Ш.И.Тожиев

ОЛИЙ МАТЕМАТИКАДАН МАСАЛАЛАР ЕЧИШ

Ш. И. ТОЖИЕВ

ОЛИЙ МАТЕМАТИКАДАН МАСАЛАЛАР ЕЧИШ

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги олий техника ўқув юртлари талабалари учун дарслик сифатида тавсия этган

ТОШКЕНТ «ЎЗБЕКИСТОН» 2002

Тақризчилар: Ўзбекистон Миллий университети профессори, физика-математика фанлари доктори, акад. **Н. Ю. Сатимов.**

ТошДТУ доценти, физика-математика фанлари номзоди **Э. Қаюмов.**

Физика-математика фанлари доктори, профессор **Ф.У.Носиров** таҳрири остида.

Дарслик Олий техника университети ва техника институтлари талабалари учун мўлжалланган булиб, ундан сиртқи булим талабалари ҳам фойдаланишлари мумкин.

Ушбу дарслик 8 бобдан иборат булиб, 7 та боби биринчи курсда амалий машғулот дарсларида утиладиган «Олий математика» курсини тулиқ уз ичига олади.

Ҳар бир параграф бошида зарур бўлган қисқача назарий маълумот, сунгра мисол ва масалалар батафсил ечиб курсатилган. Параграф охирида талаба мустақил ечиши учун етарли миқдорда мисол ва масалалар келтирилган. Ҳар бир бобнинг охирида талабалар мустақил уй иши бажариши учун вариантлар ва бу вариантларни ечиш намунаси келтирилган.

8-бобда олий математика татбиқига доир масалалар ва олий математикадан ёзма иш утказиш вариантлари келтирилган.

$\text{Т}\,\dfrac{1602010000-12}{\text{М }351\,(04)2002}\,2002$

ISBN 5-640-03140-9

СЎЗ БОШИ

Мазкур дарслик техника олий ўқув юртларида таълим олаётган биринчи курс талабаларга мўлжалланган бўлиб, бакалавр мутахассислар тайёрлайдиган бундай ўқув юртлар учун тасдиқланган «Олий математика» дастури асосида ёзилган.

Дарсликни ёзишда муаллифнинг Абу Райҳон Беруний номидаги Тошкент Давлат техника университети талабаларига «Олий математика» курсидан кўп йиллар давомида ўқиган маърузалари ва муттасил амалий машғулотлар олиб бориш тажрибаларидан ҳамда олий математикага доир рус ва ўзбек тилларидаги мавжуд ўқув қўлланма ва дарсликлардан фойдаланилди.

Бу дарсликдан бошқа ихтисосдаги (олий математикадан кам соат ажратилган) ўқув юртлари ҳамда техника олий ўқув юртларининг сиртқи бўлим талабалари бемалол фойдаланишлари мумкин.

Олий математика курси бўйича олиб бориладиган амалий машғулот материаллари бобларга бўлинган бўлиб, ҳар бир тема бошида масала ва мисолларни ечишда керак бўладиган зарур назарияга оид маълумотлар (асосий таъриф, тушунчалар, теоремалар, формулалар) берилди.

Сўнгра амалий машғулот дарсида мустақил ёки доскада ечиш учун мисол ва масалалар берилди.

Ҳар бир бобнинг охирида 25 та вариантдан иборат (1—4 тагача) мустақил уй иши ва бу вариантларни ечиш намунаси келтирилди. Гуруҳ журнал рўйхат номери билан вариант номери тўғри келган вариантдаги мисол ва масалаларни талабалар алоҳида дафтарга бажаришлари керак.

Саккизинчи бобда талабаларнинг олий математикадан олган билимларини амалда татбиқ қила билишлари учун юздан ортиқ масала ва машқлар (зарур бўлган жойларда методик кўрсатмалар билан) берилди.

2-§ да амалий машғулот дарсида ёзма иш ўтказиш вариантидан намуналар берилди.

Дарсликни тайёрлашда ўзларининг қимматли ёрдамларини аямаганлари учун Ўзбекистон Миллий университети «Оптимал бошқарув назарияси» кафедраси мудири академик Н.Ю. Сатимовга ва «Математик анализ» кафедраси доценти Т.Т.Туйчиевга, Тошкент Давлат техника университети биринчи ва иккинчи «Олий математика» кафедраси мудирлари Х.Р.Латипов ва Ф. У. Носировларга ҳамда доцент Э. Қаюмовга муаллиф ўз миннатдорчилигини билдиради.

Қўлланма ҳақида билдирилган фикр ва мулоҳазаларни мамнуният билан қабул қилинади.

Муаллиф

I боб

ФУНКЦИЯЛАР. ЛИМИТЛАР. ФУНКЦИЯНИНГ УЗЛУКСИЗЛИГИ

1-§. Сонли тўпламлар.

Функциянинг таърифи ва берилиш усуллари

Барча рационал (**Q**) ва иррационал (**I**) сонлар тўплами биргаликда ҳақиқий сонлар тўпламини ташкил қилади. Ҳақиқий сонлар тўплами **R** ҳарфи билан белгиланади.

Тўғри чизиқдаги нуқталар тўплами билан **R** тўплам орасида ҳар доим ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш мумкин. Агар бу мослик ўрнатилган бўлса, у ҳолда тўғри чизиқ *сонлар ўқи* дейилади. Қуйидаги $a<x<b$ $(a\le x\le b)$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳамма х сонлар тўплами очиқ (ёпиқ) оралиқ ёки интервал (кесма, сегмент) дейилади ва $(a;b)$ ёки $]a;b[$ $([a;b])$ кўринишларнинг бири билан белгиланади, $a\le x<b$ $([a;b))$ ва $a<x\le b$ $((a;b])$ лар эса ярим очиқ интерваллар дейилади.

Ҳақиқий сон a нинг *абсолют қиймати* (*модули*) қуйидагича аниқланади:

$$|a| = \begin{cases} -a, \text{ агар } a<0 \text{ бўлса,} \\ a, \text{ агар } a>0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Ихтиёрий иккита a ва b ҳақиқий сон учун 1) $|a+b|\le |a|+|b|$, 2) $|a|-|b|\le|a-b|$, 3) $\frac{|a|}{|b|}=\frac{|a|}{|b|}$ $(b\ne 0)$ муносабатлар ҳар доим тўғридир.

Таъриф. D ва E тўпламлар берилган бўлсин. Агар D тўпламдаги ҳар бир x сонга бирор қоида ёки қонунга кўра $E=\{f(x), x\in \mathrm{D}\}$ тўпламдан битта y сон мос қўйилса, D тўпламда *функция* берилган (аниқланган) деб аталади ва у $y=f(x)$ каби белгиланади, бунда *х эркли ўзгарувчи* ёки *аргумент* дейилади.

Бу таърифдаги D ва E лар орасидаги боғланиш *функционал боғланиш* дейилади.

D тўплам функциянинг *аниқланиш соҳаси* дейилади. E тўплам, яъни D нинг ҳар бир x элементига мос келган $f(x)$ элементлар тўплами функциянинг *ўзгариш соҳаси* дейилади.

D ва E тўпламлар $[a;b]$ кесма, $(a;b)$ интервал, $(a;b]$ ёки $[a;b)$, ярим интерваллар, сон ўқининг бирор нуқтаси, бутун сон ўқи $(-\infty;+\infty)$ бўлиши мумкин.

Функциялар *жадвал, график, аналитик* усулларда берилиши мумкин: $y = f(x)$ функция аналитик усулда берилганда унинг D ва E соҳалари берилмаган бўлиши мумкин, аммо уларни $f(x)$ функциянинг хоссаларидан фойдаланиб аниқланади.

Мисол. $y = \lg(4 - 3x - x^2)$ функциянинг аниқланиш ва ўзгариш соҳаларини топинг.

Ечиш. Логарифмик функция $4 - 3x - x^2 > 0$ бўлганда маънога эга бўлади. Квадрат учҳаднинг илдизлари $x_1 = -4$, $x_2 = 1$ бўлгани учун юқоридаги тенгсизликни $-(x + 4)(x - 1) > 0$ кўринишда ёзиб оламиз.Бундан $x > -4$ ва $x < 1$ келиб чиқади. Демак, функциянинг аниқланиш соҳаси, яъни x нинг берилган функция маънога эга бўладиган қийматлари тўплами (D) $(-4;1)$ интервалдан иборат. D соҳада функциянинг қийматлари $0 < 4 - 3x - x^2 \le \frac{25}{4}$ оралиқда ўзгаргани учун (бунда $y_0 = \frac{25}{4}$ берилган функция аниқлайдиган парабола учининг ординатаси) $\left(-\infty; \lg\left(\frac{25}{4}\right)\right)$ интервал E соҳадан иборат бўлиб, у функциянинг қийматлари тўплами бўлади.

Агар D соҳани E соҳага акслантирганда ўзаро бир қийматли мослик, яъни $y = f(x)$ функция бажарилса, у ҳолда x ни у орқали $x = g(y)$ каби ифодалаш мумкин. Охирги функция $y = f(x)$ функцияга *тескари функция* дейилади. $x = g(y)$ функция учун E — аниқланиш соҳаси D эса функциянинг ўзгариш соҳаси бўлади. $g(f(x)) = x$ ва $f(g(y)) = y$ бўлгани учун $y = f(x)$ ва $x = g(y)$ функциялар *ўзаро тескари функциялар* бўлади.

Одатда $x = g(y)$ тескари функциядаги x ни y билан, y ни x билан алмаштириб $y = g(x)$ кўринишда ёзилади. Масалан, $y = x^3$ ва $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 2^x$ ва $y = \log_2 x$, $y = \sin x$ ва

$y = \arcsin x$ ҳар бир жуфт функциялар ўзаро тескари функциялар. Уларнинг аниқланиш соҳаси мос равишда қуйидагича:

$$x\in(-\infty;+\infty) \text{ ва } x\in(-\infty;+\infty),\ x\in(-\infty;+\infty) \text{ ва } x\in(0;+\infty),$$
$$x\in(-\infty;+\infty) \text{ ва } x\in[-1;+1].$$

Агар $u = \varphi(x)$ функция D соҳада аниқланган, G унинг ўзгариш соҳаси, $y = f(u)$ функция G соҳада аниқланган бўлса, у ҳолда $y = f[\varphi(x)] = F(x)$ функция *мураккаб функция* дейилади.

$y = f[\varphi(x)]$ мураккаб функция $y = f(u)$ ва $u = \varphi(x)$ функцияларнинг *композицияси* дейилади.

Функцияларнинг композицияси бир нечта функциялардан иборат бўлиши мумкин. Масалан, $y = \sin(x^2 + 1)$ функция $y = \sin u$ ва $u = x^2 + 1$, яъни иккита функциянинг композицияси бўлса, $y = \lg(\cos 2^{x^2})$ функция эса учта: $y = \lg u$, $u = \cos v$, $v = 2^w$, $w = x^2$ функцияларнинг композициясидан иборатдир u, v, w ўзгарувчилар *оралиқ аргументлари* дейилади.

Агар бирор $(a;b)$ оралиқда аниқланган $y = f(x)$ функция $F(x,y) = 0$ тенгламани қаноатлантирса, у ҳолда $y = f(x)$ функция $F(x,y) = 0$ тенглик билан аниқланган *ошкормас функция* дейилади. Функцияни ошкор кўринишга келтириш учун $F(x,y) = 0$ тенгликдан y ни топиш керак. y ни ҳар доим ҳам топиб бўлавермайди, баъзан эса умуман топиб бўлмайди. Масалан, $y + x \cdot 3^y = 1$ тенгламани y га нисбатан умуман ечиб бўлмайди.

Текисликнинг $(x; f(x))$ каби аниқланган нуқталаридан иборат ушбу

$$\{(x; f(x))\} = \{(x; y) : x\in X,\ y = f(x)\in Y\}$$

тўплам $y = f(x)$ функциянинг графиги деб аталади. Мураккаб функцияларнинг графиги уларнинг ординаталари устида (қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш, даражага кўтариш, илдиз чиқариш, логарифмлаш ва ҳ.к.) амаллар бажариш ёрдамида тақрибан чизилади.

Даражали, кўрсаткичли, логарифмик, тригонометрик ва тескари тригонометрик функциялар *асосий элементар функциялар* дейилади.

1-жадвал

Асосий элементар функцияларнинг аниқланиш ва ўзгариш соҳалари

№	Функция	Функциянинг аниқланиш соҳаси	Функциянинг ўзгариш соҳаси
1.	$y = x^n$, n —натурал сон	$(-\infty;+\infty)$	n жуфт бўлганда: $[0;+\infty)$, n тоқ бўлганда: $(-\infty;+\infty)$
2.	$y = \sqrt[2n]{x}$	$[0;+\infty)$	$[0;+\infty)$
3.	$y = \sqrt[2n+1]{x}$	$(-\infty;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$
4.	$y = a^x$	$(-\infty;+\infty)$	$(0;+\infty)$
5.	$y = \lg x$	$(0;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$
6.	$y = \sin x$	$(-\infty;+\infty)$	$[-1;+1]$
7.	$y = \cos x$	$(-\infty;+\infty)$	$[-1;+1]$
8.	$y = \mathrm{tg}\, x$	$\left((2n-1)\frac{\pi}{2}; (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	$(-\infty;+\infty)$
9.	$y = \mathrm{ctg}\, x$	$(n\pi;(n+1)\pi)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	$(-\infty;+\infty)$
10.	$y = \arcsin x$	$[-1;+1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$
11.	$y = \arccos x$	$[-1;+1]$	$[0; \pi]$
12.	$y = \mathrm{arctg}\, x$	$(-\infty;+\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right)$
13.	$y = \mathrm{arcctg}\, x$	$(-\infty;+\infty)$	$[0; \pi]$

Машқлар

Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳасини топинг:

1. $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$.

2. $y = \arccos \frac{2x}{1+x}$.

3. $y = \sqrt{25 - x^2} + \ln \sin x$.

4. $y = \lg(-x^2 - 5x + 6)$.

5. $y = \lg(2^{3x} - 4)$.

6. $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}}$.

Қуйидаги мураккаб функцияларни функцияларнинг композицияси кўринишида, яъни элементар функциялар кўринишида ёзинг:

7. $y = 2^{\sin \sqrt[3]{x}}$.

8. $y = \sqrt[5]{\lg \sin x^3}$.

9. $y = \mathrm{tg}\sqrt[3]{\lg x}$.

10. $y = \mathrm{arctg}\sqrt[3]{2x^4}$.

Қуйидаги функцияларнинг графигини чизинг:

11. $y = \frac{2x+3}{x-1}$.

12. $y = \left|3x + 4 - x^2\right|$.

13. $y = -2\sin(2x + 2)$.

14. $y = x \sin x$.

15. $y = \begin{cases} 1 + x, \text{ агар } a < 0 \text{ бўлса}, \\ 2 \sin x, \text{ агар } 0 \le x < \pi \text{ бўлса}, \\ x - \pi, \text{ агар } x \ge \pi \text{ бўлса}. \end{cases}$

Қуйидаги функцияларга тескари функцияларни топинг:

16. а) $y = 3x$;
б) $y = 1 - 5x$;
в) $y = x^2 + 1$;
г) $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$;
д) $y = 10^{x+1}$;
е) $y = 1 + \lg(x + 2)$;
ж) $y = \frac{2^x}{1 + 2^x}$;
з) $y = 2\sin 3x$.

2-§. Кетма-кетлик ва функциянинг лимити. Энг содда аниқмасликларни ечиш

1-таъриф. Агар ҳар қандай $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $n_0 = n_0(\varepsilon) > 0$ сон топилсаки (бунда n_0 — бутун сон), барча $n > n_0$ лар учун $|x_n - A| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда A сон $\{x_n\}$ сонли кетма-кетликнинг *лимити* дейилади ва бу

$$\lim_{n \to \infty} x_n = A$$

кўринишда ёзилади.

кўринишда ёзилади.

Лимитга эга бўлган кетма-кетлик *яқинлашувчи*, акс ҳолда эса *узоқлашувчи* кетма-кетлик дейилади.

1-мисол. $\{x_n\}=\left\{\frac{2n+3}{n+1}\right\}$ кетма-кетликнинг лимити $A=2$ га тенглигини исбот қилинг.

Исбот. Бу ҳолда $\{x_n\}=\left\{\frac{2n+3}{n+1}\right\}$, $A=2$. Ихтиёрий $\varepsilon>0$ сон оламиз ва $|x_n-A|$ айирманинг абсолют қийматини қараймиз:

$$|x_n-A|=\left|\frac{2n+3}{n+1}-2\right|=\left|\frac{2n+3-2n-2}{n+1}\right|=\frac{1}{n+1}<\varepsilon.$$

Охирги тенгсизликни ечиб $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$ ни ҳосил қиламиз, демак, $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]+1$ деб олиш мумкин. Шундай қилиб, n_0 сони мавжуд ва $n>n_0$ лар учун $|x_n-2|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилади. Бу эса $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+1}=2$ эканини билдиради.

$y=f(x)$ функция бирор x_0 нуқтанинг атрофида аниқланган бўлсин.

2-таъриф. Агар ҳар қандай $\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta>0$ $(\delta=\delta(\varepsilon))$ сон топилсаки, аргумент x нинг $0<|x-x_0|<\delta$ қийматлари учун $|f(x)-A|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, A сон $y=f(x)$ функциянинг $x\to x_0$ даги лимити дейилади ва бу қуйидагича ёзилади:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

3-таъриф. Агар ҳар қандай $\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)$ сон топилсаки, x аргумент нинг $x_0<x<x_0+\delta$ $(x_0-\delta<x<x_0)$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи барча $x\in X$ қийматларида $|f(x)-A|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, A сон $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги *ўнг (чап) лимити* деб аталади ва қуйидагича ёзилади:

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=A \text{ ёки } f(x_0+0)=A,$$

$$\left(\lim_{x\to x_0-0}f(x)=A \text{ ёки } f(x_0-0)=A\right).$$

Агар $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ лимит мавжуд бўлса, A сон $y=f(x)$ функциянинг $x\to\infty$ даги лимити дейилади.

Функциянинг чап ва ўнг лимитлари унинг *бир томонлама лимитлари* дейилади.

Агар иккала бир томонлама лимит мавжуд бўлиб, улар ўзаро тенг $(f(x_0-0)=f(x_0+0))$ бўлса, $f(x)$ функция $x\to x_0$ да лимитга эга дейилади.

Қуйидаги лимитлар ҳақидаги асосий теоремалар ўринли.

1-теорема. $\lim\limits_{x\to x_0}f_i(x)$ $(i=\overline{1,n})$ лимитлар мавжуд бўлсин.

У ҳолда

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{i=1}^{n}f_i(x)=\sum_{i=1}^{n}\lim_{x\to x_0}f_i(x),\ \lim_{x\to x_0}\prod_{i=1}^{n}f_i(x)=\prod_{i=1}^{n}\lim_{x\to x_0}f_i(x).$$

2-теорема. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ ва $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\neq 0$ лимитлар мавжуд бўлсин.

У ҳолда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}.$$

(Бу теоремалар $x_0=\pm\infty$ бўлганда ҳам ўринли).

Агар бу теорема шартлари бажарилмаса, $\infty-\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ ва бошқа кўринишдаги аниқмасликлар ҳосил бўлиб, уларни алгебраик алмаштиришлар ёрдамида ҳисоблаш мумкин. Умуман $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ аниқмасликлар мавжуд ва уларни ҳисоблашни мисолларда кўрсатамиз.

2-мисол. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)$ лимитни топинг.

Ечиш. Агар x ўрнига 2 ни қўйсак, $\infty-\infty$ кўринишдаги аниқмаслик ҳосил бўлади. Бу аниқмасликни ечиш учун қавс ичидаги ифодани умумий махражга келтирамиз. Натижада $\lim\limits_{x\to 2}\left(-\frac{2-x}{x^2-4}\right)$, яъни $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмаслик ҳосил бўлади. Агар $x-2\neq 0$ деб касрни қисқартирилса, аниқмаслик осонгина ечилади, яъни берилган лимит қуйидагига тенг бўлади:

$$\lim_{x\to 2}\left(-\frac{1}{x+2}\right)=-\frac{1}{4}.$$

Мисол 3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3-x^2+5}{x^3+x^2-x}$ лимитни топинг

Ечиш. Бу ҳолда $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликка эгамиз. Уни ечиш учун лимит белгиси остидаги касрнинг сурат ва махражини x^3 га бўламиз.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}.$$

Юқорида келтирилган лимитлар ҳақидаги теоремаларга кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3-x^2+5}{x^3+x^2-x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}=3.$$

Машқлар

17. $\{x_n\}=\left\{\frac{4n+5}{n-1}\right\}$ кетма-кетлик $A=4$ лимитга эга бўлишини исбот қилинг.

Қуйидаги функцияларнинг лимитини ҳисобланг:

18. а) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-4}{x^2-9}$.

19. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+3n-5}{1-n^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2+4x^2-3x^3}{7x-10-x^3}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{7x^2+10x+20}{x^3-10x^2+x}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-3x^3+3}{x^2-3}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-25}{\sqrt{x-1}-2}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2+1}\right)\right)$.

23. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{8-x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^3-3x^2+2}{x^2-7x+6}$.

24 а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)\right)$.

25. а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x^2-8x+3}{x^2-4x+3}$.

3-§. Ажойиб лимитлар

Мисол ва масалалар ечишда қуйидаги иккита ажойиб лимит жуда кўп ишлатилади:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$
2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e\approx 2{,}71828.$

1-мисол. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 3x}$ лимитни топинг.

Ечиш. Лимит белгиси остидаги каср $x\neq 0$ да маънога эга бўлгани учун касрни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз ва ечишни давом эттирамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 7x}{7x}\cdot 7x}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{7x}{3x}\right)\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{7}{3}.$$

2-мисол. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^{3x+1}$ лимитни топинг.

Ечиш.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^{3x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x-1+2}{3x-1}\right)^{3x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{2}{3x-1}\right)^{3x+1},$$

$\frac{2}{3x-1}=\frac{1}{y}$ деб белгилаймиз. У ҳолда $x=\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}$ ва $x\to\pm\infty$ да $y\to\pm\infty$ бўлади. Буларни ўрнига қўйиб, лимитни топамиз:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{2}{3x-1}\right)^{3x+1}=\lim_{y\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2(y+1)}=$$

$$=\lim_{y\to\pm\infty}\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right)^2\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right)^2=e^2,$$

бунда $\lim\limits_{y\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^2=1,\ \lim\limits_{y\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=e.$

Машқлар

Қуйидаги лимитларни топинг:

26. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}2x}{\sin 3x}$.
27. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos6x}{x\sin3x}$.
28. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin 2(x-1)}{x^2-7x+6}$.
29. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin 5x}{\sin 3x}$.
30. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x-\sin x}{5x}$.
31. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+3}{2x-1}\right)^{x}$.
32. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{4x-1}$.
33. $\lim\limits_{x\to\infty}((2x+1)(\ln(3x+1)-\ln(3x-2)))$
34. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{-5x}$.
35. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$.
36. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{6-2x}$.

4-§. Чексиз кичик функцияларни таққослаш. Узлуксиз функциялар

Агар $\lim\alpha(x)=0$, яъни ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ мавжуд бўлсаки, барча $0 < |x - x_0| < \delta$ лар учун $|\alpha (x)| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $\alpha(x)$ функция $x\to x_0$ да ($x\to x_0$ га интилганда) *чексиз кичик функция* дейилади.

Иккита $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ чексиз кичик функцияларни таққослаш учун улар нисбатининг $x\to x_0$ да лимити топилади:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C. \qquad (1.1)$$

Агар $0 < |C| < \infty$ бўлса, $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ функциялар $x \to x_0$ да бир хил тартибдаги чексиз кичик функциялар дейилади.

Агар $C = 0$ бўлса, $\alpha(x)$ функция $\beta(x)$ функцияга нисбатан юқори тартибдаги чексиз кичик функция, $\beta(x)$ функция $\alpha(x)$ функцияга нисбатан қуйи тартибдаги чексиз кичик функция дейилади.

Агар

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=C\ (0<|C|<\infty)$$

бўлса, у ҳолда $\alpha(x)$ функция $\beta(x)$ функцияга нисбатан $x \to x_0$ да k тартибли чексиз кичик функция дейилади.

Агар

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$$

бўлса, $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ чексиз кичик функциялар $x \to x_0$ да *эквивалент* (ёки тенг кучли) функциялар дейилади ва $\alpha(x)\sim\beta(x)$ каби белгиланади.

1-мисол. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\ln(1+x)}$ лимитни топинг.

Ечиш. $x \to 0$ да $\sin 5x \sim 5x$, $\ln(1 + x)\sim x$ функциялар ўзаро эквивалент бўлгани учун берилган лимитни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{5x}{x}=5.$$

Функция узлуксизлиги тушунчаси муҳим тушунчалардан ҳисобланади.

1) $f(x)$ функция $x = x_0$ нуқта ва унинг атрофида аниқланган;

2) x_0 нуқтада $f(x)$ функция лимитга эга;

3) функциянинг $x \to x_0$ даги лимити функциянинг x_0 нуқтадаги қийматига тенг, яъни

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0) \qquad (1.2)$$

бўлса, $y = f(x)$ функция $x = x_0$ нуқтада *узлуксиз* дейилади.

Агар x ўрнига $x = x_0+\Delta x$ ни қўйсак, (1.2) узлуксизлик шартига тенг кучли бўлган шартга эга бўламиз:

$$\lim_{\Delta x\to0}\Delta f(x)=\lim_{\Delta x\to0}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))=0,$$

яъни функция аргументининг x_0 нуқтадаги чексиз кичик орттирмаси Δx га функциянинг чексиз кичик орттирмаси $\Delta f(x)$ мос келганда ва фақат шунда $y = f(x)$ функция шу нуқтада узлуксиз бўлади.

Бирор соҳанинг ҳамма нуқталарида узлуксиз бўлган $y = f(x)$ функция шу соҳада узлуксиз дейилади.

2-мисол. Ихтиёрий $x \in R$ учун $y = \sin 5x$ функция узлуксиз эканини исбот қилинг.

Ечиш. Ихтиёрий Δx орттирма учун функциянинг орттирмаси қуйидагича бўлади:

$$\Delta y = \sin 5(x+\Delta x) - \sin 5x = 2\cos\left(5x + \frac{5}{2}\Delta x\right) \cdot \sin\frac{5}{2}\Delta x.$$

У ҳолда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 2\lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(5x + \frac{5}{2}\Delta x\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \sin\frac{5}{2}\Delta x = 0.$$

Демак, $y = \sin 5x$ функция сонлар ўқининг ҳамма нуқталарида узлуксиз.

Агар x_0 нуқтада функция узлуксизлигининг юқоридаги учта шартидан бирортаси бажарилмаса, x_0 нуқта *узилиш нуқтаси* дейилади.

Агар x_0 нуқтада $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ ва $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$ лимитлар мавжуд бўлиб, $f(x_0 - 0) \neq f\,(x_0 + 0)$ бўлса, x_0 нуқта *I тур узилиш нуқтаси* дейилади.

Агар $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ лимитлар ёки уларнинг бирортаси мавжуд бўлмаса ёки ∞ га тенг бўлса, x_0 нуқта *II тур узилиш нуқтаси* дейилади.

Агар x_0 нуқтада бир томонлама лимитлар мавжуд ва $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$ бўлса, у ҳолда x_0 нуқта *бартараф қилиниш мумкин бўлган узилиш нуқтаси* дейилади.

Масалан,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, \text{ агар } x \neq 0, \text{ бўлса,} \\ 2, \text{ агар } x = 2 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция учун $x = 0$ нуқта бартараф қилиниши мумкин бўлган узилиш нуқтаси бўлади.

Машқлар

Қуйидаги лимитларни топинг:

37. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sin 3(x-2)}{x^2 - 3x + 2}$.

38. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sin 3(x+1)}{x^2 + 4x - 5}$.

39. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{5x} - 1}{\sin 10x}$.

40. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{e^{\sin 7x} - 1}{x^2 + 3x}$.

41. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + 7x)}{\sin 7x}$.

42. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\mathrm{tg}\left(x^2 - 3x + 2\right)}{x^2 - 4}$.

43. $y = \dfrac{7x^8}{x^4 + 1}$ чексиз кичик функциянинг $x \to 0$ да x чексиз кичик миқдорга нисбатан тартибини аниқланг.

44. $y = \dfrac{3x+3}{2x+4}$ функциянинг узлуксизлик соҳасини аниқланг ва унинг узилиш нуқтасини топинг.

45. $y = 3^{\frac{1}{x+1}} + 1$ функциянинг $x_1 = 1$ ва $x_2 = -1$ нуқталарда узлуксизлигини текширинг.

46. $f(x) = \dfrac{2x+4}{3x+9}$ функциянинг $x_1 = -1$ ва $x_2 = -3$ нуқталарда узлуксизлигини текширинг ва чизмасини чизинг.

47. Ушбу $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, \text{ агар } x < 0 \text{ бўлса,} \\ \sin x, \text{ агар } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ бўлса,} \\ y = x - \frac{\pi}{2} + 1, \text{ агар } x \geq \frac{\pi}{2} \text{ бўлса} \end{cases}$

функция берилган. Функциянинг узилиш нуқталарини топинг ва унинг графигини чизинг.

48. Ушбу $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ агар } x < 0 \text{ бўлса,} \\ \cos x, \text{ агар } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ бўлса,} \\ 1 - x, \text{ агар } x \geq \frac{\pi}{2} \text{ бўлса} \end{cases}$

функциянинг узлуксизлигини текширинг ва графигини чизинг.

5-§. Биринчи мустақил уй иши

Бу параграфда талабаларнинг мустақил бажаришлари учун мўлжалланган 25 та вариантга бўлинган мисоллар келтирилган. Ҳар бир вариантда тўққизта мисол бўлиб, уларнинг лимитини ҳисоблаш керак.

Қуйида вариант мисолларини ечиш намунасини келтирамиз.

Берилган лимитларни ҳисобланг.

1. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}$.

Ечиш.

$$\lim_{x\to-2}\frac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(5x+3)}{(x+2)(3x+4)}=\lim_{x\to-2}\frac{5x+3}{3x-4}=\frac{7}{10}=0,7.$$

2. $\lim\limits_{x\to4}\frac{3x^2-10x-8}{4x^2+6x-64}$.

Ечиш.

$$\lim_{x\to4}\frac{3x^2-10x-8}{4x^2+6x-64}=\frac{0}{24}=0.$$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^4+2x^3+5}{6x^4+3x^2-7x}$.

Ечиш.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^4+2x^3+5}{6x^4+3x^2?\,7x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(7+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^4}\right)}{x^4\left(6+\frac{3}{x^2}-\frac{7}{x^3}\right)}=\frac{7}{6}.$$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x-3}{2x^3+4x+3}$.

Ечиш.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10x-3}{2x^3+4x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(10-\frac{3}{x}\right)}{x^3\left(2+\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{10-\frac{3}{x}}{x^2\left(2+\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}=\frac{10}{\infty}=0.$$

5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^5-3x^3-4}{3x^2-4x+2}$.

Ечиш.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^5+3x^3-4}{3x^2-4x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5\left(2+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^4}\right)}{x^2\left(3-\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(2+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^4}\right)}{3-\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}=$$

$$=\frac{-\infty}{3}=-\infty.$$

6. $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}$.

Ечиш.

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}=\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{21+x}-5\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}{\left(x^3-64\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=\lim_{x\to4}\frac{21+x-25}{\left(x^3-64\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{(x-4)\left(x^2+4x+16\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=\lim_{x\to4}\frac{1}{\left(x^2+4x+16\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=\frac{1}{480}.$$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}$.

Ечиш.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x}{2x-3}-1\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-2x+3}{2x-3}\right)^{2-5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{3}}\right)^{\frac{3(2-5x)}{2x-3}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3\left(\frac{2}{x}-5\right)}{2-\frac{3}{x}}}=e^{-\frac{15}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e^{15}}}.$$

8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4x+3}{2x-5}\right)^{1+7x}$.

Ечиш.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x+3}{2x-5}\right)^{1+7x}=2^{\lim\limits_{x\to-\infty}(1+7x)}=2^{-\infty}=0.$$

9. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi^2-x^2}$.

Ечиш.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi^2-x^2}=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)}{\pi^2-x^2}=\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin^2\frac{\pi-x}{4}}{(\pi-x)(\pi+x)}=$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin^2\frac{\pi-x}{4}}{4\cdot\frac{\pi-x}{4}\cdot(\pi+x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\pi}\frac{\sin\frac{\pi-x}{4}}{\pi+x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{0}{2\pi}=0.$$

1-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$; 2. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{4x^2+19x-5}{2x^2+11x+5}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+5x-7}{2x^2-x+10}$;

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^2+5x+7}{3x^2-2x^2+x}$; 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^5+6x^4-x^3}{2x^2+6x+1}$; 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+4}\right)^{3x+2}$; 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-3}{x+4}\right)^{x+3}$; 9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{tgx}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

2-вариант

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$; 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2+x-3}{x^3+x-2}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x+1}{x^4-x^3+2x}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4x^2-7}{2x^3+7x-3}$; 5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4-3x-2x^2}{3x^4+5x}$; 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7}\cdot x}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+2}$; 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{7x+4}\right)^{x}$; 9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x-\sin^2 x}{x^2}$.

3-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$; 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-7x+5}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+9}{2x^2-x+4}$;

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5x^3-3x^2+7}{2x^4-4x+1}$; 5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{7-3x^4}{2x^3+3x^2-5}$; 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x-3}$; 8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x-5}{3x+4}\right)^{2x}$; 9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x-\sin 3x}{x\sin x}$.

4-вариант

1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+4x-24}{x^2+2x-3}$; 2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{2x^2-9x+10}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x-7}{3x^2+x+1}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-3x+1}{1+2x-x^4}$; 5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{8x^4+7x^3-3}{3x^2-5x+1}$; 6. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3}}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-3}\right)^{x-3}$; 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{4x-5}\right)^{2x}$; 9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{2x^2}$.

5-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-7x-6}{2x^2-7x+3}$; 2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{9x^2+17x-2}{x^2+2x}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+7x-2}{3x^2-x-4}$;

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{3x^2-4x+1}$; 5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x+7}{2-3x+4x^2}$; 6. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{2x}$; 8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x-2}{3x+1}\right)^{5x}$; 9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}$.

6-вариант

1. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^2+7x-2}{3x^2+8x+4}$; 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{18x^2+5}{8-3x-9x^2}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-5x+2}{4x^3+2x-1}$; 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x+1}{7x+5}$; 6. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{3x-1}$; 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{x+4}\right)^{x-1}$; 9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}2x}{\mathrm{tg}3x}$.

7-вариант

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+4x-1}{3x^2+x-2}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+5x}{3x^2+7x}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-6x^2+2}{x^4+4x-3}$;

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{11x^3+3x}{2x^2-2x+1}$; 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x-7}{3x^4+2x^3+1}$; 6. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x}\right)^{-3x}$; 8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x-2}{3x+10}\right)^{3x}$; 9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}3x-\sin 3x}{2x^2}$.

8-вариант

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{3x^2+x-2}$; 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^4-5x^2+1}{x^2-1}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+4x-5}{4x^2-3x+2}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+3x+5}{4x^3-2x^2+1}$; 5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5x^4-3x^2}{1+2x+3x^2}$; 6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{3x+4}$; 8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x-3}{x+4}\right)^{6x+1}$; 9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{\pi-4x}$.

9-вариант

1. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{7x^2+4x-3}{2x^2+3x+1}$; 2. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^4+4x^2+2}{2x^4+1}$;

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{6x^3+5x^2+3}{2x^2-x+7}$; 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x+3}{x^3-4x^2-x}$; 6. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-7}{x+1}\right)^{4x-2}$; 8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{x+3}{3x-1}\right)^{2x}$; 9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos^3 4x}{3x^2}$.

10-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2x^2-3x-20}{x^2-x-12}$; 2. $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^2-x-30}{x^3+125}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+2}{6x^2+5x+1}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x-7}{x^4-2x^3+1}$; 5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3x^4+5x}{2x^2-3x-7}$; 6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sqrt{x^2+4}-4}{3x^2}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{3-2x}$; 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x+5}{x-10}\right)^{5x}$; 9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin 2x}-\frac{1}{tg 2x}\right)$.

11-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}$; 2. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2+3x-28}{x^3-64}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3+4x}{x^3-3x+2}$;

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{8x^5-4x^3+3}{2x^3+x-7}$; 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x+3}{3x^4-2x^2+x}$; 6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2-3x}{5-3x}\right)^{x}$; 8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{3x+7}{x+4}\right)^{4x}$; 9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\cos^2 2x}{x^2}$.

12-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x^2+x-5}{x^2-2x+1}$; 2. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{x^2-\frac{1}{4}}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-7x+1}{x^3+4x^2-3}$; 5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x^5-x^3}{4x^2+3x-6}$; 6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sqrt{x-5}-\sqrt{x+5}}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-x}{2-x}\right)^{3x+1}$; 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{4x+5}\right)^{3x}$; 9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{x^2-x}$.

13-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{-5x^2+11x-2}{3x^2-x-10}$; 2. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2+3x-28}{x^2-4x}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4-2x^3+3}{2x^2+3x-7}$; 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+1}{x^3-5x^2+4x}$; 6. $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x+1}\right)^{2x+3}$; 8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{5x-7}{x+6}\right)^{2x}$; 9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 2x}{x\arcsin x}$.

14-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{x^2-5x-14}{2x^2-9x-35}$; 2. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x^2+11x+10}{x^2-5x-14}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+14x^2}{1+2x+7x^2}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^3+x^2-7}{2x^2-5x+3}$; 5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2-x-3x^2}{x^3-16}$; 6. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x}\right)^{-2x}$; 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3-4x}{2-x}\right)^{4x}$; 9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x\sin x}$.

15-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{3x^2-6x-45}{2x^2-3x-35}$; 2. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+2x}{3x^2+x-10}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$;

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3x^4+2x^2-3}{8x^3-4x+5}$; 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-10x+7}{2x^3-3x}$; 6. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+4}\right)^{2-x}$; 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-2x}{3-x}\right)^{-x}$; 9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos x}{4x^2}$.

16-вариант

1. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{4x^2-3x-27}{x^2+2x-15}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2+x}{4x^2-5x}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-2x^2-7}{3x^4+3x+5}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x-4}{3x^2-4x+1}$; 5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x^3-3x+1}{x^5+4x^3}$; 6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^3+x^2}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x+5}\right)^{x+1}$; 8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{4+3x}{5+x}\right)^{5x}$; 9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x+\sin x}{\arcsin x}$.

17-вариант

1. $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{3x^2-26x-225}{2x^2+11x+5}$; 2. $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{2x^2-11x-6}{3x^2-20x+12}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-5x^2-3x^5}{x^4+6x+8}$;

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x^3-2x+4}{2x^2+x-5}$; 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-13}{x^7-3x^5+4x}$; 6. $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{x+20}-4}{x^3+64}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+2x}{3+2x}\right)^{-x}$; 8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x-1}{2x+5}\right)^{3x+1}$; 9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^2}$.

18-вариант

1. $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{2x^2+15x-8}{3x^2+25x+8}$; 2. $\lim\limits_{x\to-6}\dfrac{x^2+2x-24}{2x^2+15x+18}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-7x^2+3}{2+x^2-x^3}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+5x^2-3x}{3x^2+x-10}$; 5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^3+2x-5}$; 6. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-2}{\sqrt{8+x}-3}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x+2}\right)^{x+2}$; 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x}{2-10x}\right)^{5x}$; 9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{tg}x$.

19-вариант

1. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{3x^2-2x-40}{x^2-3x-4}$; 2. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-2x-4}{x^2-11x+18}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x+1}{2x^3+3x^2+2}$;

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+10x-11}{3x^4-2x+5}$; 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-81}{3x^2+4x+2}$; 6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{3-2x}$; 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{9x-4}\right)^{2x}$; 9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{7x}{\sin x+\sin 7x}$.

20-вариант

1. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+10x+3}$; 2. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^3-64}{7x^2-27x-4}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+3x-4}{2x^2-5x+1}$; 5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x+4}{3x^3-5x+1}$; 6. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^3-8}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-2x}{1-2x}\right)^{x+1}$; 8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+5}{4x-2}\right)^{3x}$; 9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{5x^2}$.

21-вариант

1. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-7x+6}{x^2-5x+6}$; 2. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^4-x^2+x+1}{x^4-1}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+29x}{5x^3+3x^2+x-1}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+7x-1}{3x^4+2x+5}$; 5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2-x}$; 6. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x}$; 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+8}{x-2}\right)^{x+4}$; 9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx-\sin x}{3x^2}$.

22-вариант

1. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{12-x-x^2}{x^3-27}$; 2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^4-1}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$;

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+7x^2+4}{x^4+5x-1}$; 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x+1}{3x^2+2x-5}$; 6. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{-5x}$; 8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+1}{3x-1}\right)^{2x+1}$; 9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 5x}{\sin 3x}$.

23-вариант

1. $\lim\limits_{x\to1/3}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$; 2. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{5x^2+3x-26}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^4+x^2+x}{x^4+3x-2}$;

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^6-5x^2+2}{2x^3+4x-5}$; 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^4+3x^2-9}$; 6. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{1+2x}$; 8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{4x}$; 9. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\sin 5x}{\pi-2x}$.

24-вариант

1. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$; 2. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+2x}{x^2+4x+4}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+7x+3}{5x^2-3x+4}$;

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^7+5x^2-4x}{3x^2+11x-7}$; 5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2-4x+2}{4x^2+2x-5}$; 6. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-9x+7}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+3}}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x-4}$; 8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+1}{3x-1}\right)^{5x}$; 9. $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{2}$.

25-вариант

1. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$; 2. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-1}{x^2+3x+2}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^2+3x+1}{3x^2+x-5}$;

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{7x^2+5x+9}{1+4x-x^3}$; 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+2x}{x^2+7x+1}$; 6. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$; 8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{x+3}{2x-4}\right)^{x+2}$; 9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}2x-\sin 2x}{x^2}$.

6-§. Иккинчи мустақил уй иши

Иккинчи мустақил уй ишининг ҳар бир вариантида тўртта мисол бўлиб, уларнинг шарти қуйидагича:

Биринчи мисолда: $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар $x\to 0$ да бир хил тартибли чексиз кичик функциялар бўлишини исбот қилиш керак.

Иккинчи мисолда: чексиз кичик функцияларнинг эквивалентлигидан фойдаланиб лимитни топиш керак.

Учинчи мисолда: берилган функцияларнинг узлуксизлигини текшириш ва чизмасини чизиш керак.

Тўртинчи мисолда: берилган функциянинг кўрсатилган нуқталарда узлуксизлигини текшириш керак.

Қуйида вариант мисолларини ечиш намунасини келтирамиз:

1. $f(x) = \cos 2x - \cos^3 2x$ ва $\varphi(x) = 3x^2 - 5x^3$ функциялар $x \to 0$ да бир хил тартибли чексиз кичик функциялар бўлишини исбот қилинг.

Исботи. $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ нисбатнинг лимитини топамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x - \cos^3 2x}{3x^2-5x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos^2 2x\right)\cos 2x}{x^2(3-5x)} = .$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x\cdot\sin^2 2x}{x^2(3-5x)} = \lim_{x\to 0}\frac{4\cos 2x\cdot\sin 2x\cdot\sin 2x}{2x\cdot 2x\,(3-5x)} = \frac{4}{3},$$

бунда $\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{(3-5x)} = \frac{1}{3}$, демак, $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар нисбатининг лимити мавжуд ва у

нолдан фарқли ўзгармас бўлгани учун (1.1) формулага асосан берилган функциялар бир хил тартибли чексиз кичик функциялар бўлади деган хулосага келамиз.

2. Чексиз кичик функцияларнинг эквивалентлигидан фойдаланиб $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 8x}{\ln(1+4x)}$ лимитни топинг.

Ечиш.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 8x}{\ln(1+4x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{8x}{4x} = 2$, бунда $\arcsin 8x \approx 8x$, $\ln(1+4x) \approx 4x$.

3. Берилган функциянинг узлуксизлигини текширинг ва чизмасини чизинг:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ агар } -\infty < x \le 0 \text{ бўлса}, \\ (x-1)^2, \text{ агар } 0 < x \le 2 \text{ бўлса}, \\ 5-x, \text{ агар } 2 < x < \infty \text{ бўлса}. \end{cases}$$

Ечиш. $f(x)$ функция $(-\infty;0)$, $(0;2)$ ва $(2;+\infty)$ интервалларда аниқланган ва узлуксиз бўлган элементар функциялар билан берилган.

Демак, фақат $x_1 = 0$ ва $x_2 = 2$ нуқталарда узилишга эга бўлиши мумкин. $x_1 = 0$ нуқта учун чап ва ўнг лимитларни ҳисоблаймиз:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} x^2 = 0\,, \quad \lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0}(x-1)^2 = 1\,,$$

$$f(0) = x^2\Big|_{x=0} = 0\,.$$

Бу эса $x_1 = 0$ нуқтада $f(x)$ функция биринчи тур узилиш нуқтасига эга бўлишини билдиради.

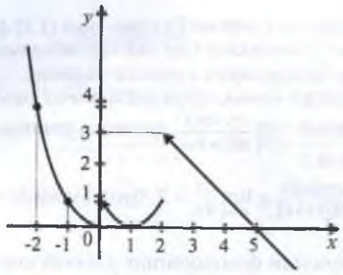
$x_2 = 2$ нуқта учун:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0}(x-1)^2 = 1\,, \qquad \lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0}(5-x) = 3\,,$$

$f(2) = (x-1)^2\Big|_{x=2} = 1$ ларга эга бўламиз. Бу эса, $x_2 = 2$ нуқтада $f(x)$ функциянинг биринчи тур узилиш нуқтасига эга бўлишини билдиради.

Берилган функциянинг графиги 1-чизмада тасвирланган.

4. $f(x) = 8^{\frac{1}{x-3}} + 1$ функциянинг $x_1 = 3$, $x_2 = 4$ нуқталарда узлуксизлигини текширинг.



1-чизма.

Ечиш. $x_1 = 3$ учун қуйидагиларга эга бўламиз.

$$\lim_{x\to 3-0} f(x) = \lim_{x\to 3-0}\left(8^{\frac{1}{x-3}}+1\right) = 8^{-\infty}+1 = 1,$$

$$\lim_{x\to 3+0} f(x) = \lim_{x\to 3+0}\left(8^{\frac{1}{x-3}}+1\right) = 8^{\infty}+1 = \infty.$$

Бу эса $f(x)$ функция $x_1 = 3$ нуқтада иккинчи тур узилиш нуқтасига эга эканлигини билдиради.

$x_2 = 4$ нуқта учун эса:

$$\lim_{x\to 4-0} f(x) = \lim_{x\to 4-0}\left(8^{\frac{1}{x-3}}+1\right) = 9,$$

$$\lim_{x\to 4+0} f(x) = \lim_{x\to 4+0}\left(8^{\frac{1}{x-3}}+1\right) = 9,$$

$$f(4) = \left(8^{\frac{1}{x-3}}+1\right)\Bigg|_{x=4} = 8^{\frac{1}{4-3}}+1 = 9.$$

Демак, $f(x)$ функция $x_2 = 4$ нуқтада узлуксиз.

1-вариант

1. $f(x) = \mathrm{tg}2x$, $\varphi(x) = \arcsin x$.   2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{2x^2}$.

3. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x<0, \\ x, & 0\le x\le 2, \\ 0, & x>2. \end{cases}$

4. $f(x) = (x-3)(x+4)$, $x_1 = -5$, $x_2 = -4$.

2-вариант

1. $f(x) = \frac{x^2}{5+x}$, $\varphi(x) = \frac{4x^2}{x-1}$.   2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{4x^2}$.

3. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x\le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2}<x<\pi, \\ 2, & x\ge\pi. \end{cases}$

4. $f(x) = \frac{x+5}{x-2}$, $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

3-вариант

1. $f(x) = \sin 8x$, $\varphi(x) = \arcsin 5x$.   2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}3x}{\ln(1+2x)}$.

3. $f(x) = \begin{cases} x-1, & x\le 0, \\ x^2, & 0<x<2, \\ 2x, & x\ge 2. \end{cases}$

4. $f(x) = 5^{\frac{2}{x-3}}$, $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.

4-вариант

1. $f(x) = \sin 3x + \sin x$, $\varphi(x) = 10x$.   2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 4x}{\mathrm{tg}5x}$.

3. $f(x) = \begin{cases} x+1, & x<0, \\ x^2-1, & 0\le x<2, \\ -x, & x\ge 2. \end{cases}$

4. $f(x) = 4^{\frac{2}{x-1}}-3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$

5-вариант

1. $f(x)=\cos 7x-\cos x,\ \varphi(x)=2x^2$. 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}}{\sin 2x}$.

3. $f(x)=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x^2+1, & 0\le x<2,\\ x+1, & x\ge 2.\end{cases}$

4. $f(x)=2^{\frac{5}{1-x}}-1,\quad x_1=0,\ x_2=1$.

6-вариант

1. $f(x)=1-\cos 2x,\ \varphi(x)=8x^2$. 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(x+2)}{x^2-4}$.

3. $f(x)=\begin{cases}x+3, & x\le 0,\\ 1, & 0<x\le 2,\\ x^2-1, & x>2.\end{cases}$

4. $f(x)=8^{\frac{4}{x-2}}-1,\quad x_1=2,\ x_2=3$.

7-вариант

1. $f(x)=3\sin^2 4x,\ \varphi(x)=x^2-x^4$. 2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(x+2)}{x^3+8}$.

3. $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ \sin x, & 0\le x<\pi,\\ 3, & x\ge\pi.\end{cases}$

4. $f(x)=5^{\frac{4}{3-x}}+1,\quad x_1=2,\ x_2=3$.

8-вариант

1. $f(x)=\operatorname{tg}(x^2+2x),\ \varphi(x)=x^2+2x$. 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\operatorname{tg}4x}$.

3. $f(x)=\begin{cases}-x+1, & x<-1,\\ x^2+1, & -1\le x\le 2,\\ 2x, & x>2.\end{cases}$

4. $f(x)=\dfrac{3x}{x-4},\quad x_1=4,\ x_2=5$.

9-вариант

1. $f(x)=\arcsin(x^2-x),\ \varphi(x)=x^3-x$. 2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{\operatorname{tg}(x-4)}$.

3. $f(x)=\begin{cases}1, & x\le 0,\\ 2^x, & 0<x\le 2,\\ x+3, & x>2.\end{cases}$

4. $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1},\quad x_1=1,\ x_2=2$.

10-вариант

1. $f(x)=\sin 7x+\sin x,\ \varphi(x)=4x$. 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{2x^2}$.

3. $f(x)=\begin{cases}-x+2, & x\le -2,\\ x^3, & -2<x\le 2,\\ 2, & x>2.\end{cases}$

4. $f(x)=2^{\frac{3}{x+2}}+1,\quad x_1=-2,\ x_2=-1$.

11-вариант

1. $f(x)=\sqrt{4+x}+2,\ \varphi(x)=3x$. 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x^3)}{2x^3}$.

3. $f(x)=\begin{cases}3x+4, & x\le -1,\\ x^2-2, & -1\le x<2,\\ x, & x>2.\end{cases}$

4. $f(x)=4^{\frac{3}{x-2}}+2,\quad x_1=2,\ x_2=3$.

12-вариант

1. $f(x)=\sin(x^2-2x),\ \varphi(x)=x^4-8x$. 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}5x}{\operatorname{tg}2x}$.

3. $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 1, \\ (x-2)^2, & 1<x<3, \\ -x+6, & x\ge 3. \end{cases}$

4. $f(x)=3^{\frac{2}{x+1}}-2, \quad x_1=-1, x_2=0$.

13-вариант

1. $f(x)=\frac{2x}{3-x}, \varphi(x) = 2x\text{-}x^2$. 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$.

3. $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<1, \\ x^2+2, & -1\le x\le 2, \\ -2x, & x>2. \end{cases}$

4. $f(x)=5^{\frac{3}{x+4}}+1, \quad x_1=-5, x_2=-4$.

14-вариант

1. $f(x)=\frac{x^2}{7+x}, \varphi(x) = 3x^3\text{—}x^2$. 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 8x}{\operatorname{tg}4x}$.

3. $f(x)=\begin{cases} -x^3, & x<-1, \\ x-1, & -1\le x\le 2, \\ -x+5, & x>2. \end{cases}$

4. $f(x) = \frac{x-4}{x+2}, x_1 = -2, x_2 = -1$.

15-вариант

1. $f(x)=\sin(x^2+5x), \ \varphi(x)=x^3-25x$. 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x}}{\operatorname{tg}2x}$.

3. $f(x)=\begin{cases} x, & x<-2, \\ -x-1, & -2\le x\le 1, \\ x^2-1, & x>1. \end{cases}$

4. $f(x) = \frac{x-4}{x+3}, x_1 = -3, x_2 = -2$.

16-вариант

1. $f(x)=\cos x-\cos^3 x, \ \varphi(x)=6x^2$. 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{\sin 2x}$.

3. $f(x)=\begin{cases} x+3, & x\le 0, \\ -x^2+4, & 0<x<2, \\ x-2, & x\ge 2. \end{cases}$

4. $f(x) = \frac{x+5}{x-3}, x_1 = 3, x_2 = 4$.

17-вариант

1. $f(x)=\arcsin 2x, \ \varphi(x)=8x$. 2. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x^3-27}$.

3. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1, \\ x^2-1, & -1<x\le 2, \\ 2x, & x>2. \end{cases}$

4. $f(x)=5^{\frac{4}{1-x}}+1, \quad x_1=1, x_2=2$.

18-вариант

1. $f(x)=1-\cos 4x, \ \varphi(x)=x\sin 2x$. 2. $\lim\limits_{x\to -5}\frac{\operatorname{tg}(x+5)}{x^2-25}$.

3. $f(x)=\begin{cases} -1, & x<0, \\ \cos x, & 0\le x\le \pi, \\ 1-x, & x>\pi. \end{cases}$

4. $f(x) = \frac{4x}{x+5}, x_1 = -5, x_2 = -4$.

19-вариант

1. $f(x)=\sin x+\sin 5x, \ \varphi(x)=2x$. 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin 2x}$.

3. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x}, & x\le 0, \\ 0, & 0<x\le 2, \\ x-2, & x>2. \end{cases}$

4. $f(x) = 5^{\frac{1}{x-4}} - 2, \quad x_1 = 3, x_2 = 4$.

20-вариант

1. $f(x) = \frac{3x}{1-x}, \varphi(x) = \frac{x}{4+x}$. 2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\mathrm{tg}3x}$.

3. $f(x) = \begin{cases} x-3, & x < 0, \\ x+1, & 0 \le x \le 4, \\ 3+x, & x > 4. \end{cases}$

4. $f(x) = 6^{\frac{1}{x-3}} + 3, \quad x_1 = 3, x_2 = 4$.

21-вариант

1. $f(x) = \cos 3x - \cos x, \ \varphi(x) = 7x^2$. 2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{arctg}6x}{2x^2 - 3x}$.

3. $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \le 1, \\ 2x, & 1 < x \le 3, \\ x+2, & x > 3. \end{cases}$

4. $f(x) = 4^{\frac{1}{3-x}} + 2, \quad x_1 = 2, x_2 = 3$.

22-вариант

1. $f(x) = x^2 - \cos 2x, \ \varphi(x) = 6x^2$. 2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin 3x}{2x}$.

3. $f(x) = \begin{cases} -x, & x \le 0, \\ x^2, & 0 < x < 2, \\ x+1, & x \ge 2. \end{cases}$

4. $f(x) = 9^{\frac{1}{2-x}}, \quad x_1 = 0, x_2 = 2$.

23-вариант

1. $f(x) = \sqrt{1+x} - 1, \ \varphi(x) = 2x$. 2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\mathrm{arctg}2x}$.

3. $f(x) = \begin{cases} -2(x+1), & x \le -1, \\ (x+1)^3, & -1 < x < 0, \\ x, & x \ge 0. \end{cases}$

4. $f(x) = 2^{\frac{1}{x-5}} + 1, \quad x_1 = 4, x_2 = 5$.

24-вариант

1. $f(x) = \sqrt{9-x} - 3, \ \varphi(x) = 2x$. 2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos 8x}{2x^2}$.

3. $f(x) = \begin{cases} 2, & x < -1, \\ 1-x, & -1 \le x \le 1, \\ \ln x, & x > 1. \end{cases}$

4. $f(x) = 6^{\frac{2}{4-x}}, \quad x_1 = 3, x_2 = 4$.

25-вариант

1. $f(x) = \cos 3x - \cos 5x, \ \varphi(x) = x^2$. 2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+5x)}{\sin 3x}$.

3. $f(x) = \begin{cases} -x, & x \le 0, \\ x^3, & 0 < x \le 2, \\ x+4, & x > 2. \end{cases}$

4. $f(x) = \frac{x+1}{x-2}, \ x_1 = 2, \ x_2 = 3$.

II боб

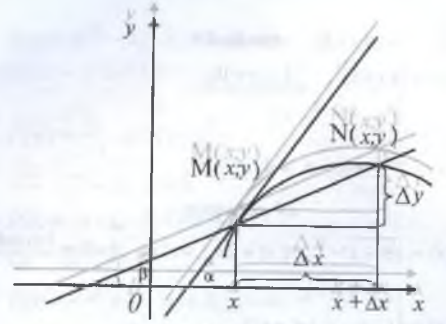
БИР ЎЗГАРУВЧИ ФУНКЦИЯСИНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБИ ВА УНИНГ ТАТБИҚЛАРИ

1-§. Ҳосила, унинг геометрик ва физик маъноси. Дифференциаллаш қоидалари ва формулалари

$y = f(x)$ функциянинг орттирмаси

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

кўринишда ифодаланишини эслатиб ўтамиз, бунда Δx аргумент x нинг орттирмаси.



2-чизма.

2-чизмадан

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{tg}\beta \tag{2.1}$$

тенгликни ёзиш мумкин.

Таъриф. $y = f(x)$ функциянинг x нуқтадаги *ҳосиласи* деб, шу нуқтадаги функция орттирмасининг уни шу орттирмага эриштирадиган аргумент орттирмасига нисбатининг ихтиёрий Δx нолга интилгандаги лимитига айтилади ва қуйидаги белгилашларнинг бири билан белгиланади:

$$y', \ f'(x), \ \frac{dy}{dx}.$$

Шундай қилиб, таърифга кўра:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{2.2}$$

Агар (2.2) формуладаги лимит мавжуд бўлса, $f(x)$ функция x нуқтада *дифференциалланувчи* дейилади.

Ҳосилани топиш амали функцияни *дифференциаллаш* дейилади.

(2.1) тенглик ва ҳосила таърифидан x нуқтадаги ҳосила $y = f(x)$ функция графигидаги $M(x;y)$ нуқтадан ўтказилган уринманинг Ox ўқи билан ташкил этган α бурчаги тангенсига тенг эканлиги келиб чиқади (2-чизмага қаранг). $y' = f'(x)$ ҳосилани физик нуқтаи назардан қараганимизда y функциянинг x нуқтадаги ўзгариш тезлигини билдиради.

Агар C — ўзгармас сон ва $u = u(x)$, $v = v(x)$ бирор дифференциалланувчи функциялар бўлса, у ҳолда қуйидаги дифференциаллаш қоидалари уринлидир:

1) $(C)' = 0$;
2) $(x)' = 1$;
3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
4) $(Cu)' = Cu'$;
5) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;
6) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$;
7) $\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$;

8) агар $y = f(u)$ бўлиб, $u = \varphi(x)$ бўлса, яъни $y = f[\varphi(x)]$ мураккаб функция дифференциалланувчи функциялардан тузилган бўлса, у ҳолда

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \ \text{ёки} \ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx};$$

9) агар $y = f(x)$ функция учун дифференциалланувчи $x = g(y)$ тескари функция мавжуд ва $\frac{dg}{dy} = g'(y) \neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}.$$

Ҳосила таърифи ва дифференциаллаш қоидаларидан фойдаланиб асосий элементар функцияларнинг ҳосилалари жадвалини тузиш мумкин:

1) $(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$, $(\alpha \in R)$;
2) $(a^u)' = a^u \ln a \ \ u'$;
3) $(e^u)' = e^u u'$;
4) $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} u'$;
5) $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$;
6) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;
7) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
8) $(\mathrm{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;

9) $(\mathrm{ctg}u)' = \frac{-1}{\sin^2 u} \cdot u'$; 10) $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

11) $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$; 12) $(\mathrm{arctg}u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

13) $(\mathrm{arcctg}u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$; 14) $(\mathrm{sh}u)' = \mathrm{ch}u \cdot u'$;

15) $(\mathrm{ch}u)' = \mathrm{sh}u \cdot u'$; 16) $(\mathrm{th}u)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 u} \cdot u'$;

17) $(\mathrm{cth}u)' = \frac{1}{\mathrm{sh}^2 u} \cdot u'$.

$y = f(x)$ эгри чизиқнинг $M_0(x_0; f(x_0))$ нуқтасидан ўтказилган уринма тенгламаси:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

$y = f(x)$ эгри чизиқнинг $M_0(x_0; f(x_0))$ нуқтасидан ўтказилган нормал (перпендикуляр) тенгламаси:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0).$$

Агар $f'(x_0) = 0$ бўлса, нормал тенгламаси $x = x_0$ кўринишда бўлади.

Эгри чизиқ билан нуқта орасидаги бурчак деганда, шу нуқтадан ўтувчи уринма билан эгри чизиқ орасидаги бурчакни тушуниш керак.

1-мисол. Ҳосила таърифидан фойдаланиб (2.2 формулага қаранг) $y = \frac{2x}{3x+1}$ функциянинг ҳосиласини топинг.

Ечиш. Ихтиёрий Δx орттирма учун функция орттирмасини топамиз:

$$\Delta y = \frac{2(x+\Delta x)}{3(x+\Delta x)+1} - \frac{2x}{3x+1} = \frac{6x^2+6x\Delta x+2x+2\Delta x-6x^2-6x\Delta x-2x}{(3x+3\Delta x+1)(3x+1)} =$$

$$= \frac{2\Delta x}{(3x+3\Delta x+1)(3x+1)}.$$

Иккала қисмини Δx га бўламиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{(3x+3\Delta x+1)(3x+1)}.$$

Бу нисбатнинг $\Delta x \to 0$ да лимитини ҳисоблаймиз:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{(3x+3\Delta x+1)(3x+1)} = \frac{2}{(3x+1)^2}.$$

2-мисол. $y = |x|$ функция ҳосиласининг $x = 0$ нуқтадаги қийматини топинг.

Ечиш. Эркли ўзгарувчи x нинг ихтиёрий орттирмасида функциянинг $x = 0$ нуқтадаги Δy орттирмаси $|\Delta x|$ га тенг:

$$\Delta y = |\Delta x| = \begin{cases} -\Delta x, & \text{агар } \Delta x < 0 \text{ бўлса,} \\ \Delta x, & \text{агар } \Delta x > 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Ҳосила таърифига кўра:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} -1, & \text{агар } \Delta x < 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } \Delta x > 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Бу эса $x = 0$ нуқтада $y = |x|$ функция ҳосилага эга эмаслигини билдиради.

Аммо, бу функция бу нуқтада узлуксиз, яъни

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} |\Delta x| = 0.$$

Демак, x нуқтада узлуксиз бўлган ҳамма функциялар бу нуқтада дифференциалланувчи бўлавермас экан.

Машқлар

49. Ҳосила таърифидан фойдаланиб $y = 3x^3-2x^2+3x-1$ функциянинг ҳосиласини топинг.

50. Ҳосила таърифидан фойдаланиб $y = \frac{3x-1}{2x+5}$ функциянинг ҳосиласини топинг.

51. $y = \sqrt[3]{x}$ функция $x = 0$ нуқтада узлуксиз ва дифференциалланувчи эканлигини кўрсатинг.

9) $(\mathrm{ctg}u)' = \frac{-1}{\sin^2 u} \cdot u'$; 10) $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

11) $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$; 12) $(\mathrm{arctg}u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

13) $(\mathrm{arcctg}u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$; 14) $(\mathrm{sh}u)' = \mathrm{ch}u \cdot u'$;

15) $(\mathrm{ch}u)' = \mathrm{sh}u \cdot u'$; 16) $(\mathrm{th}u)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 u} \cdot u'$;

17) $(\mathrm{cth}u)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 u} \cdot u'$.

$y = f(x)$ эгри чизиқнинг $M_0(x_0; f(x_0))$ нуқтасидан ўтказилган уринма тенгламаси:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

$y = f(x)$ эгри чизиқнинг $M_0(x_0; f(x_0))$ нуқтасидан ўтказилган нормал (перпендикуляр) тенгламаси:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0).$$

Агар $f'(x_0) = 0$ бўлса, нормал тенгламаси $x = x_0$ кўринишда бўлади.

Эгри чизиқ билан нуқта орасидаги бурчак деганда, шу нуқтадан ўтувчи уринма билан эгри чизиқ орасидаги бурчакни тушуниш керак.

1-мисол. Ҳосила таърифидан фойдаланиб (2.2 формулага қаранг) $y = \frac{2x}{3x+1}$ функциянинг ҳосиласини топинг.

Ечиш. Ихтиёрий Δx орттирма учун функция орттирмасини топамиз:

$$\Delta y = \frac{2(x+\Delta x)}{3(x+\Delta x)+1} - \frac{2x}{3x+1} = \frac{6x^2+6x\Delta x+2x+2\Delta x-6x^2-6x\Delta x-2x}{(3x+3\Delta x+1)(3x+1)} =$$

$$= \frac{2\Delta x}{(3x+3\Delta x+1)(3x+1)}.$$

Иккала қисмини Δx га бўламиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{(3x+3\Delta x+1)(3x+1)}.$$

Бу нисбатнинг $\Delta x \to 0$ да лимитини ҳисоблаймиз:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{(3x+3\Delta x+1)(3x+1)} = \frac{2}{(3x+1)^2}.$$

2-мисол. $y = |x|$ функция ҳосиласининг $x = 0$ нуқтадаги қийматини топинг.

Ечиш. Эркли ўзгарувчи x нинг ихтиёрий орттирмасида функциянинг $x = 0$ нуқтадаги Δy орттирмаси $|\Delta x|$ га тенг:

$$\Delta y = |\Delta x| = \begin{cases} -\Delta x, & \text{агар } \Delta x < 0 \text{ бўлса}, \\ \Delta x, & \text{агар } \Delta x > 0 \text{ бўлса}. \end{cases}$$

Ҳосила таърифига кўра:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} -1, & \text{агар } \Delta x < 0 \text{ бўлса}, \\ 1, & \text{агар } \Delta x > 0 \text{ бўлса}. \end{cases}$$

Бу эса $x = 0$ нуқтада $y = |x|$ функция ҳосилага эга эмаслигини билдиради.

Аммо, бу функция бу нуқтада узлуксиз, яъни

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} |\Delta x| = 0.$$

Демак, x нуқтада узлуксиз бўлган ҳамма функциялар бу нуқтада дифференциалланувчи бўлавермас экан.

Машқлар

49. Ҳосила таърифидан фойдаланиб $y = 3x^3-2x^2+3x-1$ функциянинг ҳосиласини топинг.

50. Ҳосила таърифидан фойдаланиб $y = \frac{3x-1}{2x+5}$ функциянинг ҳосиласини топинг.

51. $y = \sqrt[3]{x}$ функция $x = 0$ нуқтада узлуксиз ва дифференциалланувчи эканлигини кўрсатинг.

52. Қуйидаги функцияларнинг ҳосиласини топинг:

1. $y = 5x^4 - 3\sqrt[7]{x^3} + \frac{7}{x^3} + 4$.　　2. $y = 3x^2 + 5\sqrt[3]{x^5} - \frac{4}{x^3}$.

3. $y = \sqrt[3]{x^5} - \frac{2}{x^4} + 7x^5$.　　4. $y = 4\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} + 3x^2$.

5. $y = (x^5 + 3x - 1)^4$.　　6. $y = x^3 \sin x$.

7. $y = (x^9 + 1)\cos 5x$.　　8. $y = x^3 \cdot \sin x \cdot \ln x$.

9. $y = x^2 \cdot \mathrm{tg}x \cdot e^{2x}$.　　10. $y = \frac{x^4+1}{x^4-1}$.

11. $y = \left(\frac{x^4+1}{x^4-4}\right)^3$.　　12. $y = \frac{\sin^2 x}{x^3+1}$.

13. $y = \sqrt{\frac{x^3+1}{x^3-1}}$.　　14. $y = \sqrt[3]{\left(\frac{x^3+1}{x^3-1}\right)^2}$.

53. $y = x^3 + 2x - 2$ эгри чизиққа абсциссаси $x_0 = 1$ бўлган нуқтадан ўтказилган уринма ва нормалнинг тенгламасини тузинг.

54. $y = \ln(x^2 - 4x + 4)$ эгри чизиққа абсциссаси $x_0 = 1$ бўлган нуқтадан ўтказилган уринма ва нормалнинг тенгламасини тузинг.

55. $y = x^2$ ва $x^2 + 2y^2 = 3$ тенгламалар билан берилган эгри чизиқларнинг кесишган нуқталаридаги бурчакларни топинг.

56. Моддий нуқтанинг t вақт ичида босиб ўтган масофаси $s = \frac{1}{4}t^4 \cdot \frac{1}{3}t^3 + 2t + 1$ га тенг. Берилган нуқтанинг тезлигини топинг.

57. Дифференциаллаш қоидалари ва формулаларидан фойдаланиб берилган функцияларнинг ҳосиласини топинг:

1) $y = x^3 \sin 3x$;　　2) $y = x \sin^3 x$;

3) $y = x^2 \cos^2 3x$;　　4) $y = e^x \mathrm{tg} 4x$;

5) $y = x \,\mathrm{ctg}^2 7x$;　　6) $y = \sqrt{x} \cdot \cos\sqrt{x}$;

7) $y = 2^{-\frac{\cos^4 5x}{x}}$;　　8) $y = \left(2^{x^4} - \mathrm{tg}^4 x\right)^3$;

9) $y = 2^{\overline{\ln x}}$;　　10) $y = 3^{\mathrm{tg}^3 5x}$;

11) $y = \left(2^{\mathrm{tg}3x} + \mathrm{tg}3x\right)^2$;　　12) $y = x \cdot \sin^2 x \cdot 2^{x^2}$;

13) $y = \sin\left(\mathrm{tg}\sqrt{x}\right)$;　　14) $y = (\sin^3 x + \cos^3 2$

15) $y = x \sin 7x \,\mathrm{tg}^2 x$;　　16) $y = x \,\mathrm{ctg}^2 5x$;

17) $y = e^{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}$;　　18) $y = e^{-\sqrt{x^2+2x+2}}$

19) $y = x^3 e^{\mathrm{tg}3x}$;　　20) $y = \ln(x^4 - \sin^3 x)$;

21) $y = \ln^5(x - 2^{-x})$;　　22) $y = \log_3(x^2 + \sin 3$

2-§. Мураккаб кўрсаткичли ва ошкормас функцияларнинг ҳосилалари

1. Асоси ҳам, даража кўрсаткичи ҳам x нинг функ сидан иборат бўлган, яъни

$$y = [u(x)]^{v(x)} \equiv u^v$$

кўринишдаги функция *мураккаб кўрсаткичли* фун дейилади.

Масалан, $y = (\cos x)^{x^2}$, $y = x^{\sin x}$, $y = x^x$, $y = (\log_u x$ шунга ўхшаш функциялар мураккаб кўрсаткичли ф циялардир. Бундай функцияларнинг ҳосиласини то да берилган функция логарифмининг ҳосиласини то дан иборат бўлган усулни қўллаш кўпинча ҳисобл бирмунча соддалаштиради.

Масалан, $y = u^v$ функцияни логарифмлаб ҳосила топишдан қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$y' = u^v \ln u \cdot v' + vu^{v-1} \cdot u',$$

бунда $u = u(x)$ ва $v = v(x)$.

1 - мисол. $y = (\sin 4x)^{x^3}$ функциянинг ҳосиласи пинг.

Ечиш. Тенгликнинг иккала томонини логариф миз:

$$\ln y = x^3 \ln\sin 4x.$$

Бу тенгликнинг иккала томонини x бўйича дифф циаллаймиз:

$$(\ln y)' = (x^3)' \cdot \ln\sin 4x + x^3(\ln\sin 4x)'.$$

Бундан

$$\frac{y'}{y} = 3x^2 \ln\sin 4x + 4x^3 \cdot \frac{1}{\sin 4x}\cos 4x .$$

Соддалаштирамиз:

$$y' = y\left(3x^2 \ln\sin 4x + 4x^3\mathrm{ctg}4x\right).$$

y ўрнига $y = (\sin 4x)^{x^3}$ ифодани қўйиб, ушбу натижани ҳосил қиламиз:

$$y' = (\sin 4x)^{x^3}\left(3x^2 \ln\sin 4x + 4x^3\mathrm{ctg}4x\right).$$

2. Иккита x ва y ўзгарувчилар орасидаги боғланиш

$$F(x,y) = 0 \qquad (2.3)$$

тенглама кўринишида берилган бўлсин.

(2.3) ошкормас функцияни ошкор кўринишга келтирмасдан ҳосиласини топиш қоидасини кўрсатамиз.

y ни x нинг функцияси деб (2.3) тенгламанинг иккала қисмини дифференциаллаш, сўнгра ҳосил қилинган тенгламадан y' ни топиш керак. Буни қуйидаги мисолда кўрсатамиз.

2-мисол. $x^4+y^4-3xy = 0$ ошкормас функциянинг y' ҳосиласини топинг.

Ечиш. y ни x нинг функцияси деб берилган тенгламанинг иккала қисмини дифференциаллаймиз:

$$4x^3 + 4y^3 \cdot y' - 3y - 3xy' = 0.$$

Бундан эса

$$y' = \frac{4x^3-3y}{3x-4y^3}$$

ни топамиз.

Машқлар

58. Берилган функцияларни логарифмлаб сўнгра ҳосиласини топинг:

1) $y = 3^{x^2} - \mathrm{tg}^4 2x$; 2) $y = x^3\mathrm{th}^3 x$;

3) $y = \lg^4(x^5 - \sin^5 2x)$; 4) $y = \mathrm{arctg}\sqrt{1 + e^{-x^2}}$;

5) $y = x^3\ln^2(\sin^2 x - \mathrm{tg}^2 x)$; 6) $y = (\sin 3x)^{\cos 5x}$;

7) $y = (x^3 + 1)^{\mathrm{tg}2x}$; 8) $y = (\mathrm{tg}3x)^{x^2}$;

9) $y = (1 + x^4)^{\mathrm{tg}7x}$; 10) $y = (\mathrm{ctg}5x)^{x^3-1}$.

59. Қуйидаги ошкормас кўринишда берилган функцияларнинг ҳосиласини топинг:

1) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = a$; 2) $y^2 + x^2 - \sin\left(x^2 - y^2\right) = 5$;

3) $2^x + 2^y = 2^{x+y}$; 4) $e^{xy} - x^4 + y^4 = 5$;

5) $e^{xy} - x^3 - y^3 = 3$; 6) $xy - \mathrm{arctg}\frac{x}{y} = 3$.

3-§. Юқори тартибли ҳосилалар

1. Биринчи тартибли ҳосиладан олинган ҳосила, яъни

$$(y')' = (f'(x))' \text{ ёки } y'' = f''(x)$$

ҳосила $y = f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи дейилади ва y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ белгиларнинг бири билан белгиланади.

Иккинчи тартибли ҳосиланинг ҳосиласига учинчи тартибли ҳосила дейилади ва y''', $f'''(x)$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ белгиларнинг бири билан белгиланади.

Умуман, $y = f(x)$ функциянинг n-тартибли ҳосиласи деб, унинг $(n - 1)$-тартибли ҳосиласининг ҳосиласига айтилади ва $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^ny}{dx^n}$ белгиларнинг бири билан белгиланади.

1-мисол. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

Ечиш. Дастлаб ҳосилалар жадвалидан фойдаланиб биринчи тартибли ҳосилани топамиз:

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Ҳосил бўлган натижадан яна ҳосила оламиз:

$$y'' = (y')' = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)' = \left(\left(x^2+a^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+a^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{\left(x^2+a^2\right)^3}}.$$

2-мисол. $y = (2x-1)^4$ функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларининг $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ нуқталардаги қийматларини ҳисобланг.

Ечиш. Биринчи тартибли ҳосилани топамиз:

$$y' = 8\,(2x-1)^3.$$

$$x_1 = 1 \text{ да } y'(1) = 8;\ x_2 = -1 \text{ да } y'(-1) = -216.$$

Энди иккинчи тартибли ҳосилани топамиз:

$$y'' = 48(2x-1)^2;\ x_1 = 1 \text{ да } y''(1) = 48,$$

$$x_2 = -1 \text{ да } y''(-1) = 432.$$

3-мисол. $y = \sin x$ функциянинг n-тартибли ҳосиласини топинг.

Ечиш.

Берилган функцияни кетма-кет n марта дифференциаллаб топамиз:

$$y' = \cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = \cos x\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = \cos x\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$$

$$y^{(n)} = \cos\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

2. Параметрик берилган функция ларнинг юқори тартибли ҳосилалари.

Агар x нинг функцияси y ушбу

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \tag{2.4}$$

параметрик тенгламалар билан берил ган бўлса, (2.4) ифодага функциянинг *параметрик* кўри нишдаги берилиши дейилади.

Бу ҳолда у нинг x бўйича ҳосилас и y'_x

$$y'_x = y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t} \tag{2.5}$$

тенглик билан аниқланади.

Иккинчи ҳосила y'' ёки $\frac{d^2y}{dx^2}$ ни топиш учун x нинг функцияси t эканлигини назарда тути б, (2.5) тенгликни x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

ёки

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varphi'(t)\cdot\psi''(t) - \psi'(t)\cdot\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}. \tag{2.6}$$

Шунга ўхшаш $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ ва ҳока о ҳосилаларни топиш мумкин.

4-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \sin 2t \end{cases}$$

параметрик тенгламалари билан берилган y функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

Ечиш.

I усул. (2.6) формула бўйича ҳосилаларни топиб, сўнгра ўрнига қўямиз:

$$x_t{}' = 2\sin t\cos t = \sin 2t,\ \ x_t{}'' = 2\cos 2t\ ,$$

$$y_t{}' = 2\cos 2t,\ \ y_t{}'' = -4\sin 2t\ ,$$

$$y'' = \frac{\sin 2t\,(-4\sin 2t) - 2\cos 2t\cdot 2\cos 2t}{(\sin 2t)^3} = \frac{-4(\sin^2 2t + \cos^2 2t)}{\sin^3 2t} = -\frac{4}{\sin^3 2t}\,.$$

II усул. Биринчи тартибли ҳосилани топамиз:

$$y' = \frac{y_t{}'}{x_t{}'} = \frac{2\cos 2t}{\sin 2t} = 2\text{ctg}2t\ .$$

Бу ҳосилани

$$\begin{cases} y' = 2\text{ctg}2t, \\ x = \sin^2 t \end{cases}$$

кўринишда параметрик берилган функция деб қараб, (2.5) формула бўйича иккинчи ҳосилани топамиз:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y')_t{}'}{x_t{}'} = \frac{(2\text{ctg}2t)'}{(\sin^2 t)'} = \frac{-2\cdot\frac{2}{\sin^2 2t}}{2\sin t\cdot\cos t} = -\frac{\frac{4}{\sin^2 2t}}{\sin 2t} = -\frac{4}{\sin^3 2t}\,.$$

Кўриб турганимиздек, натижалар бир хил.

Машқлар

60. Қуйидаги функцияларнинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг:

1) $y = (1 + 4x^2)\text{arctg}\ 2x$; 2) $y = (x^2 + 1)\ln(1 + x^2)$;

3) $y = e^{-3x}\ (\cos 2x + \sin 2x)$; 4) $y = \sqrt{1 - 4x^2}\cdot\arcsin 2x$.

61. Қуйидаги тенгламалар билан берилган функцияларнинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг:

1) $\begin{cases} y = t^3 + t^2 - 1, \\ x = t^2 + t + 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = 2\sin^3 t, \\ x = 2\cos^3 t; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = t^3 + t, \\ x = t^2 - 2t; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = t^3 + t^2 + 1, \\ x = \frac{1}{t}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} y = (2t + 1)\cos t, \\ x = \ln t; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} y = 1 - \cos t, \\ x = t - \sin t. \end{cases}$

62. $x^4 - xy + y^4 - 1 = 0$ тенглама билан берилган функция иккинчи тартибли ҳосиласининг $M(0;1)$ нуқтадаги қийматини ҳисобланг

63. $e^y + y - x = 0$ тенглама билан берилган функция иккинчи тартибли ҳосиласининг $N(1;0)$ нуқтадаги қийматини ҳисобланг.

64. $x^3 + y^3 - xy = 1$ ва $x^2 + 2y^2 - xy + x + y = 4$ тенгламалар билан берилган функциялар иккинчи тартибли ҳосилаларининг $Q(1;1)$ нуқтадаги қийматини ҳисобланг.

65. Нуқтанинг $0x$ бўйича ҳаракат тенгламаси $x = 100-- 5t - 0{,}001t^3$ берилган (бунда x — метрда, t — секундда). Бу нуқтанинг вақтнинг $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 10$с пайтлардаги тезлиги ва тезланишларини топинг.

4-§. Функциянинг биринчи ва юқори тартибли дифференциали ва унинг татбиқи

Ҳосила таърифига кўра

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\,,$$

лимитнинг таърифига асосан

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \varepsilon(x)$$

ёки

$$\Delta y = y'\,\Delta x + \varepsilon(x)\Delta x \tag{2.7}$$

ифодага эга бўламиз (бунда $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \varepsilon(x) = 0$). (2.7) тенгликдан кўриниб турибдики, функция орттирмаси Δy ни икки қисмга ажратиш мумкин. Биринчи қисм эркли ўзгарувчининг орттирмаси Δx га нисбатан чизиқли бўлган, иккинчи қисми Δx га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдордан иборат. Биринчи қисм $y'\Delta x$ функция орттирмасининг асосий қисми (бош қисми) ёки *дифференциали* дейилади ва

$$dy = y'\Delta x \tag{2.8}$$

каби белгиланади. Эркли ўзгарувчининг дифференциали унинг орттирмасига тенг, яъни $dx = \Delta x$. У ҳолда (2.8) ифода

$$dy = y'dx \text{ ёки } dy = f'(x)dx \tag{2.9}$$

каби ёзилади.

Юқори тартибли дифференциаллар қуйидагича аниқланади:

$$d^2y = d(dy);\ d^3y = d(d^2y),\dots,\ d^ny = d(d^{n-1}y).$$

Агар $y = f(x)$ функция берилган бўлса, унинг юқори тартибли дифференциаллари қуйидагича аниқланади:

$$d^2y = f''(x)dx^2,\ d^3y = f'''(x)dx^3,\dots,\ d^{(n)}y = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Агар $y = f(u)$, бунда $u = \varphi(x)$ бўлса, $dy = f(u)du$, $du = \varphi'(x)dx$, $d^2y = y''(du)^2 + y'd^2u$ ва ҳоказо.

(2.9) формуладан кўриниб турибдики, функциянинг дифференциалини топиш учун унинг ҳосиласини топиб, ҳосилани эркли ўзгарувчининг орттирмасига кўпайтириш керак экан.

1-мисол $y = \sin^4 3x$ функциянинг дифференциалини топинг.

Ечиш. Берилган функциянинг ҳосиласини топамиз:

$$y' = 4\sin^3 3x \cos 3x \cdot 3.$$

(2.9) формулага кўра функция дифференциали :

$$dy = 12\sin^3 3x \cdot \cos 3x dx$$

га тенг.

2-мисол $y = \ln(1 + x^3)$ функциянинг иккинчи тартибли дифференциалини топинг.

Ечиш. Функциянинг биринчи тартибли ҳосиласини топамиз:

$$y' = \frac{3x^2}{1+x^3}.$$

Энди y' функциядан ҳосила олиб, иккинчи тартибли ҳосилани топамиз:

$$y'' = \frac{6x(1+x^3)-3x^2\cdot 3x^2}{\left(1+x^3\right)^2} = \frac{6x+6x^4-2x^4}{\left(1+x^3\right)^2} = \frac{3x(2-x^3)}{\left(1+x^3\right)^2}.$$

Демак,

$$d^2y = \frac{3x(2-x^3)}{\left(1+x^3\right)^2}dx^2.$$

$y = f(x)$ функциянинг бирор x нуқтадаги қиймати ва ҳосиласи берилган бўлсин. $f(x + \Delta x)$ функциянинг бирор $x + \Delta x$ нуқтага яқин қийматини қандай топишни курсатамиз. $\Delta y \approx dy$ ёки $\Delta y \approx f(x)\Delta x$ тенгсизликдан фойдаланамиз. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ булгани сабабли $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$, бундан

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \tag{2.10}$$

(2.10) формула эркли ўзгарувчи x нинг кичик орттирмаси Δx учун функция қийматини топишда кенг қўлланилади.

3-мисол. Агар кубнинг ҳажми 27м^3 дан 27,1м^3 га ортганлиги маълум бўлса, унинг томонининг орттирмасини ҳисобланг.

Ечиш. Агар кубнинг ҳажми x бўлса, унинг томони $y = \sqrt{x}$ булади. Масала шартига кўра: $x = 27$, $\Delta x = 0,1$. Куб томонининг орттирмаси

$$\Delta y \approx dy = y'(x)\Delta x = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} \cdot 0,1 = \frac{0,1}{27} \approx 0,0087 \text{ м}$$

ни ташкил этади.

4-мисол. Баландлиги $H = 40$ см, асосининг радиуси $R = 30$ см бўлган цилиндр берилган. Асос радиусини 0,5 см га орттирилганда цилиндр ҳажмининг қанчалик ортишини тақрибий ҳисобланг.

Ечиш. H баландлик ўзгармас ва асос радиуси ўзгарувчи бўлганда V ҳажм R нинг функцияси бўлади: $V = \pi H \cdot R^2$. Ҳажмнинг ΔV орттирмасини топиш учун dV ни ΔV билан алмаштирамиз:

$$\Delta V \approx 2\pi HR\Delta R.$$

Масала шартига кўра $H = 40$ см, $R = 30$ см ва $\Delta R = 0{,}5$ см бўлгани учун

$$\Delta V \approx 2\pi \cdot 40 \cdot 30 \cdot 0{,}5 = 1200\pi \approx 3770 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Тақрибий ҳисоблашларда у ёки бу сабабларга кўра хатоликларга йўл қўйилади. Уларни абсолют ва нисбий хатоликларга бўлиш мумкин.

1. Абсолют хатолик. Агар аргументнинг абсолют хатоси ε_x берилган бўлса, функциянинг ε_y абсолют хатоси функция дифференциали ёрдамида ҳисобланади.

Амалий масалаларда аргументнинг қийматлари ўлчашлар ёрдамида аниқланади ва унинг абсолют хатоси ҳам топилади.

Функциянинг абсолют хатоси қуйидагича аниқланади:

$$|f(x) - f(x_0)| \approx |f'(x_0)| \cdot |dx| < |f'(x_0)| \cdot \varepsilon_x ,$$

бундан

$$\varepsilon_y = |f'(x_0)| \cdot \varepsilon_x.$$

2. Нисбий хатолик. Нисбий хатолик деб ε_y абсолют хатоликнинг ўлчанаётган катталикнинг тақрибий қиймати $f(x_0)$ модулига нисбатига айтилади ва қуйидагича белгиланади:

$$\delta_y = \frac{\varepsilon_y}{|f(x_0)|} = \frac{|f'(x_0)|}{|f(x_0)|} \cdot \varepsilon_x = |(\ln f(x_0))'| \cdot \varepsilon_x .$$

5-мисол. $\sin 31^\circ$ нинг тақрибий қийматини топинг.

Ечиш. $x = \frac{\pi}{6}$ деб оламиз, у ҳолда

$$\Delta x = 1^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 0{,}017 .$$

Демак, аргументнинг абсолют хатоси $\varepsilon_x = 0{,}017$.

$$\sin 31^\circ = \sin(30^\circ + 1^\circ) \approx \sin 30^\circ + \cos 30^\circ \cdot 0{,}017 =$$
$$= 0{,}5 + 0{,}017 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}515.$$

Функциянинг абсолют хатоси:

$$\varepsilon_y = \left|\cos\frac{\pi}{6}\right| \cdot 0{,}017 = 0{,}015 .$$

Нисбий хато:

$$\delta_y = \frac{0{,}015}{0{,}5} \cdot 100\% = 3\% .$$

Машқлар

66. Қуйидаги функцияларнинг биринчи тартибли дифференциалларини топинг:

1) $y = x\,\mathrm{tg}^3 x$; 2) $y = \sqrt{\mathrm{arctg} x} + (\arcsin x)^2$;
3) $y = \ln\left(x + \sqrt{4 + x^2}\right)$; 4) $y = \frac{a}{x} + \mathrm{arctg}\frac{x}{a}$;
5) $y = \frac{b}{x^2} - \mathrm{arcctg}\frac{a}{x}$; 6) $y = \sqrt[4]{(x+1)^3} - \sqrt[8]{x^5 + 1}$;
7) $y = (x^2 - 1)^2 - x^4$; 8) $y = \cos 2^x - \ln\sin 4x$;
9) $x^2y^2 = (a + x)^3(a - x)$; 10) $y = \ln(1 + e^{10x}) + \mathrm{arctg} e^{3x}$.

67. Қуйидаги функцияларнинг иккинчи тартибли дифференциалларини топинг:

1) $y = 3x^5 + x^3 - 2x + 5$; 2) $y = \ln(3^x - \cos 2x)$;
3) $y = x^2 e^{2x}$; 4) $y = \mathrm{arctg}\left(3x + \sqrt{x}\right)$;
5) $y = e^{-x} \cdot \sin 2x$; 6) $y = x^3 \cdot \sin(4x + 1)$.

68. Қуйидаги функцияларнинг учинчи тартибли дифференциалларини топинг:

1) $y = \sin^2 2x$; 2) $y = \frac{\ln x}{x}$; 3) $y = x^3 \ln x$.

69. $y = x^3 - 4x^2 + 5x + 3$ функциянинг $x = 1{,}03$ да тақрибий қийматини вергулдан кейинги иккита рақамигача аниқлик билан топинг.

70. $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ функциянинг $x = 0{,}1$ да тақрибий қийматини вергулдан кейинги учта рақамигача аниқлик билан топинг.

71. $y = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$ функциянинг $x = 0{,}98$ да тақрибий қийматини вергулдан кейинги иккита рақамигача аниқлик билан топинг.

72. Қуйидаги ифодаларнинг тақрибий қийматини вергулдан кейинги иккита рақамигача аниқлик билан топинг.

а) $y = \sqrt[4]{17}$; б) $y = \sqrt{82}$; в) $\sin 61°$; г) $\mathrm{tg}\,31°$.

5-§. Дифференциалланувчи функциялар ҳақида баъзи теоремалар. Лопиталь қоидаси

1. **Ролль теоремаси**. Агар $y = f(x)$ функция $[a;b]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз бўлиб, шу кесманинг ички нуқталарида дифференциалланувчи ва $f(a) = f(b)$ бўлса, у ҳолда камида битта $x = c$ $(a < c < b)$ нуқта топиладики, бу нуқтада $f'(c) = 0$ бўлади.

2. **Лагранж теоремаси** Агар $y = f(x)$ функция $[a;b]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз, шу кесманинг ички нуқталарида дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда бу кесмада энг камида битта $x = c$ $(a < c < b)$ нуқта топиладики, бу нуқтада

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x) \tag{2.11}$$

тенглик ўринли бўлади.

(2.11) формула Лагранж формуласи ёки чекли орттирмалар формуласи дейилади.

3. **Коши теоремаси.** Агар $y = f(x)$ ва $y = \varphi(x)$ функциялар $[a;b]$ кесмада узлуксиз ва унинг барча ички нуқталарида дифференциалланувчи ҳамда шу кесмада $\varphi'(x) \neq 0$ бўлса, у ҳолда шу кесмада энг камида битта $x = c$ $(a<c<b)$ нуқта топиладики, бу нуқтада қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \tag{2.12}$$

4-теорема. Лопиталь қоидаси. $\frac{0}{0}$ ва $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликларни ечиш. Агар $y = f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар $x = x_0$ нуқтанинг бирор атрофида Коши теоремасининг шартларини қаноатлантирса, $x \to x_0$ да $\lim f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$ (ёки $+\infty$ га) интилса ва $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ лимит мавжуд бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ лимит ҳам мавжуд бўлиб, бу лимитлар ўзаро тенг бўлади, яъни

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Лопиталь қоидаси $x_0 \to +\infty$ бўлганида ҳам ўринлидир.

Агар $f'(x_0) = \varphi'(x_0) = 0$ (ёки ∞) бўлса ва теорема шартларида $y = f(x)$ ва $y = \varphi(x)$ функцияларга қўйилган шартларни $f'(x)$ ва $\varphi'(x)$ ҳосилалар ҳам қаноатлантирса, у ҳолда $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ нисбатга Лопиталь қоидасини қўллаб $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$ формулага эга бўламиз ва ҳоказо.

1-мисол. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{4x}-1}{\sin 6x}$ ни ҳисобланг.

Ечиш. Берилган касрнинг сурат ва махражи узлуксиз, дифференциалланувчи ва лимити нолга тенг, яъни $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликка эгамиз. Шунинг учун унга Лопиталь қоидасини қўллаш мумкин:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{4x}-1}{\sin 6x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(e^{4x}-1\right)'}{(\sin 6x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{4e^{4x}}{6\cos 6x} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Агар $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ ва $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)=\infty$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функцияларнинг кўпайтмасидан $0\cdot\infty$ кўринишдаги аниқмасликка эга бўламиз.

Агар $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ ва $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)=\infty$ бўлса, у ҳолда бу функцияларнинг айирмасидан $\infty-\infty$ кўринишдаги аниқмасликка эга бўламиз.

Иккала ҳолда ҳам, яъни $0\cdot\infty$ ёки $\infty-\infty$ кўринишдаги аниқмасликларни ечиш учун уларни алгебраик ўзгартиришлар ёрдамида $\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишга келтирилали.

2-мисол. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2e^{-x}$ лимитни ҳисобланг.

Ечиш. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}=0$ бўлгани учун $0\cdot\infty$ кўринишдаги аниқмасликка эгамиз.

$$\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x)'}{\left(e^x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{\infty}=0.$$

3-мисол. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$ лимитни топинг.

Ечиш. $x\to1$ да $\infty-\infty$ кўринишдаги аниқмасликка эгамиз. Қавс ичидаги ифодани умумий махражга келтирамиз:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}.$$

Натижада $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликка эга бўлдик. Энди унга Лопиталь қоидасини татбиқ этамиз:

$$\lim_{x\to1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{(x\ln x-x+1)'}{((x-1)\ln x)'}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{\ln x+\frac{x-1}{x}}\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(\ln x)'}{(\ln x)'+\left(\frac{x-1}{x}\right)'}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

$\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}$ кўринишдаги функцияларни қараймиз, бунда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

1. Агар $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$ бўлса, 0^0 кўринишдаги аниқмасликка эга бўламиз.

2. Агар $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$ бўлса, 1^∞ кўринишдаги аниқмасликка эга бўламиз.

3. Агар $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$ бўлса, ∞^0 кўринишдаги аниқмасликка эга бўламиз.

Бундай аниқмасликларни ечиш учун логарифмлаш усулидан фойдаланиб уларни юқорида кўрилган аниқмасликка келтирилади. Ушбу

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}=A$$

белгилашни киритамиз ва унинг ҳар иккала қисмини логарифмлаймиз ва логарифмнинг хоссаларидан фойдаланамиз:

$$\lim_{x\to x_0}\left[\varphi(x)\cdot\ln f(x)\right]=\ln A.$$

Бу $0\cdot\infty$ кўринишдаги аниқмасликдан иборат. Уни $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишга келтириб ечилади:

$$\ln A=\lim_{x\to x_0}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

4-мисол. $\lim\limits_{x\to0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$ лимитни ҳисобланг.

Ечиш. Изланаётган ифоданинг лимитини A деб белгилаб оламиз ва иккала қисмини логарифмлаймиз:

$$\ln A=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(e^x+x\right)=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(e^x+x\right)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\ln\left(e^x+x\right)\right)'}{x'}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{e^x+1}{e^x+x}}{1}=2.$$

Демак, $\ln A=2$, бундан $A=e^2$.

Машқлар

73. $f(x) = x - x^3$ функция $[-1;0]$ ва $[0;1]$ кесмаларда Ролль теоремаси шартларини қаноатлантиришини кўрсатинг ва унга мос C нинг қийматини топинг.

74. $[1;e]$ кесмада $y = \ln x$ функция учун Лагранж теоремаси тўғрилигини текширинг.

75. $[0;\frac{\pi}{2}]$ кесмада $f(x) = \sin x$ ва $\varphi(x) = x + \cos x$ функциялар учун Коши теоремаси тўғрилигини текширинг.

76. Қуйидаги лимитларни топинг:

а) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-7x^2+4x+2}{x^3-5x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{7x}-1}{\operatorname{tg}3x}$; г) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{2x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{1+x}\right)^x$; е) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg}x)^{2x-\pi}$;

ж) $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$.

77. Қуйидаги лимитларни топинг:

а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos7x}{x\sin7x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}(\cos2x)^{\frac{1}{x^2}}$; в) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}}{x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\left(x\sin\frac{3}{x}\right)$; е) $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

6-§. Функцияларни текшириш ва уларнинг графикларини ясашга ҳосиланинг татбиқи

1-таъриф. Агар x аргументнинг $(a;b)$ интервалдаги катта (кичик) қийматига функциянинг катта (кичик) қиймати мос келса, яъни $x_1 < x_2$ да $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$ бўлса, у ҳолда $y = f(x)$ функция *ўсувчи (камаювчи)* дейилади.

Функциянинг ўсиш (камайиш) аломатларини кўрсатамиз.

1. Агар дифференциалланувчи $y = f(x)$ функция $[a;b]$ кесмада ўсувчи (камаювчи) бўлса, унинг шу кесмадаги ҳосиласи мусбат (манфий), яъни $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ бўлади.

2. Агар $[a;b]$ кесмада узлуксиз ва кесманинг ички нуқталарида дифференциалланувчи функция мусбат (манфий) ҳосилага эга бўлса, $y = f(x)$ функция шу кесмада *ўсувчи (камаювчи)* бўлади.

Агар ихтиёрий $x_1 < x_2$ лар учун $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$ бўлса, $y = f(x)$ функция бирор интервалда *камаймайдиган (ўсмайдиган)* функция дейилади.

Функциянинг камаймайдиган ёки ўсмайдиган интерваллари унинг *монотонлик интерваллари* дейилади.

Агар берилган кесмада $y = f(x)$ функция фақат ўсувчи ёки фақат камаювчи бўлса, шу кесмада $y = f(x)$ функция *монотон* дейилади.

Функциянинг монотонлик характери функциянинг ҳосиласи ишорасини ўзгартирмайдиган нуқталарда ўзгариши мумкин.

Функциянинг биринчи тартибли ҳосиласини нолга айлантирадиган ёки узилишга эга бўладиган нуқталари $y = f(x)$ функциянинг *критик нуқталари* дейилади.

1-мисол. $y = 2x^2 - \ln x$ функциянинг монотонлик интерваллари ва критик нуқталарини топинг.

Ечиш. Берилган функция $x > 0$ да аниқланган. Унинг ҳосиласини топамиз:

$$y' = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2-1}{x}.$$

$y' = 0$, $4x^2 - 1 = 0$, бундан $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$.

$x_2 = -\frac{1}{2}$ критик нуқта функциянинг аниқланиш соҳасига кирмагани учун уни ташлаб юборамиз. Топилган $x_1 = \frac{1}{2}$ критик нуқта функциянинг аниқланиш соҳасини $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ ва $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ интервалларга бўлади.

Бу интервалларда у' ҳосиланинг ишорасини аниқлаймиз.

а) $(0;\frac{1}{2})$ да $y'\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{3} < 0$, б) $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ да $y'(1) = 3 > 0$.

Бу эса биринчи интервалда функция камаювчи, иккинчи интервалда ўсувчи эканини билдиради.

2-таъриф. Агар ихтиёрий кичик $|\Delta x| \neq 0$ аргумент орттирмаси учун $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ ($f(x + \Delta x) > f(x_1)$) тенгсизлик бажарилса, у ҳолда x_1 нуқта $y = f(x)$ функциянинг *локал максимуми* (*локал минимуми*) дейилади.

Функциянинг локал максимуми ва локал минимуми унинг *локал экстремуми* дейилади.

1-теорема (функция экстремуми мавжуд бўлишининг зарурий шарти). *Агар $y = f(x)$ функция $x = x_0$ нуқтада экстремумга эга бўлса, у ҳолда $f'(x_0) = 0$ бўлади ёки $f'(x_0)$ мавжуд бўлмайди.*

Экстремум нуқтасидан дифференциалланувчи функция графигига ўтказилган уринма Ох ўқига параллел бўлади.

2-мисол. $y = (x + 2)^3$ функциянинг экстремумини текширинг.

Ечиш. Берилган функциянинг ҳосиласини топамиз:

$$y' = 3(x + 2)^2,\ y' = 0,\ x_1 = -2.$$

$x_1 = -2$ нуқтада берилган функция экстремумга эга эмас, чунки $x>-2$ да $y = (x+2)^3>0$, $x<-2$ да $y = (x+2)^3<0$, $x = -2$ да $y = (x+2)^3 = 0$.

Демак, функциянинг ҳосиласини нолга айлантирадиган нуқтанинг мавжуд бўлиши функциянинг экстремуми мавжуд бўлади, дейиш нотўғри экан.

2-теорема (локал экстремум мавжудлигини етарли шарти). *$y = f(x)$ функция $x = x_0$ критик нуқта бўлган бирор интервалда узлуксиз ва бу интервалнинг ҳамма нуқталарида дифференциалланувчи бўлсин. Агар $x < x_0$ да $f'(x)> 0$ мусбат, $x > x_0$ да $f'(x) < 0$ манфий бўлса, у ҳолда $y = f(x)$ функция максимумга эга бўлади. Агар $x<x_0$ да $f'(x)<0$ манфий, $x > x_0$ да $f'(x) > 0$ мусбат бўлса, $y = f(x)$ функция минимумга эга бўлади.*

Теоремада кўрсатилган тенгсизлик $f'(x) > 0$ ёки $f'(x)< 0$ $x = x_0$ критик нуқтанинг етарлича кичик атрофида бажарилиши кераклигини эслатиб ўтамиз.

$y = f(x)$ функциянинг экстремумларини биринчи ҳосила ёрдамида топиш учун қуйидаги амалларни бажариш керак.

1. Берилган функциянинг биринчи тартибли y' ҳосиласи топилади.

2. y' ҳосилани нолга айлантирадиган критик ва $f'(x)$ мавжуд бўлмаган нуқталари топилади.

3. Ҳар бир критик нуқтадан чап ва ўнг томонда $f'(x)$ нинг ишораси аниқланади; $y = f(x)$ функция x_1, x_2, x_3 критик нуқталарга эга бўлса, у ҳолда қуйидаги ҳоллардан бири бўлиши мумкин.

а) агар x_1 критик нуқтанинг чап томонида ҳосиланинг ишораси мусбат, ўнг томонида манфий бўлса, бу нуқтада $f(x)$ функция локал максимумга эришади;

б) агар x_2 критик нуқтанинг чап томонида ҳосиланинг ишораси манфий, ўнг томонида мусбат бўлса, бу нуқтада $f(x)$ функция локал минимумга эришади;

в) агар x_3 критик нуқтанинг чап ва ўнг томонида ҳосиланинг ишораси бир хил бўлса, бу нуқтада функция экстремумга эришмайди.

Функция экстремумини биринчи тартибли ҳосила ёрдамида текширишни қуйидаги жадвал (2.1-жадвалга қаранг) кўринишда ёзиш мумкин.

2.1-жадвал

Критик нуқта x_1 дан ўтишда $f'(x)$ ҳосиланинг ишораси			Критик нуқтанинг характери
$x < x_1$	$x = x_1$	$x > x_1$	
+	$f'(x_1)=0$ ёки узилиш нуқтаси	–	Максимум нуқтаси
–	$f'(x_1)=0$ ёки узилиш нуқтаси	+	Минимум нуқтаси
+	$f'(x_1)=0$ ёки узилиш нуқтаси	+	Экстремум йўқ (функция ўсади)
–	$f'(x_1)=0$ ёки узилиш нуқтаси	–	Экстремум йўқ (функция камаяди)

3-мисол. Ушбу $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1 = 0$ функциянинг максимум ва минимумини текширинг ва графигини ясанг.

Ечиш. 1) Биринчи ҳосилани топамиз: $y' = x^2-4x+3$.

2) $y' = 0$ ёки $x^2-4x+3=0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизларини, яъни критик нуқталарни топамиз: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Ҳосила сонлар ўқининг ҳамма нуқталарила узлуксиз. Узилиш нуқтаси йўқ. Шунинг учун $x_1 = 1$, ва $x_2 = 3$ критик нуқтадан бошқа критик нуқта йўқ.

3) Сонлар ўқини бу нуқталар ёрдамида учта интервалга буламиз ва бу интервалларнинг ҳар бирида берилган функция ҳосиласининг ишорасини аниқлаймиз. $y' = (x - 1)(x - 3)$.

а) $]-\infty; 1[$ да $f'(0) = 3 > 0$,

б) $]1; 3[$ да $f'(2) = -1 < 0$,

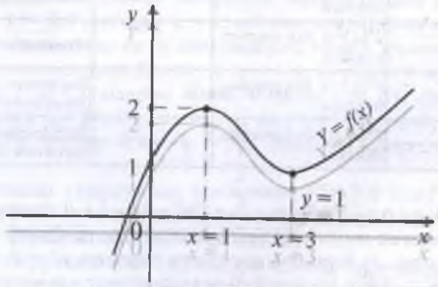
в) $]3; +\infty\ [$ да $f'(4) = 3 > 0$.

Демак, $x_1 = 1$ қийматда функция максимум, $x_2 = 3$ қийматда минимумга эришади. Функциянинг критик нуқталардаги қийматларини топамиз:

$$y_{\max} = y\Big|_{x=1} = f(1) = \frac{7}{3},\ y_{\min} = y\Big|_{x=3} = f(3) = 1.$$

Баъзи ҳолларда $y = f(x)$ функциянинг критик нуқталарида локал максимум ёки локал минимумга эга бўлишини иккинчи ҳосила ёрдамида текшириш осонроқ булади.

3-теорема. *$y = f(x)$ функциянинг биринчи тартибли ҳосиласи нолга тенг ($f'(x_0) = 0$) бўлиб, иккинчи тартибли ҳосиласи мавжуд ва нолдан фарқли ($f''(x) \neq 0$) бўлсин. Агар $f''(x)<0$ бўлса, у ҳолда $x = x_0$ нуқтада функция максимумга эга, агар $f''(x)>0$ бўлса, у ҳолда $x = x_0$ нуқтада функция минимумга эга бўлади.*



3-чизма.

$f''(x) = 0$ бўлганда, $x = x_0$ нуқта экстремал нуқта бўлмаслиги мумкин. Функциянинг экстремумини иккинчи ҳосила ёрдамида текширишни қуйидаги жадвал-схема кўринишда ёзиш мумкин (2.2 жадвал).

2.2-жадвал

$f'(x_1)$	$f''(x_1)$	Критик нуқтанинг характери
0	–	Максимум нуқтаси
0	+	Минимум нуқтаси
0	0	Номаълум

$y = f(x)$ функциянинг экстремумларини иккинчи тартибли ҳосила ёрдамида топиш учун қуйидаги амалларни бажариш керак:

1) биринчи тартибли ҳосилани топиш;

2) ҳосилани нолга айлантирадиган критик нуқталарининг сонини аниқлаш;

3) иккинчи тартибли ҳосилани топиш;

4) топилган критик нуқталарда иккинчи тартибли ҳосила ишорасини аниқлаш.

4-мисол. Иккинчи тартибли ҳосила ёрдамида $y = x^2 – e^{-x}$ функциянинг экстремумларини текширинг.

Ечиш. Берилган функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топамиз:

$$y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x},$$

$$y'' = (2 - 2x)e^{-x} - (2x - x^2)e^{-x} = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}.$$

Биринчи тартибли ҳосила $x \in R$ да узлуксиз бўлгани учун берилган функциянинг критик нуқталари $2x - x^2 = 0$ тенгламани қаноатлантиради. Бундан $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

Энди иккинчи тартибли ҳосиланинг критик нуқталардаги ишорасини текширамиз:

$y''(0) = 2>0$, шунинг учун берилган функция $x_1 = 0$ нуқтада минимумга эришади, $y_{\min} = y(0) = 0$.

$y''(2) = -2e^{-2}<0$, шунинг учун функция $x_2 = 2$ нуқтада максимумга эришади, $y_{\max} = y(2) = 4e^{-2}$.

Функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топишни кўрамиз.

$y = f(x)$ функция $[a;b]$ кесмада узлуксиз бўлсин. Бундай функция ўзининг энг катта ва энг кичик қийматларига кесманинг ичида ва учларида эришиши мумкин. Уни топиш қоидаси қуйидагича:

1) функциянинг биринчи тартибли ҳосиласини топамиз ва уни нолга тенглаб, барча критик нуқталарни аниқлаймиз;

2) функциянинг барча критик (агар бу критик нуқталар берилган кесмага тегишли бўлса) ва кесманинг ички, четки ($f(a)$; $f(b)$) нуқталардаги қийматларини ҳисоблаймиз;

3) бу қийматлар ичидан энг катта ва энг кичигини танлаймиз ва улар мос равишда функциянинг энг катта ва энг кичик қийматлари бўлади.

5-мисол. $f(x) = x^3 - 3x$ функциянинг $[-1,5; 2,5]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматини топинг.

Ечиш. 1. Функциянинг критик нуқталарини топамиз.

$y' = f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$, бу ердан $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ нуқталарда $f'(x) = 0$ эканлиги келиб чиқади ва улар берилган кесмага тегишлидир.

2. Функциянинг критик ва берилган кесманинг четки нуқталардаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = 2;$$

$$f(1) = (1)^3 - 3 \cdot 1 = -2;$$

$$f(-1,5) = (-1,5)^3 - 3 \cdot (-1,5) = 1,125;$$

$$f(2,5) = (2,5)^3 - 3 \cdot (2,5) = 8,125.$$

3. Демак, функциянинг берилган кесмадаги энг катта қиймати $x = 2,5$ (учидаги) нуқтада $f(2,5) = 8,125$ га ва энг кичик қиймати $x = 1$ (ички) нуқтада $f(1) = -2$ га тенгдир.

Функциянинг қавариқ ва ботиқлиги. Бурилиш нуқтаси

3-таъриф. Агар функциянинг графиги унинг ихтиёрий нуқтасидан ўтказилган уринмасидан пастда (юқорида) жойлашган бўлса, $(a;b)$ интервалда дифференциалланувчи $y = f(x)$ функциянинг графиги шу интервалда *қавариқ (ботиқ)* дейилади.

4-таъриф. Функция графигининг қавариқлик қисмидан ботиқлик қисмини ажратадиган нуқтаси *бурилиш нуқтаси* дейилади.

4-теорема (функция графиги қавариқ (ботиқ) бўлишининг етарли шарти). *Агар $(a;b)$ интервалнинг барча нуқталарида $y = f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи манфий (мусбат), яъни $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) бўлса, у ҳолда $y = f(x)$ эгри чизиқ бу интервалда қавариқ (ботиқ) бўлади.*

Бурилиш нуқтасида функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи ўзининг ишорасини ўзгартиради, шунинг учун бундай нуқталарда функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи нолга тенг бўлади ёки узилишга эга бўлади ёки мавжуд бўлмайди.

5-теорема (бурилиш нуқтаси мавжуд бўлишининг етарли шарти). *Агар функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи $f''(x_0) = 0$ бўлса ёки мавжуд бўлмаса ва x_0 нуқтадан ўтаётганда $f''(x)$ ўз ишорасини ўзгартирса, $x = x_0$ абсциссали нуқта $y = f(x)$ эгри чизиқнинг бурилиш нуқтаси бўлади.*

6-мисол. $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ эгри чизиқнинг қавариқлик, ботиқлик интервалларини ва бурилиш нуқтасини топинг.

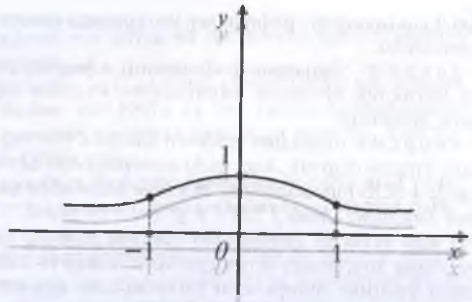
Ечиш. Биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларни топамиз:

$$y' = -xe^{-\frac{x^2}{2}}, \ y'' = \left(x^2 - 1\right)e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Биринчи ва иккинчи тартибли ҳосила ихтиёрий $x \in R$ да маънога эга. y'' ни нолга тенглаб, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ ларни топамиз. $x_1 = -1$ нуқтанинг атрофида иккинчи ҳосила ишорасининг ўзгариш қонунини аниқлаймиз:

$x < -1$ да $y''(-2) = 3e^{-2} = \frac{3}{e^2} > 0$;
$x > -1$ да $y''(0) = -1 < 0$;
$x > 1$ да, $y''(2) = 3e^{-2} > 0$.

Демак, $(-\infty; -1)$ ва $(1; +\infty)$ интервалларда $y'' > 0$ бўлгани учун шу интервалларда эгри чизиқ ботиқ; $(-1; 1)$ интервалда $y'' < 0$ бўлгани учун эгри чизиқ қавариқ бўлади.



4-чизма.

$x_1 = -1, x_2 = 1$ қийматлар бурилиш нуқтасининг абсциссалари. Бурилиш нуқтасининг ординатаси эса: $y(-1) = e^{-\frac{1}{2}}$, $y(1) = e^{-\frac{1}{2}}$. Бурилиш нуқталари: $M_1\left(-1; e^{-\frac{1}{2}}\right)$, $M_2\left(1; e^{-\frac{1}{2}}\right)$ лар бўлади. Берилган функциянинг графиги 4-чизмада тасвирланган.

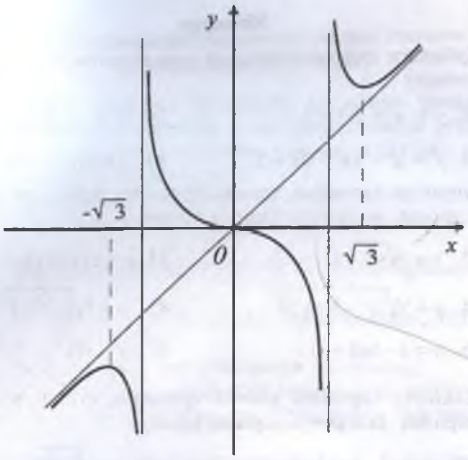
Функциянинг асимптоталари

Функция аргументи x чексизликка интилганда функция графиги бирор тўғри чизиққа чексиз яқинлашиш хоссаси унинг графигини чизишда муҳим роль ўйнайди.

5-таъриф. Агар $y = f(x)$ эгри чизиқнинг M нуқтасидан L тўғри чизиққача бўлган S масофа M нуқта чексиз узоқлашганда нолга интилса, L тўғри чизиқ $y=f(x)$ эгри чизиқнинг *асимптотаси* дейилади.

Агар шундай $x = x_i \left(i = \overline{1, n}\right)$ нуқталар мавжуд бўлсаки, улар учун $\lim\limits_{x \to x_i} \left(f(x)\right) = \pm\infty$ бўлса, яъни функция иккинчи тур узилишга эга бўлса, у ҳолда $x = x_i \left(i = \overline{1, n}\right)$ тўғри чизиқлар $y = f(x)$ эгри чизиқнинг *вертикал асимптоталари* дейилади.

Агар $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx\right)$ лимитлар мавжуд бўлса, у ҳолда $y = kx+b$ тўғри чизиқ $y = f(x)$ эгри чизиқнинг *оғма асимптотаси* дейилади.



5-чизма.

Агар $y = kx + b$ оғма асимптота тенгламасини аниқлашда $k = 0$ (хусусий ҳолда $k = 0$, $b = 0$) бўлса, у ҳолда $y = b$ (ёки $y = 0$) тўғри чизиқ *горизонтал асимптота* дейилади.

7-мисол. $y = \frac{x^3}{x^2-1}$ эгри чизиқнинг асимптотасини топинг.

Ечиш. $\lim\limits_{x \to \pm 1} = \frac{x^3}{x^2-1} = \pm\infty$ бўлгани учун берилган эгри чизиқ иккита, яъни $x = 1$ ва $x = -1$ вертикал асимптотага эга. Оғма асимптотасини топамиз:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x\left(x^2-1\right)} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0.$$

Шундай қилиб, берилган эгри чизиқ тенгламаси $y = x$ бўлган битта оғма асимптотага ва иккита $x = \pm 1$ вертикал асимптоталарга эга экан (5-чизма).

Машқлар

Қуйидаги функцияларнинг монотонлик оралиқларини топинг:

78. $y = x^4 - 2x^2 - 5$.   79. $y = \frac{x}{x^2-6x-16}$.

80. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$.   81. $y = \ln(1 - x^2)$.

