

Б. П. ДЕМИДОВИЧ

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

ИЗДАНИЕ ДЕВЯТОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
физических и механико-математических специальностей
высших учебных заведений*

326



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1977

517.2

Д 30

УДК 517.0 (075.8)

Д $\frac{20203 - 028}{053 (02) - 77}$ 11-77

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие к пятому изданию	7
Предисловие к девятому изданию	8

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ФУНКЦИИ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Отдел I. Введение в анализ	9
§ 1. Вещественные числа	9
§ 2. Теория последовательностей	14
§ 3. Понятие функции	26
§ 4. Графическое изображение функции	33
§ 5. Предел функции	45
§ 6. <i>O</i> -символика	66
§ 7. Непрерывность функции	69
§ 8. Обратная функция. Функции, заданные параметрически	78
§ 9. Равномерная непрерывность функции	81
§ 10. Функциональные уравнения	84
Отдел II. Дифференциальное исчисление функций одной переменной	87
§ 1. Производная явной функции	87
§ 2. Производная обратной функции. Производная функции, заданной параметрически. Производная функции, заданной в неявном виде	102
§ 3. Геометрический смысл производной	104
§ 4. Дифференциал функции	108
§ 5. Производные и дифференциалы высших порядков	111
§ 6. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши	120
§ 7. Возрастание и убывание функции. Неравенства	126
§ 8. Направление вогнутости. Точки перегиба	130
§ 9. Раскрытие неопределенностей	132
§ 10. Формула Тейлора	136
§ 11. Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значения функции	140

517.2

Д 30

УДК 517.0 (075.8)

Д $\frac{20203 - 028}{053 (02) - 77}$ 11-77

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие к пятому изданию	7
Предисловие к девятому изданию	8

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ФУНКЦИИ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Отдел I. Введение в анализ	9
§ 1. Вещественные числа	9
§ 2. Теория последовательностей	14
§ 3. Понятие функции	26
§ 4. Графическое изображение функции	33
§ 5. Предел функции	45
§ 6. О-символика	66
§ 7. Непрерывность функции	69
§ 8. Обратная функция. Функции, заданные параметрически	78
§ 9. Равномерная непрерывность функции	81
§ 10. Функциональные уравнения	84
Отдел II. Дифференциальное исчисление функций одной переменной	87
§ 1. Производная явной функции	87
§ 2. Производная обратной функции. Производная функции, заданной параметрически. Производная функции, заданной в неявном виде	102
§ 3. Геометрический смысл производной	104
§ 4. Дифференциал функции	108
§ 5. Производные и дифференциалы высших порядков	111
§ 6. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши	120
§ 7. Возрастание и убывание функции. Неравенства	126
§ 8. Направление вогнутости. Точки перегиба	130
§ 9. Раскрытие неопределенностей	132
§ 10. Формула Тейлора	136
§ 11. Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значения функции	140

§ 12. Построение графиков функций по характерным точкам	145
§ 13. Задачи на максимум и минимум функции	147
§ 14. Касание кривых. Круг кривизны. Эволюта	150
§ 15. Приближенное решение уравнений	152
 Отдел III. Неопределенный интеграл	154
§ 1. Простейшие неопределенные интегралы	154
§ 2. Интегрирование рациональных функций	163
§ 3. Интегрирование некоторых иррациональных функций	166
§ 4. Интегрирование тригонометрических функций	170
§ 5. Интегрирование различных трансцендентных функций	175
§ 6. Разные примеры на интегрирование функций	178
 Отдел IV. Определенный интеграл	181
§ 1. Определенный интеграл как предел суммы	181
§ 2. Вычисление определенных интегралов с помощью неопределенных	185
§ 3. Теоремы о среднем	196
§ 4. Несобственные интегралы	199
§ 5. Вычисление площадей	206
§ 6. Вычисление длин дуг	210
§ 7. Вычисление объемов	212
§ 8. Вычисление площадей поверхностей вращения	214
§ 9. Вычисление моментов. Координаты центра тяжести	215
§ 10. Задачи из механики и физики	217
§ 11. Приближенное вычисление определенных интегралов	219
 Отдел V. Ряды	222
§ 1. Числовые ряды. Признаки сходимости знакопостоянных рядов	222
§ 2. Признаки сходимости знакопеременных рядов	234
§ 3. Действия над рядами	239
§ 4. Функциональные ряды	241
§ 5. Степенные ряды	253
§ 6. Ряды Фурье	264
§ 7. Суммирование рядов	269
§ 8. Нахождение определенных интегралов с помощью рядов	273
§ 9. Бесконечные произведения	274
§ 10. Формула Стирлинга	280
§ 11. Приближение непрерывных функций многочленами	281

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Отдел VI. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	284
§ 1. Предел функции. Непрерывность	284
§ 2. Частные производные. Дифференциал функции . .	290
§ 3. Дифференцирование неявных функций	303
§ 4. Замена переменных	312
§ 5. Геометрические приложения	324
§ 6. Формула Тейлора	329
§ 7. Экстремум функции нескольких переменных . . .	332
 Отдел VII. Интегралы, зависящие от параметра	 340
§ 1. Собственные интегралы, зависящие от параметра .	340
§ 2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость интегралов	346
§ 3. Дифференцирование и интегрирование несобственных интегралов под знаком интеграла	352
§ 4. Эйлеровы интегралы	359
§ 5. Интегральная формула Фурье	362
 Отдел VIII. Кратные и криволинейные интегралы . . .	 365
§ 1. Двойные интегралы	365
§ 2. Вычисление площадей	373
§ 3. Вычисление объемов	375
§ 4. Вычисление площадей поверхностей	377
§ 5. Приложения двойных интегралов к механике . .	379
§ 6. Тройные интегралы	382
§ 7. Вычисление объемов с помощью тройных интегралов	385
§ 8. Приложения тройных интегралов к механике . .	388
§ 9. Несобственные двойные и тройные интегралы . .	392
§ 10. Многократные интегралы	396
§ 11. Криволинейные интегралы	399
§ 12. Формула Грина	408
§ 13. Физические приложения криволинейных интегралов	412
§ 14. Поверхностные интегралы	414
§ 15. Формула Стокса	419
§ 16. Формула Остроградского	421
§ 17. Элементы теории поля	425
 Ответы	 433

1. ВАЖНЕЙШИЕ ПОСТОЯННЫЕ

$\pi=3,1415926536$	$e=2,7182818285$	$M=\lg e=0,4342944819$
$\frac{1}{\pi}=0,3183098862$	$\frac{1}{e}=0,3678794412$	$\frac{1}{M}=\ln 10=2,3025850930$
$\pi^2=9,8696044011$	$e^2=7,3890560989$	$1 \text{ радиан}=57^{\circ}17'44,806''$
$\sqrt{\pi}=1,7724538509$	$\sqrt{e}=1,6487212707$	$\text{мс } 1^{\circ}=0,01745 \text{ } 32925$

II. ТАБЛИЦЫ

1. Обратные величины. Квадратные и кубические корни. Показательная функция

n	$\frac{1}{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	e^n	$\frac{n}{e}$	$\frac{n}{e}$	e^{-n}
1	1,000	1,00	3,16	1,00	2,15	4,64	2,718	1,105	0,905	0,368
2	0,500	1,41	4,47	1,26	2,71	5,85	7,389	1,221	0,819	0,135
3	0,333	1,73	5,48	1,44	3,11	6,69	20,09	1,350	0,741	0,0498
4	0,250	2,00	6,32	1,59	3,42	7,37	54,60	1,492	0,670	0,0183
5	0,200	2,24	7,07	1,71	3,68	7,94	148,41	1,649	0,607	0,00674
6	0,167	2,45	7,75	1,82	3,91	8,43	403,4	1,822	0,549	2,48·10 ⁻⁴
7	0,143	2,65	8,37	1,91	4,12	8,88	1096,6	2,014	0,497	9,12·10 ⁻⁵
8	0,125	2,83	8,94	2,00	4,31	9,28	2981	2,226	0,449	3,35·10 ⁻⁵
9	0,111	3,00	9,49	2,08	4,48	9,65	8103	2,460	0,407	1,23·10 ⁻⁵
10	0,100	3,16	10,00	2,15	4,64	10,00	22026	2,718	0,368	4,54·10 ⁻⁶

2. Факториал и связанные с ним функции

n	$n!$	$(2n-1)!!$	$(2n)!!$	$1/n!$	$1/(2n-1)!!$	$1/(2n)!!$
1	1	1	2	1	0,333 333 333	0,5
2	2	3	4	0,5	0,125	0,25
3	6	15	8	0,166 666 667	0,066 666 667	0,020 833 333
4	24	105	16	0,041 666 667	0,009 523 810	0,002 604 167
5	120	945	32	0,008 333 333	0,001 058 201	0,000 260 417
6	720	10 395	64	0,001 388 889	0,000 096 200	0,000 021 701
7	5 040	135 135	128	0,000 198 413	0,000 007 400	0,000 001 550
8	40 320	2 027 025	256	0,000 024 802	0,000 000 493	0,000 000 097
9	362 880	34 459 425	512	0,000 002 756	0,000 000 029	0,000 000 005
10	3 628 800	654 729 075	1 024	0,000 000 276	0,000 000 002	0,000 000 000

3. Гамма-функция

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\Gamma(x)$	1,000	0,951	0,918	0,897	0,887	0,886	0,894	0,909	0,931	0,962	1,000

При $x > 0 \text{ min } \Gamma(x) = \Gamma(1,4616) = 0,8856$.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ

Пятое издание Сборника почти полностью включает задачи предыдущих изданий. Добавлено свыше 200 новых задач, главным образом теоретического характера (на доказательство формул и неравенств, на исследование сходимости итерационных процессов, на исследование равномерной непрерывности функций, на исследование дифференцируемости функций и др.). Увеличено число примеров на гиперболические функции. Значительно пополнен отдел VIII «Кратные и криволинейные интегралы». Номера старых задач, за исключением небольшого числа их, сохранены неизменными; заменены лишь номера следующих старых задач: 149 на 149(н), 162 на 162(н), 178 на 178(н), 576 на 576.1, 627(ж) на 1373.2, 806 на 806.1, 1297 на 1393.3, 2412 на 2412(н), 2605 на 2605(н), 2606 на 2606(н). Номера новых задач оформлялись с помощью дробной десятичной нумерации, например задачи, вставленные непосредственно после № 2123, имеют номера 2123.1, 2123.2, 2123.3 и т. д.

Часть новых задач оригинальна, а часть заимствована из известных задачников и руководств. В частности, были использованы книги: D-r D. S. Mitrović, Zbornik matematičkih problema, I (Beograd, 1958); R. Buck, Advanced calculus (New York—Toronto—London, 1956); Н. М. Гюнтер и Р. О. Кузьмин, Сборник задач по высшей математике, ч. II, изд. 10 (Л.—М., 1933). Устранены также замеченные неточности в теоретических введениях к параграфам отделов и ошибки в ответах.

