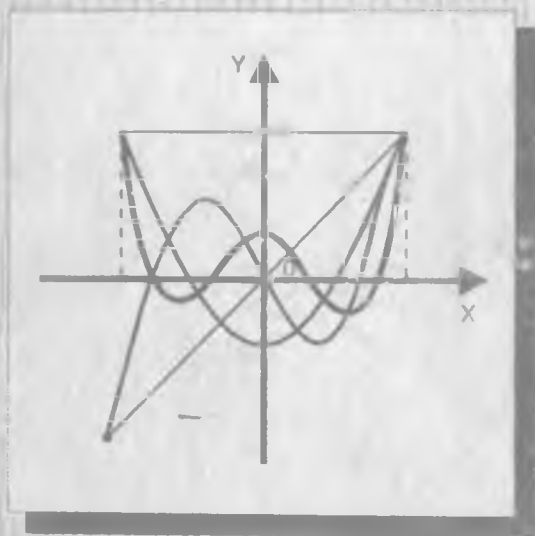


Ё.У. СОАТОВ

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА



5

«O'QITUVCHI»

51

C-73

Ё. У. СОАТОВ

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

5-ЖИЛД

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги
олий техника ўқув юртлари талабалари учун дарслик сифатида
таъсия этган

ТОШКЕНТ «ЎҚИТУВЧИ» 1998

NUXORO MUHADDISLIK-
TEKNOLOGIYA INSTITUTI

ARM

REESTR № 4/2642

2005 y

Тақризчилар: Тошкент қишлоқ хўжалигини механизациялаш ва ирригациялаш институтининг «Ҳисоблаш математикаси ва математик моделлаштириш» кафедраси, Тошкент туқимачилик енгил саноати институти «Амалий математика» кафедраси.

Таҳрир ҳайъати: Физика-математика фанлари номзодлари, доцентлар: *Е. М. Ҳусанбоев* (масъул), *А. Омонов*, *А. Абдукаримов* (математик физика тенгламалари); техника фанлари номзоди, доцент *Р. Ж. Исомов*.

Дарслик Олий техника ва қишлоқ хўжалик ўқув юртарининг талабалари учун мулжалланган.

Китоб «Олий математика» дарслигининг бешинчи жилди бўлиб, бу жилдда «Олий математика» курсининг «Математик физика тенгламалари», «Операцион ҳисоб» ва «Сонли усуллар» бўлимлари амалдаги «Дастур»га асосан ёзилган. Унда етарли миқдорда мисол ва масалалар берилган.

С $\frac{1602000000-182}{353(04)-98}$ Ахб. хати—97

ISBN 5 — 645 — 03104 — 0

© «Ўқитувчи» нашриёти, 1998.

СЎЗ БОШИ

Китобхон эътиборига ҳавола қилинаётган мазкур «Олий математика» дарслигининг бешинчи жилдига унинг математик физика тенгламалари, операцион ҳисоб ва асосий сонли усуллар каби махсус боблари киритилган.

Дарсликнинг бешинчи жилдини ёзишда ҳам олий ўқув юр்தларининг муҳандис-техник ва қишлоқ хўжалик мутахассисликлари учун математик фанларнинг амалдаги «Дастур»ида кўзда тутилган ва соатлари меъёрланган махсус боблари учун тавсия қилинган асосий ва қўшимча адабиётлардан ҳамда ўзбек тилида чоп этилган дарслик ва ўқув қўлланмаларидан кенг фойдаланилди.

Муаллиф дарсликни тузишда, унинг махсус бобларини ёзишда берган маслаҳатлари ва ёрдамлари учун Тошкент архитектура-қурилиш институти «Олий ва амалий математика» кафедраси ўқитувчиларига ўз миннатдорчилигини билдиради.

Ўзбекистон ФА нинг ҳақиқий аъзоси, физика-математика фанлари доктори, профессор В. Қ. Қобуловнинг дарсликка киритилган махсус бобларда келтирилган мавзуларни такомиллаштирилган ҳолда баён қилиш борасида берган танқидий фикр ва мулоҳазаларини муаллиф қадрлайди ва унга ўзининг миннатдорчилигини билдиради.

Муаллиф ҳолисона тақриз, танқид ва дарсликни ёзишда йўл қўйилган камчиликларни кўрсатганлари учун Тошкент қишлоқ хўжалигини механизациялаш ва ирригациялаш институти «Ҳисоблаш математикаси ва математик моделлаштириш» кафедраси ўқитувчиларига ва унинг мудир профессора Х. Эшматовга, Тошкент тўқимачилик ва енгил саноат институти «Амалий математика» кафедраси ўқитувчиларига ва унинг мудир доцент Н. Муқимовга, таҳрир ҳайъатининг аъзолари доцентлар: Ё. М. Хусанбоев, Р. Ж. Исомов, А. Омоновларга ўз ташаккурини изҳор қилади.

Айниқса, дарсликнинг «Математик физика тенгламалари» махсус бобини ёзишда доцент Н. И. Қидирбоевнинг беминнат ёрдамини муаллиф эътироф этишни ўзининг бурчи деб билади.

Дарслик ҳақидаги танқидий фикр ва мулоҳазаларини билдирган барча китобхонларга муаллиф олдиндан ўз ташаккурини билдиради.

Муаллиф

МАТЕМАТИК ФИЗИКА ТЕНГЛАМАЛАРИ

А. НАЗАРИЙ МАВЗУЛАР

1-§. Асосий физик жараёнлар ва уларнинг тенгламалари.

Умумий тушунчалар

Кўпчилик физик жараёнлар математик физиканинг асосий тенгламаларини ўрганиш заруратига олиб келишини мисолларда кўрсатамиз.

1.1 Иссиқликнинг тарқалиши ва диффузия. Парчаланишли диффузия ва занжир реакцияда диффузия. Изотроп жисм берилган бўлсин: u — жисм температураси, ρ — унинг зичлиги, γ — солиштирма иссиқлик сифими; f — иссиқлик манбаларининг интенсивлиги, яъни ҳажм бирлигидан вақт бирлигида ажраладиган иссиқлик миқдори.

Жисмнинг ҳажмини тўлдирган зарраларининг вақт бирлигидаги иссиқлик балансини ҳисоблайлик. Тажриба натижаларига мос келадиган Фурье гипотезасига асосан V ҳажмга ΔS сирт элементи орқали келадиган иссиқлик миқдори

$$\Delta Q = -k \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \Delta S$$

формула билан аниқланади, бу ерда k — мусбат пропорционаллик (мутаносиблик) коэффициенти бўлиб, *иссиқлик ўтказувчанлик коэффициенти* деб аталади. Демак, V га S сирт орқали келувчи иссиқлик миқдори Остроградский формуласига (2-жилдга қаранг) асосан

$$- \iint_S k \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V \operatorname{div}(k \nabla u) d\tau$$

га тенг бўлади, бу ерда ∇u — шу u функциянинг градиенти. V га келадиган жами иссиқлик миқдори

$$Q_1 = \iiint_V \operatorname{div}(k \nabla u) d\tau + \iiint_V f d\tau$$

тенглик билан аниқланади, бу ерда тенгликнинг ўнг қисмидаги иккинчи қўшилувчи — манбалар ҳисобига келадиган иссиқлик миқдори.

Ҳажмнинг $d\tau$ элементи температурасини Δt вақт ичида du миқдорга ошириш учун

$$\gamma du \rho d\tau = \gamma \rho \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t \cdot d\tau$$

иссиқлик миқдори керак бўлади.

Жисмнинг V ҳажмини эгаллаган зарралари температурасини оширишга сарф бўладиган жами иссиқлик миқдори вақт бирлиги ичида

$$Q_2 = \iiint_V \gamma \rho \frac{\partial u}{\partial t} \cdot d\tau$$

га тенг бўлади. $Q_1 = Q_2$ десак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\iiint_V [\operatorname{div}(k \nabla u) + f] d\tau = \iiint_V \gamma \rho \frac{\partial u}{\partial t} d\tau.$$

V соҳа ихтиёрий эканлигини ҳисобга олиб, ўрта қиймат ҳақидаги теоремага асосан

$$\operatorname{div}(k \nabla u) - \gamma \rho \frac{\partial u}{\partial t} = -f \quad (1.1)$$

ни ҳосил қиламиз. (1.1) тенглик иссиқликнинг бир жинсли бўлмаган жисмда тарқалиши дифференциал тенгламасидан иборат. Муҳит бир жинсли бўлган ҳолда бу тенглама

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{f}{k}, \quad a = \sqrt{\frac{k}{\gamma \rho}} \quad (1.2)$$

қўринишда ёзилади ва математик физиканинг асосий тенгламаси — *иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси* деб аталади. Хусусан, агар иссиқлик оқими стационар, яъни вақтга боғлиқ бўлмаса, у ҳолда бу Пуассон тенгламаси, ва агар бунда иссиқлик манбалари йўқ бўлса, у ҳолда Лаплас тенгламаси бўлади.

Бирор муҳит газ билан нотекис тўлдирилган ёки эритма билан тўлдирилган ҳажмда эритилган модда нотекис тақсимланган бўлсин. Бу ҳолларда газ ёки модданинг зичлик катта бўлган жойлардан зичлик кичик бўлган жойларга диффузияси содир бўлади, бунда концентрация дейилганда

$$u = \frac{dQ}{d\tau}$$

функция тушунилади, бу ерда dQ — газ ёки эритма билан тўлдирилган ҳажмнинг $d\tau$ элементидаги модда ёки газ миқдори.

Нэрнстинг экспериментал қонунига асосан V ҳажмдан вақт бирлиги ичида сирт элементи ΔS орқали диффузияланувчи газ ёки модда миқдори

$$\Delta Q = -D \frac{\partial u}{\partial n} \Delta S$$

формула орқали аниқланади, бу ерда D — диффузия коэффициенти деб аталадиган мусбат пропорционаллик коэффициенти. Демак, V ҳажмга вақт бирлиги ичида келадиган жами модда ёки газ миқдори

$$-\iint_S D \frac{\partial u}{\partial n} dS + \iiint_V f d\tau = \iiint_V [\operatorname{div}(k \nabla u) + f] d\tau.$$

бўлади, бу ерда тенгликнинг чап томонидаги иккинчи қўшилувчи манбалар ҳисобига келадиган модда ёки газ миқдори; f — бу манбаларнинг интенсивлиги. $d\tau$ ҳажм элементида Δt вақт ичида концентрациянинг du миқдорга ўзгариши учун

$$c du d\tau = c \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t d\tau$$

микдорда модда ёки газ талаб қилинади, бу ерда c — *говаклик коэффициент* деб аталадиган мусбат пропорционаллик коэффициент.

V ҳажмдаги концентрацияни вақт бирлигида ўзгартириш учун сарф бўладиган жами модда ёки газ миқдори

$$\iiint_V c \frac{\partial u}{\partial t} d\tau$$

бўлади. Энди модданинг сақланиш қонунига асосан

$$\iiint_V [\operatorname{div}(D \nabla u) + f] d\tau = \iiint_V c \frac{\partial u}{\partial t} d\tau$$

га эга бўламиз. Бу ердан, юқоридаги каби, бир [жинсли бўлмаган муҳитда диффузия тенгламаси

$$\operatorname{div}(D \nabla u) - c \frac{\partial u}{\partial t} = -f \quad (1.3)$$

ни ҳосил қиламиз. Бир жинсли муҳит бўлган ҳолда бу тенглама

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{f}{D}, \text{ бу ерда } a = \sqrt{\frac{D}{c}} \quad (1.4)$$

кўринишни олади ва у иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси билан устма-уст тушади. Баъзи газларнинг (масалан, радийнинг эманациясида) диффузияланишида бу газлар молекулаларининг парчаланиш реакцияси содир бўлади. Парчаланиш реакциясининг тезлигини газнинг концентрациясига пропорционал деб олиш табиий бўлади, шу сабабли (1.4) диффузия тенгламаси парчаланиш мавжуд бўлганда ушбу кўринишни олади:

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\beta}{D} u = -\frac{f}{D}, \quad (1.5)$$

бу ерда β — мусбат пропорционаллик коэффициент бўлиб, парчаланиш реакциясининг тезлигини тавсифлайди. Бунга (1.4) тенгламада манбалар интенсивлиги f нинг ўрнига ($f \rightarrow \beta u$) ни қўйиб, осон ишонч ҳосил қилиш мумкин. Стационар диффузия бўлган ҳолда (1.5) тенглама ушбу кўринишдаги тенгламага келтирилади:

$$\Delta u - k^2 u = -\frac{f}{D}, \quad k = \sqrt{\frac{\beta}{D}} \quad (1.6)$$

«Занжир реакциялар» мавжуд бўлган диффузия жараёнлари катта қизиқиш уйғотади. Занжир реакцияларга хос нарсаси шуки, диффузияланаётган газ ёки модда зарралари атроф-муҳит билан реакцияга киришиб (таъсирланиб) «кўпаядилар». Масалан, нейтрон уранининг «актив» ядролари билан тўқнашганда ядроларнинг бўлиниш реакциялари содир бўлиб, бунда янги нейтронлар пайдо бўлади, улар эса ўз навбатида актив ядролар билан реакцияга киришади ва

янги нейтронларнинг пайдо бўлишига олиб келади, бу жараён эса шу тартибда давом этади. Агар тавсифланган бу жараёни «диффузия» нуқтаи назаридан қаралса, реакция тезлиги концентрацияга (нейтронлар зичлигига) пропорционал деб олинса, биз манбалар интенсивлигини $(f + \beta u)$ га тенг деб олишимиз керак, бу ерда u — концентрация, β — занжир реакция тезлигини характерлайдиган мусбат пропорционаллик коэффициенти. Шундай қилиб, (1.4) диффузия тенгламаси занжир реакция бўлган ҳолда

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\beta}{D} u = -\frac{f}{D} \quad (1.7)$$

кўринишни олади.

Агар занжир реакцияли диффузия жараёнини стационар деб ҳисобланса, у ҳолда (1.7) тенглама ушбу кўринишга келади.

$$\Delta u + k^2 u = -\frac{f}{D}, \quad k = \sqrt{\frac{\beta}{D}}, \quad (1.8)$$

1-эслатма. (1.5) тенглама (1.7) тенглама каби номаълум функцияни оддий алмаштириш йўли билан иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасига келтирилади. Ҳақиқатан ҳам, агар

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + cu = -\frac{f}{k} \quad (a, c = \text{const})$$

тенгламада $v = ue^{-a^2 ct}$ деб олинса, у ҳолда бу тенглама ушбу кўринишдаги иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасига айланади:

$$\Delta v - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{f}{k} e^{-a^2 ct}$$

1.2. Сиқилмайдиган суюқликнинг потенциал оқими. Узлуксизлик тенгламаси. $\vec{v}$ — суюқлик зарралари ҳаракатининг x, y, z, t нинг функцияси сифатида қараладиган тезлик вектори, v_x, v_y, v_z — унинг мос равишда x, y, z — ўқлар йўналишн бўйича компонентлари; ρ — суюқлик зичлиги, f — манбалар интенсивлиги, яъни бирлик вақт ичида бирлик ҳажмдан ажраладиган суюқлик миқдори бўлсин.

V ҳажмга манбалардан S сирт орқали вақт бирлиги ичида келадиган жамн суюқлик миқдори

$$Q = \iint_S \rho v_n dS + \iiint_V f d\tau = \iiint_V [-\text{div}(\rho \vec{v}) + f] d\tau$$

бўлади. $d\tau$ ҳажм элементидаги суюқлик зичлигини Δt вақт ичида $d\rho$ миқдорга ортириш учун $d\rho d\tau = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta t d\tau$ суюқлик миқдори керак бўлади, V ҳажмдаги суюқлик миқдорини вақт бирлиги ичида ошириш учун керак бўладиган суюқлик миқдори эса

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$$

бўлади.

Бу суюқлик миқдорини, юқоридаги каби Q га тенглаб, узлуксизлик тенгламаси деб аталадиган

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = f \quad (1.9)$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Бу узлуксизлик тенгламаси ҳаракатланаётган суюқликнинг қандайдир хусусий хоссаларига боғлиқ бўлмай, у умуман ҳаракатда бўлган исталган муҳит учун ўринлидир.

Узлуксизлик тенгламасини $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$ тенгликларга асосан бундай кўринишда ҳам ёзиш мумкин:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = f. \quad (1.10)$$

Хусусан, агар суюқлик сиқилмайдиган бўлса ($\rho = \text{const}$), у ҳолда

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{f}{\rho}. \quad (1.11)$$

Потенциал суюқлик оқими бўлган ҳолда

$$\vec{v} = -\nabla u$$

ёки очиб ёзилса,

$$v_x = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad v_y = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad v_z = -\frac{\partial u}{\partial z},$$

бу ерда u — шу x, y, z аргументларнинг функцияси бўлиб, оқимнинг потенциал функцияси деб аталади. Сўнгги тенгликларни ҳисобга олган ҳолда узлуксизлик тенгламасидан сиқилмайдиган суюқликнинг ушбу потенциал оқим тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\Delta u = -\frac{f}{\rho}. \quad (1.12)$$

Бу Пуассон тенгламаси, $f \equiv 0$ бўлганда эса Лаплас тенгламасидир.

1.3. Идеал суюқлик гидродинамикаси тенгламалари. Идеал суюқлик дейилганда зарралари орасида ишчиллаш кучлари бўлмаган, бошқача айтганда, ёпишқоқлик кучлари мавжуд бўлмаган суюқликни тушунилади. $\vec{v}$, ρ ва f — 1.2-банддаги катталиклар, ρ — босим, $\vec{F}$ — масса кучи, яъни суюқликнинг масса бирлигига ташқаридан қўйилган куч, масалан, оғирлик кучи. Вақтнинг t моментида V ҳажми тўлдирадиган суюқлик зарраларини тайинлаймиз ва бу зарралар тўпламига ҳаракат миқдорининг ўзгариш қонунини татбиқ этамиз: *системанинг ҳаракат миқдоридан вақт бўйича олинган ҳосила ташқи кучларнинг тенг таъсир этувчисига тенг*. Математика тилида бу қонун шу зарралар тўпламига нисбатан ушбу кўринишга эга бўлади:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \vec{v} d\tau = \iint_S \vec{n} \rho dS + \iiint_V \rho \vec{F} d\tau.$$

Бу ерда V ҳажмга S сиртга ўтказилган $\vec{n}$ нормал йўналиши бўйича қўйилган кучларни ҳисоблашда биз идеал суюқликда уринма кучланишлар шартга кўра юзага келмаслигидан қатъий равишда фойдаландик. $\rho d\tau$ катталик модданинг сақланиш қонунига асосан вақтга боғлиқ эмас, шу сабабли

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \vec{v} d\tau = \iiint_V \frac{d\vec{v}}{dt} \rho d\tau.$$

2-эслатма. Бу тенгламанинг мақбуллиги шундаки, унда $t + \Delta t$ вақт momentiда ҳажм бўйича интеграллаш ўзгарувчиларни алмаштириш ёрдамида ҳажм бўйича интеграллашга келтирилади.

Қуйидагига эгамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\iiint_{V'} \vec{v}' \rho' d\tau' - \iiint_V \vec{v} \rho d\tau \right] &= \\ = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \iiint_V \frac{\vec{v}' - \vec{v}}{\Delta t} \rho d\tau &= \iiint_V \frac{d\vec{v}}{dt} \rho d\tau, \end{aligned}$$

бу ерда V' , $\vec{v}'$, ρ' , $d\tau'$ лар мос равишда V , $\vec{v}$, ρ , $d\tau$ лар каби бўлиб, фақат улар t вақт momentiда эмас, балки $t + \Delta t$ вақт momentiда олинган.

Энди Остраградский формуласига асосан

$$- \iint_S \vec{n} \rho dS = \iiint_V \Delta \rho d\tau$$

га эгамиз. Шу сабабли ҳаракат микдорининг ўзгариш қонунини

$$\iiint_V \frac{d\vec{v}}{dt} \rho d\tau = - \iiint_V \Delta \rho d\tau + \iiint_V \rho \vec{F} d\tau$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Бу ердан V нинг ихтиёрийлигига асосан

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = - \frac{\nabla p}{\rho} + \vec{F} \quad (1.13)$$

ни ҳосил қиламиз. Бу Эйлернинг ҳаракат тенгламаси деб аталадиган тенгламадир.

Агар суюқлик сиқилмайдиган бўлса, у ҳолда (1.11) узлуксизлик тенгламаси ва (1.13) Эйлернинг ҳаракат тенгламаси идеал сиқилмайдиган суюқлик гидродинамикасининг тўла системасини ҳосил қилади. Бу ерда номаълум функциялар $\vec{v}$ ва p дир, тенгламалар сони эси тўртта.

Сиқиладиган суюқлик бўлган ҳолда идеал суюқлик гидродинамикасининг дифференциал тенгламалари тўла системаси (1.10) узлуксизлик тенгламаси, (1.13) Эйлернинг ҳаракат тенгламаси ҳамда

ҳолат тенгламаси деб аталадиган ва номаълум функциялар: p босим ва ρ зичлик орасидаги берилган боғланишни ифодалайдиган

$$p = \Phi(\rho) \quad (1.14)$$

тенгламадан ёки номаълум функциялар: p босим, ρ зичлик ва T абсолют температура орасидаги берилган боғланишни ифодалайдиган

$$p = \Phi_1(\rho, T), \quad p = \Phi_2(\rho, T) \quad (1.15)$$

тенгламадан иборат бўлади.

1.4. Газ динамикаси ва акустика тенгламалари. Газ ҳаракати идеал суюқлик ҳаракати каби қаралади, шу билан бирга бунда газ манбалари йўқ, масса кучлари эса нолга тенг деб ҳисобланади. Газ ҳаракатининг катта тезликларида (соатига 300 — 400 км дан ортиқ бўлганда) газ сиқилишини ҳисобга олиш зарурати пайдо бўлади. Шу сабабли газ ҳаракати тенгламалари тўла системасини ҳосил қилиш учун узлуксизлик тенгламаси ва Эйлернинг ҳаракат тенгламалари қаторига газ ҳолати тенгламасини ҳам жалб қилиш зарур. Бундай газ ҳолати тенгламаси ҳаракатланаётган газда кетаётган жараёнларнинг катта тезкорлиги сабабли унинг адиабатиклиги ҳақидаги гипотезани қўшимча қилинганда Пуассоннинг ушбу адиабата тенгламаси

$$\frac{p}{\rho^\chi} = c = \text{const}, \quad \chi = \frac{c_p}{c_v}$$

дан иборат бўлади, бу ерда p ва ρ — 1.3-банддаги каби катталиклар, c_p ва c_v — газнинг ўзгармас босимдаги ва ўзгармас ҳажмдаги иссиқлик сиғимлари (ҳаво учун $\chi \approx 1,41$).

3-эслатма. Газ ҳолати тенгламасини қўшимча номаълум сифатида T абсолют температурани киритиб, бошқача кўринишда ёзиш ҳам мумкин. Бу ҳолда газ ҳолати тенгламаси Пуассон адиабата тенгламаси ва Клапейрон тенгламасидан иборат бўлади:

$$p = \rho RT.$$

бу ерда R — абсолют газ дончийси.

Шундай қилиб, газнинг катта тезликларда адиабатик ҳаракати тенгламалари ушбу

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) &= 0, \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho}, \\ \frac{p}{\rho^\chi} &= c = \text{const}, \quad \chi = \frac{c_p}{c_v} \end{aligned} \quad (1.16)$$

кўринишда ёзилади, бу тенгламалар газ динамикаси тенгламалари тўла системаси номи билан машҳурдир. Газ ҳаракатининг кичик тезликларида уни сиқилмайдиган идеал суюқлик сифатида қараш мумкин ва бу ҳолда тегишли тенгламалар системаси — аэромеханиканинг тенгламалари тўла системаси 1.3-банддаги ҳулосаларга асосан ушбу кўринишда ёзилади:

$$\text{div} \vec{v} = 0, \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho}, \quad (1.17)$$

Фазода товуш тўлқинларининг тарқалишини газ зарраларининг ўз мувозанат вазияти атрофида товуш тўлқинларининг тарқалиш йўналишида адиабатик бўйлама тебранишлар сифатида талқин этиш табиийдир. ρ_0 ва ρ_0 юқоридаги ρ ва ρ дан фарқли ўлароқ, тебранаётган газнинг босими ва зичлиги бўлсин. Тебранишлар частотасининг етарлича катталиги сабабли газ конденсацияси $s = \frac{p - p_0}{\rho_0}$.

тезлик вектори $\vec{v}$, ва шунингдек $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial y}$, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$ ва ∇s лар етарлича кичик бўлади, бу миқдорларга нисбатан юқори кичиклик тартибдаги миқдорларни ҳисобга олмасликни шартлашиб оламиз. Бу шартда $\rho = \rho_0(1 + s)$ тенглик ва адиабата тенгламаси $p = p_0(1 + s)^\chi$ га асосан

$$\rho \simeq \rho_0(1 + \chi s), \quad \nabla p = \rho_0 \chi (1 + s)^{\chi-1} \nabla s \simeq \rho_0 \chi \nabla s,$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t}$$

га эга бўламиз ва энди Эйлернинг ҳаракат тенгламаси ушбу кўришни олади:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -a^2 \nabla s, \quad a = \sqrt{\frac{\chi p_0}{\rho_0}}.$$

Шунга асосан, $\vec{v}$ векторни вақтнинг бошланғич моментида потенциал, яъни

$$\vec{v}|_{t=0} = -\nabla \Phi(x, y, z)$$

деб ҳисоблаб,

$$\vec{v} = -\nabla u, \quad u = \Phi(x, y, z) + a^2 \int_0^t s \, dt,$$

$$s = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t}$$

ни ҳосил қиламиз.

Узлуксизлик тенгламаси

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \rho \vec{v} &= \rho \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \nabla \rho = \rho_0(1 + s) \operatorname{div} \vec{v} + \\ &+ \rho_0 \vec{v} \nabla s \simeq \rho_0 \operatorname{div} \vec{v} \end{aligned}$$

тенгликларга асосан ушбу кўринишда ёзилади:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (1.18)$$

Бу ердан u потенциал функция акустика тенгламаси деб аталадиган

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad a = \sqrt{\frac{\chi p_0}{\rho_0}} \quad (1.19)$$

тенгламани, яъни математик физиканинг асосий тенгламалари—тўлқин тенгламасини қаноатлантиради. Бу тенгламани яна газ конденса-

цияси, босими ва зичлиги ҳам қаноатлантиради, чунки улар потенциал функция орқали қуйидагича осон ифодаланади:

$$s = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \rho = \rho_0 \left(1 + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \right), \quad (1.20)$$

$$p = p_0 \left(1 + \frac{\gamma}{a^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \right).$$

4-эслатма. Шунинг қайд қиламизки, масса кучлари мавжуд бўлганда, ўша юқорида қилинган фаразларда

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = a^2 \nabla s + \vec{F},$$

$$\vec{v} = -\nabla u + \int_0^t \vec{F} dt$$

бўлади ва (1.19) тенглама (1.18) га асосан ушбу тенглама билан алмашинади:

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div} \int_0^t \vec{F} dt.$$

1.5. Электростатика ва ўзгармас электр токи тенгламалари. Бир муҳитда — диэлектрикда берилган электр зарядлари ҳосил қилган доимий электр майдон берилган бўлсин, бунда $\vec{E}$ — электр майдон кучланганлиги, ρ — зарядлар зичлиги, ϵ — диэлектрик ўзгармас.

Агар муҳит бир жинсли, яъни $\epsilon = \text{const}$ бўлса, у ҳолда Кулон қонунига асосан нуқтавий электр заряд интенсивлиги $\vec{e}$ ушбу

$$\vec{e} = \frac{\vec{r}}{r^3} e = -\nabla \left(\frac{e}{e \cdot r} \right)$$

кучланиши потенциал электр майдон ҳосил қилади, бу ерда $\vec{r}$ — фазонинг e заряд турган нуқтасини унинг ихтиёрий нуқтаси билан туташтирувчи вектор, r — бу векторнинг узунлиги. Зарядни ўраб олган исталган ёпиқ S сирт орқали ўтувчи вектор оқими e учун ушбу тенгликлар ўринли бўлади:

$$\iint_S \epsilon e_n ds = \iiint_{S_1} \left(\frac{r}{r^3} \right) e ds = 4 \pi e,$$

бу ерда S_1 — маркази заряд турган нуқтада бўлган сфера. dt ҳажм элементига жойлаштирилган ρdt зарядни нуқтавий заряд сифатида, берилган электр майдон кучланганлиги $\vec{E}$ ни эса нуқтавий заряд қўшилишидан ҳосил бўлган майдон сифатида қараш мумкин. Бунга асосан $\vec{E}$ вектор потенциал майдонларининг қўшилиши сифатида потенциал майдон бўлади, яъни $\vec{E} = -\nabla u$, бу эса

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (1.21)$$

дир ва, бундан ташқари,

$$-\iint_S \epsilon E_n dS = 4\pi \iiint_V \rho d\tau \quad (1.22)$$

тенглик ўринли бўлади.

Муҳит бир жинсли бўлмаган ҳолда, яъни $\epsilon \neq \text{const}$ да (1.21) ва (1.22) тенгликлар бевосита эксперимент орқали аниқланади, улар *Кулон қонунининг умумлашмаси* сифатида қаралиши мумкин. Назарий жиҳатдан (1.21) тенгликни энергия сақланиш принципининг натижаси сифатида қараш мумкин, чунки бу тенгликнинг чап қисми мусбат бирлик заряднинг ёпиқ контурни айланиб ўтишидаги бажарган иш деб қаралиши мумкин, бу иш эса берилган электр майдонининг ўзгармаслигига асосан нолдан фарқли бўла олмайди.

(1.22) тенглик эса вектор оқими $e\vec{E}$ нинг сақланиш қонуни сифатида талқин этилиши мумкин.

(1.21) ва (1.22) тенгликларни Стокс ва Остроградский формулаларига асосан (2-жилдга қаранг)

$$\oint_C \vec{E}_\tau ds = \iint_\sigma (\text{rot } \vec{E})_\nu d\sigma, \quad \iiint_V \text{div} (e\vec{E}) d\tau = 4\pi \iiint_V \rho d\tau$$

кўринишда ёзиб, V ва σ нинг ихтиёрийлигига асосан *электростатика тенгламалари системаси* деб аталадиган

$$\text{rot } \vec{E} = 0, \quad \text{div} (e\vec{E}) = 4\pi\rho \quad (1.23)$$

системани ҳосил қиламиз.

Бу системадан шу нарса келиб чиқадики, фақатгина $\vec{E}$ вектор потенциал, яъни $\vec{E} = -\text{grad } u$ бўлибгина қолмасдан, балки u потенциал функция ҳам электростатика тенгламаси деб аталадиган

$$\text{div} (e \nabla u) = -4\pi\rho \quad (1.24)$$

тенгламани қаноатлантиради.

Сўнгги тенглама бир жинсли муҳит бўлган ҳолда *Пуассон тенгламасидан*, зарядлар йўқ бўлганда эса *Лаплас тенгламасидан* иборат бўлади.

Бир жинсли электр ўтказувчи муҳитда ҳажмий зичлиги $\vec{j}(x, y, z)$ бўлган стационар электр токи мавжуд бўлсин. Агар муҳитда ҳажмий ток манбалари бўлмаса, у ҳолда

$$\text{div } \vec{j} = 0. \quad (1.25)$$

$\vec{E}$ электр майдон ток зичлиги орқали дифференциал шаклдаги *Ом қонуни*

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\lambda} \quad (1.26)$$

дая аниқланади, бу ерда λ — муҳит ўтказувчанлиги. Электр токи

бўлган ҳолда $\vec{E}$ вектор потенциал бўлади, яъни шундай $u(x, y, z)$ функция мавжудки,

$$\vec{E} = -\nabla u$$

бўлади. Буни ҳисобга олиб, (1.26) дан ўзгармас электр токи тенг-
ламаси

$$\Delta u = 0.$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу тенглама Лапласнинг уч ўлчовли тенгламаси билан устма-уст тушади.

2.6 Максвелл тенгламаси. Бирор муҳитда вақтга боғлиқ равишда ўзгарувчи магнит майдони, бу магнит майдоннинг кучланиши $\vec{H}$, диэлектриклик доимийси ϵ , муҳитдаги магнит ўтувчанлик коэф-
фициенти μ берилган бўлсин. Фарадейнинг тажрибалар орқали олин-
ган қонунига мувофиқ магнит майдонининг ўзгариши электр майдон
кучланишини индуктивлайди. $\vec{E}$ — ўзгармас электр майдонига индук-
тивланган электр майдонининг қўшилиши натижасидаги электр май-
доннинг кучланиши бўлсин (агар ўзгармас электр майдони бўлма-
са, $\vec{E}$ фақат индуктивланган майдон кучланиши деб қаралади).

Фарадей қонунининг математик ифодаси қуйидагича ёзилади:

$$\oint_C \vec{E}_s ds = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mu \vec{H}_n d\sigma. \quad (1.27)$$

Бу тенглик Стокс формуласига кўра $\vec{E}$ ва $\vec{H}$ векторлар қаноат-
лантирадиган тенгламалардан бирини ёзишга имкон беради:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial (\mu \vec{H})}{\partial t}. \quad (1.28)$$

$\vec{E}$ ва $\vec{H}$ ларни аниқлаш учун иккинчи тенглама сифатида, таби-
ийки, магнитостатиканинг биринчи тенгламасини олиш мумкин:

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \text{div } (\mu \vec{H}) = 0. \quad (1.29)$$

Бу ерда $\vec{j}$ — $\vec{E}$ вектор ҳисобига пайдо бўладиган ўтказувчанлик токи-
нинг зичлиги. У ҳолда вектор анализнинг умумий $\text{div rot } \vec{H} = 0$
формуласига кўра $\text{div } \vec{j} = 0$ бўлиши керак. Умумий ҳолда бунинг
бўлиши мумкин эмас, чунки узлуксизлик тенгламасига мувофиқ $\vec{j}$
вектор учун $\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ (ρ — вақтнинг функцияси бўлган зарядлар
зичлиги) га эгамиз. Бу зичликни йўқотиш учун (1.29) тенгламани,
ўзгарган ушбу

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \vec{j}_{cm})$$

шаклда оламинз. Бу ерда $\vec{j}$ —юқорида кўрсатилган ўтказувчанлик токи, j_{cm} эса бундан буён *силжиш токи* деб аталувчи, ҳозирча номаълум қўшилувчи. Бизнинг мақсадимиз (1.29) тенгликдаги эндиётни йўқотиш бўлганлиги сабабли, бу силжиш токи шундай танланиши керакки, $\text{div}(\vec{j} + \vec{j}_{cm}) = 0$ бўлиши лозим. Бу талабга мувофиқ узлуксизлик тенгламасидан силжиш токини аниқлаш учун

$$\text{div} \vec{j}_{cm} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

шартни ҳосил қиламиз. Лекин, $e\vec{E}$ вектор оқимнинг узлуксизлик тенгламасига кўра $\text{div}(e\vec{E}) = 4\pi \rho$ га эгамиз. Шу сабабли силжиш токини аниқлаш учун ҳосил қилинган шарт

$$\text{div} \vec{j}_{cm} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \text{div}(e\vec{E})$$

кўринишда ёзилади. Бу шартни ягона бўлмаган усуллар билан қаноатлангириш мумкин. Лекин тайин дифференциал тенгламага эга бўлиш учун силжиш токини табиийки,

$$\vec{j}_{cm} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} (e\vec{E})$$

тенглик билан аниқлаш маъқул.

Шундай қилиб,

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (e\vec{E}) \quad (1.30)$$

дифференциал тенгламага эга бўламиз.

Бу ерда $\vec{j}$ ўтказувчанлик токи бўлиб, Ом қонунига мувофиқ $\vec{j} = \lambda \vec{E}$ тенглик билан аниқланадн, λ — муҳитнинг ўтказувчанлик коэффициенти. (1.28) ва (1.30) тенгламалар электродинamikанинг *Максвелл тенгламалари* деб аталувчи тўлиқ тенгламалар система-сидир.

1.7. Симлардаги эркин электр тебранишлар тенгламалари. Чексиз узун тўғри чизиqli ўтказгичдан ток ўтганида электромагнит тебранишлар ҳисобига тескари ўзиндукция электр юритувчи кучлари пайдо бўлади. Айтайлик, ўтказгич Ox ўқи бўйлаб йўналган ва ўтказгичнинг мос равишда сифими, омик қаршилиги, индуктивлиги, изоляция сирқишини тавсифлайдиган ва ўтказгичнинг узунлик бирлиги учун ҳисобланган C, R, L, G параметрлар x нинг узлуксиз функциялари бўлсин. Агар бу параметрлар берилган деб ҳисобланса, у ҳолда i ва v номаълум функциялар (ток кучи i ва v кучланиши) учун дифференциал тенгламаларни электродинамика умумий тенгламалари (1.28) ва (1.30) дан фойдаланмасдан бевосита тузиш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, Ом қонунига асосан ўтказгичнинг dx элементида кучланиш камайиши электр юритувчи кучлар йиғиндисига тенг, яъни:

$$-\frac{\partial v}{\partial x} dx = i R dx + L \frac{\partial i}{\partial t} dx. \quad (1.31)$$

Вақт бирлиги ичида ўтказгичнинг dx элементига келадиган электр миқдори

$$i|_x - i|_{x+dx} = -\frac{\partial i}{\partial x} dx$$

бўлади, шу вақт ичида dx элементда сарфланган электр миқдори эса

$$C \frac{\partial v}{\partial t} dx + G v dx$$

бўлади. Шу сабабли электр сақланиш қонунига асосан қуйидагига эга бўламиз:

$$-\frac{\partial i}{\partial x} dx = C \frac{\partial v}{\partial t} dx + G v dx. \quad (1.32)$$

(1.31) ва (1.32) тенгликлардан *телеграф тенгламалари системаси* деб аталадиган

$$\begin{cases} \frac{\partial i}{\partial x} + C \frac{\partial v}{\partial t} + G v = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0 \end{cases} \quad (1.33)$$

системани ҳосил қиламиз.

5-эслатиш. Бу тенгламалар электромагнит майдон умумий назарияси нуқтаи нзаридадан тақрибийдир, чунки улар баъзи қўшимча физик гипотезалар асосида Максвелл умумий тенгламаларидан ҳосил қилиниши мумкин, чунки бу ҳолда улар ўтказгич параметрларининг берилишига мувофиқ келади.

Хусусан, бу системанинг коэффициентлари ўзгармас бўлганда биринчи тенгламага $\frac{\partial}{\partial x}$ операторни, иккинчи тенгламага эса $-C \frac{\partial}{\partial t}$ операторни татбиқ этиб, t функциялар учун ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - (RC + LG) \frac{\partial i}{\partial t} - RG i = 0.$$

v функциялар учун ушбу тенгламалар ҳам шунга ўхшаш ҳосил қилинади:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - (RC + LG) \frac{\partial v}{\partial t} - RG v = 0.$$

Бу деган сўз, i ва v функцияларнинг ҳар бири телеграф тенгламасини қанъатлантиради:

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2} u_{tt} - bu_t - cu = 0, \quad a = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (1.34)$$

бу ерда $b = RC + LG$, $c = RG$. Бу тенглама янги номаълум функция $w = ue^{\frac{a^2}{2} t}$ ни киритиш билан

$$w_{xx} - \frac{1}{a^2} w_{tt} + k^2 w = 0, \quad a = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1.35)$$

тенгламага келтирилади, бу ерда

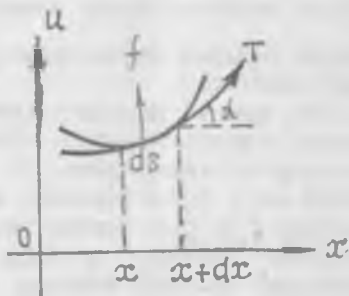
$$k^2 = \frac{1}{4}(a^2 b^2 - 4C), \quad k = \frac{1}{2} \frac{RC - LG}{\sqrt{LC}}. \quad (1.36)$$

1.8. Тор тенгласи ва мембрана тенгласи. Айтайлик, x , u текисликда тор, яъни букилишга қаршилиги йўқ ингичка ип x ўқи билан устма-уст тушадиган ўз вазияти атрофида кичик кўндаланг тебранишлар қилаётган бўлсин. T — ипнинг таранглиги, ρ — унинг чизиқли зичлиги, f — масса кучи, яъни торга перпендикуляр қилиб, унинг бирлик массасига қўйилган куч. Тор нуқталарининг мувозанат ҳолатидан оғишини нфодалайдиган $u = u(x, t)$ функция учун тенглама тузишда тебранишлар кичик бўлганлиги сабабли $\frac{\partial u}{\partial x}$ га нисбатан юқори тартибни кичикликдаги миқдорларни ташлаб юборишга келишамиз.

Аввало, шуни қайд этамизки, мувозанат ҳолатида таъсир ва акстаъсирнинг тенглик қонунига асосан T таранглик ўзгармас бўлади. Сўнгра торнинг мувозанат ҳолатида турган dx элементи мувозанат ҳолатидан оғганда $ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}$ (1.1-шакл) узунликка эга бўлади ва, демак, $\Delta = \frac{ds}{dx} - 1 \approx 0$ узайиш олади. [Бу деган

сўз, Гук қонунига асосан таранглик ҳамма вақт доимий қолади. Торнинг ds элементига қўйилган барча кучларнинг u ўққа проекцияларини ҳисоблаймиз ва Даламбер принципига асосан нолга тенглаймиз. $x + dx$ нуқтадаги таранглик проекцияси

$$T \sin \alpha \Big|_{x+dx} = T \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}} \Big|_{x+dx} \approx \approx T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+dx}$$

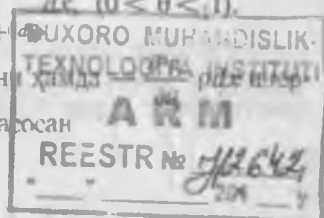


1.1- шакл

бўлади, ds элементга қўйилган таранглик кучлари тенг таъсир этувчисининг проекцияси нолга тенг бўлади.

$$T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+dx} - T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x = 0 \quad (0 \leq \theta \leq 1).$$

Бунга d билан $\frac{\partial u}{\partial x}$ га тенг кучни қўшиб, Даламбер принципига асосан



$$T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x+0dx} dx + \rho f dx - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rho dx = 0.$$

Бу тенгликдан, dx га қисқартириб ва $dx \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб, торнинг кичик кўндаланг тебранишлари тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{T} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{\rho}{T} f \quad (1.37)$$

ни ҳосил қиламиз.

Хусусан, тор бир жинсли бўлганда, яъни $\rho = \text{const}$ да бу тенглама ушбу кўринишни олади:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{f}{a^2}, \quad a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \quad (1.38)$$

Бу тенглама битта фазовий координата бўлган ҳол учун тўлқин тенгламаси билан устма-уст тушади ва одатда *тор тенгламаси* деб аталади.

x, y, z фазода мембрана, яъни букилишга қаршилиги йўқ юпқа плёнка x, y текислик билан устма-уст тушувчи ўз мувозанат ҳолати атрофида u ўқ йўналишида кичик кўндаланг тебранишлар бажарсин. Айтайлик, T — мембрананинг таранглиги, яъни мембрана кесимининг бирлик узунлигига бу кесимга перпендикуляр қилиб қўйилган ва мембрананинг уринма текислигида ётадиган куч, ρ — мембрананинг сирт зичлиги, f — мембрананинг масса бирлигига қўйилган ва унга перпендикуляр куч. Мембрана нуқталарининг мувозанат ҳолатидан оғишини берадиган $u = u(x, y, z, t)$ функцияни тузишда тебранишларнинг кичиклигига асосан $\frac{\partial u}{\partial x}$ ва $\frac{\partial u}{\partial y}$ га нисбатан юқори тартибли кичикликдаги миқдорларни ташлаб юборишга келишиб олайлик.

Энг аввало, таъсирнинг акс таъсирга тенглиги қонунини мембрананинг мувозанат ҳолатда чексиз тор тўғри тўрт бурчакли кичик қисмларига татбиқ этамиз. Бу қисмларни аввало x ўқига параллел, кейин эса y ўқига параллел деб ҳисоблаб, мувозанат ҳолатда T таранглик x ва y га боғлиқ эмас деб хулоса чиқарамиз. Сўнгра мембрананинг мувозанат ҳолатидаги ҳар қандай ds чизиқли элементи мувозанат ҳолатдан чиқишда узунлиги

$$ds' = ds \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}$$

бўлган элементга ўтади ва

$$\Delta = \frac{ds'}{ds} - 1 \approx 0$$

нисбий узайиш олади. Бу эса Гук қонунига мувофиқ равишда T таранглик ҳамма вақт доимий қолишини англатади. Айтайлик C' — мембрананинг бирор бўлаги D' ни чегаралаб турган контур, C ва

D — уларнинг x ва y ўқларига проекциялари бўлсин. D' ва C' га қўйилган кучларнинг тенг таъсир этувчиларини u ўққа проекциялаймиз. C' га қўйилган таранглик кучларининг тенг таъсир этувчисининг проекцияси

$$Q = \int_C T \sin \alpha \, ds = \int_C T \cdot \frac{-\frac{\partial u}{\partial n}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2}} \, ds \approx - \int_C T \frac{\partial u}{\partial n} \, ds$$

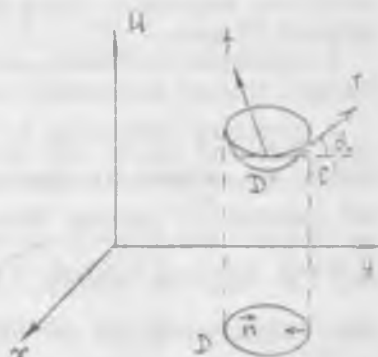
бўлади, бу ерда $\vec{n}$ вектор C контурга ўтказилган ички нормал (1.2-шакл). Бу ердан маълум Грин формуласига асосан (2-жилдга қarang):

$$\begin{aligned} Q &= \iint_{D'} T \operatorname{div} \nabla u \, dS = \\ &= \iint_{D'} T (u_{xx} + u_{yy}) \, dS. \quad (1.39) \end{aligned}$$

Бу катталиққа D' га қўйилган масса кучларининг тенг таъсир этувчиси

$$\iint_{D'} \rho f \, dS$$

ни ва мембрана бўлаги D' нинг инерция кучлари тенг таъсир этувчиси



1.2-шакл

$$\iint_{D'} \left(-\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) dS$$

ни қўшиб,

$$\iint_{D'} \left[T (u_{xx} + u_{yy}) + \rho f - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] dS = 0 \quad (1.40)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенгликдан D нинг ихтиёрийлигига асосан ўрта қиймат ҳақидаги теорема бўйича мембрананинг кичик кўндаланг тебранишлари тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{T} f \quad (1.41)$$

ни ҳосил қиламиз.

Мембрана бир жинсли бўлган ҳолда, яъни $\rho = \text{const}$ да мембрана тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{f}{a^2}, \quad a = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (1.42)$$

ни беради, у иккита фазовий координатали тўлқин тенгламасидан иборат.

1.9. Ингичка стерженнинг бўйлама тебранишлари. Ингичка стержен ўзининг Ox ўқи билан мос тушувчи мувозанатига нисбатан бўйлама тебраниш ҳолатида бўлсин. Бунда тебраниш шунчалик кичикки, стерженнинг Ox ўқиға перпендикуляр ясси кесимлари яссилигича қолиб, бир-бирларига параллел бўлган ҳолда фақат Ox ўқи бўйлаб силжийди, E — стержен материали учун Юнг модули, s — унинг кўндаланг кесими юзи, ρ — чизиқли зичлиги. T — стерженнинг таранглик кучи, f — Ox ўқи йўналиши бўйича таъсир қилувчи масса кучи, $u(x, t)$ — стерженнинг мувозанат ҳолатида x абсциссаға эға бўлган кесимнинг силжиш ҳаракатини ифодаловчи номаълум функция бўлсин.

Стерженнинг мувозанат ҳолатда x ва $x + dx$ нуқталардаги кесимлари орасига жойлашган элементини қараймиз.

x нуқтадаги силжиш u , $x + dx$ нуқтадаги силжиш эса $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ бўлади, шу сабабли абсциссаси x бўлган нуқтада стерженнинг нисбий узайиши $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x$ миқдор билан аниқланади, бу нуқтадаги таранглик, Гук қонунига мувофиқ, $T = Es \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x$ муносабат билан аниқланади. Стерженнинг $x + dx$ абсциссали кесимидаги таранглик кучи $Es \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+dx}$ га тенг бўлиб, стерженнинг dx узунликка эға бўлган элементига тенг таъсир этувчи таранглик кучи

$$Es \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+dx} - Es \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(Es \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x+\theta dx} dx, \quad (0 \leq \theta \leq 1)$$

бўлади.

Бу миқдорға стерженнинг абсциссалари x ва $x + dx$ бўлган кесимлари орасидаги элементига таъсир қилаётган бошқа кучларнинг тенг таъсир этувчиларини, яъни масса кучлари $\rho s f dx$ ва инерция кучи $\left(-\rho s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx \right)$ ни қўшамиз. Сўнгра Даламбер принцинга асосан барча кучлар йиғиндисини нолға тенглаб

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(Es \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x+\theta dx} dx + \rho s f dx - \rho s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = 0 \quad (1.43)$$

муносабатни ҳосил қиламиз.

Бу тенгликда $dx \rightarrow 0$ да лимитға ўтиб, стерженнинг бўйлама тебранишлари тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(Es \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \rho s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\rho s f. \quad (1.44)$$

Агар $Es = \text{const}$ дейилса, тенглама

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{E} f \quad (1.45)$$

кўринишни олади. Агар стержен бир жинсли бўлса, охириги тенглама тўлқин тенгламаси билан мос тушади:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{f}{a^2}, \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (1.46)$$

Умумий тушунчалар

Хусусий ҳосилали дифференциал тенглама деб, бир нечта эркли ўзгарувчиларнинг номаълум функцияси ва унинг хусусий ҳосилалари орасидаги боғланишни ифодаловчи

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) = 0 \quad (1.47)$$

тенгламага айтилади.

Номаълум функциянинг тенгламадаги энг юқори тартибли ҳосиласининг тартиби k — хусусий ҳосилали *тенгламанинг тартиби* дейилади.

Агар тенглама номаълум функция ва унинг барча хусусий ҳосилаларига нисбатан чизиқли бўлса, у *чизиқли хусусий ҳосилали тенглама* дейилади.

Биринчи тартибли, хусусий ҳосилали, чизиқли тенгламанинг умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$A_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + A_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + \quad (1.48)$$

$$+ A_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} + A_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

бу ерда $A_1, \dots, A_{n+1}$ берилган функциялар, $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ номаълум функция.

Агар (1.48) тенгламада $A_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ бўлса, у *бир жинсли хусусий ҳосилали дифференциал тенглама*, $A_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ бўлса, *бир жинсли бўлмаган тенглама* дейилади.

Бир жинсли бўлмаган тенгламанинг ечимини $v(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = c$ кўринишда излаб, бир жинсли тенглама кўринишига келтиришмиз мумкин. Ҳақиқатан ҳам,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial x_i}}{\frac{\partial v}{\partial u}}, \quad i = \overline{1, n}$$

ҳосилаларни (1.48) тенгламага қўйсақ, қуйидагига эга бўламиз:

$$A_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial v}{\partial x_1} + A_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial v}{\partial x_2} + \dots + \\ + A_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial v}{\partial x_n} - A_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial v}{\partial u} = 0.$$

Шунинг учун бундан кейин фақат бир жинсли бўлган тенгламалар қаралади. Бундай тенгламанинг ечими $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ қуйидаги оддий дифференциал тенгламалар системаси

$$\frac{dx_1}{A_1} = \frac{dx_2}{A_2} = \dots = \frac{dx_n}{A_n} \quad (1.49)$$

нинг интегралли

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = c \quad (1.50)$$

бўлади ва, аксинча, (1.50) системанинг интегралли бўлса, $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ бир жинсли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламанинг ечими бўлади.

Ушбу

$$A_1(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_1} + A_2(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \quad (1.51)$$

хусусий ҳосилали дифференциал тенглама берилган бўлсин. (1.51) тенгламанинг ечими $u(x_1, x_2)$ бўлса,

$$\frac{dx_1}{A_1} = \frac{dx_2}{A_2} \quad (1.52)$$

тенгламанинг интегралли

$$u(x_1, x_2) = c$$

бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, (1.52) система ечимининг тўлиқ дифференциали

$$du(x_1, x_2) = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2$$

бўлади. Бу ифодада, (1.52) га асосан, dx_i ларни уларга пропорционал бўлган A_i лар билан алмаштирамиз, яъни $dx_i = \lambda A_i$ ($i = 1, 2$) (бу ерда λ — пропорционаллик коэффициенти):

$$du(x_1, x_2) = \lambda \left(A_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right).$$

$u(x_1, x_2)$ (1.51) тенгламанинг ечими бўлганлиги сабабли $du(x_1, x_2) = 0$ аниқлиги оламиз.

(1.52) системанинг ечими $u(x_1, x_2)$ ни охириги ифодага қўйганлигимиз сабабли у x_i нинг функцияси бўлади ва унинг дифференциали, демак, ҳосиласи ҳам нолга тенг бўлади, яъни у ўзгармас сон экан.

(1.52) системанинг интегралли (1.51) хусусий ҳосилали тенгламанинг ечими бўлиши ҳам худди шундай кўрсатилади.

Мисол. Қуйидаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламанинг ечимини топиш:

$$xy \frac{\partial u}{\partial x} - (x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Бунда

$$A_1(x, y) = xy, \quad A_2(x, y) = -(x^2 + y^2).$$

Демак, мос оддий дифференциал тенгламалар системаси

$$\frac{dx}{xy} = - \frac{dy}{x^2 + y^2}$$

бўлади. Бу тенгламада x эркин ўзгарувчи, y унинг функцияси деб қараб бир жинсли оддий дифференциал тенгламани ечамиз:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{x^2 + y^2}{xy} \quad \text{ёки} \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{x}{y} - \frac{y}{x}.$$

$\frac{y}{x} = v$ деб олиб, $y = vx$ ва $\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$ ни топамиз ва тенгламага қўямиз:

$$v + x \frac{dv}{dx} = - \frac{1}{v} - v \quad \text{ёки} \quad x \frac{dv}{dx} = - \frac{1 + 2v^2}{v},$$

$$\frac{v}{1 + 2v^2} dv = - \frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{4} \frac{d(1 + 2v^2)}{1 + 2v^2} = - \frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{4} \ln(1 + 2v^2) = \ln \left| \frac{1}{Cx} \right|,$$

$$1 + 2v^2 = \frac{1}{(Cx)^4}.$$

$$1 + 2 \frac{v^2}{x^2} = \frac{1}{C^4 x^2}, \quad \frac{1}{C^4} = c \text{ десак,}$$

$$u(x, y) = x^4 + 2x^2 y^2.$$

Физик масалаларнинг кўпчилиги иккинчи тартибли чизиқли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларга келтирилади. Иккинчи тартибли чизиқли хусусий ҳосилали тенгламалар умумий ҳолда

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = f(x, y)$$

(1.53)

кўринишга эга бўлиб, бу ерда A, B, C, D, E, F коэффициентлар x ва y ўзгарувчиларнинг узлуксиз функциялари, $u(x, y)$ — номаълум функция, $f(x, y)$ — берилган функция.

Агар тенглама коэффициентлари эркин ўзгарувчи x, y ларга боғлиқ бўлмаса, у ҳолда у ўзгармас коэффициентли тенглама дейилади. Агар (1.53) тенгламада $f(x, y) \equiv 0$ бўлса, у бир жинсли хусусий ҳосилали дифференциал тенглама, $f(x, y) \neq 0$ бўлса, бир жинсли бўлмаган тенглама дейилади.

(1.53) хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг ечими деб, тенгламага қўйилганда уни айнантирадиган x ва y нинг ихтиёрий $u(x, y)$ функциясига айтилади.

Математик физиканинг асосий тенгламалари

I. Тўлқин тенгламаси:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1.54)$$

Торнинг кўндаланг тебраниши, стерженнинг бўйлама тебраниши, симдаги электр тебранишлари, айланувчи цилиндрдаги айланма тебранишлар, гидродинамика, газодинамика ва акустиканинг тебраниш билан боғлиқ жараёнларини тадқиқ этиш шундай тенгламага олиб келади.

II. Иссиқлик тарқалиш тенгламаси ёки Фурье тенгламаси:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1.55)$$

Иссиқликнинг бир жинсли муҳитда тарқалиши, диффузия ҳодисалари, фильтрация масалалари, эҳтимоллар назариясининг баъзи масалалари шундай тенгламага келтирилиб ўрганилади.

III. Лаплас тенгламаси:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (1.56)$$

Электр ва магнит майдонлари ҳақидаги масалаларни, стационар иссиқлик ҳолати ҳақидаги масалаларни, гидродинамиканинг сиқилмайдиган суюқликнинг потенциал ҳаракати ва стационар иссиқлик майдонларига тегишли масалаларни ёчиш Лаплас тенгламасига келтирилади.

Кўп сонли ўзгарувчиларнинг функциялари учун ҳам тегишли тенгламалар қаралиши мумкин. Масалан, агар изланаётган функция учта эркин ўзгарувчига боғлиқ бўлса, тўлқин тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (1.54')$$

иссиқлик тарқалиш тенгламаси

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (1.55')$$

Лаплас тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (1.56')$$

кўринишда бўлади.

Юқорида келтирилган математик физиканинг асосий тенгламалари тегишли масаланинг физик моҳияти, масаланинг қўйилиши ва ечилиш услублари билан бир-бирларидан фарқланади.

2-§. Иккинчи тартибли икки ўзгарувчи хусусий ҳосилали
дифференциал тенгламаларнинг турлари ва каноник
кўринишлари

(1.53) тенгламани

$$\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y) \quad (2.1)$$

алмаштиришлар ёрдамида соддароқ кўринишга келтириш мумкин. Алмаштириш бажарилаётган бирор D соҳада $\xi(x, y)$ ва $\eta(x, y)$ функциялар узлуксиз, икки марта дифференциалланувчи ва якобиан

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.2)$$

бўлиши керак. (2.2) шарт тескари алмаштириш

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta) \quad (2.3)$$

мавжудлигининг зарурий ва етарли шартидир. Янги ўзгарувчилар бўйича ҳосилаларни топамиз:

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi} \xi_x^2 + u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_{\eta\xi} \eta_x \xi_x + \\ &+ u_{\eta\xi} \eta_x \xi_y = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_{\xi\xi} \xi_{xx} + u_{\eta\xi} \eta_{xx}, \\ u_{xy} &= u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} \xi_x \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_{\eta\xi} \eta_x \xi_y + \\ &+ u_{\xi\eta} \eta_x \xi_y, \\ u_{yy} &= u_{\eta\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_{\xi\xi} \xi_{yy} + u_{\eta\xi} \eta_{yy}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

(2.4) ни (1.53) га қўйиб, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$a_{11} u_{\xi\xi} + 2a_{12} u_{\xi\eta} + a_{13} u_{\eta\eta} + F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0, \quad (2.5)$$

бу ерда

$$\begin{aligned} a_{11}(\xi, \eta) &= A \xi_x^2 + 2B \xi_x \xi_y + C \xi_y^2, \\ a_{13}(\xi, \eta) &= A \eta_x^2 + 2B \eta_x \eta_y + C \eta_y^2, \\ a_{12}(\xi, \eta) &= A \xi_x \eta_x + B(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + C \xi_y \eta_y. \end{aligned} \quad (2.6)$$

(2.6) да $\xi(x, y)$ ва $\eta(x, y)$ функцияларни шундай танлаймизки, натижада a_{11}, a_{13} коэффициентлар нолга айлансин ёки

$$\begin{aligned} A \xi_x^2 + 2B \xi_x \xi_y + C \xi_y^2 &= 0, \\ A \eta_x^2 + 2B \eta_x \eta_y + C \eta_y^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

бўлсин. Бу тенгламаларни $\frac{\xi_x}{\xi_y}$ ва $\frac{\eta_x}{\eta_y}$ ларга нисбатан ечсак,

$$\frac{\xi_x}{\xi_y} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad \frac{\eta_x}{\eta_y} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} \quad (2.8)$$

ифодаларни ҳосил қиламиз. Демак, (2.7) нинг ҳар бир тенгламаси хусусий ҳосилалари биринчи тартибли чизиқли

$$A\xi_x + (B - \sqrt{B^2 - AC})\xi_y = 0, \quad A\eta_x + (B + \sqrt{B^2 - AC})\eta_y = 0 \quad (2.9)$$

тенгламаларга ажралади. Бундай тенгламалар олдинги параграфга асосан мос равишда

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B - \sqrt{B^2 - AC}} \quad \text{ва} \quad \frac{dx}{A} = \frac{dy}{B + \sqrt{B^2 - AC}}$$

тенгламаларга эквивалент ёки

$$A dy - (B - \sqrt{B^2 - AC}) dx = 0, \quad (2.10)$$

$$A dy - (B + \sqrt{B^2 - AC}) dx = 0.$$

(2.10) дан кўринадики, иккала тенгламани битта тенглама кўринишида ёзиш мумкин

$$A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2 = 0. \quad (2.11)$$

2.10) нинг умумий интеграллари $\varphi(x, y) = C_1$, $\psi(x, y) = C_2$ бўлсин. Бу ҳолда улар (1.53) нинг иккита эгри чизиқлар оиласини ташкил қилиб, *тенгламанинг характеристикалари* дейилади. (2.11) тенглама эса (1.53) тенглама *характеристикаларининг дифференциал тенгламаси* дейилади.

(2.10) тенглама интегралларининг қандай бўлиши ва (1.53) тенгламанинг содда кўринишга келтирилиши $\Delta = B^2 - AC$ дискриминантининг ишорасига боғлиқ бўлади.

Дискриминант қийматларига боғлиқ равишда (1.53) тенгламани қуйидаги турларга ажратиш мумкин:

1) Агар D соҳада $\Delta > 0$ бўлса, берилган тенглама шу соҳада *гиперболик* турдаги тенглама дейилади.

2) Агар D соҳада $\Delta < 0$ бўлса, берилган тенглама шу соҳада *эллиптик* турдаги тенглама дейилади.

3) Агар D соҳада $\Delta = 0$ бўлса, берилган тенглама шу соҳада *параболик* турдаги тенглама дейилади.

Кўрсатилган турлардаги ҳар бир тенгламаларнинг ўзларига хос каноник кўринишлари мавжуд. Уларни келтириб чиқариш учун (1.53) ни келтирилган турлар бўйича алоҳида-алоҳида соддалаштирамиз.

1. $\Delta = B^2 - AC > 0$ бўлган ҳол. Бу ҳолда (2.7) га асосан (2.6) дан $a_{11} = 0$, $a_{13} = 0$ ва $a_{12} \neq 0$ эканлиги келиб чиқади. Шунинг учун (2.5) ни $2a_{12}$ га бўлиб

$$u_{\xi\eta} = \bar{F}(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta}) \quad (2.12)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу ерда $\bar{F} = -F/2a_{12}$. (2.12) гиперболик турдаги тенгламанинг каноник кўриниши дейилади.

Агар (2.12) да $\xi = \alpha + \beta$, $\eta = \beta - \alpha$ алмаштиришни бажарсак, гиперболик турдаги тенгламанинг иккинчи содда кўринишига эга бўламиз

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = F_1(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta). \quad (2.13)$$

2. $\Delta = B - AC < 0$. Бу ҳолда (2.9) ёки (2.10) нинг коэффициентлари ва умумий интеграллари комплекс катталиклар бўлади. Шунинг учун эллиптик турдаги тенгламалар ҳақиқий характеристикаларга эга бўлмайди. Комплекс ечимлар қўшма бўлиб,

$$\xi = \varphi + i\psi, \quad \eta = \varphi - i\psi \quad (2.14)$$

кўринишда бўлади; $\varphi(x, y)$ ва $\psi(x, y)$ функциялар ҳақиқий функциялардир.

(2.14) ни (2.7) га қўйиб, ҳақиқий ва мавҳум қисмларини ажратамиз:

$$\begin{aligned} A(\varphi_x + i\psi_x)^2 + 2B(\varphi_x + i\psi_x)(\varphi_y + i\psi_y) + C(\varphi_y + i\psi_y)^2 &= 0, \\ A\varphi_x^2 - A\psi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y - 2B\psi_x\psi_y + C\varphi_y^2 - C\psi_y^2 + \\ + i[2A\varphi_x\psi_x - 2B(\varphi_x\psi_y + \psi_x\varphi_y) + 2C\varphi_y\psi_y] &= 0. \end{aligned}$$

Комплекс функциялар хоссаларига асосан

$$\begin{aligned} A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2 &= A\psi_x^2 + 2B\psi_x\psi_y + C\psi_y^2, \\ A\varphi_x\psi_x + B(\varphi_x\psi_y + \psi_x\varphi_y) + C\varphi_y\psi_y &= 0 \end{aligned}$$

тенгликлар келиб чиқади. Бу ердан (2.6) га асосан,

$$a_{11} = a_{13}, \quad a_{12} = 0.$$

Бу ҳолда (2.5) ни a_{11} га бўлиб

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = F_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \quad (2.15)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. $F_1 = -\frac{F}{a_{11}}$. Бу эллиптик турдаги тенгламанинг каноник кўринишидир.

3. $\Delta = B^2 - AC = 0$ бўлсин. Бу ҳолда (2.10) нинг умумий интеграллари ҳақиқий ва тенг бўлади. Икки тенглама бир хил бўлиб, битта тенгламага айланади:

$$A \frac{\partial \xi}{\partial x} + B \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0. \quad (2.16)$$

(2.16) нинг ечими

$$\xi = \varphi(x, y) = C \quad (2.17)$$

бўлади.

$\eta(x, y)$ учун якобиани $\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \neq 0$ бўлган икки марта дифференциалланувчи ихтиёрий функцияни оламиз. Бу ҳолда (2.6) дан $a_{11} = 0$, $a_{12} = 0$ бўлиши келиб чиқади.

(2.5) ни a_{13} га бўлиб, параболик турдаги тенгламанинг каноник кўринишига эга бўламиз:

$$u_{\eta\eta} = F_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \quad (2.18)$$

бу ерда

$$F_1 = - \frac{F}{a_{12}}.$$

Хусусий ҳосилалари дифференциал тенгламаларни классификациялашни эркин ўзгарувчилар учта ва ундан ортиқ бўлганда ҳам келтириш мумкин. Юқорида келтирилган классификациялашга қараб, шундай хулоса чиқариш мумкин.

1-§ даги тўлқин тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

гиперболик турдаги тенглама, иссиқлик тарқалиш тенгламаси

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

параболик турдаги тенглама, Лаплас тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

эллиптик турдаги тенглама бўлади.

Мисол. Ушбу

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

тенгламани каноник кўринишга келтиринг.

Ечиш. Берилган тенглама учун

$$A = x^2; \quad B = xy, \quad C = y^2,$$

$$\Delta = B^2 - AC = (xy)^2 - x^2 y^2 = 0$$

Демак, тенглама параболик кўринишдаги тенглама экан. Унинг характеристик тенгламалари

$$x^2 dy^2 - 2xy dx dy + y^2 dx^2 = 0$$

ёки

$$(x dy - y dx)^2 = 0,$$

$$x dy - y dx = 0$$

кўринишда бўлади. Шундай қилиб характеристикалардан бири

$$\frac{y}{x} = C$$

чизиқдан иборат. Ўзгарувчиларни қуйидагича алмаштирамиз:

$$\xi = \frac{y}{x}, \quad \eta = y$$

(иккинчи ўзгарувчининг ихтиёрийлигидан фойдаландик). Тегишли ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{y^2}{x^4} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{2y}{x^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{y}{x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{y}{x^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{1}{x^2},$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{1}{x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{1}{x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Буларни берилган тенгламага қўйиб,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

кўринишдаги каноник тенгламани ҳосил қиламиз.

3-§. Коши масаласи, чегаравий масалалар, аралаш масалаларнинг қўйилиши

Физик жараёнларни математик ифодалашда масаланинг тегишли шартлар билан қўйилиши муҳим аҳамиятга эгадир.

Маълумки, оддий ва хусусий ҳосилли дифференциал тенгламалар, умуман айтганда, чексиз ечимларга эга. Бирор физик масаланинг ягона ечимини топиш жараёни ифодаловчи дифференциал тенгламалар билан биргаликда қараладиган қўшимча шартларнинг аниқ танланишига боғлиқдир. Масаланинг қўйилишига қараб бу шартлар бошланғич, чегаравий, аралаш деб номланган турларга бўлинади.

3.1. Коши масаласи. Тенгламаларнинг турларига қараб, қўшимча шартлар ҳам турлича қўйилади. Агар тенглама биринчи тартибли бўлса, бу ҳолда тенглама ечимини ифодаловчи функциянинг аргументнинг бошланғич қийматига мос келувчи қиймати берилади. Агар тенглама иккинчи тартибли бўлса, у ҳолда функция ва унинг ўзгариш тезлиги (биринчи тартибли ҳосила) нинг аргументнинг бошланғич қийматига мос келувчи қийматлари берилади. Фақат бошланғич шартлари билан берилган масала *Коши масаласи* дейилади.

Тўлқин тенгламалари учун бошланғич шартли масаланинг қўйилишини кўрайлик. Узунлиги чегараланмаган торнинг эркин тебраниш тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < \infty, t > 0) \quad (3.1)$$

бўлади. Тор нуқталарининг вақтга боғлиқ бўлган ҳолатини аниқлаш учун вақтнинг $t = 0$ бошланғич пайтида унинг ҳар бир нуқтасининг абсцисса ўқидан оғиши u ни ва бошланғич тезлиги $\frac{\partial u}{\partial t}$ ни билиш

зарур. Демак, масаланинг қўйилиши қуйидагича таърифланади: иккинчи тартибли хусусий ҳосилли (3.1) дифференциал тенгламанинг

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = F(x) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (3.2)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин. Шунингдек, кўп ўзгарувчиларга боғлиқ бўлган тўлқин тенгламаси, иссиқлик тарқалиш тенгламалари учун Коши масаласини келтириш мумкин:

1) иккинчи тартибли хусусий ҳосилали

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

дифференциал тенгламанинг $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $t < 0$ соҳада аниқланган ва

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = F(x, y)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $u(x, y, t)$ ечими топилсин;

2) Иккинчи тартибли хусусий ҳосилали

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

дифференциал тенгламанинг $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$, $t > 0$ соҳада аниқланган ва

$$u(x, y, z, 0) = f(x, y, z), \quad \frac{\partial u(x, y, z, 0)}{\partial t} = F(x, y, z)$$

бошланғич шаргларни қаноатлантирувчи $u(x, y, z, t)$ ечими топилсин;

3) иккинчи тартибли хусусий ҳосилали

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

иссиқлик тарқалиш тенгласининг $-\infty < x < \infty$, $t > 0$ соҳада аниқланган ва

$$u(x, 0) = f(x) \quad (-\infty < x < \infty)$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи $u(x, t)$ ечими топилсин.

3.2. Чегаравий масалалар. Бирор соҳада Лаплас тенгласинини қаноатлантирувчи ва иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари билан биргаликда узлуксиз бўлган функция шу соҳада *гармоник функция* дейилади. Кўп физик масалаларни кўрилганда уларнинг стационар ҳолатини, яъни физик жараёнларнинг ўзгариши вақтга боғлиқ бўлмаган ҳолатини текширилади. Асосан бундай масалалар эллиптик турдаги тенгламалар орқали ифодаланади. Шунинг учун бу жараёнларнинг стационар ҳолати фақат соҳа чегарасида қўйилган шартларга боғлиқ бўлади. Қуйида эллиптик тенгламалар учун қўйиладиган чегаравий масалаларни кўрамыз.

1) Бирор D соҳанинг ичида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3.3)$$

Лаплас тенгласини қаноатлантирувчи ва соҳа чегараси S чиқиқ устида берилган

$$u|_S = f(x, y) \quad (3.4)$$

қийматни қабул қилувчи $u(x, y)$ гармоник функция топилсин. Бунда $u(x, y)$ ва $f(x, y)$ узлуксиз функциялар. Бу масала *Дирехлеинг ички масаласи* ёки *биринчи чегаравий масала* дейилади. Агарда

$u(x, y)$ функция S чегаранинг ташқарисиди изланса (бу ерда D соҳа чексиз бўлади) бундай масала Дирехленнинг ташқи масаласи дейилади.

2) (3.3) Лаплас тенгламасини қаноатлантирувчи ва соҳа чегараси S чизик устида нормал бўйича ҳосиласи берилган

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = f(x, y) \quad (3.5)$$

қийматни қабул қилувчи $u(x, y)$ гармоник функция топилсин. Бу масала *Нейман масаласи* (ёки иккинчи чегаравий масала) дейилади.

3.3. Аралаш масалалар. Бундай масалалар чегараланган жисмларда содир бўладиган физик жараёнларни текширишда уларга мос тенгламаларнинг берилган бошланғич ва чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимларини топишда қўйилади.

1) Тўлқин тенгламаси учун аралаш масалани уч ўлчовли тенглама учун ёзамиз (бир ва икки ўлчовли тенгламалар учун шу тарзда ёзилади).

Иккинчи тартибли хусусий ҳосилали

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.6)$$

дифференциал тенгламанинг $(x, y, z) \in V, t > 0$ соҳасида аниқланган ва

$$u|_{t=0} = f(x, y, z), \quad (3.7)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x, y, z)$$

бошланғич шартларни ҳамда

$$\text{I. } u|_S = \mu(x, y, z, t),$$

$$\text{II. } \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = \mu(x, y, z, t), \quad (3.8)$$

$$\text{III. } \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u \right)|_S = \mu(x, y, z, t)$$

чегаравий шартлардан бирини қаноатлантирадиган ечими топилсин. Бу ерда $S = V$ соҳанинг сирти, μ ва β функциялар S сиртда аниқланган узлуксиз функциялардир. $\frac{\partial u}{\partial n}$ — сирт нуқтасида нормал бўйича олинган ҳосила.

2) Иккинчи тартибли хусусий ҳосилали

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.9)$$

дифференциал тенгламанинг $(x, y, z) \in V, t > 0$ соҳада аниқланган

$$u|_{t=0} = f(x, y, z) \quad (3.10)$$

бошланғич шартни ҳамда (3.8) чегаравий шартлардан бирини қаноатлантирадиган ечими топилсин.

Юқорида масалаларнинг қўйилишидан кўрдикки, физик жараёнларни ифодалайдиган тенгламаларнинг ечимлари бошланғич ва чегаравий шартларга боғлиқ бўлади.

Баъзи ҳолларда бу шартларнинг озгина ўзгаришига ечимнинг жуда катта ўзгариши мос келиб қолиши мумкин. Бу эса физик жараёнини ўрганишда катта хатоликларга олиб келади. Ечим турғун дейилганда қўйилган шартларнинг озгина ўзгаришига ечимнинг озгина ўзгариши мос келиши тушунлади.

Агар масаланинг ечими мавжуд, ягона ва турғун бўлса, у ҳолда бундай масала (коррект) тўғри қўйилган дейилади.

4-§. Бир ўлчовли тўлқин тенгламасини Даламбер усули билан ечиш. Дьюамель принципи

1. Бир жинсли (3.1) тенгламанинг (3.2) бошланғич шартларда Даламбер усули билан ечилишини кўриб чиқамиз. Тенгламанинг умумий ечими иккита ихтиёрий функциялар йиғиндиси сифатида қидирилади:

$$u(x, t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at). \quad (4.1)$$

Бу φ ва ψ функцияларнинг иккинчи тартибли ҳосилалари мавжуд бўлсин. У вақтда, кетма-кет ҳосилалар олсак,

$$\begin{aligned} u_x^* &= \varphi'(x - at) + \psi'(x + at), \\ u_{xx}^* &= \varphi''(x - at) + \psi''(x + at), \\ u_t^* &= -a\varphi'(x - at) + a\psi'(x + at), \\ u_{tt}^* &= a^2\varphi''(x - at) + a^2\psi''(x + at) \end{aligned}$$

лар ҳосил бўлиб, натижа (3.1) тенгламани қаноатлантиради. Демак, (4.1) функция умумий ечим бўлади. (3.2) бошланғич шартлардан фойдаланиб, φ ва ψ номаълум функцияларни топамиз:

$$t = 0 \text{ да } \begin{cases} \varphi(x) + \psi(x) = f(x), \\ -a\varphi'(x) + a\psi'(x) = F(x) \end{cases} \quad (4.2)$$

системага келамиз. Иккинчи тенгламани 0 дан x гача бўлган оралиқда интегралласак,

$$-a[\varphi(x) - \varphi(0)] + a[\psi(x) - \psi(0)] = \int_0^x F(x) dx$$

ёки

$$-\varphi(x) + \psi(x) = \frac{1}{a} \int_0^x F(x) dx + C \quad (4.3)$$

кўринишдаги ифодага келамиз. Бу ерда $C = -\varphi(0) + \psi(0)$ ўзгармас сон. (4.2) ва (4.3) тенгламалардан $\varphi(x)$, $\psi(x)$ номаълум функцияларни аниқлаймиз:

$$\psi(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x F(x) dx - \frac{C}{2},$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x F(x) dx + \frac{C}{2}. \quad (4.4)$$

Бу формулаларда аргумент x ни $x - at$ ва $x + at$ ларга алмаштириб, (4.1) формулага қўйсак, $u(x, t)$ функция топилади:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} f(x - at) - \frac{1}{2a} \int_0^{x-at} F(x) dx + \frac{1}{2} f(x + at) + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} F(x) dx = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(x) dx. \quad (4.5)$$

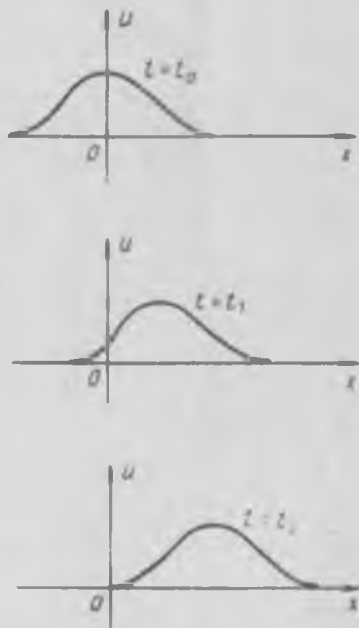
Бу (4.5) формула тор тебраниш тенгламаси учун Коши масаласининг Даламбер усули билан топилган ечими дейилади.

Олинган (4.5) ечимнинг физик маъносини англаш учун $u(x, t)$ ечимга кирган $\varphi(x - at)$ ва $\varphi(x + at)$ функцияларни алоҳида-алоҳида текшираемиз. $\varphi(x - at)$ функцияни олиб, t га $t = t_0$, $t = t_1$, $t = t_2$ ва ҳоказо ўсувчи қийматларни бериб, унинг графигини ясаймиз (1.3-шакл).

Шаклдан кўринадики, иккинчи график биринчисига нисбатан at_1 миқдорга, учинчиси at_2 ва ҳоказо миқдорга ўнг томонга сурилган. Агар бу графикларнинг проекцияларини навбат билан экранга туширсак, гўё уларнинг юқоридаги биринчиси ўнг томонга «чоппи» ўтаётгандек бўлади. Торнинг бундай четланиши тўлқин деб аталади.

$$\text{Тенгламадаги } a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

коэффициент эса тўлқинларнинг тарқалиш тезлиги дейилади. Энди $\psi(x + at)$ функцияни кўрайлик. t га $t_2 < t_1 < t_0$ қийматларни берсак, 1.3-шаклдаги графикларда биринчиси пастдагиси бўлиб, тўлқин ўнгдан чапга a тезлик билан тарқалади. Энди Даламбер формуласи (4.5) ёрдамида олинган ечимни текшираемиз.



1.3-шакл

Икки ҳолни кўрамиз. Биринчисида тор нуқталарининг бошланғич тезлиги нолга тенг бўлиб, тор бошланғич четлатиш ҳисобига тебрансин, яъни $F(x) = 0$ деб олсак, (4.5) формуладан қуйидаги ечимни ҳосил қиламиз:

$$u(x, t) = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2}. \quad (4.6)$$

Бу ерда $f(x)$ берилган функциядир. Формуладан кўринадики, ечим $u(x, t)$ иккита тўлқин йиғиндисидан иборат: биринчи $\frac{1}{2} f(x - at)$ тўлқин a тезлик билан ўнг томонга, иккинчи $\frac{1}{2} f(x + at)$ тўлқин шу тезлик билан чап томонга тарқаладиган тўлқинлардир.

$\frac{1}{2} f(x - at)$ тўғри тўлқин, $\frac{1}{2} f(x + at)$ эса тескари тўлқин деб аталади.

Бошланғич $t = 0$ моментда иккала тўлқин профили устма-уст тушади. Фараз қиламиз, бошланғич моментда $f(x)$ функция $(-l, l)$ оралиқда нолга тенг бўлмасин ҳамда жуфт функция бўлсин.

1.4-шаклдаги чап устунда $\frac{1}{2} f(x + at)$ тўлқиннинг чап томонга тарқалиши, ўнг устунда эса вақтнинг турли моментларида $\frac{1}{2} f(x - at)$

тўлқиннинг ўнг томонга тарқалиши, ўртадаги устунда эса тўлқинлар йиғиндиси, яъни тор нуқталари умумий четланиши кўрсатилган. $t < \frac{l}{a}$ моментда иккала тўлқинлар бир-бири билан устма-уст

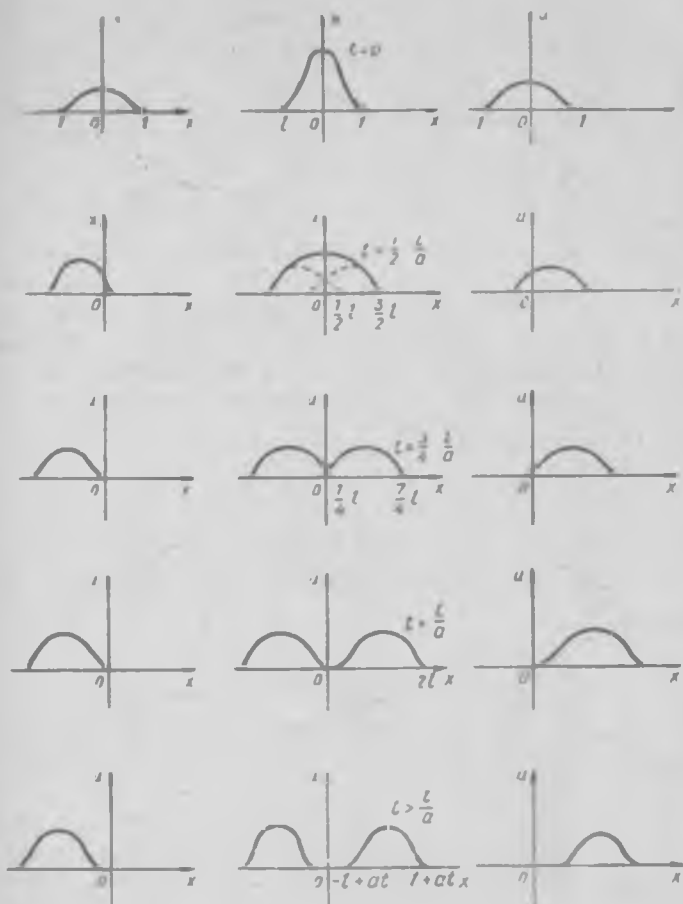
тушади; $t = \frac{l}{a}$ моментдан бошлаб бу тўлқинлар устма-уст тушмайди ва турли томонга қараб узоқлашади.

Энди иккинчи ҳолни кўрамиз. Торийинг бошланғич четланиши ноль бўлсин ва бошланғич моментда тор нуқталари бошланғич тезлик олиши натижасида тебрансин. Бу ҳолда тор бўйлаб импульс тўлқинлар тарқалади. (4.5) формулага $f(x) = 0$ ни қўйиб, $u(x, t)$ функция учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(x) dx = \Phi(x + at) - \Phi(x - at), \quad (4.7)$$

бу ерда

$$\Phi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x F(x) dx \quad (4.8)$$



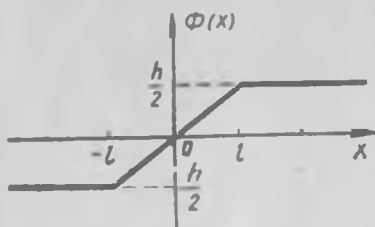
1.4- шакл

Бу формуладан кўринадикки, ечим $u(x, t)$ юқоридаги каби, тўғри $u_1 = -\Phi(x - at)$ ва тескари $u_2 = \Phi(x + at)$ тўлқинлардан иборат экан. Бошланғич $t = 0$ моментда $u_1 = -\Phi(x)$, $u_2 = \Phi(x)$ бўлиб, $u(x, 0) = 0$ бўлади. Агар $F(x)$ $(-l, l)$ оралиқда аниқланган бўлиб, $F(x) = v_0$ бошланғич ўзгармас тезликка эга бўлса, у вақтда $\Phi(x) =$

$$= \frac{1}{2a} \int_0^x v_0 dx = \frac{v_0}{2a} x \text{ бўлиб, бу ерда } -l \leq x \leq l \text{ бўлади. } x > l$$

$$\text{қийматларда } \Phi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^l v_0 dx = \frac{v_0 l}{2a} = \frac{h}{2} \text{ ва } x > -l \text{ қийматларда}$$

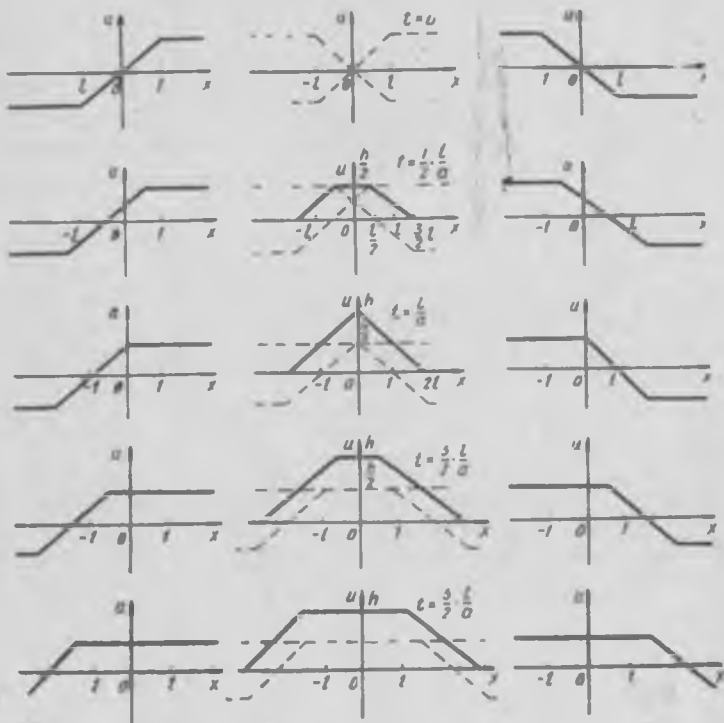
$$\Phi(x) = \frac{1}{2a} \int_x^l v_0 dx = -\frac{v_0 l}{2a} = -\frac{h}{2} \text{ бўлади. Бу ерда } h = \frac{v_0 l}{a} \text{ бўлиб,}$$



1.5- шакл

$\Phi(x)$ узлуксиз ва тоқ функция-
дир (1.5-шакл). Энди $u(x, t)$
ечимнинг t нинг турли қий-
матларидаги графигини ясай-
миз 1.6-шаклда чап устунда
тескари тўлқин $u_2 = \Phi(x+at)$
нинг турли моментдаги ҳолати,
ўнг устунда тўғри тўлқин $u_1 =$
 $= \Phi(x-at)$ нинг графиги,
ўрта устунда эса тор нуқтала-

ри умумий четланиши графиги келтирилган. Биринчи ҳолдан фарқ-
ли ўлароқ, $t = 0$ да $u(x, 0) = 0$ бўлиб, t катталаниши билан нуқта
юқорига кўтарилади, чунки (4.7) формуладаги интеграллаш оралиғи
кенгаяди. $t = \frac{l}{a}$ бўлганда

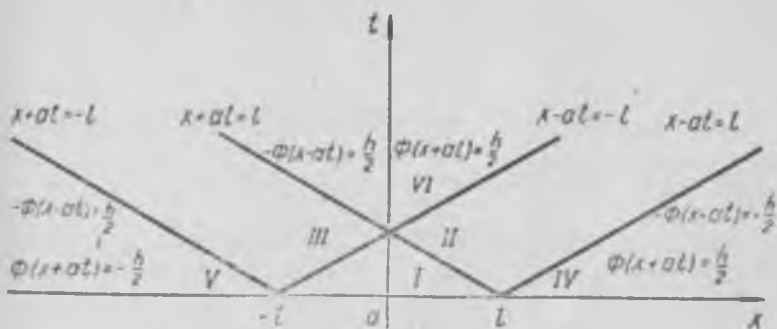


1.6- шакл

$$u\left(0, \frac{l}{a}\right) = \frac{1}{2a} \int_{-l}^l v_0 dx = \frac{v_0 l}{a} = h$$

ҳосил бўлади. $t > \frac{l}{a}$ бўлганда ҳам $u(0, t) = h$ бўлади, чунки $(-l, l)$ дан ташқарида $F(x)$ нолга тенг. Шунинг учун четлашиш функцияси $u(0, t)$ шаклда ўзгармас бўлиб қолади. Мисол учун $x_1 = \frac{l}{2}$ бўлсин. У ҳолда t нинг $\frac{l}{2a}$ дан кичик қийматларида тескари ва тўғри тўлқинларнинг биргаликда таъсири натижасида нуқта кўтарилиб боради. $t > \frac{l}{2a}$ моментда тескари тўлқин четлашиши бу нуқтада доимий $\frac{h}{2}$ га тенг бўлиб, нуқта тўғри тўлқин таъсирида юқорига кўтарилишни давом этади. $t > \frac{3l}{2a}$ моментда иккала тўлқиннинг четланиши $\frac{h}{2}$ га тенг бўлади ва $u\left(\frac{l}{2}, t\right)$ [функциянинг қиймати h га тенг бўлади.

Шундай қилиб, $u(x, t)$ функциянинг графиги t нинг турли қийматларида қуйидагича бўлар экан: $t = 0$ да $u = 0$ — тўғри чизиқ; $0 < t < \frac{l}{a}$ да чизиқ профили трапеция шаклида бўлиб, унинг юқори асоси кўтарилиб, катталиги камаяди; $t = \frac{l}{a}$ да профил учбурчак ва $t > \frac{l}{a}$ да профили кенгайдиган трапеция кўринишида бўлади (1.6-шакл). Шундай қилиб, торга берилган $(-l, l)$ ораликдаги бошланғич тезланиш натижасида тор тебраниб, h баландликка кўтарилади ва вақт ўтиши билан шу баландликда қолади (силжишининг қолдиғи). Охт текислигини олиб, $x - at = \pm l$ ва $x + at = \pm l$ — характеристик тўғри чизиқларни юқори ярим текисликда чизамиз (1.7-шакл). $\Phi(x)$ функциянинг ифодасидан фойдалансак, тескари тўлқин $\Phi(x + at)$ нинг II, IV ва VI зоналардаги четланиши ўзгармасга



1.7-шакл

тенглиги келиб чиқади. III, V ва VI зоналарда тўғри тўлқин — $\Phi(x - at)$ нинг четланиши ҳам $\frac{h}{2}$ га тенг. Шунинг учун VI зона силжиш қолдиғидан иборат бўлиб, бу зонага мос келган функциямиз $u(x, t) = \Phi(x + at) - \Phi(x - at) = h$ бўлади. IV зонада тўғри тўлқин четланиши $-\frac{h}{2}$ га тенг; шунақа четланиш V зонада тескари тўлқинда мавжуд. Шунинг учун IV ва V зоналар тор нуқталари учун сокин зоналар бўлади. Нуқта текислигининг IV зонасидан VI зонасига ўтганда тўғри тўлқиннинг четланиши $-\frac{h}{2}$ дан $\frac{h}{2}$ гача ўзгаради.

Шу мулоҳазалардан фойдаланиб, $x_0 > l$ бўлганда $u(x_0, t)$ функциянинг қуйидаги ифодасини ёзамиз:

$$u(x_0, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{x_0 - l}{a}, \\ \frac{h}{2} \left(1 - \frac{x_0 - at}{a} \right), & \frac{x_0 - l}{a} < t < \frac{x_0 + l}{a}, \\ h, & t > \frac{x_0 + l}{a}. \end{cases}$$

2. Энди Коши масаласини бир жинсли бўлмаган тенгламалар учун кўрамиз. Бир жинсли бўлмаган

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (4.9)$$

тўлқин тенгламасининг $-\infty < x < \infty$, $t > 0$ соҳада аниқланган ва

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (4.10)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин. Бу масалада ҳосил бўлган тебранишни икки тебранишнинг йиғиндиси шаклида қараймиз. Биринчиси, бошланғич оғишдан ҳосил бўлган тебраниш (ташқи куч таъсирисиз), иккинчиси эса фақат ташқи куч таъсирида юз берган тебраниш (бошланғич оғиш ҳисобга олинмайди). Бу ҳолда

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) \quad (4.11)$$

бўлиб, $v(x, t)$ функция

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (4.12)$$

тенгламанинг $-\infty < x < \infty$, $t > 0$ соҳада

$$v|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x) \quad (4.13)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими, $w(x, t)$ функция эса

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (4.14)$$

тенгламанинг $-\infty < x < \infty, t > 0$ соҳада

$$\left. \omega \right|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \omega}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (4.15)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими бўлади. (4.12), (4.13) масаланинг ечими маълумки,

$$v(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(x) dx \quad (4.16)$$

кўринишда бўлади. (4.14), (4.15) нинг ечимини топниш учун қуйидаги қўшимча масалани ечамиз:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \quad (4.17)$$

тенгламанинг

$$\left. \omega \right|_{t=\tau} = 0, \quad \left. \frac{\partial \omega}{\partial t} \right|_{t=\tau} = f(x, \tau) \quad (4.18)$$

(τ — параметр) бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилин. Бу масала учун бошланғич момент $t=0$ бўлмасдан, балки $t=\tau$ бўлади. У ҳолда (4.16) Даламбер формуласи

$$\omega(x, t - \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \quad (4.19)$$

кўринишда ёзилади. (4.19) ечим аниқ бўлса, (4.14) нинг (4.15) ни қаноатлантирувчи ечими

$$\omega(x, t) = \int_0^t \omega(x, t - \tau) d\tau \quad (4.20)$$

бўлади. (4.20) нинг ҳақиқатан ечим эканлигини (4.14) га қўйиб текшираимиз. (4.20) ни t бўйича дифференциялаймиз:

$$\omega_t(x, t) = \omega|_{t=t} + \int_0^t \omega_t(x, t - \tau) d\tau$$

(4.18) шартнинг биринчи қисмига асосан:

$$\omega_t(x, t) = \int_0^t \omega_t(x, t - \tau) d\tau. \quad (4.21)$$

(4.20) ва (4.21) дан кўринадики, $\omega(x, t)$ функция (4.18) бошланғич шартларни қаноатлантиради. (4.21) ни яна t бўйича дифференциалласак, (4.18) шартнинг иккинчи қисмига асосан

$$\omega_{tt}(x, t) = \omega_{tt}|_{t=t} + \int_0^t \omega_{tt}(x, t - \tau) d\tau =$$

$$= f(x, t) + \int_0^t \omega_{tt}(x, t - \tau) d\tau \quad (4.22)$$

келиб чиқади.

(4.20) ва (4.22) га асосан кўриниб турибдики, $\omega(x, t)$ функция (4.14) тенгламанинг (4.15) бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими бўлади. Демак,

$$\omega(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \left[\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \right] d\tau. \quad (4.23)$$

Бу ҳолда (4.9) нинг (4.10) бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(x) dx + \\ + \frac{1}{2a} \int_0^t \left[\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \right] d\tau \quad (4.24)$$

кўринишда бўлади. (4.23) ва (4.24) Дьюамель принципини ифода-лайди.

Мисол. Қуйидаги бир жинсли бўлмаган

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2$$

тўлқин тенгламасининг

$$u|_{t=0} = \sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = x$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини Дьюамель принципидан фойдаланиб топим.

Ечиш. $a = 1$ ва

$$f(x, t) = x, \quad \varphi(x) = \sin x, \quad \psi(x) = x$$

функциялар учун Дьюамель принципидан фойдаланамиз:

$$u(x, t) = \frac{\sin(x-t) + \sin(x+t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} x dx + \\ + \frac{1}{2} \int_0^t \left[\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} x dx \right] d\tau = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t).$$

Ҳар қайси қўшилувчинини алоҳида- алоҳида ҳисоблаймиз:

$$u_1(x, t) = \frac{\sin(x-t) + \sin(x+t)}{2} = \sin x \cos t,$$

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{x-t}^{x+t} = \frac{(x+t)^2 - (x-t)^2}{4} =$$

$$= \frac{x^2 + 2xt + t^2 - x^2 + 2xt - t^2}{4} = xt,$$

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= \frac{1}{2} \int_0^t \left[\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} x dx \right] d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t \left[\frac{(x+t-\tau)^2 - (x-t+\tau)^2}{2} \right] d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \frac{x^2 + t^2 + \tau^2 + 2xt - 2x\tau - 2t\tau - x^2 - t^2 - \tau^2 + 2xt - 2x\tau + 2t\tau}{2} d\tau = \\ &= \int_0^t (xt - x\tau) d\tau = xt\tau \Big|_0^t - x \frac{\tau^2}{2} \Big|_0^t = xt^2 - \frac{xt^2}{2} = \frac{xt^2}{2}. \end{aligned}$$

Демак, масаланинг ечими

$$u(x, t) = \sin x \cos t + xt + \frac{xt^2}{2}$$

булар экан.

5-§. Уч ўлчовли тўлқин тенгламаси учун Коши масаласи.

Пуассон формуласи. Гюгенс принципи

Уч ўлчовли

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (5.1)$$

тўлқин тенгламасининг

$$u \Big|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x, y, z) \quad (5.2)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $u(x, y, z, t)$ ечимини топиш масаласини кўрамиз. Бу ерда $\varphi(x, y, z)$ функция учинчи тартибгача, $\psi(x, y, z)$ функция иккинчи тартибгача хусусий ҳосилалари билан биргаликда фазонинг барча нуқталарида узлуксиз функциялар бўлсин деб ҳисоблаймиз. (5.1) ва (5.2) масалани ечиш учун қуйидаги ёрдамчи масалани кўрайлик. (5.1) тенгламанинг хусусий ҳолдаги

$$u_f \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_f}{\partial t} \Big|_{t=0} = f(x, y, z) \quad (5.3)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $u_f(x, y, z, t)$ ечими топилисин.

$$\frac{\partial u_f}{\partial t} = v(x, y, z, t)$$

десак, у ҳолда (5.3) га асосан

$$v \Big|_{t=0} = f(x, y, z),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial^2 u_f}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = \frac{\partial^2 u_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_f}{\partial z^2} = 0$$

шартларни қаноатлантиради. Шунинг учун, агар u_f функция учинчи тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга бўлса, (5.1) нинг (5.2) ни қаноатлантирувчи ечими

$$u(x, y, z, t) = \frac{\partial u_f}{\partial t} + u_f \quad (5.4)$$

формула орқали ифодаланади. Демак, (5.1) тенглама учун Коши масаласи u_f функцияни аниқлашга келтирилади. Бу функцияни

$$u_f(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a} \iiint_{S_r} \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\sigma_r \quad (5.5)$$

кўринишда ёзамиз. Бу интеграл (5.1) тенгламанинг маркази $M(x, y, z)$ нуқтада бўлиб, радиуси $r = at$ бўлган S_r сфера сирти бўйича олинган ечими бўлишини кўрсатамиз. $f(\xi, \eta, \zeta)$ — ихтиёрий узлуксиз функция, $d\sigma_r$ сферанинг юз элементи. (5.5) дан

$$\left| \iiint_{S_r} \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\sigma_r \right| \leq \max |f| \cdot \frac{4\pi r^2}{r}$$

бўлганлиги учун $t \rightarrow 0$ да $u_f \rightarrow 0$ бўлиб, (5.5) шартларнинг биринчи қисмини қаноатлантиради. Иккинчи қисмини қаноатлантиришини текшириш учун

$$\xi = x + \beta_1 r, \quad \eta = y + \beta_2 r, \quad \zeta = z + \beta_3 r \quad (5.6)$$

алмаштиришларни бажариб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$u_f = \frac{r}{4\pi a} \iiint_{S_1} f(x + \beta_1 r, y + \beta_2 r, z + \beta_3 r) d\sigma_1. \quad (5.7)$$

Бу ерда $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1$, $d\sigma_1 = \frac{d\sigma_r}{r}$ бўлиб, интеграл S_1 бирлик сферанинг барча тайинланган x, y, z нуқталарида ҳисобланади.

(5.7) ни t бўйича дифференциалласак,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_f}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi} \iiint_{S_1} f(x + \beta_1 r, y + \beta_2 r, z + \beta_3 r) d\sigma_1 + \\ &+ \frac{r}{4\pi a} \iiint_{S_1} \left(\beta_1 \frac{\partial f}{\partial \xi} + \beta_2 \frac{\partial f}{\partial \eta} + \beta_3 \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right) d\sigma_1 \end{aligned} \quad (5.8)$$

бўлади. (5.8) дан $t \rightarrow 0$ да $\frac{\partial u_f}{\partial t} \rightarrow f(x, y, z)$ эканлиги келиб чиқади. Энди, u_f функциянинг (5.1) ни қаноатлантиришини исбот қилиш кифоядир. (5.7) дан

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_f}{\partial z^2} &= \frac{r}{4\pi a} \iiint_{S_1} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} \right) d\sigma_1 = \\ &= \frac{1}{4\pi a r} \iiint_{S_r} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} \right) d\sigma_r. \end{aligned} \quad (5.9)$$

$\frac{\partial^2 u_f}{\partial t^2}$ ифодани ҳисоблаш учун (5.8) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_f}{\partial t} &= \frac{u_f}{t} + \frac{1}{4\pi r} \iint_{S_r} \left(\beta_1 \frac{\partial f}{\partial \xi} + \beta_2 \frac{\partial f}{\partial \eta} + \beta_3 \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right) d\sigma_r = \\ &= \frac{u_f}{t} + \frac{1}{4\pi r} \iiint_{V_r} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} \right) d\xi d\eta d\zeta = \frac{u_f}{t} + \frac{I(t)}{4\pi r}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

бу ерда

$$f(t) = \iiint_{V_r} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} \right) d\xi d\eta d\zeta,$$

V_r — маркази (x, y, z) нуқтада бўлиб, радиуси $r = at$ бўлган шар. (5.10) дан:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_f}{\partial t^2} &= -\frac{u_f}{t^2} + \frac{1}{t} \frac{\partial u_f}{\partial t} + \frac{\partial I(t)}{\partial t} + \frac{1}{4\pi at} - \frac{I(t)}{4\pi at^2} = \\ &= -\frac{u_f}{t^2} + \frac{u_f}{t^2} + \frac{I(t)}{4\pi at^2} + \frac{1}{4\pi at} \frac{\partial I(t)}{\partial t} - \frac{I(t)}{4\pi at^2} = \frac{1}{4\pi at} \frac{\partial I(t)}{\partial t}. \end{aligned}$$

$\frac{\partial I(t)}{\partial t}$ ифодани ҳисоблаш учун сферик координаталар системасига ўтиб, $d\sigma_r = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} = a \iint_{S_r} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} \right) d\sigma_r$$

тенгликни оламиз. Демак,

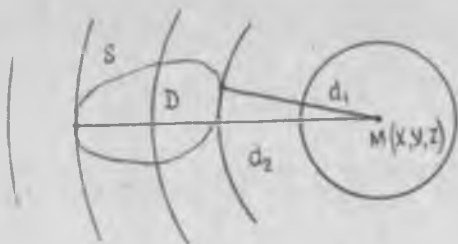
$$\frac{\partial^2 u_f}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi t} \iint_{S_r} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} \right) d\sigma_r \quad (5.11)$$

бўлади. (5.11) ва (5.9) ни солиштирсак, (5.5) орқали ифодаланган $u_f(x, y, z, t)$ функция ҳақиқатан ҳам (5.1) тўлқин тенгламасини қаноатлантиради. $\Phi(x, y, z)$ ва $\psi(x, y, z)$ функциялар тўғрисидаги мулоҳазалар ва (5.4) га асосан Коши масаласининг умумлашган ечими

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \frac{1}{4\pi a} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\iint_{S_r} \frac{\Phi(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\sigma_r \right] + \right. \\ &\quad \left. + \iint_{S_r} \frac{\Psi(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\sigma_r \right\} \end{aligned} \quad (5.12)$$

қурилишда ифодаланади. (5.12) ни Пуассон формуласи дейилади.

Фазода Пуассон формуласи орқали ифодаланган тўлқин тарқалишининг физик моҳиятини кўрайлик. Бошланғич тебраниш чегараси S чиқиқдан иборат бўлган бирор D соҳада содир бўлсин. Бу соҳа-



1.8- шакл

нинг ташқарисиди ϕ ва ψ функциялар нолга тенг (ички нуқталарда нолдан фарқли). Муҳит ҳолатининг ўзгаришини D соҳа ташқарисиди ётувчи тайинланган M нуқтадан кузатайлик (1.8-шакл). M нуқтадан S сиртгача бўлган энг яқин масофа d_1 , энг узоқ масофа d_2 бўлсин. Маркази M нуқтада бўлиб, радиуси $r = at$ бўлган S_r сфера $t < \frac{d_1}{a}$ вақтда D соҳага етиб келмайди. Шунинг учун сфера нуқталарида ϕ ва ψ лар ноль бўлиб, (5.12) га асосан $u(x, y, z, t) = 0$ бўлади ёки $t = \frac{d_1}{a}$ вақтда S_r сфера S сирт билан тўқнашади, ёки тўлқиннинг олдинги фронти M нуқтадан ўтади. Олдинги фронт S сиртининг ҳар бир нуқтасидан радиуси $r = at$ бўлган сфераларнинг ўрамасидан иборат бўлади (Гюйгенс принципи). $t = \frac{d_1}{a}$ ва $t = \frac{d_2}{a}$ вақтлар орасида S_r сфера D соҳани кесиб ўтади. Шунинг учун бу оралиқда, (5.12) га асосан, $u(x, y, z, t) \neq 0$. $t > \frac{d_2}{a}$ вақтда S_r сфера D соҳани ўз ичига олади ва улар умумий нуқтага эга бўлмайди. Шунинг учун бу вақтда, (5.12) га асосан, $u(x, y, z, t) = 0$ бўлади ёки бошланғич тебраниш M нуқтадан ўтиб бўлади. Бу деган сўз, $t = \frac{d_2}{a}$ вақт тўлқиннинг орқа фронтининг M нуқтадан ўтишини аниқлайди. Демак, олдинги фронт тебраниш етиб келмаган нуқталарни ажратиб турувчи чизик, орқа фронт эса тебранишдан тўхталган (осойишталашган) нуқталардан тебранаётган нуқталарни ажратиб турувчи чизик бўлади.

6-§. Икки ва уч ўлчовли тўлқин тенгламаси учун Коши масаласи. Пасайиш (тушиш) усули. Масалани ечишнинг Дюамель принципи

Олдинги параграфда кўрилган масаланинг хусусий ҳолини ёки f функция z га боғлиқ бўлмаган ҳолини кўрайлик. Бу ҳолда (5.5) га асосан u функция ҳам z га боғлиқ бўлмайди ва икки ўлчовли

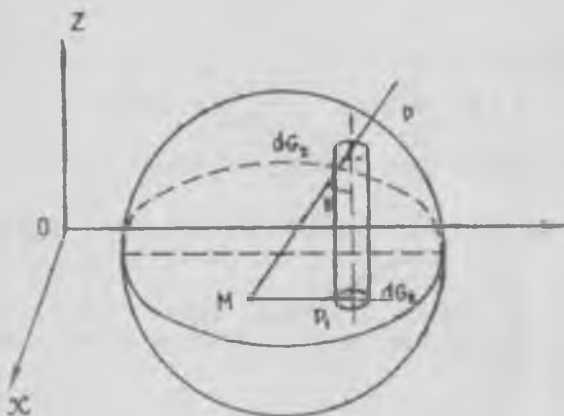
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (6.1)$$

тўлқин тенгламасини

$$u \Big|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x, y) \quad (6.2)$$

бошланғич шартларда қаноатлантиради.

Ҳисоблашларни осонлаштириш учун 5-§ даги (5.1) нинг ечимини xOy текислигида ифодалаймиз. Бунинг учун S_r сферанинг юқори ва пастки қисмларини унинг xOy текисликтаги маркази $M(x, y)$ нуқтада бўлган катта C_r доирасига проекциялаймиз (1.9-шакл). Бу ҳолда



1.9-шакл

$$d\sigma_r = \frac{dC_r}{\cos \gamma} \quad (6.3)$$

бўлиб, (5.5) интеграл қуйидагича ёзилади:

$$\iint_{S_r} \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\sigma_r = \iint_{C_r} \frac{f(\xi, \eta)}{r} \frac{dC_r}{\cos \gamma}; \quad (dC_r = d\xi_1 d\eta_1).$$

Шаклдан:

$$\cos \gamma = \frac{|PP_1|}{|MP|} = \frac{\sqrt{r^2 - |P_1M|^2}}{r} = \frac{\sqrt{r^2 - (x - \xi_1)^2 - (y - \eta_1)^2}}{r}.$$

Шунинг учун:

$$\iint_{S_r} \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\sigma_r = \iint_{C_r} \frac{f(\xi_1, \eta_1) d\xi_1 d\eta_1}{\sqrt{r^2 - (x - \xi_1)^2 - (y - \eta_1)^2}}.$$

Демак, бу алмаштиришларга нисбатан (5.12) ни

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi a} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\iint_{C_r} \frac{\varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{r^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}} \right] + \right. \\ \left. + \iint_{C_r} \frac{\psi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{r^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}} \right\} \quad (6.4)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу ники ўлчовли тўлқин тенгламаси учун Пуассон формуласидир. У фазода олдинги фронти бор, орқа фронти йўқ (Гюгенс принципи бажарилмайдн), цилиндрнк тўлқинларни ифодалайди. Шу тариқа, агар f функция фақат x га боғлиқ бўлса, u функция ҳам x га боғлиқ бўлиб, бир ўлчовли

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (6.5)$$

тўлқин тенгламасининг

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x) \quad (6.6)$$

бошланғич шартларини қаноатлантирувчи ечими бўлади. Бу ҳолда

$$u_f(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a} \iint_{S_r} \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{r_1} d\sigma_r = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} f(\xi) d\xi$$

(5.5) кўринишда бўлади ($d\sigma_r = 2\pi r d\xi$). Шунинг учун, бир ўлчовли тўлқин тенгламасининг (6.6) шартларни қаноатлантирувчи ечими қуйидагича ёзилади:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi) d\xi \right] + \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \right\} = \\ = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \quad (6.7)$$

Бу Даламбер формуласидир.

Юқоридаги, (5.1) — (5.2) Коши масаласининг (5.12) ечимидан (6.1) — (6.2) ва (6.5) — (6.6) Коши масалаларининг (6.4) ва (6.7) ечимларини келтириб чиқариш усули пасайиш (тушиш) усули дейилган.

Энди уч ўлчовли бир жинсли бўлмаган

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t) \quad (6.8)$$

тенгламанинг $-\infty < x, y, z < \infty, t \geq 0$ соҳада

$$u(x, y, z, t)|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \\ \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x, y, z) \quad (6.9)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими — узлуксиз $u(x, y, z, t)$ функцияни топиш билан шуғулланамиз. Бундай масала товуш тарқалиш назарияси, электромагнит тўлқинларнинг тарқалиш назарияси ва физиканинг бошқа соҳаларида фундаментал аҳамиятга эга. (6.8) — (6.9) нинг ечими, бир жинсли

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (6.10)$$

тенгламанинг

$$v \Big|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x, y, z) \quad (6.11)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $v(x, y, z, t)$ ечими билан берилган (6.8) кўринишдаги

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t) \quad (6.12)$$

тенгламанинг

$$w \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (6.13)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $w(x, y, z, t)$ ечими йиғиндисида иборат бўлади, яъни $u = v + w$.

(6.10) — (6.11) Коши масаласининг ечими 5-§ да Пуассон формуласи орқали топишган эди.

(6.12) — (6.13) Коши масаласининг ечимини эса Дьюамель принциpidан фойдаланиб топамиз.

Биринчидан,

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right) \quad (6.14)$$

тенгламанинг $t > \tau$ учун (τ — параметр)

$$\omega(x, y, z, t, \tau) \Big|_{t=\tau} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} \Big|_{t=\tau} = f(x, y, z, \tau) \quad (6.15)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топамиз.

(6.14) — (6.15) масаланинг ечими Пуассон формуласи орқали ифодаланади. Фақат формуладаги t ўрнига $t - \tau$ ни қўйиш керак, чунки бу ерда бошланғич момент $t = \tau$. Бу ҳолда (5.7) қуйидаги

$$\omega(x, y, z, \tau) = \frac{t - \tau}{4\pi} \iiint_{S_1} f[x + \beta_1 a(t - \tau), y + \beta_2 a(t - \tau), z + \beta_3 a(t - \tau)] d\tau \quad (6.16)$$

кўринишда бўлади. Энди,

$$u(x, y, z, t) = \int_0^t \omega(x, y, z, t, \tau) d\sigma_1 \quad (6.17)$$

функция (6.12) — (6.13) масаланинг ечими эканлигини кўрсатамиз. (6.17) ни t бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \int_0^t \frac{\partial \omega}{\partial \tau} d\tau + \omega(x, y, z, t, \tau) \Big|_{\tau=t}. \quad (6.18)$$

(6.15) нинг биринчи шартига асосан (6.18) даги иккинчи қўшилувчи нолга тенг, шунинг учун

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \int_0^t \frac{\partial \omega}{\partial \tau} d\tau. \quad (6.19)$$

(6.17) ва (6.19) формуладан кўринадики, $\omega(x, y, z, t)$ функция (6.13) бошланғич шартларни қаноатлантиради. (6.19) ни яна t бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = \int_0^t \frac{\partial^2 \omega}{\partial \tau^2} d\tau + \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t}. \quad (6.20)$$

(6.15) га асосан:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = \int_0^t \frac{\partial^2 \omega}{\partial \tau^2} d\tau + f(x, y, z, t). \quad (6.21)$$

Бу ерда ω функцияси (6.14) тенгламани қаноатлантиришини ҳисобга олсак, (6.17) ва (6.21) ларга асосан, ω функциянинг (6.12) ни қаноатлантириши келиб чиқади. Демак,

$$\begin{aligned} \omega(x, y, z, t) = & \frac{1}{4\pi} \int_0^t (t-\tau) d\tau \iiint_{S_1} f[x - \beta_1 a(t-\tau), \\ & y + \beta_2 a(t-\tau), z + \beta_3 a(t-\tau)] d\sigma_1. \end{aligned} \quad (6.22)$$

(6.22) да $r = a(t-\tau)$ белгилаш киритиб, $\xi = x + \beta_1 r$, $\eta = y + \beta_2 r$, $\zeta = z + \beta_3 r$ формулалар орқали сферик координаталар системасига ўтсак,

$$(r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1),$$

$$\omega(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{V_r} \frac{f(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a})}{r} d\xi d\eta d\zeta \quad (6.23)$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу ерда V_r — маркази (x, y, z) нуқтада, радиуси $r = at$ бўлган шар. (6.23) ифода кечикувчи потенциал дейилади.

Шунингдек, Дьюамель принципи ёрдамида икки ўлчовли

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t) \quad (6.24)$$

тенгламининг

$$u \Big|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x, y) \quad (6.25)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $u(x, y, t)$ узлуксиз ечимини топиш мумкин.

(6.24) — (6.25) Коши масаласининг ечими, бир жинсли

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (6.26)$$

тенгламининг

$$v \Big|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x, y) \quad (6.27)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $v(x, y, t)$ ечими билан

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t) \quad (6.28)$$

тенгламининг

$$w \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (6.29)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $w(x, y, t)$ ечими йиғиндисидан иборат бўлади: $u = v + w$.

(6.26) — (6.27) масаланинг ечими (6.4) формула орқали ифодаланади. Юқоридики келтирилганидек, (6.28) — (6.29) масаланинг ечимини

$$w = \int_0^t \omega(x, y, \tau) d\tau \quad (6.30)$$

кўринишда топамиз. Бу ерда $\omega(x, y, t)$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$$

тенгламининг

$$\omega \Big|_{t=\tau} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} \Big|_{t=\tau} = f(x, y, \tau) \quad (6.31)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимидир. Бу ечим

$$\omega(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \left[\iint_{r < a(t-\tau)} \frac{f(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - r^2}} \right] d\tau \quad (6.32)$$

кўринишда ифодаланади.

7-§. Лаплас ва Пуассон тенгламалари. Грин формуласи.

Урта қиймат ҳақидаги теорема ва гармоник функциялар учун максимум принципи

Турли стационар физик жараёнларни, жумладан, иссиқлик ўтказиш назарияси, электростатика, гидродинамика масалаларини ўрганишда қуйидаги дифференциал тенгламага келамиз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \text{ ёки } \Delta u = 0. \quad (7.1)$$

Бу тенглама *Лаплас тенгламаси* дейилади. Тенгламанинг чап томонидаги ифода u функциянинг лапласиани, Δ белги *Лаплас оператори* дейилади.

Бир жинсли бўлмаган

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z) \text{ ёки } \Delta u = f \quad (7.2)$$

тенглама *Пуассон тенгламаси* дейилади.

Бу тенгламаларни текширишда Грин формуласи ва гармоник функциялар тушунчаси катта аҳамиятга эга.

Грин формуласи. Вектор майдонлар назариясидан маълумки, вектор майдоннинг ҳажм бўйича тарқалиши (дивергенцияси) ҳажмни чегараловчи ёпиқ сирт орқали майдон оқимиغا тенг, яъни

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \iint_S a_n dS \quad (7.3)$$

Агар $u(x, y, z)$ ва $v(x, y, z)$ функциялар ёпиқ V соҳада узлуксиз ва иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга функциялар бўлиб,

$$a_x = u \frac{\partial v}{\partial x}, \quad a_y = u \frac{\partial v}{\partial y}, \quad a_z = u \frac{\partial v}{\partial z}$$

бўлса, у ҳолда

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{a} &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \\ &+ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} = u \Delta v + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v, \quad a_n = u \frac{\partial v}{\partial n} \end{aligned}$$

бўлади, бунда $\vec{n}$ — V соҳанинг S сиртига ўтказилган ташқи нормал. (7.3) га асосан

$$\iiint_V u \Delta v dV = \iint_S u \frac{\partial v}{\partial n} ds - \iiint_V \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v dV$$

ёки

$$\iiint_V v \Delta u dV = \iint_S v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \iiint_V \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} u dV.$$

Бу икки тенгликни бир-биридан айирсак,

$$\iiint_V (u \Delta v - v \Delta u) dV = \iint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \quad (7.4)$$

формуланн ҳосил қиламиз. (7.4) ифода *Грин формуласи* дейилади.

Икки ўлчовли $u(x, y)$ ва $v(x, y)$ функциялар учун S эгри чиқиқ билан чегараланган S соҳада Грин формуласи

$$\iint_S (u \Delta v - v \Delta u) ds = \int_C \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dl \quad (7.5)$$

кўринишда ифодаланади. Бу ерда $ds = dx dy$, dl — C эгри чизик ёй элементи.

Гармоник функциялар қуйидаги хоссаларга эга:

1-теорема. Агар u функция C эгри чизик билан чегараланган соҳада гармоник функция бўлса, u ҳолда

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0 \quad (7.6)$$

бўлади.

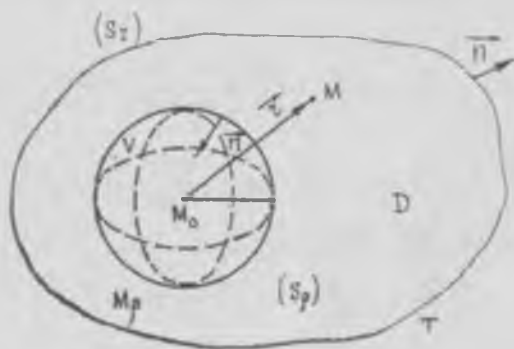
Исбот. Агар (7.4) да $u = 1$ десак, $\Delta u = 0$ тенгликка асосан (7.6) тенглик келиб чиқади.

2-теорема (функциянинг ўрта қиймати ҳақида). Агар u функция бирор M_0 нуқтани ўз ичига олган бирор V соҳада гармоник функция бўлса, u ҳолда функциянинг шу нуқтадаги қиймати маркази M_0 нуқтада бўлган шарнинг S сирти бўйича олинган қийматларининг ўрта арифметикига тенг бўлади, яъни

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_S u ds,$$

R — сфера радиуси.

Исбот. $u(x, y, z)$ функция $T + S_r$ соҳада биринчи тартибли ҳосилалари билан биргаликда узлуксиз гармоник функция бўлсин. S_r — T соҳани чегараловчи сирт. Ихтиёрий $M(x, y, z)$ нуқта (1.10-шакл) $D = T - V$ соҳада ётади. V — радиуси ρ бўлган шар, S_ρ — шу шарнинг сирти. $M_0(x, y, z)$ нуқта V шарнинг маркази. $v = \frac{1}{r}$ функцияни кўрайлик, бу ерда $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ —



1.10- шакл

M ва M_0 нуқталар орасидаги масофа. v функция $M = M_0$ нуқтада узилишга эга бўлганлиги учун T соҳада u ва v функцияларга Грин формуласини қўлаб бўлмайди. Лекин D соҳада $v = \frac{1}{r}$ функция чегараланган. Шунинг учун бу соҳада u ва $v = \frac{1}{r}$ функциялар учун (7.4) формулани қўллаймиз:

$$\begin{aligned} \iiint_D \left(u \Delta \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \Delta u \right) \Delta V = \iint_{S_r} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] ds + \\ + \iint_{S_\rho} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) ds - \iint_{S_\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} ds. \end{aligned} \quad (7.7)$$

D соҳанинг ташқи нормали бўйича ҳосила қатнашган охириги иккита қўшилувчини ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{S_\rho} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{r=\rho} = \frac{1}{\rho^2}$$

бўлганлиги учун

$$\iint_{S_\rho} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) ds = \frac{1}{\rho^2} \iint_{S_\rho} u ds = \frac{1}{\rho^2} 4\pi \rho^2 u(M_\rho) = 4\pi u(M_\rho), \quad (7.8)$$

бу ерда $M_\rho - S_\rho$ сиртдаги ихтиёрий нуқта. Шунга ўхшаш

$$\begin{aligned} \iint_{S_\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \frac{1}{\rho} \iint_{S_\rho} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \frac{1}{\rho} 4\pi \rho^2 \left[\frac{\partial u(M_\rho)}{\partial n} \right] = \\ = 4\pi \rho \left[\frac{\partial u(M_\rho)}{\partial n} \right]. \end{aligned} \quad (7.9)$$

D соҳада $\Delta \left(\frac{1}{r} \right) = 0$ эканлигини ҳисобга олиб (7.8) ва (7.9) ни (7.7) га қўямиз:

$$\begin{aligned} \iiint_D \left(-\frac{1}{r} \right) \Delta u dV = \iint_{S_r} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] ds + \\ + 4\pi u(M_\rho) - 4\pi \rho \left[\frac{\partial u(M_\rho)}{\partial n} \right]. \end{aligned} \quad (7.10)$$

$\rho \rightarrow 0$ да $M_\rho \rightarrow M_0$ бўлганлиги учун

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] ds - \frac{1}{4\pi} \iiint_D \frac{\Delta u}{r} dV \quad (7.10')$$

бўлади. Бу ерда

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} 4\pi\rho \frac{\partial u(M_0)}{\partial \rho} = 0$$

эканлигини ҳисобга олсак,

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_R} \left[u \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] ds - \iiint_D \frac{\Delta u}{r} \Delta v \quad (7.11)$$

келиб чиқади. u — гармоник функция бўлганлиги учун $\Delta u = 0$. Демак, (7.11) дан

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_R} \left[u \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] ds \quad (7.12)$$

бўлади. Хусусий ҳолда (7.12) ни маркази M_0 нуқтада, радиуси R бўлган сферага қўлаймиз (u функция сферада ва унинг S_R сиртида биринчи тартибли ҳосилалари билан биргаликда узлуксиз ва гармоник функция). Ташқи n нормал сфера радиусига мос келади. Шунинг учун:

$$\left. \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right|_{r=R} = \left. \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{1}{R^2}.$$

Демак,

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_R} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right] ds - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_R} u \left(-\frac{1}{R^2} \right) ds.$$

(9.6) ни ҳисобга олсак,

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R} u ds \quad (7.13)$$

формулани ҳосил қиламиз.

3-теорема (максимум принципи). *Чегараланган T соҳанинг ичида гармоник бўлган ва $S_r + T$ ёниқ соҳада узлуксиз бўлган u функция ($u \neq \text{const}$) ўзининг энг катта ва энг кичик қийматлари фақат соҳани чегараловчи сиртда эришади.*

Исбот. Шартга кўра $u \neq \text{const}$. Фараз қилайлик, u функция T соҳанинг ичидаги M_0 нуқтада максимум қийматга эга бўлсин, яъни

$$u_0 = u(M_0) \geq u(M). \quad (7.14)$$

$u_0 = u(M)$ эканлигини кўрсатамиз, бунда M — соҳанинг ихтиёрий нуқтаси. Маркази M_0 нуқтада, радиуси ρ бўлган ва T соҳа ичида ётувчи S_ρ сферани оламиз. (7.13) формулада функцияни энг катта қиймати билан алмаштирамиз:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi \rho^2} \iint_{S_\rho} u(M) ds.$$

Ўрта қиймат ҳақидаги теоремага асосан,

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi \rho^2} u(M_\rho) \cdot 4\pi \rho^2 = u(M_\rho).$$

$M_\rho - S_\rho$ сиртдаги ихтиёрий нуқта. Бу тенглик ва (7.14) дан

$$u_0 = u(M). \quad (7.15)$$

Шу тариқа (7.15) тенгликнинг T соҳанинг барча нуқталарида бажарилишини исботлаш мумкин (ҳар гал кейинги олинган нуқтада уни марказ қилиб шар чизамиз ва юқоридаги мулоҳазадан фойдаланамиз; бу жараён охириги шар S_r сирт билан уринганигача давом этади).

8-§. Грин функцияси. Унинг чегаравий масалаларни ечишда қўлланилиши. Доира ва шар учун Пуассон формулалари

Дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларни ечишда Грин функцияси усули кўп қўлланиладиган усуллардан ҳисобланади. Унинг моҳияти қуйидагидан иборат: аввало берилган масалага ўхшаш масаланинг махсус ечими топилади ва у ёрдамида берилган масаланинг ечими интеграл орқали ҳисобланади.

Грин функцияси қуйидагича аниқланади. 7-§ да $T + S_r$ соҳада биринчи тартибли ҳосилалари билан биргаликда узлуксиз бўлган ва T соҳа ичида иккинчи тартибли ҳосиллага эга бўлган u функцияси учун Гриннинг интеграл формуласи

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] ds - \frac{1}{4\pi} \iiint_D \frac{\Delta u}{r} dV \quad (8.1)$$

ўринли эканлиги исботланган. Агар $v(x, y, z)$ ёпиқ D соҳада гармоник функция бўлса,

$$\iiint_D (u \Delta v - v \Delta u) dV = \iint_{S_r} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \quad (8.2)$$

формулани ёзиш мумкин. v — гармоник функция бўлганлиги учун $\Delta v = 0$. Демак,

$$0 = \iint_{S_r} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds - \iiint_D v \Delta u dV. \quad (8.3)$$

(8.1) ва (8.3) ларни қўшамиз:

$$u(M_0) = \iint_{S_r} \left[\frac{\partial u}{\partial n} \left(\frac{1}{4\pi r} + v \right) - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{4\pi r} + v \right) \right] ds -$$

$$-\iiint_D \left(\Delta u \frac{1}{4\pi r} + v \right) dV. \quad (8.4)$$

Агар

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r} + v, \quad r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \quad (8.5)$$

деб белгиласак,

$$u(M_0) = \iint_{S_r} \left[G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds - \iiint_D G \Delta u dV \quad (8.6)$$

бўлади. (8.5) дан кўринадики, G функцияни аниқлаш учун $\Delta v = 0$ тенгламанинг махсус $v \Big|_{S_r} = -\frac{1}{4\pi r}$ чегаравий шартни қаноатлантирувчи ечими v ни топиш kifойадир.

(8.5) кўринишдаги $G(M, M_0)$ функция куйидаги шартлар ёрдамида аниқланади:

1) $G(M, M_0)$ функция M нуқтанинг функцияси сифатида аниқланиб, тайинланган M_0 нуқтадан бошқа нуқталарда гармоник функция ёки Лаплас тенгламасини қаноатлантиради.

2) $G(M, M_0)$ функция $M = M_0$ нуқтада чексизликка айланади.

3) $G(M, M_0)$ функция соҳани чегараловчи S_r сирт устида нолга тенг:

$$G(M, M_0) = 0, \quad M \in S_r. \quad (8.7)$$

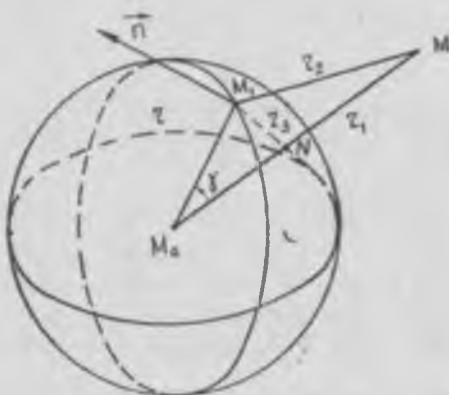
Юқоридаги шартлар ёрдамида аниқланган $G(M, M_0)$ функция $\Delta u = 0$ Лаплас тенгламаси учун биринчи чегаравий масаланинг (Дирехле масаласининг) Грин функцияси дейилади. (9.6) да $\Delta u = 0$, $u \Big|_{S_r} = f(M)$ бўлса, бу формула

$$u(M_0) = - \iint_{S_r} u \frac{\partial G}{\partial n} ds = - \iint_{S_r} f \frac{\partial G}{\partial n} ds \quad (8.8)$$

кўринишда бўлиб, фақат $G(M, M_0)$ функцияга боғлиқ бўлади (биринчи чегаравий масалада $u \Big|_{S_r} = f$, $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{S_r} = 0$ ва иккинчи чегаравий масалада $u \Big|_{S_r} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{S_r} = f(M)$). (8.8) формула биринчи чегаравий масаланинг, яъни Дирехле масаласининг ечимидир.

Грин функцияси Нейман масаласининг ечимини ва учинчи чегаравий масаланинг ечимларини топишда ҳам қўлланилади. Куйида Грин функцияси ёрдамида ечимлари топиладиган иккита масалани кўрамыз.

Шар учун Дирехле масаласининг ечими. Маркази M_0 нуқтада бўлиб, радиуси r ва S_r сфера билан чегараланган V шарни кўрайлик. $\vec{n}$ — ташқи нормал, M_1 — сферадаги, M — сфера ташқарисидаги ихтиёрий нуқталар бўлиб, M_0M чизикдаги N нуқта $M_0N \cdot M_0M = r^2$ тенгликни қаноатлантиради (1.11-шакл). N нуқтага



1.11-шакл

бирлик заряд жойлаштирамиз. (8.7) шарт бажарилиши учун M нуқтага шундай бирлик заряд жойлаштириш керакки, сферада улар бир-бирини йўқотсин. Агар S_n сферада ихтиёрий M_1 нуқтани олсак, $\Delta M_0M_1N \propto \Delta M_0M_1M$ бўлади, чунки у иккаласи учун умумий бурчак ва бу бурчак томонлари пропорционал. Демак,

$$\frac{M_0N}{M_0M_1} = \frac{M_0M}{M_0M_1} \quad \text{ёки} \quad \frac{r_0}{r} = \frac{r}{r_1} = \frac{r}{r_2}. \quad (8.9)$$

Бу ерда $r_0 = \frac{r_0}{r} \cdot r_2$ бўлиб, $v = -\frac{r}{r_0 r_2}$ гармоник функция сферада $u = \frac{1}{r_2}$ гармоник функция қабул қилган қийматларни олади. M нуқтага жойлаштирилган заряд потенциали $-\frac{r}{r_0}$ дан иборат. Демак, Грин функцияси иккита заряд ҳосил қилган майдон потенциали.

$$G(M_1, N) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{r_2} - \frac{r}{r_0 r_2} \right] \quad (8.10)$$

кўринишида ифодаланади. Юқорида келтирилгандек, Дирехле масаласининг ечими

$$u(M_0) = - \int \int_{S_r} f(M_1) \frac{\partial G}{\partial n} ds, \quad u \Big|_{S_r} = f \quad (8.11)$$

қўринишда бўлади. Сферага ўтказилган ташқи нормал $\vec{n}$ нинг йўналиши радиус йўналиши билан устма-уст тушади. Шунинг учун

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r} \cos(\vec{n}, \vec{r}). \text{ Демак,}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n} &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_3} \right) - \frac{r}{r_0} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_3} \right) \right], \quad \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_3} \right) = \\ &= -\frac{1}{r_3^2} \cos(\vec{r}_3, \vec{n}), \end{aligned} \quad (8.12)$$

$$\frac{r}{r_0} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_3} \right) = -\frac{r}{r_0} \cdot \frac{1}{r_3^2} \cos(\vec{r}_3, \vec{n}). \quad (8.13)$$

$$\Delta M_0 M_1 N \text{ дан } r_0^2 = r^2 + r_3^2 - 2rr_3 \cos(\vec{r}_3, \vec{n}),$$

$$\Delta M_0 M_1 M \text{ дан } r_1^2 = r^2 + r_2^2 - 2rr_2 \cos(\vec{r}_2, \vec{n}),$$

ёки

$$\cos(\vec{r}_3, \vec{n}) = \frac{r^2 + r_3^2 - r_0^2}{2rr_3}, \quad (8.14)$$

$$\cos(\vec{r}_2, \vec{n}) = \frac{r^2 + r_2^2 - r_1^2}{2rr_2}. \quad (8.15)$$

$$r_2 = \frac{rr_3}{r_0}, \quad r_1 = \frac{r^2}{r_0} \text{ тенгликларга асосан:}$$

$$\begin{aligned} \cos(\vec{r}_3, \vec{n}) &= \frac{r^2 - \frac{r^4}{r_0^2} + \frac{r^2 r_3^2}{r_0^2}}{2r \cdot \frac{r_3}{r_0}} = \\ &= \frac{r^2 r_0^2 - r^4 - r^2 r_3^2}{2r^2 r_3} = \frac{r_0^2 - r^2 + r_3^2}{2r_3 r_0}. \end{aligned}$$

Энди (8.10), (8.12), (8.13), (8.14), (8.15) формулаларга кўра

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{S_r} &= \frac{1}{4\pi} \left[-\frac{1}{r_3} \frac{r^2 + r_3^2 - r_0^2}{2rr_3} + \frac{r}{r_0} \frac{r_0^2}{r_3^2 r^2} \frac{r_0^2 + r_3^2 - r^2}{2r_3 r_0} \right] = \\ &= -\frac{1}{4\pi r} \frac{r - r_0^2}{r_3^3}. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Демак,

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi r} \iint_{\Sigma} f(M_1) \frac{r^2 - r_0^2}{r_3^3} ds \quad (8.16')$$

бўлади. Бу формулани сферик координаталар системасида ифода-
лаймиз. Сфера маркази M_0 нуқтада, $(r, \theta, \varphi) — M_1$ нуқтанинг коорди-
наталари, $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ эса N нуқта координаталари, $\gamma — \overline{M_0M_1}$ ва $\overline{M_0N}$
радиус—векторлар орасидаги бурчак бўлсин. $r_3^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \gamma$,
алмаштириш якобиани $l = r^2 \sin \theta$ бўлганлиги учун (10.16') фор-
мула

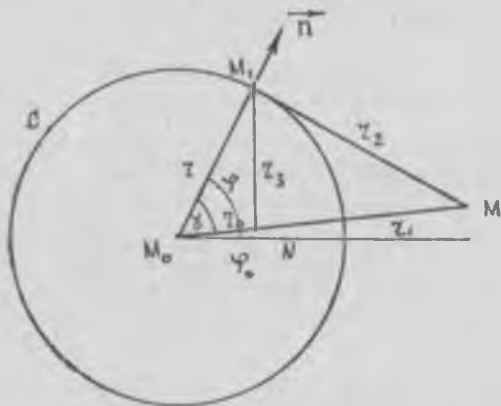
$$u(r_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{r}{4\pi} \iint_{S_r} \frac{r^2 - r_0^2}{(r^2 - r_0^2 - 2rr_0 \cos \gamma)^{\frac{1}{2}}} f(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \quad (8.17)$$

кўринишда бўлади. Бу формула *Пуассон формуласи* дейилади.

Доира учун Дирехле масаласининг ечими. Маркази
 M_0 нуқтада бўлиб, радиуси r ва C айлана билан чегараланган D
донрани кўрайлик (12- шакл) $\vec{n}$ — ташқи нормал, M_1 айланадаги, M
айлана ташқарисидаги нуқталар бўлиб, M_0M чизикдаги N нуқта

$$M_0N \cdot M_0M = r^2 \text{ ёки } r_0 r_1 = r^2 \quad (8.18)$$

шартни қаноатлантиради. ΔM_0NM_1 билан ΔM_0M_1M ларнинг ўхшаш-
лигидан:



1.12- шакл

$$r_2 = \frac{rr_1}{r_0} \text{ ёки } r_3 = \frac{r^2 r_0}{r} \quad (8.19)$$

Демак, юқорида қайд қилинганидек Грин функцияси

$$G(M, N) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_3} + v \text{ ёки } G(M_1, N) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_2} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0 r_2} \quad (8.20)$$

кўринишда бўлади. Бу ердан $G|_C = 0$, $v|_C = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_3}$. Лаплас
тенгламасининг ечими

$$u(N) = - \int_C f(M_1) \frac{\partial G}{\partial n} ds \quad (8.21)$$

кўринишда бўлади. Бу ерда

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial r} \cos(\vec{n}, \vec{r}) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r_1} \cos(\vec{n}, \vec{r}_1) + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r_2} \cos(\vec{n}, \vec{r}_2).$$

M_0M_1N ва M_0M_1M учбурчаклардан

$$\cos(\vec{n}, \vec{r}_3) = \frac{r^2 + r_3^2 - r_0^2}{2rr_3}, \quad \cos(\vec{n}, \vec{r}_2) = \frac{r^2 + r_2^2 - r_1^2}{2rr_2}$$

бўлганликлари учун

$$-\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_C = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{r_3} \frac{r^2 + r_3^2 - r_0^2}{2rr_3} - \frac{1}{r_2} \frac{r^2 + r_2^2 - r_1^2}{2rr_2} \right).$$

(8.18) ва (8.19) га асосан

$$-\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_C = \frac{1}{2\pi r} \cdot \frac{r^2 - r_0^2}{r_3^2}$$

бўлади. (r, φ) — M_1 нукта қутб координаталари, (r_0, φ_0) — N нукта қутб координаталари бўлса, M_0M_1N учбурчакдан $r_3^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$ бўлганлиги учун

$$-\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_C = \frac{1}{2\pi r} \frac{r^2 - r_0^2}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

бўлиб, $u \Big|_C = f(\varphi)$ ва $ds = r d\theta$ эканлигини ҳисобга олсак, ечим

$$u(N) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - r_0^2}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} f(\varphi) d\varphi \quad (8.22)$$

кўринишда бўлади. Бу формула доира учун Пуассон формуласи дейилади.

9-§. Иссиқлик тарқалиш тенгламаси. Коши масаласи.

Аралаш масала. Максимум принципи.

Иссиқлик тарқалиши, диффузия ва ёпишқоқ суюқликларнинг ҳаракати жараёнларини ўрганиш масалалари параболик турдаги

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (9.1)$$

тенгламаларни текширишга келтирилади.

Максимум принципи ҳақидаги теорема (исботсиз). D соҳа юқоридан H кесма, ён ва паст томондан Γ билан чегараланган тўғри тўртбурчак бўлсин. Иссиқлик тарқалиш (9.1) тенгламасининг D соҳада узлуксиз бўлган ҳар қандай ечими ўзининг энг катта ва энг кичик қийматига Γ да эришади.

Аралаш масала. Бундай масала тенглама ечимининг $t = 0$ да қаноатлантириши керак бўлган бошланғич шарт ва соҳа чегарасида қаноатлантириши керак бўлган чегаравий шартларнинг қўйилишидан иборат бўлади (3-§).

Чегараланган стерженда иссиқлик тарқалиш масаласини кўрайлик. Иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари бир жинсли бўлмаган

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (9.2)$$

дифференциал тенгламанинг $0 \leq x \leq l$, $t > 0$ соҳада аниқланган ва

$$u|_{t=0} = u(x, 0) = \varphi(x) \quad (9.3)$$

бошланғич шарт ҳамда

$$u|_{x=0} = u(0, t) = \psi_1(t), \quad (9.4)$$

$$u|_{x=l} = l = u(l, t) = \psi_2(t)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $u(x, t)$ ечими топилсин. $f(x, t)$ функция стержен бўйлаб ташқи иссиқлик манбасининг таъсирини ифодалайди.

Ечимни иккита v ва w функцияларнинг йиғиндиси, яъни $u = v + w$ шаклда ифодалаймиз. Бу ерда v функция

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (9.5)$$

бир жинсли тенгламанинг $v(x, 0) = \varphi(x)$ бошланғич шарт ва

$$v|_{x=0} = \psi_1(t), \quad v|_{x=l} = \psi_2(t) \quad (9.6)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимни, w функция эса

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (9.7)$$

бир жинсли бўлмаган тенгламанинг

$$w|_{t=0} = 0 \quad (9.8)$$

бошланғич шарт ва бир жинсли бўлган

$$w|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=l} = 0 \quad (9.9)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимни бўлади. Ҳар бир тенгламани алоҳида-алоҳида ечамиз. (9.5) — (9.6) масаланинг ечимини

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (9.10)$$

кўринишда излаймиз. Бу ерда

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l v(x, t) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \quad (9.11)$$

(9.11) ни икки марта бўлаклаб интеграллаймиз:

$$\begin{aligned} \frac{2}{l} \int_0^l v(x, t) \sin \frac{k\pi x}{l} dx &= \left| \begin{array}{l} v(x, t) = u, \quad \frac{\partial v}{\partial x} dx = du \\ \sin \frac{k\pi x}{l} dx = dv, \quad v = -\frac{l}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{l} \end{array} \right| = \\ &= \frac{2}{l} \left[-\frac{v(x, t) l}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{l} \right]_0^l + \frac{l}{k\pi} \int_0^l \frac{\partial v}{\partial x} \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx = du \\ \cos \frac{k\pi x}{l} dx = dv, \quad v = \frac{l}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{l} \end{array} \right| = -\frac{2v(l, t)}{k\pi} (-1)^k + \\ &+ \frac{2v(0, t)}{k\pi} + \frac{2}{k\pi} \left[\frac{l}{k\pi} \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \sin \frac{k\pi x}{l} \right]_0^l - \frac{l}{k\pi} \int_0^l \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \\ &= \frac{2}{k\pi} [v(0, t) - (-1)^k v(l, t)] - \frac{2l}{k^2 \pi^2} \int_0^l \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \end{aligned}$$

(9.5) ва (9.6) га асосан:

$$a_k(t) = \frac{2}{k\pi} [\psi_1(t) - (-1)^k \psi_2(t)] - \frac{2l}{k^2 \pi^2 a^2} \int_0^t \frac{\partial v}{\partial t} \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \quad (9.12)$$

(9.11) ни t бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{da_k}{dt} = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{\partial v}{\partial t} \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \quad (9.13)$$

(9.12) ва (9.13) дан интегрални йўқотиб, a_k га нисбатан

$$\frac{da_k}{dt} + \frac{k^2 \pi^2 a^2}{l^2} a_k = \frac{2k\pi a^2}{l^2} [\psi_1(t) - (-1)^k \psi_2(t)] \quad (9.14)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (9.14) нинг умумий ечими

$$\begin{aligned} a_k(t) &= e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \left[C_n + \frac{2k\pi a^2}{l^2} \int_0^t e^{\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 \tau} [\psi_1(\tau) - \right. \\ &\quad \left. - (-1)^k \psi_2(\tau)] d\tau \right], \end{aligned} \quad (9.15)$$

бу ерда $C_n = a_k(0)$. (9.5) га асосан:

$$v(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(0) \sin \frac{k\pi x}{l} = \varphi(x).$$

Демак,

$$a_k(0) = C_k = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx$$

бўлиб, ечим

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \left[\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx + \right. \\ \left. + \frac{2k\pi a^2}{l^2} \int_0^t e^{\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 \tau} [\psi_1(\tau) - (-1)^k \psi_2(\tau)] d\tau \right] \quad (9.16)$$

кўринишда бўлади.

(9.7) — (9.9) масаланинг ечимини ҳам (9.10) кўринишда излаймиз:

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (9.17)$$

бу ерда

$$f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \quad (9.18)$$

ёйилмани ҳисобга олган ҳолда (9.7) дан

$$\frac{da_k(t)}{dt} + \omega_k^2 a_k(t) = f_k(t) \quad (9.19)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу ерда $\omega_k = \frac{k\pi a}{l}$. (9.8) га асосан:

$$a_k(t) = \int_0^t e^{-\omega_k^2 (t-\tau)} f_k(\tau) d\tau.$$

Топилган ифодани ечимга, (9.18) ни ҳисобга олган ҳолда қўйсак,

$$w(x, t) = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (9.20)$$

ифодани ҳосил қиламиз.

Бу ерда

$$G(x, \xi, t - \tau) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\omega_k^2 (t-\tau)} \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot \sin \frac{k\pi \xi}{l}$$

бўлиб, у Грин функцияси дейилади.

Демак, (9.12) — (9.13) аралаш масаланинг ечими

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \left[\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx + \right. \\ & + \frac{2k\pi a^2}{l^2} \int_0^t e^{\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 \tau} [\psi_1(\tau) - (-1)^k \psi_2(\tau)] d\tau \Big] \sin \frac{k\pi x}{l} + \\ & + \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \end{aligned} \quad (9.21)$$

кўринишда бўлади.

10-§. Штурм — Лиувилл масаласи. Хос функция ва хос қийматлар. Асосий хоссалари

Оддий дифференциал тенгламалар назариясида

$$[\varphi(x) y']' - q(x) y + \lambda p(x) y = 0 \quad (10.1)$$

кўринишдаги тенгламага *Штурм — Лиувилл тенгламаси* дейилади. Бу ерда $\varphi(x)$, $q(x)$, $p(x)$ функциялар $[a, b]$ кесмада узлуксиз функциялар бўлиб, $\varphi(x) > 0$, $q(x) > 0$, $p(x) > 0$ бўлади. λ — тенглама параметри. (10.1) тенгламанинг нолдан фарқли ечимини топиш учун функция

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) &= 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) &= 0 \end{aligned} \quad (10.2)$$

чегаравий шартларни қаноатлантириши зарур.

Биз қуйида математик физика тенгламаларини ечишда кўп қўлланиладиган (10.1) нинг хусусий ҳолини кўрамыз.

λ параметрнинг шундай қийматлари топилсинки, бу қийматларда

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (10.3)$$

дифференциал тенгламанинг

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \quad (10.4)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи нолдан фарқли ечими мавжуд бўлсин. Бу масала *Штурм — Лиувилл масаласи* дейилади.

$\lambda > 0$ бўлсин. Бу ҳолда (10.3) нинг ечими

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x \quad (10.5)$$

кўринишда бўлади. (10.4) чегаравий шартларга асосан:

$$\begin{cases} C_1 - 1 + C_2 \cdot 0 = 0, \\ C_1 \cos \sqrt{\lambda} l + C_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0. \end{cases}$$

Бу ерда $C_1 = 0$, $C_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0$ бўлади. $C_2 \neq 0$ бўлсин (акс ҳолда $X(x) = 0$):

$$\sin \sqrt{\lambda} l = 0, \quad \sqrt{\lambda} l = k\pi, \quad k \in Z, \quad \sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{l}.$$

Шундай қилиб, (10.3) — (10.4) масаланинг нолдан фарқли ечими

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \quad (10.6)$$

қийматларда мавжуд бўлади. Бу қийматлар масаланинг хос қийматлари, уларга мос келадиган нолдан фарқли

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (10.7)$$

ечимлар масаланинг хос функциялари дейилади.

(10.6) дан кўринадики, хос қийматлар сони чексиз, манфий эмас ва чегараланмаган

$$X_1(x), X_2(x), \dots, X_m(x), \dots, X_n(x), \dots \quad (10.8)$$

кетма-кетликни ташкил қилади.

Хос функциялар қуйидаги хоссаларга эга.

1. Ҳар бир хос қийматга фақат битта хос функция мос келади (ўзгармас кўпайтирувчигача аниқлик билан).

Исбот. Битта $\lambda_k = \lambda$ хос қийматга иккита хос функция $X_m(x)$ ва $X_n(x)$ мос келсин. Барча хос функциялар (10.2) чегаравий шартларни қаноатлантиради. Уларнинг биринчисидан

$$\alpha_1 X_m(0) + \alpha_2 X_m'(0) = 0, \quad \alpha_1 X_n(0) + \alpha_2 X_n'(0) = 0 \quad (10.9)$$

келиб чиқади. α_1 ва α_2 лар бир вақтда нолга тенг эмас, шунинг учун (10.9) нинг Вронский детерминанти нолга тенг бўлади:

$$\omega [X_m(0), X_n'(0)] = X_m(0) X_n'(0) - X_m'(0) X_n(0) = 0.$$

Демак, $X_m(x)$ ва $X_n(x)$ функциялар чизикли боғлиқ бўлиб, $\lambda = \lambda_k$ бўлганда битта боғлиқмас хос функция мавжуд бўлади, яъни $X_m(x) = C X_n(x)$, ($C = \text{const}$).

2. Ҳар хил λ_m ва $\lambda_n \neq \lambda_m$ хос қийматларга мос келган иккита $X_m(x)$ ва $X_n(x)$ хос функциялар $[a, b]$ кесмада ортогоналдир ёки

$$\int_a^b X_m(x) \cdot X_n(x) \cdot d(x) = 0. \quad (10.10)$$

3. Ҳар хил λ_m ва λ_n хос қийматларга мос келган иккита $X_m(x)$ ва $X_n(x)$ хос функциялар $\rho(x)$ вазнли ортогонал бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b X_m(x) \cdot X_n(x) \cdot \rho(x) dx = 0, \quad (m \neq n) \quad (10.11)$$

бўлади.

Биринчи хоссада қайд этилган ўзгармас кўпайтувчини шундай танлаймизки,

$$\|X_n\|^2 = \int_a^b \rho(x) X_n^2(x) dx = 1 \quad (10.12)$$

бўлсин. Бу шартни қаноатлантирувчи хос функциялар *нормалланган* дейилади.

Агар функциялар системаси (10.10) ва (10.12) шартларни қаноатлантирса, у ҳолда $[a, b]$ кесмада *ортонормалланган система* дейилади:

$$\int_a^b \rho(x) X_m(x) \cdot X_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{агар } m \neq n, \\ 1. & \text{агар } m = n. \end{cases} \quad (10.13)$$

11-§. Чегаравий масалаларни ечишда ўзгарувчиларни ажратиш усули. Унинг татбиқининг умумий схемаси

Математик физикада кенг қўлланиладиган усуллардан бири ўзгарувчиларни ажратиш усули ёки Фурье усули ҳисобланади.

Айниқса, бу усул гиперболик ва параболик турдаги тенгламалар учун ёпиқ соҳадаги чегаравий масалаларни ечишда қўлланилади. Баъзи ҳолларда эллиптик турдаги тенгламаларни ечишда ҳам қўлланилади. Ҳар бир турдаги тенгламалар учун биттадан масалаларни кўрайлик.

11.1. Чегараланган торнинг тебраниши. Биз икки томонидан маҳкамланган торнинг эркин тебраниш тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (11.1)$$

нинг бошланғич шартлар

$$u|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(x) \quad (11.2)$$

ва чегаравий шартлар

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \quad (11.3)$$

берилгандаги хусусий ечимини топамиз. Бунинг учун Фурье усулидан фойдаланамиз. (11.1) тенгламанинг (айнан 0 га тенг бўлмаган) хусусий ечимини иккита $X(x)$ ва $T(t)$ функциялар кўпайтмаси шаклида қидирамиз:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t). \quad (11.4)$$

Бундан тегишли ҳосилаларни топиб, (11.1) тенгламага қўйиб, қўйидагини ҳосил қиламиз:

$$X(x) \cdot T''(t) = a^2 X''(x) T(t)$$

ва бу тенгликнинг ҳадларини $a^2 X \cdot T$ га бўлиб

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (11.5)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенглик ўзгармас сонга тенг бўлгандагина ўринли бўлади. Уни $-\lambda$ билан белгилаймиз. Шундай қилиб,

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

Бу тенгликлардан иккита тенглама ҳосил бўлади:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (11.6)$$

$$T'' + a^2 \lambda T = 0. \quad (11.7)$$

Бу тенгламаларнинг умумий ечимларини топамиз. Характеристик тенгламанинг илдизлари комплекс бўлганлиги учун

$$X(x) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x, \quad (11.8)$$

$$T(t) = C \cos a \sqrt{\lambda} t + D \sin a \sqrt{\lambda} t \quad (11.9)$$

ечимларга эга бўламиз. Бунда A, B, C, D — ихтиёрий ўзгармас сонлар. $X(x)$ ва $T(t)$ лар учун топилган ифодаларни (11.4) тенгликка қўямиз:

$$u(x, t) = (A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x) (C \cos a \sqrt{\lambda} t + D \sin a \sqrt{\lambda} t). \quad (11.10)$$

Энди A ва B ўзгармас сонларни (11.3) шартлардан фойдаланиб топамиз. (11.8) га $x=0$ ва $x=l$ қийматларни қўйсак,

$$0 = A \cdot 1 + B \cdot 0, \quad 0 = A \cos \sqrt{\lambda} l + B \sin \sqrt{\lambda} l$$

тенгламалар ҳосил бўлиб, биринчисидан $A=0$, иккинчисидан $B \sin \sqrt{\lambda} l = 0$ эканлиги келиб чиқади. $B \neq 0$, чунки акс ҳолда $X=0$ бўлиб, $u=0$ бўлиб қолади. Бу шартга зид. Шунинг учун

$$\sin \sqrt{\lambda} l = 0$$

бўлиши керак, бундан $\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) хос қийматларни топамиз. Уларга мос келадиган хос функциялар

$$X = B \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (11.11)$$

тенглик билан ифодаланади. Топилган $\sqrt{\lambda}$ нинг ифодасини (11.9) га қўйсак, у

$$T(t) = C \cos \frac{an\pi}{l} t + D \sin \frac{an\pi}{l} t, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (11.12)$$

қўринишни олади. n нинг ҳар бир қиймати учун топилган ифодаларни (11.4) га қўйиб, чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $u_n(x, t)$ ечимларни ҳосил қиламиз:

$$u_n(x, t) = \left(C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Тенглама чизикли ва бир жинсли бўлгани учун ечимларнинг йиғиндиси ҳам ечим бўлади ва шунинг учун

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (11.13)$$

қатор билан ёзилган функция ҳам (11.1) тенгламанинг ечими бўлади. C_n ва D_n ўзгармас сонларни аниқлаш учун бошланғич (11.2) шартдан фойдаланамиз. $t = 0$ бўлганда

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (11.14)$$

бўлиб, $f(x)$ функциянинг $(0, l)$ оралиқда Фурье қаторига ёйилмаси мавжуд деб фарз қилсак,

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad (11.15)$$

га тенг бўлади. (11.13) тенгликда t бўйича ҳосила олиб, $t = 0$ да

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{an\pi}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу қаторнинг Фурье [коэффициентларини аниқлаймиз:

$$D_n \frac{an\pi}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

ёки

$$D_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx. \quad (11.16)$$

Шундай қилиб, бич C_n ва D_n коэффициентларни аниқладик, демак, чегаравий ва бошланғич шартларни қаноатлантирувчи (11.1) тенгла-
манинг ечими бўлган $u(x, t)$ функцияни аниқладик. Фурье усули
математик физиканинг кўп масалаларини ечишда жуда қўл келади.

Изоҳ: Агар юқорида $-\lambda$ ўрнига $+\lambda = k^2$ ифодани олсак,
тенгламанинг умумий ечими (11.8):

$$X = Ae^{kx} + Be^{-kx}$$

бўлиб, (11.2) чегаравий шартларни қаноатлантирмайди.

Хос функцияни $u_k(x, t) = \left(C_n \cos \frac{ak\pi}{l} t + D_n \sin \frac{ak\pi}{l} t \right) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l}$
кўринишда ҳосил қилган эдик. Уни шаклан ўзгартирсак,

$$u_k(x, t) = F_k \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \left(\frac{k\pi a}{l} t + \varphi_k \right). \quad (11.17)$$

кўринишга келади.

Бу ерда $F_k = \sqrt{C_k^2 + D_k^2}$ ва $\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{C_k}{D_k}$.

(11.17) формуладан кўринадики, торнинг барча нуқталари бир
хил $\omega_k = \frac{k\pi a}{l}$ частота ва φ_k фаза билан гармоник тебранар экан.

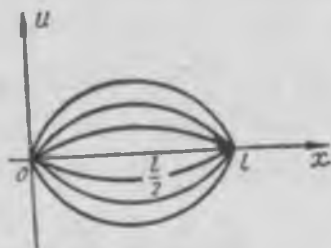
Тебраниш амплитудаси $F_k \sin \frac{k\pi x}{l}$ га тенг бўлиб, у x га боғлиқ
экан. $k = 1$ бўлганда (11.17) формуладан биринчи гармоника учун

$$u_1(x, t) = F_1 \sin \frac{\pi x}{l} \sin \left(\frac{\pi a}{l} t + \varphi_1 \right)$$

формулани ҳосил қиламиз. $x = 0$ ва $x = l$ бўлганда қўзғалмас нуқ-
талар торнинг четлари бўлиб, $x_1 = \frac{l}{2}$ да торнинг четланиши энг кат-
та бўлиб, F_1 га тенг бўлади (1.13-шакл). $k = 2$ бўлганда

$$u_2(x, t) = F_2 \sin \frac{2\pi x}{l} \sin \left(\frac{2\pi a}{l} t + \varphi_2 \right)$$

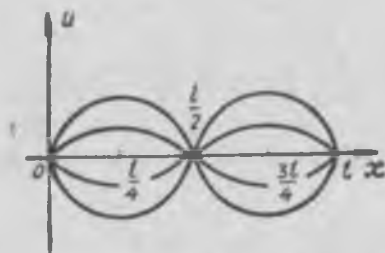
бўлиб, қўзғалмас нуқта учта бўлади:



1.13-шакл

$$x = 0, \quad x = \frac{l}{2}, \quad x = l.$$

Амплитуда энг катта қийматига иккита $x = \frac{l}{4}$ ва $x = \frac{3l}{4}$ нуқтада эришади (1.14-шакл). Умуман $\sin \frac{k\pi x}{l} = 0$ тенгламанинг илдизлари



1.14-шакл

қанча бўлса, $[0, l]$ кесмада шунча қўзғалмас нуқталар бўлади (улар *тугун* нуқталар дейилади). Тугун нуқталар' орасида шундай битта нуқта мавжуд бўладики, бу нуқтада четланиш максимумга эришади; бундай нуқталар «*тутамлик*» нуқталари дейилади. Торнинг энг кичик ўз частотаси

$$\omega_1 = \frac{\pi a}{l} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (11.18)$$

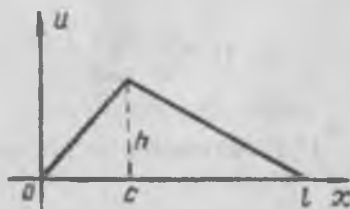
га тенг бўлади, бунда T — тор таранглиги, ρ — зичлиги.

(11.18) формуладан кўринадики, таранглик T қанча катта бўлиб, тор қанча енгил (l ва ρ лар кичик) бўлса, овоз шунча юқори бўлар экан. Қолган ω_k частоталарга мос келган овозлар *обертон* ёки *гармоникалар* дейилади.

Мисол. Четлари $x = 0$ ва $x = l$ маҳкамланган тор берилган бўлиб, тор нуқталарининг бошланғич тезлиги нолга тенг. Бошланғич четланиши учи (c, h) нуқтада бўлган учбурчак шаклида бўлса (1.15-шакл), торнинг тебранишини топинг. (T_0 — таранглик, ρ — зичлик ва $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$ лар берилган).

Ечиш. $u|_{t=0} = f(x)$ функциянинг аналитик ифодаси берилган (1.15-шакл):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{hx}{c}, & 0 \leq x \leq c, \\ \frac{h(l-x)}{l-c}, & c \leq x \leq l. \end{cases}$$



1.15-шакл

Масаланинг шarti бўйича $F(x) = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$, демак, (11.16) га асосан ечимда барча D_k коэффициентлар нолга тенг. C_k коэффициентларни (11.15) формула ёрдамида топамиз:

$$C_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \left[\frac{h}{c} \int_0^c x \sin \frac{k\pi x}{l} dx + \right. \\ \left. + \frac{h}{l-c} \int_c^l (l-x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \right].$$

Ҳар бир интегрални бўлаклаб интеграллаймиз ва ушбу натижага келамиз:

$$\int_0^c x \sin \frac{k\pi x}{l} dx = -\frac{lx}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{l} \Big|_0^c + \frac{l^2}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi x}{l} \Big|_0^c = \\ = -\frac{lc}{k\pi} \cos \frac{k\pi c}{l} + \frac{l^2}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi c}{l}, \\ \int_c^l (l-x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{l(l-c)}{k\pi} \cos \frac{k\pi c}{l} + \frac{l^2}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi c}{l}.$$

Шундай қилиб,

$$C_k = \frac{2hl^2}{k^2\pi^2 c(l-c)} \sin \frac{k\pi c}{l}$$

эканини аниқладик. C_k нинг ифодасини (11.13) формулага қўямиз ва ушбу ечимни оламиз:

$$u(x, t) = \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi c}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{k\pi at}{l}.$$

Агар торнинг ўртасидан тортилган бўлса, яъни $c = \frac{l}{2}$ бўлса, $\frac{k\pi c}{l} = \frac{k\pi}{2}$ бўлиб, k нинг барча жуфт қийматларида $\frac{l}{2}$ нуқта қўзғалмас нуқта бўлади. Шунинг учун ечимда тоқ гармоникалар бўлади, яъни:

$$u(x, t) = \frac{8h}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l} \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi at}{l}.$$

11.2. Чегараланган стерженда иссиқликнинг тарқалиши. Иссиқлик тарқалиши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (11.19)$$

тенгламасининг

$$u \Big|_{x=0} = u(x, 0) = \varphi(x) \quad (11.20)$$

бошланғич шартни ва

$$u \Big|_{x=l} = u(0, t) = 0, \quad u \Big|_{x=l} = u(l, t) = 0 \quad (11.21)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $0 < x < l$, $t > 0$ соҳада $u(x, t)$ ечими топилсин. (11.21) чегаравий шартлар бир жинсли бўлганлиги учун Фурье усулини қўллаш мумкин. $u(x, t)$ функциянинг $(0, 0)$ ва $(0, l)$ нуқталарда узлуксиз бўлиши учун $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ бўлиши шарт. Бундан ташқари $\varphi(x)$ функция узлуксиз биринчи тартибли ҳосилга эга бўлсин. (11.19) тенгламанинг ечимини

$$u(x, t) = X(x) T(t) \quad (11.22)$$

кўринишда излаймиз. (11.22) ни (11.19) га қўямиз:

$$X(x) T''(t) = a^2 X''(x) T(t).$$

Бу ердан

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

ёки

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad (11.23)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (11.24)$$

иккита тенгламани ҳосил қиламиз. (11.23) чегаравий шартлардан

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \quad (11.25)$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.

(11.24) — (11.25) масала Штурм — Лиувилл масаласи бўлиб, унинг ечими 10-§ да ўрганилган ва

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (11.26)$$

кўринишда бўлади. λ_k нинг қийматини (10.5) га қўйиб,

$$T'(t) + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 T(t) = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Унинг ечими

$$T(t) = a_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}$$

бўлади. Демак, (11.19) нинг (11.21) ни қаноатлантирувчи ечими

$$u_k(x, t) = a_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (11.27)$$

бўлади. Бошланғич шартни қаноатлантириш учун

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (11.28)$$

қаторни тузамиз. (11.20) га асосан:

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

Агар

$$a_k = \varphi_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \quad (11.29)$$

ва

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin \frac{k\pi x}{l} = \varphi(x)$$

қаторлар абсолют ва текис яқинлашса, бу тенглик ўринли бўлади. (11.29) ни (11.28) га қўйиб масаланинг ечимини топамиз:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (11.30)$$

Бу ечим масаланинг барча шартларини қаноатлантиришини текшириб қўриш қийин эмас.

11.3. Дирехле масаласини доира учун ечиш. $x^2 + y^2 = R^2$ доира берилган бўлиб, унинг айланасида бирор $f(\varphi)$ функция берилган бўлсин (φ — қутб бурчаги).

Лаплас тенгламасини қутб координаталарида ёзамиз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (11.31)$$

Функциянинг доира айланасидаги қиймати берилган:

$$u \Big|_{r=R} = f(\varphi). \quad (11.32)$$

Ечимни

$$u = \Phi(\varphi) \cdot R(r) \quad (11.33)$$

деб фараз қилиб, Фурье усулидан фойдаланамиз. Ҳосилалар олиб, (11.31) тенгламага қўямиз:

$$r^2 \Phi(\varphi) R''(r) + r \Phi(\varphi) R'(r) + \Phi''(\varphi) R(r) = 0.$$

Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = - \frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} = -k^2. \quad (11.34)$$

Бундан иккита тенглама ҳосил бўлади:

$$\Phi''(\varphi) + k^2 \Phi(\varphi) = 0, \quad (11.35)$$

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - k^2 R(r) = 0. \quad (11.36)$$

Биринчи (11.35) тенгламанинг умумий ечими:

$$\Phi(\varphi) = A \cos k\varphi + B \sin k\varphi. \quad (11.37)$$

Иккинчи (11.36) тенгламанинг ечимини $R(r) = r^m$ кўринишда излаймиз. Бу ерда m ни топиш керак. r^m ни (11.36) тенгламага қўйиб, ушбунни ҳосил қиламиз:

$$r^2 m(m-1)r^{m-2} + rmr^{m-1} - k^2 r^m = 0$$

ёки

$$m^2 - k^2 = 0.$$

Бундан $m = \pm k$ экани кўринади. Хусусий ечимлар r^k ва r^{-k} бўлиб, умумий ечим:

$$R = Cr^k + Dr^{-k} \quad (11.38)$$

бўлади. (11.27) ва (11.38) ларни (11.31) формулага қўйсак, ушбу ҳосил бўлади:

$$u_k = (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi)(C_k r^k + D_k r^{-k}), \quad (11.39)$$

Биз доирада узлуксиз ва чекли ечимни излаймиз. $r = 0$ бўлганда (11.39) формулада $D_k = 0$ бўлиши керак. Агар $k = 0$ бўлса, (11.35), (11.36) тенгламалардан:

$$\Phi''(\varphi) = 0, \quad rR''(r) + R'(r) = 0.$$

Буларни интеграллаймиз ва

$$u_0 = (A_0 + B_0\varphi)(C_0 + D_0 \ln r)$$

ни ҳосил қиламиз. u_0 ни (11.39) билан $k = 0$ да солиштириб, $B_0 = 0$, $D_0 = 0$ эканини топамиз. У вақтда $u_0 = \frac{a_0}{2}$ бўлади. Бу ерда $\frac{a_0}{2} = A_0 C_0$ деб белгиладик. $k = 1, 2, \dots, n, \dots$ мусбат қийматлар билан чегараланамиз. Ечимлар йиғиндиси яна ўз навбатида ечим бўлгани учун

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) r^n \quad (11.40)$$

Бу ерда $a_n = \frac{1}{2} C_n \cdot A_n$, $b_n = C_n \cdot B_n$ деб белгилаш киритдик. Энди ихтиёрий a_n ва b_n ўзгармасларни четки (11.32) шартдан топамиз. $r = R$ да (11.40) дан:

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) R^n. \quad (11.41)$$

Бу тенгликдан

$$a_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos n t dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin n t dt \quad (11.42)$$

коэффициентларни аниқлаб, (11.40) га қўямиз ва баъзи тригонометрик алмаштиришни бажариб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos n(t - \varphi) dt \left(\frac{r}{R}\right)^n = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(t - \varphi) \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in(t-\varphi)} + e^{-in(t-\varphi)}}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^n \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r e^{i(t-\varphi)}}{R}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} e^{-i(t-\varphi)}\right)^n \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[1 + \frac{\frac{r}{R} e^{i(t-\varphi)}}{1 - \frac{r}{R} e^{i(t-\varphi)}} + \frac{\frac{r}{R} e^{-i(t-\varphi)}}{1 - \frac{r}{R} e^{-i(t-\varphi)}} \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}{1 - 2 \frac{r}{R} (t - \varphi) + \left(\frac{r}{R}\right)^2} \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{r^2 - R^2}{R^2 - 2Rr \cos(t - \varphi) + r^2} dt. \quad (11.43) \end{aligned}$$

Дирехленинг доира учун қўйилган масаласининг $u(r, \varphi)$ ечими Пуассон интегралига келди. Бу формула (12.31) тенгламани қаноатлантиради ҳамда $r \rightarrow R$ да $u(r, \varphi) \rightarrow f(\varphi)$, яъни ечим бўлади.

11.4. Ўзгарувчиларни ажратишнинг умумий схемаси. Фурье усулининг ғояси қуйидагича: бир нечта ўзгарувчиларга боғлиқ бўлган изланаётган функция ҳар бири алоҳида бир ўзгарувчига боғлиқ бўлган функцияларнинг кўпайтмаси шаклида изланади. Бу кўпайтмани берилган тенгламага қўйиб, бир нечта дифференциал тенгламаларни

ҳосил қиламиз. Булардан баъзилари Штурм — Лиувилл масаласини ташкил қилади.

$$a(t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d(t) \frac{\partial u}{\partial t} + e(x) \frac{\partial u}{\partial x} + [f_1(t) + f_2(x)] u = 0 \quad (11.44)$$

кўринишдаги гиперболик турдаги тенгламани кўрайлик. Бу a, c, d, e, f_1, f_2 коэффициентлар $0 \leq x \leq 1$ ва $0 \leq t \leq T$ соҳада узлуксиз функциялар бўлиб,

$$a(t) > a_0 > 0, \quad c(x) < c_0 < 0.$$

Берилган соҳада узлуксиз бўлиб (11.44) ни ва

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_2(x) \quad (11.45)$$

бошланғич шартларни ҳамда

$$\begin{aligned} \alpha_1 u(0, t) + \alpha_2 \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= 0, \\ \beta_1 u(l, t) + \beta_2 \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} &= 0, \\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 &\neq 0, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0 \end{aligned} \quad (11.46)$$

бир жинсли чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $u(x, t)$ ечимни топайлик.

Аввало, олдинги параграфда кўрганимиздек, (11.44) нинг нолдан фарқли ечимини

$$u(x, t) = T(t) X(x) \quad (11.47)$$

кўрнишда излаймиз ва бу ечим (11.46) шартларни қаноатлантиришини талаб қиламиз:

$$a(t) T''(t) X(x) + c(x) T(t) X''(x) + d(t) T'(t) X(x) + e(x) T(t) X'(x) + [f_1(t) + f_2(x)] T(t) X(x) = 0$$

ёки

$$\frac{a(t) T''(t) + d(t) T'(t) + f_1(t) T(t)}{T(t)} = - \frac{c(x) X''(x) + e(x) X'(x) + f_2(x) X(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Бу ердан

$$a(t) T''(t) + d(t) T'(t) + [f_1(t) + \lambda] T(t) = 0, \quad (11.48)$$

$$c(x) X''(x) + e(x) X'(x) + [f_2(x) + \lambda] X(x) = 0 \quad (11.49)$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз $T(t) \neq 0$ бўлганлиги учун (11.47) ни (11.46) га қўйиб, $T(t)$ га қисқартирсак, чегаравий шарт

$$\begin{aligned} \alpha_1 X(0) + \alpha_2 X'(0) &= 0, \\ \beta_1 X(l) + \beta_2 X'(l) &= 0 \end{aligned} \quad (11.50)$$

кўринишда бўлади. (11. 49) нинг (11. 50) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи нолдан фарқли ечимини топиш Штурм — Лиувилл масаласидир. Бу масала олдинги параграфда қаралган. Шунинг учун хос қийматлар ва хос функциялар аниқланган, деб фараз қиламиз. Бу ҳолда (11.48)

$$a_k(t) T''(t) + d(t) T'(t) + [f_{1k}(t) + \lambda_k] T(t) = 0 \quad (11. 51)$$

кўринишга келади. Бу тенгламанинг умумий ечими $T_k(t)$ иккита чиқиқли боғлиқ бўлмаган $T_k^{(1)}(t)$ ва $T_k^{(2)}(t)$ хусусий ечимларнинг чиқиқли комбинациясидан иборат бўлади ёки

$$T_k(t) = C_1^{(k)} T_k^{(1)}(t) + C_2^{(k)} T_k^{(2)}(t). \quad (11. 52)$$

$C_1^{(k)}$ ва $C_2^{(k)}$ лар ихтиёрий ўзгармаслар. Уларни шундай танлаймизки, $t = 0$ да

$$T_k^{(1)}(0) = 1, T_k^{(1)}(0) = 0, T_k^{(2)}(0) = 0, T_k^{(2)'}(0) = 1. \quad (11. 53)$$

Шундай қилиб, (11. 44) нинг (11. 46) ни қаноатлантирувчи ечими

$$u_k(x, t) = [C_1^{(k)} T_k^{(1)}(t) + C_2^{(k)} T_k^{(2)}(t)] X_k(x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (11. 54)$$

кўринишда бўлади. (11. 45) бошланғич шартларни қаноатлантириши учун ечимни

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} [C_1^{(k)} T_k^{(1)}(t) + C_2^{(k)} T_k^{(2)}(t)] X_k(x) \quad (11. 55)$$

кўринишдагн қатор орқали ифодалаймиз. (11. 55) ни (11. 45) га қўйиб, (11. 53) ни ҳисобга олсак,

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x) = \varphi_1(x), \quad (11. 56)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k X_k(x) = \varphi_2(x) \quad (11. 57)$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. Бу ерда

$$A_k = C_1^{(k)} T_k^{(1)'}(0) + C_2^{(k)} T_k^{(2)'}(0), \quad B_k = C_1^{(k)} T_k^{(1)}(0) + C_2^{(k)} T_k^{(2)}(0). \quad (11. 58)$$

(11. 56) ва (11. 57) қаторларни текис яқинлашади 'дэб фэрэз қилиб, A_k ва B_k коэффициентларни аниқлаш мумкин. Тенгликларнинг иккала томонини $\rho(x) \cdot X(x)$ га кўпайтириб, 0 дан 1 гача интегралласак ва (10. 10), (10. 12) ларни ҳисобга олсак,

$$A_k = \int_0^1 \rho(x) \varphi_1(x) \varphi_1(x) X_k(x) dx, \quad B_k = \int_0^1 \rho(x) \varphi_2(x) X_k(x) dx$$

бўлади. Бу қийматларни (11.58) га қўйиб $C_1^{(k)}$ ва $C_2^{(k)}$ ларни аниқлаймиз.

Фурье усулини ўзгарувчилар сони бир нечта бўлганда ҳам қўллаш мумкин.

12- §. Штурм — Лиувилл масаласининг хос функциялари системасининг тўлалиги ва ёпиқлиги. Ёйиш ҳақидаги теорема. Ўртача яқинлашиш

Хос функцияларнинг чексиз (улар ичида айнан нолга тенг бўлган функциялар йўқ)

$$X_1(x), X_2(x), \dots, X_m(x), \dots, X_n(x), \dots \quad (12.1)$$

кетма-кетлиги берилган бўлсин. Бу кетма-кетлик берилган ораликда узлуксиз ёки чекли сондаги биринчи тур узилиш нуқталарига эга бўлган $f(x)$ функция мавжуд бўлсин. $X_n(x)$ функцияларнинг ихтиёрий C_n коэффициентларда

$$S_n(x) = C_1 X_1(x) + \dots + C_n X_n(x) = \sum_{m=1}^n C_m X_m(x) \quad (12.2)$$

чиқиқли комбинациялардан шундай топилсинки, у $f(x)$ функцияга ўрта квадратик четланишда яқинлашсин ёки

$$\delta_n = \int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2 dx$$

катталики энг кичик қийматга эга бўлсин. (12.2) дан

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) - \sum_{m=1}^n C_m X_m(x)]^2 dx &= \int_a^b [f(x)]^2 dx - 2 \sum_{m=1}^n C_m \times \\ &\times \int_a^b f(x) X_m(x) dx + \sum_{m=1}^n C_m^2 \int_a^b X_m^2(x) dx, \\ \int_a^b X_m^2(x) dx &= \lambda_m, \quad c_m = \frac{1}{\lambda_m} \int_a^b f(x) X_m(x) dx \end{aligned}$$

деб белгиласак,

$$\delta_n = \int_a^b [f(x)]^2 dx - 2 \sum_{m=1}^n \lambda_m c_m C_m + \sum_{m=1}^n \lambda_m C_m^2$$

бу ерда охирги икки ифодани тўла квадратга тўлдирсак,

$$\delta_n = \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{m=1}^n \lambda_m C_m^2 + \sum_{m=1}^n \lambda_m (C_m - c_m)^2$$

бўлади, бундан кўринадики, σ_n ифода $C_m = c_m$ бўлганда энг кичик қийматга эга бўлади. Демак,

$$\delta_n = \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{m=1}^n \lambda_m C_m^2 = \int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2 dx. \quad (12.3)$$

Бу тенглик *Бессель тенглиги* дейилади. (14.3) дан $n \rightarrow \infty$ да

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m C_m^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \quad (12.4)$$

тенгсизлигини ҳосил қиламиз. Бу тенгсизлик *Бессель тенгсизлиги* дейилади. (12.3) дан кўринадики, $S_n(x)$ функциянинг $f(x)$ функцияга ўртача яқинлашиш учун

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m C_m^2 = \int_a^b f^2(x) dx \quad (12.5)$$

тенглик бажарилиши керак. Бу тенглик ҳар бир узлуксиз $f(x)$ функция учун бажарилса, (12.1) система *ёпиқ* дейилади.

Агар $[a, b]$ соҳада нолдан фарқли функциялар мавжуд бўлиб, (12.1) система функцияларига ортогонал бўлса, у ҳолда бу система *тўла* дейилади.

Умуман, (12.1) системанинг тўлалик ва ёпиқлик тушунчалари тенг кучли маънога эга.

Стеклов теоремаси. $[a, b]$ кесмада иккинчи тартибга-ча ҳосилалари билан бирга узлуксиз бўлган ихтиёрий $F(x)$ функция (11.50) шартларни қаноатлантирса, (12.1) система бўйича Фурье қаторига ёйилади ва бу қатор текис ва абсолют яқинлашади:

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k X_k(x). \quad (12.6)$$

Исбот. Бу қатор текис яқинлашувчи бўлсин. C_k коэффициентларни аниқлаш учун унинг иккала томонини $\rho(x) \cdot X_i(x)$ (i —ихтиёрий номер) ифодага кўпайтириб, натижани $[a, b]$ кесма бўйича интеграллаймиз. Текис яқинлашувчи қаторни ҳадлаб интеграллаш мумкин бўлганлигидан

$$\int_a^b \rho(x) F(x) X_l(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \int_a^b \rho(x) X_k(x) X_l(x) dx \quad (12.7)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. (10.11) га асосан уннг томонда фақат $k = l$ бўлган ҳадлар қолади. Шунинг учун

$$C_k = F_k = \frac{\int_a^b \rho(x) F(x) X_k(x) dx}{\int_a^b \rho(x) X_k^2(x) dx} \quad (12.8)$$

бўлади. Демак,

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k X_k(x), \quad (12.9)$$

у ерда F_k — Фурье коэффициентлари.

13-§. Бессель тенгламаси. Бессель функциялари ва уларнинг асосий хоссалари. Асимптотикалар

Математик физиканинг кўп масалаларни ечишда

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - v^2) y = 0, \quad (v = \text{const}) \quad (13.1)$$

кўринишдаги чизиқли дифференциал тенгламаларга келинади. Бу тенглама *Бессель тенгламаси* дейилади. (13.1) тенглама $x = 0$ да махсус нуқтага эга. Шунинг учун тенгламанинг ечимини

$$y = x^p (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) \quad (a_0 \neq 0) \quad (13.2)$$

даражали қатор кўринишида излаймиз. (13.2) ни (13.1) га қўйиб, p кўрсаткични ва a_k ($k = 1, 2, \dots$) ларни аниқлаймиз:

$$y' = px^{p-1} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) + x^p (a_1 + 2a_2 x + \dots)$$

$$y'' = p(p-1)x^{p-2} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) + px^{p-1} (a_1 + 2a_2 x + \dots) + \dots + px^{p-1} (a_1 + 2a_2 x + \dots) + x^p (2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \dots).$$

x нинг бир хил даражаларни олдидаги коэффициентларни тенглаштираемиз:

$$\begin{aligned} p^2 - v^2 &= 0, \\ [(p+1)^2 - v^2] a_1 &= 0, \\ [(p+2)^2 - v^2] a_2 + a_0 &= 0, \\ [(p+3)^2 - (2+v^2)] a_3 + a_1 &= 0, \\ \dots \\ [(\dot{p} + \dot{k})^2 - v^2] \dot{a}_k + \dot{a}_{k-2} &= 0. \end{aligned}$$

Биринчи тенгламадан $p_1 = v$ ва $p_2 = -v$ ларни аниқлаймиз. $p_1 = v$ дан

$$a_1 = 0, \quad a_3 = -\frac{a_0}{2(2v-2)}, \quad \dots$$

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2v+k)} \quad (k = 2, 3, 4, \dots)$$

$$a_{2k+1} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Жуфт индексли коэффициентларни қуйидагича аниқлаш мумкин:

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(v+1) \cdot 1!}, \quad a_4 = -\frac{a_2}{2^4(v+1)(v+2) \cdot 2!}, \quad \dots, \quad (13.3)$$

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k}(v+1) \dots (v+k) \cdot k!} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

a_0 коэффициент ихтиёрий бўлганлиги учун уни

$$a_0 = \frac{1}{2^v \Gamma(v+1)} \quad (13.4)$$

($\Gamma(v+1)$ — гамма — функция) кўринишда танлаймиз. Бу ерда

$$\Gamma(v+1) = v\Gamma(v) = v \int_0^\infty e^{-x} x^{v-1} dx, \quad \Gamma(n+1) = n!. \quad (13.5)$$

(13.3), (13.4) ва (13.5) тенгликлардан:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+v} \Gamma(k+v+1) \Gamma(k+1)}$$

a_{2k+1} ва a_{2k} коэффициентлар қийматларини (13.2) қаторга қўйиб, (13.1) нинг ечимини ҳосил қиламиз. Бу ечим v -тартибли 1 тур Бессель функциялари дейилади ва $J_v(x)$ орқали белгиланади

$$J_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-v}}{\Gamma(k+1) \Gamma(k+v+1)}, \quad (13.6)$$

$p_2 = -v$ қиймат учун

$$J_{-v}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-v}}{\Gamma(k+1) + \Gamma(k-v+1)} \quad (13.7)$$

бўлади. $J_v(x)$ ва $J_{-v}(x)$ хусусий ечимлар чизиқли боғлиқ бўлмаганлиги учун умумий ечим

$$J = C_1 J_v(x) + C_2 J_{-v}(x) \quad (13.8)$$

кўринишда бўлади.

Агар $\nu = n$ (n — бутун сон) бўлса,

$$J_{-\nu}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

бўлиб, функциялар чизикли боғлиқ бўлади ва (13.1) нинг умумий ечимини топиш мумкин эмас. Бу ҳолда тенгламанинг хусусий ечими тартиқсида $J_\nu(x)$ функция билан чизикли бўлмаган

$$N_n(x) = \lim_{\lambda \rightarrow n} N_\nu(x) = \lim_{\lambda \rightarrow n} \frac{J_\nu(x) \cos \lambda \pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu \pi}$$

функция олинади. $N_\nu(x)$ функция *Нейман функцияси* дейилади ва умумий ечим

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 N_\nu(x)$$

кўринишда бўлади.

Бессель функцияларининг қуйидаги хоссаларини кўрамиз: 1) Бессель функциялари учун

$$\pm \frac{dR_\nu(x)}{dx} = R_{\nu \mp 1}(x) - \frac{\nu}{x} R_\nu(x), \quad (13.9)$$

$$R_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} R_\nu(x) - R_{\nu-1}(x) \quad (13.10)$$

рекурент муносабатлар ўринли. Бу ерда $R_\nu(x)$ — исталган Бессель функциясини ифодалайди.

2) (13.6) ва (13.7) дан

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \quad (13.11)$$

асимптотик формулалар келиб чиқади. Умуман

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-1}) \right].$$

3) Ушбу

$$x^2 y'' + xy' + (k^2 x^2 - \nu^2) y = 0 \quad (13.12)$$

тенгламанинг ечими $y = J_\nu(kx)$ кўринишда ифодаланади. Бу ечим $p(x) = x$ вазн билан $[0, 1]$ ораликда ортогоналлик хусусиятга эга ёки

$$\int_0^1 x J_\nu\left(\frac{\mu_i}{l}x\right) J_\nu\left(\frac{\mu_j}{l}x\right) dx = 0, \quad i \neq j. \quad (13.13)$$

μ_i ва μ_j лар $J_\nu(x) = 0$ тенгламанинг мусбат илдиэлари. Агар $i = j$ бўлса, (13.13) нинг ўнг томони

$$\frac{i^n}{2} J_{\nu+1}^2(\mu_i) \quad (\nu > -1)$$

бўлади.

14- §. Ханкел функциялари ва уларнинг асосий хассалари. Ейилма тўғрисидаги теорема

(13. 1) тенгламанинг $J_\nu(x)$ ва $N_\nu(x)$ функциялардан тузилган

$$H_\nu^{(1)} = J_\nu(x) + i N_\nu(x), \quad H_\nu^{(2)} = J_\nu(x) - i N_\nu(x) \quad (14. 1)$$

чизиқли комбинациялари ҳам унинг хусусий ечимлари бўлади. Бу функциялар Ханкел функциялари дейилади.

Ханкел функцияларини биринчи тур цилиндрик функциялар (Бессел функциялари) орқали қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\left. \begin{aligned} H_\nu^{(1)} &= J_\nu(x) + i \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} = \frac{J_{-\nu}(x) - e^{-i\nu\pi} J_\nu(x)}{i \sin \nu\pi} \\ H_\nu^{(2)} &= J_\nu(x) - i \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} = \frac{-J_{-\nu}(x) + e^{i\nu\pi} J_\nu(x)}{i \sin \nu\pi} \end{aligned} \right\} (14.2)$$

Бу формулалар ν бутун сон бўлмаган ҳоллардагина ўринлидир; ν бутун сон, яъни $\nu = n$ бўлса, бу муносабатларнинг ўнг томони $\frac{0}{0}$ шаклдаги аниқмасликка айланади. $\nu \rightarrow n$ деб, Лопитал қондасидан фойдаланиб лимитга ўтсак,

$$\left. \begin{aligned} H_n^{(1)}(x) &= J_n(x) + \frac{i}{\pi} \left\{ \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} - (-1)^n \left[\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} \right\} \\ H_n^{(2)}(x) &= J_n(x) - \frac{i}{\pi} \left\{ \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} - (-1)^n \left[\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} \right\} \end{aligned} \right\}$$

ларга эга бўламиз.

ν бутун соннинг ярмига тенг бўлган ҳолларда Ханкел функциялари элементар функциялар орқали ифодаланади, хусусан:

$$\begin{aligned} H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \frac{e^{ix}}{i}, \\ H_{-\frac{1}{2}}^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{ix}, \\ H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(x) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \frac{e^{-ix}}{i}, \\ H_{-\frac{1}{2}}^{(2)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-ix}. \end{aligned}$$

Агар (14. 2) да v ни $-v$ га алмаштирсак (v — ихтиёрӣ),

$$\left. \begin{aligned} H_{-v}^{(1)}(x) &= \frac{J_v(x) - e^{iv\pi} J_{-v}(x)}{-i \sin v\pi} = e^{iv\pi} \frac{J_{-v}(x) - e^{-iv\pi} J_v(x)}{i \sin v\pi} \\ H_{-v}^{(2)}(x) &= \frac{-J_v(x) + e^{-iv\pi} J_{-v}(x)}{-i \sin v\pi} = e^{-iv\pi} \frac{-J_{-v}(x) + e^{iv\pi} J_v(x)}{i \sin v\pi} \end{aligned} \right\}$$

ларга ёки

$$H_{-v}^{(1)}(x) = e^{iv\pi} H_v^{(1)}(x);$$

$$H_{-v}^{(2)}(x) = e^{-iv\pi} H_v^{(2)}(x)$$

ларга эга бўламиз. Агар $v = n$ бўлса,

$$H_{-n}^{(1), (2)}(x) = (-1)^n H_n^{(1), (2)}(x).$$

Ханкел функцияларини аннқлайдиган (14. 1) чизиқли комбинациялардан

$$\cos vx = \frac{e^{ivx} + e^{-ivx}}{2},$$

$$\sin vx = \frac{e^{ivx} - e^{-ivx}}{2i}.$$

Эйлер формулаларига ўхшаш ушбу

$$J_v(x) = \frac{H_v^{(1)}(x) + H_v^{(2)}(x)}{2},$$

$$N_v(x) = \frac{H_v^{(1)}(x) - H_v^{(2)}(x)}{2i}$$

тенгликларни келтириб чиқариш мумкин.

Ханкел функциялари ҳам Бессель функциялари каби хоссаларга эга:

$$\left. \begin{aligned} 1) \frac{dH_v^{(1), (2)}(x)}{dx} &= -H_{v+1}^{(1), (2)}(x) + \frac{v}{x} H_v^{(1), (2)}(x), \\ \frac{dH_v^{(1), (2)}(x)}{dx} &= H_{v-1}^{(1), (2)}(x) - \frac{v}{x} H_v^{(1), (2)}(x), \end{aligned} \right\} \quad (14.3)$$

$$\left. \begin{aligned} H_{v+1}^{(1), (2)}(x) &= \frac{2v}{x} H_v^{(1), (2)}(x) - H_{v-1}^{(1), (2)}(x), \\ 2 \frac{dH_v^{(1), (2)}(x)}{dx} &= H_{v-1} - (x) H_{v+1}(x). \end{aligned} \right\} \quad (14. 4)$$

(14. 3) формулада $v = 0$ деб олсак,

$$H'_0(x) = -H_1(x)$$

бўлади.

2) Ханкел функциялари қуйндаги кўринишдаги асимптотик формулаларга эга:

$$H_v^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i \left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)} [1 + O(x^{-1})],$$

$$H_v^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i \left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)} [1 + O(x^{-1})],$$

$$H_v^{(1)}(ix) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-x} e^{-\frac{\nu\pi i}{2} - \frac{\pi i}{4}} [1 + O(x^{-1})],$$

$$H_v^{(2)}(ix) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^x e^{\frac{\nu\pi i}{2} + \frac{\pi i}{4}} [1 + O(x^{-1})].$$

Энди ихтиёрий $f(x)$ функциянинг Бессель функциялари орқали қаторга ёйилишини кўрайлик. Бу функцияни $(0, l)$ оралиқда текис қяқинлашувчи

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_v \left(\frac{k_n}{l} x \right) \quad (14.5)$$

қатор кўринишида ифодалаш мумкин бўлсин. Бу ерда $0 < k_1 < k_2 < \dots < k_n \dots$ лар $J_v(x)$ функциянинг илдизлари, $\nu > -1$ ҳақиқий сонлар.

(14.5) ни $x J_v \left(\frac{k_m}{l} x \right)$ га кўпайтирамиз, бу ерда m бирор бутун сон. Ҳосил бўлган кўпайтмани 0 дан l гача интеграллаймиз:

$$\int_0^l x f(x) J_v \left(\frac{k_m}{l} x \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^l x J_v \left(\frac{k_n}{l} x \right) J_v \left(\frac{k_m}{l} x \right) dx$$

ёки (13.13) ни ва $\int_0^l x J_v^2 \left(\frac{k}{l} x \right) dx = \frac{l^2}{2} J_{\nu+1}^2(k)$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$\int_0^l x f(x) J_v \left(\frac{k_m}{l} x \right) dx = C_m \int_0^l x J_v^2 \left(\frac{k_m}{l} x \right) dx = C_m \frac{l^2}{2} J_{\nu+1}^2(k_m)$$

га эга бўламиз. Бу ердан

$$C_m = \frac{2}{l^2 J_{\nu+1}^2(k_m)} \int_0^l x f(x) J_v \left(\frac{k_m}{l} x \right) dx, \quad (m=1, 2, \dots) \quad (14.6)$$

Бу формула билан *Фурье — Бессель қатори* деб аталувчи (14.5) қаторнинг барча коэффицентлари аниқланади.

Функцияни Фурье-Бессель қаторига ёйилиш шартини аниқловчи теоремани исботсиз келтирамиз: агар

$$\int_0^l t^{\frac{1}{2}} |f(t)| dt$$

интеграл мавжуд бўлиб, бўлакли узлуксиз $f(x)$ функция $0 < a < b < l$ шартни қаноатлантирувчи (a, b) оралиқда ўзгариши чегараланган функция бўлса, у ҳолда Фурье—Бессель қатори яқинлашувчи бўлиб, $\frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)]$ йиғиндига эга бўлади, яъни қатор $f(x)$ функцияни унинг барча узлуксиз нуқталарида ифодалайди.

Агар $f(x)$ функция (a, b) оралиқни $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ нуқталар билан ихтиёрий равишда бўлақларга бўлганда

$$\sum_{m=1}^n |f(x_m) - f(x_{m-1})|$$

йиғинди x_m ($0 < m < n$) нуқта ихтиёрий танланганда n га боғлиқ бўлмаган M аниқ юқори чегарага эга бўлса, у ҳолда бу функция (a, b) оралиқда ўзгариши чегараланган функция деб аталади.

15-§. Цилиндрик соҳада тўлқин тенгламаси.

Аралаш масаланинг ечими

Цилиндрик (r, φ, z) координаталар системасида тўлқин тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (15.1)$$

кўринишда бўлади, бундай тенгламаларга доиравий мембрананинг тебраниши, чексиз қувурда газнинг радиал тебраниши ва ҳоказо масалалар келади. Шулардан амалиётда кўп учрайдиган радиуси l бўлган айлана чегараси бўйича маҳкамланган мембрананинг тебранишини кўрайлик. Бу масала:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (15.2)$$

тенгламанинг

$$u|_{r=l} = 0 \quad (15.3)$$

чегаравий шартни ва

$$u|_{t=0} = \varphi(r, \varphi), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(r, \varphi) \quad (15.4)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $u(r, \varphi, t)$ ечимини топиш масаласидир.

Ечимни Фурье усули бўйича

$$u(r, \varphi, t) = T(t)v(r, \varphi) \quad (15.5)$$

кўринишда излаймиз. (17.5) ни (17.2) га қўйиб

$$T''(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0, \quad (15.6)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda^2 v = 0. \quad (15.7)$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз. (15.6) нинг умумий ечими

$$T(t) = C_1 \cos a \lambda t + C_2 \sin a \lambda t \quad (15.8)$$

кўринишда бўлади. (15.7) ни ечимни $v|_{r=l} = 0$ чегаравий шартни қаноатлантирувчи хос функцияларни топиш масаласига келтирдик. v функция $r = 0$ нуқтада чегараланган бўлиб, даври 2π бўлган функциядир. Масаланинг ечимини

$$v(r, \varphi) = R(r) \Phi(\varphi) \quad (15.9)$$

кўринишда излаймиз. (15.9) ни (15.7) га қўйиб

$$\Phi''(\varphi) + p^2 \Phi(\varphi) = 0, \quad (15.10)$$

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi), \quad \Phi'(\varphi) = \Phi'(\varphi + 2\pi), \quad (16.11)$$

$$R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) + \left(\lambda^2 - \frac{p^2}{r^2} \right) R = 0, \quad (15.12)$$

$$[R(l) = 0, \quad (15.13)$$

$R(0)$ — чекли катталиқ, тенгламаларни ҳосил қиламиз. (15.10) — (15.11) масаланинг нолдан фарқли даврий бўлган ечими $p = n$ бўлганда мавжуддир.

(15.12) нинг умумий ечими $p = n$ бўлганда

$$R_n(r) = D_n J_n(\lambda r) + E_n N_n(\lambda r)$$

кўринишда бўлади. (15.13) шартга асосан

$$J_n(\lambda l) = 0 \text{ ёки } J_n(\mu) = 0 \quad (15.14)$$

тенглама чексиз кўп

$$\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \dots$$

ечимларга эга. Бу ҳолда $\lambda_{nm} = \frac{\mu_m^{(n)}}{l}$ ($m = 1, 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots$). Бу хос қийматга

$$R_{nm}(r) = J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l} r \right).$$

хос функциялар мос келади. Шунинг учун (15.9) га асосан

$$v_{n,m}(r, \varphi) = J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l} r \right) [A_{n,m} \cos n \varphi + B_{n,m} \sin n \varphi].$$

ечимни ҳосил қиламиз. Демак,

$$u_{nm}(r, \varphi, t) = \left[C_{nm} \cos \frac{\mu_m^{(n)} a}{l} t + C_{2nm} \sin \frac{\mu_m^{(n)} a}{l} t \right] \times$$

$$\propto [A_{n,m} \cos n \varphi + B_{n,m} \sin n \varphi] J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l} r \right).$$

(15.4) бошлангич шартларни қаноатлантириши учун қуйидаги қаторни тузамиз:

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[(A_{n,m}^{(1)} \cos \frac{\mu_m^{(n)} a}{l} t + A_{n,m}^{(2)} \sin \frac{\mu_m^{(n)} a}{l} t) \cos n \varphi + \right. \\ \left. + (B_{n,m}^{(1)} \cos \frac{\mu_m^{(n)} a}{l} t + B_{n,m}^{(2)} \sin \frac{\mu_m^{(n)} a}{l} t) \sin n \varphi J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l} r \right) \right]. \quad (15.15)$$

(15.4) бошлангич шартлардан, (13.23), (14.2) дан фойдаланиб, умумий ечимни ёзамиз:

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} M_{nm} J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l} r \right) \sin(n\varphi + \psi_{nm}) \sin \left(\frac{\mu_m^{(n)} a t}{l} + \right. \\ \left. + \psi_{nm} \right).$$

Бу ерда M_{nm} , ψ_{nm} , ν_{nm} лар $A_{n,m}^{(1)}$, $A_{n,m}^{(2)}$, $B_{n,m}^{(1)}$, $B_{n,m}^{(2)}$ коэффициентлар орқали ифодаланади.

Б. АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР

1-§. Биринчи тартибли икки ўзгарувчи хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар

Ушбу параграфда биринчи тартибли икки ўзгарувчи хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимларини топишга доир мисоллар қаралади.

1-мисол. $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$ тенгламани қаноатлантирувчи $z = z(x, y)$ функцияни топинг.

Ечиш. Берилган тенгламани интеграллаймиз ва

$$z = x + \varphi(y)$$

функцияга эга бўламиз, бу ерда $\varphi(y)$ — ихтиёрий функция. Ҳақиқатан ҳам топилган $z(x, y)$ функция берилган тенгламани қаноатлантирувчи функциядир.

2-мисол.

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

тенгламанинг умумий интегралини топинг.

Ечиш.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

системани қараймиз.

$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ тенгламани ечиб, $\frac{y}{x} = C_1$ га эга бўламиз. $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z}$ тенгламани ечиб, $\frac{z}{x} = C_2$ га эга бўламиз. Шунинг учун

$$\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0 \text{ ёки } \frac{z}{x} = \Psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

тенгламанинг умумий интегралидир. Бу ерда Φ ва Ψ ихтиёрий функциялар.

3-мисол. $(x^2 + y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ тенгламанинг умумий интегрални топинг.

Ечиш. Қуйидаги системани қараймиз:

$$\frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{0}.$$

Пропорциянинг хоссасидан фойдаланиб, $\frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{dy}{2xy}$ тенгламани

$$\frac{dx + dy}{x^2 + y^2 + 2xy} = \frac{dx - dy}{x^2 + y^2 - 2xy}$$

ёки

$$\frac{d(x + y)}{(x + y)^2} = \frac{d(x - y)}{(x - y)^2}.$$

қўринишда ёзиб оламиз.

Юқоридаги тенгламани интеграллаб,

$$-\frac{1}{x + y} = -\frac{1}{x - y} + C, \quad \frac{1}{x - y} - \frac{1}{x + y} = C$$

тенгликка эга бўламиз. Бу тенгликдан

$$\frac{2y}{x^2 - y^2} = C \text{ ёки } \frac{y}{x^2 - y^2} = C_1$$

эканлини топамиз.

Системанинг иккинчи тенгламасидан $dz = 0$ ёки $z = C_2$ экани келиб чиқади. Шунинг учун умумий интеграл

$$\Phi\left(\frac{y}{x^2 - y^2}, z\right) = 0 \text{ ёки } z = \Psi\left(\frac{y}{x^2 - y^2}\right)$$

қўринишда бўлади. Юқоридагидек Φ ва Ψ — ихтиёрий функциялар.

1-дарсхона топшириқлари

Қуйидаги биринчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг умумий интегралларини топинг:

$$1. \quad yz \frac{\partial z}{\partial x} + xz \frac{\partial z}{\partial y} = -2xy.$$

$$\text{Ж: } x^2 + \frac{z^2}{2} = \psi(x^2 - y^2).$$

$$2. \frac{\partial z}{\partial x} \sin x + \frac{\partial z}{\partial y} \sin y = \sin z.$$

$$\text{Ж: } \operatorname{tg} \left(\frac{z}{2} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) \cdot \Psi \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{y}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right).$$

1-мустақил иш топшириқлари

Қуйидаги биринчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг умумий интегралларини топинг:

$$1. yz \frac{\partial z}{\partial x} + xz \frac{\partial z}{\partial y} = xy.$$

$$\text{Ж: } z^2 = x^2 + \psi(y^2 - x^2).$$

$$2. y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

$$\text{Ж: } z = \psi(x^2 + y^2).$$

2-§. Икки ўзгарувчили иккинчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни каноник кўринишга келтириш. Характеристик тенглама

Икки ўзгарувчили иккинчи тартибли хусусий ҳосилали ушбу

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

тенгламани каноник шаклга келтириш учун

$$A dy - (B + \sqrt{B^2 - AC}) dx = 0,$$

$$A dy - (B - \sqrt{B^2 - AC}) dx = 0$$

тенгламаларга ажралувчи

$$A(dy)^2 - 2Bdx dy + C(dx)^2 = 0$$

характеристик тенглама тузилиб, уларнинг умумий интеграллари топилади.

1-мисол. Ушбу $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ тенгламани каноник кўринишга келтиринг.

Ечиш. $A = x^2$, $B = 0$, $C = -y^2$, $\Delta = B^2 - AC = x^2 y^2 > 0$. Демак, бу гиперболик тенгламадир.

Характеристик тенгламани тузамиз:

$$x^2(dy)^2 - y^2(dx)^2 = 0$$

ёки

$$(xdy + ydx)(xdy - ydx) = 0.$$

Бу қуйидаги дифференциал тенгламаларга ажралади:

$$\begin{aligned} xdy + ydx &= 0, \\ xdy - ydx &= 0 \end{aligned}$$

Буларни интеграллаб, $xy = C_1$, $\frac{y}{x} = C_2$ тенгликларга келамиз. Берилган тенгламани каноник кўринишга келтириш учун $\xi = xy$ ва $\eta = \frac{y}{x}$ янги ўзгарувчиларни киритамиз. Улардан фойдаланиб, тегишли ҳосилаларини топамиз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} y - \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{y^2}{x^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} x + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{1}{x}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} y^2 - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{y^2}{x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{y^2}{x^4} + 2 \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{y}{x^3}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \end{aligned}$$

Юқоридагиларни берилган тенгламага қўйиб, соддалаштирсак

$$-4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} y^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{y}{x} = 0$$

ёки

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{1}{xy} = 0$$

ёки

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

каноник кўринишга эга бўламиз.

$$2\text{-мисол. } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \sin^2 x - 2y \sin x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

тенгламани каноник кўринишга келтиринг.

Ечиш. $A = \sin^2 x$, $B = -y \sin x$, $C = y^2$ бўлгани учун

$$\Delta = B^2 - AC = y^2 \sin^2 x - y^2 \sin^2 x = 0.$$

Демак, юқоридаги тенглама параболик тенгламадир.

$$\sin^2 x (dy)^2 + 2y \sin x dx dy + y^2 (dx)^2 = 0$$

ёки

$$(\sin x dy + y dx)^2 = 0$$

берилган тенгламанинг характеристик тенгламасидир.
 $\sin x dy + y dx = 0$ тенгламани интеграллаб,

$$\ln y + \int \frac{x}{2} = \ln C \text{ ёки } ytg \frac{x}{2} = C$$

ни ҳосил қиламиз.

Берилган тенгламани каноник шаклга келтириш учун

$$\left. \begin{aligned} \xi &= y \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \\ \eta &= y \end{aligned} \right\}$$

алмаштиришлардан фойдаланиб, тегишли ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial \xi} y \sec^2 \frac{x}{2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{\partial z}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} y^2 \sec^4 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} y \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \sec^2 \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \right) y \sec^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \sec^2 \frac{x}{2}.$$

Топилган хусусий ҳосилаларни тенгламага қўйиб,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial \xi} y \sec^2 \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \sin^2 x + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} - \frac{\partial z}{\partial \xi} y \sec^2 \frac{x}{2} \sin x = 0$$

ёки

$$y \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \sin x$$

тенгликка эга бўламиз.

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\xi}{\eta}.$$

бўлганини эътиборга олсак, тенглама

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = \frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2} \frac{\partial z}{\partial \xi}$$

шаклдаги каноник кўринишга келади.】

3-мисол.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

тенгламани каноник кўринишга келтиринг.

Ечиш. $A = 1$, $B = -1$, $C = 2$, $\Delta = B^2 - AC = 1 - 1 \cdot 2 = -1 < 0$ бўлгани учун юқоридаги тенглама эллиптик тенгламадир.

Энди характеристик тенгламани тузамиз:

$$(dy)^2 + 2dx dy + 2(dx)^2 = 0,$$

бундан $(y')^2 + 2y' + 2 = 0$ ёки $y' = -1 \pm i$ ни ҳосил қиламиз. Демак,

$$\begin{cases} y + x - ix = C_1, \\ y + x + ix = C_2 \end{cases}$$

характеристеристик тенгламаларга эга бўламиз. Ушбу

$$\begin{aligned} \xi &= y + x, \\ \eta &= x \end{aligned}$$

янги ўзгарувчиларни киритамиз. Булардан фойдаланиб хусусий ҳосилларни топамиз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}. \end{aligned}$$

Буларни берилган тенгламага қўйиб соддалаштирсак, тенглама

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0$$

каноник кўринишга келади.

2-дарсхона топшириқлари

Қуйидаги тенгламаларни каноник кўринишга келтиринг:

$$1. \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$\text{Ж: } \xi = \frac{y}{x}, \quad \eta = y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0.$$

$$2. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} + 6 \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

$$\text{Ж: } \xi = x + y, \quad \eta = 3x + y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} = 0.$$

$$3. \quad \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$\text{Ж: } \xi = y^2; \quad \eta = x^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) = 0.$$

2-мустақил иш топшириқлари

Қуйидаги тенгламаларни каноник кўринишга келтиринг:

$$1. \quad (1 + x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$\text{Ж: } \xi = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}), \quad \eta = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

$$2. \sin^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$\mathcal{K}: \xi = y \lg \frac{x}{2}, \eta = y, \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

$$3. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (3 + \sin^2 x) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$\mathcal{K}: \xi = 2x + \sin x + y,$$

$$\eta = 2x - \sin x - y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\eta - \xi}{32} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0.$$

3- §. Бир жинсли тўлқин тенгламаси учун Коши масаласини Даламбер формуласи билан ечиш

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

бир жинсли тўлқин тенгламасининг

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини (Коши масаласини) топишда Даламбернинг қуйидаги формуласидан фойдаланилади:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(x) dx.$$

1- мисол.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

тенгламанинг

$$u(x, 0) = x^2 \text{ ва } \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Ечиш: $a = 1$, $\varphi(x) = x^2$ ва $\psi(x) = 0$ эканлигини эътиборга олиб, Даламбер формуласига биноан ечимни топамиз:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left((x-t)^2 + (x+t)^2 \right) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} 0 \cdot dx =$$

$$= \frac{x^2 - 2xt + t^2 + x^2 + 2xt + t^2}{2} = x^2 + t^2.$$

2- мисол.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

тенгламанинг

$$u(x, 0) = \sin 2x, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \cos x$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимининг $t = \frac{\pi}{2}$ вақтдаги қийматини ҳисобланг.

Ечиш. $a = 3$, $\varphi(x) = \sin 2x$, $\psi(x) = \cos x$ эканлигини эътиборга олиб, Даламбер формуласидан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\sin 2(x-3t) + \sin 2(x+3t)}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} \int_{x-3t}^{x+3t} \cos x dx = \\ &= \frac{2 \sin 2x \cos 6t}{2} + \frac{1}{6} (\sin(x+3t) - \sin(x-3t)) = \sin 2x \cos 6t + \\ &\quad + \frac{1}{3} \sin 3t \cos 2x. \end{aligned}$$

Топилган $u(x, t)$ га $t = \frac{\pi}{2}$ қийматни қўйиб, ечимни ҳосил қиламиз, яъни

$$\begin{aligned} u\left(x, \frac{\pi}{2}\right) &= \sin 2x \cos 6 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \sin 3 \cdot \frac{\pi}{2} \cos 2x = -\sin 2x - \\ &\quad - \frac{1}{3} \cos 2x. \end{aligned}$$

3- дарсхона топшириқлари

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенгламанинг $u(x, 0) = 0$ ва $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = x$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Ж: $u(x, t) = xt$.

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенгламанинг

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{ва} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \cos x$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Ж: $u(x, t) = \frac{1}{a} \cos x \sin at$.

$$3. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ тенгламанинг}$$

$$u(x, 0) = \sin x \text{ ва } \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 1$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимининг $t = \frac{\pi}{2a}$ вақтдаги қийматини ҳисобланг.

$$\text{Ж: } u\left(x, \frac{\pi}{2a}\right) = \frac{\pi}{2a}$$

3- мустақил иш топшириқлари

$$1. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ тенгламанинг}$$

$$u(x, 0) = \sin x \text{ ва } \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

$$\text{Ж: } u(x, t) = \sin x \cos t.$$

$$2. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ тенгламанинг}$$

$$u(x, 0) = 0 \text{ ва } \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 30 \sin x$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

$$\text{Ж: } u(x, t) = 6 \sin x \sin 5t.$$

$$3. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ тенгламанинг}$$

$$u(x, 0) = \frac{x}{1+x^2} \text{ ва } \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \sin x$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимининг $t = \pi$ вақтдаги қийматини ҳисобланг.

$$\text{Ж: } u(x, \pi) = \frac{1}{2} \left[\frac{x+\pi}{1+(x+\pi)^2} + \frac{x-\pi}{1+(x-\pi)^2} \right].$$

4- §. Бир ўлчовли бир жинсли бўлмаган тўлқин тенгламалари учун Коши масаласини Дьюамель формуласидан фойдаланиб ечиш
Бир жинсли бўлмаган

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

тўлқин тенгламасининг $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$ да аниқланган ва

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини (Коши масаласи) топиш учун қуйидаги Дьюамель формуласидан фойдаланилади:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(x) dx + \\ + \frac{1}{2a} \int_0^t \left[\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \right] d\tau.$$

Мисол. Қуйидаги бир жинсли бўлмаган

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x$$

тўлқин тенгламасининг

$$u|_{t=0} = x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \cos x$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини Дьюамель формуласидан фойдаланиб топинг.

Ечиш. $a = 2$ деб олиб, Дьюамель формуласини қўлаймиз:

$$u(x, t) = \frac{(x-2t)^2 + (x+2t)^2}{2} + \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} \cos x dx + \\ + \frac{1}{4} \int_0^t \left[\int_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)} 2x dx \right] d\tau = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t).$$

Ҳар қайси қўшилувчини алоҳида ҳисоблаймиз:

$$u_1(x, t) = \frac{x^2 - 4xt + 4t^2 + x^2 + 4xt + 4t^2}{2} = x^2 + 4t^2,$$

$$u_2(x, t) = \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} \cos x dx = \frac{1}{4} \sin x \Big|_{x-2t}^{x+2t} =$$

$$= \frac{1}{4} (\sin(x+2t) - \sin(x-2t)) = \frac{1}{2} \sin 2t \cos x.$$

$$u_3(x, t) = \frac{1}{4} \int_0^t \left[\int_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)} 2x dx \right] d\tau = \frac{1}{4} \int_0^t \left[x^2 \Big|_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)} \right] d\tau =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^t [(x+2t-2\tau)^2 - (x-2t+2\tau)^2] d\tau =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^t 2x \cdot (4t - 4\tau) d\tau = 2x \int_0^t (t - \tau) d\tau =$$

$$= 2xt^2 - xt^2 = xt^2.$$

Топилган $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, $u_3(x, t)$ ларни инобатга олиб, масаланинг ечимини ёзамиз:

$$u(x, t) = x^3 + t^2 + xt^2 + \frac{1}{2} \sin 2t \cos x.$$

4- дарсхона топшириқлари

1. Бир жинсли бўлмаган

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4xt$$

тўлқин тенгламасининг

$$u|_{t=0} = e^x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини Дьюамель формуласидан фойдаланиб топим.

$$\text{Ж: } u(x, t) = \frac{e^{x+3t} + e^{x-3t}}{2} + xt + \frac{2xt^3}{3}.$$

2. Бир жинсли бўлмаган

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \cdot t$$

тўлқин тенгламасининг

$$u|_{t=0} = e^{-x}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 5x$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини Дьюамель формуласидан фойдаланиб топим.

$$\text{Ж: } u(x, t) = \frac{e^{-x+4t} + e^{-x-4t}}{2} + 5xt + \frac{xt^3}{6}.$$

4- мустақил иш топшириқлари

1. Бир жинсли бўлмаган

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2t$$

тўлқин тенгламаси учун

$$u|_{t=0} = \sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 2$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини Дьюамель формуласидан фойдаланиб топим. Ж: $u(x, t) = \sin x \cos t + 2t + \frac{t^3}{3}.$

2. Бир жинсли бўлмаган

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xt$$

тўлқин тенгламаси учун

$$u|_{t=0} = 2 \cos 5x, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 8x$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини Дьюамель формуласидан фойдаланиб топинг. Ж: $u(x, t) = 2 \cos 5x \cos 10t + 8xt + \frac{xt^3}{2}$.

5- §. Лаплас тенгламасининг баъзи содда ечимлари

Қуйида Лаплас тенгламаси учун бир нечта содда ички чегаравий масалаларнинг ечимлари билан танишиб чиқамиз.

1- масала.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Лаплас тенгламасининг

$$u|_{x^2+y^2=a^2} = A$$

шартни қаноатлантирувчи $x^2 + y^2 \leq a^2$ доирадаги ечимини топинг.

Ечиш. $u = A$, чунки

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ва

$$u(x, y)|_{x^2+y^2=a^2} = A|_{x^2+y^2 < a^2} = A.$$

2- масала. Лаплас тенгламасининг

$$u|_{x^2+y^2 < a^2} = \frac{Ax}{a}$$

шартни қаноатлантирувчи

$$x^2 + y^2 \leq a^2$$

доирадаги ечимини топинг.

Ечиш. $u(x, y)|_{x^2+y^2=a^2} = \frac{Ax}{a}$, чунки

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{A}{a},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$$u(x, y)|_{x^2+y^2 < a^2} = \frac{Ax}{a}.$$

3- масала. Лаплас тенгламасининг

$$u|_{x^2+y^2=a^2} = \frac{Ay^2}{a^2} + \frac{Bx^2}{a^2}$$

шартни қаноатлантирувчи,

$$x^2 + y^2 \leq a^2$$

доирадаги ечимини топим.

$$\text{Ечиш. } v(x, y) = \frac{A+B}{2} + \frac{B-A}{2a^2} (x^2 - y^2)$$

функцияни оламиз. $x = a \cos \varphi$, $y = a \sin \varphi$ десак, чегаравий шарт

$$u|_{x^2+y^2=a^2} = A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi$$

кўринишга олади. $v(x, y)$ функция эса ушбу $v(x, y) = \frac{A+B}{2} +$

$$+ \frac{B-A}{2a^2} (a^2 \cos^2 \varphi - a^2 \sin^2 \varphi) = A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi \text{ кўринишга келади.}$$

Демак, $v(x, y)$ чегаравий шартни қаноатлантиради. Энди хусусий ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{B-A}{a^2} x,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{B-A}{a^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{B-A}{a^2} y,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{A-B}{a^2}.$$

Юқоридан маълумки, $v(x, y)$ тенгламани ҳам қаноатлантиради. Демак, $v(x, y)$ ечим экан.

5- дарсхона топшириқлари

Лаплас тенгламасининг

$$1. u|_{x^2+y^2=a^2} = Axy$$

ёки

$$2. u|_{x^2+y^2=a^2} = A + \frac{B}{a} y$$

шартни қаноатлантирувчи

$$x^2 + y^2 \leq a^2$$

доирадаги ечимни топим.

$$\text{Ж: } 1. u(x, y) = Axy.$$

$$2. u(x, y) = A + \frac{B}{a} y.$$

Лаплас тенгламасининг

$$u \mid_{x^2+y^2=a^2} = A + By$$

шартни қаноатлантирувчи

$$x^2 + y^2 \leq a^2$$

доирадаги ечимини топинг.

$$\text{Ж: } u(x, y) = A + By.$$

6- §. Лаплас тенгламасини тўғри тўртбурчакда ўзгарувчиларни ажратиш усули билан ечиш

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Лаплас тенгламасини $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ тўғри тўртбурчакда

$$u \mid_{y=0} = f(x), \quad u \mid_{y=b} = \varphi(x),$$

$$u \mid_{x=0} = \psi(y), \quad u \mid_{x=a} = \chi(y)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини ўзгарувчиларни ажратиш усули билан ечишда (топишда)

$$\begin{aligned} f(0) &= \psi(0), & f(a) &= \chi(0), \\ \chi(b) &= \varphi(a), & \varphi(0) &= \psi(b) \end{aligned}$$

шартлар ўринли бўлиши керак.

Агар қўйилган бу шартлар бажарилса, масаланинг ечими ўзгарувчиларни ажратиш усули билан топилади ва у қуйидагига тенг:

$$\begin{aligned} u(x, y) = u_0(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} & \left\{ \left[\frac{\varphi_n \frac{\text{sh} \frac{\pi n}{a} y}{\text{sh} \frac{\pi n}{a} b}}{\frac{\text{sh} \frac{\pi n}{a} (b-y)}{\text{sh} \frac{\pi n}{a} b}} \right] \text{sh} \frac{\pi n}{a} x + \left[\frac{\chi_n \frac{\text{sh} \frac{\pi n}{b} x}{\text{sh} \frac{\pi n}{b} a}}{\frac{\text{sh} \frac{\pi n}{b} (a-x)}{\text{sh} \frac{\pi n}{b} a}} \right] \text{sh} \frac{\pi n}{b} y \right\} \\ & + \left[\frac{\psi_n \frac{\text{sh} \frac{\pi n}{b} (a-x)}{\text{sh} \frac{\pi n}{b} a}}{\frac{\text{sh} \frac{\pi n}{b} (a-x)}{\text{sh} \frac{\pi n}{b} a}} \right] \text{sh} \frac{\pi n}{b} y \end{aligned}$$

Бу ерда:

$$u_0(x, y) = A + Bx + Cy + Dxy,$$

$$A = f(0), \quad B = \frac{f(a) - f(0)}{a},$$

$$C = \frac{\psi(b) - \psi(0)}{b},$$

$$D = \frac{\varphi(a) - \varphi(0) - f(a) + f(0)}{ab},$$

$$\bar{f}_n = \frac{2}{a} \int_0^a (f(x) - u_0(x, 0)) \sin \frac{\pi n}{a} x dx,$$

$$\bar{\varphi}_n = \frac{2}{a} \int_0^a (\varphi(x) - u_0(x, b)) \sin \frac{\pi n}{a} x dx,$$

$$\bar{\chi}_n = \frac{2}{b} \int_0^b (\chi(y) - u_0(0, y)) \sin \frac{\pi n}{b} y dy,$$

$$\bar{\psi}_n = - \int_0^b (\psi(y) - u_0(0, y)) \sin \frac{\pi n}{b} y dy.$$

Мисол. Лаплас тенгламасининг $0 < x < 1$, $0 < y < 2$ тўғри тўртбурчакда

$$u|_{y=0} = x, \quad u|_{y=2} = x+2,$$

$$u|_{x=0} = y, \quad u|_{x=1} = 1+y$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Ечиш. $f(x) = x$, $\varphi(x) = x+2$,

$$\psi(y) = y, \quad \chi(y) = 1+y,$$

$$a = 1, \quad b = 2$$

эканлигини ҳисобга олиб, юқоридаги шартларнинг ўринли бўлишини текшираемиз:

$$f(0) = 0, \quad \psi(0) = 0,$$

$$f(1) = 1, \quad \chi(0) = 1,$$

$$\chi(2) = 3, \quad \varphi(1) = 3,$$

$$\varphi(0) = 2, \quad \psi(2) = 2.$$

Демак, тегишли шартлар бажарилди.

Энди A , B , C , D коэффицентларни аниқлаймиз:

$$A = f(0) = 0,$$

$$B = \frac{f(a) - f(0)}{1} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$C = \frac{\Psi(2) - \Psi(0)}{2} = \frac{2 - 0}{2} = 1,$$

$$D = \frac{\Phi(1) - \Phi(0) - f(1) + f(0)}{2} = 0.$$

Шундай қилиб,

$$u_0(x, y) = x + y.$$

Тегишли интегралларни ҳисоблаб, $\overline{\Phi}_n = \overline{f}_n = \overline{\chi}_n = \overline{\Psi}_n = 0$ эканлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин. Демак, ечим $u(x, y) = x + y$ дан иборат бўлади.

6- дарсхона топшириқлари

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ Лаплас тенгламасининг $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 5$ тўғри тўртбурчакдаги

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \quad u(x, 5) = 0, \\ u(0, y) &= Ay(5 - y), \\ u(3, y) &= 0 \end{aligned}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

$$\text{Ж: } u(x, y) = \frac{200A}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \text{ch} \frac{(2n+1)(3-x)\pi}{5} \cdot \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi y}{5}}{\text{sh} \frac{3(2n+1)\pi}{5}}.$$

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ Лаплас тенгламасининг $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$ тўғри тўртбурчакдаги

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \quad u(x, \pi) = 0, \\ u(0, y) &= Ay(\pi - y), \\ u(\pi, y) &= 0 \end{aligned}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

$$\text{Ж: } u(x, y) = \frac{8A}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sh}(2n+1)(\pi-x)}{\text{sh}(2n+1)\pi} \cdot \frac{\sin(2n+1)y}{(2n+1)^2}.$$

6- мустақил иш топшириқлари

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ Лаплас тенгламасининг $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 20$ тўғри тўртбурчакдаги

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \quad u(x, 20) = 0, \\ u(0, y) &= 30y(20 - y), \end{aligned}$$

$$u(10, y) = 0$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

$$\text{Ж: } u(x, y) = \frac{96000}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)(10-x)\pi}{20}}{(2n+1)^3} \times \\ \times \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi y}{20}}{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi}{2}}.$$

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ Лаплас тенгламасининг $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2\pi$ тўғри тўртбурчакдаги

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \quad u(x, 2\pi) = 0, \\ u(0, y) &= \pi y(2\pi - y), \\ u(1, y) &= 0 \end{aligned}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

$$\text{Ж: } u(x, y) = 32 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)(1-x)}{2} \cdot \sin \frac{(2n+1)y}{2}}{(2n+1)^3 \cdot \operatorname{sh} \frac{2n+1}{2}}.$$

7- §. Чегараланган торнинг эркин ва мажбурий тебраниш тенгламаларини ўзгарувчиларни алмаштириш усули билан ечиш

Чегараланган торнинг эркин тебраниши тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ни ушбу бошланғич шартлар

$$u|_{t=0} = \varphi(x),$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x)$$

ва

$$u|_{x=0} = 0,$$

$$u|_{x=l} = 0$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини ўзгарувчиларни алмаштириш усулидан фойдаланиб топсак, у

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right) \sin \frac{\lambda \pi}{l} x$$

кўринишда бўлади, бу ерда

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx,$$

$$D_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx.$$

Мисол. Торнинг эркин тебраниш тенгламасининг

$$u|_{t=0} = \cos x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 2 \cos x$$

бошланғич шартлар ва

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0$$

чектавий шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

Ечиш. C_n ва D_n коэффициентларни ҳисоблаш учун аввал ушбу интегрални ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^l \cos x \sin \frac{n\pi}{l} x dx = \int_0^{\pi} \cos x \sin nx dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\sin(nx+x) + \sin(nx-x)] dx = \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\cos(nx+x)}{n+1} + \frac{\cos(nx-x)}{n-1} \right] \Big|_0^{\pi} = \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\cos(\pi+n\pi)}{n+1} + \frac{\cos(\pi-n\pi)}{n-1} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \right] = \\ &= \frac{n}{n^2-1} - \frac{1}{2} \left(\frac{\cos(\pi+n\pi)}{n+1} - \frac{\cos(\pi-n\pi)}{n-1} \right). \end{aligned}$$

n жуфт ва тоқ бўлганида мос равишда ушбуга эга бўламиз:

$$I_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & n - \text{тоқ}, \\ \frac{1}{n-1}, & n - \text{жуфт}. \end{cases}$$

$$\text{Бунн эътнборга олсак, } C_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \sin nx dx =$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\pi(n+1)}, & n - \text{ТОК}, \\ \frac{2}{\pi(n-1)}, & n - \text{жуфт} \end{cases}$$

$$D_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^{\pi} 2 \cos x \sin nx dx = \frac{4}{an\pi} I_n =$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{an\pi(n+1)}, & n - \text{ТОК}, \\ \frac{4}{an\pi(n-1)}, & n - \text{жуфт}. \end{cases}$$

Демак,

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\pi(k+1)} \cos a(2k-1)t + \right. \\ & \left. + \frac{2}{an\pi(k+1)} \sin a(2k-1)t \right) \sin(2k-1)x + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{\pi(2k-1)} \cos 2akt + \frac{4}{an\pi(2k-1)} \sin 2akt \right) \sin 2kx. \end{aligned}$$

Энди чегараланган торнинг мажбурий тсбраниш тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

ни ушбу

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x)$$

бошлангич ва

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топамиз.

Ечимни ушбу кўринишда излаймиз:

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t).$$

Бу ердаги $v(x, t)$ функцияни шундай танлаймизки, у бир жинсли

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

тенгламани

$$v \Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x)$$

бошланғич ва

$$v \Big|_{x=0} = 0, \quad v \Big|_{x=l} = 0$$

чегаравий шартларда қаноатлангирсин. $\omega(x, t)$ функция эса

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t)$$

тенгламани

$$w \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$$

бошланғич ва

$$w \Big|_{x=0} = 0, \quad w \Big|_{x=l} = 0$$

чегаравий шартларда қаноатлангирсин.

Чегараланган торнинг эркин тебраниш тенгламасининг ечими ушбу $w(x, t)$ йиғинди кўринишида топилади:

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

бу ерда

$$\gamma_k(t) = \frac{l}{k\pi a} \int_0^t g_k(\tau) \sin \frac{k\pi a(t-\tau)}{l} d\tau,$$

$$g_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

7- дарсхона топшириқлари

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенгламанинг

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$$

бошланғич ҳамда

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = A \sin \omega t$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

$$\text{Ж: } u(x, t) = \frac{A \sin nx \sin x \sin \omega t}{\sin \omega t} + \\ + \frac{2 A \omega}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\omega^2 - \frac{n^2 \pi^2}{l^2}} \sin \frac{n \pi t}{l} \sin \frac{n \pi x}{l}$$

$$2. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5x(x-1) \text{ тенгламанинг}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

бошланғич ҳамда

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

$$\text{Ж: } u(x, t) = -\frac{5}{12} x(x^2 - 2x^2 + 1) + \\ + \frac{8}{\pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi t \cdot \sin(2n+1)\pi x}{(2n+1)^5}$$

7- мустақил иш топшириқлари

$$1. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ тенгламанинг}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

бошланғич ҳамда

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = \sin \frac{1}{2} t$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

$$\text{Ж: } u(x, t) = \sin \frac{x}{2} \sin \frac{t}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\frac{1}{4} - n^2} \sin nt + \sin nx$$

$$2. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x(x-1)t^2 \text{ тенгламанинг}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

бошланғич ҳамда

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

$$\begin{aligned} \text{Ж: } u(x, t) = & -\frac{8t^2}{\pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi x}{(2n+1)^5} + \\ & + \frac{16}{\pi^7} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi x}{(2n+1)^7} - \\ & - \frac{16}{\pi^7} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi x \cos(2n+1)\pi t}{(2n+1)^7}. \end{aligned}$$

8- §. Иссиқлик ўтказиш тенгламасини Фурье алмаштиришлари усули билан ечиш

Бу параграфда чегараланмаган ёки бир томондан чегараланган стерженларда иссиқлик тарқалиш тенгламаларининг Фурье алмаштиришлари билан ечилиши қаралади.

8. 1. Чегараланмаган стерженда иссиқлик тарқалиши.

Ушбу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty$$

иссиқлик тарқалиш тенгламасининг

$$u(x, 0) = \varphi(x).$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими Фурье усули билан топилганда қуйидаги

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi$$

Пуассон интегралини ҳисоблашга тўғри келади.

Мисол. Ушбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty$$

иссиқлик тарқалиш тенгламасининг

$$u(x, 0) = x$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Ечиш. Пуассон формуласига биноан ечим

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi$$

бўлади. Интегрални ҳисоблаш учун $\frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}} = \eta$ янги ўзгарувчини киритамиз. У ҳолда:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x + 2a\eta \sqrt{t}) e^{-\eta^2} d\eta =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{\pi}} I_1 + \frac{2a\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \cdot I_2 \text{ бўлиб, бу ерда}$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta e^{-\eta^2} d\eta.$$

I_1 Пуассон интеграли ва xe^{-x^2} тоқ функция эканлигидан $I_1 = \sqrt{\pi}$ ва $I_2 = 0$. Демак, ечим $u(x, t) = x$ экан

8.2. Бир томондан чегараланган стерженда иссиқлик тарқалиши.

Ушбу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < +\infty$$

иссиқлик тарқалиш тенгламасининг

$$u(x, 0) = \varphi(x)$$

бошланғич шартни ҳамда

$$u(0, t) = \mu(t)$$

чегаравий шартни қаноатлантирувчи ечими Фурье усули билан топиш қуйидаги интегрални ҳисоблашга келтирилади:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{\xi}{2}\right) \left\{ e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}} \right\} d\xi +$$

$$+ \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \mu(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{(t-\tau)^2}} d\tau.$$

8- дарсхона топириқлари

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty$$

иссиқлик тарқалиш тенгламасининг

$$1. \quad u(x, 0) = e^{-x^2}$$

ёки

$$2. u(x, 0) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

$$\text{Ж: } 1. u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{(x-\tau)^2}{4t}\right)} d\tau.$$

$$2. u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \cos \omega x e^{-\omega^2 t} d\omega.$$

8- мустақил иш топшириқлари

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty$$

иссиқлик тарқалиш тенгласининг

$$1. u(x, 0) = e^{-|x|} \quad \text{ёки}$$

$$2. u(x, 0) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

$$\text{Ж: } 1. u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\omega^2 t}}{\omega^2 + 1} \cos \omega x d\omega.$$

$$2. u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \omega}{\omega} - \cos \omega \right) \sin \omega x \cdot \frac{e^{-\omega^2 t}}{\omega} d\omega.$$

9-§. Назорат иши

1. Қуйидаги икки ўзгарувчили иккинчи тартибли тенгламаларни каноник кўринишга келтиринг:

$$1.1. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$1.2. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial x} + 6 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$1.3. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 13 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$1.4. y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$1.5. y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2x \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

$$1.6. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (x \geq 0 \text{ соҳада}).$$

$$1.7. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 6 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$1.8. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$1.9. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 7 \frac{\partial u}{\partial x} + 9 \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0.$$

$$1.10. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 5 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y} + 11 \frac{\partial^3 u}{\partial y^2} + 10 u = 0.$$

$$1.11. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 5 \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

$$1.12. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 20 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$1.13. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 20 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 10 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

$$1.14. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 15 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 5 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$1.15. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 15 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8 \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

$$1.16. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 12 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 30 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 5 \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

$$1.17. 8 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 11 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$1.18. 10 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 8 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$1.19. 25 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$1.20. 8 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 13 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$1.21. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 14 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$1.22. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 7 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$1.23. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$1.24. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$1.25. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 19 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$1.26. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 18 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$1.27. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 40 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 11 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$1.28. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 20 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 13 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$1.29. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 10 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 29 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$1.30. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ тор тебраниш тенгламасининг}$$

$$u \Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини [Даламбер формуласидан фойдаланиб топинг:

$$2.1. a = 4, \varphi(x) = x^4, \psi(x) = \cos 2x.$$

$$2.2. a = 4, \varphi(x) = x^3, \psi(x) = \sin 2x.$$

$$2.3. a = 4, \varphi(x) = x^2, \psi(x) = \cos x.$$

$$2.4. a = 4, \varphi(x) = x^2, \psi(x) = \sin x.$$

$$2.5. a = 9, \varphi(x) = x, \psi(x) = \cos 3x.$$

$$2.6. a = 9, \varphi(x) = x^3, \psi(x) = \sin 3x.$$

$$2.7. a = 9, \varphi(x) = x^3, \psi(x) = \cos 4x.$$

$$2.8. a = 9, \varphi(x) = x^4, \psi(x) = \sin 4x.$$

$$2.9. a = 16, \varphi(x) = \sin 5x, \psi(x) = \cos 2x.$$

$$2.10. a = 16, \varphi(x) = \sin 5x, \psi(x) = \sin 2x.$$

$$2.11. a = 16, \varphi(x) = \sin 4x, \psi(x) = \cos x.$$

$$2.12. a = 16, \varphi(x) = \sin 4x, \psi(x) = \sin x.$$

$$2.13. a = 4, \varphi(x) = \cos 5x, \psi(x) = \cos 2x.$$

$$2.14. a = 4, \varphi(x) = \cos 5x, \psi(x) = \sin 2x.$$

$$2.15. a = 4, \varphi(x) = \cos 4x, \psi(x) = \cos x.$$

$$2.16. a = 4, \varphi(x) = \cos 4x, \psi(x) = \sin x.$$

$$2.17. a = 9, \varphi(x) = \cos 5x, \psi(x) = e^{5x}.$$

$$2.18. a = 9, \varphi(x) = \sin 5x, \psi(x) = e^{6x}.$$

$$2.19. a = 9, \varphi(x) = \cos 4x, \psi(x) = e^{7x}.$$

$$2.20. a = 9, \varphi(x) = \sin 4x, \psi(x) = e^{8x}.$$

$$2.21. a = 16, \varphi(x) = \cos 3x, \psi(x) = e^{9x}.$$

$$2.22. a = 16, \varphi(x) = \sin 3x, \psi(x) = e^{10x}.$$

$$2.23. a = 16, \varphi(x) = e^{5x}, \psi(x) = \cos 2x.$$

$$2.24. a = 16, \varphi(x) = e^{5x}, \psi(x) = \sin 2x.$$

$$2.25. a = 4, \varphi(x) = e^{-4x}, \psi(x) = \sin 3x.$$

$$2.26. a = 4, \varphi(x) = e^{-5x}, \psi(x) = \cos 2x.$$

$$2.27. a = 4, \varphi(x) = e^{-6x}, \psi(x) = \cos 3x.$$

$$2.28. a = 4, \varphi(x) = e^{-7x}, \psi(x) = \sin 4x.$$

$$2.29. a = 9, \varphi(x) = e^{-x}, \psi(x) = \sin x + \cos x.$$

$$2.30. a = 9, \varphi(x) = e^{-2x}, \psi(x) = \cos 3x.$$

10-§. Штурм — Лиувилл масаласи. Лежандр кўпхадлари

10.1 $[a, b]$ кесмада $(k(x)y'(x))' - q(x)y(x) + \lambda\beta(x)y(x) = 0$ тенгламани

$$\begin{aligned} y(a) &= 0, y(b) = 0, \\ y'(a) &= 0, y'(b) = 0, \\ y''(a) &= 0, y''(b) = 0, \\ y'''(a) &= 0, y'''(b) = 0 \end{aligned}$$

шартлардан бирини қаноатлантирувчи $y(x)$ функцияни топниш масаласини Штурм — Лиувилл масаласи дейилади, бунда $k(x)$, $q(x)$, $\beta(x) \in [a; b]$ кесмада узлуксиз функциялар ва $k(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $\beta(x) > 0$. Барча λ лар учун Штурм — Лиувилл масаласининг $y(x) \not\equiv 0$ ечими доимо мавжуд бўлавермайди. $y(x) \equiv 0$ ечим мавжуд бўлган λ^* тенгламанинг хос сони ва унга мос $y^*(x)$ ечим тенгламанинг хос функцияси дейилади.

Мисол. $[0; l]$ да

$$y'' - \lambda y = 0, y(0) = y(l) = 0$$

Штурм — Лиувилл масаласининг хос сони ва хос функцияларини топинг.

Ечиш. $k^2 - \lambda = 0$ характеристик тенгламани тузамиз.

Икки ҳолни қараймиз: а) $\lambda > 0$; б) $\lambda < 0$.

а) $k_{1,2}^2 = \lambda$ ёки $k_{1,2} = \pm \sqrt{\lambda}$ ва $y = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$.

$y(0) = 0$ ва $y(l) = 0$ шартлардан

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\sqrt{\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}l} = 0 \end{cases}$$

ёки $C_1 = C_2 = 0$ экани келиб чиқади. Бу ердан $y(x) = 0$ бўлиб, масаланинг ечими йўқ.

$$\begin{aligned} \text{б) } k^2 - \lambda &= 0, \lambda = -\mu^2, \\ k^2 + \mu^2 &= 0, k_{1,2} = \pm \mu i, \\ y &= C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x. \end{aligned}$$

$y(0) = 0, y(l) = 0$ шартлардан

$$\begin{cases} C_1 + C_2 \cdot 0 = 0 \\ C_1 \cos \mu l + C_2 \sin \mu l = 0 \end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ \mu l = k\pi \end{cases}$$

экани келиб чиқади. Демак, хос сон ва хос функциялар мос равишда

$$\lambda = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad y_k(x) = \sin \frac{k\pi}{l} x$$

га тенг экан.