Биринчи тартибли ҳосила ёрдамида қуйидаги функцияларнинг экстремумларини топинг:

82. $y = 3\sqrt[3]{x^2} - x^2$. ✓   83. $y = x(x+1)^3(x-3)^2$.

84. $y = 3\sqrt[3]{\left(x^2-6x+5\right)^2}$.   85. $y = 3\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$.

86. $y = x - \ln(1+x)$.   87. $y = x\ln^2 x$. ✓

Иккинчи тартибли ҳосила ёрдамида қуйидаги функцияларнинг экстремумларини топинг:

88. $y = 2x^3 - 15x^2 - 84x + 8$. ✓   89. $y = \sqrt{e^{x^2-4}}$.

90. $y = \frac{14}{x^4-8x^2+2}$.   91. $y = \sin 3x - 3\sin x$.

Қуйидаги функцияларнинг берилган оралиқдаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг:

92. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, $[-1;\ 5]$ кесмада.

93. $y = x + 3\sqrt[3]{x}$, ✓ $[-1;\ 1]$ кесмада.

94. $y = x^2\ln x$, ✓ $[-1;\ e]$ кесмада.

95. $y = 2\sin x + \sin 2x$, $[0;\ \frac{3}{2}\pi]$ кесмада.

Қуйидаги функцияларнинг қавариқлик, ботиқлик оралиқлари ва бурилиш нуқталарини топинг:

96. $y = x - \ln x$.   97. $y = \ln(1 + x^2)$.   98. $y = \mathrm{arctg}\,x - x$.

99. $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$. ✓   100. $y = \frac{1}{(x+1)^3}$.   101. $y = x \cdot \mathrm{arctg}\,x$.

Қуйидаги эгри чизиқларнинг асимптоталарини топинг:

102. $y = x + \frac{\ln x}{x}$.   103. $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$.   104. $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

7-§. Функцияни текширишнинг умумий схемаси. Функция графигини ясаш

Функцияни тўлиқ текшириш ва унинг графигини ясашни қуйидаги тартибда олиб бориш тавсия этилади:

1) функциянинг аниқланиш соҳаси, жуфт ёки тоқлиги, даврийлиги текширилади;

2) функциянинг узилиш нуқталари, унинг графигининг координата ўқлари билан кесишиш нуқталари аниқланади;

3) функциянинг монотонлиги ва экстремумлари текширилади;

4) қавариқлик ва ботиқлик интерваллари, бурилиш нуқтаси аниқланади;

5) функциянинг асимптоталари топилади;

6) бу маълумотлар графикни чизиш учун камлик қилса, қўшимча зарур бўлган ҳисоблашларни бажариш керак;

7) юқоридаги маълумотларга кўра функция графиги ясалади.

Мисол кўрамиз.

Мисол. $y = \sqrt[3]{(x+3)x^2}$ функцияни тўлиқ текширинг ва графигини ясанг.

Ечиш. Тавсия этилган схемадан фойдаланамиз.

1. Берилган функциянинг аниқланиш соҳаси: $x \in R$.

2. Функция узилиш нуқтасига эга эмас ва Ox ўқини $x = -3$ ва $x = 0$; Oy ўқини эса $x = 0$ нуқталарда кесади.

3. Функция жуфт ҳам, тоқ ҳам, даврий ҳам эмас.

4. Функциянинг ҳосиласини топамиз:

$$f'(x) = \frac{x+2}{\sqrt[3]{x(x+3)^2}}.$$

$x_1 = -2$ нуқтада $f'(x) = 0$ ва $x_2 = -3$, $x_3 = 0$ нуқталарда $f(x)$ мавжуд эмас. Бу нуқталар функциянинг аниқланиш соҳасини $(-\infty; -3)$, $(-3; -2)$, $(-2; 0)$, $(0; +\infty)$ интервалларга бўлади. Ҳар бир ҳосил қилинган интервалларнинг ичида ҳосила ишораси сақланади, яъни $(-\infty; 3)$, $(-3; 2)$, $(0; +\infty)$ интервалларда $f'(x)>0$ ва $(-2; 0)$ интервалда $f'(x) < 0$. Бу эса $(-\infty; -3)$, $(-3; -2)$ интервалларда функция ўсувчи, $(-2; 0)$ интервалда камаювчи ва $(0; +\infty)$ интервалда ўсувчи эканини билдиради. $x_1 = -2$ нуқтанинг атрофида x ўсиши билан биринчи тартибли ҳосила ишорасини «+» дан «–» га ўзгартиради, шунинг учун $x_1 = -2$ нуқта максимум нуқтаси бўлиб,

$$y_{\max} = y(-2) = \sqrt[3]{4} \quad \text{бўлади.}$$

$x_3 = 0$ нуқта учун биринчи тартибли ҳосила ишорасини «–»дан «+» га ўзгартиради, шунинг учун $x_3 = 0$ минимум нуқтаси бўлиб,

$$y_{\min} = y(0) = 0 \quad \text{бўлади.}$$

$x_2 = -3$ нуқтада функция экстремумга эга эмас, чунки унинг атрофида $f'(x)$ ишорасини ўзгартирмайди.

5. Иккинчи тартибли ҳосилани топамиз:

$$f''(x) = -\frac{2}{\sqrt[3]{(x+3)^5 \cdot x^4}}.$$

Ихтиёрий чекли x учун $f''(x) > 0$. Шунинг учун бурилиш нуқтаси иккинчи тартибли ҳосиласи мавжуд бўлмаган $x_3 = -3$ ва $x_3 = 0$ нуқталари бўлиши мумкин. Бу нуқталар билан бўлинган интервалларда у" нинг ишорасини аниқлаймиз:

$x \in (-\infty; -3)$ интервалда $f''(x) > 0$ — эгри чизиқ ботиқ;
$x \in (-3; 0)$ интервалда $f''(x) < 0$ — эгри чизиқ қавариқ;
$x \in (0; +\infty)$ интервалда $f''(x) < 0$ — эгри чизиқ қавариқ;

$x_2 = -3$ нуқта атрофида иккинчи тартибли ҳосила ишорасини ўзгартиргани учун $M(-3;0)$ нуқта бурилиш нуқтаси бўлади. $x_3 = 0$ нуқта бурилиш нуқтаси бўлмайди, чунки унинг атрофида иккинчи тартибли ҳосила ишорасини ўзгартирмайди.

6. Берилган функция барча сонлар ўқида аниқланганлиги сабабли вертикал асимптотага эга эмас. $y = kx+b$ оғма асимптотасини аниқлаймиз:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{(x+3)\cdot x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{1+\frac{3}{x}} = 1.$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (y - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{(x+3)\cdot x^2} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{(x+3)\cdot x^2} - x\right)\left(\sqrt[3]{(x+3)^2\cdot x^4} + x\sqrt[3]{(x+3)\cdot x^2} + x^2\right)}{\sqrt[3]{(x+3)^2\cdot x^4} + x\sqrt[3]{(x+3)\cdot x^2} + x^2} =$$

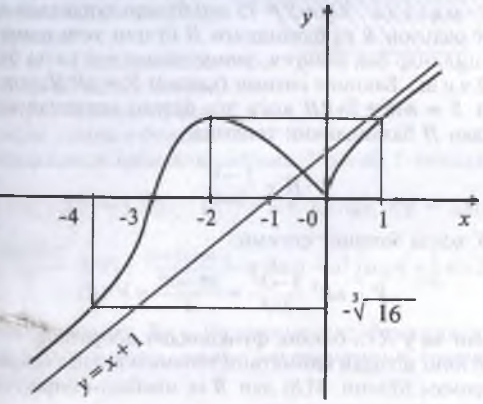
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+3)\cdot x^2 - x^3}{\sqrt[3]{(x+3)^2\cdot x^4} + x\sqrt[3]{(x+3)\cdot x^2} + x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2}{\sqrt[3]{(x+3)^2\cdot x^4} + x\sqrt[3]{(x+3)\cdot x^2} + x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{1+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}} + \sqrt[3]{1+\frac{3}{x}} + 1} = 1.$$

Оғма асимптотанинг тенгламаси $y = x + 1$ эканлигини топдик.

7. Функция графигини чизишдан олдин эгри чизиқнинг абсциссалар ўқини $x_2 = -3$ ва $x_3 = 0$ нуқталарда қандай бурчак остида кесишини аниқлаш керак. Бу нуқталарда $y' = \text{tg}\alpha = \infty$ ва $\alpha = \frac{\pi}{2}$. $x_3 = 0$ қийматида берилган функция нол қийматга эришади, яъни бу нуқта атрофида



6-чизма.

функция графиги Ox ўқининг юқори қисмида ётишини билдиради. Шунинг учун $x_3 = 0$ нуқта функция графигининг қайтиш нуқтаси бўлади.

8. Текшириш натижаларига кўра функция графигини чизамиз (6-чизма).

Машқлар

105. Қуйидаги функцияларни тўлиқ текширинг ва графигини ясанг:

а) $y = x^3 - 3x^2$; б) $y = x^2 + \frac{2}{x}$; в) $y = \frac{x^3}{3-x^2}$;

г) $y = \ln(x^2 + 2x + 2)$; д) $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$; е) $y = -\ln(x^2-4x+5)$.

8-§. Максимум ва минимум назариясининг амалий масалаларни ечишга татбиқи

Максимум ва минимум назарияси ёрдамида геометрия, механика ва бошқа фанларга доир кўпгина масалалар ечилади.

Шундай масалаларнинг баъзиларини ечиб кўрсатамиз.

1-масала. Юзи $S = 75\,\pi$м^2 бўлган тунукадан асосининг радиуси R ва баландлиги H бўлган усти очиқ шундай цилиндр бак ясангки, унинг ҳажми энг катта бўлсин.

Ечиш. Бакнинг сиғими (ҳажми) $V = \pi R^2 H$, уни ясаш учун $S = \pi R^2 + 2\pi RH$ юзга эга бўлган материал кетади. Бундан H баландликни топамиз:

$$H = \frac{S-\pi R^2}{2\pi R}. \qquad \text{(A)}$$

У ҳолда бакнинг сиғими:

$$V = \pi R^2\, \frac{S-\pi R^2}{2\pi R} = \frac{SR-\pi R^3}{2} = V\ (R)$$

га тенг ва у R га боғлиқ функциядан иборатдир.

R нинг шундай қийматини топамизки, унда сиғим $V(R)$ максимум бўлсин. $V(R)$ дан R га нисбатан биринчи тартибли ҳосилани топамиз:

$$V' = \frac{1}{2}\left(S - 3\pi R^2\right),\ V' = 0,$$

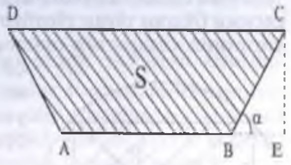
$$S - 3\pi R^2 = 0, \qquad R = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}.= \sqrt{\frac{75\pi}{3\pi}} = 5\text{м}.$$

Иккинчи тартибли ҳосила $V'' = -3\pi R < 0$ бўлгани учун топилган $R = 5$ қийматда бакнинг сиғими энг катта (максимал) бўлади.

Юқоридаги (A) формуладан бакнинг баландлигини топамиз:

$$H = \frac{S-\pi R^2}{2\pi R} = \frac{S-\pi\frac{S}{3\pi}}{2\pi\cdot\sqrt{\frac{S}{3\pi}}} = \sqrt{\frac{S}{3\pi}} = \sqrt{\frac{75\pi}{3\pi}} = 5\text{м}.$$

2-масала. Суғориш каналининг кўндаланг кесими тенг ёнли трапеция шаклида бўлиб, унинг ён томони кичик асосига тенг (7-чизма). Бу трапециянинг ён томони нишаблик бурчаги α қандай бўлганда каналнинг кўндаланг кесими юзи энг катта бўлади?



7-чизма.

Ечиш. Трапециянинг ён томони ва кичик асосини a деб, каналнинг кўндаланг кесим юзини α бурчакнинг функцияси каби аниқлаймиз. У ҳолда 7-чизмадан:

$$|AB| = a,\ |BE| = a\cos\alpha,\ |DC| = a + 2a\cos\alpha,\ CE = a\sin\alpha,$$

$$S = \frac{|AB|+|DC|}{2}\cdot|CE| = \frac{2a+2a\cos\alpha}{2}\cdot a\sin\alpha = a^2\left(\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$$

ни ҳосил қиламиз. Бу α ўзгарувчининг функциясидан иборат бўлгани учун, унинг экстремумини текширамиз:

$$S' = a^2(\cos\alpha + \cos 2\alpha).$$

Критик нуқталарда $S' = 0$, яъни $\cos\alpha + \cos 2\alpha = 0$ ёки

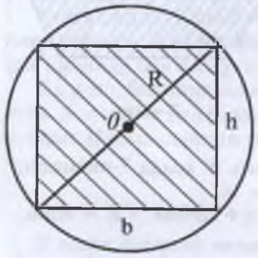
$$\cos\frac{3\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} = 0.$$

Аниқланиш соҳаси $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ бўлгани учун $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$. Шунинг учун $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$, бундан $\frac{3\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}$ ёки $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Энди $\alpha = \frac{\pi}{3}$ бўлганда S функция $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ кесмада энг катта қийматга эришишини исбот қиламиз.

Ҳақиқатан, $S'' = a^2(-\sin\alpha - 2\sin 2\alpha)$, $S''\left(\frac{\pi}{3}\right) = a^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\right) = -a^2\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$. Шунинг учун $\alpha = \frac{\pi}{3}$ да функция $S''\left(\frac{\pi}{3}\right) = S_{\max}\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ локал максимумга эга, $S(0) = 0$, $S\left(\frac{\pi}{2}\right) = a^2 < S_{\max}$ бўлгани учун $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ кесмада S функция энг катта қийматга эришади.

3-масала. Брусокнинг маҳкамлиги унинг кўндаланг кесими бўлган тўғри тўртбурчакнинг эни b га ва h баландлигининг квадратига пропорционаллиги маълум. Радиуси $R = 2\sqrt{3}$ дм бўлган ходадан шундай брусок тайёрланганки, унинг маҳкамлиги энг катта бўлсин (8-чизма).



8-чизма.

Ечиш. Брусокнинг маҳкамлиги қуйидагича ифодаланади:

$$N = kh^2 b,$$

бунда k — пропорционаллик коэффициенти, $k > 0$. 8-чизмадан $h^2 + b^2 = 4R^2$ ёки $h^2 = 4R^2 - b^2$ тенгликни ёзамиз. У ҳолда брусокнинг маҳкамлиги:

$$N = k(4R^2 - b^2)\, b.$$

$N = N(b)$ функциянинг экстремумини топамиз:

$$N' = k(4R^2 - 3b^2).$$

Агар $N' = 0$ бўлса, $4R^2 - 3b^2 = 0$ бўлади, бундан $b = \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{2\cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4$ дм. Баландлик эса

$$h = \sqrt{4R^2 - b^2} = \sqrt{4R^2 - \frac{4R^2}{3}} = \sqrt{\frac{12R^2 - 4R^2}{3}} = 2R\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} =$$

$$= 2\cdot 2\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{2},$$

яъни $h = 4\sqrt{2}$ дм га тенг. Иккинчи тартибли ҳосила $N'' = -6kb < 0$ бўлгани учун, аниқланган b ва h нинг қийматларида брусокнинг маҳкамлиги энг катта бўлади.

Машқлар

106. Сиғими $V = 16\pi \approx 50$ м^3 бўлган ёпиқ цилиндр бак ясаш талаб қилинади. Бакнинг ўлчамлари (радиуси R ва баландлиги H) қандай бўлганда уни тайёрлаш учун энг кам материал кетади?

107. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипснинг ичига чизилган юзи энг катта бўлган тўғри тўртбурчакнинг томонларини топинг.

108. Ясовчиси 20 см бўлган конус шаклидаги воронка ясаш талаб қилинади. Воронканинг ҳажми энг катта бўлиши учун унинг баландлиги қандай бўлиши керак?

109. R радиусли шар ичига энг катта ҳажмга эга бўлган мунтазам уч бурчакли призма чизинг.

110. Кўндаланг кесими тўғри тўртбурчак бўлган ёғочнинг маҳкамлигини энига ва баландлигининг кубига тўғри пропорционал деб қабул қилиб, диаметри 16 см бўлган ходадан кесиб олинадиган тўрт қиррали тўсиннинг эни қандай бўлганда у энг катта маҳкамликка эга бўлишини топинг.

9-§. Биринчи мустақил уй иши

Бу мустақил уй ишининг ҳар бир вариантида 14 та мисол бўлиб, уларда берилган функциянинг биринчи тартибли ҳосиласини топиш керак.

Қуйида вариант мисолларини ечиш намунасини келтирамиз.

Берилган функцияларни дифференциалланг (биринчи тартибли ҳосилани топинг).

1. $y = 9x^4 - \frac{4}{x^3} + \sqrt[3]{x^7} - 3x + 4.$

Ечиш.

$$y' = 9\cdot 4x^3 - 4\cdot(-3)x^{-4} + \frac{7}{3}\cdot x^{4/3} - 3 = 36x^3 + \frac{12}{x^4} + \frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4} - 3.$$

2. $y = \sqrt[4]{\left(2x^2 - 3x + 1\right)^3} - \frac{6}{(x+1)^3}.$

Ечиш.

$$y' = \frac{3}{4}\left(2x^2 - 3x + 1\right)^{-\frac{1}{4}}\cdot(4x-3) - 6\cdot(-3)(x+1)^{-4} =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{4x-3}{\sqrt[4]{2x^2-3x+1}} + \frac{18}{(x+1)^4}.$$

3. $y = \mathrm{tg}^5(x+2)\cdot\arccos 3x^2.$

Ечиш.

$$y' = 5\mathrm{tg}^4(x+2)\cdot\frac{1}{\cos^2(x+2)}\cdot\arccos 3x^2 + \mathrm{tg}^5(x+2)\cdot$$

$$\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-9x^4}}\right)\cdot 6x = \frac{5\mathrm{tg}^4(x+2)\arccos 3x^2}{\cos^2(x+2)} - \frac{6x\,\mathrm{tg}^5(x+2)}{\sqrt{1-9x^4}}.$$

4. $y = \arcsin^5 4x\cdot\log_2(x-5).$

Ечиш.

$$y' = 5\arcsin^4 4x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-16x^2}}\cdot 4\log_2(x-5) + \arcsin^5 4x\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{(x-5)\ln 2} = \frac{20\arcsin^4 4x\cdot\log_2(x-5)}{\sqrt{1-16x^2}} + \frac{\arcsin^5 4x}{(x-5)\ln 2}.$$

5. $y = 3^{-x^4}\cdot\mathrm{ctg}7x^3.$

Ечиш.

$$y' = 3^{-x^4}\cdot\ln 3\cdot\left(-4x^3\right)\cdot\mathrm{ctg}7x^3 + 3x^{-x^4}\cdot x^4\cdot\left(\frac{1}{-\sin^2 7x^3}\right)\cdot 21x^2 =$$

$$= -4\ln 3\cdot 3^{-x^4}\cdot x^3\cdot\mathrm{ctg}7x^3 - \frac{21x^3\cdot 3^{-x^4}}{\sin^2 7x^3}.$$

6. $y = \mathrm{cth}^2 3x\cdot\mathrm{arctg}\sqrt{x}.$

Ечиш.

$$y' = 2\mathrm{cth}3x\cdot\left(-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3x}\right)\cdot 3\mathrm{arctg}\sqrt{x} + \mathrm{cth}^2 3x\cdot\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= -\frac{6\mathrm{cth}3x\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}}{\mathrm{sh}^2 3x} + \frac{\mathrm{cth}^2 3x}{2(1+x)\sqrt{x}}.$$

7. $y = \frac{\sqrt{3x^2-7x+5}}{e^{-x^4}}.$

Ечиш.

$$y' = \left(\sqrt{3x^2 - 7x + 5}\cdot e^{x^4}\right)' = \frac{(6x-7)e^{x^4}}{2\sqrt{3x^2-7x+5}} + \sqrt{3x^2 - 7x + 5}\times$$

$$\times e^{x^4}\cdot 4x^3 = \frac{(6x-7)e^{x^4}}{2\sqrt{3x^2-7x+5}} + 4x^3e^{x^4}\sqrt{3x^2 - 7x + 5}.$$

8. $y = \frac{\lg\left(x^2-3x+5\right)}{\mathrm{arcctg}^2 5x}.$

Ечиш.

$$y' = \left(\lg\left(x^2 - 3x + 5\right)\cdot\mathrm{arcctg}^{-2}5x\right)' = \frac{(2x-3)\mathrm{arcctg}^{-2}5x}{\left(x^2-3x+5\right)\ln 10} +$$

$$+ (-2)\mathrm{arcctg}^{-3}5x\left(-\frac{1}{1+25x^2}\right)5\cdot\lg\left(x^2 - 3x + 5\right) =$$

$$= \left(\frac{(2x-3)\mathrm{arcctg}^2 5x}{\left(x^2-3x+5\right)\ln 10} + \frac{10\lg\left(x^2-3x+5\right)\mathrm{arcctg}\,5x}{1+25x^2}\right)\cdot\mathrm{arcctg}^{-4}5x.$$

9. $y = \dfrac{\sqrt{\arcsin 3x}}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Ечиш.

$$y' = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{\arcsin 3x}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\,3\cdot\operatorname{sh}^2 x - 2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x\sqrt{\arcsin 3x}}{\operatorname{sh}^4 x} =$$

$$= \frac{\dfrac{3\operatorname{sh}^2 x}{2\sqrt{\arcsin 3x}\cdot\sqrt{1-9x^2}} - \operatorname{sh}2x\cdot\sqrt{\arcsin 3x}}{\operatorname{sh}^4 x}.$$

10. $y = \dfrac{3\ln\left(x^2-5\right)}{(x+3)^7}$.

Ечиш.

$$y' = \frac{\dfrac{1}{x^2-5}2x\cdot 3(x+3)^7 - 7(x+3)^6\cdot 3\ln\left(x^2-5\right)}{(x+3)^{14}} = 3\cdot\frac{\dfrac{2x(x+3)}{x^2-5} - 7\cdot\ln\left(x^2-5\right)}{(x+3)^8}.$$

11. $y = \sqrt[7]{\dfrac{x+5}{x-5}}\cdot\operatorname{ctg}(3x-4)$.

Ечиш.

$$y' = \frac{1}{7}\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{-\frac{6}{7}}\cdot\frac{x-5-(x+5)}{(x-5)^2}\operatorname{ctg}(3x-4) - \frac{1}{\sin^2(3x-4)}\cdot 3\sqrt[7]{\frac{x+5}{x-5}} =$$

$$= -\frac{10}{7}\cdot\operatorname{ctg}(3x-4)\sqrt[7]{\frac{(x-5)^8}{(x+5)^6}} - \frac{3}{\sin^2(3x-4)}\cdot\sqrt[7]{\frac{x+5}{x-5}}.$$

12. $y = \left(\operatorname{th}\sqrt{x+2}\right)^{\ln(3x+2)}$.

Ечиш.
Берилган функцияни логарифмлаймиз:

$$\ln y = \ln(3x+2)\ln\left(\operatorname{th}\sqrt{x+2}\right).$$

У ҳолда

$$\frac{1}{y}y' = \frac{3}{3x+2}\ln\left(\operatorname{th}\sqrt{x+2}\right) + \frac{\ln(3x+2)}{\operatorname{th}\sqrt{x+2}\operatorname{ch}^2\sqrt{x+2}\cdot 2\sqrt{x+2}}.$$

Бундан y' ни топамиз:

$$y' = \left(\operatorname{th}\sqrt{x+2}\right)^{\ln(3x+2)}\cdot\left(\frac{3\ln\left(\operatorname{th}\sqrt{x+2}\right)}{3x+2} + \frac{\ln(3x+2)}{2\sqrt{x+2}\operatorname{sh}\sqrt{x+2}\operatorname{ch}\sqrt{x+2}}\right).$$

13. $y = (\sin 7x)^{\operatorname{arctg}(3x-5)}$.

Ечиш.
Берилган функцияни логарифмлаймиз:

$$\ln y = \operatorname{arctg}(3x-5)\cdot\ln(\sin 7x).$$

У ҳолда

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{1+(3x-5)^2}\cdot 3\ln(\sin 7x) + \operatorname{arctg}(3x-5)\cdot\frac{1}{\sin 7x}\cdot 7\cos 7x.$$

Бундан y' ни топамиз:

$$y' = (\sin 7x)^{\operatorname{arctg}(3x-5)}\cdot\left(\frac{3\ln(\sin 7x)}{1+(3x-5)^2} + \frac{7\operatorname{arct}(3x-5)\cos 7x}{\sin 7x}\right).$$

14. $y = \dfrac{\sqrt[7]{(x+5)^6}}{(x-1)^2(x+3)^5}$.

Ечиш.
Логарифмлаш усулини татбиқ этиб дифференциаллаймиз:

$$\ln y = \frac{6}{7}\ln(x+5) - 2\ln(x-1) - 5\ln(x+3),$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{6}{7(x+5)} - \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x+3}.$$

$$y' = \frac{\sqrt[7]{(x+5)^6}}{(x-1)^2(x+3)^5}\left(\frac{6}{7(x+5)} - \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x+3}\right).$$

1-вариант

1. $y = 2\sqrt{x^3} - \frac{7}{x} + 3x^2 - \frac{2}{x^5}$.

2. $y = \frac{7}{(x-1)^3} + \sqrt{8x - 3 + x^2}$.

3. $y = 3^{\mathrm{tg}x} \cdot \arcsin 7x^4$.

4. $y = (x-4)^5 \cdot \mathrm{arcctg}3x^2$.

5. $y = \mathrm{arctg}^4 x \cdot \cos 7x^4$.

6. $y = \sin^4 2x \cdot \arccos x^2$.

7. $y = \frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{e^x}$.

8. $y = \frac{\mathrm{tg}^2(x-2)}{\lg(x+3)}$.

9. $y = \frac{\arcsin^2 4x}{\mathrm{tg}(5x-3)}$.

10. $y = \frac{2\lg(4x+5)}{(x+6)^4}$.

11. $y = \sqrt[4]{\frac{x+6}{x-6}} \cdot \sin\left(3x^2 + 1\right)$.

12. $y = (\mathrm{ch}3x)^{\frac{\mathrm{ctg}x}{x}}$.

13. $y = (\mathrm{arctg}5x)^{\log_2(x+4)}$.

14. $y = \frac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^3}$.

2-вариант

1. $y = 7x + \frac{5}{x^2} - \sqrt[5]{x^4} + \frac{6}{x}$.

2. $y = \sqrt{3x^4 - 2x^3} + x - \frac{4}{(x+2)^3}$.

3. $y = \sin^3 2x \cdot \cos 8x^5$.

4. $y = \mathrm{arctg}^2 5x \cdot \ln(x-4)$.

5. $y = \mathrm{tg}^4 x \cdot \arcsin 2x^3$.

6. $y = (x-3)^4 \cdot \arccos 5x^3$.

7. $y = \frac{e^{\arccos^2 x}}{\sqrt{x+5}}$.

8. $y = \frac{\log_5(3x-7)}{\mathrm{ctg}7x^3}$.

9. $y = \frac{\mathrm{arcctg}^4 5x}{sh\sqrt{x}}$.

10. $y = \frac{9\mathrm{arcg}(x+7)}{(x-1)^2}$.

11. $y = \sqrt[3]{\frac{2x-5}{2x+3}} \cdot \lg(4x+7)$.

12. $y = (\mathrm{cth}3x)^{\arcsin x}$.

13. $y = (\arccos x)^{\mathrm{tg}2x}$.

14. $y = \frac{\sqrt{x+7}\cdot(x-3)^4}{(x+2)^3}$.

3-вариант

1. $y = 5x^2 - \sqrt[3]{x^8} + \frac{4}{x^3} - \frac{5}{x}$.

2. $y = \sqrt[3]{(x-7)^5} + \frac{5}{4x^2+3x-5}$.

3. $y = \cos^5 3x \cdot \mathrm{tg}(4x+1)^3$.

4. $y = \mathrm{arctg}^3 2x \cdot \ln(x+5)$.

5. $y = (x-2)^4 \cdot \arcsin 5x^4$.

6. $y = (3x-4)^3 \cdot \arccos 3x^2$.

7. $y = \frac{(x-4)^2}{e^{\mathrm{arctg}x}}$.

8. $y = \frac{\ln(5x-3)}{4\mathrm{tg}3x^4}$.

9. $y = \frac{\mathrm{arctg}^3 2x}{\mathrm{ch}\frac{1}{x}}$.

10. $y = \frac{8\mathrm{arctg}(2x+3)}{(x+1)^3}$.

11. $y = \sqrt[4]{\frac{x+3}{x-3}} \cdot \ln(5x^2 - 2x + 1)$.

12. $y = (\cos(x+2))^{\ln x}$.

13. $y = (\arcsin 2x)^{\mathrm{ctg}(x+1)}$.

14. $y = \frac{(x-3)^5(x+2)^3}{\sqrt{(x-1)^3}}$.

4-вариант

1. $y = 3x^5 - \frac{3}{x}\sqrt{x^3} + \frac{10}{x^7}$.

2. $y = \sqrt[5]{(x+4)^6} - \frac{2}{2x^2-3x+7}$.

3. $y = \mathrm{tg}^4 x \cdot \arcsin 4x^5$.

4. $y = \arccos^4 x \cdot \ln(x^2 + x + 1)$.

5. $y = 2^{-x^2} \cdot \mathrm{arcstg}7x^4$.

6. $y = \mathrm{sh}^3 x \cdot \arccos\sqrt{x}$.

7. $y = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2+5x-1}}$.

8. $y = \frac{\ln(7x+2)}{5\cos 4x}$.

9. $y = \frac{\arccos 3x^4}{\mathrm{th}^3 x}$.

10. $y = \frac{7\arccos(4x-1)}{(x+2)^4}$.

11. $y = \sqrt[5]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \log_3(x^2 + x + 4)$.

12. $y = (\sin 3x)^{\arccos x}$.

13. $y = (\mathrm{arctg}(x+7))^{\cos 2x}$.

14. $y = \frac{(x-2)^3\cdot\sqrt{(x+1)^5}}{(x-4)^2}$.

5-вариант

1. $y=\sqrt[3]{x^7}+\frac{3}{x}-4x^5+\frac{4}{x^3}$.
2. $y=\frac{3}{(x-4)^7}-\sqrt{5x^2-4x+3}$.
3. $y=\arcsin^2 2x\cdot\mathrm{ctg}7x^4$.
4. $y=\sqrt{\arccos 2x\cdot 3^{-x}}$.
5. $y=(x+6)^4\cdot\mathrm{arctg}3x^5$.
6. $y=\mathrm{th}^2\sqrt{x}\cdot\mathrm{arcctg}3x^2$.
7. $y=\frac{e^{-\mathrm{ctg}2x}}{(3x^2-4x+2)^2}$.
8. $y=\frac{\sin^3 5x}{\ln(2x-3)}$.
9. $y=\frac{\arcsin 5x^3}{\mathrm{ch}\sqrt{x}}$.
10. $y=\frac{6\arcsin(3x+2)}{(x-3)^2}$.
11. $y=\sqrt[6]{\frac{7x-4}{7x+4}}\cdot\log_5(3x^2+2x)$.
12. $y=(\mathrm{th}5x)^{\arcsin(x+1)}$.
13. $y=(\mathrm{arcctg}(x-3))^{\sin 4x}$.
14. $y=\frac{(x-3)^5(x-2)^2}{(x+1)^7}$.

6-вариант

1. $y=7x^2+\sqrt[3]{x^4}-\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}$.
2. $y=\sqrt[3]{4x^2-3x-4}-\frac{2}{(x-3)^2}$.
3. $y=\mathrm{ctg}3x\cdot\arccos 3x^2$.
4. $y=\mathrm{tg}^4 3x\cdot\mathrm{arctg}7x^2$.
5. $y=3^{\cos x}\cdot\ln(x^2-3x+7)$.
6. $y=\mathrm{cth}^3 5x\cdot\arcsin 3x^2$.
7. $y=\frac{\sqrt{7x^3-5x+1}}{e^{\cos x}}$.
8. $y=\frac{\cos^2 3x}{\lg(x-4)}$.
9. $y=\frac{\mathrm{cth}^2(x+1)}{\arccos 2x}$.
10. $y=\frac{3\mathrm{arcctg}(2x-1)}{(x+1)^4}$.
11. $y=\sqrt[7]{\frac{2x-3}{2x+1}}\cdot\lg(7x-10)$.
12. $y=(\mathrm{sh}(x+2))^{\arcsin 2x}$.
13. $y=(\mathrm{ctg}(3x-1))^{\arcsin 3x}$.
14. $y=\frac{(x+2)^7(x-3)^3}{\sqrt{(x+1)^5}}$.

7-вариант

1. $y=4x^5+\frac{5}{x}-\sqrt[3]{x^7}-\frac{7}{x^4}$.
2. $y=\sqrt[5]{3x^2+4x-5}+\frac{4}{(x-4)^4}$.
3. $y=\arccos^2 x\cdot\ln(x-3)$.
4. $y=5^{-x}\cdot\arcsin 3x^3$.
5. $y=\log_2(x-7)\cdot\mathrm{arctg}\sqrt{x}$.
6. $y=\mathrm{ch}\frac{1}{x}\cdot\mathrm{arctg}(7x+2)$.
7. $y=\frac{e^{\mathrm{tg}x}}{\sqrt{3x^2+x-4}}$.
8. $y=\frac{\mathrm{tg}^3 2x}{\lg(5x+1)}$.
9. $y=\frac{\mathrm{th}3x^5}{\mathrm{arctg}^2 3x}$.
10. $y=\frac{2\mathrm{arcctg}(3x+2)}{(x-1)^4}$.
11. $y=\sqrt[3]{\frac{5x+1}{5x-1}}\cdot\ln(3x-x^2)$.
12. $y=(\cos 5x)^{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}$.
13. $y=(\mathrm{tg}(4x-3))^{\arccos 3x}$.
14. $y=\frac{(x-1)^3(x+2)^5}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}$.

8-вариант

1. $y=4x^4-\frac{3}{x}-\sqrt[5]{x^2}+\frac{6}{x^3}$.
2. $y=\sqrt[3]{5x^2-2x-1}+\frac{8}{(x-5)^2}$.
3. $y=\ln^5 x\cdot\mathrm{arctg}7x^4$.
4. $y=\mathrm{arctg}^4 x\cdot\log_2(x-3)$.
5. $y=\arccos^3 5x\cdot\mathrm{tg}x^4$.
6. $y=\mathrm{ch}^3 4x\cdot\arccos 4x^2$.
7. $y=\frac{e^{\sin x}}{(x-5)^7}$.
8. $y=\frac{\log_3(4x+5)}{2\mathrm{ctg}\sqrt{x}}$.
9. $y=\frac{\arccos^7 2x}{\mathrm{th}x^3}$.
10. $y=\frac{4\arccos 3x}{(x+2)^5}$.
11. $y=\sqrt[9]{\frac{x+3}{x-3}}\cdot\log_4(2x-3)$.
12. $y=(\mathrm{arctg}2x)^{\mathrm{th}(4x+1)}$.
13. $y=(\cos(2x-5))^{\mathrm{arctg}5x}$.
14. $y=\frac{(x-3)^2\sqrt{x+4}}{(x+2)^7}$.

9-вариант

1. $y = 5x^3 - \frac{8}{x^2} + 4\sqrt{x} + \frac{1}{x}$.
2. $y = \frac{3}{(x+2)^5} - \sqrt[7]{5x - 7x^2 - 3}$.
3. $y = \mathrm{arctg}^3 4x \cdot 3^{\sin x}$.
4. $y = \arccos 3x \cdot \log_3(x+5)$.
5. $y = (x-5)^7 \cdot \mathrm{arctg} 7x^3$.
6. $y = \mathrm{sh}^3 3x \cdot \mathrm{arcctg} 5x^2$.
7. $y = \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 1}}{e^{-x}}$.
8. $y = \frac{\ln(7x-3)}{3\mathrm{tg}^2 4x}$.
9. $y = \frac{\arcsin^3 4x}{\mathrm{sh}(3x+1)}$.
10. $y = \frac{\arcsin(3x+8)}{(x-7)^3}$.
11. $y = \sqrt{\frac{6x+5}{6x-5}} \cdot \lg(4x+7)$.
12. $y = \left(\ln(x+3)\right)^{\sin\sqrt{x}}$.
13. $y = (\sin(7x+4))^{\mathrm{arctg} x}$.
14. $y = \frac{(x-7)^{10}\sqrt{3x-1}}{(x+3)^3}$.

10-вариант

1. $y = \frac{4}{x^5} - \frac{9}{x} + \sqrt[5]{x^2} - 7x^3$.
2. $y = \sqrt[4]{(x-1)^5} - \frac{4}{7x^2 - 3x + 2}$.
3. $y = 2^{\cos x} \cdot \mathrm{arctg}^2 5x$.
4. $y = e^{-x} \cdot \arcsin^2 5x$.
5. $y = \arccos x^2 \cdot \mathrm{ctg} 7x^3$.
6. $y = \mathrm{th}^5 3x \cdot \arcsin\sqrt{x}$.
7. $y = \frac{\sqrt{x^3 + 4x - 5}}{e^{x^2}}$.
8. $y = \frac{\lg(11x+9)}{\cos^2 5x}$.
9. $y = \frac{\mathrm{th}^4(2x+5)}{\arccos 3x}$.
10. $y = \frac{7\mathrm{arcctg}(4x+1)}{(x-4)^2}$.
11. $y = \sqrt[3]{\frac{4x-1}{4x+1}} \cdot \lg(2x^3 - 3)$.
12. $y = \left(\log_2(x+4)\right)^{\mathrm{ctg} 7x}$.
13. $y = (\arcsin 2x)^{\ln(x+3)}$.
14. $y = \frac{(x+1)^8 (x-3)^2}{\sqrt{(x+2)^5}}$.

11-вариант

1. $y = \frac{8}{x^3} + \frac{3}{x} - 4\sqrt{x^2} + 2x^7$.
2. $y = \sqrt[5]{(x-2)^6} - \frac{3}{7x^3 - x^2 - 4}$.
3. $y = 4^{-x} \cdot \ln^5(x+2)$.
4. $y = \log_4(x-1) \cdot \arcsin^4 x$.
5. $y = 5^{-x^2} \cdot \arccos 5x^4$.
6. $y = \mathrm{cth}^2(x+1) \cdot \arccos\frac{1}{x}$.
7. $y = \frac{e^{\mathrm{ctg} 5x}}{(x+4)^2}$.
8. $y = \frac{\mathrm{ctg}^2 5x}{\ln(7x-2)}$.
9. $y = \frac{\sqrt[3]{\mathrm{arctg} 2x}}{\mathrm{sh}^2 x}$.
10. $y = \frac{3\arcsin(2x-7)}{(x+2)^4}$.
11. $y = \sqrt[4]{\frac{4x-1}{4x+1}} \cdot \sin(3x^2 + 1)$.
12. $y = \left(\mathrm{sh} 3x\right)^{\mathrm{arctg}(x+3)}$.
13. $y = (\arccos 2x)^{\lg(5x-3)}$.
14. $y = \frac{(x+2)(x-7)^8}{\sqrt[2]{(x-1)^4}}$.

12-вариант

1. $y = 5x^2 + \frac{4}{x} - \sqrt[3]{x^7} + 2x^6$.
2. $y = \frac{3}{(x+4)^2} - \sqrt[3]{4 + 3x - x^2}$.
3. $y = 5x^2 \cdot \arccos 2x^5$.
4. $y = \mathrm{ctg}^3 4x \cdot \mathrm{arctg} 2x^3$.
5. $y = 4(x-7)^6 \cdot \arcsin 3x^5$.
6. $y = \mathrm{ch}^3(2x+3) \cdot \mathrm{arctg} 2x$.
7. $y = \frac{e^{2x}}{\sqrt{3x^2 - 4x + 7}}$.
8. $y = \frac{\sin^2(5x+1)}{\lg(2x+3)}$.
9. $y = \frac{\mathrm{ch}^2(4x+2)}{\mathrm{arctg} x^3}$.
10. $y = \frac{5\ln(5x+7)}{(x-7)^2}$.
11. $y = \sqrt{\frac{x-7}{x+7}} \cdot \cos(2x^3 + x)$.
12. $y = \left(\arcsin 5x\right)^{\lg\sqrt{x}}$.
13. $y = (\mathrm{arctg} 7x)^{\lg(x+1)}$.
14. $y = \frac{\sqrt[3]{(x-1)^7}}{(x+1)^5 (x-5)^3}$.

Наиф

13-вариант

1. $y = 10x^2 + 3\sqrt{x^5} - \frac{4}{x} - \frac{5}{x^4}$.
2. $y = \frac{2}{(x-1)^3} - \frac{8}{6x^2+3x-7}$.
3. $y = \sin^4 3x \cdot \operatorname{arctg} 2x^3$.
4. $y = e^{-\cos x} \cdot \operatorname{arctg} 7x^5$.
5. $y = (x+5)^2 \cdot \arccos^3 5x$.
6. $y = \operatorname{th}^3 4x \cdot \operatorname{arcctg} 3x^4$.
7. $y = \frac{e^{-\sin 2x}}{(x+5)^4}$.
8. $y = \frac{\cos^2(5x+7)}{\lg(x+5)}$.
9. $y = \frac{\arcsin 4x^5}{\operatorname{th}^3 x}$.
10. $y = \frac{4\log_3(3x+1)}{(x+1)^2}$.
11. $y = \sqrt[6]{\frac{x-9}{x+9}} \cdot \operatorname{tg}(3x^2 - 4x + 1)$.
12. $y = (\arccos 5x)^{\ln x}$.
13. $y = (\log_4(2x+3)^{\arcsin x}$.
14. $y = \frac{\sqrt[3]{(x-2)^5(x+3)^2}}{(x-7)^3}$.

Искон

14-вариант

1. $y = \sqrt{x^5} - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3} - 3x^3$.
2. $y = \sqrt{1 + 5x - 2x^2} + \frac{3}{(x-3)^4}$.
3. $y = \cos^4 3x \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x}$.
4. $y = (x+1) \cdot \arccos 3x^4$.
5. $y = 2^{-\sin x} \cdot \arcsin^3 2x$.
6. $y = \operatorname{cth}^4 7x \cdot \arcsin\sqrt{x}$.
7. $y = \frac{e^{\cos 5x}}{\sqrt{x^2-5x-2}}$.
8. $y = \frac{\sin^2(4x+1)}{\ln(7x-1)}$.
9. $y = \frac{\operatorname{arctg}^3(2x+1)}{\operatorname{ch}\sqrt{x}}$.
10. $y = \frac{7\log_4(2x-5)}{(x-1)^5}$.
11. $y = \sqrt[7]{\frac{x-4}{x+4}} \cdot \operatorname{ctg}(2x+5)$.
12. $y = (\operatorname{arctg} 2x)^{\sin x}$.
13. $y = (\log_3(3x+2))^{\arccos x}$.
14. $y = \frac{\sqrt{(x+2)^3(x-1)^4}}{(x+2)^7}$.

Об

15-вариант

1. $y = 9x^2 + \frac{5}{x} - \frac{7}{x^4} + \sqrt[3]{x^7}$.
2. $y = \sqrt[3]{5 + 4x - x^2} - \frac{5}{(x+1)^5}$.
3. $y = \operatorname{tg}^3 2x \cdot \sin x^5$.
4. $y = 2^{\sin x} \cdot \operatorname{arctg} x^4$.
5. $y = (x+2)^7 \cdot \arccos\sqrt{x}$.
6. $y = \operatorname{sh}^3 2x \cdot \arcsin 7x^2$.
7. $y = \frac{(2x+5)^2}{e^{\operatorname{tg} x}}$.
8. $y = \frac{\operatorname{ctg}^3(2x+3)}{\log_2(x+2)}$.
9. $y = \frac{\arccos 4x^3}{\operatorname{sh}^4 x}$.
10. $y = \frac{\ln(7x+2)}{(x-6)^4}$.
11. $y = \sqrt[8]{\frac{x-2}{x+2}} \cdot \sin(4x^2 - 7x + 2)$.
12. $y = (\ln(x+7))^{\operatorname{ctg} 2x}$.
13. $y = (\lg(7x+5)^{\operatorname{arctg} 2x}$.
14. $y = \frac{\sqrt[4]{(x-8)(x+2)^8}}{(x-1)^5}$.

Рузиев

16-вариант

1. $y = 3\sqrt{x} + \frac{4}{x^4} + \sqrt[3]{x^2} - \frac{7}{x}$.
2. $y = \sqrt[4]{5x^2 - 4x + 1} - \frac{7}{(x-5)^2}$.
3. $y = \operatorname{ctg} 7x \cdot \arccos 2x^3$.
4. $y = 3^{-x^2} \cdot \operatorname{arctg} x^5$.
5. $y = (x-7)^3 \cdot \arcsin 7x^8$.
6. $y = \operatorname{th}^5 4x \cdot \arccos 3x^4$.
7. $y = \frac{e^{-\lg 2x}}{4x^2-3x+5}$.
8. $y = \frac{\lg^2 x}{\sin 5x^2}$.
9. $y = \frac{\operatorname{cth}^3(x-2)}{\arccos 3x}$.
10. $y = \frac{4\lg(3x+7)}{(x+1)^7}$.
11. $y = \sqrt[9]{\frac{x-3}{x+3}} \cdot \cos(x^2 - 3x + 2)$.
12. $y = (\operatorname{ctg}(7x+4))^{\sqrt{x+3}}$.
13. $y = (\ln(5x-4))^{\operatorname{arctg} x}$.
14. $y = \frac{\sqrt[5]{x+1}\,(x-3)^7}{(x+8)^3}$.

Абд

17-вариант

1. $y=\sqrt{x^3}+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^5}-5x^3$.
2. $y=\sqrt[5]{3-7x+x^2}-\frac{4}{(x-7)^5}$.
3. $y=e^{-\sin x}\cdot \mathrm{tg}7x^5$.
4. $y=3^{\cos x}\cdot \arcsin^2 3x$.
5. $y=\ln(x-3)\cdot \arccos 3x^4$.
6. $y=\mathrm{ch}^3 5x\cdot \mathrm{arctg}\sqrt{x}$.
7. $y=\frac{e^{-\sin 4x}}{(2x-5)^6}$.
8. $y=\frac{\ln^2(x+1)}{\cos 3x^4}$.
9. $y=\frac{\mathrm{th}^3(3x+1)}{\arcsin 3x}$.
10. $y=\frac{5\log_2(x^2+1)}{(x-3)^4}$.
11. $y=\sqrt{\frac{3x-2}{3x+2}}\cdot \mathrm{tg}(2x^2-9)$.
12. $y=\left(\mathrm{th}\left(\sqrt{x+1}\right)\right)^{\mathrm{arctg}2x}$.
13. $y=(\log_2(6x+1))^{\arcsin 2x}$.
14. $y=\frac{\sqrt[7]{(x-2)^4}}{(x+1)^2(x-6)^5}$.

Мух

18-вариант

1. $y=7x^2+\frac{3}{x}-\sqrt[5]{x^4}+\frac{8}{x^3}$.
2. $y=\sqrt{(x-3)^7}+\frac{9}{7x^2-5x-8}$.
3. $y=e^{\cos x}\cdot \mathrm{ctg}8x^3$.
4. $y=\ln(x-10)\cdot \arccos^2 4x$.
5. $y=\log_2(x-4)\cdot \mathrm{arctg}^3 4x$.
6. $y=\mathrm{cth}^4 2x\cdot \mathrm{arctg}x^3$.
7. $y=\frac{3x^2-5x+10}{e^{-x^2}}$.
8. $y=\frac{\log_3(7x+1)}{\mathrm{tg}\sqrt{x}}$.
9. $y=\frac{\mathrm{cth}^3(3x-1)}{\arccos x^2}$.
10. $y=\frac{6\log_3(2x+9)}{(x+4)^2}$.
11. $y=\sqrt[4]{\frac{2x+3}{2x-3}}\cdot \mathrm{ctg}(3x^2+5)$.
12. $y=\left(\mathrm{cth}\,\frac{1}{x}\right)^{\arcsin 7x}$.
13. $y=(\lg(4x-3))^{\arccos 4x}$.
14. $y=\frac{\sqrt[5]{(x+1)^2}}{(x-3)^4(x-4)^3}$.

Сойл

19-вариант

1. $y=8x^3-\frac{4}{x}-\frac{7}{x^4}+\sqrt[7]{x^2}$.
2. $y=\sqrt[3]{(x-8)^4}-\frac{1}{1+3x-4x^2}$.
3. $y=\cos^5 x\cdot \arccos 4x$.
4. $y=\lg(x-2)\cdot \arcsin^3 x$.
5. $y=(x-7)^4\cdot \mathrm{arcctg}^2 7x$.
6. $y=\mathrm{sh}^3 5x\cdot \arccos 3x^2$.
7. $y=\frac{e^{-x}}{(2x^2-x+4)^2}$.
8. $y=\frac{\log_3(4x-1)}{\mathrm{ctg}2x}$.
9. $y=\frac{\mathrm{sh}^3 x}{\arccos 4x}$.
10. $y=\frac{3\log_2(5x-4)}{(x-3)^5}$.
11. $y=\sqrt[4]{\frac{x+5}{x-5}}\cdot \sin(3x^2+x+4)$.
12. $y=\left(\cos(x+3)\right)^{\arcsin 3x}$.
13. $y=(\ln(7x-3))^{\mathrm{arctg}5x}$.
14. $y=\frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{(x+3)^3(x-4)^2}$.

Низ

20-вариант

1. $y=8x-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x}-\sqrt[5]{x^4}$.
2. $y=\frac{3}{4x-3x^2+1}-\sqrt{(x+1)^5}$.
3. $y=\sin^3 7x\cdot \mathrm{arcctg}5x^2$.
4. $y=\log_4(x+1)\cdot \mathrm{arctg}^5 7x$.
5. $y=\sqrt[5]{x-3}\cdot \arccos^4 2x$.
6. $y=\mathrm{ch}^3 9x\cdot \mathrm{arctg}(5x-1)$.
7. $y=\frac{e^{4x}}{(3x+5)^2}$.
8. $y=\frac{\ln^3(x-5)}{\mathrm{tg}\frac{1}{x}}$.
9. $y=\frac{\sqrt{\mathrm{ch}^3 x}}{\mathrm{arctg}5x}$.
10. $y=\frac{7\log_5(x^2+x)}{(x+3)^3}$.
11. $y=\sqrt[3]{\frac{x-6}{x+6}}\cdot \cos(7x+2)$.
12. $y=\left(\sqrt{x+5}\right)^{\arccos 3x}$.
13. $y=(\log_5(2x+5))^{\mathrm{arctg}x}$.
14. $y=\frac{\sqrt[3]{(x-2)^4}}{(x-5)(x+1)^7}$.

Мчз

21-вариант

1. $y = \sqrt[4]{x^3} - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^5} + 3x$.
2. $y = \frac{3}{x-4} + \sqrt[6]{(2x^2 - 3x + 1)^5}$.
3. $y = \sin^3 2x \cdot \mathrm{arcctg} 3x^5$.
4. $y = \ln(x + 9) \cdot \mathrm{arcctg}^3 2x$.
5. $y = \sqrt[3]{x - 4} \cdot \arcsin^4 5x$.
6. $y = \mathrm{th}^4 x \cdot \mathrm{arcctg}\frac{1}{x}$.
7. $y = \frac{e^{\mathrm{ctg} 5x}}{(3x-5)^3}$.
8. $y = \frac{\lg(x+2)}{\sin 2x^3}$.
9. $y = \frac{\mathrm{th}^2(x+3)}{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}$.
10. $y = \frac{\log_7(2x^2+5)}{(x-4)^2}$.
11. $y = \sqrt[6]{\frac{x-7}{x+7}} \cdot \arcsin(2x + 3)$.
12. $y = (\sin 4x)^{\mathrm{arctg}\frac{1}{x}}$.
13. $y = (\sin(8x - 1))^{\mathrm{cth}(x+3)}$.
14. $y = \frac{(x+4)^3 x-2)^4}{\sqrt[3]{(x-2)^5}}$.

Ол

22-вариант

1. $y = 4x^3 + \frac{3}{x} - \sqrt[3]{x^5} - \frac{2}{x^4}$.
2. $y = \sqrt{(x - 4)^7} - \frac{10}{3x^2+5x+1}$.
3. $y = \cos\sqrt[5]{x} \cdot \mathrm{arctg} x^4$.
4. $y = \lg(x + 2) \cdot \arcsin^2 3x$.
5. $y = (x - 5)^4 \cdot \arccos 3x^5$.
6. $y = \mathrm{cth}^3 4x \cdot \arcsin(3x + 1)$.
7. $y = \frac{(2x-3)^7}{e^{-2x}}$.
8. $y = \frac{\mathrm{tg}^3 7x}{\ln(3x+2)}$.
9. $y = \frac{\arcsin^2 3x}{\mathrm{ch}(x-2)}$.
10. $y = \frac{2\ln(3x-10)}{(x+5)^7}$.
11. $y = \sqrt[7]{\frac{x-8}{x+8}} \cdot \arccos(3x - 5)$.
12. $y = \left(\mathrm{tg} 3x^4\right)^{\sqrt{x+1}}$.
13. $y = (\cos(3x + 8))^{\mathrm{th}(x-7)}$.
14. $y = \frac{(x-1)^5(x+2)^3}{\sqrt[5]{(x+3)^2}}$.

Хачт

23-вариант

1. $y = 4x^5 - \frac{5}{x} - 4\sqrt{x^3} + \frac{2}{x^3}$.
2. $y = \frac{4}{(x-7)^3} - \sqrt[3]{(3x^2 - x + 1)^4}$.
3. $y = \mathrm{tg}^6 2x \cdot \cos 7x^3$.
4. $y = 4^{-\sin x} \cdot \mathrm{arctg} 3x$.
5. $y = \sqrt{(x + 3)^5} \cdot \arcsin 3x^4$.
6. $y = \mathrm{ch}^2 5x \cdot \mathrm{arctg} x^4$.
7. $y = \frac{(3x+1)^4}{e^{5x}}$.
8. $y = \frac{\mathrm{ctg}\sqrt{x-2}}{\lg(3x+5)}$.
9. $y = \frac{\mathrm{arcctg}^3 x}{\mathrm{sh}(2x-5)}$.
10. $y = \frac{8\lg(4x+5)}{(x-1)^3}$.
11. $y = \sqrt[8]{\frac{x-4}{x+4}} \cdot \mathrm{arctg}(5x + 1)$.
12. $y = \left(\mathrm{ctg} 2x^3\right)^{\sin\sqrt{x}}$.
13. $y = (\mathrm{tg}(9x + 5))^{\mathrm{ch}(2x-1)}$.
14. $y = \frac{(x-1)^4(x-7)^2}{\sqrt[3]{(x+2)^5}}$.

Х

24-вариант

1. $y = \frac{7}{x} + \frac{4}{x^3} - \sqrt[5]{x^3} - 2x^6$.
2. $y = \frac{7}{(x+2)^2} - \sqrt{8 - 5x + 2x^2}$.
3. $y = \mathrm{ctg}^3 4x \cdot \arcsin\sqrt{x}$.
4. $y = 2^{\cos x} \cdot \mathrm{arctg}^3 x$.
5. $y = \sqrt[3]{(x + 1)^2} \cdot \arccos 3x$.
6. $y = \mathrm{th}^4 7x \cdot \arccos x^2$.
7. $y = \frac{5x^2+4x-2}{e^{-x}}$.
8. $y = \frac{\mathrm{tg}(3x-5)}{\ln^2(x+3)}$.
9. $y = \frac{\arccos^3 5x}{\mathrm{th}(x-2)}$.
10. $y = \frac{2\log_3(4x+7)}{(x+3)^4}$.
11. $y = \sqrt[9]{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \mathrm{arcctg}(7x + 2)$.
12. $y = \left(\mathrm{tg} 7x\right)^{\sqrt{x+2}}$.
13. $y = (\mathrm{ctg}(7x + 5))^{\mathrm{sh} 3x}$.
14. $y = \frac{(x+7)^2(x-3)^5}{\sqrt{x^2+3x-1}}$.

λ

25-вариант

1. $y = \frac{6}{x^6} + \frac{3}{x} + 3x^3 - \sqrt{x^7}$.
2. $y = \sqrt[3]{(x-1)^5} + \frac{5}{2x^2+4x-7}$.
3. $y = \mathrm{ctg}\frac{1}{x} \cdot \arccos x^4$.
4. $y = \lg(x-3) \cdot \arcsin^2 5x$.
5. $y = \mathrm{tg}^3 x \cdot \mathrm{arctg} 3x$.
6. $y = \mathrm{cth} 4x^5 \cdot \arccos 2x$.
7. $y = \frac{\sqrt{5x^2-x+1}}{e^{3x}}$.
8. $y = \frac{\cos^2 x}{\lg(x^2-2x+1)}$.
9. $y = \frac{\sqrt{\arccos 3x}}{\mathrm{sh}^2 x}$.
10. $y = \frac{3\log_4(2x+9)}{(x-7)^2}$.
11. $y = \sqrt{\frac{7x-4}{7x+4}} \cdot \arcsin(x^2+1)$.
12. $y = (\arccos x)^{\sqrt{\cos x}}$.
13. $y = (\mathrm{sh}(3x-7))^{\cos(x+4)}$.
14. $y = \frac{\sqrt[3]{x-3} \cdot (x+7)^5}{(x-4)^2}$.

10-§. Иккинчи мустақил уй иши

Иккинчи мустақил уй ишининг ҳар бир вариантида олтита мисол бўлиб уларнинг шартлари қуйидагича.

Биринчи мисолда: берилган ошкормас функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топиш керак.

Иккинчи мисолда: параметрик кўринишдаги функциянинг y' ва y'' ҳосилаларини топиш керак.

Учинчи мисолда: берилган y функция учун аргументнинг x_0 қийматида $y'''(x_0)$ ни ҳисоблаш керак.

Тўртинчи мисолда: берилган функцияларнинг n-тартибли ҳосиласини топиш керак.

Бешинчи ва олтинчи мисолларнинг шартлари вариантда берилган.

Қуйида вариант мисолларини ечиш намунасини келтирамиз.

1. Агар $x^3y - y^2 = 6x$ функция берилган бўлса, y' ва y'' ларни топинг.

Ечиш. Биринчи тартибли ҳосилани топамиз:

$$3x^2y + x^3y' - 2yy' = 6. \qquad (A)$$

Бундан y' ни топамиз:

$$y' = \frac{6-3x^2y}{x^3-2y}. \qquad (B)$$

Иккинчи тартибли ҳосилани топиш учун (A) ёки (B) тенгликларнинг ҳар иккала қисмини дифференциаллаймиз:

$$6xy + 3x^2y' + 3x^2y' + x^3y'' - 2y'^2 - 2yy'' = 0,$$

бундан

$$y''(x^3 - 2y) = 2y'^2 - 6x^2y' - 6xy,$$

$$y'' = 2 \cdot \frac{(6-3x^2y)^2}{(x^3-2y)^3} - 6x^2 \frac{6-3x^2y}{(x^3-2y)^2} - \frac{6xy}{x^3-2y}.$$

2. Агар $\begin{cases} x = 3t^4 - t^2, \\ y = t^3 - 5 \end{cases}$

бўлса, y' ва y'' ларни топинг.

Ечиш. $\begin{cases} x' = 12t^3 - 2t, \\ y' = 3t^2 \end{cases}$ ва $\begin{matrix} x'' = 36t^2 - 2 \\ y'' = 6t \end{matrix}$ бўлгани учун

$$y'_x = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{3t^2}{12t^3-2t} = \frac{3t}{12t^2-2},$$

$$y''_x = \frac{y_t'' x_t - y_t' x_t''}{(x_t')^3} = \frac{6t(12t^3-2t)-(36t^2-2)\cdot 3t}{(12t^3-2t)^3} =$$

$$= \frac{72t^4-12t^2-108t^4+6t^2}{(12t^3-2t)^3} = -\frac{3(6t^2+1)}{4t(6t^2-1)^2}.$$

3. Агар $y=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\cos^2 x$ бўлса, $y'''\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ни топинг.

Ечиш. Берилган функциянинг учинчи тартибгача ҳосилаларини топамиз:

$$y'=\frac{1}{2}\cos x\cdot\sin x=\frac{1}{4}\sin 2x,$$

$$y''=\frac{1}{2}\cos 2x,\quad y'''=-\sin 2x.$$

Демак,

$$y'''\left(\frac{\pi}{4}\right)=y'''(45^\circ)=-\sin 2\cdot 45^\circ=-\sin\cdot 90^\circ=-1.$$

4. $y = xe^x$ функциянинг n-тартибли ҳосиласини топинг.

Ечиш. Берилган функциянинг биринчи, иккинчи, учинчи ва ҳоказо тартибли ҳосилаларини топамиз:

$$y' = e^x + xe^x$$

$$y'' = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x$$

$$y''' = 2e^x + e^x + xe^x = 3e^x + xe^x.$$

y', y'', y''' лар учун ҳосил қилинган ифодаларни солиштириб n-тартибли ҳосила учун

$$y^{(n)} = ne^x + xe^x$$

формулани ёзамиз.

5. $y = x^2 - 9x - 4$ эгри чизиққа абсциссаси $x = -1$ бўлган нуқтадан ўтказилган уринма тенгламасини ёзинг.

Ечиш. Уринманинг уриниш нуқтаси ординатаси $y(-1) = 1 + 9 - 4 = 6$ га тенг. Ихтиёрий нуқта учун $y' = 2x - 9$, уриниш нуқтасида: $y'(-1) = -11$. Шунинг учун $M(-1; 6)$ нуқтада ўтувчи ва бурчак коэффициенти $k = -11$ бўлган уринманинг тенгламаси $y - 6 = -11(x + 1) \Rightarrow y = -11x - 5$ бўлади.

6. Ox ўқи бўйича иккита моддий нуқта $x_1=\frac{t^3}{3}-4$ ва $x_2=\frac{7}{2}t^2-12t+3$ қонун бўйича ҳаракатланади. Қандай вақтдан кейин уларнинг тезлиги тенг бўлади?

Ечиш. Иккала нуқтанинг тезлигини топамиз:

$$x_1' = t^2,\quad x_2' = 7t - 12.$$

Масаланинг шартига асосан: $x_1' = x_2'$, яъни $t^2 = 7t - 12$, $t^2 - 7t + 12 = 0$, бундан $t_1 = 3$с, $t_2 = 4$с.

1-вариант

1. $\mathrm{arctg}y = 4x + 5y.$

2. $\begin{cases} x=\sqrt{t}, \\ y=\sqrt[3]{t}. \end{cases}$

3. $y = e^{x}\cos x,\ x_0 = 0.$

4. $y=\frac{1}{x+5}.$

5. $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ эгри чизиқнинг (1; 1) нуқтасида ўтказилган нормалнинг тенгламасини ёзинг.

6. Моддий нуқта $S = t^4 - 3t^2 + 2t - 4$ қонун бўйича ҳаракатланади. Нуқта ҳаракатининг $t = 2$с даги тезлигини топинг.

2-вариант

1. $y^2 - x = \cos x.$

2. $\begin{cases} x=\frac{2t}{1+t^2}, \\ y=\frac{t^2}{1+t^2}. \end{cases}$

3. $y = \sin 2x,\ x_0 = \pi.$

4. $y = e^{-2x}.$

5. $x^2 - y^2 + xy - 1 = 0$ эгри чизиқнинг (3;2) нуқтасида ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини аниқланг.

6. Моддий нуқта $S = 3t^4 - t^3 + 4t^2 + 6$ қонун бўйича ҳаракатланади. Нуқта ҳаракатининг $t = 2$с даги тезлигини топинг.

3-вариант

1. $3x + \sin y = 5y.$

2. $\begin{cases} x=\sqrt{t^2-1}, \\ y=\frac{t+1}{\sqrt{t^2-1}}. \end{cases}$

3. $y = (2x + 1)^5,\ x_0 = 1.$

4. $y = \ln(3 + x).$

5. $y^2 = 4x^3$ эгри чизиқнинг қайси нуқтасида ўтказилган уринма $x + 3y - 1 = 0$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлади?

6. Моддий нуқта $s = 4\cos\left(\frac{t}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + 6$ қонун бўйича ҳаракатланади. Нуқта ҳаракатининг $t = \pi$ с даги тезлигини топинг.

4-вариант

1. $\operatorname{tg} y = 3x + 5y$.

2. $\begin{cases} x = 4t + 2t^2, \\ y = 5t^3 - 3t^2. \end{cases}$

3. $y = \ln(1 + x)$, $x_0 = 2$.

4. $y = \sqrt{x}$.

5. $y = x^2 - 6x + 2$ эгри чизиққа абсциссаси $x = 2$ бўлган нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг

6. Моддий нуқта $s = 4\sin\left(\frac{t}{3} + \frac{\pi}{6}\right) - 8$ қонун бўйича ҳаракатланади. Нуқта ҳаракатнинг $t = \frac{\pi}{2}$ с даги тезлигини топинг.

5-вариант

1. $xy = \operatorname{ctg} y$.

2. $\begin{cases} x = \frac{\ln t}{t}, \\ y = t\ln t. \end{cases}$

3. $y = \frac{1}{2}x^2e^x$, $x_0 = 0$.

4. $y = xe^{3x}$.

5. $y = \frac{x^2}{4} - x + 5$ эгри чизиққа абсциссаси $x = 4$ бўлган нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг.

6. Моддий нуқта $s = -3\cos\left(\frac{t}{4} + \frac{\pi}{12}\right) + 10$ қонун бўйича ҳаракатланади. Нуқта ҳаракатининг $t = \frac{\pi}{3}$ с даги тезлигини топинг.

6-вариант

1. $y = e^y + 4x$.

2. $\begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t\sin t. \end{cases}$

3. y=arcsin$x$, $x_0 = 0$.

4. $y = \ln(x - 3)$.

5. $y = \frac{x^4}{4} - 27x + 60$ эгри чизиққа абсциссаси $x = 2$ бўлган нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг

6. Моддий нуқта $s = \frac{5}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 7$ қонун бўйича ҳаракатланади. Неча секундан кейин унинг тезлиги 42 м/с га тенг бўлади?

7-вариант

1. $\ln y - \frac{y}{x} = 7$.

2. $\begin{cases} x = t^4, \\ y = \ln t. \end{cases}$

3. $y = (5x - 4)^5$, $x_0 = 2$.

4. $y = \ln(5 + x)^2$.

5. $y = -\frac{x^2}{2} + 7x - \frac{15}{2}$ эгри чизиққа абсциссаси $x = 3$ бўлган нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг.

6. Моддий нуқта $S = 4t^3 - 2t + 11$ қонун бўйича ҳаракатланади. Неча секундан кейин унинг тезлиги 190 м/с га тенг бўлади?

8-вариант

1. $y^2 + x^2 = \sin y$.

2. $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 4\sin t. \end{cases}$

3. $y = x\sin 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

4. $y = e^{4x}$.

5. $y = 3\operatorname{tg}2x + 1$ эгри чизиққа абсциссаси $x = \frac{\pi}{2}$ бўлган нуқтада ўтказилган нормалнинг тенгламасини ёзинг.

6. Моддий нуқта $S = 2t^5 - 6t^3 - 58$ қонун бўйича ҳаракатланади. Нуқта ҳаракатининг $t = 2$с даги тезлигини топинг.

9-вариант

1. $e^y = 4x - 7y$.

2. $\begin{cases} x = 5\cos^2 t, \\ y = 3\sin^2 t. \end{cases}$

3. $y = x^2\ln x$, $x_0 = \frac{1}{3}$,

4. $y = \frac{1}{x-7}$.

5. $y = 4\text{tg}3x$ эгри чизиққа абсциссаси $x = \frac{\pi}{9}$ бўлган нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг.

6. Моддий нуқта $s = \frac{5}{3}t^3 - 2t + 7$ қонун бўйича ҳаракатланади. Нуқта ҳаракатининг $t = 4$ с даги тезлигини топинг.

10-вариант

1. $4\sin^2(x+y) = x$.

2. $\begin{cases} x = \text{arctgt}, \\ y = \ln(1+t^2). \end{cases}$

3. $y = x\sin 2x,\ \ x_0 = -\frac{\pi}{4}$.

4. $y = 5^x$.

5. $y = 6\text{tg}5x$ эгри чизиққа абсциссаси $x = \frac{\pi}{20}$ бўлган нуқтада ўтказилган нормалнинг тенгламасини ёзинг.

6. Ox ўқи бўйича иккита моддий нуқта $x = 3t^2 - 8$ ва $x = 2t^2 + 5t + 6$ қонун бўйича ҳаракатланади. Бу нуқталар бир-бирлари билан учрашганларидан кейин қандай тезликлар билан узоқлашадилар?

11-вариант

1. $\sin y = 7x + 3y$.

2. $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

3. $y = x\cos 2x,\ \ x_0 = \frac{\pi}{12}$.

4. $y = e^{-5x}$.

5. $y = 4\sin 6x$ эгри чизиққа абсциссаси $x = \frac{\pi}{18}$ бўлган нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламасини тузинг.

6. Ox ўқи бўйича иккита моддий нуқта $x = 5t^2 - t + 6$ ва $x = 4t^2 + 18$ қонун бўйича ҳаракатланади. Бу нуқталар бир-бирлари билан учрашганларидан кейин қандай тезликлар билан узоқлашадилар?

12-вариант

1. $\text{tg}y = 4y\text{-}5x$.

2. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t). \end{cases}$

3. $y = x^4 \ln x,\ \ x_0 = 1$.

4. $y = \ln(4 + x)$.

5. $y = \sin 2x$ эгри чизиқнинг қайси нуқтасида ўтказилган уринма Ox ўқи билан $\frac{\pi}{4}$ бурчак ташкил этишини аниқланг.

6. Ox ўқи бўйича иккита моддий нуқта $x = \frac{4}{3}t^3 - 7t + 16$ ва $x = t^3 + 2t^2 + 5t - 8$ қонун бўйича ҳаракатланади. Қандай вақтдан кейин уларнинг тезликлари тенг бўлади?

13-вариант

1. $y = 7x - \text{ctg}y$.

2. $\begin{cases} x = 3(\sin t - t\cos t), \\ y = 3(\cos t + t\sin t). \end{cases}$

3. $y = x + \text{arctg}x,\ \ x_0 = 1$.

4. $y = \frac{1}{x-6}$.

5. $y = 2x^3 - 1$ эгри чизиқнинг қайси нуқтасида ўтказилган уринма Ox ўқи билан $\frac{\pi}{3}$ бурчак ташкил этишини аниқланг.

6. Моддий нуқта $s = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 - 11t + 275$ қонун бўйича ҳаракатланади. Қандай вақтдан кейин униңг тезлиги 10м/с га тенг бўлади?

14-вариант

1. $xy - 6 = \cos y$.

2. $\begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$

3. $y = \cos^2 x,\ \ x_0 = \frac{\pi}{4}$.

4. $y = 10^x$.

5. $y = \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{2} - 7x + 9$ эгри чизиқнинг қайси нуқтасида ўтказилган уринма Ox ўқи билан $-\frac{\pi}{4}$ бурчак ташкил этишини аниқланг.

6. Моддий нуқта $xy = 20$ гипербола бўйича ҳаракатланади. Унинг абсциссаси 1м/с тезлик билан текис ўсади. Нуқта (4;5) ҳолатга келганда унинг ординатаси қандай тезликда бўлади.

15-вариант

1. $3y = 7 + xy^3$.

2. $\begin{cases} x = e^{3t}, \\ y = e^{-3t}. \end{cases}$

3. $y = \ln(x^2 - 4)$, $x_0 = 3$. 4. $y = 7^x$.

5. $y = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 7x + 4$ эгри чизиқнинг қайси нуқтасида ўтказилган уринма Ox ўқи билан $\frac{\pi}{4}$ бурчак ташкил этади?

6. $y^2 = 8x$ параболанинг қайси нуқтасида ординатаси абсциссасига қараганда икки марта тез ўсади?

16-вариант

1. $y^2 = x + \ln\frac{y}{x}$. 2. $\begin{cases} x = \frac{\ln t}{t}, \\ y = t^2 \ln t. \end{cases}$

3. $y = x^2 \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$. 4. $y = \cos 3x$.

5. $y = \frac{x^3}{3} - \frac{9x^2}{2} + 20x - 7$ эгри чизиқнинг қайси нуқтасида ўтказилган уринма Ox ўқига параллел бўлади?

6. Ox ўқи бўйича иккита моддий нуқта $x = 5t^2 + 2t + 6$ ва $4t^2 + 3t + 18$ қонун бўйича ҳаракатланади. Бу нуқталар бир-бирлари билан учрашганларидан кейин қандай тезликлар билан узоқлашадилар?

17-вариант

1. $xy^2 - y^3 = 4x - 5$. 2. $\begin{cases} x = \arccos t, \\ y = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$

3. $y = x \arccos x$, $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 4. $y = \ln(3x - 5)$.

5. $y = \frac{x^4}{4} - 7$ эгри чизиқнинг қайси нуқтасида ўтказилган уринма $y = 8x - 4$ тўғри чизиққа параллел бўлади?

6. $y^2 = 16x$ эгри чизиқнинг қайси нуқтасида ординатаси абсциссасига қараганда тўрт марта тез ўсади?

18-вариант

1. $x^2y^2 + x = 5y$. 2. $\begin{cases} x = \frac{1}{t+1}, \\ y = \frac{t^2}{(e+1)^2}. \end{cases}$

3. $y = (x + 1)\ln(x + 1)$, $x_0 = -\frac{1}{2}$. 4. $y = \frac{x}{x+5}$.

5. $y = -3x^2 + 4x + 7$ эгри чизиқнинг қайси нуқтасида ўтказилган уринма $x - 20y + 5 = 0$ тўгри чизиққа перпендикуляр бўлади?

6. $x^2 = 9y$ параболанинг қайси нуқтасида абсциссаси ординатасига қараганда икки марта тез ўсади?

19-вариант

1. $x^4 + x^3y^2 + y = 4$. 2. $\begin{cases} x = 5\sin^3 t, \\ y = 3\cos^3 t. \end{cases}$

3. $y = \ln^3 x$, $x_0 = 1$. 4. $y = \ln\frac{1}{4-x}$.

5. $y = 3x^2 - 4x + 6$ эғри чизиқнинг қайси нуқтасида ўтказилган уринма $8x - y - 5 = 0$ тўғри чизиққа параллел бўлади?

6. $x^2 = 10y$ параболанинг қайси нуқтасида абсциссаси ординатасига қараганда беш марта тез ўсади?

20-вариант

1. $\sin y = xy^2 + 5$. 2. $\begin{cases} x = e^{-3t}, \\ y = e^{3t}. \end{cases}$

3. $y = 2^{x^2}$, $x_0 = 1$. 4. $y = \sqrt{x + 7}$.

5. $y = 5x^2 - 4x + 1$ эгри чизиқнинг қайси нуқтасида ўтказилган уринма $x + 6y + 15 = 0$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлади?

6. Ox ўқи бўйича иккита моддий нуқта $x = 2t^3 - 2t^2 + 6t - 7$ ва $x = \frac{5}{3}t^3 - t^2 + 14t + 4$ қонун бўйича ҳаракатланади. Қандай вазиятдан кейин уларнинг тезлиги тенг бўлади?

21-вариант

1. $x^3 + y^3 = 5x$. 2. $\begin{cases} x = \sqrt[3]{(t - 1)^2}, \\ y = \sqrt{t - 1}. \end{cases}$

3. $y = (4x - 3)^5$, $x_0 = 1$. 4. $y = xe^{5x}$.

5. $y = 3x^2 - 5x - 11$ эгри чизиқнинг қайси нуқтасида ўтказилган уринма $x - y + 10 = 0$ тўғри чизиққа параллел бўлади?

6. Моддий нуқта эгри чизиқ бўйича $S\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 30t + 18$ формула билан берилган қонун асосида ҳаракатланади. Вақтнинг қандай пайтида нуқтанинг тезлиги нолга тенг бўлади?

22-вариант

1. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{7}$.

2. $\begin{cases} x = \ln^2 t, \\ y = t + \ln t. \end{cases}$

3. $y = x\,\mathrm{arcctg}x$, $x_0 = 2$.

4. $y = \frac{4}{x+3}$.

5. $y = -x^2 + 7x + 16$ эгри чизиқнинг қайси нуқтасида ўтказилган уринма $y = 3x + 4$ тўғри чизиққа параллел бўлади?

6. Жисм Ox тўғри чизиқ бўйлаб $y = \frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 - 10t - 16$ қонун бўйича ҳаракатланди. Жисмнинг тезлиги ва тезланишини аниқланг.

23-вариант

1. $y^2 = \frac{x-y}{x+y}$.

2. $\begin{cases} x = te^t, \\ y = \frac{t}{e^t}. \end{cases}$

3. $y = (7x - 4)^6$, $x_0 = 1$.

4. $y = \frac{1+x}{\sqrt{x}}$.

5. $y = 4x^2 - 10x + 13$ эгри чизиқнинг қайси нуқтасида ўтказилган уринма $y = 6x - 7$ тўғри чизиққа параллел бўлади?

6. t вақтда бирор кимёвий реакция натижасида олинган модданинг массаси $x = 7(1 - e^{-4t})$ (кг) тенглама билан ифодаланади. $t = 0$ бўлганда реакция тезлигини аниқланг.

24-вариант

1. $\sin^2(3x^2 + y^2) = 5$.

2. $\begin{cases} x = 6t^2 - 4, \\ y = 3t^5. \end{cases}$

3. $y = x\sin 2t$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

4. $y = \frac{1}{x+1}$.

5. $y = 7x^2 - 5x + 4$ эгри чизиқнинг қайси нуқтасида ўтказилган уринма $23y + x - 1 = 0$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлади?

6. Моддий нуқта тўғри чизиқ бўйлаб $v^2 = 6x$ қонун бўйича ҳаракатланади (бунда v — тезлик, x — ўтилган йўл). Тезлик 6 м/с бўлганда нуқта тезланишини аниқланг.

25-вариант

1. $\mathrm{ctg}^2(x + y) = 5x$.

2. $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln t. \end{cases}$

3. $y = \sin(x^3 + \pi)$, $x_0 = \sqrt[3]{\pi}$.

4. $y = \ln(5x - 1)$.

5. $y = \frac{x^2}{4} - 7x + 5$ эгри чизиқнинг қайси нуқтасида ўтказилган ўринма $y = 2x + 5$ тўғри чизиққа параллел бўлади?

6. Моддий нуқта $S = 3t + t^3$ қонун бўйича ҳаракатланади. Унинг $t = 2$с даги ҳаракат тезлигини топинг.

11-§. Учинчи мустақил уй иши

Учинчи мустақил уй ишининг ҳар бир вариантида еттита мисол бўлиб, уларнинг шарти қуйидагича.

1—5 мисолларда: берилган функцияларнинг лимитини Лопиталь қоидаси ёрдамида топиш керак.

6—7 мисолларда: берилган ифодаларни дифференциал ёрдамида тақрибий ҳисоблаш ва хатоликни баҳолаш (вергулдан кейин иккита рақамигача аниқлик билан) керак.

Қуйида вариант мисолларини ечиш намунасини келтирамиз.

Қуйидаги лимитларни Лопиталь қоидасидан фойдаланиб топинг.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{\sqrt[5]{3x-1}}$

Ечиш. $x \to \infty$ да лимит белгиси остидаги касрнинг сурат ва махражи чексизликка интилади.

Демак, $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликка эгамиз. Бинобарин, унга Лопиталь қоидасини қўллаш мумкин:

$$1.\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{\sqrt[5]{3x-1}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x^2+1}}{\frac{3}{5\sqrt[5]{(3x-1)^4}}}=$$

$$=\frac{10}{5}\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt[5]{(3x-1)^4}}{x^2+1}\cdot\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{10}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{(3x-1)^4}+x\cdot\frac{4}{5}(3x-1)^{-\frac{1}{5}}\cdot3}{2x}=$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{15x-5+12x}{10x\cdot\sqrt[5]{3x-1}}=\frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{27x-5}{x\cdot\sqrt[5]{3x-1}}=\frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{27-\frac{5}{x}}{\sqrt[5]{3x-1}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{27}{\infty}=0.$$

$$2.\ \lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin x}{\operatorname{tg}^2 2x}.$$

Ечиш. $x=\frac{\pi}{2}$ да $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмаслик ҳосил бўлади. Унга Лопиталь қоидасини татбиқ этамиз:

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin x}{\operatorname{tg}^2 2x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\cos x}{2\operatorname{tg}2x\cdot\frac{2}{\cos^2 2x}}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\cos^3 2x\cos x}{4\sin 2x}=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to\pi/2}(-\cos^3 2x)\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{2\sin x\cos x}=\frac{1}{4}\cdot1\lim_{x\to\pi/2}\frac{1}{2\sin x}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.$$

$$3.\ \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}4x}{e^{5x}-1}.$$

Ечиш. $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмаслик, уни Лопиталь қоидаси ёрдамида ечамиз:

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}4x}{e^{5x}-1}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\frac{4}{1+16x^2}}{5e^{5x}}=\frac{4}{5}.$$

$$4.\ \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{2-\sqrt{4+x^2}}-\frac{3}{\sqrt{16+x}-4}\right).$$

Ечиш. Бу ерда $\infty-\infty$ кўринишдаги аниқмаслик бўлгани учун уни алгебраик алмаштириш ёрдамида $\frac{0}{0}$ кўринишга келтирамиз:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{2-\sqrt{4+x^2}}-\frac{3}{\sqrt{16+x}-4}\right)(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{16+x}-4-6+3\sqrt{4+x^2}}{(2-\sqrt{4+x^2})(\sqrt{16+x}-4)}\right)\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{16+x}}+\frac{3x}{\sqrt{4+x^2}}}{\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\left(\sqrt{16+x}-4\right)+\frac{1}{2\sqrt{16+x}}\left(2-\sqrt{4+x^2}\right)}=\frac{\frac{1}{8}}{0}=\infty.$$

$$5.\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x-4}{x^2-x+3}\right)^x.$$

Ечиш. 1^∞ кўринишдаги аниқмаслик.

$y=\left(\frac{x^2+3x-4}{x^2-x+3}\right)^x$ белгилаш киритамиз, сўнгра ҳар иккала томонини логарифмлаймиз:

$$\ln y=x\ln\frac{x^2+3x-4}{x^2-x+3}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x^2+3x-4}{x^2-x-3}}{\frac{1}{x}}\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{x^2+3x-4}{x^2-x-3}\right)^{-1}\cdot\frac{(2x+3)(x^2-x-3)-(2x-1)(x^2+3x-4)}{(x^2-x-3)^2}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2(2x^3-2x^2-6x+3x^2-3x-9-2x^3-6x^2+8x+x^2+3x-4)}{(x^2+3x-4)(x^2-x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2(-4x^2+2x-13)}{(x^2+3x-4)(x^2-x-3)}=4.$$

$\ln y=\ln\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x-4}{x^2-x+3}\right)^x=4$ бўлгани учун $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x-4}{x^2-x+3}\right)^x=e^4$ бўлади.

6. $\sqrt[3]{84}$ ни вергулдан кейинги икки рақамигача аниқлик билан топинг.

Ечиш. Берилган ифодани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз: $\sqrt[3]{84} = \sqrt[3]{4^3 + 20}$ ва $y = \sqrt[3]{x}$ функцияни киритамиз, бунда

$$x = x_0 + \Delta x,\ \Delta x = 20,$$

$$y = (x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0)\Delta x$$

формуладан фойдаланамиз.

$$y(x_0) = \sqrt[3]{64} = 4\,,\ \ y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,;\ \ y'(64) = \frac{1}{3\cdot 16} = \frac{1}{48}\,.$$

У ҳолда

$$\sqrt[3]{84} \approx 4 + \frac{20}{48} = 4,42\,.$$

Нисбий хато

$$\delta = \frac{4,42-4,3}{4,42}\cdot 100\% = 2,7\%\,.$$

7. arctg0,98 ни тақрибий ҳисобланг.

Ечиш. 6-мисолдаги каби ишларни бажарамиз:

$$y = \mathrm{arctg}x,\ x_0 = 1,\ \Delta x = 0,98 - 1 = -0,02.$$

$$y(x_0) = \mathrm{arctg}1 = \frac{\pi}{4}\,,$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2}\,;\ \ y'(1) = 0,5,\ \ \mathrm{arctg}0,98 \approx \frac{\pi}{4} - 0,5\cdot 0,02 = 0,77\,.$$

Нисбий хато

$$\delta = \left|\frac{0,77-0,78}{0,77}\right|\cdot 100\% = 13\%\,.$$

1-вариант

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi - 2\mathrm{arctg}x)\ln x\,.$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin x}\,.$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1-x)+\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}}{\mathrm{ctg}\pi x_{2}}\,.$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 x)^{\mathrm{tg}x^{\frac{1}{2}}}\,.$

5. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{x^2}\,.$ 6. $\sqrt[3]{70}\,.$

7. $\cos 59^\circ\,.$

2-вариант

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)x\,.$ 2. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\frac{x}{\mathrm{ctg}x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right).$

3. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x\cdot\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}\,.$ 4. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\ln x}\,.$

5. $\lim\limits_{x\to 0}(\ln\mathrm{ctg}x)^{\mathrm{tg}x}\,.$ 6. $(2,01)^3+(2,01)^2\,.$

7. $e^{2.01}\,.$

3-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right).$ 2. $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)\cdot\mathrm{tg}\frac{x}{2}\,.$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}\cdot\ln(1-x)}\,.$ 4. $\lim(\ln(x+e^x))^{\frac{1}{x}}\,.$

5. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2a}}\,.$ 6. $\sqrt[3]{65}\,.$

7. $\ln\mathrm{tg}46^\circ\,.$

4-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2-\sin x^2}\,.$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\mathrm{arctg}x}{x^3}\,.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\left(e^{x^2}-1\right)}{\cos x-1}\,.$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\mathrm{tg}x}\,.$

5. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

6. $\frac{2,9}{\sqrt{(2,9)^2+16}}$.

7. $\operatorname{arctg}\sqrt{1,02}$.

5-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{2\sin x+x}$. — ✓

2. $\lim\limits_{x\to \pi/2a}\frac{1-\sin ax}{(2ax-\pi)^2}$. —

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{\beta x}-\cos\beta x}$. — ✓

4. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{5}{2+\sqrt{9+x}}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

6. $\sqrt{\frac{4-3,02}{1+3,02}}$.

7. $\operatorname{arctg}\sqrt{0,97}$.

6-вариант

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2\operatorname{arctg}x^2-\pi}$. —

2. $\lim\limits_{x\to \pi/6}\frac{1-2\sin x}{\cos 3x}$. —

3. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$. —

4. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$. —

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$.

6. $\sqrt[4]{15,8}$.

7. $\operatorname{arctg} 1,01$.

7-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$. ✓

$x\to 1$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{a}{6x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$.

6. $\sqrt[3]{10}$.

7. $\ln(e^2+0,2)$.

8-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$. ✓

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{e^x-1}$. ✓

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\operatorname{tg}4x-12\operatorname{tg}x}{3\sin 4x-12\sin x}$. ✓

4. $\lim(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$.

5. $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\operatorname{tg}x)^{2x-\pi}$.

6. $\sqrt[5]{200}$.

7. $\operatorname{arctg} 1,03$.

9-вариант

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^3}$. ✓

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg}x}$. ✓

3. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\frac{\sqrt{\operatorname{tg}x}-1}{2\sin^2 x-1}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^x$.

6. $\sqrt[5]{34}$.

7. ln tg 47°15.

10-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x^3}$. ✓

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2}$.

6. $\sqrt{\frac{(2,037)^2-3}{(2,037)^2+5}}$.

7. $\lg 9,5$.

11-вариант

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos bx}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$.
4. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\mathrm{ctg}\,\frac{\pi x}{4}\right)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}}$.
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+\mathrm{tg}x}{1+\sin x}\right)^{x}$.
6. $\sqrt[7]{130}$.
7. $\mathrm{arctg}\sqrt{3,1}$.

12-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{ch}x-1}{1-\cos x}$.
2. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x-a}{x^n-a^n}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-4}{x+3}\right)^{3x}$.
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\right)^{x}$.
6. $\sqrt[3]{27,5}$.
7. $2^{2,1}$.

13-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\pi}{x}}{\mathrm{ctg}\frac{\pi x}{2}}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{\sin 2x}$.
3. $\lim\limits_{x\to \pi/4}(\mathrm{tg}x)^{\mathrm{tg}\,2x}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\mathrm{tg}x}$.
5. $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}$.
6. $\sqrt{17}$.
7. $4^{1,2}$.

14-вариант

1. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-2\mathrm{tg}x}{1+\cos 4x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{ctg}x)^{\sin x}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{tg}x}{x}\right)^{1/x^2}$.
6. $\sqrt{640}$.
7. $\mathrm{tg}59^{\circ}$.

15-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin x)}$.
2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)$.
3. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\frac{\sqrt[3]{\mathrm{tg}x}-1}{2\sin^2 x-1}$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$.
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.
6. $\sqrt{1,2}$.
7. $\log_2 1,9$.

16-вариант

1. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\frac{\mathrm{tg}x}{\mathrm{tg}5x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0}(1-e^{2x})\mathrm{ctg}x$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{5}{1+2\ln x}}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$.
6. $\sqrt[10]{1025}$.
7. $\mathrm{arctg}\sqrt{3,2}$.

17-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\mathrm{ctg}x$.
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x\sqrt{1-x^2}}$.
3. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2e^{-0,01x}$.
4. $\lim(1-e^{x})^{\frac{1}{x}}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{2}{x}\right)^{x}$.

6. $(3,02)^4+(3,02)^3$.

7. $\operatorname{ctg}29^\circ$.

18-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1-x^3}{\sin^2 2x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)^{\frac{1}{\ln 2(x-1)}}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{\cos\sqrt{x}}$.

6. $(5,07)^3$.

7. $\sin 93^\circ$.

19-вариант

1. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{3}{x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x\sqrt{x}}}{\sqrt{\sin bx}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\log_2 x}$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{m}{x}\right)^{x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$.

6. $(4,01)^{1,5}$.

7. $\lg 1,5$.

20-вариант

1. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-x}}$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{4}{x^2}}-1}{2\operatorname{arctg}x^2-\pi}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}2x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}$.

6. $\sqrt[3]{1,02}$.

7. $\sin 29^\circ$.

21-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1/2}\ln 2x\cdot\ln(2x-1)$.

4. $\lim\limits_{x\to 5}\left(\frac{1}{x-5}-\frac{5}{x^2-x-20}\right)$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$.

6. $\cos 151^\circ$.

7. $\lg 101$.

22-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x+7)}{\sqrt[7]{x-3}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1/3}\left(\frac{x}{3x-1}-\frac{1}{\ln 3x}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\sin\frac{a}{x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{3}{4+\ln x}}$.

6. $\operatorname{arctg}1,05$.

7. $\sin 31^\circ$.

23-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{4x-\sin x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\pi}{x}}{\operatorname{ctg}\frac{5x}{2}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\cdot\operatorname{tg}x$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right)$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$.

6. $\cos 61^\circ$.

7. $\lg 0,9$.

24-вариант

1. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}5x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos 2x)\operatorname{ctg}4x$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty} x^3e^{-x}$.

4. $\lim\limits_{x\to1}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$.

5. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\mathrm{tg}x}$.

6. $\mathrm{tg}44^{\circ\circ}$.

7. $e^{0,25}$.

25-вариант

1. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{\sec^2x-2\mathrm{tg}x}{1+\cos4x}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\sin\frac{b}{x}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to1}(x-1)^{x-1}$.

4. $\lim\limits_{x\to0}(\mathrm{ctg}x)^{\sin x}$.

5. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$.

6. $\mathrm{arctg}0,98$.

7. $\sqrt{15}$.

12-§. Тўртинчи мустақил уй иши

Бу мустақил уй ишининг ҳар бир вариантида тўртта мисол бўлиб, уларнинг шарти қуйидагича:

Биринчи мисолнинг шарти вариантда берилган.

Иккинчи ва учинчи мисолларда: берилган функцияларни тўлиқ текшириш ва уларнинг чизмасини чизиш керак.

Тўртинчи мисолда: берилган $y=f(x)$ функциянинг $[a; b]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топиш керак:

Қуйида вариант мисолларини ечиш намунасини келтирамиз.

1. Берилган S тўла сиртга эга ва асоси квадрат бўлган барча тўғри параллелепипедлар ичидан энг катта ҳажмга эга бўлганини топинг.

Ечиш. Параллелепипед асосининг томони x ва баландлиги y бўлсин, у ҳолда унинг тўла сирти:

$$S=2x^2+4x\ y$$

бўлади, бундан

$$y=\frac{S-2x^2}{4x}.$$

Параллелепипеднинг ҳажми:

$$V=x^2y \text{ ёки } V=x^2\cdot\frac{S-2x^2}{4x}=\frac{x(S-2x^2)}{4},$$

$$V=\frac{1}{4}Sx-\frac{1}{2}x^3\ \left(0<2x^2<S,\ 0<x<\sqrt{\frac{S}{2}}\right).$$

Биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топамиз:

$$V'=\frac{1}{4}S-\frac{3}{2}x^2;\quad V'=0,\ \frac{1}{4}\cdot S-\frac{3}{2}x^2=0,\ x=\frac{1}{6}\sqrt{6S},$$

$$V''=-3x,\ V''\left(\frac{1}{6}\sqrt{6S}\right)=-3\frac{1}{6}\sqrt{6S}=-\frac{1}{2}\sqrt{6S}<0$$

бўлгани учун аргументнинг бу қийматида функция (V) максимумга эришади. Параллелепипеднинг баландлиги:

$$y=\frac{S-2\left(\frac{1}{6}\sqrt{6S}\right)^2}{4\cdot\frac{1}{6}\sqrt{6S}}=\frac{1}{6}\sqrt{6S}.$$

Демак, энг катта ҳажмга қирраси $\frac{1}{6}\sqrt{6S}$ бўлган куб эга бўлади.

2. $y=\frac{(x+3)^2}{x-4}$ функцияни тўлиқ текширинг ва унинг графигини чизинг.

Ечиш. Берилган функцияни юқорида баён қилинган схема бўйича текширамиз.

1. Функциянинг аниқланиш соҳаси: $x\in(-\infty;4)\cup(4;+\infty)$.

2. $x>4$ қийматларда $y>0$ ва $x<4$ қийматларда $y<0$ бўлгани учун берилган функциянинг графиги $x=4$ нинг ўнг томонида Ox ўқининг юқорисида, $x=4$ нинг чап томонида эса Ox ўқининг пастки қисмида жойлашишини билдиради.

3. Берилган функция графигининг координата ўқлари билан кесишган нуқтаси: $\left(0; -\frac{9}{4}\right)$ ва (− 3; 0).

4. $x = 4$ — вертикал асимптотаси, чунки $\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x+3)^2}{x-4} = \infty$ бўлгани учун:

$$\lim_{x\to 4-0} y = \lim_{x\to 4-0}\frac{(x+3)^2}{x-4} = -\infty\,,\quad \lim_{x\to 4+0} y = \lim_{x\to 4+0}\frac{(x+3)^2}{x-4} = +\infty\,.$$

Оғма асимптотасини топамиз:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+3)^2}{x(x-4)} = 1\,,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x+3)^2}{x-4} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+6x+9-x^2+4x}{x-4} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{10x+9}{x-4} = 10\,.$$

Шундай қилиб, функция ягона $y = x + 10$ оғма асимптотага эга экан.

5. Функциянинг ўсиш, камайиш оралиқларини ва локал экстремумларини текширамиз:

$$y' = \frac{2(x+3)(x-4)-(x+3)^2}{(x-4)^2} = \frac{2x^2-2x-24-x^2-6x-9}{(x-4)^2} = \frac{x^2-8x-33}{(x-4)^2}\,.$$

$y' = 0$ дан, $x^2 - 8x - 33 = 0$, бундан $x_1 = 11$, $x_2 = -3$.

а) $(-\infty; -3)$ интервалда $y' > 0$, демак, функция бу интервалда ўсувчи;

б) $(-3; 4)$ интервалда $y' < 0$, функция камаювчи. Шунинг учун $x = -3$ нуқтаси локал максимум бўлиб, $y(-3) = 0$ бўлади;

в) $(4;11)$ интервалда $y' < 0$, функция камаяди;

г) $(11; +\infty)$ интервалда $y' > 0$, функция ўсади.

Шунинг учун $x = 11$ нуқта локал минимум бўлиб, $y(11) = 28$ бўлади.

6. Функция графигининг қавариқлик, ботиқлик интервалларини ва букилиш нуқтасини текширамиз, унинг учун иккинчи тартибли ҳосилани топамиз:

$$y'' = \frac{(2x-8)(x-4)^2(x^2-8x-33)2(x-4)}{(x-4)^4} =$$

$$= \frac{2x^2-8x-8x+32-2x^2+16x+66}{(x-4)^3} = \frac{98}{(x-4)^3}\,.$$

а) $(-\infty; 4)$ интервалда $y'' < 0$ ва бу интервалда эгри чизиқ қавариқ;

б) $(4; +\infty)$ интервалда $y'' > 0$ ва бу интервалда эгри чизиқ ботиқ.

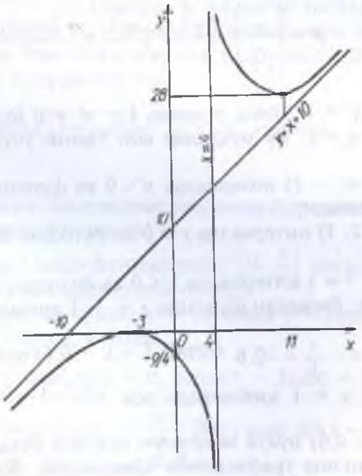
$x = 4$ нуқтада функция маънога эга бўлмаганлиги учун букилиш нуқтаси йўқ.

7. Функциянинг графиги 9-чизмада тасвирланган.

3. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ **функцияни тўлиқ текширинг ва унинг графигини ясанг.**

Ечиш. 1. Функциянинг аниқланиш соҳаси: $(-\infty; +\infty)$.

2. $x = 0$ да $y = 0$ бўлгани учун график координаталар бошидан ўтади.



9-чизма.

3. Функция $(0\,;+\infty)$ интервалда мусбат қийматларни ва $(-\infty;\,0)$ интервалда манфий қийматларни қабул қилади.

4. Вертикал асимптотаси йўқ.

Оғма асимптотасини аниқлаймиз:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{xe^{-\frac{x^2}{2}}}{x}=0\,,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}}}=0\,.$$

$y=0$ горизонтал асимптотага эга бўлдик.

5. $y(-x)=-xe^{-\frac{x^2}{2}}=-y(x)$ бўлгани учун функция тоқ ва унинг графиги координаталар бошига нисбатан симметрик бўлади.

6. Функциянинг монотонлик оралиқларини текширамиз:

$$y'=\left(\frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}}\right)'=\frac{e^{\frac{x^2}{2}}-x\cdot xe^{\frac{x^2}{2}}}{e^{x^2}}=\frac{e^{\frac{x^2}{2}}(1-x^2)}{e^{x^2}}\,.$$

Агар $y'=0$ бўлса, у ҳолда $1-x^2=0$ бўлади, бундан $x_1=-1$, $x_2=1$. Бу нуқталар сон ўқини учта интервалга бўлади:

а) $(-\infty;\,-1)$ интервалда $y'<0$ ва функция бу интервалда камаяди;

б) $(-1;\,1)$ интервалда $y'>0$ ва функция бу интервалда ўсади;

в) $(1;\,+\infty)$ интервалда $y'<0$ ва функция камаяди.

Демак, берилган функция $x=-1$ қийматида $y(-1)=$ $=-1\cdot e^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{e}}\approx-0{,}6$ бўлиб, $(-1;\,-0{,}6)$ нуқта минимум нуктаси, $x=1$ қийматида эса $y(1)=1\cdot e^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}\approx0{,}6$ бўлиб, $(1;\,0{,}6)$ нуқта максимум нуқтаси бўлади.

7. Функция графигининг қавариқлик, ботиқлик оралиқлари ва букилиш нуқтасини топамиз:

$$y'=\frac{1-x^2}{e^{\frac{x^2}{2}}}\,,$$

$$y''=\frac{-2xe^{\frac{x^2}{2}}-(1-x)^2\,xe^{\frac{x^2}{2}}}{e^{x^2}}=\frac{xe^{\frac{x^2}{2}}(-2-1+x^2)}{e^{x^2}}=\frac{x(x^2-3)}{e^{\frac{x^2}{2}}}\,.$$

Агар $y''=0$ бўлса, $x(x^2-3)=0$ бўлиб, бундан $x_1=0$, $x_2=-\sqrt{3}$, $x_3=\sqrt{3}$.

а) $(-\infty;\sqrt{3})$ интервалда $y''<0$ ва эгри чизиқ бу интервалда қаварик;

б) $(-\sqrt{3}\,;\,0)$ интервалда $y''>0$ ва эгри чизиқ бу интервалда ботиқ;

в) $(0;\sqrt{3})$ интервалда $y''<0$ ва эгри чизиқ бу интервалда қаварик;

г) $(\sqrt{3}\,;+\infty)$ интервалда $y''>0$ ва эгри чизиқ бу интервалда ботиқ.

$x=\pm\sqrt{3}$, $x=0$ нуқталарда y'' иккинчи ҳосила ишорасини ўзгартиргани учун x нинг бу қийматлари функциянинг графиги учун букилиш нуқталарининг абсциссаси бўлиб, унинг координаталари

$$y\left(\pm\sqrt{3}\right)=\pm\sqrt{3}/e^{3/2}\approx\pm0{,}4,\quad y(0)=0$$

бўлади.

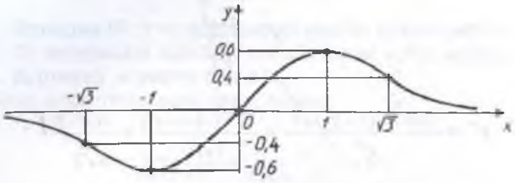
8. Бу олинган маълумотлар ёрдамида функциянинг графигини чизамиз (10-чизма).

4. $y=2\sin x+\cos2x$ функциянинг $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматини топинг.

Ечиш. Критик нуқталарни топамиз: $y'=2\cos x-2\sin2x$. Агар $y'=0$ бўлса, у ҳолда

$$2\cos x-4\sin x\cos x=0,\ 2\cos x(1-2\sin x)=0.$$

Агар $\cos x=0$ бўлса, $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$; агар $\sin x=\frac{1}{2}$ бўлса, $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, бунда $k,\ n\in R$.



10-чизма.

Аниқланган критик нуқталардан фақат $x = \frac{\pi}{6}$ ва $x = \frac{\pi}{2}$ нуқталар берилган $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ кесмага тегишли. Шунинг учун $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$ да функциянинг қийматларини ҳисоблаймиз:

$$y(0) = 1,\ \ y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin 30^\circ + \cos 30^\circ = 1 + \frac{1}{2} = 1,5\ ,$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin 90^\circ + \cos\pi = 2 - 1 = 1\ .$$

Демак, $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ кесмада берилган функция $x = \frac{\pi}{6}$ да энг катта қиймати $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1,5$ га, $x = 0$ ва $x = \frac{\pi}{2}$ нуқталарда энг кичик қийматига, яъни $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ га эришади.

1-вариант

1. Кўндаланг кесими тўғри тўртбурчак бўлган ходанинг маҳкамлиги энига ва баландлигининг кубига тўғри пропорционал деб қабул қилиб, диаметри 16 см бўлган ходадан кесиб олинадиган тўрт қиррали ёғочнинг эни қандай бўлганда у энг катта маҳкамликка эга бўлади?

2. $y = \frac{x^2}{4x^2-1}$.   3. $y = x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$.   4. $y = \frac{x^3}{x^2-x+1}$; $[-1;1]$.

2-вариант

1. Маълумки, тўсиннинг сиқишга бўлган қаршилиги кесим юзига пропорционал. *d* диаметрли думалоқ ходадан кесим юзи тўғри тўртбурчак бўлган шундай тўсин қирқиб олиш керакки, унинг сиқишга бўлган қаршилиги энг катта бўлсин.

2. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.   3. $y = xe^{\frac{1}{x}}$.   4. $y = \frac{(x+1)^3}{x^3}$; $[1;2]$.

3-вариант

1. Иккита мусбат сонннинг йигиндиси *a* га тенг. Агар уларнинг кублари йиғиндиси энг кичик сон бўлса, у ҳолда шу сонларни топинг.

2. $y = x + \frac{\ln x}{x}$.   3. $y = \frac{2+x}{(x+1)^2}$.   4. $y = \sqrt{x - x^3}$; $[-2;2]$.

4-вариант

1. Тўғри бурчакли координаталар системасида (5; 4) нуқта берилган. Бу нуқтадан шундай тўғри чизиқ ўтказилсинки, у координата ўқларининг мусбат йўналишлари билан энг кичик юзли учбурчак ҳосил қилсин.

2. $y = x - \ln(1 + x^2)$.   3. $y = \frac{(1-x)^3}{(x-2)^2}$.   4. $y = 4 - e^{-x^2}$; $[0;1]$.

5-вариант

1. Узунлиги 50 см бўлган сим бўлагидан энг катта юзга эга бўлган тўғри тўртбурчак ясанг.

2. $y = x + \frac{x^3}{x^2-x+1}$.   3. $y = xe^{x}$.   4. $y = \frac{x^3+4}{x^2}$; $[1;2]$.

6-вариант

1. Берилган *p* периметрли тўғри тўртбурчаклар ичидан юзи энг катта бўлганини топинг.

2. $y = x^2 - 2\ln x$.   3. $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.   4. $y = xe^{x}$; $[-2;0]$.

7-вариант

1. Қирраси a бўлган куб ичига қуйидагича цилиндр ясалган: Цилиндр ўқи куб диагонали билан устма-уст тушади, асосларининг айланалари кубнинг ёқларига уринади. Шундай цилиндрларнинг энг катта ҳажмга эга бўлганини топинг.

2. $y = x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}$. 3. $y = \frac{x^2}{(x+1)^2}$. 4. $y = (x - x^2)\, e^x;\ [-2;1]$.

8-вариант

1. Иккита мусбат сонning йиғиндиси a га тенг. Уларнинг кўпайтмаси энг катта бўлиши учун бу сонлар қандай бўлиши керак?

2. $y = \frac{x^2-x-1}{x^2-2x}$. 3. $y = (x+2)\, e^{1-x}$. 4. $y = (x-1)\, e^{-x};\ [0;3]$.

9-вариант

1. R радиусли доирага ички чизилган барча тўғри тўртбурчаклар ичидан энг катта юзга эга бўлганини топинг.

2. $y = \frac{(x-2)^2}{x+1}$. 3. $y = \frac{\ln x}{x}$. 4. $y = \frac{x}{9-x^2};\ [-2;2]$.

10-вариант

1. Берилган $2p$ периметрли барча тўғри тўртбурчаклар ичидан диагонали энг кичик бўлганини топинг.

2. $y = -\ln\frac{1+x}{1-x}$. 3. $y = \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2$. 4. $y = \frac{1+\ln x}{x};\ \left[\frac{1}{e};e\right]$.

11-вариант

1. Юқорига тик отилган жисмнинг ҳаракат қонуни $S = 18t - 6t^2$ тенглама билан берилган. Жисм энг юқорига кўтарилган баландликни топинг.

2. $y = \ln(x^2+1)$. 3. $y = \frac{x^3}{9-x^2}$. 4. $y = e^{4x-x^2};\ [1;3]$.

12-вариант

1. Юқорига тик отилган жисмнинг ҳаракат қонуни $S = \vartheta_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ тенглама билан берилган. Жисм энг юқорига кўтарилган баландликни топинг.

2. $y = \frac{x^2+6}{x^2+1}$. 3. $y = (x+1)e^{2x}$. 4. $y = \frac{x^3-8}{x^4};\ [-3;1]$.

13-вариант

1. Жисмнинг тўғри чизиқли ҳаракати $S = -t^3 + 9t^2 - 24t - 8$ тенглама билан берилган бўлса, жисм ҳаракатининг максимал тезлигини топинг.

2. $y = x\ln x$. 3. $y = \frac{4x}{4+x^2}$. 4. $y = \frac{e^{2x}+1}{e^x};\ [-1;2]$.

14-вариант

1. Радиуси 16 га тенг бўлган доиравий майдоннинг чегараси максимал ёритилган бўлиши учун фонарни майдон ўртасидан қандай h баландликка ўрнатиш керак?

2. $y = (x-1)e^{3x+1}$. 3. $y = \frac{x^4}{x^3-1}$. 4. $y = x\ln x;\ \left[\frac{1}{e^2};1\right]$.

15-вариант

1. R радиусли шарга ички чизилган барча конуслар ичидан ён сирти энг катта бўлганини топинг.

2. $y = \frac{x^2-3x+2}{x+1}$. 3. $y = \ln(x^2-2x+6)$.

4. $y = x^3e^{x+1};\ [-4;0]$.

16-вариант

1. R радиусли шарга ички чизилган барча конуслар ичидан ҳажми энг катта бўлганини топинг.

2. $y = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$. 3. $y = \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$.

4. $y = x^2 - 2x + \frac{2}{x-1};\ [-1;3]$.

17-вариант

1. R радиусли шарга ички чизилган барча цилиндрлар ичидан ён сирти энг катта бўлганини топинг.

2. $y = \frac{x^5}{x^4 - 1}$. 3. $y = x^3 e^{x+1}$. 4. $y = (x + 1)\sqrt[3]{x^2}$; $\left[-\frac{4}{3}; 3\right]$.

18-вариант

1. R радиусли шарга ички чизилган барча цилиндрлар ичидан ҳажми энг катта бўлганини топинг.

2. $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$. 3. $y = x - \ln(1 + x)^2$. 4. $y = e^{6x - x^2}$; $[-3; 3]$.

19-вариант

1. Берилган конусга ички чизилган барча цилиндрлар ичидан ҳажми энг катта бўлганини топинг (конус асосининг радиуси R ва баландлиги H берилган).

2. $y = \frac{1}{3}\sqrt{x^3}(x - 5)$. 3. $y = 1 - \ln^3 x$. 4. $y = \frac{\ln x}{x}$; $[1; 4]$.

20-вариант

1. Берилган конусга ички чизилган барча цилиндрлар ичидан тўла сирти энг катта бўлганини топинг (конус асосининг радиуси R ва баландлиги H берилган).

2. $y = \frac{x^3}{x^4 - 1}$. 3. $y = (x - 1)e^{4x+2}$.

4. $y = 3x^4 - 16x^3 + 2$; $[-3; 1]$.

21-вариант

1. Берилган конусга ички чизилган барча цилиндрлар ичидан ён сирти энг катта бўлганини топинг (конус асосининг радиуси R ва баландлиги H берилган).

2. $y = \frac{e^{2x} + 1}{e^x}$. 3. $y = \frac{2x^2 + 4x + 2}{2 - x}$.

4. $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$; $[-1; 2]$.

22-вариант

1. Ҳажми V берилган, тўла сирти эса энг кичик бўлган туби квадрат шаклидаги усти очиқ (қопқоқсиз) яшикнинг ўлчамларини топинг.

2. $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$. 3. $y = -x \ln^2 x$. 4. $y = (3 - x)e^{-x}$; $[0; 5]$.

23-вариант

1. Ўлчамлари 100×60 см бўлган тўғри тўртбурчак шаклидаги тунуканинг учларидан тенг квадратлар қирқиб олиб ташлаб, сўнгра унинг четларини букиб, энг катта ҳажмга эга бўлган усти очиқ яшик ясаш керак. Қирқиб олиб ташланадиган квадратларнинг томони қандай бўлиши керак?

2. $y = \frac{5x^4 + 3}{x}$. 3. $y = x^2 - 2\ln x$. 4. $y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x$; $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

24-вариант

1. Асоси ва баландлигининг йиғиндиси a га тенг бўлган барча учбурчаклар ичидан юзи энг катта бўлганини топинг.

2. $y = \frac{4 - 2x}{1 - x^2}$. 3. $y = e^{\frac{1}{3 - x}}$. 4. $y = 108x - x^4$; $[-1; 4]$.

25-вариант

1. a радиусли доирага тўғри бурчакли учбурчак ички чизилган. Катетларининг муносабати қандай бўлганда учбурчак энг катта юзга эга бўлади.

2. $y = \frac{5x}{4 - x^2}$. 3. $y = \ln(4 - x^2)$. 4. $y = \frac{x^4}{49} - 6x^3 + 7$; $[16; 20]$.

III боб

КОМПЛЕКС СОНЛАР

1-§. Комплекс сон хақида тушунча. Комплекс сонлар устида асосий амаллар

Комплекс сон деб $z = x + iy$ кўринишдаги ифодага айтилади, бу ерда x ва y ҳақиқий сонлар, $i = \sqrt{-1}$ — *мавҳум бирлик деб* аталади.

x — комплекс сон z нинг *ҳақиқий қисми*, iy эса *мавҳум қисми* дейилади. Улар $x = \mathrm{Re}z$, $y = Zmz$ билан белгиланади. Агар $x = 0$ бўлса, $0 + iy = iy$ *соф мавҳум* сон дейилади, агар $y = 0$ бўлса, $x = x \in R$ ҳақиқий сон ҳосил бўлади.

Фақат мавҳум қисмининг ишораси билан фарқ қиладиган $z = x + iy$ ва $z = x - iy$ комплекс сонлар *бир-бирига қўшма* дейилади (11-чизмага қаранг). Геометрик нуқтаи назардан $z = x + iy$ комплекс сон Oxy текисликда координаталари x ва y бўлган $M(x;y)$ нуқтанинг $\overline{OM}$ векторини аниқлайди ва аксинча ҳар бир $M(x;y)$ нуқтага $z = x + iy$ комплекс сонлар мос келади.

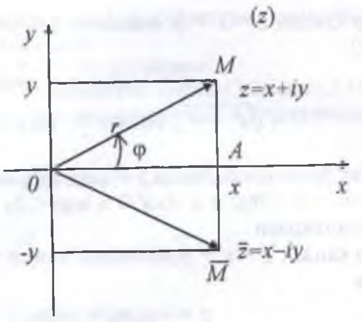
Комплекс сонлар тўплами билан Oxy текисликдаги нуқталар орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилгани учун берилган Oxy текислик комплекс текислик дейилади ва у Z билан белгиланади.

Комплекс сонлар тўплами G ҳарфи билан белгиланади, $R \subset G$.

Ўзгарувчи Z комплекс текислигининг ($z = x$) Ox ўқда ётувчи нуқталарига ҳақиқий сонлар мос келади, шунинг учун Ox ўқ комплекс текисликнинг *ҳақиқий ўқи* дейилади. Oy ўқда ётувчи нуқталар ($z = iy$) соф мавҳум сонни ифодалагани учун Oy ўқ комплекс текисликнинг *мавҳум сонлар ўқи* ёки *мавҳум ўқи* дейилади.

Агар иккита $z_1 = x_1 + iy_1$ ва $z_2 = x_2 + iy_2$ комплекс сон берилган бўлса, уларнинг устида арифметик амаллар қуйидаги қоида бўйича бажарилади:

1) $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$,
2) $z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$,
3) $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$,
4) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}; \ \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \ (z_2 \neq 0)$.



11-чизма.

Комплекс сонлар устида амаллар бажариш қоидалари шуни кўрсатадики, комплекс сонларни қўшиш, айириш, кўпайтириш ва бўлиш натижасида яна комплекс сон ҳосил бўлади.

1-мисол. $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 - 4i$, $z_3 = 1 + i$ комплекс сонлар берилган. $z = \frac{z_1 + z_1 \cdot z_2 + z_2^2}{z_1 + z_3}$ ни топинг.

Ечиш. Дастлаб қуйидагиларни ҳисоблаймиз:

$$z_1 + z_3 = (2 + 3i) + (1 + i) = 3 + 4i,$$
$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i) \cdot (3 - 4i) = (6 + 12) + i(9 - 8) = 18 + i,$$
$$z_2^2 = (3 - 4i)^2 = 9 - 24i - 16 = -7 - 24i,$$
$$z_1 + z_1 \cdot z_2 + z_2^2 = 2 + 3i + 18 + i - 7 - 24i = 13 - 20i.$$

Бу қийматларни ўрнига қўямиз:

$$z = \frac{13-20i}{3+4i} = \frac{(13-20i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{(39-80)+i(-60-52)}{25} = \frac{41}{25} - i\frac{112}{25}.$$

$r = \left|\overline{OM}\right| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ сон z комплекс сонннинг *модули* дейилади.

$\overline{OM}$ вектор ва Ox ўқининг мусбат йўналиши орасидаги бурчак z комплекс сонннинг *аргументи* дейилади ва $\varphi = \mathrm{Arg}z$ деб белгиланади.

Ҳар қандай $z = x + iy$ комплекс сон учун (11-чизмага қаранг)

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \qquad (3.1)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \cos\varphi = \frac{x}{r},\ \sin\varphi = \frac{y}{r}$$

формула ўринлидир, бунда $y = \arg z$ аргументнинг асосий қиймати $-\pi < \arg z \leq \pi$ ёки $0 \leq \arg z < 2\pi$ тенгсизликни қаноатлантиради.

Ҳар қандай $z = x + iy$ комплекс сонни тригонометрик шаклда

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi\ ) \qquad (3.2)$$

ёки кўрсаткичли шаклда

$$z = re^{i\varphi} \qquad (3.3)$$

каби ёзиш мумкин. (3.2) ва (3.3) дан

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad (3.4)$$

Эйлер формуласига эга бўламиз. Комплекс сонларни кўпайтиришда, даражага кўтаришда (3.2) ва (3.3) формулалардан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир.

