ҳар бир соғин сигир, қорамол, чўчқа ва 4 ойликдан 6 ойликкача, 6 ойликдан 8 ойликкача 8 ойликдан 10 ойликкача бўлган ёш моллар учун озуқанинг оптимал рациони тузилсин.

Моллар учун ҳазмбоп моддаларнинг керакли қийматлари ва ҳар хил озуқа учун ҳазмбоп моддаларнинг таркиби, озуқа нормаси справочнигидан олинсин. Хўжаликдаги озуқа таркибининг таннархи қуйидагича:

54- жадвал

Озуқа турлари	Сўм ва тийин (1 ц. га)
Донли экинлар:	
а) жўхори	30 — 50
б) арпа	4 — 00
в) жавдар	3 — 00
Пичан (яйловдан ўрилган)	2 — 00
Пичан (кўп йиллик ўтдан)	2 — 50
Пахол	0 — 50
Жўхори силоси	0 — 10
Озуқабоп лавлаги	3 — 00
Картошка ва бошқалар	3 — 50

1 литр сут берувчи сигирга кунига 300 г ва бир бош чорва молига эса 2 кг гача озуқа берилиши керак. Бошқа озуқаларнинг ҳажми ва таркиби молларнинг хусусиятларига қараб чегараланган.

VI боб. ЧИЗИҚЛИ ПРОГРАММАЛАШНИНГ ИККИ ТАРАФЛАМАЛИ МАСАЛАСИ

1-§. Икки тарафламали жадваллар

Олдинги бобда кўрилган тенгламалар системасини қисқача қуйидагича ёзамиз:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-x_j) \quad (i = 1,2,\ldots,m).$$

Бу системани 1- жадвал кўринишида ифодалаймиз.

1- жадвал

	$-x_1$	$-x_2$	$\ldots$	$-x_s$	$\ldots$	$-x_n$
$y_1 =$	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1s}	$\ldots$	a_{1n}
$y_2 =$	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2s}	$\ldots$	a_{2n}
$\vdots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$y_r =$	a_{r1}	a_{r2}	$\ldots$	a_{rs}	$\ldots$	a_{rn}
$\vdots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$y_m =$	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{ms}	$\ldots$	a_{mn}

2- жадвал

	$-x_1$	$-x_2$	— … —	y_r	— … —	x_n
$y_1 =$	b_{11}	b_{12}	…	$-\frac{a_{1s}}{a_{rs}}$	…	b_{1n}
$y_2 =$	b_{21}	b_{22}	…	$-\frac{a_{1s}}{a_{rs}}$	…	b_{2n}
⋮	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$x_s =$	$\frac{a_{r1}}{a_{rs}}$	$\frac{a_{r2}}{a_{rs}}$	…	$\frac{1}{a_{rs}}$	…	$\frac{a_{rn}}{a_{rs}}$
⋮	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$y_m =$	b_{m1}	b_{m2}	…	$\frac{a_{ms}}{a_{rs}}$	…	b_{mn}

Агар $||A_{ij}||$ системанинг матрицаси бўлса, (y_r ва x_s) эркли ва эрксиз ўзгарувчиларга нисбатан Жорданнинг модификацияланган чиқариш методини қўллаб, 2- жадвалга эга бўламиз.

Энди ушбу функция берилган бўлсин:

$$v_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot v_i \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Бу функцияда v_j ларни жадвалнинг юқори қисмига, u_i ларни жадвалнинг чап бош устунига ёзиб, 3- жадвални ҳосил қиламиз:

3- жадвал

	v_1	v_2	…	v_s	…	v_n
u_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1s}	…	a_{1n}
u_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2s}	…	a_{2n}
⋮	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
u_r	a_{r1}	a_{r2}	…	a_{rs}		a_{rn}
⋮	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
u_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{ms}		a_{mn}

3- жадвалдан u_r ва v_s ўзгарувчиларга нисбатан Жорданнинг оддий чиқариш усулини қўллаб, янги 4- жадвалга эга бўламиз:

4- жадвал

	v_1	v_2	$\ldots$	u_r	$\ldots$	v_n
$u_1 =$	b_{11}	b_{12}	$\ldots$	$\dfrac{a_{1s}}{a_{rs}}$	$\ldots$	b_{1n}
$\vdots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
v_s	$-\dfrac{a_{r1}}{a_{rs}}$	$-\dfrac{a_{r2}}{a_{rs}}$	$\ldots$	$\dfrac{1}{a_{rs}}$	$\ldots$	$-\dfrac{a_{rn}}{a_{rs}}$
$\vdots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
u_m	b_{m1}	b_{m2}	$\ldots$	$\dfrac{a_{ms}}{a_{rs}}$	$\ldots$	b_{mn}

1- ва 3- жадваллар бир- биридан фақат чап устун ва юқори қатор номаълумлари билан фарқланади. Шунинг учун ҳам бу жадвалларни **икки тарафламали жадваллар** деб юритилади. (1) ва (3) жадвалларни битта жадвал кўринишида ёзсак, 5- жадвал ҳосил бўлади:

5- жадвал

	v_1 $-x_1$	v_2 $-x_2$	$\ldots$ $\ldots$	v_s $-x_s$	$\ldots$ $\ldots$	v_n $-x_n$
$u_1 = y_1 =$	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1s}	$\ldots$	a_{1n}
$u_2 = y_2 =$	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2s}	$\ldots$	a_{2n}
$\vdots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$u_r = y_r =$	a_{r1}	a_{r2}	$\ldots$	a_{rs}	$\ldots$	a_{rn}
$\vdots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$u_m = y_m =$	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{ms}	$\ldots$	a_{mn}

5- жадвалдан бир вақтнинг ўзида, мавжуд алмаштиришларни қўллаб, керак бўлган жадвалларни ҳосил қиламиз. Бу жадвалларда қайси устун ва қайси қатор алмаштирилган бўлса, шу устун ва қаторлардаги номаълумлар бир вақтнинг ўзида алмаштирилади.

2- §. Икки тарафламали симплекс метод

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \tag{1}$$

мақсад функциясининг максимум қиймати

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n \leqslant a_i, \; (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{2}$$

шартларда топилсин ва номаълумларнинг манфий бўлмаслик шарти

$$x_1 \geqslant 0\,, \; x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0 \tag{3}$$

бўлганда (1) функцияга икки тарафламали бўлган функция

$$w = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_m u_m \qquad (1')$$

нинг минимум қиймати қуйидаги шартларда топилсин:

$$\begin{aligned} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m &> c_1, \\ a_{12}u_2 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{m2}u_m &> c_2, \qquad (2') \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{mn}u_m &\geqslant c_n; \\ u_1 \geqslant 0,\ u_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ u_m &\geqslant 0. \qquad (3) \end{aligned}$$

Бу ерда Z тўғри функция, w эса икки тарафламали функция деб юритилади Энди тўғри функциядан икки тарафламали функцияга ўтишда қандай қоидаларга амал қилиш керак эканлигини қараб чиқамиз:

1. Тўғри функциядаги чегаравий шартларнинг озод ҳад $a_1, a_2, \ldots, a_m$ лари икки тарафламали функциядаги номаълумларнинг коэффициентлари бўлиб хизмат қилади. Аксинча, икки тарафламали функциядаги $c_1, c_2, \ldots, c_n$ лар эса тўғри функциядаги номаълумларнинг коэффицентлари бўлиб хизмат қилади.

2. Тўғри функциянинг матрицаси (A) бўлса, икки тарафламали функциянинг матрицаси (A^*) A матрицанинг транспонирлангани бўлади.

3. Тўғри функциядаги чегаравий шартларнинг тенгсизлик белгилари ($\leqslant$) кичик ёки тенг кўринишда бўлса, икки тарафламали функциядаги чегаравий шартларнинг тенгсизлик белгилари унга қарама-қарши ($\geqslant$) катта ёки тенг шаклида бўлади.

4. Тўғри функциянинг максимум қиймати икки тарафламали функциянинг минимум қийматига тенг, яъни $z_{max} = w_{min}$ бўлади. Бу хулосалардан кейин тўғри ва икки тарафламали функцияларни битта жадвалга бундай жойлаштирамиз. Бунинг учун тўғри функциядаги чегаравий шартларни қуйидагича ёзамиз:

$$\begin{aligned} y_1 &= -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n + a_1 \geqslant 0 \\ y_2 &= -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \ldots - a_{2n}x_n + a_2 > 0, \qquad (4) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m &= -a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \ldots - a_{mn}x_n + a_m \geqslant 0 \end{aligned}$$

Икки тарафламали функциядаги чегаравий шартларни эса бундай ёзамиз:

$$
\begin{aligned}
&v_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{m1}u_m - c_1 \geqslant 0,\\
&v_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{m2}u_m - c_2 \geqslant 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&v_n = a_{1m}u_1 + a_{2m}u_2 + \dots + a_{mn}u_m - c_n \geqslant 0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Ҳосил бўлган бу системаларни 6- жадвалга жойлаштирамиз.

6- жадвал

Икки тарафламали функция	Тўғри функция	v_1	v_2	...	...	v_n	w
		$-x_1$	$-x_2$	...	...	$-x_n$	1
$u_1 =$	$y_1 =$	a_{11}	a_{12}	...	...	a_{1n}	a_1
$u_2 =$	$y_2 =$	a_{21}	a_{22}	...	...	a_{2n}	a_2
.	.						
.	.	.	.	.	.	.	
.	.						
$u_m =$	$y_m =$	a_{m1}	a_{m2}	...	...	a_{mn}	a_m
$1 =$	$z =$	$-c_1$	$-c_2$	...	...	$-c_n$	

6- жадвалдан тўғри функциянинг максимум ва икки тарафламали функциянинг минимум қийматлари бир вақтда Жорданнинг модификацияланган чиқариш методи ёрдамида топилади.

Агар аралаш системалар берилган бўлса, у вақтда аралаш системалар учун симплекс методини қўллаб, максимум ёки минимум қийматларни, шунингдек, тўғри ва икки тарафламали масалаларни чизиқли программалашнинг юқорида кўрсатиб ўтилган қоидаларига амал қилган ҳолда топиш мумкин.

Қуйидаги мисолни кўриб чиқайлик. Тўғри масаладаги функциянинг максимум қиймати:

$$z = 10x_1 - x_2 - 9x_3 - 8x_4 \tag{1}$$

$$
\begin{cases}
2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 + 2 = 0,\\
5x_1 - 2x_2 - 3x_4 + 5 = 0
\end{cases}
\tag{2}
$$

ёки

$$y_1 = -7x_1 + 4x_2 - x_3 - 4x_4 + 1 \geqslant 0,$$
$$y_2 = -3x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 6x_4 + 10 \geqslant 0,$$
$$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0; \quad x_3 \geqslant 0; \quad x_4 \geqslant 0 \qquad (3)$$

шартларида топилсин.

Одатдагидек икки тарафламали масаладаги функцияси

$$w = 2u_1 + 5u_2 + u_3 + 10u_4 \qquad (1')$$

кўринишда бўлиб, унинг минимум қиймати

$$\left| \begin{array}{l} v_1 = -2u_1 - 5u_2 + 7u_3 + 3u_4 - 10 \geqslant 0, \\ v_2 = u_1 + 2u_2 + 4u_3 + 2u_4 + 1 \geqslant 0, \\ v_3 = 3u_1 + u_3 + 5u_4 + 9 \geqslant 0, \\ v_4 = u_1 + 3u_2 + 4u_3 + 6u_4 + 8 \geqslant 0 \end{array} \right. \qquad (2')$$

$$u_1 \geqslant 0, \; u_2 \geqslant 0, \; \ldots, \; u_4 \geqslant 0. \qquad (3')$$

шартларда топилиши керак.

Булардан 7-жадвални тузиб, Жордан-Гаусс алмаштиришларининг 2-методини қўллаб, ноль қатнашган биринчи ва иккинчи қаторларни йўқотамиз.

7-жадвал

Икки тарафламали функция	Тўғри ф-я	v_1	v_2	v_3	v_4	w
		$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	1
$u_1 =$	$0 =$	−2	1	3	1	2
$u_2 =$	$0 =$	−5	2	0	3	5
$u_3 =$	$y_1 =$	7	−4	1	4	1
$u_4 =$	$y_2 =$	3	2	5	6	10
$1 =$	$z =$	−10	1	9	8	0

↑

8-жадвал

Икки тарафламали функция	Тўғри ф-я	v_1	u_1	v_3	v_4	w
		$-x_1$	0	$-x_3$	$-x_4$	1
$v_2 =$	$x_2 =$	−2	1	3	1	2
$u_2 =$	$0 =$	−1	−2	−6	1	1
$u_3 =$	$y_1 =$	−1	4	13	8	9
$u_4 =$	$y_2 =$	7	−2	−2	4	6
$1 =$	$z =$	−8	−1	6	7	−2

↑

Бу ерда Жорданнинг модификацияланган методини қўллаб ҳар бир алмаштиришда юқорига кўтарилган ноль устун ташлаб кетилади ва қолганлари ёзиб олинади.

9-жадвал

Икки тарафламали функция	Тўғри ф-я	v_1	v_3	u_2	w
		$-x_1$	$-x_3$	0	1
$v_2=$	$x_2=$	-1	9	-1	1
$v_4=$	$x_4=$	-1	-6	1	1
$u_3=$	$y_1=$	$\boxed{7}$	61	-8	1
$u_4=$	$y_2=$	11	23	-4	2
$1=$	$z=$	-1	48	-7	-9

↑

10-жадвал

Икки тарафламали функция	Тўғри ф-я	u_3	v_3	w
		$-y_1$	$-x_3$	1
$v_2=$	$x_2=$	$\frac{1}{7}$	*	$\frac{8}{7}$
$v_4=$	$x_4=$	$\frac{1}{7}$	*	$\frac{8}{7}$
$v_1=$	$x_1=$	1	$\frac{61}{7}$	$\frac{1}{7}$
$u_4=$	$y_2=$	$-\frac{11}{7}$	*	$\frac{3}{7}$
1	z	$\frac{1}{7}$	$\frac{397}{7}$	$\frac{62}{7}$

9- жадвалда ноль қатнашган қатор қолмади, аммо биз масаланинг оптимал ечимига келмадик, чунки охирги қаторда манфий ишорали сон (—1) сақланиб қолди, шу қаторда (—7) сони ҳам мавжуд, бу эса юқоридаги қоида бўйича ўчирилиб кетади.

Энди симплекс методи қоидалари орқали мақсад функциясининг оптимал ечимини излаймиз ва натижада 10- жадвалга келамиз. Бу жадвалдаги охирги қаторда манфий ишорали сони қолмади, натижада масаланинг оптимал ечимига келдик. Бу жадвалдан номаълумларнинг қийматларини ёзиб оламиз. $x_1=\frac{1}{7}$; $x_2=\frac{8}{7}$; $x_3=0$; $x_4=\frac{8}{7}$ бўлганда $z_{max}=\frac{62}{7}$ бўлади. $u_1=0$; $u_2==0$; $u_3=\frac{1}{7}$; $u_4=0$ бўлганда $w_{min}=\frac{62}{7}$ бўлади.

Демак, бу мисолни ечиш билан биз қуйидаги хулосага келамиз. Агар қуйилган тўғри функциянинг максимум қийматини топиш талаб этилса, унга икки тарафламали бўлган функциянинг минимум қийматини топишга тўғри келади ёки аксинча.

* 10-жадвалдаги қаторда z номаълумларнинг коэффициентлари мусбат бўлганлиги сабабли жадвалда айрим сонларни ҳисобламадик.

Машқ учун мисоллар

1) $z = -6x_1 - 2x_2$ функциянинг максимум қийматини

$$x_1 - 2x_2 \leqslant 2,$$
$$2x_1 + x_2 \leqslant 1,$$
$$x_1 + x_2 \leqslant 4$$
$$x_i \geqslant 0 \ (i = 1, 2)$$

шартларда топинг.

Икки тарафлама $w = 2u_1 + u_2 + 4u_3$ функциянинг минимум қийматини қуйидаги

$$u_1 - 2u_2 + u_3 \geqslant 0,$$
$$2u_1 + u_2 + u_3 \geqslant -2,$$
$$u_i > 0 \ (i = 1, 2, 3)$$

шартларда топинг.

2) $z = x_1 + x_1 + x_3$ функциянинг минимум қийматини

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \geqslant 7,$$
$$-3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geqslant 8,$$
$$-3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geqslant -4,$$
$$x_2 - x_3 \geqslant -1,$$
$$x_j > 0 \ (j = 1, 2, 3)$$

шартларда топинг.

$w = 7u_1 - 8u_2 - 4u_3$ икки тарафлама функциянинг максимум қийматини

$$2u_1 - 3u_2 - 3u_3 \leqslant 1,$$
$$2u_1 - 3u_2 + 3u_3 - u_4 \leqslant 1,$$
$$u_1 - 2u_2 + 2u_3 + u_4 < 1,$$
$$u_i \geqslant 0 \ (i = 1, 2, 3, 4)$$

шартларда топинг.

3) $z = 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4$ функциянинг максимум қийматини

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 < 7,$$
$$3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leqslant 2,$$
$$2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 < 0,$$
$$x_i \geqslant 0 \ (i = 1, 2, 3, 4)$$

шартларда топинг.

$w = 7u_1 + 2u_2 + 0u_3$ икки ёқламали функциянинг минимум қийматини

$$\begin{gathered} u_1 + 3u_2 + 2u_3 \geqslant 3, \\ 4u_1 - 2u_2 + u_3 \geqslant 2, \\ 2u_1 + u_2 - 3u_3 \geqslant -1, \\ 3u_1 + 2u_2 + u_3 \geqslant 1, \\ u_i \geqslant 0 \ (i = 1,\ 2,\ 3) \end{gathered}$$

шартларда топинг.

Энди қуйидаги тўғри функциялар берилган бўлсин. Унга икки тарафламали функцияни тузинг ва саволларга жавоб беринг:

4) $z = 4x_1 - x_2$(1) нинг максимум қиймати

$$\left|\begin{array}{l} x_2 \geqslant 2, \\ -x_1 - x_2 \geqslant -1, \\ -x_1 - x_2 \geqslant -1, \\ -x_1 \geqslant -4, \end{array}\right.$$
$$x_1 \geqslant 0; \quad x_i \geqslant 0 \qquad (3)$$

шартларда топилсин.