10.2. Ушбу

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n [(x^2 - 1)^n]}{dx^n}$$

Родрига формуласи орқали аниқланган кўпхадлар *Лежандр кўпхадлари* дейилади.

Хусусан,

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8} (63x^5 - 70x^3 + 15x), \dots$$

Лежандр кўпхадлари учун қуйидаги хоссалар ўринлидир:

1. Бу кўпхадлар $(-1; 1)$ ораликда ортогонал кўпхадлардир, яъни

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \delta_{mn},$$

бу ерда $\delta_{mn} = \begin{cases} \frac{2}{2n+1}, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$

2. Лежандр кўпхадлари жуфт n лар учун жуфт функция, тоқ n лар учун эса тоқ функциядир.

3. $P_n(1) = 1$ ва $P_n(-1) = (-1)^n$.

4. Бу кўпхадлар Лежандрнинг

$$((1-x^2)y')' + n(n+1)y = 0$$

дифференциал тенгламасини қаноатлантиради.

10- дарсхона топшириқлари

1. Қуйидаги Штурм — Лиувилл масаласининг хос сон ва хос функцияларини топинг:

$$y'' - \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(l) = 0.$$

$$\text{Ж: } \lambda_0 = 0, \quad y_0(x) = 1, \quad \lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2,$$

$$y_k(x) = \cos \frac{k\pi}{l} x, \quad k = 1, 2, \dots$$

2. Лежандр кўпҳадлари учун

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial^n \Phi(t, x)}{\partial t^n} \right]_{t=0}$$

эканини исботланг, бу ерда

$$\Phi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = \frac{1}{1 - 2tx + t^2}$$

10-мустақил иш топшириқлари

1. Қуйидаги Штурм — Лиувилл масаласининг хос сон ва хос функцияларини топинг:

$$y'' - \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(l) = 0.$$

$$\text{Ж: } \lambda_0 = 0, \quad y_0(x) = 1, \quad \lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2,$$

$$y_k(x) = \cos \frac{k\pi}{l} x, \quad k = 1, 2, \dots$$

2. Лежандр кўпҳадлари учун қуйидаги рекуррент формула тўғри эканлигини исботланг:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0,$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

11-§. Лаплас тенгламасини доирадаги чегаравий шарт билан ечишда ўзгарувчиларни алмаштириш усули

Қутб координатларида берилган

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

Лаплас тенгламасининг

$$u(r, \varphi)|_{r=R} = f(\varphi)$$

чегаравий шартни қаноатлантирувчи доира ичидаги ечимини топишда Пуассоннинг

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \frac{(R^2 - r^2) dt}{R^2 - 2Rr \cos(t - \varphi) + r^2}$$

формуласидан фойдаланилади.

Мисол. Юқоридаги Лаплас тенгламасининг

$$u(r, \varphi)|_{r=1} = 2 \sin \varphi$$

чегаравий шартни қаноатлантирувчи $r < 1$ доира ичидаги ечимини топинг.

Е чи ш. Пуассон формуласига кўра:

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2(1-r^2) \sin t \, dt}{1-2r \cos(t-\varphi) + r^2} = \frac{1-r^2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin[(t-\varphi) + \varphi] \, dt}{1-2r \cos(t-\varphi) + r^2} = \\ &= \frac{(1-r^2) \cos \varphi}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(t-\varphi) \, dt}{1-2r \cos(t-\varphi) + r^2} + \\ &+ \frac{(1-r^2) \sin \varphi}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(t-\varphi) \, dt}{1-2r \cos(t-\varphi) + r^2} = \\ &= \frac{(1-r^2) \cos \varphi}{\pi} I_1 + \frac{(1-r^2) \sin \varphi}{\pi} I_2. \end{aligned}$$

Энди I_1 ва I_2 интегралларни ҳисоблаймиз.

Агар I_1 интегралда сурат ва махражни $2r$ га кўпайтирсак, интеграл осон ҳисобланади:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2r} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2r \sin(t-\varphi) \, dt}{1-2r \cos(t-\varphi) + r^2} = \frac{1}{2r} \ln(1-2r \cos(t-\varphi) + r^2) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{2r} (\ln(1-2r \cos(\pi-\varphi) + r^2) - \ln(1-2r \cos(-\pi-\varphi) + r^2)) = 0. \end{aligned}$$

I_2 интегрални ҳисоблашда аввал интеграл ости функциясини $-2r$ га кўпайтириб бўламиз, кейин суратга $1+r^2$ ни қўшиб айирамиз, шу билан бирга

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \pm 2ab \cos x + b^2} = \frac{\pi}{|a^2 - b^2|}$$

эканини эътиборга олсак:

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{2r} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-2r \cos(t-\varphi) + r^2 - (1+r^2)) \, dt}{1-2r \cos(t-\varphi) + r^2} = \\ &= -\frac{1}{2r} \int_{-\pi}^{\pi} dt + \frac{1+r^2}{2r} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{1-2r \cos(t-\varphi) + r^2} = -\frac{\pi}{r} + \\ &+ \frac{1+r^2}{2r} \cdot \frac{2\pi}{1-r^2} = -\frac{\pi}{r} + \frac{\pi(1+r^2)}{r(1-r^2)}. \end{aligned}$$

Демак,

$$u(r, \varphi) = \frac{1-r^2}{-r} \sin \varphi + \frac{1+r^2}{r} \sin \varphi = 2r \sin \varphi.$$

Шундай қилиб, масаланинг ечими $u(r, \varphi) = 2r \sin \varphi$ бўлади.

11- дарсхона топишириқлари

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

Лаплас тенгламасининг берилган чегаравий шартни қаноатлантирувчи донра ичидаги ечимини Пуассон формуласидан фойдаланиб топинг:

1. $u|_{r=a} = \sin^3 \varphi.$

Ж: $u(r, \varphi) = \frac{3}{a} r \sin \varphi - 4 \left(\frac{r}{a} \right)^3 \sin 3 \varphi.$

2. $u|_{r=5} = 2 \sin^3 \varphi + 8.$

Ж: $u(r, \varphi) = 8 + \frac{6}{5} r \sin \varphi - 8 \left(\frac{r}{5} \right)^3 \sin^3 \varphi.$

11- мустақил иш топишириқлари

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

Лаплас тенгламасининг берилган чегаравий шартни қаноатлантирувчи донра ичидаги ечимини Пуассон формуласидан фойдаланиб топинг:

1. $u|_{r=2} = 5 \sin \varphi.$

Ж: $u(r, \varphi) = \frac{5}{2} r \sin \varphi.$

2. $u|_{r=1} = \sin^3 \varphi.$

Ж: $u(r, \varphi) = 3 \sin \varphi - 4 r^3 \sin 3 \varphi.$

12-§. Доирадаги чегаравий шарт билан берилган Пуассон тенгламасини ечиш

Ушбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

Пуассон тенгламасин

$$u|_{x^2+y^2=R^2} = 0$$

шартни қаноатлантирувчи ечимини

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y)$$

кўринишда қндирилади. Бу ерда $v(x, y)$ функция Пуассон тенгламасининг хусусий ечими ва $w(x, y)$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Лаплас тенгламасининг

$$w|_{x^2+y^2=R^2} = -v|_{x^2+y^2=R^2}$$

чегаравий шартни қаноатлантирувчи ечимидир.

Мисол. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4$ Пуассон тенгламасининг

$$u|_{x^2+y^2=9} = 0$$

чегаравий шартни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Тенгламанинг хусусий ечими

$$v(x, y) = -x^2 - y^2$$

бўлади, чунки

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -2.$$

Энди

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Лаплас тенгламасининг

$$w|_{x^2+y^2=9} = -v|_{x^2+y^2=9} = (x^2 + y^2)|_{x^2+y^2=9} = 9$$

чегаравий шартни қаноатлантирувчи ечимини топамиз. Бу ечимни топишда

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

деб олиб, қутб координаталарига ўтамиз, у ҳолда $w(x, y)$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = 0$$

Лаплас тенгламасининг

$$w|_{r=9} = 9$$

шартни қаноатлантирувчи ечими бўлади. $w(x, y)$ ни топишда Пуассон формуласидан фойдаланамиз, яъни:

$$\begin{aligned} w(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 9 \cdot \frac{9-r^2}{9-6r \cos(t-\varphi)+r^2} dt = \\ &= \frac{9(9-r^2)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{9-6r \cos(t-\varphi)+r^2} \end{aligned}$$

Энди $\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \pm 2ab \cos x + b^2} = \frac{\pi}{(a^2 - b^2)}$ эканини эътиборга олсак,

$$w(r, \varphi) = \frac{9(9-r^2)}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{9-r^2} = 9$$

ёки

$$w(x, y) = 9.$$

Демак, $u(x, y) = v(x, y) + w(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ экан.

12- дарсхона топишириғи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -xy$$

Пуассон тенгламасининг

$$u|_{x^2+y^2=16} = 0$$

чегаравий шартни қаноатлантирувчи ечимини $x^2 + y^2 \leq 16$ доира ичида топинг.

$$\text{Ж: } u(r, \varphi) = -\frac{r^4}{24} \sin 2\varphi + \frac{16}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(16 - r^2) \sin 2t dt}{16 - 8r \cos(t - \varphi) + r^2}.$$

Кўрсатма. (x, y) Декарт координаталар системасидан (r, φ) қутб координаталарига ўтинг.

12- мустақил иш топишириғи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12(x^2 - y^2)$$

Пуассон тенгламасининг $1 \leq r \leq 2$ ҳалқада

$$u|_{r=1} = u|_{r=2} = 0$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

$$\text{Ж: } u(r, \varphi) = \left(17r^4 - 129r^2 + \frac{112}{r^2}\right) \cdot \frac{\cos 2\varphi}{17}.$$

13- §. Тўғри тўртбурчак шаклидаги мембрананинг эркин тебраниш масаласини ўзгарувчиларни ажратиш усули билан ечиш

Тўғри тўртбурчак ($0 < x < l$, $0 < y < m$) шаклидаги мембрананинг эркин тебраниш тенгламасини

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = u|_{y=0} = u|_{y=m} = 0$$

чегаравий шартларда ечиш учун ўзгарувчиларни алмаштириш усулидан фойдаланилади. Бу ечим

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_{k,n} \cos \pi a \sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2} t + B_{k,n} \sin \pi a \sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2} t \right) \sin \frac{\pi k x}{l} \sin \frac{\pi n y}{m}$$

кўринишда бўлиб,

$$A_{k,n} = \frac{4}{lm} \int_0^m \int_0^l \varphi(v, z) \sin \frac{\pi k v}{l} \sin \frac{\pi n z}{m} dv dz,$$

$$B_{k,n} = \frac{4}{\pi a l m} \sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2} \int_0^m \int_0^l \psi(v, z) \sin \frac{\pi k v}{l} \sin \frac{\pi n z}{m} dv dz$$

формулалар бўйича ҳисобланади.

Мисол. Юқоридаги масалани $\varphi(x, y) = \sin \frac{3\pi x}{l} \sin \frac{8\pi y}{m}$ ва $\psi(x, y) = 0$ бўлган ҳолда ечинг.

Ечиш: $\psi(x, y) = 0$ бўлганидан $B_{k,n} = 0$ ($k, n \in N$) бўлади.

Энди $A_{k,n}$ ни ҳисоблаймиз:

$$A_{k,n} = \frac{4}{lm} \int_0^m \int_0^l \sin \frac{3\pi v}{l} \cdot \sin \frac{8\pi z}{m} \sin \frac{\pi k v}{l} \cdot \sin \frac{\pi n z}{m} dv dz.$$

Агар $k \neq 3$, $n \neq 8$ бўлса, $A_{k,n} = 0$. Шунинг учун $A_{3,8}$ ни ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} A_{3,8} &= \frac{4}{lm} \int_0^m \int_0^l \sin^2 \frac{3\pi v}{l} \sin^2 \frac{8\pi z}{m} dv dz = \\ &= \frac{1}{lm} \int_0^l \left(1 - \cos \frac{6\pi v}{l}\right) dv \cdot \int_0^m \left(1 - \cos \frac{16\pi z}{m}\right) dz = \\ &= \frac{1}{lm} \left[v - \left(\sin \frac{6\pi v}{l}\right) \cdot \frac{l}{6\pi} \right]_0^l \cdot \left[z - \frac{m}{16\pi} \sin \frac{16\pi z}{m} \right]_0^m = \\ &= \frac{1}{lm} [l - 0] \cdot [m - 0] = 1. \end{aligned}$$

Демак,

$$u(x, y, t) = A_{3,8} \cos \pi a \sqrt{\frac{9}{l^2} + \frac{64}{m^2}} t \sin \frac{3\pi x}{l} \sin \frac{8\pi y}{m}$$

ёки

$$u(x, y, t) = \cos \pi a \sqrt{\frac{9}{l^2} + \frac{64}{m^2}} t \sin \frac{3\pi x}{l} \sin \frac{8\pi y}{m}.$$

13-дарсхона топшириғи

Мембрананинг

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

эркин тебраниш тенгламасининг

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = u|_{y=0} = u|_{y=m} = 0,$$

$$u(x, y, 0) = xy(1-x)(1-y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(x; y; 0)} = 0$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

$$\text{Ж: } u(x, y, t) = \frac{64}{\pi^6} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \cos \sqrt{(2m+1)^2 + (2n+1)^2} \pi a t \times \\ \times \frac{\sin(2m+1)x \sin(2n+1)y}{(2m+1)^3 (2n+1)^3},$$

13- мустақил иш топшириғи

Мембрананинг

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

эркин тебраниш тенгламасини чегаравий шартлар

$$[u]_{x=0} = [u]_{y=0} = [u]_{x=1} = [u]_{y=1} = 0,$$

$$u(x, y, 0) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{(x, y, 0)} = xy(1-x)(1-y)$$

булгандаги ечимини топинг.

$$\text{Ж: } u(x, y, t) = \frac{16}{\pi^2 a} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1)x}{(2m+1)^3} \times \frac{\sin(2n+1)y}{(2n+1)^3} \times \\ \times \frac{\sin \pi a t \sqrt{(2m+1)^2 + (2n+1)^2}}{\sqrt{(2m+1)^2 + (2n+1)^2}}.$$

ОПЕРАЦИОН ҲИСОБ

Назарий мавзулар ва амалий машғулотлар

Операцион ҳисоб математиканинг муҳим бўлимларидан биридир. Физика, механика, автоматика, телемеханика ва электротехниканинг кўпгина масалаларини ечишда операцион ҳисобнинг усулларидан фойдаланилади. Қуйида операцион ҳисобнинг асосий тушунчалари ва унинг баъзи дифференциал тенгламаларни ечишга татбиқлари билан танишасиз.

1-§. Лаплас алмаштириши. Оригинал ва тасвир.

Энг содда функцияларнинг тасвирлари

Фараз қилайлик, $t \geq 0$ ҳақиқий ўзгарувчининг $f(t)$ комплекс функцияси берилган бўлсин. Баъзан $f(t)$ функцияни чексиз ($-\infty$, $+\infty$) оралиқда аниқланган, лекин $t < 0$ да $f(t) = 0$ деб ҳисоблаймиз.

$f(t)$ функциянинг *Лаплас алмаштириши* деб, $p = s + i\tau$ ($s > 0$, τ — ҳақиқий ўзгарувчилар) комплекс ўзгарувчининг

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (1.1)$$

формула билан аниқланадиган $F(p)$ функцияга айтилади.

(1.1) тенгликнинг ўнг томонидаги хосмас интеграл *Лаплас интеграли* деб аталади. Бу интеграл яқинлашувчи бўлиб, бирор $F(p)$ функцияни аниқлаш учун $f(t)$ функция қуйидаги шартларни қаноатлантиради деб фараз қиламиз:

а) $f(t)$ функция узлуксиз ёки $t \geq 0$ даги ихтиёрий чекли оралиқда чекли сондаги I тур узилиш нуқталарига эга;

б) t нинг манфий қийматларида нолга тенг, яъни $t < 0$ да $f(t) = 0$;

в) шундай $M > 0$ ва $s_0 > 0$ ўзгармас сонлар мавжудки,

$$|f(t)| \leq M e^{s_0 t}$$

бўлади. s_0 сон $f(t)$ функциянинг *ўсиш кўрсаткичи* деб аталади.

в) шартни барча чегараланган функциялар, масалан, $\sin t$ ва $\cos t$ лар қаноатлантиради, улар учун $s_0 = 0$, $|f(x)| = M$ деб олиш мумкин.

Шу шартнинг ўзини барча $t^*(k > 0)$ даражали функциялар ҳам қаноатлантиради, чунки уларнинг ҳар бири $e'(s_0 = 1)$ кўрсаткичли функциядан секинроқ ўсади.

$t < 0$ да $f(t) = 0$ талаб шунинг учун ҳам киритиладики, физика ва техниканинг қўпчилик масалаларида t аргумент вақт сифатида қаралади ва шу сабабли вақтнинг бирор бошланғич моментигача $f(t)$ функция ўзини қандай тутишининг аҳамияти йўқ.

а), б), в) шартларни қаноатлантирадиган исталган функция оригинал (ёки прообраз) деб аталади. (1.1) формула билан аниқланадиган $F(p)$ функция $f(t)$ функциянинг тасвири (ёки образи) деб аталади. $f(t)$ оригиналнинг тасвири $F(p)$ бўлса, бундай ёзилади:

$$F(p) \xrightarrow{f} f(t) \text{ ёки } F(p) = L\{f(t)\}.$$

$f(t)$ оригинал $F(p)$ тасвирга эга бўлса, бундай ёзилади:

$$f(t) \leftarrow F(p).$$

($\leftrightarrow$) белги ҳамма вақт оригиналга қараб йўналган.)

Агар функция а), б), в) шартларнинг ҳеч бўлмаганда биттасини қаноатлантирмаса, у оригинал бўлмайди. Масалан, $\frac{1}{t}$ ва $\lg t$ функциялар оригинал бўлмайди, чунки улар учун а) шарт бузилади: иккала функция ҳам II тур узлиш нуқталарига эга.

e^{st} функция ҳам оригинал бўлиши мумкин эмас, чунки унинг учун в) шарт бузилади: $t \rightarrow \infty$ да у исталган M ва s_0 да $Me^{s_0 t}$ функциядан тезроқ ўсади.

(1.1) таърифдан фойдаланиб, ҳақиқий ўзгарувчининг бир қатор элементар функцияларининг тасвирини топамиз.

1-мисол. Хевисайд бирлик функцияси

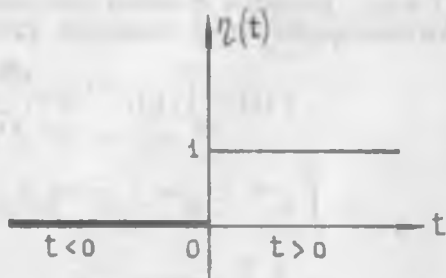
$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{агар } t < 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } t > 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

нинг тасвирини топинг.

Ечиш. Хевисайд функциясининг графиги 2.1-шаклда тасвирланган. $\eta(t)$ функция оригиналнинг юқоридаги шартларини қаноатлантиради, унинг тасвирини (1.1) формула бўйича топамиз:

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \\ &= -\frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

$\operatorname{Re} p = s > 0$ дан $t \rightarrow \infty$ да $e^{-pt} \rightarrow 0$.



2.1-шакл

Ҳақиқатан ҳам, агар $|e^{-pt}| = |e^{-s+it}| = e^{-st} |e^{-it}| = e^{-st} |\cos t| +$
 $+ |\sin t| = e^{-st} (\cos^2 t + \sin^2 t) = e^{-st}$ бўлса, у ҳолда $t \rightarrow \infty$ ва
 $s = \operatorname{Re} p > 0$ дан $t \rightarrow \infty$ бўлганда $e^{-pt} \rightarrow 0$ га эга бўламиз. Шундай
қилиб, $\eta(t)$ Хевисайд бирлик функциясининг $\operatorname{Re} p = s > 0$ да Лаплас
интеграллари яқинлашади ва унинг $F(p)$ тасвири $\frac{1}{p}$ функция бўлади,
яъни $\eta(t) \leftarrow \frac{1}{p}$ ёки $1 \leftarrow \frac{1}{p}$.

2-мисол. Ушбу кўрсаткичли функциянинг тасвирини топинг:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{агар, } t < 0 \text{ бўлса,} \\ e^{\alpha t}, & \text{агар, } t \geq 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

бу ерда α — комплекс сон.

Ечиш. Берилган функция оригиналнинг юқоридаги шартларини қаноатлантиради. Унинг тасвирини (1.1) формула билан топамиз:

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{\alpha t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-\alpha)t} dt = \\ &= \frac{e^{-(p-\alpha)t}}{-(p-\alpha)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-\alpha} \quad (\operatorname{Re}(p-\alpha) > 0). \end{aligned}$$

Демак, берилган функция учун

$$e^{\alpha t} \leftarrow \frac{1}{p-\alpha} \quad (\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha)$$

га эгамиз. Шунга ўхшаш,

$$e^{-\alpha t} \leftarrow \frac{1}{p+\alpha} \quad (\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}(-\alpha)).$$

3-миѐсол. Ушбу функциянинг тасвирини топинг:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{агар } t < 0 \text{ бўлса,} \\ \cos \omega t, & \text{агар } t \geq 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

бу ерда ω — ҳақиқий сон.

Ечиш. Берилган функция оригиналнинг юқоридаги шартларини қаноатлантиради. Унинг тасвирини (1.1) га асосан топамиз:

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cos \omega t dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot \frac{1}{2} [e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}] dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-(p-i\omega)t} dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-(p+i\omega)t} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p+i\omega} \end{aligned}$$

Интеграллаш натижасини содда-лаштираб,

$$\cos \omega t \leftarrow \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

ни ҳосил қиламиз. Шунга ўхшаш, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\sin \omega t \leftarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

4-мисол. Ушбу функциянинг оригиналини топинг:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{агар } t < 0 \text{ бўлса,} \\ \operatorname{sh} \omega t, & \text{агар } t > 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

бу ерда ω — ҳақиқий сон.

$$\text{Е чи ш. Маълумки, } \operatorname{sh} \omega t = \frac{1}{2} (e^{\omega t} - e^{-\omega t}),$$

шу сабабли тасвирни ушбу формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} \operatorname{sh} \omega t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} (e^{\omega t} - e^{-\omega t}) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-(p-\omega)t} dt - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-(p+\omega)t} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-\omega} - \frac{1}{p+\omega} \right) \quad (\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \omega). \end{aligned}$$

Шундай қилиб,

$$\operatorname{sh} \omega t \leftarrow \frac{\omega}{p^2 - \omega^2} \quad (\operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} \omega|).$$

Шунга ўхшаш,

$$\operatorname{ch} \omega t \leftarrow \frac{p}{p^2 - \omega^2} \quad (\operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} \omega|).$$

5-мисол. Ушбу даражали функциянинг оригиналини топинг:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{агар } t < 0 \text{ бўлса,} \\ t^n, & \text{агар } t > 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Е чи ш. (1.1) формулага асосан

$$F(p) = \int_0^{\infty} t^n e^{-pt} dt$$

n марта бўлаклаб интеграллаб[ва] $\operatorname{Re} p > 0$ да $\lim_{t \rightarrow \infty} t^k e^{-pt} = 0$ ($k = 1, \overline{n}$) эканини ҳисобга олиб,

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-pt} dt = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб,

$$t^n \leftarrow \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Хусусан, $n = 0$ бўлганда

$$1 \leftarrow \frac{1}{p}$$

га, $n = 1$ бўлганда $t \leftarrow \frac{1}{p^2}$ га эга бўламиз.

Пировардида $F(p)$ тасвир чизиклилик хоссасига эга эканлигини айтиб ўтамиз, яъни:

а) агар $C = \text{const}$ ва $f(t) \leftarrow F(p)$ бўлса, у ҳолда

$$C f(t) \leftarrow C F(p); \quad (1.2)$$

б) агар $f_1(t) \leftarrow F_1(p)$ ва $f_2(t) \leftarrow F_2(p)$ бўлса, у ҳолда

$$f_1(t) + f_2(t) \leftarrow F_1(p) + F_2(p).$$

Бу муносабатлардан ушбу натижа келиб чиқади:

$$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) + \dots + C_n f_n(t) \leftarrow C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p) + \dots + C_n F_n(p).$$

Чизиклилик хоссаси (1.1) дан ва интегралнинг чизиклилик хоссасидан куйндаги келиб чиқади:

$$\int_0^{\infty} C f(t) e^{-pt} dt = C \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = C F(p),$$

бундан (1.2) формулани ҳосил қиламиз:

$$C f(t) \leftarrow C F(p).$$

Асосий оригиналлар ва тасвирлар жадвали:

2.1-жадвал.

№	$f(t)$ оригинал	$F(p)$ тасвир
1	1	$\frac{1}{p}$
2	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
4	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
5	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
6	$\text{sh } \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
7	$\text{ch } \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$

1-дарсхона топшириклари

1. $f(t) = e^{at} \sin \omega t$ функциянинг тасвирини таърифдан фойдаланиб ҳисобланг.

$$\mathcal{K}: F(p) = \frac{16}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}.$$

2. Чизиқлилиқ хоссаси ва тасвирлар жадвалидан фойдаланиб, қуйидаги функцияларнинг тасвирларини топинг:

a) $f(t) = a^t$; б) $f(t) = 4t^2 - 2t + 3$;

6) $f(t) = 4 - 5e^{2t}$; 7) $f(t) = \cos^3 t$.

В) $f(t) = 2 \sin 2t + 3 \sin 2t;$

Ж: а) $F(p) = \frac{1}{p - \ln a}$; б) $F(p) = \frac{4}{p} - 5 \frac{1}{p-2}$;

$$\text{в) } F(p) = \frac{4}{p^2+4} + \frac{6}{p^3-4}; \quad \text{г) } F(p) = \frac{8}{p^3} - \frac{2}{p^2} + \frac{3}{p};$$

$$д) F(p) = \frac{1}{4} \cdot \frac{p}{p^2+9} + \frac{4}{3} \cdot \frac{p}{p^2+1}.$$

1- мустақил иш топшириқлари

1) $f(t) = e^{2t} \cos \omega t$ функциянинг тасвирини таърифга кўра то-
линг.

$$\text{Ж: } F(p) = \frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \omega^2}.$$

2. Чизиқлилиқ хоссаси ва тасвирлар жадвалидан фойдаланиб, куйидаги функцияларнинг тасвирларини топинг:

$$a) f(t) = \frac{1}{3}t^3 + 4 \cos 2t;$$

6) $f(t) = \frac{1}{3} \sin 3t - 5;$

B) $f(t) = \cos^2 t$;

г) $f(t) = \cos 2t \cdot \sin 3t$.

$$\text{ж: } F(p) = \frac{1}{3} \frac{3!}{p^4} + \frac{4p}{p^2+4}; \quad \text{б) } F(p) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{p^2+9} - \frac{5}{p};$$

$$\text{в) } F(p) = \frac{1}{2p} + \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2+4}; \quad \text{г) } F(p) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p^2+1} + \frac{25}{p^2+25} \right).$$

2-§. Операцион ҳисобнинг асосий теоремалари

1-§ да биз тасвирларнинг чизиқ-лирик хоссаси билан танишдик. Бу параграфда эса биз Лаплас алмаштиришининг асосий хоссалари билан танишишни давом эттирамиз.

1. **Ўхшашлик теоремаси** (эркли ўзгарувчи масштабнинг ўзгариши). *Агар $f(t) \leftarrow F(p)$ бўлса, y ҳолда $\alpha > 0$ бўлганда*

$$f(\alpha t) = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Исботи. Лаплас алмаштириши таърифига кўра:

$$f(\alpha t) \leftarrow \int_0^{\infty} f(\alpha t) e^{-pt} dt.$$

Бу интегралда $\alpha t = z$, $dt = \frac{dz}{\alpha}$ деб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$f(\alpha t) \leftarrow \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} f(z) e^{-\frac{p}{\alpha} z} dz = \frac{1}{c} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Шундай қилиб, оригинал аргументининг α мусбат сонга кўпайтирилиши тасвири ва унинг аргументини шу α сонга бўлинишига олиб келади.

2. Кечикиш (ёки силжиш) теоремаси. Агар

$$f(t) \leftarrow F(p)$$

бўлса, у ҳолда $\tau > 0$ бўлганда

$$f(t - \tau) \leftarrow e^{-p\tau} F(p)$$

бўлади.

Исботи. Лаплас алмаштириши таърифига кўра

$$f(t - \tau) \leftarrow \int_0^{\infty} e^{-pz} f(t - \tau) dz.$$

Бу интегралда $t - \tau = z$, $dt = dz$ деб олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} f(t - \tau) &\leftarrow \int_{-\tau}^{\infty} e^{-p(\tau+z)} f(z) dz = \\ &= e^{-p\tau} \int_{-\tau}^{\infty} e^{-pz} f(z) dz = e^{-p\tau} \int_{-\tau}^0 e^{-pz} f(z) dz + \\ &+ e^{-p\tau} \int_0^{\infty} e^{-pz} f(z) dz = e^{-p\tau} F(p). \end{aligned}$$

чунки биринчи интеграл $\int_{-\tau}^0 e^{-pz} f(z) dz = 0$ ($z < 0$ да $f(z) = 0$).

Демак, оригинал аргументининг τ мусбат миқдорга кечикиши тасвирининг $e^{-p\tau}$ га кўпайтирилишига олиб келади.

1-мисол. $f(t) = (t - 1)^2$ оригиналнинг тасвирини топинг.

Ечиш. Тасвирлар жадвалидан даражали функция учун $n = 2$ бўлганда

$$t^2 \leftarrow \frac{2}{p^3}$$

га эгамиз. У ҳолда кечикиш теоремасига асосан $\alpha = 1$ бўлганда

$$(t^2 - 1) \rightarrow \frac{2}{p^3} e^{-p}.$$

3. Силжиш (ёки сўниш) теоремаси. Агар $f(t) \leftarrow F(p)$ бўлса, у ҳолда исталган α да

$$a^{\alpha t} f(t) \leftarrow F(p - \alpha).$$

Исботи. Ҳақиқатан ҳам,

$$e^{\alpha t} f(t) \leftarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{\alpha t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-\alpha)t} f(t) dt = F(p - \alpha).$$

Шундай қилиб, оригиналнинг $e^{\alpha t}$ функцияга кўпайтирилиши p эркин ўзгарувчининг α га силжишига олиб келади.

2-мисол. $f(t) = e^{\alpha t} \sin \omega t$ оригиналнинг тасвирини топинг.

Ечиш. Жадвалдан

$$\sin \omega t \leftarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

га эгамиз, у ҳолда

$$e^{\alpha t} \sin \omega t \leftarrow \frac{\omega}{(p - \alpha)^2 + \omega^2}.$$

Шунга ўхшаш,

$$e^{\alpha t} \cos \omega t \leftarrow \frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \omega^2}.$$

4. Параметр бўйича дифференциаллаш теоремаси. Агар

$$f(t, x) \leftarrow F(p, x)$$

бўлса, у ҳолда

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \leftarrow \frac{\partial F(p, x)}{\partial x}.$$

Исботи. Ҳақиқатан ҳам,

$$F(p, x) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t, x) dt$$

бўлганлиги учун интегрални x параметр бўйича дифференциаллаб,

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} dt$$

ни ҳосил қиламиз, бундан,

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \leftarrow \frac{\partial F(p, x)}{\partial x}.$$

Бу хосса кўп сондаги тасвирларни ҳосил қилиш имконини беради.

3-мисол. $f(t) = t^n e^{\alpha t}$ оригиналнинг тасвирини топинг.

Ечиш. $e^{\alpha t} \leftarrow \frac{1}{p - \alpha}$ мосликнинг иккала томонини α параметр бўйича дифференциаллаб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$t e^{\alpha t} \leftarrow \frac{1}{(p - \alpha)^2}; \quad t^2 e^{\alpha t} \leftarrow \frac{2}{(p - \alpha)^3}; \\ t^3 e^{\alpha t} \leftarrow \frac{3!}{(p - \alpha)^4}; \quad \dots; \quad t^n e^{\alpha t} \leftarrow \frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}.$$

4-мисол. $f(t) = t \cos \omega t$ ва $f(t) = t \sin \omega t$ оригиналларнинг тас-
вирларини топинг.

Ечиш. $\sin \omega t \leftarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ ва $\cos \omega t \leftarrow \frac{p}{p^2 + \omega^2}$ мосликларнинг иккала томонини ω параметр бўйича дифференциаллаб,

$$t \cos \omega t \leftarrow \frac{p^2 + \omega^2 - 2\omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2} \quad \text{ва} \quad t \sin \omega t \leftarrow + \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$$

ларни ҳосил қиламиз.

5. Оригинални дифференциаллаш теоремаси. Агар $f(t) \leftarrow F(p)$ бўлиб, $f'(t)$ оригинал бўлса, у ҳолда

$$f'(t) \leftarrow p F(p) - f(0)$$

бўлади.

Исботи. $f'(t)$ ҳосила учун Лаплас алмаштиришини ёзамиз:

$$f'(t) \leftarrow \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt.$$

Булаклаб интеграллаб ва $u = e^{-pt}$, $du = -pe^{-pt} dt$, $dv = f'(t) dt$, $v = f(t)$ деб олиб,

$$f'(t) \leftarrow f(t) e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (2.1)$$

ни ҳосил қиламиз. $f(t)$ учун 1-§ даги в) шартга асосан

$$f(t) \leq M e^{s_0 t}$$

га эгамиз, шу сабабли, агар $\operatorname{Re} p > s_0$ бўлса, у ҳолда $t \rightarrow \infty$ да

$$|f(t) e^{-pt}| < M e^{(s_0 - \operatorname{Re} p) t} \rightarrow 0.$$

Натижада (2.1) мосликда биринчи қўшилувчида $-f(0)$ қолади ва (2.1) муносабат узил-кесил ушбу кўринишни олади:

$$f'(t) \leftarrow p F(p) - f(0). \quad (2.2)$$

Хусусан, агар $f(0) = 0$ бўлса, у ҳолда

$$f'(t) \leftarrow p F(p).$$

Теоремани такрор татбиқ этиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$f''(t) \leftarrow p [p F(p) - f(0)] - f'(0) = p^2 F(p) - p f(0) - f'(0), \\ f'''(t) \leftarrow p [p^2 F(p) - p f(0) - f'(0)] - f''(0) = p^3 F(p) - \\ - p^2 f(0) - p f'(0) - f''(0).$$

(2.2) формулани $n-1$ марта татбиқ этиб, қуйидаги умумий формулани ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} f^n(t) &\leftarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - f^{n-2} f'(0) - \\ &- p^{n-3} f''(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \end{aligned} \quad (2.3).$$

Хусусий ҳолда функциянинг ва унинг ҳосилаларининг барча бошланғич қийматлари нолга тенг бўлганда

$$f^n(t) \leftarrow p^n F(p)$$

ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, бошланғич қийматлар ноль бўлганда оригинални n -карра дифференциаллаш унинг тасвирини p^n га кўпайтиришга келтирилади.

6. Оригинални интеграллаш ҳақидаги теорема.
Агар

$$f(t) \leftarrow F(p)$$

бўлса, у ҳолда

$$\int_0^t f(t) dt \leftarrow \frac{F(p)}{p}. \quad (2.4)$$

Исботи. Дифференциаллаш теоремасини $\int_0^t f(t) dt$ оригиналга татбиқ этамиз ва

$$\int_0^t f(t) dt \leftarrow G(p)$$

деб белгилаймиз.

$$\left(\int_0^t f(t) dt \right)' \leftarrow p G(p) - \int_0^0 f(t) dt \quad (2.5)$$

$\left(\int_0^t f(t) dt \right)' = f(t)$ ва $\int_0^0 f(t) dt = 0$ бўлганлиги учун (2.5) формула қуйидаги кўринишни олади:

$$f(t) \leftarrow p G(p). \quad (2.6)$$

Бироқ шартга кўра

$$f(t) \leftarrow F(p). \quad (2.7)$$

(2.6) ва (2.7) ни таққослаб, қуйидагини ҳосил қиламиз.

$$p G(p) = F(p),$$

бундан

$$G(p) = \frac{F(p)}{p}, \quad (2.8)$$

яъни

$$\int_0^t f(t) dt \leftarrow \frac{F(p)}{p}.$$

Демак, оригинални 0 дан t гача интеграллаш тасвирни p га бўлишга келтирилади.

7. Тасвирни дифференциаллаш теоремаси. Агар $f(t) \leftarrow F(p)$ бўлса, у ҳолда

$$-t f(t) \leftarrow F'(p). \quad (2.9)$$

Исботи. (2.9) формулани ҳосил қилиш учун

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

функция p параметр бўйича дифференциалланади:

$$F'(p) = \int_0^{\infty} f(t) (-t) e^{-pt} dt,$$

бу эса $-t f(t) \leftarrow F'(p)$ эканлигини англатади. Шундай қилиб, тасвирни дифференциаллаш оригинални $-t$ га кўпайтиришга келтирилади.

Масалан, (2.9) формулани

$$1 \leftarrow \frac{1}{p}$$

мосликка кетма-кет татбиқ этиб, қуйндагиларни ҳосил қиламиз:

$$-t \leftarrow -\frac{1}{p^2}, \text{ яъни } t \rightarrow \frac{1}{p^2};$$

$$-t^2 \leftarrow \frac{2}{p^3}, \text{ яъни } t^2 \leftarrow \frac{2}{p^3} \text{ ва ҳ. к.}$$

$$\text{Умуман } t^n \leftarrow \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

8. Тасвирни интеграллаш теоремаси. Агар $\int_p^{\infty} F(z) dz$ интеграл яқинлашувчи ва $f(t) \leftarrow F(p)$ бўлса, у ҳолда

$$\frac{f(t)}{t} \leftarrow \int_p^{\infty} F(z) dz,$$

яъни тасвирни p дан ∞ гача интеграллаш оригинални t га бўлишга мос келади.

5-мисол. $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ оригиналнинг тасвирини топинг.

Ечиш. $\sin t \leftarrow \frac{1}{p^2 + 1}$ ва

$$\int_p^{\infty} \frac{dz}{z^2 + 1} = -\operatorname{arctg} z \Big|_p^{\infty} = -\operatorname{arctg} \infty + \operatorname{arctg} p = \operatorname{arctg} p$$

бўлганлиги учун

$$\frac{\sin t}{t} \leftarrow \operatorname{arctg} p. \quad (2.10)$$

Агар (2.10) формулага оригинални интеграллаш ҳақидаги теорема татбиқ этилса,

$$\int_0^t \frac{\sin t}{t} dt \leftarrow \frac{\arctan p}{p}$$

Маълумки, чап томонда турган интеграл элементар функциялар орқали ифодаланмайди ва элементар бўлмаган Sit (интеграл синус) функцияни аниқлайди.

Келтирилган хоссалардан фойдаланиб, тасвирларнинг тулароқ жадваллини келтирамыз.

2.2-жадвал

№	$f(t)$ оригинал	$F(p)$ тасвир
1	1	$\frac{1}{p}$
2	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$
4	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
5	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
6	$\text{sh } \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
7	$\text{ch } \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
8	$e^{\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \omega^2}$
9	$e^{\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \alpha)^2 + \omega^2}$
10	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}$
11	$\cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
12	$t \sin \omega t$	$\frac{2 p \omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
13	$\sin(t - \alpha)$	$e^{-\alpha p} \frac{1}{p^2 + 1}$

№	$f(t)$ оригинал	$P(p)$ тасвир
14	$\cos(t - \alpha)$	$e^{-\alpha p} \frac{p}{p^2 + 1}$
15	$\frac{\sin t}{t}$	$\operatorname{arctg} p$
16	$\int_0^t \frac{\sin t}{t} dt$	$\frac{\operatorname{arctg} p}{p}$

Операцион ҳисобнинг асосий хоссаларини (теоремаларини) жамлаб келтирайлик:

1. Чизиқлилик хосси: $C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \leftarrow C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p)$.

2. Ўхшашлик теоремаси: $f(\alpha t) \leftarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$.

3. Кечикиш теоремаси: $f(t - \tau) \leftarrow F(p) \cdot e^{-p\tau}$.

4. Силжиш теоремаси: $e^{\alpha t} f(t) \leftarrow F(p - \alpha)$.

5. Параметр бўйича дифференциаллаш теоремаси:
агар $f(t, x) \leftarrow F(p, x)$ бўлса, у ҳолда $\frac{\partial f}{\partial x} \leftarrow \frac{\partial F}{\partial x}$.

6. Оригинални дифференциаллаш теоремаси:

$$f'(t) \leftarrow p F(p) - f(0),$$

$$f^{(n)}(t) \leftarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

7. Оригинални интеграллаш теоремаси: $\int_0^t f(t) dt \leftarrow \frac{1}{p} F(p)$.

8. Тасвирни дифференциаллаш теоремаси: $-t f(t) \leftarrow F'(p)$.

9. Тасвирни интеграллаш теоремаси: $\frac{f(t)}{t} \leftarrow \int_0^\infty F(z) dz$.

2- дарсхона топшириқлари

Қуйидаги функцияларнинг тасвирларини топинг:

1. $e^{-5t} \operatorname{sh} 5t$.

Ж: $\frac{5}{(p+5)^2 - 25}$

2. $\int_0^t \sin t dt$.

Ж: $\frac{1}{p(p^2 + 1)}$

3. $(t-1)^2 e^{t-1}$.

Ж: $\frac{2}{(p-1)^3} e^{-p}$.

4. $e^{-7t} \operatorname{ch} 7t$.

Ж: $\frac{p-7}{(p+7)^2 - 49}$.

$$5. t \operatorname{sh} 3 t.$$

$$\mathcal{K}: \frac{6p}{(p^2 - 9)^2}.$$

$$6. \int_0^t \cos^2 \omega t \, dt.$$

$$\mathcal{K}: \frac{p^2 + 2\omega^2}{(p^2 + 4\omega^2)p^2}.$$

2-мустақил иш топшириқлари

Қуйидаги функцияларнинг тасвирларини топинг:

$$1. \sin 3(t-2).$$

$$\mathcal{K}: e^{-2p} \frac{3}{p^2 + 9}.$$

$$2. \int_0^t \cos \omega t \, dt.$$

$$\mathcal{K}: \frac{1}{p^2 + \omega^2}.$$

$$3. t \cos t.$$

$$\mathcal{K}: \frac{p^2 - 1}{(p^2 + 1)^2}.$$

$$4. \frac{e^t - 1}{t}.$$

$$\mathcal{K}: \ln \frac{p}{p-1}.$$

$$5. \frac{1 - \cos t}{t}.$$

$$\mathcal{K}: \ln \frac{\sqrt{p^2 + 1}}{p}.$$

3-§. Оригинални тасвир бўйича топиш усуллари

Операцион ҳисобда оригинални маълум тасвири бўйича излаш учун ёйиш теоремалари деб аталадиган теоремалардан ҳамда тасвирлар жадвалидан фойдаланилади.

Ёйиш теоремаси. Агар изланаётган $f(t)$ функциянинг $F(p)$ тасвири $\frac{1}{p}$ нинг даражалари бўйича даражали қаторга ёйиш мумкин бўлса, яъни

$$F(p) = \frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p^2} + \dots + \frac{a_n}{p^{n+1}} + \dots \quad (3.1)$$

бўлиб, у $\frac{1}{|p|} < R$ да $F(p)$ га яқинлашса, у ҳолда оригинал қуйидаги формула бўйича топилади:

$$f(t) = a_0 + a_1 \frac{t}{1!} + a_2 \frac{t^2}{2!} + \dots + a_n \frac{t^n}{n!} + \dots \quad (3.2)$$

Бу қатор $t > 0$ қийматлар учун яқинлашади ва $t < 0$ да $f(t) = 0$ деб олинади.

Исботи. Теоремани исботлаш учун қуйидаги учта шартларнинг бажарилишини кўрсатиш етарлидир:

а) (3.2) тенгликнинг ўнг томонидаги қатор барча t ларда яқинлашади;

б) унинг $f(t)$ йиғиндиси оригиналнинг б) шarti

$$|f(t)| \leq M e^{\delta t}$$

ни қаноатлантиради;

в) $f(t)$ ва $F(p)$ функциялар орасида

$$f(t) \leftrightarrow F(p)$$

операцион мослик мавжуд.

(3.1) қатор $F(p)$ функция учун Лоран қатори эканлиги ва у $|p| > \frac{1}{R}$ да яқинлашувчилиги сабабли яқинлашиш соҳасидаги исталган p да яқинлашишнинг зарурийлик аломатига асосан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|p|^{n+1}} = 0.$$

Бироқ, бу ҳолда қаторнинг барча ҳадлари

$$|p| > \frac{1}{R_n} > \frac{1}{R}$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган исталган p учун ўз навбатида

$$\frac{a_n}{|p|^{n+1}} \leq |a_n| R_1^{n+1} \leq M \quad (3.3)$$

тенгсизликни қаноатлантириши лозим, бу ерда $M > 0$ — ўзгармас сон. (3.3) тенгсизликдан (3.1) қатор коэффициентларининг модуллари учун

$$|a_n| \leq \frac{M}{R_1^{n+1}}$$

баҳони топамиз, сўнгра R_1 ни R га исталганча яқин қилиб танлаш мумкин бўлганлиги сабабли, бу ердан

$$|a_n| \leq \frac{M}{R^{n+1}} \quad (3.4)$$

баҳо келиб чиқади. Демак, оригинални аниқлайдиган (3.2) қатор ҳадларининг абсолют қийматлари ($t > 0$ да)

$$\left| a_n \frac{t^n}{n!} \right| \leq \frac{M}{R^{n+1}} \frac{t^n}{n!}$$

баҳони қаноатлантиради. Бироқ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{R^{n+1}} \frac{t^n}{n!} = \frac{M}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{t}{R} \right)^n$$

қатор барча t лар учун яқинлашади ва унинг йиғиндиси $\frac{M}{R} e^{\frac{t}{R}}$ га тенг. Бу эса (3.2) қатор ҳам барча t лар учун яқинлашишини ва унинг $f(t)$ йиғиндиси абсолют қиймати бўйича мажорант қатор йиғиндисидан ортқ бўлмаслигини исботлайди, яъни

$$|f(t)| < \frac{M}{R} e^{\frac{t}{R}} \quad (3.5)$$

Шундай қилиб, а) ва б) шартлар исбогланди, в) шартнинг бажарилишини курсатиш учун Лаплас алмаштиришининг чизиқлилигидан келиб чиқадиган исталган k да тўғри бўлган

$$\sum_{n=0}^k \frac{a_n}{p^{n+1}} \rightarrow \sum_{n=0}^k \frac{a_n t^n}{n!} \quad (3.6)$$

операцион муносабатни ёзамиз. Агар бу операцион муносабатда $|p| > \frac{1}{R}$ деб олинса, иккала даражали қаторнинг текис яқинлашувчанлигига асосан $k \rightarrow \infty$ да лимитга ўтиш мумкин ва шу билан учинчи шарт в) нинг тўғрилигига ишонч ҳосил қилинади:

$$F(p) \leftarrow f(t). \quad (3.7)$$

Ёйиш теоремаси исботланди.

1-мисол. $F(p) = \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}}$ тасвир учун оригинални топинг.

Ечиш. $F(p)$ функцияни $p (p \neq 0)$ комплекс ўзгарувчининг бутун текислигида ушбу Лоран қаторига ёямиз:

$$F(p) = \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! p^{n+1}} = \frac{1}{p} - \frac{1}{1! p^2} + \frac{1}{2! p^3} - \dots$$

Ёйилма биринчи теореманинг шартларини қаноатлантирганлиги сабабли бу функциянинг оригинали қуйидагича бўлади:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{(n!)^2} = 1 - \frac{t^2}{(1!)^2} + \frac{t^4}{(2!)^2} - \dots \quad (3.8)$$

Бу қаторнинг йиғиндиси ноль индексли 1 тур Бессель функцияси орқали ифодаланади. Бессель функциясининг z нинг даражалари бўйича қаторга ёйилмаси қуйидаги курунишдадир:

$$I_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}. \quad (3.9)$$

Ҳақиқатан ҳам, (3.9) қатор $z = 2\sqrt{t}$ бўлганда (3.8) қаторга айланади. Шундай қилиб

$$f(t) = I_0(2\sqrt{t})$$

ва биз қуйидаги операцион муносабатни ҳосил қиламиз:

$$I_0(2\sqrt{t}) \leftarrow \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}}.$$

Энди p нинг каср рационал функцияси бўлган тасвирнинг, яъни

$$F(p) = \frac{Q(p)}{P(p)}$$

нинг $Q(p)$ ва $P(p)$ p га нисбатан мос равишда m ва n даражали ($m < n$) кўпхадлар оригиналини топиш усулини кўрсатамиз.

Агар $P(p)$ махражнинг барча нлдизлари маълум бўлса, у ҳолда уни энг содда кўпайтувчиларга ёйиш мумкин:

$$P(p) = (p - p_1)^{k_1} (p - p_2)^{k_2} \dots (p - p_r)^{k_r},$$

бу ерда

$$k_1 + k_2 + \dots + k_r = n.$$

Маълумки, бу ҳолда $F(p)$ функцияни қуйидаги кўринишдаги энг содда касрлар йиғиндисига ёйиш мумкин:

$$\frac{A_{js}}{(p - p_j)^{k_j - s + 1}}.$$

бу ерда j индекс 1 дан r гача бўлган барча қийматларни, s индекс эса 1 дан k_j гача бўлган барча қийматларни қабул қилади.

Шундай қилиб, $F(p)$ ни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$F(p) = \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^{k_j} \frac{A_{js}}{(p - p_j)^{k_j - s + 1}}. \quad (3.10)$$

Бу ёйилманинг барча коэффициентларини

$$A_{js} = \frac{1}{(s-1)!} \lim_{p \rightarrow p_j} \frac{d^{s-1}}{dp^{s-1}} [(p - p_j)^{k_j} \cdot F(p)] \quad (3.11)$$

формула бўйича аниқлаш мумкин.

A_{js} коэффициентларни аниқлаш учун (3.11) формуланнинг ўрнига интеграл ҳисобда рационал касрларни интеграллашда қўлланиладиган элементар усуллардан фойдаланиш мумкин. Хусусан, бу усулни қўллаш $P(p)$ махражнинг барча илдизлари туб ва жуфт-жуфти билан қўшма бўлганда мақсадга мувофиқдир.

Агар $P(p)$ нинг барча илдизлари туб, яъни

$P(p) = (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)$, бу ерда $i \neq k$ да $p_i \neq p_k$ бўлса, ёйилма соддалашади:

$$F(p) = \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{p - p_j}, \quad \text{бу ерда } A_j = \frac{Q(p_j)}{P'(p_j)}. \quad (3.12)$$

$F(p)$ нинг у ёки бу усул билан туб касрларга ёйилмасини тузишда $f(t)$ оригинал қуйидаги формулалар бўйича изланади:

а) $P(p)$ махражнинг туб илдизлари бўлган ҳолда:

$$f(t) = \sum_{j=1}^n \frac{Q(p_j)}{P'(p_j)} e^{p_j t}; \quad (3.13)$$

б) $P(p)$ махражнинг каррали илдизлари бўлган ҳолда:

$$f(t) = \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^{k_j} A_{js} \frac{t^{k_j-s}}{(k_j-s)!} e^{p_j t}. \quad (3.14)$$

2-мисол. $F(p) = \frac{p}{p^3 - 4p + 8}$ функциянинг оригиналини топинг.

Ечиш. $p_1 = 2 + 2i$ ва $p_2 = 2 - 2i$ бўлгани учун, тасвирни оригиналлари маълум бўлган энг содда касрлар йиғиндисига шаклидаги ёйилмасини топиш учун, элементар усуллардан фойдаланамиз:

$$\frac{p}{p^3 - 4p + 8} = \frac{(p-2) + 2}{(p-2)^2 + 4} = \frac{p-2}{(p-2)^2 + 4} + \frac{2}{(p-2)^2 + 4}.$$

2.2- жадвалнинг 8 ва 9-формулаларига кўра:

$$\frac{p-2}{(p-2)^2 + 4} \leftarrow e^{2t} \cos 2t; \quad \frac{2}{(p-2)^2 + 4} \leftarrow e^{2t} \sin 2t.$$

Шу сабабли

$$F(p) = \frac{p}{p^3 - 4p + 8} \leftarrow e^{2t} (\cos 2t + \sin 2t).$$

3-мисол. $F(p) = \frac{1}{p^3 - 8}$ функциянинг оригиналини топинг.

Ечиш. Яна интеграл ҳисобдан маълум бўлган касрлар ёйилмасини топишнинг элементар усулларида фойдаланамиз. Касрнинг махражи битта $p_1 = 2$ ҳақиқий илдиз ва иккита қўшма $p_2 = -1 + i\sqrt{3}$, $p_3 = 1 - i\sqrt{3}$ комплекс илдизга эга бўлганлиги учун (p_2 ва p_3 илдизларга $p^2 + 2p + 4$ учқад мос келади) берилган каср энг содда касрларга бундай ёйилади:

$$\frac{1}{p^3 - 8} = \frac{A}{p-2} + \frac{Bp+C}{p^2 + 2p + 4}.$$

A , B , C коэффициентларни топиш учун қуйидаги айниятга эгамиз:

$$1 = A(p^2 + 2p + 4) + (p-2)(Bp+C).$$

$p = 2$ деб, $1 = 12A$ ни топамиз, бундан $A = \frac{1}{12}$.

p^2 олдидagi коэффициентларни нолга ва озод ҳадни бирга тенглаб, қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ 4A - 2C = 1. \end{cases}$$

Бундан $B = -A = -\frac{1}{12}$, $C = 2A - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$. Шундай қилиб,

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^3 - 8} &= \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{p-2} - \frac{1}{12} \cdot \frac{p+4}{p^2 + 2p + 4} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{p-2} - \\ &- \frac{1}{12} \cdot \frac{(p+1) + 3}{(p+1)^2 + (\sqrt{3})^2}. \end{aligned}$$

Демак,

$$\begin{aligned} F(p) = \frac{1}{p^3 - 8} &= \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{p-2} - \frac{1}{12} \cdot \frac{p+1}{(p+1)^2 + (\sqrt{3})^2} - \\ &- \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{\sqrt{3}}{(p+1)^2 + (\sqrt{3})^2}. \end{aligned}$$

2.2-жадвалдаги 3, 8, 9-формулардан фойдалансак,

$$f(t) = \frac{1}{12} e^{2t} - \frac{1}{12} e^{-t} (\cos \sqrt{3} t + \sqrt{3} \sin \sqrt{3} t).$$

4-мисол. $F(p) = \frac{p^2 + p + 1}{p(p^2 - 1)}$ тасвирнинг оригиналини топинг.

Ечиш. Тасвирнинг махражи $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $p_3 = -1$, $p_4 = i$, $p_5 = -i$ туб илдизларга эга. Бу ҳолда $F(p)$ функциянинг ёйилмаси (3.12) кўринишда бўлади:

$$F(p) = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p-1} + \frac{A_3}{p+1} + \frac{A_4}{p-i} + \frac{A_5}{p+i}.$$

A_1, A_2, A_3, A_4 коэффициентлар

$$A_j = \frac{Q(p_j)}{P'(p_j)}$$

формула билан аниқланади, бу ерда $Q(p) = p^2 + p + 1$, $P'(p) = 5p^4 - 1$:

$$A_1 = \frac{Q(0)}{P'(0)} = -1; \quad A_2 = \frac{Q(1)}{P'(1)} = \frac{3}{4}; \quad A_3 = \frac{Q(-1)}{P'(-1)} = \frac{1}{4};$$

$$A_4 = \frac{Q(i)}{P'(i)} = \frac{i}{4}; \quad A_5 = \frac{Q(-i)}{P'(-i)} = -\frac{i}{4}.$$

Энди (3.13) формула бўйича оригинални топамиз:

$$f(t) = -1 \cdot e^{0 \cdot t} + \frac{3}{4} e^{1 \cdot t} + \frac{1}{4} e^{-1 \cdot t} + \frac{i}{4} e^{i \cdot t} - \frac{i}{4} e^{-i \cdot t} = -1 + \frac{1}{4} (3e^t + e^{-t}) - \frac{1}{2} \frac{e^{i \cdot t} - e^{-i \cdot t}}{2i} = -1 + \frac{1}{4} (3e^t + e^{-t}) - \frac{1}{2} \sin t.$$

5-мисол. $F(p) = \frac{1p^2}{(p^2-1)^3}$ тасвирнинг оригиналини топинг.

Ечиш. $P(p) = (p^2-1)^3 = (p-1)^3(p+1)^3$ га эгамиз, шу сабаб-ли $F(p)$ нинг ёйилмаси қуйидаги кўринишга эга:

$$F(p) = \frac{p^2}{(p-1)^3} = \frac{A_{11}}{(p-1)^3} + \frac{A_{12}}{(p-1)^2} + \frac{A_{13}}{(p-1)} + \frac{A_{21}}{(p+1)^3} + \frac{A_{22}}{(p+1)^2} + \frac{A_{23}}{(p+1)}.$$

(3.11) формулалар бўйича ёйилманинг A_{j_s} коэффициентларини топамиз:

$$A_{11} = \frac{1}{0!} \lim_{p \rightarrow 1} \left[(p-1)^3 \frac{p^2}{(p^2-1)^3} \right] = \lim_{p \rightarrow 1} \frac{p^2}{(p+1)^3} = \frac{1}{8};$$

$$A_{12} = \frac{1}{1!} \lim_{p \rightarrow 1} \frac{d}{dp} \left[\frac{p^2}{(p+1)^3} \right] = \lim_{p \rightarrow 1} \left[\frac{2p}{(p+1)^3} - \frac{3p^2}{(p+1)^4} \right] = \frac{1}{16};$$

$$A_{13} = \frac{1}{2!} \lim_{p \rightarrow 1} \frac{d^2}{dp^2} \left[\frac{p^2}{(p+1)^3} \right] = \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow 1} \left[\frac{2}{(p+1)^3} - \frac{12p}{(p+1)^4} + \frac{12p^2}{(p+1)^5} \right] = -\frac{1}{16};$$

$$A_{21} = \frac{1}{0!} \lim_{p \rightarrow -1} \left[(p+1)^3 \frac{p^2}{(p^2-1)^3} \right] = \lim_{p \rightarrow -1} \frac{p^2}{(p-1)^3} = -\frac{1}{8};$$

$$A_{22} = \frac{1}{1!} \lim_{p \rightarrow -1} \frac{d}{dp} \left[\frac{p^2}{(p-1)^3} \right] = \lim_{p \rightarrow -1} \left[\frac{2p}{(p-1)^3} - \frac{3p^2}{(p-1)^4} \right] = \frac{1}{16};$$

$$A_{22} = \frac{1}{2!} \lim_{p \rightarrow -1} \frac{d^2}{dp^2} \left[\frac{p^2}{(p-1)^3} \right] = \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow -1} \left[\frac{2}{(p-1)^3} - \frac{12p}{(p-1)^4} + \frac{12p}{(p-1)^5} \right] = \frac{1}{16}.$$

Берилган тасвирнинг ёйилмаси узил-кесил қуйидагича бўлади:

$$F(p) = \frac{p^2}{(p^2-1)^3} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(p-1)^3} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{p-1} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{(p+1)^3} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{p+1}.$$

Энди оригинални (3.14) формуладан (ёки 2.2-жадвалдан) фойдаланиб топамиз:

$$f(t) = \frac{1}{8} \cdot \frac{t^2}{2} e^t + \frac{1}{16} t e^t - \frac{1}{16} e^t - \frac{1}{8} \cdot \frac{t^2}{2} e^{-t} + \frac{1}{16} t e^{-t} + \frac{1}{16} e^{-t}.$$

ёки

$$F(p) = \frac{p^2}{(p^2-1)^3} = \frac{p^2-1}{8} \operatorname{sh} t + \frac{t}{8} \operatorname{ch} t.$$

3-дарсхона топшириқлари

1. Қуйидаги тасвирларнинг оригиналларини биринчи ёйиш теоремасидан фойдаланиб топинг:

$$\text{а) } F(p) = \frac{1}{p(1+p^4)}; \quad \text{б) } F(p) = \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p^2}}.$$

$$\text{Ж: а) } f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{4n}}{(4n!)} (-1)^{n+1};$$

$$\text{б) } f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{p^{2n}}{n! (2n!)}.$$

2. Қуйидаги тасвирларнинг оригиналларини иккинчи ёйиш теоремасидан фойдаланиб топинг:

$$\text{а) } F(p) = \frac{p}{(p^2+1)(p^2+2p+2)};$$

$$\text{б) } F(p) = \frac{1}{(p-1)(p^2-4)};$$

$$\text{в) } F(p) = \frac{p^2-1}{p(p^2+4)^2}.$$

$$\text{Ж: а) } f(t) = \frac{1}{5} (\cos t + 2 \sin t) - \frac{1}{5} e^{-t} (\cos t + 3 \sin t);$$

$$\text{б) } f(t) = -\frac{1}{3} e^t + \frac{1}{4} e^{2t} + \frac{1}{12} e^{-2t};$$

$$\text{в) } f(t) = \frac{1}{16} (\cos 2t + 5t \sin 2t - 1).$$

3-мустақил иш топшириқлари

1. Қуйидаги тасвирларнинг оригиналлариини биринчи ёйиш теоремасидан фойдаланиб топинг:

а) $F(p) = p - \sin \frac{1}{p}$;

б) $F(p) = p \ln \left(1 + \frac{1}{p^2}\right)$.

Ж: а) $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{[(2n+1)!]^2}$.

б) $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(n+1)(2n!)}$.

2. Қуйидаги тасвирларнинг оригиналлариини иккинчи ёйиш теоремасидан фойдаланиб топинг:

а) $F(p) = \frac{p+3}{p(p^2-4p+3)}$;

б) $F(p) = \frac{1}{p(p^4-5p^2+4)}$;

в) $F(p) = \frac{p^3+p+1}{(p-1)^2(p^2+1)}$.

Ж: а) $f(t) = 1 - e^{2t} + e^{3t}$; б) $f(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \operatorname{ch} t + \frac{1}{12} \operatorname{ch} 2t$;

в) $f(t) = \frac{3e^t-1}{4}e^t + \frac{1}{4}(\sin t + \cos t)$.

4-§. Оригиналлар ўрамаси, унинг хоссалари. Ўраманинг Лаплас алмаштиришлари

Дастлаб ўрама деб аталадиган тушунча билан танишамиз. $f(t)$ ва $g(t)$ функцияларнинг ўрамаси деб

$$\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \quad (4.1)$$

интегралга айтилади. Ўрама интеграл ости ифодасига кирувчи ва (4.1) интегралнинг юқори чегара ўзгарувчиси бўлган t нинг функция-сидир.

Функцияларнинг ўрамаси

$$f * g = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau,$$

каби белгиланади.

Ўраманинг муҳим хоссаларини келтираамиз:

а) Ўрама $f(t)$ ва $g(t)$ функцияларга нисбатан коммутативдир, яъни

$$f * g = g * f.$$

Ҳақиқатан ҳам, $g * f$ учун интегралда қуйидаги ўрнига қўйишни ба-
жарамиз:

$t - \tau = \tau_1, d\tau = -d\tau_1$; $\tau = 0$ да $\tau_1 = t$ ва $\tau = t$ да $\tau_1 = 0$,
у ҳолда

$$\begin{aligned} g * f &= \int_0^t g(\tau) f(t - \tau) d\tau = - \int_t^0 g(t - \tau_1) f(\tau_1) d\tau_1 = \\ &= \int_0^t f(\tau_1) g(t - \tau_1) d\tau_1 = f * g. \end{aligned}$$

Демак, $g * f = f * g$.

б) Агар $f(t)$ ва $g(t)$ оригиналлар бўлса, у ҳолда $f * g$ йиғма ҳам
оригинал бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $f(x)$ ва $g(x)$ оригиналлар бўлса, у ҳолда $f * g$ учун
оригиналнинг биринчи ва иккинчи шартларни а), б) ни (1-§) текши-
риш осон, в) шартни текшириш учун қуйидагидан фойдаланамиз:
шундай α_1 ва α_2 сонлар мавжудки, улар учун

$$|f(t)| \leq M_1 e^{\alpha_1 t} \text{ ва } |g(t)| \leq M_2 e^{\alpha_2 t}$$

бўлади. α_1 ва α_2 сонларнинг энг каттасини α билан белгилаймиз. У
ҳолда (4.1) ўрамада интеграл остидаги $f(\tau) g(t - \tau)$ ифода ихтиёрий
($0 \leq \tau \leq t$) лар учун қуйидаги тенгсизликни қаноатлантиради:

$$|f(\tau) g(t - \tau)| \leq M_1 e^{\alpha \tau} \cdot M_2 e^{\alpha(t - \tau)} = M e^{\alpha t},$$

бунда $M = M_1 \cdot M_2$. Интегрални баҳолаш ҳақидаги теоремага асосан

$$|f * g| = \left| \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right| \leq M e^{\alpha t} \cdot t \leq M e^{(\alpha+1)t},$$

чунки барча t ларда $t < e^t$.

Шундай қилиб, ўрама оригиналнинг в) шартини ҳам қаноатлан-
тиради, яъни агар берилган $f(t)$ ва $g(t)$ функциялар оригинал бўлса,
у ҳолда ўрама оригинал бўлади.

1-мисол. $f(t) = e^t$ ва $g(t) = t$ функцияларнинг ўрамасини то-
пинг.

Ечиш: Иккита функциянинг ўрамаси таърифига кўра;

$$\begin{aligned} f * g &= \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_0^t e^{\tau} (t - \tau) d\tau = \\ &= \left\{ u = t - \tau, du = -d\tau \right\} = e^{\tau} (t - \tau) \Big|_0^t + \\ &+ \int_0^t e^{\tau} d\tau = -t + e^{\tau} \Big|_0^t = -t + e^t + 1. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, $e^t * t = e^t - t - 1$.

Ўраманинг Лаплас алмаштиришини топишга ўтамиз:

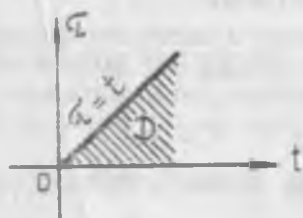
Тасвирларни кўпайтириш теоремаси (оригиналларнинг ўрамаси ҳақидаги теорема). Агар $f(t) \leftarrow F(p)$, $g(t) \leftarrow G(p)$ бўлса, у ҳолда функцияларнинг $f * g$ ўрамасига тасвирларнинг кўпайтмаси мос келади:

$$f * g \leftarrow F(p) \cdot G(p). \quad (4.3)$$

Ўрама учун Лаплас интегралини ёзамиз:

$$f * g \leftarrow \int_0^\infty \left[\int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right] e^{-pt} dt. \quad (4.4)$$

Бу интегрални 2.2-шаклда тасвирланган D чексиз соҳа бўйича олинган икки каррали интеграл сифатида қараймиз. Ташқи интегралда t ўзгарувчи 0 дан ∞ гача, ички интегралда эса τ ўзгарувчи 0 дан t гача ўзгаради. (4.4) икки каррали интегралда интеграллаш тартибини ўзгартирамиз, яъни ташқи интегрални τ ўзгарувчи бўйича 0 дан ∞ гача, ички интегрални эса t ўзгарувчи бўйича τ дан ∞ гача оламиз:



2.2- шакл

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dt \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) e^{-pt} dt &= \\ = \int_0^\infty d\tau \int_\tau^\infty f(\tau) g(t - \tau) e^{-pt} dt. \end{aligned}$$

Ўнг томондаги ички интегралда $t - \tau = t_1$, $dt = dt_1$ ўрнига қўйишни бажарамиз, ҳамда $f(t)$ ва e^{-pt} кўпайтувчилар t_1 интеграллаш ўзгарувчисига боғлиқ бўлмаганлиги учун уларни ички интеграл белгисидан ташқарига чиқарамиз. У ҳолда қуйидаги икки каррали интегрални ҳосил қиламиз:

$$f * g = \int_0^\infty f(\tau) e^{-p\tau} d\tau \int_0^\infty g(t_1) e^{-pt_1} dt_1.$$

Бу эса интегралнинг кўпайтмасидан иборат, чунки ички интеграл τ га боғлиқ эмас. Бу интегралларнинг биринчиси $F(p)$, иккинчиси эса $G(p)$ дан иборат, бу эса

$$f * g \leftarrow F(p) G(p)$$

эканлигини билдиради.

Шундай қилиб, иккита оригинал ўрамасининг тасвири уларнинг тасвирлари кўпайтмасига тенг.

(4.3) формуладан кўпинча берилган тасвирни оригиналлари маълум бўлган кўпайтувчиларга ажратиш мумкин бўлган ҳолда фойдаланилади.

2-мисол. $F(p) = \frac{p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$ функция оригиналлари ўрама ҳақидаги теоремадан фойдаланиб топинг.

Ечиш. $F(p)$ ни кўпайтма кўринишида ифодалаймиз:

$$F(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2} \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = F_1(p) F_2(p).$$

Тасвирлар жадвалидан фойдаланамиз:

$$F_1(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2} \rightarrow \cos \omega t = f(t); \quad F_2(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \rightarrow \sin \omega t = g(t)$$

Шу сабабли $F(p) = F_1(p) F_2(p) \rightarrow f * g$, яъни:

$$\begin{aligned} F(p) &\rightarrow \int_0^t \sin \omega \tau \cdot \cos \omega (t - \tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t [\sin \omega t + \sin (2\omega \tau - \omega t)] d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \left[\tau \sin \omega t - \frac{1}{2\omega} \cos (2\omega \tau - \omega t) \right]_0^t = \frac{1}{2} t \sin \omega t - \frac{1}{2\omega} [\cos (\omega t) - \\ &\quad - \cos (-\omega t)] = \frac{t \sin \omega t}{2}. \end{aligned}$$

Шундай қилиб,

$$F(p) = \frac{p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2} = \frac{t \sin \omega t}{t^2}$$

ни ҳосил қилдик.

3-мисол. Тасвири $F(p) = \frac{p^2}{(p^2 + 1)^2}$ формула билан берилган оригиналлари ўрама ҳақидаги теоремадан фойдаланиб топинг.

Ечиш. $F(p)$ тасвири

$$F(p) = \frac{p}{p^2 + 1} \cdot \frac{p}{p^2 + 1}$$

кўпайтма кўринишида ифодалаймиз, бироқ $\frac{p}{p^2 + 1} \rightarrow \cos t$, шу сабабли

$$f(t) = \cos t \text{ ва } g(t) = \cos t.$$

Демак, изланаётган оригинал

$$\begin{aligned} f * g &= \int_0^t \cos \tau \cos (t - \tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t [\cos t + \cos (2\tau - t)] d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \left[\tau \cos t + \frac{1}{2} \sin (2\tau - t) \right]_0^t = \frac{1}{2} \left(t \cos t + \frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{2} \sin t \right) = \\ &= \frac{1}{2} (t \cos t + \sin t). \end{aligned}$$

Шундай қилиб,

$$F(p) = \frac{p^2}{(p^2 + 1)^2} \rightarrow \frac{1}{2} (t \cos t^2 + \sin t).$$

4- дарсхона топшириқлари

1. Функцияларнинг ўрамасини топинг:

а) $f(t) = t$ ва $g(t) = \cos t$; б) $f(t) = t$ ва $g(t) = \sin t$.

Ж: а) $t * \cos t = 1 - \cos t$; б) $t * \sin t = t - \sin t$.

2. Ўрама теоремасидан фойдаланиб, а) мисолнинг оригиналини топинг, қолган мисолларнинг оригиналини оригинал бўйича дифференциаллаш ёки интеграллаш теоремаларидан фойдаланиб топинг:

$$\text{а) } F(p) = \frac{p!}{p^4 - 1}; \quad \text{в) } F(p) = \frac{1}{p(p^4 - 1)};$$

$$\text{б) } F(p) = \frac{1}{p^4 - 1}.$$

$$\text{Ж: а) } f(t) = \frac{1}{2} (\cosh t - \cos t); \quad \text{в) } f(t) = \frac{1}{2} (\cosh t + \cos t - 2);$$

$$\text{б) } f(t) = \frac{1}{2} (\sinh t - \sin t).$$

4- мустақил иш топшириқлари

Ҳар бир топшириқда берилган мисолларнинг биринчиси а) нинг оригиналини оригиналларнинг ўрамаси ҳақидаги теоремадан фойдаланиб топинг. Қолган мисолларнинг оригиналлари шу а) нинг оригинали бўйича оригинални дифференциаллаш ёки интеграллаш теоремасидан фойдаланиб топинг:

$$1. \text{ а) } F(p) = \frac{1}{(p-1)(p^2+1)}; \quad \text{б) } F(p) = \frac{p}{(p-1)(p^2+1)};$$

$$\text{в) } F(p) = \frac{1}{p(p-1)(p^2+1)}.$$

$$\text{Ж: а) } f(t) = \frac{1}{2} (e^t - \sin t - \cos t); \quad \text{б) } f(t) = \frac{1}{2} (e^t + \sin t - \cos t);$$

$$\text{в) } f(t) = \frac{1}{2} (e^t + \cos t - \sin t - 2).$$

$$2. \text{ а) } F(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+2p+2)}; \quad \text{б) } F(p) = \frac{p}{(p+1)(p^2+2p+2)};$$

$$\text{в) } F(p) = \frac{1}{p(p+1)(p^2+2p+2)}.$$

$$\text{Ж: а) } f(t) = e^{-t}(1 - \cos t); \quad \text{б) } f(t) = e^{-t}(\sin t + \cos t - 1);$$

$$\text{в) } f(t) = \frac{1}{2} e^{-t} (\cos t - \sin t - 2) + \frac{1}{2}.$$

экани келиб чиқади. Биз (5.1) дифференциал тенгламанинг операторли тенгламасини ҳосил қилдик. (5.3) функция тасвири бўладиган $x(t)$ оригинал (5.1) тенгламанинг (5.2) бошланғич шартларни қаноатлантирадиган изланаётган ечими бўлади.

Хусусан, агар барча бошланғич шартлар нолга тенг, яъни

$$x_0 = x'_0 = \dots = x_0^{(n-1)} = 0$$

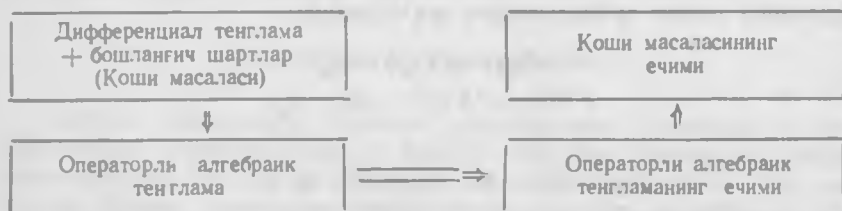
бўлса, у ҳолда $R_{n-1}(p) = 0$ ва

$$X(p) = \frac{F(p)}{Q_n(p)}. \quad (5.4)$$

(5.3) ва (5.4) формулаларда тасвирлардан оригиналларга ўтиб, изланаётган $x(t)$ ечимни ҳосил қиламиз.

Чизиқли дифференциал тенгламаларни операцион усул билан интеграллашнинг классик усуллардан устунлиги шундаки, биз бу ҳолда дифференциал тенгламанинг берилган бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимини дарҳол, (умумий ечимни ҳосил қилишни четлаб ўтиб) топамиз.

Шундай қилиб, Коши масаласини ечиш қуйидаги схема бўйича амалга оширилади:



1-мисол. Агар $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ бўлса, $x'' - 2x' - 3x = e^{3t}$ тенгламанинг ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламадан операторли тенгламага ўтамиз:

$$x(t) \leftarrow \lambda(p),$$

у ҳолда

$$x'(t) \leftarrow pX(p), \quad x''(t) \leftarrow p^2X(p).$$

Тасвирлар жадвалидан $e^{3t} \leftarrow \frac{1}{p-3}$ ни топамиз.

Операторли тенглама қуйидаги кўринишда бўлади:

$$p^2X(p) - 2pX(p) - 3X(p) = \frac{1}{p-3}$$

ёки

$$(p^2 - 2p - 3)X(p) = \frac{1}{p-3}.$$

бундан:

$$X(p) = \frac{1}{(p-3)^2(p+1)}.$$

Рационал касрни энг содда касрларга ёямиз:

$$\frac{1}{(p-3)^2(p+1)} = \frac{A}{(p-3)^2} + \frac{B}{p-3} + \frac{C}{p+1},$$

$$1 = A(p+1) + B(p-3)(p+1) + C(p-3)^2.$$

A, B, C коэффициентларни қуйидаги тенгламалар системасидан топамиз:

$$\begin{cases} p = -1 & 1 = 16C, \\ p = +3 & 1 = 4A, \\ p^2 & 0 = B + C. \end{cases}$$

Демак,

$$A = \frac{1}{4}, C = \frac{1}{16}, B = -\frac{1}{16}.$$

Шундай қилиб,

$$X(p) = \frac{1}{4(p-3)^2} - \frac{1}{16(p-3)} + \frac{1}{16(p+1)}.$$

Тасвирлар жадвалидан фойдаланиб хусусий ечимни (оригинални) топамиз:

$$x(t) = \frac{1}{4} t e^{3t} - \frac{1}{16} e^{3t} + \frac{1}{16} e^{-t}.$$

2-мисол. $x'' - 3x' + 2x = t e^t$ тенгламани $x(0) = 1, x'(0) = -2$ бошланғич шартларда интегралланг.

Ечиш. $x(t) \leftarrow X(p)$ деймиз, у ҳолда берилган бошланғич шартларга асосан

$$\begin{aligned} x'(t) &\leftarrow pX(p) - 1, \\ x''(t) &\leftarrow p^2X(p) - p + 2. \end{aligned}$$

Тасвирлар жадвалидан тенгламанинг биринчи қисмининг тасвирини топамиз:

$$t e^t \leftarrow \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Берилган тенгламада барча функцияларни уларнинг тасвирлари билан алмаштириб, қуйидаги операторли тенгламани ҳосил қиламиз:

$$(p^2X(p) - p + 2) - 3(pX(p) - 1) + 2X(p) = \frac{1}{(p-1)^2}$$

ёки

$$X(p)(p^2 - 3p + 2) - p + 5 = \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Бу тенгламадан $X(p)$ ни аниқлаймиз:

$$X(p) = \frac{p-5}{p^2-3p+2} + \frac{1}{(p-1)^2(p^2-3p+2)}$$

ёки

$$X(p) = \frac{p^3 - 7p^2 + 11p - 4}{(p-1)^2(p-2)}.$$

$X(p)$ ning оригиналини иккинчи ёйиш теоремасидан фойдаланиб аниқлаймиз. Бунинг учун дастлаб рационал касрн энг содда касрларга ёзамиз:

$$X(p) = \frac{A_{11}}{(p-1)^2} + \frac{A_{12}}{(p-1)^2} + \frac{A_{13}}{p-1} + \frac{A_{21}}{p-2}.$$

A_{11} , A_{12} , A_{13} , A_{21} коэффициентларни (3.11) формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$A_{11} = \frac{1}{0!} \lim_{p \rightarrow 1} (p-1) \frac{p^3 - 7p^2 + 11p - 4}{(p-1)^2(p-2)} = \lim_{p \rightarrow 1} \frac{p^3 - 7p^2 + 11p - 4}{p-2} = -1,$$

$$A_{12} = \frac{1}{1!} \lim_{p \rightarrow 1} \left(\frac{p^3 - 7p^2 + 11p - 4}{p-2} \right) = \lim_{p \rightarrow 1} \left(\frac{3p^2 - 14p + 11}{p-2} - \frac{p^3 - 7p^2 + 11p - 4}{(p-2)^2} \right) = -1,$$

$$\begin{aligned} A_{13} &= \frac{1}{2!} \lim_{p \rightarrow 1} \left(\frac{3p^2 - 14p + 11}{p-2} - \frac{p^3 - 7p^2 + 11p - 4}{(p-2)^2} \right)' = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow 1} \left(\frac{6p - 14}{p-2} - \frac{3p^2 - 14p + 11}{p-2} - \frac{3p^2 - 14p + 11}{(p-2)^2} + \frac{2(p^3 - 7p^2 + 11p - 4)}{(p-2)^3} \right) = 3, \end{aligned}$$

$$A_{21} = \frac{1}{0!} \lim_{p \rightarrow 2} (p-2) \frac{p^3 - 7p^2 + 11p - 4}{(p-1)^2(p-2)} = \lim_{p \rightarrow 2} \frac{p^3 - 7p^2 + 11p - 4}{(p-1)^2} = -2.$$

Шундай қилиб,

$$X(p) = -\frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{3}{p-1} - \frac{2}{p-2}.$$

Тасвирлар жадвалидан фойдаланиб, тенгламанинг ечимини ҳосил қиламиз:

$$x(t) = -\frac{t^2}{2} e^t - t e^t + 3e^t - 2e^{2t} \text{ ёки } x_1(t) = e^t \left(3 - t - \frac{t^2}{2} \right) - 2e^{2t}.$$

3-мисол. $x'' + 4x = 2\sin 2t$ тенгламани $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$ бошланғич шартларда интегралланг.

Ечиш. Тасвирлар жадвалига кўра

$$2\sin 2t \leftarrow \frac{4}{p^2 + 4}.$$

$x(t) \leftarrow X(p)$ десак, бошланғич шартларга асосан:

$$x'(t) \leftarrow pX(p) + 1, \quad x''(t) \leftarrow p^2X(p) + p.$$

Ушбу операторли тенгламани тузамиз:

$$p^2X(p) + p + 4X(p) = \frac{4}{p^2 + 4}.$$

ёки

$$X(p)(p^2 + 4) + p = \frac{4}{p^2 + 4}.$$

Бундан

$$X(p) = \frac{4}{(p^2 + 4)^2} - \frac{p}{p^2 + 4}.$$

Ечимни топиш учун бу тенгликнинг ўнг томонини умумий махражга келтириб ўтирмаймиз, чунки иккинчи қўшилувчи учун оригинал маълум:

$$\frac{p}{p^2 + 4} \rightarrow \cos 2t,$$

биринчи қўшилувчинини оригиналларнинг йиғиндиси ҳақидаги теоремадан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{2}{p^2 + 4} \rightarrow \sin 2t.$$

Шу сабабли

$$\frac{4}{(p^2 + 4)^2} = \frac{2}{p^2 + 4} - \frac{2}{p^2 + 4} \rightarrow \int_0^t \sin 2\tau \sin 2(t - \tau) d\tau.$$

Сўнгги интегрални ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \int_0^t \sin 2\tau \sin 2(t - \tau) d\tau &= \frac{1}{2} \int_0^t (\cos(4\tau - 2t) - \cos 2t) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \sin(4\tau - 2t) - \tau \cos 2t \right) \Big|_0^t = \frac{\sin 2t}{4} - \frac{t}{2} \cos 2t \end{aligned}$$

Бундан узил-кесил

$$X(p) \rightarrow x(t) = \frac{\sin 2t}{4} - \frac{t}{2} \cos 2t - \cos 2t.$$

Шундай қилиб, берилган тенгламанинг ечими қуйидагича бўлади:

$$x(t) = \frac{1}{4} \sin 2t - \frac{1}{2} (t + 2) \cos 2t.$$

4-мисол. $x'' + 2x' + 5x = te^t$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Умумий ечимни топиш учун қуйидаги ихтиёрий бошланғич шартларни оламиз:

$$x(0) = C_1, \quad x'(0) = C.$$

$x(t) \leftarrow X(p)$ деб олиб, бошланғич шартларнинг ихтиёрийлигига асосан

$$x'(t) \leftarrow pX(p) - C_1, \quad x''(t) \leftarrow p^2X(p) - C_1p - C_2$$

ни топамиз. Тасвирлар жадвалидан:

$$te^t \leftarrow \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Қуйидаги операторли тенгламани тузамиз:

$$p^3 X(p) - C_1 - C_2 + 2p X(p) - 2C_1 + 5X(p) = \frac{1}{(p-1)^2}$$

ёки

$$(p^2 + 2p + 5) X(p) - C_1(p+2) - C_2 = \frac{1}{(p-1)^2},$$

бундан

$$X(p) = \frac{C_1(p+2)}{p^2 + 2p + 5} + \frac{C_2}{p^2 + 2p + 5} + \frac{1}{(p-1)^2(p^2 + 2p + 5)}.$$

Тасвирлар жадвалидан фойдаланиб, бир неча айний алмаштиришлардан сўнг биринчи икки қўшилувчининг оригиналини топамиз:

$$C_1 \frac{p+2}{p^2 + 2p + 5} = C_1 \frac{(p+1)+1}{(p+1)^2 + 2^2} = C_1 \left(\frac{p+1}{(p+1)^2 + 2^2} + \frac{1}{2} \frac{2}{(p+1)^2 + 2^2} \right) \rightarrow \\ \rightarrow C_1 (e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t) = C_1 e^{-t} (\cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t);$$

$$C_2 \frac{1}{p^2 + 2p + 5} = C_2 \frac{1}{(p+1)^2 + 2^2} = \frac{C_2}{2} \frac{2}{(p+1)^2 + 2^2} \rightarrow \frac{C_2}{2} e^{-t} \sin 2t.$$

Сўнгги қўшилувчининг оригиналини излаш учун уни интеграл ҳисобда рационал касрларни интеграллашда қўлланиладиган одатдаги қондалар бўйича энг содда касрларга ёямиз:

$$\frac{1}{(p-1)^2(p^2 + 2p + 5)} = \frac{A}{(p-1)^2} + \frac{B}{p-1} + \frac{Cp+D}{p^2 + 2p + 5},$$

бундан

$$1 = A(p^2 + 2p + 5) + p(p-1)(p^2 + 2p + 5) + (Cp+D)(p-1)^2.$$

Ушбу

$$\begin{array}{l|l} p = +1 & 1 = 8A, \\ p^3 & 0 = B + C, \\ p^2 & 0 = A - B + 2B + D - 2C, \\ p^0 & 1 = 5A - 5B + D, \end{array}$$

тенгламалар системасидан A, B, C, D коэффициентларни топамиз:

$$A = \frac{1}{8}, B = -\frac{1}{16}, C = \frac{1}{16}, D = \frac{1}{16}.$$

Шундай қилиб,

$$\frac{1}{(p-1)^2(p^2 + 2p + 5)} = \frac{1}{8} \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{16} \frac{1}{p-1} + \frac{1}{16} \frac{p+1}{(p+1)^2 + 4} \rightarrow \\ \rightarrow \frac{1}{8} \cdot te^t - \frac{1}{16} e^{t'} + \frac{1}{16} e^{-t} \cos 2t.$$

Барча қўшилувчиларнинг оригиналларини жамлаб, берилган дифференциал тенгламанинг ечимини ҳосил қиламиз:

$$x(t) = \frac{2t-1}{16} e^t + e^{-t} \left(C_1 + \frac{1}{16} \right) \cos 2t + \frac{C_1 + C_2}{2} \sin 2t.$$

ёки

$$x(t) = \frac{2l-1}{16} e^t + e^{-t} (\overline{C}_1 \cos 2t + \overline{C}_2 \sin 2t),$$

бу ерда

$$\overline{C}_1 = C_1 + \frac{1}{16}, \quad \overline{C}_2 = \frac{C_2 + C_3}{2}.$$

Бир қатор механика ва физика масалаларининг операцияларини ҳисоб усуллари билан ечилишини келтирайлик.

5.1.1. Гармоник тебранма ҳаракат. Оғирлиги P бўлган юк тинч турган ҳолатидаги узунлиги l бўлган вертикал пружинага осилган. Юк бироз пастга тортилиб, кейин қўйиб юборилади. Пружина массаси ва ҳаво қаршилигини ҳисобга олмай, юкнинг ҳаракат қонунини топинг.

Ечиш. Ох ўқни юк осилган нуқта орқали пастга вертикал йўналтирамиз. Координаталар боши O ни юк мувозанатда бўлган ҳолатда, яъни юкнинг оғирлиги пружинанинг реакция кучи билан мувозанатлашган нуқтада оламиз (2.3-шакл).

λ — пружинанинг айни пайтдаги узайиши, $\lambda_{ст}$ эса статик узайиш, яъни чўзилмаган пружина охиридан мувозанат ҳолатигача бўлган катталиқ. x ҳолда $\lambda = \lambda_{ст} + x$ ёки $\lambda - \lambda_{ст} = x$.

Ҳаракатнинг дифференциал тенгламасини Ньютоннинг иккинчи қонуни $\vec{F} = m\vec{a}$ дан топамиз, бу ерда $m = \frac{P}{g}$ — юк массаси, a — ҳаракат тез-

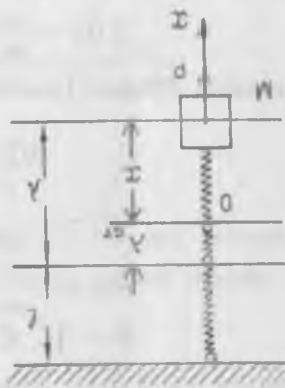
ланиши, F — юкка қўйилган кучларнинг тенг таъсир этувчиси. Қўрилайтган ҳолда тенг таъсир этувчи куч пружинанинг таранглик кучи ва оғирлик кучи йиғиндисидан иборат.

Гук қонунига биноан пружинанинг таранглик кучи унинг узайишига пропорционал, яъни — $c\lambda$ га тенг, бунда c — ўзгармас пропорционаллик коэффициент, у пружинанинг бикрлиги дейилади.

Шунинг учун ҳаракат дифференциал тенгламаси қуйидаги қўрнишда бўлади:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = c\lambda + p.$$

Мувозанат ҳолатида пружинанинг таранглик кучи оғирлик кучи билан мувозанатлашгани учун $P = c\lambda_{ст}$ бўлади. Дифференциал тенгламага P нинг ифодасини қўйиб ва $\lambda - \lambda_{ст}$ ни x билан белгилаб, тенгламани



2.3-шакл

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx$$

кўринишда ёки $\frac{c}{m} = k^2$ орқали белгилаб,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0$$

кўринишга келтирамыз.

Бу тенглама юкнинг эркин тебранма ҳаракати тенгламаси ёки гармоник осцилляторнинг тенгламаси дейилади. Бу коэффициентлари ўзгармас бўлган иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенглама. Келтирилган тенгламани операцион усул билан ечайлик. Бошланғич шартлар

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0$$

кўринишда бўлсин.

Оператор тенглама

$$[p^2 X(p) - (x_0 p + v_0)] + k^2 X(p) = 0$$

кўринишда, унинг оператор ечими эса

$$X(p) = \frac{x_0 p + v_0}{p^2 + k^2} = x_0 \frac{p}{p^2 + k^2} + v_0 \frac{1}{p^2 + k^2}.$$

кўринишда бўлади. Изланаётган хусусий ечим

$$x(t)_0 = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt$$

ёки

$$x(t) = A \sin(kt + \alpha)$$

дан иборат; бунда

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{k}\right)^2}, \quad \alpha = \arctg\left(\frac{x_0 k}{v_0}\right).$$

Агар $v_0 = 0$ бўлса, $x(t) = x_0 \cos kt$ ёки $x(t) = x_0 \sin\left(kt + \frac{\pi}{2}\right)$ бўлади.

5.1.2. Сўнувчи тебранма ҳаракат. Юкнинг 5.1-масаладаги шартларда ҳаракат қонунини топинг, бу ерда ҳаракат тезлигига пропорционал бўлган ҳаво қаршилигини ҳисобга олинг.

Ечиш. Бу ерда юкка таъсир этадиган кучлар қаторига ҳавонинг қаршилиқ кучи $\vec{R} = -\mu \vec{v}$ (манфий ишора $\vec{R}$ куч $\vec{v}$ тескари йўналганлигини билдиради) қўшилади. Ҳаракатнинг дифференциал тенгламасининг Ox ўққа проекцияси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx - \mu \frac{dx}{dt},$$

$$\text{ёки } \frac{c}{m} = k^2, \quad \frac{\mu}{m} = 2\pi \text{ деб,}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2x = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бошланғич шартлар

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0$$

лардан иборат.

Оператор тенглама

$$[p^2X(p) - (x_0p + v_0)] + 2n[pX(p) - x_0] + k^2X(p) = 0$$

кўринишда, унинг оператор ечими эса

$$X(p) = \frac{x_0p + v_0 + 2nx_0}{p^2 + 2np + k^2} = x_0 \frac{p}{p^2 + 2np + k^2} + (v_0 + 2nx_0) \frac{1}{p^2 + 2np + k^2}$$

кўринишда бўлади.

$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ белгилаш киритиб, $(k^2 - n^2) > 0$ да изланаётган хусусий ечимни ёзамиз:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{-nt} \left(\cos k_1 t - \frac{n}{k_1} \sin k_1 t \right) + \frac{v_0 + 2nx_0}{k_1} e^{-nt} \sin k_1 t = \\ &= e^{-nt} \left(x_0 \cos k_1 t + \frac{v_0 + nx_0}{k_1} \sin k_1 t \right). \end{aligned}$$

Қуйидаги

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + nx_0}{k_1} \right)^2}, \quad \alpha = \arctg \frac{x_0 k_1}{v_0 + nx_0}$$

белгилашни киритиб, ечимни

$$x(t) = A e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Агар $(k^2 - n^2) < 0$ бўлса, у ҳолда $h = \sqrt{n^2 - k^2}$ деб ечимни

$$x(t) = e^{-nt} (x_0 \operatorname{ch}(ht) + \frac{v_0 + nx_0}{h} \operatorname{sh}(ht))$$

кўринишда ҳосил қиламиз.

Агар $x^2 - n^2 = 0$ бўлса, у ҳолда оператор ечим ушбу кўриниш-ни олади:

$$\begin{aligned} X(p) &= x_0 \frac{p}{(p+n)^2} + (v_0 + 2nx_0) \cdot \frac{1}{(p+n)^2} = x_0 \frac{p+n-n}{(p+n)^2} + \\ &+ \frac{v_0 + 2nx_0}{(p+n)^2} = \frac{x_0}{p+n} + \frac{v_0 + nx_0}{(p+n)^2}. \end{aligned}$$

бундан оригиналга ўтсак,

$$x(t) = x_0 e^{-nt} + (v_0 + nx_0) t e^{-nt} = e^{-nt} [x_0 + (v_0 + nx_0)t]$$

ни ҳосил қиламиз.

5.1.3. Муҳитнинг қаршилиги ҳисобга олинмагандаги мажбурий тебранма ҳаракат. Узунлиги l бўлган пружинага P оғирликдаги юк осилган. Юкка қўзғатувчи $Q \sin \omega t$ даврий куч таъсир қилади, бунда

Q ва p — ўзгармаслар. Пружинанинг массасини ва муҳитнинг қаршилигини ҳисобга олмай юкнинг ҳаракат қонунини топинг

Ечиш. 5.1-мисолдагига ўхшаш қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$m = \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx + Q \sin \omega t.$$

$k^2 = \frac{c}{m}$, $q = \frac{Q}{m}$ белгилашлар киритсак, тенгламани

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = q \sin \omega t$$

кўринишда ёза оламиз. Бу тенглама ўзгармас коэффициентли иккинчи тартибли бир жинсли бўлмаган чизиқли тенгламадир. Бошланғич шартлар

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0$$

лардан иборат бўлсин.

Оператор тенглама

$$[p^2 X(p) - (px_0' - v_0)] + k^2 X(p) = \frac{q\omega}{p^2 - \omega^2}$$

кўринишда, оператор ечими эса

$$X(p) = \frac{q\omega}{(p^2 + k^2)(p^2 + \omega^2)} + \frac{x_0 p + v_0}{p^2 + k^2}$$

кўринишда бўлади.

Оригиналларга ўтишда қуйидаги икки ҳолни кўрамыз:

1- ҳол. $\omega^2 = k^2$. Бу ҳолда

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{q\omega}{k^2 - \omega^2} \left(\frac{1}{\omega} \sin \omega t - \frac{1}{k} \sin kt \right) + x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt = \\ &= \frac{q}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t + x_0 \cos kt + \left(\frac{v_0}{k} - \frac{q\omega}{k(k^2 + \omega^2)} \right) \sin kt = \\ &= \frac{q}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t + x_0 \cos kt + \frac{1}{k} \left(v_0 - \frac{q\omega}{k^2 - \omega^2} \right) \sin kt. \end{aligned}$$

Қуйидаги

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{1}{k^2} \left(v_0 - \frac{q\omega}{k^2 - \omega^2} \right)^2}, \quad \alpha = \arctg \frac{x_0 k}{v_0 - q\omega(k^2 - \omega^2)}$$

белгилашларни киритиб, ечимни

$$x(t) = \frac{q}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t + A \sin(kt + \alpha)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

2- ҳол. $\omega^2 = k^2$. Бу ҳолда оператор ечим қуйидагича бўлади:

$$X(p) = \frac{q\omega}{(p^2 + k^2)^2} + \frac{x_0 p + v_0}{p^2 + k^2},$$

хусусий ечим эса

$$x(t) = -\frac{q}{2k} t \cos kt + x_0 \cos kt + \frac{1}{k} \left(v_0 + \frac{q}{2k} \right) \sin kt.$$

кўринишда бўлади.

Агар

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{1}{k^2} \left(v_0 + \frac{q}{2k} \right)^2}, \quad \alpha = \arctg \frac{x_0 k}{v_0 + \frac{q}{2k}} = \arctg \frac{2x_0 k^2}{q + 2kv_0}$$

белгилаш киритсак, хусусий ечимни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$x(t) = -\frac{q}{2k} t \cos kt + A \sin(kt + \alpha).$$

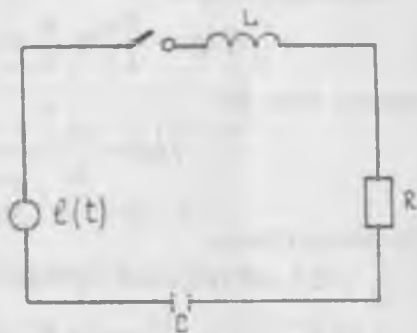
5.1.4. Электр занжиридаги тебранишлар ҳақидаги масала.

Электр юритувчи кучи $e(t)$ га тенг бўлган манбага кетма-кет уланган L индуктивлик ғалтаги, $R_{\text{ом}}$ қаршилик ва C сифимдан иборат контур уланган. Агар бошланғич пайтда контурдаги ток ва конденсатор заряди нолга тенг бўлса, занжирдаги i токни t вақтнинг функцияси сифатида топинг (2.4-шакл).

Ечиш. Кирхгоф қонунига биноан занжирдаги электр юритувчи куч индуктивликдаги, қаршиликдаги ва сифимдаги кучланишлар пасайиши йиғиндисига тенг:

$$e(t) = u_L + u_R + u_C,$$

улар i ток билан қуйидаги муносабатлар орқали боғланган:



2.4-шакл

$$u_L = L \frac{di}{dt}, \quad u_R = Ri, \quad u_C = \frac{1}{c} \int_0^t i(\tau) d\tau.$$

Эслатма. Бу ерда охирги тенглик ток ва конденсатор заряди орасидаги муносабатдан топилади: $i = \frac{dq}{dt}$, бундан $q = \int_0^t i(\tau) d\tau + q_0$; сўнгра $u_C = \frac{q}{c}$ бўлгани учун $u_C = \frac{1}{c} \int_0^t i(\tau) d\tau + \frac{q_0}{c}$ берилган масалада шартга кўра $q_0 = 0$.

Шундай қилиб, қуйидаги тенглама ҳосил бўлади:

$$e(t) = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau.$$

Бу интегро-дифференциал тенгламалар, у тенгламаларнинг энг мураккаб турларидан бирига мансубдир. Лекин мазкур ҳолда унн t бўйича дифференциаллаб, ўзгармас коэффициентли иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламага ўтиш мумкин:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{de}{dt}.$$

Икки ҳолни кўрамиз.

1. $e(t) = E = \text{const.}$ Бу ҳолда $\frac{de}{dt} = 0$ ва охириги тенглама бир жинсли

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

тенгламага айланади. Бу дифференциал тенглама ток учун механик тебранишларнинг муҳитнинг қаршилигини ҳисобга олингандаги тенг-ламасига ўхшайди. Уни

$$i(0) = 0, \quad i'(0) = \frac{E}{L}$$

бошланғич шартларда операцион усул ёрдамида ечайлик.

Оператор тенглама

$$\left[p^2 I(p) - \frac{E}{L} \right] + \frac{R}{L} p I(p) + \frac{1}{LC} I(p) = 0,$$

оператор ечим эса

$$I(p) = \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC}}$$

кўринишда бўлади.

$\frac{R}{L} = 2\delta$ деб белгилаб, қуйидаги уч ҳолни кўрайлик:

1-ҳол. $\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = \omega_1^2 > 0$. Бу ҳолда тасвирдан оригиналга ўтиб $i(t)$ ток учун сўнувчи электр тебранишларни ифодаловчи қуйи-даги

$$i(t) = \frac{E}{\omega_1 L} e^{-\delta t} \sin \omega_1 t$$

ечимни ҳосил қиламиз.

2-ҳол. $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} = \beta^2 > 0$. Бу ҳолда

$$i(t) = \frac{E}{\beta L} e^{-\delta t} \sin \beta t.$$

i ток даврий бўлмайди ва занжирда ҳеч қандай тебранишлар содир бўлмайди.

3-ҳол. $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} = 0$. Бу ҳолда оператор ечим

$$I(p) = \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{(p + \delta)^2},$$

демак,

$$i(t) = \frac{E}{L} t e^{-\delta t},$$

яъни бу ҳолда ҳам $i(t)$ ток даврий бўлмай, электр тебранишлар бўлмайди.

II. $e(t) = E \sin \omega t$. Бу ҳолда $\frac{de}{dt} = E \omega \cos \omega t$ ва қуйидаги чизикли иккинчи тартибли бир жинсли бўлмаган тенглама ҳосил бўлади:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{E}{L} \omega \cos \omega t$$

Бошланғич шартлар қуйидагича:

$$i(0) = 0; \quad i'(0) = 0$$

бўлсин, $\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L} = \omega_1^2 > 0$ бўлган ҳолни кўрайлик. Оператор тенглама

$$p^2 I(p) + \frac{R}{L} p I(p) + \frac{1}{LC} I(p) = \frac{E \omega}{L} \cdot \frac{p}{p^2 + \omega^2},$$

оператор ечим эса

$$I(p) = \frac{E \omega}{L} \cdot \frac{p}{\left(p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC}\right)(p^2 + \omega^2)}.$$

Қуйидаги

$$\frac{R}{2L} = \delta, \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2, \quad \omega_1^2 = \omega_0^2 - \delta^2$$

белгилашларни киритиб, тасвирдан оригиналга ўтсак:

$$i(t) = \frac{E \omega}{L} \cdot \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2) + 4 \delta^2 \omega^2} \left\{ e^{-\delta t} [(\omega^2 - \omega_0^2) \cos \omega t - \frac{\delta}{\omega_1} (\omega^2 + \omega_0^2) \sin \omega_1 t] - (\omega^2 - \omega_0^2) \cos \omega t + 2 \delta \omega \sin \omega t \right\}.$$

Яна қуйидаги

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \omega^2 - \frac{1}{LC} = \frac{\omega}{L} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = \frac{\omega}{L} G, \quad C = \omega L - \frac{1}{\omega C},$$

$$(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4 \delta^2 \omega^2 = \frac{\omega^2}{L^2} G^2 + \frac{R^2}{L^2} \omega^2 = \frac{\omega^2}{L^2} (G^2 + R^2) = \frac{\omega^2}{L^2} Z^2,$$

$$Z^2 = G^2 + R^2,$$

$$\omega^2 + \omega_0^2 = \omega^2 + \frac{1}{LC} = \frac{\omega}{L} \left(\omega L + \frac{1}{\omega C} \right) = \frac{\omega}{L} G_0, \quad G_0 = \omega L + \frac{1}{\omega C}$$

белгилашларни киритсак, у ҳолда

$$i(t) = \frac{EL}{\omega Z^2} \left\{ e^{-\delta t} \left[\frac{\omega}{L} G \cos \omega_1 t - \frac{\delta}{\omega_1} \frac{\omega}{L} G_0 \sin \omega_1 t \right] - \right. \\ \left. - \frac{\omega}{L} G \cos \omega t + 2 \delta \omega \sin \omega t \right\} = \\ = \frac{E}{Z^2} \left\{ \frac{e^{-\delta t}}{\omega_1} [\omega_1 G \cos \omega_1 t - \delta G_0 \sin \omega_1 t] - G \cos \omega t - R \sin \omega_1 t \right\}$$

Энди

$$\frac{R}{Z} = \cos \gamma, \quad \frac{G}{Z} = \sin \gamma \\ \frac{\omega_1 G}{\sqrt{\omega_1^2 G^2 + \delta^2 G_0^2}} = \sin \gamma_1, \quad \frac{\delta G_0}{\sqrt{\omega_1^2 G^2 + \delta^2 G_0^2}} = \cos \gamma_1,$$

демак, у ҳолда

$$i(t) = \frac{-E \sqrt{\omega_1^2 G^2 + \delta^2 G_0^2}}{\omega_1 Z^2} e^{-\delta t} \sin(\omega_1 t - \gamma_1) + \frac{E}{Z} \sin(\omega_1 t - \gamma).$$

Қуйидаги

$$\frac{\sqrt{\omega_1^2 G^2 + \delta^2 G_0^2}}{Z} = \omega_0$$

тенглик ўринли эканлини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам, илдиш остидаги ифодани қуйидагича ўзгартирсак,

$$\omega_1^2 G^2 + \delta^2 G_0^2 = (\omega_0^2 - \delta^2) G^2 + \delta G_0^2 = \omega_0^2 G^2 + \\ + \delta^2 (G_0^2 - G^2) = \omega_0^2 G^2 + \delta^2 (G_0 + G)(G_0 - G) = \\ = \omega_0^2 G^2 + \frac{R^2}{4L^2} \cdot 2\omega L \cdot \frac{2}{\omega C} = \omega_0^2 G^2 + \frac{1}{LC} R^2 = \\ = \omega_0^2 (G^2 + R^2) = \omega^2 Z^2$$

ни ҳосил қиламиз, чунки $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$.

Демак,

$$\frac{\sqrt{\omega_1^2 G^2 + \delta^2 G_0^2}}{Z} = \frac{\omega_0 Z}{Z} = \omega_0.$$

Юқоридагиларни эътиборга олиб узнл-кесил қуйидаги

$$i(t) = \frac{E \omega_0}{\omega_1 Z} e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_1 t - \gamma_1) + \frac{E}{Z} \sin(\omega t - \gamma)$$

ни ҳосил қиламиз.

5.2. Ўзгармас коэффициентли чизикли дифференциал тенгламаларни ечишнинг операцион усулларини бундай тенгламалар системаларини ечишга ҳам татбиқ қилиш мумкин. Фарқ шундан иборатки, битта оператор тенглама ўрнига изланаётган функцияларнинг тас-

вирларига нисбатан чизиқли алгебраик оператор тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Бундай берилган дифференциал тенгламалар системасини олдиндан ўзгартириб олишга зарурат қолмайди, масалан, уларни нормал шаклга келтириш зарур эмас. Берилган ҳар қандай системани, у қандай берилган бўлса, шу кўринишда операцион усул ёрдамида ечиш мумкин.

Биринчи тартибли тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\left. \begin{aligned} x_1'(t) + \sum_{k=1}^n a_{1k} x_k(t) &= f_1(t), \\ x_2'(t) + \sum_{k=1}^n a_{2k} x_k(t) &= f_2(t), \\ &\dots \dots \dots \\ x_n'(t) + \sum_{k=1}^n a_{nk} x_k(t) &= f_n(t). \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Қуйидаги

$$x_k(0) = x_{k0}, \quad (k = \overline{1, n}) \quad (5.6)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимни топиш талаб қилинсин, бунда

$$L\{f_k\} = F_k(p), \quad L\{x_k(t)\} = X_k(p).$$

Оператор тенгламалар системаси қуйидаги

$$\left. \begin{aligned} pX_1(p) + \sum_{k=1}^n a_{1k} X_k(p) &= F_1(p) + x_{10}, \\ pX_2(p) + \sum_{k=1}^n a_{2k} X_k(p) &= F_2(p) + x_{20}, \\ &\dots \dots \dots \\ pX_n(p) + \sum_{k=1}^n a_{nk} X_k(p) &= F_n(p) + x_{n0}. \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

кўринишда бўлади. (5.7) алгебраик чизиқли тенгламалар системасини $X_k(p)$ тасвирларга нисбатан ечиб, сўнгра топилган тасвирлардан $x_k(t)$ оригиналларга ўтиш керак, улар биргаликда (5.5) дифференциал тенгламалар системасининг (5.6) бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини беради.

Ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламалар системаларини операцион ҳисоб усуллари ёрдамида ечишга мисоллар кўраимиз.

5-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x' + 3x - 4y = 9e^{2t}, \\ 2x + y' - 3y = 3e^{2t}, \end{cases}$$

чизиқли дифференциал тенгламалар системасини

$$x(0) = 2, \quad y(0) = 0$$

бошланғич шартларда ечинг.

Е ч и ш. Қуйидагига эгамиз:

$$e^{2t} \leftarrow \frac{1}{p-2}$$

$x(t) \leftarrow X(p)$, $y(t) \leftarrow Y(p)$ деб оламиз. Бошланғич шартларга асосан

$$x'(t) \leftarrow p X(p) - 2, \quad y'(t) \leftarrow Y(p)$$

операторли тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{cases} pX(p) - 2 + 3X(p) - 4Y(p) = \frac{9}{p-2}, \\ 2X(p) + pY(p) - 3Y(p) = \frac{3}{p-2} \end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases} X(p)(p+3) - 4Y(p) - 2 = \frac{9}{p-2}, \\ 2X(p) + Y(p)(p-3) = \frac{3}{p-2} \end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases} X(p)(p+3) - 4Y(p) = \frac{2p+5}{p-2}, \\ 2X(p) + Y(p)(p-3) = \frac{3}{p-2} \end{cases}$$

Бу системани $X(p)$ ва $Y(p)$ га нисбатан ечиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$X(p) = \frac{2p^3 - p - 3}{(p^2 - 1)(p - 2)}, \quad Y(p) = -\frac{p + 1}{(p^2 - 1)(p - 2)}$$

ёки

$$X(p) = \frac{2p-3}{(p-1)(p-2)}, \quad Y(p) = -\frac{1}{(p-1)(p-2)}$$

Топилган тасвирларни энг содда касрларга ёйиб, қуйидагини топамиз:

$$X(p) = \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-2}, \quad Y(p) = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p-2}$$

Тасвирлар жадвалидан:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^t + e^{2t}, \\ y(t) &= e^t - e^{2t}. \end{aligned}$$

6-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x' + 2x + y' = 0, \\ 3x' - y'' + 2y = 0 \end{cases}$$

бир жинсли системанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Системанинг умумий ечимини топиш талаб этилаётганлиги учун бошланғич шартларни қуйидаги кўринишда оламиз:

$$x(0) = C_1, \quad x'(0) = C_2, \quad y(0) = C_3, \quad y'(0) = C_4$$

$x(t) \leftarrow X(p)$, $y(t) \leftarrow Y(p)$ деб олиб, бошланғич шартларга асосан қуйидагиларни топамиз:

$$\begin{aligned} x'(t) &\leftarrow pX(p) - C_1, & y'(t) &\leftarrow pY(p) - C_3, \\ x''(t) &\leftarrow p^2X(p) - C_1p - C_2, & y''(t) &\leftarrow p^2Y(p) - C_3p - C_4. \end{aligned}$$

Операторли тенгламалар системасига ўтсак:

$$\begin{cases} (p^2 + 2)X(p) + pY(p) = C_1p + C_2 + C_3, \\ 3pX(p) - (p^2 - 2)Y(p) = -C_3p + 3C_1 - C_4. \end{cases}$$

Бу системани ечиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{(p^3 + p)C_1 + (p^2 - 2)C_2 - 2C_3 - pC_4}{(p^3 - 1)(p^3 + 4)}, \\ Y(p) &= \frac{-6C_1 + 3pC_2 + (p^2 + 5p)C_3 + (p^2 + 2)C_4}{(p^3 - 1)(p^3 + 4)}. \end{aligned}$$

Энди оригиналларни топамиз. Қуйидагига эгамиз:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p^3 - 1)(p^3 + 4)} &= \frac{1}{5} \frac{(p^3 + 4) - (p^3 - 1)}{(p^3 - 1)(p^3 + 4)} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{p^3 - 1} - \frac{1}{p^3 + 4} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{5} \left(\operatorname{sh} t - \frac{1}{2} \sin 2t \right). \end{aligned}$$

Бундан, оригинални дифференциаллаш қондасига кура, кетма-кет қуйидагиларни топамиз:

$$\begin{aligned} \frac{p}{(p^3 - 1)(p^3 + 4)} &\rightarrow \frac{1}{5} (\operatorname{ch} t - \cos 2t), \\ \frac{p^2}{(p^3 - 1)(p^3 + 4)} &\rightarrow \frac{1}{5} (\operatorname{sh} t + 2 \sin 2t), \\ \frac{p^3}{(p^3 - 1)(p^3 + 4)} &\rightarrow \frac{1}{5} (\operatorname{ch} t + 4 \cos 2t). \end{aligned}$$

Чап томонларда $f(0)$ кўринишдаги қўшилувчилар, $f(0) = 0$ бўлганлиги учун, пайдо бўлмайди. Ҳосил қилинган формулалардан фойдаланиб, $X(p)$ ва $Y(p)$ нинг юқорида келтирилган ифодалари бўйича берилган системанинг умумий ечимини топамиз:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2C_1 - C_4}{5} \operatorname{ch} t - \frac{C_2 + 2C_3}{5} \operatorname{sh} t + \frac{3C_1 + C_4}{5} \cos 2t + \\ &\quad + \frac{3C_2 + C_3}{5} \sin 2t, \\ y(t) &= \frac{3(C_2 + 2C_3)}{5} \operatorname{ch} t - \frac{3}{5} (2C_1 - C_4) \operatorname{sh} t - \end{aligned}$$

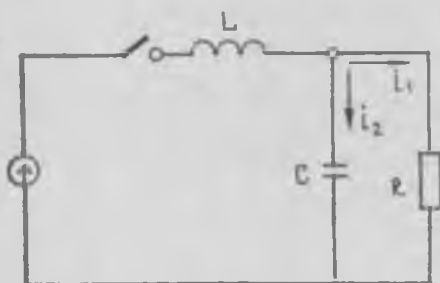
$$-\frac{1}{5}(3C_2 + C_3)\cos 2t + \frac{1}{5}(3C_1 + C_4)\sin 2t.$$

Интеграллашда операцион усулларнинг классик усуллардан устунлик томонларини таъкидлаб ўтамиз:

а) умумий ечимни топмай туриб, хусусий ечимни топиш имконияти бор (5-мисол);

б) системанинг умумий ечими шундай қулай усулда ёзиладики, берилган исталган бошланғич шартларни бевосита, тўғридан-тўғри ўрнига қўйиб, керакли хусусий ечимни ажратиб олиш мумкин (6-мисол).

5.2.1. Занжирни электр юритувчи кучи ўзгармас бўлган манбага улаш. L индуктивлик C сифим ва R қаршилик 2.5-шаклда тасвирланган схема бўйича уланган. Занжир ўзгармас электр юритувчи



2.5-шакл

кучи E га тенг бўлган манбага уланади, бунда ула нишга қадар занжирда ток ва заряд бўлмайди. Ўзиндукция ғалтагидан ўтадиган i токни t вақтнинг функцияси кўринишда топинг.

Ечиш. Ўнг контурдаги токларни i_1 ва i_2 орқали белгилаб, Кирхгоф қонуни асосида масаланинг тенгламалар системасини тузамиз:

$$\left. \begin{aligned} L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t (i - i_1) d\tau &= E, \\ Ri_1 - \frac{1}{C} \int_0^t (i - i_1) d\tau &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

бунда $i - i_1 = i_2$.
Бошланғич шартлар

$$i(0) = i_1(0) = 0$$

бўлсин. Оператор тенгламалар системаси

$$\left. \begin{aligned} L_p I(p) + \frac{1}{C \cdot p} [I(p) - I_1(p)] &= \frac{E}{p}, \\ RI_1(p) - \frac{1}{C \cdot p} [I(p) - I_1(p)] &= 0 \end{aligned} \right\}$$

ёки

$$\left. \begin{aligned} \left(L_p + \frac{1}{C \cdot p} \right) I(p) - \frac{1}{C \cdot p} I(p) &= \frac{E}{p}, \\ \frac{1}{C \cdot p} I(p) - \left(R + \frac{1}{C \cdot p} \right) I_1(p) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

кўринишда бўлади.

Бу алгебраик системанинг иккинчи тенгламасидан $I(p)$ ни топамиз. $I(p)$ нинг бу ифодасини алгебраик системанинг биринчи тенгламасига қўйсак,

$$I_1(p) = \frac{E}{LCR} \cdot \frac{1}{p \left(p^2 + \frac{1}{CR} p + \frac{1}{LC} \right)}.$$

Икки ҳолини кўрамиз.

1-ҳол. $\frac{1}{LC} - \frac{1}{4C^2R^2} = \omega_1^2 > 0$ бўлсин, бу ҳолда оригиналларга ўтиб, қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{E}{CR} \cdot \frac{1}{CL} \left[1 - e^{-\frac{t}{2RC}} \left(\cos \omega_1 t + \frac{1}{2CR\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right] = \\ &= \frac{EL}{R} \left[1 - e^{-\frac{t}{2RC}} \left(\cos \omega_1 t + \frac{1}{2CR\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right]. \end{aligned}$$

Юқорида келтирилган $I(p)$ нинг оператор тенгламасини, $I_1(p)$ ифодаси н фойдаланиб, қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$I(p) = \frac{E}{LCR} \left[CR \cdot \frac{1}{p^2 + p/(CR) + 1/LC} + \frac{1}{p[p^2 + p/(CR) + 1/LC]} \right].$$

Бу ифодадан оригиналга ўтиб, қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{E}{LCR} \left\{ CR \frac{1}{\omega_1} e^{-\frac{t}{2RC}} \sin \omega_1 t + LC \left[1 - e^{-\frac{t}{2RC}} \left(\cos \omega_1 t + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2CR\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right] \right\} = \frac{E}{R} \left\{ 1 - e^{-\frac{t}{2RC}} \left[\cos \omega_1 t + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\omega_1} \left(\frac{1}{2RC} - \frac{R}{L} \right) \sin \omega_1 t \right] \right\}. \end{aligned}$$

$i_2(t)$ токнинг қийматини унинг $i(t) - i_1(t)$ айирмага тенглиги ифодасидан топилади.

2-ҳол. $\frac{1}{4C^2R^2} - \frac{1}{LC} = \beta^2 > 0$ бўлсин. Бу ҳолда оригиналларга ўтиб, қуйидаги ифодани топамиз:

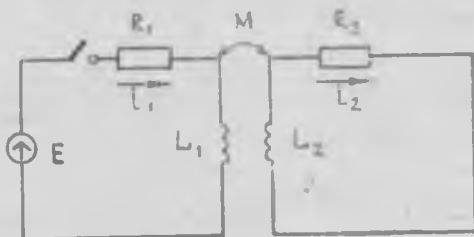
$$i_1(t) = \frac{EL}{R} \left[1 - e^{-\frac{t}{2RC}} \left(\operatorname{ch} \beta t + \frac{1}{2CR\beta} \operatorname{sh} \beta t \right) \right].$$

$i(t)$ учун ҳам унинг оператор тенгламасидан фойдаланиб, қуйидаги ифодани ёзиш мумкин:

$$i(t) = \frac{E}{R} \left\{ 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \left[\operatorname{ch} \beta t + \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{2RC} - \frac{R}{L} \right) \operatorname{ch} \beta t \right] \right\}.$$

5.2.2. Индуктив боғланган иккита контурдан иборат занжирни улаш. Электр юритувчи кучи E ўзгармас бўлган манбага 2.6-шаклда тасвирланган индуктив боғланган иккита контурдан иборат занжир уланади. Агар занжирга улаш ноль бошланғич шартларда амалга оширилса, шу билан бирга $L_1 L_2 \neq M^2$ бўлса, ҳар иккала контурдаги i_1 ва i_2 тоқларни t вақтининг функцияси сифатида топинг.

Ечиш. Кирхгоф қонунига асосан масаланинг дифференциал тенгламалари системаси куйидаги кўринишда бўлади:



2.6- шакл

$$\left. \begin{aligned} L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + M \frac{di_2}{dt} &= E, \\ L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + M \frac{di_1}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Бошланғич шартлар

$$i_1(0) = i_2(0) = 0$$

дан иборат.

Оператор тенгламалар системаси

$$\left. \begin{aligned} L_1 p I_1(p) + R_1 I_1(p) + M p I_2(p) &= \frac{E}{p}, \\ L_2 p I_2(p) + R_2 I_2(p) + M p I_1(p) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

ёки

$$\left. \begin{aligned} (L_1 p + R_1) I_1(p) + M p I_2(p) &= \frac{E}{p}, \\ M p I_1(p) + (L_2 p + R_2) I_2(p) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

кўринишда бўлади.

Охириги тенгламалар системасининг иккинчи тенгламасидан

$$I_2(p) = - \frac{M p}{L_2 p + R_2} I_1(p)$$

ни топамиз. Буни системанинг биринчи тенгламасига қўйиб,

$$\left(L_1 p + R_1 - \frac{M^2 p^2}{L_2 p + R_2} \right) I_1(p) = \frac{E}{p}$$

ёки

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \frac{EL_2}{L_1 L_2 - M^2} \cdot \frac{p + \frac{R_2}{L_2}}{p \left(p^2 + \frac{L_1 R_2 + L_2 R_1}{L_1 L_2 - M^2} p + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2 - M^2} \right)} = \\ &= \frac{E}{L_1 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \right)} \cdot \frac{p + \frac{R_2}{L_2}}{p \left(p^2 + \frac{\frac{R_2}{L_2} + \frac{R_1}{L_1}}{1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}} p + \frac{\frac{R_1 R_2}{L_1 L_2}}{1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}} \right)}. \end{aligned}$$

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\frac{M^2}{L_1 L_2} = k^2, \quad R_1 L_1 = 2\alpha_1, \quad \frac{R_2}{L_2} = 2\alpha_2, \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{1 - k^2} = \sigma,$$

у ҳолда

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \frac{E}{L_1(1-k^2)} \left[\frac{1}{p^2 + 2\sigma p + \frac{4\alpha_1\alpha_2}{1-k^2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{R_2}{L_2}}{p \left(p^2 + 2\sigma p + \frac{4\alpha_1\alpha_2}{1-k^2} \right)} \right]. \end{aligned}$$

Энди $\sigma^2 - \frac{4\alpha_1\alpha_2}{1-k^2} = \beta^2 > 0$ бўлгани учун тасвирлардан оригиналларга ўтиб, қуйидаги ифодани топамиз:

$$i_1(t) = \frac{E}{R_1} \left\{ 1 + e^{-\sigma t} \left[\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta(1-k^2)} \operatorname{sh} \beta t - \operatorname{ch} \beta t \right] \right\}.$$

Эслатма. β — ҳақиқий сон, чунки

$$\begin{aligned} \sigma^2 - \frac{4\alpha_1\alpha_2}{1-k^2} &= \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2}{(1-k^2)^2} - \frac{4\alpha_1\alpha_2}{1-k^2} = \\ &= \frac{\alpha_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2 k^2}{(1-k^2)^2} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2 k^2}{(1-k^2)^2} > 0. \end{aligned}$$

$i_2(t)$ нинг ифодасини топиш учун дастлаб оператор тенгламалар системасидан $I_2(p)$ оператор ечимни топиш зарур ва ундан сўнг тасвирлардан оригиналларга ўтиш керак.

5-дарсхона топшириқлари

1. Берилган дифференциал тенгламаларнинг берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимларини топинг:

а) $x'' + 2x' + x = e^{-t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$;

б) $x'' + 4x = \cos 3t$, $x(0) = 2$, $x'(0) = -2$;

в) $x'' - 9x = \operatorname{sh} t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 3$.

Ж: а) $x(t) = \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right)e^{-t}$;

б) $x(t) = \frac{11}{5} \cos 2t - \frac{1}{5} \cos 3t + \sin 2t$;

в) $x(t) = \frac{25}{24} \operatorname{sh} 3t - \operatorname{ch} 3t - \frac{1}{5} \operatorname{sh} t$.

2. Берилган дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимларини топинг:

а) $x'' + 9x = \cos 3t$;

б) $x'' + 2x' = te^{-2t}$

Ж: а) $x(t) = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t + \frac{t}{6} \sin 3t$;

б) $x(t) = C_1 + \left(C_2 - \frac{t^2 + t}{4}\right)e^{-2t}$.

3. Берилган дифференциал тенгламалар системаларининг ечимларини берилган бошланғич шартларда топинг:

а) $\begin{cases} 2x'' + x - y' = -3 \sin t, \\ x + y = -\sin t; \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1, \quad y(0) = 0;$

б) $\begin{cases} x' + 2x + 2y = 10e^{2t}, \\ y' - 2x + y = 7e^{2t}; \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 3.$

Ж: а) $x(t) = t \cos t$, $y(t) = -t \sin t$;

б) $x(t) = e^{2t}$, $y(t) = 3e^{2t}$.

4. Берилган дифференциал тенгламалар системасининг умумий ечимини топинг:

$$\begin{cases} x'' + y' = \operatorname{ch} t - \sin t, \\ y'' + x' = \operatorname{ch} t - \cos t. \end{cases}$$

Ж: $x(t) = C_1 + C_2 \operatorname{sh} t + C_3 \operatorname{ch} t$,

$y(t) = C_4 - C_2 \operatorname{sh} t - C_3 \operatorname{ch} t + \operatorname{ch} t + \cos t$.

5-мустақил иш топшириқлари

1. Берилган дифференциал тенгламаларининг ечимларини берилган бошланғич шартларда топинг:

а) $x'' + 4x = \sin 2t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -2$;

б) $x'' - x' = e^t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = x''(0) = 0$.

Ж: а) $x(t) = \cos 2t - \frac{7}{8} \sin 2t - \frac{t}{4} \cos 2t$;

б) $x(t) = 3 + t + (t - 2)e^t$.

2. $x'' + x' = e^{-t} \sin t$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

$$\text{Ж: } x(t) = C_1 + C_2 e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-t} (\cos t - \sin t).$$

3. Берилган дифференциал тенгламалар системаларининг ечимларини берилган бошланғич шартларда топинг:

$$\begin{cases} x'' - y' = 0, & x(0) = y'(0) = 0, \\ x' - y'' = 2 \cos t, & x'(0) = y(0) = 2. \end{cases}$$

$$\text{Ж: } x(t) = \sin t + \operatorname{sh} t, \quad y(t) = \cos t + \operatorname{ch} t.$$

4. Берилган дифференциал тенгламалар системасининг умумий ечимини топинг:

$$\begin{cases} x'' + y' = t, \\ y'' - x' = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ж: } x(t) &= C_1 + C_2 \sin t + C_3 \cos t, \\ y(t) &= C_4 + C_5 \sin t - C_2 \cos t + \frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

6-§. Дьюамель интегралы, унинг татбиқи

Бу параграфда биз йиғма ва тасвирларни кўпайтириш теоремаси билан танишишни давом эттирамиз.

1. $f(t) \leftarrow F(p)$ ва $g(t) \leftarrow G(p)$ бўлсин, у ҳолда $f(t)$ ва $g(t)$ функцияларнинг йиғмаси

$$f * g = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

интеграл бўлади. Тасвирларни кўпайтириш теоремасига асосан:

$$F(p) G(p) \mapsto \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau.$$

Бу ердан оригиналларни дифференциаллаш теоремасига асосан

$$pF(p) G(p) \mapsto \frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau, \quad (6.1)$$

чунки

$$\left(\int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right) \Big|_{t=0} = \int_0^0 f(\tau) g(t - \tau) d\tau = 0.$$

(6.1) формуланинг ўнг томонидаги интеграл учун t параметрдир, шу билан бирга унга интеграл остидаги функция ҳам, интеграллашнинг юқори чегараси ҳам боғлиқ.

Математик анализ курсидан аниқ интегралнинг параметр бўйича дифференциаллашнинг қуйидаги қондаси маълум:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \varphi(x, t) dx = \varphi(x_2, t) \frac{dx_2}{dt} - \varphi(x_1, t) \frac{dx_1}{dt} + \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{d\varphi}{dt} dx.$$

Буни (6.1) формуланинг ўнг томонига татбиқ этсак:

$$p F(p) G(p) \rightarrow f(t) g(0) + \int_0^t f(\tau) g'_t(t - \tau) d\tau. \quad (6.2)$$

Бу формуланинг унг томони Дьюамель интегралли деб аталади. Ўнгманинг ушбу

$$f * g = g * f.$$

ёки

$$\int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

коммутативлик хоссасига асосан (6.2) формулани бундай қайта ёзиш мумкин:

$$p F(p) G(p) \rightarrow g(t) f(0) + \int_0^t g(\tau) f'_t(t - \tau) d\tau. \quad (6.3)$$

1-мисол. $\frac{1}{(p^2 + 1)p^3}$ тасвир учун оригинални Дьюамель формуласини татбиқ этиб топинг.

Ечиш. Берилган ифодани кейинги ҳисоблашлар қулай бўладиган шаклга келтирамиз:

$$\frac{1}{(p^2 + 1)p^3} = p \cdot \frac{1}{p^2 + 1} \cdot \frac{1}{p^4}.$$

Ифодаларни белгилаймиз:

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + 1}, \quad G(p) = \frac{1}{p^4}.$$

Тасвирлар жадвалидан фойдаланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + 1} \rightarrow \sin t = f(t),$$

$$G(p) = \frac{1}{p^4} \rightarrow \frac{t^3}{3!} = g(t).$$

Бундан:

$$g(0) = 0, \quad g'(t) = \frac{t^2}{2}.$$

Энди Дьюамель формуласига кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$p F(p) G(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)p^3} \rightarrow \sin t \cdot 0 + \frac{1}{2} \int_0^t \sin \tau (t - \tau) d\tau.$$

Икки марта бўлаклаб интеграллаб, масаланинг ечимини ҳосил қиламиз:

$$\frac{1}{(p^2 + 1)p^3} \rightarrow \frac{t^3}{2} + \cos t - 1.$$

2-мисол. Дьюамель формуласини татбиқ этиб,

$$\frac{p}{(p-1)(p+1)}$$

таъсирнинг оригиналини топинг.

Еч и ш. Бу ерда

$$\frac{1}{p-1} \rightarrow e^t = f(t), \quad \frac{1}{p+1} \rightarrow e^{-t} = g(t), \quad f(0) = e^0 = 1, \quad f'(t) = e^t$$

булганлиги учун (6.3) Дьюамель формуласи бўйича қуйидагига эга буламиз:

$$\begin{aligned} p F(p) G(p) &= p \cdot \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{p+1} \rightarrow e^{-t} \cdot 1 + \int_0^t e^{-t} \cdot e^{t-\tau} d\tau = \\ &= e^{-t} + e^t \int_0^t e^{-2\tau} d\tau = e^{-t} - \frac{1}{2} e^t \cdot e^{-2\tau} \Big|_0^t = e^{-t} - \frac{1}{2} e^t (e^{-2t} - 1) = \\ &= \frac{1}{2} (2e^{-t} - e^{-t} + e^t) = \frac{1}{2} (e^t + e^{-t}) = \text{ch } t. \end{aligned}$$

2. Дьюамель интегралидан дифференциал тенгламаларни интеграллашда фойдаланиш мумкин. Бошланғич шартлари ноль булган узгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенглама учун Коши масаласи Дьюамель формуласи ёрдамида ўнг томони 1 га тенг булган ёрдамчи тенглама учун ўша масалани ечишга келтиривлади.

Ўзгармас коэффициентли

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t) \quad (6.4)$$

чизиқли дифференциал тенгламанинг

$$x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0$$

бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимини топиш талаб этилсин. Бу тенглама билан биргаликда чап томони шу тенгламанинг ўзи, ўнг томони эса 1 га тенг қуйидаги тенгламани ҳам қарайлик:

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} z' + a_n z = 1. \quad (6.5)$$

Бу тенгламанинг ҳам

$$z(0) = z'(0) = \dots = z^{(n-1)}(0) = 0$$

ёшланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимини излаймиз. Энди

$$X(p) \rightarrow x(t), \quad Z(p) \rightarrow z(t), \quad F(p) \rightarrow f(t), \quad \frac{1}{p} \rightarrow 1$$

деб олиб, (6.4) ва (6.5) тенгламаларга мос операторли тенгламаларга ўтамиз:

$$p^n X(p) + a_1 p^{n-1} X(p) + \dots + a_{n-1} p X(p) + a_n X(p) = F(p),$$

$$p^n Z(p) + a_1 p^{n-1} Z(p) + \dots + a_{n-1} p Z(p) + a_n Z(p) = \frac{1}{p},$$

бу тенгламаларнинг ечимларини топамиз:

$$X(p) = \frac{F(p)}{Q_n(p)}, \quad Z(p) = \frac{1}{p Q_n(p)}, \quad (6.6)$$

бу ерда $Q_n(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$. (6.6) муносабатлардан

$$X(p) = p F(p) Z(p).$$

(6.2) ёки (6.3) шаклдаги Дьюамель формуласини татбиқ этиб, (6.4) дифференциал тенгламанинг ечимини қуйидаги шаклда ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} p F(p) Z(p) = X(p) \rightarrow x(t) &= \int_0^t f(\tau) z'(t - \tau) d\tau = \\ &= z(t) f(0) + \int_0^t z(\tau) f'(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Бу формулалар ўзгармас коэффициентли чиқиқли дифференциал тенгламанинг бошланғич шартлари ноль бўлгандаги ечимини бу тенгламанинг ўнг томонидаги $f(t)$ функциянинг тасвирини топмасдан туриб аниқлашга имкон беради.

Шундай қилиб, (6.4) дифференциал тенгламанинг ноль бошланғич шартларни қаноатлантирадиган $x(t)$ ечимини, агар чап томони ўшандай, ўнг томони эса 1 га тенг (6.5) тенгламанинг ноль бошланғич шартларни қаноатлантирадиган $z(t)$ ечими маълум бўлса, квадратура шаклида топишга имкон беради. Дьюамель интегралнинг чап томонларни бир хил, ўнг томонларни эса турлича бўлган бир неча дифференциал тенгламаларни дифференциаллашда татбиқ этиш айниқса фойдалидир.

3-мисол. $x'' - 5x' + 6x = \sin t$ дифференциал тенгламани $x(0) = x'(0) = 0$ бошланғич шартларда Дьюамель интегралини татбиқ этиб ечинг.

Ечиш. Дастлаб ёрдамчи

$$z'' - 5z' + 6z = 1$$

тенгламанинг $z(0) = z'(0) = 0$ бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимини топамиз. Мос

$$p^2 Z(p) - 5p Z(p) + 6Z(p) = \frac{1}{p}$$

операторли тенглама

$$Z(p) = \frac{1}{p(p^2 - 5p + 6)} = \frac{1}{p(p-2)(p-3)}$$

ечимга эга. Рационал касрни энг содда касрларга ёямиз:

$$\frac{1}{p(p-2)(p-3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p-3},$$

бунда

$$1 = A(p-2)(p-3) + Bp(p-3) + Cp(p-2).$$

A, B, C коэффициентларни қуйидаги системадан ҳисоблаймиз:

$$\begin{array}{l|l} p=0 & 1=6A, \\ p=2 & 1=-2B, \\ p=3 & 1=3C. \end{array}$$

Бундан:

$$A = \frac{1}{6}, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{3}.$$

Шундай қилиб,

$$Z(p) = \frac{1}{6p} - \frac{1}{2(p-2)} + \frac{1}{3(p-3)}.$$

Шу сабабли тасвирлар жадвалидан фойдаланиб,

$$z(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} e^{2t} + \frac{1}{3} e^{3t}$$

ни ҳосил қиламиз, бундан:

$$z'(t) = -e^{2t} + e^{3t}.$$

Берилган тенгламанинг ечимини излаш учун (6.7) нинг биринчи формуласидан фойдаланамиз. Бизнинг ҳолда $f(t) = \sin t$, демак,

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t f(\tau) z'(t-\tau) d\tau = \int_0^t \sin \tau (e^{3(t-\tau)} - e^{2(t-\tau)}) d\tau = \\ &= e^{3t} \int_0^t e^{-3\tau} \sin \tau d\tau - e^{2t} \int_0^t e^{-2\tau} \sin \tau d\tau. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Икки марта бўлаклаб интеграллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^t e^{\alpha\tau} \sin \tau d\tau = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{\alpha\tau} \quad du = \alpha e^{\alpha\tau} d\tau \\ dv = \sin \tau d\tau, \quad v = -\cos \tau \end{array} \right\} = \\ &= -e^{\alpha\tau} \cos \tau \Big|_0^t + \alpha \int_0^t e^{\alpha\tau} \cos \tau d\tau = 1 - e^{\alpha t} \cos t + \alpha \int_0^t e^{\alpha\tau} \cos \tau d\tau = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = e^{\alpha\tau} \quad du = \alpha e^{\alpha\tau} d\tau \\ dv = \cos \tau d\tau, \quad v = \sin \tau \end{array} \right\} = 1 - e^{\alpha t} \cos t + \alpha (e^{\alpha\tau} \sin \tau) \Big|_0^t - \\ &- \alpha \int_0^t e^{\alpha\tau} \sin \tau d\tau = 1 - e^{\alpha t} \cos t + \alpha e^{\alpha t} \sin t - \alpha^2 \int_0^t e^{\alpha\tau} \sin \tau d\tau, \end{aligned}$$

бундан

$$I = 1 - e^{\alpha t} \cos t + \alpha e^{\alpha t} \sin t - \alpha^2 I,$$

Демак,

$$I = \int_0^t e^{\alpha \tau} \sin \tau d\tau = \frac{1}{1 + \alpha^2} (1 - e^{\alpha t} \cos t + \alpha e^{\alpha t} \sin t).$$

Бу натижани (6.8) формулага қўйиб, $\alpha = -2$ ва $\alpha = -3$ бўлганда масаланинг ушбу ечимини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{e^{3t}}{10} (1 - e^{-3t} \cos t - 3e^{-3t} \sin t) = -\frac{e^{2t}}{5} (1 - e^{-2t} \cos t - \\ &- 2e^{-2t} \sin t) = \frac{1}{10} (e^{3t} - 2e^{2t} - \cos t - 3 \sin t + 2 \cos t + \\ &+ 4 \sin t) = \frac{1}{10} (e^{3t} - 2e^{2t} + \cos t + \sin t). \end{aligned}$$

4-мисол. Дьюамель формуласидан фойдаланиб, $x'' + x = e^{2t}$ тенгламани $x(0) = x'(0) = 0$ бошланғич шартларда ечинг.

Ечиш. $z'' + z = 1$ ёрдамчи тенгламани $z(0) = z'(0) = 0$ бошланғич шартларда қараймиз. Унинг

$$p^2 Z(p) + Z(p) = \frac{1}{p}$$

операторли тенгламаси

$$Z(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1}$$

ечимни беради, бундан $z(t) = 1 - \cos t$ ни ҳосил қиламиз. (6.7) формулага қўра $z'(t) = \sin t$, $f(t) = e^{2t}$ да дастлабки тенгламанинг изланаётган ечимини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t f(\tau) z'(t - \tau) d\tau = \int_0^t e^{2\tau} \sin(t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{\alpha^2 + 1} (e^{\alpha t} - \cos t - \alpha \sin t). \end{aligned}$$

5-мисол. Ушбу Қоши масаласини Дьюамель формуласидан фойдаланиб ечинг:

$$x'' + x = \cos t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Ечиш. Бу тенгламанинг чап томони олдинги мисолдаги тенгламанинг чап томони билан бир хил бўлганлиги учун ёрдамчи тенгламанинг ечими яна ўша функциянинг ўзи бўлади:

$$z(t) = 1 - \cos t, \quad z'(t) = \sin t.$$

(6.7) формула бўйича $f(t) = \cos t$ бўлганда берилган тенгламанинг $x(t)$ ечимини ҳосил қиламиз:

$$x(t) = \int_0^t \cos \tau \sin(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t (\sin t + \sin(t - 2\tau)) d\tau =$$

$$-\frac{1}{2}(\tau \sin t + \frac{1}{2} \cos(t-2\tau)) \Big|_0^t = \frac{1}{2}(t \sin t + \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{2} \cos t) = \frac{1}{2} t \sin t.$$

7-§. Лаплас ва Фурье алмаштиришларининг боғланиши

Операцион ҳисоб Лаплас алмаштириши билан боғлиқ бўлиб, у ҳақиқий ўзгарувчининг $f(t)$ функциясига комплекс ўзгарувчининг $F(p)$ функциясини

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (7.1)$$

муносабат ёрдамида мос қўяди.

Юқорида айтганимиздек, операцион ҳисобда оригиналлар деб аталадиган ва а), б) ва в) шартларни (1-§ га қаранг) қаноатлантирадиган $f(t)$ функциялар қаралади.

Гармоник анализ функцияларни тригонометрик қаторларга ёйиш ҳақидаги тушунча бўлиб, Фурье алмаштиришларига боғлиқ. Математик анализдан маълумки, Фурье алмаштириши $f(t)$ функция $F(\omega)$ функцияни

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (7.2)$$

муносабат ёрдамида мос қўяди.

Фурье алмаштириши барча абсолют интегралланувчи функциялар учун аниқланган, яъни унинг мавжуд бўлиши учун

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$$

интегралнинг яқинлашувчи бўлиши талаб этилади. Бундан ташқари, оригиналлар қаноатлантирадиган биринчи шарт Фурье алмаштиришидаги мос шарт билан устма-уст тушади. Лаплас ва Фурье алмаштиришлари орасидаги боғланишни аниқлаймиз. Бир томонлама Фурье алмаштиришни қарайлик. Бу алмаштиришда $f(t)$ функция $t < 0$ да нолга тенг деб ҳисобланади. У ҳолда (7.2) формула ушбу кўринишга олади:

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Агар (7.1) Лаплас алмаштиришида $p = i\omega$ деб олинса, яъни p комплекс сонни соф мавҳум сон деб ҳисобланса, $F(\omega)$ нинг ўнг томони шу (7.1) Лаплас интегрални билан аниқ устма-уст тушади. Бироқ Лаплас алмаштириши яна в) шарт

$$|f(t)| < Me^{st}$$

СОНЛИ УСУЛЛАР

Ҳозирги замон техника ва технологиясининг тараққиёти математик услубларнинг муҳандислик тадқиқотларига кенг миқёсдаги татбиқи билан тавсифланади. Халқ ҳужалигининг купгина илмий-техникавий масалаларининг муваффақиятли ечими ЭҲМ ларнинг омилкорлик билан қўлланишига боғлиқ бўлиб, бу мақсаднинг амалга оширилиши учун математиканинг тегишли сонли усуллари ишлаб чиқилган.

Табийий-илмий муаммоларни ҳисоблаш математикаси воситалари билан тадқиқ қилиш математик моделлаштиришдан бошланади, жараён чекланган аниқликда алгебраик, дифференциал ёки интеграл тенгламалар ёрдамида тасвирланади. Одатда, бу тенгламалар асосий физик микдорларнинг — энергия, ҳаракат микдори ва ҳоказоларнинг сақланиш қонунларини ифодалайди. Математик моделлаштириш амалга ошириладиганда албатта масаланинг тўғри қўйилганлиги, бошланғич маълумотларнинг етарлилиги, қўйилган масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги текширилади.

Купгина ҳолларда энг содда моделлар учун ҳам ечимни аналитик шаклда олиб бўлмайди. Айтайлик, масала ушбу

$$2x - \cos 3x = 0$$

бир ўзгарувчи тенгламани ечишга келтирилган бўлсин. Бу тенгламанинг илдизларини аналитик усуллар билан топиб бўлмайди. График усуллар билан ҳам тегишли аниқликдаги ечимни олиш қийин. Бундай ҳолларда илдизларни топиш имконини берадиган сонли усуллардан фойдаланилади.

Барча сонли усуллар учун бир умумийлик бўлиб, у ҳам бўлса математик масалани чекли ўлчамли масалага келтирилишидир. Қўйилган масала дискретлаштирилади, яъни узлуксиз функциялардан узлукли, дискрет функцияларга ўтилади.

Сонли усуллар билан олинадиган ечим қўйилган масаланинг тақрибий ечими бўлади. Масала ечимининг умумий хатолиги бир неча ташкил этувчилардан иборат бўлиб, улардан биринчиси тадқиқ қилинаётган жараёни ўзининг математик моделига қанчалик мувофиқлиги билан белгиланади. Одатда масаланинг бошланғич ва чегаравий шартлар, тенгламаларнинг коэффициентлари, ўнг томонлари доимо маълум бир хатолик билан берилади. Натижанинг аниқлиги дастлабки маълумотларнинг аниқлигига боғлиқ бўлади.

Бирор масаланинг аниқ ечими R бўлсин. Моделлаштирилиб ўрганиладиган жараёни ўзининг математик моделига тўлиқ мувофиқ келолмаслиги ва дастлабки маълумотлардаги аниқсизликлар натижаси-

да аниқ ечим ўрнига бошқа R_1 ечим олинади. Ҳосил бўладиган $\Delta_1 = R - R_1$ хатоликдан масалани ечиш давомида олиб бориладиган ҳисоблашлар жараёнида қутулиш иложи йўқлиги сабабли бундай хатолик **йўқотилмас хатолик** дейилади. Тадқиқотчи бу хатоликларнинг катталигини билиши ва шунга қараб натижанинг йўқотилмас хатосининг баҳолаши керак.

Масалани ечишга киришилار экан бирор усул танланади (масалан, сонли усул) ва ҳисоблашларни бошламасдан R_1 ечим ўрнига R_2 ечимга олиб келувчи янги хатоликка йўл қўйилади. $\Delta_2 = R_1 - R_2$ хатолик **усул хатолиғи** дейилади.

Ва ниҳоят ҳисоблаш жараёнидаги оралиқ натижаларда кўп ҳолати сонлар ҳосил бўлади ва уларни яхлитлаб олишга тўғри келади (масала ЭХМда ечилганда ҳам сонлар яхлитланади). Шундай қилиб, масалани ечишда ҳисоблашнинг аниқ олиб бормаганлигимиз натижасида ҳам хатоликка йўл қўйилади ва R_2 ечимдан фарқли R_3 ечим ҳосил бўлади. $\Delta_3 = R_2 - R_3$ хатолик **ҳисоблаш хатолиғи** дейилади.

Тўлиқ хатолик юқорида айтиб ўтилган хатоликлар йиғиндисидан иборат бўлади:

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = R - R_1 + R_1 - R_2 + R_2 - R_3 = R - R_3.$$

Масала ечимининг аниқлиги борасида тасаввурга эга бўлиш учун хатоликнинг барча турлари тўлиқ таҳлил қилиниши керак.

А. НАЗАРИЙ МАВЗУЛАР

1-§. Хатоликлар назариясининг элементлари

1.1. Бирор миқдорнинг аниқ қиймати x , бу миқдорнинг тақрибий қиймати a бўлсин.

x аниқ сон билан унинг a тақрибий қиймати орасидаги $x - a$ айирма x миқдорнинг тақрибий қиймати a нинг **хатолиғи** деб аталади.

Агар $x - a > 0$, яъни $a < x$ бўлса, у ҳолда a сон x га **ками билан яқинлашиш**, агар $x - a < 0$, яъни $x < a$ бўлса, у ҳолда a сон x га **ортиғи билан яқинлашиш** деб аталади. Масалан, $\sqrt{2}$ учун 1,41 сони ками билан тақрибий қиймат, 1,42 сони эса ортиғи билан тақрибий қиймат бўлади, чунки $1,41 < \sqrt{2} < 1,41$. 3,14 сони π сони учун ками билан тақрибий қиймат бўлади, чунки $\pi > 3,14$; 2,72 сони e сонининг ортиғи билан тақрибий қиймати бўлади, чунки $e < 2,72$.

Агар a сон аниқ x соннинг тақрибий қиймати бўлса, бу бундай ёзилади: $a \approx x$. Масалан, $\sqrt{2} \approx 1,41$ ёки $\sqrt{2} \approx 1,42$, $\pi \approx 3,14$; $e \approx 2,72$.

Бирор x аниқ сон тақрибий қиймати a нинг **абсолют хатолиғи** деб, улар орасидаги айирманинг абсолют қиймати $|x - a|$ га айтилади.

x нинг аниқ қиймати номаълумлиги сабабли $|x - a|$ абсолют хатолик ҳам номаълум бўлади. Лекин абсолют хатонинг ўзгариш че-

гараларини кўрсатиш мумкин. Шунинг учун ҳам абсолют хатолик ўрнига **чегаравий абсолют хатолик** тушунчаси киритилади.

1-таъриф. *а тақрибий соннинг чегаравий абсолют хатолиги деб, бу соннинг абсолют хатолигидан кичик бўлмаган Δ сонга ай-тилади:*

$$|x - a| \leq \Delta.$$

Бундан буён «чегаравий» сўзини тушириб қолдирамиз.

Сўнгги тенгсизликдан x аниқ сон қуйидаги ораликда ётишн келиб чиқади:

$$a - \Delta \leq x \leq a + \Delta.$$

Демак, $a - \Delta$ сон x соннинг ками билан яқинлашиши, $a + \Delta$ эса ортиғи билан яқинлашишидир. Қисқалик мақсадида қуйидаги ёзувдан фойдаланилади:

$$x = a \pm \Delta.$$

1-мисол. π сонини алмаштирадиган тақрибий $a = 3,14$ сонининг чегаравий абсолют хатолигини топинг.

Ечиш. $3,14 < \pi < 3,15$ тенгсизлик ўринли бўлганлиги учун $|\pi - a| < 0,01$ бўлади. Демак, $\Delta = 0,01$ ни чегаравий абсолют хатолик учун қабул қилиш мумкин.

Амалиётда кўпинча «0,01 гача аниқлик билан», «1 см гача аниқлик билан» ва ҳоказо ифодалар қўлланилади. Бу нарса абсолют хатолик мос равишда 0,01; 1 см га тенглигини билдиради ва ҳоказо.

Тақрибий соннинг абсолют хатолиги x аниқ сонни унинг a тақрибий қиймати билан яқинлашиш сифатини етарлича тавсифлай олмайди. Масалан, $\Delta = 0,5$ м абсолют хатолик хонанинг бўйини ўлчашда ҳаддан ташқари катта, ўй қуриш учун ер майдонини ажратишда йўл қўйилиши мумкин, шаҳарлар орасидаги масофани ўлчашда эса сезилмайди ҳам.

Ўлчаш ёки ҳисоблаш натижаси аниқлигининг ҳақиқий кўрсаткичи унинг **нисбий хатолигидир**.

a тақрибий соннинг нисбий хатолиги деб

$$\frac{|x - a|}{|a|}$$

нисбатга айтилади.

2-таъриф. *а тақрибий соннинг чегаравий нисбий хатолиги деб, нисбий хатоликдан кичик бўлмаган δ сонга айтилади, яъни*

$$\frac{|x - a|}{|a|} \leq \delta \quad \text{ёки} \quad \delta = \frac{\Delta}{|a|}.$$

Бундан

$$\Delta = |a| \cdot \delta$$

нисбий хатолик кўпинча процент (фоиз) ларда ифодаланади. Масалан, 3,14 сони π сонининг тақрибий қиймати. Унинг хатолиги 0,00159 ... га тенг; чегаравий абсолют хатолик $\Delta = 0,0016$ га тенг, чегаравий нисбий хатолик эса

$$\delta = \frac{\Delta}{3,14} = 0,00051 = 0,051 \%$$

га тенг деб ҳисоблаш мумкин.

1.2. Агар a тақрибий соннинг абсолют хатолиги бу сон охириги рақами хонасининг бир бирлигидан (ярмидан) ортиқ бўлмаса, у ҳолда a соннинг барча рақамлари кенг маънода ишончли (тор маънода ишончли) рақамлар деб аталади.

Тақрибий сонларни фақат ишончли рақамларни сақлаган ҳолда ёзиш лозим. Масалан, $a = 52400$ сонининг абсолют хатолиги $\Delta = 100$ бўлса, у ҳолда бу сонни қуйидаги кўринишда ёзиш керак: $a = 524 \cdot 10^2$ ёки $5,24 \cdot 10^3$.

Ишончли рақамлари билан ёзилган $37 \cdot 10$; 370 ; $370,0$; $370,00$ тақрибий сонлар турлича аниқлик даражасига эга, уларнинг чегаравий абсолют хатоликлари 10 ; 1 ; $0,1$; $0,01$ га тенг.

Тақрибий соннинг хатолигини, у нечта ишончли қийматли рақамга эга эканлигини кўрсатиш билан баҳолаш мумкин. Қийматли рақамларни санашда биринчи нолдан фарқли рақамдан чапда турган ноллар ҳисобга олинмайди. Соннинг охирида турган ноллар доимо қийматли рақамлардир (акс ҳолда уларни ёзилмайди). Масалан, қийматли рақамлар билан ёзилган $a = 0,002080$ сони тўртта қийматли рақам, яъни $2, 0, 8, 0$ га эга.

Тақрибий соннинг нисбий хатолиги қийматли рақамлари сони билан боғлиқдир.

Агар a сон n та ишончли қийматли рақамга эга бўлса, у ҳолда унинг δ нисбий хатолиги

$$\delta \leq \frac{1}{k} \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1} \quad (1.1)$$

тенгсизликни қаноатлантиради, бу ерда k шу a соннинг биринчи рақами. Ва аксинча, нисбий хатолиги δ бўлган a соннинг n та рақами ишончли бўлса, у ҳолда n ушбу

$$(1+k)\delta \leq \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1}$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган энг катта туб сондир.

2- мисол. Агар $a = 47,542$ тақрибий соннинг чегаравий нисбий хатолиги $\delta = 0,1\%$ бўлса, унинг ишончли рақамлари сонини аниқланг.

Ечиш. (1.1) тенгсизликни тузамиз: бу ерда $k = 4$, $\delta = 0,1\% = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{1000}$;

$$(1+k)\delta = \frac{5}{1000} = 5 \cdot \left(\frac{1}{10} \right)^3 \leq \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1}$$

Равшанки, $n - 1 = 2$ ёки $n = 3$. Демак, $a = 47,542$ сони учта ишончли рақам: $4, 7$ ва 5 га эга.

Маълум бир маънода бундай ҳисоблаш мумкин: фақат битта ишончли рақамнинг борлиги 10% тартибида нисбий хатоликка, иккита ишончли рақамнинг борлиги 1% тартибида нисбий хатоликка, учта ишончли рақамнинг борлиги $0,1\%$ тартибида нисбий хатоликка мос келади ва ҳоказо.

Математик жадвалларда барча сонлар ишончли рақамлари билан берилди. Масалан, жадвалда $\lg 2 = 0,3010$ берилган бўлса, у ҳолда $\Delta = 0,0001$, $\delta = 0,03\%$.

1.3. Агар тақрибий сонлар ортиқча (ски ишончсиз) рақамларга эга бўлса, уни яхлитлаш лозим. Яхлитлашда фақат ишончли рақамлар сақланади. Ортиқча рақамлар ташлаб юборилади, шу билан бирга биринчи ташлаб юборилаётган рақам 4 дан катта бўлса, у ҳолда сақлаб қолинаётган охири рақам битта орттирилади. Агар ташлаб юборилаётган қисм фақат битта 5 рақамидан ёки 5 ва қолганлари ноллардан иборат бўлса, у ҳолда одатда охириги сақлаб қолинандиган рақам жуфт сон бўладиган қилиб яхлитланади.

3- мисол. Сонларни берилган аниқликда яхлитланг:

- а) $a = 10,547$ ни $10^{-2} = 0,01 = \Delta$ гача аниқликда тўртта ишончли рақам билан;
- б) $a = 5,1997$ ни $10^{-3} = 0,001 = \Delta$ гача аниқликда тўртта ишончли рақам билан;
- в) $a = 3,855$ ни $10^{-2} = 0,01 = \Delta$ гача аниқликда учта ишончли рақам билан.

Е чи ш. а) $a = 10,5474 \approx 10,55$ ортиғи билан;

б) $a = 5,1997 \approx 5,200$ — ортиғи билан;

в) $a = 3,88 \approx 3,88$ — ками билан.

1.4. Абсолют ва нисбий хатоликларнинг асосий хоссалари. Қуйидаги иккита масалани қарайлик: аргументнинг абсолют хатолиги бўйича функциянинг абсолют хатолиги топилсин; 2) функциянинг йўл қўйиладиган абсолют хатолиги маълум бўлса, аргументнинг нисбий хатолиги топилсин (тескари масала).

Бу масалаларни ҳал этишда қуйидаги асосий теоремадан фойдаланилади:

Теорема. Функциянинг чегаравий абсолют хатолиги аргумент чегаравий абсолют хатолигини бу функция ҳосиласининг абсолют қиймати билан кўпайтмасига тенг:

$$\beta = \alpha |f'(x)|, \quad (1.2)$$

бу ерда α — шу x аргументнинг чегаравий абсолют хатолиги, β эса $y = f(x)$ функциянинг чегаравий абсолют хатолиги.

Агар x аргументнинг чегаравий нисбий хатолигини δ_x орқали, $y = f(x)$ функциянинг чегаравий нисбий хатолигини δ_y орқали белгиласак, у ҳолда (1.2) тенгликдан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\delta_y = \left| x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right| \delta_x. \quad (1.3)$$

4- мисол. $y = \ln x$ функциянинг чегаравий абсолют хатолигини топинг.

Е чи ш. $y = \ln x$ функция учун (1.2) формуладан фойдаланамиз:

$$y' = \frac{1}{x}$$

У ҳолда

$$\beta = \alpha \left| \frac{1}{x} \right| = \frac{\alpha}{|x|} = \delta.$$

Демак, логарифмнинг чегаравий абсолют хатолиги β , аргументнинг чегаравий нисбий хатолиги δ_x га тенг.

5- мисол. $y = x^n$ функциянинг чегаравий нисбий хатолигини топинг.

Ечиш. $y' = nx^{n-1}$ бўлганлиги учун (1.3) формулага асосан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\delta_y = \left| x \cdot \frac{nx^{n-1}}{x^n} \right| \delta_x = |n| \delta_x.$$

Демак, даражанинг чегаравий нисбий хатолиги δ_y асоснинг чегаравий нисбий хатолиги δ_x ни даража кўрсаткичнинг абсолют қиймати га кўпайтирилганига тенг.

Хусусан, доира юзининг чегаравий нисбий хатолиги радиуснинг чегаравий нисбий хатолигидан 2 марта катта, чунки $S = \pi r^2$ бўлгани учун:

$$\delta_S = \left| r \frac{S'}{S} \right| \delta_r = \left| r \cdot \frac{2\pi r}{\pi r^2} \right| \delta_r = 2 \delta_r.$$

Икки ўзгарувчи $u = f(x, y)$ функциянинг чегаравий нисбий хатолигини баҳолашда (1.2) тенгликка ўхшаш ушбу формулани ҳосил қиламиз:

$$\beta = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \alpha_x + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \alpha_y.$$

бу ерда α_x — ўзгарувчи x нинг чегаравий абсолют хатолиги;

α_y — ўзгарувчи y нинг чегаравий абсолют хатолиги;

β — эса $u = f(x, y)$ функциянинг чегаравий абсолют хатолиги.

Охирги тенглик исталган сондаги аргументлар функцияси учун умумлаштирилиши мумкин. Масалан, $u = x + y + z + \dots + t$ функция учун

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| = \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| = \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| = \dots = \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| = 1,$$

шунинг учун

$$\beta = \alpha_x + \alpha_y + \alpha_z + \dots + \alpha_t.$$

демак, йиғиндининг чегаравий абсолют хатолиги β қўшилувчиларнинг чегаравий абсолют хатоликлари $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \dots, \alpha_t$ нинг йиғиндига тенг.

Йиғиндининг чегаравий нисбий хатолигини аниқлашда ушбу икки ҳолни ажратиш керак:

1) Барча қўшилувчилар бир хил (аниқлик учун — мусбат) ишорали. Йиғиндининг чегаравий нисбий хатолиги

$$\delta = \frac{\alpha_x + \alpha_y + \dots + \alpha_t}{x + y + \dots + t}$$

га тенг. $\delta_x, \delta_y, \dots, \delta_t$ — мос равишда $x, y, \dots, t$ нинг чегаравий нисбий хатоликларн бўлсин. У ҳолда $\alpha_x = \delta_x \cdot x, \alpha_y = \delta_y \cdot y, \dots, \alpha_t = \delta_t \cdot t$. $\delta_{\max}$ ва $\delta_{\min}$ орқали $\delta_x, \delta_y, \dots, \delta_t$ сонларнинг ичида энг каттаси ва энг кичигини белгилаймиз. У ҳолда

$$\delta = \frac{\delta_x \cdot x + \delta_y \cdot y + \dots + \delta_t \cdot t}{x + y + \dots + t} < \frac{(x + y + \dots + t) \delta_{\max}}{x + y + \dots + t} = \delta_{\max}.$$

ёки $\delta < \delta_{\max}$. Шунга ўхшаш, $\delta > \delta_{\min}$ ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб,

$$\delta_{\min} < \delta < \delta_{\max}.$$

Демак, бир хил ишорали қўшилувчилар йиғиндисининг чегаравий нисбий хатолиги қўшилувчиларнинг энг кичик ва энг катта чегаравий нисбий хатоликлари орасида ётади.

2) Қўшилувчилар турли ишорали, масалан, агар $u = x - y$ бўлса, у ҳолда унинг чегаравий нисбий хатолиги

$$\delta = \frac{\alpha_x + \alpha_y}{|x - y|}$$

га тенг. Демак, x ва y сонлар бир-бирига яқин бўлса, у ҳолда x ва y сонларнинг чегаравий нисбий хатоликларн, ҳатто жуда кичик бўлганда ҳам, улар айирмасининг чегаравий нисбий хатолиги жуда катта бўлиши мумкин. Масалан, ишончли рақамлар билан ёзилган $x = 1,245$ ва $y = 1,235$ сонлари учун қуйидагига эга бўламиз:

$$\alpha_x = 0,001, \alpha_y = 0,001; \delta_x = 0,08\%; \delta_y = 0,08\%;$$

$$\delta = \frac{0,001 + 0,001}{0,01} \cdot 100\% = 20\%.$$

2-§. Функцияларнинг қийматларини ҳисоблаш.

Кўпхадлар учун Горнер схемаси

2.1. Ҳисоблаш амалиётида кўпинча бирор функциянинг берилган нуқтадаги қийматини ҳисоблашга тўғри келади. Бунда шуни назарда тутиш керакки, математик эквивалент бўлган ифода-лар уларнинг қийматларини ҳисоблаш учун зарур бўлган амаллар сони маъносида ҳамма вақт ҳам тенг кучли бўлавермайди. Масалан,

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

айниятнинг чап қисмининг ҳисоблашда тўрта кўпайтириш амалини ва иккита қўшиш амалини бажариш зарур. Энг қисмининг ҳисоблаш учун эса бор-йўғи битта қўшиш ва битта кўпайтириш амалини бажариш зарур.

Функцияларнинг қийматларини ҳисоблаш одатда элементар арифметик амаллар кетма-кетлигига келтирилади. Бу амалларни такрорланувчи циклларга бўлиб, уларнинг сонини камайтириш маъқулдир. Мисол тариқасида Горнер схемасини кўриб чиқайлик.

2.2. Горнер схемаси — бу кўп ҳадни икки ҳадга бўлишда тўлиқ-мас бўлинма ва қолдиқни топиш | усулидир.

Даражали кўп ҳад деб, ушбу

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad (2.1)$$

кўринишдаги ифодага айтилади, бу ерда $a_0, a_1, \dots, a_n$ коэффициентлар — ҳақиқий сонлар, шу билан бирга $a_0 \neq 0$; a_n — кўпҳаднинг озад ҳади деб аталади.

(2.1) кўпҳаднинг $x = \xi$ нуқтадаги қийматини ҳисоблаш талаб қилинсин.

$P_n(x)$ ни $(x - \xi)$ га бўламиз, у ҳолда

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = (b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-1})(x - \xi) + b_n$$

га эга бўламиз. Бу тенгликда x ўрнига ξ ни қўйсақ,

$$b_n = P_n(\xi)$$

келиб чиқади.

Демак $P_n(\xi)$ ни ҳисоблаш учун b_n ни топиш етарли экан. (2.2) тенгликда x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффицентларни тенглаштириб,

$$\begin{cases} a_0 = b_0, \\ a_1 = b_1 - b_0\xi, \\ a_2 = b_2 - b_1\xi, \\ \vdots \\ a_n = b_n - b_{n-1}\xi \end{cases}$$

муносабатларга эга бўламиз. Бу тенгликлардан

$$\begin{cases} b_0 = a_0, \\ b_1 = a_1 + b_0\xi, \\ b_2 = a_2 + b_1\xi, \\ \vdots \\ b_n = a_n + b_{n-1}\xi \end{cases} \quad (2.3)$$

ни ҳосил қиламиз.

Ҳисоблаш жараёнида (2.3) тенгликларни ушбу

$$\begin{array}{cccccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n & | \xi \\ b_0\xi & b_1\xi & b_2\xi & \dots & b_{n-2}\xi & b_{n-1}\xi & & \\ \hline b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-1} & b_{n-2} & = P_n(\xi) \end{array}$$

жадвал шаклида жойлаштириш ҳисоблаш ишларини енгиллаштиради. Бу ерда $b_0 = a_0$ бўлиб, охириги қатордаги бошқа сонларнинг ҳар бири унинг устида турган иккита соннинг йиғиндисига тенг. Келтирилган усул **Горнер схемаси** деб аталади.

Агар фақат $b_n = P_n(\xi)$ ни ҳисоблаш талаб қилинса, у ҳолда Горнер схемасини

$$P_n(\xi) = (\dots ((a_0\xi + a_1)\xi + a_2) + \dots + a_{n-1})\xi + a_n \quad (2.4)$$

кўринишда ёзиб олиш мумкин. Бу усул кўпхад қийматини ҳисоблашда ҳақиқатан ҳам самарали усулдир. Чунки (2.4) формула ёрдамида $P_n(\xi)$ ни ҳисоблаётганда биз фақат n марта кўпайтириш амалини бажарамиз. Оддий йўл билан ҳисоблаганда эса $\xi^2, \xi^3, \dots, \xi^n$ даражаларни ҳисоблаш учун $(n-1)$ марта кўпайтириш амалини ва $a_0\xi^n, a_1\xi^{n-1}, \dots, a_{n-1}\xi$ кўпайтмаларни ҳосил қилаётганда яна n та кўпайтириш амалини, ҳаммаси бўлиб, $2n-1$ та кўпайтириш амалини бажаришга тўғри келар эди.

1-мисол. $P_5(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 1$ кўпхаднинг $x=3$ даги қийматини Горнер схемасидан фойдаланиб ҳисобланг.

Ечиш. Бу кўпхад учун Горнер схемасини тузамиз:

1	3	-2	1	-1	1	3
	3	18	48	147	438	
1	6	16	49	146	439	

Шундай қилиб, $P_5(3) = 439$.

Биз Горнер схемаси бўйича ҳисоблашлар бажарганимизда фақат $b_n = P_n(\xi)$ ни ҳисоблабгина қолмасдан, балки $P_n(x)$ кўпхадни $x - \xi$ ники ҳадга бўлишдан ҳосил бўладиган тўлиқмас бўлинма бўлимиш $Q_{n-1}(x)$ кўпхаднинг коэффициентларини ҳам аниқлаймиз. Ҳақиқатан ҳам

$$Q_{n-1}(x) = \beta_0 x^{n-1} + \beta_1 x^{n-2} + \dots + \beta_{n-2} \quad (2.5)$$

ва

$$P_n(x) = Q_{n-1}(x)(x - \xi) + \beta_n \quad (2.6)$$

бўлсин, шу билан бирга Безу теоремасига асосан (1-жилд, 267-саҳифага қаранг) бўлишдаги β_n қолдиқ $P_n(\xi)$ га тенг, яъни $\beta_n = P_n(\xi)$. (2.5) ва (2.6) формулалардан

$$P_n(x) = (\beta_0 x^{n-1} + \beta_1 x^{n-2} + \dots + \beta_{n-1})(x - \xi) + \beta_n$$

ни ҳосил қиламиз. Қавсларни очиб, ўхшаш ҳадларни ихчамласак,

$$P_n(x) = \beta_0 x^n + (\beta_1 - \beta_0 \xi) x^{n-1} + (\beta_2 - \beta_1 \xi) x^{n-2} + \dots + (\beta_{n-1} - \beta_{n-2} \xi) x + (\beta_n - \beta_{n-1} \xi)$$

га эга бўламиз. Бу тенглиkning чап ва ўнг томонларидаги x ўзгаришнинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни таққослаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} a_0 &= \beta_0, \\ a_1 &= \beta_1 - \beta_0 \xi, \\ a_2 &= \beta_2 - \beta_1 \xi, \\ &\dots \dots \dots \\ a_{n-1} &= \beta_{n-1} - \beta_{n-2} \xi, \\ a_n &= \beta_n - \beta_{n-1} \xi. \end{aligned}$$

Бундан:

$$\begin{aligned}\beta_0 &= a_0 - b_0, \\ \beta_1 &= a_1 + \beta_0 \xi = b_1, \\ \beta_2 &= a_2 + \beta_1 \xi = b_2, \\ \beta_{n-1} &= a_{n-1} + \beta_{n-2} \xi = b_{n-1}, \\ \beta_n &= a_n + \beta_{n-1} \xi = b_n.\end{aligned}$$

Ана шунини исботлаш талаб этилган эди.

Шундай қилиб, (2.3) формула, ва демак, Горнер схемаси ҳам, бўлишни бажармасдан туриб, $Q_{n-1}(x)$ бўлинимнинг коэффициентларини ва $P_n(\xi)$ қолдиқни топиш имконини беради.

2-мисол. $P_n(x) = 12x^4 + 19x^3 - 4$ кўпхаднинг $\xi = -2$ нуқтадаги қийматини ҳисобланг ва $P_4(x)$ ни $x + 2$ икки ҳадга бўлишдан чиқадиган $Q_3(x)$ бўлима кўпхаднинг коэффициентларини аниқланг.

Ечиш. Бу кўпхад учун Горнер схемасини тузамиз:

$$\begin{array}{r} 12 \quad 19 \quad 0 \quad 0 \quad -4 \quad | -2 \\ \quad -24 \quad 10 \quad -20 \quad 40 \\ \hline 12 \quad -5 \quad 10 \quad -20 \quad 36 \end{array} = P(-2) - \text{қолдиқ}.$$

Шундай қилиб, $P_4(-2) = 36$ ва $Q_3(x) = 12x^3 - 5x^2 + 10x - 20 - P_4(x)$ ни $x + 2$ бўлишдан чиқадиган бўлима кўпхад.

2.3. Горнер схемасидан фойдаланиб, берилган $P_n(x)$ кўпхаднинг ҳақиқий илдизлари чегараларини топиш мумкин. Айтайлик $x = \beta$ ($\beta > 0$) да Горнер схемасидаги барча b_i коэффициентлар манфиймас шу билан бирга биринчи коэффициент мусбат бўлсин, яъни

$$b_0 = a_0 > 0 \text{ ва } b_i \geq 0 \ (i = 1, n),$$

у ҳолда $P_n(x)$ кўпхаднинг барча x_k ҳақиқий илдизлари β дан чапда жойлашган, яъни

$$x_k < \beta \ (k = \overline{1, m}, \ m \leq n)$$

бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$P_n(x) = (b_0 x^{n-1} + \dots + b_{n-1})(x - \beta) + b_n$$

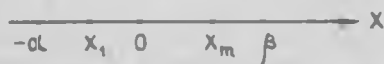
булганлиги учун исталган $x > \beta$ да юқорида келтирилган шартларга асосан $P_n(x) > 0$ бўлади, яъни β дан катта исталган сон $P_n(x)$ кўпхаднинг ҳеч қачон илдизи бўла олмайди. Шундай қилиб, кўпхаднинг x_k ҳақиқий илдизларини юқоридан баҳоладик.

x_k илдизларини қуйидан баҳолаш учун

$$Q_n(x) = (-1)^n P(-x) = a_0 x^n - a_1 x^{n-1} + \dots + (-1)^n a_n$$

кўпхадни тузамиз. Бу янги кўпхад учун шундай $x = \alpha$ ($\alpha > 0$) сонни топамизки, мос Горнер схемасидаги биринчи коэффициентдан ташқари барча коэффициентлар манфиймас бўлсин, биринчи коэффициент эса равшанки, мусбат бўлади. Юқоридагига ўхшаш мулоҳаза юри-

тиб, $Q_n(x)$ кўпхаднинг $x_k (k = \overline{1, m})$ ҳақиқий илдиэлари учун $-x_k < \leq \alpha$ тенгсизликни ҳосил қиламиз. Демак, $x_k > -\alpha$ кўпхаднинг ҳақиқий илдиэлари учун қуйи чегарани ҳосил қилдик. Шундай қилиб, $P_n(x)$ кўпхаднинг барча ҳақиқий илдиэлари $[-x, \beta]$ кесмада жойлашган (3.1-шакл).



3.1-шакл

3-мисол. $P_4(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 1$ кўпхаднинг ҳақиқий илдиэлари чегараларини топинг.

Ечиш. $P_4(x)$ кўпхаднинг, масалан, $x = 2$ даги қийматини ҳисоблаймиз. Горнер схемасини тузамиз.

1	-2	3	4	-1	2
	2	0	6	20	
1	0	3	10	19	$= P(2)$

Барча коэффициентлар манфиймас бўлганлиги учун $P_4(x)$ кўпхаднинг ҳақиқий илдиэлари, агар улар мавжуд бўлса, $x_k < 2$ тенгсизликни қаноатлантиради. Демак, ҳақиқий илдиэларнинг юқори чегараси топилди.

Қуйи чегарани баҳолаш учун янги кўпхадни тузамиз:

$$Q_4(x) = (-1)^4 P_4(-x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 4x - 1.$$

Унинг қийматини, масалан, $x = 1$ да ҳисоблаймиз. Горнер схемасини тузамиз.

1	2	3	-4	-1	1
	1	3	6	2	
1	3	6	2	1	

Барча коэффициентлар мусбат, демак, $-x_k < 1$, яъни $x_k > -1$. Шундай қилиб, ҳақиқий илдиэларнинг қуйи чегараси топилди. Демак, берилган $P_4(x)$ кўпхаднинг барча ҳақиқий илдиэлари $[-1, 2]$ кесманинг ичида жойлашган.

2.4. Кўпхадда ўзгарувчини алмаштириш. Ушбу

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

кўпхадда x ўзгарувчини

$$x = y + \xi$$

формула бўйича алмаштириш зарур бўлсин, бу ерда y янги ўзгарувчи, ξ — тайин сон. Ўрнига қўйгандан сўнг унга нисбатан янги

$$P_n(y + \xi) = A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + \dots + A_n$$

кўпхадни ҳосил қиламиз. Энди қуйидагиларни кўрсатиш мумкин:

$$A_n = P_n(\xi),$$

$A_{n-1} = P_{n-1}(\xi)$, бу ерда $P_{n-1}(x)$ — берилган $P_n(x)$ кўпхадни $(x - \xi)$ га бўлишдан чиққан бўлинма;

$A_{n-2} = P_{n-2}(\xi)$, бу ерда $P_{n-2}(x)$ — $P_{n-1}(x)$ ни $x - \xi$ га бўлишдан чиққан бўлинма;

$A_0 = P_0(\xi)$, бу ерда $P_0(x)$ — шу $P_n(x)$ ни $x - \xi$ га бўлишдан чиққан бўлинма.

$P_n(\xi), P_{n-1}(\xi), P_{n-2}(\xi), \dots, P_0(\xi)$ қийматларни ҳисоблашда ушбу умумлашган Горнер схемасидан фойдаланилади:

$$\begin{array}{r} a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_{n-1} \quad a_n \quad | \xi \\ b_0 \xi \quad b_1 \xi \quad b_2 \xi \quad \dots \quad b_{n-2} \xi \quad b_{n-1} \xi \\ \hline a_0 = b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \dots \quad b_{n-1} \quad b_n = P_n(\xi) = A_n \\ c_0 \xi \quad c_1 \xi \quad c_2 \xi \quad \dots \quad c_{n-2} \xi \\ \hline b_0 = c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad \dots \quad c_{n-1} = P_{n-1}(\xi) = A_{n-1} \\ \dots \end{array}$$

4-мисол. $P_4(x) = x^4 - 8x^3 + 5x^2 + 2x - 7$ кўпхадда ўзгарувчининг учинчи даражасини йўқотиш учун $x = y + 2$ деб олинг ва алмаштирилган кўпхадни топинг.

Ечиш. Умумлашган Горнер схемасини татбиқ этамиз ($\xi = 2$ да):

$$\begin{array}{r} 1 \quad -8 \quad 5 \quad 2 \quad -7 \quad | \xi = 2 \\ \quad 2 \quad -12 \quad -14 \quad -24 \\ \hline 1 \quad -6 \quad -7 \quad -12 \quad -31 = A_4 \\ \quad 2 \quad -8 \quad -30 \\ \hline 1 \quad -4 \quad -15 \quad -42 = A_3 \\ \quad 2 \quad -4 \\ \hline 1 \quad -2 \quad -19 = A_2 \\ \quad 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 = A_1 \\ \quad 1 = A_0 \end{array}$$

Демак, $P(y + 2) = y^4 - 19y^2 - 42y - 31$.

3-§. Функцияларни аппроксимациялаш

3.1. Функцияларни аппроксимациялашдан кўпгина амалий масалаларни ҳал этишда фойдаланилади.

Бирор экспериментни ўтказиш жараёнида берилган $x_0, x_1, \dots, x_n$ нуқталарда $y = f(x)$ функциянинг

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad \dots, \quad y_n = f(x_n)$$

қийматлари ҳосил қилинган бўлиб, бошқа $x \neq x_i (i = \overline{0, n})$ нуқталарда $f(x)$ функцияни тиклаш талаб қилинсин.

Аппроксимациялашнинг бошқа кенг тарқалган масалаларидан бири берилган $y_i = f(x_i) (i = \overline{0, n})$ қийматлар бўйича $f'(x)$ ҳосилани ва

$\int_a^b f(x) dx$ интегрални аниқлашдан иборатдир.

Бу каби масалаларни ҳал этишда классик ёндошув усули шундан иборатки, $f(x)$ функция ҳақида мавжуд маълумотдан фойдаланган ҳолда $f(x)$ га бирор маънода яқин бўлган бошқа $\varphi(x)$ функция қаралади ва $\varphi(x)$ устида тегишли амални бажариб, бундай алмаштириш хатолигини олиш имкони бўлади.

Бундай ёндошувни амалга оширишда ушбу тўртта масалани кўриб чиқиш керак.

1. $f(x)$ функциянинг берилиш шакли ҳақидаги масала. Бу ерда иккита асосий ҳол бўлиши мумкин. Функция ё аналитик усулда, ёки жадвал усулида берилган. Функциянинг график усулда берилишини аниқ масалага боглиқ равишда ё биринчи ҳолга, ёки иккинчи ҳолга киритилади. Бундан кейин биз $[a, b]$ кесмада ўзининг етарли тартибгача ҳосилалари билан узлуксиз бўлган ва x_i (бунда $a \leq x_i \leq b$ ва $i = \overline{1, n}$) тугунларда ўзининг $y_i = f(x_i)$ қийматлари билан аниқланган $f(x)$ функцияни қараймиз.

2. Аппроксимацияловчи функциялар синфи, яъни $f(x)$ функция қандай $\varphi(x)$ функциялар билан аппроксимацияланиши ҳақидаги масала. Бунда ушбу икки факторга амал қилинади. Биринчидан, аппроксимацияловчи функция аппроксимацияланувчи функциянинг ўзига хос хусусиятларини акс эттирсин, иккинчидан, унинг устида тегишли амалларни бажариш қулай бўлсин.

Сонли анализда уч гуруҳ аппроксимацияловчи функциялар кенг қўлланилади. Биринчи гуруҳ — бу $1, x, x^2, \dots, x^n$ кўринишдаги функциялар бўлиб, уларнинг чизиқли комбинациялари ёрдамида даражаси n дан юқори бўлмаган барча кўп ҳадлар синфини ҳосил қилиш мумкин.

Иккинчи гуруҳни Фурье қаторлари ва Фурье интеграллини ҳосил қиладиган $\sin ax$ ва $\cos ax$ функциялар ҳосил қилади.

Учинчи гуруҳ e^{ax} экспоненциал функциялардан иборат.

Қуйида биз кўпҳадлар билан аппроксимациялаш устида батафсилроқ тўхталамиз, яъни аппроксимацияловчи функция устида бирор n -даражали кўпҳадни қараймиз.

3. Аппроксимацияловчи ва аппроксимацияланадиган функцияларнинг яқинлиги масаласи, яъни $\varphi(x)$ функция қаноатлантириши лозим бўлган мувофиқлик мезонини танлаш ҳақидаги масала.

Мувофиқлик мезони ҳақидаги масала шундан иборатки, бунда бирор йўл билан аппроксимацияланувчи ва аппроксимацияловчи функциялар

орасидаги «фарқланиш» аниқланади, кейин эса барча аппроксимацияловчи функциялар синфидан бу «фарқланиш»нинг энг кичик бўлишни таъминлайдиган функция танланади.

Кенг тарқалган мувофиқлик мезонларидан бири *Чебишев мезони* бўлиб, унда «фарқланиш» тушунчаси x_i тугунларда $\varphi(x)$ функциянинг $f(x)$ функциядан четлашувининг максимал миқдори деб қаралишига асосланади:

$$\Delta = \max |f(x_i) - \varphi(x_i)|.$$

Бу ерда аппроксимацияловчи функция учун $\Delta = 0$ бўладиган ҳол энг катта аҳамиятга эга. Бу қуйидагини билдиради: ўзининг $y_i = f(x_i)$ қийматлари билан берилган $y = f(x)$ функция учун (3.1-жадвал) x_i тугунларда шу $y = f(x)$ функциянинг қийматлари билан бир

3.1-жадвал

x	x_0	x_1	...	x_n
$y = f(x)$	y_0	y_1	...	y_n

хил, яъни $\varphi(x_i) = y_i$ бўлган аппроксимацияловчи $\varphi(x)$ функцияни тузиш талаб қилинад. $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функцияларнинг x_i тугунларда бир хил бўлиш мезонига асосланган бундай аппроксимациялаш усули *интерполяциялаш* (ёки *интерполяция*) деб аталади.

Мувофиқлик мезонига яна бир мисол келтирайлик. Функциялар орасидаги «фарқланиш» тушунчасини x_i тугун нуқталарда улар четлашилларини квадратлари йиғиндис сифатида бундай киритамиз:

$$\rho = \sum_{i=0}^n |f(x_i) - \varphi(x_i)|^2.$$

Энди аппроксимацияловчи функция сифатида бу ρ минимал бўладиган нуқтани танлаймиз. Бу мезондан унча юқори бўлмаган аниқликда берилган катта миқдордаги маълумотлар берилган ҳолларда фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Бу мезонга асосланган аппроксимациялаш усули кўпинча *Энг кичик квадратлар усули* деб аталади (2-жилд, 336-саҳифага қаранг).

4. Ҳосил қилинган ечимнинг аниқлик масаласи кўп жиҳатдан асосий масаладир. Бу ерда тақрибий ечим аниқ ечимдан берилган едан ортиқ фарқ қилмаслиги лозим. Бу $f(x)$ функцияни исталганча даражада аниқ яқинлаштириш масаласи бўлиб, у юқорида санаб утилган «параметрларга» (x_i тугунлар, $\varphi(x)$ функциялар синфи, $f(x)$ ва $\varphi(x)$ нинг мувофиқлик мезони) боғлиқ бўлиб, умумий ҳолда очиқлигича қолади ва ҳар бир тайин аппроксимациялаш жараёнида алоҳида тадқиқ қилиниши керак.

3.2 Бирор гўпламда ўзларининг ҳосилалари билан биргаликда узлуксиз бўлган

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$$

функциялар системаси берилган бўлсин. Бу функциялар системасини **асосий система** деб аталади. Ушбу

$$Q_n(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x)$$

кўринишдаги функция ***n*-тартибли умумлашган функция** деб аталади, бу ерда $a_0, a_1, \dots, a_n$ ўзгармас коэффициентлар.

Хусусий ҳолда, асосий система x ўзгарувчининг бутун манфий-мас даражаларидан иборат, яъни

$$\varphi_0'(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = x^2, \dots, \varphi_n(x) = x^n$$

бўлса, у ҳолда одатдаги ***n*-даражали**

$$Q_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

кўпхадга эга бўламиз. Агарда

$$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = \cos x, \varphi_2(x) = \sin x, \dots, \varphi_{2n-1}(x) = \cos nx,$$

$$\varphi_{2n}(x) = \sin nx$$

бўлса, у ҳолда ***n*-тартибли**

$$Q_n(x) = a_0' + a_1\cos x + a_2\sin x + \dots + a_{2n-1}\cos nx + a_{2n}\sin nx$$

тригонометрик кўпхадга эга бўламиз.

Шундай қилиб, функцияларни аппроксимациялаш масаласи қуйидагича қўйилади: берилган $f(x)$ функцияни берилган ***n*-тартибли $Q_n(x)$ умумлашган $\varphi(x) = Q_n(x)$ кўпхад билан шундай алмаштириш керакки, $f(x)$ функциянинг $Q_n(x)$ кўпхаддан (маълум маънода) кўрсатилган тўпламда фарқланиши энг кичик бўлсин. $\varphi(x) = Q_n(x)$ кўпхад ***умумий ҳолда аппроксимацияловчи*** кўпхад деб аталади.**

Агар кўрсатилган тўплам алоҳида

$$x_0, x_1, \dots, x_n$$

нуқталардан иборат бўлса, у ҳолда аппроксимациялаш ***нуқтавий яқинлаштириш*** деб аталади. Агар бу тўплам $a \leq x \leq b$ кесма бўлса, у ҳолда аппроксимациялаш ***интеграл яқинлаштириш*** деб аталади.

Амалиётда функцияларни оддий ва тригонометрик кўпхадлар билан аппроксимациялаш жуда муҳим аҳамиятга эга.

«Иккита функциянинг фарқланиши» атамасига келсак, у вазиятга қараб турлича тушуниладн. Шунга мувофиқ аппроксимациялашнинг турлича масалаларига эга бўламиз: ўртача квадратик яқинлаштириш, текис яқинлаштириш ва ҳоказо.

4-§. Энг яхши нуқтавий ва интеграл ўртача квадратик яқинлашишлар

$f(x)$ функцияни $\varphi(x)$ функция билан энг кичик квадратлар усули ёрдамида аппроксимациялаш натижасида бу функциялар орасидаги фарқланиш ўлчови ўртасида нуқтавий яқинлашишлар учун,

$$\rho = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - \varphi(x_i))^2,$$

интеграл яқинлаштиришлар учун эса

$$\rho = \int_a^b (f(x) - \varphi(x))^2 dx$$

олинади ва у ўртача квадратик яқинлашиш деб аталади.

а) Нуқтавий яқинлашиш. Айрим $x_1, x_2, \dots, x_n$ нуқталардаги $y_1, y_2, \dots, y_n$ қийматлари маълум бўлган $y = f(x)$ функциянинг аппроксимациялайдиган

$$y = \varphi(x, a_1, a_2, \dots, a_n)$$

функцияни топиш талаб қилинсин. Энг кичик квадратлар усули бўйича $\varphi(x, a_1, \dots, a_m)$ функцияни

$$\rho = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - \varphi(x_i))^2, \text{ бунда } f(x_i) = y_i,$$

миқдор энг кичик бўладиган қилиб танланади. ρ миқдорнинг барча $a_1, a_2, \dots, a_m$ ўзгарувчилар бўйича хусусий ҳосилаларини топамиз. Бу хусусий ҳосилаларни нолга тенглаб, $a_1, a_2, \dots, a_m$ номаълумларни топиш учун ушбу m та номаълумли m та

$$\frac{\partial \rho}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial a_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \rho}{\partial a_m} = 0$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу тенгламалар системасини ечиб, $a_1, a_2, \dots, a_m$ ларни топамиз. Бу коэффициентларга эга бўлган $y = \varphi(x, a_1, a_2, \dots, a_m)$ функция энг кичик ўртача квадратик четланиш $\rho_{\min}$ га эга бўлади.

Хусусий ҳолда

$$y = \varphi(x, a, b) = ax + b$$

кўринишдаги чизиқли боғланиш изланаётган бўлса, a ва b коэффициентлар ушбу чизиқли тенгламалар системасидан топилади:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \quad (4.1)$$

Агар

$$y = \varphi(x, a, b, c) = ax^2 + bx + c$$

кўринишдаги ўртача квадратик четланиш изланаётган бўлса, у ҳолда a, b, c коэффициентлар ушбу чизиқли тенгламалар системасидан топилади:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + c \cdot n = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \quad (4.2)$$

б) Интеграл яқинлашиш. Изланаётган $y = f(x)$ функцияни $[a, b]$ кесмада аппроксимацияловчи $y = \varphi(x, a_1, a_2, \dots, a_m)$ функцияни энг кичик квадратлар усули бўйича топиш талаб қилинсин. $\varphi(x, a_1, a_2, a_3, \dots, a_m)$ функцияни изланаётган $y = f(x)$ функциядан фарқланиш ўлчови сифатида

$$\rho = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx$$

қабул қилинади. Энг яхши ўртача квадратик аппроксимациялашда ρ миқдор энг кичик қиймат қабул қилади.

а) банддаги каби

$$\frac{\partial \rho}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial a_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \rho}{\partial a_m} = 0$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз ва буни ечиб, $a_1, a_2, \dots, \dots, a_m$ номаълумларнинг ρ минимал бўладиган қийматларини топамиз.

Одатда аппроксимацияловчи функция сифатида кўпхад танланади.

Интегралли аппроксимациялашда аниқ интегралларни ҳисоблашга тўғри келади, улар жуда мураккаб бўлиши ёки элементар функциялар орқали умуман ифодаланмаслиги ҳам мумкин. Шу сабабли нуқтавий аппроксимациялаш усули афзалроқдир.

Мисол. $y = 3^x$ функцияни $[-1; 1]$ кесмада учинчи даражали кўпхад билан ўртача квадратик аппроксимацияланг.

Ечиш. Изланаётган функцияни

$$Q_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

кўпхад кўринишида танлаймиз. Ушбу

$$\rho = \int_{-1}^1 (3^x - a_0 - a_1x - a_2x^2 - a_3x^3)^2 dx$$

миқдорнинг энг кичик қийматини

$$\frac{\partial \rho}{\partial a_i} = 0; \quad i = \overline{0,3}$$

шартлардан топамиз. Ушбу тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial a_0} = -2 \int_{-1}^1 (3^x - a_0 - a_1x - a_2x^2 - a_3x^3) dx = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial a_1} = -2 \int_{-1}^1 (3^x - a_0 - a_1x - a_2x^2 - a_3x^3) x dx = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial a_2} = -2 \int_{-1}^1 (3^x - a_0 - a_1x - a_2x^2 - a_3x^3) x^2 dx = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial a_3} = -2 \int_{-1}^1 (3^x - a_0 - a_1x - a_2x^2 - a_3x^3) x^3 dx = 0. \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 x^n dx = \begin{cases} 0, & n \text{ тоқ бўлганда,} \\ \frac{2}{n+2}, & n \text{ жуфт бўлганда} \end{cases}$$

жанлигини ҳисобга олиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$2a_0 + \frac{2}{3} a_2 = \int_{-1}^1 3^x dx.$$

$$\frac{2}{3} a_1 + \frac{2}{5} a_3 = \int_{-1}^1 x 3^x dx,$$

$$\frac{2}{3} a_0 + \frac{2}{5} a_2 = \int_{-1}^1 x^2 3^x dx,$$

$$\frac{2}{5} a_1 + \frac{2}{7} a_3 = \int_{-1}^1 x^3 3^x dx$$

ёки

$$6a_0 + 2a_2 = 7,2819;$$

$$2a_1 + 1,2a_3 = 2,4739;$$

$$2a_0 + 1,2a_2 = 2,7779;$$

$$2,8a_1 + 2a_3 = 3,5366$$

системани ечамиз:

$$a_0 = 0,9944; \quad a_1 = 1,1000, \quad a_2 = 0,6576; \quad a_3 = 0,2335.$$

Шундай қилиб, изланаётган функция

$$Q_3(x) = 0,9944 + 1,1000x + 0,6576x^2 + 0,2335x^3$$

қўринишга эга бўлади.

5-§. Функцияларга алгебраик кўпхадлар билан энг яхши текис яқинлашиш

$f(x)$ функцияни $\varphi(x)$ функция билан яқинлаштиришда бу функциялар орасидаги фарқланиш ўлчови сифатида

$$\Delta = \max |f(x) - \varphi(x)|$$

миқдор қабул қилинса, бундай яқинлашиш текис яқинлашиш деб аталади.

Яқинлашиш энг яхши бўлиши учун бу миқдор $[a, b]$ кесмада бошқа функцияларга нисбатан энг кичик бўлиши талаб қилинади.

$f(x)$ функцияни $Q_m(x)$ алгебраик кўпхадлар билан аппроксимациялаш учун ушбу Вейерштрасс теоремаси ўринли: агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда исталганча кичик $\varepsilon > 0$ учун етарлича катта m -даражали шундай $Q_m(x)$ кўпхад топилдики, унинг учун

$$|f(x) - Q_m(x)| < \varepsilon$$

бўлади.

$$\Delta_m = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - Q_m(x)|$$

миқдорга энг кичик қиймат берадиган бундай $Q_m(x)$ кўпхад $f(x)$ функцияга $[a, b]$ кесмада энг яхши текис яқинлашувчи кўпхад ёки $f(x)$ функциядан $[a, b]$ кесмада энг кам фарқланадиган функция деб аталади.

$$\min \Delta_m = E_m$$

энг кичик фарқланиш $[a, b]$ кесмада $f(x)$ нинг энг кичик фарқланиши деб аталади.

Қуйидаги теорема ўринлидир: ёпиқ чегараланган тўпламда (бу $[a, b]$ кесма ёки чекли сондаги $x_1, x_2, \dots, x_n$ нуқталар системаси бўлиши мумкин) узлуксиз бўлган исталган $f(x)$ функция ва исталган m натурал сон учун даражаси m дан ортиқ бўлмаган ва энг кичик E_m фарқланишга эга бўлган $Q_m(x)$ кўпхад мавжуд, шу билан бирга бундай кўпхад ягонадир.

$Q_m(x)$ кўпхадга баъзан қўшимча чеклашлар қилинади, масалан, $a_m = 1$ деб олинади, бу ҳолда

$$Q_m(x) = a_0 + a_1x + \dots + x^m$$

га эга бўламиз:

Хусусан, $f(x) \equiv 0$ бўлса, у ҳолда

$$\rho_m = \max_{x \in [a, b]} |Q_m(x)|$$

миқдорга энг кичик қиймат берадиган $Q_m(x)$ кўпхад $[a, b]$ кесмада нолдан энг кам фарқланадиган кўпхад деб аталади. Ана шундай хоссага Чебишев кўпхадлари эга бўлиб, улар сонли усуллар назарияси ва амалиётида катта аҳамиятга эга.

6-§. Чебишев кўпхадлари

Чебишев кўпхадлари $[-1, 1]$ кесмада

$$T_m(x) = \cos(m \arccos x), \quad m \geq 0 \quad (6.1)$$

формула билан берилади.

Агар $m = 0$ ва $m = 1$ бўлса,

$$T_0(x) = 1 \quad \text{ва} \quad T_1(x) = x$$

га эга бўламиз. Сўнгра

$$\cos(m-1)\varphi + \cos(m+1)\varphi = 2 \cos \varphi \cos m \varphi$$

ёки

$$\cos(m+1)\varphi = 2 \cos \varphi \cos m \varphi - \cos(m-1)\varphi$$

айниятдан фойдаланиб ва $\varphi = \arccos x$ деб олиб, (6.1) га асосан

$$T_{m+1}(x) = 2xT_m(x) - T_{m-1}(x) \quad (6.2)$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда $m = 1, 2, \dots$

Бутун $0 \leq x \leq 1$ ўқида $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ деб ва (6.2) рекуррент

формулани бутун Ox ўқига ёйиб, бу формула бўйича кетма-кет қуйидагиларни топамиз:

$$\begin{aligned}T_2(x) &= 2xT_1(x) + T_0(x) = 2x^2 - 1, \\T_3(x) &= 2xT_2(x) + T_1(x) = 4x^3 - 3x, \\T_4(x) &= 2xT_3(x) + T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 6, \\T_5(x) &= 2xT_4(x) + T_3(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x. \\&\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Чебишев кўпхадларининг хоссалари:

1. Чебишев кўпхадлари m жуфт сон бўлганда жуфт, m тоқ сон бўлганда тоқ функциялардир.

2. $m > 1$ да $T_m(x)$ кўпхаднинг юқори коэффициенти 2^{m-1} га тенг.

3. $m > 1$ да $T_m(x)$ кўпхад $(-1, 1)$ оралиқда m та турли ҳақикий илдизга эга ва улар

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2m} \pi, \quad k = \overline{1, m}$$

формула билан аниқланади.

4. $T_m(x)$, $m > 0$ кўпхад модулининг $[-1, 1]$ кесмадаги энг катта қиймати 1 га тенг, яъни

$$\max_{x \in [-1, 1]} |T_m(x)| = 1.$$

шу билан бирга $x_n = \cos \frac{n\pi}{m}$, $n = \overline{0, m}$ да $T_m(x) = (-1)^n$.

Бундан барча $x \in [-1, 1]$ учун

$$|T_m(x)| \leq 1$$

булиши равшан.

$\bar{T}_m(x)$ орқали юқори коэффициенти 1 га тенг бўлган Чебишев кўпхадини белгилаймиз:

$$\bar{T}_m(x) = 2^{1-m} \cdot T_m(x),$$

- у ҳолда, равшанки,

$$\max_{x \in [-1, 1]} |\bar{T}_m(x)| = 2^{1-m}.$$

5. m -даражали ($m > 1$) $\bar{T}_m(x)$ Чебишев кўпхади $m(m > 1)$ даражали ва юқори коэффициенти бир бўлган бошқа $\bar{Q}_m(x)$ кўпхадга қараганда нолдан энг кичик фарқ қилади, яъни $\max_{x \in [-1, 1]} |\bar{T}_m(x)| \leq \max_{x \in [-1, 1]} |\bar{Q}_m(x)|$. Бу қуйидагини англатади: m -даражали ва юқори

коэффициенти бир бўлган исталган $\bar{Q}_m(x)$ кўпхад учун

$$\max_{x \in [-1, 1]} |\bar{Q}_m(x)| > 2^{1-m}$$

тенгсизлик ўринли.

Бундан ташқари $f(x) = x^m$, $m \geq 1$ функция учун $[-1, 1]$ кесмада энг яхши яқинлашувчи $(m-1)$ - даражали $Q_{m-1}(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{m-1}x^{m-1}$ кўпхад

$$Q_{m-1}(x) = x^m - \bar{T}_m(x) \quad (6.3)$$

бўлади, бу ерда $\bar{T}_m(x)$ юқори коэффициентни бирга тенг бўлган Чебишев кўпхади.

Ҳақиқатан ҳам,

$$f(x) - Q_{m-1}(x) = x^m - a_{m-1}x^{m-1} - \dots - a_1x - a_0$$

айнрма масала маъносига кўра $[-1, 1]$ кесмада нолдан энг кичик фарқланадиган кўпхаддир, яъни у $\bar{T}_m(x)$ Чебишев кўпхадида ноборат. Бу ердан (6.3) формула келиб чиқади.

5-хоссадан фойдаланиб, ихтиёрий $[a, b]$ кесмада нолдан энг кичик фарқланадиган m - даражали ва юқори коэффициентни 1 га тенг бўлган $\bar{T}_m(x)$ кўпхадни тузиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам,

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

алмаштириш $a \leq x \leq b$ кесмани $-1 \leq t \leq 1$ кесмага алмаштиради, шу билан бирга t^m олдидаги юқори коэффициент $\left(\frac{b-a}{2}\right)^m$ га тенг. Бу ердан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\bar{T}_m(x) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^m \bar{T}_m(t) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^m \cdot \bar{T}_m\left(\frac{x - \frac{b+a}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right) \quad (6.4)$$

(6.4) формуладан $\bar{T}_m(x)$ кўпхаднинг нолдан оғиши

$$E_m\left(\frac{b-a}{2}\right) 2^{1-m} = 2 \left(\frac{b-a}{4}\right)^m$$

га тенглиги келиб чиқади.

Мисол. $f(x) = x^2$ функциянинг $[0, 1]$ кесмада биринчи даражали $Q_1(x) = Ax + B$ кўпхад ёрдамида энг яхши текис яқинлашишини топинг.

Ечиш. A ва B коэффициентларни

$$E_1 = \max_{x \in [0, 1]} |x^2 - Q_1(x)|$$

миқдор энг кичик бўладиган қилиб танлаймиз. Демак,

$$\bar{Q}_2(x) = x^2 - Ax - B$$

кўпхад $[0, 1]$ кесмада нолдан энг кичик оғади.

$a = 0$, $b = 1$ қийматларни ўрнига қўйиб, (6.4) формуладан қўғидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned}\bar{Q}_1(x) &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \bar{T}_2\left(\frac{x - \frac{b+a}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 2^{1-2} T_2\left(\frac{x - \frac{b+a}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2^{-1} T_2\left(\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{8} T_2(2x-1) = \frac{1}{8} (2(2x-1)^2 - 1) = \\ &= \frac{1}{8} (8x^2 - 8x + 1) = x^2 - x + \frac{1}{8} = x^2 - \left(x - \frac{1}{8}\right).\end{aligned}$$

Бундан $Q_1(x) = x - \frac{1}{8}$, шу билан бирга $E_1 = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}$,

$$\bar{Q}_2(0) = \frac{1}{8}, \quad \bar{Q}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}, \quad \bar{Q}_2(1) = \frac{1}{8},$$

шу сабабли $E_1 = \frac{1}{8}$ оғиш учта нуқтада: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x = 1$ да рўй беради. Бу энг яхши яқинлашиш кўпхадларнинг ўзига хос хусусиятидир.

Геометрик нуқтан назардан $y = Q_1(x)$ функциянинг графиги $A(0, 0)$ ва $B(1, 1)$ нуқталар орқали ўтувчи ватар билан бу ватарга параллел уринма ўртасидан уларга параллел бўлиб ўтган тўғри чизиқдир, бунда эгри чизиқ $y = x^2$ функциянинг графигидан иборат (3.2-шакл).

7-§. Функцияларни интерполяциялаш. Хатоликни баҳолаш

7.1. Интерполяциялаш дейил-ганда функциянинг жадвал усулида берилишидан аналитик усулда берилишига ўтишни тушунилади.

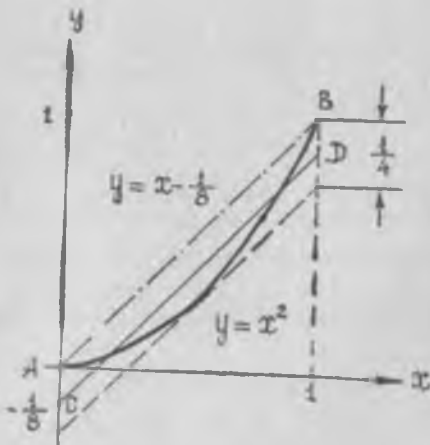
Энг содда интерполяциялаш масаласи қуйидагидан иборат: $[a, b]$ кесмада интерполяция тугунлари деб аталадиган $n+1$ та

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$$

нуқта ва бу нуқталарда бирор $y = f(x)$ функциянинг

$$\begin{aligned}y_0 &= f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = \\ &= f(x_2), \dots, y_n = f(x_n)\end{aligned}$$

қийматлари берилган. Бу маълумотлар жадвал шаклида ёзилган бўлсин (3.2-жадвал).



3.2-шакл

x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n

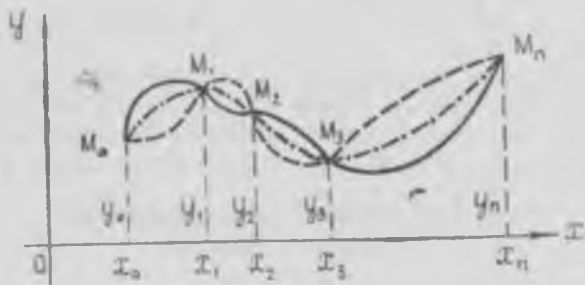
Маълум синфга тегишли бўлган ва интерполяция тугунларида $y = f(x)$ функция қабул қиладиган қийматларни қабул қиладиган, яъни

$$F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, F(x_2) = y_2, \dots, F(x_n) = y_n$$

бўлган $y = F(x)$ функцияни (аппроксимацияловчи функцияни) топиш талаб қилинади. Геометрик нуқтаи назардан бу берилган

$$M_0(x_0, y_0), M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \dots, M_n(x_n, y_n)$$

нуқталардан ўтадиган маълум типдаги эгри чизиқни топиш лозимлигини англатади (3.3-шакл)



3.3-шакл

Масала бундай умумий қўйилганда чексиз кўп ечимлар тўпламига эга бўлиши ёки мутлақо ечимга эга бўлмаслиги мумкин. Бироқ ихтиёрий $F(x)$ функция ўрнига

$$P_n(x_0) = y_0, P_n(x_1) = y_1, P_n(x_2) = y_2, \dots, P_n(x_n) = y_n$$

шартларни қаноатлантирадиган даражаси n дан ортиқ бўлмаган $P_n(x)$ кўпхад изланадиган бўлса, масала бир қийматли ечилади. Бу шартлардан фойдаланиб, номаълум $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ коэффициентларни аниқлаш учун қуйидаги $(n+1)$ та номаълумли $(n+1)$ та тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = y_0.$$

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = y_1.$$

$$\dots$$

$$a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = y_n.$$

Агар $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ қийматлар бир-биридан фарқли бўлса, система ягона ечимга эга эканлигини айтиб ўтамиз. Бу системани ечиб, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ коэффициентларнинг қийматларини аниқлаймиз ва қўйилган масаланинг ечимини берадиган $P_n(x)$ интерполяцион кўпхадни ҳосил қиламиз.

1-мисол. Ушбу жадвал (3.3-жадвал).

3.3-жадвал

x	0	1	2
y	1	1	3

билан берилган $f(x)$ функция учун интерполяцион кўпхаднинг даражасини ва ўзини топинг.

Ечиш. Тугуилар сони ва параметрлар сони $n+1=3$ шу сабабли, интерполяцион кўпхаднинг даражаси $n=2$ бўлади. $P_2(x)$ ни

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

кўринишда ёзамиз ва жадвалдаги маълумотлар бўйича ушбу чизиқли тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 &= 1, \\ a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 &= 1, \\ a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 &= 3. \end{aligned}$$

Бу системани ечиб, $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = 1$ ни топамиз, демак, интерполяцион кўпхад бундай кўринишда бўлади:

$$P_2(x) = 1 - x + x^2.$$

У қўйилган шартларни қаноатлантиришини аниқлаш қийин эмас.

7.2. Интерполяциялашда мувофиқлик мезони сифатида $f(x)$ ва $P_n(x)$ функцияларнинг интерполяция тугунларнда устма-уст тушиши шarti қабул қилинади.

$f(x)$ функциянинг бирор $\bar{x} \neq x_i$ нуқтадаги қийматини ҳисоблаш зарур бўлган ҳолда интерполяция хатолиги Δ деб, аниқ ва тақрибий қийматлар орасидаги

$$R_n(x) = |f(\bar{x}) - P_n(\bar{x})|$$

айирмага айтилади, бу ерда $R_n(x)$ — интерполяция формуласининг хатолиги.

Тайин $\bar{x}$ нуқта учун хатолик ушбу тенгсизликни қаноатлантиришини исботлаш мумкин:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_n(\bar{x})|, \quad (7.1)$$

бу ерда

$$\omega_n(x) = \prod_{i=0}^n (\bar{x} - x_i) = (\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1) \dots (\bar{x} - x_n),$$

$$M_{n+1} = \max_{x \in [a, b]} |f^{n+1}(x)|.$$

$[a, b]$ кесмада $f(x)$ функцияни $P_n(x)$ кўпхад билан интерполяциялаш натижасида ҳосил бўладиган хатолик қуйидаги муносабат орқали аниқланади:

$$|R_n(x)| = \max_{x \in (a, b)} |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{x \in [a, b]} |\omega_n(x)|.$$

бу ер а

$$\omega_n = \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

2-мисол. Интерполяция тугунлари сифатида

$$x_0 = 100, \quad x_1 = 121, \quad x_2 = 144$$

ни танлаб, $y = \sqrt{x}$ функция учун интерполяцион кўпхад ёрдамида $\sqrt{117}$ ни қандай аниқликда ҳисоблаш мумкин?

Е чиш. Энг аввал $M_3 = \max_{x \in [100, 144]} |(Vx)'''|$ ни аниқлаймиз. Бунинг учун қуйидагиларни топамиз:

$$y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}, \quad y'' = -\frac{1}{4} x^{-3/2}, \quad y''' = \frac{3}{8} x^{-5/2}.$$

Бундан:

$$M_3 = \frac{3}{8} 100^{-5/2} = \frac{3}{8} 10^{-5}.$$

(7.1) муносабатга асосан:

$$|R_2(117)| \leq \frac{3}{8} \cdot 10^{-5} |(117 - 100)(117 - 121)(117 - 144)| \approx 0,12 \cdot 10^{-2}.$$

8-§. Лагранж ва Ньютоннинг интерполяцион кўпхадлари

$P_n(x)$ интерполяцион кўпхаднинг a_i коэффицентларини ҳисоблаш юқори тартибли тенгламалар системасини ечиш билан боғлиқ. Шу сабабли амалий масалаларни ҳал этишда интерполяцион кўпхаднинг махсус турлари билан иш кўрилади.

8.1. Лагранжнинг интерполяцион формуласи деб ушбу

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} y_i$$

интерполяцион кўпхадга айтилади. Каернинг сурат ва махражини $(x-x_i)$ га кўпайтириб ҳамда

$$\omega_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n),$$

$$\omega'_n(x_i) = (x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)$$

ларни ҳисобга олиб, (8.2) Лагранж интерполяцион кўпҳадини бундай кўринишда ёзиш мумкин:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{\omega_n(x)}{(x-x_i)\omega'_n(x_i)} = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x). \quad (8.3)$$

y_i лар олдида турган $l_i(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x-x_i)\omega'_n(x_i)}$, $i = \overline{0, n}$ коэффициентлар Лагранж кўпайтувчилари деб аталадн. Улар учун қуйидаги тенглик ўринли:

$$\sum_{i=0}^n l_i(x) = 1.$$

3-мисол. $f(x)$ функция 3.4-жадвал билан берилган.

3.4-жадвал

x	0	1	2	6
y	-1	-3	3	1187

Унинг $x = 4$ нуқтадаги қийматини Лагранж интерполяцион кўпҳадидан фойдаланиб ҳисобланг.

Ечиш. (7.3) формулага x_i ва y_i нинг қийматларини қўйиб, $n = 3$ ва $x = 4$ да қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$L_3(4) = -1 \cdot \frac{(4-1)(4-2)(4-6)}{(-1)(-2)(-6)} - 3 \cdot \frac{4 \cdot (4-2)(4-6)}{1 \cdot (1-2)(1-6)} + \\ + \frac{4(4-1)(4-6)}{2(2-1)(2-6)} + 1187 \cdot \frac{4(4-1)(4-2)}{6(6-1)(6-2)} = 255.$$

Одатда ҳисоблашлар қулай бўлиши учун ушбу ёрдамчи жадвал тузилади (3.5-жадвал):

$x - x_0$	$x_0 - x_1$	$x_0 - x_2$	$\dots$	$x_0 - x_n$	k_0
$x_1 - x_0$	$x - x_1$	$x_1 - x_2$	$\dots$	$x_1 - x_n$	k_1
$x_2 - x_0$	$x_2 - x_1$	$x - x_2$	$\dots$	$x_2 - x_n$	k_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$x_n - x_0$	$x_n - x_1$	$x_n - x_2$	$\dots$	$x - x_n$	k_n

Бу ерда $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ — интерполяция тугунлари, x — аргументнинг қиймати бўлиб, унинг учун Лагранж интерполяцион кўпҳадининг қиймати аниқланади. i -сатр элементлари кўпайтмаларини k ($i = 0, n$) орқали белгилаймиз:

$$k_0 = (x - x_0)(x_0 - x_1) \dots (x_0 - x_n),$$

$$k_1 = (x_1 - x_0)(x - x_1) \dots (x_1 - x_n),$$

$$k_n = (x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x - x_n).$$

$k_0, k_1, k_2, \dots, k_n$ сонларни жадвалнинг ўнгдан охириги устунига жойлаштирамиз. Қўшимча равишда бош диагоналда турган элементлар кўпайтмасини ҳисоблаймиз:

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Энди (8.3) Лагранж интерполяцион кўпҳадини бундай кўринишда ёзиш мумкин:

$$L_n(x) = \omega_n(x) \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{k_i}. \quad (8.4)$$

4-мисол. 3-мисолни (8.4) формуладан фойдаланиб ечинг:
Ечиш. Жадвал тузамиз (3.6-жадвал):

3.6-жадвал

4 — 0	0 — 1	0 — 2	0 — 6	$k_0 = -48$
1 — 0	4 — 1	1 — 2	1 — 6	$k_1 = 15$
2 — 0	2 — 1	4 — 2	2 — 6	$k_2 = -16$
6 — 0	6 — 1	6 — 2	4 — 6	$k_3 = -240$

(8.3) формулага ва жадвалга асосан:

$$\omega_3(4) = 4(4 - 1)(4 - 2)(4 - 6) = -48.$$

Функциянинг $x = 4$ нуқтадаги тақрибий қийматини, яъни $f(4) \approx \approx L_3(4)$ ни ушбу формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$L_3(4) = \omega_3(x) \sum_{i=0}^3 \frac{y_i}{k_i} = -48 \left(\frac{-1}{-48} + \frac{-3}{15} + \frac{3}{-16} + \frac{1187}{-240} \right) = 255.$$

8.2. Энг кўп қўлланиладиган интерполяциялаш масаласи тенг узоқликдаги тугунли интерполяциялаш масаласидир. Бу ҳолда интерполяцион кўпхадларнинг шаклигина эмас, балки ҳисоблаш жараёнининг ўзи ҳам ихчамлашади.

Тенг узоқликдаги тугунли интерполяцион кўпхадларни тузишда *чекли айирмалар* деб аталадиган миқдорлардан фойдаланилади.

$y = f(x)$ функция тенг узоқликдаги тугунли жадвал билан берилган бўлсин (3.7-жадвал):

3.7-жадвал

x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n

Бу ерда $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} = h = \text{const}$, h — *қadam* деб аталади,

Биринчи тартибли чекли айирма деб, функциянинг тугундаги ва ундан олдинги тугундаги қийматлари орасидаги айирмага айтилади, яъни:

$$\begin{aligned} \Delta y_0 &= y_1 - y_0, \\ \Delta y_1 &= y_2 - y_1, \\ \Delta y_2 &= y_3 - y_2, \\ &\vdots \\ \Delta y_{n-1} &= y_n - y_{n-1}. \end{aligned}$$

Иккинчи тартибли чекли айирма деб, тугундаги ва ундан олдинги тугундаги биринчи тартибли чекли айирмалар орасидаги айирмага айтилади, яъни:

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_0 &= \Delta y_1 - \Delta y_0, \\ \Delta^2 y_1 &= \Delta y_2 - \Delta y_1, \\ &\vdots \\ \Delta^2 y_{n-1} &= \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}. \end{aligned}$$

Ихтиёрий k -тартибли чекли айирмалар ҳам шунга ўхшаш аниқланади, яъни:

$$\begin{aligned} \Delta^k y_0 &= \Delta^{k-1} y_1 - \Delta^{k-1} y_0, \\ \Delta^k y_1 &= \Delta^{k-1} y_2 - \Delta^{k-1} y_1, \end{aligned}$$

ва ҳоказо.

Чекли айирмаларни жадвал шаклида ёзиш қулай бўлади (3. 8- жадвал):

3. 8- жадвал

i	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	x_0	y_0	$\Delta y_0 = y_1 - y_0$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$	$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$
1	x_1	y_1	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1$
2	x_2	y_2	$\Delta y_2 = y_3 - y_2$	$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2$	$\Delta^3 y_2 = \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2$
3	x_3	y_3	$\Delta y_3 = y_4 - y_3$	$\Delta^2 y_3 = \Delta y_4 - \Delta y_3$	$\Delta^4 y_3 = \Delta^3 y_4 - \Delta^3 y_3$
...	...	...	...	...	...
$n-1$	x_{n-1}	y_{n-1}	$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$		
n	x_n	y_n			

5- мисол. $y = x^3 + 3x^2 - x - 1$ функциянинг $x_0 = 0$ дан бошлаб $h = 1$ қадам билан 4- тартиблигача чекли айирмаларни жадвалини тузинг.

Ечиш. Берилганларга асосан $n = 5$ ва $x_0 = 1, x_1 = 1, \dots, x_5 = 5$ да $y = x^3 + 3x^2 - x - 1$ функциянинг мос қийматларини топамиз ва жадвалга киритамиз. Чекли айирмаларни бевосита жадвалда ҳисоблаймиз (3. 9- жадвал):

3. 9- жадвал

i	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	0	-1	$2 - (-1) = 3$	$15 - 3 = 12$	6	0
1	1	2	$17 - 2 = 15$	$33 - 15 = 18$	6	0
2	2	17	$50 - 17 = 33$	$57 - 33 = 24$	6	
3	3	50	$107 - 50 = 57$	$87 - 57 = 30$		

i	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
4	4	107	$194 - 107 = 87$			
	5	194				

Юқоридаги жадвалдан кўриниб турибдики, учинчи тартибли чекли айирмалар ўзгармас. Бу $f(x)$ функция учинчи тартибли кўпхад эканлиги билан тушунтирилади. Учинчи тартибли чекли айирмалар $\Delta^n P_n(x) = n! a_0 h^n$ формула бўйича ҳисоблаш ҳам мумкин эди.

8.3. Тенг узоқликдаги $x_i = x_0 + ih$ ($i = \overline{0, n}$) қадамлар учун $L_n(x)$ Лагранж кўпхади Ньютон интерполяцион кўпхади шаклида ёзилиши мумкин:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2} (x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}), \quad (8.5)$$

бу ерда $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \Delta^3 y_0, \dots, \Delta^n y_0$ — турли тартибли чекли айирмалар.

Энди

$$\frac{x - x_0}{h} = q$$

деб, (8.5) Ньютон интерполяцион кўпхадини ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$P_n(x) = y_0 + q \Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1) \dots (q-n+1)}{n!} \Delta^n y_0. \quad (8.6)$$

(8.5) ёки (8.6) Ньютон формуласида $h = 1$ деб олиб, ушбу чиқиқли интерполяциялаш формуласини ҳосил қиламиз:

$$P_1(x) = y_0 + q \Delta y_0 \quad \text{ёки} \quad P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h} (x - x_0) \quad (8.7)$$

$n = 2$ бўлганда квадратик интерполяция формуласи ҳосил бўлади:

$$P_2(x) = y_0 + q \Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2} \Delta^2 y_0$$

ёки

$$P_2(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h} (x - x_0) + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2} (x - x_0)(x - x_1). \quad (8.8)$$

(8.5) ва (8.6) формулалар Ньютоннинг биринчи интерполяцион формулалари деб аталади. Уларни $[x_0; x_1]$ да интерполяциялашда қўлланилади. $[x_{n-1}, x_n]$ да интерполяциялашда Ньютоннинг ушбу иккинчи интерполяцион кўпхадларидан фойдаланилади:

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h} (x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2} (x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} (x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1) \quad (8.9)$$

ёки

$$\frac{x - x_n}{h} = t$$

белгилашни киритиб, (8.9) ни ушбу кўринишда ёзамиз:

$$P_n(x) = y_n + \Delta y_{n-1} t + \frac{t(t+1)}{2} \Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{t(t+1) \dots (t+n-1)}{n!} \Delta^n y_0. \quad (8.10)$$

6-мисол. Жадвал билан берилган $y = 3^x$ функциянинг $x_1 = 0,63$ ва $x_2 = 1,35$ нуқталардаги қийматларини Ньютон кўпҳадлари ёрдамида (тўртта ишончли рақам билан) ҳисобланг (3.10-жадвал):

3.10-жадвал

x	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50
y	1,732	2,280	3,000	3,948	5,196

Ечиш. Чекли айирмалар жадвалини тузамиз (3.11-жадвал):

3.11-жадвал

i	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	0,50	1,732	0,548	0,172	0,56	0,16
1	0,75	2,280	0,720	0,228	0,72	
2	1,00	3,000	0,948	0,300		
3	1,25	3,948	1,248			
4	1,50	5,196				

Сўнгра $\bar{x}_1 = 0,63$ жадвалнинг бошида, $\bar{x}_2 = 1,35$ эса охирида жойлашганлиги учун $f(0,63)$ ни ҳисоблашда Ньютоннинг биринчи интерполяцион кўпҳадидан, $f(1,35)$ ни ҳисоблашда эса иккинчи интерполяцион кўпҳадидан фойдаланиш лозим.

Шундай қилиб, $x_0 = 0,5$ деб олиб, q ни ҳисоблаймиз:

$$q = \frac{\bar{x} - x_0}{h} = \frac{0,63 - 0,5}{0,25} = 0,52.$$

q нинг бу қийматини Ньютон биринчи интерполяцион кўпҳадининг (8.6) ифодасига қўйиб ва чекли айирмалардан фойдаланиб қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned} f(0,63) \approx P_4(0,52) &= [1,732 + \frac{0,548}{1!} \cdot 0,52 + \frac{0,172}{2!} \cdot 0,52(-0,48) + \\ &+ \frac{0,055}{3!} \cdot 0,52(-0,48)(-1,48) + \frac{0,16}{4!}(-0,48)(-1,48)(-2,48)] \approx \\ &\approx 1,999 \end{aligned}$$

(тўртта ишончли рақамни қолдириб, қолган рақамларни яхлитлаймиз). Шунга ўхшаш, $x_4 = 1,50$ деб,

$$t = \frac{\bar{x}_2 - x_4}{h} = \frac{1,35 - 0,50}{0,25} = -0,60$$

ни ҳисоблаймиз ва Ньютоннинг иккинчи интерполяцион кўпҳади ифодаси (8.10) дан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} f(1,35) \approx P_4(-0,60) &= 5,196 + \frac{1,248}{1!}(-0,60) + \\ &+ \frac{0,300}{2!}(-0,60)(-0,40) + \frac{0,72}{3!}(-0,60)(-0,40)(-1,40) + \\ &+ \frac{0,16}{4!}(-0,60)(-0,40)(1,40)(2,40) \approx 4,407. \end{aligned}$$

9- §. Сплайнлар билан интерполяциялаш

$[a, b]$ кесма n та тенг $[x_i, x_{i+1}]$ қисмий кесмаларга бўлинган бўлсин, бу ерда $x_i = a + ih$, $i = \overline{0, n}$, $x_n = b$, $h = \frac{b-a}{n}$.

Сплайн деб, бутун $[a, b]$ кесмада бир неча ҳосилаларни билан узлуксиз, ҳар бир қисмий кесмада эса алоҳида бирор алгебраик кўпҳаддан иборат бўлган функцияга айтилади.

Барча қисмий кесмалар бўйича кўпҳадларнинг даражаларининг энг каттаси *сплайннинг даражаси*, сплайннинг даражаси билан $[a, b]$ да узлуксиз ҳосилаларнинг энг катта тартиби орасидаги айирма *сплайннинг дефекти* деб аталади. Масалан, узлуксиз бўлакли — чизиқли функция (синиқ чизиқ) дефекти бирга тенг бўлган биринчи даражали сплайндир, чунки фақат функциянинг ўзи (нолинчи тартибли ҳосила) узлуксиз, биринчи ҳосила эса узлукли бўлади.

Амалиётда $[a, b]$ да узлуксиз иккинчи ҳосилага эга бўлган учинчи даражали сплайнлар кенг тарқалган. Бу сплайнлар *кубик сплайнлар* деб аталади ва $S_3(x)$ орқали белгиланади.

Сплайнлар воситасида интерполяциялаш берилган x_i нуқталарда берилган $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$ қийматларни қабул қиладиган ва қўшимча шартларни қаноатлантирадиган интерполяцион кўпхадни тузишни англатади. Масалан, $[a, b]$ да бир нечта кўпхадлардан «улаб» тузилган ва узлуксиз иккинчи ҳосилага эга бўлган $S_3(x)$ кубик сплайн учун ушбу шартлар қўйилади:

$$S_3(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n} \quad (9.1)$$

$$S_3'(x_{i+0}) = S_3'(x_{i-0}), \quad i = \overline{1, n-1};$$

$$S_3^-(x_{i-0}) = S_3^-(x_{i+0}), \quad i = \overline{1, n-1}; \quad S_3^-(x_0) = S_3^-(x_n) = 0.$$

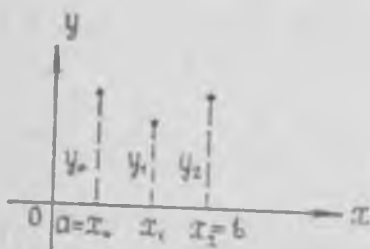
Демак, ҳар бир қўшни тугунлар жуфти оралигида интерполяцион функция учинчи даражали кўпхад бўлиб, уни бундай кўринишда ёзиб олиш қулай бўлади:

$$S_3(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \\ x_{i-1} \leq x \leq x_i; \quad i = \overline{1, n}.$$

Ҳосилаларни топамиз:

$$\left. \begin{aligned} S_3'(x) &= b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2 \\ S_3''(x) &= 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}). \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

(8.11) шартларни тузиб, a_i, b_i, c_i, d_i , $i = \overline{1, n}$ ларни топиш учун чизиқли тенглама системасини ҳосил қиламиз. Масалан, $n = 2$ бўлганда тенг узоқликдаги учта x_0, x_1, x_2 тугун нуқталарга ва функциянинг уларга мос y_0, y_1, y_2 қийматлари учун (3.4-шакл) $[x_0, x_2]$ кесмада



3.4-шакл

$$S_3(x) = a_1 + b_1(x - x_0) + c_1(x - x_0)^2 + d_1(x - x_0)^3$$

кўпхадга, $[x_1, x_2]$ кесмада эса

$$S_3(x) = a_2 + b_2(x - x_1) + c_2(x - x_1)^2 + d_2(x - x_1)^3$$

кўпхадга эга бўламиз.

(9.1) ни ҳисобга олсак, (9.2) шартлар бундай кўринишни олади:

$$\begin{aligned} y_0 &= a_1, \quad y_1 = a_2, \\ y_2 &= a_2 + b_2h + c_2h^2 + d_2h^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_1 &= a_1 + b_1 h + c_1 h^2 + d_1 h^3, \\b_2 &= b_1 + 2c_1 h + 3d_1 h^2, \\c_2 &= c_1 + 3d_1 h, \quad 2c_1 = 0, \quad c_2 + d_2 h = 0.\end{aligned}$$

Бу 8 номаълумли 8 та тенгламалар системасини ечиб, ҳар бир кесмадаги $S_8(x)$ кўпхадни топамиз.

10- §. Чизиқли тенгламалар системаларини ечиш усуллари

Чизиқли тенгламалар системаларини ечиш усуллари аниқ усуллар (Крамер қондаси, Гаусснинг номаълумларни чиқариш усули, Гаусс—Жорданнинг яхшиланган усули) ва итерацион усуллар (уч диагоналли системаларга татбиқ этиладиган «прогонка» усули, оддий итерация усули, Зейдель усули ва бошқалар) га бўлинади.

Итерацион усуллар (тақрибий усуллар) системанинг ечимини берилган анқликда ҳосил қилиш имконини беради.

11- §. Гаусс — Жордан усули. Матрицаларни алмаштириш ва детерминантларни ҳисоблаш

11.1. Олий математиканинг умумий курсидан маълумки, чизиқли тенгламалар системаларини Гаусс усули билан ечишда бу система учбурчакли система шаклига келтирилади. Номаълумларнинг қийматларини бевосита топишга имкон берадиган Гаусс—Жордан яхшиланган усулини кўриб чиқамиз.

Ушбу ихтиёрий чизиқли тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (11.1)$$

(11.1) системанинг кенгайтирилган матрицасини қараймиз:

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

В матрицада нолдан фарқли a_{ik} элементни танлаймиз. Уни ҳал этувчи элемент деб атаймиз; матрицанинг i - сатрини ҳал этувчи сатр, k - устунини эса ҳал этувчи устун деб атаймиз. В матрица устида элементар алмаштиришлар бажариб, бу матрицага эквивалент ва k - ҳал этувчи устунда a_{ik} дан бошқа барча элементлари ноллар бўлган янги матрицани ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, сатрлар устида элементар алмаштиришлар ёрдамида, ҳал этувчи элемент сифатида бир хил номерли сатр ва устунларнинг кесишган жойларида турган элементларни танлаш йўли билан В матрица ушбу кўринишга келтирилиши мумкин:

Амалиётда $[a, b]$ да узлуксиз иккинчи ҳосилага эга бўлган учинчи даражали сплайнлар кенг тарқалган. Бу сплайнлар *кубик сплайнлар* деб аталади ва $S_3(x)$ орқали белгиланади.

Сплайнлар воситасида интерполяциялаш берилган x_i нуқталарда берилган $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$ қийматларни қабул қиладиган ва қўшимча шартларни қаноатлантирадиган интерполяцион кўпхадни тузишни англатади. Масалан, $[a, b]$ да бир нечта кўпхадлардан «улаб» тузилган ва узлуксиз иккинчи ҳосилага эга бўлган $S_3(x)$ кубик сплайн учун ушбу шартлар қўйилади:

$$S_3(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n} \quad (9.1)$$

$$S_3'(x_{i+0}) = S_3'(x_{i-0}), \quad i = \overline{1, n-1};$$

$$S_3^-(x_{i-0}) = S_3^-(x_{i+0}), \quad i = \overline{1, n-1}; \quad S_3^-(x_0) = S_3^-(x_n) = 0.$$

Демак, ҳар бир қўшни тугунлар жуфти оралиғида интерполяцион функция учинчи даражали кўпхад бўлиб, уни бундай кўринишда ёзиб олиш қулай бўлади:

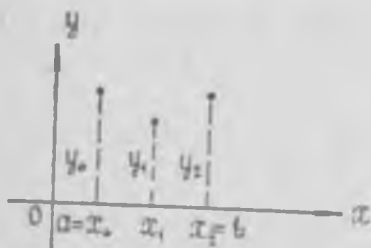
$$S_3(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3,$$

$$x_{i-1} \leq x \leq x_i; \quad i = \overline{1, n}.$$

Ҳосилаларни топамиз:

$$\left. \begin{aligned} S_3^+(x) &= b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2 \\ S_3^-(x) &= 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}) \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

(8.11) шартларни тузиб, a_i, b_i, c_i, d_i , $i = \overline{1, n}$ ларни топиш учун чизиқли тенглама системасини ҳосил қиламиз. Масалан, $n = 2$ бўлганда тенг узоқликдаги учта x_0, x_1, x_2 тугун нуқталарга ва функциянинг уларга мос y_0, y_1, y_2 қийматлари учун (3.4-шакл) $[x_0, x_1]$ кесмада



3.4-шакл

$$S_3(x) = a_1 + b_1(x - x_0) + c_1(x - x_0)^2 + d_1(x - x_0)^3$$

кўпхадга, $[x_1, x_2]$ кесмада эса

$$S_3(x) = a_2 + b_2(x - x_1) + c_2(x - x_1)^2 + d_2(x - x_1)^3$$

кўпхадга эга бўламиз.

(9.1) ни ҳисобга олсак, (9.2) шартлар бундай кўринишни оладн:

$$y_0 = a_1, \quad y_1 = a_2,$$

$$y_2 = a_2 + b_2h + c_2h^2 + d_2h^3,$$

$$\begin{aligned}y_1 &= a_1 + b_1 h + c_1 h^2 + d_1 h^3, \\b_2 &= b_1 + 2c_1 h + 3d_1 h^2, \\c_2 &= c_1 + 3d_1 h, \quad 2c_1 = 0, \quad c_2 + d_2 h = 0.\end{aligned}$$

Бу 8 номаълумли 8 та тенгламалар системасини ечиб, ҳар бир кесмадаги $S_2(x)$ кўпҳадни топамиз.

10-§. Чизмқли тенгламалар системаларини ечиш усуллари

Чизикли тенгламалар системаларини ечиш усуллари аниқ усуллар (Крамер қондаси, Гаусснинг номаълумларни чиқариш усули, Гаусс—Жорданнинг яхшиланган усули) ва итерацион усуллар (уч диагоналли системаларга татбиқ этиладиган «прогонка» усули, оддий итерация усули, Зейдель усули ва бошқалар) га бўлинади.

Итерацион усуллар (тақрибий усуллар) системанинг ечимини бэрилган аниқликда ҳосил қилиш имконини беради.

11-§. Гаусс — Жордан усули. Матрицаларни алмаштириш ва детерминантларни ҳисоблаш

11.1. Олий математиканинг умумий курсидан маълумки, чизикли тенгламалар системаларини Гаусс усули билан ечишда бу система учбурчакли система шаклига келтирилади. Номаълумларнинг қийматларини бевосита топишга имкон берадиган Гаусс—Жордан яхшиланган усулини кўриб чиқамиз.

Ушбу ихтиёрий чизикли тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (11.1)$$

(11.1) системанинг кенгайтирилган матрицасини қараймиз:

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

B матрицада нолдан фарқли a_{ik} элементни танлаймиз. Уни ҳал этувчи элемент деб атаймиз; матрицанинг i - сатрини ҳал этувчи сатр, k - устунини эса ҳал этувчи устун деб атаймиз. B матрица устида элементар алмаштиришлар бажариб, бу матрицага эквивалент ва k - ҳал этувчи устунда a_{ik} дан бошқа барча элементлари ноллар бўлган янги матрицани ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, сатрлар устида элементар алмаштиришлар ёрдамида, ҳал этувчи элемент сифатида бир хил номерли сатр ва устунларнинг кесишган жойларида турган элементларни танлаш йўли билан B матрица ушбу кўринишга келтирилиши мумкин:

$$B \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1, r+1} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2, r+1} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{r, r+1} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_{r+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_m \end{array} \right) \quad (11.2)$$

(бунда система матрицаси ранги $r \leq n$).

(11.2) матрица ушбу системанинг кенгайтирилган матрицасидир:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + a'_{1, r+1} x_{r+1} + \dots + a'_{1n} x_n = b'_1, \\ x_2 + a'_{2, r+1} x_{r+1} + \dots + a'_{2n} x_n = b'_2, \\ \dots \\ x_r + a'_{r, r+1} x_{r+1} + \dots + a'_{rn} x_n = b'_r, \\ 0 = b'_{r+1} \\ 0 = b'_m. \end{array} \right. \quad (11.3)$$

бу система эса (11.1) системага эквивалентдир.

1) Агар $b'_{r+1}, \dots, b'_m$ сонлардан ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли бўлса, у ҳолда (11.3) система, ва, демак, (11.1) система ҳам биргаликда эмас.

2) Агар $b'_{r+1} = \dots = b'_m = 0$ бўлса, у ҳолда

а) $r < n$ бўлганда система биргаликда ва чексиз кўп ечимлар тўпламига эга ҳамда (11.3) формулалар $x_1, x_2, \dots, x_r$ баъзи номаълумларнинг $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ озод номаълумлар орқали ошкор ифодаларини беради.

б) $r = n$ бўлганда бу системанинг ечимлари ягонадир.

1- мисол. Ушбу тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 3, \\ 3x_1 + 11x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Е чи ш. Системани бундай қайта ёзиб оламиз:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 11x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 6x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 3. \end{cases}$$

Кенгайтирилган матрицани тузамиз:

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 11 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 6 & -5 & 7 & 8 & 3 \end{array} \right)$$

Ҳал этувчи элемент сифатида $a_{11} = 1$ ни (биринчи сатрнинг биринчи элементини) оламиз:

$$B \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -11 & 1 & 8 & 3 \end{array} \right)$$

Олдин учинчи сатрни (-1) га кўпайтириб, иккинчи ва учинчи сатрларнинг ўринларини алмаштирамиз:

$$B \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 8 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & -11 & 1 & 8 & 3 \end{array} \right)$$

Ҳал этувчи элемент сифатида $a_{12} = 1$ (2- сатрнинг 2- элементи)ни оламиз:

$$\begin{aligned} B &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 36 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -36 & -8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -36 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -36 & -8 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 40 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -36 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Система биргаликда эмас (а) ҳол).

2-мисол. Ушбу тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ 4x_1 - x_3 + x_3 + x_4 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 8. \end{cases}$$

Ечиш. Кенгайтирилган матрицани тузамиз ва элементар алмаштиришлар бажарамиз:

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 1 & -2 & 8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & -15 & -1 \\ 0 & 3 & -7 & -19 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -12 & 8 \end{array} \right) \sim$$

$$\begin{aligned}
&\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -12 & 8 \\ 0 & 3 & -7 & -19 & 6 \\ 0 & 4 & -7 & -15 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 12 & -8 \\ 0 & 3 & -7 & -19 & 6 \\ 0 & 4 & -7 & -15 & -1 \end{array} \right) \sim \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 17 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & 12 & -8 \\ 0 & 0 & -16 & -55 & 30 \\ 0 & 0 & -19 & -63 & 31 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 17 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & 12 & -8 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{55}{16} & -\frac{15}{8} \\ 0 & 0 & 19 & 63 & -31 \end{array} \right) \sim \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{16} & \frac{11}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{27}{16} & -\frac{19}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{55}{16} & -\frac{15}{8} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{37}{16} & \frac{37}{8} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{16} & \frac{11}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{27}{16} & -\frac{19}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{55}{16} & -\frac{15}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -2 \end{array} \right) \sim \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Система биргаликда ва ушбу ягона ечимга эга:

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 5, x_4 = -2.$$

3-мисол. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 5, \\
x_2 + x_3 + x_4 &= 3, \\
x_1 + x_3 &= 2.
\end{aligned}$$

Ечиш. Кенгайтирилган матрицани тузамиз ва элементар алмаштиришларни бажарамиз:

$$\begin{aligned}
B &= \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{array} \right) \sim \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Система биргаликда, иккита параметр $(n-r=4-2=2)x_3$ ва x_4 га боғлиқ бўлган ушбу чексиз кўп ечимлар тўпламига эга:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_3 + x_4 - 1, \\
x_2 &= 3 - x_3 - x_4.
\end{aligned}$$

11.2. Элементар алмаштиришларни бажариб, тескари матрицани топиш мумкин. Бунинг учун берилган n -тартибли A квадрат матрица учун бу матрицанинг ённга ўнг томондан ўшандай тартибли E бирлик матрицани ёзиб, $n \times 2n$ ўлчамли (A/E) тўғри тўртбурчак матрица тузилади. Агар A матрица махсус матрица бўлса, сатрлар устида элементар алмаштиришлар бажариб, тузилган матрицани ҳар доим (E/B) кўринишга келтириш мумкин. У ҳолда B матрица A матрица учун *тескари матрица* бўлади, яъни $B = A^{-1}$.