Агар $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ комплекс сонлар берилган бўлса, у ҳолда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right) = \frac{r_1}{r_2}\cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)},\ (z_2 \neq 0),$$

$$z^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right) = r^n \cdot e^{in\varphi}. \qquad (3.5)$$

(3.5) формула *Муавр формуласи* дейилади.

(3.2) комплекс соннинг n-даражали ($n > 1$, $n \in Z$) илдизи қуйидаги формула билан топилади:

$$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{i(\varphi + 2\pi k)}{n}},$$
$$(k = \overline{0, n-1}). \qquad (3.6)$$

(3.6) ифода илдизнинг n та қийматини аниқлайди, $\sqrt[n]{r}$ эса арифметик илдиздир.

2-мисол. $(1 + i)^{12}$ ни ҳисобланг.

Ечиш. $z = 1 + i$ комплекс сонни (3.2) ёки (3.3) формулалар ёрдамида тригонометрик ёки кўрсаткичли шаклда ёзиб оламиз:

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},\ \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \varphi = \frac{\pi}{4},$$

$$z = \sqrt{2}\ \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cdot e^{\frac{i\pi}{4}}.$$

Муавр формуласига кўра:

$$z^{12} = \left(\sqrt{2}\right)^{12}\ \left(\cos\left(12\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(12\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2^{12}}\cdot e^{3\pi i} =$$
$$= 64\cdot(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = -64.$$

3-мисол. $z^6 + 1 = 0$ тенгламанинг илдизларини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламани $z^6 = -1$ ёки $z = \sqrt[6]{-1}$ кўринишда ёзиб оламиз.

-1 соннинг (3.2) формулага асосан тригонометрик шакли

$$-1 = 1\cdot(\cos\pi + i\sin\pi)$$

кўринишда бўлади. (3.6) формулага кўра берилган тенгламанинг илдизлари

$$z_k = \sqrt[6]{-1} = 1\cdot\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right) = e^{\frac{i(\pi + 2k\pi)}{6}}$$

каби топилади, бунда $k = \overline{0, 5}$; k га кетма-кет 0,1,...,5 қийматлар бериб, $z^6 + 1 = 0$ тенгламанинг олтита илдизини топамиз:

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{\frac{\pi i}{6}};$$

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i = e^{\frac{\pi i}{2}};$$

$$z_2 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{-\frac{5\pi}{6}};$$

$$z_3 = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = e^{\frac{7\pi i}{6}} = e^{-\frac{5\pi i}{6}};$$

$$z_4 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i = e^{-\frac{\pi i}{2}} = e^{\frac{3\pi i}{2}};$$

$$z_5 = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = e^{\frac{11\pi i}{6}} = e^{-\frac{\pi i}{6}}.$$

4-мисол. $z^3 - 1 + i\sqrt{3} = 0$ тенгламанинг илдизларини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламани $z^3 = 1 - i\sqrt{3}$ кўринишда ёзиб оламиз. Ўнг қисмидаги комплекс сонни тригонометрик шаклда ёзиб сўнгра (3.6) формулага кўра топамиз:

$$z^3 = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

$$z_k = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{3} - i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{3}\right),\ (k = \overline{0,2}).$$

Демак, берилган тенгламанинг илдизлари:

$$z_0 = \sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{9} - i\sin\frac{\pi}{9}\right),$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{9} - i\sin\frac{7\pi}{9}\right),$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\frac{13\pi}{9} - i\sin\frac{13\pi}{9}\right).$$

Машқлар

111. Қуйидаги комплекс сонларни тасвирловчи нуқталарни кўрсатинг. $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = -1 + 3i$, $z_4 = -\sqrt{3} + i$, $z_5 = -6$, $z_6 = 8$, $z_7 = \sqrt{2}\cdot i$, $z_8 = 5 + 12i$.

112. Агар $z_1 = 4 + 5i$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = 7 - 9i$ бўлса, $z = \frac{z_1(z_2 + z_3)}{z_2}$ ифоданинг қийматини топинг.

113. Агар $z_1 = 4 + 8i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = 9 + 13i$ бўлса, $z = \frac{z_1 + z_2 z_3}{z_2}$ ифоданинг қийматини топинг.

114. Агар $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -1 + 2i$, $z_3 = 8 + 12i$ бўлса, $z = \frac{z_1^2 + z_2 + z_3}{z_2}$ ифоданинг қийматини топинг.

115. Қуйидаги комплекс сонларни тригонометрик ва кўрсаткичли шаклда ёзинг.

$z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$, $z_3 = \frac{1}{2}$, $z_4 = \frac{2}{1+i}$,
$z_5 = -\sqrt{3} - i$, $z_6 = 2 - 2i$, $z_7 = -1 + i$, $z_8 = -i$.

116. Қуйидаги тенгламаларнинг илдизларини топинг:

1) $z^2 - i = 0$; 2) $z^4 + i = 0$; 3) $z^3 + i = 0$; 4) $z^8 - i = 0$.

IV боб

АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ

1-§. Бошланғич функция ва аниқмас интеграл

Берилган $y = f(x)$ функция (a,b) интервалда аниқланган бўлсин. Агар $F'(x) = f(x)$ (бунда $x \in (a;b)$) тенглик ўринли бўлса, $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг $(a; b)$ интервалдаги *бошланғич функцияси* дейилади. Берилган $f(x)$ функциянинг ихтиёрий иккита бошланғич функцияси бир-биридан ўзгармас сонга фарқ қилади.

$f(x)$ функциянинг $F(x) + C$ (бунда C — ўзгармас сон) бошланғич функциялар тўплами $f(x)$ функциянинг *аниқмас интеграли* дейилади ва

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{4.1}$$

кўринишда белгиланади.

Асосий интеграллаш қоидаларини келтирамиз:

1. $\int f'(x)dx = \int d[f(x)] = f(x) + C$.

2. $d\int f(x)dx = d(F(x) + C) = f(x)dx$.

3. $\int (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx$.

4. $\int af(x) = a\int f(x)dx,\ (a = \text{const})$.

5. Агар $\int f(x)dx = F(x) + C$ бўлса, $\int f(ax + b)dx = = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$, бунда $a \neq 0$, b — ўзгармас сонлар.

6. Агар $\int f(x)dx = F(x) + C$ бўлиб, $u = \varphi(x)$ — ихтиёрий дифференциалланувчи функция бўлса, у ҳолда

$$\int f(u)du = F(u) + C .$$

Интеграллаш натижасини тўғри бажарилганлигини текшириш учун аниқланган бошланғич функциядан ҳосила олиш керак, яъни

$$(F(x) + C)' = f(x)$$

тенглик ўринли бўлиши зарур ва етарлидир.

Интеграллашни енгиллаштириш учун асосий *интеграллар жадвалини* тузамиз:

1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1);\ n = 0$ бўлса, $\int dx = x + C$;

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;\ (n = -1)$;

3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;

4) $\int e^x dx = e^x + C$;

5) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

6) $\int \cos x dx = \sin x + C$;

7) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C;\ (a \neq 0)$;

8) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C = -\frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$;

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;\ (a \neq 0)$;

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C;\ (a > 0)$;

11) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;

12) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

13) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C = \ln\left|\frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x\right| + C$;

14) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x\right| + C$;

15) $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$;

16) $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$;

17) $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$;

18) $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$;

19) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$;

20) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$;

21) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$;

22) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C$.

1-мисол. Интеграллаш қоидалари ва интеграллар жадвалидан фойдаланиб, қуйидаги интегралларни топинг:

1) $\int \left(3x^2 - 2\sqrt[3]{x} + \frac{3}{x^2} + 1\right)dx$;

2) $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x)^2} dx$;

3) $\int 9^x e^{2x} dx$;

4) $\int (3x - 6)^8 dx$;

5) $\int \sin(4x-5)dx$; 6) $\int \frac{x-\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx$;

7) $\int \frac{\sin 2x}{4+\sin^2 x}dx$; 8) $\int \frac{x-2}{x^2-4x+6}dx$.

Ечиш. 1) Берилган интегралда интеграл остидаги функциянинг шаклини ўзгартириб ёзамиз, сўнгра интеграллар жадвалидаги 1-формуладан фойдаланамиз:

$$\int\left(3x^2-2\sqrt[3]{x}+\frac{3}{x^2}+1\right)dx=3\int x^2dx-2\int x^{\frac{1}{3}}dx+3\int x^{-2}dx+\int dx=$$

$$=3\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1}-2\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+3\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+x+C=$$

$$=x^3-\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{2}-x^{-1}+x+C=$$

$$=x^3-3x\sqrt[3]{x}-\frac{1}{x}+x+C\cdot$$

2) Берилган интегралда интеграл остидаги функцияни интеграллаш учун қулай кўринишда ёзиб оламиз, сунгра 1,7-формулалардан фойдаланамиз:

$$\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x)^2}dx=\int\frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x)^2}dx=\int\frac{1+x^2}{x^2(1+x)^2}dx+\int\frac{x^2}{x^2(1+x)^2}dx=$$

$$=\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{1+x^2}=-\frac{1}{x}+\operatorname{arctg}x+C.$$

Қолган интеграллар ҳам интеграл остидаги функцияни бошқача кўринишда ёзиб олингач, жадвалдаги тегишли формулалар ёрдамида топилади:

3) $\int 9^x e^{2x}dx=\int 3^{2x}e^{2x}dx=\int(3e)^{2x}dx=\frac{(3e)^{2x}}{2\ln(3e)}+C$.

4) $\int(3x-6)^8dx=\frac{1}{3}\int(3x-6)^8 3dx=\frac{1}{3}\int(3x-6)^8 d(3x-6)=$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-6)^9}{9}+C=\frac{1}{27}(3x-6)^9+C.$$

5) $\int\sin(4x-5)dx=\frac{1}{4}\int\sin(4x-5)4dx=$

$$=\frac{1}{4}\int\sin(4x-5)d(4x-5)=-\frac{1}{4}\cos(4x-5)+C.$$

6) $\int\frac{x-\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx=\int\frac{x}{1+x^2}dx-\int\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx=$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx-\int\operatorname{arctg}x\,d(\operatorname{arctg}x)=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2+C=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln\left|1+x^2\right|-(\operatorname{arctg}x)^2\right]+C.$$

7) $\int\frac{\sin 2x}{4+\sin^2 x}dx=\int\frac{2\sin x\cos x}{4+\sin^2 x}dx=\int\frac{d(4+\sin^2 x)}{4+\sin^2 x}dx=$

$$=\ln(4+\sin^2 x)+C.$$

8) $\int\frac{x-2}{x^2-4x+6}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-4}{x^2-4x+6}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-4x+6)}{x^2-4x+6}=$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+6)+C=\ln\sqrt{x^2-4x+6}+C.$$

Машқлар

Асосий интеграллар жадвалидан фойдаланиб, қуйидаги интегралларни топинг ва натижани дифференциаллаб текширинг:

117. $\int\left(3x^5-4\sqrt[5]{x^3}+\frac{2}{x^6}\right)dx$. 118. $\int\left(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}\right)^2dx$.

119. $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$. 120. $\int\left(3\sin x-2^{2x}3^x-\frac{1}{9+x^2}\right)dx$.

121. $\int\sqrt[5]{(5x+3)^3}dx$. 122. $\int\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+7)^2}}dx$.

123. $\int \frac{3-2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}\,dx$.

124. $\int\left(4x-\sqrt[7]{x^5}+2\sin x-2\right)dx$.

125. $\int\left(x^5-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+2^x\right)dx$.

126. $\int \frac{x+1}{x^2+2x+4}\,dx$.

127. $\int\left(\frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}-\cos^7 x\sin x\right)dx$.

128. $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}\,dx$.

129. $\int e^{2x}\left(1+\frac{e^{-2x}}{\cos^{2x}}\right)dx$.

130. $\int 2^{3x}\left(1-\frac{2^{-3x}}{x^2}\right)dx$.

131. $\int 2^{3x}\cdot 4^{2x}\cdot 5^x\,dx$.

132. $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}\,dx$.

133. $\int x\sin(x^2)dx$.

134. $\int\left(ax^2+b\right)^{\frac{2}{3}}xdx$.

135. $\int\sqrt{\cos x}\sin xdx$.

136. $\int\cos(\sin x)\cdot\cos xdx$.

2-§. Функцияларни бевосита интеграллаш

Агар интеграл остидаги функция бир нечта функциялардан иборат бўлса, у ҳолда бу функцияларни алгебраик алмаштиришлар ёрдамида ёки айрим кўпайтувчи функцияларни дифференциал белгиси остига киритиш ёрдамида жадвал интегралларидан бирига келтирилади. Буни қуйидаги мисолларда кўрсатамиз.

1-мисол. $\int\operatorname{ctg}^3 xdx$ интегрални топинг.

Ечиш.

$$\int\operatorname{ctg}^3 xdx=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\operatorname{ctg}xdx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\cdot\operatorname{ctg}xdx=$$

$$=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}x\right)dx=-\int\operatorname{ctg}xd(\operatorname{ctg}x)-\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}=$$

$$=-\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2}-\ln|\sin x|+C.$$

2-мисол. $\int\frac{x-3}{x+5}\,dx$ интегрални топинг.
Ечиш.

$$\int\frac{x-3}{x+5}\,dx=\int\frac{x+5-8}{x+5}\,dx=\int\left(1-\frac{8}{x+5}\right)dx=\int dx-8\int\frac{d(x+5)}{x+5}=$$

$$=x-8\ \ln|x+5|+C.$$

3-мисол. $\int\frac{dx}{x^2+4x+8}$ интегрални топинг.
Ечиш.

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+8}=\int\frac{dx}{x^2+4x+4+4}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+4}=\int\frac{d(x+2)}{4+(x+2)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}+C.$$

Ушбу $\int\sin mx\cos nxdx$, $\int\sin mx\sin nxdx$, $\int\cos mx\cos nxdx$ кўринишдаги интеграллар берилган бўлса, уларни интеграллаш учун тригонометриядан маълум бўлган қуйидаги формулалардан фойдаланиш керак:

$$\sin mx\cos nxdx=\frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\right),$$

$$\sin mx\sin nxdx=\frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\right),$$

$$\cos mx\cos nxdx=\frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x+\cos(m+n)x\right).$$

4-мисол. $\int\sin(2x-1)\ \ \sin(3x+5)dx$ интегрални топинг.

Ечиш.

$$\int\sin(2x-1)\ \ \sin(3x+5)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\cos(2x-1-3x-5)-\cos(2x-1+3x+5)\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\cos(x+6)-\cos(5x+4)\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\cos(x+6)d(x+6)-\frac{1}{10}\int\cos(5x+4)d(5x+4)=$$

$$=\frac{1}{2}\sin|x+6|-\frac{1}{10}\sin(5x+4)+C.$$

Ушбу $\int \cos^m x \sin^n xdx$ $(m, n \in Z)$ кўринишдаги интегралларни интеграллашда қуйидаги ҳоллардан бири бўлиши мумкин:

а) m ёки n тоқ, масалан $m = 2k + 1$ тоқ сон бўлсин, у ҳолда

$$\int \cos^m x \sin^n xdx = \int \cos^{2k} x \sin^n x \cos xdx =$$

$$= \int (1 - \sin^2 x)^k \quad \sin^n xd(\sin x)$$

кўринишдаги даражали функциянинг интеграли ҳосил қилинади.

5-мисол. $\int \sin^5 x \cos^3 xdx$ ни топинг.

Ечиш.

$$\int \sin^5 x \cos^3 xdx = \int \sin^5 x \cos^2 x \cos xdx =$$

$$= \int \sin^5 x(1 - \sin^2)d(\sin x) = \int \sin^5 xd(\sin x) - \int \sin^7 xd(\sin x) =$$

$$= \frac{1}{6}\sin^6 x - \frac{1}{8}\sin^8 x + C.$$

б) m ва n жуфт бўлсин. У ҳолда тригонометрик функцияларнинг даражасини пасайтирадиган қуйидаги формулалардан фойдаланилади:

$$2\cos^2 \alpha x = 1 + \cos 2\alpha x, \quad 2\sin^2 \alpha x = 1 - \cos^2 \alpha x \quad (\alpha \in R).$$

6-мисол. $\int \sin^2 4xdx$ ни топинг.

Ечиш.

$$\int \sin^2 4xdx = \int \frac{1-\cos 8x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2 \cdot 8}\int \cos 8xd(8x) =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}\sin 8x + C.$$

7-мисол. $\int \frac{dx}{7-6x-x^2}$ ни топинг.

Ечиш.

Интеграл остидаги каср махражидан тўлиқ квадрат ажратамиз. Натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \frac{dx}{7-6x-x^2} = \int \frac{dx}{7+9-(9+6x+x^2)} = \int \frac{dx}{16-(x+3)^2} = \frac{1}{2 \cdot 4}\ln\left|\frac{x+3+4}{x+3-4}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x+7}{x-1}\right| + C.$$

8-мисол. $\int \frac{x^4+2}{x^2+9}$ ни топинг.

Ечиш.

Берилган интегрални ҳисоблаш учун интеграл остидаги функциянинг суратини махражига (кўпҳадни кўпҳадга бўлиш қоидаси бўйича) бўлиб, унинг бутун қисмини ва каср қисмини (қолдиқни) аниқлаш керак.

$$\begin{array}{l|l} x^4 + 2 & x^2 + 9 \\ \cline{2-2} x^4 + 9x^2 & x^2 - 9 \\ \cline{1-1} -9x^2 + 2 & \\ -9x^2 - 81 & \\ \cline{1-1} \quad 83 & \end{array}$$

Бу эса интеграл остидаги функцияни бутун кўпҳад ва бирор тўғри каср йиғиндиси кўринишида ёзиш имконини беради.

Натижада берилган интеграл қуйидагича топилади:

$$\int \frac{x^4+2}{x^2+9}dx = \int \left(x^2 - 9 + \frac{83}{x^2+9}\right)dx = \int x^2 dx - 9\int dx + 83\int \frac{dx}{3^2+x^2} =$$

$$= \frac{x^3}{3} - 9x + \frac{83}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C.$$

Машқлар

Қуйидаги берилган интегралларни топинг:

137. $\int (2^{2x} + 2^{-3x})\, dx$.
138. $\int (e^{3x} - e^{-2x})\, dx$.
139. $\int \sqrt[5]{1 - 6x^3 x^2}\, dx$.
140. $\int \sqrt[3]{1 + 3x^4}\, x^3 dx$.
141. $\int \frac{4x-6}{\sqrt{4+x^2}}\, dx$.
142. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+9}}\, dx$.
143. $\int \cos^4 2x \sin^3 2xdx$.
144. $\int \cos^2 3x \sin^5 3xdx$.

145. $\int \operatorname{ctg}^3 2x dx$. 146. $\int \operatorname{tg}^2 8x dx$.

147. $\int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx$. 148. $\int \frac{x^2-5}{x^2+4} dx$.

149. $\int \sin 6x \sin 8x dx$. 150. $\int \cos 10x \sin 2x dx$.

151. $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$. 152. $\int \frac{dx}{x^2-6x+7} dx$.

153. $\int \frac{dx}{8-2x-x^2}$. 154. $\int \frac{dx}{9-8x-x^2}$.

155. $\int \frac{x^3+3}{x+1} dx$. 156. $\int \frac{x^2+x+1}{x+1} dx$.

3-§. Квадрат учҳад қатнашган функцияларнинг интеграллари

Қуйидаги кўринишдаги интегралларни қараймиз:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c} dx. \tag{4.2}$$

Агар $A \neq 0$ бўлса, у ҳолда каср суратидан махраждаги квадрат учҳаднинг ҳосиласига тенг бўлган $2x+b$ қўшилувчини ажратиб олиш мумкин. Натижада оддий алмаштириш ёрдамида берилган интеграл қуйидаги кўринишни олади:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c} dx = \frac{A}{2} \int \frac{(2x+b)+\left(\frac{2B}{A}-b\right)}{x^2+bx+c} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x+b}{x^2+bx+c} dx +$$

$$+\left(B-\frac{Ab}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+bx+c} = \frac{A}{2} \ln\left|x^2+bx+c\right| + \left(B-\frac{Ab}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+bx+c}.$$

Охирги интегрални топиш учун махраждаги квадрат учҳадни қуйидаги кўринишга келтириб оламиз:

$$x^2+bx+c = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + C - \frac{b^2}{4}.$$

Бунда $C - \frac{b^2}{4}$ ифодани ишорасига қараб қуйидаги

$$\int \frac{dx}{x^2 \pm a^2}$$

жадвал интегралининг бирига эга бўламиз.

1-мисол. $\int \frac{5x-2}{x^2+4x+13} dx$ ни топинг.

Ечиш.

$$\int \frac{5x-2}{x^2+4x+13} dx = \frac{5}{2} \int \frac{2x+4-4-\frac{4}{5}}{x^2+4x+13} dx = \frac{5}{2} \int \frac{2x+4}{x^2+4x+13} dx -$$

$$-12 \int \frac{dx}{x^2+4x+13} = \frac{5}{2} \int \frac{d(x^2+4x+13)}{x^2+4x+13} - 12 \int \frac{dx}{(x+2)^2+9} =$$

$$= \frac{5}{2} \ln(x^2+4x+13) - 4\operatorname{arctg} \frac{x+2}{3} + C.$$

2-мисол. $\int \frac{5x-7}{x^2-8x+7} dx$ ни топинг.

Ечиш.

$$\int \frac{5x-7}{x^2-8x+7} dx = \frac{5}{2} \int \frac{2x-8+8-\frac{14}{5}}{x^2-8x+7} dx =$$

$$= \frac{5}{2} \int \frac{2x-8}{x^2-8x+7} dx + 13 \int \frac{dx}{(x-4)^2-9} = \frac{5}{2} \int \frac{d(x^2-8x+7)}{x^2-8x+7} + 13 \int \frac{dx}{(x-4)^2-9} =$$

$$= \frac{5}{2} \ln\left|x^2-8x+7\right| + \frac{13}{2 \cdot 3} \ln\left|\frac{x-4-3}{x-4+3}\right| + C =$$

$$= \frac{5}{2} \ln\left|x^2-8x+7\right| + \frac{13}{6} \ln\left|\frac{x-7}{x-1}\right| + C.$$

Эслатма. Агар (4.2) интегралнинг махражидаги квадрат учҳад ax^2+bx+c $(a \neq 0)$ кўринишда бўлса, у ҳолда a ни қавсдан ташқарига чиқариш керак, яъни

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right).$$

3-мисол. $\int \frac{4x-3}{2x^2-12x+10} dx$ ни топинг.

Ечиш.

$$\int\frac{4x-3}{2x^2-12x+10}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{4x-3}{x^2-6x+5}\,dx=\int\frac{2x-6+6-\frac{3}{2}}{x^2-6x+5}\,dx=$$

$$=\int\frac{2x-6}{x^2-6x+5}\,dx\pm\frac{9}{2}\int\frac{dx}{x^2-6x+5}=\int\frac{d(x^2-6x+5)}{x^2-6x+5}\pm\frac{9}{2}\int\frac{dx}{(x-3)^2-4}=$$

$$=\ln\left|x^2-6x+5\right|\pm\frac{9}{8}\ln\left|\frac{x-1}{5-x}\right|+C.$$

Ушбу

$$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \tag{4.3}$$

кўринишдаги интеграл (4.2) кўринишдаги интеграл каби топилади, аммо натижада ҳосил бўлган интеграл бошқа жадвал интеграли бўлади. $A\neq0$ бўлса, (4.3) ни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b-b+\frac{2Ba}{A}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx+$$

$$+\left(B-\frac{bA}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\frac{A}{2a}\int\left(ax^2+bx+c\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\,d(ax^2+bx+c)+\left(B-\frac{bA}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}}=$$

$$=\frac{A}{2a}\sqrt{ax^2+bx+c}+\left(B-\frac{bA}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}}$$

Охирги интеграл учун $c-\frac{b^2}{4a}=\pm k^2$ ва $a>0$ бўлса,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm k^2}}=\ln\left|x^2\sqrt{x^2\pm k^2}\right|+C$$

кўринишдаги, $C>\frac{b^2}{4a}$ ва $a<0$ бўлса,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-k^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$$

кўринишдаги жадвал интеграллари ҳосил бўлади.

4-мисол. $\int\frac{5x-1}{\sqrt{x^2-4x+20}}\,dx$ ни топинг.

Ечиш.

$$\int\frac{5x-1}{\sqrt{x^2-4x+20}}dx=\frac{5}{2}\int\frac{2x-4+4-2/5}{\sqrt{x^2-4x+20}}dx=\frac{5}{2}\int\frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x+20}}dx+$$

$$+9\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+20}}=\frac{5}{2}\int\frac{d(x^2-4x+20)}{\sqrt{x^2-4x+20}}+9\int\frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+16}}=$$

$$=5\sqrt{x^2-4x+20}+9\ln\left|x-2+\sqrt{(x-2)^2+16}\right|+C\cdot$$

5-мисол. $\int\frac{4x+5}{\sqrt{8+2x-x^2}}\,dx$ ни топинг.

Ечиш.

$$\int\frac{4x+5}{\sqrt{8+2x-x^2}}dx=-2\int\frac{-2x+2-2-5/2}{\sqrt{8+2x-x^2}}dx-2\int\frac{2-2x}{\sqrt{8+2x-x^2}}dx+$$

$$+9\int\frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}=-2\int\frac{d(8+2x-x^2)}{\sqrt{8+2x-x^2}}+9\int\frac{dx}{\sqrt{9-(1-x)^2}}=$$

$$=-\sqrt{8+2x-x^2}+9\cdot\arcsin\frac{1-x}{3}+C.$$

Қуйидаги интеграл берилган бўлсин:

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx, \tag{4.4}$$

бунда k — бутун сон, $k>0$, $p^2-4q<0$ бўлсин. Агар $A\neq0$ ($k=1$) бўлса, у ҳолда (4.4) дан (4.3) га ўхшаш интегрални ажратиб оламиз:

$$\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx=\frac{A}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k}=$$

$$=\frac{A}{2}\cdot\frac{(x^2+px+q)^{-k+1}}{-k+1}+C,\ \ (k\neq 1).$$

Энди (4.4) ни тўлиқ топиш учун иккинчи интегрални топамиз:

$$\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}=\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4-p^2}{4}\right]^k}=\int\frac{dx}{(u^2+a^2)^k}\,, \qquad (4.5)$$

бунда $u=x+\frac{p}{2}$, $a=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{4}$, $4q-p^2>0$.

(4.5) кўринишдаги интегралларни топиш учун қуйидаги махраж даражасини пасайтиришнинг рекуррент формуласидан фойдаланамиз:

$$\int\frac{du}{(u^2+a^2)^k}=\frac{u}{2a^2(k-1)(u^2+a^2)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2a^2(k-1)}\int\frac{du}{(u^2+a^2)^{k-1}}\,. \qquad (4.6)$$

Буни қуйидаги мисолда кўрсатамиз.

6-мисол. $\int\frac{4x+5}{(x^2+6x+25)^2}\,dx$ ни топинг.

Ечиш.

$$\int\frac{4x+5}{(x^2+6x+25)^2}\,dx=2\int\frac{2x+6-6+\frac{5}{2}}{(x^2+6x+25)^2}\,dx=2\int\frac{2x+6}{(x^2+6x+25)^2}\,dx-$$

$$-7\int\frac{dx}{(x^2+6x+25)^2}=\int\frac{d(x^2+6x+25)}{(x^2+6x+25)^2}-7\int\frac{dx}{\left[(x+3)^2+4^2\right]^2}=$$

$$=-\frac{2}{x^2+6x+25}-7\int\frac{dx}{\left[(x+3)^2+4^2\right]}=-\frac{2}{x^2+6x+25}-$$

$$-7\left[\frac{x+3}{2\cdot 4^2(2-1)\left[(x+3)^2+4^2\right]}+\frac{1}{32}\int\frac{dx}{(x+3)^2+4^2}\right]=-\frac{2}{x^2+6x+25}-$$

$$-\frac{7(x+3)}{32(x^2+6x+25)}-\frac{7}{128}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{4}+C.$$

Бунда иккинчи интегралга (4.6) формулани қўлладик.

Машқлар

Қуйидаги интегралларни топинг.

157. $\int\frac{dx}{x^2+x+\frac{101}{4}}$. 158. $\int\frac{dx}{x^2+2x+17}$.

159. $\int\frac{3x-7}{x^2+x+1}\,dx$. 160. $\int\frac{x-2}{x^2-8x+7}\,dx$.

161. $\int\frac{7x+3}{2x^2+4x+9}\,dx$. 162. $\int\frac{x+1}{5x^2+2x+1}\,dx$.

163. $\int\frac{3x-1}{\sqrt{x^2-6x+13}}\,dx$. 164. $\int\frac{x-3}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$.

165. $\int\frac{7x-2}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx$. 166. $\int\frac{dx}{\sqrt{4x-3x^2-1}}$.

167. $\int\frac{3x-1}{(x^2+2x+10)^2}\,dx$. 168. $\int\frac{x-7}{(x^2+10x+9)^2}\,dx$.

4-§. Ўзгарувчини алмаштириш усули билан интеграллаш

Агар $x=\varphi(t)$ функция узлуксиз ва ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $\int f(x)\,dx$ интегрални янги ўзгарувчи (t) киритиш орқали қуйидаги формула бўйича топиш мумкин:

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt\,. \qquad (4.7)$$

(4.7) формуланинг ўнг қисмидаги интегрални (агар уни топиш мумкин бўлса) топамиз ва уни яна x ўзгарувчи орқали ифодалаймиз. Бундай усулга аниқмас интегралда *ўзгарувчи алмаштириш* ёки *ўрнига қўйиш усули* билан интеграллаш дейилади. $x = \varphi(t)$ алмаштириш бажарилганда D_1ваD_2 аниқланиш сохалари ўзаро бир қийматли ($D_1 <=> D_2$) ҳамда $\varphi(t)$ ва $f(x)$ функциялари аниқланган ва $x \in D_1$нинг ҳамма қийматларини $\varphi(t)$ функция ҳам қабул қилиши керак.

Буларни қуйидаги мисолларни ечиш ёрдамида кўрсатамиз.

1-мисол. $\int x\sqrt{1-x}\,dx$ ни топинг.

Ечиш.

$t = \sqrt{1-x}$ формула ёрдамида янги ўзгарувчи t ни киритамиз.

У ҳолда

$$t^2 = 1 - x => x = 1 - t^2,\ dx = -2tdt\cdot$$

Бунда $D_1 : 0 \le t < \infty$, $D_2 : 1 \le x < \infty$ ва $D_1 <=> D_2$. (4.7) формулага асосан қуйидагига эга бўламиз:

$$\int x\sqrt{1-x}\quad dx = \int (1-t^2)\cdot t\cdot(-2t)dt = -2\int (1-t^2)t^2 dt =$$

$$= 2\int (t^4 - t^2)dt = 2\left(\int t^4 dt - \int t^2 dt\right) = 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right) + C =$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{(1-x)^5}}{5} - \frac{\sqrt{(1-x)^3}}{3}\right) + C = \frac{2(1-x)^2\sqrt{1-x}}{5} - \frac{2(1-x)\sqrt{1-x}}{3} + C.$$

2-мисол. $\int \frac{\sqrt{x^2+b^2}}{x^2}dx$ ни топинг.

Ечиш. $x = \varphi(t) = b\mathrm{tg}t$ ўрнига қўйишдан фойдаланамиз. $x = b\mathrm{tg}t$ нинг аниқланиш соҳаси $D_1 : -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ бўлиб, у қуйидаги шартни қаноатлантиради: $D_1 \leftrightarrow D_2$ $(-\infty; +\infty)$ ва D_1 да $\varphi'(t)$ ҳосила узлуксиз. У ҳолда $dx = \frac{bdt}{\cos^2 t}$ ва (4.7) формулага асосан берилган интеграл қуйидагича топилади:

$$\int \frac{\sqrt{x^2+b^2}}{x^2}dx = \int \frac{\sqrt{b^2\mathrm{tg}^2 t + b^2}\cdot b\cdot dt}{b^2\mathrm{tg}^2 t\cos^2 t} = \int \frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}}{\sin^2 t}dt = \int \frac{1}{\cos t\sin^2 t}dt =$$

$$= \int \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos t\cdot\sin^2 t}dt = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t}dt + \int \frac{dt}{\cos t} = -\frac{1}{\sin t} + \ln\left|\mathrm{tg}t + \frac{1}{\cos t}\right| +$$

$$C = -\frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}}{\mathrm{tg}t} + \ln\left|\mathrm{tg}t + \sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}\right| + C = -\frac{\sqrt{b^2+x^2}}{x} +$$

$$+ \ln\left|\frac{x+\sqrt{b^2+x^2}}{b}\right| + C.$$

3-мисол. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ ни топинг.

Ечиш. $x = a\sin t$ тригонометрик ўрнига қўйишни татбиқ этамиз. У ҳолда $dx = a\cos tdt$. $D_1 : -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, $D_2 : -a \le x \le a$. $D_1 <=> D_2$ бажарилади. Берилган интегрални янги ўзгарувчи t орқали ифодалаб топамиз:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\cdot a\cos tdt = a^2\int |\cos t|\cos tdt =$$

$$= a^2\int \cos^2 tdt = a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{2}\int \cos 2tdt =$$

$$= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}\sin t\cdot\cos t + C.$$

Энди $t = \arcsin\frac{x}{a}$ ва $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ тенгликлардан фойдаланиб, охирги ифодани x ўзгарувчи орқали ифодалаймиз. Натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\cdot\frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Айрим функцияларнинг интегралини топишда $x = \varphi(t)$ алмаштириш эмас, балки $t = \psi(x)$ алмаштириш мақсадга мувофиқдир. Буни қуйидаги мисолда кўрсатамиз.

4-мисол. $\int \sqrt[3]{1+\cos x}\cdot \sin x\, dx$ ни топинг.

Ечиш. $1+\cos x = t$ ўрнига қўйишни бажарамиз. У ҳолда $-\sin x dx = dt$ бўлиб, берилган интегрални топиш қуйидаги кўринишни олади:

$$\int \sqrt[3]{1+\cos x}\cdot \sin x\ dx = -\int \sqrt[3]{t}\cdot dx = -\int t^{\frac{1}{3}}dt = -\frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C =$$

$$= -\frac{3\sqrt[3]{t^4}}{4} + C = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\cos x)^4} + C.$$

5-мисол. $\int e^{-x^4}x^3\ dx$ ни топинг.

Ечиш. $-x^4 = t$ ўрнига қўйишни бажарамиз. У ҳолда $-4x^3dx = dt$, $x^3dx = -\frac{1}{4}dt$ ва берилган интеграл қуйидагича топилади:

$$\int e^{-x^4}x^3\ dx = \int e^t\left(-\frac{1}{4}\right)dt = -\frac{1}{4}\int e^t dt = -\frac{1}{4}e^t + C =$$

$$= -\frac{1}{4}e^{-x^4} + C.$$

6-мисол. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+2x+2}}$ ни топинг.

Ечиш. Бу ҳолда $t = \frac{1}{x-1}$ ўрнига қўйишдан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Бундан $x = \frac{1}{t}+1$, $dx = -\frac{1}{t^2}dt$ бўлиб, берилган интеграл қуйидагича топилади:

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{-\frac{1dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2-2\left(\frac{1}{t}-1\right)+10}} = -\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1}{t^2}+9}} =$$

$$= -\int \frac{dx}{\sqrt{9t^2+1}} = -\int \frac{dx}{\sqrt{(3t)^2+1}} = -\frac{1}{3}\ln\left|3t+\sqrt{9t^2+1}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3}{x+1}+\sqrt{\frac{9}{(x+1)^2}+1}\right| + C.$$

Эслатма. Аниқмас интегрални ўрнига қўйиш ёки бўлаклаб интеграллаш усулларидан фойдаланиб топишда ёзувни соддалаштириш ва қисқартириш мақсадида киритилаётган белгилашларни иккита вертикал чизиқ ичига ёзишни тавсия этамиз. Буни юқорида ечилган 3-мисолда кўрсатамиз.

Ечиш.

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \left|\begin{matrix} x = a\sin t \\ dx = a\cos tdx \end{matrix}\right| = \int \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cdot \cos tdt =$$

$$= a^2\int |\cos t|\cos tdt = a^2\int \cos^2 tdt = a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{2}\int \cos 2tdt = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}\sin 2t + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}\sin t - \cos t + C = \left|\begin{matrix} t = \arcsin\frac{x}{a},\ \sin t = \frac{x}{a} \\ \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\cdot x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Машқлар

Қуйидаги интегралларни ўзгарувчини алмаштириш усули билан топинг:

169. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+3}}$.
170. $\int x\sqrt[3]{(5x^2-3)^7}dx$.
171. $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.
172. $\int x^2\sqrt{x^3+5}dx$.
173. $\int \frac{(2\ln x+3)^3}{x}dx$.
174. $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}}dx$.
175. $\int x^3(1-2x^4)^3dx$.
176. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x}}$.
177. $\int \frac{\sin 4xdx}{\cos^4 2x+4}dx$.
178. $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}}dx$.
179. $\int \frac{\text{arctg}x}{1+x^2}dx$.
180. $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$.

5-§.Бўлаклаб интеграллаш

Бўлаклаб интеграллаш усули қуйидаги формулага асосланади:

$$\int u dv = uv - \int v du , \tag{4.8}$$

бунда $u(x)$, $v(x)$лар узлуксиз дифференциалланувчи функциялар деб қаралади. (4.8)формула *бўлаклаб интеграллаш формуласи* дейилади.

(4.8) формулани ҳамма интегралларга ҳам қўллай бериш мумкин эмас. Агар интеграл остидаги функциялар $P_n(x)\sin nx$, $P_n(x)\cos nx$, $P_n(x)e^{nx}$, $P_n(x)\ln^k x$, $P_n(x)\mathrm{ch} nx$, $a^{kx}\sin nx$, $a^{kx}\cos nx$, $\arcsin x$, $\mathrm{arctg} x$ (бунда k, n — мусбат бутун сонлар), $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ кўпҳад кўринишда бўлса, у ҳолда (4.8) формулани қўллаш натижасида берилган интеграл жадвал интегралига келади.

Айрим мисолларда бўлаклаб интеграллаш формуласи бир неча маротаба қўлланилади. Бўлаклаб интеграллашда қуйидаги уч ҳолга эътибор бериш керак:

а) агар интеграллар $\int P_n(x)\cdot \sin nxdx$, $\int P_n(x)\cdot e^{ax}dx, \ldots$ кўринишларда бўлса, у ҳолда $u = P_n(x)$, $dv = \sin nxdx$ деб белгилаш керак.

Буни қуйидаги мисолда кўрамиз.

1-мисол. $\int (x^2 + 2x)\cos 2xdx$ ни топинг.

Ечиш.

$$\int (x^2 + 2x)\cos 2xdx \left| \begin{array}{l} u = x^2 + 2x, \;\; du = (2x+2)dx \\ dv = \cos 2xdx, \;\; v = \int \cos 2xdx = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| =$$

$$= (x^2 + 2x)\cdot\frac{1}{2}\sin 2x - \int \frac{1}{2}\sin 2x\cdot(2x+2)dx =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + 2x)\cdot \sin 2x - \int (x+1)\sin 2x\, dx \cdot$$

$$\left| \begin{array}{l} u = x+1, \;\; du = dx \\ dv = \sin 2xdx, \;\; v = \int \sin 2xdx = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + 2x)\sin 2x - \left[(x+1)\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) - \int -\frac{1}{2}\cos 2xdx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + 2x)\sin 2x + \frac{1}{2}(x+1)\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + C\cdot$$

б) агар интеграллар $\int P_n(x)\ln^n xdx$, $\int P_n(x)\arcsin xdx, \ldots$ кўринишларда бўлса, у ҳолда $u = \ln^n x$ ёки $u = \arcsin x$ $dv = P_n(x)dx$ деб белгилаш керак.

2-мисол. $\int x\,\mathrm{arctg} xdx$ ни топинг.

Ечиш.

$$\int x\,\mathrm{arctg}\, xdx \left| \begin{array}{l} u = \mathrm{arctg} x, \;\; du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx, \;\; v = \int xdx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right|$$

$$= \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\, x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\, x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\, x - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\, x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\, x + C.$$

3-мисол. $\int x^2\ln^2 xdx$ ни топинг.

Ечиш.

$$\int x^2\ln^2 xdx \left| \begin{array}{l} u = \ln^2 x, \;\; du = 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx \\ dv = x^2dx, \;\; v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln^2 x - \int\frac{x^3}{3}2\ln x\frac{1}{x}dx = \frac{x^3}{3}\ln^2 x - \frac{2}{3}\int x^2\ln xdx\cdot$$

$$\left| \begin{array}{l} u = \ln x, \;\; du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^2dx, \;\; v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| = \frac{x^3}{3}\ln^2 x - \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\cdot\ln x - \int\frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{3}dx\right] =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln^2 x - \frac{2}{9}x^3\ln x + \frac{2}{27}x^3 + C.$$

в) агар интеграллар $\int a^{nx}\sin mxdx$, $\int e^{nx}\cos kxdx,\ldots$ кўринишларда бўлса, у ҳолда (4.8) формулани икки марта татбиқ этиш натижасида берилган интеграл ҳосил бўлади. Бунда биринчи марта *u* деб кўрсаткичли функцияни белгилаган бўлсак, иккинчи марта (4.8) формулани татбиқ этилганда яна кўрсаткичли функцияни *u* деб белгилаш керак.

4-мисол. $\int e^{3x}\sin xdx$ ни топинг.

Ечиш.

$$\int e^{3x}\sin xdx\left|\begin{matrix} u=\sin x, & du=\cos xdx \\ dv=e^{3x}dx, & v=\frac{1}{3}e^{3x}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}\sin x-\frac{1}{3}\int e^{3x}\cos xdx\left|\begin{matrix} u=\cos x, & du=-\sin xdx \\ dv=e^{3x}dx, & v=\frac{1}{3}e^{3x}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}\sin x-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}e^{3x}\cos x-\int\frac{1}{3}e^{3x}\cdot(-\sin x)dx\right]=$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}\sin x-\frac{1}{9}e^{3x}\cos x-\frac{1}{9}\int e^{3x}\sin xdx.$$

Ўнг томондаги охирги интегрални чап қисмига ўтказиб соддалаштирсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{10}{9}\int e^{3x}\sin xdx=\frac{1}{3}e^{3x}\sin x-\frac{1}{9}e^{3x}\cos x+\frac{10}{9}C.$$

Демак,

$$\int e^{3x}\sin xdx=\frac{3}{10}e^{3x}\sin x-\frac{1}{10}e^{3x}\cos x+C.$$

Машқлар

Қуйидаги интегралларни бўлаклаб интеграллаш усули билан топинг:

181. $\int x\sin xdx$.
182. $\int x\ln xdx$.
183. $\int \arcsin xdx$.
184. $\int \ln^2 xdx$.

185. $\int\sqrt{x}\ln xdx$.
186. $\int x\arccos 2xdx$.
187. $\int x^2e^{3x}dx$.
188. $\int\arccos xdx$.
189. $\int(x^2-2x+5)e^{-x}dx$.
190. $\int\frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx$.
191. $\int x^3e^{-x^2}dx$.
192. $\int x^2\cdot 2^{-3x}dx$.
193. $\int e^{\sqrt{x}}dx$.
194. $\int\sin(\ln x)\,dx$.
195. $\int xe^{\frac{1}{x}+1}dx$.
196. $\int\ln(1+x^2)\,dx$.
197. $\int x\cos\left(\frac{x}{2}+1\right)dx$.
198. $\int\ln(x-3)\,dx$.
199. $\int e^{3x}\cos xdx$.
200. $\int 2^{2x}\sin 3xdx$.

6-§.Рационал функцияларни интеграллаш

Қуйидаги икки кўпҳаднинг нисбати *каср-рационал функция ёки рационал каср* дейилади:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}, \qquad (4.9)$$

бунда m, n — мусбат бутун сонлар, $a_i, b_j\in R$ ($i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,m}$).

Агар $m<n$ бўлса, у ҳолда (4.9) функция тўғри рационал каср, $m>n$ бўлса, нотўғри рационал каср дейилади.

Ҳар қандай нотўғри касрнинг суратини махражига бўлиш натижасида уни бирор кўпҳад ва тўғри каср йиғиндиси шаклида ёзиш мумкин:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=M_{m-n}(x)+\frac{Q_1(x)}{P_n(x)}.$$

Масалан, $\frac{x^4+4}{x^2+3x-1}$ нотўғри касрнинг суратини махражига бўлсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{x^4+4}{x^2+3x-1}=x^2-3x+10+\frac{-3x+14}{x^2+3x-1}.$$

Ҳар қандай кўпҳад осон интегралланади ва рационал функцияни интеграллаш тўғри касрни интеграллашга келтирилади. Шунинг учун рационал функцияларнинг $m < n$ шартда интегралини топишни кўрамиз.

Қуйидаги кўринишдаги касрларга *энг содда рационал касрлар* дейилади:

$$1)\ \frac{A}{x-a}; \qquad 2)\ \frac{A}{(x-a)^n}; \qquad 3)\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q}; \qquad 4)\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},$$

бунда A, M, N, p, q — ўзгармас сонлар; n — бутун сон, $p^2-4q<0$.

Биринчи ва иккинчи турдаги касрларнинг аниқмас интеграли осон топилади:

$$\int \frac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$$

$$\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C.$$

3) ва 4) кўринишдаги касрларни интеграллаш 4-§ да кўрилган.

Шундай қилиб, ҳар қандай энг содда рационал касрни уни ташкил этувчи элементар функцияларнинг интеграллари каби интеграллаш мумкин экан.

Ҳар қандай ҳақиқий коэффициентли $P_n(x)$ кўпҳадни ҳақиқий сонлар тўпламида қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$P_n(x) = a_0(x-\alpha_1)^{k_1}\ldots(x-\alpha_\beta)^{k_\beta}\cdot(x+p_1x+q_1)^{t_1}\ldots$$
$$\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{t_s}, \qquad (4.10)$$

бунда $\alpha_1\ldots, \alpha_\beta$ лар $P_n(x)$ кўпҳаднинг $k_1,\ldots,k_\beta$ каррали ҳақиқий илдизлари, $P_\gamma^2-4q_\gamma<0$ $(\gamma=1,s)$; $k_1+k_2+\ldots$ $\ldots+k_\beta+2t_1+\ldots+2t_s=n$; $k_1,\ldots,k_\beta$, $t_1,\ldots t_S$ мусбат бутун сонлар. Агар кўпҳадни (4.10) кўринишда ёзиш мумкин бўлса, (4.9) рационал касрни қуйидаги рационал касрлар йиғиндиси кўринишида ёзиш мумкин:

$$\frac{A_1}{x-\alpha_r} + \frac{A_2}{(x-\alpha_r)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-\alpha_r)^{k_1}}. \qquad (4.11)$$

(4.10) кўпҳад t_s каррали жуфт қўшма комплекс сондан иборат илдизларга эга бўлса, у ҳолда (4.9) рационал каср қуйидаги элементар касрлар йиғиндиси кўринишида ёзилади:

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_\gamma x+q_\gamma} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_\gamma x+q_\gamma)^2} + \ldots + \frac{M_sx+N_s}{(x^2+p_\gamma x+q_\gamma)^{t_s}}. \qquad (4.12)$$

Энди (4.11) ва (4.12) даги номаълум A_1, A_2, A_k ва $M_1, M_2 \ldots M_s$, $N_1, N_2, \ldots, N_s$ коэффициентларни топиш учун (4.11) ва (4.12) ни қўшиб умумий махражга келтирамиз, натижада ўзаро тенг бўлган

$$Q_m(x) = Q^{*}_{m-n}(x) \qquad (4.13)$$

$(n-1)$-даражали кўпҳадларга эга бўламиз.

(4.13) дан осонгина номаълум коэффициентлар топилади. Уларни икки усул билан топишни қуйидаги мисолларда кўрсатамиз:

1-мисол. $\int \frac{2x-3}{x(x+1)(x+2)}dx$ ни топинг.

Ечиш. (4.11) формулага асосан элементар касрларнинг йиғиндиси қуйидагича бўлади:

$$\frac{2x-3}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}. \qquad (A)$$

(A) нинг ўнг томонини умумий махражга келтирсак, у ҳолда иккита касрнинг тенглик аломатига кўра

$$2x-3 = A(x+1)(x+2) + B(x+2)x + C(x+1)x \qquad (B)$$

ни ҳосил қиламиз.

(B) нинг иккала қисмидаги x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаб, қуйидаги системага эга бўламиз:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 0 = A+B+C, \\ x^1 & 2 = 3A+2B+C, \\ x^0 & -3 = 2A. \end{array}$$

Бундан $A = -\frac{3}{2}$, $B = 5$, $C = -\frac{7}{2}$ келиб чиқади.

Бу усул *номаълум коэффициентларни топиш усули* дейилади.

Энди A, B, C номаълум коэффицентларни x нинг махражни нолга айлантирадиган сон қийматларини қўйиш усули билан топишни кўрамиз. Агар (B) тенгликдаги x ўрнига кетма-кет 0, −1, −2 қийматларни қўйсак, натижада A, B, C номаълум коэффициентлар топилади:

$x = 0$: да $2 \cdot 0 - 3 = 2A \Rightarrow A = -\frac{3}{2}$;

$x = -1$: да $2 \cdot (-1) - 3 = B(-1 + 2)(-1) => B = 5$;

$x = -2$: да $2 \cdot (-2) - 3 = C(-2 + 1) \cdot (-2) => C = -\frac{7}{2}$;
натижа бир хил чиқади.

Энди бу топилган қийматларни ўрнига қўямиз:

$$\frac{2x-3}{x(x+1)(x+2)} = \frac{3}{2x} + \frac{5}{x+1} - \frac{7}{2(x+2)}.$$

Натижада берилган интеграл қуйидагича топилади:

$$\int \frac{2x-3}{x(x+1)(x+2)}\,dx = \int \left(\frac{3}{2x} + \frac{5}{x+1} - \frac{7}{2(x+2)} \right) dx =$$

$$= -\frac{3}{2}\ln|x| + 5\ln|x+1| - \frac{7}{2}\ln|x+2| + C.$$

2-мисол. $\int \frac{xdx}{(x-2)(x+2)^2}$ ни топинг.

Ечиш. Тўғри касрни энг содда касрлар йиғиндиси кўринишида ёзиш қоидасига кўра:

$$\int \frac{xdx}{(x-2)(x+2)^2} = \int \left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+2} \right) dx.$$

Қавс ичидаги касрларни умумий махражга келтирамиз ва унинг суратини x га тенглаймиз:

$$x = A(x+2)^2 + B(x-2) + C(x-2)(x+2).$$

$$x = 2 \text{ да: } 2 = 16A => A = \frac{1}{8};$$

$$x = -2 \text{ да: } -2 = 4B => B = \frac{1}{2}.$$

C номаълумни топиш учун тенгликнинг ўнг томонидаги қавсларни очиб x^2 олдидаги коэффициентлар йиғиндисини нолга тенглаймиз, натижада

$0 = A + C,$ бундан $C = -\frac{1}{8}$

келиб чиқади. Бу қийматларни ўрнига қўйиб берилган интегрални топамиз:

$$\int \frac{xdx}{(x-2)(x+2)^2} = \int \left(\frac{1}{8(x-2)} + \frac{1}{2(x+2)^2} - \frac{1}{8(x+2)} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-2| - \frac{1}{2(x+2)} - \frac{1}{8}\ln|x+2| + C.$$

3-мисол. $\int \frac{x^4+3x^2-5}{x^3+2x^2+5x}\,dx$ ни топинг.

Ечиш. Интеграл остидаги функция нотўғри каср бўлгани учун унинг суратини махражига бўлиб, касрни бутун қисм ва тўғри рационал каср йиғиндиси кўринишида ёзиб оламиз:

$$\frac{x^4+3x^2-5}{x^3+2x^2+5x} = x - 2 + \frac{2x^2+10x-5}{x^3+2x^2+5x}.$$

Энди охирги тўғри касрни энг содда касрлар йиғиндиси кўринишида ёзиб оламиз:

$$\frac{2x^2+10x-5}{x(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+2x+5}.$$

Бу тенгликнинг ўнг қисмини умумий махражга келтириб, касрларнинг суратларини тенглаймиз:

$$2x^2 + 10x - 5 = A(x^2 + 2x + 5) + Mx^2 + Nx.$$

x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаймиз:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 2 = A + M, \\ x^1 & 10 = 2A + N, \\ x^0 & -5 = 5A, \end{array}$$

бундан $A = -1$, $M = 3$, $N = 12$.

Натижада берилган интеграл қуйидагича ҳисобланади:

$$\int \frac{x^4+3x^2-5}{x^3+2x^2+5x}\,dx = \int\left(x-2-\frac{1}{x}+\frac{3x+12}{x^2+2x+5}\right)dx =$$

$$= \int (x-2)d(x-2) - \int \frac{dx}{x} + \frac{3}{2}\int \frac{2x+2+6}{x^2+2x+5}\,dx =$$

$$= \frac{(x-2)^2}{2} - \ln|x| + \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5} + \frac{3}{2}\cdot 6\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} =$$

$$= \frac{(x-2)^2}{2} - \ln|x| + \frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right| + \frac{9}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C \cdot$$

Машқлар

Қуйидаги интегралларни топинг:

201. $\int \frac{dx}{x^3-x}$.
202. $\int \frac{x-4}{x^2-5x+6}\,dx$.
203. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$.
204. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx$.
205. $\int \frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}\,dx$.
206. $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}\,dx$.
207. $\int \frac{x^2dx}{x^4-1}$.
208. $\int \frac{2xdx}{(x+1)(x^2+1)^2}$.
209. $\int \frac{4}{x(x^2+4)}\,dx$.
210. $\int \frac{1}{x(x+1)^2}\,dx$.
211. $\int \frac{dx}{x(x^2-1)}$.
212. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)^2}$.
213. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx$.
214. $\int \frac{13dx}{x(x^2+6x+13)}\,dx$.

7-§. Баъзи иррационал функцияларни интеграллаш

Қуйидаги кўринишдаги интеграллар берилган бўлсин:

$$\int R(x, x^{\alpha}, x^{\beta}, x^{r}, \ldots)\,dx\,, \tag{4.14}$$

$$\int R(x, (ax+b)^{\alpha}, (ax+b)^{\beta} + (ax+b)^{r}, \ldots)\,dx\,, \tag{4.15}$$

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta} + \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r}, \ldots\right)dx\,. \tag{4.16}$$

Бу ерда $\alpha = \frac{m_1}{n_1}$, $\beta = \frac{m_2}{n_2}$, $t = \frac{m_3}{n_3}$ рационал сонлар бўлиб, k уларнинг умумий махражи бўлса, у ҳолда (4.14) учун $x = t^k$, (4.15) учун эса $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$ алмаштиришлар ёрдамида бу интегралларни топиш рационал функцияни интеграллашга келади. Бундай интегралларни топишни мисолларда кўрамиз.

1-мисол. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+4}$ ни топинг.

Ечиш. Бу мисолда $k = 4$ бўлгани учун юқоридагига кўра берилган интеграл қуйидагича топилади:

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+4}\left|\begin{array}{l}\sqrt[4]{x} = t,\ x = t^4\\ dx = 4t^3dt\end{array}\right| = 4\int \frac{t^2}{t^3+4}t^3dt = 4\int \frac{t^5dt}{t^3+4} =$$

$$= 4\int\left(t^2 - \frac{4t^2}{t^3+4}\right)dt = 4\left(\int t^2dt - \frac{4}{3}\int \frac{3t^2}{t^3+4}dt\right) = 4\frac{t^3}{3} - \frac{16}{3}\cdot\int \frac{d(t^3+4)}{t^3+4} =$$

$$= \frac{4}{3}t^3 - \frac{16}{3}\ln\left|t^3+4\right| + C = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - \frac{16}{3}\ln\left|\sqrt[4]{x^3}+4\right| + C \cdot$$

2-мисол. $\int \frac{\sqrt[6]{x+2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x+2}}\,dx$ интегрални топинг.

Ечиш. Бу мисолда $k = 6$ бўлгани учун интеграл қуйидагича топилади:

$$\int \frac{\sqrt[6]{x+2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x+2}}\,dx\left|\begin{array}{l}\sqrt[6]{x+2} = t,\ x+2 = t^6\\ dx = 6t^5dt\end{array}\right| = \int \frac{t}{t^3+t^2}6t^5dt =$$

$$= 6\int \frac{t^6}{t^2(t+1)}\,dt = 6\int \frac{t^4}{t+1}dt = 6\int\left(t^3 - t^2 + t - 1 + \frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= \frac{3}{2}t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 6t + 6\ln|t+1| + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^2} -$$

$$-2\sqrt{x+2} + 3\sqrt[3]{x+2} - 6\sqrt[6]{x+2} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x+2}+1\right| + C .$$

3-мисол. $\int \frac{2}{(2-x)^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx$ ни топинг.

Ечиш. $\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} = t$ алмаштиришни бажарамиз, бундан $\frac{2-x}{2+x} = t^3 \Rightarrow x = \frac{2-2t^3}{1+t^3}$, $2 - x = \frac{4t^3}{1+t^3}$ ва $dx = \frac{-12t^2}{(1+t^3)^2}dt$ бўлади.

Демак, $\int \frac{2}{(2-x)^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx = -\int \frac{2(1+t^3)t\cdot 12t^2}{16t^3(1+t^3)^2}dt = -\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^3} =$

$$= \frac{3}{4t^2} + C = \frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + C .$$

Қуйидаги кўринишдаги интегрални қараймиз:

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (4.17)$$

бунда $P_n(x)$ n-даражали кўпҳад. (4.17) кўринишдаги интегрални ҳар доим қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (4.18)$$

бунда $\lambda \in R$; $Q_{(n-1)}(x)$ эса $(n-1)$ - даражали коэффициентлари номаълум бўлган кўпҳад бўлиб, улар қуйидагича аниқланади. (4.18) тенгликнинг ҳар иккала қисмини дифференциаллаш ёрдамида $Q_{(n-1)}(x)$ кўпҳаднинг номаълум коэффициентлари ва λ сон топилади.

Буни қуйидаги мисолда кўрсатамиз.

4-мисол. $\int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx$ ни топинг.

Ечиш. (4.18) формулага асосан:

$$\int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sqrt{x^2+4} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} .$$

Охирги тенгликни дифференциаллаймиз:

$$\frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}} = (3Ax^2 + 2Bx + C)\sqrt{x^2+4} +$$

$$+(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + \lambda\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} .$$

Бу тенгликнинг иккала томонини $\sqrt{x^2+4}$ га кўпайтирамиз. У ҳолда $x^4 + 4x^2 = (3Ax^2 + 2Bx + C)\ (x^2+4) + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\ \ x + \lambda$.

Бундан қуйидаги системага эга бўламиз:

$$\begin{array}{l|l} x^4 & 1 = 3A + A, \\ x^3 & 0 = 2B + B, \\ x^2 & 4 = 12A + C + B, \\ x^1 & 0 = 4B + D, \\ x^0 & 0 = 4C + \lambda. \end{array}$$

Бу системанинг ечимини топамиз: $A = \frac{1}{4}$, $B = 0$, $C = \frac{1}{2}$, $D = 0$, $\lambda = -2$. Демак,

$$\int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx = \frac{x^3+2x}{4}\sqrt{x^2+4} - 2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} =$$

$$= \frac{x^3+2x}{4}\sqrt{x^2+4} - 2\ln\left|x + \sqrt{x^2+4}\right| + C.$$

Биномиал дифференциалларни интеграллаш

Ушбу

$$x^m(a + bx^n)^p dx$$

дифференциал ифода биномиал дифференциал деб аталади. Унинг интеграли

$$\int x^m(a + bx^n)^p dx \qquad (4.19)$$

берилган бўлсин. Бунда a, b ўзгармас сонлар, m, n, p – рационал сонлар. (4.19) интегрални ҳисоблаш m, n, p рационал сонларга боғлиқлигини рус математиги П.Л.Чебишев кўрсатган. (4.19) интеграл қуйидаги учта

Агар қуйидаги $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ тенглик ўринли бўлса, $t = \mathrm{tg}x$ алмаштириш қулай. Бу алмаштиришда тригонометриядан маълум бўлган

$$\sin x = \frac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$x = \mathrm{arctg}t, \ dx = \frac{dt}{1+t^2} \tag{4.22}$$

формулалардан фойдаланилади.

2-мисол. $\int \frac{dx}{3+\sin^2 x}$ ни топинг.

Ечиш: $t = \mathrm{tg}x$ алмаштиришни бажарамиз ва (4.22) тенгликларга кўра топамиз:

$$\int \frac{dx}{3+\sin^2 x} = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}dt}{3+\frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{3+4t^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\frac{2\mathrm{tg}x}{\sqrt{3}} + C.$$

3-мисол. $\int \mathrm{tg}^5 2x dx$ ни топинг.

Ечиш. $t = \mathrm{tg}2x$ алмаштиришни бажарамиз. Бунда

$$x = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,t, \quad dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt,$$

$$\int \mathrm{tg}^5 2x dx = \int t^5 \cdot \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{t^5}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(t^3 - t + \frac{t}{1+t^2}\right)dt = \frac{1}{8}t^4 - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}\ln\left|1+t^2\right| + C =$$

$$= \frac{1}{8}\mathrm{tg}^4 x - \frac{1}{4}\mathrm{tg}^2 x + \frac{1}{4}\ln\left|1+\mathrm{tg}^2 x\right| + C.$$

Агар интеграллар $\int \sin x \cdot f(\cos x)\,dx$ ёки $\int \cos x \cdot f(\sin x)\,dx$ кўринишда бўлса, у ҳолда

$$\cos x = t \qquad \text{ёки} \qquad \sin x = t$$

алмаштириш натижасида улар t га боғлиқ рационал функцияга келади.

4-мисол. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx$ ни топинг.

Ечиш. $\cos x = t$ алмаштириш бажарамиз, у ҳолда $dt = -\sin x dx$ ва

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x}\sin x dx = \int \frac{1-t^2}{t^4}(-dt) =$$

$$= -\int \frac{1}{t^4}\,dt + \int \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{3}t^{-3} - \frac{1}{t} + C =$$

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$$

5-мисол. $\int \frac{\cos 2x dx}{\sqrt[3]{(2+3\sin 2x)^2}}$ ни топинг.

Ечиш. $2+3\sin 2x = t^3$ деб оламиз. У ҳолда $\cos 2x dx = \frac{1}{2}t^2 dt$ ва берилган интеграл қуйидагича топилади:

$$\int \frac{\cos 2x dx}{\sqrt[3]{(2+3\sin 2x)^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{t^2 dt}{\sqrt[3]{t^6}} = \frac{1}{2}\int dt = \frac{1}{2}t + C =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt[3]{(2+3\sin 2x)} + C.$$

Эслатма. $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$ алмаштиришни юқоридаги ҳамма мисоллар учун қўллаш мумкин.

Машқлар

Қуйидаги интегралларни топинг:

225. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$.
226. $\int \frac{dx}{4-5\sin x}$.
227. $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{3+4\sin 2x}}\,dx$.
228. $\int \frac{\sin 3x}{\sqrt[3]{(3+2\cos 3x)^2}}\,dx$.
229. $\int \frac{\sin^2 x dx}{1+\cos^2 x}$.
230. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}$.

231. $\int \cos^3 x \sin^{10} x dx$. 232. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x \cos x + \cos^2 x}$.

233. $\int \sin^4 8x dx$. 234. $\int \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx$.

235. $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$. 236. $\int \frac{\sin x dx}{\sin x + 1}$.

9-§. Биринчи мустақил уй иши

Бу мустақил уй ишининг ҳар бир вариантида 14 та мисол бўлиб, уларнинг интегралларини топиш керак, шунингдек, 1—5-мисолларда натижани дифференциаллаш орқали текшириш керак.

Қуйида вариант мисолларини ечиш намунасини келтирамиз.

Аниқмас интегралларни топинг ва 1—5-мисолларнинг натижасини дифференциаллаш орқали текширинг.

1. $\int \frac{3 - 2x^4 + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}} dx$.

Ечиш. Интеграл остидаги ифоданинг суратини махражига бўламиз ва интеграллар жадвалига кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \frac{3 - 2x^4 + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}} dx = 3\int x^{-\frac{1}{4}} dx - 2\int x^{\frac{15}{4}} dx + \int x^{\frac{5}{12}} dx =$$

$$= 4x^{\frac{3}{4}} - \frac{8}{19} x^{\frac{19}{4}} + \frac{12}{17} x^{\frac{17}{12}} + C = 4\sqrt[4]{x^3} - \frac{8}{19}\sqrt[4]{x^{19}} + \frac{12}{17}\sqrt[12]{x^{17}} + C.$$

Натижани текширамиз:

$$\left(4\sqrt[4]{x^3} - \frac{8}{19}\sqrt[4]{x^{19}} + \frac{12}{17}\sqrt[12]{x^{17}} + C\right)' =$$

$$= 4 \cdot \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} - \frac{8}{19} \cdot \frac{19}{4} x^{\frac{15}{4}} + \frac{12}{17} \cdot \frac{17}{12} x^{\frac{5}{12}} = 3x^{-\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{15}{4}} + x^{\frac{5}{12}}.$$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-8x)^2}}$.

Ечиш.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-8x)^2}} = \int (4-8x)^{-\frac{2}{3}} dx \left| \begin{aligned} d(4-8x) &= -8dx \\ dx &= -\tfrac{1}{8} d(4-8x) \end{aligned} \right| =$$

$$= -\frac{1}{8} \int (4-8x)^{-\frac{2}{3}} d(4-8x) = -\frac{1}{8} \cdot \frac{(4-8x)^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C =$$

$$= -\frac{3}{8}(4-8x)^{-\frac{1}{3}} + C.$$

Натижани текширамиз:

$$\left(-\frac{3}{8}(4-8x)^{\frac{1}{3}} + C\right)' = -\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3}(4-8x)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (-8) =$$

$$= (4-8x)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{(4-8x)^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(4-8x)^2}}.$$

3. $\int \frac{dx}{5-6x}$.

Ечиш.

$$\int \frac{dx}{5-6x} \left| \begin{aligned} d(5-6x) &= -6dx \\ dx &= -\tfrac{1}{6} d(5-6x) \end{aligned} \right| = -\frac{1}{6} \int \frac{d(5-6x)}{5-6x} = -\frac{1}{6} \cdot \ln|5-6x| + C.$$

Натижани текширамиз:

$$\left(-\frac{1}{6} \cdot \ln|5-6x| + C\right)' = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5-6x} \cdot (-6) = \frac{1}{5-6x}.$$

4. $\int \cos(2-5x)\, dx$.

Ечиш.

$$\int \cos(2-5x)\, dx \left| \begin{aligned} d(2-5x) &= -5dx \\ dx &= -\tfrac{1}{5} d(2-5x) \end{aligned} \right| =$$

$$= -\frac{1}{5} \int \cos(2-5x) \cdot d(2-5x) = -\frac{1}{5}\sin(2-5x) + C.$$

Натижани текширамиз:

$$\left(-\frac{1}{5}\sin(2-5x)+C\right)' = -\frac{1}{5}\cos(2-5x)\cdot(-5) = \cos(2-5x)\cdot$$

5. $\int \frac{3dx}{\sqrt{4x^2-3}}$.

Ечиш.

$$\int \frac{3dx}{\sqrt{4x^2-3}} = \frac{3}{2}\int \frac{2dx}{\sqrt{(2x)^2-\left(\sqrt{3^2}\right)}} = \frac{3}{2}\int \frac{d(2x)}{\sqrt{(2x)^2-\left(\sqrt{3^2}\right)}} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2-3}\right| + C.$$

Натижани текширамиз:

$$\left(\frac{3}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2-3}\right|+C\right)' = \frac{3}{2}\cdot\frac{2+\frac{8x}{2\sqrt{4x^2-3}}}{2x+\sqrt{4x^2-3}} =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{2\left(\sqrt{4x^2-3}+2x\right)}{\left(2x+\sqrt{4x^2-3}\right)\cdot\sqrt{4x^2-3}} = \frac{3}{\sqrt{4x^2-3}}.$$

6. $\int \frac{7x}{3x^2+4}\,dx\cdot$

Ечиш. Интеграл остидаги функциянинг (касрнинг) шаклини шундай алмаштирамизки, натижада суратида махражининг ҳосиласи ҳосил бўлсин:

$$\int \frac{7x}{3x^2+4}\,dx = \frac{7}{6}\int \frac{6x}{3x^2+4}\,dx = \frac{7}{6}\int \frac{d(3x^2+4)}{3x^2+4} = \frac{7}{6}\ln\left|3x^2+4\right| + C\cdot$$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{6-5x^2}}$.

Ечиш.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{6-5x^2}} = \int \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{5}\cdot x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{d(\sqrt{5}x)}{\sqrt{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{5}x)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{6}} + C.$$

8. $\int e^{5-4x}dx\cdot$

Ечиш.

$$\int e^{5-4x}dx \left|\begin{array}{l} d(5-4x) = -4dx \\ dx = -\frac{1}{4}d(5-4x) \end{array}\right| = -\frac{1}{4}\int e^{5-4x}d(5-4x) =$$

$$= -\frac{1}{4}e^{5-4x} + C.$$

9. $\int \frac{\sqrt[7]{\ln^3(x+2)}}{x+2}\,dx$.

Ечиш.

$$\int \frac{\sqrt[7]{\ln^3(x+2)}}{x+2}\,dx = \int \ln^{\frac{3}{7}}(x+2)\ d(\ln(x+2)) =$$

$$= \frac{7}{10}\ln^{\frac{10}{7}}(x+2) + C = \frac{7}{10}\sqrt[7]{\ln^{10}(x+2)} + C.$$

10. $\int \frac{\cos 3xdx}{\sqrt[5]{\sin 3x-4}}$.

Ечиш.

$$\int \frac{\cos 3xdx}{\sqrt[5]{\sin 3x-4}} = \frac{1}{3}\int (\sin 3x-4)^{-\frac{1}{5}}\cos 3xdx =$$

$$= \frac{1}{3}\int (\sin 3x-4)^{-\frac{1}{5}}d(\sin 3x-4) = \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{4}(\sin 3x-4)^{\frac{4}{5}} + C =$$

$$= \frac{5}{12}\sqrt[5]{(\sin 3x-4)^4} + C.$$

11. $\int \frac{dx}{\sin^2 4x\cdot\sqrt[3]{\mathrm{ctg}^2 4x}}$.

Ечиш.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 4x\cdot\sqrt[3]{\mathrm{ctg}^2 4x}} = \int -\left(\frac{1}{4}\right)\mathrm{ctg}^{-\frac{2}{3}}4x\cdot\left(-\frac{4}{\sin^2 4x}dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \mathrm{ctg}^{-\frac{2}{3}}4xd(\mathrm{ctg}4x) = -\frac{3}{4}\mathrm{ctg}^{\frac{1}{3}}4x + C = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{\mathrm{ctg}4x} + C.$$

12. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^5 2x}}{1+4x^2}\,dx$.

Ечиш.

$$\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^5 2x}}{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{arctg}^{\frac{5}{3}} 2x\left(\frac{2}{1+4x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \operatorname{arctg}^{\frac{5}{3}} 2x\,d(\operatorname{arctg} 2x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}\operatorname{arctg}^{\frac{8}{3}} 2x + C =$$

$$= \frac{3}{16}\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^8 2x} + C.$$

13. $\int e^{3\cos x+2}\sin x\,dx$.

Ечиш.

$$\int e^{3\cos x+2}\sin x\,dx = -\frac{1}{3}\int e^{3\cos x+2}\,d(3\cos x+2) = -\frac{1}{3}e^{3\cos x+2} + C.$$

14. $\int \frac{3x+10}{6x^2-4}\,dx$.

Ечиш.

$$\int \frac{3x+10}{6x^2-4}\,dx = \int \frac{3x}{6x^2-4}\,dx + 10\int \frac{dx}{6x^2-4} = \frac{1}{4}\int \frac{12x}{6x^2-4}\,dx +$$

$$+ \frac{10}{\sqrt{6}}\int \frac{d(\sqrt{6}\cdot x)}{(\sqrt{6}x)^2-2^2} = \frac{1}{4}\ln\left|6x^2-4\right| + \frac{5}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}x-2}{\sqrt{6}x+2}\right| + C.$$

1-вариант

1. $\int \frac{\sqrt[6]{x^5}-5x^2+3}{x}\,dx$.
2. $\int \sqrt{5-4x}\,dx$.
3. $\int \frac{dx}{3x+4}$.
4. $\int \sin(3-4x)\,dx$.
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+3}}$.
6. $\int \frac{x}{2x^2-7}\,dx$.
7. $\int \frac{dx}{3x^2-7}$.
8. $\int e^{2x-10}\,dx$.
9. $\int \frac{\sqrt{\ln^5(x+1)}}{x+1}\,dx$.
10. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{(\sin x-4)^3}}$.
11. $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg} 3x}}{\sin^2 3x}\,dx$.
12. $\int \frac{\arccos^2 2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$.
13. $\int e^{5x^2-3}x\,dx$.
14. $\int \frac{x-1}{5-2x^2}\,dx$.

2-вариант

1. $\int \left(x\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x^3}} + 1\right)dx$.
2. $\int \sqrt[3]{(2-x)^2}\,dx$.
3. $\int \frac{dx}{6x+1}$:
4. $\int \sin(9x+7)\,dx$.
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-7x^2}}$.
6. $\int \frac{x}{3x^2+8}\,dx$.
7. $\int \frac{dx}{3x^2+7}$.
8. $\int e^{4-7x}\,dx$.
9. $\int \frac{\ln(3x+5)}{3x+5}\,dx$.
10. $\int \frac{\cos 6x}{\sin^4 6x}\,dx$.
11. $\int \frac{\operatorname{tg}^4 7x}{\cos^2 7x}\,dx$.
12. $\int \frac{\operatorname{arctg}^7 3x}{1+9x^2}\,dx$.
13. $\int e^{1-4x^2}x\,dx$.
14. $\int \frac{2x+3}{1-3x^2}\,dx$.

3-вариант

1. $\int \left(x^2 - \frac{\sqrt[3]{x}}{x} - 3\right)dx$.
2. $\int \sqrt[4]{(3+5x)^3}\,dx$.
3. $\int \frac{dx}{7x-3}$.
4. $\int \cos(10x-3)\,dx$.
5. $\int \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{3-4x^2}}$.
6. $\int \frac{2x}{3x^2-7}\,dx$.
7. $\int \frac{dx}{6x^2-7}$.
8. $\int e^{8x+1}\,dx$.
9. $\int \frac{\ln^5(x+9)}{x+9}\,dx$.
10. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{\cos x^4 2x}}\,dx$.
11. $\int \frac{\operatorname{ctg}^5 6x}{\sin^2 6x}\,dx$.
12. $\int \frac{\arccos 4x}{\sqrt{1-16x^2}}\,dx$.
13. $\int e^{3x^2+4}x\,dx$.
14. $\int \frac{2x+3}{5x^2+2}\,dx$.

4-вариант

1. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-2x^5+3}{x}\,dx$.
2. $\int \sqrt{3+2x}\,dx$.
3. $\int \frac{dx}{2x+9}$.
4. $\int \sin(9x-1)\,dx$.
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-9}}$.
6. $\int \frac{2x}{\sqrt{2x^2+5}}\,dx$.
7. $\int \frac{dx}{7x^2+6}$.
8. $\int e^{2x+3}\,dx$.
9. $\int \frac{dx}{(x+4)\ln^3(x+4)}$.

10. $\int \frac{\sin 4x}{\sqrt[3]{\cos 4x}}\,dx$. 11. $\int \frac{\sqrt[6]{\operatorname{tg}^5 4x}}{\cos^2 4x}\,dx$. 12. $\int \frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

13. $\int e^{\sin x+1}\cos x dx$. 14. $\int \frac{x-3}{4x^2+1}\,dx$.

5-вариант

1. $\int\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}+2x^3-4\right)dx$. 2. $\int \sqrt{3-4x}\,dx$. 3. $\int \frac{dx}{2x+7}$.

4. $\int \cos(8x-4)\,dx$. 5. $\int \frac{dx}{2x^2+7}$. 6. $\int \frac{x}{\sqrt{7-3x^2}}\,dx$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-3x^2}}$. 8. $\int e^{7+3x}dx$. 9. $\int \frac{\sqrt{\ln^5(x+6)}}{x+6}\,dx$.

10. $\int \sin^5 4x\cos 4x dx$. 11. $\int \frac{\operatorname{ctg}^4 3x}{\sin^2 3x}\,dx$. 12. $\int \frac{\arcsin^2 2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$.

13. $\int e^{4-x^2}x dx$. 14. $\int \frac{x-3}{1-4x^2}\,dx$

6-вариант

1. $\int \frac{\sqrt{x^3}-3x^2+2}{x}\,dx$. 2. $\int \sqrt[3]{4-2x}\,dx$. 3. $\int \frac{dx}{5-2x}$.

4. $\int \sin(8x-5)dx$. 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}$. 6. $\int \frac{x}{2x^2+9}\,dx$.

7. $\int \frac{dx}{6x^2+1}$. 8. $\int e^{5-x}dx$. 9. $\int \frac{\ln^3(x-8)}{x-8}\,dx$.

10. $\int \sin^4 8x\cos 8x dx$. 11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg}^2 x}}$. 12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}\arcsin 5x}$.

13. $\int e^{3x^3}x^2dx$. 14. $\int \frac{3x-2}{x^2-8}\,dx$.

7-вариант

1. $\int\left(2x^3-3\sqrt{x^3}+\frac{4}{x}\right)dx$. 2. $\int \sqrt[4]{2-5x}\,dx$. 3. $\int \frac{dx}{7-3x}$.

4. $\int \cos(3x-7)\,dx$. 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+2}}$. 6. $\int \frac{5x}{\sqrt{3-5x^2}}\,dx$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-1}}$. 8. $\int e^{4-5x}dx$. 9. $\int \frac{dx}{(x+3)\ln^4(x+3)}$.

10. $\int \sqrt{\cos^3 2x}\sin 2x dx$. 11. $\int \frac{\operatorname{tg}^6 2x}{\cos^2 2x}\,dx$. 12. $\int \frac{\operatorname{arctg}^8 3x}{1+9x^2}\,dx$.

13. $\int \frac{x^4dx}{e^{x^5}+1}$. 14. $\int \frac{x-5}{8-4x^2}\,dx$.

8-вариант

1. $\int \frac{2x^4-\sqrt{x^3}+5}{x^2}\,dx$. 2. $\int \sqrt[5]{(6-5x)^2}\,dx$. 3. $\int \frac{dx}{2+7x}$.

4. $\int \sin(7-4x)\,dx$. 5. $\int \frac{\sqrt{2}dx}{\sqrt{7-2x^2}}$. 6. $\int \frac{x}{\sqrt{3x^2+8}}\,dx$.

7. $\int \frac{dx}{3x^2-5}$. 8. $\int e^{3-8x}dx$. 9. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^4(x-5)}}{x-5}\,dx$.

10. $\int \frac{\cos 6x}{\sin^3 6x}\,dx$. 11. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^5 x}}{\sin^2 x}\,dx$. 12. $\int \frac{\arccos^2 7x}{\sqrt{1-49x^2}}\,dx$.

13. $\int \frac{x}{e^{x^2}-3}\,dx$. 14. $\int \frac{x+4}{7x^2+3}\,dx$.

9-вариант

1. $\int \frac{3x^2-\sqrt{x^5}+7}{x^3}\,dx$. 2. $\int \sqrt{5-4x}\,dx$. 3. $\int \frac{dx}{1+6x}$.

4. $\int \cos(7x+3)dx$. 5. $\int \frac{\sqrt{14}dx}{2x^2-7}$. 6. $\int \frac{5x}{\sqrt{5x^2+3}}\,dx$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$. 8. $\int e^{2-4x}dx$. 9. $\int \frac{\sqrt{\ln^2(x+3)}}{x+3}\,dx$.

10. $\int \sin^6 3x\cos 3x dx$. 11. $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg}^2 x}}{\sin^2 x}\,dx$. 12. $\int \frac{\sqrt[4]{\operatorname{arctg}^3 x}}{1+x^2}\,dx$.

13. $\int \frac{x}{e^{2x^2}+5}\,dx$. 14. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{2x^2-1}}\,dx$.

10-вариант

1. $\int \frac{3x^4-\sqrt[3]{x^2}+1}{x^2}\,dx$. 2. $\int \sqrt[3]{5-2x}\,dx$. 3. $\int \frac{dx}{1-7x}$.

4. $\int \sin(7x+1)\,dx$. 5. $\int \frac{dx}{8x^2+9}$. 6. $\int \frac{x}{3x^2-6}\,dx$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-3x^2}}$. 8. $\int e^{2-6x}dx$. 9. $\int \frac{\ln^5(x-7)}{x-7}\,dx$.

10. $\int \sqrt{\cos 7x}\,\sin 7x dx$. 11. $\int \frac{\mathrm{tg}^7 4x}{\cos^2 4x}\,dx$. 12. $\int \frac{\mathrm{arcctg}^3 8x}{1+64x^2}\,dx$.

13. $\int e^{4-5x^2}x dx$. 14. $\int \frac{x-5}{\sqrt{4-9x^2}}\,dx$.

11-вариант

1. $\int \left(\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{x^3}+4\right)dx$. 2. $\int \frac{dx}{(2+x)^3}$. 3. $\int \frac{dx}{6+5x}$.

4. $\int \cos(5x-6)\,dx$. 5. $\int \frac{dx}{3x^2-2}$. 6. $\int \frac{x}{5x^2+1}\,dx$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+8}}$. 8. $\int e^{3x+1}dx$. 9. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(x+7)}}{x+7}\,dx$.

10. $\int \frac{\sin 5x dx}{\cos^4 5x}$. 11. $\int \frac{\sqrt{\mathrm{ctg}^3 x}}{\sin^2 x}\,dx$. 12. $\int \frac{\sqrt{\mathrm{arctg}^5 3x}}{1+9x^2}\,dx$.

13. $\int \frac{x dx}{e^{2x^2+1}}$. 14. $\int \frac{x-1}{7x^2+4}\,dx$.

12-вариант

1. $\int \frac{\sqrt{x}-2x^3+6}{x}\,dx$. 2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3+x}}$. 3. $\int \frac{dx}{6-3x}$.

4. $\int \cos(3x-7)\,dx$. 5. $\int \frac{dx}{4x^2+3}$. 6. $\int \frac{5x}{5x^2-3}\,dx$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+2}}$. 8. $\int e^{3x-4}dx$. 9. $\int \frac{\ln^3(x-5)}{x-5}\,dx$.

10. $\int \frac{\cos 5x}{\sqrt{\sin^3 5x}}\,dx$. 11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\mathrm{tg}^{3x}}}$. 12. $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

13. $\int \frac{x dx}{e^{x^2+3}}$. 14. $\int \frac{1-2x}{5x^2-1}\,dx$.

13-вариант

1. $\int \frac{\sqrt[3]{x}-2x^2+4}{x^2}\,dx$. 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{(3-x)^5}}$. 3. $\int \frac{dx}{5+4x}$.

4. $\int \cos(5x-8)dx$. 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3}}$. 6. $\int \frac{x}{2x^2-7}\,dx$.

7. $\int \frac{dx}{2x^2+7}$. 8. $\int e^{2-5x}dx$. 9. $\int \frac{dx}{(x+5)\ln^3(x+5)}$.

10. $\int \sin^3 5x\cos 5x dx$. 11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\,\mathrm{ctg}^5 x}$. 12. $\int \frac{\arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$.

13. $\int \frac{x^2}{e^{x^3}+1}\,dx$. 14. $\int \frac{2x+1}{5x^2+1}\,dx$.

14-вариант

1. $\int \left(\sqrt{x}-\frac{3x^2}{\sqrt{x^3}}+2\right)dx$. 2. $\int \sqrt[3]{1+3x}\,dx$. 3. $\int \frac{dx}{3-5x}$.

4. $\int \sin(3x+6)\,dx$. 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$. 6. $\int \frac{9x}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$.

7. $\int \frac{dx}{4x^2-3}$. 8. $\int e^{1-4x}dx$. 9. $\int \frac{dx}{(x+3)\ln^4(x+3)}$.

10. $\int \frac{\sin 4x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 4x}}$. 11. $\int \frac{\mathrm{ctg}^5 2x}{\sin^2 2x}\,dx$. 12. $\int \frac{\mathrm{arcctg}^3 2x}{1+4x^2}\,dx$.

13. $\int e^{\sin x}\cos x dx$. 14. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$.

15-вариант

1. $\int \left(\sqrt[3]{x}-\frac{4}{x^5}+2\right)dx$. 2. $\int \sqrt[4]{1+3x}\,dx$. 3. $\int \frac{dx}{5+3x}$.

4. $\int \sin(5-3x)\,dx$. 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-8x^2}}$. 6. $\int \frac{3x}{9x^2+2}\,dx$.

7. $\int \frac{dx}{3x^2+1}$. 8. $\int e^{3-5x}dx$. 9. $\int \frac{\ln^4(3x+1)}{3x+1}\,dx$.

10. $\int \sqrt{\cos^3 2x}\,\sin 2x dx$. 11. $\int \frac{\mathrm{tg}^3 4x}{\cos^2 4x}\,dx$. 12. $\int \frac{\sqrt[3]{\arccos^2 x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

13. $\int e^{2x^3-1}x^2 dx$. 14. $\int \frac{3x-2}{2x^2+7}\,dx$.

16-вариант

1. $\int \frac{\sqrt[7]{x^6}-2x^2+3}{x}\,dx$. 2. $\int \sqrt[3]{3-2x}\,dx$. 3. $\int \frac{dx}{3-2x}$.

4. $\int \sin(5x-3)\,dx$. 5. $\int \frac{dx}{4x^2-3}$. 6. $\int \frac{5x}{\sqrt{7x^2-1}}\,dx$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{8x^2-9}}$. 8. $\int e^{4-3x}dx$. 9. $\int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{\ln(x+3)}}$.

10. $\int \sqrt[3]{\cos 2x}\cdot \sin 2x dx$. 11. $\int \frac{\sqrt[3]{\mathrm{tg}5x}}{\cos^2 5x}\,dx$. 12. $\int \frac{\sqrt[5]{\arccos^2 3x}}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$.

13. $\int \frac{\sin x}{e^{\cos x}}\,dx$. 14. $\int \frac{5+x}{3x^2+1}\,dx$.

17-вариант

1. $\int \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}-\frac{2}{x^3}+1\right)dx$. 2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-5x}}$. 3. $\int \frac{dx}{5x-3}$.

4. $\int \cos(3x+5)\,dx$. 5. $\int \frac{dx}{8x^2-9}$. 6. $\int \frac{3x}{\sqrt{9x^2+5}}\,dx$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$. 8. $\int e^{5-2x}dx$. 9. $\int \frac{\sqrt{\ln^7(x+4)}}{x+4}\,dx$.

10. $\int \sin^3 4x\cos 4x dx$. 11. $\int \frac{\mathrm{tg}^3 2x}{\cos^2 2x}\,dx$. 12. $\int \frac{\mathrm{arcctg}^4 3x}{1+9x^2}\,dx$.

13. $\int \frac{x^2}{e^{x^3+1}}\,dx$. 14. $\int \frac{x-5}{8-4x^2}\,dx$.

18-вариант

1. $\int \left(\frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{5}{x}+6\right)dx$. 2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}}$. 3. $\int \frac{dx}{4-7x}$.

4. $\int \cos(2+5x)\,dx$. 5. $\int \frac{dx}{4x^2+7}$. 6. $\int \frac{2x}{5x^2-3}\,dx$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$. 8. $\int e^{6x-1}dx$. 9. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{\ln(x+1)}}$.

10. $\int \frac{\cos 4x}{\sin^3 4x}\,dx$. 11. $\int \frac{\sqrt{\mathrm{ctg}^5 4x}}{\sin^2 x}\,dx$. 12. $\int \frac{\arccos^2 7x}{\sqrt{1-49x^2}}\,dx$.

13. $\int \frac{x}{e^{x^2+3}}\,dx$. 14. $\int \frac{x+4}{7x^2+3}\,dx$.

19-вариант

1. $\int \left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}-\frac{7}{x^3}+5\right)dx$. 2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-4x)^2}}$. 3. $\int \frac{dx}{5-3x}$.

4. $\int \cos(3-4x)\,dx$. 5. $\int \frac{2dx}{4+3x^2}$. 6. $\int \frac{x}{3x^2-2}\,dx$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+5}}$. 8. $\int e^{4x+5}dx$. 9. $\int \frac{\sqrt{\ln^3(x+1)}}{x+1}\,dx$.

10. $\int \frac{\sin 5x}{\sqrt{\cos 5x}}\,dx$. 11. $\int \frac{\sqrt[5]{\mathrm{ctg}^2 x}}{\sin^2 x}\,dx$. 12. $\int \frac{\sqrt[3]{\mathrm{arcctg}^2 x}}{1+x^2}\,dx$.

13. $\int \frac{x}{e^{2x^2+1}}\,dx$. 14. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{2x^2-1}}\,dx$.

20-вариант

1. $\int \left(\frac{5x^2}{\sqrt{x}}-\sqrt[3]{x^2}+2\right)dx$. 2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5+3x}}$. 3. $\int \frac{dx}{4x-2}$.

4. $\int \cos(4x+3)\,dx$. 5. $\int \frac{2dx}{3x^2-2}$. 6. $\int \frac{7x}{7x^2+1}\,dx$.

7. $\int \frac{dx}{3x^2-2}$. 8. $\int e^{4x+3}dx$. 9. $\int \frac{\sqrt[7]{\ln^2(x+1)}}{x+1}dx$.

10. $\int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x}dx$. 11. $\int \frac{\mathrm{tg}^7 3x}{\cos^2 3x}dx$. 12. $\int \frac{\mathrm{arcctg}^4 8x}{1+64x^2}dx$.

13. $\int e^{4-5x^2}xdx$. 14. $\int \frac{x-5}{\sqrt{4-9x^2}}dx$.

21-вариант

1. $\int \frac{2x^2+3\sqrt{x}-1}{2x}dx$. 2. $\int \sqrt[4]{1+x}dx$. 3. $\int \frac{dx}{2+3x}$.

4. $\int \cos(3-4x)\,dx$. 5. $\int \frac{dx}{4x^2+3}$. 6. $\int \frac{x}{\sqrt{5-4x^2}}dx$.

7. $\int \frac{dx}{4x^2-5}$. 8. $\int e^{2+4x}dx$. 9. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}{x-1}dx$.

10. $\int \frac{\cos 3x}{\sin^3 3x}dx$. 11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\mathrm{tg}^3 x}}$. 12. $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

13. $\int \frac{x}{e^{3x^2-3}}dx$. 14. $\int \frac{1-2x}{5x^2-1}dx$.

22-вариант

1. $\int \frac{\sqrt[3]{x}+4x^2-5}{2x^2}dx$. 2. $\int \sqrt[3]{(1+x)^2}dx$. 3. $\int \frac{dx}{4-5x}$.

4. $\int \sin(6-7x)\,dx$. 5. $\int \frac{dx}{9x^2+3}$. 6. $\int \frac{3x}{4x^2+1}dx$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-3}}$. 8. $\int e^{3-5x}dx$. 9. $\int \frac{dx}{(1-x)\cdot\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}$.

10. $\int \frac{\sin 3x}{\cos^4 3x}dx$. 11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\mathrm{ctg}^4 x}$. 12. $\int \frac{\arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$.

13. $\int e^{\sin x}\cos xdx$. 14. $\int \frac{3x+1}{5x^2+1}dx$.

23-вариант

1. $\int \frac{2\sqrt{x}-x^2+3}{\sqrt[3]{x}}dx$. 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x}}$. 3. $\int \frac{dx}{1-5x}$.

4. $\int \cos(3-4x)\,dx$. 5. $\int \frac{9dx}{\sqrt{9x^2-3}}$. 6. $\int \frac{4x}{\sqrt{3-4x^2}}dx$.

7. $\int \frac{dx}{5x^2+2}$. 8. $\int e^{2x+1}dx$. 9. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{\ln^3(1-x)}}$.

10. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{\cos 2x}}dx$. 11. $\int \frac{\mathrm{ctg}^5 2x}{\sin^2 2x}dx$. 12. $\int \frac{\mathrm{arctg}^3 2x}{1+4x^2}dx$.

13. $\int e^{\cos x}\sin xdx$. 14. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4}}dx$.

24-вариант

1. $\int \frac{\sqrt[6]{x}-2x^2+5}{x^2}dx$. 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-2x)^3}}$. 3. $\int \frac{dx}{3+5x}$.

4. $\int \cos(3+5x)\,dx$. 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-9x^2}}$. 6. $\int \frac{2x}{\sqrt{8x^2-9}}dx$.

7. $\int \frac{dx}{2x^2+5}$. 8. $\int e^{7x-2}dx$. 9. $\int \frac{\ln^3(1-x)}{1-x}dx$.

10. $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x}dx$. 11. $\int \frac{\mathrm{tg}^3 4x}{\cos^2 4x}dx$. 12. $\int \frac{\sqrt[3]{\arccos^2 x}}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

13. $\int e^{2x^3-1}x^2dx$. 14. $\int \frac{3x-2}{2x^2+9}dx$.

25-вариант

1. $\int \frac{4x^3-\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}dx$. 2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2+x}}$. 3. $\int \frac{dx}{2-3x}$.

4. $\int \sin(4-7x)\,dx$. 5. $\int \frac{dx}{7x^2-4}$. 6. $\int \frac{4x}{\sqrt{4x^2+3}}dx$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2+1}}$. 8. $\int e^{3x-5}dx$. 9. $\int \frac{\sqrt{\ln(2x-1)}}{2x-1}\, dx$.

10. $\int \sin^7 2x \cos 2x dx$. 11. $\int \frac{\sqrt[3]{\mathrm{tg}^5 5x}}{\cos^2 5x}\, dx$. 12. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\mathrm{arctg}^3 x}$.

13. $\int \frac{\sin x}{e^{\cos x}}\, dx$. 14. $\int \frac{5-x}{3x^2+1}\, dx$.

10-§. Иккинчи мустақил уй иши

Бу мустақил уй ишининг ҳар бир вариантида 10 та мисол бўлиб, уларда берилган интегралларни ҳисоблаш керак.

Қуйида вариант мисолларини ечиш намунасини келтирамиз.

Аниқмас интегралларни топинг:

1. $\int \frac{3-7x}{4x^2+5}\, dx$.

Ечиш.

$$\int \frac{3-7x}{4x^2+5}\, dx = 3\int \frac{dx}{(2x)^2+(\sqrt{5})^2} - 7\int \frac{xdx}{4x^2+5} = \frac{3}{2}\int \frac{d(2x)}{(2x)^2+(\sqrt{5})^2} - \frac{7}{8}$$

$$\int \frac{d(4x^2+5)}{4x^2+5} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x}{\sqrt{5}} - \frac{7}{8}\ln(4x^2+5) + C.$$

2. $\int \frac{dx}{e^{3x}(2-e^{-3x})}$.

Ечиш.

$$\int \frac{dx}{e^{3x}(2-e^{-3x})}\left|\begin{matrix} t = 2 - e^{-3x} \\ dt = 3e^{-3x}dx \quad \frac{dt}{3} = \frac{dx}{e^{3x}} \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + C = \frac{1}{3}\ln\left|2 - e^{-3x}\right| + C.$$

3. $\int \frac{3x^5-4x}{x^2+1}\, dx$.

Ечиш. Интеграл остидаги функция нотўғри каср бўлгани учун, унинг суратини махражига бўлиб, касрнинг бутун қисми ва каср қисмини топамиз. Натижада алгебраик йиғиндининг интегралига эга бўламиз:

$$\begin{array}{r|l} 3x^5 - 4x & x^2 + 1 \\ \hline 3x^5 + 3x^3 & 3x^3 - 3x \\ \cline{1-1} -3x^3 - 4x & \\ -3x^3 - 3x & \\ \cline{1-1} -x. & \end{array}$$

$$\int \frac{3x^5-4x}{x^2+1}\, dx = \int\left(3x^3 - 3x - \frac{x}{x^2+1}\right) dx =$$

$$= \frac{3}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

4. $\int \cos^3(7x+2)\, dx$.

Ечиш.

$\cos^2(7x+2) = 1 - \sin^2(7x+2)$ тригонометрик айниятдан фойдаланамиз:

$$\int \cos^3(7x+2)\, dx = \int \cos^2(7x+2)\cos(7x+2)\, dx =$$

$$= \frac{1}{7}\int (1 - \sin^2(7x+2))\, d(\sin(7x+2)) =$$

$$= \frac{1}{7}\int d(\sin(7x+2) - \frac{1}{7}\int \sin^2(7x+2)\, d(\sin(7x+2)) =$$

$$= \frac{1}{7}\sin(7x+2) - \frac{1}{21}\sin^3(7x+2) + C.$$

5. $\int \mathrm{ctg}^4 5x dx$.

Ечиш.

$\mathrm{ctg}^2 5x = \frac{1}{\sin^2 5x} - 1$ бўлгани учун берилган интегрални қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз.

$$\int \mathrm{ctg}^4 5x dx = \int \mathrm{ctg}^2 5x\left(\frac{1}{\sin^2 5x} - 1\right) dx =$$

$$= \int \mathrm{ctg}^2 5x \cdot \frac{1}{\sin^2 5x}\, dx - \int \mathrm{ctg}^2 5x dx =$$

$$= -\frac{1}{5}\int \operatorname{ctg}^2 5x\left(-\frac{5}{\sin^2 5x}\right)dx - \int\left(\frac{1}{\sin^2 5x} - 1\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{5}\int \operatorname{ctg}^2 5x d(\operatorname{ctg} 5x) - \frac{1}{5}\int \frac{5dx}{\sin^2 5x} + \int dx =$$

$$= -\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 5x + \frac{1}{5}\operatorname{ctg} 5x + x + C =$$

$$= -\frac{1}{15}\operatorname{ctg}^3 5x + \frac{1}{5}\operatorname{ctg} 5x + x + C.$$

6. $\int \sin\frac{7}{2}x \sin\frac{3}{2}xdx$.

Ечиш.

$$\int \sin\frac{7}{2}x\sin\frac{3}{2}xdx = \frac{1}{2}\int(\cos 2x - \cos 5x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\cos 2xdx - \frac{1}{2}\int\cos 5xdx =$$

$$= \frac{1}{4}\int\cos 2xd(2x) - \frac{1}{10}\int\cos 5xd(5x) = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{10}\sin 5x + C.$$

7. $\int \frac{dx}{6x^2 - 3x + 2}$.

Ечиш. Интеграл остидаги функциянинг махражидан тўлиқ квадрат ажратамиз ва интеграллаймиз:

$$\int\frac{dx}{6x^2-3x+2} = \frac{1}{6}\int\frac{dx}{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{3}-\frac{1}{16}} =$$

$$= \frac{1}{16}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{13}}{4\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{4\sqrt{13}}{6\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{13}}{4\sqrt{3}}} + C =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{13}}\operatorname{arctg}\frac{(4x-1)\sqrt{3}}{\sqrt{13}} + C.$$

8. $\int\frac{3x-6}{2-5x-x^2}dx$.

Ечиш. Интеграл остидаги функциянинг суратидан махражининг ҳосиласини ажратиб оламиз:

$$\int\frac{3x-6}{2-5x-x^2}dx = -\frac{3}{2}\int\frac{-2x+4-5+5}{2-5x-x^2}dx =$$

$$= -\frac{3}{2}\int\frac{-2x-5}{2-5x-x^2}dx - \frac{3}{2}\cdot 9\int\frac{dx}{2-5x-x^2} =$$

$$= -\frac{3}{2}\int\frac{d(2-5x-x^2)}{2-5x-x^2} + \frac{27}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{33}}{2}\right)^2} =$$

$$= -\frac{3}{2}\ln\left|2-5x-x^2\right| + \frac{27}{2\sqrt{33}}\ln\left|\frac{x-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{33}}{2}}{x-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2}}\right| + C =$$

$$= -\frac{3}{2}\ln\left|2-5x-x^2\right| + \frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{11}}\ln\left|\frac{2x-5-\sqrt{33}}{2x-5+\sqrt{33}}\right| + C..$$

9. $\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2+2x-7}}$.

Ечиш. Интеграл остидаги функциянинг махражидан тўлиқ квадрат ажратамиз:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2+2x-7}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{2}{5}x-\frac{7}{5}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{5}\right)^2-\frac{7}{5}-\frac{1}{25}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|x+\frac{1}{5}+\sqrt{x^2+\frac{2}{5}x-\frac{7}{5}}\right| + C.$$

10. $\int\frac{2x-7}{\sqrt{1-4x-3x^2}}dx$.

Ечиш. Берилган интегрални шундай иккита интеграл йиғиндиси кўринишида ёзиб оламизки, бунда интеграллардан бирининг суратида илдиз остидаги ифоданинг ҳосиласи турган бўлсин:

$$\int \frac{2x-7}{\sqrt{1-4x-3x^2}}\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{-6x+21-4+4}{\sqrt{1-4x-3x^2}}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{-6x-4}{\sqrt{1-4x-3x^2}}\,dx - \frac{25}{3\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}x-x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{d(1-4x-3x^2)}{\sqrt{1-4x-3x^2}} - \frac{25}{3\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2-\left(x+\frac{2}{3}\right)^2}} =$$

$$= -\frac{2}{3}\int \sqrt{1-4x-3x^2} - \frac{25}{3\sqrt{3}}\arcsin\frac{x+\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{7}}{3}} + C =$$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{1-4x-3x^2} - \frac{25}{3\sqrt{3}}\arcsin\frac{3x+2}{\sqrt{7}} + C.$$

1-вариант

1. $\int \frac{2-3x}{x^2+2}\,dx$.
2. $\int \frac{\sin x}{1+3\cos 2x}\,dx$.
3. $\int \frac{1-2x-x^2}{1+x^2}\,dx$ ·
4. $\int \sin^2(1-x)\,dx$.
5. $\int \mathrm{tg}^2 x dx$.
6. $\int \sin 3x \cos x dx$.
7. $\int \frac{dx}{4x^2-5x+4}$.
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+8x-x^2}}$.
9. $\int \frac{x+1}{2x^2+3x-4}\,dx$ ·
10. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2-3x-16}}\,dx$.

2-вариант

1. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2-4}}\,dx$.
2. $\int \frac{3x^2}{1-x^2}\,dx$.
3. $\int \frac{2x^2+3}{2x^2-1}\,dx$.
4. $\int \sin^3(1-x)\,dx$.
5. $\int \mathrm{tg}^5 4x dx$.
6. $\int \sin^5 2x \cos 2x dx$.

7. $\int \frac{dx}{3x^2+5x+1}$.
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-4x-1}}$.
9. $\int \frac{x+6}{3x^2+x+1}\,dx$ ·
10. $\int \frac{x-3}{\sqrt{2x^2-4x-1}}\,dx$.

3-вариант

1. $\int \frac{8-13x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$.
2. $\int \frac{\sin 3x}{3-\cos 3x}\,dx$ ·
3. $\int \frac{x^2+2}{x^2-1}\,dx$ ·
4. $\int \left(1-2\sin\frac{x}{5}\right)^2 dx$.
5. $\int \mathrm{tg}^4 3x dx$.
6. $\int \sin^2 3x \cos 3x dx$.
7. $\int \frac{dx}{2x^2-7x+1}$.
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-2x^2}}$.
9. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2-2x+8}}\,dx$.
10. $\int \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-x+5}}\,dx$.

4-вариант

1. $\int \frac{6x+1}{2x^2-1}\,dx$.
2. $\int \frac{e^x}{2e^x+3}\,dx$.
3. $\int \frac{8x^3-1}{2x+1}\,dx$.
4. $\int \cos^3 5x \sin 5x dx$.
5. $\int \mathrm{tg}^2 7x dx$.
6. $\int \cos^3 5x \sin 5x dx$.
7. $\int \frac{dx}{2x^2+x-6}$.
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}$.
9. $\int \frac{xdx}{2x^2+x+5}$.
10. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{1+x-3x^2}}\,dx$.

5-вариант

1. $\int \frac{x-2}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$.
2. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x-4}\,dx$ ·
3. $\int \frac{x^3-2}{x^2-4}\,dx$ ·
4. $\int \cos^3(1-x)\,dx$.
5. $\int \mathrm{tg}^5 x dx$.
6. $\int \sin\frac{x}{4}\cos x\frac{x}{4}\,dx$.
7. $\int \frac{dx}{5x^2+2x+7}$.
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+8x-2x^2}}$.
9. $\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx$ ·
10. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+8x+9}}\,dx$.

6-вариант

1. $\int \frac{3-7x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$. 2. $\int \frac{e^x}{4-3e^x}\,dx$. 3. $\int \frac{2x^4-3}{x^2+1}\,dx$.

4. $\int (3-\sin 2x)^2 dx$. 5. $\int x\mathrm{tg}^2 x^2 dx$. 6. $\int \cos x \cdot \sin 9x dx$.

7. $\int \frac{dx}{2x^2-2x+1}$. 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-2x^2}}$. 9. $\int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2}\,dx \cdot$

10. $\int \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx$.

7-вариант

1. $\int \frac{5-3x}{\sqrt{2x^2+1}}\,dx$. 2. $\int \frac{x^2}{7-5x^3}\,dx \cdot$ 3. $\int \frac{x^3-1}{2x+1}\,dx \cdot$

4. $\int \sin^2 \frac{3x}{2}\,dx \cdot$ 5. $\int \mathrm{ctg}^3 x dx$. 6. $\int \sin^4 2x \cos 2x dx$.

7. $\int \frac{dx}{2x^2-11x+2}$. 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-2x-3x^2}}$. 9. $\int \frac{x+4}{2x^2-6x-8}\,dx \cdot$

10. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x+x^2}}\,dx$.

8-вариант

1. $\int \frac{1+x}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$. 2. $\int \frac{\sin 2x}{3\sin^2 x+4}\,dx$. 3. $\int \frac{x^3}{1-x^2}\,dx \cdot$

4. $\int (\cos x+3)^2 dx \cdot$ 5. $\int \mathrm{tg}^2 \frac{x}{2}\,dx$. 6. $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}\,dx$.

7. $\int \frac{dx}{2x^2+x+2}$. 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$. 9. $\int \frac{x+4}{2x^2-7x+1}\,dx \cdot$

10. $\int \frac{2x-13}{\sqrt{x^2+6x+13}}\,dx$.

9-вариант

1. $\int \frac{3x+2}{2x^2+1}\,dx \cdot$ 2. $\int \frac{e^{2x}}{5+e^{2x}}\,dx \cdot$ 3. $\int \frac{x^2}{x^2+3}\,dx \cdot$

4. $\int \cos^3(x+3)\,dx$. 5. $\int \mathrm{tg}^3 \frac{x}{2}\,dx$. 6. $\int \cos^5 x \sin x dx$.

7. $\int \frac{dx}{3x^2-12x+3}$. 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-10x+4}}$. 9. $\int \frac{5x-2}{2x^2-5x+3}\,dx \cdot$

10. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{2x^2-5x+1}}\,dx$.

10-вариант

1. $\int \frac{1-5x}{1+25x^2}\,dx \cdot$ 2. $\int \frac{4x^3}{7+2x^4}\,dx \cdot$ 3. $\int \frac{6x^3+x^2-2x+1}{2x-1}\,dx \cdot$

4. $\int \sin^3 \frac{4x}{5}\,dx \cdot$ 5. $\int \mathrm{tg}^2 4x dx \cdot$ 6. $\int \cos 2x \cos 3x dx \cdot$

7. $\int \frac{dx}{2x^2+3x}$. 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3-x^2}}$. 9. $\int \frac{4x-1}{4x^2-4x+5}\,dx \cdot$

10. $\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+3x-4}}\,dx$.

11-вариант

1. $\int \frac{4x-3}{3x^2-4}\,dx \cdot$ 2. $\int \frac{4x-5}{2x^2-5x+17}\,dx \cdot$ 3. $\int \frac{x^4}{x^2-3}\,dx$.

4. $\int (1-\cos x)^2 dx$. 5. $\int \mathrm{ctg}^3 x dx$. 6. $\int \sin 5x \sin 7x dx$.

7. $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$. 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-8x+3}}$. 9. $\int \frac{x+1}{2x^2+x+1}\,dx$.

10. $\int \frac{x-4}{\sqrt{2x^2-x+7}}\,dx$.

12-вариант

1. $\int \frac{5x+1}{\sqrt{x^2-6}}\,dx$. 2. $\int \frac{7x^3}{2x^4+5}\,dx$. 3. $\int \frac{x^3+5x}{x^2+1}\,dx$.

4. $\int \sin^2(2x-1)\,dx$. 5. $\int \mathrm{ctg}^2 5x dx$. 6. $\int \sin 4x \cos 2x dx$.

7. $\int \frac{dx}{2x-3-4x^2}$. 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$. 9. $\int \frac{x+1}{3x^2-2x+3}\,dx$.

10. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x+4}}\,dx$.

13-вариант

1. $\int \frac{x-3}{9x^2+7}\,dx$. 2. $\int \frac{\cos 3x}{\sqrt{\sin 3x-2}}\,dx$. 3. $\int \frac{x^2-5x+6}{x^2-4}\,dx$.

4. $\int \sin^3 6x dx$. 5. $\int \mathrm{tg}^3 \frac{x}{3}\,dx$. 6. $\int \cos^3 4x \sin 4x dx$.

7. $\int \frac{dx}{3x^2-8x-3}$. 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-x+4}}$. 9. $\int \frac{4x+8}{4x^2+6x-13}\,dx$.

10. $\int \frac{4x+1}{\sqrt{2+x-x^2}}\,dx$.

14-вариант

1. $\int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}}\,dx$. 2. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx$. 3. $\int \frac{x^3-1}{x+3}\,dx$.

4. $\int \sin^2 0.5x dx$. 5. $\int (1-\mathrm{tg}2x)^2 dx$. 6. $\int \cos^{-3} 2x \sin 2x dx$.

7. $\int \frac{dx}{8-2x-x^2}$. 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+4x-3x^2}}$. 9. $\int \frac{5x+1}{x^2-4x+1}\,dx$.

10. $\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+4x-5}}\,dx$.

15-вариант

1. $\int \frac{4-2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$. 2. $\int \frac{\sin x}{1+3\cos x}\,dx$. 3. $\int \frac{x^3}{x^2-1}\,dx$.

4. $\int \sin^2\left(\frac{x}{6}+1\right) dx$. 5. $\int \mathrm{tg}^5 2x dx$. 6. $\int \cos x \sin 9x dx$.

7. $\int \frac{dx}{5x-x^2-6}$. 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+4}}$. 9. $\int \frac{xdx}{2x^2+2x+5}\,dx$.

10. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{4+2x-x^2}}\,dx$.

16-вариант

1. $\int \frac{5-x}{2+x^2}\,dx$. 2. $\int \frac{\sin 2x}{4-\sin^2 x}\,dx$. 3. $\int \frac{x^4+1}{x^2+1}\,dx$.

4. $\int \cos^2 2x dx$. 5. $\int (2x+\mathrm{tg}^2 7x) dx$. 6. $\int \sin 4x \cos 2x dx$.

7. $\int \frac{dx}{x^2+4x+25}$. 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+2-2x^2}}$. 9. $\int \frac{x-3}{x^2-5x+4}\,dx$.

10. $\int \frac{x-7}{\sqrt{3x^2-2x+1}}\,dx$.

17-вариант

1. $\int \frac{1+3x}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx$. 2. $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}-5}\,dx$. 3. $\int \frac{x^4-2x^2-1}{x^2+1}\,dx$.

4. $\int \left(1+2\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$. 5. $\int \mathrm{tg}^4 \frac{2x}{3}\,dx$. 6. $\int \sin 3x \cos 2x dx$.

7. $\int \frac{dx}{2x^2-8x+30}$. 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-8x+1}}$. 9. $\int \frac{2x-1}{2x^2+8x-6}\,dx$.

10. $\int \frac{x+5}{\sqrt{3-6x-x^2}}\,dx$.

18-вариант

1. $\int \frac{5-4x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. 2. $\int \frac{x^2}{7+3x^3}\,dx$. 3. $\int \frac{x^4+2}{x^2-4}\,dx$.

4. $\int \cos^2 3x dx$. 5. $\int (\mathrm{tg}2x+\mathrm{ctg}2x)^2 dx$. 6. $\int \sin^3 7x \cos 7x dx$.

7. $\int \frac{dx}{3x^2-9x+6}$.   8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+6}}$.   9. $\int \frac{2-x}{4x^2+16x-12}\,dx$.

10. $\int \frac{2x+4}{\sqrt{3x^2+x-5}}\,dx$.

19-вариант

1. $\int \frac{5x-1}{\sqrt{x^2-3}}\,dx$.   2. $\int \frac{3x+2}{x^2+2x}\,dx$.   3. $\int \frac{x^3-3}{x+5}\,dx$.

4. $\int \sin^4 2x dx$.   5. $\int (1-\mathrm{ctg}x)^2 dx$.   6. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$.

7. $\int \frac{dx}{2x^2-2x+5}$.   8. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2x^2}}$.   9. $\int \frac{2x-1}{3x^2-6x-9}\,dx$.

10. $\int \frac{7x-2}{\sqrt{x^2-5x+1}}\,dx$.

20-вариант

1. $\int \frac{1-3x}{4x^2-1}\,dx$.   2. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+3}}\,dx$.   3. $\int \frac{x^3+1}{x^2+1}\,dx$.

4. $\int \sin^2 3x dx$.   5. $\int \mathrm{ctg}^3 3x dx$.   6. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 2x}\,dx$.

7. $\int \frac{dx}{2x^2-3x-2}$.   8. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+3}}$.   9. $\int \frac{2x-1}{3+x-2x^2}\,dx$.

10. $\int \frac{x-8}{\sqrt{4x^2+x-5}}\,dx$.

21-вариант

1. $\int \frac{x-5}{3-2x^2}\,dx$.   2. $\int \frac{3x^2-2}{\sqrt{2x^3-4x}}\,dx$.   3. $\int \frac{2x^2+5}{x+1}\,dx$.

4. $\int \cos^2 \frac{2x}{5}\,dx$.   5. $\int \mathrm{tg}^3 4x dx$.   6. $\int \cos 2x \cos 5x dx$.

---

7. $\int \frac{dx}{5x^2-10x+25}$.   8. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-x+5}}$.   9. $\int \frac{x-3}{4x^2+2x-3}\,dx$.

10. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{2x^2-x+6}}\,dx$.

22-вариант

1. $\int \frac{x+4}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$.   2. $\int \frac{\cos 7x}{\sqrt{5-\sin 7x}}\,dx$.   3. $\int \frac{x^3+3x+1}{x^2+2}\,dx$.

4. $\int \sin^3 5x dx$.   5. $\int \mathrm{tg}^4 \frac{x}{2}\,dx$.   6. $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}\,dx$.

7. $\int \frac{dx}{2x^2+6x+3}$.   8. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}}$.   9. $\int \frac{x+2}{3x^2-x+5}\,dx$.

10. $\int \frac{x-9}{\sqrt{4+2x-x^2}}\,dx$.

23-вариант

1. $\int \frac{2x-7}{x^2-5}\,dx$.   2. $\int \frac{\sin 4x}{\sqrt{\cos 4x+3}}\,dx$.   3. $\int \frac{x^2+x}{2-x}\,dx$.

4. $\int \sin^4 x dx$.   5. $\int \mathrm{tg}^4(x+6)\,dx$.   6. $\int \sin 2x \sin 3x dx$.

7. $\int \frac{dx}{x^2+7x+11}$.   8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$.   9. $\int \frac{x-5}{2x^2+x-4}\,dx$.

10. $\int \frac{2x+7}{\sqrt{x^2+5x-4}}\,dx$.

24-вариант

1. $\int \frac{7x-2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$.   2. $\int \frac{12x^2+5x^4}{4x^3+x^5}\,dx$.   3. $\int \frac{2x\ \ +5}{x-7}\,dx$.

4. $\int \cos^4 x dx$.   5. $\int \mathrm{tg}^3(x-5)\,dx$.   6. $\int \sin x \cos^3 x dx$.

7. $\int \frac{dx}{2x^2-3x+1}$. 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$. 9. $\int \frac{2x+3}{3x^2+2x-7}\,dx$.

10. $\int \frac{3x-4}{\sqrt{2x^2-6x+1}}\,dx$.

25-вариант

1. $\int \frac{x-5}{x^2-7}\,dx$. 2. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{6-\cos^2 x}}\,dx$. 3. $\int \frac{2x^3+3}{x-1}\,dx$.

4. $\int \cos^3 4x dx$. 5. $\int \mathrm{tg}^2(4x+1)\,dx$. 6. $\int \sin x \cos 4x dx$.

7. $\int \frac{dx}{2x^2-3x+2}$. 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x-x^2}}$. 9. $\int \frac{3x+1}{x^2-4x-2}\,dx$.

10. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{3x^2+9x-4}}\,dx$.

11-§. Учинчи мустақил уй иши

Бу мустақил уй иши вариантларининг ҳар бирида 8 та мисол бўлиб, уларни бажаришда қуйидагиларга эътибор бериш керак.