В новом издании Сборника учтены отдельные замечания работников кафедры математического анализа Московского государственного университета. Приношу им свою благодарность. Особую признательность выражаю доценту МГУ А. Ф. Филиппову за ценные советы.

Москва, 1961 г.

Б. П. Демидович

ПРЕДИСЛОВИЕ К ДЕВЯТОМУ ИЗДАНИЮ

Девятое издание сборника является стереотипным. Устранены отдельные неточности.

Приношу благодарность проф. А. Р. Янпольскому и доц. А. Ф. Шапкину за тщательное знакомство с материалом книги и сделанные замечания.

Москва, 1.07, 1976

Б. П. Демидович

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ФУНКЦИИ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ОТДЕЛ I

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

§ 1. Вещественные числа

1°. Метод математической индукции. Чтобы доказать, что некоторая теорема верна для всякого натурального числа n , достаточно доказать: 1) что эта теорема справедлива для $n=1$ и 2) что если эта теорема справедлива для какого-нибудь натурального числа n , то она справедлива также и для следующего натурального числа $n+1$.

2°. Сечение. Разбиение рациональных чисел на два класса A и B называется *сечением*, если выполнены следующие условия: 1) оба класса не пусты; 2) каждое рациональное число, попадает в один и только в один класс и 3) любое число, принадлежащее классу A (*нижний класс*), меньше произвольного числа, принадлежащего классу B (*верхний класс*). Сечение A/B определяет: а) рациональное число, если или нижний класс A имеет наибольшее число или же верхний класс B имеет наименьшее число, и б) иррациональное число, если класс A не имеет наибольшего числа, а класс B — наименьшего числа. Числа рациональные и иррациональные носят название *вещественных* или *действительных* *).

3°. Абсолютная величина. Если x — вещественное число, то *абсолютной величиной* $|x|$ называется неотрицательное число, определяемое следующими условиями:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{если } x < 0; \\ x, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

Для любых вещественных чисел x и y имеет место неравенство

$$|x| - |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$$

4°. Верхняя и нижняя грани. Пусть $X = \{x\}$ — ограниченное множество вещественных чисел. Число

$$m = \inf \{x\}$$

называется *нижней гранью* множества X , если:

1) каждое $x \in X$ **) удовлетворяет неравенству

$$x \geq m;$$

*) В дальнейшем под словом *число* мы будем понимать вещественное число, если не оговорено противное.

**) Запись $x \in X$ означает, что число x принадлежит множеству X .

2) каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует $x' \in X$ такое, что

$$x' < m + \varepsilon.$$

Аналогично число

$$M = \sup \{x\}$$

называется *верхней гранью* множества X , если:

1) каждое $x \in X$ удовлетворяет неравенству

$$x \leq M,$$

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует $x'' \in X$ такое, что

$$x'' > M - \varepsilon.$$

Если множество X не ограничено снизу, то принято говорить, что

$$\inf \{x\} = -\infty;$$

если же множество X не ограничено сверху, то полагают

$$\sup \{x\} = +\infty.$$

5°. Абсолютная и относительная погрешности. Если a ($a \neq 0$) есть точное значение измеряемой величины, а x — приближенное значение этой величины, то

$$\Delta = |x - a|$$

называется *абсолютной погрешностью*, а

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}$$

— *относительной погрешностью* измеряемой величины.

Говорят, что число x имеет n верных знаков, если абсолютная погрешность этого числа не превышает половины единицы разряда, выражаемого n -й значащей цифрой.

Применяя метод математической индукции, доказать, что для любого натурального числа n справедливы следующие равенства:

$$1. \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$2. \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$3. \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = (1 + 2 + \dots + n)^2.$$

$$4. \quad 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

5. Пусть

$$a^{(n)} = a(a-h) \dots [a - (n-1)h] \text{ и } a^{(0)} = 1.$$

Доказать, что

$$(a+b)^{(n)} = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{(n-m)} b^{(m)},$$

где C_n^m — число сочетаний из n элементов по m . Вывести отсюда формулу *бинома Ньютона*.

6. Доказать *неравенство Бернулли*:

$$(1+x_1)(1+x_2) \dots (1+x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — числа одного и того же знака, большие -1 .

7. Доказать, что если $x > -1$, то справедливо неравенство

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (n > 1),$$

причем знак равенства имеет место лишь при $x=0$.

8. Доказать неравенство

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad \text{при } n > 1.$$

Указание. Использовать неравенство

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > 2 \quad (n=1, 2, \dots).$$

9. Доказать неравенство

$$2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2n)! > [(n+1)!]^n \quad \text{при } n > 1.$$

10. Доказать неравенство

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

10.1. Доказать неравенства:

а) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \quad (n \geq 2);$

б) $n^{n+1} > (n+1)^n \quad (n \geq 3);$

в) $\left| \sin \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \sin x_k \quad (0 \leq x_k \leq \pi; \quad k=1, 2, \dots, n);$

г) $(2n)! < 2^{2n} (n!)^2.$

11. Пусть c — положительное число, не являющееся точным квадратом целого числа, и A/B — сечение, определяющее вещественное число $\sqrt{c}$, где в класс B входят все положительные рациональные числа b такие, что $b^2 > c$, а в класс A — все остальные рациональные числа. Доказать, что в классе A нет наибольшего числа, а в классе B нет наименьшего числа.

12. Сечение A/B , определяющее число $\sqrt[3]{2}$, строится следующим образом: класс A содержит все рациональные числа a такие, что $a^3 < 2$; класс B содержит все остальные рациональные числа. Доказать, что в классе A нет наибольшего числа, а в классе B — наименьшего.

13. Построив соответствующие сечения, доказать равенства:

а) $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18};$ б) $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6},$

14. Построить сечение, определяющее число $2^{\sqrt{2}}.$

15. Доказать, что всякое непустое числовое множество, ограниченное снизу, имеет нижнюю грань, а всякое непустое числовое множество, ограниченное сверху, имеет верхнюю грань.

16. Показать, что множество всех правильных рациональных дробей

$$\frac{m}{n},$$

где m и n — натуральные числа и $0 < m < n$, не имеет наименьшего и наибольшего элементов. Найти нижнюю и верхнюю грани этого множества.

17. Определить нижнюю и верхнюю грани множества рациональных чисел r , удовлетворяющих неравенству

$$r^2 < 2.$$

18. Пусть $\{-x\}$ — множество чисел, противоположных числам $x \in \{x\}$.

Доказать, что

$$а) \inf \{-x\} = -\sup \{x\}; \quad б) \sup \{-x\} = -\inf \{x\}.$$

19. Пусть $\{x+y\}$ есть множество всех сумм $x+y$, где $x \in \{x\}$ и $y \in \{y\}$.

Доказать равенства:

$$а) \inf \{x+y\} = \inf \{x\} + \inf \{y\};$$

$$б) \sup \{x+y\} = \sup \{x\} + \sup \{y\}.$$

20. Пусть $\{xy\}$ есть множество всех произведений xy , где $x \in \{x\}$ и $y \in \{y\}$, причем $x \geq 0$ и $y \geq 0$.

Доказать равенства:

$$а) \inf \{xy\} = \inf \{x\} \cdot \inf \{y\}; \quad б) \sup \{xy\} = \sup \{x\} \cdot \sup \{y\}.$$

21. Доказать неравенства:

$$а) |x-y| \geq ||x| - |y||;$$

$$б) |x+x_1+\dots+x_n| \geq |x| - (|x_1| + \dots + |x_n|).$$

Решить неравенства:

$$22. |x+1| < 0,01.$$

$$26. |x+2| + |x-2| \leq 12,$$

$$23. |x-2| \geq 10.$$

$$27. |x+2| - |x| > 1.$$

$$24. |x| > |x+1|.$$

$$28. ||x+1| - |x-1|| < 1.$$

$$25. |2x-1| < |x-1|.$$

$$29. |x(1-x)| < 0,05.$$

30. Доказать тождество

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 = x^2.$$

31. При измерении длины в 10 см абсолютная погрешность составляла 0,5 мм; при измерении расстояния в 500 км абсолютная погрешность была равна 200 м. Какое измерение точнее?

32. Определить, сколько верных знаков содержит число

$$x = 2,3752,$$

если относительная погрешность этого числа составляет 1%?

33. Число

$$x = 12,125$$

содержит 3 верных знака. Определить, какова относительная погрешность этого числа.

34. Стороны прямоугольника равны:

$$x = 2,50 \text{ см} \pm 0,01 \text{ см},$$

$$y = 4,00 \text{ см} \pm 0,02 \text{ см}.$$

В каких границах заключается площадь S этого прямоугольника? Каковы абсолютная погрешность Δ и относительная погрешность δ площади прямоугольника, если за стороны его принять средние значения?

35. Вес тела $p = 12,59 \text{ Г} \pm 0,01 \text{ Г}$, а его объем $v = 3,2 \text{ см}^3 \pm \pm 0,2 \text{ см}^3$. Определить удельный вес тела и оценить абсолютную и относительную погрешности удельного веса, если за вес тела и объем его принять средние значения.

36. Радиус круга

$$r = 7,2 \text{ м} \pm 0,1 \text{ м}.$$

С какой минимальной относительной погрешностью может быть определена площадь круга, если принять $\pi = 3,14$?

37. Измерения прямоугольного параллелепипеда суть:

$$x = 24,7 \text{ м} \pm 0,2 \text{ м},$$

$$y = 6,5 \text{ м} \pm 0,1 \text{ м},$$

$$z = 1,2 \text{ м} \pm 0,1 \text{ м}.$$

В каких границах заключается объем v этого параллелепипеда? С какими абсолютной и относительной погрешностями может быть определен объем этого параллелепипеда, если за его измерения принять средние значения?

38. С какой абсолютной погрешностью следует измерить сторону квадрата x , где $2 \text{ м} < x < 3 \text{ м}$, чтобы иметь возможность определить площадь этого квадрата с точностью до $0,001 \text{ м}^2$?

39. С какими абсолютными погрешностями Δ достаточно измерить стороны x и y прямоугольника, чтобы площадь его можно было вычислить с точностью до $0,01 \text{ м}^2$, если ориентировочно стороны прямоугольника не превышают 10 м каждая?

40. Пусть $\delta(x)$ и $\delta(y)$ — относительные погрешности чисел x и y , $\delta(xy)$ — относительная погрешность числа xy .

Доказать, что

$$\delta(xy) \leq \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y).$$

§ 2. Теория последовательностей

1°. Понятие предела последовательности. Говорят, что последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, или иначе $x_n (n=1, 2, \dots)$, имеет своим пределом число a (короче, *сходится к a*), т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ при } n > N.$$

В частности, x_n называется *бесконечно малой*, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

Последовательность, не имеющая предела, называется *расходящейся*.

2°. Признаки существования предела.

1) Если

$$y_n \leq x_n \leq z_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c.$$

2) Монотонная и ограниченная последовательность имеет предел.

3) Критерий Коши. Для существования предела последовательности x_n необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало число $N = N(\varepsilon)$ такое, что

$$|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon,$$

если только $n > N$ и $p > 0$.