4-мисол. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ матрица учун тескари матрицани

элементар алмаштиришлар усулидан фойдаланиб топинг.

Ечиш. Янги (A/E) матрица тузамиз ва унинг устида элементар алмаштиришлар бажарамиз:

$$\begin{aligned} (A/E) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2/9 & -2/9 & 1/9 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/9 & 2/9 & 2/9 \\ 0 & 1 & 0 & 2/9 & 1/9 & -2/9 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 & -2/9 & 1/9 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Демак, тескари матрица:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/9 & 2/9 & 2/9 \\ 2/9 & 1/9 & -2/9 \\ 2/9 & -2/9 & 1/9 \end{pmatrix}.$$

Детерминантларни ҳисоблашда бунга ўхшаш алмаштиришлардан бош диагоналдан ташқарида ётадиган барча элементларни нолга айлантириш учун фойдаланиш мумкин.

5-мисол. Детерминантни ҳисобланг:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}.$$

Е чиш. Қаралган усулни мазкур детерминантга татбиқ этамиз. Ушбу хоссадан фойдаланамиз: агар детерминантнинг бирор сатри элементларига бошқа сатр элементлари қўшилса (ёки айирилса) детерминант ўзгармайди:

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 9 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -11 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{17} & 3 \\ 0 & 0 & -21 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 40/17 \\ 0 & 1 & 0 & -44/17 \\ 0 & 0 & 17 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 240/17 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 240/17 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot 1 \cdot 17 \cdot \frac{240}{17} = -240 \text{ Демак, берилган детерминант } -240$$

га тенг.

12-§. Уч диагоналли системаларни ечишнинг «прогонка» усули

Қуйидаги махсус кўринишдаги [чизиқли] алгебраик тенгламалар системасини кўрайлик:

$$\begin{cases} -b_1x_1 + c_1x_2 & = d_1, \\ a_2x_1 - b_2x_2 + c_2x_3 & = d_2, \\ a_3x_2 - b_3x_3 + c_3x_4 & = d_3, \\ a_4x_3 - b_4x_4 + c_4x_5 & = d_4, \\ \dots & \dots \\ a_nx_{n-1} - b_nx_n & = d_n, \end{cases} \quad (12.1)$$

бу ерда $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ — номаълумлар, a_i, b_i, d_i, c_i лар маълум сонлар.

(12.1) системанинг A матричасини тузамиз:

$$A = \begin{pmatrix} -b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & -b_2 & c_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -b_3 & c_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & -b_4 & c_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n - b_n & 0 \end{pmatrix}$$

Уч диагоналли матрицани ҳосил қилдик, унинг бош диагонали ва унга қўшни иккита диагоналида [ётмайдиган] барча элементлари нолга тенг.

(12.1) тенгламалар иккинчи тартибли [айирмали] тенгламалар ёки *уч нуқтали тенгламалар* деб аталади.

Агар ушбу

$$|b_i| > |a_i| + |c_i|$$

шарт бажарилса, у ҳолда (12.1) система ягона ечимга эга ва уни «прогонка» усули ёрдамида топиш мумкин.

Усулнинг моҳияти қуйидагича: (12.1) системанинг биринчи тенгламасини x_1 га нисбатан ечиб,

$$x_1 = \frac{c_1}{b_1} x_2 - \frac{d_1}{b_1} \quad \text{ёки} \quad x_1 = \alpha_1 x_2 + \beta_1 \quad (12.2)$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда

$$\alpha_1 = \frac{c_1}{b_1} \quad \text{ва} \quad \beta_1 = -\frac{d_1}{b_1}. \quad (12.3)$$

(12.2) ни (12.1) системанинг биринчи тенгламасига қўйиб ва уни x_2 га нисбатан ечиб,

$$x_2 = \alpha_2 x_3 + \beta_2 \quad (12.4)$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда

$$\alpha_2 = \frac{c_2}{b_2 - a_2 \alpha_1}, \quad \beta_2 = \frac{a_2 \beta_1 - d_2}{b_2 - a_2 \alpha_1}.$$

x_2 учун топилган (12.4) ифодани (12.1) системанинг навбатдаги тенгламасига қўйиб, x_3 ва x_4 ни боғловчи тенгламани ҳосил қиламиз ва ҳоказо. Энди

$$x_k = \alpha_k x_{k+1} + \beta_k \quad (12.5)$$

ифода топилган деб фараз қилайлик, бу ерда

$$\alpha_k = \frac{c_k}{b_k - a_k \alpha_{k-1}}, \quad \beta_k = \frac{a_k \beta_{k-1} - d_k}{b_k - a_k \alpha_{k-1}}. \quad (12.6)$$

Шундай қилиб x_k , x_{k+1} , $k = 1, n-1$ қўшни қийматларни боғловчи (12.5) тенгламаларнинг коэффициентларини α_1 , ва β_1 (12.3) да номаълум бўлганлиги учун] (12.6) рекуррент муносабатлардан $k = 2, n-1$ да топиш мумкин.

(12.1) системанинг сўнги тенгламасига x_n нинг [(12.5) формуладан $k = n-1$ учун] ифодасини қўйиб,

$$x_n = \frac{\beta_n + \alpha_n \beta_{n-1}}{1 - \alpha_n \cdot \alpha_{n-1}} \quad (12.7)$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда

$$\alpha_n = \frac{a_n}{b_n}, \quad \beta_n = -\frac{d_n}{b_n}. \quad (12.8)$$

Сўнгра (12.5) формула бўйича ушбу кетма-кетликдан қолган x_{n-1} , x_{n-2} , ..., x_1 номаълумларни топамиз.

α_k , β_k $k = 1, n$ коэффициентларни (12.6) формулалар бўйича ҳн-соблаш жараёни «прогонка» нинг *тўғри йўли*, x_k номаълумларни (12.5) ва (12.7) формулалар бўйича топиш эса «прогонка» нинг *тес-кари йўли* деб аталади.

Мисол. «Прогонка» усули билан ушбу тенгламалар снстема-
сини ечинг:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 & = -5, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 & = 8, \\ 2x_2 - 5x_3 + x_4 & = -6, \\ x_3 - 3x_4 & = -8. \end{cases}$$

Ечиш. Коэффициентлардан жадвал тузамиз (3.12-жадвал):

3.12-жадвал

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
1		3	1	-5
2	1	4	-1	8
3	2	5	1	-6
4	1	3		-8

Тўғри «прогонка» йўли α_k ва β_k коэффициентларни (12.3), (12.6)
ва (12.8) формулалар бўйича ҳисоблашдан иборат:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{c_1}{b} = -\frac{1}{3}, & \beta_1 &= \frac{-d_1}{b_1} = \frac{5}{3}; \\ \alpha_2 &= \frac{c_2}{b_2 - a_2 \alpha_1} = -\frac{3}{11}, & \beta_2 &= \frac{a_2 \beta_1 - d_2}{b_2 - a_2 \alpha_1} = -\frac{19}{11}, \\ \alpha_3 &= \frac{c_3}{b_3 - a_3 \alpha_2} = \frac{11}{61}, & \beta_3 &= \frac{a_3 \beta_2 - d_3}{b_3 - a_3 \alpha_2} = \frac{28}{61}, \\ \alpha_4 &= \frac{a_4}{b_4} = \frac{1}{3}, & \beta_4 &= -\frac{d_4}{b_4} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Тескари «прогонка» йўли x_k номаълумларни (12.5) ва (12.7) форму-
лалар бўйича топишдан иборат:

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{\beta_4 - \alpha_4 \beta_3}{1 - \alpha_4 \alpha_3} = 3; \\ x_3 &= \alpha_3 x_4 + \beta_3 = 1; \\ x_1 &= \alpha_1 x_2 + \beta_1 = 1. \end{aligned}$$

Иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар учун уч нуқтали
айирмалли схема уч диагоналли чизиқли системаларга олиб келади.

13-§. Тенгламаларни ечишнинг итерация усуллари.

Қўзғалмас нуқта ҳақидаги теорема. Итерация
жараёнининг яқинлашиши

13.1. Алгебраик тенгламани ечишнинг энг муҳим усулларидан
бири итерация усули ёки кетма-кет яқинлашиш усулидир. Бу усул-
нинг асосий афзаллиги ҳар бир қадамда бажариладиган операциялар
бир хиллиги бўлиб, ЭХМ лар учун итератив алгоритмларга асос-
ланган дастурлар тузиш ишини жуда осонлаштиради.

Усулнинг моҳияти қуйидагидан иборат. Ушбу тенглама берилган бўлсин:

$$f(x) = 0, \quad (13.1)$$

бу ерда $f(x)$ — узлуксиз функция. Унинг ҳақиқий илдизларини топиш талаб қилинади. Берилган (13.1) тенгламани унга тенг кучли

$$x = \varphi(x). \quad (13.2)$$

тенглама билан алмаштирамиз. Бирор усул билан бу тенгламанинг илдизи яққаланган $[a, b]$ оралиқ (яъни бу тенгламанинг фақат битта илдизини ўз ичига олган оралиқ) ажратилган бўлиб, x_0 бу оралиқнинг исталган нуқтаси бўлсин. Уни илдизнинг *нолинчи яқинлашиши* деб атаймиз. Навбатдаги x_1 яқинлашишни топиш учун (13.2) тенгламанинг ўнг томонида x нинг ўрнига x_0 қийматни қўямиз, яъни

$$x_1 = \varphi(x_0).$$

Кейинги яқинлашишлар ушбу кетма-кетлик бўйича амалга оширилади:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi(x_0), \\ x_2 &= \varphi(x_1), \\ &\vdots \\ x_n &= \varphi(x_{n-1}). \end{aligned} \quad (13.3)$$

1-теорема. *Агар $\varphi(x)$ функция узлуксиз ва (13.3) кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, у ҳолда унинг limiti (13.2) тенгламанинг илдизи бўлади.*

Исботи. Теорема шартига кўра $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашади, демак, $n \rightarrow \infty$ да унинг limiti мавжуд, уни $\bar{x}$ орқали белгнлаймиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}. \quad (13.4)$$

(13.3) муносабатларни ҳисобга олиб, (13.4) тенгликни

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_{n-1})$$

кўринишда ёзамиз.

$\varphi(x)$ функция узлуксиз бўлганлиги сабабли бу тенгликда функциянинг ва лимитнинг φ ва $\lim$ символларининг ўринларини алмаштириш мумкин, яъни:

$$\bar{x} = \varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}),$$

бу ерда (13.4) ни эътиборга олсак,

$$\bar{x} = \varphi(\bar{x})$$

га эга бўламиз. Шунинг исботлаш талаб этилган эди.

13.2. Энди (13.3) итерация жараёни қандай шартларда яқинлашишини кўриб чиқайлик.

Мисол. «Прогонка» усули билан ушбу тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 & = -5, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 & = 8, \\ 2x_2 - 5x_3 + x_4 & = -6, \\ x_3 - 3x_4 & = -8. \end{cases}$$

Ечиш. Коэффициентлардан жадвал тузамиз (3.12-жадвал):

3.12-жадвал

	a	b	c	d
1		3	1	-5
2	1	4	-1	8
3	2	5	1	-6
4	1	3		-8

Тўғри «прогонка» йўли α_k ва β_k коэффициентларни (12.3), (12.6) ва (12.8) формулалар бўйича ҳисоблашдан иборат:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{c_1}{b} = \frac{1}{3}, \quad \beta_1 = \frac{-d_1}{b_1} = \frac{5}{3}; \\ \alpha_2 &= \frac{c_2}{b_2 - a_2 \alpha_1} = -\frac{3}{11}; \quad \beta_2 = \frac{a_2 \beta_1 - d_2}{b_2 - a_2 \alpha_1} = -\frac{19}{11}, \\ \alpha_3 &= \frac{c_3}{b_3 - a_3 \alpha_2} = \frac{11}{61}; \quad \beta_3 = \frac{a_3 \beta_2 - d_3}{b_3 - a_3 \alpha_2} = \frac{28}{61}, \\ \alpha_4 &= \frac{a_4}{b_4} = \frac{1}{3}; \quad \beta_4 = -\frac{d_4}{b_4} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Тескари «прогонка» йўли x_k номаълумларни (12.5) ва (12.7) формулалар бўйича топишдан иборат:

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{\beta_4 - \alpha_4 \beta_3}{1 - \alpha_4 \alpha_3} = 3; \\ x_3 &= \alpha_3 x_4 + \beta_3 = 1; \\ x_1 &= \alpha_1 x_2 + \beta_1 = 1. \end{aligned}$$

Иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар учун уч нуқтали айирмалли схема уч диагоналли чизиқли системаларга олиб келади.

13-§. Тенгламаларни ечишнинг итерация усуллари.

Кузгалмас нуқта ҳақидаги теорема. Итерация жараёнининг яқинлашиши

13.1. Алгебранг тенгламани ечишнинг энг муҳим усулларида бири итерация усули ёки кетма-кет яқинлашиш усулидир. Бу усулнинг асосий афзаллиги ҳар бир қадамда бажариладиган операциялар бир хиллигн бўлиб, ЭХМ лар учун итератив алгоритмларга асосланган дастурлар тузиш ишини жуда осонлаштирадн.

Усулнинг моҳияти қуйидагидан иборат. Ушбу тенглама берилган бўлсин:

$$f(x) = 0, \quad (13.1)$$

бу ерда $f(x)$ — узлуксиз функция. Унинг ҳақиқий илдизларини топиш талаб қилинади. Берилган (13.1) тенгламани унга тенг кучли

$$x = \varphi(x). \quad (13.2)$$

тенглама билан алмаштирамиз. Бирор усул билан бу тенгламанинг илдизи яқкаланган $[a, b]$ оралиқ (яъни бу тенгламанинг фақат битта илдизини ўз ичига олган оралиқ) ажратилган бўлиб, x_0 бу оралиқнинг исталган нуқтаси бўлсин. Уни илдизнинг *нолинчи яқинлашиши* деб атаймиз. Навбатдаги x_1 яқинлашишни топиш учун (13.2) тенгламанинг ўнг томонида x нинг ўрнига x_0 қийматни қўямиз, яъни

$$x_1 = \varphi(x_0).$$

Кейинги яқинлашишлар ушбу кетма-кетлик бўйича амалга оширилади:

$$\begin{aligned} x_2 &= \varphi(x_1), \\ x_3 &= \varphi(x_2), \\ &\vdots \\ x_n &= \varphi(x_{n-1}). \end{aligned} \quad (13.3)$$

1-теорема. *Агар $\varphi(x)$ функция узлуксиз ва (13.3) кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, у ҳолда унинг лимити (13.2) тенгламанинг илдизи бўлади.*

Исботи. Теорема шартига кўра $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашади, демак, $n \rightarrow \infty$ да унинг лимити мавжуд, уни $\bar{x}$ орқали белгилаймиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}. \quad (13.4)$$

(13.3) муносабатларни ҳисобга олиб, (13.4) тенгликни

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_{n-1})$$

кўринишда ёзамиз.

$\varphi(x)$ функция узлуксиз бўлганлиги сабабли бу тенгликда функциянинг ва лимитнинг φ ва $\lim$ символларининг ўринларини алмаштириш мумкин, яъни:

$$\bar{x} = \varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}),$$

бу ерда (13.4) ни эътиборга олсак,

$$\bar{x} = \varphi(\bar{x})$$

га эга бўламиз. Шуни исботлаш талаб этилган эди.

13.2. Энди (13.3) итерация жараёни қандай шартларда яқинлашишини кўриб чиқайлик.

2-теорема. Агар $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ кесмада аниқланган ва дифференциалланувчи бўлиб, шу билан бирга унинг барча қийматлари $[a, b]$ га тегишли ва $a < x < b$ да

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1 \quad (13.5)$$

бўлса, у ҳолда (13.3) итерация жараёни исталган $x_0 \in [a, b]$ да яқинлашувчи бўлади.

q сон сифатида ҳосила модули $|\varphi'(x)|$ нинг $0 \leq x \leq b$ даги энг катта қийматини (ёки юқори чегарасини) олиш мумкин.

Исботи. $[a, b]$ кесма $x = \varphi(x)$ тенглама илдизининг яқкаланн-ши оралиғи бўлиб $\varphi(x)$ функция дифференциалланувчи бўлсин ва унинг ҳосиласи теорема шартини қаноатлантирсин. $x_0 \in [a, b]$ кесма-нинг исталган нуқтаси ва $x_1 = \varphi(x_0)$ биринчи яқинлашиш бўлсин. Агар $\bar{x}$ бу тенгламанинг аниқ илдизи бўлса, у ҳолда, Лагранж тео-ремасига кўра,

$$\bar{x} - x_1 = \varphi(\bar{x}) - \varphi(x_0) = (\bar{x} - x_0) \varphi'(\bar{x}_0)$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда x_0 нуқта $\bar{x}$ ва x_0 нуқталар орасида (яъни $[a, b]$ оралиқда) ётади. (13.5) тенгсизликка асосан,

$$|\bar{x} - x_1| = |\bar{x} - x_0| \cdot |\varphi'(\bar{x}_0)| \leq q |\bar{x} - x_0|.$$

Шунга ўхшаш, $x_2 = \varphi(x_1)$ иккинчи яқинлашиш учун (теорема шартига кўра x_1 нуқта $[a, b]$ га тегишли)

$$\bar{x} - x_2 = \varphi(\bar{x}) - \varphi(x_1) = (\bar{x} - x_1) \varphi'(\bar{x}_1)$$

га эга бўламиз, бу ерда $\bar{x}_1$ яна a ва b орасида ётади. Олдинги тенг-сизликни татбиқ этиб,

$$|\bar{x} - x_2| \leq q^2 |\bar{x} - x_0|$$

баҳони аниқлаймиз. Бу жараёни давом эттириб,

$$|\bar{x} - x_n| \leq q^n |\bar{x} - x_0| \quad (13.6)$$

ни ҳосил қиламиз. (13.5) га асосан $q < 1$ бўлганлиги учун $n \rightarrow \infty$ да $q^n \rightarrow 0$. Энди (13.6) тенгсизликда лимитга ўтиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{x} - x_n) = 0$$

ни ҳосил қиламиз, яъни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x},$$

шунинг исботлаш талаб қилинган эди.

Шундай қилиб, итерация жараёнининг яқинлашиши учун қарала-ётган оралиқда $|\varphi'(x)| < 1$ бўлиши етарлидир.

13.3. 2-теорема исботининг асосида ётадиган ғоядан итерация жараёнида эришилган аниқликни баҳолаш учун фойдаланиш мумкин.

Илдизнинг аниқ ва тақрибий қийматлари орасидаги айирмани қарайлик:

$$|\bar{x} - x_n| = |\varphi(\bar{x}) - (x_{n-1})| \leq q |\bar{x} - x_{n-1}| = \\ = q |(\bar{x} - x_n) + (x_n - x_{n-1})| \leq q |\bar{x} - x_n| + q |x_n - x_{n-1}|.$$

Бундан қуйидагига эга бўламиз:

$$|\bar{x} - x| \leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}| \quad (13.7)$$

ёки

$$|\bar{x} - x_n| \leq \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0|. \quad (13.8)$$

(13.8) муносабат биринчи итерациядан кейиноқ илдишни берилган ε аниқликда ҳисоблаш учун зарур бўлган итерацияларнинг энг катта сони $N(\varepsilon)$ ни топиш имконини беради. Ҳақиқатан ҳам,

$$|\bar{x} - x_n| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилиши учун

$$\frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0| \leq \varepsilon$$

бўлиши етарлидир, бундан

$$N(\varepsilon) > \frac{\lg \frac{\varepsilon(1-q)}{|x_1 - x_0|}}{\lg q}.$$

$q \leq \frac{1}{2}$ бўлганда (13.7) хатолик баҳоси соддалашади ва ушбу кўринишни олади:

$$|\bar{x} - x_n| \leq |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon. \quad (13.9)$$

Умумий ҳолда итерация жараёнини иккита кетма-кет яқинлашиш учун

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1-q}{q} \varepsilon \quad (13.10)$$

тенгсизлик бажарилмагунга қадар давом эттириш лозим, бу ерда ε $\bar{x}$ илдизининг берилган чегаравий абсолют хатолиги ва $|\varphi'(x)| \leq q < 1$. У ҳолда (13.7) формулага асосан ушбу тенгсизликка эга бўламиз:

$$|\bar{x} - x_n| \leq \varepsilon,$$

яъни $\bar{x} = x_n \pm \varepsilon$.

13.4. Итерация жараёнининг яқинлашиши учун тенгламани

$$x = \varphi(x)$$

шаклда ёзилиши ҳам маълум аҳамиятга эга, чунки $|\varphi'(x)|$ айрим ҳолларда изланаётган илдизининг атрофларида кичик бўлиши, бошқа бир ҳолларда эса катта бўлиши мумкин. Шу сабабли $f(x) = 0$ тенг-

ламани $x = \varphi(x)$ кўринишга $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ шарт бажариладиган қилиб келтириш учун ун қишбу

$$x = x + \lambda f(x) \quad (13.11)$$

эквивалент кўринишда ёзиб оламиз, бу ерда λ сонини

$$|\varphi'(x)| < 1$$

тенгсизлик бажариладиган қилиб танлаш лозим. (13.11) формуладан

$$\varphi(x) = x + \lambda f(x) \quad (13.12)$$

булиши келиб чиқади. λ параметрни итерация жараёнининг яқинлашиши учун етарли бўлган (13.5) шартдан аниқлаш мумкин:

$$|\varphi'(x)| = |1 + \lambda f'(x)| < 1. \quad (13.13)$$

Агар

$$1 + \lambda f'(x_0) = 0$$

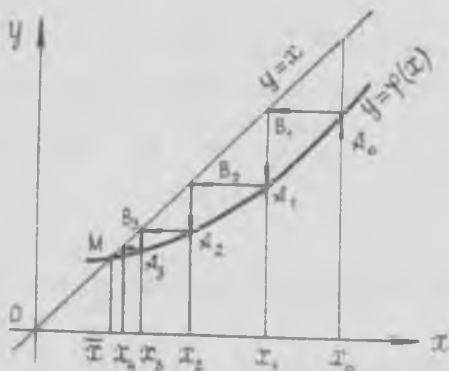
деб олинса, нолинчи яқинлашиш $x = x_0$ атрофида (13.12) тенгсизлик бажарилади ва бундан $f'(x_0) \neq 0$ бўлганда

$$\lambda = -\frac{1}{f'(x_0)} \quad (13.14)$$

ни ҳосил қиламиз.

13.5. Пировардида итерация жараёнининг геометрик маъносини ва итерация жараён яқинлашадиган (13.15) шартни кўриб чиқамиз.

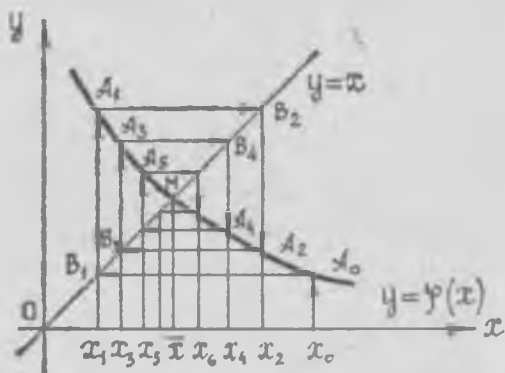
$f(x) = 0$ тенглама берилган бўлсин. Бу тенгламани $x = \varphi(x)$ кўринишга келтирамиз ҳамда $y = x$ ва $y = \varphi(x)$ функцияларнинг графикларини чизамиз (3.5-шакл). Бу функциялар графиклари кесишиш нуқтасининг $\bar{x}$ абсциссаси берилган тенгламанинг илдизи бўлади. Мумкин бўлган тўрт ҳолни кўриб чиқамиз.



3.5-шакл

1) Агар $\varphi'(x) > 0$, $|\varphi'(x)| < 1$ бўлса, у ҳолда жараён яқинлашади (поғонавий яқинлашиш). $x_0, x_1, x_2, \dots$ кетма-кет яқинлашишлар монотон камаяди, $A_0B_1A_1B_2A_2 \dots$ синиқ чизиқ, «поғонавий» шаклда бўлади.

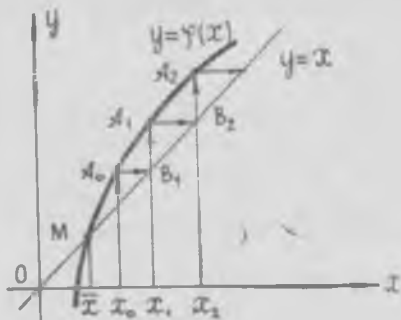
2) Агар $\varphi'(x) < 0$, $|\varphi'(x)| < 1$ бўлса, жараён яқинлашади («спирал» бўйича яқинлашиш). $x_0, x_1, x_2, \dots$ яқинлашишлар $\bar{x}$ илдиз атрофида тебранади. $A_0B_1A_1B_2A_2, \dots$ синиқ чизиқ «спирал» шаклида бўлади (3.6-шакл).



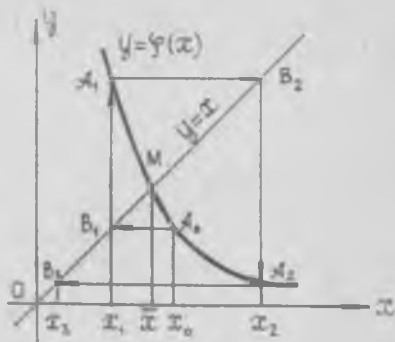
3.6-шакл

Шундай қилиб, агар $\varphi'(x)$ ҳосиланинг ишораси бир хил сақланса ва $|\varphi'(x)| < q < 1$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда кетма-кет яқинлашишлар $\varphi'(x) > 0$ да илдизга монотон яқинлашади ва $\varphi'(x) < 0$ да илдиз атрофида тебраниб яқинлашади.

3) Агар $\varphi'(x) > 0$ ва $\varphi'(x) > 1$ бўлса, у ҳолда жараён узоқлашади. «Яқинлашишлар» $\bar{x}$ илдиздан $A_0B_1A_1B_2A_2 \dots$ «поғона» бўйича узоқлашади (3.7-шакл).



3.7-шакл

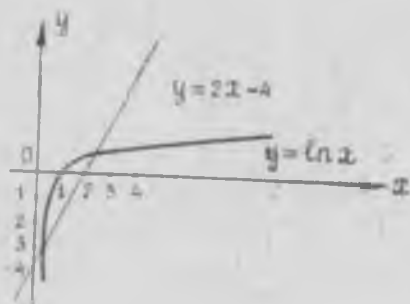


3.8-шакл

4) Агар $\varphi'(x) < 0$ ва $|\varphi'(x)| > 1$ бўлса ҳам жараён узоқлашади. «Яқинлашишлар» x илдиздан $A_0 B_1 A_1 B_2 A_2 \dots$ «спирал» бўйича узоқлашади (3.8-шакл).

Мисол. $2x - \ln x - 4 = 0$ тенгламанинг катта илдизини $\epsilon = 0,01$ гача аниқликда ҳисобланг.

Ечиш. Бу тенгламани $2x - 4 = \ln x$ кўринишида ёзиб олиб, $y = 2x - 4$ ва $y = \ln x$ функцияларнинг графикларини битта чизмага чизсак, катта илдиз 2 ва 3 сонлари орасида ётишини кўрамиз (3.9-шакл). Илдизга нолинчи яқинлашиш сифатида $x_0 = 3$ ни оламиз. Берилган тенгламани, бу ерда $f(x) = 2x - \ln x - 4$ эканини ҳисобга олиб, (13.11) кўринишида ёзиб оламиз:



3.9-шакл

$$x = x + \lambda(2x - \ln x - 4). \quad (13.15)$$

λ параметрни (13.14) шартдан топамиз:

$$\lambda = \frac{-1}{f'(x_0)} = - \frac{1}{2 - \frac{1}{x}} \bigg|_{x_0=3} = -0,6.$$

Ҳисоблашлар қулай бўлиши учун $\lambda = -0,5$ деб оламиз, бунда ҳам жараён яқинлашишининг етарлилик шarti (13.13) бажарилади. Ҳақиқатан, $\lambda = -0,5$ қийматни (13.14) га қўйсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x = \frac{1}{2} \ln x + 2, \quad (13.16)$$

шу билан бирга

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \ln x + 2,$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2x} \quad \text{ва} \quad [2, 3] \text{ кесмада } |\varphi'(x)| < 1.$$

Энди итерация жараёнини (13.15) формула бўйича $x_0 = 3$ да белгилаймиз:

$$x_1 = \frac{1}{2} \ln 3 + 2 = 2,549,$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \ln 2,549 + 2 = 2,467,$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \ln 2,467 + 2 = 2,451,$$

$$x_4 = \frac{1}{2} \ln 2,451 + 2 = 2,448,$$

$$x_5 = \frac{1}{2} \ln 2,448 + 2 = 2,447.$$

Тўртинчи яқинлашишнинг абсолют хатолиги

$$q = \max_{2 < x < 3} |\varphi'(x)| = \max_{2 < x < 3} \left| \frac{1}{2x} \right| = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$$

ни ҳисобга олиниб, (13.9) ва (13.10) формулалар бўйича баҳоланади:

$$|\bar{x} - x_1| \leq |x_1 - x_3| = 0,003 < 0,01.$$

Шундай қилиб, 0,001 гача аниқликда илдиз

$$\bar{x} \approx x_4 = 2,448 \approx 2,45$$

га эга бўлдик.

14-§. Тенгламалар системаларини ечишнинг итерация усуллари.

Оддий итерация усули. Яқинлашишнинг етарлилик шартлари

14.1. Итерация усулини, умуман айтганда, чизиқли бўлмаган тенгламалар системаларини ечишга татбиқ этиш мумкин. Қуйидаги тенгламалар системаси берилган бўлсин, соддалик учун, фақат икки-та тенглама билан чекланамиз:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0. \end{cases} \quad (14.1)$$

Бу системанинг ечимини берилган аниқликда ҳисоблаш талаб этилади. x_0, y_0 —(14.1) система ечимининг нолинчи яқинлашиши бўлсин, уни график усул билан топиш мумкин. (14.1) системани

$$\begin{cases} x = \varphi_1(x, y), \\ y = \varphi_2(x, y) \end{cases} \quad (14.2)$$

шаклда ёзиб олиб, итерация жараёнини татбиқ этамиз, у маълум шартларда илдизларнинг берилган қийматларини аниқлаштириш имконини беради. Бунинг учун (14.2) система тенгламаларининг ўнг томонларига x ва y нинг ўрнига нолинчи яқинлашиш қийматлари x_0, y_0 ни қўямиз ва биринчи яқинлашишни ҳосил қиламиз:

$$x_1 = \varphi_1(x_0, y_0), \quad y_1 = \varphi_2(x_0, y_0).$$

Иккинчи яқинлашишлар ҳам шунга ўхшаш ҳосил қилиниб,

$$x_2 = \varphi_1(x_1, y_1), \quad y_2 = \varphi_2(x_1, y_1)$$

ва, умуман, n -яқинлашишлар ҳам шу тартибда ҳисобланади:

$$x_n = \varphi_1(x_{n-1}, y_{n-1}), \quad y_n = \varphi_2(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

Агар $\varphi_1(x, y)$ ва $\varphi_2(x, y)$ функциялар узлуксиз ҳамда $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ яқинлашишлар кетма-кетликлари яқинлашувчи бўлса, у ҳолда уларнинг лимитлари (14.2) системанинг, ва демак, (14.1) системанинг ҳам ечими бўлишини исботлаш осон. Бу ҳолда итерация жараёни яқинлашади дейилади, яъни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \bar{y},$$

бу ерда $\bar{x}, \bar{y}$ — берилган системанинг ечими.

Агар итерация жараёни узоқлашса, у ҳолда ундан фойдаланиш мумкин эмас.

14.2. Юқорида тавсифланган итерация жараёни яқинлашувчи бўлишининг етарлилик шартларини тавсифлаймиз.

Теорема. Агар 1) $R: \begin{cases} a \leq x \leq b, \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ ёпиқ соҳада (14.2) системанинг битта ва фақат битта $x = \bar{x}, y = \bar{y}$ ечими мавжуд;

2) $\varphi_1(x, y)$ ва $\varphi_2(x, y)$ функциялар $x = a, x = b, y = c, y = d$ тўғри чизиқлар билан чегараланган тўғри тўртбурчакда аниқланган ва узлуксиз дифференциалланувчи:

3) x_0, y_0 бошланғич яқинлашиш ва кейинги барча x_n, y_n яқинлашишлар R тўғри тўртбурчакка тегишли ва бу тўғри тўртбурчакда

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right| &\leq q_1 < 1, \\ \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right| &\leq q_2 < 1 \end{aligned} \quad (14.3)$$

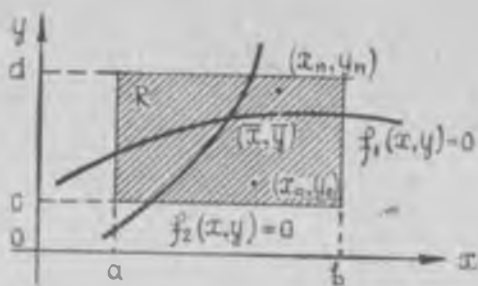
тенгсизликлар бажарилса, у ҳолда итерация жараёни (14.2) системанинг $\bar{x}, \bar{y}$ ечимига яқинлашади, яъни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \bar{y}.$$

Агар (14.3) шартни

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| &\leq q_1 < 1, \\ \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right| &\leq q_2 < 1 \end{aligned} \quad (14.4)$$

шарт билан алмаштирилса ҳам, теорема тўғри бўлаверади.



3.10- шакл

(Теореманинг геометрик талқини (3.10- шаклда тасвирланган).

Мисол. Итерация усули билан

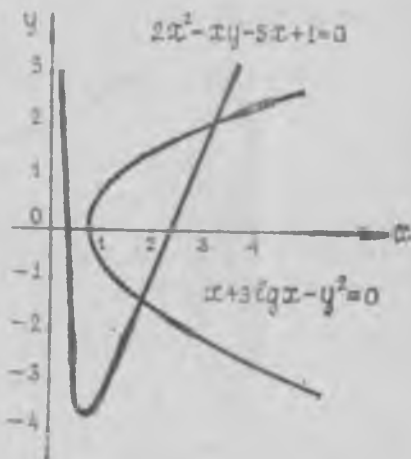
$$\begin{cases} f_1(x, y) = x + 3 \lg x - y^2 = 0, \\ f_2(x, y) = 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0 \end{cases} \quad (14.5)$$

системанинг илдизларини тўрта қийматли рақамлари билан топинг.

Ечиш. График усулда эгри чизиқларнинг кесишиш нуқталарини топамиз (3.11- шакл). Улар иккита нуқта бўлади. Улардан мусбат координаталарга эга бўлган нуқтани қараймиз. Илдизнинг яқкаланиш

соҳаси сифатида $R: \begin{cases} 3 \leq x < 4, \\ 2 \leq y < 2.5 \end{cases}$

тўғри тўртбурчакни олиш мумкин. Энди системани (14.2) кўринишга келтираемиз. Бунини турли усуллар билан амалга ошириш мумкин. Масалан:



3.11- шакл

$$\begin{cases} x = y^2 - 3 \lg x, & \text{у ҳолда } \Phi_1(x, y) = y^2 - 3 \lg x, \\ y = 2x + \frac{1}{x} - 5, & \text{у ҳолда } \Phi_2(x, y) = 2x + \frac{1}{x} - 5. \end{cases}$$

Хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = -\frac{3 \lg e}{x}, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = 2 - \frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = 0.$$

Булардан кўриниб турибдики, қаралаётган тўғри тўртбурчакда ушбу тенгсизликлар ўринли:

$$\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right| > 1, \quad \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right| > 1.$$

Бу эса система бундай кўринишда бўлганида итерация жараёни узоқлашишини кўрсатади.

Энди x ни (14.5) системанинг иккинчи тенгламасидан, y ни эса бу системанинг биринчи тенгламасидан аннқлаймиз:

$$x = \sqrt{\frac{x(5+y)-1}{2}}, \quad y \text{ ҳолда } \varphi_1(x, y) = \sqrt{\frac{x(5+y)-1}{2}},$$

$$y = \sqrt{3 \lg x + x}, \quad y \text{ ҳолда } \varphi_2(x, y) = \sqrt{3 \lg x + x}.$$

Бу ерда

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{5+y}{\sqrt{x(5+y)-1}}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{x(5+y)-1}},$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{1 + \frac{3 \lg x}{x}}{2\sqrt{x+3 \lg x}}; \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0.$$

Илдизнинг яккаланиш соҳаси

$$\begin{cases} 3 \leq x \leq 4, \\ 2 \leq y \leq 2,5 \end{cases}$$

да

$$\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right| < 1, \quad \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right| < 1$$

шартлар бажарилади. Демак, итерация жараёни яқинлашади. Нолинчи яқинлашиш сифатида, масалан, $x_0 = 3, 4$; ва $y_0 = 2, 2$ ни оламиз, қолган яқинлашишларни

$$x_n = \sqrt{\frac{x_{n-1}(5+y_{n-1})-1}{2}},$$

$$y_n = \sqrt{x_{n-1} + 3 \lg x_{n-1}}$$

формулалар бўйича ҳисоблаймиз. Ҳисоблаш натижаларини 3.13-жадвалга ёзамиз:

3.13-жадвал.

n	x_n	y_n
0	3,4	2,2
1	3,426	2,243
2	3,451	2,2505
3	3,466	2,255
4	3,475	2,258
5	3,480	2,259
6	3,483	2,260

Шундай қилиб, $\bar{x} = 3,483$, $\bar{y} = 2,260$ деб олиш мумкин.

15- §. Чизиқли системаларни ечишнинг оддий итерация ва Зейдель усуллари

15.1. Номаълумлар сони катта бўлганда чизиқли тенгламалар системаларини ечишда баъзан тақрибий сонли усуллардан фойдаланиш қулайроқ бўлади. Булар жумласига оддий итерация усули, Зейдель усули ва бошқалар ҳосдир.

n та номаълумли n та чизиқли тенглама системаси берилган бўлсин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (15.1)$$

Ушбу матрицаларни киритамиз:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Энди (15.1) системани матрицали тенглама шаклида ёзамиз:

$$Ax = b. \quad (15.2)$$

$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ диагональ элементлар нолга тенг эмас, деб ҳисоблаб, (15.1) системанинг биринчи тенгламасини x_1 га нисбатан, иккинчи тенгламасини x_2 га нисбатан ечамиз ва ҳоказо. Натижада қуйидаги эквивалент системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \dots + \alpha_{1n}x_n, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2n}x_n, \\ \dots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1}, \end{cases} \quad (15.3)$$

бу ерда

$$\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i \neq j \text{ бўлганда } \alpha_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{ii}}$$

ва

$$i = j (i, j = \overline{1, n}) \text{ бўлганда } \alpha_{ij} = 0.$$

Ушбу матрицаларни киритамиз:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ ва } \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

бу ерда α матрицанинг бош диагонали элементлари нолга тенг. (15.3) системани

$$x = \beta + \alpha x. \quad (15.4)$$

матрицали тенглама шаклида ёзиш мумкин.

Ҳосил бўлган (15.4) системани кетма-кет яқинлашишлар усули билан ечамиз. Нолинчи яқинлашиш сифатида, масалан, озод ҳадлар устуни

$$x^{(0)} = \beta$$

ни оламиз. $x^{(0)}$ ни (15.4) нинг ўнг томонига қўйиб,

$$x^{(1)} = \beta + \alpha x^{(0)}$$

биринчи яқинлашишни оламиз. $x^{(1)}$ ни (15.4) нинг ўнг томонига қўйиб, иккинчи яқинлашишни оламиз. Жараёни такрорлаб,

$$x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \dots$$

яқинлашиш кетма-кетлигини ҳосил қиламиз, бу ерда исталган k -яқинлашиш

$$x^{(k)} = \beta + \alpha x^{(k-1)} \quad (15.5)$$

формула бўйича ҳисобланади. Агар $\{x^{(k)}\}$ яқинлашишлар кетма-кетлиги

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x$$

га эга бўлса, у ҳолда бу лимит (15.3) системанинг ечими бўлади.

(15.5) формула билан аниқланадиган кетма-кет яқинлашишлар усули *оддий итерация усули* деб аталади.

Агар α матрицанинг элементлари абсолют қийматлари бўйича кичик бўлса, у ҳолда итерация жараёни яхши яқинлашади, яъни (15.1) системанинг ечимини берилган аниқликда ҳосил қилиш учун зарур бўлган яқинлашишлар сони катта бўлмайди. Бошқача сўз билан айтганда, итерация жараёнини муваффақият билан қўлланиш учун A матрица бош диагонали элементларининг модуллари бу матрицанинг шу диагоналидан ташқаридаги элементларига нисбатан катта бўлиши лозим.

Итерация жараёнининг яқинлашиш шартини исботсиз келтирамиз. Теорема. Агар (15.3) система учун

$$\sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1 \quad (i = \overline{1, n}) \quad \text{ёки} \quad \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1, \quad (j = \overline{1, n})$$

шартлардан ҳеч бўлмаганда биттаси бажарилса, у ҳолда итерация жараёни бошланғич яқинлашишнинг танлангичига боғлиқ бўлмаган равишда бу системанинг ягона ечимига яқинлашади.

Натижа. (15.1) система учун

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \quad i = \overline{1, n} \quad (15.6)$$

тенгсизликлар бажарилса, яъни (15.1) системанинг ҳар бир тенгламаси учун бош диагоналдаги коэффициентлар модули қолган бошқа барча коэффициентлар (озод ҳадларни ҳисобга олмаганда) модуллари йиғиндисидан катта бўлса, итерация жараёни яқинлашувчи бўлади.

Мисол. Чизиқли тенгламалар системасини итерация усули билан ечинг:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 0,24x_2 - 0,08x_3 &= 8, \\ 0,091x_1 + 3x_2 - 0,15x_3 &= 9, \\ 0,04x_1 - 0,08x_2 + 4x_3 &= 20. \end{aligned}$$

Ечиш. Бу системада бош диагоналдаги 4, 3, 4, коэффициентлар (ҳар бир тенгламадаги) номаълумлар олдидаги коэффициентларнинг абсолют қийматлари йиғиндисидан катта. Юқорида таърифланган натижага асосан итерация жараёни яқинлашувчи бўлади. Системани (15.3) кўринишга келтирамыз:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 0,06x_2 + 0,02x_3, \\ x_2 = 3 - 0,03x_1 + 0,05x_3, \\ x_3 = 5 - 0,01x_1 + 0,02x_2. \end{cases} \quad (15.7)$$

Бу системани матрица шаклида бундай ёзиш мумкин:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Берилган система ечимига нолинчи яқинлашиш сифатида

$$x_1^{(0)} = 2, \quad x_2^{(0)} = 3, \quad x_3^{(0)} = 5$$

қийматларни оламыз.

Бу қийматларни (15.7) тенгламаларнинг ўнг томонларига қўйиб, биринчи яқинлашишни ҳосил қиламыз:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= 2 - 0,06 \cdot 3 + 0,02 \cdot 5 = 1,92, \\ x_2^{(1)} &= 3 - 0,03 \cdot 2 + 0,05 \cdot 5 = 3,19, \\ x_3^{(1)} &= 5 - 0,01 \cdot 2 + 0,02 \cdot 3 = 5,04. \end{aligned}$$

Сўнгра бу топилган яқинлашишларни (15.7) тенгламаларнинг ўнг томонларига қўйиб, ечимларга иккинчи яқинлашишларни топамиз:

$$x_1^{(2)} = 1,9094; \quad x_2^{(2)} = 3,1944; \quad x_3^{(2)} = 5,0446.$$

Янги ўринга қўйишдан сўнг учинчи яқинлашишларга эга бўламиз. Натижаларни жадвалга ёзамиз (3.14-жадвал):

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	2	3	5
1	1,92	3,19	5,04
2	1,9094	3,1944	5,0446
3	1,90923	3,19495	5,04485

15.3. Зейдель усули оддий итерация усулининг модификациясидан иборат бўлиб, $x_i (i > 1)$ номаълумнинг $(k+1)$ -яқинлашишини ҳисоблашда $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$ номаълумларнинг $(k+1)$ -яқинлашишидаги топилган қийматлари ҳисобга олинади. (15.3) келтирилган тенгламалар системаси берилган бўлсин. Танланган

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$$

нолинчи яқинлашнинг (15.3) системанинг биринчи тенгламасига қўйиб, $x_1^{(1)}$ биринчи яқинлашишни ҳосил қиламиз.

(15.3) системанинг иккинчи тенгламасига

$$x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$$

ни қўямиз ва $x_2^{(1)}$ биринчи яқинлашишни ҳосил қиламиз. Системанинг учинчи тенгламасига

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$$

ни қўямиз ҳамда $x_3^{(1)}$ биринчи яқинлашишни ҳосил қиламиз ва ҳоказо, $x_n^{(1)}$ ни ҳосил қилингунга қадар шу жараён давом эттирилади.

Иккинчи, учинчи ва ҳоказо итерацияларни шунга ўхшаш бажарамиз.

Оддий итерация учун яқинлашиш теоремаси Зейдель усули учун ҳам ўринли бўлади.

16-§. Чизиқли бўлмаган системаларни ечишнинг Ньютон усули

Чизиқли бўлмаган системаларни ечишнинг яна бир усулини кўриб чиқамиз. Иккита номаълумли иккита тенглама системаси бўлган ҳолни таҳлил қиламиз:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0. \end{cases} \quad (16.1)$$

Бу система ечимининг (x_0, y_0) яқинлашишларини маълум деб ҳисоблаймиз. Тегишли аниқликка эга бўлмаган бу қийматларга тузатмаларни h ва k орқали белгилаб, уларни излаймиз. Ечимнинг x ва y аниқ қийматларини

$$\bar{x} = x_0 + h, \bar{y} = y_0 + k$$

куринишда ёзамиз. Шундай қилиб, (16.1) система ўрнига

$$\begin{cases} f_1(x_0 + h, y_0 + k) = 0, \\ f_2(x_0 + h, y_0 + k) = 0 \end{cases}$$

га эга бўламиз. $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функцияларни h ва k нинг даражалари бўйича Тейлор қаторига ёямиз:

$$f_1(x_0 + h, y_0 + k) = f_1(x_0, y_0) + hf'_{1x}(x_0, y_0) + kf'_{1y}(x_0, y_0) + O_1(h, k)$$

$$f_2(x_0 + h, y_0 + k) = f_2(x_0, y_0) + hf'_{2x}(x_0, y_0) + kf'_{2y}(x_0, y_0) + O_2(h, k).$$

Бу ерда $O_1(h, k)$ ва $O_2(h, k)$ лар h ва k га нисбатан юқори тартибли кичик ҳадларни ўз ичига олади. Бу ҳадларни эътиборга олмасдан, яъни h ва k катта эмас деб қабул қилиб, h ва k тузатмаларининг тақрибий қийматларини аниқлаш учун ушбу чизикли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} f_1(x_0, y_0) + hf'_{1x}(x_0, y_0) + kf'_{1y}(x_0, y_0) = 0, \\ f_2(x_0, y_0) + hf'_{2x}(x_0, y_0) + kf'_{2y}(x_0, y_0) = 0. \end{cases} \quad (16.2)$$

(16.2) системадан тузатмалар учун (Крамер формулаларни бўйича) қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} h_1 = \frac{\begin{vmatrix} -f_1(x_0, y_0) & f'_{1y}(x_0, y_0) \\ -f_2(x_0, y_0) & f'_{2y}(x_0, y_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f'_{1x}(x_0, y_0) & f'_{1y}(x_0, y_0) \\ f'_{2x}(x_0, y_0) & f'_{2y}(x_0, y_0) \end{vmatrix}}, \\ k_1 = \frac{\begin{vmatrix} f'_{1x}(x_0, y_0) & -f_1(x_0, y_0) \\ f'_{2x}(x_0, y_0) & -f_2(x_0, y_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f'_{1x}(x_0, y_0) & f'_{1y}(x_0, y_0) \\ f'_{2x}(x_0, y_0) & f'_{2y}(x_0, y_0) \end{vmatrix}}. \end{cases} \quad (16.3)$$

Шундай қилиб, илдиэларнинг (x_0, y_0) га қараганда аниқроқ ушбу қийматлари ҳосил бўлади:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + h_1, \\ y_1 &= y_0 + k_1. \end{aligned}$$

Худди шу йўл билан x_1, y_1 ларнинг тақрибий ечимлигини инобатга олиб, кейинги тузатмаларни ҳосил қилиш мумкин. Баён қилинган усул *Ньютон усули* деб аталади.

Мисол. 14-§ даги мисолда келтирилган

$$\begin{aligned} x + 3\lg x - y^2 &= 0, \\ 2x^2 - xy - 5x + 1 &= 0. \end{aligned}$$

тенгламалар системасини Ньютон усули билан ечинг.

Ечиш 14-§ даги мисолдан $x_0 = 3, 4$ ва $y_0 = 2, 2$ га эгамиз. Сунгра

$$f'_{1x}(x, y) = 1 + \frac{3}{x \ln 10}; \quad f'_{1y}(x, y) = -2y,$$

$$f'_{2x}(x, y) = 4x - y - 5; \quad f'_{2y}(x, y) = -x.$$

$f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ функцияларнинг қийматини ва уларнинг ҳосилларининг қийматини (x_0, y_0) нуқтада ҳисоблаймиз:

$$f_1(3, 4; 2, 2) = 0,1545; \quad f_2(3, 4; 2, 2) = -0,3600,$$

$$f'_{1x}(3, 4; 2, 2) = 1,383; \quad f'_{1y}(3, 4; 2, 2) = 6,400;$$

$$f'_{2x}(3, 4; 2, 2) = -4,400; \quad f'_{2y}(3, 4; 2, 2) = -3,400.$$

Шундай қилиб, (16.2) тенгламалар системаси ушбу кўринишда бўлади:

$$\begin{cases} 0,1545 + 1,383h_1 - 4,4k_1 = 0, \\ -0,36 + 6,4h_1 - 3,4k_1 = 0. \end{cases}$$

(16.3) Крамер формулаларни $h_1 = 0,089$, $k_1 = 0,063$ ечимни беради. Шунинг учун ечимларнинг биринчи яқинлашиши

$$x_1 = 3,4 + 0,089 = 3,483;$$

$$y_1 = 2,2 + 0,063 = 2,263$$

га тенг. Илдизларнинг ҳосил қилинган қийматларини бошланғич қийматлар сифатида олиб, яна бир қадам аниқлаштириш мумкин:

$$f_1(3,489; 2,263) = -0,0041, \quad f_2(3,489; 2,263) = 0,0056;$$

$$f'_{1x}(3,489; 2,263) = -1,3734, \quad f'_{1y}(3,489; 2,263) = 66930;$$

$$f'_{2x}(3,489; 2,263) = -4,526; \quad f'_{2y}(3,489; 2,263) = 3,489.$$

Топилган қийматларни (16,3) формулаларга қўйиб,

$$h_2 = -0,0016, \quad k_2 = -0,0014$$

ни ҳосил қиламиз, бундан:

$$x_2 = 3,489 - 0,0016 = 3,4874,$$

$$y_2 = 2,263 - 0,0014 = 2,2616.$$

Агар бу иккинчи яқинлашиш учун шу ишларни яна такрорласак, тўртинчи рақамдан кичик бўлган тузатмаларни оламиз.

17-§. Сонли дифференциаллаш

17.1. Кўпгина амалий масалаларни ҳал этишда жадвал шаклида ёки мураккаб аналитик ифода шаклида берилган $y = f(x)$ функциянинг турли тартибли ҳосилаларининг қийматларини ҳисоблашга тўғри келади. Бундай ҳолларда дифференциал ҳисоб усулларини бевосита татбиқ этишнинг ё иложи бўлмайди, ёки бу жуда қийин бўлади. Шунинг учун уларга тақрибий сонли дифференциаллаш усуллари қўлланилади.

Сонли дифференциаллаш формулаларини келтириб чиқариш учун аввал берилган $f(x)$ функцияни бирор $[a, b]$ кесмада $P_n(x)$ кўпхад билан интерполяцияланади, кейин эса

$$f'(x) \approx P'_n(x)$$

деб олинади.

Агар $P_n(x)$ интерполяция кўпҳади учун

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

бўлса, у ҳолда $P'_n(x)$ ҳосиланинг $r_n(x)$ хатолиги

$$r_n(x) = f'(x) - P'_n(x) = R'_n(x)$$

формула билан топилади (яъни интерполяция кўпҳади ҳосиласининг хатолиги бу кўпҳад хатолигининг ҳосиласига тенг).

Сонли дифференциаллаш интерполяциялашдан кўра камроқ аниқликка эга бўлган операциядир, яъни $[a, b]$ кесмада $y = f(x)$ ва $y = P_n(x)$ эгри чизиқлар ординаталарининг бир-бирига яқинлиги бу кесмада уларнинг $f'(x)$ ва $P'_n(x)$ ҳосилаларининг бир-бирига яқин бўлишлигига кафолат бўла олмайди.

17.2. $y = f(x)$ функциянинг қийматлари $[a, b]$ кесмада тенг узоқликдаги $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ тугунларда берилган бўлсин:

$$y_0 = f(x_0), y = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n).$$

$[a, b]$ кесмада $y' = f'(x)$, $y'' = f''(x)$ ва ҳоказо ҳосилаларни топиш учун y функцияни шу тугун нуқталар системаси учун тузилган (8.6) Ньютон интерполяцион кўпҳади билан алмаштирамиз.

$$y \approx y_0 + q \Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \\ + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!} \Delta^4 y_0 + \dots$$

бу ерда $q = \frac{x-x_0}{h}$ ва $h = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{0, n}$.

$(q-i)$ кўринишдаги биномларни кўпайтириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y \approx y_0 + q \Delta y_0 + \frac{q^2 - q}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6} \Delta^3 y_0 + \\ + \frac{q^4 - 6q^3 + 11q^2 - 6q}{24} \Delta^4 y_0 + \dots$$

Сўнгра

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dq} \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \frac{dy}{dq}$$

бўлганлиги учун

$$y' \approx \frac{1}{h} \left[\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+23}{6} \Delta^3 y_0 + \right. \\ \left. + \frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12} \Delta^4 y_0 + \dots \right] \quad (17.1)$$

Шунга ўхшаш

$$y'' = \frac{d}{dx} (y') = \frac{dy'}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \frac{dy'}{dq}$$

бўлганлиги учун

$$y'' = \frac{1}{h^2} \left[\Delta^2 y_0 + (q-1) \Delta^3 y_0 + \frac{6q^2 - 8q + 11}{12} \Delta^4 y_0 + \dots \right]. \quad (17.2)$$

$y = f(x)$ функциянинг исталган тартибли ҳосилаларини ҳам шунга ўхшаш ҳисоблаш мумкин.

Тайин x нуқтадаги ҳосилаларни топишда x_0 сифатида аргументнинг жадвалдаги шу x_0 га энг яқин қийматини танлаш лозим.

Жадвалдаги x_i нуқталардаги ҳосилаларни топишда сонли дифференциаллаш усуллари соддалашади, чунки жадвалдаги ҳар бир қийматни бошланғич қиймат сифатида олиш мумкин бўлганлиги учун $x = x_0$, $q = 0$ деймиз, у ҳолда (17.1) ва (17.2) дан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y'(x_0) \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \frac{\Delta^5 y_0}{5} - \dots \right), \quad (17.3)$$

$$y''(x_0) = \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12} \Delta^4 y_0 - \frac{5}{6} \Delta^5 y_0 - \dots \right). \quad (17.4)$$

Шунга ўхшаш, учинчи, тўртинчи ва ҳ. к. тартибли ҳосилалар учун тегишли формулаларни ҳосил қилиш мумкин:

$$y'''(x_0) \approx \frac{1}{h^3} \left(\Delta^3 y_0 - \frac{3}{2} \Delta^4 y_0 + \dots \right), \quad (17.5)$$

$$y^{IV}(x_0) \approx \frac{1}{h^4} (\Delta^4 y_0 - \dots). \quad (17.6)$$

h кичик бўлганда ушбу тақрибий формулаларни ҳосил қиламиз:

$$y'(x_0) \approx \frac{\Delta y_0}{h}, \quad y''(x_0) \approx \frac{\Delta^2 y_0}{h^2}, \quad y'''(x_0) \approx \frac{\Delta^3 y_0}{h^3}, \dots$$

Бу формулалар ҳосилаларни тегишли тартибли чекли айирмалар билан боғлайди.

Биринчи ҳосила учун хатолик ушбу формула бўйича ҳисобланишини айтиб ўтаемиз:

$$R'_n(x_0) \approx \frac{(-1)^n \Delta^{n+1} y_0}{h(n+1)}.$$

1-мисол. 3.15-жадвал билан берилган $y = \lg x$ функциянинг $y'(50)$ ҳосиласини топинг.

3.15-жадвал

x	50	55	60	65
$\lg x$	1,6990	1,7404	1,7782	1,8129

Ечиш. Бу ерда $h = 5 \cdot x = 50$ нукта интерполяция тугунн $x_0 = 50$ билан устма-уст тушмокда. Ҳосилани ҳисоблаш учун (17.3) формуладан фойдаланамиз. Аввал чекли айирмалар жадвалини тузамиз (3.16- жадвал).

3.16- жадвал.

x	$\lg x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
50	1,6990	0,0414	-0,0036	0,0005
55	1,7404	0,0378	-0,0031	—
60	1,7782	0,0347	—	—
65	1,8129	—	—	—

Шундай қилиб, (17.3) дан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y'(50) \approx \frac{1}{5} \left(0,0414 - \frac{-0,0036}{2} + \frac{0,0005}{3} \right) = \frac{1}{5} (0,0414 + 0,0018 + 0,0002) = 0,0087.$$

2- мисол. $y = f(x)$ функция 3.17- жадвал билан берилган.

3.17- жадвал

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	2	10	30	68	130	222

$f'(3,5)$ ва $f''(3,5)$ ларин ҳисобланг.

Ечиш. Бу ерда $h = 1$. Чекли айирмалар жадвалини тузамиз (3.18- жадвал):

3.18- жадвал

i	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	0	0	2	6	6	0
1	1	2	8	12	6	0
2	2	10	20	18	6	0
3	3	30	38	24	6	
4	4	68	62	30	—	
5	5	130	92			
6	6	222				

x_0 учун $x=3,5$ га энг яқин $x_0=3$ ни олиб, $q = \frac{3,5-3}{1} = 0,5$ га эга бўламиз (17.1) ва (17.2) формулаларни татбиқ этиб, ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$f'(3,5) \approx \frac{1}{1} \left(38 + \frac{2,05 - 1}{2} \cdot 24 + \frac{3 \cdot 0,5^2 - 6 \cdot 0,5 + 2}{6} \cdot 6 \right) = 37,75;$$

$$f''(3,5) \approx \frac{1}{1^2} (24 + (0,5 - 1) \cdot 6 + \frac{6!(0,5)^2 - 18 \cdot 0,5 + 11}{12} \cdot 0) = 21.$$

17.3. Тақрибий дифференциаллаш формулаларини Ньютоннинг иккинчи интерполяция формуласидан ҳам ҳосил қилиш мумкин:

$$y \approx y_n + \Delta y_{n-1} t + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!} \Delta^3 y_{n-3} + \dots,$$

бу ерда

$$t = \frac{x - x_n}{h},$$

$$y' \approx \frac{1}{h} \left[\Delta y_{n-1} + \frac{2t+1}{2} \Delta^2 y_{n-2} + \frac{3t^2+6t+2}{6} \Delta^3 y_{n-3} + \dots \right] \quad (17.7)$$

$$y'' \approx \frac{1}{h^2} \Delta^2 y_{n-2} + (t+1) \Delta^3 y_{n-3} + \dots \quad (17.8)$$

ва ҳоказо.

3- мисол. $y = f(x)$ функция 3. 19- жадвал билан берилган ($h = 0,1$ қадамли):

3.19- жадвал

x	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2
y	1,8221	2,0138	2,2255	2,4596	2,7183	3,0042	3,3201

$f'(1,06)$ ни ҳисобланг.

Ечиш. Чекли айирмалар жадвалини тузамиз (3. 20- жадвал):

3. 20- жадвал

i	x	$y = f(x)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	0,6	1,8221	0,1917	0,0200	0,0024
1	0,7	2,0138	0,2117	0,0224	0,0022
2	0,8	2,2255	0,2341	0,0246	0,0026
3	0,9	2,4596	0,2587	0,0272	0,0028
4	1,0	2,7183	0,2859	0,0300	—
5	1,1	3,0042	0,3159	—	—
6	1,2	3,3201	—	—	—

Энди $x = 1,06$ учун ҳосиланинг қийматини аниқлаш талаб қилинаётганлиги туфайли (17.7) формулани татбиқ қиламиз, бунда x_n учун $x = 1,06$ га энг яқин 1,1 ни оламиз:

$$t = \frac{x - x_n}{h} = \frac{1,06 - 1,1}{0,1} = \frac{-0,04}{0,1} = -0,4,$$

ва ниҳоят,

$$f'(1,06) = \frac{1}{0,1} \left(0,2859 + \frac{-0,4^2 + 1}{2} \cdot 0,0272 + \frac{3 \cdot 0,16 - 6 \cdot 0,4 + 2}{6} \cdot 0,0026 \right) = 2,8865.$$

18 - §. Сонли интеграллаш. Тўғри тўртбурчаклар, трапециялар, Симпсон усуллари.

18.1. Ушбу

$$\int_a^b f(x) dx$$

аниқ интегрални ҳисоблаш талаб этилаётган бўлсин. Математик анализ курсидан маълумки, $[a, b]$ кесмада узлуксиз $f(x)$ функция учун бу интеграл мавжуд ва у $f(x)$ учун бошланғич функция $F(x)$ нинг b ва a нуқталардаги қийматлари айирмасига тенг:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

бу ерда $F'(x) = f(x)$.

Бироқ кўпчилик амалий масалаларда бу бошланғич функцияларни элементар функциялар орқали ифодалашнинг иложи бўлмайди. Бундан ташқари, $f(x)$ функция кўпинча аргументнинг маълум қийматлари бўйича ўзининг қийматлари жадвали орқали берилади. Бу ҳоллар эса интегрални тақрибий ҳисоблаш усулларига бўлган эҳтиёжни юзага келтиради ҳамда бу усуллар шартли равишда аналитик ва сонли усулларга ажралади. Функцияларни, сонли интеграллашнинг айрим усулларини кўриб чиқайлик. Улар интегралнинг сонли қийматини бевосита интеграл остидаги функциянинг тугунлар деб аталаётган нуқталардаги берилган қийматларига асосланиб ҳисоблаш имконини беради.

Интегрални сонли аниқлаш жараёни *квадратура*, тегишли формулалар эса *квадратура формулалари* деб аталади.

Сонли интеграллаш $\int_a^b f(x) dx$ интегрални

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n A_i f(x_i)$$

квадратура формуласи бўйича топишдан иборат бўлиб, бу ерда x_i нуқталар *формула тугунлари* деб аталади ва улар $[a, b]$ кесмага тегишли, A_i ҳақиқий сонлар *вазнлар ёки вазний коэффициентлар* деб аталади. Формулаининг ўнг томонида турган йиғиндининг кўри-ниши интеграллаш усулини,

$$R_n = \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n A_i f(x_i)$$

айирма эса *усулнинг хатолигини* аниқлаб беради.

Квадратура формулалари турли мезонлар асосида тузилади: интегрални интеграл йиғинди кўринишида ифодалаш, интеграл остидаги функцияни аппроксимациялаб ёки интерполяциялаб, кейин интеграллаш ва ҳ. к.

18.2. Олий математика курсидан маълум бўлган энг содда квадратура формулаларини ёдга олайлик. $y = f(x)$ функция $[a, b]$ кес-мада қийматлар жадвали билан берилган бўлсин (3. 21- жадвал):

3. 21- жадвал

x	$a = x_0$	x_1	$\dots$	x_{i-1}	x_i	$\dots$	$x_n = b$
$y = f(x)$	y_0	y_1	$\dots$	y_{i-1}	y_i	$\dots$	$y_n = a$

Бу ерда $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_i - x_{i-1} = \dots = x_n - x_{n-1} = h$;

$h = \frac{b-a}{n}$ — интеграллаш қадами.

а) $\int_a^b f(x) dx$ интегрални ҳисоблаш учун чап тўғри тўртбурчаклар

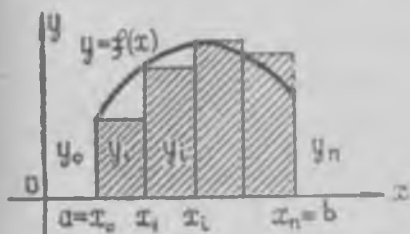
формуласи

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) = h \sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

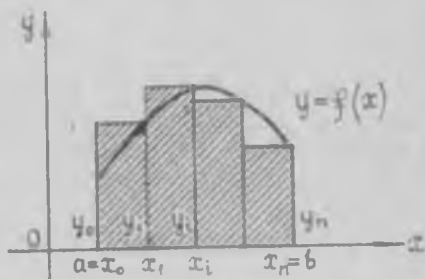
кўринишда, ўнг тўғри тўртбурчаклар формуласи

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) = h \sum_{i=1}^{n-1} y_i$$

кўринишида бўлади. Бу формулаларнинг номлари интегралнинг геометрик маъноси билан боғлиқ. Агар Oxy текисликда $y = f(x)$ эгри чизиқни чизиб $[a, b]$ кесмани x_i нуқталар билан n та тенг бўлакка бўлинса, у ҳолда чап тўғри тўртбурчаклар формуласи интегралнинг тақрибий қиймати сифатида 3. 12- шаклдаги штрихланган тўғри тўртбурчаклар юзлари йиғиндисини беради, ўнг тўғри тўртбурчаклар формуласи эса 3. 13- шаклдаги штрихланган тўғри тўртбурчак юзлари йиғиндисини беради.



3.12- шакл



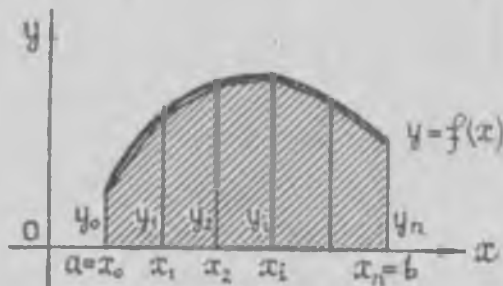
3.13- шакл

б) $\int_a^b f(x) dx$ интегрални ҳисоблаш учун трапециялар формуласи

ушбу кўринишида бўлади:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right).$$

Геометрик нуқтани назардан у интегралнинг тақрибий қиймати сифатида 3. 14- шаклда штрихлаб кўрсатилган тўғри бурчакли трапециялар юзлари йиғиндисини беради.



3.14- шакл

в) $\int_a^b f(x) dx$ интегрални ҳисоблаш учун Симпсон формуласи ушбу

кўринишда бўлади:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left(y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) \right),$$

бу ерда $[a, b]$ кесма $2n$ та тенг бўлакка бўлинган ва

$$h = \frac{b-a}{2n}.$$

Симпсон формуласини бошқача параболик *трапециялар формуласи* деб ҳам аталади, бунга сабаб шуки, уни келтириб чиқаришда функциянинг $[a, b]$ кесмадаги графиги y_{2i-1} , y_{2i-1} , y_{2i} қийматлар бўйича ясалган парабола билан тақрибий алмаштирилади (интерполяцияланади).

Симпсон формуласи юқори аниқликка эга.

Мисол. $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$ интегрални тўғри тўртбурчаклар, тра-

пециялар ва Симпсон формулалари бўйича ҳисобланг. Натижаларни интегралнинг аниқ қиймати билан таққосланг.

Ечиш. $[0, 1]$ кесмани 10 та тенг бўлакка бўламиз. $y = \sqrt{1+x^2}$ функциянинг бўлиниш нуқталаридаги қийматлари жадвалини тузамиз (3. 22- жадвал):

3. 22- жадвал

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,10
y_i	1,000	1,005	1,020	1,044	1,077	1,118	1,166	1,221	1,281	1,345	1,414

а) Тўғри тўртбурчаклар формуласи:

$$h = \frac{1-0}{10} = 0,1;$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = 0,1 (1,000 + 1,005 + 1,020 + \dots + 1,345) \approx 1,128$$

(чап тўғри тўртбурчаклар, 3. 12- шакл);

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = 0,1 (1,005 + 1,020 + \dots + 1,414) = 1,169 \text{ (ўнг тўғ-}$$

ри тўртбурчаклар, 3. 13- шакл);

б) трапециялар формуласи: $h = 0,1$.

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx \approx 0,1 \left(\frac{1,100 + 1,414}{2} + 1,055 + \dots + 1,345 \right) = 1,158.$$

в) Симпсон формуласи:

$$h = \frac{1-0}{10} = 0,1:$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx \approx \frac{0,1}{3} (1,000 + 1,414 + 2 (1,005 + 1,044 + 1,118 +$$

$$+ 1,221 + 1,345) + 4 (1,020 + 1,077 + 1,166 + 1,281)) = 1,1478.$$

г) аниқ ечим:

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \ln (\sqrt{2} + 1) = 1,147.$$

Интегралнинг Симпсон формуласи бўйича ҳисобланган қиймати унинг аниқ қийматига энг яқиндир.

18.3. Тўғри тўртбурчаклар, трапециялар ва Симпсон формулаларининг ўнг томонлари тегишли интегралдан R_n хатоликка фарқ қилади. Бу миқдор ушбу тенгсизликлар билан тавсифланади.

Тўғри тўртбурчаклар усули учун:

$$R_n \leq \frac{h}{2} (b-a) M_1, \text{ бу ерда } M_1 = \max_{[a, b]} |f'(x)|. \quad (18.1)$$

Трапециялар усули учун:

$$R_n \leq \frac{h^2}{12} (b-a) M_2, \text{ бу ерда } M_2 = \max_{[a, b]} |f''(x)|. \quad (18.2)$$

Симпсон усули учун:

$$R_n \leq \frac{h^4}{180} (b-a) M_4, \text{ бу ерда } M_4 = \max_{[a, b]} |f^{(IV)}(x)| \quad (18.3)$$

Агар $f(x)$ функцияни, m - даражали ихтиёрий алгебраик кўпхад билан алмаштирилганда

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) \quad (18.4)$$

тақрибий тенглик аниқ тенгликка айланса, у ҳолда бу квадратура формуласи m - даражали кўпхадлар учун *аниқ формула* деб аталади.

Қолдиқ ҳадларининг (18. 1), (18. 2), (18. 3) ифодаларидан кўриниб турибдики, тўғри тўртбурчаклар формуласи нолинчи даражали кўпхад учун, трапециялар формуласи биринчи даражали кўпхад учун, Симпсон формуласи эса учинчи даражали кўпхад учун аниқ формулалардир, чунки улар учун қолдиқ ҳад нолга тенг.

Бундай масала юзга келади: (18. 4) квадратура формулалари орасидан n та x_i тугунни $[a, b]$ кесмада шундай жойлаштириш ва A_i вазнларни шундай топиш керакки, уларга мос квадратура формуласи максимал даражали алгебраик кўпхадлар учун ўринли бўлсин.

19- §. Гаусснинг квадратура формуласи

19.1. Бизга Лежандрнинг кўпхадлари ҳақида баъзи маълумотлар керак бўлади. Ушбу

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

кўринишдаги кўпхадлар *Лежандр кўпхадлари* деб аталади.

Асосий хоссалари:

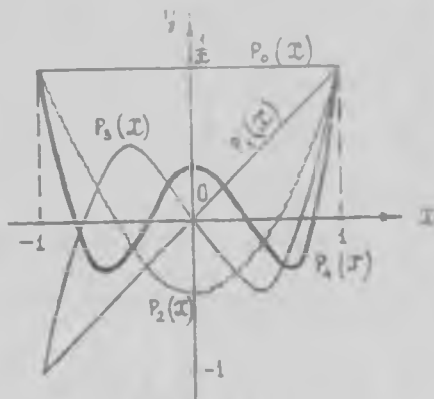
а) $P_n(1) = 1, P_n(-1) = (-1)^n, n = 0, 1, 2, \dots$

б) $\int_{-1}^1 P_n(x) Q_k(x) dx = 0, k > 0$ бўлганда, бу ерда $Q_k(x)$ — дара-

жаси n дан кичик бўлган исталган кўпхад.

в) $P_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) Лежандр кўпхади $(-1, 1)$ оралиқда n та турли ҳақиқий илдиэга эга.

Лежандрнинг биринчи бешта кўпхадини ва уларнинг графикларини келтирамыз (3. 15- шакл):



3.15- шакл

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3).$$

19.2. Гауссинг квадратура формуласини келтириб чиқариш. Аввал $[-1, 1]$ кесмада берилган $y = f(t)$ функцияни қараймиз. Умумий ҳолдаги $[a, b]$ кесмани бизнинг ҳолга эркин ўзгарувчини чизикли алмаштириш йўли билан келтириш мумкин.

Масалани бундай қўямиз: t_i тугунлар ва A_i коэффициентларни шундай танлаш керакки,

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{i=1}^n A_i f(t_i) \quad (19.1)$$

квадратура формуласи мумкин бўлган энг юқори m - даражали кўпҳадлар учун аниқ бўлсин. Бизнинг нхтиёримизда $2n$ та t_i ва A_i ($i = 1, n$) ўзгармаслар бўлиб, $(2n - 1)$ - даражали кўпҳад эса $2n$ та коэффициентлар билан аниқланганлиги учун, бу энг юқори даража умумий ҳолда $(2n - 1)$ га тенг бўлиши равшан.

(19.1) тенглик қаноатлантирилиши учун

$$f(t) = 1, t, t^2, \dots, t^{2n-1}$$

тенгликлар ўринли бўлиши зарур ва етарлидир.

Ҳақиқатан,

$$\int_{-1}^1 t^k dt = \sum_{i=1}^n A_i t_i^k, \quad k = \overline{0, 2n-1} \quad (19.2)$$

ва

$$f(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k t^k$$

деб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(t) dt &= \sum_{k=0}^{2n-1} C_k \int_{-1}^1 t^k dt = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k \sum_{i=1}^n A_i t_i^k = \\ &= \sum_{i=1}^n A_i \sum_{k=0}^{2n-1} C_k t_i^k = \sum_{i=1}^n A_i f(t_i). \end{aligned}$$

Шундай қилиб,

$$\int_{-1}^1 t^k dt = \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1} = \begin{cases} \frac{2}{k+1}, & k \text{ жуфт бўлганда,} \\ 0, & k \text{ тоқ бўлганда} \end{cases}$$

муносабатни ҳисобга олсак, қўйилган масалани ечиш учун t_i ва A_i ларни ушбу $2n$ та тенглама системасидан аниқлаш етарлидир, деган хулосага келамиз:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{i=1}^n A_i &= 2, \\ \sum_{i=1}^n A_i t_i &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^n A_i t_i^{2n-2} &= \frac{2}{2n-1}, \\ \sum_{i=1}^n A_i t_i^{2n-1} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (19.3)$$

(19.3) система чизиқли эмас ва уни одатдаги йўл билан ечиш катта) математик қийинчиликлар билан боғлиқ. Лекин бу ерда ушбу сунъий усулни қўллаш мумкин.

Ушбу кўпҳадларни қараймиз:

$$f(t) = t^k P_n(t), \quad k = \overline{0, n-1},$$

бу ерда $P_n(t)$ Лежандр кўдҳадлари.

Бу кўпҳадларнинг даражалари $(2n-1)$ дан ортиқ бўлмаганлиги учун (19.3) системага асосан улар учун (19.1) ва

$$\int_{-1}^1 t^k P_n(t) dt = \sum_{i=1}^n A_i t_i^k P_n(t_i), \quad k = \overline{0, n-1} \quad (19.4)$$

формула ўринли бўлиши керак. Иккинчи томондан, Лежандр кўпҳадларининг ортогоналлигига асосан (6) хосса)

$$k < n \text{ да } \int_{-1}^1 t^k P_n(t) dt = 0$$

тенгликлар бажарилади, шунинг учун

$$\sum_{i=1}^n A_i t_i^k P_n(t_i) = 0, \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (19.5)$$

(19.5) тенгликлар, агар

$$P_n(t_i) = 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (19.6)$$

деб олинса, ҳеч сўзсиз бажарилади, яъни (19.1) квадратура формуласи энг юқори аниқликда бўлиши учун t_i нуқталар сифатида тегишли Лежандр кўпҳадларининг нолларини олиш етарлидир. Маълумки, [в] хосса], бу ноллар ҳақиқий сонлар, турли ва $(-1, 1)$ оралиқда жойлашган. t_i абсциссаларни билган ҳолда (19.3) системанинг биринчи n та чизиқли тенгламасидан $A_i, i = \overline{1, n}$ коэффициентларни топиш осон. Бу системанинг дастлабки n та тенгламасининг детерминанти Вандермонд детерминантидир:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_n \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 & \dots & t_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & t_3^{n-1} & \dots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (t_i - t_j) = 0$$

Демак, A_i лар бир қийматли аниқланади. (19.1) формула Гаусс квадратура формуласи деб аталиб, унда t_i лар $P_n(t)$ Лежандр кўпҳадининг ноллари ва $A_i, i = \overline{1, n}$ лар (19.3) системадан аниқланади.

1- мисол. $n = 3$ учун Гаусс квадратура формуласини келтириб чиқаринг.

Ечиш. Учинчи даражали ($n = 3$) Лежандр кўпҳади бундай бўлади:

$$P_3(t) = \frac{1}{2} (5t^3 - 3t).$$

Бу кўпҳадни нолга тенглаб, илдиэларини топамиз:

$$t_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}} \approx -0,774597;$$

$$t_2 = 0;$$

$$t_3 = \sqrt{\frac{3}{5}} \approx 0,774597.$$

A_1, A_2, A_3 коэффициентларни аниқлаш учун, (19.3) га асосан, ушбу тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 2, \\ -\sqrt{\frac{3}{5}} A_1 + \sqrt{\frac{3}{5}} A_3 = 0, \\ \frac{3}{5} A_1 + \frac{3}{5} A_3 = \frac{2}{3}, \end{cases}$$

бундан $A_1 = A_3 = \frac{5}{9}, A_2 = \frac{8}{9}$ ни оламиз.

Демак,

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \frac{1}{9} \left[5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f(0) + 5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \right].$$

Гаусс квадратура формуласининг ноқулайлиги шундаки, t_i тугунлар ва A_i вазнлар, умуман айтганда, иррационал сонлардир. Лежандр кўпҳадининг илдизлари $t = 0$ нуқтага нисбатан симметрик жойлашган, A_i вазнлар эса мусбат ва исталган n да симметрик тугунларда устма-уст тушади. $n = 1, 4$ учун Гаусс формуласидаги t_i тугунлар ва A_i вазнларнинг қийматлари жадвалини келтирамыз (3.23-жадвал):

3.23-жадвал

n	i	t_i	A_i
1	1	0	2
2	1, 2	$\mp 0,57735027$	1
3	1; 3	$\mp 0,77459667$	$\frac{5}{9} = 0,555\ 555\ 56$
	2	0	
4	1, 4	$\mp 0,86113631$	$\frac{8}{9} = 0,888\ 888\ 89$
	2, 3	$\mp 0,33998104$	0,34785484 0,65214516

19.3. Энди Гаусс квадратура формуласини

$$\int_a^b f(x) dx$$

интегрални ҳисоблашга қўллайлик. Ўзгарувчини бундай

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t$$

алмаштириб, қуйидагини ҳосил қиламыз:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t\right) dt.$$

Бу интегралга (19.1) Гаусс квадратура формуласини татбиқ қилиб,

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) \quad (19.7)$$

га эга бўламыз, бу ерда

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (19.8)$$

t_i лар $P_n(t)$ Лежандр кўпҳадининг ноллари, яъни $P_n(t_i) = 0$.

n та тугунли (19.7) Гаусс формуласининг қолдиқ ҳади бундай ифодаланади:

$$R_n \leq \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^n}{[(2n!)]^2 (2n+1)} \max_{x \in [a, b]} |f^{(2n)}(x)|, \quad (19.9)$$

бу ердан қуйдагиларни ҳосил қиламиз:

$$R_2 \leq \frac{1}{135} \left(\frac{b-a}{2} \right)^5 \max_{x \in [a, b]} |f^{(10)}(x)|,$$

$$R_3 \leq \frac{1}{15750} \left(\frac{b-a}{2} \right)^7 \max_{x \in [a, b]} |f^{(6)}(x)|,$$

$$R_4 \leq \frac{1}{3472875} \left(\frac{b-a}{2} \right)^9 \max_{x \in [a, b]} |f^{(8)}(x)|$$

ва ҳоказо.

2-мисол. $\int_0^1 \sqrt{1+2x} dx$ интегрални Гаусс формуласини татбиқ этиб ҳисобланг ($n=3$).

Ечиш. $a=0$ ва $b=1$ га эгамиз. (19.8) формула ва келтирилган жадвалга асосан x_i тугунлар (бешта қийматли рақамгача) ушбу қийматларга эга бўлади:

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} t_1 = 0,11270;$$

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} t_2 = 0,50000;$$

$$x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} t_3 = 0,88730.$$

(19.7) формуладаги мос коэффициентлар бизнинг ҳолда бундай бўлади:

$$c_1 = \frac{b-a}{2} A_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{18} = 0,27778;$$

$$c_2 = \frac{b-a}{2} A_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{9} = \frac{4}{9} = 0,44444;$$

$$c_3 = \frac{b-a}{2} A_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{18} = 0,27778.$$

Кейинги ҳисоблашларни жадвалга ёзамиз (3.24-жадвал):

3.24-жадвал

i	x_i	$y_i = \sqrt{1+2x_i}$	c_i	$c y_i$
1	0,11270	1,10698	0,27778	0,30747
2	0,50000	1,41421	0,44444	0,62853
3	0,88730	1,66571	0,27778	0,46270
Σ				1,39870

Демак,

$$\int_0^1 \sqrt{1+2x} dx = \sum_{i=1}^3 c_i y_i = 1,39870.$$

Хатоликни баҳолаш учун $y = f(x) = \sqrt{1+2x}$ функциянинг олтинчи тартибли ҳосиласини топамиз:

$$f^{(6)}(x) = -945(1+2x)^{-\frac{11}{2}}.$$

Бу ердан:

$$\max_{x \in [0, 1]} |f^{(6)}(x)| = 945.$$

Демак, формуланинг абсолют хатолиги бундай қийматга эга бўлади:

$$R_3 \leq \frac{1}{15750} \left(\frac{b-a}{2} \right)^7 \max_{x \in [a, b]} |f^{(6)}(x)| = \frac{945}{15750} \left(\frac{1}{2} \right)^7 \approx \frac{1}{2000}.$$

Солиштириш учун интегралнинг аниқ қийматини келтирамиз:

$$\int_0^1 \sqrt{1+2x} dx = \sqrt{3} - \frac{1}{3} \approx 1,39872.$$

20-§. Монте-Карло усули

20.1. Масалаларни тасодифий миқдорлардан фойдаланиб ечиш усуллари умумий ном билан *Монте-Карло усули* деб аталади. Уларнинг номи Монте-Карло шахри номи билан боғлиқ.

Монте-Карло усулининг моҳияти қуйидагидан иборат: бирор ўрганилаётган миқдорнинг a қийматини топиш талаб қилинади, бунинг учун математик кутилиши a га тенг бўлган X миқдорни танланади:

$$M(X) = a.$$

Амалда эса бундай йўл тутилади: n та синов ўтказилади, бунинг натижасида X нинг n та мумкин бўлган қиймати олиниб, уларнинг ўрта арифметик қиймати

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

ҳисобланади ва $\bar{X}$ ни изланаётган a соннинг $\bar{a}$ баҳоси (тақрибий қиймати) сифатида қабул қилинади:

$$a \approx \bar{a} = \bar{X}.$$

Монте-Карло усули кўп сондаги синовлар ўтказилишини талаб этганлиги учун уни кўпинча *статистик синовлар усули* деб аталади. Бу усул назариясида X тасодифий миқдорни қандай қилиб энг мақсадга мувофиқ равишда танлаш, унинг мумкин бўлган қийматларини қандай қилиб топиш кўрсатилади.

20.2. X тасодикий миқдор математик кутилиши a нинг баҳосини ҳосил қилиш учун n та эркин синов ўтказилган ва улар бўйича X танланманинг ўрта қиймати топилган бўлиб, у изланаётган баҳо сифатида қабул қилинган бўлсин: $\bar{a} = \bar{X}$.

Агар синов такрорланадиган бўлса, у ҳолда X нинг бошқа мумкин бўлган қийматлари олиниши равшан, яъни бошқа ўртача қиймат, ва, демак, бошқа a баҳо ҳосил бўлади. Бундан математик кутилишнинг аниқ баҳосини ҳосил қилиш мумкин эмаслиги келиб чиқади. Йўл қўйилиши мумкин бўлган хатолик ҳақидаги масала юзага келади. Биз фақат берилган ў эҳтимоллик (ишончлилик) билан йўл қўйилиш мумкин хатоликнинг юқори чегараси δ ни излаш билан чекланамиз:

$$P(|\bar{X} - a| \leq \delta) = \gamma.$$

Бизни қизиқтираётган хатоликнинг юқори чегараси δ математик кутилишни танланма ўрта қиймати бўйича ишончлилик оралиқлари ёрдамида баҳолашдир.

Олий математика умумий курси (эҳтимоллик назарияси) натижаларидан фойдаланиб, ушбу уч ҳолни кўриб чиқамиз:

а) X тасодикий миқдор нормал тақсимланган ва унинг ўрта квадратик четланиши маълум. Бу ҳолда ў ишончлилик билан юқори чегара

$$\delta = \frac{t\delta}{\sqrt{n}} \quad (20.1)$$

га тенг, бу ерда n — синовлар сони; t — Лаплас функцияси аргументининг $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ бўладиган қиймати, δ — шу X нинг маълум ўрта квадратик четланиши.

1-мисол. Ўрта квадратик четланиши 0,5 га тенглиги маълум бўлган X нормал миқдорнинг математик кутилишини баҳолаш учун 100 та синов ўтказилган бўлса, δ хатоликнинг юқори чегарасини 0,95 ишончлилик билан топим.

Ечиш. Бу ерда $n = 100$, $\delta = 0,5$, $\gamma = 0,95$, $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0,95}{2} = 0,475$. Лаплас функцияси жадвалидан $t = 1,96$ ни топишимиз. Хатоликнинг изланаётган юқори чегараси:

$$\delta = 1,96 \cdot \frac{0,5}{\sqrt{100}} = 0,098.$$

б) X тасодикий миқдор нормал тақсимланган, шу билан бирга унинг ўрта квадратик четланиши σ номаълум. Бу ҳолда ў ишончлилик билан хатоликнинг юқори чегараси

$$\delta = t_{\gamma} \frac{S}{\sqrt{n}} \quad (20.2)$$

га тенг, бу ерда n — синовлар сони, S — танланма ўрта квадратик четланиши, t_{γ} — жадвалдан топилади.

2-мисол. Агар нормал тақсимланган X тасодикий миқдорнинг математик кутилишини баҳолаш учун унинг устида 100 та синов ўтказилган, улар бўйича $S = 0,5$ танланма ўрта квадратик четланиш топилган бўлса, хатоликнинг юқори чегарасини 0,95 ишончлилик билан топим.

Ечинш. Шартга кўра $S = 0,5$, $\gamma = 0,95$ ва $n = 100$. Шунинг учун $t_\gamma = 1,984$ хатоликнинг изланаётган юқори чегараси:

$$\delta = 1,984 \cdot \frac{0,5}{\sqrt{100}} = 0,099.$$

в) X тасодифий миқдор нормал тақсимотдан фарқли тақсимотга эга. Бу ҳолда X тасодифий миқдорнинг ўрта квадратик четланиш δ маълум бўлса, синовлар сони етарлича катта ($n > 30$) бўлганда хатоликнинг юқори чегарасини γ ишончлилиқ (20.1) формуласи бўйича ҳисоблаш мумкин, агарда δ номаълум бўлса, (20.1) формулага танланма ўрта квадратик четланиш S ни қўйиш мумкин ёки (20.2) формуладан фойдаланиш мумкин.

Агар n қанча катта бўлса, иккала формула берадиган натижалар орасидаги фарқ шунчалик кичик бўлишини айтиб ўтаемиз. Хусусан (1 ва 2- мисолларда), $n = 100$ ва $X = 0,95$ бўлганда хатоликнинг юқори чегараси (20.1) формула бўйича 0,098 га ва (20.2) формула бўйича 0,098 га тенг, кўриб турибмизки, фарқ унчалик катта эмас.

Хатоликнинг олдиндан берилган δ юқори чегарасини таъмин этадиган энг кичик сондаги синовлар сонини аниқлаш учун n ни (20.1) ва (20.2) формулалардан топиш керак:

$$n = \frac{t_\gamma^2 \delta^2}{\delta^2}, \quad n = \frac{t_\gamma^2 S^2}{\delta^2}.$$

Масалан, $\delta = 0,098$, $t_\gamma = 1,96$, $\sigma = 0,5$ бўлса, хатоликнинг 0,088 дан ортмаслигини таъмин этадиган синовлар сони

$$n = \frac{1,96^2 \cdot 0,5^2}{0,098^2} = 100.$$

20.3. Юқорида 20.1-бандда биз Монте—Карло усули тасодифий сонларни татбиқ этишга асосланганлигини айтиб ўтдик. Энди бу сонларни таърифлаймиз.

Тасодифий сонлар деб, (0,1) оралиқда текис тақсимланган R тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган r қийматларини айтилади.

Аслида эса мумкин бўлган қийматлари, умуман айтганда, чексиз сондаги рақамларга эга бўлган текис тақсимланган R тасодифий миқдордан эмас, балки мумкин бўлган қийматлари чекли сондаги рақамлардан иборат бўлган R^* квази текис тасодифий миқдордан фойдаланилади. R ни R^* га алмаштириш натижасида миқдор аниқ тақсимотга эмас, балки тақрибий тақсимотга эга бўлади.

20.4. Узлуксиз X тасодифий миқдорнинг $f(x)$ тақсимот зичлигини билган ҳолда унинг мумкин бўлган $X_i (i = 1, 2, \dots)$ қийматлари кетма-кетлигини топиш талаб қилинаётган бўлсин.

X устида синов ўтказиш қондасини келтираемиз: $f(x)$ тақсимот зичлиги маълум бўлган узлуксиз X тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган X_i қийматини топиш учун r_i тасодифий сонни танлаш ва

$$\int_{-\infty}^{x_i} f(x) dx = r_i \text{ тенгламани ёки } \int_{r_i}^{x_i} f(x) dx = r_i$$

тенгламани x_i га нисбатан ечиш лозим, бу ерда c — шу X тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган энг кичик қиймати.

3-мисол. Узлуксиз X тасодифий миқдор

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

курсаткичли қонун бўйича тақсимланган X нинг мумкин бўлган қийматларини олиш учун ошкор формулани топинг.

Ечиш. Келтирилган кондага мувофиқ

$$\lambda \int_0^{x_i} e^{-\lambda x} dx = r_i$$

тенгламани ёзамиз. Интеграллаб,

$$e^{-\lambda x_i} = 1 - r_i$$

ни ҳосил қиламиз. Бу тенгламани X_i га нисбатан ечамиз:

$$X_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - r_i)$$

r_i тасодифий сон $(0,1)$ оралиққа тегишли, демак, $1 - r_i$ ҳам тасодифий сон ва $(0,1)$ оралиққа тегишли. Бошқача айтганда R ва $1 - R$ миқдорлар бир хил тақсимланган. Шу сабабли X_i ни излаш учун яна ҳам соддароқ

$$X_i = -\frac{1}{\lambda} \ln r_i$$

формуладан фойдаланамиз. Масалан, агар $\lambda = 5$ бўлиб, $r_1 = 0,73$ танланган бўлса, у ҳолда мумкин бўлган X_1 қиймат бундай бўлади:

$$X_1 = -\frac{1}{5} \ln 0,73 = 0,2 \cdot 0,31 = 0,062.$$

Нормал тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматларини топиш қондасини келтирамыз: $a = 0$ ва $\sigma = 1$ параметрли нормал X тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган X_i қийматини топиш учун 12 та эркин тасодифий сонларни қушиш ва ҳосил бўлган йиғиндидан 6 ни айириш лозим:

$$X_i = \sum_{k=1}^{12} r_k - 6.$$

4-мисол. $a = 0$, $\sigma = 1$ параметрли нормал X тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматини топинг.

Ечиш. Тасодифий сонлар жадвалидан 12 та сонни танлаймиз, уларни қушамиз ва ҳосил бўлган йиғиндидан 6 ни айирамиз.

$$X_i = (0,10 + 0,09 + \dots + 0,67) - 6 = 5,01 - 6 = -0,99.$$

Агар $a \neq 0$ ва $\sigma \neq 1$ параметрли нормал тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган Z_i қийматини топиш талаб қилинаётган бўлса, у ҳолда шу банддаги сўнги қонда бўйича мумкин бўлган қийматни топиб, кейин изланаётган мумкин бўлган қийматни

$$Z_i = \sigma X_i + a$$

формула бўйича топамиз.

20.5. Аниқ интегралларни Монте — Карло усули бўйича ҳисоблашнинг куплаб усуллари яратилган. Улардан бирини — интеграл остидаги функциянинг ўрта қийматини топиш усулини келтирамиз.

Ушбу $\int_a^b \varphi(x) dx$ аниқ интегрални ҳисоблаш талаб этилаётган бўлсин.

(a, b) интеграллаш оралиғида $f(x) = \frac{1}{b-a}$ зичлик билан текис тақсимланган X тасодифий миқдорни қараймиз. У ҳолда математик кутилиш

$$M[\varphi(X)] = \int_a^b \varphi(x) f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Бундан

$$\int_a^b \varphi(x) dx = (b-a) M[\varphi(X)].$$

$M[\varphi(X)]$ математик кутилишни унинг баҳоси, яъни танланма ўрта қиймати билан алмаштириб, изланаётган интеграл учун ушбу тақрибий тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\int_a^b \varphi(x) dx \approx (b-a) \frac{\sum_{i=1}^n \varphi(X_i)}{n}, \quad (20.3)$$

бу ерда X_i — шу X тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қиймати.

X миқдор (a, b) оралиқда $f(x) = \frac{1}{b-a}$ зичлик билан текис тақсимланганлиги учун X_i ни ушбу формула бўйича топилади:

$$\int_a^{X_i} f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^{X_i} dx = r_i.$$

Бундан

$$X_i = a + (b-a)r_i; \quad (20.4)$$

бу ерда r_i — тасодифий сон.

Ҳисоблаш натижалари жадвалга ёзилади.

5-мисол. $\int_0^3 (x+1) dx$ интегрални Монте — Карло усули билан

ҳисобланг: а) ҳисоблашнинг абсолют хатолигини топинг; б) хатоликнинг юқори чегараси $\sigma = 0,1$ бўлишини $\gamma = 0,1$ ишончлилик билан таъминлаб берадиган синовларнинг энг кичик сонини топинг.

Ечиш. Ушбу

$$\int_1^3 (x+1) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(X_i)$$

формуладан фойдаланамиз, бу ерда $a = 1$, $b = 3$, $\varphi(x) = x + 1$. Сод-
далик учун синовлар сонини $n = 10$ деб оламиз. У ҳолда

$$\int_1^3 (x+1) dx \approx \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (X_i + 1),$$

бу ерда X_i нинг мумкин бўлган қийматлари ушбу формула бўйича
топилади:

$$X_i = a + (b-a) r_i \text{ ёки } X_i = 1 + 2r_i.$$

r_i сонлар тасодифий сонлар жадвалидан вергулдан кейин учта
рақам билан олинган.

Ўнта синов натижаси жадвалда келтирилган (3.25-жадвал). Жад-
валдан кўриниб турибдики,

$$\sum_{i=1}^{10} \varphi(X_i) = \sum_{i=1}^{10} (X_i + 1) = 29,834.$$

Демак, изланаётган интеграл:

$$\int_1^3 (x+1) dx \approx \frac{1}{10} \cdot 29,834 = 5,967.$$

а) Интегралнинг аниқ қиймати:

$$\int_1^3 (x+1) dx = \frac{(x+1)^2}{2} \Big|_1^3 = 6.$$

Шунинг учун абсолют хатолик:

$$6 - 5,967 = 0,033.$$

б) Хатоликнинг юқори чегараси $\delta = 0,1$ бўлишини $\gamma = 0,95$
ишончлилик билан таъминлайдиган энг кичик синовлар сонини

$$n = \frac{t^2 \delta^2}{\delta^2}$$

формула бўйича ҳисоблаймиз. t сонини $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = 0,75$ формула
бўйича Лаплас функцияси жадвалидан топамиз: $t = 1,96$.

Х тасодифий миқдор (1,3) ораликда текис тақсимланганлиги ва
унинг дисперсияси

$$D(X) = \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{6}$$

га тенглигини ҳисобга олиб, ўрта қиймати топиладиган $\varphi(x) = x + 1$
функциянинг дисперсиясини топамиз:

i	r_i	$2r_i$	$X_i = 1 + 2r_i$	$\Phi(X_i) = X_i + 1$
1	0,100	0,200	1,200	2,200
2	0,973	1,946	2,946	3,946
3	0,253	0,506	1,506	2,506
4	0,376	0,752	1,752	2,752
5	0,520	1,040	2,040	3,040
6	0,135	0,270	1,270	2,270
7	0,863	1,726	2,726	3,726
8	0,467	0,934	1,934	2,934
9	0,354	0,708	1,708	2,708
10	0,876	1,752	2,752	3,752
Σ				29,834

$$\sigma^2 = D(X + 1) = D(X) = \frac{1}{3}.$$

Энди изланаётган энг кичик синовлар сонини топамиз:

$$n = \frac{r^2 \delta^2}{\delta^2} = \frac{1,96^2 \left(\frac{1}{3}\right)}{0,1} = 128.$$

21-§. Биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламаларни Эйлер усули билан ечиш

21.1. Биринчи тартибли

$$y' = f(x, y)$$

дифференциал тенглама текисликда йўналишлар майдонини, яъни текисликнинг $f(x, y)$ функция мавжуд бўлган ҳар бир нуқтасида бу нуқта орқали ўтувчи интеграл эгри чизиқнинг йўналишини аниқлайди. Коши масаласини ечиш, яъни $y' = f(x, y)$ тенгламанинг $y(x_0) = y_0$ бошланғич шартини қаноатлантирадиган ечимини топиш талаб этилаётган бўлсин.

Ҳатто энг содда дифференциал тенглама учун ҳам бу шартларни қаноатлантирадиган ечимни чекли сондаги математик амаллар ёрдамида топиш, умуман, мумкин эмас. Бу нарсa дифференциал тенгламаларни тақрибий ечишнинг турли сонли усулларининг яратилишига олиб келди. Бу усулларни уларнинг ечимларини қандай шаклда берилишига қараб асосан уч гуруҳга бўлиш мумкин:

а) аналитик усуллар, дифференциал тенгламанинг тақрибий ечимини аналитик нфода шаклида беради;

б) график усуллар тақрибий ечимни график кўринишида беради;

в) сонли усуллар тақрибий ечимни жадвал шаклида беради

Бундай тавсиф маълум маънода шартли эканлигини айтиб утамыз. Масалан, Эйлер синиқ чизиқлари график усули бир вақтда дифференциал тенгламанинг сонли ечимини ҳам беради.

$$21.2. \quad y(x_0) = y_0 \text{ бошланғич шарт билан берилган биринчи тартибли}$$

$$y' = f(x, y)$$

дифференциал тенгламани (Коши масаласи) тақрибий интеграллашнинг Эйлер усулини кўриб чиқамиз.

$[x_0, x]$ кесмани, $\frac{x - x_0}{n} = h$ деб олиб, $x_1, x_2, \dots, x_n = x$ нуқталар билан n та бўлакка бўламиз, бу ерда h — интеграллаш қадами.

y' функция биринчи кесманинг ичида x_0 дан x_1 гача $f(x_0, y_0)$ ўзгармас қийматни сақлайди, деб фараз қиламиз, у ҳолда интеграл эгри чизиқни бу бўлакда унга $M_0(x_0, y_0)$ нуқтада ўтказилган уринма билан алмаштириб,

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда y_1 — изланаётган функциянинг $x_1 = x_0 + h$ даги қиймати. Юқоридагини такрорлаб, изланаётган ечимнинг кетма-кет қийматларини ҳосил қиламиз:

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1),$$

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2),$$

$$\vdots$$

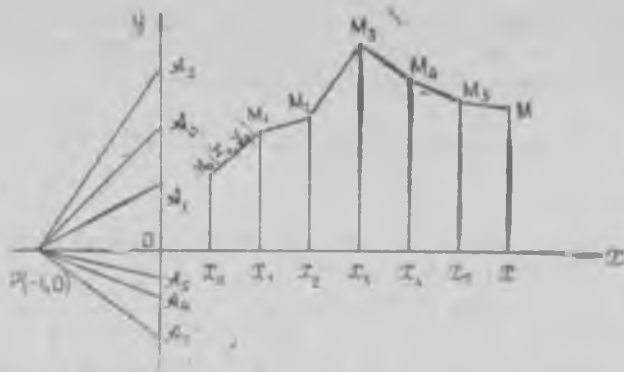
$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i).$$

Шундай қилиб, интеграл эгри чизиқ учлари $M_i(x_i, y_i)$ нуқталарда бўлган синиқ чизиқдан иборат бўлади, бу ерда

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i). \quad (21.1)$$

Бу усул Эйлер синиқ чизиқлар *усули* ёки оддийгина Эйлер усули деб аталади.

Эйлер синиқ чизиғини ҳосил қилиш учун $P(-1, 0)$ қутбни танлаймиз ва ординаталар ўқнда $OA_0 = f(x_0, y_0)$ кесмани қўямиз. Равшанки, PA_0 нурнинг бурчак коэффициентни $f(x_0, y_0)$ га тенг, шунинг учун Эйлер синиқ чизиғининг биринчи бўғинини ҳосил қилиш учун $M_0(x_0, y_0)$ нуқтадан M_0M_1 тўғри чизиқни PA_0 га параллел қилиб, $x = x_1$ тўғри чизиқ билан бирор $M_1(x_1, y_1)$ нуқтада кесишгунга қадар ўтказиш етарлидир. Сўнгра $M_1(x_1, y_1)$ нуқтани бошланғич нуқта қилиб олиб, ординаталар ўқнда $OA_1 = f_1(x_1, y_1)$ кесмани қўямиз ва M_1 нуқта орқали $M_1M_2 \parallel PA_1$ тўғри чизиқни $x = x_2$ тўғри чизиқ



3.16-шакл

билан M_2 нуқтада кесишгунга қадар ўтказамиз ва ҳоказо (3.16-шакл).

Эйлер усули дифференциал тенгламани энг содда сонли интеграллаш усулидир.

1- мисол. $y(0) = 1$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган

$$y' = \frac{xy}{2}$$

дифференциал тенглама интегралининг $[0, 1]$ кесмадаги қийматлари жадвалини, Эйлер усулидан фойдаланиб, тузинг. $h = 0,1$ деб олинг.

Ечиш. Аргументнинг кетма-кет қийматларини тузамиз: $x_0 = 0$, $x_1 = 0,1$; $x_2 = 0,2$; ... ; $x_{10} = 1$. Изланаётган функциянинг мос қийматларини (21. 1) формула

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

бўйича ҳисоблаймиз, бу ерда

$$f(x, y) = \frac{xy}{2}.$$

Ҳисоблаш натижалари жадвалда келтирилган (3. 26- жадвал).

Жадвалнинг сўнгги устунида $y = e^{\frac{x^2}{4}}$ аниқ ечимнинг қийматлари таққослаш учун келтирилган.

Жадвалдан кўрииб турибдики, y_{10} қийматнинг абсолют хатолиги

$$1,2840 - 1,2479 = 0,0361,$$

нисбий хатолиги эса тақрибан 3 % га тенг. Эйлер усулининг, умуман айтганда, аниқлиги ҳам ва хатolik маъносида нисбатан қониқарли натижаларни h қадам кичик бўлгандагина беради. Эйлернинг баъзи бир такомиллаштирилган усулларини кўриб чиқамиз.

21.3.

$$y' = f(x, y)$$

i	x	y	$f(x)y = \frac{xy}{2}$	$h \cdot f(x, y)$	$y = e^{x^2/4}$ аниқ ечим
0	0	1	0	0	1
1	0,1	1	0,005	0,005	1,0025
2	0,2	1,005	0,1005	0,0101	1,0100
3	0,3	1,0151	0,1523	0,0152	1,0227
4	0,4	1,0303	0,2067	0,0206	1,0408
5	0,5	1,0509	0,2627	0,0263	1,0645
6	0,6	1,0772	0,3232	0,0323	1,0942
7	0,7	1,1095	0,3883	0,0388	1,1303
8	0,8	1,1483	0,4593	0,0459	1,1735
9	0,9	1,1942	0,5374	0,0537	1,2244
10	1,0	1,2479			1,2840

дифференциал тенгламани

$$y(x_0) = y_0$$

бошланғич шарт билан ечиш талаб қилинсин. h қадамни танлаб, Эйлер усулига асосан изланаётган ечимнинг кетма-кет қийматларини $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, \dots, n$ лар учун

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

тақрибый формула бўйича ҳисоблаймиз.

Такомиллаштирилган Эйлер синиқ чизиқлари усулининг аниқлиги юқорироқ бўлиб, бунда аввал

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2},$$

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)$$

оралиқ қийматлар ҳисобланади ва интеграл эгри чизиқлар йўналишлар майдонининг қиймати $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$ ўрта нуқтада топилади,

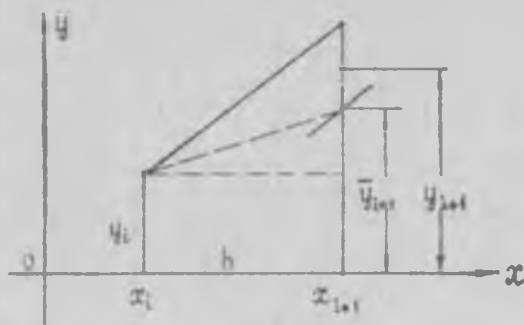
яъни

$$f\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right)$$

ҳисобланади, кейин эса бундай олинади:

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right). \quad (21.2)$$

(3.17- шаклга қаранг).



3.17- шакл

21.4. Эйлернинг бошқа такомиллаштирилган усулларида бири Эйлер — Коши усули бўлиб, бунда аввал ечимнинг дастлабки яқинлашиши аниқланади, яъни

$$\bar{y}_{i+1} = y_i + h (x_i, y_i),$$

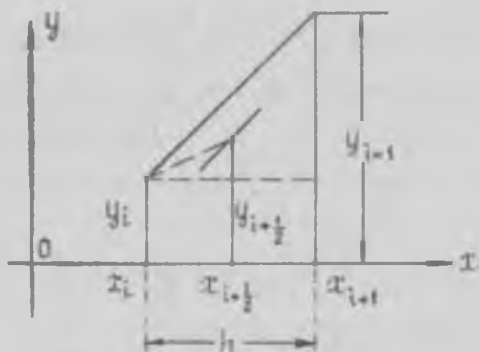
бундан фойдаланиб, интеграл эгри чизиқлар йўналишлари майдони топилади:

$$f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1}).$$

Сўнгра

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})) \quad (21.3)$$

бўйича тақрибий ечим ҳисобланади (3.18- шаклга қаранг).



3.18- шакл

2- мисол. Бошланғич шартлари $y(0) = 1$ бўлган

$$y' = y - \frac{2x}{y}$$

тенгламани $[0, 1]$ кесмада $h = 0,2$ қадам билан Эйлернинг биринчи ва иккинчи такомиллаштирилган усуллари билан интегралланг.

Ечиш. Бу ерда $h = 0,2$; $f(x, y) = y - \frac{2x}{y}$. Бу тенгламанинг такомиллаштирилган синиқ чизиқлар усули (21-2)

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(x_i + \frac{1}{2}; y_i + \frac{1}{2}\right)$$

билан ҳисобланган интеграллаш натижалари 3.27-жадвалда берилган.

3. 27- ж а д в а л

i	x_i	y_i	$\frac{h}{2} f(x_i, y_i)$	$x_i + \frac{1}{2}$	y_{i+1}	$h \cdot f\left(x_i + \frac{1}{2}, y_i + \frac{1}{2}\right)$
0	0	1,0	0,1	0,1	1,1	0,1836
1	0,2	1,1836	0,0846	0,3	1,2682	0,1590
2	0,4	1,3426	0,0747	0,5	1,4173	0,1424
3	0,6	1,4850	0,0677	0,7	1,5527	0,1302
4	0,8	1,6152	0,0625	0,9	1,6777	0,1210
5	1,0	1,7362				

3. 28- жадвалда берилган тенглама интеграллини Эйлер—Кошининг такомиллаштирилган усули билан ҳисоблаш натижалари келтирилган, бунда қадам аввалгидек, $h = 0,2$ деб олинган.

3. 28- ж а д в а л

i	x_i	y_i	$\frac{h}{2} f(x_i, y_i)$	x_{i+1}	y_{i+1}	$\frac{h}{2} f(x_{i+1}, y_{i+1})$	$\frac{h}{2} (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}))$
0	0	1,0	0,1	0,2	1,2	0,0867	0,1867
1	0,2	1,1867	0,0850	0,4	1,3566	0,0767	0,1617
2	0,4	1,3484	0,0755	0,6	1,4993	0,0699	0,1454
3	0,6	1,4938	0,0690	0,8	1,6318	0,0651	0,1341
4	0,8	1,6279	0,0645	1,0	1,7569	0,0618	0,1263
5	1,0	1,7542					

Таққослаш учун

$$y = \sqrt{2x + 1}$$

аниқ ечимни келтирамыз, бундан:

$$y(1) = \sqrt{3} \approx 1,73205.$$

21.5. Ҳар бир y_i қийматларни итерациялаб Эйлер — Кошининг тақомиллаштирилган усулининг аниқлигини ошириш мумкин. Аввал ушбу

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (21.4)$$

дастлабки яқинлашиш танланади, сўнгра ушбу

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2} \left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)}) \right] \quad (21.5)$$

итерация жараёни тузилади.

Итерация жараёнини бирор икки кетма-кет $y_{i+1}^{(m)}$ ва $y_{i+1}^{(m+1)}$ яқинлашишни ҳисоблаш учун керакли рақамларгача устма-уст тушгунга қадар давом эттирилади. Шундан кейин

$$y_{i+1} \approx \bar{y}_{i+1}^{(m)}$$

деб олинади, бу ерда $\bar{y}_{i+1}^{(m)}$ шу $y_{i+1}^{(m)}$ ва $y_{i+1}^{(m+1)}$ яқинлашишларнинг умумий қисми.

Агар h нинг танланган қийматида уч-тўрт итерациялашдан сўнг керакли рақамлар устма-уст тушмаса, у ҳолда h ҳисоблаш қадами-ни кичрайтириш лозим.

3-мисол. Итерациялаш усулидан фойдаланиб $y(0) = 1,5$ бошланғич шарт билан берилган $y' = y - x$ дифференциал тенглама интегралининг $y(1,5)$ қийматини тўртта ўнлик рақамнинг устма-уст тушиш аниқлигида топинг.

Ечиш. Қадамни $h = 0,25$ деб танлаб ва (21.4), (21.5) итерация жараёни

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i),$$

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2} \left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)}) \right]$$

ни татбиқ этиб, кетма-кет ҳисоблаймиз:

$$y_1^{(0)} = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1,5 + 0,375 = 1,8750;$$

$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{h}{2} (f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(0)})) = 1,5 + 0,125 (1,5 + 1,8750 - 0,25) = 1,89062;$$

$$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{h}{2} (f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(1)})) = 1,5 + 0,125 (1,5 + 1,8962 - 0,25) = 1,89258;$$

$$y_1^{(3)} = y_0 + \frac{h}{2} (f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(2)})) = 1,5 + 0,125 (1,5 + 1,89258 - 0,25) = 1,89282.$$

$$y_1^{(4)} = y_0 + \frac{h}{2} (f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(3)})) = 1,5 + 0,125 (1,5 + 1,89282 - 0,25) = 1,89285.$$

Сўнгги икки яқинлашишда тўртта рақам устма-уст тушмоқда. Шунинг учун яхлитлаб,

$$y_1 \approx 1,8929$$

деб олиш мумкин.

Яна (21.4) ва (21.5) формулалардан фойдаланиб, қуйидагиларни ҳисоблаймиз:

$$y_2^{(0)} = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1,8929 + 0,25(1,8929 - 0,25) = 2,3036,$$

$$y_2^{(1)} = y_1 + \frac{h}{2} (f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^{(0)})) = 1,8929 + 0,125(1,6429 + 2,3036 - 0,5) = 2,3237;$$

$$y_2^{(2)} = y_1 + \frac{h}{2} (f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^{(1)})) = 1,8929 + 0,125(1,6429 + 2,3237 - 0,5) = 2,32622$$

$$y_2^{(3)} = y_1 + \frac{h}{2} (f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^{(2)})) = 1,8929 + 0,125(1,6129 + 2,32622 - 0,5) = 2,32654.$$

$$y_2^{(4)} = y_1 + \frac{h}{2} (f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^{(3)})) = 1,8929 + 0,125(1,6429 + 2,32654 - 0,5) = 2,32658.$$

Итерацияни тўхтатиш ва

$$y_2 \approx 2,3266$$

деб қабул қилиш мумкин.

(21.4) ва (21.5) формулаларни қўллашни давом эттириб, берилган тенгламанинг ечимини ҳосил қиламиз. Ҳисоблаш натижаларини 3.29-жадвалга жойлаштирамиз.

3. 29-жадвал

i	x_i	y_i	$y_{i+1}^{(0)}$	$y_{i+1}^{(1)}$	$y_{i+1}^{(2)}$	$y_{i+1}^{(3)}$	$y_{i+1}^{(4)}$	y_{i+1}
0	0	1,5000	1,875	1,89062	1,89258	1,89282	1,89285	1,8929
1	0,25	1,8929	2,3036	2,3237	2,32622	2,32654	2,32658	2,3266
2	0,50	2,3266	2,78325	2,80908	2,81231	2,81271	2,81276	2,8128
3	0,75	2,8128	3,3285	3,36171	3,36586	3,3664	3,36645	3,3664
4	1,00	3,3664	3,9580	4,0007	4,00603	4,0067	4,00679	4,0068
5	1,25	4,0068	4,6960	4,7509	4,75776	4,75870	4,75872	4,7587
6	1,50	1,7587						

22- §. Рунге — Кутт усули

Эйлер усули бошланғич шартлари билан берилган дифференциал тенгламани (Коши масаласи) сонли ечишнинг энг содда ва биринчи тартибли аниқликдаги усулидир.

Рунге — Кутт усули юқори аниқликдаги усуллардан биридир.
 $[x_0, x]$ кесмада

$$y(x_0) = y_0 \quad (22.1)$$

бошланғич шартлари билан берилган

$$y' = f(x, y) \quad (22.2)$$

тенгламанинг сонли ечимини топиш талаб қилинсин.

Бу кесмани

$$x_i = x_0 + ih$$

(бу ерда $i = \overline{1, n}$ ва $h = \frac{x - x_0}{n}$ интеграллаш қадами),

нуқталар билан n та тенг бўлакка бўламиз.

Рунге — Кутт усулининг моҳияти изланаётган y_{i+1} қийматларни

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{s=1}^q A_s k_s^i$$

кўринишда излашдан иборат бўлиб, бу ерда

$$k_1^i = hf(x_i, y_i),$$

$$k_2^i = hf(x_i + \alpha_2 h; y_i + \beta_{21} k_1^i),$$

$$k_3^i = hf(x_i + \alpha_3 h; y_i + \beta_{31} k_1^i + \beta_{32} k_2^i),$$

$$k_4^i = hf(x_i + \alpha_4 h; y_i + \beta_{41} k_1^i + \beta_{42} k_2^i + \beta_{43} k_3^i),$$

$$\vdots$$

$$k_q^i = hf(x_i + \alpha_q h; y_i + \beta_{q1} k_1^i + \dots + \beta_{q, q-1} k_{q-1}^i), \vdots$$

$A_1, A_2, \dots, A_q, \alpha_2, \dots, \alpha_q, \beta_{21}, \dots, \beta_{q, q-1}$ — бирор параметрлар.

Рунге — Кутт усули ёрдамида турли тартибли аниқликдаги схемаларни тузиш мумкин. Масалан, $q = 1, A = 1$ да ушбу

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

биринчи тартибли аниқликдаги Рунге — Кутт усулига эга бўламиз. Бу усул бизга Эйлернинг синиқ чизиклар усули номн билан маълум [(21. 1) формула]. Шунга ўхшаш

$$q = 2, A_1 = A_2 = \frac{1}{2}, \alpha_2 = 1, \beta_{21} = 1$$

да иккинчи тартибли аниқликдаги Рунге — Кутт усулига эга бўламиз, яъни

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i) + hf(x_i, y_i))$$

Бу эса бизга Эйлер — Кошининг такомиллаштирилган усули номи билан маълум [(21. 3) формула].

Рунге — Куттнинг ушбу

туртинчи тартибли аниқликдаги схемаси кенг қўлланилади, бу ерда

$k_1^i, k_2^i, k_3^i, k_4^i$ сонлар геометрик маънога эга.

Айтайлик 3. 19- шаклдаги M_0CM_1 чизиқ (22. 1) бошланғич шартли (22. 2) дифференциал тенгламанинг ечимини ифодаласин. Бу эгри чизиқнинг C нуқтаси Oy ўққа параллел бўлган ва $[x_i, x_{i+1}]$ кесмани тенг иккига бўладиган тўғри чизиқда ётади, B ва L эса эгри чизиққа M_0 нуқтада ўтказилган уринманинг AC ва N_1M_1 ординаталар билан кесишиш нуқталари. U ҳолда k_1 сон M_0 нуқтада M_0CM_1 эгри чизиққа ўтказилган уринманинг h кўпайтувчи қадар аниқликдаги бурчак коэффициентини, яъни $k_1^i = hy_i' = hf(x_i, y_i)$.

3.19- шакл

В нукта

координаталарга эга, яъни

$$B\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right).$$

Демак, k_2 сон интеграл эгри чизиққа B нуқтада ўтказилган уринманинг h кўпайтувчи аниқлигидаги бурчак коэффициенти (BF — бу уринманинг кесмаси).

M_0 нуқта орқали BF кесмага параллел тўғри чизиқ ўтказилади, у ҳолда D нуқта $x = x_i + \frac{h}{2}$, $y = y_i + \frac{k_2}{2}$ координаталарга эга бўлади, яъни:

$$D\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right).$$

Демак, k_3 сон интеграл эгри чизиққа D нуқтада ўтказилган уринманинг h кўпайтувчи аниқлигидаги бурчак коэффициенти (DR_1 — бу уринманинг кесмаси).

Ниҳоят, M_0 нуқта орқали DR_1 га параллел тўғри чизиқ ўтказамиз, у M_1N_1 давомини $R_2(x_i + h, y_i + k_3)$ нуқтада кесиб ўтади. У ҳолда k_4 сон интеграл эгри чизиққа R_2 нуқтада ўтказилган уринманинг h кўпайтувчи аниқлигидаги бурчак коэффициенти бўлади.

3. 19-шаклда $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ шу k_1', k_2', k_3', k_4' бурчак коэффициен-
тларга мос бурчаклар.

Рунге — Кутт усули бўйича ҳисоблашни ушбу схемага жойлаш-
тириб амалга ошириш қулай бўлади (3. 30-жадвал).

3.30-жадвал

i	x	y	$k_i = hf(x, y)$	Δy
0	y_0	y_0	$k_1^{(0)}$	$k_1^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}$	$k_2^{(0)}$	$2k_2^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}$	$k_3^{(0)}$	$2k_3^{(0)}$
	$x_0 + h$	$y_0 + k_3^{(0)}$	$k_4^{(0)}$	$k_4^{(0)}$
1				$\frac{1}{6} \sum = \Delta y_0$
	x_1	y_1	$k_1^{(1)}$	$k_1^{(1)}$

Мисол. $y(0)_i = 1$ бошланғич шарт билан берилган

$$y' = x + y$$

дифференциал тенгламанинг $[0,05]$ кесмадаги қийматини $h = 0,1$ деб олиб, Рунге — Кутт усули билан ҳисобланг.

Ечиш: Ҳисоблаш жараёнининг бошланишини кўрсатамиз. y_1 ни ҳисоблаймиз. Кетма-кет қуйидагиларга эга бўламиз:

$$k_1^{(0)} = hf(x_0, y_0) = 0,1(0 + 1) = 0,1;$$

$$k_2^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = 0,1\left(0 + \frac{0,1}{2} + 1 + \frac{0,1}{2}\right) = 0,11,$$

$$k_3^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = 0,1\left(0 + \frac{0,1}{2} + 1 + \frac{0,11}{2}\right) = 0,1105;$$

$$k_4^{(0)} = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0,1(0 + 0,1 + 1 + 0,1105) = 0,12105.$$

3.31- жадвал

i	x	y	$k = 0,1(x + y)$	Δy
0	0	1	0,1	0,1000
	0,05	1,05	0,11	0,2200
	0,05	1,055	0,1105	0,2210
	0,1	1,1105	0,1210	0,1210
				$\frac{1}{6} \cdot 0,6620 = 0,1103$
1	0,1	1,1103	0,1210	0,1210
	0,15	1,1708	0,1321	0,2642
	0,15	1,1763	0,1326	0,2652
	0,2	1,2429	0,1443	0,1443
				$\frac{1}{6} \cdot 0,7947 = 0,1324$
2	0,2	1,2427	0,1443	0,1443
	0,25	1,3149	0,1565	0,3130
	0,25	1,3209	0,1571	0,3142
	0,3	1,3998	0,1700	0,1700
				$\frac{1}{6} \cdot 0,9415 = 0,1569$
3	0,3	1,3996	0,1700	0,1700
	0,35	1,4846	0,1835	0,3670
	0,35	1,4904	0,1840	0,3680
	0,4	1,5836	0,1984	0,1984
				$\frac{1}{6} \cdot 1,1034 = 0,1840$
4	0,4	1,5836	0,1984	0,1984
	0,45	1,6828	0,2133	0,4266
	0,45	1,6902	0,2140	0,4280
	0,5	1,7976	0,2298	0,2298
				$\frac{1}{6} \cdot 1,2828 = 0,2138$
5	0,5	1,7974		

Бу ердан:

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(0,1 + 0,11 + 0,1105 + 0,12105) = 0,1103.$$

Демак,

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0,1103 = 1,1103.$$

Кейинги ҳисоблаш натижалари 267-бетдаги 3.31-жадвалда келтирилган. Шундай қилиб,

$$y(0,5) = 1,7974.$$

Солиштириш учун

$$y = 2e^x - x - 1$$

аниқ ечимни келтирамиз, бундан

$$y(0,5) = 2\sqrt{e} - 1,5 = 1,79744 \dots$$

Рунге — Кутт усули, ўзининг сермехнатлигига қарамасдан, дифференциал тенгламаларни ЭХМда сонли ечишда кенг қўлланилади.

23-§. Иккинчи тартибли оддий дифференциал тенглама учун чизикли чегаравий масалани ечишнинг «прогонка», коллокация ва Галеркин усуллари

23.1. Чегаравий масалада, оддий дифференциал тенглама учун Коши масаласидан фарқли ўлароқ, изланаётган функциянинг қиймати (ёки функция ва унинг ҳосиласи комбинациясининг қиймати) битта нуқтада эмас, балки ечимни аниқлаш талаб этилаётган кесмани чегаралаб турган иккита нуқтада берилади.

Иккинчи тартибли

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (23.1)$$

оддий дифференциал тенглама учун чегаравий масалани ечишни қўриб чиқамиз. (23.1) тенглама учун энг содда икки нуқтали чегаравий масала қуйидагича қўйилади: $[a, b]$ кесманинг ичида (23.1) тенгламани, кесманинг охириларида эса

$$\begin{cases} \varphi_1(y(a), y'(a)) = 0, \\ \varphi_2(y(b), y'(b)) = 0 \end{cases} \quad (23.2)$$

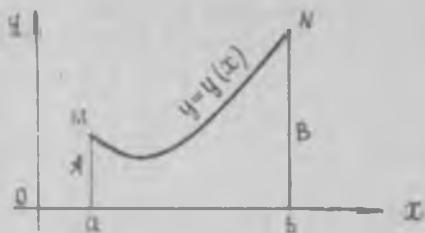
чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $y = y(x)$ функцияни топиш талаб этилади. (23.1) тенглама учун икки нуқтали чегаравий масаланинг баъзи турларини қўриб чиқамиз.

Масалан, иккинчи тартибли

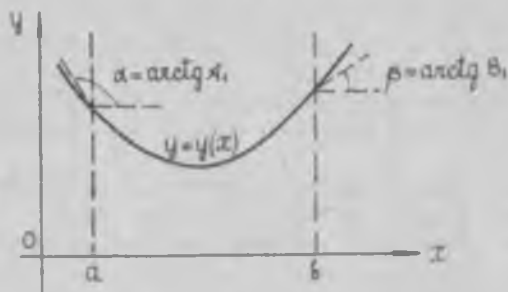
$$y'' = f(x, y, y') \quad (23.3)$$

дифференциал тенглама $y(a) = A$, $y(b) = B$ ($a < b$) чегаравий шартлар билан берилган, яъни изланаётган $y = y(x)$ функциянинг $[a, b]$ кесманинг $x = a$ ва $x = b$ чегаравий нуқталаридаги қийматлари маълум бўлсин. Бу ҳолда (23.3) тенгламанинг ечими геометрик нуқтан назардан берилган $M(a, A)$ ва $N(b, B)$ нуқталардан ўтувчи $y = y(x)$ интеграл эгри чизиқдан иборат бўлади (3.20-шакл).

Энди (23.3) тенглама учун изланаётган функция ҳосиласининг қийматлари чегаравий нуқталарда маълум бўлсин, яъни $y'(a) = A_1$, $y'(b) = B_1$. Бу ҳолда (23.3) геометрик нуқтан назардан тенгламанинг ечими $x=a$ ва $x=b$ тўғри чизиқларни мос равишда $\alpha = \arctg A_1$, $\beta = \arctg B_1$ бурчаклар остида кесиб ўтувчи интеграл эгри чизиқдан иборат бўлади (3.21-шакл).

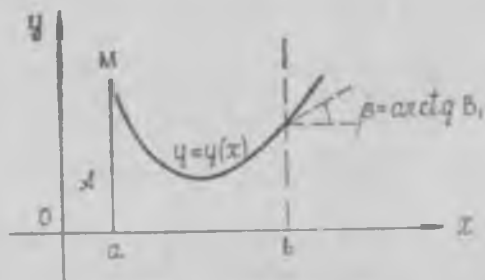


3.20-шакл



3.21-шакл

Нижоят, (23.3) тенглама учун бир чегаравий нуқтада изланаётган функциянинг қиймати $y(a) = A$, иккинчи чегаравий нуқтада бу функция ҳосиласининг қиймати $y'(b) = B_1$ маълум бўлсин. Бундай масала *аралаш чегаравий масала* деб аталади. Бу ҳолда (23.3) тенгламанинг ечими геометрик нуқтан назардан $M(a, A)$ нуқтадан ўтадиган ва $x=b$ тўғри чизиқни $\beta = \arctg B_1$ бурчак остида кесадиган $y = y(x)$ интеграл эгри чизиқдан иборат бўлади (3.22-шакл). Агар дифференциал



3.22-шакл

тенглама ва унинг чегаравий шартлари чизиқли бўлса, у ҳолда бундай масала *чизиқли чегаравий масала* деб аталади ҳамда (23.1) дифференциал тенглама ва (23.2) чегаравий шартлар қуйидагича ёзилади:

$$y'' + p_1(x)y' + q_1(x)y = f(x) \quad (23.4)$$

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = \gamma_1, \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = \gamma_2, \end{cases} \quad (23.5)$$

бу ерда $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ — шу $[a, b]$ кесмада маълум бўлган узлуксиз функциялар; α_0 , α_1 , β_0 , β_1 , γ_1 , γ_2 — берилган ўзгармас сонлар, шу билан бирга

$$|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0 \text{ ва } |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0.$$

Агар $a \leq x \leq b$ да $f(x) = 0$ бўлса, тенглама *бир жинсли*, акс ҳолда *бир жинсли бўлмаган* тенглама деб аталади.

Агар $\gamma_1 = 0$ ва $\gamma_2 = 0$ бўлса, у ҳолда мос чегаравий шарт *бир жинслилик шарт*и деб аталади.

Агарда дифференциал тенглама ҳам, чегаравий шартлар ҳам бир жинсли бўлса, у ҳолда чегаравий масала *бир жинсли масала* деб аталади.

23.2. (23.4) чизиқли дифференциал тенглама (23.5) икки нуқтали чизиқли чегаравий шартлар билан берилган бўлсин.

Бу чегаравий масалани ечишнинг энг содда усулларида бири уни чекли айирмалар тенгламалар системасига келтиришдан иборат (чекли айирмалар усули). Бунинг учун $[a, b]$ кесмани h узунликдаги n та тенг бўлакка бўламиз, бу ерда $h = \frac{b-a}{n}$ — қадам.

Бўлиниш нуқталарни $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_i = x_0 + ih$ ($i = \overline{0, n}$) абсциссаларга эга. $y = y(x)$ функциянинг ва унинг $y' = y'(x)$, $y'' = y''(x)$ ҳосилаларининг x_i бўлиниш нуқталаридаги қийматларини мос равишда $y_i = y(x_i)$, $y'_i = y'(x_i)$, $y''_i = y''(x_i)$ орқали белгилаймиз. Яна $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $f_i = f(x_i)$ белгилашларни ҳам киритамиз. $[a, b]$ кесманинг ҳар бир x_i ички нуқтасида $y'(x_i)$ [ва $y''(x_i)$] ҳосилаларни тақрибан

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad y''_i = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2} \quad (23.6)$$

чекли айирмалар нисбатлар билан алмаштираемиз, чегаравий $x_0 = a$ ва $x_n = b$ нуқталар учун эса

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad y'_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} \quad (23.7)$$

деб оламиз. (23.6) ва (23.7) формулалардан фойдаланиб, (23.6) тенгламани ва (23.6) чегаравий шартларни ушбу тенгламалар системаси билан тақрибий алмаштираемиз:

$$\begin{cases} \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + q_i y_i = f_i, \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = \gamma_1, \\ \beta_0 y_0 + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \gamma_2. \end{cases} \quad (23.8)$$

Шундай қилиб, $n+1$ та номаълумли $n+1$ та алгебраик тенглама системасига келдик. Бундай системани ечиш натижасида изланаётган функциянинг тақрибий қийматлари жадвалини ҳосил қиламиз.

Агар $y'(x_i)$ ва $y''(x_i)$ ни

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

марказий чекли айирмалар билан алмаштирилса, у ҳолда яна ҳам аниқроқ формулаларни ҳосил қилиш мумкин. Ҳосилалар учун чегаравий нуқталарда (23.7) формулалардан фойдаланиш мумкин. Бу ҳолда ушбу системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i, \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = \gamma_1, \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \gamma_2, \quad i = 0, n-1. \end{cases} \quad (23.9)$$

1-мисол. Ушбу чегаравий масаланинг ечимини чекли айирмалар усули билан 0,001 гача аниқликда толиғ:

$$\begin{cases} y'' - xy' + 2y = x + 1, \\ y(0,9) - 0,5y'(0,9) = 2, \\ y(1,2) = 1. \end{cases}$$

Ечиш. $[0,9; 1,2]$ кесмани $h = 0,1$ қадам билан қисмларга бўламиз. У ҳолда

$$x_0 = 0,9; \quad x_1 = 1,0; \quad x_2 = 1,1; \quad x_3 = 1,2$$

абсциссали тўртта нуқта ҳосил қилинади.

Берилган тенгламани $x_1 = 1,0$ ва $x_2 = 1,1$ ички нуқталарда

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - x_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + 2y_i = x_i + 1, \quad (i = 1, 2) \quad (23.10)$$

чекли айирмали тенглама билан алмаштирамиз. Чегаравий шартлардан фойдаланиб, чегаравий нуқталарда чекли айирмали

$$\begin{cases} y_0 + 0,5 \frac{y_1 - y_0}{h} = 2, \\ y_3 = 1 \end{cases} \quad (23.11)$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз.

Ўхшаш ҳадларни ихчамлаб ва $h = 0,1$ ни ҳисобга олиб, (23.10) ва (23.11) тенгламаларни мос равишда қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\begin{aligned} y_{i-1}(2 + 0,1 x_i) - 4 y_i(1 - 0,01) + y_{i+1}(2 - 0,1 x_i) &= 0,02 x_i, \\ 1,2 y_0 - y_1 &= 0,4, \\ y_3 &= 1, \quad i = \overline{1, 2}. \end{aligned}$$

Берилган масала

$$\begin{cases} 1,2 y_0 - y_1 = 0,4, \\ 2,1 y_0 - 3,96 y_1 + 1,9 y_2 = 0,04, \\ 2,11 y_1 - 3,96 y_2 + 1,89 y_3 = 0,042 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечишга келтирилади. Системани ечиб,

$$y_0 = 1,406; y_1 = 1,287; y_2 = 1,149; y_3 = 1,000$$

ни ҳосил қиламиз.

23.3. Иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларга чекли айирмалар усулини татбиқ этилганда уч ҳадли чизиқли алгебраик тенгламалар системаси ҳосил бўлиб, уларнинг ҳар бири учта қўшни номаълумни ўз ичига олади. Бундай системани ечиш учун «прогонка» усули деб номланувчи махсус усул мавжуд.

(23.9) чекли-айирмали тенгламалар системаси тегишли алмаштиришлардан сўнг

$$y_{i+1} + m_i y_i + n_i y_{i-1} = \bar{f}_i h^2, \quad (23.12)$$

$$\begin{cases} \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = \gamma_1, \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \gamma_2, \quad i = \overline{1, n-1} \end{cases} \quad (23.13)$$

кўринишга келтирилади, бу ерда

$$m_i = -\frac{2 - q_i h^2}{1 + \frac{p_i}{2} h}, \quad n_i = \frac{1 - \frac{p_i}{2} h}{1 + \frac{p_i}{2} h}, \quad \bar{f}_i = \frac{l_i}{1 + \frac{p_i}{2} h}. \quad (23.14)$$

(23.12) — (23.13) чизиқли система $y_0, y_1, \dots, y_n$ номаълумларга нисбатан $(n+1)$ та биринчи даражали тенгламадан иборат. Бу система-ни одатдаги усуллар билан ҳам ечиш мумкин, аммо биз бу ерда «прогонка» усули билан ечишни кўрсатамиз. (23.12) тенгламани y_i га нисбатан ечсак,

$$y_i = \frac{\bar{f}_i}{m_i} h^2 - \frac{1}{m_i} y_{i+1} - \frac{n_i}{m_i} y_{i-1} \quad (23.15)$$

га эга бўламиз. (23.12) — (23.13) тўлиқ система ёрдамида (23.15) системадан y_{i-1} номаълум йўқотилган, деб фараз қилайлик. У ҳолда бу тенглама

$$y_i = c_i(d_i - y_{i+1}) \quad (23.16)$$

кўринишни олади, бу ерда $c_i, d_i, i = \overline{1, n-1}$ — бирор коэффициентлар. Бундан

$$y_{i-1} = c_{i-1}(d_{i-1} - y_i)$$

эканлиги равшан.

Бу ифодани (23.12) га қўйсак,

$$y_{i+1} + m_i y_i + n_i c_{i-1}(d_{i-1} - y_i) = \bar{f}_i h^2,$$

ва, демак,

$$y_i = \frac{(\bar{f}_i h^2 - n_i c_{i-1} d_{i-1}) - y_{i+1}}{m_i - n_i c_{i-1}}. \quad (23.17)$$

(23.16) ва (23.17) формулаларни таққослаб, c_i ва d_i коэффициентларни аниқлаш учун ушбу формулаларни ҳосил қиламиз:

$$c_i = \frac{1}{m_i - n_i c_{i-1}}, \quad d_i = \bar{f}_i h^2 - n_i c_{i-1} d_{i-1} \quad (i = \overline{1, n-1}). \quad (23.18)$$

Энди c_0 ва d_0 ни аниқлаймиз. Биринчи чегаравий шарт (23.13) дан

$$y_0 = \frac{\gamma_1 h - \alpha_1 y_1}{\alpha_0 h - \alpha_1}$$

ни ҳосил қиламиз. Иккинчи томондан, $i = 0$ бўлганда (23.16) дан

$$y_0 = c_0(d_0 - y_1) \quad (23.19)$$

га эга бўламиз. Сўнгги икки тенгликни таққослаб,

$$c_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0 h - \alpha_1}, \quad d_0 = \frac{\gamma_1 h}{\alpha_1} \quad (23.20)$$

ни топамиз. (23.18), (23.20) формулаларга асосан $c_i, d_i, i = \overline{1, n-1}$ коэффициентлар c_{n-1} ва d_{n-1} гача (улар ҳам киради) кетма-кет топилади (тўғри йўл).

Тескари йўл y_n ни аниқлашдан бошланади. (23.13) даги иккинчи чегаравий шартдан ва (23.16) формуладан $i = n-1$ деб, ушбу тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} \beta_0 y_0 + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \gamma_2, \\ y_{n-1} = c_{n-1}(d_{n-1} - y_n). \end{cases} \quad (23.21)$$

Бунини y_n га нисбатан ечсак,

$$y_n = \frac{\gamma_2 h + \beta_1 c_{n-1} d_{n-1}}{\beta_0 h + \beta_1 (c_{n-1} + 1)} \quad (23.22)$$

га эга бўламиз.

Энди (23.16) формула бўйича кетма-кет $y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_0$ ларни топамиз.

Назорат қилиш мақсадида биринчи чегаравий шартнинг бажарилишини текшириб кўриш мумкин.

Ҳисоблашларни жадвал кўринишида жойлаштириш қулай бўлади (3.32-жадвал).

3.32-жадвал

i	0	1	2	...	$n-2$	$n-1$	n
c_i	c_0 (23.20) дан	c_1	c_2	...	c_{n-2}	c_{n-1}	
d_i	d_0 (23.20) дан	d_1	d_2	...	d_{n-2}	d_{n-1}	
x_i	$x_0 = a$	x_1	x_2	...	x_{n-2}	x_{n-1}	$x_n = b$
y_i	y_0	y_1	y_2	...	y_{n-2}	y_{n-1}	y_n (23.22) дан

2-мисол. Ушбу

$$y'' = x + y, \quad (23.23)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \quad (23.24)$$

чегаравий масалани «прогонка» усули билан ечинг.

Ечиш. $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0, \beta_0 = 1, \beta_1 = 0, \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ларга эгамиз. $h = 0,1$ деб оламиз ҳамда (23.23) тенглама ва (23.24) чегаравий шартлардан тегишли

$$y_{i+1} + m_i y_i + n_i y_{i-1} = \bar{f}_i h^2, \quad i = \overline{1, n-1}$$

$$y_0 = 0, \quad y_1 = 0$$

чекли-айирмали тенгламаларга ўтамиз, бу ерда $m_i = -2 - h^2, n_i = 1, \bar{f}_i = x_i = ih$.

(23.20) ва (23.18) формулаларга асосан

$$c_0 = 0, \quad c_0 d_0 = \gamma_1,$$

бундан

$$c_1 = \frac{1}{m} = -0,498; \quad d_1 = \bar{f}_1 h^2 - n_1 \gamma_1 = 0,001$$

(23.18) формулалар бизнинг ҳолда

$$c_i = \frac{1}{-2 - h^2 - c_{i-1}}, \quad d_i = ih^2 - c_{i-1}d_{i-1}, \quad i = \overline{1,9}$$

ни беради.

c_i ва d_i ($i = \overline{1,9}$) нинг топилган қийматлари жадвалнинг биринчи иккита сатрида ёзилади. Сўнгра (23.16) формуладан ва маълум $y_{10} = 0$ қийматдан фойдаланиб, $y_9, y_8, \dots, y_1$ ни ҳисоблаймиз.

Таққослаш мақсадида жадвалнинг сўнгги сатрида $\bar{y} = \frac{2e}{e^2 - 1} \times \times \operatorname{sh} x - x$ аниқ ечимнинг қийматлари берилган (3.33-жадвал).

3.33-жадвал

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_i	0	-0.498	-0.662	-0.878	-0.890	-0.900	-0.908	-0.915	-0.921	-0.926	—
d_i	—	0.001	0.002	0.004	0.008	0.012	0.016	0.022	0.028	0.035	—
$\bar{y}_i$	0	-0.025	-0.049	-0.072	-0.078	-0.081	-0.078	-0.070	-0.055	0.032	0
y_i	0	-0.015	-0.029	-0.041	-0.050	-0.057	0.058	-0.054	-0.044	-0.026	0

23.4. Чегаравий масаланинг тақрибий қийматини аналитик нфода шаклда топиш имконини берадиган усул билан танишамиз.

Ушбу чизиқли

$$L[y] \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (23.25)$$

дифференциал тенгламани ва

$$\begin{cases} \Gamma_a[y] \equiv \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = \gamma_1, \\ \Gamma_b[y] \equiv \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = \gamma_2. \end{cases} \quad (23.26)$$

бунда $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$ чизиқли чегаравий шартларни қаноатлантирадиган $y = y(x)$ функцияни аниқлаш талаб этилаётган бўлсин.

Шундай қилиб бирор чизиқли эркли

$$u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x) \quad (23.27)$$

функциялар (базис функциялар) тўпламини танлаймизки, улардан $u_0(x)$ функция бир жинсли бўлмаган чегаравий шартларни қаноатлантирсин, яъни

$$\Gamma_a[u_0] = \gamma_1, \quad \Gamma_b[u_0] = \gamma_2 \quad (23.28)$$

бўлиб, қолган $u_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ функциялар эса мос бир жинсли чегаравий шартларни қаноатлантирсин:

$$\Gamma_a[u_i] = 0, \quad \Gamma_b[u_i] = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (23.29)$$

Агар (23.26) чегаравий шартлар бир жинсли ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$) бўлса, у ҳолда $u_0(x) \equiv 0$ деб олиб,

$$u_i(x), \quad i = \overline{1, n}$$

функцiялар системасинигина караш мумкин.

(23.25) — (23.26) чегаравий масаланинг ечимини (азис функцияларнинг чизикли комбинацияси

$$y = u_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i u_i(x) \quad (23.30)$$

шаклида излаймиз. Бу ҳолда u функция равшанки, (23.26) чегаравий шартларни қаноатлантиради. Ҳақиқатан ҳам, чегаравий шартларнинг қизиқли эканлигига асосан,

$$\Gamma_a[y] = \Gamma_a[u_0] + \sum_{i=1}^n c_i \Gamma_a[u_i] = \gamma_1 + \sum_{i=1}^n c_i \cdot 0 = \gamma_1$$

га эга буламиз. Шунга ўхшаш, $\Gamma_{\rho_1}^1[y] = \gamma_1$.

(23.30) ифодани (23.25) тенгламага қўйиб, *уйғун бўлмаган функция* деб аталувчи

$$\begin{aligned} R(x, c_1, c_2, \dots, c_n) &= L[y] - f(x) = \\ &= L[u_0] - f(x) + \sum_{i=1}^n c_i L[u_i], \end{aligned} \quad (23.31)$$

функцыяга эга буламыз.

Агар $c_i (i = \overline{1, n})$ ларнинг бирор танланишида

$$a \leq x \leq b \text{ да } R(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \equiv 0$$

тенглик бажарилса, у функция (23.25) — (23.26) чегаравий масаланинг аниқ ечими бўлади.

Бироқ c_i коэффициендларни бундай муваффақият билан танлаш, умуман айтганда, мумкин эмас. Шу сабабли бундай натижа билан чекланилади: $R(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ функция $[a, b]$ даги берилган етар-лича энч нуқталар системаси $x_1, x_2, \dots, x_n$ (коллокация нуқталари) да нолга айланиши талаб қилинади, бу нуқталарда, шундай қилиб, (23.25) дифференциал тенглама аниқ қаноатлантирилади; коллокация нуқталари сифатида, масалан, $[a, b]$ кесмани тенг булакларга бўлувчи нуқталар танланиши мумкин. Натижада ушбу

[illegible]

ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИ ХОСИЛ ҚИЛАМИЗ.

(23.32) система биргаликда бўлган ҳолда $c_1, c_2, \dots, c_n$ коэффициентларни одатдаги усуллар билан аниқлаш мумкин, шундан сўнг қаралаётган чегаравий масаланинг тақрибий ечими (23.22) формула билан топилади.

Чизиқли чегаравий масалани бундай ечиш усули *коллокация усули* деб аталади.

3-мисол. Ушбу чегаравий масалани коллокация усули билан ечинг:

$$\begin{cases} y'' + (1 + x^2)y + 1 = 0, \\ y(1) = 0, \quad y(-1) = 0. \end{cases} \quad (23.33)$$

Ечиш. Базис функциялар сифатида

$$u_n(x) = x^{n-2}(1 - x^2), \quad n = 1, 2, \dots$$

кўпхадларни танлаймиз, улар чегаравий шартларни қаноатлантириши равшан:

$$u_n(1) = 0, \quad u_n(-1) = 0.$$

Коллокация нуқталари сифатида

$$x_0 = 0, \quad x_+ = \frac{1}{2}, \quad x_- = -\frac{1}{2}$$

ларни танлаймиз. Иккита базис функция билан чекланиб,

$$y = c_1(x - x^2) + c_2(x^2 - x^4)$$

деб оламиз. Бунн (23.33) дифференциал тенгламага қўямиз:

$$\begin{aligned} R(x) = -2c_1 + c_2(2 - 12x^2) + (1 + x^2)[c_1(1 - x^2) + \\ + c_2(x^2 - x^4)] + 1 = 1 - c_1(1 + x^4) + c_2(2 - 11x^2 - x^4). \end{aligned} \quad (25.34)$$

Коллокация нуқталари

$$x_0 = 0, \quad x_+ = \frac{1}{2}, \quad x_- = -\frac{1}{2}$$

да $R(x_0) = 0$, $R(x_+) = 0$, $R(x_-) = 0$. Бундан, (23.34) формуладан фойдаланиб, c_1 ва c_2 коэффицентларни аниқлаш учун ушбу чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 1 - c_1 + 2c_2 = 0, \\ 1 - \frac{17}{16}c_1 - \frac{49}{64}c_2 = 0. \end{cases} \quad (23.35)$$

Бу системани ечиб,

$$c_1 = 0,957, \quad c_2 = -0,022$$

ни топамиз, демак, ушбу

$$y \approx 0,957(1 - x^2) - 0,022(x^2 - x^4) = 0,957 - 0,979x^2 + 0,022x^4$$

тақрибий ечимга эга бўламиз.

Хусусан, $y(0) = 0,957$.

23.5. Галёркин усули.

Ушбу

$$L[y] \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (23.36)$$

чизиқли дифференциал тенглама ва

$$\Gamma_a[y] \equiv \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = \gamma_1, \quad \Gamma_b[y] \equiv \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = \gamma_2 \quad (23.37)$$

берилган, бунда $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$ ва $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$.

Бирор тўла системанинг қисми бўлган базис функцияларнинг чекли системаси

$$u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x)$$

ни танлаймиз, бунда $u_0(x)$ функция бир жинсли бўлмаган чегаравий шартлар $\Gamma_a[u_0] = \gamma_1$, $\Gamma_b[u_0] = \gamma_2$ ни, $u_1(x), \dots, u_n(x)$ функциялар эса

$$\Gamma_a[u_i] = \Gamma_b[u_i], \quad i = \overline{1, n}$$

бир жинсли чегаравий шартларни қаноатлантирсин.

Чегаравий масаланинг ечимини яна

$$y = u_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i u_i(x) \quad (23.38)$$

қўринишда излаймиз. Бу y функция u_i базис функцияларнинг танланишига кўра (23.37) чегаравий шартларни c_i коэффициентлар ихтиёрий танланганда ҳам қаноатлантиради. (23.38) ифсдани (23.36) тенгламага қўйсақ,

$$R(x, c_1, c_2, \dots, c_n) = L[u_0] + \sum_{i=1}^n c_i [u_i] - f(x)$$

оғишини беради. Аниқ ечим y учун $R \equiv 0$. Аниқ ечимга яқин бўлган тақрибий ечимни топиш учун c_i коэффициентларни шундай танлаймизки, R функция бирор маънода кичик бўлсин. Галёркин усулига кўра R ни $u_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ базис функцияларга ортогонал бўлишини талаб қиламиз. Бу эса $u_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ функциялар сони етарлича катта бўлганда R оғишнинг ўртача кичик бўлишини таъминлайди, бироқ бу ерда тақрибий ечимнинг аниқ ечимга қанчалик яқин эканлиги масаласи очиқ қолади.

$c_1, c_2, \dots, c_n$ коэффициентларни топиш учун R ва $u_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ функцияларнинг ортогоналлигидан фойдаланиб, ушбу чиқиқли тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{cases} \int_a^b u_1(x) R(x, c_1, c_2, \dots, c_n) dx = 0, \\ \int_a^b u_2(x) R(x, c_1, c_2, \dots, c_n) dx = 0, \\ \dots \dots \dots \int_a^b u_n(x) R(x, c_1, c_2, \dots, c_n) dx = 0, \end{cases}$$

ёки батафсилроқ ёзнлса,

$$\sum_{i=1}^n c_i \int_a^b u_i(x) L[u_i] dx = \int_a^b u_i(x) \left\{ f(x) - L[u_0] \right\} dx, \quad i = \overline{1, n}$$

4- мисол. $y(0) = 1, y(1) = 0$ чегаравий шартларни қаноатлантирадиган

$$y'' + xy' + y = 2x$$

тенгламанинг тақрибий ечимини Галёркин усули билан топинг.

Ечиш. Ушбу функцияларни базис функциялар сифатида танлаймиз:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1 - x, \\ u_1(x) &= x(1 - x), \\ u_2(x) &= x^2(1 - x), \\ u_3(x) &= x^3(1 - x). \end{aligned}$$

Масаланинг тақрибий ечимини

$$y = (1 - x) + c_1 x(1 - x) + c_2 x^2(1 - x) + c_3 x^3(1 - x)$$

кўпхад шаклида излаймиз. Буни берилган дифференциал тенгламанинг чап томонига қўйиб, ушбу оғишни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} R(x, c_1, c_2, \dots, c_n) &= (1 - 4x) + c_1(-2 + 2x - 3x^2) + \\ &+ c_2(2 - 6x + 3x^2 - 4x^3) + c_3(6x - 12x^2 + 4x^3 - 5x^4). \end{aligned}$$

Я функциянинг u_1, u_2, u_3 функцияларга ортогоналлик шартидан фойдаланиб, ушбу системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} \int_0^1 (x - x^2) R(x, c_1, c_2, c_3) dx = 0, \\ \int_0^1 (x^2 - x^3) R(x, c_1, c_2, c_3) dx = 0, \\ \int_0^1 (-x^4 + x^3) R(x, c_1, c_2, c_3) dx = 0. \end{cases}$$

Бу системага $R(x)$ нинг қийматини қўйиб ва интеграллаб, ушбуга эга бўламиз:

$$\begin{aligned} 133c_1 + 63c_2 + 36c_3 &= -70, \\ 140c_1 + 108c_2 + 79c_3 &= -98, \\ 264c_1 + 252c_2 + 211c_3 &= -210. \end{aligned}$$

Буни ечиб, $c_1 = -0,2090, c_2 = -0,7894, c_3 = 0,2090$ ни ҳосил қиламиз. Шу сабабли изланаётган ечим

$$y = (1 - x)(1 - 0,2090x - 0,7894x^2 + 0,2090x^3)!$$

бўлади.

24- §. Математик физиканинг чегаравий масалаларини ечишнинг тўрлар усули. Дифференциал операторларни айирмали аппроксимациялаш. Схеманинг турғунлиги ҳақида тушунча. Ошкор ва ошкормас схемалар

24.1. Маълумки, китобнинг «Математик физика тенгламалари» бўлимида қаралган тўлқин тенгламаси ёки тор тебраниш тенгламаси (1.54), иссиқлик ўтказувчанлик (Фурье) тенгламаси, Лаплас тенгламалари (1.56) нинг ечимларини бир қийматли аниқлаш учун *бошланғич* ва *чегаравий шартлар* деб аталувчи қўшимча шартларнинг ҳам берилиши лозим. Лекин, кўпгина тенгламалар ечимларини аналитик шаклда олишнинг иложи йўқлиги сабабли уларни ечишда тақрибий ёки сонли усулларга мурожаат қилишга тўғри келади.

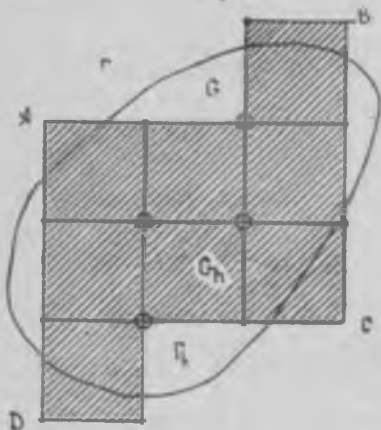
Биз ҳосилаларни айирмали аппроксимациялашга асосланган сонли усулларни кўриб чиқамиз. Бундай ёндашиш айирма усули, ёки чекли айирма усули ёки тўрлар усули деб аталади.

24.2. Тўрлар усулининг моҳияти қуйидагича. Айирмали схемани тузишда олдин берилган тенглама аргументларининг узлуксиз ўзгариш соҳаси G ни уларнинг дискрет ўзгариш соҳаси G_h тўрли соҳа (ёки оддий айтганда тўр) билан, яъни *тўр тугунлари* деб аталадиган (x_i, y_j) нуқталар тўплами билан алмаштирилади. Тўр соҳа квадрат, тўғри тўртбурчак, учбурчак ва ҳоказо катаклардан иборат бўлиши мумкин. Тўрли соҳани танлаганда, унинг G_h контури берилган G соҳанинг Γ контурини иложи борича яхши аппроксимациялайдиган бўлиши керак.

Мисол сифатида h қадам билан квадрат тўр тузамиз:

$$x_i = x_0 + ih, \quad y_j = y_0 + jh; \quad i, j = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

бунда тўрнинг (x_i, y_j) тугунлари $\bar{G}$ соҳага тегишли ёки унинг че-



3.23- шакл

гарасидан h дан кичик бўлган масофада ётади. Тўр тугунлари ушбу кўринишларда бўлишлари мумкин: қўшни, ички ва чегаравий тугунлар.

Қўшни тугунлар бир- биридан координата ўқлари йўналиши бўйича тўр қадами h га тенг масофада ётади.

Ички тугунлар G соҳага, уларга қўшни бўлган тўртта тугун эса тўрға тегишли, акс ҳолда уларни чегаравий тугунлар деб аталади. Бунда чегаравий тугун бу тўрнинг қўшни ички тугунга эга бўлса, у *I тур чегаравий тугун* деб

аталади; акс ҳолда *II тур чегаравий* тугунга эга бўламиз. 3.23-шаклда ички тугунлар очиқ доирачалар билан, I тур чегаравий нуқ-

талар қора доирачалар билан белгиланган; A, B, C, D тугунлар II тур чегаравий тугунлардир. Ички тугунлар ва I тур чегаравий тугунларни *ҳисоблаш тугунлари* деб атаймиз. Энди изланаётган $u = u(x, y)$ функциянинг (x_i, y_j) тугундаги қийматини $u_{ij} = u(x_i, y_j)$ орқали белгилаймиз.

24.3. Айирмали схемани тузишда навбатдаги қадам $L[u]$ дифференциал операторни бирор айирмали ифода билан алмаштиришдан иборат. Бу операторларни 24.1-бандда эслатиб ўтилган тенгламалар учун келтираемиз:

а) ушбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Лаплас тенгласига мос чекли- айирмали тенгламани ҳосил қилиш учун

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

дифференциал операторда хусусий ҳосилаларни ушбу формулалар бўйича алмаштириш керак:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\approx \frac{1}{h^2} (u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &\approx \frac{1}{h^2} (u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}).\end{aligned}$$

У ҳолда Лаплас дифференциал тенгласи ҳар бир (x_i, y_j) нуқтада чекли- айирмали

$$Lu = \frac{1}{h^2} (u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} - 4u_{ij}) = 0 \quad (24.1)$$

тенглама билан аппроксимацияланади. Бундан u_{ij} ларнинг қийматларини ҳосил қиламиз:

$$u_{ij} = \frac{1}{4} (u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}), \quad (24.2)$$

бу ерда (x_{i+1}, y_{j+1}) — ҳисоблаш нуқталари.

Агар берилган масала учун

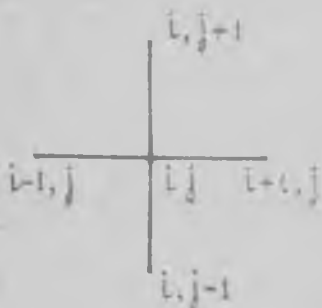
$$(x, y) \in \Gamma \text{ да } u(x, y) = \varphi(x, y)$$

чегаравий шарт берилган бўлса, у ҳолда турнинг I тур чегаравий нуқтасида

$$u_{i,j} = u(x_i, y_j) = \varphi(x, y)$$

деб оламиз, бунда (x, y) шу Γ чегаранинг (x_i, y_j) чегаравий нуқтага энг яқин нуқтаси.

Ҳосил қилинган (24. 1) айирмалли тенгламалар изланаётган функциянинг турнинг айрим тугунларидаги қийматларининг чизиқли комбинациясидан иборат. Айирмалли схемани тузиш учун фойдаланиладиган тугунларнинг бундай конфигурацияси «қолип» (шаблон) деб аталади. Бизнинг ҳолда «қолип» бешта тугунга эга (беш нуқтали «қолип»). Бундай «қолип» «хоч» (крест) деб номланади (3. 24- шакл).



3.24- шакл

Шундай қилиб, (24. 1) чизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламалар системасини ҳосил қиламиз, унда номаълумлар сони тенгламалар сонига (яъни турнинг ички тугунлари сонига) тенг. Бундай система ҳар доим биргаликда ва биргина ечимга эга. Уни ечиб, изланаётган $u = u(x, y)$ функциянинг G_h тур соҳа тугунларидаги ечимларини ҳосил қиламиз.

1- мисол.

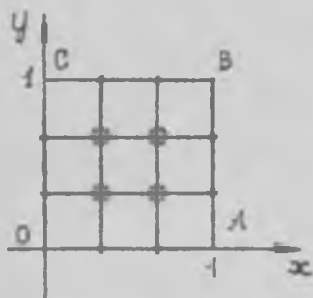
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Лаплас тенгламаси учун

$G = \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ квадратда Дирихле масаласини қуйидаги чегаравий шартлар билан ечинг:

$$u(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x = 0 \text{ ва } 0 \leq y \leq 1 \text{ бўлса;} \\ 0, & \text{агар } y = 0 \text{ ва } 0 \leq x \leq 1 \text{ бўлса;} \\ \frac{1}{2} y(y+1), & \text{агар } x = 1 \text{ ва } 0 \leq y \leq 1 \text{ бўлса,} \\ \frac{1}{2} x(x+1), & \text{агар } y = 1 \text{ ва } 0 \leq x \leq 1 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Ечиш. $h = \frac{1}{3}$ қадам билан G_h турли соҳани тузамиз: $x_i = \frac{i}{3}$, $y_j = \frac{j}{3}$, $i, j = \overline{0, 3}$. O, A, B, C тугунлардан ташқари бар-



3.25- шакл

ча тугунлар ҳисоблаш тугунларидир (3. 25- шакл). Лаплас тенгламаси учун чекли айирмалли (24. 2)

$$u_{ij} = \frac{1}{4} (u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}), \text{ бу ерда } i, j =$$

$= \overline{1, 2}$ системага эгамиз. 1 тур чегаравий нуқталарда чегаравий шартлар ушбу кўринишда бўлади:

$u_{0j} = u_{i0} = 0$, агар $x = 0$, $0 < y < 1$ ва $y = 0$, $0 < x < 1$ бўлса,

$$u_{3j} = \frac{j(j+3)}{2 \cdot 3^3}, \text{ агар } x = 1, 0 < y < 1 \text{ бўлса,}$$

$$u_{i3} = \frac{i(i+3)}{2 \cdot 3^3}, \text{ агар } y = 1, 0 < x < 1 \text{ бўлса,}$$

бу ерда $i, j = \overline{1, 2}$.

Равишанлик учун чегаравий шартлар ва номаълум қийматларнинг (ҳисоблаш тугунларида) бошланғич жадвалини тузамиз (3.34-жадвал).

3. 34- ж а д в а л

C	$u_{13} = 0,222$	$u_{23} = 0,556$	B
$u_{02} = 0$	u_{12}	u_{22}	$u_{22} = 0,556$
$u_{01} = 0$	u_{11}	u_{21}	$u_{21} = 0,222$
0	$u_{10} = 0$	$u_{20} = 0$	A

Бу жадвалдан ва «хоч» қолипидан фойдаланиб, дастлабки (24. 2) тенгламалар системасини ёзамиз:

$$\begin{cases} u_{11} = \frac{1}{4} (0 + u_{21} + 0 + u_{12}), \\ u_{12} = \frac{1}{4} (0 + u_{22} + u_{11} + 0,222) \\ u_{21} = \frac{1}{4} (u_{11} + 0,222 + u_{22} + 0), \\ u_{22} = \frac{1}{4} (u_{12} + 0,556 + u_{21} + 0,556) \end{cases}$$

Тўртта номаълумли тўртта чизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламалар системасини ҳосил қилдик (яъни номаълумлар сони ички тугунлар сонига тенг). Бу системани ечиб,

$$u_{10} = 0,084, u_{12} = u_{21} = 0,166, u_{22} = 0,362$$

ни ҳосил қиламиз.

б) Иссиқлик ўтказувчанлик тенграмаси

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t),$$

га мос чекли-айирмали тенгламани ҳосил қилиш учун соддалаштириш мақсадида $a = 1$ деб оламиз ва

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

дифференциал операторни киритамиз ва унда хусусий ҳосилаларни ушбу формулалар бўйича чекли айирмалар билан алмаштирамиз:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{1}{\tau} (u_{i,j+1} - u_{ij})$$

ёки

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{1}{\tau} (u_{i,j} - u_{i,j-1}),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2} (u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}),$$

бу ерда h — тўрнинг x координата бўйича қадами, τ — тўрнинг t координата бўйича қадами. Бундай аппроксимацияга мувофиқ равишда иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун ушбу иккита айирмали схема тузамиз:

$$Lu \equiv \frac{1}{\tau} (u_{i,j+1} - u_{ij}) - \frac{1}{h^2} (u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}) = f_{i,j} \quad (24.3)$$

ёки

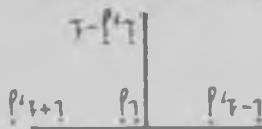
$$Lu \equiv \frac{1}{\tau} (u_{ij} - u_{i,j-1}) - \frac{1}{h^2} (u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}) = f_{ij}, \quad (24.4)$$

Бу ерда $f_{ij} = f(x_i, t_j)$ шу билан бирга кўпинча (24.3) схема учун $f_{ij} = f(x_i, t_j + \frac{\tau}{2})$, (24.4) схема учун эса $f_{ij} = f(x_i, t_j - \frac{\tau}{2})$ олинади.

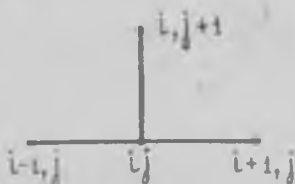
Ҳосил қилинган бу айирмали, схемани тўрт нуқтали «қолипда» тасвирлаймиз. (24.3) схема *ошкор схема* (3.26-шакл), (24.4) схема эса *ошкормас схема* (3.27-шакл) деб аталади. Бундай деб номланиши шу сабабданки, (24.3) схема $u(x, t)$ функциянинг навбатдаги $(j+1)$ - қатлам нуқталаридаги қийматларини функциянинг олдинги j - қатламдаги қийматлари орқали ошкор аниқлайди. Тўр қатлами деганда бирор горизонтал (ёки вертикал) тўғри чизиқда ётувчи тугунлар тўплами тушунилади. Шундай қилиб, ушбу

$$u_{i,j+1} = r(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + (1-2r)u_{ij} \quad (24.5)$$

формула бўйича кетма-кет исталган $u_{i,j+1}$ қийматларни ҳосил қилиш мумкин [(24.3) келиб чиқади], бу ерда



3.26- шакл



3.27- шакл

$$r = \frac{\tau}{h^2}.$$

(24. 4) схема изланаётган функциянинг қийматларини ошқормас кўринишда — тенгламалар системаси орқали беради.

в) Торнинг тебраниш тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

га мос чекли- айирмали тенгламани ҳосил қилиш учун

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

дифференциал операторни киритамиз ва ундаги ҳосилаларни ушбу схемалар бўйича чекли айирмалар билан алмаштирамиз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{1}{\tau^2} (u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2} (u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}).$$

Тор тебраниш тенгламасининг айирмали аппроксимацияси ушбу кўринишни олади:

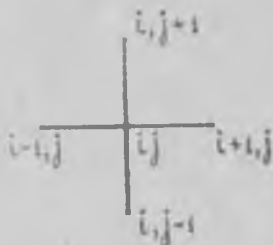
$$Lu \equiv \frac{1}{\tau^2} (u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}) - \frac{1}{h^2} (u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}) = f_{ij}. \quad (24.6)$$

Бу айирмали схема беш нуқтали «хоч» «қолип» ида аниқланган (3. 28- шакл) ва изланаётган функциянинг $(j+1)$ - қатламдаги қийматларини унинг олдинги j - қатламидаги қийматлари орқали аниқлайдиган ошқор схемадир. Изланаётган функциянинг $u_{i,j+1}$ қийматларини ушбу формула бўйича кетма-кет ҳосил қилиш мумкин [(24. 6) дан келиб чиқади]:

$$u_{i,j+1} = -u_{i,j-1} + \gamma^2 (u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + 2(1 - \gamma^2) u_{ij} + \tau^2 f_{ij},$$

бу ерда $\gamma = \frac{\tau}{h}$, $u_{i,-1}$ ($j=0$ да) сохта

номаълум бўлиб, уни бошланғич шартлардан аниқлаб, кейин (24. 6) тенгламага қўйиш мумкин.



3.28- шакл

24.4. Чегаравий масалаларни тўр усули билан ечишда чекли- айирмали схеманинг турғунлиги ҳақидаги масала юзага келади.

Агар дифференциал операторни аппроксимациялаш ва ҳисоблашлар жараёнида йўл қўйилган кичик хатоликлар жорий қатламнинг тартиб рақами чекланмаган ҳолда органида йўқолиб кетса ёки кичиклигича қолса, бундай чекли айирмали схема турғун схема деб аталади. Акс ҳолда схемани турғунмас схема деб атаймиз.

Айирмали схемалар назариясида, масалан, Лаплас тенгламаси учун биз кўриб чиққан «Дирихле масаласи»га тузилган (24. 2) «хоч» схеманинг турғун схема эканлиги исботланади.

(24. 3) айирмали ошкор схема $r = \frac{\tau}{h^2} < \frac{1}{2}$ бўлганда биргина ечим-

га эга ва турғундир, $r > \frac{1}{2}$ да эса турғунмасдир. (24. 4) айирмали ошкормас схема биргина ечимга эга ва ихтиёрий r учун турғундир. Таҳлиллар шуни кўрсатадики, торнинг тебраниш тангласини учун тузилган (24. 7) айирмали схема $\gamma^2 = \left(\frac{\tau}{h}\right)^2 < \frac{1}{1+\tau}$, $\tau > 0$ да турғундир.

Б. АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР

1- §. Тақрибий сонлар билан амаллар бажариш.

Ҳисоблашлардаги хатоликларни баҳолаш

1.1. Мисолларда абсолют ва нисбий хатоликлар, ишончли рақамлар тушунчаларидан фойдаланишни, тақрибий сонларнинг ёзилишини, улар устида амаллар бажарилишини кўрсатиб ўтамиз.

1- мисол. Агар тақрибий соннинг ёзилишида битта ишончли рақами бўлса, унинг нисбий хатоси 10 % дан ортмаслигини кўрсатинг.

Ечиш. Исботлаш учун (1. 1) формуладан фойдаланамиз ($n = 1$; $1 \leq k \leq 9$):

$$\delta \leq \frac{1}{9} \text{ ёки } \delta = \frac{1}{10} \cdot 100 \% = 10 \%.$$

Ҳақиқатан, битта ишончли рақамда ($n = 1$ да) нисбий хато 10 % дан ортмайди.

2- мисол. Тақрибий сонни унинг барча ишончли рақамларини сақлаган ҳолда ёзинг:

а) 2566 ± 3 ; б) $40203 \pm 0,01$.

Ечиш. а) Тақрибий соннинг чегаравий абсолют хатоси $\Delta = 3 > 1$, шу сабабли берилган тақрибий соннинг охириги рақамни 6 ишончсиз, уни яхлитлаш керак.

Қўйидагиларга эгамиз:

$$2566 \approx 257 \cdot 10 \text{ ёки стандарт шаклда}$$

$$2566 \approx 2,57 \cdot 10^3.$$

Соннинг ишончли рақамлари: 2, 5 ва 7.

б) Тақрибий соннинг чегаравий абсолют хатоси $\Delta = 0,01$, яъни охириги сақланадиган рақамнинг бирлигига тенг бўлиши керак.

$$\text{Шунга кўра } 40203 \approx 40203,00 \text{ ёки стандарт шаклда } 40203 \approx 4,0203 \cdot 10^4.$$

3- мисол. Ёзилган рақамларининг ҳаммаси ишончли бўлган ушбу $a_1 = 25,3$ ва $a_2 = 4,12$ тақрибий сонларнинг кўпайтмасини топинг.

Чегаравий нисбий хатони ва ишончли рақамлар сонини баҳоланг.

Ечиш. $a_1 = 25,3$ сонининг ишончли рақамлари 3 та, шу сабабли (1.1) формула бўйича δ_1 нисбий хатоликни $n = 3$, $k = 2$ да топамиз:

$$\delta_1 \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{200};$$

$a_2 = 4,12$ сони учун $n = 3$, $k = 4$ да:

$$\delta_2 \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{400}.$$

a_1 ва a_2 тақрибий сонларнинг кўпайтмаси

$$a = a_1 \cdot a_2 = 104,236;$$

унинг нисбий хатоси эса:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{1}{200} + \frac{1}{400} = 0,0075.$$

(1.1) формулага кўра $k = 1$ ва $\delta = 0,0075$ да

$$0,0075 < \frac{1}{1} \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1}$$

бунда $n - 1 = 2$ ёки $n = 3$ Бу эса жавобда 3 та ишончли рақам сақланиши кераклигини, қолган рақамларни яхлитлаш зарурлигини билдиради. Шундай қилиб, ками билан $a = 25,3 \cdot 4,12 = 104$.

1.2. Кам микдордаги ҳисоблаш ишларини бажариб, етарлича аниқликни олиш имконини берадиган рақамларни ҳисоблаш қондаларини келтирамиз.

1. Тақрибий маълумотларни уларда ишончли рақамларнигина ва ақалли битта тўла ишончли бўлмаган рақамни сақлаган ҳолда яхлитлаш керак.

2. Тақрибий сонларни қўшиш ва айириш натижасида ҳосил бўладиган сонда ўнли хоналари энг кам бўлган тақрибий сонда улар нечта бўлса шунча ўнли хоналарни сақлаб қолиш керак. (Соннинг ўнли хоналари деб каср белгиси—вергулдан ўнгда турган рақамларга айтилади.)

3. Тақрибий сонларни кўпайтириш ва бўлиш натижасида ҳосил бўладиган сонда қийматли рақамлари энг кам бўлган сонда нечта қийматли рақам бўлса, шунча қийматли рақам қолдириш керак.

4. Тақрибий сонни квадрат ва кубга кўтариш натижасида ҳосил бўлган сонда даражага кўтарилаётган сонда нечта қийматли рақам бўлса, шунча қийматли рақам қолдириш керак (бунда квадратнинг ва айниқса кубнинг охириги рақами, асоснинг окирги рақамига қараганда ишончлилиги кам бўлади).

5. Тақрибий сондан квадрат ва куб илдиз чиқариш натижасида ҳосил бўлган сонда илдиз остидаги тақрибий сонда нечта қийматли рақам бўлса, шунча қийматли рақам олиш керак (бунда квадрат, айниқса, кубимизнинг охириги рақамидан илдиз остидаги соннинг охириги рақами ишончлироқдир).

6. Оралиқ натижаларни ҳисоблашда юқоридаги қондаларда айтилганидан битта хона ортиқ олиш керак. Охириги натижада бу захира рақам ташлаб юборилади.

4- мисол. Ёзилган рақамлари ишончли бўлган тақрибий сонларни қўшинг:

$$215,21 + 14,182 + 21,4.$$

Ечиш. 2- қондани қўллаб, қўшиш натижасида ҳосил бўлган сонда битта ўнли ишорани қолдириб, қолганларини яхлитлаймиз:

$$215,21 + 14,182 + 21,4 = 250,792 \approx 250,8 \text{ (ортиғи билан).}$$

5- мисол. Ёзилган рақамлари ишончли бўлган тақрибий сонларни кўпайтиринг:

$$25,3 \cdot 4,12.$$

Ечиш. 3- қондани қўллаб, кўпайтириш натижасида ҳосил бўлган сонда 3 та ишончли рақам қолдириб, қолганларини яхлитлаймиз:

$$25,3 \cdot 4,12 = 104,236 \approx 104 \text{ (ками билан)}$$

1- дарсхона топшириқлари

1. Қуйидаги сонларни берилган аниқликда яхлитланг:

а) 1,5 783 ни 0,001 гача; б) 23,4997 ни 0,001 гача; в) 0,07964 ни 0,001 гача; г) 15 9734 ни 10^3 гача; д) 471,2583 ни 10^{-2} гача.

Ж: а) 1,578; б) 23,500; в) 0,080; г) $160 \cdot 10^3 = 1,60 \cdot 10^5$; д) 471,26.

2. Тақрибий сонни, унинг ҳамма ишончли рақамларини сақлаган ҳолда ёзинг:

а) 2684 ± 3 ; б) $39804 \pm 0,1$; в) $94,86 \pm 0,1$.

Ж: а) $268 \cdot 10 = 2,68 \cdot 10^3$; б) 39804,0; в) 94,9.

3. Ишончли рақамлари билан ёзилган сонларнинг чегаравий нисбий хатоларини топинг:

а) 2; б) 0,02; в) 0,2.

Ж: а) 50 %; б) 50 %; в) 50 %.

4. Ишончли рақамлари билан ёзилган қайси тенглик аниқроқ:

$$\sqrt{46} = 6,78 \text{ ми ёки } \frac{7}{13} = 0,54 \text{ ми?}$$

Ж: биринчиси, чунки

$$\delta_1 = \frac{0,01}{6,76} < \frac{0,01}{0,54} = \delta_2.$$

5. Тақрибий сонларнинг ишончли рақамлари сонини аниқланг ва уларнинг ёзилишларини кўрсатинг:

а) 37,542 ни 3 % ли аниқликда;

б) 14,9360 ни 1 % ли аниқликда.

Ж: а) битта; $4 \cdot 10$; б) иккита, 15.

6. Тақрибий сонлар йиғиндисини топинг:

$a_1 = 12,5784 \pm 0,00005$; $a_2 = 37,54 \pm 0,003$ ва $a_3 = 2,3 \pm 0,02$.

Йиғиндининг чегаравий абсолют хатосини баҳоланг.

Ж: 52,4; 0,02305.

7. Ишончли рақамлари билан ёзилган сонлар устида амалларни бажаринг:

- а) $1,038 + 12,5 + 2,34$ 9845;
б) $2,34 \cdot 0,027$; в) $173 : 24,567$;

г) $0,4158^2$; д) $\sqrt{2,715}$.

Ж: а) 15,9; б) $6,3 \cdot 10^{-2}$; в) 7,04; г) 0,1729; д) 1,648.

1- мустақил иш топшириқлари

1. Сонларни берилган аниқликда яхлитланг:

- а) 4,761 ни 0,01 гача; б) 31,009 ни 0,01 гача;
в) 28,34 ни 10^3 гача; г) 0,00025 ни 0,001 гача.

Ж: а) 4,76; б) 31,01; в) 0; г) 0,000.

2. Ишончли рақамлари билан ёзилган сонларнинг чегаравий абсолют ва нисбий хатоларини топинг:

- а) 38,5; б) 62,215; в) 3,71.

Ж: а) 0,1; 0,26 %; б) 0,001; 0,0016 %; в) 0,01; 0,27 %.

3. Ишончли рақамлари билан ёзилган сонлар учун қайси тенгликнинг аниқлиги юқорироқ:

а) $\sin 15^\circ = 0,259$ ми ёки $\sqrt{17} = 4,12$ ми?

б) $\lg 31 = 1,49$ ми ёки $\lg \frac{\pi}{8} = 0,414$ ми?

в) $\ln 87 = 4,466$ ми ёки $\cos \frac{\pi}{6} = 0,87$ ми?

Ж: а) иккинчиси; б) иккинчиси; в) биринчиси.

4. Тақрибий сонларнинг ишончли рақамлари сонини аниқланг ва уларнинг ёзилишларини кўрсатинг:

- а) 48361 ни 1% ли аниқликда;

- б) 592,8 ни 2% ли аниқликда.

Ж: а) иккита; $48 \cdot 10^3$; б) битта; $6 \cdot 10^3$.

5. Квадрат томони қўпол ўлчанганда $a \approx 12$ см бўлди. Квадратнинг юзини ҳисоблашда:

- а) чегаравий абсолют хато $0,5 \text{ см}^2$ дан;

б) чегаравий нисбий хато 1% дан ошмаслиги учун унинг томони узунлигини қандай аниқликда ўлчаш керак?

Ж: а) 0,021 см; б) 0,06 см.

6. Ишончли рақамлари билан ёзилган сонлар устида амалларни бажаринг:

а) $25,386 + 0,49 + 3,10 + 0,5$;

б) $3,49 \cdot 8,6$; в) $0,144 : 1,2$;

г) $65,2^2$; д) $\sqrt{81,1}$.

Ж: а) 29,5; б) 30,0; в) 0,120; г) $277 \cdot 10^2$; д) 9,006.

2-§. Кўпхадларнинг қийматларини ҳисоблаш. Горнер схемаси. Энг кичик квадратлар усули билан эмпирик формулалар тузиш

2.1. Горнер схемаси — ихтиёрий даражали $P_n(x)$ кўпхадни қизиқли иккиҳадга бўлиш усули бўлиб, y $x = \alpha$ да кўпхаднинг қийматини тез ҳисоблаш ва кўпхад илдизларининг чегараларини топиш имконини беради (2-§).

1-мисол. $x = -1,5$ да $P_5(x) = -x^5 + 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ кўпхаднинг қийматини ҳисобланг.

Ечиш. Берилган кўпхад учун Горнер схемасини тузамиз:

-1	2	-1	3	-4	1	-1,5
	1,5	-5,25	-9,375	-18,5625	33,84375	
-1	3,5	-6,25	12,375	-22,5625	34,84375	$= P_5(-1,5)$

Шундай қилиб, $P_5(-1,5) = 34,84375$.

2-мисол. $P_5(x) = x^5 - 3x^3 + 5x^2 - 4$ кўпхаднинг $x = 2$ нуқтадаги қийматини ҳисобланг. $P_5(x)$ кўпхадни $x - 2$ иккиҳадга бўлишдан чиққан бўлинма — $Q_1(x)$ кўпхаднинг коэффициентларини аниқланг.

Ечиш. Берилган кўпхад учун Горнер схемасини тузамиз:

1	0	-3	5	0	-4	2
	2	4	2	14	28	
1	2	1	7	14	24	$= P_5(2)$

Шундай қилиб, $P_5(x)$ кўпхаднинг $x = 2$ даги қиймати $P_5(2) = 24$ қолдиққа тенг, изланаётган кўпхад — бўлинма:

$$Q_1(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 7x + 14.$$

3-мисол. 2-мисолдаги $P_5(x) = x^5 - 3x^3 + 5x^2 - 4$ кўпхаднинг ҳақиқий илдизларининг чегараларини топинг.

Ечиш. Берилган кўпхад учун 2-мисолда тузилган Горнер схемасидан фойдаланамиз. Горнер схемасида b_i коэффициентларнинг ҳаммаси мусбат бўлгани сабабли (2-§ нинг 3-бандига қаранг) кўпхад ҳақиқий илдизларининг юқори чегараси $\beta = 2$ бўлади.

Қуйи чегарани баҳолаш учун янги кўпхад тузамиз:

$$Q_2(x) = (-1)^5 P_5(-x) = x^5 - 3x^3 - 5x^2 - 4.$$

Бунинг, масалан, $\alpha = 3$ даги қийматини ҳисоблаймиз. Горнер схемасини тузамиз:

1	0	-3	-5	0	-4	3
	3	9	18	39	117	
1	3	6	13	39	113	

Горнер схемасида b'_i коэффициентларнинг ҳаммаси мусбат, шунинг учун $P_5(x)$ кўпхад ҳақиқий илдизларининг қуйи чегараси $-\alpha = -3$ сонидан иборат.

Шундай қилиб, берилган $P_5(x)$ кўпхаднинг барча ҳақиқий илдизлари $[-3; 2]$ кесманинг ичида ётади.

4-мисол. Горнер схемасидан фойдаланиб

$$P_4(x) = 12x^4 + 10x^3 - 5$$

кўпхадда $x = y - 1$ формула бўйича янги y ўзгарувчига ўтинг.

Ечиш. Масалани ечиш учун $\xi = -1$ да Горнернинг умумий схемасини тузамиз (2-§ нинг 4-бандига қаранг):

$$\begin{array}{rrrrr|l}
 12 & 10 & 0 & 0 & -5 & -1 \\
 & -12 & 2 & -2 & 2 & \\
 \hline
 12 & -2 & 2 & -2 & -3 & P(-1) = A_4 \\
 & -12 & 14 & -16 & & \\
 \hline
 12 & -14 & 16 & -18 & & P_n(-1) = A_3 \\
 & -12 & 26 & & & \\
 \hline
 12 & -26 & 42 & & & P_2(-1) = A_2 \\
 & -12 & & & & \\
 \hline
 12 & -38 & & & & P_3(-1) = A_1 \\
 & & & & & \\
 \hline
 12 & & & & & = A_0
 \end{array}$$

A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 қийматлар изланаётган кўпхаднинг коэффициентларидир:

$$P_4(y-1) = 12y^4 - 38y^3 + 42y^2 - 18y - 3$$

ёки

$$P_4(x) = 12(x+1)^4 - 38(x+1)^3 + 42(x+1)^2 - 18(x+1) - 3.$$

2.2. Тажрибадан жадвал ёки график кўринишида олинган функционал боғланишларни тасвирловчи формулалар *эмпирик формулалар* дейилади. Берилган $f(x)$ функцияни тақрибий тасвирлаш учун $\varphi(x)$ аппроксимацияловчи функция танланади. Аппроксимациялашни амалга ошириш усулларида бири энг кичик квадратлар усулидир (4-§).

5-мисол. Энг кичик квадратлар усули билан қийматлари 3·35-жадвалда берилган функцияни аппроксимацияловчи $y = a + bx$ функцияни топинг.

3.35-жадвал

x	1	3	4	5
y	1	2,5	2	3

Ечиш. a ва b параметрлар қуйидаги системадан аниқланади:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2, \quad \sum_{i=1}^n x_i, \quad \sum_{i=1}^n y_i, \quad \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Йиғиндиларни топиш учун $n = 4$ да қуйидаги жадвални тузамиз (3.36-жадвал):

3.36-жадвал

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1	1	1	1
2	3	2,5	9	7,5
3	4	2	16	8
4	5	3	25	15
$\sum_{i=1}^n$	13	8,5	51	31,5

Шундай қилиб, чизиқли тенгламалар системаси қуйидаги кўринишни олади:

$$\begin{cases} a \cdot 51 + b \cdot 13 = 31,5, \\ a \cdot 13 + b \cdot 4 = 8,5. \end{cases}$$

Бу системани Крамер усули билан ечиб, $a = 0,44$ ва $b = 0,69$ эканини топамиз. Демак, изланаётган функция

$$y = 0,44x + 0,69.$$

2-дарсхона топириқлари

1. $x = \xi$ да $P_n(x)$ кўпхад қийматини Горнер схемасидан фойдаланиб топинг:

а) $P_5(x) = 3x^5 - 2x^4 + x^3 - 2$, $\xi = 3$;

б) $P_6(x) = 2x^6 + 3x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 5$, $\xi = 4$.

Ж: а) 592; б) 10981.

2. $P_n(x)$ кўпхадни $(x - \alpha)$ иккихадга бўлиш натижасида чиқадиган $Q_{n-1}(x)$ бўлинма ва R қолдиқни Горнер схемасидан фойдаланиб топинг:

а) $P_5(x) = 2x^5 - 6x^4 - 3x^2 + 4x$ ни $(x-3)$ га;

б) $P_4(x) = 10x^4 - 3x^3 + 2x - 5$ ни $(x+2)$ га.

Ж: а) $Q_1(x) = 2x^4 - 3x - 5$; $R = -15$;

б) $Q_3(x) = 10x^3 - 23x^2 + 46x - 90$; $R = 175$.

3. $P_3(x) = 2x^3 - x^2 - 5$ кўпхаднинг ҳақиқий илдизлари чегараларини Горнер схемасидан фойдаланиб топинг.

Ж: $[-1; 2]$.

4. Горнер схемасидан фойдаланиб, $P_n(x)$ кўпхадни $(x-3)$ нинг даражалари бўйича ёзинг:

а) $P_3(x) = 2x^3 - 18x^2 + 108$;

б) $P_4(x) = x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 54x + 84$.

Ж: а) $P_3(x) = 2(x-3)^3 - 54(x-3)$;

б) $P_4(x) = (x-3)^4 + 6(x-3)^3 + 18(x-3)^2 + 3$.

5. Ушбу жадвал билан берилган функциянинг энг яхши аппроксимацияларини (чизикли ва квадратик) энг кичик квадратлар усулидан фойдаланиб топинг:

3.37-жадвал

x	0,5	1	1,5	2	2,5
y	0,70	0,58	0,82	0,48	0,50

2-мустақил иш топшириқлари

1. Горнер схемасидан фойдаланиб, $P_n(x)$ кўпхаднинг $x = \xi$ даги қийматларини ҳисобланг:

а) $P(x) = 2x^5 - 4x^4 - x^2 + 1$, $\xi = 7$;

б) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 7$, $\xi = -\frac{1}{2}$.

Ж: а) 23962; б) $\frac{29}{8}$.

2. Горнер схемасидан фойдаланиб, $P_n(x)$ кўпхадни $(x-\alpha)$ икки ҳадга бўлишдан чиқадиган $Q_{n-1}(x)$ бўлинмани ва R қолдиқни топинг:

а) $P_3(x) = 5x^3 - 26x^2 + 25x - 4$, $(x-5)$,

б) $P_5(x) = x^5 + 3x^4 - 20x^3 - 48x^2 + 64x$, $(x+5)$.

Ж: а) $Q_2(2) = 5x^2 - x + 20$; $R = 96$;

б) $Q_4(x) = x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 2x + 54$; $R = -270$.

3. $P_3(x) = 5x^3 - 4x^2 + 3x - 2$ кўпхаднинг ҳақиқий илдизлари чегараларини Горнер схемасидан фойдаланиб топинг.

Ж: $[-1; 1]$.

4. $P_n(x)$ кўпхадни, Горнер схемасидан фойдаланиб, $(x+2)$ нинг даражалари бўйича ёзинг:

а) $P_3(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$;

б) $P_4(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.

Ж: а) $P_3(x) = 2(x+2)^3 - 9(x+2)^2 + 10(x+2) - 3$;

б) $P_4(x) = (x+2)^4 - 8(x+2)^3 + 14(x+2)^2 + 8(x+2) - 15$.

5. Ушбу жадвал билан берилган функциянинг аппроксимацияларини энг кичик квадратлар усулидан фойдаланиб топинг:

3.38- ж а д в а л

x	1	2	3	4	5
y	0,60	0,97	0,84	0,52	0,69

а) $y = ax + b$ — чизиқли функция билан;

б) $y = ax^2 + bx + c$ — квадратик функция билан.

3-§. Интерполяцион кўпхадларни тузиш. Чизиқли ва квадратик интерполяциялаш

Функцияларни алгебраик кўпхадлар билан интерполяциялаш яъни $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ интерполяциялаш тугунларида $y_i = P_n(x_i)$, $i = \overline{0, n}$ қийматларни қабул қилувчи даражаси $\leq n$ бўлган $P_n(x)$ кўпхадни тузишга доир мисолларни кўриб чиқайлик.

1-мисол. 3.39-жадвал орқали берилган функциянинг интерполяцион кўпхадини топинг:

3.39- ж а д в а л

x	0	1	2
y	2	0	2

Ечиш. Интерполяцион тугунлар сони 3 га тенг, шу сабабли изланаётган интерполяцион кўпхаднинг даражаси $n = 2$ бўлади. $P_2(x)$ ни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2.$$

$P_2(x_i) = y_i$ ($i = 2$) шартни тузамиз. Берилган жадвалдан фойдаланиб, қуйидаги чизиқли тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 = 2, \\ a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 = 0, \\ a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 = 2. \end{cases}$$

Бу тенгламалар системасини ечиб, $a_0 = 2$, $a_1 = -3$, $a_2 = 1$ эканини топамиз:

Шундай қилиб изланаётган интерполяцион кўпхад қуйидаги кўринишга эга:

$$P_2(x) = 2 - 3x + x^2.$$

2-мисол. 3.40-жадвал билан берилган функция учун Лагранжнинг интреполяцион кўпхадини тузинг.

3. 40- жадвал

x	1	3	6
y	10	16	4

Ечиш. Лагранж кўпҳадини тузиш учун (8.4) формуладан фойдаланамиз:

$$L_n(x) = \omega_n(x) \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{k_i},$$

бунда $\omega_n(x)$ — бош диагоналда жойлашган (уларнинг тагига чизилган) элементлар кўпайтмаси, k_i эса 8- §, 1-бандда келтирилган ёрдамчи жадвалдаги i -сатр элементларни кўпайтмаси.

Берилган масала учун ёрдамчи жадвал тузамиз (3.41- жадвал):

3. 41- жадвал

$x-1$	$1-3$	$1-6$	$k_0 = (-2)(-5)(x-1) = 10(x-1)$
$3-1$	$x-3$	$3-6$	$k_1 = 2(-3)(x-3) = -6(x-3)$
$6-1$	$6-3$	$x-6$	$k_2 = 5 \cdot 3(x-6) = 15(x-6)$
			$\omega_3(x) = (x-1)(x-3)(x-6)$

Юқорида келтирилган формула бўйича Лагранж кўпҳадини тузамиз:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \omega_2(x) \sum_{i=0}^2 \frac{y_i}{k_i} = (x-1)(x-3)(x-6) \left(\frac{10}{10(x-1)} + \frac{16}{-6(x-3)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{15(x-6)} \right) = (x-3)(x-6) - \frac{8}{3}(x-1)(x-6) + \\ &\quad + \frac{4}{15}(x-1)(x-3) = (x^2 - 9x + 18) - \frac{8}{3}(x^2 - 7x + 6) + \frac{4}{15}(x^2 - \\ &\quad - 4x + 3) = 2,8 + 8,6x - 1,4x^2. \end{aligned}$$

3-мисол. $x_0 = 1$ бошланғич қиймат бўйича интерполяция қадамини $h = 0,2$ деб олиб,

$$y = x^2 - 3x + 2$$

кўпҳад учун чекли айирмалар жадвални тузинг.

Ечиш. 8- §, 2-бандда келтирилган формуладан фойдаланамиз. $x_0 = 1$; $x_1 = 1, 2; \dots; x_{10} = 3$ деб олиб, функциянинг тегишли қийматларини топамиз ва жадвалга ёзамиз, шу ернинг ўзида чекли айирмаларни ҳисоблаймиз (3.42- жадвал).

	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	1	0,00	$-0,16 - 0,00 = -0,16$	0,08	0
1	1,2	-0,16	$-0,24 - (-0,16) = -0,08$	0,08	0
2	1,4	-0,24	$-0,24 - (-0,24) = 0,00$	0,08	0
3	1,6	-0,24	$-0,16 - (-0,24) = 0,08$	0,08	0
4	1,8	-0,16	$0,00 - (-0,16) = 0,16$	0,08	0
5	2,0	0,00	$0,24 - 0,00 = 0,24$	0,08	0
6	2,2	0,24	$0,56 - 0,24 = 0,32$	0,08	0
7	2,4	0,56	$0,96 - 0,56 = 0,40$	0,08	0
8	2,6	0,96	$1,44 - 0,96 = 0,48$	0,08	—
9	2,8	1,44	$2,00 - 1,44 = 0,56$	—	—
10	3,0	2,00		—	—

4-мисол. Ньютоннинг интерполяцион қўлҳадидан фойдаланиб, қуйидаги жадвал маълумотлари бўйича $\sin 26^\circ 15'$ ни топинг:

$$\sin 26^\circ = 0,43837;$$

$$\sin 27^\circ = 0,45399;$$

$$\sin 28^\circ = 0,46947.$$

Ечиш. Олдин чекли айирмалар жадвалини тузамиз (3.43-жадвал):

3. 43- жадвал

i	x	y	Δy	$\Delta^2 y$
0	26°	0,43837	0,01562	-0,00014
1	27°	0,45399	0,01548	—
2	28°	0,46947	—	—

Бунда $x = 26^\circ 15'$ бўлиб, жадвал бошидаги қийматга яқин, шу сабабли Ньютоннинг биринчи интерполяцион кўпҳади (8.6) ни қўллаймиз:

$$P_n(x) = y_0 + q \Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1) \dots (q-n+1)}{n!} \Delta^n y_0$$

$x_0 = 26^\circ$ $h = 1^\circ = 60'$, $x = 26^\circ 15'$ деб олиб ҳисоблаймиз:

$$q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{26^\circ 15' - 26^\circ}{60'} = \frac{15'}{60'} = \frac{1}{4}$$

Энди

$$\sin 26^\circ 15' = 0,43837 + \frac{1}{4} \cdot 0,01562 + \frac{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - 1 \right)}{2!} (-0,00014) = 0,44229$$

3-дарсхона топшириқлари

1. 3.44, 3.45-жадваллар билан берилган функциялар учун интерполяцион кўпҳадларни топинг.

3.44-жадвал

а)

x	0	1	2
y	1	1	2

3.45-жадвал

б)

x	0	1	3	4
y	0	2	0	1

Ж: а) $1 - 0,5x + 0,5x^2$; б) $\frac{17}{4}x - \frac{8}{3}x^2 + \frac{5}{12}x^3$.

2. Биринчи топшириқдаги б) ҳол учун Лагранж интерполяцион функциясини тузинг ва $x = 2$ да унинг қийматини ҳисобланг.

Ж: $\frac{5}{6}x^3 - \frac{13}{3}x^2 + \frac{11}{2}x - \frac{1}{3}$.

3. x ва y миқдорларнинг қийматлари жадвали (3.46-жадвал) берилган.

3.46-жадвал

x	1	2	3	4	5	6
y	3	10	15	12	9	5

Чекли айрмалар жадвалини тузинг.

4. 3.47-жадвал берилган.

3.47- жадвал

x	1	2	3	4	5
$\lg x$	0,000	0,301	0,477	0,602	0,699

$\lg 1,7$; $\lg 2,5$; $\lg 3,1$; ва $\lg 4,6$ сонларни чизикли интерполяциялаш билан топинг.

Ж: 0,211; 0,389; 0,490; 0,660.

5.3.48- жадвал билан берилган функция учун Ньютоннинг биринчи интерполяцион кўпҳаддини тузинг.

3.48- жадвал

x	0	1	2	3	4
y	1	4	15	40	85

Функцияни $x = 1,5$ да ҳисобланг.

Ж: $1 + x + x^2 + x^3$; 8,125.

6. Функция 3.49- жадвал билан берилган. $x = 5,5$ да унинг қиймати Ньютон кўпҳади ёрдамида топинг.

3.49- жадвал

x	2	4	6	8	10
y	3	11	27	50	83

Ж: 22.

3- мустақил иш топшириқлари

1. 3.50- жадвал билан берилган функция учун интерполяцион кўпҳаддини топинг.

3.50- жадвал

x	0	1	2	8
y	1	-2	0	8

2. 1-топшириқ учун Лагранжнинг интерполяцион кўпҳаддини ёзинг.

Ж: $1 - \frac{1033}{168}x + \frac{389}{112}x^2 - \frac{109}{336}x^3$.

3. Функция 3.51- жадвал билан берилган.

3. 51- жадвал

x	-2	1	2	4
y	25	-8	-15	-23

Лагранж кўпҳадини тузинг ва $x = 0$ да функция қийматини топинг.

Ж: $x^2 - 10x + 1$; 0.

4. Функция 3. 52- жадвал билан берилган.

3. 52- жадвал

x	0	1	3	4	5
y	1	-3	25	129	381

Функция қийматини $x = 0,5$ ва $x = 2$ да:

а) чизиқли интерполяциялаш ёрдамида;

б) Ланграж формуласи ёрдамида ҳисобланг.

Ж: а) -1 ; 11 ; б) $-\frac{15}{16}$; -3 .

5. 3. 53- жадвал берилган.

3. 53- жадвал

x	1000	1010	1020	1030	1040	1050
$\lg x$	3,000	3,004	3,009	3,013	3,017	3,021

Ньютон формуласидан фойдаланиб, $\lg 1014$, ва $\lg 1044$ ни ҳисобланг.

Ж: 3,006; 3,019.

4- §. Гаусс—Жордан усули. Учбурчакли системани «прогонка» усули билан ечиш

Чизиқли тенгламалар системалари ечимларини Гаусс—Жордан ва «прогонка» усуллари билан топишга доир мисоллар кўрамин.

1- мисол. Ушбу чизиқли тенгламалар системасини Гаусс—Жордан усули билан ечинг:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 8, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -1; \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2. \end{cases}$$

Ечиш. Бу системани ечишда элементар алмаштиришлардан фойдаланилади. Биринчи ва сўнги тенгламаларнинг ўринларини алмаштириб, B кенгайтирилган матрицани тузамиз:

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} \overline{-1} & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 8 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -4 & 7 \end{array} \right).$$

Ҳал қилувчи элемент сифатида биринчи сатрдаги биринчи элементни оламиз. Янги эквивалент системага биринчи (ҳал қилувчи) сатрни ўзгартирмасдан кўчириб ёзиб, биринчи (ҳал қилувчи) устундаги ҳал қилувчи элементдан ташқари барча элементларни ноллар билан алмаштирамиз. Янги матрицанинг қолган элементларини «тўғри тўрт-бурчак қондаси» дан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} B &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 4 & 10 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & \overline{1} & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Ҳал қилувчи элемент учун иккинчи сатрдаги иккинчи элементни олиб, бу матрицани ҳам алмаштирамиз:

$$B \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & \overline{-5} & 7 & 19 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 5 \end{array} \right).$$

Ҳал қилувчи элемент сифатида учинчи сатрда учинчи ўринда турган элементни олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$B \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4/5 & 13/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & -16/5 & -32/5 \end{array} \right).$$

Тўртинчи сатрда турган тўртинчи элементни ҳал қилувчи элемент сифатида олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$B \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -16/5 & -32/5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

Демак, система биргаликда ва у ушбу ягона ечимга эга: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$, $x_4 = 2$.

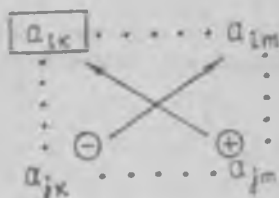
Эслатма: «Тўғри тўртбурчак қондасини» эслатиб ўтамиз (3.29-шакл):

$$a'_{jm} = \frac{a_{jm} \cdot a_{lk} - a_{jk} \cdot a_{lm}}{a_{lk}},$$

бу ерда a_{lk} — ҳал қилувчи элемент,

a_{lm} — алмаштирилиши керак бўлган B матрицанинг элементи;

a'_{jm} — алмаштирилган янги матрицанинг элементи.



3.29-шакл

2-мисол. Ушбу чизиқли тенгламалар системасини Гаусс — Жордан усули билан ечинг:

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 2,$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 3,$$

$$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 1,$$

$$x_1 + 5x_2 - 7x_3 = -1.$$

Ечиш. Берилган системанинг B кенгайтирилган матрицасини тузамиз ва унинг сатрлари устида элементар алмаштиришлар бажарамиз:

$$\begin{aligned} B &= \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -7 & 0 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{7} & -10 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & -10 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & -10 & 1 & -3 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/7 & -5/7 & 8/7 \\ 0 & 7 & -10 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/7 & -5/7 & 8/7 \\ 0 & 1 & -10/7 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Система биргаликда ва у ушбу кўринишда ёзиладиган чексиз кўп ечимлар тўпламига эга:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8}{7} - \frac{1}{7} x_2 + \frac{5}{7} x_4, \\ x_2 = -\frac{3}{7} + \frac{10}{7} x_3 - \frac{1}{7} x_4. \end{cases}$$

Бу ерда x_1 , x_2 — базис номаълумлар, x_3 , x_4 — эркин номаълумлар.

3-мисол. Ушбу чизиқли тенгламалар системасини Гаусс — Жордан усули билан ечинг:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -2, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

Ечиш. Берилган системанинг B кенгайтирилган матрицаси устида элементар алмаштиришлар бажарамиз:

$$\begin{aligned} B &= \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 5 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 6 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-9} & 10 & -9 \\ 0 & 0 & -9 & 10 & -10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 11/3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 10 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 11/3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10/9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Система биргаликда эмас.

4-мисол. Ушбу чизиqli тенгламалар системасини «прогонка» усули билан ечинг:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 & = 5, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 & = 6, \\ 2x_2 - 5x_3 - x_4 & = 10, \\ x_3 + 4x_4 - x_5 & = -1, \\ x_4 + 5x_5 & = 11. \end{cases}$$

Ечиш. Коэффициентлар жадвалини тузамиз (3.54-жадвал).

3.54-жадвал

i	a	b	c	d
1	0	-3	-1	5
2	1	4	1	6
3	2	5	-1	10
4	1	-4	1	-1
5	1	-5	0	11

Система ечимга эга, чунки

$$|b_i| > |a_i| + |c_i|$$

шарти бажарилмоқда. Тўғри «прогонка» йўлини бажарамиз (12-§) (12.2), (12.3), (12.6) ва (12.8) формулалар бўйича α_k ва β_k коэффициентларни ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{c_1}{b_1} = \frac{1}{3}, & \beta_1 &= -\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{5}{3}; \\ \alpha_2 &= \frac{c_2}{b_2 - a_2\alpha_1} = \frac{3}{11}, & \beta_2 &= \frac{a_2\beta_1 - \alpha_2}{b_2 - a_2\alpha_1} = -\frac{13}{11}; \\ \alpha_3 &= \frac{c_3}{b_3 - a_3\alpha_2} = -\frac{11}{49}, & \beta_3 &= \frac{a_3\beta_2 - \alpha_3}{b_3 - a_3\alpha_2} = -\frac{136}{49}; \\ \alpha_4 &= \frac{c_4}{b_4 - a_4\alpha_3} = \frac{49}{185}, & \beta_4 &= \frac{a_4\beta_3 - \alpha_4}{b_4 - a_4\alpha_3} = \frac{87}{185}; \\ \alpha_5 &= \frac{a_5}{b_5} = -\frac{1}{5}, & \beta_5 &= -\frac{\alpha_5}{b_5} = \frac{11}{5}.\end{aligned}$$

Тескари «прогонка» йўли x_5, x_4, x_3, x_2, x_1 номаълумларни (12.5) ва (12.7) формулалар бўйича топишдан иборат:

$$\begin{aligned}x_5 &= \frac{\beta_5 - \alpha_5\beta_4}{1 - \alpha_5\alpha_4} = 2, \\ x_4 &= \alpha_4x_5 + \beta_4 = 1, \\ x_3 &= \alpha_3x_4 + \beta_3 = -3, \\ x_2 &= \alpha_2x_3 + \beta_2 = -2, \\ x_1 &= \alpha_1x_2 + \beta_1 = 1.\end{aligned}$$

4-дарсхона топишириқлари

1. Чизиқли тенгламалар системасини Гаусс — Жордан усули билан ечинг:

$$\begin{aligned}\text{а)} \quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 13, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -9; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -5; \end{cases} & \text{б)} \quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 6; \end{cases} \\ \text{в)} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = -2, \\ 3x_1 + x_3 + x_4 = 4 \end{cases} & \text{г)} \quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}\end{aligned}$$

Ж: а) $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = -3, x_4 = 1$;

б) $x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = 4$;

в) чексиз кўп ечимлар тўплами:

$$x_1 = \frac{1}{3}(4 - x_3 - x_4), \quad x_2 = \frac{1}{3}(5 + 7x_3 + 4x_4);$$

г) система биргаликда эмас.

2. Чизикли тенгламалар системасини «прогонка» усули билан ечинг:

$$а) \begin{cases} -4x_1 + x_2 & = 6, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 & = 11, \\ 2x_2 + 5x_3 + x_4 & = -5, \\ x_3 - 3x_4 + x_5 & = -10, \\ x_4 + 3x_5 & = 6; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 3x_1 - x_2 & = 9, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 & = -11, \\ 2x_2 - 5x_3 + x_4 & = -12, \\ x_3 - 4x_4 & = 5. \end{cases}$$

Ж: а) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 1$;

б) $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

4-мустақил иш топшириқлари

1. Чизикли тенгламалар системасини Гаусс — Жордан усули билан ечинг:

$$а) \begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 12, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 17, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -3; \end{cases} \quad б) \begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

Ж: а) $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = -3$, $x_4 = 4$;

б) система биргаликда эмас.

2. Чизикли тенгламалар системасини «прогонка» усули билан ечинг:

$$а) \begin{cases} 4x_1 - x_2 & = 13, \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 & = -6, \\ x_2 - 4x_3 + x_4 & = -11, \\ 2x_3 + 6x_4 - x_5 & = -9, \\ x_4 - 4x_5 & = -6; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} -3x_1 - x_2 & = 8, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 & = 2, \\ 2x_2 - 5x_3 + x_4 & = -9, \\ x_3 + 3x_4 & = -1. \end{cases}$$

Ж: а) $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$, $x_5 = 1$;

б) $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = -1$.

5-§. Тенгламаларни ечишнинг итерация усули

$f(x) = 0$ алгебраик тенгламани ечиш босқичларини, яъни яқка-лаш ораллиғини ажратиш ва уни итерация усули билан торайтириш-ни мисолларда кўрсатамиз.

1-мисол. $x^3 - 3x - 6 = 0$ тенгламанинг илдизини ажратинг.

Ечиш. $y = x^3 - 3x - 6 = f(x)$ функцияни кўрайлик. $x = 0$ да $y = -6 < 0$ га, $x = 3$ да эса $y = 12 > 0$ га эгамиз, яъни $[0; 3]$ кесмада тенгламанинг илдизи мавжуд, чунки яккаланиш оралиғининг маълум биринчи шarti бажарилмоқда:

$$f(0) \cdot f(3) = -6 \cdot 3 = -12 < 0.$$

$y' = 3x^2 - 3$ ҳосила $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ соҳада мусбат ($y' > 0$), $(-1; 1)$ соҳада манфий ($y' < 0$). Бироқ топилган $[0; 3]$ кесма ҳеч бирига тўлалигича тегишли эмас. Уни $[1; 3]$ кесмагача торайтирамиз, чунки $x = 1$ да $y = -8 < 0$ ва биринчи шарт бажарилмоқда: $f(1) \cdot f(3) < 0$, бунда $y' > 0$, яъни биринчи ҳосила $[1; 3]$ кесмада ишорасини сақлайди, шунинг учун яккалаш оралиғининг иккинчи шarti ҳам бажарилмоқда. Иккинчи ҳосилани ҳисоблаймиз: $y'' = 6x$, у кўрсатилган оралиқда мусбат (ишорасини сақлайди). Шундай қилиб, $[1; 3]$ оралиқда учала шарт ҳам бажарилмоқда, шунинг учун у илдизни яккалаш оралиғидир, берилган тенгламанинг илдизи шу оралиқда тегишли.

2-мисол. $2x \cos x - \sin x = 0$ тенгламанинг энг кичик мусбат илдизини ажратинг.

Ечиш. Тенгламани қуйидаги эквивалент шаклда ёзиб оламиз:

$$2x = \operatorname{tg} x.$$

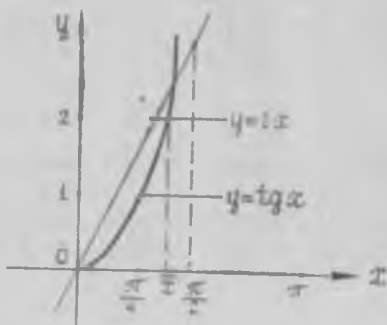
Битта чизмада $y = 2x$ ва $y = \operatorname{tg} x$ функцияларнинг графикларини чизамиз (3.30-шакл).

Чизмадан кўришиб турибдики, изланаётган $(0; \frac{\pi}{2})$ яккалаш оралиғи битта ва фақат битта энг кичик мусбат илдизини ўз ичига олади.

3-мисол. $5x^3 - 20x + 3 = 0$ тенгламанинг $[0; 1]$ кесмада ётган илдизини итерация усули билан $\varepsilon = 0,0001$ гача аниқликда топинг.

Ечиш. Берилган тенгламани

$$x = \varphi(x)$$



3.30-шакл

кўринишга келтириб оламиз. Буни бир неча усуллар билан бажариш мумкин, масалан,

$$x = x + (5x^3 - 20x + 3)$$

десак, у ҳолда $\varphi_1(x) = 5x^3 - 19x + 3$;

$$x = \frac{1}{20} (5x^3 + 3)$$

десак, у ҳолда

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{20}(5x^3 + 3).$$

Кетма-кет яқинлашмишларни ҳисоблаш учун ҳосил қилинган $\varphi(x)$ функцияларнинг қайси биридан фойдаланиш лозимлигини аниқлай-
миз.

Агар $\varphi(x)$ функция $[a; b]$ кесмада

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1$$

(13.5) ни қаноатлантирса, итерация жараёни яқинлашади.

$$[0; 1] \text{ кесмада } |\varphi'_1(x)| = |15x^2 - 19| > 1;$$

$$[0; 1] \text{ кесмада } |\varphi'_2(x)| = \frac{15}{20} x^2 = \frac{3}{4} x^2 < 1.$$

Демак, $\varphi_2(x)$ функциядан фойдаланиш ва кетма-кет яқинлашмишлар-
ни итерация усули билан

$$x_n = \frac{1}{20}(5x_{n-1}^2 + 3)$$

формула бўйича излаш мумкин.

Нолинчи яқинлашиш сифатида $[0; 1]$ кесмага тегишли бўлган $x_0 = 0,75$ қийматни оламиз.

Энди

$$q = \max_{0 < x < 1} |\varphi'(x)| = \max_{0 < x < 1} \frac{3}{4} x^2 = \frac{3}{4} = 0,75$$

ни ҳисобга олган ҳолда берилган $\varepsilon = 0,0001$ аниқликка эришилиши
учун иккита кетма-кет яқинлашиш орасидаги айирма қандай бўли-
ши кераклигини (13.10) дан аниқлаймиз:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1-q}{q} \varepsilon = 0,00003.$$

Шундай қилиб, иккита кетма-кет яқинлашиш орасидаги айирма $0,00003$ дан ортнқ бўлмаганида итерация жараёнини тўхтатиш ва
берилган аниқликка эришилди деб ҳисоблаш мумкин. Ҳисоблашлар-
ни ушбу жадвал шаклида олиб бориш қулайдир (3.55-жадвал):

3.55-жадвал

n	x_n	x_n^3	$x_{n+1} = \varphi(x_n)$
0	0,75	0,42188	0,25547
1	0,2555	0,016777	0,154144
2	0,1541	0,005652	0,151413
3	0,1514	0,005443	0,151361
4	0,15136	0,005442	0,151361

Мана шу ерда итерация жараёнини тўхтатиш ва $\varepsilon = 0,0001$ гача
аниқликда

$$x = 0,1514$$

деб ҳисоблаш мумкин.

5-дарсхона топшириқлари

1. $x^3 - 9x^2 + 18x - 1 = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизларини яқкалаш оралиқларини график усулда топинг.

Ж: (0; 1); (2; 3); (6; 7).

2. Тенгламаларни 0,01 гача аниқликда итерация усули билан ечинг:

а) $x^3 - 12x - 5 = 0$;

б) $x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$;

в) $4x = \cos x$.

Ж: а) 0,42; б) 3,62; в) 0,24.

5-мустақил иш топшириқлари

1. $x^3 - 12x + 1 = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизларини яқкалаш оралиқларини график усул билан топинг.

Ж: (-4; -3); (0; 1) (3; 4).

2. Тенгламаларнинг илдизларини итерация усули билан 0,01 гача аниқликда топинг:

а) $x^3 - 5x + 0,1 = 0$;

б) $x^3 - x - 2 = 0$.

Ж: а) 0,02; б) 1,27.

5-§. Тенгламалар системаларини ечишнинг итерация усуллари

Итерация усулини тенгламалар ечимини аниқлаштиришга татбиқ этамиз.

Мисол.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ x^3 - y = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасини (15.2) кўринишга келтиринг ва уни 0,01 гача аниқликда итерация усули билан ечинг.

Ечиш. Бошланғич яқинлашиш сифатида $x_0 = 0,8$, $y_0 = 0,55$ ни оламиз (уларни график усулда топиш мумкин).

Берилган системани (14.1) формула билан таққослаб,

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1, \\ f_2(x, y) = x^3 - y \end{cases}$$

га эга бўламиз. Бу системани (14.3) шартларга риоя қилган ҳолда (14.2) кўринишга келтириш учун бундай йўл тутамиз. Берилган системага эквивалент ушбу тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{cases} x = x + \alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y) = \Phi_1(x, y), \\ y = y + \gamma f_1(x, y) + \delta f_2(x, y) = \Phi_2(x, y). \end{cases}$$

α , β , γ , δ параметрларни шундай танлаймизки, $\Phi_1(x, y)$ ва $\Phi_2(x, y)$ функцияларнинг хусусий ҳосилалари нолинчи яқинлашишда нолга тенг ёки унга яқин бўлсин, яъни α , β , γ , δ ларни ушбу тенгламалар системасининг тақрибий ечими сифатида топамиз:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 1 + \alpha f'_{1x}(x_0, y_0) + \beta f'_{2x}(x_0, y_0) = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \alpha f'_{1y}(x_0, y_0) + \beta f'_{2y}(x_0, y_0) = 0;$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \gamma f'_{1x}(x_0, y_0) + \delta f'_{2x}(x_0, y_0) = 0;$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 1 + \gamma f'_{1y}(x_0, y_0) + \delta f'_{2y}(x_0, y_0) = 0.$$

Бизнинг ҳолда

$$f'_{1x}(0,8; 0,55) = 2 \cdot 0,8 = 1,6;$$

$$f'_{1y}(0,8; 0,55) = 2 \cdot 0,55 = 1,1;$$

$$f'_{2x}(0,8; 0,55) = 3 \cdot 0,8^2 = 1,92;$$

$$f'_{2y}(0,8; 0,55) = -1.$$

Берилган системага эквивалент системани ушбу кўринишда ёзамиз:

$$\begin{cases} x = x + \alpha(x^2 + y^2 - 1) + \beta(x^3 - y), \\ y = y + \gamma(x^2 + y^2 - 1) + \delta(x^3 - y). \end{cases}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ нинг мос қийматлари сифатида ушбу

$$\begin{cases} 1 + 1,6\alpha + 1,92\beta = 0, \\ 1,1\alpha - \beta = 0, \\ 1,6\gamma + 1,92\delta = 0, \\ 1 + 1,1\gamma - \delta = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасининг ечимларини танлаймиз, яъни

$$\alpha \approx -0,3; \quad \beta \approx -0,3; \quad \gamma \approx -0,5; \quad \delta \approx 0,4.$$

У ҳолда берилган системага эквивалент бўлган ушбу

$$\begin{cases} x = x - 0,3(x^2 + y^2 - 1) - 0,3(x^3 - y), \\ y = y - 0,5(x^2 + y^2 - 1) + 0,4(x^3 - y) \end{cases}$$

тенгламалар системаси (14.2) кўринишда бўлади, шу билан бирга $x_0 = 0,8, y_0 = 0,55$ нуқтанинг етарлича кичик атрофида (14.3) шарт бажарилади.

Биринчи, иккинчи ва қолган яқинлашишларни, токи иккита қўшни яқинлашиш орасидаги фарқ 0,01 дан кичик бўлмагунча, топишга киришамиз. Ҳисоблаш натижаларини жадвалга ёзамиз (3.56-жадвал).

n	x_n	y_n	x_n^2	x_n^3	y_n^2	$x_n^2 + y_n^2$	$x_n^2 + y_n^2 - 1$	$x_n^3 - y_n$	Δx	Δy
0	0,8	0,55	0,64	0,512	0,325	0,9425	-0,0575	-0,038	0,029	0,014
1	0,829	0,564	0,687	0,569	0,318	1,005	0,005	0,005	-0,003	-0,0005
2	0,826	0,5635								

Шундай қилиб, тенгламалар системасининг ечими 0,01 гача аниқликда

$$\bar{x} \approx 0,83; \quad \bar{y} \approx 0,56$$

бўлади. Система фақат ишораси билан фарқ қиладиган ечимга ҳам эга: $\underline{x} \approx -0,83; \quad \underline{y} \approx -0,56$.

6-дарсхона топшириғи

Ушбу тенгламалар системасининг ечимини 0,01 га аниқликда итерация усули билан ҳисобланг, бунда бошланғич яқинлашишни график усулда топинг:

- а) $x^2 + y - 4 = 0$,
 $y - \lg x - 1 = 0$;
 б) $20x^2 = 1 - 2x^3 + 4y^3$,
 $10y = 5 + 2x^2 - 3y^2$

(нолинчи яқинлашиш учун $x_0 = 0,3$, $y_0 = 0,5$ ни олинг).

Ж: а) $\bar{x} = 1,67$, $\bar{y} = 1,22$,

б) $\bar{x} = 0,26$, $\bar{y} = 0,48$.

6-мустақил иш топшириғи

Тенгламалар системаси ечимини 0,01 гача аниқликда итерация усули билан топинг:

$$\sin x - y = 1,32,$$

$$x - \cos y = 0,85$$

(нолинчи яқинлашиш сифатида $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ ни олинг).

Ж: $\bar{x} = 1,79$, $\bar{y} = -0,34$.

7-§. Чизикли тенгламалар системаларини оддий итерация усули ва Зейдель усули билан ечиш

Итерация усули ва Зейдель усулининг чизикли тенгламалар системаларини ечишга татбиқ этилишига оид мисоллар кураимиз.

1-мисол. Ушбу чизикли тенгламалар системасини (0,1 гача аниқликда) оддий итерация усули билан ечинг:

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 26, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 7. \end{cases}$$

Ечиш. Берилган системани махсус (15.3) кўринишга келтирамиз:

$$\begin{cases} x_1 = 3,25 - 0,125x_2 - 0,125x_3, \\ x_2 = 1,4 - 0,2x_1 + 0,2x_3, \\ x_3 = 1,4 - 0,2x_1 + 0,2x_2. \end{cases}$$

Ушбу матрицаларни тузамиз:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \\ -0,2 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Кетма-кет яқинлашишларни амалга оширамиз. Нолинчи яқинлашиш сифатида $x^{(0)} = \beta$ олинади:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{pmatrix}.$$

Биринчи яқинлашиш: $x^{(1)} = \beta + \alpha x^{(0)}$:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \\ -0,2 & 0,2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2,9 \\ 1,03 \\ 1,03 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Иккинчи яқинлашиш: $x^{(2)} = \beta + \alpha x^{(1)}$

$$\begin{aligned} x^{(2)} &= \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \\ -0,2 & 0,2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,9 \\ 1,03 \\ 1,03 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2,992 \\ 1,026 \\ 1,026 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Учинчи яқинлашиш:

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \\ -0,2 & 0,2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,992 \\ 1,026 \\ 1,026 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2,99 \\ 1,01 \\ 1,01 \end{pmatrix}.$$

Шундай қилиб, $x_1^{(3)} = 2,99$, $x_2^{(3)} = 1,01$, $x_3^{(3)} = 1,01$ ва 0,1 гача аниқликда $x_1 = 3,0$, $x_2 = 1,0$, $x_3 = 1,0$ ни ҳосил қиламиз.

2- мисол. Ушбу тенгламалар системасини 0,001 гача аниқликда Зейдель усули билан ечинг:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14. \end{cases}$$

Е чи ш. Итерация жараёни яқинлашади, чунки ушбу

$$\begin{aligned} |a_{11}| &= 10 > |a_{12}| + |a_{13}| = 2, \\ |a_{22}| &= 10 > |a_{21}| + |a_{23}| = 3, \\ |a_{33}| &= 10 > |a_{31}| + |a_{32}| = 4 \end{aligned}$$

(15.6) шарт бажарилади.

Берилган системани (15.3) кўринишга келтираемиз:

$$\begin{cases} x_1 = 1,2 - 0,1x_2 - 0,1x_3, \\ x_2 = 1,3 - 0,2x_1 - 0,1x_3, \\ x_3 = 1,4 - 0,2x_1 - 0,2x_2. \end{cases}$$

Нолинчи яқинлашиш сифатида

$$x_1^{(0)} = 1,2; \quad x_2^{(0)} = 1,3; \quad x_3^{(0)} = 1,4$$

ечимларини оламиз. Зейдель жараёнини (15- §) кетма-кет қўллаб, қуйидагиларни кетма-кет ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1^{(1)} = 1,2 - 0,1 \cdot 1,3 - 0,1 \cdot 1,4 = 0,93; \\ x_2^{(1)} = 1,3 - 0,2 \cdot 0,93 - 0,1 \cdot 1,4 = 0,974 \\ x_3^{(1)} = 1,4 - 0,2 \cdot 0,93 - 0,2 \cdot 0,974 = 1,0192; \end{cases} \\ \begin{cases} x_1^{(2)} = 1,2 - 0,1 \cdot 0,974 - 0,1 \cdot 1,0192 = 1,0007, \\ x_2^{(2)} = 1,3 - 0,2 \cdot 1,0007 - 0,1 \cdot 1,0192 = 0,9979, \\ x_3^{(2)} = 1,4 - 0,2 \cdot 1,0007 - 0,2 \cdot 0,9979 = 1,0003; \end{cases} \\ \begin{cases} x_1^{(3)} = 1,2 - 0,1 \cdot 0,9979 - 0,1 \cdot 1,0003 = 1,0002, \\ x_2^{(3)} = 1,3 - 0,2 \cdot 1,0002 - 0,1 \cdot 1,0003 = 0,9999, \\ x_3^{(3)} = 1,4 - 0,2 \cdot 1,0002 - 0,2 \cdot 0,9999 = 1,0000. \end{cases} \end{aligned}$$

Тенгламалар системасининг ечими сифатида учинчи яқинлашишни қабул қиламиз:

$$x_1 = 1,0002; \quad x_2 = 0,9999; \quad x_3 = 1,0000.$$

0,001 гача аниқликда ечим

$$x_1 = 1,000; \quad x_2 = 1,000; \quad x_3 = 1,000$$

бўлади. Таққослаш учун системанинг аниқ ечимини келтирамиз:

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1.$$

7- дарсхона топшириқлари

1. Берилган чиқиқли тенгламалар системасининг ечимини оддий итерация усули билан 0,001 гача аниқликда топинг:

$$\begin{cases} 7,6x_1 + 0,5x_2 + 2,4x_3 = 1,9, \\ 2,2x_1 + 9,1x_2 + 4,4x_3 = 9,7, \\ -1,3x_1 + 0,2x_2 + 5,8x_3 = -1,4. \end{cases}$$

Ж: $x_1 = 0,236$; $x_2 = 1,103$; $x_3 = -0,214$.

2. Чиқиқли тенгламалар системасини Зейдель усули билан 0,001 гача аниқликда ечинг:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 = 1, \\ 2x_1 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

Ж: $x_1 = 4,83$; $x_2 = 1,94$; $x_3 = -2,91$.

7- мустақил иш топшириқлари

1. Чиқиқли тенгламалар системасини оддий итерация усули билан 0,01 гача аниқликда ечинг:

$$\begin{cases} 8,3x_1 - 0,1x_2 + 0,2x_3 = 16,1, \\ 0,3x_1 + 4,5x_2 - 0,1x_3 = -3,6, \\ 0,4x_1 - 0,2x_2 + 5,5x_3 = -15,5. \end{cases}$$

Ж: аниқ ечим $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = -3$.

2. Чиқиқли тенгламалар системасини Зейдель усули билан 0,01 гача аниқликда ечинг:

$$\begin{cases} 4,3x_1 - x_2 + 2x_3 = 13,6, \\ x_1 + 5,1x_2 = -13,3, \\ 0,3x_1 - 2,1x_2 + 6,2x_3 = 13,1. \end{cases}$$

Ж: аниқ ечим: $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = 1$.

8- §. Сонли интеграллаш. Тўғри тўртбурчаклар, трапециялар. Симпсон формулалари. Гаусс квадратураси

Турли формулалардан фойдаланиб, сонли интеграллашга онд мисоллар кўрамиз.

1- мисол. $\int_1^2 \sqrt{x} dx$ интегрални [1, 2] кесмани 10 та тенг

қисмга бўлиб, тўғри тўртбурчаклар, трапециялар, Симпсон формулалари бўйича ҳисобланг. Хатоликни баҳоланг.

Ечиш. 18- § даги формулалардан фойдаланамиз. Бизнинг ҳолда $n = 10$, $h = \frac{2-1}{10} = 0,1$. Интеграллаш тугунлари:

$$x_0 = 1; x_1 = 1,1; x_2 = 1,2; \dots; x_9 = 1,9; x_{10} = 2.$$

$y = \sqrt{x}$ функциянинг тегишли қийматлари жадвалини тузамиз (3.57-жадвал):

3.57- жадвал

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
y_i	1	1,049	1,095	1,140	1,183	1,225	1,265	1,304	1,342	1,378	1,414

а) Тўғри тўртбурчаклар формуласидан фойдаланамиз, чап тўғри тўртбурчаклар учун:

$$\int_1^2 \sqrt{x} dx \approx 0,1 (1 + 1,049 + 1,095 + 1,140 + 1,183 + 1,225 + 1,265 + 1,304 + 1,342 + 1,378) = 0,1 \cdot 11,981 \approx 1,20;$$

ўнг тўғри тўртбурчаклар учун:

$$\int_0^2 \sqrt{x} dx = 0,1 (1,049 + 1,095 + 1,140 + 1,183 + 1,225 + 1,265 + 1,304 + 1,342 + 1,378 + 1,414) = 0,1 \cdot 12,395 \approx 1,240.$$

Хатоликни (18. 1) формула бўйича баҳолаймиз:

$$R_n \leq \frac{h}{2} (b-a) M_1. \text{ Бу ерда } M_1 = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|.$$

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ функциянинг ҳосил си: } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \text{ Ҳосила } [0; 1]$$

кесмада энг катта қийматга $x = 1$ бўлганда эришади.

Шундай қилиб,

$$M_1 = \max_{x \in [1; 2]} |f'(x)| = \frac{1}{2}.$$

Абсолют хатолик:

$$R_n \leq \frac{0,1}{2} (2-1) \cdot \frac{1}{2} = 0,025.$$

Демак, чапки тўғри тўртбурчаклар формуласи учун:

$$\int_1^2 \sqrt{x} dx \approx 1,20 \pm 0,025$$

га, ўнг тўғри тўртбурчаклар учун

$$\int_1^2 \sqrt{x} dx \approx 1,240 \pm 0,025$$

га эгамиз.

б) Трапецнялар формуласидан фойдаланамиз:

$$\int_1^2 \sqrt{x} dx \approx 0,1 \left(\frac{1+1,414}{2} + 1,049 + 1,095 + 1,140 + 1,183 + \right. \\ \left. + 1,225 + 1,265 + 1,304 + 1,342 + 1,371 \right) = 1,2188.$$

Хатоликни (18. 2) формула бўйича баҳолаймиз:

$$R_n \leq \frac{h^2}{12} (b-a) M_2, \text{ бу ерда } M_2 = \max_{x \in [a; b]} |f''(x)|.$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

ҳосилага эгамиз. Иккинчи ҳосила энг катта қийматига $x=1$ бўлганда эришади, шу сабабли $M_2 = \max_{x \in [1; 2]} |f''(x)| = \frac{1}{4}$. Шундай қилиб, абсолют хатолик учун:

$$R_n \leq \frac{0,1^2}{12} \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = 0,0002.$$

Демак, $\int_1^2 \sqrt{x} dx \approx 1,2188 \pm 0,0002$ га эга бўлдик.】

в) Симпсон формуласидан фойдаланамиз:

$$\int_1^2 \sqrt{x} dx \approx \frac{0,1}{3} \left((1 + 1,414) + 4(1,049 + 1,140 + 1,225 + 1,304 + \right. \\ \left. + 1,378) + 2(1,095 + 1,183 + 1,265 + 1,342) \right) = \frac{0,1}{3} \cdot 36,568 = \\ = 1,2189333.$$

Хатоликни (18. 3) формула бўйича баҳолаймиз:

$$R_n \leq \frac{h^4}{180} (b-a) M_4, \text{ бу ерда } M_4 = \max_{x \in [a; b]} |f^{IV}(x)|.$$

Қуйидагиларни ҳисоблаймиз:

$$f'''(x) = \frac{3}{8} \frac{1}{\sqrt{x^3}}, \quad f^{IV}(x) = -\frac{15}{16} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^5}};$$

$$M_4 = \max_{x \in [1; 2]} |f^{IV}(x)| = \frac{15}{16}.$$

Абсолют хатоликни ҳисоблаймиз:

$$R_n \leq \frac{0,14}{180} \cdot 1 \cdot \frac{15}{16} = 0,0000005.$$

Демак,

$$\int_1^2 \sqrt{x} \, dx \approx 1,218933 \pm 0,0000005.$$

г) Таққослаш мақсадида интегрални Ньютон — Лейбниц формуласи бўйича ҳисоблаймиз:

$$\int_1^2 \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3} \sqrt{x} \Big|_1^2 = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1) \approx 1,2189513.$$

Шундай қилиб, интегралнинг аниқ қиймати ҳақиқатан ҳам а), б), в) бандларда топилган оралиқларда ётади. Интегралнинг аниқ қийматига Симпсон формуласи бўйича ҳисобланган қиймат энг яқиндир.

2- мисол. $\int_1^2 \sqrt{x} \, dx$ интегрални Гаусс формуласини $n = 3$ да қўллаб, ҳисобланг.

Ечиш. Гаусс формуласи 19- § да баён этилган. Бу ерда $a = 1$, $b = 2$ га эгамиз. Тугунларни ушбу формулалар бўйича топамиз:

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_i, \quad i = \overline{1, 3}$$

19- § даги жадвал маълумотларидан $n = 3$ да фойдаланиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$x_1 = \frac{2+1}{2} + \frac{2-1}{2} t_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} (-0,77459667) \approx 1,11270;$$

$$x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} t_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0 = 1,50000;$$

$$x_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} t_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} (0,77459667) \approx 1,88730.$$

Интеграл Гаусс квадратура формуласи бўйича ҳисобланади:

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) = \sum_{i=1}^n C_i f(x_i).$$

Бу формуладаги тегишли A_i коэффициентларнинг қийматларини 19- § даги жадвалдан оламиз:

$$C_1 = \frac{b-a}{2} A_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{18} = 0,27778;$$

$$C_2 = \frac{b-a}{2} A_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{9} = \frac{4}{9} = 0,44444;$$

$$C_3 = \frac{b-a}{2} A_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{18} = 0,27778.$$

Кейинги ҳисоблашларни 3. 58- жадвалга ёзамиз.

3. 58- жадвал

i	x_i	$y_i = \sqrt{x_i}$	C_i	$C_i y_i$
1	1,11270	1,05485	0,27778	0,29301
2	1,50000	1,22474	0,44444	0,54431
3	1,88730	1,37379	0,27778	0,38161
$\Sigma C_i y_i = 1,21893$				

Де мак,

$$\int_1^2 \sqrt{x} dx = \sum_{i=1}^3 C_i y_i = 1,21893.$$

Хатоликни (18. 13) формулаларда $n = 3$ деб баҳолаймиз:

$$R_3 \leq \frac{1}{15750} \left(\frac{b-a}{2} \right)^7 \max_{x \in [a; b]} |f^{IV}(x)|.$$

$y = f(x) = \sqrt{x}$ функциянинг олтинчи тартибли ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$y^{VI} = - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2^6} x^{-\frac{11}{2}} = f^{VI}(x),$$

$$\max_{x \in [1; 2]} |f^{VI}(x)| = \frac{945}{2^6} \approx 14,7.$$

Энди абсолют хатоликни ҳисоблаймиз:

$$R_3 \leq \frac{1}{15750} \left(\frac{1}{2} \right)^7 \cdot \frac{945}{2^6} \approx 0,0000078 < 0,00001.$$

Таққослаш мақсадида интегралнинг аниқ қиймати

$$\int_1^2 \sqrt{x} dx = 1,2189513$$

ни келтираимиз.

Аниқ қийматга яқин натижа Симпсон формуласи бўйича [1-в) мисол] $n = 10$ да, Гаусс формуласи бўйича $n = 3$ да олинди.

8- дарсхона топшириқлари

Интегрални вергулдан кейинги иккита рақамигача ҳисобланг:

1. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ — трапеция формуласи бўйича, $n = 3$ деб олинг.

Ж: 0,75.

2. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$ — Симпсон формуласи бўйича, $n = 4$ деб олинг.

Ж: 0,24.

3. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ Гаусс формуласи бўйича, $n = 3$ деб олинг. Аниқ қий-

мат билан солиштиринг.

8- мустақил иш топшириғи

11. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ интегрални ҳисобланг ва натижаларни таққосланг

(тўғри тўртбурчаклар, трапециялар ва Симпсон формулалари бўйича, $n = 8$ деб олинг ва Гаусс формуласи бўйича $n = 3$ деб олинг). Хатоликларни баҳоланг ва аниқ натижа билан солиштиринг.

9- §. Монте — Карло усули.

Монте — Карло усулини интегралларни ҳисоблашга қўллайлик.

Мисол. $\int_1^2 (2x+1) dx$ интегрални Монте — Карло усули билан

ҳисобланг:

а) ҳисоблашнинг абсолют хатолигини топинг;

б) хатоликнинг юқори чегараси $\delta = 0,1$ бўлишини; $\gamma = 0,95$ ишончлик билан таъминлайдиган синовларнинг энг кичик сонини топинг.

Ечиш. (20.3) формула

$$\int_a^b \varphi(x) dx \sim \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(x_i)$$

дан фойдаланамиз. Бизнинг ҳолда $a = 1$, $b = 2$, $\varphi(x) = 2x + 1$ га эгамиз. $n = 10$ деб оламиз. У ҳолда

$$\int_1^2 (2x + 1) dx \approx \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (2x_i + 1)$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда мумкин бўлган x_i қийматларни (20. 4) формула

$$x_i = a + (b - a) r_i$$

дан топамиз, бизнинг ҳолда

$$x_i = 1 + r_i,$$

бу ерда r_i сонлар тасодифий сонлар жадвалидан вергулдан сунг учта рақам билан олинади.

Ўнта синов натижасини 3. 59- жадвалда келтирамиз.

3. 59- жадвал

i	r_i	$x_i = 1 + r_i$	$2x_i = 2 + 2r_i$	$\varphi(x_i) = 2x_i + 1$
1	0,100	1,100	2,200	3,200
2	0,973	1,973	3,946	4,946
3	0,253	1,253	2,506	3,506
4	0,376	1,376	2,752	3,752
5	0,520	1,520	3,040	4,040
6	0,135	1,135	2,270	3,270
7	0,863	1,863	3,726	4,726
8	0,467	1,467	2,934	3,934
9	0,354	1,354	2,708	3,708
10	0,876	1,876	3,752	4,752
$\sum_{i=1}^{10} \varphi(x_i) = 39,834$				

Жадвалдан $\sum_{i=1}^{10} \varphi(x_i) = 39,834$. Демак, изланаётган интеграл

$$\int_1^2 (2x + 1) dx \approx \frac{1}{10} \cdot 39,834 = 3,9834.$$

а) Интегралнинг аниқ қиймати:

$$\int_1^2 (2x + 1) dx = \left. \frac{(2x + 1)^2}{4} \right|_1^2 = 4.$$

Шу сабабли ҳисоблашнинг абсолют хатолиги

$$4 - 3,9834 = 0,0166$$

бўлади.

б) Хатоликнинг юқори чегараси $\delta = 0,1$ бўлишини $\gamma = 0,95$ ишончлик билан таъминлайдиган синовларнинг энг кичик сони n ни (20. 1) формула

$$n = \frac{t_{\alpha}^2}{\delta^2}$$

бўйича ҳисоблаймиз. Бу формуладаги t сонни $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = 0,475$ тенгликдан Лаплас функцияси жадвали бўйича топамиз: $t = 1,96$. Бунда δ нинг қийматини X тасодифий миқдор [1; 2] ораликда текис тақсимланган деган шартдан топамиз, шу сабабли унинг дисперсияси қуйидагига тенг:

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1^2}{12} = \frac{1}{12}.$$

Энди $\Phi(X) = 2X + 1$ функциянинг дисперсиясини топамиз:

$$D(2X + 1) = 4D(X) = 4 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Демак, } \delta^2 = D(2X + 1) = \frac{1}{3}.$$

Шундай қилиб, изланаётган синовлар энг кичик сонини ҳисоблаймиз:

$$n = \frac{t_{\alpha}^2 \cdot \delta^2}{\gamma^2} = \frac{(1,96)^2 \cdot \frac{1}{3}}{(0,95)^2} = 128.$$

9- дарсхона топишириқлари

1. $\int_0^1 (1-x^2) dx$ аниқ интегрални Монте—Карло усули ёрдамида

ҳисобланг, бунда тасодифий сонлар жадвалидан кетма-кет 30 та қийматни вергулдан кейинги учта рақами билан олинг. Абсолют ва нисбий хатоликларни топинг.

Ж: 0,685; 0,018; 2,7 %.

2. $\int_1^2 \ln x dx$ аниқ интегрални Монте—Карло усули ёрдамида ҳи-

собланг, бунда тасодифий сонлар жадвалидан 10 та қийматни вергулдан кейинги учта рақами билан олинг. Абсолют ва нисбий хатоликларни топинг.

Ж: 0,371; 0,015; 3,9 %.