5) $z = x_1 + x_2 + x_3$ нинг минимум қиймати

$$\begin{gathered} x_1 - x_4 - 2x_6 = 5, \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3, \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5, \\ x_i \geqslant 0 \quad (i = \overline{1,6}). \end{gathered}$$

шартларда топилсин.

6) $z = 5x_1 - x_2 + x_3 - 10x_4 + 7x_5$ нинг максимум қиймати

$$\begin{gathered} 3x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 7. \\ x_i \geqslant 0 \quad (i = \overline{1,5}) \end{gathered}$$

шартларда топилсин.

V боб. ЧИЗИҚЛИ ПРОГРАММАЛАШНИНГ ТРАНСПОРТ МАСАЛАСИ

1-§. Транспорт масаласи ҳақида умумий тушунчалар

Хўжаликлараро ишлаб чиқаришнинг ўсиши, маҳнатни тежашда ва жамоат ишлаб чиқаришини самарали бошқаришда планлаштириш асосий омиллардан бири бўлиб ҳисобланади. Қишлоқ хўжалигини самарали ташкил этиш мураккаб, кўп қиррали, ўзаро бир-бири билан боғлиқ бўлган соҳа бўлиб, ер майдонларидан, машина-трактор паркидан, ишчи кучларидан, мавжуд буюмлардан ва ҳар хил материаллардан фойдаланишнинг оптимал вариантини топишни талаб этади.

Қишлоқ хўжалик ходимлари олдидаги энг мураккаб проблемалардан бири ишчи кучидан оптимал фойдаланишдир. Бу эса биринчи навбатда қишлоқ хўжалигида машина-трактор парки структурасидан оптимал фойдаланишни талаб этади.

Хўжаликда мавжуд бўлган машина-трактор паркидан фойдаланиш масаласини қараб чиқайлик. Бунда ҳар бир трактор агрегати билан бажарилган меҳнат сарфи бошқа трактор агрегати билан бажарилган меҳнат сарфидек бўлиб туюлади. Умуман олганда у бундай эмас. Айтайликки, ишлаб чиқаришда бешта кетма-кет процессни икки хил усул билан бажариш талаб этилсин. У вақтда қандайдир бир чегаравий шартларни эътиборга олмаганда $2^5=32$ вариантли ишни бажаришга тўғри келади. Агар бу процесс 10 та бўлса, у вақтда мумкин бўлган вариантлар сони $2^{10}=1024$ ни ташкил қилади ва ҳоказо. Мақсад шундан иборатки, машина-трактор пракидан фойдаланишни шундай ташкил қилиш кераккки, натижада ҳамма бажариладиган ишларга кетадиган харажат энг кам бўлсин. Бу эса ўз навбатида энг катта стажга эга бўлган мутахассисдан ҳам, ҳар хил маркадаги тракторлардан ҳам бир даврда ҳар хил ишларни ўз вақтида кўрсатилган ҳажмда бажаришни самарали ташкил қилиш анча қийинчилик туғдиради. Шунинг учун ҳам машина-трактор паркидан рационал фойдаланишни ташкил қилишда, бир-бирига боғлиқ бўлган мураккаб системаларни ҳал қилиш талаб этилади. Биз бу ерда машина-трактор парки билан боғлиқ бўлган энг содда масалани ечишни, математик формада ёзиш методикаси орқали текшириб чиқамиз.

2-§. Транспорт масаласининг қўйилиши ва унинг модели

Транспорт масаласи ҳар хил ҳоларда қўйилиши мумкин. Айтайлик, m та $A_1, A_2, \ldots, A_m$ жўнатиш пунктида мос равишда $a_1, a_2, \ldots, a_m$ миқдордаги бир хил юклар мавжуд бўлсин. Шу юкларни n та $B_1, B_2, \ldots, B_n$ та қабул қилиш пунктларига мос равишда $b_1, b_2, \ldots, b_n$ миқдорда тақсимлаш зарур. Агар бир i пунктдан j- пунктга жўнатилаётган юкларнинг миқдорини x_{ij} ва шу ташилаётган юкларга сарфланган харажатлар қимматини c_{ij} билан белгиласак, у вақтда

$$z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \qquad (1)$$

функциянинг максимум ёки минимум қийматларига қуйидаги шартларда эришилсин:

1.
$$\begin{aligned} x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}&=a_1,\\ x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}&=a_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\ x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}&=a_m \end{aligned}$$

Бу ерда жўнатиш пунктларидаги тақсимланаётган юклар, умумий юк запаслари ($a_1, a_2, \ldots a_m$) га тенг бўлиши керак.

2.
$$\begin{aligned} x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{m1}&=b_1,\\ x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{m2}&=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\ x_{1n}+x_{2n}+\ldots+x_{mn}&=b_n, \end{aligned}$$

Шу тақсимланаётган юклар талаб қилинадиган $b_1, b_2, \ldots, b_n$ юк миқдорларига тенг бўлиши керак.

3. $x_{ij}\geqslant 0$ ($i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots n$) номаълумларнинг манфий бўлмаслик шарти.

Бу келтирилган ҳамма маълумотларни қуйидаги жадвал кўринишида ёзамиз. (1- жадвал.) 1 - жадвал бундай тўлдирилади: чап бош устунига жўнатиш пунктлари ($A_1, A_2, \ldots, A_m$), юқориги қаторига қабул қилиш пунктлари $B_1, B_2, \ldots, B_n$), охирги устунга умумий юк запаслари ($a_1, a_2, \ldots, a_m$), пастки қаторга юкка бўлган талаблар ($b_1, b_2, \ldots, b_n$) ёзилади. Жадвал ичидаги катакчаларга эса, жўнатилаётган юк миқдорлари билан уларни ўтказишга кетган харажатларни, яъни тарифлар ёзилади. Жадвалдаги катакчаларнинг ҳар бирининг юқориги ўнг бурчагига тариф (c_{ij}) лар, пастки чап бурчагига эса ўтказилаётган юк миқдор (x_{ij}) лари ёзилади.

1-*жадвал*

Жўнатиш пунктлари	Қабул қилиш пунктлари				Юк запаси
	B_1	B_2	. .	B_n	
A_1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	. . .	x_{1n} c_{1n}	a_1
A_2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	. . .	x_{2n} c_{2n}	a_2
	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
A_m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	. . .	x_{mn} c_{mn}	a_m
Юкка бўлган талаб	b_1	b_2	. . .	b_n	

Агар умумий юк запаслари

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

қабул қилиш нуқталаридаги юк запасларига тенг бўлса:

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = \sum_{j=1}^{n} b_j \text{ёки} \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

бўлса, у вақтда бундай кўринишдаги масала *ёпиқ*

	v_j	$v_1 = 50$	$v_2 = 31$	$v_3 = 30$	$v_4 = 26$	
u_i	Экин турлари	Ҳар бир участкага гектаридан олинадиган ҳосил (ц. ҳисобида)				Экиладиган майдонлар (гектар ҳисобида)
		1	2	3	4	
$u_1 = 0$	Маккажўхори (дон учун)	− 50 1800	+ 40	20	15	1000
$u_2 = 19$	Буғдой	20	− 12 1800	11 3500	+ 7 700	6000
$u_3 = 16$	Арпа	22	15 1200	10	9	1200
$u_4 = 22$	Тариқ	28 1000 +	10	6	4 800 −	1800
Участкалар майдони (гектар ҳисобида)		2000	3000	3500	1500	10000

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1000,\\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 6000,\\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 1200,\\
x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 1600,\\
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 2000,\\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 3000,\\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 3500,\\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 1500
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

шартларда ва шу номаълумларнинг манфий бўлмаслик шартлари

$$x_{ij} > 0 \ (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4;\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \qquad (2)$$

бўлганда,

$$
\begin{aligned}
z = 50x_{11} + 40x_{12} + 20x_{13} + 15x_{14} + 20x_{21} + 12x_{22} + \\
+ 11x_{23} + 7x_{24} + 22x_{31} + 15x_{32} + 10x_{33} + 9x_{34} + \\
+ 28x_{41} + 10x_{42} + 6x_{43} + 4x_{44}
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

мақсад функциясининг максимум қиймати топилсин.

Бу масалани потенциал методи ёрдамида ечиш учун 3-жадвалда участкалар бўйича экиладиган экин майдонларини энг катта ҳосилдорлик бўйича тақсимлаб чиқамиз. Бунинг учун потенциал методи қоидаларига амал қилиш керак.

Масала шартида энг катта тариф 50 (центнер) дир. Шунинг учун шу катта ҳосилдорликдан бошлаб масалани бошланғич (таянч) планини тузамиз. Тузилган таянч план бўйича цикл кўрсаткичларини ҳисоблаймиз. Ҳисоблаш натижалари бўйича мақсад функцияси қиймати қуйидагига тенг бўлади:

$$z_{max} = 1000 \cdot 50 + 1800 \cdot 12 + 350 \cdot 11 + 700 \cdot 7 + 1200 \cdot 5 + 1000 \cdot 28 + 800 \cdot 4 = 50000 + 21000 + 38000 + 4900 + 6000 + 28000 + 3200 = 164200 \text{ (ц)},$$

$$z_{max} = 164200 \text{ (ц)}.$$

Бу масаланинг оптимал ечимини топишда ҳам тўлдирилган катаклар сони учун илгари кўриб ўтилган ($k = m + n - 1$) шарт бажарилиши (масала кўрсаткичлари бўйича $m + n - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$), яъни тўлдирилган катаклар сони 7 та бўлиши керак. Кўриб ўтганимиздек, бу шарт бажарилмаса, зарур бўлган катакларга сунъий равишда ноль юк миқдорини қўшиб (масала шартини бажариш учун тенглаштирамиз) жадвалдаги миқдорга кўпайтирамиз. Бу эса потенциаллар қийматини топишга имконият яратади. Схема жадвал бўйича топилган функциянинг ($z_{max} = 164200$ центнер) экинлар бўйича ҳосилдорлик кўрсаткичи ҳақиқатан ҳам максимум ҳосилдорлик эканлигига ишонч ҳосил қилиш учун топилган ечимни текширамиз. Бунинг учун функциянинг эркин ўзгарувчилари ҳисобланган потенциал бирлик v_j ва u_i ларни қуйидаги икки ҳол бўйича бажарилишини текшириш лозим.

1. $v_j - u_i = c_{ij}$ (тўлдирилган катаклар учун).
2. $v_j - u_i \geqslant c_{ij}$ (тўлдирилмаган катаклар учун).

Биринчи шартнинг бажарилиши потенциал миқдорларни аниқлашда фойдаланилади. Бу шартнинг бажарилишини текшириш учун u_i га 0; 1; 10; 100 ва ҳоказо қийматлардан бирини қўямиз.

Шунга асосланиб қолган потенциалларни топишимиз мумкин. Потенциалларни тўлдирилган катаклар учун топамиз, тўлдирилмаган катаклар учун эса иккинчи шартнинг бажарилишини текширамиз.

Оптимал ечимни топиш учун масаланинг шартига кўра мавжуд потенциалларни ҳисоблаб кўрамиз. Бунинг учун u_1 га ноль (0) қийматни қўйиб, $u_1=0$ деб қабул қиламиз. Қолган қийматларни эса шунга асосланиб қуйидагича топамиз.

Горизонтал қаторлардаги тўлдирилган катакчадаги нархга ноль қўйиб уни жадвалнинг юқори қисмига ёзамиз. Ҳосил бўлган потенциал миқдоридан тўлдирилган вертикал катакчалардаги турган ҳосилдорликни айириб жадвалнинг чап томонига ёзамиз. Тўлдирилган катакларда иккинчи шартнинг бажарилишини қуйидагича текширамиз:

$$
\begin{aligned}
v_2 - u_1 &= 32 - 0 = 31 < 40,\\
v_3 - u_1 &= 30 - 0 = 30 > 20,\\
v_4 - u_1 &= 26 - 0 = 26 > 15,\\
v_1 - u_1 &= 50 - 19 = 31 > 20,\\
v_1 - u_3 &= 50 - 16 = 34 > 22.\\
v_3 - u_3 &= 30 - 16 = 14 > 10,\\
v_4 - u_3 &= 26 - 16 = 10 > 9,\\
v_2 - u_4 &= 31 - 22 = 9 < 10,\\
v_3 - u_4 &= 30 - 22 = 8 > 6.
\end{aligned}
$$

Бу потенциалларни $v_j - u_i = c_{ij}$ формула ёрдамида топамиз: $v_1 - u_1 = 50$, бу ерда $v_1 - 0 = 50$. Худди шунингдек, $v_1 - u_4 = 28$ ёки $50 - u_4 = 28$ дан u_4 ни топамиз.

$$u_4 = 50 - 28 = 22. \quad u_4 = 22.$$

Худди шу йўл билан қолган потенциалларни ҳам топамиз:

$$v_4 = 26;\ u_2 = 19;\ v_2 = 31;\ v_3 = 30;\ u_3 = 16.$$

Потенциаллар жадвалдаги катакчаларнинг $A_{1,2}$ ва $A_{2,4}$ ларида бузилади. Шунинг учун планни яна яхшилаш вариантини тузишга киришамиз, бу иш эса юқорида бажарилган усул ёрдамида бажарилади.

4- жадвал

Экин турлари	Ҳар бир участкадан олинадиган ҳосил (ц ҳисобида)				Экиладиган майдонлар (га ҳисобида)
	1	2	3	4	
Маккажўхори (дон учун)	50 200	40 800	20	15	1000
Буғдой	20	12 1000	11 3500	7 1500	6000

Экин турлари	Ҳар бир участкадан олинадиган ҳосил (ц ҳисобида)				Экиладиган майдонлар (га ҳисобида)
	1	2	3	4	
Арпа	22	15 1200	10	9	1200
Тариқ	28 1800	10	6	4	1800
Участкалар майдони, (га ҳисобида)	2000	3000	3500	1500	10000

4-жадвал кўрсаткичлари бўйича мақсад функцияси қиймати қуйидагича бўлади:

$$z_{max} = 200 \cdot 50 + 800 \cdot 40 + 1500 \cdot 7 + 1200 \cdot 15 + 1800 \cdot \cdot 28 = 10000 + 3200 + 12000 + 38500 + 10500 + 18000 + + 50400 = 171400 \text{ ц}$$

$$z_{max} = 171400 \text{ ц.}$$

Бу масаланинг оптимал ечимига эришгунча бир неча жадвални тўлдиришга тўғри келади, лекин потенциал методда ҳар бир итерация бир-биридан фарқ қилмаганлиги учун улар ташлаб кетилди ва охирги жадвални 4-жадвал деб олинди.

Бунда шундай хулосага келамиз:

1. Маккажухори экиш учун 1 участкадан 200 га, 2-участкадан 800 га;
2. Бугдой учун 2-участкадан 1000 гектар, 3-участкадан 3500 гектар, 4-участкадан 1500 гектар;
3. Арпа учун 2-участкадан 1200 гектар;
4. Тариқ учун 1-участкадан 1800 гектар майдон ажратилган.

Шунинг учун масаланинг оптимал ечими $z_{max} = 171200$ ц га тўғри келар экан.

2-масала. Колхознинг учта чорвачилик фермасига 3500 тонна пичан келтириш лозим.

Бу пичан бешта участкада: биринчи участкада $A_1 = 900$ т; иккинчи участкада $A_2 = 650$ т; учинчи участкада $A_3 = 800$ т; тўртинчи участкада $A_4 = 500$ т ва бешинчи участкада $A_5 = 650$ т пичан тайёрланади.

Шу пичанни учта чорвачилик фермасига ташиш керак. Фермаларнинг пичанга бўлган талаби: $B_1 = 1350$ т;

$B_2 = 1200$ т; $B_3 = 950$ т. Дастлабки маълумотлар кўрсаткичи жадвалда берилган.

5-жадвал

Пичан тайёрланган участкалар	Участкалар билан фермалар орасидаги масофалар (км)			Участкаларда тайёрланган пичан миқдори
	B_1	B_2	B_3	
A_1	3	5	2	900
A_2	4	2	5	650
A_3	2	7	8	800
A_4	1	4	1	500
A_5	3	6	3	650
Фермаларга келтирилиши зарур бўлган пичан миқдори хашак (т)	1350	1200	950	3500

Колхоз участкаларда тайёрланган пичанни фермаларга ташишни шундай ташкил қилиши керакки, уларга сарфланадиган тонна-километрлар энг кам бўлсин.

Ташилиши керак бўлган пичан миқдорини x_{ij} билан белгилайлик: ($i = \overline{1,5}$; $j = \overline{1,3}$). Юқоридаги жадвал маълумотлари асосида масаланинг математик моделини тузамиз.

$$\begin{gathered}
x_{11} + x_{12} + x_{13} = 900, \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} = 650, \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} = 800, \\
x_{41} + x_{42} + x_{43} = 500, \\
x_{51} + x_{52} + x_{53} = 650, \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1350, \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1200, \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 950.
\end{gathered}$$

Бу тенгламалар системасининг шундай ечимини топиш кераккки, натижада

$$z = 3x_{11} + 5x_{12} + 2x_{13} + 4x_{21} + 2x_{22} + 5x_{23} + 2x_{31} + \\ + 7x_{32} + 8x_{33} + x_{41} + 4x_{42} + x_{43} + 3x_{51} + 6x_{52} + 3x_{53}$$

мақсад функцияси минимум қийматга эга бўлсин.

6-жадвал катакчалари икки бўлакка бўлинади, унинг юқориги ўнг бурчагига ферма билан участка орасидаги масофалар (км), пастки чап бурчагига эса ташиб келтирилган пичан миқдори ёзилади. Бунда масофа (км) c_{ij} билан, пичан миқдори эса x_{ij} билан белгиланади.

Шу транспорт масаласининг ечимини потенциал методи билан топайлик.