3°. Основные теоремы о пределах последовательностей. Предполагая, что существуют

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

имеем:

$$1) \text{ если } x_n \leq y_n, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}, \text{ если } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0.$$

4°. Число e . Последовательность

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n=1, 2, \dots)$$

имеет конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,718\,281\,8284\dots$$

5°. Бесконечный предел. Символическая запись

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

обозначает, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что

$$|x_n| > \varepsilon \text{ при } n > N.$$

6°. Пределная точка. Число ξ (или символ ∞) называется *частичным пределом (пределной точкой)* данной последовательности x_n ($n = 1, 2, \dots$), если существует ее подпоследовательность

$$x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_n}, \dots \quad (1 \leq p_1 < p_2 < \dots)$$

такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p_n} = \xi.$$

Всякая ограниченная последовательность имеет по меньшей мере один конечный частичный предел (*принцип Больцано—Вейерштрасса*). Если этот частичный предел единственный, то он же является конечным пределом данной последовательности.

Наименьший частичный предел (конечный или бесконечный) последовательности x_n

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$$

называется *нижним пределом*, а наибольший частичный предел ее

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$$

называется *верхним пределом* этой последовательности.

Равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$$

является необходимым и достаточным условием существования предела (конечного или бесконечного) последовательности x_n .

41. Пусть

$$x_n = \frac{n}{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1,$$

определив для каждого $\varepsilon > 0$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что

$$|x_n - 1| < \varepsilon, \text{ если } n > N.$$

Заполнить следующую таблицу:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001	...
N					

42. Доказать, что x_n ($n=1, 2, \dots$) есть *бесконечно малая* (т. е. имеет предел, равный 0), указав для всякого $\varepsilon > 0$ число $N=N(\varepsilon)$ такое, что $|x_n| < \varepsilon$ при $n > N$, если

а) $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$; б) $x_n = \frac{1}{n!}$;

б) $x_n = \frac{2n}{n^2+1}$; г) $x_n = (-1)^n \cdot 0,999^n$.

Для каждого из этих случаев заполнить следующую таблицу:

ε	0,1	0,001	0,0001	...
N				

43. Доказать, что последовательности

а) $x_n = (-1)^n n$, б) $x_n = 2^{\sqrt{n}}$, в) $x_n = \lg(\lg n)$ ($n \geq 2$)

имеют бесконечный предел при $n \rightarrow \infty$ (т. е. являются *бесконечно большими*), определив для всякого $E > 0$ число $N=N(E)$ такое, что $|x_n| > E$ при $n > N$.

Для каждого из этих случаев заполнить следующую таблицу:

E	10	100	1000	10 000	...
N					

44. Показать, что

$$x_n = n^{(-1)^n} \quad (n=1, 2, \dots)$$

не ограничена, однако не является бесконечно большой при $n \rightarrow \infty$.

45. Сформулировать с помощью неравенств следующие утверждения:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

Предполагая, что n пробегает натуральный ряд чисел, определить значения следующих выражений:

46. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10\,000n}{n^2+1}$.

48. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1}$.

47. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

49. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$.

$$50. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n} \quad (|a| < 1, |b| < 1).$$

$$51. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right).$$

$$52. \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} \right|.$$

$$53. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right].$$

$$54. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \dots + \frac{(2n-1)^2}{n^3} \right].$$

$$55. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} \right).$$

$$56. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right].$$

$$57. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[2]{2} \sqrt[3]{2} \sqrt[4]{2} \dots \sqrt[n]{2}).$$

Доказать следующие равенства:

$$58. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

$$63. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0).$$

$$59. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

$$64. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0 \quad (a > 1).$$

$$60. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad (a > 1).$$

$$65. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

$$61. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

$$66. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

$$62. \lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0, \text{ если } |q| < 1.$$

67. Какое выражение больше при достаточно больших n :

а) $100n + 200$ или $0,01n^2$? б) 2^n или n^{1000} ? в) 1000^n или $n!$?

68. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \right) = 0.$$

Указание. См. пример 10.

69. Доказать, что последовательность

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

монотонно возрастает и ограничена сверху, а последовательность

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

монотонно убывает и ограничена снизу. Отсюда вывести, что эти последовательности имеют общий предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

У к а з а н и е. Составить отношения $\frac{x_{n+1}}{x_n}$, $\frac{y_n}{y_{n+1}}$ и воспользоваться неравенством примера 7.

70. Доказать, что

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n} \quad (n=1, 2, \dots).$$

При каких значениях показателя n выражение $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ будет отличаться от числа e меньше чем на 0,001?

71. Пусть p_n ($n=1, 2, \dots$) — произвольная последовательность чисел, стремящаяся к $+\infty$, и q_n ($n=1, 2, \dots$) — произвольная последовательность чисел, стремящаяся к $-\infty$ ($p_n, q_n \in [-1, 0]$). Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e.$$

72. Зная, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = e.$$

Вывести отсюда формулу

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}, \quad (*)$$

где $0 < \theta_n < 1$, и вычислить число e с точностью до 10^{-5} .

73. Доказать, что число e иррационально.

74. Доказать неравенство

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

75. Доказать неравенства:

$$a) \frac{1}{n+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},$$

где n — любое натуральное число;

$$b) 1 + \alpha < e^\alpha,$$

где α — вещественное число, отличное от нуля.

76. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(a^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = \ln a \quad (a > 0),$$

где $\ln a$ есть логарифм числа a при основании $e = 2,718 \dots$

Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость следующих последовательностей:

$$77. x_n = p_0 + \frac{p_1}{10} + \dots + \frac{p_n}{10^n} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где p_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) — целые неотрицательные числа, не превышающие 9, начиная с p_1 .

$$78. x_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n+9}{2n-1}.$$

$$79. x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

$$80. x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

$$81. x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \dots, x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}, \dots$$

n корней

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость следующих последовательностей:

$$82. x_n = a_0 + a_1 q + \dots + a_n q^n,$$

где

$$|a_k| < M \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \text{ и } |q| < 1.$$

$$83. x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}.$$

$$84. x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}.$$

$$85. x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}.$$

У к а з а н и е. Воспользоваться неравенством

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

86. Говорят, что последовательность x_n ($n = 1, 2, \dots$) имеет ограниченное изменение, если существует число C такое, что

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \dots + |x_n - x_{n-1}| < C \quad (n = 2, 3, \dots).$$

монотонно убывает и ограничена снизу. Отсюда вывести, что эти последовательности имеют общий предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

Указание. Составить отношения $\frac{x_{n+1}}{x_n}$, $\frac{y_n}{y_{n-1}}$ и воспользоваться неравенством примера 7.

70. Доказать, что

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

При каких значениях показателя n выражение $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ будет отличаться от числа e меньше чем на 0,001?

71. Пусть p_n ($n = 1, 2, \dots$) — произвольная последовательность чисел, стремящаяся к $+\infty$, и q_n ($n = 1, 2, \dots$) — произвольная последовательность чисел, стремящаяся к $-\infty$ ($p_n, q_n \in [-1, 0]$). Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e.$$

72. Зная, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = e.$$

Вывести отсюда формулу

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}, \quad (*)$$

где $0 < \theta_n < 1$, и вычислить число e с точностью до 10^{-5} .

73. Доказать, что число e иррационально.

74. Доказать неравенство

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

75. Доказать неравенства:

$$а) \frac{1}{n+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},$$

где n — любое натуральное число;

$$б) 1 + \alpha < e^\alpha,$$

где α — вещественное число, отличное от нуля.

76. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(a^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = \ln a \quad (a > 0),$$

где $\ln a$ есть логарифм числа a при основании $e = 2,718 \dots$

Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость следующих последовательностей:

$$77. x_n = p_0 + \frac{p_1}{10} + \dots + \frac{p_n}{10^n} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где p_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) — целые неотрицательные числа, не превышающие 9, начиная с p_1 .

$$78. x_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n+9}{2n-1}.$$

$$79. x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

$$80. x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

$$81. x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \dots, x_n = \sqrt{2 + \underbrace{\sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}_{n \text{ корней}}}, \dots$$

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость следующих последовательностей:

$$82. x_n = a_0 + a_1 q + \dots + a_n q^n,$$

где

$$|a_k| < M \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \text{ и } |q| < 1.$$

$$83. x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}.$$

$$84. x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}.$$

$$85. x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}.$$

Указание. Воспользоваться неравенством

$$\frac{1}{n^3} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

86. Говорят, что последовательность x_n ($n = 1, 2, \dots$) имеет ограниченное изменение, если существует число C такое, что

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \dots + |x_n - x_{n-1}| < C \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Доказать, что последовательность с ограниченным изменением сходится.

Построить пример сходящейся последовательности, не имеющей ограниченного изменения.

87. Сформулировать, что значит, что для данной последовательности не выполнен критерий Коши.

88. Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость последовательности

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

89. Доказать, что если последовательность x_n ($n = 1, 2, \dots$) сходится, то любая ее подпоследовательность x_{p_n} также сходится и имеет тот же самый предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

90. Доказать, что монотонная последовательность будет сходящейся, если сходится некоторая ее подпоследовательность.

91. Доказать, что если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|.$$

92. Если $x_n \rightarrow a$, то что можно сказать о пределе

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}?$$

93. Доказать, что сходящаяся числовая последовательность ограничена.

94. Доказать, что сходящаяся числовая последовательность достигает либо своей верхней грани, либо своей нижней грани, либо той и другой. Построить примеры последовательностей всех трёх типов.

95. Доказать, что числовая последовательность x_n ($n = 1, 2, \dots$), стремящаяся к $+\infty$, обязательно достигает своей нижней грани.

Найти наибольший член последовательности x_n ($n = 1, 2, \dots$), если:

$$96. x_n = \frac{n^2}{2^n}. \quad 97. x_n = \frac{\sqrt[n]{n}}{100 + n}. \quad 98. x_n = \frac{1000^n}{n!}.$$

Найти наименьший член последовательности x_n ($n = 1, 2, \dots$), если:

$$99. x_n = n^2 - 9n - 100. \quad 100. x_n = n + \frac{100}{n}.$$

Для последовательности x_n ($n = 1, 2, \dots$) найти $\inf x_n$, $\sup x_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ и $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, если:

$$101. x_n = 1 - \frac{1}{n}.$$

$$102. x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}.$$

$$101.1. x_n = (-1)^{n-1} \left(2 + \frac{3}{n} \right).$$

$$103. x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}.$$

$$104. x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

$$105. x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3}.$$

$$108. x_n = n^{(-1)^n}.$$

$$106. x_n = (-1)^n n.$$

$$109. x_n = 1 + n \sin \frac{n\pi}{2}.$$

$$107. x_n = -n [2 + (-1)^n].$$

$$110. x_n = \frac{1}{n-10,2}.$$

Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ и $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, если:

$$111. x_n = \frac{n^2}{1+n} \cos \frac{2n\pi}{3}.$$

$$114. x_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}.$$

$$112. x_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \cdot (-1)^n + \sin \frac{n\pi}{4}.$$

$$115. x_n = \cos^n \frac{2n\pi}{3}.$$

$$113. x_n = \frac{n}{n+1} \sin^2 \frac{n\pi}{4}.$$

Найти частичные пределы следующих последовательностей:

$$116. \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, \dots$$

$$117. 1, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots$$

$$118. \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots$$

$$119. x_n = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right) + 2(-1)^n.$$

$$120. x_n = \frac{1}{2} [(a+b) + (-1)^n (a-b)].$$

121. Построить пример числовой последовательности, имеющей в качестве своих частичных пределов данные числа

$$a_1, a_2, \dots, a_p.$$

122. Построить пример числовой последовательности, для которой все члены данной числовой последовательности

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

являются ее частичными пределами. Какие еще частичные пределы обязательно имеет построенная последовательность?