9- мустақил иш топишириқлари

1. Монте—Карло усулидан фойдаланиб,

$$\int_{-1}^3 (x^2 + x^3) dx$$

интегрални ҳисобланг, бунда тасодифий сонлар жадвалидан 20 та қийматни олинг. Абсолют ва нисбий хатоликларни топинг.

Ж: 21,894; 0,689; 3,1 %.

2. Монте — Карло усулидан фойдаланиб,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

интегрални ҳисобланг, бунда тасодифий сонлар жадвалидан 10 та қийматни олинг. Абсолют ва нисбий хатоликларни топинг.

Ж: 0,6968; 0,0037; 0,5 %.

10-§. Оддий дифференциал тенглама учун Коши масаласини Эйлер усули билан ечиш

Эйлер усули билан Коши масаласини ечишга мисоллар кўрайлик. 1-мисол. Эйлер усулидан фойдаланиб,

$$y' = \frac{y-x}{y+x}$$

дифференциал тенгламанинг $y(0) = 1$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи y функциясининг қийматларини ҳисобланг, қадамни $h = 0,1$ деб олинг. Унинг биринчи тўртта қийматини топиш билан чекланг.

Ечиш. Аргументнинг кетма-кет қийматларини топамиз:

$x_0 = 0; x_1 = 0,1; x_2 = 0,2; x_3 = 0,3; x_4 = 0,4.$

Изланаётган функциянинг мос қийматларини (21.1) формула

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

бўйича ҳисоблаймиз, бу ерда $i = 0, 3$, $h = 0,1$, $f(x, y) = \frac{y-x}{y+x}$.

Ҳисоблаш натижаларини 3.60-жадвалга жойлаштирамиз.

3.60-жадвал

i	x	y	$y-x$	$y+x$	$f(x, y) = \frac{y-x}{y+x}$	$h \cdot f(x, y)$
0	0	1,000	1,000	1,000	1,000	0,1000
1	0,1	1,100	1,000	1,200	1,833	0,083
2	0,2	1,183	0,983	1,383	0,711	0,071
3	0,3	1,254	0,954	1,554	0,614	0,061
4	0,4	1,315	—	—	—	—

2-мисол. Эйлернинг биринчи ва иккинчи такомиллаштирилган усулларидан фойдаланиб,

$$y' = \frac{y-x}{y+x}$$

дифференциал тенгламанинг $y(0) = 1$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи y функциясининг қийматларини топинг, $h = 0,1$. Биринчи тўртта қийматни топиш билан чекланинг.

Е чи ш. Бу ерда $h = 0,1$, $f(x, y) = \frac{y-x}{y+x}$.

Бу тенглама интегралини синиқ чизиқлар такомиллаштирилган усули формуласи (21.2)

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}),$$

(бу ерда $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}$)

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)$$

билан ҳисобланган натижалари 3.61-жадвалда келтирилган:

3.61- жадвал

i	x_i	y_i	$\frac{h}{2} f(x_i, y_i)$	$x_{i+\frac{1}{2}}$	$y_{i+\frac{1}{2}}$	$hf(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$
0	0	1,000	0,050	0,05	1,050	0,091
1	0,1	1,091	0,042	0,15	1,133	0,077
2	0,2	1,168	0,035	0,25	1,203	0,066
3	0,3	1,234	0,031	0,35	1,265	0,057
4	0,4	1,291	—	—	—	—

Навбатдаги жадвалда (3.62- жадвал) берилган тенгламанинг интегралини Эйлер — Коши такомиллаштирилган усули (21.3) формуласи

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})),$$

(бу ерда $\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$) бўйича ҳисоблаш натижалари келтирилган.

3.62- жадвал

i	x_i	y_i	$\frac{h}{2} f(x_i, y_i)$	x_{i+1}	y_{i+1}	$\frac{h}{2} f(x_{i+1}, y_{i+1})$	$\frac{h}{2} (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}))$
0	0	1,000	0,050	0,1	1,100	0,042	0,092
1	0,1	1,092	0,042	0,2	1,176	0,036	0,078
2	0,2	1,170	0,035	0,3	1,240	0,031	0,066
3	0,3	1,236	0,031	0,4	1,298	0,027	0,058
4	0,4	1,294	—	—	—	—	—

3-мисол. $y' = 2x - y$ тенглама учун $y(0) = -1$ бошланғич шартли Коши масаласини Эйлернинг итерация усули билан ечинг. Қадамни $h = 0,2$ деб олинг. Ечишни учта ўнлик рақамлар устма-уст тушгунга қадар давом эттиринг.

Ечиш. Бу ерда $h = 0,2$, $f(x, y) = 2x - y$. Маълум (21.4) $y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i)$ формулага кўра $i = 0$ бўлганда қуйидаги но-линчи яқинлашишга эга бўламиз:

$$y_1^{(0)} = hf(x_0, y_0) = -1 + 0,2(2 \cdot 0 + 1) = -0,800.$$

y_1 ни (21.5) формула

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)})]$$

бўйича итерациялаймиз:

$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{h}{2} [f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(0)})] = -1 + 0,1 [1 + 2 \cdot 0,2 - (-0,800)] = -0,780;$$

$$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{h}{2} [f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(1)})] = -1 + 0,1 [1 + 2 \cdot 0,2 - (-0,780)] = -0,782;$$

$$y_1^{(3)} = y_0 + \frac{h}{2} [f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(2)})] = -1 + 0,1 [1 + 2 \cdot 0,2 - (-0,782)] = -0,782.$$

$y_1 = -0,782$ ни ҳосил қилдик. (21.4) формула бўйича $y_2^{(0)}$ нинг қийматини ҳисоблаймиз:

$$y_2^{(0)} = y_1 + hf(x_1, y_1) = -0,782 + 0,2(0,2 \cdot 2 + 0,782) = -0,546.$$

y_2 ни (21.5) формула бўйича итерациялаймиз:

$$y_2^{(1)} = y_1 + \frac{h}{2} [f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^{(0)})] = -0,782 + 0,1 [2 \cdot 0,2 + 0,782 + 2 \cdot 0,4 - (-0,546)] = -0,529;$$

$$y_2^{(2)} = y_1 + \frac{h}{2} [f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^{(1)})] = -0,782 + 0,1 [2 \cdot 0,2 + 0,782 + 2 \cdot 0,4 - (-0,529)] = -0,531;$$

$$y_2^{(3)} = y_1 + \frac{h}{2} [f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^{(2)})] = -0,782 + 0,1 [2 \cdot 0,2 + 0,782 + 2 \cdot 0,4 - (-0,531)] = -0,531.$$

$y_2 = -0,531$ ни ҳосил қилдик. Шунга ўхшаш ҳисоблаб, y_3, y_4, y_5 ни топамиз (3.63-жадвал).

i	x_i	y_i	$y_{i+1}^{(0)}$	$y_{i+1}^{(1)}$	$y_{i+1}^{(2)}$	$y_{i+1}^{(3)}$
0	0	-1	-0,800	-0,780	-0,782	-0,782
1	0,2	-0,782	-0,546	-0,529	-0,531	-0,531
2	0,4	-0,531	-0,265	-0,252	-0,253	-0,253
3	0,6	-0,253	0,038	0,048	0,047	0,047
4	0,8	0,047	0,358	0,365	0,366	0,366
5	1,0	0,366	—	—	—	—

Топилган y_i қийматлар

$$y = e^{-x} + 2x - 2$$

хусусий ечимнинг $[0; 1]$ кесманинг мос нуқталаридаги қийматлари билан 0,01 гача аниқликда устма-уст тушишини текшириб кўриш қийин эмас.

10-дарсхона топшириқлари

1. Эйлер усули билан

$$y' = \frac{(x+y)(1-xy)}{x+2y}$$

тенгламанинг $y(0) = 1$ бошланғич шартли сонли ечимини $[0; 1]$ кесмада топинг, $h = 0,2$ деб олинг.

Ж: $y(1) = 1,27$.

2. Эйлер усули билан

$$y' = x^2 + |y|$$

тенгламанинг $y(0) = 1$ бошланғич шартли қаноатлантирувчи ечимини $h = 0,1$ қадам билан тўртта нуқтада ҳисобланг.

Ж: $y(0,4) = 1,52$.

3.2-масалани ушбу уч усул билан ечинг:

а) синиқ чиқиқлар такомиллаштирилган усули;

б) Эйлер — Коши такомиллаштирилган усули;

в) итерация усули.

10-мустақил иш топшириқлари

1. Эйлер усули билан

$$y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

тенгламанинг $y(0) = 1$ бошланғич шартли сонли ечимини $[0; 1]$ кесмада топинг, $h = 0,2$ деб олинг.

Ж: $y(1) = 1,328$.

2. $y(2) = 4$ бошланғич шартли $y' = y^2 + \frac{y}{x}$ тенгламанинг ечимини $h = 0,1$ қадам билан тўртта қийматини ушбу усуллар билан топинг:

а) Эйлер усули;

- б) синиқ чизиқлар такомиллаштирилган усули;
 в) Эйлер—Коши такомиллаштирилган усули;
 г) итерация усули.

Ж: а) $y(2,4) = 54,86$.

11-§. Сонли дифференциаллаш. Юқори аниқликдаги сонли дифференциаллаш формулалари

Сонли дифференциаллашга бир нечта мисоллар кўрайлик.

1-мисол. Синуслар жадвали $h = 0,2$ қадам билан берилган. $x = 0,6$ нуқтада биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларни топинг (3.64-жадвал).

3.64-жадвал

i	x	$y = f(x) = \sin x$	i	x	$y = f(x) = \sin x$
0	0	0	5	1,0	0,84147
1	0,2	0,19867	6	1,2	0,93204
2	0,4	0,38942	7	1,4	0,98545
3	0,6	0,56464	8	1,6	0,99957
4	0,8	0,71736	9	1,8	0,97385

Ечиш. Чекли айримлар жадвалини тузамиз (3.65-жадвал).

3.65-жадвал

i	x	$y = \sin x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
0	0	0	0,19867	-0,00792	-0,00761	0,00064	0,00022	0,00010
1	0,2	0,19867	0,19075	-0,01553	-0,00967	0,00086	0,00032	-0,00019
2	0,4	0,38942	0,17522	-0,02250	-0,00611	0,00118	0,00013	0,00005
3	0,6	0,56464	0,15272	-0,02861	-0,00493	0,00131	0,00018	-0,00009
4	0,8	0,71736	0,12411	-0,03354	-0,00362	0,00149	0,00009	—
5	1,0	0,84147	0,09057	-0,03716	-0,00213	0,00158	—	—
6	1,2	0,93204	0,05341	-0,03929	-0,00055	—	—	—
7	1,4	0,98545	0,01412	-0,03984	—	—	—	—
8	1,6	0,99957	-0,02572	—	—	—	—	—
9	1,8	0,97385	—	—	—	—	—	—

$x_0 = x_3 = 0,6$ деб олиб, (17.3) ва (17.4) формулалар бўйича ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$f'(0,6) \approx \frac{1}{0,2} \left[0,15272 - \frac{1}{2} (-0,02861) + \frac{1}{3} (-0,0493) - \frac{1}{4} \cdot 0,00131 + \frac{1}{5} \cdot 0,00018 - \frac{1}{6} (-0,00009) \right] = 0,82540;$$

$$f''(6) \approx \frac{1}{0,2^2} \left[-0,2861 - (-0,00493) + \frac{11}{2} \cdot 0,00131 - \frac{5}{6} \cdot 0,00018 + \frac{137}{180} (-0,00009) \right] = -0,56742.$$

2-мисол. Функция 3.66-жадвал билан берилган.

3.66- жадвал

x	0	1	2	3	4	5
y	-5	-1	19	73	179	355

$x = 1,5$ ва $x = 4,2$ нуқталарда биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларни топинг.

Е чиш. Чекли айирмалар жадвалини тузамиз (3.67- жадвал).

3.67- жадвал

i	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	0	-5	4	16	18	0
1	1	-1	20	34	18	0
2	2	19	54	52	18	—
3	3	73	106	70	—	—
4	4	179	176	—	—	—
5	5	355	—	—	—	—

а) (17.1) ва (17.2) формулалардан фойдаланамиз. Жадвалга кўра $h = 1$. Ҳосилаларни $x = 1,5$ нуқтада ҳисоблаш учун $x_0 = 1$ деб оламиз, у ҳолда $q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1,5 - 1}{1} = 0,5$;

$$f'(1,5) \approx \frac{1}{1} \left(20 + \frac{2 \cdot 0,5 - 1}{2} \cdot 34 + \frac{3 \cdot 0,5^2 - 6 \cdot 0,5 + 2}{6} \cdot 18 \right) = 19,25;$$

$$f''(1,5) \approx \frac{1}{1^2} (34 + (0,5 - 1) \cdot 18) = 25.$$

б) (17.7) ва (17.8) формулалардан фойдаланамиз. $x = 4,2$ нуқтада (у ўнг охирига яқинроқ) ҳосилаларни ҳисоблаш учун $x_n = 4$ деб оламиз, у ҳолда

$$t = \frac{x - x_n}{h} = \frac{4,2 - 4}{1} = 0,2;$$

$$f'(4,2) \approx \frac{1}{1} \left[106 + \frac{2 \cdot 0,2 + 1}{2} \cdot 52 + \frac{3 \cdot 0,2^2 + 6 \cdot 0,2 + 2}{6} \cdot 18 \right] = 152,36;$$

$$f''(4,2) \approx \frac{1}{1^2} [52 + (0,2 + 1) \cdot 18] = 73,6.$$

11- дарсхона топшириқлари

1. $y = f(x)$ функция жадвал билан берилган. (3.68; 3.69; 3.70- жадваллар). Ҳосиланинг қийматини кўрсатилган x_1 ва x_2 нуқталарда топинг:

а)

x	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
y	1,44013	1,54722	1,67302	1,81973	1,98970	2,18547	2,40978	2,66537

$$x_1 = 2,03 \text{ ва } x_2 = 2,22.$$

б)

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
y	1,0083	1,1134	1,2208	1,3310	1,4449	1,5634	1,6876	1,8186

$$x_1 = 1,14 \text{ ва } x_2 = 1,42.$$

в)

x	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5
y	3,92847	4,41016	4,93828	5,51744	6,15213	6,84782	7,61045	8,44671

$$x_1 = 3,02 \text{ ва } x_2 = 3,31.$$

$$\text{Ж: а) } f'(2,03) = 1,42249; \quad f'(2,22) = 1,87640$$

$$\text{б) } f'(1,14) = 1,0704; \quad f'(1,42) = 1,1698;$$

$$\text{в) } f'(3,02) = 5,63133; \quad f'(3,31) = 7,34833.$$

2. $y = f(x)$ функция 3. 71- жадвал билан берилган. $f'(x)$ ва $f''(x)$ ҳосилаларнинг қийматларини $x = 2$ нуқтада ҳисобланг.

x	1	2	3	4	5	6
y	1	5	21	55	113	201

$$\text{Ж: } f'(2) = 9; \quad f''(2) = 12.$$

11- мустақил иш топшириқлари

1. $y = f(x)$ функция 3. 72; 3. 73- жадвал билан берилган. Ҳосиланинг қийматини кўрсатилган x_1 ва x_2 нуқталарда ҳисобланг.

3. 72- жадвал

а)

x	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	1,05	1,10
y	0,2803	0,3186	0,3592	0,4021	0,4472	0,4945	0,5438	0,5952

$$x_1 = 0,82 \text{ ва } x_2 = 1,03.$$

3. 73- жадвал

а)

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
y	0,8802	0,9103	0,9340	0,9523	0,9661	0,9764	0,9838	0,9891

$$x_1 = 1,34 \text{ ва } x_2 = 1,65.$$

Ж: а) $f'(0,82) = 0,8077$; $f'(1,03) = 0,9914$;

б) $f'(1,34) = 0,1873$; $f'(1,65) = 0,0741$.

2. $y' = f(x)$ функция 3. 74- жадвал билан берилган. $f'(x)$ ва $f''(x)$ ҳосилаларнинг қийматларини $x = 2,5$ нуқтада ҳисобланг.

3. 74- жадвал

x	0	1	2	3	4	5
y	1	3	19	85	261	631

$$\text{Ж: } f'(2,5) = 63,5; \quad f''(2,5) = 75.$$

12- §. Иккинчи тартибли оддий дифференциал тенглама учун чизиқли чегаравий масалани ечиш

Чегаравий масалаларни ечишга битта мисол кўрайлик.

Мисол. $y'' + x^2y + 2 = 0$ дифференциал тенглама учун

$$y(-1) = 0, \quad y(1) = 0$$

бошланғич шартли чегаравий масалани $[-1; 1]$ кесмада чекли айирмалар усули билан ечинг. Бу кесмани тўртта тенг бўлакка бўлинг.

Ечиш. $[-1; 1]$ кесмани $h = 0,5$ қадам билан тўртта тенг бўлакка ($n = 4$) бўламиз:

$$x_0 = -1; x_1 = -0,5; x_2 = 0; x_3 = 0,5; x_4 = 1.$$

Бунда $y_0 = y(-1) = 0$ ва $y_4 = y(1) = 0$ қийматлар маълум. Ушбу учта қийматни ҳисоблаш лозим:

$$y_1 = y(-0,5); y_2 = y(0); y_3 = y(0,5).$$

(23.9) формулаларда $i = \overline{1, 3}$ деб, y_1, y_2, y_3 қийматларни ҳисоблаш учун тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{cases} \frac{y_1 - 2y_1 + y_0}{h^2} + x_1^2 y_1 + 2 = 0, \\ \frac{y_1 - 2y_2 + y_1}{h^2} + x_2^2 y_2 + 2 = 0, \\ \frac{y_1 - 2y_3 + y_2}{h^2} + x_3^2 y_3 + 2 = 0, \\ y_0 = 0, \\ y_4 = 0. \end{cases}$$

$h = 0,5$ ни ўрнига қўйиб ва системани соддалаштириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 16y_0 - 31y_1 + 16y_2 & = -8, \\ 2y_1 - 4y_2 + 2y_3 & = -1, \\ 16y_2 - 31y_3 + 16y_4 & = -8, \\ y_0 & = 0, \\ y_4 & = 0. \end{cases}$$

Бу ердан:

$$y_0 = 0; y_1 = 0,8; y_2 = 1,05; y_3 = 0,8; y_4 = 0.$$

12- дарсхона топшириқлари

Берилган кесмани n та тенг бўлакка бўлиб, дифференциал тенгламани кўрсатилган чегаравий шартларда чекли айирмалар усули билан ечинг.

1. $x^2 y'' - xy' = 3x^3;$

$y(1) = 2; y(2) = 9; [1; 2]; n = 4.$

Ж: $y_1 = 2,953; y_2 = 4,375; y_3 = 6,359.$

2. $x^2 y'' + xy' - y = x^2;$

$y(1) = 1,333; y'(3) = 3; [1; 3]; n = 7.$

Ж: $y_1 = 1,926; y_2 = 2,593; y_3 = 3,333;$

$y_4 = 4,148; y_5 = 5,037; y_6 = 6.$

3. $y'' + (x-1)y' + 3,125y = 4x;$

$y(0) = 1; y(1) = 1,368; [0; 1]; n = 10.$

Ж: $y_1 = 1,17; y_2 = 1,31; y_3 = 1,42; y_4 = 1,50; y_5 = 1,64;$

$y_6 = 1,66; y_7 = 1,63; y_8 = 1,58; y_9 = 1,49.$

12- мустақил иш топшириқлари

Берилган кесмани n та тенг бўлакка бўлиб, дифференциал тенгламани кўрсатилган чегаравий шартларда чекли айирмалар усули билан ечинг.

$$1. x^2 y'' - 2y = 0;$$

$$y(1) - 2y'(1) = 0; y(2) = 4,5; [1; 2]; n = 5.$$

$$\text{Ж: } y_0 = 2; y_1 = 2,273; y_2 = 2,674; y_3 = 3,185; y_4 = 3,796.$$

$$2. y'' + xy' + y = 2x;$$

$$y(0) = 1; y(1) = 0; [0; 1]; n = 10.$$

$$\text{Ж: } y_1 = 0,874; y_2 = 0,743; y_3 = 0,611; y_4 = 0,482; y_5 = 0,362;$$

$$y_6 = 0,253; y_7 = 0,161; y_8 = 0,087; y_9 = 0,033.$$

13- §. «Прогонка» ва коллокация усуллари

«Прогонка» ва коллокация усуллари билан бир нечта мисолларнинг ечимларини келтирайлик.

1- мисол. «Прогонка» усули билан

$$y'' + x^2 y = -2; y(-1) = 0; y(1) = 0$$

чегаравий масалани (12- § даги 1- мисол) $[-1; 1]$ кесмани тенг тўрт бўлакка бўлиб ечинг.

Ечиш. $n = 4; h = 0,5; x_i = x_0 + ih$ га эгамиз. Чегаравий шартларни билан берилган масаладан мос (23. 12) ва (23. 13) чекли айирмални тенгламаларга ўтамиз. Ечилаётган масалада

$$p_i = p(x_i) = 0; q_i = q(x_i) = x_i^2; f_i = f(x_i) = -2;$$

$$\alpha_0 = -1, \beta_0 = 1, \gamma_1 = 0,$$

$$\alpha_1 = 0, \beta_1 = 0, \gamma_2 = 0,$$

$$y_0 = y(-1) = 0, y_4 = y(1) = 0.$$

m_i, n_i, f_i лар учун (23. 14) формулаларни тузамиз:

$$m_i = q_i h^2 - 2 = 0,25 x_i^2; n_i = 1, f_i = -2.$$

Ечимни (23. 16) формула бўйича топамиз:

$$y_i = c_i (d_i - y_{i+1}), i = \overline{1, 3},$$

$$\text{бу ерда } c_0 = 0, d_0 = 0 \quad (23. 20)$$

$$c_i = \frac{1}{0,25x_i^2 - 2 - c_{i-1}}$$

$$d_i = -0,5 - c_{i-1} \cdot d_{i-1}, i = \overline{1, 3}. \quad (23.18)$$

Жадвални тўлдиришга ўтамиз (3. 75- жадвал).

Аввал c_i, d_i ларни, кейин (23. 16) формулалар бўйича $y_i, i = \overline{1, 3}$ ларни ҳисоблаймиз (тескари йўл).

i	0	1	2	3	4
c_i	0	-0,516	-0,674	-0,791	—
d_i	—	-0,5	-0,758	-1,011	—
x_i	-1	-0,5	—	0,5	1
y_i	0	0,799	1,049	0,799	0

2- мисол. 1- мисолдаги чегаравий масалани коллокация усули билан ечинг.

Ечиш. Қуйидагига эгамиз:

$$\begin{aligned} y'' + x^2 y &= -2, \\ y(-1) &= y(1) = 0. \end{aligned}$$

Базис функциялар сифатида $u_n(x) = x^{2n-2} (1-x^2)$, $n=1, 2, \dots$ купҳадларни оламиз.

Чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ушбу иккита

$$u_1(x) = 1 - x^2, \quad u_2(x) = x^2 - x^4$$

базис функция билан чекланамиз.

У ҳолда

$$y = c_1 (1 - x^2) + c_2 (x^2 - x^4).$$

Буни дифференциал тенгламага қўйганимиздан сўнг,

$$R(x) = c_1 (x^2 - x^4 - 2) + c_2 (x^4 - x^6 - 12x^2 + 2) + 2$$

фарқни оламиз. Коллокация нуқталари сифатида

$$x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{1}{2};$$

ни олсак, бу нуқталарда

$$R\left(\pm \frac{1}{2}\right) = 0, \quad R(0) = 0.$$

Шундай қилиб, c_1 ва c_2 коэффициентларни аниқлаш учун

$$c_1 - c_2 - 1 = 0,$$

$$\frac{29}{16} c_1 + \frac{61}{64} c_2 - 2 = 0$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу ердан $c_1 = 1,068$ ва $c_2 = 0,068$. Шундай қилиб, ушбу тақрибий ечимни ҳосил қилдик:

$$y \approx 1,068 (1 - x^2) + 0,068 (x^2 - x^4) = 1,068 - x^2 - 0,068x^4.$$

13- дарсхона топишириқлари

1. «Прогонка» усули билан чегаравий масалаларни ечинг:

а) $y'' - 2xy' - 2y = -4x$;

$y(0) - y'(0) = 0, y(1) = 3,718; n = 10$;

б) $y'' + y = -x$;

$y(0) = 0, y(1) = 0; n = 4$.

Ж: а) $y_1 = -0,025; y_2 = -0,049; y_3 = -0,072$;

$y_4 = -0,078; y_5 = -0,081; y_6 = -0,078$;

$y_7 = -0,070; y_8 = -0,055; y_9 = -0,032$;

б) $y_1 = 0,039; y_2 = 0,063; y_3 = 0,055$.

2. Коллокация усули билан ушбу чегаравий масалани ечинг:

$$y'' + y = -x,$$

$$y(0) = 0, y(1) = 0; n = 4.$$

Натижани 1 (б)- масала ечими ва аниқ ечим билан таққосланг.

13- мустақил иш топишириғи

«Прогонка» ва коллокация усули билан

$$y'' + y = x,$$

$$y(-1) = 0, y(1) = 0$$

чегаравий масалани ечинг. Натижаларни аниқ ечим билан таққосланг.

14- §. Лаплас тенгламаси учун түрлар усули

Түрлар усули татбиқини битта масала ечиш мисолида кўрсатайлик.

Мисол. Лаплас тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

нинг бирлик квадратдаги

$$u(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ агар } 0 \leq x \leq 1, y = 0 \text{ бўлса,} \\ \frac{8}{3} y (64y^2 - 60y + 29), \text{ агар } x = 0, 0 \leq y \leq 1 \text{ бўлса,} \\ \frac{8}{3} (1 - x) (64x^2 - 68x + 3), \text{ агар } 0 \leq x \leq 1, y = 1 \text{ бўлса,} \\ 0, \text{ агар } x = 1, 0 \leq y \leq 1 \text{ бўлса;} \end{cases}$$

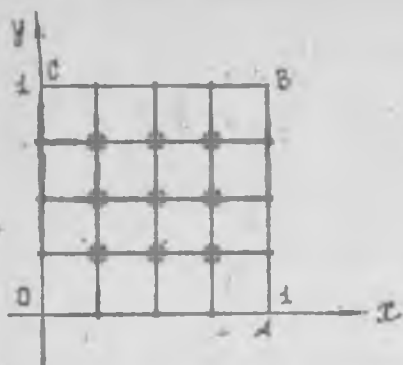
чегаравий шартлар бўйича ечимини топинг.

Ечиш. $h = 0,25$ деб олиб,

$$G = \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

квадратни $x_i = ih, y_j = jh$ ($i, j = 0, 4$) тўғри чизиқлар билан G_h түрли соҳага алмаштирамиз.

3.31- шаклдаги A, B, C, O тугунлардан ташқари барча тугунлар ҳисоблаш тугунларидир.



3.31- шакл

$x = ih, y = jh$ алмаштиришдан сунг, чегаравий шартлар биринчи тур чегаравий тугунларда (шаклдаги қора доирачалар) ушбу кўрнинишни олади:

$$u_{i0} = 0, u_{4j} = 0 \quad (i, j = \overline{1, 3})$$

$$u_{j0} = \frac{8}{3}h \cdot j (64(h_j)^2 - 60(h_j) + 29) = \frac{2j}{3} (4j^2 - 15j + 29) \quad (j = \overline{1, 3}),$$

$$u_{i4} = \frac{8}{3} (1 - h_i) (64(h_i)^2 - 68h_i + 33) = \frac{1}{6} (4 - i) (16i^2 - 68i + 132). \quad (i = \overline{1, 3})$$

Чегаравий шартлар ва номаълум қийматлар (ҳисоблаш тугунларида — шаклда бўлмаган доирачалар) жадвалини келтирамиз (3.76-жадвал):

3.76- жадвал

C	$u_{14} = 40$	$u_{24} = 20$	$u_{34} = 12$	B
$u_{03} = 40$	u_{13}	u_{23}	u_{33}	$u_{43} = 0$
$u_{02} = 20$	u_{12}	u_{22}	u_{32}	$u_{42} = 0$
$u_{01} = 10$	u_{11}	u_{21}	u_{31}	$u_{41} = 0$
O	$u_{10} = 0$	$u_{20} = 0$	$u_{30} = 0$	A

Айирмали схемани (24.2) формула бўйича тузамиз:

$$u_{ij} = \frac{1}{4} (u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}),$$

бу ерда $(x_{i \pm 1}, y_{j \pm 1})$ — ҳисоблаш тугунлари.

Келтирилган жадвалдан ва беш нуқтали «хоч» (3.28-шаклга қ.) «қолип» идан фойдаланиб, ушбу айирмали схемани тузамиз:

$$\begin{aligned}
u_{11} &= \frac{1}{4} (12 + u_{21} + u_{12} + 0), \\
u_{21} &= \frac{1}{4} (u_{11} + u_{31} + u_{22} + 0), \\
u_{31} &= \frac{1}{4} (u_{21} + 0 + u_{32} + 0), \\
u_{12} &= \frac{1}{4} (20 + u_{22} + u_{11} + u_{13}), \\
u_{22} &= \frac{1}{4} (u_{12} + u_{32} + u_{21} + u_{23}), \\
u_{32} &= \frac{1}{4} (u_{22} + 0 + u_{31} + u_{33}), \\
u_{13} &= \frac{1}{4} (40 + u_{23} + 40 + u_{12}), \\
u_{23} &= \frac{1}{4} (u_{13} + u_{23} + 20 + u_{21}), \\
u_{33} &= \frac{1}{4} (u_{23} + 0 + u_{32} + u_{32}).
\end{aligned}$$

Симметриклик хоссасига асосан:

$$u_{11} = u_{33}, \quad u_{13} = u_{23}, \quad u_{31} = u_{21}.$$

Шу сабабли ҳосил қилинган айирмалли схема соддалашади:

$$\begin{aligned}
u_{11} &= \frac{1}{4} (12 + u_{21} + u_{12}), \\
u_{21} &= \frac{1}{4} (u_{11} + u_{31} + u_{22}), \\
u_{31} &= \frac{1}{4} (u_{21} + u_{32}) = \frac{1}{2} u_{21}, \\
u_{12} &= \frac{1}{4} (20 + u_{22} + u_{11} + u_{13}), \\
u_{22} &= \frac{1}{4} (u_{12} + u_{32} + u_{23} + u_{21}) = \frac{1}{2} (u_{12} + u_{21}), \\
u_{13} &= \frac{1}{4} (40 + u_{23} + u_{12} + 40) = 20 + \frac{1}{2} u_{12}.
\end{aligned}$$

Бу системани оддий итерация усули ва Зейдель усули билан ечамиз (15- §).

Нолинчи яқинлашишни чегаравий қийматлар бўйича чизиқли интерполяциялаш ёрдамида (8. 7) формула (сатрлар бўйича)

$$u_{ij}^0 = u_{0j} + (u_{ij} - u_{0j}) \frac{i}{4}$$

орқали ҳисоблаймиз.

$j = 1$ бўлганда

$$u_{11}^0 = 12 + (0 - 12) \frac{i}{4} = 12 \left(1 - \frac{i}{4} \right)$$

га эга буламиз, бу ерда $i = 1, 3$ ни ўзгартириб,

$$u_{11}^0 = 9, \quad u_{21}^0 = 6, \quad u_{31}^0 = 3$$

ни ҳосил қиламиз.

Симметрикликни ҳисобга олиб

$$u_{32}^0 = u_{21}^0 = 6, \quad u_{33}^0 = u_{11}^0 = 9$$

деймиз. u_{12}^0 ва u_{22}^0 ни ҳисоблашда (8. 7) чизикли интерполяция формуласидан $j = 2$ да ва топилган u_{32}^0 қийматдан фойдаланамиз:

$$u_{12}^0 = u_{02} + (u_{32}^0 - u_{02}) \frac{i}{3} =$$

$$i = 20 + (6 - 20) \frac{i}{3} = 20 \left(1 - \frac{7}{30} i \right).$$

Бундан $i = 1, 2$ ни ўзгартириб,

$$u_{12}^0 = 15,33; \quad u_{22}^0 = 10,66$$

ни ҳосил қиламиз. Симметрикликни ҳисобга олиб,

$$u_{23}^0 = u_{12}^0 = 15,33$$

деб оламиз.

Сўнгги u_{13}^0 қийматни $j = 3$ сатр учун чизикли интерполяция формуласи бўйича ҳисоблаймиз ва бунда топилган u_{23}^0 қийматдан фойдаланамиз:

$$u_{03}^0 = u_{02} + (u_{23}^0 - u_{02}) \frac{i}{2} = 40 + (15,33 - 40) \frac{i}{2},$$

бундан $i = 1$ да $u_{13}^0 = 27,67$ ни ҳосил қиламиз.

Топилган нолинчи яқинлашишни жадвал шаклида ёзиш мумкин (3. 77- жадвал):

3. 77- ж а д в а л

$u_{13}^0 = 27,67$	$u_{23}^0 = 15,33$	$u_{33}^0 = 9$
$u_{12}^0 = 15,33$	$u_{22}^0 = 10,66$	$u_{32}^0 = 6$
$u_{11}^0 = 9$	$u_{21}^0 = 6$	$u_{31}^0 = 3$

Ҳосил бўлган тенгламалар системасини ечишни икки усул: оддий итерация (15.2- §) ва Зейдель усуллари (15. 3- §) билан амалга

оширамиз. Ҳисоблашни то иккита кетма-кет ечим ҳар бир ўзгарувчи бўйича 0,1 гача аниқликда устма-уст тушгунча давом эттирамиз.

Оддий итерация усули бўйича ҳисоблашда тўртта итерация, Зейдель усулида эса 3 та итерация талаб этилди. Ечимлар жадвалларда келтирилган (3.78; 3.79- жадваллар).

3.78- жадвал

	40	20	12	
40	28,5	17,0	8,6	0
20	17,0	11,3	5,6	0
12	8,6	5,6	2,8	0
	0	0	0	

Оддий итерация усули

3.79- жадвал

	40	20	12	
40	28,6	17,0	8,6	0
20	17,0	11,4	5,7	0
12	8,6	5,7	2,8	0
	0	0	0	

Зейдель усули

14- дарсхона топшириғи

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ Лаплас тенгламасининг тақрибий ечимини квадрат учун кўрсатилган чегаравий шартларда ечинг:

а)	16,18	38,63	б)	17,98	39,02
0,00●	●	●	0,00●	●	●
0,00●	○	○	0,00●	○	○
0,00●	○	○	0,00●	○	○
0,00●	●	●	0,00●	●	●
	26,15	29,34		29,05	29,63

3.80- жадвал

3.81- жадвал

Ж:

а)	0,00	16,18	38,63	50,00	б)	0,00	17,98	39,92	50,0
	0,00	14,12	26,09	30,10		0,00	15,18	36,39	30,10
	0,00	15,20	20,53	12,38		0,00	16,37	21,26	12,38
	0,00	26,15	29,34	4,31		0,00	29,05	29,63	4,31

14- мустақил иш топшириғи

Лаплас тенгламаси $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ нинг тақрибий ечимини $h = \frac{1}{6}$ қадам билан квадрат учун кўрсатилган шартларда ечинг:

	9,81	19,78	29,12	40,16	42,31	
0,00●	●	●	●	●	●	● 50,00
0,00●	○	○	○	○	○	● 40,16
0,00●	○	○	○	○	○	● 33,11
0,00●	○	○	○	○	○	● 19,14
0,00●	○	○	○	○	○	● 13,0
0,00●	○	○	○	○	○	● 6,98
0,00●	●	●	●	●	●	● 4,31
	17,28	31,96	40,00	30,50	17,28	

Ж:

3,82- ж а д в а л

0,00	9,81	19,78	29,12	40,16	42,31	50,00
0,00	8,97	17,58	25,36	32,18	36,11	40,16
0,00	8,68	16,0	22,29	26,86	29,69	33,11
0,00	8,36	15,59	20,71	23,05	22,62	19,11
0,00	9,43	17,22	21,71	21,85	18,55	13,00
0,00	12,20	22,09	26,96	24,01	16,70	6,98
0,00	17,28	31,96	40,00	30,50	17,28	4,31

15-§. Иссиқлик ўтказувчанлик ва тор тебраниш тенгламалари учун тўрлар усули

Иссиқлик ўтказувчанлик ва тор тебраниш тенгламаларини тўрлар усули билан ечишга мисоллар кўрайлик.

1-мисол.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун

$$G \{0 < x < 1, 0 < t < 0,1\}$$

тўғри тўртбурчакда $0 \leq x \leq 1$ да $u(x, 0) = x(1-x)$ бошланғич шартлар ва $0 \leq t \leq 0,1$ да

$$u(0, t) = 0, u(1, t) = 0$$

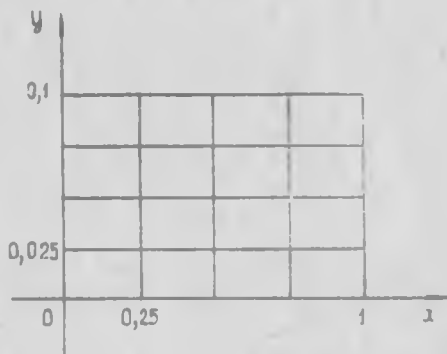
чегаравий шартлар билан берилган масалами ечинг.

Ечиш. G соҳада x координата бўйича $k = \frac{1}{N}$ қадамли ва t ко-

ордината бўйича $\tau = \frac{0,1}{M}$ қадамли тўғри тўртбурчакли текис тўр кн-ритамиз: $x_i = ih$ ($i = \overline{0, N}$); $t_j = j\tau$ ($j = \overline{0, m}$). $h = 0,25$ ($N = 4$) деб оламиз. Ошкор схема турғун бўлиши учун (24.5) $r = \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ бўлишини талаб қиламиз, бундан

$$\tau \leq 0,03.$$

Бўлишлар сони M бутун сон бўлиши учун $\tau = 0,025$ деб танлаймиз ($M = 4$) (3.32 шакл).



3.32- шакл

Ҳисоблаймиз: $r = \frac{\tau}{h^2} = 0,4$.

(24.3) ошкор схема шакл алмаштиришлардан сўнг (24.5) кўри-нишни олади:

$$u_{i,j+1} = r(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + (1 - 2r)u_{ij} + \tau f_{ij}.$$

Бизнинг ҳолда $r = 0,4$; $f_{ij} = 0$ бўлганлиги учун

$$u_{i,j+1} = 0,4(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + 0,2u_{ij}.$$

Бошланғич ва чегаравий шартлардан:

$$u_{i0} = u(x, 0) + ih(1 - ih) = \frac{i}{4} \left(1 - \frac{i}{4}\right) = \frac{i(4-i)}{16},$$

$$u_{0j} = u(0, j\tau) = 0, \quad u_{4j} = u(1, j\tau) = 0 \quad (i = \overline{0, 3}; j = \overline{0, 3}).$$

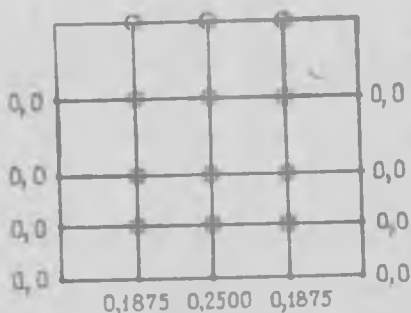
Бу формулалар бўйича изланаётган функциянинг $j = 0$ да но-линчи қатламдаги қийматларини (бошланғич шартлар) ҳисоблаймиз:

$$u_{10} = \frac{1 \cdot (4-1)}{16} = 0,1875;$$

$$u_{20} = \frac{2 \cdot (4-2)}{16} = 0,2500;$$

$$u_{30} = \frac{3(4-3)}{16} = 0,1875.$$

Турли G_h соҳа схемасини келтирамиз (схемада изланаётган номаълум қийматлар бўлмаган доирачалар билан белгиланган (3.33-шакл)).



3.33-шакл

Изланаётган функциянинг қийматларини навбатдаги $j = 1$ бўлган қатламда тўрт нуқтали «қолип» дан фойдаланиб ҳисоблашга ўтამиз (3.33-шаклга қ).

$$u_{11} = 0,4(u_{00} + u_{20}) + 0,2u_{10} = 0,4(0 + 0,2500) + 0,2 \cdot 0,1875 = 0,1375;$$

$$u_{21} = 0,4(u_{10} + u_{30}) + 0,2u_{20} = 0,4(0,1875 + 0,1875) + 0,2 \cdot 0,2500 = 0,2000;$$

$$u_{31} = 0,4(u_{20} + u_{40}) + 0,2 \cdot u_{30} = 0,4(0,2500 + 0) + 0,2 \cdot 0,1875 = 0,1375$$

Функциянинг навбатдаги $j = 2, 4$ бўлган қатламдаги қийматлари ҳам шунга ўхшаш ҳисобланади (3.83-жадвал).

3.83-жадвал

u_{ij}	u_{0j}	u_{1j}	u_{2j}	u_{3j}	u_{4j}
0	0	0,1876	0,2500	0,1875	0
1	0	0,1375	0,2000	0,1375	0
2	0	0,1075	0,1500	0,1075	0
3	0	0,0815	0,1160	0,0815	0
4	0	0,0627	0,0884	0,0627	0

2-мисол. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ торнинг тебраниши тенгламаси учун $G\{0 < x < 1, 0 < t < 0,6\}$ тўғри тўртбурчак

$$0 \leq x \leq 1 \text{ да } u(x, 0) = x(1-x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

бошланғич шартлар ва

$$0 \leq t \leq 0,6 \text{ да } u(0, t) = 0, \quad u(1, x) = 0$$

чегаравий шартлар билан берилган масалани ечинг.

Ечиш. G соҳани $x_i = ih$, $t_j = j \cdot \tau$ ($i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, M}$) тўр билан қоплаймиз. $h = 0,25$ деб оламиз, у ҳолда $\tau < 0,25$. $[0; 0,6]$ кесманинг узунлиги $0,6$ бўлгани учун $\tau = 0,2$ ни танлаймиз, чунки M бутун сон бўлиши керак (3.34-шакл).

(24.7). Ҳисоблаш формуласидан

$$\begin{aligned} f_{ij} = 0 \text{ ва } \gamma^2 &= \left(\frac{\tau}{h}\right)^2 = \\ &= 0,64, \quad u_{i,j+1} = -u_{i,j-1} + \\ &+ 0,64(u_{i-1,j} - u_{i+1,j}) + 0,72 u_{ij} \\ &\quad (i = \overline{1,3}; j = \overline{0,2}). \end{aligned}$$

Бошланғич ва чегаравий шартлар бундай ёзилади:

$$\begin{aligned} u_{i,0} &= u(x_i, 0) = x_i(1-x_i) = \\ &= ih(1-ih) = \frac{i}{4} \left(1 - \frac{i}{4}\right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{i}{16} (4-i), \quad (i = \overline{1,3}),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{i,1} - u_{i,-1}}{0,2} = 0 \quad (i = \overline{1,3}),$$

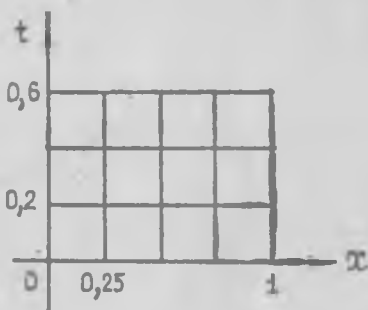
$$u_{0j} = u(0, j\tau) = 0, \quad u_{4j} = u(1, j\tau) = 0 \quad (j = \overline{1,3})$$

Изланаётган функциянинг нолинчи қатламдаги қийматларини ҳисоблаймиз (бошланғич шартлар):

$$u_{10} = \frac{1(4-1)}{16} = 0,188;$$

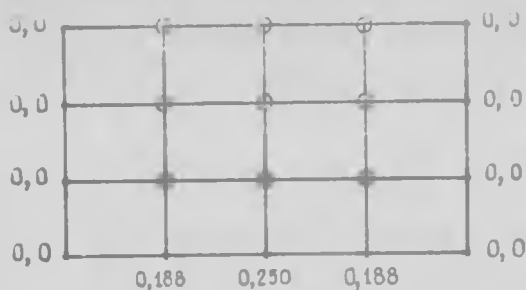
$$u_{20} = \frac{2(4-2)}{16} = 0,250;$$

$$u_{30} = \frac{3(4-3)}{16} = 0,188.$$



3.34-шакл

G_h турли соҳа 3.35- шаклда тасвирланган.



3.35- шакл

Энди изланаётган функциянинг навбатдаги қатламдаги қийматларини $\gamma = 0$ да «хоч» қолтпи бўйича ҳисоблаймиз, лекин аввал $u_{i,-1} (j=0)$ сохта қийматларни бошланғич шартлардан бундай аниқлаб оламиз:

$$u_{i,-1} = u_{i1}.$$

Шундай қилиб, биринчи қадамда

$$u_{i1} = -u_{i1} + 0,64(u_{i-1,0} + u_{i+1,0}) + 0,72u_{i0}$$

га эга бўламиз. Бу ердан

$$u_{i1} = 0,32(u_{i-1,0} + u_{i+1,0}) + 0,36u_{i0}.$$

$i = 1$ бўлганда

$$u_{11} = 0,32(u_{00} + u_{20}) + 0,36u_{10} = 0,32(0 + 0,250) + 0,36 \cdot 0,188 = 0,148;$$

$i = 2$ бўлганда

$$u_{21} = 0,32(u_{10} + u_{30}) + 0,36u_{20} = 0,32(0,188 + 0,188) + 0,36 \cdot 0,250 = 0,210;$$

$i = 3$ бўлганда

$$u_{31} = 0,32(u_{20} + u_{40}) + 0,36u_{30} = 0,32(0,250 + 0) + 0,36 \cdot 0,188 = 0,148.$$

Изланаётган функциянинг қийматларини иккинчи қадамда ($ij = 1$ да) ҳам шунга ўхшаш ҳосил қиламиз:

$$u_{i2} = -u_{i0} + 0,64(u_{i-1,1} + u_{i+1,1}) + 0,72u_{i1},$$

бу ердан қуйидагига эга бўламиз:

$$u_{12} = -u_{10} + 0,64(u_{01} + u_{21}) + 0,72 \cdot u_{11} = -0,188 + 0,64(0 + 0,210) + 0,72 \cdot 0,148 = 0,053;$$

$$u_{22} = -u_{20} + 0,64(u_{11} + u_{31}) + 0,72 \cdot u_{21} = \\ = -0,250 + 0,64(0,148 + 0,148) + 0,72 \cdot 0,210 = 0,091.$$

$$u_{32} = u_{12} = 0,053.$$

Симметрикликни ҳисобга олсак, ҳисоблашлар кейинги қадамларда ($j = 2$ ва $j = 3$ да) ҳам худди шундай бажарилади. Ҳисоблаш натижаларини жадвалга ёзамиз (3.84-жадвал).

3.84-жадвал

$i \backslash j$	u_{0j}	u_{1j}	u_{2j}	u_{3j}	u_{4j}
0	0	0,188	0,250	0,188	0
1	0	0,148	0,210	0,148	0
2	0	0,053	0,091	0,053	0
3	0	-0,052	-0,077	-0,052	0

15-дарсхона топшириғи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ ниссиқлик ўтказувчанлик тенгламасининг}$$

$$u(x, 0) = (1,1x^2 + 1,1) \sin \pi x,$$

$$u(0, t) = 0, u(1, t) = 0$$

шартларни қаноатлантирадиган тақрибий ечимини $0 \leq t \leq 0,02$ учун топинг. x аргумент бўйича қадамни $h = 0,1$ ва $r = \frac{1}{2}$ деб олинг.

Ж:

3.85-жадвал

$t \backslash x$	1,0	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,000	0,343	0,672	0,970	1,213	1,375	1,423	1,237	1,062	0,618
0,005	0,336	0,656	0,943	1,172	1,318	1,351	1,243	0,973	0,531
0,010	0,328	0,639	0,914	1,131	1,262	1,281	1,162	0,887	0,486
0,015	0,320	0,621	0,885	1,088	1,206	1,212	1,084	0,824	0,443
0,020	0,311	0,602	0,855	1,045	1,150	1,145	1,018	0,764	0,412

15-мустақил иш топшириқлари

1. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ниссиқлик ўтказувчанлик тенгламасининг

$$u(x, 0) = (1,1x^2 + 2,3)e^{-x}, u(0, t) = 2,3 \text{ ва } u(1, t) = 3,4e^{-1}$$

шартларни қаноатлантирадиган тақрибий ечимини $0 \leq t \leq 0,01$ қийматлар учун топинг. x аргумент бўйича қадамни $h = 0,1$ ва $r = \frac{1}{6}$ деб олинг.

Ж:

3.86-жадвал

$\begin{matrix} x \\ t \end{matrix}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,000	2,091	1,919	1,777	1,660	1,562	1,480	1,410	1,350	1,297
0,0017	2,097	1,924	1,781	1,663	1,564	1,482	1,411	1,351	1,298
0,0033	2,102	1,929	1,785	1,666	1,567	1,484	1,413	1,352	1,299
0,0050	2,106	1,934	1,789	1,670	1,570	1,486	1,415	1,354	1,300
0,0067	2,110	1,939	1,794	1,673	1,572	1,488	1,416	1,355	1,301
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

2. Ушбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2} t x^2$$

тор тебраниш тенгламасининг

$$G = \{0 \leq x \leq 2, 0 \leq t \leq 1\}$$

соҳадаги

$$u(x, 0) = x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sin x,$$

$$u(0, t) = e^t - 1, \quad u(2, t) = 4 \cos t$$

шартларни қаноатлантирадиган тақрибий ечимини топинг. x аргумент бўйича қадамни $h = 0,002$, t аргумент бўйича қадамни эса $\tau = 0,001$ деб олинг.

Ж:

3.87-жадвал

$\begin{matrix} x \\ t \end{matrix}$	0,00	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00
0,0	0,0	0,16	0,64	1,44	2,56	4,00
0,2	0,22	0,28	0,82	1,67	2,80	3,98
0,4	0,49	0,48	1,08	1,96	3,10	3,68
0,6	0,82	0,92	1,41	2,33	3,19	3,30
0,8	1,23	1,42	1,82	2,76	3,11	2,79
1,0	1,72	1,97	2,46	2,97	2,88	2,16

Босқич (курс) иши

Талабалар томонидан ЭҲМ да мустақил бажариладиган босқич ишининг мавзуси: Иссиқлик утказувчанлик тенгламаси учун аралаш масалани ечиш. Ошкор ва ошқормас схемалар.

Вазифа. Масалани ечиш учун дастур тузиш ва уни синаш. Қадамни танлаш. Ҳисоб ишларини бажариш. Олинган натижаларни таҳлил қилиш.

И Л О В А Л А Р

1- илова

$I_0(\mu) = 0$ ва $I_1(\mu) = 0$ характеристик тенгламаларнинг илдиэлари

n	$I_0(\mu) = 0$ тенгламанинг илдиэлари	$I_1(\mu) = 0$ тенгламанинг илдиэлари
1	2,4048	3,8317
2	5,5201	7,0156
3	8,6537	10,1735
4	11,7915	13,3237
5	14,9309	16,4706
6	18,0711	19,6159
7	21,2116	22,7601
8	24,3525	25,9037
9	27,4935	29,0468
10	30,6346	32,1897

2- илова

$\frac{I_2(\mu)}{I_1(\mu)} = \frac{1}{lh}$ μ характеристик тенгламанинг илдиэлари

$lh = n$	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
0,0	0,0000	3,8317	7,0156	10,1735	13,3237	16,4706
0,01	0,1412	3,8343	7,0170	10,1745	13,3244	16,4712
0,02	0,1995	3,8369	7,0184	10,1754	13,3252	16,4718
0,03	0,2814	3,8421	7,0213	10,1774	13,3267	16,4731
0,06	0,3438	3,8473	7,0241	10,1794	13,3282	16,4743
0,08	0,3960	3,8525	7,0270	10,1813	13,3297	16,4755
0,10	0,4417	3,8577	7,0298	10,1833	13,3312	16,4767
0,15	0,5376	3,8706	7,0369	10,1882	13,3349	16,4797
0,20	0,6970	3,8835	7,0440	10,1931	13,3387	16,4828
0,30	0,7465	3,9091	7,0582	10,2029	13,3462	16,4888
0,40	0,8516	3,9344	7,0723	10,2127	13,3537	16,4949
0,50	0,9408	3,9594	7,0864	10,2225	13,3611	16,5010
0,60	1,0184	3,9841	7,1004	10,2322	13,3686	16,5070
0,70	1,0873	4,0085	7,1143	10,2419	13,3761	16,5131
0,80	1,1490	4,0325	7,1282	10,2519	13,3835	16,5191
0,90	1,2048	4,0562	7,1421	10,2613	13,3910	16,5251
1,00	1,2558	4,0795	7,1558	10,2710	13,3984	16,5312
1,5	1,4569	4,1902	7,2223	10,3188	13,4353	16,5612
2,0	1,5994	4,2910	7,2884	10,3658	13,4719	16,5910
3,0	1,7887	4,4634	7,4103	10,4566	13,5434	16,6499
4,0	1,9081	4,6018	7,5201	10,5423	13,6125	16,7073
5,0	1,9898	4,7131	7,6177	10,6233	13,6786	16,7630
6,0	2,0490	4,8033	7,7039	10,6964	13,7414	16,8168
7,0	2,0937	4,8772	7,7797	10,7646	13,8008	16,8684
8,0	2,1286	4,9384	7,8464	10,8271	13,8566	16,9179
9,0	2,1566	4,9897	7,9051	10,8842	13,9090	16,9650
10,0	2,1795	5,0332	7,9569	10,9363	13,9580	17,0099
15,0	2,2509	5,1733	8,1422	11,1367	14,1576	17,2008
20,0	2,2880	5,2568	8,2534	11,2677	14,2983	17,3442
30,0	2,3261	5,3410	8,3771	11,4221	14,4748	17,5348

$lh = n$	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
40,0	2,3455	5,3846	8,4432	11,5081	14,5774	17,6508
50,0	2,3572	5,4112	8,4840	11,5621	14,6433	17,7272
60,0	2,3651	5,4291	8,5116	11,5990	14,6889	17,7807
80,0	2,3750	5,4516	8,5466	11,6461	14,7475	17,8502
100,0	2,3809	5,4652	8,5678	11,6747	14,7834	17,8931
∞	2,4048	5,5201	8,6537	11,7915	14,9309	18,0711

3- илова

$I_0(\mu) N_0(k\mu) - N_0(\mu) I_0(k\mu) = 0$ характеристик тенгламанинг μ_n илдизлари

n	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5
1,2	15,7014	31,4126	47,1217	62,8304	78,5385
1,5	6,2702	12,5598	18,8451	25,1294	31,4133
2,0	3,1230	6,2734	9,4182	12,5614	15,7040
2,5	2,0732	4,1773	6,2754	8,3717	10,4672
3,0	1,5485	3,1291	4,7038	6,2767	7,8487
3,5	1,2339	2,5002	3,7608	5,0196	6,2776
4,0	1,0244	2,0809	3,1322	4,1816	5,2306

4- илова

$\lg \mu = -\frac{\mu}{h}$ характеристик тенгламанинг илдизлари

h	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
0	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956	14,1372	17,2788
0,1	1,6320	4,7335	7,8667	11,0047	14,1443	17,2845
0,2	1,6887	4,7544	7,8794	11,0137	14,1513	17,2903
0,3	1,7414	4,7751	7,8920	11,0228	14,1584	17,2961
0,4	1,7906	4,7956	7,9046	11,0318	14,1654	17,3019
0,5	1,8366	4,8158	7,9171	11,0409	14,1724	17,3076
0,6	1,8798	4,8358	7,9295	11,0498	14,1795	17,3134
0,7	1,9203	4,8556	7,9419	11,0588	14,1865	17,3192
0,8	1,9586	4,8751	7,9542	11,0677	14,1935	17,3249
0,9	1,9947	4,8943	7,9665	11,0767	14,2005	17,3306
1,0	2,0288	4,9132	7,9787	11,0856	14,2075	17,3364
1,5	2,1746	5,0037	8,0382	11,1296	14,2421	17,3649
2,0	2,2889	5,0870	8,0965	11,1727	14,2764	17,3932
3,0	2,4557	5,2329	8,2045	11,2560	14,3434	17,4490
4,0	2,5704	5,3540	8,3029	11,3349	14,4080	17,5034
5,0	2,6537	5,4544	8,3914	11,4086	14,4699	17,5562
6,0	2,7165	5,5378	8,4703	11,4773	14,5288	17,6072
7,0	2,7654	5,6078	8,5406	11,5408	14,5847	17,6562
8,0	2,8044	5,6669	8,6031	11,5994	14,6374	17,7032
9,0	2,8363	5,7172	8,6587	11,6532	14,6860	17,7481
10,0	2,8628	5,7606	8,7083	11,7027	14,7335	17,7908

h	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	ρ_6
15,0	2,9476	5,9080	8,8898	11,8959	14,9251	17,9742
20,0	2,9930	5,9921	9,0019	12,0250	15,0652	18,1136
30,0	3,0406	6,0831	9,1294	12,1807	15,2380	18,3018
40,0	3,0651	6,1311	9,1986	12,2688	15,3417	18,4180
50,0	3,0801	6,1606	9,2420	12,3247	15,4090	18,4953
60,0	3,0901	6,1805	9,2715	12,3632	15,4559	18,5497
80,0	3,1028	6,2058	9,3089	12,4124	15,5164	18,6209
100,0	3,1105	6,2211	9,3317	12,4426	15,5537	18,6650
∞	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496

АДАБИЁТ

1. Бахвалов Н. С. , Жидков Н. П. , Кабельков Т. П. Численные методы, М., «Наука», 1987.
2. Будаков Б. М. , Самарский А. А. , Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике, М., «Наука», 1972.
3. Волков Е. А. Численные методы, М., «Наука», 1982.
4. Годунов С. К. Уравнения математической физики, М., «Наука», 1979.
5. Гутер Р. С. , Овчинский Б. В. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта, М., «Наука», 1970.
6. Демидович Б. П. , Марон И. А. Основы вычислительной математики. М., «Наука», 1970.
7. Демидович Б. П. , Марон И. А. , Шувалова Э. З. Численные методы анализа, М., «Наука», 1967.
8. Диткин В. А. , Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление, М., «Наука», 1974.
9. Исроилов М. Хисоблаш методлари, Т., «Ўқитувчи», 1988.
10. Калиткин Н. Н. Численные методы, М., «Наука», 1978.
11. Кузнецов Д. С. Специальные функции, М., «Высшая школа», 1965.
12. Положий Г. Н. Уравнения математической физики, М., «Высшая школа», 1964.
13. Соатов Е. У. Ҷилий математика, 1-жилд, Т., «Ўқитувчи», 1992.
14. Соатов Е. У. Ҷилий математика, 2-жилд, Т., «Ўқитувчи», 1994.
15. Соатов Е. У. Ҷилий математика, 3-жилд, Т., «Ўзбекистон», 1996.
16. Соатов Е. У. Ҷилий математика, 4-жилд, Т., «Ўқитувчи», 1997.
17. Тешабоева Н. Математик физика методлари, Т., «Ўқитувчи», 1980.
18. Тихонов А. Н. , Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1979.
19. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных, М., Изд-во иностр. литературы, 1957.
20. Қобулов В. Қ. Функционал анализ ва хисоблаш математикаси, Т., «Ўқитувчи», 1976.

М У Н Д А Р И Ж А

3

Сўз боши

Математик физика тенгламалари

А. Назарий мавзулар

1-§. Асосий физик жараёнлар ва уларнинг тенгламалари. Ўмумий тушунчалар	4
2-§. Иккинчи тартибли икки ўзгарувчи хусусий ҳосилли дифференциал тенгламаларнинг турлари ва каноник кўринишлари	25
3-§. Қоши масаласи, чегаравий масалалар, аралаш масалаларнинг қўйлиши	29
4-§. Бир ўлчовли тўлқин тенгласини Даламбер усули билан ечиш. Дюамель принципи	32
5-§. Уч ўлчовли тўлқин тенгласи учун Қоши масаласи. Пуассон формуласи. Гюгенс принципи	41
6-§. Икки ва уч ўлчовли тўлқин тенгласи учун Қоши масаласи. Пасайиш (тушиш) усули. Масалани ечишнинг Дюамель принципи	44
7-§. Лаплас ва Пуассон тенгламалари. Грин формуласи. Ўрта қиймат ҳақидаги теорема ва гармоник функциялар учун максимум принципи	49
8-§. Грин функцияси. Унинг чегаравий масалаларни ечишда қўлланилиши. Доира ва шар учун Пуассон формулалари	54
9-§. Иссиқлик тарқалиш тенгласи. Қоши масаласи. Аралаш масала. Максимум принципи	59
10-§. Штурм — Лиувилл масаласи. Хос функция ва хос қийматлар. Асосий хоссалари	63
11-§. Чегаравий масалаларни ечишда ўзгарувчиларни ажратиш усули. Унинг татбиқининг умумий схемаси	65
12-§. Штурм — Лиувилл масаласининг хос функциялари системасининг тўлалиги ва ёпиқлиги. Ёйиш ҳақидаги теорема. Ўртача яқинлашиш	77
13-§. Бессель тенгласи. Бессель функциялари ва уларнинг асосий хоссалари. Асимптотикалар	79
14-§. Ханкел функциялари ва уларнинг асосий хоссалари. Ёйилма тўғрисидаги теорема	82
15-§. Цилиндрик соҳада тўлқин тенгласи. Аралаш масаланинг ечими	85

Б. Амалий машғулотлар

1-§. Биринчи тартибли икки ўзгарувчи хусусий ҳосилати дифференциал тенгламалар	87
2-§. Икки ўзгарувчи иккинчи тартибли хусусий ҳосилати дифференциал тенгламаларни каноник кўринишга келтириш. Характеристик тенглама	89
3-§. Бир жинсли тўлқин тенгламаси учун Коши масаласини Даламбер формуласи билан ечиш	93
4-§. Бир ўлчовли бир жинсли бўлмаган тўлқин тенгламалари учун Коши масаласини Дюамель формуласидан фойдаланиб ечиш	95
5-§. Лаплас тенгламасининг баъзи содда ечимлари	98
6-§. Лаплас тенгламасини тўғри тўртбурчакда ўзгарувчиларни ажратиш усули билан ечиш	100
7-§. Чегараланган торнинг эркин ва мажбурий тебраниш тенгламаларини ўзгарувчиларни алмаштириш усули билан ечиш	103
8-§. Иссиқлик ўтказиш тенгламасини Фурье алмаштиришлари усули билан ечиш	108
9-§. Назорат иши	110
10-§. Штурм — Лиувилл масаласи. Лежандр кўпҳадлари	113
11-§. Лаплас тенгламасини доирадаги чегаравий шарт билан ечишда ўзгарувчиларни алмаштириш усули	115
12-§. Доирадаги чегаравий шарт билан берилган Пуассон тенгламасини ечиш	117
13-§. Тўғри тўртбурчак шаклидаги мембрананинг эркин тебраниш масаласини ўзгарувчиларни ажратиш усули билан ечиш	119

Операцион ҳисоб

Назарий мавзулар ва амалий машғулотлар

1-§. Лаплас алмаштириши. Оригинал ва тасвир. Энг содда функцияларнинг тасвирлари	121
2-§. Операцион ҳисобнинг асосий теоремалари	127
3-§. Оригинални тасвир бўйича топиш усуллари	135
4-§. Оригиналлар ўрамаси, унинг хоссалари. Ўраманинг Лаплас алмаштиришлари	142
5-§. Дифференциал тенгламалар ва уларнинг системаларини операцион ҳисоб усули билан ечиш	147
6-§. Дюамель интеграл, унинг табиқи	169
7-§. Лаплас ва Фурье алмаштиришларининг боғланиши	175

Соғли усуллар

А. Назарий мавзулар

1-§. Хатоликлар назариясининг элементлари	179
2-§. Функцияларнинг қийматларини ҳисоблаш. Кўпҳадлар учун Горнер схемаси	184
3-§. Функцияларни аппроксимациялаш	189
4-§. Энг яхши нуқтавий ва интеграл ўртача квадратик яқинлашишлар	192

5-§. Функцияларга алгебраик кўпхадлар билан энг яхши текис яқинла- ш	195
6-§. Чебишев кўпхадлари	196
7-§. Функцияларни интерполяциялаш. Хатоликни баҳолаш	199
8-§. Лагранж ва Ньютоннинг интерполяцион кўпхадлари	202
9-§. Сплайнлар билан интерполяциялаш	209
10-§. Чизиқли тенгламалар системаларини ечиш усуллари	211
11-§. Гаусс — Жордан усули. Матрицаларни алмаштириш ва детерминант- ларни ҳисоблаш	211
12-§. Уч диагоналли системаларни ечишнинг «прогонка» усули	216
13-§. Тенгламаларни ечишнинг итерация усуллари. Қўзғалмас нуқта ҳақи- даги теорема. Итерация жараёнининг яқинлашиши	218
14-§. Тенгламалар системаларини ечишнинг итерация усуллари. Оддий ите- рация усули. Яқинлашишнинг етарлилик шартлари	225
15-§. Чизиқли системаларни ечишнинг оддий итерация ва Зейдель усул- лари	229
16-§. Чизиқли бўлмаган системаларни ечишнинг Ньютон усули	232
17-§. Сонли дифференциаллаш	234
18-§. Сонли интеграллаш. Тўғри тўртбурчаклар, трапециялар, Симпсон усуллари	239
19-§. Гаусснинг квадратура формуласи	244
20-§. Монте — Карло усули	250
21-§. Биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламаларни Эйлер усули билан ечиш	256
22-§. Рунге — Кутт усули	263
23-§. Иккинчи тартибли оддий дифференциал тенглама учун чизиқли чегар- авий масалани ечишнинг «прогонка», коллокация ва Галеркин усул- лари	268
24-§. Математик физиканинг чегаравий масалаларини ечишнинг турлар усу- ли. Дифференциал операторларни айирмали аппроксимациялаш. Схе- манинг турғунлиги ҳақида тушунча. Ошкор ва ошқормас схемалар.	280

Б. Амалий машғулотлар

1-§. Тақрибий сонлар билан амаллар бажариш. Ҳисоблашлардаги хато- ликларни баҳолаш	286
2-§. Кўпхадларнинг қийматларини ҳисоблаш. Горнер схемаси. Энг кичик квадратлар усули билан эмпирик формулалар тузиш	290
3-§. Интерполяцион кўпхадларни тузиш. Чизиқли ва квадратик интер- поляциялаш	294
4-§. Гаусс — Жордан усули. Учбурчакли системани «прогонка» усули би- лан ечиш	299
5-§. Тенгламаларни ечишнинг итерация усули	304
6-§. Тенгламалар системаларини ечишнинг итерация усули	307
7-§. Чизиқли тенгламалар системаларини оддий итерация усули ва Зейдель усули билан ечиш	309
8-§. Сонли интеграллаш. Тўғри тўртбурчаклар, трапециялар. Симпсон формуллари. Гаусс квадратураси	312
	349

9-§. Монте — Карло усули	317
10-§. Оддий дифференциал тенглама учун Коши масаласини Эйлер усули билан ечиш	320
11-§. Сонли дифференциаллаш. Юқори аниқликдаги сонли дифференциаллаш формулалари	324
12-§. Иккинчи тартибли оддий дифференциал тенглама учун чизиқли чегаравий масалани ечиш	327
13-§. «Прогонка» ва коллокация усуллари	329
14-§. Лаплас тенгламаси учун турлар усули	331
15-§. Иссиқлик ўтказувчанлик ва тор тебраниш тенгламалари учун турлар усули	336
Босқич (курс) иши	342
Иловалар	343
Адабиёт	346

ЕЛҚИН УЧҚУНОВИЧ СОАТОВ

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

5-жилд

Олий техника ўқув юртлари талабалари учун дарслик

Тошкент «Ўқитувчи» 1998

Таҳририят мудбири *М. Пулатов*
Муҳаррирлар: *Н. Ғошпов, И. Ғ. Аҳмаджонов*
Расмлар муҳаррири *М. Қудряшова*
Тех. муҳаррир *Т. Грешникова*
Мусаҳҳид *З. Содиқова*

ИБ № 7276

Теришга берилди 16.05.97. Босишга рухсат этилди 31.10.97.
Бичими 60×90³/₁₆. Литературная гарн. Кегли 10 шпонам.
Юқори босма усулида босилди. Шартли б. т. 22,0. Шартли кр-
отт. 22,87. Нашр. т. 27,68. 2000 нусхада босилди. Буюртма
2923.

«Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент, 129. Навоий кўчаси, 30. Шарт-
нома 09-267-97.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитасининг Тош-
полиграфкомбинати. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. 1998.

9
10
11
12
13
14
15
C 73

Соатов Ё. У.

Олий математика: Олий техника ўқув юртлари талабалари учун дарслик; 5- жилд /Таҳрир ҳайъати: Ё. М. Ҳусанбоев (маъсул), А. Омонов, А. Абдукаримов, Р. Ж. Исомов/,—Т.: «Ўқитувчи», 1997.— 352 б.

ББК 22.11я73



лади. Кўпинча биз сонлар ўқини горизонтал ҳолатда жойлаштирамиз ва мусбат йуналишни чапдан ўнгга қараб оламиз.

Агар x_1 сон мусбат бўлса, бу сон O нуқтадан ўнг томонда $OM_1 = x_1$ масофада ётувчи M_1 нуқта билан тасвирланади; агар x_2 сон манфий бўлса, у O нуқтадан чап томонда $OM_2 = -x_2$ масофада ётувчи M_2 нуқта билан тасвирланади (1-расм). O нуқта ноль сонни тасвирлайди. Ҳар бир ҳақиқий сон сонлар



1-расм.

ўқининг маълум бир нуқтаси билан тасвирланади. Иккита ҳар хил ҳақиқий сон сонлар ўқининг ҳар хил нуқталари билан тасвирланади.

Сонлар ўқининг ҳар бир нуқтаси биргина ҳақиқий (рационал ёки иррационал) соннинг тасвири деган фикр ҳам тўғри бўлади.

Шундай қилиб, барча ҳақиқий сонлар билан сонлар ўқидаги барча нуқталар орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуддир: ҳар бир сонга сонлар ўқида уни тасвирловчи биргина нуқта мос келади ва, аксинча, сонлар ўқидаги ҳар бир нуқтага шу нуқта билан тасвирланувчи биргина сон тўғри келади. Бу мослик кўпгина муҳокамаларда „ x сон“ тушунчаси билан „ x нуқта“ тушунчасини бир хил маънода ишлатишга имкон беради. Бу ҳолдан биз бу курсда кенг фойдаланамиз.

Ҳақиқий сонлар тўпламининг қуйидаги муҳим хоссасини исботсиз кўрсатамиз: *ихтиёрий иккита ҳақиқий сон орасида рационал сонлар ҳам, иррационал сонлар ҳам топилади.* Бу жумлани геометрик терминларда бундай ифодалаш мумкин: *сонлар ўқининг ихтиёрий икки нуқтаси орасида рационал нуқталар ҳам, иррационал нуқталар ҳам топилади.*

Натижада „назария билан амалиётни“ боғловчи ушбу теоремани келтирамиз.

Теорема. *Ҳар бир иррационал α сон исталган даражадаги аниқликда рационал сонлар ёрдами билан ифодаланиши мумкин.*

Ҳақиқатан, иррационал сон $\alpha > 0$ бўлсин ва бу α сонни $\frac{1}{n}$ гача (масалан, $\frac{1}{10}$ гача, $\frac{1}{100}$ гача ва ҳоказо) аниқликда ҳисоблаш керак бўлсин.

α ҳар қандай сон бўлганда ҳам у иккита N ва $N+1$ бутун сонлар орасида бўлади. N ва $N+1$ орасидаги кесмани n бўлакка бўламиз, бу ҳолда α иккита $N + \frac{m}{n}$ ва $N + \frac{m+1}{n}$ рационал сонлар орасида бўлади. Уларнинг айирмаси $\frac{1}{n}$ га тенг,

демак, буларнинг ҳар бири α ни: биринчиси ками билан, иккинчиси эса ортиғи билан берилган даражада аниқлик билан ифодаляди.

Мисол: $\sqrt{2}$ иррационал сон қуйдаги рационал сонлар билан ифодаланади:

$$1,4 \text{ ва } 1,5 \left(\frac{1}{10} \text{ гача аниқликда} \right),$$

$$1,41 \text{ ва } 1,42 \left(\frac{1}{100} \text{ гача аниқликда} \right),$$

$$1,414 \text{ ва } 1,415 \left(\frac{1}{1000} \text{ гача аниқликда} \right) \text{ ва ҳоказо.}$$

2-§. Ҳақиқий соннинг абсолют қиймати

Ҳақиқий соннинг абсолют қиймати тушунчасини киритамиз, бу тушунча бундан буён бизга зарур булади.

Таъриф. x ҳақиқий соннинг *абсолют қиймати* (ёки модули $|x|$ билан белгиланади) деб, қуйдаги шартларни қаноатлантирувчи манфий бўлмаган ҳақиқий сонга айтилади:

$$x \geq 0 \text{ бўлса, } |x| = x;$$

$$x < 0 \text{ бўлса, } |x| = -x.$$

$$\text{Мисоллар: } |2| = 2; \quad |-5| = 5; \quad |0| = 0.$$

Таърифдан кўрннадикки, ҳар қандай x учун $x \leq |x|$ муносабат ўринлидир.

Абсолют қийматларнинг баъзи хоссаларини қараб чиқамиз.

1. Бир неча ҳақиқий сонлар алгебраик йиғиндисининг абсолют қиймати қушилувчилар абсолют қийматларининг йиғиндисидан катта эмас:

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Исбот. Фараз қилайлик, $x + y \geq 0$ бўлсин, y ҳолда:

$$|x + y| = x + y \leq |x| + |y| \text{ (чунки } x \leq |x| \text{ ва } y \leq |y|).$$

$x + y < 0$ бўлсин, y ҳолда:

$$|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|,$$

шунинг исботлаш талаб қилинган эди.

Келтирилган исбот қушилувчилар сони ҳар қанча бўлган ҳолга осонгина умумлаштирилади.

$$\text{Мисоллар: } |-2 + 3| \leq |-2| + |3| = 2 + 3 = 5 \text{ ёки } 1 \leq 5;$$

$$|-3 - 5| = |-3| + |-5| = 3 + 5 = 8 \text{ ёки } 8 = 8.$$

2. Айирманинг абсолют қиймати камаювчи ва айрилувчининг абсолют қийматлари айирмасидан кичик эмас:

$$|x - y| \geq |x| - |y|, \quad |x| \geq |y|.$$

Исбот. $x - y = z$ деб оламиз, y ҳолда $x = y + z$ ва юқорида исботланганига кўра:

$$|x| = |y + z| \leq |y| + |z| = |y| + |x - y|,$$

бундан:

$$|x| - |y| \leq |x - y|.$$

Шуни исботлаш талаб қилинган эди.

3. Кўпайтманинг абсолют қиймати кўпайтувчилар абсолют қийматларининг кўпайтмасига тенг:

$$|xyz| = |x||y||z|.$$

4. Бўлинманинг абсолют қиймати бўлинувчи ва булувчи абсолют қийматларининг бўлинмасига тенг:

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Кейинги икки хосса абсолют қийматнинг таърифидан бево-сита келиб чиқади.

3-§. Ўзгарувчи ва ўзгармас миқдорлар

Вақт, узунлик, юз, ҳажм, масса, тезлик, босим, температура ва шунга ўхшаш физик миқдорларни ўлчаш натижасида уларнинг сон қийматлари аниқланади. Математика миқдорлар билан, уларнинг конкрет мазмунини эътиборга олмаган ҳолда, шуғулланади. Бундан буён миқдорлар ҳақида гапирганимизда биз уларнинг сон қийматларини назарда тутамиз. Турли ҳодисаларда баъзи миқдорлар ўзгаради, яъни уларнинг сон қийматлари ўзгаради, баъзи миқдорларнинг сон қийматлари ўзгармайди. Масалан, нуқтанинг текис ҳаракатида вақт ва масофа ўзгаради; тезлик ўзгармай қолаверади.

Турли сон қийматлар қабул қиладиган миқдор *ўзгарувчи миқдор* дейилади. Сон қийматлари ўзгармайдиган миқдор *ўзгармас миқдор* дейилади. Бундан буён ўзгарувчи миқдорларни $x, y, z, u, \dots$ ва ҳоказо ҳарфлар билан, ўзгармас миқдорларни $a, b, c, \dots$ ва ҳоказо ҳарфлар билан белгилаймиз.

Изоҳ. Кўпинча математикада ўзгармас миқдорга ўзгарувчи миқдорнинг барча сон қийматлари бир хил бўлган хусусий ҳоли деб қаралади.

Шуни ҳам қайд қилиб ўтиш керакки, конкрет физик ҳодисалар кўрилатганда бир хил исмли миқдор бир ҳодисада

ўзгарувчи, бошқа бир ҳодисада ўзгармас бўладиган ҳол бўлиши ҳам мумкин. Масалан, текис ҳаракатнинг тезлиги ўзгармас миқдор, текис тезланувчи ҳаракатнинг тезлиги эса ўзгарувчи миқдордир. Ҳар қандай ҳодисада ҳам ўз қийматини ўзгартирмайдиган миқдорлар *абсолют ўзгармас миқдорлар* дейилади. Масалан, айлана узунлигининг диаметрига нисбати абсолют ўзгармас миқдордир: $\pi = 3,14159...$

Бутун курс давомида кўрамизки, ўзгарувчи миқдор тушунчаси дифференциал ва интеграл ҳисобнинг асосий тушунчасидир. „Математикада бурилиш пункти,— деб ёзади. Ф. Энгельс ўзининг „Табиат диалектикаси“ асарида — Декартнинг ўзгарувчи миқдори бўлди. Шу туфайли математикага *ҳаракат ва диалектика* кирди ҳамда шу туфайлигина дифференциал ва интеграл ҳисоб *тезда зарур* бўлиб қолди“.

4- §. Ўзгарувчи миқдорнинг ўзгариш соҳаси

Ўзгарувчи миқдор турли сон қийматлар қабул қилади. Текширилаётган масаланинг характериға қараб, бу қийматлар тўплами турлича бўлиши мумкин. Масалан, одатдаги шаронзда иситилаётган сувнинг температураси $15-18^{\circ}\text{C}$ бўлган уй температурасидан бошлаб, қайнаш нуқтаси 100°C гача ўзгаради. $x = \cos \alpha$ ўзгарувчи миқдор эса -1 дан $+1$ гача бўлган барча қийматларни қабул қилиши мумкин.

Ўзгарувчи миқдорнинг қийматлари геометрик равишда сонлар ўқининг нуқталари билан тасвирланади. Масалан, $x = \cos \alpha$ ўзгарувчининг қийматлари α нинг мумкин бўлган барча қийматларида сонлар ўқи кесмасининг -1 ва $+1$ ни ҳам ўз ичига олган -1 дан $+1$ гача бўлган нуқталари тўплами билан тасвирланади (2- расм).

Таъриф. Ўзгарувчи миқдорнинг барча сон қийматлари тўплами шу ўзгарувчининг *ўзгариш соҳаси* дейилади.

Ўзгарувчи миқдорнинг бундан буён тез-тез учрайдиган қуйидаги ўзгариш соҳаларини қайд қилиб ўтамыз.

Берилган a ва b ($a < b$) сонлар орасида ётувчи барча x сонлар тўплами *оралиқ* ёки *интервал* дейилади, бунда a ва b сонларнинг ўзлари қаралаётган сонлар тўпламига тегишли эмас; у оралиқ (a, b) билан ёки $a < x < b$ тенгсизликлар билан белгиланади.

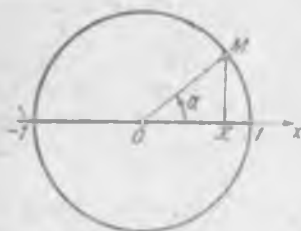
Берилган иккита a ва b сонлар орасида ётувчи барча x сонлар тўплами *кесма* ёки *сегмент* дейилади, бунда a ва b сонларнинг иккаласи ҳам қаралаётган тўпламга тегишли бўлади; у кесма $[a, b]$ билан ёки $a \leq x \leq b$ тенгсизликлар билан белгиланади. Баъзан кесма *ёпиқ оралиқ* ёки *ёпиқ интервал* дейилади.

Агар a ва b сонлардан бири, масалан a , оралиққа қушилиб, иккинчиси қушилмаса, у ҳолда *ярим ёпиқ оралиқ* ҳосил бўлади, буни

$$a \leq x < b$$

тенгсизликлар билан бериш ва $[a, b]$ билан белгилаш мумкин. Агар b сони оралиққа кирса ва a сони кирмаса, у ҳолда *ярим ёпиқ оралиқ* $(a, b]$ ҳосил бўлади, уни бундай тенгсизликлар билан бериш мумкин:

$$a < x \leq b.$$



2- расм.

Агар ўзгарувчи x миқдор a дан катта ҳар қандай қийматлар қабул қиларса, у ҳолда бундай интервал $(a, +\infty)$ билан белгиланади ва $a < x < +\infty$ шартли тенгсизликлар билан берилди. Шунингдек, шартли тенгсизликлар

$$a \leq x < +\infty; -\infty < x < c; -\infty < x \leq c; -\infty < x < +\infty$$

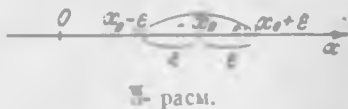
билан берилдиган чексиз интерваллар ва ярим ёпиқ чексиз интерваллар ҳам қараб чиқилади.

Мисол. $x = \cos x$ ўзгарувчининг ўзгариш соҳаси α нинг мумкин бўлган ҳамма қийматларида $[-1, 1]$ кесмадан иборат ва $-1 \leq x \leq 1$ тенгсизликлар билан аниқланади.

Юқорида берилган таърифларни „сон“ тушунчаси ўрнига „нуқта“ тушунчасидан фойдаланиб ифодалаш мумкин, масалан:

Берилган a ва b нуқталар (*кесманинг учлари*) орасида ётувчи ҳамма x нуқталар тўплами *кесма* дейилади, бунда кесманинг учлари шу тўпламга тегишли бўлади.

Берилган x_0 нуқтанинг *атрофи* деб, шу нуқтани ўз ичига олган, яъни учлари $a < x_0 < b$ шартни қаноатлантирадиган ихтиёрий (a, b) интервалга айтилади. Купинча x_0 нуқтанинг шундай (a, b) атрофи олинадик, унинг учун x_0 ўрта бўлади. У вақтда x_0 — *атрофнинг маркази*, $\frac{b-a}{2}$ миқдор *атрофнинг радиуси* дейилади. 3- расмда x_0 нуқтанинг ε радиусли атрофи $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ тасвирланган.



5- §. Тартибланган ўзгарувчи миқдор.
Ўсувчи ва камаювчи ўзгарувчи миқдорлар.
Чекланган ўзгарувчи миқдор

Агар x ўзгарувчи миқдорнинг ўзгариш соҳаси маълум бўлса ва унинг ихтиёрий ҳар икки қийматининг қайси бири олдинги ва қайси бири кейинги эканлигини айтиш мумкин бўлса, бу ўзгарувчини *тартибланган ўзгарувчи миқдор* деб айтамыз. Бу ерда „олдинги“ ва „кейинги“ тушунчалари вақт билан боғлиқ бўлмай, балки ўзгарувчи миқдор қийматини „тартиблаш“ усули, яъни ўзгарувчи миқдорнинг тегишли қийматларининг тартибини аниқлашдан иборатдир.

Қийматлари $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ сонлар-кетма-кетлигини ҳосил қиладиган ўзгарувчи миқдор тартибланган ўзгарувчи миқдорнинг хусусий ҳолидир. Бу ерда $k' < k$ да қайси бири катталигидан қатъи назар x_k — „олдинги“ қиймат, $x_{k'}$ эса „кейинги“ қийматдир.

1- таъриф. Агар ўзгарувчи миқдорнинг ҳар бир кейинги қиймати олдинги қийматидан катта бўлса, ўзгарувчи миқдор *ўсувчи* дейилади. Агар ўзгарувчи миқдорнинг ҳар бир кейинги қиймати олдинги қийматидан кичик бўлса, ўзгарувчи миқдор *камаювчи* дейилади.

Ўсувчи ўзгарувчи миқдорлар ва камаювчи ўзгарувчи миқдорлар *монотон ўзгарадиган* ўзгарувчи миқдорлар ёки, тўғридан-тўғри, *монотон миқдорлар* дейилади.

Мисол. Доирага ички чизилган мунтазам кўпбурчак томонларининг сонни иккилантириб борилганда, бу кўпбурчакнинг s юзи ўсувчи ўзгарувчи миқдор бўлади. Доирага ташқи чизилган мунтазам кўпбурчак томонларининг сонни иккилантириб борилганда унинг юзи камаювчи ўзгарувчи миқдор бўлади. Ҳар қандай ўзгарувчи миқдор ҳам албатта ўсувчи ёки камаювчи бўлавермаслигини курсатиб ўтамыз. Масалан, агар α миқдор $[0, 2\pi]$ кесмада ўсувчи бўлса, $x = \sin \alpha$ ўзгарувчи монотон миқдор бўлмайди. У аввал 0 дан 1 гача ўсади, сўнгра 1 дан —1 гача камаяди, ундан кейин —1 дан 0 гача ўсади.

2- таъриф. Агар шундай ўзгармас $M > 0$ сон мавжуд бўлиб, ўзгарувчининг бирор қийматидан бошлаб, унинг барча кейинги қийматлари

$$-M \leq x \leq M, \text{ яъни } |x| \leq M$$

шартни қаноатлантирса, ўзгарувчи x миқдор *чекланган* дейилади. Бошқача айтганда, агар шундай $[-M, M]$ кесмани курсатиш мумкин бўлсаки, ўзгарувчи миқдорнинг бирор қийматидан бошлаб, ундан кейинги барча қийматлари шу кесмага тегишли бўлса, ўзгарувчи миқдор чекланган дейилади. Лекин ўзгарувчи миқдор $[-M, M]$ кесмадаги ҳамма қийматларни

$$x > a.$$

$$x \leq b.$$

албатта қабул қилади деб ўйлаш ярамайди. Масалан, $[-2, 2]$ кесмада мумкин бўлган барча рационал қийматларни қабул қиладиган ўзгарувчи миқдор чекланган, шундай бўлишига қарамай у $[-2, 2]$ кесмадаги барча қийматларни ҳам қабул қилавермайди, яъни иррационал қийматларни қабул қилмайди.

6- §. Функция

Табиатнинг турли ҳодисаларини ўрганишда ва техникага доир масалаларни ечишда, бинобарин, математикада ҳам бир миқдорнинг ўзгаришини бошқа миқдорнинг ўзгаришига боғлиқ равишда куриб чиқишга тўғри келади. Масалан, ҳаракатни ўрганишда ўтилган йўл вақтнинг ўзгаришига боғлиқ ҳолда ўзгарадиган ўзгарувчи миқдор деб қаралади. Бу ерда ўтилган йўл вақтнинг функцияси дир.

Бошқа мисол қарайлик. Маълумки, доиранинг юзи радиус орқали $Q = \pi R^2$ тенглик билан ифодаланади. Агар R радиус турли сон қийматларни қабул қилса, у ҳолда доиранинг юзи Q ҳам турли сон қийматларни қабул қилади. Шундай қилиб, бир ўзгарувчининг ўзгариши бошқасининг ўзгаришига сабаб бўлади. Бу ерда доиранинг Q юзи R радиусининг функцияси-дир. „Функция“ тушунчасининг таърифини берамиз.

1- таъриф. Агар ўзгарувчи x нинг бирор соҳага тегишли ҳар бир қийматида бошқа ўзгарувчи у нинг маълум бир қиймати тўғри келса, у ҳолда у ўзгарувчи x нинг *функцияси* бўлади. Бу символик тарзда бундай ёзилади: $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ ва ҳоказо.

Ўзгарувчи x *эркли ўзгарувчи ёки аргумент* деб аталади. x ва y ўзгарувчилар орасидаги муносабат функционал боғланиш дейилади. Функционал боғланишнинг $y = f(x)$ символик ёзилишида f ҳарфи у нинг қийматини ҳосил қилиш учун x нинг қиймати устида қандай амаллар бажарилиши кераклигини кўрсатади. $y = f(x)$, $u = \varphi(x)$ ва ҳоказо ёзувлар ўрнига баъзан $y = u(x)$, $u = u(x)$ ва ҳоказо ёзилади, яъни у ҳарфи эркин ўзгарувчини ҳам, x нинг устида бажариладиган амаллар тўплами символини ҳам белгилайди.

$y = C$ ёзув x нинг ҳар қандай қийматида бир хил ва C га тенг бўлган функцияни билдирадн, бу ерда C ўзгармас миқдорга тенг.

2- таъриф. x нинг берилган $f(x)$ қондага биноан у функциянинг қийматлари топиладиган қийматлари тўплами *функциянинг аниқланиш соҳаси* (функциянинг *борлик соҳаси ёки мавжудлик соҳаси*) дейилади.

1- мисол. $y = \sin x$ функция x нинг барча қийматлари учун аниқланган. Демак, унинг мавжудлик соҳаси $-\infty < x < +\infty$ чексиз интервал бўлади.

1-изох. Агар иккита ўзгарувчи x ва $y = f(x)$ миқдорнинг функционал боғланишига эга бўлсак ҳамда x ва $y = f(x)$ тартибланган ўзгарувчи миқдорлар деб қаралса, y ҳолда функциянинг аргументнинг иккита x^* ва x^{**} қийматига мос иккита $y^* = f(x^*)$, $y^{**} = f(x^{**})$ қийматидан аргументнинг кейинги қийматига мос бўлгани функциянинг кейинги қиймат бўлади. Шунинг учун, масалан, қуйидаги таъриф табиидир.

3-тариф. Агар $y = f(x)$ функция шундай бўлсаки, x аргументнинг катта қийматига функциянинг катта қиймати мос келса, $y = f(x)$ функция ўсувчи дейилади. Камаювчи функция ҳам худди шундай таърифланади.

2-мисол. $0 < R < +\infty$ да $Q = \pi R^2$ ўсувчи функция, чунки R нинг катта қийматига Q нинг катта қиймати мос келади.

2-изох. Баъзан функция тушунчасининг таърифида x нинг бирор соҳага тегишли ҳар бир қийматига y нинг бир эмас, бир неча қийматлари ёки ҳатто чексиз куп қийматлари туплами мос келади, деб фараз қилинади. Бу ҳолда функцияни юқорида таърифланган бир қийматли деб аталувчи функциядан фарқ қилиш учун, куп қийматли функция дейилади. Бундан буён функция ҳақида гапирганимизда фақат бир қийматли функцияларни назарда тутамиз. Агар баъзида куп қийматли функция билан иш куриш зарур бўлиб қолса, y ҳолда биз алоҳида айтиб ўтамиз.

7-§ Функциянинг берилиш усуллари

1. Функция берилишининг жадвал усули

Бу усулда аргументнинг маълум тартибдаги $x_1, x_2, \dots, x_n$ қийматлари ва функциянинг шуларга мос $y_1, y_2, \dots, y_n$ қийматлари ёзилади.

x	x_1	x_2	$\dots\dots\dots$	x_n
y	y_1	y_2	$\dots\dots\dots$	y_n

Тригонометрик функциялар жадваллари, логарифмлар жадваллари ва ҳоказолар функциянинг жадвал усулда берилишига мисол бўлади.

Ҳодисаларни экспериментал равишда ўрганиш натижасида ҳам ўлчанаётган миқдорлар орасидаги функционал боғланишни ифодаловчи жадваллар ҳосил бўлиши мумкин. Масалан, метео-

5471/552
299/1745

рологик майдончада маълум кунда ҳавонинг температурасини ўлчаш натижасида қуйидаги жадвал ҳосил бўлади.

Вакт t га (соат ҳисобида) боғланишда температура (T) нинг қиймати (градус ҳисобида).

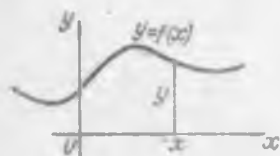
t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T	0	-1	-2	-2	-0,5	1	3	3,5	4

Бу жадвал T ни t нинг функцияси каби аниқлайди.

II. Функция берилишининг график усули.

Агар текисликда тўғри бурчакли координаталар системасида қандайдир $M(x, y)$ нуқталар тўпламига эга бўлсак ва бунда шу тўпламнинг ҳар қандай иккита нуқтаси Oy ўққа параллел

тўғри чизиқда ётмаса, y ҳолда бу нуқталар тўплами бирор $y = f(x)$ бир қийматли функцияни аниқлайди; аргументнинг қийматлари нуқталарнинг абсциссаларидан, функциянинг қийматлари тегишли ординаталаридан иборатдир (4-расм).



4-расм.

Абсциссалари эркин ўзгарувчининг қийматларидан, ординаталари эса функциянинг тегишли қийматларидан иборат бўлган (xOy) текисликдаги нуқталар тўплами берилган функциянинг *графи* дейилади.

III. Функция берилишининг аналитик усули

Аввало „аналитик ифода“ тушунчасини изоҳлаймиз. Ўзгармас ёки ўзгарувчи миқдорларни белгиловчи сонлар ва ҳарфлар устида маълум тартибда бажариладиган маълум математик амаллар (операциялар) тўпламининг символик тарздаги белгисини *аналитик ифода* деб атаёмиз.

Маълум математик амаллар тўплами деган сўздан фақат ўрта мактаб курсидан маълум (қушиш, айириш, илдиз чиқариш ва ҳоказо) амалларнигина эмас, балки бу курсни ўрганиш давомида аниқлана борадиган амалларни ҳам тушунишимизни қайд қилиб ўтамиз.

Масалан, қуйидагилар аналитик ифодалардир:

$$x^4 - 2, \quad \frac{\lg x - \sin x}{5x^2 + 1}, \quad 2x - \sqrt{5 + 3x}$$

ва ҳоказо.

Агар $y = f(x)$ функционал боғланиш шундай булсаки, унда f аналитик ифодани белгиласа, y ҳолда x нинг функцияси: *у аналитик тарзда берилган* дейилади.

Аналитик тарзда берилган функцияларга мисоллар:

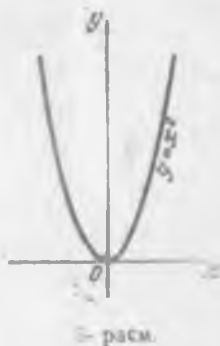
- 1) $y = x^4 - 2$, 2) $y = (x + 1)(x - 1)^{-1}$, 3) $y = \sqrt{1 - x^2}$,
4) $y = \sin x$, 5) $Q = \pi R^2$ ва ҳоказо.

Бу ерда функциялар биргина формула ёрдамида аналитик усулда берилган (формула деган сўздан икки аналитик ифоданинг тенглиги тушунилади). Бундай ҳолларда функция аниқланишининг табиий аниқланиш соҳаси ҳақида гапирish мумкин.

x нинг ўнг томонда турувчи аналитик ифода бутунлай аниқ қийматга эга бўладиган қийматларининг туплами аналитик усулда берилган *функциянинг табиий аниқланиш соҳасидир*. Масалан, $y = x^4 - 2$ функциянинг табиий аниқланиш соҳаси — $-\infty < x < +\infty$ чексиз интервалдан иборат, чунки функция x нинг барча қийматларида аниқланади. $y = (x + 1)(x - 1)^{-1}$ функция x нинг, $x = 1$ қийматидан бошқа, ҳамма қийматларида аниқланган; $x = 1$ қийматда махражнинг қиймати нолга айланади. $y = \sqrt{1 - x^2}$ функциянинг табиий аниқланиш соҳаси $-1 \leq x \leq 1$ кесма бўлади ва ҳоказо.

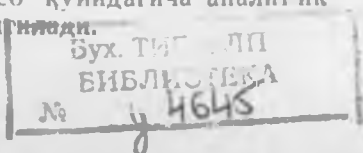
Изоҳ. Баъзан функция аниқланишининг бутун табиий соҳаси қаралмасдан, балки унинг бир қисмини қараш керак бўлади. Масалан, доира юзи Q нинг R радиусга боғлиқлиги $Q = \pi R^2$ функция билан аниқланади. Бу геометрик масалада берилган функциянинг аниқланиш соҳаси $0 < R < +\infty$ чексиз интервалдан иборат. Бу функция аниқланишининг табиий соҳаси эса $-\infty \leq R < +\infty$ чексиз интервалдан иборатдир.

Агар $y = f(x)$ функция аналитик усулда берилган булса, y ҳолда бу функция xOy координаталар текислигида график тарзда тасвирланиши мумкин. Масалан, $y = x^2$ функциянинг графиги 5-расмда тасвирланган параболадир.



8-§. Асосий элементар функциялар. Элементар функциялар

Асосий элементар функциялар деб қуйидагича аналитик усул билан берилган функцияларга айтади.



I. Даражали функция: $y = x^a$, бунда a — ҳақиқий сон*).

II. Кўрсаткичли функция: $y = a^x$, бунда a — бирга тенг бўлмаган мусбат сон.

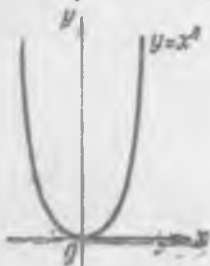
III. Логарифмик функция: $y = \log_a x$, бунда логарифм асоси a — бирга тенг бўлмаган мусбат сон.

IV. Тригонометрик функциялар:

$$\begin{array}{lll} y = \sin x, & y = \cos x, & y = \operatorname{tg} x, \\ y = \operatorname{ctg} x, & y = \sec x, & y = \operatorname{cosec} x. \end{array}$$

V. Тескари тригонометрик функциялар:

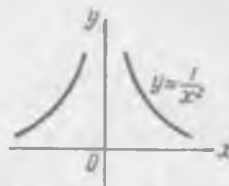
$$\begin{array}{lll} y = \arcsin x, & y = \arccos x, & y = \operatorname{arctg} x, \\ y = \operatorname{arccot} x, & y = \operatorname{arcsec} x, & y = \operatorname{arccosec} x. \end{array}$$



6- расм.



7- расм.



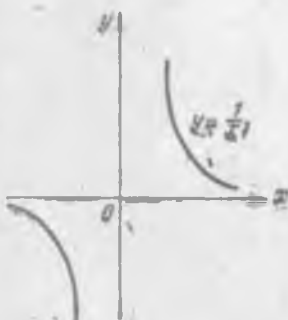
8- расм.

Асосий элементар функцияларнинг аниқланиш соҳаларини ва графикларини кўриб чиқамиз.

Даражали функция: $y = x^a$.

1. a бутун мусбат сон. Функция $-\infty < x < +\infty$ чексиз интервалда аниқланган. Бу ҳолда функциянинг графиклари a нинг баъзи бир қийматларида 6- ва 7-расмларда тасвирланган кўринишларда бўлади.

2. a бутун манфий сон. Бу ҳолда функция x нинг $x = 0$ дан бошқа ҳамма қийматларида аниқланган. Функциянинг графиклари a нинг баъзи бир қийматларида 8- ва 9-расмларда тасвирланган кўринишларда бўлади.

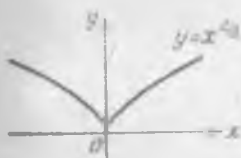


9- расм.

*) a иррационал сон бўлганда бу функция логарифмлаш ва потенцирлаш йўли билан ҳисобланади: $\log y = a \log x$. Бунда $x > 0$ деб фараз қилинади.

10, 11, 12- расмларда a нинг рационал каср қийматлари учун даражали функциянинг графиклари тасвирланган.

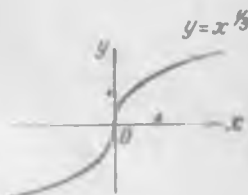
Курсаткичли функция, $y = a^x$, $a > 0$ ва $a \neq 1$. Бу функция x нинг ҳамма қийматларида аниқланган. Унинг графиги 13- расмда тасвирланган кўринишга эга.



10- расм.



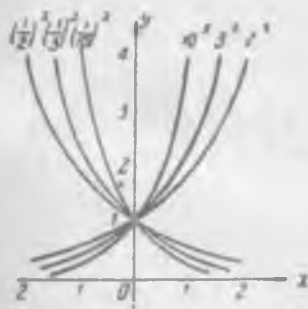
11- расм.



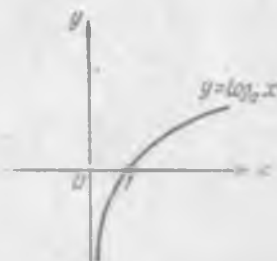
12- расм.

Логарифмик функция, $y = \log_a x$, $a > 0$ ва $a \neq 1$. Бу функция $x > 0$ қийматларда аниқланган. Унинг графиги 14- расмда тасвирланган.

Тригонометрик функциялар. $y = \sin x$ ва ҳоказо формулаларда эркин ўзгарувчи x радиан билан ифодаланади. Тригонометрик функцияларнинг ҳаммаси даврийдир. Даврий функциянинг умумий таърифини келтирамыз.



13- расм.



14- расм.

1- таъриф. Агар шундай ўзгармас сон C мавжуд бўлиб, x аргументга бу сон қўшилганда (ёки айрилганда) функциянинг қиймати ўзгармаса, яъни $f(x + C) = f(x)$ бўлса, $y = f(x)$ *даврий функция* дейилади. Бундай энг кичик сон функциянинг *даври* дейилади; бундан буён уни $2l$ билан белгилаймиз.

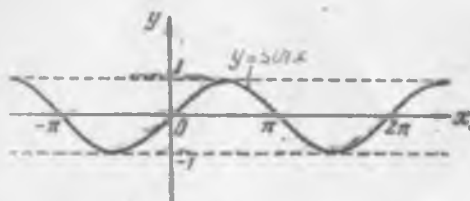
Таърифдан бевосита келиб чиқадики, $y = \sin x$ даври 2π бўлган даврий функциядир: $\sin x = \sin(x + 2\pi)$. $\cos x$ нинг даври ҳам 2π га тенг. $y = \operatorname{tg} x$ ва $y = \operatorname{ctg} x$ функцияларнинг даври π га тенг.

$y = \sin x$, $y = \cos x$ функциялар x нинг барча қийматларида аниқланган; $y = \operatorname{tg} x$ ва $y = \operatorname{sec} x$ функциялар x нинг

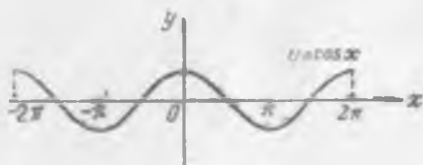
$$x = (2k + 1) \frac{\pi}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

нуқталардан бошқа ҳамма қийматларида аниқланган; $y = \operatorname{ctg} x$ ва $y = \operatorname{cosec} x$ функциялар x нинг

$$x = k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$



15- расм.



16- расм.

нуқталардан бошқа барча қийматларида аниқланган. Тригонометрик функцияларнинг графиклари 15—19- расмларда тасвирланган.

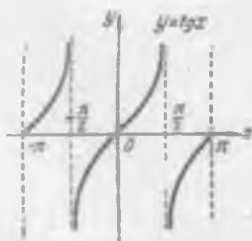
Тескари тригонометрик функцияларни кейинроқ батафсил кўриб чиқамиз.

Сўнгра функциянинг функцияси тушунчасини киритамиз. Агар y u нинг функцияси бўлиб, u эса u навбатида x ўзгарувчига боғлиқ бўлса, u ҳолда y ҳам x га боғлиқ бўлади. Фараз қилайлик,

$$y = F(u)$$

ва

$$u = \varphi(x)$$



17- расм.



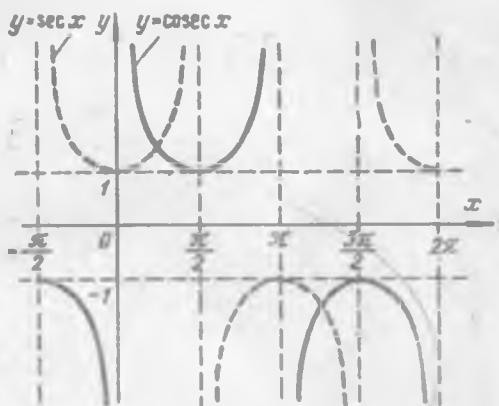
18- расм.

булсин. x нинг y функциясини ҳосил қиламиз:

$$y = F[\varphi(x)].$$

Охирги функция функциянинг функцияси ёки мураккаб функция дейилади.

1-мисол. $y = \sin u$, $u = x^2$ бўлсин. $y = \sin(x^2)$ функция x нинг мураккаб функциясидан иборат.



19- расм.

Изоҳ. $y = F[\varphi(x)]$ функциянинг аниқланиш соҳаси ё $u = \varphi(x)$ функциянинг бутун аниқланиш соҳаси, ёки u нинг $F(u)$ функция аниқланиш соҳасидан ташқари чиқмайдиган қийматлари аниқланадиган қисми бўлади.

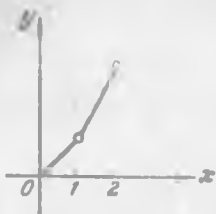
2-мисол. $y = \sqrt{1-x^2}$ ($y = \sqrt{u}$, $u = 1-x^2$) функциянинг аниқланиш соҳаси $[-1, 1]$ кесмадан иборат, чунки $|x| > 1$ да $u < 0$ ва, бинобарин, ($u = 1-x^2$ функция x нинг ҳамма қийматларида аниқланган булса ҳам) $\sqrt{u}$ функция аниқланмаган. Бу функциянинг графиги маркази координаталар бошида ва радиуси бирга тенг айлананинг устки яримдан иборат бўлади.

„Функциянинг функцияси“ амали бир марта эмас, бир неча марта бажарилиш мумкин. Масалан, $y = \ln[\sin(x^2 + 1)]$ функция қуйидаги амаллар (қуйидаги функцияларнинг аниқланиши) натижасида ҳосил қилинади:

$$v = x^2 + 1, \quad u = \sin v, \quad y = \ln u.$$

Энди элементар функция тушунчасини таърифлаймиз.

2-таъриф. Элементар функция деб $y = f(x)$ куринишдаги биргина формула билан берилиши мумкин булган функцияга айтилади, бунда уннг томонда турувчи ифода чекли сон-



20-расм.

да қушиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш ва функциянинг функцияси амаллари ёрдамида асосий элементар функциялардан ва ўзгармаслардан тузилган.

Таърифдан элементар функциялар аналитик усулда берилган функциялар эканлиги келиб чиқади.

Элементар функцияларга мисоллар:

$$y = |x| = \sqrt{x^2},$$

$$y = \sqrt{1 + 4\sin^2 x}, \quad y = \frac{\log x + 4\sqrt[3]{x} + 2\lg x}{10x - x + 10}.$$

Элементар бўлмаган функцияларга мисоллар:

$y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ ($y = f(n)$) функция элементар функция эмас, чунки y ни топши учун керак бўлган амаллар сони n нинг ўсиши билан ортади, яъни чекланган эмас.

Изоҳ. 20-расмда тасвирланган функция

$$\begin{aligned} \text{агар } 0 \leq x \leq 1 & \quad \text{бўлса, } f(x) = x, \\ \text{агар } 1 \leq x \leq 2 & \quad \text{бўлса, } f(x) = 2x - 1 \end{aligned}$$

икки формула ёрдамида берилган бўлса ҳам, элементар функциядир.

Бу функцияни $0 \leq x \leq 2$ қийматлар учун битта формула билан бериш ҳам мумкин:

$$f(x) = \frac{3}{2} \left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}|x - 1| = \frac{3}{2} \left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \sqrt{(x - 1)^2}.$$

(V боб машқларидаги 139–144- мисолларга қаралсин.)

9-§. Алгебраик функциялар

Алгебраик функциялар жумласига қуйидагича кўринишдаги элементар функциялар киради:

1. Бутун рационал функция ёки кўпҳад:

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n,$$

бу ерда $a_0, a_1, \dots, a_n$ — коэффициентлар деб аталадиган ўзгармас сонлар; n манфий бўлмаган бутун сон бўлиб, кўпҳаднинг даражаси дейилади. Бу функция x нинг ҳамма қийматларида, яъни чексиз интервалда аниқланганлиги равшан.

1-мисол. $y = ax + b$ *чизиqli функция*. $b = 0$ бўлганда $y = ax$ *чи-зиqli функция* y нинг x га пропорционаллик боғланишини ифодалайди. $a = 0$ бўлганда $y = b$ функция ўзгармасдир.

2- мисол. $y = ax^2 + bx + c$ квадратик функция. Квадратик функциянинг графиги параболадан иборат (21- расм).

Бу функциялар аналитик геометрияда муфассал қараб чиқилган.

II. Рационал каср функция. Бу функция иккита купҳаднинг нисбати каби аниқланади:

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}$$

Масалан, тескари пропорционал муносабатни ифодаловчи

$y = \frac{a}{x}$ функция рационал каср

функциядир. Унинг графиги

22- расмда тасвирланган. Ра-

ционал каср функция x нинг

махражни нолга айлантиради-

ган қийматларидан бошқа ҳамма

қийматларида аниқланганлиги

кўриниб турибди.

III. Иррационал функция. Агар $y = f(x)$ формула-

нинг ўнг томонида қушиш, айтириш, купайтириш, бўлиш ва

бутун бўлмаган рационал кўрсаткичли даражага кўтариш амал-

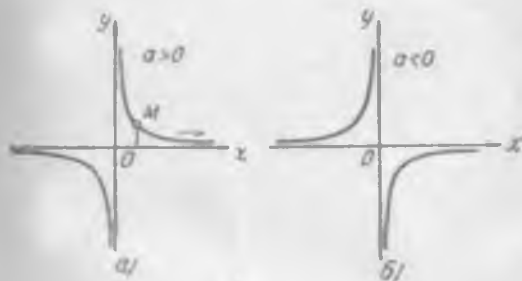
лари бажарилса, y га

x нинг иррационал

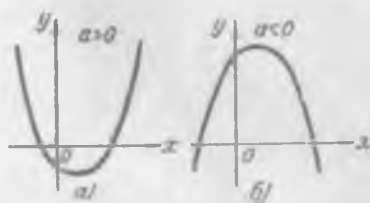
функцияси дейилади.

Иррационал функ-

цияларга мисоллар:



22- расм.



21- расм.

бутиш булмаган рационал кўрсаткичли даражага кўтариш амаллари бажарилса, y га x нинг иррационал функцияси дейилади.

Иррационал функцияларга мисоллар:

$$y = \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{1 + 5x^2}},$$

$y = \sqrt{x}$ ва шунга ухшаш.

1- изоҳ. Алгебраик функцияларнинг кел-

тирилган уч кўриниши алгебраик функцияларнинг ҳаммасини ўз ичига олмайди.

Ушбу

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \dots + P_n(x) = 0 \quad (1)$$

кўринишдаги тенгламани қаноатлантирувчи ҳар қандай $y = f(x)$ функция алгебраик функция деб аталади; бу ерда $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$ лар x га нисбатан бирор купҳадлардир.

Келтирилган уч кўринишдаги функцияларнинг ҳар бири (1) кўринишдаги тенгламани қаноатлантиришни, лекин (1) кўринишдаги тенгламани қаноатлантирувчи ҳар қандай функ-

а) $f(4)$. Жав. 17. б) $f(\sqrt{2})$. Жав. 3. в) $f(a+1)$. Жав. $a^2 + 2a + 2$.
 г) $f(a) + 1$. Жав. $a^2 + 2$. д) $f(a^2)$. Жав. $a^4 + 1$. е) $[f(a)]^2$. Жав. $a^4 + 2a^2 + 1$. ж) $f(2a)$. Жав. $4a^2 + 1$.

3. $\varphi(x) = \frac{x-1}{3x+5}$. Ушбу $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ ва $\frac{1}{\varphi(x)}$ ифодалар ёзилсин. Жав.
 $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-x}{3+5x}$; $\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{3x+5}{x-1}$.

4. $\psi(x) = \sqrt{x^2+4}$. Ушбу $\psi(2x)$ ва $\psi(0)$ ифодалар ёзилсин. Жав.
 $\psi(2x) = 2\sqrt{x^2+1}$; $\psi(0) = 2$.

5. $f(0) = \lg 0$. Ушбу тенглик $f(20) = \frac{2f(0)}{1-[f(0)]^2}$ текшириб кўриласин.

6. $\varphi(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$. Ушбу тенглик $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$ текшириб кўриласин.

7. $f(x) = \lg x$, $\varphi(x) = x^3$. Қуйидаги ифодалар ёзилсин: а) $f[\varphi(2)]$. Жав. $3 \lg 2$. б) $f[\varphi(a)]$. Жав. $3 \lg a$. в) $\varphi[f(a)]$. Жав. $[\lg a]^3$.

8. $y = 2x^2 + 1$ функция аниқланишининг табиий соҳаси топилсин. Жав. $-\infty < x < +\infty$.

9. Қуйидаги функциялар аниқланишининг табиий соҳалари топилсин:

а) $\sqrt{1-x^2}$. Жав. $-1 < x < +1$. б) $\sqrt{3+x} + \sqrt{7-x}$. Жав. $-3 < x < 7$.
 в) $\sqrt[3]{x+a} - \sqrt[5]{x-b}$. Жав. $-\infty < x < +\infty$. г) $\frac{a+x}{a-x}$. Жав. $x \neq a$.
 д) $\arcsin^2 x$. Жав. $-1 < x < 1$. е) $y = \lg x$. Жав. $x > 0$. ж) $y = a^x$ ($a > 0$). Жав. $-\infty < x < +\infty$.

Қуйидаги функцияларнинг графиклари ясалсин:

10. $y = -3x + 5$. 11. $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$. 12. $y = 3 - 2x^2$.
 13. $y = x^2 + 2x - 1$. 14. $y = \frac{1}{x-1}$. 15. $y = \sin 2x$. 16. $y = \cos 3x$.
 17. $y = x^2 - 4x + 6$. 18. $y = \frac{1}{1-x^2}$. 19. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
 20. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. 21. $y = \lg \frac{1}{2}x$. 22. $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{4}$. 23. $y = 3^x$.
 24. $y = 2^{-x^2}$. 25. $y = \log_2 \frac{1}{x}$. 26. $y = x^2 + 1$. 27. $y = 4 - x^2$. 28. $y = \frac{1}{x^2}$.
 29. $y = x^4$. 30. $y = x^6$. 31. $y = \sqrt{x}$. 32. $y = (\sqrt{x})^{-1}$. 33. $y = \sqrt[3]{x}$.
 34. $y = |x|$. 35. $y = \log_2 |x|$. 36. $y = \log_2 (1-x)$. 37. $y = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.
 38. $y = 4 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

39. $f(x)$ функция $[-1; 1]$ кесмада қуйидагича аниқланган:

$$-1 < x < 0 \text{ да } f(x) = 1 + x;$$

$$0 < x < 1 \text{ да } f(x) = 1 - 2x.$$

40. $f(x)$ функция $[0; 2]$ кесмада қуйидагича аниқланган:

$$0 < x < 1 \text{ да } f(x) = x^2;$$

$$1 < x < 2 \text{ да } f(x) = x.$$

Қутб координаталарида қуйидаги тенгламалар билан берилган эгри чизиклар ясалсин:

41. $\rho = \frac{a}{\varphi}$ (гиперболик спираль). 42. $\rho = a^{\varphi}$ (логарифмик спираль).

43. $\rho = a \sqrt{\cos 2\varphi}$ (лемниската). 44. $\rho = a(1 - \cos \varphi)$ (кардиоида).

45. $\rho = a \sin 3\varphi$.

ция келтирилган уч кўринишдаги функциялардан бири була-
вермаслигини исботлаш мумкин.

2-изоҳ. Алгебраик бўлмаган функция *трансцендент*
функция дейилади.

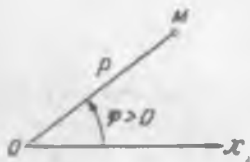
Трансцендент функцияларга мисоллар:

$$y = \cos x, \quad y = 10^x \quad \text{ва шунга ўхшаш.}$$

10-§. Қутб координаталари системаси

Текисликдаги нуқтанинг ўрнини *қутб координаталари*
системаси деб аталадиган система ёрдамида аниқлаш мумкин.

Текисликда, *қутб* деб аталадиган, бирор O нуқтани ва бу
нуқтадан чиқувчи *қутб ўқи* деб аталадиган ярим тўғри чизиқ-
ни танлаб оламиз. Текисликдаги бирор
 M нуқтанинг ўрни иккита сон: M нуқ-
танинг қутбдан узоқлигини ифодаловчи
 ρ сон ва OM кесманинг қутб ўқи билан
ҳосил қилган бурчак миқдори φ сон
билан аниқланиши мумкин. φ бурчакни
ҳисоблашда соат стрелкаси йўналишига
тескари йўналиш мусбат йўналиш ҳи-
собланади. ρ ва φ сонлар M нуқтанинг
қутб координаталари дейилади (23-
расм).



23- расм.

ρ радиус-векторни доимо манфий эмас деб ҳисоблаймиз.
Агар φ қутб бурчаги $0 \leq \varphi < 2\pi$ ярим ёпиқ ораликда олинса,
у ҳолда текисликнинг қутбдан бошқа ҳар бир нуқтасига тўла
аниқ бир жуфт сон ρ ва φ мос келади. Қутб учун $\rho = 0$, φ —
ихтиёрий.

Қутб координаталари билан тўғри бурчакли Декарт коор-
динаталари орасидаги муносабатни аниқлаймиз. Тўғри бурчак-
ли координаталар системасининг боши қутб билан, Ox ўқининг
мусбат йўналиши эса қутб ўқи билан устма-уст тушган бўлсин.

24- расмдан бевосита қуйидагилар келиб чиқади:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

ва аксинча,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

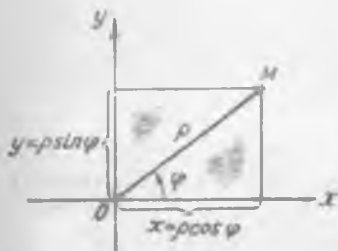
Изоҳ. φ ни топишда нуқтанинг қайси чоракда ётганлиги-
ни эътиборга олиб, φ нинг шунга мос қийматини олиш керак.

$\rho = F(\varphi)$ тенглама қутб координаталари системасида бирор
чизиқни аниқлайди.

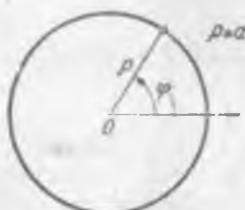
1- мисол. Ушбу $\rho = a$ тенглама қутб координатларида маркази қутб-
да ва радиуси a бўлган айланани аниқлайди, бу ерда $a = \text{const}$. Тўғри бур-
чакли координаталар системасида 24- расмда курсатилгандек жойлашган ай-
лананинг тенгламаси

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \text{ ёки } x^2 + y^2 = a^2$$

булади (25- расм).



24- расм.



25- расм.



26- расм.

2- мисол.

$\rho = a \varphi$, бу ерда $a = \text{const}$.

φ нинг баъзи қийматлари учун ρ нинг қийматлари жадвалини тузамиз:

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	3π	4π
ρ	0	$\approx 0,78a$	$\approx 1,57a$	$\approx 2,36a$	$\approx 3,14a$	$\approx 4,71a$	$\approx 6,28a$	$\approx 9,42a$	$\approx 12,56a$

Бу қийматларга мос эгри чизик 26- расмда тасвирланган. Бу эгри чизик
Архимед спирали дейилади.

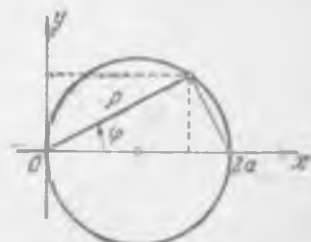
3- мисол.

$$\rho = 2a \cos \varphi.$$

Бу — маркази $\rho_0 = a, \varphi = 0$ нуқтада, радиуси a га тенг бўлган айлана тенг-
ламасидан иборат (27- расм). Бу айлананинг тенгламасини тўғри бурчакли
координаталар билан ёзамиз. Берилган тенг-

ламага $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ қий-

матларни қўйиб, $\sqrt{x^2 + y^2} = 2a \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ёки
 $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ тенгламага эга бўламиз.



27- расм.

1 Собға машқлар

1. $f(x) = x^3 + 6x - 4$ функция берилган.
 $f(1) = 3, f(3) = 23$ экани текшириб кўрилсин.

2. $f(x) = x^2 + 1$. Қуйидаги қийматлар ҳи-
соблансин:

II БОБ

ЛИМИТ. ФУНКЦИЯНИНГ УЗЛУКСИЗЛИГИ

1- §. Ўзгарувчи миқдорнинг лимити.

Чексиз катта ўзгарувчи миқдор

Бу параграфда биз „ўзгарувчи миқдор лимитга интилади“ терминлари билан аниқланадиган махсус равишда ўзгарадиган тартибланган ўзгарувчи миқдорларни текшираемиз. Бундан буён бутун курс бўйича ўзгарувчининг лимити тушунчаси асосий роль ўйнайди, чунки математик анализнинг ҳосила, интеграл ва бошқа асосий тушунчалари у билан бевосита боғлиқдир.

1- таъриф. Агар ҳар бир олдиндан берилган ихтиёрий кичик мусбат ε сон учун ўзгарувчи x нинг шундай қийматини кўрсатиш мумкин бўлсаки, ўзгарувчининг барча кейинги қийматлари ушбу

$$|x - a| < \varepsilon$$

тенгсизликни қаноатлантирса, ўзгармас „ a “ сон ўзгарувчи x миқдорнинг *лимити* (*охирги марраси*) дейилади.

Агар a сон ўзгарувчи x миқдорнинг лимити бўлса, у ҳолда x ўзгарувчи a га интилади дейилади ва

$$x \rightarrow a \text{ ёки } \lim x = a^*$$

кўринишда ёзилади.



28- расм.

Геометрик терминларда лимитнинг таърифини қуйидагича ифодалаш мумкин:

Агар маркази a нуқтада ва радиуси ε бўлган олдиндан берилган ихтиёрий ҳар қанча кичик атроф учун x нинг шундай

қиймати топилсаки, ўзгарувчининг кейинги қийматларига тегишли барча нуқталар шу атрофда бўлса, ўзгармас a сон ўзгарувчи x нинг *лимити* бўлади (28- расм). Лимитга интилувчи ўзгарувчиларнинг бир неча мисолини кўраемиз.

1- мисол: ўзгарувчи миқдор x кетма-кет қуйидаги қийматларни қабул қилади:

$$x_1 = 1 + 1, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad x_3 = 1 + \frac{1}{3}, \dots, \quad x_n = 1 + \frac{1}{n}, \dots$$

*) „ $\lim$ “ қисқартирилган латинча limes — марра (чек) деган сўздир.

лантирса, ўзгарувчи миқдор x „плюс чексизликка интилади“ дейилади ва $x \rightarrow +\infty$ кўринишда ёзилади.

Плюс чексизликка интилувчи ўзгарувчи миқдорга $x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_n = n, \dots$ қийматларни қабул қиладиган x ўзгарувчи миқдор мисол бўлади.

Агар ихтиёрий $M > 0$ да ўзгарувчининг бирор қийматидан бошлаб барча кейинги қийматлари $x < -M$ тенгсизлиқни қаноатлантирса, ўзгарувчи миқдор „минус чексизликка интилади“ $x \rightarrow -\infty$.

Масалан, $x_1 = -1, x_2 = -2, \dots, x_n = -n, \dots$ қийматларни қабул қиладиган ўзгарувчи x минус чексизликка интилади.

2- §. Функциянинг лимити

Бу параграфда x аргумент бирор a лимитга ёки чексизликка интилганда функция ўзгаришининг баъзи бир ҳолларини текшираимиз.

1- таъриф. Фараз қилайлик, $y = f(x)$ функция a нуқта-нинг бирор атрофида ёки бу атрофнинг баъзи бир нуқталарида аниқланган бўлсин. Агар ҳар бир мусбат ε сон учун, y қанчалик кичик бўлмасин, шундай мусбат δ сонни кўрсатиш мумкин бўлсаки, x нинг a дан фарқи ва

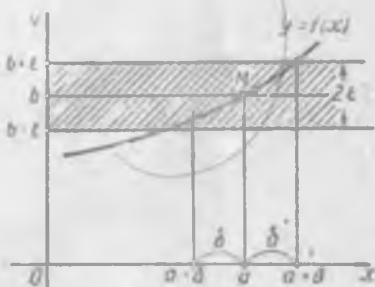
$$|x - a| < \delta$$

тенгсизлиқни*) қаноатлангивувчи барча қийматлари учун $|f(x) - b| < \varepsilon$ тенгсизлик ўрибли бўлса, x аргумент a га интилганда ($x \rightarrow a$), $y = f(x)$ функция b лимитга интилади ($y \rightarrow b$). Агар $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функциянинг лимити b бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

ёки $x \rightarrow a$ да $f(x) \rightarrow b$ ёзилади.

Агар $x \rightarrow a$ да $f(x) \rightarrow b$ бўлса, у ҳолда $y = f(x)$ функциянинг графигида бу қуйидагича тасвирланади (31- расм); $|x - a| < \delta$ тенгсизлиқдан $|f(x) - b| < \varepsilon$ тенгсизлик чиқар экан, у ҳолда бу, a нуқтадан δ дан йироқ бўлмаган масофада ту-



31- расм.

*) Бу ерда x нинг $|x - a| < \delta$ тенгсизлиқни қаноатлантирувчи ва функциянинг аниқланиш соҳасига тааллуқли қийматлари назарда тутилади. Бундан буён ҳам шундай ҳолатлар учраб туради. Масалан, $x \rightarrow \infty$ да функциянинг ўзгаришини текширишда функция x нинг фақат бутун мусбат қийматлари учун аниқланган бўлиши мумкин. Бинобарин, бу ҳолда x фақат бутун мусбат қийматларни қабул қилиб чексизликка интилади ($x \rightarrow \infty$). Бундан кейин бу ҳақда изоҳ бериб ўтирмаймиз.

рувчи барча x нуқталар учун $y = f(x)$ функция графигининг M нуқталари $y = b - \varepsilon$ ва $y = b + \varepsilon$ тўғри чизиқлар билан chegarаланган, эни 2ε бўлган йўл (полоса) ичида ётади.

1- изоҳ. $f(x)$ функциянинг $x \rightarrow a$ даги лимитини қуйидагича таърифлаш ҳам мумкин.

Фараз қилайлик, ўзгарувчи миқдор x қийматларни шундай қабул қиладики (шундай тартибланган бўладики), агар

$$|x' - a| > |x'' - a|$$

булса, y ҳолда x'' кейинги, x' эса олдинги қиймат бўлади; агар $|x' - a| = |x'' - a|$ ва $\bar{x} < \bar{x}'$ булса, y ҳолда $\bar{x}'$ кейинги, $\bar{x}$ эса олдинги қиймат бўлади.

Бошқача айтганда, сонлар тўғри чизигининг иккита нуқтасидан a нуқтага яқини кейинги нуқтадир; масофалар тенг бўлганда a нуқтадан ўнгдагиси кейинги нуқта бўлади.

Шу равишда тартибланган ўзгарувчи x миқдор a лимитга интилсин [$x \rightarrow a$ ёки $\lim x = a$].

Сўнгра $y = f(x)$ ўзгарувчини текшираимиз. Бунда ва бундан кейин функциянинг иккита қийматидан аргументнинг кейинги қийматига тегишли булганини функциянинг кейинги қиймати деб ҳисоблаймиз.

Агар шундай аниқланган y ўзгарувчи миқдор $x \rightarrow a$ да бирор b лимитга интилса, y ҳолда

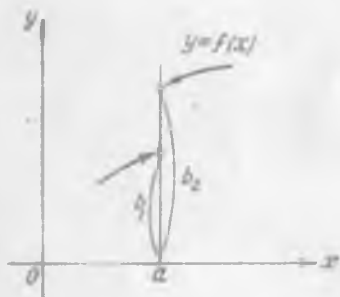
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

кўринишда ёзамиз ва $y = f(x)$ функция $x \rightarrow a$ да b лимитга интилади деб айтаимиз.

Функция лимитининг иккала таърифи эквивалент (тенг кучли) эканлигини исботлаш осон.

2- изоҳ. Агар x бирор a сондан кичик қийматларнигина қабул қилиб, шу a сонга интилганда $f(x)$ функция b_1 лимитга интилса, y ҳолда $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b_1$ ёзилади ва b_1 га $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги чап лимити дейилади. Агар x фақат a дан катта қийматларнигина қабул қилса, y ҳолда $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b_2$ ёзилади ва b_2 га функциянинг a нуқтадаги ўнг лимити дейилади (32- расм).

Агар ўнг лимит ва чап лимит мавжуд ва тенг, яъни $b_1 = b_2 = b$ бўлса y ҳолда b , лимитнинг юқорида берилган таърифи маъносида, a нуқтадаги лимитнинг ўзи бўлишини исботлаш



32- расм.

мумкин. Аксинча, агар a нуқтада функциянинг лимити b мавжуд бўлса, у ҳолда функциянинг a нуқтада ўнг ва чап лимитлари мавжуд ва улар тенг бўлади.

1- м и с о л. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = 7$ эканини исботлаймиз. Ҳақиқатан, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ берилган бўлсин; ушбу

$$|(3x + 1) - 7| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилиши учун қуйидаги тенгсизликларнинг бажарилиши зарур:

$$|3x - 6| < \varepsilon, \quad |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad -\frac{\varepsilon}{3} < x - 2 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Шундай қилиб, исталган ε да x нинг $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta$ тенгсизликини қаноатлантирувчи барча қийматлари учун $3x + 1$ функция қийматининг 7 дан фарқи ε дан кичик бўлади. Бу эса $x \rightarrow 2$ да функциянинг лимити 7 демакдир.

3- и з о ҳ. Функциянинг лимити $x \rightarrow a$ да мавжуд бўлиши учун функция $x = a$ нуқтада аниқланган бўлиши талаб қилинмайди. Лимитни топишда a нуқтанинг a дан фарқли атрофида функциянинг қийматлари қаралади; бу ҳол қуйидаги мисол билан очиқ тасвирланади.

2- м и с о л. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$ эканини исботлаймиз. Бу ерда $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ функция $x = 2$ да аниқланмаган.

Ихтиёрий ε да шундай δ топиладики, агар $|x - 2| < \delta$ бўлса,

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon \quad (1)$$

тенгсизлик бажарилишини исботлаш керак. Аммо $x \neq 2$ да (1) тенгсизлик

$$\left| \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} - 4 \right| = |x + 2 - 4| < \varepsilon$$

тенгсизликка ёки

$$|x - 2| < \varepsilon \quad (2)$$

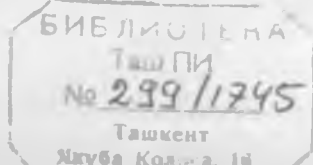
тенгсизликка эквивалентдир.

Шундай қилиб, ихтиёрий ε да (2) тенгсизлик бажарилса, (1) тенгсизлик бажарилади (бу ерда $\delta = \varepsilon$). Бунинг узи, берилган функция $x \rightarrow 2$ да 4 сонидан иборат лимитга эга демакдир.

Энди, $x \rightarrow \infty$ да функция ўзгаришининг баъзи ҳолларини кўрамиз.

2- таъриф. Ҳар бир ихтиёрий кичик мусбат ε сон учун шундай мусбат N сонни курсатиш мумкин бўлсаки, x нинг $|x| > N$ тенгсизликини қаноатлантирувчи барча қийматлари учун $|f(x) - b| < \varepsilon$ тенгсизлик қаноатлантирилса, $x \rightarrow \infty$ да $f(x)$ функция b лимитига интилади.

З. Н. О. Пискунов



3- мисол.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x} \right) = 1$$

ёки бошқача ёзувда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1$$

эканини исботлаймиз. Агар фақат $|x| > N$ бўлса, ихтиёрий ε да

$$\left| \left(1 + \frac{1}{x} \right) - 1 \right| < \varepsilon \quad (3)$$

тенгсизлик бажарилишини исботламоқ керак, бунда ε танлаиши билан N аниқланади. (3) тенгсизлик $\left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$ тенгсизликка эквивалент; $|x| > \frac{1}{\varepsilon} = N$ бўлса, $\left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади. Бунинг маъноси



33- расм

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

демаклар (33- расм).

Ушбу $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ символларининг маъносини билган ҳолда, символик тарзда

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

кўринишда ёзиладиган

- $x \rightarrow +\infty$ да $f(x)$ b га интилади" ва
- $x \rightarrow -\infty$ да $f(x)$ b га интилади"

нофодаларнинг маънолари равшан бўлади.

3- §. Чексизликка интилувчи функция Чекланган функциялар

Биз $x \rightarrow a$ ёки $x \rightarrow \infty$ да $f(x)$ функциянинг бирор b лимит-га интилиш ҳолларини кўрдик.

Энди аргумент бирор усул билан ўзгарганда $y = f(x)$ функция чексизликка интилган ҳолни кўрамиз.

1- таъриф. Ҳар қанча катта мусбат M сон учун шундай $\delta > 0$ қийматни топиш мумкин бўлсаки, x нинг $|x - a| < \delta$ шартни қаноатлантирадиган a дан фарқли барча қийматлари учун $|f(x)| > M$ тенгсизлик ўринли бўлса, $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функция чексизликка интилади, яъни $x \rightarrow a$ да функция чексиз катта миқдор бўлади.

Агар $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функция чексизликка интилса, у ҳолда бундай ёзилади:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

ёки $x \rightarrow a$ да $f(x) \rightarrow \infty$.

Агар $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функция чексизликка интилса ва бунда фақат мусбат ёки фақат манфий қийматлар қабул қилса, мос равишда бундай ёзилади: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ёки $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

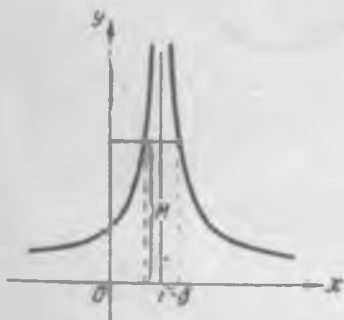
1-мисол. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$ эканини исботлаймиз. Ҳақиқатан, ҳар қандай $M > 0$ да фақат

$$(1-x)^2 < \frac{1}{M}, \quad |1-x| < \frac{1}{\sqrt{M}} = \delta$$

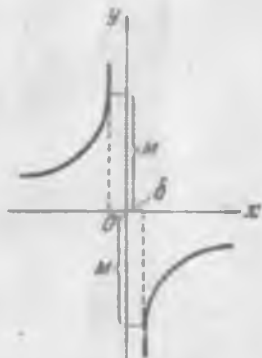
булса,

$$\frac{1}{(1-x)^2} > M$$

га ага бўлаемиз. $\frac{1}{(1-x)^2}$ функция фақат мусбат қийматлар қабул қилади (34-расм).



34-расм.



35-расм.

2-мисол. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x}\right) = \infty$ эканини исботлаймиз. Ҳақиқатан, натижийи $M > 0$ да фақат

$$|x| = |x - 0| < \frac{1}{M} = \delta$$

булса,

$$\left|-\frac{1}{x}\right| > M$$

бўлади. Бу ерда $x < 0$ да $\left(-\frac{1}{x}\right) > 0$ ва $x > 0$ да $\left(-\frac{1}{x}\right) < 0$ (35-расм).

Агар $x \rightarrow \infty$ да $f(x)$ функция чексизликка интилса, у ҳолда бундай ёзилади:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

ва жумладан

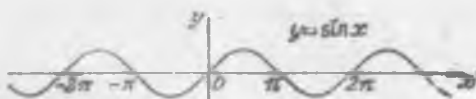
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

булиши мумкин.

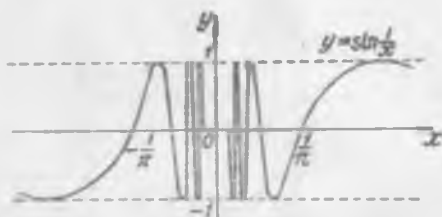
Масалан,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ ва ш. ў.}$$

1- низоҳ. $x \rightarrow a$ да ёки $x \rightarrow \infty$ да $y = f(x)$ функция чекли лимитга ёки чексизликка интилмаслиги мумкин.



36- расм.



37- расм.

3- мисол. $-\infty < x < +\infty$ чексиз интервалда аниқланган $y = \sin x$ функция $x \rightarrow \infty$ да чекли лимитга ҳам, чексизликка ҳам интилмайди (36- расм).

4- мисол. x нинг $x=0$ дан бошқа ҳамма қийматларида аниқланган $y = \sin \frac{1}{x}$ функция $x \rightarrow 0$ да чекли лимитга ҳам, чексизликка ҳам интилмайди. Бу функциянинг графиги 37- расмда тасвирланган.

2- таъриф. Агар шундай мусбат M сон мавжуд бўлиб, аргумент x нинг қаралаётган соҳага тегишли барча қийматлари учун $|f(x)| \leq M$ тенгсизлик бажарилса, x

нинг берилган ўзгариш соҳасида $y = f(x)$ чекланган функция дейилади. Агар бундай M сон мавжуд бўлмаса, у ҳолда берилган соҳада $y = f(x)$ чекланмаган функция дейилади.

5- мисол. Чексиз $-\infty < x < +\infty$ интервалда аниқланган $y = \sin x$ функция чекланган, чунки x нинг барча қийматларида

$$|\sin x| < 1 = M.$$

3- таъриф. Агар маркази a нуқтада бўлган атроф мавжуд бўлиб, берилган функция шу атрофда чекланган бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $x \rightarrow a$ да чекланган дейилади.

4- таъриф. Агар шундай $N > 0$ сон мавжуд бўлиб, x нинг $|x| > N$ тенгсизликлари қаноатлантирувчи барча қийматларида

$f(x)$ функция чекланган бўлса, $y = f(x)$ функция $x \rightarrow \infty$ да чекланган дейилади.

Лимитга интилувчи функциянинг чекланганлиги ҳақидаги масала қуйидаги теорема билан ечилади.

1-теорема. Агар $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ бўлиб, b чекли сон бўлса, у ҳолда $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функция чекланган бўлади.

Исбот. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ тенгликдан исталган $\varepsilon > 0$ да шундай δ топиладики, $a - \delta < x < a + \delta$ атрофда,

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

ёки

$$|f(x)| < |b| + \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Бу эса $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функция чекланган демакдир.

2-изох. Чекланган $f(x)$ функциянинг таърифидан агар

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad \text{ёки} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty,$$

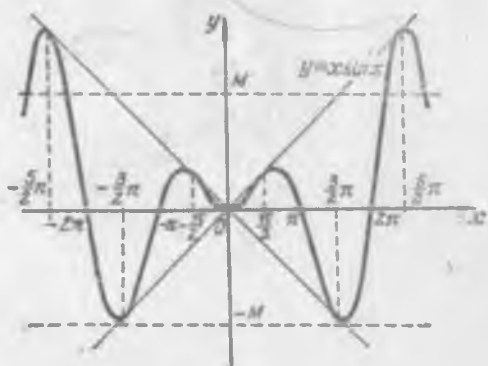
яъни $f(x)$ чексиз катта миқдор бўлса, у ҳолда функция чекланмаган бўлиши келиб чиқади. Бунинг акси: чекланмаган функция чексиз катта миқдор бўлмаслиги ҳам мумкин, деган жумла тўғри эмас.

Масалан, $y = x \sin x$ функция $x \rightarrow \infty$ да чекланмаган, чунки исталган $M > 0$ учун x нинг шундай қийматларини топиш мумкинки, $|x \sin x| > M$ бўлади. Лекин $y = x \sin x$ функция $x = 0, \pi, 2\pi, \dots$ қийматларда нолга айлани учун чексиз катта миқдор эмас. $y = x \sin x$ функциянинг графиги 38-расмда тасвирланган.

2-теорема. Агар $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq 0$ бўлса, у

ҳолда $y = \frac{1}{f(x)}$ функция $x \rightarrow a$ да чекланган функциядир.

Исбот. Теореманинг шартидан ихтиёрий $\varepsilon > 0$ да $x = a$ нуқтанинг бирор атрофида $|f(x) - b| < \varepsilon$ ёки $||f(x)| - |b|| < \varepsilon$, ёки $-\varepsilon < |f(x)| - |b| < \varepsilon$, ёки $|b| - \varepsilon < |f(x)| < |b| + \varepsilon$ бўлиши келиб чиқади.



38-расм.

Охирги тенгсизликлардан $\frac{1}{|b|-\varepsilon} > \frac{1}{|f(x)|} > \frac{1}{|b|+\varepsilon}$ келиб чиқадиги; масалан, $\varepsilon = \frac{1}{10}|b|$ деб олсак, ушбу

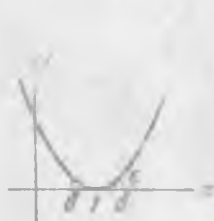
$$\frac{10}{9|b|} > \frac{1}{|f(x)|} > \frac{10}{11|b|}$$

тенгсизликларни ҳосил қиламиз. Бу эса $\frac{1}{f(x)}$ функция чекланган демакдир.

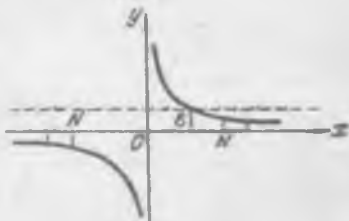
4- §. Чексиз кичик миқдорлар ва уларнинг асосий хоссалари

Бу параграфда аргументнинг бирор характердаги ўзгаришида юлган нтилувчи функцияларни текшираимиз.

Таъриф. Агар $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ ёки $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$ бўлса, $x \rightarrow a$ да ёки $x \rightarrow \infty$ да $\alpha = \alpha(x)$ функция чексиз кичик миқдор дейиладиги.



39- расм.



40- расм.

Лимитнинг таърибидан чиқадики, масалан, $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ бўлса, бу, олдиндан берилган ҳар қандай ихтиёрий кичик мусбат ε учун $\delta > 0$ топиладиги, x нинг $|x - a| < \delta$ шартни қаноатлантирувчи барча қийматлари учун $|\alpha(x)| < \varepsilon$ шартни қаноатлантирилади демакдир.

1- мисол. $\alpha = (x-1)^2$ функция $x \rightarrow 1$ да чексиз кичикдир, чунки $\lim_{x \rightarrow 1} \alpha = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0$ (39- расм).

2- мисол. $\alpha = \frac{1}{x}$ функция $x \rightarrow \infty$ да чексиз кичикдир (40- расм) (2- § даги 3- мисолга қаранг).

Келгуси учун муҳим бўлган бир муносабатни аниқлаймиз:

1- теорема. Агар $y = f(x)$ функция узгармас сон b билан чексиз кичик миқдор α нинг йиғиндиси

$$y = b + \alpha \quad (1)$$

кўринишда берилса, у ҳолда,

$$\lim y = b \quad (x \rightarrow a \text{ ёки } x \rightarrow \infty \text{ да}).$$

Аксинча, агар $\lim y = b$ бўлса, $y = b + \alpha$ ёзиш мумкин, бу ерда α чексиз кичик миқдор.

Исбот. (1) тенгликдан $|y - b| = |\alpha|$ келиб чиқади. Аммо ихтиёрий ε да, бирор қийматдан бошлаб, α нинг барча қийматлари $|\alpha| < \varepsilon$ муносабатни қаноатлантиради, демак, бирор қийматдан бошлаб, у нинг барча қийматлари учун $|y - b| < \varepsilon$ тенгсизлик қаноатлантирилади. Бунинг ўзи $\lim y = b$ демакдир.

Аксинча: агар $\lim y = b$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий ε да бирор қийматдан бошлаб, у нинг барча қийматлари учун $|y - b| < \varepsilon$ бўлади. Лекин $y - b = \alpha$ деб белгиласак, у ҳолда α нинг бирор қийматидан бошлаб, барча қийматлари учун $|\alpha| < \varepsilon$ бўлади, бу эса α чексиз кичик миқдор демакдир.

3- мисол. Функция

$$y = 1 + \frac{1}{x}$$

берилган бўлсин (41- раси), у ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 1,$$

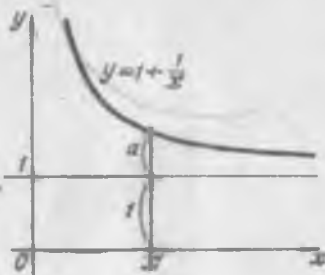
ва аксинча, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1$ бўлгани учун, ўзга-

рувчи у ни лимит 1 билан $\alpha = \frac{1}{x}$ чек-

сиз кичик миқдорнинг йиғиндиси, яъни

$$y = 1 + \alpha$$

кўринишда ёзиш мумкин.



41- раси.

2- теорема. Агар $x \rightarrow a$ да (ёки $x \rightarrow \infty$ да) $\alpha = \alpha(x)$ нолга интилса-ю, лекин нолга айланмаса, у ҳолда $y = \frac{1}{\alpha}$ чексизликка интилади.

Исбот. $M > 0$ исталганча катта бўлганда $|\alpha| < \frac{1}{M}$ тенгсизлик бажарилса, $\frac{1}{|\alpha|} > M$ тенгсизлик бажарилади. $|\alpha| < \frac{1}{M}$ тенгсизлик α нинг бирор қийматидан бошлаб, барча қийматлари учун бажарилади, чунки $\alpha(x) \rightarrow 0$.

3- теорема. Икки, уч ва умуман маълум сондаги чексиз кичик функцияларнинг алгебраик йиғиндиси чексиз кичик функциядир.

Исбот. Исботни иккита қўшилувчи учун келтирамыз, чунки саноғи исталганча бўлган қўшилувчилар учун теорема худди шундай исботланади.

$u(x) = \alpha(x) + \beta(x)$ бўлсин, бу ерда $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0$.

Ихтиёрий исталганча кичик $\varepsilon > 0$ шундай $\delta > 0$ топиладики, $|x - a| < \delta$ тенгсизлик қаноатлантирилганда $|u| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилишини исботлаймиз. $\alpha(x)$ чексиз кичик бўлгани учун шундай δ топиладики, маркази a нуқтада ва радиуси δ_1 бўлган атрофда

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

бўлади. $\beta(x)$ чексиз кичик бўлгани учун, маркази a нуқтада ва радиуси δ_2 бўлган атрофда $|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ бўлади.

Энди δ ни δ_1 ва δ_2 миқдорлардан кичигига тенг қилиб оламиз, у ҳолда a нуқтанинг δ радиусли атрофида $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ ва $|\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$ тенгсизликлар бажарилади. Бинобарин бу атрофда

$$|u| = |\alpha(x) + \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

яъни $|u| < \varepsilon$ бўладики, бу эса талаб қилинган исботдир.

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0$$

Булган ҳол учун ҳам исбот шундай ўтказилади.

Изоҳ. Бундан буён бизга шундай чексиз кичик миқдорларнинг йиғиндисини текширишга тўғри келадики, ҳар бир қўшилувчининг камайиши билан қўшилувчилар сони ортиб боради. Бу ҳолда теореманинг тасдиқи нотўғри бўлиб қолиши ҳам мумкин. Масалан, ушбу чексиз кичик миқдорлар йиғиндисини куздан кечирайлик:

$$u = \underbrace{\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{x}}_{x \text{ та қўшилувчи}}$$

бу ерда x бутун мусбат қийматлар ($x = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$) қабул қилади. Ҳар бир қўшилувчи $x \rightarrow \infty$ да чексиз кичиклиги, лекин йиғинди $u = 1$ чексиз кичик эмаслиги равшан.

4-теорема. Чексиз кичик $\alpha = \alpha(x)$ функциянинг чекланган $z = z(x)$ функция билан кўпайтмаси $x \rightarrow a$ (ёки $x \rightarrow \infty$) да чексиз кичик миқдордир (функциядир).

Исбот. Исботни $x \rightarrow a$ ҳол учун келтирамыз. Бирор $M > 0$ учун $x = a$ нуқтанинг шундай атрофи топиладики, бу атрофда $|z| < M$ тенгсизлик қаноатлантирилади. Ҳар қандай $\varepsilon > 0$ учун $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{M}$ тенгсизлик бажариладиган атроф топилади. Бу нукта атрофдан энг кичигида

$$|\alpha z| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Бу эса αz чексиз кичик демакдир. $x \rightarrow \infty$ ҳол учун ҳам исбот шу тариқа ўтказилади. Шу теоремадан қуйидаги натижалар чиқади:

1- натижа. Агар $\lim \alpha = 0$, $\lim \beta = 0$ бўлса, у ҳолда $\lim \alpha \beta = 0$, чунки $\beta(x)$ чекланган миқдор. Бу ҳол ҳар қандай чекли сондаги кўпайтувчилар учун ҳам ўринлидир.

2- натижа. Агар $\lim \alpha = 0$ ва $c = \text{const}$ бўлса, у ҳолда

$$\lim c\alpha = 0.$$

5- теорема. Чексиз кичик $\alpha(x)$ миқдорни лимити нолдан фарқли функцияга бўлишдан чиққан $\frac{\alpha(x)}{z(x)}$ булинма чексиз кичик миқдордир.

Исбот. $\lim \alpha(x) = 0$, $\lim z(x) = b \neq 0$ бўлсин. 3- § даги 2- теоремага асосан, $\frac{1}{z(x)}$ чекланган миқдор эканлиги чиқади.

Шунинг учун $\frac{\alpha(x)}{z(x)} = \alpha(x) \frac{1}{z(x)}$ каср чексиз кичик миқдорнинг чекланган сон билан кўпайтмаси, яъни чексиз кичик миқдордир.

5- §. Лимитлар ҳақида асосий теоремалар

Бу параграфда ҳам олдингидек, биргина x аргументга боғлиқ функциялар тўпламини текширамыз, бунда $x \rightarrow a$ ёки $x \rightarrow \infty$.

Биз исботни бу ҳоллардан биттаси учун келтирамыз, чунки иккинчиси учун исбот худди шундай ўтказилади. Баъзан биз умуман $x \rightarrow a$ ни ҳам, $x \rightarrow \infty$ ни ҳам ёзмаймиз, лекин булар ўрнига қараб англашилади.

1- теорема. Икки, уч ва умуман маълум сондаги узгарувчилар алгебраик йиғиндисининг лимити бу узгарувчилар лимитларининг алгебраик йиғиндисига тенг:

$$\lim (u_1 + u_2 + \dots + u_k) = \lim u_1 + \lim u_2 + \dots + \lim u_k.$$

Исбот. Исботни икки қўшилувчи учун келтирамыз, чунки қўшилувчилар сони ҳар қанча бўлганда ҳам исбот худди шундай ўтказилади. Айтайлик, $\lim u_1 = a_1$, $\lim u_2 = a_2$ бўлсин. У ҳолда 4- § даги 1- теоремага асосан бундай ёзиш мумкин:

$$u_1 = a_1 + \alpha_1, \quad u_2 = a_2 + \alpha_2,$$

бу ерда α_1 ва α_2 чексиз кичик миқдорлар. Демак,

$$u_1 + u_2 = (a_1 + a_2) + (\alpha_1 + \alpha_2).$$

$(a_1 + a_2)$ ўзгармас миқдор, $(a_1 + a_2)$ эса чексиз кичик миқдор, у ҳолда яна 4- § даги 1- теоремага асосан бундай хулоса чиқарамиз:

$$\lim (u_1 + u_2) = a_1 + a_2 = \lim u_1 + \lim u_2.$$

1- мисол.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 1 + 0 = 1.$$

2- теорема. Икки, уч ва умуман маълум сондаги ўзгарувчилар купайтмасининг limiti бу ўзгарувчилар лимитларининг купайтмасига тенг:

$$\lim u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n = \lim u_1 \cdot \lim u_2 \cdot \dots \cdot \lim u_n.$$

Исбот. Ёзувни ихчамлаш мақсадида исботни икки купайтувчи учун келтирамиз.

$$\lim u_1 = a_1, \quad \lim u_2 = a_2 \text{ бўлсин.}$$

Демак,

$$u_1 = a_1 + \alpha_1, \quad u_2 = a_2 + \alpha_2,$$

$$u_1 u_2 = (a_1 + \alpha_1)(a_2 + \alpha_2) = a_1 a_2 + a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2.$$

$a_1 a_2$ купайтма ўзгармас миқдор. 4- § даги теоремаларга асосан $a_1 a_2 + a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2$ чексиз миқдор. Демак, $\lim u_1 u_2 = a_1 a_2 = \lim u_1 \cdot \lim u_2$.

Натижа. Ўзгармас купайтувчини лимит ишорасидан ташқарига чиқариш мумкин.

Ҳақиқатан, агар $\lim u_1 = a_1$, c ўзгармас ва, демак, $\lim c = c$ бўлса, у ҳолда $\lim (cu_1) = \lim c \cdot \lim u_1 = c \cdot \lim u_1$, бу эса талб қилинган исботдир.

2- мисол.

$$\lim_{x \rightarrow 2} 5x^3 = 5 \lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 5 \cdot 8 = 40.$$

3- теорема. Махражининг limiti нолдан фарқли бўлса, икки ўзгарувчи миқдор бўлинмасининг limiti шу ўзгарувчилар лимитларининг бўлинмасига тенг:

$$\text{Агар } \lim v \neq 0 \text{ бўлса, } \lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}.$$

Исбот. $\lim u = a$, $\lim v = b \neq 0$ бўлсин. Демак, $u = a + \alpha$, $v = b + \beta$, бу ерда α ва β чексиз кичик миқдорлар.

Ушбу айниятни ёзамиз:

$$\frac{u}{v} = \frac{a + \alpha}{b + \beta} = \frac{a}{b} + \left(\frac{a + \alpha}{b + \beta} - \frac{a}{b} \right) = \frac{a}{b} + \frac{ab - \beta a}{b(b + \beta)}$$

ёки

$$\frac{u}{v} = \frac{a}{b} + \frac{ab - \beta a}{b(b + \beta)}.$$

$\frac{a}{b}$ каср ўзгармас сон, $\frac{ab - \beta a}{b(b + \beta)}$ каср эса 4-§ нинг 4-ва 5-теоремаларига мувофиқ чексиз кичик ўзгарувчи миқдордир, чунки $ab - \beta a$ чексиз кичик миқдор, $b(b + \beta)$ махраж эса $b^2 \neq 0$ лимитга эга. Бинобарин,

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{a}{b} = \frac{\lim u}{\lim v}.$$

3-мисол.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x + 5}{4x - 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (3x + 5)}{\lim_{x \rightarrow 1} (4x - 2)} = \frac{3 \lim_{x \rightarrow 1} x + 5}{4 \lim_{x \rightarrow 1} x - 2} = \frac{3 \cdot 1 + 5}{4 \cdot 1 - 2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Бу ерда биз касрнинг лимити ҳақида исботланган теоремадан фойдаландик, чунки $x \rightarrow 1$ да махражнинг лимити нолдан фарқли. Агар махражнинг лимити ноль бўлса касрнинг лимити ҳақидаги теоремани қўланиш мумкин эмас. Бу ҳолда махсус текширишлар ўтказиш керак бўлади.

4-мисол. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ топилисин.

Бу ерда $x \rightarrow 2$ да махраж ҳам, сурат ҳам нолга интилади ва демек, 8-теорема қўл келмайди. Қуйидаги айний алмаштиришни бажарамиз:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2.$$

Бу алмаштириш x нинг 2 дан фарқли ҳамма қийматлари учун ўринлидир. Шунинг учун лимитнинг таърифини назарда тутган ҳолда бундай ёза оламиз:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4.$$

5-мисол. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x - 1}$ топилисин. $x \rightarrow 1$ да махраж нолга интилади, сурат эса нолга интирмайдиган (сурат бирга интилади). Демак, тескари миқдорнинг лимити ноль, яъни

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)}{\lim_{x \rightarrow 1} x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Бундан ўтган параграфнинг 2-теоремасига асосан:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x - 1} = \infty.$$

4-теорема. Агар учта $u = u(x)$, $z = z(x)$, $v = v(x)$ функциянинг тегишли қийматлари орасида $u \leq z \leq v$ тенгсизликлар бажарилса, бунда $x \rightarrow a$ да (ёки $x \rightarrow \infty$ да) $u(x)$ ва

$v(x)$ биргина b лимитга интилса, у ҳолда $x \rightarrow a$ да (ёки $x \rightarrow \infty$ да) $z = z(x)$ ҳам шу лимитга интилади.

Исбот. Аниқлик учун $x \rightarrow a$ да функцияларнинг ўзгаришини текширамиз. $u \leq z \leq v$ тенгсизликлардан

$$u - b \leq z - b \leq v - b$$

тенгсизликлар келиб чиқади; шарт бўйича

$$\lim_{x \rightarrow a} u = b, \quad \lim_{x \rightarrow a} v = b.$$

Демак, исталган $\varepsilon > 0$ да маркази a нуқтада булган бирор атроф топиладики, бу атрофда $|u - b| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади; шунингдек маркази a нуқтада булган бирор атроф ҳам топиладики, бу атрофда $|v - b| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади. Кўрсатилган атрофлардан энг кичигида

$$-\varepsilon < u - b < \varepsilon \quad \text{ва} \quad -\varepsilon < v - b < \varepsilon$$

тенгсизликлар бажарилади, демак,

$$-\varepsilon < z - b < \varepsilon$$

тенгсизликлар бажарилади, яъни

$$\lim_{x \rightarrow a} z = b.$$

5-теорема. Агар $x \rightarrow a$ да (ёки $x \rightarrow \infty$ да) функция у манфий бўлмаган $u \geq 0$ да қийматларни қабул қилса ва бунда b лимитга интилса, у ҳолда b манфий бўлмаган $b \geq 0$ сондир.

Исбот. Фараз қилайлик, $b < 0$ бўлсин, у ҳолда $|u - b| \geq |b|$, яъни $|u - b|$ айирманинг модули $|b|$ мусбат сондан катта, демак, $x \rightarrow a$ да нолга интилмайди. Аммо, у вақтда $x \rightarrow a$ да у функция b га интилмайди, бу эса теореманинг шартига зид келади. Демак, $b < 0$ деб фараз қилиш қарама-қаршиликка олиб келади. Демак, $b \geq 0$.

Агар $u \leq 0$ бўлса, у ҳолда $\lim u \leq 0$ бўлиши шунинг сингарии исботланади.

6-теорема. Агар $x \rightarrow a$ да (ёки $x \rightarrow \infty$ да) лимитларига интилувчи иккита $u = u(x)$ ва $v = v(x)$ функциянинг тегишли қийматлари орасида $v \geq u$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $\lim v \geq \lim u$ булади.

Исбот. Шартга биноан $v - u \geq 0$, демак, 5-теоремага мувофиқ $\lim (v - u) \geq 0$ ёки $\lim v - \lim u \geq 0$, яъни $\lim v \geq \lim u$.

6-инсони. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ ни исботлаймиз.

42-расмдан: агар $OA = 1$, $x > 0$ бўлса, $AC = \sin x$, $AB = x$, $\sin x < x$ экани чиқади. $x < 0$ да $|\sin x| < |x|$ бўлиши равшан. Бу тенгсизликлардан 5 ва 6-теоремаларга асосан $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ эканлиги чиқади.

7-мисол. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{x}{2} = 0$ ни исботлаймиз.
 Ҳақиқатан,

$$\left| \sin \frac{x}{2} \right| < \left| \sin x \right|.$$

Демак,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{x}{2} = 0.$$

8-мисол. $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ ни исботлаймиз.



42-расм.

$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ эканини эътиборга оламиз, демак,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) = 1 - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - 0 = 1.$$

Ўзгарувчиларнинг limiti ҳақидаги масаланинг баъзи бир текширишларида иккита мустақил масалани ечишга тўғри келади:

1) ўзгарувчининг limiti мавжудлигини исботлаш ва ичида текширилаётган лимит ётадиган чегараларни аниқлаш;

2) текширилаётган лимитни керакли даражада аниқлик билан ҳисоблаш.

Баъзан биринчи масала келгуси учун муҳим бўлган қуйидаги теорема ёрдами билан ечиладн.

7-теорема. *Агар ўзгарувчи миқдор v ўсувчи, яъни унинг ҳар бир кейинги қиймати олдингисидан катта булса ва у чекланган, яъни $v < M$ булса, бу ўзгарувчи миқдор $\lim v = a$ лимитга эгадир, бу ерда $a \leq M$.*

Чекланган ҳолда камайиб борадиган ўзгарувчи миқдор учун ҳам шундай тасдиқ ўринлидир.

Бу теореманинг исботини бу ерда келтирмаймиз, чунки у ҳақиқий сонлар назариясига асосланади, биз бу ерда у назарияни келтирмаймиз*).

Қуйидаги икки параграфда математикада кўп татбиқ этиладиган иккита функциянинг limitлари чиқарилади.

6-§. $x \rightarrow 0$ да $\frac{\sin x}{x}$ функциянинг limiti

$\frac{\sin x}{x}$ функция $x = 0$ да аниқланмаган, чунки касрнинг сураг ва махражи нолга айланади. Бу функциянинг $x \rightarrow 0$ даги limitини топамиз. Радиуси 1 бўлган айланани қараймиз (43-расм);

*) Бу теореманинг исботи, масалан, Г. М. Фихтенгольцнинг „Математик анализ асослари“, 1-том, 1970, китобида келтирилган.

МОВ марказий бурчакии x билан белгилаймиз, бунда $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

43- расмдан бевосита қуйдагилар чиқади:

$$\triangle MOA \text{ юзи} < \widehat{MOA} \text{ сектор юзи} < \triangle COA \text{ юзи.} \quad (1)$$

$$\triangle MOA \text{ юзи} = \frac{1}{2} OA \cdot MB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin x.$$

$$\widehat{MOA} \text{ сектор юзи} = \frac{1}{2} OA \cdot \widehat{MA} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x = \frac{1}{2} x.$$

$$\triangle COA \text{ юзи} = \frac{1}{2} OA \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x.$$

(1) тенгсизлик $\frac{1}{2}$ га қисқартирилгандан сўнг бундай ёзилади:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Ҳамма ҳадларини $\sin x$ га бўламиз:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

ёки

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$



43- расм

Биз бу тенгсизликни $x > 0$ фараз қилиб чиқардик;

$\frac{\sin(-x)}{(-x)} = \frac{\sin x}{x}$ ва $\cos(-x) = \cos x$ эканлигини эътиборга олиб, бу тенгсизлик $x < 0$ да ҳам тўғри деган хулосага келамиз. Аммо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Демак, $\frac{\sin x}{x}$ ўзгарувчи шундай икки миқдор оралигидаки, уларнинг иккаласи ҳам биргина лимитга интилади ва у лимит 1 га тенг; шундай қилиб, ўтган параграфнинг 4- теоремасига асосан

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$y = \frac{\sin x}{x}$ функциянинг графиги 44- расмда тасвирланган.

Мисоллар.

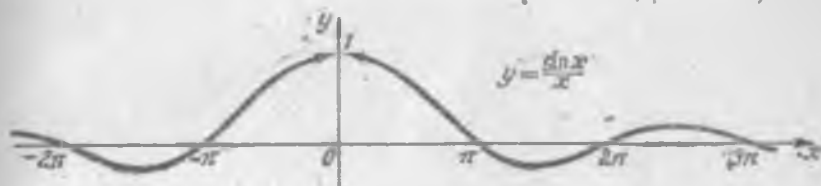
$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} k \frac{\sin kx}{kx} = k \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(kx)}{(kx)} = k \cdot 1 = k \quad (k = \text{const}).$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \sin \frac{x}{2} = 1 \cdot 0 = 0.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\frac{\sin \alpha x}{\alpha x}}{\frac{\sin \beta x}{\beta x}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \beta x}{\beta x}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{1}{1} = \frac{\alpha}{\beta}$$

($\alpha = \text{const}, \beta = \text{const}$).



44- расм.

7- §. e сони

Ушбу

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ўзгарувчи миқдорни текшираимиз, n бу ерда натурал қатор сонларининг 1, 2, 3, ... қийматларини қабул қиладиган ўсувчи миқдор.

1- теорема. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ўзгарувчи миқдор $n \rightarrow \infty$ да 2 билан 3 орасида ётувчи лимитга эга.

Исбот. Ньютон биноми формуласига мувофиқ бундай ёзишимиз мумкин:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n}{1} \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots \\ &\dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots [n-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \left(\frac{1}{n}\right)^n. \end{aligned} \quad (1)$$

(1) тенгликни қуйидагича алмаштиришимиз мумкин:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

Охирги тенгликдан $(1 + \frac{1}{n})^n$ ўзгарувчи миқдор n ўсиши билан ўсадиган ўзгарувчи миқдор эканлиги чиқади. Ҳақиқатан, n қийматдан $n + 1$ қийматга ўтганда охирги йигиндининг ҳар бир қўшилувчиси ўсади.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \text{ ва ҳоказо}$$

ва яна бир ҳад қўшилади. (Ёйилмаининг ҳамма ҳадлари мусбат.)

Энди $(1 + \frac{1}{n})^n$ ўзгарувчи миқдор чекланганлигини кўрсатамиз. $(1 - \frac{1}{n}) < 1$; $(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) < 1$ ва ҳоказо эканлигини қайд қилиб, (2) ифодадан ушбу тенгсизликни ҳосил қиламиз:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}$$

Сўнгра

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} < \frac{1}{2!}, \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} < \frac{1}{3!}, \quad \dots, \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} < \frac{1}{n!}$$

эканлигини қайд қилиб, тенгсизликни бундай ёзмағимиз мумкин:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Бу тенгсизликнинг ўнг томонида тагига чизилган ҳадлар маҳражи $q = \frac{1}{2}$ ва биринчи ҳади $a = 1$ бўлган геометрик прогрессияни ҳосил қилади, шунинг учун

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &< 1 + \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right] = \\ &= 1 + \frac{a - aq^n}{1 - q} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] < 3. \end{aligned}$$

Демак, барча n учун шу тенгсизликни ҳосил қиламиз:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

(2) тенгликдан

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$$

келиб чиқади.

Шундай қилиб, ушбу тенгсизликни ҳосил қиламиз:

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3. \quad (3)$$

Бу билан $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ўзгарувчи миқдор чекланганлиги аниқланди.

Демак, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ўзгарувчи миқдор ўсувчи ва чекланган, шунинг учун 5- § даги 7- теоремага асосан у лимитга эга. Бу лимит e ҳарфи билан белгиланади.

Таъриф. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ўзгарувчи миқдорнинг $n \rightarrow \infty$ даги лимити e сони дейлади:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

5- § даги 6- теоремага асосан (3) тенгсизликдан e сони ҳам $2 \leq e \leq 3$ тенгсизликни қаноатлантириши чиқади. Теорема ишботланди.

e сони иррациональ сон. Кейинроқ уни исталган даражада аниқлик билан ҳисоблаш методи кўрсатилади. Унинг вергулдан кейинги ўнта ишончли рақамли қиймати:

$$e = 2,7182818284 \dots$$

2- теорема. x чексизликка интилганда $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ функция e лимитга интилади, яъни

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Исбот. Агар n бутун мусбат қийматлар қабул қилса, $n \rightarrow \infty$ да $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$ аниқланган эди. Энди x каср қийматлар ҳам, манфий қийматлар ҳам қабул қилган ҳолда, чексизликка интилсин.

1) $x \rightarrow +\infty$ дейлик. Унинг ҳар бир қиймати иккита мусбат бутун сон орасида:

$$n \leq x < n + 1.$$

Бунда қуйидаги тенгсизликлар бажарилади:

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1},$$

*) n монотон ўсаядиган ўзгарувчи миқдор бўлмаганда ҳам $n \rightarrow +\infty$ да $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$ эканини кўрсатиш мумкин.

$$1 + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{n+1},$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Агар $x \rightarrow \infty$ бўлса, у ҳолда $n \rightarrow \infty$ равшан. Ораларида $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ ўзгарувчи ётадиган ўзгарувчиларнинг лимитларини топамиз:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) =$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} =$$

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e,$$

демак, (5- § даги 4- теоремага мувофиқ),

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (4)$$

2) $x \rightarrow -\infty$ дейлик. Янги $t = -(x+1)$ ёки $x = -(t+1)$ ўзгарувчини киритамиз. $t \rightarrow +\infty$ да $x \rightarrow -\infty$ бўлади. Бундай ёза оламиз:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)^{-t-1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1} =$$

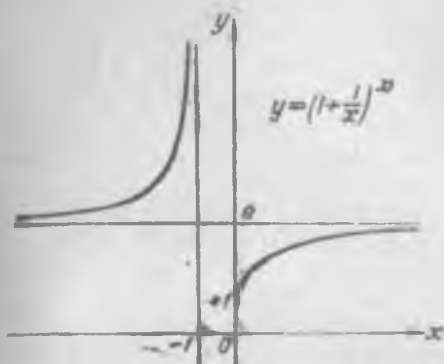
$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t+1} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \left(1 + \frac{1}{t}\right) = e \cdot 1 = e.$$

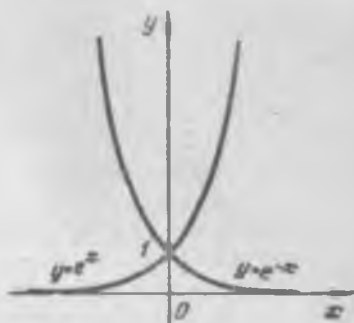
Теорема исботланди, $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ функциянинг графиги 45- расмда тасвирланган.

Агар (4) тенгликда $\frac{1}{x} = a$ фараз қилинса, у ҳолда $x \rightarrow \infty$ да $a \rightarrow 0$ (аммо $a \neq 0$) ва биз мана бу тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\lim_{a \rightarrow 0} (1+a)^{\frac{1}{a}} = e.$$



45- расм.



46- расм.

Мисоллар:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 = e \cdot 1 = e.$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \cdot e \cdot e = e^3.$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{2y} = e^2.$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1+4}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-1}\right)^{x+3} =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-1}\right)^{(x-1)+4} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{y}\right)^{y+4} =$
 $= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{y}\right)^y \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{y}\right)^4 = e^4 \cdot 1 = e^4.$

Изоҳ. Асоси e бўлган кўрсаткичли функция

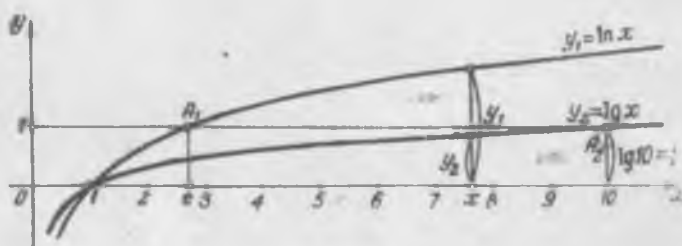
$$y = e^x,$$

бундан буён математика курсида жуда катта роль ўйнайди. Бу функция механикада (тебранишлар назариясида), электротехникада ва радиотехникада, радиохимия ва ҳоказоларда турли ҳодисаларни ўрганишда катта роль ўйнайди. Бу функцияни кўпинча *экспонентал* функция (Exponential function) деб аташади. Кўрсаткичли функция $y = e^x$ нинг ва кўрсаткичли функция $y = e^{-x}$ нинг графиклари 46- расмда тасвирланган.

8- §. Натурал логарифмлар

1 бобнинг 8- § ида логарифмик функция $y = \log_a x$ таърифланган эди. a сони логарифмлар асоси дейилади. Агар $a = 10$ бўлса, у ҳолда у га x нинг ўнли логарифми дейилади ва $y = \lg x$ билан белгиланади. Инглиз олими Бригг (1556—1630) номи билан Бригг логарифмлари деб аталадиган ўнли логарифмлар қийматларининг жадвали мактаб курсидан маълум.

Асоси $e = 2,71828 \dots$ сондан иборат логарифмлар *натурал логарифмлар* ёки биринчи логарифмик жадвалларнинг нхтирочиларидан бири, математик Непер (1530—1617) номи билан *Непер логарифмлари* дейилади. Демак, $e^y = x$ бўлса, у га x нинг натурал логарифми дейилади ва $y = \log_e x$ ўрнига $y = \ln x$ билан ёзилади. $y = \ln x$ ва $y = \lg x$ функцияларнинг графиклари 47- расмда ясалган.



47- расм.

Энди айни бир x соннинг ўнли ва натурал логарифмлари орасидаги муносабатни аниқлаймиз. $y = \lg x$ ёки $x = 10^y$ бўлсин. Охири тенгликнинг чап ва ўнг томонларини e асосга кўра логарифмлаймиз:

$$\ln x = y \ln 10.$$

Бундан $y = \frac{1}{\ln 10} \ln x$ ёки y нинг қийматини қўйиб, $\lg x = \frac{1}{\ln 10} \ln x$ ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, агар x соннинг натурал логарифми маълум бўлса, бу соннинг ўнли логарифми уни x га боғлиқ бўлмаган $M = \frac{1}{\ln 10} \approx 0,434294$ кўпайтувчига кўпайтириш йўли билан топилади. M сони натурал логарифмдан ўнли логарифмга ўтиш *модули* дейилади:

$$\lg x = M \ln x.$$

Агар бу айниятда $x = e$ фараз қилсак, у ҳолда M соннинг унли логарифми орқали ифодасини ҳосил қиламиз:

$$\lg e = M \quad (\ln e = 1).$$

Натурал логарифмлар унли логарифмлар билан бундай ифодаланади:

$$\ln x = \frac{1}{M} \lg x,$$

бу ерда

$$\frac{1}{M} \approx 2,302585.$$

Изоҳ. Сонларнинг натурал логарифмларини ҳисоблаш учун махсус жадваллар бор (масалан, қаралсин: И. Н. Бронштейн и К. А. Семендяев, Справочник по математике, Физматгиз, 1967).

9-§. Функцияларнинг узлуксизлиги

Фараз қилайлик, $y = f(x)$ функция бирор x_0 қийматда ва маркази x_0 да бўлган бирор атрофда аниқланган $y_0 = f(x_0)$ бўлсин.

Агар x бирор мусбат ёки манфий (фарқи йўқ) Δx орттирма олса ва $x = x_0 + \Delta x$ қийматга эга бўлиб қолса, у ҳолда y функция ҳам бирор Δy орттирма олади. Функциянинг янги ўстирилган қиймати $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$ бўлади (48-расм).

Δy функциянинг орттирмаси

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

формула билан ифодаланади.

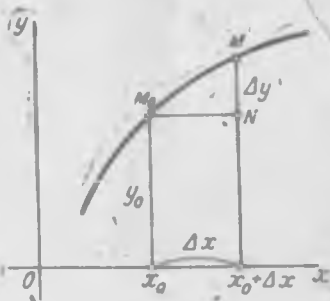
1-таъриф. Агар x_0 нуқтанинг бирор атрофида (x_0 нуқтанинг ўзида ҳам) $y = f(x)$ функция аниқланган бўлса ва агар

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \quad (1)$$

ёки (яна шунинг ўзи)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0 \quad (2)$$

бўлса, $x = x_0$ қийматда (ёки x_0 нуқтада) функция узлуксиз



48- расм.

дейлади. (2) ифоданинг узлуксизлик шартини бундай ёзиш мумкин:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

ёки

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad (3)$$

аммо

$$x_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} x.$$

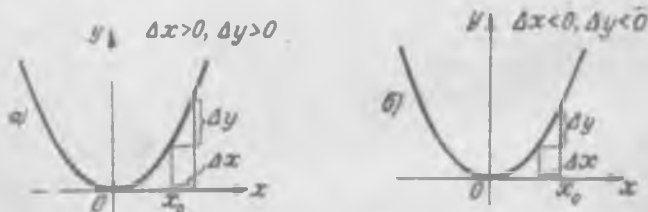
Демак, (3) тенгликни бундай ёзиш мумкин:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right), \quad (4)$$

яъни $x \rightarrow x_0$ да узлуксиз функциянинг лимитини топиш учун функциянинг ифодасида аргумент x ўрнига унинг x_0 қийматини қўйиш кифоя. Берилган нуқтада функция узлуксизлигининг геометрик тасвири шуни билдирадики, агар фақат $|\Delta x|$ етарли кичик бўлса $x_0 + \Delta x$ ва x_0 нуқталарда функция графиги ординаталарининг айирмаси абсолют қиймат бўйича ихтиёрий кичик булади.

1-мисол. $y = x^2$ функциянинг ихтиёрий x_0 нуқтада узлуксизлигини исботлаймиз. Ҳақиқатан,

$$y_0 = x_0^2, \quad y_0 + \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2, \quad \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2,$$



49-расм.

x исталган усул билан нолга интилганда (49-а ва б расм):

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 \Delta x + \Delta x^2) = 2x_0 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0.$$

2-мисол. Ихтиёрий x_0 нуқтада $y = \sin x$ функциянинг узлуксизлигини исботлаймиз. Ҳақиқатан,

$$y_0 = \sin x_0, \quad y_0 + \Delta y = \sin(x_0 + \Delta x),$$

$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Юқорида 5- § даги (7- мисол) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{\Delta x}{2} = 0$ эканлиги кўрсатилган эди. $\cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$ функция чекланган. Демак, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$.

Ҳар бир асосий элементар функцияни худди шу тариха кўздан кечириб, ҳар бир асосий элементар функция ўзи аниқланган ҳар бир нуқтада узлуксиз эканини исботлаш мумкин.

Сунгра қуйидаги теоремани исботлаймиз.

1-теорема. Агар $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, унда $\psi(x) = f_1(x) + f_2(x)$ йиғинди ҳам x_0 нуқтада узлуксиз функциядир.

Исбот. $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар узлуксиз бўлгани учун (3) тенгликка асосан мана буларни ёзиш мумкин:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = f_1(x_0) \text{ ва } \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = f_2(x_0).$$

Лимитлар ҳақидаги 1- теоремага асосан бундай ёза оламиз:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) + f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = \\ &= f_1(x_0) + f_2(x_0) = \psi(x_0). \end{aligned}$$

Демак, йиғинди $\psi(x) = f_1(x) + f_2(x)$ узлуксиз функциядир. Теорема исботланди.

Теорема ҳар қандай чекли сондаги қўшилувчилар учун ҳам тўғрилигини натижа тариқасида қайд қилиб ўтаемиз.

Лимитлар назариясига суяниб, қуйидаги теоремаларни ҳам исботлаш мумкин:

а) Икки узлуксиз функциянинг қўшайтмаси узлуксиз функциядир.

б) Икки узлуксиз функциянинг бўлинмаси, агар қаралаётган нуқтада махраж нолга айланмаса, узлуксиз функциядир.

в) Агар $x = x_0$ да $u = \varphi(x)$ узлуксиз ва $u_0 = \varphi(x_0)$ нуқтада $f(u)$ функция узлуксиз бўлса, $f[\varphi(x)]$ мураккаб функция ҳам x_0 нуқтада узлуксиздир.

Бу теоремалардан фойдаланиб, қуйидаги теоремани исботлаш мумкин.

2-теорема. Ҳар қандай элементар функция ўзи аниқланган ҳар бир нуқтада узлуксиздир*).

*) Бу масала Г. М. Фихтенгольцнинг „Математик анализ асослари“, 1- том, 1970, китобида муфассал баён этилган.

3-мисол. $y = x^3$ функция исталган x_0 нуқтада узлуксиз ва шунинг учун

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^3 = x_0^3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^3 = 3^3 = 9.$$

4-мисол. $y = \sin x$ функция исталган нуқтада узлуксиз ва шунинг учун

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

5-мисол. $y = e^x$ функция ҳар бир нуқтада узлуксиз ва шунинг учун

$$\lim_{x \rightarrow a} e^x = e^a.$$

6-мисол.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[(1+x)^{\frac{1}{x}} \right].$$

Масомики, $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ ва $z > 0$ да $\ln z$ функция узлуксиз, демак, $z = e$ да ҳам узлуксиз, у ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[(1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \ln e = 1.$$

2-таъриф. Агар $y = f(x)$ функция бирор (a, b) интервалнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, функция шу интервалда узлуксиз дейилади, бу ерда $a < b$.

Агар функция $x = a$ да ҳам аниқланган бўлса ва бунда $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $x = a$ нуқтада унгдан узлуксиз дейилади. Агар $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b)$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $x = b$ нуқтада чапдан узлуксиз дейилади.

Агар $f(x)$ функция (a, b) интервалнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса ва интервал учларида тегишли равишда унгдан ва чапдан узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ ёпиқ интервалда ёки кесмада узлуксиз дейилади.

7-мисол. $y = x^2$ функция $[a, b]$ кесманинг ҳар қандай нуқтасида узлуксизлиги 1-мисолдан келиб чиқади.

Агар бирор $x = x_0$ нуқтада $y = f(x)$ функция учун узлуксизлик шартларидан ҳеч булмаганда биттаси бажарилмаса, яъни агар $x = x_0$ да функция аниқланмаган бўлса, ёки $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

лимит мавжуд бўлмаса, ёки $x \rightarrow x_0$ интилиш ихтиёрий бўлса-ю, ўнгда ва чапда турган нфодалар мавжуд бўлмада, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ бўлса, у ҳолда $y = f(x)$ функция $x = x_0$ нуқтада *узилган* бўлади. Бу ҳолда $x = x_0$ нуқта *функциянинг узилиш нуқтаси* дейилади.

8- мисол. $y = \frac{1}{x}$ функция $x = 0$ бўлганда *узилувчидир*. Ҳақиқатан $x = 0$ да функция аниқланмаган.

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Бу функция исталган $x \neq 0$ қийматда узлуksиз эканлигини кўрсатиш осон.

9- мисол. $y = 2^{\frac{1}{x}}$ функция $x = 0$ да *узилувчи*. Ҳақиқатан, $\lim_{x \rightarrow 0+0} 2^{\frac{1}{x}} = \infty$,

$\lim_{x \rightarrow 0-0} 2^{\frac{1}{x}} = 0$. $x = 0$ да функция аниқланмаган (50- расм).

10- мисол. $f(x) = \frac{x}{|x|}$ функцияни текшираимиз.

$x < 0$ да $\frac{x}{|x|} = -1$ бўлади;

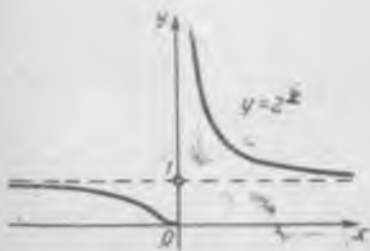
$x > 0$ да $\frac{x}{|x|} = 1$ бўлади.

Демак,

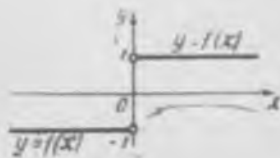
$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{x}{|x|} = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x}{|x|} = 1;$$

$x = 0$ да функция аниқланмаган. Шундай қилиб, $x = 0$ да $f(x) = \frac{x}{|x|}$ функция *узилувчи* эканини аниқладик (51- расм).



50- расм.



51- расм.

11-мисол. 3-§ нинг 4-мисолида текширилган $y = \sin \frac{1}{x}$ функция $x = 0$ да узилувчидир.

3-таъриф. Агар $f(x)$ функция шундай бўлсаки,

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0+0) \text{ ва } \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$$

чекли лимитлар мавжуд, аммо $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ ёки $x = x_0$ да $f(x)$ функция аниқланмаган бўлса, у ҳолда $x = x_0$ нуқта 1-тур узилиш нуқта дейлади. (Масалан, 10-мисолда қурилган функция учун $x = 0$ нуқта 1-тур узилиш нуқтадир.)

10-§. Узлуксиз функцияларнинг баъзи бир хоссалари

Бу параграфда кесмада узлуксиз бўлган функцияларнинг баъзи бир хоссаларини текшираимиз. Бу хоссалар теоремалар шаклида ифодаланади, уларни исботсиз келтираимиз*).

1-теорема. Агар $y = f(x)$ функция бирор $[a, b]$ ($a \leq x \leq b$) кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда $[a, b]$ кесмада ҳеч бўлмаганда шундай бир $x = x_1$ нуқта топилдики, функциянинг бу нуқтадаги қиймати

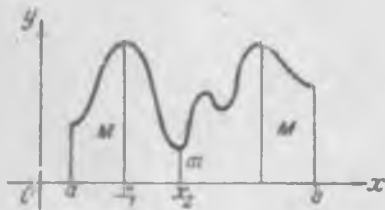
$$f(x_1) \geq f(x)$$

муносабатни қаноатлантиради, бу ерда x кесманинг исталган бошқа нуқтаси ва ҳеч бўлмаганда шундай бир $x = x_2$ нуқтаси топилдики, функциянинг бу нуқтадаги қиймати

$$f(x_2) \leq f(x)$$

муносабатни қаноатлантиради.

Функциянинг $f(x_1)$ қийматини $y = f(x)$ функциянинг $[a, b]$ кесмадаги энг катта қиймати деб атаймиз, функциянинг $f(x_2)$ қийматини функциянинг $[a, b]$ кесмадаги энг кичик қиймати деб атаймиз.



52-расм.

Бу теорема қисқача бундай ифодаланади:

$a \leq x \leq b$ кесмада узлуксиз функция бу кесмада ҳеч бўлмаганда бир марта энг катта M қийматга ва энг кичик m қийматга эришади.

Бу теореманинг маъноси 52-расмда равшан тасвирланган.

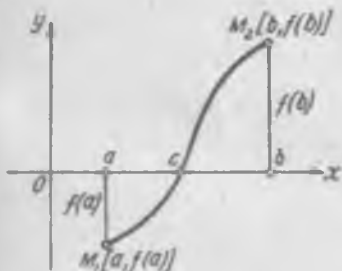
*) Бу теореманинг исботи Г. М. Фихтенгольцнинг „Математик анализ асослари“, 1-том, „Ўқитувчи“, 1970, китобидан топниш мумкин.

Изоҳ. Функциянинг қийматлари $a < x < b$ интервалда қаралса, функциянинг энг катта қиймати бўлиши ҳақидаги теореманинг тасдиқи нотўғри бўлиб қолиши мумкин. Масалан, $y = x$ функцияни $0 < x < 1$ интервалда қарасак, y ҳолда унинг қийматлари орасида энг каттаси ҳам йўқ ва энг кичиги ҳам йўқ. Ҳақиқатан, бу интервалда x нинг энг кичик қиймати ҳам, энг катта қиймати ҳам йўқ. (Четки чап нуқта йўқ, чунки ҳар қандай x^* нуқтани олмайлик, бу олинган нуқтадан чапда бўлган, масалан, $\frac{x^*}{2}$ нуқта топилади; шунингдек четки ўнг нуқта ҳам йўқ, демак, $y = x$ функциянинг энг кичик қиймати ҳам, энг катта қиймати ҳам йўқ.)

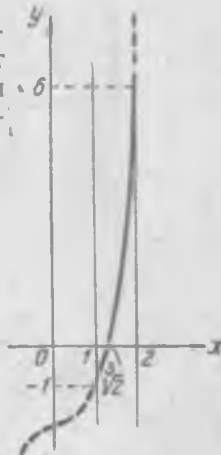
2-теорема. Агар $y = f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлиб, бу кесманинг учларида турли ишорали қийматларни қабул қилса, y ҳолда a ва b нуқталар орасида ҳеч бўлмаганда шундай бир $x = c$ нуқта топиладики, бу нуқтада функция нолга айланади:

$$f(c) = 0, \quad a < c < b.$$

Бу теорема содда геометрик маънога эга. $y = f(x)$ узлуксиз функциянинг $M_1 [a, f(a)]$ ва $M_2 [b, f(b)]$ нуқталарни туташтирувчи графиги Ox ўқни ҳеч бўл-



53- расм.



54- расм.

маганда битта нуқтада кеседи, бу ерда $f(a) < 0$ ва $f(b) > 0$ (ёки $f(a) > 0$ ва $f(b) < 0$) (53- расм).

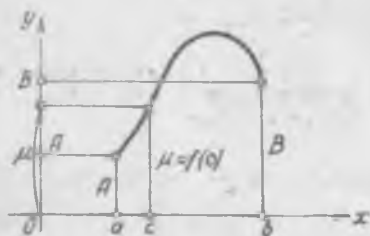
Мисол. $y = x^3 - 2$ функция берилган; $y_{x=1} = -1$, $y_{x=2} = 6$. Бу функция $[1, 2]$ кесмада узлуксиз. Демак, бу кесмада $y = x^3 - 2$ нолга айланидиган нуқта мавжуд. Ҳақиқатан, $x = \sqrt[3]{2}$ да $y = 0$ (54- расм).

3-теорема. Фараз қилайлик, $y = f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Агар бу кесманинг

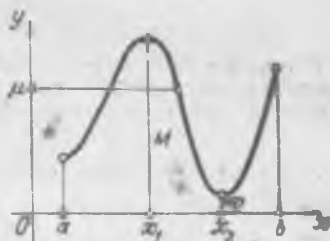
учларида функция тенг бўлмаган $f(a) = A$, $f(b) = B$ қийматларни қабул қилса, y ҳолда A ва B сонлар орасида ётувчи μ сон қандай бўлмасин, a ва b орасида ётувчи шундай $x = c$ нуқта топиладики, унда $f(c) = \mu$ бўлади.

Бу теореманинг маъноси 55-расмда очиқ-ойдин тасвирланади. Бу ҳолда ҳар қандай $y = \mu$ тўғри чизиқ $y = f(x)$ функциянинг графигини кесади.

Изоҳ. 2-теорема бу теореманинг хусусий ҳолидан иборат эканлигини қайд қилиб ўтамыз, чунки агар A ва B турли ишораларга эга бўлса, y ҳолда μ ўрнида 0 ни олиш мумкин, y вақтда $\mu = 0$ ўзи A ва B сонлар орасида бўлади.



55- расм.



56- расм.

3-теореманинг натижаси. Агар $y = f(x)$ функция бирор интервалда узлуксиз бўлиб, энг катта ва энг кичик қийматларни қабул қилса, y ҳолда бу интервалда функция ҳеч бўлмаганда бир марта узининг энг кичик ва энг катта қийматлари орасида ётувчи исталган қийматни қабул қилади.

Ҳақиқатан, $f(x_1) = M$, $f(x_2) = m$ бўлсин. $[x_1, x_2]$ кесмани қараймиз. Бу ҳолда 3-теоремага биноан бу кесмада $y = f(x)$ функция M ва m орасида ётувчи исталган μ қийматни қабул қилади. Аммо, $[x_1, x_2]$ кесма $f(x)$ функция аниқланган текшириладиган интервал ичига жойлашган (56-расм).

11-§. Чексиз кичик миқдорларни таққослаш

Айтайлик, бир вақтда бир неча

$$x, \beta, \gamma, \dots$$

чексиз кичик миқдорлар биргина x аргументнинг функцияларидан иборат бўлиб, x бирор a лимитга ёки чексизликка интилганда улар нолга интилсин. Бу ўзгарувчиларнинг нисбатла-

рини куздан кечириб, узгарувчиларнинг нолга интилишларини характерлаймиз*).

Бундан буён қуйидаги таърифлардан фойдаланамиз.

1-таъриф. Агар $\frac{\beta}{\alpha}$ нисбат чекли ва нолдан фарқли лимитга эга, яъни $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = A \neq 0$, демак, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{A} \neq 0$ бўлса, у ҳолда β ва α чексиз кичик миқдорлар бир хил тартибли чексиз кичик миқдорлар дейилади.

1-мисол. $\alpha = x$, $\beta = \sin 2x$ бўлсин, бу ерда $x \rightarrow 0$. α ва β бир хил тартибли чексиз кичик миқдорлардир, чунки

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2.$$

2-мисол. $x \rightarrow 0$ да x , $\sin 3x$, $\lg 2x$, $7 \ln(1+x)$ чексиз кичик миқдорлар бир хил тартибли чексиз кичик миқдорлардир. Бунинг исботи 1-мисолда исбот қандай ўтказилган бўлса, шундай қилинади.

2-таъриф. Агар иккита чексиз кичик миқдорнинг нисбати $\frac{\beta}{\alpha}$ нолга интилса, яъни $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = 0$ ($\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = \infty$) бўлса, у ҳолда β чексиз кичик миқдор α чексиз кичик миқдорга нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдор дейилиб, α чексиз кичик миқдор эса β -чексиз кичик миқдорга нисбатан қуйи тартибли чексиз кичик миқдор дейилади.

3-мисол. $\alpha = x$, $\beta = x^n$, $n > 1$, $x \rightarrow 0$ бўлсин. β чексиз кичик миқдор α чексиз кичик миқдорга нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдордир, чунки $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} = 0$.

Бунда α чексиз кичик миқдор β чексиз кичик миқдорга нисбатан қуйи тартибли чексиз кичик миқдордир.

3-тариф. Агар β ва α^k бир хил тартибли чексиз кичик миқдорлар, яъни $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha^k} = A \neq 0$ бўлса, β чексиз кичик миқдор α чексиз кичик миқдорга нисбатан k -тартибли чексиз кичик миқдор дейилади.

4-мисол. Агар $\alpha = x$, $\beta = x^3$ бўлса, у ҳолда $x \rightarrow 0$ да β чексиз кичик миқдор α чексиз кичик миқдорга нисбатан учинчи тартибли чексиз кичик миқдордир, чунки

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{(x)^3} = 1.$$

* Махраждаги чексиз кичик миқдор α нуқтанинг бирор атрофида нолга айланмайди деб фараз қиламиз.

4-таъриф. Агарда иккита чексиз кичик миқдорнинг $\frac{\beta}{\alpha}$ нисбати бирга интилса, яъни $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = 1$ бўлса, у ҳолда β ва α чексиз кичик миқдорлар *эквивалент чексиз кичик миқдорлар**) дейилади ва $\alpha \sim \beta$ шаклида ёзилади.

5-мисол. $\alpha = x$ ва $\beta = \sin x$ бўлсин, бунда $x \rightarrow 0$, α ва β чексиз кичик миқдорлар эквивалентдир, чунки

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

6-мисол. $\alpha = x$, $\beta = \ln(1+x)$, бўлсин. $x \rightarrow 0$, бунда α ва β чексиз кичик миқдорлар эквивалентдир, чунки

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

(9-§ даги 6-мисолга қаранг).

1-теорема. Агар α ва β эквивалент чексиз кичик миқдорлар бўлса, уларнинг $\alpha - \beta$ айирмаси α ва β га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдордир.

Исбот. Ҳақиқатан,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) = 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = 1 - 1 = 0.$$

2-теорема. Агар иккита чексиз кичик миқдорнинг $\alpha - \beta$ айирмаси α га ва β га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдор бўлса, у ҳолда α ва β эквивалент чексиз кичик миқдорлардир.

Исбот. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = 0$ бўлсин, у ҳолда $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) = 0$, ёки $1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = 0$, ёки $1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha}$, яъни $\alpha \approx \beta$. Агар $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha - \beta}{\beta} = 0$ бўлса, у ҳолда $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) = 0$ ёки $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = 1$, яъни $\alpha \approx \beta$.

7-мисол. $\alpha = x$, $\beta = x + x^3$ бўлиб, $x \rightarrow 0$ бўлсин.

α ва β чексиз кичик миқдорлар эквивалентдир, чунки уларнинг $\beta - \alpha = x^3$ айирмаси α га нисбатан ва β га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдордир. Ҳақиқатан,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta - \alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x + x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 + x^2} = 0.$$

*) Бу ҳолда α ва β баъзан тенг кучли чексиз кичик миқдорлар дейиладн.

8-мисол. $x \rightarrow \infty$ да $\alpha = \frac{x+1}{x^2}$ ва $\beta = \frac{1}{x}$ чексиз кичик миқдорлар эквивалентлар, чунки уларнинг $\alpha - \beta = \frac{x+1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$ айирмаси α га нисбатан ва β га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдорлар. α ва β нисбатининг limiti 1 га тенг:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x+1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1.$$

Изоҳ. Агар иккита чексиз кичик миқдорнинг $\frac{\beta}{\alpha}$ нисбати лимитга эга бўлмаса ва чексизликка интилмаса, у ҳолда β ва α юқорида кўрсатилган маънода ўзаро таққослана олмайди.

9-мисол. $\alpha = x$, $\beta = x \sin \frac{1}{x}$ бўлиб, $x \rightarrow 0$ бўлсин. α ва β чексиз кичик миқдорлар таққосланадиган эмас, чунки уларнинг $\frac{\beta}{\alpha} = \sin \frac{1}{x}$ нисбати $x \rightarrow 0$ да чекли лимитга ҳам, чексизликка ҳам интилмайди (3-§ даги 4-мисолга қаранг).

II бобга машқлар

Кўрсатилган лимитлар ҳисоблансин:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 1}$. Жас. 4. 2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [2\sin x - \cos x + \operatorname{ctg} x]$. Жас. 2.

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{2+x}}$. Жас. 0. 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}\right)$. Жас. 2.

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 2x + 1}{3x^2 - 5}$. Жас. $\frac{4}{3}$. 6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x}$. Жас. 1.

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$. Жас. $\frac{1}{2}$. 8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{n^3}$. Жас. $\frac{1}{3}$.

Кўрсатиш. $k = 0, 1, 2, \dots, n$ учун $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ формулани ёзамиз.

$$1^3 = 1;$$

$$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1;$$

$$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1.$$

Чап ва ўнг томонларни ҳадма-ҳад қўшамиз:

$$(n+1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + \dots + n) + (n+1),$$

$$(n+1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3 \frac{n(n+1)}{2} + (n+1),$$

бундан

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 1}{2x + 5}$. Жав. ∞ .
10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 + 4}$. Жав. 0.
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^3 + 2x}$. Жав. $\frac{1}{2}$.
12. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$. Жав. 4.
13. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$. Жав. 3.
14. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$. Жав. $\frac{1}{8}$.
15. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2}$. Жав. 1.
16. $\lim_{y \rightarrow -2} \frac{y^3 + 3y^2 + 2y}{y^3 - y - 6}$. Жав. $-\frac{2}{5}$.
17. $\lim_{u \rightarrow -2} \frac{u^2 + 4u^2 + 4u}{(u + 2)(u - 3)}$. Жав. 0.
18. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^3 - x^3}{h}$. Жав. $3x^2$.
19. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right]$. Жав. -1.
20. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$. Жав. n . (n — бутун мусбат сон).
21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x}$. Жав. $-\frac{1}{2}$.
22. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x} - 2 - \sqrt{2}}$. Жав. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + p^2} - p}{\sqrt{x^2 + q^2} - q}$. Жав. $\frac{q}{p}$.
24. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$. Жав. $\frac{2}{3}$.
25. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{a}}{x - a}$. Жав. $\frac{\sqrt[m]{a}}{ma}$.
26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x}$. Жав. $\frac{1}{2}$.
27. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 - 3}}{\sqrt{x^3 + 1}}$. Жав. 1.
28. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$. Жав. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x+1} = 1$.
29. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$. Жав. 0.
30. $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$. Жав. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x} = 0$.
31. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$. Жав. 1.
32. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$. Жав. 4.
33. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{x^2}$. Жав. $\frac{1}{9}$.
34. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos x}}$. Жав. $\sqrt{2}$.
35. $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x$. Жав. 1.
36. $\lim_{v \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2\cos v}{\sin(v - \frac{\pi}{3})}$. Жав. $\sqrt{3}$.
37. $\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z) \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2}$. Жав. $\frac{2}{\pi}$.
38. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x}{3x}$. Жав. $\frac{2}{3}$.
39. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{x}$. Жав. $2 \cos a$.
40. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$. Жав. $\frac{1}{2}$.

41. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$. Жав. e^2 . 42. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$. Жав. $\frac{1}{e}$.
43. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$. Жав. $\frac{1}{e}$. 44. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+5}$. Жав. e .
45. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \{ \ln(n+1) - \ln n \})$. Жав. 1. 46. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{\frac{1}{3 \sec x}}$. Жав. e^2 .
47. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$. Жав. e . 48. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$. Жав. e .
49. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \lg^2 x)^{\frac{1}{\lg^2 x}}$. Жав. e^3 . 50. $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{m}\right)^m$. Жав. 1.
51. $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+e^a)}{a}$. Жав. $\frac{a \rightarrow +\infty \text{ да } 1;}{a \rightarrow -\infty \text{ да } 0}$. 52. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$. Жав. $\frac{\alpha}{\beta}$.
53. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x - 1}{x}$ ($a > 1$). Жав. $x \rightarrow +\infty \text{ да } +\infty, x \rightarrow -\infty \text{ да } 0$. 54. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[a^{\frac{1}{n}} - 1 \right]$. Жав. $\ln a$.
55. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{\beta x}}{x}$. Жав. $a - \beta$. 56. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}$. Жав. 1.

Функцияларнинг узилиш нуқталари аниқлансин:

57. $y = \frac{x-1}{x(x+1)(x^2-4)}$. Жав. $x = -2; -1; 0; 2$ да узилиш.
58. $y = \lg \frac{1}{x}$. Жав. $x = 0$ ва $x = \pm \frac{2}{\pi}; \pm \frac{2}{3\pi}; \dots \pm \frac{2}{(2n+1)\pi}$ да узилиш.
59. $y = 1 + 2^{\frac{1}{x}}$ функциянинг узилиш нуқтаси топилсин ва бу функциянинг графиги ясалсин. Жав. $x = 0$ да узилиш ($x \rightarrow 0 + 0$ да $y \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow 0 - 0$ да $y \rightarrow 1$).
60. Қуйидаги ($x \rightarrow 0$ да) чексиз кичик миқдорлар $x^2, \sqrt{x(1-x)}, \sin 3x, 2x \cos x \sqrt{\lg^2 x}, xe^{2x}$ орасидан чексиз кичик миқдор x билан бир хил тартибли чексиз кичик миқдорлар, ҳамда x га нисбатан юқори ва қуйи тартибли чексиз кичик миқдорлар ажратилсин. Жав. x билан бир хил тартибли чексиз кичик миқдорлар: $\sin 3x$ ва xe^{2x} ; x га қараганда юқори тартибли чексиз кичик миқдорлар: x^2 ва $2x \cos x \sqrt{\lg^2 x}$, x га қараганда қуйи тартибли чексиз кичик миқдор: $\sqrt{x(1-x)}$.
61. Курсатилган чексиз кичик миқдорлар ($x \rightarrow 0$ да) орасида чексиз кичик миқдор x га тенг кучли чексиз кичик миқдорлар топилсин: $2 \sin x; \frac{1}{2} \lg 2x; x - 3x^2; \sqrt{2x^3 + x^2}; \ln(1+x); x^3 + 3x^4$. Жав. $\frac{1}{2} \lg 2x; x - 3x^2; \ln(1+x)$.
62. $x \rightarrow 1$ да $1-x$ ва $1 - \sqrt[3]{x}$ чексиз кичик миқдорлар бир хил тартибли бўлишига ишонч ҳосил қилинсин. Улар эквивалент бўладими? Жав. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}} = 3$, демак, берилган чексиз кичик миқдорлар бир хил тартибли, ammo эквивалент эмас.

III БОБ

ҲОСИЛА ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛ

1- §. Ҳаракат тезлиги

Бирор қаттиқ жисмининг тўғри чизиқли ҳаракатини масалан, юқорига вертикал ҳолда отилган тошнинг ҳаракатини, ёки двигатель цилиндридаги поршень ҳаракатини ва шунга ўхшаш ҳаракатларни текшираимиз. Жисмининг конкрет ўлчамларини ва шаклини эътиборга олмай, бундан буён уни ҳаракат қилувчи M нуқта шаклида тасаввур қиламиз. Ҳаракат қилувчи нуқтани унинг бирор бошланғич M_0 ҳолатидан ҳисобланадиган s масофа t вақтга боғлиқ бўлади, яъни s масофа t вақтнинг функцияси бўлади:

$$s = f(t). \quad (1)$$

Фараз қилайлик, ҳаракат қилувчи M нуқта t вақтнинг*) бирор моментда M_0 бошланғич ҳолатдан s масофада бўлсин, ундан кейинги бирор $t + \Delta t$ моментда эса нуқта бошланғич ҳолатдан $s + \Delta s$ масофада бўлиб, M_1 ҳолатни олган бўлсин (57- расм).

57- расм. Шундай қилиб, Δt вақт оралиғида s масофа Δs миқдорда ўзгаради. Бу ҳолда Δt вақт оралиғида s миқдор Δs ортирмани олди дейилади.

Энди $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ нисбатни текширайлик; у бизга нуқта ҳаракатининг Δt вақтдаги ўртача тезлигини беради:

$$v_{\text{орта}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (2)$$

Ўртача тезлик M нуқта ҳаракатининг t моментдаги тезлигини ҳамма ҳолда ҳам аниқ характерлайвермайди. Масалан,

*) Бу ерда ва бундан буён ҳам ўзгарувчининг конкрет қийматини ўзгарувчининг ўзини билдирувчи ҳарф билан белгилаймиз.

жисм Δt оралиқнинг бошида жуда тез, охирида эса жуда секин ҳаракатланган бўлса, у ҳолда ўртача тезлик нуқта ҳаракатининг кўрсатилган хусусиятларини акс эттира олмаслиги ва бизга нуқта ҳаракатининг t моментдаги ҳақиқий тезлиги ҳақида тасаввур бера олмаслиги равшан. Бу ҳақиқий тезлигини ўртача тезлик ёрдами билан аниқроқ ифодалаш учун Δt кичик вақт оралигини олиш керак. Нуқта ҳаракатининг t моментдаги тезлигини $\Delta t \rightarrow 0$ даги ўртача тезлиқнинг интилган лимити жуда тўла характерлайди. Бу лимит ҳаракатнинг берилган моментдаги тезлиги дейилади:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (3)$$

Шундай қилиб, вақт орттирмаси Δt нолга интилган ҳолда йўл орттирмаси Δs нинг вақт орттирмаси Δt га нисбатининг лимити ҳаракатнинг берилган моментдаги тезлиги дейилади.

Биз (3) тенгликни ёйилган шаклда ёзамиз. Масофанинг орттирмаси

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$$

булгани учун

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \quad (3')$$

Бунинг ўзи нотекис ҳаракатнинг тезлиги бўлади. Шундай қилиб, нотекис ҳаракат тезлиги тушунчаси лимит тушунчаси билан узвий равишда боғланганлигини кўраимиз. Фақат лимит тушунчаси ёрдами билан нотекис ҳаракат тезлигини топиш мумкин.

Юқоридаги (3') формуладан тезлик v вақт орттирмаси Δt га боғлиқ бўлмасдан, балки t нинг қийматига ва $f(t)$ функциянинг характерига боғлиқлиги келиб чиқади.

Мисол. Йўлнинг вақтга боғланиши

$$s = \frac{gt^2}{2}$$

формула билан ифодаланса, текис тезланувчан ҳаракатнинг ихтиёрий t моментдаги ва $t = 2$ секунд моментдаги тезлиги топиласин.

Еч иш. t моментда $s = \frac{gt^2}{2}$ га эгамиз; $t + \Delta t$ моментда:

$$s + \Delta s = \frac{g(t + \Delta t)^2}{2} = \frac{g(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2)}{2}.$$

Δs ни топамиз:

$$\Delta s = \frac{g(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2)}{2} - \frac{gt^2}{2} = gt\Delta t + \frac{g\Delta t^2}{2}.$$

$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ нисбатни тузамиз:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{gt\Delta t + \frac{1}{2}g\Delta t^2}{\Delta t} = gt + \frac{g\Delta t}{2};$$

таърифта кўра:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(gt + \frac{1}{2}g\Delta t \right) = gt.$$

Шундай қилиб, t вақтнинг исталган моментида тезлик $v = gt$ га тенг.
 $t = 2$ бўлса, $(v)_{t=2} = g \cdot 2 = 9,8 \cdot 2 = 19,6$ м/сек.

2- §. Ҳосиланинг таърифи

Бирор оралиқда аниқланган

$$y = f(x) \quad \checkmark \quad (1)$$

функцияга x аргументнинг шу оралиқдаги ҳар бир қийматида $y = f(x)$ функция маълум қийматга эга.

Аргумент x бирор (мусбат ёки манфий — бари бир) Δx орттирмани олсин. У вақтда y функция бирор Δy орттирмани олади. Шундай қилиб:

аргументнинг x қийматида $y = f(x)$ га,

аргументнинг $x + \Delta x$ қийматида $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ га эга бўламиз. Функциянинг орттирмаси Δy ни топамиз:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \quad (2)$$

Функция орттирмасининг аргумент орттирмасига нисбатини тузамиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (3)$$

Бу нисбатнинг $\Delta x \rightarrow 0$ даги лимитини топамиз. Агар бу лимит мавжуд бўлса, у берилган $f(x)$ функциянинг ҳосиласи дейилади ва $f'(x)$ билан белгиланади. Шундай қилиб, таърифта кўра,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ёки

$$\checkmark \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (4)$$

Демак, берилган $y = f(x)$ функциянинг аргумент x бўйича ҳосиласи деб, аргумент орттирмаси Δx ихтиёрий равишда

нолга интилган ҳолда функция орттормаси Δy нинг аргумент орттормаси Δx га нисбатининг лимитига айтилади.

Умумий ҳолда x нинг ҳар бир қиймати учун $f'(x)$ ҳосила маълум қийматга эга, яъни ҳосила ҳам x нинг функцияси бўлишини қайд қилиб утамыз.

Ҳосила учун $f'(x)$ белги қаторида бошқача белгилар ҳам ишлатилади, масалан,

$$y', \quad y'_x, \quad \frac{dy}{dx}.$$

Ҳосиланинг $x = a$ дақи конкрет қиймати $f'(a)$ ёки $y'|_{x=a}$ билан белгиланади.

Берилган $f(x)$ функциядан ҳосила топиш амали шу функцияни *дифференциаллаш* дейилади.

1- мисол. $y = x^3$ функция берилган; унинг: 1) ихтиёрий x нуқтадаги ва 2) $x = 3$ нуқтадаги ҳосиласи y' топилисин.

Еч иш. 1) Аргументнинг x га тенг қийматида $y = x^3$ га эгамиз. Аргументнинг $x + \Delta x$ га тенг қийматида $y + \Delta y = (x + \Delta x)^3$ га эгамиз. Функциянинг орттормасини топамиз:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 2x \Delta x + (\Delta x)^3.$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбатини тузамиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x \Delta x + (\Delta x)^3}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Лимитга ўтиб, берилган функциядан ҳосила топамиз:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Демак, $y = x^3$ функциянинг ихтиёрий нуқтадаги ҳосиласи

$$y' = 2x.$$

2) $x = 3$ да шуни ҳосил қиламиз:

$$y'|_{x=3} = 2 \cdot 3 = 6.$$

2- мисол. $y = \frac{1}{x}$, y' топилисин.

Еч иш. Бундан олдинги мисолдаги каби муҳокама қилиб, шуни ҳосил қиламиз:

$$y = \frac{1}{x}, \quad y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x}.$$

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)}.$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{x(x + \Delta x)} \right] = -\frac{1}{x^2}.$$

Изоҳ. Ҳамакунини, агар ҳаракатланувчи нуқта s масофасининг t вақтга боғланиши $s = f(t)$ формула билан ифодаланса, у ҳолда t моментдаги v тезлик

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

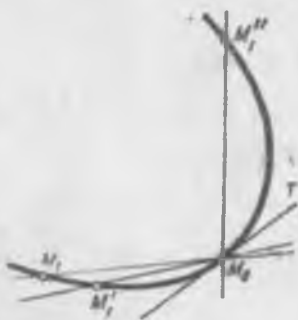
формула билан ифодаланиши аниқланган эди. Демак,

$$v = s'_t = f'(t),$$

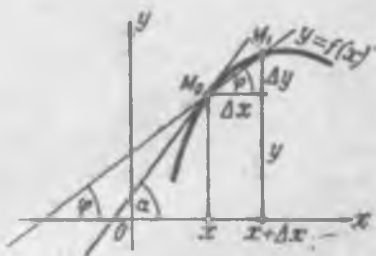
яъни тезлик йўлдан t вақт бўйича олинган ҳосиллага*) тенг.

3- §. Ҳосиланинг геометрик маъноси

Ҳаракат қилувчи жисмининг (нуқтанинг) тезлигини текшириш натижасида, яъни *механик* тасавурлардан чиқиб бориб, ҳосила тушунчасига келдик. Энди ҳосиланинг жуда муҳим геометрик маъносини берамиз. Бунинг учун энг аввал эгри чизиққа унинг берилган нуқтасида ўтказилган уринганининг таърифини беришимиз керак бўлади.



58- расм.



59- расм.

Бир эгри чизиқ ва унда тайин M_0 нуқта берилган бўлсин. Эгри чизиқда бир M_1 нуқтани оламиз ва M_0M_1 кесувчини ўтказамиз (58- расм). Агар M_1 нуқта эгри чизиқ бўйича M_0 нуқтага чексиз яқинлаша борса, у ҳолда M_0M_1 кесувчи $M_0M'_1$, $M_0M''_1$ ва ҳоказо турли вазиятларни ишғол қилади.

*) Биз „ x бўйича ҳосила“ ёки „вақт t бўйича ҳосила“ ва ҳоказо деганимизда, бу билан биз ҳосилани ҳисоблашда аргумент учун x ни ёки вақт t ни на ҳақоқо олинниши кераклигини тушунамиз.

Агар M_1 нуқта эгри чизиқ бўйича исталган томондан M_0 нуқтага чексиз яқинлаша борганда кесувчи маълум M_0T тўғри чизиқ вазиятини эгаллашга интилса, у ҳолда бу тўғри чизиқ M_0 нуқтада эгри чизиққа уринма дейилади („эгаллашга интилади“ деган тушунча қуйида аниқланади).

Биз $f(x)$ функцияни ва тўғри бурчакли координаталар системасида унга мос

$$y = f(x)$$

эгри чизиқни кўздан кечирамиз (59- расм). x нинг бирор қийматида функция $y = f(x)$ қийматга эга. Эгри чизиқда x ва у нинг бу қийматларига $M_0(x, y)$ нуқта тўғри келади. Аргумент x га Δx орттирмани берамиз. Аргументнинг янги $x + \Delta x$ қийматига функциянинг „орттирилган“ $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ қиймати тўғри келади. Эгри чизиқнинг бунга мос нуқтаси $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ нуқта бўлади. M_0M_1 кесувчини ўтказамиз ва унинг Ox ўқининг мусбат йўналиши билан ҳосил қилган бурчагини φ билан белгилаймиз. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбатни тузамиз. 59- расмдан

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (1)$$

эканлигини бевосита кўрамиз.

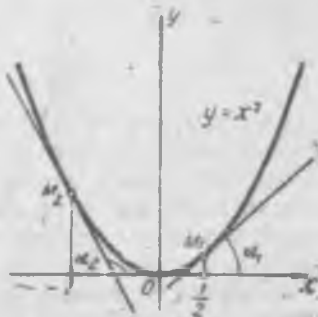
Энди агар Δx нолга интилса, у ҳолда M_1 нуқта эгри чизиқ бўйича ҳаракат қилиб, M_0 нуқтага яқинлаша боради. M_0M_1 кесишувчи M_0 нуқта атрофида айланади ва Δx ўзгарishi билан φ бурчак ўзгаради. Агар $\Delta x \rightarrow 0$ да φ бурчак бирор α лимитга интилса, у ҳолда M_0 нуқтадан ўтувчи ва абсциссалар ўқининг мусбат йўналиши билан α бурчак ташкил қилувчи тўғри чизиқ изланган уринма бўлади. Унинг бурчак коэффициентини топиш қийин эмас.

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Демак,

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha, \quad (2)$$

яъни аргумент x нинг берилган қийматида $f'(x)$ ҳосиланинг қиймати $f(x)$ функциянинг графигига унинг $M_0(x, y)$ нуқтадаги уринманинг Ox ўқининг мусбат йўналиши билан ҳосил қилган бурчак тангенсига тенг.



60- расм.

Мисол. $y = x^2$ эгри чизикқа $M_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$; $M_2(-1, 1)$ нуқталардаги уринмалар огмалик бурчакларининг тангенслари топилсин (60-расм).

Ечиш. 2-§ даги 1-мисолга асосан, $y' = 2x$; демак,

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = y' \Big|_{x=\frac{1}{2}} = 1; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = y' \Big|_{x=-1} = -2.$$

4-§. Функцияларнинг дифференциалланувчилиги

Таъриф. Агар

$$y = f(x) \quad (1)$$

функция $x = x_0$ нуқтада ҳосилага эга бўлса, яъни

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (2)$$

мавжуд бўлса, у ҳолда берилган $x = x_0$ қийматда функция *дифференциалланувчи* ёки (бари бир) ҳосилага эга деймиз.

Агар функция бирор $[a, b]$ кесманинг ёки (a, b) интервалнинг ҳар бир нуқтасида дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда функция $[a, b]$ кесмада ёки (a, b) интервалда дифференциалланувчи дейилади.

Теорема. Агар $y = f(x)$ функция бирор $x = x_0$ нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда функция шу нуқтада узлуксиздир.

Ҳақиқатан, агар

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

бўлса,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \gamma,$$

бу ерда $\Delta x \rightarrow 0$ да γ нолга интилиувчи миқдордир. Лекин, у ҳолда

$$\Delta y = f'(x_0) \Delta x + \gamma \Delta x$$

бўлади; бундан $\Delta x \rightarrow 0$ да $\Delta y \rightarrow 0$, бу эса x_0 нуқтада $f(x)$ функция узлуксиз демакдир (II боб, 9-§ га қаранг).

Шундай қилиб, узилиш нуқтасида функция ҳосилага эга бўла олмайди. Тескари хулоса тўғри эмас, яъни бирор $x = x_0$ нуқтада $y = f(x)$ функция узлуксиз бўлишидан бу нуқтада у дифференциалланувчи ҳам бўлади деган хулоса чиқмайди; x_0 нуқтада $f(x)$ функция ҳосилага эга бўлмаслиги ҳам мумкин. Бунга ишонч ҳосил қилмоқ учун бир неча мисол кўриб чиқамиз.

1- мисол. $f(x)$ функция $[0, 2]$ кесмада қуйидагича аниқланган (61- расмга қаранг):

$$0 < x < 1 \text{ да } f(x) = x,$$

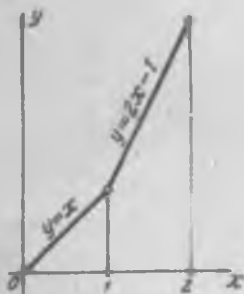
$$1 < x < 2 \text{ да } f(x) = 2x - 1.$$

Бу функция $x = 1$ нуқтада узлуксиз бўлса-да, ҳосиллага эга эмас. Ҳақиқатан, $\Delta x > 0$ да

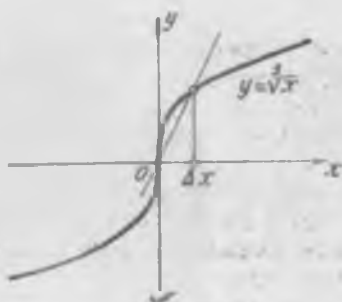
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[2(1 + \Delta x) - 1] - [2 \cdot 1 - 1]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2,$$

$\Delta x < 0$ да

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[1 + \Delta x] - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$



61- расм.



62- расм.

Шундай қилиб, текширилатган лимит Δx нинг ишораси қандайдигига бориқ, бу эса $x = 1$ нуқтада функция ҳосиллага эга эмас демакдир^{*)}. Геометрик жиҳатдан бунга шундай факт мос келадики, $x = 1$ нуқтада берилган „эгри чизик“ маълум бир уринмага эга бўлмайди.

Функциянинг $x = 1$ нуқтада узлуксизлиги

$$\Delta x < 0 \text{ да } \Delta y = \Delta x,$$

$$\Delta x > 0 \text{ да } \Delta y = 2\Delta x$$

бўлишидан келиб чиқади ва демак, иккала ҳолда ҳам $\Delta x \rightarrow 0$ да $\Delta y \rightarrow 0$.

2- мисол. Графики 62- расмда тасвириланган $y = \sqrt[3]{x}$ функция эркин узгарувчининг барча қийматлари учун аниқланган ва узлуксиздир. Бу функция $x = 0$ да ҳосиллага эгами-йўқми эканлигини аниқлаймиз; бунинг учун $x = 0$ да ва $x = 0 + \Delta x$ да функциянинг қийматларини топамиз:

$$x = 0 \text{ да } y = 0, \quad x = 0 + \Delta x \text{ да } y + \Delta y = \sqrt[3]{\Delta x}.$$

^{*)} Ҳосиланинг таърифига биноан $\Delta x \rightarrow 0$ да Δx қандай қилиб нолга интилишига қарамай, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбатнинг биргина лимитга интилиши талаб қилинади.

Демак,

$$\Delta y = \sqrt[3]{\Delta x}.$$

Функция орттирмасининг аргумент орттирмасига нисбатининг лимитини топиш:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = +\infty.$$

Шундай қилиб, $\Delta x \rightarrow 0$ да функция орттирмасининг аргумент орттирмасига нисбати $x = 0$ нуқтада чексизликка интилади (лимитга эга эмас). Демак, текширилаётган функция $x = 0$ нуқтада дифференциалланувчи эмас. Бу нуқтада эгри чизикқа уринма абсцисса ўқи билан $\frac{\pi}{2}$ бурчак ҳосил қилади, яъни Oy ўқининг устига тушади.

5- §. n бутун ва мусбат бўлганда $y = x^n$ функциянинг ҳосиласи

Берилган $y = f(x)$ функциянинг ҳосиласини ҳосиланинг умумий таърифига асосан топиш учун қуйидаги амалларни бажариш зарур:

1) аргумент x га Δx орттирма бериш, функциянинг орттирилган қийматини ҳисоблаш:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x);$$

2) функциянинг орттирмасини топиш;

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x);$$

3) функция орттирмасининг аргумент орттирмасига нисбатини тузиш:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

4) $\Delta x \rightarrow 0$ да бу нисбатнинг лимитини топиш:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Биз бу ерда ва бундан кейинги параграфларда бу умумий усулни баъзи бир элементар функцияларнинг ҳосилаларини ҳисоблаш учун қўлланамиз.

Теорема. $y = x^n$ функциянинг ҳосиласи (бунда n бутун мусбат сон) nx^{n-1} га тенг, яъни

$$\text{агар } y = x^n \text{ бўлса, } y' = nx^{n-1} \quad (1)$$

Исбот. Ушбу функция берилган:

$$y = x^n.$$

1) Агар x ўзига Δx орттирма олса, y ҳолда
 $y + \Delta y = (x + \Delta x)^n$.

2) Ньютон биноми формуласидан фойдаланиб, бундай ёза оламиз:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n - x^n$$

ёки

$$\Delta y = n x^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n.$$

3) Нисбатни топамиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1}.$$

4) Бу нисбатнинг лимитини топамиз:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1} \right] = n x^{n-1},$$

демак, $y' = n x^{n-1}$, бу эса теореманинг исботидир.

1- мисол. $y = x^5$, $y' = 5x^{5-1} = 5x^4$.

2- мисол. $y = x$, $y' = 1x^{1-1}$, $y' = 1$. Охирги натижа оддий геометрик маънога эга; $y = x$ тўғри чизиққа уринма x нинг ҳар қандай қийматида бу тўғри чизиқ билан устма-уст тушади ва демак, Ox ўқнинг мусбат йўналиши билан тангенс 1 га тенг бурчак ҳосил қилади.

(1) формула n каср ва манфий бўлган ҳолда ҳам тўғрилигини қайд қилиб ўтамыз. (Бу 12- § да исботланади.)

3- мисол. $y = \sqrt{x}$.

Бу функцияни даража кўринишида тасвирлаймиз:

$$y = x^{\frac{1}{2}};$$

у вақтда (1) формулага биноан (ҳозиргина қилинган изоҳни ҳисобга олиб) шуни ҳосил қиламиз:

$$y' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

4- мисол.

$$y = \frac{1}{x\sqrt{x}}.$$

у ни даражали функция кўринишида ёзамиз:

$$y = x^{-\frac{3}{2}}.$$

У вақтда

$$y' = -\frac{3}{2} x^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{2} x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}.$$

6- §. $y = \sin x$, $y = \cos x$ функцияларнинг ҳосилалари1- теорема. $\sin x$ нинг ҳосиласи $\cos x$, яъни (II)
агар $y = \sin x$ бўлса, $y' = \cos x$ бўлади.Исбот. Аргумент x га Δx ортирма берамиз; у ҳолда:

1) $y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$;

$$\begin{aligned} 2) \Delta y &= \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right); \end{aligned}$$

$$3) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$4) y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

аммо

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1,$$

шунинг учун

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Охирги тенглик $\cos x$ узлуксиз функция эканлигига асосан ҳосил қилинади.2- теорема. $\cos x$ нинг ҳосиласи $-\sin x$, яъни (III)
агар $y = \cos x$ бўлса, $y' = -\sin x$ бўлади.

Исбот. Аргумент x га Δx орттирмани берамиз; у ҳолда

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x);$$

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \sin \frac{x + \Delta x + x}{2} =$$

$$= -2 \sin \frac{\Delta x}{2} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$\sin x$ нинг узлуксиз функциялигини эътиборга олиб, охирида шуни ҳосил қиламиз:

$$y' = -\sin x.$$

7- §. Ўзгармас миқдорнинг ҳосиласи, ўзгармас миқдор билан функция кўпайтмасининг ҳосиласи, айгиндининг, кўпайтманинг, бўлинманинг ҳосилалари

1- теорема. *Ўзгармас миқдорнинг ҳосиласи нолга тенг, яъни*

агар $y = C$ бўлса, бу ерда $C = \text{const}$, $y' = 0$ бўлади. (IV)

Исбот. $y = C$ ўзи x нинг шундай функциясики, барча x лар учун унинг қийматлари C га тенг.

Демак, x нинг исталган қийматида

$$y = f(x) = C.$$

Аргумент x га Δx ($\Delta x \neq 0$) орттирмани берамиз. Аргументнинг барча қийматларида функция y ўзининг C қийматини сақлайди, шунинг учун

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = C.$$

Демак, функциянинг орттирмаси мана бунга тенг:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 0,$$

функция орттирмасининг аргумент орттирмасига нисбати

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

демак,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

яъни

$$y' = 0.$$

Охирги натижа содда геометрик маънога эга. $y = C$ функциянинг графиги Ox ўққа параллел тўғри чизиқдан иборат. Графикнинг исталган нуқтасида уринма бу тўғри чизиқ билан бир хил бўлади ва демак, Ox ўқ билан тангенс y' нолга тенг бурчак ҳосил қилади.

2-теорема. *Ўзгармас кўпайтувчини ҳосила ишорасидан ташқарига чиқариш мумкин, яъни*

агар $y = Cu(x)$ бўлса, ($C = \text{const}$), $y' = Cu'(x)$ бўлади. (V)

Исбот. Бундан олдинги теоремани исботлашдаги каби муҳокама юргизамиз:

$$y = Cu(x);$$

$$y + \Delta y = C u(x + \Delta x);$$

$$\Delta y = C u(x + \Delta x) - C u(x) = C [u(x + \Delta x) - u(x)],$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = C \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = C \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}, \text{ яъни } y' = Cu'(x).$$

1-мисол. $y = 3 \frac{1}{\sqrt{x}}.$

$$y' = 3 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)' = 3 \left(x^{-\frac{1}{2}} \right)' = 3 \left(-\frac{1}{2} \right) x^{-\frac{1}{2} - 1} = -\frac{3}{2} x^{-\frac{3}{2}},$$

яъни

$$y' = -\frac{3}{2x\sqrt{x}}.$$

3-теорема. *Чекли сондаги дифференциалланувчи функциялар йиғиндисининг ҳосиласи шу функциялар ҳосилаларининг йиғиндисига тенг*).*

Масалан, қўшилувчилар учта бўлган ҳол учун:

$$y = u(x) + v(x) + w(x); y' = u'(x) + v'(x) + w'(x). \quad (\text{VI})$$

*) $y = u(x) + v(x)$ ифода $y = u(x) + (-1)v(x)$ га тенг кучан ва $y' = [u(x) + (-1)v(x)]' = u'(x) + [-v(x)]' = u'(x) - v'(x).$

Исбот. Аргументнинг x қиймати учун

$$y = u + v + w$$

(ёзувни қисқартиш мақсадида функцияларнинг белгисида аргумент x ни тушириб қолдирамиз).

Аргументнинг $x + \Delta x$ қиймати учун:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) + (w + \Delta w),$$

бу ерда Δy , Δu , Δv ва Δw лар, y , u , v ва w функцияларнинг аргумент x ни Δx орттирмасига мос орттирмалари. Демак,

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v + \Delta w, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

ёки

$$y' = u'(x) + v'(x) + w'(x).$$

2- мисол. $y = 3x^4 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}},$

$$y' = 3(x^4)' - \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = 3 \cdot 4x^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}-1},$$

яъни

$$y' = 12x^3 + \frac{1}{3} \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}.$$

4- теорема. Иккита дифференциалланувчи функциялар кўпайтмасининг ҳосиласи биринчи функция ҳосиласининг иккинчи функция билан кўпайтмаси плюс биринчи функциянинг иккинчи функция ҳосиласи билан кўпайтмасига тенг,

агар $y = uv$ бўлса, $y' = u'v + uv'. \quad (\text{VII})$

Исбот. Олдинги теоремани исботлашдаги каби муҳокама қиламиз:

$$y = uv,$$

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v),$$

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = \Delta u v + u \Delta v + \Delta u \Delta v,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} v + u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} v + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x} =$$

$$= \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) v + u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

(чунки u ва v лар Δx га боглиқ эмас).

Ўнг томондаги охирги ҳадни текширамыз:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$u(x)$ дифференциалланувчи функция, шунинг учун узлуксиз. Демак, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = 0$. Вундан ташқари,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v' \neq \infty.$$

Шундай қилиб, текширилаётган ҳад нолга тенг ва биз охирда

$$y' = u'v + uv' \quad 14$$

га эга бўламыз. Искотланган теоремага асосан ҳар қанча функцияларнинг кўпайтмасини дифференциаллаш қондаси осонгина чиқарилади.

Масалан, учта функциянинг кўпайтмасига эга бўлсак:

$$y = uvw,$$

у ҳолда ўнг томонини u билан (vw) нинг кўпайтмаси каби тасвирлаб, шунн ҳосил қиламыз:

$$y' = u'(vw) + u(vw)' = u'vw + u(v'w + vw') = u'vw + u v'w + uvw'.$$

Шундай қилиб, истаганча сондаги функциялар кўпайтмасининг ҳосиласи учун шунга ўхшаш формула ҳосил қила оламыз. Яъни агар $y = u_1 u_2 \dots u_n$ бўлса, у ҳолда

$$y' = u_1' u_2 \dots u_{n-1} u_n + u_1 u_2' \dots u_{n-1} u_n + \dots + u_1 u_2 \dots u_{n-1} u_n'.$$

3- мисол. Агар $y = x^2 \sin x$ бўлса, у ҳолда

$$y' = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

4- мисол. Агар $y = \sqrt{x} \sin x \cos x$ бўлса, у ҳолда

$$y' = (\sqrt{x})' \sin x \cos x + \sqrt{x} (\sin x)' \cos x + \sqrt{x} \sin x (\cos x)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x \cos x + \sqrt{x} \cos x \cos x + \sqrt{x} \sin x (-\sin x) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x \cos x + \sqrt{x} \cos x \cos x + \sqrt{x} \sin x (-\sin x) =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x \cos x + \sqrt{x} (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{\sin 2x}{4\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cos 2x.$$

5- теорема. Касрнинг (яъни иккита функция бўлинмасининг) ҳосиласи касрга тенг бўлиб, унинг махражи берилган каср махражининг квадратидан, сурати эса махражнинг сурат ҳосиласи билан ва суратнинг махраж ҳосиласи билан кўпайтмалари орасидаги айирмадан иборат, яъни

$$\text{агар } y = \frac{u}{v} \text{ бўлса, } y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \quad (\text{VIII})$$

Исбот. Агар Δu , Δv ва Δv лар u , v ва v функцияларнинг аргумент x нинг Δx орттирмасига мос орттирмалари бўлса, у ҳолда

$$u + \Delta u = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} \cdot (v + \Delta v)$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} v - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} v - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (v + \Delta v)}$$

Бундан $\Delta x \rightarrow 0$ да $\Delta v \rightarrow 0$ ни эътиборга олиб, шу натижа-ни ҳосил қиламиз*):

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

5- мисол. Агар $y = \frac{x^3}{\cos x}$ бўлса, у ҳолда

$$y' = \frac{(x^3)' \cos x - x^3 (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{3x^2 \cos x + x^3 \sin x}{\cos^2 x}$$

Изоҳ. Агар махражи C ўзгармас бўлган

$$y = \frac{u(x)}{C}$$

кўринишдаги функцияга эга бўлсак, у ҳолда бу функцияни дифференциаллашда (VIII) формулани қўлланишнинг ҳожати йўқ, балки (V) формулани қўлланиш маъқул:

$$y' = \left(\frac{1}{C} u\right)' = \frac{1}{C} u' = \frac{u'}{C}$$

Бу натижанинг ўзи (VIII) формуладан ҳам албатта чиқади.

6- мисол. Агар $y = \frac{\cos x}{7}$ бўлса,

$$y' = \frac{(\cos x)'}{7} = -\frac{\sin x}{7}$$

*) $v(x)$ — дифференциалланувчи, демак, узлуксиз функциядир, шунинг учун $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0$.

8- §. Логарифмик функциянинг ҳосиласи

Теорема. $\log_a x$ функциянинг ҳосиласи $\frac{1}{x} \log_a e$ га тенг, яъни

$$\text{агар } y = \log_a x \text{ бўлса, } y' = \frac{1}{x} \log_a e \text{ бўлади.} \quad (\text{IX})$$

Исбот. Агар $y = \log_a x$ функциянинг аргумент x нинг Δx орттирмасига мос орттирмаси Δy бўлса, у ҳолда

$$y + \Delta y = \log_a (x + \Delta x);$$

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Охирги тенгликнинг ўнг томонидаги ифодани x га кўпайтирамиз ва бўламиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \frac{x}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

$\frac{\Delta x}{x}$ миқдорни α билан белгилаймиз. Берилган x учун $\Delta x \rightarrow 0$ да $\alpha \rightarrow 0$ бўлиши равшан. Демак,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Аmmo

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

эканн маълум (II боб, 7- § га қаранг). Агар логарифм ишораси остида турган ифода e сонга интилса, у ҳолда бу ифоданинг логарифми $\log_a e$ га интилади (логарифмик функция узлуксиз бўлгани учун). Шунинг учун охирда ушбу натижани ҳосил қиламиз;

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{x} \log_a e.$$

Бунда $\log_a e = \frac{1}{\ln a}$ эканлигини эътиборга олиб, чиққан формулани

$$y' = \frac{1}{x} \frac{1}{\ln a}$$

кўринишида ёзиш мумкин.

Бу формуланинг муҳим хусусий ҳолини қайд қилиб ўтамиз: агар $a = e$ бўлса, у ҳолда $\ln a = \ln e = 1$, яъни

$$\text{агар } y = \ln x \text{ бўлса, } y' = \frac{1}{x} \text{ бўлади.} \quad (\text{X})$$

9- §. Мураккаб функциянинг ҳосиласи

Фараз қилайлик, $y = f(x)$ мураккаб функция, яъни шундай функция берилганки, уни

$$y = F(u), \quad u = \varphi(x)$$

ёки $y = F[\varphi(x)]$ (1 боб 8- § га қаранг) кўринишда тасвирлаш мумкин бўлсин. $y = F(u)$ нфодада u ўзгарувчи *оралиқ аргумент* дейилади.

Мураккаб функцияни дифференциаллаш қондасини чиқарамиз.

Теорема. Агар $u = \varphi(x)$ функция бирор x нуқтада $u'_x = \varphi'(x)$ ҳосиллага эга бўлса, $y = F(u)$ функция эса u нинг мос қийматида $y'_u = F'(u)$ ҳосиллага эга бўлса, y ҳолда кўрсатилган x нуқтада $y = F[\varphi(x)]$ мураккаб функция ҳам

$$y'_x = F'_u(u) \varphi'(x)$$

га тенг ҳосиллага эга бўлади, бу ерда u ўрнига $u = \varphi(x)$ нфода қўйилиши зарур. Қисқача,

$$y'_x = y'_u u'_x,$$

яъни мураккаб функциянинг ҳосиласи берилган функциянинг *оралиқдаги аргумент* u бўйича ҳосиласининг *оралиқдаги аргументнинг* x бўйича ҳосиласи билан кўпайтмасига тенг.

Исбот. Аргумент x нинг маълум қийматида

$$u = \varphi(x), \quad y = f(u).$$

Аргументнинг ўстирилган $x + \Delta x$ қийматида

$$u + \Delta u = \varphi(x + \Delta x), \quad y + \Delta y = F(u + \Delta u).$$

Шундай қилиб, Δx орттирмага Δu орттирма мос келади, бунга эса Δy орттирма мос келади, бунинг устига $\Delta x \rightarrow 0$ да $\Delta u \rightarrow 0$ ва $\Delta y \rightarrow 0$. Шартга мувофиқ

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x.$$

Бу муносабатдан, лимит таърифидан фойдаланиб, ($\Delta u \neq 0$ да)

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha \quad (1)$$

тенгликни ҳосил қиламиз, бу ерда $\Delta u \rightarrow 0$ да $\alpha \rightarrow 0$. Бу (1) тенгликни

$$\Delta y = y'_u \Delta u + \alpha \Delta u \quad (2),$$

куринишда ёзамиз. Бу (2) тенглик ихтиёрий α да $\Delta u = 0$ бўлганда ҳам тўғрилигича қолади, чунки $u = 0$ айниятга айланади. $\Delta u = 0$ да $\alpha = 0$ деб ҳисоблаймиз. (2) тенгликнинг барча ҳадларини Δx га бўламиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u'_u \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x}. \quad (3)$$

Шартга кўра

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0.$$

(3) тенгликда $\Delta x \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб, шуни ҳосил қиламиз:

$$y'_x = u'_u u'_x, \quad (4)$$

бу эса талаб қилинган исботдир.

1- мисол. $y = \sin(x^2)$ функция берилган бўлсин, y'_x ни топамиз. Берилган функцияни қуйидигича функциянинг функцияси шаклида ёзамиз:

$$y = \sin u, \quad u = x^2.$$

Бундан

$$y'_u = \cos u, \quad u'_x = 2x.$$

Демак, (4) формулага мувофиқ

$$y'_x = y'_u u'_x = \cos u \cdot 2x.$$

u ўрнига унинг ифодасини қўйиб, охирда

$$y'_x = 2x \cos(x^2)$$

натижани ҳосил қиламиз.

2- мисол. $y = (\ln x)^3$ функция берилган. y'_x ни топамиз.

Берилган функцияни қуйидагича ёзамиз:

$$y = u^3, \quad u = \ln x.$$

Бундан шуларни топамиз:

$$y'_u = 3u^2, \quad u'_x = \frac{1}{x}.$$

Демак,

$$y'_x = 3u^2 \frac{1}{x} = 3(\ln x)^2 \frac{1}{x}.$$

Агар $y = f(x)$ функция шундай бўлсаки, уни

$$y = F(u), \quad u = \varphi(v), \quad v = \psi(x)$$

кўринишда ёзиш мумкин бўлса, y_x ҳосилани топиш олдинги теоремани кетма-кет қўлланиш билан бажарилади.