1-мисолда: берилган интегрални тригонометрик алмаштиришлар ёрдамида топиш керак;

2-мисолда: берилган интегрални ўзгарувчини алмаштириш ёрдамида топиш керак;

3—8-мисолларда: берилган интегралларни бўлаклаб интеграллаш формуласи ёрдамида топиш керак.

Қуйида вариант мисолларни ечиш намунасини келтирамиз

Аниқмас интегралларни ҳисобланг.

1. $\int x^2\sqrt{16-x^2}\,dx$.

Ечиш.

$$\int x^2\sqrt{16-x^2}\,dx \left| \begin{matrix} x = 4\sin t, & dx = 4\cos t dt \\ \sin t = \frac{x}{4}, & t = \arcsin\frac{x}{4} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int 16\sin^2 t \cdot \sqrt{16-16\sin^2 t} \cdot 4\cos t dt = 256\int \sin^2 t\cos^2 t dt =$$

$$= 64\int \sin^2 2t dt = 32\int (1-\cos 4t)\,dt = 32t - 8\sin 4t + C =$$

$$= 32\arcsin\frac{x}{4} - 8\sin 4\left(\arcsin\frac{x}{4}\right) + C =$$

$$= 32\arcsin\frac{x}{4} - \frac{x}{4}(8-x^2)\sqrt{16-x^2} + C.$$

2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$.

Ечиш.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}} \left| \begin{matrix} x = \frac{1}{t}, & t = \frac{1}{x} \\ dx = -\frac{1}{t^2}dt & \end{matrix} \right| = -\int \frac{dt}{t^2\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{5}{t}+1}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+5t+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{21}{4}}} = -\ln\left|t+\frac{5}{2}+\sqrt{t^2+5t+1}\right| + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x}+1}\right| + C = C - \ln\left|\frac{1}{x}+\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{x^2+5x+1}}{x}\right|.$$

3. $\int (x+2)\sin 4x dx$:

Ечиш.

$$\int (x+2)\sin 4x dx \left| \begin{matrix} u = x+2, & du = dx \\ dv = \sin 4x dx, & v = -\frac{1}{4}\cos 4x \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{1}{4}(x+2)\cos 4x + \frac{1}{4}\int \cos 4x dx =$$

$$= -\frac{1}{4}(x+2)\cos 4x + \frac{1}{16}\sin 4x + C.$$

4. $\int \arccos 5x dx$.

Ечиш.

$$\int \arccos 5x dx \left| \begin{matrix} u = \arccos 5x, \ du = -\frac{5dx}{\sqrt{1-25x^2}} \\ dv = dx, \ v = -x \end{matrix} \right| =$$

$$= -x \arccos 5x + 5\int \frac{xdx}{\sqrt{1-25x^2}} = -x \arccos 5x - \frac{1}{10}\int \frac{-50xdx}{\sqrt{1-25x^2}} =$$

$$= -x \arccos 5x - \frac{1}{5}\sqrt{1-25x^2} + C.$$

5. $\int xe^{x+3}dx$.

Ечиш.

$$\int xe^{x+3}dx \left| \begin{matrix} u = x, \ du = dx \\ dv = e^{x+3}dx, \ v = e^{x+3} \end{matrix} \right| =$$

$$= xe^{x+3} - \int e^{x+3}dx = xe^{x+3} - e^{x+3} + C.$$

6. $\int \frac{x\mathrm{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

Ечиш.

$$\int \frac{x\mathrm{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}} dx \left| \begin{matrix} u = \mathrm{arctg}x, \ du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}, \ v = \sqrt{1+x^2} \end{matrix} \right| = \sqrt{1+x^2}\mathrm{arctg}x -$$

$$-\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}\mathrm{arctg}x - \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| + C.$$

7. $\int (x^2 - 4x + 3)e^{-2x}dx$.

Ечиш.

$$\int (x^2 - 4x + 3)e^{-2x}dx \left| \begin{matrix} u = x^2 - 4x + 3, \ du = (2x-4)dx, \\ dv = e^{-2x}dx, \ v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 3)e^{-2x} + \int (x-2)e^{-2x}dx \cdot$$

$$\cdot \left| \begin{matrix} u = x - 2, \ du = dx \\ dv = e^{-2x}dx, \ v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 3)e^{-2x} - \frac{1}{2}(x-2)e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 3)e^{-2x} - \frac{1}{2}(x-2)e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C.$$

8. $\int \frac{\ln(\ln(x+2))\ln(x+2)}{x+2} dx$.

Ечиш.

$$\int \frac{\ln(\ln(x+2))\ln(x+2)}{x+2} dx \left| \begin{matrix} u = \ln(\ln(x+2)), \ du = \frac{dx}{(x+2)\ln(x+2)} \\ dv = \frac{\ln(x+2)}{x+2}dx, \ v = \frac{1}{2}\ln^2(x+1) \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{\ln^2(x+2)}{2} \cdot \ln(\ln(x+2)) - \frac{1}{2}\int \frac{\ln(x+2)}{x+2}dx =$$

$$= \frac{\ln^2(x+2)}{2} \cdot \ln(\ln(x+2)) - \frac{1}{4}\ln^2(x+2) + C.$$

1-вариант

1. $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6} dx$.
2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}}$.
3. $\int \ln(x+4)dx$.
4. $\int \frac{x \arccos 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$.
5. $\int x^2 e^{-x}dx$.
6. $\int (x-5)\cos xdx$.
7. $\int x\,\mathrm{arctg}\, xdx$.
8. $\int x\cos(x-7)dx$.

2-вариант

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$.
2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-2}}$.
3. $\int \frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

4. $\int \arccos 2xdx$. 5. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$. 6. $\int (x+5)\sin xdx$.

7. $\int x^2 e^{3x} dx$. 8. $\int x\sin(x-3)dx$.

3-вариант

1. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx$. 2. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x+1}}$. 3. $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx$.

4. $\int \operatorname{arctg} xdx$. 5. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$. 6. $\int (x+9)\sin xdx$.

7. $\int x\cos(x+4)\, dx$. 8. $\int (x-4)e^x dx$.

4-вариант

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$. 2. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x-1}}$. 3. $\int x^2 \ln(x+1)\, dx$.

4. $\int \frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$. 5. $\int x\operatorname{tg}^2 xdx$. 6. $\int (x+7)\sin 2xdx$.

7. $\int x\cos(x+3)dx$. 8. $\int xe^{-6x} dx$.

5-вариант

1. $\int x^3\sqrt{9-x^2}\, dx$. 2. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$. 3. $\int \frac{\ln x \ln(\ln x)}{x} dx$.

4. $\int \frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$. 5. $\int (x^2+2)e^{-x} dx$. 6. $\int (x+4)\sin 3xdx$.

7. $\int x\cos(x-2)\, dx$. 8. $\int \operatorname{arctg} 7xdx$.

6-вариант

1. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(x^2-1)^3}}$. 2. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$. 3. $\int \ln(x^2+1)\, dx$.

4. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} dx$. 5. $\int x^2 \sin^2 xdx$. 6. $\int (x+3)\sin 5xdx$.

7. $\int xe^{x+2} dx$. 8. $\int \arcsin 5xdx$.

7-вариант

1. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$. 2. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x-x^2}}$. 3. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$.

4. $\int \operatorname{arctg} 2xdx$. 5. $\int x^2(\cos 2x+3)\, dx$. 6. $\int (x-4)\cos 2xdx$.

7. $\int xe^{-7x} dx$. 8. $\int \ln(x-7)\, dx$.

8-вариант

1. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2} dx$. 2. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$. 3. $\int \sqrt{x}\ln^2 xdx$.

4. $\int \frac{x\operatorname{arcctg} x}{\sqrt{1+x-x^2}} dx$. 5. $\int (x^2+2)e^{-x} dx$. 6. $\int (x-8)\sin xdx$.

7. $\int \arcsin 2xdx$. 8. $\int x\cos(x+6)dx$.

9-вариант

1. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$. 2. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}}$. 3. $\int \ln\frac{1-x}{1+x} dx$.

4. $\int \arcsin 2xdx$. 5. $\int (x^3+3)\sin xdx$. 6. $\int (x+4)\cos 3xdx$.

7. $\int x\sin(x+7)dx$. 8. $\int \operatorname{arctg}\frac{x}{2} dx$.

10-вариант

1. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^4} dx$. 2. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x-1}}$. 3. $\int (x^2-x+1)\ln xdx$.

4. $\int \frac{x\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$. 5. $\int (x^2-3)\cos x dx$. 6. $\int (x+8)\sin 3x dx$.

7. $\int x\cos(x-4)\,dx$. 8. $\int \ln(x+8)\,dx$.

11-вариант

1. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$. 2. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x-1}}$. 3. $\int \sqrt{x}\ln x dx$.

4. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1+x}}\,dx$. 5. $\int (x^2+1)e^{-x}dx$. 6. $\int (x+6)\cos 4x dx$.

7. $\int x\sin(x+4)\,dx$. 8. $\int \operatorname{arctg}\frac{x}{5}\,dx$.

12-вариант

1. $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$. 2. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1+x-x^2}}$. 3. $\int \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}\,dx$.

4. $\int x^2\operatorname{arctg}x\,dx$. 5. $\int (x^2-1)e^x dx$. 6. $\int (x-6)\sin\frac{x}{2}\,dx$.

7. $\int x\cos(x+9)\,dx$. 8. $\int \ln(x+12)\,dx$.

13-вариант

1. $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$. 2. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x-x^2}}$. 3. $\int x\ln(x^2+1)\,dx$.

4. $\int x\operatorname{arctg}2x dx$. 5. $\int x^2\cos^2 x dx$. 6. $\int (x+1)\cos 7x dx$.

7. $\int (x+3)e^{-x}dx$. 8. $\int \arcsin\frac{x}{3}\,dx$.

14-вариант

1. $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^4}\,dx$. 2. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x-x^2}}$. 3. $\int x\ln^2 x dx$.

4. $\int \operatorname{arctg}(x+5)\,dx$. 5. $\int (x^2+x)\sin x dx$. 6. $\int (x+2)\sin\frac{x}{2}\,dx$.

7. $\int \arccos x dx$. 8. $\int \ln(2x-1)\,dx$.

15-вариант

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$. 2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x-x^2}}$. 3. $\int x^2\ln x dx$.

4. $\int x^2\operatorname{arctg}x dx$. 5. $\int (x^2+x)\cos x dx$. 6. $\int x\sin\frac{x}{2}\,dx$.

7. $\int (x^2-3)e^x dx$. 8. $\int \ln(2x+3)\,dx$.

16-вариант

1. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^4}\,dx$. 2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-3}}$. 3. $\int x\ln(x+1)\,dx$.

4. $\int x\operatorname{arctg}^2 x dx$. 5. $\int (x^2+1)e^x dx$. 6. $\int (x+4)\cos\frac{x}{2}\,dx$.

7. $\int xe^{-4x}dx$. 8. $\int \arccos\frac{x}{5}\,dx$.

17-вариант

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$. 2. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-2}}$. 3. $\int \sin(\ln x)\,dx$.

4. $\int x^2\cos\frac{x}{3}\,dx$. 5. $\int (x^2-1)e^{-x}dx$. 6. $\int (x+1)\sin\frac{x}{3}\,dx$.

7. $\int x\cos(x+7)\,dx$. 8. $\int \operatorname{arctg}\frac{x}{4}\,dx$.

18-вариант

1. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$. 2. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{2-x-x^2}}$. 3. $\int (x^2-4)\sin 5x dx$.

4. $\int x\operatorname{arcctg}^2 x dx$. 5. $\int x\sin^2 x dx$. 6. $\int (x+2)\cos\frac{x}{4}\,dx$.

7. $\int xe^{-5x}dx$. 8. $\int \arcsin\frac{x}{7}\,dx$.

19-вариант

1. $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4}\,dx$. 2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-3x-2x^2}}$. 3. $\int \ln(x+5)\,dx$.

4. $\int x^2 \sin 2x dx$. 5. $\int \arcsin 9x dx$. 6. $\int (x+3)\sin\frac{x}{4}\, dx$.

7. $\int x e^{x+3} dx$. 8. $\int \operatorname{arctg} 6x dx$.

20-вариант

1. $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}\, dx$. 2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-3x+2}}$. 3. $\int \ln\frac{2-x}{2+x}\, dx$.

4. $\int (x^2+4)\, e^{2x} dx$. 5. $\int x \operatorname{arctg} 2x dx$. 6. $\int (x-9)\sin\frac{x}{2}\, dx$.

7. $\int x\cos(2-x)\, dx$. 8. $\int \arccos\frac{x}{3}\, dx$.

21-вариант

1. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\, dx$. 2. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$. 3. $\int \cos(\ln x)\, dx$.

4. $\int \sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} dx$. 5. $\int x\sin^2 x dx$. 6. $\int (x-2)\, e^x dx$.

7. $\int (x+1)\cdot e^{-4x} dx$. 8. $\int x\cos 6x dx$.

22-вариант

1. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\, dx$. 2. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$. 3. $\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$.

4. $\int x \operatorname{arctg} 2x dx$. 5. $\int x\sin x\cos x dx$. 6. $\int (x-7)\cos 2x dx$.

7. $\int x^2 e^{-x} dx$. 8. $\int \arcsin 3x dx$.

23-вариант

1. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\, dx$. 2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$. 3. $\int \ln(x+2)\, dx$.

4. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}\, dx$. 5. $\int x^2(\sin 2x-3)\, dx$. 6. $\int (x+2)\cos 3x dx$.

7. $\int x^2 e^{-2x} dx$. 8. $\int (x+2)\cos 3x dx$.

24-вариант

1. $\int \sqrt{4-x^2}\, dx$. 2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. 3. $\int \frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x}\, dx$.

4. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}\, dx$. 5. $\int x^2(\sin x+1)\, dx$. 6. $\int (x-2)\cos 4x dx$.

7. $\int \operatorname{arctg} 3x dx$. 8. $\int x\sin(x-2)\, dx$.

25-вариант

1. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}\, dx$. 2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$. 3. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\, dx$.

4. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\, dx$. 5. $\int (x^2+x)e^{-x} dx$. 6. $\int (x-4)\sin 2x dx$.

7. $\int x\cos 8x dx$. 8. $\int \arcsin 8x dx$.

12-§.Туртинчи мустақил уй иши

Мазкур мустақил уй иши вариантларининг ҳар бирида 9 та мисол булиб, уларни бажаришда қуйидагиларга эътибор бериш керак.

1—4-мисолларда: берилган интегрални интеграл остидаги касрнинг махражини купайтувчиларга ажратиб, сунгра туғри касрни энг содда рационал касрлар йиғиндиси куринишида ифодалаш ёрдамида топиш керак.

5—6-мисолларда: берилган интегрални интеграл остидаги функциянинг илдиз остидаги ифодасини бирор узгарувчи билан алмаштириш ёрдамида топиш керак.

7—8-мисолларда: берилган интегрални $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ ва $t = \operatorname{tg} x$ тригонометрик алмаштиришлар ёрдамида топиш керак.

9-мисолда: берилган интегрални илдиз остидаги ифодада янги узгарувчи киритиш ёрдамида топиш керак.

Вариант мисолларини ечиш намунаси келтирамиз.

1. $\int \frac{7x-x^2-4}{(x+1)(x^2-5x+6)}\, dx$ интегрални топинг.

Ечиш. Интеграл остидаги функция рационал касрдан иборат. Унинг махражини кўпайтувчиларга ажратамиз: $(x+1)(x-2)(x-3)$.

Тўғри касрни энг содда рационал касрлар йиғиндиси кўринишида ёзишдан фойдаланамиз, яъни

$$\frac{7x-x^2-4}{(x+1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонини умумий махражга келтириб, суратларини ўзаро тенглаб қуйидаги айниятга эга бўламиз:

$$7x-x^2-4=A(x-2)(x-3)+B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x-2).$$

A, B, C коэффициентларни хусусий қийматлар бериш усули билан аниқлаймиз:

$$\left.\begin{array}{l|c} x=-1 & -12=12A, \\ x=2 & 6=-3B, \\ x=3 & 8=4C. \end{array}\right\}$$

Бундан: $A=-1$, $B=-2$, $C=2$. Бу қийматларни ўрнига қўйсак, берилган интеграл энг содда рационал функцияларнинг интегралига келади:

$$\int\frac{7x-x^2-4}{(x+1)(x^2-5x+6)}\,dx=\int\left(-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x-2}+\frac{2}{x-3}\right)dx=$$

$$=-\int\frac{dx}{x+1}-2\int\frac{dx}{x-2}+2\int\frac{dx}{x-3}=-\ln|x+1|-2\ln|x-2|+$$

$$+2\ln|x-3|+C=\ln\frac{(x-3)^2}{|x+1|(x-2)^2}+C.$$

2. $\int\frac{15x-x^2-11}{(x-1)(x^2+x-2)}\,dx$ интегрални топинг.

Ечиш.

$$\int\frac{15x-x^2-11}{(x-1)(x^2+x-2)}\,dx=\int\frac{15x-x^2-11}{(x-1)^2(x+2)}\,dx=\int\left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}\right)dx.$$

$$=\left|\begin{array}{l} 15x-x^2-11\equiv A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2 \\ x=1 \mid 3=3B,\quad B=1 \\ x=-2 \mid -45=9C\quad C=-5 \\ x^2 \mid -1=A+C,\quad A=4 \end{array}\right|=$$

$$=\int\left(\frac{4}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{5}{x+2}\right)dx=-4\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-5\ln|x+2|+C.$$

Номаълум коэффициентларни топишда x га $x=1$, $x=-2$ хусусий қийматларни бериб B ва C топилди, x^2 олдидаги коэффициентларни тенглаб эса A топилди.

3. $J(x)=\int\left(\frac{x^4-8x^3+23x^2-43x+27}{(x-2)(x^2-2x+5)}\right)dx$ интегрални топинг.

Ечиш. Интеграл остидаги функция нотўғри каср бўлгани учун унинг суратини махражига бўлиб, кўпҳад ва тўғри рационал каср йиғиндиси кўринишида ёзиб олиш мумкин:

$$J(x)=\int\left(\frac{x^4-8x^3+23x^2-43x+27}{(x-2)(x^2-2x+5)}\right)dx=$$

$$=\int\left(x-4+\frac{-2x^2+3x+13}{(x-2)(x^2-2x+5)}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}-4x+\int\left(\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+5}\right)dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} -2x^2+3x-13\equiv A(x^2-2x+5)+(Bx+C)(x-2) \\ x=2 \mid -15=5A,\quad A=-3, \\ x^2 \mid A+B=-2,\quad B=1, \\ x^0 \mid 5A-2C=-13,\quad C=-1, \end{array}\right|=$$

$$=\frac{x^2}{2}-4x+\int\left(\frac{-3}{x-2}+\frac{x-1}{x^2-2x+5}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}-4x-3\ln\left|x^2-2x+5\right|+C.$$

4. $\int \frac{2x^3-5x^2+8x-32}{x^4+9x^2+20}dx$ интегрални топинг.

Ечиш.

$$\int \frac{2x^3-5x^2+8x-32}{x^4+9x^2+20}dx = \int \frac{2x^3-5x^2+8x-32}{(x^2+4)(x^2+5)}dx =$$

$$= \int \left(\frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{x^2+5}\right)dx =$$

$$= \left|\begin{array}{l} 2x^3-5x^2+8x-32 = (Ax+B)(x^2+5)+(Cx+D)(x^2+4) \\ \begin{array}{c|c} x^3 & 2 = A+C \\ x^2 & -5 = B+D \\ x & 8 = 5A+4C \\ x^0 & -22 = 5B+4D \end{array} \quad \begin{array}{l} A=0,\ B=-2, \\ C=2,\ D=-3. \end{array} \end{array}\right| =$$

$$= \int\left(\frac{-2}{x^2+4} + \frac{2x-3}{x^2+5}\right)dx = -\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \ln(x^2+5) - \frac{3}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

5. $\int \frac{x+1}{3-\sqrt{x-2}}dx$ интегрални топинг.

Ечиш.

$$\int \frac{x+1}{3-\sqrt{x-2}}dx \left|\begin{array}{ll} \sqrt{x-2} = t, & x-2 = t^2 \\ x = t^2+2, & dx = 2tdt \end{array}\right| = -2\int \frac{(t^2+3)tdt}{t-3} =$$

$$= -2\int\left(t^2+3t+12+\frac{36}{t-3}\right)dt =$$

$$= -2\left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 12t + 36\ln|t-3|\right) + C =$$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^3} - 2(x-2) - 24\sqrt{x-2} - 72\ln\left|\sqrt{x-2}-3\right| + C.$$

6. $\int \frac{4\sqrt{x-2}-\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt{x-2}+2\sqrt[3]{x-2}}dx$ интегрални топинг.

Ечиш. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ касрларнинг умумий махражи $m = 6$ бўлгани учун керакли алмаштиришни бажариб интегрални топамиз:

$$\int \frac{4\sqrt{x-2}-\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt{x-2}+2\sqrt[3]{x-2}}dx \left|\begin{array}{ll} x-2 = t^6, & x = t^6+2 \\ dx = 6t^5dt & \end{array}\right| = \int \frac{(4t^3-t)6t^5}{t^3+2t^2}dt =$$

$$= 6\int \frac{4t^6-t^4}{t+2}dt = \int\left(4t^5 - 8t^4 + 15t^3 - 30t^2 + 60t - 120 + \frac{240}{t+2}\right)dt =$$

$$= 6\left(\frac{2}{3}t^6 - \frac{8}{5}t^5 + \frac{15}{4}t^4 - 10t^3 + 60t^2 - 120t + 240\ln|t+2|\right) + C =$$

$$= 4(x-2) - \frac{48}{5}\sqrt[6]{(x-2)^5} + \frac{45}{2}\sqrt[3]{(x-2)^2} - 60\sqrt{x-2} +$$

$$+180\sqrt[3]{x-2} - 720\sqrt[6]{x-2} + 1440\ln\left|\sqrt[6]{x-2}+2\right| + C.$$

7. $\int \frac{dx}{3\sin x - 2\cos x + 1}$ интегрални топинг.

Ечиш.

$$\int \frac{dx}{3\sin x-2\cos x+1}\left|\begin{array}{c} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ x = 2\operatorname{arctgt},\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array}\right| =$$

$$= 2\int \frac{dt}{6t-2+2t^2+1+t^2} = 2\int \frac{dt}{3t^2+6t-1} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{(t+1)^2-\frac{4}{3}} =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\ln\left|\frac{t+1-\frac{2}{\sqrt{3}}}{t+1+\frac{2}{\sqrt{3}}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{3}+2}\right| + C.$$

8. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x - \sin 2x + 3\cos^2 x}$ интегрални топинг.

Ечиш.

$$\int \frac{dx}{2\sin^2 x-\sin 2x+3\cos^2 x}\left|\begin{array}{c} t = \operatorname{tg}x,\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \\ \sin x\cos x = \frac{t}{1+t^2},\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array}\right| =$$

$$=\int\frac{dt}{2t^2-2t+3}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-t+\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x-1}{\sqrt{5}}+C.$$

9. $\int\frac{\cos^3 6x}{\sqrt[5]{\sin 6x}}dx$ интегрални топинг.

Ечиш.

$$\int\frac{\cos^3 6x}{\sqrt[5]{\sin 6x}}dx\left|\begin{matrix}\sin 6x=t\\ dt=6\cos 6xdx\end{matrix}\right|=\frac{1}{6}\int\frac{(1-t^2)}{\sqrt[5]{t}}dt=$$

$$=\frac{1}{6}\int\left(t^{-\frac{1}{5}}-t^{\frac{9}{5}}\right)dt=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{4}t^{\frac{4}{5}}-\frac{5}{14}t^{\frac{14}{5}}\right)+C=$$

$$=\frac{5}{24}\sqrt[5]{\sin^4 6x}-\frac{5}{84}\sqrt[5]{\sin^{14} 6x}+C.$$

1-вариант

1. $\int\frac{3x^2+20x+9}{(x^2+4x+3)(x+5)}dx$.
2. $\int\frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$.
3. $\int\frac{3x+13}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$.
4. $\int\frac{5x}{x^4+3x^2-4}dx$.
5. $\int\frac{dx}{2+\sqrt{x+3}}$.
6. $\int\frac{1-\sqrt{x+1}}{\left(1+\sqrt[3]{x+1}\right)\sqrt{x+1}}dx$.
7. $\int\frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}$.
8. $\int\frac{dx}{8\sin^2 x-16\sin x\cos x}$.
9. $\int\cos^4 3x\sin^2 3xdx$.

2-вариант

1. $\int\frac{12dx}{(x-2)(x^2-2x+3)}$.
2. $\int\frac{x^3-2x^2-2x+1}{x^3-x^2}dx$.
3. $\int\frac{x^2-6x+8}{x^3+8}dx$.
4. $\int\frac{2x^5-2x+1}{1-x^4}dx$.

5. $\int\frac{xdx}{\sqrt{x+3}}$.
6. $\int\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}dx$.
7. $\int\frac{dx}{5-4\sin x+2\cos x}$.
8. $\int\frac{dx}{16\sin^2 x-8\sin x\cos x}$.
9. $\int\sqrt[5]{\sin^4 x}\,\cos^3 xdx$.

3-вариант

1. $\int\frac{43x-67}{(x-1)(x^2-x-12)}dx$.
2. $\int\frac{3x^2+1}{(x-1)(x^2-1)}dx$.
3. $\int\frac{12-6x}{(x-1)(x^2-4x+13)}dx$.
4. $\int\frac{x^4+x^3+2x^2+x+2}{x^4+5x^2+4}dx$.
5. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x-3}}$.
6. $\int\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx$.
7. $\int\frac{3\sin x-2\cos x}{1+\cos x}dx$.
8. $\int\frac{dx}{1+3\cos^2 x}dx$.
9. $\int\cos^3 x\sin^8 xdx$.

4-вариант

1. $\int\frac{2x^4+8x^3+9x^2-7}{(x^2+x-2)(x+3)}dx$.
2. $\int\frac{x+2}{x^3-x^2}dx$.
3. $\int\frac{2x^2+2x+20}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$.
4. $\int\frac{5dx}{x^4+3x^2-4}$.
5. $\int\frac{xdx}{2+\sqrt{x+4}}$.
6. $\int\frac{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt[6]{x^5}}dx$.
7. $\int\frac{dx}{5+3\cos x-5\sin x}$.
8. $\int\frac{2\operatorname{tg}x+3}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx$.
9. $\int\cos^4 x\sin^5 xdx$.

5-вариант

1. $\int\frac{8xdx}{(x^2+6x+5)(x+3)}dx$.
2. $\int\frac{4x^4+8x^3-3x-3}{x^3+2x^2+x}dx$.

3. $\int \frac{x^2+3x-6}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx$.

4. $\int \frac{x^3+8x-2}{x^4+4x^2}dx$.

5. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x+1}}$.

6. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$.

7. $\int \frac{dx}{5\cos x+10\sin x}$.

8. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x+4\sin^2 x}$.

9. $\int \frac{\cos^3 xdx}{\sqrt[3]{\sin^4 x}}$.

6-вариант

1. $\int \frac{2x^4-7x^3+7x^2-8x}{(x^2-5x+6)(x+1)}dx$.

2. $\int \frac{x+2}{x^3+x^2}dx$.

3. $\int \frac{x^2+3x+2}{x^3-1}dx$.

4. $\int \frac{2x^3-2x^2+5}{(x-1)^2(x^2+4)}dx$.

5. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x+2}}dx$.

6. $\int \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}dx$.

7. $\int \frac{dx}{3+2\cos x-\sin x}$.

8. $\int \frac{\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{ctg}^2x}dx$.

9. $\int \sqrt[5]{\sin^3 2x}\cdot\cos^3 2xdx$.

7-вариант

1. $\int \frac{2x^4+8x^3-45x-64}{(x-1)(x^2+5x+6)}dx$.

2. $\int \frac{4x^2}{(x^2-2x+1)(x+1)}dx$.

3. $\int \frac{36dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}$.

4. $\int \frac{x^3+x^2-x-3}{x^4-x^2}dx$.

5. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+4}}$.

6. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[6]{x-1}}dx$.

7. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$.

8. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x-5\cos^2 x}$.

9. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}dx$.

8-вариант

1. $\int \frac{2x^4+17x^3+32x^2-7x}{(x^2+4x+3)(x+5)}dx$.

2. $\int \frac{2x^2-2x-1}{x^2-x^3}dx$.

3. $\int \frac{9x-9}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$.

4. $\int \frac{x^3-x-5}{x^4+3x^2-4}dx$.

5. $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x-3}dx$.

6. $\int \frac{\sqrt{x-1}-2\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}dx$.

7. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$.

8. $\int \frac{dx}{7\cos^2 x+2\sin^2 x}$.

9. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos^4 x}}dx$.

9-вариант

1. $\int \frac{6x^2+6x-6}{(x+1)(x^2+x-2)}dx$.

2. $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx$.

3. $\int \frac{7x-10}{x^3+8}dx$.

4. $\int \frac{x^3-x-1}{x^4-x^2}dx$.

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+3}$.

6. $\int \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[6]{x+3}}dx$.

7. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$.

8. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$.

9. $\int \frac{3\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$.

10-вариант

1. $\int \frac{37x-85}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx$.

2. $\int \frac{4x^4+8x^3-x-2}{x(x+1)^2}dx$.

3. $\int \frac{4x^2+3x+17}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$.

4. $\int \frac{2x^2-7x+10}{(x-1)(x^3-x^2+4x-4)}dx$.

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)}$.

6. $\int \frac{\sqrt[6]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}dx$.

7. $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+3}$.

8. $\int \frac{dx}{\cos x\sin^3 x}$.

9. $\int \sin^3 x\cos^4 xdx$.

11-вариант

1. $\int \frac{3x^2+3x-24}{(x^2-x-2)(x-3)}dx$.

2. $\int \frac{2x^4-4x^3+2x^2-4x+1}{x(x-1)^2}dx$.

3. $\int \frac{4x+2}{x^4+4x^2}dx$.

4. $\int \frac{4x+2}{x^4+4x^2}dx$.

5. $\int \frac{1+x}{x+\sqrt{x}}dx$.

6. $\int \frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}}dx$.

7. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$.

8. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

9. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}dx$.

12-вариант

1. $\int \frac{2x^4-7x^3+3x+20}{(x-2)(x^2-2x-3)}dx$.

2. $\int \frac{3x-x^2-2}{x(x+1)^2}dx$.

3. $\int \frac{x^2-5x+40}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx$.

4. $\int \frac{x^3-x+2}{x^4+x^2}dx$.

5. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$.

6. $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}dx$.

7. $\int \frac{dx}{8+4\cos x}$.

8. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x+8\sin x\cos x}$.

9. $\int \sqrt[3]{\cos^2 x}\,\sin^2 xdx$.

13-вариант

1. $\int \frac{3x^2-15}{(x-1)(x^2+5x+6)}dx$.

2. $\int \frac{2x^3+1}{x^2(x+1)}dx$.

3. $\int \frac{4x-x^2-12}{x^3+8}dx$.

4. $\int \frac{x^2+2x+4}{x^4+5x^2+4}dx$.

5. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-1}dx$.

6. $\int \frac{\sqrt[6]{x+3}}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt{x+3}}dx$.

7. $\int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$.

8. $\int \frac{\sin 2x}{4\sin^4 x+\cos^4 x}dx$.

9. $\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\,\cos^3 x\,dx$.

14-вариант

1. $\int \frac{x^2-19x+6}{(x-1)(x^2+5x+6)}dx$.

2. $\int \frac{x^3-3}{(x-1)(x^2-1)}dx$.

3. $\int \frac{x^2-13x+10}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$.

4. $\int \frac{2x^5-2x^3+x^2}{1-x^2}dx$.

5. $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x+5}}$.

6. $\int \frac{x+1+\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{(x+1)(1+\sqrt[3]{x+1})}dx$.

7. $\int \frac{dx}{7\sin x-3\cos x}$.

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x}$.

9. $\int \sqrt[5]{\cos^3 2x}\,\sin^3 2xdx$.

15-вариант

1. $\int \frac{6xdx}{x^3+2x^2-x-2}$.

2. $\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}dx$.

3. $\int \frac{3-9x}{x^4+4x^2}dx$.

4. $\int \frac{x^4dx}{x^4+5x^2+4}$.

5. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-1}}$.

6. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt[3]{x}+1)\sqrt{x}}dx$.

7. $\int \frac{dx}{2+4\sin x+3\cos x}$.

8. $\int \frac{dx}{4\cos^2+3\sin^2 x}$.

9. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos^3 x}}dx$.

16-вариант

1. $\int \frac{4x^2+32x+52}{(x^2+6x+5)(x+3)}dx$.

2. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x}dx$.

3\. $\int \frac{6-9x}{x^3+8}\,dx$.

4\. $\int \frac{x^3-2x+5}{x^4-1}\,dx$.

5\. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-7}}\,dx$.

6\. $\int \frac{\sqrt{3x+1}+2}{\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{3x+1}}\,dx$.

7\. $\int \frac{dx}{4\cos x+3\sin x}$.

8\. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x-2}$.

9\. $\int \sin^2 2x\cos^4 2x\,dx$.

17-вариант

1\. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}\,dx$.

2\. $\int \frac{4x^4+8x^3-1}{(x^2+x)(x+1)}\,dx$.

3\. $\int \frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)}\,dx$.

4\. $\int \frac{x^3+4x-3}{x^4+4x^2}\,dx$.

5\. $\int \frac{1+x}{x\sqrt{x-1}}\,dx$.

6\. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$.

7\. $\int \frac{2-\sin x+3cx}{1+\cos x}\,dx$.

8\. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+\sin 2x+3\cos^2 x}$.

9\. $\int \sqrt[5]{\cos^4 x}\,\sin^3 x\,dx$.

18-вариант

1\. $\int \frac{2x^4+8x^3-17x-5}{(x^2+2x-3)(x+2)}\,dx$.

2\. $\int \frac{4x\,dx}{(x^2-1)(x+1)}$.

3\. $\int \frac{x^2+23}{(x+1)(x^2+6x+13)}\,dx$.

4\. $\int \frac{7x-2}{(x-1)(x^2+4)}\,dx$.

5\. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x-7}}$.

6\. $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-1}\,dx$.

7\. $\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$.

8\. $\int \frac{dx}{5\sin^2 x-3\cos^2 x}$.

9\. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}\,dx$.

19-вариант

1\. $\int \frac{2x^4+17x^3+40x^2+37x+36}{(x+1)(x^2+8x+15)}\,dx$.

2\. $\int \frac{dx}{x^3+x^2}$.

3\. $\int \frac{2x^2+7x+7}{(x-1)(x^2+2x+5)}\,dx$.

4\. $\int \frac{x^3+2x^2+4x-2}{x^4+3x^2-4}\,dx$.

5\. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x-4}}$.

6\. $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[6]{x}}\,dx$.

7\. $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$.

8\. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+3\sin x\cos x-\cos^2 x}$.

9\. $\int \sin^4 2x\cos^2 2x\,dx$.

20-вариант

1\. $\int \frac{6x^2}{(x-1)(x^2+3x+2)}\,dx$.

2\. $\int \frac{x^3+4x^2+2x-1}{x^3-x^2}\,dx$.

3\. $\int \frac{19x-x^2-34}{(x+1)(x^2-4x+13)}\,dx$.

4\. $\int \frac{4x^2-2}{x^4-x^2}\,dx$.

5\. $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx$.

6\. $\int \frac{\sqrt[6]{3x+1}+1}{\sqrt{3x+1}-\sqrt[3]{3x+1}}\,dx$.

7\. $\int \frac{7+6\sin-5\cos x}{1+\cos x}\,dx$.

8\. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x+4\cos^4 x}\,dx$.

9\. $\int \frac{\cos^3 2x}{\sqrt[3]{\sin^2 2x}}\,dx$.

21-вариант

1\. $\int \frac{2x^4-5x^3-15x^2+40x-70}{(x^2+2x-3)(x-4)}\,dx$.

2\. $\int \frac{x^3-4x+5}{(x^2-1)(x-1)}\,dx$.

3\. $\int \frac{2x+22}{(x+2)(x^2-2x+10)}\,dx$.

4\. $\int \frac{(2x+3)}{(x-1)(x^3-x^2+4x-4)}\,dx$.

5\. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x-8}}$.

6\. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{4x-\sqrt[3]{x^2}}$.

7. $\int\frac{dx}{2-3\cos x+\sin x}$.

8. $\int\frac{\sin^2 x}{3\sin^2 x-\cos^2 x}dx$.

9. $\int\sin^4 3x\cos^2 3x\,dx$.

22-вариант

1. $\int\frac{2x^4-7x^3+2x^2+13}{(x^2-5x+6)(x+1)}dx$.

2. $\int\frac{3x^2+2}{x(x+1)^2}dx$.

3. $\int\frac{5x^2+17x+36}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx$.

4. $\int\frac{x^3+x^2+x-1}{x^4+5x^2+4}dx$.

5. $\int\frac{dx}{3+\sqrt{x-6}}$.

6. $\int\frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[4]{x}}dx$.

7. $\int\frac{dx}{3\sin x-\cos x}$.

8. $\int\frac{\mathrm{tg}x}{\sin^2 x+3\cos^2 x}dx$.

9. $\int\sin^4 x\cos^5 x dx$.

23-вариант

1. $\int\frac{7x^2-17x}{(x-2)(x^2-2x-3)}dx$.

2. $\int\frac{x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$.

3. $\int\frac{6x}{x^3-1}dx$.

4. $\int\frac{2x^5-2x^3-x^2}{1-x^4}dx$.

5. $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x+6}}$.

6. $\int\frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x\left(1+\sqrt[6]{x}\right)}dx$.

7. $\int\frac{dx}{4-4\sin x+3\cos x}$.

8. $\int\frac{dx}{6-3\cos^2 x}$.

9. $\int\sin^5 x\cdot\sqrt[5]{\cos^3 x}dx$.

24-вариант

1. $\int\frac{6x^4-30x^2+30}{(x^2-1)(x+2)}dx$.

2. $\int\frac{3x^2-7x+2}{(x^2-x)(x-1)}dx$.

3. $\int\frac{3x^2+2x+1}{x^3-1}dx$.

4. $\int\frac{5x^3-x^2+21x-9}{x^4+10x^2+9}dx$.

5. $\int\frac{x-1}{x\sqrt{x-2}}dx$.

6. $\int\frac{\sqrt{x}dx}{1-\sqrt[3]{x}}$.

7. $\int\frac{dx}{\cos x-3\sin x}$.

8. $\int\frac{dx}{2\sin^2 x-\sin 2x+\cos^2 x}$.

9. $\int\frac{3\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$.

25-вариант

1. $\int\frac{3x^2-17x+2}{(x-1)(x^2+5x+6)}dx$.

2. $\int\frac{x^2+x+2}{x^3+x^2}dx$.

3. $\int\frac{4x^2+7x+5}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$.

4. $\int\frac{x^3-x^2+4x}{x^4-1}dx$.

5. $\int\frac{x^2}{\sqrt{x-2}}dx$.

6. $\int\frac{\sqrt{x}}{3x+\sqrt[3]{x^2}}dx$.

7. $\int\frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$.

8. $\int\frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}dx$.

9. $\int\sin^3 x\cos^8 x\,dx$.

V боб

АНИҚ ИНТЕГРАЛ

1-§.Аниқ интеграл ҳақида тушунча. Аниқ интегрални ҳисоблаш

Бирор $[a;b]$ кесмада узлуксиз $y=f(x)$ функция берилган бўлсин. Бу кесмани ихтиёрий равишда нуқталар билан n та қисмга бўламиз (12-чизма):

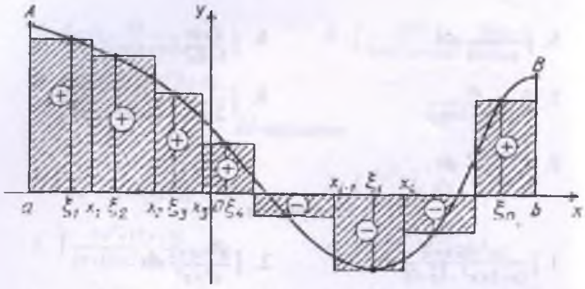
$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b.$$

Бу қисмларнинг узунликлари мос равишда

$$\Delta x_1=x_1-x_0,\ \Delta x_2=x_2-x_1,\ldots,\Delta x_n=x_n-x_{n-1}$$

га тенг. Ҳар бир қисмий интервалларнинг ичида биттадан ихтиёрий ξ_i нуқта танлаб оламиз:

$$\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_n.$$



12-чизма.

Бу танланган нуқталарда функциянинг қийматларини ҳисоблаймиз:

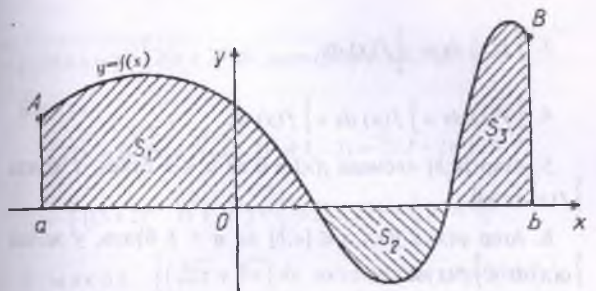
$$f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n).$$

Бу миқдорлардан

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \\ = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \tag{5.1}$$

йиғиндини тузамиз. (5.1) йиғинди $y = f(x)$ функциянинг $[a;b]$ кесмадаги *интеграл йиғиндиси* дейилади. S_n йиғинди геометрик нуқтаи назардан 12-чизмадаги штрихланган тўғри тўртбурчаклар юзларининг йиғиндисини билдиради. (5.1) интеграл йиғиндининг Δx_i ларнинг энг каттаси узунлиги нолга интилгандаги $(\Delta x_i \to 0)$ лимити (қиймати) $[a;b]$ кесманинг бўлиниш усулига ва ундаги $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ нуқталарнинг танланишига боғлиқ бўлмаса, бу лимит $y = f(x)$ функциянинг $x = a$ дан $x = b$ гача олинган *аниқ интеграли* дейилади ва қуйидагича белгиланади ("$f(x)$ дан x бўйича a дан b гача олинган аниқ интеграл" деб ўқилади):

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx\,. \tag{5.2}$$



13-чизма.

$f(x)$ — интеграл остидаги функция, $f(x)dx$ — интеграл остидаги ифода, $[a;b]$ — интеграллаш оралиғи, a ва b — сонлар мос равишда интеграллашнинг қуйи ва юқори чегаралари дейилади.

Теорема. *Агар $y = f(x)$ функция $[a;b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция шу кесмада интегралланувчидир, яъни бундай функциянинг аниқ интеграли мавжуддир.*

Агар $f(x) \geq 0$, $x \in [a;b]$бўлса, у ҳолда бу функциянинг аниқ интеграли $y = f(x)$ функциянинг графиги, Ox ўқ ва $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзини ифодалайди. Бундай шакл *эгри чизиқли трапеция* дейилади.

Масалан, 13-чизмада кўрсатилган функциянинг графиги билан чегараланган юз учун:

$$\int_a^b f(x)\,dx = S_1 - S_2 + S_3\,.$$

Аниқ интегралнинг асосий хоссаларини кўрамиз (қуйида келтирилган $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функцияларни $[a;b]$ кесмада интегралланувчи деб оламиз).

1. $\int_a^b \left(f(x) \pm \varphi(x)\right) dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b \varphi(x)\,dx.$

2. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx \quad (c = \text{const}).$

3. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$

4. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$

5. Агар $[a;b]$ кесмада $f(x) \geq 0$ ва $a < b$ бўлса, у ҳолда $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

6. Агар $\varphi(x) \leq f(x)$, $x \in [a;b]$ ва $a < b$ бўлса, у ҳолда $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx.$

7. Агар $m = \min\limits_{x \in [a;\,b]} f(x)$, $M = \max\limits_{x \in [a;\,b]} f(x)$ ва $a < b$ бўлса, у ҳолда

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

8. Агар $f(x)$ функция $[a;b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда шу кесмада $x = c < (a < c < b)$ нуқта топиш мумкинки,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

тенглик ўринли бўлади;

9. Агар $f(x)$ функция узлуксиз ва $\Phi'(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ бўлса, у ҳолда қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$\Phi'(x) = f(x),$$

бунда $\Phi(x)$ га $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси дейилади;

10. Агар $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг қандайдир бошланғич функцияси бўлса, у ҳолда қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \equiv F(x)\Big|_a^b. \qquad (5.3)$$

Бу тенглик *Ньютон — Лейбниц формуласи* дейилади. Аниқ интеграллар асосан (5.3) формула ёрдамида ҳисобланади. Энди қуйидаги аниқ интегралларни ҳисоблаймиз.

1-мисол. $\int\limits_1^3 2(x+2)^2 dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш.

$$\int\limits_1^3 2(x+2)^2 dx = 2\int\limits_1^3 (x+2)^2 d(x+2) = \frac{2}{3}(x+2)^3\Big|_1^3 =$$

$$= \frac{2}{3}\left((3+2)^3 - (1+2)^3\right) = \frac{2}{3}(125-27) = \frac{2}{3}98 = \frac{196}{3}.$$

2-мисол. $\int\limits_0^8 \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right) dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш.

$$\int\limits_0^8 \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right) dx = \sqrt{2}\int\limits_0^8 \sqrt{x}dx + \int\limits_0^8 \sqrt[3]{x}dx = \sqrt{2}\int\limits_0^8 x^{\frac{1}{2}}dx + \int\limits_0^8 x^{\frac{1}{3}}dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cdot 2x^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_0^8 + \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}\Big|_0^8 = \frac{2\sqrt{2}}{8}8^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}8^{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{8^3} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{2^{3\cdot 4}} =$$

$$= \frac{64}{3} + 12 = 33\frac{1}{3}.$$

3-мисол. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\ \sin x\,dx = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\ d(\cos x) =$$

$$-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d(\cos x) + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,d(\cos x) = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\cos^3 x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

4-мисол. $\int\limits_1^2 \frac{2x-1}{x^3+x}\,dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Интеграл остидаги функция тўғри рационал каср. Уни энг содда рационал касрлар йиғиндиси кўринишида ифодалаймиз ва кейин интегрални ҳисоблаймиз:

$$\frac{2x-1}{x^3+x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1},\ 2x-1=A(x^2+1)+Bx^2+Cx.$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A+B=0, \\ x^1 & \ \ C=2, \\ x^0 & \ \ A=-1 \end{array}$$

бундан $A=-1,\ B=1,\ C=2.$

Демак,

$$\int_1^2\frac{2x-1}{x^3+x}\,dx=\int_1^2\left(-\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{2}{1+x^2}\right)dx=$$

$$=\left(-\ln|x|+\frac{1}{2}\left|1+x^2\right|+2\text{arctg}x\right)\Big|_1^2=$$

$$=-\ln 2+\frac{1}{2}\ln 5+2\,\text{arctg}\,2-\frac{1}{2}\ln 2-2\,\text{arctg}\,1=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{8}+2\left(\text{arctg}\,2-\frac{\pi}{4}\right)\approx 0{,}38.$$

Агар $y=f(x)$ функция $[a;b]$ кесмада узлуксиз, $x=\varphi(t)$ функция эса ўзининг ҳосиласи билан бирга $[a;b]$ кесмада узлуксиз ва монотон бўлиб, $\varphi(a)=a$, $\varphi(b)=b$ ва $f[\varphi(t)]$ мураккаб функция $[\alpha;\beta]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда аниқ интеграл учун қуйидаги ўзгарувчини алмаштириш формуласи ўринли бўлади:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt\,. \qquad (5.4)$$

Бу алмаштиришни қўллашга доир мисолар кўрамиз.

5-мисол. $\int_3^8\frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $\sqrt{1+x}=t$ алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда
$t^2=1+x,\ x=t^2-1,\ dx=2t\,dt$
$x=3$ да $t=2=a,\ x=8$ да эса $t=3=b.$

Булар учун юқорида санаб ўтилган ҳамма шартлар бажарилади. Демак,

$$\int_3^8\frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx=\int_2^3\frac{(t^2-1)2\,tdt}{t}=2\int_2^3(t^2-1)\,dt=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_2^3$$

$$=2\left(9-3-\frac{8}{3}+2\right)=\frac{32}{3}.$$

6-мисол. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{2\cos x+3}$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш.

$t=\text{tg}\,\frac{x}{2}$ алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ x=2\text{arctgt},\ dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\alpha=tg0=0,\ \beta=\text{tg}\,\frac{\pi}{4}=1$$

Демак,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{2\cos x+3}=\int_0^1\frac{\frac{2t}{1+t^2}dt}{2\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+3}=\int_0^1\frac{2dt}{t^2+5}=\frac{2}{\sqrt{5}}\,\text{arctg}\,\frac{t}{\sqrt{5}}\Big|_0^1=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{5}}\,\text{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{5}}\approx 0{,}28.$$

Агар $u(x)$ ва $v(x)$ функциялар $[a;b]$ кесмада узлуксиз ва ҳосилага эга бўлсалар, у ҳолда

$$\int_a^b u(x)d\upsilon(x)=u(x)\quad \upsilon(x)\Big|_a^b-\int_a^b\vartheta(x)\,du(x) \qquad (5.5)$$

тенглик ўринли бўлади. (5.5) формула аниқ интегрални *бўлаклаб интеграллаш формуласи* дейилади. (5.5) формула татбиқига доир мисолар қараймиз.

7-мисол. $\int_0^\pi x\sin x\,dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш.

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx \left| \begin{matrix} u = x, & du = dx \\ d\upsilon = \sin x\,dx, & \upsilon = -\cos x \end{matrix} \right| =$$

$$= -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x\,dx = -x\cos x\Big|_0^{\pi} - \sin x\Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\pi\cdot\cos\pi + 0\cdot\cos 0 = \pi.$$

8-мисол. $\int_1^e x\ln^2 x\,dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш.

$$\int_1^e x\ln^2 x\,dx \left| \begin{matrix} u = \ln^2 x, & du = \frac{2}{x}\ln x\,dx \\ d\upsilon = x\,dx, & \upsilon = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln^2 x\Big|_1^e - \int_1^e x\ln x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, & du = \frac{1}{x}dx \\ d\upsilon = x\,dx, & \upsilon = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln^2 x\Big|_1^e - \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e + \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln^2 x\Big|_1^e - \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e + \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2 - 1).$$

Машқлар

Қуйидаги аниқ интегралларни ҳисобланг:

237. $\int_1^2 \left(2x^2 + \frac{2}{x^4}\right)dx$; 238. $\int_1^4 \left(2x + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$;

239. $\int_0^1 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x^3\right)dx$; 240. $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

241. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$; 242. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,dx$;

243. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$; 244. $\int_0^4 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$;

245. $\int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1}dy$; 246. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$;

247. $\int_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1+x^2}\,dx$; 248. $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$;

249. $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$; 250. $\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$;

251. $\int_4^5 \frac{xdx}{(1+x^2)^3}$; 252. $\int_0^4 \frac{xdx}{\cos^2(x^2)}$;

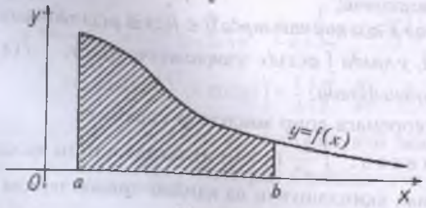
253. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sin^3 xdx$; 254. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2-9}$;

255. $\int_0^1 x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$; 256. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\mathrm{tg}^2 x\,dx$;

2-§. Хосмас интеграллар

Агар $y = f(x)$ функция $a \le x \le +\infty$ да узлуксиз бўлиб, $\int_a^B f(x)dx = J(B)$ бўлса, бунда $J(B)$ — бирор узлуксиз функция (14-чизма), ушбу

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad (5.6)$$



14-чизма.

лимит юқори чегараси чексиз бўлган *хосмас интеграл* дейилади ва у

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \tag{5.7}$$

каби белгиланади. Демак, таърифга кўра:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx\,.$$

Агар (5.6) лимит мавжуд бўлса, (5.7) интеграл *яқинлашувчи*, агар (5.6) лимит мавжуд бўлмаса ёки чексизликка интилса, (5.7) интеграл *узоқлашувчи* дейилади.

Худди шунингдек, қуйи чегараси чексиз бўлган хосмас интеграл тўғрисида ҳам гапириш мумкин, у қуйидагича аниқланади:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx\,,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx,$$

бунда $-\infty < c < \infty$.

Агар $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, (5.7) интеграл *абсолют яқинлашувчи* дейилади. (5.7) интегралнинг яқинлашишини аниқлаш учун қуйидаги таққослаш аломатларидан фойдаланилади.

1-теорема. *x нинг барча $x \geq a$ қийматларида $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда*

1)*агар* $\int_a^{+\infty}|\varphi(x)|dx$ *яқинлашувчи бўлса, у ҳолда* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *ҳам яқинлашувчи;*

2) *агар $x \geq a$ қийматларда $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда* $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ *узоқлашувчи бўлса,* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *ҳам узоқлашувчи бўлади.*

Бу теоремага доир мисоллар қараймиз.

1-мисол. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^n}$ $(n > 0)$ интеграл n нинг қандай қийматларида яқинлашувчи ва қандай қийматларида узоқлашувчи бўлишини аниқланг.

Ечиш. $n \neq 1$ бўлсин деб фараз қиламиз. У ҳолда

$$\int_1^b \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{1-n}x^{1-n}\Big|_1^b = \frac{1}{1-n}\left(b^{1-n}-1\right),$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^n} = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-n}\left(b^{1-n}-1\right).$$

Демак, агар $n > 1$ бўлса,

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^n} = \frac{1}{1-n}$$

бўлиб, берилган интеграл яқинлашувчи бўлади; агар $n < 1$ бўлса,

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^n} = +\infty$$

бўлиб, берилган итеграл узоқлашувчи бўлади. $n = 1$ бўлса,

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^n} = \lim_{b\to+\infty}\ln b = +\infty$$

бўлиб, интеграл узоқлашувчи бўлади.

Демак, $0 < n < 1$ да хосмас интеграл яқинлашувчи, $1 \leq n < \infty$ да эса узоқлашувчи экан.

2-мисол. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+13}$ хосмас интегрални ҳисобланг ёки унинг узоқлашувчи ёки яқинлашувчилигини аниқланг.

Ечиш.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+13} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{(x+2)^2+9} = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}\Big|_1^b =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{b+2}{3} - \operatorname{arctg}1\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12}\,.$$

Демак, интеграл мавжуд ва яқинлашувчи экан.

3-мисол. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)e^x}$ интеграл яқинлашувчи эканлигини кўрсатинг.

Ечиш. $x \geq 1$ бўлганда $\frac{1}{(1+x^2)e^x} \leq \frac{1}{1+x^2}$ тенгсизлик ўринли ва хосмас интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)e^x} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_1^b =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

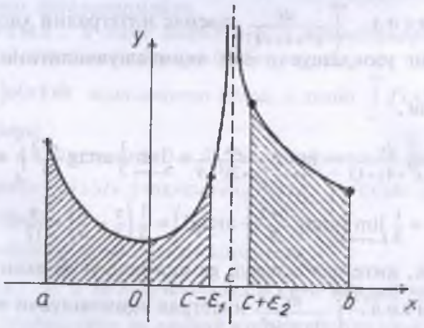
яқинлашувчи бўлгани учун (1-теоремага кўра) берилган интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади.

$y = f(x)$ функция $[a;b]$ кесманинг $x = c$ нуқтасидан бошқа ҳамма нуқталарида узлуксиз бўлсин, $x = c$ нуқтада эса узилишга эга бўлсин (15-чизма). У ҳолда таърифга кўра

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx \qquad (5.8)$$

бунда $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$. (5.8) интеграл узлукли функциянинг хосмас интеграли дейилади. Агар (5.8) нинг ўнг томонидаги иккала интеграл мавжуд бўлса, у ҳолда берилган интеграл яқинлашувчи бўлади.

Агар (5.8) нинг ўнг томонидаги интеграллардан бирортаси узоқлашувчи бўлса, у ҳолда берилган интеграл ҳам узоқлашувчи бўлади.



15-чизма.

$a = c$ ёки $b = c$ бўлган ҳолда (5.8) тенгликнинг ўнг томони битта лимитдан иборат бўлиб қолади.

4-мисол. $\int_0^1 \frac{dx}{x^n}$ ($n = \text{const} > 0$) хосмас интегралнинг яқинлашувчи ва узоқлашувчи бўлиш шартларини топинг.

Ечиш. Интеграл остидаги функция $x = 0$ да узилишга эга. Агар $n \neq 1$ бўлса, у ҳолда

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^n} = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_0^1 \frac{dx}{x^n} = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \frac{x^{-n+1}}{-n+1}\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(\frac{1}{-n+1} - \frac{\varepsilon^{-n+1}}{-n+1} \right) =$$

$$= \begin{cases} n < 1 & \text{да } \frac{1}{1-n}, \\ n > 1 & \text{да } \infty. \end{cases}$$

Агар, $n = 1$ бўлса, у ҳолда

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^n} = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \ln[x]\Big|_\varepsilon^0 = -\lim_{\varepsilon \to 0+0} \ln \varepsilon = +\infty.$$

Демак, берилган интеграл $0 < n < 1$ да яқинлашувчи ва $n \geq 1$ да узоқлашувчи экан.

5-мисол. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ хосмас интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $x = 1$ да интеграл остидаги функция узилишга эга. Шунинг учун таърифга кўра:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} (-2)(1-x)^{-\frac{1}{2}}\Big|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= -2 \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\sqrt{1 - 1 + \varepsilon} - \sqrt{1 - 0} \right) = 2 \lim_{\varepsilon \to 0} \left(1 - \sqrt{\varepsilon} \right) = 2 \quad (\varepsilon > 0).$$

Демак берилган интеграл яқинлашувчи.

2-теорема. *$f(x)$, $\varphi(x)$ функциялар $[a;b]$ кесмадаги $x = c$ нуқтада узилишга эга ва $[a;b]$ кесманинг $x = c$ нуқтасидан бошқа ҳамма нуқталарда $\varphi(x) \geq f(x) \geq 0$ тенгсизлик бажарилсин. У ҳолда*

1) *агар* $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ *яқинлашувчи бўлса, у ҳолда* $\int_a^b f(x)\,dx$ *ҳам яқинлашувчи;*

2) *агар x = с дан бошқа барча нуқталар учун* $f(x) \geq \varphi(x) \geq 0$ *тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда* $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ *узоқлашувчи бўлганда,* $\int_a^b f(x)\,dx$ *ҳам узоқлашувчи бўлади.*

6-мисол. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2x^3}}$ интегралнинг яқинлашувчилигини текширинг.

Ечиш. Интеграл остидаги функция $x = 0$ да узилишга эга. $x \geq 0$ да $\frac{1}{\sqrt[3]{x+2x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ бўлгани учун қуйидаги хосмас интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim \frac{2}{3}\sqrt{x}\,\Big|_\varepsilon^1 = \frac{2}{3}\lim_{\varepsilon \to 0}\left(1 - \sqrt{\varepsilon}\right) = \frac{2}{3} \quad (\varepsilon > 0).$$

Хосмас интеграл яқинлашувчи бўлгани учун берилган интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади.

Машқлар

Қуйидаги аниқ интегралларни ҳисобланг:

257. $\int_0^3 xe^{3x}\,dx$. 258. $\int_0^\pi x\sin x\,dx$.

259. $\int_1^e \ln x\,dx$. 260. $\int_0^\pi x^2\cos x\,dx$.

261. $\int_{\sqrt{3}}^{\pi^2} \cos\sqrt{x}\,dx$. 262. $\int_0^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$.

263. $\int_0^1 xe^{-x}dx$. 264. $\int_0^1 x^2e^x dx$.

Қуйидаги хосмас интегралларни ҳисобланг ёки яқинлашувчилигини текширинг:

265. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. 266. $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$.

267. $\int_0^{1/e} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$. 268. $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^3}$.

269. $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^3}$. 270. $\int_0^\infty x^3e^{-x^2}dx$.

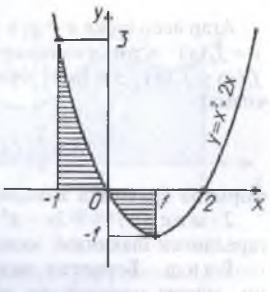
271. $\int_1^\infty \frac{2+\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$. 272. $\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$.

3-§. Аниқ интегралнинг геометрияга оид масалаларни ечишга татбиқи

1. Ясси шакллар юзларини ҳисоблаш. 1-§ дан маълумки, агар $[a;b]$ кесмада $y = f(x) \geq 0$ бўлса, у ҳолда $y = f(x)$ эгри чизиқ, Ox ўқи ва $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзи

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

формула билан аниқланади. Бу формула ёрдамида юзларни ҳисоблашга доир мисолларни кўрамиз.



16-чизма.

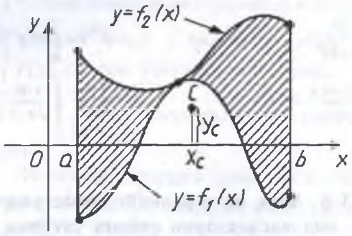
1-мисол. $y = x^2 - 2x$ эгри чизиқ, $x = -1$, $x = 1$ тўғри чизиқлар ва Ox ўқи билан чегараланган шаклнинг юзини ҳисобланг.

Ечиш. Дастлаб берилган чизиқлар билан чегараланган шаклни чизамиз (16-чизма). Изланаётган юз $S = |\ S_1\ | + |\ S_2\ | = S_1 - S_2$, шунинг учун:

$$S = \int_{-1}^0 \left(x^2 - 2x\right)dx - \int_0^1 \left(x^2 - 2x\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_{-1}^0 - \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{3} + 1\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + 1 = 2.$$



17-чизма.

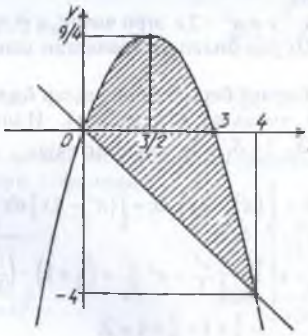
Агар ясси шакл $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар ва $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ эгри чизиқлар билан чегараланган ҳамда $f_1(x) \leq f_2(x)$, $x \in [a;b]$ бўлса, у ҳолда шаклнинг юзи (17-чизма)

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right) dx \tag{5.9}$$

формула ёрдамида аниқланади.

2-мисол. $y = 3x - x^2$ ва $y = -x$ чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзини ҳисобланг.

Ечиш. Берилган чизиқларнинг кесишган нуқтасини, сўнгра изланаётган шаклнинг юзини чизамиз. (18-чизма).



18-чизма.

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x - x^2 \\ y = -x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = -x, \\ -x = 3x - x^2 \end{array}\right\}$$

Бу системанинг ечими $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $y_1 = 0$, $y_2 = -4$. (5.9) формулага асосан:

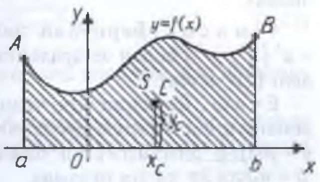
$$S = \int_0^4 \left(3x - x^2 - (-x)\right) dx = \int_0^4 \left(4x - x^2\right) dx =$$

$$= \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4 = \frac{32}{3}.$$

Агар $y = f(x)$ эгри чизиқ тенгламаси параметрик, яъни $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ кўринишда берилган бўлса, эгри чизиқли трапециянинг юзи

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\, \varphi'(t)\, dt \tag{5.10}$$

формула билан топилади, бунда a ва b лар $\varphi(\alpha) = a$ ва $\psi(\beta) = b$ тенгламалардан аниқланади.$[\alpha;\beta]$ кесмада $\psi(t) \geq 0$ деб олинади (19-чизма).



19-чизма.

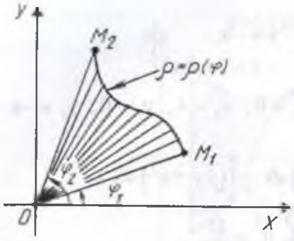
3-мисол. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипс билан чегараланган шаклнинг юзини ҳисобланг.

Ечиш. Эллипснинг параметрик тенгламаси $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ кўринишда эканлигидан ва ўқларга нисбатан симметриклигидан ҳамда (5.10) формулага асосан ҳисоблаймиз:

$$S = 4\int_0^a y\, dx = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a \sin t(-b \sin t)\, dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt =$$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt = 2ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab.$$

Агар узлуксиз $y = f(x)$ эгри чизиқ қутб координаталарида $\rho = \rho(\varphi)$ тенглама билан берилган бўлса, OM_1 ва OM_2 қутб



20-чизма.

радиуслари билан чегараланган M_1OM_2 эгри чизиқли секторнинг юзи қуйидаги аниқ интеграл билан ифодаланади:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\rho(\varphi)\right)^2 \, d\varphi, \qquad (5.11)$$

бунда φ_1 ва φ_2 мос равишда OM_1ва OM_2 қутб радиусларининг қутб бурчаклари (20-чизма).

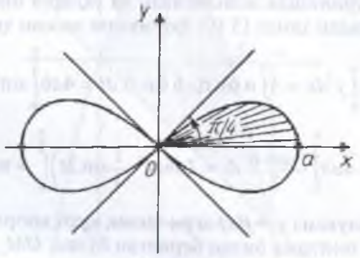
4-мисол. Бернулли лемнискатаси $\left(x^2+y^2\right)^2 = = a^2\left(x^2-y^2\right)$ билан чегараланган шаклнинг юзини ҳисобланг (21-чизма).

Ечиш. Берилган эгри чизиқ тенгламасини қутб координаталар системасида ифодалаймиз. Бунинг учун $x = r\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ алмаштириш бажарсак, $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ ёки $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ га эга бўламиз.

Шаклнинг симметриклиги хоссасини эътиборга олиб (5.11) формулага асосан изланаётган юзни топамиз:

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi \, d\varphi = 2a^2\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

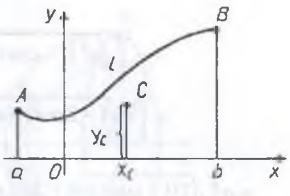
2. Эгри чизиқ ёйининг узунлигини ҳисоблаш. Агар AB ёй $y = f(x)$ тенглама билан берилган бўлса (бунда $f(x)$ — узлуксиз, дифференциалланувчи функция), у ҳолда унинг узунлиги



21-чизма.

$$l = \int_a^b \sqrt{1+y'^2} \, dx \qquad (5.12)$$

формула ёрдамида ҳисобланади (22-чизма).



22-чизма.

Агар ёй тенгламаси $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ параметрик кўринишда (бунда $\varphi(t)$, $\psi(t)$ узлуксиз, дифференциалланувчи функциялар) берилган бўлса, у ҳолда ёй узунлиги l қуйидагича ҳисобланади:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} \, dt, \qquad (5.13)$$

бунда α, β лар t параметрнинг мос равишда A ва B учлардаги қийматлари.

Агар ёй тенгламаси қутб координаталар системасида $\rho = \rho(\varphi)$ тенглама билан берилган бўлса, у ҳолда қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \, d\varphi \qquad (5.14)$$

бунда φ_1 ва φ_2 мос равишда M_1 ва M_2 ёй охирлари қутб радиусларининг $O\rho$ ўқ билан ташкил этган қутб бурчаклари.

5-мисол. Учларининг абсциссалари $x_1 = \sqrt{3}$ ва $x_2 = \sqrt{8}$ бўлган $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ эгри чизиқнинг узунлигини ҳисобланг.

Ечиш. (2.12) формулага кўра, қуйидагига эга бўламиз:

$$l = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} \, dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1+x} \, dx = \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} = \frac{38}{3}.$$

6-мисол. $y = a(1-\cos t)$, $x = a(t-\sin t)$ циклоида битта арки узунлигини ҳисобланг.

Ечиш. Циклоида арклари бир хил бўлгани учун унинг битта аркини оламиз. Бунда t параметр 0 дан 2π гача ўзгаради. $x' = a(1-\cos t)$, $y' = a\sin t$ бўлгани учун (5.13) формулага кўра эгри чизиқнинг узунлиги қуйидагича аниқланади:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} a\sqrt{1 - 2\cos t + \cos t^2 + \sin^2 t}\, dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\, dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2} dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a .$$

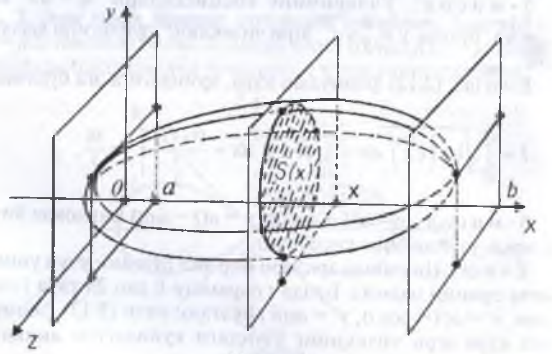
7-мисол. $\rho = e^{\varphi}$ логарифмик спирал биринчи ўрамининг узунлигини ҳисобланг.

Ечиш. (2.14) формулага асосан:

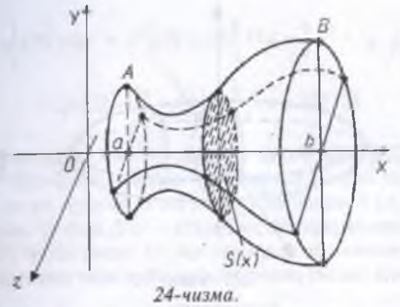
$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{2\varphi} + e^{2\varphi}}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}e^{\varphi}\, d\varphi = \sqrt{2}e^{\varphi}\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \sqrt{2}\left(e^{2\pi} - 1\right) \approx 108,16.$$

3. Жисмлар ҳажмини ҳисоблаш. Фазода $x = a$, $x = b$ текисликлар орасида жойлашган бирор жисм берилган бўлсин. *Ox* ўқига перпендикуляр ва $x \in [a;b]$ нуқталардан ўтувчи ҳар қандай текисликлар бу жисмни кесганда ҳосил бўлган кесимнинг юзи $S(x)$га тенг бўлсин (23-чизма). У ҳолда $x = a$, $x = b$ текисликлар орасидаги жисмнинг ҳажми ушбу формула билан ҳисобланади:



23-чизма.



24-чизма.

$$V = \int_a^b S(x)\, dx. \qquad (5.15)$$

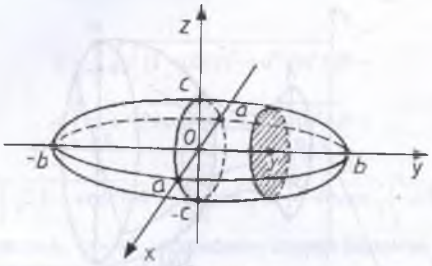
Хусусий ҳолда *aABb* эгри чизиқли трапециянинг *Ox* ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг кўндаланг кесим юзи $S(x) = \pi(f(x))^2$ бўлади (24-чизма). Шунинг учун эгри чизиқли трапециянинг *Ox* ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми ушбу формула билан ҳисобланади:

$$V_x = \pi\int_a^b [f(x)]^2\, dx. \qquad (5.16)$$

8-мисол. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ сирт билан чегараланган жисмнинг ҳажмини ҳисобланг.

Ечиш. Берилган тенглама бўйича эллипсоид ясаймиз (25-чизма). Бу эллипсоидни *Oy* ўқига перпендикуляр, $y \in [-b;b]$ нуқталардан ўтувчи ихтиёрий текислик билан кесилганда ҳосил бўлган кесимни қараймиз.

Кесим тенгламаси $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$, $(y - \text{const})$ ёки $1 - \frac{y^2}{b^2} > 0$ бўлса, у ҳолда $\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\right)^2} = 1$, яъни ярим ўқлари $a_1 = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$, $c_1 = c\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$ бўлган эллипсга



25-чизма.

эга бўламиз. Бу кесимни юзи эса $S(y) = \pi a_1 c_1 = \pi ac\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$ га тенг. У ҳолда (2.15) формулага кўра:

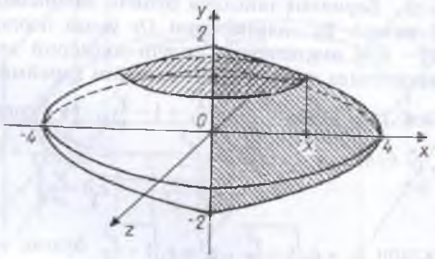
$$V = \int_{-b}^{b} \pi ac\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = 2\pi ac\int_{0}^{b}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy =$$

$$= 2\pi ac\left(y - \frac{y^2}{3b^2}\right)\Big|_0^b = \frac{4}{3}\pi abc.$$

9-мисол. *Oxy* текисликда ётувчи ва $y^2 = 4 - x$, $x = 0$ чизиқлар билан чегараланган шаклнинг *Oy* ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини ҳисобланг (26-чизма).

Ечиш. (5.16) формула ва 26-чизмага кўра:

$$V_y = \pi\int_c^d x^2 dy = \pi\int_{-2}^{2}\left(4 - y^2\right)^2 dy = 2\pi\int_0^2\left(4 - y^2\right)^2 dy =$$



26-чизма.

$$= 2\pi\int_0^2\left(16 - 8y^2 + y^4\right) dy = 2\pi\left(16y - \frac{8}{3}y^3 + \frac{y^5}{5}\right)\Big|_0^2 =$$

$$= 2\pi\left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\right) = \frac{512}{15}\pi \approx 107,23.$$

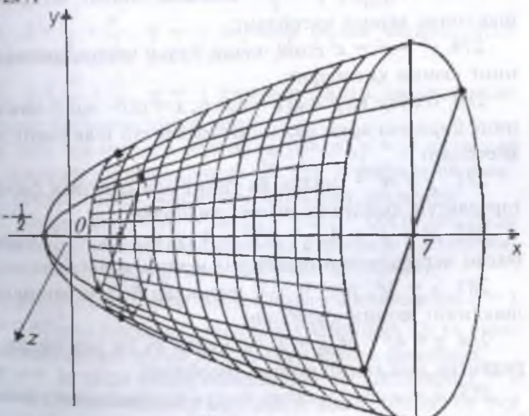
4. Айланиш жисмининг сиртини ҳисоблаш. Агар *AB* эгри чизиқ $y = f(x)$ функциянинг графигидан иборат ва эгри чизиқнинг четки нуқталарини координаталари $A\,(a, f(a))$, $B(b, f\,(b))$, бўлса, (бунда $f(x)$ — узлуксиз, дифференциалланувчи функция) у ҳолда унинг *Ox* ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган сиртнинг юзи қуйидаги формула билан аниқланади:

$$Q_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f\,'(x)\right)^2}\; dx\,. \qquad (5.17)$$

10-мисол. Абсциссалари $x_1 = 1$, $x_2 = 7$ бўлган нуқталар билан чегараланган $y^2 = 2x + 1$ парабола ёйининг айланишидан ҳосил бўлган сиртнинг юзини топинг.

Ечиш. 27-чизма ва (5.17) формулага кўра изланаётган сиртнинг юзи қуйидагича топилади: $y = \sqrt{2x+1}$,

$y' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$.



27-чизма.

$$Q_x = 2\pi\int_1^7 \sqrt{2x+1}\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_1^7 \sqrt{2x+1+1}\,dx =$$

$$= 2\pi\int_1^7 \sqrt{2x+2}\,dx = 2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_1^7 = \frac{2}{3}2\pi(64-8) = \frac{112\pi}{3}.$$

Машқлар

273. $y^2 = 9x$, $y = 3x$ чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзини ҳисобланг.

274. $y^2 = x + 5$, $y^2 = -x + 4$ чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзини ҳисобланг.

275. $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$ чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзини ҳисобланг.

276. $y = (x - 4)^2$, $y = 16 - x^2$ чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзини ҳисобланг.

277. $4y = 8x - x^2$, $4y = x + 6$ чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзини ҳисобланг.

278. $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = \frac{x^2}{2}$ чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзини ҳисобланг.

279. $y^2 = x^2 - x^4$ ёпиқ чизиқ билан чегараланган шаклнинг юзини ҳисобланг.

280. Ox ўқи ва $y = a(1 - \cos t)$, $x = a(t - \sin t)$ циклоиданинг биринчи арки билан чегараланган шаклнинг юзини ҳисобланг.

281. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ чизиқ ва унинг асимптотаси билан чегараланган шаклнинг юзини ҳисобланг.

282. $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $y = x$, $y = \frac{-x}{\sqrt{3}}$ чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзини ҳисобланг.

283. $x = 3t^2$, $y = 3t - t^2$ чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзини ҳисобланг.

284. $y = 4t^2 - 6t$, $x = 2t$ чизиқлар ва Ox ўқи билан чегараланган шаклнинг юзини ҳисобланг.

285. $\rho = a\cos 2\varphi$ чизиқ билан чегараланган шаклнинг юзини ҳисобланг.

286. $r = a\varphi$ $(a > 0)$ Архимед спиралининг биринчи ва иккинчи ўрамлари билан чегараланган шаклнинг юзини ҳисобланг.

287. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ астроида узунлигини ҳисобланг.

288. $y = 2\sqrt{x}$ параболанинг абсциссалари $x_1 = 0$ ва $x_2 = 1$ бўлган нуқталар орасидаги ёйининг узунлигини ҳисобланг.

289. $y = \frac{1}{3}\sqrt{(2x-1)^3}$ эгри чизиқнинг абсциссалари $x_1 = 2$ ва $x_2 = 8$ бўлган нуқталар орасидаги ёйининг узунлигини ҳисобланг.

290. $y = \frac{4}{3}x$ чизиқнинг абсциссалари $x_1 = 2$ ва $x_2 = 8$ бўлган нуқталар орасидаги ёйининг узунлигини ҳисобланг.

291. $y = \ln x$ эгри чизиқнинг абсциссалари $x_1 = \sqrt{3}$ ва $x_2 = \sqrt{8}$ бўлган нуқталар орасидаги ёйининг узунлигини ҳисобланг.

292. $y = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$ эгри чизиқнинг абсциссалари $x_1 = 1$ ва $x_2 = 9$ бўлган нуқталар орасидаги ёйининг узунлигини ҳисобланг.

293. $\rho = (1 - \cos\varphi)$ кардиоиданинг узунлигини ҳисобланг.

294. $z = \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{2}$, $z = 1$ сиртлар билан чегараланган жисмнинг ҳажмини ҳисобланг.

295. $y = \frac{x^2}{1} + \frac{z^2}{4}$, $y = 1$ сиртлар билан чегараланган жисмнинг ҳажмини ҳисобланг.

296. Oxy текисликда ётувчи ва $y = x^2$, $x = y^2$ чизиқлар билан чегараланган шаклнинг Ox ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини ҳисобланг.

297. Ox ўқи ва $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ циклоида биринчи аркининг абсциссалар ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини ҳисобланг.

298. $y = \frac{1}{2}\sqrt{4x-1}$ эгри чизиқ ёйининг абсциссалари $x_1 = 1$ ва $x_2 = 9$ бўлган нуқталар орасидаги қисмининг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

299. $y = 3x$ тўғри чизиқ кесмасининг абсциссалари $x_1 = 0$ ва $x_2 = 2$ бўлган нуқталар орасидаги кесмасининг Ox ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

4-§. Аниқ интегралнинг физикага оид масалаларни ечишга татбиқи

1. **Моддий нуқтанинг босиб ўтган йўлини тезлиги бўйича ҳисоблаш.** Агар $u = f(t)$ функция моддий нуқта траекториясини ифодаласа, моддий нуқтанинг $[t_1;t_2]$ вақт оралиғида босиб ўтган йўли S қуйидаги

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt \tag{5.18}$$

формула билан ҳисобланади.

1-мисол. Моддий нуқта бирор тўғри чизиқ бўйлаб $u(t) = 4t^3 + 2t + 1$ тезлик билан ҳаракатланади. Бу нуқтанинг $[0;3]$ вақт оралиғида босиб ўтган йўлини топинг.

Ечиш. (5.18) формулага кўра:

$$S = \int_0^3 \left(4t^3 + 2t + 1\right) dt = \left(t^4 - t^2 + t\right)\Big|_0^3 = 75 \ \ (м).$$

2. **Ўзгарувчи кучнинг бажарган ишини ҳисоблаш.** $F(s)$ куч таъсирида моддий нуқта Os тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракатлансин.

Бу кучнинг $[a;b]$ кесмадаги бажарган иши

$$A = \int_a^b F(s)\,ds$$

формула билан топилади.

2-мисол. Агар пружинани 1 см га чўзиш учун 1kН куч қўйиш керак бўлса, пружинани 10 см га чўзишда бажарилган ишни ҳисобланг.

Ечиш. Гук қонунига асосан F кучнинг пружинани чўзиши унинг чўзилишига пропорционалдир, яъни, $F = kx$, бунда x — пружинанинг чўзилиши (метрда), k — пропорционаллик коэффициенти.

Масала шартига кўра $x = 0{,}01$ м, куч эса $F = 1k$Н бўлгани учун $1 = 0{,}01k$ тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан k ни топамиз: $k = 100$ ва $F = 100x$.

Демак, изланаётган иш:

$$A = \int_0^{0,1} 100x\,dx = 50x^2\Big|_0^{0,1} = 0,5 \text{ kЖ}.$$

3-мисол. Қозон $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ эллиптик параболоид шаклида бўлиб, унинг баландлиги Н = 4 м. Қозон зичлиги $d = 0{,}8$ т/м³ бўлган суюқлик билан тўлдирилган. Қозондан суюқликни насос билан чиқариб ташлашда бажарилган ишни ҳисобланг.

Ечиш. z баландликда Δz_i қалинликдаги элементар суюқлик қатламини оламиз. Бу қатлам горизонтал кесими ярим ўқлари $a = 2\sqrt{z_i}$; $b = 3\sqrt{z_i}$ бўлган эллипс бўлиб, унинг массаси $\Delta m_i \approx 6\pi g\delta z_i\Delta z_i$, ҳажми эса $\Delta \upsilon_i = \pi \cdot 2\sqrt{z_i}\,3\sqrt{z_i}\,\Delta z_i$ га тенг.

Суюқликни чиқариб ташлаш учун бажарилган иш:

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 6\pi g\delta z_i(H - z_i)\Delta z_i = \int_0^H 6\pi g\delta z(H - z)\,dz =$$

$$= 6\pi g\delta\left(H\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^H = \pi g\delta H^3 = 6\pi g\delta \approx 1575,53 \text{ kЖ}.$$

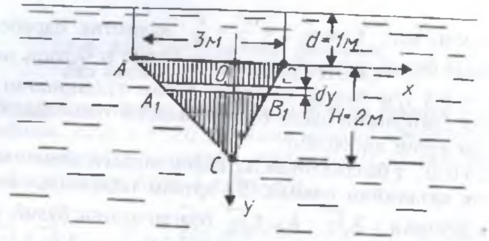
3. **Суюқликнинг пластинкаларга таъсир этувчи босим кучини ҳисоблаш.** Бундай масалаларни ечишни аниқ мисолда кўрсатамиз.

4-мисол. Асоси $a = 3$м ва баландлиги Н = 2м бўлган учбурчакли пластинка суюқликка учи пастга қилиб шундай ботирилганки, унинг асоси суюқлик сатҳи билан параллел ва ундан 1м узоқликда жойлашган. Суюқликнинг зичлиги $\delta = 0{,}9$ т/м³га тенг. Суюқликни пластинканинг ҳар бир томонига таъсир этувчи босим кучини ҳисобланг.

Ечиш. Паскаль қонунидан фойдаланиб суюқликнинг босим кучини аниқлаймиз. Унга кўра h чуқурликдаги ΔS юзга суюқликнинг Δp босими $\Delta p = \delta gh\Delta s$ га тенг, бунда δ — суюқлик зичлиги, g — эркин тушиш тезланиши.

Энди ΔS юзни суюқлик сатҳидан $y + d$ масофада ётувчи ва унга битта томони параллел бўлган dy қалинлик билан фарқ қилувчи учбурчакларга ажратамиз (28-чизма). Ҳосил бўлган ABC ва $A_1B_1C_1$учбурчаклар ўхшашлигидан:

$$\frac{|A_1B_1|}{a} = \frac{H-y}{H} \Rightarrow |A_1B_1| = \frac{a}{H}(H - y)$$



28-чизма.

Кесилган (эни dy бўлган) юз

$$dS = \frac{a}{H}(H - y)\,dy\,.$$

Текис учбурчакнинг томонларига таъсир этувчи босим:

$$dP = \frac{a}{H}\delta g(d + y)(H - y)\,dy.$$

Охирги тенгликнинг иккала қисмини интеграллаб, изланаётган босимни топамиз:

$$P = \int_0^H \frac{a}{H}\delta g(d + y)\,(H - y)\,dy = \frac{3}{2}\delta g\int_0^2 (2 + y - y^2)\,dy =$$

$$= \frac{3}{2}\delta g\left(2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^2}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 5\delta g \approx 44{,}1 \text{ кН}.$$

4. **Чизиқ ва доиранинг инерция моментларини ҳисоблаш.**

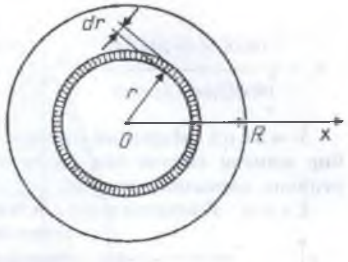
а) узунлиги l бўлган бир жинсли таёқчанинг иккинчи учига нисбатан инерция моменти қуйидагича ҳисобланади:

$$J = \gamma\int_0^e x^2\,dx = \gamma\frac{e^3}{3}.$$

Агар таёқчанинг массаси M берилган бўлса, у ҳолда $\gamma = \frac{M}{e}$ бўлиб,

$$J = \frac{M}{e}\cdot\frac{e^3}{3} = \frac{Me^2}{3} = \frac{1}{3}Me^2$$

га эга бўламиз.



29-чизма.

б) радиуси r бўлган айлананинг марказига нисбатан инерция моменти

$$J = 2\pi\gamma r^3$$

формула орқали аниқланади.

в) радиуси R бўлган бир жинсли доиранинг марказига нисбатан инерция моментини ҳисоблаш учун доирани эни dr бўлган n та ҳалқаларга ажратамиз. Бу ҳалқачаларнинг ҳар бирининг юзи $dS = 2\pi rdr$ га, массаси $dm = 2\pi r\delta\cdot dr$ га тенг, бунда $\delta = \frac{M}{\pi R^2}$ — зичлик. Битта ҳалқачанинг инерция моменти (29-чизма):

$$dJ_0 = 2\pi\delta r^3 dr.$$

Бундай инерция моментлари йиғиндисининг $n\to\infty$ даги лимити мавжуд ва у қуйидаги аниқ интегралга тенг:

$$J_0 = \int_0^R 2\pi\delta r^3\,dr = 2\pi\delta\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^R = \frac{1}{2}\pi R^4\frac{M}{\pi R^2} = \frac{1}{2}MR^2.$$

5. **Текис шаклнинг оғирлик марказини ҳисоблаш.** Қуйидаги ҳолларни қараймиз:

а) бирор текис шакл 19-чизмада кўрсатилганидек берилган бўлсин. Текис шакл $\delta = \delta(x)$ зичликка эга бўлса, у ҳолда текис шаклнинг оғирлик маркази $C(x_c;y_c)$ нинг координаталари қуйидаги формула билан топилади:

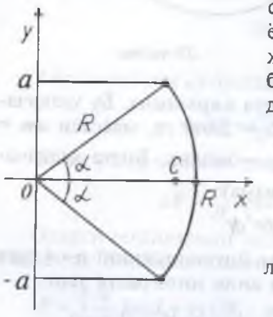
$$x_c = \frac{\int_a^b x\delta(x)\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_a^b \delta(x)\sqrt{1+y'^2}\,dx};\quad y_c = \frac{\int_a^b y\delta(x)\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_a^b \delta(x)\sqrt{1+y'^2}\,dx}. \qquad (5.19)$$

б) агар текис шакл $[a;b]$ кесмада пастдан $y = f_1(x)$, юқоридан $y = f_2(x)$ чизиқлар билан чегараланган (17-чизма) ва зичлиги $\delta = \delta(x)$ бўлса, у ҳолда унинг оғирлик маркази $C(x_c;y_c)$нинг координаталари қуйидаги формула билан аниқланади:

$$x_c = \frac{\int\limits_a^b x\delta(x)(f_2(x)-f_1(x))dx}{\int\limits_a^b \delta(x)(f_2(x)-f_1(x))dx}, \quad y_c = \frac{\int\limits_a^b y\delta(x)\left(f_2^2(x)-f_1^2(x)\right)dx}{\int\limits_a^b \delta(x)(f_2(x)-f_1(x))dx}. \quad (5.20)$$

5-мисол. Марказий бурчаги $2a$ ва радиуси R бўлган бир жинсли айлана ёйи билан чегараланган шаклнинг оғирлик марказини топинг.

Ечиш. Координаталар системасини 30-чизмада кўрсатилганидек оламиз. Бу ҳолда ёйнинг симметриклигидан ва бир жинслилигидан $y_c = 0$ га эга бўламиз. x_c ни (5.19) формуладан топамиз:



30-чизма

$$x_c = \frac{\int\limits_{-a}^{a} x\sqrt{1+x'^2}\;dy}{\int\limits_{-a}^{a} \sqrt{1+x'^2}\;dy}.$$

Айлананинг параметрик тенгламасидан фойдаланамиз:

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t. \end{cases}$$

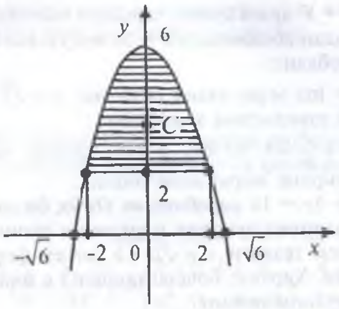
У ҳолда

$$x_c = \frac{\int\limits_{-a}^{a} R^2\cos t\;dt}{\int\limits_{-a}^{a} R\;dt} = R\frac{\sin t\Big|_{-a}^{a}}{t\Big|_{-a}^{a}} = R\frac{\sin a}{a}.$$

6-мисол. $y = 6 - x^2$, $y = 2$ чизиқлар билан чегараланган бир жинсли текис шакл оғирлик марказининг координаталарини топинг.

Ечиш. 31-чизмада кўрсатилгандек шаклни чизиб оламиз. Чизмага кўра $x_c = 0$ бўлади. y_c ни топиш учун (5.20) формуладан фойдаланамиз:

$$y_c = \frac{1}{2}\cdot\frac{\int\limits_{-2}^{2}\left((6-x^2)^2-2^2\right)dx}{\int\limits_{-2}^{2}(4-x^2)\;dx} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\int\limits_{-2}^{2}\left(32-12x^2+x^4\right)dx}{\int\limits_{-2}^{2}(4-x^2)\;dx} =$$



31-чизма.

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(32x-4x^3+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2}{\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{192}{5}}{\frac{16}{3}} = 3,6.$$

Машқлар

300. $y^2 = 9x$, $y = 3x$ чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзини топинг.

301. $y^2 = 2px$, $x^2 = 2py$ параболалар орасидаги соҳанинг юзини топинг.

302. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипснинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини топинг.

303. Координаталар бошини $(a;b)$ нуқта билан туташтирувчи тўғри чизиқ кесмаси Oy ўқ атрофида айланади. Ҳосил бўлган конуснинг ҳажмини топинг.

304. $y^2 = 4ax$ параболанинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сиртнинг координаталар бошидан абсциссаси $x = 3a$ бўлган нуқтагача оралиқдаги юзини топинг.

305. $y = 3x$ тўғри чизиқнинг $x = 0$ дан $x = 3$ гача оралиқдаги кесмасининг: а) Ox ўқ атрофида; б) Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган конус сиртининг юзини ҳисобланг.

306. $ay^2 = x^3$ ярим кубик парабола ёйининг координаталар бошидан абсциссаси $x = 5a$ нуқтагача бўлган узунлигини ҳисобланг.

307. $y = \ln x$ эгри чизиқ ёйининг $x = \sqrt{3}$ дан $x = \sqrt{8}$ гача бўлган узунлигини ҳисобланг.

308. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(x \geq 0,\ y \geq 0)$ эллипс чорак қисми юзининг оғирлик марказини топинг.

309. $x^2 + 4y = 16$ парабола ва Ox ўқ билан чегараланган шакл юзининг оғирлик марказини топинг.

310. Жисм тезлиги $\upsilon = \sqrt{2t+3}$ м/сек формула билан ифодаланади. Ҳаракат бошлангандан 3 с ичида жисм босиб ўтган йўлини топинг.

311. 48 км/соат тезлик билан ҳаракат қилаётган автомобиль тормозлана бошлади ва 3 с ўтгач тўхтади. Автомобиль батамом тўхтагунча босиб ўтган йўлни топинг.

312. Радиуси 3 см га тенг ярим доира шаклдаги текис тўсиқ сувга шундай ботирилганки, унинг диаметри сув сатҳида жойлашган. Сувнинг бу тўсиққа бўлган босим кучини аниқланг.

313. Тўғон вертикал тўғри трапеция шаклида бўлиб, унинг юқори ва пастки асослари мос равишда 80 ва 50 м га, баландлиги эса 25 м га тенг. Тўғонга таъсир қилаётган сувнинг босим кучини аниқланг.

314. Устки асоси a ва остки асоси b $(a > b)$, баландлиги h бўлган тенг ёнли трапеция шаклидаги вертикал тўғонга таъсир қилаётган сувнинг босим кучини ҳисобланг.

5-§. Биринчи мустақил уй иши

Мазкур уй иши вариантларининг ҳар бирида 8 та мисол бўлиб, уларни бажаришда қуйидагиларга эътибор бериш керак:

1—7-мисолларда: берилган аниқ интегралларни вергулдан кейинги иккита рақамигача аниқлик билан ҳисоблаш керак.

8-мисолда: берилган хосмас интегрални ҳисоблаш, узоқлашувчи ёки яқинлашувчи эканлигини аниқлаш керак.

Вариант мисолларининг ечиш намунасини келтирамиз.

Қуйидаги аниқ интегралларни вергулдан кейинги иккита рақамигача аниқлик билан ҳисобланг:

1. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x(1+x^2)}$.

Ечиш. Интеграл остидаги касрни рационал касрлар йиғиндиси кўринишда ёзиб оламиз ва ҳисоблашни давом эттирамиз:

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int\limits_1^2 \left(\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}\right) dx \left| \begin{array}{l} 1 = A(1+x^2) + (Bx+C)x, \\ \left.\begin{array}{ll} x = 0 & 1 = A, \\ x^2 & 0 = A + B, \\ x & 0 = C, \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = 1, \\ B = -1, \\ C = 0 \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_1^2 \frac{dx}{x} - \int\limits_1^2 \frac{xdx}{1+x^2} = \ln|x|\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_1^2 =$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 5 =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot 0,69 - \frac{1}{2} \cdot 1,61 = 0,24.$$

2. $\int\limits_1^e \ln^2 x\, dx$.

Ечиш. Бўлаклаб интеграллаш формуласини икки марта татбиқ этиб, қуйидаги натижага эга бўламиз:

$$\int\limits_1^e \ln^2 x\, dx \left| \begin{array}{l} u = \ln^2 x,\ du = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} dx, \\ d\upsilon = dx,\ \upsilon = x, \end{array} \right| =$$

$$= x\ln^2 x\,\Big|_1^e - 2\int\limits_1^e \ln x\, dx \left| \begin{array}{l} u = \ln x,\ du = \frac{1}{x} dx, \\ d\upsilon = dx,\ \upsilon = x, \end{array} \right| =$$

$$= e\ln^2 e - 2(x\ln x - x)\Big|_1^e = e - 2e + 2e - 2 = 0,72.$$

3. $\int\limits_3^4 \frac{9x^2-14x+1}{x^3-2x^2-x+2}\,dx.$

Ечиш. Интеграл остидаги функция тўғри касрдан иборат. Унинг махражини кўпайтувчиларга ажратамиз, сўнгра содда рационал касрларнинг йиғиндиси кўринишида ёзиб оламиз ва интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int\limits_3^4 \frac{9x^2-14x+1}{x^3-2x^2-x+2}\,dx = \int\limits_3^4 \frac{9x^2-14x+1}{(x+1)(x-1)(x-2)}\,dx = \int\limits_3^4 \left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}\right)dx \cdot$$

$$\left|\begin{array}{l} 9x^2-14x+1 = A(x-1)(x-2)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)(x-1), \\ \left.\begin{array}{l|r} x=-1 & 24=6A, \\ x=1 & -4=-2B, \\ x=2 & 9=3C, \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} A=4, \\ B=2, \\ C=3 \end{array}\right\} \end{array}\right|$$

$$= \int\limits_3^4 \left(\frac{4}{x+1}+\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}\right)dx =$$

$$= \left(4\ln|x+1|+2\ln|x-1|+3\ln|x-2|\right)\Big|_3^4 =$$

$$= 4\ln 5+2\ln 3+3\ln 2-4\ln 4-2\ln 2 =$$

$$= \ln\left(5^4\cdot 3^2\cdot 2\right)-\ln 4^4 = \ln\frac{5^4\cdot 3^2\cdot 2}{4^4} = \ln\frac{11250}{256} = 3,78.$$

4. $\int\limits_0^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}.$

Ечиш.

$$\int\limits_0^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}} \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2+1}=t,\ x^2+1=t^2,\ x\,dx=t\,dt, \\ x=0 \text{ да } t=1,\ x=1 \text{ да } t=\sqrt{2}. \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_1^{\sqrt{2}} \frac{(t^2-1)t}{t}\,dt = \int\limits_1^{\sqrt{2}} (t^2-1)\,dt = \left(\frac{1}{3}t^3-t\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} = 0,20.$$

5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}.$

Ечиш. Интеграл остидаги функция $\sin x$ ва $\cos x$ га нисбатан жуфт функция бўлгани учун $t = \mathrm{tg}x$ алмаштиришни татбиқ этамиз ((4.21) формулага қаранг):

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$$

$$\left| \begin{array}{l} t=\mathrm{tg}x,\ dx=\frac{dt}{1+t^2},\ \cos^2 x=\frac{dt}{1+t^2},\ \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}, \\ x=0 \text{ да } t=0,\ x=\frac{\pi}{4} \text{ да } t=1 \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(4-\frac{3}{1+t^2}+\frac{5t^2}{1+t^2}\right)} = \int\limits_0^1 \frac{dt}{9t^2+1} = \frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\,3t\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\mathrm{arctg}\ 3-\mathrm{arctg}\,0\right) = 0,42.$$

6. $\int\limits_0^1 \frac{2x-11}{\sqrt{3x-2x-x^2}}\,dx$

Ечиш. Берилган интегрални шундай иккита интегралга ажратамизки, биринчи интеграл остидаги функциянинг сурати квадрат илдиз остидаги квадрат учҳаднинг ҳосиласидан иборат бўлсин. Зарур алмаштиришларни бажариб, натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$\int\limits_0^1 \frac{2x-11}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx = -4\int\limits_0^1 \frac{-2x-2}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx - 19\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}} =$$

$$= -8\sqrt{3-2x-x^2}\,\Big|_0^1 - 19\arcsin\frac{x+1}{2}\Big|_0^1 =$$

$$= 8\sqrt{3}-\frac{19}{2}\pi+\frac{19}{2}\pi \approx -6,05.$$

7. $\int\limits_{\frac{2}{3}}^{\frac{10}{3}} \frac{xdx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}}$.

Ечиш. Берилган интеграл $\sqrt{3x-1}=t$ алмаштириш ёрдамида жадвал интегралига келтирилади:

$$\int\limits_{\frac{2}{3}}^{\frac{10}{3}} \frac{x\,dx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}}$$

$$\left| \begin{array}{l} \sqrt{3x-1}=t,\ 3x-1=t^2,\ x=\frac{1}{3}(t^2+1),\ dx=\frac{2}{3}t\,dt, \\ x=\frac{2}{3}\ \text{да}\ \ t=1,\ x=\frac{10}{3}\ \text{да}\ \ t=3 \end{array} \right| =$$

$$=\int\limits_1^3 \frac{\frac{1}{3}(t^2+1)\frac{2}{3}tdt}{t^2\cdot t}=\frac{2}{9}\int\limits_1^3 \frac{t^3+t}{t^3}\,dt=\frac{2}{9}\left(t-\frac{1}{t}\right)\Big|_1^3=0,59.$$

8. Хосмас интегралларни ҳисобланг:

а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$;　　б) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$

Ечиш.

$$\text{а)}\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}=\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+4x+9}+\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}=$$

$$=\lim_{\alpha\to-\infty}\int\limits_{\alpha}^{0} \frac{dx}{(x+2)^2+5}+\lim_{\beta\to+\infty}\int\limits_{0}^{\beta} \frac{dx}{(x+2)^2+5}=$$

$$=\lim_{\alpha\to-\infty}\frac{1}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt5}\Big|_{\alpha}^{0}+\lim_{\beta\to+\infty}\frac{1}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt5}\Big|_{0}^{\beta}=$$

$$=\lim_{\alpha\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt5}-\frac{1}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{\alpha+2}{\sqrt5}\right)+$$

$$+\lim_{\beta\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{\beta+2}{\sqrt5}-\frac{1}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt5}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt5}-\frac{1}{\sqrt5}\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt5}=\frac{\pi}{\sqrt5}.$$

Демак, берилган интеграл яқинлашувчи.

$$\text{б)}\ \int\limits_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx=\int\limits_{-1}^{0} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx+\int\limits_{0}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx=$$

$$=\lim_{\beta\to0}\int\limits_{-1}^{\beta}\left(3x^{\frac{4}{3}}+2x^{-\frac{2}{3}}\right)dx+\lim_{\alpha\to0}\int\limits_{\alpha}^{1}\left(3x^{\frac{4}{3}}+2x^{-\frac{2}{3}}\right)dx=$$

$$=\lim_{\beta\to0-0}\left(\frac{9}{7}x^{\frac{7}{3}}+6x^{\frac{1}{3}}\right)\Big|_{-1}^{\beta}+\lim_{\alpha\to0+0}\left(\frac{9}{7}x^{\frac{7}{3}}+6x^{\frac{1}{3}}\right)\Big|_{\alpha}^{1}=$$

$$=\lim_{\beta\to0-0}\left(\frac{9}{7}\beta^{\frac{7}{3}}+6\,\beta^{\frac{1}{3}}+\frac{9}{7}+6\right)+$$

$$+\lim_{\alpha\to0+0}\left(\frac{9}{7}+6-\frac{9}{7}\alpha^{\frac{7}{3}}-6\,\alpha^{\frac{1}{3}}\right)=14\frac{4}{7}.$$

Демак, берилган хосмас интеграл яқинлашувчи.

1-вариант

1. $\int\limits_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{x^2+1}$.
2. $\int\limits_{1}^{2} (y-1)\ln y\,dy$.
3. $\int\limits_{2}^{3} \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}\,dx$.
4. $\int\limits_{0}^{\sqrt3} \sqrt{3-x^2}\,dx$.
5. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^2 x\,dx$.
6. $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{4x^2+4x+5}$.
7. $\int\limits_{0}^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$.
8. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{16x\,dx}{16x^4-1}$;　　б) $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$.

2-вариант

1. $\int\limits_{0}^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$.
2. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} x\operatorname{tg}^2 x\,dx$.

3. $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{x\,dx}{(x-1)^3}$.   4. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{(1-x^2)^3}\,dx$.

5. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}\,dx$.   6. $\int\limits_{2}^{3} \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\,dx$.

7. $\int\limits_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{e^x-1}$.

8. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{4x\,dx}{\sqrt[4]{(16+x^2)^5}}$;   б) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln 2dx}{(1-x)\ln^2(1-x)}$.

3-вариант

1. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+4}}$.   2. $\int\limits_{0}^{1} x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$.

3. $\int\limits_{4}^{5} \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$.   4. $\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

5. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} 2\cos x\sin 3x\,dx$.   6. $\int\limits_{-\frac{3}{2}}^{2} \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}\,dx$.

7. $\int\limits_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\;\,dx$.

8. а) $\int\limits_{4}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2-4x+1}$;   б) $\int\limits_{0}^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x}\,dx$.

4-вариант

1. $\int\limits_{1}^{e} \frac{1+\ln x}{x}\,dx$.   2. $\int\limits_{0}^{4} x^3\sqrt{x^2+9}\,dx$.

3. $\int\limits_{3}^{4} \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$.   4. $\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$.

5. $\int\limits_{0}^{\pi} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\,dx$.   6. $\int\limits_{4}^{5} \frac{x}{x^4-4x^2+3}\,dx$.

7. $\int\limits_{0}^{5} \frac{xdx}{\sqrt{x+4}}$.

8. а) $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\pi(x^2+4x+5)}$;   б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x}{1-x^4}\,dx$.

5-вариант

1. $\int\limits_{0}^{1} \frac{z^3}{z^8+1}\,dz$.   2. $\int\limits_{-1}^{0} (x+1)e^{-2x}dx$.

3. $\int\limits_{0}^{1} \frac{2x+3}{(x-2)^3}\,dx$.   4. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+3)^3}}$.

5. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{32}} \left(32\cos^2 4x-16\right)dx$.   6. $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{x^3}{x^2+x+1}\,dx$.

7. $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

8. а) $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2+4x+5}$;   б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}}\,dx$.

6-вариант

1. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-\cos^2 x}$.   2. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}}\,dx$.

3. $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}$.   4. $\int\limits_{1}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\,dx$.

5. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x+1}$.   6. $\int\limits_{7}^{10} \frac{x^3dx}{x^2-3x+2}$.

7. $\int\limits_{\frac{2}{3}}^{\frac{7}{3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{2+3x}}$.

8. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{arctg}\,2x}{\pi(1+4x^2)}\,dx$; б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

7-вариант

1. $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$. 2. $\int\limits_{1}^{2} \ln(3x+2)\,dx$.

3. $\int\limits_{3}^{5} \frac{(x^2+2)dx}{(x-1)^2(x-1)}$. 4. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}$.

5. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{tg}^4 x\,dx$. 6. $\int\limits_{3}^{5} \frac{x^2dx}{\sqrt{8x-x^2-15}}$.

7. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$.

8. а) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{16dx}{\pi(4x^2+4x+5)}$; б) $\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$.

8-вариант

1. $\int\limits_{0}^{1} x^3\sqrt{4+5x^4}\,dx$. 2. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \mathrm{arctg}\frac{1}{x}\,dx$.

3. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^4+3x^3-1}{(x+1)^2}\,dx$. 4. $\int\limits_{2\sqrt{3}}^{6} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$.

5. $\int\limits_{0}^{\pi} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}\,dx$. 6. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

7. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2dx}{(1+x)^4}$.

8. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{x\,dx}{4x^2+4x+5}$; б) $\int\limits_{\frac{3}{4}}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$.

9-вариант

1. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2\frac{x}{2}\,dx$. 2. $\int\limits_{-1}^{0} x\ln(1-x)\,dx$.

3. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{x^5-2x^2+3}{(x-2)^2}\,dx$. 4. $\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$.

5. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x\cos 5x\,dx$. 6. $\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{0} \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$.

7. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

8. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{(x+2)dx}{\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^4}}$; б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\lg x}}{\cos 2x}\,dx$.

10-вариант

1. $\int\limits_{1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$. 2. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{9}} \frac{x\,dx}{\cos^2 3x}$.

3. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x\,dx}{x^2+3x+2}$. 4. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$.

5. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx$. 6. $\int\limits_{4}^{7} \frac{dx}{x^2+3x-10}$.

7. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}\ln 2} \frac{e^x dx}{e^x+e^{-x}}$

8. а) $\int_{0}^{\infty}\frac{3-x^2}{x^2+4}\,dx$; б) $\int_{0}^{1}\frac{2e^{1-\frac{2}{\pi}\arcsin x}}{\pi\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

11-вариант

1. $\int_{1}^{\frac{1}{2}}\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\arcsin(1-x)dx$.

3. $\int_{3}^{10}\frac{x^2+3}{x^3-x^2-6x}\,dx$.

4. $\int_{0}^{3}\frac{dx}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}$.

5. $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\cos x}$.

6. $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}}\frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$.

7. $\int_{0}^{\sqrt[3]{7}}\frac{zdz}{\sqrt{9+z^3}}$.

8. а) $\int_{0}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{\mathrm{arctg}2x}dx}{1+4x^2}$; б) $\int_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{4x-x^2-4}}$.

12-вариант

1. $\int_{0}^{1}3(x^2+x^2e^{x^3})\,dx$.

2. $\int_{1}^{e}x\ln^2x\,dx$.

3. $\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^4+x^2}$.

4. $\int_{2}^{4}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$.

5. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{ctg}^3x\,dx$.

6. $\int_{2}^{3}\frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$.

7. $\int_{0}^{5}\frac{x\,dx}{\sqrt{3x+1}}$.

8. а) $\int_{1}^{\infty}\frac{4dx}{x(1+\ln^2x)}$; б) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x\,dx}{\sqrt[3]{\cos^2x}}$.

13-вариант

1. $\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\pi^2}\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

2. $\int_{-3}^{0}(x-2)e^{-\frac{x}{3}}\,dx$.

3. $\int_{2}^{3}\frac{x^7dx}{1-x^4}$.

4. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

5. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos 3x\cos 5x\,dx$.

6. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+2x+3}$.

7. $\int_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$.

8. а) $\int_{0}^{\infty}x\sin x\,dx$; б) $\int_{-\frac{3}{4}}^{0}\frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$.

14-вариант

1. $\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{x^2dx}{1+x^6}$.

2. $\int_{\frac{3}{2}}^{2}\mathrm{arctg}(2x-3)dx$.

3. $\int_{2}^{3}\frac{dx}{x^4-1}$.

4. $\int_{0}^{\sqrt{2,5}}\frac{dx}{(5-x^2)^3}$.

5. $\int_{0}^{\pi}\cos^4x\sin^2x\,dx$.

6. $\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$.

7. $\int_{\ln 3}^{0}\frac{1-e^x}{1+e^x}\,dx$.

8. а) $\int_{-\infty}^{-1}\frac{7dx}{(x^2-4x)\ln 5}$; б) $\int_{1}^{2}\frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}\ln 2}$.

15-вариант

1. $\int_1^e \frac{\sin \ln x \, dx}{x}$.

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+3)\sin x \, dx$.

3. $\int_{-1}^0 \frac{x\,dx}{x^3-1}$.

4. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \, dx$.

6. $\int_1^2 \frac{dt}{t^2+5t+4}$.

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos y dy}{4+\sqrt{\sin y}}$.

8. а) $\int_{\frac{1}{3}}^{\infty} \frac{\pi dx}{(1+9x^2)\mathrm{arctg}^2 3x}$; б) $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{9x^2-9x+2}$.

16-вариант

1. $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

2. $\int_1^2 x^2 \ln x \, dx$.

3. $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2x^2+4}{x^3-x^2+x-1} dx$.

4. $\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-3}}$.

5. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$.

6. $\int_0^2 \frac{x\,dx}{x^2+3x+2}$.

7. $\int_2^5 \frac{x^2dx}{(x-1)\sqrt{x-1}}$.

8. а) $\int_2^{\infty} \frac{7dx}{(x^2+4)\sqrt{\pi \ \mathrm{arctg}\frac{x}{2}}}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin^3 x \, dx}{\sqrt{\cos x}}$.

17-вариант

1. $\int_3^8 \sqrt{x+1}\, dx$.

2. $\int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} dx$.

3. $\int_4^5 \frac{dx}{x^2(x-1)}$.

4. $\int_2^4 \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4} dx$.

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \, dx$.

6. $\int_1^2 \frac{x-5}{x^2-2x+2} dx$.

7. $\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}$.

8. а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x)\ln 3}$; б) $\int_0^3 \frac{\sqrt[3]{9x} \ dx}{\sqrt[3]{9-x^2}}$.

18-вариант

1. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha\cos^3\alpha \, d\alpha$.

2. $\int_0^{\pi} (x+2)\cos\frac{x}{2} dx$.

3. $\int_0^2 \frac{dx}{(x+1)(x^2+4)}$.

4. $\int_0^{\frac{\sqrt{7}}{3}} x^3\sqrt{7+x^2} dx$.

5. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1+\sin x}\, dx$.

6. $\int_{-1}^1 \frac{x-5}{x^2+2x+5} dx$.

7. $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

8. а) $\int_0^{\infty} e^{-3x} x \, dx$; б) $\int_0^1 \frac{x^4dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$.

19-вариант

1. $\int\limits_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{6}} 12\text{tg}3x\,dx$.

2. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 4x\,dx$.

3. $\int\limits_{7}^{9} \frac{(x^2-x+2)dx}{x^4-5x^2+4}$.

4. $\int\limits_{\frac{4\sqrt{2}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2-8}}{x^4}\,dx$.

5. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\text{tg}x}{\sin 2x}\,dx$.

6. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{x^2+2x}$.

7. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

8. а) $\int\limits_{-\infty}^{0} \left(\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx$;

б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^2}{\sqrt{64-x^6}}\,dx$.

20-вариант

1. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$.

2. $\int\limits_{1}^{e^2} \sqrt{x}\ln x\,dx$.

3. $\int\limits_{4}^{6} \frac{x\,dx}{x^3-6x^2+16x-6}$.

4. $\int\limits_{1}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$.

5. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x\,dx}{\cos^3 x}$.

6. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$.

7. $\int\limits_{e^2}^{e^3} \frac{\ln x\,dx}{x(1-\ln^2 x)}$.

8. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{2x^2-2x+1}$;

б) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$.

21-вариант

1. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

2. $\int\limits_{0}^{1} \text{arctg}\sqrt{x}\,dx$.

3. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^3+1}$.

4. $\int\limits_{0}^{3} x^4\sqrt{9-x^2}\,dx$.

5. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{8}} \sin x \sin 3x\,dx$.

6. $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx$.

7. $\int\limits_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx$.

8. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$;

б) $\int\limits_{1}^{5} \frac{x^2dx}{\sqrt{31(x^3-1)}}$.

22-вариант

1. $\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$.

2. $\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{-\frac{2}{3}} \frac{x\,dx}{e^{3x}}$.

3. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{x^5+1}{x^6+x^4}\,dx$.

4. $\int\limits_{0}^{3} \frac{x^3dx}{\sqrt{9+x^2}}$.

5. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin x \sin 2x \sin 3x\,dx$.

6. $\int\limits_{\frac{3}{4}}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$.

7. $\int\limits_{\sqrt{7}}^{\sqrt{26}} \frac{x^3dx}{(x^2+1)^{\frac{2}{3}}}$.

8. а) $\int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x-1)^2}$;

б) $\int\limits_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$.

23-вариант

1. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{4x^2-9}$.

2. $\int\limits_{1}^{\pi} \frac{\ln^2 x}{x^2}\, dx$.

3. $\int\limits_{2}^{3} \frac{x^3+x^2+2}{x(x^2-1)^2}\, dx$.

4. $\int\limits_{0}^{\sqrt{6}} \sqrt{6-x^2}\, dx$.

5. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 x\ \sin^4 x\, dx$.

6. $\int\limits_{\frac{1}{6}}^{2} \frac{dx}{3x^2-x+1}$.

7. $\int\limits_{0}^{13} \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x-1}}\, dx$.

8. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{(6x^2-5x+1)\ln\frac{3}{4}}$;

б) $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}$.

24-вариант

1. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha \sin^3\alpha\, d\alpha$.

2. $\int\limits_{0}^{2} (y+1)\ln y\, dy$.

3. $\int\limits_{3}^{5} \frac{x^3-2x^2+4}{x^2(x-2)^2}\, dx$.

4. $\int\limits_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\, dx$.

5. $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^3 x}$.

6. $\int\limits_{3}^{4} \frac{x^2}{x^2-6x+10}\, dx$.

7. $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 12} \frac{dx}{\sqrt{e^x+4}}$.

8. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{9x^2-9x+2}$;

б) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$.

25-вариант

1. $\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{\pi}}{4}} \frac{xdx}{\cos^2 x^2}$.

2. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin x\cos x\, dx$.

3. $\int\limits_{3}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{x^2dx}{x^4-1}$.

4. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{1} \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^6}\, dx$.

5. $\int\limits_{0}^{\pi} \sin^4\frac{x}{2}\, dx$.

6. $\int\limits_{3,5}^{5} \frac{x}{x^2-7x+13}\, dx$.

7. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{5-4x}}$.

8. а) $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{dx}{3x^2-3x+2}$;

б) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(2x-1)^2}$.

6-§.Иккинчи мустақил уй иши

Иккинчи мустақил уй ишининг ҳар бир вариантида 7 та мисол бўлиб, уни қуйидагича бажариш керак:

Биринчи мисолда: берилган чизиқ билан чегараланган шаклнинг юзини (вергулдан кейинги иккита рақамигача аниқлик билан) ҳисоблаш керак.

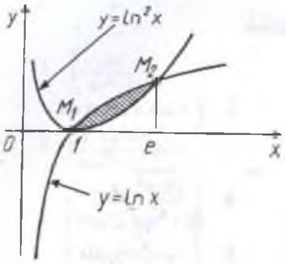
Иккинчи мисолда: берилган чизиқ ёйи узунлигини (вергулдан кейинги иккита рақамигача аниқлик билан) ҳисоблаш керак.

Учинчи мисолда: тенгламаси берилган чизиклар билан чегараланган Ф шаклнинг кўрсатилган координата ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини (вергулдан кейинги иккита рақамигача аниқлик билан) ҳисоблаш керак.