123. Построить пример последовательности:

- а) не имеющей конечных частичных пределов;
- б) имеющей единственный конечный частичный предел, но не являющейся сходящейся;
- в) имеющей бесконечное множество частичных пределов;
- г) имеющей в качестве своего частичного предела каждое вещественное число.

124. Доказать, что последовательности x_n и $y_n = x_n \sqrt[n]{n}$ ($n = 1, 2, \dots$) имеют одни и те же частичные пределы.

125. Доказать, что из ограниченной последовательности x_n ($n = 1, 2, \dots$) всегда можно выделить сходящуюся подпоследовательность x_{p_n} ($n = 1, 2, \dots$).

126. Доказать, что если последовательность x_n ($n = 1, 2, \dots$) не ограничена, то существует подпоследовательность x_{p_n} такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p_n} = \infty.$$

127. Пусть последовательность x_n ($n = 1, 2, \dots$) сходится, а последовательность y_n ($n = 1, 2, \dots$) расходится. Что можно утверждать о сходимости последовательностей:

$$\text{а) } x_n + y_n; \text{ б) } x_n y_n?$$

Привести соответствующие примеры.

128. Пусть последовательности x_n и y_n ($n = 1, 2, \dots$) расходятся. Можно ли утверждать, что последовательности

$$\text{а) } x_n + y_n; \text{ б) } x_n y_n$$

также расходятся?

Привести соответствующие примеры.

129. Пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0,$$

и y_n ($n = 1, 2, \dots$) — произвольная последовательность. Можно ли утверждать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0?$$

Привести соответствующие примеры.

130. Пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0.$$

Следует ли отсюда, что либо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, либо $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$?

Рассмотреть пример: $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$, $y_n = \frac{1-(-1)^n}{2}$ ($n = 1, 2, \dots$).

131. Доказать, что

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

и

$$б) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Построить примеры, когда в этих соотношениях имеют место строгие неравенства.

132. Пусть $x_n \geq 0$ и $y_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$). Доказать, что

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

и

$$б) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Построить примеры, когда в этих соотношениях имеют место строгие неравенства.

133. Доказать, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ существует, то, какова бы ни была последовательность y_n ($n = 1, 2, \dots$), имеем:

$$a) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

и

$$б) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \quad (x_n \geq 0).$$

134. Доказать, что если для некоторой последовательности x_n ($n = 1, 2, \dots$), какова бы ни была последовательность y_n ($n = 1, 2, \dots$), имеет место по меньшей мере одно из равенств:

$$a) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

или

$$б) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \quad (x_n \geq 0),$$

то последовательность x_n — сходящаяся.

135. Доказать, что если $x_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) и

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 1,$$

то последовательность x_n — сходящаяся.

136. Доказать, что если последовательность x_n ($n = 1, 2, \dots$) ограничена и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0,$$

то частичные пределы этой последовательности расположены всюду плотно между ее нижним и верхним пределами:

$$l = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{и} \quad L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

то есть любое число из отрезка $[l, L]$ является частичным пределом данной последовательности.

137. Пусть числовая последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ удовлетворяет условию

$$0 \leq x_{m+n} \leq x_m + x_n \quad (m, n = 1, 2, \dots).$$

Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$ существует.

138. Доказать, что если последовательность x_n ($n = 1, 2, \dots$) сходится, то последовательность средних арифметических

$$\xi_n = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

также сходится и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Обратное утверждение неверно: построить пример.

139. Доказать, что если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = +\infty.$$

140. Доказать, что если последовательность x_n ($n = 1, 2, \dots$) сходится и $x_n > 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

141. Доказать, что если $x_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n},$$

предполагая, что предел, стоящий в правой части последнего равенства, существует.

142. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

143. Доказать теорему Штольца: если

а) $y_{n+1} > y_n$ ($n = 1, 2, \dots$);

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$, в) существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$,

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

144. Найти:

а) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{a^n}$ ($a > 1$); б) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lg n}{n}$.

145. Доказать, что если p — натуральное число, то

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$;

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right) = \frac{1}{2}$,

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 3^p + \dots + (2n-1)^p}{n^{p+1}} = \frac{2^p}{p+1}$.

146. Доказать, что последовательность

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

сходится.

Таким образом, имеет место формула

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n,$$

где $C = 0,577216\dots$ — так называемая *постоянная Эйлера* и $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

147. Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right).$$

148. Последовательность чисел x_n ($n = 1, 2, \dots$) определяется следующими формулами:

$$x_1 = a, x_2 = b, x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} \quad (n = 3, 4, \dots).$$

Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

149(н). Пусть x_n ($n = 1, 2, \dots$) — последовательность чисел, определяемая следующей формулой:

$$x_0 > 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

150. Доказать, что последовательности x_n и y_n ($n = 1, 2, \dots$), определяемые следующими формулами:

$$x_1 = a, \quad y_1 = b, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},$$

имеют общий предел

$$\mu(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

(арифметико-геометрическое среднее чисел a и b).

§ 3. Понятие функции

1°. Понятие функции. Переменная y называется однозначной функцией f от переменной x в данной области изменения $X = \{x\}$, если каждому значению $x \in X$ ставится в соответствие одно определенное действительное значение $y = f(x)$, принадлежащее некоторому множеству $Y = \{y\}$.

Множество X носит название области определения или области существования функции $f(x)$; Y называется множеством значений этой функции.

В простейших случаях множество X представляет собой или открытый промежуток (интервал) $a, b[= (a, b): a < x < b$ или полуоткрытые промежутки

$$]a, b[= (a, b]: a < x \leq b, [a, b[= [a, b): a \leq x < b,$$

или замкнутый промежуток (сегмент) $[a, b]: a \leq x \leq b$, где a и b — некоторые вещественные числа или символы $-\infty$ и $+\infty$ (в последних случаях равенства исключаются). Если каждому значению x из X соответствует одно или несколько значений $y = f(x)$, то y называется многозначной функцией от x .

2°. Обратная функция. Если под x понимать любое значение, удовлетворяющее уравнению

$$f(x) = y,$$

где y — фиксированное число, принадлежащее множеству значений Y функции $f(x)$, то это соответствие определяет на множестве Y некоторую, вообще говоря, многозначную функцию

$$x = f^{-1}(y),$$

называемую обратной по отношению к функции $f(x)$. Если функция $y = f(x)$ монотонна в строгом смысле, т. е. $f(x_2) > f(x_1)$ (или соответственно $f(x_2) < f(x_1)$) при $x_2 > x_1$, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ является однозначной и монотонной в том же смысле.

Определить области существования следующих функций:

151. $y = \frac{x^2}{1+x}$.

160. $y = \arccos(2 \sin x)$.

152. $y = \sqrt{3x - x^3}$.

161. $y = \lg[\cos(\lg x)]$.

153. $y = (x-2) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

162(н). $y = (x + |x|) \sqrt{x \sin^2 \pi x}$.

154. а) $y = \log(x^2 - 4)$;

163. $y = \operatorname{ctg} \pi x + \arccos(2^x)$.

б) $y = \log(x+2) + \log(x-2)$.

164. $y = \arcsin(1-x) + \lg(\lg x)$.

155. $y = \sqrt{\sin(\sqrt{x})}$.

165. $y = (2x)!$

156. $y = \sqrt{\cos x^2}$.

165.1. $y = \log_2 \log_3 \log_4 x$.

157. $y = \lg\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$.

165.2. $y = \sqrt[4]{\lg \operatorname{tg} x}$.

158. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$.

165.3. $y = \sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\sin 3x}$
($0 \leq x \leq 2\pi$).

159. $y = \arcsin \frac{2x}{1+x}$.

Определить области существования и множество значений следующих функций:

166. $y = \sqrt{2+x-x^2}$.

169. $y = \arcsin\left(\lg \frac{x}{19}\right)$.

167. $y = \lg(1-2 \cos x)$.

170. $y = (-1)^x$.

168. $y = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$.

171. В треугольник ABC (рис. 1), основание которого $AC=b$ и высота $BD=h$, вписан прямоугольник $KLMN$, высота которого

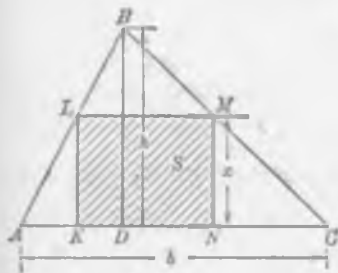


Рис. 1.

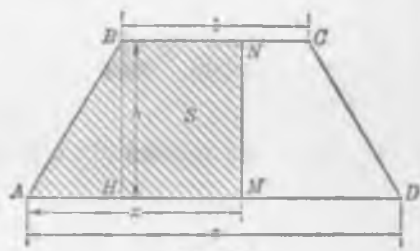


Рис. 2.

$NM=x$. Выразить периметр P прямоугольника $KLMN$ и его площадь S как функции от x .

Построить графики функций $P=P(x)$ и $S=S(x)$.

172. В треугольнике ABC сторона $AB=6$ см, сторона $AC=8$ см и угол $BAC=x$. Выразить $BC=a$ и площадь $ABC=S$

как функции переменной x . Построить графики функций $a = a(x)$ и $S = S(x)$.

173. В равнобедренной трапеции $ABCD$ (рис. 2), основания которой $AD = a$ и $BC = b$ ($a > b$), а высота $HB = h$, проведена прямая $MN \parallel HB$ и отстоящая от вершины A на расстоянии $AM = x$. Выразить площадь S фигуры $ABNMA$ как функцию переменной x . Построить график функции: $S = S(x)$.

174. На сегменте $0 \leq x \leq 1$ оси Ox равномерно распределена масса, равная $2g$, а в точках этой оси $x = 2$ и $x = 3$ находятся сосредоточенные массы по $1g$ в каждой. Составить аналитическое выражение функции $m = m(x)$ ($-\infty < x < +\infty$), численно равной массе, находящейся в интервале $(-\infty, x)$, и построить график этой функции.

175. Функция $y = \operatorname{sgn} x$ определяется следующим образом:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Построить график этой функции. Показать, что

$$|x| = x \operatorname{sgn} x.$$

176. Функция $y = [x]$ (целая часть числа x) определяется следующим образом: если $x = n + r$, где n — целое число и $0 \leq r < 1$, то $[x] = n$.

Построить график этой функции.