6-жадвал

	u_i \ v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 5$	$v_3 = 2$	
	Участкалар	Фермалар B_1	B_2	B_3	Участкалардаги пичан запаси
$u_1 = 0$	A_1	3	5	900 / 2	900
$u_2 = 3$	A_2	4	650 / 2	5	650
$u_3 = 0$	A_3	800 / 2	7	8	800
$u_4 = 1$	A_4	500 / 1	4	1	500
$u_5 = -1$	A_5	50 / 3	550 / 6	50 / 3	650
Фермалар учун талаб қилинган пичан миқдори		1350	1200	950	3500

Дастлабки план берилган бўлсин (6-жадвал).

Масалани ечиш учун тўлдирилган катакдаги тонналарни км га кўпайтириб уларнинг йиғиндисини топамиз:

$$z_{\min} = 900 \cdot 2 + 650 \cdot 2 + 800 \cdot 2 + 500 \cdot 1 + 50 \cdot 3 + $$
$$+ 550 \cdot 6 + 50 \cdot 3 = 1800 + 1300 + 1600 + 500 + 150 +$$
$$+ 3300 + 150 = 8800 \text{ т/км};$$
$$z_{\min} = 8800 \text{ т/км}.$$

Транспорт масаласини ечишда ҳамма тўлдирилган катаклар учун $k = m + n - 1$ шарти бажарилиши керак. Берилган масалада $m = 5$ ва $n = 3$ бўлиб, $m + n - 1 = 5 + 3 - 1 = 7$ бўлади.

Демак, масала ечишда тўлдирилган катаклар сони 7 та бўлиши керак. Агар тўлдирилган катаклар учун ($k = m + n - 1$) шарт бажарилмаса, у ҳолда етишмаган катакчага ноль тоннани қўшамиз. Бу эса потенциалларни топишга имконият яратиб беради.

Тузилган масала ечимини схема-жадвалнинг кўрсаткичлари мақсад функцияси $z_{min} = 8800$ т/км эканини кўрсатади. Бу ечим оптимал ёки оптимал эмаслигини текшириб кўриш зарур. Буни потенциал методи ёрдамида аниқлаймиз. Участкалар (u_i) ва фермалар (v_j) потенциаллари учун:

1. Юк тақсимланган катакчалар учун

$$v_j - u_i = c_{ij};$$

2. Тақсимланмаган катакчалар учун эса

$$v_j - u_i \leqslant c_{ij}$$

шартларнинг бажарилишини текширамиз. Бу ерда u_i қатор потенциалини v_j устун потенциали ўрнига ихтиёрий мусбат бутун сон (масалан, 0; 1; 10 ва ҳ. к.) ни қуйиб, қолган потенциалларни топамиз. Қулайлик учун $u_1 = 0$ деб олайлик. Қолган потенциаллар эса қуйидагича топилади. Горизантал қатордаги тўлдирилган катаклардаги тарифларга u_1 нинг қиймати қўшилиб жадвалнинг қайси устунида турган бўлса, унинг тепасига ёзилади. Вертикал катакчаларда турган тарифлар эса топилган потенциалдан айрилиб жадвалнинг чап томонига ёзилади.

Тўлдирилмаган катакчаларда масаланинг оптимал ечимини текширишда $v_j - u_i \leqslant c_{ij}$ шартни бажарилишига аҳамият берилади. Агар бу шарт бажарилмаса, тузилган план оптимал эмас ва тақсимлаш давом эттирилади.

Юк тақсимлашни шундай ташкил этиш керакки, бунда тақсимлаш ёпиқ занжир кўринишида бўлиши керак. Бунда занжирнинг қолган катакчаларининг ҳаммаси тўлдирилган, юк тақсимланган бўлиши керак. Занжир тузиш бошланган катакча бурчагида плюс (+) ишорасини, қолган катакчаларга эса унга қарама-қарши бўлган минус (—) ишорасини қолганларига эса алмашиб келувчи плюс (+), минус (—), плюс (+) ва ҳоказо каби ишораларни қуйиб чиқамиз, чунки оптимал ечимни топиш учун тузилган янги пландан ёпиқ занжирдаги манфий катакдаги юклар орасидаги энг кичигини олиб, унинг миқдорини узгартирмасдан мусбат катаклардаги юкларга қушамиз. Топилган йиғиндини манфий катакдаги юклар миқдоридан айириб, изланган планнинг ёки ечимнинг янгича вариантига эга бўламиз. Бу жараён оптимал ечимга эга булгунча давом эттирилади. Қурилаётган мисолда тулдирилмаган катаклар учун 5-жадвал курсаткичларини, иккинчи (шартини) потенциаллар айирмаси буйича бажарилиш шартини текшириб куриш мақсадга мувофиқдир. Бу қуйидагича текширилади:

$$
\begin{aligned}
v_1 - u_1 &= 2 - 0 = 2 < 3, \\
v_2 - u_1 &= 5 - 0 = 5 = 5, \\
v_1 - u_2 &= 2 - 3 = -1 < 4, \\
v_3 - u_2 &= 2 - 3 = -1 < 5, \\
v_2 - u_3 &= 5 - 0 = 5 < 7, \\
v_3 - u_3 &= 2 - 0 = 2 < 8, \\
v_2 - u_4 &= 5 - 1 = 4 = 4, \\
v_3 - u_4 &= 2 - 1 = 1 = 1.
\end{aligned}
$$

Юқорида куриб утилган ҳисоблашларнинг ҳаммаси тулдирилмаган катаклар учун текширилиши лозим булганда, $v_j - u_i < c_{ij}$ шарт тўла бажарилиши керак. Агар бу шарт бажарилса, масаланинг оптимал ечимига эришдик деб ҳисоблаймиз. Ечилган масала юқоридаги шартнинг ҳаммасини қаноатлантиради. Шунинг учун ҳисоблаш натижаси буйича функциянинг қиймати $z_{\min} = 8800$ т/км га тенг.

4-§. Транспорт масаласининг тақсимлаш методи

Тақсимлаш методи билан масалалар ечганда қуйидаги қоидаларга амал қилиш зарур:

1. Масала шартидаги умумий юк запасларини қабул қилувчи пунктларда, юкни юк миқдорларига нисбатан („Северо-Восток") „Шимоли-Шарқ" бурчак усули буйича тақсимланади ва функция z ҳисобланади.

2. Шу функциянинг минимум қийматига, яъни оптимал ечимга эга эканлигини топиш учун жадвалнинг унг ва пастки томонларига қушимча устун ва қатор катакчалари қушилади. Бу катакчаларга *ҳал қилувчи қўшилувчилар катакчаси* дейилади. Бу катакчаларга шундай қўшилувчиларни топиш керакки, натижада ҳамма тўлдирилган катакчалардаги тарифлар нолга айланиши керак. Агар ҳамма тулдирилган катакчалардаги тарифлар мусбат ишорали бўлса, масаланинг оптимал ечимига эга булинади.

3. Ҳал қилувчи қушнлувчилар ёрдамида тўлдирилмаган катакчалардаги тарифларнинг бирортаси ёки бир нечтаси манфий ишорали бўлса, у вақтда масаланинг оптимал ечими ёпиқ контурлар орқали топилади. Бу процесс ҳамма бўш катакчалардаги тарифлар мусбат ишорали бўлгунча давом этади.

Бу методнинг тўлиқ алгоритмини қуйидаги масалани ечиш жараёнида баён этамиз.

1- масала. Турттa A_1, A_2, A_3, A_4 ёнилги базаларида 40, 20, 30, 10 тоннадан ёнилғи мавжуд бўлиб, уларни талаб қилинган участкаларга 30, 40, 30 тоннадан етказиб бериш керак. Бунда ёнилгиларни базалардан участкаларга етказаб беришда қилинадиган транспорт харажатлари энг кам бўлсин. Ёнилгини ташиш харажатлари 7-жадвалда келтирилган.

7-жадвал

Жўнатиш пунктлари	Қабул қилиш пунктлари			Умумий ёнилги запаси
	B_1	B_2	B_9	
A_1	3	4	5	40
A_2	7	2	3	20
A_3	6	1	4	30
A_4	5	2	3	10
Ёнилғига бўлган талаб	30	40	30	100

Ёнилғини ташиш учун кетган харажатни c_{ij} билан, ташилиши керак бўлган ёнилғи миқдорини эса x_{ij} билан белгилаймиз. Транспорт масаласини тақсимлаш методи билан ечганда жадвалнинг юқориги чап бурчагига тариф (c_{ij}) лар, пастки ўнг бурчагига эса ташилаётган юк миқдорлари (x_{ij}) лар ёзилади.

Масаланинг математик модели жадвал маълумотлари асосида қуйидагича тузилади.

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=40,$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=20,$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}=30,$$
$$x_{41}+x_{42}+x_{43}=30,$$
$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=30,$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=40,$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=30.$$

Бу тенгламалар системасини шундай ечимини топиш натижасида чизиқли функция

$$z = 3x_{11} + 4x_{12} + 5x_{13} + 7x_{21} + 2x_{22} + 3x_{23} + 6x_{31} + \\ + x_{32} + 4x_{33} + 5x_{41} + 2x_{42} + 3x_{43} \to (\min)$$

қийматга эга бўлсин.

Масалани ечишда жадвални, „шимоли-шарқ" бурчак методи бўйича юқоридан қуйи бурчакка қараб юкларни тақсимлаб чиқамиз ва масаланинг бошланғич планини тузамиз, натижада ушбу 8-жадвалга эга бўламиз.

8-жадвал

Жўнатилган пунктлар	Қабул қилиш пунктлари			Умумий ёнилғи запаси
	B_1	B_2	B_3	
A_1	3 / 30	4 / 10	5	40
A_2	7	2 / 20	3	20
A_3	6	1 / 10	4 / 20	30
A_4	5	2	3 / 10	10
Ёнилғига бўлган талаб	30	40	30	100

Бу жадвалда тақсимланган юкнинг оптималлик миқдори масаланинг мақсад функцияси орқали тўлдирилган катаклар бўйича ҳисоблаб топилади. Шунга асосан жадвал кўрсаткичлари бўйича мақсад функциясининг қиймати $z_{\min} = 30 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 20 \cdot 2 + 10 \cdot 1 + 20 \cdot 4 + + 10 \cdot 3 = 90 + 40 + 10 + 80 + 30 = 290$ сўмни ташкил этади.

Бу план масаланинг ҳақиқатан ҳам оптимал ечими эканлигини тақсимлаш методи ёрдамида текшириб кўрамиз. Бунинг учун жадвалнинг пастки (энг охирги) ва ўнг томонига қўшимча график чизиб, унга ҳал қилувчи қўшилувчиларни қўшиб ёзамиз. Бу 9-жадвалда келтирилган.

9- жадвал

Жўнатиш пунктлари	Қабул қилиш пунктлари			Умумий ёнилғи запаси	Ҳал қилувчи кўшилувчи
	B_1	B_2	B_3		
A_1	3 / 30	4 / 10	5	40	0
A_2	7	2 / 20	3	20	+2
A_3	6	1 / 10	4 / 20	30	+3
A_4	5	2	3 / 10	10	+4
Ёнилғига бўлган талаб	30	40	30	100	
Ҳал қилувчи қўшилувчи	—3	—4	—7		

9-жадвалда келтирилган ҳал қилувчи қўшилувчилар ёрдамида тўлдирилган катакчалардаги тарифларни ноллрга айлантирамиз, бу қуйидагича бажарилади: A_1B_1 тўлдирилган катакдаги масофа 3 км бўлганлигидан уни нолга айлантириш учун (пастки қаторга)—3 ни ҳал қилувчи деб олиб, унинг ўнг томонига нолни қўшсак, уларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлади. A_1B_2 ни нолга тенглаштириш учун унга—4 ҳал қилувчини қўшамиз ва ҳоказо. Шулар ёрдамида ҳамма тўлдирилган катакчалардаги (тарифлар) масофалар нолга айлангунча планни яхшилаш давом эттирилади. Бундай алмаштиришлар методикаси 10-жадвалда келтирилган.

Бундай алмаштиришлардан кейин ҳамма тўлдирилмаган катакчалардаги масофалар олдидаги коэффициентлар мусбат бўлса, масала ечими ниҳоясига етказилган деб ҳисобланади. Акс ҳолда масала ечимини қуйидагича давом эттирилади. Бунинг учун жадвалдаги масофага ҳал қилувчи қўшимчалар қўшилганда нолга айланадиган, энг соддаси 3 та тўлдирилган катак ва битта манфий ишорали тўлдирилмаган катаклар бўйича тўғри тўртбурчакни оламиз. Бу тўртбурчакда уларнинг ишоралари кетма-кет алмашиниб келади. (Агар бундай тўғри тўртбурчаклар бир қанча бўлса, уларнинг ишорали масофалар орасидан энг катта абсолют қийматига эга бўлган манфий масофадан бошлаймиз.) Ҳосил бўлган тўғри тўртбурчакнинг мусбат бурчакларидаги юклардан энг кичик миқдордагисини олиб, уни ўзгартирмасдан манфий катакчалардаги юк миқдорига қўшамиз, мусбат катакчалардаги юклардан олиб ташлаймиз, натижада жадвалдаги юкларнинг янгича тақсимланиши 11-жадвал кўринишида бўлади.

10- жадвал

Жўнатиш пунктлари	Қабул қилиш пунктлари			Ёнилғи запаси
	B_1	B_2	B_3	
A_1	0 30	+ 0 10	−2	40
A_2	6	0 20	−2	20
A_3	6	0 − 10	0 + 20	30
A_4	6	0	0 10	10
Ёнилғига бўлган талаб	30	40	30	100

11- жадвал

Жўнатиш пунктлари	Қабул қилиш пунктлари			Ёнилғи запаси	Ҳал қилувчи қўшилувчи
	B_1	B_2	B_3		
A_1	0 30	0	−2 10	40	0
A_2	6	0 20	−2	20	−2
A_3	6	0 20	0 10	30	−2
A_4	6	2	0 10	10	−2
Ёнилғига бўлган талаб	30	40	30	100	
Ҳал қилувчи қўшилувчи	0	−2	−2		

Бундай алмаштиришларни масаланинг оптимал ечимга эга бўлгунча давом эттирамиз. Келгуси жадвалларни тўлдиришда юқорида кўриб ўтилган қоидаларга амал қилинади.

Бу кўрсаткичлар бўйича функция қиймати $z_{\min} = 270$ сўм бўлади. ($z_{\min} = 30 \cdot 3 + 5 \cdot 10 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 20 + 10 \cdot 4 + 3 \cdot 10 = 90 + 50 + 40 + 20 + 40 + 30 = 270$ сўм).

Бироқ 11-жадвалда тўлдирилган катакчаларда манфий кўрсаткичли масофалар бор. Шунинг учун 12-жадвални тузамиз:

12- жадвал

Жўнатиш пунктлари	Қабул қилиш пунктлари			Ёнилғи запаслари
	B_1	B_2	B_3	
A_1	0 30	2	0 10	40
A_2	4	0 20	—2	20
A_3	4	—0 20	+0 10	30
A_4	4	2	0 10	10
Ёнилғига бўлган талаб	30	40	30	100

Кейинги жадваллар олдинги қоидалар асосида тўлдирилаверади.

13- жадвал

Жўнатиш пунктлари	Қабул қилиш пунктлари			Ёнилғи запаси	Ҳал қилувчи қўшилувчилар
	B_1	B_2	B_3		
A_1	0 30	2	0 10	40	—2
A_2	4	0 10	—2 10	20	0
A_3	4	0 30	0	30	0
A_4	4	2	0 10	10	—2

Жўнатиш пунктлари	Қабул қилиш пунктлари			Ёнилғи запаси	Ҳал қилувчи қўшилувчилар
	B_1	B_2	B_3		
Ёнилғига бўлган талаб	30	40	30	100	
Ҳал қилувчи қўшилувчилар	+2	0	+2		

14-жадвал

Жўнатиш пунктлари	Қабул қилиш пунктлари			Ёнилғи запаси
	B_1	B_2	B_3	
A_1	0 30	0	0 10	40
A_2	6	0 10	0 10	20
A_3	6	0 30	2	30
A_4	4	0	0 10	10
Ёнилғига бўлган талаб	30	40	30	100

14-жадвал кўрсаткичларида функция қиймати $z_{min} = 250$ сўмга тенг бўлади ($z_{min} = +3 \cdot 30 + 5 \cdot 10 + 2 \times \times 10 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 10 = 90 + 50 + 20 + 30 + 30 + 30 = 250$ сўм)

14- жадвалдаги ҳамма тўлдирилмаган катакчалардаги масофалар мусбат ишорали бўлади. Шунинг учун масала ечимини ниҳоясига етган деб ҳисоблаймиз. Функция қиймати эса $z_{min} = 250$ сўмга тенг бўлади. Шу йўл билан базалардаги ёнилғиларни участкалар бўйича ташишни ташкил этсак, бошланғич планга нисбатан $z_{min} = 290 - 250 = 40$ сўм иқтисод қилишга муваффақ бўламиз ва тақсимланган юкларнинг миқдори $x_{11} = 30$ т; $x_{13} = 10$ т; $x_{22} = 10$ т; $x_{23} = 10$ т; $x_{32} = 30$ т; $x_{43} = 10$ т бирликда бўлар экан.

Шу метод билан ечиладиган яна бир масалани кўриб ўтайлик.