Тўртинчи мисолда: ℓ эгри чизиқ ёйининг кўрсатилган ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сиртнинг юзини (вергулдан кейинги иккита рақамигача аниқлик билан) ҳисоблаш керак.

Бешинчи мисолда: P идишдаги сувни чиқариб ташлаш учун сарф бўлган ишни ҳисоблаш керак. Сувнинг солиштирма оғирлиги: 9,81 кН/$м^3$ ва π = 3,14 деб олинг. Натижани бутун қисмигача яхлитланг.

Олтинчи мисолда: сувга вертикал ботирилган пластинкага сувнинг босим кучини ҳисоблаш керак. Сувнинг солиштирма оғирлиги: 9,81 кН/$м^3$. Натижани бутун қисмигача яхлитланг. **Пластинканинг шакли, ўлчамлари ва жойлашиш чизмаси** 38—62-чизмаларда берилган.



32-чизма.

1—13-вариантлардаги еттинчи мисолнинг шарти қуйидагича: *z* эгри чизиқ билан чегараланган бир жинсли текис шакл оғирлик марказининг координаталарини топиш керак.

14—25-вариантлардаги еттинчи мисолнинг шарти қуйидагича: берилган чизиқлар билан чегараланган текис бир жинсли Φ шаклнинг оғирлик маркази координаталарини топиш керак.

Вариант мисолларини ечиш намунасини келтирамиз.

1. $y = \ln x$ ва $y = \ln^2 x$ чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзини (вергулдан кейинги иккита рақамигача аниқлик билан) ҳисобланг.

Ечиш. Берилган чизиқларни ясаймиз (32-чизма). Берилган чизиқлар кесишган нуқталарнинг координаталарини топамиз: $M_1(1;0)$, $M_2(1;1)$. Энди (5.9) формуладан фойдаланамиз:

$$S = \int_1^e (\ln x - \ln^2 x)\,dx,$$

$$\int \ln^2 x\,dx \left| \begin{matrix} u = \ln^2 x, & du = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}\,dx, \\ d\upsilon = dx, & \upsilon = x \end{matrix} \right| =$$

$$= x\ln^2 x - 2\ln x\,dx,$$

$$\int \ln x\,dx \left| \begin{matrix} u = \ln x, & du = \frac{1}{x}\,dx, \\ d\upsilon = dx, & \upsilon = x \end{matrix} \right| =$$

$$= x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

У ҳолда

$$S = \int_1^e \ln x\,dx - \int_1^e \ln^2 x\,dx =$$

$$= (x\ln x - x)\Big|_1^e - (x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x)\Big|_1^e =$$

$$= e\ln e - e + 1 - (e\ln^2 e - 2e\ln e + 2e) + 2 = 3 - e \approx 0,28.$$

2. $x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t$, $y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t$ $(0 \leq t \leq \pi)$ чизиқ ёйи узунлигини (вергулдан кейинги иккита рақамигача аниқлик билан) ҳисобланг

Ечиш. (5.13) формуладан фойдаланамиз:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Интеграл остидаги функцияларни топамиз:

$$\frac{dx}{dt} = 2t\sin t + (t^2 - 2)\cos t + 2\cos t - 2t\sin t = t^2\cos t,$$

$$\frac{dy}{dt} = -2t\cos t - (2 - t^2)\sin t + 2\sin t + 2t\cos t = t^2\sin t,$$

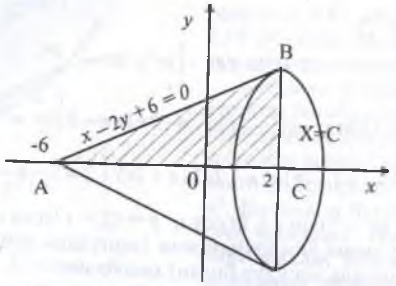
$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{t^4\cos^2 t + t^4\sin^2 t} = t^2.$$

У ҳолда изланаётган ёй узунлиги:

$$l = \int_0^\pi t^2 \quad dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^\pi = \frac{\pi^3}{3} \approx 10,32.$$

3. $x - 2y + 6 = 0$, $x = 2$ ва $y = 0$ чизиқлар билан чегараланган текис шаклни абсциссалар ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини (вергулдан кейинги иккита рақамигача аниқлик билан) ҳисобланг.

Ечиш. Текис фигурани ясаймиз (33-чизма). $x - 2y + 6 = 0$ тўғри чизиқ Ox ўқни $A(-6;0)$ нуқтада кесиб ўтади. Интеграллаш чегаралари: $a = -6$, ва $b = 2$. ABC учбурчакнинг Ox ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган конуснинг ҳажмини (5.16) формула бўйича ҳисоблаймиз:

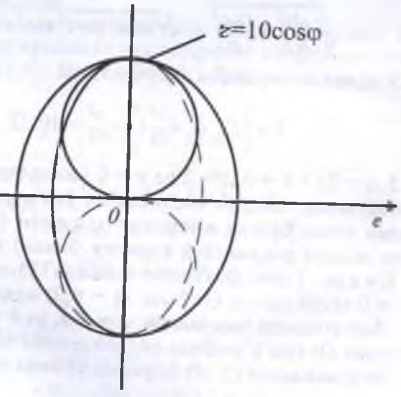


33-чизма.

$$V = \pi\int_{-6}^{2}\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2 dx = \pi\int_{-6}^{2}\left(\frac{1}{4}x^2+3x+9\right)dx =$$

$$= \pi\left(\frac{x^3}{12}x+\frac{3x^2}{2}+9x\right)\Bigg|_{-6}^{2} \approx 133,98.$$

4. $r = 10\sin\varphi$ айлананинг Ol қутб ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сиртнинг юзини (вергулдан кейинги иккита рақамигача аниқлик билан) ҳисобланг (34-чизма).



34-чизма.

Ечиш. (5.17) ва (5.14) формулалардан (қутб координаталар системасида ёзилишидан) фойдаланамиз:

$$S = 2\pi\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} y\sqrt{r'^2+r^2}\,d\varphi, \text{ бунда } y = r\sin\varphi.$$

Сўнгра, $r'_\varphi = 10\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi = 10\sin\varphi\sin\varphi = 10\sin^2\varphi$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$.

Бу қийматларни ўрнига қўямиз:

$$S = 2\pi\int_0^{\pi} 10\sin^2\varphi\sqrt{100\cos^2\varphi+100\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

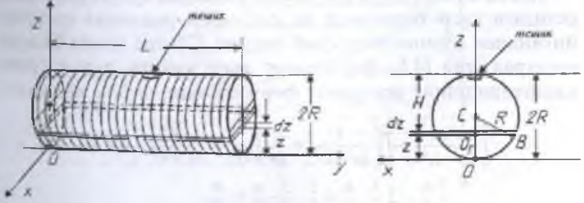
$$= 200\pi\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi = 200\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\pi}{2}\,d\varphi =$$

$$= 100\pi\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} \approx 985,96.$$

5. Асоснинг радиуси 1 м, узунлиги 5 м бўлган цилиндрик цистерна 35-чизмада кўрсатилганидек ҳолатда бўлиб, сув билан тўлдирилган. Цистернанинг юқоридаги тешигидан сувни тортиб чиқариш учун зарур бўладиган ишни ҳисобланг. Сувнинг солиштирма оғирлиги: $g = 9{,}8$кН/м^3. Натижани бутун қисмигача яхлитланг.

Ечиш. z баландликдан dz қатлам сувни ажратиб оламиз (35-чизма). Унинг ҳажми:

$$dV = 2|0_1, B|\,Zdz = 2z\sqrt{R^2-(R-r)^2}\,dz = 2z\sqrt{z(2R-r)}\,dz.$$



35-чизма.

Бу қатламни $H = 2R - z$ баландликка кўтариш керак. dz қатламдаги сувни чиқариб ташлаш учун dA элементар иш қуйидаги формула билан аниқланади:

$$dA = H\gamma dV = 2\gamma l(2R - z)\sqrt{z(2R - z)}dz.$$

Ҳамма сувни чиқариб ташлаш учун бажарилган A иш барча элементар ишларнинг йиғиндисига тенглигидан:

$$A = \int_0^{2R} dA = \int_0^{2R} 2\gamma l(2R - z)\sqrt{z(2R - z)}dz =$$

$$= 2\gamma l\int_0^{2R} z^{\frac{1}{2}}(2R - z)^{\frac{3}{2}} dz. \qquad (1)$$

Энди (1) интегрални ҳисоблаймиз. Бу интеграл биномиал дифференциални интеграллашдан иборат бўлгани учун, (4.19) формула ёрдамида топамиз. $m = \frac{1}{2}$, $n = 1$, $p = \frac{3}{2}$ ва $\frac{m+1}{2} + p = 3$ бўлгани учун $a + bx^n = u^2x^n$ алмаштиришни бажарамиз:

$$A = 2\gamma l\int_0^{2R} z^{\frac{1}{2}}(2R - z)^{\frac{3}{2}} \; dz \left| \begin{array}{l} 2R - z = u^2z, \; dz = \\ z = \dfrac{2R}{u^2+1}, \text{ агар } z = \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} = -4Ru(u^2+1)^{-2}du, \\ = 0 \text{ бўлса, } u = \infty, \text{ агар } z = 2R \text{ бўлса, } u = 0 \end{array} \right| =$$

$$= 32\gamma lR^3\int_0^{\infty} \frac{u^4du}{(u^2+1)^4}.$$

Ҳосил бўлган интеграл хосмас интеграл бўлиб, интеграл остидаги каср тўғри каср ва уни содда рационал касрлар йиғиндиси кўринишида ёзиб оламиз. Сўнгра ҳосил бўлган интегралларга (4.6) формулани, яъни махраж даражасини пасайтиришнинг рекуррент формуласини татбиқ қиламиз:

$$\int_0^{\infty} \frac{u^4du}{(u^2+1)^4} = \int_0^{\infty}\left(\frac{1}{(u^2+1)^2} - \frac{2}{(u^2+1)^3} + \frac{1}{(u^2+1)^4}\right)du =$$

$$= \frac{\pi}{4} - 2\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{32}.$$

Шундай қилиб,

$$A = 32\gamma lR^3 \cdot \frac{\pi}{32} = \pi\gamma lR^3.$$

Агар $l = 5$ м, $R = 1$, $\gamma = 9,81$, $\pi = 3,14$ қийматларни ўрнига қўйсак,

$$A = 3,14 \cdot 9,81 \cdot 5 \cdot 1 \approx 154 \text{ кЖ}$$

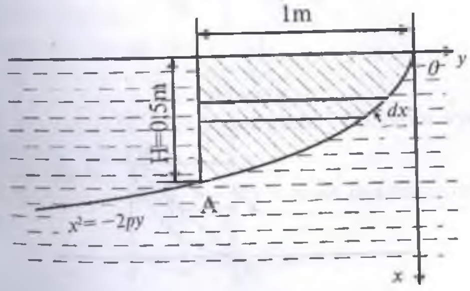
натижага эга бўламиз.

6. 36-чизмада тасвирланган пластинка сувга вертикал қилиб шундай ботирилганки, унинг битта қирраси сув сиртида ётади. Сувнинг солиштирма оғирлиги 9,81 кН/м^3 деб унинг пластинкага берган босим кучини ҳисобланг.

Ечиш. Координаталар системасини 36-чизмада кўрсатилганидек оламиз. У ҳолда эгри чизиқ $x^2 = -2py$ параболанинг содда тенгламаси бўлади. Парабола $A\left(\frac{1}{2};-1\right)$ нуқтадан ўтганлиги учун $p = \frac{1}{8}$ бўлади ва $x^2 = -\frac{y}{4}$ парабола тенгламасига эга бўламиз. x чуқурликда эни dx бўлган горизонтал чизиқлар билан чегараланган юзчани оламиз. Унинг юзи: $ds = \left(1 - |y|\right)dx$. Бу юзчага тасир этувчи сувнинг босими $\Delta P = \gamma x\left(1 - |y|\right)dx = \gamma x(1 - 4x^2)dx$ га тенг.

У ҳолда сувнинг бутун пластинкага босими:

$$P = \gamma\int_0^H x(1 - 4x^2)dx = \gamma\left(\frac{x^2}{2} - x^4\right)\Big|_0^H = \gamma\left(\frac{H^2}{2} - H^4\right).$$



36-чизма.

$H = \frac{1}{2}$ м ва $g = 9{,}81$kH/м³ қийматларни ўрнига қўйсак:

$$P = 9{,}81\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{16}\right) = \frac{9{,}81}{16} \approx 0{,}61\text{кН}.$$

7. $y = x^2$ ва $y = \sqrt{x}$ эгри чизиқлар билан чегараланган бир жинсли шакл оғирлик марказининг координаталарини топинг.

Ечиш. Берилган шакл (37-чизма) оғирлик марказининг координаталари (5.20) формула ёрдамида ҳисобланади, бунда

$$f_1(x) = x^2,\ f_2(x) = \sqrt{x}.$$

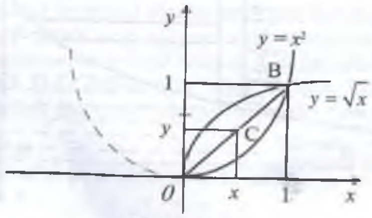
Эгри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси (0;0) ва $B(1;1)$ бўлгани учун $a = 0$, $b = 1$ бўлади. Дастлаб қуйидаги интегрални ҳисоблаб оламиз:

$$\int_0^1 (f_2(x) - f_1(x))dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$$\int_0^1 x(f_2(x) - f_1(x))dx = \int_0^1 x\left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{x4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{20}.$$

Бу қийматларни (5.20) га қўйсак:

$$x_c = y_c = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{20}.$$



37-чизма.

1-вариант

1. $r = 3\cos 2\varphi$.
2. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$.
3. Ф: $x = 3\cos^2 t$, $y = 4\sin^2 t$ $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$, Oy.
4. J: $y = \sqrt{x}$ эгри чизиқнинг $y = x$ тўғри чизиқ билан кесилган қисмини, Ox.
5. P — юқори асосининг радиуси 1 м, пастки асосининг радиуси 2 м, баландлиги 3 м бўлган кесик конус.
6. 38-чизма.
7. J: $\rho = a(1 + \cos\varphi)$, $(0 \le \varphi \le p)$ кардиоида ёйи.

2-вариант

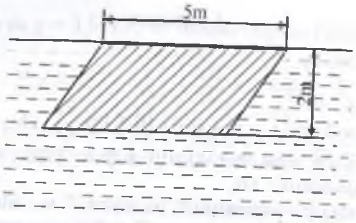
1. $r = 2(1 - \cos\varphi)$.
2. $y^2 = (x + 1^3)$ эгри чизиқнинг $x = 4$тўғри чизиқ билан кесилган қисми.
3. Ф: $x = \sqrt{1 - y^2}$, $y = \sqrt{\frac{3}{4}}x$, $y = 0$, Ox.
4. J: $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, $(0 \le t \le 2\pi)$, Ox.
5. P — асосининг радиуси 1 м, узунлиги 5 м бўлган цилиндрик цистерна.
6. 39-чизма.
7. J: $\rho = ae^{\varphi}\left(\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi\right)$ логарифмик спирал ёйи.

3-вариант

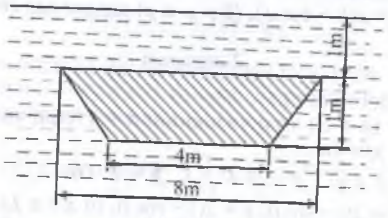
1. $r^2 = 2\sin 2\varphi$.
2. $y = 1 - \ln\cos x, \left(0 \le x \le \frac{\pi}{6}\right)$.
3. Ф: $y^2 = (x - 1)^3$, $x = 2$, Ox.
4. J: $x = \cos t$, $y = 3 + \sin t$, Ox.
5. P — асоси 2 м ва баландлиги 5 м бўлган мунтазам учбурчакли пирамида.
6. 40-чизма.
7. J: $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$ циклоиданинг бир арки.

4-вариант

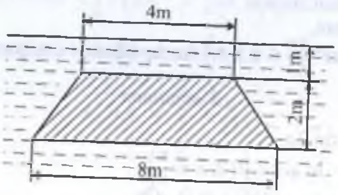
1. $x = 4(t - \sin t)$, $y = 4(1 - \cos t)$.



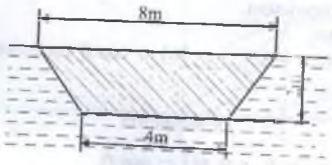
38-чизма.



39-чизма.



40-чизма.



41-чизма.

2. $r = 6\cos^3 \frac{\varphi}{3} \left(0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right)$.

3. Ф: $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = \sqrt{\frac{3}{2}}x$, $y=0$, Ox.

4. J: $3x = y^3$ $(0 \le y \le 2)$, Oy.

5. P — юқори асосининг томони 4 м, баландлиги 6 м, учи пастга йўналтирилган мунтазам учбурчакли пирамида.

6. 41-чизма.

7. J: $x = 2\cos^3 \frac{t}{4}$, $y = 2\sin^3 \frac{t}{4}$ биринчи квадрантда жойлашган астроида ёйи.

5-вариант

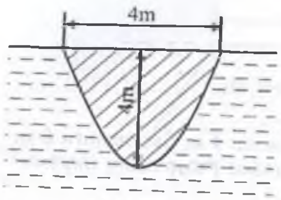
1. $r = 2(1 + \cos\varphi)$.
2. $x = 4\cos^3 t$, $y = 4\sin^4 t$.
3. Ф: $y = \sin x$, $y = 0$, $(0 \le x \le 2)$, Ox.
4. J: $y = \frac{x^3}{3}$ $(-1 < x \le 1)$, Ox.
5. P — асосининг радиуси 3 м, баландлиги 5 м, учи пастга йўналтирилган конус.
6. 42-чизма.
7. J: $x = e^t \cdot \sin t$, $y = e^t \cdot \cos t$ $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$ эгри чизиқ ёйи.

6-вариант

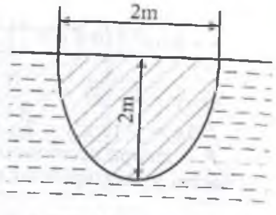
1. $r = 2\sin 3\varphi$.
2. $y^2 = (x-1)^3$ эгри чизиқнинг $A(1;0)$ нуқтадан $B(6;\sqrt{125})$ нуқтагача қисми.
3. Ф:$y^2 = 4x$; $x^2 = 4y$, Ox.
4. J: $x = \cos t$, $y = 1 + \sin t$, Ox.
5. P — устки асосининг радиуси 3 м, пасткисиники 1 м, баландлиги 3 м бўлган кесик конус.
6. 43-чизма.
7. J: $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$ кардиоида ёйи.

7-вариант

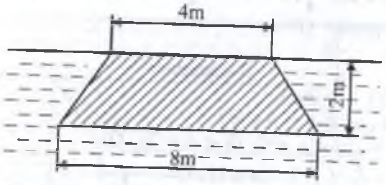
1. $r = 2 + \cos\varphi$.
2. $y^2 = x^5$, эгри чизиқнинг $x = 5$ тўғри чизиқ билан кесилган қисми.
3. Ф: $x = 2\cos t$, $y = 5\sin t$, Oy.



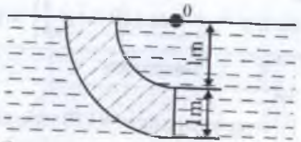
42-чизма.



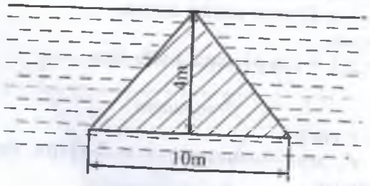
43-чизма.



44-чизма.



45-чизма.



46-чизма.

4. J: $x^2 = 4 + y$, эгри чизиқнинг $y = 2$ тўғри чизиқ билан кесилган қисмини. Oy.

5. P— асосининг радиуси 2 м ва баландлиги 5 м бўлган конус.

6. 44-чизма.

7. J: $r = 2\sin\varphi$ эгри чизиқнинг (0,0) нуқтасидан $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ нуқтасигача ёйи.

8-вариант

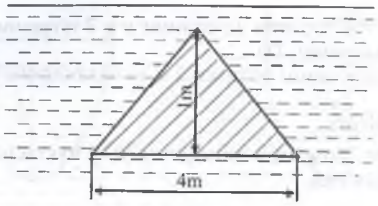
1. $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $y = \dfrac{x^2}{2}$.
2. $r = 3\cos\varphi$.
3. Ф: $y = x^2$, $8x = y^2$, Oy.
4. J: $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$ $(0 \leq x \leq 2p)$.
5. P — юқори асосининг томони 8 м, пастки асоснинг томони 4 м, баландлиги 2 м бўлган мунтазам туртбурчакли кесик пирамида.
6. 45-чизма.
7. J: $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ $(0 \leq x \leq p)$ айлана ёйи.

9-вариант

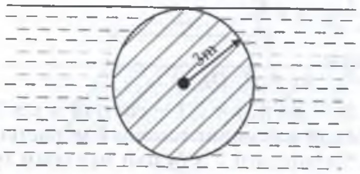
1. $y^2 = x + 1$, $y^2 = 9 - x$.
2. $r = 3(1 - \cos j)$.
3. Ф: $y = e^x$, $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, Ox.
4. J: $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, Ox.
5. P — асосининг радиуси 2 м, чуқурлиги 4 м бўлган параболоид.
6. 46-чизма.
7. J: $\rho = 2\sqrt{3}\cos\varphi$ эгри чизиқнинг $\varphi = 0$ ва $\varphi = \frac{\pi}{4}$ нурлари орасидаги ёйи.

10-вариант

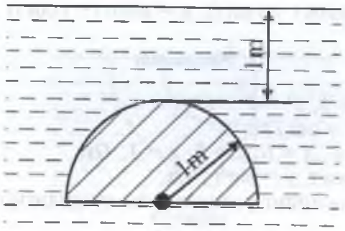
1. $y^2 = x^3$, $x = 0$, $y = 4$.
2. $r = 2\cos^3\dfrac{\varphi}{3}$.
3. Ф: $y^2 = \dfrac{4x}{3}$, $x = 3$, Ox.



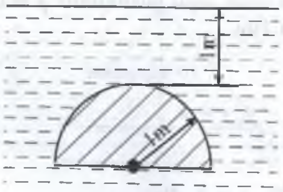
47-чизма.



48-чизма.



49-чизма.



50-чизма.

4. *J*: $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$ қутб ўқи атрофида.

5. *P* — асосининг радиуси 1 м, чуқурлиги 2 м бўлган ярим эллипсоид.

6. 47-чизма.

7. *J*: $x = \sqrt{3}t^2$, $y = t - t^3 (0 \le t \le 1)$ эгри чизиқ ёйи.

11-вариант

1. $r = 4\sin^2\varphi$.

2. $x = 5\cos^2 t$, $y = 5\sin^2 t$ $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$.

3. Ф: $y = 2x - x^2$, $y = 0$, *Ox*.

4. *J*: $y^2 = 4 + x$ параболани $x = 2$ тўғри чизиқ билан ажратган қисмини, *Ox*.

5. *P* — юқори асосининг томони 2 м, пастки асосининг томони 4 м, баландлиги 1 м бўлган мунтазам тўртбурчакли кесик пирамида.

6. 48-чизма.

7. *J*: $x^2 + y^2 = R^2$ айлананинг *Ox* ўқидан юқоридаги ярим қисми.

12-вариант

1. $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$.

2. $9y^2 = 4(3 - x)^2$ эгри чизиқнинг Оу ўқини кесган нуқталари орасидаги ёйни.

3. Ф: $r = 2(1 + \cos\varphi)$, қутб ўқи.

4. *J*: $y^2 = 2x$, эгри чизиқнинг $2x = 3$ тўғри чизиқ билан ажратган қисмини, *Ox*.

5. *P* — асосининг томони 1 м ва баландлиги 2 м бўлган мунтазам тўртбурчакли пирамида.

6. 49-чизма.

7. *J*: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \le x \le 2\pi)$ циклоиданинг биринчи арк ёйи.

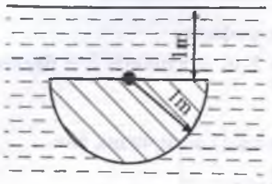
13-вариант

1. $y^2 = 9x$, $y = 3x$.

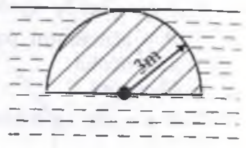
2. $r = 3\sin\varphi$.

3. Ф: $x = 7\cos^3 t$, $y = 7\sin^3 t$, *Oy*.

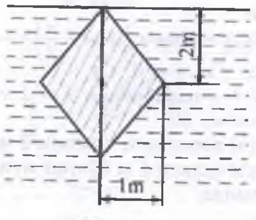
4. *J*: $3y = x^3$ $(0 \le x \le 1)$, *Ox*.



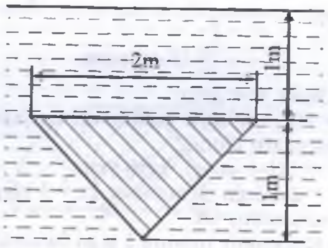
51-чизма.



52-чизма.

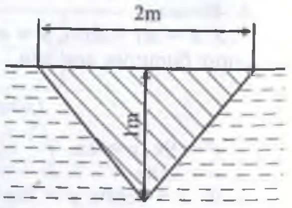


53-чизма.



54-чизма.

55-чизма.



56-чизма.

5. P — асосининг томони 2 м, баландлиги 6 м ва учи пастга йўналган мунтазам олти бурчакли пирамида.
6. 50-чизма.
7. J: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ астроиданинг учинчи квадрантда жойлашган ёйи.

14-вариант

1. $x = 3(\cos t + t\sin t)$, $y = 3(\sin t - t\cos t)$, $y = 0$, $(0 \leq x \leq 2\pi)$.
2. $y = \ln\sin x \left(\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$.
3. Ф: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1} = 1$, Ox.
4. J: $r^2 = 4\cos 2\varphi$, қутб ўқи атрофида.
5. P — асосининг радиуси 1 м ва баландлиги 3 м бўлган цилиндр.
6. 51-чизма.
7. Ф — томонлари $x + y = a$, $x = 0$ ва $y = 0$ тўғри чизиқлар устида ётувчи учбурчак

15-вариант

1. $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$.
2. $x = 9(t - \sin t)$, $y = 9(1 - \cos t)$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$.
3. Ф: $x^3 = (y - 1)^2$, $x = 0$, $y = 0$, Ox.
4. J: $r = 6\sin\varphi$, қутб ўқи атрофида.
5. P — юқори асосининг томони 1 м, пастки асосининг томони 2 м, баландлиги 2 м бўлган мунтазам олти бурчакли кесик пирамида.
6. 52-чизма.
7. Ф: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипс ва $(x \leq 0,\ y \leq 0)$ координата ўқлари билан чегараланган шакл.

16-вариант

1. $y^2 = x^3$, $x = 2$.
2. $r = 2(1 - \cos\varphi)$.
3. Ф: $xy = 4$, $2x + y - 6 = 0$, Ox.
4. J: $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$.

5. P — тарновнинг перпендикуляр кесими радиуси 1 м бўлган ярим айланадан, тарновнинг узунлиги 10 м.

6. 53-чизма.

7. Ф: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ циклоида биринчи аркининг Ox ўқи билан чегараланган қисми.

17-вариант

1. $y^2 = x^2$, $y = 2 - x^2$.

2. $y^2 = (x - 1)^3$ $A(2; -1)$ нуқтадан $B(5; -8)$ нуқтагача.

3. Ф: $x = \sqrt{3}\cos t$, $y = 2\sin t$, Oy.

4. J: $r = 2\sin\varphi$, қутб ўқи атрофида.

5. P— юқори асосининг томони 2 м, пастки асосининг томони 1 м, баландлиги 2 м бўлган мунтазам олти бурчакли кесик пирамида.

6. 54-чизма.

7. Ф: $y^2 = x$, $y = x^2$ эгри чизиқлар билан чегараланган шакл.

18-вариант

1. $y^2 = 4/0x^3$, $x = 0$.

2. $x = 7(t - \sin t)$, $y = 7(1 - \cos t)$ $(2p \leq t \leq 4\pi)$.

3. Ф: $y = 2 - x^2$, $y = x^2$, Ox.

4. J: $r = \frac{2}{3}\cos\varphi$, қутб ўқи атрофида.

5. P — радиуси 2 м бўлган ярим сфера.

6. 55-чизма.

7. Ф: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ айлананинг Ox ўқи билан чегараланган юқори қисми.

19-вариант

1. $r = 3\sin 4\varphi$.

2. $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$ $(0 \leq x \leq 2)$.

3. Ф: $y = -x^2 + 8$, $y = x^2$, Ox.

4. J: $x = 3\cos^3 t$, $y = 3\sin^3 t$, Ox.

5. P— асосининг томони 2 м ва баландлиги 5 м бўлган мунтазам тўртбурчакли пирамида.

6. 56-чизма.

7. Ф: $y = b\sqrt{\frac{x}{a}}$ $(a > 0,\ b > 0)$ парабола ёйи, Oy ўқи ва $y = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган шакл.

20-вариант

1. $y = x^3$, $y = 1$, $x = 0$.

2. $x = 4\cos^3 t$, $y = \sin^3 t$.

3. Ф: $y^2 = (x + 4)^3$, $x = 0$, Ox.

4. J: $x = 2\cos t$, $y = 3 + 2\sin t$, Ox.

5. P— асосининг томони 2 м, баландлиги 6 м бўлган ва учи билан пастга йўналган мунтазам тўртбурчакли пирамида.

6. 57-чизма.

7. Ф: $y^2 = ax^3 - x^4$ ёпиқ чизиқ билан чегараланган шакл.

21-вариант

1. $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$.

2. $x = \sqrt{3}t^2$, $y = t - t^3$ (сиртмоқ).

3. Ф: $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$, Oy.

4. J: $r^2 = 9\cos 2\varphi$, қутб ўқи атрофида.

5. P — шакли сферик сегментдан иборат бўлиб, радиуси 1 м ва баландлиги 1,5 м га тенг қозон.

6. 58-чизма.

7. Ф: координата ўқлари ва биринчи квадрантда жойлашган астроида ёйи билан чегараланган шакл.

22-вариант

1. $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$, $x = 0$, $x = 2$.

2. $r = 5\sin\varphi$.

3. Ф: $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, Ox.

4. J: $y = x^3$, эгри чизиқнинг $x = \pm\frac{2}{3}$ тўғри чизиқлар орасидаги қисмини.

5. P — асосининг радиуси 1 м, узунлиги 5 м бўлган ярим цилиндр.

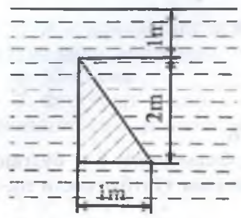
6. 59-чизма.

7. Ф: $r = a(1 + \cos\varphi)$ кардиоида билан чегараланган шакл.

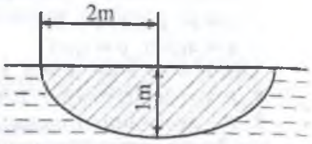
23-вариант

1. $x^2 = 4y$, $y = \frac{8}{x^2+4}$.

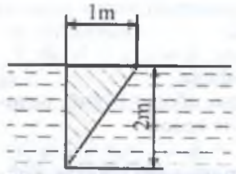
2. $r = 4\cos\varphi$.



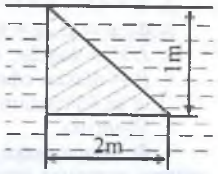
57-чизма.



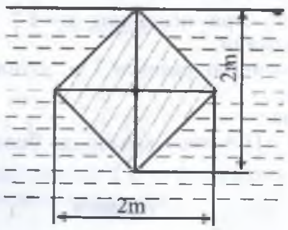
58-чизма.



59-чизма.



60-чизма.



61-чизма.

3. Ф: $2y = x^2$, $2x + 2y - 3 = 0$.

4. J: $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$, Ox.

5. P— тарновнинг перпендикуляр кесими параболадан иборат. Тарновнинг узунлиги 5 м, эни 4 м, чуқурлиги 4 м га тенг.

6. 60-чизма.

7. Ф: $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ Бернулли лемнискатасининг биринчи сиртмоғи билан чегараланган шакло.

24-вариант

1. $y = x + 1$, $y = \cos x$, $y = 0$.

2. $r = 5(1 + \cos\varphi)$.

3. Ф: $y = x - x^2$, $y = 0$, Ox.

4. J. $x = \cos t$, $y = 2 + \sin t$, Ox.

5. P — асоснинг радиуси 8 м, баландлиги 10 м бўлган конус шаклидаги воронка учи пастга қилиб қўйилган.

6. 61-чизма.

7. Ф: координата ўқлари ва $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ парабола билан чегараланган шакл.

25-вариант

1. $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$.

2. $y^2 = x^3$ эгри чизиқнинг $A(0;0)$ нуқтадан $B(4;8)$ нуқтагача қисми.

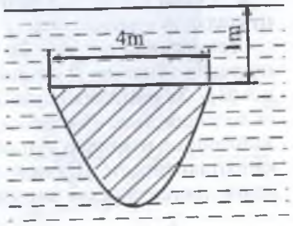
3. Ф: $y = 2 - \frac{x^2}{2}$, $x + y = 2$, Oy.

4. J: $r = 4\sin\varphi$ қутб ўқи атрофида.

5. P — радиуси 1 м бўлган ярим шар шаклидаги қозон.

6. 62-чизма.

7. Ф: $x = a$ $(a > 0)$ тўғри чизиқ ва $ay^2 = x^3$ ярим кубик парабола билан чегараланган шакл.



62-чизма.

VI боб

БИР НЕЧА ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБИ

1-§. Бир неча ўзгарувчили функциялар ҳақида тушунча. Хусусий ҳосила

1 таъриф. Агар D соҳадаги ҳар бир $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ нуқтага бирор қоида ёки қонунга кўра битта ҳақиқий сон z ($z \in R$) мос қўйилган бўлса, D соҳада *кўп ўзгарувчили* (*n та ўзгарувчили*) *функция* берилган (аниқланган) деб аталади ва уни

$$z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

каби белгиланади. Бунда D — функциянинг берилиш (аниқланиш) соҳаси, $x_1, x_2, ..., x_n$ — эркли ўзгарувчилар функциянинг аргументлари, z эрксиз ўзгарувчи эса $x_1, x_2, ..., x_n$ ўзгарувчиларнинг функцияси дейилади.

Икки ўзгарувчили функция $z = f(x,y)$, $z = \varphi(x,y)$, $z = z(x,y)$ ва ҳ. к. кўринишда белгиланади.

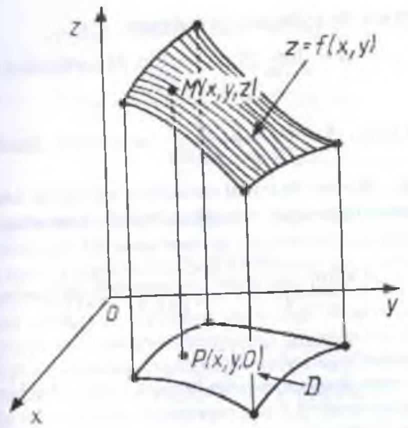
Ҳар қандай $z = f(x,y)$ тенглама $Oxyz$ декарт координаталар системасида бирор сиртни ифодалайди. Бу сирт икки ўзгарувчили функциянинг графиги дейилади. Шунингдек, бу сиртдаги барча $M(x; y; z)$ нуқталар тўпламининг координаталари $z = f(x;y)$ тенгламани қаноатлантиради (63-чизма).

1-мисол. $z = \ln(y + 2x - x^2)$ функциянинг аниқланиш соҳаси D ни ва функциянинг қийматлар соҳасини топинг.

Ечиш. Берилган функция Oxy текисликдаги $y + 2x - x^2 > 0$ёки $y > x^2 - 2x$ тенгсизликни қаноатлантирадиган нуқталарда маънога эга.

Текисликда $y = x^2 - 2x$ тенгламани қаноатлантирувчи нуқталар тўплами D соҳанинг чегарасини ташкил этади. $y = x^2 - 2x$ тенглама параболадан иборат бўлиб, у D соҳага тегишли эмас (64-чизма). $y = x^2 - 2x$ парабола ичига жойлашган нуқталар тўплами $y > x^2 - 2x$ тенгсизликни қаноатлантиради. Шунинг учун D соҳа очиқ ва уни қуйидаги тенгсизликлар системаси ёрдамида ёзиш мумкин:

$$D: \{-\infty < x < +\infty;\ x^2 - 2x < y < +\infty\}.$$



63-чизма.

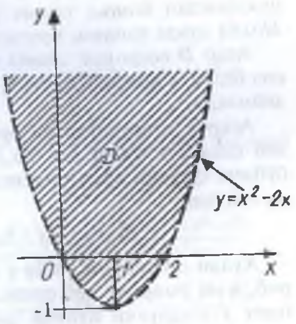
Логарифм ишораси остидаги ифода исталганча кичик ва исталганча катта мусбат қийматларни қабул қилганлиги учун функциянинг қийматлар соҳаси:

$$E: \{-\infty < z < +\infty\}.$$

2-таъриф. Агар исталган $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон атрофи топилсаки, ушбу $0 < |x - x_0| < \delta$ ва $0 < |y - y_0| < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи барча $(x;y) \in D$ нуқталарда

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда A сон $z = f(x,y)$ функциянинг $M_0(x_0;y_0)$ нуқтадаги *лимити* деб аталади.



64-чизма.

Агар A сон $z = f(x,y)$ функциянинг $M_0(x_0;y_0)$ нуқтадаги лимити бўлса, бу қуйидагича ёзилади:

$$A = \lim_{M \to M_0} f(x, y) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y).$$

2-мисол. $A = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ лимитини ҳисобланг.

Ечиш. Лимит белгиси остидаги ифодани элементар алмаштириш ёрдамида соддалаштириб, топамиз:

$$A = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{x^2+y^2+1-1} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right) = 2.$$

3-таъриф. Агар

$$A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $z = f(x,y)$ функция $M_0(x_0;y_0)$ нуқтада *узлуксиз* дейилади.

Масалан, $z = \dfrac{1}{2x^2+y^2}$ функция текисликнинг $M(0;0)$ нуқтасидан бошқа ҳамма нуқталарда узлуксиз. Бунда $M(0;0)$ нуқта узилиш нуқтаси бўлади.

Агар D соҳанинг ҳамма нуқталарида функция узлуксиз бўлса, у ҳолда, берилган функция шу соҳада узлуксиз дейилади.

Агар x ўзгарувчига Δx орттирма бериб, y ни ўзгармас деб олсак, у ҳолда $z = f(x,y)$ функциянинг x ўзгарувчи бўйича хусусий орттирмасига эга бўламиз ва у қуйидагича ёзилади:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Худди шунингдек, агар y ўзгарувчига Δy орттирма бериб, x ни ўзгармас деб олсак, у ҳолда $z = f(x,y)$ функциянинг y ўзгарувчи бўйича хусусий орттирмасини ҳосил қиламиз:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Агар қуйидаги

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \equiv \frac{\partial z}{\partial x} \equiv z'_x \equiv f'_x(x, y),$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} \equiv \frac{\partial z}{\partial y} \equiv z'_y \equiv f'_y(x, y)$$

лимитлар мавжуд бўлса, улар $z = f(x,y)$ функциянинг x ва y ўзгарувчилар бўйича *хусусий ҳосилалари* дейилади.

Бир неча ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосиласи бу ўзгарувчилардан бирининг функциясининг ҳосиласи сифатида топилади. Шунинг учун бир ўзгарувчили функциянинг ҳосилалари учун келтириб чиқарилган барча дифференциаллаш формулалари ва қоидалари бир неча ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилалари учун ҳам сақланади. Бу ерда фақат бирор аргумент бўйича хусусий ҳосилани топиш учун бу қоидалар ва формулаларни қўлланилаётганда қолган аргументлар ўзгармас деб ҳисобланишини ёдда тутиш лозим.

3-мисол. $z = \operatorname{arcctg} \dfrac{y}{x}$ функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг.

Ечиш. Юқорида айтилганларга кўра топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{x}{x^2+y^2}.$$

4-мисол. $u = \ln^2\left(x^2+y^2+z^2\right)$ функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг.

Ечиш.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\ln\left(x^2+y^2+z^2\right) \cdot \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \cdot 2x = \frac{4x\ln(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2\ln\left(x^2+y^2+z^2\right) \cdot \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \cdot 2y = \frac{4y\ln(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2\ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\cdot \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\cdot 2z = \frac{4z\ln(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}.$$

$z = f(x,y)$ функциянинг хусусий дифференциаллари қуйидагича аниқланади:

$$d_x z = f'_x(x,y)dx,\ d_y z = f'_y(x,y)dy,$$

бунда $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ бўлиб, унга эркли x ва y ўзгарувчининг дифференциали дейилади.

5-мисол. $u = \left(xy^2\right)^{z^3}$ функциянинг хусусий дифференциалларини топинг.

Ечиш.

$$d_x u = z^3\left(xy^2\right)^{z^3-1}\cdot y^2 dx,$$

$$d_y u = z^3\left(xy^2\right)^{z^3-1}\cdot 2xydy,$$

$$d_z u = \left(xy^2\right)^{z^3}\cdot \ln\left(xy^2\right)\cdot 3z^2 dz.$$

6-мисол. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ функциянинг x, y, z ўзгарувчиларга нисбатан хусусий ҳосилаларининг $P(2; -2;1)$ нуқтадаги қийматини ҳисобланг.

Ечиш. Хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - yz,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - xz,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - xy.$$

Бу ифодаларга берилган нуқтанинг координаталарини қўямиз:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3},\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P = -\frac{2}{3} - 2 = -\frac{8}{3},\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P = \frac{1}{3} + 4 = \frac{13}{3}.$$

Машқлар

315. Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳасини топинг:

а) $z = \sqrt{y^2 - 2x + 4}$; б) $z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \sqrt{x - y}$;

в) $z = \ln\left(4 - x^2 + y^2\right)$; г) $z = \sqrt{4 - x^2 + y}$;

д) $z = \ln x + \ln\cos y$; е) $z = \sqrt{x^2 - y^2 - 9}$;

ж) $z = \sqrt{xy} + \sqrt{x - y}$; з) $z = \sqrt{4 - y^2 + x}$.

316. Қуйидаги функцияларнинг хусусий ҳосилаларини топинг:

а) $z = \left(x^3 + y^3 - xy^2\right)^3$; б) $z = \arcsin\frac{y}{x}$;

в) $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt{x}}$; г) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$;

д) $z = \ln\left(xy + \ln xy\right)$; е) $z = \sin^2\left(x\cos^2 y + y\sin^2 x\right)$;

ж) $z = \mathrm{arctg}\frac{x-y}{z}$; з) $z = \ln\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+z^2}}$.

317. Агар $u = \ln\left(1 + x + y^2 + z^2\right)$ бўлса, $u'_x + u'_y + u'_z$ нинг $M_0(1;1;1)$ нуқтадаги қийматини ҳисобланг.

318. $z = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$ функция хусусий ҳосилаларининг $M_0(3;4)$ нуқтадаги қийматини ҳисобланг.

319. Қуйидаги функцияларнинг хусусий дифференциалларини топинг:

а) $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$; б) $z = \mathrm{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$;

в) $u = x^{yz}$; г) $u = \frac{x^2+y^2-z^2}{z^2-x^2-y^2}$;

д) $u = \ln\frac{xyz}{x^3+y^3+z^3}$; е) $u = \mathrm{tg}^2\left(x - y^2 + z^2\right)$.

2-§. Функциянинг тўла дифференциали. Мураккаб ва ошкормас функцияларни дифференциаллаш

$z = f(x,y)$ функциянинг тўла орттирмаси деб

$$\Delta z = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x,y)$$

айирмага айтилади.

$z = f(x,y)$ функциянинг Δx ва Δy га нисбатан чизиқли бўлган бош қисми бу функциянинг *тўла дифференциали* деб аталади ва dz билан белгиланади.

Агар $z = f(x,y)$ функция узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда тўла дифференциал мавжуд бўлади ва у қуйидагича ёзилади:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \tag{6.1}$$

бунда $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

n та ўзгарувчили $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциянинг тўла дифференциали қуйидагича аниқланади:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n. \tag{6.2}$$

1-мисол. $z = x^2 - xy + y^2$ функциянинг тўла орттирмаси ва тўла дифференциалини топинг.

Ечиш. Таърифга кўра:

$$\Delta z = (x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x)(y + \Delta y) + (y + \Delta y)^2 - x^2 + xy - y^2 =$$

$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - xy - x\Delta y - y\Delta x - \Delta x\Delta y +$$

$$+ y^2 + 2y\Delta y + (\Delta y)^2 - x^2 + xy - y^2 =$$

$$= 2x\Delta x - x\Delta y + 2y\Delta y - y\Delta x + (\Delta x)^2 - \Delta x\Delta y + (\Delta y)^2 =$$

$$= (2x - y)\Delta x + (2y - x)\Delta y + (\Delta x)^2 - \Delta x\Delta y + (\Delta y)^2.$$

Бунда $(2x - y)\Delta x + (2y - x)\Delta y$ ифода Δx ва Δy ларга нисбатан чизиқли бўлган қисми функциянинг дифференциали dz дан иборат, $\alpha = (\Delta x)^2 - \Delta x\Delta y + (\Delta y)^2$ миқдор эса $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдор. Шундай қилиб, $\Delta z = dz + \alpha$ ни ҳосил қиламиз.

2-мисол. $u = \ln^2(x^2 + y^2 - z^2)$ функциянинг тўла дифференциалини топинг.

Ечиш. Дастлаб функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\ln(x^2 + y^2 - z^2)\cdot\frac{1}{x^2+y^2-z^2}\cdot 2x = \frac{4x\ln(x^2+y^2-z^2)}{x^2+y^2-z^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2\ln(x^2 + y^2 - z^2)\cdot\frac{1}{x^2+y^2-z^2}\cdot 2y = \frac{4y\ln(x^2+y^2-z^2)}{x^2+y^2-z^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2\ln(x^2 + y^2 - z^2)\cdot\frac{1}{x^2+y^2-z^2}\cdot(-2z) = -\frac{4z\ln(x^2+y^2-z^2)}{x^2+y^2-z^2}.$$

(6.2) формулага кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$du = \frac{4\ln(x^2+y^2-z^2)}{x^2+y^2-z^2}\cdot(xdx + ydy - zdz).$$

Тўла дифференциалдан функциянинг қийматларини тақрибий ҳисоблашда фойдаланилади.

Бизга маълумки, $\Delta z \approx dz$, яъни

$$f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) \approx f(x_0,\ y_0) + dz(x_0,\ y_0).$$

3-мисол. $(1{,}02)^{3{,}01}$ ни тақрибий ҳисобланг.

Ечиш. $z = x^y$ функцияни қараймиз. $x_0 = 1$ ва $y_0 = 3$ да $z_0 = 1^3 = 1$ ни ҳосил қиламиз. У ҳолда $z = (1{,}02)^{3{,}01} \approx z_0 + dz = 1 + 0{,}06 = 1{,}06$ га эга бўламиз.

$$\Delta x = 1{,}02 - 1 = 0{,}02, \quad \Delta y = 3{,}01 - 3 = 0{,}01.$$

$z = x^y$ функциянинг ихтиёрий нуқтадаги тўла дифференциалини топамиз.

Аниқланган $\Delta x = 0{,}02$ ва $\Delta y = 0{,}01$ орттирмалари ва $M(1;3)$ нуқтадаги тўла дифференциалини ҳисоблаймиз:

$$dz = 3\cdot 1^2\cdot 0{,}02 + 1^3\cdot\ln 1\cdot 0{,}02 = 0{,}06.$$

У ҳолда $z = (1{,}02)^{3{,}01} \approx z_0 + dz = 1 + 0{,}06 = 1{,}06$ га эга бўламиз:

Агар $z = f(u,v)$ функцияда $u = \varphi(x,y)$, $v = \psi(x,y)$ бўлса, у ҳолда берилган функция x ва y ўзгарувчиларга нисбатан мураккаб функция бўлиб, унинг хусусий ҳосиласини топиш учун қуйидаги формулалардан фойдаланилади:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{6.3}$$

$u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ бўлган ҳол учун (6.3) формуладаги иккинчи ифода йўқолади (яъни нолга тенг бўлади) ва бу формула қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{6.4}$$

Агар $u = x$, $v = y(x)$ бўлса, у ҳолда (6.4) формула қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}. \tag{6.5}$$

(6.5) формула функциянинг тўла ҳосиласини ифодалайди.

4-мисол. Агар $z = \cos(uv)$ функцияда $u = 2x+3y$, $v = xy$ бўлса, унинг хусусий ҳосилаларини топинг.

Ечиш. (6.3) формулага асосан:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-v\cos(uv)\cdot 2-u\cos(uv)\cdot y=$$
$$=-(4xy+3y^2)\cdot\cos(2x^2y+3xy^2),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-v\cos(uv)\cdot 3-u\cos(uv)\cdot x=$$
$$=-(6xy+2x^2)\cdot\cos(2x^2y+3xy^2).$$

5-мисол. Агар $u = x + y^2 + z^3$ функцияда $y = \sin x$, $z = \cos x$ бўлса, унинг тўла ҳосиласини топинг.

Ечиш. (6.4) формулага кўра топамиз:

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}=1+2y\cos x+3z^2(-\sin x)=$$
$$=1+2\sin x\cos x-3\cos^2 x\sin x.$$

Агар $y(x)$ ошкормас функция $F(x,y) = 0$ тенглама билан берилган ва $F'_y(x,y)\neq 0$ бўлса, у ҳолда унинг ҳосиласи

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \tag{6.6}$$

формула билан аниқланади.

Агар $z(x,y)$ ошкормас функция $F(x,y,z) = 0$ тенглама билан берилган ва $F'_z(x,y,z)\neq 0$ бўлса, у ҳолда қуйидаги формула ўринли:

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\quad \frac{dz}{dy}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}. \tag{6.7}$$

6-мисол. $x^3+y^3-e^{xy}-5=0$ тенглама билан берилган ошкормас функциянинг ҳосиласини топинг.

Ечиш. (6.6) формулага асосан:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3x^2-ye^{xy}}{3y^2-xe^{xy}}.$$

7-мисол. $xyz+x^3-y^3-z^3+5=0$ тенглама билан берилган ошкормас функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг.

Ечиш. (6.7) формулага асосан қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{yz+3x^2}{xy-3z^2},\quad \frac{dz}{dy}=-\frac{xz-3y^2}{xy-3z^2}.$$

Машқлар

320. Қуйидаги функцияларнинг тўла дифференциалларини топинг:

а) $z = x^3 + xy^2 + x^2y$;

б) $z = e^{x^2-y^2}$;

в) $z = e^{\cos^3(x^2-y^2)}$;

г) $z = \ln^2(x^2+y^2)$;

д) $u = \sin^3(xy^2z^3)$;

е) $u = \mathrm{ctg}^3(xy^2-y^3+xz^2)$.

321. Қуйидаги ифодаларни тақрибий ҳисобланг:

а) $(1.02)^3\cdot(0.97)^3$;

б) $\sqrt{(4.05)^2+(2.93)^2}$.

322. Агар $u = x\sin y$, $v = y\cos x$ бўлса, $z=\sqrt{u^2+v^2}$ функциянинг хусусий ҳосиласини топинг.

323. Агар $u = xy$, $v=\frac{x}{y}$, $t=e^{xy}$ бўлса, $z=\ln(u^3+v^3-t^3)$ функциянинг хусусий ҳосиласини топинг.

324. Агар $y=\sin\sqrt{x}$ бўлса, $z=\mathrm{tg}^2(x^2-y^2)$ функциянинг хусусий ҳосиласини топинг.

325. Агар $y = e^{-x^2}$ бўлса, $z = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2 + y^2}$ функциянинг хусусий ҳосиласини топинг.

326. $\sin xy - x^2 - y^2 = 5$ тенглама билан берилган y ошкормас функциянинг ҳосиласини топинг.

327. Қуйидаги тенгламалар билан берилган z ошкормас функцияларнинг хусусий ҳосиласини топинг.

а) $xyz - \sin^2 xyz + x^3 + y^3 + z^3 = 7$;

б) $x^2y^2z^2 + 7y^4 - 8xz^3 + z^4 = 10$.

328. $x^3 + y^3 + z^3 - xyz = 2$ тенглама билан берилган z ошкормас функция хусусий ҳосиласининг $M_0(1;1;1)$ нуқтадаги қийматини ҳисобланг.

3-§. Юқори тартибли хусусий ҳосилалар. Сиртга ўтказилган уринма ва нормал текисликларнинг тенгламалари

Биринчи тартибли хусусий ҳосиладан олинган хусусий ҳосила *иккинчи тартибли хусусий ҳосила* дейилади ва уни қуйидагича ёзилади:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xx}(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yy}(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yx}(x, y).$$

Худди шунингдек, уч ва ундан юқори тартибли хусусий ҳосилалар ҳам юқоридаги каби аниқланади.

$\dfrac{\partial^n z}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$ ёзув z функция x ўзгарувчи бўйича k марта ва y ўзгарувчи бўйича $n—k$ марта дифференциалланганлигини билдиради.

$f''_{xy}(x, y)$ ва $f''_{yx}(x, y)$ хусусий ҳосилалар $z = f(x,y)$ функциянинг *аралаш ҳосилалари* дейилади.

1-мисол. $z = e^{x^2y^2}$ функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топинг.

Ечиш. Дастлаб биринчи тартибли хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2y^2}\cdot 2xy^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2y^2}\cdot 2x^2y.$$

Буларни яна дифференциалласак, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{x^2y^2}\cdot 4x^2y^4 + e^{x^2y^2}\cdot 2y^2 = 2y^2e^{x^2y^2}(2x^2y^2 + 1),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{x^2y^2}\cdot 4x^4y^2 + e^{x^2y^2}\cdot 2x^2 = 2x^2e^{x^2y^2}(2x^2y^2 + 1),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = e^{x^2y^2}\cdot 4x^3y^3 + e^{x^2y^2}\cdot 4xy = 4xye^{x^2y^2}(x^2y^2 + 1),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = e^{x^2y^2}\cdot 4x^3y^3 + e^{x^2y^2}\cdot 4xy = 4xye^{x^2y^2}(x^2y^2 + 1).$$

Охирги икки ифодани солиштириб, уларнинг ўзаро тенг эканлигига ишонч ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

Демак, битта функциянинг фақат дифференциаллаш тартиби билан фарқ қиладиган аралаш хусусий ҳосилалари узлуксиз бўлса, улар ўзаро тенг бўлар экан.

2-мисол. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ функция $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ Лаплас тенгламасини қаноатлантиришини исбот қилинг.

Ечиш. Берилган функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2yx}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Буларни Лаплас тенгламасига қўямиз:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2yx}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \equiv 0.$$

$z = f(x,y)$ функциянинг иккинчи тартибли тўла дифференциали (d^2z)

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

формула билан ифодаланади.

3-мисол. $z = x^3 + y^3 + x^2y^2$ функциянинг иккинчи тартибли тўла дифференциалини топинг.

Ечиш. Берилган функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 2xy^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + 2x^2y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 2y^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y + 2x^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy.$$

Демак, $d^2z = (6x + 2y^2)dx^2 + 8xydxdy + (6y + 2x^2)dy^2$.

Агар сирт $z = f(x,y)$ тенглама билан берилган бўлса, у ҳолда $M_0(x_0;y_0;z_0)$ нуқтада берилган сиртга ўтказилган уринма текислик тенгламаси

$$z - z_0 = f'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y - y_0) \tag{6.8}$$

формула билан, сиртга $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқтадан ўтказилган нормалнинг каноник тенгламаси эса

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{f'_z(x_0,y_0)} \tag{6.9}$$

формула билан ифодаланади.

Агар сирт тенгламаси $F(x,\ y,\ z) = 0$ ошкормас кўринишда бўлиб, $F(x_0,\ y_0,\ z_0) = 0$ бўлса, у ҳолда $M_0(x_0;y_0;z_0)$ нуқтада ўтказилган уринма текислик тенгламаси

$$\begin{aligned} F'_x(x_0,y_0,z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0,y_0,z_0) + (y - y_0) + \\ + F'_z(x_0,y_0,z_0)(z - z_0) = 0, \end{aligned} \tag{6.10}$$

нормал тенгламаси эса

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)} \tag{6.11}$$

кўринишда бўлади.

4-мисол. $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 0$ сиртга $M_0(1;\ 2;\ -1)$ нуқтада ўтказилган уринма текислик ва нормал тенгламаларини топинг.

Ечиш. Хусусий ҳосилаларнинг $M_0(1;2;\ -1)$ нуқтадаги қийматларини ҳисоблаймиз.

$$F'_x(x_0,y_0,z_0) = (3x^2 + yz)\big|_{M_0} = 1,$$

$$F'_y(x_0,y_0,z_0) = (3x^2 + xz)\big|_{M_0} = 11,$$

$$F'_z(x_0,y_0,z_0) = (3x^2 + xy)\big|_{M_0} = 5.$$

Буларни (6.10) ва (6.11) тенгламаларга қўйиб, уринма текислик тенгламасини ва нормал тенгламасини ҳосил қиламиз.

$$(x-1) + 1(y-2) + 5(z+1) = 0, \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{5}.$$

Машқлар

329. Қуйидаги функцияларнинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топинг ва аралаш хусусий ҳосилаларнинг тенглигини аниқланг:

а) $z = \frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^3}$; б) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$;

в) $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$; г) $z = e^x\left(\sin y + \cos y\right)$;

д) $z = \mathrm{arctg}\,\frac{x+y}{1-xy}$; е) $z = \frac{x+y}{x-y}$.

330. $z = e^x\left(x\cos y - y\sin y\right)$ функция $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ тенгламани қаноатлантиришини исбот қилинг.

331. $z = e^{-\cos(x+3y)}$ функция $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ тенгламани қаноатлантиришини исбот қилинг.

332. Қуйидаги берилган сиртларга берилган нуқтада ўтказилган уринма текислик ва нормал тенгламаларини топинг:

а) $xyz^2 + 2y^2 + 3yz + 4 = 0$, $M_0\left(0;2;-2\right)$;

б) $z = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$, $M_0(3;1;4)$;

в) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$, $M_0(1;-1;1)$;

г) $z = 1 + x^2 + y^2$, $M_0(1;1;4)$.

4-§. Икки ўзгарувчили функциянинг экстремуми

Агар $M_0(x_0;y_0)$ нуқтанинг шундай кичик атрофи мавжуд бўлсаки, бу атрофнинг M_0 дан фарқли барча $M(x;y)$ нуқталари учун

$$f(x_0, y_0) \ge f(x, y) \quad \left(f(x_0, y_0) \le f(x, y)\right)$$

тенгсизликлар бажарилса, $M_0(x_0;y_0)$нуқта $z = f(x,y)$ функциянинг *локал* максимуми (минимуми) дейилади. Функциянинг максимуми ёки минимуми унинг *экстремуми* дейилади. Функциянинг экстремумга эришадиган нуктаси унинг *экстремум нуқтаси* дейилади.

1-теорема (экстремум мавжудлигининг етарли шарти). *Агар $M_0(x_0;y_0)$ нуқта $z = f(x,y)$ функциянинг экстремум нуқтаси бўлса, у ҳолда унинг хусусий ҳосилалари $f'_x(x_0;y_0) = f'_y(x_0;y_0) = 0$ бўлади ёки бу ҳосилалардан бирортаси мавжуд бўлмайди.*

Бу шартни қаноатлантирадиган нуқталар *стационар* ёки *критик* нуқталар дейилади. Экстремум нуқталар ҳар доим стационар нуқта бўлади, аммо стационар нуқталар экстремум нуқтаси бўлиши ҳам, бўлмаслиги ҳам мумкин. Стационар нуқта экстремум нуқтаси бўлиши учун экстремум мавжуд бўлишининг зарурий шарти ҳам бажарилиши керак.

Икки ўзгарувчили функция экстремуми мавжуд бўлишининг зарурий шартини таърифлаш учун қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$A = f''_{xx}(x_0;y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0;y_0),$$
$$C = f''_{yy}(x_0;y_0), \quad \Delta = AC - B^2.$$

2-теорема (экстремум мавжудлигининг *зарурий* шарти). *$M_0(x_0;y_0)$стационар нуқтага эга бўлган бирор соҳада $z = f(x,y)$ функция узлуксиз ва учинчи тартибли хусусий ҳосилага эга бўлсин. У ҳолда*:

1) *агар $\Delta > 0$ бўлса, $M_0(x_0;y_0)$ нуқта берилган функция учун экстремум нуқтаси бўлиб, $A < 0$ ($C < 0$) да максимум нуқта, $A > 0$ ($C > 0$) да минимум нуқта бўлади;*

2) *агар $\Delta < 0$ бўлса, $M_0(x_0;y_0)$нуқта экстремум нуқтаси бўлмайди;*

3) *агар $\Delta = 0$ бўлса, $M_0(x_0;y_0)$нуқта экстремум нуқтаси бўлиши мумкин, бўлмаслиги ҳам мумкин.*

Учинчи ҳолда қўшимча текшириш ўтказиш зарурлигини эслатиб ўтамиз.

1-мисол. $z = x^3 + y^3 - 3xy$ функциянинг экстремумини текширинг.

Ечиш. Берилган функция учун $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ ҳар доим мавжуд ва бу хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x.$$

Энди қуйидаги системани тузамиз:

$$\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0, \end{cases}$$

бундан $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$. Шундай қилиб, $M_1(0;0)$ ва $M_2(1;1)$ иккита стационар нуқтага эга бўлдик.

Энди қуйидагиларни топамиз:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \qquad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \qquad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

У ҳолда

$$\Delta = AC - B^2 = 36xy - 9.$$

$M_1(0;0)$ нуқтада $\Delta = -9 < 0$ бўлгани учун бу нуқтада экстремум йўқ.

$M_2(1;1)$ нуқтада $\Delta = 27 > 0$ ва $A = 6 > 0$ бўлгани учун бу нуқтада берилган функция локал минимумга эришади: $z_{\min} = -1$.

$\varphi(x,y) = 0$ функция ёрдамида $z = f(x,y)$ функциянинг топилган экстремумини *шартли экстремум* дейилади. $\varphi(x,y) = 0$ тенглама *боғловчи тенглама* дейилади.

Геометрик масалаларда шартли экстремумларни аниқлаш $z = f(x,y)$ сиртнинг $\varphi(x,y) = 0$ цилиндр билан кесишишидан ҳосил бўлган эгри чизиқнинг экстремум нуқталарини топишга келтирилади.

Агар $\varphi(x,y)$ боғловчи тенгламадан $y = y(x)$ ни топиб (агар уни топиш мумкин бўлса), уни $z = f(x,y)$ функцияга қўйсак, шартли экстремумни топиш масаласи $z = (x,y(x))$ бир ўзгарувчили функциянинг экстремумини топишга келтирилади.

2-мисол. $z = x^2 - y^2$ функциянинг $y = 2x - 6$ шарт бўйича экстремумини топинг.

Ечиш. $y = 2x - 6$ ни берилган функцияга қўйиб, x ўзгарувчига нисбатан бир ўзгарувчили қуйидаги функцияни ҳосил қиламиз:

$$z = x^2 - (2x - 6)^2, \qquad z = -3x^2 + 24x - 36.$$

Унинг ҳосиласини топамиз ва уни нолга тенглаймиз:

$$z' = -6x + 24;\ z' = 0, \text{ бундан}$$
$$x = 4,\ y = 2x - 6 = 8 - 6 = 2.$$

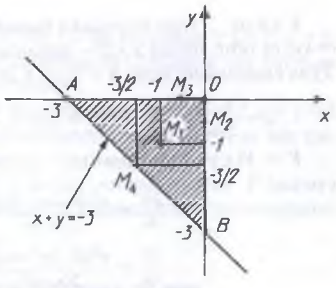
Иккинчи тартибли ҳосила $z'' = -6 < 0$ бўлгани учун $M(4;2)$ нуқтада берилган функция шартли максимумга эришади: $z_{\max} = 12$.

Дифференциалланувчи функция чегараланган ёпиқ $\overline{D}$ соҳада ўзининг энг катта (энг кичик) қийматига ёпиқ $\overline{D}$ соҳа ичида ётувчи стационар нуқтасида ёки шу соҳанинг чегарасида эришади. $z = f(x,y)$ функциянинг чегараланган ёпиқ $\overline{D}$ соҳадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топиш учун функциянинг бу соҳага тегишли критик нуқталардаги қийматларини ҳамда унинг $\overline{D}$ соҳанинг чегарасидаги энг катта ва энг кичик қийматлар аниқланади. Бу қийматларнинг орасидаги энг каттаси ва энг кичиги берилган функциянинг $\overline{D}$ соҳадаги мос равишда энг катта ва энг кичик қийматлари бўлади. Буни қуйидаги мисолда кўрсатамиз.

3-мисол. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ функциянинг $x = 0$, $y = 0$, $x + y = -3$ чизиқлар билан чегараланган соҳадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

Ечиш. Oxy текислигида $\overline{D}$ соҳани чизиб оламиз (65-чизма). $\overline{D}$ соҳага тегишли стационар нуқталарни аниқлаймиз:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2x - y + 1 = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 2y - x + 1 = 0, \end{aligned}\right\}$$



65-чизма.

бундан $x = -1$, $y = -1$. $M(-1; -1)$ нуқтани ҳосил қилдик, бу нуқтада $z_1 = z(-1;-1) = -1$.

Берилган функцияни соҳа чегарасида текширамиз.

OB тўғри чизиқда (65-чизма) $x = 0$ бўлиб, $z = y^2 + y$ тенгламага эга бўламиз ва бу тенглама $[-3;0]$ кесмада бир ўзгарувчили функциянинг энг катта ва энг кичик қийматини топиш масаласига келади. $z'_y = 2y + 1$ ни топиб, уни нолга тенглаймиз: $2y + 1 = 0$, бундан $y = -\frac{1}{2}$; $z''_{yy} = 2$ бўлгани учун $M_2\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ шартли локал минимум нуқтага эга бўламиз ва унда $z_2 = z\left(0;-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ қийматни ҳосил қиламиз. OB кесма учларида:

$$z_3 = z(0,-3) = 6, \qquad z_4 = z(0,0) = 0.$$

OA тўғри чизиқда, $y = 0$ бўлиб, $z = x^2 + x$ ни ҳосил қиламиз. $z'_x = 2x + 1 = 0$, $x = -\frac{1}{2}$, $z''_{xx} = 2$, яъни $M_3\left(-\frac{1}{2};0\right)$ локал минимум нуқтаси бўлиб, унда $z_5 = z\left(-\frac{1}{2};0\right) = -\frac{1}{4}$.

А нуқтада: $z_6 = z(-3,0) = 6$.

AB кесма тенгламаси $x + y = -3$ бўлиб, ундан $y = -x - 3$; $z = 3x^2 + 9x + 6$, $z'_x = 6x + 9$, $x = -\frac{3}{2}$, $M_4\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$ стационар нуқтага эга бўлдик: $z_7 = z\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$. Функциянинг AB кесма учлардаги қийматлари юқорида аниқланган эди.

Берилган z функциянинг топилган барча қийматларини солиштириб, функция $A(-3;0)$ ва $B(0;-3)$ нуқталарда энг катта $z_{\text{энг кат}} = 6$ ва $M_1(-1;-1)$ стационар нуқтада энг кичик $z_{\text{энг кич}} = -1$ қийматларга эришишини аниқлаймиз.

4-мисол. Тўла сиртининг юзи S, ҳажми эса энг катта бўлган тўғри бурчакли параллелепипеднинг ўлчамларини аниқланг.

Ечиш. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажми $V = xyz$ га тенг, бунда x,y,z — параллелепипеднинг ўлчамлари. Тўла сиртининг юзи: $S = 2(xy + xz + yz)$, бундан

$$z = \frac{S-2xy}{2(x+y)}, \qquad V = xyz = \frac{Sxy-2x^2y^2}{2(x+y)} = V(x,y).$$

$V = V(x;y)$ функциянинг экстремумларини топамиз:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2(S-2x^2-4xy)}{2(x+y)^2} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2(S-2y^2-4xy)}{2(x+y)^2} = 0, \end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned} S - 2x^2 - 4xy = 0, \\ S - 2y^2 - 4xy = 0. \end{aligned}\right\}$$

Масала шартига кўра $x > 0$, $y > 0$ бўлгани учун охирги системадан $x = y = \sqrt{\frac{S}{6}}$ ни топамиз. Демак, ягона $M_0\left(\sqrt{\frac{S}{6}};\sqrt{\frac{S}{6}}\right)$ стационар нуқтага эга. У $V = V(x;y)$ функция учун максимум нуқтаси бўлади.

Шундай қилиб, ҳажми энг катта бўлган параллелепипед, яъни қирраси $\sqrt{\frac{S}{6}}$ га тенг кубга эга бўламиз.

Машқлар

333. Қуйидаги функцияларнинг экстремумини текширинг:

а) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$;

б) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$;

в) $z = 3xy - x^2 - y^2 - 10x + 15y$;

г) $z = x^3 + x^2 - 3x + 2y$;

д) $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$;

е) $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$.

334. $z = x + 2y$ функциянинг $x^2 + y^2 = 5$ шарт бўйича экстремумини топинг.

335. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 5$ функциянинг $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$ чизиқлар билан чегараланган соҳадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

336. $z = x^2y(4 - x - y)$ функциянинг $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$ чизиқлар билан чегараланган соҳадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

337. Тўла сиртининг юзи энг кичик бўлган V ҳажмга эга тўғри бурчакли параллелепипеднинг ўлчамларини аниқланг.

5-§. Биринчи мустақил уй иши

Мустақил уй ишининг ҳар бир вариантида олтита мисол бўлиб, уларнинг шарти қуйидагича.

1-мисолда: берилган функциянинг аниқланиш соҳасини топиш керак.

2-мисолда: берилган функциянинг хусусий ҳосиласини ва хусусий дифференциалини топиш керак.

3-мисолда: берилган функциянинг $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нуқтадаги хусусий ҳосилаларини $(f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0))$ қийматларини вергулдан кейин иккита рақамгача аниқлик билан ҳисоблаш керак.

4-мисолда: берилган функциянинг тўла дифференциалини топиш керак.

5-мисолда: $u = u(x,y)$ (бунда $x = x(t)$, $y = y(t)$) мураккаб функция ҳосиласининг $t = t_0$ даги қийматини вергулдан кейин иккита рақамгача аниқлик билан ҳисоблаш керак.

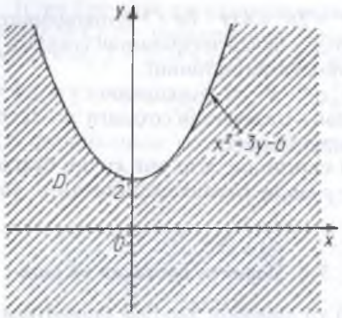
6-мисолда: $z(x,y)$ ошкормас кўринишда берилган функция хусусий ҳосиласининг $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нуқтадаги қийматини вергулдан кейин иккита рақамгача аниқлик билан ҳисоблаш керак.

Қуйида вариант мисолларини ечиш намунасини келтирамиз.

1-мисол. $z = \ln(x^2 - 3y + 6)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. Логарифмик функцияларнинг аргументлари фақат мусбат бўлгандагина маънога эга бўлгани учун $x^2 - 3y + 6 > 0$ бўлиши керак. Бундан

$$3y < x^2 + 6 \text{ ёки } y < \frac{1}{3}x^2 + 2.$$



66-чизма.

Демак, аниқланиш соҳа чегараси $x^2-3y+6=0$ ёки $x^2=3y-6$ чизиқ, яъни параболадан иборат. Берилган функциянинг аниқланиш соҳаси парабола ташқарисидаги нуқталардан иборат (66-чизма).

2-мисол. $z=e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}$ функциянинг хусусий ҳосилаларини ва хусусий дифференциалларини топинг.

Ечиш. Функциянинг x бўйича хусусий ҳосиласини топамиз. Унинг учун y ни ўзгармас деб бир ўзгарувчили мураккаб функцияни дифференциаллаш формуласидан фойдаланамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}\left(-\frac{1}{3}\left(x^2+5y^2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x\right)=$$

$$=-\frac{2x}{3}e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+5y^2)^2}}.$$

Шунингдек, x ни ўзгармас деб y бўйича хусусий ҳосилани топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}\left(-\frac{1}{3}\left(x^2+5y^2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 10y\right)=$$

$$=-\frac{10y}{3}e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+5y^2)^2}}.$$

Хусусий дифференциалларини топамиз:

$$d_xz=\frac{\partial z}{\partial x}dx=-\frac{2x}{3}e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+5y^2)^2}}dx.$$

$$d_yz=\frac{\partial z}{\partial y}dx=-\frac{10y}{3}e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+5y^2)^2}}dy.$$

3-мисол. $f(x,y,z)=\sqrt{xy}\cos z$ функция хусусий ҳосилаларининг $(f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0))$ $M_0\left(1;1;\frac{\pi}{3}\right)$ нуқтадаги қийматларини вергулдан кейин иккита рақамгача аниқлик билан ҳисобланг.

Ечиш. Берилган функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз, сўнгра уларнинг $M_0\left(1;1;\frac{\pi}{3}\right)$ нуқтадаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$f'_x(x,y,z)=\frac{y}{2\sqrt{xy}}\cdot\cos z,\qquad f'_x\left(1,1,\frac{\pi}{3}\right)=0.25,$$

$$f'_y(x,y,z)=\frac{x}{2\sqrt{xy}}\cdot\cos z,\qquad f'_y\left(1,1,\frac{\pi}{3}\right)=0.25,$$

$$f'_z(x,y,z)=\sqrt{xy}\cdot(-\sin z),\qquad f'_z\left(1,1,\frac{\pi}{3}\right)=-0.86.$$

4-мисол. $z=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{y}}$ функциянинг тўла дифференциалини топинг.

Ечиш. Берилган функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{x+y}\cdot\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}\cdot(x+y)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=\frac{y}{x+y}\cdot\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}\cdot(x+y)}.$$

(6.1) формулага асосан қуйидагига эгамиз:

$$dz=\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}\cdot(x+y)}dx-\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}\cdot(x+y)}dy.$$

5-мисол. $z = \arccos\frac{x^2}{y}$ (бунда, $x = 1+\ln t$, $y = -2e^{-t^2+1}$) мураккаб функция ҳосиласининг $t_0 = 1$ даги қийматини вергулдан кейин иккита рақамгача аниқлик билан ҳисобланг.

Ечиш. (6.4) формулага асосан қуйидагига эгамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^4}{y^2}}}\cdot\frac{2x}{y}\cdot\frac{1}{t} -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^4}{y^2}}}\cdot\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)\cdot\left(-2e^{-t^2+1}\right)\cdot(-2t).$$

$t_0 = 1$ бўлса, $x = 1$, $y = -2$ ва $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ ни ҳосил қиламиз.

6-мисол. $4x^3 - 3y^3 + 2xyz - 4xz = 3 - z^2$ ошкормас функция хусусий ҳосилаларининг $M_0(0;1;-1)$ нуқтадаги қийматини вергулдан кейин иккита рақамигача аниқлик билан ҳисобланг.

Ечиш. Берилган мисол учун

$$F(x, y, z) = 4x^3 - 3y^3 + 2xyz - 4xz + z^2 - 3.$$

Унинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$F'_x = 12x^2 + 2yz - 4z\,,\quad F'_y = -9y^2 + 2xz\,,$$

$$F'_z = 2xy - 4x + 2z\,.$$

(6.7) формулага асосан:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{12x^2+2yz-4z}{2xy-4x+2z},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{9y^2+2xz}{2xy-4x+2z}.$$

$\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ ларнинг $M_0(0;1;-1)$ нуқтадаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial z(0,1,-1)}{\partial x} = 1,\quad \frac{\partial z(0,1,-1)}{\partial y} = -4.5.$$

1-вариант

1. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 5}$.
2. $z = \mathrm{tg}(x^3 + y^2)$.
3. $f(x, y, z) = \ln\cos(x^2y^2 + z)$, $M_0\left(0;0;\frac{\pi}{4}\right)$.
4. $z = \cos(x^2 - y^2) + x^3$.
5. $u = \ln(e^x + e^y)$, $x = t^2$, $y = t^3$, $t_0 = 1$.
6. $z^3 + 3xyz + 3y = 7$, $M_0(1;1;1)$.

2-вариант

1. $z = \arccos(x + y)$.
2. $z = \mathrm{ctg}\sqrt{xy^3}$.
3. $f(x, y, z) = 27\sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}$, $M_0(3;4;2)$.
4. $z = \ln(3x^2 - 2y^2)$.
5. $u = x^y$, $x = e^t$, $y = \ln t$ $t_0 = 1$.
6. $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = \frac{3}{2}$, $M_0\left(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$.

3-вариант

1. $z = 3x + \frac{y}{2-x+y}$.
2. $z = e^{-x^2+y^2}$.
3. $f(x, y, z) = \mathrm{arctg}(xy^2 + z)$, $M_0(2;1;0)$.
4. $z = 5xy^2 - 3x^3y^4$.
5. $u = e^{y-2x}$, $x = \sin t$, $y = t^3$, $t_0 = 0$.
6. $e^{z-1} = \cos x\cos y + 1$, $M_0\left(0;\frac{\pi}{2};1\right)$.

4-вариант

1. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.
2. $z = \ln(3x^2 - y^4)$.

4. $z = \frac{\operatorname{tg}(x+y)}{x-y}$.
5. $u = \frac{x}{y}$, $x = e^t$, $y = 2 - e^{2t}$, $t_0 = 0$.
6. $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z + 2 = 0$, $M_0\left(1;1;1\right)$.

11-вариант

1. $z = \frac{x^3y}{3+x-y}$.
2. $z = e^{2x^2-y^2}$.
3. $f(x,y,z) = \ln(x+y^2) - \sqrt[3]{x^2y^2}$, $M_0\left(5;2;3\right)$.
4. $z = \operatorname{ctg}\frac{y}{x}$.
5. $u = \ln(e^{-x} + e^{2y})$, $x = t^2$, $y = \frac{1}{3}t^3$, $t_0 = 1$.
6. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 2$, $M_0\left(0;1;-1\right)$.

12-вариант

1. $z = \arccos(x + 2y)$.
2. $z = \ln\left(\sqrt{xy} - 1\right)$.
3. $f(x,y,z) = \sqrt{z} \cdot x^y$, $M_0\left(1;2;4\right)$.
4. $z = xy^4 - 3x^2y + 1$.
5. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + 3}$, $x = \ln t$, $y = t^2$, $t_0 = 1$.
6. $e^z - xyz - x + 1 = 0$, $M_0\left(2;1;0\right)$.

13-вариант

1. $z = \arcsin(2x - y)$.
2. $z = \arcsin(2x^3y)$.
3. $f(x,y,z) = -\frac{z}{x^2+y^2}$, $M_0\left(\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.
4. $z = \ln(x + xy - y^2)$.

5. $u = \arcsin\frac{x^2}{y}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$.
6. $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 15 = 0$, $M_0\left(1;-1;2\right)$.

14-вариант

1. $z = \ln(9 - x^2 - y^2)$.
2. $z = \operatorname{arctg}\frac{x^2}{y^2}$.
3. $f(x,y,z) = \ln(x^3 + \sqrt[3]{y} - z)$, $M_0\left(2;1;8\right)$.
4. $z = 2x^2y^2 + x^3 - y^3$.
5. $u = \frac{y^2}{x}$, $x = 1 - 2t$, $y = 1 + \operatorname{arctg} t$, $t_0 = 0$.
6. $x^2 - 2xy - 3y^2 + 6x - 2y + z^2 - 8z + 20 = 0$, $M_0\left(0;-2;2\right)$.

15-вариант

1. $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$.
2. $z = \cos(x - \sqrt{xy^3})$.
3. $f(x,y,z) = \frac{z}{x^4+y^2}$, $M_0\left(2;3;25\right)$.
4. $z = \sqrt{3x^2 - 2y^2 + 5}$.
5. $u = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$.
6. $x^2 + y^2 + z^2 = y - z + 3$, $M_0\left(1;2;0\right)$.

16-вариант

1. $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-5}}$.
2. $z = \sin\frac{x+y}{x-y}$.
3. $f(x,y,z) = 8\sqrt[5]{x^3 + x^2 + z}$, $M_0\left(3;2;1\right)$.

4. $z = \arcsin\frac{x+y}{x}$.

5. $u = \sqrt{x^2 + y + 3}$, $x = \ln t$, $y = t^2$, $t_0 = 1$.

6. $x + y + z + 2 = xyz$, $M_0\,(2;1;0)$.

17-вариант

1. $z = 4x + \frac{y}{2x-5y}$.

2. $z = \operatorname{tg}\frac{2x-y^2}{x}$.

3. $f(x,y,z) = \ln\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - z\right)$, $M_0\,(1;1;1)$.

4. $z = \operatorname{arctg}(x - y)$.

5. $u = \arcsin\frac{x}{2y}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$.

6. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 3y - z = 0$, $M_0\,(1;-1;1)$.

18-вариант

1. $z = \frac{\sqrt{3x-2y}}{x^2+y^2+4}$.

2. $z = \operatorname{ctg}\sqrt{\frac{x}{x-y}}$.

3. $f(x,y,z) = -\frac{2x}{\sqrt{z^2+y^2}}$, $M_0\,(3;0;1)$.

4. $z = \sqrt{3x^2 - y^2 + x}$.

5. $u = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$, $x = \sin\,2t$, $y = tg^2t$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

6. $x^2 - y^2 - z^2 + 6z + 2x - 4y + 12 = 0$, $M_0\,(0;1;-1)$.

19-вариант

1. $z = \frac{5}{4-x^2-y^2}$.

2. $z = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$.

3. $f(x,y,z) = z \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, $M_0\,(0;0;1)$.

4. $z = y^2 - 3xy - x^4$.

5. $u = \sqrt{x + y + 3}$, $x = \ln t$, $y = t^2$, $t_0 = 1$.

6. $\sqrt{x^2 + y^2} + z^2 - 3z = 3$, $M_0\,(4;3;1)$.

20-вариант

1. $z = \ln(2x - y)$.

2. $z = \ln(3x^2 - y^2)$.

3. $f(x,y,z) = \frac{\sin(x-y)}{z}$, $M_0\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3};\sqrt{3}\right)$.

4. $z = \arccos(x + y)$.

5. $u = \frac{y}{x}$, $x = e^t$, $y = 1 - e^{2t}$, $t_0 = 0$.

6. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 59$, $M_0\,(3;1;4)$.

21-вариант

1. $z = \frac{7x^3y}{x-4y}$.

2. $z = \arccos(x - y)$.

3. $f(x,y,z) = \sqrt{z}\cdot\ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$, $M_0\,(4;1;4)$.

4. $z = \ln(y^2 - x^2 + 3)$.

5. $u = \arcsin\frac{2x}{y}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$.

6. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2z = 17$, $M_0\,(-2;-1;2)$.

22-вариант

1. $z = \sqrt{1 - x - y}$.

2. $z = \operatorname{arcctg}\frac{x^3}{y}$.

3. $f(x,y,z) = \frac{x-z}{x-y}$, $M_0\,(3;1;1)$.

4. $z = 2 - x^3 - y^3 + 5x$.
5. $u = \ln(e^{2x} + e^{y})$, $x = t^2$, $y = t^4$, $t_0 = 1$.
6. $x^3 + 3xyz - z^3 = 12$, $M_0\,(3;1;3)$.

23-вариант

1. $z = e^{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$.
2. $z = \cos\frac{x-y}{x^2+y^2}$.
3. $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos z}$, $M_0\left(3;4;\frac{\pi}{2}\right)$.
4. $z = 7x - x^3y^2 + y^4$.
5. $u = \mathrm{arctg}(x + y)$, $x = t^2 + 2$, $y = 4 - t^2$, $t_0 = 1$.
6. $\ln z = x + 2y - z + \ln 3$, $M_0\,(1;1;3)$.

24-вариант

1. $z = \frac{1}{x^2+y^2-6}$.
2. $z = \sin\sqrt{\frac{y}{x+y}}$.
3. $f(x,y,z) = z \cdot e^{-xy}$, $M_0\,(0;1;1)$.
4. $z = e^{y-x}$.
5. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + 3}$, $x = \ln t$, $y = t^3$, $t_0 = 1$.
6. $2x^2 + 2y^2 + z^3 - 8xz - z + 6 = 0$, $M_0\,(2;1;1)$.

25-вариант

1. $z = \frac{4xy}{x^2-y^2}$.
2. $z = e^{-(x^2+y^2)}$.
3. $f(x,y,z) = \arcsin\left(x\sqrt{y}\right) - yz^2$, $M_0\,(0;4;1)$.
4. $z = \mathrm{arctg}(2x - y)$.
5. $u = \mathrm{arctg}(xy)$, $x = t + 3$, $y = e^t$, $t_0 = 0$.
6. $z^2 = xy - z + x^2 - 4$, $M_0\,(2;1;1)$.

6-§. Иккинчи мустақил уй иши

Мазкур мустақил уй ишининг ҳар бир вариантида бешта мисол бўлиб, уларнинг шарти қуйидагича:

1-мисолда: берилган S сиртга $M_0\,(x_0;y_0;z_0)$ нуқтада ўтказилган уринма ва нормал текисликлар тенгламасини топиш керак.

2-мисолда: берилган функциянинг иккинчи тартибли ҳосилаларини топиш ва $z''_{xy} = z''_{yx}$ тенглик тўғрилигини текшириш керак.

3-мисолда: берилган U функция берилган тенгламани қаноатлантиришини текшириш керак.

4-мисолда: функциянинг экстремумини текшириш керак.

5-мисолда: берилган чизиқлар билан чегараланган $\overline{D}$ соҳада $z = z(x,y)$ функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топиш керак.

Қуйида вариант мисолларини ечиш намунасини келтирамиз.

1-мисол. S: $z = x^2 - y^2 + 3xy - 4x + 2y - 4$ сиртга $M_0(-1;0;1)$ нуқтада ўтказилган уринма ва нормал текисликлар тенгламасини топинг.

Ечиш. Хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y - 4 , \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y + 3x + 2 \cdot$$

Ҳосил қилинган ифодаларга $M_0(-1;0;1)$ нуқтанинг координаталарини қўямиз, натижада S сиртга перпендикуляр ва берилган нуқтадан ўтувчи $\bar{n}$ векторнинг координаталарига эга бўламиз:

$$A = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = 6 , \qquad B = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = -1 , \qquad C = -1.$$

(6.8) формулага асосан уринма текислик тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$6\left(x+1\right) - y - \left(z-1\right) = 0 \text{ ёки } 6x + y + z + 5 = 0 .$$

(6.9) формулага асосан нормал тенгламаси:

$$\frac{x+1}{6} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1} .$$

2-мисол. $z = \arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$ функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топинг.

Ечиш. Дастлаб берилган функциянинг биринчи тартибли хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$z'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{y} = -\frac{1}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{y-x}},$$

$$z'_y = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\left(\frac{-x}{y^2}\right) = -\frac{\sqrt{x}}{2y\sqrt{y-x}}.$$

Бу ҳосилаларнинг ҳар бирини x ва y бўйича дифференциаллаб, берилган функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$z''_{xx} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{y-x}-\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y-x}}}{2x(y-x)} = \frac{y-x-x}{4x\sqrt{x}\cdot\sqrt{y-x}(y-x)} = \frac{y-2x}{4x\sqrt{x}(y-x)\sqrt{y-x}},$$

$$z''_{yy} = -\frac{\sqrt{x}}{2}\left(\frac{\sqrt{y-x}+\frac{y}{2\sqrt{y-x}}}{y^2(y-x)}\right) = \frac{\sqrt{x}\cdot(2x+3y)}{2y^2(y-x)},$$

$$z''_{xy} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(-\frac{1}{2}\right)(y-x)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)\sqrt{y-x}},$$

$$z''_{yx} = \frac{1}{2y}\cdot\frac{\frac{\sqrt{y-x}}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y-x}}}{y-x} = \frac{y-x+x}{4y(y-x)\sqrt{x}\sqrt{y-x}} = \frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)\sqrt{y-x}}.$$

Булардан аралаш хусусий ҳосилалар тенглиги ($z'_{xy} = z'_{yx}$) кўриниб турибди.

3-мисол. $u = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ функция

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{4y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$$

тенгламани қаноатлантиришини текширинг.

Ечиш. Берилган u функциянинг x ва y ўзгарувчилар бўйича биринчи ва иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = -\frac{4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Топилганларни берилган тенгламанинг чап ва ўнг томонига қўямиз. Чап томонда:

$$\frac{2\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \frac{8x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \frac{2\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{8x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Ўнг томонда эса:

$$\frac{4y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{8xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Ҳосил қилинган натижалардан берилган функция тенгламани қаноатлантирмаслиги кўриниб турибди.

4-мисол. $z = xy(x + y - 2)$ функциянинг локал экстремумларини текширинг.

Ечиш. Берилган функциянинг биринчи тартибли хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$z'_x = 2xy + y^2 - 2y, \qquad z'_y = x^2 + 2xy - 2x.$$

Уларни нолга тенглаб қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} y(2x + y - 2) = 0,\\ x(x + 2y - 2) = 0.\end{aligned}\right\}$$

Бундан берилган функциянинг $M_1(0;0)$, $M_2(2;0)$, $M_3(0;2)$, $M_4\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$ стационар нуқталарини аниқлаймиз. 2-теорема ёрдамида бу нуқталарнинг қайси бирлари экстремум нуқталари эканлигини аниқлаймиз. Унинг учун берилган функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$z''_{xx} = 2y,\ z''_{xy} = 2x + 2y - 2,\ z''_{yy} = 2x.$$

Ҳосил қилинган ифодаларга стационар нуқталарнинг координаталарини қўямиз ва экстремум мавжудлигини зарурий шартидан фойдаланиб қуйидагига эга бўламиз:

M_1 нуқта учун $\Delta = -4 < 0$, яъни экстремум йўқ;
M_2 нуқта учун $\Delta = -4 < 0$, яъни экстремум йўқ;
M_3 нуқта учун $\Delta = -4 < 0$, яъни экстремум йўқ;

M_4 нуқта учун $\Delta = \frac{12}{9} > 0$, $A = \frac{4}{3} > 0$, яъни экстремум нуқта йўқ, лекин берилган функция локал минимум нуқтага эга ва унда

$$z_{\min} = z\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}.$$

5-мисол. $x = 0$, $y = 0$, $x + y - 1 = 0$ чизиқлар билан чегараланган $\bar{D}$ соҳада $z = xy - y^2 + 3x + 4y$ функциянинг энг катта ва энг кичик қийматини топинг.

Ечиш. Дастлаб берилган $\bar{D}$ соҳани чизиб оламиз (67-чизма). Берилган $\bar{D}$ соҳа, яъни OAB учбурчакнинг ичида ётувчи стационар нуқталар бор ёки йўқлигини аниқлаймиз. Унинг учун берилган функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

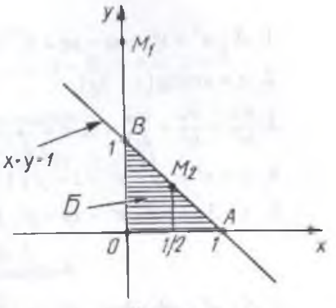
$$z'_x = y + 3, \qquad z'_y = x - 2y + 4.$$

Бундан

$$\left.\begin{aligned} z'_x &= y + 3 = 0, \\ z'_y &= x - 2y + 4 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{ёки} \quad \left.\begin{aligned} y + 3 &= 0, \\ x - 2y + 4 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Ҳосил қилинган системани ечиб $M(-10;-3)$ стационар нуқтани топамиз. Бу нуқта $\bar{D}$ соҳа ташқарисида бўлгани учун уни масалани ечишда ҳисобга олмаймиз. Функциянинг қийматларини $\bar{D}$ соҳа чегарасида текширамиз.

OAB учбурчакнинг OA томонида $(y = 0,\ 0 \le x \le 1)$ z функция $z = 3x$ кўринишда бўлади. OA кесмада стационар нуқта йўқ, чунки $z' = 3$. O ва A нуқталарда, мос равишда $z(0,0) = 0$, $z(1,0) = 3$. Учбурчакнинг OB томонида $(x = 0,)$ $0 \le y \le 1)$ z функция: $z' = y^2 + 4y$, $z' = -2y + 4$. Стационар нуқтани $-2y + 4 = 0$ тенгламадан топамиз, яъни $y = 2$. $M_1(0;2)$ нуқта $\bar{D}$ соҳага тегишли эмас. B нуқтадаги функциянинг қиймати $z(0,1) = 3$. Энди тенгламаси $x + y = 1$ бўлган томондаги энг катта ва энг кичик қийматини топамиз. Бунда $y = 1 - x$, $z = -2x^2 + 2x + 3$, у ҳолда $z' = -4x + 2$ ва $z' = 0$ дан $x = \frac{1}{2}$ га эга бўламиз ва натижада $\bar{D}$ соҳага тегишли бўлган $M_2\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ стационар нуқтага эга бўлдик. Бу нуқтада функциянинг қиймати: $z\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = 3.5$. Олинган функциянинг барча қийматларига кўра



67-чизма.

$$z_{\text{энг. кат.}} = z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 3,5, \quad z_{\text{энг. кич.}} = z(0,0) = 0.$$

1-вариант

1. $S : x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z + 4 = 0$, $M_0(2;1;-1)$.
2. $z = \operatorname{arctg}(x + y)$.
3. $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $u = e^{xy}$.
4. $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$.
5. $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$, $D : x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0$.

2-вариант

1. $S : x^2 + z^2 - 5yz + 3y = 46$, $M_0(1;2;-3)$.
2. $z = \arccos(2x + y)$.
3. $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $u = y\sqrt{\frac{y}{x}}$.
4. $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$.
5. $z = 2x^3 - xy^2 + y$, $D : x = 0, x = 1, y = 0, y = 6$.

3-вариант

1. $S: x^2 + y^2 - xz - yz = 0,\ M_0(0;2;2)$.
2. $z = \operatorname{arcctg}(x - 3y)$.
3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,\ u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
4. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.
5. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2,\ D: x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 1$.

4-вариант

1. $S: x^2 + y^2 + 2yz - z^2 + y - 2z = 2,\ M_0(1;1;1)$.
2. $z = \arcsin(x - y)$.
3. $a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ u = \sin^2(x - ay)$.
4. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.
5. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1,\ D: x = 0,\ y = 0,\ x + y - 3 = 0$.

5-вариант

1. $S: y^2 - z^2 + x^2 - 2xz + 2x = z,\ M_0(1;1;1)$.
2. $z = \ln(3x^2 - 2y^2)$.
3. $a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ u = e^{-\cos(x+ay)}$.
4. $z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2$.
5. $z = x^2 + 2xy - 10,\ D: y = 0,\ y = x^2 - 4$.

6-вариант

1. $S: z = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - y,\ M_0(-1;-1;-1)$.
2. $z = e^{2x^2+y^2}$.
3. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0,\ u = (x - y)(y - z)(z - x)$.

4. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.
5. $z = xy - 2y - y,\ D: x = 0,\ y = 0,\ x = 3,\ y = 4$.

7-вариант

1. $S: z = y^2 - x^2 + 2xy - 3y,\ M_0(1;-1;1)$.
2. $z = \operatorname{ctg}\frac{y}{x}$.
3. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u,\ u = x\ln\frac{u}{x}$.
4. $z = (x - 2)^2 + 2y^2 - 10$.
5. $z = \frac{1}{2}x^2 - xy,\ D: y = 8,\ y = 2x^2$.

8-вариант

1. $S: x^2 - y^2 - 2xy - x - 2y,\ M_0(-1;1;1)$.
2. $z = \operatorname{tg}\sqrt{xy}$.
3. $y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ u = \ln(x^2 + y^2)$.
4. $z = (x - 5)^2 + y^2 + 1$.
5. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2,\ D: x = 0,\ y = 0,\ x + y - 1 = 0$.

9-вариант

1. $S: x^2 - 2y^2 + z^2 + xz - 4y = 13,\ M_0(3;1;2)$.
2. $z = \cos(x^2y^2 - 5)$.
3. $x^2\frac{\partial u}{\partial x} - xy\frac{\partial u}{\partial y} + y^2 = 0,\ u = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$.
4. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.
5. $z = 2x^2 + 3y^2 + 1,\ D: y = \sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2},\ y = 0$.

10-вариант

1. $S: 4y^2 - z^2 + 4xy - xz + 3z = 9,\ M_0(1;-2;1)$.
2. $z = \sin\sqrt{x^3y}$.

3. $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xy, \ u = 0, \ u = e^{xy}$.

4. $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2$.

5. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1, \ D: x = -3, y = 0, x + y + 1 = 0$.

11-вариант

1. $S: z = x^2 + y^2 - 3xy - x + y + 2, \ M_0(2;1;0)$.

2. $z = \arcsin(x - 2y)$.

3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \ u = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$.

4. $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.

5. $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1, \ D: x = 5, y = 0, x - y - 1 = 0$.

12-вариант

1. $S: 2x^2 - y^2 + 2z^2 + xy + xz = 3, \ M_0(1;2;1)$.

2. $z = \arccos(4x - y)$.

3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ u = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$.

4. $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$.

5. $z = 2x^2 + 2xy^2 - \frac{1}{2}y^2 - 4x, \ D: y = 2x \ y = 2, x = 0$.

13-вариант

1. $S: x^2 - y^2 + z^2 - 4x + 2y = 14, \ M_0(3;1;4)$.

2. $z = \operatorname{arctg}(5x + 2y)$.

3. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + u = 0, \ u = \frac{2x+3y}{x^2+y^2}$.

4. $z = xy(12 - x - y)$.

5. $z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x, \ D: x = 0, x = 2, y = 0, y = 2$.

14-вариант

1. $S: x^2 + y^2 - z^2 + xz + y + 4, \ M_0(1;1;2)$.

2. $z = \operatorname{arctg}(2x - y)$.

3. $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1, \ u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

4. $z = xy - x^2 - y^2 + 9$.

5. $z = xy - 3x - 2y, \ D: x = 0, x = 4, y = 0, y = 4$.

15-вариант

1. $S: x^2 - y^2 - z^2 + xz + 4x = -5, \ M_0(-2;1;0)$.

2. $z = \ln(4x^2 - 5y^2)$.

3. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u, \ u = (x^2 + y^2)\operatorname{tg}\frac{x}{y}$.

4. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$.

5. $z = x^2 + xy - 2, \ D: y = 4x^2 - 4, \ y = 0$.

16-вариант

1. $S: x^2 + y^2 - xz + yz - 3x + 11, \ M_0(1;4;-1)$.

2. $z = e^{\sqrt{x+y}}$.

3. $9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ u = e^{-(x+3y)} \cdot \sin(x + 3y)$.

4. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

5. $z = x^2 y(4 - x - y), \ D: x = 0, \ y = 0, \ y = 6 - x$.

17-вариант

1. $S: x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xz = 8, \ M_0(0;2;0)$.

2. $z = \arcsin(4x + y)$.

3. $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ u = xe^{\frac{z}{x}}$.

4. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

5. $z = x^3 + y^3 - 3xy, \ D: x = 0, x = 2, y = -1, y = 2$.

18-вариант

1. $S: x^2 - y^2 - 2z^2 - 2y = 0, \ M_0(-1;-1;1)$.

2. $z = \arccos(x - 5y)$.

3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.
4. $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$.
5. $z=4(x-y)-x^2-y^2,\ D: x=0,\ x+2y=4,\ x-2y=4$.

19-вариант

1. $S: x^2+y^2-3z^2+xy=-2z,\ M_0(1;0;1)$.
2. $z=\sin\sqrt{xy}$.
3. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0,\ u=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.
4. $z=xy(6-x-y)$.
5. $z=x^2+2xy-y^2-4x,\ D: x=3,\ y=0,\ y=x+1$.

20-вариант

1. $S: 2x^2-y^2+z^2-6x+2y+6=0,\ M_0(1;-1;1)$.
2. $z=\cos\left(3x^2-y^3\right)$.
3. $\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ u=\ln(x+e^{-y})$.
4. $z=x^2+y^2-xy+x+y$.
5. $z=6xy-9x^2-9y^2+4x+4y,\ D: x=0,\ y=0,\ x=1,\ y=2$.

21-вариант

1. $S: x^2+y^2-z^2+6xy-z=8,\ M_0(1;1;0)$.
2. $z=\operatorname{arctg}(3x+2y)$.
3. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0,\ u=\arcsin\frac{x}{x+y}$.
4. $z=x^2+xy+y^2-2x-y$.
5. $z=x^2+2xy-y^2-2x+2y,\ D: y=x+2,\ y=0,\ x=2$.

22-вариант

1. $S: z=2x^2-3y^2+4x-2y+10,\ M_0(-1;1;3)$.
2. $z=\ln\left(5x^2-3y^4\right)$.

3. $\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u}{y^2},\ u=\frac{y}{(x^2-y^2)^5}$.
4. $z=(x-1)^2-2y^2$.
5. $z=4-2x^2-y^2,\ D: y=0,\ y=\sqrt{1-x^2}$.

23-вариант

1. $S: z=x^2+y^2-4xy+3x-15,\ M_0(-1;3;4)$.
2. $z=\operatorname{arctg}(x-4y)$.
3. $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x+y}{x-y},\ u=\frac{x^2+y^2}{x-y}$.
4. $z=xy-3x^2-2y^2$.
5. $z=5x^2-3xy+y^2+4,\ D: x=-1,\ x=1\ \ y=-1,\ y=1$.

24-вариант

1. $S: z=x^2+2y^2+4xy-5y-10,\ M_0(-7;1;8)$.
2. $z=\ln(3xy-4)$.
3. $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{u},\ u=\sqrt{2xy+y^2}$.
4. $z=x^2+3(y+2)^2$.
5. $z=x^2+2xy+4x-y^2,\ D: x+y+2=0,\ x=0,\ y=0$.

25-вариант

1. $S: z=2x^2-3y^2+xy+3x+1,\ M_0(1;-1;2)$.
2. $z=\operatorname{tg}\left(xy^2\right)$.
3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u=\ln(x^2-y^2)$.
4. $z=2(x+y)-x^2-y^2$.
5. $z=2x^2y-x^3y-x^2y^2,\ D: x=0,\ y=0,\ x+y=6$.

VII боб

ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1-§. Асосий тушунчалар. Биринчи тартибли дифференциал тенгламалар. Изоклин усули

Дифференциал тенглама деб эркли x ўзгарувчи, y номаълум функция ва унинг турли тартибли ҳосилалари ёки дифференциалларини боғловчи тенгламага айтилади.

Дифференциал тенгламанинг *тартиби* деб унга кирувчи юқори ҳосиланинг (ёки дифференциалнинг) тартибига айтилади.

Агар номаълум функция бир аргументли функциядан иборат бўлса, бундай дифференциал тенглама *оддий* дифференциал тенглама дейилади.

Агар номаълум функция бир нечта аргументга боғлиқ бўлган функциядан иборат бўлса, бундай дифференциал тенглама *хусусий ҳосилали* дифференциал тенглама дейилади.

Масалан, $2xy' - 3y + x = 0$ (бунда $y = y(x)$) тенглама биринчи тартибли оддий дифференциал тенглама, $u'_x + u'_y - xy + 2 = 0$ (бунда $u = u(x,y)$) тенглама биринчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламадир.

Бу бобда фақат оддий дифференциал тенгламаларни қараймиз, шу сабабли қисқалик учун "оддий" сўзини ишлатмаймиз.

Умумий ҳолда n-тартибли дифференциал тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\Phi\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{n}\right) = 0. \tag{7.1}$$

Агар (7.1) тенгламани энг юқори тартибли ҳосилага нисбатан ечилган

$$y^{n} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{7.2}$$

кўринишда ёзиш мумкин бўлса, бундай тенглама *нормал кўринишдаги n-тартибли дифференциал тенглама* дейилади.

Дифференциал тенгламанинг ечимини топиш жараёни *тенгламани интеграллаш* дейилади.

(7.1) (ёки (7.2)) дифференциал тенгламани қаноатлантирадиган, яъни уни айниятга айлантирадиган ҳар қандай $y = y(x)$ функция дифференциал тенгламанинг *ечими* (ёки *интеграли*) дейилади.

1-мисол. Сон ўқининг ҳамма нуқталарида аниқланган $y = xe^{2x}$ функция $y'' - 4y' + 4y = 0$ дифференциал тенгламанинг ечими бўлишини исбот қилинг.

Ечиш. Берилган функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топамиз:

$$y' = e^{2x}(1 + 2x), \;\; y'' = 4e^{2x}(1 + x).$$

Берилган функция ва унинг ҳосилаларини тенгламага қўйсак, қуйидаги айниятга эга бўламиз:

$$4e^{2x}(1 + x) - 4e^{2x}(1 + 2x) + 4xe^{2x} = 4e^{2x}(1 + x - 1 - 2x + x) \equiv 0.$$

Демак, $y = xe^{2x}$ функция берилган тенгламанинг ечими экан.

2-мисол. $F(x, y) = \ln\frac{y}{x} - 5 + xy = 0$ ошкормас кўринишда берилган функциянинг $(x + xy^2)y' = y + xy^2$ дифференциал тенгламанинг ечими бўлишини исбот қилинг.

Ечиш. $F(x, y) = 0$ ошкормас функцияни дифференциаллаш қоидаси, яъни (6.6) формулага кўра

$$y' = \frac{F_{x'}}{F_{y'}} = -\frac{\left(y - \frac{1}{x}\right)}{x + \frac{1}{y}} = \frac{y}{x} \cdot \frac{1 - xy}{1 + xy} = \frac{y - xy^2}{x + x^2 y}$$

ни ҳосил қиламиз. Топилган ҳосилани берилган дифференциал тенгламага қўйсак, айниятга эга бўламиз.

(7.1) (ёки (7.2)) дифференциал тенглама ечимининг (ёки интегралининг) Oxy текислигидаги графиги *интеграл эгри чизиқ* дейилади. Демак, ҳар бир ечимга ёки интегралга унга мос битта интеграл эгри чизиқ тўғри келади.

(7.2) дифференциал тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги масала қуйидаги теорема ёрдамида ҳал қилинади.

1-теорема (Коши теоремаси)**.** *Агар* (7.2) *тенгламанинг ўнг қисми*

$$x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)} \tag{7.3}$$

қиймат атрофида узлуксиз функция бўлса, у ҳолда (a;b) интервалда ётувчи x_0 учун у функция ва унинг ҳосилалари

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \qquad (7.4)$$

қийматлар қабул қилса, (7.2) *тенглама* $y = y(x)$ *хусусий ечимга эга бўлади.*

Агар олинган атрофда бу функциянинг аргументларга нисбатан хусусий ҳосилалари узлуксиз бўлса, ечим ягона бўлади (Коши масаласи). (7.4) тенгликлар *бошланғич шартлар* дейилади.

Ихтиёрий (7.2) дифференциал тенглама Коши теоремасини қаноатлантирувчи соҳада чексиз кўп ечимга эга бўлади. Бу ечимлар тўпламини таърифлаш учун умумий ечим тушунчасини киритамиз. (7.1) ёки (7.2) дифференциал тенгламанинг *умумий ечими* (умумий интеграли) деб $y = \varphi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right)$ ёки қисқача $y = \varphi\left(x, \underline{C_i}\right)$ кўринишдаги функцияга айтилади, бунда $C_i\left(i = \overline{1, n}\right)$ ихтиёрий ўзгармас бўлиб, улар қуйидаги иккита шартни қаноатлантириши керак:

1) C_i ихтиёрий қийматларида (7.1) ёки (7.2) дифференциал тенглама ечимга эга;

2) $x_0, y_0, y_0{}', \ldots, y_0{}^{(n-1)}$ ихтиёрий бошланғич қийматлар учун $C_i = C_{i0}$ ўзгармаснинг қийматлари

$$\varphi(x_0, C_{i0}) = y_0,\ \varphi'(x_0, C_{i0}) = y_0{}', \ldots,\ \varphi^{(n-1)}(x_0, C_{i0}) = y_0{}^{(n-1)}$$

бошланғич шартни қаноатлантиради.

C_{i0} ларга маълум қийматлар бериб ҳосил қилинадиган ҳар бир ечим (7.2) тенгламанинг *хусусий ечими* дейилади.

Дифференциал тенгламанинг умумий ечимидан бошқа, ихтиёрий ўзгармаснинг ҳеч қандай қийматида ҳосил бўлмайдиган ечими (интеграл) мавжуд бўлиши мумкин. Бундай ечим (интеграл) *махсус ечим* дейилади. Махсус ечимнинг ихтиёрий нуқтасида Коши теоремасининг бирор шарти бузилади. Масалан, $y'' = 3\sqrt[3]{(y'-1)^2}$ дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y = x + \frac{1}{4}(x + C_1)^4 + C_2$$

дан иборат, бунда C_1, C_2 — ихтиёрий ўзгармас. $y = x + C$ (бунда C — ихтиёрий ўзгармас) функция ҳам берилган тенгламани ечими. Лекин бу ечим умумий ечимдаги C_1 ва C_2 ўзгармасларнинг бирор қийматларида ҳосил бўлмайди. Бундан ташқари $y = 1$ да ечимнинг ихтиёрий нуқтасида ечимнинг ягоналиги хақидаги Коши теоремасининг шарти бузилади ёки берилган тенгламанинг ўнг қисмида y' хусусий ҳосила $y' = 1$ да узлукли. Шунинг учун $y = x + C$ махсус ечим бўлади.

Аниқмас интеграллар назариясида кўрилган барча интеграллар энг содда $y' = f(x)$ дифференциал тенгламанинг умумий ечими эканлигини таъкидлаб ўтамиз:

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C\ ,$$

бунда $F(x)$ — $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси, яъни $F'(x) = f(x)$; C — ихтиёрий ўзгармас сон.

Умумий ҳолда биринчи тартибли дифференциал тенглама қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (7.5)$$

ёки

$$y' = f(x, y)\,. \qquad (7.6)$$

(7.5) ёки (7.6) тенгламалар учун қуйидаги теоремани исботсиз келтирамиз.

2-теорема (Коши). *Агар $f(x,y)$ функция $M_0(x_0;y_0)$ нуқта ва унинг атрофида узлуксиз бўлса, у ҳолда (7.6) тенглама $y(x_0) = y_0$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи $y = \varphi(x)$ ечимга эга бўлади. Агар берилган функциянинг $\frac{\partial f}{\partial x}$ хусусий ҳосиласи бу нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда $y = \varphi(x)$ ечим ягона ечим бўлади.*

Биринчи тартибли дифференциал тенгламани қуйидагича қулай кўринишда ҳам ёзилади:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0\,. \qquad (7.7)$$

(7.7) — дифференциал тенгламанинг дифференциалли кўринишдаги тенгламаси дейилади.

(7.5) ёки (7.6) дифференциал тенглама учун тенглама ечимининг мавжудлик ва ягоналиги ҳақидаги Коши теоремасини исботсиз келтирамиз.

Агар (7.6) *тенгламанинг ўнг томони ва унинг $f'_y(x,y)$ хусусий ҳосиласи x ва y ўзгарувчиларнинг бирор ўзгариш соҳасида аниқланган ва узлуксиз бўлса, бу соҳанинг $(x_0;\ y_0)$ ички нуқтаси қандай бўлмасин, берилган тенглама $y(x_0) = y_0$, бошланғич шартни қаноатлантирувчи ягона $y = \varphi(x)$ ечимга эга бўлади.*

Бу, геометрик нуқтаи назаридан, соҳанинг ҳар бир $(x_0; y_0)$ ички нуқтаси орқали ягона интеграл эгри чизиқ ўтишини билдиради.

$y' = f(x, y)$ тенгламанинг $y(x_0) = y_0$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топиш масаласи Коши масаласи дейилади.

Ҳосиланинг геометрик маъносига кўра:

$$y' = f(x, y) = \text{tg}\alpha = k\ ,$$

бу ерда α — уринманинг Ox ўққа оғиш бурчаги. Бу эса интеграл эгри чизиққа унинг ҳар бир нуқтасида ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти (7.6) дифференциал тенглама ўнг томонининг бу нуқтадаги қийматига тенг эканини билдиради.

Текисликнинг ҳар бир нуқтасига Ox ўққа оғиш бурчагининг тангенси (7.6) дифференциал тенглама ўнг томонининг шу нуқтадаги қийматига тенг бўладиган қилиб кесма қўйилган қисми бу дифференциал тенгламанинг *йўналишлар майдони* деб аталади.

Текисликнинг майдон кесмалари бир хил йўналишга эга бўладиган барча нуқталар тўплами дифференциал тенгламанинг *изоклинаси* дейилади.

Ушбу

$$f(x, y) = k \qquad (7.8)$$

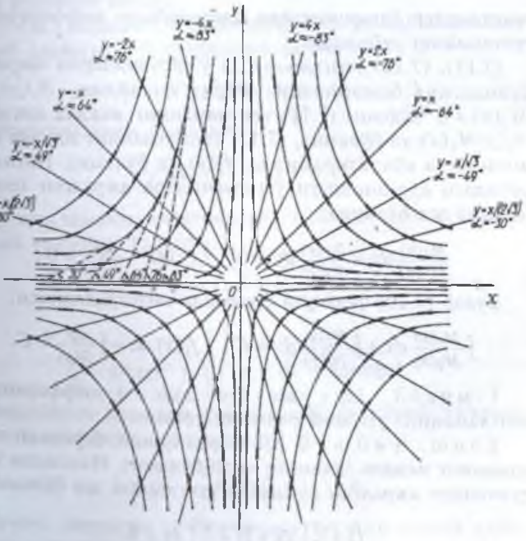
муносабат (7.6) дифференциал тенгламанинг изоклиналар оиласининг тенгламаси деб олинади. (7.8) изоклиналар оиласи ёрдамида интеграл эгри чизиқлар оиласини тақрибий ясаш мумкин.

3-мисол. $y' = -\frac{2y}{x}$ дифференциал тенгламанинг интеграл эгри чизиқларини изоклиналар усули билан тақрибий ясанг.

Ечиш. $-\frac{2y}{x} = k$ $(k = \text{const})$ деб берилган тенгламанинг $y = -\frac{k}{2}x$ изоклиналар оиласи тенгламасини топамиз. Улар координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқлардан иборат бўлиб, йўналишлар майдони эса $y' = k = \text{tg}\alpha$ тенглик билан аниқланади. k га ҳар хил қийматлар бериб, уларга мос изоклиналарини топамиз ва интеграл эгри чизиққа ўтказилган уринманинг Ox ўққа оғиш бурчаги α бўйича йўналишлар майдонини аниқлаймиз. Уларни қуйидаги жадвал кўринишида ёзиб оламиз:

k	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	± 1	$\pm\sqrt{3}$	± 2	± 3	$\pm\infty$
α	0	$\pm 30°$	$\pm 45°$	$\approx\pm 60°$	$\approx\pm 64°$	$\approx\pm 72°$	$\pm 90°$
$y = -\frac{k}{2}x$	$y=0$	$y = \pm\frac{x}{\sqrt{3}}$	$y = \pm\frac{1}{2}x$	$y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$	$y=\pm x$	$y = \pm\frac{3}{2}x$	$y=0$

Бу жадвалда берилганларга кўра майдон йўналишларини чизамиз (68-чизма) ва интеграл эгри чизиқларни тақрибий чизамиз. α бурчакнинг мусбат ёки манфий қийматига қараб Ox ўқидан соат стрелкасига қарама-қарши ёки соат стрелкаси йўналишида интеграл чизиқлар чизилади.



68-чизма.

2-§. Ўзгарувчилари ажраладиган ва бир жинсли дифференциал тенгламалар

Ушбу

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0 \qquad (7.9)$$

тенглама ўзгарувчилари *ажралган* дифференциал тенглама дейилади. Унинг умумий интеграли

$$\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = C \qquad (7.10)$$

каби аниқланади, бунда C — ихтиёрий ўзгармас.

Ушбу

$$M_1(x)N_1(y)\,dx + M_2(x)N_2(y)\,dy = 0 \qquad (7.11)$$

ёки

$$y' = \frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y) \qquad (7.12)$$

тенгламалар ўзгарувчилари *ажраладиган* дифференциал тенгламалар дейилади.

(7.11), (7.12) тенгламаларда ўзгарувчиларни ажратиш қуйидагича бажарилади. Фараз қилайлик, $N_1(y) \neq 0$, $M_2(x) \neq 0$ бўлсин. (7.11) тенгламанинг иккала қисмини $N_1(y)M_2(x)$ га бўламиз, (7.12) тенгламанинг иккала қисмини dx га кўпайтирамиз ва $f_2(y)$ га бўламиз. Натижада қуйидаги кўринишдаги ўзгарувчилари ажралган тенгламаларга эга бўламиз:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\,dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\,dy = 0\,, \quad f_1(x)dx - \frac{dy}{f_2(y)} = 0\,.$$

Булар (7.10) формула ёрдамида интегралланади:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}\,dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\,dy = C\,, \quad \int f_1(x)\,dx - \int \frac{dy}{f_2(y)} = C\,.$$

1-мисол. $(xy + y)dx + (xy + x)dy = 0$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. $x \neq 0,\ y \neq 0$ деб фараз қилиб, берилган тенгламанинг иккала қисмини xy га бўламиз. Натижада ўзгарувчилари ажралган қуйидаги тенгламага эга бўламиз:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)dx + \left(1 + \frac{1}{y}\right)dy = 0.$$

(7.10) формулага кўра унинг интегралини топамиз:

$$\int\left(1 + \frac{1}{x}\right)dx + \int\left(1 + \frac{1}{y}\right)dy = \ln|C|,$$

$$x + \ln|x| + y + \ln|y| = \ln|C|,$$

$$\ln|xy| + \ln e^{x+y} = \ln|C|, \ \ xye^{x+y} = C.$$

Охирги тенглик берилган дифференциал тенгламанинг умумий интегралидир. Уни топишда $x \neq 0,\ y \neq 0$ деб қабул қилган эдик. Аммо $x = 0$ ва $y = 0$ ҳам берилган тенгламанинг ечими бўлишини осонгина текшириш мумкин. Иккинчи томондан, уларни умумий интегралда $C = 0$ деб топиш ҳам мумкин. Демак, $x = 0,\ y = 0$ берилган тенгламанинг хусусий ечими.