177. Пусть

$$y = \pi(x) \quad (x \geq 0)$$

обозначает число простых чисел, не превышающих числа x . Построить график этой функции для значений аргумента $0 \leq x \leq 20$.

На какое множество E_y отображает множество E_x функция $y = f(x)$, если:

$$178(n). \quad y = x^2, \quad E_x = \{-1 \leq x \leq 2\}.$$

$$179. \quad y = \lg x, \quad E_x = \{10 < x < 1000\}.$$

$$180. \quad y = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x, \quad E_x = \{-\infty < x < +\infty\}.$$

$$181. \quad y = \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4}, \quad E_x = \{0 < |x| \leq 1\}.$$

$$182. \quad y = |x|, \quad E_x = \{1 \leq |x| \leq 2\}.$$

Переменная x пробегает интервал $0 < x < 1$. Какое множество пробегает переменная y , если:

183. $y = a + (b - a)x$. 186. $y = \sqrt{x - x^2}$.

184. $y = \frac{1}{1-x}$. 187. $y = \operatorname{ctg} \pi x$.

185. $y = \frac{x}{2x-1}$. 188. $y = x + [2x]$.

189. Найти $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, если

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x.$$

190. Найти $f(-1)$, $f(-0,001)$, $f(100)$, если

$$f(x) = \lg x^2.$$

191. Найти $f(0,9)$, $f(0,99)$, $f(0,999)$, $f(1)$, если

$$f(x) = 1 + [x].$$

192. Найти $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, если

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{при } -\infty < x \leq 0, \\ 2^x & \text{при } 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

193. Найти $f(0)$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(x)+1$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}$, если

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}.$$

194. Найти значения x , для которых: 1) $f(x) = 0$; 2) $f(x) > 0$; 3) $f(x) < 0$, если:

а) $f(x) = x - x^2$; б) $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$; в) $f(x) = (x + |x|)(1 - x)$.

195. Найти

$$\varphi(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

если: а) $f(x) = ax + b$; б) $f(x) = x^2$; в) $f(x) = a^x$.

196. Пусть

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Показать, что

$$f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) = 0.$$

197. Найти целую линейную функцию

$$f(x) = ax + b,$$

если $f(0) = -2$ и $f(3) = 5$.

Чему равны $f(1)$ и $f(2)$ (линейная интерполяция)?

198. Найти целую рациональную функцию второй степени

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

если

$$f(-2)=0, \quad f(0)=1, \quad f(1)=5.$$

Чему равны $f(-1)$ и $f(0,5)$ (квадратичная интерполяция)?

199. Найти целую рациональную функцию третьей степени:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

если

$$f(-1)=0, \quad f(0)=2, \quad f(1)=-3, \quad f(2)=5.$$

200. Найти функцию вида

$$f(x) = a + bc^x,$$

если

$$f(0)=15, \quad f(2)=30, \quad f(4)=90.$$

201. Доказать, что если для линейной функции

$$f(x) = ax + b$$

значения аргумента $x = x_n$ ($n = 1, 2, \dots$) образуют арифметическую прогрессию, то соответствующие значения функции $y_n = f(x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) образуют также арифметическую прогрессию.

202. Доказать, что если для показательной функции

$$f(x) = a^x \quad (a > 0)$$

значения аргумента $x = x_n$ ($n = 1, 2, \dots$) образуют арифметическую прогрессию, то соответствующие значения функции $y_n = f(x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) образуют геометрическую прогрессию).

203. Пусть функция $f(u)$ определена при $0 < u < 1$. Найти области определения функций:

а) $f(\sin x)$; б) $f(\ln x)$; в) $f\left(\frac{1+x}{x}\right)$.

204. Пусть

$$f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x}) \quad (a > 0).$$

Показать, что

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

205. Пусть

$$f(x) + f(y) = f(z).$$

Определить z , если:

а) $f(x) = ax$; б) $f(x) = \operatorname{arctg} x \quad (|x| < 1)$;

б) $f(x) = \frac{1}{x}$; г) $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$.

Найти $\varphi[\varphi(x)]$, $\psi[\psi(x)]$, $\varphi[\psi(x)]$ и $\psi[\varphi(x)]$, если

206. $\varphi(x) = x^2$ и $\psi(x) = 2^x$.

207. $\varphi(x) = \operatorname{sgn} x$ и $\psi(x) = \frac{1}{x}$.

208. $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ x & \text{при } x > 0 \end{cases}$ и $\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ -x^2 & \text{при } x > 0. \end{cases}$

209. Найти $f[f(x)]$, $f\{f[f(x)]\}$, если

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

210. Пусть

$$f_n(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{n \text{ раз}}.$$

Найти $f_n(x)$, если

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

211. Найти $f(x)$, если

$$f(x+1) = x^2 - 3x + 2.$$

212. Найти $f(x)$, если

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} \quad (|x| \geq 2).$$

213. Найти $f(x)$, если

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2} \quad (x > 0).$$

213.1. Найти $f(x)$, если

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2.$$

Доказать, что следующие функции являются монотонно растающими в указанных промежутках:

214. $f(x) = x^2$ $(0 \leq x < +\infty)$.

215. $f(x) = \sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

216. $f(x) = \operatorname{tg} x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$.

217. $f(x) = 2x + \sin x$ $(-\infty < x < +\infty)$.

Доказать, что следующие функции являются монотонно убывающими в указанных промежутках:

218. $f(x) = x^2$ $(-\infty < x \leq 0)$. 219. $f(x) = \cos x$ $(0 \leq x \leq \pi)$.

220. $f(x) = \operatorname{ctg} x$ $(0 < x < \pi)$.

221. Исследовать на монотонность следующие функции:

- а) $f(x) = ax + b$; г) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$;
 б) $f(x) = ax^3 + bx + c$; д) $f(x) = a^x$ ($a > 0$).
 в) $f(x) = x^2$;

222. Можно ли почленно логарифмировать неравенство?

223. Пусть $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x)$ — монотонно возрастающие функции. Доказать, что если

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x),$$

то

$$\varphi[\varphi(x)] \leq f[f(x)] \leq \psi[\psi(x)].$$

Определить обратную функцию $x = \varphi(y)$ и ее область существования, если:

224. $y = 2x + 3$ ($-\infty < x < +\infty$).

225. $y = x^2$; а) $-\infty < x \leq 0$; б) $0 \leq x < +\infty$.

226. $y = \frac{1-x}{1+x}$ ($x \neq -1$).

227. $y = \sqrt{1-x^2}$; а) $-1 \leq x \leq 0$; б) $0 \leq x \leq 1$.

228. $y = \operatorname{sh} x$, где $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ($-\infty < x < +\infty$).

229. $y = \operatorname{th} x$, где $\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ($-\infty < x < +\infty$).

230.

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } -\infty < x < 1; \\ x^2, & \text{если } 1 \leq x \leq 4; \\ 2^x, & \text{если } 4 < x < +\infty. \end{cases}$$

231. Функция $f(x)$, определенная в симметричном интервале $(-l, l)$, называется четной, если

$$f(-x) = f(x);$$

и нечетной, если

$$f(-x) = -f(x).$$

Определить, какие из данных функций $f(x)$ являются четными, а какие нечетными:

а) $f(x) = 3x - x^3$; г) $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$;

б) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$; д) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

в) $f(x) = a^x + a^{-x}$ ($a > 0$);

232. Доказать, что всякую функцию $f(x)$, определенную в симметричном интервале $(-l, l)$, можно представить в виде суммы четной и нечетной функций.

233. Функция $f(x)$, определенная на множестве E , называется периодической, если существует число $T > 0$ (период функции — в широком смысле слова!) такое, что

$$f(x \pm T) = f(x) \text{ при } x \in E.$$

Выяснить, какие из данных функций являются периодическими, и определить наименьший период их, если:

а) $f(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$;

б) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$;

в) $f(x) = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3 \operatorname{tg} \frac{x}{3}$; е) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$;

г) $f(x) = \sin^3 x$;

ж) $f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x}$;

д) $f(x) = \sin x^2$;

з) $f(x) = \sin x + \sin(x\sqrt{2})$.

234. Доказать, что для функции Дирихле

$$x(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

периодом является любое рациональное число.

235. Доказать, что сумма и произведение двух периодических функций, которые определены на общем множестве и периоды которых соизмеримы, есть функции также периодические.

235.1. Функция $f(x)$ называется *антипериодической*, если

$$f(x + T) = -f(x) \quad (T > 0).$$

Доказать, что $f(x)$ — периодическая с периодом $2T$.

236. Доказать, что если для функции $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) выполнено равенство $f(x + T) = kf(x)$, где k и T — положительные постоянные, то $f(x) = a^{\varphi(x)}$, где a — постоянная, а $\varphi(x)$ — периодическая функция с периодом T .

§ 4. Графическое изображение функции

1°. Для построения графика функции $y = f(x)$ поступают следующим образом: 1) определяют область существования функции: $X = \{x\}$; 2) выбирают достаточно густую сеть значений аргумента $x_1, x_2, \dots, x_n$ из X и составляют таблицу соответствующих значений функции

$$y_i = f(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

3) наносят систему точек $M_i(x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) на координатную плоскость Oxy и соединяют их линиями, характер которой учитывает положение промежуточных точек.

221. Исследовать на монотонность следующие функции:

а) $f(x) = ax + b$;

г) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$;

б) $f(x) = ax^3 + bx + c$;

д) $f(x) = a^x \quad (a > 0)$.

в) $f(x) = x^3$;

222. Можно ли почленно логарифмировать неравенство?

223. Пусть $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x)$ — монотонно возрастающие функции. Доказать, что если

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x),$$

то

$$\varphi[\varphi(x)] \leq f[f(x)] \leq \psi[\psi(x)].$$

Определить обратную функцию $x = \varphi(y)$ и ее область существования, если:

224. $y = 2x + 3 \quad (-\infty < x < +\infty)$.

225. $y = x^2$;

а) $-\infty < x \leq 0$;

б) $0 \leq x < +\infty$.

226. $y = \frac{1-x}{1+x} \quad (x \neq -1)$.

227. $y = \sqrt{1-x^2}$;

а) $-1 \leq x \leq 0$;

б) $0 \leq x \leq 1$.

228. $y = \operatorname{sh} x$, где $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad (-\infty < x < +\infty)$.

229. $y = \operatorname{th} x$, где $\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (-\infty < x < +\infty)$.

230.

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } -\infty < x < 1; \\ x^2, & \text{если } 1 \leq x \leq 4; \\ 2^x, & \text{если } 4 < x < +\infty. \end{cases}$$

231. Функция $f(x)$, определенная в симметричном интервале $(-l, l)$, называется четной, если

$$f(-x) = f(x);$$

и нечетной, если

$$f(-x) = -f(x).$$

Определить, какие из данных функций $f(x)$ являются четными, а какие нечетными:

а) $f(x) = 3x - x^3$;

г) $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$;

б) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$;

д) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

в) $f(x) = a^x + a^{-x} \quad (a > 0)$;

232. Доказать, что всякую функцию $f(x)$, определенную в симметричном интервале $(-l, l)$, можно представить в виде суммы четной и нечетной функций.