2-масала. *Мавжуд участкаларда ғалла экинлари экишни шундай ташкил қилиш керакки, натижада ғалла ҳосилини йиғиштиришда экинлар бўйича максимум ҳосилдорликка эришилсин. Участкаларнинг майдони ва улардан олинадиган ҳосилдорлик 15-жадвалда кўрсатилган. (Бу масала потенциал методи билан ечиб кўрсатилган. Шунинг учун бошланғич жадвал тузилмади.)*

15-жадвал

Экин турлари	Ҳар бир участканинг гектаридан олинган ҳосили				Экиладиган майдонлар (га)	Ҳал қилувчи қўшилувчилар
	1	2	3	4		
Маккажўхори (дон учун)	50 1000	40	20	15	1000	0
Буғдой	20 1000	12 3000	11 2000	17	6000	+30
Арпа	22	15	10 1200	9	1200	+31
Ғариқ	28	10	6 300	4 1500	1800	+35
Участка майдонлари (га)	2000	3000	3500	1500	10000	
Ҳал қилувчи қўшилувчилар	−50	−42	−41	−39		

Жадвал кўрсаткичлари бўйича масаланинг математик модели қуйидагича тузилади:

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1000,\\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 6000,\\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 1200,\\
x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 1800,\\
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 2000,\\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 3000,\\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 35000,\\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 1500,
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

унинг чизиқли функцияси эса бундай бўлади:

$$z = 50x_{11} + 40x_{12} + 20x_{13} + 15x_{14} + 20x_{21} + \\ + 12x_{22} + 11x_{23} + 17x_{2} + 22x_{31} + 15x_{32} + 10x_{33} + \\ + 9x_{34} + 28x_{41} + 10x_{42} + 6x_{43} + 4x_{44}. \qquad (2)$$

(1) тенгламалар системасининг шундай ечимларини топиш керакки, натижада (2) мақсад функцияси ўзининг энг катта қийматига эришсин.

Экиладиган экинларни жадвалда „Шимоли-Шарқ" бурчаги бўйича тақсимлаймиз. Бунда ҳам ҳал қилувчи қўшилувчилар ёрдамида ҳосилдорликни нолга айлантирамиз. Булар 16-жадвалда келтирилган.

16-жадвал

Ғалла турлари	Ҳар бир участкадан олинадиган ҳосил (га)				Экиладиган майдон
	1	2	3	4	
Маккажўхори (дон учун).	0 1000	0	−21	−24	1000
Буғдой	−0 1000	2 3000	0+ 2000	−2	6000
Арпа	3	15	0 1200	1	1200
Тариқ	+13	3	−0 300	0 1500	1800
Участка майдонлари	2000	3000	3500	1500	10000

Бу ерда масала оптимал ечимга эга бўлиши учун ҳамма тўлдирилмаган катаклардаги ҳосилдорликлар манфий ишорага эга бўлиши керак.

Бунинг учун биринчи ва учинчи устун ҳамда иккинчи ва тўртинчи қатор элементларидан тузилган ва ҳосилдорликнинг энг каттасидан иборат бўлган тўғри тўртбурчак ясаймиз. Бу олинган тўғри тўртбурчакда манфий катакчадаги энг кичик майдонни олиб, унинг миқдорини ўзгартирмасдан мусбат катакчалардаги экин майдонига қўшамиз ва манфий майдондаги экин майдонларидан олиб ташлаймиз.

Натижада экинлар экишнинг янгича вариантига эга бўламиз. Ҳисоблашни шу йўсинда оптимал ечимга эга бўлгунча давом эттирамиз.

17-жадвал

Ғалла турлари	Ҳар бир участкадан олинадиган ҳосил (га ҳисобида)				Экиладиган майдон	Ҳал қилувчи қўшилувчи
	1	2	3	4		
Маккажўхори	0 1000	−2	−21	−24	1000	+13
Буғдой	0 700	0 3000	0 2300	1	6000	+13
Арпа	13	3	0 1200	0	1200	+13
Тариқ	13 300	3	0	0 1500	1800	0
Участка майдони	2000	3000	3500	1500	15000	
Ҳал қилувчи қўшилувчилар	−13	−13	−13			

$$z_{max} = 50 \cdot 1000 + 20 \cdot 700 + 12 \cdot 2000 + 11 \cdot 2300 + 10 \cdot 1200 + 28 \cdot 3000 + 4 \cdot 1500 = 50000 + 14000 + 26000 + 25300 + 12000 + 8400 + 6000 = 151700 \text{ ц},$$

$$z_{max} = 151700 \text{ ц}.$$

18-жадвал

Ғалла турлари	Ҳар бир участкадан олинадиган ҳосил (га ҳисобида)				Экин турлари
	1	2	3	4	
Маккажўхори (дон учун)	0 200	0 800	−19	−26	1000
Буғдой	−2	0 1000	0 3500	0 1500	6000
Арпа	−3	0 1200	−4	0	1200
Тариқ	0 1800	−8	−11	0	1800
Участка майдони	2000	3000	3500	1500	10000

Охирги жадвалда ҳамма тўлдирилмаган катакларда хосилдорлик манфий ишорага эга булди. Шунинг учун процессни бошқа давом эттириш мумкин эмас. Демак, максимум ҳосилдорлик $z_{max} = 171400$ центнерга тенг бўлиб, ҳар бир участкадан олинадиган ғалла турлари бўйича экиладитан майдонлар мос равишда $x_{11} = 200$; $x_{12} = 800$; $x_{22} = 1000$; $x_{23} = 3500$; $x_{24} = 1500$; $x_{32} = 1200$; $x_{41} = 1800$ гектарни ташкил этар экан.

5-§. Транспорт масаласининг очиқ модели

Олдинги параграфларда транспорт масалаларнинг ёпиқ моделига мансуб бўлган масалаларни кўрган эдик. Бунда ишлаб чиқариш билан унга бўлган талаб мос келган эди. Энди ишлаб чиқариш билан талаб мос келмаган ҳолни кўриб ўтайлик. Бунда икки ҳол бўлиши мумкин.

1-ҳол. Юк жўнатиш пунктларининг умумий юк запаслари (a_i) қабул қилиш пунктларининг умумий талабларидан (b_j) кўп бўлсин.

Бу ифодани математик кўринишда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{1}$$

Агар (1) тенгсизликни тенгликка айлантириш учун унинг ўнг томонига уларнинг фарқини $\left(\sum a_i - \sum b_j\right)$, масалан b_{n+1} ни қўшсак,

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j + b_{n+1} \tag{2}$$

тенглик ҳосил бўлади. Бу ерда b_{n+1} — „фиктив" юк қабул қилувчи пункт дейилади.

Кўриниб турибдики, натижада транспорт масаласининг очиқ модели ёпиқ моделга келтирилади. Бунда мақсад функциясининг минимум қиймати ва ўзгарувчиларининг манфий бўлмаслик шартлари ҳам назарда тутилмоқда.

Ушбу ҳолдаги очиқ транспорт масаласининг матрицавий кўриниши 19-жадвалда кўрсатилган.

19-жадвал

Жўнатиш пунктлари	Қабул қилиш пунктлари					Юк запаси
	B_1	B_2	...	B_n	B_{n+1}	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	0 $x_{1,n+1}$	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	0 $x_{2,n+1}$	a_2
. .	...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1} a_{m1}	c_{m2} a_{m2}	......	c_{mn} a_{mn}	0 $x_{m,n+1}$	a_m
Юкка бўлган талаб	b_1	b_2	......	b_n	b_{n+1}	

2-ҳол. Жўнатиш пунктларидаги умумий юк миқдори (a_i) қабул қилиш пунктларининг умумий талабидан (b_j) кичик, яъни

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (1')$$

бўлсин. Кўриниб турибдики, бу кўринишдаги тенгсизликни тенгликка айлантириш учун унинг ўнг томонига йиғиндилар айирмаси $\sum a_i - \sum b_i = a_{m+1}$ ни қўшамиз, натижада:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i + a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (2')$$

тенглик ҳосил бўлади. Шундай қилиб, яна очиқ кўринишдаги транспорт масаласини ёпиқ ҳолдаги кўринишга келтирдик. Бу ерда ҳам янги a_{m+} „фиктив" юк жўнатиш пункти дейилиб, бу жўнатиш пунктидан қабул қилувчи пунктларга юк жўнатишдаги сарфланадиган транспорт харажатлари $c_{(m+1)j} = 0$ деб қабул қилинади.

Иккинчи ҳолдаги таранспорт масаласининг матрицавий кўриниши 20-жадвалда берилган.

Юқорида кўриб ўтилган икки ҳолдан шу нарса маълум бўлдики, транспорт масаласининг ҳар икки кўринишдаги очиқ модели аввало ёпиқ кўринишдаги

20- *жадвал*

Жўнатиш пунктлари	Қабул қилиш пунктлари				Юк запаси
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	...	x_{1n} c_{1n}	a_1
A_2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	...	x_{2n} c_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
A_m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	...	x_{mn} c_{mn}	a_m
A_{m+1}	$x_{(m+1)1}$ 0	$x_{(m+1)2}$ 0	...	$x_{(m+1)n}$ 0	a_{m+1}
Юкка бўлган талаб	b_1	b_2	...	b_n	

моделга олиб келинар, сўнгра эса уни ҳал этиш мумкин булар экан.

Энди қуйидаги масалани куриб ўтайлик.

1- масала. Туртга (A_1, A_2, A_3, A_4) автомобиль хўжалиги ҳар куни 1600 та ЗИЛ-155 маркали автомобилни юк жўнатадиган бешта (B_1, B_2, B_3, B_4, B_5) станцияга вақтинча фойдаланадиган (P_1) ташкилотга жўнатиши керак. Автохўжаликлар асосий ва вақтинча фойдаланадиган ташкилотлар талабига биноан босиб ўтилган масофани тонна километрлар буйича ҳисоблайди.

Автомобилларни шундай тақсимлаш керакки, натижада автомашиналарга бўлган талаб қондирилсин.

21- *жадвал*

Автохўжаликлар	Автохўжаликлар билан юк ортувчилар орасидаги масофалар (км)					Мавжуд автомашиналар
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2	4	1	3	5	200
A_2	7	3	9	4	1	600
A_3	10	15	14	8	4	500
A_4	9	13	12	11	7	300
Автомашиналарга бўлган талаб	300	500	400	200	180	1600 / 1580

учун эса шу қатор ва устундаги энг кичик сонга яқин булган сонлар олинади.

2-операция c_{ij} лардан биронта энг қулай сон топилади. Агар масаланинг шарти максимум қийматни топишни талаб этса, у вақтда

$$c_{ij}^{(1)} - c_{ij}^{(2)} = \mu_i \, (\mu_j),$$

агарда масаланинг шарти минимум қийматни топишни талаб этса,

$$c_{ij}^{(2)} - c_{ij}^{(1)} = \mu_i \, (\mu_j)$$

топилади.

3-операция. Шу топилган $\mu_i \, (\mu_j)$ ичидан масаланинг максимум ва минимум қийматлари учун бир хил булган энг катта сон олинади. Бу сонни K_μ билан белгиланади.

4-операция. Шу топилган K_μ сонни юк миқдори x_{ij} ларга ва тариф c_{ij} ларга нисбатан ҳар бир қатор ва ҳар бир устун учун текширилади.

Қаторлар учун $a_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$;

устунлар учун $b_j - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$

шартлар бажарилиши керак. Шу туртта операциядан кейин масаланинг бошланғич плани топилади. Бу ерда

1. $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$;
2. $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$

шартлар бажарилиши керак.

Мисол. Қуйидагилар берилган:

$$b_j = (40;\ 30;\ 50;\ 20),$$

$$a_i = (30;\ 30;\ 45;\ 35),$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 8 & 7 \\ 3 & 6 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Бу ерда $z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min$ ни топиш талаб этилади. Бунинг учун берилган маълумотларни 24- жадвал кўринишида ёзамиз ва айтиб ўтилган 4 та операциянинг бажарилишини текширамиз.

24- жадвал

Тартиб номери	1	2	3	4	B_i	
+1	3	5	4	2	30	1
2	2	6	8	7	30	4
3	3	6	6	4	45	1
4	5	4	5	4	35	0
A_j	40	30	50	20	140	p_i \ p_j
	1	1	1	2		

Ҳар бир i қатор ва j устундан c_{ij} нинг икки қиймати қаралиб,

$$c_{ij}^{(1)} \quad \text{ва} \quad c_{ij}^{(2)}$$

топилади.

а) **1- операция.** Агар $z_{\min}$ ни топиш талаб этилган бўлса, $c_{ij}^{(1)}$ учун устун ва қатордаги энг кичик сонга яқин бўлган сон олинади. $c_{ij}^{(2)}$ учун эса шу устун ва қатордаги энг кичик сонга яқин бўлган сон олинади.

1- қаторлар учун

қаторлар	$c_{ij}^{(1)}$	$c_{ij}^{(2)}$
1	2	3
2	2	6
3	3	4
4	4	4

2- устунлар учун

устунлар	$c_{ij}^{(1)}$	$c_{ij}^{(2)}$
1	2	3
2	4	5
3	4	5
4	2	4

2- операция. Топилган $c_{ij}^{(1)}$; $c_{ij}^{(2)}$ ларнинг айирмасини устунлар ва қаторлар учун айрим-айрим топиб, Бу масала транспорт масаласининг очиқ типига мансуб бўлиб, уни потенциал методи ёрдамида ечиш билан чегараланамиз.

Бу ерда автомашиналар сони талаб қилинаётган автомашиналарга нисбатан кўп, шунинг учун биз машиналарга бўлган талабни умумий машиналар сони билан тенглаштириб, уни ёпиқ моделга келтириб оламиз.

Бу масаланинг дастлабки ечими (юкнинг тақсимланиши) 22- жадвалда кўрсатилган.

22- жадвал

Автохўжаликлар	Автомашиналар билан юк ортувчилар орасидаги масофа (км ҳисобида)						Автохўжаликдаги автомобиллар сони
	B_1^x	B_2	H_3	B_4	B_5	P_1^x	
A_1	2	4	1 / 200	3	5	0	200
A_2	7	3 / 420	9	4	1 / 180	0	600
A_3	− 10 / 0	15 / 80	+ 14 / 200	8 / 200	4	20	500
A_4	9 / 300	13	12 / −	11	7	0	300
Автомобилга бўлган талаб	+ 300	500	400	200	180	20	1600

$z_{\min} = 200 \cdot 1 + 420 \cdot 3 + 180 \cdot 115 + 200 \quad 14 + 200 \cdot$
$\cdot 8 + 300 \cdot 9 = 9860$ т/км.

Биз бу қийматни потенциал метод ёрдамида унинг оптимал ечими эканлигини текширамиз.

(A_3, B_5) (A_4, B_3); (A_4, B_5) катакчаларда потенциаллар $v_j - u_i \leqslant c_{ij}$ шарти бажарилмади. Шунинг учун шу катакчалардаги энг узун масофа (км) орқали ёпиқ тўртбурчак каби тақсимлашни давом эттирамиз; бир неча (итерация) дан кейин оптимал ечимга эга бўлган (23) жадвалга келтирамиз.

Охирги жадвалга асосан машиналарни шундай тақсимласак, у потенциал методнинг қонуниятларини қаноатлантиради ва оптимал ечимга эга бўламиз;

$z_{\min} = 200 \cdot 1 + 500 \cdot 3 + 100 \cdot 1 + 200 \cdot 10 + 200 \cdot 8 +$
$+ 80 \cdot 4 + 100 \cdot 9 + 200 \cdot 12 = 200 + 1500 + 100 + 2000 +$
$+ 1600 + 320 + 900 + 2400 = 9020$ т/км.

Демак, $z_{\min} = 9020$ т/км.

Автохўжаликлар	Автохўжаликлардаги юк ортувчилар орасидаги масофа (км ҳисобида)						Автохўжаликлардаги автомобиллар сони
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	P_1	
A_1	2	4	1 200	3	5	0	200
A_2	7	3 500	9	4	1 100	0 —	600
A_3	10 200	15	14	8 200	4 80	0 20	500
A_4	9 100	13	12 200	11	7	0	300
Автомобилга бўлган талаб	300	500	400*	200	180	20	

Демак, берилган масаланинг шартларига биноан энг кам йўл 9020 т/км ни ташкил этар экан.

6-§. Тақрибий ҳисоблаш методи (Аппроксимация методи)

Транспорт масаласини олдинги параграфларда кўриб ўтилган ечиш усулларидан ташқари тақрибий ҳисоблаш усуллари ҳам мавжуддир. Энди бу тақрибий ҳисоблаш методларидан айримларини кўриб ўтамиз.

Чизиқли программалаштиришнинг тақрибий ҳисоблаш методи қуйидаги операциялар ёрдамида бажарилади:

1-операция. Қўйилган масаланинг шартларига қараб ҳар бир i —қатор ва j устунлар бўйича c_{ij} нинг иккита қиймати, яъни $c_{ij}^{(1)}$ ва $c_{ij}^{(2)}$ текширилади. Масаланинг шарти максимум қийматни топишни талаб этса, $c_{ij}^{(1)}$ учун ҳар бир қатор ва устунлардаги сонларнинг энг каттаси олинади.

$c_{ij}^{(2)}$ учун эса шу қатор ва устундаги энг катта сонга яқин бўлган сон олинади.

Масаланинг шарти минимум қийматни топишни талаб этса, у вақтда $c_{ij}^{(1)}$ учун ҳар бир қатор ва ҳар бир устундаги сонларнинг энг кичиги олинади. $c_{ij}^{(2)}$

уни жадвалнинг ўнг ва пастки томонларига жойлаштирамиз:

$$c_{ij}^{(2)} - c_{ij}^{(1)} = \mu_i\,(\mu_j)$$

ни топамиз.

1) қаторлар учун	2) устунлар учун
$3 - 2 = 1,$	$3 - 2 = 1,$
$6 - 2 = 4,$	$5 - 4 = 1,$
$4 - 3 = 1,$	$5 - 4 = 1,$
$4 - 4 = 0,$	$4 - 2 = 2.$

3-операция. Топилган μ_i ва μ_j нинг қийматлари орасидаги энг катта K_μ ни топамиз, яъни:

$$K_\mu = \max\,[1;\ 4;\ 1;\ 0;\ 1;\ 1;\ 1;\ 2] = 4;\ K_\mu = 4$$

4-операция. K_μ нинг қиймати қайси қатор ва устунга тўғри келган бўлса, биз x_{ij} нинг миқдорини шу қатор ва устун бўйича тарқатамиз.

24-жадвалда у 2-қатор ва 1-устунга тўғри келади, шунинг учун уни талаб этилганича тақсимлаймиз.