Исботланган қоидага мувофиқ

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

Бу теоремани u_x ни топиш учун қўлланиб, шуни ҳосил қиламиз:

$$u'_x = u'_v v'_x.$$

u'_x нинг ифодасини олдинги тенгликка қўйсак,

$$y'_x = u'_v u'_v v'_x \quad (5)$$

ёки

$$y'_x = F'_{(u)}(u) \varphi'_v(v) \psi'_x(x).$$

3- мисол. $y = \sin [(\ln x)^3]$ функция берилган. y'_x ни топамиз. Берилган функцияни қуйидагича ёзамиз:

$$y = \sin u, \quad u = v^3, \quad v = \ln x.$$

Бундан

$$y'_u = \cos u, \quad u'_v = 3v^2, \quad v'_x = \frac{1}{x}$$

ни топамиз. Демак, (5) формулага мувофиқ

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x = 2(\cos u) v^2 \frac{1}{x},$$

ёки охириги натижа:

$$y'_x = \cos [(\ln x)^3] \cdot 3(\ln x)^2 \frac{1}{x}.$$

Текширилган функция фақат $x > 0$ да аниқлангандигини эслатиб ўтамиз.

10- §. $y = \lg x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \ln |x|$ Функцияларнинг ҳосилалари

1- теорема. $\lg x$ функциянинг ҳосиласи $\frac{1}{\cos^2 x}$ га тенг, яъни

агар $y = \lg x$ бўлса, y ҳолда $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$. (X1)

Исбот. Модомики,

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}$$

экан, y ҳолда касрни дифференциаллаш қондасига мувофиқ (III боб, 7- §, (VIII) формулага қаран):

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

2- теорема. $\operatorname{ctg} x$ функциянинг ҳосиласи $-\frac{1}{\sin^2 x}$ га тенг, яъни

$$\text{агар } y = \operatorname{ctg} x \text{ бўлса, } y' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \quad (\text{XII})$$

Исбот. Модомики,

$$y = \frac{\cos x}{\sin x}$$

экан, у ҳолда

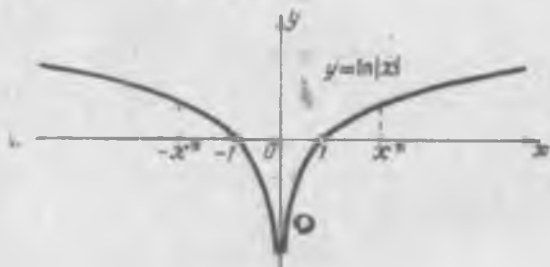
$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \\ &= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

1- мисол. Агар $y = \operatorname{tg} \sqrt{x}$ бўлса, у ҳолда

$$y' = \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}}.$$

2- мисол. Агар $y = \ln \operatorname{ctg} x$ бўлса, у ҳолда

$$y' = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} (\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \right) = -\frac{1}{\cos x \sin x} = -\frac{2}{\sin 2x}.$$



63- расм.

3- теорема. $\ln |x|$ функциянинг ҳосиласи (63- расм) $\frac{1}{x}$ га тенг, яъни

$$\text{агар } y = \ln |x| \text{ бўлса, у ҳолда } y' = \frac{1}{x}. \quad (\text{XIII})$$

Исбот. а) Агар $x > 0$ бўлса, $|x| = x$, $\ln |x| = \ln x$ ва шунинг учун

$$y' = \frac{1}{x}.$$

б) $x < 0$ бўлсин, у ҳолда $|x| = -x$. Лекин

$$\ln |x| = \ln (-x).$$

(Агар $x < 0$ бўлса, $-x > 0$ бўлишини қайд этамиз.)

$y = \ln u$, $u = -x$ фараз қилиб, $y = \ln(-x)$ функцияни мураккаб функция шаклида ёзамиз. У ҳолда

$$y'_x = y'_u u'_x = \frac{1}{u} (-1) = \frac{1}{-x} (-1) = \frac{1}{x}.$$

Демак, x нинг манфий қийматлари учун ҳам

$$y'_x = \frac{1}{x}$$

тенглик тўғри бўлади. Демак, (XIII) формула исталган $x \neq 0$ қийматлар учун исботланди. ($x = 0$ да $\ln|x|$ функция аниқланмаган.)

11- §. Ошкормас функция ва уни дифференциаллаш

Иккита x ва y ўзгарувчиларнинг қийматлари ўзаро бирор тенглама билан боғланган бўлсин, биз уни символик тарзда бундай белгилаймиз:

$$F(x, y) = 0. \quad (1)$$

Агар $y = f(x)$ функция бирор (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, (1) тенгламада y урнига $f(x)$ ифода қўйилганда тенглама x га нисбатан айниятга айланса, y ҳолда $y = f(x)$ функция (1) тенглама билан аниқланган, ошкормас функция бўлади.

Масалан,

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0 \quad (2)$$

тенглама мана бу

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad (3)$$

$$y = -\sqrt{a^2 - x^2} \quad (4)$$

элементар функцияларни ноошкор тарзда аниқлайди (64- ва 65- расм).

Ҳақиқатан, бу қийматларни (2) тенгламага қўйгандан сўнг айният ҳосил бўлади:

$$x^2 + (a^2 - x^2) - a^2 = 0.$$

(3) ва (4) ифодадалар (2) тенгламани y га нисбатан ечиш йўли билан ҳосил қилинган. Аммо, ҳар қандай ошкормас берилган функцияни ҳам ошкор шаклда бермоқ, яъни $y = f(x)$ шакл-

*) Агар функция $y = f(x)$ кўринишдаги тенглама билан берилган бўлса, y ҳолда функция ошкор кўринишда ёки ошкора берилган дейилади.

га қўймоқ мумкин бўлавермайди, бу ерда $f(x)$ элементар функция.

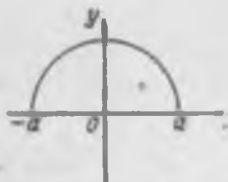
Масалан,

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

ёки

$$y - x - \frac{1}{4} \sin y = 0$$

тенгламалар билан берилган функциялар элементар функциялар билан ифодаданмайди, яъни бу тенгламаларни элементар функциялар орқали у га нисбатан ечиш мумкин эмас.



64- расм.



65- расм.

1- изоҳ. „Ошкор функция“ ва „ошкормас функция“ терминлари функциянинг табиатини эмас, балки берилиш усулини характерлайди. Ҳар бир ошкор функция $y = f(x)$ ни ошкормас функция $y - f(x) = 0$ шаклида бериш мумкин.

Энди ошкормас функцияни ошкор кўринишга келтирмасдан, яъни $y = f(x)$ шаклга алмаштирмасдан, унинг ҳосиласини топиш қондасини кўрсатамиз.

Фараз қилайлик, функция ушбу

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

тенглама билан берилган бўлсин. Агар у бу ерда x нинг шу тенглик билан аниқланадиган функцияси бўлса, у ҳолда бу тенглик айниятдир.

у ни x нинг функцияси деб ҳисоблаб, бу айниятнинг иккала томонини x бўйича дифференциаллаб (мураккаб функцияни дифференциаллаш қондасидан фойдаланган ҳолда), шунини топамиз:

$$2x + 2yy' = 0,$$

бундан

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Агар биз ушбу

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

ошкор функцияни дифференциаллаган бўлсак,

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{y},$$

яъни худди ўша натижани ҳосил қилган булар эдик.

y x нинг ошкормас функцияси бўлган ҳолга яна бир мисол кўрамиз:

$$y^2 - y - x^2 = 0.$$

Бунини x бўйича дифференциаллаймиз:

$$2y^2 y' - y' - 2x = 0,$$

бундан

$$y' = \frac{2x}{2y^2 - 1}.$$

2-изоҳ. Аргумент x нинг берилган қийматида ошкормас функция ҳосиласининг қийматини топиш учун x нинг берилган қийматида y функциянинг қийматини ҳам билиш зарурлиги келтирилган мисоллардан келиб чиқади.

12-§. Кўрсаткичи исталган ҳақиқий сон бўлган даражали функциянинг, кўрсаткичли функциянинг, мураккаб кўрсаткичли функциянинг ҳосилалари

1-теорема. x^n функциянинг ҳосиласи nx^{n-1} га тенг, яъни

$$\text{агар } y = x^n \text{ бўлса, } y' = nx^{n-1}, \quad (1')$$

бу ерда n — исталган сон.

Исбот. $x > 0$ бўлсин. Берилган функцияни логарифмлаймиз:

$$\ln y = n \ln x.$$

Чиққан тенгликнинг иккала томонини, y ни x нинг функцияси ҳисоблаб, x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{y'}{y} = n \frac{1}{x}, \quad y' = yn \frac{1}{x}.$$

бунга $y = x^n$ қийматни қўйиб, охириги натижани ҳосил қиламиз:

$$y' = nx^{n-1}.$$

Агар фақат x^a маънога эга бўлса, бу формуланинг $x < 0$ учун ҳам тўғрилигини кўрсатиш қийин эмас*).

2-теорема. a^x функциянинг ҳосиласи, $a^x \ln a$ га тенг, бу ерда $a > 0$, яъни

$$\text{агар } y = a^x \text{ бўлса, } y' = a^x \ln a, \quad (\text{XIV})$$

Исбот. $y = a^x$ тенгликни логарифмлаймиз:

$$\ln y = x \ln a.$$

Бу тенгликни, y ни x нинг функцияси ҳисоблаб, дифференциаллаймиз:

$$\frac{1}{y} y' = \ln a; \quad y' = y \ln a$$

ёки

$$y' = a^x \ln a.$$

Агар асос $a = e$ бўлса, y ҳолда $\ln e = 1$ бўлади ва биз

$$y = e^x, \quad y' = e^x \quad (\text{XIV}')$$

формулани ҳосил қиламиз.

1-мисол. $y = e^{x^2}$ функция берилган. Оралиқ аргумент u ни киритиб, уни мураккаб функция сингари тасвирлаймиз:

$$y = e^u, \quad u = x^2;$$

y ҳолда

$$y'_u = e^u, \quad u'_x = 2x,$$

демак,

$$y'_x = e^u 2x = e^{x^2} 2x.$$

Асоси ҳам, даража кўрсаткичи ҳам x нинг функцияларидан иборат бўлган функция мураккаб кўрсаткичли функция дейилади, масалан $(\sin x)^{x^2}$, x^{e^x} , x^x , $(\ln x)^x$ ва шунга ўхшаш, умуман,

$$y = [u(x)]^{v(x)} \equiv u^v$$

кўринишдаги ҳар бир функция мураккаб кўрсаткичли функциядир**).

3-теорема.

Агар $y = u^v$ бўлса, $y' = vu^{v-1} u' + u^v v \ln u$ бўлади. (XV)

*) Бу формула илгари (III боб, 5-§) n бутун мусбат сон бўлган ҳол учун исботланган эди. Энди (1) формула умумий ҳолда (исталган ўзгармас n сон учун) исботланди.

**) Кўпинча бундай функция кўрсаткичли-даражали ёки даражали-кўрсаткичли функция дейилади.

Исбот. у функцияни логарифмлаймиз:

$$\ln y = v \ln u.$$

Чиққан тенгликни x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{1}{y} y' = v \frac{1}{u} u' + v' \ln u,$$

бундан

$$y' = y \left(v \frac{u'}{u} + v' \ln u \right).$$

Бунга $y = u^v$ ифодани қўйиб, ушбу натижани ҳосил қиламиз:

$$y' = v u^{v-1} u' + u^v v' \ln u.$$

Шундай қилиб, мураккаб кўрсаткичли функциянинг ҳосиласи иккита қўшилувчидан иборат: агар дифференциаллашда u ни x нинг функцияси, v ни эса ўзгармас деб фараз қилинса (яъни агар u^v даражали функция деб қаралса), биринчи қўшилувчи чиқади; агар v ни x нинг функцияси, u ни эса const деб фараз қилинса (яъни, u^v кўрсаткичли функция деб қаралса) иккинчи қўшилувчи чиқади.

2-мисол. Агар $y = x^x$ бўлса, у ҳолда $y' = x x^{x-1} (x') + x^x (x') \ln x$

ёки

$$y' = x^x + x^x \ln x = x^x (1 + \ln x).$$

3-мисол. Агар $y = (\sin x)^{x^2}$ бўлса, у ҳолда

$$\begin{aligned} y' &= x^2 (\sin x)^{x^2-1} (\sin x)' + (\sin x)^{x^2} (x^2)' \ln \sin x = \\ &= x^2 (\sin x)^{x^2-1} \cos x + (\sin x)^{x^2} 2x \ln \sin x. \end{aligned}$$

Ҳосилаларни топиш учун бу параграфда қўлланилган ва аввал берилган функция логарифмининг ҳосиласини топишдан иборат бўлган усул, функцияларни дифференциаллашда кенг қўлланилади. Бу усулни қўлланиш кўпинча ҳисоблашни бирмунча соддалаштиради.

4-мисол. $y = \frac{(x+1)^2 \sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}$ функциядан ҳосил топиш талаб қилинади.

Ечиш. Тенгликнинг иккала томонини логарифмлаймиз:

$$\ln y = 2 \ln (x+1) + \frac{1}{2} \ln (x-1) - 3 \ln (x+4) - x.$$

Оқирги тенгликнинг иккала томонини дифференциаллаймиз:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1.$$

у га кўпайтириб ва у ўрнига $\frac{(x+1)^2 \sqrt{x-1}}{(x+4)^2 e^x}$ ифодани қўйиб, ушбу натижани ҳосил қиламиз:

$$y' = \frac{(x+1)^2 \sqrt{x-1}}{(x+4)^2 e^x} \left[\frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1 \right].$$

Изоҳ. Берилган $y = y(x)$ функция натурал логарифмининг x бўйича ҳосиласидан иборат $\frac{y'}{y} = \ln(y)'$ ифода *логарифмик ҳосила* дейилади.

13-§. Тескари функция ва уни дифференциаллаш

Фараз қилайлик, бирор (a, b) ($a < b$) интервалда аниқланган ўсувчи (66- расм) ёки камаювчи функция

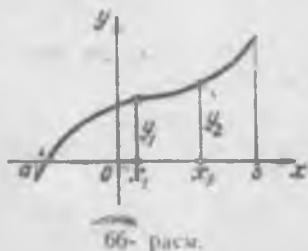
$$y = f(x) \quad (1)$$

берилган бўлсин (1 боб, 6- § га қаранг) $f(a) = c$, $f(b) = d$ бўлсин. Аниқлик учун бундан буён ўсувчи функцияни текширамиз. (a, b) интервалга қарашли иккита ҳар хил x_1 ва x_2 қийматларни қараймиз. Ўсувчи функциянинг таърифидан агар $x_1 < x_2$ ва $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ бўлса, у вақтда $y_1 < y_2$ бўлиши чиқади. Демак, иккита ҳар хил x_1 ва x_2 қийматларга функциянинг иккита y_1 ва y_2 турли қийматлари мос келади. Бунинг тескарисин ҳам тўғри, яъни агар $y_1 < y_2$ ва $y_1 = f(x_1)$ ҳамда $y_2 = f(x_2)$ бўлса, ўсувчи функциянинг таърифидан $x_1 < x_2$ бўлиши чиқади. Шундай қилиб, x нинг қийматлари билан унинг уларга мос қийматлари орасида ўзаро бир қийматли мослик аниқланади.

у нинг бу қийматларини аргументнинг қийматлари деб, x нинг қийматларини эса функциянинг қийматлари деб қараб, x ни у нинг функцияси сифатида оламиз:

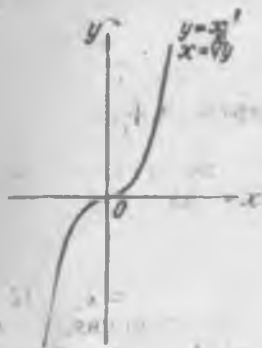
$$x = \varphi(y). \quad (2)$$

Бу функция $y = f(x)$ функция учун *тескари функция* дейилади. $y = f(x)$ функция ҳам $x = \varphi(y)$ функция учун тескари эканлиги равшан. Шунга ўхшаш муҳокама билан камаювчи функция ҳам тескари функцияга эга эканлигини исботлаш мумкин.

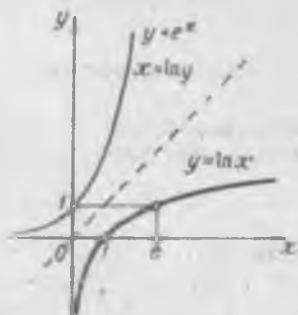


1-изох. Агар ўсувчи (ёки камаювчи) $y = f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлиб, бунинг устига $f(a) = c$, $f(b) = d$ бўлса, у ҳолда тескари функция ҳам $[c, d]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз эканлигини исботсиз кўрсатамиз.

1-мисол. $y = x^3$ функция берилган бўлсин. Бу функция $-\infty < x < +\infty$ чексиз интервалда ўсувчи; бунга тескари функция $x = \sqrt[3]{y}$ (67- расм).



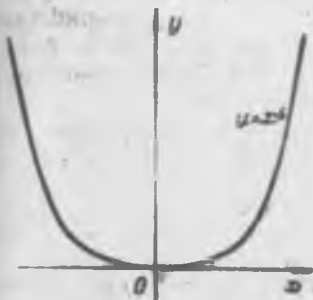
67- расм.



68- расм.

$x = \varphi(y)$ тескари функция $y = f(x)$ тенгламани x га нисбатан ечиш йўли билан топилишини айтиб ўтаемиз.

2-мисол. $y = e^x$ функция берилган бўлсин. Бу функция $-\infty < x < +\infty$ чексиз интервалда ўсувчи. Унга тескари функция $x = \ln y$. Тескари функциянинг мавжудлик соҳаси $0 < y < +\infty$ (68- расм).



69- расм.

2-изох. Агар $y = f(x)$ функция бирор интервалда ўсувчи ҳам, камаювчи ҳам бўлмаса, у ҳолда бу функция бир неча тескари функцияларга эга бўлиши мумкин*).

3-мисол. $y = x^2$ функция $-\infty < x < +\infty$ чексиз интервалда аниқланган. Бу функция ўсувчи ҳам, камаювчи ҳам эмас ва тескари функцияга ҳам эга эмас. Агар биз $0 < x < +\infty$ интервални қарасак, у ҳолда функция бу ерда ўсувчи ва унинг учун тескари функция $x = \sqrt{y}$ бўлади. $-\infty < x < 0$ интервалда эса функция камаювчи ва унинг учун тескари функция $x = -\sqrt{y}$ бўлади (69- расм).

* у ни x нинг функцияси эканлиги ҳақида гапирганимизда, биз у нинг x билан бир қийматли тарзда боғлиқлигини тушунишимизни яна бир марта таъкидлаб ўтаемиз.

3-изоҳ. Агар $y = f(x)$ ва $x = \varphi(y)$ функциялар ўзаро тескари бўлса, уларнинг графиклари биргина эгри чизиқдан иборат бўлади. Аммо, тескари функциянинг аргументини яна x билан, функцияни эса y билан белгиласак ва уларни бир координаталар системасида чизсак, y ҳолда иккита ҳар хил график ҳосил қиламиз.

Графиклар биринчи координат бурчагининг биссектриссасига нисбатан симметрик бўлишини кўриш қийин эмас.

4-мисол. 68-расмда 2-мисолда текширилган $y = e^x$ (ёки $x = \ln y$) функциянинг ва унга тескари $y = \ln x$ функциянинг графиклари чизилган.

Энди тескари функция ҳосиласини билган ҳолда $y = f(x)$ функциянинг ҳосиласини топишга имкон берувчи теоремани исботлаймиз.

Теорема. Агар

$$y = f(x) \quad (1)$$

функция учун текшириладиган y нуқтада нолдан фарқли $\varphi'(y)$ ҳосилага эга бўлган

$$x = \varphi(y) \quad (2)$$

тескари функция мавжуд бўлса, y ҳолда тегишли x нуқтада $y = f(x)$ функция $\frac{1}{\varphi'(y)}$ га тенг бўлган $f'(x)$ ҳосилага эга бўлади, яъни

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} \quad (\text{XVI})$$

формула туғри бўлади.

Шундай қилиб, иккита ўзаро тескари функциялардан бирининг ҳосиласи бирни бу функциялардан иккинчисининг x ва y нинг тегишли қийматларидаги ҳосиласига бўлинганига тенг*).

Исбот. Δy орттирмани олганимизда, (2) га биноан

$$\Delta x = \varphi(y + \Delta y) - \varphi(y).$$

$\varphi(y)$ монотон функция бўлгани учун $\Delta x \neq 0$. Ушбу айниятни ёзамиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}. \quad (3)$$

* Биз $f'(x)$ ёки x ёзар эканмиз, y ҳолда ҳосилани ҳисоблашда эркин ўзгарувчи сифатида x олинади деб ҳисоблаймиз; $\varphi'(y)$ ёки x , ёзганимизда эса ҳосилани ҳисоблашда эркин ўзгарувчи родини y ўйнайди деб ҳисоблаймиз. (XVI) формуланинг ўнг томонида y бўйича дифференциаллагандан сўнг ўрнига $f(x)$ ни қўйиш кераклигини уқтириб ўтамиз.

$\varphi(y)$ узлуксиз функция бўлгани учун, $\Delta y \rightarrow 0$ да $\Delta x \rightarrow 0$. $\Delta y \rightarrow 0$ да (3) тенгликнинг иккала томонида лимитга ўтиш билан

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \text{ ёки } f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

ни ҳосил қиламиз, яъни XVI формуланинг ўзи келиб чиқди.

Изоҳ. Агар мураккаб функцияни дифференциаллаш ҳақидаги теоремадан фойдаланилса, у ҳолда XVI формулани қўлладагича ҳосил қилиш мумкин. у ни x нинг функцияси ҳисоблаб, (2) тенгликнинг иккала томонини x бўйича дифференциаллаймиз: $1 = \varphi'(y) y'_x$, бундан

$$y'_x = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

Чиққан натижа геометрик усулда очик тасвирланади. $y = f(x)$ функциянинг графигини текширамиз (70- расм). Бу эгри чизиқ $x = \varphi(y)$ функциянинг графиги ҳам бўлади, бу ерда x энди функция деб, y эса эркин ўзгарувчи деб қаралади. Бу эгри чизиқнинг бирор $M(x, y)$ нуқтасини текширамиз. Берилган уринманинг Ox ва Oy ўқларининг мусбат йўналишлари билан ташкил қилган бурчакларини мос равишда α ва β билан белгилаймиз. Ҳосиланинг геометрик маъноси ҳақида 3- § даги натижаларга асосан:

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha, \quad \varphi'(y) = \operatorname{tg} \beta. \quad (4)$$

Агар $\alpha < \frac{\pi}{2}$ бўлса, у ҳолда $\beta = \frac{\pi}{2}$ бўлиши 70- расмдан бевожита чиқади. Агар $\alpha > \frac{\pi}{2}$ бўлса, у ҳолда $\beta = \frac{3\pi}{2} - \alpha$ эканлигини кўриш осон. Демак, ҳар қандай ҳолда

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} \alpha,$$

бундан

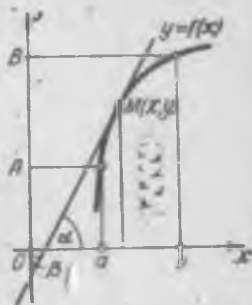
$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

ёки

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}.$$

(4) формуладан $\operatorname{tg} \alpha$ ва $\operatorname{tg} \beta$ нинг ифодаларини ўрнига қўйиш билан шу натижани ҳосил қиламиз:

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$



70- расм.

14-§. Тескари тригонометрик функциялар ва уларни дифференциаллаш

1) Функция $y = \arcsin x$.

Ушбу

$$x = \sin y \quad (1)$$

функцияни қараймиз ва Oy ўқи юқорига вертикал ҳолда йўналтириб, бу функциянинг графигини ясаймиз (71-расм). Бу функция $-\infty < y < +\infty$ чексиз интервалда аниқланган. $-\frac{\pi}{2} <$

$y < \frac{\pi}{2}$ кесмада $x = \sin y$ функция ўсувчи, унинг қийматлари $-1 < x < 1$ кесмани тўлатади. Бинобарин, $x = \sin y$ функция тескари функцияга эга, у бундай белгиланади:

$$y = \arcsin x^*).$$

Бу функция $-1 < x < 1$ кесмада аниқланган, унинг қийматлари $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ кесмани тўлатади. 71-расмда $y = \arcsin x$ функциянинг графиги қуюқ чизик билан тасвирланган.

1-теорема. $\arcsin x$ функциянинг ҳосиласи $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ га тенг, яъни агар $y = \arcsin x$ бўлса,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (XVII)$$

Исбот. (1) тенгликка асосан:

$$x' = \cos y.$$

Тескари функцияни дифференциаллаш қондасига кўра

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\cos y},$$

лекин

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

шунинг учун

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

*) Тригонометридан маълум $y = \arcsin x$ тенглик (1) тенглигининг бошқача ёзилиши эквивалентини қайд этамиз. Бу ерда y (берилган x да) синуслари x га тенг бурчакларнинг қийматлари тўпламини биладиради.

илдиз олдида плюс ишора олинади, чунки $y = \arcsin x$ функция $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ кесмада қийматлар қабул қилади, демак, $\cos y \geq 0$.

1-мисол. $y = \arcsin e^x$,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} (e^x)' = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

2-мисол.

$$y = \left(\arcsin \frac{1}{x} \right)^2,$$

$$y' = 2 \arcsin \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \left(\frac{1}{x} \right)' = -2 \arcsin \frac{1}{x} \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}}.$$

2) Функция $y = \arccos x$.

Юқоридагидек,

$$x = \cos y \quad (2)$$

функцияни қараймиз ва-Оу ўқни юқорига йўналтириб, унинг графигини ясаймиз (72- расм). Бу функция $-\infty < y < +\infty$ чексиз интервалда аниқланган. $0 < y < \pi$ кесмада $x = \cos y$ функция камаювчи ва тескари функцияга эга бўлиб, у мана бундай белгиланади:

$$y = \arccos x.$$

Бу функция $-1 < x < 1$ кесмада аниқланган. Функциянинг қийматлари $\pi \geq y \geq 0$ кесмани тўлдиради. 72- расмда $y = \arccos x$ функциянинг графиги қуюқ чизик билан тасвирланган.

2-теорема. $\arccos x$ функциянинг ҳо-

силаси $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ га тенг, яъни агар $y = \arccos x$ бўлса,

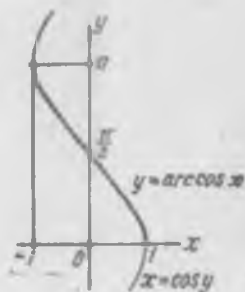
$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (\text{XVIII})$$

Исбот. (2) тенгликка асосан

$$x'_y = -\sin y.$$

Демак,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}.$$



72- расм.

Аммо $\cos y = x$, шунинг учун

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y}$ тенгликда илдиз олдида плюс ишора оли-
нади, чунки $y = \arccos x$ функция $0 < y < \pi$ кесмада аниқлан-
ган, демак, $\sin y \geq 0$.

3- мисол. $y = \arccos(\operatorname{tg} x)$.

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}} (\operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}} \frac{1}{\cos^2 x}.$$

3) Функция $y = \arctg x$.
Ушбу

$$x = \operatorname{tg} y \quad (3)$$

функцияни қараймиз ва графигини ясаймиз (73- расм). Бу функ-
ция унинг, $y = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) қийматларидан

бошқа, барча қийматлари учун аниқ-
ланган. $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ интервалда
 $x = \operatorname{tg} y$ функция ўсувчи ва тескари
функцияга эга бўлиб, у бундай бел-
гиланади:

$$y = \arctg x.$$

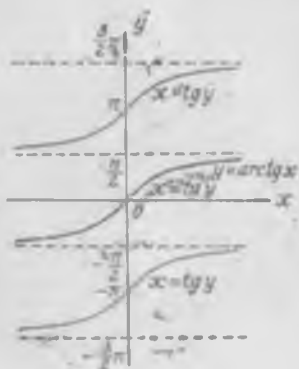
Бу функция $-\infty < x < +\infty$ интервалда
аниқланган. Функциянинг қийматла-
ри $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ интервални тўлдира-
ди. 73- расмда $y = \arctg x$ функция-
нинг графиги қуюқ чизик билан тас-
вирланган.

3- теорема. $\arctg x$ функция-
нинг ҳосиласи $\frac{1}{1+x^2}$ га тенг, яъни

$$\text{агар } y = \arctg x \text{ бўлса, } y' = \frac{1}{1+x^2}. \quad (\text{XIX})$$

Исбот. (3) тенгликка асосан

$$x_y = \frac{1}{\cos^2 y}.$$



73- расм.

Демак,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \cos^2 y,$$

аммо

$$\cos^2 y = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y},$$

$\operatorname{tg} y = x$ бўлгани учун охирги натижа:

$$y' = \frac{1}{1 + x^2}$$

4- мисол. $y = (\operatorname{arctg} x)^4$,

$$y' = 4(\operatorname{arctg} x)^3 (\operatorname{arctg} x)' = 4(\operatorname{arctg} x)^3 \frac{1}{1 + x^2}.$$

4) Функция $y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$.

Ушбу

$$x = \operatorname{ctg} y \quad (4)$$

функцияни қараймиз. Бу функция унинг, $y = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2$) қийматларидан бошқа, барча қийматлари учун аниқланган. Бу функциянинг графиги 74- расмда тасвирланган. $0 < y < \pi$ интервалда $x = \operatorname{ctg} y$ функция камаювчи ва тескари функцияга эга бўлиб, у

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$$

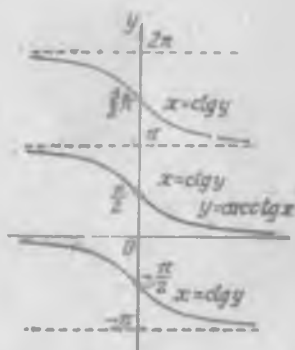
билан белгиланади. Бу функция, $-\infty < x < +\infty$ чексиз интервалда аниқланган, унинг қийматлари $0 < y < \pi$ интервални тўлдирadi.

4- теорема. $\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$ функциянинг ҳосиласи $-\frac{1}{1+x^2}$ га тенг, яъни

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x \text{ бўлса, } y' = -\frac{1}{1+x^2} \quad (XX)$$

Исбот. (4) тенгликдан

$$x'_y = -\frac{1}{\sin^2 y},$$



74- расм.

Демак,

$$y'_x = -\sin^2 y = -\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 y} = -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 y}.$$

Аммо $\operatorname{ctg} y = x$. Шунинг учун

$$y'_x = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

15-§. Дифференциаллашнинг асосий формулалари жадвали

Энди дифференциаллашнинг олдинги параграфларда чиқарилган барча асосий формулаларини ва қоидаларини бир жадвалга йиғамиз.

$$y = \operatorname{const}, \quad y' = 0.$$

Даражали функция:

$$y = x^a, \quad y' = ax^{a-1};$$

жумладан

$$y = \sqrt{x}, \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$y = \frac{1}{x}, \quad y' = -\frac{1}{x^2}.$$

Тригонометрик функциялар:

$$y = \sin x, \quad y' = \cos x,$$

$$y = \cos x, \quad y' = -\sin x,$$

$$y = \operatorname{tg} x, \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$y = \operatorname{ctg} x, \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Тескари тригонометрик функциялар:

$$y = \arcsin x, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y = \arccos x, \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad y' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$y = \operatorname{arcctg} x, \quad y' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Кўрсаткичли функциялар:

$$y = a^x, \quad y' = a^x \ln a;$$

жумладан,

$$y = e^x, \quad y' = e^x.$$

Логарифмик функция:

$$y = \log_a x, \quad y' = \frac{1}{x} \log_a e;$$

жумладан,

$$y = \ln x, \quad y' = \frac{1}{x}.$$

Дифференциаллашнинг умумий қоидалари:

$$y = Cu(x), \quad y' = Cu'(x) \quad (C = \text{const}),$$

$$y = u + v - w, \quad y' = u' + v' - w',$$

$$y = uv, \quad y' = u'v + uv',$$

$$y = \frac{u}{v}, \quad y' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

$$\left. \begin{aligned} y &= f(u), \\ u &= \varphi(x), \end{aligned} \right\} \quad y'_x = f'_u(u) \varphi'_x(x),$$

$$y = u^v, \quad y' = vu^{v-1}u' + uv' \ln u.$$

Агар $y = f(x)$, $x = \varphi(y)$ бўлиб, f ва φ ўзаро тескари функциялар бўлса, у ҳолда

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(x)}$$

бўлади, бу ерда $y = f(x)$.

16- §. Функцияларнинг параметрик берилиши

Икки тенглама берилган:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

бу ерда, $t \in [T_1, T_2]$ кесмадаги қийматларни қабул қилади. t нинг ҳар бир қийматида x ва y нинг қийматлари тўғри келади (φ ва ψ функцияларни бир қийматли деб фараз қиламиз). Агар x ва y қийматларига Oxy координат текислигидаги нуқтанинг координатлари деб қаралса, y ҳолда t нинг ҳар бир қийматига текисликнинг маълум бир нуқтаси тўғри келади. t нинг қийматлари T_1 дан T_2 гача ўзгарса, бу нуқта текисликда бирор эгри чизиқни чизади. (1) тенгламалар бу эгри чизиқнинг *параметрик тенгламалари* дейилади, t параметр дейилади,

эгри чизиқни (1) тенгламалар билан бериш усули эса *параметрик усул* дейилади.

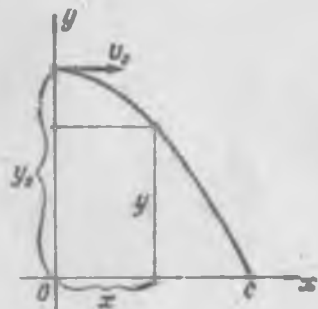
Энди, фараз қилайлик, $x = \varphi(t)$ функция $t = \Phi(x)$ тескари функцияга эга бўлсин. У ҳолда у ўзи x нинг функциясидан иборат бўлиши равшан:

$$y = \psi[\Phi(x)]. \quad (2)$$

Шундай қилиб, (1) тенгламалар у ни x нинг функцияси каби аниқлайди ва x нинг функцияси параметрик равишда берилади дейилади. у нинг x билан бевосита боғлиқлигининг ифодаси $y = f(x)$ ни (1) тенгламадан параметр t ни йўқотиш йўли билан ҳосил қилиш мумкин.

Эгри чизиқларнинг параметрик тарзда берилиши механикада кенг қўлланилади. Агар *Оху* текисликда бирор моддий нуқта ҳаракат қилса ва бизга бу нуқтанинг координата ўқларидаги проекцияларининг ҳаракат қонунлари маълум:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (1')$$



75- расм.

бўлса, бу ерда параметр t вақт, у ҳолда (1') тенгламалар ҳаракатланувчи нуқта траекториясининг параметрик тенгламаларидан иборат бўлади. Бу тенгламалардан параметр t ни йўқотиб, $y = f(x)$ ёки $F(x, y) = 0$ формада траектория тенгламасини ҳосил қиламиз. Масалан, шундай бир масалани куздан кечирайлик.

Масала. y_0 баландликда v_0 тезлик билан горизонтал ҳаракат қиладётган самолётдан ташланган юкнинг траекторияси ва тушиш жойи аниқлансин (ҳавонинг қаршилигини эътиборга олмаслик мумкин).

Е ч й ш. Юкни самолёт *Оу* ўқини кесган моментда ташлаган деб фараз қилиб, координаталар системасини 75- расмда кўрсатилгандек қилиб оламиз. Равшанки, юкнинг ўзгармас v_0 тезлик билан горизонтал силжиши текис ҳаракат бўлади:

$$x = v_0 t.$$

Тортиш кучининг таъсири остида тушаётган юкнинг вертикал силжиши

$$S = \frac{gt^2}{2}$$

формула билан ифодаланади. Демак, вақтнинг исталган моментда юкнинг ердан масофаси

$$y = y_0 - \frac{gt^2}{2}$$

формула билан ифодаланади.

Ушбу икки тенглама :

$$x = v_0 t,$$

$$y = y_0 - \frac{gt^2}{2},$$

траекториянинг параметрик тенгламалари бўлади. Параметр t ни йўқотиш учун биринчи тенгламадан $t = \frac{x}{v_0}$ қийматни топамиз ва бу қийматни иккинчи тенгламага қўямиз. У вақтда траектория тенгламасини

$$y = y_0 - \frac{g}{2v_0^2} x^2$$

формада ҳосил қиламиз. Бу — учи $M(0, y_0)$ нуқтада бўлган парабола тенгламасидир, бунда Oy ўқ параболанинг симметрия ўқи хизматини қилади.

Энди OC кесманинг миқдорини аниқлаймиз. C нуқтанинг абсциссасини X билан белгилаймиз, бу нуқтанинг ординатаси $y = 0$ эканлигини қайд этамиз, Бу қийматларни олдинги формулага қўйсақ,

$$0 = y_0 - \frac{g}{2v_0^2} X^2.$$

бундан

$$X = v_0 \sqrt{\frac{2y_0}{g}}.$$

17- §. Баъзи эгри чизикларнинг параметрик формадаги тенгламалари

А й л а н а. Маркази координаталар бошида ва радиуси r бўлган айлана берилган (76- расм).

Айлананинг бирор $M(x, y)$ нуқтасига ўтказилган радиусининг Ox ўқ билан ҳосил қилган бурчагини t билан белгилаймиз, У ҳолда айлана истадган нуқтасининг координаталари параметр t билан қуйидагича ифодаланади:

$$\begin{cases} x = r \cos t, \\ y = r \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

Бу эса айлананинг параметрик тенгламаларидир. Агар бу тенгламалардан параметр t ни йўқотсак, у ҳолда айлананинг фақат x ва y ни ўз ичига олган тенгламасини ҳосил қиламиз. Параметрик тенгламаларни квадратга кўтариб ва қўшиб, айлана учун мана бу тенгламани ҳосил қиламиз:

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t)$$

ёки

$$x^2 + y^2 = r^2.$$



76- расм.

Э л л и п с. Эллипснинг

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

тенгламаси берилган. Бунда

$$x = a \cos t \quad (2')$$

фараз қиламиз. Бу ифодани (1) тенгламага қўйиб,

$$y = b \sin t \quad (2'')$$

ифодани оламиз. Мана бу тенгламалар:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad 0 < t < 2\pi, \quad (2)$$

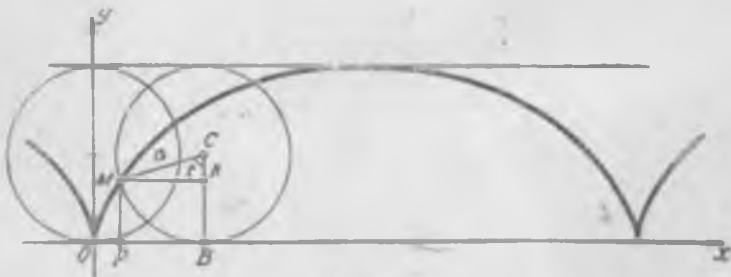
эллипснинг параметрик тенгламаларидир.

Параметр t нинг геометрик маъносини аниқлаймиз. Марказлари координаталар бошида ва радиуслари a ва b бўлган иккита айлана утказамиз (77- расм). $M(x, y)$ нуқта эллипсда ётсин, B нуқта эса катта айлананинг M нуқта билан бир хил абсциссага эга бўлган нуқтаси бўлсин, OB радиуснинг Ox ўқ билан ҳосил қилган бурчагини t билан белгилаймиз. Расмдан бевосита қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$\begin{aligned} x = OP &= a \cos t \quad [6y - (2') \text{ тенглама}] \\ CQ &= b \sin t. \end{aligned}$$

(2'') тенгликка асосан $CQ = y$, яъни CM тўғри чизиқ Ox ўққа параллел деган хулосага келамиз.

Демак, (2) тенгламаларда t радиус OB нинг абсцисса ўқи билан ҳосил қилган бурчагидир. Баъзан t бурчак *эксцентрик бурчак* деб ҳам аталади.



77- расм.



78- расм.

Циклонда: Агар айлана тўғри чизиқ бўйича сирпанмасдан юмаланса, бу айланада ётувчи нуқта чизган эгри чизиқ циклонда дейилади (78- расм). Фараз қилайлик, юмаланувчи айлананинг M нуқтаси ҳаракат бошланишида координаталар бошига тушган бўлсин. Айлана t бурчакка бурилгандан кейин M нуқтанинг координатларини аниқлаймиз. Юмаланувчи айлананинг радиусини a билан белгилаймиз (78- расмдан кўрингандек).

$$x = OP = OB - PB,$$

аммо айлана сирпанмасдан юмаланади, шунинг учун

$$OB = MB = at, \quad PB = MK = a \sin t.$$

Демак,

$$x = at - a \sin t = a(t - \sin t).$$

Сўнгра,

$$y = MP = KB = (B - CK) = a - a \cos t = a(1 - \cos t).$$

Шундай қилиб,

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (3)$$

тенгламалар циклоиданинг параметрик тенгламаларидир. t нинг 0 дан 2π га-ча узгаришида M нуқта циклоиданинг бир арқини чизади.

Оқирги тенгламалардан параметр t ни йўқотамиз ва x нинг y га бевосита боғланишини ҳосил қиламиз. $0 \leq t \leq \pi$ кесмада $y = a(1 - \cos t)$ функция ушбу тесқари

$$t = \arccos \frac{a-y}{a}$$

функцияга эга. t нинг ифодасини (3) тенгламалардан биринчисига қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x = a \arccos \frac{a-y}{a} - a \sin \left(\arccos \frac{a-y}{a} \right)$$

ёки

$$0 \leq x \leq \pi a \text{ да } x = a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}.$$

Расмдан бевосита кўрамизки, $\pi a \leq x \leq 2\pi a$ да

$$x = 2\pi a - \left(a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2} \right).$$

$x = a(t - \sin t)$ функция тесқари функцияга эга, бироқ y элементар функциялар орқали ифодаланмайди. Шунинг учун $y = f(x)$ функция ҳам элементар функциялар билан ифодаланмайди.

1- нз о ҳ. Функцияларни ва эгри чизикларни текшириш учун баъзи бир ҳолларда y нинг x га ёки x нинг y га бевосита боғланишига қараганда параметрик тенгламалар қулайроқ эканлигига циклоида мисолида ишонч ҳосил қилиш осон.

Астроида. Ушбу

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \quad (4)$$

параметрик тенгламалар билан берилган эгри чизик астроида дейилади.

Иккала тенгламанинг барча ҳадларини $\frac{2}{3}$ даражага кўтарниб ва қўшин билан x ва y орасида

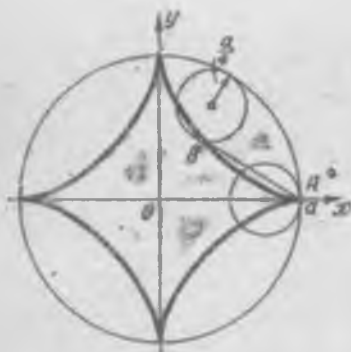
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (\cos^2 t + \sin^2 t)$$

ёки

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (5)$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Бу эгри чизиқ 79- расмда тасвирланган формага эга эканлиги қуйида кўрсатилади (V боб, 12- § га қarang). Бу эгри чизиқ a радиусли айлана бўйича сирпан-

май юмаланувчи $\frac{a}{4}$ радиусли иккинчи айланадаги бирор нуқтанинг траекторияси сифатида чиқарилиши мумкин (бунда кичик айлана доимо катта айлана ичида қолади; 79- расмга қarang).



79- расм.

2- и 3-о ҳ. (4) тенгламалар ва (5) тенглама биргина $y = f(x)$ функцияни аниқлаб қолмайди. Улар $-a \leq x \leq +a$ кесмада узлуксиз иккита функцияни аниқлайди. Улардан бири манфий бўлмаган қийматлар, иккинчиси мусбат бўлмаган қийматлар қабул қилади.

18- §. Параметрик берилган функциянинг ҳосиласи

Фараз қилайлик, x нинг функцияси y ушбу

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (t_0 \leq t \leq T) \quad (1)$$

параметрик тенгламалар билан берилган бўлсин. Бу функциялар ҳосилаларга эга ва $x = \varphi(t)$ функция ҳосилага эга булган $t = \Phi(x)$ тескари функцияга эга деб фараз қиламиз. У ҳолда параметрик тенгламалар билан аниқланган $y = f(x)$ функцияни мураккаб функция деб қарамоқ мумкин:

$$y = \psi(t), \quad t = \Phi(x),$$

t — ораликдаги аргумент.

Мураккаб функцияни дифференциаллаш қондасига мувофиқ

$$y'_x = y'_t t'_x = \psi'_t(t) \Phi'_x(x). \quad (2)$$

Тескари функцияни дифференциаллаш ҳақидаги теоремага асосан

$$\Phi'_x(x) = \frac{1}{\varphi'_t(t)}.$$

Охирги ифодани (2) тенгликка қўйиб, шуни ҳосил қиламиз:

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

ёки

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \quad (\text{XXI})$$

Чиқарилган формула унинг x га бевосита боғланишининг ифодасини топмай туриб, параметрик берилган функциянинг y_x ҳосиласини топишга имкон беради.

1-мисол. x нинг функцияси y ушбу параметрик тенгламалар билан берилган:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \end{cases} \quad (0 < t < \pi).$$

1) t нинг исталган қийматида, 2) $t = \frac{\pi}{4}$ қийматда $\frac{dy}{dx}$ ҳосила топилисин.

Ечиш.

$$1) y'_x = \frac{(a \sin t)'}{(a \cos t)'} = \frac{a \cos t}{-a \sin t} = -\operatorname{ctg} t$$

$$2) (y'_x)_{t=\frac{\pi}{4}} = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = -1.$$

2-мисол. Ихтиёрий $(0 < t < 2\pi)$ нуқтада ушбу

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

циклоидага уринманинг бурчак коэффициентини топилисин.

Ечиш. Уринманинг ҳар бир нуқтадаги бурчак коэффициентини y'_x ҳосиланинг бу нуқтадаги қийматига тенг, яъни

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Аmmo

$$x'_t = a(1 - \cos t), \quad y'_t = a \sin t$$

Демак,

$$y'_x = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right).$$

Демак, циклоиданинг ҳар бир нуқтадаги уринманинг бурчак коэффициентини $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right)$ га тенг, бу ерда t — параметрнинг шу нуқтага мос қиймати.

Аммо, бунинг маъноси уринманинг Ox ўқига α оғиш бурчаги $\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ га тенг демакдир (t нинг $-\pi$ ва π орасидаги қийматлари учун*).

19- §. Гиперболик функциялар

Математик анализнинг кўпгина татбиқларида $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ва $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ кўринишдаги кўрсаткичли функцияларнинг комбинациялари учрайди. Бу комбинациялар янги функциялар сифатида қаралади ва қуйидагича белгиланади:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \\ \operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Бу (1) функциялардан биринчиси *гиперболик синус*, иккинчиси *гиперболик косинус* дейилади. Бу функциялар ёрдами билан яна иккита $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ ва $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ функцияни аниқлаш мумкин:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{th} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - \text{гиперболик тангенс}, \\ \operatorname{cth} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - \text{гиперболик котангенс}. \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

$\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$ функциялар x нинг барча қийматлари учун аниқланган. Функция $\operatorname{cth} x$ эса $x = 0$ нуқтадан бошқа ҳамма ерда аниқланган. Гиперболик функцияларнинг графиклари 80, 81 ва 82-расмларда берилган.

$\operatorname{sh} x$ ва $\operatorname{ch} x$ функцияларнинг (1) формулалар таърифларидан тригонометрик функциялар орасидаги муносабатлар каби муносабатлар келиб чиқади:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad (2)$$

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b, \quad (3)$$

$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b. \quad (3')$$

*) Ҳақиқатан бурчак коэффициентни уринманинг Ox ўқига α оғиш бурчагининг тангенсига тенг. Шунинг учун $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right)$ ва t нинг $\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ айирма 0 ва π орасида ётадиган қийматлари учун $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$.

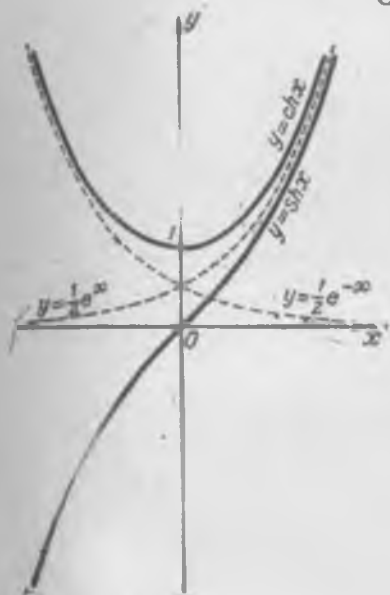
Ҳақиқатан,

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = 1. \end{aligned}$$

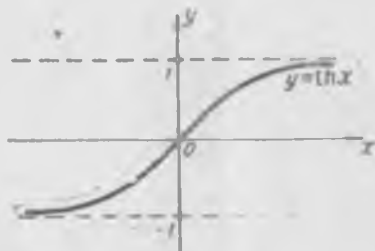
Сўнгра,

$$\operatorname{ch}(a+b) = \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2}$$

эканини назарга олиб, қуйидаги муносабатни ҳосил қиламиз:



80-расм.



81-расм.

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b &= \frac{e^a + e^{-a}}{2} \cdot \frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a - e^{-a}}{2} \cdot \frac{e^b - e^{-b}}{2} = \\ &= \frac{e^{a+b} + e^{-a+b} + e^{a-b} + e^{-a-b} + e^{a+b} - e^{-a+b} - e^{a-b} + e^{-a-b}}{4} = \\ &= \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2} = \operatorname{ch}(a+b). \end{aligned}$$

(3') муносабатнинг тўғрилиги ҳам шунинг сингари исботланади.

„Гиперболик функциялар“ дейишнинг сабаби шу билан изоҳланадики,

$$x^2 + y^2 = 1$$

айланани параметрик тасвирлаш учун $\sin t$ ва $\cos t$ тригонометрик функциялар қандай роль ўйнаса,

$$x^2 + y^2 = 1$$

гиперболани параметрик тасвирлаш учун $\operatorname{sh} t$ ва $\operatorname{ch} t$ функциялар ҳам шундай роль ўйнайди.

Ҳақиқатан,

$$x = \cos t, \quad y = \sin t$$

тенгламалардан t параметрни йўқотиш билан

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t$$

ёки

$$x^2 + y^2 = 1$$

(айлана тенгламаси) тенгликни ҳосил қиламиз. Шунга ўхшаш

$$x = \operatorname{ch} t,$$

$$y = \operatorname{sh} t$$

тенгламалар гиперболанинг параметрик тенгламаларидир.

Ҳақиқатан, бу тенгламаларни ҳадма-ҳад квадратга кўтариб, биринчисидан иккинчиси айирилса, ушбу тенглик ҳосил қилинади:

$$x^2 - y^2 = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t.$$

Унг томондаги ифода, (2) формулага асосан, бирга тенг, демак,

$$x^2 - y^2 = 1,$$

бу эса гиперболанинг тенгламасидир.

Ушбу

$$x^2 - y^2 = 1$$

тенглама билан ифодаданган айланани текширамыз (83- расм). $x = \cos t$, $y = \sin t$ тенгламаларда t параметр сон жиҳатдан AOM марказий бурчакка ёки AOM сектор юзи S нинг иккиланганига тенг, чунки $t = 2S$.

Гиперболанинг

$$x = \operatorname{ch} t,$$

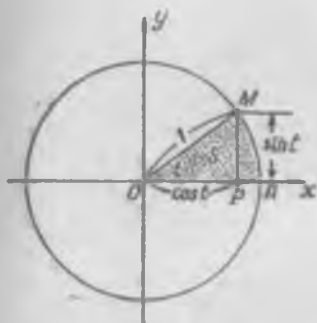
$$y = \operatorname{sh} t$$

82- расм.

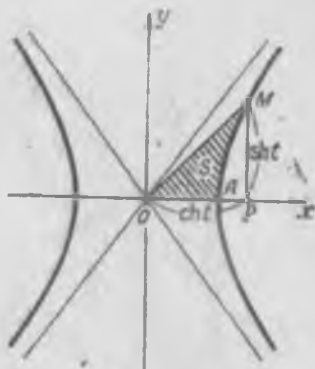
параметрик тенгламаларида t параметр ҳам сон жиҳатдан АСМ гиперболик сектор^{*} юзининг иккиланганига тенглигини исботсиз қайд этамиз (84- расм).

Гиперболик функцияларнинг ҳосилалари гиперболик функцияларнинг таърифларидан келиб чиқадиған ушбу

$$\left. \begin{aligned} (\operatorname{sh} x)' &= \operatorname{ch} x, & (\operatorname{th} x)' &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \\ (\operatorname{ch} x)' &= \operatorname{sh} x, & (\operatorname{cth} x)' &= -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \end{aligned} \right\} \quad (\text{XXII})$$



83- расм.



84- расм.

формулар билан аниқланади; масалан, $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ функция учун

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

20- §. Дифференциал

Фараз қилайлик, $y = f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада дифференциалланадиган бўлсин. Бу функциянинг $[a, b]$ кесмага тегишли бирор x нуқтадаги ҳосиласи

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

тенглик билан аниқланади. $\Delta x \rightarrow 0$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбат маълум

$f'(x)$ сонга интилади ва, демак, $f'(x)$ ҳосиладан чексиз кичик миқдорга фарқ қилади:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

бу ерда $\Delta x \rightarrow 0$ да $\alpha \rightarrow 0$.

Охирги тенгликнинг барча ҳадларини Δx га кўпайтириб, ушбу тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + \alpha \Delta x. \quad (1)$$

Умумий ҳолда $f(x) \neq 0$, шунинг учун ўзгармас x ва ўзгарувчи $\Delta x \rightarrow 0$ да $f'(x) \Delta x$ кўпайтма Δx га нисбатан биринчи тартибли чексиз кичик миқдордир. $\alpha \Delta x$ кўпайтма эса Δx га нисбатан доимо юқори тартибли чексиз кичик миқдордир, чунки

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0.$$

Шундай қилиб, функциянинг Δy орттирмаси иккита қўшилувчидан иборат бўлиб, булардан орттирманинг бош бўлаги деб аталадиган биринчиси $[f'(x) \neq 0$ да] Δx орттирмага нисбатан чизиқлидир. $f'(x) \Delta x$ кўпайтма функциянинг *дифференциали* деб аталади ва dy ёки $df(x)$ билан белгиланади.

Шундай қилиб, агар $y = f(x)$ функция x нуқтада $f'(x)$ ҳосилага эга бўлса, y ҳолда $f'(x)$ ҳосиланинг аргумент орттирмаси Δx билан кўпайтмаси функциянинг *дифференциали* деб аталади ва dy символ билан белгиланади:

$$dy = f'(x) \Delta x. \quad (2)$$

$y = x$ функциянинг дифференциалини топамиз; бу ҳолда $y' = (x)' = 1$, демак, $dy = dx = \Delta x$. Шундай қилиб, эркин ўзгарувчи x нинг дифференциали dx унинг орттирмаси Δx билан бир хил бўлар экан. $dx = \Delta x$ тенгликни ҳам эркин ўзгарувчи дифференциалининг таърифи деб қаралганда текширилган мисол, функция дифференциалининг таърифига бунинг зид келмаслигини курсатар эди. Ҳар қандай ҳолда (2) формулани бундай ёза оламиз:

$$dy = f'(x) dx.$$

Аммо, бу муносабатдан ушбу тенглик келиб чиқади:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Демак, $f'(x)$ ҳосилани функция дифференциалини эркин ўзгарувчининг дифференциалига нисбати деб қараш мумкин.

(1) ифодага қайтамыз ва уни, (2) ни ҳисобга олган ҳолда, бундай ёзамиз:

$$\Delta y = dy + \alpha \Delta x. \quad (3)$$

Шундай қилиб, функция орттирмаси функция дифференциалидан Δx га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдорга фарқ қилади. Агар $f'(x) \neq 0$ бўлса, y ҳолда $\alpha \Delta x$ кўпайтма dy га нисбатан ҳам юқори тартибли чексиз кичик миқдордир ва

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1 + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha \Delta x}{f'(x) \Delta x} = 1 + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{f'(x)} = 1.$$

Шунинг учун тақрибий ҳисоблашларда баъзан ушбу

$$\Delta y \approx dy \quad (4)$$

тақрибий тенгликдан ёки ёйиқроқ кўрinishдаги

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \Delta x \quad (5)$$

тақрибий тенгликдан фойдаланилади, бу эса ҳисоблашни қисқартиради.

1- мисол. $y = x^2$ функциянинг dy дифференциали ва Δy орттирмаси топилисин:

1) x ва Δx нинг ихтиёрий қийматларида;

2) $x = 20$, $\Delta x = 0,1$ бўлганда.

Еч иш. 1) $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \Delta x + \Delta x^2$,
 $dy = (x^2)' \Delta x = 2x \Delta x$.

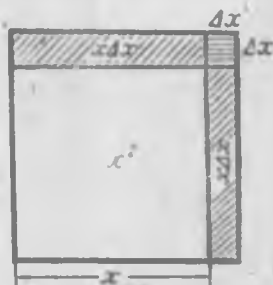
2) Агар $x = 20$, $\Delta x = 0,1$ бўлса,

$$\Delta y = 2 \cdot 20 \cdot 0,1 + (0,1)^2 = 4,01,$$

$$dy = 2 \cdot 20 \cdot 0,1 = 4,00.$$

Δy ни dy билан алмаштиришдаги хато 0,01 га тенг. Кўпинча уни $\Delta y = 4,01$ га нисбатан оз деб ҳисоблаб, уни эътиборга олмаслик мумкин.

Текширилган масала 85- расм билан равшан кўрсатилади.



85- расм.

Тақрибий ҳисоблашларда (5) дан чиқариладиган ушбу

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x \quad (6)$$

тақрибий тенгликдан ҳам фойдаланилади.

2- мисол. $f(x) = \sin x$ бўлсин, y ҳолда $f'(x) = \cos x$.

Бу ҳолда (6) тақрибий тенглик мана бу кўрinishни олади:

$$\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \cos x \Delta x. \quad (7)$$

$\sin 46^\circ$ нинг тақрибий қийматини ҳисоблаймиз. $x = \frac{\pi}{4}$ деб фараз қиламиз

(бу 45° бурчакка тўғри келади). $\Delta x = \frac{\pi}{180}$ (бу 1° бурчакка тўғри келади),

$x + \Delta x = \frac{4}{\pi} + \frac{\pi}{180}$ деб фараз қиламиз. Бу қийматларни (7) га қўйсак,

$$\sin 46^\circ = \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180} \right) \approx \sin \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi}{4}$$

ёки

$$\sin 46^\circ \approx \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\pi}{180} = 0,7071 + 0,7071 \cdot 0,0175 = 0,7194.$$

3-и н с о л. Агар (7) формулада $x = 0$, $\Delta x = \alpha$ десак, қуйидаги тақрибий тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\sin \alpha \approx \alpha.$$

4-и н с о л. Агар $f(x) = \lg x$ бўлса, у вақтда (6) формула бўйича қуйидаги тақрибий тенгликни оламиз:

$$\lg(x + \Delta x) \approx \lg x + \frac{1}{\cos^2 x} \Delta x,$$

$x = 0$, $\Delta x = \alpha$ бўлганда:

$$\lg \alpha \approx \alpha.$$

5-и н с о л. Агар $f(x) = \sqrt{x}$ бўлса, (6) формула

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Delta x,$$

ни беради. $x = 1$, $\Delta x = \alpha$ фараз қилиб,

$$\sqrt{1 + \alpha} \approx 1 + \frac{1}{2} \alpha$$

тақрибий тенгликни ҳосил қиламиз.

Функциянинг дифференциалини топиш масаласи унинг ҳосиласини топиш билан барабар, чунки ҳосилани аргументнинг дифференциалига кўпайтириш билан функциянинг дифференциалини ҳосил қиламиз. Демак, ҳосиллага тегишли теоремалар ва формулаларнинг кўпчилиги дифференциаллар учун ҳам ўз кучини сақлайди. Масалан:

Иккита дифференциалланувчи u ва v функциялар йиғиндисининг дифференциали шу функциялар дифференциалларининг йиғиндисига тенг:

$$d(u + v) = du + dv.$$

Иккита дифференциалланувчи u ва v функциялар кўпайтмасининг дифференциали ушбу

$$d(uv) = u dv + v du$$

формула билан аниқланади.

Масалан, охирги формулани исботлайлик. Агар $y = uv$ бўлса, u ҳолда

$$dy = y'dx = (uv' + vu') dx = uv'dx + vu'dx,$$

аммо

$$v'dx = dv, \quad u'dx = du,$$

шунинг учун

$$dy = u dv + v du.$$

Бошқа формулалар ҳам шунга ўхшаш исботланади, масалан, бўлинманинг дифференциалини аниқловчи формула:

агар $y = \frac{u}{v}$ бўлса, $dy = \frac{vdu - u dv}{v^2}$ бўлади.

Функциянинг дифференциалини ҳисоблашга доир бир неча мисол ечамиз.

6- мисол. $y = \lg^2 x$, $dy = 2 \lg x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$.

7- мисол. $y = \sqrt{1 + \ln x}$, $dy = \frac{1}{2\sqrt{1 + \ln x}} \cdot \frac{1}{x} dx$.

Мураккаб функция дифференциалининг ифодасини топамиз. Фараз қилайлик,

$$y = f(u), \quad u = \varphi(x), \quad \text{ёки} \quad y = f[\varphi(x)]$$

булсин. U ҳолда мураккаб функцияни дифференциаллаш қондасига мувофиқ.

$$\frac{dy}{dx} = f'_u(u) \varphi'(x),$$

демак,

$$dy = f'_u(u) \varphi'(x) dx,$$

лекин $\varphi'(x) dx = du$, шунинг учун

$$dy = f'(u) du.$$

Шундай қилиб, *оралиқ аргумент и эркин* узгарувчи бўлган ҳолда функциянинг дифференциали қандай курунишда бўлган бўлса, мураккаб функциянинг дифференциали шундай курунишда бўлади. Бошқача айтганда, дифференциалнинг формаси функциянинг аргументи эркин узгарувчи ёки бошқа аргументнинг функцияси булишига боғлиқ эмас. Дифференциал формасининг инвариантлиги деб аталадиган бу муҳим хоссадан бундан буён кенг равишда фойдаланилади.

8- мисол. $y = \sin \sqrt{x}$ функция берилган. dy топилсин.

Ечиш. Берилган функцияни мураккаб шаклда ёзамиз: $y = \sin u$, $u = \sqrt{x}$ ва дифференциаллаймиз.

$$dy = \cos u \frac{1}{2\sqrt{x}} dx;$$

аммо $\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = du$, шунинг учун бундай ёзиш мумкин:

$$dy = \cos u du \quad \text{ёки} \quad dy = \cos(\sqrt{x}) d(\sqrt{x}).$$

21- §. Дифференциалнинг геометрик маъноси

Биз

$$y = f(x)$$

функцияни ва унга тегишли эгри чизиқни текшираемиз (86- расм).

Тенгламаси $y = f(x)$ бўлган эгри чизиқда ихтиёрий $M(x, y)$ нуқта олиб, бу нуқтада эгри чизиққа уринма ўтказамиз ва бу уринма Ox ўқнинг мусбат йўналиши билан ҳосил қилган бурчагини α билан белгилаймиз*). Эркин ўзгарувчига Δx орттирмани берамиз; y ҳолда функция $\Delta y = NM_1$ орттирмани олади. $y = f(x)$ эгри чизиқда $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ қийматларга $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ нуқта мос келади.

MNT учбурчакдан

$$NT = MN \operatorname{tg} \alpha,$$

лекин

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x), \quad MN = \Delta x,$$

шунинг учун

$$NT = f'(x) \Delta x;$$

аммо дифференциалнинг таърифига мувофиқ $f'(x) \Delta x = dy$. Шундай қилиб,

$$NT = dy.$$

Охирги тенглик $f(x)$ функциянинг берилган x ва Δx қийматларига тегишли дифференциали $y = f(x)$ эгри чизиқнинг берилган x нуқтасидаги уринма ординатасининг орттирмасига тенг эканини билдиради.

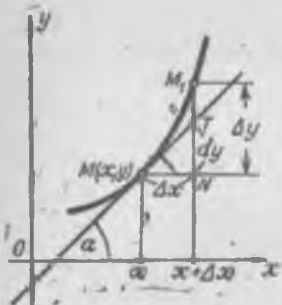
86- расмдан бевосита

$$M_1T = \Delta y - dy$$

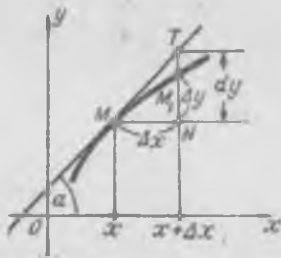
*) $f(x)$ функция x нуқтада чекли ҳосиллага эга деб фараз қилиб, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ ни ҳосил қиламиз.

эканлиги чиқади. Илгари исбот қилинганига кўра $\Delta x \rightarrow 0$ да $\frac{M_1 T}{NT} \rightarrow 0$. Δy орттирма доимо dy дан катта деб ўйлаш ярамайди. Чунончи, 87- расмда

$$\Delta y = M_1 N, \quad dy = NT, \quad \text{бунда } \Delta y < dy.$$



86- расм.



87- расм.

22- §. Турли тартибли ҳосилалар

$y = f(x)$ функция бирор $[a, b]$ кесмада дифференциалланувчи бўлсин. $f'(x)$ ҳосиланинг қийматлари, умуман айтганда, x га боғлиқ, яъни $f'(x)$ ҳосила ҳам x нинг функциясидан иборат. Бу функцияни дифференциаллаб, $f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи деб аталадиган ҳосилани топамиз.

Биринчи ҳосиладан олинган ҳосила *иккинчи тартибли ҳосила* ёки бошланғич функциянинг *иккинчи ҳосиласи* дейилади ва y'' ёки $f''(x)$ символ билан белгиланади:

$$y'' = (y')' = f''(x).$$

Масалан, $y = x^5$ бўлса, y ҳолда

$$y' = 5x^4, \quad y'' = (5x^4)' = 20x^3.$$

Иккинчи ҳосиланинг ҳосиласи *учинчи тартибли ҳосила* ёки *учинчи ҳосила* дейилади ва y''' ёки $f'''(x)$ билан белгиланади.

Умуман $f(x)$ функциянинг n -тартибли ҳосиласи деб унинг $(n-1)$ -тартибли ҳосиласининг (биринчи тартибли) ҳосиласига айтилади ва $y^{(n)}$ ёки $f^{(n)}(x)$ симvoli билан белгиланади:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = f^{(n)}(x).$$

(Ҳосиланинг тартиби даража кўрсаткичи деб тушунилмаслигини учун қавс ичига олинади.)

Тўртинчи, бешинчи ва ундан юқори тартибли ҳосилаларим рақамлари билан белгиланади; y^{IV} , y^V , y^{VI} , ... Бундай ҳолда ҳосиланинг тартибини қавсиз ёзиш мумкин. Масалан, агар $y = x^6$ бўлса, y ҳолда $y' = 6x^5$, $y'' = 20x^4$, $y''' = 60x^3$, $y^{IV} = y^{(4)} = 120x$, $y^V = y^{(5)} = 120$, $y^{(6)} = y^{(7)} = \dots = 0$.

1-мисол. $y = e^{kx}$ функция ($k = \text{const}$) берилган. Унинг исталган n -тартибли ҳосиласининг ифодаси топилсин.

Ечиш. $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$, ..., $y^{(n)} = k^n e^{kx}$.

2-мисол. $y = \sin x$ бўлса, $y^{(n)}$ топилсин.

Ечиш.

$$y' = \cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right).$$

$$y'' = -\sin x = \sin \left(x + 2 \frac{\pi}{2} \right).$$

$$y''' = -\cos x = \sin \left(x + 3 \frac{\pi}{2} \right).$$

$$y^{IV} = \sin x = \sin \left(x + 4 \frac{\pi}{2} \right).$$

.....

$$y^{(n)} = \sin \left(x + n \frac{\pi}{2} \right).$$

Баъзи бир элементар функцияларнинг исталган тартибли ҳосилалари учун ҳам формулалар шундай чиқарилади. Уқувчи $y = x^2$, $y = \cos x$, $y = \ln x$ функцияларнинг n -тартибли ҳосилалари учун формулаларни ўзи топмоғи мумкин.

Исталган тартибли ҳосилалар учун 7-§ даги 2 ва 3-теоремаларда кўрсатилган қондалар осонгина умумлаштирилади.

Бу ҳолда ўз-ўзидан тушунарли ушбу формулалар ўринлидир:

$$(u + v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}, \quad (Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}.$$

Икки функция кўпайтмаси $u(x)v(x)$ нинг n -тартибли ҳосиласини ҳисоблашга имкон берувчи (Лейбниц формуласи деб аталган) формулани чиқараймиз. Бу формулани чиқариш учун олдин бир неча ҳосилани топамиз, сўнгря исталган тартибли ҳосилаларни ҳисоблаш учун ярайдиган умумий қонунни аниқлаймиз:

$$y = uv,$$

$$y' = u'v + uv',$$

$$y'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$

$$y''' = u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' = \\ = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''',$$

$$y^{IV} = u^{IV}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{IV}.$$

Ҳосилалар тузиш қонуни исталган тартибли ҳосилалар учун сақланади ва қуйидагидан иборат:

$(u + v)^n$ ифодани Ньютон биноми формуласига мувофиқ ёйиш ва ҳосил бўлган ёйилмада u ва v нинг даража кўрсаткичларини ҳосилалар тартибининг кўрсаткичлари билан алмаштириш керак, шу билан бирга ёйилманинг четки ҳадларига кирувчи ноль даражаларни ($u^0 = v^0 = 1$) функцияларнинг ўзлари билан (яъни „нолинчи тартибли ҳосилалар“ билан) алмаштириш керак:

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = (u)^{(n)} \cdot v + nu^{(n-1)} v' + \\ + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u^{(n-2)} v'' + \dots + uv^{(n)}.$$

Бу эса *Лейбниц формуласидир*.

Формуланинг қатъий исботини тўла математик индукция методи билан бериш (яъни бу формуланинг n - тартиб учун тўғрилигидан унинг $(n+1)$ - тартиб учун ҳам тўғрилиги келиб чиқишини исботлаш) ҳам мумкин.

3- мисол. $y = e^{ax} x^2$, $y^{(n)}$ ҳосила топилисин.
Ечиш.

$$\begin{array}{ll} u = e^{ax}, & v = x^2, \\ u' = ae^{ax}, & v' = 2x, \\ u'' = a^2 e^{ax}, & v'' = 2, \\ \dots & \dots \end{array}$$

$$u^{(n)} = a^n e^{ax}, \quad v^{(n)} = v^{(IV)} = \dots = 0,$$

$$y^{(n)} = a^n e^{ax} x^2 + na^{n-1} e^{ax} \cdot 2x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} e^{ax} \cdot 2,$$

ёки

$$y^{(n)} = e^{ax} [a^n x^2 + 2na^{n-1} x + n(n-1) a^{n-2}].$$

23- §. Турли тартибли дифференциаллар

Биз $y = f(x)$ функцияга эга булайлик, бу ерда x — эркин ўзгарувчи. Бу функциянинг дифференциали

$$dy = f'(x) dx$$

x нинг бирор функциясидир, аммо x га фақат биринчи купайтувчи $f'(x)$ боғлиқ бўлиши мумкин, иккинчи купайтувчи (dx) эса эркин ўзгарувчи x нинг орттирмасидан иборат бўлиб, ўзгарувчининг қийматига боғлиқ эмас. dy ўзи x нинг функцияси бўлганликдан, биз бу функциянинг дифференциали ҳақида гапирмоққа ҳақлимиз.

Функция дифференциалнинг дифференциали бу функция-нинг иккинчи дифференциали ёки иккинчи тартибли дифференциали дейилади ва d^2y билан белгиланади:

$$d(dy) = d^2y$$

Иккинчи дифференциалнинг ифодасини топамиз. Дифференциалнинг умумий таърифига асосан:

$$d^2y = [f'(x) dx]' dx.$$

dx ўзи x га боғлиқ эмас, шунинг учун дифференциаллашда dx ҳосила ишорасидан ташқарига чиқарилади ва биз

$$d^2y = f''(x) (dx)^2$$

ни ҳосил қиламиз. Дифференциалнинг даражасини ёзишда қавсларни тушириб қолдириш қабул қилинган; масалан, $(dx)^2$ урнига dx^2 ёзиш қабул қилинган, бундан dx ифоданинг квадрати тушунилади; $(dx)^3$ урнига dx^3 ёзилади ва ҳоказо.

Учинчи дифференциал ёки функциянинг учинчи тартибли дифференциали деб унинг иккинчи дифференциалининг дифференциалига айтилади:

$$d^3y = d(d^2y) = [f''(x) dx^2]' dx = f'''(x) dx^3.$$

Умуман n - тартибли дифференциал деб $(n-1)$ - тартибли дифференциалнинг биринчи дифференциалига айтилади:

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = [f^{(n-1)}(x) dx^{n-1}]' dx,$$

$$d^n y = f^{(n)}(x) dx^n. \quad (1)$$

Турли тартибли дифференциаллардан фойдаланган ҳолда, ис-талган тартибли ҳосилани тегишли тартибли дифференциаллар-нинг нисбати шаклида бернш мумкин:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}; \quad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}. \quad (2)$$

Изоҳ. (1) ва (2) тенгликлар ($n > 1$ да) x фақат эркин ўзгарувчи бўлган ҳол учунгина туғридир. Ҳақиқатан, ушбу мураккаб функцияни олайлик:

$$y = F(u), \quad u = \varphi(x). \quad (3)$$

Биз u нинг эркин ўзгарувчи ёки x нинг функцияси бўлишига қарамай, биринчи тартибли дифференциал инвариант формада бўлишини кўрдик:

$$dy = F'_u(u) du. \quad (4)$$

Иккинчи дифференциал ва ундан кейинги дифференциаллар бу хоссага эга эмас.

Ҳақиқатан, (3) ва (4) формулаларга асосан:

$$d^2 y = d(F'_u(u) du).$$

Лекин бу ерда $d(u) = \varphi'(x) dx$ ўзи x га боғлиқ, шунинг учун

$$d^2 y = d(F'_u(u) du) + F'_u(u) d du$$

ёки

$$d^2 y = F''_{uu}(u) (du)^2 + F'_u(u) d^2 u, \text{ бунда } d^2 u = \varphi''(x) (dx)^2. \quad (5)$$

$d^2 y$ ва ҳоказолар ҳам шунинг сингарни топилади.

1- м и с о л. Ушбу $y = \sin u$, $u = \sqrt{x}$ мураккаб функциядан dy ва $d^2 y$ топилсин.

Е ч и ш.

$$dy = \cos u \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \cos u du.$$

Сўнгра (5) формула бўйича қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} d^2 y &= -\sin u (du)^2 + \cos u d^2 u = -\sin u (du)^2 + \cos u \cdot u'' (dx)^2 = \\ &= -\sin u \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)^2 (dx)^2 + \cos u \left(-\frac{1}{4x^{3/2}} \right) (dx)^2. \end{aligned}$$

24-§. Ошкормас функцияларнинг ва параметрик берилган функцияларнинг турли тартибли ҳосилалари

1. Ошкормас функциялардан турли тартибли ҳосилаларни топиш усулини мисолда кўрсатамиз.

Фараз қилайлик, x нинг ошкормас функцияси y ушбу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (1)$$

тенглик билан аниқлансин. Бу тенгликнинг барча ҳадларини, у бунда x нинг функцияси эканлигини эсда тутган ҳолда, x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0;$$

бундан

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}. \quad (2)$$

Охирги тенгликни яна x бўйича (x нинг функцияси y эканлигини назарда тутиб) дифференциаллаймиз:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{b^2 y - x \frac{dy}{dx}}{a^2 y^2}.$$

Бу ерда $\frac{dy}{dx}$ ҳосила ўрнига унинг ифодасини (2) тенгликдан олиб қўйсак,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2 y + x \frac{b^2}{a^2} y}{y^3},$$

ёки соддалаштиргандан сўнг

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2 (a^2 y^2 + b^2 x^2)}{a^4 y^3}.$$

(1) тенгламадан

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

чиқади, шунинг учун иккинчи ҳосилани

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$$

куринишда ёзиш мумкин. Охириги тенгликни x бўйича дифференциаллаб, $\frac{d^3y}{dx^3}$ ни топамиз ва ҳоказо.

2. Энди параметрик берилган функциялардан юқори тартибли ҳосилалар топиш масаласини қараб чиқамиз.

Фараз қилайлик, x нинг функцияси y ушбу параметрик тенгламалар билан берилган бўлсин:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned} \right\} t_0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

бунда $x = \varphi(t)$ функция $[t_0, T]$ кесмада $t = \Phi(x)$ тесқари функцияга эга бўлсин.

Бу ҳолда $\frac{dy}{dx}$ ҳосила

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad (4)$$

тенглик билан аниқлангани 18-§ да исботланган эди.

Иккинчи ҳосила $\frac{d^2y}{dx^2}$ ни топиш учун x нинг функцияси t эканлигини назарда тутиб, (4) тенгликни x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right) \frac{dt}{dx}, \quad (5)$$

АММО

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{\frac{dx}{dt}} \right) = \frac{\frac{dx}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) - \frac{dy}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right)}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2} = \frac{\frac{dx}{dt} \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^3},$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}.$$

Охириги ифодани (5) формулага қўйиб, шуни ҳосил қиламиз:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt} \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^3}.$$

Бу формулага қуйидаги ихчамроқ шаклни бериш мумкин:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\varphi'(t) \psi''(t) - \psi'(t) \varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

Шунга ўхшаш

$$\frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \frac{d^4 y}{dx^4}$$

ва ҳоказо ҳосилаларни ҳам топиш мумкин.

Мисол. x нинг функцияси y параметрик тарзда берилган:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t.$$

$$\frac{dy}{dx} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ ҳосилалар топилисин.}$$

Ечиш.

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -a \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = b \cos t, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -b \sin t,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(-a \sin t)(-b \sin t) - (b \cos t)(-a \cos t)}{(-a \sin t)^3} = -\frac{b}{a^2} \frac{1}{\sin^3 t}$$

25- §. Иккинчи ҳосиланинг механик маъносиИлгарилама ҳаракат қилувчи жисмнинг ўтган s йули t вақт-га боғланишда

$$s = f(t) \quad (1)$$

формула билан ифодаланади.

Маълумки (III боб, 1- § га қаранг), жисмнинг берилган моментдаги v тезлиги йўлнинг вақт бўйича биринчи ҳосиласига тенг, яъни

$$v = \frac{ds}{dt}. \quad (2)$$

Бирор t моментда жисмнинг тезлиги v га тенг бўлсин. Агар ҳаракат текис бўлмаса, у ҳолда t пайтдан кейин ўтган Δt вақт оралигида тезлик ўзгаради ва Δv орттирмани олади.

Тезлик орттирмаси Δv нинг вақт орттирмаси Δt га нисбати Δt вақтдаги *ўртача тезланиш* дейилади:

$$a_{\text{ур}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Вақт орттирмаси нолга интилган ҳолда тезлик орттирмасининг вақт орттирмасига нисбатининг limiti *берилган моментдаги тезланиш* дейилади:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t};$$

бошқача айтганда, берилган моментдаги тезланиш тезликнинг вақт бўйича ҳосиласига тенг:

$$a = \frac{dv}{dt},$$

яъни $v = \frac{ds}{dt}$ демак,

$$a = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2 s}{dt^2},$$

яъни *тўғри чизиqli ҳаракат тезланиши йўлнинг вақт бўйича иккинчи ҳосиласига тенг*. (1) тенгликка асосан:

$$a = j''(t).$$

Мисол. s масофанинг t вақтга боғланиши ушбу

$$s = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + s_0 \quad (3)$$

формула билан берилган бўлса, эркин тушувчи жисмининг v тезлиги ва a тезланиши топилсин, бу ерда $g = 9,8 \text{ м/сек}^2$ — ер тортишининг тезланиши, $s_0 = s_{t=0}$ эса s нинг $t = 0$ даги қиймати.

Е ч и ш. Дифференциаллаб, шуни топамиз:

$$v = \frac{ds}{dt} = g t + v_0; \quad (4)$$

бу формуладан $v_0 = (v)_{t=0}$ эканлиги чиқади.

Яна бир марта дифференциаллаб,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = g$$

ни топамиз. Аксинча, агар бирор ҳаракатнинг тезланиши ўзгармас ва g га тенг бўлса, у ҳолда $(v)_{t=0} = v_0$ ва $(s)_{t=0} = s_0$ шартларда тезлик (4) тенглик билан, масофа эса (3) тенглик билан ифодаланишини қайд этамиз.

26-§. Уринма ва нормал тенгламалари.

Уринма ости ва нормал ости узунликлари

Тенгламаси

$$y = f(x)$$

бўлган эгри чизиқни текшираимиз. Бу эгри чизиқда $M(x_1, y_1)$ нуқтани оламиз (88-расм) ва бу нуқтада эгри чизиққа ўтказилган уринма ордината ўқиға параллел эмас деб фараз қилиб, бу уринма тенгламасини ёзамиз.

M нуқтадан ўтувчи k бурчак коэффициентли тўғри чизиқ тенгламаси

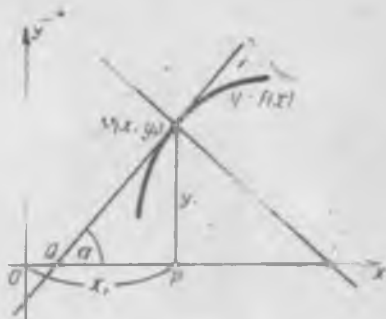
$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

кўринишга эга. Уринма учун (3-§ га қarang)

$$k = f'(x_1),$$

шунинг учун уринманинг тенгламаси

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$$



88- расм.

кўринишни олади. Эгри чизиққа унинг берилган нуқтасидаги уринма билан бир қаторда нормални ҳам қараш жуда кўп учрайди.

Таъриф. Эгри чизиққа берилган нуқтада *нормал* деб, берилган нуқтадан ўтувчи ва шу нуқтадаги уринмага перпендикуляр тўғри чизиққа айтилади.

Нормалнинг таърифидан, унинг бурчак коэффициенти k_n уринманинг бурчак коэффициенти k_t билан

$$k_n = -\frac{1}{k_t},$$

яъни

$$k_n = -\frac{1}{f'(x_1)}$$

тенглик билан боғланганлиги чиқади.

Демак, $y = f(x)$ эгри чизиққа $M(x_1, y_1)$ нуқтадаги нормал тенгламаси

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)} (x - x_1)$$

кўринишга эга.

1-ми сол. $y = x^3$ эгри чизиққа унинг $M(1, 1)$ нуқтасида уринма ва нормалнинг тенгламалари ёзилсин.

Ечиш. $y' = 3x^2$ бўлгани учун уринманинг бурчак коэффициенти $(y')_{x=1} = 3$ га тенг.

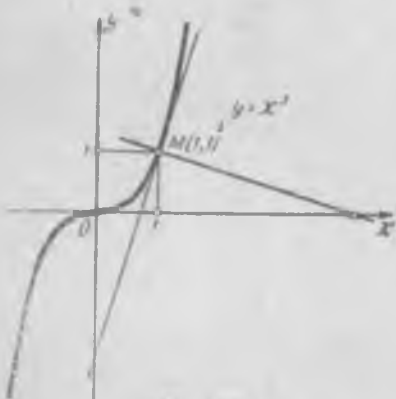
Демак, уринма тенгламаси

$$y - 1 = 3(x - 1) \text{ ёки } y = 3x - 2.$$

Нормал тенгламаси:

$$y - 1 = -\frac{1}{3} (x - 1) \text{ ёки } y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

(89- расмга қаранг).



89- расм.

Уринманинг уриниш нуқтаси билан Ox ўқ орасидаги QM кесмасининг (88- расм) T узунлиги уринманинг узунлиги дейилади. Бу кесманинг Ox ўқдаги проекцияси, яъни QP кесма уринма ости дейилади; уринма ости узунлиги S_T билан белгиланади. MR кесманинг N узунлиги нормал узунлиги дейилади, RM кесманинг Ox ўқдаги RP проекцияси эса нормал ости дейилади; нормал ости узунлиги S_N билан белгиланади.

$y = f(x)$ эгри чизиқ билан $M(x_1, y_1)$ нуқта учун T, S_T, N, S_N миқдорларни топамиз.

88- расмдан кўринганидек,

$$QP = |y_1 \operatorname{ctg} \alpha| = \left| \frac{y_1}{\operatorname{tg} \alpha} \right| = \left| \frac{y_1}{y'_1} \right|,$$

шунинг учун

$$S_T = \left| \frac{y_1}{y'_1} \right|,$$

$$T = \sqrt{y_1^2 + \frac{y_1^2}{y'^2_1}} = \left| \frac{y_1}{y'_1} \sqrt{y'^2_1 + 1} \right|.$$

Сўнгра, шу расмининг узидан

$$PR = |y_1 \operatorname{tg} \alpha| = |y_1 y'_1|$$

эканлиги равшан, шунинг учун

$$S_N = |y_1 y'_1|.$$

$$N = \sqrt{y_1^2 + (y_1 y'_1)^2} = |y_1 \sqrt{1 + y_1'^2}|.$$

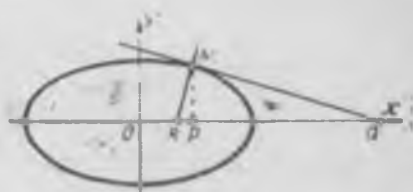
Бу формулалар $y_1 > 0$, $y'_1 > 0$ фараз қилиб чиқарилди. Аммо улар умумий ҳолда ҳам сақланади.

2- мисол.

$x = a \cos t$, $y = b \sin t$ (1) эллипс

учун $t = \frac{\pi}{4}$ бўлган $M(x_1, y_1)$ нуқтада (90- расм) уринма ва нормал тенгламалари, уринма ва уринма ости узунликлари, нормал ва нормал ости узунликлари топилсин.

Еч иш. (1) тенгламадан қуйидагиларни топамиз:



90- расм.

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t; \frac{dy}{dt} = b \cos t; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t; \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}.$$

Уриниш нуқтаси M нинг координаталарини топамиз:

$$x_1 = (x)_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad y_1 = (y)_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Уринманинг тенгласи:

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a} \left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

ёки

$$bx + ay - ab\sqrt{2} = 0.$$

Нормал тенгласи:

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b} \left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

ёки

$$(ax - by)\sqrt{2} - a^2 + b^2 = 0.$$

Уринма ости ва нормал ости узунликлари:

$$S_T = \left| \frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}} \right| = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad S_N = \left| \frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}} \right| = \frac{b^2}{a\sqrt{2}}.$$

Уринма ва нормал узунликлари:

$$r = \left| \frac{b}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 + 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$N = \left| \frac{b}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \left(-\frac{b}{a}\right)^2} \right| = \frac{b}{a\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

27- §. Радиус-векторнинг қутб бурчаги бўйича ҳосиласининг геометрик маъноси

Эгри чизиқнинг қутб координаталардаги

$$\rho = f(\theta) \quad (1)$$

тенгламасига эга бўлайлик. Қутб координаталаридан тўғри бурчакли Декарт координаталарига ўтиш формулаларини ёзамиз:

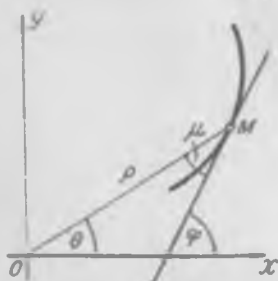
$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta.$$

Бу ерда ρ ўрнига унинг θ орқали ифодасини (1) тенгламадан олиб қўямиз:

$$x = f(\theta) \cos \theta, \quad y = f(\theta) \sin \theta. \quad (2)$$

Бу (2) тенгламалар берилган эгри чизиқнинг параметрик тенгламаларидир, бунда параметр қутб бурчаги θ дир (91- расм).

Агар эгри чизиқнинг бирор $M(\rho, \theta)$ нуқтасидаги уринманинг абсцисса ўқининг мусбат йўналиши билан ташкил қилган бурчагини φ билан белгиласак, қуйидаги тенгликларни ҳосил қиламиз:



91- расм.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

ёки

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{d\rho}{d\theta} \sin \theta + \rho \cos \theta}{\frac{d\rho}{d\theta} \cos \theta - \rho \sin \theta} \quad (3)$$

Радиус-вектор йўналиши билан уринма орасидаги бурчакни μ билан белгилеймиз: $\mu = \varphi - \theta$.

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \theta}$$

эканлиги равшан. Бу ерда $\operatorname{tg} \varphi$ ўринга унинг (3) ифодасини қўйиб ва ихчамлаштириб, шуни ҳосил қиламиз:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{(\rho' \sin \theta + \rho \cos \theta) \cos \theta - (\rho' \cos \theta - \rho \sin \theta) \sin \theta}{(\rho' \cos \theta - \rho \sin \theta) \cos \theta + (\rho' \sin \theta + \rho \cos \theta) \sin \theta} = \frac{\rho}{\rho'}$$

ёки

$$\rho'_0 = \rho \operatorname{ctg} \mu. \quad (4)$$

Шундай қилиб, радиус-векторнинг қутб бурчаги бўйича ҳосиласи радиус-вектор узунлигининг радиус-вектор ва эгри чизиқнинг берилган нуқтасидаги уринма орасидаги бурчак котангенси билан кўпайтмасига тенг.

Мисол. $\rho = e^{a\theta}$ логарифмик спиралга уринма радиус-вектор билан ўзгармас бурчак остида кесишганлиги кўрсатилсин.

Ечиш. Спираль тенгламасидан

$$\rho' = ae^{a\theta}$$

ни топамиз. (4) формулага асосан

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{\rho'}{\rho} = a, \text{ яъни } \mu = \operatorname{arccotg} a = \text{const.}$$

III бобга машқлар

Ҳосиланинг таърифидан бевосита фойдаланиб, қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари топилсин;

$$1. y = x^3, \text{ Жав. } 3x^2. \quad 2. y = \frac{1}{x}, \text{ Жав. } -\frac{1}{x^2}. \quad 3. y = \sqrt{x}, \text{ Жав. } \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$4. y = \frac{1}{\sqrt{x}}, \text{ Жав. } -\frac{1}{2x\sqrt{x}}. \quad 5. y = \sin^2 x, \text{ Жав. } 2 \sin x \cos x. \quad 6. y = 2x^2 - x, \text{ Жав. } 4x - 1.$$

Эгри чизиқларга уринмалар оғиш бурчакларининг тангенслари аниқлансин:

$$7. y = x^3. \text{ а) } x = 1 \text{ да. Жав. } 3. \text{ б) } x = -1 \text{ да. Жав. } -3; \text{ чизма ясалсин.}$$

$$8. y = \frac{1}{x}. \text{ а) } x = \frac{1}{2} \text{ да. Жав. } -4. \text{ б) } x = 1 \text{ да. Жав. } -1; \text{ чизма ясалсин.}$$

$$9. y = \sqrt{x}, x = 2 \text{ да. Жав. } \sqrt{2}/4.$$

Функцияларнинг ҳосилалари топилинсин:

10. $y = x^4 + 3x^2 - 5$. Жав. $y' = 4x^3 + 6x$. 11. $y = 6x^3 - x^2$. Жав. $y' = 18x^2 - 2x$. 12. $y = \frac{x^5}{a+b} - \frac{x^3}{a-b} - x$. Жав. $y' = \frac{5x^4}{a+b} - \frac{3x^2}{a-b} - 1$. 13. $y = \frac{x^3 - x^2 + 1}{5}$. Жав. $y' = \frac{3x^2 - 2x}{5}$. 14. $y = 2ax^3 - \frac{x^5}{b} + c$. Жав. $y' = 6ax^2 - \frac{5x^4}{b}$. 15. $y = 6x^{\frac{7}{2}} + 4x^{\frac{5}{2}} + 2x$. Жав. $y' = 21x^{\frac{5}{2}} + 10x^{\frac{3}{2}} + 2$. 16. $y = \sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}$. Жав. $y' = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^2}$. 17. $y = \frac{(x+1)^3}{x^2}$. Жав. $y' = \frac{3(x+1)^2(x-1)}{2x^3}$. 18. $y = \frac{x}{m} + \frac{m}{x} + \frac{x^2}{n^2} + \frac{n^2}{x^2}$. Жав. $y' = \frac{1}{m} - \frac{m}{x^2} + \frac{2x}{n^2} - \frac{2n^2}{x^3}$. 19. $y = \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 5$. Жав. $y' = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$. 20. $y = \frac{ax^2}{3\sqrt{x}} + \frac{b}{x\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$. Жав. $y' = \frac{5}{3} ax^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2} bx^{-5/2} + \frac{1}{6} x^{-7/6}$. 21. $y = (1+4x^3)(1+2x^2)$. Жав. $y' = 4x(1+3x+10x^3)$. 22. $y = x(2x-1)(3x+2)$. Жав. $y' = 2(9x^2+x-1)$. 23. $y = (2x-1)(x^2-6x+3)$. Жав. $y' = 6x^2-26x+12$. 24. $y = \frac{2x^4}{b^3-x^2}$. Жав. $y' = \frac{4x^3(2b^3-x^2)}{(b^3-x^2)^2}$. 25. $y = \frac{a-x}{a+x}$. Жав. $y' = -\frac{2a}{(a+x)^2}$. 26. $f(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$. Жав. $f'(t) = \frac{t^2(3+t^2)}{(1+t^2)^2}$. 27. $f(s) = \frac{(s+4)^2}{s+3}$. Жав. $f'(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+3)^2}$. 28. $y = \frac{x^3+2}{x^2-x-2}$. Жав. $y' = \frac{x^4-2x^3-6x^2-2x+2}{(x^2-x-2)^2}$. 29. $y = \frac{x^p}{x^m-a^m}$. Жав. $y' = \frac{x^{p-1}[(p-m)x^m - pa^m]}{(x^m-a^m)^2}$. 30. $y = (2x^2-3)^2$. Жав. $y' = 8x(2x^2-3)$. 31. $y = (x^2+a^2)^5$. Жав. $y' = 10x(x^2+a^2)^4$. 32. $y = \sqrt{x^2+a^2}$. Жав. $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$. 33. $y = (a+x) \cdot \sqrt{a-x}$. Жав. $y' = \frac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$. 34. $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. Жав. $y' = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$. 35. $y = \frac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}}$. Жав. $y' = \frac{1+4x^2}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$. 36. $y = \sqrt[3]{x^2+x+1}$. Жав. $y' = \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$. 37. $y = (1+\sqrt[3]{x})^3$. Жав. $y' = \left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3$.

38. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \cdot$ Жас. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \times$
 $\times \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right]$. 39. $y = \sin^3 x$. Жас. $y' = \sin 2x$.
40. $y = 2 \sin x + \cos 3x$. Жас. $y' = 2 \cos x - 3 \sin 3x$. 41. $y = \lg(ax + b)$.
 Жас. $y' = \frac{a}{\cos^2(ax + b)}$. 42. $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ Жас. $y' = \frac{1}{1 + \cos x}$.
43. $y = \sin 2x \cos 3x$. Жас. $y' = 2 \cos 2x \cos 3x - 3 \sin 2x \sin 3x$.
44. $y = \operatorname{ctg}^2 5x$. Жас. $y' = -10 \operatorname{ctg} 5x \cdot \operatorname{cosec}^2 5x$. 45. $y = t \sin t + \cos t$.
 Жас. $y' = t \cos t$. 46. $y = \sin^3 t \cos t$. Жас. $y' \sin^3 t (3 \cos^2 t - \sin^2 t)$.
47. $y = a \sqrt{\cos 2x}$. Жас. $y' = -\frac{a \sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$. 48. $r = a \sin^2 \frac{\varphi}{3}$. Жас. $r'_{\varphi} =$
 $= a \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cos \frac{\varphi}{3}$. 49. $y = \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} \frac{x}{2}}{x}$. Жас. $y' = -\frac{2(x \cos x + \sin x)}{x^2 \sin^2 x}$.
50. $y = a \sin^4 \frac{x}{2}$. Жас. $y' = 2a \sin^3 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$. 51. $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x$. Жас. $y' =$
 $= \operatorname{tg} x \sec^2 x$. 52. $y = \ln \cos x$. Жас. $y' = -\operatorname{tg} x$. 53. $y = \ln \operatorname{tg} x$. Жас. $y' = \frac{2}{\sin 2x}$.
54. $y = \ln \sin^2 x$ Жас. $y' = 2 \operatorname{ctg} x$. 55. $y = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sec x}$. Жас. $y' = \sin x +$
 $+ \cos x$. 56. $y = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$. Жас. $y' = \frac{1}{\cos x}$. 57. $y = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$
 Жас. $y' = \frac{1}{\cos x}$. 58. $y = \sin(x + a) \cos(x + a)$. Жас. $y' = \cos 2(x + a)$. 59.
 $f(x) = \sin(\ln x)$. Жас. $f'(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}$. 60. $f(x) = \operatorname{tg}(\ln x)$. Жас. $f'(x) =$
 $= \frac{\sec^2(\ln x)}{x}$. 61. $f(x) = \sin(\cos x)$. Жас. $f'(x) = -\sin x \cos(\cos x)$.
62. $r = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \varphi - \operatorname{tg} \varphi + \varphi$. Жас. $\frac{dr}{d\varphi} = \operatorname{tg}^4 \varphi$. 63. $f(x) = (x \operatorname{ctg} x)^2$. Жас.
 $f'(x) = 2x \operatorname{ctg} x (\operatorname{ctg} x - x \operatorname{cosec}^2 x)$. 64. $y = \ln(ax + b)$. Жас. $y' =$
 $= \frac{a}{ax + b}$. 65. $y = \log_a(x^2 + 1)$. Жас. $y' = \frac{2x}{(x^2 + 1) \ln a}$. 66. $y = \ln \frac{1 + x}{1 - x}$.
 Жас. $y' = \frac{2}{1 - x^2}$. 67. $y = \log_2(x^2 - \sin x)$. Жас. $y' = \frac{2x - \cos x}{(x^2 - \sin x) \ln 2}$.
68. $y = \ln \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$. Жас. $y' = \frac{4x}{1 - x^4}$. 69. $y = \ln(x^2 + x)$. Жас. $y' = \frac{2x + 1}{x^2 + x}$.
70. $y = \ln(x^3 - 2x + 5)$. Жас. $y' = \frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x + 5}$. 71. $y = x \ln x$. Жас. $y' =$

- $= \ln x + 1$. 72. $y = \ln^3 x$. Жас. $y' = \frac{3 \ln^2 x}{x}$. 73. $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.
 Жас. $y' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$. 74. $y = \ln(\ln x)$. Жас. $y' = \frac{1}{x \ln x}$. 75. $f(x) =$
 $= \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. Жас. $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$. 76. $f(x) = \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$.
 Жас. $f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$. 77. $y = \sqrt{a^2+x^2} - a \ln \frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}$.
 Жас. $y' = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}$. 78. $y = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) - \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}$. Жас. $y' =$
 $= \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}$. 79. $y = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \lg \frac{x}{2}$. Жас. $y' = \frac{1}{\sin^2 x}$. 80. $y =$
 $= \frac{\sin x}{2 \cos^2 x}$. Жас. $y' = \frac{1+\sin^2 x}{2 \cos^2 x}$. 81. $y = \frac{1}{2} \lg^2 x + \ln \cos x$. Жас. $y' = \lg^2 x$.
 82. $y = e^{ax}$. Жас. $y' = ae^{ax}$. 83. $y = e^{4x+5}$. Жас. $y' = 4e^{4x+5}$. 84. $y = a^{x^2}$.
 Жас. $y' = \ln 2x a^{x^2} \ln a$. 85. $y = 7^{x^2+2x^3}$. Жас. $y' = 2(x+1)7^{x^2+2x^3} \ln 7$. 86. $y =$
 $= c^a - x^2$. Жас. $y' = -2xc^{a^2-x^2} \ln c$. 87. $y = ae^{\sqrt{x}}$. Жас. $y' = \frac{a}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$.
 88. $r = a^{\theta}$. Жас. $r' = a^{\theta} \ln a$. 89. $r = a^{\ln \theta}$. Жас. $\frac{dr}{d\theta} = \frac{a \ln \theta \ln a}{\theta}$. 90. $y =$
 $= e^x (1 - x^2)$. Жас. $y' = e^x (1 - 2x - x^2)$. 91. $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$. Жас. $y' =$
 $= \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$. 92. $y = \ln \frac{e^x}{1 + e^x}$. Жас. $y' = \frac{1}{1 + e^x}$. 93. $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)$.
 Жас. $y' = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$. 94. $y = e^{\sin x}$. Жас. $y' = e^{\sin x} \cos x$. 95. $y = a^{\lg nx}$.
 Жас. $y' = na^{\lg nx} \sec^2 nx \ln a$. 96. $y = e^{\cos x} \sin x$. Жас. $y' = e^{\cos x} (\cos x -$
 $- \sin^2 x)$. 97. $y = e^x \ln \sin x$. Жас. $y' = e^x (\operatorname{ctg} x + \ln \sin x)$. 98. $y = x^n e^{\sin x}$.
 Жас. $y' = x^{n-1} e^{\sin x} (n + x \cos x)$. 99. $y = x^x$. Жас. $y' = x^x (\ln x + 1)$.
 100. $y = x^{\frac{1}{x}}$. Жас. $y' = x^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right)$. 101. $y = x^{\ln x}$. Жас. $y' = x^{\ln x - 1} \ln x^2$.
 102. $y = e^{x^x}$. Жас. $y' = e^{x^x} (1 + \ln x) x^x$. 103. $y = \left(\frac{x}{n} \right)^{nx}$. Жас. $y' =$
 $= n \left(\frac{x}{n} \right)^{nx} \left(1 + \ln \frac{x}{n} \right)$. 104. $y = x^{\sin x}$. Жас. $y' = x^{\sin x} \left(\frac{\sin x}{x} + \ln x \cos x \right)$.
 105. $y = (\sin x)^x$. Жас. $y' = (\sin x)^x (\ln \sin x + x \operatorname{ctg} x)$. 106. $y = (\sin x)^{\lg x}$.
 Жас. $y' = (\sin x)^{\lg x} (1 + \sec^2 x \ln \sin x)$. 107. $y = \lg \frac{1-e^x}{1+e^x}$. Жас. $y' =$

$$= -\frac{2e^x}{(1+e^x)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{1+e^x}} \quad 108. \quad y = \sin \sqrt{1-2^x}. \quad \text{Жас. } y' =$$

$$= -\frac{\cos \sqrt{1-2^x}}{2 \sqrt{1-2^x}} 2^x \ln 2. \quad 109. \quad y = 10^{\operatorname{arctg} x}. \quad \text{Жас. } y' = 10^x \operatorname{tg} x \ln 10 \left(\operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x} \right).$$

Қуйдаги функцияларни олдин логарифмлаб, сунгра ҳосилалари топилади:

$$\text{син: } 110. \quad y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}. \quad \text{Жас. } y' = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}} \left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{x-1} \right). \quad 111. \quad y = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}. \quad \text{Жас. } y' = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}} \left(\frac{3}{x+1} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{4(x-2)} - \frac{2}{5(x-3)} \right). \quad 112. \quad y = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3 (x+3)^4}. \quad \text{Жас. } y' =$$

$$= -\frac{(x+1)(5x^2+14x+5)}{4(x+2)^3 (x+3)^5}. \quad 113. \quad y = \frac{\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[4]{(x-2)^3} \sqrt[3]{(x-3)^2}}. \quad \text{Жас. } y' =$$

$$= \frac{-161x^2 + 480x - 271}{60 \sqrt[5]{(x-1)^2} \sqrt[4]{(x-2)^3} \sqrt[3]{(x-3)^2}}. \quad 114. \quad y = \frac{x(1+x^2)}{\sqrt[5]{1-x^3}}. \quad \text{Жас. } y' =$$

$$= \frac{1+3x^2-2x^4}{(1-x^3)^{\frac{3}{5}}}. \quad 115. \quad y = x^2 (a+3x)^3 (a-2x)^2. \quad \text{Жас. } y' =$$

$$= 5x^4 (a+3x)^3 (a-2x) (a^2+2ax-12x^2). \quad 116. \quad y = \arcsin \frac{x}{a}. \quad \text{Жас. } y' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}. \quad 117. \quad y = (\arcsin x)^2. \quad \text{Жас. } y' = \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}. \quad 118. \quad y =$$

$$= \operatorname{arctg} (x^2+1). \quad \text{Жас. } y' = \frac{2x}{1+(x^2+1)^2}. \quad 119. \quad y = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}. \quad \text{Жас. } y' =$$

$$= \frac{2}{1+x^2}. \quad 120. \quad y = \arccos (x^2). \quad \text{Жас. } y' = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}. \quad 121. \quad y = \frac{\arccos x}{x}.$$

$$\text{Жас. } y' = \frac{-(x+\sqrt{1-x^2} \arccos x)}{x^2 \sqrt{1-x^2}}. \quad 122. \quad y = \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}}. \quad \text{Жас. } y' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}. \quad 123. \quad y = x \sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}. \quad \text{Жас. } y' = 2 \sqrt{a^2-x^2}.$$

$$124. \quad y = \sqrt{a^2-x^2} + a \arcsin \frac{x}{a}. \quad \text{Жас. } y' = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}. \quad 125. \quad u = \operatorname{arctg} \frac{v+a}{1-av}.$$

$$\text{Жас. } \frac{du}{dv} = \frac{1}{1+v^2}. \quad 126. \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x \sqrt{3}}{1-x^2}. \quad \text{Жас. } y' = \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}.$$

$$127. \quad y = x \arcsin x. \quad \text{Жас. } y' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \quad 128. \quad f(x) = \arccos (\ln x).$$

$$\text{Жас. } f'(x) = -\frac{1}{x \sqrt{1-\ln^2 x}}. \quad 129. \quad f(x) = \arcsin \sqrt{\sin x}. \quad \text{Жас. } f'(x) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x - \sin^3 x}}. \quad 130. y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \quad (0 < x < \pi). \text{Жав. } y' = \\
 &= \frac{1}{2}. \quad 131. y = e^{\operatorname{arctg} x}. \text{Жав. } y' = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2}. \quad 132. y = \operatorname{arctg} \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \text{Жав.} \\
 &y' = \frac{2}{e^x + e^{-x}}. \quad 133. y = x^{\operatorname{arcsin} x}. \text{Жав. } y' = x^{\operatorname{arcsin} x} \left(\frac{\operatorname{arcsin} x}{x} + \frac{\ln x}{1 - x^2} \right). \\
 &134. y = \arcsin(\sin x). \\
 &\text{Жав. } y' = \frac{\cos x}{|\cos x|} = \begin{cases} 1 & \text{ва IV чорақларда} \\ -1 & \text{ва III чорақларда} \end{cases}. \quad 135. y = \operatorname{arctg} \frac{4 \sin x}{3 + 5 \cos x}. \\
 &\text{Жав. } y' = \frac{4}{5 + 3 \cos x}. \quad 136. y = \operatorname{arctg} \frac{a}{x} + \ln \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}. \text{Жав. } y' = \frac{2a}{x^2 - a^2}. \\
 &137. y = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x. \text{Жав. } y' = \frac{x^2}{1-x^4}. \quad 138. y = \frac{3x^3 - 1}{3x^3} + \\
 &+ \ln \sqrt{1+x^2} + \operatorname{arctg} x. \text{Жав. } y' = \frac{x^5 + 1}{x^6 + x^4}. \quad 139. y = \frac{1}{3} \ln \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} + \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}. \text{Жав. } y' = \frac{1}{x^3 + 1}. \quad 140. y = \ln \frac{1+x\sqrt{2+x^2}}{1-x\sqrt{2+x^2}} + \\
 &+ 2 \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}. \text{Жав. } y' = \frac{4\sqrt{2}}{1+x^4}. \quad 141. y = \arccos \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}. \\
 &\text{Жав. } y' = -\frac{2n|x|^n}{x(x^{2n} + 1)}.
 \end{aligned}$$

Ошкормас функцияларни дифференциаллаш

$$\begin{aligned}
 &\text{Қуйидаги функциялар учун } \frac{dy}{dx} \text{ топилисин: } 142. y^2 = 4px. \text{Жав. } \frac{dy}{dx} = \\
 &= \frac{2p}{y}. \quad 143. x^3 + y^3 = a^3. \text{Жав. } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \quad 144. b^3x^3 + a^3y^3 = a^3b^3. \text{Жав. } \frac{dy}{dx} = \\
 &= -\frac{b^3x}{a^3y}. \quad 145. y^3 - 3y + 2ax = 0. \text{Жав. } \frac{dy}{dx} = \frac{2a}{3(1-y^2)}. \quad 146. x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}. \\
 &\text{Жав. } \frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}}. \quad 147. x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}. \text{Жав. } \frac{dy}{dx} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}. \quad 148. y^2 - \\
 &- 2xy + b^2 = 0. \text{Жав. } \frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-x}. \quad 149. x^3 + y^3 - 3axy = 0. \text{Жав. } \frac{dy}{dx} = \\
 &= \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}. \quad 150. y = \cos(x+y). \text{Жав. } \frac{dy}{dx} = -\frac{\sin(x+y)}{1 + \sin(x+y)}. \quad 151. \cos \\
 &(xy) = x. \text{Жав. } \frac{dy}{dx} = -\frac{1 + y \sin(xy)}{x \sin(xy)}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{Қуйидаги параметрик берилган функциялар учун } \frac{dy}{dx} \text{ топилисин: } 152. x = \\
 &= a \cos t, y = b \sin t. \text{Жав. } \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t. \quad 153. x = a(t - \sin t), y = a(1 -
 \end{aligned}$$

$-\cos t$. Жав. $\frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}$. 154. $x = a \cos^3 t$, $y = b \sin^3 t$. Жав. $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \operatorname{tg} t$. 155. $x = \frac{3at}{1+t^2}$, $y = \frac{3at^3}{1+t^2}$. Жав. $\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{1-t^2}$. 156. $u = 2 \ln \operatorname{ctg} s$, $v = \operatorname{tg} s + \operatorname{ctg} s$. Бунда $\frac{du}{dv} = \operatorname{tg} 2s$ эка лиги курсатилсин.

Эгри чизикларга уринмалар оғиш бурчакларининг тангенслари топилсин:

157. $x = \cos t$, $y = \sin t$ учун $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ нуқтада. Чизма ясал-

син. Жав. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 158. $x = 2 \cos t$, $y = \sin t$ учун $x = 1$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ нуқтада. Чизма ясалсин. Жав. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. 159. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$

учун $t = \frac{\pi}{2}$ да. Чизма ясалсин. Жав. 1. 160. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ учун $t = \frac{\pi}{4}$ да. Чизма ясалсин. Жав. -1. 161. Горизонтга α бурчак остида

отилаган жисм ҳавосиз фазода тортиш кучи таъсири остида тенгламалари $x = (v_0 \cos \alpha) t$, $y = (v_0 \sin \alpha) t - \frac{gt^2}{2}$ ($g = 9,8$ м/сек²) бўлган эгри чизик (парабола) чизган. $\alpha = 60^\circ$, $v_0 = 50$ м/сек. эканини билган ҳолда, ҳаракат йўналиши аниқлансин: 1) $t = 2$ секундда; 2) $t = 7$ секундда. Чизма ясалсин. Жав. 1) $\operatorname{tg} \varphi_1 = 0,948$, $\varphi_1 = 43^\circ 30'$; 2) $\operatorname{tg} \varphi_2 = -1,012$, $\varphi_2 = +134,3^\circ$.

Функцияларнинг дифференциаллари топилсин:

162. $y = (a^3 - x^3)^4$. Жав. $dy = -10x(a^2 - x^2)^4 dx$. 163. $y = \sqrt{1+x^2}$.

Жав. $dy = \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$. 164. $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x$. Жав. $dy = \sec^4 x dx$.

165. $y = \frac{x \ln x}{1-x} + \ln(1-x)$. Жав. $dy = \frac{\ln x dx}{(1-x)^2}$.

Функцияларнинг орттирмалари ва дифференциаллари ҳисоблансин:

166. $y = 2x - x$; $x = 1$, $\Delta x = 0,01$ да. Жав. $\Delta y = 0,0302$, $dy = 0,03$.

167. $y = x^3 + 2x$ берилган. $x = -1$, $\Delta x = 0,02$ да Δy ва dy топилсин.

Жав. $\Delta y = 0,098808$, $dy = 0,1$. 168. $y = \sin x$ берилган. $x = \frac{\pi}{3}$, $\Delta x = \frac{\pi}{18}$ да

dy топилсин. Жав. $dy = \frac{\pi}{36} = 0,0873$. 169. $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866025$;

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ эканини билган ҳолда $\sin 60^\circ 3'$ ва $\sin 60^\circ 18'$ нинг тақрибий

қийматлари топилсин. Натижалар жадвалдаги қийматлар билан таққослансин. Жав. $\sin 60^\circ 3' \approx 0,866461$; $\sin 60^\circ 18' \approx 0,866843$. 170. $\operatorname{tg} 45^\circ 4' 30''$ нинг тақрибий қиймати топилсин. Жав. 1,00262. 171. $\log_{10} 200 = 2,30103$ ни билган ҳолда $\log_{10} 200,2$ нинг тақрибий қиймати топилсин. Жав. 2,30116.

Турли тартибли ҳосилалар. 172. $y = 3x^3 - 2x^3 + 5x - 1$. y'' топилин.

Жав. $18x - 4$. 173. $y = \sqrt[5]{x^3}$. y''' топилин. Жав. $\frac{42}{125}x^{-\frac{12}{5}}$. 174. $y = x^6 \cdot y^{(6)}$

топилин. Жав. 6!. 175. $y = \frac{C}{x^n}$. y'' топилин. Жав. $\frac{n(n+1)C}{x^{n+2}}$. 176. $y =$

$= \sqrt{a^2 - x^2}$. y'' топилин. Жав. $\frac{a^2}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$. 177. $y = 2\sqrt{x}$. $y^{(4)}$ то-

пилин. Жав. $-\frac{15}{8\sqrt{x}}$. 178. $y = ax^3 + bx + c$. y''' топилин. Жав. 0.

179. $f(x) = \ln(x+1)$. $f^{IV}(x)$ топилин. Жав. $-\frac{6}{(x+1)^3}$. 180. $y = \lg x$. y''' то-

пилин. Жав. $6 \sec^4 x - 4 \sec^2 x$. 181. $y = \ln \sin x$. y''' топилин. Жав. $2 \csc x \times$

$\times \operatorname{cosec}^3 x$. 182. $f(x) = \sqrt{\sec 2x}$. $f''(x)$ топилин. Жав. $f''(x) = 3[f'(x)]^3 -$

$-f(x)$. 183. $y = \frac{x^3}{1-x}$. $f^{IV}(x)$ топилин. Жав. $\frac{4!}{(1-x)^5}$. 184. $\rho = (q^2 + a^2) \times$

$\times \operatorname{arctg} \frac{q}{a}$. $\frac{d^2 \rho}{dq^2}$ топилин. Жав. $\frac{4a^3}{(a^2 + q^2)^3}$. 185. $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$. $\frac{d^2 y}{dx^2}$ то-

пилин. Жав. $\frac{y}{a^2}$. 186. $y = \cos ax$. $y^{(n)}$ топилин. Жав. $a^n \cos \left(ax + n \frac{\pi}{2} \right)$.

187. $x = a^x$. $y^{(n)}$ топилин. Жав. $(\ln a)^n a^x$. 188. $y = \ln(1+x)$. y^n топи-

лин. Жав. $(-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$. 189. $y = \frac{1-x}{1+x}$. $y^{(n)}$ топилин. Жав.

$2(-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$. 190. $y = e^x x$. $y^{(n)}$ топилин. Жав. $e^x(x+n)$.

191. $y = x^{n-1} \ln x$. $y^{(n)}$ топилин. Жав. $\frac{(n-1)!}{x}$. 192. $y = \sin^3 x$. $y^{(n)}$ топи-

лин. Жав. $-2^{n-1} \cos \left(2x + \frac{\pi n}{2} \right)$. 193. $y = x \sin x$. $y^{(n)}$ топилин. Жав. $x \sin \left(x +$

$+\frac{\pi}{2}n \right) - n \cos \left(x + \frac{\pi}{2}n \right)$. 194. Агар $y = e^x \sin x$ бўлса, $y'' - 2y' + 2y = 0$

эканлиги исботлансин. 195. $y^2 = 4ax$. $\frac{d^2 y}{dx^2}$ топилин. Жав. $-\frac{4a^2}{y^3}$. 196. $b^2 x^3 +$

$+ a^2 y^3 = a^2 b^2$. $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ва $\frac{d^2 y}{dx^2}$ топилин. Жав. $-\frac{b^4}{a^2 y^3} - \frac{3b^6 x}{a^4 y^4}$. 197. $x^3 + y^3 = r^3$.

$\frac{d^2 y}{dx^2}$ топилин. Жав. $-\frac{r^2}{y^3}$. 198. $y^3 - 2xy = 0$. $\frac{d^3 y}{dx^3}$ топилин. Жав. 0. 199. $\rho =$

$= \lg(\varphi + \rho)$. $\frac{d^3 \rho}{d\varphi^3}$ топилин. Жав. $-\frac{2(5 + 8\rho^3 + 3\rho^4)}{\rho^5}$. 200. $\sec \varphi \cdot \cos \rho = C$.

$\frac{d^2 \rho}{d\varphi^2}$ топилин. Жав. $\frac{\lg^2 \rho - \lg^2 \varphi}{\lg^3 \rho}$. 201. $e^x + x = e^y + y$. $\frac{d^2 y}{dx^2}$ топилин.

Жав. $\frac{(1 - e^x + y)(e^x - e^y)}{(e^y + 1)^2}$. 202. $y^3 + x^3 - 3axy = 0$. $\frac{d^2y}{dx^2}$ топилсин.

Жав. $-\frac{3a^2xy}{(y^2 - ax)^3}$. 203. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$. $\frac{d^2y}{dx^2}$ топилсин.

Жав. $-\frac{1}{4a \sin^4 \left(\frac{t}{2}\right)}$. 204. $x = a \cos 2t$, $y = b \sin^3 t$. $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ эканлиги кўрсатилсин.

205. $x = a \cos t$, $y = a \sin t$. $\frac{d^3y}{dx^3}$ топилсин. Жав. $-\frac{3 \cos t}{a^3 \sin^5 t}$

206. $\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}(\operatorname{sh} x) = \operatorname{sh} x$; $\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}(\operatorname{ch} x) = \operatorname{ch} x$ эканлиги кўрсатилсин.

Уринма ва нормал тенгламалари.

Уринма ости ва нормал ости узунликлари

207. $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$ эгри чизиққа унинг $M(3, 2)$ нуқтасида уринма ва нормал тенгламалари ёзилсин. Жав. Уринма $8x - y - 22 = 0$; нормал $x + 8y - 19 = 0$.

208. $x^2 + y^2 = r^2$ айлананинг $M(x_1, y_1)$ нуқтасида уринма ва нормал тенгламалари, уринма ости ва нормал ости узунликлари топилсин. Жав. Уринма

$$xx_1 + yy_1 = r^2; \text{ нормал } x_1y - y_1x = 0; s_T = \left| \frac{y_1^2}{x_1} \right|; s_N = |x_1|.$$

209. Исталган нуқтада $y^2 = 4px$ параболанинг уринма ости парабола уч билан тенг иккига бўлиниши ва нормал ости ўзгармас ҳам $2p$ га тенг бўлиши кўрсатилсин. Чизма ясалсин.

210. $M(x_1, y_1)$ нуқтада уринма тенгламаси топилсин: а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

эллипс учун. Жав. $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$. б) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гипербола учун;

Жав. $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$.

211. $y = \frac{8a^3}{4a^2 + x^2}$ „лудфинг“ $x = 2a$ нуқтасидаги уринма ва нормал тенгламалари топилсин. Жав. Уринма $x + 2y = 4a$; нормал $y = 2x - 3a$.

212. $3y = 6x - 5x^3$ эгри чизиқнинг $M\left(1, \frac{1}{3}\right)$ нуқтасига ўтказилган нормал координаталар бошидан ўтиши кўрсатилсин.

213. $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$ эгри чизиққа унинг $M(a, b)$ нуқтасидаги уринма $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$ эканлиги кўрсатилсин.

214. $y^2 = 20x$ параболага шундай уринма тенгламаси топилсинки, у Ox ўқи билан 45° ли бурчак ҳосил қилсин. Жав. $y = x + 5$ [(5, 10) нуқтада].

215. $x^2 + y^2 = 52$ айланага $2x + 3y = 6$ түргри чизиққа параллел бўлган уринмалар тенгламалари топилсин. Жав. $2x + 3y \pm 26 = 0$.

216. $4x^3 - 9y^3 = 36$ гиперболога $2y + 5x = 10$ тўғри чиқиққа перпендикуляр бўлган уринмалар тенгламалари топилсин. *Жав.* Бундай уринмалар йўқ.

217. $xy = m$ гиперболога уринманинг координата ўқлари орасидаги кесмаси уриниш нуқтаси билан тенг иккига бўлиниши кўрсатилсин.

218. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ астроидага уринманинг координата ўқлари орасидаги кесмаси ўзгармас узунликка эга бўлиши исботлансин.

219. $y = a^x$ ва $y = b^x$ эгри чиқиқлар қандай a бурчак остида кесишади?

Жав. $\lg a = \frac{\ln a - \ln b}{1 + \ln a \cdot \ln b}$.

220. $\theta = \frac{\pi}{2}$ нуқтада $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ циклоиданинг уринма ости, нормал ости, уринма ва нормал узунликлари топилсин. *Жав.* $s_T = a$; $s_N = a$; $T = a\sqrt{2}$; $N = a\sqrt{2}$.

221. $x = 4a \cos^2 t$, $y = 4a \sin^2 t$ астроида учун s_T , s_N , T ва N миқдорлар топилсин. *Жав.* $s_T = |4a \sin^2 t \cos t|$; $s_N = |4a \sin^2 t \lg t|$; $T = 4a \sin^2 t$; $N = |4a \sin^2 t \lg t|$.

Турли масалалар

Функцияларнинг ҳосилалари топилсин: 222. $y = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2} \ln \lg \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$.

Жав. $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$. 223. $y = \arcsin \frac{1}{x}$. *Жав.* $y' = -\frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}}$.

224. $y = \arcsin(\sin x)$. *Жав.* $y' = \frac{\cos x}{|\cos x|}$. 225. $y = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \times$

$\times \arctg \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \lg \frac{x}{2} \right)$ ($a > 0$, $b > 0$). *Жав.* $y' = \frac{1}{a+b \cos x}$. 226. $y = |x|$.

Жав. $y' = \frac{x}{|x|}$. 227. $y = \arcsin \sqrt{1-x^2}$, *Жав.* $y' = -\frac{x}{|x| \sqrt{1-x^2}}$. 228.

Шарнинг ҳажми ва сирти формулалари $v = \frac{4}{3} \pi r^3$ ва $s = 4\pi r^2$ дан $\frac{dv}{dr} = s$

келиб чиқади. Бу натижанинг геометрик маъноси тушунтирилсин. Доира юзи билан айлана узунлиги орасида шунга ўхшаш муносабат топилсин. 229. ABC учбурчакда a томон бошқа b , c томонлар ва улар орасидаги A бурчак орқали $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$ формула билан ифодаланади. b ва c томонлар

ўзгармас бўлганда a томон A бурчакнинг функциясиدير. $\frac{da}{dA} = h_a$ бўлиши кўрсатилсин, бу ерда h_a учбурчакнинг a асосига туширилган баландлиги. Бу натижани геометрик мулоҳазалар билан тушунтиринг. 230. Дифференциал тушунчасидан фойдаланиб,

$\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$, $\sqrt[3]{a^3 + b} \approx a + \frac{b}{3a^2}$ тақрибий формулаларнинг келиб чиқиши аниқлансин, бу ерда $|b|$ сони a га

нисбатан кичик. 231. Маятникнинг тебраниш даври $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ га тенг.

1) Маятникнинг l узунлигини; 2) Тортиш кучи тезланиши g ни ўлчашдаги 1% хато T даврини ҳисоблашдаги хатога қандай таъсир этади? *Жавоб:* 1) $\approx 1/2\%$; 2) $\approx 1/2\%$. 232. Трактриса шундай хоссага эгаки, унинг исталган нуқтаси учун уринманинг T кесмаси ўзгармас узунлигини сақлайди. Бунинг трактрисанинг

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a}{2} \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{a + \sqrt{a^2 - y^2}} \quad (a > 0)$$

формадаги тенгламасига асосан исботланг;

2) эгри чизик

$$x = a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right), \quad y = a \sin t$$

параметрик тенгламаларига асосан исботланг.

233. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$ функция $y'' + 3y' + 2y = 0$ тенгламани қаноатлантириши исботлансин (бу ерда C_1 ва C_2 ўзгармаслар).

234. $y = e^x \sin x$, $z = e^x \cos x$ фараз қилиб, $y'' = 2z$, $z'' = -2y$ тенгликлар исботлансин.

235. $y = \sin(m \arcsin x)$ функция $(1 - x^2) y'' - xy' + m^2 y = 0$ тенгламани қаноатлантириши кўрсатилсин.

236. Агар $(a + bx) e^{\frac{y}{x}} = x$ бўлса, у ҳолда $x^3 \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(x \frac{dy}{dx} - y \right)^2$ бўлиши исботлансин.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАНУВЧИ ФУНКЦИЯЛАР ҲАҚИДА
БАЪЗИ ТЕОРЕМАЛАР

162с.

1-§. Ҳосиланинг илдизлари ҳақида теорема (Ролль теоремаси)

Ролль теоремаси. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз, бу кесманинг барча ички нуқталарида дифференциалланувчи бўлса-ю, $x = a$ ва $x = b$ учларда нолга айлansa $[f(a) = f(b) = 0]$, у ҳолда $[a, b]$ кесма ичида ҳеч бўлмаганда шундай бир $x = c$, $a < c < b$ нуқта мавжудки, бу нуқтада $f'(x)$ ҳосила нолга айланади, яъни $f'(c) = 0$ бўлади*).

Исбот. $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлгани учун бу кесмада у энг катта M қийматга ва энг кичик m қийматга эга.

Агар $M = m$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция ўзгармас, яъни x нинг барча қийматларида $f(x) = m$ ўзгармас қийматга эга бўлади. Аммо у ҳолда кесманинг исталган нуқтасида $f'(x) = 0$ бўлади ва теорема ҳам исботланган бўлади.

Энди $M \neq m$ деб фараз қиламиз. У ҳолда бу сонлардан ҳеч бўлмаганда биттаси нолга тенг эмас.

Аниқлик учун $M > 0$ ва $x = c$ да функция ўзининг энг катта қийматига эга, яъни $f(c) = M$ деб фараз қиламиз. Бунда c миқдор a га ҳам, b га ҳам тенг эмаслигини кўрамиз, чунки шартга кўра $f(a) = 0$, $f(b) = 0$. Функциянинг энг катта қиймати $f(c)$ бўлгани учун, $\Delta x > 0$ да ҳам, $\Delta x < 0$ да ҳам $f(c + \Delta x) - f(c) < 0$

Бундан чиқаднки,

$$\Delta x > 0 \text{ да } \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} < 0, \quad (1')$$

$$\Delta x < 0 \text{ да } \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} > 0. \quad (1'')$$

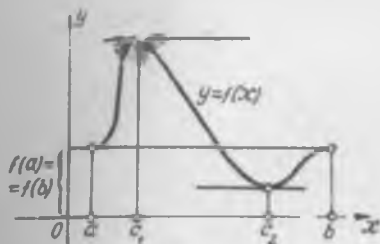
Теореманинг шартига кўра $x = c$ да ҳосила мавжуд, шунинг учун $\Delta x \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб, шунини ҳосил қиламиз:

*) Агар $f(c) = 0$ бўлса, c сони $f(x)$ функциянинг илдизи дейилади.

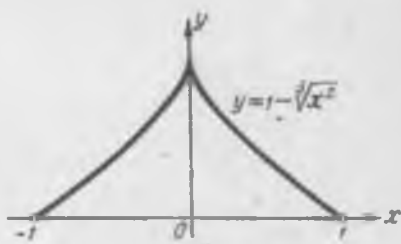
$$\Delta x > 0 \text{ да } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c) < 0,$$

$$\Delta x < 0 \text{ да } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c) > 0.$$

Лекин $f'(c) < 0$ ва $f'(c) > 0$ муносабатлар фақат $f'(c) = 0$ бўлган ҳолдагина ўринлидир. Демак, $[a, b]$ кесма ичида шундай c нуқта борки, унда $f'(x)$ ҳосила нолга тенг.



92- расм.



93- расм.

Ҳосиланинг илдизлари ҳақидаги теорема содда геометрик маънога эга: агар ҳар бир нуқтада уринмага эга бўлган узлуксиз эгри чизиқ абсциссалари a ва b бўлган нуқталарда Ox ўқни кесиб ўтса, у ҳолда бу эгри чизиқда c абсциссали, $a < c < b$, шундай бир нуқта топиладики, бу нуқтада уринма Ox ўққа параллел бўлади.

1-изоҳ. Исботланган теорема $[a, b]$ кесманинг учларида нолга айланмайдиган, лекин $f(a) = f(b)$ тенг қийматларни қабул қиладиган дифференциалланувчи функция учун ҳам тўғри бўлади (92- расм). Бу ҳолда ҳам исботлаш худди олдингидагидек олиб борилади.

2-изоҳ. $f(x)$ функция шундай бўлсаки, $[a, b]$ кесма ичидаги ҳамма нуқталарда ҳам ҳосиласи мавжуд бўлавермаса, у ҳолда теореманинг тасдиқи нотўғри булиб чиқиши мумкин (яъни бу ҳолда $[a, b]$ кесмада $f'(x)$ ҳосила нолга айланадиган c нуқта бўлмай қолиши мумкин).

Масалан,

$$y = f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$$

Функция (93- расм) $[-1, 1]$ кесмада узлуксиз ва кесма учларида нолга айланади, бироқ орилиқ ичида

$$f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$



94- раси.

ҳосила нолга айланмайди. Бу шундан келиб чиқадики, оралиқ ичида $x = 0$ нуқта мавжуд бўлиб, бу нуқтада ҳосила мавжуд эмас (чексизликка айланади).

94- расмда тасвирланган график ҳосиласи $[0, 2]$ кесмада нолга айланмайдиган функциянинг яна бир мисолини беради.

Бу функция учун ҳам Ролль теоремасининг шартлари бажарилмаган, чунки $x = 1$ нуқтада функция ҳосиллага эга эмас.

2- §. Чекли орттирмалар ҳақида теорема (Лагранж теоремаси)

Лангранж теоремаси. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз ва бу кесманинг барча ички нуқталарида дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда $[a, b]$ кесма ичида ҳеч бўлмаганда шундай бир c , $a < c < b$ нуқта топиладики, унда

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \quad (1)$$

бўлади.

Исбот. $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ сонни Q ҳарфи билан белгилаймиз, яъни

$$Q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (2)$$

деб фараз қиламиз ва

$$F(x) = f(x) - f(a) - (x - a) \cdot Q \quad (3)$$

тенглик билан аниқланган ёрдамчи $F(x)$ функцияни текширамиз.

Бу $F(x)$ функциянинг геометрик маъносини аниқлаймиз. Бунинг учун AB ватарнинг (95- расм) бурчак коэффиценти $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = Q$ эканлигини ва у $(a; f(a))$ нуқтадан ўтишини ҳисобга олиб, олдин бу ватарнинг тенгламасини ёзамиз:

$$y - f(a) = Q(x - a),$$

бундан

$$y = f(a) + Q(x - a).$$

Аммо $F(x) = f(x) - [f(a) + Q(x - a)]$. Демак, x нинг ҳар бир қиймати учун $F(x)$ функция, бир хил абсциссали нуқталар

учун $y = f(x)$ эгри чизиқ билан $y = f(a) + Q(x - a)$ ватар ординаталарининг айирмасига тенг.

$F(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз, бу кесма ичида дифференциалланувчи эканини ва кесма учларида нолга эйланишини, яъни $F(a) = 0$, $F(b) = 0$ эканлигини кўриш осон. Демак, $F(x)$ функцияга Ролль теоремасини қўллаш мумкин. Бу теоремага мувофиқ кесма ичида шундай $x = c$ нуқта мавжудки, унда

$$F'(c) = 0.$$

Аммо

$$F'(x) = f'(x) - Q.$$

Демак,

$$F'(c) = f'(c) - Q = 0,$$

бундан

$$Q = f'(c).$$

Q нинг қийматини (2) тенгликка қўйиб, шуни ҳосил қиламиз:

$$\text{Е} \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \quad (1')$$

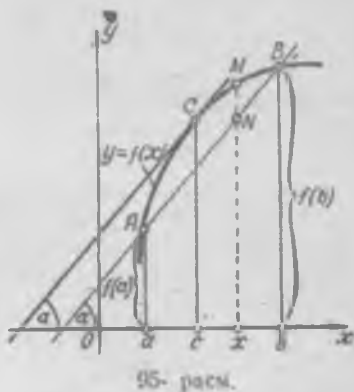
бундан бевосита (1) формула чиқади. Шундай қилиб, теорема исботланди.

Лагранж теоремасининг геометрик маъносини аниқламоқ учун 95- расмга мурожаат қиламиз. Расмдан бевосита равшанки, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ миқдор графикнинг a ва b абсциссали A ва B нуқталаридан ўтувчи ватар оғиш бурчаги α нинг тангенсидан иборат.

Иккинчи томондан, $f'(c)$ — эгри чизиққа c абсциссали нуқтада уринма оғиш бурчагининг тангенсидир. Шундай қилиб, (1') тенгликнинг ёки унга эквивалент бўлган (1) тенгликнинг геометрик маъноси қуйидагидан иборат бўлади: агар AB ёйнинг барча нуқталарида уринма мавжуд бўлса, у ҳолда бу ёйда A ва B нуқталар орасида шундай C нуқта топиладики, унда уринма A ва B нуқталарни туташтирувчи ватарга параллел бўлади.

Энди қуйидагини кўрамиз, c қиймат $a < c < b$ шартни қаноатлантирганликдан, $c - a < b - a$ ёки

$$c - a = \theta(b - a),$$



θ бу ерда 0 билан 1 орасида ётувчи бирор сон, яъни

$$0 < \theta < 1.$$

Аммо у ҳолда

$$c = a + \theta(b - a),$$

ва (1) формулага қуйидаги кўринишни бериш мумкин:

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'[a + \theta(b - a)], \quad 0 < \theta < 1. \quad (1'')$$

3- §. Икки функция орттирмаларининг нисбати ҳақида теорема (Коши теоремаси)

Коши теоремаси. Агар иккита $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар $[a, b]$ кесмада узлуксиз ва унинг ичида дифференциалланувчи бўлса, шу билан бирга $\varphi'(x)$ шу кесма ичининг ҳеч қаерида нолга айланимаса, у ҳолда $[a, b]$ кесма ичида шундай $x = c$, $a < c < b$ нуқта топиладики, унда

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \quad \text{Ҳосил бўлади} \quad (1)$$

Исбот. Q сонни

$$Q = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \quad (2)$$

тенглик билан аниқлаймиз. $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$ эканлигини қайд этамиз, чунки акс ҳолда $\varphi(b)$ билан $\varphi(a)$ тенг бўлар ва у ҳолда Ролль теоремасига биноан кесма ичида $\varphi'(x)$ ҳосила нолга айланиб, теореманинг шартига зид бўлар эди.

Ушбу ёрдамчи функцияни тузамиз:

$$F(x) = f(x) - f(a) - Q[\varphi(x) - \varphi(a)].$$

$F(a) = 0$ ва $F(b) = 0$ эканлиги равшан, бу $F(x)$ функциянинг ва Q соннинг таърифидан келиб чиқади. $F(x)$ функция $[a, b]$ кесмада Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиришини пайқаб, a ва b орасида шундай $x = c$ ($a < c < b$) қиймат мавжудки, унда $F'(c) = 0$ бўлади, деган хулосани чиқарамиз. Аммо, $F'(x) = f'(x) - Q\varphi'(x)$, демак,

$$F'(c) = f'(c) - Q\varphi'(c) = 0,$$

бундан

$$Q = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Q нинг қийматини (2) тенгликка қуйиб, (1) тенгликни ҳосил қиламиз.

Изоҳ. Биринчи қарашда мумкин бўлиб куринганидек, Коши теоремасини

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}$$

касрнинг сурат ва махражига Лагранж теоремасини қўллаш билан исботламоқ мумкин эмас. Ҳақиқатан, биз бу ҳолда (касрни $b - a$ га қисқартгандан сўнг) ушбу

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c_1)}{\varphi'(c_2)}$$

формулани ҳосил қилар эдик, бунда $a < c_1 < b$, $a < c_2 < b$. Аммо, умуман айтганда, $c_1 \neq c_2$, шунинг учун чиққан натижа ҳозирча Коши теоремасини бермайди.

4- §. Иккита чексиз кичик миқдор нисбатининг лимити (“ $\frac{0}{0}$ кўринишдаги ноаниқликни очиш“)

Фараз қилайлик, бирор $[a, b]$ кесмада $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар Коши теоремасининг шартларини қаноатлантирсин ва бу кесманинг $x = a$ нуқтасида нолга айлансин, яъни $f(a) = 0$ ва $\varphi(a) = 0$ бўлсин.

Бу $x = a$ қийматда $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ нисбат аниқланмаган, аммо $x \neq a$ қийматларда тўла аниқ маънога эга. Демак, $x \rightarrow a$ да бу нисбатнинг лимитини топиш масаласи қўйилиши мумкин. Бу типдаги лимитларни ҳисоблаш одатда “ $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликларни очиш” дейилади.

Бу хилдаги масала билан биз илгари ҳам, масалан, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ лимитни текширишда, элементар функциялардан ҳосилалар топишда учрашган эдик. $x = 0$ да $\frac{\sin x}{x}$ ифода маънога эга эмас, яъни $F(x) = \frac{\sin x}{x}$ функция $x = 0$ да аниқланмаган, аммо биз $x \rightarrow 0$ да $\frac{\sin x}{x}$ ифоданинг лимити мавжуд ва 1 га, тенглигини кўрган эдик.

Теорема. (Лопиталь қондаси). *Айтайлик, бирор $[a, b]$ кесмада $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар Коши теоремасининг шартларини қаноатлантирсин ва унинг бирор $x = a$ нуқтасида нолга айлансин, яъни $f(a) = \varphi(a) = 0$ бўлсин; у*

ҳолда агар $x \rightarrow a$ да $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ нисбатнинг limiti мавжуд бўлса, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ҳам мавжуд бўлади, шу билан бирга

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Исбот. $[a, b]$ кесмада бирор $x \neq a$ нуқтани оламыз. Коши формуласини қўлланиб, ушбу тенгликни ёза оламыз:

$$\frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Бунда a ва x орасида ётади. Аммо шартга кўра $f(a) = \varphi(a) = 0$, демак,

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \quad (1)$$

Агар $x \rightarrow a$ бўлса, у ҳолда $\xi \rightarrow a$, чунки ξ нинг қиймати a билан x орасида ётади. Бунда $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$ бўлса, у ҳолда $\lim_{\xi \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$ ҳам мавжуд ва A га тенг. Бундан равшанки,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \lim_{\xi \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A,$$

охирги натижа:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

1-изоҳ. Агар $x = a$ да $f(x)$ ёки $\varphi(x)$ функциялар аниқланмаган, лекин

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$$

бўлган ҳолда ҳам теорема ўринлидир.

Бу ҳолни илгари текширилган ҳолга келтириш учун $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функцияларни $x = a$ нуқтада узлуксиз бўладиган қилиб аниқлаб оламыз. Бунинг учун

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \quad \varphi(a) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$$

фараз қилиш кифоя, чунки $x \rightarrow a$ да $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ нисбатнинг limiti $x = a$ нуқтада $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар аниқланганими-йўқми эканлигига боғлиқ эмаслиги равшан.

2-изоҳ. Агар $f'(a) = \varphi'(a) = 0$ ва теорема шартларида $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функцияларга қўйилган шартларни $f'(x)$ ва $\varphi'(x)$ ҳосилалар ҳам қаноатлантирса, у ҳолда $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ нисбатга Лопиталь қондасини қўлланиб, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$ формулага келамиз ва ҳоказо.

3-Изоҳ. Агар $\varphi'(a) = 0$ лекин $f'(x) \neq 0$ бўлса, у ҳолда теорема $x \rightarrow a$ да нолга интиладиган $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ тескари нисбатга қўлланарли бўлади. Демак, $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ нисбат чексизликка интилади.

1-мисол.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 5x)'}{(3x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cos 5x}{3} = \frac{5}{3}.$$

2-мисол.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1} = 1.$$

3-мисол.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2. \end{aligned}$$

Бу ерда Лопиталь қондасини уч марта қўлланишга тўғри келди, чунки биринчи, иккинчи ва учинчи ҳосилаларнинг нисбатлари $x = 0$ да $\frac{0}{0}$ ноанқликка олиб келади.

4-изоҳ. Лопиталь қондаси

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \text{ ва } \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$$

бўлган ҳолда ҳам қўлланилади.

Ҳақиқатан, $x = \frac{1}{z}$ фараз қилиб, $x \rightarrow \infty$ да $z \rightarrow 0$ эканини кураимиз, демак,

$$\lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = 0.$$

Лопиталь қондасини $\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}$ нисбатга қўлланиб, шуни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},\end{aligned}$$

бу эса талаб қилинган исботдир.

4-мисол.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{k}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k \cos \frac{k}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} k \cos \frac{k}{x} = k.$$

5-§. Иккита чексиз катта миқдор нисбатининг limiti $\left(\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги ноаниқликни очиш

Энди $x \rightarrow a$ билан (ёки $x \rightarrow \infty$ билан) чексизликка интилувчи иккита $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар нисбатининг limiti ҳақидаги масалани текшираамиз.

Теорема. *Фараз қилайлик, a нуқта атрофидаги барча $x \neq a$ нуқталарда $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар узлуксиз ва дифференциалланувчи бўлсин, шу билан бирга $\varphi'(x)$ ҳосила нолга айланмасин; сўнгра*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$$

ва

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A \quad (1)$$

лимит мавжуд бўлсин. У ҳолда $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ лимит мавжуд ва

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A. \quad (2)$$

Исбот. Текширилаётган a нуқта атрофида $a < x < a$ (ёки $a < x < a$) бўладиган иккита a ва x нуқта оламиз. Коши теоремасига биноан

$$\frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \quad (3)$$

бу ерда $a < c < x$. (3) тенгликнинг чап томонини бундай алмаштирамиз:

$$\frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f(x) \frac{1 - \frac{f(a)}{f(x)}}{1 - \frac{\varphi(a)}{\varphi(x)}}}{\varphi(x) \frac{1 - \frac{\varphi(a)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{\varphi(a)}{\varphi(x)}}}. \quad (4)$$

(3) ва (4) муносабатлардан:

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \frac{1 - \frac{f(a)}{f(x)}}{1 - \frac{\varphi(a)}{\varphi(x)}}.$$

Бундан:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \frac{1 - \frac{\varphi(a)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(a)}{f(x)}}, \quad (5)$$

(1) шартдан шу чиқадики, ихтиёрий кичик $\varepsilon > 0$ да a ни a га шундай яқин қилиб танлаб олиш мумкинки, барча $x = c$ учун

$$\left| \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} - A \right| < \varepsilon$$

ёки

$$A - \varepsilon < \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} < A + \varepsilon. \quad (6)$$

тенгсизлик бажарилади, бу ерда $a < c < a$. Сўнгра

$$\frac{1 - \frac{\varphi(a)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(a)}{f(x)}}$$

касрни текшираамиз.

(6) тенгсизлик ўринли бўлиши учун a ни тайинлаб қуйиб, x ни a га яқинлаштирамиз.

$x \rightarrow a$ да $f(x) \rightarrow \infty$ ва $\varphi(x) \rightarrow \infty$ бўлгани учун

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1 - \frac{\varphi(a)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(a)}{f(x)}} = 1$$

ва, демак, илгари танланган $\varepsilon > 0$ да a га етарли яқин x учун

$$\left| \frac{1 - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}}{1 - \frac{f(x)}{f(a)}} \right| < \varepsilon$$

ёки

$$1 - \varepsilon < \frac{1 - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}}{1 - \frac{f(x)}{f(a)}} < 1 + \varepsilon \quad (7)$$

(6) ва (7) тенгсизликларнинг мос ҳадларини бир-бирига кўпайтирсак,

$$(A - \varepsilon)(1 - \varepsilon) < \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \frac{1 - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}}{1 - \frac{f(x)}{f(a)}} < (A + \varepsilon)(1 + \varepsilon)$$

ёки (5) тенгликка асосан

$$(A - \varepsilon)(1 - \varepsilon) < \frac{f(x)}{\varphi(x)} < (A + \varepsilon)(1 + \varepsilon)$$

келиб чиқади, x ни a га етарли даражада яқин қилиб олганда ε ихтиёрий кичик сон бўлгани учун, охириги тенгсизликлардан

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A$$

ёки (1) га асосан

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$$

келиб чиқади, бу эса талаб қилинган исботдир.

1-изоҳ. Агар (1) шартда $A = \infty$, яъни

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \infty$$

бўлса, унда (2) тенглик бу ҳолда ҳам тўғри булади. Ҳақиқатан, олдинги ифодадан

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = 0$$

чиқади. У ҳолда исботланган теоремага асосан

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = 0,$$

бундан

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty.$$

2-изоҳ. Исботланган теорема $x \rightarrow \infty$ ҳол учун ҳам осонгина умумлаштирилади. Агар $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$ ва

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \quad (8)$$

Исботи, $\frac{0}{0}$ кўринишдаги ноаниқлик ҳолда шундай шартларда қилинганидек, $x = \frac{1}{z}$ алмаштириш йўли билан ўтказилади (4-§ даги 4-изоҳга қаралсин).

1-мисол.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1} = \infty.$$

3-изоҳ. Агар (2) ва (8) формулаларнинг ўнг томонидаги лимит (чекли ёки чексиз) мавжуд бўлса, фақат шу ҳолдагина улар тўғри бўлишини яна бир марта таъкидлаймиз. Шундай ҳол юз бериши ҳам мумкинки, ўнг томондаги лимит мавжуд бўлмаган бир вақтда, чап томондагиси мавжуд бўлади. Мисол келтирамиз. Фараз қилайлик,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$$

ни топиш керак бўлсин. Бу лимит мавжуд ва 1 га тенг. Ҳақиқатан,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 1.$$

Аmmo, ҳосилаларнинг нисбати

$$\frac{(x + \sin x)'}{(x)'} = \frac{1 + \cos x}{1} = 1 + \cos x$$

$x \rightarrow \infty$ да ҳеч қандай лимитга интилмайди, балки 0 билан 2 орасида тебранади.

2-мисол.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + b}{cx^2 + d} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2ax}{2cx} = \frac{a}{c}$$

3- мисол.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 3x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \frac{2 \cdot 3 \cos 3x \sin 3x}{2 \cos x \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin 3x}{\sin x} \cdot \frac{(-1)}{1} = 3 \frac{(-1)}{1} \cdot \frac{(-1)}{1} = 3.
 \end{aligned}$$

4- мисол.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Умуман, исталган бутун $n > 0$ да

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \dots 1}{e^x} = 0.$$

Символик тарзда

а) $0 \cdot \infty$, б) 0^0 , в) ∞^0 , г) 1^∞ , д) $\infty - \infty$

кўринишда ёзиладиган бошқа ноаниқлик ҳоллари бундан олдинги ҳолларга келтирилади ва маъноси қуйидагидан иборат бўлади.

а) Фараз қилайлик, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$ бўлсин;

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \varphi(x)]$$

ни топиш талаб қилинади. Бу $0 \cdot \infty$ типдаги ноаниқлик. Агар изланаётган ифодани

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}$$

кўринишда ёки

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

кўринишда ёзсак, у ҳолда $x \rightarrow a$ да $\frac{0}{0}$ кўринишдаги ёки $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги ноаниқлик келиб чиқади.

5- мисол.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{n}{x^{n+1}}} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{n} = 0.$$

б) Фараз қилайлик,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$$

бўлиб,

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\varphi(x)}$$

ни топиш, яъни 0^0 кўринишдаги ноаниқликни очиш талаб қилинади.

Бунда

$$y = [f(x)]^{\varphi(x)}$$

фараз қилиб, бу тенгликнинг иккала томонини логарифмлаймиз:

$$\ln y = \varphi(x) [\ln f(x)].$$

Ўнг томонда $x \rightarrow a$ да $0 \cdot \infty$ кўринишдаги ноаниқликни ола-
 миз. $\lim_{x \rightarrow a} \ln y$ ни топиб, сўнггра $\lim_{x \rightarrow a} y$ ни топиш осон. Ҳақи-
 қатан, логарифмик функциянинг узлуксизлигига асосан,
 $\lim_{x \rightarrow a} \ln y = \ln \lim_{x \rightarrow a} y$ ва $\ln \lim_{x \rightarrow a} y = b$ бўлса, y ҳолда $\lim_{x \rightarrow a} y = e^b$.
 Агар жумладан, $b = +\infty$ ёки $b = -\infty$ бўлса, y ҳолда мос
 равишда $\lim_{x \rightarrow a} y = +\infty$ ёки 0 бўлади.

6- мисол. $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$ ни топиш талаб қилинади. $y = x^x$ фараз қилиб, $\ln \lim y = \lim \ln y = \lim \ln (x^x) = \lim (x \ln x)$ ни топамиз:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0} x = 0,$$

демак, $\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = 0$, бундан $\lim_{x \rightarrow 0} y = e^0 = 1$, яъни

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1.$$

Бошқа ҳолларда ҳам лимитлар шунга ўхшаш йўл билан топилади.

бундан коэффициентларнинг қийматларини топамиз:

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= f(a), \quad C_1 = f'(a), \quad C_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} f''(a), \\ C_3 &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a), \quad \dots, \quad C_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} f^{(n)}(a). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$C_1, C_2, \dots, C_n$ ларнинг топилган қийматларини (2) формулага қўйиб, изланган кўпҳадни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \\ &+ \frac{(x-a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} f^{(n)}(a). \end{aligned} \quad (5)$$

Берилган $f(x)$ функция билан тузилган $P_n(x)$ кўпҳад қийматларининг айирмасини $R_n(x)$ орқали белгилаймиз (96- расм):

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x),$$

бундан

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

ёки ёйилган кўринишда

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots \\ &\dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x). \end{aligned} \quad (6)$$

$R_n(x)$ қолдиқ ҳад дейилади. x нинг қолдиқ ҳад $R_n(x)$ жуда кичик бўладиган қийматлари учун $P_n(x)$ кўпҳад $f(x)$ функциянинг тақрибий тасвирини беради.

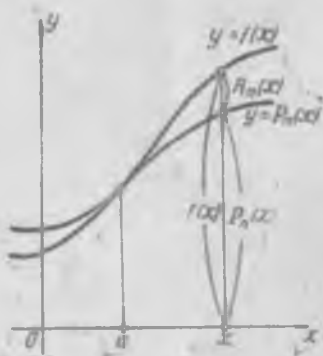
Шундай қилиб, (6) формула $y=f(x)$ функцияни, қолдиқ ҳад $R_n(x)$ қийматиға тенг бўлган тегишли даражадаги аниқликда $y=P_n(x)$ кўпҳад билан алмаштиришга имкон беради.

Эндиги вазифамиз x нинг турли қийматларида $R_n(x)$ миқдорни баҳолашдан иборат.

Қолдиқ ҳадни

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} Q(x) \quad (7)$$

формада ёзамиз, бу ерда $Q(x)$ — аниқланиши керак бўлган бирор функция. Бунга мослаб (6) формулани қайтадан ёзамиз:



96- расм.

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots \\ \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} Q(x). \quad (6')$$

x ва a нинг тайин қийматларида $Q(x)$ функция маълум қийматга эга; уни Q билан белгилаймиз.

Сўнгра t га боғлиқ (t нинг қиймати a билан x орасида ётади) ёрдамчи

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{x-t}{1} f'(t) - \frac{(x-t)^2}{2!} f''(t) - \dots \\ \dots - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} Q$$

функцияни текшираемиз, бу ерда Q (6') муносабат билан аниқланган қийматга эга; бунда a ва x ни аниқ сонлар деб ҳисоблаймиз.

Энди $F'(t)$ ҳосилани топамиз:

$$F'(t) = -f'(t) + f'(t) - \frac{x-t}{1} f''(t) + \frac{2(x-t)}{2!} f''(t) - \\ - \frac{(x-t)^2}{2!} f'''(t) + \dots - \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) + \frac{n(x-t)^{n-1}}{n!} f^{(n)}(t) - \\ - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + \frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!} Q,$$

ёки қисқартиргандан кейин:

$$F'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + \frac{(x-t)^n}{n!} Q. \quad (8)$$

Демак, a абсциссали нуқта ($a < x$ да $a \leq t \leq x$ ва $a > x$ да $a \geq t \geq x$) яқинида ётувчи барча t нуқталарда $F(t)$ функция ҳосилга эга.

Сўнгра [(6')] формулага асосан]

$$F(x) = 0, \quad F(a) = 0$$

эканлигини кўраемиз. Шунинг учун $F(t)$ функцияга Ролль теоремаси қўлланса бўлади, демак, a ва x орасида ётувчи шундай $t = \xi$ қиймат мавжудки, бу қийматда $F'(\xi) = 0$ бўлади. Бундан (8) муносабатга асосан:

$$-\frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi) + \frac{(x-\xi)^n}{n!} Q = 0,$$

бундан

$$Q = f^{(n+1)}(\xi).$$

Бу ифодани (7) формулага қўйиб, шуни ҳосил қиламиз:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Бу — қолдиқ ҳад учун *Лагранж формаси* дейилади.
 ξ миқдор x ва a орасида ётгани учун уни

$$\xi = a + \theta(x - a)$$

формада*) тасвирлаш мумкин, бу ерда θ 0 билан 1 орасида ётувчи сон, яъни $0 < \theta < 1$; у ҳолда қолдиқ ҳад формуласи

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]$$

кўринишини олади.

$$\begin{aligned} f(x) = & f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots \\ & \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)) \end{aligned} \quad (9)$$

формула $f(x)$ функция учун *Тейлор формуласи* дейилади.

Агар Тейлор формуласида $a = 0$ фараз қилинса, у ҳолда формула

$$\begin{aligned} f(x) = & f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots \\ & \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \end{aligned} \quad (10)$$

кўринишда ёзилади, θ бу ерда 0 билан 1 сонлари орасида. Тейлор формуласининг бу хусусий ҳоли баъзан *Маклорен формуласи* дейилади.

7- §. $e^x, \sin x, \cos x$ функцияларни Тейлор формуласи бўйича ёйиш

1. $f(x) = e^x$ функцияни ёйиш. $f(x)$ дан кетма-кет ҳосиллар олиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$f(x) = e^x, \quad f(0) = 1,$$

$$f'(x) = e^x, \quad f'(0) = 1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad f^{(n)}(0) = 1.$$

Бу ифодаларни 6- § нинг (10) формуласига қўямиз:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi x}, \quad 0 < \theta < 1.$$

*) Шу бобнинг 2- § охирига қаранг.

Агар $|x| \leq 1$ бўлса, $n = 8$ деб олиб, қолдиқ ҳадни баҳолаймиз:

$$R_9 < \frac{1}{9!} \cdot 3 < 10^{-5}.$$

$x = 1$ да e соннинг тақрибий қийматини топишга нмкон берадиган ушбу формулани ҳосил қиламиз:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{8!}.$$

бунда ҳисоблашни олтита*) каср хонали ўнли касрлар билан бажариб, сўнгра натижани бешта ўнли каср рақамигача яхлитлаб, e учун ушбу қийматни топамиз:

$$e = 2,71828.$$

Бу ерда хато $\frac{3}{9!}$ дан ёки 0,00001 дан ошмайди.

Шуни қайд этамизки, x қандай бўлмасин, $n \rightarrow \infty$ да қолдиқ ҳад

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \rightarrow 0.$$

Ҳақиқатан, $\theta < 1$ бўлгани учун, x нинг тайин қийматида $e^{\theta x}$ миқдор чекланган ($x > 0$ да e^x дан кичик ва $x < 0$ да 1 дан кичик).

Тайин сон x қандай бўлмасин

$$n \rightarrow \infty \text{ да } \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$$

ни исботлаймиз. Ҳақиқатан,

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \left| \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \dots \cdot \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n+1} \right|.$$

Агар x тайин сон бўлса, у ҳолда шундай бутун мусбат n сон топиладики,

$$|x| < N$$

бўлади.

$\frac{|x|}{N} = q$ белгилашни киритамиз; у вақтда $0 < q < 1$ ни эътиборга олиб, $n = N + 1, N + 2, N + 3$ ва ҳоказо қийматларда бундай ёза оламиз:

*) Бошқача айтганда яхлитлаш хатосининг йиғиндиси R_8 дан анча ошиб кетиши мумкин (масалан, қўшилувчилар саноғи 10 та бўлганда бу хато миқдори $5 \cdot 10^{-5}$ га етиши мумкин).

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| &= \left| \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \dots \cdot \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n+1} \right| = \\ &= \left| \frac{x}{1} \right| \cdot \left| \frac{x}{2} \right| \cdot \left| \frac{x}{3} \right| \cdot \dots \cdot \left| \frac{x}{N-1} \right| \cdot \left| \frac{x}{N} \right| \cdot \dots \cdot \left| \frac{x}{n} \right| \cdot \left| \frac{x}{n+1} \right| < \\ &< \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \dots \cdot \frac{x}{N-1} \cdot q \cdot q \cdot \dots \cdot q = \frac{x^{N-1}}{(N-1)!} q^{n-N+2}, \end{aligned}$$

чунки

$$\left| \frac{x}{N} \right| = q, \quad \left| \frac{x}{N+1} \right| < q, \dots, \left| \frac{x}{n+1} \right| < q.$$

Аммо $\frac{x^{N-1}}{(N-1)!}$ миқдор ўзгармас, яъни n га боғлиқ эмас, q^{n-N+2} эса $n \rightarrow \infty$ да 0 га интилади. Шунинг учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0. \quad (1)$$

Демак, $n \rightarrow \infty$ да $R_n(x) = e^{\theta x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$.

Юқоридагидан чиқадики, x ҳар қандай бўлганда ҳам стар-ли сонда ҳадларни олиб e^x ни исталган даражада аниқлик билан ҳисоблай оламиз.

2. $f(x) = \sin x$ функцияни ёйиш: $f(x) = \sin x$ функ-циядан кетма-кет ҳосилалар оламиз:

$$f(x) = \sin x, \quad f(0) = 0,$$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), \quad f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), \quad f'''(0) = -1,$$

$$f^{IV}(x) = \sin x = \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right), \quad f^{IV}(0) = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2},$$

$$f^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(n+1)}(\xi) = \sin\left[\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right].$$

Бу қийматларни 6-§ нинг (10) формуласига қўйиб, $f(x) = \sin x$ функциянинг Тейлор формуласи буйица ёйилмасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \\ &\dots + \frac{x^n}{n!} \sin\frac{n\pi}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin\left[\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

Энди $\left| \sin \left[\xi + (n+1) \frac{\pi}{2} \right] \right| \leq 1$ бўлгани учун x нинг барча қийматларида

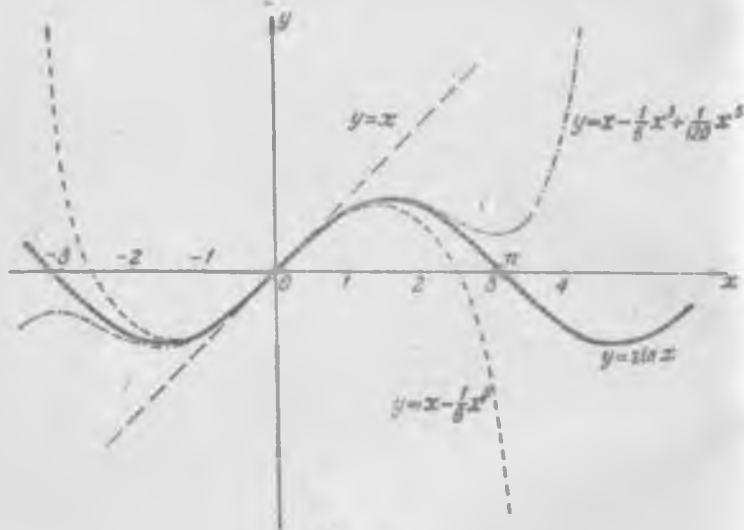
$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

Чиққан формулани $\sin 20^\circ$ ни тақрибий ҳисоблаш учун татбиқ қиламиз. $n = 3$ деб фараз қиламиз, яъни ёйилманинг биринчи иккита ҳади билан чекланамиз:

$$\sin 20^\circ = \sin \frac{\pi}{9} \approx \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{9} \right)^3 = 0,342.$$

Қилинган хатони ва қолдиқ ҳадга тенг хатони баҳолаймиз:

$$|R_3| = \left| \left(\frac{\pi}{9} \right)^4 \frac{1}{4!} \sin(\xi + 2\pi) \right| \leq \left(\frac{\pi}{9} \right)^4 \frac{1}{4!} = 0,00062 < 0,001.$$



97- расм.

Демак, хато 0,001 дан кичик, яъни 0,001 гача аниқлик билан $\sin 20^\circ = 0,342$.

97- расмда $f(x) = \sin x$ функциянинг графиги ва унинг биринчи учта

$$S_1(x) = x; \quad S_2(x) = x - \frac{x^3}{3!}; \quad S_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

яқинлашмаларининг графиклари берилган.

3. $f(x) = \cos x$ функцияни ёйиш. $f(x) = 0$ функциянинг $x = 0$ даги кетма-кет ҳосилаларини топиш ва Маклорен формуласига қўйиш билан ушбу ёйилмани ҳосил қиламиз:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{x^n}{n!} \cos \frac{\pi n}{2} + \\ + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos \left(\frac{\pi}{2} + (n+1) \frac{\pi}{2} \right).$$

$$|\xi| < |x|.$$

Бу ерда ҳам x нинг барча қийматларида $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

IV бобга машқлар

Қуйидаги функциялар учун Ролль теоремасининг тўғрилиги текшириб курилсин: 1. $[1, 2]$ кесмада $y = x^2 - 3x + 2$. 2. $[0, 1]$ кесмада $y = x^2 + 5x^3 - 6x$. 3. $[1, 3]$ кесмада $y = (x-1)(x-2)(x-3)$.

4. $[0, \pi]$ кесмада $y = \sin^2 x$. 5. $f(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 1$ функция 1 ва -1 илдизларга эга. $f'(x)$ ҳосиланинг Ролль теоремасида гапириладиган илдизи топилинсин. 6. $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}$ функциянинг илдизлари орасида унинг

ҳосиласининг илдизи борлиги текшириб курилсин. 7. $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ кесмада

$y = \cos^2 x$ функция учун Ролль теоремасининг тўғрилиги текшириб курилсин.

8. $[-1, 1]$ кесманинг учларида $y = 1 - \sqrt[3]{x^4}$ функция нолга айланади.

Бу функциянинг ҳосиласи $(-1, 1)$ интервалнинг ҳеч қаерида нолга айланмаслигига ишонч ҳосил қилинсин. Нима учун бу ерда Ролль теоремасининг қўлланмаслиги тушунтирилсин.

9. $[x_1, x_2]$ кесмада $y = \sin x$ функция учун Лагранж формуласи тузилсин. Жав. $\sin x_2 - \sin x_1 = (x_2 - x_1) \cos c$,

$x_1 < c < x_2$. 10. $[0, 1]$ кесмада $y = 2x - x^2$ функция учун Лагранж формуласининг тўғрилиги текшириб курилсин.

11. Қандай нуқтада $y = x^n$ эгри чизик уринмаси $M_1(0, 0)$ ва $M_2(a, a^n)$ нуқталарни тортиб турувчи ватарга

параллел бўлади? Жав. Абсиссаси $c = \frac{a}{\sqrt[n]{n+1}}$ нуқтада.

12. Қандай нуқтада

$y = \ln x$ эгри чизик уринмаси $M_1(1, 0)$ ва $M_2(e, 1)$ нуқталарни тортиб турувчи ватарга параллел бўлади? Жав. Абсиссаси $c = e - 1$ бўлган нуқтада.

Лагранж теоремасидан фойдаланиб, тенгсизликлар исботлансин:

13. $e^x > 1 + x$. 14. $\ln(1 + x) < x$ ($x > 0$). 15. ($b > a$ да) $b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$.

16. $\arctg x < x$. 17. $[1, 2]$ кесмада $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = x^3$ функциялар учун Коши формуласи ёзилсин ва c топилинсин.

Қуйидаги лимитлар ҳисоблансин: 18. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n-1}$. Жав. $\frac{1}{n}$.

19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\sin x}$. Жав. 2. 20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x - x}{x - \sin x}$. Жав. 2. 21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\cos x - 1}$.

Жав. -2 . 22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}$. Жав. Лимит мавжуд эмас. ($x \rightarrow +0$ да

$\sqrt{2}$, $x \rightarrow -0$ да $-\sqrt{2}$). 23. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2}$. Жав. $-\frac{1}{8}$. 24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$.

11 Н. С. Пискунов

- Жав. $\ln \frac{a}{b}$. 25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x}$. Жав. $-\frac{1}{6}$. 26. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$.
 Жав. $\cos a$. 27. $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y + \sin y - 1}{\ln(1+y)}$. Жав. 2. 28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x}{3x^2 + x^3}$. Жав. $\frac{1}{3}$.
 29. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-1}{2x+b}$. Жав. $\frac{3}{2}$. 30. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n}$ (бу ерда $n > 0$). Жав. 0.
 31. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\arcsin \lg x}$. Жав. 1. 32. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \frac{x+1}{x}}{\ln \frac{x-1}{x}}$. Жав. -1 . 33. $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^{ay}}$. Жав. $a > 0$
 да 0, $a < 0$ да ∞ . 34. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$. Жав. 1. 35. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 3x}{\ln \sin x}$. Жав. 1.
 36. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \lg 7x}{\ln \lg 2x}$. Жав. 1. 37. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)-x}{\pi \lg \frac{x}{2}}$. Жав. 0. 38. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \lg \frac{\pi x}{2}$.
 Жав. $\frac{2}{\pi}$. 39. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \right]$. Жав. $-\frac{1}{2}$. 40. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{16x} \right]$.
 Жав. -1 . 41. $\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec \varphi - \lg \varphi)$. Жав. 0. 42. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right]$.
 Жав. $\frac{1}{2}$. 43. $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 2x$. Жав. $\frac{1}{2}$. 44. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^3}}$. Жав. ∞ . 45. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.
 Жав. $\frac{1}{e}$. 46. $\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt[t]{t^2}$. Жав. 1. 47. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\lg x}$. Жав. 1. 48. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x$.
 Жав. e^a . 49. $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$. Жав. $\frac{1}{e}$. 50. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$. Жав. 1.
 51. $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \varphi}{\varphi} \right)^{\frac{1}{\varphi^2}}$. Жав. $\frac{1}{\sqrt{e}}$. 52. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\lg \frac{\pi x}{4} \right)^{\lg \frac{\pi x}{4}}$. Жав. $\frac{1}{e}$. 53. $x^4 -$
 $- 5x^3 + 5x^2 + x + 2$ купҳад $x-2$ даражаси бўйича ёйилсин. Жав.
 $-7(x-2) - (x-2)^2 + 3(x-2)^3 + (x-2)^4$. 54. $x^5 + 2x^4 - x^3 + x + 1$ куп-
 ҳад $x+1$ даражаси бўйича ёйилсин. Жав. $(x+1)^2 + 2(x+1)^3 - 3(x+1)^4 +$
 $+(x+1)^5$. 55. $a=1$, $n=3$ да $y = \sqrt{x}$ функция учун Тейлор формуласи
 ёзилсин. Жав. $\sqrt{x} = 1 + \frac{x-1}{1} \cdot \frac{1}{2} - \frac{(x-1)^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{(x-1)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{3}{8} -$
 $-\frac{(x-1)^4}{4!} \cdot \frac{15}{16} [1 + \theta(x-1)]^{-\frac{7}{2}}$, $0 < \theta < 1$. 56. $n=2$ да $y = \sqrt{1+x}$
 функция учун Маклорен формуласи ёзилсин. Жав. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x -$
 $-\frac{1}{8}x^2 + \frac{x^3}{16(1+\theta x)^{\frac{5}{2}}}$, $0 < \theta < 1$. 57. Олдинги мисол натижасидан фойда-

даниб, $x = 0,2$ да $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$ тақрибий тенгликнинг хатоси баҳолансин. Жав. $\frac{1}{10}$ дан кичик.

x нинг кичикроқ қийматларида қуйидаги тақрибий тенгликларнинг келиб чиқиши изоҳлансин ва бу тенгликларнинг хатолари баҳолансин: 58. $\ln \cos x \approx -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}$. 59. $\lg x \approx x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$. 60. $\arcsin x \approx x + \frac{x^3}{6}$. 61. $\arctg x \approx x - \frac{x^3}{3}$. 62. $\frac{e^x + e^{-x}}{2} \approx 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$. 63. $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \approx x - x^3 + \frac{5x^5}{6}$.

Тейлор формуласидан фойдаланиб, ифодаларнинг лимитлари ҳисоблансин: 64. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$. Жав. 1. 65. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+x) - \sin^2 x}{1 - e^{-x^2}}$. Жав. 0.

66. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\lg x - \sin x) - x^2}{x^6}$. Жав. $\frac{1}{4}$. 67. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$. Жав. 0. 68. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{\operatorname{ctg} x}{x} \right)$. Жав. $\frac{1}{3}$. 69. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^3} - \operatorname{ctg}^3 x \right)$. Жав. $\frac{2}{3}$.

V БОБ

ФУНКЦИЯНИ ТЕКШИРИШ

1- §. Масаланинг қўйилиши

Табиатда бўладиган турли ҳодисаларнинг миқдорий томонини урганиш шу ҳодисада иштирок этадиган ўзгарувчи миқдорлар орасидаги функционал боғланишни топиш ва урганишга келтирилади. Агар шундай функционал боғланишни аналитик равишда, яъни бир ёки бир неча формула шаклида ифодалаш мумкин бўлса, биз бу функционал боғланишнинг математик анализ воситалари билан текшириш имконига эга бўламиз. Масалан, снаряднинг бушлиқда учиб ҳодисасини текширганда учиб узоқлиги R нинг кўтарилиш бурчаги α билан бошланғич v_0 тезлигига боғлиқлигини кўрсатадиган ушбу формула ҳосил бўлади:

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

(g — оғирлик кучи тезланиши).

Бу формулани ҳосил қилгандан сўнг, α нинг қандай қийматида R узоқлик энг катта бўлишини, қандай қийматида энг кичик бўлишини, α бурчак катталашганда узоқлик ҳам катталашуви учун қандай шартлар кераклиги ва шу сингари масалаларни аниқлаш имкониятига эга бўламиз.

Бошқа бир мисол кўрайлик. Рессор устидаги (автомобиль, танк) юкнинг тебранишини текшириш натижасида юкнинг мувозанат ҳолатдан четланиши (чиқиши) у нинг t вақтга қандай боғланишини кўрсатуви ушбу формула ҳосил қилинган:

$$y = e^{-kt} (A \cos \omega t + B \sin \omega t).$$

Бу формулага кирган k , A , B , ω миқдорлар берилган тебранувчи система учун аниқ қийматларга эга (улар рессорнинг эластиклигига, юкнинг миқдорига ва ҳоказоларга боғлиқ бўлиб, аммо t вақтнинг ўтиши билан ўзгармайди), шунга кўра биз уларни ўзгармас миқдорлар деб қараймиз.

Келтирилган формулага асосланиб t нинг қандай қайматларида t нинг ўсиши билан y четланиш ортади, энг катта четланишнинг миқдори вақтга боғлиқ равишда қандай ўзгаради, t нинг қийматлари қандай бўлганда четланиш энг катта булади, t нинг қийматлари қандай бўлганда юк энг катта тезлик билан ҳаракат қилади ва шу каби қатор масалаларни аниқлашимиз мумкин.

Айтилган масалаларнинг ҳаммаси „функцияни текшириш“ тушунчасига киради. Равшанки, бу масалаларни (II бобда қилганимиз каби) функциянинг айрим нуқталардаги қийматларини ҳисоблаш йули билан аниқлаш жуда қийин. Бу бобнинг мақсади функцияни текширишнинг умумийроқ усулларни топишдир.

2- §. Функциянинг ўсиши ва камайиши

I бобнинг 6- § да ўсувчи ва камаювчи функцияларнинг таърифи берилган эди. Энди ҳосила тушунчасини функциянинг ўсиши ва камайишини текширишга татбиқ қиламиз.

Теорема. 1) Агар $[a, b]$ кесмада ҳосилага эга булган $f(x)$ функция шу кесмада ўсувчи булса, унинг ҳосиласи $[a, b]$ кесмада манфий бўлмайди, яъни $f'(x) \geq 0$.

2) Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз, (a, b) oralikда дифференциалланувчи булса ва $a < x < b$ учун $f'(x) > 0$ булса, бу функция $[a, b]$ кесмада ўсади.

Исбот. Аввал теореманинг биринчи қисмини исбот қиламиз. $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада ўсади деб фараз қиламиз. x аргументга Δx орттирмани берамиз ва

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1)$$

нисбатни қараймиз.

$f(x)$ ўсувчи функция, шунга кўра

$$\Delta x > 0 \text{ булганда } f(x + \Delta x) > f(x)$$

ва

$$\Delta x < 0 \text{ булганда } f(x + \Delta x) < f(x)$$

Иккала ҳолда ҳам

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0, \quad (2)$$

демак,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0,$$

яъни $f'(x) > 0$, шуни исботлаш талаб қилинган эди. [Агар $f'(x) < 0$ бўлса, Δx нинг етарли даражада кичик қийматларида (1) нисбат манфий булар эди, бу эса (2) муносабатга зиддир].

Энди теореманинг иккинчи қисмини исботлаймиз. x нинг $[a, b]$ оралиқдаги ҳамма қийматларида $f'(x) > 0$ деб фарз қиламиз.

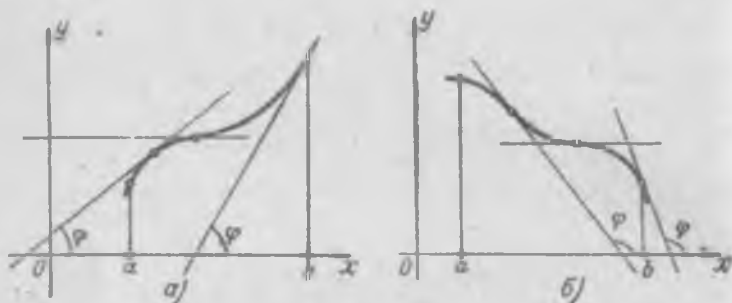
$[a, b]$ кесмага тегишли иккита ихтиёрый x_1 ва x_2 ($x_1 < x_2$) қийматни қараймиз.

Лагранжнинг чекли орттирмалар ҳақидаги теоремасига биноан ушбу тенгликни ёзишимиз мумкин:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad x_1 < \xi < x_2.$$

Шартга кўра $f'(\xi) > 0$ демак, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, бу эса $f(x)$ ўсувчи функция деган сўздир.

Камаювчи (дифференциалланувчи) функция учун ҳам шунга ўхшаш теоремани айтиш мумкин, яъни:



98-расм.

Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада камайса, шу кесмада $f'(x) \leq 0$ бўлади. Агар (a, b) оралиқда $f'(x) < 0$ бўлса $[a, b]$ кесмада $f(x)$ камайди. [Албатта, бу ерда ҳам функция $[a, b]$ кесманинг ҳамма нуқталарида узлуксиз ва (a, b) оралиқнинг ҳамма нуқталарида дифференциалланувчи деб фарз қиламиз].

Изоҳ. Исботланган теорема ушбу геометрик фактни ифодалайди. Агар $[a, b]$ кесмада $f(x)$ функция ўсса, шу кесманинг ҳар бир нуқтасида $y = f(x)$ эгри чизиққа уринма Ox ўқ билан φ уткир бурчакни ҳосил қилади ёки — айрим нуқталарда — горизонтал бўлади; бу бурчакнинг тангенс манфий бўлмайди: $f'(x) = \operatorname{tg} \varphi \geq 0$ (98-а расм). Агар $[a, b]$ кесмада $f(x)$ функция камайса, уринма Ox ўқ билан ўтмас бурчак ҳосил қилади (ёки айрим нуқталарда уринма горизонтал бўлади); бу бурчакнинг



тангенс мусбат бўлмайди (98-б расм). Теореманинг иккинчи қисми ҳам шу каби тасвирланади. Теорема ҳосиланинг ишорасига қараб функциянинг ўсиши ёки камайишини аниқлашга имкон беради.

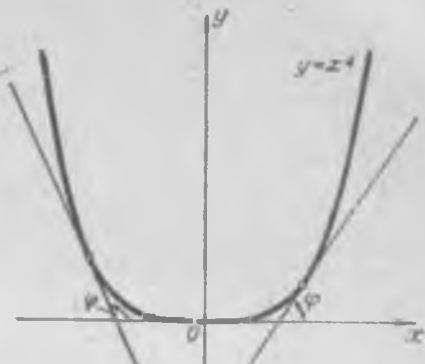
Мисол. Ушбу функциянинг ўсиш ва камайиш соҳалари аниқлансин:

$$y = x^4.$$

Ечиш. Ҳосилани топамиз:

$$y' = 4x^3;$$

$x > 0$ бўлганда $y' > 0$ бўлади — функция ўсади; $x < 0$ бўлганда $y' < 0$ бўлади — функция камаёди (99-расм).



99-расм.

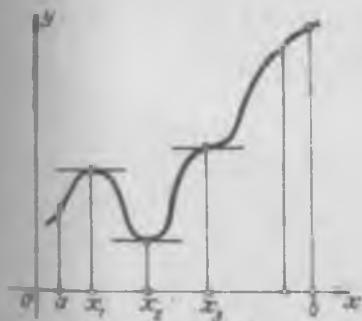
3-§. Функциянинг максимуми ва минимуми

Максимумнинг таърифи. Агар $f(x)$ функциянинг x_1 нуқтадаги қиймати x_1 ни ўз ичига олган биронта интервалнинг ҳамма нуқталаридаги қийматларидан катта бўлса, $f(x)$ функция x_1 нуқтада **максимум** (maximum) га эга бўлади. Бошқача айтганда, агар абсолют миқдори буйича етарли даражада кичик бўлган ҳар қандай (мусбат ва манфий) Δx учун $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ бўлса, $f(x)$ функция $x = x_1$ нуқтада **максимумга** эга бўлади*).

Масалан, графиги 100-расмда тасвирланган $y = f(x)$ функция $x = x_1$ нуқтада максимумга эга.

Минимумнинг таърифи. Агар абсолют миқдори буйича етарли даражада кичик бўлган ҳар қандай (мусбат ва манфий) Δx учун

$$f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$$



100-расм.

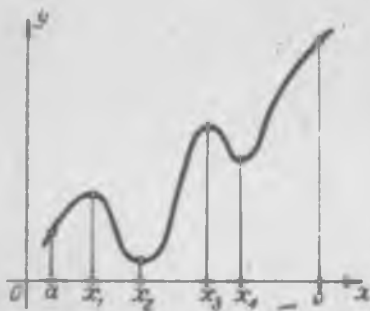
* Баъзан бу таъриф бундай ифодаланади: агар x_1 нуқтанинг шундай (α, β) атрофини $(\alpha < x_1 < \beta)$ топиш мумкин бўлсаки, шу атрофнинг x_1 дан бошқа ҳамма нуқталари учун $f(x) < f(x_1)$ тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция x_1 нуқтада **максимумга** эга дейилади.

булса, $f(x)$ функция $x = x_2$ нуқтада *минимум* (minimum) га эга бўлади (100- расм).

Масалан, утган параграф охирида қаралган $y = x^4$ функция (99- расмга қаралсин) $x = 0$ нуқтада минимумга эга, чунки $x = 0$ бўлганда $y = 0$ ва x нинг бошқа қийматларида $y > 0$.

Максимум ва минимум таърифлари муносабати билан қуйндаги ҳолларга эътибор қилиш лозим.

1. Кесмада аниқланган функция x нинг фақат қаралаётган кесманинг ичидаги қийматларида максимал ва минимал қийматларга етиши мумкин.



101- расм.

2. Функциянинг максимуми ва минимумини қаралаётган кесмада унинг энг катта ва энг кичик қийматлари деб қараш хато булди. Функциянинг максимум нуқтадаги қиймати шу максимум нуқтага етарли даражада яқин турган ҳамма нуқталардаги қийматларига нисбатангина энг катта бўлади, минимум нуқтадаги қиймати эса шу минимум нуқтага етарли даражада яқин турган нуқталардаги қий-

матларига нисбатангина энг кичик бўлади.

101- расмда $[a, b]$ кесмада аниқланган функция тасвирланган, бу функция

$x = x_1$ ва $x = x_3$ нуқталарда максимумга эга;

$x = x_2$ ва $x = x_4$ нуқталарда минимумга эга, лекин функциянинг $x = x_4$ даги минимуми $x = x_1$ даги максимумидан катта. Функциянинг $x = b$ даги қиймати қаралаётган кесмадаги максимумларнинг ҳар биридан каттадир.

Функциянинг максимум ва минимумлари функциянинг *экстремумлари**) ёки *экстремаль қийматлари* деб аталади.

Функциянинг экстремаль қийматлари ва уларнинг $[a, b]$ кесмада жойланиши аргументнинг ўзгариши билан боғланишда функциянинг ўзгаришини маълум даражада характерлайди.

Қуйда экстремаль қийматларни топиш методи курсатилади.

1- теорема (экстремум мавжудлигининг зарур шarti). Агар дифференциалланувчи $y = f(x)$ функция $x = x_1$ нуқтада максимумга ёки минимумга эга булса, унинг ҳосиласи шу нуқтада нолга айланади, яъни $f'(x_1) = 0$ булади.

*) Extremum — четки деган сўз (латинча).

Исбот. Аниқлик учун $x = x_1$ нуқтада функция максимум-га эга деб фараз қиламиз. Бу ҳолда x_1 га абсолют қиймат жиҳатидан етарли даражада кичик Δx ($\Delta x \neq 0$) орттирма бериб, ушбу тенгсизликни ёзиш мумкин:

$$f(x_1 + \Delta x) < f(x_1),$$

яъни

$$f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) < 0.$$

Лекин бундай ҳолда

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

нисбатнинг ишораси Δx нинг ишораси билан белгиланади, яъни:

$$\Delta x < 0 \text{ бўлганда } \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} > 0,$$

$$\Delta x > 0 \text{ бўлганда } \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} < 0.$$

Ҳосиланинг таърифига мувофиқ:

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Агар $f(x)$ функция $x = x_1$ нуқтада ҳосилага эга бўлса, ун-томондаги лимит Δx нинг қандай (мусбат ёки манфийлигича қолган ҳолда) нолга интилишига боғлиқ бўлмайди.

Аммо Δx манфийлигича қолган ҳолда нолга интилса, у ҳолда

$$f'(x_1) \geq 0.$$

Агар Δx мусбатлигича қолган ҳолда нолга интилса, у ҳолда

$$f'(x_1) \leq 0.$$

$f'(x_1)$ нинг қиймати Δx нинг қандай ҳолда нолга интилишига боғлиқ бўлмаган аниқ сон бўлгани учун сўнгги икки тенгсизлик фақат

$$f'(x_1) = 0$$

бўлгандагина биргаликда бўлади.

Функциянинг минимуми бўлган ҳол учун ҳам теорема шу равишда исботланади.

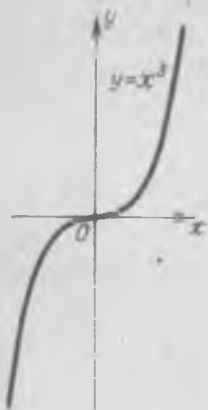
Исботланган теоремага ушбу равшан кўриниб турган геометрик факт мос келади: агар $f(x)$ функция максимум ва минимум нуқталарда ҳосилага эга бўлса, $y = f(x)$ эгри чизиқ-нинг шу нуқталарида ўтказилган уринма Ox ўқи-га параллел бўлади. Ҳақиқатан, $f'(x_1) = \operatorname{tg} \varphi = 0$ тенгликдан, бу ерда φ — уринма билан Ox ўқи орасидаги бурчак, $\varphi = 0$ эканлиги келиб чиқади (100- расм).

1- теоремадан бевосита ушбу натижа чиқади: агар аргумент x нинг қаралаётган ҳамма қийматларида $f(x)$ функция ҳосилага эга бўлса, у ҳолда функция x нинг фақат ҳосилани нолга айлантирадиган қийматларидагина экстремумга (максимум ёки минимумга) эга бўлади. Бунга тескари хулоса тўғри эмас: ҳосилани нолга айлантирадиган ҳар қандай қийматда албатта максимум ёки минимум мавжуд бўлвермайди. Масалан, 100- расмда тасвирланган функциянинг ҳосиласи $x = x_0$ нуқтада нолга айланади (уринма горизонтал),

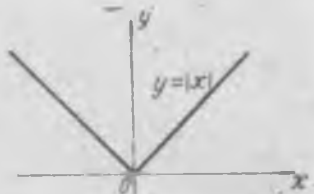
лекин бу нуқтада функция на максимумга ва на минимумга эга эмас. Худди шунингдек, $y = x^3$ функциянинг ҳосиласи (102- расм) $x = 0$ нуқтада нолга тенг:

$$(y')_{x=0} = (3x^2)_{x=0} = 0,$$

аммо бу нуқтада функция на максимумга ва на минимумга эга эмас. Ҳақиқатан, x



102- расм.



103- расм.

нуқта O нуқтага ҳар қанча яқин бўлса ҳам ҳамма вақт $x < 0$ бўлганда $x^3 < 0$ ва $x > 0$ бўлганда $x^3 > 0$ бўлади.

Биз биронта кесманинг ҳамма нуқталарида функция ҳосилага эга бўлган ҳолни текширдик. Ҳосила мавжуд бўлмаган нуқталарда аҳвол қандай бўлади? Бундай нуқталарда ё максимум ёки минимум бўлиши, аммо на униси ва на буниси бўлмаслиги мумкинлигини мисолларда кўрсатамиз.

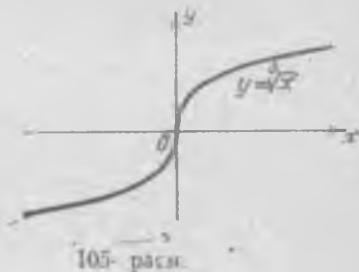
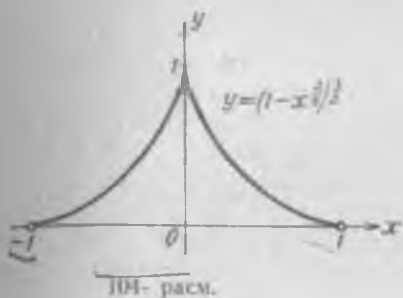
1- мисол. $y = |x|$ функция $x = 0$ нуқтада ҳосилага эга эмас (бу нуқтада эгри чизик уринмага эга эмас), аммо берилган функция шу нуқтада минимумга эга, чунки $x = 0$ бўлганда $y = 0$ ва нолдан бошқа ҳар қандай x нуқта учун эса $y > 0$ (103- расм).

2- мисол. $y = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ функция $x = 0$ нуқтада ҳосилага эга эмас,

чунки $y' = -(1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}$ ҳосила $x = 0$ нуқтада чексизликка айланади, аммо функция бу нуқтада максимумга эга: $f|0| = 1$, x ноль бўлмаган нуқтада $f(x) < 1$ бўлади (104- расм).

3- масал. $y = \sqrt[3]{x}$ функция $x = 0$ нуқтада ҳосилага эга эмас ($x \rightarrow 0$ да $y' \rightarrow \infty$). Бу нуқтада функция максимумга ҳам, минимумга ҳам эга эмас: $f(0) = 0$; $x < 0$ бўлганда $f(x) < 0$; $x > 0$ бўлганда $f(x) > 0$ бўлади (105- расм).

Шундай қилиб, функция фақат икки ҳолда: ҳосила мавжуд ва нолга тенг бўлган нуқталарда ёки ҳосила мавжуд бўлмаган нуқталарда экстремумга эга бўлиши мумкин.



Агар биронта нуқтада ҳосила мавжуд бўлмаса (аммо яқин нуқталарда мавжуд бўлса), шу нуқтада ҳосила ўз илшиини курамин.

Аргументнинг ҳосила нолга айланадиган ёки ўзиладиган қийматлари *критик нуқталар* ёки *критик қийматлар* дейилади.

Юқорида айтилганлардан ҳар қандай критик қийматда функция максимумга ёки минимумга эга бўлавермаслиги келиб чиқади. Лекин, агар функция биронта нуқтада максимумга ёки минимумга эришса, у нуқта шубҳасиз критик нуқта бўлади. Шунга кура функциянинг экстремумларини топиш учун бундай қилинади: ҳамма критик нуқталар топилади, сўнгра ҳар бир критик нуқтани айрим текшириб, у нуқтада функциянинг максимуми ёки минимуми бўлиши ёки на максимуми ва на минимуми бўлмаслиги аниқланади.

Функцияни критик нуқталарда текшириш ушбу теоремага асосланади.

2- теорема (экстремум мавжудлигининг етарли шартлари). $f(x)$ функция критик нуқта x_1 ни ўз ичига олган биронта интервалда узлуксиз ва шу интервалнинг ҳамма (балки x_1 нуқтанинг ўзидан бошқа) нуқталарида дифференциалланувчи бўлсин. Агар шу нуқтанинг чап томонидан ўнг томонига ўтишда ҳосиланинг ишораси плюсдан минусга ўзгарса, функция $x = x_1$ нуқтада максимумга эга бўлади. Агар чапдан x_1 нуқта орқали ўнгга ўтишда ҳоси-

ланинг ишораси минусдан плюсга узгарса, функция шу нуқтада минимумга эга бўлади.

Шундай қилиб,

$$\text{агар а) } \begin{cases} x < x_1 \text{ бўлганда } f'(x) > 0, \\ x > x_1 \text{ „ } f'(x) < 0 \end{cases}$$

бўлса, функция x_1 нуқтада максимумга эга;

$$\text{агар б) } \begin{cases} x < x_1 \text{ бўлганда } f'(x) < 0, \\ x > x_1 \text{ бўлганда } f'(x) > 0 \end{cases}$$

бўлса, функция x_1 нуқтада минимумга эга бўлади. Бунда шунини назарда тутиш лозимки, а) ва б) шартлар x нинг x_1 га етарли даражада яқин бўлган ҳамма қийматларида, яъни x_1 критик нуқтанинг етарли даражада кичик атрофининг ҳамма нуқталарида бажарилиши керак.

Исбот Аввало ҳосиланинг ишораси плюсдан минусга ўзгаради, яъни x нинг x_1 нуқтага етарли даражада яқин бўлган ҳамма қийматлари учун ушбу:

$$\begin{aligned} x < x_1 \text{ бўлганда } f'(x) > 0, \\ x > x_1 \text{ „ } f'(x) < 0 \end{aligned}$$

тенгсизликларга эгамиз деб фараз қиламиз.

$f(x) - f(x_1)$ айирмага Лагранж теоремасини қўлланиб, ушбу тенгликни ҳосил қиламиз:

$$f(x) - f(x_1) = f'(\xi)(x - x_1),$$

бу ерда ξ x ва x_1 орасидаги нуқта.

1) $x < x_1$ бўлсин; у ҳолда

$$\xi < x_1, \quad f'(\xi) > 0, \quad f'(\xi)(x - x_1) < 0$$

ва демак,

$$f(x) - f(x_1) < 0,$$

ёки

$$f(x) < f(x_1). \quad (1)$$

2) $x > x_1$ бўлсин, у ҳолда

$$\xi > x_1, \quad f'(\xi) < 0, \quad f'(\xi)(x - x_1) < 0$$

ва, демак,

$$f(x) - f(x_1) < 0,$$

ёки

$$f(x) < f(x_1). \quad (2)$$

(1) ва (2) тенгсизликлар x нинг x_1 га етарли даражада яқин ҳамма қийматларида $f(x)$ функциянинг қийматлари x_1 нуқта-

даги қийматидан кичик эканини кўрсатади. Демак, x_1 нуқтада $f(x)$ функция максимумга эгадир.

Теореманинг минимум учун етарли шарт ҳақидаги иккинчи ҳисси ҳам шу равишда исбот қилинади.

106- расм 2- теореманинг маъносини кўргазмали тасвирлайди.

$x = x_1$ нуқтада $f'(x_1) = 0$ ва x нинг x_1 нуқтага етарли даражада яқин ҳамма қийматлари учун ушбу тенгсизликлар

$$x < x_1 \text{ бўлганда } f'(x) > 0,$$

$$x > x_1 \text{ „ } f'(x) < 0$$

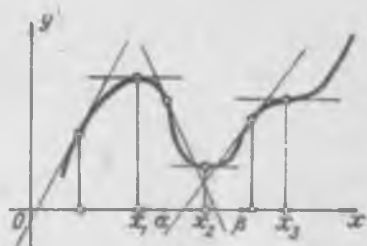
бажарилади деб фараз қилайлик.

Бу ҳолда $x < x_1$ бўлганда эгри чизиққа уринма Ox ўқ билан ўткир бурчак ҳосил қилади — функция ўсади; $x > x_1$ бўлганда эса, уринма Ox ўқ билан ўтмас бурчак ҳосил қилади — функция камаяди; $x = x_1$ бўлганда функция ўсишдан камайишга ўтади, яъни максимумга эга бўлади.

Агар x_2 нуқтада $f'(x_2) = 0$ ва x нинг x_2 нуқтага етарли даражада яқин бўлган ҳамма қийматлари учун ушбу тенгсизликлар

$$x < x_2 \text{ бўлганда } f'(x) < 0,$$

$$x > x_2 \text{ бўлганда } f'(x) > 0$$



106- расм.

бажарилса, бу ҳолда $x < x_2$ бўлганда эгри чизиққа уринма Ox ўқ билан ўтмас бурчак ҳосил қилади — функция камаяди; $x > x_2$ бўлганда эса эгри чизиққа уринма Ox ўқ билан ўткир бурчак ҳосил қилади — функция ўсади. $x = x_2$ бўлганда функция камайишдан ўсишга ўтади, яъни минимумга эга бўлади.

Агар x_3 нуқтада $f'(x_3) = 0$ ва x нинг x_3 га етарли даражада яқин ҳамма қийматлари учун ушбу тенгсизликлар.

$$x < x_3 \text{ бўлганда } f'(x) > 0,$$

$$x > x_3 \text{ „ } f'(x) > 0$$

бажарилса, бу ҳолда $x < x_3$ бўлганда ҳам, $x > x_3$ бўлганда ҳам функция ўсади. Демак, $x = x_3$ бўлганда функция максимумга ҳам, минимумга ҳам эга бўлмайди. Худди шундай ҳол $y = x^3$ функция учун $x = 0$ нуқтада рўй беради.

Ҳақиқатан ҳосила $y' = 3x^2$, демак,

$$(y')_{x=0} = 0,$$

$$(y')_{x<0} > 0,$$

$$(y')_{x>0} > 0,$$

бу эса $x = 0$ бўлганда функция на максимумга ва на минимумга эга эмас деган сўздир (юқоридаги 102- расмга қаралсин).

4- §. Дифференциалланувчи функцияни биринчи ҳосила ёрдами билан максимум ва минимумга текшириш схемаси

Ўтган параграфда айтилганларга асосан дифференциалланувчи $y = f(x)$ функцияни максимум ва минимумга текшириш қондасини қуйидагича ифодалаш мумкин:

1. Функциянинг биринчи ҳосиласини, яъни $f'(x)$ ни топамиз.

2. Аргумент x нинг критик қийматларини топамиз; бунинг учун:

а) биринчи ҳосилани нолга тенглаймиз ва ҳосил бўлган $f'(x) = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдиэларини топамиз;

б) x нинг $f'(x)$ ҳосила узилишга дучор бўладиган қийматларини топамиз.

3. Ҳосиланинг критик нуқтадан чапдаги ва ўнгдаги ишорасини текшираимиз. Иккита критик нуқта оралиғидаги интервалда ҳосиланинг ишораси ўзгармайди, шунга кўра, масалан, x_2 критик нуқтанинг (106- расм) чап ва ўнг томонида ҳосила ишорасини текшириш учун ҳосиланинг α ва β нуқталардаги ишорасини аниқлаш кифоя ($x_1 < \alpha < x_2$, $x_2 < \beta < x_3$, бу ерда x_1 ва x_3 энг яқин критик нуқталар).

4. Аргументнинг ҳар бир критик қиймати учун $f(x)$ функциянинг қийматини ҳисоблаймиз.

Шундай қилиб, мумкин бўлган ҳолларнинг қуйидаги схематик тасвирини ҳосил қиламиз:

Критик нуқта x_1 даи ўтишда $f'(x)$ ҳосиланинг ишораси:			Критик нуқтанинг характери
$x < x_1$	$x = x_1$	$x > x_1$	
+	$f'(x_1) = 0$ ёки узилувчи	—	Максимум нуқтаси
—	$f'(x_1) = 0$ ёки узилувчи	+	Минимум нуқтаси
+	$f'(x_1) = 0$ ёки узилувчи	+	Максимум ҳам, минимум ҳам йўқ (функция ўсади)
—	$f'(x_1) = 0$ ёки узилувчи	—	Максимум ҳам, минимум ҳам йўқ (функция камаяди)

1-мисол. Ушбу

$$y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$$

Функция максимум ва минимумга текширилсин.

Е ч и ш. 1) Биринчи ҳосилани топамиз:

$$y' = x^2 - 4x + 3.$$

2) $x^2 - 4x + 3 = 0$ ҳосиланинг ҳақиқий илдизларини топамиз.
Демак,

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$

Ҳосила ҳамма нуқталарда узлуксиз. Демак, бошқа критик нуқталар йўқ.

3) Критик қийматларни текшираемиз ва текшириш натижаларини 107-расмда кўрсатамиз.

Биринчи критик нуқта $x_1 = 1$ ни текшираемиз. $y' = (x - 1)(x - 3)$, шунга кўра

$$x < 1 \text{ бўлганда } y' = (-) \cdot (-) > 0;$$

$$x > 1 \text{ бўлганда } y' = (+) \cdot (-) < 0.$$

Демак, $x_1 = 1$ қийматдан (чапдан ўнгга) ўтишда ҳосиланинг ишораси плюстан минусга ўзгаради. Демак, $x = 1$ нуқтада функция максимумга эга, унинг қиймати

$$(y)_{x=1} = \frac{7}{3}.$$

Энди иккинчи критик нуқта $x_2 = 3$ ни текшираемиз:

$$x < 3 \text{ бўлганда } y' = (+) \cdot (-) < 0;$$

$$x > 3 \text{ бўлганда } y' = (+) \cdot (+) > 0.$$

Демак, $x_2 = 3$ нуқтадан ўтишда ҳосиланинг ишораси минусдан плюсга ўзгаради. Шунга кўра $x_2 = 3$ нуқтада функция минимумга эга, унинг қиймати

$$(y)_{x=3} = 1.$$

Ўтказилган текширишга асосан функциянинг графигини чизамиз (107-расм).

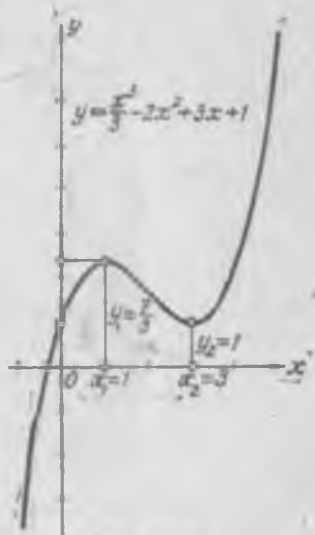
2-мисол. Ушбу функция

$$y = (x - 1)\sqrt[3]{x^3}$$

максимум ва минимумга текширилсин.

Е ч и ш. 1) Биринчи ҳосилани топамиз:

$$y' = \sqrt[3]{x^3} + \frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

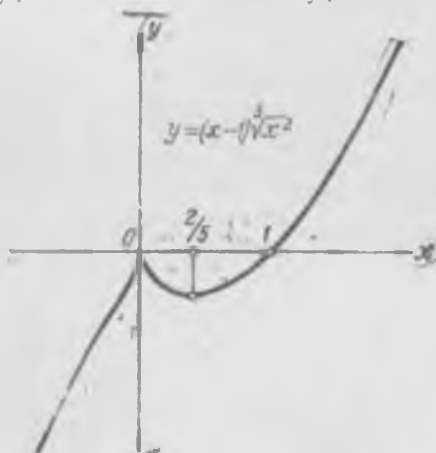


107- расм.

2) Аргументнинг критик қийматларини топамиз: а) ҳосила нолга айланадиган нуқталарни топамиз:

$$y' = \frac{5x - 2}{3\sqrt{x}} = 0, \quad x_1 = \frac{2}{5};$$

б) ҳосиланинг узилиш (биэнинг мисолимизда чексизликка айланадиган) нуқтасини топамиз. Бундай нуқта



108- расм.

$$x_2 = 0$$

нуқтадир. ($x_2 = 0$ нуқтада функциянинг ўзи аниқданган ва узлуksиз эканини қайд қилиб ўтатмиз.)

Бошқа критик нуқталар йўқ.

3) Топилган критик нуқталар характерини текшираимиз. $x_1 = \frac{2}{5}$ нуқтани текшираимиз. Бунда

$$(y')_{x < \frac{2}{5}} < 0, \quad (y')_{x > \frac{2}{5}} > 0$$

эканлигини эътиборга олиб, функция $x = \frac{2}{5}$ нуқтада минимумга эга деган хулосага келамиз. Минимум нуқтада функциянинг қиймати:

$$(y)_{x = \frac{2}{5}} = \left(\frac{2}{5} - 1\right)^2 \sqrt[3]{\frac{4}{25}} = -\frac{8}{5} \sqrt[3]{\frac{4}{25}}.$$

Иккинчи критик нуқта $x = 0$ ни текшираимиз:

$$(y)_{x < 0} > 0, \quad (y')_{x > 0} < 0$$

эканини кўриб, $x = 0$ нуқтада функция максимумга эга деган хулосага келамиз. Бу максимум нуқтада функциянинг қиймати

$$(y)_{x = 0} = 0$$

бўлади. Текширилаётган функциянинг графиги 108- расмда тасвирланган.

5- §. Функцияни максимум ва минимумга иккинчи ҳосила ёрдамида текшириш

$y = f(x)$ функциянинг ҳосиласи $x = x_1$ нуқтада нолга айланади, яъни $f'(x_1) = 0$ деб фараз қиламиз. Бундан ташқари, иккинчи ҳосила $f''(x)$ мавжуд ва x_1 нуқтанинг бирор атрофида узлуksиз бўлсин. У ҳолда ушбу теорема туғри бўлади.

Теорема. $f'(x_1) = 0$ бўлсин; у вақтда $f''(x_1) < 0$ бўлса, функция $x = x_1$ нуқтада максимумга эга, $f''(x_1) > 0$ бўлса, функция $x = x_1$ нуқтада минимумга эга бўлади.

Исбот. Аввал теореманинг биринчи қисмини исботлаймиз.

$$f'(x_1) = 0 \text{ ва } f''(x_1) < 0$$

булсин.

Шартга кўра $x = x_1$ нуқтанинг бирор атрофида $f''(x)$ узлуксиз булгани учун, $x = x_1$ нуқтани ўз ичига олган бирор кичик кесма топиш мумкинки, унинг ҳамма нуқталарида иккинчи ҳосила $f''(x)$ маъфий бўлади.

$f''(x)$ га биринчи ҳосиладан биринчи ҳосила $f''(x) = (f'(x))'$ деб қараш мумкин. Шунга кўра $(f'(x))' < 0$ шартида $x = x_1$ нуқтани ўз ичига олган кесмада $f'(x)$ нинг камайиши маълум бўлади (V боб 2- §). Аммо $f'(x_1) = 0$, демак, шу кесмада $x < x_1$ бўлганда $f'(x) > 0$ бўлади, $x > x_1$ бўлганда эса $f'(x) < 0$ бўлади, яъни $f'(x)$ ҳосиланинг ишораси $x = x_1$ нуқтадан утишда плюстан минусга ўзгаради; бу эса x_1 нуқтада $f(x)$ функция максимумга эга деган суздир. Шу билан теореманинг биринчи қисми исботланди.

Теореманинг иккинчи қисми ҳам шу тариқа исботланади, яъни: агар $f''(x) > 0$ бўлса, $x = x_1$ нуқтани ўз ичига олган биронта кесманинг ҳамма нуқталарида $f''(x) > 0$ бўлади, лекин у ҳолда шу кесмада $f''(x) = (f'(x))' > 0$ ва, демак, $f'(x)$ ўсади. $f'(x_1) = 0$ булгани учун x_1 нуқтадан утишда $f'(x)$ ҳосиланинг ишораси минусдан плюсга ўзгаради, яъни $x = x_1$ нуқтада $f(x)$ функция минимумга эга бўлади.

Агар критик нуқтада $f''(x_1) = 0$ бўлса, $x = x_1$ нуқтада ё максимум, ёки минимум бўлиши, ёки на максимум ва на минимум бўлмаслиги мумкин. Бу ҳолда текширишни биринчи усул билан олиб бориш керак (V боб 4- § га қаралсин).

Функцияни иккинчи ҳосила ёрдамида экстремумга текшириш схемасини ушбу жадвалда тасвирлаш мумкин:

$f'(x_1)$	$f''(x_1)$	Критик нуқтанинг характери
0	—	Максимум нуқтаси
0	+	Минимум нуқтаси
0	0	Номаълум

1- мисол. Ушбу

$$y = \sin x + \cos 2x$$

Функциянинг максимум ва минимуми бор-йўқлиги текширилсин.

Ечиш. Берилган функция даври 2π булган даврий функция булгани учун текширишни $(0, 2\pi)$ кесмада ўтказиш kifой.

1) Биринчи ҳосилани топамиз:

$$y' = 2 \cos x - 2 \sin 2x = 2 (\cos x - 2 \sin x \cos x) = \\ = 2 \cos x (1 - 2 \sin x).$$

2) Аргументнинг критик қийматларини топамиз:

$$2 \cos x (1 - 2 \sin x) = 0,$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6}, \quad x_2 = \frac{\pi}{2}, \quad x_3 = \frac{5\pi}{6}, \quad x_4 = \frac{3\pi}{2}.$$

3) Иккинчи ҳосилани топамиз:

$$y'' = -2 \sin x - 4 \cos 2x.$$

4) Ҳар бир критик нуқтанинг характерини текшираимиз:

$$(y'')_{x=\frac{\pi}{6}} = -2 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} = -3 < 0.$$

Демак, $x_1 = \frac{\pi}{6}$ — максимум нуқта; бу нуқтада функциянинг қиймати;

$$(y)_{x=\frac{\pi}{6}} = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Сўнгра

$$(y'')_{x=\frac{\pi}{2}} = -2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 2 > 0.$$

Демак, $x_2 = \frac{\pi}{2}$ нуқтада минимумга эгамиз:

$$(y)_{x=\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot 1 - 1 = 1.$$

$x_3 = \frac{5\pi}{6}$ нуқтани текшираимиз:

$$(y'')_{x=\frac{5\pi}{6}} = -2 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} = -3 < 0.$$

Демак, $x_3 = \frac{5\pi}{6}$ нуқтада функция максимумга эга:

$$(y)_{x=\frac{5\pi}{6}} = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Нидоят,

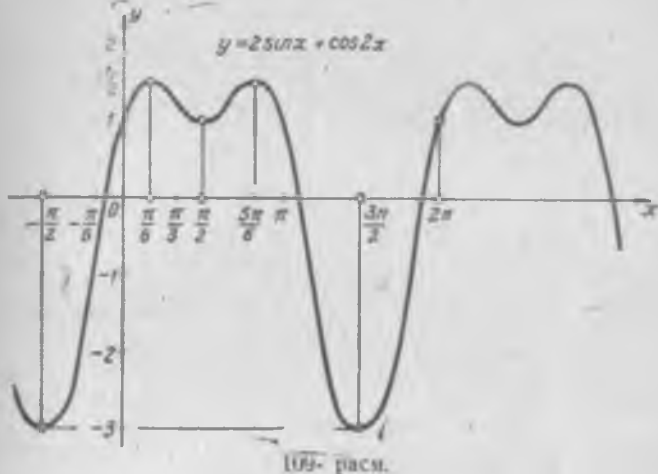
$$(y'')_{x=\frac{3\pi}{2}} = -2(-1) - 4(-1) = 6 > 0.$$

Демак, $x_4 = \frac{3\pi}{2}$ нуқтада функция минимумга эга:

$$(y)_{x=\frac{3\pi}{2}} = 2(-1) - 1 = -3.$$

Текширилган функциянинг графиги 109- расмда тасвирланган.

Биронта $x = x_1$ нуқтада $f'(x_1) = 0$ ва $f''(x_1) = 0$ бўлса, бу нуқтада $f(x)$ функция ё максимумга, ё минимумга эга бўлиши, ё бўлмаса на максимумга ва на минимумга эга бўлмаслигини қуйидаги мисолларда кўрсатамиз.



2 - мисол. Ушбу

$$y = 1 - x^4$$

функция максимум ва минимумга текширилсин.

Е чи ш. 1) Критик нуқталарни топамиз:

$$y' = -4x^3, \quad -4x^3 = 0, \quad x = 0.$$

2) Иккинчи ҳосиланинг $x = 0$ нуқтадаги ишорасини аниқлайжиз:

$$y'' = -12x^2, \quad (y'')_{x=0} = 0.$$

Демак, бу мисолда иккинчи ҳосила ишораси ёрдами билан критик нуқтанинг характерини аниқлаб бўлмайди.

3) Критик нуқта характерини биринчи усулда текшираамиз (V боб 4- § га қаралсин):

$$(y')_{x < 0} > 0, \quad (y')_{x > 0} < 0.$$

Демак, $x = 0$ нуқтада функция максимумга эга, унинг қиймати:

$$(y)_{x=0} = 1.$$

Текширилган функциянинг графиги 110- расмда тасвирланган.

3- мисол. Ушбу

$$y = x^6$$

функция максимум ва минимумга текширилсин.

Е чи ш. Иккинчи усул билан текшираамиз:

$$1) y' = 6x^5, \quad y' = 6x^5 = 0, \quad x = 0; \quad 2) y'' = 30x^4, \quad (y'')_{x=0} = 0.$$

Шундай қилиб, текширилаётган функциянинг $\left[-3; \frac{3}{2}\right]$ кесмадаги энг катта қиймати

$$(y)_{x=-1} = 5,$$

энг кичик қиймати эса

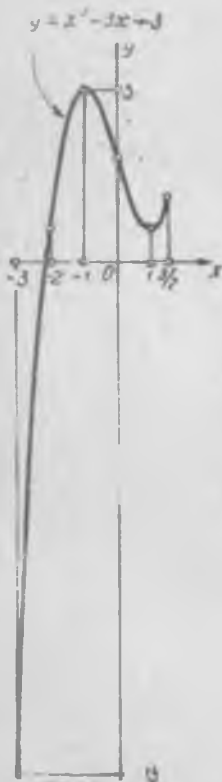
$$(y)_{x=-3} = -15.$$

Текширилган функциянинг графиги 113- расида тасвирланган.

7- §. Функциялар максимуми ва минимуми назариясининг масалалар ечишга татбиқи

Максимум ва минимум назарияси ёрдами билан геометрия, механика ва ҳоказоларга доир кўпгина масалалар ечилади. Шундай масалалардан баъзиларини кўрамир.

1 - м а с а л а. Горизонтга φ бурчак билан қиялатиб қўйилган тупдан v_0 бошлангич тезлик билан отилган ўқнинг бушлиқда учиш узоқлиги $R = OA$ (114- расм)



$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}$$

формула билан аниқланади (g — оғирлик кучининг тезланиши). Берилган v_0 бошлангич тезликда ўқнинг учиш узоқлиги R энг катта бўлиши учун φ бурчак қандай бўлиши аниқлансин.

Е ч и ш. R миқдор ўзгарувчи φ бурчакнинг функцияси. Шу функцияни $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ кесмада максимумга текширамир:

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{g}, \quad \frac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{g} = 0,$$

критик қиймат $\varphi = \frac{\pi}{4}$;

$$\frac{d^2R}{d\varphi^2} = -\frac{4v_0^2 \sin 2\varphi}{g}, \quad \left(\frac{d^2R}{d\varphi^2}\right)_{\varphi = \frac{\pi}{4}} = -\frac{4v_0^2}{g} < 0.$$

Демак, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ қийматда R функция

$$(R)_{\varphi = \frac{\pi}{4}} = \frac{v_0^2}{g}$$

максимумга эга.

R функция $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ кесманинг учларида ушбу қийматларга эга бўлади:

$$(R)_{\varphi=0} = 0, \quad (R)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0.$$

113- расм.

Шундай қилиб, топилган максимум R функциянинг энг катта қиймати-

2-масала. Берилган v ҳажмидаги цилиндрнинг тўла сирти S энг кичик бўлиши учун цилиндрнинг ўлчовлари қандай бўлиши керак?

Ечмш. Цилиндр асосининг радиусини r билан, цилиндрнинг баландлигини h билан белгилаб, тўла сирти учун ушбу ифодага эга бўламиз:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Цилиндрнинг ҳажми v маълум, шунинг учун r берилганда h нинг ифодаси

$$v = \pi r^2 h$$

формула билан аниқланади, бундан

$$h = \frac{v}{\pi r^2}.$$

h нинг бу ифодасини S нинг формуласига қўямиз:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{v}{\pi r^2}.$$

ёки

$$S = 2\left(\pi r^2 + \frac{v}{r}\right).$$



114-раск.

Бу ерда v — маълум сон. Шундай қилиб, S ни фақат биргина эркин ўзгарувчи r нинг функцияси каби ифодаладик.

Бу функциянинг $0 < r < \infty$ оралиқдаги энг кичик қийматини топамиз:

$$\frac{dS}{dr} = 2\left(2\pi r - \frac{v}{r^2}\right),$$

$$2\pi r - \frac{v}{r^2} = 0, \quad r_1 = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}},$$

$$\left(\frac{d^2S}{dr^2}\right)_{r=r_1} = 2\left(2\pi + \frac{2v}{r^3}\right)_{r=r_1} > 0.$$

Демак, $r = r_1$ нуқтада S функция минимумга эга. Айни вақтда $\lim_{r \rightarrow 0} S = \infty$, $\lim_{r \rightarrow \infty} S = \infty$, яъни r нолга ёки чексизликка яқинлашганда S чексиз катталашадди. Демак, $r = r_1$ нуқтада S функция энг кичик қийматга эга бўлади.

Лекин $r = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$ бўлса, у ҳолда

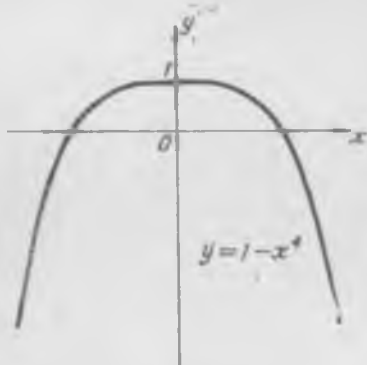
$$h = \frac{v}{\pi r^2} = 2 \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}.$$

Шундай қилиб, маълум v ҳажмидаги цилиндрнинг тўла сирти S энг кичик бўлиши учун, цилиндрнинг баландлиги диаметрига тенг бўлиши керак.

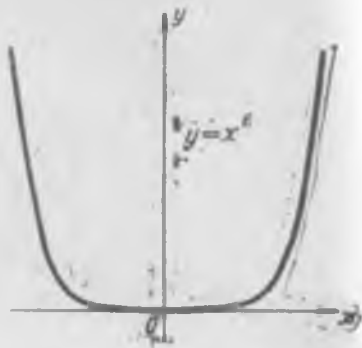
Демак, иккинчи усул жавоб бермайди. Биринчи усул билан текшираемиз:

$$(y')_x < 0 < 0, \quad (y')_x > 0 > 0.$$

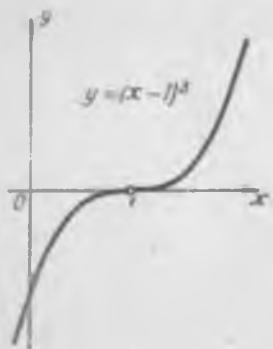
Демак, $x = 0$ бўлганда функция минимумга эга (110- расм).



110- расм.



111- расм.



112- расм.

4- мисол. Ушбу

$$y = (x - 1)^3$$

функция максимум ва минимумга текширилсин.
Ечиш. Иккинчи усул:

$$y' = 3(x - 1)^2, \quad 3(x - 1)^2 = 0, \quad x = 1;$$

$$y'' = 6(x - 1), \quad (y'')_{x=1} = 0;$$

шундай қилиб, иккинчи усул жавоб бермайди.
Биринчи усул билан топамиз:

$$(y')_{x < 1} > 0, \quad (y')_{x > 1} \geq 0.$$

Демак, $x = 1$ нуқтада функция на максимум-
га ва на минимумга эга эмас (112- расм).

6- §. Функциянинг кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматлари

$y = f(x)$ функция $[a, b]$ кесманинг ҳамма нуқталарида уз-
луксиз деб фараз қилайлик. Бу ҳолда шу кесмада функция
энг катта қийматга эга бўлади (II боб 10- § га қаранг). $f(x)$
функциянинг берилган кесмадаги критик нуқталарининг сони
чекли деб фараз қиламиз. Агар энг катта қиймат $[a, b]$ кесма
иچида бўлса, у қиймат (агар бир неча максимум бўлса) мак-
симумлардан биттаси, яъни энг катта максимум бўлади. Лекин

Энг катта қиймат кесма четларининг бирида бўлиши ҳам мумкин.

Шундай қилиб, функция $[a, b]$ кесмада ўзининг энг катта қийматига кесманинг ё бош нуқтасида, ё охириги нуқтасида, ё бўлмаса функция учун максимум бўлган ички нуқтасида етиши мумкин.

Функциянинг энг кичик қиймати ҳақида ҳам шундай дейиш мумкин: функция ўзининг энг кичик қийматига кесманинг ё бошида, ё охирида, ё бўлмаса функция учун минимум нуқта бўлган ички нуқтада етиши мумкин.

Айтилганлардан ушбу қоида келиб чиқади: агар $[a, b]$ кесмада узлуксиз функциянинг шу кесмада энг катта қийматини топиш талаб этилса, ушбу амалларни бажариш керак:

1) Функциянинг кесмадаги ҳамма максимум ва минимумлари топилади;

2) кесманинг бош ва охириги нуқталарида функциянинг қийматлари аниқланади, яъни $f(a)$ ва $f(b)$ ҳисобланади;

3) Функциянинг юқорида топилган ҳамма қийматлари орасидан энг каттаси танлаб олинади; ана шу қиймат функциянинг берилган кесмадаги энг катта қиймати бўлади.

Функциянинг берилган кесмадаги энг кичик қийматини топишда ҳам шундай ишлар бажарилади.

Мисол. Ушбу $y = x^3 - 3x + 3$ функциянинг $\left[-3; \frac{3}{2}\right]$ кесмада энг катта ва энг кичик қийматлари аниқлансин.

Ечиш. 1) Функциянинг $\left[-3; \frac{3}{2}\right]$ кесмадаги максимум ва минимумларини топамиз:

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 - 3, & 3x^2 - 3 &= 0, & x_1 &= 1, & x_2 &= -1, \\ y'' &= 6x, & \text{у ҳолда} & & (y'')_{x=1} &= 6 > 0. \end{aligned}$$

Демак, $x = 1$ нуқта минимум нуқта экан:

$$(y)_{x=1} = 1$$

Иккинчи критик нуқтани текширамиз:

$$(y'')_{x=-1} = -6 < 0.$$

Демак, $x = -1$ нуқта максимум нуқта экан:

$$(y)_{x=-1} = 5.$$

2) Кесманинг бош ва охириги нуқталарида функциянинг қийматини аниқлаймиз:

$$(y)_{x=-3} = \frac{15}{2}, \quad (y)_{x=\frac{3}{2}} = -15.$$

8- §. Тейлор формуласи ёрдами билан функцияни максимум ва минимумга текшириш

Агар биронта $x = a$ нуқтада $f'(a) = 0$ ва $f''(a) = 0$ бўлса, уша нуқтада ё максимум, ё минимум бўлиши, ёки униси ҳам, буниси ҳам бўлмаслиги мумкинлиги V бобнинг 5- § да қўрилган эди. Бу ҳолда масалани ечиш учун текширишни биринчи усулда олиб бориш, яъни $x = a$ нуқтадан чапда ва ўнгда биринчи ҳосиланинг ишорасини текшириш йўли билан олиб бориш кераклиги кўрсатилган эди.

Энди бу ҳолда текширишни IV бобнинг 6- § да чиқарилган Тейлор формуласи ёрдами билан ўтказиш мумкинлигини кўрсатамиз.

Умумийлик учун $f(x)$ функциянинг фақат $f''(x)$ гина эмас, балки n -тартибгача (n -тартибни ҳам қўшиб) ҳамма ҳосилалари $x = a$ нуқтада нолга айланади деб фараз қиламиз:

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^n(a) = 0, \quad (1)$$

лекин

$$f^{(n+1)}(a) \neq 0.$$

Сўнгра $f(x)$ функция $x = a$ нуқта артофида $(n+1)$ -тартибгача $[(n+1)$ - тартибни ҳам қўшиб] узлуксиз ҳосилаларга эга деб фараз қиламиз.

$f(x)$ функция учун (1) тенгликни эътиборга олган ҳолда Тейлор формуласини ёзамиз:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad (2)$$

бу ерда ξ a билан x орасидаги сон.

$f^{(n+1)}(x)$ функция a нуқта атрофида узлуксиз ва $f^{(n+1)}(a) \neq 0$ бўлгани учун шундай кичик мусбат h сон топиш мумкинки, x нинг $|x-a| < h$ тенгсизликни қаноатлантирадиган ҳар қандай қиймати учун $f^{(n+1)}(x) \neq 0$ бўлади. Бунда, агар $f^{(n+1)}(a) > 0$ бўлса, $(a-h, a+h)$ интервалнинг ҳамма нуқталарида $f^{(n+1)}(x) > 0$ бўлади; агар $f^{(n+1)}(a) < 0$ бўлса, шу интервалнинг ҳамма нуқталарида $f^{(n+1)}(x) < 0$ бўлади.

(2) формулани ушбу шаклда ёзамиз:

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad (2')$$

ва турли хусусий ҳолларни қараб чиқамиз.

Биринчи ҳол. n — тоқ сон.

а) $f^{(n+1)}(a) < 0$ бўлсин. Бу ҳолда ҳамма нуқталарида $(n+1)$ -ҳосила манфий бўладиган $(a-h, a+h)$ интервал топилади.

Агар x шу интервалнинг нуқтаси бўлса, ξ ҳам $a - h$ билан $a + h$ орасида бўлади ва, демак, $f^{(n+1)}(\xi) < 0$ бўлади. $n + 1$ жуфт сон, шунга кўра, $x \neq a$ да $(x - a)^{n+1} > 0$, шунинг учун $(2')$ формуланинг ўнг томони манфий бўлади.

Демак, $x \neq a$ да $(a - h, a + h)$ интервалнинг ҳамма нуқталарида

$$f(x) - f(a) < 0,$$

бу эса $x = a$ нуқтада функция максимумга эга демакдир.

б) $f^{(n+1)}(a) > 0$ бўлсин. Бу ҳолда h нинг етарлича кичик қийматида $(a - h, a + h)$ интервалнинг ҳамма x нуқталарида $f^{(n+1)}(\xi) > 0$. Демак, $(2')$ формуланинг ўнг томони мусбат бўлади, яъни $x \neq a$ да ўша интервалнинг ҳамма нуқталарида

$$f(x) - f(a) > 0$$

бўлади, бу эса $x = a$ нуқтада функция минимумга эга деган сўздир.

Иккинчи ҳол. n — жуфт сон.

Бу ҳолда $n + 1$ тоқ сон ва $(x - a)^{n+1}$ миқдор $x < a$ ва $x > a$ бўлишига қараб ҳар хил ишорага эга бўлади.

Агар h абсолют миқдор жнҳатдан етарли даражада кичик бўлса, $(a - h, a + h)$ интервалнинг ҳамма нуқталарида $(n + 1)$ ҳосиланинг ишораси унинг $x = a$ нуқтадаги ишораси каби бўлади. Демак, $f(x) - f(a)$ айирма $x < a$ ва $x > a$ бўлишига қараб ҳар хил ишорага эга бўлади. Бу эса $x = a$ нуқтада максимум ҳам, минимум ҳам йўқлигини кўрсатади.

Агар n — жуфт сон бўлганда $f^{(n+1)}(a) > 0$ бўлса, бу ҳолда $x < a$ учун $f(x) < f(a)$ бўлади, $x > a$ учун эса $f(x) > f(a)$ бўлади.

Агар n — жуфт сон бўлганда $f^{(n+1)}(a) < 0$ бўлса, бу ҳолда $x < a$ учун $f(x) > f(a)$ бўлади, $x > a$ учун эса $f(x) < f(a)$ бўлади.

Эришилган натижаларни бундай ифодалаш мумкин.

Агар $x = a$ бўлганда

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^n(a) = 0$$

бўлса ва нолга айланмайдиган биринчи ҳосил $f^{(n+1)}(a)$ жуфт тартибли ҳосила бўлиб, a нуқтада

$f^{(n+1)}(a) < 0$ бўлса, $f(x)$ максимумга эга;

$f^{(n+1)}(a) > 0$ бўлса, $f(x)$ минимумга эга.

Агар нолга айланмайдиган биринчи ҳосила $f^{(n+1)}(a)$ тоқ тартибли бўлса, a нуқтада функция максимумга ҳам, минимумга ҳам эга бўлмайди. Бунда

$$f^{(n+1)}(a) > 0 \text{ бўлса, } f(x) \text{ ўсади;}$$

$$f^{(n+1)}(a) < 0 \text{ бўлса, } f(x) \text{ камаяди.}$$

Мисол. Ушбу функция

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$$

максимум ва минимумга текширилсин.

Ечиш. Функциянинг критик қийматларини топамиз:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 = 4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1).$$

Мана бу

$$4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 0$$

теңгламадан ягона критик нуқтани топамиз:

$$x = 1$$

(чунки теңглама биттагина ҳақиқий илдиэга эга).

$x = 1$ критик нуқтанинг характерини текшираимиз:

$$x = 1 \text{ бўлганда } f''(x) = 12x^2 - 24x + 12 = 0,$$

$$x = 1 \quad f'''(x) = 24x - 24 = 0,$$

$$\text{ҳар қандай } x \text{ учун } f^{IV}(x) = 24 > 0.$$

Демак, $x = 1$ нуқтада $f(x)$ функция минимумга эгадир.

9- §. Эгри чизиқнинг қавариқлиги ва ботиқлиги. Бурилиш нуқта

Бир қийматли дифференциалланувчи $f(x)$ функциянинг теңликдаги графиги бўлган $y = f(x)$ эгри чизиқни қараймиз.

1- таъриф. Агар (a, b) интервалда эгри чизиқнинг ҳамма нуқталари унинг ҳар қандай уринмасидан пастда бўлса, шу интервалда эгри чизиқнинг қавариқлиги юқорига қараган деймиз.

Агар (b, c) интервалда эгри чизиқнинг ҳамма нуқталари унинг ҳар қандай уринмасидан юқорида бўлса, шу интервалда эгри чизиқнинг қавариқлиги пастга йуналган деймиз.

Қавариқлиги юқорига қараган эгри чизиқни қавариқ эгри чизиқ, қавариқлиги пастга қараган эгри чизиқни ботиқ эгри чизиқ деб атаймиз.

115- расмда (a, b) интервалда қавариқ ва (b, c) интервалда ботиқ эгри чизиқ курсатилган.

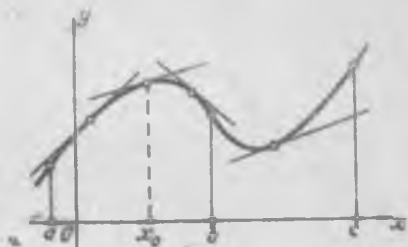
Эгри чизиқ қавариқлигининг йуналиши эгри чизиқ шаклининг муҳим характеристикасидир. Бу параграф $y = f(x)$ функ-

цияни текшириб, графигининг турли интервалларда қавариқлигининг йуналиши ҳақида фикр ҳосил бўладиган белгилар топишга бағишланган.

Ушбу теоремани исботлаймиз.

1-теорема. Агар (a, b) интервалнинг ҳамма нуқталарида $f(x)$ функциянинг иккинчи ҳосиласи манфий, яъни $f''(x) < 0$ бўлса, шу интервалда $y = f(x)$ эгри чизикнинг қавариқлиги юқорига қараган (эгри чизик қавариқ) бўлади.

Исбот. (a, b) интервалда ихтиёрий $x = x_0$ нуқтани оламиз (115-расм) ва эгри чизикқа унинг абсциссаси $x = x_0$ бўлган нуқтасида уринма утказамиз. Агар эгри чизикнинг (a, b) интервалдаги ҳамма нуқталари шу уринмадан пастда ётганини, яъни $y = f(x)$ эгри чизик исталган нуқтасининг ординатаси уринманинг ўша x қийматдаги ординатаси бўлган y дан кичиклигини аниқласак, теорема исботланган бўлади.



115-расм.

Эгри чизик тенгламаси ушбу кўринишга эга:

$$y = f(x). \quad (1)$$

Эгри чизикқа унинг $x = x_0$ нуқтасидаги уринма тенгламаси ушбу кўринишга эга:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

ёки

$$\bar{y} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (2)$$

(1) ва (2) тенгламалардан абсцисса x нинг бир қийматига мос эгри чизик ва уринма нуқталари ординаталарининг айырмаси

$$y - \bar{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

эканлиги келиб чиқади.

$f(x) - f(x_0)$ айирмага Лагранж теоремасини қўллаиб, ушбу тенгликни топамиз:

$$y - \bar{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

(с нуқта x_0 билан x орасида ётади) ёки

$$y - \bar{y} = [f'(c) - f'(x_0)](x - x_0).$$

$f'(c) - f'(x_0)$ айирмага яна Лагранж теоремасини қўлланиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$y - \bar{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0) \quad (3)$$

(c_1 нукта x_0 билан c орасида ётади).

Аввало $x > x_0$ бўлган ҳолни қараймиз. Бу ҳолда $x_0 < c_1 < c < x$; бунда

$$x - x_0 > 0, \quad c - x_0 > 0$$

ва ундан ташқари, шартга кўра

$$f''(c_1) < 0,$$

шунинг учун (3) тенгликдан $y - \bar{y} < 0$ эканлиги келиб чиқади.

Энди $x < x_0$ бўлган ҳолни қараймиз. Бу ҳолда $x < c < c_1 < x_0$ ва $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$ бўлади ва шартга кўра $f''(c_1) < 0$ бўлгани учун (3) тенгликдан

$$y - \bar{y} < 0$$

эканлиги келиб чиқади.

Шундай қилиб, (a, b) интервалда x ва x_0 нинг ҳар қандай қийматларида эгри чизиқнинг исталган нуқтаси шу эгри чизиққа ўтказилган уринма нуқтасидан пастда ётганлигини исботладик. Бу эса эгри чизиқ қавариқ деган сўздир. Теорема исботланди.

Ушбу теорема ҳам шу тарзда исботланади.

1'- теорема. Агар (b, c) интервалнинг ҳамма нуқталарида $f(x)$ функциянинг иккинчи ҳосиласи мусбат, яъни $f''(x) > 0$ бўлса, шу интервалда $y = f(x)$ эгри чизиқнинг қавариқлиги пастга йуналган (ботиқ) бўлади.

Изоҳ. 1 ва 1'- теоремаларнинг мазмунини геометрик тасвирлаш мумкин. (a, b) интервалда қавариқ бўлган $y = f(x)$ эгри чизиқни қарайлик (116- расм). $f'(x)$ ҳосила эгри чизиққа унинг абсциссаси x бўлган нуқтасидаги уринманинг Ox ўққа оғиш бурчаги α нинг тангенсига тенг, яъни $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$. Шунинг учун $f''(x) = [\operatorname{tg} \alpha]'_x$. Агар (a, b) интервалда ҳамма x учун $f''(x) < 0$ бўлса, бунинг маъноси x нинг ўсиши билан $\operatorname{tg} \alpha$ камаяди демакдир. x нинг ўсиши билан $\operatorname{tg} \alpha$ камайганда тегишли эгри чизиқнинг қавариқ бўлиши шаклда равшан кўриниб турибди. 1- теореманинг ўзи шу фактнинг аналитик исботидир.

1'- теорема ҳам шунинг сингари геометрик усулда тасвирланади (117- расм).

1- мисол. Ушбу

$$y = 2 - x^2$$

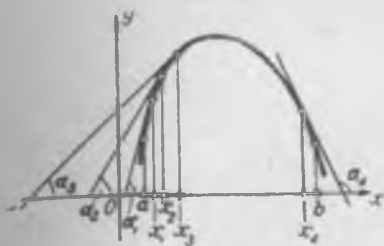
тенглама билан берилган эгри чизиқнинг қавариқлик ва ботиқлик интерваллари аниқлансин.

Ечиш. Иккинчи ҳосила x нинг ҳамма қийматлари учун манфий, яъни:

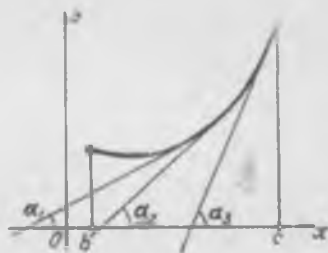
$$y'' = -2 < 0.$$

Демак, ҳамма ерда эгри чизиқнинг қавариқлиги юқорига қараган (118- расм).
2- мисол. Эгри чизиқ ушбу тенглама билан берилган:

$$y = e^x.$$



116- расм.

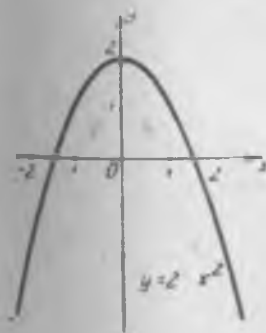


117- расм.

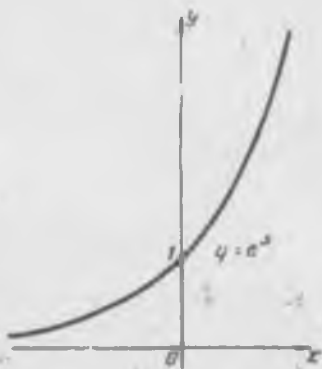
Ечиш. Иккинчи ҳосила x нинг ҳамма қиймати учун мусбат:

$$y'' = e^x > 0,$$

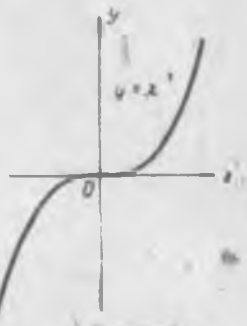
демак, эгри чизиқ ҳамма ерда ботиқ, яъни қавариқлиги ластга қараган (119- расм).



118- расм.



119- расм.



120-

3- мисол. Эгри чизиқ ушбу тенглама билан аниқланган:

$$y = x^3.$$

Иккинчи ҳосила

$$y'' = 6x,$$

шунинг учун, $x < 0$ бўлганда $y'' < 0$ ва $x > 0$ бўлганда $y'' > 0$. Демак, $x < 0$ бўлганда эгри чизиқнинг қавариқлиги юқорига қараган, $x > 0$ бўлганда эса қавариқлиги пастга қараган (120- расм).

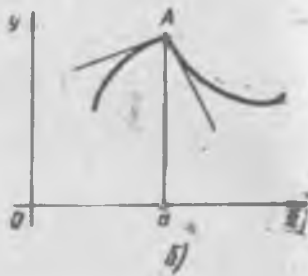
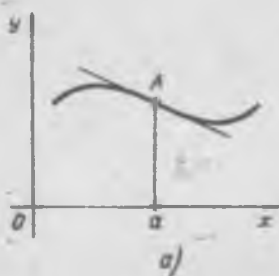
2- таъриф. Узлуксиз эгри чизиқнинг қавариқ қисмининг ботиқ қисмидан ажратган нуқта эгри чизиқнинг бурилиш нуқтаси деб аталади.

120, 121 ва 122- расмлардаги O , A ва B нуқталар бурилиш нуқталардир.

Равшанки, бурилиш нуқтадаги уринма эгри чизиқни қесиб ўтади, чунки бу нуқтанинг бир томонида эгри чизиқ уринма остида бўлса, иккинчи томонда уринма устида бўлади.

Энди берилган нуқта эгри чизиқнинг бурилиш нуқтаси бўлиши учун етарли шартларни аниқлаймиз.

2- теорема. Эгри чизиқ $y = f(x)$ тенглама билан аниқланган бўлсин. Агар $f''(a) = 0$ бўлса ёки $f''(a)$ мавжуд бўлмаса ва $x = a$ нуқтадан утишда $f''(x)$ нинг ишораси ўзгарса, эгри чизиқнинг абсциссаси $x = a$ бўлган нуқтаси бурилиш нуқта бўлади.



121- расм.

Исбот. 1) $x < a$ бўлганда $f''(x) < 0$ ва $x > a$ бўлганда $f''(x) > 0$ бўлсин.

У вақтда $x < a$ бўлганда эгри чизиқ қавариқ ва $x > a$ бўлганда ботиқ бўлади. Демак, эгри чизиқнинг абсциссаси $x = a$ бўлган нуқтаси бурилиш нуқтадир (121- расм).

2) Агар $x < b$ да $f''(x) > 0$ ва $x > b$ да $f''(x) < 0$ бўлса, $x < b$ да эгри чизиқ ботиқ, $x > b$ да эса қавариқ бўлади. Демак, эгри чизиқнинг абсциссаси $x = b$ бўлган нуқтаси бурилиш нуқтадир (122- расм).

4- мисол. Ушбу

$$y = e^{-x^2} \text{ (Гаусс эгри чизиғи)}$$

эгри чизиқнинг бурилиш нуқталари топилсин ҳамда қавариқлик ва ботиқлик интерваллари аниқлансин.

Е ч и ш. 1) Биринчи ва иккинчи ҳосилаларни топамиз:

$$y' = -2xe^{-x^2}$$

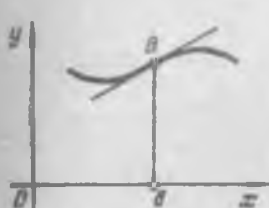
$$y'' = 2e^{-x^2} (2x^2 - 1).$$

2) Биринчи ва иккинчи ҳосила ҳамма нуқталарда мавжуд. x нинг $y'' = 0$ бўладиган қийматларини топамиз:

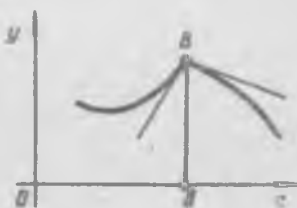
$$2e^{-x^2} (2x^2 - 1) = 0,$$

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



a)



b)

122- расм.