2-мисол. $\left(1 + e^{2x}\right)y^2y' = e^x$ дифференциал тенгламанинг $y(0) = 1$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламани дифференциалли шаклда ёзиб оламиз ((7.7) формулага қаранг):

$$\left(1 + e^{2x}\right)y^2dy - e^xdx = 0.$$

Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$y^2dy - \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = 0.$$

Бу тенгламани интеграллаб берилган тенгламанинг умумий ечимини топамиз:

$$\int y^2dy - \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \frac{C}{3}$$

ёки

$$\frac{y^3}{3} - \mathrm{arctg}e^x = \frac{C}{3}, \ \ y = \sqrt[3]{C + 3\mathrm{arctg}e^x}\,.$$

Бошланғич шартдан фойдаланиб ихтиёрий ўзгармас C нинг қийматини аниқлаймиз:

$$1 = \sqrt[3]{C + \frac{3}{4}\pi} \Rightarrow C = 1 - \frac{3}{4}\pi.$$

Демак, берилган тенгламанинг хусусий ечими қуйидагича кўринишда бўлади:

$$y = \sqrt[3]{1 - \frac{3}{4}\pi + 3\mathrm{arctg}\, e^{x}}.$$

Агар $f(tx, ty) = t^{n} f(x, y)$ (n — ўзгармас сон) тенглик ихтиёрий $t \in R$ учун ўринли ($f(tx, ty)$ функция аниқланган) бўлса, $f(x, y)$ функция x ва y аргументларга нисбатан *n ўлчовли бир жинсли функция* дейилади.

Масалан, $f(x, y) = 2x^{4} - xy^{3} + y^{4}$ функция тўрт ўлчовли ($n = 4$) бир жинсли функция бўлади, чунки

$$f(tx, ty) = 2 \cdot (tx)^{4} - (tx)^{3}(ty) + (ty)^{4} =$$
$$= t^{4}(2x^{4} - x^{3}y + y^{4}) = t^{4} f(x, y).$$

$f(x, y) = 4\sqrt[3]{x^{2}} - 2\sqrt[3]{xy} - 3\sqrt[3]{y^{2}}$ функция

$$f(tx, ty) = 4\sqrt[3]{(tx)^{2}} - 2\sqrt[3]{(tx)(ty)} - 3\sqrt[3]{(ty)^{2}} =$$
$$= \sqrt[3]{t^{2}}\left(4\sqrt[3]{x^{2}} - 2\sqrt[3]{xy} - 3\sqrt[3]{y^{2}}\right) = t^{\frac{2}{3}} f(x, y)$$

бўлгани учун $n = \frac{2}{3}$ ўлчовли бир жинсли функция бўлади.

Агар $n = 0$ бўлса, бундай функция ноль ўлчовли бир жинсли функция дейилади. Масалан,

$$f(x, y) = \frac{x+y}{x-y} \cdot \ln\left(\frac{x}{y} - 1\right)$$

функция учун

$$f(tx, ty) = \frac{tx+ty}{tx-ty} \cdot \ln\left(\frac{tx}{ty} - 1\right) = \frac{t(x+y)}{t(x-y)} \cdot \ln\left(\frac{x}{y} - 1\right) =$$
$$= \frac{x+y}{x-y} \cdot \ln\left(\frac{x}{y} - 1\right) = f(x, y)$$

(бунда $t \neq 0$) бўлгани учун берилган функция ноль ўлчовли бир жинсли функция бўлади.

Агар $f(x, y)$ функция ўзининг аргументларига нисбатан ноль ўлчовли бир жинсли функция, яъни

$$f(tx, ty) = t^{0} f(x, y) = f(x, y)$$

бўлса, у ҳолда қуйидаги нормал кўринишдаги

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (7.13)$$

дифференциал тенглама x ва y ўзгарувчиларга нисбатан *бир жинсли тенглама* дейилади.

Агар бир жинсли $P(x, y)$, $Q(x, y)$ функциялар бир хил n ўлчовли, яъни

$$P(tx, ty) = t^{2} P(x, y)\,, \quad Q(tx, ty) = t^{2} Q(x, y)$$

бўлса, у ҳолда тўлиқ дифференциалли

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

тенглама бир жинсли бўлади. Ҳақиқатан, уни қуйидаги нормал кўринишда ёзиб оламиз:

$$y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = f(x, y),$$

бундан

$$f(tx, ty) = -\frac{P(tx,ty)}{Q(tx,ty)} = -\frac{t^{2}P(x,y)}{t^{2}Q(x,y)} = f(x, y)$$

бўлгани сабабли $f(x, y)$ функция ноль ўлчовли бир жинсли функция бўлади.

Нормал кўринишдаги (7.13) бир жинсли дифференциал тенгламани ҳар доим $y' = f(x, y) = f(tx, ty)$ кўринишда ёзиш мумкин ва $t = \frac{1}{x}$ алмаштириш ёрдамида $y' = \frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ ни ҳосил қилинади. Демак, (7.13) тенгламани $y = xu$ $\left(u = \frac{y}{x},\ y' = u + xu'\right)$ алмаштириш ёрдамида x ва янги $u(x)$ функцияларга нисбатан ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага келтирилади:

$$u + xu' = \varphi(u), \quad x\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u, \quad \frac{du}{\varphi(u)-u} = \frac{dx}{x}.$$

3-мисол. $2x^{2}y' = x^{2} + y^{2}$ дифференциал тенгламанинг умумий ва $y(1) = 0$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

Ечиш. $2x^{2}$ ва $x^{2} + y^{2}$ функциялар икки ўлчовли бир жинсли бўлгани учун берилган тенглама бир жинсли бўлади. $y = xu$, $y' = xu' + u$ алмаштиришни бажарамиз:

$$2x^{2}(u + xu') = x^{2} + (xu)^{2}, \quad 2x^{2}(u + xu') = x^{2}(1 + u^{2}).$$

$x \neq 0$ деб тенгламанинг иккала қисмини x^{2} га бўламиз. Сўнгра ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$2u + 2x\frac{du}{dx} = 1 + u^2, \quad 2xdu = (1 - 2u + u^2)dx .$$

$$\frac{du}{(u-1)^2} = \frac{dx}{2x}, \quad \int\frac{du}{(u-1)^2} = \int\frac{dx}{2x}, \quad \int\frac{d(u-1)}{(u-1)^2} = \frac{1}{2}\ln|x| + \ln C ,$$

$$-\frac{1}{u-1} = \frac{1}{2}\ln|x| + \ln C , \quad 1 = (1 - u)\ln\left(C\sqrt{|x|}\right).$$

Охирги ифодадаги u нинг ўрнига $\frac{y}{x}$ қийматини қўямиз:

$$1 = \left(1 - \frac{y}{x}\right)\ln\left(C\sqrt{|x|}\right), \quad x = (x - y)\ln\left(C\sqrt{|x|}\right).$$

Уни y га нисбатан ечиб, берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топамиз:

$$y = x - \frac{x}{\ln\left(C\sqrt{|x|}\right)}.$$

$y(1) = 0$ бошланғич шартдан фойдаланиб, ўзгармас C нинг қийматини аниқлаймиз:

$$0 = 1 - \frac{1}{\ln C}, \quad \ln C = 1, \ C = e.$$

Демак, берилган тенгламанинг хусусий ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y = x - \frac{x}{1+\ln\sqrt{|x|}}.$$

Машқлар

338. $y(x, C)$ функция (бунда C — ихтиёрий ўзгармас сон) берилган дифференциал тенгламанинг ечими (интеграли) бўладими:

а) $y = x^2\left(1 + Ce^{\frac{1}{2}}\right), \ x^2y' + (1 - 2x)y = x^2$;

б) $y = Ce^x - e^{-x}, \ xy'' + 2y' - xy = 0$;

в) $x^2 + y^4 = Cy^2, \ xydy = (x^2 - y^4)dy$;

г) $y = Cx + \frac{1}{C}, \ xy' - y + \frac{1}{y} = 0$;

д) $y = \frac{2+Cx}{1+2x}, \ 2(1 + x^2y') = y - xy'$;

е) $e^{\frac{y}{x}} = Cy, \ xyy' - y^2 = x^2y'$?

339. Қуйида берилган ҳар бир дифференциал тенглама учун изоклина усули ёрдамида йўналишлар майдонини ясанг ва интеграл эгри чизиқларни тақрибий чизинг:

а) $y' = x + y$; б) $2xy' = \frac{y^2}{x}$; в) $xy' = 1 - y$.

340. Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимини топинг:

а) $(1 + e^x)y' = ye^x$;

б) $xy' = y^2 + 1$;

в) $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 9\frac{y}{x} + 9$;

г) $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$;

д) $ydx + \left(\sqrt{xy} - \sqrt{x}\right)dy = 0$;

е) $4(x^2y + y)dy + \sqrt{5 + y^2}\,dx = 0$.

341. Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг берилган бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг:

а) $(x + xy)dy + (y - xy)dx = 0, \ y(1) = 1$;

б) $xy' = x\sin\frac{y}{x} + y, \ y(2) = \pi$;

в) $ydx + \left(\sqrt{xy} - x\right)dy = 0, \ y(1) = 1$;

г) $xy' = y(1 + \ln y - \ln x), \ y(1) = e^2$.

3-§. Биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар. Бернулли тенгламаси

Номаълум y функция ва унинг y' ҳосиласига нисбатан

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{7.14}$$

кўринишдаги тенглама (шунингдек, алгебраик алмаштиришлар ёрдамида (7.14) кўринишга келтириладиган тенглама) *биринчи тартибли чизиқли бир жинслимас дифференциал тенглама* дейилади. $P(x) \neq 0$ ва $Q(x) \neq 0$ функциялар бирор соҳада узлуксиз бўлиши керак. Масалан, $[a;b]$ кесмада Коши теоремасининг шарти бажарилсин. (7.14) тенгламанинг умумий ечимини ҳар доим қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)\, e^{\int P(x)dx}dx + C\right), \tag{7.15}$$

бунда C — ихтиёрий ўзгармас. Шундай қилиб, (7.14) тенгламанинг умумий ечими маълум бўлган $P(x)$, $Q(x)$ функцияларнинг интеграллари орқали ифодаланади.

Агар (7.14) тенгламада $Q(x) = 0$ ёки $P(x) = 0$ бўлса, у ҳолда ўзгарувчиларга нисбатан ажраладиган дифференциал тенглама ҳосил қиламиз ва унинг умумий ечимини мос равишда (7.14) тенгламада $Q(x) = 0$ ёки $P(x) = 0$ деб аниқлаймиз. $Q(x) = 0$ бўлган ҳолда (7.14) тенглама чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламага айланади.

1-мисол. $(x^2 - x)y' + y = x^2(2x - 1)$ тенгламанинг умумий ечимини ва $y(-2) = 2$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламанинг иккала қисмини $x^2 - x \neq 0$ га бўлиб, уни (7.14) кўринишдаги тенгламага келтирамиз:

$$y' + \frac{y}{x^2 - x} = \frac{x^2(2x-1)}{x^2 - x}.$$

Бунда $P(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)}$, $Q(x) = \frac{x^2(2x-1)}{x(x-1)} = \frac{x(2x-1)}{x-1}$.

(7.15) формулага асосан берилган тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y = e^{-\int \frac{dx}{x(x-1)}}\left(\int \frac{x(2x-1)}{x-1} e^{-\int \frac{dx}{x(x-1)}} dx + C\right).$$

Бу ечимдаги интегралларни топамиз:

а) $\int \frac{dx}{x(x-1)} \left| \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{1}{x(x-1)},\ A = -1,\ B = 1 \right| =$

$$= \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right) dx = -\ln|x| + \ln|x-1| = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|;$$

б) $\int \frac{x(2x-1)}{x-1} e^{\ln\frac{x-1}{x}} dx = \int \frac{x(2x-1)}{x-1} \cdot \left|\frac{x-1}{x}\right| dx =$

$$= \pm\int (2x-1)\, dx = \pm(x^2 - x),$$

бунда (+) ва (−) ишоралар $\left|\frac{x-1}{x}\right| = \pm\frac{x-1}{x}$ тенгликдан ҳосил бўлади. Топилган (а) ва (б) интегралларни умумий ечимга қўямиз:

$$y = e^{-\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|}(\pm(x^2 - x) + C) = \left|\frac{x}{x-1}\right| \cdot (\pm(x^2 - x) + C) =$$

$$= \pm\frac{x}{x-1} \cdot (\pm x(x-1) + C) = x^2 + \frac{Cx}{x-1}.$$

Ундан $y(-2) = 2$ шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимини ажратиб оламиз:

$$2 = 4 - \frac{2C}{-2-1},\ C = -3,\ y = x^2 - \frac{3x}{x-1}.$$

Айрим ҳолларда дифференциал тенгламалар x га нисбатан чизиқли бўлиб, уларнинг умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y). \tag{7.16}$$

(7.16) нинг умумий ечими қуйидаги формула ёрдамида аниқланади:

$$x = e^{-\int P(y)dy}\left(\int Q(y)e^{\int P(y)dy}dy + C\right). \tag{7.17}$$

2-мисол. $(2x - y^2)y' = 2y$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенглама $x(y)$ функцияга нисбатан чизиқли бўлгани учун, уни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$(2x - y^2)\frac{dy}{dx} = 2y,\ 2x - y^2 = 2y\frac{dx}{dy},\ \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - \frac{y}{2},$$

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y} \cdot x = -\frac{y}{2},\ P(y) = -\frac{1}{y},\ Q(y) = -\frac{y}{2},$$

яъни (7.16) кўринишдаги тенгламага эга бўлдик. (7.17) формулага асосан берилган тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$x = e^{\int\frac{dy}{y}}\left(-\int\frac{y}{2}e^{-\int\frac{dy}{y}}\,dy + C\right) = e^{\ln|y|}\left(-\int\frac{y}{2}e^{-\ln|y|}\,dy + C\right) =$$

$$= |y|\left(-\frac{1}{2}\int\frac{y}{|y|}\,dy + C\right) = -\frac{y}{2}\int\,dy + C = C - \frac{1}{2}y^2.$$

(7.14) чизиқли дифференциал тенгламани Бернулли усули билан ҳам интеграллаш мумкин. Унинг учун иккита: $u(x)$ ва $v(x)$ номаълум функциялар бўлган $y = u(x)\cdot v(x)$ алмаштиришни (Бернулли алмаштиришини) қўллаймиз. У ҳолда $y' = u'v + uv'$ (7.14) тенгламадаги y ва y' ларни ўрнига қуйиб қуйидаги

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бундан

$$(v' + P(x)\cdot v)u + u'v = Q(x). \tag{7.18}$$

Номаълум функцияларнинг бирини ихтиёрий танлаб олиш мумкин бўлгани учун, масалан, v ни шундай оламизки, у (7.18) тенгламадаги u нинг олдидаги коэффициентини нолга айлантирувчи тенгламанинг $v = v(x)$ хусусий ечими бўлсин. Бундан кейин (7.18) тенглама $u'v = Q(x)$ кўринишга келади. Бу тенгламанинг умумий ечими $u = u(x, C)$ бўлсин, у ҳолда $y = u(x, C)\cdot v(x)$ (7.14) тенгламанинг умумий ечими бўлади. Шундай қилиб, (7.14) тенгламани интеграллаш иккита ўзгарувчилари ажраладиган тенгламани интеграллашга келтирилади.

3 - мисол. $y' + y\text{tg}x = \frac{1}{\cos x}$ тенгламани Бернулли усули билан интегралланг ва унинг $y(\pi) = 1$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

Ечиш. $y = uv$, $y' = u'v + uv'$ Бернулли алмаштиришни бажариб, қуйидагига эга бўламиз:

$$u'v + uv' + uv\text{tg}x = \frac{1}{\cos x},\ (v' + v\text{tg}x)u + u'v = \frac{1}{\cos x}.$$

$v' + v\text{tg}x = 0$ тенгламанинг хусусий ечимини топамиз:

$$dv + v\text{tg}x dx = 0,\ \frac{dv}{v} + \text{tg}x dx = 0,$$

$$\int\frac{dv}{v} + \int\text{tg}x dx = 0,\ \ln|v| - \ln|\cos x| = \ln C_1.$$

$C_1 = 1$ деб тенгламанинг $v = \cos x$ хусусий ечимни оламиз. Сўнгра $u'v = \frac{1}{\cos x}$ (бунда $v = \cos x$) тенгламанинг умумий ечимини излаймиз:

$$u' = \frac{1}{\cos^2 x},\ u = \int\frac{dx}{\cos^2 x} + C = \text{tg}x + C.$$

Берилган тенгламанинг умумий ечими:

$$y = uv = (\text{tg}x + C)\cos x.$$

Ундан $y(\pi) = 1$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимни ажратиб оламиз: $1 = (0 + C)\cdot(-1)$, бундан $C = -1$. Бу қийматни умумий ечимга қўйиб, берилган тенгламанинг хусусий ечимини топамиз:

$$y = (\text{tg}x - 1)\cos x = \sin x - \cos x.$$

Ушбу

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \tag{7.19}$$

дифференциал тенглама (бунда $n = \text{const} \in R$, $n \neq 0$, $n \neq 1$), шунингдек, бирор алгебраик алмаштиришлар ёрдамида (7.19) кўринишга келтириладиган исталган тенглама *Бернулли тенгламаси* дейилади.

$z(x)$ янги функцияни $z = y^{n-1}$ формула ёрдамида алмаштирилса, у ҳолда Бернулли тенгламаси шу функцияга нисбатан чизиқли тенгламага келтирилади:

$$z' + (1 - n)P(x)z = (1 - n)Q(x). \tag{7.20}$$

Юқоридаги усуллардан фойдаланиб, (7.20) тенгламанинг $z = z(x, c)$ ечимини топамиз. Сўнгра $y = z^{\frac{1}{1-n}}$ топилади.

Бернулли тенгламасининг ечимини $y = u(x)\cdot v(x)$ Бернулли алмаштириши ёрдамида ҳам топиш мумкин. Буни мисолда кўрсатамиз.

4 - мисол. Ушбу $y' + 2e^x y = 2e^x\sqrt{y}$ Бернулли тенгламасининг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламада $n = \frac{1}{2}$ бўлгани учун $z = y^{1-n} = \sqrt{y}$ алмаштиришни бажарамиз. (7.20) тенгламага кўра $z' + e^x z = e^x$ тенгламани ҳосил қиламиз, унинг умумий ечими (7.15) формулага асосан қуйидаги кўринишда бўлади:

$$z = e^{-\int e^x dx}\left(\int e^x \cdot e^{\int e^x dx} dx + C\right) = e^{-e^x}\left(\int e^x e^{e^x} dx + C\right) =$$

$$= e^{-e^x}\left(\int e^{e^x} dxe^x + C\right) = e^{-e^x}\left(e^{e^x} + C\right) = 1 + Ce^{-e^x}.$$

Берилган тенгламанинг умумий ечими:

$$y = z^2 = \left(1 + Ce^{-e^x}\right)^2.$$

5-мисол. Ушбу $xy' + y = xy^2\ln x$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Тенгламанинг иккала қисмини $x\neq 0$ га бўламиз. Натижада $n = 2$ бўлган Бернулли тенгламасига эга бўламиз. Уни Бернулли алмаштириши ($y = uv$, $y' = u'v + uv'$) усули билан ечамиз:

$$x(u'v + uv') + uv = x(uv)^2\ln x.$$

$xv' + v = 0$ тенгламанинг хусусий ечими $v = x^{-1}$ осонгина топилади. Энди $xvu' = xu^2v^2\ln x$ тенгламанинг умумий ечимини топиш керак.

$v = x^{-1}$ қийматни ўрнига қўйиб, $u' = u^2 \cdot \frac{\ln x}{x}$ тенгламани ҳосил қиламиз.

Охирги тенгламадаги ўзгарувчиларни ажратамиз ва уни интеграллаймиз:

$$\frac{du}{u^2} = \ln x\,\frac{dx}{x}, \quad \int\frac{du}{u^2} = \int\ln x\,\frac{dx}{x},$$

$$-\frac{1}{u} = \frac{\ln^2 x}{2} + \frac{C}{2}, \quad u = -\frac{2}{C+\ln^2 x}.$$

Демак, берилган тенгламанинг умумий ечими:

$$y = uv = -\frac{2}{x(C+\ln^2 x)}.$$

Машқлар

342. Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг турини аниқланг ва уларни ечиш йўлларини кўрсатинг:

а) $xy' + 2\sqrt{xy} = y$; б) $y'\cos x = \frac{y}{\ln y}$;

в) $y' = \frac{y}{2x\ln y + y - x}$; г) $(1 + e^{2x})y^2dy - e^x dx = 0$;

д) $y' = e^{2x} - e^x y$; е) $xy' + y - y^2 = 0$;

ж) $2x\cos^2 y dx + (2y - x^2\sin 2y)dy = 0$;

з) $y^2 + x^2y' = xyy'$.

343. Ушбу дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимини топинг:

а) $y' + \frac{y}{x} = 1 + 2\ln x$;

б) $y' + 4xy = 2x^{-x^2}y$;

в) $(2y - x^2\sin 2y)y' + 2x\cos^2 y = 0$;

г) $(x^2 - xy)y' + y^2 = 0$;

д) $y' - \frac{y}{x-3} = \frac{y}{x-3}$;

е) $xdy = (e^{-x} - y)dx$.

344. Ушбу дифференциал тенгламаларнинг берилган бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

а) $2xydx + (y - x^2)dy = 0$, $y(-2) = 4$;

б) $y' = 2y - x + e^x$, $y(0) = -1$;

в) $y' + 3y = e^{2x}y^2$, $y(0) = 1$;

г) $y' + y\mathrm{tg}x = \frac{1}{\cos x}$, $y(\pi) = 5$;

д) $y^2dx = \left(x + ye^{-\frac{1}{y}}\right)dy$, $y(0) = -3$;

е) $y' - 7y = e^{3x}y^2$, $y(0) = 2$.

4-§. Тўлиқ дифференциалли тенглама

Агар D соҳада $P(x,y)$, $Q(x,y)$ функциялар аниқланган ва

$$\frac{dP(x,y)}{dy}=\frac{dQ(x,y)}{dx} \tag{7.21}$$

тенгсизлик бажарилса,

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{7.22}$$

тенглама ечими мавжуд бўлади. (7.22) кўринишдаги тенглама *тўлиқ дифференциалли* тенглама дейилади.

(7.22) тенгламанинг умумий интеграли қуйидаги формулаларнинг бири билан аниқланади:

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\, dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\, dy = C, \tag{7.23}$$

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\, dy = C, \tag{7.24}$$

бунда $M_0(x_0,y_0)\in D$.

Мисол. $(x^2 + y - 4)dx + (x + y + e^y)dy = 0$ тенгламанинг умумий интегралини топинг.

Ечиш. $P = x^2 + y - 4$, $Q = x + y + e^y$ деб белгилаб оламиз

$$\frac{dP}{dy}=1,\ \frac{dQ}{dx}=1$$

бўлгани учун (7.21) шарт бажарилади ва берилган тенглама тўлиқ дифференциалли тенглама бўлади. Унинг умумий интегралини (7.23) ёки (7.24) формуладаги $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ деб топиш мумкин.

Танлаб олинган x_0, y_0 нинг бу қийматларида $P(x,y)$, $Q(x,y)$ функциялар ва унинг хусусий ҳосилалари аниқланган, яъни $M_0(0,0)\in D$. (7.23) формулага асосан қуйидагига эга бўламиз:

$$\int_0^x (x^2+0-4)\, dx + \int_0^y (x+y+e^y)\, dy = C,$$

$$\frac{x^3}{3} - 4x + xy + \frac{y^2}{2} + e^y - 1 = C.$$

(7.24) формулага асосан:

$$\int_0^x (x^2+y-4)\, dx + \int_0^y (0+y+e^y)\, dy = C,$$

$$\frac{x^3}{3} + xy - 4x + \frac{y^2}{2} + e^y - 1 = C,$$

яъни аниқланган умумий интеграл билан бир хил натижага эга бўлдик.

Машқлар

345. Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг умумий интегралини топинг:

а) $(e^y + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)dy = 0$;

б) $\left(2x + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + \left(1 - \frac{1}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}dy = 0$;

в) $y' = \frac{y-3x^2}{4y-x}$;

г) $(3x^2y + \sin x)dx + (x^3 - \cos y)dy = 0$.

346. Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг хусусий ечимларини топинг:

а) $e^{-y}dx + (2y - xe^{-y})dy = 0,\ y(-3) = 0$;

б) $xdx + ydy = \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2},\ y(1) = 1$;

в) $x + ye^x + (y + e^x)y' = 0,\ y(0) = 4$;

г) $(2x + y + 3x^2\sin y)dx + (x + x^3\cos y + 2y)dy = 0,\ y(0) = 2$.

347. $A(1;0)$ нуқтадан ўтувчи шундай эгри чизиқнинг тенгламасини тузингки, унинг исталган уринмасининг ординаталар ўқидан ажратган кесмаси уриниш нуқтасининг абсциссасига тенг бўлсин.

348. $A(2;1)$ нуқтадан ўтувчи шундай эгри чизиқнинг тенгламасини тузингки, унинг ҳар қандай нуқтасига ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти уриниш нуқтасининг радиус-вектори бурчак коэффициентининг квадратига тенг бўлсин.

349. Радийнинг емирилиш тезлиги унинг мавжуд миқдорига пропорционалдир. Агар 1600 йилдан сўнг бошлангич миқдорнинг ярмиси қолиши маълум бўлса, неча йилдан сўнг 1 кг радийдан 650 г қолишини ҳисобланг.

350. Тандирдан олинган нон 20 мин. ичида 100° дан 60° гача совиди. Атрофдаги ҳавонинг температураси 25° га тенг. Ноннинг совиш тезлигини нон температураси ва унинг атрофидаги ҳавонинг температураси айирмасига пропорционал деб ҳисоблаб, нон қанча вақт ичида 30° гача совишини аниқланг.

5-§. Тартибини пасайтириш мумкин бўлган юқори тартибли дифференциал тенгламалар

Тартибини пасайтириш мумкин бўлган юқори тартибли дифференциал тенгламаларнинг баъзи турларини кўриб чиқамиз.

I.
$$y^{(n)} = f(x) \qquad (7.25)$$

кўринишдаги тенгламанинг умумий счими n марта интеграллаш усули билан топилади. Унинг иккала қисмини dx га кўпайтириб интегралласак, (n—1)-тартибли тенгламага эга бўламиз:

$$y^{(n-1)} = \int y^{(n)}dx = \int f(x)\,dx = \varphi_1(x) + \bar{C}_1.$$

Бу ишни такрорласак (n-2)-тартибли тенгламага эга бўламиз:

$$y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)}dx = \int (\varphi_1(x) + \bar{C}_1)\,dx =$$

$$= \int \varphi_1(x)\,dx + \int \bar{C}_1 dx = \varphi_2(x) + \bar{C}_1 x + \bar{C}_2.$$

n марта интеграллаб (7.25) тенгламанинг умумий ечимини ҳосил қиламиз:

$$y = \varphi_n(x) + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n, \qquad (7.26)$$

бунда $C_i (i = \overline{1,n})$ — ихтиёрий ўзгармас сонлар бўлиб, улар $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \ldots, \bar{C}_n$ ихтиёрий ўзгармас сонлар билан аниқланали.

1-мисол. Ушбу $y^{IV} = \frac{8}{(x-3)^5}$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламанинг иккала қисмини dx га кўпайтириб, учинчи тартибли тенгламага эга бўламиз:

$$y^{III} = \int y^{IV} dx = \int \frac{8dx}{(x-3)^5} = -\frac{2}{(x-3)^4} + \bar{C}_1.$$

Бу тенгликни яна уч марта интегралласак, берилган тенгламанинг умумий ечимига эга бўламиз:

$$y'' = \int y''' dx = \int\left(-\frac{2}{(x-3)^4} + C_1\right)dx = \frac{2}{3(x-3)^3} + \bar{C}_1 x + \bar{C}_2$$

$$y' = \int y'' dx = \int\left(\frac{2}{3(x-3)^2} + \bar{C}_1 x + \bar{C}_2\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{3(x-3)^2} + \frac{1}{2}\bar{C}_1 x^2 + \bar{C}_2 x + \bar{C}_3,$$

$$y = \int y' dx = \int\left(-\frac{1}{3(x-3)^2} + \frac{1}{2}\bar{C}_1 x^2 + \bar{C}_2 x + \bar{C}_3\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3(x-3)} + \frac{1}{6}\bar{C}_1 x^3 + \frac{1}{2}\bar{C}_2 x^2 + \bar{C}_3 x + \bar{C}_4 =$$

$$= \frac{1}{3(x-3)} + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4,$$

бунда $C_1 = \frac{1}{6}\bar{C},\ C_2 = \frac{1}{2}\bar{C}_2,\ C_3 = \bar{C}_3,\ C_4 = \bar{C}.$

II. n-тартибли дифференциал тенгламада изланаётган y функция ва унинг $k(1 \le k \le n)$ тартибгача ҳосиласи иштирок этмасин, яъни

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0\,. \qquad (7.27)$$

$z(x)$ номаълум функцияни $z = y^{(k)}$ формула бўйича киритамиз ва $y^{(k+1)} = z'$, $y^{(k+1)} = z'', \ldots, y^{(n)} = z^{(n-k)}$ ларни эътиборга олиб, $z(x)$ функцияга нисбатан (n-k)-тартибли

$$F(x, z, z', z'', \ldots, z^{(n-k)}) = 0 \qquad (7.28)$$

дифференциал тенгламага эга бўламиз, яъни (7.27) тенгламанинг тартиби k га пасайтирилади. Агар (7.28) тенгламанинг умумий ечимини $z = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$ кўринишда аниқлаш мумкин бўлса, қуйидаги дифференциал тенгламага эга бўламиз:

$$z=y^{(k)}=\varphi(x, C_1, C_2,\ldots,C_{n-k}).$$

Бу (7.25) кўринишдаги тенгламадан иборат бўлиб, унинг ечими k марта интеграллаш ёрдамида топилади. Хусусий ҳолда, агар $n = 2$, $k = 1$ бўлса, (7.28) тенглама биринчи тартибли тенглама бўлади.

2-мисол. Ушбу $xy'' = y'\ln\frac{y'}{x}$ дифференциал тенгламанинг $y(1) = e$, $y'(1) = e^2$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламада y қатнашмагани ва $n = 2$, $k = 1$ бўлгани учун у II тур кўринишдаги тенгламадир. $z = y'$ деб бу тенгламанинг тартибини биттага пасайтирамиз. У ҳолда $z' = y''$ ва берилган тенглама изланаётган z функцияга нисбатан биринчи тартибли бир жинсли дифференциал тенглама кўринишига келади:

$$xz' = z\ln\left(\frac{z}{x}\right).$$

Уни ечиш учун $z = x\cdot u(x)$, $z' = u + xu'$ алмаштиришни бажарсак, тенглама кўриниши қуйидагича бўлади:

$$u + xu' = u\ln u.$$

Бу тенгламада ўзгарувчиларни ажратамиз ва интеграллаймиз:

$$\frac{du}{u(\ln u-1)} = \frac{dx}{x},\ \ln\left|\ln u - 1\right| = \ln x + \ln C_1,$$

$$\ln u - 1 = C_1x,\ u = e^{1+C_1x},\ z = xe^{1+C_1x}.$$

$z = y'$ бўлгани учун, охирги тенглама биринчи тартибли дифференциал тенглама бўлади ва y бир марта интеграллаш ёрдамида ечилади:

$$z = y' = xe^{1+C_1x},\ y = \int xe^{1+C_1x}dx = \frac{1}{C_1}\int xd(e^{1+C_1x}) =$$

$$= \frac{1}{C_1}\left(xe^{1+C_1x} - \int e^{1+C_1x}dx\right) = \frac{C_1x-1}{C_1^2}e^{1+C_1x} + C_2.$$

Берилган тенгламанинг умумий ечимини топдик. $y(1) = e$, $y'(y) = e^2$ бошланғич шартлардан фойдаланиб C_1 ва C_2 ихтиёрий ўзгармасларнинг қийматини аниқлаймиз:

$$\begin{cases} e = \dfrac{C_1-1}{C_1^2}e^{1+C_1} + C_2, \\ e^2 = e^{1+C_1}. \end{cases}$$

Бундан $C_1 = 1$, $C_2 = e$.

Демак, берилган тенгламанинг хусусий ечими

$y = (x - 1)\ e^{1+x} + e$ бўлади.

3-мисол. Ушбу $y''' \cdot \mathrm{ctg}x + y'' = 2$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенглама учун $n = 3$, $k = 2$, демак, берилган тенглама II тур кўринишдаги тенгламадир. $z = y^4$ янги функция киритамиз ва берилган тенгламадан $z'\mathrm{ctg}x + z = 2$ чизиқли тенгламани ҳосил қиламиз. Уни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$z' + z\mathrm{tg}x = 2\mathrm{tg}x.$$

Унинг умумий ечимини (7.15) формулага асосан топамиз:

$$z = e^{-\int \mathrm{tg}x dx}\left(\int 2\mathrm{tg}x \cdot e^{\int \mathrm{tg}x dx}dx + C_1\right) =$$

$$= e^{\ln|\cos x|}\cdot\left(2\int \mathrm{tg}x \cdot e^{-\ln|\cos x|}dx + C_1\right) =$$

$$= |\cos x|\cdot\left(2\int\frac{\mathrm{tg}x}{|\cos x|}dx + C_1\right) = 2\cos x\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx + C_1\cos x =$$

$$= 2\cos x\cdot\frac{1}{\cos x} + C_1\cos x = 2 + C_1\cos x.$$

$z = y''$ бўлгани учун I тур дифференциал тенглама кўринишга эга бўламиз. Уни қуйидагича ёзамиз:

$$y'' = 2 + C_1\cos x,\ y' = \int(2 + C_1\cos x)dx = 2x + C_1\sin x + C_2,$$

$$y = \int(2x + C_1\sin x + C_2)dx = x^2 - C_1\cos x + C_2x + C_3.$$

Демак, умумий ечим $y = x^2 - C_1\cos x + C_2x + C_3$ бўлади.

III. Эркли ўзгарувчи x ошкор қатнашмайдиган қуйидаги n-тартибли дифференциал тенгламани кўрамиз:

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \qquad (7.29)$$

Бу ҳолда $P(y) = y'$ (бунда y нинг аргументи деб қаралади) янги функция киритиш тенгламанинг тартибини бир бирликка пасайтиришга имкон беради. Бунинг учун $y', y'', \dots, y^{(n)}$ ларни аргументи y бўлган янги функциянинг ҳосилалари орқали ифодалаш керак. Мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидасига кўра:

$$y' = \frac{dy}{dx} = P, \quad y'' = \frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = P\frac{dP}{dy},$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx}\left(P\frac{dP}{dy}\right) = \frac{dP}{dx} \cdot \frac{dP}{dx} + P\frac{d^2P}{dxdy} =$$
$$= P\left(\frac{dP}{dy}\right)^2 + P^2\frac{d^2P}{dy^2} \qquad (7.30)$$

ва ҳоказо. Бажарилган ҳисоблашлардан кўриниб турибдики, $y^{(k)}$ ҳосила тартиби $k-1$ дан катта бўлмаган P функциянинг y га нисбатан ҳосилалари орқали ифодаланади. Натижада (7.30) тенгламаларни эътиборга олсак, (7.29) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\Phi\left(y, P, \frac{dP}{dy}, \frac{d^2P}{dy^2}, \dots, \frac{d^{(n-1)}P}{dy^{(n-1)}}\right) = 0. \qquad (7.31)$$

Агар (7.31) тенглама

$$P = \varphi(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})$$

умумий ечимга эга бўлса, $P = \frac{dy}{dx}$ ни эътиборга олиб (7.29) тенгламанинг умумий ечимини топиш охирги тенгламада ўзгарувчиларни ажратиш ва уни ечишга келтирилади:

$$\int\frac{dy}{\varphi(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})} = \int dx, \quad \Phi(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) = x + C_n.$$

Агар (7.29) тенгламада $n = 2$ бўлса, (7.31) тенглама биринчи тартибли тенглама бўлади.

4-мисол. Ушбу $y''' - \frac{(y'')^2}{y'} = 6(y')^2y$ тенгламанинг $y(2) = 0$, $y'(2) = 1$, $y''(2) = 0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенглама (7.29) кўринишдаги тенглама, бунда $n = 3$. (7.30) тенгликларни эътиборга олиб, янги $P(y)$ функцияни киритамиз ва $P(y)$ функцияни топамиз:

$$P^2\frac{d^2P}{dy^2} + P\left(\frac{dP}{dy}\right)^2 - \frac{\left(P\frac{dP}{dy}\right)^2}{P} = 6P^2y,$$

$$P^2\left(\frac{d^2P}{dy^2} - 6y\right) = 0, \quad (P \neq 0),$$

бундан $\frac{d^2P}{dy^2} = 6y$. Бу I тур тенглама бўлиб, унинг ечими икки марта интеграллаш ёрдамида топилади:

$$\frac{dP}{dy} = \int 6ydy = 3y^2 + C_1, \quad P = \int(3y^2 + C_1)\,dy = y^3 + C_1y + C_2,$$

$$P = y' = y^3 + C_1y + C_2.$$

$y'(2) = P(0) = 1$, $y''(2) = P(0)\frac{dP(0)}{dy} = 0$ бошланғич шартлардан фойдаланиб, $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ ларни топамиз. Энди $y' = y^3 + 1$ тенгламани интеграллаймиз:

$$\frac{dy}{dx} = y^3 + 1, \quad \frac{dy}{y^3+1} = dx, \quad \int\frac{dy}{y^3+1} = \int dx,$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2y-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\ln\frac{|y+1|}{\sqrt{y^2-y+1}} = x + C_3.$$

Энди $y(2) = 0$ шартдан фойдаланамиз: $C_3 = -2 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$. Демак, изланаётган хусусий ечим:

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcig}\frac{2y-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\ln\frac{|y+1|}{\sqrt{y^2-y+1}} + 2 + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

Машқлар

351. Қуйидаги тенгламаларнинг умумий ечимини топинг:

а) $y''' = x^2 - \sin x$;

б) $y^{IV} = \frac{y'''}{x}$;

в) $yy'' = y'^2$;

г) $x^2y''' = y''^2$;

д) $xy'' - y' = x^2e^x$;

е) $xy'' + y' = y'^2$;

352. Қуйидаги тенгламаларнинг берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг:

а) $y'' = \frac{\ln x}{x^2},\ y(1) = 3,\ y'(1) = 1$;

б) $xy''' - y'' = x^2 + 1,\ y(-1) = 0,\ y'(-1) = 1$;

в) $y'' = e^{2y},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$;

г) $2y'^2 = (y-1)y'',\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$;

д) $y^3y'' + 1 = 0,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 0$;

е) $2y'' = 3y^2,\ y(2) = 1,\ y'(2) = -1$.

353. Тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган моддий нуқтанинг тезланиши вақтга боғлиқ бўлиб, у $a(t) = 6t - 2$ формула ёрдамида ифодаланади. Агар вақтнинг бошланғич моменти $t = 0$ да тезлик $v = 1$ м/сек, йўл эса $S = 0$ бўлса, нуқтанинг ҳаракат қонунини топинг.

354. Йўлнинг горизонтал қисмида $v = 90$ км\соат тезлик билан ҳаракатланаётган автомобилга вақтнинг бирор моментида тормоз берилди. Агар ҳаракатга қаршилик автомобил оғирлигининг 0,3 қисмига тенг бўлса, тормоз берилгандан кейин ўтган вақтни ва босиб ўтилган йўлни топинг.

6-§. Юқори тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар

Умумий ҳол. Ушбу

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = f(x) \qquad (7.32)$$

кўринишдаги (бунда $a_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$, $f(x)$ — бирор D соҳада берилган функциялар) тенглама *n-тартибли чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенглама* дейилади. Агар (7.32) нинг ўнг томони D соҳада $f(x) \equiv 0$ бўлса,

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = 0 \quad (7.33)$$

тенгламага эга бўламиз. (7.33) тенглама *n-тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенглама* дейилади.

Агар $a_i(x)$, $f(x)$ функциялар D соҳадаги $(a;b)$ интервалда узлуксиз бўлса, (7.32), (7.33) кўринишдаги исталган тенгламалар учун $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, $x_0 \in (a;b)$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ягона ечим мавжудлиги ҳақидаги теорема ўринли бўлади.

(7.32) ва (7.33) тенгламаларнинг умумий ва хусусий ечимларини топишда $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ функцияларнинг чизиқли боғлиқлиги ва чизиқли эрклилиги муҳим рол ўйнайди.

Агар ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ сонлар мавжуд бўлсаки, бирор $(a;b)$ интервалга тегишли барча x лар учун

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i(x) \equiv 0 \qquad (7.34)$$

тенглик ўринли бўлса, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ функциялар $(a;b)$ интервалда *чизиқли боғлик* дейилади.

Агар (7.34) тенглик $(a;b)$ интервалга тегишли барча x лар учун фақат $\mu_i = 0$ да бажарилса, $y_i(x)$ функциялар шу интервалда *чизиқли эркли* дейилади. Ушбу

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \ldots & y'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (7.35)$$

детерминант Вронский детерминанти (ёки вронскиан) дейилади.

Функцияларнинг чизиқли боғлиқ ва чизиқли эркли бўлиши аломати.

Агар $y_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ функциялар системаси (яъни $(a;b)$ интервалда $(n$-$1)$-тартибли ҳосиласигача узлуксиз бўлган функциялар) $(a;b)$ интервалда чизиқли боғлиқ бўлса, у ҳолда $(a;b)$да $W \equiv 0$ бўлади.

Агар $W \not\equiv 0$ бўлса, у ҳолда $y_i(x)$ функциялари чизиқли эркли бўлади.

Масалан, $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ функциялар учун $W \not\equiv 0$, шунинг учун улар чизиқли эркли бўлади.

n та чизиқли эркли $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ ечимлар тўплами (7.33) тенгламанинг *фундаментал ечимлар системаси* дейилади. Бунинг ёрдамида (7.33) бир жинсли тенгламанинг умумий ечими аниқланади.

1-теорема. *Агар $y_1, y_2, \dots, y_n$ функциялар (7.33) тенгламанинг фундаментал ечимлари системасини ташкил этса, у ҳолда*

$$\overline{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) \qquad (7.36)$$

функция (7.33) тенгламанинг умумий ечими бўлади (бунда C_i— ихтиёрий ўзгармас сон).

1-мисол. e^x, e^{-x}, e^{2x} функциялар $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ тенгламанинг фундаментал ечимлар системаси бўлишини кўрсатинг ва унинг умумий ечимини ёзинг.

Ечиш. $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = e^{2x}$ функцияларни ва уларнинг ҳосилаларини берилган тенгламага қўйиш натижасида, улар тенгламанинг ечими эканлиги аниқланади.

Унинг вронскиани (7.35) қуйидаги кўринишда бўлади:

$$W(e^x, e^{-x}, e^{2x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^x \cdot e^{-x} \cdot e^{2x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -6e^{2x} \neq 0.$$

Демак, e^x, e^{-x}, e^{2x} лар чизиқли эркли ва берилган тенгламанинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этади. Унинг умумий ечими (7.36) формулага асосан

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$$

кўринишда бўлади.

2-теорема ((7.32) тенглама умумий ечимининг кўриниши ҳақида). *(7.32) чизиқли бир жинсли бўлмаган тенглама умумий ечимининг кўриниши $y = \overline{y} + y^*$ каби бўлиб, бунда $\overline{y}$*

— унга мос (7.33) бир жинсли тенгламанинг ((7.36) кўринишдаги) умумий ечим, y^* — (7.32) тенгламанинг бирорта хусусий ечими.

Бундай тенгламаларни ечишни мисолда кўрсатамиз.

2-мисол. Бирорта хусусий ечими $y^* = x + 1$ функциядан иборат бўлган $y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x + 1$ тенгламанинг умумий ечимини ёзинг.

Ечиш. 1-мисолда бир жинсли тенгламанинг $\overline{y}$ умумий ечими аниқланган эди. Шунга кўра берилган тенгламанинг умумий ечими

$$y = \overline{y} + y^* = C_1 e^x C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + x + 1$$

кўринишдаги функция бўлади.

Агар (7.33) тенгламанинг фундаментал ечимлар системаси маълум бўлса, у ҳолда (7.32) тенгламанинг хусусий ечими y^* ни ихтиёрий ўзгармасларни вариациялаш усули (Лагранж усули) билан топиш мумкин. Бу усулда y^* қуйидаги кўринишда изланади:

$$y^* = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + \dots + C_n(x) y_n(x). \qquad (7.37)$$

Бунда $y_i(x)$ (7.33) тенгламанинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этади, $C_i(x)$ номаълум функциялар эса қуйидаги системадан аниқланади:

$$\left.\begin{array}{l} C_1{}' y_1 + C_2{}' y_2 + \dots + C_n{}' y_n = 0, \\ C_1{}' y_1{}' + C_2{}' y_2{}' + \dots + C_n{}' y_n{}' = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1{}' y_1{}^{(n-1)} + C_2{}' y_2{}^{(n-1)} + \dots + C_n{}' y_n{}^{(n-1)} = f(x). \end{array}\right| \qquad (7.38)$$

Бу система $C_i{}'$ ларга нисбатан чизиқли алгебраик тенгламалар системасидан иборатдир. Системанинг детерминанти Вронский детрминантидан иборат бўлиб, у нолдан фарқли. Шунинг учун (7.38) система $C_i{}' = \varphi_i(x)$ ягона ечимга эга бўлади. Охирги тенглик биринчи тартибли дифференциал тенглама бўлгани учун уни интеграллаб $C_i(x) = \int \varphi_i(x)\,dx$ ни топамиз.

Демак, (7.32) тенгламанинг хусусий ечими

$$y^* = y_1 \int \varphi_1(x)\,dx + y_2 \int \varphi_2(x)\,dx + \dots + y_n \int \varphi_n(x)\,dx \qquad (7.39)$$

кўринишда бўлади.

1-изоҳ. (7.39) формула ёрдамида интегралларни топишда n та ўзгармаслар ҳосил бўлади. Уларни нолга тенг деб олиш мумкин.

3-мисол. Ушбу $y''' - 2y'' - y' + 2y = \frac{e^{2x}}{e^x+1}$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Бир жинсли тенгламанинг умумий ечими 1-мисолдан маълум:

$$\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x}.$$

Берилган тенгламанинг хусусий ечими y^* ни Лагранж усули билан топамиз. (7.37) формулага асосан:

$$y^* = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x} + C_3(x)e^{2x}.$$

(7.38) система бу ҳол учун қуйидаги кўринишни олади:

$$\left.\begin{array}{r} C_1{}'e^x + C_2{}'e^{-x} + C_3{}'e^{2x} = 0, \\ C_1{}'e^x - C_2{}'e^{-x} + 2C_3{}'e^{2x} = 0, \\ C_1{}'e^x + C_2{}'e^{-x} + 4C_3{}'e^{2x} = \frac{e^{2x}}{e^x+1}. \end{array}\right|$$

Унинг детерминанти $W = -6e^{2x} \neq 0$. Системани Крамер формуласи ёрдамида ечиб, қуйидагиларни топамиз:

$$C_1{}' = -\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x}{e^x+1},\ C_2{}' = \frac{1}{6}\cdot\frac{e^{3x}}{e^x+1},\ C_3{}' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{e^x+1}.$$

Бу ифодаларни интеграллаймиз:

$$C_1 = -\frac{1}{2}\int\frac{e^x dx}{e^x+1} = -\frac{1}{2}\int\frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = -\frac{1}{2}\ln(e^x+1),$$

$$C_2 = \frac{1}{6}\int\frac{e^{3x}dx}{e^x+1} = \frac{1}{6}\int\frac{e^{2x}d(e^x)}{e^x+1} = \frac{1}{6}\int\left(e^x - 1 + \frac{1}{e^x+1}\right)d(e^x) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{e^{2x}}{2} - e^x + \ln(e^x+1)\right),$$

$$C_3 = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{e^x+1} = \frac{1}{3}\int\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}dx = \frac{1}{3}\int\left(1 - \frac{e^x}{e^x+1}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(x - \int\frac{d(e^x+1)}{e^x+1}\right) = \frac{1}{3}(x - \ln(e^x+1)).$$

Тенгламанинг хусусий ечими:

$$y^* = -\frac{1}{2}e^x\ln(e^x+1) + \frac{1}{6}e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + \ln(e^x+1)\right) +$$

$$+\frac{1}{3}e^{2x}(x - \ln(e^x+1)) = \frac{1}{12}e^x - \frac{1}{6} + \frac{1}{3}xe^{2x} +$$

$$+\left(\frac{1}{6}e^{-x} - \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{3}e^{2x}\right)\ln(e^x+1).$$

Берилган тенгламаниг умумий ечими:

$$y = \overline{y} + y^* = C_1x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x} + \frac{1}{12}(4xe^{2x} + e^x - 2) +$$

$$+\frac{1}{6}(e^{-x} - 3e^x - 2e^{2x})\ln(e^x+1).$$

2-изоҳ. (7.33) тенгламанинг фундаментал ечимлар системасини топиш мумкин бўлмаса, (7.32) тенгламанинг хусусий ечими y^* ни ва умумий ечимини топиш мумкин эмас. (7.32) тенгламаларни ечишнинг бошқа усуллари ҳам мавжуд бўлмаса, фақат хусусий ҳолда, яъни (7.32) тенгламадаги ҳамма $a_i(x)$ коэффициентлар ўзгармас сонлар бўлгандагина фундаментал ечимлар системасини ва (7.32) тенгламанинг умумий ечимини топиш усули мавжудлигини эслатиб ўтамиз.

Ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенглама. (7.32) ва (7.34) тенгламаларга $a_i(x) = P_i = \text{const}$, $P_i \in R$ ни қўямиз:

$$y^{(n)} + P_1y^{(n-1)} + P_2y^{(n-2)} + \ldots + P_{n-1}y' + P_ny = f(x), \qquad (7.40)$$

$$y^{(n)} + P_1y^{(n-1)} + P_2y^{(n-1)} + \ldots + P_{n-1}y' + P_ny = 0, \qquad (7.41)$$

(7.41) тенгламанинг фундаментал ечимлар системасини фақат алгебраик усулдан фойдаланиб қуйидагича топиш мумкин.

(7.41) тенгламага асосланиб

$$\lambda^n + P_1\lambda^{n-1} + \ldots + P_{n-1}\lambda + P_n = 0 \qquad (7.42)$$

алгебраик тенглама тузамиз. (7.42) тенглама (7.41) тенгламанинг *характеристик* тенгламаси дейилади. У n та илдизга эга бўлиб, улар ичида содда ҳақиқий, каррали илдизлар ва комплекс қўшма содда илдизлар бўлиши мумкин.

Агар (7.42) характеристик тенгламанинг ҳамма λ_i илдизлари содда ва ҳақиқий бўлса, у ҳолда (7.41) тенгламанинг фундаментал ечимлар системаси қуйидагича бўлади:

$$e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x},\ \ldots,\ e^{\lambda_n x}. \tag{7.43}$$

(7.42) характеристик тенгламанинг k та каррали λ илдизи ҳақиқий бўлса, у ҳолда унга мос (7.41) тенглама k та чизиқли эркли ечимга эга бўлиб, унинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$y_1 = e^{\lambda x},\ y_2 = xe^{\lambda x},\ \ldots,\ y_n = x^{k-1}e^{\lambda x}. \tag{7.44}$$

(7.42) характеристик тенгламанинг m та каррали, иккита $\alpha \pm \imath\beta$ комплекс қўшма илдизлар учун (7.41) тенглама $2m$ та чизиқли эркли ечимга эга бўлиб, унинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\begin{gathered}
\overline{y}_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ \overline{y}_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x,\\
\overline{y}_3 = xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ \overline{y}_4 = xe^{\alpha x}\sin\beta x,\\
\overline{y}_5 = x^2e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ \overline{y}_6 = x^2e^{\alpha x}\sin\beta x,\\
\text{\_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_}\\
\overline{y}_{2m-1} = x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ \overline{y}_{2m} = x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.
\end{gathered} \tag{7.45}$$

Кўрилган умумий мулоҳазалардан кўриниб турибдики, (7.42) характеристик тенглама n та илдизга, мос равишда бир жинсли (7.41) тенглама n та чизиқли эркли ечимга эга ва улар фундаментал ечимлар системасини ташкил этади. Улар ёрдамида ва (7.36) формула асосида (7.41) тенгламанинг умумий ечими топилади.

4-мисол. Ушбу

$$y^{IV} - 16y = 0$$

ўзгармас коэффициентли тўртинчи тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенглама учун характеристик тенглама тузамиз ва унинг илдизларини топамиз:

$$\lambda^4 - 16 = 0,\ (\lambda^2-4)(\lambda^2+4) = 0,\ \lambda^2 = 4,\ \lambda_{1,2} = \pm 2,$$
$$\lambda^2 = -4,\ \lambda_{3,4} = \pm 2i.$$

Иккита ҳақиқий ва иккита комплекс қўшма ($a = 0$, $b = 2$) сонлардан иборат тўртта содда илдизлар ҳосил қилдик. (7.43), (7.45) хусусий ечимлардан фундаментал ечимлар системасини ҳосил қиламиз:

$$y_1 = e^{2x},\ y_2 = e^{-2x},\ y_3 = e^{0x}\cos 2x = \cos 2x,$$
$$y_4 = e^{0x}\sin 2x = \sin 2x.$$

(7.36) формулага асосан берилган тенгламанинг умумий ечими

$$\overline{y} = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x$$

кўринишда бўлади.

Агар (7.41) тенгламада $n = 2$ бўлса, у ҳолда ўзгармас коэффициентли иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенглама ҳосил қиламиз:

$$y'' + P_1y' + P_2y = 0. \tag{7.46}$$

(7.46) тенгламанинг характеристик тенгламаси

$$\lambda^2 + P_1\lambda + P_2 = 0 \tag{7.47}$$

ва унинг илдизлари:

1) ҳақиқий ва ҳар хил: $\lambda_1 \neq \lambda_2$;

2) ҳақиқий ва бир бирига тенг: $\lambda_1 = \lambda_2$;

3) комплекс қўшма: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ илдизларги эга бўлиши мумкин.

Уларга мос қуйидаги фундаментал ечимлар системаси ва (7.46) тенгламанинг умумий ечими тўғри келади:

1) $y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = e^{\lambda_2 x};\ \overline{y} = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$;

2) $y_1 = e^{\lambda x},\ y_2 = xe^{\lambda x};\ \overline{y} = C_1e^{\lambda x} + C_2xe^{\lambda x} = e^{\lambda x}(C_1 + C_2x)$;

3) $y^1 = e^{ax}\cos\beta x,\ y^2 = e^{ax}\sin\beta x;\ \overline{y} = e^{ax}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$.

5-мисол. Ушбу тенгламаларнинг умумий ечимини топинг:

а) $y'' - 15y' + 26y = 0$;

б) $y'' + 6y' + 9y = 0$;

в) $y'' - 2e' + 10y = 0$.

Ечиш. Ҳар бир ҳол учун характеристик тенглама тузамиз, унинг илдизларини, фундаментал ечимлар системасини ва умумий ечимини топамиз:

а) $\lambda^2 - 15\lambda + 26 = 0,\ \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 13$;

$y_1 = e^{2x},\ y_2 = e^{13x}$;

$\overline{y} = C_1e^{2x} + C_2e^{13x}$;

б) $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0,\ \lambda_1 = \lambda_2 = -3$;

$y_1 = e^{-3x},\ y_2 = xe^{-3x}$;

$\overline{y} = e^{-3x}(C_1 + C_2x)$;

в) $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0,\ \lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$;

$y_1 = e^{x}\cos 3x,\ y_2 = e^x \sin 3x$;

$\overline{y} = e^x(C_1\cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

Шундай қилиб, ўзгармас коэффицентли чизиқли тенгламани ечиш учун:

1) унинг фундаментал ечимлар системасини топиш;

2) (7.41) бир жинсли тенгламанинг y умумий ечимини тузиш;

3) Лагранж усули билан (7.40) тенгламанинг y^* хусусий ечимини топиш;

4) $\overline{y} = y + y^*$ формула ёрдамида (7.40) тенгламанинг умумий ечимини топиш керак.

(7.40) тенгламанинг ўнг қисми $f(x)$ кўп ҳолларда муҳандислик ишларида қўлланиладиган алоҳида кўринишларга эга бўлади:

$$f(x) = e^{ax}(P_r(x)\cos bx + Q_s(x)\sin bx), \qquad (7.48)$$

бунда $P_r(x),\ Q_s(x)$ — мос ҳолда r ва s даражали кўпҳад; a, b — бирор ўзгармас сонлар. $f(x)$ функциянинг хусусий ҳоллари қуйидагича бўлиши мумкин:

$$f(x) = P_r(x)e^{ax} \quad (b = 0); \qquad (7.49)$$

$$f(x) = P_r(x)\cos bx + Q_s(x)\sin bx \quad (a = 0); \qquad (7.50)$$

$$f(x) = e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx) \quad (A = \mathrm{const},\ B = \mathrm{const}); \ (7.51)$$

$$f(x) = A\cos bx + B\sin bx\ (a = 0,\ P_r(x) = A,\ Q_s(x) = B); \ (7.52)$$

$$f(x) = P_r(x) \quad (a = 0,\ b = 0). \qquad (7.53)$$

Бу ҳамма ҳоллар учун, шунингдек, умумий ҳол учун ((7.48) формулага қаранг) (7.40) тенгламанинг y^* хусусий ечими ўнг қисмининг тузилишига қараб топилиши исбот қилинган.

$f(x)$ функциянинг умумий ҳоли учун хусусий ечим

$$y^* = x^k e^{ax}(\overline{P}_m(x)\cos bx + \overline{Q}_m(x)\sin bx) \qquad (7.54)$$

формула билан аниқланади, бунда $\overline{P}_m(x),\ \overline{Q}_m(x)$ — даражаси $m = \max\{r,s\}$ бўлган кўпҳад; k эса (7.42) характеристик тенгламанинг $z = a + bi$ илдизлар сонига мос келувчи сонга тенг. Шундай қилиб, агар $\lambda_i (i = \overline{1,n})$ илдизлар ичида z сони бўлмаса, $k = 0$; агар битта илдиз z сони бўлса, у ҳолда $k = 1$; агар илдизлар ичида икки каррали илдиз z сони бўлса, у ҳолда $k = 2$ ва ҳоказо.

Демак, (7.54) формула ёрдамида фақат $P_m(x)$ ва $Q_m(x)$ кўпҳаднинг коэффициентлари маълум бўлган y^* хусусий ечимининг тузилишини бирдан ёзиш мумкин экан.

(7.40) тенгламага y^* хусусий ечимни ва унинг ҳосилаларини қўйиб чап ва ўнг қисмидаги ўхшаш ҳадлари олдидаги коэффициентларни тенглаб, ноъмалум коэффициентларни ҳисоблаш учун керакли бўлган сондаги чизиқли алгебраик тенгламаларни ҳосил қиламиз.

Демак, y^* тузилишини ((7.54) формулага қаранг) билган ҳолда, элементар амаллар ёрдамида (яъни дифференциаллаш ва чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечиш) интеграллаш амалини бажармасдан, (7.40) тенгламанинг хусусий y^* ечимини топиш мумкин экан.

6-мисол. Ушбу $y^{IV} - 3y^{III} = 9x^2$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Тенгламанинг характеристик тенгламасини тузамиз, унинг илдизларини, фундаментал ечимлар системасини ва бир жинсли тенгламага мос $\overline{y}$ умумий ечимни топамиз:

$$\lambda^4 - \lambda^3 = 0,\ \lambda^2(\lambda^2 - 3) = 0,\ \lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{3};$$

$$y_1 = e^{0x} = 1,\ y_2 = xe^{0x} = x,\ y_3 = e^{\sqrt{3}x},\ y_4 = e^{-\sqrt{3}x};$$

$$\overline{y} = C_1 + C_2x + C_3e^{\sqrt{3}x} + C_4e^{-\sqrt{3}x}.$$

Берилган тенгламанинг ўнг қисми (7.53) хусусий хол кўринишда, шунинг учун $z = 0$. Характеристик тенгламанинг $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ каррали илдизи $z = 0$ билан бир хил, бундан $k = 2$ эканлиги келиб чиқади. (7.54) формулаға асосан y^* хусусий ечим

$$y^* = x^2(Ax^2 + Bx + C) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$$

кўринишда бўлади. Ҳисоблашни осонлаштириш учун y^*, y^{*I}, y^{*II}, y^{*III}, y^{*IV} ифодаларни алоҳида сатрларга ёзамиз ва вертикал чизиқнинг чап томонига тенгламадаги уларнинг олдидаги мос коэффициентларни ёзамиз. Бу ифодаларни коэффициентларга кўпайтириб қўшамиз ва ўхшаш ҳадларни ихчамлаймиз:

$$\begin{array}{r|l} 0 & y^* = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2, \\ 0 & y^{*I} = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx, \\ -3 & y^{*II} = 12Ax^2 + 6Bx + 2Cx, \\ 0 & y^{*III} = 24A + 6B, \\ 1 & y^{*IV} = 24A, \end{array}$$

$$y^{*IV} - 3y^{*II} = -36Ax^2 - 18Bx - 6C + 24A \equiv 9x^2.$$

Охирги тенгликнинг чап ва ўнг қисмидаги x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаб, A, B, C ларни аниқлаш учун қуйидаги алгебраик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{array}{r|l} x^2 & -36A = 9, \\ x^* & -18B = 0, \\ x^0 & -6C + 24A = 0 \end{array}\right\}$$

бундан $A = -\frac{1}{4}$, $B = 0$, $C = -1$.

Демак,

$$y^* = x^2\left(-\frac{1}{4}x^2 - 1\right).$$

Берилган тенгламанинг умумий ечими

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 + C_2x + C_3e^{\sqrt{3}x} + C_4e^{-\sqrt{3}x} - \frac{1}{4}x^4 - x^2$$

функциядан иборат бўлади.

7-мисол. Ушбу $y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$ характеристик тенглама илдизлари $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$ бўлгани учун $y'' - 7y' + 6y = 0$ бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$\bar{y} = C_1e^x + C_2e^{6x}$$

функциядан иборат бўлади.

Берилган тенгламанинг ўнг қисми (7.49) кўринишдаги функциядан иборат, бунда $a = 1$; $b = 0$;

$P_1(x) = x - 2$; $z = 1$, z характеристик тенгламанинг илдизи бўлгани учун $k = 1$ ва берилган тенгламанинг хусусий ечими

$$y^* = xe^x(Ax + B) = e^x(Ax^2 + Bx)$$

формула билан аниқланади. Сўнгра 6-мисолдаги каби давом этамиз:

$$\begin{array}{r|l} 6 & y^* = e^x(Ax^2 + Bx), \\ -7 & y^{*\prime} = e^x(Ax^2 + Bx) + e^x(2Ax + B), \\ 1 & y^{*\prime\prime} = e^x(Ax^2 + (2A + B)x + B) + e^x(2Ax + 2A + B), \end{array}$$

$$y^{*\prime\prime} - 7y^{*\prime} + 6y^* =$$

$$= e^x((6A - 7A + A)x^2 + (6B - 7B - 14A + 2A + B + 2A)x -$$

$$-7B + 2A + 2B \equiv e^x(x - 2).$$

Охирги тенгликнинг иккала қисмини $e^x \neq 0$ га бўламиз ва x нинг чап ва ўнг қисмдаги бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаймиз:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & 0 = 0, \\ x^1 & -10A = 1, \\ x^0 & 2A - 5B = -2, \end{array}$$

бундан $A = -\frac{1}{10}$, $B = \frac{9}{25}$;

$$y^* = e^x\left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x\right).$$

Берилган тенгламанинг умумиий ечими

$$y = \overline{y} + y^* = C_1e^x + C_2e^{6x} + e^x\left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x\right)$$

дан иборат бўлади.

Агар (7.40) тенгламада $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ бўлса, у ҳолда ўнг томони мос равишда $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ бўлган (7.40) кўринишдаги

$$y^{(n)} + P_1y^{(n-1)} + \ldots + P_ny = f_1(x)\,, \qquad (7.55)$$

$$y^{(n)} + P_1y^{(n-1)} + \ldots + P_ny = f_2(x) \qquad (7.56)$$

иккита тенгламанинг хусусий ечимлари y_1^* ва y_2^* бўлади.

Ўнг томони $f(x)$ бўлган (7.40) тенгламанинг ечими $y^* = y_1^* + y_2^*$ функция бўлади.

$f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар (7.49)—(7.53) кўринишдаги функциялар бўлиши мумкин. У ҳолда (7.48) формула ёрдамида (7.55) ва (7.56) тенгламаларнинг y_1^* ва y_2^* хусусий ечимлари топилади. Бундан ташқари $f_1(x)$ юқорида кўрилган тур фукциялари бўлиб, $f_2(x)$ умуман кўрилмаган функция бўлсин. Бу ҳолда (7.40) тенгламанинг y^* хусусий ечимини Лагранж усули билан топиш мумкин ёки (7.55) тенгламани ечиш учун (7.48) формуладан фойдаланиб, (7.56) тенгламанинг ечимини Лагранж усулини татбиқ этиб топиш лозим.

8-мисол. Ушбу

$$y'' + y = x\sin x + \cos 2x \qquad (A)$$

тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. $\lambda^2 + 1 = 0$ характеристик тенгламанинг илдизлари $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, у ҳолда $y'' + y = 0$ бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$\overline{y} = C_1\cos x + C_2\sin x$$

функция билан аниқланади. Берилган тенгламанинг ўнг қисми (7.50) ва (7.52) кўринишдаги иккита функциянинг йиғиндисидан иборат: $f_1(x) = x\sin x$, $f_2(x) = \cos 2x$. Шунинг учун (7.54) формуладан фойдаланиб

$$y'' + y = x\sin x \qquad (B)$$

тенгламанинг y_1^* хусусий ечимини ва

$$y'' + y = \cos 2x \qquad (C)$$

тенгламанинг y_2^* хусусий ечимини топамиз. (B) тенглама учун $a = 0$, $b = 0$, $z = i = \lambda_{1,2}$ бўлгани учун $k = 1$ ва

$$y_1^* = x((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x)$$

кўринишда бўлади. Номаълум A, B, C, D коэффициентларни юқорида кўрилган схема асосида ҳисоблаймиз ва y_1^* ни топамиз:

$$\begin{array}{l|l}
 & y_1^* = (Ax^2 + Bx)\cos x + (Cx^2 + Dx)\sin x, \\
1 & \\
0 & y_1^{*\prime} = (2Ax + B)\cos x - (Ax^2 + Bx)\sin x + (2Cx + D)\sin x + (Cx^2 + \\
 & +Dx)\cos x = (Cx^2 + 2Ax + Dx + B)\cos x + (-Ax^2 - Bx + 2Cx + D)\sin x, \partial \\
1 & y_1^{*\prime\prime} = (2Cx + 2A + D)\cos x - (Cx^2 + 2Ax + Dx + B)\sin x + \\
 & +(-2Ax - B + 2C)\sin x + (-Ax^2 - Bx + 2Cx + D)\cos x,
\end{array}$$

- -

$$y_1^{*\prime\prime} + y_1^* = (Ax^2 + Bx + 2Cx + 2A + D - Ax^2 - Bx + 2Cx + D)\cos x +$$
$$+(Cx^2 + Dx - Cx^2 - 2Ax - Dx - 2Ax - B + 2C)\sin x = x\sin x.$$

Охирги тенгликнинг чап ва ўнг қисмидаги ўхшаш ҳадлар олдидаги коэффициентларни тенглаб, номаълум A, B, C, D ларни топамиз:

$$\begin{array}{r|l|}
x\cos x & 4C = 0, \\
\cos x & 2A + 2D = 0, \\
x\sin x & -4A = 1, \\
\sin x & -2B = 2C = 0,
\end{array}$$

бундан $A = -\frac{1}{4}$, $B = 0$, $C = 0$, $D = \frac{1}{4}$.

Демак,

$$y^* = x\left(-\frac{1}{4}x\cos x + \frac{1}{4}\sin x\right) = \frac{1}{4}x(\sin x - x\cos x).$$

(C) тенглама учун $a = 0$, $b = 2$, $z = 2i$ бўлгани учун $k = 0$ ва

$$y_2^* = M\cos 2x + N\sin 2x$$

бўлади. M ва N номаълумларни топамиз:

$$\begin{array}{r|l} 1 & y_2^{*} = M\cos 2x + N\sin 2x, \\ 0 & y_2^{*}{}' = -2M\sin 2x + 2N\cos 2x, \\ 1 & y_2^{*}{}'' = -4M\cos 2x - 4N\sin 2x, \end{array}$$

$$y_2^{*}{}'' + y_2^{*} = -3M\cos 2x - 3N\sin 2x = \cos 2x,$$

бундан $-3M = 1$, $-3N = 0$ бўлгани учун

$$y_2^{*} = -\frac{1}{3}\cos 2x .$$

Натижада

$$y^{*} = y_1^{*} + y_2^{*} = \frac{1}{4}x(\sin x + \cos x) - \frac{1}{3}\cos 2x$$

ва берилган (A) тенгламанинг умумий ечими

$$y = \overline{y} + y^{*} = C_1\cos x + C_2\sin x +$$
$$+\frac{1}{4}x(\sin x - x\cos x) - \frac{1}{3}\cos 2x$$

функциядан иборат бўлади.

9-мисол. Ушбу $y'' - 2y' + 5y = 3e^x + e^x \mathrm{tg}2x$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. $y'' - 2y' + 5y = 0$ бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини топамиз.

Унга мос $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ характеристик тенгламани тузамиз. У $\lambda_1 = 1 + 2i$, $\lambda_2 = 1 - 2i$ илдизларга эга.

Тенгламанинг умумий ечими

$$\overline{y} = e^x\left(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right)$$

дан иборат бўлади.

Берилган тенгламанинг ўнг қисми иккита функциянинг йиғиндисидан иборат. Улардан биринчиси $f_1(x) = 3e^x$ (7.48) кўринишдаги функциядан иборат бўлиб, у учун $P_r(x) = 3$, $a = 1$, $b = 0$, $z = 1 \neq \lambda_{1,2}$, $k = 0$ бўлади. $y'' - 2y + 5y = 3e^x$ тенгламанинг y_1^{*} хусусий ечими $y_1^{*} = Ae^x$ кўринишда бўлади. Ноъмалум A коэффициент қуйидаги тенгликдан топилади:

$$(A - 2A + 5A)e^x = 3e^x,\ A = \frac{3}{4},\ y_1^{*} = \frac{3}{4}e^x .$$

Иккинчи $f_2(x) = e^x \mathrm{tg}2x$ функция юқорида кўрилган функцияларнинг бирортасига ўхшамайди, шунинг учун $y'' - 3y' + 5y = e^x \mathrm{tg}2x$ тенгламанинг y_2^{*} хусусий ечимини ихтиёрий ўзгармасларни вариациялаш (Лагранж усули) усули ёрдамида қидириш керак.

(7.37) формулага асосан:

$$y_2^{*} = e^x(C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x) .$$

Бу ҳолда (7.38) система иккита тенгламадан тузилган бўлади ($y_1 = e^x\cos 2x$, $y_2 = e^x\sin 2x$):

$$\left.\begin{array}{l} C_1{}' e^x\cos 2x + C_2{}' e^x\sin 2x = 0, \\ C_1{}' e^x(\cos 2x - 2\sin 2x) + C_2{}' e^x(\sin 2x + 2\cos 2x) = e^x \mathrm{tg}2x. \end{array}\right\}$$

Бу тенгламалар системасини e^x га қисқартирамиз:

$$\left.\begin{array}{l} C_1{}'\cos 2x + C_2{}'\sin 2x = 0, \\ C_1{}'(\cos 2x - 2\sin 2x) + C_2{}'(\sin 2x + 2\cos 2x) = \mathrm{tg}2x. \end{array}\right\}$$

Охирги системанинг детерминанти (вронскиани)ни ҳисоблаймиз:

$$W = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ \cos 2x - 2\sin 2x & \sin 2x + 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2 .$$

$C_1{}'$, $C_2{}'$ ларни Крамер формуласига кўра топамиз:

$$C_1{}' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \mathrm{tg}2x & \sin 2x + 2\cos 2x \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\sin 2x\mathrm{tg}2x ,$$

$$C_2{}' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ \cos 2x - 2\sin 2x & \mathrm{tg}2x \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\sin 2x .$$

Энди ҳосил қилинган тengликларни интеграллаймиз:

$$C_1 = -\frac{1}{2}\int \sin 2x\mathrm{tg}2x dx = -\frac{1}{2}\int \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1-\cos^2 2x}{\cos 2x}dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos 2x} + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = \frac{1}{4}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right| + \frac{1}{4}\sin 2x ,$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = -\frac{1}{4}\cos 2x .$$

Демак,

$$y_2^* = e^x\left(\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x\cos 2x -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\sin 2x\cos 2x\right) = \frac{1}{4}e^x\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|\cos 2x\,.$$

Шундай қилиб, берилган тенгламанинг хусусий ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y^* = y_1^* + y_2^* = \frac{3}{4}e^x + \frac{1}{4}e^x\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|\cos 2x =$$

$$= \frac{1}{4}e^x\left(3 + \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|\cos 2x\right).$$

Умумий ечим эса қуйидаги функциядан иборат бўлади:

$$y = \overline{y} + y^* = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) +$$

$$+\frac{1}{4}e^x\left(3 + \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|\cos 2x\right).$$

Машқлар

355. Қуйидаги чизиқли бир жинсли иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларнинг фундаментал ечимлар системасини ва умумий ечимини топинг:

а) $y''+5y'+6y=0$; б) $y''-2y'-4y=0$;
в) $y''-7y'+6y=0$; г) $y''+6y'+9y=0$;
д) $y''-6y'+18y=0$; е) $y''-25y=0$;
ж) $y''+2y'-15y=0$; з) $y''+2y'+y=0$;
и) $y''+36y=0$; к) $y''-2y'+5y=0$.

356. Қуйидаги чизиқли бир жинсли юқори тартибли дифференциал тенгламаларнинг фундаментал ечимлар системасини ва умумий ечимини топинг:

а) $y''+9y'=0$; б) $y^{III}+3y'-y=0$;
в) $4y^{III}-3y'+5y=0$; г) $y^{III}-5y''+16y'-12y=0$;

д) $y^{IV}-8y''+16y=0$; е) $y^{IV}-8y''+7y=0$;
ж) $y^{V}-6y^{IV}+9y^{III}=0$; з) $y^{VI}-3y^{V}+3y^{IV}=0$.

357. Қуйидаги бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламаларнинг берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимларини топинг:

а) $y''-3y'+2y=e^{3x}(x^2+x)$, $y(0)=1$, $y'(0)=-2$;
б) $y^{III}-y'=2x$, $y(0)=0$, $y'(0)=y''(0)=2$;
в) $y^{IV}-y=8e^x$, $y(0)=-1$, $y'(0)=0$, $y''(0)=1$, $y'''(0)=0$;
г) $y''-2y'+2y=4e^x\cos x$, $y(\pi)=\pi e^\pi$, $y'(\pi)=2\pi$;
д) $y''+4y=4(\sin 2x+\cos 2x)$, $y(\pi)=y'(\pi)=2\pi$;
е) $y''-2y'=2e^x$, $y(1)=-1$, $y'(1)=0$;
ж) $y''+4y=x$, $y(0)=1$, $y'(0)=\frac{\pi}{2}$;
з) $y''-6y'+9y=10\sin x$, $y(0)=-0{,}6$, $y'(0)=0{,}8$.

358. Қуйидаги бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламаларнинг хусусий ечимини топинг:

а) $y''-8y'+16y=e^{4x}(1-x)$;
б) $y''-3y'=e^{3x}-28$;
в) $y''+16y=x\sin 4x$;
г) $y^{III}+y''=2x+e^{-x}$;
д) $y''-4y'=2\cos^2 4x$;
е) $y^{IV}-y=3xe^x+\sin x$;
ж) $y''-7y'=(x-1)^2$;
з) $y^{IV}+y''=x^2+2x$;
и) $y''-4y'+13y=e^{2x}(x^2\cos 3x+\sin 3x)$;
к) $y^{V}-y^{IV}=2xe^x-4$.

359. Қуйидаги бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг:

а) $y''+4y=\cos^2 x$; б) $y''+5y'+6y=e^{-x}+e^{-2x}$;
в) $4y''-y=x^3-24x$; г) $y^{III}+y^{II}=6x+e^{-x}$;

д) $y''+4y=\frac{1}{\sin^2 x}$; е) $y^{III}+y^{I}=\mathrm{tg}x$;

ж) $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$; з) $y''+y+\mathrm{ctg}^2 x=0$;

и) $y''-2y'+y=\frac{e^x}{x^2+1}$; к) $y''-3y'=3x^3+x^2$.

7-§. Дифференциал тенгламалар системаси ҳақида тушунча

Ушбу

$$\left.\begin{aligned} y_1{}' &= f_1(x,y_1,y_2,\ldots,y_n),\\ y_2{}' &= f_2(x,y_1,y_2,\ldots,y_n),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n{}' &= f_n(x,y_1,y_2,\ldots,y_n) \end{aligned}\right| \qquad (7.57)$$

кўринишдаги система биринчи тартибли n та *дифференциал тенгламаларнинг нормал шаклдаги системаси* ёки *нормал система* дейилади.

Бунда $f_i(i=\overline{1,n})$ функция бирор $(n+1)$ ўлчовли D соҳада аниқланган, $x,y_1,y_2,\ldots,y_n$ — ўзгарувчилар, $y_1(x)$, $y_2(x)$,...,$y_n(x)$ лар изланаётган функциялар.

Нормал система тенгламаларининг ўнг қисмида изланаётган функцияларнинг ҳосилалари бўлмайди.

(7.57) системанинг $(a;b)$ интервалдаги *ечими* деб $(a;b)$ интервалда узлуксиз дифференциалланувчи ва бу системанинг ҳар бир тенгламасини қаноатлантирадиган $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x),\ldots,y_n=y_n(x)$ ечимлар тўпламига айтилади.

Биринчи тартибли дифференциал тенгламалар системаси учун Коши масаласи қуйидагича ифодаланади.

Ушбу

$$y_1(x_0)=y_{10},\ y_2(x_0)=y_{20},\ldots,y_n(x_0)=y_{n0} \qquad (7.58)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи (7.57) системанинг $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x),\ldots,y_n=y_n(x)$ ечимларини топиш лозим, бунда $y_{10},y_{20},\ldots,y_{n0}$ — берилган сонлар; $x_0\in(a;b)$.

Теорема (Кошининг мавжудлик ва ечимининг ягоналиги масаласи). *Агар* $f_i(i=\overline{1,n})$ *функциялар* $(x_0,y_{10},y_{20},\ldots,y_{n0})\in D$ *нуқта атрофида узлуксиз ҳамда* $\frac{df_i}{dy_i}$ $(i=\overline{1,n})$ *узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда* (7.57) *системанинг* (7.58) *бошланғич шартни қаноатлантирувчи ягона ечими мавжуд бўлади.*

(7.57) системанинг *умумий ечими* деб n та ихтиёрий ўзгармас $C_1,C_2,\ldots,C_n$ сонларга боғлиқ бўлган n та $y_i=\varphi_i(x,C_1,C_2,\ldots,C_n)$ $(i=\overline{1,n})$ функциялар тўпламига айтилади ва у қуйидаги шартларни қаноатлантириши керак:

1) $x,C_1,C_2,\ldots,C_n$ ўзгарувчиларнинг бирор ўзгариш соҳасида φ_i функциялар аниқланган ва узлуксиз $\frac{d\varphi_i}{dx}$ хусусий ҳосилаларга эга бўлиши керак;

2) C_i нинг ихтиёрий қийматларида φ_i функциялар тўплами (7.57) системанинг ечими бўлиши керак;

3) D соҳадаги ихтиёрий (7.58) бошланғич шартда Коши теоремасининг шартини қаноатлантирадиган шундай ихтиёрий ўзгармас $C_{10},C_{20},\ldots,C_{n0}$ қийматларни топиш мумкинки, улар учун $y_{i0}=\varphi_i(x_0,C_{10},C_{20},\ldots,C_{n0})$ тенглик ўринли бўлади.

(7.57) системанинг умумий ечимидан ихтиёрий ўзгармасларнинг мумкин бўлган баъзи қийматларида ҳосил бўладиган ечимлар *хусусий ечимлар* дейилади.

Юқорида айтилганларнинг ҳаммаси (7.57) системанинг хусусий ҳоли бўлган

$$\left.\begin{aligned} y_1{}' &= a_{11}(x)y_1+a_{21}(x)y_2+\ldots+a_{n1}(x)y_n+f_1(x),\\ y_2{}' &= a_{21}(x)y_1+a_{22}(x)y_2+\ldots+a_{n2}(x)y_n+f_2(x),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n{}' &= a_{n1}(x)y_1+a_{n2}(x)y_2+\ldots+a_{nn}(x)y_n+f_n(x) \end{aligned}\right| \qquad (7.59)$$

кўринишдаги *чизиқли дифференциал тенгламалар системаси* учун ҳам ўринли, бунда $a_{ij}(x)$, $f_i(x)$ $(i,j=\overline{1,n})$ функциялар бирор $(a;b)$ интервалда узлуксиз деб олинади. Агар ҳамма $f_i(x)\equiv 0$ бўлса, у ҳолда (7.59) система *бир жинсли*, акс ҳолда *бир жинсли бўлмаган* система дейилади. Агар $a_{ij}(x)=\mathrm{const}$ бўлса, у ҳолда (7.59) система *ўзгармас коэффициентли система* дейилади. Бундай системаларни интеграллаш усуллари мавжуд. Улардан иккитасини кўрамиз.

1-усул. (7.59) системада $a_{ij}(x) = \mathrm{const}$ бўлсин. Бу системанинг ушбу

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (7.60)$$

характеристик тенгламасини тузамиз. (7.60) тенглик λ га нисбатан n-даражали алгебраик тенгламадан иборат бўлиб, у n та илдизга эга бўлади. Қуйидаги ҳоллардан бири бўлиши мумкин.

1. (7.60) **характеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиқий ва ҳар хил.** Уларни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ билан белгилаймиз. Маълумки, ҳар бир λ_i $(i = \overline{1,n})$ илдиз учун унга мос

$$y_1^{(i)} = \alpha_1^{(i)} e^{\lambda_i x},\ y_2^{(i)} = \alpha_2^{(i)} e^{\lambda_i x},\ \dots,\ y_n^{(i)} = \alpha_n^{(i)} e^{\lambda_i x} \qquad (7.61)$$

кўринишдаги хусусий ечимларга эга бўлади, бундаги $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)}$ коэффициентлар

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11}-\lambda_i)\alpha_1^{(i)} + a_{12}\alpha_2^{(i)} + \dots + a_{1n}\alpha_n^{(i)} = 0, \\ a_{21}\alpha_1^{(i)} + (a_{22}-\lambda_i)\alpha_2^{(i)} + \dots + a_{2n}\alpha_n^{(i)} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\alpha_1^{(i)} + a_{n2}\alpha_2^{(i)} + \dots + (a_{nn}-\lambda_i)\alpha_n^{(i)} = 0 \end{array}\right| \qquad (7.62)$$

чизиқли алгебраик тенгламалар системасидан аниқланади.

Ҳамма (7.61) кўринишдаги хусусий ечимлар фундаментал ечимлар системасини ташкил қилади.

(7.59) системада $a_{ij}(x) = \mathrm{const}$, $f_i(x) \equiv 0$ бўлган ҳол учун бир жинсли системанинг умумий ечими (7.61) ечимларнинг чизиқли комбинациясидан иборат қуйидаги функциялар тўпламидан иборат бўлади:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i y_1^{(i)} = C_1\alpha_1^{(1)} e^{\lambda_1 x} + C_2\alpha_1^{(2)} e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n\alpha_1^{(n)} e^{\lambda_n x}, \\ y_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i y_2^{(i)} = C_1\alpha_2^{(1)} e^{\lambda_1 x} + C_2\alpha_2^{(2)} e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n\alpha_2^{(n)} e^{\lambda_n x} \\ y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i y_n^{(i)} = C_1\alpha_n^{(1)} e^{\lambda_1 x} + C_2\alpha_n^{(2)} e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n\alpha_n^{(n)} e^{\lambda_n x} \end{array}\right| \qquad (7.63)$$

бунда C_i — ихтиёрий ўзгармас сон.

1-мисол. Ушбу

$$\left.\begin{array}{l} y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' = -y_1 + 5y_2 - y_3, \\ y_3' = y_1 - y_2 + 3y_3, \end{array}\right\}$$

бир жинсли системанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган системанинг характеристик тенгламасини тузамиз:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Бу тенглама ҳақиқий ҳар хил илдизларга эга: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$. Уларнинг ҳар бири учун (7.62) кўринишдаги система тузамиз:

$$\lambda_1 = 2 \text{ учун:} \quad \left.\begin{array}{l} \alpha_1^{(1)} - \alpha_2^{(1)} + \alpha_3^{(1)} = 0, \\ -\alpha_1^{(1)} + 3\alpha_2^{(1)} - \alpha_3^{(1)} = 0, \\ \alpha_1^{(1)} - \alpha_2^{(1)} + \alpha_3^{(1)} = 0. \end{array}\right|$$

$$\lambda_2 = 3 \text{ учун:} \quad \left.\begin{array}{l} \alpha_2^{(2)} + \alpha_3^{(2)} = 0, \\ -\alpha_1^{(2)} + 2\alpha_2^{(2)} - \alpha_3^{(1)} = 0, \\ \alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(2)} = 0. \end{array}\right|$$

$$\lambda_3 = 6 \text{ учун:} \quad \left.\begin{array}{l} -3\alpha_1^{(3)} - \alpha_2^{(3)} + \alpha_3^{(3)} = 0, \\ -\alpha_1^{(3)} - \alpha_2^{(3)} - \alpha_3^{(3)} = 0, \\ \alpha_1^{(3)} - \alpha_2^{(3)} - 3\alpha_3^{(3)} = 0. \end{array}\right|$$

Бу системаларнинг детерминантлари нолга тенг бўлгани учун, уларнинг ҳар бири чексиз кўп ечимларга эга бўлади. Бу ҳол учун ечимлардан $\alpha_1^{(1)} = \alpha_1^{(2)} = \alpha_1^{(3)} = 1$ бўлганини ажратиб оламиз.

У ҳолда юқоридаги системаларнинг қуйидаги ечимларига эга бўламиз: агар $\lambda_1 = 2$ бўлса, $\alpha_1^{(1)} = 1$, $\alpha_2^{(1)} = 0$, $\alpha_3^{(1)} = -1$; агар $\lambda_2 = 3$ бўлса, $\alpha_1^{(2)} = 1$, $\alpha_2^{(2)} = 1$, $\alpha_3^{(2)} = 1$; агар $\lambda_3 = 6$ бўлса, $\alpha_1^{(3)} = 1$, $\alpha_2^{(3)} = -2$, $\alpha_3^{(3)} = 1$ бўлади. Бу қийматларни ўрнига қўйиб қуйидаги фундаментал ечимлар системасига эга буламиз:

$$y_1^{(1)} = e^{2x},\ y_2^{(1)} = 0,\ y_3^{(1)} = -e^{2x};$$
$$y_1^{(2)} = e^{3x},\ y_2^{(2)} = e^{3x},\ y_3^{(2)} = e^{3x};$$
$$y_1^{(3)} = e^{6x},\ y_2^{(3)} = -2^{6x},\ y_3^{(3)} = e^{6x}.$$

Бу ечимларнинг чизиқли комбинацияси ва (7.63) функциялар тўпламига асосан берилган системанинг умумий ечими қуйидаги кўринишда булади:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + C_3e^{6x}, \\ y_2 &= C_2e^{3x} - C_3e^{6x}, \\ y_3 &= -C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + C_3e^{6x}. \end{aligned}\right\}$$

2. (7.60) характеристик тенгламанинг илдизлари $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ҳар хил, аммо улар орасида комплекс сонлар мавжуд. Маълумки, характеристик тенглама комплекс илдизларга эга бўлган ҳолда $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ комплекс илдизлар жуфтига иккита хусусий ечим мос келади:

$$y_j^{(1)} = \alpha_i^{(1)}e^{(a+ib)x}, \qquad (7.64)$$

$$y_j^{(2)} = \alpha_i^{(2)}e^{(a-ib)x}, \qquad (7.65)$$

бунда $j = \overline{1,n}$; $\alpha_i^{(1)}$, $\alpha_i^{(2)}$ коэффициентлар $\lambda = a - ib$ учун (7.62) системадан аниқланади.

Бу ҳолда $e^{ax}\cos bx$ ва $e^{ax}\sin bx$ кўринишдаги функцияларга эга бўлган ҳақиқий ечимлар жуфтига эга бўламиз.

2-мисол. Ушбу

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= -7y_1 + y_2, \\ y_2' &= -2y_1 - 5y_2 \end{aligned}\right\}$$

системанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган системанинг характеристик тенгламаси

$$\begin{vmatrix} -7-\lambda & 1 \\ -2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0$$

кўринишда бўлиб, у $\lambda_{1,2} = -6 \pm i$ илдизларга эга.

(7.62) формулага асосан

$$\left.\begin{aligned} (-7-\lambda)\alpha_1 + \alpha_2 &= 0, \\ -2\alpha_1 + (-5-\lambda)\alpha_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

системага эга бўламиз. $\lambda_1 = -6 + i$ учун:

$$\left.\begin{aligned} (-7-\lambda_1)\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} &= 0, \\ -2\alpha_1^{(1)} + (-5-\lambda_1)\alpha_2^{(1)} &= 0, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} (-1-i)\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} &= 0, \\ -2\alpha_1^{(1)} + (1-i)\alpha_2^{(1)} &= 0, \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1^{(1)} = 1, \\ \alpha_2^{(1)} = 1 + i. \end{cases}$$

(7.64) формулага асосан хусусий ечим:

$$y_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)}e^{(a+ib)x} = e^{(-6+i)x} = e^{-6x}(\cos x + i\sin x),$$

$$y_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)}e^{(a+ib)x} = (1+i)e^{(-6+i)x} =$$
$$= e^{-6x}(\cos x - \sin x + i(\cos x + \sin x)).$$

(Бу ерда Эйлер формуласи $e^{(a+ib)x} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)$ дан фойдаландик). Бу ечимнинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини алоҳида олиб, берилган системанинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этувчи иккита ҳақиқий кўринишдаги ечимига эга бўламиз:

$$y_1^{-(1)} = e^{-6x},\ y_2^{-(1)} = e^{-6x}(\cos x - \sin x),$$

$$\bar{\bar{y}}_1^{(1)} = e^{-6x}\sin x,\ \bar{\bar{y}}_2^{(1)} = e^{-6x}(\cos x + \sin x).$$

У ҳолда берилган системанинг умумий ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= C_1y_1^{-(1)} + C_2\bar{\bar{y}}_1^{(1)} = e^{-6x}(C_1\cos x + C_2\sin x), \\ y_2 &= C_1y_2^{-(1)} + C_2\bar{\bar{y}}_2^{(1)} = e^{-6x}(C_1(\cos x - \sin x) + C_2(\cos x + \sin x)). \end{aligned}\right\}$$

Иккинчи $\lambda_2 = -6 - i$ илдиздан фойдаланмадик, чунки бу илдиз учун юқоридаги амалларни бажарсак, натижада охирги ҳосил қилган системанинг умумий ечимига эга бўламиз.

Бу усул ихтиёрий чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламалар системаси учун тўғридир.

3. (7.60) характеристик тенгламанинг $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ илдизлари ичида карралиси мавжуд. Бу ҳолда қуйидагича иш тутамиз. (7.60) характеристик тенгламанинг λ илдизлари ичида k таси каррали бўлсин. У ҳолда (7.59) ечимлар системасини ($a_{ij}(x) = \text{const}$, $f_i(x) \equiv 0$, $(i, j = \overline{1, n})$ ҳол учун) қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$\begin{aligned}
y_1 &= (\alpha_{10} + \alpha_{11}x + \alpha_{12}x^2 + \ldots + \alpha_{1k-1}x^{k-1})e^{\lambda x}\\
y_2 &= (\alpha_{20} + \alpha_{21}x + \alpha_{22}x^2 + \ldots + \alpha_{2k-1}x^{k-1})e^{\lambda x}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n &= (\alpha_{n0} + \alpha_{n1}x + \alpha_{n2}x^2 + \ldots + \alpha_{nk-1}x^{k-1})e^{\lambda x}
\end{aligned} \qquad (7.66)$$

$a_{ij}(i = \overline{1, n},\ j = \overline{0, k-1})$ сонларни қуйидагича аниқланади. (7.66) даги y_i функцияларнинг ва унинг $y_i{}'$ ҳосилаларини (7.59) системага қўйиб, $e^{\lambda x} \neq 0$ га қисқартирамиз, сўнгра ҳосил қилинган тенгликнинг чап ва ўнг қисмидаги x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффицентларини тенглаймиз. Бу жараёнларни қуйидаги мисолда кўрсатамиз.

3-мисол. Ушбу

$$\left.\begin{aligned}
y_1{}' &= y_2 + y_3,\\
y_2{}' &= y_1 + y_2 - y_3,\\
y_3{}' &= y_2 + y_3
\end{aligned}\right| \qquad (1)$$

системанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган системанинг характеристик тенгламасини тузамиз:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & -1\\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)^2\lambda = 0. \qquad (2)$$

Бундан $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ каррали ва $\lambda_3 = 0$ илдизга эга бўламиз. (7.66) формулага асосан $\lambda_{1,2} = 1$ илдиз учун

$$\begin{aligned}
y_1^{(1,2)} &= (\alpha_{10} + \alpha_{11}x)e^x,\\
y_2^{(1,2)} &= (\alpha_{20} + \alpha_{21}x)e^x,\\
y_3^{(1,2)} &= (\alpha_{30} + \alpha_{31}x)e^x
\end{aligned} \qquad (3)$$

кўринишдаги ечимларга эга бўламиз. $a_{ij}(i = \overline{1, 3},\ j = \overline{0, 1})$ коэффициентлар берилган системага y_1, y_2, y_3, $y_1{}'$, $y_2{}'$, $y_3{}'$ ларни қўйиш ёрдамида ҳосил бўлган қуйидаги системадан аниқланади. $e^x \neq 0$ га қисқартирилгандан сўнг

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{11} + \alpha_{10} + \alpha_{11}x &= \alpha_{20} + \alpha_{21}x + \alpha_{30} + \alpha_{31}x,\\
\alpha_{21} + \alpha_{20} + \alpha_{21}x &= \alpha_{11}x + \alpha_{10} + \alpha_{20} + \alpha_{21}x - \alpha_{30} - \alpha_{31}x,\\
\alpha_{31} + \alpha_{30} + \alpha_{31}x &= \alpha_{20} + \alpha_{21}x + \alpha_{30} + \alpha_{31}x
\end{aligned}\right\}$$

системага эга бўламиз. Бундан чап ва ўнг қисмидаги x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаб

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{11} + \alpha_{10} &= \alpha_{20} + \alpha_{30},\\
\alpha_{11} &= \alpha_{21} + \alpha_{31},\\
\alpha_{21} + \alpha_{20} &= \alpha_{10} + \alpha_{20} - \alpha_{30},\\
\alpha_{21} &= \alpha_{11} + \alpha_{21} - \alpha_{31},\\
\alpha_{31} &= \alpha_{21} + \alpha_{31},\\
\alpha_{31} + \alpha_{30} &= \alpha_{20} + \alpha_{30}
\end{aligned}\right|$$

системани ҳосил қиламиз. Бундан $\alpha_{20} = \alpha_{31} = \alpha_{11}$, $\alpha_{30} = \alpha_{10}$, $\alpha_{20} = 0$ ни топамиз. α_{10} ва α_{11} сонларни ихтиёрий параметр деб олишимиз мумкин. $\alpha_{10} = C_1$ ва $\alpha_{11} = C_2$ деб белгиласак, (3) ечимни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$y_1^{(1,2)} = (C_1 + C_2x)e^x,\ \ y_2^{(1,2)} = C_1e^x,\ \ y_3^{(1,2)} = (C_1 + C_2x)e^x. \qquad (4)$$

$\lambda_3 = 0$ илдиз учун (7.61) формулага асосан

$$y_1^{(3)} = \alpha_1^{(3)}e^{0x} = \alpha_1^{(3)},\ y_2^{(3)} = \alpha_2^{(3)}e^{0x} = \alpha_2^{(3)},\ y_3^{(3)} = \alpha_3^{(3)}e^{0x} = \alpha_3^{(3)} \qquad (5)$$

ечимлар мос келади. $\alpha_1^{(3)}$, $\alpha_2^{(3)}$, $\alpha_3^{(3)}$ сонлари (7.62) системадан аниқланади:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_2^{(3)} + \alpha_3^{(3)} &= 0,\\
\alpha_1^{(3)} + \alpha_2^{(3)} - \alpha_3^{(3)} &= 0,\\
\alpha_2^{(3)} + \alpha_2^{(3)} &= 0.
\end{aligned}\right|$$

Системанинг ечими: $\alpha_1^{(3)} = 2C_3$, $\alpha_2^{(3)} = -C_3$, $\alpha_3^{(3)} = C_3$.

Демак, $\lambda_3 = 0$ илдиз учун (1) системанинг (5) кўринишдаги ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y_1^{(3)} = 2C_3\,,\ y_2^{(3)} = -C_3\,,\ y_3^{(3)} = C_3\,,$$

бунда C_3 — ихтиёрий ўзгармас сон.

Берилган системанинг умумий ечими

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y_1^{(1,2)} + y_1^{(3)} = (C_1 + C_2x)e^{x} + 2C_3,\\ y_2 &= y_2^{(1,2)} + y_2^{(3)} = C_1e^{x} - C_3,\\ y_3 &= y_3^{(1,2)} + y_3^{(3)} = (C_1 + C_2x)e^{x} + C_3 \end{aligned}\right|$$

кўринишда бўлади.

Агар система бир жинсли бўлмаса, унга мос бир жинсли системанинг (7.63) кўринишдаги умумий ечимини билган ҳолда бу ечимдаги $C_1, C_2, \dots, C_n$ ихтиёрий ўзгармасларни вариациялаш усули билан берилган бир жинсли бўлмаган системанинг умумий ечимини топиш мумкин. Бир жинсли бўлмаган системанинг умумий ечимини ҳар доим (7.63) кўринишда ёзиш мумкинлиги исбот қилинган. Бунда (7.63) даги $C_1, C_2, \dots, C_n$ ихтиёрий ўзгармасларни унга мос $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ (ҳар бирига мос $C_1, C_2, \dots, C_n$ ихтиёрий ўзгармаслар иштирок этувчи) функциялар билан алмаштириш керак. Бу функцияларни берилган бир жинсли бўлмаган система ёрдамида аниқланади. Унинг учун системага $y_1, y_2, \dots, y_n,\ y_1', y_2', \dots, y_n'$ ларнинг қийматини қўйиб $C_1'(x), C_2'(x), \dots, C_n'(x)$ ларга нисбатан n та чизиқли алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз. Бу системанинг ечими ҳар доим мавжуд ва у қуйидаги кўринишда бўлади:

$$C_1'(x) = \varphi_1(x),\ C_2'(x) = \varphi_2(x),\ \dots,\ C_n'(x) = \varphi_n(x),$$

бунда $\varphi_i(x)$ ($i = \overline{1,n}$) — маълум функциялар. Бу тенгликларни интеграллаб $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ функцияларни топамиз:

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x)\,dx + C_i,$$

бунда C_i — ихтиёрий ўзгармас. (7.63) ечимдаги $C_i = \text{const}$ нинг ўрнига $C_i(x)$ аниқланган қийматларни қўйиб бир жинсли бўлмаган тенгламалар системасининг умумий ечимини ҳосил қиламиз. Буни қуйидаги мисолда кўрсатамиз.

4-мисол. Ушбу

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 - 5y_2 - 4x + 1,\\ y_2' &= y_1 - 2y_2 + x \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

системанинг $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

Ечиш. Дастлаб бир жинсли бўлган системанинг умумий ечимини топамиз:

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 - 5y_2,\\ y_2' &= y_1 - 2y_2. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

(2) нинг характеристик тенгламаси

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$ бўлиб, у $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 3$ илдизларга эга. (2) системанинг умумий ечими

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1e^{-x} + 5C_2e^{3x},\\ y_2 &= C_2e^{-x} + C_2e^{3x} \end{aligned} \qquad (3)$$

кўринишда бўлади. (3) ечимдаги C_1 ва C_2 ўзгармасларни $C_1(x)$ ва $C_2(x)$ ноъмалум функциялар деб ҳисоблаймиз. Шунингдек, (3) даги y_1 ва y_2 лар (1) системанинг ечими деб оламиз. (3) нинг ҳосиласини топамиз:

$$y_1' = C_1'(x)e^{-x} - C_1(x)e^{-x} + 5C_2'(x)e^{3x} + 15C_2e^{3x}$$

$$y_2' = C_1'(x)e^{-x} - C_1(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{3x} + 3C_2e^{3x}.$$

(1) системага $y_1,\ y_2,\ y_1',\ y_2'$ қийматларни қўямиз ва ўхшаш ҳадларни ихчамлангандан сўнг

$$\left.\begin{aligned} C_1'(x)e^{-x} + 5C_2'(x)e^{3x} &= 4x + 1,\\ C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{3x} &= x \end{aligned}\right\}$$

системага эга бўламиз. Бу системанинг ечими:

$$C_1'(x) = \frac{1}{4}(x-1)e^{x},\ C_2'(x) = \frac{1}{4}(3x+1)e^{3x}.$$

Охирги тенгликларни интеграллаб, топамиз:

$$C_1(x) = \frac{1}{4}(x-2)e^x + C_1,\ C_2(x) = -\frac{1}{12}(3x+1)e^{3x} + C_2\,.$$

(3) тенгликдаги C_1 ва C_2 ни ўрнига $C_1(x)$ ва $C_2(x)$ ларни қўйиб, берилган бир жинсли бўлмаган системанинг умумий ечимини ҳосил қиламиз:

$$y_1 = C_1e^{-x} + 5C_2e^{3x} + \frac{1}{4}(x-2) - \frac{5}{12}(3x+2)\,,$$

$$y_2 = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{4}(x-2) - \frac{1}{12}(3x+2)\,.$$

Бошланғич шартлардан фойдаланиб C_1 ва C_2 ўзгармасларни аниқлаймиз:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= C_1 + 5C_2 - \frac{1}{2} - \frac{5}{6}, \\ 2 &= C_1 + C_2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}, \end{aligned}\right\}$$

бундан $C_1 = \frac{11}{4},\ C_2 = -\frac{1}{12}$.

Шундай қилиб қуйидаги хусусий ечимга эга бўламиз:

$$y_1 = \frac{11}{4}e^{-x} - \frac{5}{12}e^{3x} + \frac{1}{4}(x-2) - \frac{5}{12}(3x+2)\,,$$

$$y_2 = \frac{11}{4}e^{-x} - \frac{1}{12}e^{3x} + \frac{1}{4}(x-2) - \frac{1}{12}(3x+2)\,.$$

2-усул. (7.59) системани интеграллашнинг иккинчи усули (*чиқариш усули*) қуйидагидан иборат. Бирор шартни қаноатлантирган ҳолда y_1 функциядан бошқа ҳамма номаълум функцияларни ҳар доим чиқариш (йўқотиш) мумкин. Натижада $y_1(x)$ учун битта n-тартибли ўзгармас коэффициентли (агар (7.59) системада a_{ij} = const бўлса) чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенглама ҳосил қиламиз. Уни ечиб, сўнгра ечимини дифференциаллаш ёрдамида қолган ҳамма номаълум $y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x)$ функцияларни топамиз. Бу ишлар қуйидагича бажарилади. (7.59) системадаги биринчи тенгламанинг иккала қисмини x бўйича дифференциаллаймиз, сўнгра унга системадаги $y_1', y_2', \dots, y_n'$ қийматларини қўямиз:

$$\begin{aligned} y_1'' &= a_{11}y_1' + a_{12}y_2' + \dots + a_{1n}y_n' + f_1'(x) = \\ &= I_2(y_1, y_2, \dots, y_n) + F_2(x), \end{aligned} \tag{7.67}$$

бунда $I_2(y_1, y_2, \dots, y_n)$ — ўзгармас коэффициентли $y_1, y_2, \dots, y_n$ функцияларнинг маълум чизиқли комбинацияси, $F_2(x)$ эса $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ ва $f_1'(x)$ функцияларнинг чизиқли комбинациясини билдиради. (7.67) нинг иккала қисмини x бўйича дифференциаллаб

$$y_1''' = I_3(y_1, y_2, \dots, y_n) + F_3(x)$$

чизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламага эга бўламиз. Бу жараённи такрорлаб

$$y_1^{(n)} = I_n(y_1, y_2, \dots, y_n) + F_n(x)$$

ни топамиз.

Натижада қуйидаги n та тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ y_1'' &= I_2(y_1, y_2, \dots, y_n) + F_2(x), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1^{(n-1)} &= I_{n-1}(y_1, y_2, \dots, y_n) + F_{n-1}(x), \\ y_1^{(n)} &= I_n(y_1, y_2, \dots, y_n) + F_n(x). \end{aligned}\right| \tag{7.68}$$

(7.68) тенгламалар системасидаги дастлабки n-1 та тенгламалар $y_2, y_3, \dots, y_n$ функцияларга нисбатан ечиладиган тенгламалардир. Бу функциялар $x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}$ лар орқали қуйидагича ифодаланилади:

$$\begin{aligned} y_2 &= \varphi_2(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}), \\ y_3 &= \varphi_3(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= \varphi_n(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}). \end{aligned} \tag{7.69}$$

(7.68) системанинг охирги тенгламасидаги $y_2, y_3, \dots, y_n$ ларни ўрнига (7.69) системадаги ифодаларни қўйиб, қуйидаги ўзгармас коэффициентли n-тартибли чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламага эга бўламиз:

$$y_1^{(n)} = F(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}).$$

Унинг умумий ечими (5-§ ни кўринг) бизга маълум усул ёрдамида аниқланади:

$$y_1 = \phi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n). \qquad (7.70)$$

Охирги ифодани x бўйича n-1 марта дифференциаллаб $y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}$ ҳосилаларни топамиз. Бу ҳосилаларни (7.69) системага қўйиб ва (7.70) функция билан биргаликда берилган системанинг умумий ечимини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} y_1 &= \phi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ y_2 &= \phi_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ y_3 &= \phi_3(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= \phi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n). \end{aligned} \qquad (7.71)$$

Қуйидаги мисолни кўрамиз.

5-мисол. Ушбу

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 - y_2 + y_3 + e^x, \\ y_2' &= y_1 + y_2 + y_3 + x, \\ y_3' &= 4y_1 - y_2 + 4y_3 \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

системанинг чиқариш усули билан умумий ечимини ва

$$y_1(0) = 0,34, \ \ y_2(0) = -0,16, \ \ y_3(0) = 0,27 \qquad (2)$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимни топинг.

Ечиш. (1) системанинг биринчи тенгламасини x бўйича дифференциаллаймиз ва y_1', y_2', y_3' ларнинг ўрнига бу системадаги уларнинг ифодаларини қўямиз.

Натижада

$$y_1'' = 3y_1' - y_2' + y_3' + e^x = 3(3y_1 - y_2 + y_3 + e^x) -$$

$$-(y_1 + y_2 + y_3 - x) + 4y_1 - y_2 + 4y_3 + e^x =$$

$$= 12y_1 - 5y_2 + 6y_3 + 4e^x + x$$

ҳосил бўлади. y_1'' ни x бўйича дифференциаллаймиз ва яна y_1, y_2, y_3 ларнинг ўрнига (1) системадаги ифодаларини қўямиз:

$$y_1''' = 12y_1' - 5y_2' + 6y_3' + 4e^x + 1 = 12(3y_1 - y_2 + y_3 + e^x) -$$

$$-5(y_1 + y_2 + y_3 - x) + 6(4y_1 - y_2 + 4y_3) + 4e^x + x =$$

$$= 55y_1 - 23y_2 + 31y_3 + 16e^x + 6x.$$

Демак, бу ҳол учун (7.68) система қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= 3y_1' - y_2' + y_3' + e^x, \\ y_1'' &= 12y_1' - 5y_2' + 6y_3' + 4e^x + x, \\ y_1''' &= 55y_1' - 23y_2' + 31y_3' + 16e^x + 6x. \end{aligned}\right| \qquad (3)$$

Биринчи ва иккинчи тенгламалардан y_2 ва y_3 ларни топамиз:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1'' - 6y_1' + 6y_1 + 2e^x - x, \\ y_3 &= y_1'' - 5y_1' + 3y_1 + e^x - x. \end{aligned} \qquad (4)$$

y_2 ва y_3 нинг қийматларини (3) системадаги учинчи тенгламага қўямиз:

$$y_1''' = 55y_1 - 23(y_1' - 6y_1' + 2e^x - x) + 31(y_1'' - 5y_1' +$$

$$+3y_1 + e^x - x) + 16e^x + 6x = 8y_1'' - 17y_1' + 10y_1 + e^x - 2x.$$

Бундан

$$y_1''' - 8y_1'' + 17y_1' - 10y_1 = e^x - 2x \qquad (5)$$

кўринишдаги учинчи тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламага эга бўламиз. Бундай тенгламани ечиш усулини (5-§ га қаранг) биламиз. Тенгламанинг характеристик тенгламасини тузамиз:

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 10 = 0. \qquad (6)$$

Унинг илдизлари $\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2, \ \lambda_3 = 5$. (5) тенгламанинг мос бир жинсли тенгламасининг умумий ечими y_1 қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y_1 = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{5x} .$$

(5) тенгламанинг ўнг қисми (7.49) ва (7.53) кўринишдаги функциялар йиғиндисидан, яъни $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = 2x$ дан иборат $f_1(x) = e^x$ учун $z = 1$ га тенг, чунки $\lambda_1 = 1$ тўгри келади, шунинг учун $k = 1$. $f_2(x) = -2x$ учун $z = 0$ ва у характеристик тенгламанинг илдизлари ичида йўқ, шунинг учун $k = 0$.

Демак, (5) тенгламанинг хусусий ечими y_1^* ни қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$y_1^* = Axe^x + Bx + C ,$$

бунда A, B, C номаълум сонлар. Бу сонларни топиш учун y_1^{*I}, y_1^{*II}, y^{*III} ҳосилаларни топиб, уларни y_1^* билан биргаликда (5) тенгламага қўямиз:

$$y_1^{*}{}' = Ae^x + Axe^x + B ,\ \ y_1^{*}{}'' = 2Ae^x + Axe^x ,$$

$$y^{*III} = 3Ae^x + Axe^x ,$$

$$3Ae^x + Axe^x - 8(2Ae^x + Axe^x) + 17(Ae^x + Axe^x + B) -$$

$$-10(Axe^x + Bx + C) = e^x - 2x ,$$

$$4Ae^x + 17B - 10Bx - 10C = e^x - 2x ,$$

$$\left.\begin{aligned} 4A &= 1, \\ -10B &= -2, \\ 17B - 10C &= 0, \end{aligned}\right\}$$

бундан $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{5}$, $C = \frac{17}{50}$.

Шундай қилиб,

$$y_1^* = \frac{1}{4}xe^x + \frac{1}{5}x + \frac{17}{50} .$$

(5) тенгламанинг умумий ечими

$$y_1 = \bar{y}_1 + y_1^* = C_1x + C_2e^{2x} + C_3e^{5x} + \frac{1}{4}xe^x + \frac{1}{5}x + \frac{17}{50}$$

функциядан иборат бўлади.

Системанинг умумий ечимини топиш учун y_1', y_1'' ҳосилаларни топиб, уларни (4) тенгликка қўямиз:

$$y_1{}' = C_1x + 2C_2e^{2x} + 5C_3e^{5x} + \frac{1}{4}xe^x + \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{5} ,$$

$$y_1{}'' = C_1e^x + 4C_2e^{2x} + 25C_3e^{5x} + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{4}xe^x ,$$

$$y_2 = C_1e^x + 4C_2e^{2x} + 25C_3e^{5x} + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{4}xe^x - 6(C_1e^x +$$

$$+2C_2e^{2x} + 5C_3e^{5x} + \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}xe^x + \frac{1}{5}) + 6(C_1e^x +$$

$$+ C_2e^{2x} + C_3e^{5x} + \frac{1}{4}xe^x + \frac{1}{5}x + \frac{17}{50}) + 2e^x - x =$$

$$= C_1e^x - 2C_2e^{2x} + C_3e^{5x} - e^x + \frac{1}{4}xe^x + \frac{6}{5}x + \frac{21}{25} ,$$

$$y_3 = C_1e^x + 4C_2e^{2x} + 25C_3e^{5x} + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{4}xe^x -$$

$$-5(C_1e^x + 2C_2e^{2x} + 5C_3e^{5x} + \frac{1}{4}xe^x + \frac{1}{5}) + 3(C_1e^x +$$

$$+ C_2e^{2x} + C_3e^{5x} + \frac{1}{4}xe^x + \frac{1}{5}x + \frac{17}{50}) + e^x - x =$$

$$= -C_1e^x - 3C_2e^{2x} + 3C_3e^{5x} + \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{4}xe^x - \frac{2}{5}x + \frac{1}{50} .$$

Демак, (1) системанинг ечими:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{5x} + \frac{1}{4}xe^x + \frac{1}{5}x + \frac{17}{50}, \\ y_2 &= C_1e^x - 2C_2e^{2x} + C_3e^{5x} - e^x + \frac{1}{4}xe^x + \frac{6}{5}x + \frac{21}{25}, \\ y_3 &= -C_1e^x - 3C_2e^{2x} + 3C_3e^{5x} + \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{4}xe^x - \frac{2}{5}x + \frac{1}{50}. \end{aligned}\right|$$

Системанинг хусусий ечимини топиш учун (2) бошланғич шартлардан фойдаланиб қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} \frac{17}{50} &= C_1 + C_2 + C_3 + \frac{17}{50}, \\ -\frac{4}{25} &= C_1 - 2C_2 + C_3 - 1 + \frac{21}{25}, \\ \frac{27}{100} &= -C_1 - 3C_2 + 3C_3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{50}, \end{aligned}\right|$$

булардан $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$ ларни топамиз.

Изланаётган хусусий ечим қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{4}xe^x + \frac{1}{5}x + \frac{17}{50}, \\ y_2 &= \frac{1}{4}xe^x - e^x + \frac{6}{5}x + \frac{21}{25}, \\ y_3 &= -\frac{1}{4}xe^x + \frac{1}{4}e^x - \frac{2}{5}x + \frac{1}{50}. \end{aligned}\right\}$$

Машқлар

Қуйидаги дифференциал тенгламалар системасининг умумий ечимини топинг:

360. $\begin{cases} y_1' = -7y_1 + y_2, \\ y_2' = -2y_1 - 5y_2. \end{cases}$ 361. $\begin{cases} y_1' = y_1 - 3y_2, \\ y_2' = 3y_1 + y_2. \end{cases}$

362. $\begin{cases} y_1' = -5y_1 + 2y_2 + e^x, \\ y_2' = y_1 + 6y_2 + e^{-2x}. \end{cases}$ 363. $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2 + x, \\ y_2' = 3y_1 - 4y_2. \end{cases}$

364. $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + y_2 + e^x. \end{cases}$

365. $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 - \cos x, \\ y_2' = -2y_1 - y_2 + \sin x + \cos x. \end{cases}$

366. $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_3, \\ y_3' = 2y_1 - y_2. \end{cases}$ 367. $\begin{cases} y_1' = 5y_1 + 2y_2 - 3y_3, \\ y_2' = 4y_1 + 5y_2 - 4y_3, \\ y_3' = 6y_1 + 4y_2 - 4y_3. \end{cases}$

Қуйидаги дифференциал тенгламалар системаси учун Коши масаласини ечинг:

369. $\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \quad y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 1. \\ y_3' = y_1, \end{cases}$

370. $\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_3, \quad y_1(0) = -1, \;\; y_2(0) = 1, \;\; y_3(0) = 0. \\ y_3' = y_1 + y_2, \end{cases}$

8-§. Биринчи мустақил уй иши

Мустақил уй ишининг ҳар бир вариантида бешта мисол бўлиб, уларнинг шарти қуйидагича.

1-, 2-, 3-, 5-мисолларда: берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечимини (умумий интегралини) топиш керак.

4-мисолда: дифференциал тенгламанинг берилган бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимини (хусусий интегралини) топиш керак.

Қуйида вариант мисолларини ечиш намунасини келтирамиз.