25-жадвал

Тартиб номери	1	2	3	4	B_i	
1	3	5	4	2 20	30	1
2	2 30	—	—	—	30	
3	3	6	6	4	45	1
4	5	4	5		35	0
A_j	40	30	50	20	140	
	0	1	1	2		μ_j \ μ_i

Бу 4 та операцияни кетма-кет қўлланишни оптимал ечимга эга бўлгунча давом эттиришга тўғри келади. Агар жадвалда қайси қатор ёки устун бўйича қўйил-

ган талаблар бажарилса, шу устун ёки қатордаги қолган тарифлар ўчирилиб кетади.

б) 1- операция.

Қаторлар учун

2	3
3	4
4	4
$c_{ij}^{(1)}$	$c_{ij}^{(2)}$

Устунлар учун

2	3
4	5
4	5
2	4
$c_{ij}^{(1)}$	$c_{ij}^{(2)}$

2- операция.

μ_i (μ_j) ларни топамиз

Қаторлар учун

$3-2=1,$
$4-3=1,$
$4-4=0,$

Устунлар учун

$3-2=1,$
$5-4=1,$
$4-2=2,$
$5-4=1,$

3- операция.

K_μ ни топамиз.

$[1;\ 1;\ 0;\ 1;\ 1;\ 1;\ 2]=2 \qquad K_\mu=2$

4- операция.

K_μ нинг қиймати энг охирги устунга тўғри келяпти, шунинг учун x_{ij} нинг қийматини энг охирги устундаги энг кичик тариф бўйича тарқатамиз.

в) 1- операция.

қаторлар учун

$c_{ij}^{(1)}$	$c_{ij}^{(2)}$
2	3
3	6
4	5

устунлар учун

$c_{ij}^{(1)}$	$c_{ij}^{(2)}$
2	3
4	5
4	5

2- операция.

μ_i (μ_j) ни топиш керак

қаторлар учун

$3-2=1$
$6-3=3,$
$5-4=1,$

устунлар учун

$3-2=1,$
$5-4=1,$
$5-4=1,$

3- операция.

K_μ ни топамиз:

$$[1;\ 3;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1] - 3 \quad K_\mu = 3$$

26- жадвал

Тартиб номери	1	2	3	4	B_j	
1	3	5	4	2 20	30	1
2	— 30	—	—	—	30	—
3	3 10	1	1	—	45	3
4	5	4	5	—	35	1
A_i	40	30	50	20		μ_i
	0	1	1	—	μ_j	

г) **1- операция.**

қаторлар учун

$c_{ij}^{(1)}$	$c_{ij}^{(2)}$
2	4
3	6
4	5

устунлар учун

$c_{ij}^{(1)}$	$c_{ij}^{(2)}$
4	5
4	5

2- операция.

$\mu_i\ (\mu_j)$ ни топиш керак.

қаторлар учун

$4 - 2 = 2$

$6 - 3 = 3,$

$5 - 4 = 1,$

устунлар учун

$5 - 4 = 1,$

$5 - 4 = 1,$

3- операция.

K_μ ни топиш учун

$$[2;\ 3;\ 1;\ 1;\ 1] - 3 \quad K_\mu - 3$$

27- жадвал

Тартиб номери	1	2	3	4	
1	5	4 10	20	2	30
2	2 30	—			30
3	3 10		35	6 —	45
4	—	4 30	5	5 —	35
	40	30	50	20	140

$$z_{min} = 10 \cdot 4 + 20 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 35 \cdot 6 + 30 \cdot 4 + 5 \cdot 5 =$$
$$= 40 + 40 + 60 + 30 + 210 + 120 + 25 = 525.$$

Охирги жадвалдан кўриниб турибдики, зарур бўлган юк миқдорлари умуман тақсимланиб бўлинди. Масала ечими ниҳоясига етди. Демак, $z_{min} = 525$.

Машқ учун масалалар

1- масала. Бир вақтда A_1 ва A_2 станцияларнинг маълум жойида биридан 40 т ва иккинчисидан 30 т юк жўнатилди. Юк B_1, B_2, B_3 пунктларнинг иккитасига 10 тоннадан ва учинчисига 30 тонна миқдорида олиб борилиши керак. Юкни олиб бориш харажати қуйидаги жадвалда берилган.

28- жадвал

Жўнатиш пункти	Қабул қилиш пункти			Юк запаси
	B_1	B_2	B_3	
A_1	4	9	3	40
A_2	4	8	4	30
Юкка бўлган талаб	20	30	20	70

Юк олиб келиш планини шундай тузиш керакки, уларни олиб келиш учун сарф қилинган харажат энг кам бўлсин.

2-масала. A_1, A_2, A_3, A_4 омборларда 40, 20, 30, 10 тоннадан ёнилги запаси бор. Ёнилги ташишни шундай планлаштириш керакки, B_1, B_2, B_3 омборга мос равишда 30, 40, 30 тоннадан ташилсин ва ташиш учун кетган харажат жадвалда кўрсатилган асосда минимал бўлсин.

29-жадвал

Жўнатиш пункти	Қабул қилиш пункти			Юк запаси
	B_1	B_2	B_3	
A_1	6	4	5	40
A_2	7	5	3	20
A_3	6		4	30
A_4	5	3	3	10
Ёқилғига бўлган талаб (тонна)	30	40	30	1300

3-масала. A_1 A_2 A_3 жўнатиш пунктларида 40, 15, 25 тоннадан бир хил юк бор. Бу юкни 15, 10, 30, 15 тоннадан мос равишда B_1, B_2, B_3, B_4 пунктларга олиб боришни шундай ташкил қилиш керакки, натижада юк олиб келишнинг умумий харажати минимал бўлсин. Транспортда юкни ташиш харажати қуйидаги жадвалда келтирилган.

30-жадвал

Жўнатиш пункти	Қабул қилиш пункти				Юк запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	8	3	5	3	40
A_2	2	4	9	7	15
A_3	6	9	4	3	25
Юкка бўлган талаб (тонна)	15	10	30	15	80

4-масала. A_1 ва A_2 ишлаб чиқариш пунктларида 600 ва 100 бирликда бир хил маҳсулот ишлаб чиқарилади. Бу маҳсулотларни B_1, B_2 ва B_3 пунктларга 300, 400 ва 300 бирликдан олиб келиш талаб қилинади. Маҳсулотнинг керакли пунктга олиб келиш харажати қуйидаги жадвалда келтирилган.

31-жадвал

Жўнатиш пункти	Қабул қилиш пункти			Жами юк запаси
	B_1	B_2	B_3	
A_1	2	4	1	600
A_2	3	6	1	400
Юкка бўлган талаб (тонна)	300	400	300	1000

Транспорт харажати энг кам бўлган планни тузиш талаб қилинади.

5-масала Учта пунктдан 4 та ташкилотга тошкўмир етказиш планини шундай тузиш керакки, натижада транспортга кетган умумий харажат минимал бўлсин. Бир тонна кўмирни етказиб бериш учун қилинган траспорт харажати қуйидаги жадвалда берилган.

32-жадвал

Жўнатиш пункти	Истеъмолчи				Шахтадан кўмир қазиб олиш миқдори (т)
	K_1	K_2	K_3	K_4	
A_1	1	4	1	3	63
A_2	3	2	2	1	45
A_3	5	3	6	2	76
Истеъмолчи эҳтиёжи (тонна)	68	28	56	32	184

6-масала. „Сельхозтехника" нинг район бирлашмасига қарашли ёнилғи базаларидан колхоз участкаларига ёнилғи олиб келишнинг қуйидаги жадвалда келтирилган маълумотлари асосида оптимал планини тузиш талаб қилинади. Бунда оптималлик ўлчови — минимум тонна-километр топилсин.

33-жадвал

Ёнилғи базалари	Ёнилғи базасидан колхоз участкасигача бўлган масофа (км)					Талаб қилинадиган ёнилғи запаси (т)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	20	60	70	60	30	1500
A_2	30	50	40	40	10	1250
A_3	40	10	20	30	50	1350
Талаб қилинадиган ёнилғи (т)	1100	850	750	800	600	4100

VI боб. Математик программалашнинг айрим турлари

1-§. Бутун сонли программалаш

Бутун сонли (дискрет) программалаш ҳам математик программалашнинг бир булими бўлиб, экстремал масалаларни ҳал этишда изланаётган номаълумларга қўшимча равишда бутун сонли ечимлар булсин, деган шартнинг киритилиши билан фарқланади.

Маълумки, халқ хужалигининг турли соҳаларида ишлаб чиқаришни ташкил этиш купгина иқтисодий кўрсаткич ва объектларга боғлиқдир. Масалан, етиштирилаётган пахтага дастлабки ишлов бериш учун 2,6, пахта тозалаш заводига пахтани ташиш учун 3,2 автомашина керак деб айтилмайди. Бу кўрсаткичлар ҳар доим бутун сон шаклида ифодаланиши керак. Умумий ҳолда бутун сонли программалаш масаласининг математик модели қуйидагича бўлади. Қуйидаги (2) тенгсизликлар қийматини $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумларнинг шундай бутун сонли системасидан топиш кераккн, натижада (1) мақсад функцияси ўзини максимум (минимум) қийматига эга булсин.

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + , \ldots + c_n x_n \ (1) \ \max (\min) \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &< a_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &< a_2, \end{aligned} \qquad (2)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n < a_m, \qquad (3)$$

$$x_i \geqslant 0 \text{ ва } x_i - \text{ бутун сон бўлсин.}$$

Агар (2) системадаги номаълумларнинг a_{ij} коэффициентлари ва a_i озод ҳадлар ичида каср сонлар мавжуд бўлса, биз уларни мавжуд амаллар ёрдамида бутун сонларга келтиришимиз керак, яъни тенгсизликлаd. системасининг коэффициенти бутун сонлар билан алмаштирилади. Энди (2) системани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$y_1 = a_{11}(-x_1) + a_{12}(-x_2) + \dots + a_{1n}(-x_n) + a_1 \geqslant 0,$$

$$y_2 = a_{21}(-x_1) + a_{22}(-x_2) + \dots + a_{2n}(-x_n) + a_2 \geqslant 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_m = a_{m1}(-x_1) + a_{m2}(-x_2) + \dots + a_{mn}(-x_n) + a_m \geqslant 0$$

Бу ерда ҳамма номаълумларнинг коэффициентлари бутун сон, шу билан бирга y_i ўзгарувчиларнинг коэффициенти ҳам бутун сон бўлади. Демак, y_i лар бутун сон бўлса, x_i лар ҳам бутун сон бўлади. Энди Жорданнинг модификацияланган чиқариш методини r марта қўллаб масаланинг оптимал ечимига келамиз, яъни 1-жадвалга эга бўламиз.

1-жадвал

	$-y_1 - y_2 \dots - y_r - x_{r+1} \dots - x_n$					1
$x_1 =$	b_1	b_{12}	$\dots b_{1r}$	$b_{1,r+1}$	$\dots b_{1n}$	b_1
$x_2 =$	b_{21}	b_{22}	$\dots b_{2r}$	$b_{2,r+1}$	$\dots b_{2n}$	b_2
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$x_r =$	b_{21}	b_{22}	$\dots b_{r,r}$	$b_{r,r+1}$	$\dots b_{r,n}$	b_r
$y_{r+1} =$	$b_{r+1,1}$	$b_{r+1,2}$	$\dots b_{r+1,2}$	$b_{r+1,r+1}$	$\dots b_{r+1,n}$	b_{r+1}
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$y_m =$	b_{m1}	b_{m2}	$\dots b_{mr}$	$b_{m,r+1}$	b_{mn}	b_m
z	q_1	q_2	$\dots q_r$	q_{r+1}	q_n	Q

Бу алмаштиришлар натижасида 1-жадвалдаги ҳамма озод ҳадлар ва z қаторидаги номаълумларнинг коэффициентлари мос равишда ($b_1, b_2, \dots, b_m$ ва $q_1, q_2,$

$\ldots, q_n$) мусбат бўлса, берилган масала оптимал ечимга эга бўлади.

Агар биринчи жадвалда ҳамма озод ҳадлар коэффициентлари бутун сонлар бўлса, масала ечилган, яъни унинг бутун сонли ечими топилган деб ҳисобланади, акс ҳолда эса қуйидагича давом этамиз.

Қулайлик учун 1-жадвалнинг чап бош устунидаги ўзгарувчиларни $\eta_i (i = 1, 2, \ldots, m)$, юқоридаги ўзгарувчиларни эса ξ_j (кси) $(j = 1, 2, \ldots, n)$ лар билан белгиласак, 1-жадвални қуйидагича 2-жадвал кўринишида ёзамиз.

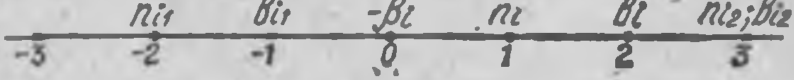
2- жадвал

	$-\xi_1 \ldots -\xi_j \ldots -\xi_n$	1
$\eta_1 =$	$b_{11} \ldots b_{1j} \ldots b_{1n}$	b_1
$\vdots$	$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$\ldots$
$\eta_i =$	$b_{i1} \ldots b_{ij} \ldots b_{in}$	b_i
$\vdots$	$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$\ldots$
$\eta_m =$	$b_{m1} \quad b_{mj} \quad b_{mn}$	b_m
$z =$	$q_1 \ldots q_j \ldots q_n$	Q

2-жадвалдаги озод ҳадлардан бири, яъни b_i каср сон бўлсин, у вақтда шу қатордаги (b_{ij}) сонлар, каср сон, ёки бутун сон бўлиши мумкин. Шу сонларнинг бутун қисмини n билан белгилайлик. У вақтда $b_i = 1{,}7$ бўлса, $n_i = 1$; агар $b_{i1} = -1{,}4$ бўлса, $n_{i1} = -2$; агар $b_{i2} = 3$ бўлса, $n_{i2} = 3$ ва ҳоказо. Уларни сон ўқида қуйидагича кўрсатилади.

Шундай йўл билан 2-жадвалдаги сонларнинг бутун қисмини аниқлаймиз ва уни β билан белгилаб, бундай ёзамиз:

$$\begin{cases} \beta_{ij} = b_{ij} - n_{ij} \; (j = 1, 2, \ldots, n) \\ \beta_i = b_i - n_i. \end{cases} \qquad (4)$$



23- расм.

Агар b_{ij} коэффициент бутун бўлса, у вақтда $n_{ij}=b_{ij}$ ларнинг айирмаси β_{ij} нолга тенг булади. Агар b_{ij} каср сон бўлса, уларнинг айирмаси β_{ij} тўғри каср булади.

Куриниб турибдики, β_{ij} мусбат тўғри каср сон ёки нолга тенг булади. Агар β_i ни олиб қарасак, у нолга тенг бўлиши мумкин эмас, чунки b_i бутун сон эмас, шунинг учун

$$0 \leqslant \beta_{ij} < 1, \; 0 < \beta_i < 1 \qquad (5)$$

шарт бажарилди.

β ҳади (5) шартга кўра (4) формула билан аниқланади ва унга мос келувчи b сонининг каср қисми деб юритилади.

2-жадвалдан η_i ни ёзиб оламиз:

$$\eta_i = b_{i1}(-\xi_1) + \ldots + b_{ij}(-\xi_j) + \ldots + b_{in}(-\xi_n) + b_i.$$

(4) формуладан b_{ij} ва b_i ларнинг қийматини келтириб қўямиз:

$$\begin{gathered}\eta_i = (n_{i1} + \beta_{i1})(-\xi_1) + \ldots + (n_{ij} + \beta_{ij})(-\xi_j) + \ldots + \\ + (n_{in} + \beta_{in})(-\xi_n) + (n_i + \beta_i) = n_{i1}(-\xi_1) + \ldots + \\ + n_{ij}(-\xi_j) + \ldots + n_{in}(-\xi_n) + n_i + \beta_{i1}(-\xi_1) + \ldots + \\ + \beta_{ij}(-\xi_j) + \ldots + \beta_{in}(-\xi_n) + \beta_i\end{gathered}$$

ёки

$$\eta = \sum_{j=1}^{n} n_{ij}(-\xi_j) + n_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}(-\xi_j) + \beta_i \qquad (6)$$

(6) тенгликни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$-\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}(-\xi_j) - \beta_i = \sum_{j=1}^{n} n_{ij}(-\xi_j) + n_i - \eta_i.$$

Бунинг бирор томонини s_i билан белгилаймиз. У вақтда

$$s_i = -\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}(-\xi_j) - \beta_i = \sum_{j=1}^{n} n_{ij}(-\xi_j) + n_i - \eta_i \qquad (7)$$

бўлади.

Шундай қилиб, (7) формуладан қўшимча шартни ёзамиз ва янги жадвални ҳосил қиламиз:

3-жадвал

	$-\xi_1 \dots \xi_j \dots \xi_n$	1
$\eta_1 =$	$b_{11} \dots b_{1j} \dots b_{1n}$	b_1
$\vdots$		
$\eta_l =$	$b_{l1} \dots b_{lj} \dots b_{ln}$	b_l
$\eta_m =$	$b_{m1} \dots b_{mj} \dots b_{mn}$	b_m
$s_l =$	$-\beta_{l1} \dots \beta_{lj} \dots -\beta_{ln}$	$-\beta_l$
$z =$	$q_1 \dots q_j \dots q_n$	Q

Қўшилган қўшимча чегаравий шарт ҳар қандай бутун номанфий ξ_l ва η_l ларни қаноатлантиради ёки масаланинг бутун сонли ечимини топишга имкон яратади.

Алмаштиришлардан сўнг масалани ечиш жараёнида манфий озод ҳадлар пайдо бўлса, масаланинг таянч ечимини топиб, кейин ечимнинг оптимал плани ва масаланинг бутун сонли оптимал планини топиш мумкин бўлади.

1-мисол. Қуйидаги берилган шартларда

$$y_1 = -x_2 - 3x_2 + 2x_3 + 4 \geqslant 0,$$
$$y_2 = -5x_1 + x_3 + 12 \geqslant 0,$$
$$y_3 = -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4 \geqslant 0$$
$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,\ 2,\ 3).$$

$z = 2x_1 + x_2 - 3x_3$ функциянинг бутун сонли оптимал ечими — максимум қиймати топилсин.

Масаланинг шартида берилган маълумотлардан ва Жорданнинг модификацияланган чиқариш методидан икки марта фойдаланиб, унинг оптимал ечимига эга бўламиз.