3) Топилган қийматларни текшираимиз:

$$x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ бўлганда } y'' > 0,$$

$$x > -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ бўлганда } y'' < 0;$$

x_1 нуқтадан ўтишда иккинчи ҳосила ишорасини ўзгартиради. Демак, $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ бўлганда эгри чизикда бурилиш нуқта бор; унинг координаталари:

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right) \text{ бўлади;}$$

$$x < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ бўлганда } y'' < 0,$$

$$x > \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ бўлганда } y'' > 0.$$

Демак, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ бўлганда ҳам эгри чизикда бурилиш нуқта бўлади; унинг

координаталари: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$. Иккинчи бурилиш нуқтанинг мавжудлиги эгри чизикнинг Оу ўққа нисбатан симметрик эканидан бевосита келиб чиқади.

4) Юқоридагидан ушбу натижа чиқади:

$-\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ бўлганда эгри чизик ботиқ;

$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ бўлганда эгри чизик қавариқ;

$\frac{1}{\sqrt{2}} < x < +\infty$ бўлганда эгри чизик ботиқ.

5) Биринчи ҳосила

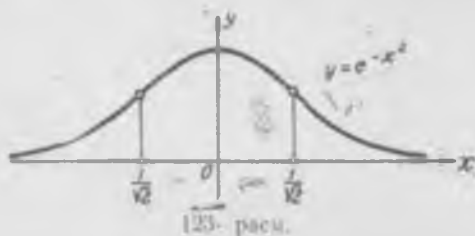
$$y' = -2xe^{-x^2}$$

ифодасидан ушбу натижалар чиқади:

$x < 0$ бўлганда $y' > 0$, яъни функция ўсади;

$x > 0$. $y' < 0$, . камаяди;

$x = 0$. $y' = 0$.



123- расм.

Бу нуқтада функция максимумга эга, унинг қиймати; $y = 1$.

Утказилган текширишга асосан эгри чизик графигини чизиш ос (123- расм).

5- мисол. Ушбу

$$y = x^4$$

эгри чизикнинг бурилиш нуқталари топилсин.

Е ч и ш. 1) Иккинчи ҳосилани топамиз;

$$y'' = 12x^2.$$

2) $y'' = 0$ бўладиган нуқталарни аниқлаймиз;

$$12x^2 = 0, \quad x = 0.$$

3) Топилган $x = 0$ қийматни текшираимиз;

$x < 0$ бўлганда $y'' > 0$ — эгри чизик ботиқ;

$x > 0$. $y'' > 0$ — .

Демак, эгри чизикнинг бурилиш нуқталари йўқ (124- расм).

6- мисол. Ушбу

$$y = (x-1)^{\frac{1}{3}}$$

эгри чизикнинг бурилиш нуқталари топилсин.

Е ч и ш. 1) Биринчи ва иккинчи ҳосилаларни топамиз:

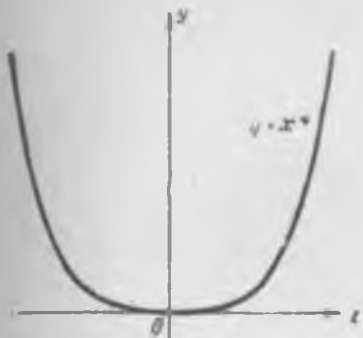
$$y' = \frac{1}{3} (x-1)^{-\frac{2}{3}}, \quad y'' = -\frac{2}{9} (x-1)^{-\frac{5}{3}}.$$

2) Иккинчи ҳосила ҳеч бир нуқтада нолга айланимайди, лекин $x = 1$ бўлганда y'' мавжуд эмас ($y'' = \pm \infty$).

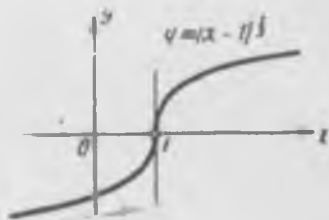
3) $x = 1$ қийматни текшираёмиз:

$x < 1$ бўлганда $y'' > 0$ — эгри чизик ботик;

$x > 1$. $y'' < 0$ — эгри чизик қаварик.



124- расм.



125- расм.

Демак, $x = 1$ бўлганда бурилиш нуқтаси мавжуд; бу $(1; 0)$ нуқтадир. $x = 1$ бўлганда $y' = \infty$, яъни бу нуқтада эгри чизик вертикал уринмага эга (125- расм).

10- §. Асимптоталар

Купинча $y = f(x)$ эгри чизикнинг шаклини текширишга тўғри келади, бунинг учун эса, ўзгарувчи нуқта абсциссаси ёки ординатаси, ёки абсциссаси ва ординатаси бир вақтда (абсолют қиймати бўйича) чексиз ўсганда тегишли функциянинг ўзгариш характерини текширишга тўғри келади. Бунда текширилаётган эгри чизик, унинг ўзгарувчи нуқтаси чексиз*) узоқлашганда, биронта тўғри чизикқа чексиз яқинлашадиган ҳоли муҳим хусусий ҳолдир.

Таъриф. Агар эгри чизикнинг ўзгарувчи M нуқтаси чексиз узоқлашганда унинг бирон A тўғри чизикдан масофаси нолга интилса, A тўғри чизик эгри чизикнинг асимптотаси деб аталади (126- ва 127- расмлар).

Бундан буён *вертикал* (яъни ордината ўқига параллел) ва *огма* (яъни ордината ўқига параллел бўлмаган) асимптоталарни бир-биридан фарқ қиламиз.

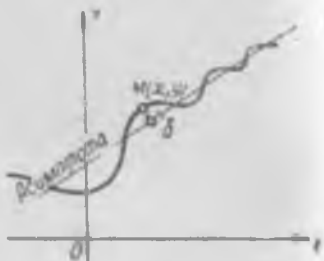
*) Агар ўзгарувчи M нуқта эгри чизик устида шундай ҳаракат қилсаки, у нуқтанинг координаталар бошидан масофаси чексиз ўсса, бу ҳолда ўзгарувчи нуқта эгри чизик бўйича чексизликка ҳаракат қилади деймиз.

1. Вертикал асимптоталар

Асимптотанинг таърифидан, агар $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$ ёки $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$ ёки $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ бўлса, у ҳолда $x=a$ тўғри чизик $y = f(x)$



126- расм.

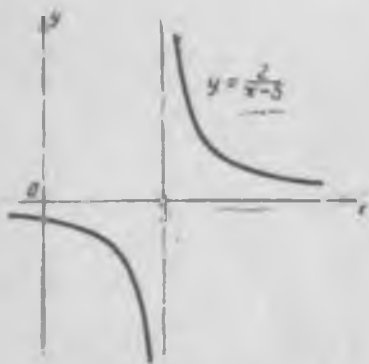


127- расм.

эгри чизикнинг асимптотаси эканлиги чиқади; ва аксинча, агар $x=a$ тўғри чизик асимптота бўлса, ёзилган тенгликлардан бири бажарилади.

Демак, $y = f(x)$ эгри чизикнинг вертикал асимптоталарини топиш учун абсциссанинг шундай $x=a$ қийматларини топиш ке-

ракки, x шу сонларга яқинлашганда $y = f(x)$ функция чексизликка интилсин. Бу ҳолда $x=a$ тўғри чизик берилган эгри чизикнинг вертикал асимптотаси бўлади.



128- расм.

1- мисол. $y = \frac{2}{x-5}$ эгри чизик $x=5$ вертикал асимптотага эга, чунки $x \rightarrow 5$ бўлганда $y \rightarrow \infty$ бўлади (128-расм).

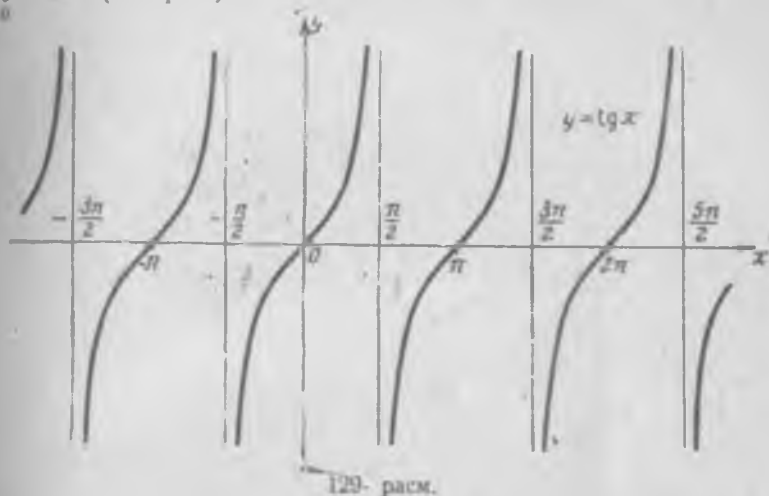
2- мисол. $y = \lg x$ эгри чизик чексиз кўп вертикал асимптоталарга эга:

$$x = \pm \frac{\pi}{2}, \quad x = \pm \frac{3\pi}{2},$$

$$x = \pm \frac{5\pi}{2}, \dots$$

Бу эса $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$, ёки $-\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, \dots$ қийматларга интилганда $\lg x$ нинг чексизликка ($\lg x \rightarrow \infty$) интилишидан келиб чиқади (129-расм).

3-мисол. $y = e^{\frac{1}{x}}$ эгри чизиқ $x = 0$ вертикал асимптотага эга, чунки $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$ (130-расм).



II. Оғма асимптоталар. $y = f(x)$, эгри чизиқ оғма асимптотага эга бўлиб, унинг тенгласи

$$y = kx + b \quad (1)$$

булсин, k ва b сонларни аниқлаймиз (131-расм). Фараз қилайлик, $M(x, y)$ — эгри чизиқда ётган нуқта ва $N(x, y)$ — асимптотада ётган нуқта булсин. MP кесманинг узунлиги M нуқтадан асимптотача бўлган масофага тенг. Шартга кура

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} MP = 0.$$

Агар асимптотанинг Ox ўққа оғиш бурчагини φ билан белгиласак, NMP учбурчакдан:

$$NM = \frac{MP}{\cos \varphi}$$

булади. φ — ўзгармас ($\frac{\pi}{2}$ га тенг бўлмаган) бурчак, шунинг учун олдинги тенгликдан

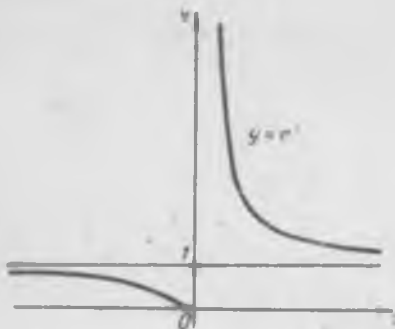
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} NM = 0 \quad (2')$$

келиб чиқади, ва аксинча, (2') тенгликдан (2) тенглик келиб чиқади. Лекин

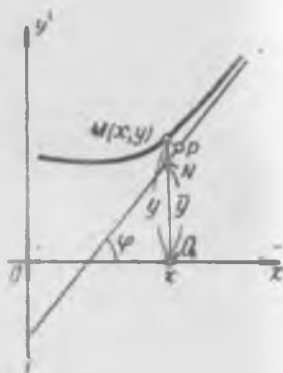
$$LM = |QM - QN| = |y - \bar{y}| = |f(x) - (kx + b)|$$

ва (2') тенглик

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx - b] = 0 \quad (3)$$



130- расм.



131- расм.

кўринишга келади. Шундай қилиб, (1) тўғри чизиқ $y = f(x)$ эгри чизиқнинг асимптотаси бўлса, (3) тенглик бажарилади, ва аксинча, k, b — ўзгармас сонлар бўлганда (3) тенглик бажарилса, $y = kx + b$ тўғри чизиқ асимптота бўлади. Энди k ва b ни топамиз. Бунинг учун (3) тенгликда x ни қавсдан ташқарига чиқариб, ушбу шаклда ёзамиз:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0.$$

Биринчи кўпайтувчи x чексизликка интилади ($x \rightarrow +\infty$), шунга кўра ушбу тенглик бажарилиши керак:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0.$$

b ўзгармас бўлганда $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{x} = 0$. Демак,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k \right] = 0,$$

ёки

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}. \quad (4)$$

k ни топгандан сўнг, (3) тенгликдан b ни топамиз:

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx]. \quad (5)$$

Демак, агар $y = kx + b$ тўғри чизиқ $y = f(x)$ эгрү чизиқнинг асимптотаси бўлса, k ва b (4) ва (5) формулалардан топилади. Аксинча, агар (4) ва (5)- лимитлар мавжуд бўлса, (3) тенглик бажарилади ва $y = kx + b$ тўғри чизиқ асимптота бўлади. Агар (4) ва (5)- лимитлардан биттаси мавжуд бўлмаса, y ҳолда эгри чизиқ асимптотага эга бўлмайди.

Биз текширишни 131- расмга тўғри келадиган $x \rightarrow +\infty$ ҳол учун ўтказдик, лекин муҳокамамининг барчаси $x \rightarrow -\infty$ ҳол учун ҳам тўғридир.

4- мисол. Ушбу

$$y = \frac{x^3 + 2x - 1}{x}$$

эгри чизиқнинг асимптоталари топилин.

Еч и ш. 1) Вертикал асимптоталарни ахтарамиз:

$$\begin{array}{l} x \rightarrow -0 \text{ бўлганда } y \rightarrow +\infty, \\ x \rightarrow +0 \quad \quad \quad y \rightarrow -\infty. \end{array}$$

Демак, $x = 0$ тўғри чизиқ берилган эгри чизиқнинг вертикал асимптотасидир.

2) Оғма асимптоталарни ахтарамиз:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 2x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right] = 1,$$

яъни

$$k = 1,$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [y - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^3 + 2x - 1}{x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^3 + 2x - 1 - x^2}{x} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2 - \frac{1}{x} \right] = 2, \end{aligned}$$

яъни

$$b = 2.$$

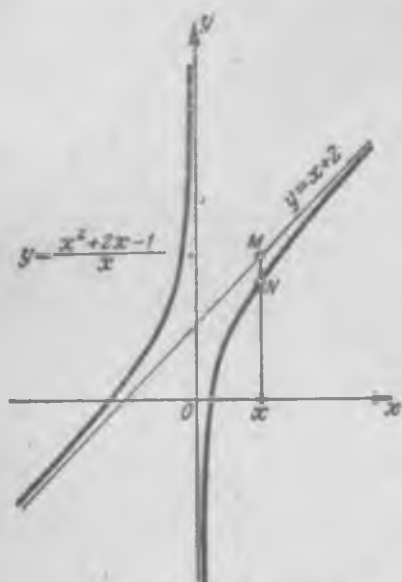
Демак,

$$y = x + 2$$

тўғри чизиқ берилган эгри чизиқнинг оғма асимптотасидир.

Эгри чизиқ билан асимптотанинг бир-бирига нисбатан турган ҳолатини текшириш учун x нинг битта қийматига тегишли эгри чизиқ нуқтасининг ординатаси билан асимптота нуқтасининг ординатаси орасидаги айирмани қараймиз:

$$\frac{x^3 + 2x - 1}{x} - (x + 2) = -\frac{1}{x}.$$



132- расм.

$x > 0$ бўлганда бу айирма манфий,
 $x < 0$ бўлганда эса мусбат; демак,
 $x > 0$ бўлганда эгри чизик асимпто-
тадан пастда, $x < 0$ бўлганда асимп-
тотадан юқорида бўлади (132- расм).

5 - мисол. Ушбу

$$y = e^{-x} \sin x + x$$

эгри чизикнинг асимптоталарни топиш-
син.

Ечиш. 1) Вертикал асимпто-
ларнинг йўқлиги кўриниб турибди.

2) Огма асимптоталарни излай-
миз:

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} \sin x + x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-x} \sin x}{x} + 1 \right] = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{-x} \sin x + x - x] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \sin x = 0. \end{aligned}$$

Демак, $y = x$ тўғри чизик $x \rightarrow +\infty$
да огма асимптотадир.

Берилган эгри чизик $x \rightarrow -\infty$ да асимптоталарга эга бўлмайди. Ҳақи-
қатан, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x}$ мавжуд эмас, чунки

$$\frac{y}{x} = \frac{e^{-x}}{x} \sin x + 1.$$

(Бу ифодада $x \rightarrow -\infty$ да биринчи қўшилувчи чексиз ўсади ва, демак,
лимитга эга эмас.)

11- §. Функцияларни текширишнинг умумий плани ва графиклар ясаш

„Функцияни текшириш“дан одатда қуйидагиларни:

- 1) Функция мавжудлигининг табиий соҳасини,
- 2) функциянинг узилиш нуқталарини,
- 3) функциянинг ўсиш ва камайиш интервалларини,
- 4) максимум ва минимум нуқталарни, шунингдек функция-
нинг максимал ва минимал қийматларини,
- 5) графикнинг қавариқлик ва ботиқлик соҳаларини, бури-
лиш нуқталарини,
- 6) функция графиксининг асимптоталарини топиш тушун-
лади.

Ўтказилган текширишга асосан функциянинг графиги яса-
лади (баъзан, текшириш давомида график элементларини бел-
гилаб бориш фойдали бўлади).

1-изоҳ. Агар текширилаётган функция $y = f(x)$ *жуфт*,
яъни аргументнинг ишораси ўзгарганда функциянинг қиймати
ўзгармаса, яъни

$$f(-x) = f(x)$$

бўлса, функциянинг аниқланиш соҳасида аргументнинг фақат
мусбат қийматларида функцияни текшириш ва графигини ясаш
кифоя. Аргументнинг манфий қийматлари учун функция гра-
фигини ясашда жуфт функция графиги ордината ўқига нисба-
тан симметрик бўлишидан фойдаланилади.

1-мисол. $y = x^2$ жуфт функция, чунки $(-x)^2 = x^2$ (5-расмга қаранг).

2-мисол. $y = \cos x$ жуфт функция, чунки $\cos(-x) = \cos x$
(16-расмга қаранг).

2-изоҳ. Агар $y = f(x)$ *тоқ* функция, яъни аргумент ишо-
раси ўзгарганда функциянинг ишораси ҳам ўзгарса, яъни
 $f(-x) = -f(x)$ бўлса, бу функцияни аргументнинг фақат
мусбат қийматлари учун текшириш кифоя. Тоқ функциянинг
графиги координаталар бошига нисбатан симметрик бўлади.

3-мисол. $y = x^3$ тоқ функция, чунки $(-x)^3 = -x^3$ (7-расмга қа-
ранг).

4-мисол. $y = \sin x$ тоқ функция, чунки $\sin(-x) = -\sin x$ (15-рас-
мга қаранг).

3-изоҳ. Функциянинг бир неча хоссасини билиш унинг
бошқа хоссалари ҳақида хулоса чиқаришга имкон беради, шу-
нинг учун баъзан текшириш тартибини берилган функциянинг
конкрет хусусиятларига қараб белгилаш мақсадга мувофиқ бў-
лади. Масалан, агар функциянинг узлуксиз ва дифференциал-
ланувчи эканини аниқлаган ҳамда унинг максимум ва миңиму-
нуқталарини топган бўлсак, шу билан функциянинг ўсиш ва
камайиш соҳаларини ҳам аниқлаган бўламиз.

5-мисол. Ушбу

$$y = \frac{x}{1+x^2}$$

функция текширилсин ва графиги ясазсин.

Ечиш. 1) Функциянинг мавжудлик соҳаси $-\infty < x < +\infty$ интервал-
дир, $x < 0$ бўлганда $y < 0$ бўлади, $x > 0$ бўлганда эса $y > 0$ бўлади.

2) Функция ҳамма ерда узлуксиз.

3) Функцияни максимум ва минимумга текширамыз. Ушбу

$$y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0$$

тенгликдан критик нуқталарни топамиз:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$$

Критик нуқталарнинг характерини текширамиз:

$$x < -1 \text{ бўлганда } y' < 0,$$

$$x > -1 \text{ бўлганда } y' > 0.$$

Демак, $x = -1$ нуқтада функция минимумга эга:

$$y_{\min} = (y)_{x=-1} = -0,5.$$

Сўнгра,

$$x < 1 \text{ бўлганда } y' > 0,$$

$$x > 1 \text{ бўлганда } y' < 0.$$

Демак, $x = 1$ нуқтада функция максимумга эга:

$$y_{\max} = (y)_{x=1} = 0,5.$$

4) Функциянинг ўсиш ва камайиш соҳаларини аниқлаймиз:

$$-\infty < x < -1 \text{ бўлганда } y' < 0 \text{ — функция камаёди,}$$

$$-1 < x < 1 \text{ бўлганда } y' > 0 \text{ — функция ўсади,}$$

$$1 < x < \infty \text{ бўлганда } y' < 0 \text{ — функция камаёди.}$$

5) Эгри чизиқнинг қавариқлик ва ботиқлик соҳаларини ва бурилиш нуқталарини аниқлаймиз, ушбу

$$y'' = \frac{2x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3} = 0.$$

тенгликдан

$$x_1 = -\sqrt{3}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{3}.$$

y'' ни x нинг функцияси каби текшириб, қуйндагиларин топамиз:

$$-\infty < x < -\sqrt{3} \text{ бўлганда}$$

$$y'' < 0 \text{ — эгри чизиқ қавариқ,}$$

$$-\sqrt{3} < x < 0 \text{ бўлганда}$$

$$y'' > 0 \text{ — эгри чизиқ ботиқ,}$$

$$0 < x < \sqrt{3} \text{ .}$$

$$y'' < 0 \text{ — эгри чизиқ қавариқ,}$$

$$\sqrt{3} < x < +\infty \text{ .}$$

$$y'' > 0 \text{ — эгри чизиқ ботиқ.}$$

Демак, координаталари: $x = -\sqrt{3}$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ бўлган нуқта бурилиш нуқтадир; худди шунингдек $(0, 0)$ ва $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ нуқталар ҳам бурилиш нуқталардир.

6) Эгри чизиқнинг асимптоталарини аниқлаймиз:

$$x \rightarrow +\infty \text{ да } y \rightarrow 0,$$

$$x \rightarrow -\infty \text{ да } y \rightarrow 0.$$

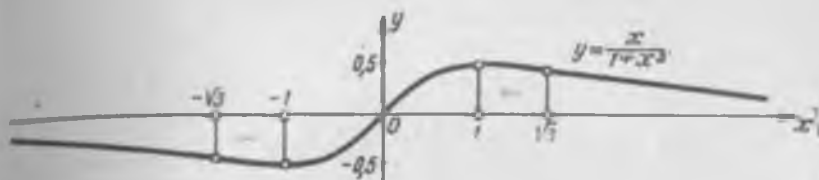
Демак $y = 0$ тўғри чизиқ ягона оғма асимптотадир. Эгри чизиқнинг вертикал асимптотаси йўқ, chunkи x нинг ҳеч қандай чекли қийматида функция чексизликка интилмайди.

Текширилган функциянинг графиги 133- расмда тасвирланган.
6- мисол. Ушбу функция

$$y = \sqrt[3]{2ax^3 - x^3}$$

текширилсин ва графиги ясалсин.

Ечиш. 1) Функция x нинг барча қийматлари учун аниқланган.



133- расм.

2) Функция ҳамма ерда узлуксиз.

3) Функцияни максимум ва минимумга текширамыз:

$$y' = \frac{4ax - 3x^2}{3\sqrt[3]{(2ax^3 - x^3)^2}} = \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{x(2a - x)^2}}$$

Ҳосила ушбу

$$x_1 = 0 \text{ ва } x_2 = 2a$$

икки нуқтадан бошқа ҳамма ерда мавжуддир.

Ҳосиланинг $x \rightarrow 0$ ва $x \rightarrow +0$ шартлардаги чегаравий қийматларини текширамыз:

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{x} \sqrt[3]{(2a - x)^2}} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{x} \sqrt[3]{(2a - x)^2}} = +\infty;$$

$x < 0$ бўлганда $y' < 0$, $x > 0$ бўлганда $y' > 0$.

Демак, $x = 0$ бўлганда функция минимумга эга. Функциянинг қиймати бу нуқтада нолга тенг.

Энди функцияни иккинчи $x_2 = 2a$ критик нуқтада текширамыз. $x \rightarrow 2a$ ҳам ҳосила чексизликка интилади. Аммо x нинг $2a$ га яқин ($2a$ дан ҳам яқин ва ҳам ўнгда) бўлган ҳамма қийматлари учун ҳосила манфий. Демак, бу нуқтада функция максимумга ҳам, минимумга ҳам эга эмас. $x_2 = 2a$ нуқтада ва унинг яқинидаги нуқталарда функция камайд; эгри чиқиққа шу нуқтадаги уринма вертикалдир.

$x = \frac{4a}{3}$ бўлганда ҳосила нолга айланади. Бу критик нуқтанинг характе-

рини текширамыз. Биринчи ҳосиласининг ифодасини қараб чиқиб, $x < \frac{4a}{3}$ бўл-

ганда $y' > 0$, $x > \frac{4a}{3}$ бўлганда $y' < 0$ булишини кўрамыз.

Демак, $x = \frac{4a}{3}$ бўлганда функция максимумга эга:

$$y_{\max} = \frac{2}{3} a \sqrt[3]{4}.$$

4) Утказилган текширишга асосан функциянинг ўсиш ва камийиш ҳолатларини ҳосил қиламиз:

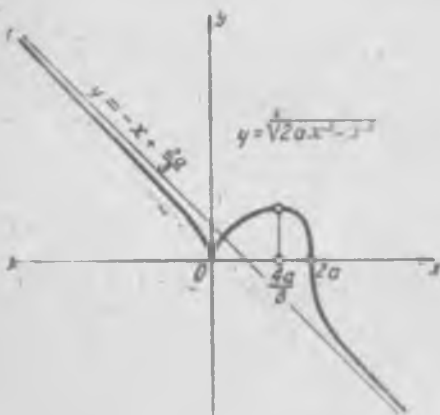
$-\infty < x < 0$ да функция камаяди,

$0 < x < \frac{4a}{3}$ да ўсади,

$\frac{4a}{3} < x < \infty$ да камаяди.

5) Эгри чизиқнинг қавариқлик ва ботиқлик соҳаларини ҳамда бурилиш нуқталарини аниқлаймиз: иккинчи ҳосила

$$y'' = - \frac{8a^2}{9x^{\frac{4}{3}}(2-x)^{\frac{2}{3}}}$$



134- расм.

ҳеч бир нуқтада молга айланмайди. Лекин икки нуқта борки, уларда иккинчи ҳосила ўзилади; улар $x_1 = 0$ ва $x_2 = 2a$ нуқталардир.

Бу нуқталарнинг ҳар бири яқинида иккинчи ҳосила ишорасини текшираемиз:

$x < 0$ бўлганда $y'' < 0$ — эгри чизиқнинг қавариқлиги юқорига қараган.

$x > 0$ бўлганда $y'' < 0$ — эгри чизиқнинг қавариқлиги юқорига қараган.

Демак, абсциссаси $x = 0$ бўлган нуқта бурилиш нуқта эмас.

$x < 2a$ бўлганда $y'' < 0$ — эгри чизиқнинг қавариқлиги юқорига қараган; $x > 2a$ бўлганда $y'' > 0$ — эгри чизиқнинг қавариқлиги пастга қараган.

Демак, эгри чизиқнинг $(2a; 0)$ нуқтаси бурилиш нуқтадир.

6) Эгри чизиқнинг асимптоталарини аниқлаймиз:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{2ax^3 - x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{2a}{x}} - 1 = -1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\sqrt[3]{2ax^3 - x^3} + x \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2ax^2 - x^3 + x^3}{\sqrt[3]{(2ax^3 - x^3)^2} - x \sqrt[3]{2ax^3 - x^3} + x^3} = \frac{2a}{3}.$$

Демак,

$$y = -x + \frac{2a}{3},$$

эгри чизик $y = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3}$ эгри чизикнинг огма асимптотасидир.
Текширилган функциянинг графиги 134- расмда тасвирланган.

12- §. Параметрик шаклда берилган эгри чизикларни текшириш

Эгри чизик параметрик тенгламалар

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (1)$$

билан берилган бўлсин. Бу ҳолда эгри чизикни текшириш ва яшаш юқорида

$$y = f(x)$$

тенглама билан берилган эгри чизикда бажарилгани каби утказилади. Ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \varphi'(t), \\ \frac{dy}{dt} = \psi'(t). \end{cases} \quad (2)$$

Берилган эгри чизикнинг шундай нуқталарида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad (3)$$

ҳосилани ҳисоблаймизки, бу нуқталар яқинида эгри чизик бирор $y = f(x)$ функциянинг графиги бўлсин. t параметрининг $\varphi'(t)$ ёки $\psi'(t)$ ҳосилалардан биттасини бўлса ҳам нолга айлантирадиган ёки узилишга дучор бўлган $t_1, t_2, t_3, \dots, t_k$ қийматларини топамиз. (t нинг бундай қийматларини критик қийматлар деб атаймиз.) (3) формула бўйича $(t_1, t_2), (t_2, t_3), \dots, (t_{k-1}, t_k)$ интервалларнинг ҳар бирнда, демак,

$$(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{k-1}, x_k)$$

[бу ерда $x_i = \varphi(t_i)$] интервалларнинг ҳар бирида $\frac{dy}{dx}$ нинг ишорасини аниқлаймиз; шу билан функциянинг ўсиш ва камайиш соҳаларини аниқлаган бўламиз. Бу шунингдек параметрнинг $t_1, t_2, \dots, t_k$ қийматларига мос нуқталарнинг характерини аниқлашга ҳам имкон беради. Сўнгга $\frac{d^2y}{dx^2}$ ни ҳисоблаймиз:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}. \quad (4)$$

Бу формулага асосан ҳар бир нуқтада эгри чизик қавариқлигининг йуналишини аниқлаймиз.

Асимптоталарни топиш учун t нинг шундай қийматларини топамизки, уларга яқинлашганда x ёки y чексизликка интилин ва t нинг яна шундай қийматларини топамизки, уларда ҳам x , ҳам y чексизликка интилсин. Сунгра текширишни одатдаги усул билан ўтказамиз.

Параметрик шаклда берилган эгри чизикларни текширишда пайдо бўладиган баъзи хусусиятларни мисолларда аниқлаймиз.

1- мисол. Ушбу

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos^3 t, \\ y &= a \sin^3 t \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

теңгламалар билан берилган эгри чизик текширилсин.

Ечиш. x ва y микдорлар t нинг барча қийматлари учун аниқланган. Аmmo $\cos^3 t$ ва $\sin^3 t$ функциялар—даврий функциялар ва уларнинг даври 2π бўлгани учун параметр t нинг ўзгаришини 0 дан 2π гача бўлган чегарала қараш kifоя; бунда x нинг ўзгариш соҳаси $[-a, a]$ кесма бўлади ва y нинг ўзгариш соҳаси $[-a, a]$ кесма бўлади. Демак, қаралаётган эгри чизикнинг асимптоталари йўқ.

$\frac{dx}{dt}$ ва $\frac{dy}{dt}$ ни топамиз:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -3a \cos^2 t \sin t, \\ \frac{dy}{dt} &= 3a \sin^2 t \cos t. \end{aligned} \right\} \quad (2')$$

Бу ҳосилалар $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ бўлганда нолга айланади. $\frac{dy}{dx}$ ни топамиз.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3a \sin^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \sin t} = -\operatorname{tg} t. \quad (3')$$

(2') ва (3') формулаларга асосан ушбу жадвални тузамиз:

t нинг ўзгариш соҳаси	x нинг шунга мос ўзгариш соҳаси	y нинг шунга мос ўзгариш соҳаси	$\frac{dy}{dx}$ нинг ишораси	y ни x нинг функцияси $y=f(x)$ шифатида ўзгаришининг характери
$0 < t < \frac{\pi}{2}$	$a > x > 0$	$0 < y < a$	—	камаяди
$\frac{\pi}{2} < t < \pi$	$0 > x > -a$	$a > y > 0$	+	ўсади
$\pi < t < \frac{3\pi}{2}$	$-a < x < 0$	$0 > y > -a$	—	камаяди
$\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$	$0 < x < a$	$-a < y < 0$	+	ўсади

Жадвалдан кўринадики, (1') тенглама $y = f(x)$ кўринишдаги иккита узлуксиз функцияни белгилайди. $0 < t < \pi$ бўлганда $y > 0$ (жадвалнинг биринчи ва иккинчи йўлига қаралсин), $\pi < t < 2\pi$ бўлганда, $y < 0$ (жадвалнинг учинчи ва тўртинчи йўлига қаралсин). (3') формуладан:

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{dy}{dt} = \infty$$

ва

$$\lim_{t \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{dy}{dt} = \infty$$

эканлиги келиб чиқади. Бу нуқталарда эгри чизиққа уринма вертикал бўлади. Яна ўша (3') формуладан ушбуларни топамиз:

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=\pi} = 0, \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=2\pi} = 0.$$

Бу нуқталарда эгри чизиққа уринма горизонтал бўлади. Энди $\frac{d^2y}{dx^2}$ ни топамиз:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3a \cos^4 t \sin t}.$$

Бундан кўраимизки:

$0 < t < \pi$ бўлганда $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ — эгри чизиқ ботик,

$\pi < t < 2\pi$ бўлганда $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ — эгри чизиқ қавариқ.

Текшириш натижаларига асосан эгри чизикни ясаймиз (135- раси). Бу эгри чизиқ *астроиди* деб аталади.

2-мисол. Ушбу тенгламалар

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3} \quad (1'')$$

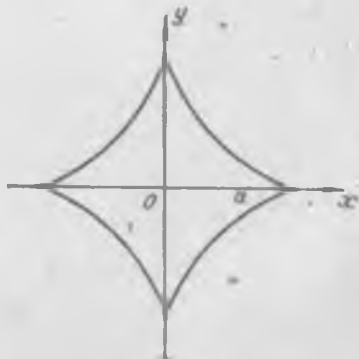
билан берилган эгри чизиқ ясалсин (*Декарт барги*).

Еч и ш. Функцияларнинг иккаласи ҳам t нинг, $t = -1$ дан бошқа, ҳамма қимматларида аниқланган. $t \rightarrow -1$ да:

$$\lim_{t \rightarrow -1+0} x = \lim_{t \rightarrow -1-0} \frac{3at}{1+t^3} = +\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow -1+0} y = \lim_{t \rightarrow -1-0} \frac{3at^2}{1+t^3} = -\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow -1+0} x = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow -1+0} y = +\infty.$$



135- раси.

Сунгра:

$$t = 0 \text{ да } x = 0, \quad y = 0,$$

$$t \rightarrow +\infty \text{ да } x \rightarrow 0, \quad y \rightarrow 0,$$

$$t \rightarrow -\infty \text{ да } x \rightarrow 0, \quad y \rightarrow 0.$$

Энди $\frac{dx}{dt}$ ва $\frac{dy}{dt}$ ни топамиз:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6a\left(\frac{1}{2} - t^3\right)}{(1+t^3)^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2} \quad (2^o)$$

 t учун ушбу критик қийматларни ҳосил қиламиз:

$$t_1 = -1, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \quad t_4 = \sqrt[3]{2}.$$

 $\frac{dy}{dx}$ ни топамиз:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{t(2-t^3)}{2\left(\frac{1}{2} - t^3\right)} \quad (3^o)$$

(1^o), (2^o), (3^o) формулаларга асосан ушбу жадвални тузамиз:

t нинг ўзгариш соҳаси	x нинг шунга мос ўзгариш соҳаси	y нинг шунга мос ўзгариш соҳаси	$\frac{dy}{dx}$ нинг нишораси	y ни x нинг функцияси ($y=f(x)$) сифатида ўзгаришининг характери
$-\infty < t < -1$	$0 < x < +\infty$	$0 > y > -\infty$	—	камаяди
$-1 < t < 0$	$-\infty < x < 0$	$+\infty > y > 0$	—	камаяди
$0 < t < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$0 < x < a\sqrt[3]{4}$	$0 < y < a\sqrt[3]{2}$	+	ўсади
$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < t < \sqrt[3]{2}$	$a\sqrt[3]{4} > x > a\sqrt[3]{2}$	$a\sqrt[3]{2} < y < a\sqrt[3]{4}$	—	камаяди
$\sqrt[3]{2} < t < +\infty$	$a\sqrt[3]{2} > x > 0$	$a\sqrt[3]{4} > y > 0$	+	ўсади

(3^o) формуладан қуйидагиларни топамиз:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\left(\begin{smallmatrix} t=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{smallmatrix}\right)} = 0, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\left(\begin{smallmatrix} t=\infty \\ x=0 \\ y=0 \end{smallmatrix}\right)} = \infty,$$

Демак, эгри чизик координаталар бошини икки марта Ox ўққа параллел уринма билан ва Oy ўққа параллел уринма билан кесиб ўтади.Энди t_3 нуқтани текшираемиз:

$$t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ бўлганда } \left(\frac{dy}{dx}\right) = \infty \quad (x = a\sqrt[3]{4}, \quad y = a\sqrt[3]{2}).$$

Бу нуқтада эгри чизикқа уринма вертикал. t_4 нуқтани текшираемиз:

$$t = \sqrt[3]{2} \text{ бўлганда } \left(\frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad (x = a\sqrt[3]{2}, \quad y = a\sqrt[3]{4}).$$

Бу нуқтада эгри чизикқа уринма горизонтал. Асимптотанинг мавжудлик масаласини текшираемиз:

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow -1-0} \frac{3at^2(1+t^3)}{3at(1+t^3)} = -1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - kx) = \lim_{t \rightarrow -1+0} \left[\frac{3at^2}{1+t^3} - (-1) \frac{3at}{1+t^3} \right] = \lim_{t \rightarrow -1+0} \left[\frac{3at(t+1)}{1+t^3} \right] = \lim_{t \rightarrow -1+0} \frac{3at}{1-t+t^2} = -a.$$

Демак, $y = -x - a$ тўғри чизик эгри чизикнинг $x \rightarrow +\infty$ даги тармогининг асимптотаси бўлади.

Шунинг сингари қуйидагиларни топамиз:

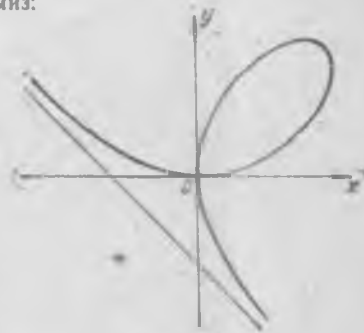
$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = -1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - kx) = -a.$$

Демак, топилган тўғри чизик эгри чизикнинг $x \rightarrow -\infty$ даги тармогининг ҳам асимптотаси бўлади.

Утказилган текширишга асосан эгри чизикни ясаймиз (136-расм).

Эгри чизикларни текшириш билан боғлиқ бўлган баъзи масалалар VIII бобнинг 19-§ „Эгри чизикнинг махсус нуқталари“ да қўшимча равишда қараб чиқилади.



136-расм.

V бобга машқлар

Функцияларнинг экстремумлари топилсин: 1. $y = x^2 - 2x + 3$. Жав. $x = 1$ да $y_{\min} = 2$. 2. $y = \frac{x^2}{3} - 2x^2 + 3x + 1$. Жав. $x = 1$ да $y_{\max} = \frac{7}{2}$, $x = 3$ да $y_{\min} = 1$. 3. $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 3$. Жав. $x = 1$ да $y_{\max} = 10$, $x = 5$ да $y_{\min} = -22$. 4. $y = -x^4 + 2x^2$. Жав. $x = \pm 1$ да $y_{\max} = 1$, $x = 0$ да, $y_{\min} = 0$. 5. $y = x^4 - 8x^2 + 2$. Жав. $x = 0$ да $y_{\max} = 2$, $x = \pm 2$ да $y_{\min} = -14$. 6. $y = 3x^5 - 125x^3 + 2160x$. Жав. $x = -4$ ва $x = 3$ да максимум, $x = -3$ ва $x = 4$ да минимум. 7. $y = 2 - (x-1)^{2/3}$. Жав. $x = 1$ да $y_{\max} = 2$. 8. $y = 3 -$ $2(x+1)^{1/3}$. Жав. максимум ҳам, минимум ҳам йўқ. 9. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$.Жав. $x = \sqrt{2}$ да минимум, $x = -\sqrt{2}$ да максимум. 10. $y = \frac{(x-2)(3-x)}{x^2}$.

Жав. $x = \frac{12}{5}$ да максимум. 11. $y = 2e^x + e^{-x}$. Жав. $x = -\frac{\ln 2}{2}$ да минимум.

12. $y = \frac{x}{\ln x}$. Жав. $x = e$ да $y_{\min} = e$. 13. $y = \cos x + \sin x$ ($-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$). Жав. $x = \frac{\pi}{4}$ да $y_{\max} = \sqrt{2}$. 14. $y = \sin 2x - x$ ($-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$).

Жав. $x = \frac{\pi}{6}$ да минимум. $x = -\frac{\pi}{6}$ да максимум. 15. $y = x + \lg x$.

Жав. максимум ҳам, минимум ҳам йўқ. 16. $y = e^x \sin x$. Жав. $x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$ да максимум, $x = 2k\pi + \frac{3}{4}\pi$ да минимум. 17. $y = x^4 - 2x^3 + 2$. Жав. $x = 0$ да максимум; $x = -1$ да минимум; $x = 1$ да минимум. 18. $y = (x-2)^x \times (2x+1)$. Жав. $x = \frac{1}{8}$ да $y_{\min} \approx -8,24$.

19. $y = x + \frac{1}{x}$. Жав. $x = 1$ да минимум; $x = -1$ да максимум. 20. $y = x^3 (a-x)^3$. Жав. $x = \frac{a}{2}$ да $y_{\max} = \frac{a^4}{16}$; $x = 0$ ва $x = a$ да $y_{\min} = 0$.

21. $y = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{a-x}$. Жав. $x = \frac{a^2}{a+b}$ да максимум; $x = \frac{a^2}{a-b}$ да минимум. 22. $y = x + \sqrt{1-x}$.

Жав. $x = \frac{3}{4}$ да $y_{\max} = \frac{5}{4}$; $x = 1$ да $y_{\min} = 1$. 23. $y = x \sqrt{1-x}$ ($x < 1$).

Жав. $x = \frac{2}{3}$ да $y_{\max} = \frac{2}{3}$; $x = 0$ да $y_{\min} = 0$. 24. $y = \frac{x}{1+x^2}$. Жав. $x = -1$ да мини-

мум; $x = 1$ да максимум. 25. $y = x \ln x$. Жав. $x = \frac{1}{e}$ да минимум. 26. $y = x \ln^2 x$. Жав. $x = e^{-2}$ да $y_{\max} = 4e^{-2}$; $x = 1$ да $y_{\min} = 0$.

27. $y = \ln x - \arctg x$. Жав. Функция ўсади. 28. $y = \sin 3x - 3 \sin x$. Жав. $x = \frac{\pi}{2}$ да

минимум; $x = \frac{3\pi}{2}$ да максимум. 29. $y = 2x + \arctg x$. Жав. Экстремумлар

йўқ. 30. $y = \sin x \cos^3 x$. Жав. $x = \frac{\pi}{2}$ да минимум; $x = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$ да ва

$x = \arccos(-\sqrt{\frac{2}{3}})$ да максимум. 31. $y = \arcsin(\sin x)$. Жав. $x = \frac{(4m+1)\pi}{2}$

да максимум; $x = \frac{(4m+3)\pi}{2}$ да минимум.

Ушбу функцияларнинг кўрсатилган кесмаларда энг катта ва энг кичик қийматлари топилсин. 32. $y = -3x^4 + 6x^3 - 1$ ($-2 < x < 2$). Жав. $x = \pm 1$

да $y = 2$ — энг катта қиймат, $x = \pm 2$ да $y = -25$ — энг кичик қиймат.

33. $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ ($-1 < x < 5$). Жав. $x = 5$ да $y =$

$\frac{23}{3}$ — энг катта қиймат, $x = -1$ да $y = -\frac{13}{3}$ — энг кичик қиймат. 34. $y =$

$\frac{x-1}{x+1}$ ($0 < x < 4$). Жав. $x = 4$ да $y = \frac{3}{5}$ — энг катта қиймат, $x = 0$ да $y =$

$-\frac{1}{5}$ — энг кичик қиймат. 35. $y = \sin 2x - x$ ($-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$). Жав. $x =$

$-\frac{\pi}{2}$ да $y = \frac{\pi}{2}$ — энг катта қиймат, $x = \frac{\pi}{2}$ да $y = -\frac{2}{\pi}$ — энг кичик қиймат.

36. Томони a бўлган квадрат шаклдаги тунукадан мумкин қадар катта

ҳажмли усти очик яшик ясаш керак. Бунинг учун тунуканинг тўртала бур-

чагидан тенг квадратлар қирқиб олинадиган квадратлар томонининг узунлиги

топилсин. Жав. $\frac{a}{6}$.

37. Берилган доирага ички чизилган тўғри тўртбурчаклардан энг катта

юзга эга бўлган квадрат эканлиги исбот қилинсин. Квадратнинг периметри

ҳам энг катта бўлиши кўрсатилсин.

38. Доирага ички чизилган тенг ёнли учбурчаклардан энг катта пери-

метрга эга бўлган тенг томонли учбурчак эканлиги кўрсатилсин.

39. Гипотенузасининг узунлиги h булган тўғри бурчакли учбурчаклар-

дан энг катта юзга эга бўлган топилсин. Жав. Ҳар бир катети $\frac{h}{\sqrt{2}}$ га

тенг бўлади.

40. Радиуси R бўлган шарга ички чизилган тўғри цилиндрлардан энг

катта ҳажмга эга бўлган цилиндрнинг баландлиги топилсин. Жав. Баландли-

ги $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ га тенг.

41. Радиуси R бўлган шарга ички чизилган тўғри цилиндрлардан энг

катта ён сиртга эга бўлган цилиндрнинг баландлиги топилсин. Жав. Баланд-

лиги $R\sqrt{2}$ га тенг.

42. Радиуси R бўлган шарга ташқи чизилган энг кичик ҳажмли тўғри

конуснинг баландлиги топилсин. Жав. Баландлиги $4R$ га тенг (конуснинг

ҳажми шар ҳажмининг иккитасига тенг).

43. Ости квадрат шаклда бўлиб, усти очик резервуарни (суюқлик

сақланадиган идиш) ички томондан қўрғошин билан қоплаш керак. Си-

ғини 32 л бўлган резервуарга энг кам миқдорда қўрғошин сарф бўлиши

учун унинг ўлчовлари қандай бўлиши керак? Жав. Баландлиги 0,2 м, асо-

сининг томони 0,4 м (яъни асосининг томони баландлигидан икки марта

катта бўлиши керак).

44. Тунукачи усти очик тарнов ясамоқчи. Тарнов туби ва ёнларининг

кенглиги 10 см дан бўлиб, сигими энг катта бўлиши учун устининг кенгли-

ги қандай бўлиши керак? Жав. 20 см.

45. Маълум ҳажмга эга бўлган конус шаклдаги чодирнинг баландлиги

асосининг радиусидан $\sqrt{2}$ марта катта бўлганда, унга энг кам материал ке-

тиши исботлансин.

46. Усти очик, девори ва асоси маълум қалинликда бўлган цилиндр

ясаш керак. Уни талаб қилинган ҳажмда, энг кам материалдан ясаш учун

ўлчовларини қандай олиш керак? Жав. Агар R — цилиндр ички асосининг

радиуси, v — ички ҳажми бўлса, $R = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$ бўлиши керак.

47. Усти ва остидан ярим сфералар билан тугайдиган цилиндр шаклда

ва девори бир хил қалинликда бўлган қозон ясаш керак. Унинг ҳажми v

га тенг бўлиб, ташқи сирти энг кичик бўлсин. Жав. Қозон шар шаклида

бўлиб, ички радиуси $R = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}$ бўлиши керак.

48. Юзи S ва периметри энг кичик бўлган тенг ёнли трапеция ясалсин;

трапециянинг асосидаги бурчак α га тенг. Жав. Ён томонининг узунлиги

$\sqrt{\frac{S}{\sin \alpha}}$ га тенг.

14 Н. С. Пискунов

36. Томони a бўлган квадрат шаклдаги тунукадан мумкин қадар катта

ҳажмли усти очик яшик ясаш керак. Бунинг учун тунуканинг тўртала бур-

чагидан тенг квадратлар қирқиб олинадиган квадратлар томонининг узунлиги

топилсин. Жав. $\frac{a}{6}$.

37. Берилган доирага ички чизилган тўғри тўртбурчаклардан энг катта

юзга эга бўлган квадрат эканлиги исбот қилинсин. Квадратнинг периметри

ҳам энг катта бўлиши кўрсатилсин.

38. Доирага ички чизилган тенг ёнли учбурчаклардан энг катта пери-

метрга эга бўлган тенг томонли учбурчак эканлиги кўрсатилсин.

39. Гипотенузасининг узунлиги h булган тўғри бурчакли учбурчаклар-

дан энг катта юзга эга бўлган топилсин. Жав. Ҳар бир катети $\frac{h}{\sqrt{2}}$ га

тенг бўлади.

40. Радиуси R бўлган шарга ички чизилган тўғри цилиндрлардан энг

катта ҳажмга эга бўлган цилиндрнинг баландлиги топилсин. Жав. Баландли-

ги $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ га тенг.

41. Радиуси R бўлган шарга ички чизилган тўғри цилиндрлардан энг

катта ён сиртга эга бўлган цилиндрнинг баландлиги топилсин. Жав. Баланд-

лиги $R\sqrt{2}$ га тенг.

42. Радиуси R бўлган шарга ташқи чизилган энг кичик ҳажмли тўғри

конуснинг баландлиги топилсин. Жав. Баландлиги $4R$ га тенг (конуснинг

ҳажми шар ҳажмининг иккитасига тенг).

43. Ости квадрат шаклда бўлиб, усти очик резервуарни (суюқлик

сақланадиган идиш) ички томондан қўрғошин билан қоплаш керак. Си-

ғини 32 л бўлган резервуарга энг кам миқдорда қўрғошин сарф бўлиши

учун унинг ўлчовлари қандай бўлиши керак? Жав. Баландлиги 0,2 м, асо-

сининг томони 0,4 м (яъни асосининг томони баландлигидан икки марта

катта бўлиши керак).

44. Тунукачи усти очик тарнов ясамоқчи. Тарнов туби ва ёнларининг

кенглиги 10 см дан бўлиб, сигими энг катта бўлиши учун устининг кенгли-

ги қандай бўлиши керак? Жав. 20 см.

45. Маълум ҳажмга эга бўлган конус шаклдаги чодирнинг баландлиги

асосининг радиусидан $\sqrt{2}$ марта катта бўлганда, унга энг кам материал ке-

тиши исботлансин.

46. Усти очик, девори ва асоси маълум қалинликда бўлган цилиндр

ясаш керак. Уни талаб қилинган ҳажмда, энг кам материалдан ясаш учун

ўлчовларини қандай олиш керак? Жав. Агар R — цилиндр ички асосининг

радиуси, v — ички ҳажми бўлса, $R = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$ бўлиши керак.

47. Усти ва остидан ярим сфералар билан тугайдиган цилиндр шаклда

ва девори бир хил қалинликда бўлган қозон ясаш керак. Унинг ҳажми v

га тенг бўлиб, ташқи сирти энг кичик бўлсин. Жав. Қозон шар шаклида

бўлиб, ички радиуси $R = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}$ бўлиши керак.

48. Юзи S ва периметри энг кичик бўлган тенг ёнли трапеция ясалсин;

трапециянинг асосидаги бурчак α га тенг. Жав. Ён томонининг узунлиги

$\sqrt{\frac{S}{\sin \alpha}}$ га тенг.

14 Н. С. Пискунов

49. Радиуси R бўлган шар ичига энг катта ҳажмга эга бўлган мунтазам уч бурчакли призма чизилсин. *Жав.* Призманинг баландлиги $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ га тенг.

50. Радиуси R бўлган ярим шарга энг кичик ҳажмли ташқи конус ясаш керак; конуснинг асоси ярим шар асосида бўлади; конуснинг баландлиги топилисин. *Жав.* Конуснинг баландлиги $R\sqrt{3}$ га тенг.

51. Радиуси r бўлган цилиндрга энг кичик ҳажмли ташқи тўғри конус чизилсин; цилиндр ва конус доиравий асосларининг текисликлари ва уларнинг марказлари бир-бирининг устига тушади деб фараз қилинади. *Жав.*

Конус асосининг радиуси $\frac{3}{2}r$ га тенг.

52. Радиуси R бўлган доира шаклидаги тунукадан шундай сектор қийиб олдинсинки, уни ўраб ясалган воронка энг катта ҳажмга эга бўлсин.

Жав. Секторнинг марказий бурчаги $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ га тенг.

53. Қирраси a бўлган куб ичига қуйидагича қилиб цилиндрлар ясалган; цилиндрларнинг ўқлари куб диагонали билан устма-уст тушади, асосларининг айланалари кубнинг ёқларига уринади. Шу цилиндрлардан энг катта

ҳажмга эга бўлгани топилисин. *Жав.* Цилиндрнинг баландлиги $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ га, асо-

сининг радиуси $\frac{a}{\sqrt{6}}$ га тенг.

54. Тўғри бурчакли координаталар системасининг биринчи квадратига (x_0, y_0) нуқта берилган. Бу нуқтадан шундай тўғри чизиқ ўтказилсинки, у координата ўқларининг мусбат йўналишлари билан энг кичик юзли учбурчак ҳосил қилсин. *Жав.* Тўғри чизиқ координата ўқларидан $2x_0$ ва $2y_0$

кесмаларни кесадм, яъни тенгламаси $\frac{x}{2x_0} + \frac{y}{2y_0} = 1$ бўлади.

55. $y^2 = 2px$ парабола ўқида унинг учидан a масофада бир нуқта берилган; парабола устида шу нуқтага энг яқин турган нуқтанинг абсциссаси топилисин. *Жав.* $x = a - p$.

56. Кўндаланг кесими тўғри тўртбурчак бўлган ёғочнинг маҳкамлигини энига ва баландлигининг кубига тўғри пропорционал деб қабул қилиб, диаметри 16 см бўлган ёўладан кесиб олинадиган тўрт қиррали ёғочнинг эни қандай бўлганда, у энг катта маҳкамликка эга бўлишини топинг. *Жав.* Эни 8 см га тенг бўлганда.

57. Миноносец қирғоқнинг энг яқин нуқтасидан 9 км масофада якорда турибди, миноносецдан ҳарбий лагерга хабарчи юбориш керак; лагерь қирғоқ бўйлаб миноносецга энг яқин нуқтадан 15 км масофада жойлашган. Агар хабарчи пиёда соатига 5 км юрса, қайиқда эса соатига 4 км йўл босса, лагерга энг қисқа вақтда етиб бориш учун қирғоқнинг қандай пунктида қайиқдан қирғоққа чиқиши керак? *Жав.* Лагердан 3 км масофада.

58. Нуқта текисликда MN чизикдан ташқари муҳитда v_1 тезлик билан, MN чизик бўйлаб v_2 тезлик билан ҳаракат қилади. Энг қисқа вақт ичида A нуқтадан MN чизикдаги B нуқтага етиш учун нуқта қандай йўл билан бориши керак? A нуқтанинг MN чизикдан масофаси h га, A нуқтанинг MN чизикдаги проекцияси α нинг B дан масофаси Q га тенг. *Жав.* Агар нуқтанинг йўли ABC бўлса, $\frac{AB}{v_1} > \frac{v_1}{v_2}$ бўлганда $\frac{AC}{v_2} = \frac{v_1}{v_2}$ ва $\frac{AB}{v_1} < \frac{v_1}{v_2}$ бўлганда $AC = AB$.

59. ω юк ричаг билан кўтарилмоқда; F куч ричагининг бир учига қўйилган, таянч нуқтаси ричагининг иккинчи учида. Агар юк таянч нуқтадан a см масофадаги нуқтага осилган, ричаг ўқи узунлигининг ҳар бир санти-

метридаги оғирлиги v грамм бўлса, юкни кўтаришга сарф бўладиган куч энг кам бўлиши учун ричагининг узунлиги қандай бўлиши керак? Жав. $x =$

$$= \sqrt{\frac{2av}{v}} \text{ см.}$$

60. Номатълум x миқдорни n марта ўлчаганда ушбу сонлар топилган: $x_1, x_2, \dots, x_n$. Агар x учун $x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ сон қабул қилинса, ўлчаш хатолари квадратларининг йиғиндиси $(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2$ энг кичик бўлиши кўрсатилсин.

61. Суюқликнинг канал деворига ишқаланишини мумкин қадар камайтириш учун сув тегадиган юз мумкин қадар кичик бўлиши керак. Қўндаланг кесими берилган тўғри тўрт бурчакли очиқ каналнинг эни баландлигидан икки марта катта бўлганда, у энг яхши шаклга эга бўлиши кўрсатилсин.

Қуйидаги эгри чизиқларнинг бурилиш нуқталари, қавариқлик ва ботиқлик интерваллари аниқлансин.

62. $y = x^5$. Жав. $x < 0$ да эгри чизиқ қавариқ; $x > 0$ да эгри чизиқ ботиқ; $x = 0$ бурилиш нуқтаси. 63. $y = 1 - x^2$. Жав. Эгри чизиқ ҳамма ерда қавариқ. 64. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$. Жав. $x = 1$ да бурилиш нуқтаси бўлади. 65. $y = (x - b)^2$. Жав. $x = b$ да бурилиш нуқтаси бўлади. 66. $y = x^4$.

Жав. Эгри чизиқ ҳамма ерда ботиқ. 67. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$. Жав. $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ да бурилиш нуқталари бўлади. 68. $y = \lg x$. Жав. $x = 1$ да бурилиш нуқталари бўлади. 69. $y = xe^{-x}$. Жав. $x = 2$ да бурилиш нуқтаси бўлади. 70. $y = a - \sqrt{x - b}$. Жав. $x = b$ да бурилиш нуқтаси бўлади. 71. $y = a - \frac{1}{x - b}$. Жав. Эгри чизиқнинг бурилиш нуқтаси йўқ.

Қуйидаги эгри чизиқларнинг асимптоталари топилсин:

72. $y = \frac{1}{x - 1}$. Жав. $x = 1, y = 0$. 73. $y = \frac{1}{(x + 2)^2}$. Жав. $x = -2;$

$y = 0$. 74. $y = c + \frac{a^3}{(x - b)^3}$. Жав. $x = b, y = c$. 75. $y = e^{\frac{1}{x}} - 1$. Жав. $x = 0;$
 $y = 0$. 76. $y = \ln x$. Жав. $x = 0$. 77. $y^3 = 6x^2 + x^3$. Жав. $y = x + 2$. 78. $y^3 = a^3 - x^3$. Жав. $y + x = 0$. 79. $y^3 = \frac{x^3}{2a - x}$. Жав. $x = 2a$. 80. $y^3(x - 2a) = x^3 - a^3$. Жав. $x = 2a; y = \pm(x + a)$.

Функциялар текширилсин ва графиклари ясалсин: 81. $y = x^4 - 2x^2 + 10$.

82. $y = \frac{8a^3}{x^3 + 4a^2}$. 83. $y = e^{-\frac{1}{x}}$. 84. $y = \frac{6x}{1 + x^2}$. 85. $y = \frac{4 + x}{x^2}$. 86. $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.

87. $y = \frac{x + 2}{x^3}$. 88. $y = \frac{x^2}{1 + x}$. 89. $y^2 = x^3 - x$. 90. $y = \frac{x^5}{3 - x^2}$. 91. $y = \sqrt[3]{x^2} +$

$+ 2$. 92. $y = x - \sqrt{x^3 + 1}$. 93. $y = \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}$. 94. $y = xe^{-x}$. 95. $y = x^2e^{-x^2}$.

96. $y = x - \ln(x + 1)$. 97. $y = \ln(x^2 + 1)$. 98. $y = \sin 3x$. 99. $y = x + \sin x$.

100. $y = x \sin x$. 101. $y = e^{-x} \sin x$. 102. $y = \ln \sin x$. 103. $y = \frac{\ln x}{x}$. 104. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \frac{1}{2}t. \end{cases}$

105. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3. \end{cases}$ 106. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$ 107. $\begin{cases} x = ae^t \cos t, \\ y = ae^t \sin t. \end{cases}$

Қушимча масалалар.

- Қуйидаги чизиқларнинг асимптоталари топилинсин: 108. $y = \frac{x^3 + 1}{1 + x}$. Жав. $x = -1$; $y = x - 1$. 109. $y = x + e^{-x}$. Жав. $y = x$. 110. $2y(x+1)^2 = x^3$. Жав. $x = -1$; $y = \frac{1}{2}x - 1$. 111. $y^3 = a^3 - x^3$. Асимптоталар йўқ. 112. $y = e^{-2x} \sin x$. Жав. $y = 0$. 113. $y = e^{-x} \sin 2x + x$. Жав. $y = x$. 114. $y = x \ln \left(e + \frac{1}{x}\right)$. Жав. $x = -\frac{1}{e}$; $y = x + \frac{1}{e}$. 115. $y = xe^{\frac{1}{x^2}}$. Жав. $x = 0$, $y = x$. 116. $x = \frac{2t}{1-t^2}$; $y = \frac{t^2}{1-t^2}$. Жав. $y = \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

- Қуйидаги функциялар текширилсин ва графиклари ясалсин: 117. $y = |x|$. 118. $y = \ln |x|$. 119. $y^2 = x^3 - x$. 120. $y = (x+1)^2(x-2)$. 121. $y = x + |x|$. 122. $y = \sqrt[3]{x^3} - x$. 123. $y = x^2$, $\frac{x^2}{x+1}$. 124. $y = \frac{x^2}{2} - \ln x$. 125. $y = \frac{x^3}{2} \ln x$. 126. $y = \frac{1}{e^x - 1}$. 127. $y = \frac{x}{\ln x}$. 128. $y = x + \frac{\ln x}{x}$. 129. $y = x \ln x$. 130. $y = e^{\frac{1}{x}} - x$. 131. $y = |\sin 3x|$. 132. $y = \frac{\sin x}{x}$. 133. $y = x \arctg x$. 134. $y = x - 2 \arctg x$. 135. $y = e^{-2x} \sin 3x$. 136. $y = |\sin x| + x$. 137. $y = \sin(x^2)$. 138. $y = \cos^3 x + \sin^3 x$. 139. $y = \frac{x + |x|}{2}$. 140. $y = \frac{x - |x|}{2}$. 141. $y = \sin\left(\frac{x + |x|}{2}\right) - \frac{x - |x|}{2}$ ($-\pi < x < \pi$). 142. $y = \cos\left(\frac{x - |x|}{2}\right) - \frac{x + |x|}{2}$ ($-\frac{\pi}{2} < x < 1$). 143. $y = \frac{1}{2}(3x + |x|) + 1$. 144. $y = \frac{1}{2}[3(x-1) + |x-1|] + 1$ ($0 < x < 2$).

VI БОБ

ЭГРИ ЧИЗИҚНИНГ ЭГРИЛИГИ

1- §. Ёйнинг узунлиги ва унинг ҳосиласи

Эгри чизиқнинг M_0M ёйи (137- расм) (a, b) интервалда аниқланган

$$y = f(x)$$

функциянинг графиги бўлсин. Эгри чизиқ ёйининг узунлигини аниқлаймиз, AB эгри чизиқда

$$M_0, M_1, M_2, \dots, M_{l-1}, M_l, \dots, M_{n-1}, M$$

нуқталарни оламиз. Олинган нуқталарни туташтириб M_0M ёйга ички чизилган $M_0M_1M_2 \dots M_{l-1}M_l \dots M_{n-1}M$ синиқ чизиқни ҳосил қиламиз. Бу синиқ чизиқ узунлигини P_n билан белгилаймиз.

Агар M_0M ёйга ички чизилган $M_0M_1M_2 \dots M_{l-1}M_l \dots M_{n-1}M$ синиқ чизиқ узунлигининг унинг $M_{l-1}M_l$ кесмаларидан энг каттасининг узунлиги нолга интилгандаги лимити мавжуд бўлса ва у лимит орадаги $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ нуқталарни танлашга боғлиқ бўлмаса, шу лимит (уни s билан белгилаймиз) M_0M эгри чизиқ ёйининг узунлиги деб аталади.



137- расм.

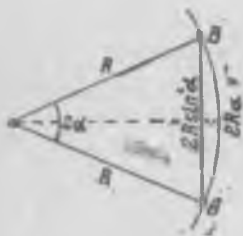
Ихтиёрий эгри чизиқ ёйи узунлигининг бу таърифи айлана узунлигининг таърифига ўхшаш эканини қайд қилиб ўтамиз.

Агар $[a, b]$ кесмада $f(x)$ функция ва унинг $f'(x)$ ҳосиласи узлуксиз бўлса, $y = f(x)$ эгри чизиқнинг $[a, f(a)]$ ва $[b, f(b)]$ нуқталар билан чегараланган ёйи аниқ узунликка эга бўлиши XII бобда исбот қилинади ва шу узунликни ҳисоблаш йўли курсатилади. Курсатилган шартлар бажарилганда эгри чизиқнинг ҳар қандай ёйи узунлигининг уни тортиб турувчи ватар-

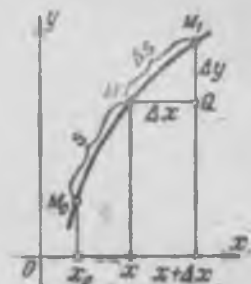
га нисбати, ватар узунлиги нолга интилганда, 1 га интилиши ҳам, яъни

$$\lim_{M_0, M \rightarrow 0} \frac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}} = 1$$

ўша ерда (натижа сифатида) аниқланади. Бу теорема айлана учун осонгина исбат қилиниши мумкин*), аммо умумий ҳолда уни ҳозирча исботсиз қабул қиламиз. Қуйидаги масалани қараб чиқамиз. Текисликда тенгламаси $y = f(x)$ бўлган эгри чизиқ берилган деб фараз қилайлик. $M_0(x_0, y_0)$ — эгри чизиқнинг биронта тайин нуқтаси, $M(x, y)$ — шу эгри чизиқнинг ўзгарувчи нуқтаси бўлсин. M_0M ёйнинг узунлигини s билан белгилаймиз (139- расм).



138- расм.



139- расм.

M нуқтанинг абсциссаси x ўзгарганда ёй узунлиги s ҳам ўзгаради, яъни s x нинг функцияси, s нинг x бўйича ҳосиласини топамиз.

x га Δx орттirma берамиз. Бунда s ёй $\Delta s = \overline{MM_1}$ узунлигича орттirma олади. $\overline{MM_1}$ — бу ёйни тортувчи ватар бўлсин.

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x}$ ни топиш учун қуйидагича киришамиз: ΔMM_1Q дан

$$\overline{MM_1}^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

*) AB ёйни қараймиз (138- расм), унинг марказий бурчаги 2α га тенг. Бу ёйнинг узунлиги $2R\alpha$ га тенг (R — айлананинг радиуси), уни тортиб турувчи ватарнинг узунлиги эса $2R \sin \alpha$ га тенг. Шунга кўра

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\overline{AB}}{AB} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2R\alpha}{2R \sin \alpha} = 1.$$

Бу тенгликнинг чап томонини Δs^2 га кўпайтирамиз ва бўламиз:

$$\left(\frac{MM_1}{\Delta s}\right)^2 \Delta s^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Бу тенгликнинг ҳамма ҳадларини Δx^2 га бўламиз:

$$\left(\frac{MM_1}{\Delta s}\right)^2 \left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2.$$

$\Delta x \rightarrow 0$ шarti билан чап ва ўнг томонларининг лимитларини топамиз.

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{MM_1}{\Delta s} = 1$ ва $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ эканини эътиборга олиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \text{ ёки } \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (1)$$

Ёйнинг дифференциали учун ушбу тенгликни ҳосил қиламиз:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (2)$$

ёки*)

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (2')$$

Эгри чизик $y = f(x)$ тенглама билан берилган ҳол учун ёй узунлигининг дифференциали ифодасини топдик. Лекин эгри чизик параметрик тенгламалар билан берилганда ҳам (2') формула ўз кучини сақлайди.

Агар эгри чизик

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

параметрик тенгламалар билан берилган бўлса,

$$dx = \varphi'(t) dt, \quad dy = \psi'(t) dt$$

бўлади ва (2') ифода ушбу шаклни олади:

$$ds = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

*) Қатъий айтганда (2') формула $dx > 0$ бўлган ҳолдагина тўғри. Агар $dx < 0$ бўлса, $ds = -\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Шунинг учун формулани умумий ҳолда $|ds| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ шаклда ёзиш тўғрироқ бўлади.

2- §. Эгрилик.

Эгри чизиқ шаклини характерловчи элементлардан бири унинг эгрилик, эгилиш даражасидир.

Бизга берилган эгри чизиқ ўз-ўзини кесмайди ва ҳар бир нуқтасида аниқ уринмага эга деб фараз қиламиз. Эгри чизиққа унинг ихтиёрий иккита A ва B нуқталарида уринмалар ўтказамиз ва шу уринмалар орасида ҳосил бўлган бурчакни — аниқроғи уринманинг A нуқтадан B нуқтага ўтишдаги айланиш бурчагини α билан белгилаймиз (140- расм). Бу бурчак AB ёйнинг *қўшнилик бурчаги* деб аталади. Узунликлари бир хил бўлган иккита ёйнинг қайси бирида қўшнилик бурчаги катта бўлса, ўша ёй кўпроқ эгилган бўлади (140 ва 141- расмлар).



140- расм.



141- расм.

Иккинчи томондан ҳар хил узунликдаги ёйларни фақат тегишли қўшнилик бурчакларига қараб уларнинг эгриланиш даражасига баҳо бера олаймиз. Бундан, эгри чизиқнинг эгриланиш даражасининг тула характеристикаси қўшнилик бурчагининг тегишли ёй узунлигига нисбатидан иборат бўлиши келиб чиқади.

1- таъриф. AB ёйнинг ўртача эгрилиги $K_{\text{ур}}$ деб, тегишли қўшнилик бурчаги α нинг ёй узунлигига нисбатига айтилади:

$$K_{\text{ур}} = \frac{\alpha}{AB}.$$

Бир эгри чизиқнинг ҳар хил қисмлари (ёйлари) учун ўртача эгрилик ҳар хил бўлиши мумкин; масалан, 142- расмда кўрсатилган эгри чизиқда AB ва A_1B_1 ёйларнинг узунликлари бир хил бўлса ҳам, уларнинг ўртача эгриликлари ҳар хилдир. Ҳатто ҳар хил нуқталар яқинда эгри чизиқнинг эгриланиши

хар хил. Берилган чизикнинг берилган A нуқтаси яқинида эгрилик даражасини характерлаш учун эгри чизикнинг берилган нуқтасидаги эгрилик деган тушунчани киритамиз.

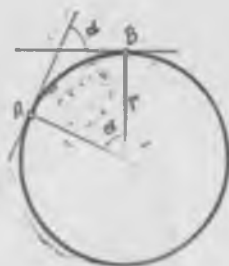
2- таъриф. Эгри чизикнинг A нуқтасидаги эгрилиги K_A деб, $\widehat{AB}$ ёйи ўртача эгриликнинг ёй узунлиги нолга интилган (яъни B нуқта A га яқинлашган) пайтдаги лимитига айтилади:

$$K_A = \lim_{B \rightarrow A} K_{\text{ур}} = \lim_{\widehat{AB} \rightarrow 0} \frac{\alpha^*)}{\widehat{AB}}.$$

Мисол. Радиуси r бўлган айлана учун: 1) марказий бурчак α га мос $\widehat{AB}$ ёйининг ўртача эгрилиги аниқлансин (143- расм); 2) A нуқтадаги эгрилиги аниқлансин.



142- расм.



143- расм.

Еч и ш. 1) Равшанки, $\widehat{AB}$ ёйининг қўшнилик бурчаги α га тенг, ёйининг узунлиги αr га тенг. Демак,

$$K_{\text{ур}} = \frac{\alpha}{\alpha r},$$

ёки

$$K_{\text{ур}} = \frac{1}{r}.$$

2) A нуқтадаги эгрилик:

$$K = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha r} = \frac{1}{r}.$$

Шундай қилиб, радиуси r бўлган айлана ёйининг ўртача эгрилиги ёйининг узунлигига ва ҳолатига боғлиқ эмас, ҳамма ёйлар учун $\frac{1}{r}$ га тенг. Айлананинг ҳар бир нуқтасидаги эгрилиги ҳам нуқтани танлашга боғлиқ эмас ва $\frac{1}{r}$ га тенг.

*) Лимитнинг миқдори эгри чизикда ўзгарувчи B нуқтани A нуқтанинг қайси томонида олиганига боғлиқ эмас деб фараз қиламиз.

Изоҳ. Шунинг айтиб ўтиш керакки, ихтиёрий эгри чизиқнинг ҳар хил нуқталаридаги эгрилиги, умуман айтганда, ҳар хил бўлади. Буни қуйида кўрамиз.

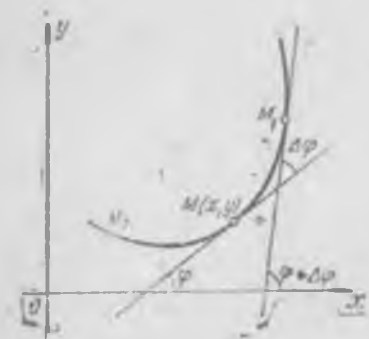
3- §. Эгриликни ҳисоблаш

Берилган эгри чизиқнинг ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтасидаги эгрилигини ҳисоблаш учун формула чиқарамиз. Бунда эгри чизиқ Декарт координатлари системасида

$$y = f(x) \quad (1)$$

шаклдаги тенглама билан берилган ва $f(x)$ функция узлуксиз иккинчи ҳосилага эга деб фараз қиламиз.

Эгри чизиққа унинг абсциссалари x ва $x + \Delta x$ бўлган M ва M_1 нуқталарида уринмалар утказамиз ва бу уринмаларнинг Ox ўқиға оғиш бурчакларини φ ва $\varphi + \Delta\varphi$ билан белгилаймиз (144- расм).



144- расм.

Эгри чизиқнинг биронта ўзгармас M_0 нуқтасидан бошлаб ҳисобланган $\overline{MM_0}$ ёй узунлигини s билан белгилаймиз; унда $\Delta s = \overline{M_0 M_1} - \overline{M_0 M}$, $|\Delta s| = \overline{MM_1}$ бўлади.

144- расмдан бевосита кўриш мумкинки, $\overline{MM_1}$ ёйга мос қўшнилик бурчаги φ билан $\varphi + \Delta\varphi$ бурчак айирмасининг абсолют қийматига, яъни $|\Delta\varphi|$ га тенг*).

Таърифга мувофиқ эгри чизиқнинг $\overline{MM_1}$ қисмидаги уртача

эгрилик:

$$K_{\text{ур.}} = \frac{|\Delta\varphi|}{|\Delta s|} = \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right|.$$

M нуқтадаги эгриликни ҳосил қилиш учун бу ифоданинг $\overline{MM_1}$ ёй узунлиги нолга интилиш шарти билан лимитини топиш керак:

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right|.$$

* 144- расмда тасвирланган эгри чизиқ учун $|\Delta\varphi| = \Delta\varphi$ экани равшан, чунки $\Delta\varphi > 0$.

φ ва s миқдорларнинг ихкаласи x га боғлиқ (x нинг функцияси) бўлгани учун φ ни s нинг функцияси деб қараш мумкин. Биз бу функцияни параметр x ёрдами билан параметрик шаклда берилган деб ҳисоблай оламиз. Унда

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds},$$

демак,

$$K = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|, \quad (2)$$

$\frac{d\varphi}{ds}$ ни ҳисоблаш учун параметрик шаклда берилган функцияни дифференциаллаш формуласи

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}}$$

дан фойдаланамиз. $\frac{d\varphi}{dx}$ ҳосилани $y = f(x)$ функция орқали ифода-
далаш учун $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}$, демак,

$$\varphi = \arctg \frac{dy}{dx}$$

эканини кўрамиз.

Сунгги тенгликни x бўйича дифференциаллаб, ушбуни топамиз:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

$\frac{ds}{dx}$ ҳосилани эса VI бобнинг 1- § да топган эдик:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Шунинг учун

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

ёки $K = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|$ бўлгани учун ушбу формулани ҳосил қиламиз:

$$K = \frac{\left| \frac{d^2y}{dx^2} \right|}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}. \quad (3)$$

Демак, эгри чизиқнинг иккинчи ҳосила $\frac{d^2y}{dx^2}$ мавжуд ва ўз-луksиз бўлган ҳар қандай нуқтасида эгриликни ҳисоблаш мумкин. Уни ҳисоблаш учун (3) формула хизмат қилади. Эгри чизиқнинг эгрилигини ҳисоблаганда махраждаги илдининг фақат арифметик (яъни мусбат) қийматини олиш кераклигини ёдда сақлаш лозим; чунки таърифга кўра чизиқнинг эгрилиги манфий бўла олмайди.

1- мисол. $y^2 = 2px$ параболанинг: а) ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтасидаги, б) $M_1(0, 0)$ нуқтасидаги, в) $M_2\left(\frac{p}{2}, p\right)$ нуқтасидаги эгрилиги аниқлансин.

Ечиш. $y = \sqrt{2px}$ функциянинг биринчи ва иккинчи ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{\sqrt{2px}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{(2px)^{3/2}}.$$

Топилган ифодаларни (3) формулага қўйиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$а) \quad K = \frac{p^2}{(2px + p^2)^{3/2}}.$$

$$б) \quad K_{x=0, y=0} = \frac{1}{p^2}.$$

$$в) \quad K_{x=p/2, y=p} = \frac{1}{2\sqrt{2}p}.$$

2- мисол. $y = ax + b$ тўғри чизиқнинг ихтиёрий (x, y) нуқтасидаги эгрилиги аниқлансин.

Ечиш.

$$y' = a, \quad y'' = 0.$$

(3) формуладан

$$K = 0$$

эганини ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, тўғри чизиқ эгрилиги ноль бўлган чизиқдир. Бу натижани эгриликнинг таърифидан бевосита ҳосил қилиш мумкин.

4- §. Параметрик шаклда берилган чизиқнинг эгрилигини ҳисоблаш

Эгри чизиқ параметрик тенгламалар билан берилган бўлсин:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Унда (III боб 24- § га қаранг):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''\varphi' - \psi'\varphi''}{(\varphi')^3}.$$

Бу ифодаларни олдинги параграфдаги (3) формулага қўйиб, шуни ҳосил қиламиз:

$$K = \frac{|\psi''\varphi' - \psi'\varphi''|}{[\varphi'^2 + \psi'^2]^{3/2}}. \quad (1)$$

Мисол. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ циклоиданинг нхтиёрий (x, y) нуқтасидаги эгрилиги аниқлансин.

Ечиш.

$$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t), \quad \frac{d^2x}{dt^2} = a \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = a \sin t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = a \cos t.$$

Бу ифодаларни (3) формулага қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} K &= \frac{|a(1 - \cos t)a \cos t - a \sin t \cdot a \sin t|}{[a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t]^{3/2}} = \frac{|\cos t - 1|}{2^{3/2}a(1 - \cos t)^{3/2}} = \\ &= \frac{1}{2^{3/2}a(1 - \cos t)^{1/2}} = \frac{1}{4a \left| \sin \frac{t}{2} \right|}. \end{aligned}$$

5- §. Қутб координаталардаги тенглама билан берилган чизиқнинг эгрилигини ҳисоблаш

Эгри чизиқ

$$\rho = f(\theta). \quad (1)$$

тенглама билан берилган бўлсин.

Қутб координаталардан Декарт координаталарига ўтиш формулаларини ёзамиз:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta. \end{cases} \quad (2)$$

Бу ифодалардаги ρ ўрнига унинг θ орқали ифодасини, яъни $f(\theta)$ ни қўйсак, ушбу тенгликлар ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} x = f(\theta) \cos \theta, \\ y = f(\theta) \sin \theta. \end{cases} \quad (3)$$

Кейинги тенгламаларга (1) эгри чизикнинг параметрик тенгламалари деб қараш мумкин, бу ерда параметр θ бўлади. Бу ҳолда

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dp}{d\theta} \cos \theta - p \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dp}{d\theta} \sin \theta + p \cos \theta,$$

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} = \frac{d^2p}{d\theta^2} \cos \theta - 2 \frac{dp}{d\theta} \sin \theta - p \cos \theta,$$

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} = \frac{d^2p}{d\theta^2} \sin \theta + 2 \frac{dp}{d\theta} \cos \theta - p \sin \theta.$$

Бу ифодаларни бундан олдинги параграфдаги (1) формулага қўйиб, эгри чизикнинг эгрилигини қутб координаталарда ҳисоблаш учун ушбу формулани ҳосил қиламиз:

$$K = \frac{|p^3 + 2p'^2 - pp''|}{(p^2 + p'^2)^{3/2}}. \quad (4)$$

Мисол. Архимед спирали $p = a\theta$ ($a > 0$) ихтиёрий нуқта-сидаги эгрилиги аниқлансин (145- расм).

Ечмш.

$$\frac{dp}{d\theta} = a, \quad \frac{d^2p}{d\theta^2} = 0.$$

Демак,

$$K = \frac{|a^2\theta^3 + 2a^3|}{(a^2\theta^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a} \frac{\theta^3 + 2}{(\theta^2 + 1)^{3/2}}.$$

θ нинг катта қийматлари учун ушбу тақрибий триглик-

ларни ёзиш мумкин: $\frac{\theta^3 + 2}{\theta^3} \approx 1$, $\frac{\theta^3 + 1}{\theta^3} \approx 1$; шунинг учун олдинги формула-даги $\theta^3 + 2$ билан ва $\theta^3 + 1$ ни θ^3 га алмаштириб, ушбу тақрибий форму-лани ҳосил қиламиз (θ нинг катта қийматлари учун):

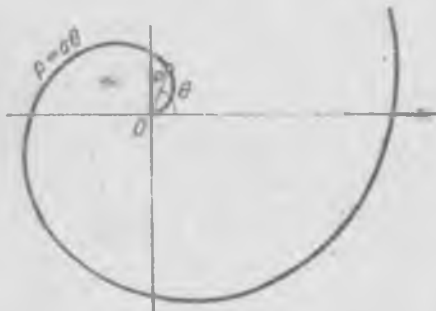
$$K \approx \frac{1}{a} \frac{\theta^3}{(\theta^2)^{3/2}} = \frac{1}{a\theta}.$$

Демак, θ нинг катта қийматларида Архимед спиралининг эгрилиги ра-диуси $a\theta$ га тенг бўлган айлана эгрилигига тахминан тенг бўлади.

6- §. Эгрилик радиуси ва доираси. Эгрилик маркази. Эволюта ва эвольвента

Таъриф. Чизикнинг берилган M нуқтасидаги эгрилиги K га тескари бўлган R миқдор шу чизикнинг берилган нуқтаси-даги эгрилик радиуси деб аталади:

$$R = \frac{1}{K}. \quad (1)$$



145- расм.

ёки

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|} \quad (2)$$

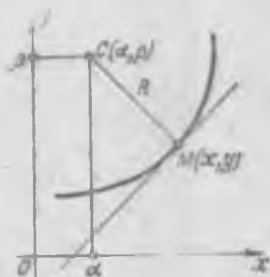
M нуқтада эгри чизиққа унинг ботиқлик томонига йуналган нормал ясаймиз ва шу нормалда M нуқтадаги эгрилик радиуси R га тенг бўлган MC кесма оламиз. C нуқта берилган эгри чизиқнинг M нуқтадаги эгрилик маркази дейилади; радиуси R , маркази C нуқтада бўлган (айланаси M нуқтадан ўтадиган) доира эгри чизиқнинг M нуқтадаги эгрилик доираси дейилади (146- расм).

Эгрилик доирасининг таърифидан кўринадики, берилган нуқтада эгри чизиқ эгрилиги билан эгрилик доирасининг эгрилиги бир-бирига тенг.

Эгрилик марказининг координаталарини аниқловчи формулаларни чиқарамиз.



146- расм.



147- расм.

Эгри чизиқ тенгламаси

$$y = f(x) \quad (3)$$

бўлсин.

Эгри чизиқда бир $M(x, y)$ нуқта оламиз ва шу нуқтага тегишли эгрилик маркази координаталари α ва β ни аниқлаймиз (147- расм). Бунинг учун эгри чизиққа M нуқтадаги нормал тенгламасини ёзамиз:

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x). \quad (4)$$

(Бу ерда X ва Y нормал нуқтасининг ўзгарувчи координата-

лари.) $C(\alpha, \beta)$ нуқта нормал устида булгани учун, унинг координаталари (4) тенгламани қаноатлантириши керак:

$$\beta - y = -\frac{1}{y'}(x - \alpha). \quad (5)$$

$C(\alpha, \beta)$ нуқта $M(x, y)$ нуқтадан эгрилик радиуси R га тенг масофада туради:

$$(x - \alpha)^2 + (\beta - y)^2 = R^2. \quad (6)$$

(5) ва (6) тенгламаларни бирга ечиб, α ва β ни аниқлаймиз:

$$(\alpha - x)^2 + \frac{1}{y'^2}(\alpha - x)^2 = R^2, \quad (x - \alpha)^2 = \frac{y'^2}{1 + y'^2} R^2;$$

бундан:

$$\alpha = x \pm \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} R, \quad \beta = y \mp \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} R,$$

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|} \text{ бўлгани учун}$$

$$\alpha = x \pm \frac{y'(1 + y'^2)}{|y''|}, \quad \beta = y \mp \frac{1 + y'^2}{|y''|}.$$

Охирги формулаларда каср олдида қайси ишорани олиш масаласини ечиш учун $y'' > 0$ бўлган ҳолни ва $y'' < 0$ бўлган ҳолни қараш керак. Агар $y'' > 0$ бўлса, бу нуқтада эгри чизиқ ботиқ ва, демак, $\beta > y$ (147- расм), шунга кўра пастки ишораларни олиш керак. Бу ҳолда $|y''| = y''$ эканини эътиборга олганда, эгрилик маркази координаталарининг формулалари бундай бўлади:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \\ \beta &= y + \frac{1 + y'^2}{y''}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Шундай йўл билан $y'' < 0$ бўлганда ҳам (7) формулалар ўз кучини сақлашини кўрсатиш мумкин.

Агар эгри чизиқ

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

параметрик тенгламалар билан берилган бўлса, эгрилик марказининг координаталарини топиш учун (7) формуладаги y' ва y'' ўрнига уларнинг параметр орқали

$$y' = \frac{\dot{y}_t}{\dot{x}_t}; \quad y'' = \frac{\dot{x}_t \ddot{y}_t - \dot{y}_t \ddot{x}_t}{\dot{x}_t^3}.$$

ифодаларини қўйиш керак. Унда

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= x - \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}, \\ \beta &= y + \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

1-мисол. $y^2 = 2px$ параболанинг: а) ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтасидаги, б) $M_0(0, 0)$ нуқтасидаги, в) $M_1\left(\frac{p}{2}, p\right)$ нуқтасидаги эгрилик марказининг координаталари аниқлансин.

Ечиш. $\frac{dy}{dx}$ ва $\frac{d^2y}{dx^2}$ нинг қийматларини (7) формулага қўйиб, ушбуларни ҳосил қиламиз (148-расм):

$$\begin{aligned} \text{а) } \alpha &= 3x + p, & \beta &= -\frac{(2x)^{3/2}}{\sqrt{p}}, \\ \text{б) } x &= 0 \text{ булганда: } \alpha = p, \beta = 0; \\ \text{в) } x &= \frac{p}{2} \text{ булганда: } \alpha = \frac{5p}{2}, \beta = -p. \end{aligned}$$

Агар берилган чизиқнинг $M_1(x, y)$ нуқтасида эгрилик полга тенг бўлмаса, бу нуқтага аниқ эгрилик маркази $C_1(\alpha, \beta)$ мос келади. Берилган чизикнинг ҳамма эгрилик марказлари тўплами бирор янги чизиқни ташкил этади, бу чизиқ биринчи чизиққа нисбатан эволюта дейилади.

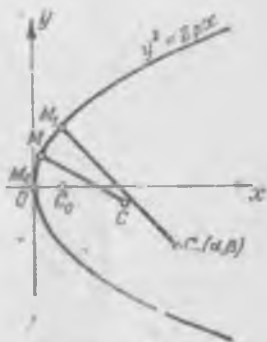
Шундай қилиб, берилган чизиқ эгрилик марказларининг геометрик ўрни унинг *эволютаси* дейилади. Берилган чизиқ ўзининг эволютасига нисбатан *эвольвента* ёки *инволюта* (ёки *ёйилма*) дейилади.

Агар берилган эгри чизиқ тенгламаси $y = f(x)$, бўлса, (7) тенгламаларни эволютанинг параметрик тенгламалари (параметр x) дсб қараш мумкин. Бу тенгламалардан параметр x ни (агар мумкин бўлса) йўқотиб, эволютанинг ўзгарувчи координаталари α ва β орасида бевосита муносабат топамиз. Агар эгри чизиқ параметрик тенгламалар $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ билан берилган бўлса, (7') тенгламалар эволютанинг параметрик тенгламаларини беради (чунки x, y, x', y', x'', y'' миқдорлар t нинг функцияларидир).

2-мисол. $y^2 = 2px$ парабола эволютасининг тенгламаси топилсин.

Ечиш. 1-мисолга асосан параболанинг ҳар қандай (x, y) нуқтаси учун ушбу тенгликларга эгамиз:

$$\begin{aligned} \alpha &= 3x + p, \\ \beta &= -\frac{(2x)^{3/2}}{\sqrt{p}}. \end{aligned}$$



148-расм.

Бу тенгламалардан параметр x ни чиқариб ташлаб, ушбуни ҳосил қиламиз:

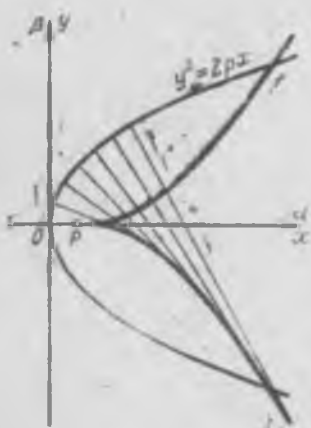
$$\beta^3 = \frac{8}{27p} (a - p)^3.$$

Бу — яримкубик парабола тенгламасидир (149- расм).
3- мисол. Параметрик тенгламалар:

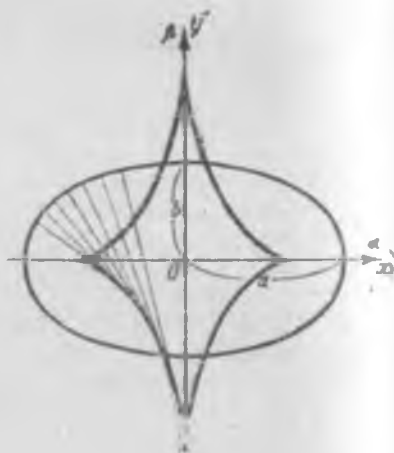
$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

билан берилган эллипс эволютасининг тенгламаси топилади.
Ечиш. x ва y нинг t бўйича ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} x' &= -a \sin t, & y' &= b \cos t; \\ x'' &= -a \cos t & y'' &= -b \sin t. \end{aligned}$$



149- расм.



150- расм.

Ҳосилалар ифодаларини (7') формулаларга қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} a &= a \cos t - \frac{b \cos t (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)}{ab \sin^2 t + ab \cos^2 t} = \\ &= a \cos t - a \cos t \sin^2 t - \frac{b^2}{a} \cos^3 t = \left(a - \frac{b^2}{a}\right) \cos^3 t. \end{aligned}$$

Шундай қилиб,

$$a = \left(a - \frac{b^2}{a}\right) \cos^3 t.$$

Шунга ўхшаш:

$$\beta = \left(b - \frac{a^2}{b}\right) \sin^3 t.$$

Параметр t ни чиқариб ташлаб, эллипс эволютасининг тенгламасини ушбу шаклда ҳосил қиламиз:

$$\left(\frac{x}{b}\right)^{2a} + \left(\frac{y}{a}\right)^{2b} = \left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right)^{2a}$$

Бу ерда a ва b — эволютанинг ўзгарувчи координаталари (150- расм).
4- мисол. Циклоида

$$x = a(t - \sin t),$$

$$y = a(1 - \cos t).$$

эволютасининг параметрик тенгламалари топилин.

Еч и ш.

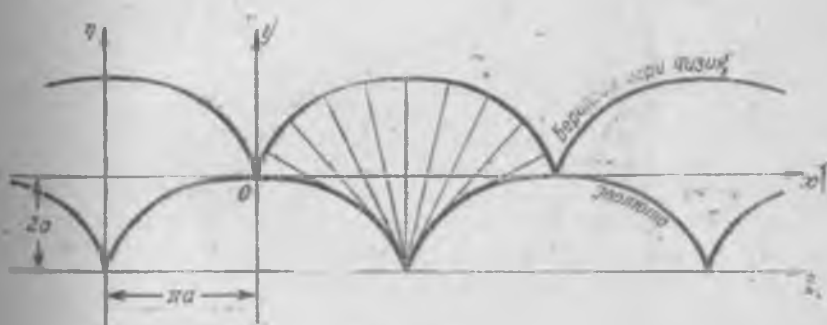
$$x' = a(1 - \cos t), \quad y' = a \sin t,$$

$$x'' = a \sin t, \quad y'' = a \cos t.$$

Бу ифодаларни (7') формулаларга қўйиб, ушбуларни ҳосил қиламиз:

$$\alpha = a(t + \sin t),$$

$$\beta = -a(1 - \cos t).$$



151- расм.

Энди:

$$\alpha = \xi - \pi a,$$

$$\beta = \eta - 2a,$$

$$t = \tau - \pi$$

леб фараз қилиб, ўзгарувчиларни алмаштирамиз; бунда эволюта тенгламалари ушбу шаклни олади:

$$\xi = a(\tau - \sin \tau),$$

$$\eta = a(1 - \cos \tau);$$

бу тенгламалар ξ, η координаталар системасида яна ясовчи доирасининг радиуси a бўлган циклоидани белгилайди. Демак, циклоиданинг эволютаси яна циклоида бўлади, лекин кейинги циклоида аввалгига нисбатан Ox ўқ бўйича — πa қадар ва Oy ўқ бўйича — $2a$ қадар силжиган бўлади (151- расм).

7-§. Эволютанинг хоссалари

1-теорема. Берилган эгри чизикқа нормал унинг эволютасига уринма бўлади.

Исбот. Ўтган параграфнинг (7') параметрик тенгламалари билан аниқланган эволютага уринманинг бурчак коэффициенти ушбуга тенг:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\frac{d\beta}{dx}}{\frac{d\alpha}{dx}}.$$

Ўша (7') тенгламаларга асосан:

$$\frac{d\alpha}{dx} = - \frac{3y''^2 y'^2 - y' y''' - y'^2 y'''}{y''^2} = - y' \frac{3y' y''^2 - y''' - y'^2 y'''}{y''^2}, \quad (1)$$

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{3y''^2 y' - y''' - y'^2 y'''}{y''^2} \quad (2)$$

эканини назарга олиб, ушбу муносабатни ҳосил қиламиз:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = - \frac{1}{y'}.$$

Лекин y' — эгри чизикқа тегишли нуқтадаги уринманинг бурчак коэффициенти, шунинг учун ҳосил қилинган муносабатдан эгри чизикқа уринма билан унинг эволютаси тегишли нуқтасидаги уринма бир-бирига перпендикуляр экани келиб чиқади, яъни эгри чизикқа нормал унинг эволютасига уринма бўлади.

2-теорема. Агар эгри чизикнинг бирор $M_1 M_2$ қисмида эгрилик радиуси монотон ўзгарса (яъни ё фақат ўсса, ё фақат камайса), эгри чизикнинг шу қисмида эволюта ёйи узунлигининг орттирмаси (абсолют қиймат бўйича) берилган эгри чизик эгрилик радиусининг мос орттирмасига тенг.

Исбот. VI бобнинг 1-§ даги (2') формулага асосан ушбу тенгликка эга бўламиз:

$$ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2,$$

бу ерда ds — эволюта ёйи узунлигининг дифференциали; бундан

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2.$$

Бунга (1) ва (2) ифодаларни қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = (1 + y'^2) \left(\frac{3y' y''^2 - y''' - y'^2 y'''}{y''^2} \right)^2. \quad (3)$$

Энди $\left(\frac{dR}{dx}\right)^2$ ни топамиз. Маълумки,

$$R = \frac{(1+y'^2)^{1/2}}{y''}, \text{ шунинг учун } R^2 = \frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}.$$

Бу тенгламанинг иккала томонини x бўйича дифференциаллаб, тегишли алмаштиришларни бажаргандан сўнг ушбунни ҳосил қиламиз:

$$2R \frac{dR}{dx} = \frac{2(1+y'^2)^2 (3y'y''^2 - y''' - y'^2 y''')}{(y''^2)^2}.$$

тенгликнинг иккала томонини $2R = \frac{2(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$ га бўлиб, ушбунни ҳосил қиламиз:

$$\frac{dR}{dx} = \frac{(1+y'^2)^{1/2} (3y'y''^2 - y''' - y'^2 y''')}{y''^2}.$$

Квадратга кўтариб, ушбунни ҳосил қиламиз:

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)^2 = (1+y'^2) \left(\frac{3y'y''^2 - y''' - y'^2 y'''}{y''^2}\right)^2. \quad (4)$$

(3) ва (4) тенгликларни таққослаб, ушбунни топамиз:

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dx}\right)^2,$$

бундан

$$\frac{dR}{dx} = \mp \frac{ds}{dx}.$$

Шартга кўра $\frac{dR}{dx}$ ишораси ўзгармайди (R фақат ўсади ёки фақат камаёди), демак, $\frac{ds}{dx}$ нинг ишораси ҳам ўзгармайди. Аниқлик учун $\frac{dR}{dx} < 0$, $\frac{ds}{dx} > 0$ деб қабул қиламиз (бу 152-расмга мос келади). Демак, $\frac{dR}{dx} = -\frac{ds}{dx}$.

M_1 нуқтанинг абсциссаси x_1 , M_2 нуқтанинг абсциссаси x_2 бўлсин. $[x_1, x_2]$ кесмада $s(x)$ ва $R(x)$ функцияларга Коши теоремасини қўлланамиз:

$$\frac{s(x_2) - s(x_1)}{R(x_2) - R(x_1)} = \left(\frac{ds}{dx}\right)_{x=\xi} = -1,$$

бу ерда ξ x_1 ва x_2 орасидаги сон ($x_1 < \xi < x_2$).

Ушбу белгилашларни киритамиз (152- расм):

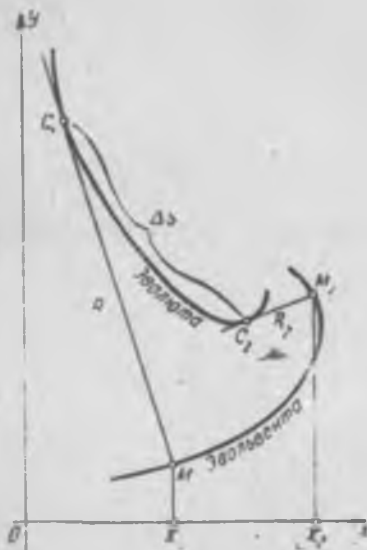
$$s(x_2) = s_2, \quad s(x_1) = s_1, \quad R(x_2) = R_2, \quad R(x_1) = R_1,$$

у ҳолда $\frac{s_2 - s_1}{R_2 - R_1} = -1$, ёки $s_2 - s_1 = -(R_2 - R_1)$. Бу эса

$$|s_2 - s_1| = |R_2 - R_1|.$$

демакдир.

Бу тенглик эгрилик радиуси ўсганда ҳам худди шундай исботланади.



152- расм.



153- расм.

1 ва 2- теоремаларни эгри чизиқ ошкор тенглама $y = f(x)$ билан берилган ҳол учун исботладик.

Агар эгри чизиқ параметрик тенгламалар билан берилган бўлса, бу теоремалар ўз кучини сақлайди ва уларнинг исботи ҳам худди ўшандай ўтказилади.

Изоҳ. Эгри чизиқни (эвольвентани) ўзининг эволютаси бўйича ясаш учун ушбу содда механик усулни кўрсатамиз.

Эгилувчи линейка эволюта C_0C_1 (153- расм) формаси бўйича эгилган бўлсин. Бир учи C_0 нуқтага боғланган чузилмайдиган ип ўша линейка бўйлаб ўралган бўлсин. Ипни доим тортилган ҳолатда ёя бошласак, ипнинг иккинчи учи M_1M_0 эгри чизиқни — эвольвентани чизади. „Эвольвента“ — ёйилма номи

ҳам шундан келиб чиққан. Ҳосил қилинган эгри чизиқ ҳақиқатан эвольвента эканлигининг исботи юқорида аниқланган эволюта хоссаларига асосланиб ўтказилиши мумкин.

Битта эволютага чексиз кўп ҳар хил эвольвенталар мос келишини қайд этиб ўтамиз (153- расм).

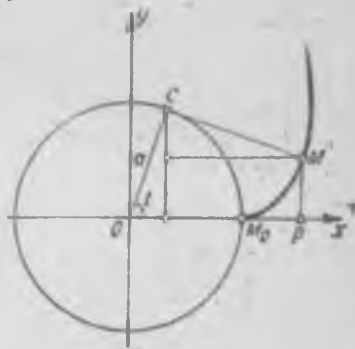
Мисол. Радиуси a бўлган айлана берилган бўлсин (154- расм). Бу айлананинг эвольвенталаридан $M_0(a, 0)$ нуқтадан ўтганини олайлик.

$CM = CM_0 = at$ эканини эътиборга олиб, айлана эвольвентаси тенгламасини ҳосил қилиш осон:

$$OP = x = a(\cos t + t \sin t),$$

$$PM = y = a(\sin t - t \cos t).$$

Тишги гилдирак тишининг профили кўпинча доира эвольвентаси шаклида бўлишини қайд қилиб ўтамиз.



154- расм.

8- §. Тенгламанинг ҳақиқий илдизларини тақрибий ҳисоблаш

Функцияни текшириш методлари

$$f(x) = 0$$

тенглама илдизларининг тақрибий қийматларини топишга имкон беради.

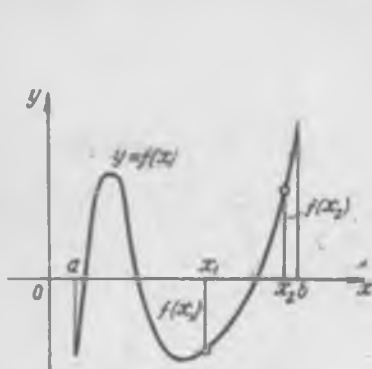
Агар берилган тенглама биринчи, иккинчи, учинчи ёки тўртинчи даражали алгебраик*) тенглама бўлса, у тенглама илдизларини унинг коэффициентлар орқали чекли сондаги қўшиш, айтириш, кўпайтириш, бўлиш ва илдиз чиқариш амаллари ёрдами билан ифодалашга имкон берадиган формулалар бор. Тўртинчидан юқори даражали тенгламалар учун, умуман айтганда, бундай формулалар йўқ. Аммо, агар ҳар қандай алгебраик ёки алгебраик бўлмаган (трансцендент) тенгламанинг коэффициентлари ҳарфлар билан эмас, сонлар билан берилган бўлса, у ҳолда тенгламанинг илдизларини истаган даражада аниқлик билан тақрибий ҳисоблаш мумкин. Ҳатто алгебраик тенгламанинг илдизлари радикаллар орқали ифодаланадиган ҳолларда ҳам, амалда баъзан тенгламани тақрибий ечиш методини қўлланиш қулай бўлади. Қуйида тенглама илдизларини тақрибий ҳисоблашнинг баъзи методлари баён қилинади.

*) Агар $f(x)$ кўпҳад бўлса, $f(x) = 0$ тенглама алгебраик тенглама дейлади (VII боб, 6-§ га қаранг).

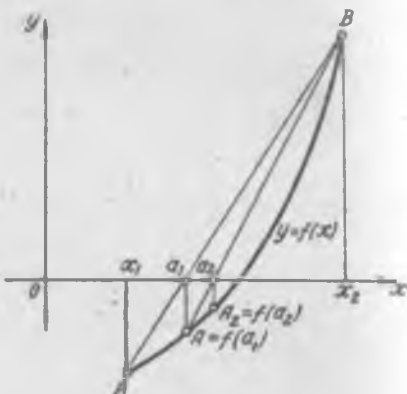
1. Ватарлар усули. Ушбу тенглама

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

берилган бўлиб, бу ерда $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз, икки марта дифференциалланувчи бўлсин. $y = f(x)$ функцияни $[a, b]$ кесма ичида текшириб шундай $[x_1, x_2]$ кесма ажратамизки, бу кесма ичида функция монотон (ё ўсувчи, ё кин камаювчи) ва кесма четларида $f(x_1)$ ва $f(x_2)$ функцияларнинг қийматлари ҳар хил ишорали бўлсин. Аниқлик учун $f(x_1) < 0$; $f(x_2) > 0$ деб қабул қиламиз (155-расм). $y = f(x)$ функция $[x_1, x_2]$ кесмада узлуксиз бўлгани учун унинг графиги x_1 ва x_2 нуқталар орасидаги биронта нуқтада Ox ўқни кесадн.



155- расм.



156- расм.

$y = f(x)$ эгри чизиқнинг x_1 ва x_2 абсциссаларга тегишли чегара нуқталарини туташтирувчи AB ватарни ўтказамиз. Бу ватарнинг Ox ўқ билан кесишган нуқтанинг a_1 абсциссаси ил дизнинг тақрибий қиймати бўлади (156-расм). Бу тақрибий қийматни топиш учун берилган иккита $A(x_1, f(x_1))$ ва $B(x_1, f(x_2))$ нуқтадан ўтувчи AB тўғри чизиқ тенгламасини ёзамиз

$$\frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

$x = a_1$ бўлганда $y = 0$ бўлгани учун

$$\frac{-f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{a_1 - x_1}{x_2 - x_1},$$

бундан

$$a_1 = x_1 - \frac{(x_2 - x_1)f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}. \quad (2)$$

Ёки шакл алмаштиргандан кейин:

$$a_1 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}. \quad (2')$$

Илдизнинг аниқроқ қийматини топиш учун $f(a_1)$ ни аниқлаймиз. Агар $f(a_1) < 0$ бўлса, (2) формулани $[a_1, x_2]$ кесмага қўланиб, шу усулни такрорлаймиз. Агар $f(a_1) > 0$ бўлса, шу формулани $[x_1, a_1]$ кесмага қўлланамиз. Бу усулни бир неча марта такрорлаб, илдизнинг янада аниқроқ a_1, a_2 ва ҳ. к. қийматларини топамиз.

1-мисол.

$$f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$$

тенглама илдизларининг тақрибий қийматлари топилин.

Еч и ш. Даставвал $f(x)$ функция монотон бўладиган оралиқларини топамиз. $f'(x) = 3x^2 - 6$ ҳосилани топиб, $x < -\sqrt{2}$ бўлганда ҳосила мусбат, $-\sqrt{2} < x < +\sqrt{2}$ оралиқда манфий ва $x > \sqrt{2}$ бўлганда яна мусбат эканини кўрамиз (157-расм). Шундай қилиб, функция учта монотонлик участкага эга; буларнинг ҳар бирида функциянинг биттадан илдизи бор.

Бундан кейинги ҳисоблашларни қулайлаштириш мақсадида бу монотонлик оралиқларини торайтирамиз (лекин ҳар бир оралиқда тегишли илдиз бўлсин). Бунинг учун $f(x)$ ифодага x нинг исталган қийматларини қўйиб, ҳар бир монотонлик оралиғида чегара нуқталарда функция ҳар хил ишоради бўладиган кичикроқ кесмалар ажратамиз:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0, & f(0) = 2, \\ x_2 = 1, & f(1) = -3, \\ x_3 = -3, & f(-3) = -7, \\ x_4 = -2, & f(-2) = 6, \\ x_5 = 2, & f(2) = -2, \\ x_6 = 3, & f(3) = 11. \end{array}$$

Шундай қилиб, илдизлар ушбу интервалларда бўлади:

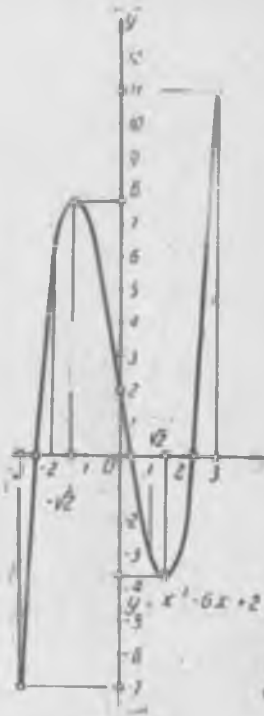
$$(3; -2), (0; 1), (2; 3).$$

Илдизнинг $(0; 1)$ интервалдаги тақрибий қийматини топамиз; (2) формулага кўра:

$$a_1 = 0 - \frac{(1-0)2}{-3-2} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

Энди

$$f(0,4) = 0,4^3 - 6 \cdot 0,4 + 2 = -0,336, \quad f(0) = 2$$



157-расм.

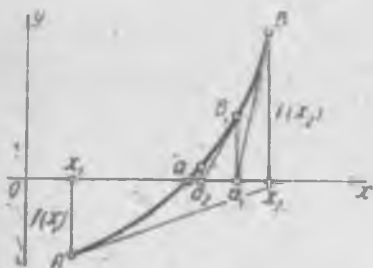
бўлгани учун илдиш 0 билан 0,4 орасидадир. Шу интервалга яна (2) формулани қўлланиб, иккинчи аниқроқ тақрибий қийматни топамиз:

$$a_1 = 0 - \frac{(0,4 - 0) \cdot 2}{-0,336 - 2} = \frac{0,8}{2,336} = 0,342 \text{ ва ш.к.}$$

Илдишларнинг бошқа интерваллардаги тақрибий қийматларини ҳам шу равишда топамиз.

2. Уринмалар усули (Ньютон усули). Яна $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$ ва $[x_1, x_2]$ кесмада биринчи ҳосиланинг ишораси ўзгармайди деб фараз қиламиз. Бу ҳолда (x_1, x_2) интервалда $f(x) = 0$ тенглама битта илдишга эга бўлади. Энди яна $[x_1, x_2]$ кесмада иккинчи ҳосиланинг ишораси ҳам ўзгармайди деб фараз қиламиз; бунга илдишни ўз ичига олган интервал узунлигини камайтириш йўли билан эришиш мумкин.

$[x_1, x_2]$ кесмада иккинчи ҳосила ишорасининг ўзгармаслиги эгри чизик $[x_1, x_2]$ участкада ё фақат қавариқ, ё фақат ботиқ эканини кўрсатади.



158- расм.

Эгри чизикқа B нуқтада уринма ўтказамиз (158- расм). Уринманинг Ox ўқ билан кесишган нуқтасининг абсциссаси a_1 илдишнинг тақрибий қиймати бўлади. Шу абсциссани топиш учун B нуқтадаги уринма тенгламасини ёзамиз:

$$y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2).$$

$y = 0$ бўлганда $x = a_1$ бўлишини эътиборга олиб, ушбуни топамиз:

$$a_1 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}. \quad (3)$$

Сўнгра B_1 нуқтада уринма ўтказиб, шу равишда илдишнинг аниқроқ қиймати a_2 ни топамиз. Бу усулни бир неча марта такрорлаб, илдишнинг исталган аниқликдаги тақрибий қийматини топа оламиз.

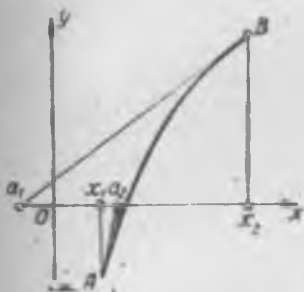
Қуйидаги ҳолни айтиб ўтамиз. Агар уринмани B нуқтадан эмас, балки A нуқтадан ўтказганимизда, уринманинг Ox ўқ билан кесишган нуқтаси (x_1, x_2) интервалдан ташқарида қолар эди.

158 ва 159- расмлардан кўринадики, ёйнинг қайси чегара нуқтасида $f(x)$ функция ишораси билан унинг иккинчи ҳосиласининг ишораси бир хил бўлса, ўша нуқтада уринма ўтказиш керак. $[x_1, x_2]$ кесмада иккинчи ҳосила шартга кўра ишорасини сақлайди, шунинг учун чегара нуқталарининг би-

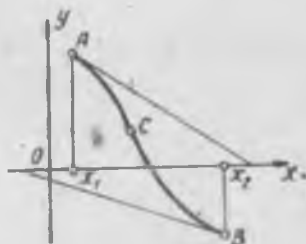
рида функциянинг ишораси билан иккинчи ҳосиласининг ишораси аяббатта бир хил бўлади. Бу қоида $f'(x) < 0$ бўлганда ҳам ўз кучини сақлайди. Агар уринма интервалнинг чап чегарасидан ўтказилса, (3) формулада x_1 ўрнига x_1 ни қўйиш керак:

$$a_1 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (3')$$

Агар (x_1, x_2) интервал ичида C бурилиш нуқтаси бўлса, уринмалар усули илдизининг (x_1, x_2) интервалдан ташқарида ётган тақрибий қийматини бериши мумкин (160- расм).



159- расм.



160- расм.

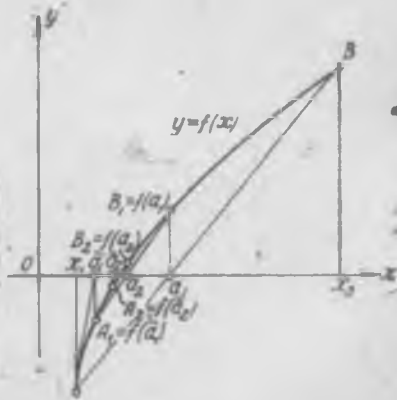
2- мисол. $f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$ тенгламанинг $(0; 1)$ интервалдаги илдизини ҳисоблаш учун (3) формулани қўллаёмиз.

$$f(0) = 2, \quad f'(0) = (3x^2 - 6)_{x=0} = -6, \quad f''(x) = 6x > 0,$$

шунга кўра (3) формула бўйича шунини топамиз:

$$a_1 = 0 - \frac{2}{-6} = \frac{1}{3} = 0,333.$$

3. Бирлаштирилган усул (161- расм). Ватарлар усули ва уринмалар усулини $[x_1, x_2]$ кесмада бир вақтда қўлланиб, изланган a илдизининг икки томонида ётган a_1 ва a_1 нуқталарини топамиз (чунки $f(a_1)$ ва $f(a_1)$ ординаталарининг ишоралари ҳар хил). Сўнгра $[a_1, a_1]$ кесмада яна ватарлар усулини ва уринмалар усулини қўллаёмиз. Натижада илдизининг қийматига



161- расм.

янада яқинроқ иккита a_2 ва a_2 сонларни топамиз. Топилган тақрибий қийматлар орасидаги айирма талаб этилган аниқлик даражасидан кичик бўлгунча ишни шу равишда давом эттирамиз. Бирлаштирилган метод билан биз изланган илдизга бир вақтда икки томондан яқинлашамиз (яъни бир вақтда илдизнинг ҳақиқий қийматидан ортиқроқ ва камроқ тақрибий қийматларни топамиз).

Чунончи, юқорида қаралган мисолда ўрнига қўйиш нули билан

$$f(0,333) > 0, \quad f(0,342) < 0$$

эканинга ишонч ҳосил қиламиз. Демак, илдизнинг қиймати топилган тақрибий қийматлар орасида бўлади:

$$0,333 < x < 0,342.$$

VI бобга машқлар

Эгри чизиқларнинг кўрсатилган нуқталарда эгрилиги топилисин; 1. $b^3x^3 + a^2y^3 = a^3b^3$, (0, b) ва (a, 0) нуқталарда. Жав. (0, b) нуқтада $\frac{b}{a^3}$, (a, 0) нуқтада $\frac{a}{b^3}$. 2. $xy = 12$, (3, 4) нуқтада Жав. $\frac{24}{12^2}$. 3. $y = x^3$, (x_1, y_1) нуқтада. Жав. $\frac{6x_1}{(1+9x_1^4)^{3/2}}$. 4. $16y^3 = 4x^4 - x^3$, (2, 0) нуқтада. Жав. $\frac{1}{2}$. 5. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, ихтиёрий нуқтада. Жав. $1/(3\sqrt[3]{|axy|})$.

Қуйидаги эгри чизиқларнинг кўрсатилган нуқталарда эгрилик радиуси топилисин; ҳар бир эгри чизиқ чизилсин ва тегишли эгрилик доираси ясалсин. 6. $y^3 = x^3$, (4, 8) нуқтада. Жав. $R = \frac{80\sqrt{10}}{3}$. 7. $x^2 = 4ay$, (0, 0) нуқтада. Жав. $R = 2a$. 8. $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, (x_1, y_1) нуқтада. Жав. $R = \frac{(b^2x_1^2 + a^2y_1^2)^{3/2}}{a^2b^2}$. 9. $y = \ln x$, (1, 0) нуқтада. Жав. $R = 2\sqrt{2}$. 10. $y = \sin x$, $(\frac{\pi}{2}, 1)$ нуқтада. Жав. $R = 1$. 11. $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$, $t = t_1$ бўлганда.

Жав. $R = 3a \sin t_1 \cos t_1$.

Қуйидаги эгри чизиқларнинг эгрилик радиуслари топилисин; 12. $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 4t - t^3 \end{cases}$, $t = 1$ бўлганда. Жав. $R = 6$. 13. Айлана $\rho = a \sin \theta$.

Жав. $R = \frac{a}{2}$. 14. Архимед спирали $\rho = a\theta$. Жав. $R = \frac{(\rho^2 + a^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2a^2}$. 15. Кар-

дионда $\rho = a(1 - \cos \theta)$. Жав. $R = \frac{2}{3}\sqrt{2a\rho}$. 16. Лемниската $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$.

Жав. $R = \frac{a^2}{3\rho}$. 17. Парабола $\rho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$. Жав. $R = 2a \sec^3 \frac{\theta}{2}$. 18. $\rho = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$.

Жав. $R = \frac{3}{4} a \sin^2 \frac{\theta}{3}$.

Ушбу эгри чизикларнинг эгрилик радиуси энг кичик қийматга эга бўлган нуқталари топилсин; 19. $y = \ln x$. Жав. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2} \ln 2\right)$. 20. $y = e^x$.

Жав. $\left(-\frac{1}{2} \ln 2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 21. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$. Жав. $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$

22. $y = a \ln \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. Жав. $(0, 0)$ нуқтада $R = \frac{a}{2}$.

Ушбу эгри чизикларнинг ҳар бири учун эгрилик маркази координаталари (α, β) ва эволюта тенгламаси топилсин. 23. $\frac{x^3}{a^3} - \frac{y^3}{b^3} = 1$. Жав. $\alpha =$

$-\frac{(a^3 + b^3)x^3}{a^4}$, $\beta = -\frac{(a^3 + b^3)y^3}{b^4}$. 24. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Жав. $\alpha = x +$

$+ 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$, $\beta = y + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$. 25. $y^3 = a^3x$. Жав. $\alpha = \frac{a^4 + 15y^4}{6ay^3}$;

$\beta = \frac{a^4y - 9y^5}{2a^4}$. 26. $\begin{cases} x = 3t, \\ y = t^3 - 6. \end{cases}$ Жав. $\alpha = -\frac{4}{3}t^3$; $\beta = 3t^3 - \frac{3}{2}$.

27. $\begin{cases} x = k \ln \operatorname{ctg} \frac{t}{2} - k \cos t, \\ y = k \sin t. \end{cases}$ Жав. $y = \frac{k}{2} \left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$ (трактрисса).

28. $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t). \end{cases}$ Жав. $\alpha = a \cos t$; $\beta = a \sin t$. 29. $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$

Жав. $\alpha = a \cos^3 t + 3a \cos t \sin^2 t$; $\beta = a \sin^3 t + 3a \cos^2 t \sin t$. 30. $x^3 - 4x + 2 = 0$ тенгламанинг илдизлари 0,001 гача аниқликда топилсин. Жав. $x_1 = 1,675$; $x_2 = 0,539$; $x_3 = -2,214$. 31. $f(x) = x^5 - x - 0,2 = 0$ тенгламанинг $(1; 1,1)$ интервалдаги илдининг тақрибий қиймати топилсин. Жав. 1,045.

32. $x^4 + 2x^2 - 6x + 2 = 0$ тенгламанинг илдизлари 0,01 гача аниқликда ҳисоблансин. Жав. $0,38 < x_1 < 0,39$; $1,24 < x_2 < 1,25$. 33. $x^3 - 5 = 0$ тенглама

тақрибий ечилсин. Жав. $x_1 \approx 1,71$, $x_{2,3} = 1,71 \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. 34. $x - \operatorname{tg} x = 0$

тенгламанинг 0 ва $\frac{3\pi}{2}$ орасидаги илдининг тақрибий қиймати топилсин.

Жав. 4,4935. 35. $\sin x = 1 - x$ тенгламанинг илдири 0,001 гача аниқликда ҳисоблансин. Қўрсатма: тенглама $f(x) = 0$ кўринишга келтирилсин. Жав. $0,5110 < x < 0,5111$.

Ҳар хил масалалар.

36. Лемниската $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ нинг ҳар бир нуқтасидаги эгрилик шу нуқтанинг радиус-векторига пропорционал эканлиги кўрсатилсин. 37. $\rho =$

$a \ln \frac{3}{4}$ эгри чизик эгрилик радиусининг энг катта қиймати топил-

син. Жав. $R = \frac{3a}{4}$. 38. $y = x \ln x$ эгри чизикнинг $y' = 0$ бўладиган нуқта-

сида эгрилик марказининг координаталари топилсин. Жав. $(e^{-1}; 0)$. 39. Архимед спирали $\rho = a\varphi$ нуқталари учун $\varphi \rightarrow \infty$ да радиус-вектор билан

эгрилик радиуси орасидаги айирма нолга интилиши исботлансин. 40. $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

нуқтада $y = \sin x$ синусоида билан умумий уринма ва эгриликка эга бўлган

$y = ax^2 + bx + c$ парабола топилсин. Графиги ясалсин. *Жав.* $y = -\frac{x^2}{2} +$

$+\frac{\pi x}{2} + 1 - \frac{\pi^2}{8}$. 41. $f(x)$ функция бундай аниқланган:

$-\infty < x < 1$ интервалда $f(x) = x^3$,

$1 < x < \infty$ интервалда $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$f(x)$ чизик ҳамма ерда узлуксиз эгриликка эга бўлмоғи учун a, b, c нинг қийматлари қандай бўлиши керак? Графиги ясалсин. *Жав.* $a = 3, b = -3, c = 1$. 42. Циклонданинг ҳар қандай нуқтасида эгрилик радиуси шу нуқтадаги нормал узунлигидан икки марта катта эканлиги кўрсатилсин. 43. $y =$

$= x^2$ параболанинг $(1, 1)$ нуқтасида эгрилик айланасининг тенгламаси ёзилсин. *Жав.* $(x+4)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{125}{4}$. 44. $y = \lg x$ эгри чизикнинг $\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$ нуқ-

тасида эгрилик айланасининг тенгламаси ёзилсин. *Жав.* $\left(x - \frac{\pi - 10^2}{4}\right)^2 +$

$+\left(y - \frac{9}{4}\right)^2 = \frac{125}{16}$. 45. Ярим уқлари a ва b бўлган эллипс эволютасининг

тула узунлиги топилсин. *Жав.* $4(a^3 - b^3) / ab$. 46. $xe^x = 2$ тенглама илдиэларининг тақрибий қиймати 0,01 гача аниқликда топилсин. *Жав.* Тенглама ягона ҳақиқий $x \approx 0,84$ илдиэга эга. 47. $x \ln x = 0,8$ тенглама илдиэларининг тақрибий қиймати 0,01 гача аниқликда топилсин. *Жав.* Тенглама ягона ҳақиқий $x \approx 1,64$ илдиэга эга. 48. $x^2 \arcsin \lg x = 1$ тенглама илдиэининг тақрибий қиймати 0,001 гача аниқликда топилсин. *Жав.* Тенглама ягона ҳақиқий $x \approx 1,096$ илдиэга эга.

КОМПЛЕКС СОНЛАР. КЎПҲАДЛАР

1-§. Комплекс сонлар. Дастлабки таърифлар

Комплекс сон деб

$$z = a + ib \quad (1)$$

ифодага айтилади, бу ерда a ва b — ҳақиқий сонлар, i — мавҳум бирлик, ушбу тенгликлар билан аниқланади:

$$i = \sqrt{-1} \text{ ёки } i^2 = -1; \quad (2)$$

a — комплекс сон z нинг ҳақиқий қисми, ib — мавҳум қисми дейилади. Улар бундай белгиланади: $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$. Агар $a = 0$ бўлса, $0 + ib = ib$ соф мавҳум сон дейилади; агар $b = 0$ бўлса, ҳақиқий сон ҳосил бўлади: $a + i \cdot 0 = a$. Фақат мавҳум қисмининг ишораси билан фарқ қиладиган икки комплекс сон: $z = a + ib$ ва $\bar{z} = a - ib$ бир-бирига қўшма дейилади.

Ушбу икки асосий таъриф қабул қилинади:

1. Агар $z_1 = a_1 + ib$ ва $z_2 = a_2 + ib_2$ дан иборат икки комплекс сонда

$$a_1 = a_2; \quad b_1 = b_2$$

бўлса, яъни ҳақиқий қисмлар ўзаро ва мавҳум қисмлар ўзаро тенг бўлса, у комплекс сонлар тенг дейилади.

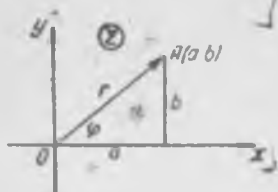
2. Агар $a = 0$, $b = 0$ бўлса, фақат шундагина комплекс сон z нолга тенг бўлади:

$$z = a + ib = 0.$$

1. Комплекс сонларнинг геометрик тасвири. Ҳар қандай комплекс сон $z = a + ib$ ни Ox текисликда координаталари a ва b бўлган $A(a, b)$ нуқта шаклида тасвирлаш мумкин. Аксинча, Ox текисликдаги ҳар қандай $M(a, b)$ нуқта $z = x + iy$ комплекс сонга мос келади. Ўзида комплекс сон тасвирланадиган текислик ўзгарувчи z нинг комплекс текислиги дейилади (162- расм), текисликка доирача ичига z симболи қўйилади.

Ўзгарувчи z комплекс текислигининг Ox ўқда ётувчи нуқталарига ҳақиқий сонлар мос келади ($b = 0$). Оу ўқда ётувчи нуқталар соф *мавҳум сонни* тасвирлайди, чунки бу ҳолда $a = 0$. Шунинг учун комплекс сонларни z нинг комплекс ўзгарувчи текислигида тасвирлаганда Оу ўқ мавҳум сонлар ўқи ёки *мавҳум ўқ*, Ox ўқ эса *ҳақиқий ўқ* дейилади.

$A(a, b)$ нуқтани координаталар боши билан туташтириб, OA векторни ҳосил қиламиз. Баъзи ҳолларда $z = a + ib$ комплекс соннинг геометрик тасвирини OA вектор деб қабул қилиш қулай бўлади.



162- расм.

2. Комплекс соннинг тригонометрик шакли. Координаталар бошини қутб, Ox ўқининг мусбат йўналишини қутб ўқи деб олиб, $A(a, b)$ нуқтанинг қутб координаталарини φ ва r ($r > 0$) билан белгилаймиз. Унда ушбу тенгликларни ёзиш мумкин (162- расм):

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi,$$

демак, комплекс сон z ни бундай тасвирлаш мумкин:

$$a + ib = r \cos \varphi + ir \sin \varphi.$$

ёки

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (3)$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги ифодада $z = a + ib$ комплекс сон ёзувининг *тригонометрик шакли* деб аталади.

r комплекс сон z нинг *модули* деб аталади. φ комплекс сон z нинг аргументи деб аталади; улар бундай ифодаланади:

$$r = |z|, \quad \varphi = \arg z. \quad (4)$$

r ва φ миқдорлар a ва b орқали бундай ифодаланади:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \text{Arc tg } \frac{b}{a}.$$

Демак,

$$\left. \begin{aligned} |z| &= |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}, \\ \arg z &= \arg(a + ib) = \text{Arc tg } \frac{b}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Комплекс соннинг аргументи φ бурчак Ox ўқининг мусбат йўналишидан соат стрелкаси ҳаракатига тескари йўналишда ҳисобланса мусбат, қарама-қарши йўналишда ҳисобланса манфий бўлади. Равшанки, аргумент бир қийматли бўлмасдан, балки

$2k\pi$ қўшилувчигача (k — ихтиёрий бутун сон) аниқликда белгиланади.

Изоҳ. Қўшма комплекс сонлар $z = a + ib$ ва $\bar{z} = a - ib$ тенг модуллерга эга: $|z| = |\bar{z}|$, аргументларининг абсолют қийматлари тенг, аммо ишоралари билан фарқ қилади: $\arg z = -\arg \bar{z}$.

Ҳақиқий сон A ни ҳам (3) шаклда ёзиш мумкин, яъни:

$$A > 0 \text{ бўлса, } A = |A| (\cos 0 + i \sin 0),$$

$$A < 0 \text{ бўлса, } A = |A| (\cos \pi + i \sin \pi).$$

Нолга тенг бўлган комплекс соннинг модули нолга тенг: $|0| = 0$. Нолнинг аргументи сифатида ҳар қандай φ бурчакни қабул қилиш мумкин. Ҳақиқатан ҳар қандай φ бурчак учун ушбу тенгликни ёзиш мумкин:

$$0 = 0 (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

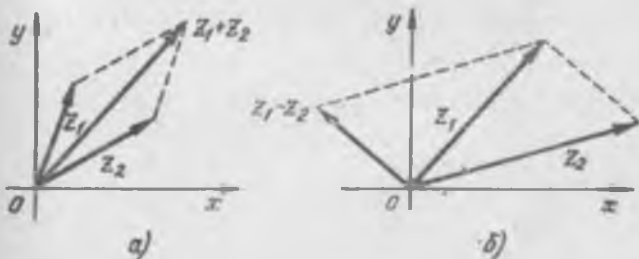
2-§. Комплекс сонлар устида асосий амаллар

1. Комплекс сонларни қўшиш. Икки комплекс сон $z_1 = a_1 + ib_1$ ва $z_2 = a_2 + ib_2$ нинг йиғиндиси деб ушбу

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \quad (1)$$

тенглик билан аниқланган комплекс сонга айтилади.

(1) формуладан векторлар билан тасвирланган комплекс сонларни қўшиш — векторларни қўшиш қондасига мувофиқ бажарилиши келиб чиқади (163-а расм).



163- расм.

2. Комплекс сонларни айириш. Икки $z_1 = a_1 + ib_1$ ва $z_2 = a_2 + ib_2$ комплекс сонларнинг айирмаси деб шундай комплекс сонга айтиладики, унга z_2 комплекс сонни қўшганда z_1 комплекс сон ҳосил бўлади:

$$z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2). \quad (2)$$

Икки комплекс сон айирмасининг модули шу сонларни комплекс ўзгарувчилар текислигида тасвирловчи нуқталар орасидаги масофага тенг (163-б расм):

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}.$$

3. Комплекс сонларни кўпайтириш. $z_1 = a_1 + ib_1$ ва $z_2 = a_2 + ib_2$ комплекс сонлар кўпайтмаси деб, уларни икки ҳадлар сингари алгебра қондасига мувофиқ, лекин

$i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = (-i) \cdot i = -i^2 = 1$, $i^5 = i$ ва ҳ. к., умуман k бутун бўлганда:

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i$$

эканлигини эътиборга олиб кўпайтирганда ҳосил бўлган комплекс сонга айтилади.

Шу қоидага асосан қуйидаги кўпайтмани ҳосил қиламиз:

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ib_1 a_2 + ia_1 b_2 + i^2 b_1 b_2$$

ёки

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(b_1 a_2 + a_1 b_2). \quad (3)$$

Комплекс сонлар тригонометрик шаклда берилган бўлсин:

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Бу сонларнинг кўпайтмасини топамиз:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \\ &+ i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2] = r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \\ &- \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \\ &+ \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Шундай қилиб,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \quad (3')$$

яъни икки комплекс сон кўпайтмаси шундай комплекс сонки, унинг модули кўпайтувчилар модулларининг кўпайтмасига тенг, аргументи эса кўпайтувчилар аргументларининг йиғиндисига тенг.

1-нзох. $z = a + ib$ ва $\bar{z} = a - ib$ қўшма комплекс сонлар кўпайтмаси (3) формулага мувофиқ бундай ифодаланади:

$$z \bar{z} = a^2 + b^2,$$

ёки

$$z \bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

Қўшма комплекс сонлар кўпайтмаси улардан ҳар бири модулининг квадратиغا тенг.

4. Комплекс сонларни бўлиш. Комплекс сонларни бўлиш кўпайтиришга тескари амал каби таърифланади:

$$z_1 = a_1 + ib_1, \quad z_2 = a_2 + ib_2, \quad |z_2| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \neq 0$$

деб фараз қиламиз. У ҳолда $\frac{z_1}{z_2} = z$ шундай комплекс сонки, унда $z_1 = z_2 z$ бўлади. Агар $\frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy$ бўлса, у ҳолда

$$a_1 + ib_1 = (a_2 + ib_2)(x + iy)$$

ёки

$$a_1 + ib_1 = (a_2 x - b_2 y) + i(a_2 y + b_2 x);$$

x ва y ушбу

$$a_1 = a_2 x - b_2 y, \quad b_1 = b_2 x + a_2 y$$

тенгламалар системаси билан аниқланади. Бундан:

$$x = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \quad y = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Ниҳоят, ушбу формулани ҳосил қиламиз:

$$z = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}. \quad (4)$$

Комплекс сонларни бўлиш амалда бундай бажарилади: $z_1 = a_1 + ib_1$ ни $z_2 = a_2 + ib_2$ га бўлиш учун бўлинувчи ва бўлувчини бўлувчига қўшма сонга (яъни $a_2 - ib_2$ га) кўпайтирамиз.

Унда бўлувчи ҳақиқий сон бўлади; унга бўлинувчининг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини бўламиз:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} &= \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a^2 + b^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a^2 + b^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Комплекс сонлар тригонометрик шаклда

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

$$z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

берилган бўлса, ушбунини ҳосил қиламиз:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)]. \quad (5)$$

Бу тенгликни текшириш учун бўлувчини бўлинмага купайтириш кифоя:

$$\begin{aligned} r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)] &= \\ = r_2 \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_2 + \varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_2 + \varphi_1 - \varphi_2)] &= r_1 (\cos \varphi_1 + \\ &+ i \sin \varphi_1). \end{aligned}$$

Шундай қилиб, *икки комплекс сон бўлинмасининг модули бўлинувчи ва бўлувчи модулларининг бўлинмасига тенг; бўлинманинг аргументи бўлинувчи ва бўлувчи аргументларининг айирмасига тенг.*

2-изоҳ. Комплекс сонлар устида амаллар бажариш қондалари шуни кўрсатадики, комплекс сонларни қўшиш, айириш, кўпайтириш ва бўлиш натижасида яна комплекс сон ҳосил бўлади.

Агар ҳақиқий сонларни комплекс сонларнинг хусусий ҳоли деб қараб, комплекс сонлар устида амаллар бажариш қондалари ҳақиқий сонларга татбиқ этилса, бу қондалар арифметикадан бизга маълум одатдаги амаллар қондаларининг ўзи бўлади.

3-изоҳ. Комплекс сонлар йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва бўлинмасининг таърифларига қайтиб, у ифодаларда ҳар бир комплекс сон унинг қўшмаси билан алмаштирилса, шў амалларнинг натижалари ҳам унга қўшма комплекс сонларга алмашинишини текшириб кўриш осон. Бундан ушбу теорема келиб чиқади:

Теорема. *Коэффициентлари ҳақиқий сонлар бўлган ушбу*

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

кўпҳадда x ўрнига $a + ib$ сон, сўнгра унга қўшма сон $a - ib$ қўйилса, ўрнига қўйиш натижалари ҳам ўзаро қўшма бўлади.

3-§. Комплекс сонни даражага кўтариш ва комплекс сондан илдиз чиқариш

1. Даражага кўтариш. Бундан олдинги параграфдаги (3) формуладан, агар n бутун мусбат сон бўлса, ушбу формула келиб чиқади:

$$[r (\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (1)$$

Бу *Муавр формуласи* деб аталади. Бундан кўринадикки, *комплекс сонни бутун мусбат даражага кўтаришда модул*

шу даражага кўтарилади, аргумент эса даража курсаткичига кўпайтирилади.

Энди Муавр формуласининг яна бир татбиқини қараймиз. Бу формулада $r = 1$ деб фараз қилиб,

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Чап томонини Ньютон биноми формуласи бўйича ёйиб, ҳақиқий ва мавҳум қисмларини тенглаб, $\sin n\varphi$ ва $\cos n\varphi$ ни $\sin \varphi$ ва $\cos \varphi$ нинг даражалари орқали ифода қила оламиз. Масалан, $n = 3$ бўлганда:

$$\begin{aligned} \cos^3 \varphi + i 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi - i \sin^3 \varphi = \\ = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi; \end{aligned}$$

икки комплекс соннинг тенглик шартидан фойдаланиб, ушбу тенгликларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \cos 3\varphi &= \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi, \\ \sin 3\varphi &= -\sin^3 \varphi + 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi. \end{aligned}$$

2. Илдииз чиқариш. Комплекс соннинг n -даражали илдииз деб n -даражага кўтарганда илдииз остидаги сонга тенг бўладиган комплекс сонга айтилади, яъни

$$\rho^n (\cos n\psi + i \sin n\psi) = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

бўлса,

$$\sqrt[n]{r} (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho (\cos \psi + i \sin \psi).$$

Тенг комплекс сонларнинг модуллари тенг бўлиши керак, аргументлари эса 2π га каррали сонга фарқ қилиши мумкин бўлгани учун

$$\rho^n = r, \quad n\psi = \varphi + 2k\pi.$$

Бундан

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

бу ерда k — ихтиёрий бутун сон, $\sqrt[n]{r}$ — мусбат r сон илдиизининг арифметик (яъни ҳақиқий мусбат) қиймати. Демак,

$$\sqrt[n]{r} (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right). \quad (2)$$

k га $0, 1, 2, \dots, n-1$ қийматларни бериб, илдиизнинг n та ҳар хил қийматларини топамиз. k нинг бошқа қийматларида аргументлар топилган қийматлардан 2π га каррали сонга фарқ

қилиади ва демак, топилган илдиэлар аввалгилар билан бир хил бўлади.

Шундай қилиб, комплекс соннинг n - даражали илдиэи n та ҳар хил қийматга эга бўлади.

Нолга тенг бўлмаган ҳақиқий A соннинг n - даражали илдиэи ҳам n та қийматга эга бўлади, ҳақиқий сон комплекэ соннинг хусусий ҳолидан иборат бўлгани учун тригонометрик шаклда тасвирланиши мумкин:

агар $A > 0$ бўлса, $A = |A| (\cos 0 + i \sin 0)$;

агар $A < 0$ бўлса, $A = |A| (\cos \pi + i \sin \pi)$.

1- м и с о л. Бирнинг куб илдиэининг ҳамма қийматлари топилсин. Е ч и ш. Бирни тригонометрик шаклда тасвирлаймиз:

$$1 = \cos 0 + i \sin 0.$$

(2) формула бўйича шуни ҳосил қиламиз:

$$\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \frac{0 + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{3}.$$

k га 0, 1, 2 қийматларни бериб, илдиэининг учта қийматини топамиз:

$$x_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1, \quad x_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}, \quad x_3 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}.$$

Маълумки,

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Шунинг учун

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$x_3 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

164- расмдаги A, B, C нуқталар топилган илдиэларнинг геометрик тасвиридир.

3. Икки ҳадли тенгламани е ч и ш.

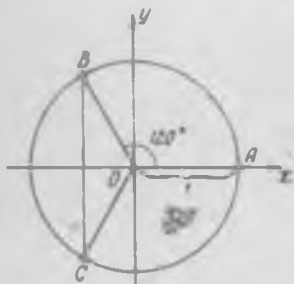
$$x^n = A$$

шаклдаги тенглама икки ҳадли тенглама дейилади. Бу тенгламанинг илдиэларини топамиз.

Агар A ҳақиқий мусбат сон бўлса,

$$x = \sqrt[n]{A} \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$



164- расм.

Қавс ичидаги ифода 1 нинг n - даражали илдизининг ҳамма қийматларини беради.

Агар A ҳақиқий манфий сон бўлса,

$$x = \sqrt[n]{|A|} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{n} \right).$$

Қавс ичидаги ифода — 1 нинг n - даражали илдизининг ҳамма қийматларини беради.

Агар A комплекс сон бўлса, x нинг қийматлари (2) формула бўйича топилади.

2-мисол. $x^4 = 1$ тенглама ечилсин.

Ечиш.

$$x = \sqrt[4]{\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi} = \cos \frac{2k\pi}{4} + i \sin \frac{2k\pi}{4}.$$

k ни 0, 1, 2, 3 га тенглаб, ушбуларни топамиз:

$$x_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$x_2 = \cos \frac{2\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi}{4} = i,$$

$$x_3 = \cos \frac{4\pi}{4} + i \sin \frac{4\pi}{4} = -1,$$

$$x_4 = \cos \frac{6\pi}{4} + i \sin \frac{6\pi}{4} = -i.$$

4-§. Кўрсаткичи комплекс бўлган кўрсаткичли функция ва унинг хоссалари

$z = x + iy$ бўлсин. Агар x ва y ҳақиқий ўзгарувчилар бўлса, z комплекс ўзгарувчи деб аталади. Комплекс ўзгарувчи z нинг ҳар бир қийматига xOy текислигида (комплекс ўзгарувчи текислигида) маълум нуқта мос келади (162-расмга қаранг).

Таъриф. Комплекс ўзгарувчи z нинг бирор комплекс қийматлар соҳасида ҳар бир қийматига бошқа w комплекс миқдорнинг аниқ қиймати мос келса, w комплекс ўзгарувчи z нинг функцияси бўлади. Комплекс аргументнинг функцияси $w = f(z)$ ёки $w = w(z)$ билан белгиланади.

Бу ерда биз комплекс ўзгарувчининг битта функциясини, яъни кўрсаткичли функция

$$w = e^z \text{ ёки } w = e^{x+iy}$$

ни қараймиз.

w функциянинг комплекс қийматлари бундай белгиланади*):

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \quad (1)$$

яъни

$$w(z) = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (2)$$

Мисоллар.

$$1. z = 1 + \frac{\pi}{4} i, \quad e^{1 + \frac{\pi}{4} i} = e \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = e \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

$$2. z = 0 + \frac{\pi}{2} i, \quad e^{0 + \frac{\pi}{2} i} = e^0 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = i,$$

$$3. z = 1 + i, \quad e^{1+i} = e^1 (\cos 1 + i \sin 1) \approx 0,54 + i \cdot 0,83.$$

4. $z = x$ — ҳақиқий сон, $e^{x+0i} = e^x (\cos 0 + i \sin 0) = e^x$ — одатдагича кўрсаткичли функция.

Кўрсаткичли функциянинг хоссалари.

1. Агар z_1 ва z_2 — иккита комплекс сон бўлса, унда

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

Исбот.

$$z_1 = x_1 + i y_1, \quad z_2 = x_2 + i y_2$$

бўлсин. У вақтда

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = \\ &= e^{x_1} e^{x_2} [\cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Иккинчи томондан, тригонометрик шаклдаги икки комплекс соннинг кўпайтмаси ҳақидаги теоремага асосан:

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= e^{x_1+iy_1} e^{x_2+iy_2} = e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1) e^{x_2} (\cos y_2 + \\ &+ i \sin y_2) = e^{x_1} e^{x_2} [\cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2)]. \end{aligned} \quad (5)$$

(4) ва (5) тенгликларда ўнг томонлар тенг, демак, чап томонлар ҳам тенг бўлади: $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.

*) Комплекс ўзгарувчининг кўрсаткичли функциясининг бундай белги-ланиши мақсадга мувофиқлиги қўйида XIII бобнинг 21-§ да ва XVI боб-нинг 18-§ да ҳам кўрсатилади (II том).

2. Шунинг сингари йўл билан

$$e^{z_1 - z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} \quad (6)$$

формула ҳам исботланади.

3. Агар m бутун сон бўлса,

$$(e^z)^m = e^{mz} \quad (7)$$

бўлади. Агар $m > 0$ бўлса, бу формула (3) формулага асосан осонгина ҳосил бўлади; агар $m < 0$ бўлса, бу формула (3) ва (6) формулаларга асосан ҳосил қилинади.

4. Ушбу айният

$$e^{z + 2\pi i} = e^z \quad (8)$$

тўғридир.

Ҳақиқатан, (3) ва (1) формулаларга асосан:

$$e^{z + 2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z.$$

(8) айниятга асосан, e^z кўрсаткичли функция даври $2\pi i$ га тенг бўлган даврий функция эканлиги чиқади.

5. Энди ушбу комплекс миқдорни қараб чиқамиз:

$$w = u(x) + iv(x),$$

бу ерда $u(x)$ ва $v(x)$ ҳақиқий ўзгарувчи x нинг ҳақиқий функцияларидир. Бу w миқдор — ҳақиқий ўзгарувчининг комплекс функциясидир.

а) Ушбу лимитлар мавжуд бўлсин:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u(x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = v(x_0).$$

У вақтда $u(x_0) + iv(x_0) = w_0$ комплекс ўзгарувчи w нинг лимити дейилади.

б) Агар $u'(x)$ ва $v'(x)$ ҳосилалар мавжуд бўлса, ушбу

$$w'_x = u'(x) + iv'(x) \quad (9)$$

ифода ҳақиқий ўзгарувчи комплекс функциясининг ҳақиқий аргумент бўйича ҳосиласи дейилади.

Энди ушбу

$$w = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{(\alpha + i\beta)x}$$

кўрсаткичли функцияни қараймиз, бу ерда α ва β ўзгармас ҳақиқий сонлар, x ҳақиқий ўзгарувчи. Бу w функция ҳақиқий

узгарувчининг комплекс функцияси, уни (1) формулага мувофиқ бундай ёзиш мумкин:

$$w = e^{ix} [\cos \beta x + i \sin \beta x]$$

ёки

$$w = e^{ix} \cos \beta x + i e^{ix} \sin \beta x.$$

w'_x ҳосилани топамиз. (9) формулага асосан:

$$\begin{aligned} w'_x &= (e^{ix} \cos \beta x)' + i (e^{ix} \sin \beta x)' = e^{ix} (\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x) + \\ &+ i e^{ix} (\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x) = \alpha [e^{ix} (\cos \beta x + i \sin \beta x)] + \\ &+ i \beta [e^{ix} (\cos \beta x + i \sin \beta x)] = (\alpha + i \beta) [e^{ix} (\cos \beta x + i \sin \beta x)] = \\ &= (\alpha + i \beta) e^{(i\alpha + \beta)x}. \end{aligned}$$

Демак, агар $w = e^{(i\alpha + \beta)x}$ бўлса, $w' = (\alpha + i \beta) e^{(i\alpha + \beta)x}$ ёки

$$[e^{(i\alpha + \beta)x}]' = (\alpha + i \beta) e^{(i\alpha + \beta)x}. \quad (10)$$

Шундай қилиб, k комплекс сон (хусусий ҳолда ҳақиқий сон) ва x ҳақиқий сон бўлса, y ҳолда

$$(e^{kx})' = k e^{kx}. \quad (9')$$

Кўрсаткичли функцияни дифференциаллашнинг одатдаги формуласини ҳосил қилдик. Энди

$$(e^{kx})'' = [(e^{kx})']' = k (e^{kx})' = k^2 e^{kx}$$

ва ҳар қандай n учун

$$(e^{kx})^{(n)} = k^n e^{kx}.$$

Бу формулалар бизга бундан кейин керак бўлади.

5-§. Эйлер формуласи.

Комплекс соннинг кўрсаткичли шакли

Агар утган параграфнинг (1) формуласида $x = 0$ десак, унда

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad (1)$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу — кўрсаткичи мавҳум сон бўлган кўрсаткичли функцияни тригонометрик функциялар орқали ифодаловчи *Эйлер формуласидир*.

(1) формулада y ни — y билан алмаштириб,

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y \quad (2)$$

формулани ҳосил қиламиз. (1) ва (2) тенгликлардан $\cos y$ ва $\sin y$ ни топамиз:

$$\left. \begin{aligned} \cos y &= \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \\ \sin y &= \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Сунгги формулалардан фойдаланиб, жумладан, $\cos \varphi$ ва $\sin \varphi$ ни уларнинг ҳар қандай бутун мусбат даражаларини ва шу даражалар кўпайтмасни каррали ёйларнинг синуслари ва косинуслари орқали тасвирлашимиз мумкин.

1- мисол.

$$\begin{aligned} \cos^2 y &= \left(\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (e^{2iy} + 2 + e^{-2iy}) = \\ &= \frac{1}{4} [(\cos 2y + i \sin 2y) + 2 + (\cos 2y - i \sin 2y)] = \frac{1}{4} (2 \cos 2y + 2) = \\ &= \frac{1}{2} (1 + \cos 2y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\text{- мисол. } \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi &= \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right)^2 \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right)^2 = \\ &= \frac{(e^{i2\varphi} - e^{-i2\varphi})^2}{4 \cdot 4i^2} = -\frac{1}{8} \cos 4\varphi + \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Комплекс соннинг кўрсаткичли шакли. Комплекс сонни тригонометрик шаклда тасвирлаймиз:

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

бу ерда r комплекс соннинг модули, φ комплекс соннинг аргументи. Эйлер формуласига кўра

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}. \quad (4)$$

Демак, ҳар қандай комплекс сонни ушбу кўрсаткичли шаклда тасвирлаш мумкин:

$$z = r e^{i\varphi}.$$

3- мисол. 1, i , -2 , $-i$ сонлар кўрсаткичли шаклда ифодалансин. Ечиш.

$$1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = e^{2k\pi i},$$

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2} i},$$

$$-2 = 2 (\cos \pi + i \sin \pi) = 2e^{\pi i},$$

$$-i = \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = e^{-\frac{\pi}{2} i}.$$

Кўрсаткичли функциянинг 4- § даги (3), (6) ва (7) хоссаларига асосан кўрсаткичли шаклдаги комплекс сонлар устида амаллар бажариш осон.

Ушбу комплекс сонлар берилган бўлсин:

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}.$$

Бу ҳолда

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}; \quad (5)$$

бу натижа 2- § даги (3') формула билан бир хил.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}; \quad (6)$$

бу формула 2- § даги (5) формула билан бир хил.

$$z^n = (r e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}; \quad (7)$$

бу формула 3- § даги (1) формула билан бир хил.

$$\sqrt[n]{r e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1); \quad (8)$$

бу формула 3- § даги (2) формула билан бир хил.

6- §. Кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратиш

Маълумки,

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n$$

функция, n бутун мусбат сон бўлганда, *кўпҳад (полином) ёки x нинг бутун рационал функцияси* деб аталади; n сони *кўпҳаднинг даражаси* дейилади. Бу ерда $A_0, A_1, \dots, A_n$ коэффициентлар ҳақиқий ёки комплекс сонлар; эркин ўзгарувчи x ҳам ҳақиқий, ҳам комплекс қийматлар олиши мумкин. Ўзгарувчи x нинг кўпҳадни нолга айлантирадиган қиймати кўпҳаднинг *илдизи* деб аталади;

1-теорема (Безу теоремаси). *Кўпҳад $f(x)$ ни $x - a$ айирмага бўлганда $f(a)$ га тенг қолдиқ ҳосил бўлади.*

Исбот. $f(x)$ ни $x - a$ га бўлганда бўлинмада даражаси $f(x)$ даражасидан битта кам бўлган $f_1(x)$ кўпҳад ҳосил бўлиб, қолдиқ ўзгармас R бўлади. Шунга кўра бундай тенгликни ёзиш мумкин:

$$f(x) = (x - a) f_1(x) + R. \quad (1)$$

Бу тенглик x нинг a га тенг бўлмаган ҳамма қийматлари учун тўғри ($x = a$ бўлганда $x - a$ га бўлишнинг маъноси бўлмайди).

Энди x ни a га интилишга мажбур қиламиз. Унда (1) тенглик чап томонининг лимити $f(a)$ га, ўнг томонининг лимити R га тенг бўлади. $f(x)$ ва $(x - a)f_1(x) + R$ функциялар (ҳамма $x \neq a$ учун) ўзаро тенг бўлгани учун уларнинг $x \rightarrow a$ даги лимитлари ҳам тенг бўлади, яъни $f(a) = R$.

Натижа. Агар a кўпҳаднинг илдиизи, яъни $f(a) = 0$ бўлса, $f(x)$ кўпҳад $x - a$ га қолдиқсиз бўлинади, демак, кўпайтма шаклида тасвирланади:

$$f(x) = (x - a)f_1(x),$$

бу ерда $f_1(x)$ — кўпҳад.

1- мисол. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ кўпҳад $x = 1$ да нолга айланади, яъни $f(1) = 0$, шунинг учун бу кўпҳад $x - 1$ га қолдиқсиз бўлинади:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6).$$

Энди бир x номаълумли тенгламаларни қарашга ўтаемиз.

Тенгламадаги x ўрнига қўйганда тенгламани айниятга айлантирадиган ҳар қандай (ҳақиқий ёки комплекс) сон тенгламанинг илдиизи деб аталади.

2- мисол. $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{5\pi}{4}$, $x_3 = \frac{9\pi}{4}$, ..., сонлар $\cos x = \sin x$ тенгламанинг илдиизларидир.

Агар тенглама $P(x) = 0$ шаклда бўлиб, бу ерда $P(x)$ n - даражали кўпҳад бўлса, бу тенглама n - даражали алгебраик тенглама дейилади. Таърифдан алгебраик тенглама $P(x) = 0$ нинг илдиизлари $P(x)$ кўпҳад илдиизларидан иборат эканлиги чиқади.

Ҳар қандай тенглама илдиизга эга бўладими? деган савол туғилади.

Тенглама алгебраик бўлмаса, жавоб салбий бўлади: шундай ноалгебраик тенгламалар мавжудки, уларнинг на ҳақиқий, на комплекс ҳеч қандай илдиизи бўлмайди, бунга $e^x = 0$ тенглама*) мисол бўла олади.

*) Зотан, агар $x_1 = a + ib$ сон бу тенгламанинг илдиизи бўлса эди, ушбу айният $e^{a+ib} = 0$ ёки (Эйлер формуласига биноан) $e^a (\cos b + i \sin b) = 0$ айният ўринли бўлар эди. Лекин a нинг ҳеч қандай ҳақиқий қийматида e^a нолга тенг бўлмайди; $\cos b + i \sin b$ ҳам нолга тенг эмас (чунки бу соннинг модули b нинг ҳар қандай қиймати учун $\sqrt{\cos^2 b + \sin^2 b} = 1$). Демак, $(\cos b + i \sin b)$ кўпайтма ҳам нолга тенг эмас, яъни $e^{a+ib} \neq 0$, бу эса $e^x = 0$ тенглама илдиизга эга эмас деган сўзидир.

Аммо алгебранг тенглама бўлган ҳолда қўйилган саволга жавоб ижобийдир. Бу жавоб алгебранинг ушбу асосий теоремаси билан берилади:

2-теорема (алгебранинг асосий теоремаси). *Ҳар қандай бутун рационал $f(x)$ функция энг камида битта ҳақиқий ёки комплекс илдизга эгадир.*

Бу теорема олий алгебрада исбот қилинади. Бу ерда биз бу теоремани исботсиз қабул қиламиз.

Алгебранинг асосий теоремасидан фойдаланиб, ушбу теоремани исбот қилиш осон:

3-теорема. *n -даражали ҳар қандай кўпҳад $x - a$ шаклдаги n та чизиқли кўпайтувчига ва x^n олдидаги коэффицентга тенг кўпайтувчига ажралади.*

Исбот. $f(x)$ ни n -даражали ушбу

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n$$

кўпҳаддан иборат деб фараз қилайлик. Бу кўпҳад асосий теоремага кура энг камида битта илдизга эга, у илдизни a_1 билан белгилаймиз. Унда кўпҳадни Безу теоремасининг натижасига асосан бундай ёзишимиз мумкин:

$$f(x) = (x - a_1) f_1(x),$$

бу ерда $f_1(x)$ $n - 1$ -даражали кўпҳад; шунингдек $f_1(x)$ ҳам илдизга эга. Уни a_2 билан белгилаймиз. Унда

$$f_1(x) = (x - a_2) f_2(x),$$

бу ерда $f_2(x)$ $n - 2$ -даражали кўпҳад. Шунинг сингари

$$f_2(x) = (x - a_3) f_3(x).$$

Чизиқли кўпайтувчиларга ажратиш процессини шундай давом эттириб, ушбу муносабатга келиб етамиз:

$$f_{n-1}(x) = (x - a_n) f_n,$$

бу ерда f_n нолинчи даражали кўпҳад, яъни тайин сон. Бу сон x^n олдидаги коэффицентга тенг, яъни $f_n = A_0$.

Ҳосил қилинган тенгликларга асосан, ушбу тенгликни ёзишимиз мумкин:

$$f(x) = A_0 (x - a_1) (x - a_2) \dots (x - a_n). \quad (2)$$

Бу (2) ажралмадан $a_1, a_2, \dots, a_n$ сонлар кўпҳаднинг илдизлари эканлиги келиб чиқади, чунки $x = a_1, x = a_2, \dots, x = a_n$ ўрнига қўйилганда тенгликнинг ўнг томони, демак, чап томони ҳам, нолга айланади.

3-мисол. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ купқад,
 $x = 1, x = 2, x = 3$

бўлганда нолга айланади. Демак,

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3).$$

$a_1, a_2, \dots, a_n$ дан бошқа ҳеч қандай $x = a$ қиймат $f(x)$ купқаднинг илдизи бўла олмайди, чунки $x = a$ да (2) тенгликнинг ўнг томонидаги купайтувчиларнинг ҳеч бири нолга айланмайди. Бундан ушбу натижа чиқади.

n-даражасли купқад *n* тадан ортиқ ҳар хил илдизларга эга бўлолмайди.

Аммо бу ҳолда ушбу теоремага ўрин бор:

4-теорема. Агар x нинг $n+1$ та, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ҳар хил қийматларида *n*-даражасли икки $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(x)$ купқаднинг қийматлари бир хил бўлса, у купқадлар бири-бирига айнан тенгдир.

Исбот. Берилган купқадлар айирмасини $f(x)$ билан белгилаймиз:

$$f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x).$$

Шартга мувофиқ $f(x)$ даражаси *n* дан юқори бўлмаган, $a_1, a_2, \dots, a_n$ нуқталарда нолга айланидиган купқаддир. Демак, уни ушбу шаклда тасвирлаш мумкин:

$$f(x) = A_0(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n).$$

Аммо шартга кўра $f(x)$ купқад a_0 нуқтада ҳам нолга айланади. У ҳолда $f(a_0) = 0$ ва бунда ҳам чизикли купайтувчиларнинг ҳеч бири нолга тенг эмас. Шунинг учун $A_0 = 0$, бундан эса (2) тенгликка мувофиқ $f(x)$ айнан нолга тенглиги келиб чиқади. Демак,

$$\varphi_1(x) - \varphi_2(x) \equiv 0 \quad \text{ёки} \quad \varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x).$$

5-теорема. Агар.

$$P(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n$$

купқад айнан нолга тенг бўлса, унинг ҳамма коэффициентлари нолга тенг.

Исбот. Бу купқадни (1) формула бўйича купайтувчиларга ажратамиз:

$$\begin{aligned} P(x) &= A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n = \\ &= A_0(x - a_1) \dots (x - a_n). \end{aligned} \quad (1')$$

Агар бу купқад айнан нолга тенг бўлса, бу ҳолда x нинг $a_1, a_2, \dots, a_n$ қийматларидан бошқа биронта қийматида ҳам нолга

тенг бўлади. Лекин у вақтда $x - a_1, \dots, x - a_n$ айирмалардан ҳеч бири нолга тенг эмас ва, демак, $A_0 = 0$.

$A_1 = 0, A_2 = 0$ ва ҳоказо эканлиги ҳам шу тариқа исботланади.

6-теорема. *Агар икки кўпҳад бир-бирига айнан тенг бўлса, кўпҳадлардан бирикинги коэффициентлари иккинчисиникинг мос коэффициентларига тенгдир.*

Бу берилган кўпҳадларнинг айирмаси айнан нолга тенг кўпҳад бўлишидан келиб чиқади. Демак, бундан олдинги теоремага асосан, унинг ҳамма коэффициентлари нолга тенгдир.

4-мисол. Агар $ax^3 + bx^2 + cx + d$ кўпҳад $x^3 - 5x$ кўпҳадга айнан тенг бўлса, унда $a = 0, b = 1, c = -5, d = 0$ бўлади.

7-§. Кўпҳаднинг каррали илдизлари ҳақида

Агар n -даражали кўпҳаднинг чизиқли кўпайтувчиларга ажралмаси

$$f(x) = A_0(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) \quad (1)$$

да баъзи чизиқли кўпайтувчилар бир хил бўлса, уларни бирлаштириш мумкин ва унда кўпҳаднинг кўпайтувчиларга ёйилмаси ушбу кўринишда бўлади.

$$f(x) = A_0(x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_m)^{k_m}. \quad (1')$$

Бунда

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n.$$

Бу ҳолда a_1 илдиз k_1 каррали илдиз, a_2 илдиз k_2 каррали илдиз ва ҳоказо деб аталади.

Мисол. Ушбу кўпҳад $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ қуйидаги чизиқли кўпайтувчиларга ажралади;

$$f(x) = (x - 2)(x - 2)(x - 1).$$

Бу ёйилмани бундай ёзиш мумкин;

$$f(x) = (x - 2)^2(x - 1).$$

$a_1 = 1$ — икки каррали илдиз; $a_2 = 2$ — содда илдиз.

Агар кўпҳад k -каррали a илдизга эга бўлса, кўпҳад k та бир хил илдизга эга деб ҳисоблаймиз. Унда кўпҳадни чизиқли кўпайтувчиларга ажратиш ҳақидаги теоремадан ушбу теорема келиб чиқади.

Ҳар қандай n -даражали кўпҳад расо n та (ҳақиқий ёки комплекс) илдизга эга бўлади.

||30λ.

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n$$

купҳаднинг илдизлари ҳақида айтилганларнинг ҳаммасини ушбу

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n = 0$$

алгебрлик тенгламанинг илдизлари терминларида ифодалаш мумкин.

Энди қуйидаги теоремани исбот қиламиз:

Теорема. Агар a_1 сон $f(x)$ купҳаднинг $k_1 > 1$ каррали илдизи бўлса, шу сон $f'(x)$ ҳосила учун $k_1 - 1$ каррали илдиз бўлади.

Исбот. Агар $x = a_1$ сон $f(x)$ купҳаднинг $k_1 > 1$ каррали илдизи бўлса, (1') формуладан

$$f(x) = (x - a_1)^{k_1} \varphi(x)$$

келиб чиқади, бу ерда $\varphi(x) = (x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_m)^{k_m}$ кўпайтмачи $x = a_1$ бўлганда нолга айланмайди, яъни $\varphi(a_1) \neq 0$. Дифференциаллаймиз:

$$\begin{aligned} f'(x) &= k_1 (x - a_1)^{k_1-1} \varphi(x) + (x - a_1)^{k_1} \varphi'(x) = \\ &= (x - a_1)^{k_1-1} [k_1 \varphi(x) + (x - a_1) \varphi'(x)]. \end{aligned}$$

Бундай белгилаймиз:

$$\psi(x) = k_1 \varphi(x) + (x - a_1) \varphi'(x).$$

У вақтда

$$f'(x) = (x - a_1)^{k_1-1} \psi(x),$$

бунда

$$\psi(a_1) = k_1 \varphi(a_1) + (a_1 - a_1) \varphi'(a_1) = k_1 \varphi(a_1) \neq 0,$$

яъни $x = a_1$ сон $f'(x)$ купҳаднинг $k_1 - 1$ каррали илдизидир. Теореманинг исботидан, агар $k_1 = 1$ бўлса, a_1 сон $f'(x)$ ҳосиланинг илдизи эмаслиги келиб чиқади.

Исботланган теоремадан яна ушбу натижа чиқади: a_1 сон $f(x)$ ҳосила учун $k_1 - 2$ каррали илдиз, $f'''(x)$ ҳосила учун $k_1 - 3$ каррали илдиз, $\dots$, $f^{(k_1-1)}(x)$ ҳосила учун бир каррали (яъни сонда) илдиз бўлиб, $f^{(k_1)}(x)$ ҳосила учун илдиз бўлмайди, яъни

$$f(a_1) = 0, \quad f'(a_1) = 0, \quad f''(a_1) = 0, \quad \dots, \quad f^{(k_1-1)}(a_1) = 0,$$

лекин

$$f^{(k_1)}(a_1) \neq 0.$$

8-§. Комплекс илдизларга эга бўлган кўпхадни кўпайтувчиларга ажратиш

VII боб 7-§ (1) формуладаги $a_1, a_2, \dots, a_n$ илдизлар ҳақиқий ва комплекс бўлиши мумкин. Ушбу теоремага урин бэр.

Теорема. Агар коэффициентлари ҳақиқий булган $f(x)$ кўпхад $a + ib$ комплекс илдизга эга бўлса, шу кўпхад $a - ib$ қўшма комплекс илдизга ҳам эга бўлади.

Исбот. Агар $f(x)$ кўпхаддаги x ўрнига $a + ib$ комплекс сонни қўйиб, даражаларга кўтаришни бажариб, i иштирок этмаган ҳадларни айрим ва i иштирок этган ҳадларни айрим тулдасак, ушбу ифодани ҳосил қиламиз:

$$f(a + ib) = M + iN,$$

бу ерда M ва N миқдорлар i қатнашмаган ифодалардир.

$a + ib$ кўпхаднинг илдизи бўлгани учун:

$$f(a + ib) = M + iN = 0,$$

буидан

$$M = 0, \quad N = 0.$$

Энди кўпхаддаги x ўрнига $a - ib$ ифодани қўямиз. Натижада (шу бобнинг 2-§ охиридаги 3-изоҳга асосан) $M + iN$ га қўшма бўлган $M - iN$ сон чиқади, яъни

$$f(a - ib) = M - iN.$$

Юқорида айтилганидек $M = 0, N = 0$ булгани учун $f(a - ib) = 0$, яъни $a - ib$ комплекс сон кўпхаднинг илдизидир.

Шундай қилиб,

$$f(x) = A_0(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

ажралмага комплекс илдизлар узининг қўшмаси билан жуфт ҳолда киради.

Бир жуфт қўшма комплекс илдизларга мос чизиқли кўпайтувчиларни кўпайтириб, ҳақиқий коэффициентли квадрат учхад ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} [x - (a + ib)][x - (a - ib)] &= [(x - a) - ib][(x - a) + ib] = \\ &= (x - a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 + px + q, \end{aligned}$$

бу ерда $p = -2a, q = a^2 + b^2$ ҳақиқий сонлар.

Агар $a + ib$ сон k каррали илдиз бўлса, унга қўшма булган $a - ib$ сон ҳам худди шундай k каррали илдиз бўлиши керак, яъни кўпхад ажралмасида $x - (a + ib)$ чизиқли кўпайтувчи неча марта учраса, $x - (a - ib)$ чизиқли кўпайтувчи ҳам шунча марта учради.

Шундай қилиб, ҳақиқий коэффициентли кўпхад тегишли даражадаги чизиқли ва квадрат учхад шаклидаги ҳақиқий кўпайтувчиларга ажралади, яъни:

$$f(x) = A_0 (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_r)^{k_r} (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_{s+q_1}x + q_{s+q_1})^{l_s}.$$

Бунда $k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2l_1 + \dots + 2l_s = n$.

9-§. Интерполяциялаш. Лагранжнинг интерполяцион формуласи

Биронта ҳодисани ўрганишда y ва x миқдорлар орасида шу ҳодисанинг миқдор томонини аниқловчи функционал боғланиш борлиги аниқланган бўлсин; бунда $y = \varphi(x)$ функция номаълум бўлиб, лекин тажриба асосида аргументнинг $[a, b]$ кесмадаги $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ қийматларида функциянинг $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ қийматлари аниқланган бўлсин.

Масала $y = \varphi(x)$ номаълум функцияни $[a, b]$ кесмада аниқ ёки тақрибий тасвирлайдиган, ҳисоблаш учун мумкин қадар қулай (масалан кўпхад) шаклида функция топишдан иборат. Шу масалани умумийроқ шаклда бундай айтиш мумкин: $[a, b]$ кесмада номаълум $y = \varphi(x)$ функциянинг $n + 1$ та ҳар хил $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ нуқталардаги қийматлари берилган:

$$y_0 = \varphi(x_0), \quad y_1 = \varphi(x_1), \quad \dots, \quad y_n = \varphi(x_n);$$

$\varphi(x)$ функцияни тақрибий ифодаловчи, даражаси $< n$ бўлган $P(x)$ кўпхадни топиш талаб этилади.

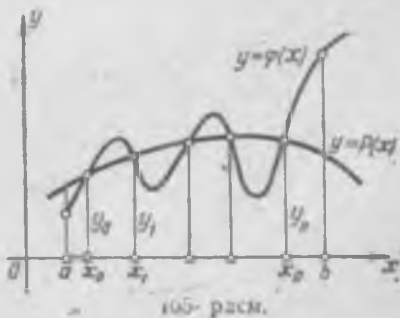
Бундай кўпхад сифатида $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ нуқталардаги қийматлари $\varphi(x)$ функциянинг $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ қийматлари билан мос равишда бир хил бўлган кўпхадни олиш кераклиги табиийдир (165-расм). У вақтда „функцияни интерполяциялаш масаласи“ деб аталадиган бу масала бундай ифодаланади: берилган $\varphi(x)$ функция учун берилган $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ қийматларда

$$y_0 = \varphi(x_0),$$

$$y_1 = \varphi(x_1),$$

$$\dots$$

$$y_n = \varphi(x_n)$$



қийматлар қабул қиладиган, даражаси $< n$ булган $P(x)$ куп-
ҳадни топиш керак.

Бундай купҳад сифатида n - даражали ушбу шаклдаги куп-
ҳадни оламиз:

$$P(x) = C_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) + \\ + C_1(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n) + \\ + C_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n) + \dots \\ \dots + C_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) \quad (1)$$

ва $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ коэффициентларни

$$P(x_0) = y_0, \quad P(x_1) = y_1, \quad \dots, \quad P(x_n) = y_n \quad (2),$$

шартлар бажариладиган қилиб аниқлаймиз.

(1) формулада $x = x_0$ деб фараз қиламиз; у вақтда (2) тенг-
ликларни эътиборга олиб, ушбунни топамиз:

$$y_0 = C_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n),$$

бундан

$$C_0 = \frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}.$$

Сунгра, $x = x_1$ фараз қилиб, ушбунни топамиз:

$$y_1 = C_1(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n),$$

бундан

$$C_1 = \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}.$$

Шу равишда қуйидагиларни топамиз:

$$C_2 = \frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)};$$

$$\dots \dots \dots$$

$$C_n = \frac{y_n}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})}.$$

Топилган қийматларни (1) формулага қўйиб, изланган купҳад-
ни ҳосил қиламиз:

$$P(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} y_0 + \\ + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} y_1 + \dots \\ \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} y_n. \quad (3)$$

Бу формула Лагранжнинг интерполяцион формуласи деб аталади.

Агар $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ кесмада $n+1$ -тартибли ҳосилага эга бўлса, $\varphi(x)$ функцияни $P(x)$ кўпхад билан алмаштиришдаги хато, яъни $R(x) = \varphi(x) - P(x)$ миқдор ушбу тенгсизликни қаноатлантиради:

$$|R(x)| < |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)| \frac{1}{(n+1)!} \max |\varphi^{(n+1)}(x)|.$$

Буни исботсиз қабул қиламиз.

Изоҳ. 6-§ даги 4-теоремадан шу келиб чиқадики, топилган $P(x)$ кўпхад қўйилган шартларни қаноатлантирадиган бирдан-бир кўпхаддир.

Бошқа интерполяцион формулалар ҳам борлигини кўрсатамиз. Улардан бири Ньютоннинг интерполяцион формуласи бўлиб, 10-§ да қаралган.

Мисол. Тажриба асосида $y = \varphi(x)$ функциянинг ушбу қийматлари топилган: $x_0 = 1$ бўлганда $y_0 = 3$, $x_1 = 2$ бўлганда $y_1 = -5$, $x_2 = -4$ бўлганда $y_2 = 4$. $y = \varphi(x)$ функцияни 2-даражали кўпхад билан тақрибий тасвирлаш талаб қилинади.

Ечиш. (3) формула бўйича ($n=2$ да) ушбунини ҳосил қиламиз:

$$P(x) = \frac{(x-2)(x+4)}{(1-2)(1+4)} \cdot 3 + \frac{(x-1)(x+4)}{(2-1)(2+4)} \cdot (-5) + \frac{(x-1)(x-2)}{(-4-1)(-4-2)} \cdot 4.$$

ёки

$$P(x) = -\frac{39}{30}x^2 - \frac{123}{30}x + \frac{252}{30}$$

10-§. Ньютоннинг интерполяцион формуласи

$y = \varphi(x)$ функциянинг $(n+1)$ -қиймати маълум бўлсин, яъни аргументнинг $n+1$ та $x_0, x_1, \dots, x_n$ қийматларида функциянинг қийматлари $y_0, y_1, \dots, y_n$ бўлсин. Бунда аргументнинг қушқи қийматлари орасидаги айирма ўзгармас бўлсин. Уни h билан белгилаймиз. Шундай қилиб, аргументнинг тегишли қийматларида номаълум $y = \varphi(x)$ функциянинг қийматлари жадвалига эга бўламиз.

x	x_0	$x_1 = x_0 + h$	$x_2 = x_0 + 2h$	$\dots$	$x_n = x_0 + nh$
y	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n

Аргумент x нинг тегишли қийматларида даражаси n дан кўри бўлмаган тегишли қийматлар оладиган кўпхад тузамиз. Бу кўпхад тақрибан $\varphi(x)$ функцияни ифодалайди.

Олдин қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\begin{aligned}\Delta y_0 &= y_1 - y_0, & \Delta y_1 &= y_2 - y_1, & \Delta y_2 &= y_3 - y_2, \dots, \\ \Delta^2 y_0 &= y_2 - 2y_1 + y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, & \Delta^2 y_1 &= \Delta y_2 - \Delta y_1, \dots, \\ \Delta^3 y_0 &= y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0, \dots\end{aligned}$$

$$\Delta^n y_0 = \Delta^n y_1 - \Delta^{n-1} y_0.$$

Булар 1-, 2-, ..., n - тартибли айирмалар деб аталувчи ифодалардир.

x_0 ва x_1 га мос равишда y_0, y_1 қийматларни оладиган кўпҳадни ёзамиз. Бу 1- даражали кўпҳад бўлади:

$$P_1(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h}. \quad (1)$$

Ҳақиқатан,

$$P_1(x)|_{x=x_0} = y_0, \quad P_1|_{x=x_1} = y_0 + \Delta y_0 \frac{h}{h} = y_0 + (y_1 - y_0) = y_1.$$

x_0, x_1, x_2 да мос равишда y_0, y_1, y_2 қийматларни оладиган кўпҳадни ёзамиз. Бу 2- даражали кўпҳад бўлади:

$$P_2(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right). \quad (2)$$

Ҳақиқатан,

$$\begin{aligned}P_2|_{x=x_0} &= y_0, & P_2|_{x=x_1} &= y_1, \\ P_2|_{x=x_2} &= y_0 + \Delta y_0 \cdot 2 + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \frac{2h}{h} \left(\frac{2h}{h} - 1 \right) = y_2.\end{aligned}$$

Учинчи даражали кўпҳад мана бу кўринишда бўлади:

$$\begin{aligned}P_3(x) &= y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right) + \\ &+ \frac{\Delta^3 y_0}{3!} \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right) \left(\frac{x - x_0}{h} - 2 \right).\end{aligned} \quad (3)$$

Ниҳоят $x_0, x_1, \dots, x_n$ да мос равишда $y_0, y_1, \dots, y_n$ қийматларга эга бўладиган n - даражали кўпҳад мана бу кўринишда олади:

$$\begin{aligned}P_n(x) &= y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right) + \dots \\ &+ \frac{\Delta^n y_0}{n!} \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right) \dots \left[\frac{x - x_0}{h} - (n-1) \right].\end{aligned} \quad (4)$$

Бунинг тўғрилигига тегишли қийматларни ўрнига қўйиб ишонч ҳосил қилиш мумкин. Шу ифода *Ньютоннинг интерполяцион формуласи* ёки *интерполяцион кўпҳадидир*.

Моҳияти жиҳатидан Лагранж кўпҳади билан Ньютон кўпҳади берилган жадвал учун айнан бир хил бўлиб, улар фақат ёзилиши билан фарқ қилади, чунки x нинг берилган $n+1$ та қийматларида берилган $n+1$ та қийматларга эга бўладиган даражаси n дан юқори бўлмаган кўпҳад ягона усулда топилади.

Кўп ҳолларда Ньютоннинг интерполяцион кўпҳади Лагранжнинг интерполяцион кўпҳадига қараганда қулайроқдир. Ньютон кўпҳадини хусусияти шундан иборатки k - даражадан кўпҳаддан $k+1$ - даражали кўпҳадга ўтишда унинг дастлабки $k+1$ ҳадлари ўзгармайди, фақат аргументнинг барча олдинги қийматларида нолга тенг бўлган янги бир ҳад ортади, холос.

Изоҳ. Лагранжнинг интерполяцион формуласи (9- § да (3) га қаранг) ва Ньютоннинг интерполяцион формуласи (4) формула (бўйича функциянинг $x_0 < x < x_n$ кесмадаги қийматлари аниқланади. Агар шу формулалар бўйича функциянинг $x < x_0$ даги қиймати аниқланса (буни $|x - x_0|$ кичик сон бўлганда қилиш мумкин), уни *жадвални орқага экстраполяция қилиши* дейилади. Агар функциянинг $x > x_n$ даги қиймати аниқланадиган бўлса, *жадвални олдинги экстраполяция қилиш* дейилади.

11- §. Дифференциаллашнинг сонли методи

Бирор номаълум $\varphi(x)$ функциянинг қийматлари 10- § нинг бошида қаралган жадвал билан берилган бўлсин. Шу функциянинг тақрибий ҳосиласини топиш талаб қилинади. Бу масала қуйидагича ечилади. Лагранж ёки Ньютоннинг интерполяцион кўпҳади тузилади ва шу кўпҳаддан ҳосил топилади.

Кўпинча аргументнинг қўшни қийматлари орасидаги айрмалар тенг бўлган жадваллар қаралгани учун биз Ньютоннинг интерполяцион формуласидан фойдаланамиз. Аргументнинг учта x_0, x_1, x_2 қийматида функциянинг учта y_0, y_1, y_2 қийматлари берилган бўлсин. Бу ҳолда 10- § даги (2, кўпҳадни ёзамиз ва уни дифференциаллайиз. Функция ҳосиласининг $x_0 \leq x \leq x_2$ кесмадаги тақрибий қийматини ҳосил қиламиз:

$$\varphi'(x) \approx P_2'(x) = \frac{\Delta y_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2h} \left(2 \frac{x - x_0}{h} - 1 \right), \quad (1)$$

$x = x_0$ да

$$\varphi'(x_0) \approx P_2'(x_0) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h} \quad (2)$$

бўлади.

Агар 3- тартибли кўпҳадни (10- § да (3)) қарасак, дифференциаллагандан сўнг унинг ҳосиласи учун ушбу ифодани ҳосил қиламиз:

$$\varphi'(x) \approx P'_3(x) = \frac{\Delta y_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2h} \left(2 \frac{x-x_0}{h} - 1 \right) + \frac{\Delta^3 y_0}{2 \cdot 3h} \left[3 \left(\frac{x-x_0}{h} \right)^2 - 6 \left(\frac{x-x_0}{h} \right) + 2 \right]. \quad (3)$$

Жумладан, $x = x_0$ бўлганда

$$\varphi'(x_0) \approx P'_3(x) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h} + \frac{\Delta^3 y_0}{3h}. \quad (4)$$

Агар 10- § даги (4) формуладан фойдалансак, у ҳолда ҳосиланинг тақрибий ифодаси учун $x = x_0$ да ушбу ифодани ҳосил қиламиз:

$$\varphi'(x_0) \approx P'_n(x) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h} + \frac{\Delta^3 y_0}{3h} + \frac{\Delta^4 y_0}{4h} + \dots \quad (5)$$

Ҳосилаларга эга бўлган функция учун Δy_0 айирма h га исбатан 1- тартибли чексиз кичик миқдор, $\Delta^2 y_0$ айирма 2-тартибли чексиз кичик миқдор, $\Delta^3 y_0$ айирма 3- тартибли чексиз кичик миқдор ва ҳоказо эканини қайд қилиб ўтамиз.

12- §. Функцияларни кўпҳадлар билан энг яхши яқинлаштириш ҳақида. Чебишев назарияси

9 ва 10 параграфда қаралган масалалар муносабати билан ушбу саволни қўйиш табиий бўлади: $[a, b]$ кесмада $\varphi(x)$ узлуксиз функция берилган бўлсин. Шу функцияни аввалдан берилган ҳар қандай аниқлик даражаси билан $P(x)$ кўпҳад шаклида тақрибий тасвирлаш мумкинми? Бошқача айтганда, $\varphi(x)$ ва $P(x)$ орасидаги айирманинг абсолют қиймати $[a, b]$ кесманинг ҳамма нуқтасида олдиндан берилган ϵ мусбат сондан кичик бўладиган $P(x)$ кўпҳадни топиш мумкинми? Бу саволга ижобий жавоб*) қуйидаги теоремада берилган, биз буни исботсиз келтирамиз.

*) Лагранжининг интерполяцион кўпҳади (9- § даги (3) га қаранг) қуйилган саволга жавоб бермайди. Унинг қийматлари функциянинг $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ нуқталардаги қийматларига тенг, лекин $[a, b]$ кесманинг бошқа нуқталарида унинг қийматлари функциянинг тегишли қийматларидаш жуда узоқ бўлиши мумкин.

Вейерштрасс теоремаси. Агар $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, ҳар қандай $\varepsilon > 0$ учун шу кесманинг ҳамма нуқталарида ушбу

$$|\varphi(x) - P(x)| < \varepsilon$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган $P(x)$ кўпхад мавжуддир. Машҳур совет математиги академик С. Н. Бернштейн берилган кесмада узлуксуз $\varphi(x)$ функцияга тақрибий тенг бўлган бундай кўпхадларни бевосита топишнинг қуйидаги усулини берди.

Масалан, $\varphi(x)$ функция $(0, 1)$ кесмада узлуксиз бўлсин. Ушбу ифодани тузамиз:

$$B_n(x) = \sum_{m=0}^n \varphi\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m (1-x)^{n-m}.$$

Бу ерда C_n^m — биномиал коэффициентлар, $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)$ — берилган функциянинг $x = \frac{m}{n}$ нуқтадаги қиймати. $B_n(x)$ ифода n - даражали кўпхад; у *Бернштейн кўпхади* деб аталади.

Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон берилган бўлса, шундай Бернштейн кўпхадини топиш (яъни унинг даражаси n ни шундай танлаб олиш) мумкинки, x нинг $[0, 1]$ кесмадаги ҳамма қийматлари учун ушбу тенгсизлик.

$$|B_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

қаноатланади.

Ҳар қандай $[a, b]$ кесма ўрнига $[0, 1]$ кесмани қараш учун мийликни чегараламайди, чунки $x = a + t[b - a]$ алмаштириш билан ҳар қандай $[a, b]$ кесмани $[0, 1]$ кесмага айлантириш мумкин. Бунда n - даражали кўпхад яна шу даражали кўпхадга алмашинади.

Функцияларни кўпхадлар билан энг яхши яқинлаштириш назариясининг ижодчиси математика фанининг энг буюк намоёндаларидан бири бўлган рус математиги П. Л. Чебишевдир (1821 — 1894). Унинг бу соҳада эришган чуқур натижалари кейинги математикларнинг ишларига катта таъсир этди. Бу назариянинг Чебишев томонидан барпо қилиниши, унинг машиналарда кенг фойдаланиладиган, шарнирли механизмлар назарияси ҳақидаги асаридан бошланади. Бундай механизмларни ўрганиб, у берилган даражадаги бош ҳадининг коэффициентни бирга тенг бўлган ҳамма кўпхадлар орасида шу берилган кесмада нолдан энг кам фарқ қиладиган кўпхадни топиш масаласига келди. У бундай кўпхадларни топди ва кейинчалик олиш-

Икки узгарувчининг функцияси билан берилганда:

$$z = f(x, y).$$

Икки узгарувчининг функцияси билан берилиши ёки, юқорида келтирилган усулда — формула ёки формулага асосан эркин ўзгаришлар учун функция қийматларини ҳисоблаш мумкин.

$y \backslash x$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0

Бу жадвалда x ва y нинг қийматлари устуннинг кесилишган ерида берилган.

Агар функционал бўлган табиқий экспериментал урганишда қиймат булса, z ни икки узгарувчи ҳар бир жадвал ҳосил бўлган жадвал билан берилади.

Бир узгарувчининг функцияси ҳам, умуман олганда мавжуд бўлавермайдиган.

2-таъриф. $z = f(x, y)$ функцияси (x, y) қийматларининг ҳар бир мавжудлик соҳасида берилган.

Функциянинг аниқлик соҳаси тасвирланади. Агар x ва y текисликда $M(x, y)$ нукта тўплами аниқлик соҳаси текисликда тасвирланади. Ҳар бир нукта (x, y) функциянинг аниқлик соҳасида бўлиши керак. Аниқлик соҳаси, жумладан, бутун бўлиши асосан текисликда бўлиши керак. Берилган соҳа

лар уларни Чебишев кўпҳадлари деб атадилар. У кўпҳадлар кўпгина ажойиб хоссаларга ва ҳозирги вақтда математика ва техниканинг кўп масалаларини текширишда кучли қурол бўлиб хизмат қилмоқда.

VII БОБГА МАШҚЛАР

1. $(3 + 5i)(4 - i)$ топилсин. Жав. $17 + 17i$. 2. $(6 + 11i)(7 + 3i)$ топилсин. Жав. $9 + 95i$. 3. $\frac{3-i}{4+5i}$ топилсин. Жав. $\frac{7}{41} - \frac{19}{41}i$. 4. $(4 - 7i)^3$ топилсин. Жав. $-524 + 7i$. 5. $\sqrt{7}$ топилсин. Жав. $\pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. 6. $\sqrt{-5-12i}$ топилсин. Жав. $\pm(2-3i)$. 7. Ушбу ифодалар тригонометрик шаклга келтирилсин: а) $1 + i$. Жав. $\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$. б) $1 - i$. Жав. $\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$. 8. $\sqrt[3]{7}$ топилсин. Жав. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}; -i; \frac{1-\sqrt{3}}{2}$. 9. Қуйилган ифодалар $\sin x$ ва $\cos x$ даражалари орқали ифодалансин: $\sin 2x, \cos 2x, \sin 4x, \cos 4x, \sin 5x, \cos 5x$. 10. Каррали ёйлар синуси ва косинуси орқали ифодалансин: $\cos^2 x, \cos^3 x, \cos^4 x, \cos^5 x, \cos^6 x; \sin^2 x, \sin^3 x, \sin^4 x, \sin^5 x, \sin^6 x$. 11. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 1$ кўпҳад $x + 4$ га бўлинсин. Жав. $f(x) = (x+4)(x^2-8x+40)-161$, яъни бўлинма $= x^2 - 8x + 40$; қолдиқ $f(-4) = -161$. 12. $f(x) = x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$ кўпҳад $x + 3$ га бўлинсин. Жав. $f(x) = (x+3)(x^3+9x^2+27x+27)$. 13. $f(x) = x^7 - 1$ ни $x - 1$ га бўлиш керак. Жав. $f(x) = (x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$. Ушбу ҳақиқий коэффициентли кўпҳадлар кўпайтувчиларга ажратилсин: 14. $f(x) = x^4 - 1$. Жав. $f(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$. 15. $f(x) = x^2 - x - 2$. Жав. $f(x) = (x-2)(x+1)$. 16. $f(x) = x^3 + 1$. Жав. $f(x) = (x+1)(x^2-x+1)$.

17. Тажриба асосида x нинг функцияси y нинг ушбу қийматлари ҳосил қилинган:

$$\begin{array}{lll} x_1 = 0 & \text{бўлганда} & y_1 = 4, \\ x_2 = 1 & & y_2 = 6, \\ x_3 = 2 & & y_3 = 10. \end{array}$$

Функция иккинчи даражали кўпҳад кўринишида тасвирлансин. Жав. $x^2 + x + 4$.

18. $x = 1, 2, 3, 4, 5$ бўлганда мос равишда $2, 1, 5, 0$ қийматлар оладиган тўртинчи даражали кўпҳад топилсин. Жав. $-\frac{7}{6}x^4 + \frac{79}{6}x^3 - \frac{151}{3}x^2 + \frac{226}{3}x - 35$.

19. $x = 2, 4, 5, 10$ бўлганда мос равишда $3, 7, 9, 19$ қийматлар оладиган мумкин қадар қуйи даражали кўпҳад топилсин. Жав. $2x - 1$.

20. $y = \sin \pi x$ функция учун $[0, 1]$ кесмада 1-, 2-, 3- ва 4- даражали Бернштейн кўпҳадлари топилсин. Жав. $B_1(x) = 0$; $B_2(x) = 2x(1-x)$;

$B_3(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}x(1-x)$; $B_4(x) = 2x(1-x)[(2\sqrt{2}-3)x^2 - (2\sqrt{2}-3)x + \sqrt{2}]$.

VIII БОБ

БИР НЕЧА ЎЗГАРУВЧИНИНГ ФУНКЦИЯСИ

1-§. Бир неча ўзгарувчи функциясининг таърифи

Бир ўзгарувчининг функциясини қараган пайтда, кўп ҳодисаларни урганишда икки ва ундан ортиқ эркин ўзгарувчиларнинг функциялари ҳам учрашини кўрсатган эдик. Бир неча мисол келтирамиз.

1-мисол. Томонларининг узунлиги x ва y га тенг бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзи S ушбу формула билан ифодаланади:

$$S = xy$$

x ва y нинг ҳар бир қўш қийматига S юзининг аниқ бир қиймати мос келади; S икки ўзгарувчининг функциясидир.

2-мисол. Қирраларининг узунликлари x, y, z га тенг бўлган тўғри тўртбурчакли параллелепипеднинг ҳажми V ушбу формула билан ифодаланади:

$$V = xyz.$$

Бу ерда V учта ўзгарувчи x, y, z нинг функциясидир.

3-мисол. Стволи горизонтга φ бурчак остида оғма қилиб қўйилган тўпдан v_0 бошланғич тезлик билан отилган снаряднинг учиб узоқлиги R (давонинг қаршилиги эътиборга олинмаганда) ушбу формула билан ифодаланади:

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}$$

Бу ерда g — оғирлик кучининг тезланиши. Бу формула v_0 ва φ нинг ҳар бир қўш қийматида R нинг аниқ қийматини беради, яъни R икки ўзгарувчи v_0 ва φ нинг функциясидир.

4-мисол.

$$u = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Бу ерда u тўрт ўзгарувчи x, y, z, t нинг функциясидир.

1-таъриф. Агар бир-бирига боғлиқ бўлмаган n та ўзгарувчи x ва y нинг бирор D ўзгариш соҳасидаги ҳар бир қўш (x, y) қийматига z миқдорнинг аниқ бир қиймати мос келса, z икки эркин ўзгарувчи x, y ва y нинг D соҳада аниқланган функцияси дейилади.

Икки ҳагарувчининг функциясини символик тарзда бундай ифодадалади:

$$z = f(x, y), \quad z = F(x, y) \quad \text{ва} \quad x, y.$$

Икки ҳагарувчининг функциясини, масалан, жадвал ёрдами билан берилиши ёки, юқорида қаралган тўрт мисолдаги каби, аналитик усулда — формула ёрдами билан берилиши мумкин. Формулага асосан эркин ҳагарувчинларнинг баъзи қуш қийматлари учун функция қийматларининг жадвалини тузиш мумкин. Чунончи, биринчи мисол учун ушбу жадвалини тузиш мумкин:

$$S = xy$$

$y \backslash x$	0	1	1,5	2	3
1	0	1	1,5	2	3
2	0	2	3	4	6
3	0	3	4,5	6	9
4	0	4	6	8	12

Бу жадвалда x ва y нинг таъини қийматларига тегишли сатр ва устуннинг кесилишган ерида S функциянинг мос қиймати қўйилган.

Агар функционал боғланиш $z = f(x, y)$ бирон ҳодисани экспериментал урганишда z миқдорни улчаш натижасида ҳосил булса, z ни икки ҳагарувчининг функциясини сифатида тасвирловчи жадвал ҳосил бўлади. Бу ҳолда функция фақат жадвал билан берилади.

Бир ҳагарувчининг функциясини каби икки ҳагарувчининг функциясини ҳам, умуман айтганда, x ва y нинг ҳар қандай қийматида мавжуд булавермайди.

2-таъриф. $z = f(x, y)$ функция аниқланган x ва y қуш (x, y) қийматларининг туплами функциянинг *аниқлик соҳаси* ёки *мавжудлик соҳаси* деб аталади.

Функциянинг аниқлик соҳасини геометрик тарзда кургазмални тасвирланади. Агар x ва y нинг ҳар бир қуш қийматини Oxy текисликда $M(x, y)$ нуқта билан тасвирласак, функциянинг аниқлик соҳасини текисликдаги нуқталарнинг бирор туплами кўринишида тасвирланади. Нуқталарнинг бу тупламини ҳам функциянинг аниқлик соҳасини деб атаймиз. Функциянинг аниқлик соҳасини, жумладан, бутун текислик бўлиши ҳам мумкин. Бундан бўён асосан текисликиннинг чизиклари билан чегараланган қисмидан иборат бўлган соҳалар билан иш кўрамыз. Беришган соҳани чегараловчи чизикни соҳанинг *чегараси*

деб айтаймиз. Соҳанинг чегарада ётмаган нуқталарини соҳанинг *ички* нуқталари деб атаймиз. Фақат ички нуқталардан иборат бўлган соҳа *очиқ соҳа* дейилади. Агар соҳага чегараларини нуқталари ҳам кирса, *соҳа ёпиқ* деб аталади. Агар шундай ўзгармас C сон мавжуд бўлсаки, координаталар боши O дан соҳанинг исталган M нуқтасигача бўлган масофа C дан кичик, яъни $|OM| < C$ бўлса, соҳа чегараланган деб аталади.

5- Мисол.

$$z = 2x - y$$

функциянинг табиий аниқлик соҳаси белгилансин.

$2x - y$ аналитик ифода x ва y нинг ҳар қандай қийматига маънога эга. Демак, функциянинг табиий аниқлик соҳаси бутун Oxy текислиги бўлади.

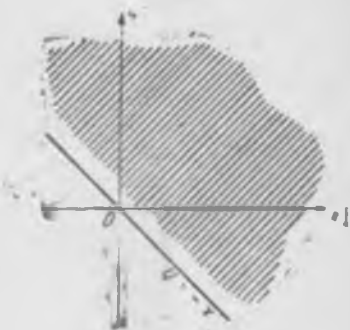
6- мисол.

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

z ҳақиқий қийматга эга бўлиши учун, радикал остида номанфий сон туриши, яъни x ва y ушбу тенгсизлиكنи қаноатлантириши керак

$$1 - x^2 - y^2 > 0 \text{ ёки } x^2 + y^2 < 1.$$

Координаталари бу тенгсизлиكنи қаноатлантирувчи ҳамма $M(x, y)$ нуқталар радиуси 1 га тенг ва маркази координаталар бошида бўлган доирада ва у доира чегарасида ётади.



7- мисол.

$$z = \ln(x + y).$$

Логарифмлар фақат мусбат сонлар учун аниқланган бўлади, шунинг учун ушбу тенгсизлик қаноатланиши керак:

$$x + y > 0 \text{ ёки } y > -x.$$

Бу, z функциянинг табиий аниқлик соҳаси $y = -x$ тўғри чизиқдан ёқоридаги ярим текислик бўлади деган сўзидир; тўғри чизиқнинг ўзи бу соҳага қирмайдн (166- расм).

8- мисол. Учбурчакнинг юзи S — асоси x ва баландлиги y нинг функцияси:

$$S = \frac{xy}{2}.$$

Бу функциянинг аниқлик соҳаси $x > 0$, $y > 0$ соҳадир (чунки учбурчакнинг асоси ва баландлиги манфий сон ва ноль бўла олмайди). Бу функциянинг аниқлик соҳаси функцияни белгилловчи аналитик ифоданинг табиий

аниқлик соҳасидан фарқ қилади, чунки $\frac{xy}{2}$ ифоданинг табиий аниқлик соҳаси бутун Oxy текислиги бўлиши равшан кўришиб турибди.

Икки ўзгарувчи функциясининг таърифини уч ёки ундан ортнқ ўзгарувчи бўлган ҳол учун умумлаштириш осон.

3- таъриф. Агар $x, y, z, \dots, u, t$ ўзгарувчиларнинг ҳар бир қийматлар тўпламига ўзгарувчи w нинг аниқ қиймати мос келса, w ни $x, y, z, \dots, u, t$ эркин ўзгарувчиларнинг функцияси деб атаёмиз ва

$$w = F(x, y, z, \dots, u, t) \text{ ёки } w = f(x, y, z, \dots, u, t)$$

ва $x, y, z, \dots, u, t$ кўринишда ёзамиз.

Икки ўзгарувчининг функцияси сингари, уч, тўрт ва ундан ортиқ ўзгарувчилар функциясининг аниқлик соҳаси ҳақида сузлаш мумкин.

Масалан, уч ўзгарувчининг функцияси учун аниқлик соҳаси уч сон (x, y, z) нинг бирор тўплами бўлади. Маълумки, ҳар бир учта сон $Qxyz$ фазо координаталар системасида бирор $M(x, y, z)$ нуқтани беради. Демак, уч ўзгарувчи функциясининг аниқлик соҳаси фазо нуқталарининг бирор тўплами бўлади.

Шунга ўхшаш, тўрт ўзгарувчи функцияси $w = f(x, y, z, t)$ нинг аниқлик соҳаси тўртта сон (x, y, z, t) нинг бирор тўплами бўлади дейиш мумкин. Лекин тўрт ва ундан ортиқ ўзгарувчилар функциясининг аниқлик соҳасини содда геометрик маънода изоҳлаб бўлмайди.

2- мисолда x, y, z нинг барча қийматларида аниқланган уч ўзгарувчи функцияси келтирилган.

4- мисолда тўрт ўзгарувчининг функцияси келтирилган.

9- мисол.

$$w = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2}.$$

Бу ерда w тўрт ўзгарувчи x, y, z, u нинг функцияси бўлиб, ўзгарувчиларнинг ушбу

$$1 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2 > 0$$

муносабатни қаноатлантирувчи қийматларида аниқланган.

2- §. Икки ўзгарувчи функциясининг геометрик тасвири

Оху текисликдаги G соҳада (бу соҳа, баъзан, бутун текисликдан иборат бўлиши ҳам мумкин) аниқланган

$$z = f(x, y) \quad (1)$$

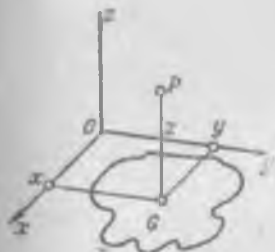
функцияни ва $Oxyz$ тўғри бурчакли Декарт координаталари системасини қараймиз (167- расм). G соҳанинг ҳар бир (x, y) нуқтасидан Oxy текисликка перпендикуляр ўтказамиз ва унда $f(x, y)$ га тенг кесма ажратамиз.

У ҳолда фазода координаталари

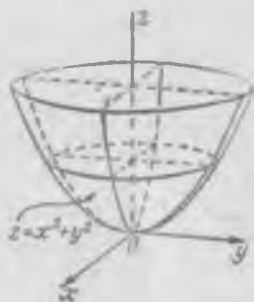
$$x, y, z = f(x, y)$$

бўлган P нуқтани ҳосил қиламиз.

Координаталари (1) тенгламани қаноатлантирадиган P нуқталарнинг геометрик ўрни икки ўзгарувчи функциясининг графиги деб аталади. Аналитик геометрия куҳсидан биламизки, (1) тенглама фазода бирон сиртни белгилайди. Шундай қилиб, икки ўзгарувчи функциясининг графиги, Оху текисликдаги проекцияси функциянинг аниқлик соҳасидан иборат бўлган сирт бўлади. Оху текисликка перпендикуляр бўлган ҳар бир тўғри чизиқ $z = f(x, y)$ сирт билан бир мартадан ортиқ кесишмайди.



167- расм



168- расм

Мисол. Геометриядан маълумки, $z = x^2 + y^2$ функциянинг графиги айланмш параболоидадан иборатдир. (168- расм.)

Изоҳ. Уч ва ундан ортиқ ўзгарувчининг функциясини фазода график ёрдами билан тасвирлаш мумкин эмас.

3- §. Функциянинг хусусий ва тўла орттирмаси

$z = f(x, y)$ сиртнинг Oxz текисликка параллел, $y = \text{const}$, текислик билан кесишганидан ҳосил бўлган PS чизиқни қараймиз (169- расм).

Бу текисликда y ўзгармас қийматни сақлагани учун, z фазоат PS чизиқ бўйлаб x нинг ўзгармшига боглиқ равшда ўзгаради. Эркин ўзгарувчи x га Δx орттирма берамиз; унда z ҳам орттирма олади, бу орттирма z нинг x бўйича хусусий орттирмаси деб аталади ва $\Delta_x z$ билан белгиланади (шаклда SS' кесма), яъни

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y). \quad (1)$$

мавжуд булса, $z = f(x, y)$ функция $M_0(x_0, y_0)$ нуқтада узлуксиз дейилади.

Агар $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$ деб белгиласак, (1) тенгликни бундай ёзиш мумкин:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) \quad (1')$$

ёки

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0. \quad (1'')$$

$\Delta \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ деб белгилаймиз. $\Delta x \rightarrow 0$ ва $\Delta y \rightarrow 0$ да $\Delta \rho \rightarrow 0$ ва, аксинча, $\Delta \rho \rightarrow 0$ бўлса, $\Delta x \rightarrow 0$ ва $\Delta y \rightarrow 0$ бўлади.

(1'') тенгликда квадрат қавслар ичида турган ифода функциянинг тула орттирмаси Δz эканини эътиборга олиб, (1'') тенгликни бундай шаклда ёзиш мумкин:

$$\lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \Delta z = 0. \quad (1''')$$

Бирор соҳанинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлган функция шу соҳада узлуксиз дейилади.

Агар бирон $N(x_0, y_0)$ нуқтада (1) тенглик бажарилмаса, $N(x_0, y_0)$ нуқта $z = f(x, y)$ функциянинг узилиш нуқтаси дейилади. (1') шарт, масалан, қуйидаги ҳолларда бажарилмаслиги мумкин:

1) $z = f(x, y)$ функция $N(x_0, y_0)$ нуқта бирор атрофининг барча нуқталарида аниқланган, лекин $N(x_0, y_0)$ нуқтанинг ўзида аниқланмаган;

2) $z = f(x, y)$ функция $N(x_0, y_0)$ нуқта атрофининг барча нуқталарида аниқланган, лекин

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$$

лимит мавжуд эмас.

3) Функция $N(x_0, y_0)$ нуқта атрофининг барча нуқталарида аниқланган ва $\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} f(x, y)$ лимит ҳам мавжуд, лекин

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) \neq f(x_0, y_0)$$

1- мисол. $z = x^2 + y^2$ функция x ва y нинг ҳар қандай қийметларида, яъни Oxy текисликининг ҳар бир нуқтасида узлуксиз.

Ҳақиқатан, x ва y , Δx ва Δy нинг ҳар қандай қиймати учун:

$$\Delta z = [(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2] - (x^2 + y^2) = 2x \Delta x + 2y \Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2.$$

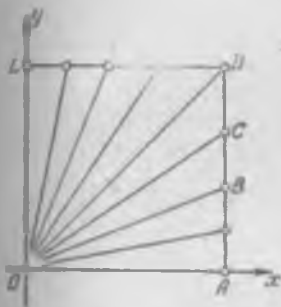
демак,

$$\lim \Delta z = 0, \\ \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0$$

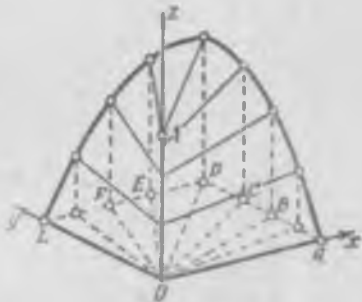
Узилувчи функцияга мисол келтирамиз.
2- мисол.

$$z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

Функция $x = 0$ ва $y = 0$ нуқтадан ташқари ҳамма ерда аниқланган (171, 172- расилар).



171- расм.



172- расм.

z нинг $y=kx$ ($k = \text{const}$) тўғри чизик бўйлаб қийматини қараймиз. Бу тўғри чизик бўйлаб

$$z = \frac{2kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{2k}{1 + k^2} = \text{const},$$

яъни z функция координаталар бошидан ўтган ҳар қандай тўғри чизик бўйлаб, тўғри чизикнинг бурчак коэффициентини k га боғлиқ бўлган ўзгармас қийматга эга бўлади. Шунинг учун координаталар бошига ҳар хил йўл билан яқинлашиб, ҳар хил лимит қийматларга эга бўламиз, бу эса (x, y) нуқта Оху текисликда координаталар бошига интилганда $f(x, y)$ функция лимитга эга бўлмайди деган сўздир. Демак, функция бу нуқтада узилган. Бу функцияни координаталар бошида узлуксиз бўладиган қилиб қушимча белгилаш мумкин эмас. Шу билан бирга бу функциянинг бошқа нуқталарда узлуксиз эканлигини куриш қийин эмас.

Ёпиқ ва чегараланган соҳада узлуксиз бўлган куп узгарувчи функциянинг бир неча муҳим хоссаларни исботсиз айтиб ўтамиз. Бу хоссалар кесмада узлуксиз бўлган бир узгарувчи функциянинг хоссаларига ўхшашдир (II боб, 10- § га қаралсин).

1- хосса. Агар $f(x, y, \dots)$ функция ёпиқ ва чегараланган D соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлса, шу D соҳада камида

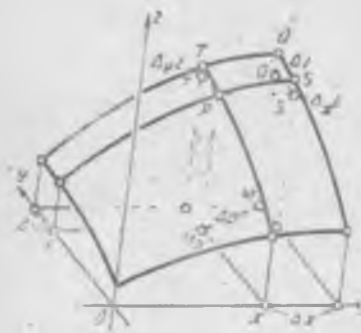
Шунга ўхшаш, агар x ҳагармас қиймати сақлаб, y га Δ_y орттирма берсак, z ҳам орттирма олади, бу орттирма z нинг y бўйича хусусий орттирмаси деб аталади ва $\Delta_y z$ билан белгиланади (шаклда TT' кесма):

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y). \quad (2)$$

Функция $\Delta_y z$ орттирмани $z = f(x, y)$ сиртини Оуз текисликка параллел $x = \text{const}$ текислик билан кесишган ерида ҳосил бўлган „қизик бўйлаб“ олади.

Ниҳоят аргумент x га Δx орттирма ва аргумент y га Δy орттирма бериб, z учун янги орттирма ҳосил қиламиз; бу орттирма функция z нинг *тула орттирмаси* деб аталади ва ушбу формула билан белгиланади:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad (3)$$



169- расм.

169- расмда Δz орттирма QQ' кесма билан тасвирланган.

Тула орттирма, умуман айтганда, хусусий орттирмалар йиғиндисига тенг эмас, яъни

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z.$$

Мисол. $z = xy$.

$$\Delta_x z = (x + \Delta x)y - xy = y\Delta x,$$

$$\Delta_y z = x(y + \Delta y) - xy = x\Delta y,$$

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y.$$

$$x = 1, \quad y = 2, \quad \Delta x = 0,2, \quad \Delta y = 0,3$$

бўлганда

$$\Delta_x z = 0,4, \quad \Delta_y z = 0,3, \quad \Delta z = 0,76.$$

Никитадан ортиқ ҳагарувчилар функциясининг хусусий ва тула орттирмалари ҳам шу каби белгиланади. Чунки уч ҳагарувчининг функцияси $u = f(x, y, t)$ учун:

$$\Delta_x u = f(x + \Delta x, y, t) - f(x, y, t),$$

$$\Delta_y u = f(x, y + \Delta y, t) - f(x, y, t),$$

$$\Delta_t u = f(x, y, t + \Delta t) - f(x, y, t),$$

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) - f(x, y, t).$$

4- §. Бир неча ҳагарувчи функциясининг узлуксизлиги

Битта муҳим ёрдамчи тушунчани, яъни берилган нуқта атрофи тушунчасини киритамиз.

$M_0(x_0, y_0)$ нуқтанинг r радиусли атрофи деб

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$$

теңгисзликини қаноатлантирадиган ҳамма (x, y) нуқталар тўпламига яъни маркази $M_0(x_0, y_0)$ нуқтада бўлган r радиусли доира ичида ётган ҳамма нуқталар тўпламига айтилади.

Агар биз $f(x, y)$ функция „ (x_0, y_0) нуқта яқинида“ ёки „ (x_0, y_0) нуқта атрофида“ фалон хоссага эга десак, ундаи маркази (x_0, y_0) нуқтада бўлган шундай доира топиладик, унинг ҳамма нуқталарида функция айтилган хоссага эга бўлади деган маънони тушунақиз.

Бир неча узгарувчи функциясининг узлуксизлиги тушунчасини қарашдан аввал бир неча узгарувчи функциясининг лимити тушунчасини қараймиз*).

Оху текисликнинг бирон G соҳасида аниқланган

$$z = f(x, y)$$

функция берилган бўлсин.

G соҳада ёки унинг чегарасида ётган тайин $M_0(x_0, y_0)$ нуқтани қараймиз (170- расм).

1- таъриф. „Агар ҳар қандай мусбат ε сон учун шундай $r > 0$ сон топилсакки, $MM_0 < r$ теңгисзлик қаноатланадиган барча $M_0(x, y)$ нуқталар учун

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

теңгисзлик қаноатланса, узгарувчи $M(x, y)$ нуқта $M_0(x_0, y_0)$ нуқтага интилганда $f(x, y)$ функция A *лимитга интилади* дейилади.

Агар A сон $M(x, y) \rightarrow M_0(x_0, y_0)$ да $f(x, y)$ функциянинг лимити бўлса, бундай ёзилади:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A.$$

2- таъриф. $M_0(x_0, y_0)$ нуқта $f(x, y)$ функциянинг аниқланиш соҳасидаги нуқта бўлсин. Агар $M(x, y)$ нуқта функциянинг аниқланиш соҳасида қолган ҳолда $M_0(x_0, y_0)$ нуқтага ихтиёрий усулда интилганда ушбу теңглик

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0) \quad (1)$$

*) Биз асосан икки ўзгарувчи функциясини қараймиз, чунки уч ва ундан ортиқ ўзгарувчи функциясини қараш ҳеч қандай принципиал ўзгариш келтирмайди, лекин қўшимча техник қийинчиликлар келтириб чиқаради.

битта шундай $N(x_0, y_0, \dots)$ нуқта топиладикн, соҳанинг бошқа ҳамма нуқталари учун ушбу

$$f(x_0, y_0, \dots) \geq f(x, y, \dots)$$

муносабат бажарилади ва камида битта шундай $\bar{N}(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \dots)$ нуқта топиладикн, соҳанинг бошқа ҳамма нуқталари учун

$$f(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \dots) \leq f(x, y, \dots)$$

муносабат бажарилади. Функциянинг $f(x_0, y_0, \dots) = M$ қийматини $f(x, y, \dots)$ функциянинг D соҳадаги энг катта қиймати деб, $f(x_0, y_0, \dots) = m$ қийматини эса энг кичик қиймати деб атаймиз.

Бу хосса бундай ҳам таърифланади. Ёпиқ ва чегараланган соҳада узлуксиз функция камида бир марта энг катта M қийматга ва камида бир марта энг кичик m қийматга эришади.

2- хосса. Агар $f(x, y, \dots)$ функция ёпиқ ва чегараланган D соҳада узлуксиз бўлса ва M, m сонлар $f(x, y, \dots)$ функциянинг соҳадаги энг катта ва энг кичик қийматлари бўлса, у ҳолда $m < \mu < M$ шартни қаноатлантирадиган ҳар қандай μ сон учун шундай $N^*(x_0^*, y_0^*, \dots)$ нуқта топилиши мумкинки, у нуқтада $f(x_0^*, y_0^*, \dots) = \mu$ тенглик бажарилади.

2- хоссадан натижа. Агар $f(x, y, \dots)$ функция ёпиқ ва чегараланган соҳада узлуксиз бўлиб, мусбат ва манфий қийматларга эга бўлса, у ҳолда шу соҳа ичида $f(x, y, \dots)$ функция нолга айланадиган нуқталар топилиши мумкин.

5- §. Бир неча ўзгарувчи функциясининг хусусий ҳосилалари

Таъриф. $z = f(x, y)$ функциянинг x бўйича хусусий ҳосиласи деб хусусий орттирма $\Delta_x z$ нинг Δx орттирмага нисбатн Δx нолга интилишидаги лимитига айтилади.

$z = f(x, y)$ функциянинг x бўйича хусусий ҳосиласн ушбу символларнинг бири билан белгиланади:

$$z'_x, \quad f'_x(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Шундай қилиб, таърифга кўра:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Шунга ухшаш $z = f(x, y)$ функциянинг y бўйича хусусий ҳосиласи деб функциянинг y бўйича хусусий ортирмаси $\Delta_y z$ нинг Δy га нисбати Δy нолга интилгандаги лимитига айтилади.

Функциянинг y бўйича хусусий ҳосиласи ушбу символларнинг бири билан белгиланади:

$$z'_y, f'_y, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Шундай қилиб,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

$\Delta_x z$ ни ҳисоблашда y нинг ўзгармаслигини $\Delta_y z$ ни ҳисоблашда эса x нинг ўзгармаслигини эътиборга олиб, хусусий ҳосилаларга бундай таъриф бериш мумкин: $z = f(x, y)$ функциянинг x бўйича хусусий ҳосиласи деб, y ни ўзгармас фараз қилиб, x бўйича топилган ҳосиллага айтилади. $z = f(x, y)$ функциянинг y бўйича хусусий ҳосиласи деб x ни ўзгармас фараз қилиб, y бўйича топилган ҳосиллага айтилади.

Бу таърифдан очиқ кўринадики, хусусий ҳосилаларни ҳисоблаш қондаси бир ўзгарувчининг функцияси учун кўрсатилган қонда билан бир хил, лекин ҳар гал қайси ўзгарувчи бўйича ҳосилла изланаётганини ёдда тутиш керак бўлади.

1-мисол. $z = x^2 \sin y$ функция берилган; $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ хусусий ҳосилаларни топиш талаб қилинади.

Еч иш.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y.$$

2-мисол. $z = x^y$

Бу ерда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Ҳар қанча ўзгарувчилар функциясининг хусусий ҳосилалари ҳам шунга ухшаш топилади. Чунончи, агар u туртта x, y, z, t ўзгарувчининг функцияси бўлса:

$$u = f(x, y, z, t),$$

у ҳолда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta y}$$

ва ҳ. к.

3- мисол. $u = x^2 + y^2 + xtz^3$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + tz^3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 3xtz^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = xz^3.$$

6- §. Икки ўзгарувчи функцияси хусусий ҳосилаларининг геометрик маъноси

Ушбу тенглама

$$z = f(x, y)$$

173- расмда тасвирланган сиртнинг тенгламаси бўлсин.

$x = \text{const}$ текислиқни ўтказамиз. Бу текислиқнинг сирт билан кесимида PT эгри чизиқ ҳосил бўлади. Берилган x бўйича

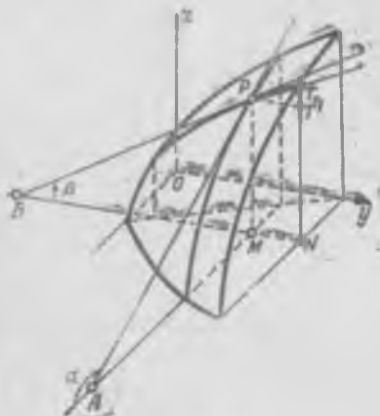
Оху текисликда бирор $M(x, y)$ нуқтани қараймиз. M нуқтага $z = f(x, y)$ сиртнинг (x, y, z) нуқтаси мос келади, x ни ўзгармас ҳолда сақлаб, y га $\Delta y = MN = PT'$ орттирма берамиз. Унда z функция $\Delta_y z = TT'$ орттирма олади ($N(x, y + \Delta y)$ нуқтага $z = f(x, y)$ сиртнинг $T(x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ нуқтаси мос келади).

$\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ нисбат PT кесувчи билан Oy ўқининг мусбат йўналиши орасидаги бурчакнинг тангенсига тенг:

$$\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \text{tg } \widehat{TP'T'}$$

Демак,

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y}$$



173- расм.

лимит PT эгри чизиқнинг P нуқтасидан ўтган PB уринма билан Oy ўқининг мусбат йуналиши орасида ҳосил бўлган β бурчакнинг тангенсига тенг:

$$\frac{dz}{dy} = \operatorname{tg} \beta.$$

Демак, $\frac{\partial z}{\partial y}$ хусусий ҳосиланинг сон қиймати $z = f(x, y)$ сиртни $x = \text{const}$ текислик билан кесганда ҳосил бўлган эгри чизиққа уринма оғиш бурчагининг тангенсига тенг.

Шунингдек $\frac{\partial z}{\partial x}$ хусусий ҳосиланинг сон қиймати $z = f(x, y)$ сиртнинг $y = \text{const}$ текислик билан кесимида уринманинг оғиш бурчаги α нинг тангенсига тенг.

7-§. Тўла орттирма ва тўла дифференциал

$z = f(x, y)$ функция тўла орттирмасининг таърифига кўра (VIII бобнинг 3-§ га қаранг):

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \quad (1)$$

$f(x, y)$ функция қаралаётган (x, y) нуқтада узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга деб фараз қиламиз.

Δz ни хусусий ҳосилалар орқали ифодалаймиз. Бунинг учун (1) тенгликнинг ўнг томонига $f(x, y + \Delta y)$ ни қўшамиз ва айирамиз:

$$\begin{aligned} \Delta z &= [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + \\ &+ [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Иккинчи квадрат қавс ичида турган

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

ифодага бир ўзгарувчи y функциясининг (x нинг қиймати ўзгармайди) икки қиймати орасидаги айирма деб қараш мумкин. Бу айирмага Лагранж теоремасини татбиқ қилиб,

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta y \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \quad (3)$$

тенгликни ҳосил қиламиз, бу ерда y у билан $y + \Delta y$ орасидаги сон.

Худди шунингдек, (2) тенгликдаги биринчи квадрат қавс ичида турган ифодани биргина x ўзгарувчили функциянинг (иккинчи аргумент шу $y + \Delta y$ қийматни сақлабди) икки қийма-

ти орасидаги айирма деб қараш мумкин. Бу айирмага Лагранж теоремасини қўлланиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x}, \quad (4)$$

бу ерда $\bar{x}$ x билан $x + \Delta x$ орасидаги сон.

(3) ва (4) ифодаларни (2) тенгликка қўйиб, шунинг ҳосил қиламиз:

$$\Delta z = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y}. \quad (5)$$

Фаразимишга кўра хусусий ҳосилалар узлуксиз булгани учун

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \\ \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

($\bar{x}$ ва $\bar{y}$ мос равишда x билан $x + \Delta x$, y билан $y + \Delta y$ орасида булгани учун, $\Delta x \rightarrow 0$ ва $\Delta y \rightarrow 0$ да $\bar{x}$ ва $\bar{y}$ мос равишда x ва y га интилади). (6) тенгликни бундай кўринишда ёзиш мумкин:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \gamma_1, \\ \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \gamma_2. \end{aligned} \right\} \quad (6')$$

бу ерда Δx ва Δy нолга интилганда (яъни $\Delta \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0$ да) γ_1 ва γ_2 миқдорлар нолга интилади.

(6') тенгликка кўра (5) ифода ушбу кўринишга келади.

$$\Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y. \quad (5')$$

Ўнг томордаги охириги икки қўшилувчининг йиғиндиси $\Delta \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдордир. Ҳақиқатан $\rho \rightarrow 0$ да $\frac{\gamma_1 \Delta x}{\Delta \rho} \rightarrow 0$, чунки γ_1 чексиз кичик миқдор, $\frac{\Delta x}{\Delta \rho}$ — чегараланган ($|\frac{\Delta x}{\Delta \rho}| < 1$) миқдор. $\frac{\gamma_2 \Delta y}{\Delta \rho} \rightarrow 0$ эканлиги ҳам шундай текширилади.

Олдинги икки қўшилувчининг йиғиндиси Δx ва Δy га нисбатан чизикли ифода. $f'_x(x, y) \neq 0$ ва $f'_y(x, y) \neq 0$ булганда бу

ифода орттирманинг бош булагини ташкил этади ва Δz дан $\Delta z = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдорга фарқ қилади.

Таъриф. Тўла орттирмаси Δz берилган (x, y) нуқтада яқин ҳашилувчи: Δx ва Δy га нисбатан чизиқли ифода ва Δz га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдор йиғиндисини кўринишида тасвирланиши мумкин бўлган $z = f(x, y)$ функция берилган нуқтада дифференциалланувчи дейилади, орттирманинг чизиқли қисми эса, тўла дифференциал дейилади ва dz ёки df билан белгиланади.

(5') тенгликдан, агар $f(x, y)$ функция берилган нуқтада узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у функция шу нуқтада дифференциалланувчи ва тўла дифференциалга эга эканлиги келиб чиқади:

$$dz = f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y.$$

(5') тенгликни яна бундай кўринишда ёзиш мумкин:

$$\Delta z = dz + r_1 \Delta x + r_2 \Delta y$$

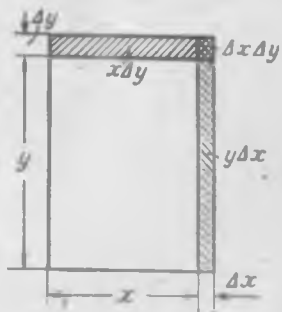
ва Δz га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдоргача аниқлик билан ушбу тақрибий тенгликни ёзиш мумкин:

$$\Delta z \approx dz.$$

Эркин ўзгарувчиларнинг орттирмалари Δx ва Δy ни x ва y эркин ўзгарувчиларнинг дифференциаллари деймиз, уларни dx ва dy билан белгилаймиз. Унда тўла дифференциалнинг ифодаси ушбу кўринишни олади:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Шундай қилиб, агар $z = f(x, y)$ функция узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у функция (x, y) нуқтада дифференциалланувчи ва унинг тўла дифференциали хусусий ҳосилаларнинг тегишли эркин ўзгарувчилар дифференциалларига кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг.



174- расм.

1- мисол. $z = xy$ функциянинг (2; 3) нуқтада $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,2$ бўлганда тўла орттирмаси ва тўла дифференциали топилсин.

Ечиш.

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y \Delta x + x \Delta y + \Delta x \Delta y,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = y dx + x dy = y \Delta x + x \Delta y,$$

Демак, $\Delta z = 3 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,72$,

$$dz = 3 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 = 0,7.$$

174- расмда бу мисолга тасвир берилган.

Юқоридаги муҳокамалар ва таърифлар ҳар қанча аргумент-нинг функциясига тегишли равишда умумлаштирилади.

Агар кўп ўзгарувчининг ушбу функцияси

$$w = f(x, y, z, u, \dots, t)$$

берилган бўлиб, $(x, y, z, u, \dots, t)$ нуқтадаги ҳамма хусусий ҳосилалари $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \dots, \frac{\partial f}{\partial t}$ узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$dw = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \dots + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

ифода функция тўла орттирмасининг бош бўлаги бўлади ва тўла дифференциал деб аталади. $\Delta w - dw$ айирманинг $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + \dots + (\Delta t)^2}$ га нисбатан юқори тартибли кичик миқдор эканини исботлаш худди икки ўзгарувчининг функциясидаги каби ўтказилади.

2- мисол. Уч ўзгарувчи x, y, z нинг функцияси $u = e^{x^2+y^2} \sin^2 z$ нинг тўла дифференциали топилсин.

Еч и ш. Хусусий ҳосилалар

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x^2+y^2} 2x \sin^2 z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{x^2+y^2} 2y \sin^2 z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = e^{x^2+y^2} 2 \sin z \cos z = e^{x^2+y^2} \sin 2z$$

x, y, z нинг ҳамма қийматларида узлуксиз бўлгани учун

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = e^{x^2+y^2} (2x \sin^2 z dx + 2y \sin^2 z dy + \sin 2z dz).$$

8- §. Тўла дифференциалнинг тақрибий ҳисоблашга татбиқи

$z = f(x, y)$ функция (x, y) нуқтада дифференциаланувчи бўлсин. Бу функциянинг тўла орттирмасини топамиз:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

бундан

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta z. \quad (1)$$

Биз мапа бу

$$\Delta z \approx dz \quad (2)$$

тақрибий формулага эгамиз, бунда

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y. \quad (3)$$

(1) формулада Δz ўрнига dz нинг ёнқ ифодасини қўйиб, уш-бу тақрибий формулани ҳосил қиламиз:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y. \quad (4)$$

Бу формула Δx ва Δy га нисбатан юқори тартибли чексиз ки-чик миқдоргача аниқликда тўғридир.

(2) ва (4) формулаларни тақрибий ҳисоблашга қандай қўл-ланишини кўрсатамиз.

М а с а л а. Ўлчовлари қуйидагича бўлган цилинд-рик стакан ясаш учун кетадиган материалнинг ҳажми ҳисобланси: (175- расм):

ички цилиндрининг радиуси R ,
ички цилиндрининг баландлиги H ,
стакан ён девори ва тубининг қалинлиги k .

Е ч и ш. Бу масаланинг икки хил: аниқ ва тақрибий ечилишини берамиз.

а) **А н и қ е ч и л и ш и.** Изланган v ҳажм ташқи цилиндри билан ички цилиндри ҳажмларининг айирмаси-га тенг. Ташқи цилиндрининг радиуси $R + k$ га ва ба-ландлиги $H + k$ га тенг бўлгани учун,

$$v = \pi (R + k)^2 (H + k) - \pi R^2 H,$$

ёки

$$v = \pi (2RHk + R^2 k + Hk^2 + 2Rk^2 + k^3). \quad (5)$$

б) **Та қ р и б и й е ч и л и ш и.** Ички цилиндри ҳажмини f билан белгилай-миз, у ҳолда $f = \pi R^2 H$. Бу икки ўзгарувчи R ва H нинг функцияси. Агар R ва H ни k га орттирсак, f функция ҳам Δf орттирма олади; лекин бу изланган v ҳажмининг ўзи, яъни $v = \Delta f$ бўлади.

(1) тенгликка асосан ушбу тақрибий

$$v \approx \Delta f,$$

ёки

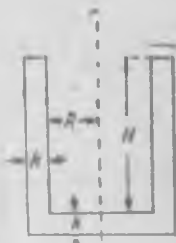
$$v \approx \frac{\partial f}{\partial R} \Delta R + \frac{\partial f}{\partial H} \Delta H$$

формулага эгамиз. Лекин

$$\frac{\partial f}{\partial R} = 2\pi RH, \quad \frac{\partial f}{\partial H} = \pi R^2, \quad \Delta R = \Delta H = k$$

бўлгани учун:

$$v \approx \pi (2RHk + R^2 k). \quad (6)$$



175- расм.

(5) ва (6) нагжаларни солиштириб, улар k га нисбатан иккинчи ва учинчи тартибли кичик ҳадлардан иборат бўлган $\pi(Hk^2 + 2Rk^3 + k^3)$ миқдорга фарқ қилганини курамиз.

Бу формулаларни сонли мисолларга қўлланайлик:

$$R = 4 \text{ см}, \quad H = 20 \text{ см}, \quad k = 0,1 \text{ см бўлсин.}$$

(5) формулани қўлланиб, ушбу аниқ натижани ҳосил қиламиз:

$$v = \pi(2 \cdot 4 \cdot 20 \cdot 0,1 + 4^3 \cdot 0,1 + 20 \cdot 0,1^3 + 2 \cdot 4 \cdot 0,1^3 + 0,1^3) = 17,881 \pi.$$

(6) формулани қўлланиб, ушбу тақрибий натижани ҳосил қиламиз:

$$v \approx \pi(2 \cdot 4 \cdot 20 \cdot 0,1 + 4^3 \cdot 0,1) = 17,6 \pi.$$

Демак, (6) тақрибий формула $0,3\pi$ дан кичик хатоли натижа беради. Бу-
даги хато ўлчанган миқдорнинг $100 \cdot \frac{0,3\pi}{17,881\pi} \%$, яъни 2% дан кам.

9- §. Дифференциалнинг ҳисоблашдаги хатони баҳолашга татбиқи

Бирор u миқдор $x, y, z, \dots, t$ ўзгарувчиларнинг функцияси бўлсин:

$$u = f(x, y, z, \dots, t)$$

ва $x, y, z, \dots, t$ ўзгарувчиларнинг қийматларини бирон усул билан аниқлашда $\Delta x, \Delta y, \dots, \Delta t$ хатоларни қилган бўлайлик. У ҳолда аргументларнинг ноаниқ қийматлари бўйича ҳисобланган функциянинг қиймати бундай хато билан ҳосил бўлади $\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, \dots, z + \Delta z, t + \Delta t) - f(x, y, z, \dots, t)$.

Қуйида $\Delta x, \Delta y, \dots, \Delta t$ хатолар маълум бўлганда Δu хатони баҳолаш билан шуғулланамиз. $\Delta x, \Delta y, \dots, \Delta t$ миқдорларнинг етарли даражада кичик абсолют қийматлари учун тула орттирмани тақрибан тула дифференциал билан алмаштириш мумкин:

$$\Delta u \approx \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \dots + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t.$$

Бу ерда хусусий ҳосилалар ва аргумент хатоларининг қийматлари мусбат ва манфий булиши мумкин. Уларни абсолют қийматлар билан алмаштириб, ушбу тенгсизликни ҳосил қиламиз:

$$|\Delta u| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| |\Delta x| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| |\Delta y| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| |\Delta t|. \quad (1)$$

Агар аргументларнинг *максимал абсолют* хатолари (хатолар қийматларининг абсолют миқдорлари учун чегаралар) тегишинча $|\Delta^* x|, |\Delta^* y|, \dots, |\Delta^* u|$ билан белгиланса, ушбу тенгсизликни қабул қилиш мумкин:

$$|\Delta^* u| = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| |\Delta^* x| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| |\Delta^* y| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| |\Delta^* t|. \quad (2)$$

Мисоллар.

1. $u = x + y + z$ бўлсин, u ҳолда

$$|\Delta^* u| = |\Delta^* x| + |\Delta^* y| + |\Delta^* z| \text{ бўлади.}$$

2. $u = x - y$ бўлсин, u ҳолда

$$|\Delta^* u| = |\Delta^* x| + |\Delta^* y| \text{ бўлади.}$$

3. $u = xy$ бўлсин, u ҳолда

$$|\Delta^* u| = |x| |\Delta^* y| + |y| |\Delta^* x| \text{ бўлади.}$$

4. $u = \frac{x}{y}$ бўлсин, u ҳолда

$$|\Delta^* u| = \left| \frac{1}{y} \right| |\Delta^* x| + \left| \frac{x}{y^2} \right| |\Delta^* y| = \frac{|y| |\Delta^* x| + |x| |\Delta^* y|}{y^2} \text{ бўлади.}$$

5. Тўғри бурчакли ABC учбурчакнинг гипотенузаси ва бир катети тақрибан $c = 75$, $a = 32$ га тенг. Гипотенуза узунлигини ўлчагандаги максимал абсолют хато $|\Delta^* c| = 0,2$, катетни ўлчагандаги абсолют хато $|\Delta^* a| = 0,1$.

A бурчак $\sin A = \frac{a}{c}$ формула бўйича ҳисоблансин; A бурчакни ҳисоблашдаги максимал абсолют хато $|\Delta A|$ аниқлансин.

Е ч и ш. $\sin A = \frac{a}{c}$, $A = \arcsin \frac{a}{c}$, демак,

$$\frac{\partial A}{\partial a} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - a^2}}, \quad \frac{\partial A}{\partial c} = -\frac{A}{c \sqrt{c^2 - a^2}}.$$

(2) формулани қўлланиб, ушбунни ҳосил қиламиз:

$$|\Delta A| = \frac{1}{\sqrt{(75)^2 - (32)^2}} \cdot 0,1 + \frac{32}{75 \sqrt{(75)^2 - (32)^2}} \cdot 0,2 = 0,00273 \text{ радиан} = 9'24''.$$

Шундай қилиб,

$$A = \arcsin \frac{32}{75} \pm 9'24''.$$

6. Тўғри бурчакли ABC учбурчакнинг катети $b = 121,56$ м, бурчаги $A = 25^\circ 21' 40''$, b катетни аниқлашдаги максимал абсолют хато $|\Delta^* b| = 0,05$ м. A бурчакни аниқлашдаги максимал абсолют хато $|\Delta^* A| = 12''$.

a катетни $a = b \operatorname{tg} A$ формула бўйича ҳисоблашдаги максимал абсолют хато топилисин.

Е ч и ш. (2) формула бўйича

$$|\Delta^* a| = |\operatorname{tg} A| |\Delta^* b| + \frac{|b|}{\cos^2 A} |\Delta^* A|$$

ёқанини топамиз. Тегишли қийматларни қўйиб ($|\Delta^* A|$ ни радиан билан ифодалашни унутмасдан), қуйидаги қийматни ҳосил қиламиз:

$$|\Delta^* a| = \operatorname{tg} 25^\circ 21' 40'' \cdot 0,05 + \frac{121,56}{\cos^2 25^\circ 21' 40''} \cdot \frac{12}{206265} = 0,0237 + 0,0087 = 0,0324 \text{ м.}$$

Бирор миқдор хатоси Δx нинг ўша миқдорнинг тақрибий қиймати x га нисбати шу *миқдорнинг нисбий хатоси* деб аталади. Уни δx билан белгилаймиз:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x}.$$

x миқдорнинг *максимал нисбий хатоси* деб максимал абсолют хатонинг x нинг абсолют қийматига нисбатига айтилади ва $|\delta^* x|$ билан белгиланади:

$$|\delta^* x| = \frac{|\Delta^* x|}{|x|}. \quad (3)$$

u функциянинг максимал нисбий хатосини баҳолаш учун (2) тенгликнинг барча ҳадларини $|u| = |f(x, y, z, \dots, t)|$ га бўламиз:

$$\frac{|\Delta^* u|}{|u|} = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| |\Delta^* x| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| |\Delta^* y| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| |\Delta^* t|. \quad (4)$$

лекин

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \ln |f|, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \ln |f|, \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \ln |f|.$$

Шунинг учун (4) тенгликни бундай ёзиш мумкин:

$$|\delta^* u| = \left| \frac{\partial}{\partial x} \ln |f| \right| |\Delta^* x| + \left| \frac{\partial}{\partial y} \ln |f| \right| |\Delta^* y| + \dots + \left| \frac{\partial}{\partial t} \ln |f| \right| |\Delta^* t|, \dots \quad (5)$$

ёки қисқача

$$|\delta^* u| = |\Delta^* \ln |f||. \quad (6)$$

(4) формуладан ҳам, (5) формуладан ҳам бундай натижа чиқади: функциянинг максимал нисбий хатоси шу функция логарифмининг максимал абсолют хатосига тенг.

(6) формуладан тақрибий ҳисоблашда қўлланиладиган қондалар келиб чиқади.

1. $u = xy$ бўлсин. 3- мисолнинг натижаларидан фойдаланиб, мана бу тенгликни ҳосил қиламиз:

$$|\delta^* u| = \frac{|y| |\Delta^* x|}{|xy|} + \frac{|x| |\Delta^* y|}{|xy|} = \frac{|\Delta^* x|}{|x|} + \frac{|\Delta^* y|}{|y|} = |\delta^* x| + |\delta^* y|,$$

яъни кўпайтманинг максимал нисбий хатоси кўпайтувчилар максимал нисбий хатоларининг йиғиндисига тенг.

2. Агар $u = \frac{x}{y}$ бўлса, 4- мисол натижаларидан фойдаланиб, шуни топамиз:

$$|\delta^* u| = |\delta^* x| + |\delta^* y|.$$

Изоҳ. 2- мисолга асосан ушбу натижа чиқади; агар $u = x - y$ бўлса,

$$|\delta^* u| = \frac{|\Delta^* x| + |\Delta^* y|}{|x - y|}.$$

Агар x ва y нинг қийматлари бир-бирига яқин бўлса, $|\delta^* u|$ нинг қиймати анқланидиган $x - y$ нинг қийматиға қараганда анча катта бўлиши мумкин. Ҳисоблаш ишларини бажаришда бу ҳолни ҳисобга олиш лозим.

7- мисол. Маятникнинг тебраниш даври

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

бу ерда l — маятник узунлиги, g — оғирлик кучининг тезланиши.

Агар $\pi \approx 3,14$ (0,005 гача аниқликда), $l = 1$ м (0,01 гача аниқликда), $g = 9,8$ м/сек² (0,02 м/сек² гача аниқликда) деб қабул қилиб, T ни шу формула бўйича ҳисобласак, қандай нисбий хато қилган бўламиз?

Ечиш. (6) формулага кўра максимал нисбий хато

$$|\delta^* T| = |\Delta^* \ln T|.$$

Лекин

$$\ln T = \ln 2 + \ln \pi + \frac{1}{2} \ln l - \frac{1}{2} \ln g.$$

$|\Delta^* \ln T|$ ни ҳисоблаймиз. $\pi \approx 3,14$, $\Delta^* \pi = 0,005$, $l = 1$ м, $\Delta^* l = 0,01$ м, $g = 9,8$ м/сек², $\Delta^* g = 0,02$ м/сек² эканини эътиборга олиб, ушбу қийматни ҳисоб қиламиз:

$$\Delta^* \ln T = \frac{\Delta^* \pi}{\pi} + \frac{\Delta^* l}{2l} + \frac{\Delta^* g}{2g} = \frac{0,005}{3,14} + \frac{0,01}{2} + \frac{0,02}{2 \cdot 9,8} = 0,0076.$$

Шундай қилиб, максимал нисбий хато

$$\delta^* T = 0,0076 = 0,76 \, \%.$$

10- §. Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Тўла ҳосила. Мураккаб функциянинг тўла дифференциали

Ушбу

$$z = F(u, v) \quad (1)$$

тенгламада u ва v миқдорлар x, y эркин ўзгарувчиларнинг функциялари:

$$u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y) \quad (2)$$

деб фараз қилайлик. z бу ҳолда x ва y нинг мураккаб функцияси.