Дифференциал тенгламанинг умумий ечимини (умумий интегралини) топинг.

1. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$.

Ечиш. Берилган тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$y(1 - x^2)dy = -x(y^2 + 1)dx .$$

Бу тенглама ўзгарувчилари ажраладиган тенглама. Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{ydy}{1+y^2} = \frac{-xdx}{1-x^2} .$$

Охирги тенгламанинг иккала қисмини интеграллаймиз:

$$\int \frac{ydy}{1+y^2} = \int \frac{xdx}{1-x^2}, \; \frac{1}{2}\ln(1 + y^2) = \frac{1}{2}\ln\left|x^2 - 1\right| + \frac{1}{2}\ln C ,$$

$$y^2 + 1 = C\left|x^2 - 1\right|, \;\; y^2 = C\left|x^2 - 1\right| - 1 .$$

Демак, берилган тенгламанинг умумий ечими

$$y = \pm\sqrt{C\left|x^2 - 1\right| - 1}$$

функциялардан иборат бўлади.

2. $\sec^2 x\mathrm{tg}ydx + \sec^2 y\mathrm{tg}xdy = 0$.

Ечиш. Берилган тенглама ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенглама. Ўзгарувчиларни ажратамиз ва уларни интеграллаймиз:

$$\frac{\sec^2 ydy}{\mathrm{tg}y} = -\frac{\sec^2 xdx}{\mathrm{tg}x},\ \int\frac{\sec^2 ydy}{\mathrm{tg}y} = -\int\frac{\sec^2 xdx}{\mathrm{tg}x},$$

$$\int\frac{d(\mathrm{tg}y)}{\mathrm{tg}y} = -\int\frac{d(\mathrm{tg}x)}{\mathrm{tg}x},\ \ln|\mathrm{tg}y| = -\ln|\mathrm{tg}x| + \ln C,$$

$$\mathrm{tg}y = \frac{C}{\mathrm{tg}x},\ \mathrm{tg}y\cdot\mathrm{tg}x = C,$$

яъни дифференциал тенгламанинг умумий интегралини ҳосил қилдик.

3. $y - x\frac{dy}{dx} = x + y\frac{dy}{dx}$.

Ечиш. Берилган тенгламадан $\frac{dy}{dx}$ ни топамиз:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x+y}.$$

Бу тенглама биринчи тартибли бир жинсли тенгламадан иборат. Уни $y = x\cdot u(x)$ алмаштириш ёрдамида ечамиз:

$$y' = u'x + u,\ u'x + u = \frac{ux-x}{x+ux},\ u'x + u = \frac{u-1}{1+u},$$

$$u'x = \frac{u-1}{1+u} - u = \frac{-u^2-1}{u+1},\ x\frac{du}{dx} = -\frac{u^2+1}{u+1}.$$

Ўзгарувчилари ажраладиган тенглама ҳосил қилдик, уни ечамиз:

$$\frac{u+1}{u^2+1}du = -\frac{dx}{x},\ \int\frac{u+1}{u^2+1}du = -\int\frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{2udu}{u^2+1} + \int\frac{du}{u^2+1} = -\ln|x| + \ln|C|,$$

$$\frac{1}{2}\ln|u^2+1| + \mathrm{arctg}u = \ln\left|\frac{C}{x}\right|,\ \mathrm{arctg}u = \ln\left|\frac{C}{x\sqrt{u^2+1}}\right|,$$

$$\mathrm{arctg}\frac{y}{x} = \ln\frac{|C|}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

яъни берилган тенгламанинг умумий интегралини топдик.

4. Ушбу

$$dy - e^{-x}dx + ydx - xdy = xydx$$

дифференциал тенгламанинг $y(0) = \ln 5$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

Ечиш. Тенгламада қуйидаги алмаштиришларни бажариб ҳосилани топамиз:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy+e^{-y}-y}{1-x},\ \frac{dy}{dx} + \frac{1-x}{1-x}y = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

$\frac{dy}{dx} + y = \frac{e^{-x}}{1-x}$ тенглама биринчи тартибли чизиқли тенглама бўлгани учун ечимни $y = u(x)\cdot v(x)$ алмаштириш ёрдамида топамиз:

$$y' = u'v + uv',\ u'v + uv' + uv = \frac{e^{-x}}{1-x},$$

$$u'v + u\left(\frac{dv}{dx} + v\right) = \frac{e^{-x}}{1-x}. \quad (1)$$

$\frac{dv}{dx} + v = 0$ шартдан фойдаланиб, $v(x)$ функцияни топамиз:

$$\frac{dv}{dx} = -v,\ \frac{dv}{v} = -dx,\ \int\frac{dv}{v} = -\int dx$$

$$\ln|v| = -x,\quad v = e^{-x}.$$

$v(x)$ учун топилган ифодани (1) тенгламага қўямиз:

$$\frac{du}{dx}e^{-x} = \frac{e^{-x}}{1-x},\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{1-x},$$

$$du = \frac{dx}{1-x},\ \int du = \int\frac{dx}{1-x},\ u = -\ln|1-x| + \ln C,\ u = \ln\frac{C}{|1-x|}.$$

У ҳолда

$$y = uv = e^{-x}\ln\frac{C}{|1-x|}$$

функция берилган тенгламанинг умумий ечими бўлади. Бошланғич шартдан фойдаланиб ўзгармас C ни топамиз:

$$y(0) = \ln C = \ln 5,\ C = 5.$$

Берилган тенгламанинг хусусий ечими

$$y = e^{-x} \ln \frac{5}{|1-x|}$$

функциядан иборат бўлади.

5. Ушбу

$$(1 + x^2)\frac{dy}{dx} = xy + x^2y^2$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Тенгламанинг турини аниқлаш учун алмаштиришлар бажариб,

$$\frac{dy}{dx} - \frac{x}{1+x^2}y = \frac{x^2}{1+x^2}y^2$$

кўринишдаги тенгламага эга бўламиз. Бу тенглама Бернулли тенгламаси бўлгани учун уни $y = u(x) \cdot v(x)$ алмаштириш ёрдамида ечамиз:

$$y' = u'v + uv', \quad u'v + uv' - \frac{x}{1+x^2}uv = \frac{x^2}{1+x^2}u^2v^2,$$

$$u'v + u\left(\frac{dv}{dx} - \frac{xv}{1+x^2}\right) = \frac{x^2u^2v^2}{1+x^2}. \qquad (1)$$

$\frac{dv}{dx} - \frac{xv}{1+x^2} = 0$ шартдан фойдаланиб $v(x)$ функцияни топамиз:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{xv}{1+x^2}, \quad \frac{dv}{v} = \frac{xdx}{1+x^2}, \quad \int\frac{dv}{v} = \int\frac{xdx}{1+x^2}$$

$$\ln|v| = \frac{1}{2}\ln(1 + x^2), \quad v = \sqrt{1 + x^2}\,.$$

$v(x)$ учун аниқланган ифодани (1) тенгламага қўямиз:

$$\frac{du}{dx}\sqrt{1 + x^2} = \frac{x^2u^2(1+x^2)}{1+x^2}, \quad \frac{du}{u^2} = \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\int\frac{du}{u^2} = \int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \int\frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u},$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}\left|\begin{array}{ll} u_1(x) = x, & du_1 = dx \\ dv_1 = \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}, & v_1 = \sqrt{1 + x^2} \end{array}\right| =$$

$$= x\sqrt{1 + x^2} - \int\sqrt{1 + x^2}\,dx = x\sqrt{1 + x^2} - \int\frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{1 + x^2} - \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} - \int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= x\sqrt{1 + x^2} - \ln\left|x + \sqrt{1 + x^2}\right| - \int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}} - 2C\,.$$

Охирги тенгламадан қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$2\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}} = x\sqrt{1 + x^2} - \ln\left|x + \sqrt{1 + x^2}\right| - 2C,$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}x\sqrt{1 + x^2} - \frac{1}{2}\ln\left|x + \sqrt{1 + x^2}\right| - C\,.$$

Демак,

$$-\frac{1}{u} = \frac{1}{2}x\sqrt{1 + x^2} - \frac{1}{2}\ln\left|x + \sqrt{1 + x^2}\right| - C,$$

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{2}\ln\left|x + \sqrt{1 + x^2}\right| - \frac{1}{2}x\sqrt{1 + x^2} + C,$$

$$u = \left(\frac{1}{2}\ln\left|x + \sqrt{1 + x^2}\right| - \frac{1}{2}x\sqrt{1 + x^2} + C\right)^{-1}.$$

Берилган тенгламанинг умумий ечими

$$y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| - \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + C}$$

формула билан аниқланади.

1-вариант

1. $e^{x+3y}dy = xdx$.
2. $y' + y + y^2 = 0$.
3. $y^2 + x^2y' = xyy'$.

4. $y' - y = e^x, \; y(0) = 1$.

5. $xy'2y + x^5y^3e^x = 0$.

2-вариант

1. $\sin y\cos xdy = \cos y\sin xdx$.

2. $y^2\ln xdx - (y-1)xdy = 0$.

3. $xy' - y = x\text{tg}\frac{y}{x}$.

4. $xy' + y + e^{-x^2} = 0, \; y(1) = \frac{1}{2e}$.

5. $y'x^3\sin y = xy' - 2y$.

3-вариант

1. $y' = (2y+1)\text{tg}x$.

2. $(x + y^2)dy + ydx - y^2dx = 0$.

3. $xy' = y - xe^x$.

4. $\cos ydx = (x + 2\cos y)\sin ydy, \; y(0) = \frac{\pi}{4}$.

5. $(2x^2y\ln y - x)y' = y$.

4-вариант

1. $(\sin(x+y) + \sin(x-y))dx + \frac{dy}{\cos y} = 0$.

2. $y' + 2y - y^2 = 0$.

3. $xy' - y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x}$.

4. $x^2y' + xy + 1 = 0, \; y(1) = 0$.

5. $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2-1}$.

5-вариант

1. $(1 + e^x)yy' = e^x$.

2. $(x^2 + x)ydx + (y^2 + 1)dy = 0$.

3. $xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}$.

4. $yx' + x = 4y^3 + 3y^2, \; y(2) = 1$.

5. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$.

6-вариант

1. $\sin x\text{tg}ydx - \frac{dy}{\sin x} = 0$.

2. $(xy^3 + x)dx + (x^2y^2 - y^2)dy = 0$.

3. $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$.

4. $(2xy + y)dy = ydx + 4\ln ydy, \; y(0) = 1$.

5. $xy^2y' = x^2 + y^3$.

7-вариант

1. $3e^x\sin ydx + (1 - e^x)\cos ydy = 0$.

2. $(1 + y^2)dx - (y + yx^2)dy = 0$.

3. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

4. $y' = \frac{y}{3x^2-y^2}, \; y(0) = 1$.

5. $(x+1)(y' + y^2) = -y$.

8-вариант

1. $y' = \frac{e^{2x}}{\ln y}$.

2. $y' = 2xy + x$.

3. $y = x(y' - \sqrt[5]{e^y})$.

4. $(1 - 2xy)y' = y(y-1), \; y(0) = 1$.

5. $y'x + y = -xy^2$.

9-вариант

1. $3^{x^2+y}dy + xdx = 0$.

2. $y - xy' = 3(1 + x^2y')$.

3. $y' = \frac{x}{y} - 1$.
4. $x(y' - y) = e^{x},\ y(1) = 0$.
5. $y' - xy = -y^{3}e^{-x^{2}}$.

10-вариант

1. $(\cos(x - 2y) + \cos(x + 2y))y' = \sec x$.
2. $2xyy' = 1 - x^{2}$.
3. $y'x + x + y = 0$.
4. $y = x(y' - x\cos x),\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
5. $xy' - 2\sqrt{x^{3}} \cdot y = y$.

11-вариант

1. $y' = e^{x^{2}}x(1 + y^{2})$.
2. $(x^{2} - 1)y' - xy = 0$.
3. $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$.
4. $(xy' - 1)\ln x = 2y,\ y(e) = 0$.
5. $y' + xy = x^{3}y^{3}$.

12-вариант

1. $\mathrm{ctg}x\cos^{2} ydx + \sin^{2} x\mathrm{tg}ydy = 0$.
2. $(y^{2}x + y^{2})dy + xdx = 0$.
3. $xdy - ydx = \sqrt{x^{2} + y^{2}}dx$.
4. $(2e^{y} - x)y' = 1,\ y(0) = 0$.
5. $y' = \frac{x}{y}e^{2x} + y$.

13-вариант

1. $y'\sin x = y\cos x + 2\cos x$.
2. $(1 + x^{3})y^{3}dx - (y^{2} - 1)x^{3}dy = 0$.
3. $(4x^{2} + 3xy + y^{2})dx + (4y^{2} + 3xy + x^{2})dy = 0$.

4. $xy' + (x + 1)y = 3x^{2}e^{-x},\ y(1) = 0$.
5. $yx' + x = -yx^{2}$.

14-вариант

1. $1 + (1 + y')e^{y} = 0$.
2. $xy' - y = y^{2}$.
3. $(x - y)ydx - x^{2}dy = 0$.
4. $(x + y^{2})dy = ydx,\ y(0) = 1$.
5. $x(x - 1)y' + y^{3} = xy$.

15-вариант

1. $y'\mathrm{ctg}x + y = 2$.
2. $\sqrt{y^{2} + 1}dx = xydy$.
3. $xy + y^{2} = (2x^{2} + xy)y'$.
4. $(\sin^{2} y + x\mathrm{ctg}y)y' = 1,\ y(0) = \frac{\pi}{2}$.
5. $2x^{3}yy' + 3x^{2}y^{2} + 1 = 0$.

16-вариант

1. $\frac{e^{-x^{2}}}{x}dy + \frac{1}{\cos^{2} y}dx$.
2. $y' - xy^{2} = 2xy$.
3. $xy + y^{2} = (2x^{2} + xy)y'$.
4. $(x + 1)y' + y = x^{3} + x^{2},\ y(0) = 0$.
5. $\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{y} - 2x\right)dy$.

17-вариант

1. $e^{x}\sin ydx + \mathrm{tg}ydy = 0$.
2. $2x^{2}yy' + y^{2} = 2$.
3. $(2\sqrt{xy} - y)dx + xdy = 0$.

4. $xy' - 2y + x^2 = 0, \ y(1) = 0$.

5. $y' = x\sqrt[3]{y} = 3y$.

18-вариант

1. $(1 + e^{3y})xdx = e^{3y}dy$.

2. $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$.

3. $xy' + y\left(\ln\frac{y}{x} - 1\right) = 0..$

4. $xy' + y = \sin x, \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$.

5. $xy' + y = y^2 \ln x$.

19-вариант

1. $(\sin(2x + y) - \sin(2x - y))dx = \frac{dy}{\sin y}$.

2. $y'\sqrt{1 + y^2} = \frac{x^2}{y}$.

3. $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$.

4. $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x, \ y(\sqrt{2}) = 1$.

5. $xdx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3\right)dy$.

20-вариант

1. $\cos ydx = 2\sqrt{1 + x^2}dy + \cos y \cdot \sqrt{1 + x^2}dy$.

2. $(y + 1)y' = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} + xy$.

3. $(y^2 - 2xy)dx - x^2dy = 0$.

4. $(1 - x^2)y' + xy = 1, \ y(0) = 1$.

5. $y' + 2xy = 2x^3y^3$.

21-вариант

1. $y'\sqrt{1 - x^2} - \cos^2 y = 0$.

2. $(1 + x^2)y' + y\sqrt{1 + x^2} = xy$.

3. $(x + 2y)dx + xdy = 0$.

4. $y'\mathrm{ctg}x - y = 2\cos^2 x\mathrm{ctg}x, \ y(0) = 0$.

5. $y' + y = \frac{x}{y^2}$.

22-вариант

1. $e^x \mathrm{tg}ydx = (1 - e^x)\,\mathrm{scc}^2\, ydy$.

2. $xyy' = \frac{1+x^2}{1-y^2}$.

3. $(2x - y)dx + (x + y)dy = 0$.

4. $x^2y' = 2xy + 3, \ y(1) = -1$.

5. $y' - y\mathrm{tg}x + y^2 \cos x = 0$.

23-вариант

1. $y' + \sin(x + y) = \sin(x - y)$.

2. $(xy - x)^2dy + y(1 - x)dx = 0$.

3. $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$.

4. $y' + 2xy = xe^{-x^2}, \ y(0) = 0$.

5. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.

24-вариант

1. $\cos^3 y \cdot y' - \cos(2x + y) = \cos(2x - y)$.

2. $(x^2 - y)y' = x^2y - y + x^2 - 1$.

3. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

4. $y' - 3x^2y - x^2e^{x^3} = 0, \ y(0) = 0$.

5. $y' - y + y^2 \cos x = 0$.

25-вариант

1. $3^{y^2-x^2} = \frac{y'y}{x}$.

2. $\sqrt{1 - y^2}dx + y\sqrt{1 - x^2}dy = 0$.

3. $x^2y' = y(x + y)$.

4. $xy' + y = \ln x + 1,\ y(1) = 0$.

5. $y' = x\sqrt{y} + \frac{xy}{x^2-1}$.

9-§. Иккинчи мустақил уй иши

Мустақил уй ишининг ҳар бир вариантида бешта мисол бўлиб, уларнинг шарти қуйидагича.

1-мисолда: берилган дифференциал тенгламанинг берилган бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топиш ва ҳосил қилинган $y = \varphi(x)$ функциянинг $x = x_0$ даги қийматини 0,001 гача аниқлик билан ҳисоблаш керак.

2-мисолда: тартибини пасайтириш ёрдамида дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топиш керак.

3-мисолда: тартибини пасайтириш мумкин бўлган дифференциал тенгламанинг берилган бошлангич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топиш керак.

4-мисолда: берилган дифференциал тенгламани интеграллаш керак.

5-мисол: шарти вариантда берилган.

Қуйида вариант мисолларини ечиш намунасини келтирамиз.

1. Ушбу

$$y''(x + 2)^5 = 1$$

дифференциал тенгламанинг $y(-1) = \frac{1}{12}$, $y'(-1) = -\frac{1}{4}$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг ва топилган ечимнинг $x = -3$ даги қийматини 0,001 гача аниқлик билан ҳисобланг.

Ечиш. Берилган тенгламанинг умумий ечимини топамиз (5-§ даги I тур тенгламага қаранг):

$$y'' = \frac{1}{(x+2)^5},\ y' = \int\frac{dx}{(x+2)^5} = -\frac{1}{4(x+2)^4} + C_1,$$

$$y = \int\left(-\frac{1}{4(x+2)^4} + C_1\right)dx = \frac{1}{12(x+2)^3} + C_1x + C_2.$$

Бошланғич шартдан фойдаланиб, C_1 ва C_2 ларнинг қийматини аниқлаймиз:

$$y(-1) = \frac{1}{12} - C_1 + C_2 = \frac{1}{12},\ C_2 - C_1 = 0,$$

$$y'(-1) = -\frac{1}{4} + C_1 = -\frac{1}{4},\ C_1 = 0,\ C_2 = 0.$$

Берилган тенгламанинг бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечими

$$y = \frac{1}{12(x+2)^3}$$

кўринишда бўлади. Энди $y(x)$ функциянинг $x = -3$ даги қийматини ҳисоблаймиз:

$$y(-3) = \frac{1}{12(-3+2)^3} = -\frac{1}{12} = -0,08.$$

2. Ушбу тартибини пасайтириш мумкин бўлган

$$y''(e^x + 1) + y' = 0$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенглама II тур тенгламадан иборат (5-§ ва 2-мисолга қаранг). Шунинг учун $y' = z(x)$ алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда $y'' = \frac{dz}{dx}$ ва

$$\frac{dz}{dx}(e^x + 1) + z = 0,\ \frac{dz}{dx}(e^x + 1) = -z,$$

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{e^x+1},\ \int\frac{dz}{z} = -\int\frac{dx}{e^x+1}.$$

Ўнг қисмдаги интегралда $e^x + 1 = t$ алмаштириш ёрдамида қуйидагига эга бўламиз:

$$\ln|z| = \ln(e^x + 1) - \ln e^x + \ln C_1.$$

Охирги ифодани потенцирлаб

$$z = C_1\frac{e^x+1}{e^x}$$

ни топамиз. $z = y' = \frac{dy}{dx}$ ни эътиборга олиб, берилган тенгламанинг умумий ечимини топамиз:

$$\frac{dy}{dx} = C_1\frac{e^x+1}{e^x},\ y = C_1\int\frac{e^x+1}{e^x}dx = C_1(x - e^{-x}) + C_2.$$

3. Ушбу тартибини пасайтириш мумкин бўлган

$$y^3 y'' = -1$$

дифференциал тенгламанинг $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенглама III турга тегишли (5-§ ва 4-мисолга қаранг). Шунинг учун тенгламанинг тартибини $y' = P(y)$ алмаштириш ёрдамида пасайтирамиз. У ҳолда $y'' = P\frac{dP}{dy}$.

$$y^3 P\frac{dP}{dy} = -1, \;\; PdP = -\frac{dy}{y^3},$$

$$\int PdP = -\int \frac{dy}{y^3}, \;\; \frac{P^2}{2} = \frac{1}{2y^2} + C_1,$$

$$P^2 = \frac{1}{y^2} + 2C_1, \;\; P = \pm\sqrt{\frac{1}{y^2} + 2C_1},$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{1+2C_1y^2}}{y}, \;\; dx = \pm\frac{ydy}{\sqrt{1+2C_1y^2}},$$

$$x = \pm\int\frac{ydy}{\sqrt{1+2C_1y^2}} + C_2 = \pm\frac{1}{4C_1}\int(1 + 2C_1y^2)^{-\frac{1}{2}}d(1 + 2C_1y^2),$$

$$x = \pm\frac{1}{2C_1}\sqrt{1 + C_1y^2} + C_2,$$

яъни берилган тенгламанинг умумий ечимига эга бўлдик. Бошланғич шартлардан фойдаланиб, C_1 ва C_2 нинг қийматларини топамиз:

$$1 = \pm\frac{1}{2C_1}\sqrt{1 + 2C_1} + C_2,$$

$$0 = \pm\sqrt{1 + 2C_1},$$

булардан $1 + 2C_1 = 0$, $C_1 = -\frac{1}{2}$, $C_2 = 1$.

Демак, изланаётган ечим

$$x = \pm\sqrt{1 - y^2} + 1$$

кўринишда бўлади. Бу ечим $(x-1)^2 + y^2 = 1$ айлананинг ярмини (чап ёки ўнг қисмини) ифодалайди.

4. Ушбу

$$\left(\frac{1}{x} - y^3 + 4\right)dx + \left(-\frac{1}{y} - 3xy^2\right)dy = 0$$

тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$P(x,y) = \frac{1}{x} - y^3 + 4, \;\; Q(x,y) = -\frac{1}{y} - 3xy^2$$

((7.22) тенгламага қаранг). У ҳолда

$$\frac{dP}{dy} = -3y^2, \;\; \frac{dQ}{dx} = -3y^2.$$

$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ бўлгани учун берилган тенглама тўлиқ дифференциалли тенглама бўлади. Унинг умумий интеграли (7.24) формула ёрдамида топилди:

$$\int_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{x} - y^3 + 4\right)dx + \int_{y_0}^{y}\left(-\frac{1}{y} - 3x_0y^2\right)dy = C_0,$$

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x} - \int_{x_0}^{x}y^3dx + 4\int_{x_0}^{x}dx - \int_{y_0}^{y}\frac{dy}{y} - 3x_0\int_{y_0}^{y}y^2dy = C_0,$$

$$\ln|x|\Big|_{x_0}^{x} - y^3x\Big|_{x_0}^{x} + 4x\Big|_{x_0}^{x} - \ln|y|\Big|_{y_0}^{y} - 3x_0\frac{y^3}{3}\Big|_{y_0}^{y} = C_0,$$

$$\ln|x| - \ln|x_0| - xy^3 + x_0y^3 + 4x - 4x_0 -$$
$$- \ln|y| + \ln|y_0| - x_0y^3 + x_0{y_0}^3 = C_0,$$

$$\ln\left|\frac{x}{|y|}\right| - xy^3 + 4x = C,$$

бунда $C = C_0 + \ln\left|\frac{x_0}{y_0}\right| + 4x_0 - x_0 - x_0{y_0}^3$.

5. Агар эгри чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси $M(x;\, y)$ дан ўтказилган уринма, координата ўқлари ва уриниш нуқтасининг ординатаси билан чегараланган трапецияларнинг

юзи ўзгармас миқдор 3 га тенглиги маълум бўлса (69-чизма), $A(2;2)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

Ечиш. Трапециянинг юзи:

$$S_{DMCO} = \frac{|MC|+|DO|}{2} \cdot |OC| \cdot$$

$$|MC| = y,\ |DO| = \pm|DB| + |BO| = \pm|DB| \cdot |MC| = \pm|DB| + y \cdot$$

$$|OC| = x,\ \pm|DB| = -|BM|\,\text{tg}\alpha = -|BM|\,y' = -xy',$$

бунда, агар $y' = \text{tg}\alpha < 0$ бўлса, $|DB|$ нинг олдидаги ишора « + », агар $y' = \text{tg}\alpha > 0$ бўлса, « − » ишора олинади (69-чизма). Шунинг учун иккала ҳолда ҳам $|DO| = -xy' + y$. Бу қийматларни ўрнига қўйиб, соддалаштирамиз;

$$S_{DMCO} = \frac{y-xy'+y}{2} \cdot x = 3,\ -\frac{1}{2}x^2y' + xy = 3,$$

$$-x^2y' + 2xy = 6,\ y' - \frac{2}{x}y = -\frac{6}{x^2},\ (x \neq 0).$$

Натижада биринчи тартибли чизиқли тенгламани ҳосил қилдик. Уни ечамиз:

$$y = uv,\ y' = u'v + uv',\ u'v + uv' - \frac{2uv}{x} = -\frac{6}{x^2},$$

$$u'v + u\left(\frac{dv}{dx} - \frac{2v}{x}\right) = -\frac{6}{x^2}, \qquad (1)$$

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2v}{x} = 0,\ \frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x},$$

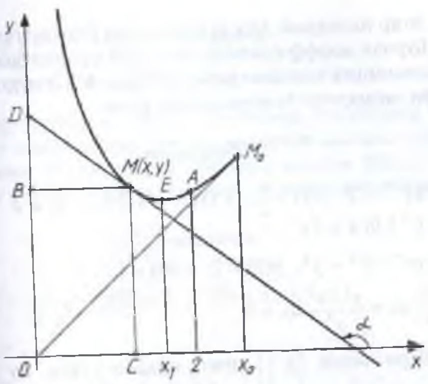
$$\int\frac{dv}{v} = 2\int\frac{dx}{x},\ \ln|v| = 2\ln|x|,\ v = x^2.$$

(1) тенгламага $v = x^2$ ни қўйиб u ни топамиз:

$$u'x^2 = -\frac{6}{x^2},\ u' = -\frac{6}{x^4},\ u = -6\int\frac{dx}{x^4} = \frac{2}{x^3} + C.$$

У ҳолда (1) тенгламанинг умумий ечими

$$y = uv = \left(\frac{2}{x^3} + C\right)x^2 = \frac{2}{x} + Cx^2.$$



69-чизма.

функциядан иборат бўлади. Масала шартидаги эгри чизиқнинг $A(2;2)$ нуқтадан ўтиш шартидан фойдаланиб, C нинг қийматини топамиз:

$$2 = \frac{2}{2} + C \cdot 2^2,\ C = \frac{1}{4}\cdot$$

Изланаётган эгри чизиқ тенгламаси

$$y = \frac{2}{x} + \frac{x^2}{4},\ \left(0 < x \leq x_0 = \sqrt[3]{16}\right)$$

кўринишда бўлади. У 69-чизмада тасвирланган бўлиб, $x_1 = \sqrt[3]{4}$ да минумум нуқтасига эга бўлади.

I-вариант

1. $y'' = \frac{1}{1+x^2},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ x_0 = 1.$
2. $xy'' - y' = x^2e^x.$
3. $2yy'' = y'^2,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$
4. $\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx + \frac{e^y}{1+x^2}dy = 0.$

5. Агар ихтиёрий $M(x;y)$ нуқтасида ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти шу нуқта ординатасининг учлантирилганига тенглиги маълум бўлса, $A(0;2)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

2-вариант

1. $xy''' = 2,\ y(1) = \frac{1}{2},\ y'(1) = y''(1) = 0,\ x_0 = 2$.
2. $y''x\ln x = 2y'$.
3. $yy'' - y'^2 = y^4,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.
4. $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$.

5. Эгри чизиқ $\left(2;\frac{1}{2}\right)$ нуқта орқали ўтади. Бу эгри чизиқнинг ихтиёрий $M(x;y)$ нуқтасидан уринма ўтказилган бўлиб, унинг Ox ўқ билан кесишиш нуқтасининг абсциссаси уриниш нуқтасининг абсциссасидан икки марта катта. Эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

3-вариант

1. $y''' = e^{2x},\ y(0) = \frac{9}{8},\ y'(0) = \frac{1}{4},\ y''(0) = -\frac{1}{2},\ x_0 = \frac{1}{2}$.
2. $x^2y'' + xy' = 1$.
3. $y'' = -\frac{1}{2y^3},\ y(0) = \frac{1}{2},\ y'(0) = \sqrt{2}$.
4. $\left(1 - e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$.

5. Агар ихтиёрий $M(x;y)$ нуқтасида ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти уриниш нуқтаси радиус-векторининг бурчак коэффициенти квадратига тенглиги маълум бўлса, $A(2;1)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

4-вариант

1. $y''' = \cos^2 x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -\frac{1}{8},\ y''(0) = 0,\ x = \pi$.
2. $y''x\ln x = y'$.

3. $y'' = 1 - y'^2,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.
4. $x(2x^2 + y^2)dx + y(x^2 + 2y^2)dy = 0$.

5. Агар ихтиёрий $M(x;y)$ нуқтасида ўтказилган уринмасининг ординаталар ўқидан ажратган кесмаси уриниш нуқтасининг абсциссасига тенглиги маълум бўлса, $A(1;0)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

5-вариант

1. $y'' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ y(0) = 2,\ y'(0) = 3,\ x_0 = 1$.
2. $xy'' = y'$.
3. $y''^2 = y',\ y(0) = \frac{2}{3},\ y'(0) = 1$.
4. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\right)dy = 0$.

5. Агар ихтиёрий $M(x;y)$ нуқтасида ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти шу нуқта ординатасидан етти марта катта эканлиги маълум бўлса, $A(0;5)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

6-вариант

1. $y'' = \frac{1}{\sin^2 2x},\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4},\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,\ x_0 = \frac{5}{4}\pi$.
2. $y'' = y' + x$.
3. $2yy'' - y'^2 = 1,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1$.
4. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\right)dy = 0$.

5. Агар ихтиёрий $M(x;y)$ нуқтасида ўтказилган уринманинг ординаталар ўқидан ажратган кесмаси уриниш нуқтасидан координаталар бошигача бўлган масофага тенглиги маълум бўлса, $A(0;1)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

7-вариант

1. $y'' = x + \sin x,\ \ y(0) = -3,\ \ y'(0) = 0$.
2. $xy'' = y' + x^2$.
3. $y'' = 2 - y,\ \ y(0) = 2,\ \ y'(0) = 2$.
4. $\left(3x^2 \mathrm{tg} y - \frac{2y^3}{x^3}\right)dx + \left(x^3 \sec^2 y + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2}\right)dy = 0$.

5. Агар ихтиёрий $M(x;y)$ нуқтасида ўтказилган уринманинг ординаталар ўқидан ажратган кесмаси уриниш нуқтаси абсциссасининг квадратига тенглиги маълум бўлса, $A(1; -1)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

8-вариант

1. $y'' = \mathrm{arctg} x,\ \ y(0) = y'(0) = 0$.
2. $xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right)$.
3. $y'' = \frac{1}{y^3},\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0$.
4. $\left(2x + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y}\right)dx = \frac{x^2 + y^2}{xy^2}\,dy$.

5. Агар ихтиёрий $M(x;y)$ нуқтасида ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти уриниш нуқтаси радиус-векторининг бурчак коэффициентидан уч марта катталиги маълум бўлса, $A(-8; -2)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

9-вариант

1. $y'' = \mathrm{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x},\ \ y(0) = \frac{1}{2},\ \ y'(0) = 0,\ \ x_0 = \frac{\pi}{4}$.
2. $xy'' + y' = \ln x$.
3. $yy'' - 2y'^2 = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2$.
4. $\left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0$.

5. Агар ихтиёрий $M(x;y)$ нуқтасида ўтказилган уринманинг ординаталар ўқидан ажратган кесмаси шу нуқтадан координаталар бошигача бўлган масофага тенглиги маълум бўлса, $A(0; -8)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

10-вариант

1. $y''' = e^{\frac{x}{2}} + 1,\ \ y(0) = 8,\ \ y'(0) = 5,\ \ y''(0) = 2,\ \ x_0 = 2$.
2. $y'' \mathrm{tg} x = y' + 1$.
3. $y'' = y' + y'^2,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1$.
4. $(3x^2 - 2x - y)dx + (2y - x + 3y^2)dy = 0$.

5. Агар ихтиёрий $M(x;y)$ нуқтасида ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти шу нуқта ординатасининг иккиланганига тенглиги маълум бўлса, $A(-1;3)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

11-вариант

1. $y'' = \frac{x}{e^{2x}},\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = -\frac{1}{4},\ \ x_0 = -\frac{1}{2}$.
2. $y'' + 2xy'^2 = 0$.
3. $y'' + \frac{2}{1-y}y'^2 = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1$.
4. $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{xdy - ydx}{x^2} = 0$.

5. Агар ихтиёрий $M(x;y)$ нуқтасида ўтказилган уринманинг уриниш нуқтасига координаталар бошидан туширилган перпендикулярнинг узунлиги уриниш нуқтасининг абсциссасига тенглиги маълум бўлса, $A(2;3)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

12-вариант

1. $y'' = \sin^2 3x,\ \ y(0) = -\frac{\pi^2}{16},\ \ y'(0) = 0,\ \ x_0 = \frac{\pi}{2}$.
2. $2xy'y'' = y'^2 + 1$.

3. $y''(1+y)=5y'^2,\ y(0)=0,\ y'(0)=1$.

4. $(3x^2y+y^3)dx+(x^3+3xy^2)dy=0$.

5. Агар ихтиёрий $M(x;y)$ нуқтасида ўтказилган уринмасининг ординаталар ўқидан ажратган кесмаси уриниш нуқтасининг координаталари йиғиндисининг ярмига тенглиги маълум бўлса, $A(4;10)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

13-вариант

1. $y'''=x\sin x,\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y''(0)=0,\ x_0=\frac{\pi}{2}$.

2. $y''-\frac{y'}{x-1}=x(x-1)$.

3. $y''(2y+3)-2y'^2=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=3$.

4. $y(x^2+y^2+a^2)dx+x(x^2+y^2-a^2)dx=0$.

5. Агар ихтиёрий $M(x;y)$ нуқтасида ўтказилган уринманинг ординаталар ўқидан ажратган кесмаси уриниш нуқтаси абсциссасининг квадратига тенглиги маълум бўлса, $A(-2;5)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

14-вариант

1. $y'''\sin^4x=\sin 2x, y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}, y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1, y''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1, x_0=\frac{5\pi}{2}$.

2. $y'''+y''\,\mathrm{tg}x=\sec x$.

3. $4y''^2=1+y'^2,\ y(0)=1,\ y'(0)=0$.

4. $\left(\sin y+y\sin x+\frac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\frac{1}{y}\right)dy=0$.

5. Агар ихтиёрий $M(x;y)$ нуқтасида ўтказилган уринманинг Ox ўқидан ажратган кесмаси уриниш нуқтасининг абсциссасидан уч марта катта эканлиги маълум бўлса, $A(1;1)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

15-вариант

1. $y''=\cos x+e^{-x},\ y(0)=-e^{-\pi},\ y'(0)=1,\ x_0=\pi$.

2. $y''-2y'\,\mathrm{ctg}x=\sin^3x$.

3. $2y'^2=(y-1)y'',\ y(0)=2,\ y'(0)=2$.

4. $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$.

5. Агар ихтиёрий $M(x;y)$ нуқтасида ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти шу нуқта ординатасидан олти марта катта эканлиги маълум бўлса, $A(-2;4)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

16-вариант

1. $y''=\sin^3x,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{7}{9},\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\ x_0=2,5\pi$.

2. $y''+4y'=2x^2$.

3. $1+y'^2=yy',\ y(0)=1,\ y'(0)=0$.

4. $(3x^2-y\cos xy+y)dx+(x-x\cos xy)dy=0$.

5. Агар ихтиёрий $M(x;y)$ нуқтасида ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти уриниш нуқтаси радиус-векторининг бурчак коэффициентидан тўққиз марта катталиги маълум бўлса, $A(-6;4)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

17-вариант

1. $y'''=\sqrt{x}-\sin 2x,\ y(0)=-\frac{1}{8},\ y'(0)=\frac{1}{8}\cos 2,\ y''(0)=\frac{1}{2},$
$x_0=1$.

2. $xy''-y'=2x^2e^x$.

3. $y''+yy'^3=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=2$.

4. $\left(12x^3-e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}\right)dx+\left(16y+\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\right)dy=0$.

5. Агар ихтиёрий $M(x;y)$ нуқтасида ўтказилган уринманинг уриниш нуқтасига координаталар бошидан туширилган перпендикулярнинг узунлиги уриниш нуқтасининг абсциссасига тенглиги маълум бўлса, $A(4;-3)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

18-вариант

1. $y'' = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1, \ x_0 = 4\pi$.

2. $x(y'' + 1) + y' = 0$.

3. $yy'' - y'^2 = 0, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 2$.

4. $\left(\frac{y}{2\sqrt{xy}} + 2xy \sin x^2 y + 4\right)dx + \left(\frac{x}{2\sqrt{xy}} + x^2 \sin x^2 y\right)dy = 0$.

5. Агар ихтиёрий $M(x;y)$ нуқтасида ўтказилган уринманинг ординаталар ўқидан ажратган кесмаси уриниш нуқтаси координаталари йиғиндисининг ярмига тенглиги маълум бўлса, $A(9; -4)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

19-вариант

1. $y'' = 2\sin x \cos^2 x, \ y(0) = -\frac{5}{9}, \ y'(0) = -\frac{2}{3}, \ x_0 = \frac{\pi}{2}$.

2. $y'' + 4y' = \cos 2x$.

3. $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 1$.

4. $y \cdot 3^{xy} \ln 3dx + (x \cdot 3^{xy} \ln 3 - 3)dy = 0$.

5. Агар ихтиёрий $M(x;y)$ нуқтасида ўтказилган уринманинг ординаталар ўқидан ажратган кесмаси уриниш нуқтаси абсциссасининг квадратига тенглиги маълум бўлса, $A(3; -2)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

20-вариант

1. $y'' = 2\sin^2 x \cdot \cos x, \ y(0) = \frac{1}{9}, \ y'(0) = 1, \ x_0 = \pi$.

2. $y'' + y' = \sin x$.

3. $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)y'^2 = 0, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 1$.

4. $\left(\frac{1}{x-y} + 3x^2y^7\right)dx + \left(7x^3y^6 - \frac{1}{x-y}\right)dy = 0$.

5. Агар ихтиёрий $M(x;y)$ нуқтасида ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти шу нуқта ординатасидан беш марта катта эканлиги маълум бўлса, $A(-2;1)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

21-вариант

1. $y'' = 2\sin x \cos^2 x - \sin^3 x, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1, \ x_0 = \frac{\pi}{2}$.

2. $x^2 y'' = y'^2$.

3. $y''(1 + y) = y'^2 + y', \ y(0) = 2, \ y'(0) = 2$.

4. $\left(\frac{2y}{x^3} + y\cos xy\right)dx + \left(\frac{1}{x^2} + x\cos xy\right)dy = 0$.

5. Агар ихтиёрий $M(x;y)$ нуқтасида ўтказилган уринманинг ординаталар ўқидан ажратган кесмаси уриниш нуқтаси координаталари йиғиндисининг тўртдан бирига тенглиги маълум бўлса, $A(16;0)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

22-вариант

1. $y'' = 2\cos x \sin^2 x - \cos^3 x, \ y(0) = \frac{2}{3}, \ y'(0) = 2, \ x_0 = \frac{\pi}{2}$.

2. $2xy''y' = y'^2 - 4$.

3. $y'' = \frac{y'}{\sqrt{y}}, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 2$.

4. $\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} - 2x\right)dx + \frac{xdy}{\sqrt{1-x^2y^2}} = 0$.

5. Агар ихтиёрий $M(x;y)$ нуқтасида ўтказилган уринманинг ординаталар ўқидан ажратган кесмаси уриниш нуқтаси координаталари йиғиндисининг ярмига тенглиги маълум бўлса, $A(1; -7)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

23-вариант

1. $y'' = x - \ln x, \ y(1) = -\frac{5}{12}, \ y'(1) = \frac{3}{2}, \ x_0 = 2$.

2. $y''' x \ln x = y''$.

3. $yy'' + y'^2 = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

4. $(5x^4y^4 + 28x^6)dx + (4x^5y^3 - 3y^2)dy = 0$.

5. Агар ихтиёрий $M(x;y)$ нуқтасида ўтказилган уринманинг уриниш нуқтасига координаталар бошидан туширилган перпендикулярнинг узунлиги уриниш нуқтасининг абсциссасига тенглиги маълум бўлса, $A(-4;1)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

24-вариант

1. $y'' = \frac{1}{x^2},\ y(1) = 3,\ y'(1) = 1,\ x_0 = 2$.

2. $y''\operatorname{ctg}x + y' = 2$.

3. $y'' = \frac{1}{\sqrt{y}},\ y(0) = y'(0) = 0$.

4. $\left(2xe^{x^2+y^2} + 2\right)dx + \left(2ye^{x^2+y^2} - 3\right)dy = 0$.

5. Агар ихтиёрий $M(x;y)$ нуқтасида ўтказилган уринманинг ординаталар ўқидан ажратган кесмаси уриниш нуқтасининг абсциссаси квадратига тенглиги маълум бўлса, $A(2;8)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

25-вариант

1. $y''' = \cos 4x,\ y(0) = 2,\ y'(0) = \frac{15}{16},\ x_0 = \pi$.

2. $(1 + x^2)y'' = 2xy$.

3. $yy'' - 2yy'\ln y = y'^2,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

4. $(3y^3\cos 3x + 7)dx + (3y^2\sin 3x - 2y)dy = 0$.

5. Агар ихтиёрий $M(x;y)$ нуқтасида ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти шу нуқта ординатасидан тўрт марта катта эканлиги маълум бўлса, $A(3;-2)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

10-§. Учинчи мустақил уй иши

Бу мустақил уй ишининг ҳар бир вариантида бешта мисол бўлиб, уларнинг шарти қуйидагича.

1-мисолда: ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли бўлган дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимини топиш керак.

2- ва 3-мисолларда: ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимини топиш керак.

4-мисолда: дифференциал тенгламанинг берилган бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топиш керак.

5-мисолда: $f(x)$ функциянинг кўринишига қараб берилган чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг хусусий ечими y^* нинг кўринишини ёзинг.

Қуйида вариант мисолларини ечиш намунасини келтирамиз.

1. Ушбу

а) $4y'' - 11y' + 6y = 0$; б) $4y'' - 4y' + y = 0$;
в) $y'' - 2y' + 37y = 0$

дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Ҳар бир дифференциал тенглама учун характеристик тенглама тузамиз ва уни ечамиз. Ҳосил қилинган характеристик тенгламанинг илдизларининг кўринишига қараб (7.47 формула ва 6-§ даги 5-мисолга қаранг) дифференциал тенгламанинг умумий ечимини ёзамиз.

а) $4\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0$, илдизлари $\lambda_1 = \frac{3}{4}$, $\lambda_2 = 2$ ҳақиқий ва ҳар хил, шунинг учун тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y = C_1e^{\frac{3}{4}x} + C_2e^{2x};$$

б) $4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$, илдизлари $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ ҳақиқий ва бир-бирига тенг, демак тенгламанинг умумий ечими:

$$y = C_1e^{\frac{x}{2}} + C_2xe^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}}\left(C_1 + C_2x\right);$$

в) $\lambda^2 - 2\lambda + 37 = 0$, илдизлари $\lambda_{1,2} = 1 \pm 6i$ — қўшма комплекс сон, шунинг учун тенгламанинг умумий ечими:

$$y = e^x (C_1 \cos 6x + C_2 \sin 6x) .$$

2. Ушбу

$$y'' - 3y' - 4y = 6xe^{-x}$$

тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Бир жинсли тенгламанинг характеристик тенгламасини тузамиз:

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 ,$$

унинг илдизлари $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -1$. Демак, бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$\overline{y} = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}$$

формула билан аниқланади.

Берилган тенгламанинг ўнг томонида турган $f(x) = 6xe^{-x}$ функциянинг кўринишига қараб ((7.49) формулага қаранг) унинг хусусий ечимини ёзамиз:

$$y^* = (Ax + B)e^{-x} \cdot x = (Ax^2 + Bx)e^{-x} .$$

Бунда $(Ax^2 + B)e^{-x}$ ифодани $z = a + ib = -1$ характеристик тенгламанинг илдизи бўлгани учун x га кўпайтирилди. Энди A ва B номаълум коэффициентларни аниқлаймиз. Унинг учун:

$$y^{*\,\prime} = (2Ax + B)e^{-x} - (Ax^2 + Bx)e^{-x} ,$$

$$y^{*\,\prime\prime} = 2Ae^{-x} + (Ax^2 + Bx)e^{-x} - 2(2Ax + B)e^{-x} .$$

y^*, $y^{*\,\prime}$, $y^{*\,\prime\prime}$ ларнинг аниқланган ифодаларини берилган тенгламага қўямиз ва иккала қисмини e^{x} га бўламиз. Сўнгра x^2, x ва x^0 олдидаги коэффициентларни тенглаймиз. Натижада A ва B ларни аниқлаш мумкин бўлган системага эга бўламиз:

$$2A + Ax^2 + Bx - 4Ax - 2B - 6Ax -$$
$$-3B + 3Ax^2 + 3Bx - 4Ax^2 - 4Bx = 6x ,$$

$$\left.\begin{array}{c|c} x^2 & A + 3A - 4A = 0, \\ x & B - 4A - 6A + 3B - 4B = 6, \\ x^0 & 2A - 2B - 3B = 0, \end{array}\right]$$

бундан $A = -\frac{3}{5}$, $B = -\frac{6}{25}$.

У ҳолда $y^* = -\left(\frac{3}{5}x^2 + \frac{6}{25}x\right)e^{-x}$ бўлади ва берилган бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечими қуйидагича бўлади:

$$y = \overline{y} + y^* = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x} - \left(\frac{3}{5}x^2 + \frac{6}{25}x\right)e^{-x} .$$

3. Ушбу

$$y'' + y' = 5x + \cos 2x$$

тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Бир жинсли тенгламанинг характеристик тенгламасини тузамиз:

$$\lambda^2 + \lambda = 0 ,$$

унинг илдизлари $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$. Демак, унинг умумий ечими

$$\overline{y} = C_1 + C_2 e^{-x}$$

кўринишда бўлади.

Тенгламанинг ўнг қисмидаги $f(x) = 5x + \cos 2x$ функция $f_1(x) = 5x$ ва $f_2(x) = \cos 2x$ функцияларнинг йиғиндисидан иборат. Унга мос иккита хусусий ечим мавжуд бўлиб, улар қуйидаги кўринишда изланади:

$$y_1^* = Ax^2 + Bx ,$$

$$y_2^* = A_1 \cos 2x + B_1 \sin 2x ,$$

яъни $y^* = y_1^* + y_2^*$. Унинг ҳосилаларини топамиз:

$$y^{*\,\prime} = 2Ax + B - 2A_1 \sin 2x + 2B_1 \cos 2x ,$$

$$y^{*\,\prime\prime} = 2A - 4A_1 \sin 2x - 4B_1 \cos 2x .$$

$y^{*\prime}$ ва $y^{*\prime\prime}$ ифодаларни берилган тенгламага қўямиз ва A, B, A_1, B_1 коэффициентларни аниқлаймиз:

$$2A - 4A_1 \cos 2x - 4B_1 \sin 2x + 2Ax + B -$$
$$-2A_1 \sin 2x + 2B_1 \cos 2x = 5x + \cos 2x,$$

$$\left.\begin{array}{r|l} x & 2A = 5, \\ x^0 & 2A + B = 0, \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r|l} \cos 2x & -4A_1 + 2B_1 = 1, \\ \sin 2x & -2A_1 - 4B_1 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 10B_1 = 1, \\ A_1 = -2B_1 \end{array}\right\}$$

бундан $A = \frac{5}{2}$, $B = -5$, $A_1 = -\frac{1}{5}$, $B_1 = -\frac{1}{10}$.

Шундай қилиб, берилган тенгламанинг хусусий ечими:

$$y^* = \frac{5}{2}x^2 - 5x - \frac{1}{5}\cos 2x + \frac{1}{10}\sin 2x,$$

унинг умумий ечими эса

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{5}{2}x^2 - 5x - \frac{1}{5}\cos 2x + \frac{1}{10}\sin 2x$$

кўринишда бўлади.

4. Ушбу

$$y'' + 16y = (34x + 13)e^{-x}$$

дифференциал тенгламанинг $y(0) = -1$, $y'(0) = 5$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

Ечиш. Бир жинсли тенгламанинг $\lambda^2 + 16 = 0$ характеристик тенгламаси $\lambda_{1,2} = \pm 4i$ мавҳум илдизга эга. Унга мос бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$\bar{y} = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$$

формула билан аниқланади, унинг хусусий ечими

$$y^* = (Ax + B)e^{-x}$$

кўринишда бўлади. $y^{*\prime}$ ва $y^{*\prime\prime}$ ларни топамиз:

$$y^{*\prime} = Ae^{-x} - (Ax + B)e^{-x},$$
$$y^{*\prime\prime} = -2Ae^{-x} + (Ax + B)e^{-x}.$$

Берилган тенгламага $y^{*\prime}$ ва $y^{*\prime\prime}$ ифодаларни қўйиб қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$-2A + Ax + B + 16Ax + 16B = 34x + 13,$$

бундан $A = 2$, $B = 1$. У ҳолда

$$y^* = (2x + 1)e^{-x}$$

бўлади ва берилган тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + (2x + 1)e^{-x}$$

кўринишда бўлади. C_1 ва C_2 нинг қийматларини топиш учун $y(0) = -1$, $y'(0) = 5$ бошланғич шартлардан фойдаланиб қуйидаги системани тузамиз:

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = -1 = C_1 + 1, \\ y'(0) = 5 = 4C_2 + 2 - 1, \end{array}\right|$$

бу ердан $C_1 = -2$, $C_2 = 1$. Умумий ечимга C_1 ва C_2 ларнинг қийматини қўйиб, берилган тенгламанинг хусусий ечимини топамиз:

$$y = \sin 4x - 2\cos 4x + (2x + 1)e^{-x}.$$

5. Агар а) $f(x) = (5 - x)e^{3x}$; б) $f(x) = x\sin 2x$ бўлса, $y'' - 9y = f(x)$ чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг хусусий ечими у* ни аниқланг ва кўринишини ёзинг.

Ечиш. Характеристик тенгламанинг илдизларини топамиз:

$$\lambda^2 - 9 = 0, \ \lambda_1 = -3, \ \lambda_2 = 3.$$

а) $f(x) = (5 - x)e^{3x}$ бўлгани учун хусусий ечим

$$y^* = (Ax + B)e^{3x} \cdot x = (Ax^2 + Bx)e^{3x}$$

кўринишда бўлади. Бунда $z = a + ib = 3$ ва $k = 1$ бўлгани учун x га кўпайтирилди.

б) $f(x) = \sin 2x$ бўлгани учун

$$y^* = (A_1 x + B_1)\cos 2x + (A_2 x + B_2)\sin 2x$$

кўринишда бўлади.

1-вариант

1. а) $y'' - 4y = 0$; б) $y'' + 2y' + 17y = 0$; в) $y'' - y' - 12y = 0$.
2. $y'' - 6y' + 10y = 51e^{-x}$.
3. $y'' - 2y' = (4x + 4)e^{2x}$.
4. $y'' + 6y = (\cos 4x - 8\sin 4x)e^{x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$.
5. $3y'' - 10y' + 3y = f(x)$; а) $f(x) = e^{3x}$; б) $f(x) = 2\cos 3x - \sin 3x$.

2-вариант

1. а) $y'' + y' - 6y = 0$; б) $y'' + 9y' = 0$; в) $y'' - 4y' + 20y = 0$.
2. $y'' + y = 2\cos x - (4x + 4)\sin x$.
3. $y'' + 2y' + y = 4x^3 + 24x^2 + 22x - 4$.
4. $y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
5. $y'' - 3y' + 2y = f(x)$; а) $f(x) = x + 2e^{x}$; б) $f(x) = 3\cos 4x$.

3-вариант

1. а) $y'' - 49y = 0$; б) $y'' - 4y' + 5y = 0$; в) $y'' + 2y - 3y = 0$.
2. $y'' + 6y' + 10y = 74e^{3x}$.
3. $y'' - 4y' = 8 - 16x$.
4. $y'' - 12y' + 36y = 32\cos 2x + 24\sin 2x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$.
5. $y'' - 4y' + 4y = f(x)$; а) $f(x) = \sin 2x + 2e^{x}$; б) $f(x) = x^2 - 4$.

4-вариант

1. а) $y'' + 7y' = 0$; б) $y'' - 5y' + 4y = 0$; в) $y'' + 16y = 0$.
2. $y'' - 3y' + 2y = 3\cos x + 19\sin x$.
3. $y'' - 2y' + y = 4e^{x}$.
4. $y'' + y = x^3 - 4x^2 + 7x - 10$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.
5. $y'' - y' + y = f(x)$; а) $f(x) = e^{x}\cos x$; б) $f(x) = 7x + 2$.

5-вариант

1. а) $y'' - 6y' + 8y = 0$; б) $y'' + 4y' + 5y = 0$; в) $y'' + 5y' = 0$.
2. $y'' + 6y' + 9y = (48x + 8)e^{x}$.
3. $y'' - 8y' + 20y = 16(\sin 2x - \cos 2x)$.
4. $y'' - y = (14 - 16x)e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.
5. $y'' - 3y' = f(x)$; а) $f(x) = 2x^2 - 5x$; б) $f(x) = e^{-x}\sin 2x$.

6-вариант

1. а) $4y'' - 8y' + 3y = 0$; б) $y'' - 3y' = 0$; в) $y'' - 2y' + 10y = 0$.
2. $y'' + 5y' = 72e^{2x}$.
3. $y'' - 6y' + 13y = 34e^{-3x}\sin 2x$.
4. $y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.
5. $y'' + 3y - 4y = f(x)$; а) $f(x) = 3xe^{-4x}$; б) $f(x) = x\sin x$.

7-вариант

1. а) $y'' + 4y' + 20 = 0$; б) $y'' - 3y' - 10y = 0$; в) $y'' - 16y = 0$.
2. $y'' - 5y' - 6y = 3\cos + 19\sin x$.
3. $y'' + 2y' - 3y = (12x^2 + 6x - 4)e^{x}$.
4. $y'' + 10y' + 34y = -9e^{-5x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$.
5. $y'' + 36y = f(x)$; а) $f(x) = 4xe^{-x}$; б) $f(x) = 2\sin 6x$.

8-вариант

1. а) $9y'' + 6y' + y = 0$; б) $y'' - 4y' - 21y = 0$; в) $y'' + y = 0$.
2. $y'' - 8y' + 12y = 36x^4 - 96x^3 + 24x^2 + 16x - 2$.
3. $y'' + 4y' + 4y = 6e^{-2x}$.
4. $y'' - 6y' + 25y = (32x - 12)\sin x - 36x\cos 3x$.
5. $y'' - 6y' + 9y = f(x)$; а) $f(x) = (x - 2)e^{3x}$; б) $f(x) = 4\cos x$.

9-вариант

1. а) $2y'' + 3y' + y = 0$; б) $y'' + 4y' + 8y = 0$; в) $y'' - 6y' + 9y = 0$.
2. $y'' + 8y' + 25y = 18e^{5x}$.
3. $y'' + 3y' = 10 - 6x$.
4. $y'' + 25y = e^{x}(\cos 5x - 10\sin 5x)$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -4$.
5. $4y'' - 5y' + y = f(x)$; а) $f(x) = (4x + 2)e^{x}$; б) $f(x) = e^{x}\sin 3x$.

10-вариант

1. а) $y'' - 10y' + 21y = 0$; б) $y'' - 2y' + 2y = 0$; в) $y'' + 4y' = 0$.
2. $y'' - 9y' + 20y = 126e^{-2x}$.
3. $y'' + 10y' + 25y = 40 + 52x - 240x^2 - 200x^3$.
4. $y'' + 2y' + 5y = -8e^{-x}\sin 2x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$.
5. $4y'' + 7y' - 2y = f(x)$; а) $f(x) = 3e^{-2x}$; б) $f(x) = (x - 1)\cos 2x$.

11-вариант

1. а) $y'' + 6y' = 0$; б) $y'' + 10y' + 29y = 0$; в) $y'' - 8y' + 7y = 0$.
2. $y'' + 36y' = 63 + 66x - 36x^3$.
3. $y'' + 4y' + 20y = 4\cos 4x - 52\sin 4x$.
4. $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
5. $y'' - y' - 6y = f(x)$; а) $f(x) = 2e^{3x}$; б) $f(x) = 9\cos x - \sin x$.

12-вариант

1. а) $y'' + 25y = 0$; б) $y'' + 6y' + 9y = 0$; в) $y'' + 2y' + 2y = 0$.
2. $y'' + y' = -4\cos x - 2\sin x$.
3. $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$.
4. $y'' + y' - 12y = (16x + 22)e^{4x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$.
5. $y'' - 16y = f(x)$; а) $f(x) = -3e^{4x}$; б) $f(x) = \cos x - 4\sin x$.

13-вариант

1. а) $y'' - 3y' = 0$; б) $y'' - 7y' - 8y = 0$; в) $y'' + 4y' + 13y = 0$.
2. $y'' + 2y' - 24y = 6\cos 3x - 33\sin 3x$.
3. $y'' + 2y' + y = (12x - 10)\cdot e^{-x}$.
4. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
5. $y'' - y' = f(x)$; а) $f(x) = (x - 2)e^{4x}$; б) $f(x) = 3\cos 4x$.

14-вариант

1. а) $y'' - 3y' - 4y = 0$; б) $y'' + 6y' + 13y = 0$; в) $y'' + 2y' = 0$.
2. $y'' + 6y' + 13y = -75\sin 2x$.
3. $y'' - 4y = (-24x - 10)e^{2x}$.
4. $y'' + 8y' + 16y = 16x^3 + 24x^2 - 10x + 8$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.
5. $y'' - 2y' + 2y = f(x)$; а) $f(x) = (2x - 3)e^{4x}$; б) $f(x) = e^x\sin x$.

15-вариант

1. а) $2y'' + 25y' = 0$; б) $y'' - 10y' + 16y = 0$; в) $y'' - 8y' + 16y = 0$.
2. $y'' + 5y' = 39\cos 3x - 105\sin 3x$.
3. $y'' + 6y' + 9y = 72e^{3x}$.
4. $y'' - 2y' + 37y = 36e^x\cos 6x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$.
5. $5y'' - 6y' + y = f(x)$; а) $f(x) = x^2e^x$; б) $f(x) = \cos x - \sin x$.

16-вариант

1. а) $y'' - 3y' - 18y = 0$; б) $y'' - 6y' = 0$; в) $y'' + 2y' + 5y = 0$.
2. $y'' - 4y' + 29y = 104\sin 5x$.
3. $y'' + 16y = 80e^{2x}$.
4. $y'' - 8y' = 16 + 48x^2 - 128x^3$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 14$.
5. $5y'' + 9y' - 2y = f(x)$; а) $f(x) = x^3 - 2x$; б) $f(x) = 2\sin 2x - 3\cos 2x$.

17-вариант

1. а) $y'' - 6y' + 13y = 0$; б) $y'' - 2y' - 15y = 0$; в) $y'' - 8y' = 0$.
2. $y'' - 4y' + 5y = (24\sin x + 8\cos x)\cdot e^{2x}$.
3. $y'' + 4y' = 15e^x$.
4. $y'' + 12y' + 36y = 72x^3 - 18$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
5. $y'' - 2y' - 15y = f(x)$; а) $f(x) = 4xe^{3x}$; б) $f(x) = x\sin 5x$.

18-вариант

1. а) $y'' + 2y' + y = 0$; б) $y'' + 6y' + 25y = 0$; в) $y'' - 4y' = 0$.
2. $y'' + 16y' = 8\cos 4x$.
3. $y'' + 2y' + y = (18x + 8)e^{-x}$.
4. $y'' + 3y' = (40x + 58)e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
5. $y'' - 3y' = f(x)$; а) $f(x) = 2x^3 - 4x$; б) $f(x) = 2e^{3x}\cos x$.

19-вариант

1. а) $y'' + 10y' = 0$; б) $y'' - 6y' + 8y = 0$; в) $4y'' + 4y' + y = 0$.
2. $y'' + 9y = 9x^4 + 12x^2 - 17$.
3. $y'' - 14y' + 49y = 144\sin 7x$.
4. $y'' - 9y' + 18y = 26\cos x - 8\sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
5. $y'' - 7y' + 12y = f(x)$; а) $f(x) = xe^{3x} + 2e^x$; б) $f(x) = 3x\sin 2x$.

20-вариант

1. а) $y'' + 5y = 0$; б) $9y'' - 6y' + y = 0$; в) $y'' + 6y' + 8y = 0$.
2. $y'' - 12y' + 40y = 2e^{6x}$.
3. $y'' + y' - 2y = 9\cos x - 7\sin x$.
4. $y'' + 8y' = 18x + 60x^2 - 32x^3$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 2$.
5. $y'' + 9y' = f(x)$; а) $f(x) = x^2 + 4x - 3$; б) $f(x) = xe^{2x}\sin x$.

21-вариант

1. а) $y'' + 6y' + 10y = 0$; б) $y'' - 4y' + 4y = 0$; в) $y'' - 5y' + 4y = 0$.

2. $y'' + 4y' = e^{x}(24\cos 2x + 2\sin 2x)$.

3. $y'' + 9y = 10e^{3x}$.

4. $y'' - 3y' + 2y = -\sin x - 7\cos x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 7$.

5. $y'' - 4y' + 5y = f(x)$; а) $f(x) = -2xe^{x}$; б) $f(x) = x\cos 2x - \sin 2x$.

22-вариант

1. а) $y'' - y = 0$; б) $4y'' + 8y' - 5y = 0$; в) $y'' - 6y' + 10y = 0$.

2. $y'' + 2y' + y = 6e^{-x}$.

3. $4y'' - 4y' + y = -25\cos x$.

4. $y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1$.

5. $y'' + 3y' + 2y = f(x)$; а) $f(x) = (3x - 7)e^{-x}$; б) $f(x) = \cos x - 3\sin x$.

23-вариант

1. а) $y'' + 8y' + 25y = 0$; б) $y'' + 9y' = 0$; в) $9y'' + 3y' - 2y = 0$.

2. $y'' + 2y' + 37y = 37x^2 - 33x + 74$.

3. $3y'' - 5y' - 2y = 6\cos 2x + 38\sin 2x$.

4. $y'' + 16y = 32e^{4x}$.

5. $y'' - 8y' + 16y = f(x)$; а) $f(x) = 2xe^{4x}$; б) $f(x) = \cos 4x + 2\sin 4x$.

24-вариант

1. а) $6y'' + 7y' - 3y = 0$; б) $y'' + 16y = 0$; в) $4y'' - 4y' + y = 0$.

2. $6y'' - y' - y = 3e^{2x}$.

3. $y'' + 4y' + 29y = 26e^{-x}$.

4. $y'' + 5y' + 6y = 52\sin x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = -2$.

5. $y'' + y' - 2y = f(x)$; а) $f(x) = (2x - 1)e^{-x}$; б) $f(x) = 3x\cos 2x$.

25-вариант

1. а) $9y'' - 6y' + y = 0$; б) $y'' + 12y' + 37y = 0$; в) $y'' - 2y' = 0$.

2. $2y'' + 7y' + 3y = 222\sin 3x$.

3. $4y'' + 3y' - y = 11\cos x - 7\sin x$.

4. $y'' - 4y' = 8e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -8$.

5. $y'' + 3y' - 4y = f(x)$; а) $f(x) = 6xe^{-x}$; б) $f(x) = x^2\sin 2x$.

11-§. Тўртинчи мустақил уй иши

Мустақил уй ишининг ҳар бир вариантида тўртта мисол бўлиб уларнинг шарти қуйидагича:

1-мисолда: берилган чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламанинг хусусий ечимини топиш керак.

2-мисолда: берилган дифференциал тенгламалар системасини икки усул билан ечиш керак:

а) юқори тартибли дифференциал тенглама кўринишига келтириб;

б) характеристик тенглама тузиш ёрдамида.

3-мисолда: дифференциал тенгламани ихтиёрий ўзгармасларни вариациялаш усули билан ечиш керак.

4-масала шарти вариантда берилган.

Қуйида вариант мисолларининг ечиш намунасини келтирамиз.

1. Ушбу

$$y^{IV} - y = 0$$

чизиқли бир жинсли бўлган дифференциал тенгламанинг $y(0) = 5$, $y'(0) = 3$, $y''(0) = y'''(0) = 0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

Ечиш. Тенгламанинг характеристик тенгламасини тузамиз ва уни ечамиз:

$$\lambda^4 - 1 = 0\,,\ (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0\,,\ \lambda_1 = -1\,,\ \lambda_2 = 1\,,\ \lambda_{3,4} = \pm i\,.$$

Берилган тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{x} + C_3\cos x + C_4\sin x$$

кўринишда бўлади. y', y'', y''' ҳосилаларни топамиз:

$$y' = -C_1e^{-x} + C_2e^{x} - C_3\sin x + C_4\cos x\,,$$

$$y'' = C_1e^{-x} + C_2e^{x} - C_3\cos x - C_4\sin x\,,$$

$$y''' = -C_1e^{-x} + C_2e^{x} + C_3\sin x - C_4\cos x\,.$$

C_1, C_2, C_3, C_4 ларнинг қийматларини аниқлаш учун бошланғич шартдан фойдаланиб, қуйидаги системани тузамиз ва уни ечамиз:

$$\left.\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &= 5,\\ -C_1 + C_2 + C_4 &= 3,\\ C_1 + C_2 - C_3 &= 0,\\ -C_1 + C_2 - C_4 &= 0 \end{aligned}\right| \quad \left.\begin{aligned} 2C_1 + 2C_2 &= 5,\\ -2C_1 + 2C_2 &= 3, \end{aligned}\right\}$$

бундан $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = 2$, $C_3 = \frac{5}{2}$, $C_4 = \frac{3}{2}$.

Берилган тенгламанинг хусусий ечими

$$y = \tfrac{1}{2} e^{-x} + 2e^{x} + \frac{5}{2}\cos x + \frac{3}{2}\sin x$$

кўринишда бўлади.

2. Ушбу

$$\left.\begin{aligned} x' &= -7x + y,\ x = x(t),\ x' = \frac{dx}{dt},\\ y' &= -2x - 5y,\ y = y(t),\ y' = \frac{dy}{dt} \end{aligned}\right\}$$

дифференциал тенгламалар системасини икки усул билан ечинг:

а) юқори тартибли дифференциал тенглама кўринишига келтириб;

б) характеристик тенглама тузиш ёрдамида.

Ечиш. а) Берилган системанинг биринчи тенгламасини x бўйича дифференциаллаймиз:

$$x'' = -7x' + y'.$$

Энди y' ўрнига иккинчи тенгламадаги ифодасини қўямиз:

$$x'' = -7x' - 2x - 5y.$$

Бу тенгламадаги y ўрнига $y = x' + 7x$ ни қўямиз. Натижада $x(t)$ номаълум функцияга нисбатан иккинчи тартибли дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз:

$$x'' = -7x' - 2x - 5(x' + 7x),\ x'' + 12x' + 37x = 0.$$

Охирги тенгламани бизга маълум бўлган усул (7-§ га қаранг) билан ечамиз:

$$\lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0,\ \lambda_{1,2} = -6 \pm \sqrt{36 - 37} = -6 \pm i,$$

$$x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

Бунинг ҳосиласини топамиз:

$$x' = -6e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-6t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t).$$

$y = x' + 7x$ тенгламага x ва x' нинг қийматларини қўямиз:

$$y' = -6e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + 6e^{-6t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) +$$
$$+7e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

Демак, изланаётган ечим

$$x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t),$$

$$y = e^{-6t}(C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\cos t + \sin t))$$

функциялардан иборат бўлади.

б) Системанинг характеристик тенгламасини тузамиз ва уни ечамиз:

$$\begin{vmatrix} -7-\lambda & 1 \\ -2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ (7 + \lambda)(5 + \lambda) + 2 = 0,$$

$$\lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0,\ \lambda_{1,2} = -6 \pm i.$$

$\lambda_1 = -6 + i$ учун (7-§ даги 2-мисолга қаранг) қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} (-7 + 6 - i)\alpha + \beta &= 0,\\ -2\alpha + (-5 + 6 - i)\beta &= 0, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} -(1 + i)\alpha + \beta &= 0,\\ -2\alpha + (-1 - i)\beta &= 0. \end{aligned}\right\}$$

$\alpha = 1$ деб, $\beta = 1 + i$ ни топамиз. У ҳолда берилган тенгламанинг биринчи хусусий ечими

$$x_1 = e^{(-6+i)t},\ y_1 = (1 + i)e^{(-6+i)t}$$

бўлади.

$\lambda_2 = -6 - i$ учун система

$$\left.\begin{aligned}(-7+6+i)\alpha+\beta=0,\\ -2\alpha+(-5+6-i)\beta=0,\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}(-1+i)\alpha+\beta=0,\\ -2\alpha+(1+i)\beta=0\end{aligned}\right\}$$

кўринишда бўлади. $\alpha = 1$ деб, $\beta = 1 - i$ ни топамиз, натижада берилган тенгламанинг иккинчи хусусий ечими

$$x_2 = e^{(-6-i)t},\ \ y_2 = (1-i)e^{(-6-i)t}$$

ни топамиз.

Қуйидаги

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1+x_2}{2},\ \ \bar{x}_2 = \frac{x_1-x_2}{2i},$$

$$\bar{y}_1 = \frac{y_1+y_2}{2},\ \ \bar{y}_2 = \frac{y_1-y_2}{2i}$$

формула ёрдамида $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{y}_1$ ва $\bar{y}_2$ фундаментал ечимлар системасини топамиз. Унинг учун Эйлер формуласи

$$e^{(\alpha\pm\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t \pm \sin\beta t)$$

дан фойдаланиб

$$\bar{x}_1 = e^{-6t}\cos t,\ \ \bar{x}_2 = e^{-6t}\sin t,$$

$$\bar{y}_1 = e^{-6t}(\cos t - \sin t),\ \ \bar{y}_2 = e^{-6t}(\cos t + \sin t)$$

ларни топамиз.

Берилган системанинг умумий ечими

$$x = C_1\bar{x}_1 + C_2\bar{x}_2,\ \ y = C_1\bar{y}_1 + C_2\bar{y}_2$$

кўринишда бўлади, яъни

$$x = e^{-6t}(C_1\cos t + C_2\sin t),$$

$$y = e^{-6t}(C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\cos t + \sin t)).$$

3. Ушбу

$$y'' - y = \frac{2e^x}{e^x-1}$$

дифференциал тенгламани ихтиёрий ўзгармасни вариациялаш усули билан ечинг.

Ечиш. Берилган тенгламага мос бир жинсли тенгламани ечамиз:

$$y'' - y = 0,\ \lambda^2 - 1 = 0,\ \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1.$$

Бир жинсли тенгламанинг умумий ечими:

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{x}.$$

C_1 ва C_2 ларни x га боғлиқ функция деб ҳисоблаймиз, яъни

$$y = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{x}.$$

$C_1(x)$ ва $C_2(x)$ ларни ((7.38) системага қаранг)

$$\left.\begin{aligned}C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{x} = 0,\\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x)\end{aligned}\right\}$$

системадан аниқлаймиз, берилган тенглама учун:

$$\left.\begin{aligned}C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{x} = 0,\\ C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{x} = \frac{2e^x}{e^x-1}.\end{aligned}\right\}$$

Бундан $C_1'(x)$ ва $C_2'(x)$ ни, сўнгра $C_1(x)$, $C_2(x)$ ларни топамиз:

$$2C_2'(x)e^{x} = \frac{2e^x}{e^x-1},\ \ C_2'(x) = \frac{1}{e^x-1}$$

$$2C_2(x) = \int\frac{dx}{e^x-1}\left|\begin{matrix}t = e^x, & x = \ln t\\ dx = \frac{dt}{t} & \end{matrix}\right| = \int\frac{dt}{t(t-1)} = \int\frac{dt}{t-1} - \int\frac{dt}{t} =$$

$$= \ln|t-1| - \ln|t| + C_2 = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + C_2 = \ln\left|\frac{e^x-1}{e^x}\right| + C_2,$$

$$C_1'(x) = -C_2'(x)e^{2x} = -\frac{e^{2x}}{e^x-1},$$

$$C_1(x) = -\int\frac{e^{2x}}{e^x-1}dx\left|\begin{matrix}t = e^x, & dt = e^x dx\\ x = \ln t & \end{matrix}\right| =$$

$$= -\int\frac{t\,dt}{t-1} = -\int\frac{t-1+1}{t-1}dt = -t - \ln|t-1| + C_1 = -e^x - \ln|e^x-1| + C_1.$$

Демак, (7.37) формулага асосан берилган тенгламанинг умумий ечими қуйидагича бўлади:

$$y = (-e^{-x} - \ln\left|e^x - 1\right| + C_1)e^{-x} + \left(\ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x}\right| + C_2\right)e^x =$$

$$= C_1e^{-x} + C_2e^x + e^x\ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x}\right| - e^{-x}\ln\left|e^x - 1\right| - 1 .$$

4. $P(1;2)$ нуқтадан ўтувчи ва қуйидаги хоссага эга бўлган эгри чизиқ тенгламасини ёзинг: эгри чизиқ ихтиёрий нуқтаси $M(x;y)$ нинг радиус-вектори ва бу нуқтада ўтказилган уринма ҳамда абсциссалар ўқи билан чегараланган учбурчакнинг юзи 2 га тенг (70-чизма).

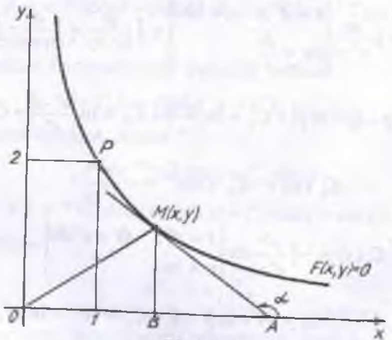
Ечиш. 70-чизмадан: $|OA| = |OB| + |AB| = x + |AB|$. Учбурчак BMA дан:

$$\frac{|BA|}{y} = \text{ctg}(\pi - \alpha) = -\text{ctg}\alpha\,,\ \ |BA| = -y\text{ctg}\alpha\,,$$

$$|BA| = -\frac{y}{\text{tg}\alpha} = -\frac{y}{\frac{dy}{dx}} = -y\frac{dx}{dy}\,,\ \ |OA| = |OB| + |BA| = x - y\frac{dx}{dy}\,.$$

Масала шартига кўра:

$$S_{OMA} = 0,5\cdot|OA|\cdot|MB| = 2\,.$$



70-чизма.

Бунга $|OA|$ ва $|MB|$ ларнинг қийматларини қўйсак, қуйидаги

$$\frac{1}{2}\left(x - y\frac{dx}{dy}\right)\cdot y = 2,\ \ xy - y^2\frac{dx}{dy} = 4,\ \ y^2\frac{dx}{dy} = xy - 4\,.$$

$$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = -\frac{4}{y^2}$$

тенгламага, яъни $x = x(y)$ функцияга нисбатан биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламага эга бўламиз. Уни $x = uv$ алмаштириш ёрдамида ечамиз:

$$u'v + uv' - \frac{uv}{y} = -\frac{4}{y^2}\,,\ \ u'v + u\left(\frac{dv}{dy} - \frac{v}{y}\right) = -\frac{4}{y^2}\,,$$

$$\frac{dv}{dy} - \frac{v}{y} = 0,\ \ \frac{dv}{v} = \frac{dy}{y}\,,\ \ \int\frac{dv}{v} = \int\frac{dy}{y},\ \ \ln|v| = \ln|y|,\ \ v = y,$$

$$\frac{du}{dy}\cdot y = -\frac{4}{y^2}\,,\ \ du = -\frac{4dy}{y^3}\,,\ \ u = \frac{2}{y^2} + C\,,$$

$$x = \left(\frac{2}{y^2} + C\right)y = Cy + \frac{2}{y}\,.$$

Изланаётган эгри чизиқ $P(1;2)$ нуқтадан ўтади, шунинг учун $1 = 2C + 1$, $C = 0$. Демак, унинг тенгламаси $x = \frac{2}{y}$ ёки $xy = 2$, яъни бу эгри чизиқ гиперболадир.

1-вариант

1. $y''' - y' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 4.$

2. $\begin{cases} x' = -2x + y, \\ y' = -3x + 2y. \end{cases}$

3. $y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{1}{xe^x}\,.$

4. Агар эгри чизиқнинг ихтиёрий нуқтасида ўтказилган уринманинг уриниш нуқтаси билан координаталар боши орасидаги масофа уриниш нуқтасининг абсциссасига тенглиги маълум бўлса, шу эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

2-вариант

1. $y^{IV} + 2y''' - 2y' - y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = 8.$

2. $\begin{cases} x' = 6x - y, \\ y' = 3x + 2y. \end{cases}$

3. $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{\cos x}$.

4. Агар эгри чизиқнинг ихтиёрий нуқтасида ўтказилган уринма, уриниш нуқтасидан абсциссалар ўқига туширилган перпендикуляр ва абсциссалар ўқи билан чегараланган учбурчакнинг катетлари йиғиндиси ўзгармас миқдор a га тенглиги маълум бўлса, шу эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

3-вариант

1. $y''' + y'' - 5y' + 3y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -14$.

2. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -6x - 3y. \end{cases}$

3. $y'' - 2y' + 2y = \dfrac{e^{x}}{\sin^2 x}$.

4. Агар эгри чизиқнинг ихтиёрий нуқтасида ўтказилган уринманинг Ox ўқидан ажратган кесмасининг узунлиги уриниш нуқтасининг абсциссасидан икки марта кичик бўлса, шу эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

4-вариант

1. $y''' + y'' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -1$.

2. $\begin{cases} x' = y, \\ y' = x. \end{cases}$

3. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\mathrm{ctg}x$.

4. Агар эгри чизиқнинг ихтиёрий нуқтасида ўтказилган уринма ва нормалнинг Ox ўқидан ажратган кесмаси $2l$ га тенглиги маълум бўлса, шу эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

5-вариант

1. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0$.

2. $\begin{cases} x' = -x - 2y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$

3. $y'' - 2y' + 2y = \dfrac{e^{x}}{\sin x}$.

4. Агар эгри чизиқнинг ихтиёрий нуқтасида ўтказилган уринманинг Ox ўқидан ажратган кесмасининг узунлиги уриниш нуқтаси абсциссасининг $\frac{2}{3}$ қисмига тенглиги маълум бўлса, шу эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

6-вариант

1. $y''' + 3y'' + 2y' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 2$.

2. $\begin{cases} x' = -2y, \\ y' = y. \end{cases}$

3. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^{x}}{x^2}$.

4. Агар эгри чизиқнинг ихтиёрий нуқтасида ўтказилган уринманинг Ox ўқидан ажратган кесмасининг узунлиги уриниш нуқтаси абсциссасининг кубига тенглиги маълум бўлса, $A(2;4)$ нуқтадан ўтувчи шу эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

7-вариант

1. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1$.

2. $\begin{cases} x' = 4x + 2y, \\ y' = 4x + 6y. \end{cases}$

3. $y'' + y = \mathrm{tg}x$.

4. Агар эгри чизиқнинг ихтиёрий нуқтасида ўтказилган уринманинг Oy ўқидан ажратган кесмасининг узунлиги уриниш нуқтасининг абсциссасидан уч марта катталиги маълум бўлса, $A(1;5)$ нуқтадан ўтувчи шу эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

8-вариант

1. $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0,\ y(0) = -2{,}5,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0$.

2. $\begin{cases} x' = 8x - 3y, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$

3. $y'' + 4y = \mathrm{ctg}2x$.

4. $A(1;2)$ нуқтадан ўтувчи ва қуйидаги хоссага эга бўлган эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг: ихтиёрий нуқтаси ординатасининг шу нуқта абсциссасига нисбати изланаётган эгри чизиқнинг шу нуқтасида ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентига пропорционал ва пропорционаллик коэффициенти 3 га тенг.

9-вариант

1. $y''' + 9y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 9$, $y''(0) = -18$.

2. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = x + 3y. \end{cases}$

3. $y'' + y = \mathrm{ctg}x$.

4. Агар эгри чизиқнинг ихтиёрий нуқтасида ўтказилган уринманинг уриниш нуқтасидан Ox ўқи билан кесишган нуқтаси орасидаги масофа уриниш нуқтасидан координаталар бошигача бўлган масофага тенглиги маълум бўлса, шу эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

10-вариант

1. $y''' - 13y'' + 12y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 133$.

2. $\begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = 5x + 4y. \end{cases}$

3. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

4. Агар эгри чизиқнинг ихтиёрий нуқтасида ўтказилган уринма, координата ўқлари ва уриниш нуқтасидан абсциссалар ўқига туширилган перпендикуляр билан чегараланган трапециянинг юзи ўзгармас миқдор $3a^2$ га тенглиги маълум бўлса, шу эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

11-вариант

1. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$, $y'''(0) = 0$.

2. $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 3x + 6y. \end{cases}$

3. $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$.

4. Агар эгри чизиқ ихтиёрий нуқтаси уринмасининг бурчак коэффициенти уриниш нуқтаси ординатасининг квадратига тенглиги маълум бўлса, $A(2; -1)$ нуқтадан ўтувчи шу эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг. Пропорционаллик коэффициенти 6 га тенг.

12-вариант

1. $y^{IV} - 10y'' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 8$, $y'''(0) = 24$.

2. $\begin{cases} x' = 5x + 4y, \\ y' = 4x + 5y. \end{cases}$

3. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.

4. $M(x;y)$ нуқтасида ўтказилган нормал Oy ўқидан узунлиги $\frac{x^2}{y}$ га тенг кесма ажратувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

13-вариант

1. $y''' - y'' + y' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$.

2. $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 4x + 3y. \end{cases}$

3. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.

4. Уринманинг Oy ўқидан ажратган кесмасининг узунлиги уриниш нуқтаси абсциссасининг квадратига тенг бўлган эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

14-вариант

1. $y''' - 3y'' - 3y' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 4$.

2. $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = x + y. \end{cases}$

3. $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$.

4. $M(x;y)$ нуқтасидан ўтказилган нормал Oy ўқидан узунлиги $\frac{y^2}{x}$ га тенг кесма ажратувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

15-вариант

1. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -6.$

2. $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x + 8y. \end{cases}$

3. $y'' + 4y = \mathrm{tg}2x$.

4. Агар эгри чизиқнинг ихтиёрий нуқтасидан координата ўқларига параллел (бу ўқлар билан кесишгунга қадар) тўғри чизиқлар ўтказилса, у ҳолда ҳосил бўлган тўғри тўртбурчакларнинг юзи эгри чизиқ билан икки қисмга бўлинади, қайсики бирини юзи иккинчисиникидан икки марта катта бўлиш хоссасига эга бўлган эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

16-вариант

1. $y^{IV} - 2y''' + y'' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1,\ y'''(0) = 2.$

2. $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = 2x + 3y. \end{cases}$

3. $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}$.

4. $M(x;y)$ нуқтасида ўтказилган нормал Oy ўқини $\frac{y}{x^2}$ га тенг кесмада кесувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

17-вариант

1. $y^{IV} - y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = -4.$

2. $\begin{cases} x' = 7x + 3y, \\ y' = x + 5y. \end{cases}$

3. $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x^3}$.

4. Эгри чизиқнинг ҳар бир нуқтасида ўтказилган уринма абсциссаси уриниш нуқтасининг абсциссасини икки бараварига тенг бўлган нуқтада у = 1 тўғри чизиқ билан кесишади. Шу эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

18-вариант

1. $y^{IV} - 16y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = -8.$

2. $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = -x + 4y. \end{cases}$

3. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$.

4. Ҳамма уринмалари координаталар бошидан ўтувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

19-вариант

1. $y''' + y'' - 4y' - 4 = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 12.$

2. $\begin{cases} x' = 2x + 8y, \\ y' = x + 4y. \end{cases}$

3. $y'' + y = -\mathrm{ctg}2x$.

4. Эгри чизиққа ўтказилган уринмаларнинг Oy ўқи билан уриниш нуқтаси орасидаги кесманинг узунлиги ўзгармас 2 га тенг бўлган ва $A(2;0)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

20-вариант

1. $y''' + 2y'' + 9y' + 18y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -3,\ y''(0) = -9.$

2. $\begin{cases} x' = 5x + 8y, \\ y' = 3x + 3y. \end{cases}$

3. $y'' - y' = e^{2x} - \cos e^x$.

4. Агар Oy ўқи, эгри чизиққа ўтказилган ихтиёрий уринма ва уриниш нуқтасининг радиус-вектори билан чегараланган учбурчак тенг ёнли бўлса, шу эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

21-вариант

1. $y^{V} - y^{IV} + 9y''' = 0,\ y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0,$ $y^{IV}(0) = 27.$

2. $\begin{cases} x' = -5x + 2y, \\ y' = x - 6y. \end{cases}$

3. $y'' - y' = e^{2x} \sin e^{x}$.

4. Эгри чизиқнинг бирор нуқтасида ўтказилган нормалнинг ординаталар ўқи ва эгри чизиқ билан кесишиш нуқтаси орасидаги кесмаси шу нуқта билан кординаталар боши орасидаги кесмага тенглиги маълум бўлса, шу эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

22-вариант

1. $y''' + 2y'' + y' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = -3.$

2. $\begin{cases} x' = 6x + 3y, \\ y' = -8x - 5y. \end{cases}$

3. $y'' + y = \mathrm{tg}^2 x$.

4. Агар эгри чизиққа ўтказилган уринманинг координата ўқлари орасидаги кесмасини уриниш нуқтаси тенг иккига бўлиши маълум бўлса, шу эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

23-вариант

1. $y''' - y'' - y' + y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1.$

2. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = 8x + y. \end{cases}$

3. $y'' + y = \dfrac{2}{\sin^2 x}$.

4. Агар координаталар бошидан уринмага туширилган перпендикулярнинг узунлиги уриниш нуқтасининг абсциссасига тенг бўлса, шу эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

24-вариант

1. $y^{IV} + 5y'' + 4y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 4,\ y''(0) = -1,$ $y'''(0) = -16.$

2. $\begin{cases} x' = x - 5y, \\ y' = -x - 3y. \end{cases}$

3. $y'' + 2y' + 5y = \dfrac{e^{-x}}{\sin 2x}$.

4. Агар эгри чизиққа ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти уриниш нуқтаси ординатасининг учланганлигига тенглиги маълум бўлса, $A(0; -2)$ нуқтадан ўтувчи шу эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

25-вариант

1. $y^{IV} + 10y'' + 9y' = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = -9,$ $y'''(0) = -27.$

2. $\begin{cases} x' = 4x - 8y, \\ y' = -8x + 4y. \end{cases}$

3. $y'' + 9y = \dfrac{1}{\cos 3x}$.

4. Агар эгри чизиқнинг ихтиёрий нуқтасида ўтказилган уринма, уриниш нуқтасидан абсциссалар ўқига туширилган перпендикуляр ва Ox ўқи билан чегараланган учбурчакнинг юзи ўзгармас миқдор b^2 га тенглиги маълум бўлса, шу эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

VIII боб

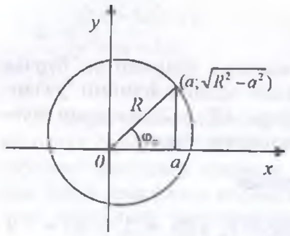
1-§. Олий математика татбиқига дори масалалар

I. Функция ҳақида тушунча.
Энг содда функцияларни текшириш

1.1. Радиуси R ва маркази координаталар бошида бўлган айлана бўйича моддий нуқта v тезлик билан соат стрелкаси йўналишга қарама-қарши йўналишда текис ҳаракатланмоқда. Бошланғич пайтда бу нуқтанинг абсциссаси a ($|a| \leq R$) га тенг, ординатаси эса мусбат. Бу нуқта абсциссасининг тебраниш тенгламасини тузинг. Бошланғич вақт қандай бўлганида бу абсциссанинг модули энг катта бўлади?

Ечиш. Маълумки, нуқта ҳаракатининг тезлиги қуйидаги формула билан топилади:

$$\omega = \frac{v}{R},$$



71-чизма.

бунда ω — *a* нуқтанинг бурчак тезлиги, *v* — унинг илгариланма ҳаракат тезлиги.

Масала шарти ва 71-чизмага кўра:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t = \arccos\frac{a}{R} + \frac{v}{R}t\,.$$

Энди қуйидагиларни топамиз:

а) *M* нуқтанинг абсциссаси *t* нинг функцияси (*x*(*t*)) бўлиб, унинг тебраниш тенгламаси:

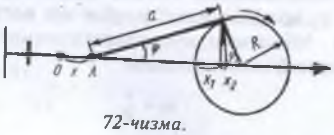
$$x(t) = R\cos\varphi(t) = R\cos\left(\frac{v}{R}t + \arccos\frac{a}{R}\right) =$$

$$= R\left[\frac{a}{R}\cos\frac{v}{R}t - \sqrt{1-\frac{a^2}{R^2}}\sin\frac{v}{R}t\right] = a\cos\frac{v}{R}t - \sqrt{R^2-a^2}\sin\frac{v}{R}t\,.$$

б) $\max|x(t)| = R$ шартдан $\varphi(t) = \pi$, яъни arccos $\frac{a}{R} + \frac{v}{R}t = \pi$ келиб чиқади; бу ердан изланаётган вақт t ни топамиз:

$$t_{\max} = \frac{\pi - \arccos\frac{a}{R}}{\frac{v}{R}} = \frac{R}{v}\arccos\left(-\frac{a}{R}\right).$$

1.2. Кривошип-шатун механизми схемасини қараймиз (72-чизма). Маховикнинг радиуси *R*, шатун узунлиги *a* га тенг. Маховик секундига *n* марта айланиб, соат стрелкаси йўналиши бўйича бир текис ҳаракат қилади (айланади). Шатун ва кривошип $t = 0$ да бир тўғри чизиқни ҳосил қилади (чап “тинч» ҳолатда), *A* нуқта (крейцкопф ёки ползун) *O* нуқта (координаталар боши)да бўлади. *A* нуқта (крейцкопф) *x* кўчишининг *t* вақтга боғлиқлигини текширинг. *x*(*t*) функциянинг максимуми тўғрисида нима дейиш мумкин? Минимуми тўғрисида-чи? Натижаларни чизмадан яққол кўриниб турадиган хулосалар билан таққосланг.



72-чизма.

Ечиш. $x = x_1 + x_2$; $\varphi = \omega\cdot t = 2\pi nt$;

$$x_1 = R - R\cos\varphi = R(1-\cos 2\pi nt)\,;$$

$$x_2 = a - a\cos\psi = a - a\sqrt{1-\sin^2\psi} = a - a\sqrt{1-\left(\frac{R\sin\varphi}{a}\right)^2}\,;$$

$$x(t) = R(1-\cos 2\pi nt) + a - \sqrt{a^2 - R^2\sin^2 2\pi nt}\,.$$

x(*t*) функция ифодасидаги биринчи ва иккинчи қўшилувчилар бир хил нуқталарда $t_{\max} = \frac{1}{2n}$ максимумга эришадилар;

$x(t_{\max}) = R(1+1) + a - \sqrt{a^2 - O} = 2R$ да эса *a* нуқта “тинч” ҳолатда бўлади. Ҳудди шундай хулосани *x*(*t*) функциянинг минимуми учун ҳам чиқариш мумкин.

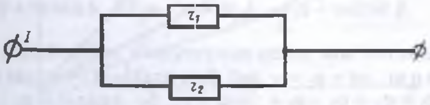
1.3. *I* ток қаршиликлари r_1 ва r_2 бўлган иккита тармоққа қандай тақсимланганда вақт бирлигида ўтказгичнинг қизишига сарф бўлган энергия миқдори ($Q = I^2R$)энг кичик бўлади? Токнинг аслида тақсимланиши билан таққосланг (73-чизма).

Ечиш. r_1 қаршиликдан ўтувчи ток *i* бўлсин, у ҳолда r_2 дан ўтадиган ток $I-i$ га тенг бўлади. Энергиянинг қизишга сарф бўлган умумий йўқотилиши $Q = i^2r_1 + (I-i)^2r_2$ га тенг.

Q(*i*) функциянинг максимумини топиш масаласини ечамиз:

$$Q = i^2r_1 + (I-i)^2r_2 \to \min,\ i \in (-\infty;+\infty)\,,$$

$$Q = (r_1+r_2)i^2 - 2Ir_2i + I^2r_2 = (r_1+r_2)\left(i^2 - \frac{2Ir_2}{r_1+r_2} + \frac{I^2r_2}{r_1+r_2}\right) =$$



73-чизма.

$$= (r_1 + r_2)\left[\left(i - \frac{Ir_2}{r_1+r_2}\right)^2 - \frac{I^2r_2^2}{(r_1+r_2)^2} + \frac{I^2r_2}{r_1+r_2}\right] =$$

$$= (r_1 + r_2)\left(i - \frac{Ir_2}{r_1+r_2}\right)^2 + \frac{r_1r_2I^2}{r_1+r_2} \to \min .$$

Булардан

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= i = \frac{Ir_2}{r_1+r_2}, \\ i_2 &= I - i = \frac{Ir_1}{r_1+r_2} \end{aligned}\right|$$

тенгликка эга бўламиз, яъни $\frac{i_1}{i_2} = \frac{r_2}{r_1}$ — токлар тармоқлар қаршиликларига тескари пропорционал тақсимлангандир.

Токларнинг аслида тақсимланиши эса қуйидагичадир:

$$U = IR,\ \frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2},\ \text{яъни}\ U = I\,\frac{r_1r_2}{r_1+r_2},$$

бундан эса юқоридаги натижани ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= \frac{U}{R_1} = \frac{Ir_2}{r_1+r_2}, \\ i_2 &= \frac{U}{R_2} = \frac{Ir_1}{r_1+r_2}. \end{aligned}\right|$$

1.4. Занжирдаги ток бир хил частотали иккита ўзгарувчан ток генераторидан ҳосил қилинади. Улардаги ток миқдорлари $i_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ ва $i_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$ формулалар билан аниқланади. Бу токлар йиғиндисини топинг.

Мос ҳолда A_1 ва A_2 узунликларга эга бўлган $\bar{A}_1$ ва $\bar{A}_2$ векторларни горизонтал ўққа φ_1 ва φ_2 бурчаклар остида ўтадиган қилиб ясасак, $\bar{A}_1$ ва $\bar{A}_2$ векторларни қўшиб, A узунликдаги ва ўққа φ бурчак остида огган $\bar{A}$ векторни ҳосил қилишимизни кўрсатинг (74-чизма); бунда A ва φ лар

$$A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

йиғиндининг мос ҳолда амплитудаси ва бошланғич фазаси.

Ечиш. $\omega t + \varphi_1 = \gamma$ деб белгилаймиз, у ҳолда $\omega t + \varphi_2 = \gamma - \varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_1 + \gamma = \alpha + \gamma$, бу ерда $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$ (74-чизмага қаранг).

Қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = A_1 \sin\gamma + A_2 \sin(\alpha + \gamma) =$$

$$= A_1 \sin\gamma + A_2 \sin\alpha \cos\gamma + A_2 \cos\alpha \sin\gamma =$$

$$= (A_1 + A_2 \cos\alpha)\sin\gamma + A_2 \sin\alpha \cos\gamma.$$

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$A_1 + A_2 \cos\alpha = B,\ \ A_2 \sin\alpha = C\ .$$

Натижада:

$$B^2 + C^2 = A_1^2 + 2A_1A_2 \cos\alpha + A_2^2 \cos^2\alpha + A_2^2 \sin\alpha =$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\alpha = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos\beta = A^2.$$

74-чизмага кўра:

$$\frac{A_1 + A_2\cos\alpha}{A} = \cos\delta,\ \ \frac{A_2 \sin\alpha}{A} = \sin\delta.$$

У ҳолда

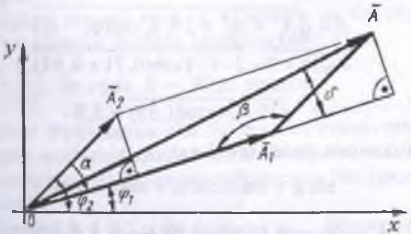
$$A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = A(\cos\delta \sin\gamma + \sin\delta\cos\gamma) =$$

$$= A\sin(\gamma + \delta) = A\sin(\omega t + \varphi_1 + \varphi - \varphi_1) = A\sin(\omega t + \varphi)\ .$$

Векторларнинг хоссалари ва уларнинг проекцияларидан фойдаланиб, бу натижани осонроқ йўл билан ҳосил қилишимиз ҳам мумкин эди.

1.5. Параллел уланган иккита ўзгарувчан ток генератори

$$i_1 = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_1\right),\ \ i_2 = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_2\right)$$



74-чизма.

токлар беради. Шу токларнинг умумий йиғиндисини топинг. Йиғинди токнинг 0 га тенг бўлиши ва энг катта қийматга (абсолют қиймати бўйича) эга бўлиш вақтларини топинг (1.4-масалага қаранг).

Ечиш. Масала шартига кўра $A_1 = A_2 = A$ бўлгани учун $\varphi = \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$. Йиғинди ток I ни $I = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)$ деб ёзиш мумкин.

Бу ерда

$$A = \sqrt{2A^2 + 2A^2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = \sqrt{2}A\sqrt{1 - \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}\ .$$

1) Йиғинди ток қуйидаги ҳолларда 0 га тенг бўлади:

$$\frac{2\pi}{T}t + \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} = k\pi, \text{ яъни } t = \frac{T}{2\pi}\left(k\pi - \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right),$$

$$t = \frac{T}{2}\left(k - \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2\pi}\right),\ k \in Z\ .$$

2) Йиғинди ток қуйидаги ҳолда модули бўйича энг катта бўлади:

$$\frac{2\pi}{T}t + \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} = \pi k + \frac{\pi}{2}, \text{ яъни } t = \frac{T}{2\pi}\left(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right),$$

$$t = \frac{T}{2}\left(k + \frac{1}{2} - \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2\pi}\right),\ k \in Z\ .$$

1.6. $y_1 = 4,0\sin(t + 0,64)$ ва $y_2 = 3,0\sin(t - 0,71)$ тўлқинларнинг интерференциясини тавсифланг, яъни йиғинди тебранишларнинг амплитудаси ва бошланғич фазасини топинг (1.4-масалага қаранг).

Ечиш. Амплитуда:

$$A = \sqrt{A_1^{\ 2} + A_2^{\ 2} + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} =$$

$$= \sqrt{16 + 9 + 2\cdot 4\cdot 3\cos(0,71 + 0,64)} =$$

$$\sqrt{25 + 24\cos(1,35)} \approx 5,5\ .$$

Бошланғич фаза: $\varphi = \delta + \varphi_1$,

$$\sin\varphi = \sin\delta\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1\cos\delta =$$

$$= \frac{1}{A}\left[A_2\sin(\varphi_2 - \varphi_1)\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1(A_1 + A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)\right] =$$

$$= \frac{1}{A}\left[A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2\right];$$

$$\sin\varphi = \frac{1}{5,5}\left[3\sin(-0,71) + 4\sin 0,64\right] = 0,062\ ;$$

бу ердан $\varphi = 0,06$.

2. Функциялар графигини чизиш

2.1. Импульслар генератори пайдо қиладиган қуйилаги кучланиш осциллограммаларини формула орқали ёзинг (75-чизмага қаранг)

Жавоблар:

а) $u(t) = \frac{A}{h}(t - \tau),\ \tau \le t \le \tau + h$, даври $T = h$;

б) $u(t) = \begin{cases} A, & \tau \le t \le \tau + h, \\ O, & \tau + h \le t \le \tau + 2h, \end{cases}\quad T = 2h$;

в) $u(t) = \frac{A-a}{h}|t - \tau| - a,\ \tau - h \le t \le \tau + h\ \ T = 2h$;

г) $u(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\sin\frac{2\pi}{T}(x + c)$;

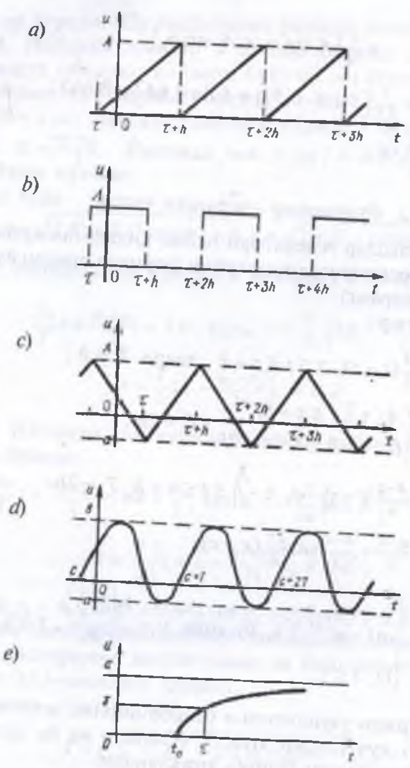
д) $u(t) = \begin{cases} a(1 - e^{-\nu(t-t_0)}), \text{ бу ерда } \nu = \dfrac{\ln\left(1 - \frac{\gamma}{a}\right)}{\tau - t_0}, & t \ge t_0,; \\ O, & t \le t_0. \end{cases}$

2.2. Стержен узунлигига σ (бирор бирлик юзга таъсир этувчи куч) куч таъсир этса, у чўзилади ва бу чўзилиш узунлиги Гук қонуни бўйича аниқланади:

$l = l_0\left(1 + \frac{\sigma}{E}\right)$, бу ерда E — Юнг модули.

l ни σ нинг функцияси деб бу функциянинг графигини ясанг. Аргументнинг қандай қийматларида $l = l(\sigma)$ тўғри чизиқ узунликнинг кучланишига бевосита боғлиқлигини акс эттиради?

Жавоб. $0 \le \sigma \le \sigma_{max}$, бу ерда $\sigma = \sigma_{max}$ бўлганда стерженнинг пластик деформацияси (узилиши) бошланади.



75-чизма.

2.3—2.7 масалаларни ечишда қуйидагилар талаб қилинади:

а) текширилаётган катталик (миқдор) нинг ўлчамини текшириш;

б) аргументнинг қандай қийматларида берилган функция аниқ физик боғланишни акс эттиришини кўрсатиш;

в) функциянинг графигини ясаш;

г) графикдан фойдаланиб берилган боғланишни текшириш; қўйилган саволларга жавоб бериш.

2.3. Актив (омик) қаршиликсиз тебраниш контуридаги электр тебранишлари В.Томсон формуласи билан берилади: $T = 2\pi\sqrt{LC}$, бу ерда L — индуктивлик, C — сиғим. T ни C нинг функцияси деб графигини ясанг.

2.4. Иккита параллел актив (омик) қаршиликлардан иборат занжир бўлагининг қаршилиги $R = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$ га тенг. R ни r_2 нинг функцияси деб (яъни r_1 ни ўзгармас деб ҳисоблаб) графигини ясанг. Бу графикнинг горизонтал асимптотаси борлигини физик нуқтаи назардан талқин этинг.

Жавоб. r_2 чексиз ортганда R қаршилик r_1 га яқинлашади, буни r_2 қаршиликдан иборат занжир бўлагининг узилиши каби талқин этиш мумкин.

2.5. Ер сиртидан h баландликдаги массаси m га тенг жисмнинг Ерга тортилиш кучи (яъни жисмнинг оғирлиги) Ньютон қонуни бўйича, шунингдек, массалари M ва m бўлган сферик-симметрик жисмлар, бу жисмлар марказларига жойлашган M ва m нуқтавий массалар каби тортишади, деган теоремага кўра $P = f\frac{Mm}{(R+h)^2}$ га тенг.

Бу ерда M ва R мос ҳолда Ернинг массаси ва радиуси, $f = 6,67 \cdot 10^{-11}\,\text{Н}\,\frac{\text{м}^2}{\text{кг}^2}$ — гравитацион доимий. P ни h нинг функцияси деб графигини ясанг.

2.6. 1 моль (1 грамм молекула) газнинг изотермик жараёнда бажарган иши $A = RT\ln\frac{v_2}{v_1}$ га тенг, бу ерда v_1 — газнинг бошланғич ва v_2 — охирги (натижавий) ҳажмлари.

T — температура (Кельвин бўйича);

R — универсал газ доимийси (R = 2 кал/град моль).

A ни ϑ нинг функцияси деб графигини ясанг.

2.7 Ҳаво босими P нинг баландлик h га боғлиқ ҳолда ўзгариши

$$P = P_0 e^{-\frac{\gamma_0 h}{kT}}$$

барометрик формула билан ифодаланади, бу ерда P_0 ва γ_0 лар $h = 0$ баландликдаги мос ҳолда босим ва солиштирма оғирлик.

T — температура (Кельвин бўйича);

k — Больцман доимийси ($k = 1,4 \cdot 10^{-16}$ эрг/град);

$T = \text{const}$ бўлганда p ни h нинг функцияси деб графигини ясанг.

Бу функция монотонлигининг физикавий талқини қандай?

$T = \text{const}$ шартнинг физикавий талқини қандай?

2.8. $I = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$ синусоидал ток:

а) битта ярим даврли $I = \max(0, I_0 \sin(\omega t + \varphi))$ тўғриланишда;

б) иккита ярим даврли $I = \left|I_0 \sin(\omega t + \varphi)\right|$ тўғриланишда ўзгарадиган токнинг графигини ясанг.

Бу ҳолларда ўзгарувчан токнинг энг кичик даври қандай?

2.9. Қаршиликка етиб келадиган синусоидал токнинг қуввати ("оний қувват" деб ҳам аталади)

$$W = U_0 I_0 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

га тенг. W ни t нинг функцияси деб графигини ясанг. Қувватнинг чўққилари такрорланиш частотаси f қандай?

Жавоб: $f = \frac{\omega}{\pi}$.

2.10. R қаршилик, L индуктивлик ва ЭЮК манбаи кетма-кет уланган занжир туташтирилганда (бошланғич ток йўқ: $I(t_0) = 0$) қуйидаги ток вужудга келади:

$$I = \frac{E}{R}\left[1 - e^{-\frac{R}{L}(t - t_0)}\right], \quad t \geq t_0.$$

I ни t нинг функцияси деб графигини ясанг. Бу ҳолда горизонтал асимптотанинг мавжудлигига қандай физикавий талқин бериш мумкин? R қаршилик катталиги ўзгарганда график кўриниши қандай ўзгаради? L ўзгарганда-чи? E ўзгарганда-чи?

Жавоб. Асимптотанинг мавжудлиги вақт ортиши билан ток ўзининг барқарорлашган $I_\infty = \frac{E}{R}$ қийматига яқинлаша бориб, деярли доимий (ўзгармас) бўлиб қолиши билан талқин қилинади. Занжирнинг I_∞ эса актив (омик) қаршилигидан аниқланади

2.11. f частотали бирор асбобнинг кўрсатишлари x ва $x + h$ оралиқларида ётади. Кичик h ларда бу частота қуйидагиларга тенг бўлади:

а) $f = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \cdot h$ Гаусснинг нормал қонуни (параметрлари m, σ бўлган);

б) $f = \frac{h}{\pi\left[1+(x-m)^2\right]}$ (Коши қонуни).

f ни x нинг функцияси деб графигини ясанг. Бу ҳолларда асбобларнинг энг тез-тез учрайдиган кўрсатишлари қандай? m параметрнинг қийматлари ўзгарганда графикларнинг кўриниши қандай ўзгаради?

2.12. Сўнувчи $I(t) = I_0 e^{-kt} \cos(\omega t + \varphi)$ (ω — частота, φ — бошланғич фаза, k — сўниш декременти) токнинг графигини ясанг. Токнинг сўнишини $\left|I(t)\right| \leq 0,05 I_0$ ҳолда амалий жиҳатдан рўй берган деб, $k = 1$, $\omega = 2, \varphi = \frac{\pi}{4}$ ҳол учун T нинг қайси қийматидан бошлаб тақрибан сўниш рўй беришини баҳоланг.

Ечиш. $e^{-T} \leq 0,05$ дан: $T \geq \ln 20 \approx 3$. Амалий жиҳатдан $T = 3$ деб олиш мумкин.

2.13. Актив қаршилик бўлмаган занжир манбадан қабул қилгичга бериладиган қувват максимуми (вақт бўйича)

$$W = \frac{E^2}{2z_0\left[1+\cos(\varphi - \varphi_0)\right]}$$

ифода билан аниқланади, бу ерда $E, z_0, \varphi, \varphi_0$ — занжирнинг турли характеристикалари (E – ЭЮК; z_0 — бу ҳолда манба қаршилиги; φ ва φ_0 — мос ҳолда манба ва нагрузка қаршиликларининг аргументлари).

W ни φ нинг функцияси деб графигини ясанг.

Нагрузка ва манба қаршиликлари аргументлари тенг бўлганда бериладиган қувват максимуми энг кичик бўлишини кўрсатинг. Бу аргументлар орасида қандай муносабат бўлганда бу максимум энг катта бўлади?

Бу натижалар қандай талқин этилади?

Кўрсатма. $W(\varphi_{\max}) = W_{\max} = \infty$, бу ерда $\varphi_{\max} - \varphi_0 = \pi$. Ҳар иккала хулоса ($W_{\min}$ ва $W_{\max}$ га нисбатан) актив (омик) қаршилик йўқ деган фараз орқали тушунтирилади. Масалан, бу ҳолда (манба ва нагрузка қаршиликларининг аргументлари тенглигини ҳисобга олиб) бўлганда (қаршиликлар қарама-қарши фазада бўлганда) занжирнинг умумий қаршилиги 0 га тенг бўлади, берилаётган қувват чексиз бўлади.

2.14. Бирор (Ван-дер-Поль системасида) механик система тебранишларининг амплитудаси ўзгариш қонуни қуйидагича ифодаланади:

$$\rho = \frac{2}{\sqrt{1+Ce^{-\mu t}}},$$

бу ерда C — бошланғич шартларга боғлиқ бўлган ўзгармас; μ — система параметри. ρ ни t нинг функцияси деб графигини ясанг.

2.15. Стержен ўқи билан φ бурчак ташкил этувчи ва r масофада стержен йўналишдаги магнит майдонининг кучланганлиги $H = \frac{ml}{\mu r^3}\sqrt{1+3\cos^2\varphi}$ га тенг, бу ерда

m — магнит массаси;

l — стерженнинг узунлиги ($l < r$);

μ — муҳитнинг магнит сингдирувчанлиги.

H ни φ нинг $\left(-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right)$ функцияси деб графигини ясанг.

2.16. Адиабатик жараёнда газнинг p босими ва T температураси орасидаги боғланиш $\rho T^{\frac{\chi}{1-\chi}} = C(= \text{const})$ тенглик билан берилади, бу ерда $\chi > 1$ — адиабата кўрсаткичи.

ρ ни T нинг функцияси деб графигини ясанг. $\chi > 1$ нинг турли қийматларига мос келувчи графиклар ўзаро қандай жойлашган?

2.17. Ўзгарувчан ток занжиридаги ток ва кучланиш орасидаги фаза сурилиши қуйидаги тенглик билан аниқланади:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R},$$

бу ерда R — занжирнинг актив (омик) қаршилиги; L — индуктивлик; C — сиғим, ω — бурчак частотаси.

φ ни:

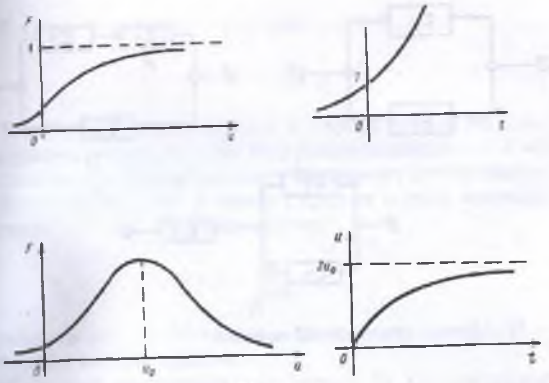
а) L нинг функцияси деб;

в) C нинг функцияси деб;

с) ω нинг функцияси деб графигини ясанг.

Учала функциянинг монотонлигини изоҳлаб беринг.

2.18. Синус-кучланиш ўзгартиргичининг (киришдаги кучланиш u бўлганда чиқишда $V = \sin u$ кучланиш ҳосил қилади) киришига 2π даврга эга бўлган даврий кучланиш берилган. Бу кучланиш $-\pi \le t \le \pi$ да $u(t) = t^2$ га тенг. V ни t нинг функцияси деб графигини ясанг.



76-чизма.

2.19. Косинус-кучланиш ўзгартиргичининг ($V = \cos u$) киришига $u = 0{,}5\sin(2t + 1)$ кучланиш берилган. Чиқиш кучланиши $V = V(t)$ нинг графигини ясанг.

2.20. Ўзгартиргич-квадратор ($V = 2u^2$) киришига $u = 2(1 - e^{-t})$ кучланиш берилган. $V(t)$ нинг графигини ясанг.

2.21. Агар $F(u)$ ва $f(t)$ функциялар 76-чизмадаги графиклар билан берилган бўлса, у ҳолда кучланиш ўзгартиргичнинг ($V = F(u)$) киришига $u = f(t)$ кучланиш берилганда унинг чиқишдаги кучланиш графигини ясанг.

3. Лимитлар

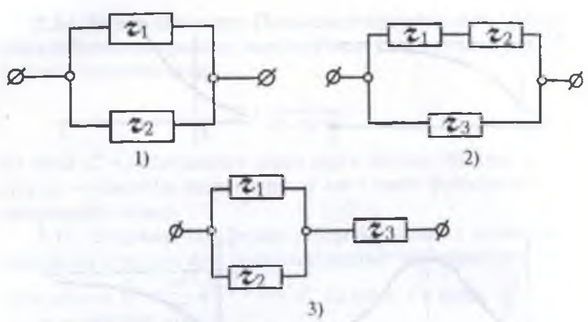
3.1. 77-чизмадаги учта чизма тасвирланган занжир (r_1, r_2 ва ҳ.к. қаршиликлардан тузилган занжир) нинг умумий қаршилиги R ни топинг.

R нинг қиймати:

а) r_2 қаршилик чексиз кичиклашганда;

б) r_2 қаршилик чексиз катталашганда нимага интилишини топинг.

Жавобларни физик жиҳатдан аниқ бўлган хулосалар билан таққосланг.



77-чизма.

Ечиш.

1) $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{1}{R}$, бу ердан $R=\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}$; а) 0; б) r_1 (2.4-масала билан таққосланг);

2) $\frac{1}{r_1+r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{R}$, бу ердан $R=\frac{(r_1+r_2)r_3}{r_1+r_2+r_3}$; а) $\frac{r_1r_3}{r_1+r_2}$; б) r_3;

3) $\frac{r_1r_3}{r_1+r_2}+r_3=R$; а) r_3; б) r_1+r_3.

3.2. Массаси m га тенг моддий нуқта иккита қарама-қарши йўналган ўзгарувчан $F_1=k\sqrt{4+t^2}$ ва $F_2=k\sqrt{1+t^2}$ кучлар таъсирида ҳаракат қилади. Вақт ўзгариши билан ҳаракат текис ҳаракатга яқин бўла боришини, яъни бу нуқтанинг тезланиши нолга чексиз яқинлашиб боришини исбот қилинг.

Ечиш.

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{|F_1-F_2|}{m}=\lim_{t\to+\infty}\frac{k\sqrt{4+t^2}-k\sqrt{1+t^2}}{m}=\lim_{t\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{4+t^2}+\sqrt{1+t^2}}=0.$$

3.3. Трубинанинг ишчи ғилдираклари ҳаракати $\ln y=-k^2x^2+\ln y_0$ тенглама билан ифодаланади, бу ерда y — айланиш ўқидан x масофада ғилдирак қалинлиги; $x=0$ да $y=y_0$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{y_0}$ ни топинг.

Ечиш. $\ln y=-k^2x^2+\ln y_0$ дан:

$$\frac{y}{y_0}=e^{-k^2x^2} \text{ ва } \lim_{x\to\infty}\frac{y}{y_0}=0.$$

3.4. Ярим чексиз ($0\le x<+\infty$) қувур бўйлаб газ концентрацияси (зичлиги) нинг вақт ўтиши билан ($0<t<+\infty$) тақсимланиши (бунда вақтнинг бошланғич ($t=0$) пайтида бутун газ массаси M қувур қирқими (кесим юзининг бирлиги) $x=0$ да тўпланган бўлса)

$$c(x,t)=\frac{M}{\sqrt{\pi Dt}}e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

кўринишда бўлади, бу ерда x — қирқимгача масофа; D — диффузия коэффициенти.