Масаланинг бу оптимал ечими 4-жадвалда келтирилган.

4-жадвалда ҳосил бўлган оптимал ечим $x_1 = -\frac{16}{7}$; $x_2 = \frac{4}{7}$; $x_3 = 0$ бўлганда $z_{max} = \frac{6}{7}$ дир. Бу ечим бутун сонли эмас, шунинг учун биз масаланинг бутун сонли ечимини излаймиз. Бунда фақат симплекс методини қўллаб масаланинг бутун сонли ечимини топиш мумкин. Бунинг учун оптимал ечим ичидаги ихтиёрий каср

	$-y_2$	$-y_1$	$-x_3$	1
$x_2 =$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	-1	$\frac{4}{7}$
$y_3 =$	$-\frac{15}{7}$	$-\frac{5}{7}$	-6	$\frac{4}{7}$
$x_1 =$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{16}{7}$
$z =$	$\frac{5}{7}$	$\frac{4}{7}$	4	$\frac{36}{7}$

сонни танлаймиз. Бизнинг мисолда уларнинг ҳаммаси касрли сонлар, шунинг учун биз улардан исталган бирини олишимиз мумкин.

Масалан, бу сон 1-қаторда $\frac{4}{7}$ га тенг. $\beta_{ij} = b_{ij} - n_{ij}$ $(j = 1,2\ ,\ \ldots\ ,\ n)$ $\beta_i = b_i - n_i$ формулалар ёрдамида танланган биринчи қатордаги β коэффициентнинг каср қисмини топамиз. Агар b_{ij} бутун сон бўлса, у вақтда $b_{ij} = n_{ij}$ бўлади.

Юқоридагиларни эътиборга олган ҳолда, эгамиз:

$$\beta_{11} = \frac{1}{7} - (-1) = \frac{6}{7}; \qquad \beta_{12} = \frac{2}{7} - 0 = \frac{2}{7};$$

$$\beta_{13} = -1 - (-1) = 0; \qquad \beta_{14} = \frac{4}{7} - 0 = \frac{4}{7}.$$

Энди ёрдамчи шартларни ушбу формула ёрдамида топамиз:

$$s_i = -\beta_{i1}(\xi_1) - \ldots - \beta_{ij}(-\xi_j) - \ldots - \beta_{in}(-\xi_n) - \beta_i.$$

Бизнинг масаламизда биринчи ёрдамчи шарт:

$$s_1 = -\frac{6}{7}(-y_2) - \frac{2}{7}(-y_1) - 0(-x_3) - \frac{4}{7} \geqslant 0.$$

Бу шартни оптимал ечимга эга бўлган жадвалга қўйиб навбатдаги 5-жадвалга эга бўламиз:

5-жадвал

	$-y_2$	$-y_1$	$-x_3$	1
$x_3 =$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	-1	$\frac{4}{7}$
$y_2 =$	$-\frac{15}{7}$	$-\frac{5}{7}$	-6	$\frac{4}{7}$
$x_1 =$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{16}{7}$
$s_1 =$	$-\frac{6}{7}$	$-\boxed{\frac{2}{7}}$	0	$\frac{4}{7}$
$z =$	$\frac{5}{7}$	$\frac{4}{7}$	4	$\frac{36}{7}$

Ҳосил бўлган жадвалдан масаланинг бутун сонли ечимини топиш мумкин эмас, чунки озод ҳадлар устунида манфий ишорали сон мавжуд.

Шунинг учун Жорданнинг модификацияланган чиқариш методини қўллаб, ҳал қилувчи элемент $-\frac{2}{7}$ га нисбатан масаланинг таянч ечимини излаймиз. Натижада қуйидаги 6-жадвалга эга бўламиз.

6-жадвал

	$-y_2$	$-s_1$	$-x_3$	
$x_3 =$	-1	1	-1	0
$y_2 =$	0	$-\frac{5}{2}$	-6	2
$x_1 =$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y_1 =$	$\boxed{3}$	$-\frac{7}{2}$	0	2
$z =$	-1	2	4	4

Ҳосил бўлган 6-жадвалдан масаланинг оптимал ечимини излаш мумкин, чунки охирги устундаги ҳамма сонлар мусбат ишорали.

Бу сонлар бутун сонли, лекин оптимал ечим эмас, шунинг учун биз оптимал ечимни излаймиз. 6- жадвалда мавжуд амалларни қўллаб, ҳал қилувчи элемент 3 га тенг эканлигини топамиз, демак, навбатдаги ҳисоблаш ишларини давом эттирамиз, натижада 7- жадвалга эга бўламиз.

7- жадвал

	$-y_1$	$-S_1$	$-x_1$	1
$x_2 =$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	-1	$\frac{2}{3}$
$y_2 =$	0	$-\frac{5}{2}$	-6	2
$x_1 =$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y_3 =$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{7}{6}$	0	$\frac{2}{3}$
$z =$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	4	$\frac{14}{3}$

Ҳосил бўлган 7- жадвалдан масаланинг оптимал ечими топилади, лекин бу ечим ҳам бутун сонли эмас, шунинг учун бутун сонли ечимни излаймиз. Бунинг учун илгаригидек хоҳлаган каср озод ҳадни оламиз. Айтайлик, бу сон учун $\frac{2}{3}$ ни олиб, иккинчи ёрдамчи шартни текширамиз. Бу ерда аввало шу қатор учун каср коэффициентни топишимиз керак.

Бу ерда

$$\beta_{11} = \frac{1}{3} - (0) = \frac{1}{3},$$

$$\beta_{12} = -\frac{1}{6} - (-1) = -\frac{1}{6} + 1 = \frac{5}{6},$$

$$\beta_{13} = -1 - (-1) = 0,$$

$$B_1 = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3},$$

$$S_2 = -\frac{1}{3}(y_1) - \frac{5}{6}(-S_1) - 0(-x_2) - \frac{2}{3} > 0.$$

Буларни навбатдаги 8-жадвалга қўйиб, симплекс методи ёрдамида масаланинг бутун сонли ечимини излаймиз:

8-жадвал

	$-y_1$	s_1	$-x_3$	1
$x_2=$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	-1	$\frac{2}{3}$
$y_2=$	0	$-\frac{5}{2}$	-6	2
$x_1=$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y_3=$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{7}{6}$	0	$\frac{2}{3}$
$s_2=$	$\boxed{-\frac{1}{3}}$	$-\frac{5}{6}$	0	$-\frac{2}{3}$
$z=$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	4	$\frac{14}{3}$

Бу жадвалда манфий сонли ҳад қатнашгани учун масаланинг таянч ечимини излаймиз.

Ҳал қилувчи $-\frac{1}{2}$ элементга нисбатан Жорданнинг модификацияланган чиқариш методини қўллаб, 9-жадвалга эга бўламиз.

9-жадвал

	$-s_2$	$-s_1$	$-x_3$	1
$x_2=$	1	-1	-1	0
$y_2=$	0	$-\frac{5}{2}$	-6	2
$x_1=$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y_3=$	1	-2	0	0
$y_1=$	-3	$\frac{5}{2}$	0	2
$z=$	1	0	4	4

9- жадвал кўрсаткичлари оптимал бўлган бутун сонли ечимга ҳам эга бўлди. Яъни $x_1 = 2$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$ бўлганда, $z_{max} = 4$ га тенг бўлар экан.

Бутун сонли программалаш юқорида кўриб ўтилган ҳоллардан ташқари комбинаторика масалаларини ҳал этишда, тармоқ ва корхоналарнинг календарь планини тузишда ҳам кенг фойдаланилади.

Булардан ташқари, тармоқ ва корхоналарни оптимал жойлаштириш ва ихтисослаштириш масаласини ҳал этишда ҳам бутун сонли программалашни қўллаш ижобий натижалар бериши мумкин.

2- §. Каср- чизиқли программалаш

Каср- чизиқли программалаш ҳам математик программалашнинг бир соҳаси бўлиб, экстремал масалаларни ечишда қўлланилади ва унинг математик модели қуйидагича бўлади:

$$z = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} q_j x_j} = \frac{z_1(x)}{z_2(x)}, \quad (1)$$

Функциянинг максимум (минимум) қийматлари

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &< b_2, \quad (2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + {}'_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leqslant b_m \end{aligned}$$

$$x_j \geqslant 0 \; (j = 1, 2, \ldots, n) \quad (3)$$

шартлар бажарилганда топилсин.

Бу ерда $z_2(x) \neq 0$. Агар (1) да $z_1(x) = z_2(x) = z(x)$ бўлса, каср-чизиқли программалаш масаласи чизиқли программалаш масаласи каби бўлади.

Кўриниб турибдики, каср- чизиқли программалаш чизиқли программалаш масаласидан фақатгина мақсад функциясининг бошқа кўриниши билангина фарқ қилар экан. Каср чизиқли программалаш, масалан, таннархни минималлаштириш, меҳнат унумдорлигини максималлаштириш, қишлоқ хўжалигини планлаштириш, кам харажат қилиб кўпроқ маҳсулот етиштириш каби масалаларни ҳал этишда яхши самаралар беради. Масалан, хўжалик ёки корхона маҳсулот ишлаб чиқаришнинг шундай планини топиши керакки, натижада маҳсулот етиштиришга кетган таннарх кам бўлсин, шу билан биргаликда белгиланган вақт ичида планлаштирилган маҳсулот ишлаб чиқарилсин. Масалан, бўрдоқичилик фермасида гўшт учун ҳар хил ҳайвонлар боқилади (масалан, қорамоллар, чўчқа ва ҳ. к.). j турдаги молнинг бир бошидан q_j ц маҳсулот олинсин, фермада унинг баҳоси p_j бўлсин. Агар ҳайвонлар сонини x_j билан белгиласак, 1 ц гўшт етиштириш таннархи

$$z = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} q_j x_j} \tag{1}$$

формула билан аниқланади.

Бу ерда ҳайвон турларининг шундай сонини топиш керакки, натижада маҳсулот етиштиришга кетган таннарх энг кам бўлсин ва (2), (3) шартлар бажарилсин.

Махсус ҳолда таннархни аниқлашда чизиқли система номаълумларининг шундай қийматларини топиш керакки, натижада каср-чизиқли функция энг кичик қийматга эга бўлсин.

Таннарх каср-чизиқли программалашда асосий иқтисодий кўрсаткич бўлмасдан, кўпгина ҳолларда маҳсулот ишлаб чиқариш харажати ва баҳоси ҳам асосий кўрсаткич бўлиши мумкин. Маҳсулот баҳосидан харажатни айирсак соф даромад қолади. Хусусий ҳолда соф даромаднинг харажатга нисбати рентабеллик деб юритилади. Ишлаб чиқаришда бундай кўрсаткич энг юқори кўрсаткич бўлиши керак.

Агар функцияда номаълумлар сони фақат иккита (x_1, x_2) бўлса, у вақтда каср-чизиқли программалаш масаласини график метод билан ечиш мумкин. Энди каср-чизиқли программалаш масаласининг симплекс метод ёрдамида ечилишини кўрамиз. Бунинг учун (1) ва (2) шартлар жадвалга жойлаштирилади:

10-жадвал

	$-x_1$	$-x_2$	. . .	$-x_n$	1
$y_1 =$	a_{11}	a_{12}	. . . .	a_{1n}	a_1
$y_2 =$	a_{21}	a_{22}	. . . .	a_{2n}	a_2
$\vdots$	. . .	. . .	. . . .	. . .	. . .
y_m	a_{m1}	a_{m2}	. . . .	a_{mn}	a_m
$z_1 =$	$-p_1$	$-p_2$	. . . .	$-p_n$	0
$z_2 =$	$-q_1$	$-q_2$	. . . .	$-q_n$	0

Жадвалнинг охирги z_1 қаторига функционалнинг суратидаги номаълумлар олдидаги коэффициентлар, z_2 қаторига эса махраждаги номаълумлар олдидаги коэффициентлар ёзилади. Агар жадвалдаги озод ҳадларнинг бир ёки бир нечтаси манфий бўлса, модификацияланган Жордан методи ёрдамида унинг таянч ечимини излаймиз.

Ҳал қилувчи элементни одатдаги методлар ёрдамида топамиз. Айтайлик, қатор ечимлардан кейин жадвалнинг куриниши қуйидагича бўлсин:

11-жадвал

	$-y_1$ . . . $-x_s$ . . . $-x_n$	1
$x_1 =$	b_{11} . . . b_{1s} . . . b_{1n}	b_1
$\vdots$	. . . .	
$y_r =$	b_{r1} . . . b_{rs} . . . b_{rn}	b_r
$\vdots$	. . . .	
$y_m =$	b_{m1} . . . b_{ms} . . . b_{mn}	b_m
$z_1 =$	p'_1 . . . p'_s . . . p'_n	$p^{(e)}$
$z_2 =$	q'_1 . . . q'_s . . . q'_n	$q^{(e)}$
$d_j =$	d_1 . . . d_s . . . d_n	$z^{(e)} = \dfrac{P^{(e)}}{Q^{(e)}}$

Демак, 11-жадвалда ҳамма озод ҳадлар мусбат бўлади, яъни таянч плани топилган бўлсин. Энди масаланинг оптимал планини топишимиз керак.

Бунинг учун қуйидаги қоидалар бажарилади:

1. Ҳар бир устун учун

$$d_j = \begin{vmatrix} p'_j & P^{(e)} \\ q'_j & Q^{(e)} \end{vmatrix} = p_j \cdot Q^{(e)} - q'_j P_j^{(e)} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

детерминантни ҳисоблаймиз. Ҳосил бўлган натижани жадвалда қўшимча қаторга ёзамиз.

2. Агар масаланинг шарти максимум қийматни топишни талаб этса, бош устунни d_j қатордаги манфий сон абсолют қийматининг энг каттасидан бошлаймиз.

3. Бош қаторни эса озод ҳадлари мос равишда шу устунда турган сонларга бўлиб, энг кичигини топамиз (уларнинг иккаласи ҳам мусбат ёки иккаласи ҳам манфий бўлса).

4. z_1 ва z_2 қатордаги элементлар одатдаги қоида бўйича топилади, янги жадвалдаги d_j қатори тўлдирилмайди.

5. Қайтадан ҳар бир устун учун d_j детерминантни ҳисоблаймиз. Агар улар ичида ҳеч бўлмаганда битта манфий сон бўлса, шу бош устун бўйича қатор ечимларни бажарамиз.

6. Агар масаланинг шарти максимумни топишни талаб этса, у вақтда аниқловчи d_j қаторда манфий коэффициентли сон бўлмаслиги керак.

7. Агар масаланинг шарти минимумни топишни талаб этса, ҳал қилувчи устун қилиб, детерминант d_j қатордаги мусбат сонлардан энг кичиги олинади. Максимум критериясида эса аниқловчи d_j қатордаги ҳамма сонлар манфий бўлмаслиги керак.

1-мисол. Берилган

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 \leqslant 5, \\ x_1 + x_2 \leqslant 7, \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 11, \\ x_1 + 2x_2 \geqslant 7, \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2). \end{gathered}$$

шартларда каср-чизиқли функция $z = \dfrac{x_1 + 4x_2}{4x_1 + x_2}$ нинг максимум қиймати топилсин. Юқоридаги тенгсизликлар системасини ва каср-чизиқли функцияни симплекс метод ёрдамида жадвалга соламиз. Аввало тенгсизликлар системасини бир хил тенгсизлик белгисига келтирамиз.

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\leqslant 5, \\ x_1 + x_2 &\leqslant 7, \\ 2x_1 + x_2 &< 11, \\ -x_1 - 2x_2 &\leqslant -7 \end{aligned}$$

Бу тенгсизликлар қўшимча номаълумларнинг қўшилиши натижасида тенгламаларга айлантирилиб, уларни 12- жадвал кўринишида ёзамиз.

12 - жадвал

	$-x_1$	$-x_2$	1
$y_1=$	-1	2	5
$y_2=$	1	1	7
$y_3=$	2	1	11
$y_4=$	-1	-2	-7
$z_1=$	-1	-4	0
$z_2=$	-4	-1	0

12- жадвалдан масаланинг оптимал планини топишимиз керак, лекин бу ерда, яъни озод ҳадлар устунида манфий ишорали (—7) сони мавжуд, шунинг учун унинг аввало таянч ечимини топиб, кейинчалик оптимал ечимга ўтамиз. 13- жадвални ҳосил қиламиз.

13- жадвалда яна манфий ишорали озод ҳад сақланиб қолди, шунинг учун таянч ечимини топиш процессини давом эттирамиз ва 14- жадвални ҳосил қиламиз.

13- жадвал

	$-x_1$	$-y_1$	1
$x_2=$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
$y_2=$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$
$y_3=$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{17}{2}$
$y_4=$	-2	1	-2
$z_1=$	-3	2	10
$z_2=$	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$

14- жадвал

	$-y_4$	$-y_1$	1
$x_2=$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	3
$y_2=$	$+\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	3
$y_3=$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	6
$x_1=$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
$z_1=$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	13
$z_2=$	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{7}{4}$	7
$d_j=$	$\frac{75}{4}$	$\frac{105}{4}$	$\frac{13}{7}$

14-жадвалда масаланинг таянч ечими топилди. Энди d_j қаторни ҳисоблаймиз. Демак d_j қатордаги ҳамма номаълумлар олдидаги коэффициентлар мусбат, шунинг учун биз $x = 1$; $x = 3$ қийматларда

$$z_{max} = \frac{13}{7}$$ га эга бўлдик.

2- мисол.

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 < 2, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 < -1, \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leqslant 5, \\ x_j > 0 \ (j = 1, 2, 3). \end{gathered} \qquad 1$$

шартларда $z = \frac{5x_1 - x_2 + 3x_3}{x_1 + 2x_2 + 3x_3}$ каср-чизиқли функциянинг (max) қийматлари топилсин.

Берилган маълумотларни тартибга келтириб ва уларни жадвалга солиб таянч ечимини топамиз (15-жадвал).