233. Функция $f(x)$, определенная на множестве E , называется периодической, если существует число $T > 0$ (период функции — в широком смысле слова!) такое, что

$$f(x \pm T) = f(x) \quad \text{при } x \in E.$$

Выяснить, какие из данных функций являются периодическими, и определить наименьший период их, если:

а) $f(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$;

б) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$;

в) $f(x) = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3 \operatorname{tg} \frac{x}{3}$; е) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$;

г) $f(x) = \sin^3 x$;

ж) $f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x}$;

д) $f(x) = \sin x^2$;

з) $f(x) = \sin x + \sin(x\sqrt{2})$.

234. Доказать, что для функции Дирихле

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

периодом является любое рациональное число.

235. Доказать, что сумма и произведение двух периодических функций, которые определены на общем множестве и периоды которых соизмеримы, есть функции также периодические.

235.1. Функция $f(x)$ называется *антипериодической*, если

$$f(x + T) = -f(x) \quad (T > 0).$$

Доказать, что $f(x)$ — периодическая с периодом $2T$.

236. Доказать, что если для функции $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) выполнено равенство $f(x + T) = kf(x)$, где k и T — положительные постоянные, то $f(x) = a^{\varphi(x)}$, где a — постоянная, а $\varphi(x)$ — периодическая функция с периодом T .

§ 4. Графическое изображение функции

1°. Для построения графика функции $y = f(x)$ поступают следующим образом: 1) определяют область существования функции: $X = \{x\}$; 2) выбирают достаточно густую сеть значений аргумента $x_1, x_2, \dots, x_n$ из X и составляют таблицу соответствующих значений функции

$$y_i = f(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

3) наносят систему точек $M_i(x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) на координатную плоскость Oxy и соединяют их линией, характер которой учитывает положение промежуточных точек.

2°. Чтобы получить грамотный график функции, следует изучить общие свойства этой функции.

В первую очередь нужно: 1) решив уравнение $f(x)=0$, определить точки пересечения графика функции с осью Ox (*нули функции*); 2) установить области изменения аргумента, где функция положительна или отрицательна; 3) если возможно, выяснить *промежутки монотонности* (возрастания или убывания) функции; 4) изучить поведение функции при неограниченном приближении аргумента к граничным точкам области существования функции.

В этом параграфе предполагается, что свойства простейших элементарных функций — степенной, показательной, тригонометрических и т. п., известны читателю.

Пользуясь этими свойствами, можно, не проделывая большой вычислительной работы, сразу рисовать эскизы графиков многих функций. Другие графики иногда удастся свести к комбинации (сумме или произведению и т. п.) этих простейших графиков.

237. Построить график линейной однородной функции

$$y = ax$$

при $a = 0; \frac{1}{2}; 1; 2; -1$.

238. Построить график линейной функции

$$y = x + b$$

при $b = 0, 1, 2, -1$.

239. Построить графики линейных функций:

а) $y = 2x + 3$; б) $y = 2 - 0,1x$; в) $y = -\frac{x}{2} - 1$.

240. Температурный коэффициент линейного расширения железа $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-6}$. Построить в подходящем масштабе график функции

$$l = f(T) \quad (-40^\circ \leq T \leq 100^\circ),$$

где T — температура в градусах и l — длина железного стержня при температуре T , если $l = 100$ см при $T = 0^\circ$.

241. На числовой оси движутся две материальные точки. Первая в начальный момент времени $t = 0$ находилась на 20 м влево от начала координат и имела скорость $v_1 = 10$ м/сек; вторая при $t = 0$ находилась на 30 м вправо от точки O и имела скорость $v_2 = -20$ м/сек. Построить графики уравнений движений этих точек и найти время и место их встречи.

242. Построить графики целых рациональных функций 2-й степени (*параболы*):

а) $y = ax^2$ при $a = 1, \frac{1}{2}, 2, -1$;

б) $y = (x - x_0)^2$ при $x_0 = 0, 1, 2, -1$;

в) $y = x^2 + c$ при $c = 0, 1, 2, -1$.

243. Построить график квадратного трехчлена

$$y = ax^2 + bx + c,$$

приведя его к виду

$$y = y_0 + a(x - x_0)^2.$$

Рассмотреть примеры:

а) $y = 8x - 2x^2$; в) $y = -x^2 + 2x - 1$;

б) $y = x^2 - 3x + 2$; г) $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

244. Материальная точка брошена под углом $\alpha = 45^\circ$ к плоскости горизонта с начальной скоростью $v_0 = 600$ м/сек. Построить график траектории движения и найти наибольшую высоту подъема и дальность полета (приближенно считать $g \approx 10$ м/сек²; сопротивлением воздуха пренебречь).

Построить графики целых рациональных функций степени выше второй:

245. $y = x^3 + 1$.

247. $y = x^3 - x^4$.

246. $y = (1 - x^2)(2 + x)$.

248. $y = x(a - x)^3 (a + x)^3$ ($a > 0$).

Построить графики дробно-линейных функций (гиперболы):

249. $y = \frac{1}{x}$.

250. $y = \frac{1-x}{1+x}$.

251. Построить график дробно-линейной функции

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad - bc \neq 0, c \neq 0),$$

приведя ее к виду

$$y = y_0 + \frac{m}{x - x_0}.$$

Рассмотреть пример

$$y = \frac{3x+2}{2x-3}.$$

252. Газ при давлении $p_0 = 1$ атм занимает объем $v_0 = 12$ м³. Построить график изменения объема v газа в зависимости от давления p , если температура газа остается постоянной (закон Бойля — Мариотта).

Построить графики дробных рациональных функций:

253. $y = x + \frac{1}{x}$ (гипербола).

254. $y = x^2 + \frac{1}{x}$ (трезубец Ньютона).

255. $y = x + \frac{1}{x^2}$.

256. $y = \frac{1}{1+x^2}$ (кривая Аньези).

2°. Чтобы получить грамотный график функции, следует изучить общие свойства этой функции.

В первую очередь нужно: 1) решив уравнение $f(x)=0$, определить точки пересечения графика функции с осью Ox (*нули функции*); 2) установить области изменения аргумента, где функция положительна или отрицательна; 3) если возможно, выяснить *промежутки монотонности* (возрастания или убывания) функции; 4) изучить поведение функции при неограниченном приближении аргумента к граничным точкам области существования функции.

В этом параграфе предполагается, что свойства простейших элементарных функций — степенной, показательной, тригонометрических и т. п., известны читателю.

Пользуясь этими свойствами, можно, не проделывая большой вычислительной работы, сразу рисовать эскизы графиков многих функций. Другие графики иногда удастся свести к комбинации (сумме или произведению и т. п.) этих простейших графиков.

237. Построить график линейной однородной функции

$$y = ax$$

при $a = 0; \frac{1}{2}; 1; 2; -1$.

238. Построить график линейной функции

$$y = x + b$$

при $b = 0, 1, 2, -1$.

239. Построить графики линейных функций:

а) $y = 2x + 3$; б) $y = 2 - 0,1x$; в) $y = -\frac{x}{2} - 1$.

240. Температурный коэффициент линейного расширения железа $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-6}$. Построить в подходящем масштабе график функции

$$l = f(T) \quad (-40^\circ \leq T \leq 100^\circ),$$

где T — температура в градусах и l — длина железного стержня при температуре T , если $l = 100$ см при $T = 0^\circ$.

241. На числовой оси движутся две материальные точки. Первая в начальный момент времени $t = 0$ находилась на 20 м влево от начала координат и имела скорость $v_1 = 10$ м/сек; вторая при $t = 0$ находилась на 30 м вправо от точки O и имела скорость $v_2 = -20$ м/сек. Построить графики уравнений движений этих точек и найти время и место их встречи.

242. Построить графики целых рациональных функций 2-й степени (*параболы*):

а) $y = ax^2$ при $a = 1, \frac{1}{2}, 2, -1$;

б) $y = (x - x_0)^2$ при $x_0 = 0, 1, 2, -1$;

в) $y = x^2 + c$ при $c = 0, 1, 2, -1$.

243. Построить график квадратного трехчлена

$$y = ax^2 + bx + c,$$

приведя его к виду

$$y = y_0 + a(x - x_0)^2.$$

Рассмотреть примеры:

а) $y = 8x - 2x^2$; в) $y = -x^2 + 2x - 1$;

б) $y = x^2 - 3x + 2$; г) $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

244. Материальная точка брошена под углом $\alpha = 45^\circ$ к плоскости горизонта с начальной скоростью $v_0 = 600$ м/сек. Построить график траектории движения и найти наибольшую высоту подъема и дальность полета (приближенно считать $g \approx 10$ м/сек²; сопротивлением воздуха пренебречь).

Построить графики целых рациональных функций степени выше второй:

245. $y = x^3 + 1$.

247. $y = x^3 - x^4$.

246. $y = (1 - x^2)(2 + x)$.

248. $y = x(a - x)^2 (a + x)^3 (a > 0)$.

Построить графики дробно-линейных функций (гиперболы):

249. $y = \frac{1}{x}$.

250. $y = \frac{1-x}{1+x}$.

251. Построить график дробно-линейной функции

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad - bc \neq 0, c \neq 0),$$

приведя ее к виду

$$y = y_0 + \frac{m}{x - x_0}.$$

Рассмотреть пример

$$y = \frac{3x+2}{2x-3}.$$

252. Газ при давлении $p_0 = 1$ атм занимает объем $v_0 = 12$ м³. Построить график изменения объема v газа в зависимости от давления p , если температура газа остается постоянной (закон Бойля — Мариотта).

Построить графики дробных рациональных функций:

253. $y = x + \frac{1}{x}$ (гипербола).

254. $y = x^2 + \frac{1}{x}$ (трезубец Ньютона).

255. $y = x + \frac{1}{x^2}$.

256. $y = \frac{1}{1+x^2}$ (кривая Аньези).

$$257. y = \frac{2x}{1+x^2} \text{ (серпентин Ньютона).}$$

$$258. y = \frac{1}{1-x^2}.$$

$$261. y = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{1-x}.$$

$$259. y = \frac{x}{1-x^2}.$$

$$262. y = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}.$$

$$260. y = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x}.$$

263. Построить эскиз графика функции

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a_1x + b_1} \quad (a_1 \neq 0),$$

приведя ее к виду

$$y = kx + m + \frac{n}{x - x_0}.$$

Рассмотреть пример

$$y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 1}.$$

264. Построить график абсолютной величины силы притяжения F материальной точки, находящейся на расстоянии x от притягивающего центра, если $F = 10$ кГ при $x = 1$ м (закон Ньютона).

265. Согласно закону Ван-дер-Ваальса объем v реального газа и его давление p при постоянной температуре связаны соотношением

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = c.$$

Построить график функции $p = p(v)$, если $a = 2$, $b = 0,1$ и $c = 10$.