Албатта, z ни бевосита x , y орқали ифодалаш мумкин:

$$z = F[\varphi(x, y), \psi(x, y)]. \quad (3)$$

1- мисол. Агар

$$z = u^2 v^3 + u + 1; \quad u = x^2 + y^2; \quad v = e^{x+y} + 1$$

бўлса, унда

$$z = (x^2 + y^2)^3 (e^{x+y} + 1)^3 + (x^2 + y^2) + 1.$$

$F(u, v)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ функциялар ўзларининг барча аргументлари бўйича узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга деб фараз қиламиз ва бундай масалани қўямиз: (1) ва (2) тенгламалардан фойдаланиб ва (3) тенгламадан фойдаланмасдан $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ хусусий ҳосилалар ҳисоблансин.

y нинг қийматини ўзгартирмасдан, аргумент x га Δx орттирма берамиз. y вақтда (2) тенгламалар бўйича u ва v ҳам $\Delta_x u$, $\Delta_x v$ орттирмаларни олади.

Модомикн, u , v миқдорлар $\Delta_x u$, $\Delta_x v$ орттирмаларни олса, $z = F(u, v)$ функция ҳам VIII бобнинг 7- § даги (5') формула билан аниқланадиган Δz орттирмани олади:

$$\Delta z = \frac{\partial F}{\partial u} \Delta_x u + \frac{\partial F}{\partial v} \Delta_x v + \gamma_1 \Delta_x u + \gamma_2 \Delta_x v.$$

Бу тенгликнинг ҳамма ҳадларини Δx га бўламиз:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \gamma_1 \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \gamma_2 \frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Агар $\Delta x \rightarrow 0$ бўлса, бу ҳолда u ва v функциялар узлуксиз бўлгани учун $\Delta_x u \rightarrow 0$, $\Delta_x v \rightarrow 0$. Унда γ_1 ва γ_2 ҳам нолга интилади. $\Delta x \rightarrow 0$ шарт билан лимитга ўтиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \gamma_1 = 0, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \gamma_2 = 0$$

ва, демак,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4)$$

Агар y га Δy орттирма бериб, x ни ўзгартирмасак, шунга ўхшаш муҳокамалар билан ушбунни топар эдик:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4')$$

2-мисол.

$$z = \ln(u^2 + v), \quad u = e^{x+y^2}, \quad v = x^2 + y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{u^2 + v}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{u^2 + v}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x+y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1.$$

(4) ва (4') формулалардан фойдаланиб, шуларни топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{u^2 + v} e^{x+y^2} + \frac{1}{u^2 + v} 2x = \frac{2}{u^2 + v} (ue^{x+y^2} + x),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2u}{u^2 + v} 2ye^{x+y^2} + \frac{1}{u^2 + v} = \frac{1}{u^2 + v} (2u ye^{x+y^2} + 1).$$

Охириги ифодада u ва v ўрнига мос равишда e^{x+y^2} ва e^{x^2+y} ни қўйиш керак.

Иккидан ортиқ ўзгарувчиларнинг функциялари учун (4) ва (4') формулалар табиий равишда умумлаштирилади.

Масалан, $w = F(z, u, v, s)$ тўрт аргумент z, u, v, s нинг функцияси ва буларнинг ҳар бири x ва y га боғлиқ бўлса, (4) ва (4') формулалар ушбу кўринишни олади:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Агар $z = F(x, y, u, v)$ функция берилган ва y, u, v ўз навбатида бир аргумент x га боғлиқ, яъни

$$y = f(x), \quad u = \varphi(x), \quad v = \psi(x)$$

бўлса, ҳақиқатда z фақат бир ўзгарувчи x нинг функцияси бўлади ва $\frac{dz}{dx}$ ҳосилани топиш масаласини қўйиш мумкин.

Бу ҳосила (5) формулаларининг биричиси билан ҳисобланади:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx};$$

Лекин y, u, v — фақат биригина x нинг функциялари бўлгани учун хусусий ҳосилалар оддий ҳосилаларга айланади; ундан ташқари $\frac{dx}{dx} = 1$; шунинг учун

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx}.$$

Бу формула $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ хусусий ҳосиладан фарқ қилиб $\frac{dz}{dx}$ тугал ҳосилани ҳисоблаш формуласи деб аталади.

3- мисол.

$$z = x^2 + \sqrt{y}, \quad y = \sin x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad \frac{dy}{dx} = \cos x.$$

Бу ҳолда (6) формула ушбу натижани беради:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cos x = 2x + \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cos x.$$

Энди (1) ва (2) тенгликлар билан белгиланган мураккаб функциянинг тугал дифференциалини топамиз.

(4) ва (4') тенгликлар билан аниқланган $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ ифодадаларини тугал дифференциал формуласи

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (6)$$

га қуямиз.

$$dz = \left(\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy$$

ни ҳосил қиламиз.

Бу тенглиkning унг томонида ушбу алмаштиришни қиламиз:

$$dz = \frac{\partial F}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + \frac{\partial F}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \quad (7)$$

Лекин

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy &= du, \\ \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy &= dv. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(8) ни эътиборга олиб (7) ни бундай ёзиш мумкин:

$$dz = \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv \quad (9)$$

ёки

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv. \quad (9')$$

(6) ва (9') ифодадаларни солиштириб, бир неча ҳагарувчининг функция биринчи тартибли тугал дифференциалининг ифодаси

бир хил куринишда дейишимиз мумкин; яъни u ва v эркин ўзгарувчи бўлса ҳам ёки бошқа ўзгарувчиларнинг функцияси бўлса ҳам дифференциалнинг шакли инвариантдир.

4- мисол. Ушбу

$$z = u^2 v^2, \quad u = x^2 \sin y, \quad v = x^2 e^y$$

мураккаб функциянинг тўла дифференциали топилсин.

Ечнш. (9') формулага кўра:

$$dz = 2uv^2 du + 3u^2 v^2 dv = 2uv^2 (2x \sin y dx + x^2 \cos y dy) + 3u^2 v^3 (3x^2 e^y dx + x^2 e^y dy).$$

Сўнгги ифодани бундай ёзиш ҳам мумкин:

$$dz = (2uv^3 \cdot 2x \sin y + 3u^2 v^2 \cdot 3x^2 e^y) dx + (2uv^3 x^2 \cos y + 3u^2 v^3 x^2 e^y) dy = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

11- §. Ошкормас шаклда берилган функциянинг ҳосиласи

Бу масалани қарашни бир ўзгарувчининг ошкормас функциясида бошлаймиз*). x нинг бирор функцияси u ўшбу

$$F(x, y) = 0$$

тенглама билан аниқланган бўлсин. Қуйидаги теоремани исботлаймиз:

Теорема. Агар x нинг узлуксиз функцияси u

$$F(x, y) = 0 \quad (1)$$

тенглами билан ошкормас шаклда берилган бўлиб, бу ерда $F(x, y)$, $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ — координатлари берилган (i) тенгламани қаноатлантирадиган (x, y) нуқтани ўз ичига олган бирор D соҳада узлуксиз функциялар бўлсин; бундан ташқари шу нуқтада $F'_y(x, y) \neq 0$ бўлсин. У вақтда x нинг y функцияси ушбу ҳосилага эга бўлади:

$$y'_x = - \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \quad (2)$$

Исбот. x нинг бирор қийматига функциянинг y қийматини мос бўлсин. Бунда

$$F(x, y) = 0.$$

*) III бобнинг 11- § да ошкормас функцияни дифференциаллаш ҳақидаги масалани ечган эдик. Лекин у ерда айрим мисолларни қараган ва ошкормас функциянинг ҳар қандай нуқтадаги ҳосиласини берадиган умумий формулани топмаган ҳамда бу ҳосиланинг мавжудлик шартларини аниқламаган эдик.

Бу формула $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ хусусий ҳосилдан фарқ қилиб $\frac{dz}{dx}$ му-
ла ҳосилани ҳисоблаш формуласи деб аталади.

3-мисол.

$$z = x^2 + \sqrt{y}, \quad y = \sin x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad \frac{dy}{dx} = \cos x.$$

Бу ҳолда (6) формула ушбу натижани беради:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cos x = 2x + \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cos x.$$

Энди (1) ва (2) тенгликлар билан белгиланган мураккаб
функциянинг тўла дифференциалини топамиз.

(4) ва (4') тенгликлар билан аниқланган $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ ифода-
ларини тўла дифференциал формуласи

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (6)$$

га қўямиз.

$$dz = \left(\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy$$

ни ҳосил қиламиз.

Бу тенглиkning унг томонида ушбу алмаштиришни қила-
миз:

$$dz = \frac{\partial F}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + \frac{\partial F}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \quad (7)$$

Лекин

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy &= du, \\ \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy &= dv. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(8) ни эътиборга олиб (7) ни бундай ёзиш мумкин:

$$dz = \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv \quad (9)$$

ёки

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv. \quad (9')$$

(6) ва (9') ифодаларни солиштириб, бир неча узгарувчилар
функция биринчи тартибли тўла дифференциалининг ифодаси

бир хил кўринишда дейишимиз мумкин; яъни u ва v эркин ўзгарувчи бўлса ҳам ёки бошқа ўзгарувчиларнинг функцияси бўлса ҳам дифференциалнинг шакли инвариантдир.

4- мисол. Ушбу

$$z = u^2 v^3, \quad u = x^2 \sin y, \quad v = x^2 e^y$$

мураккаб функциянинг тўла дифференциали топилсин.

Ечиш. (9') формулага кўра:

$$dz = 2uv^3 du + 3u^2 v^2 dv = 2uv^3 (2x \sin y dx + x^2 \cos y dy) + 3u^2 v^3 (3x^2 e^y dx + x^2 e^y dy).$$

Сўнгги ифодани бундай ёзиш ҳам мумкин:

$$dz = (2uv^3 \cdot 2x \sin y + 3u^2 v^3 \cdot 3x^2 e^y) dx + (2uv^3 x^2 \cos y + 3u^2 v^3 x^2 e^y) dy = \\ = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

11- §. Ошкормас шаклда берилган функциянинг ҳосиласи

Бу масалани қарашни бир ўзгарувчининг ошкормас функциясида (x нинг бирор функцияси y ўшбу

$$F(x, y) = 0$$

тенглама билан аниқланган бўлсин. Қуйидаги теоремани исботлаймиз:

Теорема. Агар x нинг узлуксиз функцияси y

$$F(x, y) = 0 \quad (1)$$

тенглама билан ошкормас шаклда берилган бўлиб, бу ерда $F(x, y)$, $F_x(x, y)$, $F_y(x, y)$ — координатлари берилган (i) тенгламани қаноатлантирадиган (x, y) нуқтани ўз ичига олган бирор D соҳада узлуксиз функциялар булсин; бундан ташқари шу нуқтада $F_y(x, y) \neq 0$ бўлсин. У вақтда x нинг y функцияси ушбу ҳосиллага эга бўлади:

$$y'_x = - \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \quad (2)$$

Исбот. x нинг бирор қийматида функциянинг y қиймати мос бўлсин. Бунда

$$F(x, y) = 0.$$

*) III бобнинг 11- § да ошкормас функцияни дифференциаллаш ҳақидаги масалани ечган эдик. Лекин у ерда айрим мисолларни қараган ва ошкормас функциянинг ҳар қандай нуқтадаги ҳосиласини берадиган умумий формулани топмаган ҳамда бу ҳосиланинг мавжудлик шартларини аниқламаган эдик.

Эркин ҳагаарувчи x га Δx орттирма берамиз. у функция Δy ортторма олади, яъни аргументнинг $x + \Delta x$ қийматига функциянинг $y + \Delta y$ қиймати мос келади. $F(x, y) = 0$ тенгламага асосан

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$$

тенгламага эга бўламиз. Демак,

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = 0.$$

Сўнгги тенгликнинг чап томони икки ҳагаарувчи функциясининг тўла орттирмасидан иборат, уни 7- § нинг (5') формуласига асосан бундай ёзиш мумкин:

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y,$$

бу ерда Δx ва Δy нолга интилганда γ_1 ва γ_2 ҳам нолга интилади. Сўнгги ифоданинг чап томони нолга тенг бўлгани учун бундай ёзиш мумкин:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y = 0.$$

Кейинги тенгликни Δx га бўламиз ва $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ни ҳисоблаймиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x} + \gamma_1}{\frac{\partial F}{\partial y} + \gamma_2}.$$

Δx ни нолга интилираамиз. Бунда γ_1 ва γ_2 ҳам нолга интилишини ва $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ эканини эътиборга олсак, натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$y'_x = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \quad (2')$$

Ошкормас шаклда берилган функциянинг ҳосиласи y'_x мавжудлигини исбот қилдик ва уни ҳисоблаш учун формула топдик.

1- мисол.

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

тенглама у ни x нинг ошкормас функцияси сифатида белгилайди. Бу ерда

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y.$$

Демак, (1) формула бўйича

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

Берилган тенглама иккита ҳар хил функцияни белгилайди (чунки x нинг $(-1, 1)$ оралиқдаги ҳар бир қийматига y нинг иккита қиймати мос келади); лекин y_x нинг топилган қиймати биринчи функция учун ҳам, иккинчи функция учун ҳам тўғридир.

2-мисол. x ва y ни боғловчи

$$e^y - e^x + xy = 0$$

тенглама берилган. Бу ерда $F(x, y) = e^y - e^x + xy$,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -e^x + y, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = e^y + x.$$

Демак, (1) формула бўйича:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-e^x + y}{e^y + x} = \frac{e^x - y}{e^y + x}.$$

Энди

$$F(x, y, z) = 0 \quad (3)$$

қўринишдаги тенгламани қараймиз.

Агар x ва y нинг бирор соҳадаги ҳар бир қуш қийматига z нинг (3) тенгламани қаноатлантирадиган бир ёки бир неча қиймати мос келса, бу тенглама x ва y нинг бир ёки бир неча бир қийматли z функциясини ошкормас равишда белгилайди.

Масалан,

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

тенглама x ва y нинг иккита узлуксиз функцияси z ни ошкормас равишда белгилайди; бу тенгламани z га нисбатан ечиб, функцияларни ошкор тарзда ифодалаш мумкин; бу ҳолда қуйидаги ифодаларни ҳосил қиламиз:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \quad \text{ва} \quad z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

(3) тенглама билан берилган x ва y нинг ошкормас функцияси z нинг хусусий ҳосилалари $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ ни топамиз. $\frac{\partial z}{\partial x}$ ни излаганда y ни ўзгармас деб ҳисоблаймиз. Шунинг учун x ни эркин ўзгарувчи ва z ни функция деб ҳисобласак, (2) формулани қўлланиш мумкин. Демак,

$$z'_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Худди шу йўл билан

$$z' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ деб фараз қилинади.

Ҳар қанча ўзгарувчиларнинг ошқормас функцияси ҳам шунинг снгари аниқланади ва уларнинг хусусий ҳосилалари топилади.

3- мисол. $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$$

Буни (тенгламани z га нисбатан ечгандан сўнг) ошқор функция кабм дифференциалласак, яна шу натижани ҳосил қилар эдик.

4- мисол.

$$e^z + x^2y + z + 5 = 0.$$

Бу ерда

$$F(x, y, z) = e^z + x^2y + z + 5,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^2, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = e^z + 1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy}{e^z + 1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{e^z + 1}$$

Изоҳ. Бу параграфдаги ҳамма муҳокамалар $F(x, y) = 0$ тенглама бир ўзгарувчининг бирор функцияси $y = \varphi(x)$ ни белгилайди; $F(x, y, z) = 0$ тенглама икки ўзгарувчининг бирор функцияси $z = f(x, y)$ ни белгилайди деган фаразга суяниб ўтказилади. $F(x, y) = 0$ тенглама бир қийматли $y = \varphi(x)$ функцияни белгилаши учун $F(x, y) = 0$ функция қандай шартни қаноатлантиришини исботсиз келтираимиз:

Теорема. $F(x, y) = 0$ функция (x_0, y_0) нуқта атрофида узлуксиз, ўша ерда узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга, бунда $F_y(x, y) \neq 0$ ва $F(x_0, y_0) = 0$ булсин. У ҳолда (x_0, y_0) нуқтани ўз ичига олувчи шундай атроф мавжуд бўладики, У ерда $F(x, y) = 0$ тенглама бир қийматли $y = \varphi(x)$ функцияни белгилайди.

$F(x, y, z) = 0$ тенглама билан аниқланадиган ошқормас функциянинг мавжудлик шарти ҳақида ҳам шунга ўхшаш теоремани айтиш мумкин.

Изоҳ. Ошқормас функцияларни дифференциаллаш қондаларини чнқаришда биз ошқорамас функцияларнинг мавжудлигини белгиладиган шартлардан фойдаландик.

12- §. Ҳар хил тартибдаги хусусий ҳосилалар

Икки ўзгарувчининг функцияси

$$z = f(x, y)$$

берилган бўлсин.

Хусусий ҳосилалар $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$ ва $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$, умуман айтганда, x ва y ўзгарувчиларнинг функциясидир. Шунинг учун улардан яна хусусий ҳосилалар топиш мумкин. Демак, икки ўзгарувчи функциясининг иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари тўртта бўлади, чунки $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ва $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ функциялардан ҳар бирини x бўйича ва y бўйича дифференциаллаш мумкин.

Иккинчи хусусий ҳосилалар бундай белгиланади:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y)$, бу ерда f кетма-кет икки марта x бўйича дифференциалланади;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y)$, бу ерда f аввал x бўйича ва сўнггра натижа y бўйича дифференциалланади;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y)$, бу ерда f аввал y бўйича ва сўнггра натижа x бўйича дифференциалланади;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y)$, бу ерда f кетма-кет y бўйича икки марта дифференциалланади.

Иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларни қайтадан x бўйича ва y бўйича дифференциаллаш мумкин. Учинчи тартибли хусусий ҳосилаларга эга бўламиз. Улар саккизта бўлади:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Умуман, n -тартибли хусусий ҳосила $(n-1)$ -тартибли хусусий ҳосиланинг биринчи тартибли хусусий ҳосиласидир.

Масалан, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ ифода n -тартибли хусусий ҳосила; бу ерда z функция аввал x бўйича p марта дифференциалланган, сўнггра y бўйича $n-p$ марта дифференциалланган.

Истаган сондаги ўзгарувчилар функциясининг юқори тартибли хусусий ҳосилалари шунга ўхшаш топилади.

1- мисол. $f(x, y) = x^2y + y^3$

Функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари ҳисоблансин.

Ечиш. Кетма-кет шуларни топамиз:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial(x^2 + 3y^2)}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y.$$

2- мисол. Агар $z = y^2 e^x + x^2 y^3 + 1$ бўлса, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2 \partial y}$ ва $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x^2}$ топилиши.
Е чи ш. Кетма-кет қуйидагиларни топиш.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 e^x + 2xy^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^x + 2y^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2 \partial y} = 2ye^x + 6y^2, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^x + 3x^2 y^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2ye^x + 6xy^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x^2} = 2ye^x + 6y^2.$$

3- мисол. Агар $u = z^2 e^{x+y^2}$ бўлса, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z^2}$ топилиши.
Е чи ш.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z^2 e^{x+y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = z^2 e^{x+y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial y} = 2yz^2 e^{x+y^2}, \\ \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z^2} = 4yze^{x+y^2}.$$

Бир неча ўзгарувчи функциясини дифференциаллаш натижаси ҳар хил ўзгарувчилар бўйича қандай тартибда дифференциаллашга боғлиқ бўладими ёки бошқача айтганда ушбу $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ва $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ҳосилалар ёки

$$\frac{\partial^3 f(x, y, t)}{\partial x \partial y \partial t} \text{ ва } \frac{\partial^3 f(x, y, t)}{\partial t \partial x \partial y} \text{ ва Ҳ. к.}$$

ҳосилалар ўзаро тенг бўладими деган савол табиий равишда пайдо бўлади. Бу ҳақда ушбу теоремани айтиш мумкин.

Теорема. Агар $z = f(x, y)$ функция ва унинг хусусий ҳосилалари f'_x, f'_y, f'_{xy} , ва f'_{yx} $M(x, y)$ нуқтада ва унинг бирор атрофида аниқланган ва узлуксиз бўлса, бу нуқтада

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (f'_{xy} = f'_{yx}).$$

Исбот. Исботлаш учун ушбу ифодани қараймиз:

$$A = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)] - [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)].$$

Агар

$$\varphi(x) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

тенглик билан аниқланган $\varphi(x)$ ёрдамчи функцияни киритсак, A ни бундай кўринишда ёзиш мумкин:

$$A = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x).$$

Теореманинг шартига кўра f'_x ҳосила (x, y) нуқта атрофида аниқланган, демак, $\varphi(x)$ функция $[x, x + \Delta x]$ кесмада дифференциалланувчидир; бунда Лагранж теоремасини қўлланиб, ушбун ҳосил қиламиз:

$$A = \Delta x \varphi'(\bar{x}),$$

бу ерда $\bar{x}$ x билан $x + \Delta x$ орасида ўзгаради. Лекин

$$\varphi'(\bar{x}) = f'_x(\bar{x}, y + \Delta y) - f'_x(\bar{x}, y).$$

f'_{xy} ҳосила (x, y) нуқта атрофида аниқлангани учун, f'_x ҳосила $[y, y + \Delta y]$ кесмада дифференциалланувчи, шунга кўра ҳосил қилинган айирмага яна Лагранж теоремасини (ўзгарувчи y бўйича) қўлланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$f'_x(\bar{x}, y + \Delta y) - f'_x(\bar{x}, y) = \Delta y f'_{xy}(\bar{x}, \bar{y}),$$

бу ерда $\bar{y}$ y билан $y + \Delta y$ орасида ўзгаради.
Демак, A нинг бошлангич ифодасини

$$A = \Delta x \Delta y f'_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) \quad (1)$$

кўринишда ёзсак бўлади. A нинг ифодасида ўртадаги қўшилувчиларнинг ўринларини алмаштириб, ушбун ҳосил қиламиз:

$$A = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] - [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)].$$

Ушбу ёрдамчи функцияни киритамиз:

$$\psi(y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y),$$

у вақтда

$$A = \psi(y + \Delta y) - \psi(y)$$

бўлади. Янгидан Лагранж теоремасини қўлланиб, ушбун ҳосил қиламиз:

$$A = \Delta y \psi'(\bar{y}),$$

бу ерда $\bar{y}$ y билан $y + \Delta y$ орасида ўзгаради. Лекин

$$\psi'(\bar{y}) = f'_y(x + \Delta x, \bar{y}) - f'_y(x, \bar{y}).$$

Яна Лагранж теоремасини (ўзгарувчи x бўйича) қўлланиб, ушбун ҳосил қиламиз:

$$f'_y(x + \Delta x, \bar{y}) - f'_y(x, \bar{y}) = \Delta x f'_{yx}(\bar{x}, \bar{y}),$$

бу ерда $\bar{x}$ x билан $x + \Delta x$ орасида ўзгаради.

Шундай қилиб, A нинг бошланғич ифодасини ушбу қури-
нишда ёзиш мумкин:

$$A = \Delta u \Delta x f'_{yx}(\bar{x}, \bar{y}). \quad (2)$$

(1) ва (2) тенгликларнинг чап қисмлари A га тенг, демак,
ўнг қисмлари ҳам тенг бўлиши керак, яъни

$$\Delta x \Delta y f'_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = \Delta y \Delta x f'_{yx}(\bar{x}, \bar{y}),$$

бундан

$$f'_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = f'_{yx}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Бу тенгликда $\Delta x \rightarrow 0$ ва $\Delta y \rightarrow 0$ бўлганда лимитга утиб,
ушбунни ҳосил қиламиз:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f'_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f'_{yx}(\bar{x}, \bar{y}).$$

f'_{xy} ва f'_{yx} ҳосилалар (x, y) нуқтада узлуксиз бўлган учун,

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f'_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = f'_{xy}(x, y) \text{ ва } \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f'_{yx}(\bar{x}, \bar{y}) = f'_{yx}(x, y).$$

Ниҳоят ушбу тенгликни ҳосил қиламиз:

$$f'_{xy}(x, y) = f'_{yx}(x, y),$$

шунни исботлаш талаб қилинган эди.

Исботланган теоремадан натижа сифатида ушбунни чиқариш
мумкин: агар $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y^{n-2}}$ ва $\frac{\partial^2 f}{\partial y^{n-2} \partial x^2}$ хусусий ҳосилалар узлук-
сиз бўлса,

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^2 \partial y^{n-2}} = \frac{\partial^n f}{\partial y^{n-2} \partial x^2}.$$

Истаган сондаги ҳагаарувчиларнинг функцияси ҳақида ҳам
шундай теоремани айтиш мумкин.

4-мисол. Агар $u = e^{xy} \sin z$ бўлса, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y \partial z}$ ва $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z \partial x}$ топилсин:
Е ч и ш.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ye^{xy} \sin z, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^{xy} \sin z + xy e^{xy} \sin z = e^{xy} (1 + xy) \sin z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xy} (1 + xy) \cos z, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xe^{xy} \sin z, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = xe^{xy} \cos z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y \partial z \partial x} = e^{xy} \cos z + xye^{xy} \cos z = e^{xy} (1 + xy) \cos z.$$

Демак,

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x}$$

(бундан ташқари, шу параграфнинг 1—2- мисолларига қаралсин).

13- §. Юксаклик сиртлари

Фараз қилайлик, (x, y, z) фазода D соҳа бор ва бу соҳада

$$u = u(x, y, z) \quad (1)$$

функция берилган бўлсин. Бу ҳолда D соҳада *скаляр майдон* берилган дейилади. Масалан, $u(x, y, z)$ бир $M(x, y, z)$ нуқтадаги температура бўлса, у ҳолда температуранинг скаляр майдони берилган дейилади; агар D соҳа суюқлик ёки газ билан тўлдирилган бўлиб, $u(x, y, z)$ босимни билдирса, бу ҳолда босимнинг скаляр майдони мавжуд бўлади ва ҳоказо,

D соҳанинг $u(x, y, z)$ функция ўзгармас c қийматга эга яъни

$$u(x, y, z) = c \quad (2)$$

бўлган нуқталарини қараймиз. Бундай нуқталарнинг туплами бирор сиртнинг ҳосил қилади. Агар c нинг бошқа қийматини олсак, бошқа сирт ҳосил бўлади. Бу сиртлар — *юксаклик сиртлари* деб аталади.

1- мисол.

$$u(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}$$

скаляр майдон берилган бўлсин. Бунда юксаклик сиртлари ушбу сиртлар

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = c,$$

яъни, ярим ўқлари $2\sqrt{c}$, $3\sqrt{c}$, $4\sqrt{c}$ бўлган эллипсоидлар бўлади.

Агар u функция иккита x, y ўзгарувчининг функцияси

$$u = u(x, y)$$

бўлса, бу ҳолда юксаклик „сиртлари“ Оху текисликдаги

$$u(x, y) = c \quad (2')$$

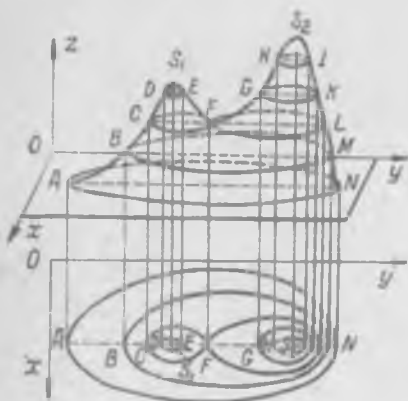
чиизиқларидан иборат бўлади, бу чиизиқлар *юксаклик чиизиқлари* деб аталади.

Агар u нинг қийматларини Oz ўқ бўйлаб қўйсак:

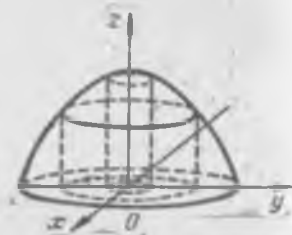
$$z = u(x, y),$$

бу ҳолда $z = u(x, y)$ сирт билан $z = c$ текисликларнинг кесилишгандан ҳосил бўлган чизиқларнинг Оху текислигидаги проекциялари — юксаклик чизиқлари бўлади (176- расм). Юксаклик чизиқларининг билган ҳолда, $z = u(x, y)$ сиртнинг хаттарини текшириш енгил бўлади.

2- мисол. $z = 1 - x^2 - y^2$ функциянинг юксаклик чизиқлари аниқлансин. Тенгламаси $1 - x^2 - y^2 = c$ бўлган чизиқлар юксаклик чизиқлари бўлади. Булар радиуси $\sqrt{1-c}$ бўлган айланалардир (177- расм). Жумладан, $c = 0$ бўлганда $x^2 + y^2 = 1$ айланани ҳосил қиламиз.



176- расм.



177- расм.

14- §. Йўналиш буйича ҳосила

D соҳада $u = u(x, y, z)$ функцияни ва $M(x, y, z)$ нуқтани қараймиз. M нуқтадан йуналтирувчи косинуслари $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ бўлган s векторни ўтказамиз (178 расм). s векторда унинг бошидан Δs масофада $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ нуқтани қараймиз.

Шундай қилиб,

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

$u(x, y, z)$ функция D соҳада ўзлуксиз ва ўзининг аргументлари бўйича ўзлуксиз ҳосилаларга эга деб фараз қиламиз.

7- § да қилинган каби, функциянинг тула орттирмасини бундай ёзамиз:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y + \epsilon_3 \Delta z, \quad (1)$$

бу ерда $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ миқдорлар $\Delta s \rightarrow 0$ да нолга интилади.

(1) тенгликнинг ҳамма ҳадларини Δs га буламиз:

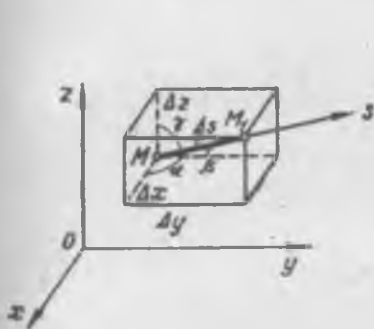
$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\Delta z}{\Delta s} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_3 \frac{\Delta z}{\Delta s}. \quad (2)$$

Равшанки,

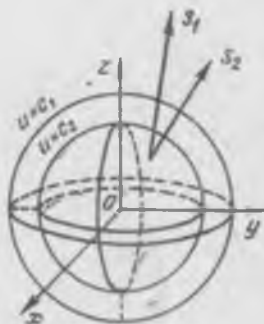
$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos \alpha, \quad \frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos \beta, \quad \frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos \gamma.$$

Демак, (2) тенгликни бундай ёзиш мумкин:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma + \varepsilon_1 \cos \alpha + \varepsilon_2 \cos \beta + \varepsilon_3 \cos \gamma. \quad (3)$$



178- расм.



179- расм.

$\frac{\Delta u}{\Delta s}$ нисбатнинг $\Delta s \rightarrow 0$ даги лимити $u = u(x, y, z)$ функциянинг (x, y, z) нуқтада s вектор йўналиши бўйича ҳосиласи деб аталади ва $\frac{\partial u}{\partial s}$ билан белгиланади, яъни

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial s}. \quad (4)$$

Шундай қилиб, (3) тенгликда лимитга ўтиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma. \quad (5)$$

(5) формуладан чиқадики, хусусий ҳосилаларни билган ҳолда истаган S йўналиш бўйича ҳосила топиш енгил бўлади. Хусусий ҳосилаларнинг ўзлари эса йўналиш бўйича ҳосиланинг хусусий ҳолидир. Масалан, $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$ бўлганда:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos 0 + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Мисол. Функция

$$u = x^2 + y^2 + z^2$$

берилган. $M(1, 1, 1)$ нуқтада: а) $S_1 = 2i + j + 3k$ вектор йўналиши бўйича

б) $S_2 = i + j + k$ вектор йўналиши бўйича $\frac{\partial u}{\partial s}$ ҳосила топилисин.

Ечиш. а) S_1 векторнинг йўналтирувчи косинусларини топамиз:

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{14}}, \quad \cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Демак,

$$\frac{\partial u}{\partial s_1} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{2}{\sqrt{14}} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{14}} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Хусусий ҳосилалар:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z$$

$M(1, 1, 1)$ нуқтада бундай бўлади:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = 2, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M = 2, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M = 2.$$

Шундай қилиб,

$$\frac{\partial u}{\partial s_1} = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} + 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{12}{\sqrt{14}}.$$

б) S_2 векторнинг йўналтирувчи косинусларини топамиз:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Демак,

$$\frac{\partial u}{\partial s_2} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Бундан буён $2\sqrt{3} > \frac{12}{\sqrt{14}}$ эвакинни назарда тутамиз (179- расм).

15- §. Градиент

$u = u(x, y, z)$ функция аниқланган D соҳанинг ҳар бир нуқтасига координата ўқларидаги проекциялари хусусий ҳосилалар $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ нинг тегишли нуқтадаги қийматларига тенг бўлган векторни ўтказамиз:

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k. \quad (1)$$

Бу вектор $u(x, y, z)$ функциянинг *градиенти* деб аталади. Бу ҳолда D соҳада *градиентларнинг вектор майдони* аниқлан-

ган дейилади. Энди градиент билан йўналиш бўйича ҳосилла орасидаги боғланишни аниқловчи ушбу теоремани исботлаймиз.

Теорема. $u = u(x, y, z)$ скаляр майдон берилган ва шу скаляр майдонда

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$$

градиентлар майдони аниқланган бўлсин. Бирор S вектор йўналиши бўйича олинган $\frac{du}{ds}$ ҳосила $\text{grad } u$ векторнинг S вектордаги проекциясига тенг бўлади.

Исбот. S векторга мос S^0 бирлик векторини қараймиз:

$$S^0 = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \cos \beta + \mathbf{k} \cos \gamma.$$

$\text{grad } u$ ва S векторларнинг скаляр кўпайтмасини ҳисоблаймиз:

$$\text{grad } u \cdot S^0 = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma. \quad (2)$$

Бу тенгликнинг унг қисмида турган ифода $u(x, y, z)$ функциядан S^0 вектор йўналиши бўйича олинган ҳосилладан иборат. Демак, бундай ёзишимиз мумкин:

$$\text{grad } u \cdot S^0 = \frac{du}{ds}.$$

Агар $\text{grad } u$ билан S^0 векторлар орасидаги бурчакни φ билан белгиласак (180- расм), бундай ёзишимиз мумкин:

$$|\text{grad } u| \cos \varphi = \frac{du}{ds} \quad (3)$$



180- расм.



181- расм.

ёки

$$\text{пр. } S^0 \text{ grad } u = \frac{du}{ds}. \quad (4)$$

Теорема исботланди.

Исбот қилинган теоремага асосан градиент билан истаган йўналиш бўйича берилган нуқтадаги ҳосила орасидаги муносабатни кўргазмани равишда аниқлаш мумкин. Берилган $M(x, y, z)$ нуқтага $\text{grad } u$ векторини ясаймиз (181- расм). $\text{grad } u$ ни

диаметр қилиб сфера ясаймиз. M нуқтадан S векторни ўтказамиз. S векторнинг сфера сирти билан кесишган нуқтани P билан белгилаймиз. Равшанки, агар φ градиент йўналиши билан MP кесма йўналиши орасидаги бурчак (бунда $\varphi < \frac{\pi}{2}$), яъни

$MP = \frac{\partial u}{\partial s}$ бўлса, $MP = |\text{grad } u| \cos \varphi$ бўлади. Агар S векторнинг йўналиши қарама-қаршисига ўзгарса, ҳосиланинг ишораси текка-қаршисига ўзгаради, лекин абсолют қиймати илгаригича қолади.

Градиентнинг баъзи хоссаларини аниқлаймиз.

1) Агар S векторнинг йўналиши градиент йўналиши билан бир хил бўлса, берилган нуқтада S вектор йўналиши бўйича олинган ҳосила энг катта қийматга эга бўлади; ҳосиланинг бу энг катта қиймати $|\text{grad } u|$ га тенг.

Бу тасдиқнинг тўғрилиги (3) тенгликдан бевосита келиб чиқади: $\frac{\partial u}{\partial s}$ нинг энг катта қиймати $\varphi = 0$ бўлганда бўлади, бу ҳолда

$$\frac{\partial u}{\partial s} = |\text{grad } u|.$$

2) $\text{grad } u$ векторга перпендикуляр вектор йўналиши бўйича ҳосила нолга тенг.

Бу тасдиқ (3) формуладан келиб чиқади. Ҳақиқатан, бу ҳолда

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \cos \varphi = 0 \quad \text{ва} \quad \frac{\partial u}{\partial s} = |\text{grad } u| \cos \varphi = 0.$$

1-мисол. $u = x^2 + y^2 + z^2$ функция берилган.

а) $M(1, 1, 1)$ нуқтадаги градиентни аниқлаймиз. Бу функциянинг ихтиёрий нуқтадаги градиентни бундай бўлади:

$$\text{grad } u = 2xi + 2yj + 2zk.$$

Демак,

$$(\text{grad } u)_M = 2i + 2j + 2k, \quad |\text{grad } u|_M = 2\sqrt{3}.$$

б) u функциянинг $M(1, 1, 1)$ нуқтада градиент йўналиши бўйича ҳосиласини топамиз. Градиентнинг йўналтирувчи косинуслари бундай бўлади:

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Демак,

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

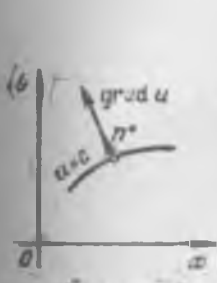
гъни

$$\frac{\partial u}{\partial s} = |\operatorname{grad} u|.$$

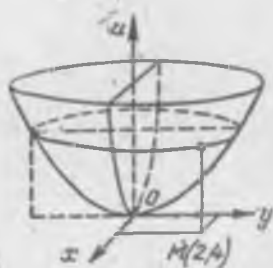
Изох. Агар $u = u(x, y)$ функция икки узгарувчининг функцияси бўлса, вектор

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j$$

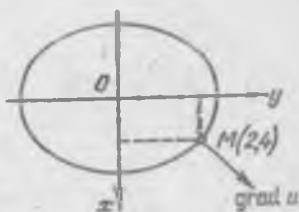
Оху текисликда ётади. Бу ҳолда $\operatorname{grad} u$ Оху текисликда ётган ва тегишли нуқтадан ўтувчи $u(x, y) = c$ юксаклик чизигига перпендикуляр ҳолда йўналганлигини исботлаймиз.



182- расм.



183- расм.



184- расм.

Ҳақиқатан, $u(x, y) = c$ юксаклик чизигига уринманинг бурчак коэффициентини $k_1 = -\frac{u'_x}{u'_y}$ бўлади. Градиентнинг бурчак коэффициентини $k_2 = \frac{u'_y}{u'_x}$ бўлади. Равшанки, $k_1 \cdot k_2 = -1$. Бу эса тасдиғимизнинг тўғрилигини исботлайди (182- расм). Уч узгарувчи функцияси градиентининг шунга ўхшаш хоссаси IX бобнинг 6- § да исбот қилинади.

2- мисол. $u = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}$ функциянинг $M(2, 4)$ нуқтадаги градиенти топилисин.

Ечиш. Бу ерда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x \Big|_M = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2}{3} y \Big|_M = \frac{8}{3}.$$

Демак,

$$\operatorname{grad} u = 2i + \frac{8}{3}j.$$

Берилган нуқтадан ўтган юксаклик чизигининг тенгламаси

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = \frac{22}{3}.$$

бўлади (184- расм).

20 Н. С. Пискунов

16- §. Икки ўзгарувчининг функцияси учун Тейлор формуласи

Икки ўзгарувчининг

$$z = f(x, y)$$

функцияси ўзининг $n + 1$ тартибгача барча ҳосилалари (сўнгги ҳосила ҳам кирди) билан бирга $M(a, b)$ нуқтанинг бирон атрофида узлуксиз деб фараз қилайлик. У ҳолда, бир аргументнинг функцияси бўлган ҳолдаги каби (IV бобнинг 6- § га қаранг), икки ўзгарувчининг функциясини $x - a$ ва $y - b$ даражалари бўйича n - тартибли кўпхад билан бирор қолдиқ ҳаднинг лнғиндисн кўринишида тасвирлаймиз. Қуйида $n = 2$ бўлган ҳол учун формула ушбу кўринишда бўлиши исботланади:

$$f(x, y) = A_0 + D(x - a) + E(y - b) + \frac{1}{2!} [A(x - a)^2 + 2B(x - a)(y - b) + C(y - b)^2] + R_2, \quad (1)$$

бу ерда A_0, D, E, A, B, C коэффициентлар x ва y га боғлиқ эмас, R_2 — қолдиқ ҳад, бунинг таркиби бир ўзгарувчи функцияси учун Тейлор формуласи қолдиқ ҳадининг таркибига ўхшаш.

x ни ўзгармас деб ҳисоблаб, биргина y ўзгарувчининг $f(x, y)$ функциясига Тейлор формуласини қўлланамиз (иккинчи тартибли ҳадлар билан чегараланамиз):

$$f(x, y) = f(x, b) + \frac{y - b}{1} f'_y(x, b) + \frac{(y - b)^2}{1 \cdot 2} f''_{yy}(x, b) + \frac{(y - b)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''_{yyy}(x, \eta_1), \quad (2)$$

бу ерда $\eta_1 = b + \theta_1(y - b)$, $0 < \theta_1 < 1$. $f(x, b)$, $f'_y(x, b)$, $f''_{yy}(x, b)$ функцияларни $x - a$ нинг даражалари бўйича Тейлор формуласига биноан ажратамиз (учинчи тартибгача аралаш ҳосилалар билан чегараланамиз):

$$f(x, b) = f(a, b) + \frac{x - a}{1} f'_x(a, b) + \frac{(x - a)^2}{1 \cdot 2} f''_{xx}(a, b) + \frac{(x - a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''_{xxx}(\xi_1, b), \quad (3)$$

бу ерда $\xi_1 = a + \theta_2(x - a)$, $0 < \theta_2 < 1$;

$$f'_y(x, b) = f'_y(a, b) + \frac{x - a}{1} f''_{yx}(a, b) + \frac{(x - a)^2}{1 \cdot 2} f'''_{yxx}(\xi_2, b), \quad (4)$$

бу ерда $\xi_2 = x + \theta_3(x - a)$, $0 < \theta_3 < 1$;

$$f''_{yy}(x, b) = f''_{yy}(a, b) + \frac{x-a}{1} f''_{yyx}(\xi_3, b), \quad (5)$$

бу ерда $\xi_3 = x + \theta_4(x - a)$, $0 < \theta_4 < 1$.

(3), (4) ва (5) ифодаларни (2) формулага қўйиб, мана бу ифодани ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(a, b) + \frac{x-a}{1} f'_x(a, b) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''_{xx}(a, b) + \\ & + \frac{(x-a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''_{xxx}(\xi_1, b) + \frac{y-b}{1} \left[f'_y(a, b) + \frac{x-a}{1} f''_{yx}(a, b) + \right. \\ & \left. + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f'''_{yxx}(\xi_2, b) \right] + \frac{(y-b)^2}{1 \cdot 2} \left[f''_{yy}(a, b) + \frac{x-a}{1} f'''_{yyx}(\xi_3, b) \right] + \\ & + \frac{(y-b)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''_{yyy}(x, y). \end{aligned}$$

Қўшилувчиларни (1) формулада кўрсатилгандек жойлаштириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(a, b) + (x-a) f'_x(a, b) + (y-b) f'_y(a, b) + \\ & + \frac{1}{2!} [(x-a)^2 f''_{xx}(a, b) + 2(x-a)(y-b) f''_{xy}(a, b) + \\ & + (y-b)^2 f''_{yy}(a, b)] + \frac{1}{3!} [(x-a)^3 f'''_{xxx}(\xi_1, b) + \\ & + 3(x-a)^2(y-b) f'''_{xxy}(\xi_2, b) + 3(x-a)(y-b)^2 f'''_{xyy}(\xi_3, b) + \\ & + (y-b)^3 f'''_{yyy}(a, y)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Ана шу $n = 2$ бўлган ҳол учун Тейлор формуласидир.

$$\begin{aligned} R_2 = & \frac{1}{3!} [(x-a)^3 f'''_{xxx}(\xi_1, b) + 3(x-a)^2(y-b) f'''_{xxy}(\xi_2, b) + \\ & + 3(x-a)(y-b)^2 f'''_{xyy}(\xi_3, b) + (y-b)^3 f'''_{yyy}(a, y)] \end{aligned}$$

ифода қолдиқ ҳад деб аталади. Энди $x - a = \Delta x$, $y - b = \Delta y$, $\Delta \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ деб белгилаймиз. R_2 ифодасини бундай алмаштирамиз:

$$\begin{aligned} R_2 = & \frac{1}{3!} \left[\frac{\Delta x^3}{\Delta \rho^3} f'''_{xxx}(\xi_1, b) + 3 \frac{\Delta x^2 \Delta y}{\Delta \rho^3} f'''_{xxy}(\xi_2, b) + \right. \\ & \left. + 3 \frac{\Delta x \Delta y^2}{\Delta \rho^3} f'''_{xyy}(\xi_3, b) + \frac{\Delta y^3}{\Delta \rho^3} f'''_{yyy}(a, y) \right] \Delta \rho^3. \end{aligned}$$

$|\Delta x| < \Delta \rho$, $|\Delta y| < \Delta \rho$ ва учинчи ҳосилалар, шарт бўйича, чегараланган булгани учун $\Delta \rho^3$ нинг коэффиценти қаралаётган соҳада чегараланган миқдор бўлади; уни α_0 билан белгилаймиз.

У вақтда бундай ёза оламиз:

$$R_3 = \alpha_0 \Delta \rho^3.$$

Қабул қилинган белгиларда $n = 2$ бўлган ҳол учун Тейлорнинг (6) формуласи ушбу кўринишни олади:

$$f(x, y) = f(a, b) + \Delta x f'_x(a, b) + \Delta y f'_y(a, b) + \\ + \frac{1}{2!} [\Delta x^2 f''_{xx}(a, b) + 2\Delta x \Delta y f''_{xy}(a, b) + \Delta y^2 f''_{yy}(a, b)] + \alpha_0 \Delta \rho^3. (6')$$

n ҳар қандай сон бўлганда Тейлор формуласи шунга ўхшаш кўринишда бўлади.

17-§. Бир неча ўзгарувчи функциясининг максимуми ва минимуми

1- таъриф. Агар $M_0(x_0, y_0)$ нуқтага етарли даражада яқин бўлиб, ундан фарқли ҳамма (x, y) нуқталар учун

$$f(x_0, y_0) > f(x, y)$$

бўлса, у ҳолда $z = f(x, y)$ функция $M_0(x_0, y_0)$ нуқтада (яъни $x = x_0$ ва $y = y_0$ бўлганда) *максимумга* эга деймиз.

2- таъриф. Худди шунга ўхшаш, агар (x_0, y_0) нуқтадан бошқа ва унга етарлича яқин турган ҳамма (x, y) нуқталар учун

$$f(x_0, y_0) < f(x, y)$$

бўлса, $z = f(x, y)$ функция $M_0(x_0, y_0)$ нуқтада *минимумга* эга дейилади.

Функциянинг максимуми ва минимуми функциянинг *экстремумлари* дейилади, яъни функция берилган нуқтада максимум ёки минимумга эга бўлса, функция шу нуқтада экстремумга эга дейилади.

1- мисол. Функция

$$z = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 1$$

$x = 1$, $y = 2$ да, яъни $(1, 2)$ нуқтада минимумга эришади. Ҳақиқатан, $f(1, 2) = -1$, шунингдек $(x - 1)^2$ ва $(y - 2)^2$ эса $x \neq 1$, $y \neq 2$ да доим мусбат, демак,

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 1 > -1,$$

яъни

$$f(x, y) > f(1, 2).$$

Бу долга мос геометрик кўриниш 185- расмда тасвирланган.

1-теорема (экстремумнинг зарур шартлари). Агар $z = f(x, y)$ функция $x = x_0$, $y = y_0$ да экстремумга эга бўлса, у ҳолда z нинг ҳар бир биринчи тартибли хусусий ҳосиласи аргументларнинг шу қийматларида ё нолга тенг бўлади, ё мавжуд бўлмайди.

Ҳақиқатан ҳам, ўзгарувчи у га бирор аниқ қиймат берамиз, масалан, $y = y_0$ бўлсин. У вақтда $f(x, y_0)$ функция бир ўзгарувчи x нинг функцияси бўлади. Бу функция $x = x_0$ бўлганда экстремумга (максимумга ёки минимумга) эга бўлади, демак,

$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x=x_0, y=y_0}$ ё нолга тенг, ёки мавжуд эмас. Худди шунингдек

$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x=x_0, y=y_0}$ нинг ё нолга тенг бўлишини, ёки мавжуд эмаслигини

исботлаш мумкин.

Бу теорема функциянинг экстремал қийматлари ҳақидаги масалани текшириш учун етарли бўлмаса ҳам, лекин максимум ёки минимумнинг мавжудлигига олдиндан ишончимиз бўлган ҳолларда бу қийматларни топишга имкон беради. Акс ҳолда қўшимча текшириш зарур бўлади.



187- расм.

Масалан, $z = x^2 - y^2$ функциянинг ҳосилалари $\frac{\partial z}{\partial x} = +2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$ бўлиб, улар $x = 0$ ва $y = 0$ бўлганда нолга айланади. Лекин бу функция шу қийматларда максимумга ҳам, минимумга ҳам эга эмас. Ҳақиқатан, бу функция координаталар бошида нолга тенг ва координаталар бошига ҳар қанча яқин нуқталарда мусбат қийматлар ҳам, манфий қийматлар ҳам қабул қилади. Демак, ноль қиймат максимум ҳам, минимум ҳам бўла олмайди (187- расм).

$z = f(x, y)$ функциянинг $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ (ёки мавжуд бўлмаган) ва $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (ёки мавжуд бўлмаган) нуқталари унинг критик нуқталари деб аталади. Агар функция бирор нуқтада экстремумга эга бўлса (1-теоремага кўра), бу ҳол фақат критик нуқтадагина юз бериши мумкин.

Икки ўзгарувчи функциясини критик нуқталарда текшириш учун унинг бу нуқталарда экстремуми бўлишининг етарли шартларини аниқлаймиз.

2-теорема. $f(x, y)$ функция $M_0(x_0, y_0)$ нуқтани ўз ичига олган бирор соҳада учинчи тартибгача (учинчи тартиблиси ҳам) узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлсин;

ундан ташқари $M_0(x_0, y_0)$ нуқта $f(x, y)$ функциянинг критик нуқтаси, яъни

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

бўлсин. У вақтда $x = x_0$ ва $y = y_0$ бўлганда:

1) агар

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0 \text{ ва } \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} < 0$$

булса, $f(x, y)$ функция максимумга эга бўлади;

2) агар

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0 \text{ ва } \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} > 0$$

булса, $f(x, y)$ функция минимумга эга бўлади;

3) агар

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 < 0$$

булса, $f(x, y)$ функция максимумга ҳам, минимумга ҳам эга бўлмайди;

4) агар
$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$$
 булса, $f(x, y)$

функция экстремумга эга бўлиши ҳам, бўлмаслиги ҳам, мумкин (бу ҳолда текширишни давом эттириш керак бўлади).

Исбот. $f(x, y)$ функция учун иккинчи тартибли Тейлор формуласини ёзамиз (16- § (6) формула). Бунда

$$a = x_0, \quad b = y_0, \quad x = x_0 + \Delta x, \quad y = y_0 + \Delta y$$

фараз қилиб, ушбу формулага эга бўламиз:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = & f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \\ & + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \Delta y^2 \right] + \alpha_0 (\Delta \rho)^2, \end{aligned}$$

бу ерда $\Delta \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ва $\Delta \rho \rightarrow 0$ бўлганда α_0 ҳам нолга интилади.

Шартга мувофиқ

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Демак,

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Delta y^2 \right] + \alpha_0 (\Delta \rho)^2. \quad (1)$$

Энди иккинчи хусусий ҳосилаларнинг $M_0(x_0, y_0)$ нуқтадаги қийматларини A, B, C орқали белгилаймиз:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{M_0} = A, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{M_0} = B, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{M_0} = C.$$

M_0 кесма йўналиши билан (бу ерда $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ нуқта) Ox ўқи орасидаги бурчакни φ билан белгилаймиз; у ҳолда

$$\Delta x = \Delta \rho \cos \varphi, \quad \Delta y = \Delta \rho \sin \varphi \quad \text{булади.}$$

Бу ифода-ларни Δf нинг формуласига қўйиб, ушбун топамиз:

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta \rho)^2 [A \cos^2 \varphi + 2B \cos \varphi \sin \varphi + C \sin^2 \varphi + 2\alpha_0 \Delta \rho]. \quad (2)$$

$A \neq 0$ деб фараз қиламиз.

Ўрта қавс ичидаги ифода-ни A га кўпайтириб ва бўлиб, ушбун ҳосил қиламиз:

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta \rho)^2 \left[\frac{(A \cos^2 \varphi + B \sin 2\varphi + C \sin^2 \varphi) + 2\alpha_0 \Delta \rho}{A} + 2\alpha_0 \Delta \rho \right]. \quad (3)$$

Энди мумкин бўлган турт ҳолни қараб чиқамиз.

1) $AC - B^2 > 0, A < 0$ бўлсин. У ҳолда касрнинг суратида иккита манфий бўлмаган миқдорлар йиғиндиси туради. Улар бир вақтда нолга айланмайди, чунки биринчи ҳад $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{B}{A}$ бўлганда, иккинчи ҳад эса $\sin \varphi = 0$ бўлганда нолга айланади.

Агар $A < 0$ бўлса, каср нолга айланмайдиган манфий миқдор бўлади. Уни $-m^2$ билан белгилаймиз; унда

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta \rho)^2 [-m^2 + 2\alpha_0 \Delta \rho],$$

бу ерда m миқдор $\Delta \rho$ га бағлиқ эмас, $\Delta \rho \rightarrow 0$ да $\alpha_0 \Delta \rho \rightarrow 0$. Демак, $\Delta \rho$ етарлича кичик бўлганда

$$\Delta f < 0$$

ёки

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) < 0.$$

Лекин у вақтда (x_0, y_0) нуқтага етарлича яқин бўлган ҳамма $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ нуқталар учун ушбу тенгсизликка эга бўламиз:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) < f(x_0, y_0).$$

бу эса функция (x_0, y_0) нуқтада максимумга эга бўлишини кўрсатади.

2) $AC - B^2 > 0, A > 0$ бўлсин. У ҳолда, юқоридагига ўхшаш фикр юритиб, ушбун ҳосил қиламиз:

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta \rho)^2 [m^2 + 2\alpha_0 \Delta \rho]$$

ёки

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) > f(x_0, y_0),$$

яъни $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада минимумга эга.

3') $(AC - B^2) < 0, A > 0$ бўлсин. Бу ҳолда функция на максимумга ва на минимумга эга бўлмайди. (x_0, y_0) нуқтадан бир йўналишда ҳаракат қилганимизда функция ўсаяди ва иккинчи йўналишда ҳаракат қилганимизда функция камаяди. Ҳақиқатан ҳам $\varphi = 0$ нур бўйича снлжиганда ушбуга эга бўламиз:

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta \rho)^2 [A + 2\alpha_0 \Delta \rho] > 0;$$

бу нур бўйича ҳаракат қилинганда функция ўсаяди. Агар $\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{B}{A}$ буладиган $\varphi = \varphi_0$ нур бўйича ҳаракат қилинса, $A > 0$ бўлганда

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta \rho)^2 \left[\frac{AC - B^2}{A} \sin^2 \varphi_0 + 2\alpha_0 \Delta \rho \right] < 0$$

булади; бу нур бўйича ҳаракат қилинганда эса функция камаяди.

3'') $AC - B^2 < 0, A < 0$ бўлсин. Бу ҳолда ҳам функция на максимумга ва на минимумга эга бўлмайди. Текшириш 3' ҳолдаги каби ўтказилади.

3''') $AC - B^2 < 0, A = 0$ бўлсин. У вақтда $B \neq 0$ ва (2) тенгликни ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta \rho)^2 [\sin \varphi (2B \cos \varphi + C \sin \varphi) + 2\alpha_0 \Delta \rho].$$

φ нинг етарлича кичик қийматларида кичик қавсдаги ифода ишорасини сақлайди, чунки у $2B$ га яқин, $\sin \varphi$ кўпайтувчи эса φ нинг нолдан катта ёки кичик бўлишига қараб ишорасини ўзгартиради ($\varphi > 0$ ва $\varphi < 0$ ни танлагандан сўнг $\Delta \rho$ ни шундай кичик қилиб оламизки, $2\alpha_0$ квадрат қавсдаги ифода-нинг ишорасини ўзгартиролмайди). Демак, бу ҳолда ҳам φ нинг, яъни Δx ва Δy нинг ҳар хил қийматларига қараб Δf нинг ишораси ўзгаради, шунга кўра бу ҳолда ҳам максимум ва минимум бўлмайди.

Шундай қилиб, A нинг ишораси қандай бўлмасин доим ушбу ҳолга эга бўламиз:

Агар (x_0, y_0) нуқтада $AC - B^2 < 0$ бўлса, функция бу нуқтада максимумга ҳам, минимумга ҳам эга бўлмайди. Бу ҳолда функциянинг графиги хизматини қилувчи сирт бу нуқта яқинида, масалан, эгар шаклида (187-расмга қаранг) бўлиши мумкин. Функция бу нуқтада *минимаксга* эга дейилади.

4) $AC - B^2 = 0$ бўлсин. Бу ҳолда (2) ва (3) формулаларга асосан Δf нинг ишорасини аниқлаб бўлмайди. Масалан, $A \neq 0$ да

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta \rho)^2 \left[\frac{(A \cos \varphi + B \sin \varphi)^2}{A} + 2x_0 \Delta \rho \right] \quad \text{бўлади;}$$

$\varphi = \arctg \left(-\frac{A}{B} \right)$ бўлганда Δf нинг ишораси $2x_0$ нинг ишорасига қараб аниқланади, бу эса махсус (масалан, юқорироқ тартибли Тейлор формуласи ёрдами билан ёки бошқа бирон усул билан) текширишни талаб қилади. Шундай қилиб, 2-теорема тўла исботланди.

3-мисол.

$$z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$$

функциянинг максимум ва минимумга эга ёки эга эмаслиги текширилсин.

Ечиш. 1) Критик нуқталарни топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 2.$$

Ушбу тенгламалар системасини ечамиз:

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0, \\ -x + 2y - 2 = 0, \end{cases}$$

унинг илдизлари

$$x = -\frac{4}{3}, \quad y = \frac{1}{3}.$$

2) $\left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$ критик нуқтада иккинчи даражаларни топамиз ва критик нуқтанинг характерини аниқлаймиз:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2,$$

$$AC - B^2 = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3 > 0.$$

Демак, $\left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$ нуқтада функция минимумга эга, яъни;

$$z_{\min} = -\frac{4}{3}.$$

4-мисол. $z = x^3 + y^3 - 3xy$ функциянинг максимум ва минимумининг мавжуд ёки мавжуд эмаслиги аниқлансин:

Е ч и ш. 1) Экстремумининг зарур шартларидан фойдаланиб, критик нуқталарни топамиз:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0. \end{cases}$$

Бундан иккита критик нуқтани топамиз.

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 1 \quad \text{ва} \quad x_2 = 0, \quad y_2 = 0.$$

2) Иккинчи тартибли ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

3) Биринчи критик нуқтанинг характерини текшираимиз:

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{\substack{x=1 \\ y=1}} = 6, \quad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)_{\substack{x=1 \\ y=1}} = -3, \quad C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{\substack{x=1 \\ y=1}} = 6,$$

$$AC - B^2 = 36 - 9 = 27 > 0; \quad A > 0.$$

Демак, берилган функция (1; 1) нуқтада минимумга эга, яъни:

$$z_{\min} = -1.$$

4) Иккинчи критик нуқта $M_2(0, 0)$ нинг характерини текшираимиз:

$$A = 0, \quad B = -3, \quad C = 0;$$

$$AC - B^2 = -9 < 0.$$

Демак, иккинчи критик нуқтада функция максимумга ҳам, минимумга ҳам эга эмас (минимакс).

5-мисол. Берилган мусбат a сон шундай учта мусбат қўшилувчига шартласинки, уларнинг қўпайтмаси энг катта қийматга эга бўлсин.

Е ч и ш. Қўшилувчиларни белгилаймиз: биринчи қўшилувчининг x билан, иккинчи қўшилувчининг y билан белгилаймиз; унда учинчи қўшилувчи $a - x - y$ бўлади. Бу қўшилувчиларнинг қўпайтмаси:

$$u = xy(a - x - y).$$

Масаланинг шартига кўра $x > 0$, $y > 0$, $a - x - y > 0$, яъни $x + y < a$, $a > 0$. Демак, x ва y $x = 0$, $y = 0$, $x + y = a$ тўғри чизиқлар билан чегараланган соҳага тегишли қийматларга эга бўлиши мумкин.

u функциясининг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y(a - 2x - y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x(a - 2y - x).$$

Ҳосилаларни нолга тенглаб, ушбу тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

$$y(a - 2x - y) = 0, \quad x(a - 2y - x) = 0.$$

Бу системани ечиб, критик нуқталарни топамиз:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & y_1 &= 0, & M_1(0, 0), \\ x_2 &= 0, & y_2 &= a, & M_2(0, a), \\ x_3 &= a, & y_3 &= 0, & M_3(a, 0), \\ x_4 &= \frac{a}{3}, & y_4 &= \frac{a}{3}, & M_4\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right). \end{aligned}$$

Олдинги учта нуқта соҳанинг чегарасида, тўртинчи нуқта соҳанинг ичида ётади. Соҳанинг чегарасида u функция нолга тенг, соҳанинг ичида эса функция мусбат; демак, $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ нуқтада u функция максимумга эга бўлади (чунки бу учбурчак ичидаги бирдан-бир экстремал нуқтадир). Кўпайтманинг максимал қиймати:

$$u_{\max} = \frac{a}{3} \frac{a}{3} \left(a - \frac{a}{3} - \frac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{27}.$$

Етарли шартлардан фойдаланиб, критик нуқталарнинг характерини текшираимиз. u функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a - 2x - 2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2x.$$

$M_1(0, 0)$ нуқтада

$$A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \quad B = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a; \quad C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad AC - B^2 = -a^2 < 0.$$

Демак, $M_1(0, 0)$ нуқтада на максимум ва на минимум йўқ. $M_2(0, a)$ нуқтада

$$A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2a, \quad B = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -a, \quad C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$AC - B^2 = -a^2 < 0$. Демак, M_2 нуқтада ҳам на максимум ва на минимум йўқ. $M_3(a, 0)$ нуқтада

$$A = 0, \quad B = -a, \quad C = -2a, \quad AC - B^2 = -a^2 < 0.$$

Демак, M_3 нуқтада ҳам на максимум ва на минимум йўқ. $M_4\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ нуқтада

$$\begin{aligned} A &= -\frac{2a}{3}, & B &= -\frac{a}{3}, & C &= -\frac{2a}{3}, \\ AC - B^2 &= \frac{4a^2}{9} - \frac{a^2}{9} > 0, & A &< 0. \end{aligned}$$

Демак, M_4 нуқтада максимумга эгамиз.

Изоҳ. Бир неча ўзгарувчи функциясининг максимум ва минимумлари назарияси экспериментал маълумотлар асосида функционал боғланишларни тасвирлаш учун формулалар ҳосил қилишнинг бир усулини топишнинг асосидир. Бу масала 19-§ да баён қилинган.

18-§. Берилган тенгламалар билан боғланган бир неча ўзгарувчи функциясининг максимуми ва минимуми (шартли максимумлар ва минимумлар)

Функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топишга доир кўп масалаларда вазифа эркин бўлмаган, балки ўзаро баъзи қўшимча шартлар билан боғланган (масалан, улар берилган тенгламаларни қаноатлантириши керак) бир неча ўзгарувчи функциясининг максимум ва минимумини топишдан иборат бўлади.

Масалан, ушбу масалани қараб чиқамиз.

Ўзи $2a$ га тенг бўлган тунукадан параллелепипед шаклида энг катта ҳажмли ёпиқ қути ясаш керак.

Қутининг узунлиги, эни ва баландлигини x , y , z ҳарфлари билан белгилаймиз. Масала $2xy + 2xz + 2yz = 2a$ шартида

$$v = xyz$$

функциянинг максимумини топишдан иборат. Бу ерда биз *шартли экстремумга* тегишли масалани оламиз: x , y , z ўзгарувчилар $2xy + 2xz + 2yz = 2a$ шарт билан боғланган. Бу параграфда бундай масалаларни ечиш усулларини қараймиз.

Аввал ўзаро битта шарт билан боғланган икки ўзгарувчи функциясининг шартли экстремуми ҳақидаги масалани қараймиз.

Ушбу

$$u = f(x, y) \quad (1)$$

функциянинг максимум ва минимумларини топиш керак бўлсин; буида x ва y мана бу

$$\varphi(x, y) = 0 \quad (2)$$

тенглама билан боғланган.

(2) шарт мавжуд бўлганда икки ўзгарувчи x ва y дан факат биттаси, масалан x эркин ўзгарувчи бўлади, чунки у (2) тенгламадан x нинг функцияси сифатида аниқланади. Агар (2) тенгламани y га нисбатан ечиб, топилган ифодани (1) тенгликдаги y ўрнига қўйсак, бир ўзгарувчи x нинг функциясини ҳосил қилиб, масалани бир ўзгарувчи функциясининг максимум ва минимумини текшириш ҳақидаги масалага келтирган бўлар эдик.

Лекин қўйилган масалани (2) тенгламани x ёки y га нисбатан ечмасдан ҳам ҳал қилиш мумкин. x нинг u функция максимум ёки минимумга эга бўладиган қийматларида u нинг x бўйича хусусий ҳосиласи нолга айланиши керак.

у x нинг функцияси эканини эсда тутиб, (1) дан $\frac{du}{dx}$ ҳосилани топамиз;

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}.$$

Демак, экстремум нуқталарида

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0. \quad (3)$$

(2) тенгликдан

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \quad (4)$$

ни топамиз. Бу тенглик (2) тенгламани қаноатлантирадиган x ва y нинг барча қийматларида қаноатланади (VIII бобнинг 11-§ га қаранг).

(4) тенгламанинг иккала томонини ҳозирча номаълум λ коэф-фициентга кўпайтириб, ҳосил қилинган тенгликни (3) тенглик-ка ҳадлаб қўшиб, қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) + \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) = 0$$

ёки

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (5)$$

Бу тенглик барча экстремум нуқталарда бажарилади. λ нинг қийматини шундай танлаймизки, (5) тенгликдаги иккинчи қавс u функцияга экстремум берувчи x ва y қийматларда нолга айланди*):

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Лекин бу ҳолда x ва y нинг шу қийматларида (5) тенгликдан

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

тенглик келиб чиқади.

Шундай қилиб, экстремум нуқталарда учта x , y , λ номаълумли учта тенгламанинг қаноатланиши келиб чиқади:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0, \\ \varphi(x, y) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Бу тенгламалардан x ва y ни ҳамда фақат ёрдамчи ролни бажарган ва бундан кейин керак бўлмайдиган λ ни аниқлаймиз.

*) Аниқлик учун критик нуқталарда $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0$ деб фараз қиламиз.

у х нинг функцияси эканини эсда тутиб, (1) дан $\frac{du}{dx}$ ҳосилани топамиз;

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}.$$

Демак, экстремум нуқталарида

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0. \quad (3)$$

(2) тенгликдан

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \quad (4)$$

ни топамиз. Бу тенглик (2) тенгламани қаноатлантирадиган x ва y нинг барча қийматларида қаноатланади (VIII бобнинг 11-§ га қаранг).

(4) тенгламанинг иккала томонини ҳозирча номаълум λ коэф-фициентга кўпайтириб, ҳосил қилинган тенгликни (3) тенглик-ка ҳадлаб қўшиб, қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) + \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) = 0$$

ёки

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (5)$$

Бу тенглик барча экстремум нуқталарда бажарилади. λ нинг қийматини шундай танлаймизки, (5) тенгликдаги иккинчи қавс и функцияга экстремум берувчи x ва y қийматларда нолга айланди*):

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Лекин бу ҳолда x ва y нинг шу қийматларида (5) тенгликдан

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

тенглик келиб чиқади.

Шундай қилиб, экстремум нуқталарда учта x , y , λ номаълумли учта тенгламанинг қаноатланиши келиб чиқади:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0, \\ \varphi(x, y) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Бу тенгламалардан x ва y ни ҳамда фақат ёрдамчи ролни бажарган ва бундан кейин керак бўлмайдиган λ ни аниқлаймиз.

*) Аниқлик учун критик нуқталарда $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0$ деб фараз қиламиз.

Бундан (6) тенгламалар шартли экстремумнинг зарур шартлари экани келиб чиқади, яъни экстремум нуқталарда (6) тенгламалар қаноатланади. Лекин (6) тенгламалар системасини қаноатлантирувчи ҳар қандай x , y (ва λ) қийматларда шартли экстремум бўлавермайди. Критик нуқтанинг характерини қўшимча текшириш керак бўлади. Конкрет масалаларни ечганда баъзан масаланинг моҳиятига асосланиб критик нуқтанинг характерини аниқлаш мумкин. (6) тенгламаларнинг чап томонлари

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) \quad (7)$$

функциянинг x , y ва λ бўйича хусусий ҳосилаларни эканини курамир.

Шундай қилиб, (2) шартни қаноатлантирувчи ва $u = f(x, y)$ функция шартли максимумга ва шартли минимумга эга бўлиши мумкин бўлган x ва y нинг қийматларини топиш учун (7) ёрдамчи функцияни тузиш, унинг x , y ва λ бўйича хусусий ҳосилаларини нолга тенглаш ва ҳосил қилинган учта (6) тенгламадан x ва y (ва ёрдамчи кўпайтувчи λ) нинг қийматларини аниқлаш керак. Юқорида кўрилган усул ҳар қанча ўзгарувчи функциясининг шартли экстремумини текширишга тарқатилади.

Ўзаро m та ($m < n$) тенглама

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

билан боғланган n та ўзгарувчи $x_1, x_2, \dots, x_n$ функцияси $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ нинг максимум ва минимумларини топиш талаб қилинсин.

Функциянинг шартли максимуми ва минимуми бўлиши мумкин бўлган $x_1, x_2, \dots, x_n$ қийматларни топиш учун, ушбу функцияни тузиш:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) &= \\ &= f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 \varphi_1(x_1, \dots, x_n) + \\ &+ \lambda_2 \varphi_2(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m \varphi_m(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

унинг $x_1, x_2, \dots, x_n$ қийматлар бўйича хусусий ҳосилаларини нолга тенглаш:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} &= 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Шундай қилиб, қутининг ҳажми энг катта бўлиши учун, қути қирраси $\sqrt[n]{\frac{a}{3}}$ га тенг куб бўлиши керак.

2-мисол. Йигиндиси a га тенг булган $x_1, x_2, \dots, x_n$ сонлар қўпайтмасининг n - даражали илдизининг энг катта қиймати топилсин. Демак, масала бундай қўйилган: $x_1, x_2, \dots, x_n$ сонлар

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a = 0 \quad (x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0) \quad (12)$$

шарти билан боғланган ҳолда

$$u = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$$

функциянинг максимумини топиш талаб қилинади. Ердамчи функция тузамиз:

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} + \lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_n - a).$$

Унинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$F'_{x_1} = \frac{1}{n} \frac{x_2 x_3 \dots x_n}{(x_1 \dots x_n)^{\frac{n-1}{n}}} + \lambda = \frac{1}{n} \frac{u}{x_1} + \lambda = 0 \quad \text{ёки} \quad u = -n\lambda x_1,$$

$$F'_{x_2} = \frac{1}{n} \frac{u}{x_2} + \lambda = 0 \quad \text{ёки} \quad u = -n\lambda x_2,$$

.....

$$F'_{x_n} = \frac{1}{n} \frac{u}{x_n} + \lambda = 0 \quad \text{ёки} \quad u = -n\lambda x_n.$$

Охирги тенгликлардан:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

ва (12) тенгламага асосан:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{a}{n}.$$

Масаланинг маъносига кўра бу қийматлар $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$ функциянинг $\frac{a}{n}$ га тенг максимумини беради.

Шундай қилиб, $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a$ тенглик билан боғланган ҳар қандай мусбат $x_1, x_2, \dots, x_n$ сонлар учун

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} < \frac{a}{n} \quad (13)$$

тенгсизлик бажарилади (чунки исбот қилинганига кўра, $\frac{a}{n}$ бу функциянинг энг катта қийматидир). Энди (13) тенгсизликдаги a ўрнига (12) тенгликдан унинг қийматини қўйиб, ушбунни топамиз:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} < \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (14)$$

функцияни $y = ax^b$ кўринишда топниш табийи ва ҳоказо. Функцияни $y = \varphi(x, a, b, c)$ кўринишда танлаб олинган, шу функцияга кирувчи $a, b, c, \dots$ параметрларни шундай танлаш керак бўладики, y ўрганилаётган ҳодисани бирор маънода жуда яхши тарзда акс эттирсин.

Қўйилган масалани ечишда жуда кенг тарқалган усул *энг кичик квадратлар усулидир*. Бу усул қуйидагидан иборат: тажрибада олинган y_i қийматлар билан мос нуқталардаги $\varphi(x, a, b, c)$ функция қийматлари орасидаги айирмалар квадратларининг йиғиндисини қараймиз:

$$S(a, b, c, \dots) = \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \dots)]^2. \quad (2)$$

$a, b, c, \dots$ параметрларни шундай танлаб оламизки, бу йиғинди энг кичик қиймат қабул қилсин:

$$S(a, b, c, \dots) = \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \dots)]^2 = \min. \quad (3)$$

Демак, масала $S(a, b, c, \dots)$ функцияни минимумга айлантирадиган $a, b, c, \dots$ параметрлар қийматларини топишга келтирилади.

1-теоремага (17-§) асосан $a, b, c, \dots$ параметрларнинг бу қийматлари қуйидаги тенгламалар системасини қаноатлантириши лозим:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial c} = 0, \quad \dots, \quad (4)$$

ёки буларни ёйилган кўринишда ёзсак:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \dots)] \frac{\partial \varphi(x_i, a, b, c, \dots)}{\partial a} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \dots)] \frac{\partial \varphi(x_i, a, b, c, \dots)}{\partial b} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \dots)] \frac{\partial \varphi(x_i, a, b, c, \dots)}{\partial c} &= 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Бу ерда қанча номаълум бўлса, шунча тенглама бўлади. Ҳар қайси конкрет ҳолда (5) тенгламалар системасининг ечими мавжудлиги ва $S(a, b, c, \dots)$ функциянинг минимумга эғалиги масаласи текширилади. $y = \varphi(x, a, b, c, \dots)$ функцияни аниқлашнинг бир неча ҳолини қараб чиқамиз.

I. $y = ax + b$ бўлсин. Бу ҳолда $S(a, b)$ функция қуйидаги кўринишда бўлади ((2) ифодага қаранг):

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2. \quad (6)$$

Бу функция иккита a ва b ўзгарувчили функциядир (x_i ва y_i —берилган сонлар; 322-бетдаги жадвалга қаранг). Демак,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a} &= -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)] x_i = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial b} &= -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)] = 0, \end{aligned} \right\}$$

яъни (5) тенгламалар системаси бу ҳолда қуйидаги кўриниш-ни олади:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n y_i x_i - a \sum_{i=1}^n x_i^2 - b \sum_{i=1}^n x_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i - bn &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Икки a ва b номаълумли иккита чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қилдик. Бу системанинг маълум ечимга эга эканлиги, a ва b параметрларнинг топилган қийматларида ҳамда $S(a, b)$ функция минимумга эга бўлиши равшан*).

II Биз аппроксимацияланувчи функция учун иккинчи даражали уч ҳадни олайлик:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Бу ҳолда (2) ифода қуйидаги кўринишни олади:

$$S(a, b, c) = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]^2. \quad (8)$$

*) Бу етарли шартларга асосан ҳам осонгина аниқланади (17-§ даги 2-теоремага қаранг). Ҳақиқатан ҳам, бу ерда

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} = 2 \sum_{i=1}^n x_i, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2n.$$

Демак,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} \right)^2 = 4n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(2 \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = 4 \sum_{i < j} (x_i - x_j)^2 > 0; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a^2} > 0.$$

Бу учта ўзгарувчининг функциясидир. (5) тенгламалар системаси қуйидаги кўринишни олади:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] x_i^2 &= 0, \\ \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] x_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] &= 0, \end{aligned} \right\}$$

ёки ёйилган кўринишда ёзсак:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n y_i x_i^2 - a \sum_{i=1}^n x_i^4 - b \sum_{i=1}^n x_i^3 - c \sum_{i=1}^n x_i^2 &= 0, \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i - a \sum_{i=1}^n x_i^3 - b \sum_{i=1}^n x_i^2 - c \sum_{i=1}^n x_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i^2 - b \sum_{i=1}^n x_i - cn &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

a, b, c номаълумларни топиш учун чизиқли тенгламалар системаси ҳосил қиламиз. Масала характеридан система аниқ ечимга эга эканлиги, a, b, c параметрларнинг олинган қийматларида $S(a, b)$ функция минимумга эга эканлиги кўриниб турибди.

Мисол. Аргументнинг тўртта қийматида ($n = 4$) изланган функциянинг тажрибага асосан тўртта қиймати олинган бўлсин; улар ушбу жадвалга ёзилган:

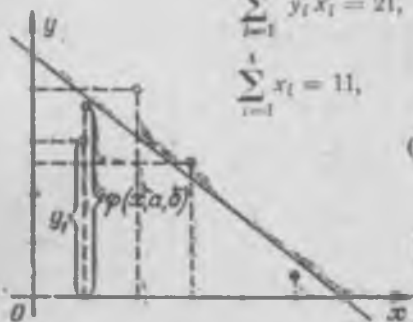
x	1	2	3	5
y	3	4	2,5	0,5

Ҳ функциянинг $y = ax + b$ чизиқли функция кўринишда топамиз, $S(a, b)$ учун ифода тузамиз:

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^4 [y_i - (ax_i + b)]^2.$$

(7) системани тузиш учун ҳамда a ва b коэффициентларни аниқлаш учун олдин қуйидагиларни ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 y_i x_i &= 21, & \sum_{i=1}^4 x_i^2 &= 39, \\ \sum_{i=1}^4 x_i &= 11, & \sum_{i=1}^4 y_i &= 10. \end{aligned}$$



190- расм.

(2) система ушбу кўринишни олади.

$$\begin{cases} 21 - 39a - 11b = 0, \\ 10 - 11a - 4b = 0. \end{cases}$$

Бу системани ечиб, a ва b ни топамиз.

$$a = -\frac{26}{35}, \quad b = \frac{159}{35}.$$

Изланган тўғри чизиқ қуйидагича бўлади (190- расм):

$$y = -\frac{26}{35}x + \frac{159}{35}.$$

20- §. Эгри чизиқнинг махсус нуқталари

Хусусий ҳосила тушунчасидан эгри чизиқларни текширишда фойдаланилади.

Эгри чизиқ

$$F(x, y) = 0$$

теңлама билан берилган бўлсин.

Эгри чизиққа уринманинг бурчак коэффициентини

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

формула билан аниқланади (VIII боб 11- § га қаранг).

Агар эгри чизиқнинг берилган $M(x, y)$ нуқтасида хусусий ҳосилалар $\frac{\partial F}{\partial x}$ ёки $\frac{\partial F}{\partial y}$ дан энг камида биттаси нолга айланмаса,

шу нуқтада ё $\frac{dy}{dx}$ ёки $\frac{dx}{dy}$ тўла аниқланади. $F(x, y) = 0$ эгри чизиқ бундай нуқтада аниқ уринмага эга бўлади. Бу ҳолда $M(x, y)$ нуқта *оддий нуқта* деб аталади.

Агар бирор $M_0(x_0, y_0)$ нуқтада

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=x_0, y=y_0} = 0 \quad \text{ва} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x=x_0, y=y_0} = 0$$

булса, у ҳолда урияманинг бурчак коэффициенти ноаниқ бўлиб қолади.

Таъриф. Агар $F(x, y) = 0$ эгри чизикнинг $M_0(x_0, y_0)$ нуқтасида $\frac{\partial F}{\partial x}$ ва $\frac{\partial F}{\partial y}$ хусусий ҳосилаларнинг иккаласи нолга айланса, бундай нуқта эгри чизикнинг *махсус нуқтаси* деб аталади. Демак, эгри чизикнинг махсус нуқтаси

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

тенгламалар системаси билан аниқланади.

Ҳар қандай эгри чизик махсус нуқтага эга бўлавермаслиги табиий. Масалан,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

эллипс учун

$$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}.$$

$\frac{\partial F}{\partial x}$ ва $\frac{\partial F}{\partial y}$ ҳосилалар фақат $x = 0$, $y = 0$ нуқтада нолга айланади, лекин x ва y нинг бу қийматлари эллипс тенгламасини қаноатлантирмайди. Демак, эллипснинг махсус нуқталари йўқ.

Эгри чизикнинг махсус нуқта яқинида кўринишини батафсил текширишга киришмасдан, махсус нуқталари бўлган бир неча эгри чизик намуналарини қараймиз.

1-мисол. Ушбу

$$y^2 - x(x - a)^2 = 0 \quad (a > 0)$$

эгри чизикнинг махсус нуқталари текшириласин.

Еч и ш. Бу мисолда $F(x, y) = y^2 - x(x - a)^2$, шунинг учун

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (x - a)(a - 8x); \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y.$$

Учта тенглама:

$$F(x, y) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

ни бирга ечиб, x ва y нинг бу системани қаноатлантирадиган қийматларини топамиз:

$$x_0 = a, \quad y_0 = 0.$$

Демак, $M_0(a, 0)$ нуқта эгри чизикнинг махсус нуқтасидир.

Эгри чизикнинг махсус нуқта яқинида жойлашинини текшираемиз ва эгри чизикни ясаймиз. Берилган тенгламани ушбу шаклда ёзамиз:

$$y = \pm (x - a)\sqrt{x}.$$

Бу формуладан кўринадики, эгри чизик: 1) фақат $x > 0$ қийматларида аниқланган; 2) Ox ўққа нисбатан симметрик; 3) Ox ўқни $(0, 0)$ ва $(a, 0)$ нуқталарда кесади. Кейинги нуқта, юқорида аниқланганидек, махсус нуқтадир.

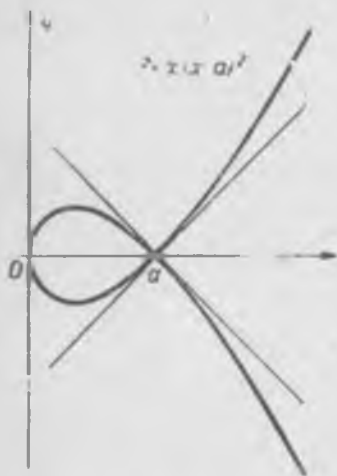
Аввал эгри чизикнинг тенгламадаги $+$ ишорага мос қисмини текшираемиз

$$y = (x - a)\sqrt{x}.$$

y нинг x бўйича биринчи ва иккинчи ҳосилаларини топамиз:

$$y' = \frac{3x - a}{2\sqrt{x}}, \quad y'' = \frac{3x + a}{4x\sqrt{x}}.$$

$x = 0$ булганда $y' = \infty$. Демак, эгри чизик координаталар бошида Oy ўққа уринади. $x = \frac{a}{3}$ бўлганда $y' = 0$, $y'' > 0$, яъни $x = \frac{a}{3}$ бўлганда y функция минимумга эга:



191- расм.

$$y = -\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$$

$0 < x < a$ кесмада $y < 0$ бўлади; $x > \frac{a}{3}$ бўлганда $y' > 0$; $x \rightarrow \infty$ да $y \rightarrow \infty$, $x = a$ бўлганда $y' = \sqrt{a}$, яъни махсус $M_0(a, 0)$ нуқтада эгри чизикнинг $y = +(x - a)$, x тармоғи $y = \sqrt{a}(x - a)$ уринмага эга бўлади.

Эгри чизикнинг иккинчи тармоғи $y = -(x - a)\sqrt{x}$ биринчи тармоғига Ox ўққа нисбатан симметрик бўлгани учун, эгри чизик иккинчи уринмага (иккинчи тармоққа) эга:

$$y = -\sqrt{a}(x - a).$$

Эгри чизик махсус нуқтадан икки марта ўтади. Бундай нуқта *туғун нуқта* деб аталади.

Текширилган эгри чизик 191- расмда тасвирланган.

2- м и с о л.

$$y^3 - x^3 = 0$$

эгри чизик (ярим кубик парабола) нинг махсус нуқталари бор-йўқлиги текшириласин.

Е ч и ш. Махсус нуқталарнинг координаталари ушбу тенгламалар системасидан топилади:

$$y^3 - x^3 = 0, \quad 3x^2 = 0, \quad 2y = 0.$$

Демак, $M_0(0, 0)$ — махсус нуқта.

Берилган тенгламани

$$y = \pm \sqrt[3]{x^3}$$

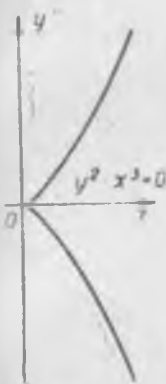
қуришнида ёзамиз. Эгри чизикнинг графигини ясаш учун аввал эгри чизикнинг тенгламадаги плюс ишорага мос тармоғини текшираемиз, чунки минус ишорага мос тармоғи биринчи тармоққа Ox ўққа нисбатан симметрикдир.

y функция фақат $x > 0$ бўлганда аниқланган бўлиб, манфий эмас ва x нинг ўсиши билан ўсади.

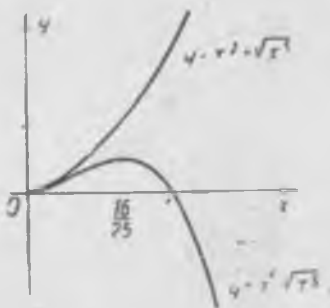
$y = \sqrt{x^3}$ функциянинг биринчи ва иккинчи ҳосилаларини топамиз:

$$y' = \frac{3}{2} \sqrt{x}, \quad y'' = \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$x = 0$ бўлганда $y = 0$, $y' = 0$ бўлади. Демак, эгри чизиқнинг қаралаётган тармоғи координаталар бошида $y = 0$ уринмага эга. Эгри чизиқнинг иккинчи $y = -\sqrt{x^3}$ тармоғи ҳам координаталар бошидан ўтади ва ўша $y = 0$ уринмага эга бўлади. Шундай қилиб, эгри чизиқнинг иккита турли тармоғи координаталар бошида учрашади, ушунинг бир уринмага эга ва уринмадан турли томонга жойлашган бўлади. Бундай махсус нуқта *биринчи тур қайтиш нуқтаси* деб аталади (192- расм).



192- расм.



193- расм.

Изоҳ. $y^2 - x^3 = 0$ эгри чизиқни $y^2 = x(x - a)^2$ (1- мисолда қаралган) эгри чизиқнинг $a \rightarrow 0$ даги лимит ҳоли сифатида қараш мумкин; ҳақиқатан $a \rightarrow 0$ да эгри чизиқ сиртмоғи бир нуқтага айланади.

3- мисол.

$$(y - x^2)^2 - x^5 = 0$$

Эгри чизиқ текширилсин.

Ечиш. Махсус нуқталарнинг координаталари

$$-4x(y - x^2) - 5x^4 = 0, \quad 2(y - x^2) = 0$$

тенгламалар системасидан топилади; бу система ягона ечимга эга: $x = 0$, $y = 0$. Демак, координаталар боши махсус нуқта экан.

Берилган тенгламани $y = x^2 \pm \sqrt{x^5}$ кўринишда ёзамиз:

Бу тенгламадан кўрнадикки, x 0 дан $+\infty$ гача қийматлар қабул қила олади.

Биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларни топамиз:

$$y' = 2x \pm \frac{5}{2} \sqrt{x^3}, \quad y'' = 2 \pm \frac{15}{4} \sqrt{x}.$$

Эгри чизиқнинг плюс ва минус ишораларга мос тармоқларини айрим текшираимиз. $x = 0$ бўлганда иккала ҳолда ҳам $y = 0$, $y' = 0$, яъни Ox ўқ иккала тармоқ учун ҳам уринма бўлади. Аввал

$$y = x^3 + \sqrt{x^3}$$

тармоқни қараймиз. x 0 дан ∞ гача ўсганда y 0 дан ∞ гача ўсади. Иккинчи тармоқ

$$y = x^3 - \sqrt{x^3}.$$

Ox ўқни $(0, 0)$ ва $(1, 0)$ нуқталарда кеседи.

$x = \frac{16}{25}$ бўлганда $y = x^3 - \sqrt{x^3}$ функция максимумга эга. Агар $x \rightarrow +\infty$ бўлса, $y \rightarrow -\infty$ бўлади.

Шундай қилиб, бу ҳолда координаталар бошида эгри чизиқнинг икки тармоғи учрашади; иккала тармоқ умумий уринмага эга ва уриниш нуқтасининг яқинида иккала тармоқ уринманинг бир томонига жойлашган. Бундай нуқта *иккинчи тур қайтиш нуқтаси* дейилади. Кўрилаган функциянинг графиги 193-расимда тасвирланган.

4-мисол. $y^2 - x^4 + x^3 = 0$ эгри чизиқ текширилсин.

Ечиш. Координаталар боши махсус нуқтадир. Эгри чизиқни бу нуқта яқинида текшириш учун эгри чизиқ тенгламасини ушбу кўринишда ёзамиз:

$$y = \pm x^2 \sqrt{1 - x^2}.$$

Эгри чизиқнинг тенгламасида ўзгарувчилар фақат жуфт даражада, шунинг учун эгри чизиқ координата ўқларига нисбатан симметрик ва, демак, эгри чизиқни x ва y нинг мусбат қийматларига мос қисмини текшириш кифоя. Охирги тенгламадан кўринадикки, x 0 дан 1 гача, яъни $0 < x < 1$ кесмада ўзгариши мумкин.

Эгри чизиқнинг $y = +x^2 \sqrt{1 - x^2}$ тенгламанинг графиги бўлган тармоғи учун биринчи ҳосилани ҳисоблаймиз:

$$y' = \frac{x(2 - 3x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$x = 0$ бўлганда $y = 0$, $y' = 0$. Демак, эгри чизиқ координаталар бошида Ox ўққа уринади.

$x = 1$ бўлганда $y = 0$, $y' = \infty$ бўлади; демак $(1, 0)$ нуқтада уринма Oy ўққа параллел бўлади. $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ бўлганда функция максимумга эга бўлади (194-расм).

Координаталар бошида (махсус нуқтада) эгри чизиқнинг радикал олдиди плюс ва минус ишораларга мос тармоқлари ўзаро уринади. Бундай махсус нуқта *ёпишиш нуқтаси* дейилади.

5-мисол. Ушбу эгри чизиқ текширилсин:

$$y^2 - x^3(x - 1) = 0.$$

Ечиш. Махсус нуқтани аниқловчи тенгламалар системасини ёзамиз:

$$y^2 - x^3(x - 1) = 0, \quad -3x^2 + 2x = 0, \quad 2y = 0.$$

Бу система $x = 0$, $y = 0$ ечимга эга. Демак, $(0, 0)$ нуқта эгри чизиқнинг махсус нуқтасидир. Берилган тенгламани ушбу кўринишда ёзамиз:

$$y = \pm x \sqrt{x - 1}.$$

Бундан кўринадики, x 1 дан ∞ гача ўзгариши ва 0 қийматга эга бўлиши ҳам мумкин (кейинги ҳолда $y = 0$ бўлади).

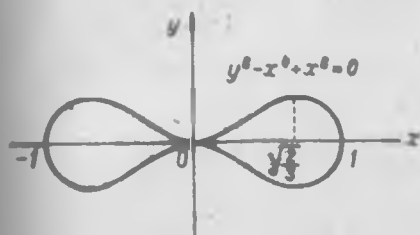
Эгри чизикнинг радикал олдидagi плюс ишорага мос тармоғини теги — рамиз. x 1 дан ∞ гача ўсганда y 0 дан ∞ гача ўсади. Ҳосила

$$y' = \frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}$$

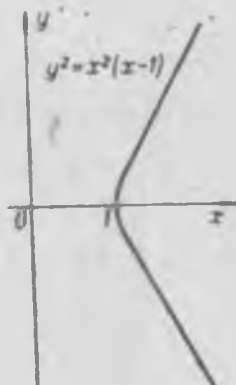
$x = 1$ бўлганда $y' = \infty$, демак, $(1, 0)$ нуқтада уринма Oy ўққа параллел бўлади.

Эгри чизикнинг минус ишорага мос тармоғи биринчи тармоққа Ox — қа нисбатан симметрикдир.

$(0, 0)$ нуқтанинг координатлари эгри чизик тенгламасини қаноатлантиради, демак, y эгри чизикка тегишли нуқта, лекин унинг яқинида эгри чизикнинг бошқа нуқталари йўқ (195- расм). Бундай махсус нуқта **яккаданан махсус нуқта** дейилади.



194- расм.



195- расм.

VIII бобга машқлар

Қуйидаги функцияларнинг хусусий ҳосилалари топилсин:

1. $z = x^2 \sin^2 y$. Жав. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin^2 y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \sin 2y$.
2. $z = xy^2$. Жав. $\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 x^{2-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x y^{2-1} \cdot 2y \ln x$.
3. $u = e^{x^2+y^2+z^2}$. Жав. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = 2ze^{x^2+y^2+z^2}$.
4. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Жав. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.
5. $z = \arctg(xy)$. Жав. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{1+x^2y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{1+x^2y^2}$.
6. $z = \arctg \frac{y}{x}$. Жав. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$.
7. $z = \ln \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$.

$$\text{Жав. } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x}{y\sqrt{x^2 + y^2}} \quad 8. \quad u = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{y}{x}}. \quad \text{Жав. } \frac{\partial u}{\partial x} =$$

$$= \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}} - \frac{z}{y^2} e^{\frac{y}{x}}, \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{y} e^{\frac{y}{x}}. \quad 9. \quad z = \arcsin(x + y).$$

$$\text{Жав. } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - (x + y)^2}} = \frac{\partial z}{\partial y}. \quad 10. \quad z = \arctg \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}. \quad \text{Жав. } \frac{\partial z}{\partial x} =$$

$$= \frac{y^2}{x\sqrt{x^4 - y^4}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{x^4 - y^4}}.$$

Қуйдаги функциялардан тўла дифференциал топилсин:

$$11. \quad z = x^2 + xy^2 + \sin y. \quad \text{Жав. } dz = (2x + y^2) dx + (2xy + \cos y) dy.$$

$$12. \quad z = \ln(xy). \quad \text{Жав. } dz = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}. \quad 13. \quad z = e^{x^2 + y^2}. \quad \text{Жав. } dz = 2e^{x^2 + y^2} x$$

$$\times (x dx + y dy). \quad 14. \quad u = \lg(3x - y) + 6^{y+z}. \quad \text{Жав. } du = \frac{3dx}{\cos^2(3x - y)} +$$

$$+ \left(-\frac{1}{\cos^2(3x - y)} + 6^{y+z} \ln 6 \right) dy + 6^{y+z} \ln 6 dz. \quad 15. \quad w = \arcsin \frac{x}{y}.$$

$$\text{Жав. } dw = \frac{y dx - x dy}{|y| \sqrt{y^2 - x^2}}.$$

$$16. \quad f(x, y) = x^2 + y^2 \text{ бўлса, } f'_x(2, 3) \text{ ва } f'_y(2, 3) \text{ ҳисоблансин.}$$

$$\text{Жав. } f'_x(2, 3) = 4. \quad f'_y(2, 3) = 27.$$

$$17. \quad \text{Агар } f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ бўлса, } x = 1, x = 0; dx = \frac{1}{2}, dy = \frac{1}{4}$$

$$\text{бўлганда } df(x, y) \text{ ҳисоблансин. Жав. } \frac{1}{2}.$$

$$18. \quad x, y \text{ ва } z \text{ миқдорларнинг кичик абсолют қийматларида } \sqrt{\frac{1+x}{(1+y)(1+z)}}$$

$$\text{учун тақрибий ифода тузилсин. Жав. } 1 + \frac{1}{2}(x - y - z).$$

$$19. \quad \sqrt{\frac{1+x}{1+y+z}} \text{ учун ҳам шу масала ечилсин. Жав. } 1 + \frac{1}{2}(x - y - z).$$

$$20. \quad \text{Агар } z = u + v^2, u = x^2 + \sin y, v = \ln(x + y) \text{ бўлса, } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ ва } \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\text{топилсин. Жав. } \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2 \frac{\ln(x + y)}{x + y}, \frac{\partial z}{\partial y} = \cos y + 2 \frac{\ln(x + y)}{x + y}.$$

$$21. \quad \text{Агар } z = \sqrt{\frac{1+u}{1+v}}, u = -\cos x, v = \cos x \text{ бўлса, } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ топилсин.}$$

$$\text{Жав. } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}.$$

$$22. \quad \text{Агар } z = e^{u-2v}, u = \sin x, v = x^2 + y^2 \text{ бўлса, } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ ва } \frac{\partial z}{\partial y} \text{ топилсин.}$$

$$\text{Жав. } \frac{\partial z}{\partial x} = e^{u-2v}(\cos x - 6x^2), \frac{\partial z}{\partial y} = e^{u-2v}(0 - 2 \cdot 2y) = -4ye^{u-2v}.$$

$$23. \quad \text{Ушбу функцияларнинг тўла ҳосилалари топилсин: } z = \arcsin(u + v),$$

$$u = \sin x \cos \alpha, v = \cos x \sin \alpha. \quad \text{Жав. Агар } 2k\pi - \frac{\pi}{2} < x + \alpha < 2k\pi + \frac{\pi}{2},$$

$$\text{бўлса, } \frac{dz}{dx} = 1, \text{ агар } 2k\pi + \frac{\pi}{2} < x + \alpha < (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2} \text{ бўлса, } \frac{dz}{dx} = -1.$$

$$24. \quad u = \frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}, y = a \sin x, z = \cos x. \quad \text{Жав. } \frac{du}{dx} = e^{ax} \sin x. \quad 25. \quad z =$$

$$= \ln(1-x^4), x = \sqrt{\sin \theta}. \quad \text{Жав. } \frac{dz}{d\theta} = -2 \lg \theta.$$

Қуйдаги тенгламалар билан берилган x нинг ошқормас функцияларининг ҳосилалари топилсин:

$$26. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \quad \text{Жав. } \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}. \quad 27. \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad \text{Жав. } \frac{dy}{dx} =$$

$$= \frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}. \quad 28. \quad y^x = x^y. \quad \text{Жав. } \frac{dy}{dx} = \frac{yx^{y-1} - y^x \ln y}{xy^{x-1} - x^y \ln x}. \quad 29. \quad \sin(xy) - e^{xy} -$$

$$-x^2y = 0. \quad \text{Жав. } \frac{dy}{dx} = \frac{y[\cos(xy) - e^{xy} - 2x]}{x[x + e^{xy} - \cos(xy)]}. \quad 30. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \frac{\partial z}{\partial x} \text{ ва}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \text{ топилсин. Жав. } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2 x}{a^2 z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2 y}{b^2 z}. \quad 31. \quad u - v \lg cw = 0; \frac{\partial w}{\partial u} \text{ ва}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} \text{ топилсин. Жав. } \frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\cos^2 aw}{aw}, \frac{\partial w}{\partial v} = -\frac{\sin 2aw}{2aw}. \quad 32. \quad z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2},$$

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{z} \text{ экани кўрсатилсин. } 33. \quad \frac{z}{x} = F\left(\frac{y}{z}\right); F - \text{ҳар қандай}$$

дифференциалланувчи функция бўлса, $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$ экани кўрсатилсин.

Иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар ҳисоблансин:

$$34. \quad z = x^3 - 4x^2y + 5y^2. \quad \text{Жав. } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x - 8y; \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -8x; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 10.$$

$$35. \quad z = e^x \ln y + \sin y \ln x. \quad \text{Жав. } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \ln y - \frac{\sin y}{x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{e^x}{y} +$$

$$+ \frac{\cos y}{x}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{e^x}{y^2} - \sin y \ln x.$$

$$36. \quad \text{Агар } u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \text{ бўлса, } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \text{ бўлиши ис-}$$

$$\text{ботлансин.}$$

$$37. \quad \text{Агар } z = \frac{x^2 y^2}{x + y} \text{ бўлса, } x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2 \frac{\partial z}{\partial x} \text{ бўлиши исботлансин.}$$

$$38. \quad \text{Агар } z = \ln(x^2 + y^2) \text{ бўлса, } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \text{ бўлиши исботлансин.}$$

$$39. \quad \text{Агар } z = \varphi(y + ax) + \psi(y - ax) \text{ ва } \varphi, \psi \text{ ҳар қандай икки марта}$$

$$\text{дифференциалланувчи функциялар бўлса, } a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \text{ бўлиши исбот-}$$

$$\text{лансин.}$$

Жав. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x}{y\sqrt{x^2 + y^2}}$ 8. $u = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{y}{x}}$. Жав. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}} - \frac{z}{y^2}e^{\frac{y}{x}}, \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{y}e^{\frac{y}{x}}$ 9. $z = \arcsin(x + y)$
 Жав. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - (x + y)^2}} = \frac{\partial z}{\partial y}$ 10. $z = \arctg \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$ Жав. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2}{x\sqrt{x^4 - y^4}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{x^4 - y^4}}$

Куйидаги функциялардан тўла дифференциал топилсин:

11. $z = x^2 + xy^2 + \sin y$. Жав. $dz = (2x + y^2)dx + (2xy + \cos y)dy$
 12. $z = \ln(xy)$. Жав. $dz = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}$ 13. $z = e^{x^2 + y^2}$. Жав. $dz = 2e^{x^2 + y^2} \times$
 $\times (x dx + y dy)$ 14. $u = \lg(3x - y) + 6^{y + z}$. Жав. $du = \frac{3dx}{\cos^2(3x - y)} +$
 $+ \left(-\frac{1}{\cos^2(3x - y)} + 6^{y + z} \ln 6\right) dy + 6^{y + z} \ln 6 dz$ 15. $w = \arcsin \frac{x}{y}$.
 Жав. $dw = \frac{y dx - x dy}{|y| \sqrt{y^2 - x^2}}$

16. $f(x, y) = x^2 + y^2$ бўлса, $f'_x(2, 3)$ ва $f'_y(2, 3)$ ҳисоблансин.
 Жав. $f'_x(2, 3) = 4$, $f'_y(2, 3) = 27$.

17. Агар $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ бўлса, $x = 1$, $x = 0$; $dx = \frac{1}{2}$, $dy = \frac{1}{4}$
 бўлганда $df(x, y)$ ҳисоблансин. Жав. $\frac{1}{2}$.

18. x, y ва z миқдорларнинг кичик абсолют қийматларида $\sqrt{\frac{1+x}{(1+y)(1+z)}}$
 учун тақрибий ифода тузилсин. Жав. $1 + \frac{1}{2}(x - y - z)$.

19. $\sqrt{\frac{1+x}{1+y+z}}$ учун ҳам шу масала ечилсин. Жав. $1 + \frac{1}{2}(x - y - z)$.

20. Агар $z = u + v^2$, $u = x^2 + \sin y$, $v = \ln(x + y)$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$
 топилсин. Жав. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2\frac{\ln(x + y)}{x + y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \cos y + 2\frac{\ln(x + y)}{x + y}$.

21. Агар $z = \sqrt{\frac{1+u}{1+v}}$, $u = -\cos x$, $v = \cos x$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial x}$ топилсин.
 Жав. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}}$

22. Агар $z = e^{u-2v}$, $u = \sin x$, $v = x^2 + y^2$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ топилсин.
 Жав. $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{u-2v}(\cos x - 6x^2)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{u-2v}(0 - 2 \cdot 2y) = -4ye^{u-2v}$.

23. Ушбу функцияларнинг тўла ҳосилалари топилсин; $z = \arcsin(u + v)$,
 $u = \sin x \cos \alpha$, $v = \cos x \sin \alpha$. Жав. Агар $2k\pi - \frac{\pi}{2} < x + \alpha < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$,

бўлса, $\frac{dz}{dx} = 1$, агар $2k\pi + \frac{\pi}{2} < x + \alpha < (2k + 1)\pi + \frac{\pi}{2}$ бўлса, $\frac{dz}{dx} = -1$.

24. $u = \frac{e^{ax}(y - z)}{a^2 + 1}$, $y = a \sin x$, $z = \cos x$. Жав. $\frac{du}{dx} = e^{ax} \sin x$ 25. $z =$
 $= \ln(1 - x^4)$, $x = \sqrt{\sin \theta}$. Жав. $\frac{dz}{d\theta} = -2 \lg \theta$.

Куйидаги тенгламалар билан берилган x нинг ошқормас функцияларининг ҳосилалари топилсин:

26. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Жав. $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}$ 27. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Жав. $\frac{dy}{dx} =$
 $= \frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}$ 28. $y^x = x^y$. Жав. $\frac{dy}{dx} = \frac{yx^{y-1} - y^x \ln y}{xy^{x-1} - x^y \ln x}$ 29. $\sin(xy) - e^{xy} -$

$-x^2y = 0$. Жав. $\frac{dy}{dx} = \frac{y[\cos(xy) - e^{xy} - 2x]}{x[x + e^{xy} - \cos(xy)]}$ 30. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва
 $\frac{\partial z}{\partial y}$ топилсин. Жав. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2 x}{a^2 z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2 y}{b^2 z}$ 31. $u - v \lg aw = 0$; $\frac{\partial w}{\partial u}$ ва

$\frac{\partial w}{\partial v}$ топилсин. Жав. $\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\cos^2 aw}{aw}$, $\frac{\partial w}{\partial v} = -\frac{\sin 2aw}{2aw}$ 32. $z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$;
 $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{z}$ экани кўрсатилсин. 33. $\frac{z}{x} = F\left(\frac{y}{x}\right)$; F — ҳар қандай

дифференциалланувчи функция бўлса, $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$ экани кўрсатилсин.

Иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар ҳисоблансин:

34. $z = x^3 - 4x^2y + 5y^3$. Жав. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x - 8y$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -8x$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 10$.

35. $z = e^x \ln y + \sin y \ln x$. Жав. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \ln y - \frac{\sin y}{x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{e^x}{y} +$
 $+\frac{\cos y}{x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{e^x}{y^2} - \sin y \ln x$.

36. Агар $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ бўлса, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ бўлиши ис-
 ботлансин.

37. Агар $z = \frac{x^2 y^2}{x + y}$ бўлса, $x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2 \frac{\partial z}{\partial x}$ бўлиши исботлансин.

38. Агар $z = \ln(x^2 + y^2)$ бўлса, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ бўлиши исботлансин.

39. Агар $z = \varphi(y + ax) + \psi(y - ax)$ ва φ, ψ ҳар қандай икки марта
 дифференциалланувчи функциялар бўлса, $a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ бўлиши исбот-
 лансин.

40. $z = 3x^4 - xy + y^3$ функциянинг $M(1, 2)$ нуктада Ox ўқ билан 60° ли бурчак ҳосил қилувчи йўналиш бўйича ҳосиласи топилсин.

Жав. $5 + \frac{11\sqrt{3}}{2}$. 41. $z = 5x^3 - 3x - y - 1$ функциянинг $M(2, 1)$ нуктада шу нуктадан $N(5, 5)$ нуктага борадиган йўналиш бўйича ҳосиласи топилсин. Жав. 9,4.

42. $f(x, y)$ функциянинг: 1) Oxy координат бурчаги биссектрисасининг йўналиши бўйича, 2) Ox ярим ўқнинг манфий йўналиши бўйича ҳосилалари топилсин. Жав. 1) $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \right)$; 2) $-\frac{\partial f}{\partial x}$. 43. $f(x, y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^3$. $M\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ нуктада ҳар қандай йўналиш бўйича ҳосил нолга тенг („функция стационар“) эканлиги кўрсатилсин.

44. Периметри $2p$ бўлган ҳамма учбурчаклардан энг катта юзга эга бўлгани аниқлансин. Жав. Тенг томонли учбурчак. 45. Тўла сирти S берилганда энг катта ҳажмига эга бўлган тўғри тўрт бурчакли параллелепипед топилсин. Жав. Қирраси $\sqrt{\frac{8}{6}}$ бўлган куб. 46. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$, $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ бўлган фазодаги икки тўғри чизик орасидаги масофа топилсин. Жав. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Қуйидаги функциялар максимум ва минимумга текширилсин. 47. $z = x^3y^3(a - x - y)$. Жав. $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{a}{3}$ бўлганда z максимумга эга.

48. $z = x^3 + xy + y^3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. Жав. $x = y = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ бўлганда z минимумга эга.

49. $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$; $0 < y < \frac{\pi}{2}$). Жав. $x = y = \frac{\pi}{3}$ бўлганда z максимумга эга бўлади.

50. $z = \sin x \sin y \sin(x + y)$ ($0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$). Жав. $x = y = \frac{\pi}{3}$ бўлганда z максимумга эга.

Қуйидаги эгри чизикларнинг махсус нукталари топилсин; уларнинг ҳарактери текширилсин ва бу нукталардаги уринмаларнинг тенгламалари тузилсин. 51. $x^2 + y^2 - 3ax = 0$. Жав. $M_0(0, 0)$ — тугун нукта; $x = 0$, $y = 0$ уринмаларнинг тенгламалари. 52. $a^4y^3 = x^4(a^2 - x^2)$. Жав. Уриниш нуктаси координаталар бошида; $y^3 = 0$ — қўш уринма. 53. $y^3 = \frac{x^3}{2a - x}$. Жав. $M_0(0, 0)$ — биринчи тур қайтиш нуктаси; $y^3 = 0$ — уринма. 54. $y^3 = x^3(9 - x^2)$. Жав. $M_0(0, 0)$ — тугун нукта; $y = \pm 3x$ — уринмалар тенгламалари.

55. $x^4 - 2ax^3y - axy^3 + a^3x^3 = 0$. Жав. $M_0(0, 0)$ — иккинчи тур қайтиш нуктаси; $y^3 = 0$ — қўш уринма. 56. $y^3(a^3 + x^3) = x^3(a^3 - x^3)$. Жав. $M_0(0, 0)$ — тугун нукта; $y = \pm x$ — уринмалар тенгламалари. 57. $b^3x^3 + a^3y^3 = x^3y^3$. Жав. $M_0(0, 0)$ — ақкаланган нукта. 58. $y = x \ln x$ эгри чизик координаталар бошида тугалувчи нуктага эга бўлиб, Oy ўқи уринма экани кўрсатилсин.

59. $y = \frac{x}{1 + e^x}$ эгри чизик координаталар бошида тугун нуктага эгалиги ва бу нуктада уринмалар ўнгдан $y = 0$, чапдан $y = x$ бўлиши кўрсатилсин.

ИХ БОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБНИНГ ФАЗОДАГИ ГЕОМЕТРИЯГА ТАТБИҚИ

1- §. Фазодаги эгри чизиқ тенгламаси

$\overrightarrow{OA} = \mathbf{r}$ векторни қараймиз; бу векторнинг боши координаталар бошида, охири эса бирор $A(x, y, z)$ нуқтада бўлсин (196- расм). Бундай вектор радиус-вектор деб аталади.

Бу векторни координата ўқларидаги проекциялари орқали ифодалаймиз:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \quad (1)$$

$\mathbf{r}$ векторнинг проекциялари бирор t параметрнинг функциялари бўлсин:

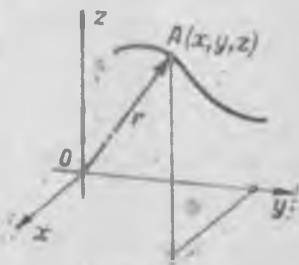
$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \\ z &= \chi(t). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

У ҳолда (1) фурумулани бундай ёзиш мумкин:

$$\mathbf{r} = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \chi(t)\mathbf{k} \quad (1')$$

ёки қисқача

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \quad (1'')$$



196- расм.

t ўзгарганда x , y , z ҳам ўзгаради ва $\mathbf{r}$ векторнинг охири A нуқта фазода бирор эгри чизиқ чизади; бу эгри чизиқ $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ векторнинг *годографи* деб аталади. (1') ёки (1'') тенгламалар фазодаги чизиқнинг *векториал тенгламалари* деб аталади. (2) тенгламалар фазодаги эгри чизиқнинг *параметрик тенгламалари* дейилади. Бу тенгламалар ёрдами билан t нинг ҳар бир қиймати учун эгри чизиқнинг унга мос нуқтасининг координаталари x , y , z аниқланади.

Изоҳ. Фазодаги эгри чизиқ икки сирт кесишган нуқталарининг геометрик ўрни сифатида ҳам таърифланиши мумкин.

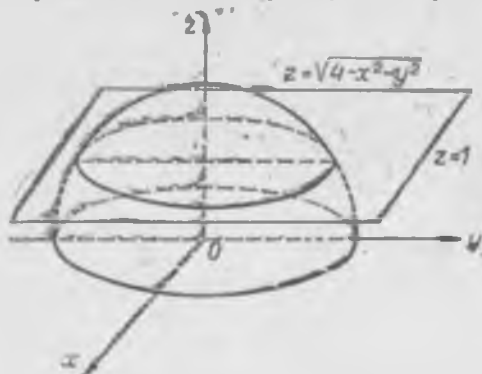
Демак, бундай эгри чизик икки сиртнинг икки тенгламаси билан берилиши мумкин:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(x, y, z) &= 0, \\ \Phi_2(x, y, z) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Масалан, ушбу

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z = 1$$

тенгламалар сфера билан текисликнинг кесишганидан ҳосил бўлган айланаларнинг тенгламаларидир (197- расм).



197- расм.

Шундай қилиб, фазодаги эгри чизик ё параметрик тенгламалар (2) билан, ёки иккита сиртнинг тенгламалари (3) билан берилиши мумкин.

Агар (2) тенгламалардан t параметрни йўқотсак ва x, y, z ни боғловчи иккита тенглама ҳосил қилсак, шу билан эгри чизикнинг параметрик усулда берилишидан сиртлар ёрдами билан берилнш усулига ўтган бўламиз. Ақсинча, агар $x = \varphi(t)$ деб фараз қилсак [$\varphi(t)$ ихтиёрий функция] ва y билан z ни t нинг функцияси сифатида ушбу

$$\Phi_1[\varphi(t), y, z] = 0, \quad \Phi_2[\varphi(t), y, z] = 0$$

тенгламалардан топсак, эгри чизикнинг сиртлар ёрдами билан берилишидан параметрик усулда берилишига ўтган бўламиз.

1- мисол.

$$x = 4t - 1, \quad y = 3t, \quad z = t + 2$$

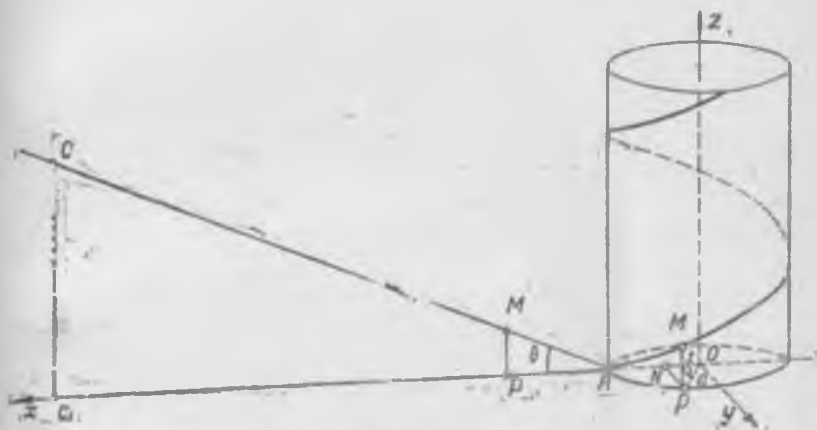
тенгламалар тўғри чизикнинг параметрик тенгламаларидир. Параметр t ни йўқотиб, иккита тенглама ҳосил қиламиз, улардан ҳар бири текислик тенгламаси бўлади. Масалан, биринчи тенгламадан иккинчи ва учинчи тенгла-

маларни ҳадлаб айирсак, $x - y - z = -3$ тенгламани ҳосил қиламиз. Агар биринчи тенгламадан иккинчининг тўртга кўпайтмасини айирсак, $x - 4z = -1$ тенгламани ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, берилаган тўғри чизиқ $x - y - z + 3 = 0$ ва $x - 4z + 9 = 0$ текисликларнинг кесишиш чизигидир.

2-мисол. Радиуси a га тенг ва ўқи Oz ўқ билан устма-уст тушган тўғри доиравий цилиндрни қараймиз (198- расм). Бу цилиндрга C_1AC тўғри бурчакли учбурчакни, унинг A учи цилиндр ясовчисининг Ox ўқи билан кесишган нуқтага тушадиган ва AC_1 катети цилиндрнинг Ox текислигида ётган доиравий кесинига ўраладиган қилиб цилиндрга ўраймиз. У вақтда учбурчакнинг гипотенузаси цилиндрнинг ён сиртида винт чизиқ деб аталадиган чизиқни ҳосил қилади.

Винт чизиқнинг тенгламасини ёзамиз, бунинг учун чизиқнинг ўзарувчи M нуқтасининг координаталарини x , y ва z билан ва AOP бурчакни t билан белгилаймиз (198- расмга қар). Унда

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = PM = AP \operatorname{tg} \theta$$



198- расм.

бўлади, бу ерда θ билан C_1AC учбурчакнинг ўткир бурчаги белгиланган ($AP = at$ (чунки AP — радиуси a бўлган доиранинг t марказий бурчагига мос ёйдир). $\operatorname{tg} \theta$ ни m билан алмаштириб, винт чизиқнинг параметрик тенгламаларини ҳосил қиламиз:

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = amt$$

(бу ерда t — параметр) ёки вектор шаклда:

$$r = ia \cos t + ja \sin t + kamt.$$

Винт чизиқнинг параметрик тенгламаларидан параметр t ни йўқотиш осон; одингги иккита тенгламани квадратга кўтариб ва уларни қўшиб, $x^2 + y^2 = a^2$ ни ҳосил қиламиз. Бу — винт чизиқ жойлашган цилиндрнинг тенгламасидир. Сўнгра иккинчи тенгламани биринчига ҳадлаб бўлиб ва ҳосил бўлган тенгламада t ўрнига унинг учинчи тенгламадан топилган қийматини қўйиб, винт чизиқ жойлашган бошқа сиртнинг тенгламасини топамиз:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{am}$$

Бу *оса винт сирт (геликоид)* деб аталадиган сиртдир. Бу сиртнинг Ox текислигига параллел ва учи Oz ўқда бўлган ярим тўғри чизикнинг ҳаракатидан ҳосил бўлган из деб қараш мумкин; бунда ярим тўғри чизик ўзгармас бурчақ тезлик билан Oz ўқ атрофида айланади ва ўзгармас тезлик билан шундай юқорига кўтариладики, унинг учи Oz ўқ бўйлаб силжийди. Винт чизик шу икки сиртнинг кесишиш чизигидир. Шунинг учун уни икки тенглама билан берish мумкин:

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{am}.$$

2-§. Скаляр аргумент вектор функциясининг limiti
ва ҳосиласи. Эгри чизикқа уринманинг тенгламаси.
Нормал текислик тенгламаси

Аввалги параграфдаги (1') ва (1'') формулаларга қайтамыз:

$$\mathbf{r} = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \chi(t)\mathbf{k}$$

ёки

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

t ўзгарганда умуман $\mathbf{r}$ векторнинг миқдори ва йўналиши ўзгаради. $\mathbf{r}$ вектор скаляр аргумент t нинг *вектор функцияси* деб аталади. Қуйидагича фараз қиламиз:



$$\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = \varphi_0.$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \psi(t) = \psi_0.$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \chi(t) = \chi_0.$$

У вақтда $\mathbf{r}_0 = \varphi_0\mathbf{i} + \psi_0\mathbf{j} + \chi_0\mathbf{k}$ вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ *векторнинг limiti* дейилади ва бундай ёзилади (199-расм):

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0.$$

Охирги тенгликдан ушбу тенгликлар келиб чиқади:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0| =$$

$$= \lim_{t \rightarrow t_0} \sqrt{[\varphi(t) - \varphi_0]^2 + [\psi(t) - \psi_0]^2 + [\chi(t) - \chi_0]^2} = 0$$

ва

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\mathbf{r}(t)| = |\mathbf{r}_0|.$$

Энди скаляр аргумент вектор функциясининг

$$\mathbf{r}(t) = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \chi(t)\mathbf{k}$$

(1)

ҳосиласи ҳақидаги масалага ўтамыз; $r(t)$ векторнинг боши координатадар бошида деб фараз қиламыз. Охирги тенглама бирон фазовий эгри чизиқнинг тенгламаси эканини биламыз.

t нинг эгри чизиқдаги маълум бир M нуқтага мос келади-ган бирор тайин қийматини олиб, унга Δt орттирма берамыз; у вақтда мана бу векторни ҳосил қиламыз:

$$r(t + \Delta t) = \varphi(t + \Delta t)i + \psi(t + \Delta t)j + \chi(t + \Delta t)k,$$

бу вектор эгри чизиқда бирор M_1 нуқтани аниқлайди (200- расм). Вектор орттирмасини топамиз:

$$\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t) = [\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)]i + [\psi(t + \Delta t) - \psi(t)]j + [\chi(t + \Delta t) - \chi(t)]k.$$

200- расмда $\overline{OM} = r(t)$, $\overline{OM}_1 = r(t + \Delta t)$ ва бу орттирма $\overline{MM}_1 = \Delta r(t)$ вектор билан тасвирланади.

Вектор функция орттирмасининг скаляр аргумент орттирмасига нисбатини, яъни $\frac{\Delta r(t)}{\Delta t}$ нисбатни қараймыз; бу $\Delta r(t)$ векторга коллинеар вектор бўлади, чунки унинг ўзи $\Delta r(t)$ ни $\frac{1}{\Delta t}$ скалярга кўпайтиришдан ҳосил бўлади. Бу векторни ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{\Delta r(t)}{\Delta t} = \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t}i + \frac{\psi(t + \Delta t) - \psi(t)}{\Delta t}j + \frac{\chi(t + \Delta t) - \chi(t)}{\Delta t}k.$$

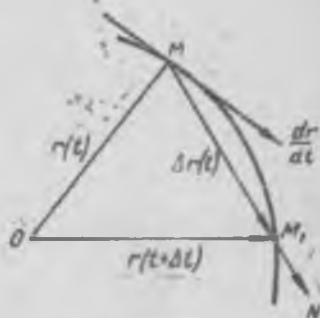
Агар $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ функциялар t нинг олинган қийматида ҳосилага эга бўлса, i , j , k векторлар олдидаги кўпайтувчиларнинг $\Delta t \rightarrow 0$ даги лимитлари $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ ҳосилаларга айланади. Демак, бу ҳолда $\Delta t \rightarrow 0$ да $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ нинг лимити мавжуд ва $\varphi'(t)i + \psi'(t)j + \chi'(t)k$ векторга тенг:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \varphi'(t)i + \psi'(t)j + \chi'(t)k.$$

Охирги тенглик билан белгиланган вектор $r(t)$ векторнинг скаляр аргумент t бўйича ҳосиласи деб аталади. Ҳосила $\frac{dr}{dt}$ ёки r' символ билан белгиланади.

Шундай қилиб,

$$\frac{dr}{dt} = r' = \varphi'(t)i + \psi'(t)j + \chi'(t)k. \quad (2)$$



200- расм.

ёки

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j + \frac{dz}{dt} k. \quad (2')$$

$\frac{dr}{dt}$ векторнинг йўналишини аниқлаймиз.

$\Delta t \rightarrow 0$ да M_1 нуқта M нуқтага яқинлашади, шунинг учун MM_1 кесувчининг йўналиши натижада уринманинг йўналишини беради. Демак, $\frac{dr}{dt}$ ҳосила вектор M нуқтада эгри чизиққа уринма бўйича йўналган. $\frac{dr}{dt}$ векторнинг узунлиги ушбу

$$\left| \frac{dr}{dt} \right| = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2} \quad (3)$$

формула билан ҳисобланади*).

Ҳосил қилинган натижаларга асосан эгри чизиқ тенгламасида $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ эканини эътиборга олиб,

$$r = xi + yj + zk$$

эгри чизиққа $M(x, y, z)$ нуқтада уринманинг тенгламасини ёзиш осон. $M(x, y, z)$ нуқтадан ўтган тўғри чизиқ тенгламаси ушбу кўринишда бўлади:

$$\frac{X-x}{m} = \frac{Y-y}{n} = \frac{Z-z}{p},$$

бу ерда X, Y, Z — тўғри чизиқ ўзгарувчи нуқтасининг координаталари, m, n, p — шу тўғри чизиқнинг йўналтирувчи косинусларига (яъни тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори проекцияларига) пропорционал миқдорлар.

Иккинчи томондан

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j + \frac{dz}{dt} k$$

вектор уринма бўйича йўналганлигини аниқладик. Шунинг учун бу векторнинг проекциялари уринманинг йўналтирувчи косинусларига, демак, m, n, p сонларга ҳам пропорционал сонлардир. Демак, уринманинг тенгламаси ушбу кўринишда бўлади:

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}} \quad (4)$$

*) Қаралаётган нуқталарда $\left| \frac{dr}{dt} \right| \neq 0$ деб фараз қиламиз.

1-мисол. t нинг ихтиёрий ва $t = \frac{\pi}{4}$ қийматларида

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = amt$$

винт чизиққа уринманинг тенгламаси ёзилсин.

Еч и ш.

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = a \cos t, \quad \frac{dz}{dt} = am.$$

(4) формула бўйича:

$$\frac{X - a \cos t}{-a \sin t} = \frac{Y - a \sin t}{a \cos t} = \frac{Z - amt}{am}.$$

Жумладан, $t = \frac{\pi}{4}$ бўлганда:

$$\frac{X - \frac{a\sqrt{2}}{2}}{-\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{Y - \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{Z - am\frac{\pi}{4}}{am}$$

ёки

$$\frac{X - \frac{a\sqrt{2}}{2}}{-1} = \frac{Y - \frac{a\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{Z - \frac{\pi am}{4}}{m\sqrt{2}}.$$

Текис эгри чизиқда бўлгани каби, уринмага перпендикуляр ва уриниш нуқтасидан ўтган тўғри чизиқ фазовий эгри чизиққа унинг шу нуқтасида *нормал* деб аталади. Фазовий эгри чизиқнинг берилган нуқтасидан унга саноксиз кўп нормал тўғри чизиқлар ўтказиш мумкин. Уларнинг ҳаммаси уринма тўғри чизиққа перпендикуляр текисликда ётади. Бу текислик *нормал текислик* деб аталади.

Нормал текисликнинг (4) уринмага перпендикуляр бўлиш шартидан нормал текисликнинг ушбу тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\frac{dx}{dt} (X - x) + \frac{dy}{dt} (Y - y) + \frac{dz}{dt} (Z - z) = 0 \quad (5)$$

2-мисол. Винт чизиққа $t = \frac{\pi}{4}$ нуқтада нормал текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

Еч и ш. 1-мисолга ва (5) формулага асосан ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:

$$-\left(X - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) + \left(Y - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) + m\sqrt{2} \left(Z - am\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

ёки

$$-X + Y + m\sqrt{2} Z = am^2 \frac{\pi}{4} \sqrt{2}.$$

Энди фазовий эгри чизик

$$\Phi_1(x, y, z) = 0, \quad \Phi_2(x, y, z) = 0 \quad (6)$$

тенгламалар билан берилганда унга уринма тўғри чизик ва нормал текислик тенгламаларини чиқарамиз.

Бу эгри чизикнинг x, y, z координаталарини бирор t параметрининг функцияси каби ифодаalaymиз:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t). \quad (7)$$

$\varphi(t), \psi(t), \chi(t)$ функцияларни t бўйича дифференциалланувчи функциялар деб фараз қиламиз.

(6) тенгламаларда x, y, z ўрнига уларнинг эгри чизик нуқтаси учун t орқали ифодааланган қийматларини қўйиб, ушбу икки айниятни ҳосил қиламиз:

$$\Phi_1[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] = 0, \quad (8a)$$

$$\Phi_2[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] = 0. \quad (8b)$$

(8a) ва (8b) айниятларни t бўйича дифференциаллаб, шуларни топамиз:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{dz}{dt} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \frac{dz}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Бу тенгламалардан қуйидагилар келиб чиқади:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}}. \quad (10)$$

Бу ерда $\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \neq 0$ деб фараз қиламиз, лекин охириги (11) ва (12) (қуйида чиқарилган) формулалар уларда иштираётган детерминантлардан бирортаси нолдан фарқли бўлганда ўз кучини сақлашини исбот қилиш мумкин.

(10) тенгликлардан шуларни ҳосил қиламиз:

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}}.$$

Демак, (4) формулага асосан уринма тўғри чизик тенгламаси ушбу кўринишга эга бўлади:

$$\frac{X - x}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}} = \frac{Z - z}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}}.$$

ёки детерминантлардан фойдалансак:

$$\begin{vmatrix} X-x & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y-y & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z-z & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (11)$$

Нормал текислик ушбу тенгламага эга бўлади:

$$(X-x) \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \end{vmatrix} + (Y-y) \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \end{vmatrix} + (Z-z) \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = 0. \quad (12)$$

Бу формулалар, уларда иштирок қилган детерминантлардан камида биттаси нолдан фарқли бўлгандагина, маънога эга бўлади. Агар эгри чизиқнинг бирор нуқтасида

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \end{vmatrix}$$

детерминантларнинг учаласи нолга тенг бўлса, бу нуқта фазовий эгри чизиқнинг *махсус нуқтаси* деб аталади. Фазовий эгри чизиқ бу нуқтада, текис эгри чизикларда бўлгани каби, ҳеч қандай уринмага эга бўлмаслиги мумкин (VIII бобнинг 20- § га қаранг).

3- м и с о л. $x^2 + y^2 + z^2 = 4r^2$ сфера билан $x^2 + y^2 = 2ry$ цилиндр кесишиш чизигининг $M(r, r, r\sqrt{2})$ нуқтасида (201- расм) унга уринма тўғри чизиқ ва нормал текислик тенгламалари топилсин.

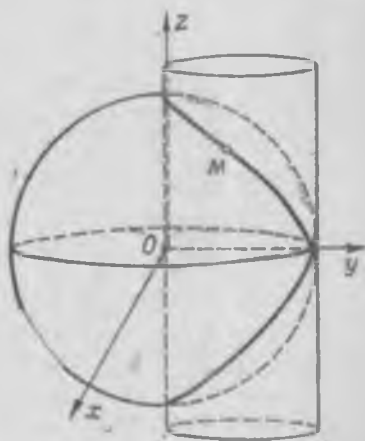
Е ч и ш.

$$\Phi_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4r^2, \quad \Phi_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2ry,$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 2z, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = 2y - 2r, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0.$$

Ҳосилаларнинг берилган M нуқтадаги қийматлари:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = 2r, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = 2r, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 2r\sqrt{2}, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = 2r, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0.$$



201- расм.

Шунинг учун уринма тўғри чизиқ тенгламаси бундай бўлади:

$$\frac{X-r}{0} = \frac{Y-r}{\sqrt{2}} = \frac{Z-r\sqrt{2}}{-1}.$$

Нормал текислик тенгламаси:

$$\sqrt{2}(Y-r) - (Z-r\sqrt{2}) = 0 \text{ ёки } \sqrt{2} Y - Z = 0.$$

3-§. Векторларни (вектор функцияларни) дифференциаллаш қоидалари

Юқорида кўрганимиздек,

$$r(t) = \varphi(t)i + \psi(t)j + \chi(t)k, \quad (1)$$

вектор ҳосиласининг таърифига кўра,

$$r'(t) = \varphi'(t)i + \psi'(t)j + \chi'(t)k. \quad (2)$$

Бундан, дифференциаллашнинг асосий қоидалари векторлар учун ҳам ўз кучида қолиши келиб чиқади. Биз қуйида вектор функцияларни дифференциаллашнинг баъзи формулаларини кўрамиз. Бу формулалар бундан буён бизга керак бўлади.

1. Векторлар йиғиндисининг ҳосиласи қушилувчи векторлар ҳосилаларининг йиғиндисига тенг.

Масалан, ушбу икки вектор берилган бўлсин:

$$\left. \begin{aligned} r_1(t) &= \varphi_1(t)i + \psi_1(t)j + \chi_1(t)k, \\ r_2(t) &= \varphi_2(t)i + \psi_2(t)j + \chi_2(t)k; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

буларнинг йиғиндис:

$$r_1(t) + r_2(t) = [\varphi_1(t) + \varphi_2(t)]i + [\psi_1(t) + \psi_2(t)]j + [\chi_1(t) + \chi_2(t)]k.$$

Ўзгарувчи вектор ҳосиласининг таърифига кўра:

$$\frac{d(r_1(t) + r_2(t))}{dt} = [\varphi_1(t) + \varphi_2(t)]'i + [\psi_1(t) + \psi_2(t)]'j + [\chi_1(t) + \chi_2(t)]'k$$

ёки

$$\begin{aligned} \frac{d(r_1(t) + r_2(t))}{dt} &= [\varphi_1'(t) + \varphi_2'(t)]i + [\psi_1'(t) + \psi_2'(t)]j + [\chi_1'(t) + \chi_2'(t)]k = \\ &= [\varphi_1'(t)i + \psi_1'(t)j + \chi_1'(t)k] + \\ &+ [\varphi_2'(t)i + \psi_2'(t)j + \chi_2'(t)k] = r_1' + r_2'. \end{aligned}$$

Демак,

$$\frac{d[r_1(t) + r_2(t)]}{dt} = \frac{dr_1}{dt} + \frac{dr_2}{dt}. \quad (I)$$

II. Векторларнинг скаляр купайтмасидан олинган ҳосили ушбу формула билан ифодаланади:

$$\frac{d(r_1 r_2)}{dt} = \frac{dr_1}{dt} r_2 + r_1 \frac{dr_2}{dt}. \quad (II)$$

Ҳақиқатан, агар $r_1(t)$, $r_2(t)$ векторлар (3) формулалар билан ифодаланса, маълумки, уларнинг скаляр купайтмаси мана бунга тенг:

$$r_1(t) r_2(t) = \varphi_1 \varphi_2 + \psi_1 \psi_2 + \chi_1 \chi_2.$$

Шунинг учун

$$\begin{aligned} \frac{d(r_1 r_2)}{dt} &= \varphi_1' \varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2' + \psi_1' \psi_2 + \psi_1 \psi_2' + \chi_1' \chi_2 + \chi_1 \chi_2' = \\ &= (\varphi_1' \varphi_2 + \psi_1' \psi_2 + \chi_1' \chi_2) + (\varphi_1 \varphi_2' + \psi_1 \psi_2' + \chi_1 \chi_2') = \\ &= (\varphi_1' i + \psi_1' j + \chi_1' k) (\varphi_2 i + \psi_2 j + \chi_2 k) + (\varphi_1 i + \psi_1 j + \chi_1 k) \times \\ &\quad \times (\varphi_2' i + \psi_2' j + \chi_2' k) = \frac{dr_1}{dt} r_2 + r_1 \frac{dr_2}{dt}. \end{aligned}$$

Теорема исботланди.

(II) формуладан ушбу муҳим натижа чиқади.

Натижа. Агар e вектор бирлик вектор, яъни $|e| = 1$ бўлса, унинг ҳосиласи, унга перпендикуляр вектор бўлади.

Исбот. Агар e бирлик вектор бўлса,

$$ee = 1.$$

Бу тенгликнинг иккала томонидан t бўйича ҳосила оламиз:

$$e \frac{de}{dt} + \frac{de}{dt} e = 0$$

ёки

$$2e \frac{de}{dt} = 0,$$

яъни скаляр купайтма

$$e \frac{de}{dt} = 0$$

бу эса $\frac{de}{dt}$ вектор e векторга перпендикуляр эканини билдиради.

III. Агар $f(t)$ скаляр функция ва $r(t)$ вектор функция бўлса, $f(t)r(t)$ кўпайтманинг ҳосиласи ушбу формула билан ифодаланади:

$$\frac{d(fr)}{dt} = \frac{df}{dt}r + f\frac{dr}{dt}. \quad (III)$$

Исбот. Агар $r(t)$ вектор (I) формула билан аниқланган бўлса, у ҳолда

$$f(t)r(t) = f(t)\varphi(t)i + f(t)\psi(t)j + f(t)\chi(t)k.$$

(2) формулага кўра мана бу тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \frac{d(f(t)r(t))}{dt} &= \left(\frac{df}{dt}\varphi + f\frac{d\varphi}{dt}\right)i + \left(\frac{df}{dt}\psi + f\frac{d\psi}{dt}\right)j + \\ &+ \left(\frac{df}{dt}\chi + f\frac{d\chi}{dt}\right)k = \frac{df}{dt}(\varphi i + \psi j + \chi k) + f\left(\frac{d\varphi}{dt}i + \right. \\ &\left. + \frac{d\psi}{dt}j + \frac{d\chi}{dt}k\right) = \frac{df}{dt}r + f\frac{dr}{dt}. \end{aligned}$$

IV. Ўзгармас сон кўпайтувчини ҳосила ишорасидан ташқариги чиқариш мумкин:

$$\frac{d(a \cdot r(t))}{dt} = a \frac{dr}{dt} = ar'(t). \quad (IV)$$

Агар $f(t) = a = \text{const}$ бўлса, бу формула III формуладан келиб чиқади. Демак, $\frac{df}{dt} = 0$.

V. $r_1(t)$ ва $r_2(t)$ векторларнинг вектор кўпайтмасининг ҳосиласи ушбу формула билан ифодаланади:

$$\frac{d(r_1 \times r_2)}{dt} = \frac{dr_1}{dt} \times r_2 + r_1 \times \frac{dr_2}{dt}. \quad (V)$$

(II) формулага ўхшаш исботланади.

4-§. Векторнинг ёй узунлиги бўйича биринчи ва иккинчи ҳосилалари. Эгри чизиқнинг эгрилиги. Бош нормал. Нуқтанинг эгри чизиқли ҳаракатдаги тезлиги ва тезланиши.

Фазовий эгри чизиқ ёйи $\widehat{M_0 A} = s$ нинг узунлиги*) ҳам текисликдаги эгри чизиқлар узунлиги каби аниқланади (202-расм). Ўзгарувчи нуқта $A(x, y, z)$ эгри чизиқ бўйича ҳаракат қилганда ёй узунлиги s ўзгаради ва аксинча, z ўзгарганда эгри чизиқ устидаги A нуқтанинг координаталари x, y ва z ўзгаради.

*) Фазовий эгри чизиқ ёйининг узунлиги текис эгри чизиқ ёйининг узунлиги каби аниқланади (VI боб 1-§ ва XII боб 3-§ га қаранг).

Демак, узгарувчи A нуқтанинг координаталари x, y, z ни ёй узунлиги s нинг функцияси деб қараш мумкин:

$$x = \varphi(s),$$

$$y = \psi(s),$$

$$z = \chi(s).$$

Эгри чизиқнинг бу параметрик тенглачаларида параметр ёйнинг узунлиги s дир.

Вектор $\overrightarrow{OA} = \mathbf{r}$ бундай ифодаланади:

$$\mathbf{r} = \varphi(s)\mathbf{i} + \psi(s)\mathbf{j} + \chi(s)\mathbf{k}$$

ёки

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \quad (1)$$

яъни $\mathbf{r}$ вектор ёй узунлиги s нинг функциясидир.

$\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ ҳосиланинг геометрик маъносини аниқлаймиз.

Қуйидаги тенгликлар уринли бўлиши 202- расмдан кўринади:

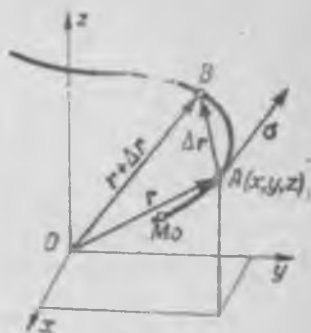
$$\overline{M_0A} = s, \quad \overline{AB} = \Delta s, \quad \overline{M_0B} = s + \Delta s,$$

$$\overline{OA} = \mathbf{r}(s), \quad \overline{OB} = \mathbf{r}(s + \Delta s),$$

$$\overline{AB} = \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(s + \Delta s) - \mathbf{r}(s),$$

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB}}.$$

2- параграфда $\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s}$ вектор эгри чизиққа A нуқтадаги уринма бўйича s нинг ўсиш томонига йўналганини кўрган эдик. Иккинчи томондан $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\overline{AB}}{\overline{AB}} \right| = 1$ (ватар узунлигининг ёй узунлигига нисбатининг limiti*). Демак, $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ — уринма бў-



202- расм.

* VI бобнинг 1- § да бу муносабатни текис эгри чизиқ учун кўрсатган эдик. Агар $\varphi(t), \psi(t), \chi(t)$ функциялар бир вақтда ҳаммаси нолга айланимайдиган узлуксиз ҳосилаларга эга бўлса, фазовий эгри чизиқ $\mathbf{r}(t) = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \chi(t)\mathbf{k}$ учун ҳам шу муносабат мавжуд бўлади.

Яъни $\vec{r}$ билан белгилаймиз:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\sigma}. \quad (2)$$

Агар $\vec{r}$ вектор

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

проекциялари билан берилган бўлса, унда

$$\vec{\sigma} = \frac{dx}{ds}\vec{i} + \frac{dy}{ds}\vec{j} + \frac{dz}{ds}\vec{k}, \quad (8)$$

аммо

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = 1.$$

Энди вектор функциянинг иккинчи ҳосиласи $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ ни, яъни $\frac{d\vec{r}}{ds}$ нинг ҳосиласини қараймиз ва унинг геометрик маъносини ёритамиз. (2) формуладан ушбу натижа чиқади:

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left[\frac{d\vec{r}}{ds} \right] = \frac{d\vec{\sigma}}{ds}.$$

Демак, $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\sigma}}{\Delta s}$ ни топишимиз керак.

203- расмдан ушбуларни кўрамиз: $AB = \Delta s$, $\overline{AL} = \vec{\sigma}$, $\overline{BK} = \vec{\sigma} + \Delta \vec{\sigma}$. B нуқтадан $\overline{BL_1} = \vec{\sigma}$ векторни ўтказамиз. BKL_1 учбурчакдан

$$\overline{BK} = \overline{BL_1} + \overline{L_1K}$$

ёки

$$\vec{\sigma} + \Delta \vec{\sigma} = \vec{\sigma} + \overline{L_1K}.$$

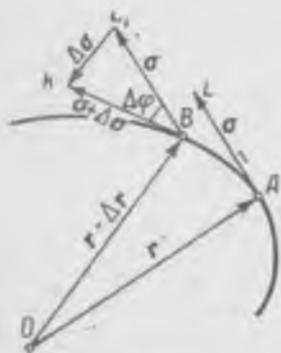
Демак, $\overline{L_1K} = \Delta \vec{\sigma}$. Искотланганига асосан $\vec{\sigma}$ векторнинг узунлиги ўз-

гармайди, шунинг учун $|\vec{\sigma}| = |\vec{\sigma} + \Delta \vec{\sigma}|$; демак, BKL_1 учбурчак тенг ёнлидир.

Шу учбурчак учдаги $\Delta \varphi$ бурчак эгри чизиққа уринманинг A нуқтадан B нуқтага ўтишдаги бурилиш бурчаги бўлади, яъни ёй узунлигининг Δs орттирмасига мос келади. BKL_1 учбурчакдан:

$$L_1K = |\Delta \vec{\sigma}| = 2|\vec{\sigma}| \left| \sin \frac{\Delta \varphi}{2} \right| = 2 \left| \sin \frac{\Delta \varphi}{2} \right|$$

(чунки $|\vec{\sigma}| = 1$).



203- расм.

Охирги тенгликнинг иккала томонини Δs га бўламиз:

$$\left| \frac{\Delta \vec{\sigma}}{\Delta s} \right| = 2 \left| \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\Delta s} \right| = \left| \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \right| \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right|.$$

Сўнгги тенгликнинг иккала томонида $\Delta s \rightarrow 0$ шарти билан лимитга ўтамиз. Чап томонда:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{\sigma}}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\vec{\sigma}}{ds} \right|.$$

Биз $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s}$ лимит мавжуд бўлган ва, демак, $\Delta s \rightarrow 0$ да $\Delta \varphi \rightarrow 0$ бўладиган эгри чизиқни қараётганимиз учун

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \right| = 1.$$

Шундай қилиб, лимитга ўтгандан сўнг

$$\left| \frac{d\vec{\sigma}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right| \quad (4)$$

ҳосил бўлади. Уринманинг A нуқтадан B нуқтага ўтишдаги бурилиш бурчаги $\Delta \varphi$ нинг AB ёй узунлиги Δs га нисбатининг абсолют қиймати, текис эгри чизиқдаги каби, берилган эгри чизиқнинг AB участкадаги ўртача эгрилиги деб аталади:

$$\text{ўртача эгрилик} = \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right|.$$

Ўртача эгриликнинг $\Delta s \rightarrow 0$ даги лимити чизиқнинг A нуқтадаги эгрилиги деб аталади ва K ҳарфи билан белгиланади:

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right|.$$

Лекин бу ҳолда (4) тенгликдан $\left| \frac{d\vec{\sigma}}{ds} \right| = K$, яъни уринманинг бирлик векторидан ёй узунлиги бўйича олинган ҳосиланинг узунлиги*) эгри чизиқнинг берилган нуқтадаги эгрилигига тенг бўлади. $\vec{\sigma}$ вектор бирлик вектор бўлгани учун, унинг $\frac{d\vec{\sigma}}{ds}$ ҳосиласи унга перпендикуляр бўлади (IX бобнинг 3- § натижага қаранг).

*) Векторнинг ҳосиласи вектор бўлишини ва шунинг учун ҳосиланинг узунлиги ҳақида гапиришимиз мумкинлигини эслатиб ўтамиз.

Шундай қилиб, $\frac{d\vec{z}}{ds}$ вектор узунлиги эгри чизиқнинг эгри-лигига тенг, йўналиши эса уринма векторга перпендикулярдир.

Таъриф. $\frac{d\vec{s}}{ds}$ вектор йўналишига эга бўлган ва эгри чизиқнинг тегишли нуқтасидан ўтган тўғри чизиқ эгри чизиқнинг шу нуқтасидаги *бош нормали* деб аталади. Бу йўналишнинг бирлик векторини n билан белгилаймиз.

$\frac{d\vec{s}}{ds}$ векторнинг узунлиги эгри чизиқ эгрилиги K га тенг бўлгани учун

$$\frac{d\vec{s}}{ds} = Kn.$$

Эгриликка тескари бўлган миқдор эгри чизиқнинг берилган нуқтасидаги *эгрилик радиуси* деб аталади ва R ҳарфи билан белгиланади, яъни $\frac{1}{R} = K$. Шунга кўра бундай ёзиш мумкин:

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d\vec{s}}{ds} = \frac{n}{R}. \quad (5)$$

Бу формуладан ушбу натижа чиқади:

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2r}{ds^2} \right)^2. \quad (6)$$

Лекин

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d^2x}{ds^2}i + \frac{d^2y}{ds^2}j + \frac{d^2z}{ds^2}k.$$

Демак,

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)^2}. \quad (6')$$

Агар эгри чизиқ параметрик тенгламалар билан берилган бўлиб, уларда параметр ёй узунлиги s бўлса (яъни берилган эгри чизиқ ўзгарувчи нуқтасининг радиус-вектори ёй узунлигининг функцияси каби ифодаланган бўлса), охириги формула эгри чизиқнинг ҳар қандай нуқтасида эгриликни ҳисоблашга имкон беради.

Радиус-вектор r ихтиёрий t параметрнинг функцияси

$$r = r(t)$$

бўлган ҳолни қараймиз. Бу ҳолда ёй узунлиги s ни параметр t нинг функцияси деб қараймиз. Бу вақтда эгрилик қуйидагича ҳисобланади:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt}. \quad (7)$$

Энди

$$\left| \frac{dr}{ds} \right| = 1^*)$$

бўлгани учун

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2, \quad (8)$$

Бу тенгликнинг ўнг ва чап томонларини дифференциаллаб ва янкига қисқартирсак, шунинг ҳосил қиламиз:

$$\frac{dr}{dt} \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{ds}{dt} \frac{d^2 s}{dt^2}. \quad (9)$$

Сўнггра (7) формулага кўра

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt} \frac{1}{\frac{ds}{dt}}.$$

Охириги тенгликнинг иккала томонини s бўйича дифференциал-
лаймиз:

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = \frac{d^2 r}{dt^2} \frac{1}{\left(\frac{ds}{dt} \right)^3} - \frac{dr}{dt} \frac{\frac{d^2 s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt} \right)^4};$$

$\frac{dr}{ds}$ учун ҳосил қилинган ифодани (6) формулага қўйиб, мана
буни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2} &= \left[\frac{d^2 r}{dt^2} \frac{1}{\left(\frac{ds}{dt} \right)^3} - \frac{dr}{dt} \frac{\frac{d^2 s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt} \right)^4} \right]^2 = \\ &= \frac{\left(\frac{d^2 r}{dt^2} \right)^2 \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 - 2 \frac{d^2 r}{dt^2} \frac{dr}{dt} \frac{ds}{dt} \frac{d^2 s}{dt^2} + \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \left(\frac{d^2 s}{dt^2} \right)^2}{\left(\frac{ds}{dt} \right)^6}. \end{aligned}$$

*) Бу тенглик $\left| \frac{dr}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta r}{\Delta s} \right|$ дан келиб чиқади. Лекин Δr — ея узун-

лиги Δs ни тартиб турувчи ватар, шунинг учун $\Delta s \rightarrow 0$ да $\left| \frac{\Delta r}{\Delta s} \right|$ нисбат 1
га яқинлади.

$\frac{ds}{dt}$ ва $\frac{d^2s}{dt^2}$ ни (8) ва (9) формулалар бўйича $r(t)$ нинг ҳо-силалари орқали ифодалаб, ушбунни ҳосил қиламиз*):

$$\frac{1}{R^3} = \frac{\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)^2 \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d^2r}{dt^2} \frac{dr}{dt}\right)^2}{\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^3} \quad (10)$$

(10) формулани бундай ёзиш мумкин**):

$$K^2 = \frac{1}{R^2} = \frac{\left[\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2}\right]^2}{\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^3} \quad (11)$$

Эгри чизик ихтиёрий параметрик тенглама билан берилганда унинг исталган нуқтасидаги эгрилигини ҳисоблашга имкон берадиган формулани ҳосил қилдик.

Агар хусусий ҳолда эгри чизик текис бўлиб, Оху текисликда ётса, унинг параметрик тенгламаси ушбу кўринишда бўлади:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = 0.$$

x, y, z нинг бу ифодаларини (11) формулага қўйиб, илгари (VI бобда) чиқарилган ва параметрик шаклда берилган текис эгри чизик эгрилигини ифодаловчи формулани ҳосил қиламиз:

$$K = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\varphi''(t)|}{\{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2\}^{3/2}}.$$

Мисол. $r = la \cos t + ja \sin t + kamt$ винт чизикнинг ихтиёрий нуқтасидаги эгрилиги ҳисоблансин.

Ечиш.

$$\frac{dr}{dt} = -la \sin t + ja \cos t + kam, \quad \frac{d^2r}{dt^2} = -la \cos t - ja \sin t,$$

*) Махражни бундай алмаштирамиз: $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left\{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right\}^2 = \left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^3$. Бу ерда $\left(\frac{dr}{dt}\right)^6$ деб ёзиш мумкин эмас. $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ дан $\frac{dr}{dt}$ векторнинг скаляр квадрати тушунилади. $\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^3$ дан $\left(\frac{dr}{dt}\right)^3$ соннинг учинчи даражаси тушунилади. $\left(\frac{dr}{dt}\right)^6$ ифоданинг эса маъноси йўқ.

**) Биз $a^2b^2 - (ab)^2 = (a \times b)^2$ айниятдан фойдаландик, бунинг тўғри-лигига ишониш учун, айниятни $a^2b^2 - (ab \cos \varphi)^2 = (ab \sin \varphi)^2$ кўринишда ёзиш kifоя.

$$\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2} = \begin{vmatrix} l & j & k \\ -a \sin t & a \cos t & am \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \end{vmatrix} = l a^2 m \sin t - j a^2 m \cos t + k a^2,$$

$$\left(\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2} \right)^2 = a^4 (m^2 + 1),$$

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + a^2 m^2 = a^2 (1 + m^2).$$

Демак,

$$\frac{1}{R^2} = \frac{a^4 (m^2 + 1)}{[a^2 (1 + m^2)]^3} = \frac{1}{a^2 (1 + m^2)^2},$$

бундан

$$R = a (1 + m^2) = \text{const.}$$

Шундай қилиб, винт чизик ўзгармас эгрилик радиусига эга.

Изоҳ. Агар эгри чизик текисликда ётган бўлса, умумий-ликини бузмасдан, уни Оху текисликда ётади деб фараз қилиш мумкин (координатларни алмаштириш йўли билан бунга доим эришиш мумкин). Агар эгри чизик Оху текисликда ётса, $z = 0$ бўлади, Унда эса $\frac{d^2z}{ds^2} = 0$, демак, n вектор ҳам Оху текисликда ётади. Бундан ушбу хулоса чиқади: агар эгри чизик текис-ликда ётса, унинг бош нормали ҳам шу текисликда ётади.

Эгри чизикли ҳаракатда нуқтанинг тезлиги. Ҳаракатланувчи нуқта вақтнинг t моментида радиус-вектори $\overline{OM} = \mathbf{r}(t)$ билан белгиланган M нуқтада (200- расмга қара-ранг), $t + \Delta t$ моментда эса $\overline{OM}_1 = \mathbf{r}(t + \Delta t)$ радиус-вектор билан белгиланган M_1 нуқтада бўлсин. Унда $\overline{MM}_1$ вектор нуқ-танинг *кўчиш вектори* дейилади. Кўчиш вектори $\overline{MM}_1$ нинг вақт орттирмаси Δt га нисбати *нуқтанинг Δt вақт ичидаги ўртача тезлиги* дейилади:

$$v_{\text{ўрта}} = \frac{\overline{MM}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \overline{MN}.$$

Ўртача тезлик вектори ҳам $\overline{MM}_1$ ватари бўйлаб нуқтанинг ҳаракати томонига (339-бетдаги 200- расмга қара-ранг) йўналган (тўғри чизикли ҳаракатда у траектория бўйича йўналган) бў-лади.

Нуқтанинг берилган моментдаги тезлиги бундай аниқла-нади:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (v_{\text{ўрта}}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

яъни

$$v = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (12)$$

Шундай қилиб: *Нуқтанинг берилган моментдаги тезлиги нуқта радиус-векторининг вақт бўйича биринчи ҳосиласига тенг* дейиш мумкин.

Тезликнинг координата ўқларндаги проекциялари 2- § даги (2') формулага асосан бундай бўлади:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Тезликнинг модули 2- § даги (3) формула бўйича аниқланади:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad (13)$$

Агар бу параграфнинг бошида қилганимиздек ёй узунлиги s ни киритсак ва ёй узунлиги s ни t вақтнинг функцияси деб қарасак, у ҳолда (12) формулани бундай ёзиш мумкин:

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt} = \bar{v}, \quad (14)$$

бу ерда $v = \frac{ds}{dt}$ — тезликнинг абсолют қиймати, $\bar{v}$ — уринма бўйича ҳаракат томонга йўналган бирлик вектор.

Эгри чизиқли ҳаракатда нуқтанинг тезланиши. III бобнинг 25- § да таърифлангани каби эгри чизиқли ҳаракатда нуқтанинг тезланиши w деб, тезлик векторининг вақт бўйича ҳосиласига айтилади:

$$w = \frac{dv}{dt} \quad (15)$$

Лекин $v = \frac{dr}{dt}$, демак,

$$w = \frac{d^2r}{dt^2} \quad (16)$$

Агар (14) формулани эътиборга олсак, мана буни ҳосил қиламиз:

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{d(v\bar{v})}{dt}.$$

Сунгги ҳосилани 3- § даги (III) формула бўйича ёйсак, ушбу ифодани ҳосил қиламиз:

$$w = \frac{dv}{dt} \bar{v} + v \frac{d\bar{v}}{dt}. \quad (17)$$

$\frac{d\bar{v}}{dt}$ ҳосилани (7) ва (5) формулалардан фойдаланиб алмаштирамиз:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{n}{R} \bar{v}.$$

Буни (17) тенгликка қўйиб, ушбу охирги ифодани ҳосил қиламиз:

$$\omega = \frac{dv}{dt} \bar{\sigma} + v^2 \frac{n}{R}. \quad (18)$$

Бу ерда $\bar{\sigma}$ — уринма бўйича ҳаракат томонга йўналган бирлик вектор, n — бош нормал бўйича йўналган бирлик вектор. (18) формула сўз билан бундай ифодаланади.

Нуқта тезланишининг уринмадаги проекцияси тезликининг абсолют қийматидаан олинган биринчи ҳосилага тенг, тезланишининг бош нормалдаги проекцияси эса тезлик квадрaтининг траектория берилган нуқтасидаги эгрилик радиусига бўлинмасига тенг.

$\bar{\sigma}$ ва n векторлар ўзаро перпендикуляр бўлгани учун, тезланиш модули ушбу формула билан аниқланади:

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}. \quad (19)$$

5-§. Ўпишма текислик. Бинормал. Буралиш

1-таъриф. Берилган эгри чизиқнинг A нуқтасидаги уринма чизиқ ва бу чизиққа бош нормал бўйича ўтган текислик A нуқтада *ёпишма текислик* деб аталади.

Текис эгри чизиқ учун ёпишма текислик эгри чизиқ ётган текислик устига тушади. Агар эгри чизиқ фазовий бўлса, унинг устида иккита P ва P_1 нуқта олиб, иккита ўзаро икки ёқли μ бурчак ташкил этадиган ёпишма текислик ҳосил қиламиз. μ бурчак қанча катта бўлса, эгри чизиқнинг шакли текис эгри чизиқдан шунча кўпроқ фарқ қилади. Буни аниқлаш учун яна бир таъриф киритамиз.

2-таъриф. Эгри чизиққа нормал ва ёпишма текисликка перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ *бинормал* деб аталади.

Бинормал устида b бирлик вектор оламиз ва уни шундай йўналтирамызки, $\bar{\sigma}$, n , b векторлар координата ўқларида ётувчи, i , j , k бирлик векторлар билан бир хил йўналишда бўлган учлик ташкил қилсин (204, 205-расмлар).

Векторларнинг вектор ва скаляр кўпайтмаларининг таърифларига кўра:

$\frac{db}{ds}$ ҳосилани топамиз. 3-§ даги (IV) формула бўйича

$$b = \bar{\sigma} \times n; \quad bb = 1. \quad (1)$$

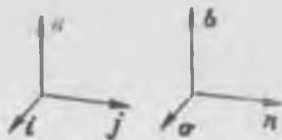
$$\frac{db}{ds} = \frac{d(\bar{\sigma} \times n)}{ds} = \frac{d\bar{\sigma}}{ds} \times n + \bar{\sigma} \times \frac{dn}{ds}. \quad (2)$$

Лекин $\frac{d\vec{s}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}$ (4- § га қаранг), шунинг учун

$$\frac{d\vec{s}}{ds} \times \vec{n} = \frac{1}{R} \vec{n} \times \vec{n} = 0$$

ва (2) формула ушбу кўринишга келади:

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \vec{\sigma} \times \frac{d\vec{n}}{ds}. \quad (3)$$



204- расм.



205- расм.

Бундан (вектор кўпайтманинг таърифига асосан) $\frac{d\vec{b}}{ds}$ вектор $\vec{\sigma}$ уринма векторга перпендикуляр эканлиги чиқади. Иккинчи томондан $\vec{b}$ бирлик вектор, шунинг учун $\frac{d\vec{b}}{ds}$ вектор $\vec{b}$ векторга перпендикулярдир (3- § даги натижага қаранг).

Демак, $\frac{d\vec{b}}{ds}$ вектор $\vec{\sigma}$ ва $\vec{b}$ векторларга перпендикуляр, яъни $\vec{n}$ векторга коллинеар бўлади.

$\frac{d\vec{b}}{ds}$ векторнинг узунлигини $\frac{1}{|T|}$ билан белгилаймиз, яъни

$$\left| \frac{d\vec{b}}{ds} \right| = \frac{1}{|T|}$$

деб фараз қиламиз; у вақтда

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{1}{T} \vec{n}. \quad (4)$$

$\frac{1}{T}$ миқдор берилган эгри чизиқнинг *буралиши* деб аталади.

Эгри чизиқнинг икки нуқтасига тегишли ёпишма текисликлар орасидаги икки ёқли μ бурчак бинормаллар орасидаги бурчакка тенг. 4- параграфдаги (4) формула сингари бундай ёзиш мумкин:

$$\left| \frac{d\vec{b}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mu}{|\Delta s|}.$$

Шундай қилиб, эгри чизиқнинг A нуқтадаги буралиши абсолют қиймат жиҳатидан A нуқтадан ва унга яқин турган B нуқтадан ўтказилган ёпишма текисликлар орасидаги μ бурчакнинг AB ёй узунлиги $|\Delta s|$ га нисбатининг $\Delta s \rightarrow 0$ да интилгандаги лимитига тенг.

Агар эгри чизиқ текис эгри чизиқ бўлса, ёпишма текислик ўз йўналишини ўзгартирмайди, ва демак, буралиш нолга тенг бўлади.

Буралишнинг таърифидан очиқ кўринадики, у фазовий эгри чизиқ текис эгри чизиқдан четланишининг ўлчови бўлади.

T миқдор эгри чизиқ буралишининг радиуси деб аталади.

Буралишни ҳисоблаш учун формула топамиз. (3) ва (4) формулалардан ушбу тенглик чиқади:

$$\frac{1}{T} n = \bar{\sigma} \times \frac{dn}{ds}.$$

Иккала томоннинг n векторга скаляр кўпайтмасини топамиз:

$$\frac{1}{T} nn = n \left(\bar{\sigma} \times \frac{dn}{ds} \right).$$

Сўнгги тенгликнинг ўнг томонида учта n , $\bar{\sigma}$ ва $\frac{dn}{ds}$ векторларнинг аралаш кўпайтмаси ҳосил бўлади. Маълумки, бундай кўпайтмада кўпайтувчиларнинг ўринларини айланма тартибда алмаштириш мумкин. Бундан ташқари $nn = 1$ эканини эътиборга олиб, сўнгги тенгликни ушбу кўринишда ёзамиз:

$$\frac{1}{T} = \bar{\sigma} \left(\frac{dn}{ds} \times n \right)$$

ёки

$$\frac{1}{T} = -\bar{\sigma} \left(n \times \frac{dn}{ds} \right). \quad (5)$$

Лекин $n = R \frac{d^2 r}{ds^2}$ бўлгани учун,

$$\frac{dn}{ds} = R \frac{d^3 r}{ds^3} + \frac{dR}{ds} \frac{d^2 r}{ds^2}$$

ва

$$\begin{aligned} \left(n \times \frac{dn}{ds} \right) &= R \frac{d^2 r}{ds^2} \times \left(R \frac{d^3 r}{ds^3} + \frac{dR}{ds} \frac{d^2 r}{ds^2} \right) = \\ &= R^2 \left(\frac{d^2 r}{ds^2} \times \frac{d^3 r}{ds^3} \right) + R \frac{dR}{ds} \left(\frac{d^2 r}{ds^2} \times \frac{d^2 r}{ds^2} \right), \end{aligned}$$

векторнинг ўз-ўзига вектор кўпайтмаси нолга тенг бўлгани учун

$$\frac{d^2 r}{ds^2} \times \frac{d^2 r}{ds^2} = 0.$$

Шундай қилиб,

$$n \times \frac{dn}{ds} = R^2 \left(\frac{d^2 r}{ds^2} \times \frac{d^2 r}{ds^2} \right).$$

$\bar{o} = \frac{dr}{ds}$ эканини эътиборга олиб ва (5) тенгликка қайтиб, шуни ҳосил қиламиз:

$$\frac{1}{r} = -R^2 \frac{dr}{ds} \left(\frac{d^2 r}{ds^2} \times \frac{d^2 r}{ds^2} \right). \quad (6)$$

Агар r вектор ихтиёрий t параметрнинг функцияси каби ифодаланган бўлса, бундан олдинги параграфда қилинганидек ушбу тенгликни исботлаш мумкин*):

*) Ҳақиқатан

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt}.$$

Бу тенгликни яна бир марта t бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dr}{ds} \right) \frac{ds}{dt} \frac{ds}{dt} + \frac{dr}{ds} \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d^2 r}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{dr}{ds} \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Яна t бўйича дифференциаллаймиз:

$$\begin{aligned} \frac{d^3 r}{dt^3} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{d^2 r}{ds^2} \right) \frac{ds}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{d^2 r}{ds^2} 2 \frac{ds}{dt} \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{d}{ds} \left(\frac{dr}{ds} \right) \frac{ds}{dt} \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{dr}{ds} \frac{d^3 s}{dt^3} = \\ &= \frac{d^3 r}{ds^3} \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 + 3 \frac{d^2 r}{ds^2} \frac{ds}{dt} \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{dr}{ds} \frac{d^3 s}{dt^3}. \end{aligned}$$

эли уч векторнинг аралаш кўпайтмасини тузамиз:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} \left(\frac{d^2 r}{dt^2} \times \frac{d^2 r}{dt^2} \right) &= \\ &= \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt} \left[\left(\frac{d^2 r}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{dr}{ds} \frac{d^2 s}{dt^2} \right) \times \left[\frac{d^3 r}{ds^3} \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 + 3 \frac{d^2 r}{ds^2} \frac{ds}{dt} \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{dr}{ds} \frac{d^3 s}{dt^3} \right] \right]. \end{aligned}$$

Бу кўпайтмани кўпхадларни кўпайтириш қондаси бўйича очиб ва иккита бир хил кўпайтувчи векторга эга бўлган ҳадларнинг ҳаммасини ташлаб (учта векторнинг аралаш кўпайтмасида икки кўпайтувчи бир хил бўлса, кўпайтма нолга тенг бўлади) қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{dr}{dt} \left(\frac{d^2 r}{dt^2} \times \frac{d^2 r}{dt^2} \right) = \frac{dr}{ds} \left(\frac{d^2 r}{ds^2} \times \frac{d^2 r}{ds^2} \right) \left(\frac{ds}{dt} \right)^6.$$

Нижоят,

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \text{ эли } \left(\frac{ds}{dt} \right)^6 = \left(\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right)^3$$

эканини эътиборга олиб, талаб қилинган тенгликни ҳосил қиламиз.

$$\frac{dr}{ds} \left(\frac{d^2r}{ds^2} \times \frac{d^3r}{ds^3} \right) = \frac{\frac{dr}{dt} \left(\frac{d^2r}{dt^2} \times \frac{d^3r}{dt^3} \right)}{\left\{ \left(\frac{dr}{dt} \right)^3 \right\}^{\frac{2}{3}}}.$$

Бу ифодани (6) формулага қўйиб ва R^2 ни унинг 4- § даги (11) формуласи бўйича алмаштириб, ушбу охирги формулани ҳосил қиламиз:

$$\frac{1}{T} = - \frac{\frac{dr}{dt} \left(\frac{d^2r}{dt^2} \times \frac{d^3r}{dt^3} \right)}{\left(\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2} \right)^{\frac{2}{3}}}. \quad (7)$$

Бу формула эгри чизиқ ихтиёрий t параметр иштирок этган параметрик тенгламалар билан берилганда унинг ҳар қандай нуқтасидаги буралишни ҳисоблашга имкон беради.

$\bar{\sigma}$, b , n векторларнинг ҳосилаларини ифодаловчи формулалар Серре-Френе формулалари деб аталади:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = \frac{n}{R}, \quad \frac{db}{ds} = \frac{n}{T}, \quad \frac{dn}{ds} = -\frac{\bar{\sigma}}{R} - \frac{b}{T}.$$

Булардан охиргиси бундай ҳосил қилинади:

$$\begin{aligned} n &= b \times \bar{\sigma}, \\ \frac{dn}{ds} &= \frac{d(b \times \bar{\sigma})}{ds} = \frac{db}{ds} \times \bar{\sigma} + b \times \frac{d\bar{\sigma}}{ds} = \frac{n}{T} \times \bar{\sigma} + b \times \frac{n}{R} = \\ &= \frac{1}{T} n \times \bar{\sigma} + \frac{1}{R} b \times n; \end{aligned}$$

лекин

$$n \times \bar{\sigma} = -b; \quad b \times n = -\bar{\sigma},$$

шунинг учун

$$\frac{dn}{ds} = -\frac{b}{T} - \frac{\bar{\sigma}}{R}.$$

Мисол. Винт чизиқнинг буралиши ҳисоблансин:

$$r = la \cos t + fa \sin t + kamf.$$

Еч иш.

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} \left(\frac{d^2r}{dt^2} \times \frac{d^3r}{dt^3} \right) &= \begin{vmatrix} -a \sin t & a \cos t & am \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \\ a \sin t & -a \cos t & 0 \end{vmatrix} = a^3 m, \\ \left(\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2} \right)^2 &= a^4 (1 + m^2) \quad (4- § \text{ даги мисолга қаранг}). \end{aligned}$$

Демак,

$$T = - \frac{a^4 (1 + m^2)}{a^3 m} = - \frac{a (1 + m^2)}{m}.$$

6-§. Сиртга уринма текислик ва нормал

Сирт ушбу

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

қуришишдаги тенглама билан берилган бўлсин.

Қуйидаги таърифларни киритамиз:

1-таъриф. Агар тўғри чизиқ сирт устида ётган бирор эгри чизиққа унинг $P(x, y, z)$ нуқтасида уринма бўлса, бу тўғри чизиқ сиртга P нуқтада *уринма* дейилади.

P нуқтадан сирт устида ётган чексиз кўп эгри чизиқлар ўтади, шунинг учун умуман айтганда бу нуқтадан сиртга чексиз кўп уринмалар ўтиши мумкин.

$F(x, y, z) = 0$ сиртнинг махсус ва оддий нуқталари ҳақида тушунча киритамиз.

Агар $M(x, y, z)$ нуқтада $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ хусусий ҳосилаларнинг учаласи нолга тенг бўлса, ёки улардан бирортаси мавжуд бўлмаса, M нуқта сиртнинг *махсус нуқтаси* деб аталади.

Агар $M(x, y, z)$ нуқтада $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ хусусий ҳосилаларнинг учаласи мавжуд ва узлуксиз бўлиб, улардан ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли бўлса, M нуқта сиртнинг *оддий нуқтаси* деб аталади. Энди қуйидаги теоремани айтишимиз мумкин.

Теорема. Берилган (1) сиртнинг P оддий нуқтасидаги ҳамма уринмалар бир текисликда ётади.

Исбот. Сиртда ётган ва шу сиртнинг берилган P нуқтасидан ўтган бирор L чизиқни қараймиз (206-расм). Бу эгри чизиқ ушбу параметрик тенгламалар билан берилган бўлсин:

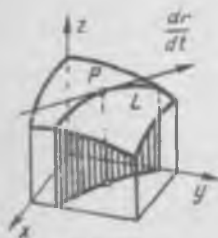
$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t). \quad (2)$$

Эгри чизиққа уринма сиртга ҳам уринма бўлади. Бу уринманинг тенгламаси мана бу шаклни олади:

$$\frac{x - \cancel{x}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y - y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{z - z}{\frac{dz}{dt}}.$$

Агар (2) ифодалар (1) тенгламага қўйилса, бу тенглама t га нисбатан айниятга айланади, чунки (2) эгри чизиқ (1) сиртда ётади. Уни t бўйича дифференциаллаб,

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0 \quad (3)$$



206-расм.

тенгликни ҳосил қиламиз*). Сунгра P нуқтадан ўтадиган N ва $\frac{dr}{dt}$ векторларни қараймиз:

$$N = \frac{\partial F}{\partial x} i + \frac{\partial F}{\partial y} j + \frac{\partial F}{\partial z} k. \quad (4)$$

Бу векторнинг $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ проекциялари P нуқтанинг x , y , z координаталарига боғлиқ; P оддий нуқта булгани учун бу проекциялар P нуқтада бир вақтда нолга айланмади ва шунинг учун

$$|N| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \neq 0.$$

Вектор

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j + \frac{dz}{dt} k \quad (5)$$

P нуқтадан ўтади ва шу сиртда ётган эгри чизиққа уринма бўлади. (2) тенгламага асосан бу векторнинг проекциялари t параметрининг P нуқтага мос қиймати бўйича ҳисобланади.

N ва $\frac{dr}{dt}$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини ҳисоблаймиз, у бир исмли проекциялар кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг:

$$N \frac{dr}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги ифода (3) тенгликка асосан нолга тенг, демак,

$$N \frac{dr}{dt} = 0.$$

Сўнгги тенгликдан N вектор ва (2) эгри чизиққа уринма $\frac{dr}{dt}$ вектор унинг P нуқтасида бир-бирга перпендикуляр экани келиб чиқади. Ўтказилган муҳокама P нуқтадан ўтувчи ва сирт устида ётувчи ҳар қандай (2) эгри чизиқ учун туғридир. Демак, сиртнинг P нуқтасида унга уринма булган туғри чизиқларнинг ҳар бири N векторга перпендикуляр ва бу уринмаларнинг ҳаммаси N векторга перпендикуляр булган бир текисликда ётади. Теорема исботланди.

*) Бу ерда биз уч узгарувчи мураккаб функциясини дифференциаллаш қонунини қўлланамиз. Қаралаётган ҳол учун бу қондани қўлланиш мумкин, чунки шартга кўра $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ хусусий ҳосилалар узлуксиздир.

2-таъриф. Эгри сиртнинг берилган P нуқтасидан утувчи сирт устида ётган эгри чизиқларга уринма жойлашган текислик сиртга P нуқтада *уринма текислик* деб аталади (207-расм).

Сиртнинг махсус нуқталарида уринма текислик мавжуд бўлмаслиги мумкин. Бундай нуқталарда сиртга уринма тўғри чизиқлар бир текисликда ётмаслиги мумкин. Масалан конус сиртнинг учи махсус нуқтадир. Бу нуқтада конус сиртга уринма тўғри чизиқлар бир текисликда ётмайди (уларнинг узлари конус сиртни ҳосил қилади).

Оддий нуқтада (1) сиртга уринма текислик тенгламасини ёзамиз. Бу текислик (4) векторга перпендикуляр бўлгани учун унинг тенгламаси ушбу кўринишда бўлади:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y-y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z-z) = 0. \quad (6)$$



207-расм.

Агар сиртнинг тенгламаси

$$z = f(x, y) \text{ ёки } z - f(x, y) = 0$$

шаклда берилган бўлса,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1$$

бўлади ва бу ҳолда уринма текислик тенгламаси ушбу кўринишда олади:

$$Z - z = \frac{\partial f}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y-y). \quad (6')$$

Изоҳ. Агар (6') формулада $X-x = \Delta x$, $Y-y = \Delta y$ деб фарз қилсак, бу формула ушбу кўринишга келади:

$$Z - z = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y;$$

бу тенгликнинг унғ томони $z = f(x, y)$ функциянинг тула дифференциалидан иборат. Демак, $Z - z = dz$. Шундай қилиб, икки узгарувчи функциясининг $M(x, y)$ нуқтадаги эркин узгарувчилар x ва y нинг Δx ва Δy орттирмаларига мос тула дифференциали берилган функциянинг графиги бўлган сиртга уринма текислик аппликатаи (z) нинг унга мос орттирмасига тенг.

3-таъриф. (1) сиртнинг $P(x, y, z)$ нуқтаси орқали уринма текисликка перпендикуляр қилиб ўтказилган тўғри чизиқ сиртга *нормал* деб аталади (207-расм).

Нормалнинг тенгламасини ёзамиз. Унинг йўналиши N векторнинг йўналиши билан бир хил бўлгани учун, унинг тенгламаси ушбу кўринишда бўлади:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \quad (7)$$

Агар сиртнинг тенгламаси $z = f(x, y)$ ёки

$$z - f(x, y) = 0$$

шаклда берилган бўлса, нормал тенгламаси ушбу кўринишда бўлади:

$$\frac{X-x}{-\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y-y}{-\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z-z}{1}.$$

Изоҳ. $F(x, y, z) = 0$ сирт уч узгарувчининг бирон функцияси $u = u(x, y, z)$ учун юсаклик сирти бўлсин, яъни

$$F(x, y, z) = u(x, y, z) - C = 0.$$

(4) формула билан аниқланган $F = u(x, y, z) - C = 0$ юсаклик сиртига нормал бўйича йўналган N вектор бундай ифодаланadi:

$$N = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k.$$

яъни

$$N = \text{grad } u.$$

Шу билан биз $u(x, y, z)$ функциянинг градиенти берилган нуқтадан ўтувчи юсаклик сиртига нормал бўйича йўналган бўлишини исбот қилдик.

Мисол. $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ шар сиртининг $P(1, 2, 3)$ нуқтасида уринма текислик тенгламаси ва нормал тенгламаси ёзилсин.

Ечиш.

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z;$$

$x = 1, y = 2, z = 3$ бўлганда:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 4, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 6.$$

Демак, уринма текислик тенгламаси:

$$2(x-1) + 4(y-2) + 6(z-3) = 0 \text{ ёки } x + 2y + 3z - 14 = 0.$$

Нормал тенгламаси:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{6}.$$

ёки

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}.$$

IX бобга машқлар

Векторларнинг ҳосилалари топилин:

1. $r = i \operatorname{ctg} t = j \operatorname{arctg} t$ Жав. $r' = -\frac{1}{\sin^2 t} i + \frac{1}{1+t^2} j$. 2. $r = te^{-t} + j2t + k \ln t$. Жав. $r' = -te^{-t} + 2j + \frac{k}{t}$. 3. $r = t^2 i - \frac{j}{t} + \frac{k}{t^2}$. Жав. $r' = 2ti + \frac{j}{t^2} - \frac{2k}{t^3}$. 4. $r = ti + t^2 j + t^3 k$ эгри чизикқа (3, 9, 27) нуқтада уринма вектор, уринма тенгламаси ва нормал текислик тенгламаси топилин. Жав. $r' = i + 2j + 3k$; уринма: $\frac{x-3}{1} = \frac{y-9}{6} = \frac{z-27}{27}$; нормал текислик: $x + 6y + 27z = 786$.

5. $r = i \cos^2 \frac{t}{2} + \frac{1}{2} j \sin t + k \sin \frac{t}{2}$ эгри чизикқа уринма вектор, уринма тенгламаси ва нормал текислик тенгламаси топилин. Жав. $r' = -\frac{1}{2} i \sin t + \frac{1}{2} j \cos t + \frac{1}{2} k \cos \frac{t}{2}$; уринма тенгламаси: $\frac{X - \cos^2 \frac{t}{2}}{-\sin t} = \frac{Y - \frac{1}{2} \sin t}{\cos t} = \frac{Z - \sin \frac{t}{2}}{\cos \frac{t}{2}}$; нормал текислик тенгламаси: $+X \sin t - Y \cos t - Z \cos \frac{t}{2} = x \sin t - y \cos t - z \cos \frac{t}{2}$, бу ерда x, y, z эгри чизикнинг нормал текислик ўтказилган нуқтасининг координаталари (яъни $x = \cos^2 \frac{t}{2}$, $y = \frac{1}{2} \sin t$, $z = \sin \frac{t}{2}$). 6. $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4 \sin \frac{t}{2}$ эгри чизикқа уринма тенгламаси ва уринманинг координата ўқлари билан ясалган бурчакларининг косинуслари топилин. Жав. $\frac{X - X_0}{\sin \frac{t}{2}} = \frac{Y - Y_0}{\cos \frac{t_0}{2}} = \frac{Z - Z_0}{\operatorname{ctg} \frac{t_0}{2}}$, $\cos \alpha = \sin^2 \frac{t_0}{2}$, $\cos \beta = \frac{1}{2} \sin t_0$, $\cos \gamma = \cos \frac{t_0}{2}$. 7. $z = x^2 - y^2$, $y = x$ эгри чизикқа координаталар бошида нормал текислик тенг-

ламаси топилсин. Курсатма. Эгри чизик тенгламаси параметрик шаклда ёзилсин. Жав. $x + y = 0$. 8. $r = l(\cos t + \sin^2 t) + j \sin t(1 - \cos t) - k \cos t$

эгри чизик учун $t = \frac{\pi}{2}$ нуқтада $\vec{a}$, n , b топилсин. Жав. $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-l + j + k)$,

$n = \frac{-5l - 4j - k}{\sqrt{42}}$, $b = \frac{l - 2j + 3k}{\sqrt{14}}$. 9. $x = \frac{t^4}{4}$, $y = \frac{t^3}{3}$, $z = \frac{t^2}{2}$ эгри чизикқа (x_0, y_0, z_0) нуқтада бош нормал ва бинормал тенгламалари топилсин.

Жав. $\frac{x - x_0}{t_0^3 + 2t_0} = \frac{y - y_0}{1 - t_0^4} = \frac{z - z_0}{-2t_0^3 - t_0}$, $\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{-2t_0} = \frac{z - z_0}{t_0^2}$.

10. $y^2 = x$, $x^2 = z$ эгри чизикқа $M(1, 1, 1)$ нуқтада ёпишма текислик тенгламаси топилсин. Жав. $6x - 8y - z + 3 = 0$.

11. $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$, $x + y - z = 0$ тенгламалар билан берилган эгри чизик учун эгрилик радиуси топилсин. Жав. $R = 2$.

12. $r = l \cos t + j \sin t + k \operatorname{sh} t$ эгри чизикнинг буралиш радиуси топилсин. Жав. $T = -\operatorname{ch} t$.

13. $r = t^2 l + 2t^2 j$ эгри чизикнинг эгрилик радиуси ва буралиш радиуси топилсин. Жав. $R = \frac{2}{3} t(1 + 9t^2)^{3/2}$, $T = \infty$.

14. $r = (a_1 t^3 + b_1 t + c_1)l + (a_2 t^3 + b_2 t + c_2)j + (a_3 t^3 + b_3 t + c_3)k$ эгри чизикнинг текис эгри чизик эканлиги исботлансин. Жав. $r''' \equiv 0$, шунинг учун буралиш нолга тенг.

15. $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t \sqrt{2}$ эгри чизикнинг эгрилиги ва буралиши топилсин. Жав. Эгрилик $\frac{\sqrt{2}}{(x+y)^2}$ га тенг; буралиш $\frac{\sqrt{2}}{(x-y)^2}$ га тенг.

16. $x = e^{-t} \sin t$, $y = e^{-t} \cos t$, $z = e^{-t}$ эгри чизикнинг эгрилиги ва буралиши топилсин. Жав. Эгрилик $\frac{\sqrt{2}}{3} e^t$ га тенг; буралиш $-\frac{1}{3} e^t$ га тенг.

17. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ гиперболоидга (x_1, y_1, z_1) нуқтада уринма текислик тенгламаси топилсин. Жав. $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} - \frac{z_1 z}{c^2} = 1$.

18. $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 6$ сиртга $(2, 2, 3)$ нуқтада нормал тенгламаси топилсин. Жав. $y + 4x = 10$; $3x - z = 3$.

19. $z = 2x^2 + 4y^2$ сиртга $M(2, 1, 12)$ нуқтада уринма текислик тенгламаси топилсин. Жав. $8x + 8y - z = 12$.

20. $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ сиртга $x - y + 2z = 0$ текисликка параллел бўлган уринма текислик ўтказилсин. Жав. $x - y + 2z = \pm \sqrt{\frac{11}{2}}$.

Х Б О Б

АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ

1- §. Бошланғич функция ва аниқмас интеграл

III бобда бундай масалани қараган эдик: $F(x)$ функция берилган; унинг ҳосиласини, яъни $f(x) = F'(x)$ функцияни топиш талаб қилинади.

Бу бобда тескари масалани қараймиз: $f(x)$ функция берилган; шундай $F(x)$ функцияни топиш керакки, унинг ҳосиласи $f(x)$ га тенг, яъни

$$F'(x) = f(x)$$

булсин.

1- таъриф. Агар $[a, b]$ кесманинг ҳамма нуқталарида $F'(x) = f(x)$ тенглик бажарилса, $F(x)$ функция шу кесмада $f(x)$ функцияга нисбатан *бошланғич* функция деб аталади.

Мисол. $f(x) = x^2$ функцияга нисбатан бошланғич функция топилсин.

Бошланғич функция таърифига кўра, $F(x) = \frac{x^3}{3}$ функция бошланғич экани чиқади, чунки $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$.

Агар $f(x)$ функция учун бошланғич функция мавжуд булса, бу бошланғич ягона бўлмаслигини кўриш осон. Чунончи, юқоридаги мисолда бошланғич учун ушбу функцияларни олиш мумкин эди: $F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$; $F(x) = \frac{x^3}{3} - 7$ ёки умуман $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ (бу ерда C — ихтиёрий ўзгармас сон), чунки

$$\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2.$$

Иккинчи томондан, $\frac{x^3}{3} + C$ кўринишдаги функция x^2 функциядан топиладиган ҳамма бошланғич функцияларни ўз ичига олишини исботлаш мумкин. Бу эса ушбу теоремадан келиб чиқади!

Теорема. Агар $F_1(x)$ ва $F_2(x)$ функциялар $f(x)$ функциядан $[a, b]$ кесмада бошланғич функциялар бўлса, улар орасидаги айирма ўзгармас сонга тенг бўлади.

Исбот. Бошланғич функциянинг таърифига кўра x нинг $[a, b]$ кесмадаги ҳар қандай қийматида

$$\left. \begin{aligned} F_1'(x) &= f(x), \\ F_2'(x) &= f(x) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

тенгликларга эга бўламиз.

$$F_1(x) - F_2(x) = \varphi(x) \quad (2)$$

деб белгилаймиз. Унда (1) тенгликларга асосан x нинг $[a, b]$ кесмадаги ҳар қандай қийматида

$$F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

ёки

$$\varphi'(x) = [F_1(x) - F_2(x)]' \equiv 0.$$

Лекин $\varphi'(x) = 0$ тенгликдан $\varphi(x)$ нинг ўзгармас сон экани келиб чиқади.

Ҳақиқатан, $[a, b]$ кесмада узлуксиз ва дифференциалланувчи экани равшан бўлган $\varphi(x)$ функцияга Лагранж теоремасини қўлланамиз (IV боб 2-§ га қаранг).

x нинг $[a, b]$ кесмадаги ҳар қандай қиймати учун Лагранж теоремасига кўра

$$\varphi(x) - \varphi(a) = (x - a) \varphi'(\xi)$$

га эга бўламиз (бу ерда $a < \xi < x$).

$$\varphi'(\xi) = 0 \text{ булгани учун,}$$

$$\varphi(x) - \varphi(a) = 0$$

ёки

$$\varphi(x) = \varphi(a). \quad (3)$$

Шундай қилиб, $[a, b]$ кесманинг ҳар қандай x нуқтасида $\varphi(x)$ функция $\varphi(a)$ қийматни сақлайди, бу эса $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ кесмада ўзгармас сон деган сўзди. $\varphi(a)$ ўзгармас сонни C билан белгилаб (2) ва (3) тенгликлардан ушбуни ҳосил қиламиз:

$$F_1(x) - F_2(x) = C.$$

Исбот қилинган теоремадан бундай натижа чиқади: агар берилган $f(x)$ функция учун қандай бўлмасин бироқ $F(x)$

бошланғич функция топилган бўлса, $f(x)$ функция учун ҳар қандай бошқа бошланғич функция $F(x) + C$ кўринишга эга бўлади (бу ерда $C = \text{const}$).

2-таъриф. Агар $F(x)$ функция $f(x)$ функция учун бошланғич бўлса, $F(x) + C$ ифода $f(x)$ функциядан *аниқмас интеграл* деб аталади ва ушбу $\int f(x) dx$ символ билан белгиланади. Шундай қилиб, таърифга кўра, агар

$$F'(x) = f(x)$$

бўлса,

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Бунда $f(x)$ функция—*интеграл остидаги функция*, $f(x) dx$ — интеграл *остидаги ифода*, $\int$ *ишора* — *интеграл ишораси* деб аталади.

Шундай қилиб, аниқмас интеграл $y = F(x) + C$ функциялар тўпламидан иборатдир.

Геометрия нуқтан назаридан қараганда аниқмас интеграл эгри чизиқлар тўпламидан (оиласидан) иборат бўлиб, уларнинг ҳар бири эгри чизиқлардан биттасини ўз-ўзига параллел ҳолда юқорига ёки пастга, яъни Oy ўқ бўйлаб снлжитиш йўли билан ҳосил қилинади.

Бундай савол пайдо бўлади: ҳар қандай $f(x)$ функция учун ҳам бошланғич функция (демак, аниқмас интеграл) мавжуд бўлаверадими? Текширишлар ҳар қандай функция учун бошланғич функция мавжуд бўлавермаслигини кўрсатади. Лекин ушбу теоремани исботсиз айтиб ўтамыз; *агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, бу функция учун бошланғич функция (демак, аниқмас интеграл) мавжуд бўлади.*

Бу боб элементар функцияларнинг баъзи классларидан бошланғич функцияни (ва аниқмас интегрални) қандай усуллар ёрдами билан топишни аниқлашга бағишланган.

Берилган $f(x)$ функция бўйича унинг бошланғич функциясини топиш $f(x)$ функцияни *интеграллаш* дейилади.

Шуни ҳам айтиб ўтиш керакки, агар элементар функциянинг ҳосиласи доим элементар функция бўлса, элементар функциянинг бошланғичи чекли сондаги элементар функциялар ёрдами билан тасвирланмаслиги ҳам мумкин. Бу масалага шу бобнинг охирида яна қайтамыз.

2-таърифдан қуйидагилар чиқади:

1. Аниқмас интегралнинг ҳосиласи *интеграл остидаги функцияга тенг*, яъни $F'(x) = f(x)$ бўлса, у ҳолда

$$\left(\int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = f(x). \quad (4)$$

Сунгги тенгликни ҳар қандай бошланғич функциянинг ҳосиласи интеграл остидаги функцияга тенг деган маънода тушуниш керак.

2. Аниқмас интегралнинг дифференциали интеграл остидаги ифодага тенг:

$$d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx. \quad (5)$$

Бу формула (4) формулага асосан ҳосил қилинади.

3. Бирон функция дифференциалининг аниқмас интегралли шу функция билан ихтиёрий ўзгармас соннинг йиғиндисига тенг:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Сунгги тенгликнинг тўғрилигини дифференциаллаш билан текшириш мумкин (тенгликнинг иккала томонидан олинган дифференциал $dF(x)$ га тенг).

2-§. Интеграллар жадвали

Интеграллаш методларини баён қилишга ўтишдан аввал энг содда функцияларнинг интеграллари жадвалини келтирамыз.

Х бобнинг 1-§ да берилган 2-таъриф ва (III бобнинг 15-§ да келтирилган) ҳосилалар жадвалидан интеграллар жадвали бевосита келиб чиқади. (Жадвалда келтирилган тенгликларнинг тўғрилигини дифференциаллаш йўли билан текшириш, яъни тенгликнинг ўнг томонидаги функциянинг ҳосиласи интеграл остидаги функцияга тенглигини аниқлаш осон.)

1. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$ ($a \neq -1$). (Бу ерда ва бундан кейинги формулаларда C ихтиёрий ўзгармас миқдор деб тушунилади.)

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$3. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$4. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$5. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$6. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$7. \int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln |\cos x| + C.$$

$$8. \int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln |\sin x| + C.$$

$$9. \int e^x \, dx = e^x + C.$$

$$10. \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$11. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C.$$

$$11'. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} + C.$$

$$12. \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x + C.$$

$$13'. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} + C.$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

Изоҳ. Ҳосилалар жадвалида (III боб 15-§) бу ердаги 7, 8, 11', 12, 13' ва 14-формуларга мос формулар йўқ. Лекин уларнинг туғрилигини дифференциаллаш йўли билан аниқлаш осон.

7- формулада:

$$(-\ln |\cos x|)' = -\frac{-\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x,$$

демак,

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln |\cos x| + C.$$

8- формулада:

$$(\ln |\sin x|)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x,$$

демак,

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln |\sin x| + C.$$

12- формулада:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| \right)' &= \frac{1}{2a} [\ln |a+x| - \ln |a-x|]' = \\ &= \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right] = \frac{1}{a^2-x^2}. \end{aligned}$$

Демак,

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$$

Бу формулани X боб 9- § нинг умумий натижаларидан чиқариш ҳам мумкин.

14- формулада:

$$\left(\ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}},$$

демак,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

Бу формулани 10- § нинг умумий натижаларидан ҳам чиқариш мумкин.

11' ва 13' формулалар ҳам шулар сингари текширилади. Бу формулалар кейинроқ 11- ва 13- формулалардан чиқарилади (4- § даги 3- ва 4- мисолларга қаранг).

3- §. Аниқмас интегралнинг баъзи хоссалари

1. теорема. *Икки ёки бир неча функциялар алгебраик йиғиндисининг аниқмас интеграл, шу функциялар аниқмас интегралларининг алгебраик йиғиндисига тенг:*

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx. \quad (1)$$

Исботлаш учун бу тенгликнинг чап ва ўнг томонларининг ҳосилаларини топамиз. 1- параграфдаги (4) формулага суяниб ушбунни топамиз:

$$\begin{aligned} \left(\int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx \right)' &= f_1(x) \pm f_2(x), \\ \left(\int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx \right)' &= \left(\int f_1(x) dx \right)' + \left(\int f_2(x) dx \right)' = \\ &= f_1(x) \pm f_2(x). \end{aligned}$$

Шундай қилиб, (1) тенгликнинг чап ва ўнг томонларининг ҳосилалари узаро тенг, яъни чап томонда турган ҳар қандай бошланғич функциянинг ҳосиласи ўнг томонда турган ҳар қандай функциянинг ҳосиласига тенг. Демак, X бобнинг 1- параграфидagi теоремага кўра (1) тенгликнинг чап томонидаги ҳар қандай функция ўнг томонидаги ҳар қандай функциядан ўзгармас қушилувчи билан фарқ қилади. (1) тенгликни шу маънода тушуниш керак.

2-теорема. Ўзгармас кўпайтувчини интеграл ишораси остидан чиқариш мумкин, яъни $a = \text{const}$ бўлса,

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx. \quad (2)$$

Бу тенгликни исботлаш учун унинг чап ва ўнг томонларининг ҳосилаларини топамиз:

$$\begin{aligned} (\int a f(x) dx)' &= a f(x), \\ (a \int f(x) dx)' &= a (\int f(x) dx)' = a f(x). \end{aligned}$$

Чап ва ўнг томонларининг ҳосилалари ўзаро тенг, демак, (1) тенгликдаги каби чап ва ўнг томонларда турган иккита ҳар қандай функциянинг айирмаси ўзгармас миқдор. (2) тенгликни шу маънода тушуниш керак.

Аниқмас интегралларни ҳисоблаганда қуйидаги қондаларни назарда тутиш фойдали.

I. Агар

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

бўлса,

$$\int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C. \quad (3)$$

Ҳақиқатан (3) тенгликнинг чап ва ўнг томонларини дифференциаллаб, шуларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} (\int f(ax) dx)' &= f(ax), \\ \left(\frac{1}{a} F(ax)\right)' &= \frac{1}{a} (F(ax))'_x = \frac{1}{a} F'(ax) a = F'(ax) = f(ax). \end{aligned}$$

Чап ва ўнг томонларнинг ҳосилалари ўзаро тенг. Шунинг исботлаш керак эди.

II. Агар

бўлса,

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= F(x) + C \\ \int f(x+b) dx &= F(x+b) + C. \end{aligned} \quad (4)$$

III. Агар

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

бўлса,

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C. \quad (5)$$

(4) ва (5) тенгликлар шу тенгликларнинг унг ва чап қисмларини дифференциаллаш билан исботланади.

1-мисол.

$$\begin{aligned}\int (2x^3 - 3 \sin x + 5\sqrt{x}) dx &= \int 2x^3 dx - \int 3 \sin x dx + \int 5\sqrt{x} dx = \\ &= 2 \int x^3 dx - 3 \int \sin x dx + 5 \int x^{\frac{1}{2}} dx = 2 \frac{x^{3+1}}{3+1} - 3(-\cos x) + \\ &\quad + 5 \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{2} x^4 + 3 \cos x + \frac{10}{3} x \sqrt{x} + C.\end{aligned}$$

2-мисол.

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + x^4 \sqrt{x} \right) dx &= 3 \int x^{-\frac{1}{3}} dx + \frac{1}{2} \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int x^{\frac{5}{4}} dx = \\ &= 3 \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + \frac{1}{2} \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1} + C = \frac{9}{2} \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + \\ &\quad + \frac{4}{9} x^{\frac{9}{4}} \sqrt{x} + C.\end{aligned}$$

3-мисол.

$$\int \frac{dx}{x+3} = \ln |x+3| + C.$$

4-мисол.

$$\int \cos 7x dx = \frac{1}{7} \sin 7x + C.$$

5-мисол.

$$\int \sin (2x-6) dx = -\frac{1}{2} \cos (2x-6) + C.$$

4-§. Ўзгарувчини алмаштириш усули билан ёки ўрнига қўйиш усули билан интеграллаш

Ушбу

$$\int f(x) dx$$

интегрални топиш талаб қилинсин; бунда $f(x)$ функция учун бошланғич функция мавжуд эканлиги бизга маълум бўлса ҳам, уни бевосита танлай олмадик деб фараз қилайлик.

$$x = \varphi(t) \quad (1)$$

деб олиб, интеграл остидаги ифодада ўзгарувчини алмаштирамиз; бу ерда $\varphi(t)$ узлуксиз функция бўлиб, узлуксиз ҳосилаларга ва тескари функцияга эга. У вақтда $dx = \varphi'(t) dt$; бу ҳолда ушбу тенглик тўғри бўлишини исботлаймиз:

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (2)$$

Бу ерда интеграллашдан сўнг тенгликнинг ўнг томонида t ўрнига унинг (1) тенгликка асосан x орқали ифодаси қўйилади деб тушунилади.

Бу тенгликнинг чап ва ўнг томонларида турган ифодаларнинг юқорнда айтилган маънода бир хил эканини аниқлаш учун уларнинг x бўйича ҳосилалари ўзаро тенг эканини исботлаш керак. Чап томонининг ҳосиласини топамиз.

$$\left(\int f(x) dx \right)'_x = f(x).$$

(2) тенгликнинг унг томонини x бўйича мураккаб функция каби дифференциаллаймиз, t оралиқ аргумент бўлади. t нинг x га боғлиқлиги (1) тенглик билан ифодаланади, бунда $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ ва тескари функцияни дифференциаллаш қондаси бўйича.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Шундай қилиб,

$$\begin{aligned} \left(\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \right)'_x &= \left(\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \right)'_t \frac{dt}{dx} = \\ &= f[\varphi(t)] \varphi'(t) \frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x). \end{aligned}$$

Демак, (2) тенгликнинг чап ва ўнг томонларининг x бўйича ҳосилалари ўзаро тенг; талаб қилинган исбот шу эди.

$x = \varphi(t)$ функцияни шундай танлаш керакки, (2) тенгликнинг ўнг томонида турган аниқмас интегрални ҳисоблаш мумкин бўлсин.

Изоҳ. Интеграллашда ўзгарувчини алмаштиришни баъзан $x = \varphi(t)$ кўринишда эмас, балки $t = \psi(x)$ кўринишда танлаш маъқулроқ бўлади. Бунини мисолда кўрсатамиз. Ушбу

$$\int \frac{\psi'(x) dx}{\psi(x)}$$

кўринишдаги интегрални ҳисоблаш керак бўлсин. Бу ерда

$$\psi(x) = t$$

деб қабул қилиш қулай, у вақтда

$$\psi'(x) dx = dt,$$

$$\int \frac{\psi'(x) dx}{\psi(x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\psi(x)| + C.$$

Ўзгарувчини алмаштириш ёрдами билан интеграллашга доир бир неча мисол келтирамыз.

1- мисол. $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx = ?$ Бунда $t = \sin x$ алмаштиришни қиламыз; У ҳолда $dt = \cos x dx$, демак, $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx = \int \sqrt{t} dt = \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sin^{\frac{3}{2}} x + C.$

2- мисол. $\int \frac{x dx}{1+x^2} = ?$ Бунда $t = 1+x^2$ деб қабул қиламиз; у вақтда $dt = 2x dx$ ва $\int \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln t + C = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$

3- мисол.

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

Бунда $t = \frac{x}{a}$ деб эътибор қиламиз; у ҳолда $dx = a dt$,

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a dt}{1+t^2} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

4- мисол. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$ Бунда $t = \frac{x}{a}$ деб қабул

қиламиз; у вақтда

$$dx = a dt \text{ ва } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{a dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{arc} \sin t + C = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0 \text{ деб фараз қилинади}).$$

(3- ва 4- мисолларда жадвалда келтирилган (2- § га қаранг) 11' ва 13' номерли интеграллар чиқарилди.

5- мисол. $\int (\ln x)^2 \frac{dx}{x} = ?$ $t = \ln x$ деб фараз қиламиз; унда $dt = \frac{dx}{x}$,

$$\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x} = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4} (\ln x)^4 + C.$$

6-мисоал. $\int \frac{x dx}{1+x^4} = ?$ $t = x^2$ деб фараз қиламиз; у вақтда $dt = 2x dx$,

$$\int \frac{x dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \arctg t + C = \frac{1}{2} \arctg x^2 + C.$$

Ўзгарувчиларни алмаштириш усули аниқмас интегралларни ҳисоблашнинг асосий усулларида биридир. Ҳатто бирор бошқа усул билан интеграллаганимизда ҳам, кўпинча орадаги ҳисоблашларда ўзгарувчиларни алмаштириш тўғри келади. Интеграллашдаги муваффақият ўзгарувчиларни берилган интегрални соддалаштирадиган функция билан алмаштиришни топа олишимизга анчагина боғлиқдир. Қисқа қилиб айтганда, интеграллаш усуллариини ўрганиш — интеграл остидаги ифода-нинг кўрнинишга қараб ўзгарувчини қандай алмаштириш кераклигини аниқлашдан иборатдир.

5-§. Квадрат учҳад қатнашган баъзи функцияларни интеграллаш

1. Ушбу интегрални қараймиз:

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^3 + bx + c}.$$

Аввал махраждаги квадрат учҳадни квадратлар йиғиндиси ёки айирмаси кўрнинишга келтирамиз:

$$\begin{aligned} ax^3 + bx + c &= a \left[x^3 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] = \\ &= a \left[x^3 + 2 \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right] = \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \pm k^2 \right], \end{aligned}$$

бу ерда

$$\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \pm k^2.$$

Плюс ёки минус ишорани тенгликнинг чап томонидаги ифода мусбат ёки манфий бўлишига, яъни $ax^3 + bx + c$ квадрат учҳаднинг илдизлари комплекс ёки ҳақиқий бўлишига қараб олилади.

Шундай қилиб, I_1 интеграл ушбу кўринишни олади:

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right]}.$$

Сўнгги интегралда ўзгарувчини бундай алмаштирамиз:

$$x + \frac{b}{2a} = t, \quad dx = dt.$$

у вақтда

$$I_1 = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 \pm k^2}$$

ҳосил бўлади.

Бу эса жадвалдаги интеграллардир (11' ва 12 формулаларга қаранг).

1-мисол. Ушбу интеграл ҳисоблансин:

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20}.$$

Ечиш.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 10} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\underbrace{x^2 + 4x + 4}_{(x+2)^2} + 10 - 4} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 6}. \end{aligned}$$

Ўзгарувчини алмаштирамиз: $x + 2 = t$, $dx = dt$. Буни интеграл остидаги ифодага қўйиб, жадвалдаги интегрални ҳосил қиламиз:

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 6} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{6}} + C.$$

t нинг ўрнига унинг x орқали ифодасини қўйиб, охириги жавобни топамиз:

$$I = \frac{1}{2\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{6}} + C.$$

II. Умумийроқ кўринишдаги интегрални қараймиз:

$$I_2 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx.$$

Интеграл остидаги функцияни бундай алмаштирамиз:

$$I_2 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2 + bx + c} dx.$$

Сўнгги интегрални икки интегралнинг йиғиндиси кўринишида тасвирлаймиз:

$$I_2 = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

Бундаги охирги интеграл I_1 интегралнинг ўзи, уни ҳисоблашни биламиз. Биринчи интегралда ўзгарувчини алмаштирамиз:

$$ax^2 + bx + c = t, \quad (2ax + b) dx = dt.$$

Демак,

$$\int \frac{(2ax + b) dx}{ax^2 + bx + c} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |ax^2 + bx + c| + C.$$

Шундай қилиб, жавобни топамиз:

$$I_2 = \frac{A}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) I_1.$$

2- мисол. Ушбу интеграл ҳисоблансин:

$$I = \int \frac{x+3}{x^3-2x-5} dx.$$

Юқоридаги усулни қўлланамиз:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+3}{x^3-2x-5} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2) + \left(3 + \frac{1}{2}2\right)}{x^3-2x-5} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(2x-2) dx}{x^3-2x-5} + 4 \int \frac{dx}{x^3-2x-5} = \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^3-2x-5| + 4 \int \frac{dx}{(x-1)^2-6} = \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^3-2x-5| + 2 \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{6}-(x-1)}{\sqrt{6}+(x-1)} \right| + C. \end{aligned}$$

III. Ушбу интегрални қараймиз:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^3+bx+c}}.$$

I пунктда кўрсатилган алмаштиришлар ёрдами билан бу интеграл a нинг ишорасига қараб, жадвалда булган ушбу кўринишдаги интегралга келтирилади:

$$a > 0 \text{ булганда } \int \frac{dt}{\sqrt{t^3 \pm k^2}} \text{ ёки } a < 0 \text{ булганда } \int \frac{dt}{\sqrt{t^3 - k^2}}.$$

булар интеграллар жадвалида қараб чиқилган (13' ва 14 формулаларга қаранг).

IV. Ушбу кўринишдаги интеграл

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

II пунктда қаралган алмаштиришлар ёрдами билан ҳисобланади:

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx &= \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \\ &= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}. \end{aligned}$$

Ҳосил бўлган интегралларнинг биринчисида ушбу алмаштиришни қўлланамиз:

$$ax^2 + bx + c = t, \quad (2ax + b)dx = dt,$$

бунда шунини ҳосил қиламиз:

$$\int \frac{(2ax + b) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{ax^2 + bx + c} + C.$$

Иккинчи интегрални шу параграфнинг III пунктда қараган эдик.

3-мисол.

$$\begin{aligned} \int \frac{5x + 3}{\sqrt{x^2 + 4x + 10}} dx &= \int \frac{\frac{5}{2}(2x + 4) + (3 - 10)}{\sqrt{x^2 + 4x + 10}} dx = \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{2x + 4}{\sqrt{x^2 + 4x + 10}} dx - 7 \int \frac{dx}{\sqrt{(x + 2)^2 + 6}} = \\ &= 5\sqrt{x^2 + 4x + 10} - 7 \ln |x + 2 + \sqrt{(x + 2)^2 + 6}| + C = \\ &= 5\sqrt{x^2 + 4x + 10} - 7 \ln |x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 10}| + C. \end{aligned}$$

6-§. Булаклаб интеграллаш

u ва v функциялар x бўйича дифференциалланувчи икки функция бўлсин. Унда, маълумки, uv купайтманинг дифференциали ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$d(uv) = u dv + v du.$$

Бундан, интеграллаб

$$uv = \int u dv + \int v du$$

ёки

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (I)$$

ни ҳосил қиламиз. Бу формула *булаклаб интеграллаш формуласи* дейилади. Бу формула купинча интеграл остидаги ифодани u билан dv нинг купайтмаси кўринишида тасвирлаганда dv дифференциалдан v функцияни топиш билан $\int v du$ интегрални ҳисоблаш $\int u dv$ интегрални бевосита ҳисоблашдан осонроқ бўлган ҳолларда қўлланилади. Интеграл остидаги ифодани u ва dv купайтувчиларга маъқул тарзда ажратишни билиш маҳорати масалалар ечиш процессида ҳосил бўлади, бунинг қандай қилинишини бир неча мисолда кўрсатамиз.

1- мисол. $\int x \sin x dx = ?$ Бундай фараз қиламиз:

$$u = x, \quad dv = \sin x dx;$$

у вақтда

$$du = dx, \quad v = -\cos x.$$

Демак,

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Изоҳ. dv дифференциал бўйича v ни белгилашда истаган ихтиёрини ўзгармасни олишимиз мумкин, чунки у охирига натижага кирмайди (буни (1) тенгликда v ўрнига $v + C$ ни қўйиб текшириб кўриш осон). Шунинг учун бу ўзгармасни нолга тенг деб ҳисоблаш қулайдир.

Булаклаб интеграллаш қондаси куп ҳолларда қўлланилади. Чунончи, ушбу кўринишдаги интеграллар:

$$\begin{aligned} &\int x^k \sin ax dx, \quad \int x^k \cos ax dx, \\ &\int x^k e^{ax} dx, \quad \int x^k \ln x dx, \end{aligned}$$

тескари тригонометрик функциялар иштирок қилган баъзи интеграллар булаклаб интеграллаш ёрдами билан ҳисобланади.

2- мисол. $\int \arctg x dx$ ни ҳисоблаш керак. Бундай белгилаймиз:

$$u = \arctg x, \quad dv = dx, \quad \text{у ҳолда} \quad du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = x. \quad \text{Демак,}$$

$$\int \arctg x dx = x \arctg x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C.$$

3-мисол. $\int x^2 e^x dx$ ни ҳисоблаш керак. Бундай белгилаймиз: $u = x^2$, $dv = e^x dx$; у вақтда $du = 2x dx$, $v = e^x$,

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx.$$

Охирги интегрални яна булаклаб интеграллаймиз. Бундай белгилаймиз:

$$u_1 = x, \quad du_1 = dx, \\ dv_1 = e^x dx, \quad v_1 = e^x.$$

У вақтда

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

Охирги натижа:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = e^x (x^2 - 2x + 2) + C.$$

4-мисол. $\int (x^2 + 7x - 5) \cos 2x dx$ ни ҳисоблаш керак. Бунда $u = x^2 + 7x - 5$, $dv = \cos 2x dx$ деб фараз қиламиз; у вақтда

$$du = (2x + 7) dx, \quad v = \frac{\sin 2x}{2},$$

$$\int (x^2 + 7x - 5) \cos 2x dx = (x^2 + 7x - 5) \frac{\sin 2x}{2} - \int (2x + 7) \frac{\sin 2x}{2} dx.$$

Охирги интегралда $u_1 = \frac{2x+7}{2}$, $dv_1 = \sin 2x dx$ белгилашни киритиб, булаклаб интеграллашни қўлланамиз, у вақтда

$$du_1 = dx, \quad v_1 = -\frac{\cos 2x}{2},$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+7}{2} \sin 2x dx &= \frac{2x+7}{2} \left(-\frac{\cos 2x}{2} \right) - \int \left(-\frac{\cos 2x}{2} \right) dx = \\ &= -\frac{(2x+7) \cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + C. \end{aligned}$$

Шунинг учун охирги натижа:

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 7x - 5) \cos 2x dx &= (x^2 + 7x - 5) \frac{\sin 2x}{2} + (2x + 7) \frac{\cos 2x}{4} - \\ &- \frac{\sin 2x}{4} + C = (2x^3 + 14x - 11) \frac{\sin x}{4} + (2x + 7) \frac{\cos 2x}{4} + C. \end{aligned}$$

5-мисол. $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = ?$

Аввал бундай алмаштирамиз. Интеграл остидаги функцияни $\sqrt{a^2 - x^2}$ га кўпайтирамиз ва бўламиз:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \\ &= a^2 \arcsin \frac{x}{a} - \int x \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.\end{aligned}$$

Охирги интегрални бўлаклаб, интеграллаймиз. Бундай белгилаймиз;

$$u = x$$

$$du = dx$$

$$dv = \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$v = -\sqrt{a^2 - x^2};$$

у вақтда

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \int x \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Сўнгги натижани берилган интеграл учун аввал топилган натижага қўйиб, ушбуни топамиз:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Интегрални чапдан ўнгга ўткизиб, содда алмаштиришдан сўнг, ушбу охирги натижага эга бўламиз:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

6- м и с о л. Ушбу интеграллар ҳисоблансин:

$$I_1 = \int e^{ax} \cos bx dx \text{ ва } I_2 = \int e^{ax} \sin bx dx.$$

Биринчи интегралга бўлаклаб интеграллаш методини қўлланиб, шуларни ҳосил қиламиз:

$$u = e^{ax},$$

$$du = ae^{ax} dx,$$

$$dv = \cos bx dx,$$

$$v = \frac{1}{b} \sin bx,$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx dx.$$

Сўнгги интегралга яна бўлаклаб интеграллаш методини қўлланамиз:

$$u = e^{ax},$$

$$du = ae^{ax} dx,$$

$$dv = \sin bx dx,$$

$$v = -\frac{1}{b} \cos bx,$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx dx.$$

Ҳосил қилинган ифодани олдинги тенгликка қўйиб, шунини ҳосил қиламиз:

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bx dx.$$

Бу тенгликдан I_1 ни топамиз:

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \int e^{ax} \cos bx \, dx = e^{ax} \left(\frac{1}{b} \sin bx + \frac{a}{b^2} \cos bx\right) + C \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right).$$

бу билан

$$I_1 = \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax} (b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

Шунга ўхшаш йўл билан I_2 ни топамиз:

$$I_2 = \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

7-§. Рационал касрлар. Энг содда рационал касрлар ва уларни интеграллаш

Қуйида ҳар қандай элементар функция элементар функциялар билан ифодаланадиган интегралга эга бўлавермаслигини кўрамиз. Шунинг учун интеграллари элементар функциялар орқали ифодаланадиган функциялар синфларини ажратиш катта аҳамиятга эга. Бу синфлардан энг соддаси — рационал функциялар синфидир.

Ҳар қандай рационал функцияни рационал каср кўринишида, яъни икки кўпхаднинг нисбати кўринишида тасвирлаш мумкин:

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = \frac{B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \dots + B_m}{A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n}.$$

Муҳокаманинг умумийлигини чекламасдан, бу кўпхадлар умумий илдизга эга эмас деб фараз қиламиз.

Агар суратнинг даражаси махражнинг даражасидан паст бўлса, каср *тўғри каср* деб аталади, акс ҳолда *нотўғри каср* деб аталади.

Агар каср нотўғри бўлса, суратни махражга (кўпхадни кўпхадга булиш қондаси бўйича) бўлиб, берилган касрни кўпхад билан бирор тўғри касрнинг йиғиндиси кўринишида тасвирлаш мумкин:

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = M(x) + \frac{F(x)}{f(x)};$$

бу ерда $M(x)$ — кўпхад, $\frac{F(x)}{f(x)}$ — тўғри каср.

1-мисол. Нотўғри рационал каср берилган бўлсин;

$$\frac{x^4 - 3}{x^3 + 2x + 1}.$$

Суратини махражга (кўпхадларни бўлиш қондаси бўйича) бўлиб, шунинг ҳосил қиламиз:

$$\frac{x^4 - 3}{x^3 + 2x + 1} = x^3 - 2x + 3 - \frac{4x - 6}{x^3 + 2x + 1}.$$

Кўпхадларни интеграллаш ҳеч қандай қийинчилик туғдирмагани учун, рационал касрларни интеграллашдаги асосий қийинчилик тўғри рационал касрларни интеграллашдан иборатдир:

Таъриф. Ушбу кўринишдаги тўғри рационал касрлар:

I. $\frac{A}{x-a},$

II. $\frac{A}{(x-a)^k} \quad (k - \text{бутун мусбат сон} \geq 2).$

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ (махражнинг илдизлари комплекс сонлар, яъни $\frac{p^2}{4} - q < 0$).

IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ ($k - \text{бутун мусбат сон} \geq 2$; махражнинг илдизлари комплекс сонлар), I, II, III ва IV типдаги *энг содда касрлар* деб аталади.

Сўнгра ҳар қандай рационал касрни энг содда касрларнинг йиғиндисига кўринишида тасвирлаш мумкинлиги исботланади (8-§ га қаранг). Шунинг учун биз аввал энг содда касрларнинг интегралларини қараб чиқамиз.

I, II ва III типдаги энг содда касрларни интеграллашда катта қийинчиликка учрамаймиз, шунинг учун уларнинг интегралларини ҳеч қандай изохсиз келтираемиз:

I. $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln |x-a| + C.$

II. $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} dx = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C =$
 $= \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$

III. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q} dx =$
 $= \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} =$
 $= \frac{A}{2} \ln |x^2+px+q| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} =$
 $= \frac{A}{2} \ln |x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$

(5-§ га қаранг).

IV типдаги энг содда қасрларни интеграллаш мураккаброқ ҳисоблашни талаб қилади. Шу типдаги интеграл берилган бўлсин:

$$\text{IV. } \int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} dx.$$

Қуйидагича алмаштирамиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} dx &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x + p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{(x^2 + px + q)^k} dx = \\ &= \frac{A}{2} \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^k} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k}. \end{aligned}$$

Биринчи интеграл $x^2 + px + q = t$, $(2x + p) dx = dt$ алмаштириш ёрдами билан олинад:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^k} dx &= \int \frac{dt}{t^k} = \int t^{-k} dt = \frac{t^{-k+1}}{-k+1} + C = \\ &= \frac{1}{(1-k)(x^2 + px + q)^{k-1}} + C. \end{aligned}$$

Иккинчи интегрални (уни I_k билан белгилаймиз) ушбу кўринишда ёзамиз:

$$I_k = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k} = \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\right]^k} = \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^k},$$

бу ерда

$$x + \frac{p}{2} = t, \quad dx = dt, \quad q - \frac{p^2}{4} = m^2$$

деб фараз қиламиз (махражнинг илдизлари фаразга кўра комплекс сонлар, демак, $q - \frac{p^2}{4} > 0$). Энди қуйидагича киришамиз:

$$\begin{aligned} I_k &= \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^k} = \frac{1}{m^2} \int \frac{(t^2 + m^2) - t^2}{(t^2 + m^2)^k} dt = \\ &= \frac{1}{m^2} \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}} - \frac{1}{m^2} \int \frac{t^2}{(t^2 + m^2)^k} dt. \end{aligned} \quad (1)$$

Сўнгги интегрални бундай алмаштирамиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + m^2)^k} &= \int \frac{t \cdot t dt}{(t^2 + m^2)^k} = \frac{1}{2} \int t \frac{d(t^2 + m^2)}{(t^2 + m^2)^k} = \\ &= -\frac{1}{2(k-1)} \int t d\left(\frac{1}{(t^2 + m^2)^{k-1}}\right). \end{aligned}$$

Булаклаб интеграллаб, шуни ҳосил қиламиз:

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2 + m^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)} \left[t \frac{1}{(t^2 + m^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}} \right].$$

Бу ифодани (1) тенгликка қўйсак, қуйидаги ҳосил булади:

$$\begin{aligned} I_k &= \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^k} = \\ &= \frac{1}{m^2} \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}} + \frac{1}{m^2} \frac{1}{2(k-1)} \left[\frac{t}{(t^2 + m^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}} \right] = \\ &= \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2 + m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)} \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}}. \end{aligned}$$

Ўнг томонда I_k типдаги интеграл бор, лекин интеграл остидаги функция махражининг даража кўрсаткичи унинг даража кўрсаткичидан битта бирлик паст ($k-1$); шундай қилиб, I_k ни I_{k-1} орқали ифодаладик.

Шу йўл билан давом этиб, маълум интеграл

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + m^2} = \frac{1}{m} \operatorname{arctg} \frac{t}{m} + C$$

га етиб борамиз. Сўнгра t ва m ўрнига уларнинг қийматларини қўйиб, IV интегралнинг x ва берилган A, B, p, q сонлар орқали ифодасини топамиз.

2- мисол.

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2) + (-1-1)}{(x^2+2x+3)^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2} dx - 2 \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(x^2+2x+3)} - \\ &\quad - 2 \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}. \end{aligned}$$

Охирги интегралга $x+1=t$ алмаштиришни қўллавамиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} &= \int \frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2} = \int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{(t^2+2)-t^2}{(t^2+2)^2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+2} - \frac{1}{2} \int \frac{t^2}{(t^2+2)^2} dt = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2+2)^2}. \end{aligned}$$

Охирги интегрални қараймиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2 dt}{(t^2+2)^2} &= \frac{1}{2} \int \frac{td(t^2+2)}{(t^2+2)^2} = -\frac{1}{2} \int td\left(\frac{1}{t^2+2}\right) = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+2} = -\frac{t}{2(t^2+2)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(ихтиёрий ўзгармасни ҳозирча ёзмаймиз; уни фақат охирги натижада ҳисобга оламиз).

Демак,

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 3)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \left[-\frac{x+1}{2(x^2 + 2x + 3)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right].$$

Охириги натижа бундай бўлади:

$$\int \frac{x-1}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx = -\frac{x+2}{2(x^2 + 2x + 3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

8-§. Рационал касрни энг содда касрларга ажратиш

Энди ҳар қандай тўғри рационал касрни энг содда касрлар йигиндисига ажратиш мумкинлигини кўрсатамиз.

Ушбу тўғри рационал каср

$$\frac{F(x)}{f(x)}$$

берилган бўлсин.

Бу касрга кирган кўпхадларнинг коэффициентлари ҳақиқий сонлар ва берилган каср қисқармайдиган каср деб фараз қиламиз (бу эса сурат ва махраж умумий илдиэга эга эмас деган сўздир).

1-теорема. $x = a$ махражнинг k каррали илдиэи, яъни $f(x) = (x-a)^k f_1(x)$ бўлсин, бу ерда $f_1(a) \neq 0$ (VII боб, 6-§ га қаранг); у ҳолда $\frac{F(x)}{f(x)}$ тўғри касрни бошқа икки тўғри каср йигиндиси шаклида қуйидагича тасвирлаш мумкин:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)}, \quad (1)$$

бу ерда A нолга тенг бўлмаган ўзгармас сон, $F_1(x)$ кўпхад, бунинг даражаси $(x-a)^{k-1} f_1(x)$ махражнинг даражасидан паст.

Исбот. Ушбу айниятни ёзамиз:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F(x) - A f_1(x)}{(x-a)^k f_1(x)} \quad (2)$$

(бу айният ҳар қандай A учун тўғри) ва ўзгармас A учун шундай қиймат топамизки, $F(x) - A f_1(x)$ кўпхад $x-a$ га бўлинсин. Бунинг учун Безу теоремасига кўра

$$F(a) - A f_1(a) = 0$$

тенглик бажарилиши зарур ва етарли. $f_1(a) \neq 0$, $F(a) \neq 0$ бўлгани учун A сони

$$A = \frac{F(a)}{f_1(a)}$$

тенгликдан бир қийматли равишда аниқланади. A нинг шундай қиймати учун

$$F(x) - A f_1(x) = (x - a) F_1(x)$$

тенгликка эга бўламиз, бу ерда $F_1(x)$ кўпхад, бунинг даражаси $(x - a)^{k-1} f_1(x)$ кўпхаднинг даражасидан паст. (2) формуладаги касрни $x - a$ га қисқартириб, (1) формулани ҳосил қиламиз.

Натижа. (1) тенгликдаги

$$\frac{F_1(x)}{(x - a)^{k-1} f_1(x)}$$

туғри касрга юқоридагидек муҳокамани қўллаш мумкин. Шундай қилиб, маҳраж k каррали $x = a$ ндизга эга бўлса, ушбу тенгликни ёзиш мумкин:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x - a)^k} + \frac{A_1}{(x - a)^{k-1}} + \dots + \frac{A_{k-1}}{x - a} + \frac{F_k(x)}{f_1(x)},$$

бу ерда $\frac{F_k(x)}{f_1(x)}$ қисқармайдиган туғри каср. Агар $f_1(x)$ бошқа ҳақиқий илдизларга эга бўлса, охириги касрга ҳам ҳозиргина исбот қилинган теоремани қўллаш мумкин.

Энди маҳраж комплекс илдизларга эга бўлган ҳолни қараймиз. Ҳақиқий коэффициентларга эга бўлган кўпхаднинг комплекс илдизлари иккитадан ўзаро қўшма бўлишини эслатиб ўтамиз (VII боб 8-§ га қаранг). Кўпхадни ҳақиқий кўпайтувчиларга ажратганда ҳар икки қўшма комплекс илдизга $x^2 + px + q$ кўринишдаги ифода мос келади. Агар комплекс илдизлар μ каррали бўлса, уларга $(x^2 + px + q)^\mu$ ифода мос келади.

2-теорема. Агар $f(x) = (x^2 + px + q)^\mu \varphi_1(x)$ бўлса (бу ерда $\varphi_1(x)$ кўпхад $x^2 + px + q$ га бўлинмайди), $\frac{F(x)}{f(x)}$ туғри рационал касрни бошқа икки туғри касрнинг йиғиндиси кўринишида қуйидагича тасвирлаш мумкин:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\mu} + \frac{\Phi_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\mu-1} \varphi_1(x)}, \quad (3)$$

бу ерда $\Phi_1(x)$ — кўпхад, бунинг даражаси махражидиги $(x^2 + px + q)^{\mu-1} \Phi_1(x)$ кўпхаднинг даражасидан паст. Исбот. Ушбу айнинг ёзамиз:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{(x^2 + px + q)^{\mu} \Phi_1(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^{\mu}} + \frac{F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\mu} \Phi_1(x)}, \quad (4)$$

бу айнинг ҳар қандай M ва N учун туғри; M ва N нинг шундай қийматини топамизки, унда $F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x)$ кўпхад $x^2 + px + q$ га бўлинсин. Бунинг учун

$$F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x) = 0$$

тенглама ҳам $x^2 + px + q$ нинг $\alpha \pm i\beta$ илдизларига тенг илдизларга эга бўлиши зарур ва етарлидир. Демак,

$$F(\alpha + i\beta) - [M(\alpha + i\beta) + N]\varphi_1(\alpha + i\beta) = 0$$

ёки

$$M(\alpha + i\beta) + N = \frac{F(\alpha + i\beta)}{\varphi_1(\alpha + i\beta)}.$$

Лекин $\frac{F(\alpha + i\beta)}{\varphi_1(\alpha + i\beta)}$ аниқ бир комплекс сон, буни $k + iL$ кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда K ва L ҳақиқий сонлар. Шундай қилиб,

$$M(\alpha + i\beta) + N = K + iL;$$

бундан

$$M\alpha + N = K, \quad M\beta = L$$

ёки

$$M = \frac{L}{\beta}, \quad N = \frac{K\beta - L\alpha}{\beta}.$$

M ва N нинг шу қийматларида $F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x)$ кўпхад $\alpha + i\beta$ илдизга, демак, $\alpha + i\beta$ қўшма илдизга ҳам эга бўлади. Бу ҳолда кўпхад $x - (\alpha + i\beta)$ ва $x - (\alpha - i\beta)$ айирмаларга, демак, уларнинг кўпайтмасига, яъни $x^2 + px + q$ га қолдиқсиз бўлинади. Бўлинмани $\Phi_1(x)$ билан белгилаб, бундай ёза оламиз;

$$F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x) = (x^2 + px + q)\Phi_1(x).$$

(4) тенгликдаги охириги касрни $x^2 + px + q$ га қисқартириб, (3) тенгликни ҳосил қиламиз, бунда $\Phi_1(x)$ нинг даражаси махражнинг даражасидан паст экани равшан. Шунинг исбот қилиш керак эди.

Энди $\frac{F(x)}{f(x)}$ тўғри касрга 1- ва 2- теоремаларининг натижаларини қўлланиб, $f(x)$ махражнинг ҳамма илдизларига мос энг содда касрларни кетма-кет ажратиш мумкин. Шундай қилиб, юқорида айтилганлардан ушбу натижа чиқади:
Агар

$$f(x) = (x-a)^{\alpha} (x-b)^{\beta} \dots (x^2+px+q)^{\mu} \dots (x^2+lx+s)^{\nu}$$

бўлса, $\frac{F(x)}{f(x)}$ каср қуйидаги кўринишда тасвирланиши мумкин:

$$\left. \begin{aligned} \frac{F(x)}{f(x)} &= \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \\ &\dots + \frac{B}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} + \\ &+ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\mu}} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\mu-1}} + \dots + \frac{M_{\mu-1}x+N_{\mu-1}}{x^2+px+q} + \\ &\dots + \frac{Px+Q}{(x^2+lx+s)^{\nu}} + \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+lx+s)^{\nu-1}} + \dots + \frac{P_{\nu-1}x+Q_{\nu-1}}{x^2+lx+s} \end{aligned} \right\} 5$$

$A, A_1, \dots, B, B_1, \dots$ коэффициентларни қуйидаги мулоҳазалардан аниқлаш мумкин. Ёзилган тенглик айниятдан иборат, шунинг учун касрларни умумий махражга келтириб, икки томондаги суратларда айнан бир хил кўпхадлар ҳосил қиламиз. Бир хил даражадаги x ларнинг коэффициентларини тенглаштириб, номаълум $A, A_1, \dots, B, B_1, \dots$ коэффициентларни аниқлаш учун тенгламалар системаси ҳосил қиламиз.

Шу билан бир қаторда коэффициентларни топишда ушбу изохдан фойдаланиш мумкин: касрларни умумий махражга келтиргандан сўнг тенгликнинг унғ ва чап қисмларида ҳосил бўлган кўпхадлар айнан тенг бўлиши керак, шунга кўра улар x нинг ҳар қандай хусусий қийматларида ҳам тенгдир. x га хусусий қийматлар бериб, коэффициентларни аниқлаш учун тенгламалар ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, ҳар қандай тўғри рационал касрни энг содда касрларнинг йиғиндиси кўринишида тасвирлаш мумкин эканини кўрдик.

Мисол. Ушбу $\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}$ каср энг содда касрларга ажратилсин.
(5) формулага асосан касрни ушбу кўринишда ёзамиз:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} = \frac{A}{(x+1)^3} + \frac{A_1}{(x+1)^2} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{B}{x-2}.$$

Умумий махражга келтириб ва суратларни тенглаштириб, ушбунинг ҳосил қиламиз:

$$x^2+2 = A(x-2) + A_1(x+1)(x-2) + A_2(x+1)^2(x-2) + B(x+1)^3, \quad (6)$$

ёки

$$x^2+2 = (A_2+B)x^3 + (A_1+3B)x^2 + (A-A_1-3A_2+3B)x + (-2A-2A_1-2A_2+B).$$

x^3, x^2, x^1, x^0 (озод ҳад) ёнидаги коэффициентларни тенглаштириб, номаълум коэффициентларни аниқлаш учун ушбу тенгламалар системасини топамиз:

$$\begin{aligned} 0 &= A_2+B, \\ 1 &= A_1+3B, \\ 0 &= A-A_1-3A_2+3B, \\ 2 &= -2A-2A_1-2A_2+B. \end{aligned}$$

Бу системани ечиб, мана буларни топамиз:

$$A = -1, \quad A_1 = \frac{1}{3}, \quad A_2 = -\frac{2}{9}, \quad B = \frac{2}{9}.$$

Коэффициентлардан баъзиларини x га нисбатан айниятдан иборат бўлган (6) тенгликда x га хусусий қийматлар беришдан ҳосил бўладиган тенгламалардан топиш ҳам мумкин.

Чунончи, $x = -1$ фараз қилиб, $3 = -3A$ ёки $A = -1$ ни ҳосил қиламиз;

$x = 2$ фараз қилиб, $6 = 27B$; $B = \frac{2}{9}$ ни ҳосил қиламиз. Агар бу икки тенгламага бир хил даражадаги x лар ёнидаги коэффициентларни тенглашдан ҳосил бўладиган яна иккита тенгламани бирлаштирсак, тўртта номаълум коэффициентни топиш учун тўртта тенглама ҳосил қиламиз. Натижада ушбу ажралмага эга бўламиз:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} = -\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{3(x+1)^2} - \frac{2}{9(x+1)} + \frac{2}{9(x-2)}.$$

9-§. Рационал касрларни интеграллаш

$\frac{Q(x)}{f(x)}$ рационал касрнинг интегралини, яъни

$$\int \frac{Q(x)}{f(x)} dx$$

интегрални ҳисоблаш талаб этилсин.

Агар берилган каср нотўғри каср бўлса, уни $M(x)$ кўпхад билан $\frac{F(x)}{f(x)}$ тўғри рационал каср йиғиндиси шаклида ифо-

далашимиз мумкин (7- параграфга қаранг). Тўғри касрни эса 8- параграфдаги (5) формулага асосан энг содда касрлар йиғиндисини курунишида ифодалаймиз. Шундай қилиб, ҳар қандай рационал касрни интеграллаш кўпхадни ва бир неча энг содда касрларни интеграллашга келтирилади.

8- параграфдаги натижалардан энг содда касрларнинг куруниши функция махражининг илдизлари билан аниқланиши келиб чиқади. Бунда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин.

I ҳол. *Махражнинг илдизлари ҳақиқий ва ҳар хил, яъни*

$$f(x) = (x-a)(x-b)\dots(x-d).$$

Бу ҳолда $\frac{F(x)}{f(x)}$ каср I типдаги энг содда касрларга ажралади:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \dots + \frac{D}{x-d}$$

ва бу тенгликнинг иккала томонини интегралласак:

$$\int \frac{F(x)}{f(x)} dx = \int \frac{A}{x-a} dx + \int \frac{B}{x-b} dx + \dots + \int \frac{D}{x-d} dx = A \ln|x-a| + B \ln|x-b| + \dots + D \ln|x-d| + C.$$

II ҳол. *Махражнинг илдизлари ҳақиқий ва улардан баъзилари каррали:*

$$f(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\dots(x-d)^{\delta}.$$

Бу ҳолда $\frac{F(x)}{f(x)}$ каср I ва II типдаги энг содда касрларга ажралади.

1- мисол. (X боб 8- § даги мисолга қаранг).

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-2)} dx &= - \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{2}{9} \int \frac{dx}{x+1} + \\ &+ \frac{2}{9} \int \frac{dx}{x-2} = \frac{1}{2} \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{3(x+1)} - \frac{2}{9} \ln|x+1| + \frac{2}{9} \ln|x-2| + C = \\ &= - \frac{2x-1}{6(x+1)^2} + \frac{2}{9} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

III ҳол. *Махражнинг илдизлари орасида такрорланмайдиган (яъни турлича) комплекс илдизлар бор:*

$$f(x) = (x^2+px+q)\dots(x^2+lx+s)(x-a)^{\alpha}\dots(x-d)^{\delta}.$$

Бу ҳолда $\frac{F(x)}{f(x)}$ каср I, II, III типдаги соддароқ касрларга ажралади.

2- мисол. Ушбу интеграл ҳисоблансин:

$$\int \frac{x \, dx}{(x^2 + 1)(x - 1)}.$$

Интеграл остидаги касрни соддароқ касрларга ажратамиз (X боб 8- §. (B) формулага қаранг):

$$\frac{x}{(x^2 + 1)(x - 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x - 1}.$$

Демак,

$$x = (Ax + B)(x - 1) + C(x^2 + 1).$$

$$x = 1 \text{ деб фараз қилсак: } 1 = 2C, C = \frac{1}{2};$$

$$x = 0 \text{ деб фараз қилсак: } 0 = -B + C, B = \frac{1}{2}.$$

x^2 олдидаги коэффициентларни тенглаб, $0 = A + C$ тенгликни ҳосил қиламиз, бундан $A = -\frac{1}{2}$. Шундай қилиб,

$$\begin{aligned} \int \frac{x \, dx}{(x^2 + 1)(x - 1)} &= -\frac{1}{2} \int \frac{x - 1}{x^2 + 1} \, dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x - 1} = \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{x \, dx}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x - 1} = \\ &= -\frac{1}{4} \ln |x^2 + 1| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln |x - 1| + C. \end{aligned}$$

IV ҳол. Махражнинг илдизлари орасида, каррали комплекс илдизлар бор:

$$f(x) = (x^2 + px + q)^n \dots (x^2 + lx + s)^r (x - a)^a \dots (x - d)^d.$$

Бу ҳолда $\frac{F(x)}{f(x)}$ касрни соддароқ касрларга ажратиш IV типдаги содда касрларни ҳам ўз ичига олади.

3- мисол. Ушбу

$$\int \frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2(x + 1)} \, dx$$

интегрални ҳисоблаш талаб этилади.

Еч иш. Касрни соддароқ касрларга ажратамиз:

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2(x + 1)} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 2x + 3)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 3} + \frac{E}{x + 1}.$$

бундан

$$\begin{aligned} x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8 &= \\ &= (Ax + B)(x + 1) + (Cx + D)(x^2 + 2x + 3)(x + 1) + E(x^2 + 2x + 3)^2 \end{aligned}$$

Юқорида кўрсатилган коэффициентларни аниқлаш усулларини комбинациялаб,

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = 0, \quad D = 0, \quad E = 1$$

эканини топамиз. Шундай қилиб,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^3 + 2x + 3)^2(x+1)} dx &= \int \frac{x-1}{(x^3 + 2x + 3)^2} dx + \int \frac{dx}{x+1} = \\ &= -\frac{x+2}{2(x^3 + 2x + 3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \ln|x+1| + C. \end{aligned}$$

Унг томондаги биринчи интеграл X боб 7- параграфдаги 2- мисолда қаралган эди. Иккинчи интеграл бевосита ҳисобланади.

Юқорида баён этилганларнинг ҳаммасидан, ҳар қандай рационал функциядан олинган интеграл охирида элементар функциялар орқали ифода этилиши мумкин эканлиги келиб чиқади, чунончи:

1) I типдаги содда касрлар бўлган ҳолда — логарифмлар билан;

2) II типдаги содда касрлар бўлган ҳолда — рационал функциялар билан;

3) III типдаги содда касрлар бўлган ҳолда — логарифмлар ва арктангенслар билан;

4) IV типдаги содда касрлар бўлган ҳолда — рационал функциялар ва арктангенслар билан чекли шаклда ифода этилади.

10- §. Иррационал функцияларнинг интеграллари

Ҳар қандай иррационал функциядан олинган интеграл элементар функциялар орқали ифодаланавермайди. Бу ва бундан кейинги параграфларда интеграллари ўзгарувчиларни алмаштириш ёрдами билан рационал функциялар интегралларига келтириладиган иррационал функцияларни қараймиз, демак, бундай функциялар охиригача интегралланади.

I. $\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx$ интегрални қараймиз, бунда R — ўз аргументларига нисбатан рационал функция*).

*) $R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}\right)$ ёзув $x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}$ миқдорлар устида фақат рационал амаллар бажарилишини кўрсатади.

Бундан буён $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \dots\right), R(x\sqrt{ax^2+bx+c}), R(\sin x, \cos x)$ ва ҳоказо кўринишдаги ёзувларни ҳам худди шундай тушуниш лозим. Масалан, $R(\sin x, \cos x)$ ёзув $\sin x$ ва $\cos x$ устида рационал амаллар бажарилишини кўрсатади.

$\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$ касрларнинг умумий махражи k бўлсин. Бундай

$$x = t^k, \quad dx = kt^{k-1} dt$$

алмаштиришни бажарамиз.

Бу ҳолда x нинг ҳар бир касрли даражаси t нинг бутун даражаси билан ифода этилади, демак, интеграл остидаги функция t нинг рационал функциясига айланади.