15-жадвал

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	1	1	1	2
$y_2 =$	4	2	1	3
$y_3 =$	1	$\boxed{-1}$	2	−1
$y_4 =$	−3	2	−2	5
$z_1 =$	−5	1	−3	0
$z_2 =$	−1	−2	−3	0

16- жадвал

	$-x_1$	y_3	x_3	1
$y_1 =$	2	1	3	1
$y_2 =$	$\boxed{6}$	2	5	1
$x_2 =$	−1	−1	−2	1
$y_4 =$	−1	2	2	3
$z_1 =$	−4	1	−1	−1
$z_2 =$	−3	0	−7	2
$d_j =$	−11	0	−9	$-\frac{1}{2}$

16- жадвалда масаланинг ечими топилди, энди шу жадвалда қўшимча қатор d_j ни ҳисоблаймиз. Бу ерда d_j қатордаги номаълумлар олдидаги коэффициентлар ҳаммаси манфий ва $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 0$ қийматларда $z_{min} = -\frac{1}{2}$ бўлади. Демак, z_{min} да масаланинг оптимал ечимига эга бўлдик. Энди масаланинг максимум қийматини топамиз, бунинг учун қатордаги энг кичик манфий сонни олиб, уни бош устун учун танлаймиз, кейинчалик бош қатор ва ҳал қилувчи элементларни одатдаги йўл билан топамиз.

17-жадвал

	$-y_2$	$-y_3$	$-x_3$	1
$y_1=$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$
$x_1=$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$
$x_2=$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{6}$
$y_4=$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{17}{6}$	$\frac{19}{6}$
$z_1=$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{1}{3}$
$z_2=$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{9}{2}$	$\frac{5}{2}$
$d_j=$	$\frac{11}{6}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{13}{3}$	$+\frac{2}{5}$

17-жадвалда d_j қаторидаги ҳамма сонлар мусбат, демак, биз $x_1=\frac{1}{6}$; $x_2=\frac{7}{6}$; $x_3=0$ қийматларида $z_{max}=$ $=\frac{2}{15}$ га эришдик.

Машқ учун мисоллар

1. $$\begin{aligned} 4x_1+2x_2-x_3-10 &\geqslant 0,\\ 2x_1-3x_2 &= 0,\\ 2x_2+x_3-10 &\leqslant 0,\\ x_3-2 &= 0,\\ x_j > 0, \quad (j &= 1,\ 2,\ 3)\\ z_{max} &= 9x_1+6x_2+8x_3 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} &2x_1-3x_2 \geqslant 0,\\ &4x_1+4x_2-x_3-10=0,\\ &2x_2-x_3+2=0, \end{aligned}$$

$$x_3 - 2 \geqslant 0,$$
$$x_j > 0, \quad (j = 1,\ 2,\ 3)$$
$$z_{\min} = 3x_1 - 2x_3 + 13.$$

3. $$2x_2 - x_3 + 2 \geqslant 0,$$
$$8x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 30 > 0,$$
$$2x_1 - 3x_2 > 0,$$
$$x_3 - 2 \geqslant 0,$$
$$x_j > 0, \quad (j = 1,\ 2,\ 3)$$
$$z_{\min} = -3x_1 - 2x_2 - 6x_3 + 9.$$

4. $$x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 2.$$
$$4x_1 + 2x_2 + x_3 < 3,$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 \leqslant -1,$$
$$-3x_1 + 2x_2 - 1x_3 \leqslant 5,$$
$$x_j > 0, \quad (j = 1,\ 2,\ 3).$$
$$z_{\max} = \frac{5x_1 - x_2 + 3x_3}{x_1 + 2x_2 + 3x_3}.$$

5. $$x_2 + 2x_3 \geqslant 10,$$
$$-x_1 + x_2 \geqslant 1,$$
$$x_1 + x_2 - 4x_3 \geqslant -1,$$
$$x_1 + x_3 > -1,$$
$$x_j \geqslant 0. \quad (j = 1,\ 2,\ 3)$$
$$z_{\max} = \frac{4x_1 - 5x_2 - 4x_3}{2x_1 + x_2 + 3x_3}.$$

VII боб МАСАЛАЛАРНИ ЭЛЕКТРОН ҲИСОБЛАШ МАШИНАЛАРИДА ЕЧИШ[1]

1- §. Умумий тушунчалар

Умуман олганда, клавишли ҳисоблаш машиналарида ҳисоблаш жараёнини бажариш учун оператор ҳар бир кўрсаткични машинанинг ўрнатиш механизмига теради, сўнгра махсус клавишни босиб, уни ҳисоблаш механизмига узатади, ҳисоблаш натижаларини ёзиб олади ҳамда ҳисоблаш жараёни бўйича машинани бошқаради.

[1]Бу боб М. Адҳамов томонидан ёзилган.

Перфорацион ҳисоблаш машиналаридан фойдаланилганда оператор бошланғич кўрсаткичларини техник воситачи (перфокарта)га ўтказади, унинг тўғри утказилганлигини текширади, ҳисоблаш мазмунига мос равишда перфокарталарда саралайди. Группаларга ажратади, ҳисоблаш жараёнига асосан (табуляторнинг коммутацион доскаси воситасида) бошқариш ишларида иштирок этади. Булар эса ўз навбатида, машиналар ёрдамида ишланиши лозим бўлган ҳужжатларни қисқа вақт ичида тайёрлашга имкон бермайди. Бу эса кўриб чиқилган машиналар механизмларининг бир-бирига узвий боғланмаганлигининг натижасидир. Бундай номуносибликни бартараф этиш йўлидаги изланишлар электрон ҳисоблаш машиналарини яратди. Электрон ҳисоблаш машиналари жуда катта тезликка эга бўлиб, бир секундда бир неча юз минг арифметик амал ҳамда мантиқий операцияларни ҳал қилади. Электрон ҳисоблаш машиналари асосан икки турга бўлинади:

1) узлуксиз ишловчи ҳисоблаш машиналари,

2) электрон рақамли ҳисоблаш машиналари

Одатда узлуксиз ишловчи электрон ҳисоблаш машиналарни моделловчи машиналар ёки ихтисослашган машиналар дейиш мумкин, чунки уларда ҳар бир математик масалани ечиш учун махсус блоклардан фойдаланилади. Электрон ҳисоблаш машиналари ўзининг техникавий хусусиятлари ва ишлатилишига қараб, универсал, ихтисослашган ва мантиқий рақамли машиналарга бўлинади.

ЕС-ЭВМ типидаги электрон ҳисоблаш машиналари ўзининг специфик хусусиятларига эга бўлиб, керакли маълумотлар перфокарта, магнитли лента ёки магнитли диск ёрдамида киритилади. Шу билан биргаликда бу типдаги ЭҲМ нинг иккита „ДОС“ ва „ОС“ режими мавжуд бўлиб, исталган масалаларни шу икки режимнинг бирида ечиш мумкин.

ЭҲМ ларнинг автоматик ишлашини таъминлаш учун илгаридан тузиб қўйилган маълум программалардан фойдаланилади Машинага бериладиган программа ҳисоблашларда иштирок этувчи сонлар устида қандай операцияларни қайси тартибда бажариш жараёнини машина механизмларига кўрсатиб турувчи йўл-йўриқлардан иборатдир. Машинага бериладиган кўрсатмалар сўзлардан эмас, балки командалардан, яъни маълум сонлар тўпламидан иборат бўлиб, улар *сонли код-лар* кетма-кетлигини ташкил этади.

Команда асосан код кўринишида бўлиб, у икки қисмдан иборат:

1) операцияни кўрсатувчи код,

2) машина хотирасидаги катакни кўрсатувчи адрес.

Программа командалари бланкаларга 8 лик системаси бўйича ёзилади. Команданинг операция қисмига қандай математик жараённи бажариш кераклиги тўғрисидаги сонли белги ёзилади. Адрес қисмига эса қуйидагилар ёзилади:

1) операцияда қатнашадиган соннинг адреси;

2) берилган соннинг катталиги;

3) ҳисоблаш жараёнидан олинган сон;

4) ҳисоблаш натижасини жўнатиш адреси.

Машиналар 1, 2, 3, 4 адресли бўлади. Шуларга қараб улардаги „команда" структуралари ҳам ўзгаради.

Бирорта масалани ЭҲМ да ечиш учун қуйидаги босқичларни босиб ўтиш керак бўлади:

1. Берилган масаланинг математик кўринишини тузиш;

2. Масаланинг ечилиш программасини энг қисқа тузиш учун исталган аниқликда ҳисоблаш усулини тўғри белгилаш;

3. Программалаштириш;

4. Машинани масала ечишга созлаш;

5. Масалани ечиш.

Тузилган ва аниқ бир ечими олинган программаларни перфолента ёки магнитли лентада сақлаб қўйилади.

Берилган маълумотларнинг катта ёки кичиклигига қараб уларни ЭҲМга пультдан ёки перфолента, перфокарталар орқали киритиб, масаланинг ечимини олиш мумкин.

Энди қишлоқ хўжалигини планлаштиришга оид айрим масалаларни „Наири" ва „ЕС-1022" типидаги ҳисоблаш машиналарида ечиш методикаси билан танишиб чиқамиз.

2-§. Масалани „Наири" ҳисоблаш машинасида ечиш

1. Ушбу масала берилган бўлсин.

Ер майдни 240 га бўлган участкага полиз ва сабзавот экинлари экиш керак. Бу майдон учун 580 ц минерал ўғит ва 2300 сум меҳнат харажатлари сарфланиши керак. Бирлик учун норма харажатлари қуйидаги жадвалда берилган.

1 га учун норма	Полиз	Сабзавот
Минерал ўғит (тонна)	2,4	1,6
Меҳнат харажатлари (киши соат)	12	20
Фойда (сўм)	90	100

Ер майдони қандай тақсимланганда хўжаликка келадиган фойда энг кўп бўлади? Масалани ечиш учун полиз ва сабзавот маҳсулотларига ажратиладиган майдонни мос равишда x_1 ва x_2 га деб белгилайлик.

Масаланинг математик модели

$$x_1 + x_2 < 240,$$
$$2{,}4\,x_1 + 1{,}6\,x_2 \leqslant 580, \qquad (1)$$
$$12\,x_1 + 20\,x_2 \leqslant 2300,$$
$$x_j \geqslant 0 + \quad (j = 1, 2) \qquad (2)$$
$$z_{\max} - 90\,x_1 + 100\,x_2 \qquad (3)$$

кўринишда бўлади. Бу тенгсизликлар системасини тенгликлар системасига айлантириш учун ҳар бир тенгсизликнинг чап томонига мос равишда сунъий x_3, x_4 ва x_5 янги ўзгарувчиларни қўшамиз:

$$x_1 + x_2 + x_3 - 240,$$
$$2{,}4\ x_1 + 1{,}6\ x_2 + x_4 = 580,$$
$$12\,x_1 + 20\,x_2 + x_5 - 2300.$$

Мақсад функцияси $z - 90\,x_1 + 100x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max$ кўринишга келади.

Энди бу тенгламалар системасининг коэффициентлари ва озод ҳадларини 1 1 1 0 0 240 2,4 1,6 1 0 0 580 12 20 0 01 90 100 0 0 0 кўринишда 45 адресдан бошлаб „Наири" ҳисоблаш машинасига киритамиз.

Агар дастлабки маълумотлар тўғри ёзилиб, тўғри киритилган бўлса „печать"га юқорида ёзилган сонлар чиқади. Ундан кейин $N > M$ шарти текширилади. Берилган масаланинг номаълумлар сони $N - 5$ тенгламалар сони $M = 3$ га тенгдир. Шу сонлар ҳам $N > M$; $N - 5$; $M - 3$ шаклида натижада қайд этилади.

Маълум вақт ўтгандан кейин масаланинг изланаётган оптимал ечими топилади ва жавоблар x,[y] лар, сўнгра $z(x)$ ларнинг қиймати берилади.

Юқорида берилган масаланинг оптимал ечими $x_1 = 191,666 \approx 191,7$ га булса $z(x) = 17\ 253$ сўм фойда келтиради.

Оптимал ечим шуни кўрсатадики, берилган шартларда хўжалик энг кўп фойда олиши учун фақат 191,7 га ерга полиз маҳсулотлари экиши керак, 48,3 га ердан бошқа мақсадларда фойдаланса бўлади. Минерал ўғитдан 460, 1 тоннаси сарфланиб, қолган 119,9 тоннасини бошқа экинларга сарфлаш мумкин. Жами меҳнат харажатлари эса 2299,4 киши соатни ташкил этади. Бунда 0,6 киши/соат тежалади.

2. Энди қуйидагича транспорт масаласи берилган бўлсин.

Мавжуд тўртта складдан мос равишда $b_1 = 620$ т; $b_2 = 680$ т; $b_3 = 460$ т; $b_4 = 540$ т минерал ўғитни тўртта колхозга ташишни шундай ташкил этиш керакки, колхозларнинг ўғитга бўлган талаблари мос равишда қондирилиб, транспорт харажати энг кам бўлсин. Колхозларнинг ўғитга бўлган талаби мос равишда $a_1 = 340$ т; $a_2 = 710$ т; $a_3 = 650$ т; $a_4 = 600$ т.

Транспорт харажатлари матрицаси қуйидагича

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Масалани ечиш учун ташилиши керак бўлган ўғит миқдорини

$x_{ij} \begin{Bmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{Bmatrix}$ билан белгилайлик. Берилган шартларга кўра масаланинг математик модели қуйидагича бўлади:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 340 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 710 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 650 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 600 \end{aligned}$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 620 \qquad (1)$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 680$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 640$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 540$$
$$x_{ij} \geqslant 0 \qquad (2)$$
$$z_{min} = 2x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + x_{14} + 3x_{21} + x_{22} + 2x_{23} + 5x_{24} + $$
$$+ x_{31} + 2x_{32} + 4x_{33} + 3x_{34} + 5x_{41} + 4x_{42} + x_{43} + x_{44} \qquad (3)$$

Кўриниб турибдики, агар $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

бўлса, „фиктив истеъмолчи“ ёки„ ишлаб чиқарувчи“ни қўшиб, транспорт масаласининг

$$\sum_{i=1}^{n+1} Q_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \quad \text{ёки} \quad \sum_{i=1}^{n} Q_i = \sum_{j=1}^{m+1} b_j$$

ёпиқ ҳолатига келтирамиз.

Энди $a_{ij} > b_j$ ва c_{ij} ларни мос равишда перфолента (перфокарта) га ёзиб „Наири-2“ га киритамиз. Шуни унутмаслик керакки, дастлабки маълумотлар 45-адресдан бошлаб киритилди.

Агар дастлабки маълумотлар тўғри тайёрланиб, ҳисоблаш машинаси „Наири-2“ га тўғри киритилган бўлса, „печать“га қуйидаги сонлар чиқади:

340 710 650 600 620 680 640 540 2 2 3 1
3 1 2 5 1 2 4 3 5 4 1 1

кейин бир нечта сонлар (булар машинанинг ички ҳисоблашларига тегишли ёзилиб, сўнгра

I	J	X[IJ]
3	1	620
2	2	680
2	3	30
4	3	430
1	4	340
3	4	30
4	4	170

кўринишдаги ечим ҳосил бўлади.

Топилган қийматларни қуйидаги жадвал кўринишида берсак масаланинг ечими яна ҳам равшан бўлади.

	620	680	460	540
340	2	2	3	1 340
710	3	1 680	2 30	5
650	1 620	2	4	3 30
600	5	4	1 430	1 170

Транспорт харажатлари эса

$z_{min} = 1.340 + 1.680 + 2.30 + 1.620 + 3.30 + 1.430 + 1.170 = 340 + 680 + 60 + 620 + 90 + 430 + 170 = 2390$

сўм бўлар экан.

3-§. Масалани стандарт Симплекс программаси орқали ЕС - ЭҲМ да ечиш

Математик программалаш (хусусан чизиқли программалаш) масалаларини ҳал этишда изланаётган номаълумлар қанча кўп булса, масалани ечиш анча мураккаблашиб боради. Масалани ечиш учун керакли бўлган дастлабки маълумотларни йиғиш ва анализ қилиш, унинг дастлабки матрицасини тузиш, ечимни одатдаги усулда (қўлда) топиш босқичлари ҳаддан ташқари кўпайиб кетиб, ҳисоблаш ишларини анча мураккаблаштиради. Бу эса айрим ноаниқликлар ва хатоликларга олиб келиши мумкин. Шунинг учун бу қийинчиликларни бартараф этишда ЭҲМ дан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. ЭҲМ ларнинг типлари ва турларига кўра тузилган ва амалда фойдаланилаётган стандарт программалар халқ хўжалик масалаларини ҳал этишда ижобий натижалар бермоқда. Ана шундай стандарт программалар Симплекс методи учун „Минск", ЕС- ЭҲМ ларнинг хусусиятларига мос ҳолда тузилгандир.

Энди чизиқли программалаш масалаларини ЕС- типидаги ЭҲМ лар учун PL/1 „машина тили" да ёзилган стандарт Симплекс программасидан фойдаланиб ечиш босқичларини кўриб ўтайлик.

1- босқич. Масаланинг қўйилиши ва дастлабки матрицани тайёрлаш, қуйида берилган масаланинг оптимал ечимини топиш талаб этилсин. 40—50 кг оғирликдаги 4—5 ойлик чўчқаларни боқиш учун шундай оптимал рацион тузиш плани топилсинки, натижада уларнинг ўртача бир суткалик семириши 450 г дан кам бўлмасин ва рационнинг нархи энг арзон (тийин) бўлсин. Бунинг учун хўжаликда чўчқаларга ем тайёрлаш учун сули, майдаланган буғдой, арпа, ўт толқони, картошка, маккажўхори силоси, ем учун аралашма, суяк уни, майдаланган балиқ ва бўр кабилар мавжуд.

Маълумки, 40—50 кг оғирликдаги чўчқаларнинг ўртача бир суткалик семиришини 450 граммга етказиш учун, унга тайёрланадиган рацион таркибида энг камида 2,3 ем бирлиги, 259 г ҳазм бўлувчи протеин, 16 г кальций, 10 г фосфор, 10 мг каротин, 15, 52 г лизин, 11,4 г метионин ва 2,7 г триптофон моддалари бўлиши керак.