Построить графики иррациональных функций:

$$266. y = \pm \sqrt{-x-2} \text{ (парабола).}$$

$$267. y = \pm x\sqrt{x} \text{ (парабола Нейля).}$$

$$268. y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{100 - x^2} \text{ (эллипс).}$$

$$269. y = \pm \sqrt{x^2 - 1} \text{ (гипербола).}$$

$$270. y = \pm \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

$$271. y = \pm x\sqrt{100 - x^2}.$$

$$272. y = \pm x \sqrt{\frac{x}{10-x}} \text{ (циссоида).}$$

$$273. y = \pm \sqrt{(x^2 - 1)(9 - x^2)}.$$

274. Построить график степенной функции

$$y = x^n$$

при: а) $n = 1, 3, 5$; б) $n = 2, 4, 6$.

275. Построить график степенной функции

$$y = x^n$$

при: а) $n = -1, -3$; б) $n = -2, -4$.

276. Построить график радикала

$$y = \sqrt[m]{x}$$

при: а) $m = 2, 4$; б) $m = 3, 5$.

277. Построить график радикала

$$y = \sqrt[m]{x^k},$$

если: а) $m = 2, k = 1$; д) $m = 3, k = 4$;

б) $m = 2, k = 3$; е) $m = 4, k = 2$;

в) $m = 3, k = 1$; ж) $m = 4, k = 3$.

г) $m = 3, k = 2$;

278. Построить график показательной функции

$$y = a^x$$

при $a = \frac{1}{2}, 1, 2, e, 10$.

279. Построить график сложной показательной функции

$$y = e^{y_1},$$

если:

а) $y_1 = x^2$; в) $y_1 = \frac{1}{x}$; д) $y_1 = -\frac{1}{x^2}$;

б) $y_1 = -x^2$; г) $y_1 = \frac{1}{x^2}$; е) $y_1 = \frac{2x}{1-x^2}$.

280. Построить график логарифмической функции

$$y = \log_a x$$

при $a = \frac{1}{2}, 2, e, 10$.

281. Построить графики функций:

а) $y = \ln(-x)$; б) $y = -\ln x$.

282. Построить график сложной логарифмической функции

$$y = \ln y_1,$$

если:

а) $y_1 = 1 + x^2$;

б) $y_1 = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$;

в) $y_1 = \frac{1-x}{1+x}$; г) $y_1 = \frac{1}{x^2}$; д) $y_1 = 1 + e^x$.

283. Построить график функции

$$y = \log_x 2.$$

284. Построить график функции

$$y = A \sin x$$

при $A = 1, 10, -2$.

285. Построить график функции

$$y = \sin(x - x_0),$$

если $x_0 = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$.

286. Построить график функции

$$y = \sin nx,$$

если $n = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.

287. Построить график функции

$$y = a \cos x + b \sin x,$$

приведя ее к виду

$$y = A \sin(x - x_0).$$

Рассмотреть пример: $y = 6 \cos x + 8 \sin x$.

Построить графики тригонометрических функций:

288. $y = \cos x$.

293. $y = \sin^2 x$.

289. $y = \operatorname{tg} x$.

294. $y = \sin^3 x$.

290. $y = \operatorname{ctg} x$.

295. $y = \operatorname{ctg}^2 x$.

291. $y = \sec x$.

296. $y = \sin x \cdot \sin 3x$.

292. $y = \csc x$.

297. $y = \pm \sqrt{\cos x}$.

Построить графики функций:

298. $y = \sin x^2$.

304. $y = \frac{\sin x}{x}$.

299. $y = \sin \frac{1}{x}$.

305. $y = e^x \cos x$.

300. $y = \cos \frac{\pi}{x}$.

306. $y = \pm 2^{-x} \sqrt{\sin \pi x}$.

300.1. $y = \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}$.

307. $y = \frac{\cos x}{1+x^2}$.

301. $y = \operatorname{tg} \frac{\pi}{x}$.

308. $y = \ln (\cos x)$.

301.1. $y = \sec \frac{1}{x}$.

309. $y = \cos (\ln x)$.

302. $y = x \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right)$.

310. $y = e^{\frac{1}{\sin x}}$.

303. $y = \pm \sqrt{1-x^2} \sin \frac{\pi}{x}$.

Построить графики обратных круговых функций:

311. $y = \arcsin x$.

317. $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

312. $y = \arccos x$.

318. $y = \arcsin (\sin x)$.

313. $y = \operatorname{arctg} x$.

319. $y = \arcsin (\cos x)$.

314. $y = \operatorname{arctg} x$.

320. $y = \arccos (\cos x)$.

315. $y = \arcsin \frac{1}{x}$.

321. $y = \operatorname{arctg} (\operatorname{tg} x)$.

316. $y = \arccos \frac{1}{x}$.

322. $y = \arcsin (2 \sin x)$.

323. Построить график функции

$$y = \arcsin y_1,$$

если:

а) $y_1 = 1 - \frac{x}{2}$;

в) $y_1 = \frac{1-x}{1+x}$;

б) $y_1 = \frac{2x}{1+x^2}$;

г) $y_1 = e^x$.

324. Построить график функции

$$y = \operatorname{arctg} y_1,$$

если:

а) $y_1 = x^2$; б) $y_1 = \frac{1}{x^2}$;

в) $y_1 = \ln x$;

г) $y_1 = \frac{1}{\sin x}$.

324.1. Построить графики функций:

а) $y = x^3 - 3x + 2$;

б) $y = \frac{x^3}{(1-x)(1+x)^2}$;

в) $y = \frac{x^2}{|x|-1}$;

г) $y = \sqrt{x(1-x^2)}$;

д) $y = 3 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$;

е) $y = \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{1+x^2}$;

ж) $y = \frac{1}{1-2^{\frac{x}{1-x}}}$;

з) $y = \lg(x^2 - 3x + 2)$;

и) $y = \arcsin\left(\frac{3}{2} - \sin x\right)$;

к) $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}\right)$;

л) $y = \log_{\cos x} \sin x$;

м) $y = (\sin x)^{\operatorname{ctg} x}$.

325. Зная график функции $y = f(x)$, построить графики функций:

а) $y = -f(x)$; б) $y = f(-x)$; в) $y = -f(-x)$.

326. Зная график функции $y = f(x)$, построить графики функций:

а) $y = f(x - x_0)$; в) $y = f(2x)$;

б) $y = y_0 + f(x - x_0)$; г) $y = f(kx + b)$ ($k \neq 0$).

326.1. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{при } |x| \leq 1; \\ 0 & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Построить графики функций:

$$y = \frac{1}{2} [f(x-t) + f(x+t)]$$

при $t = 0$, $t = 1$ и $t = 2$.

327. Построить графики функций:

а) $y = 2 + \sqrt{1-x}$; г) $y = -\arcsin(1+x)$;

б) $y = 1 - e^{-x}$; д) $y = 3 + 2 \cos 3x$.

в) $y = \ln(1+x)$;

328. Зная график функции $y = f(x)$, построить графики функций:

а) $y = |f(x)|$; б) $y = \frac{1}{2} (|f(x)| + f(x))$; в) $y = \frac{1}{2} (|f(x)| - f(x))$.

329. Зная график функции $y = f(x)$, построить графики функций:

- а) $y = f^2(x)$; г) $y = f(f(x))$;
 б) $y = \sqrt{f(x)}$; д) $y = \operatorname{sgn} f(x)$;
 в) $y = \ln f(x)$; е) $y = [f(x)]$.

329.1. Пусть

$$f(x) = (x-a)(b-x) \quad (a < b).$$

Построить графики функций:

- а) $y = f(x)$; д) $y = e^{f(x)}$;
 б) $y = f^2(x)$; е) $y = \lg f(x)$;
 в) $y = \frac{1}{f(x)}$; ж) $y = \operatorname{arctg} f(x)$.
 г) $y = \sqrt{f(x)}$;

329.2. Построить графики функций:

- а) $y = \arcsin[\sin f(x)]$; г) $y = \arccos[\cos f(x)]$;
 б) $y = \arcsin[\cos f(x)]$; д) $y = \operatorname{arctg}[\operatorname{tg} f(x)]$,
 в) $y = \arccos[\sin f(x)]$;

если: 1) $f(x) = x^2$; 2) $f(x) = x^3$.

330. Зная графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, построить графики функций:

- а) $y = f(x) + g(x)$; б) $y = f(x)g(x)$; в) $y = f(g(x))$.

Применяя правило сложения графиков, построить графики следующих функций:

331. $y = 1 + x + e^x$.

333. $y = x + \sin x$.

332. $y = (x+1)^{-2} + (x-1)^{-2}$.

334. $y = x + \operatorname{arctg} x$.

335. $y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x$.

336. $y = \sin x - \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x$.

337. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

339. $y = |1-x| - |1+x|$.

338. $y = |1-x| + |1+x|$.

340. Построить графики гиперболических функций:

а) $y = \operatorname{ch} x$, где $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$;

б) $y = \operatorname{sh} x$, где $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$;

в) $y = \operatorname{th} x$, где $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

Применяя правило умножения графиков, построить графики функций:

341. $y = x \sin x.$

345. $y = e^{-x^2} \cos 2x.$

342. $y = x \cos x.$

346. $y = x \operatorname{sgn}(\sin x).$

343. $y = x^2 \sin^2 x.$

347. $y = [x] |\sin \pi x|.$

344. $y = \frac{\sin x}{1+x^2}.$

348. $y = \cos x \cdot \operatorname{sgn}(\sin x).$

349. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{если } |x| \leq 1; \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

Построить график функции

$$y = f(x) f(a-x),$$

если:

а) $a = 0$; б) $a = 1$; в) $a = 2$.

350. Построить график функции

$$y = x + \sqrt{x} \operatorname{sgn}(\sin \pi x).$$

Построить график функции

$$y = \frac{1}{f(x)},$$

если:

351. $f(x) = x^2(1-x^2).$

354. $f(x) = \ln x.$

352. $f(x) = x(1-x)^2.$

355. $f(x) = e^x \sin x.$

353. $f(x) = \sin^3 x.$

356. Построить график сложной функции

$$y = f(u),$$

где $u = 2 \sin x$, если:

$$f(u) = \begin{cases} -1 & \text{при } -\infty < u < -1; \\ u & \text{при } -1 \leq u \leq 1; \\ 1 & \text{при } 1 < u < +\infty. \end{cases}$$

357. Пусть

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(x + |x|) \text{ и } \psi(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x < 0; \\ x^2, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

Построить графики функций:

а) $y = \varphi[\varphi(x)]$; в) $y = \psi[\varphi(x)]$;

б) $y = \varphi[\psi(x)]$; г) $y = \psi[\psi(x)]$.

358. Пусть

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| \leq 1; \\ 0, & \text{если } |x| > 1, \end{cases}$$

и

$$\psi(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & \text{если } |x| \leq 2; \\ 2, & \text{если } |x| > 2. \end{cases}$$

Построить графики функций:

а) $y = \varphi[\varphi(x)]$; в) $y = \psi[\varphi(x)]$;

б) $y = \varphi[\psi(x)]$; г) $y = \psi[\psi(x)]$.