1-мисол. Ушбу интеграл ҳисоблансин:

$$\int \frac{x^{1/4} dx}{x^{3/4} + 1}$$

Ечиш. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ касрларнинг умумий махражи 4 бўлади; шунинг учун $x = t^4$, $dx = 4t^3 dt$ алмаштиришни бажарамиз; у ҳолда;

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{\frac{1}{4}} dx}{x^{\frac{3}{4}} + 1} &= 4 \int \frac{t^2}{t^3 + 1} t^3 dt = 4 \int \frac{t^5}{t^3 + 1} dt = 4 \int \left(t^2 - \frac{t^2}{t^3 + 1} \right) dt = \\ &= 4 \int t^2 dt - 4 \int \frac{t^2}{t^3 + 1} dt = 4 \frac{t^3}{3} - \frac{4}{3} \ln |t^3 + 1| + C = \\ &= \frac{4}{3} \left[x^{3/4} - \ln |x^{3/4} + 1| \right] + C. \end{aligned}$$

II. Энди $\int R \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{r}{s}} \right] dx$ кўрнишдаги интегрални қараймиз. Бу интеграл

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$$

алмаштириш ёрдами билан рационал функциянинг интегралига келтирилади; бунда k билан $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$ касрларнинг умумий махражи белгиланган.

2-мисол. Ушбу интеграл ҳисоблансин:

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx.$$

Ечнш. $x + 4 = t^2$, $x = t^2 - 4$, $dx = 2t dt$ алмаштиришни бажарамиз; бу ҳолда

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx &= 2 \int \frac{t}{t^2-4} dt = 2 \int \left(1 + \frac{4}{t^2-4}\right) dt = 2 \int dt + 8 \int \frac{dt}{t^2-4} = \\ &= 2t + 2 \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C = 2\sqrt{x+4} + 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2} \right| + C. \end{aligned}$$

11- §. $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ кўринишдаги интеграллар
Ушбу

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx \quad (1)$$

кўринишдаги интегрални қараймиз, бунда $a \neq 0$.

Бундай интеграл Эйлернинг қуйидаги алмаштиришлари ёрдами билан янги ўзгарувчи рационал функциясининг интегралга келтирилади.

1. Эйлернинг биринчи алмаштириши. Агар $a > 0$ бўлса, у ҳолда

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{a} x + t$$

деб оламиз. Аниқлик учун $\sqrt{a}$ олдида $+$ ишорани оламиз. Бу ҳолда

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + 2\sqrt{a} xt + t^2,$$

бундан x ни t нинг рационал функцияси каби аниқлаймиз:

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t}$$

(демак, dx ҳам t билан рационал ифода этилади), демак,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} x + t = \sqrt{a} \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t} + t.$$

яъни $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, ифода t нинг рационал функцияси бўлади. $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ x ва dx лар t билан рационал ифода этилгани сабабли берилган (1) интеграл t нинг рационал функциясидаки олинган интегралга айланади.

1- мисол. Ушбу интеграл ҳисоблансин:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + c}}$$

Ечнш. Бу ерда $a=1 > 0$ бўлгани учун $\sqrt{x^2 + c} = -x + t$ деб оламиз, бу ҳолда

$$x^2 + c = x^2 - 2xt + t^2,$$

бундан

$$x = \frac{t^2 - c}{2t}.$$

Демак,

$$dx = \frac{t^2 + c}{2t^2} dt, \sqrt{x^2 + c} = -x + t = -\frac{t^2 - c}{2t} + t = \frac{t^2 + c}{2t}.$$

Дастлабки интегралга қайтамыз:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + c}} = \int \frac{\frac{t^2 + c}{2t^2} dt}{\frac{t^2 + c}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C_1 = \ln|x + \sqrt{x^2 + c}| + C_1$$

(интеграллар жадвалидан 14- формулага қаранг):

2. Эйлернинг иккинчи алмаштириши. Агар $c > 0$ бўлса, бу ҳолда

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$$

деб оламиз; у ҳолда (аниқлик учун $\sqrt{c}$ олдида $+$ ишорани оламиз)

$$ax^2 + bx + c = x^2 t^2 + 2xt\sqrt{c} + c.$$

Бундан x ўзгарувчи t нинг рационал функцияси каби аниқланади:

$$x = \frac{2\sqrt{ct} - b}{a - t^2}.$$

dx ва $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ҳам t орқали рационал ифода этилгани сабабли x , $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ва dx нинг қийматларини

$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ интегралга қўйсак, бу интеграл ҳам t нинг рационал функциясидан олинган интегралга келади.

2-мисол. Ушбу интеграл ҳисоблансин.

$$\int \frac{(1 - \sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2 \sqrt{1+x+x^2}} dx.$$

Ечиш. $\sqrt{1+x+x^2} = xt + 1$ деб оламиз; бу ҳолда

$$1+x+x^2 = x^2 t^2 + 2xt + 1; \quad x = \frac{2t-1}{1-t^2}; \quad dx = \frac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2} dt;$$

$$\sqrt{1+x+x^2} = xt + 1 = \frac{t^2 - t + 1}{1-t^2}; \quad 1 - \sqrt{1+x+x^2} = \frac{-2t^2 + t}{1-t^2}.$$

Ҳосил қилинган ифодаларни дастлабки интегралга қўямиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{(1 - \sqrt{1+x+x^2})^2}{x^3 \sqrt{1+x+x^2}} dx &= \int \frac{(-2t^2 + t)^2 (1-t^2)^2 (1-t^2) (2t^2 - 2t + 2)}{(1-t^2)^3 (2t-1)^3 (t^2-t+1)(1-t^2)^3} dt = \\ &= 2 \int \frac{t^2}{1-t^2} dt = -2t + \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = -\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x} + \\ &+ \ln \left| \frac{x + \sqrt{1+x+x^2}-1}{x - \sqrt{1+x+x^2}+1} \right| + C = -\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x} + \ln |2x + \\ &+ 2\sqrt{1+x+x^2}+1| + C. \end{aligned}$$

3. Эйлернинг учинчи алмаштириши. $ax^3 + bx + c$ учҳад-нинг ҳақиқий илдизлари α ва β бўлсин, бу ҳолда $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t$ деб оламиз:

$$ax^3 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

бўлгани сабабли

$$\begin{aligned} \sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} &= (x - \alpha)t, \\ a(x - \alpha)(x - \beta) &= (x - \alpha)^2 t^2, \\ a(x - \beta) &= (x - \alpha)t^2. \end{aligned}$$

Бундан x ни t нинг функцияси каби аниқлаймиз:

$$x = \frac{a\beta - at^3}{a - t^2}.$$

dx ва $\sqrt{ax^3 + bx + c}$ ҳам t билан рационал боғлиқ бўлгани сабабли берилган интеграл t нинг рационал функциясида олинадиган интегралга алмашади.

1-изоҳ. Эйлернинг учинчи алмаштириши $a < 0$ бўлгандагина қўлланмасдан, балки $a > 0$ бўлганда ҳам татбиқ этилади, бунда фақат $ax^3 + bx + c$ кўпҳад иккита ҳақиқий илдизга эга бўлса бас.

3-мисол. Ушбу интеграл ҳисоблансин:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3 + 3x - 4}}.$$

Ечиш. $x^3 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$ бўлгани сабабли

$$\sqrt{(x + 4)(x - 1)} = (x + 4)t$$

деб оламиз; у ҳолда

$$(x + 4)(x - 1) = (x + 4)^2 t^2, \quad x - 1 = (x + 4)t^2,$$

$$x = \frac{1 + 4t^2}{1 - t^2}, \quad dx = \frac{10t}{(1 - t^2)^2} dt,$$

$$\sqrt{(x + 4)(x - 1)} = \left[\frac{1 + 4t^2}{1 - t^2} + 4 \right] t = \frac{5t}{1 - t^2}.$$

Дастлабки интегралга қайтамиз:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2 + 3x - 4} &= \int \frac{10t(1-t^2)}{(1-t^2)^2 5t} dt = \int \frac{2}{1-t^2} dt = \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = \\ &= \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}{1 - \sqrt{\frac{x-1}{x+4}}} \right| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1}} \right| + C.\end{aligned}$$

2- нз оҳ. (1) интегрални рационал функциянинг интегралига келтириш учун Эйлернинг биринчи ва учинчи алмаштиришидан фойдаланиш етарли эканини таъкидлаб ўтамыз. $ax^2 + bx + c$ учҳадни қараймиз. Агар $b^2 - 4ac > 0$ бўлса, учҳаднинг илднзлари ҳақиқий ва, демак, Эйлернинг учинчи алмаштиришини татбиқ қилса бўлади. Агар $b^2 - 4ac \leq 0$ бўлса, бу ҳолда

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a} [(2ax + b)^2 + 4ac - b^2]$$

ва, демак, x нинг барча қийматларида учҳаднинг ишораси a нинг ишораси билан бир хил бўлади. $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ҳақиқий бўлиши учун учҳад мусбат бўлиши, демак, $a > 0$ бўлиши керак. Бу ҳолда биринчи алмаштиришни татбиқ қилса бўлади.

12- §. Тригонометрик функцияларнинг баъзи синфларини интеграллаш

Ҳозиргача фақат алгебраик (рационал ва иррационал) функцияларнинг интегралларини системали равишда ўргандик. Бу параграфда баъзи бир ноалгебраик функциялар, биринчи навбатда тригонометрик функциялар интегралларини қараймиз. Ушбу

$$\int R(\sin x, \cos x) dx \quad (1)$$

интеграл берилган бўлсин. Бу интеграл

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \quad (2)$$

алмаштириш ёрдами билан ҳамма вақт рационал функциянинг интегралига келтирилиши мумкинлигини кўрсатамиз. $\sin x$ ва $\cos x$ функцияларни $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ билан, яъни t билан ифодалаймиз:

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Сўнгра

$$x = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} t, \quad dx = \frac{2 dt}{1 + t^2}.$$

Шундай қилиб, $\sin x$, $\cos x$ ва dx лар t билан рационал ифодаланadi. Аммо рационал функцияларнинг рационал функцияси ўз навбатида яна рационал функция бўлгани учун ҳосил қилинган ифодаларни (1) интегралга қўйиб, рационал функциянинг интегралини ҳосил қиламиз:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{1-t}{1+t}\right) \frac{2 dt}{1+t^2}.$$

1-мисол. Ушбу

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

интегрални қараймиз. Юқорида ёзилган формулаларга асосан:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2 dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2 dt}{1-t^2} = \ln |t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

Кўрилган алмаштириш $R(\cos x, \sin x)$ кўринишдаги ҳар қандай функцияни интеграллаш учун имкон беради. Шунинг учун уни баъзан „универсал тригонометрик алмаштириш“ деб атайдилар. Лекин практикада бу алмаштириш кўпинча анча мураккаб рационал функцияга олиб келади. Шунинг учун „универсал“ алмаштириш билан бир қаторда баъзи ҳоллар учун мақсадга тез олиб келадиган бошқа алмаштиришларни ҳам билниш фойдалидир.

1) Агар интеграл $\int R(\sin x) \cos x dx$ кўринишда бўлса, у ҳолда $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$ алмаштириш бу интегрални $\int R(t) dt$ кўринишга олиб келади.

2) Агар интеграл $\int R(\cos x) \sin x dx$ кўринишда бўлса, у ҳолда $\cos x = t$; $\sin x dx = -dt$ алмаштириш ёрдамида бу интеграл рационал функциянинг интегралига келтирилади.

3) Агар интеграл остидаги функция фақат $\operatorname{tg} x$ га боглиқ бўлса, у ҳолда $\operatorname{tg} x = t$, $x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ алмаштириш

Брамида бу интеграл рационал функциянинг интегралига келтирилади:

$$\int R(\lg x) dx = \int R(t) \frac{dt}{1+t^2}.$$

4) Агар интеграл остидаги функция $R(\sin x, \cos x)$ кўринишда бўлса, аммо $\sin x$ ва $\cos x$ фақат ж у ф т даражаларда кирса, у ҳолда

$$\lg x = t \quad (2')$$

алмаштириш татбиқ этилади, чунки $\sin^2 x$ ва $\cos^2 x$ лар $\lg x$ билан рационал ифодаланади:

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1}{1+\lg^2 x} = \frac{1}{1+t^2}, \\ \sin^2 x &= \frac{\lg^2 x}{1+\lg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}, \\ dx &= \frac{dt}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Бундай алмаштиришдан кейин биз рационал функциянинг интегралини ҳосил қиламиз.

2-мисол. Ушбу

$$\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx$$

интеграл ҳисоблансин. Бу интегрални $\int R(\cos x) \sin x dx$ кўринишга келтириш осон. Ҳақиқатан,

$$\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x dx}{2 + \cos x} = \int \frac{1 - \cos^2 x}{2 + \cos x} \sin x dx$$

$\cos x = z$ алмаштиришни бажарамиз. Бу ҳолда $\sin x dx = -dz$:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx &= \int \frac{1 - z^2}{2 + z} (-dz) = \int \frac{z^2 - 1}{z + 2} dz = \\ &= \int \left(z - 2 + \frac{3}{z + 2} \right) dz = \frac{z^2}{2} - 2z + 3 \ln(z + 2) + C = \\ &= \frac{\cos^2 x}{2} - 2 \cos x + 3 \ln(\cos x + 2) + C. \end{aligned}$$

3-мисол. $\int \frac{dx}{2 - \sin^2 x}$ интеграл ҳисоблансин.

Ечиш. $\lg x = t$ алмаштиришни бажарамиз. Бу ҳолда:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2 - \sin^2 x} &= \int \frac{dt}{\left(2 - \frac{t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \left(\frac{\lg x}{\sqrt{2}} \right) + C. \end{aligned}$$

5) Энди $\int R(\sin x, \cos x) dx$ кўринишдаги яна бир интегрални, чунончи интеграл остида $\sin^m x \cos^n x dx$ кўпайтма турган интегрални қараймиз (бунда m ва n бутун сонлар). Бунда уч ҳолни қараймиз:

а) $\int \sin^m x \cos^n x dx$ интегралда m ва n дан камида биттаси тоқ сон. Аниқлик учун n тоқ сон деб фараз қиламиз.
 $n = 2p + 1$ деб олиб, интегрални алмаштирамиз:

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \cos^{2p+1} x dx &= \int \sin^m x \cos^{2p} x \cos x dx = \\ &= \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^p \cos x dx. \end{aligned}$$

Ўзгарувчини алмаштирамиз:

$$\sin x = t, \quad \cos x dx = dt.$$

Янги ўзгарувчини берилган интегралга қўямиз:

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int t^m (1 - t^2)^p dt,$$

бу эса t нинг рационал функциясининг интегралидир.
 4-мисол.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x dx}{\sin^4 x} = \int \frac{(1 - \sin^2 x) \cos x dx}{\sin^4 x}.$$

Энди $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$ билан белгилаб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx &= \int \frac{(1 - t^2) dt}{t^4} = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + C = \\ &= -\frac{1}{3 \sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C. \end{aligned}$$

б) $\int \sin^m x \cos^n x dx$ интегралда m ва n — манфий бўлмаган жуфт сон. $m = 2p$, $n = 2q$ деб фараз қиламиз. Тригонометриядан маълум формулаларни ёзамиз:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x, \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x. \quad (3)$$

Буларни берилган интегралга қўямиз:

$$\int \sin^{2p} x \cos^{2q} x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right)^p \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right)^q dx.$$

Даражага кўтариб, қавсларни очиб, $\cos 2x$ нинг жуфт ва тоқ даражаларини ўз ичига олган ҳадларни ҳосил қиламиз. Тоқ даражали ҳадлар, а) ҳолда кўрсатилгандек, интегралланади. Даражаларнинг жуфт кўрсаткичларини (3) формулалар

бўйича яна пасайтирамиз. Даража кўрсаткичларини пасайтиришни осон интегралланадиган $\int \cos kx dx$ кўринишдаги ҳадлар ҳосил бўлгунча шундай давом эттирамиз.

5- мисол.

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \, dx &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x)^2 \, dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) \, dx = \\ &= \frac{1}{4} \left[x - \sin 2x + \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) \, dx \right] = \frac{1}{4} \left[\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8} \right] + C. \end{aligned}$$

в) Агар иккала даража кўрсаткичи ҳам жуфт бўлиб, улардан камида биттаси манфий бўлса, юқорида баён қилинган усул мақсадга олиб келмайди. Бунда $\operatorname{tg} x = t$ (ёки $\operatorname{ctg} x = t$) алмаштиришни бажариш лозим бўлади.

6- мисол.

$$\int \frac{\sin^2 x \, dx}{\cos^6 x} = \int \frac{\sin^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\cos^6 x} \, dx = \int \operatorname{tg}^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 \, dx.$$

$\operatorname{tg} x = t$ деб оламиз; у ҳолда: $x = \arctg t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, мана бунини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} \, dx &= \int t^2 (1+t^2)^2 \frac{dt}{1+t^2} = \int t^2 (1+t^2) \, dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C. \end{aligned}$$

6) Энди

$\int \cos mx \cos nx \, dx$, $\int \sin mx \cos nx \, dx$, $\int \sin mx \sin nx \, dx$ кўринишдаги интегралларни қараймиз. Булар қуйидаги формулалар ёрдамида ҳисобланади*) ($m \neq n$):

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos (m+n)x + \cos (m-n)x],$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\sin (m+n)x + \sin (m-n)x],$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [-\cos (m+n)x + \cos (m-n)x].$$

*) Бу формулаларни ушбу усул билан келтириб чиқариш осон:

$$\begin{aligned} \cos (m+n)x &= \cos mx \cos nx - \sin mx \sin nx, \\ \cos (m-n)x &= \cos mx \cos nx + \sin mx \sin nx. \end{aligned}$$

Бу тенгликларни ҳадлаб қўшиб ва иккига бўлиб, юқорида келтирилган учта формуладан биринчисини ҳосил қиламиз. Ҳадлаб айириб ва иккига бўлиб, учинчи формулани ҳосил қиламиз. Агар шунга ўхшаш формулалар $\sin (m+n)x$ ва $\sin (m-n)x$ функциялар учун ҳам ёзилса, сўнггра улар ҳадлаб қўшилса, иккинчи формула ҳам юқоридаги каби келиб чиқади.

Буларни интегралга қуйиб, интеграллаймиз:

$$\begin{aligned}\int \cos mx \cos nx dx &= \frac{1}{2} \int [\cos (m+n)x + \cos (m-n)x] dx = \\ &= \frac{\sin (m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin (m-n)x}{2(m-n)} + C.\end{aligned}$$

Қолган икки интеграл ҳам шунга ўхшаш ҳисобланади.

7- мисол.

$$\int \sin 5x \sin 3x dx = \frac{1}{2} \int [-\cos 8x + \cos 2x] dx = -\frac{\sin 8x}{16} + \frac{\sin 2x}{2} + C.$$

13- §. Баъзи бир иррационал функцияларни тригонометрик алмаштиришлар ёрдамида интеграллаш

Х боб 11- параграфда қаралган

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx \quad (1)$$

интегралга қайтамыз, бу ерда $a \neq 0$ ва $c - \frac{b^2}{4a} \neq 0$ ($a = 0$ бўлган ҳолда интеграл 10- § II кўринишга эга бўлади, $c - \frac{b^2}{4a} = 0$ бўлганда $ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2$ бўлади ва $a > 0$ бўлса, биз рационал функция билан иш курамыз, $a < 0$ бўлганда $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ функция x нинг ҳеч бир қийматида аннқланмаган). Бу интегрални олдинги параграфда қаралган

$$\int \bar{R}(\sin z, \cos z) dz \quad (2)$$

кўринишдаги интегралга алмаштириш методини курсатамыз.

Илдиэ остидаги учҳадни ўзгартириб ёзамиз:

$$ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + (c - \frac{b^2}{4a}).$$

$x + \frac{b}{2a} = t$, $dx = dt$ фараз қилиб, ўзгарувчинини алмаштирамыз

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{at^2 + (c - \frac{b^2}{4a})}.$$

Мумкин бўлган барча ҳолларни қараймыз:

1. $a > 0$, $c - \frac{b^2}{4a} > 0$ бўлсин, $a = m^2$, $c - \frac{b^2}{4a} = n^2$ белгилашларни киритамыз. Бу ҳолда: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{m^2 t^2 + n^2}$ бўлади.

2. $a > 0$, $c - \frac{b^2}{4a} < 0$ бўлсин. Бу ҳолда

$$a = m^2, \quad c - \frac{b^2}{4a} = -n^2.$$

Демак,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{m^2 t^2 - n^2}.$$

3. $a < 0$, $c - \frac{b^2}{4a} > 0$ бўлсин, у ҳолда $a = -m^2$, $c - \frac{b^2}{4a} = n^2$ белгилашларни киритамиз. Демак,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{n^2 - m^2 t^2}.$$

4. $a < 0$, $c - \frac{b^2}{4a} < 0$ бўлсин. Бу ҳолда $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ифода x нинг барча қийматларида комплекс сондир.

Шундай қилиб, (1) интеграл қуйидаги интеграллар типларининг бирига келтирилади:

$$\text{I. } \int R(t, \sqrt{m^2 t^2 + n^2}) dt. \quad (3.1)$$

$$\text{II. } \int R(t, \sqrt{m^2 t^2 - n^2}) dt. \quad (3.2)$$

$$\text{III. } \int R(t, \sqrt{n^2 - m^2 t^2}) dt. \quad (3.3)$$

$$(3.1) \text{ интеграл } t = \frac{n}{m} \operatorname{tg} z$$

алмаштириш ёрдами билан (2) кўринишдаги интегралга келтирилади. (3.2) интеграл $t = \frac{n}{m} \sec z$ алмаштириш ёрдами билан (2) кўринишга келтирилади. (3.3) интеграл $t = \frac{n}{m} \sin t$ алмаштириш ёрдами билан (2) кўринишга келтирилади.

Мисол. Ушбу интеграл ҳисоблансин:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}.$$

Ечиш. Бу интеграл III типдаги интегралдир. $x = a \sin z$ алмаштиришнинг бажарамиз, бу ҳолда

$$dx = a \cos z \, dz,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} = \int \frac{a \cos z \, dz}{\sqrt{(a^2 - a^2 \sin^2 z)^3}} = \int \frac{a \cos z \, dz}{a^3 \cos^3 z} =$$

*) $\sqrt{1 - \sin^2 z} = |\cos z|$; биз аниқлик учун фақат $|\cos z| = \cos z$ ҳол устида тўхталамиз.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{a^2} \int \frac{dz}{\cos^2 z} = \frac{1}{a^2} \operatorname{tg} z + C = \frac{1}{a^2} \frac{\sin z}{\cos z} + C = \frac{1}{a^2} \frac{\sin z}{\sqrt{1 - \sin^2 z}} + C = \\
 &= \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C.
 \end{aligned}$$

14- §. Интеграллари элементар функциялар билан ифодаланмайдиган функциялар ҳақида

Х бобнинг 1- параграфида биз (a, b) интервалда узлуксиз булган ҳар қандай $f(x)$ функция бу интервалда бошланғич функцияга эга бўлишини, яъни $F'(x) = f(x)$ тенгликни қаноатлантирувчи $F(x)$ функция мавжуд эканини (исботсиз) айтиб ўтган эдик. Аммо ҳар қандай бошланғич функция, ҳатто бу мавжуд бўлса ҳам, элементар функциялар билан чекли кўринишда ифодаланавермайди.

Қуйидаги

$$\int e^{-x^2} dx, \int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx, \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx, \int \frac{dx}{\ln x}$$

интеграллар билан ифодаланган ва бошқа кўпгина бошланғич функцияларни элементар функциялар орқали ифодалаб бўлмайди.

Бунга ўхшаш ҳолларнинг ҳаммасида бошланғич функция чекли сондаги элементар функцияларнинг комбинациясига келтирилмайдиган бирор янги функциядан иборат бўлиши равшан.

Масалан, $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2} dx + C$ бошланғич функциялардан $x=0$

шартда нолга айланадиганлари *Лаплас функцияси* дейилади ва $\Phi(x)$ билан белгиланади. Шундай қилиб, агар $\Phi(0) = 0$ бўлса,

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2} dx + C_1.$$

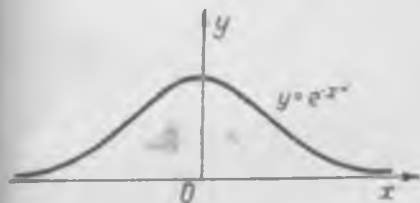
Бу функция яхши ўрганилган. x нинг турли қийматлари учун бу функция қийматларининг мукамал жадваллари тузилган. Бу жадвалларнинг қандай тузилишини биз XVI боб (II том) 21- параграфда кўрамиз. Интеграл остидаги $y = e^{-x^2}$ функция ва $y = \Phi(x)$ Лаплас функциясининг графиги 208 ва 209- расмларда тасвирланган. Бошланғич

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx + C \quad (k < 1)$$

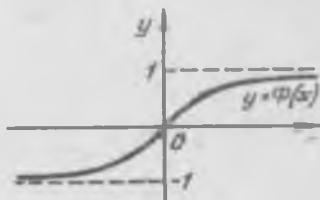
функциялардан $x=0$ бўлганда нолга айланадигани „эллиптик интеграл“ деб аталади ва $E(x)$ билан белгиланади, агар $E(0)=0$ бўлса,

$$E(x) = \int \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} dx + C_2.$$

x нинг турли қийматлари учун бу функция қийматларининг жадвали ҳам тузилган.



208- расм.



209- расм.

Х бобга машқлар

1. Қуйидаги интегралларни ҳисобланг: 1. $\int x^5 dx$. Жав. $\frac{x^6}{6} + C$. 2. $\int (x + \sqrt{x}) dx$. Жав. $\frac{x^2}{2} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$. 3. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4} \right) dx$. Жав. $6\sqrt{x} - \frac{1}{10} x^2 \sqrt{x} + C$. 4. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x}}$. Жав. $\frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C$. 5. $\int \left(\frac{1}{x^3} + \frac{4}{x\sqrt{x}} + 2 \right) dx$. Жав. $-\frac{1}{x} - \frac{8}{\sqrt{x}} + 2x + C$. 6. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$. Жав. $\frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + C$.
7. $\int \left(x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^3 dx$. Жав. $\frac{x^6}{5} + \frac{3}{4} x^3 \sqrt{x^3} + 3 \sqrt{x^3} + C$.

- Ўрнига қўйиш усули билан интеграллаш: 8. $\int e^{5x} dx$. Жав. $\frac{1}{5} e^{5x} + C$.
9. $\int \cos 5x dx$. Жав. $\frac{\sin 5x}{5} + C$. 10. $\int \sin ax dx$. Жав. $-\frac{\cos ax}{a} + C$. 11. $\int \frac{\ln x}{x} dx$. Жав. $\frac{1}{2} \ln^2 x + C$. 12. $\int \frac{dx}{\sin^3 3x}$. Жав. $-\frac{\operatorname{ctg} 3x}{3} + C$. 13. $\int \frac{dx}{\cos^3 7x}$. Жав. $\frac{\operatorname{tg} 7x}{7} + C$. 14. $\int \frac{dx}{3x-7}$. Жав. $\frac{1}{3} \ln |3x-7| + C$. 15. $\int \frac{dx}{1-x}$. Жав. $-\ln |1-x| + C$. 16. $\int \frac{dx}{5-2x}$. Жав. $-\frac{1}{2} \ln |5-2x| + C$. 17. $\int \operatorname{tg} 2x dx$. Жав. $-\frac{1}{2} \ln |\cos 2x| + C$. 18. $\int \operatorname{ctg} (5x-7) dx$. Жав. $\frac{1}{5} \ln |\sin (5x-7)| + C$.

19. $\int \frac{dy}{\operatorname{ctg} 3y} \cdot \mathcal{Жас.} - \frac{1}{3} \ln |\cos 3y| + C$. 20. $\int \operatorname{ctg} \frac{x}{3} dx \cdot \mathcal{Жас.} 3 \ln \left| \sin \frac{x}{3} \right| + C$. 21. $\int \operatorname{tg} \varphi \cdot \sec^2 \varphi d\varphi \cdot \mathcal{Жас.} \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi + C$. 22. $\int (\operatorname{ctg} e^x) e^x dx \cdot \mathcal{Жас.} \ln |\sin e^x| + C$. 23. $\int \left(\operatorname{tg} 4S - \operatorname{ctg} \frac{S}{4} \right) dS \cdot \mathcal{Жас.} - \frac{1}{4} \ln |\cos 4S| - 4 \ln \left| \sin \frac{S}{4} \right| + C$. 24. $\int \sin^2 x \cos x dx \cdot \mathcal{Жас.} \frac{\sin^3 x}{3} + C$. 25. $\int \cos^3 x \sin x dx \cdot \mathcal{Жас.} - \frac{\cos^4 x}{4} + C$. 26. $\int \sqrt{x^2 + 1} x dx \cdot \mathcal{Жас.} \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + 1)^3} + C$. 27. $\int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2 + 3}} \cdot \mathcal{Жас.} \frac{1}{2} \sqrt{2x^2 + 3} + C$. 28. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot \mathcal{Жас.} \frac{2}{3} \sqrt{x^2 + 1} + C$. 29. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} \cdot \mathcal{Жас.} - \frac{1}{\sin x} + C$. 30. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x} \cdot \mathcal{Жас.} \frac{1}{2 \cos^2 x} + C$. 31. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx \cdot \mathcal{Жас.} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C$. 32. $\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^3 x} dx \cdot \mathcal{Жас.} - \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} + C$. 33. $\int \frac{dx}{\cos^3 x \sqrt{\operatorname{tg} x - 1}} \cdot \mathcal{Жас.} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}} + C$. 34. $\int \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx \cdot \mathcal{Жас.} \frac{\ln^2(x+1)}{2} + C$. 35. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2 \sin x + 1}} \cdot \mathcal{Жас.} \sqrt{2 \sin x + 1} + C$. 36. $\int \frac{\sin 2x dx}{(1 + \cos 2x)^2} \cdot \mathcal{Жас.} \frac{1}{2(1 + \cos 2x)} + C$. 37. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} \cdot \mathcal{Жас.} 2 \sqrt{1 + \sin^2 x} + C$. 38. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x + 1}}{\cos^2 x} dx \cdot \mathcal{Жас.} \frac{2}{3} \sqrt{(\operatorname{tg} x + 1)^3} + C$. 39. $\int \frac{\cos 2x dx}{(2 + 3 \sin 2x)^2} \cdot \mathcal{Жас.} - \frac{1}{12(2 + 3 \sin 2x)} + C$. 40. $\int \frac{\sin 3x dx}{\sqrt{\cos^4 3x}} \cdot \mathcal{Жас.} \frac{1}{3 \sqrt{\cos 3x}} + C$. 41. $\int \frac{\ln^2 x dx}{x} \cdot \mathcal{Жас.} \frac{\ln^3 x}{3} + C$. 42. $\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \mathcal{Жас.} \frac{\arcsin^2 x}{2} + C$. 43. $\int \frac{\arcsin x dx}{1 + x^2} \cdot \mathcal{Жас.} \frac{\arcsin^2 x}{2} + C$. 44. $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1 - x^2}} dx \cdot \mathcal{Жас.} - \frac{\arcsin^3 x}{3} + C$. 45. $\int \frac{\arcsin x dx}{1 + x^2} \cdot \mathcal{Жас.} \frac{\arcsin^2 x}{2} + C$. 46. $\int \frac{x dx}{x^2 + 1} \cdot \mathcal{Жас.} \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$. 47. $\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 3} dx \cdot \mathcal{Жас.} \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 3) + C$. 48. $\int \frac{\cos x dx}{2 \sin x + 3} \cdot \mathcal{Жас.} \frac{1}{2} \ln(2 \sin x + 3) + C$. 49. $\int \frac{dx}{x \ln x} \cdot \mathcal{Жас.} \ln |\ln x| + C$. 50. $\int 2x(x^2 + 1)^4 dx \cdot \mathcal{Жас.} \frac{(x^2 + 1)^5}{5} + C$.

51. $\int \lg^4 x dx$. Жас. $\frac{\lg^2 x}{3} - \lg x + x + C$. 52. $\int \frac{dx}{(1+x^2) \arctg x}$. Жас. $\ln |\arctg x| + C$. 53. $\int \frac{dx}{\cos^2 x (3 \lg x + 1)}$. Жас. $\frac{1}{3} \ln |3 \lg x + 1| + C$. 54. $\int \frac{\lg^2 x}{\cos^2 x} dx$. Жас. $\frac{\lg^4 x}{4} + C$. 55. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x}$. Жас. $\ln |\arcsin x| + C$. 56. $\int \frac{\cos 2x}{2+3 \sin 2x} dx$. Жас. $\frac{1}{6} \ln |2+3 \sin 2x| + C$. 57. $\int \cos(\ln x) \frac{dx}{x}$. Жас. $\sin(\ln x) + C$. 58. $\int \cos(a+bx) dx$. Жас. $\frac{1}{b} \sin(a+bx) + C$. 59. $\int e^{2x} dx$. Жас. $\frac{1}{2} e^{2x} + C$. 60. $\int e^{\frac{x}{3}} dx$. Жас. $3e^{\frac{x}{3}} + C$. 61. $\int e^{\sin x} \cos x dx$. Жас. $e^{\sin x} + C$. 62. $\int a^{x^2} x dx$. Жас. $\frac{a^{x^2}}{2 \ln a} + C$. 63. $\int e^{\frac{x}{a}} dx$. Жас. $ae^{\frac{x}{a}} + C$. 64. $\int (e^{2x})^2 dx$. Жас. $\frac{1}{4} e^{4x} + C$. 65. $\int 3^x e^x dx$. Жас. $\frac{3^x e^x}{\ln 3 + 1} + C$. 66. $\int e^{-2x} dx$. Жас. $-\frac{1}{2} e^{-2x} + C$. 67. $\int (e^{5x} + a^{5x}) dx$. Жас. $\frac{1}{5} \left(e^{5x} + \frac{a^{5x}}{\ln a} + C \right)$. 68. $\int e^{x^2+4x+3} \times$
 $\times (x+2) dx$. Жас. $\frac{1}{2} e^{x^2+4x+3} + C$. 69. $\int \frac{(a^x-b^x)^2}{a^x b^x} dx$. Жас. $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x - \left(\frac{b}{a}\right)^x}{\ln a - \ln b} - 2x + C$. 70. $\int \frac{e^x dx}{3+4e^x}$. Жас. $\frac{1}{4} \ln(3+4e^x) + C$. 71. $\int \frac{e^{2x} dx}{2+e^{2x}}$. Жас. $\frac{1}{2} \ln(2+e^{2x}) + C$. 72. $\int \frac{dx}{1+2x^2}$. Жас. $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctg(\sqrt{2} x) + C$. 73. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$. Жас. $\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin(\sqrt{3} x) + C$. 74. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$. Жас. $\frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{4} + C$. 75. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$. Жас. $\arcsin \frac{x}{3} + C$. 76. $\int \frac{dx}{4+x^2}$. Жас. $\frac{1}{2} \arctg \frac{x}{2} + C$. 77. $\int \frac{dx}{9x^2+4}$. Жас. $\frac{1}{6} \arctg \frac{3x}{2} + C$. 78. $\int \frac{dx}{4-9x^2}$. Жас. $\frac{1}{12} \ln \left| \frac{2+3x}{2-3x} \right| + C$. 79. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$. Жас. $\ln |x+\sqrt{x^2+9}| + C$. 80. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2 x^2 - a^2}}$. Жас. $\frac{1}{b} \ln |bx + \sqrt{b^2 x^2 - a^2}| + C$. 81. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2 + a^2 x^2}}$. Жас. $\frac{1}{a} \ln |ax + \sqrt{b^2 + a^2 x^2}| + C$.

82. $\int \frac{dx}{a^2 x^2 - c^2}$. Жас. $\frac{1}{2ac} \ln \left| \frac{ax - c}{ax + c} \right| + C$. 83. $\int \frac{x^2 dx}{5 - x^4}$. Жас. $\frac{1}{6\sqrt{5}} \times$
 $\times \ln \left| \frac{x^3 + \sqrt{5}}{x^3 - \sqrt{5}} \right| + C$. 84. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^4}}$. Жас. $\frac{1}{2} \arcsin x^2 + C$. 85. $\int \frac{x dx}{x^4 + a^4}$.
Жас. $\frac{1}{2a^3} \arctg \frac{x^2}{a^2} + C$. 86. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$. Жас. $\arcsin e^x + C$. 87. $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 5x^2}}$.
Жас. $\frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin \sqrt{\frac{5}{3}} x + C$. 88. $\int \frac{\cos x dx}{a^2 + \sin^2 x}$. Жас. $\frac{1}{a} \arctg \left(\frac{\sin x}{a} \right) +$
 $+ C$. 89. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}$. Жас. $\arcsin(\ln x) + C$. 90. $\int \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$. Жас.
 $-\frac{1}{2} (\arccos x)^2 + \sqrt{1 - x^2} + C$. 91. $\int \frac{x - \arctg x}{1 + x^2} dx$. Жас. $\frac{1}{2} \ln(1 + x^2) -$
 $-\frac{1}{2} (\arctg x)^2 + C$. 92. $\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx$. Жас. $\frac{2}{3} \sqrt{(1 + \ln x)^3} + C$.
93. $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$. Жас. $\frac{4}{3} \sqrt{(1 + \sqrt{x})^3} + C$. 94. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt{1 + \sqrt{x}}}$.
Жас. $4\sqrt{1 + \sqrt{x}} + C$. 95. $\int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}$. Жас. $\arctg e^x + C$. 96. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin^3 x}}$.
Жас. $3\sqrt[3]{\sin x} + C$. 97. $\int \sqrt{1 + 3\cos^2 x} \sin 2x dx$. Жас. $-\frac{2}{9} \sqrt{(1 + 3\cos^2 x)^3} +$
 $+ C$. 98. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1 + \cos^3 x}}$. Жас. $-2\sqrt{1 + \cos^3 x} + C$. 99. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$.
Жас. $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + C$. 100. $\int \frac{\sqrt[3]{\lg^2 x}}{\cos^2 x} dx$. Жас. $\frac{3}{5} \sqrt[3]{\lg^5 x} + C$.
101. $\int \frac{dx}{2\sin^3 x + 3\cos^3 x}$. Жас. $\frac{1}{\sqrt[3]{6}} \arctg \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \lg x \right) + C$.
 $\int \frac{Ax + B}{ax^3 + bx + c} dx$ кўриништаги интеграллар: 102. $\int \frac{dx}{x^3 + 2x + 5}$
Жас. $\frac{1}{2} \arctg \frac{x+1}{2} + C$. 103. $\int \frac{dx}{3x^3 - 2x + 4}$. Жас. $\frac{1}{\sqrt{11}} \arctg \frac{3x-1}{\sqrt{11}} + C$.
104. $\int \frac{dx}{x^3 + 3x + 1}$. Жас. $\frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}} \right| + C$. 105. $\int \frac{dx}{x^3 - 6x + 5}$.
Жас. $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-5}{x-1} \right| + C$. 106. $\int \frac{dx}{2x^3 - 2x + 1}$. Жас. $\arctg(2x-1) + C$.

$$\begin{aligned}
 107. \int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 2} \quad \text{Жас. } \frac{1}{\sqrt{5}} \arctg \frac{3x-1}{\sqrt{5}} + C. \quad 108. \int \frac{(6x-7) dx}{3x^2 - 7x + 11}. \\
 \text{Жас. } \ln |3x^2 - 7x + 11| + C. \quad 109. \int \frac{(3x-2) dx}{5x^2 - 3x + 2} \quad \text{Жас. } \frac{3}{10} \ln(5x^2 - 3x + 2) - \\
 - \frac{11}{5\sqrt{31}} \arctg \frac{10x-3}{\sqrt{31}} + C. \quad 110. \int \frac{3x-1}{x^2 - x + 1} dx. \quad \text{Жас. } \frac{3}{2} \ln(x^2 - x + 1) + \\
 + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C. \quad 111. \int \frac{7x+1}{6x^2 + x - 1} dx. \quad \text{Жас. } \frac{2}{3} \ln(3x-1) + \\
 + \frac{1}{2} \ln(2x+1) + C. \quad 112. \int \frac{2x-1}{5x^2 - x + 2} dx. \quad \text{Жас. } \frac{1}{5} \ln(5x^2 - x + 2) - \\
 - \frac{8}{5\sqrt{39}} \arctg \frac{10x-1}{\sqrt{39}} + C. \quad 113. \int \frac{6x^4 - 5x^3 + 4x^2}{2x^2 - x + 1} dx. \quad \text{Жас. } x^3 - \frac{x^2}{2} + \\
 + \frac{1}{4} \ln |2x^2 - x + 1| + \frac{1}{2\sqrt{7}} \arctg \frac{4x-1}{\sqrt{7}} + C. \quad 114. \int \frac{dx}{2\cos^2 x + \sin x \cos x + \sin^2 x} \\
 \text{Жас. } \frac{2}{\sqrt{7}} \arctg \frac{2 \operatorname{tg} x + 1}{\sqrt{7}} + C.
 \end{aligned}$$

$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ кўринишдаги интеграллар:

$$\begin{aligned}
 115. \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}. \quad \text{Жас. } \frac{1}{2} \arcsin \frac{8x+3}{\sqrt{41}} + C. \quad 116. \int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}. \\
 \text{Жас. } \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1} \right| + C. \quad 117. \int \frac{dS}{\sqrt{2aS+S^2}}. \quad \text{Жас. } \ln |S + \\
 + a + \sqrt{2aS+S^2}| + C. \quad 118. \int \frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}} \quad \text{Жас. } \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{6x+7}{\sqrt{109}} + C. \\
 119. \int \frac{dx}{\sqrt{x(3x+5)}}. \quad \text{Жас. } \frac{1}{\sqrt{3}} \ln |6x+5+\sqrt{12x(3x+5)}| + C. \\
 120. \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-x^2}} \quad \text{Жас. } \arcsin \frac{2x+3}{\sqrt{17}} + C. \quad 121. \int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-x-1}}. \\
 \text{Жас. } \frac{1}{\sqrt{5}} \ln |10x-1+\sqrt{20(5x^2-x-1)}| + C. \quad 122. \int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx. \\
 \text{Жас. } 2\sqrt{ax^2+bx+c} + C. \quad 123. \int \frac{(x+3) dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}. \quad \text{Жас. } \frac{1}{4} \sqrt{4x^2+4x+3} + \\
 + \frac{5}{4} \ln |2x+1+\sqrt{4x^2+4x+3}| + C. \quad 124. \int \frac{(x-3) dx}{\sqrt{3+66x-11x^2}}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Жас.} - \frac{1}{11} \sqrt{3+66x-11x^3} + C. \quad 125.$$

$$- \frac{1}{4} \sqrt{3+4x-4x^3} + \frac{7}{4} \arcsin \frac{2x-1}{2} + C.$$

$$\text{Жас.} \frac{3}{2} \sqrt{2x^3-x} + \frac{23}{4\sqrt{2}} \ln(4x-1+\sqrt{8(2x^3-x)}) + C.$$

$$\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{3+4x-4x^3}} \quad \text{Жас.}$$

$$126. \int \frac{3x+5}{\sqrt{x(2x-1)}} dx.$$

II. Бўлаклаб интеграллаш: 127. $\int xe^x dx.$ Жас. $e^x(x-1) + C.$

128. $\int x \ln x dx.$ Жас. $\frac{1}{2} x^2 \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + C.$ 129. $\int x \sin x dx.$ Жас. $\sin x -$

$-x \cos x + C.$ 130. $\int \ln x dx.$ Жас. $x(\ln x - 1) + C.$ 131. $\int \arcsin x dx.$ Жас.

$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$ 132. $\int \ln(1-x) dx.$ Жас. $-x - (1-x) \ln(1-x) + C.$

133. $\int x^n \ln x dx.$ Жас. $\frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C.$ 134. $\int x \arctg x dx.$ Жас.

$\frac{1}{2} [(x^2+1) \arctg x - x] + C.$ 135. $\int x \arcsin x dx.$ Жас. $\frac{1}{4} [(2x^2-1) \arcsin x +$

$+ x \sqrt{1-x^2}] + C.$ 136. $\int \ln(x^2+1) dx.$ Жас. $x \ln(x^2+1) - 2x + 2 \arctg x + C.$

137. $\int \arctg \sqrt{x} dx.$ Жас. $(x+1) \arctg \sqrt{x} - \sqrt{x} + C.$ 138. $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$

Жас. $2\sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + C.$ 139. $\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx.$

Жас. $x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \arctg \sqrt{x} + C.$ 140. $\int x \cos x dx.$ Жас. $\frac{x^2}{4} +$

$+\frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x + C.$ 141. $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$ Жас. $x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x + C.$

142. $\int \frac{x \arctg x}{(x^2+1)^2} dx.$ Жас. $\frac{x}{4(1+x^2)} + \frac{1}{4} \arctg x - \frac{1}{2} \frac{\arctg x}{1+x^2} + C.$

143. $\int x \arctg \sqrt{x^2-1} dx.$ Жас. $\frac{1}{2} x^2 \arctg \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2} \sqrt{x^2-1} + C.$

144. $\int \frac{\arcsin x}{x^3} dx.$ Жас. $\ln \left| \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \right| - \frac{1}{x} \arcsin x + C$

145. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$ Жас. $x \ln |x + \sqrt{1+x^2}| - \sqrt{1+x^2} + C.$

$$146. \int \arcsin x \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}. \text{Жас. } \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| + C.$$

Қуйдағы масалаларға тригонометрик алмаштириш татбиқ этилсин:

$$147. \int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2} dx, \text{Жас. } -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2} \arcsin \frac{x}{a} + C. \quad 148. \int x^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

$$\text{Жас. } 2 \arcsin \frac{x}{2} - \frac{1}{2} x \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{4} x^3 \sqrt{4-x^2} + C. \quad 149. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{Жас. } -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C. \quad 150. \int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx, \text{Жас. } \sqrt{x^2-a^2} a \arccos \frac{a}{x} + C.$$

$$151. \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}. \text{Жас. } \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2+x^2}} + C.$$

Рационал касрларни интеграллаш:

$$152. \int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} dx.$$

$$\text{Жас. } \ln \left| \frac{(x-2)^3}{x-1} \right| + C. \quad 153. \int \frac{x dx}{(x+1)(x+3)(x+5)}. \text{Жас. } \frac{1}{8} \ln \frac{(x+3)^4}{|x+5|^3 |x+1|} + C.$$

$$154. \int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx. \text{Жас. } \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \left| \frac{x^3(x-2)^5}{(x+2)^3} \right| + C.$$

$$155. \int \frac{x^4 dx}{(x^2-1)(x+2)}. \text{Жас. } \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + \frac{16}{3} \ln |x+2| + C.$$

$$156. \int \frac{dx}{(x-1)^3(x-2)}. \text{Жас. } \frac{1}{x-1} + \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + C. \quad 157. \int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x} dx.$$

$$\text{Жас. } \frac{3}{x-2} + \ln \frac{(x-2)^2}{x^2} + C. \quad 158. \int \frac{3x+2}{x(x+1)^3} dx. \text{Жас. } \frac{4x+3}{2(x+1)^3} +$$

$$+ \ln \frac{x^2}{(x+1)^2} + C. \quad 159. \int \frac{x^2 dx}{(x+2)^3(x+4)^2}. \text{Жас. } -\frac{5x+12}{x^2+6x+8} +$$

$$+ \ln \frac{(x+4)^2}{(x+2)^2} + C. \quad 160. \int \frac{dx}{x(x^2+1)}. \text{Жас. } \ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + C.$$

$$161. \int \frac{2x^3-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} dx. \text{Жас. } \ln \frac{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}{|x-1|} + \frac{1}{2} \arctg \frac{x-1}{2} + C.$$

$$162. \int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8} dx, \text{Жас. } \ln \frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{3}{2} \arctg \frac{x}{2} - \frac{3}{\sqrt{2}} \arctg \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

$$163. \int \frac{dx}{x^3+1}. \text{Жас. } \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$164. \int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4} dx. \text{Жас. } \ln \frac{x^2+4}{(x+1)^2} + \frac{1}{2} \arctg \frac{x}{2} + C. \quad 165. \int \frac{4 dx}{x^4+1}.$$

$$\text{Жас. } \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{x^3 + x\sqrt{2} + 1}{x^3 - x\sqrt{2} + 1} + \sqrt{2} \arctg \frac{x\sqrt{2}}{1 - x^3} + C. \quad 166. \int \frac{x^5}{x^3 - 1} dx.$$

$$\text{Жас. } \frac{1}{3} [x^3 + \ln(x^3 - 1)] + C. \quad 167. \int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^4} dx. \quad \text{Жас. } \frac{2 - x}{4(x^3 + 2)} +$$

$$+ \ln(x^3 + 2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctg \frac{x}{\sqrt{2}} + C. \quad 168. \int \frac{(4x^3 - 8x) dx}{(x - 1)^2 (x^3 + 1)^2}.$$

$$\text{Жас. } \frac{3x^3 - 1}{(x - 1)(x^3 + 1)} + \ln \frac{(x - 1)^2}{x^3 + 1} + \arctg x + C. \quad 169. \int \frac{dx}{(x^2 - x)(x^3 - x + 1)^2}.$$

$$\text{Жас. } \ln \left| \frac{x - 1}{x} \right| - \frac{10}{3\sqrt{3}} \arctg \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} - \frac{2x - 1}{3(x^2 - x + 1)} + C.$$

Иррационал функцияларни интеграллаш;

$$170. \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$\text{Жас. } \frac{4}{3} [\sqrt[4]{x^3} - \ln(\sqrt[4]{x^3} + 1)] + C. \quad 171. \int \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}} dx. \quad \text{Жас. } \frac{2}{27} \sqrt[4]{x^3} -$$

$$- \frac{2}{13} \sqrt[12]{x^{13}} + C. \quad 172. \int \frac{\sqrt[5]{x} + 1}{\sqrt[4]{x^7} + \sqrt[4]{x^5}} dx. \quad \text{Жас. } - \frac{6}{\sqrt[4]{x}} + \frac{12}{\sqrt[4]{x}} +$$

$$+ 2 \ln x - 24 \ln(\sqrt[12]{x} + 1) + C. \quad 173. \int \frac{2 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt{x} + 1} dx.$$

$$\text{Жас. } \frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + 4 \sqrt{x} - 6 \sqrt[3]{x} + 6 \sqrt[6]{x} - 9 \ln(\sqrt[6]{x} + 1) +$$

$$+ \frac{3}{2} \ln(\sqrt[5]{x} + 1) + 3 \arctg \sqrt[5]{x} + C. \quad 174. \int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} \frac{dx}{x^2}.$$

$$\text{Жас. } \ln \left| \frac{\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}}{\sqrt{1 - x} - \sqrt{1 + x}} \right| - \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} + C. \quad 175. \int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} \frac{dx}{x}.$$

$$\text{Жас. } 2 \arctg \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} + \ln \left| \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}} \right| + C. \quad 176. \int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^{16}}} dx.$$

$$\text{Жас. } 14 \left[\sqrt[14]{x} - \frac{1}{2} \sqrt[7]{x} + \frac{1}{3} \sqrt[14]{x^3} - \frac{1}{4} \sqrt[7]{x^2} + \frac{1}{5} \sqrt[14]{x^5} \right] + C. \quad 177. \int \sqrt{\frac{2 + 3x}{x - 3}} dx.$$

$$\text{Жас. } \sqrt{3x^3 - 7x - 6} + \frac{11}{2\sqrt{3}} \ln \left(x - \frac{7}{6} + \sqrt{x^3 - \frac{7}{3}x - 2} \right) + C.$$

$\int R(x, \sqrt{ax^3 + bx + c}) dx$ кўринишдаги интеграллар: 178. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^3 - x + 3}}.$

$$\text{Жас. } \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{x^3 - x + 3} - \sqrt{3}}{x} + \frac{1}{2\sqrt[3]{3}} \right| + C. \quad 179. \int \frac{dx}{x\sqrt{2 + x - x^2}}.$$

$$\text{Жас. } -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2+x-x^2} + \sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right| + C. 180. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}.$$

$$\text{Жас. } \frac{1}{2} \arcsin \frac{x-2}{x\sqrt{2}} + C. 181. \int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x} dx. \text{ Жас. } \sqrt{x^2+2x} +$$

$$+ \ln |x+1+\sqrt{x^2+2x}| + C. 182. \int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}. \text{ Жас. } \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}} + C.$$

$$183. \int \sqrt{2x-x^2} dx. \text{ Жас. } \frac{1}{2} [(x-1)\sqrt{2x-x^2} + \arcsin(x-1)] + C.$$

$$184. \int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}. \text{ Жас. } \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2} \ln |x+\sqrt{x^2-1}| + C.$$

$$185. \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}. \text{ Жас. } \ln \left| \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{2+x+\sqrt{1+x+x^2}} \right| + C.$$

$$186. \int \frac{x+1}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}} dx. \text{ Жас. } -\frac{1}{\sqrt{2x+x^2}} + C. 187. \int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}} dx.$$

$$\text{Жас. } \ln \left| \frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x^4} \right| + C. 188. \int \frac{\sqrt{x^2+4x}}{x^2} dx.$$

$$\text{Жас. } -\frac{8}{x+\sqrt{x^2+4x}} + \ln |x+2+\sqrt{x^2+4x}| + C.$$

Тригонометрик функцияларни интеграллаш;

$$189. \int \sin^3 x dx.$$

$$\text{Жас. } \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C. 190. \int \sin^5 x dx. \text{ Жас. } -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

$$191. \int \cos^4 x \sin^3 x dx. \text{ Жас. } -\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x + C. 192. \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx. \text{ Жас. } \operatorname{cosec} x - \frac{1}{3} \operatorname{cosec}^3 x + C.$$

$$193. \int \cos^2 x dx. \text{ Жас. } \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C. 194. \int \sin^4 x dx. \text{ Жас. } \frac{3}{8} x - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.$$

$$195. \int \cos^6 x dx. \text{ Жас. } \frac{1}{16} \left(5x + 4 \sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{3} + \frac{3}{4} \sin 4x \right) + C.$$

$$196. \int \sin^4 x \cos^4 x dx. \text{ Жас. } \frac{1}{128} \left(3x - \sin 4x + \frac{\sin 8x}{8} \right) + C. 197. \int \lg^3 x dx.$$

$$\text{Жас. } \frac{\lg^3 x}{2} + \ln |\cos x| + C. 198. \int \operatorname{ctg}^5 x dx. \text{ Жас. } -\frac{1}{4} \operatorname{ctg}^4 x + \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x +$$

$$+ \ln |\sin x| + C. 199. \int \operatorname{ctg}^2 x dx. \text{ Жас. } \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \ln |\sin x| + C.$$

$$290. \int \sec^3 x \, dx. \text{Жас. } \frac{\lg^7 x}{7} + \frac{3 \lg^5 x}{5} + \lg^3 x + \lg x + C. 201. \int \lg^4 x \operatorname{cosec}^4 x \, dx.$$

$$\text{Жас. } \frac{\lg^7 x}{7} + \frac{\lg^5 x}{5} + C. 202. \int \frac{dx}{\cos^4 x} \text{Жас. } \lg x + \frac{1}{3} \lg^3 x + C. 203. \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} \, dx.$$

$$\text{Жас. } C - \operatorname{cosec} x. 204. \int \frac{\sin^3 x \, dx}{\sqrt{\cos^4 x}} \text{Жас. } \frac{3}{5} \cos^{\frac{5}{2}} x + 3(\cos^{-\frac{1}{2}} x) + C.$$

$$205. \int \sin x \sin 3x \, dx. \text{Жас. } -\frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + C. 206. \int \cos 4x \cos 7x \, dx.$$

$$\text{Жас. } \frac{\sin 11x}{22} + \frac{\sin 3x}{6} + C. 207. \int \cos 2x \sin 4x \, dx. \text{Жас. } -\frac{\cos 6x}{12} - \frac{\cos 2x}{4} + C.$$

$$208. \int \sin \frac{1}{4} x \cos \frac{3}{4} x \, dx. \text{Жас. } -\frac{\cos x}{2} + \cos \frac{1}{2} x + C. 209. \int \frac{dx}{4-5 \sin x}$$

$$\text{Жас. } \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\lg \frac{x}{2} - 2}{2 \lg \frac{x}{2} - 1} \right| + C. 210. \int \frac{dx}{5-3 \cos x}. \text{Жас. } \frac{1}{2} \arctg \left| 2 \lg \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$211. \int \frac{\sin x \, dx}{1+\sin x}. \text{Жас. } \frac{2}{1+\lg \frac{x}{2}} + x + C. 212. \int \frac{\cos x \, dx}{1+\cos x}. \text{Жас. } x - \lg \frac{x}{2} + C.$$

$$213. \int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} \, dx. \text{Жас. } \arctg (2 \sin^2 x - 1) + C. 214. \int \frac{dx}{(1+\cos x)^2}.$$

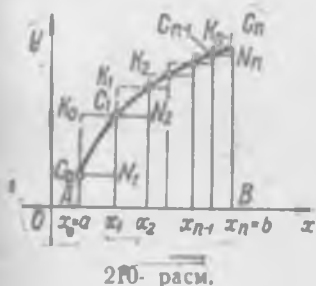
$$\text{Жас. } \frac{1}{2} \lg \frac{x}{2} + \frac{1}{6} \lg^3 \frac{x}{2} + C. 215. \int \frac{dx}{\sin^2 x + \lg^2 x}. \text{Жас. } -\frac{1}{2} \left[\operatorname{ctg} x + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \left(\frac{\lg x}{\sqrt{2}} \right) \right] + C. 216. \int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x} \, dx. \text{Жас. } \sqrt{2} \arctg \left(\frac{\lg x}{\sqrt{2}} \right) - \\ - x + C.$$

ХИ БОБ

АНИҚ ИНТЕГРАЛ

1- §. Масаланинг қўйилиши. Қуйи ва юқори интеграл йиғиндилар

Аниқ интеграл математик анализнинг асосий тушунчаларидан бири бўлиб, математика, физика, механика ва бошқа фанларда текширишнинг энг кучли қуроли ҳисобланади. Эгри чизиқлар билан чегараланган юзларни, эгри чизиқ ёйлари узунликларини, ҳажмларни, ишларни, тезликларни, йўлларни, инерция моментларини ва ҳоказоларни ҳисоблаш ишларининг ҳаммаси аниқ интегрални ҳисоблашга келтирилади.



$[a, b]$ кесмада $y = f(x)$ узулуксиз функция берилган бўлсин (210 ва 211- расмлар). Унинг бу кесмадаги энг кичик ва энг катта қийматларини m ва M билан белгилаймиз. $[a, b]$ кесмани

$$a = x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_{n-1}, \quad x_n = b$$

нуқталар билан n та қисмга ажратамиз, бунда

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

деб ҳисоблаймиз ва

$$x_1 - x_0 = \Delta x_1, \quad x_2 - x_1 = \Delta x_2, \quad \dots, \quad x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$$

деб фараз қиламиз. Сунгра $f(x)$ функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини

$[x_0, x_1]$ кесмада m_1 ва M_1 билан,

$[x_1, x_2]$ кесмада m_2 ва M_2 билан,

.....

$[x_{n-1}, x_n]$ кесмада m_n ва M_n билан

белгилаймиз. Энди

$$s_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad (1)$$

$$\bar{s}_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \quad (2)$$

йиғиндиларни тузамиз. s_n қуйи интеграл йиғинди деб, $\bar{s}_n$ эса юқори интеграл йиғинди деб аталади.

Агар $f(x) \geq 0$ бўлса, у ҳолда қуйи интеграл йиғиндининг сон қиймати „ички чизилган зинасимон“ шаклнинг

$AC_0N_1C_1N_2 \dots C_{n-1}N_nBA$ синиқ чизик билан чегараланган юзига тенг бўлиб, юқори интеграл йиғиндининг сон қиймати эса, „ташқи чизилган зинасимон“

$AK_0C_1K_1 \dots C_{n-1}K_{n-1}C_nBA$ шаклнинг синиқ чизик билан чегараланган юзига тенг.

Юқори ва қуйи интеграл йиғиндиларнинг баъзи хоссаларини кўрсатиб ўтамиз.

а) Ҳар қандай $i (i=1, 2, \dots, n)$ учун $m_i \leq M_i$ бўлгани сабабли, (1) ва (2) формулага мувофиқ

$$s_n \leq \bar{s}_n. \quad (3)$$

($f(x) = \text{const}$ бўлган ҳолдагина тенглик белгиси бўлади).

б) $m_1 \geq m, m_2 \geq m, \dots, m_n \geq m$ бўлгани учун (бунда m $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ кесмадаги энг кичик қиймати),

$$s_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n \geq m \Delta x_1 + m \Delta x_2 + \dots + m \Delta x_n = m (\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) = m (b - a).$$

Шундай қилиб,

$$s_n \geq m (b - a). \quad (4)$$

в) $M_1 \leq M, M_2 \leq M, \dots, M_n \leq M$



212- расм.

бўлгани сабабли (M бунда $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ кесмадаги энг катта қиймати),

$$\bar{s}_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n \leq M \Delta x_1 + M \Delta x_2 + \dots + M \Delta x_n = M (\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) = M(b-a).$$

Шундай қилиб,

$$\bar{s}_n \leq M(b-a). \quad (5)$$

Ҳосил қилинган тенгсизликларни биргаликда ёзамиз:

$$m(b-a) \leq \underline{s}_n \leq \bar{s}_n \leq M(b-a). \quad (6)$$

Агар $f(x) \geq 0$ бўлса, бу тенгсизликлар содда геометрик маънога эга (212- расм), чунки $m(b-a)$ ва $M(b-a)$ кўпайтмаларнинг сон қийматлари мос тартибда „ички чизилган“ AL_1L_2B тўғри тўртбурчак юзига ва „ташқи чизилган“ $A\bar{L}_1\bar{L}_2B$ тўғри тўртбурчак юзига тенг.

2- §. Аниқ интеграл. Аниқ интегралнинг мавжудлиги ҳақида теорема

Ўтган параграфдаги масалани текширишни давом эттирамиз. Энди

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

кесмаларнинг ҳар бирида биттадан нуқта оламиз. Бу нуқталарни $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ билан белгилаймиз (213- расм),

$$x_0 < \xi_1 < x_1, x_1 < \xi_2 < x_2, \dots, x_{n-1} < \xi_n < x_n.$$

Бу нуқталарнинг ҳар бирида функциянинг $f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_n)$ қийматларини ҳисоблаймиз.

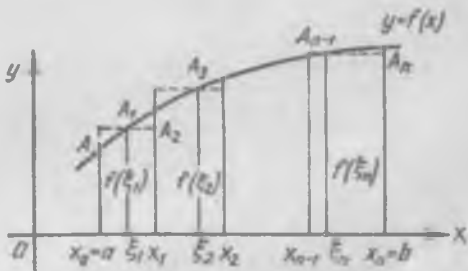
$$s_n = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (1)$$

Янгиндини тузамиз. Бу янгинди $[a, b]$ кесмада $f(x)$ у функциянинг интеграл янгиндиси деб аталади. $[x_{i-1}, x_i]$ кесмага тегишли бўлган ҳар қандай ξ_i учун

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$$

ва барча $\Delta x_i > 0$ бўлганда

$$m_i \Delta x_i \leq f(\xi_i) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i,$$



213- расм.

демак,

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i,$$

ёки

$$\underline{s}_n \leq s_n \leq \bar{s}_n. \quad (2)$$

$f(x) \geq 0$ бўлганда (2) тенгсизликлар геометрик томондан юзи s_n га тенг бўлган шакл „ички чизилган“ ва „ташқи чизилган“ синиқ чизиқ орасида ётувчи синиқ чизиқ билан чегараланган деган маънони билдирадн.

s_n йиғиндининг қиймати $[a, b]$ кесмани $[x_{i-1}, x_i]$ кесмачаларга ажратиш усулига ҳамда ҳосил қилинган кесмачалар ичида ξ_i нуқталарни танлаб олишга боғлиқ.

Энди тах $[x_{i-1}, x_i]$ билан $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ кесмачалар ичидан энг узунини белгилаймиз. $[a, b]$ кесмани $[x_{i-1}, x_i]$ кесмачаларга ажратишдаги турли усуллардан тах $[x_{i-1}, x_i]$ нолга интиладиган ҳолини қараймиз. Бу ҳолда ажратиладиган кесмачаларнинг сони n чексизликка интилиши равшан. Ҳар бир ажратиш учун ξ_i нинг мос қийматини танлаб олиб,

$$s_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (3)$$

интеграл йиғиндини тузиш мумкин.

$n \rightarrow \infty$ да бўлакчаларга ажратишнинг тах $\Delta x_i \rightarrow 0$ бўладиган бирор кетма-кетлигини қараймиз. Ҳар бир бўлакчада ξ_i қийматни танлаб оламиз. s_n^* интеграл йиғиндиларнинг бу кетма-кетлиги*) бирор лимитга интилади деб фараз қиламиз, яъни

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} s_n^* = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = s. \quad (4)$$

Энди ушбу таърифни беришимиз мумкин:

1 - таъриф. Агар $[a, b]$ кесма тах $\Delta x_i \rightarrow 0$ шартни қаноатлантирадиган ҳар қандай бўлакчаларга ажратилганда ва $[x_{i-1}, x_i]$ кесмада ξ_i нуқтани истаганча танлаб олганда

$$s_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (5)$$

*) Бу ҳолда йиғинди тартибланган ўзгарувчи миқдордан иборат.

интеграл йиғинди биргина s лимитга интилса, у ҳолда бу лимит $[a, b]$ кесмада $f(x)$ функциянинг *аниқ интеграли* деб аталади ва

$$\int_a^b f(x) dx$$

билан белгиланади.

Шундай қилиб таърифга кўра

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx. \quad (6)$$

a сон интегралнинг қуйи чегараси, b сон интегралнинг юқори чегараси дейилади. $[a, b]$ кесма интеграллаш кесмаси, x эса интеграллаш узгарувчиси дейилади.

2- таъриф. Агар $f(x)$ функция учун (6) лимит мавжуд бўлса, у ҳолда функция $[a, b]$ кесмада *интегралланувчи функция* дейилади.

Қуйи интеграл йиғинди s_n ва юқори интеграл йиғинди $\bar{s}_n$ (5) интеграл йиғиндининг хўсусий ҳолларидан иборат эканлигини кўрамиз, шунинг учун агар $f(x)$ интегралланувчи функция бўлса, у ҳолда қуйи ва юқори интеграл йиғиндилар бир хил s лимитга интилади ва шунинг учун (6) тенгликка асосан қуйидагиларни ёза оламиз: -

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx, \quad (7)$$

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx. \quad (7')$$

Агар интеграл остидаги $y = f(x)$ функциянинг графигини чизсак, $f(x) \geq 0$ бўлган ҳолда

$$\int_a^b f(x) dx$$

интегралнинг сон қиймати кўрсатилган эгри чизиқ, $x = a$ ва $x = b$ тўғри чизиқлар ҳамда Ox ўқ билан чегараланган *эгри чизиқли трапеция юзига* тенг бўлади (214- расм).

Шунинг учун, агар $y = f(x)$ эгри чизиқ, $x = a$ ва $x = b$ тўғри чизиқлар ҳамда Ox ўқ билан чегараланган эгри чизиқ-

ли трапеция юзини ҳисоблаш талаб қилинса, у ҳолда бу юз Q ушбу интеграл

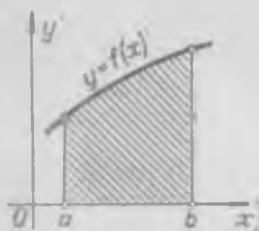
$$Q = \int_a^b f(x) dx \quad (8)$$

ёрдамида ҳисобланади.

Қуйидаги муҳим теоремани исбот қиламиз.

1- теорема. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функция шу кесмада интегралланувчидир.

Исбот. $[a, b]$ кесмани яна $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ кесмачаларга ажратамиз. Қуйи ва юқори интеграл йиғиндиларини тузамиз:



214- расм.

$$s_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad (9)$$

$$\bar{s}_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i. \quad (10)$$

Бундан кейинги ишлар учун юқори ва қуйи интеграл йиғиндиларнинг баъзи бир хоссаларини аниқлаб ўтамиз.

1- хосса. $[a, b]$ кесмани бўлакчаларга ажратишда янги бўлиниш нуқталарини орттириш йўли билан кесмачалар сонини орттирсак, қуйи интеграл йиғинди фақат ўсиши, юқори интеграл йиғинди эса фақат камайиши мумкин.

Исбот. $[a, b]$ кесма янги нуқталар орттириш йўли билан n' кесмачаларга ажратилган бўлсин ($n' > n$). Агар бирор $[x_{k-1}, x_k]$ кесмача бир неча кесмачаларга, масалан, p_k кесмачаларга ажратилган бўлса, у ҳолда янги қуйи $s_{n'}$ интеграл йиғиндида $[x_{k-1}, x_k]$ кесмачага p_k қўшилувчилар тўғри келади, буни биз $s_{n'}$ билан белгилаймиз. $\bar{s}_n$ йиғиндида бу кесмага битта $m_k (x_k - x_{k-1})$ қўшилувчи тўғри келади. Лекин $\bar{s}_{p_k}$ йиғинди ҳамда $m_k (x_k - x_{k-1})$ миқдор учун 1- § даги (4) тенгсизликка ўхшаш тенгсизлик ўринли. Биз бундай ёзишимиз мумкин.

$$\bar{s}_{p_k} \geq m_k (x_k - x_{k-1}).$$

Ҳар бир кесма учун мос тенгсизликни ёзиб ҳамда чап ва унг томонларни қўшиб

$$\bar{s}_{p_k} \geq \bar{s}_n \quad (n' > n) \quad (11)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. 1- хосса исботланди.

2- хосса. Қуйи интеграл йиғинди (9) ва юқори интеграл йиғинди (10) янги бўлиниш нуқталар орттириш йўли

билан кесмичалар сони чексиз орттирилганда қандайдир $\underline{s}$ ва $\overline{s}$ лимитларга интилади.

Исбот. 1- § даги (6) тенгсизликка асосланиб ушбуни ёзишимиз мумкин:

$$s_n \leq M(b-a),$$

яъни n ҳар қандай бўлганда ҳам s_n чегараланган. 1- хоссага асосан n ўсиб борганда s_n монотон ўсиб боради. Демак, лимитлар ҳақидаги 7- теоремага (II боб, 5- § га қ.) асосан бу узгारувчи миқдор лимитга эга; уни $\underline{s}$ билан белгилаймиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \underline{s}. \quad (12)$$

$\overline{s}_n$ нинг қуйидан чегараланганлиги ва монотон камайиши шунга ўхшаш аниқланади. Демак, $\overline{s}_n$ лимитга эга, уни биз $\overline{s}$ билан белгилаймиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{s}_n = \overline{s}.$$

3- хосса. Агар $f(x)$ функция ёпиқ $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда 2- хоссада аниқланган $\underline{s}$ ва $\overline{s}$ лимитлар $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ шартда бир-бирига тенг.

Бу умумий лимитни s билан белгилаймиз:

$$s = \overline{s} = \underline{s}. \quad (13)$$

Исбот. Юқори ва қуйи интеграл йиғиндилар айирмасини қараймиз:

$$\begin{aligned} \overline{s}_n - \underline{s}_n &= (M_1 - m_1) \Delta x_1 + (M_2 - m_2) \Delta x_2 + \dots + \\ &+ (M_l - m_l) \Delta x_l + \dots + (M_n - m_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i. \end{aligned} \quad (14)$$

Бу бўлақларга ажратишдаги $(M_i - m_i)$ айирмаларнинг энг каттасини ϵ_n билан белгилаймиз:

$$\epsilon_n = \max (M_i - m_i)$$

Агар $f(x)$ ёпиқ $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда $[a, b]$ кесмани ҳар қандай усул билан бўлақларга ажратганимизда фақат $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ бўлса, $\epsilon_n \rightarrow 0$, яъни

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \epsilon_n = 0 \quad (15)$$

бўлишини исботлаш мумкин (бунинг устида тўхталмаймиз). Ёпиқ интервалда узлуксиз функциянинг (15) тенглик билан ифодаланган хоссаси функциянинг текис узлуксизлиги дейилади.

Шундай қилиб, биз ушбу теоремадан фойдаланамиз: *ёпиқ кесмада узлуксиз бўлган функция шу кесмада текис узлуксиздир.*

Энди (14) тенгликка қайтамыз. Ўнг томондаги ҳар бир $(M_i - m_i)$ айирмани ундан кичик бўлмаган ϵ_n миқдор билан алмаштирамиз. Ушбу тенгсизликни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned}\bar{s}_n - \underline{s}_n &\leq \epsilon_n \Delta x_1 + \epsilon_n \Delta x_2 + \dots + \epsilon_n \Delta x_n = \\ &= \epsilon_n (\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) = \epsilon_n (b - a).\end{aligned}$$

$\max \Delta x_i \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) да лимитга ўтиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned}\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} (\bar{s}_n - \underline{s}_n) &\leq \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \epsilon_n (b - a) = \\ &= (b - a) \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \epsilon_n = 0,\end{aligned}\quad (16)$$

яъни

$$\lim \bar{s}_n = \lim \underline{s}_n = s \quad (17)$$

ёки $s = \bar{s} = s$, исбот ана шу.

4- хосса. $\underline{s}_n$ ва $\bar{s}_n$ лар $[a, b]$ кесманинг мос тартибда n_1 ва n_2 кесмачаларга бўлинишига мос қуйи ва юқори интеграл йиғиндилар бўлсин. У ҳолда n_1 ва n_2 нинг ҳар қандай қийматларида ушбу тенгсизлик ўринли:

$$\underline{s}_{n_1} \leq \bar{s}_{n_2}. \quad (18)$$

Исбот. $[a, b]$ кесмани $n_3 = n_1 + n_2$ кесмачаларга ажратишни қарайлик, бундай ажратишда бўлиниш нуқталари биринчи ва иккинчи бўлиниш нуқталарининг ўзлари бўлади.

1- § даги (3) тенгсизликка асосан:

$$\underline{s}_{n_3} \leq \bar{s}_{n_3}. \quad (19)$$

1- хоссага асосан:

$$\underline{s}_{n_1} \leq \bar{s}_{n_2}. \quad (20)$$

$$\underline{s}_{n_2} \leq \bar{s}_{n_1}. \quad (21)$$

тенгсизликлар ҳосил бўлади.

(20) ва (21) муносабатлардан фойдаланиб, (19) тенгсизликни кенгайтириш мумкин:

$$\underline{s}_{n_1} \leq \underline{s}_{n_2} \leq \bar{s}_{n_1} \leq \bar{s}_{n_2}$$

ёки

$$\underline{s}_{n_1} \leq \bar{s}_{n_2}.$$

Шуни исбот қилиш керак эди.

5- хосса. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз булса, у ҳолда $[a, b]$ кесмани $[x_{i-1}, x_i]$ кесмачаларга ажратишнинг ҳар қандай кетма-кетлигини янги булиниш нуқталари орттириш йўли билан тузиш шарт эмас, агар фақат $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ бўлса, қуйи интеграл йиғинди $\bar{s}_n$ ва юқори интеграл йиғинди $\underline{s}_m$ (3- хоссада аниқланган) s лимитга интилади.

Исбот. 2- хоссада аниқланган юқори интеграл йиғинди $\bar{s}_n$ кетма-кетлигининг кетма-кет булинишларини қараймиз. n ва m нинг ҳар қандай қийматларида ((18) тенгсизликка асосан) бундай ёза оламиз:

$$\underline{s}_m^* \leq \bar{s}_n.$$

$n \rightarrow \infty$ да лимитга ўтиб, (15) га асосан қуйидагини ёза оламиз:

$$\underline{s}_m^* \leq s.$$

Шунга ўхшаш усул билан $s \leq \bar{s}_m^*$ эканини исбот қиламиз. Шундай қилиб,

$$\underline{s}_m^* \leq s \leq \bar{s}_m^*$$

ёки

$$s - \underline{s}_m^* \geq 0, \quad \bar{s}_m^* - s \geq 0. \quad (22)$$

Айирманинг лимитини қараймиз:

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} (\bar{s}_m^* - \underline{s}_m^*).$$

$f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлгани учун (3- хоссани исбот қилганимизга ўхшаш ушбунни исбот қиламиз ((16) тенгликка қаранг):

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} (\bar{s}_m^* - \underline{s}_m^*) = 0.$$

Кейинги муносабатни қуйидагича ёзамиз:

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} [(\bar{s}_m^* - s) + (s - \underline{s}_m^*)] = 0.$$

(22) га асосан квадрат қавсдаги айирмаларнинг ҳар бири маъний эмас. Демак,

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} (\bar{s}_m^* - s) = 0, \quad \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} [s - \underline{s}_m^*] = 0.$$

Натижада ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \underline{s}_n = s, \quad \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \overline{s}_n = s. \quad (23)$$

Шуни исбот қилиш керак эди.

Энди юқоридаги теоремани исботлаш ва ифодалаш мумкин. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлсин.

Интеграл йиғиндилар $s_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ нинг ихтиёрий кетма-кетлигини қараймиз. Бу кетма-кетликда $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ бўлсин, ξ_i эса $[a, b]$ кесманинг ихтиёрий нуқтаси.

Бўлинишларнинг шу кетма-кетлиги учун юқори ва қуйи $\underline{s}_n$ ва $\overline{s}_n$ интеграл йиғиндиларнинг мос кетма-кетлигини қараймиз. Ҳар бир бўлиниш учун (2) муносабатлар ўринли бўлади:

$$\underline{s}_n < s_n < \overline{s}_n.$$

$\max \Delta x_i \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб ва (23) тенгликлардан ҳамда II боб 5- § даги 4- теоремадан фойдаланиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} s_n = s,$$

бунда s — учинчи хоссада аниқланган лимит.

Бу лимит, юқорида айтилганидек, аниқ интеграл $\int_a^b f(x) dx$ деб айтилади. Шундай қилиб, агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx. \quad (24)$$

Узилувчан функциялар орасида интегралланувчи функциялар ҳам, интегралланмовчи функциялар ҳам бўлишини қайд қилиб ўтамиз.

1- изох. Аниқ интеграл фақат $f(x)$ функциянинг турига ва интеграллаш чегараларига боғлиқ, аммо ҳар қандай ҳарф билан белгиланиши мумкин бўлган интеграллаш ўзгарувчисига боғлиқ эмас. Шунинг учун аниқ интеграл қийматини ўзгарتماган ҳолда x ҳарфини ҳар қандай бошқа ҳарф билан алмаштириш мумкин; масалан:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dx = \dots = \int_a^b f(z) dz.$$

2- изоҳ. Биз $\int_a^b f(x) dx$ аниқ интеграл тушупчасини берганимизда $a < b$ деб фараз қилдик. Агар $b < a$ бўлса, таърифга кўра қуйидагини қабул қиламиз:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx. \quad (25)$$

Масалан,

$$\int_1^0 x^2 dx = - \int_0^1 x^2 dx.$$

3- изоҳ. Агар $a = b$ бўлса, таърифга кўра, ҳар қандай $f(x)$ функция учун ушбу тенглик ўринали деб фараз қиламиз:

$$\int_a^a f(x) dx = 0. \quad (26)$$

Бу геометрик нуқтани назардан ҳам табиий. Ҳақиқатан, бу ҳолда эгри чизиқли трапеция асосининг узунлиги нолга тенг ва демак, трапециянинг юзи ҳам нолга тенг.

1- мисол. $\int_a^b kx dx$ ($b > 0$) интеграл ҳисоблаиш.

Ечиш. Геометрик томондан масала $y = kx$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ чизиқлар билан чегараланган трапециянинг Q юзини ҳисоблашга эквивалентдир (215- расм).

Интеграл ишораси остидаги $y = kx$ узлуксиз функция. Демак, аниқ интегрални ҳисоблаш учун биз, юқорида кўрсатиб ўтилганидек, $[a, b]$ кесмани ихтиёрий усул билан бўлакларга ажратиш ва оралиқдаги ξ_k нуқталарни ҳам ихтиёрий тандаб олишга ҳақлимиз. Аниқ интегралнинг ҳисобланган натижаси интеграл йиғиндини тузиш усулига боғлиқ эмас, лекин бўлиниш қадами нолга интилиши керак.

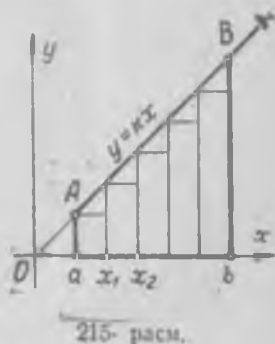
$[a, b]$ кесмани n та тенг кесмачаларга бўлаамиз.

Ҳар бир қисмий кесмачанинг узунлиги $\Delta x = \frac{b-a}{n}$; ана шу соннинг ўзи бўлиниш қадами бўлади. Бўлиниш нуқталарни қуйидаги координаталарга эга бўлади:

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = a + 2\Delta x, \dots, \quad x_n = a + n\Delta x.$$

ξ_k нуқта учун ҳар бир кесмачанинг чап учини оламиз:

$$\xi_1 = a, \quad \xi_2 = a + \Delta x, \quad \xi_3 = a + 2\Delta x, \dots, \quad \xi_n = a + (n-1)\Delta x.$$



(1) интеграл йиғиндини тузамиз. $f(\xi_i) = k\xi_i$ бўлгани учун:

$$\begin{aligned} s_n &= k\xi_1 \Delta x + k\xi_2 \Delta x + \dots + k\xi_n \Delta x = \\ &= ka\Delta x + [k(a + \Delta x)] \Delta x + \dots + [k\{a + (n-1)\Delta x\}] \Delta x = \\ &= k\{a + (a + \Delta x) + (a + 2\Delta x) + \dots + [a + (n-1)\Delta x]\} \Delta x = \\ &= k\{na + [\Delta x + 2\Delta x + \dots + (n-1)\Delta x]\} \Delta x = \\ &= k\{na + [1 + 2 + \dots + (n-1)] \Delta x\} \Delta x, \end{aligned}$$

буида

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Энди

$$1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

(арифметик прогрессия йиғиндиси) эканини ҳисобга олиб,

$$s_n = k \left[na + \frac{n(n-1)}{2} \frac{b-a}{n} \right] \frac{b-a}{n} = k \left[a + \frac{n-1}{n} \frac{b-a}{2} \right] (b-a)$$

натижани ҳосил қиламиз. Аммо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$$

бўлгани учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = Q = k \left[a + \frac{b-a}{2} \right] (b-a) = k \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Шундай қилиб,

$$\int_a^b kx \, dx = k \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Элементар геометрия методи билан $ABba$ юзни (215- расм) ҳисоблаш осон.

Аввалги натижанинг ўзи чиқади.

2- мисол. $\int_a^b x^2 \, dx$ ҳисоблансин.



216- расм.

Ечиш. Берилган интеграл $y = x^2$ парабола, $x = b$ ордината ва $y = 0$ тўғри чизиқ билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг Q юзига тенг (216- расм). $[0, b]$ кесмани

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \Delta x, \quad x_2 = 2\Delta x, \quad \dots, \quad x_n = b = n\Delta x, \quad \Delta x = \frac{b}{n}$$

нуқталар билан n та тенг бўлакка бўламиз. Ё, нуқта учун ҳар бир кесманинг ўнг учини оламиз. Интеграл йиғиндини тузамиз:

$$\begin{aligned} s_n &= x_1^2 \Delta x + x_2^2 \Delta x + \dots + x_n^2 \Delta x = \\ &= [(\Delta x)^2 \Delta x + (2\Delta x)^2 \Delta x + \dots + (n\Delta x)^2 \Delta x] = (\Delta x)^3 [1^2 + 2^2 + \dots + n^2], \end{aligned}$$

маълумки,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

шунинг учун

$$s_n = \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{b^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = Q = \int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}.$$

3- мисол. $\int_a^b m dx$ ҳисоблансин ($m = \text{const}$).

Е чи ш.

$$\begin{aligned} \int_a^b m dx &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m \Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} m \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \\ &= m \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = m(b-a). \end{aligned}$$

Бунда $\sum_{i=1}^n \Delta x_i$ йигинди $[a, b]$ кесма бўлигanda ҳосил бўлган кесмачалар узунликлрининг йигиндиси. Бўлиш қайси усулда бажарилган бўлмасин, бу йигинди $b-a$ кесма узунлигига тенг бўлади.

4- мисол. $\int_a^b e^x dx$ ҳисоблансин.

Е чи ш. $[a, b]$ кесмани яна n та тенг кесмачаларга бўламиз:

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \quad \dots, \quad x_n = a + n\Delta x; \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Ў нуқта учун кесмаларнинг чап учларидаги нуқталарни оламиз. Интеграл йигиндини тузамиз:

$$\begin{aligned} s_n &= e^a \Delta x + e^{a+\Delta x} \Delta x + \dots + e^{a+(n-1)\Delta x} \Delta x = \\ &= e^a (1 + e^{\Delta x} + e^{2\Delta x} + \dots + e^{(n-1)\Delta x}) \Delta x. \end{aligned}$$

Қавс ичидаги ифода махражи $e^{\Delta x}$ ва биринчи ҳади 1 бўлган геометрик прогрессиядир, шунинг учун

$$s_n = e^a \frac{e^{n\Delta x} - 1}{e^{\Delta x} - 1} \Delta x = e^a (e^{n\Delta x} - 1) \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1}.$$

Сўнгра

$$n\Delta x = b-a, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1} = 1.$$

(Лопиталь қондасига мувофиқ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x} = 1$.)

Шундай қилиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = Q = e^a (e^{b-a} - 1) \cdot 1 = e^b - e^a,$$

яъни

$$\int_a^b e^x dx = e^b - e^a.$$

4- и з о ҳ. Юқорида қаралган мисоллар аниқ интегралларни интеграл йиғиндиларнинг лимити деб қараб, бевосита ҳисоблаш катта қийинчиликлар билан боғлиқ эканини кўрсатади. Интеграл остидаги функциялар жуда содда (kx , x^2 , e^x) ҳолларда ҳам бу усул анча оғир ҳисоблашларни талаб этади. Мураккаброқ функциялардан аниқ интеграллар топиш яна ҳам қийинроқ ҳисоблашларга олиб келади. Шунинг учун аниқ интегралларни ҳисоблашнинг қулай методини топиш масаласи ўз-ўзидан келиб чиқади. Ньютон ва Лейбниц кашф этган бу метод интеграллаш билан дифференциаллаш орасида мавжуд муносабатдан фойдаланади. Бу бобнинг келгуси параграфлари шу методни баён қилишга ва асослашга бағишланади.

3- §. Аниқ интегралнинг асосий хоссалари

1- хосса. Ўзгармас кўпайтувчини аниқ интеграл белгисининг ташқарисига чиқариш мумкин: агар $A = \text{const}$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b A f(x) dx = A \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

Исбот.

$$\begin{aligned} \int_a^b A f(x) dx &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n A f(\xi_i) \Delta x_i = \\ &= A \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = A \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

2- хосса. Бир неча функциялар алгебраик йиғиндисининг аниқ интеграл қўшилувчилар аниқ интегралларининг алгебраик йиғиндисига тенг. Масалан, иккита қўшилувчи бўлган ҳолда:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx. \quad (2)$$

Исбот.

$$\begin{aligned}
 \int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] dx &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f_1(\xi_i) + f_2(\xi_i)] \Delta x_i = \\
 &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n f_1(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i) \Delta x_i \right] = \\
 &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f_1(\xi_i) \Delta x_i + \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i) \Delta x_i = \\
 &= \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx.
 \end{aligned}$$

Қушилувчилар сони ҳар қанча булганда ҳам, шунга ухшаш исботланади. 1 ва 2- хоссалар фақат $a < b$ булган ҳол учунгина исботланган бўлса ҳам, $a \geq b$ булган ҳолда ҳам ўз кучини сақлайди.

Аммо қуйидаги хосса фақат $a \geq b$ булган ҳолдагина тўғри бўлади.

3- хосса. Агар $[a, b]$ ($a < b$) кесмада $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар $f(x) \leq \varphi(x)$ шартни қаноатлантирса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (3)$$

Исбот. Қуйидаги айирмани қараймиз:

$$\begin{aligned}
 \int_a^b \varphi(x) dx - \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b [\varphi(x) - f(x)] dx = \\
 &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [\varphi(\xi_i) - f(\xi_i)] \Delta x_i.
 \end{aligned}$$

Бунда ҳар бир айирма нолдан катта:

$$\varphi(\xi_i) - f(\xi_i) \geq 0, \quad \Delta x_i \geq 0.$$

Демак, йиғиндининг ҳар бир қўшилувчиси манфий эмас, демак, бутун йиғинди манфий эмас ва унинг лимити ҳам манфий эмас, яъни

$$\int_a^b [\varphi(x) - f(x)] dx \geq 0$$

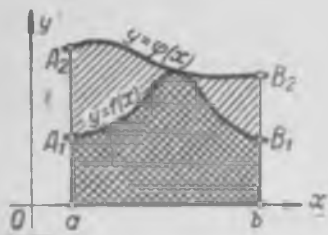
еки

$$\int_a^b \varphi(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0,$$

бундан (3) тенгсизлик келиб чиқади.

Агар $f(x) > 0$ ва $\varphi(x) > 0$ бўлса, у ҳолда баён қилинган хосса геометрик усулда кўргазмали тасвир этилади (217- расм).

$\varphi(x) \geq f(x)$ бўлгани учун aA_1B_1b эгри чизиқли трапециянинг юзи aA_2B_2b эгри чизиқли трапециянинг юзидан катта эмас.



217- расм.

4- хосса. Агар m ва M миқдорлар $f(x)$ функциянинг, $[a, b]$ кесмадаги энг кичик ва энг катта қийматлари бўлиб, $a \leq b$ бўлса, у ҳолда

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad (4)$$

бўлади.

Исбот. Теореманинг шартига кўра:

$$m \leq f(x) \leq M.$$

(3) хоссага асосан:

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx. \quad (4')$$

Аммо

$$\int_a^b m dx = m(b-a), \quad \int_a^b M dx = M(b-a)$$

(XI боб 2- параграфдаги 3- мисолга қаралсин). Бу ифодаларни (4') тенгсизликка қўйсак, (4) тенгсизлик ҳосил бўлади.

Агар $f(x) \geq 0$ бўлса, у ҳолда бу хоссани геометрик усулда тасвирлаш осон бўлади (218- расм). Эгри чизиқли $aABb$ трапециянинг юзи aA_1B_1b ҳамда aA_2B_2b тўғри тўртбурчаклар юзлари орасида ётади.

5- хосса. (Ўрта қиймат ҳақида теорема.) Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда бу кесмада шундай ξ нуқта топиладики, бу нуқта учун

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi) \quad (5)$$

тенглик ўринлидир.

Исбот. Аниқлик учун $a < b$ бўлган ҳолни қараймиз. Агар m ва M миқдорлар $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ кесмадаги энг кичик ҳамда энг катта қийматлари бўлса, у ҳолда (4) формулага мувофиқ

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Бундан

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \mu, \text{ бунда } m \leq \mu \leq M.$$

$f(x)$ узлуксиз функция бўлгани учун μ ва M орасидаги ҳамма оралиқ қийматларни қабул қилади. Демак, бирор ξ ($a < \xi < b$) қийматда $\mu = f(\xi)$ бўлади, яъни

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) (b-a).$$

6- хосса. Агар қуйидаги уч интегралнинг ҳар бири мавжуд бўлса, у ҳолда ҳар қандай учта a, b, c сон учун

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (6)$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Дастлаб $a < c < b$ деб фараз қиламиз ва $f(x)$ функция учун $[a, b]$ кесмада интеграл йиғиндини тузамиз. Интеграл йиғиндининг лимити $[a, b]$ кесмани бўлакларга булиш усулига боғлиқ бўлмагани учун $[a, b]$ кесмани майда кесмачаларга шундай бўламызки, c нуқта бўлиниш нуқтаси бўлсин. Сунгра

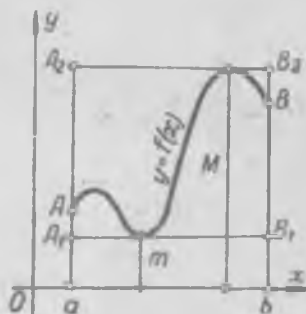
$[a, b]$ кесмага мос $\sum_a^b$ интеграл йиғиндини иккита: $[a, c]$ кесма-

га мос $\sum_a^c$ йиғиндига ва $[c, b]$ кесмага мос $\sum_c^b$ йиғиндига ажратамиз.

У вақтда

$$\sum_a^b f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_a^c f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_c^b f(\xi_i) \Delta x_i$$

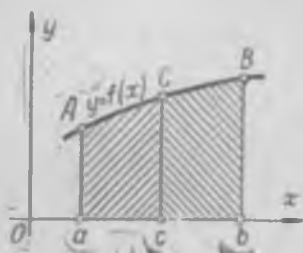
бўлади.



218- расм.

Кейинги тенгликда тах $\Delta x_i \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб, (6) муносабатни ҳосил қиламиз.

Агар $a < b < c$ бўлса, исботланган тенгликка асосан:



219- расм.

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

ёки

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx;$$

аммо 2- параграфдаги (4) формулага мувофиқ

$$\int_a^c f(x) dx = - \int_c^b f(x) dx$$

бўлади, шунинг учун

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

a, b, c нуқталарнинг бошқача ҳар қандай жойланишида ҳам бу хосса шундай исботланади.

219- расмда $f(x) > 0$ ва $a < c < b$ бўлган ҳол учун 6- хоссанинг геометрик тасвири берилган: $aABb$ трапециянинг юзи $aACc$ ва $cCBb$ трапециялар юзларининг йиғиндисига тенг.

4- §. Аниқ интегрални ҳисоблаш.

Ньютон — Лейбниц формуласи

Ушбу

$$\int_a^b f(x) dx$$

аниқ интегралнинг қуйи чегараси ўзгармас a , юқори чегараси b ўзгарувчи бўлсин. Бу ҳолда интегралнинг қиймати ҳам ўзгарувчи бўлади, яъни интеграл юқори чегарасининг функцияси бўлади.

Одатдаги белгилашлар билан иш куриш учун юқори чегарани x билан белгилаймиз, интеграллаш ўзгарувчиси билан уни аралаштириб юбормаслик мақсадида, бу ўзгарувчини t орқали белгилаймиз. (Интеграллаш ўзгарувчисининг белгиланишидан интегралнинг қиймати ўзгармайди.) Натижада

$$\int_a^x f(t) dt$$

интегрални ҳосил қиламиз, a ўзгармас сон бўлганда бу интеграл юқори x чегарасининг функцияси бўлади. Бу функцияни $\Phi(x)$ билан белгилаймиз:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (1)$$

Агар $f(t)$ манфий бўлмаган функция бўлса, у ҳолда $\Phi(x)$ функциянинг сон қиймати эгри чизиқли $aAXx$ трапециянинг юзига тенг (220- расм). Бу юз x ўзгариши билан ўзгариб бориши ўз-ўзидан равшан.

$\Phi(x)$ функциядан x га нисбатан ҳосила оламиз, яъни (1) аниқ интегралдан юқори чегарасига нисбатан ҳосила оламиз.

1- теорема. Агар $f(x)$ узлуксиз функция ва $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ бўлса, у ҳолда

$$\Phi'(x) = f(x)$$

тенглик ўринли бўлади.

Бошқача айтганда, аниқ интегралдан юқори чегараси буйича олинган ҳосила интеграл остидаги функцияга тенг бўлиб, унда интеграллаш ўзгарувчиси ўрнига юқори чегаранинг қиймати қўйилган (бунда интеграл остидаги функция узлуксиз бўлиши шарт).

Исбот. x аргументга мусбат ёки манфий Δx орттирма берамиз; у ҳолда (аниқ интегралнинг б- хоссасини эътиборга олиб) мана бундай ҳосил қиламиз:

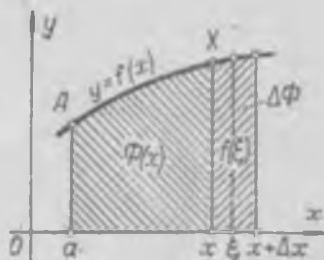
$$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

$\Phi(x)$ функциянинг орттирмаси

$$\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt,$$

яъни

$$\Delta\Phi = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$



220- расм.

Охирги интегралга ўрта қиймат ҳақидаги теоремани татбиқ қиламиз (аниқ интегралнинг 5- хоссаси):

$$\Delta\Phi = f(\xi)(x + \Delta x - x) = f(\xi)\Delta x,$$

бунда ξ нинг қиймати x билан $x + \Delta x$ орасида ётади.

Функция орттирмасининг аргумент орттирмасига нисбатини топамиз:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = f(\xi).$$

Демак,

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi).$$

Аммо $\Delta x \rightarrow 0$ бўлганда $\xi \rightarrow x$ бўлгани учун, бу ҳолда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi),$$

лекин $f(x)$ функция узлуксиз бўлгани сабабли,

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x).$$

Шундай қилиб, $\Phi'(x) = f(x)$. Теорема исботланди.

Бу теорема геометрик томондан жуда содда тасвирланади (220- расм): $\Delta\Phi = f(\xi)\Delta x$ орттирма бир асоси Δx бўлган эгри чизиқли трапециянинг юзига тенг бўлиб, $\Phi'(x) = f(x)$ ҳосила эса $x\Delta x$ кесманинг узунлигига тенг.

Изоҳ. Исбот этилган теоремадан, хусусий ҳолда, *ҳар қандай узлуксиз функция бошланғич функцияга эга деган натижа келиб чиқади*. Ҳақиқатан ҳам, агар $f(t)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, XI бобнинг 2- параграфида кўрсатил-

ганидек, $\int_a^x f(t) dt$ аниқ интеграл мавжуд, яъни

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

функция мавжуд. Аммо юқорида исбот этилганига кўра, бу $f(x)$ функциянинг бошланғич функциясидир.

2- теорема. Агар $F(x)$ узлуксиз $f(x)$ функциянинг бирор бошланғич функцияси бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (2)$$

формула уринлидир. Бу формула *Ньютон — Лейбниц формуласи* дейилади*).

Исбот. $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг бирор бошланғич функцияси бўлсин, 1- теоремага мувофиқ $\int_a^x f(t) dt$ функция ҳам $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлади. Аммо берилган функциянинг ҳар қандай иккита бошланғич функцияси бир-биридан ўзгармас C^* қўшилувчи билан фарқ қилади. Демак, бундай ёзиш мумкин:

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C^*. \quad (3)$$

Бу тенглик C^* мос равишда танлаб олинганда x нинг ҳамма қийматлари учун туғри, яъни айниятдир.

Ўзгармас C^* сонни сақлаш учун бу айниятда $x = a$ деб оламиз; у ҳолда:

$$\int_a^a f(t) dt = F(a) + C^*$$

ёки

$$0 = F(a) + C^*,$$

бундан

$$C^* = -F(a).$$

Демак

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a).$$

Бунда $x = b$ деб олсак. Ньютон — Лейбниц формуласи ҳосил бўлади:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a),$$

ёки интеграллаш ўзгарувчисини x билан алмаштирсак:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

* (2) формуланинг бундай айтилиши шартли эканини қайд қилиб ўтиш зарур, чунки Ньютонда ҳам, Лейбницда ҳам шундай формула бу сузнинг тои маъносида бўлган эмас. Лекин муҳими шуки, Ньютон билан Лейбниц аниқ интегралларни ҳисоблаш учун қоида тузишга нисбатан берувчи дифференциаллаш билан, интеграллаш орасидаги боғланишни биринчи марта аниқлаганлар.

$F(b) - F(a)$ айирма бошланғич $F(x)$ функциянинг танлаб олнинишига боғлиқ эмаслигини эслатиб ўтамыз. Чунки ҳамма бошланғич функцияларнинг бир-биридан фарқи ўзгармас миқдордир, улар айланиш вақтида йўқолиб кетади.

Агар

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

белгилашни*) киритсак, у ҳолда (2) формулани

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Интеграл остидаги функциянинг бошланғич функцияси маълум бўлса, у ҳолда Ньютон — Лейбниц формуласи аниқ интегралларни ҳисоблаш учун амалда қулай методни беради. Фақат шу формуланинг кашф этинлишигина аниқ интегрални ҳозирги замонда математик анализда тутган ўрнини олишга имкон берган. Аниқ интегрални интеграл йиғиндининг лимити каби ҳисоблашга ўхшаш процесс билан қадим замонлардаёқ (Архимед замонасида) таниш бўлсалар-да, бу усулни интеграл йиғиндининг бевосита ҳисоблаш мумкин бўлган энг содда ҳолларигагина татбиқ қилиш билан чегараланиб қолганлар. Ньютон — Лейбниц формуласи аниқ интегралнинг татбиқи соҳасини анча кенгайтирди; чунки математика бу формула ёрдамида хусусий кўринишдаги турли масалаларни ечиш учун умумий усулга эга бўлди; шунинг учун, у аниқ интегрални техникага, астрономияга ва ҳоказога татбиқ қилиш доирасини анча кенгайтирди.

1 - мисол.

$$\int_a^b x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

2 - мисол.

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

* $\Big|_a^b$ ифода икки марта ўрнига қўйиш белгиси деб аталади. Адабиётда бу ифода икки хил ёзилади:

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

ёки

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

Биз бундан кейин иккала хил ёзилишни ҳам ишлатамыз.

3- мисол.

$$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} (n \neq -1).$$

4- мисол.

$$\int_a^b e^x dx = e^x \Big|_a^b = e^b - e^a.$$

5- мисол.

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = 0.$$

6- мисол.

$$\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} \Big|_0^1 = \sqrt{2} - 1.$$

5- §. Аниқ интегралда ўзгарувчини алмаштириш

Теорема. $\int_a^b f(x) dx$ интеграл берилган бўлсин, бунда $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз функция.

$x = \varphi(t)$ формула бўйича янги t ўзгарувчини киритамиз.

Агар

1) $\varphi(a) = a, \varphi(b) = b,$ 2) $\varphi(t)$ ва $\varphi'(t)$ лар $[a, b]$ кесмада узлуксиз функциялар бўлса,3) $f[\varphi(t)]$ функция $[a, b]$ кесмада аниқланган ҳамда узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \quad (1)$$

бўлади.

Исбот. Агар $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлса, қуйидаги тенгликларни ёзиш мумкин:

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad (2)$$

$$\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = F[\varphi(t)] + C. \quad (3)$$

Кейинги тенгликнинг тўғрилиги унинг иккала томонини t бўйича дифференциаллаш билан текширилади. (Бу тенглик X бобнинг 4- параграфидаги (2) формуладан ҳам келиб чиқади.)

(2) тенгликдан:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

ёкани келиб чиқади. (3) тенгликдан:

$$\begin{aligned} \int_a^b f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt &= F[\varphi(t)] \Big|_a^b = \\ &= F[\varphi(b)] - F[\varphi(a)] = F(b) - F(a) \end{aligned}$$

ёкани чиқади. Кейинги ифодаларнинг унғ томонлари бир-бирига тенг бўлгани учун, чап томонлари ҳам тенг.

Изоҳ. Аниқ интегрални (1) формула бўйича ҳисоблаганда эски ўзгарувчига қайтишнинг зарурати йўқлигини эслатиб ўтамиз. Агар (1) тенгликдаги аниқ интеграллардан иккинчисини ҳисобласак, бирор сон ҳосил бўлади; биринчи интеграл ҳам худди шу сонга тенг.

Мисол. Ушбу интеграл ҳисоблансин:

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

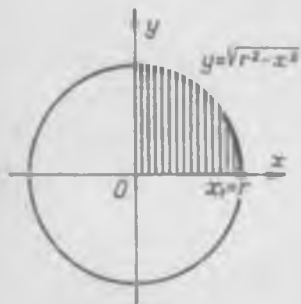
Еч и ш. Ўзгарувчини алмаштирамиз:

$$x = r \sin t, \quad dx = r \cos t dt.$$

Интеграллашнинг янги чегараларини аниқлаймиз:

$$x = 0 \text{ бўлганда } t = 0,$$

$$x = r \text{ бўлганда } t = \frac{\pi}{2}.$$



221- расм.

Демак,

$$\begin{aligned} \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} r \cos t dt = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \\ &= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = r^2 \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4}. \end{aligned}$$

Ҳисобланган интеграл геометрик томондан $x^2 + y^2 = r^2$ айлана билан чегараланган доира юзининг $\frac{1}{4}$ қисмини тасвирлайди (221- расм).

6- §. Бұлақлаб интеграллаш

u ва v функциялар x нинг дифференциалланувчи функциялари бўлсин. Бу ҳолда:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Бу айниятнинг иккала томонини a дан b гача чегараларда интеграллаймиз:

$$\int_a^b (uv)' dx = \int_a^b u'v dx + \int_a^b uv' dx. \quad (1)$$

Лекин $\int (uv)' dx = uv + C$ бўлгани сабабли $\int_a^b (uv)' dx = uv \Big|_a^b$;

Демак, (1) тенглик қуйидаги кўринишда ёзилиши мумкин:

$$uv \Big|_a^b = \int_a^b v du + \int_a^b u dv \quad \text{ёки} \quad \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Мисол. Ушбу

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

интеграл ҳисоблансин.

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^{n-1} x}_u \underbrace{d \cos x}_{dv} = \\ &= - \sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos x \cos x dx = \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx. \end{aligned}$$

Танлаб олинган белгилашлар ёрдамида кейинги тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$I_n = (n-1) I_{n-1} - (n-1) I_n.$$

бундан

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-1} \quad (2)$$

тенгликни топамиз. Шундай усул билан

$$I_{n-1} = \frac{n-3}{n-2} I_{n-2}$$

тенгликни топамиз. Шунинг учун

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} I_{n-2}.$$

Шунга ўхшаш алмаштиришларни татбиқ этишни давом эттириб, n нинг жуфт ёки тоқлигига қараб, I_0 ёки I_1 га бориб етамиз.

Икки ҳолни кўриб чиқамиз:

1) n — жуфт сон, $n = 2m$.

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0$$

2) n — тоқ сон, $n = 2m+1$:

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} I_1,$$

бирок

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1,$$

бўлганидан

$$I_{2m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \, dx = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$I_{2m+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}.$$

Бу формулалардан $\frac{\pi}{2}$ сонини чексиз кўпайтма шаклида ифода этулчи

Валлис формуласи келиб чиқади.

Ҳақиқатан ҳам, кейинги икки тенгликдан ҳадлаб бўлиш йўли билан

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m}{3 \cdot 5 \cdots (2m+1)} \right)^2 \frac{1}{2m+1} \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} \quad (3)$$

тенгликни топамиз. Энди

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} = 1$$

эканини исботлаймиз.

x нинг $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ интервалдаги барча қийматлари учун

$$\sin^{2m-1} x > \sin^{2m} x > \sin^{2m+1} x$$

тенгликлар ўринли. 0 дан $\frac{\pi}{2}$ гача чегараларда интеграллаб,

$$I_{2m-1} > I_{2m} > I_{2m+1}$$

тенгсизликларни ҳосил қиламиз, бундан

$$\frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}} > \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} > 1. \quad (4)$$

(2) тенгликдан;

$$\frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}} = \frac{2m+1}{2m}.$$

Демак,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2m+1}{2m} = 1.$$

(4) тенгсизликдан

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} = 1.$$

3) формулада лимитга ўтиб *Валлис формуласини* ҳосил қиламиз:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m}{3 \cdot 5 \dots (2m-1)} \right)^2 \frac{1}{2m+1} \right].$$

Бу формулани яна қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \dots \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \frac{2m}{2m-1} \cdot \frac{2m}{2m+1} \right).$$

7- §. Ҳосмас интеграллар

1. Чегаралари чексиз бўлган интеграллар. $f(x)$ функция x нинг $a \leq x < \infty$ оралиқдаги барча қийматларида аниқланган ва узлуксиз функция бўлсин. Ушбу

$$I(b) = \int_a^b f(x) dx$$

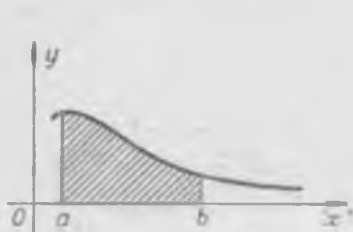
интегрални қарайлик. Бу интеграл ҳар қандай $b > a$ учун маънога эга. b ўзгарганда интеграл ҳам ўзгаради. Бу интеграл b нинг узлуксиз функциясиدير. (XI боб 4- параграфга қаранг.)

$b \rightarrow +\infty$ булганда бу интегралнинг қандай узгаришини қарай-
миз (222- расм).

Таъриф. Агар чекли лимит

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

мавжуд булса, бу лимит $f(x)$ функциянинг $[a, +\infty]$ интер-
валдаги *хосмас интеграл* дейилади ва



222- расм.

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

символ билан белгиланади. Де-
мак, таърифга кура:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Бу ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интеграл *мавжуд* ёки *яқинла-
шувчи* дейилади.

Агарда $b \rightarrow +\infty$ да $\int_a^b f(x) dx$ нинг чекли лимити мавжуд
булмаса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интеграл *мавжуд эмас*
ёки *узоқлашувчи* дейилади.

$f(x) > 0$ булган ҳолда хосмас интегралнинг геометрик маъ-
носини тушунтириш қийин эмас: агар $\int_a^b f(x) dx$ интеграл $y =$
 $= f(x)$ чизиқ абсциссалар ўқи ва $x = a$, $x = b$ ординаталар
билан чегараланган соҳа юзини ифодаласа, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$
хосмас интеграл $y = f(x)$, $x = a$, чизиқлар ва абсциссалар ўқи
орасида қолган чегараланмаган (чексиз) соҳа юзини ифодалай-
ди деб ҳисоблаш табийдир.

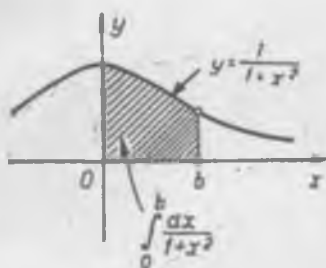
Бошқа чексиз интерваллар учун ҳам хосмас интеграллар
шунга ўхшаш аниқланади:

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^a f(x) dx,$$

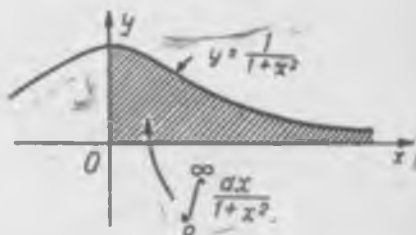
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx.$$

Кейинги тенгликни бундай тушуниш лозим: агар ўнг томондаги хосмас интегралларнинг ҳар бири мавжуд бўлса, таърифга кўра чап томондаги интеграл ҳам мавжуд (яқинлашувчи) бўлади.

1-мисол. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ интеграл ҳисоблансин (223- ва 224- расмларга қаралсин).



223- расм.



224- расм.

Ечиш. Хосмас интегралнинг таърифига мувофиқ қуйидагини топамиз.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg b = \frac{\pi}{2}.$$

Қаралган интеграл 224- расмда штрихланган чексиз эгри чизиқли трапециянинг юзини ифодалайди.

2-мисол. a нинг қандай қийматларида (225- расм)

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a}$$

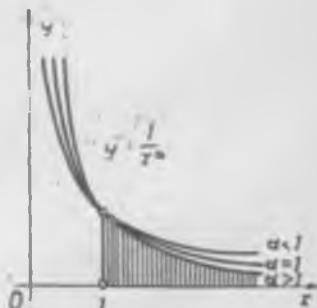
интеграл яқинлашувчи ва қандай қийматларида узоклашувчи бўлиши текширилсин.

Ечиш. $a \neq 1$ бўлганда

$$\int_1^b \frac{dx}{x^a} = \frac{1}{1-a} x^{1-a} \Big|_1^b = \frac{1}{1-a} (b^{1-a} - 1)$$

бўлгани учун

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-a} (b^{1-a} - 1).$$



225- расм.

Демак, қаралаётган интегралга нисбатан қуйидаги хулосаларни чиқариш мумкин:

агар $x > 1$ бўлса, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a} = \frac{1}{a-1}$, яъни интеграл яқинлашувчи;

агар $x < 1$ бўлса, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a} = \infty$, яъни интеграл узоқлашувчи.

$a = 1$ бўлганда, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{+\infty} = \infty$ интеграл узоқлашувчи.

3- мисол. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ интеграл ҳисоблансин.

Ечиш.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Иккинчи интеграл $\frac{\pi}{2}$ га тенг (1- мисолга қаранг). Биринчи интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg x \Big|_a^0 = \lim_{a \rightarrow -\infty} (\arctg 0 - \arctg a) = \frac{\pi}{2}.$$

Демак,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Кўп ҳолларда берилган интегралнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи эканини билиш ва унинг қийматини баҳолаш етарли бўлади. Бунинг учун қуйидаги теоремалар фойдали бўлиши мумкин; биз уларни исботсиз келтираемиз, аммо уларнинг татбиқига мисоллар келтираемиз.

1- теорема. Агар барча x ($x \geq a$) лар учун

$$0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$$

тенгсизликлар бажарилса ва $\int_a^{+\infty} \varphi(x)$ яқинлашувчи бўлса, у

ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ҳам яқинлашувчи бўлади, бунда

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx.$$

4- мисол. Ушбу

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$$

интеграл яқинлашувчи экани текширилсин.

Ечиш. $1 < x$ бўлганда

$$\frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2}$$

бўлади. Сўнгра:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^{+\infty} = 1.$$

Демак, интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$$

яқинлашувчи бўлиб, унинг қиймати 1 дан кичикдир.

2-теорема. Агар барча $x (x \geq a)$ лар учун

$$0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$$

тенгсизликлар бажарилса, шу билан бирга $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ узоқ-

лашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интеграл ҳам узоқлашувчи бўлади.

5- мисол.

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx$$

интегралнинг яқинлашиши текширилсин.

Ечиш.

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

эканлигига эътибор берамиз. Аммо

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x} \Big|_1^b = +\infty.$$

Демак, берилган интеграл ҳам узоқлашувчи.

Кейинги икки теоремада манфий бўлмаган функцияларнинг хосмас интеграллари қаралди. Чексиз интервалда ишорасини ўзгартирадиган функциялар учун қуйидаги теорема ўринали бўлади.

3-теорема. Агар $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ интеграл яқинлашувчи

бўлса, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади.

Бу ҳолда кейинги интеграл *абсолют яқинлашувчи* интеграл дейилади.

6-мисол.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$$

интегралнинг яқинлашиши текширилсин.

Ечиш. Бу ерда интеграл остидаги функция ишораси ўзгарувчи функциядир.

$$\left| \frac{\sin x}{x^3} \right| < \left| \frac{1}{x^3} \right|$$

бўлиши маълум. Аммо

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Демак, $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^3} \right| dx$ интеграл яқинлашувчидир. Бундан берилган интегралнинг ҳам яқинлашувчи бўлиши келиб чиқади.

2. Узлукли функциянинг интегралли. $f(x)$ функция $a \leq x < c$ бўлганда аниқланган ва узлуксиз бўлсин, $x = c$ бўлганда эса f аниқланмаган, ёки узлишга дучор бўлсин. Бу ҳолда $\int_a^c f(x) dx$ интегрални интеграл йигиндининг limiti деб қараш мумкин эмас, чунки $f(x)$ функция $[a, c]$ кесмада узлуксиз эмас ва шунинг учун бу лимит мавжуд бўлмаслиги ҳам мумкин.

с нуктада узилишга эга бўлган $f(x)$ функция-нинг $\int_a^c f(x) dx$ интеграли қуйидагича аниқланади:

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{b \rightarrow c-0} \int_a^b f(x) dx.$$

Агар ўнг томонда турган лимит мавжуд бўлса, у ҳолда интеграл *яқинлашувчи хосмас* интеграл дейилади, акс ҳолда интеграл *узоқлашувчи* дейилади.

Агар $f(x)$ функция $[a, c]$ кесманинг чап учида (яъни $x = a$ нуктада) узиладиган бўлса, у ҳолда таърифга мувофиқ

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{b \rightarrow a+0} \int_b^c f(x) dx.$$

Агар $f(x)$ функция $[a, c]$ кесма ичидаги бирор $x = x_0$ нуктада узлукли бўлса, тенгликнинг ўнг томонидаги хосмас интегралларнинг иккаласи ҳам мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^c f(x) dx.$$

7-мисол. Ушбу интеграл ҳисоблансин:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

Ечиш.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} &= \lim_{b \rightarrow 1-0} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = - \lim_{b \rightarrow 1-0} 2 \sqrt{1-x} \Big|_0^b = \\ &= - \lim_{b \rightarrow 1-0} 2(\sqrt{1-b} - 1) = 2. \end{aligned}$$

8-мисол. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3}$ интеграл ҳисоблансин.

Ечиш. Интеграллаш кесмаси ичида интеграл остидаги функциянинг узилиш нуктаси $x = 0$ мавжуд бўлгани учун интегрални икки қўшилувчининг йиғиндиси каби тасвирлаш керак:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3} = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0-0} \int_{-1}^{\epsilon_1} \frac{dx}{x^3} + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0+0} \int_{\epsilon_2}^1 \frac{dx}{x^3}.$$

Ҳар қайси лимитни алоҳида ҳисоблаймиз:

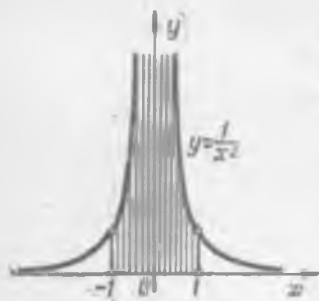
$$\lim_{x_1 \rightarrow -0} \int_{-1}^{x_1} \frac{dx}{x^3} = - \lim_{x_1 \rightarrow -0} \frac{1}{x} \Big|_{-1}^{x_1} = - \lim_{x_1 \rightarrow -0} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{-1} \right) = \infty.$$

Демак, $[-1, 0]$ оралиқда интеграл узоқлашади:

$$\lim_{x_2 \rightarrow +0} \int_{x_2}^1 \frac{dx}{x^3} = - \lim_{x_2 \rightarrow +0} \left(1 - \frac{1}{x_2} \right) = \infty.$$

Демак, $[0, 1]$ оралиқда интеграл узоқлашади.

Шундай қилиб, берилган интеграл бутун $[-1, 1]$ кесмада узоқлашади. Агар берилган интегрални интеграл остидаги функциянинг $x = 0$ нуқтадаги урилишига эътибор қилмасдан ҳисоблаганимизда нотўғри натижа ҳосил қилган бўлар эдик. Ҳақиқатан,



226- расм.

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = - \frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{-1} \right) = -2,$$

бу эса мумкин эмас (226- расм).

Изоҳ. Агар $[a, b]$ кесмада аниқланган $f(x)$ функция бу кесма нчида чекли сондаги $a_1, a_2, \dots, a_n$ нуқталарда узи лувчи бўлса, у ҳолда $f(x)$ функциядан $[a, b]$ кесмада олинган интеграл қуйидагича аниқланади:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{a_1} f(x) dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx + \dots + \int_{a_n}^b f(x) dx,$$

бунда тенгликнинг ўнг томонидаги хосмас интегралларнинг ҳар бири яқинлашувчи бўлиши шарт. Агар бу интеграллардан

ҳеч бўлмаганда биттаси узоқлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x) dx$

интеграл ҳам узоқлашувчи дейилади.

Узлукли функциялардан олинган хосмас интегралларнинг яқинлашувини аниқлаш ва уларнинг қийматларини баҳолаш учун кўпинча чегаралари чексиз бўлган интегралларни баҳолагандагига ўхшаш теоремалардан фойдаланилади.

1' теорема. Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар $[a, c]$ кесманинг c нуқтасида узлукли бўлса ва бу кесманинг барча нуқталарида

$$\varphi(x) \geq f(x) \geq 0$$

тенгсизликлар бажарилиб, $\int_a^c \varphi(x) dx$ яқинлашувчи бўлса, у

ҳолда $\int_a^c f(x) dx$ ҳам яқинлашувчи бўлади.

II' теорема. Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар $[a, c]$ кесманинг с нуқтасида узиловчи бўлса ва бу кесманинг барча нуқталарида

$$f(x) \geq \varphi(x) \geq 0$$

тенгсизликлар бажарилса ва $\int_a^c \varphi(x) dx$ узоқлашувчи бўлса, у

ҳолда $\int_a^c f(x) dx$ ҳам узоқлашувчи бўлади.

III' теорема. Агар $f(x)$ функция $[a, c]$ кесмада ишора ўзгартирувчи бўлиб, фақат с нуқтадагина узиловчи бўлса ва

бу функциянинг абсолют қийматидан олинган $\int_a^c |f(x)| dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда бу функциянинг ўзидан олинган $\int_a^c f(x) dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади.

Кўпинча хосмас интеграл белгиси остида турган функция билан таққослаш қулай бўлган функция сифатида $\frac{1}{(c-x)^a}$

функция олинади. $\int_a^c \frac{1}{(c-x)^a} dx$ интеграл $a < 1$ бўлганда яқинлашувчи, $a \geq 1$ бўлганда эса узоқлашувчи булишини текшириш осон.

$\int_a^c \frac{1}{(x-a)^a} dx$ интегралнинг ҳам яқинлашувчи эканлигини текшириб кўриш қийин эмас.

9- мисол. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+4x^3}} dx$ интеграл яқинлашувчи бўладими?

Ечиш. Интеграл остидаги функция $[0, 1]$ кесманинг чап учида узилишга эга. Уни $\frac{1}{\sqrt{x}}$ функция билан таққослаб,

$$\frac{1}{\sqrt{x+4x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

эқанини биламиз.

$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}}$ хосмас интеграл мавжуд. Демак, кичик функциядан олинган хос-

мас интеграл ҳам, яъни $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+4x^3}} dx$ ҳам мавжуддир.

8- §. Аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблаш

Х боб охирида ҳар қандай узлуксиз функция учун унинг бошланғич функциясини элементар функциялар орқали ифода-
лаб бўлмаслиги кўрсатилган эди. Бу ҳолларда аниқ интегрални
Ньютон—Лейбниц формуласи бўйича ҳисоблаш қийин, шунинг
учун аниқ интегралларни ҳисоблашда турли тақрибий усул-
лар қўлланилади. Ҳозир биз аниқ интегралга йиғиндининг ли-
мити деб берилган тушунча асосида тақрибий интеграллашнинг
бир неча усулини баён қиламиз.

1. Тўғри тўртбурчаклар формуласи. $[a, b]$ кес-
мада узлуксиз функция $y = f(x)$ берилган. $\int_a^b f(x) dx$ аниқ
интегрални ҳисоблаш талаб қилинади.

$[a, b]$ кесмани $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ нуқталар билан
узунлиги Δx бўлган n та тенг бўлақларга ажратамиз:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Сўнгра $f(x)$ функциянинг $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ нуқталардаги
қийматларини $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$ орқали белгилаймиз,
яъни

$$y_0 = f(x_0); \quad y_1 = f(x_1), \dots, \quad y_n = f(x_n).$$

Ушбу йиғиндиларни тузамиз:

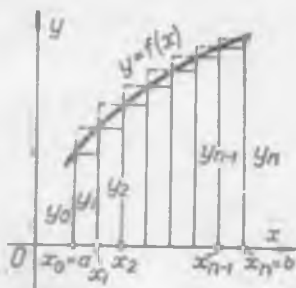
$$\begin{aligned} & y_0 \Delta x + y_1 \Delta x + \dots + y_{n-1} \Delta x, \\ & y_1 \Delta x + y_2 \Delta x + \dots + y_n \Delta x. \end{aligned}$$

Бу йиғиндиларнинг ҳар бири $f(x)$ учун $[a, b]$ кесмада ин-
теграл йиғинди бўлади ва шунинг учун $\int_a^b f(x) dx$ интегрални
тақрибий ифода этади:

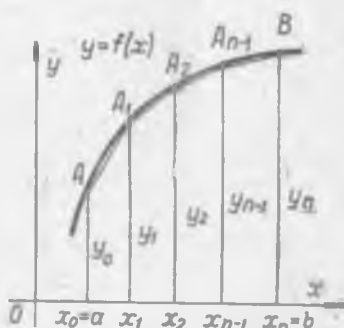
$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}), \quad (1)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n). \quad (1')$$

Булар *туғри тўртбурчаклар* формуласидир. 227- расмдан қуйидагиларни кўриш мумкин: агар $f(x)$ мусбат ва ўсувчи функция бўлса, у ҳолда (1) формула „ички“ тўғри тўртбурчаклардан тузилган зинапоясимон шаклнинг юзини тасвирлайди, (1') формула эса „ташқи“ тўртбурчаклардан тузилган зинапоясимон шаклнинг юзини тасвирлайди. Интегрални тўғри тўртбурчаклар формуласи билан ҳисоблашда қилинган хато n сон қанча катта бўлса (яъни бўлиниш қадами $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ қанча кичик бўлса), шунча кичик бўлади.



227- расм.



228- расм.

II. Трапециялар формуласи. Агар берилган $y = f(x)$ эгри чизиқни тўғри тўртбурчаклар формуласида бўлгандек зинапоясимон чизиқ билан алмаштирмасдан, балки ички чизилган синиқ чизиқ билан алмаштирсак, у ҳолда аниқ интегралнинг анча аниқроқ қиймати ҳосил бўлишини кутиш табиийдир (228- расм).

Бу ҳолда эгри чизиқли $aABb$ трапециянинг юзи юқоридан $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}B$ ватарлар билан чегараланган тўғри чизилган трапециялар юзларининг йиғиндисига тенг бўлади.

Лmmo бу трапециялардан биринчисининг юзи $\frac{y_0 + y_1}{2} \Delta x$, иккинчисининг юзи $\frac{y_1 + y_2}{2} \Delta x$ ва ҳоказо булгани сабабли

$$\int_a^b f(x) dx \approx \left(\frac{y_0 + y_1}{2} \Delta x + \frac{y_1 + y_2}{2} \Delta x + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \Delta x \right)$$

ёки

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right). \quad (2)$$

Бу эса *трапециялар формуласидир*.

n сон иктиёрий танлаб олинади. Бу сон қанча катта бўлса ва демак, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ қадам қанча кичик бўлса, (2) тақрибий тенгликнинг ўнг томонида ёзилган йиғинди шунча катта аниқлик билан интеграл қийматини беради.

III. *Парабола лар формуласи* (Симпсон формуласи). $[a, b]$ кесмани жуфт сонда $n=2m$ бўлакларга ажратамиз. $[x_0, x_1]$ ва $[x_1, x_2]$ кесмаларга мос ва берилган $y=f(x)$ эгри чизик билан чегараланган эгри чизикли трапециянинг юзини

$$M(x_0, y_0), \quad M_1(x_1, y_1) \quad M_2(x_2, y_2)$$

учта нуқтадан ўтувчи ва ўқи Оу ўққа параллел бўлган иккинчи даражали парабола билан чегараланган эгри чизикли трапециянинг юзи билан алмаштирамиз (229-расм). Бундай эгри чизикли трапецияни *параболик* трапеция деб атаймиз.

Ўқи Оу ўққа параллел бўлган параболанинг тенгламаси

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

кўринишда бўлади. A, B ва C коэффициентлар параболанинг берилган уч нуқта орқали ўтиш шартидан бир қийматли равишда аниқланади. Шунга ўхшаган параболаларни кесмаларнинг бошқа жуфтлари учун ҳам ясаймиз. Шундай ясалган параболик трапециялар юзларининг йиғиндиси интегралнинг тақрибий қийматини беради.

Дастлаб битта параболик трапециянинг юзини ҳисоблаймиз.

Лемма. Агар эгри чизикли трапеция

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

парабола, Ох ўқ ва оралиғи $2h$ га тенг бўлган иккита ордината билан чегараланган бўлса, у ҳолда унинг юзи

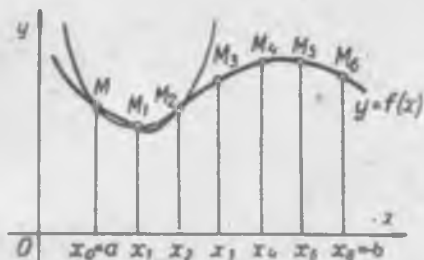
$$S = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) \text{ га тенг,} \quad (3)$$

бунда y_0 ва y_2 четдаги ординаталар, y_1 эса эгри чизиқнинг кесма ўртасидаги ординатаси.

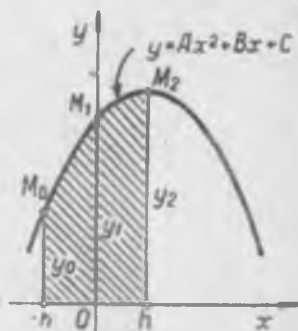
Исбот. Ёрдамчи координаталар системасини 230- расмда курсатилгандек жойлаштирамиз.

Параболанинг $y = Ax^2 + Bx + C$ тенгламасидаги коэффициентлар қуйидаги тенгламалардан аниқланади:

$$\left. \begin{array}{l} \text{агар } x_0 = -h \text{ бўлса, } y \text{ ҳолда} \\ \text{агар } x_1 = 0 \text{ бўлса, } y \text{ ҳолда} \\ \text{агар } x_2 = h \text{ бўлса, } y \text{ ҳолда} \end{array} \right\} \begin{array}{l} y_0 = Ah^2 - Bh + C, \\ y_1 = C, \\ y_2 = Ah^2 + Bh + C. \end{array} \quad (4)$$



229- расм.



230- расм.

A , B , C коэффициентларни маълум деб ҳисоблаб, парабolik трапециянинг юзини аниқ интеграл ёрдами билан ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C) dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx \right]_{-h}^h = \\ &= \frac{h}{3} (2Ah^2 + 6C). \end{aligned}$$

Аммо (4) тенгликлардан:

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C.$$

Демак,

$$S = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Шунинг исбот қилиш талаб этилган эди.

Биз яна асосий масаламизга қайтамыз (229-расмга қаранг).
(3) формуладан фойдаланиб, қуйидаги тақрибий тенгликларни ёза оламиз ($h = \Delta x$):

$$\begin{aligned} \int_{a=x_0}^{x_1} f(x) dx &\approx \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2), \\ \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx &\approx \frac{\Delta x}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4), \\ &\dots\dots\dots \\ \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}=b} f(x) dx &\approx \frac{\Delta x}{3} (y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2n}). \end{aligned}$$

Чап ва унг томонларни қушиб, чапда изланаётган интегрални, унга эса унинг тақрибий қийматини ҳосил қиламиз:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2n}), \quad (5)$$

ёки

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6m} [y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1})].$$

Бу *Симпсон формуласидир*. Бу ерда бўлиниш нуқталарнинг сони $2m$ ихтиёрий, лекин бу сон қанча катта бўлса, (5) тенгликнинг унг томонидаги йиғинди интеграл қийматини шунча аниқ ифодалайди*).

Мисол. Ушбу

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

интеграл тақрибий ҳисоблансин.

*) Интегрални берилган аниқликда ҳисоблаш учун қанча бўлиниш нуқталари олиш кераклигини аниқлашда интегрални тақрибий ҳисоблашда ҳосил бўладиган хатони баҳолаш формулаларидан фойдаланиш мумкин. Биз бу ерда бундай баҳолашни келтириб утирмаймиз. Китобхон буни анализини бирмунча тўлароқ курсларидан, масалан Фихтенгольцнинг „Дифференциал ва интеграл ҳисоб курси“ китобидан топа олади (II т., IX боб, 5-параграфга қаралсин), „Ўқитувчи“, Тошкент, 1972.

Ечиш. {1, 2} кесмани 10 та тенг бўлакка ажратамиз (231- расм).

$$\Delta x = \frac{2-1}{10} = 0,1$$

деб олиб, интеграл остидаги функция қийматлари жадвалини тузамиз:

x	$y = \frac{1}{x}$	x	$y = \frac{1}{x}$
$x_0 = 1,0$	$y_0 = 1,00000$	$x_8 = 1,6$	$y_8 = 0,62500$
$x_1 = 1,1$	$y_1 = 0,90909$	$x_9 = 1,7$	$y_9 = 0,58824$
$x_2 = 1,2$	$y_2 = 0,83333$	$x_{10} = 1,8$	$y_{10} = 0,55556$
$x_3 = 1,3$	$y_3 = 0,76923$		
$x_4 = 1,4$	$y_4 = 0,71429$		
$x_5 = 1,5$	$y_5 = 0,66667$		

I. Тўғри тўртбурчакларнинг биринчи (1) формуласини татбиқ этамиз:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1 (y_0 + y_1 + \dots + y_9) = 0,1 \cdot 7,18773 = 0,71877.$$

Тўғри тўртбурчакларнинг иккинчи (1') формуласини татбиқ этамиз:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1 (y_1 + y_2 + \dots + y_{10}) = 0,1 \cdot 6,68773 = 0,66877.$$

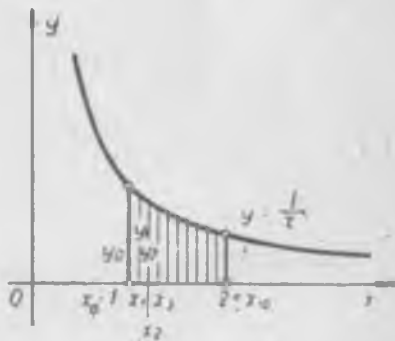
Бу ҳолда интегралнинг қиймати-ни биринчи формула оғтиги билан, иккинчи формула эса ками билан бериши 231- расмдан бевосита кўриниб турибди.

II. Трапедиялар формуласи (2) ни татбиқ этамиз.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1 \left(\frac{1 + 0,5}{2} + 6,18773 \right) = 0,69377.$$

III. Симпсон формуласи (5) ни татбиқ этамиз:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{x} &\approx \frac{0,1}{3} [y_0 + y_{10} + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9)] = \\ &= \frac{0,1}{3} (1 + 0,5 + 2 \cdot 2,72818 + 4 \cdot 3,45955) = 0,69313. \end{aligned}$$



231- расм.

C_1 коэффициентлар мураккаб касрлар билан ифодалангани учун (3) формула узундан-узоқ ва ҳисоблаш учун ноқулайдир.

Чебишев, $x_1, x_2, \dots, x_n$ абсциссалар берилмасдан, $C_1, C_2, \dots, C_n$ коэффициентлар берилган, $x_1, x_2, \dots, x_n$ абсциссалар аниқлансин деган тескари масалани қўйди.

C_1 коэффициентлар шундай берилиши керакки, (3) формула ҳисоблаш учун иложи борича содда бўлсин. C_1 коэффициентларнинг ҳаммаси ўзаро тенг бўлган ҳолдагина шундай бўлади:

$$C_1 = C_2 = \dots = C_n.$$

Агар $C_1, C_2, \dots, C_n$ коэффициентларнинг умумий қийматини C_n билан белгиласак, у ҳолда (3) формула

$$\int_a^b f(x) dx \approx C_n [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)] \quad (5)$$

кўринишни олади. (5) формула умуман тақрибий тенгликни ифодалайди, аммо $f(x)$ даражаси $n-1$ дан ошмаган кўпхад бўлса, у аниқ тенгликка айланади. Бу ҳол $C_n, x_1, x_2, \dots, x_n$ миқдорларни аниқлаш имконини беради.

Интеграллашнинг ҳар қандай юралиги учун қулай формула ҳосил қилиш мақсадида $[a, b]$ интеграллаш кесмасини $[-1, 1]$ кесмага алмаштирамиз. Бунинг учун

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

деб оламиз; бу ҳолда $t = -1$ бўлганда $x = a$; $t = 1$ бўлганда $x = b$ бўлади.

Демак,

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 \varphi(t) dt,$$

бунда $\varphi(t)$ билан t нинг интеграл остида турган функцияси белгиланган. Шундай қилиб, берилган $f(x)$ функцияни $[a, b]$ кесмада интеграллаш масаласини ҳар доим бирор бошқа $\varphi(x)$ функцияни $[-1, 1]$ кесмада интеграллаш масаласига келтириши мумкин.

Демак, масала

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = C_n [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)] \quad (6)$$

формуладаги $C_n, x_1, x_2, \dots, x_n$ сонларни шундай танлаб олиш керакки, (6) формула

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} \quad (7)$$

куринишдаги ҳар қандай $f(x)$ функция учун аниқ формула бўлсин. Бунда

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}) dx =$$

$$\begin{aligned} \text{агар } n \text{ тоқ сон бўлса, } & \left| 2 \left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \frac{a_6}{7} + \dots + \frac{a_{n-1}}{n} \right), \right. \\ \text{агар } n \text{ жуфт сон бўлса, } & \left. = 2 \left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{n-1} \right) \right. \end{aligned} \quad (8)$$

эканини эслатиб ўтамиз.

Иккинчи томондан, (6) тенгликнинг ўнг томонидаги йиғинди (7) га асосан,

$$\begin{aligned} C_n [na_0 + a_1(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + a_2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + \dots \\ \dots + a_{n-1}(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1})] \end{aligned} \quad (9)$$

га тенг. (8) ва (9) ифодаларни бир-бирига тенглаб, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ ларнинг ҳар қандай қийматларида ҳам ўринли бўлиши керак бўлган тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} 2 \left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \frac{a_6}{7} + \dots \right) = \\ = C_n [na_0 + a_1(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + \\ + a_2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + \dots + a_{n-1}(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1})]. \end{aligned}$$

Тенгликнинг ўнг ва чап томонларидаги $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ ларнинг коэффициентларини бир-бирига тенглаймиз:

$$\left. \begin{aligned} 2 &= C_n n \quad \text{ёки,} \quad C_n = \frac{2}{n}, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n &= 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 &= \frac{2}{3C_n} = \frac{n}{3}, \\ x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 &= 0, \\ x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4 &= \frac{2}{5C_n} = \frac{n}{5}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Кейинги n та тенгламадан $x_1, x_2, \dots, x_n$ абсциссаларни топамиз. n нинг турли қийматларига доир бу ечилмалар Че-

бишев томонидан топилган. Қуйидаги жадвалда оралиқ нуқта-ларнинг сони $n=3, 4, 5, 6, 7, 9$ бўлганда Чебишев топган ечимлар келтирилган:

Ординаталар сони n	C_n коэффи-циент	$x_1, x_2, \dots, x_n$ абсциссаларнинг қийматлари
3	$\frac{2}{3}$	$x_1 = -x_3 = 0,707107$ $x_2 = 0$
4	$\frac{1}{2}$	$x_1 = -x_4 = 0,794654$ $x_2 = -x_3 = 0,187592$
5	$\frac{2}{5}$	$x_1 = -x_5 = 0,832498$ $x_2 = -x_4 = 0,374541$ $x_3 = 0$
6	$\frac{1}{3}$	$x_1 = -x_6 = 0,866247$ $x_2 = -x_5 = 0,422519$ $x_3 = -x_4 = 0,266635$
7	$\frac{2}{7}$	$x_1 = -x_7 = 0,883862$ $x_2 = -x_6 = 0,529657$ $x_3 = -x_5 = 0,323912$ $x_4 = 0$
9	$\frac{2}{9}$	$x_1 = -x_9 = 0,911589$ $x_2 = -x_8 = 0,601019$ $x_3 = -x_7 = 0,528762$ $x_4 = -x_6 = 0,167906$ $x_5 = 0$

Шундай қилиб, $[-1, 1]$ кесмада интегрални тақрибий ҳисоблаш Чебишевнинг қуйидаги формуласи бўйича бажарилади:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{2}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)],$$

бунда n — жадвалда келтирилган 3, 4, 5, 6, 7 ёки 9 сонлардан бирортаси $x_1, \dots, x_n$ — шу жадвалда берилган сонлар. n га 8 қийматни ёки 9 дан катта қийматни бериб бўлмайди, чунки бу ҳолда (10) тенгламалар системаси мавҳум илдизлар беради.

Берилган интегрални интеграллаш чегаралари a ва b булса, у ҳолда Чебишев формуласи

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} [f(X_1) + f(X_2) + \dots + f(X_n)]$$

қуринишда бўлади, бунда $X_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), x_i эса жадвалда кўрсатилган қийматларни олади.

Мисол. $\int_1^2 \frac{dx}{x} (= \ln 2)$ ҳисоблансин.

Ечиш. Дастлаб ўзгарувчиларни алмаштириш ёрдамида бу интегрални интеграллаш чегаралари -1 ва $+1$ бўлган янги интегралга алмаштирамиз:

$$x = \frac{1+2}{2} + \frac{2-1}{2} t = \frac{3}{2} + \frac{t}{2} = \frac{3+t}{2}, \quad dx = \frac{dt}{2}.$$

У ҳолда

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{3+t}$$

$n = 3$ деб олиб, Чебишев формуласига мувофиқ, кейинги интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \frac{2}{3} [f(0,707107) + f(0) + f(-0,707107)].$$

Аммо $f(0,707107) = 0,269752$, $f(0) = 0,333333$, $f(-0,707107) = 0,436130$ бўлгани сабабли

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dt}{3+t} &= \frac{2}{3} (0,269752 + 0,333333 + 0,436130) = \\ &= \frac{2}{3} \cdot 1,039215 = 0,692810 \approx 0,693. \end{aligned}$$

Бу натижани тўғри тўртбурчаклар формуласи бўйича, трапециялар формуласи бўйича ҳамда Симпсон формуласи бўйича (ўтган параграфдаги ми-солга қаранг) ҳисобланган натижалар билан таққослаб, биз Чебишев формуласига мувофиқ (учта оралиқ нуқталар билан) ҳосил қилган натижамиз трапециялар формуласи бўйича (тўққизта оралиқ нуқталар билан) ҳосил этилган натижага қараганда интегралнинг ҳақиқий қийматиغا анча яқин эканини кураимиз.

Интегралларни тақрибий ҳисоблаш назарияси академик А. Н. Кривов (1863—1945) ишларида ўзининг бундан кейинги ривожини топганлигини қайд этиб ўтаемиз.

10- §. Параметрга боғлиқ бўлган интеграллар. Гамма-функция

Параметрга боғлиқ бўлган интегралларни дифференциаллаш.

$$I(a) = \int_a^b f(x, a) dx \quad (1)$$

интеграл берилган бўлсин, бунда интеграл остидаги функция бирор a параметрга боғлиқ. Агар a параметр ўзгарса, у ҳолда аниқ интегралнинг қиймати ҳам ўзгаради. Шундай қилиб, аниқ интеграл a нинг функцияси дир; шунинг учун биз уни $I(a)$ билан белгилашимиз мумкин.

1.

$$c \leq x \leq d \text{ ва } a \leq x \leq b \quad (2)$$

бўлганда $f(x, a)$ ва $f'_a(x, a)$ узлуксиз функциялар деб фараз қиламиз. Интегралдан a параметр бўйича ҳосила топамиз:

$$\lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{I(a + \Delta a) - I(a)}{\Delta a} = I'_a(a).$$

Бу ҳосилани топиш учун

$$\begin{aligned} \frac{I(a + \Delta a) - I(a)}{\Delta a} &= \frac{1}{\Delta a} \left[\int_a^b f(x, a + \Delta a) dx - \int_a^b f(x, a) dx \right] = \\ &= \int_a^b \frac{f(x, a + \Delta a) - f(x, a)}{\Delta a} dx \end{aligned}$$

эканини назарга оламиз. Интеграл остидаги функцияга Лагранж теоремасини татбиқ этамиз:

$$\frac{f(x, a + \Delta a) - f(x, a)}{\Delta a} = f'_a(x, a + \theta \Delta a),$$

бунда $0 < \theta < 1$. Аммо $f'_a(x, a)$ ёпиқ (2) соҳада узлуксиз бўлгани сабабли,

$$f'_a(x, a + \theta \Delta a) = f'_a(x, a) + \varepsilon,$$

бунда $x, a, \Delta a$ ларга боғлиқ бўлган ε миқдор $\Delta a \rightarrow 0$ да нолга интилади. Шундай қилиб,

$$\frac{I(a + \Delta a) - I(a)}{\Delta a} = \int_a^b [f'_a(x, a) + \varepsilon] dx = \int_a^b f'_a(x, a) dx + \int_a^b \varepsilon dx.$$

$\Delta x \rightarrow 0$ да лимитга ўтсак*):

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{I(a + \Delta x) - I(a)}{\Delta x} = I'_a(a) = \int_a^b f'_a(x, a) dx$$

ёки

$$\left[\int_a^b f(x, a) dx \right]'_a = \int_a^b f'_a(x, a) dx$$

формула ҳосил бўлади. Сўнгги формула *Лейбниц формуласи* дейилади.

2. Энди (1) интегралда a ва b интеграллаш чегаралари a нинг функциялари деб фараз қиламиз:

$$I(a) = \Phi[a, a(a), b(a)] = \int_{a(a)}^{b(a)} f(x, a) dx. \quad (1')$$

$\Phi[a, a(a), b(a)]$ функция a нинг мураккаб функцияси бўлиб, a ва b эса оралиқ аргументлардир. $I(a)$ дан ҳосила топиш учун кўп аргументли мураккаб функцияни дифференциаллаш қондасидан фойдаланамиз (VIII боб, 10-параграфга қarang):

$$I'(a) = \frac{\partial \Phi}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial a} \frac{da}{da} + \frac{\partial \Phi}{\partial b} \frac{db}{da}. \quad (3)$$

Аниқ интегрални ўзгарувчининг юқори чегараси бўйича дифференциаллаш ҳақидаги теоремага мувофиқ (4-§ га қarang):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \int_a^b f(x, a) dx = f[b(a), a],$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \int_a^b f(x, a) dx = - \frac{\partial}{\partial a} \int_b^a f(x, a) dx = -f[a(a), a].$$

Ниҳоят, $\frac{\partial \Phi}{\partial a}$ ҳосилани ҳисоблаш учун Лейбниц формуласини татбиқ қиламиз:

$$*) I = \int_a^b f(x, a) dx \text{ интегралда интеграл остидаги функция } \Delta x \rightarrow 0 \text{ да нолга}$$

интилади. Интеграл остидаги функциянинг нолга интилишидан интегралнинг ҳам нолга интилиши ҳамма вақт келиб чиқавермайди. Аммо, берилган ҳолда $\Delta x \rightarrow 0$ да I нолга интилади. Бу фактни биз исботсиз қабул қиламиз.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \int_a^b f'_x(x, a) dx.$$

Ҳосилаларнинг топилган ифодаларини (3) формулага қўйсак,

$$I'_x(a) = \int_{a(a)}^{b(a)} f'_x(x, a) dx + f[b(a), a] \frac{db}{da} - f[a(a), a] \frac{da}{da} \quad (4)$$

ифода ҳосил бўлади.

Лейбниц формуласи ёрдами билан баъзи бир аниқ интегралларни ҳисоблаш мумкин.

$$1\text{- мисол } I(a) = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\sin ax}{x} dx$$

интеграл ҳисоблансин.

Еч и ш. Дастлаб биз бу интегрални бевосита ҳисоблай олмаглигимизни кўраимиз, чунки $e^{-x} \frac{\sin ax}{x}$ функциянинг бошланғич функцияси элементар функциялар орқали ифода этилмайди. Берилган интегрални ҳисоблаш учун уни a параметрнинг функцияси деб қараймиз. У ҳолда унинг a бўйича ҳосиласи юқорида чиқарилган Лейбниц формуласига мувофиқ топилади*);

$$I'(a) = \int_0^{\infty} \left[e^{-x} \frac{\sin ax}{x} \right]'_x dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \cos ax dx.$$

Лекин кейинги интеграл элементар функциялар ёрдамида осон ҳисобланади; унинг қиймати $\frac{1}{1+a^2}$ га тенг. Шунинг учун $I'(a) = \frac{1}{1+a^2}$. Ҳосил қилинган айниятни интеграллаб, $I(a)$ ни топамиз;

$$I(a) = \arctg a + C. \quad (5)$$

Бундан C ни аниқлаймиз. Бунинг учун

$$I(0) = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\sin 0 \cdot x}{x} dx = \int_0^{\infty} 0 \cdot dx = 0$$

эканини эътиборга оламиз. Бундан ташқари $\arctg 0 = 0$. (5) тенгликка $a = 0$ ни қўйиб,

$$I(0) = \arctg 0 + C$$

тенгликни ҳосил қиламиз, бундан $C = 0$. Демак, a нинг ҳар қандай қиймати учун $I(a) = \arctg a$ тенглик ўринли, яъни

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\sin ax}{x} dx = \arctg a.$$

*) Лейбниц формуласи интеграллашнинг a ва b чегаралари чекли деган фарз билан чиқарилган эди. Аммо берилган ҳолда интеграллаш чегараларидан биттаси чексизликка тенг бўлса-да Лейбниц формуласи ўринлидир. Ҳосмас интегрални параметр бўйича дифференциаллаш уринли булиш шартларини Г. М. Фихтенгольцнинг „Дифференциал ва интеграл ҳисоб курси“ китобидан қаранг. „Уқитувчи“, 1970, II т. XIV боб, 3- §.

2- м и с о л. Гамма-функция.

α параметрга боғлиқ бўлган интегрални қараймиз:

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx. \quad (6)$$

Бу хосмас интегралнинг $\alpha > 0$ да мавжуд (яқинлашувчи) бўлишини курсатимиз. Буни йиғинди кўринишида тасвирлаймиз:

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \int_1^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Ўнг томондаги биринчи интеграл яқинлашувчи, чунки

$$0 < \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx < \int_0^1 x^{\alpha-1} dx = \frac{1}{\alpha}.$$

Иккинчи интеграл ҳам яқинлашувчидир. Ҳақиқатан n шундай мусбат сон бўлсинки, унда $n > \alpha - 1$ бўлсин. Бу ҳолда,

$$0 < \int_1^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx < \int_1^{\infty} x^n e^{-x} dx < \infty$$

бўлиши равшан. Кейинги интегрални, ҳар қандай бутун мусбат k сонда

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{e^x} = 0 \quad (7)$$

бўлишини ҳисобга олиб, бўлаклаб интеграллаймиз. Шундай қилиб (6) интеграл α нинг бирор функциясини аниқлайди. Бу функция $\Gamma(\alpha)$ билан белгилади ва *гамма-функция* деб аталади:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx. \quad (8)$$

Бу функциядан кўпинча математиканинг татбиқотларида фойдаланилади. α бутун сон бўлганда $\Gamma(\alpha)$ нинг қийматини топайлик. $\alpha = 1$ бўлса,

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1. \quad (9)$$

$\alpha > 1$ бутун сон бўлсин. Бўлаклаб интеграллаймиз:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = -x^{\alpha-1} e^{-x} \Big|_0^{\infty} + (\alpha-1) \int_0^{\infty} x^{\alpha-2} e^{-x} dx$$

ёки (7) ни эътиборга олиб, ушбуни ёзамиз:

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1) \Gamma(\alpha-1). \quad (10)$$

(10) ҳамда (9) га асосан, $\alpha = n$ бўлганда қуйидагини топамиз:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

11- §. Ҳақиқий ўзгарувчи комплекс функциясини интеграллаш

VII бобнинг 4- параграфида ҳақиқий ўзгарувчи x нинг комплекс функцияси $\bar{f}(x) = u(x) + iv(x)$ ва унинг ҳосиласи $\bar{f}'(x) = u'(x) + iv'(x)$ аниқланган эди.

Таъриф. Агар

$$\bar{f}'(x) = \bar{f}(x), \quad (1)$$

яъни

$$U'(x) = i V'(x) = u(x) + iv(x) \quad (2)$$

булса, $\bar{F}(x) = U(x) + iV(x)$ функция ҳақиқий ўзгарувчи комплекс функцияси $\bar{f}(x)$ нинг бошланғич функцияси дейилади.

(2) тенгликдан $U'(x) = u(x)$, $V'(x) = v(x)$, яъни $U(x)$ функция $u(x)$ учун ва $V(x)$ функция $v(x)$ учун бошланғич функциядир.

Берилган таърифдан ва бу изоҳдан агар $\bar{F}(x) = U(x) + iV(x)$ ўзн $\bar{f}(x)$ функция учун бошланғич функция бўлса, $\bar{f}(x)$ учун бошланғич функция $\bar{F}(x) + C$ кўринишда бўлади, бунда C — комплекс ихтиёрий ўзгармас. $\bar{F}(x) + C$ ифодани ҳақиқий ўзгарувчи комплекс функциясининг аниқмас интеграли деймиз ва бундай ёзамиз:

$$\int \bar{f}(x) dx = \int u(x) dx + i \int v(x) dx = \bar{F}(x) + C. \quad (3)$$

Ҳақиқий ўзгарувчининг комплекс функцияси $f(x) = u(x) + iv(x)$ нинг аниқ интегрални бундай аниқлаймиз:

$$\int_a^b \bar{f}(x) dx = \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx. \quad (4)$$

Бундай аниқлаш аниқ интегрални йиғиндининг лимити каби қилинган таърифга эид эмас, балки унга батамом мувофиқ келади.

XI бобга машқлар

1. Интеграл йиғиндиси s_n ни тузиб ва лимитга ўтиш билан $\int_a^b x^2 dx$ аниқ интегралларни ҳисобланг. Курсатма. $[a, b]$ кесмани $x_i = aq^i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) нуқталар орқали n та бўлакка ажратинг, бунда $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$.

Жав. $\frac{b^3 - a^3}{3}$. 2. $\int_a^b \frac{bx}{x^2} dx$, бунда $0 < a < b$. Жав. $\ln \frac{b}{a}$. Кўрсатма. $[a, b]$

кесма олдинги мисолдагидек бўлакларга ажратилсин. 3. $\int_a^b \sqrt{x} dx$.

Жав. $\frac{2}{3} (b^{3/2} - a^{3/2})$. Кўрсатма. 2-мисолга қаранг. 4. $\int_a^b \sin x dx$.

Жав. $\cos a - \cos b$. Кўрсатма. Дастлаб қуйидаги айниятнинг тўғрилиги кўрсатилсин:

$$\begin{aligned} \sin a + \sin(a+h) + \sin(a+2h) + \dots + \sin[a+(n-1)h] &= \\ &= \frac{\cos(a-h) - \cos(a+nh)}{2 \sin h}, \end{aligned}$$

бунинг учун чап томоннинг барча ҳадларини $\sin h$ га кўпайтириш ва бўлиш ҳамда синуслар кўпайтмасини косинуслар айирмаси билан алмаштириш керак.

5. $\int_a^b \cos x dx$. Жав. $\sin b - \sin a$.

Ньютон — Лейбниц формуласидан фойдаланиб, қуйидаги аниқ интегралларни ҳисобланг: 6. $\int_0^1 x^4 dx$. Жав. $\frac{1}{5}$. 7. $\int_0^1 e^x dx$. Жав. $e - 1$. 8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

Жав. 1. 9. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. Жав. $\frac{\pi}{4}$. 10. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Жав. $\frac{\pi}{4}$. 11. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \lg x dx$.

Жав. $\ln 2$. 12. $\int_1^e \frac{dx}{x}$. Жав. 1. 13. $\int_1^x \frac{dx}{x}$. Жав. $\ln |x|$. 14. $\int_0^x \sin x dx$.

Жав. $2 \sin^2 \frac{x}{2}$. 15. $\int_0^x x^2 dx$. Жав. $\frac{x^3 - a^3}{3}$. 16. $\int_1^z \frac{dx}{2x-1}$. Жав. $\ln(2z-1)$.

17. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$. Жав. $\frac{\pi}{4}$. 18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$. Жав. $\frac{\pi}{4}$.

Кўрсатилган алмаштиришларни татбиқ қилиб, қуйидаги интегралларни ҳисобланг: 19. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x dx$, $\cos x = t$. Жав. $\frac{1}{3}$. 20. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 + 2 \cos x}$.

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t. \text{ Жас. } \frac{\pi}{\sqrt{5}}. \quad 21. \int \frac{x dx}{\sqrt{2+4x}}, \quad 2+4x=t^2, \text{ Жас. } \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$22. \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}, \quad x = \operatorname{tg} t. \text{ Жас. } \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}. \quad 23. \int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx, \quad x-1=t^2.$$

$$\text{Жас. } 2(2 - \operatorname{arctg} 2). \quad 24. \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dz}{z \sqrt{z^2+1}}, \quad z = \frac{1}{x}. \quad \text{Жас. } \ln \frac{3}{2}.$$

$$25. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi d\varphi}{6-5 \sin \varphi + \sin^2 \varphi}, \quad \sin \varphi = t. \text{ Жас. } \ln \frac{4}{3}.$$

Қуйдаги тенгликларни исботланг: $26. \int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$

$$-x)^m dx \quad (m > 0, n > 0). \quad 27. \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx.$$

$$28. \int_0^a f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a f(x^2) dx.$$

Қуйдаги хосмас интегралларни ҳисобланг: $29. \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}. \text{ Жас. } 1.$

$$30. \int_0^{\infty} e^{-x} dx. \text{ Жас. } 1. \quad 31. \int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2}. \text{ Жас. } \frac{\pi}{2a} (a > 0). \quad 32. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{Жас. } \frac{\pi}{2}. \quad 33. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}. \text{ Жас. } \frac{1}{4}. \quad 34. \int_0^1 \ln x dx. \text{ Жас. } -1. \quad 35. \int_0^{\infty} x \sin x dx.$$

$$\text{Жас. Интеграл узоқлашувчи.} \quad 36. \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}. \text{ Жас. Интеграл узоқлашувчи.}$$

$$37. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}. \text{ Жас. } \pi. \quad 38. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}. \text{ Жас. } \frac{3}{2}. \quad 39. \int_0^2 \frac{dx}{x^2}. \text{ Жас.}$$

$$\text{Интеграл узоқлашувчи.} \quad 40. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}. \text{ Жас. } \frac{\pi}{2}. \quad 41. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}. \text{ Жас.}$$

$$\text{Интеграл узоқлашувчи.} \quad 42. \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx dx \quad (a > 0). \text{ Жас. } \frac{b}{a^2+b^2}.$$

43. $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx \, (a > 0)$. Жав. $\frac{a}{a^2 + b^2}$

Қуйдаги интегралларнинг тақрибий қийматларини топинг. 44. $\ln 5 =$

$= \int \frac{dx}{x}$ интегрални трапециялар формуласи бўйича ва Симпсон формуласи

бўйича ҳисобланг ($n = 12$). Жав. 1,6182 (трапециялар формуласи бўйича);

1,6098 (Симпсон формуласи бўйича). 45. $\int_1^{11} x^3 \, dx$ ни трапециялар формуласи

ва Симпсон формуласи бўйича ҳисобланг ($n = 10$). Жав. 3690; 3660.

46. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$, трапециялар формуласи бўйича ($n = 6$). Жав. 0,8109.

47. $\int_1^3 \frac{dx}{2x-1}$, Симпсон формуласи бўйича ($n = 4$). Жав. 0,8111. 48. $\int_4^{10} \lg_{10} x \, dx$,

трапециялар формуласи бўйича ва Симпсон формуласи бўйича ($n = 10$).

Жав. 6,0656; 6,0896. 49. $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ муносабатдан Симпсон формуласини

тадбиқ этиб ($n = 10$), π нинг қийматини ҳисобланг; Жав. 3,14159.

50. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \, dx$, Симпсон формуласи бўйича ($n = 10$). Жав. 1,371.

51. $\int_0^{\infty} e^{-ax} \, dx = \frac{1}{a}$ тенгликка асосланиб, бунда $a > 0$, $n > 0$ бутун сон бўл-

ганда $\int_0^{\infty} e^{-a x^n} \, dx$ интегралнинг қийматини топинг. Жав. $n!$ 52. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a} =$

$= \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$ тенгликка асосланиб, $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n+1}}$ интегралнинг қийматини то-

пинг. Жав. $\frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n n!}$ 53. $\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-ax}}{x e^x} \, dx$ интегрални ҳисоб-

ланг. Жав. $\ln(1+a)$ ($a > -1$). 54. $\int_0^1 x^{n-1} \, dx = \frac{1}{n}$ тенгликдан фойдала-

ниб, $\int_0^1 x^{n-1} (\ln x)^k \, dx$ интегрални ҳисобланг. Жав. $(-1)^k \frac{k!}{n^{k+1}}$.

ХІІ БОБ

АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ ГЕОМЕТРИЯГА ВА МЕХАНИКАГА ТАТБИҚИ

1-§. Тўғри бурчакли координаталар системасида юзларни ҳисоблаш

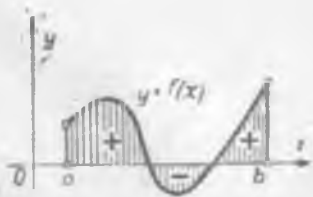
Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада манфий бўлмаса, яъни $f(x) \geq 0$ бўлса, у ҳолда $y = f(x)$ эгри чизиқ, Ox ўқ, $x = a$ ва $x = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган юз (214- расм)

$$Q = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

га тенг бўлиши маълум (ХІ боб, 2- §).

Агар $[a, b]$ кесмада $f(x) \leq 0$ бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x) dx$ аниқ интеграл ҳам ≤ 0 бўлади. Абсолют қийматига кура бу интеграл тегишли эгри чизиқли трапециянинг Q юзига тенг:

$$-Q = \int_a^b f(x) dx.$$



232- расм.

Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада ишорасини чекли сон марта узгартирса, у ҳолда интегрални бутун $[a, b]$ кесмада қисмий кесмачалар бўйича интеграллар йиғиндисига ажратамиз. Қаерда $f(x) \geq 0$ бўлса, ўша кесмачада интеграл

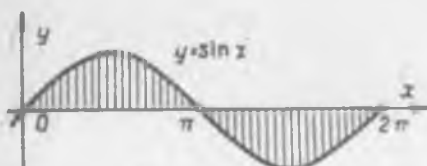
мусбат, қаерда $f(x) \leq 0$ бўлса, ўша кесмачада интеграл манфий бўлади. Бутун кесма бўйича олинган интеграл Ox ўқнинг юқорисида ва пастида ётган юзларнинг айирмасини беради (232- расм). Юзлар йиғиндисини одатдаги маънода ҳосил қилиш

учун юқорида кўрсатилган кесмалар бўйича олинган интеграллар абсолют қийматлари йиғиндисини топиш ёки

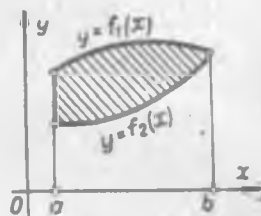
$$Q = \int_a^b |f(x)| dx$$

интегрални ҳисоблаш керак.

1-мисол. $0 < x < 2\pi$ бўлганда $y = \sin x$ синусоида ва Ox ўқ билан чегараланган Q юз ҳисоблансин (233-рasm).



233-рasm.



234-рasm.

Е чи ш. $0 < x < \pi$ бўлганда $\sin x > 0$, $\pi < x < 2\pi$ бўлганда эса $\sin x < 0$ бўлагани сабабли

$$Q = \int_0^{\pi} \sin x dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \right| = \int_0^{2\pi} |\sin x| dx,$$

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = -(-1 - 1) = 2,$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos \pi) = -2.$$

Демак, $Q = 2 + |-2| = 4$.

Агар $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ эгри чизиқлар ва $x = a$, $x = b$ ординаталар билан чегараланган юзни ҳисоблаш керак бўлса, у ҳолда $f_1(x) > f_2(x)$ шарти бажарилганда

$$Q = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx \quad (2)$$

бўлади (234-рasm).

2-мисол. $y = \sqrt{x}$ ва $y = x^3$ эгри чизиқлар билан чегараланган юз ҳисоблансин (235-рasm).

Е чи ш. Эгри чизиқлар кесишган нуқталарини топамиз. Улар $\sqrt{x} = x^3$, $x = x^4$ тенгламадан топилади:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$$

Демак,

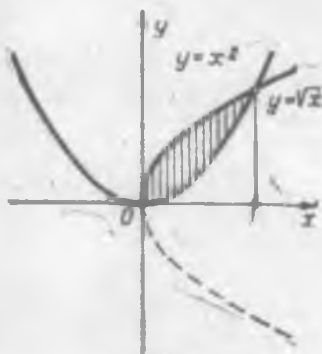
$$Q = \int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx =$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

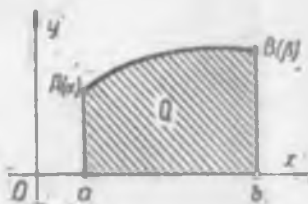
Энди тенгламалари параметрик кўринишда берилган

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad (3)$$

бунда $a \leq t \leq \beta$ ва $\varphi(a) = a$, $\varphi(\beta) = b$ эгри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапеция юзини ҳисоблаймиз (236- расм).



235- расм.



236- расм.

А тенгламалар $[a, b]$ кесмада бирор $y = f(x)$ функцияни аниқлайди деб фарз қиламиз, у ҳолда эгри чизиқли трапециянинг юзини

$$Q = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b y dx$$

формула билан ҳисоблаш мумкин бўлади.

Бу интегралда ўзгарувчини алмаштирамиз: $x = \varphi(t)$,

$$dx = \varphi'(t) dt.$$

(3) тенгламаларга асосан: $y = f(x) = f[\varphi(t)] = \psi(t)$. Демак,

$$Q = \int \psi(t) \varphi'(t) dt. \quad (4)$$

Е ч и ш. Агар θ бурчак 0 дан $\frac{\pi}{4}$ гача ўзгарса, радиус-вектор изланётган юзнинг чорагини чизади:

$$\frac{1}{4}Q = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\theta = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = \frac{a^2}{2} \frac{\sin 2\theta}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}.$$

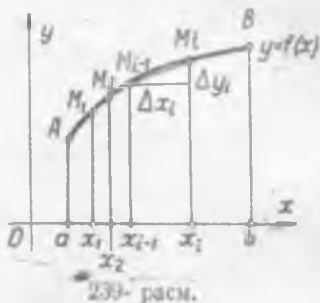
Демак, лемниската билан чегараланган юз $Q = a^2$ га тенг.

3- §. Эгри чизиқ ёйининг узунлиги

1. Тўғри бурчакли координаталар системасида эгри чизиқ ёйининг узунлиги. Текисликда тўғри чизиқли координаталар системасида эгри чизиқ $y = f(x)$ тенглама билан берилган бўлсин.

Бу эгри чизиқнинг $x = a$ ва $x = b$ вертикал тўғри чизиқлар орасидаги AB ёйининг узунлигини топамиз (239- расм).

VI боб 1- § да ёй узунлигининг таърифи берилган эди. Бу таърифни эслатиб утамыз. AB ёйда абсциссалари $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n = b$ бўлган $A, M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, B$ нуқталарни оламиз ва $AM_1, M_1M_2, \dots, M_{n-1}B$ ватарларни ўтказамиз, уларнинг узунликларини мос тартибда $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ билан белгилаймиз. Бу ҳолда AB ёй ичига чизилган $AM_1M_2 \dots M_{n-1}B$ синиқ чизиқ ҳосил бўлади. Синиқ чизиқнинг узунлиги



$$s_n = \sum_{i=1}^n \Delta s_i.$$

s ёйнинг узунлиги деб ички чизилган синиқ чизиқнинг энг катта зведноси узунлиги нолга интилгандаги лимитига айтилади:

$$s = \lim_{\max \Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta s_i. \quad (1)$$

Биз ҳозир, агар $f(x)$ функция ҳамда унинг $f'(x)$ ҳосиласи $a \leq x \leq b$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда бу лимитнинг мавжудлигини исбот қиламиз. Шу билан бирга ёй узунлигини ҳисоблаш усули ҳам берилади.

$\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$ деб белгилаймиз. Бу ҳолда:

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i.$$

Лагранж теоремасига асосан:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i),$$

бунда $x_{i-1} < \xi_i < x_i$. Демак,

$$\Delta s_i = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i.$$

Шундай қилиб, ички чизилган синиқ чизиқнинг узунлиги

$$s_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i.$$

Шартга кўра $f'(x)$ функция узлуксиз, демак, $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ функция ҳам узлуксиз. Шунинг учун интеграл йиғиндининг limiti мавжуд ва у қуйидаги аниқ интегралга тенг:

$$s = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Шундай қилиб, ёй узунлигини ҳисоблаш учун

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (2)$$

формулани ҳосил қилдик.

1-изох. Кейинги формулага асосланиб, ёй узунлигидан абсцисса бўйича ҳосила олшимиз мумкин. Агар интегралнинг юқори чегарасини ўзгарувчи деб ҳисобласак ва уни x билан белгиласак (интеграллаш ўзгарувчисини ўзгартирмаймиз), ёй узунлиги s x нинг функцияси бўлади:

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Бу интегрални юқори чегараси бўйича дифференциаллаб,

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (3)$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу формула VI бобнинг биринчи параграфда бошқача фаразлар билан ҳосил қилинган эди.

Бу эса параметрик кўринишда берилган эгри чизиқ билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзини ҳисоблаш формуласидир.

3-мисол. $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ эллипс билан чегараланган соҳанинг юзи ҳисоблансин.

Еч и ш. Эллипснинг юқори ярим юзини ҳисоблаб, уни иккига кўпайтирамиз. Бу ерда x нинг қиймати $-a$ дан $+a$ гача ўзгаради, демак, t нинг қиймати π дан 0 гача ўзгаради.

$$\begin{aligned} Q &= 2 \int_{\pi}^0 (b \sin t) (-a \sin t dt) = -2ab \int_{\pi}^0 \sin^2 t dt = 2ab \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = \\ &= 2ab \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = 2ab \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\pi} = \pi ab. \end{aligned}$$

4-мисол. Ох ўқ ва $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ циклоиданинг бир аркаси билан чегараланган юз ҳисоблансин.

Еч и ш. t нинг қиймати 0 дан 2π гача ўзгарганда x нинг қиймати 0 дан $2\pi a$ гача ўзгаради.

(4) формулага асосан бу юз қуйидагича ҳисобланади:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) a(1 - \cos t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \\ &= a^2 \left[\int_0^{2\pi} dt - 2 \int_0^{2\pi} \cos t dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt \right]; \\ \int_0^{2\pi} dt &= 2\pi, \int_0^{2\pi} \cos t dt = 0, \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \pi. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, натижада $Q = a^2(2\pi + \pi) = 3\pi a^2$ ҳосил бўлади.

2-§. Қутб координаталар системасида эгри чизиқли секторнинг юзи

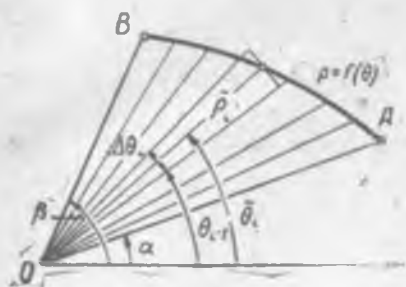
Қутб координаталар системасида эгри чизиқ

$$\rho = f(\theta)$$

тенглама билан берилган бўлсин, бу ерда $f(\theta)$ функция $\alpha \leq \theta \leq \beta$ кесмада узлуксиз.

$\rho = f(\theta)$ эгри чизиқ, $\theta = \alpha$ ва $\theta = \beta$ радиус-векторлар билан чегараланган OAB секторнинг юзини топамиз.

Берилган юзни $\alpha = \theta_0$, $\theta = \theta_1, \dots, \theta_n = \beta$ радиус-векторлар билан n та бўлакка ажратамиз. Ўтказилган радиус-векторлар



237- расм.

ораларидаги бурчакларни $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \dots, \Delta\theta_n$ билан белгилаймиз (237- расм).

θ_{i-1} билан θ_i орасидаги бирор $\bar{\theta}_i$ бурчакка мос радиус-векторнинг узунлигини $\bar{\rho}_i$ орқали белгилаймиз. Радиуси $\bar{\rho}_i$ ва марказий бурчаги $\Delta\theta_i$ бўлган доиравий секторни қараймиз. Унинг юзи:

$$\Delta Q_i = \frac{1}{2} \bar{\rho}_i^2 \Delta\theta_i.$$

Ушбу йиғинди

$$Q_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \bar{\rho}_i^2 \Delta\theta_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [f(\bar{\theta}_i)]^2 \Delta\theta_i$$

„эзнапоясимон“ секторнинг юзини беради.

Бу йиғинди $\alpha \leq \theta < \beta$ кесмада $\rho^2 = [f(\theta)]^2$ функциянинг интеграл йиғиндисин бўлгани сабабли унинг лимити $\max \Delta\theta_i \rightarrow 0$ да

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\theta$$

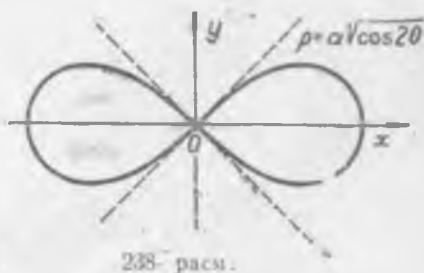
аниқ интегралга тенг. Бу $\Delta\theta_i$ бурчак ичида қандай $\bar{\rho}_i$ радиус-векторни олишимизга боғлиқ эмас. Бу лимит шаклнинг изланган юзи учун қабул қилниши табиийдир*).

Шундай қилиб, OAB секторнинг юзи:

$$Q = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\theta \quad (1)$$

ёки

$$Q = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta. \quad (1')$$



238- расм.

Мисол. $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$ лемниската билан чегараланган юз ҳисоблансин (238- расм).

* Юзнинг бу таърифи билан олдинги берилган таърифи орасида ҳеч қандай зиддик йўқлигини кўрсатиш мумкин; бошқача айтганда, агар эгри чизиқли сектор юзини эгри чизиқли трапециялар ёрдами билан ҳисобласак, яна ўша натижани ҳосил қиламиз.

1- мисол $x^2 + y^2 = r^2$ айлана узунлиги аниқлансин.

Ечиш. Дастлаб айлананинг биринчи квадрантда ётган тўртдан бир қисмининг узунлигини ҳисоблаймиз. У ҳолда AB ёйнинг тенгламаси:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2},$$

бундан

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Демак,

$$\frac{1}{4}s = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = r \arcsin \frac{x}{r} \Big|_0^r = r \frac{\pi}{2}.$$

Бутун айлананинг узунлиги $s = 2\pi r$.

Энди эгри чизик тенгламаси

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \quad (4)$$

параметрик кўринишда берилган бўлса, бу эгри чизик ёйнинг узунлигини топамиз, бунда $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ узлуксиз ҳосилали узлуксиз функциялар, шу билан бирга $\varphi'(t)$ берилган оралиқда нолга айланмайди. Бу ҳолда (4) тенглама бирор $v = f(x)$ функцияни аниқлайди; бу функция узлуксиз бўлиб, $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ узлуксиз ҳосилага эга.

$a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ бўлсин. Бу ҳолда (2) интегралда $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t) dt$ алмаштиришни бажариб,

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right]^2} \varphi'(t) dt$$

ёки

$$s = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt \quad (5)$$

формулани ҳосил қиламиз.

2-и з о ҳ. (5) формула вертикал тўғри чизиклар билан бирдан ортик нуқталарда кесишадиган эгри чизиклар учун ҳам (жумладан, ёпиқ эгри чизиклар учун) ўз кучини сақлайди; бунинг исбот қилиш мумкин, лекин эгри чизикнинг ҳамма нуқталарида $\varphi'(t)$ ва $\psi'(t)$ ҳосилаларнинг иккаласи ҳам узлуксиз бўлиши керак.

Мисол. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ астроиданинг узунлиги ҳисоблансин.

Ечиш. Эгри чизик иккала координата оқларига нисбатан симметрик бўлгани учун, дастлаб унинг биринчи квадрантда жойлашган тўртдан бир

ҳисмининг узунлигини ҳисоблаймиз. $\frac{dx}{dt} = -3a \cos^2 t \sin t$, $\frac{dy}{dt} = 3a \sin^2 t \cos t$ ҳосилаларни топамиз. t параметр 0 дан $\frac{\pi}{2}$ гача ўзгаради. Демак,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}s &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t} dt = \\ &= 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = 3a \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2}, \quad s = 6a. \end{aligned}$$

3-и з о ҳ. Агар эгри чизиқ ф а з о д а параметрик тенгламалар

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \quad (6)$$

билан берилган бўлса (бунда $\alpha \leq t \leq \beta$), у ҳолда ёйининг узунлиги (текисликдаги ёй узунлиги каби) ички чизилган синиқ чизиқ энг катта звеносининг узунлиги нолга интилгандаги лимити каби аниқланади (IX боб 1- § га қаранг). Агар $\varphi(t)$, $\psi(t)$ ва $\chi(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ кесмада узлуксиз ҳамда узлуксиз ҳосилаларга эга бўлса, эгри чизиқ аниқ лимитга эга (яъни унинг учун юқорида кўрсатилган лимит мавжуд) булиб, у

$$s = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2} dt \quad (7)$$

формула билан аниқланади. Кейинги натижани исботсиз қабул қиламиз.

3-м и с о л. t параметр 0 дан 2π гача ўзгарганда винт чизиги

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = amt$$

ёйининг узунлиги ҳисоблансин.

Е ч и ш. Берилган тенгламалардан: $dx = -a \sin t dt$, $dy = a \cos t dt$, $dz = am dt$ эканини топамиз. Буларни (7) формулага қўйиб,

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + a^2 m^2} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + m^2} dt = 2\pi a \sqrt{1 + m^2}$$

эканини топамиз.

2. Қутб координаталар системасида эгри чизиқ ёйининг узунлиги. Қутб координаталар системасида эгри чизиқнинг тенгламаси

$$\rho = f(\theta) \quad (8)$$

булсин, бунда ρ қутб радиуси, θ қутб бурчаги.

Қутб координаталардан Декарт координаталарига ўтиш формуласини ёзамиз:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta.$$

Агар бунда ρ урнига унинг θ орқали (8) ифодасини қўйсак, у ҳолда

$$x = f(\theta) \cos \theta, \quad y = f(\theta) \sin \theta$$

тенгламалар ҳосил бўлади. Бу тенгламаларга эгри чизиқнинг параметрик тенгламалари деб қараш ва ёй узунлигини ҳисоблаш учун (5) формулани татбиқ этиш мумкин. Бунинг учун x ва y дан θ параметр бўйича ҳосила оламиз:

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta.$$

Бу ҳолда

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = [f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2 = \rho'^2 + \rho^2.$$

Демак,

$$s = \int_a^b \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\theta.$$

4-мисол. $\rho = a(1 + \cos \theta)$ кардиониданинг узунлиги топилсин (240-рasm).
 5-қутб бурчагини 0 дан π гача ўзгартиб, изланаётган узунлиқнинг ярмини топамиз. Бу ерда $\rho' = -a \sin \theta$. Демак,

$$\begin{aligned} s &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1 + \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta} d\theta = 2a \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2 \cos \theta} d\theta = \\ &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8a \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 8a. \end{aligned}$$

5-мисол. $a > b$ деб фараз қилиб,

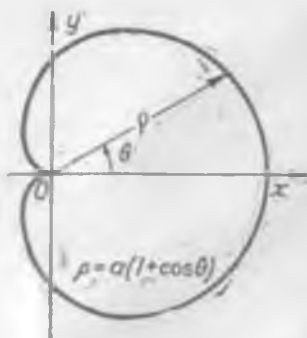
$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= b \sin t, \end{aligned} \right\} 0 < t < 2\pi$$

эллипсининг узунлиги ҳисоблансин.

Ечиш. Ҳисоблаш учун (5) формуладан фойдаланамиз. Дастлаб ёй узунлигининг

$\frac{1}{4}$ қисмини, яъни параметрнинг $t = 0$ дан

$t = \frac{\pi}{2}$ гача ўзгаришига мос бўлган ёйнинг узунлигини ҳисоблаймиз:



240-рasm.

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi}{4} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 (1 - \cos^2 t) + b^2 \cos^2 t} dt = \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 t} dt = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cos^2 t} dt = \\
 &= a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t} dt,
 \end{aligned}$$

бунда $k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$. Демак,

$$s = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t} dt.$$

Фақат кейинги интегрални ҳисоблашгина қолди. Аммо маълумки, бу интеграл элементар функциялар билан ифодаланмайди (X боб 14-параграфга қаранг). Бу интегрални фақат тақрибий ҳисоблаш методлари билан (масалан, Симпсон формуласи билан) ҳисоблаш мумкин.

Жумладан, агар эллипснинг катта ярим ўқи 5, кичик ярим ўқи 4 бўлса, у ҳолда $k = \frac{3}{5}$ ва эллипснинг узунлиги

$$s = 4 \cdot 5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cos^2 t} dt.$$

Кейинги интегрални $[0, \pi/2]$ кесмани тўрт бўлакка бўлиб), Симпсон формуласи бўйича ҳисоблаб, интегралнинг тақрибий қийматини топамиз:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{9}{25} \cos^2 t} dt \approx 1,298,$$

демак, бутун эллипс ёйининг узунлиги тақрибан $s \approx 25,96$ узунлик бирлигига тенг.

4-§. Жисмнинг ҳажмини параллел кесимлар юзлари бўйича ҳисоблаш

Бирор T жисм берилган бўлсин. Бу жисмни Ox уққа перпендикуляр текислик билан кесишдан ҳосил бўлган ҳар қандай кесимининг юзи маълум деб фараз қиламиз (241-расм). Бу юз кесувчи текислиكنинг вазиятига боғлиқ, яъни x нинг функцияси бўлади:

$$Q = Q(x).$$

$Q(x)$ ни x нинг узлуксиз функцияси деб фараз қилиб, берилган жисм ҳажмини аниқлаймиз. $x = x_0 = a$, $x = x_1$, $x = x_2, \dots$, $x = x_n = b$ текисликларни ўтказамиз.

Бу текисликлар жисмни қатламларга ажратади.

Ҳар бир $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ қисмий ораликда ихтиёрий ξ_i нуқта танлаб оламиз ва i нинг ҳар бир ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) қиймати учун ясовчиси x лар ўқиға параллел бўлиб, йўналтирувчиси T жисмни $x = \xi_i$ текислик билан кесишдан ҳосил бўлган кесимнинг контуридан иборат бўлган цилиндрик жисм ясаймиз. Асосининг юзи

$$Q(\xi_i) \quad (x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i)$$

ва баландлиги Δx_i бўлган бундай элементар цилиндрнинг ҳажми

$Q(\xi_i) \Delta x_i$ га тенг. Ҳамма цилиндрларнинг ҳажми

$$v_n = \sum_{i=1}^n Q(\xi_i) \Delta x_i$$

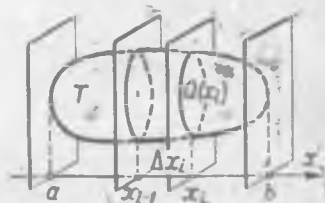
бўлади. $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ да бу йиғиндининг лимити (агар у мавжуд бўлса) берилган жисмнинг ҳажми дейилади:

$$v = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i) \Delta x_i$$

v_n миқдор $a \leq x \leq b$ кесмада узлуксиз $Q(x)$ функциянинг интеграл йиғиндисидир, шунинг учун кўрсатилган лимит мавжуд ва у

$$v = \int_a^b Q(x) dx \quad (1)$$

аниқ интеграл билан ифодаланади.



241- расм.

Мисол. Ушбу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

уч ўқли эллипсоиднинг ҳажми ҳисоблансин (242- расм).

Ечиш. Эллипсоидни *Oyz* текисликка параллел бўлиб унда x масофадан узоқликдан ўтган текислик билан кесганда $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$ ёки ярим ўқлари

$$b_1 = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad c_1 = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

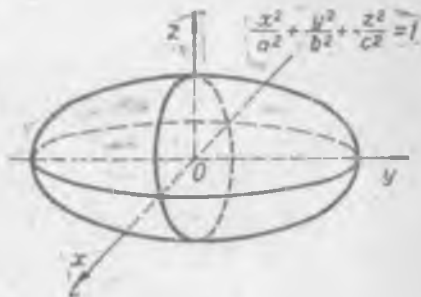
бўлган эллипс

$$\frac{y^2}{\left[b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right]^2} + \frac{z^2}{\left[c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right]^2} = 1$$

ҳосил бўлади.

Аммо бундай эллипснинг юзи $\pi b_1 c_1$ га тенг (1- параграф 3- мисолга қаранг). Шунинг учун:

$$Q(x) = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$



242- расм.

Эллипсоиднинг ҳажми:

$$v = \pi bc \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi bc \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) \Big|_{-a}^a = \frac{4}{3} \pi abc.$$

Агар $a = b = c$ бўлса, эллипсоид шарга айланади, бу ҳолда

$$v = \frac{4}{3} \pi a^3$$

ни ҳосил қиламиз.

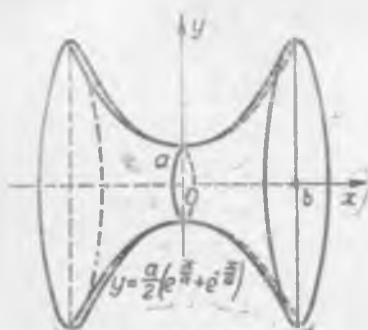
5- §. Айланиш жисмининг ҳажми

$y = f(x)$ эгри чизиқ, Ox ўқ ва $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли $aABb$ трапециянинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмни қарайлик.

Бу ҳолда жисмининг абсциссалар ўқиға перпендикуляр текислик билан кесишдан ҳосил булган ихтиёрий кесими доира бўлиб, унинг юзи

$$Q = \pi y^2 = \pi [f(x)]^2.$$

Ҳажми ҳисоблашнинг умумий формуласини татбиқ этиб [4- §. (1) формула], айланиш жисмининг ҳажмини ҳисоблаш учун



243- расм.

$$v = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

формулани ҳосил қиламиз.

Мисол. x дан $x = b$ гача ораликда

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

зanjир чизиқнинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмининг ҳажми ҳисоблансин (243- расм).

Еч и ш.

$$\begin{aligned} v &= \pi \frac{a^2}{4} \int_0^b \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)^2 dx = \frac{\pi a^2}{4} \int_0^b \left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}} \right) dx = \\ &= \frac{\pi a^2}{4} \left[\frac{a}{2} e^{\frac{2x}{a}} + 2x - \frac{a}{2} e^{-\frac{2x}{a}} \right]_0^b = \frac{\pi a^2}{8} \left(e^{\frac{2b}{a}} - e^{-\frac{2b}{a}} \right) + \frac{\pi a^2 b}{2}. \end{aligned}$$

6- §. Айланиш жисмининг сирти

Бизга $y = f(x)$ эгри чизиқнинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт берилган бўлсин. $a \leq x \leq b$ ораликда бу сиртнинг юзини аниқлаймиз. $f(x)$ функция $[a, b]$ кесманинг ҳамма нуқталарида узлуксиз ва узлуксиз ҳосиллага эга деб фараз қиламиз.

3- параграфдаги каби $AM_1, M_1M_2, \dots, M_{n-1}B$ ватарларни ўтказамиз ва уларнинг узунликларини $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ билан белгилаймиз (244- расм).

Узунлиги Δs_i ($i = 1, 2, \dots, n$) бўлган ҳар бир ватар айланда кеск конус чизади, унинг ΔP_i сирти:

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta s_i.$$

Аmmo

$$\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right)^2} \Delta x_i.$$

Лагранж теоремасини татбиқ этамиз:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i), \text{ бунда } x_{i-1} < \xi_i < x_i$$

демак,

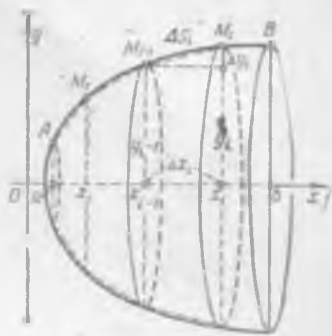
$$\Delta s_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i,$$

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i.$$

Синиқ чизиқ билан чизилган сирт

$$P_n = 2\pi \sum_{i=1}^n \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i,$$

ёки



244-расм.

$$P_n = \pi \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i \quad (1)$$

Йигиндига тенг бўлиб, бу йигинди синиқ чизиқнинг барча звенолари бўйича тарқалгандир. Синиқ чизиқнинг энг катта звеноси Δs_i нолга интилгандаги бу йигиндининг limiti қаралиётган айланиш сиртининг юзи дейилади. (1) йигинди

$$2\pi f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} \quad (2)$$

функция учун интеграл йигинди бўла олмайди, чунки $[x_{i-1}, x_i]$ кесмага мос бўлган қушилувчида бу кесманинг бир неча (x_{i-1}, x_i, ξ_i) нуқталари қатнашаётир. Лекин (1) йигиндининг limiti (2) функция интеграл йигиндисининг лимитига тенг бўлишини исбот қилиш мумкин, яъни:

$$\begin{aligned} P &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \pi \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i = \\ &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \pi \sum_{i=1}^n 2f(\xi_i) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i \end{aligned}$$

ёки

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \quad (3)$$

Мисол. $y^2 = 2px$ параболанинг x нинг $x=0$ дан $x=a$ гача ўзгартишига мос ёйининг Ox атрофида айланишдан ҳосил бўлган параболоиднинг сирти аниқлансин.

Ечиш.

$$y = \sqrt{2px}, \quad y' = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}, \quad \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{2p}{4x}} = \sqrt{\frac{4x + p}{4x}}.$$

(3) формулага асосан:

$$P = 2\pi \int_0^a \sqrt{2px} \sqrt{\frac{2x+p}{2x}} dx = 2\pi \sqrt{p} \int_0^a \sqrt{2x+p} dx =$$

$$= 2\pi \sqrt{p} \left[\frac{2}{3} (2x+p)^{3/2} \right]_0^a = \frac{2\pi \sqrt{p}}{3} [(2a+p)^{3/2} - p^{3/2}].$$

7-§. Ишни аниқ интеграл ёрдамида ҳисоблаш

Бирор F куч таъсири остида M моддий нуқта Os тўғри чиқиқ бўйича ҳаракат қилсин, бунда кучнинг йўналиши ҳаракат йўналиши билан бир хил бўлсин. M нуқта $s = a$ вазиятдан $s = b$ вазиятга кўчганда F кучнинг бажарган ишини топиш талаб этилади.

1) Агар F куч ўзгармас бўлса, у ҳолда A иш F куч билан ўтилган йўл узунлиги кўпайтмаси билан ифодаланади, яъни

$$A = F(b - a).$$

2) F куч моддий нуқтанинг олган ўрнига қараб ўзлуксиз ўзгаради, яъни $a \leq s \leq b$ кесмада $F(s)$ ўзлуксиз функцияни ифодалайди деб фараз қиламиз.

$[a, b]$ кесмани узунликлари

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$$

бўлган n та ихтиёрий бўлакка бўламиз, ундан кейин ҳар бир $[s_{i-1}, s_i]$ қисмий кесмада ихтиёрий ξ_i нуқта танлаб оламиз ва $F(s)$ кучнинг

$\Delta s_i (i = 1, 2, \dots, n)$ йўлда бажарган ишини

$$F(\xi_i) \Delta s_i$$

кўпайтма билан алмаштирамиз. Бу эса бир қисмий кесмада биз F кучни ўзгармас миқдор деб қабул қилишимизни, чунончи $F = F(\xi_i)$ деб фараз қилишимизни билдиради. Бундай ҳолда $F(\xi_i) \Delta s_i$ ифода Δs_i етарлича кичик бўлганда F кучнинг Δs_i йўлда бажарган ишининг тақрибий қийматини беради, йиғинди

$$A_n = \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \Delta s_i$$

эса F кучнинг бутун $[a, b]$ кесмада бажарган ишининг тақрибий ифодаси бўлади.

A_n йиғинди $[a, b]$ кесмада $F = F(s)$ куч учун тузилган интеграл йиғинди экани ўз-ўзидан тушунарли. Бу йиғиндининг

$\max(\Delta s_i) \rightarrow 0$ даги лимити мавжуд ва у $R(s)$ кучнинг $s = a$ нуқтадан $s = b$ нуқтагача бўлган йўлда бажарган ишини ифодалайди:

$$A = \int_a^b F(s) ds. \quad (1)$$

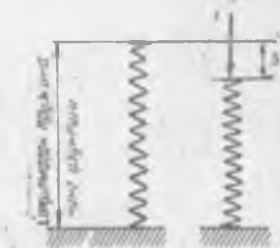
1- м и с о л. Винт пружинасининг S қисилиши унга таъсир этувчи F кучга пропорционал. Агар пружинани 1 см қисиш учун 1 кг куч керак бўлса, F куч пружинани 5 см қисиши учун қанча иш бажариши керак бўлиши ҳисоблансин (245- расм).

Е ч и ш. Шартга кўра F куч ва S силжиш $F = kS$ муносабат орқали боғланган, бунда k ўзгармас сон.

S ни метр билан, F ни килограмм билан ифодалаймиз. $S=0,01$, $F=1$ бўлганда $1=k \cdot 0,01$ бўлади, бундан $k=100$, $F=100S$.

(1) формулага асосан:

$$A = \int_0^{0,05} 100S dS = 100 \frac{S^2}{2} \Big|_0^{0,05} = 0,125 \text{ кгм.}$$



245- расм.

2- м и с о л. e_1 электр заряди ўзидан r масофада турган (ишораси бир хил) e_2 зарядни F куч билан итарса, бу куч

$$F = k \frac{e_1 e_2}{r^2}$$

формула билан ифодаланади, бунда k ўзгармас сон.

e_1 заряд санок бошланган нуқта деб қабул этилган A_0 нуқтага жойлашган деб фараз қилиб, e_2 заряднинг e_1 заряддан r_1 масофа узоқда бўлган A_1 нуқтадан e_1 заряддан r_2 масофа узоқда бўлган A_2 нуқтага кўчишида F кучнинг бажарган иши аниқлансин.

Е ч и ш. (1) формулага асосан:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} k \frac{e_1 e_2}{r^2} dr = -k e_1 e_2 \frac{1}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} = k e_1 e_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

$r_2 = \infty$ бўлганда

$$A = \int_{r_1}^{\infty} \frac{k e_1 e_2}{r^2} dr = \frac{k e_1 e_2}{r_1}$$

бўлади. $e_2 = 1$ бўлса, $A = k \frac{e_1}{r}$. Кейинги миқдор e_1 заряд ҳосил қилган майдон потенциал дейилади.

8- §. Оғирлик марказининг координаталари

Оху текисликда массалари $m_1, m_2, \dots, m_n$ бўлган

$$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$$

моддий нуқталар системаси берилган бўлсин.

$x_i m_i$ ва $y_i m_i$ кўпайтмалар m_i массанинг Ox ва Oy ўқларга нисбатан олинган *статик моментлари* дейилади.

x_c ва y_c орқали берилган системанинг оғирлик маркази координаталарини белгилаймиз. Бу ҳолда, баён этилган моддий система оғирлик марказининг координаталари:

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad (1)$$

$$y_c = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \dots + y_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (2)$$

формулалар билан аниқланиши механика курсидан маълум. Биз бу формулалардан турли шакл ва жисмларнинг оғирлик марказларини топишда фойдаланамиз.

1. Текисликдаги чизиқнинг оғирлик маркази. AB эгри чизиқ $y = f(x)$ тенглама билан берилган ($a \leq x \leq b$) ва бу эгри чизиқ моддий чизиқ бўлсин.

Бундай моддий эгри чизиқнинг чизиқли зичлигини*) γ деб фараз қиламиз. Чизиқни узунликлари $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ бўлган n та булакка бўламиз. Бу булакларнинг массалари уларнинг узунликлари билан (ўзгармас) зичлик кўпайтмасига тенг $\Delta m_i = \gamma \Delta s_i$. Δs_i ёйнинг ҳар бир бўлагида абсциссаси ξ_i бўлган ихтиёрий нуқта оламиз. Энди Δs_i ёйнинг ҳар бир бўлагини массаси $\gamma \Delta s_i$ бўлган $P_i[\xi_i, f(\xi_i)]$ моддий нуқта билан тасвирлаб ва (1) ҳамда (2) формулаларда x_i урнига ξ_i қийматни, y_i урнига $f(\xi_i)$ қийматни, m_i урнига $(\Delta s_i \text{ булаклар массалари}) \gamma \Delta s_i$ қийматни қўйсак, ёйнинг оғирлик марказини аниқлаш учун тақрибий формулалар ҳосил қиламиз:

$$x_c \approx \frac{\sum \xi_i \gamma \Delta s_i}{\sum \gamma \Delta s_i}, \quad y_c \approx \frac{\sum f(\xi_i) \gamma \Delta s_i}{\sum \gamma \Delta s_i}$$

Агар $y = f(x)$ узлуксиз функция бўлса ва узлуксиз ҳосилга эга бўлса, у ҳолда ҳар бир касрнинг суратидаги ва махражн-

*) Берилган чизиқ узунлик бирлигининг массаси чизиқли зичлик дейлади. Биз эгри чизиқнинг ҳамма жойида чизиқли зичлик бир хил деб фараз қиламиз.

даги йигиндилар $\max \Delta s_i \rightarrow 0$ да мос интеграл йигиндиларнинг лимитларига тенг бўлган лимитларга эга бўлади. Шундай қилиб, ёй оғирлик марказининг координаталари аниқ интеграллар билан ифодаланади:

$$x_c = \frac{\int_a^b x ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b x \sqrt{1+f'^2(x)} dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)} dx}, \quad (1')$$

$$y_c = \frac{\int_a^b f(x) ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b f(x) \sqrt{1+f'^2(x)} dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)} dx}. \quad (2')$$

1- м и с о л. Ox ўқнинг юқорисига жойлашган $x^2 + y^2 = a^2$ ярим айлана оғирлик марказининг координаталари топилсин.

Е ч и ш. Оғирлик марказининг ординатасини топамиз:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

$$ds = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx,$$

$$y_c = \frac{\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx}{\int_{-a}^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx} = \frac{a \int_{-a}^a dx}{\pi a} = \frac{2a^2}{\pi a} = \frac{2a}{\pi}.$$

$x_c = 0$ (чунки ярим айлана Ox ўққа нисбатан симметрикдир).

2. Текис шаклнинг оғирлик маркази. Берилган шакл $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$ чизиқлар билан чегараланган бўлиб, моддий текис шаклдан иборат бўлсин. Сирт зичлигини, яъни сирт бирлик юзининг массаси шаклнинг ҳамма бўлаклари учун ўзгармас ва δ га тенг деб ҳисоблаймиз.

Берилган шаклни $x = a$, $x = x_1$, $\dots$, $x = x_n = b$ тўғри чизиқлар билан кенглиги Δx_1 , Δx_2 , $\dots$, Δx_n бўлган полоскаларга ажратамиз. Ҳар бир полосканинг массаси полоска юзи билан δ зичлик кўпайтмасига тенг бўлади. Агар ҳар бир полоскани (246- расм) асоси Δx_i ва баландлиги $f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)$ бўлган (бун-

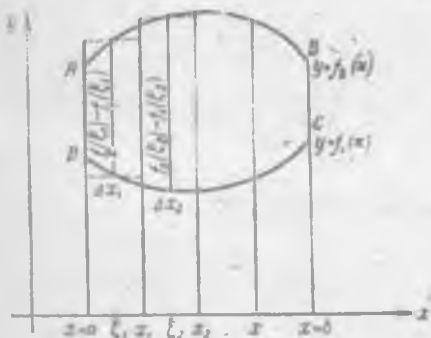
да $\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$) тўғри тўртбурчак билан алмаштирсак, у ҳолда полосканинг массаси тақрибан

$$\Delta m_i = \delta [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

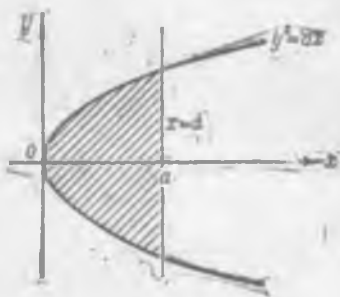
га тенг бўлади.

Бу полосканинг оғирлик маркази тахминан тегишли тўғри тўртбурчакнинг марказида бўлади:

$$(x_i)_c = \xi_i, \quad (y_i)_c = \frac{f_2(\xi_i) + f_1(\xi_i)}{2}.$$



246- расм.



247- расм.

Энди ҳар бир полоскани массаси тегишли полосканинг массасига тенг бўлган ва шу полосканинг оғирлик марказига тулланган моддий нуқта билан алмаштириб, бутун шакл оғирлик маркази координаталарининг тақрибий қийматини топамиз [(1) ва (2) формулаларга асосан]:

$$x_c \approx \frac{\sum \xi_i \delta [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i}{\sum \delta [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i},$$

$$y_c \approx \frac{\frac{1}{2} \sum [f_2(\xi_i) + f_1(\xi_i)] \delta [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i}{\sum \delta [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i}.$$

$\Delta x_i \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб, берилган шакл оғирлик марказининг координаталарини топамиз:

$$x_c = \frac{\int_a^b x [f_2(x) - f_1(x)] dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx}, \quad y_c = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b [f_2(x) + f_1(x)] [f_2(x) - f_1(x)] dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx}.$$

Бу формулалар ҳар қандай бир жинсли (яъни ҳамма нуқталарида бир хил зичликка эга бўлган) текис шакллар учун ўринли. Оғирлик марказининг координаталари шаклнинг δ зичлигига боғлиқ эмаслигини кўрдик (ҳисоблаш жараёнида δ қисқариб кетди).

2-мисол. $y^2 = ax$ параболанинг $x = a$ тўғри чизиқ билан кесилишидан ҳосил бўлган сегмент оғирлик марказининг координаталари аниқлансин (247-расм).

Ечмис. Берилган ҳолда $f_2(x) = \sqrt{ax}$, $f_1(x) = -\sqrt{ax}$, шунинг учун

$$x_c = \frac{2 \int_0^a x \sqrt{ax} dx}{2 \int_0^a \sqrt{ax} dx} = \frac{2 \sqrt{a} \frac{2}{5} x^{5/2} \Big|_0^a}{2 \sqrt{a} \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^a} = \frac{\frac{4}{5} a^3}{\frac{4}{3} a^2} = \frac{3}{5} a,$$

$y_c = 0$ (чунки сегмент Ox ўққа нисбатан симметрикдир).

9-§. Чизиқ, доира ва цилиндрнинг инерция моментини аниқ интеграл ёрдами билан ҳисоблаш

xOy текислигида массалари $m_1, m_2, \dots, m_n$ бўлган

$$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$$

моддий нуқталар системаси берилган бўлсин. Бу ҳолда, механикадан маълумки, моддий нуқталар системасининг O нуқтага нисбатан инерция моменти қуйидагича аниқланади:

$$I_O = \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) m_i \text{ ёки } I_O = \sum_{i=1}^n r_i^2 m_i, \quad (1)$$

бунда

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}.$$

8-§ даги каби, AB эгри чизиқ $y = f(x)$ тенглама билан берилган, $a \leq x \leq b$ бўлиб, бунда $f(x)$ узлуксиз функция бўлсин. Бу эгри чизиқ моддий чизиқдан иборат бўлсин. Эгри чизиқнинг чизиқли зичлиги γ га тенг бўлсин. Чизиқни узунлиги $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ бўлган n та булакларга буламиз, бунда $\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$, уларнинг массалари $\Delta m_1 = \gamma \Delta s_1$, $\Delta m_2 = \gamma \Delta s_2, \dots, \Delta m_n = \gamma \Delta s_n$ бўлсин. Ёйнинг ҳар бир қисмида абсциссаси ξ_i бўлган ихтиёрий нуқта оламиз. Бу нуқталарнинг

ординатаси $\eta_i = f(\xi_i)$ бўлади. Ёйнинг O нуқтага нисбатан инерция моменти (1) формулага мувофиқ тақрибан бундай бўлади:

$$I_O \approx \sum_{i=1}^n (\xi_i^2 + \eta_i^2) \gamma \Delta \xi_i. \quad (2)$$

Агар $y = f(x)$ функция ва унинг ҳосиласи $f'(x)$ узлуксиз бўлса, у ҳолда $\Delta x_i \rightarrow 0$ да (2) йиғинди лимитга эга. Аниқ интеграл билан ифодаланадиган бу лимит моддий чизиқнинг инерция моментини аниқлайди:

$$I_O = \gamma \int_a^b [x^2 + f^2(x)] \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (3)$$

1. Узунлиги l бўлган ингичка бир жинсли таёқчанинг (стерженнинг) охириги учига нисбатан инерция моменти. Таёқчани Ox уқ кесмаси билан устма-уст жойлаштирамиз $0 \leq x \leq l$ (248- расм). Бу ҳолда $\Delta s_i = \Delta x_i$, $\Delta m_i = \gamma \Delta x_i$, $r_i^2 = x_i^2$ ва (3) формула бундай кўринишни олади:

$$I_{O_c} = \gamma \int_0^l x^2 dx = \gamma \frac{l^3}{3}. \quad (4)$$

248- расм.

Агар таёқчанинг массаси M берилган бўлса, у ҳолда $\gamma = \frac{M}{l}$ па (4) формула бундай кўринишда бўлади:

$$I_{O_c} = \frac{1}{3} M l^2. \quad (5)$$

2. Радиуси r бўлган айлананинг марказига нисбатан инерция моменти. Айлананинг барча нуқталари унинг марказидан бир хил масофада бўлган ва массаси $m = 2\pi r \cdot \gamma$ бўлгани учун, айлананинг инерция моменти бундай бўлади:

$$I_O = m r^2 = \gamma 2\pi r \cdot r^2 = \gamma 2\pi r^3. \quad (6)$$

3. Радиуси R бўлган бир жинсли доиранинг марказига нисбатан инерция моменти. δ — доира юзи бирлигининг массаси бўлсин. Доирани n та ҳалқаларга ажратамиз.

Битта ҳалқани олиб қараймиз. (249- расм). Унинг ички радиуси r_i , ташқи радиуси $r_i + \Delta r_i$ бўлсин. Бу ҳалқанинг массаси Δr_i га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдоргача аниқлик билан $\Delta m_i = \delta 2\pi r_i \Delta r_i$ га тенг бўлади. Бу массанинг

марказга нисбатан инерция моменти (6) формулага мувофиқ тақрибан ушбуга тенг бўлади:

$$(\Delta I_o)_i \approx \delta 2\pi r_i \cdot \Delta r_i \cdot r_i^2 = \delta 2\pi r_i^3 \cdot \Delta r_i.$$

Бутун доиранинг инерция моменти ҳалқалар системаси бўлгани учун қуйидаги тақрибий формула билан ифода этилади:

$$I_o \approx \sum_{i=1}^n \delta 2\pi r_i^3 \Delta r_i. \quad (7)$$

$\Delta r_i \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб, доира юзининг марказга нисбатан инерция моменти ҳосил қиламиз:

$$I_o = \delta 2\pi \int_0^R r^3 dr = \pi \delta \frac{R^4}{2}. \quad (8)$$

Агар доиранинг массаси M берилган бўлса, у ҳолда сирт зичлиги δ бундай аниқланади:

$$\delta = \frac{M}{\pi R^2}.$$

Бу қийматни (8) да ўрнига қўйиб, натижада ушбунни ҳосил қиламиз:

$$I_o = \frac{MR^2}{2}. \quad (9)$$

4. Агар асосининг радиуси R ва массаси M бўлган доиравий цилиндрни олсак, унинг ўқиға нисбатан инерция моменти (9) формула билан ифодаланиши равшан.



249-расм.

XII бобга машқлар

Юзларни ҳисоблаш

1. $y^2 = 9x$, $y = 3x$ чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзини топинг.

Жав. $\frac{1}{2}$.

2. $xy = a^2$ тенг ёшли гипербола, Ox ўқ, $x = a$, $x = 2a$ тўғри чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзини топинг. Жав. $a^2 \ln 2$.

3. $y = 4 - x^2$ эгри чизиқ билан Ox ўқ орасидаги шаклнинг юзини топинг.

Жав. $\frac{32}{3}$.

4. $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ астронда билан чегараланган шаклнинг юзини топинг.

Жав. $\frac{3}{8} \pi a^2$.

5. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ эанжир чизик, Ox ўқ, Oy ўқ ва $x = a$ тўғри чизик билан чегараланган шаклнинг юзини топинг. Жав. $a^2 \operatorname{sh} e$.

6. $y = x^2$ эгри чизик, $y = 8$ тўғри чизик ва Oy ўқ билан чегараланган шаклнинг юзини топинг. Жав. 12.

7. Синусонданинг битта ярим тўлки ва абсциссалар ўқи билан чегараланган соҳанинг юзини топинг. Жав. 2.

8. $y^2 = 2px$, $x^2 = 2py$ парабодалар орасидаги соҳанинг юзини топинг. Жав. $\frac{4}{3} p^2$.

9. $y = x^2$, $y = 2x$, $y = x$ чизиклар билан чегараланган шаклнинг юзини топинг. Жав. $\frac{3}{2}$.

10. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ циклонданинг битта аркаси ҳамда, абсциссалар ўқи билан чегараланган соҳанинг юзини топинг. Жав. $3\pi a^2$.

11. $x = p \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ астроида билан чегараланган шаклнинг юзини топинг. Жав. $\frac{3}{8} \pi a^2$.

12. $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ леиниската билан чегараланган бутун соҳанинг юзини топинг. Жав. a^2 .

13. $\rho = a \sin 2\varphi$ эгри чизикнинг бир сўртмоғи билан чегараланган соҳанинг юзини ҳисобланг. Жав. $\frac{1}{8} \pi a^2$.

14. $\rho = a(1 - \cos \varphi)$ кардионда билан чегараланган соҳанинг тўла юзини ҳисобланг. Жав. $\frac{3}{2} \pi a^2$.

15. $\rho = a \cos \varphi$ эгри чизик билан чегараланган соҳанинг юзини топинг. Жав. $\frac{\pi a^2}{4}$.

16. $\rho = a \cos 2\varphi$ эгри чизик билан чегараланган соҳанинг юзини топинг. Жав. $\frac{\pi a^2}{4}$.

17. $\rho = \cos 3\varphi$ эгри чизик билан чегараланган соҳанинг юзини топинг. Жав. $\frac{\pi}{4}$.

18. $\rho = a \cos 4\varphi$ эгри чизик билан чегараланган соҳанинг юзини топинг. Жав. $\frac{\pi a^2}{4}$.

Ҳажмларни ҳисоблаш

19. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипс Ox ўқ атрофида айланади. Айланиш жисмининг ҳажмини топинг. Жав. $\frac{4}{3} \pi ab^2$.

20. Координаталар бошини (a, b) нуқта билан туташтирувчи тўғри чизик кесмаси Oy ўқ атрофида айланади. Ҳосил бўлган конуснинг ҳажмини топинг. Жав. $\frac{1}{3} \pi a^2 b$.

21. $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ доиранинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил булган торнинг ҳажмини топинг ($b > a$ деб фараз этилади). Жав. $2\pi a^2 b$.

22. $y^2 = 2px$ ва $x = a$ чизиклар билан чегараланган юз Ox ўқ атрофида айланади. Айланиш жисмининг ҳажмини топинг. Жав. πpa^2 .

23. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ астроида билан чегараланган шакл Ox ўқ атрофида айланади. Айланиш жисмининг ҳажмини топинг. *Жав.* $\frac{32\pi a^3}{105}$.

24. $y = \sin x$ синусоиданинг битта ёйи ва Ox ўқ билан чегараланган шакл Ox ўқ атрофида айланади. Айланиш жисмининг ҳажмини топинг. *Жав.* $\frac{\pi^2}{2}$.

25. $y^2 = 4x$ парабола ва $x = 4$ тўғри чизиқ билан чегараланган шакл Ox ўқ атрофида айланади. Айланиш жисмининг ҳажмини топинг. *Жав.* 32π .

26. $y = xe^x$ эгри чизиқ ва $y = 0$, $x = 1$ тўғри чизиқлар билан чегараланган шакл Ox ўқ атрофида айланади. Айланиш жисмининг ҳажмини топинг. *Жав.* $\frac{\pi}{4}(e^2 - 1)$.

27. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ циклоиданинг битта аркаси ва Ox ўқ билан чегараланган шакл Ox ўқ атрофида айланади. Айланиш жисмининг ҳажмини топинг. *Жав.* $5\pi^2 a^3$.

28. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ циклоиданинг битта аркаси ҳамда Ox ўқ билан чегараланган шакл Ox ўқ атрофида айланади. Айланиш жисмининг ҳажмини топинг. *Жав.* $6\pi^2 a^3$.

29. 27- масаладаги шакл, циклоиданинг учидан ўтувчи Ox ўққа параллел тўғри чизиқ атрофида айланади. Айланиш жисмининг ҳажмини топинг. *Жав.* $\frac{\pi a^3}{6}(9\pi^2 - 16)$.

30. 27- масаладаги шакл циклоиданинг учидан ўтувчи Ox ўққа параллел тўғри чизиқ атрофида айланади. Айланиш жисмининг ҳажмини топинг. *Жав.* $7\pi^2 a^3$.

31. Асосининг радиуси R бўлган цилиндр асосининг диаметри орқали асос текислиги билан α бурчак ташкил қилиб ўтувчи текислик билан кесилган. Кесиб олинган қисмининг ҳажмини топинг. *Жав.* $\frac{2}{3} R^3 \lg \alpha$.

32. $x^2 + y^2 = R^2$, $y^2 + z^2 = R^2$ цилиндрлар учун умумий бўлган ҳажмин топинг. *Жав.* $\frac{16}{3} R^3$.

33. Квадрат диагоналлариининг кесишган нуқтаси радиуси a бўлган доиранинг диаметри бўйича ҳаракат қилади; бунда квадрат жойлашган текислик ҳамма вақт доира текислигига перпендикулярлигича қолади, квадратнинг икки қарама-қарши учлари эса айлана бўйича ҳаракат қилади (маълумки ҳаракат пайтида квадратнинг катталиги ўзгариб туради). Ҳаракатлаувчи квадрат ҳосил қилган жисмининг ҳажмини топинг. *Жав.* $\frac{8}{3} a^3$.

34. $\frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q} = x$ эллиптик параболоидни $x=a$ текислик билан кесишдан ҳосил бўлган сегментининг ҳажмини ҳисобланг. *Жав.* $\pi a^2 \sqrt{pq}$.

35. $z = 0$, $y = 0$ текисликлар $x^2 = 2py$ ва $z^2 = 2px$ цилиндрлик сиртлар ва $x=a$ текислик билан чегараланган жисмининг ҳажмини ҳисобланг. *Жав.* $\frac{a^3 \sqrt{2a}}{7 \sqrt{p}}$ (биринчи октантда).

36. Тўғри чизиқ Oxy ва Oxz текисликларда ўтувчи $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ эллипсларни кесиб, Oyz текисликка параллел ҳолда ҳаракат қилади. Ҳосил бўлган жисмининг ҳажмини ҳисобланг. *Жав.* $\frac{\pi}{3} abc$.

Ёйларнинг узунликларини ҳисоблаш

37. $x^{3/2} + y^{3/2} = a^{3/2}$ астроиданинг бутун узунлигини топинг. Жав. 6a.

38. $ay^3 = x^3$ ярим кубик парабола ёйининг координаталар бошидан абсциссаси $x = 5a$ нуқтагача бўлган узунлигини ҳисобланг. Жав. $\frac{335}{27} a$.

39. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ занжир чизиқ ёйининг координаталар бошидан (x, y) нуқтагача булган узунлигини топинг. Жав. $a \operatorname{sh} \frac{x}{a} = \sqrt{y^2 - a^2}$.

40. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ циклоида битта аркасининг узунлигини топинг. Жав. 8a.

41. $y = \ln x$ эгри чизиқ ёйининг $x = \sqrt{3}$ дан $x = \sqrt{8}$ гача булган узунлигини топинг. Жав. $1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.

42. $y = 1 - \ln \cos x$ эгри чизиқ ёйининг $x = 0$ дан $x = \frac{\pi}{4}$ гача булган узунлигини топинг. Жав. $\ln \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}$.

43. $\rho = a\varphi$ Архимед спиралининг қутбдан биринчи урам охиригача булган узунлигини топинг. Жав. $\pi a \sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{a}{2} \ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2})$.

44. $\rho = e^{a\varphi}$ спиралининг қутбдан (ρ, φ) нуқтагача булган узунлигини топинг. Жав. $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a} e^{a\varphi} = \frac{\rho}{a} \sqrt{1+a^2}$.

45. $\rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ эгри чизиқнинг бутун узунлигини топинг. Жав. $\frac{3}{2} \pi a$.

46. $x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t$ эллипс эволютасининг узунлигини топинг. Жав. $\frac{4(a^3 - b^3)}{ab}$.

47. $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ кардиоиданинг узунлигини топинг. Жав. 8a.

48. $x = a(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi)$, $y = a(\sin \varphi - \varphi \cos \varphi)$ доира эвольвентаси ёйининг $\varphi = 0$ дан $\varphi = \varphi_1$ гача булган узунлигини топинг. Жав. $\frac{1}{2} a \varphi_1^2$.

Айланиш жисмлари сиртларининг юзларини ҳисоблаш

49. $y^2 = 4ax$ параболанинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил булган сиртнинг координаталар бошидан абсциссаси $x = 3a$ бўлган нуқтагача оралиқдаги юзи топилсин. Жав. $\frac{56}{3} \pi a^2$.

50. $y = 2x$ тўғри чизиқнинг $x = 0$ дан $x = 2$ гача оралиқдаги кесмасининг: а) Ox ўқ атрофида, б) Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил булган конус сиртнинг юзини ҳисобланг. Жав. а) $8\pi \sqrt{5}$, б) $4\pi \sqrt{5}$.

51. $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ доиранинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил булган тор сиртнинг юзини топинг ($b > a$). Жав. $4\pi^2 ab$.

52. Кардиоида $x = a(2 \cos \varphi - \cos 2\varphi)$, $y = a(2 \sin \varphi - \sin 2\varphi)$ параметрик тенгламалар билан берилган. Кардиоиданинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил булган жисм сиртнинг юзини топинг. Жав. $\frac{128}{5} \pi a^2$.

53. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ циклоида битта аркасининг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм сиртининг юзини топинг.

Жав. $\frac{64\pi a^2}{3}$.

54. Циклоиданинг аркаси Oy ўқ атрофида айланади (53- масалага қаранг). Айланиш жисмининг сиртини топинг. Жав. $16\pi a^2 + \frac{64}{3}\pi a^2$.

55. Циклоиданинг аркаси унинг учидан ўтган ва Ox ўққа параллел бўлган уринма атрофида айланади (53- масалага қаранг). Айланиш жисмининг сиртини топинг. Жав. $\frac{32\pi a^2}{3}$.

56. $x = a \sin^3 t$, $y = a \cos^3 t$ астроида Ox ўқ атрофида айланади. Айланиш жисмининг сиртини топинг. Жав. $\frac{12\pi a^2}{5}$.

57. $y = \sin x$ синусоиданинг ёни Ox ўқ атрофида $x = 0$ дан $x = 2\pi$ гача айланади. Айланиш жисмининг сиртини топинг. Жав. $4\pi (\sqrt{2} + \ln \sqrt{2} + 1)$.

58. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$) эллипс Ox ўқ атрофида айланади. Айланиш жисмининг сиртини топинг. Жав. $2\pi b^2 + 2\pi ab \frac{\arcsin e}{e}$, бунда $e = \frac{a^2 - b^2}{a}$.

Аниқ интегралнинг турли татбиқлари

59. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($x > 0$, $y > 0$) эллипс чорак қисми юзининг огирлик марказини топинг. Жав. $\frac{4a}{3\pi} + \frac{4b}{3\pi}$.

60. $x^2 + 4y - 16 = 0$ парабола ва Ox ўқ билан чегараланган шакл юзининг огирлик марказини топинг. Жав. $(0; \frac{8}{5})$.

61. Ярим шар җар җажминнинг огирлик марказини топинг. Жав. Симметрия ўқида, асосдан $\frac{3}{8}R$ масофада.

62. Ярим шар сиртининг огирлик марказини топинг. Жав. Симметрия ўқида, асосдан $\frac{R}{2}$ масофада.

63. Асоснинг радиуси R , баландлиги h бўлган тўғри донавий конус сиртининг огирлик марказини топинг. Жав. Симметрия ўқида, асосдан $\frac{h}{3}$ масофада.

64. $y = \sin x$ ($0 < x < \pi$) ва $y = 0$ чизиқлар билан чегараланган шакл юзининг огирлик марказини топинг. Жав. $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8})$.

65. $y^2 = 20x$, $x^2 = 20y$ параболалар билан чегараланган шакл юзининг огирлик марказини топинг. Жав. $(9; 9)$.

66. Марказий бурчаги 2α ва радиуси R бўлган доира сектори юзининг огирлик марказини топинг. Жав. Симметрия ўқида, сектор учидан $\frac{2}{3}R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ масофада.

67. Агар асоси 8 м , баландлиги 12 м бўлган тўғри тўртбурчак сувга вертикал ҳолда туширилган бўлиб, унинг юқори асоси сувнинг эркин сир-

тига параллел ва 5 м чуқурликда бўлса, тўғри тўртбурчакка бўлган сув босимининг миқдорини топинг. Жав. 1056 т.

68. Томони 8 бўлган квадрат шаклдаги шлюзнинг юқори қирраси сув сиртида ётади. Квадратни унинг бир диагонали билан ажратиб ҳосил қилинган шлюз қисмларининг ҳар бирига бўлган сув босимининг миқдорини аниқланг. Жав. 85 333,33 кг, 170 666,67 кг.

69. Диаметри 20 м бўлган ярим сферик идишдан сувни насос билан тортиб олиш учун керак бўлган иш миқдорини ҳисобланг. Жав. $2,5 \cdot 10^6 \pi$ кгм.

70. Жисм $x = ct^3$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилади, бунда x' вақтда ўтилган йўл узунлиги, $c = \text{const}$. Муҳитнинг қаршилиги тезлик квадратига пропорционал бўлиб, пропорционаллик коэффиценти k га тенг. Жисмининг $x = 0$ нуқтадан $x = a$ нуқтагача қилган ҳаракатида қаршилиқ бажарган ишни топинг. Жав. $\frac{27k}{7} \sqrt{c^3 a^7}$.

71. Зичлиги γ бўлган суяқлиқни баландлиги H , асосининг радиуси R бўлган ва учи билан пастга қараган конус шаклидаги резервуардан насос билан тортиб олиш учун сарфлаш керак бўлган ишни ҳисобланг.

$$\text{Жав. } \frac{\pi \gamma R^2 H^2}{12}$$

72. Ёғочдан ясалган қалқовуч цилиндр шаклида бўлиб, асосининг юзи $S = 4000 \text{ см}^2$, баландлиги эса $H = 50 \text{ см}$. Қалқовуч сув юзида сузиб юрибди. Қалқовучни сув сиртига кўтариб чиқариш учун қанча иш сарф қилиш керак? (Ёғочнинг солиштирама оғирлиги 0,8) Жав. $\frac{\gamma^2 H^2 S}{2} = 32 \text{ кгм}$.

73. Устки асоси $a = 6,4 \text{ м}$, остки асоси $b = 4,2 \text{ м}$, баландлиги $H = 3 \text{ м}$ бўлган тенг ёнли трапеция шаклидаги плотинани сув қандай куч билан босишини ҳисобланг. Жав. 22,2 т.

74. Қозоннинг сфера шаклидаги тагига P кг буғ берадиган тўлиқ босмининг ўқдаги ташкил этувчиларини топинг. Қозон цилиндрик қисмининг диаметри D мм, қозон ичидаги бугнинг босими P кг/см². Жав. $P = \frac{\pi PD^2}{400}$.

75. Радиуси r бўлган вертикал валнинг тагидан ясси подпятник тутиб туради. Валнинг P оғирлиги таъиннинг бутун сирти бўйича текис тарқалади. Валнинг бир марта айланишида ишқаланиш кучининг бажарган тўла ишнинг ҳисобланг. Ишқаланиш коэффиценти μ га тенг. Жав. $\frac{1}{3} \pi \mu Pr$.

76. Вертикал валнинг учи кесик конус шаклидаги пята билан тугайди. Пятанинг подпятникка бўлган солиштирама босими ўзгармас бўлиб, P га тенг. Пятанинг юқори диаметри D , қуйи диаметри d , конус учигаги бурчак 2α , ишқаланиш коэффиценти μ . Валнинг бир айланишида ишқаланиш кучининг бажарган иши топилинсин. Жав. $\frac{\pi^2 P \mu}{6 \sin \alpha} (D^3 - d^3)$.

77. Узунлиги l бўлган призматик стержень 0 дан P гача секин ўсиб борувчи куч билан шундай чўзила борадики, чўзувчи куч ҳар бир моментда стерженнинг эластик кучи билан мувозанатда бўлади. Чўзилиш эластиклик чегараларида бўлади деб фараз қилиб, кучнинг чўзиш учун сарф қилган A ишини ҳисобланг. Стержень кўндаланг кесимининг юзи F га, материалнинг эластиклик модули E га тенг.

Кўрсатма. Агар x — стерженнинг чўзилиши, f — таъсир этувчи куч бўлса, у ҳолда $f = \frac{FE}{l} x$ бўлади. P куч таъсири остидаги чўзилиш $\Delta l = \frac{Pl}{EF}$ га тенг. Жав. $A = \frac{P \Delta l}{2} = \frac{P^2 l}{2EF}$.

78. Призма шаклидаги брус вертикал ҳолатда осилган бўлиб, унинг пастки учига чўзувчи P куч таъсир этади. Агар бруснинг чўзилган ҳолатдаги узунлиги l , кўндаланг кесимининг юзи F , оғирлиги Q ва материалнинг эластиклик модули E га тенг экани берилган бўлса, брус ўз оғирлик кучи ва P куч таъсирида қанча чўзилишини ҳисобланг. Жав. $\Delta l = \frac{(Q + 2P)l}{2EF}$.

79. Призма шаклидаги идишга H баландликкача қуйилган суюқлик тўкилиб тамом бўлиши учун қанча вақт кетади? Идиш кўндаланг кесимининг юзи F , тешикнинг юзи f , оқим тезлиги $v = \mu \sqrt{2gh}$ формула билан аниқланади, бунда μ — ёпишқоқлик коэффиценти, g — оғирлик кучининг тезланиши, h — тешикдан суюқлик сатҳигача бўлган масофа. Жав. $T = \frac{2FH}{\mu f \sqrt{2gh}}$.

$$= \frac{F}{\mu f} \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

80. Кесими тўғри тўртбурчак шаклда бўлган оқава иншооти орқали оқиб чиққан Q сув сарфини (вақт бирлиги ичида оқиб чиқадиغان сув миқдорини) аниқланг. Иншоотнинг баландлиги h , кенглиги b . Жав. $Q = \frac{2}{3} \mu b h \sqrt{2gh}$.

81. Баландлиги a ва кенглиги b бўлган тўғри тўртбурчак шаклида ён томондаги тешикдан оқиб чиқадиغان Q сув сарфини аниқланг. Тешикнинг паст томонидан сув сиртигача бўлган баландлик H .

$$\text{Жав. } Q = \frac{2b\mu\sqrt{2g}}{3} [H^{3/2} - (H^2 - a^2)^{3/2}].$$

МУНДАРИЖА

Тўққизинчи нашрига суз боши	3
Бешинчи нашрига суз боши	5

I боб. Сон. Ўзгарувчи миқдор. Функция

1-§. Ҳақиқий сонлар. Ҳақиқий сонларни сонлар ўқининг нуқталари билан тасвирлаш	7
2-§. Ҳақиқий соннинг абсолют қиймати	9
3-§. Ўзгарувчи ва ўзгармас миқдорлар	10
4-§. Ўзгарувчи миқдорнинг ўзгариш соҳаси	11
5-§. Тартибланган ўзгарувчи миқдор. Ўсувчи ва камаювчи ўзгарувчи миқдорлар. Чекланган ўзгарувчи миқдор	13
6-§. Функция	14
7-§. Функциянинг берилиш усуллари	15
8-§. Асосий элементар функциялар. Элементар функциялар	17
9-§. Алгебраик функциялар	22
10-§. Кутб координатлари системаси	24
I бобга машқлар	25

II боб. Лимит. Функциянинг узлуксизлиги

1-§. Ўзгарувчи миқдорнинг лимити. Чексиз катта ўзгарувчи миқдор	28
2-§. Функциянинг лимити	31
3-§. Чексизликка интилувчи функция. Чекланган функциялар	34
4-§. Чексиз кичик миқдорлар ва уларнинг асосий хоссалари	37
5-§. Лимитлар ҳақида асосий теоремалар	41
6-§. $x \rightarrow 0$ да $\frac{\sin x}{x}$ функциянинг лимити	45
7-§. e сони	47
8-§. Натурал логарифмлар	52
9-§. Функцияларнинг узлуксизлиги	53
10-§. Узлуксиз функцияларнинг баъзи бир хоссалари	58
11-§. Чексиз кичик миқдорларни таққослаш	60
II бобга машқлар	63

III боб. Ҳосила ва дифференциал

1-§. Ҳаракат тезлиги	66
2-§. Ҳосиланинг таърифи	68
3-§. Ҳосиланинг геометрик маъноси	70
4-§. Функциянинг дифференциалланувчанлиги	72
5-§. n бутун ва мусбат бўлганда $y = x^n$ функциянинг ҳосиласи	74
6-§. $y = \sin x$, $y = \cos x$ функцияларнинг ҳосилалари	76
7-§. Ўзгармас миқдорнинг ҳосиласи, ўзгармас миқдор билан функция кўпайтмасининг ҳосиласи, йгиндининг, кўпайтманинг, бўлинманинг ҳосилалари	77
8-§. Логарифмик функциянинг ҳосиласи	82
9-§. Мураккаб функциянинг ҳосиласи	83
10-§. $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \ln x $ функцияларнинг ҳосилалари	85

11- §.	Ошкормас функция ва уни дифференциаллаш	87
12- §.	Курсаткичи исталган ҳақиқий сон бўлган даражали функция- нинг, курсаткичли функциянинг, мураккаб курсаткичли функ- циянинг ҳосилалари	89
13- §.	Тескари функция ва уни дифференциаллаш	92
14- §.	Тескари тригонометрик функциялар ва уларни дифференци- аллаш	96
15- §.	Дифференциаллашнинг асосий формулаларни жадвали	100
16- §.	Функцияларнинг параметрик берилиши	101
17- §.	Баъзи бир эгри чизиқларнинг параметрик формадаги тенглама- лари	103
18- §.	Параметрик берилган функциянинг ҳосиласи	106
19- §.	Гиперболик функциялар	108
20- §.	Дифференциал	111
21- §.	Дифференциалнинг геометрик маъноси	116
22- §.	Турли тартибли ҳосилалар	117
23- §.	Турли тартибли дифференциаллар	119
24- §.	Ошкормас функцияларнинг ва параметрик берилган функция- ларнинг турли тартибли ҳосилалари	121
25- §.	Иккинчи ҳосиланинг механик маъноси	123
26- §.	Уринма ва нормал тенгламалари. Уринма ости ва нормал ости узунликлари	125
27- §.	Раднус-векторнинг қутб бурчаги бўйича ҳосиласининг геометрик маъноси	128
III бобга машқлар		129

IV боб. Дифференциалланувчи функциялар ҳақида баъзи теоремалар

1- §.	Ҳосиланинг илдизлари ҳақида теорема (Ролль теоремаси) . . .	140
2- §.	Чекли орттирмалар ҳақида теорема (Лагранж теоремаси) . . .	142
3- §.	Икки функция орттирмаларининг нисбати ҳақида теорема (Коши теоремаси)	144
4- §.	Иккита чексиз кичик миқдор нисбатининг limiti ($\frac{0}{0}$ кўри- нишдаги ноаниқликни очиш")	145
5- §.	Иккита чексиз катта миқдор нисбатининг limiti ($\frac{\infty}{\infty}$ кўри- нишдаги ноаниқликни очиш")	148
6- §.	Тейлор формуласи	154
7- §.	e^x , $\sin x$, $\cos x$ функцияларни Тейлор формуласи бўйича ёйиш .	157

IV бобга машқлар

V боб. Функцияни текшириш

1- §.	Масаланинг қуйилиши	162
2- §.	Функциянинг ўсиши ва камайиши	163
3- §.	Функциянинг максимум ва минимуми	165
4- §.	Дифференциалланувчи функцияни биринчи ҳосила ёрдами билан максимум ва минимумга текшириш схемаси	172
5- §.	Иккинчи ҳосила ёрдами билан функцияни максимум ва мини- мумга текшириш	174
6- §.	Функциянинг кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматлари . .	180
7- §.	Функциялар максимуми ва минимуми назариясининг масалалар ечишга татбиқи	182
8- §.	Тейлор формуласи ёрдами билан функцияни максимум ва мини- мумга текшириш	184

9- §. Эгри чизиқнинг қавариқлиги ва ботиклиги. Бурилиш нуқтаси	186
10- §. Асимптоталар	193
11- §. Функцияларни текширишнинг умумий плани ва графиклар ясаш	198
12- §. Параметрик шаклда берилган эгри чизиқларни текшириш	203
<i>V бобга машқлар</i>	207

VI боб. Эгри чизиқнинг эгрилиги

1- §. Ёйнинг узунлиги ва унинг ҳосиласи	213
2- §. Эгрилик	216
3- §. Эгрилиكنи ҳисоблаш	218
4- §. Параметрик шаклда берилган чизиқнинг эгрилигини ҳисоб- лаш	221
5- §. Қутб координаталардаги тенглама билан берилган чизиқнинг эгрилигини ҳисоблаш	221
6- §. Эгрилик радиуси ва доираси. Эгрилик маркази. Эволюта ва эвольвента	222
7- §. Эволютанинг ҳоссалари	228
8- §. Тенгламанинг ҳақиқий илдизларини тақрибий ҳисоблаш	231
<i>VI бобга машқлар</i>	236

VII боб. Комплекс сонлар. Кўпқадлар

1- §. Комплекс сонлар. Дастлабки таърифлар	239
2- §. Комплекс сонлар устида асосий амаллар	241
3- §. Комплекс сонни даражага кўтариш ва комплекс сондан илдиз чиқариш	244
4- §. Кўрсаткичи комплекс бўлган кўрсаткичли функция ва унинг ҳоссалари	247
5- §. Эйлер формуласи. Комплекс соннинг кўрсаткичли шакли	250
6- §. Кўпқадни кўпайтувчиларга ажратиш	252
7- §. Кўпқаднинг каррали илдизлари ҳақида	256
8- §. Комплекс илдизларга эга бўлган кўпқадни кўпайтувчиларга ажратиш	258
9- §. Интерполяциялаш. Лагранжнинг интерполяцияон формуласи	259
10- §. Ньютоннинг интерполяцияон формуласи	261
11- §. Дифференциаллашнинг сонли методи	263
12- §. Функцияларни кўпқадлар билан энг яхши яқинлаштириш ҳақи- да Чебишев назарияси	264
<i>VII бобга машқлар</i>	266

VIII боб. Бир неча ўзгарувчининг функцияси

1- §. Бир неча ўзгарувчи функциясининг таърифи	267
2- §. Икки ўзгарувчи функциясининг геометрик маъноси	270
3- §. Функциянинг тўла орттирмаси	271
4- §. Бир неча ўзгарувчи функциясининг узлуксизлиги	272
5- §. Бир неча ўзгарувчи функциясининг хусусий ҳосилалари	276
6- §. Икки ўзгарувчи функцияси хусусий ҳосилаларининг геометрик маъноси	278
7- §. Тўла орттирма, тўла дифференциал	279
8- §. Тўла дифференциалнинг тақрибий ҳисоблашга татбиқи	282
9- §. Дифференциалнинг ҳисоблашдаги хатони баҳолашга татбиқи	284
10- §. Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Тўла ҳосила. Мураккаб функ- циянинг тўла ҳосиласи	287

11-§.	Ошкормас шаклда берилган функциянинг ҳосиласи	291
12-§.	Ҳар хил тартибдаги хусусий ҳосилалар	295
13-§.	Юксаклик сирти	299
14-§.	Йўналиш бўйича ҳосила	300 ✓
15-§.	Градиент	302
16-§.	Икки ўзгарувчининг функцияси учун Тейлор формуласи	306
17-§.	Бир неча ўзгарувчи функциясининг максимуми ва минимуми	308
18-§.	Берилган тенгламалар билан боғланган бир неча ўзгарувчи функциясининг максимуми ва минимуми (шартли максимумлар ва минимумлар)	317
19-§.	Функцияни энг кичик квадратлар усули билан тажрибадан олинган маълумотлар асосида ҳосил қилиш	322
20-§.	Эгри чизиқнинг махсус нуқталари	326

VIII бобга машқлар	331

I X б о б. Дифференциал ҳисобнинг фазодаги геометрияга татбиқи

1-§.	Фазодаги эгри чизиқ тенгламаси	335
2-§.	Скаляр аргумент вектор функциясининг limiti ва ҳосиласи	338
3-§.	Векторларни (вектор функцияларни) дифференциаллаш қоидалари	341
4-§.	Векторнинг ёй узунлиги бўйича биринчи ва иккинчи ҳосилалари. Эгри чизиқнинг эгрилиги. Бош нормал. Нуқтанинг эгри чизиқли ҳаракатдаги тезлиги ва тезланиши	316
5-§.	Ёпишма текислик. Бинормал. Буралиш	335
6-§.	Сиртга уринма текислик ва нормал	360

IX бобга машқлар	361

X б о б. Аниқмас интеграл

1-§.	Бошланғич функция ва аниқмас интеграл	366
2-§.	Интеграллар жадвали	369
3-§.	Аниқмас интегралнинг баъзи хоссалари	371
4-§.	Ўзгарувчини алмаштириш усули билан ёки ўрнига қўйиш усули билан интеграллаш	373 ✓
5-§.	Квадрат учҳад қатнашган баъзи функцияларни интеграллаш	376
6-§.	Бўлаклаб интеграллаш	379 ✓
7-§.	Рационал касрлар. Энг содда рационал касрлар ва уларни интеграллаш	383
8-§.	Рационал касрни энг содда касрларга ажратиш	387
9-§.	Рационал касрларни интеграллаш	391
10-§.	Иррационал функцияларнинг интеграллари	394
11-§.	$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ кўринишдаги интеграллар	396
12-§.	Тригонометрик функцияларнинг баъзи синфларини интеграллаш	399
13-§.	Баъзи бир иррационал функцияларни тригонометрик алмаштиришлар ёрдамида интеграллаш	401
14-§.	Интеграллари элементар функциялар билан ифодаланмайдиган функциялар ҳақида	406

X бобга машқлар	407

X I б о б. Аниқ интеграл

1-§.	Масаланинг қўйилиши. Қуйи ва юқори интеграл йигиндилар	418
2-§.	Аниқ интеграл. Аниқ интегралнинг мавжудлиги ҳақида теорема	419

3-§. Аниқ интегралнинг асосий хоссалари	430
4-§. Аниқ интегрални ҳисоблаш. Ньютон — Лейбниц формуласи . . .	434
5-§. Аниқ интегралда ўзгарувчини алмаштириш	439
6-§. Бўлаклар интеграллаш	440
7-§. Хосмас интеграллар	443
8-§. Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш	452
9-§. Чебишев формуласи	458
10-§. Параметрга боғлиқ бўлган интеграллар. Гамма-функция	463
11-§. Ҳақиқий ўзгарувчи комплекс функциясини интеграллаш	467
<i>XI бобга машқлар</i>	<i>167</i>

XII боб. Аниқ интегралнинг геометрияга ва механикага татбиқи

1-§. Тўғри бурчакли координаталар системасида юзларни ҳисоблаш . .	471
2-§. Қутб координаталар системасида эгри чизиқли секторнинг юзи . .	474
3-§. Эгри чизиқ ёйининг узунлиги	476
4-§. Жисмнинг ҳажмини параллел кесимлар юзлари бўйича ҳисоблаш	482
5-§. Айланиш жисмининг ҳажми	483
6-§. Айланиш жисмининг сирти	484
7-§. Ишни аниқ интеграл ёрдамида ҳисоблаш	486
8-§. Оғирлик марказининг координаталари	487
9-§. Чизиқ, доира ва цилиндрнинг инерция моментини аниқ интеграл ёрдами билан ҳисоблаш	491
<i>XII бобга машқлар</i>	<i>493</i>