Қуйидаги ҳолларнинг ҳар бирида бу концентрация қандай қийматга яқинлашишини топинг:

а) t вақтнинг жуда кичик ва чексиз ўсган қийматларида қувурнинг исталган нуқтасида;

б) $x\to\infty$ да вақтнинг исталган пайтида. Олинган натижаларни тушунтириб беринг;

Жавоб: а) $\lim\limits_{t\to+\infty}c(x,t)=0$; $\lim\limits_{t\to+0}c(x,t)=\begin{cases}0, & x\ne0,\\ \infty, & x=0.\end{cases}$

Биринчи тенглик газ қувур бўйлаб тарқалгани сабабли концентрация пасайишини билдиради; иккинчиси — бошланғич пайтда қувурнинг кесилган қирқим (торец) жойида газ йўқлигини билдиради; $c(0,+0)=\infty$ тенглик $x=0$ қирқимда жойлашганда «нуқтавий» M массаси борлиги тўғрисидаги фаразга мос келади.

б) $\lim\limits_{x\to\infty}c(x,t)=0$ $(t\ne0)$ вақтнинг исталган пайтида узоқлашган сари газ концентрацияси камайиб боришини билдиради.

3.5. Бирор кимёвий жараён шундай ўтаётган бўлсинки, бунда оралиқлар кетма-кетлиги $[i\tau,(i+1)\tau]$, $i=0,1,2,\ldots$ даги ҳар қайси τ вақт оралиғи давомида модда кўпайиш миқдори (кичик τ ларда) бу оралиқ бошида бўлган модда миқдорига ва оралиқ катталигига пропорционал бўлсин. Вақтнинг бошланғич пайтида модда миқдори Q_0 бўлсин деб фараз қилиб, t вақт (оралиғи) ўтгандан сўнг модда миқдори $Q_1^{(n)}$ ни топинг, бунда модда миқдори ўсиши t вақт оралиғининг ҳар бир n-қисмида $\tau = \frac{t}{n}$ содир бўлади деб олинг. $Q = \lim\limits_{n\to\infty} Q_t^{(n)}$ ни топинг.

Ечиш. $T = \tau$ да: $Q_1 = Q_0 + kQ_0\tau = Q_0(1 + k\tau) = Q_0\left(1 + \frac{kt}{n}\right)$, бу ерда k — пропорционаллик коэффициенти.

Худди шундай, $T = 2\tau$ да: $Q_2 = Q_1\left(1 + \frac{kt}{n}\right) = Q_0\left(1 + \frac{kt}{n}\right)^2$; $T = 3\tau$ да: $Q_3 = Q_2\left(1 + \frac{kt}{n}\right) = Q_0\left(1 + \frac{kt}{n}\right)^3$ ва ҳ.к.

$$T = n\tau = t \text{ да: } Q_n = Q_{n-1}\left(1 + \frac{kt}{n}\right) = Q_0\left(1 + \frac{kt}{n}\right)^n;$$

$\lim\limits_{n\to\infty} Q_n(t) = \lim\limits_{n\to\infty} Q_0\left(1 + \frac{kt}{n}\right)^n = Q_0e^{kt}$ — моддалар кўпайиши қонунига эга бўлдик.

3.6. Мамлакат аҳолисининг сони йилига 2% ўсади. 100 йил ичида у тахминан неча баравар ўсади. Жавобни 0,01 гача аниқликда ҳисобланг.

Ечиш. Агар мазкур мамлакатдаги дастлабки жами аҳоли сонини A деб белгиласак, у бир йилдан кейин $A + (A/100) \cdot 2 = (1 + 1/50) \cdot A$ га тенг бўлади. Икки йилдан кейин $A(1 + 1/50)^2$ га тенг бўлади. 100 йилдан сўнг эса $A(1 + 1/50)^{100}$ дан иборат бўлади, яъни $\left[(1 + 1/50)^{50}\right]^2$ марта ўсади. Агар $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ эканини ҳисобга олсак, $(1 + 1/50)^{50} = e = 2,72$ деб ёзишимиз мумкин. Демак, мамлакат аҳолиси 100 йил ичида тахминан $e^2 = 7,39$ марта ўсади.

3.7. Ўзгармас ЭЮК E, индуктивлик L ва R қаршиликдан иборат занжирда токнинг ўзгариш қонуни занжир уланганда қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$I = I_0e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right),$$

бу ерда I_0 — вақтнинг $t = 0$ бошланғич пайтдаги ток кучи;

а) вақт ортиши билан бу ток қандай барқарор қийматга яқинлашишини топинг;

б) $I_0 = 0$ бўлсин. Индуктивлик катта ($L > RT$) бўлганда $0 \leq t \leq T$ вақт оралиғида ток нимага тенг?

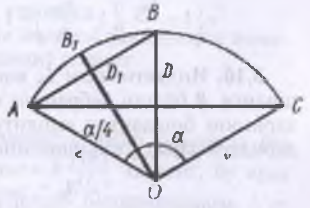
Олинган натижаларни изоҳлаб беринг.

Кўрсатма. $0 \leq t \leq T$ да, яъни индуктивлик катта бўлганда (ёки кичик T ларда) ток тақрибан чизиқлидир.

Жавоб.

а) $\lim\limits_{t\to\infty} I(t) = \frac{E}{R}$; б) $I(t) \sim \frac{E}{R}\left(+\frac{R}{L}t\right) = \frac{E}{L}t$.

3.8. Топографияда r радиусли айлана ёйи ABC нинг $f = |BD|$ қаноти (сегмент баландлиги) узунлигининг бу ёйнинг ярмиси AB_1B нинг қаноти $f_1 = |B_1D_1|$ га нисбатини топиш зарурати туғилади (78-чизма). Агар марказий бурчак AOB жуда кичик бўлса, бу нисбатнинг тақрибий қийматини топинг.



78-чизма.

Ечиш.

$$f = |BD| = |BO| - |DO| = r - r\cos\frac{\alpha}{2} = r\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right) \sim r\frac{\alpha^2}{8};$$

$$f_1 = |B_1D_1| = |B_1O| - |D_1O_1| = r - r\cos\frac{\alpha}{4} = r\left(1 - \cos\frac{\alpha}{4}\right) \sim r\frac{\alpha^2}{32};$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{f_1}{f} = \frac{r\frac{\alpha^2}{32}}{r\frac{\alpha^2}{8}} = \frac{1}{4}.$$

3.9. Ёруғликнинг синдириш коэффициенти n_1 бўлган муҳитдан синдириш коэффициенти n_2 бўлган муҳитга нормал (яъни иккита муҳит чегарасига тик) тушишда ёруғликнинг синиш коэффициенти (яъни қайтган ёруғлик интенсивлиги I_r нинг тушувчи ёруғлик интенсивлиги I_0 га нисбати) қуйидагига тенг:

$$r = \frac{I_r}{I_0} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2.$$

Ушбу

а) $n_1 \approx n_2$,

б) $n_2 < n_1$ ҳоллар учун синиш коэффициенти r учун тақрибий формулаларни топинг.

Ечиш. а) $r \approx \frac{1}{4n_1^2}(n_1 - n_2)^2$;

б) $r = \left(\frac{1-\frac{n_2}{n_1}}{1+\frac{n_2}{n_1}}\right)^2 = \left(1-\frac{n_2}{n_1}\right)^2\left(1+\frac{n_2}{n_1}\right)^{-2} \approx$

$$\approx \left(1-\frac{2n_2}{n_1}\right)\left(1-\frac{2n_2}{n_1}\right) \approx 1-\frac{4n_2}{n_1}.$$

3.10. Индуктивлиги L, конденсатор сиғими C ва қаршилиги R бўлган тебраниш контурида заряд тебранишларининг бошланғич амплитудаси (конденсатор қатламларидаги заряд ўзгаришининг $Q = Q(t)$ функцияси)

$$A_0 = \frac{Q_0}{\sqrt{1-R^2C/4L}}$$

га тенг, бу ерда $Q_0 = Q(0)$ — конденсатор қатламларидаги бошланғич заряд

Индуктивлик жуда катта ($L > CR^2$) бўлганда A_0 нинг тақрибий қийматини топинг.

Жавоб: $A_0 \approx Q_0 + \frac{Q_0R^2C}{8L}$.

3.11. Етарлича узунликка эга l узунликдаги коксиал кабел индуктивлиги

$$L = \frac{\mu_0\mu}{2\pi} l \ln\frac{R_2}{R_1}$$

га тенг (СИ ўлчов бирликларида), бу ерда R_1 ва R_2 — ички ва ташқи цилиндрлар радиуслари,

μ_0 — магнит доимийси;

μ — муҳитнинг нисбий магнит сингдирувчанлиги.

Юпқа қатлам, яъни $R_2 \approx R_1$ бўлган ҳол учун L нинг тақрибий (чизиқлаштирилган) қийматини топинг.

Ечиш.

$$L = \frac{\mu_0\mu}{2\pi} l \ln\left(1+\frac{R_2-R_1}{R_1}\right) \sim \frac{\mu_0\mu}{2\pi}\cdot\frac{l(R_2-R_1)}{R_1}.$$

3.12. Антенналар назариясида қуйидаги богланиш (муносабат) учрайди:

$$L = L_0\frac{\operatorname{tg}(\pi l/\lambda)}{2\pi l/\lambda},$$

бу ерда L — тўлқинни узайтиришда антеннанинг динамик ўзиндукцияси;

L_0 — статик ўзиндукция;

l — антеннанинг иш берувчи узунлиги;

λ — антеннанинг тўлқин узунлиги.

Тўлқин узунлиги λ ортиши билан L ўзиндукция нимага яқинлашишини (интилишини) топинг.

Жавоб: $\lim\limits_{\lambda\to\infty} L = \frac{L_0}{2}$.

3.13. Бошқариш системасининг силжиб турадиган бажарувчи элементи тезланиши $a = k\frac{f(I_1)}{g(I_2)}$ га тенг, бу ерда I_1— бу системадаги иккита ғалтакдан биринчисидаги, I_2 — иккинчисидаги ток;

$f(I)$, $g(I)$ — берилган системани характерловчи функциялар. Қуйидаги ҳолларда $t = \tau_1$, $t = \tau_2$ моментлар учун a тезланишнинг қийматини топинг ($k = 1$ деб олинг):

а) $f(I) = 2I$, $g(I) = I$, $I_1 = \sin t$, $I_2 = 2t - 2$, $\tau_1 = 0$, $t_2 = 1$;

б) $f(I) = I^2$, $g(I) = 1 + I$, $I_1 = \sin t$, $I_2 = -\cos t$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = \frac{\pi}{2}$;

в) $f(I) = I^3$, $g(I) = I$, $I^1=t^2-t$, $I_2 = 4\operatorname{tg}(t-1) - 4\sin(t-1)$, $\tau = 1$;

г) $f(I) = \sqrt[5]{1+I} - 1$, $g(I) = \sqrt[3]{1+I} - 1$, $I_1 = 2\sin\pi t$, $I_2 = \sin\pi t$, $\tau = 1$;

д) $f(I) = 2I$, $g(I) = \ln I$, $I_1 = 0,5(e^{2t} - 1)$, $I_2 = 1 + \sin t$, $\tau = 0$;

Кўрсатма.

а) $a(t) = \frac{f(I_1(t))}{g(I_2(t))}$ функция $t = \tau_1$ узлуксиз бўлгани учун:

$$a(\tau_1) = \frac{f(I_1(\tau_1))}{g(I_2(\tau_1))} = \frac{(2\sin\pi t)_{t=0}}{2(t-1)_{t=0}} = 0.$$

$$a(\tau_2) = \lim_{t\to\tau}\frac{f(I_1)}{g(I_2)} = \lim_{t\to1}\frac{(2\sin\pi t)}{2(t-1)} = -\pi;$$

б) 2,1; в) 0,5; г) 1,2; д) 2.

3.14. Лампали генераторлар назариясида генераторнинг ФИК токнинг “кертиш бурчаги» θ орқали қуйидаги формула билан ифодаланиши исбот қилинган:

$$\eta = \frac{2\theta - \sin 2\theta}{4(\sin\theta - \theta\cos\theta)} \cdot \xi ,$$

бу ерда ξ — кучланишларда фойдаланиладиган коэффициент.

«Кертиш бурчаги» чексиз камайганда генераторнинг ФИК кучланишлардан фойдаланиш коэффициентига яқинлашишини кўрсатинг.

Ечиш. Лопиталь қоидасидан фойдаланамиз:

$$\lim_{\theta\to 0} \eta = \lim_{\theta\to 0} \frac{2\theta - \sin 2\theta}{4(\sin\theta - \theta\cos\theta)} \cdot \xi = \lim_{\theta\to 0} \frac{2}{4(\cos\theta - \cos\theta + \theta\sin\theta)} \cdot \xi =$$

$$= \lim_{\theta\to 0} \frac{4\sin^2\theta}{4\theta\sin\theta} \cdot \xi = \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \cdot \xi = \lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta}{1} \cdot \xi = \xi.$$

Бу натижани, шунингдек, Тейлор формуласидан фойдаланиб топиш ҳам мумкин.

3.15. Қуйидаги $I(t)$ токнинг $t \geq 0$ ҳолларда барқарорлашган қийматини (яъни, вақт ўтиши билан ток чексиз яқинлашиб келадиган қийматни) топинг:

а) $I(t) = 2 + 0,5 \cdot e^{-2t}(\cos 3t - 2\sin 3t)$;

б) $I(t) = I_0 \frac{t^2+2t+1}{2t^2+t+4}$;　　в) $I(t) = I_0 \frac{2t+\sin t}{4t-\sin t}$;

г) $I(t) = 3t\left(\sqrt{t^2+1} - t\right)$;　　д) $I(t) = I_0 \frac{\sqrt{1+\frac{1}{t}}-1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{t}}-1}$;

е) $I(t) = I_0 t\left(e^{\frac{1}{t}} - 1\right)$;　　ж) $I(t) = I_0 \ln\frac{t+2}{t+1}$.

Жавоб. а) 2;　б) $0,5I_0$;　в) $0,5I_0$;　г) 1,5;　д) $1,5I_0$; е) 1;　ж) I_0.

3.16. Электрон лампа (триод)га иккита: мусбат ишорали $u_1(t)$ ва манфий ишорали $u_2(t)$ кучланиш берилади. Қуйидаги ҳолларнинг ҳар бирида вақт ўтиши билан лампанинг очилиши рўй беришида, яъни ишора «минусдан» «плюс»га ўзгарганда триод ток ўтказа бошлашини кўрсатинг:

а) $u_1(t) = u_1^{\circ} e^{t}$, $u_2(t) = u_2^{\circ}(1 + \alpha t^2)$; $\alpha > 0$;

б) $u_1(t) = u_1^{\circ} t^2$, $u_2(t) = u_2^{\circ}\ln(\alpha + t)$; $\alpha > 0$;

в) $u_1(t) = u_1^{\circ} e^{\alpha t}$, $\alpha > 0$; $u_2(t) = u_2^{\circ}\left[1 + \beta t\ln(1 + t^2)\right]$, $\beta > 0$.

Кўрсатма. $\frac{u_2(t)}{u_1(t)}$ нисбатнинг $t \to \infty$ даги лимитига Лопиталь қоидасини татбиқ қилинг.

3.17. Шакллари доиравий стерженлар ва ҳалқалардан иборат жисмларнинг букилма деформацияларини таҳлил қилишда татбиқ қилинадиган қуйидаги лимитларни топинг:

а) $\lim\limits_{\varphi\to 0} \frac{\varphi - \sin\varphi}{1-\cos\varphi}$;　　б) $\lim\limits_{\varphi\to 0} \frac{\frac{1}{2}\sin\varphi - \frac{1}{2}\varphi\cos\varphi}{\varphi - \sin\varphi}$;

в) $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{4(1-\cos\alpha)}$;　　г) $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{2\alpha - \alpha\cos\alpha - \sin\alpha}{4(\alpha - \sin\alpha)}$;

д) $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\frac{\alpha}{4} + \frac{\sin\alpha}{4} - \frac{2}{\alpha}\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2(\alpha/2)}$.

Кўрсатма. Лопиталь қоидаси ёки Тейлор формуласидан фойдаланинг.

Жавоб. а) 0;　б) 1;　в) 0;　г) 1;　д) 0.

4. Функция узлуксизлиги

4.1. а) Агар *u* кучланиш тушишини (пасайишини) бирор (кичик) ε миқдор аниқлигида ҳисоблаш керак бўлса, ўтказгичдаги электр токи I ни (бу ўтказгичнинг маълум қаршилиги R маълум бўлганда) ўлчашда қандай хатога йўл қўйиш мумкин? I ни ҳисоблашнинг етарлича юқори аниқликда ҳисоблашга эришиш мумкинлиги тўғрими?

Агар $R = 2$ (ом) қаршилик ва u_0 нинг аниқ қиймати 4(в) га тенглиги маълум бўлса, у ҳолда *u* кучланиш тушишини ўлчашдаги хатолик ±0,2 (в) дан ошмаган ҳолда I токни ўлчашдаги хато қандай бўлиши мумкинлигини аниқланг.

б) Юқоридаги саволларга $P = I^2R$ қувватни ±0,4 (вт) хатоликка йўл қўйиш билан ўлчаш ҳоли учун жавоб беринг.

Кўрсатма.

а) $|IR - I_0R| < \varepsilon_R$ (бу ерда $I_0 = \frac{u_0}{R} = 2$ (*a*)) шартдан $|I - I_0| < \frac{\varepsilon}{R} \equiv \delta$ ни келтириб чиқарамиз. Шундай қилиб, I

ни δ хатолик билан ўлчашда u ни ўлчашдаги хато ε дан катта бўлмайди.

Хусусан, $\varepsilon = 0{,}2$ (в) да $\delta = 0{,}1$ (a), яъни $I \in (1{,}9;\ 2{,}1)$ (a) бўлади.

б) $\delta = \sqrt{I_0^2 + \frac{\varepsilon}{R}} - I_0 \le \frac{\varepsilon}{2I_0R}$ бўлгани учун $\frac{0{,}4(вт)}{2\cdot 2(a)\cdot 1Ом} = 0{,}1(в)$ токни ўлчашдаги аниқлик 0,4 (вт) дан ортмайди.

4.2. Юзи $S = 100$ см² бўлган квадрат металл пластинка ясаш талаб қилинади. Пластинка юзи унинг лойиҳадаги юзидан йўл қўйиладиган четланишга эга бўлса, у ҳолда унинг бир хил бўлган узунликдаги томонларига (пластинка юзи учун четланишни сақлайдиган) четланишлар кўрсатиш мумкинлиги тўғрими? Агар пластинка юзига четланишлар: а) ±1 см²; б) ±0,1 см²; в) ±0,01 см² бўлса, у ҳолда пластинка томонига қўйилган четланишлар қандай?

Ж а в о б: а) 0,05 см; б) 0,005 см; в) 0,0005 см.

4.3. Юқорида — 2.2; 2.3; 2.4; 2.6-масалаларда қаралган функцияларда аргументларнинг кичик ўзгаришларига бу функциялар қийматларининг кичик ўзгаришлари мос келишини исбот қилинг. Кўрсатилган масалалардаги функцияларнинг бу хоссасининг физикавий талқини қандай?

4.4. 2.7; 2.8; 2.11; 2.17; 2.18-масалаларда қаралган функциялар узлуксизми? Элементар функцияларнинг узлуксизлигини маълум деб ҳисоблаймиз. Бу ҳолларда узлуксизликнинг физикавий талқини қандай?

4.5. 2.13-масаладаги $W(\varphi)$ функция $[\varphi_0;\ \varphi_0 + 2\pi]$ оралиқда чегараланганми? Узлуксизми? Мазкур ҳолда бу хоссалар ўртасидаги боғланишнинг физикавий талқини қандай?

4.6. Конденсаторга диэлектрик киритилади. Конденсаторнинг диэлектриксиз сиғими C_0 га тенглиги маълум, диэлектрик тўлиқ қаратилгандан сўнг эса сиғими $C_1 (C_1 > C_0)$ га тенг бўлади. Диэлектрикнинг маълум қисми киритилганда конденсаторнинг сиғими $C^* = \frac{C_0 + C_1}{2}$ га тенг бўлишини кўрсатинг.

4.7. Товуш сигнали эфирга Ω_0 элтувчи частота билан тарқатилади, бунда Ω_0 частота ω_0 дан ω_1 гача бўлган диапазонда жойлашиши маълум. Вақт ўтиши билан приёмник частотаси ω қандай ўзгарганда (яъни созлаш қандай бўлганда) узатувчининг частотасини (яъни сигнал) сезиб қолинади?

Ж а в о б. $\omega = \omega(t)$ функциянинг узлуксизлиги талаб қилинади, бу ерда $t \in [t_0, t_1]$, $\omega(t_0) = \omega_0$, $\omega(t_1) = \omega_1$ (ёки $\omega(t') = \omega_0$, $\omega(t'') = \omega_1$, бу ерда $t', t'' \in [t_0, t_1]$).

4.8. 2.21-масалада қаралган $V(t)$ кучланишни улашлар маълум вақт оралиғида $V(t_1) = 2$ (в), $V(t_2) = 10$ (в) натижаларни берган бўлсин. Кучланишнинг бу вақт оралиғидаги қийматлари тўғрисида нима дейиш мумкин?

Ж а в о б. Кучланишнинг оралиқ қийматлари 2 (в) дан 10 (в) гача бўлган барча қийматлардан иборат бўлади.

4.9. Тарқатувчи антеннанинг йўналтирилганлик диаграмма характеристикаси, яъни антенна тарқатаётган сигнал ўзгармас бўлган чизиқ $r = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\varphi\right)}{\cos\varphi}$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ тенглик билан берилади. φ аргумент $\pm\frac{\pi}{2}$ га яқинлашганда r нинг қиймати чексиз камайиб кетади, яъни диаграмма нуқта орқали ўтади. Чизиқнинг чексиз кичик функция эканлигини аниқланг.

Е ч и ш. $\lim\limits_{\varphi \to \pm\frac{\pi}{2}} r(\varphi) = \lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\alpha\right)}{\sin\alpha} = \lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1 - \cos\alpha)\right]}{\alpha} =$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{\frac{\pi}{2}(1 - \cos\alpha)}{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\alpha^2}{2}}{\alpha} = 0 \cdot$$

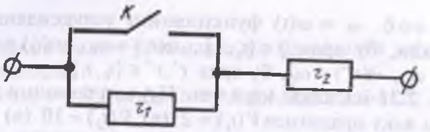
Бу натижани Лопиталь қоидасидан фойдаланиб топиш ҳам мумкин.

4.10. Эҳтимоллар назариясида ушбу «логарифмик нормал қонун» қаралади:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - m)^2}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

$y = f(x)$ эгри чизиқ узлуксиз эканини кўрсатинг, унинг графигини ясанг.

К ў р с а т м а. $f(x)$ функция учун $t = \ln(x)$ алмаштириш бажариш ёрдамида $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = \lim\limits_{t \to -\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t - \frac{1}{2\sigma^2}(t - m)^2} = +0$ га



79-чизма.

эга бўламиз ва худди шундай алмаштириш ёрдамида $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +0$ ни топиш мумкин.

4.11. Юқорида 2.1-масалада қаралган осциллограммаларнинг $u(t)$ кучланишларининг сакраш нуқталари (t^*) ва кучланиш сакраши қиймати ($h = u(t^* + 0) - u(t^*-0)$) ни топинг.

4.12. Агар K калит τ пайтда (бунда $0 < \tau < T$) уланса, у ҳолда занжирдаги ўзгармас u_0 кучланиш остида бўлган $I(t)$ (бунда $0 \le \tau \le T$) ток графигини ясанг (79-чизмага қаранг).

Узилиш нуқталари t^* ва сакраш катталиги h ни аниқлаб, $I(t)$ функциянинг узлуксизлигини текширинг.

Жавоб.

$$I(t) = \begin{cases} \frac{u_0}{r_1}, & t \in [0, \tau]; \\ \frac{u_0}{r_1 + r_2}, & t \in [\tau, T]. \end{cases}$$

$$t^* = \tau, \ h = \frac{u_0 r_2}{r_1(r_1 + r_2)}.$$

4.13. Қуйидаги ҳолларда $u(t)$ (t>0) кучланиш узлуксиз ўзгариб турадиган интервалларни кўрсатинг ва сакраш нуқталари (t^*) ҳамда сакраш катталиги (h) ни аниқланг:

а) $u(t) = u_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi)$; б) $u(t) = u_0 \mathrm{arctg} \frac{1}{t}$;

в) $u(t) = u_0 t \mathrm{arctg} \frac{1}{t}$; г) $u(t) = \frac{u_0}{1 + e^{\frac{1}{t-1}}}$.

Жавоб. б) $t^* = 0$, $h = \pi u_0$; г) $t^* = 1$, $h = -u_0$.

4.14. $F(t)$ — юк ортиш чоғида темир йўл платформасига бўлган босим кучини тақрибан ифодаловчи функция бўлсин. Қуйидаги ҳолларда катта тош бўлагининг платформа юзи (поли)га урилиш моментлари t^* ни топинг

а) $F(t) = F_0 \cdot (e^t - 1) + f_0 \cdot \eta(t - \tau)$, $0 \le t \le \tau$,

бу ерда $\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$ — Хевисайднинг бирлик функцияси.

б) $F(t) = F_0 t + \frac{f_0}{\cos^2 \frac{\pi t}{T}}$, $0 \le t \le T$.

Жавоб. а) $t^* = \tau$; б) $t^* = \frac{T}{2}$.

5. *Ҳосила*

5.1. Тормозланиш пайтида маховик t сек давомида $\varphi = 3 + 8t - t^2$ бурчакка бурилади. 1) вақтнинг $t = 3$ сек моментида маховик айланишининг бурчак тезлигини топинг; 2) t моментдаги бурчак тезланишни топинг; 3) маховик тўхтайдиган вақт моменти t ни топинг.

Ечиш. 1) ω бурчак тезлик деб, φ бурчакнинг t вақт давомида ўзгариш тезлигига айтилади. Бурчак тезлик бурилиш бурчаги φ дан t вақт бўйича олинган ҳосилага тенг:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 8 - 2t.$$

$t = 3$ сек да бурчак тезликни топамиз:

$$\omega_{t=3} = 8 - 2 \cdot 3 = 2 \ \text{рад/сек.}$$

2) ε бурчак тезланиш ω бурчак тезликдан t вақт бўйича олинган ҳосилага тенг:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -2 \ \text{рад/сек}^2.$$

3) $\omega = 0$ деб, t ни топамиз:

$$8 - 2t = 0, \ t = 4 \ \text{сек.}$$

5.2. Жисм температураси T нинг t вақтга боғлиқ ҳолда ўзгариши $T = 0{,}2t^2$ тенглама билан берилган. Вақтнинг $t = 10$ сек моментида бу жисм қандай тезлик билан қизийди?

Ечиш. Жисм қиздирилганда унинг T температураси t вақтга боғлиқ ҳолда ўзгаради, яъни у t вақтнинг функциясидир: $T = f(t)$. Жисмнинг қизиш тезлиги T температуранинг t вақт бўйича ҳосиласи $\frac{dT}{dt}$ дан иборатдир:

$$\frac{dT}{dt} = 0,4t; \qquad \left(\frac{dT}{dt}\right)_{t=10сек} = 0,4 \cdot 10 = 4.$$

Вақтнинг t = 10 сек моментида жисм секундига тўрт градус тезлик билан қизийди.

5.3. Ток кучи I вақт t га боғлиқ ҳолда $I = 0,4t^2$ (I амперларда, t секундларда) қонун бўйича ўзгаради. Саккизинчи секунд охирида ток кучи ўзгаришининг тезлигини топинг.

Ечиш. Ток кучи ўзгаришининг тезлиги I токдан t вақт бўйича олинган ҳосилага тенг:

$$\frac{dI}{dt} = 0,8t; \qquad \left(\frac{dI}{dt}\right)_{t=8сек} = 0,8 \cdot 8 = 6,4 \quad A/сек.$$

5.4. I ток кучининг t вақтга боғлиқ ҳолда ўзгариши $I = 2t^2 - 5t$ тенглама билан берилган (I ампер ҳисобида, t секунд ҳисобида). 10-сек охирида ток кучининг ўзгариш тезлигини топинг.

5.5. Тик юқорига отилган жисмнинг кўтарилиш баландлиги $S = \vartheta_0 t - 4,9t^2$ тенгламадан топилади, бу ерда t — жисм s (метр ҳисобида) баландликка эришиши учун кетган вақт (секунд ҳисобида), ϑ_0 — бошланғич тезлик (м/сек). Агар ϑ_0 = 100 м/сек бўлса, жисмнинг t = 5 сек моментдаги тезлиги ва тезланишини топинг (ҳавонинг қаршилигини ҳисобга олманг). Неча секунддан сўнг жисм энг юқори нуқтага эришади ва бу ердан қанча масофада рўй беради?

Ечиш.

$$s = 100t - 4,9t^2; \quad v = \frac{ds}{dt} = 100 - 9,8t;$$

$$v_{t=5} = 100 - 9,8 \cdot 5 = 51 \text{ м/сек}; \quad a = \frac{dv}{dt} = -9,8 \text{ м/сек}^2.$$

Жисм энг юқори нуқтага тезлиги нолга тенг бўлганда эришади, шунинг учун $v_0 = 0$ деб, s ни топамиз:

$$s = 100 \cdot 10,2 - 4,9(10,2)^2 = 510 \text{ м}.$$

5.6. Жисм ер сиртидан v_0 = 50 м/сек бошланғич тезлик билан юқорига тик отилган: 1) t = 3 сек моментдаги кўтарилиш баландлигини; 2) t = 3 сек моментдаги тезлик ва тезланишни; 3) жисм кўтарилган энг юқори нуқтани ва бу нуқтага кўтарилиш учун кетган вақтни топинг.

5.7. R радиусли доирага ички чизилган барча тўғри тўртбурчаклар ичидан энг катта юзга эга бўлганини топинг.

Ечиш. Доирага ички чизилган тўғри тўртбурчакнинг диагонали $2R$ га тенг; тўғри тўртбурчакнинг томонларидан бирини x билан белгилаймиз, у ҳолда иккинчи томон $2\sqrt{R^2 - x^2}$ бўлади. Тўғри тўртбурчакнинг юзи ўзгарувчи миқдор ва уни y билан белгилаб,

$$y = x \cdot \sqrt{4R^2 - x^2}, \; (0 < x < R)$$

ни ҳосил қиламиз.

Бу функцияни биринчи тартибли ҳосила ёрдамида текширамиз:

$$1) \; y' = x'\sqrt{4R^2 - x^2} + \left(\sqrt{4R^2 - x^2}\right)' x = \sqrt{4R^2 - x^2} -$$

$$-\frac{2x \cdot x}{2\sqrt{4R^2 - x^2}} = \sqrt{4R^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} =$$

$$= \frac{4R^2 - x^2 - x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{4R^2 - 2x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}};$$

$$2) \; \frac{4R^2 - x^2 - x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = 0, 4R^2 - 2x^2 = 0, \; x = R\sqrt{2};$$

$$3) \; y' = \frac{2(2R^2 - x^2)}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{2(2R^2 - x^2)(R\sqrt{2} + x)}{\sqrt{4R^2 - x^2}}; \; y'_{x<R\sqrt{2}} = (+)(+) = (+);$$

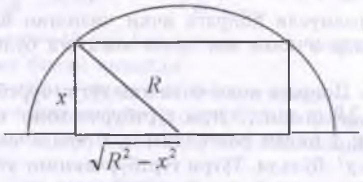
$$y'_{x<R\sqrt{2}} = (-)(+) = (-).$$

Ҳосила ишорасини (+) дан (−) га ўзгартиряпти, демак, функция $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$ да максимумга эга.

Тўғри тўртбурчакнинг томонлари $x = R\sqrt{2}$ ва $\sqrt{4R2 - \left(R\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4R^2 - 2R^2} = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}$ га тенг.

Тўғри тўртбурчакнинг томонлари тенг, демак, доирага ички чизилган тўғри тўртбурчаклар ичида юзи энг катта бўлгани квадратдир.

5.8. R радиусли доирага ички чизилган барча тўғри тўртбурчаклар ичидан энг катта периметрга эга бўлганини топинг.



80-чизма.

5.9. R радиусли ярим доирага энг катта юзга эга бўлган тўғри тўртбурчакни ички чизинг.

Ечиш. Тўғри тўртбурчакнинг томонларидан бирини x билан белгилаймиз (80-чизма). Иккинчи томонни x томон ва R радиус орқали Пифагор теоремасига кўра ифодалаймиз:

$$\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Томонлари x ва $2\sqrt{R^2 - x^2}$ бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзи ўзгарувчи миқдор; уни y билан белгилаб,

$$y = x \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2} = 2x\sqrt{R^2 - x^2}, \ (0 < x < R)$$

ни ҳосил қиламиз.

Бу функцияни биринчи тартибли ҳосила ёрдамида текширамиз:

1) $y' = 2\left[x'\sqrt{R^2 - x^2} + \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)' x\right] =$

$$= 2\left(\sqrt{R^2 - x^2} + \frac{-2x \cdot x}{2\sqrt{R^2 - x^2}}\right) = 2\left(\frac{R^2 - x^2 - x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right) = \frac{2(R^2 - 2x^2)}{\sqrt{R^2 - x^2}};$$

2) $y' = \dfrac{2(R^2 - x^2)}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 0. \qquad R_2 - 2x^2 = 0;\ x = \dfrac{R}{\sqrt{2}};$

3) $y' = \dfrac{4\left(\frac{R^2}{2} - x^2\right)}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \dfrac{\left(4\frac{R}{\sqrt{2}} - x\right)\left(\frac{R}{\sqrt{2}} + x\right)}{\sqrt{R^2 - x^2}};\ y'_{x<\frac{R}{\sqrt{2}}} = (+)(+) = (+)$

$y'_{x>\frac{d}{\sqrt{2}}} = (-)(+) = (-).$

Ҳосила ишорасини (+) дан (−) га ўзгартиряпти, демак, функция $x = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$ да максимумга эга.

Тўғри тўртбурчакнинг томонлари $x = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$ ва $2\sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = 2\sqrt{\frac{R^2}{2}} = \frac{2R}{\sqrt{2}}$ га тенг.

Тўғри тўртбурчак томонларининг нисбати: $\dfrac{R}{\sqrt{2}} : \dfrac{2R}{\sqrt{2}} = 1 : 2.$

5.10. Маълумки, тўсиннинг сиқишга бўлган қаршилиги кесим юзига пропорционал. d диаметрли думалоқ ходадан кесим юзи тўғри тўртбурчак бўлган шундай тўсин қирқиб олиш керакки, унинг сиқишга бўлган қаршилиги энг катта бўлсин.

Ечиш. Агар тўғри тўртбурчакнинг томонларидан бирини x билан белгиласак, унинг иккинчи томони $\sqrt{d^2 - x^2}$ бўлади. Кесим юзи — ўзгарувчи миқдор: $x\sqrt{d^2 - x^2}$.

Тўсиннинг сиқишга бўлган қаршилигини p билан, ўзгармас бўлган пропорционаллик коэффициентини k билан белгилаб,

$$p = kx\sqrt{d^2 - x^2} \qquad (0 < x < d)$$

ни ҳосил қиламиз.

Ҳосил бўлган функцияда $k = 1$ деб оламиз, у ҳолда $p = x\sqrt{d^2 - x^2}$. Бу функцияни биринчи тартибли ҳосила ёрдамида текширамиз:

1) $p' = x'\sqrt{d^2 - x^2} + \left(\sqrt{d^2 - x^2}\right)' x = \sqrt{d^2 - x^2} + \dfrac{(-2x)x}{2\sqrt{d^2 - x^2}} =$

$$= \frac{d^2 - x^2 - x^2}{\sqrt{d^2 - x^2}} = \frac{d^2 - 2x^2}{\sqrt{d^2 - x^2}};$$

2) $p' = \dfrac{d^2 - 2x^2}{\sqrt{d^2 - x^2}} = 0,\ x = \dfrac{d}{\sqrt{2}};$

3) $y' = \dfrac{2\left(\frac{d^2}{2} - x^2\right)}{\sqrt{d^2 - x^2}} = \dfrac{2\left(\frac{d}{\sqrt{2}} - x\right)\left(\frac{d}{\sqrt{2}} + x\right)}{\sqrt{d^2 - x^2}};\ p'_{x<\frac{d}{\sqrt{2}}} = (+)(+) = (+);$

$p'_{x>\frac{d}{\sqrt{2}}} = (-)(+) = (-).$

Ҳосила ишорасини (+) дан (−) га ўзгартиряпти, демак, функция $x = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$ да максимумга эга.

Тўғри тўртбурчакнинг томонлари $x = \frac{d}{\sqrt{2}}$ ва $\sqrt{d^2 - \left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{2}} = \sqrt{\frac{d^2}{2}} = \frac{d}{\sqrt{2}}$ га тенг.

Тўсиннинг кесими — томони $\frac{d\sqrt{2}}{2} = 0,707d$ бўлган квадратдан иборат.

5.11. ON тўғри чизиқли катта асосий қатнов йўлидан $AB = b$ масофада завод жойлашган. Шу заводга сув қувурининг тармоғини ўтказиш керак. Агар сув қувури тармоғининг узунлик бирлиги нархи OD, DN ва DB йўналишлар бўйича мос равишда k_1, k_2 ва k_3 сўмга тенг бўлса, у ҳолда ON катта асосий йўлнинг D нуқтасидан DB тўғри чизиқли шундай йўлни ўткази керакки, натижада шу йўлдан заводга ўтказилган сув қувури тармоғининг нархи энг арзон бўлсин (81-чизма).

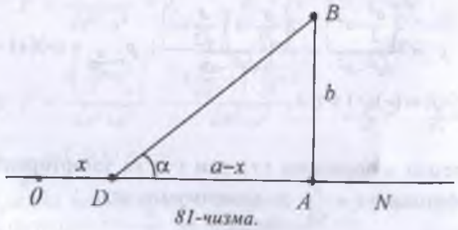
Ечиш. $OD = x$ бирлик узунлик ва $OA = a$, $ON = l$ деб белгилаймиз. У ҳолда сув қувури тармоғининг OD қисми нархи k_1x, DN қисми нархи $k_2(l-x)$, DB қисми нархи эса $k_3 \cdot \sqrt{(a-x)^2 + b^2}$ сўмга тенг бўлади. Умумий нарх

$$k = k_1x + k_2(l - x) + k_3 \cdot \sqrt{(a-x)^2 + b^2}$$

сўмга тенг бўлади. Натижада бир ўзгарувчили функцияни ҳосил қилдик. Унинг экстремумини текширамиз. Бунинг учун k дан x бўйича биринчи ва иккинчи тартибли ҳосила оламиз:

$$\frac{dk}{dx} = k_1 - k_2 - \frac{k_3(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}},$$

$$k_1 - k_2 - \frac{k_3(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}} = 0, \qquad \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}} = \frac{k_1-k_2}{k_3} \qquad (1)$$



81-чизма.

$$\frac{d^2k}{dx^2} = \frac{k_3 b^2}{\sqrt{\left[(a-x)^2+b^2\right]^3}} > 0$$

бўлгани учун (1) ни қаноатлантирадиган x нинг қиймати минимум нуқтаси бўлади.

Бу масалани $BDA = \alpha$ бурчакни аниқлаш усули билан ҳам ечиш мумкин.

81-чизмага кўра

$$\cos\alpha = \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}} \qquad (2)$$

ни ҳосил қиламиз. У ҳолда (1) га кўра:

$$\cos\alpha = \frac{k_1-k_2}{k_3} \qquad (3)$$

(бунда $k_1 - k_2 < k_3$ бўлишини талаб қиламиз). Демак, DB – чизиқ бўйича йўлни (3) тенгликни қаноатлантирадиган α бурчак остида ўтказиш керак экан. Энди x нинг қийматини аниқлаймиз, бунинг учун (2) нинг ҳар иккала томонини квадратга кўтарамиз:

$$\frac{(a-x)^2}{(a-x)^2+b^2} = \cos^2\alpha \Rightarrow \frac{(a-x)^2+b^2}{(a-x)^2} = \sec^2\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{b^2}{(a-x)^2} = \sec^2\alpha \Rightarrow \frac{b^2}{(a-x)^2}\,\mathrm{tg}^2\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a-x}{b}\right)^2 = \mathrm{ctg}^2\alpha \Rightarrow \frac{a-x}{b} = \mathrm{ctg}\,\alpha \Rightarrow x = a - b\,\mathrm{ctg}\alpha,$$

бу ифодага a, b ва (3) формула ёрдамида аниқланган α нинг қийматини қўйсак, изланаётган D нуқтанинг абсциссасига эга бўламиз.

6. Аниқмас ва аниқ интеграллар

6.1. Жисмнинг тўғри чизиқли ҳаракат тезлиги $v = 3t^2 - 2t$ тенглама билан берилган. s йўлнинг тенгламасини топинг.

Ечиш. Маълумки, жисмнинг тўғри чизиқли ҳаракати тезлиги s йўлдан t вақт бўйича олинган ҳосилага тенг: $v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 2t$, бундан, $ds = (3t^2 - 2t)dt$. Интеграллаймиз:

$$\int ds = \int (3t^2 - 2t)\, dt\,, \;\; s = t^3 - t^2 + C\,.$$

6.2. Нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракат тезлиги $v = 3t^2 - 8t + 2$ тенглама билан берилган. Нуқтанинг ҳаракат тенгламасини топинг.

6.3. Жисмнинг тўғри чизиқли ҳаракат тезлиги $v = 3t^2 + 4$ тенглама билан берилган. Агар $t = 2$ сек вақт ичида жисм 20 м ўтган бўлса, s йўлнинг тенгламасини топинг.

Ечиш. $v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 + 4$, бундан, $ds = (3t^2 + 4)dt$. Интеграллаймиз:

$$\int ds = \int (3t^2 + 4)dt, \;\; s = t^3 + 4t + C\,.$$

Бошланғич шартлардан C ни топамиз: $20 = 2^3 + 4 \cdot 2 + C$, $C = 4$. Жисмнинг ҳаракат тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$s = t^3 + 4t + 4\,\cdot$$

6.4. Агар жисм ҳаракатнинг бошланғич моментида тинч ҳолатда бўлса, эркин тушаётган жисмнинг ўзгармас g тезланишда ҳаракатланиш қонунини топинг.

Ечиш. Маълумки, тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган жисмнинг a тезланиши s йўлнинг t вақт бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосиласи ёки v тезликнинг t вақт бўйича олинган ҳосиласидир: $a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$, аммо $a = g$, демак, $\frac{dv}{dt} = g$, бундан $dv = gdt$. Интеграллаймиз:

$$\int dv = \int gdt, \;\; v = gt + C_1\,.$$

Бошланғич шартлар $t = 0$, $v = 0$ га кўра C_1 ни топамиз:

$$0 = g \cdot 0 + C_1, \qquad C_1 = 0\,.$$

Ҳаракат тезлиги тенгламасига эга бўлдик: $v = gt$.

Энди жисмнинг ҳаракат қонунини топамиз: $v = \frac{ds}{dt}$, аммо $v = gt$, демак, $\frac{ds}{dt} = gt$ ёки $ds = gtdt$. Интеграллаймиз:

$$\int ds = \int gtdt, \;\; s = \frac{gt^2}{2} + C_2\,.$$

Бошланғич шартлар $t = 0$, $s = 0$ га кўра C_2 ни топамиз:

$$0 = g \cdot \frac{0^2}{2} + C_2, \;\; C_2 = 0\,.$$

Тушаётган жисмнинг ҳаракат тенгламасига эга бўлдик: $s = \frac{gt^2}{2}$.

6.5. Жисмнинг ҳаракат тезлиги $v = (12t - 3t^2)$ м/сек тенглама билан берилган. Жисмнинг ҳаракат бошлангандан то тўхтагунига қадар босиб ўтган йўлини топинг.

Ечиш. Жисмнинг ҳаракат бошланган ва тўхтаган пайтдаги тезлиги нолга тенг. Жисмнинг тўхташ моментини топамиз, бунинг учун тезликни нолга тенглаб, тенгламани t га нисбатан ечамиз:

$$12t - 3t^2 = 0, \;\; t(4 - t) = 0, \;\; t_1 = 0, \;\; t_2 = 4 \text{ сек.}$$

$s = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt$ формула бўйича s ни ҳисоблаймиз:

$$s = \int_0^4 (12t - 3t^2)\, dt = (6t^2 - t^3)\Big|_0^4 = 32 \text{ м.}$$

6.6. Икки жисм бир пайтда бир нуқтадан тўғри чизиқ бўйлаб бир хил йўналишда ҳаракатлана бошлади. Биринчи жисм $v = (12t^2 + 2t)$ м/сек тезлик билан ҳаракатланди, иккинчиси эса $v = (4t + 5)$ м/сек тезлик билан ҳаракатланди. 5 сек.дан кейин улар орасидаги масофа қандай бўлади?

Ечиш. Биринчи ва иккинчи жисм ўтган йўлни $s = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt$ формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$s_1 = \int_0^5 (6t^2 + 2t)\, dt = (2t^3 + t^2)\Big|_0^5 = 275 \text{ м},$$

$$s_2 = \int_0^5 (4t + 5)\, dt = (2t^2 + 5t)\Big|_0^5 = 75 \text{ м},$$

$$s_1 - s_2 = 275 - 75 = 200 \text{ м.}$$

6.7. Икки жисм бир пайтда бир нуқтадан тўғри чизиқ бўйлаб бир томонга қараб ҳаракатлана бошлади. Биринчи жисм $v = 3t^2$ м/сек тезлик билан ҳаракатланмоқда, иккинчиси эса $v = (6t^2 - 10)$ м/сек тезлик билан ҳаракатланмоқда. 10 сек дан кейин улар орасидаги масофа қандай бўлади?

6.8. Винт пружинанинг x сиқилиши пружинага қўйилган F кучга пропорционал. Агар пружинани 0,01 м сиқиш учун 10 Н куч керак бўлса, пружинани 0,04 м сиқиш учун керак бўладиган F куч бажарган ишни ҳисобланг.

Ечиш. $F = 10$ Н бўлганда $x = 0{,}01$ м. $F = kx$ формула бўйича k ни топамиз: $10 = k\,0{,}01$, бундан $k = 1000$ Н/м. k нинг топилган қийматини $F = kx$ формулага қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз: $F = 1000x$, яъни $f(x) = 1000x$.

Интеграллаш чегараларини 0 дан 0,04 гача олиб, изланаётган ишни ҳисоблаймиз:

$$A = \int_0^{0.04} 1000x dx = 1000\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0.04} = 0{,}8\ (Ж).$$

6.9. 80 Н куч пружинани 0,02 м чўзади. Пружинанинг дастлабки узунлиги 0,15 м. Пружинани 0,2 м гача чўзиш учун қанча иш бажариш керак?

Ечиш. k ни топамиз: $80 = k\,0{,}02$, бундан $k = \frac{80}{0{,}02} =$ $= 4000$ (Н/м). k нинг топилган қийматини ўрнига қўйиб, $F = 4000x$ ни ҳосил қиламиз, яъни $f(x) = 4000x$.

Интеграллаш чегараларини 0 дан 0,05 гача олиб изланаётган ишни топамиз:

$$A = \int_0^{0{,}05} 4000x dx = 4000\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0{,}05} = 2000 \cdot 0{,}0025 = 5\ (Ж).$$

6.10. Агар жисм M(4;0) нуқтадан Ox ўқ бўйлаб $\vartheta = 2t + 3t^2$ тезлик билан ҳаракатлана бошлаган бўлса, жисмнинг ҳаракатланиш тенгламасини тузинг.

Ечиш. Тўғри чизиқли ҳаракатда тезлик йўлдан вақт бўйича олинган ҳосилага тенг. Йўлни x билан белгилаб, ушбуга эга бўламиз: $v = \frac{dx}{dt}$, у ҳолда $\frac{dx}{dt} = 2t + 3t^2$ ёки $dx = 2tdt + 3t^2dt$. Интеграллаб топамиз: $x = t^2 + t^3 + C$. Бошланғич шартлардан C ни топамиз. Масаланинг шартида $t = 0$ бўлганда $x = 4$ бўлиши берилган. Бу қийматларни умумий ечимга қўйиб, $C = 4$ ни топамиз.

Жисмнинг Ox ўқ бўйича тўғри чизиқли ҳаракат тенгламаси

$$x = t^2 + t^3 + 4$$

кўринишда бўлади.

6.11. Суюқликда айланаётган дискнинг бурчак тезлиги ишқаланиш ҳисобига секинлашади. Ишқаланиш бурчак тезликка пропорционал эканлиги аниқланган. 1) агар диск $t = 0$ бўлганда 12 рад/сек тезлик билан айланган

бўлиб, $t = 10$ секда эса унинг тезлиги 8 рад/сек бўлган бўлса, диск $t = 12$ сек моментда қандай тезлик билан айланишини топинг; 2) вақтнинг қайси моментида унинг 1 рад/сек тезлик билан айланишини топинг.

Ечиш. 1) Дискнинг айланиш қонунини t вақтнинг функцияси сифатида тузамиз. ω — диск айланишининг бурчак тезлиги бўлсин, у ҳолда диск айланишининг ишқаланиш кучлари таъсири остида секинлашиши $\frac{d\omega}{dt}$ бўлади.

Масаланинг шартига кўра:

$$\frac{d\omega}{dt} = k\omega, \tag{1}$$

бунда k — пропорционаллик коэффициенти. Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{d\omega}{\omega} = kdt. \tag{2}$$

2) (2) тенгламанинг иккала қисмини интеграллаймиз:

$$\int \frac{d\omega}{\omega} = k\int dt,\ \ln\omega = kt + C, \tag{3}$$

бундан

$$\omega = e^{kt+C},\ \omega = e^{kt}e^{C},$$

$$\omega = e^{kt}C_1 \text{ ёки } \omega = C_1e^{kt}. \tag{4}$$

3) $t = 10$ сек ва $\omega = 12$ рад/сек бошланғич шартларда ўзгармас миқдор C_1 ни топамиз. Бу қийматларни (4) тенгламага қўйиб, C_1 ни топамиз:

$$12 = C_1e^{k\cdot 0},\ 12 = C_1.$$

C_1 нинг қийматини (4) тенгламага қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\omega = 12e^{kt}. \tag{5}$$

4) Дастлаб берилганлар $t = 10$ сек ва $\omega = 8$ рад/сек га мувофиқ, k нинг сон қийматини топамиз. Бу қийматларни (5) тенгламага қўямиз:

$$8 = 12e^{k\cdot 10},$$

бундан

$$e^{10k} = \frac{2}{3},\ 10k\lg e = \lg 2 - \lg 3,$$

$$k = \frac{\lg 2 - \lg 3}{10 \lg e} = -\frac{\lg 3 - \lg 2}{10 \lg e} = -\frac{0,4771 - 0,3010}{10 \cdot 0,4343} = -0,0405 .$$

k нинг қийматини (5) тенгламага қўямиз:

$$\omega = 12e^{-0,0405t}. \qquad (6)$$

5) Дискнинг t = 120 сек вақт моментидаги айланиш тезлигини топамиз. (6) тенгламага t = 120 сек қийматни қўямиз:

$$\omega = 12e^{-0,0405 \cdot 120} = 12e^{-4.9} = 0,09 \text{ рад/сек.}$$

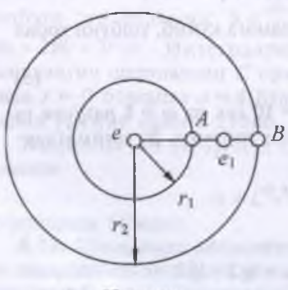
6) Диск 1 рад/сек тезлик билан айланадиган вақт моментини топамиз. (6) тенгламага w = 1 қийматни қўямиз ва t ни топамиз:

$$1 = 12e^{-0,0405t}, \text{ бундан } e^{-0,0405t} = \frac{1}{12};$$

$$-0,0405t \lg e = \lg 1 - \lg 12, \quad t = \frac{\lg 12}{0,0405 \lg e} = 61 \text{ сек.}$$

6.12. Суюқликда айланаётган дискка таъсир қилаётган секинлаштирувчи куч бурчак тезликка пропорционал. Агар диск $t = 0$ бўлганда 20 рад/сек тезлик билан, $t = 8$ да эса 16 рад/сек тезлик билан айланса, дискнинг 2 рад/сек тезлик билан айланадиган вақт моментини топинг.

6.13. Электр эговловчи $+ e1$ заряд электр майдонида эговловчи $+ e$ заряд ҳосил қилиб ҳаракатланади. Кулон қонунига кўра эговловчи иккита зарядлар орасидаги қарама-қарши кучларнинг сонли қиймати $F = \frac{e_1 \cdot e}{r^2}$ формула билан аниқланади (82-чизма). $+ e$ заряддан ўтувчи A ва B нуқталар тўғри чизиқда ётади деб, e_1 заряднинг A нуқтадан B нуқтага кўчишдаги ишни аниқланг.



82-чизма.

Ечиш. dr га кўчишдаги элементар иш

$$dA = Fdr = \frac{e_1 \cdot e}{r^2} dr$$

га тенг. Тўлиқ иш эса

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \frac{e_1 \cdot e}{r^2} dr = e_1 e \left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = e_1 e \left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}\right)$$

$$A = e_1 \left(\frac{e}{r_1} - \frac{e}{r_2}\right)$$

ифода билан аниқланади. Бунда қавс ичидаги ифода потенциаллар айирмаси ёки A ва B нуқталар орасидаги кучланишни ифодалайди.

6.14. Бурчак тезлиги ω бўлган айланувчи валга радиуси R бўлган диск маҳкамланган ва у суюқликка ботирилган. Суюқликка ишқаланиш кучи диск сирти суюқликнинг ρ чизиғига, тезлик квадратига ва ишқаланиш юзига тўғри пропорционал деб, вал ўқига нисбатан ишқаланиш куч моментини аниқланг.

Ечиш. Дискнинг сиртига суюқликнинг ишқаланиш кучи чуқурлашган сари ўзгаради. Шунинг учун дастлаб элементар ишқаланиш кучи dF ни ҳисоблаймиз.

83-чизма.

Вал ўқидан узоқликда ички радиуси r ва ташқи радиуси $r + dr$ бўлган халқани кўрамиз (83-чизма). Халқанинг юзи

$$\pi\left(r + dr\right)^2 - \pi r^2 = 2\pi r dr + \pi dr^2$$

га тенг. Бунда dr га нисбатан dr^2 нинг тартиби юқори бўлган чексиз кичик миқдор бўлгани учун уни ташлаб, халқанинг юзини $2\pi r dr$ га тенг деб олишимиз мумкин. Чизиқли тезлик $v = \omega r$ га тенг. Масала шартига кўра унинг квадрати $\omega^2 r^2$ га тенг, суюқлик зичлиги ρ. Шунинг учун пропорционаллик коэффициенти k ва вал ўқидан r масофадаги элементар ишқаланиш кучи dF учун

$$dF = k\rho 2\pi r dr \omega^2 r^2$$

ни ҳосил қиламиз, вал ўқига нисбатан моменти

$$dm = rdF = (k\rho 2\pi r dr \omega^2 r^2) r ,$$

$$dm = 2\pi k \rho \omega^2 r^4 dr .$$

Бу ифодани 0 дан R гача интегралласак, у ҳолда тўлиқ ишқаланиш куч моментини топамиз:

$$m = 2\pi k\rho\omega^2\int_0^R r^4dr = 2\pi k\rho\omega^2 \cdot \frac{r^5}{5}\Big|_0^R = 2\pi k\rho\omega^2 \cdot \frac{R^5}{5}.$$

Агар дискнинг иккала сиртини назарга олсак, у ҳолда тўлиқ ишқаланиш куч моменти

$$M = \frac{4}{5}\pi k\rho\omega^2 R^5$$

ифодага тенг бўлади.

6.15. a см узунликка эга бўлган AB кесмада P нуқта олинган. Томонлари AP ва PB кесмалардан иборат тўғри тўртбурчак юзининг S_m ўрта қийматини топинг.

Ечиш. A нуқтани бошланиш нуқтаси деб қабул қиламиз. P нуқта A нуқтадан x масофада ётган бўлсин. У ҳолда $AP = x$, $PB = a-x$ бўлади. Томонлари AP ва PB бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзи $x(a-x)$ га тенг. Юзларнинг ўртача қийматини топиш формуласидан фойдаланамиз:

$$S_m = \frac{1}{a}\int_0^a x(a-x)\,dx = \frac{1}{a}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a =$$

$$= \frac{1}{a}\left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{1}{a}\cdot\frac{a^3}{6} = \frac{a^2}{6}.$$

Демак, $S_m = \frac{a^2}{6}$ см².

7. *Дифференциал тенглама*

7.1. Температураси 20°С бўлган хонада турган бирор жисмнинг температураси 20 минут ичида 100°С дан 60°С гача совийди. Жисмнинг совиш қонунини ва неча минутдан сўнг у 30°С га совишини топинг.

Ечиш. Ньютон қонунига кўра (совиш тезлиги температуралар айирмасига тўғри пропорционал) қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\frac{dT}{dt} = k(T-20) \text{ ёки } \frac{dT}{T-20} = kdt,$$

$$\text{яъни } \ln(T-20) = kt + \ln C.$$

Агар $t = 0$ бўлса, $T = 100$°С бўлишидан фойдаланиб, $C = 80$ эканлигини аниқлаймиз. Агар $t = 20$ бўлса, у ҳолда $T = 60$°С бўлишидан фойдаланиб, k ни топамиз:

$$\ln 40 = 20k + \ln 80, \text{ бундан } k = -\frac{\ln 2}{20}.$$

Шундай қилиб, жисмнинг совиш қонуни

$$T - 20 = 80e^{-\frac{t\ln 2}{20}} = 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} \text{ ёки } T = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$$

кўринишда бўлади.

$T = 30°$ да $10 = 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$ ёки $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} = \frac{1}{8}$ га эга бўламиз.

Бундан эса $\frac{t}{20} = 3 \rightarrow t = 60$ ни ҳосил қиламиз. Демак, жисмнинг температураси 60 минутдан сўнг 30°С бўлади.

7.2. Асосининг диаметри 4 м ва баландлиги 6 м бўлган цилиндр шаклидаги идиш вертикал ҳолатда қўйилган бўлиб, у сув билан тўлдирилган. Идиш тагидан радиуси $r = \frac{1}{12}$ м бўлган доира шаклидаги тешикдан сув чиқиб кетади. Тўла идишдаги сув неча минутдан кейин тўлиқ чиқиб кетади?

Ечиш. h баландликка эга бўлган идишнинг пастки тешигидан чиқиб кетувчи суюқликнинг $v\left(\frac{м}{с}\right)$ тезлигини аниқловчи Бернулли формуласидан фойдаланамиз:

$$v = \delta\sqrt{2gh},$$

бунда $g = 9{,}8$ м/с² – тортиш кучининг тезланиши, δ — суюқликнинг хоссасига боғлиқ бўлган ўзгармас коэффициент (сув учун $\delta \approx 0{,}6$).

Фараз қиламиз, t соатда идишдаги сувнинг баландлиги h м га, dt вақтда эса dh м га камайган бўлсин. dt чексиз кичик вақт оралиғида чиқиб кетувчи сувнинг ҳажмини икки усул билан аниқлаймиз:

а) dv ҳажмининг баландлиги $|dh|$ ва асоси $r(r = 2$ м) радиусли доирадан иборат бўлган цилиндр қатлам ҳажмидан иборат, яъни

$$dw = \pi r^2\,|dh| = -\pi r^2 dh;$$

б) иккинчи томондан бу қатлам ҳажмининг баландлиги vdt (бунда v — суюқликнинг оқиб чиқиш тезлиги) ва идиш асосидаги тешикдан иборат цилиндр ҳажмига тенг. Агар тешик радиусини ρ ($\rho = \frac{1}{12}$ м) деб олсак, у ҳолда

$$dw = \pi\rho^2 v dt = \pi\rho^2\delta\sqrt{2gh}dt$$

бўлади.

а) ва б) иккита бир хил ҳажмни билдирувчи ифодалардан қуйидаги

$$-r^2 dh = \delta\rho^2\sqrt{2gh}dt$$

тенгламага эга бўламиз. Бу тенгламани ўзгарувчиларни ажратиб, сўнгра интегралласак,

$$dt = -\frac{r^2}{\delta\rho^2\sqrt{2g}}\cdot\frac{dh}{\sqrt{h}};\ t = C - \frac{2r^2}{\delta\rho^2\sqrt{2g}}\cdot\sqrt{h}$$

ни ҳосил қиламиз. Масала шартига кўра $t = 0$ да $h = h_0 = 6$ м бўлгани учун ўзгармас C нинг қиймати

$$C = \frac{2r^2}{\delta\rho^2\sqrt{2g}}\sqrt{h_0}$$

бўлади.

Шундай қилиб, t ва h орасидаги боғланиш

$$t = \frac{2r^2}{\delta\rho^2\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h}\right)$$

тенглама билан аниқланади. Бу формулада $h = 0$ деб, сувнинг тўлиқ чиқиб кетиш вақти T ни топамиз:

$$T = \frac{2r^2\sqrt{h_0}}{\delta\rho^2\sqrt{2g}}.$$

Масала шартида берилган қийматлар $r = 2$ м, $h_0 = 6$ м, $\delta = 0{,}6$ м, $\rho = \frac{1}{12}$ м, $g = 9{,}8$ м/с^2 ларни ўрнига қўйиб, $T \approx 1062$, $C \approx 17{,}7$ мин эканлигини аниқлаймиз.

7.3. Иккита тўғри доиравий

$$x^2 + y^2 = R^2 \text{ ва } x^2 + z^2 = R^2$$

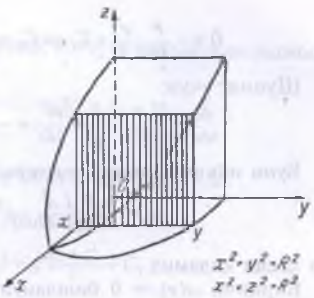
цилиндрлар билан чегараланган жисмнинг ҳажмини топинг.

Ечиш. Цилиндрлар Ox ўқига перпендикуляр бўлгани учун ва ҳосил бўлган жисмнинг абсциссаси $x\,(-R < x < R)$

нуқтадан ўтади. 84-чизмада жисмнинг саккиздан бир қисми тасвирланган. Кесим томони $x^2+y^2=R^2$ айлананинг ординатасига, яъни $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ га тенг квадратдан иборат. Квадратнинг юзи x нинг функциясидан иборат булиб, у

$$S(x) = y^2 = R^2 - x^2$$

га тенг. Жисмнинг саккиздан бир қисмининг ҳажмини ҳисоблаш учун қуйидаги интегрални ҳисоблаш керак:



84-чизма.

$$\frac{V}{8} = \int_0^R \left(R^2 - x^2\right)dx = \frac{2}{3}R^3.$$

Бундан $V = \frac{16}{3}R^3$ (куб бир.)ни ҳосил қиламиз.

7.4. Кўндаланг кесими ўзгармас бўлган ходанинг эгилувчанлиги ва охирги нуқтасига тўпланган эркли куч P га эга бўлган ҳолати

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} = -\frac{Px}{Ez} \qquad (1)$$

дифференциал тенглама билан ифодаланиши материаллар қаршилигида исботланган, бунда ω — кесим абсциссаси x бўлган ходанинг эгилиши, Ez — хода кесимининг "бурилиш қаттиқлиги" деб аталувчи ўзгармас миқдор. (1) тенгламанинг $\omega(e) = 0$; $\omega'(e) = 0$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Ечиш. Берилган дифференциал тенгламани икки марта интеграллаш ёрдамида умумий ечимини топамиз:

$$\frac{d\omega}{dx} = -\frac{P}{Ez}\int x dx = -\frac{P}{Ez}\cdot\frac{x^2}{2} + C_1.$$

$\omega'(e) = 0$ бошланғич шартдан фойдаланиб, C_1 ўзгармас сонни топамиз:

$$0 = -\frac{P}{Ez}\cdot\frac{e^2}{2} + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{P}{Ez}\cdot\frac{e^2}{2} = \frac{Pe^2}{2Ez}\,.$$

Шунинг учун:

$$\frac{d\omega}{dx} = -\frac{P}{Ez}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{Pe^2}{2Ez} = -\frac{P}{2Ez}(x^2 - e^2)\,.$$

Буни иккинчи марта интеграллаб,

$$\omega = -\frac{P}{2Ez}\left(\frac{x^3}{3} - e^2x\right) + C_2$$

ни ҳосил қиламиз.

Биринчи $\omega(e) = 0$ бошланғич шартдан фойдаланиб топамиз:

$$0 = -\frac{P}{2Ez}\left(\frac{e^3}{3} - e^3\right) + C_3\,,$$

бундан $C_2 = -\frac{Pe^3}{3Ez}$ ни аниқлаймиз ва натижада

$$\omega = -\frac{P}{2Ez}\left(\frac{x^3}{3} - e^2x\right) - \frac{Pe^3}{3Ez}$$

ни ҳосил қиламиз.

7.5. *Ox* ўқи бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилувчи нуқтанинг асосий ҳаракат тенгламаси

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x$$

кўринишда ёзилади, бунда m — нуқтанинг массаси, F_x — Ox ўқидаги нуқтага таъсир этувчи куч проекцияси.

Бошланғич тезлиги v_0, бошланғич вақти $t = t_0$ ва унинг координатаси $x = x_0$ га тенглигини билган ҳолда нуқтанинг ҳаракат қонунини топинг.

Ечиш. Масала шартидаги таъсир этувчи куч $F_x = mg$ га тенг (g — тортиш кучи тезланиши). У ҳолда берилган тенглама

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg \text{ ёки } \frac{d^2x}{dt^2} = g$$

кўринишга келади. Буни бир марта интеграллаймиз:

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right) = gdt \Rightarrow \frac{dx}{dt} = gt + C_1\,.$$

$t = t_0$ да бошланғич тезлик $v = v_0$ га тенглигини эътиборга олиб, C_1 ни топамиз:

$$v_0 = gt_0 + C_1 \Rightarrow C_1 = v_0 - gt_0\,.$$

Натижада:

$$\frac{dx}{dt} = g(t - t_0) + v_0 \Rightarrow dx = [g(t - t_0) + v_0]dt\,.$$

Иккинчи марта интеграллаб,

$$x = v_0t + g\frac{(t-t_0)^2}{2} + C_2$$

ифодага эга бўламиз. $x = x_0$, $t = t_0$ бошланғич шартдан фойдаланиб C_2 ни топамиз:

$$x_0 = v_0t + C_2 \Rightarrow C_2 = x_0 - v_0t\,.$$

Натижада

$$x = v_0t + g\frac{(t-t_0)^2}{2} + x_0 - v_0t_0$$

ечимга эга бўламиз. $t_0 = 0$ бўлганда нуқта ҳаракат қонунига эга бўламиз:

$$x = x_0 + v_0t + \frac{gt^2}{2}\,.$$

8. Кўп ўзгарувчили функция экстремумини топиш

8.1. Периметри 2р га тенг бўлган учбурчакларнинг ичида тенг томонли учбурчакнинг юзи энг катта бўлишини исбот қилинг.

Ечиш. Изланаётган учбурчакнинг томонларини мос равишда x, y ва z билан белгилаймиз.

Герон формуласига кўра учбурчакнинг юзи:

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}\,.$$

Агар $z = 2p - x - y$ га тенглигини эътиборга олсак ва z ўрнига бу қийматни қўйсак, юз формуласи

$$S_{(x,y)} = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$$

икки ўзгарувчили функциядан иборат бўлади.

Бу функциянинг экстремумини текшириш учун уни квадратга кўтарамиз:

$$f(x,y) = S^2 = p(p-x)(p-y)(x+y-p).$$

Биринчи тартибли хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p(p-y)(2p-2x-y);\ \frac{\partial f}{\partial y} = p(p-x)(2p-2y-x).$$

Бу ҳосилаларни нолга тенглаб,

$$\left.\begin{matrix} p(p-y)(2p-2x-y)=0, \\ p(p-x)(2p-2y-x)=0 \end{matrix}\right\}$$

системага эга бўламиз ва уни қуйидагича ечамиз:

$$1)\ \left.\begin{matrix} p-y=0 \\ p-x=0 \end{matrix}\right\},\qquad 2)\ \left.\begin{matrix} 2p-2x-y=0 \\ 2p-2y-x=0 \end{matrix}\right\},$$

$$3)\ \left.\begin{matrix} 2p-2x-y=0 \\ p-x=0 \end{matrix}\right\},\qquad 4)\ \left.\begin{matrix} 2p-2y-x=0 \\ p-y=0 \end{matrix}\right\}.$$

Бу системаларни қаноатлантирувчи

$$(p,p);\ \left(\frac{2}{3}p, \frac{2}{3}p\right);\ (p,0);\ (0,p)$$

стационар нуқталарни топамиз. Бу нуқталардан фақат $M\left(\frac{2}{3}p, \frac{2}{3}p\right)$ нуқта масала шартини қаноатлантиради, қолганлари эса қаноатлантирмайди (бунга учбурчакнинг томони ярим периметрига тенг бўла олмаслиги сабаб бўлади).

$M\left(\frac{2}{3}p, \frac{2}{3}p\right)$ нуқта экстремумини текширамиз:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2p(p-y);\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2p(p-x);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = p(2x+2y-3p);\ A = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_M = -\frac{2}{3}p^2;$$

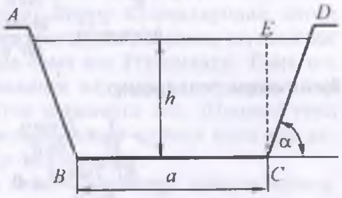
$$B = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_M = -\frac{1}{3}p^2;\ C = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_M = -\frac{2}{3}p^2;$$

$$\Delta = AC - B^2 = \left(-\frac{2}{3}p^2\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}p^2\right) - \left(-\frac{1}{3}p^2\right)^2 p^2 =$$

$$= \frac{4}{9}p^4 - \frac{1}{9}p^4 = \frac{1}{3}p^4 > 0;$$

$\Delta > 0$, $A < 0$ бўлгани учун текширилаётган нуқтада функция максимумга эришади. Демак, $x = \frac{2}{3}p$, $y = \frac{2}{3}p$ да функция энг катта қийматга эришади. У ҳолда $z = 2p - x - y = \frac{2}{3}p$ ва $x = y = z$ бўлиб, учбурчак тенг томонли бўлади.

8.2. Каналнинг кўндаланг кесими тенг ёнли трапеция шаклида бўлиб, унинг юзи S га тенг. Каналнинг чуқурлиги ва трапеция ён томони асоси билан ташкил этган бурчак α қандай бўлганда сув тегиб турувчи периметр энг кичик бўлади (85-чизма).



85-чизма.

Ечиш. Сув тегиб турган периметрни z билан белгилаймиз. У ҳолда

$$z = AB + BC + CD.$$

Чизмага кўра

$$h = CD\sin\alpha,\ CD = \frac{h}{\sin\alpha},\ BC = a.$$

У ҳолда $z = a + \frac{2h}{\sin\alpha}$ бўлади. a, h ва α учта ўзгарувчили z функцияга эга бўлдик. Масала шартидан фойдаланиб, уни икки ўзгарувчили функцияга келтирамиз. Трапеция юзи

$$S = \frac{BC+AD}{2}h,\ BC = a,\ AD = BC + 2ED = a + 2h\text{ctg}\alpha$$

бўлгани учун: $S = \frac{2a+2h\text{ctg}\alpha}{2}h \Rightarrow S = (a + h\text{ctg}\alpha)h \Rightarrow$

$$a = \frac{S}{h} - h\text{ctg}\alpha$$

бўлгани учун z қуйидаги кўринишни олади:

$$z = \frac{S}{h} - h\text{ctg}\alpha + \frac{2h}{\sin\alpha},$$

бу эса h ва α га нисбатан икки ўзгарувчили функция. Унинг хусусий ҳосиласини топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial h} = -\frac{S}{h^2} - \text{ctg}\alpha + \frac{2}{\sin\alpha}, \quad \frac{\partial z}{\partial \alpha} = h\cos ec^2\alpha - \frac{2h\cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

ва қуйидаги иккита тенгламалар системасини ечамиз:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{S}{h^2} - \text{ctg}\alpha + \frac{2}{\sin\alpha} = 0, \\ h\cos ec^2\alpha - \frac{2h\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = 0, \end{aligned}\right\}$$

буни соддалаштирамиз:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{S}{h^2} + \frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha} = 0, \\ \frac{h(1-2\cos\alpha)}{\sin^2\alpha} = 0. \end{aligned}\right|$$

Иккинчи тенгламадан, $h(1-2\cos\alpha)=0$ бундан $h=0$ ёки $1-2\cos\alpha=0$. Аммо h чуқурлик нол бўла олмайди, шунинг учун $1-2\cos\alpha=0$ бўлади ва бундан $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $\alpha=\frac{\pi}{3}$ ҳосил қиламиз. α нинг бу қийматини биринчи тенгламага қўямиз:

$$-\frac{S}{h^2} + \frac{2-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 0 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}.$$

Энди α ва h нинг аниқланган қийматларидан фойдаланиб, иккинчи тартибли ҳосиланинг қийматини аниқлаймиз:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial h^2} = \frac{2S}{h^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} = 2\cdot\frac{1-\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha}\cdot h, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\partial h} = \frac{1-2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

A, B ва C сонларни топамиз:

$$A = \frac{6}{\sqrt{S}\cdot\sqrt[4]{3}}; \; B = 0; \; C = \frac{4}{3}\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{S};$$

$$\Delta = AC - B^2 = \frac{6}{\sqrt[4]{S}\cdot\sqrt[4]{3}}\cdot\frac{4}{3}\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{S} > 0.$$

Демак, h ва α нинг аниқланган қийматларида z функция минимумга эришади ва у

$$z_{\min} = 2\sqrt{S}\cdot\sqrt[4]{3}$$

га тенг бўлади.

2-§. Амалий машғулот дарсида олий математикадан ёзма иш ўтказиш вариантидан намуналар

Маъруза ва амалий машғулот дарсларида талабаларнинг олий математиканинг бирор бўлимларидан олган билимларини аниқлаш ва уни мустаҳкамлаш, шунингдек назорат қилиш мақсадида ёзма иш ўтказилади. Ёзма иш вариантлари қандай тузилиши ва унда нечта мисол ёки масала бўлиши жуда катта аҳамиятга эга. Шунинг учун ёш ўқитувчиларга ёрдам тариқасида қуйида ёзма иш вариантларидан намуналар келтирилди.

1. Биринчи ёзма иш "Лимитлар" бобига бағишланган бўлиб, унга бир соат вақт ажратиш лозим. Бу ёзма иш вариантларида 6 та дан мисол берилган бўлиб, уларнинг лимитларини топиш керак.

1-вариант

1. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+3x+1}{2x^2-3x-5}$.
2. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{3-8x-3x^2}{x^2+x-6}$.
3. $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-3}{x^2+3x+1}$.
5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sqrt{1-\cos4x}}{\sin^2 3x}$.
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+5}\right)^{3x-2}$.

2-вариант

1. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{2x^2+5x+1}{x^2+2x-3}$.
2. $\lim\limits_{x\to5}\frac{2x^2-17x+35}{x^2-x-20}$.
3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{9-x}-3}{\sqrt{x+4}-2}$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+1}{x^3+3x+1}$.
5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 6x}{x\text{tg}2x}$.
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{5-2x}$.

3-вариант

1. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{2x^2-x+1}$.
2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{4-3x^2-x}$.
3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{2-\sqrt{x+1}}$.
4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{m^3-8m+1}{3m^3-m+4}$.
5. $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin 5y}{\arcsin 2y}$.
6. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{2x-4}$.

4-вариант

1. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-16}{x^2+5x+2}$.
2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-16x+1}{3x^2+5x-2}$.
3. $\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{\sqrt{n^2+9}-3}{\sqrt{4-n^2}-2}$.
4. $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{3n^2-4n+1}{2n^2+n-2}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 3x}{1-\cos 4x}$.
6. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(-\dfrac{2}{3x-1}\right)^{1-4x}$.

5-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-3}{x^2-4}$.
2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2-1}$.
3. $\lim\limits_{m\to 4}\dfrac{5-\sqrt{m^2+9}}{\sqrt{2m+1}-3}$.
4. $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{2-3n-n^2}{2n^2-n+1}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 x}{3x\sin x}$.
6. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{2}{3x-4}\right)^{1-6x}$.

6-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}$.
2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{3x^2+x+2}$.
3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2-9}$.
4. $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{3n^2-4n^5+2}{2n^5+3n^2-n}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 4x}{\sin^2 3x}$.
6. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)^{3x+1}$.

7-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-3x+2}$.
2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2+2x-3}{x^2+x-2}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{4-3x}}{7x}$.
4. $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{4n^3-3n^2+1}{2n^2+3n-5}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\sin 3x}$.
6. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^{2x+3}$.

8-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-2x-3}$.
2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2+10x+5}{x^2-2x-3}$.
3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-3}{x^2-2x}$.
4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^6-3x^2-2}{2x^6+4x+5}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\mathrm{tg}^2 5x}$.
6. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-5}\right)^{x-1}$.

9-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x+5}{x^2-6x+5}$.
2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{2x^2-6x-15}$.
3. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{2x^2-6x-20}$.
4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{6x^5-3x^2+1}{3x^5+2x+3}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg} 3x}{4x}$.
6. $\lim\limits_{x\to \infty}\ln\left(\dfrac{2-4x}{1-4x}\right)^{x+3}$.

10-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2-13x-7}{x^2-9x+14}$.
2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2-5x-2}{x^2+5x+6}$.
3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt{4x+1}-3}$.
4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3-4x^2+5}{3x^4+2x^2-x}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{4x^2}$.
6. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-3}\right)^{3x}$.

11-вариант

1. $\lim\limits_{m\to 3}\dfrac{3m^2-5m-3}{m^2-5m+6}$.
2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^2+9x+2}{x^2-3x-10}$.
3. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{2x-1}-3}$.
4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4-3x^2+4}{5x^4-3x-2}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 5x}{3x^2}$.
6. $\lim\limits_{x\to \infty}\ln\left(\dfrac{2x-3}{2x-1}\right)^x$.

12-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{x^2-7x+10}$.
2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+4x-1}{x^2-6x-7}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{\sqrt{x+4}-2}$.
4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{9x^5-4x^3+1}{3x^4-2x-3}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x\mathrm{tg}2x}$.
6. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{x^2}{x-2}}$.

13-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-9x-18}{x^2-7x+6}$.
2. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-6}{2x^2+3x-9}$.
3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x+10}-4}{x^2-4}$.
4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^3-2x-4}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\sin 5x\cdot\mathrm{ctg}3x$.
6. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{4x+5}{4x+1}\right)^{x+3}$.

14-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{3x^2-17x-28}{x^2-9x+14}$.
2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-4x-4}$.
3. $\lim\limits_{m\to 3}\dfrac{9-m^2}{\sqrt{4m-3}-3}$.
4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^5-3x^2+1}{4x-x^3+4}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{\sin 3x\mathrm{tg}2x}$.
6. $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{5x}{x-1}}$.

15-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-8x-3}{x^2-x-6}$.
2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{2x^2-7x-15}$.
3. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-49}{\sqrt{2x+11}-5}$.
4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{9x^3-4x^2+2}{6x^3+3x-5}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{tg}^2 3x\cdot\mathrm{ctg}^2 2x$.
6. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+4}\right)^{x-1}$.

16-вариант

1. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{2x^2+x-6}$.
2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-x-12}{x^2-2x-2}$.
3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-2}{x^2-x}$.
4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^5-x^2+5}{x^4-2x+3}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\mathrm{arctg}3x}$.
6. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^x$.

17-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$.
2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-7x-2}{x^2-7x+10}$.
3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-2}-2}{\sqrt{x+1}-2}$.
4. $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{6n^3-2n+7}{3n^3-4n+5}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\sin 8x\mathrm{ctg}x$.
6. $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{x+1}{x-3}}$.

18-вариант

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+x-2}{3x^2+4x+1}$.
2. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-x-12}{x^2+4x+3}$.
3. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$.
4. $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{7n^4-2n^3+3}{n^4+2n}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{1-\cos 2x}$.
6. $\lim\limits_{n\to \infty}\ln\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n+3}$.

19-вариант

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-5x-7}{3x^2+x-2}$.
2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+x-4}{2x^2+x-3}$.
3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt{2x}-2}$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^7+6x+4}{6x^7-3x+5}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}3x\cdot\mathrm{ctg}7x$.
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+4}{2x-4}\right)^{x-3}$.

20-вариант

1. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+2x-15}{2x^2+7x-15}$.
2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x-1}{4x-3x^3-1}$.
3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{6x+1}-5}{\sqrt{x}-2}$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5+3x^2-1}{2x^5-x+5}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{\cos x-\cos^3 x}$.
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+1}{5x-1}\right)^{x-4}$.

21-вариант

1. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+9x+4}{x^2-x-20}$.
2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{x^2+2x-3}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+25}-5}$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^4-5n+3}{n^4+3n-6}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\mathrm{tg}2x}{1-\cos 3x}$.
6. $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{x}{x^2-1}}$.

22-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2-4x+3}$.
2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+3x-14}{3x^2-7x+2}$.
3. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{2x-2}-4}$.
4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{6x^4-3x^2+x}{2x^3-x^2+4}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 3x}{2x\sin 5x}$.
6. $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{4+3t}{1+3t}\right)^{t-2}$.

23-вариант

1. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+5x+2}$.
2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-10x+8}{2x^2-3x-2}$.
3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{\sqrt{2x+3}-3}$.
4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^4-4x^2+5}{6x^4+3x-10}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{1-\cos 4x}$.
6. $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{x^2}{x-2}}$.

24-вариант

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-x-12}{x^2-2x-8}$.
2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-2x-5}{x^2+5x+4}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}{5x}$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+3n^2-n^4}{2n+n^2-3n^4}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\sin^2 3x\cdot\mathrm{ctg}^2 5x$.
6. $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$;

25-вариант

1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-x-12}{x^2+5x+6}$.
2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-3x-9}{3x^2-5x-12}$.
3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{5x+5}-5}$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-7x+4}{6x^3-3x^2+2}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\mathrm{arctg}^2 2x}$.
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-4}\right)^{x}$.

2. Иккинчи ёзма иш “Ҳосила ва унинг татбиқи"га доир бўлиб, унга икки соат вақт ажратиш лозим. Бу ёзма иш вариантларида 5 та дан мисол ва 1 та масала берилган. Уларни қуйидагича бажариш керак.

1-2-мисолларда: берилган функциянинг биринчи тартибли ҳосиласини топиш керак.

3-мисолда: берилган функциянинг аргумент x нинг берилган қийматидаги биринчи тартибли ҳосиласининг қийматини ҳисоблаш керак.

4-мисолда: берилган функциянинг иккинчи тартибли (y'') ҳосиласини топиш керак.

5-мисолда: параметрик кўринишда берилган функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$ ни топиш керак.

6-масала шарти вариантда берилган.

1-вариант

1. $y = \frac{\sqrt{1+\cos^3 x}}{1+\sin 3x}$.   2. $y = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{1+e^{2x}}$.

3. $f(x) = \frac{x}{2x-1}$, $x = -2$.

4. $y = \sqrt[3]{(1-x)^2}$.   5. $\begin{cases} x = \arcsin(t^2 - 1), \\ y = \arccos 2t. \end{cases}$

6. $y = \frac{ax+x^3}{a}$ эгри чизиқ a нинг қандай қийматида Ox ўқини 45° бурчак остида кесиб ўтади.

2-вариант

1. $y = \left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)^3$.   2. $y = e^{-\frac{1}{\cos x}}$.

3. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $x = -8$.

4. $y = 2^{\operatorname{ctg}2x}$.   5. $\begin{cases} x = t^2 + t + 1, \\ y = t^3 + t. \end{cases}$

6. $xy = 8$ ва $x^2 - y^2 = 12$ гиперболалар тўғри бурчак остида кесишишини кўрсатинг.

3-вариант

1. $y = \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)^3}$.   2. $y = \sqrt[3]{(1+\sin^3 2x)^2}$.

3. $f(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}$, $x = 0{,}01$.

4. $y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$.   5. $\begin{cases} x = \operatorname{ctg} t, \\ y = \frac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$

6. $x^2 + y^2 = 8$ ва $y^2 = 2x$ эгри чизиқлар қандай бурчак остида кесишишини аниқланг.

4-вариант

1. $y = \sqrt[5]{x + x \cdot \sqrt[3]{x}}$.   2. $y = 3^{x\cos^3 x}$.

3. $f(x) = x^2 - \frac{1}{2x^2}$, $x = \pm 2$.

4. $y = xe^{-x}$.   5. $\begin{cases} x = \frac{2-t}{2+t^2}, \\ y = \frac{t^2}{2+t^2}. \end{cases}$

6. $y = \frac{1}{x}$ гипербола ва $y = \sqrt{x}$ парабола қандай бурчак остида кесишишини аниқланг.

5-вариант

1. $y = \sqrt[3]{\frac{1+\sin 3x}{3+2\sin 3x}}$.   2. $y = e^{\frac{x}{\sqrt{3}}}\operatorname{arctg}^2 x$.

3. $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + x$, $x = -1$.

4. $y = \ln(\ln x)$.   5. $\begin{cases} x = 2\cos^3 2t, \\ y = \sin^3 2t. \end{cases}$

6. $y = x - x^3$ эгри чизиқ билан $y = 5x$ тўғри чизиқ кесишиш нуқтасида ташкил этган бурчакни топинг.

6-вариант

1. $y = \sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$.   2. $y = \frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$.

3. $f(x) = e^x \cdot \cos 3x$, $x = 0$.

4. $y = x\sqrt{1+x^2}$.   5. $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$

6. $x = t^2$, $y = t^3$ ярим кубик параболанинг $t = 2$ нуқтасида ўтказилган уринма ва нормал тенгламасини тузинг.

7-вариант

1. $y = \frac{3}{\sqrt[3]{x^3+x^2+1}} - 2\sqrt{6x+5}$.   2. $y = \cos 2x \sin^2 x$.

3. $f(x) = \ln(1+x) + \arcsin\frac{x}{2}$, $x = 1$.

4. $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

5. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin^2 t. \end{cases}$

6. $x^2 + y^2 = 5$ ва $y^2 = 4x$ эгри чизиқларнинг кесишиш нуқтасидаги бурчакни толинг.

8-вариант

1. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

2. $y = \sin^3 5x \cdot \sin^5 3x$.

3. $f(x) = \text{tg}^3 \frac{\pi x}{6}$, $x = 2$.

4. $y = \frac{\ln x}{x}$.

5. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t. \end{cases}$

6. $y = \frac{x-1}{1+x^2}$ эгри чизиқ абсциссалар ўқини қандай бурчак остида кесиб ўтади?

9-вариант

1. $y = x \cdot \sqrt[3]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$.

2. $f(x) = e^{\cos^2 3x}$.

3. $2y = 1 + xy^3$, $x = 1, y = 1$.

4. $y = x^2 \ln x^3$.

5. $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t. \end{cases}$

6. $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$ эгри чизиқнинг Oy ўқи билан кесишган нуқтасида ўтказилган уринма ва нормалнинг тенгламасини тузинг.

10-вариант

1. $y = \sqrt{x + \sqrt[3]{x}}$.

2. $y = e^{\text{tg}x} \cos x$.

3. $y = (x + y)^3 - 27(x - y)$, $x = 2, y = 1$.

4. $y = x^3 e^{5x}$.

5. $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t, \\ y = 2\sin t - \sin 2t. \end{cases}$

6. $y = 4x - x^3$ эгри чизиқнинг Ox ўқи билан кесишган нуқтасида ўтказилган уринма ва нормалнинг тенгламасини тузинг.

11-вариант

1. $y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^3 + 1}$.

2. $y = \arcsin(\text{tg}x)$.

3. $ye^y = e^{x+1}$, $x = 0, y = 1$.

4. $y = (1 + x^2)\text{tg}x$.

5. $\begin{cases} x = 2t^2 + t, \\ y = \ln t. \end{cases}$

6. $xy = 4$ гиперболага абсциссалари $x_1 = 1$, $x_2 = -4$ бўлган нуқталарда ўтказилган уринмаларнинг тенгламасини тузинг ва уринмалар орасидаги бурчакни топинг.

12-вариант

1. $y = \frac{\sqrt{x^2+\sqrt{x}}}{x^3-\sqrt{x}}$.

2. $y = e^{\cos x} \sin^2 x$.

3. $y^2 = x + \ln \frac{y}{x}$, $x = 1, y = 1$.

4. $y = e^x \cos^4 x$.

5. $\begin{cases} x = 3t - t^3, \\ y = 3t^2. \end{cases}$

6. Моддий нуқта $S = t^3 - 3t^2 + 3t + 5$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. t вақтнинг қайси моментида нуқтанинг тезлиги нолга тенг бўлади?

13-вариант

1. $y = 5\sqrt{x^2 + \sqrt{x} + \frac{1}{x}}$.

2. $y = \ln\ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

3. $x = t\ln t$, $y = \frac{\ln t}{t}$, $t = 1$.

4. $y = e^{-x}\cos x$.

5. $\begin{cases} x = 2t - t^3, \\ y = 2t^2. \end{cases}$

6. Иккита нуқта $S_1 = t^3 - 3t$ ва $S_2 = t^3 - 5t^2 + 17t - 4$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. Вақтнинг қайси моментила уларнинг тезлиги ўзаро тенг бўлади?

14-вариант

1. $y = 1 + \sqrt{\frac{1+x}{x-1}}$.

2. $y = \frac{\sin x}{1+\text{tg}y}$.

3. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t = \frac{\pi}{2}$.

4. $y = \sqrt{x} \cdot e^x$.

5. $\begin{cases} x = \mathrm{ctg}\, t, \\ y = \frac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$

6. Агар тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган нуқтанинг тезлиги $v = t^3 + t^2 - t + t$ тенглама билан берилган бўлса, нуқтанинг $t = 3$ моментдаги тезланишини топинг.

15-вариант

1. $y = \sqrt[3]{\frac{x^2+1}{3x-2}}$.
2. $S = \frac{e^t}{\cos t}$.
3. $x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t,\ t = \frac{\pi}{4}$.
4. $y = xe^{-x^2}$.
5. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \frac{t+1}{t}. \end{cases}$

6. Нуқта $S = t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 4$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. $t = 5$ да нуқтанинг тезлигини топинг.

16-вариант

1. $y = \sqrt[4]{x^2 + 3x} - \sqrt[5]{(6x-1)^2}$.
2. $y = \frac{1+e^x}{1-e^x}$.
3. $y = (1 + x^3)\left(5 - \frac{1}{x^2}\right),\ x = 1, x = 0$.
4. $y = \mathrm{arctg}\,\frac{2x}{1-x^2}$.
5. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \frac{t^3}{t-1}. \end{cases}$

6. Нуқта $S = 3t^3 + t^2 - 4$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. $t = 5$ сек моментдаги тезлик ва тезланишни топинг.

17-вариант

1. $y = \frac{2x}{\sqrt{1+x}} - 4\sqrt{1+x}$.
2. $y = \sin^2 3x$.
3. $S = \frac{3}{5-t} + \frac{t^2}{5},\ t = 0,\ t = 2$.
4. $y = x^3 \ln x$.
5. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$

6. Нуқта $S = t^2 - 8t^2 + 4$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. Вақтнинг қайси моментида нуқтанинг тезлиги нолга тенг бўлади?

18-вариант

1. $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$.
2. $y = \sqrt{1 + \ln^2 x}$.
3. $f(x) = x(1 + \sqrt{x^3}),\ x = 0$.
4. $y = xe^{\sin x}$.
5. $\begin{cases} x = \sin \frac{t}{2}, \\ y = \cos t. \end{cases}$

6. Тормозланиш пайтида маховик t сек давомида $\varphi = 3 + 8t - t^2$ бурчакка бурилади. Вақтнинг $t = 5$ сек моментида маховик айланишининг бурчак тезлигини топинг.

19-вариант

1. $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$.
2. $y = \frac{4 \ln x}{1 - \ln x}$.
3. $f(x) = \frac{x}{1-x^2},\ x = 2$.
4. $y = \ln \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$.
5. $\begin{cases} x = \cos at, \\ y = \sin at. \end{cases}$

6. Тормозланиш пайтида маховик t сек давомида $\varphi = 4 - 8t + t^3$ бурчакка бурилади. Вақтнинг t моментдаги бурчак тезланишини топинг.

20-вариант

1. $y = \sqrt[5]{3x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^3 - 4}$.
2. $y = \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x - \mathrm{ctg}\, x + x$.
3. $f(x) = \frac{a-x}{1+x},\ x = 1$.
4. $y = x\,\mathrm{arctg}\, x$.
5. $\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = \cos t. \end{cases}$

6. Тормозланиш пайтида маховик t сек давомида $\varphi = t^2 - 8t - 3$ бурчакка бурилади. Маховик тўхтайдиган вақт моменти t ни топинг.

21-вариант

1. $y = x\sqrt{1 + x^2}$.
2. $y = \ln\sqrt{\frac{1+\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}x}} - x$.
3. $S(t) = \frac{3}{5-t} + \frac{t^2}{5}$, $t = 0$, $t = 2$.
4. $y = \frac{x}{x^2-1}$.
5. $\begin{cases} x = \cos\frac{t}{2}, \\ y = t - \sin t. \end{cases}$

6. Жисм температураси T нинг t вақтга боғлиқ ҳолда ўзгариши $\mathrm{T} = 0{,}4t^2$ тенглама билан берилган. Вақтнинг $t = 10$ сек моментида бу жисм қандай тезлик билан қизийди?

22-вариант

1. $y = 5\sqrt{4x + 3} - \frac{2}{\sqrt{x^3+x+1}}$.
2. $y = \ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\cos x}}$.
3. $y = e^{\sqrt{\ln x}}$, $x = e$.
4. $y = x - \mathrm{arctg}x$.
5. $\begin{cases} x = \mathrm{tg}t + \mathrm{ctg}t, \\ y = 2\ln\mathrm{ctg}t. \end{cases}$

6. Массаси 5 кг бўлган жисм $S = 3t^2 + t + 4$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. Жисмнинг ҳаракат бошлангандан 4 сек ўтгандан кейинги кинетик энергияси $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ ни топинг.

23-вариант

1. $y = 3\sqrt[3]{x^5 + 5x^4 - \frac{5}{x}}$.
2. $y = \ln\left(e^x + \sqrt{1 + e^x}\right)$.
3. $y = \sqrt[3]{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}$, $x = \frac{\pi}{2}$.
4. $y = \sin x - \frac{1}{3}\cos^3 x$.
5. $\begin{cases} x = \sin t^2 + 1, \\ y = e^{t^2}. \end{cases}$

6. Ток кучи I вақт t га боғлиқ ҳолда $I = 0{,}4t^2$ қонун бўйича ўзгаради. $t = 8$ секунд охирида ток кучи ўзгаришининг тезлигини топинг.

24-вариант

1. $y = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$.
2. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}}$.
3. $f(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$, $x = 0$, $x = 1$.
4. $y = \mathrm{arctg}\sqrt{x}$.
5. $\begin{cases} x = 3\cos^2 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$

6. Нуқта $S = 2t^3 - 2t^2 - 4$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. $t = 2$ секунд охирида нуқтанинг тезланишини топинг.

25-вариант

1. $y = x + \sqrt[3]{\frac{1+x^5}{1-x^5}}$.
2. $y = \mathrm{tg}^2(x^3 + 1)$.
3. $f(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x^2+1}$, $x = 0, x = 1$.
4. $y = \ln(x + \sqrt{x})$.
5. $\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = at\sin t. \end{cases}$

6. $y = x^2 - 6x + 8$ параболага абсциссаси $x = 4$ бўлган нуқтада ўтказилган нормалнинг тенгламасини тузинг.

3. Учинчи ёзма иш "Аниқмас интеграл" бобига бағишланган бўлиб, унга икки соат вақт ажратилган. Бу ёзма иш вариантларида 6 та дан мисол бўлиб, берилган интегралнинг бошланғич функциясини топиш керак.

1-вариант

1. $\int x^3\mathrm{arctg}x dx$.
2. $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^4} dx$.
3. $\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$.
4. $\int \frac{2x-1}{5x^2-x+2} dx$.
5. $\int \ln^2 x dx$.
6. $\int \sin 2x \cos 5x dx$.

2-вариант

1. $\int \frac{3x-1}{4x^2-4x+17} dx$.
2. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{6x-x^2-8}} dx$.

3. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}dx$.

4. $\int \frac{x-1}{x^3+8}dx$.

5. $\int \cos 2x \cos^2 x dx$.

6. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$.

3-вариант

1. $\int \frac{dx}{2\sin x - 3\cos x}$.

2. $\int \frac{\sin 2x dx}{3\sin^2 x + 4}$.

3. $\int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}dx$.

4. $\int \frac{x^2}{9-x^4}dx$.

5. $\int \frac{e^x+1}{e^x-1}dx$.

6. $\int x \cdot 5^x dx$.

4-вариант

1. $\int \frac{x-8}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$.

2. $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$.

3. $\int \frac{2x^2-x-1}{x^3-x^2-6x}dx$.

4. $\int \frac{x-\mathrm{arctg}2x}{1+4x^2}dx$.

5. $\int x^2 e^{3x} dx$.

6. $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx$.

5-вариант

1. $\int x^2 \cdot 2^x dx$.

2. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

3. $\int e^{-2x}\sin(e^{-2x})\,dx$.

4. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$.

5. $\int x^2 \sin x dx$.

6. $\int \frac{1+x^2}{x}dx$.

6-вариант

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

2. $\int x^2 \cdot e^{-\frac{x}{2}}dx$.

3. $\int \frac{\sin 4x}{1+\cos 4x}dx$.

4. $\int \frac{2x}{(x+1)(x^2+x+2)}dx$.

5. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

6. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}$.

7-вариант

1. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$.

2. $\int \sqrt{x}\ln x dx$.

3. $\int \frac{x+1}{4x^2-12x+3}dx$.

4. $\int \frac{dx}{5-4\sin x}$.

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

6. $\int \frac{5x^3-8}{x^3-4x}dx$.

8-вариант

1. $\int \frac{2^{\ln x}}{x\sqrt{1+4^{\ln x}}}dx$.

2. $\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}dx$.

3. $\int \frac{x+2}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$.

4. $\int x^2 \cdot 5x^{\frac{x}{2}}dx$.

5. $\int \sin x \sin 3x dx$.

6. $\int \frac{dx}{x^4+2x^3+2x^2}$.

9-вариант

1. $\int \sin 5x \cos x dx$.

2. $\int (1-x)\sin x dx$.

3. $\int \frac{dx}{4x^3-x}$.

4. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}}$.

5. $\int (1-\sin 2x)^2 dx$.

6. $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx$.

10-вариант

1. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+2x}dx$.

2. $\int \frac{e^{2x}}{e^x-1}dx$.

3. $\int \frac{\sqrt[3]{\mathrm{arctg}^2 x}}{1+x^2}dx$.

4. $\int \sqrt[3]{x^2}\ln x dx$.

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2+1}}$.

6. $\int \sin 5x \cos 3x dx$

11-вариант

1. $\int \frac{\sin 5x}{1+\cos^2 5x}dx$.

2. $\int \mathrm{arctg}\sqrt{x}dx$.

3. $\int \frac{x-4}{\sqrt{x^2-2x+3}}\,dx$.

4. $\int \frac{dx}{x^4-16}$.

5. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

6. $\int \frac{\sin^3 x+1}{\cos^2 x}\,dx$.

12-вариант

1. $\int \frac{3-2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}\,dx$.

2. $\int \frac{x+2}{\sqrt{4x^2-4x+3}}\,dx$.

3. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

4. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$.

5. $\int \operatorname{ctg}^4 x dx$.

6. $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}\,dx$.

13-вариант

1. $\int \frac{3x^3+x^2+5x+1}{x^3+x}\,dx$.

2. $\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}\,dx$.

3. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$.

4. $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$.

5. $\int \frac{xdx}{2x^4+5}$.

6. $\int (x+1)e^x dx$.

14-вариант

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x-7)}$.

2. $\int (x^2+3)\cos x dx$.

3. $\int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}\,dx$.

4. $\int \frac{xdx}{2x^2+2x+5}$.

5. $\int \frac{x^4}{x^4-16}\,dx$.

6. $\int \sin^2 x\cos^4 x dx$.

15-вариант

1. $\int \frac{dx}{(1+x^2)(\operatorname{arctg}x-3)}$.

2. $\int \frac{3x+2}{x^2-4x+12}\,dx$.

3. $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$.

4. $\int \frac{2-x}{(7-x)^3}\,dx$.

5. $\int \frac{\sqrt{2x-3}}{x}\,dx$.

6. $\int (1+\sin^4 x)\,dx$.

16-вариант

1. $\int \frac{dx}{\cos^2 x(1+\operatorname{tg}x)^3}$.

2. $\int \frac{x+4}{\sqrt{7+6x-x^2}}\,dx$.

3. $\int e^{2x}\sin 2x dx$.

4. $\int \frac{x^2-2x+1}{x^3+2x^2+x}\,dx$.

5. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$.

6. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\,dx$.

17-вариант

1. $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}-5}\,dx$.

2. $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$.

3. $\int \frac{5x+3}{\sqrt{4x+5-x^2}}\,dx$.

4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$.

5. $\int \ln(x^2+1)\,dx$.

6. $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$.

18-вариант

1. $\int (x^2+3)e^{-2x}dx$.

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x-x^2}}$.

3. $\int \frac{dx}{x\ln^3 x}$.

4. $\int \frac{dx}{x^4-6x^3+9x^2}$.

5. $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}\,dx$.

6. $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}\,dx$.

19-вариант

1. $\int (x+2)\ln x dx$.

2. $\int \frac{x^2+x+5}{x(x+3)(x-2)}\,dx$.

3. $\int \frac{2x+3}{x^2-5x+7}\,dx$.

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+1}$.

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}}$.

6. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 3x}$.

20-вариант

1. $\int \frac{81^x-3^x}{9^x}\,dx$.

2. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{1+6x-3x^2}}\,dx$.

3. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}+1}$.
4. $\int \sin(\ln x)dx$.
5. $\int \frac{x^2-3}{x^4-5x^2+4}\,dx$.
6. $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x}$.

21-вариант

1. $\int 2^x \cdot 3^x dx$.
2. $\int \arcsin x dx$.
3. $\int \frac{x+1}{5x^2+2x+1}\,dx$.
4. $\int \frac{x+3}{(x+2)(x^2+x+1)}\,dx$.
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$.
6. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{7+2\cos x}}\,dx$.

22-вариант

1. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{7+2\cos x}}\,dx$.
2. $\int x\ln(x^2+1)dx$.
3. $\int \frac{3x-13}{x^2-4x+8}\,dx$.
4. $\int \frac{x^2}{9-x^4}\,dx$.
5. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.
6. $\int \frac{x^4+2x-2}{x^4-1}\,dx$.

23-вариант

1. $\int \sqrt{\sin x}\cos^5 x dx$.
2. $\int \frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}\,dx$.
3. $\int \frac{x^2}{1-x^4}\,dx$.
4. $\int \frac{dx}{x^3+4x-x^2-4}$.
5. $\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx$.
6. $\int (x^2+1)\cdot 3^x dx$.

24-вариант

1. $\int \frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$.
2. $\int \frac{5x+3}{3x^2+2x+1}\,dx$.
3. $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$.
4. $\int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[6]{x}+1)}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.
5. $\int \cos 3x\cos x dx$.
6. $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$.

25-вариант

1. $\int \frac{1+\ln x}{x}\,dx$.
2. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.
3. $\int x^3 e^{x^2} dx$.
4. $\int \frac{3x-1}{x^2-6x+10}\,dx$.
5. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+2x}\,dx$.
6. $\int \frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x^5}+\sqrt[4]{x^3}}\,dx$.

4. Тўртинчи ёзма иш “Дифференциал тенгламалар” бобига бағишланган бўлиб, унга ҳам икки соат вақт ажратилган. Бу ёзма иш вариантларида 5 та дан мисол бўлиб, берилган дифференциал тенгламаларни ечиш керак. 1,2,3,5-мисолларда умумий ечимни, 4-мисолда берилган бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимни топиш керак.

1-вариант

1. $y'-\frac{y}{x}-\frac{1}{\sin\frac{y}{x}}=0$.
2. $e^{1+x^2}\text{tg}y dx=\frac{e^{2x}}{x-1}\,dy$.
3. $y''+y'\text{tg}x=\sin 2x$.
4. $y''-y=\cos 2x,\ \ y(0)=-\frac{1}{5},\ \ y'(0)=1$.
5. $y''+4y=\text{ctg}2x$.

2-вариант

1. $y'=4+\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2$.
2. $y'=2^{x-y}$.
3. $y''=4\cos 2x$.
4. $y''-2y'+5y=5x^2-4x+2,\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=2$.
5. $y''-y=\sin x$.

3-вариант

1. $(x^2+y^2)dx-xydy=0$.
2. $(1+e^{2x})y^2dy=e^x dx$.
3. $yy''+y'^2=0$.

4. $y''+3y'-10y = xe^{-2x}, \;\; y(0)=0, \;\; y'(0)=0$.

5. $y''-3y'+2y = 2^x$.

4-вариант

1. $xy'-y = x^2\cos x$.

2. $3e^x \operatorname{tg} y\,dx = (1+e^x)\sec^2 y\,dy$.

3. $x^3y''+x^2y' = 1$.

4. $y''-2y' = e^x(x^2+x-3), \;\; y(0)=2, \;\; y'(0)=2$.

5. $y''-4y'+5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$.

5-вариант

1. $y'-\dfrac{3}{x}y = x$.

2. $\dfrac{y}{x}y'+e^y = 0$.

3. $x^3y''' = 6$.

4. $y''-4y'+4y = \sin x, \;\; y(0)=0, \;\; y'(0)=0$.

5. $y''+4y = \cos^2 x$.

6-вариант

1. $y'+2xy = 2xy^3$.

2. $y'+y = e^x\sin x$.

3. $y'''\sin^4 x = \sin 2x$.

4. $y''-3y'+2y = -e^{-2x}, \;\; y(0)=1, \;\; y'(0)=0$.

5. $y''-6y'+9y = \dfrac{9x^2+6x+2}{x^3(3x-2)}e^{3x}$.

7-вариант

1. $x^3y'+x^2y+x+1 = 0$.

2. $(x+y)dx+xdy = 0$.

3. $yy''+1 = y'^2$.

4. $y''+y = \cos 3x, \;\; y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4, \;\; y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

5. $y''+2y'+y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$.

8-вариант

1. $y'+\dfrac{2y}{x} = \dfrac{e^{-x^2}}{x}$.

2. $1+(1+y')e^y = 0$.

3. $x^2y''' = y''^2$.

4. $y''-y = e^{2x}, \;\; y(0)=1, \;\; y'(0)=2$.

5. $y''+y' = \operatorname{tg} x$.

9-вариант

1. $y'+2xy = xe^{-x^2}$.

2. $x\cos\dfrac{y}{x}(ydx+xdy) = x^2\sin\dfrac{y}{x}dx$.

3. $y'^2+2yy'' = 0$.

4. $y''-4y = 3xe^{-x}, \;\; y(0)=0, \;\; y'(0)=0$.

5. $y''+4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$.

10-вариант

1. $xy+y^2 = (2x^2+xy)y'$.

2. $y'+\dfrac{y}{x+1}+x^2 = 0$.

3. $y'' = 2yy'$.

4. $y''+4y = \sin x, \;\; y(0)=0, \;\; y'(0)=0$.

5. $y''-y = \dfrac{e^{2x}}{e^x-1}$.

11-вариант

1. $xy'+y = \sin x$.

2. $y^2dx = (xy-x^2)dy$.

3. $2xy'y'' = y'^2-1$.

4. $y''-2y'+2y=2x,\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=0$.

5. $y''-6y'+9y=36\sqrt{x}e^{3x}$.

12-вариант

1. $xy'-y=x\mathrm{tg}\,\frac{y}{x}$.
2. $y'+\frac{1-2x}{x^2}y=1$.
3. $2yy''=1+y'^2$.
4. $2y''+y'-y=2e^x,\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=1$.
5. $y''+y=\frac{1}{\cos 2x}$.

13-вариант

1. $y'-\frac{y}{x}=e^{\frac{y}{x}}$.
2. $y'+\frac{4xy}{x^2+1}=\frac{1}{x^2+1}$.
3. $y''^2=y'^2+1$.
4. $y''-4y'+3y=e^{5x},\ \ y(0)=3,\ \ y'(0)=9$.
5. $y''+4y=2\mathrm{tg}x$.

14-вариант

1. $y'+y\mathrm{tg}x=\frac{1}{\cos x}$.
2. $xy'=y-xy$.
3. $xy''-y'=x^2e^x$.
4. $y''+4y=5e^x,\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=1$.
5. $y''-y'=\frac{1}{1+e^x}$.

15-вариант

1. $xy'=y+xe^{\frac{y}{x}}$.
2. $x+y=xy'$.

3. $x(y''+1)+y'=0$.
4. $y''+y=xe^x,\ \ y(0)=0,5,\ \ y'(0)=1$.
5. $y''+2y'+y=\frac{e^{-x}}{x}$.

16-вариант

1. $y'+xy=x^3$.
2. $y'+\frac{3}{x}y=\frac{2}{x^3}$.
3. $xy''=y'+x^2$.
4. $y''-y=2(1-x),\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=1$.
5. $y''-2y'+y=\frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$.

17-вариант

1. $x\ln\frac{x}{y}d-ydx=0$.
2. $y'x+y=-xy^2$.
3. $y''+\frac{1}{x}y'=0$.
4. $y''-y=9xe^{2x},\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=-5$.
5. $y''+y=\frac{2+\cos^3 x}{\cos^2 x}$.

18-вариант

1. $y'\cos x-y\sin x=\sin x$.
2. $(x^2-2y^2)dx+2xydy=0$.
3. $x^2y''+y'^2=0$.
4. $y''+6y'+8y=3x^2+2x+1,\ \ y(0)=\frac{17}{64},\ \ y'(0)=0$.
5. $y''+y=\frac{1}{\sin x}$.

19-вариант

1. $\left(xye^{\frac{x}{y}}+y^2\right)dx=x^2e^{\frac{x}{y}}dy$.

2. $xy'\ln\frac{y}{x} = x + y\ln\frac{y}{x}$.
3. $x^2y'' = 4$.
4. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
5. $y'' + y = \mathrm{tg}^2 x$.

20-вариант

1. $x^2y' = 2xy + 3$.
2. $y^2 + x^2y' = xyy'$.
3. $y'' = \sqrt{1 - y'^2}$.
4. $y'' + 4y = e^{-2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
5. $y'' - 3y' + 2y = 1 + \frac{1}{1+e^x}$.

21-вариант

1. $dy = (y + x^2)dx$.
2. $y = y'\ln y$.
3. $y^3y'' - 3 = 0$.
4. $y'' - 4y' + 5y = xe^{2x}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.
5. $y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}$.

22-вариант

1. $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x$.
2. $(x^2 - x^2y)y' + y^2 + xy^2 = 0$.
3. $xy'' + 2y' = 0$.
4. $y'' - 3y' - 4y = 17\sin x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$.
5. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

23-вариант

1. $y' - 2xy = xe^{-x^2}$.
2. $3e^x \mathrm{tg} y dx = (1 - e^x)\sec^2 y dy$.

3. $1 + y'^2 + yy'' = 0$.
4. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(3 - 4x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
5. $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$.

24-вариант

1. $xy' = 3y - x^4y^2$.
2. $(1 + y^2)dx - \sqrt{x}dy = 0$.
3. $yy'' = y'^2$.
4. $y'' + 2y' + y = 9e^{2x} + x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
5. $y'' + y = \mathrm{ctg} x$.

25-вариант

1. $y' - y = e^x$.
2. $x + xy + y'(y + xy) = 0$.
3. $y'' = 2 - y$.
4. $y'' + y = \sin 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
5. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$.

3-§. Амалий машғулот дарсларида зарур бўладиган формулалар

Ажойиб лимитлар

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + kx)^{\frac{1}{x}} = e^k$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x} = \alpha$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a$;

9) $\lim\limits_{y\to\infty} y\,(a^{\frac{1}{y}} - 1) = \ln a$.

(Ҳосила ва интеграл жадвали китобнинг форзацида берилди.)

Энг оддий функцияларнинг юқори тартибли ҳосилалар жадвали

№	Функция	n- тартибли ҳосиласи
1.	$y = x^n$	$y^{(n)} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$
2.	$y = \ln x$	$y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\ \frac{1}{x^n}$
3.	$y = \log_a x$	$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{\ln a}\cdot\frac{1}{x^n}$
4.	$y = e^{kx}$	$y^{(n)}=k^n e^{kx}$
5.	$y = a^x$	$y^{(n)}=(\ln a)^n a^x$
6.	$y = a^{kx}$	$y^{(n)}=(k\ln a)^n a^{kx}$
7.	$y = \sin x$	$y^{(n)}= \sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$
8.	$y = \cos x$	$y^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$
9.	$y = \sin kx$	$y^n = k^2 \sin\left(kx+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$
10.	$y = \cos kx$	$y^{(n)}=k^n \cos\left(kx+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$
11.	$y = \operatorname{sh}x$	n — жуфт бўлса, $y^{(n)} = \operatorname{sh}x$, n — тоқ бўлса, $y^{(n)}=\operatorname{ch}x$.
12.	$y = \operatorname{ch}x$	n — жуфт бўлса, $y^{(n)} = \operatorname{ch}x$, n — тоқ бўлса, $y^{(n)}=\operatorname{sh}x$.

Интегралларнинг кўринишига қараб, ўзгарувчиларни алмаштириш усуллар жадвали

№	Интеграл	Узгарувчини алмаштириш
1.	$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}\right) dx$	$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}$
2.	$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+e}}, \ldots\right) dx$	$t = \sqrt[r]{\frac{ax+b}{cx+e}}$, бунда r — n, m,... сонларга бўлинувчи энг кичик сон.
3.	$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx.$	Эйлернинг қуйидаги учта алмаштиришлардан бирини бажарилади.
	1) агар $a > 0$ бўлса, 2) агар $c > 0$ бўлса, 3) агар квадрат учҳад $ax^2 + bx + c = (x-\alpha)(x-\beta)$ бўлса,	$t - \sqrt{a}x = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, $xt + \sqrt{c} = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, $t(x - \alpha) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$.
4.	$\int R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right) dx$	$x = a\operatorname{tg}t$ ёки $x = a\operatorname{ctg}t$
5.	$\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx$	$x = \frac{a}{\sin t}$ ёки $x = \frac{a}{\cos t}$
6.	$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$	$x = a\sin t$ ёки $x = a\cos t$.

АДАБИЁТЛАР

1. Бермант Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. — М.: Наука, 1985.

2. Бермант Г.Н., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. — М.: Наука, 1969.

3. Богомолов Н.В. Олий математикадан амалий машғулотлар. — Т.: "Ўқитувчи", 1976.

4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. — М.: Наука, 1988.

5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах.— М.: Высшая школа, 1986, ч. 1,2.

6. Демидович В.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — М.: Наука, 1977.

7. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. Под ред. Б.П.Демидовича. — М.: Наука, 1978.

8. Зорич В.А. Математический анализ. 1 и 2 т. — М.: Наука, 1981.

9. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 1. — М.: Наука, 1971, ч. 2 — 1973.

10. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Высшая школа, 1983.

11. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3 т. — М.: Высшая школа, 1988.

12. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). — М.: Высшая школа, 1983.

13. Минорский. В. Олий математикадан масалалар тўплами. — Т.: "Ўқитувчи", 1963.

14. Рябушко и др. Сборник задач индивидуальных заданий по высшей математике. Часть 1, 2.— Минск, Высшая школа, 1991.

15. Сборник задач по курсу высшей математики. Под ред. Г.И.Кручковича. — М.: Высшая школа, 1973.

МУНДАРИЖА

22.161.6
Т.24

Тожиев Ш.И.
Олий математикадан масалалар ечиш. Олий ўқув юртлари талабалари учун дарслик. Т.: "Ўзбекистон", 2002.— 512 б.

ББК 22.161.6я73

Таджиев Шукрулла Исмоилович

ОЛИЙ МАТЕМАТИКАДАН МАСАЛАЛАР ЕЧИШ

Тошкент — "Ўзбекистон" — 2002

Муҳаррир *Я. Алимова*
Бадиий муҳаррир *Ҳ. Меҳмонов*
Техник муҳаррир *У. Ким*
Мусаҳҳиҳ *М. Раҳимбекова*
Компьютерда тайёрловчи *Л. Абкеримова*

Теришга берилди 5.02.02. Босишга рухсат этилди 26.09.02.
Когоз формати $84\times108^1/_{32}$. Шартли босма т. 26,88. Нашр т. 23,79.
Тиражи 2000. Буюртма № 321. Баҳоси шартнома асосида.

«Ўзбекистон» нашриёти, 700129, Тошкент, Навоий, 30,
Нашр № 13-2002.

Ўзбекистон матбуот ва ахборот агентлигининг
Ғ. Ғулом номидаги нашриёт-матбаа ижодий уйи. 700129, Тошкент ш.,
Навоий кўчаси, 30. 700169. Тошкент, У. Юсупов кўчаси. 86 уй.