Рацион тузиш учун фойдаланиладиган озуқа моддаларининг сарфланиш нормалари ва рацион баҳоси ҳам мавжуд (2- жадвалга қаранг). Энди рационда мос равишда қанчадан ишлатиладиган маҳсулот ҳажмини x_i билан белгилаб ушбу 1- жадвални ҳосил қиламиз.

1- жадвал

Номаълум (x_i) миқдорлар (кг)

Ем тури	Номаълум миқдорлар	Ем	Номаълум миқдорлар
Сули		Маккажўхори силоси	
Майдаланган буғдой		Ем учун аралашма	
Арпа		Суяк уни	
Ўт толқони		Майдаланган балиқ	
Картошка		Бўр	

Юқоридаги берилганларга асосан оптимал рацион тузиш масаласининг математик модели қуйидагича бўлади:

I 1. $x_1 + 0,71x_2 + 1,13x_3 + 0,64x_4 + 0,31x_5 + 0,14x_6 +$
$+ 0,12x_7 + 0,9x_8 + 0,32x_9 > 2,3,$

2. $85x_1 + 11x_2 + 80x_3 + 120x_4 + 14x_5 + 12x_6 + 8x_7 + 340x_8 + 150x_9 \geqslant 259,$

3. $1{,}7x_1 + 2{,}0x_2 + 1{,}2x_3 + 9{,}9x_4 + 0{,}2x_5 + 1{,}7x_6 + 0{,}5x_7 + 31{,}8x_8 + 9{,}9x_9 + 374x_{10} \geqslant 16,$

4. $3{,}3x_1 + 9{,}6x_2 + 3{,}3x_3 + 2{,}5x_4 + 0{,}9x_5 + 0{,}4x_6 + 0{,}4x_7 + 14{,}5x_8 + 7{,}9x_9 \geqslant 10,$

5. $4{,}0x_2 + 1{,}0x_3 + 150x_4 + 120x_6 \geqslant 10,$

6. $4{,}0x_1 + 6{,}7x_2 + 5{,}3x_3 + 10{,}8x_4 + 5{,}1x_5 + 2{,}8x_6 + 2{,}5x_7 + 28{,}8x_8 + 61{,}7x_9 \geqslant 15{,}52,$

7. $3{,}4x_1 + 4{,}8x_2 + 4{,}3x_3 + 6{,}2x_4 + 3{,}5x_5 + 2{,}8x_6 + 2{,}2x_7 + 14{,}8x_8 + 33{,}3x_9 \geqslant 11{,}4,$

8. $1{,}5x_1 + 2{,}2x_2 + 1{,}9x_3 + 3{,}1x_4 + 2{,}0x_5 + 0{,}8x_6 + 1{,}5x_7 + 4{,}6x_8 + 6{,}9x_9 \geqslant 2{,}7.$

II $z = 5{,}3x_1 + 5{,}6x_2 + 5{,}3x_3 + 10{,}1x_4 + 6{,}6x_5 + 1{,}1x_6 + 6{,}4x_7 + 26x_8 + 21{,}8x_9 + 2{,}1x_{10} \to \min.$

III $x_i \geqslant 0 \ (i = 1, 2, 3, \ldots, 10).$

Оптимал рацион тузишнинг дастлабки матрицаси 2- жадвалда берилган.

2- босқич. Дастлабки маълумотларни ЭҲМ га тайёрлаш. Берилган масалани ЭҲМ да ечиш учун керакли бўлган дастлабки маълумотларни киритишга тайёрлаймиз. Маълумки, ҳар қандай бошланғич маълумотларни ҳисоблаш машиналарига перфолента, перфокарта, магнитли лента кабилар орқали киритиш мумкин. Оптимал рацион тузиш масаласининг дастлабки маълумотлари масалан, ЕС-1022 ҳисоблаш машинасига перфокарта (айрим ҳолларда магнитли лента) орқали киритилади 2-жадвалда кўрсатилган дастлабки маълумотларни 80 позицияли перфокартага ўтказиш учун уларни 3- жадвал шаклида ёзамиз.

3-жадвалдан кўриниб турибдики, дастлабки маълумотлар жами 99 перфокартага жойлашар экан. Энди стандарт симплекс программага мурожаат қилиш, маълумотларни ёзиш ва чиқариш учун қўшимча бошқариш перфокарталарини ҳам тайёрлаймиз. Бу бошқариш перфокарталари 4- жадвалда кўрсатилган.

4- жадвалдаги дастлабки 6 та перфокартани 3- жадвалдаги перфокарталар (уларнинг сони 99 эди) олдига, қолган 12 тасини эса охирига қўйиб ЕС-1022 машинасига киритамиз.

2- жадвал

№	Шартлар	Ўлчов бирлиги	Сули x_1	Майдаланган буғдой x_2	Арпа x_3	Ўт тоқони x_4	Картошка x_5	Маккажўхори силоси x_6	Ем учун аралашма x_7	Суяк уни x_8	Майдаланган балиқ	Бўр	Чегаравий шартлар	Мавжуд ресурслар
1	Ем бирлиги	кг	1	0,71	1,13	0,64	0,31	0,14	0,12	0,9	0,32	—	>	2,37
2	Ҳазм қилувчи протеин	г	85	114	80	120	14	12	8	340	150	—	>	259
3	Кальций	—"—	1,7	2,0	1,2	9,9	0,2	1,7	0,5	31,8	9,9	374	>	16
4	Фосфор	—"—	3,3	9,6	3,3	2,5	0,9	0,4	0,4	14,5	7,9	—	>	10
5	Каротин	мг	—	4,0	1,0	150	—	20	—	—	—	—	>	10
6	Лизин	г	4,0	6,7	5,3	10,8	5,1	2,8	2,5	28,8	61,7	—	>	15,52
7	Метионин	—"—	3,4	4,8	4,3	6,2	3,5	2,8	2,2	14,8	33,3	—	>	11,4
8	Триптофан	—"—	1,5	2,2	1,9	3,1	2,0	0,8	1,5	4,6	6,9	—	≥	2,7
	Рацион баҳоси	тийин	5,3	5,6	5,3	10,1	6,6	1,1	6,4	26	21,8	2,1	→	min

1 . . .	5 . . .	15	25 . . . .
1)	x_{01}	y_{01}	1.0
2)	x_{02}	y_{01}	0.71
3)	x_{03}	y_{01}	1.13
4)	x_{04}	y_{01}	0.64
5)	x_{05}	y_{01}	0.31
6)	x_{06}	y_{01}	0.14
7)	x_{07}	y_{01}	0.12
8)	x_{08}	y_{01}	0 9
9)	x_{09}	y_{01}	0.32
10)	x_{10}	y_{01}	0.0
11)	x_{01}	y_{02}	85.0
12)	x_{02}	y_{02}	114 0
13)	x_{03}	y_{02}	80.0
14)	x_{04}	y_{02}	120.0
15)	x_{05}	y_{02}	14.0
16)	x_{06}	y_{02}	12.0
17)	x_{07}	y_{02}	8.0
18)	x_{08}	y_{02}	340.0
19)	x_{09}	y_{02}	150.0
20)	x_{10}	y_{02}	0.0
21)	x_{01}	y_{03}	1.7
22)	x_{02}	y_{03}	2.0
23)	x_{03}	y_{03}	1.2
24)	x_{04}	y_{03}	9.9
25)	x_{05}	y_{03}	0.2
26)	x_{06}	y_{03}	1.7
27)	x_{07}	y_{03}	0 5
28)	x_{08}	y_{03}	31.8
29)	x_{09}	y_{03}	9.9
30)	x_{10}	y_{03}	374.0
31)	x_{01}	y_{04}	3.3
32)	x_{02}	y_{04}	9.6
33)	x_{03}	y_{04}	3.3
34)	x_{04}	y_{04}	2.5
35)	x_{05}	y_{04}	0.9
36)	x_{06}	y_{04}	0.4
37)	x_{07}	y_{04}	0.4
38)	x_{08}	y_{04}	14.5
39)	x_{09}	y_{04}	7.9
40)	x_{10}	y_{04}	0.0
41)	x_{01}	y_{05}	0.0
42)	x_{02}	y_{05}	4.0
43)	x_{03}	y_{05}	1.0
44)	x_{04}	y_{05}	150.0
45)	x_{05}	y_{05}	0.0
46)	x_{06}	y_{25}	20.0
47)	x_{07}	y_{05}	0.0
48)	x_{08}	y_{05}	0.0

Давоми

1	5	15	25 . . . .
49)	x_{09}	y_{05}	0.0
50)	x_{10}	y_{05}	0.0
51)	x_{01}	y_{06}	4.0
52)	x_{02}	y_{06}	6.7
53)	x_{03}	y_{06}	5.3
54)	x_{04}	y_{06}	10.8
55)	x_{05}	y_{06}	5.1
56)	x_{06}	y_{06}	2.8
57)	x_{07}	y_{06}	2.5
58)	x_{08}	y_{06}	28.8
59)	x_{09}	y_{06}	61.7
60)	x_{10}	y_{06}	0.0
61)	x_{01}	y_{07}	3.4
62)	x_{02}	y_{07}	4.8
63)	x_{03}	y_{07}	4.3
64)	x_{04}	y_{07}	6.2
65)	x_{05}	y_{07}	3.5
66)	x_{06}	y_{07}	2.8
67)	x_{07}	y_{07}	2.2
68)	x_{08}	y_{07}	14.8
69)	x_{09}	y_{07}	33.3
70)	x_{10}	y_{07}	0
71)	x_{01}	y_{08}	1.5
72)	x_{02}	y_{08}	2.2
73)	x_{03}	y_{08}	1.9
74)	x_{04}	y_{08}	3.1
75)	x_{05}	y_{08}	2.0
76)	x_{06}	y_{08}	0.8
77)	x_{07}	y_{08}	1.5
78)	x_{08}	y_{08}	4.6
79)	x_{09}	y_{08}	6.9
80)	x_{10}	y_{08}	0
81)	x_{01}	y_{09}	5.3
82)	x_{02}	y_{09}	5.6
83)	x_{03}	y_{09}	5.3
84)	x_{04}	y_{09}	10.1
85)	x_{05}	y_{09}	6.6
86)	06	09	1.1
87)	07	09	6.4
88)	08	09	26.0
89)	09	09	21.8
90)	10	09	2.1
91) __ LB __	OG	01	2.3
92) __ LB __	OG	02	259.0
93) __ LB __	OG	03	16.0
94) __ LB __	OG	03	10.0
95) __ LB __	OG	04	10.0
96) __ LB __	OG	06	15.52
97) __ LB __	OG	07	11.4
98) __ LB __	OG	08	2.7
99) __ LB __	OG	09	0.0

4- жадвал

```
1. // _ JØB _ 107008 _ КАФ _ КИБ
2. // _ ASSIGN _ SYS001, X' 191'
3. // _ ASSIGN _ SYS005, X' 191'
4. // _ EXEC _ DFVZMØSS
5. INPUT
6. NAME _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ SIMPL
7. ENDATA
8. MØVE
9. _ _ _ DATA _ _ _ _ _ _ SIMPL
10. _ _ _ _ BØUNDS _ _ _ _ ØG
11. _ _ _ _ MINIMIZE _ Y9
12. ENDATA
13. LPSØLUTIØN
14. END
15. /*
16. /&
```

Шуни эслатиб ўтиш керакки, агар қўйилган масала максимумда ечилса, 4- жадвалдаги 11- перфокартани

```
_ _ _ _ MAXIMIZE _ Y9
```

кўринишда ўзгартириш керак. Мақсад функциясидаги коэффициентларни, яъни 2-жадвалдаги 9- қатор элементларини манфий ишора билан ёзиш орқали ҳам масалани максимум қийматда ечиш мумкин.

Агар дастлабки маълумотлар ва бошқариш перфокарталари тўғри киритилган бўлса, ЭҲМ дан махсус формада масаланинг ечими олинади.

3- босқич. ЭҲМ дан олинган натижани анализ қилиш. Агар дастлабки маълумотлар ва бошқарувчи перфокарталар (улар 16 та) ЕС-ЭҲМ га тўғри киритилган бўлса, натижа қуйидагича берилади (5- жадвал).

Бу жадвалда XI ва YI ўзгарувчилар қайси турга мансублиги ($\leqslant$, $>$, $=$) ўзгарувчи XI ва YJ нинг изланаётган оптимал қийматлари; ўзгарувчиларга мос келадиган коэффициентлар; мос коэффициент билан ўзгарувчининг топилган қиймати кўпайтмаси берилади. Жадвалнинг охирги қаторида эса мақсад функциясининг оптимал қиймати ҳисобланади. Жадвалдан кўриниб турибдики, изланаётган ўзгарувчиларнинг оптимал қиймати

$$x_2 = 1{,}505;\ x_3 = 1{,}073;\ x_6 = 0{,}146;$$
$$x_{10} = 0{,}031;\ z = 14{,}331 \approx 14 \text{ (тийин).}$$

VARIABLE	TYPE	ENTRIES	SOLUTION ACTIVITY	UPPER BOUND	LOWER BOUND	CURRENT COST	REDUCED COST
X01	LL	9	0.0	***********	0.0	5.300	-0.132
Y01	LL	0	2.300	***********	2.300	0.0	-2.223
X02	B*	9	1.505	***********	0.0	5.600	0.0
X03	B*	9	1.073	***********	0.0	5.300	0.0
X04	LL	9	0.0	***********	0.0	10.100	-1.742
X05	LL	9	0.0	***********	0.0	6.600	-5.427
X06	B*	9	0.146	***********	0.0	1.100	0.0
X07	LL	9	0.0	***********	0.0	6.400	-5.855
X08	LL	9	0.0	***********	0.0	26.000	-12.078
X09	LL	9	0.0	***********	0.0	21.800	-15.853
X10	B*	9	0.031	***********	0.0	2.100	0.0
Y02	LL	0	259.000	***********	259.000	0.0	-0.035
Y03	LL	0	16.000	***********	16.000	0.0	-0.006
Y04	B*	0	18.037	***********	10.000	0.0	-0.000
Y05	LL	0	10.000	***********	10.000	0.0	-0.019
Y06	B*	0	16.169	***********	15.520	0.0	0.0
Y07	B*	0	12.239	***********	11.400	0.0	0.0
Y08	B*	0	5.463	***********	2.700	0.0	0.0
Y09	B*	0	14.331	***********	0.0	-1.000	1.000

Топилган бу ечимни берилган дастлабки маълумотлар билан солиштириб қуйидаги 6-жадвални ҳосил қиламиз.

6- жадвал

Тартиб номери	Озуқа бирлиги	Ресурслар		Фарқ ёки иқтисодий самара
		берилган вариантда	оптимал вариантда	
1.	Ем бирлиги (кг)	2,3	2,3	—
2.	Протеин (гр)	259	259	—
3.	Кальций (гр)	16	16	—
4.	Фосфор (гр)	10	18,037	0.037
5.	Каротин (гр)	10	10	—
6.	Лизин (гр)	15,52	16,169	0,649
7.	Метионин (гр)	11,4	12,239	0,839
8.	Триптофан (гр)	2,7	5,463	2,763

Жадвалдан кўриниб турибдики, берилган моддалар бўйича оптимал рацион тузиш учун фосфордан 18 г, лизин моддасидан 16 гр, метиониндан 12 гр ва триптофандан эса 5 гр фойдаланилганда рационнинг баҳоси хўжаликка энг арзон, яъни 14 тийинга тушар экан.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

1. **Абрамов Л М., Капустин В. Ф** Математическое программирование, изд. Ленинградского университета, Ленинград, 1976 г.
2. **Бирман И. Я** Транспортная задача линейного программирования, изд. „Экономика", М., 1962 г.
3. Гасс С. Линейное программирование. „Физматгиз", М., 1961 г.
4. **Искандаров Р., Назаров Р** Алгебра ва сонлар назарияси, I қисм, „Ўқитувчи" нашриёти, Тошкент, 1977 й.
5. **Карпелевич Ф. И, Садовский Л. Е.** Элементы линейной алгебры и линейного программирования Изд-во „Наука". М., 1967 г.
6. **Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. И., Волощенко А Б.** Математическое программирование, М., „Высшая школа", 197[illegible] г.
7. **Калихман И. Л.** Линейная алгебра и программирование, М., „Высшая школа", 1967 г.
8. **Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И.** „Линейное и выпуклое программирование", Изд-во „Наука", М., 1964 г.
9. **Заславский Ю Л** Сборник задач по линейному программированию. Изд-во „Наука", М., 1969 г.
10. **Солодавников А. С.** Введение в линейную алгебру и линейное программирование, Изд-во „Просвещение", М., 1966 г.
11. **Қучқоров А., Мизрапов У.** Қишлоқ хўжалигини планлаштиришда математик методлар. Тошкент, „Ўқитувчи" нашриёти, 1975 й.
12. **Адҳамов М., Огабоев Т.** Планлаштиришда математик методларни қўллаш, Тошкент, „Ўқитувчи" нашриёти, 1982 й.

МУНДАРИЖА

На узбекском языке

Абдували Кучкаров и Уракбай Мизрапов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

(Учебное пособие для студентов сельхозвузов)

Ташкент „Ўқитувчи" 1985

Махсус редактор *Адҳамов М.*
Редактор *Умарова М.*
Бадиий редактор *Федоров П.*
Техредактор *Картаева Е.*
Корректор *Аъзамова П.*

ИБ № 3238

Теришга берилди 6. 09 84 й, Босишга рухсат этилди 4.05.85. Р-01664. Формат 84×108 1/32. Литературная гарнитураси. Кегль 10, 8 шпонсиз. Тип. қоғози № 3. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л. 9,24. Шартли кр.-отт. 9,40. Нашр. л. 7,62. Тиражи 4000. Заказ № 210. Баҳоси 45 т.

„Ўқитувчи" нашриёти. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома 7—125—83.

Область газеталарининг М. В. Морозов номидаги босмахонаси ва бирлашган нашриети. Самарқанд. У. Турсунов кўчаси, 82 1985.

Объединенное издательство и типография областных газет имени М. В. Морозова. Самарканд, ул. У. Турсунова, 82.