359. Функцию $f(x)$, определенную в положительной области $x > 0$, продолжить в отрицательную область $x < 0$ таким образом, чтобы полученная функция была: 1) четной; 2) нечетной, если:

а) $f(x) = 1 - x$; г) $f(x) = \sin x$;

б) $f(x) = 2x - x^2$; д) $f(x) = e^x$;

в) $f(x) = \sqrt{x}$; е) $f(x) = \ln x$.

Построить соответствующие графики функций.

360. Определить, относительно каких вертикальных осей симметричны графики функций:

а) $y = ax^2 + bx + c$; в) $y = \sqrt{a+x} + \sqrt{b-x}$ ($0 < a < b$);

б) $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2}$; г) $y = a + b \cos x$.

361. Определить, относительно каких центров симметричны графики функций:

а) $y = ax + b$;

г) $y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$;

б) $y = \frac{ax+b}{cx+d}$;

д) $y = 1 + \sqrt[3]{x-2}$.

в) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$;

362. Построить графики периодических функций:

а) $y = |\sin x|$; б) $y = \operatorname{sgn} \cos x$; в) $y = f(x)$,

где $f(x) = A \frac{x}{l} \left(2 - \frac{x}{l}\right)$, если $0 \leq x \leq 2l$ и $f(x + 2l) = f(x)$;

г) $y = [x] - 2 \left[\frac{x}{2} \right]$;

д) $y = (x)$, где (x) — расстояние от числа x до ближайшего к нему целого числа.

363. Доказать, что если график функции $y = f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) симметричен относительно двух вертикальных осей $x = a$ и $x = b$ ($b > a$), то функция $f(x)$ — периодическая.

364. Доказать, что если график функции $y = f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) симметричен относительно двух точек $A(a, y_0)$ и $B(b, y_1)$ ($b > a$), то функция $f(x)$ есть сумма линейной функции и периодической функции. В частности, если $y_0 = y_1$, то функция $f(x)$ — периодическая.

365. Доказать, что если график функции $y = f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) симметричен относительно точки $A(a, y_0)$ и прямой $x = b$ ($b \neq a$), то функция $f(x)$ — периодическая.

366. Построить график функции $y = f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$), если $f(x+1) = 2f(x)$ и $f(x) = x(1-x)$ при $0 \leq x \leq 1$.

367. Построить график функции

$$y = f(x) \quad (-\infty < x < +\infty),$$

если

$$f(x+\pi) = f(x) + \sin x \quad \text{и} \quad f(x) = 0, \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

368. Построить график функции $y = y(x)$, если:

а) $x = y - y^2$; в) $x = y - \ln y$;

б) $x = \frac{1-y}{1+y^2}$; г) $x^2 = \sin y$.

369. Построить графики функций $y = y(x)$, заданных параметрически, если:

а) $x = 1 - t$, $y = 1 - t^2$;

б) $x = t + \frac{1}{t}$, $y = t + \frac{1}{t^2}$;

в) $x = 10 \cos t$, $y = \sin t$ (эллипс);

г) $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$ (гипербола);

д) $x = 5 \cos^2 t$, $y = 3 \sin^2 t$;

е) $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ (циклоида);

ж) $x = t + \sqrt[3]{t}$, $y = \sqrt[3]{t+1}$, ($t > 0$).

370. Построить графики неявных функций:

а) $x^2 - xy + y^2 = 1$ (эллипс);

д) $\sin x = \sin y$;

б) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ (декартов лист);

е) $\cos(\pi x^2) = \cos(\pi y)$;

в) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ (парабола);

ж) $x^y = y^x$ ($x > 0$, $y > 0$);

г) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$ (астроида);

з) $x - |x| = y - |y|$.

370.1. Построить графики неявных функций:

а) $\min(x, y) = -1$; в) $\max(|x|, |y|) = 1$;

б) $\max(x, y) = 1$; г) $\min(x^2, y) = 1$.

371. Построить графики функций $r = r(\varphi)$ в полярной системе координат (r, φ) , если:

а) $r = \varphi$ (спираль Архимеда);

б) $r = \frac{\pi}{\varphi}$ (гиперболическая спираль);

в) $r = \frac{\varphi}{\varphi + 1}$ ($0 \leq \varphi < +\infty$);

г) $r = 2^{2\pi}$ (логарифмическая спираль);

д) $r = 2(1 + \cos \varphi)$ (кардиоида);

е) $r = 10 \sin 3\varphi$ (трехлепестковая роза);

ж) $r^2 = 36 \cos 2\varphi$ (лемниската Бернулли);

з) $\varphi = \frac{r}{r-1}$ ($r > 1$);

и) $\varphi = 2\pi \sin r$.

371.1. Построить в полярных координатах r и φ графики следующих функций:

а) $\varphi = 4r - r^2$; в) $r^2 + \varphi^2 = 100$.

б) $\varphi = \frac{12r}{1+r^2}$;

371.2. Построить в полярных координатах r и φ графики функций, заданных параметрически ($t \geq 0$ — параметр):

а) $\varphi = t \cos^2 t, \quad \left. \begin{array}{l} r = t \sin^2 t, \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{б) } \varphi = 1 - 2^{-t} \sin \frac{\pi t}{2}, \\ r = 1 - 2^{-t} \cos \frac{\pi t}{2}. \end{array} \left. \right\}$

372. Приближенно решить уравнение

$$x^3 - 3x + 1 = 0,$$

построив график функции $y = x^3 - 3x + 1$.

Графически решить следующие уравнения:

373. $x^3 - 4x - 1 = 0$. 376. $\lg x = 0,1x$.

374. $x^4 - 4x + 1 = 0$. 377. $10^x = x^2$.

375. $x = 2^{-x}$. 378. $\lg x = x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$).

Графически решить системы уравнений:

379. $x + y^2 = 1, \quad 16x^2 + y = 4$.

380. $x^2 + y^2 = 100, \quad y = 10(x^2 - x - 2)$.

§ 5. Предел функции

1°. Ограниченность функции. Функция $f(x)$ называется ограниченной на данном промежутке (a, b) , если существуют некоторые числа m и M такие, что

$$m \leq f(x) \leq M$$

при $x \in (a, b)$.

Число $m_0 = \inf_{x \in (a, b)} \{f(x)\} = \max m$ называется *нижней гранью* функции $f(x)$,

а число $M_0 = \sup_{x \in (a, b)} \{f(x)\} = \min M$ называется *верхней гранью* функции $f(x)$

на данном промежутке (a, b) . Разность $M_0 - m_0$ называется *колебанием функции* на промежутке (a, b) .

2°. Предел функции в точке. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X = \{x\}$, имеющем точку сгущения a . Запись

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad (1)$$

обозначает, что для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x , для которых $f(x)$ имеет смысл и которые удовлетворяют условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Для существования предела функции (1) необходимо и достаточно, чтобы для каждой последовательности $x_n \rightarrow a$, $x_n \neq a$ ($x_n \in X$; $n = 1, 2, \dots$), было выполнено равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

Имеют место два замечательных предела:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Критерий Коши. Предел функции $f(x)$ в точке a существует тогда и только тогда, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

как только $0 < |x' - a| < \delta$ и $0 < |x'' - a| < \delta$, где x' и x'' — любые точки из области определения функции $f(x)$.

3°. Односторонние пределы. Число A' называется *пределом слева* функции $f(x)$ в точке a :

$$A' = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0),$$

если

$$|A' - f(x)| < \varepsilon \text{ при } 0 < a - x < \delta(\varepsilon).$$

Аналогично, число A'' называется *пределом справа* функции $f(x)$ в точке a :

$$A'' = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0),$$

если

$$|A'' - f(x)| < \varepsilon \text{ при } 0 < x - a < \delta(\varepsilon).$$

Для существования предела функции $f(x)$ в точке a необходимо и достаточно, чтобы

$$f(a-0) = f(a+0).$$

4. Бесконечный предел. Условная запись

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

обозначает, что для любого $E > 0$ справедливо неравенство:

$$|f(x)| > E, \text{ если только } 0 < |x - a| < \delta(E).$$

5°. Частичный предел. Если для некоторой последовательности $x_n \rightarrow a$ ($x_n \neq a$) имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = B,$$

то число (или символ ∞) B называется *частичным пределом* (соответственно конечным или бесконечным) *функции* $f(x)$ в точке a .

Наименьший и наибольший из этих частичных пределов обозначаются через

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{и} \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$$

и называются соответственно *нижним и верхним пределами* функции $f(x)$ в точке a .

Равенство

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$$

необходимо и достаточно для существования предела (соответственно конечного или бесконечного) функции $f(x)$ в точке a .

381. Показать, что функция, определяемая условиями:

$$f(x) = n, \quad \text{если} \quad x = \frac{m}{n},$$

где m и n — взаимно простые целые числа и $n > 0$ и

$$f(x) = 0, \quad \text{если } x \text{ иррационально,}$$

конечна, но не ограничена в каждой точке x (т. е. не ограничена в любой окрестности этой точки).

382. Если функция $f(x)$ определена и локально ограничена в каждой точке: а) интервала, б) сегмента, то является ли эта функция ограниченной на данном интервале или соответственно сегменте?

Привести соответствующие примеры.

383. Показать, что функция

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$$

ограничена в интервале $-\infty < x < +\infty$.

384. Показать, что функция

$$f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

не ограничена в любой окрестности точки $x=0$, однако не является бесконечно большой при $x \rightarrow 0$.

385. Исследовать на ограниченность функцию

$$f(x) = \ln x \cdot \sin^2 \frac{\pi}{x}$$

в интервале $0 < x < e$.

386. Показать, что функция

$$f(x) = \frac{\pi}{1+x}$$

в области $0 \leq x < +\infty$ имеет нижнюю грань $m=0$ и верхнюю грань $M=1$.

387. Функция $f(x)$ определена и монотонно возрастает на сегменте $[a, b]$. Чему равны ее нижняя и верхняя грани на этом сегменте?

Определить нижнюю и верхнюю грани функций:

388. $f(x) = x^2$ на $[-2, 5]$.

389. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ на $(-\infty, +\infty)$.

390. $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ на $(0, +\infty)$.

391. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ на $(0, +\infty)$.

392. $f(x) = \sin x$ на $(0, +\infty)$.

393. $f(x) = \sin x + \cos x$ на $[0, 2\pi]$.

394. $f(x) = 2^x$ на $(-1, 2)$.

395. $f(x) = [x]$: а) на $(0, 2)$ и б) на $[0, 2]$.

396. $f(x) = x - [x]$ на $[0, 1]$.

397. Определить колебание функции

$$f(x) = x^2$$

на интервалах: а) $(1; 3)$; б) $(1,9; 2,1)$; в) $(1,99; 2,01)$; г) $(1,999; 2,001)$.

398. Определить колебание функции

$$f(x) = \arctg \frac{1}{x}$$

на интервалах: а) $(-1; 1)$; б) $(-0,1; 0,1)$; в) $(-0,01; 0,01)$; г) $(-0,001; 0,001)$.

399. Пусть $m[f]$ и $M[f]$ — соответственно нижняя и верхняя грани функции $f(x)$ на промежутке (a, b) .

Доказать, что если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — функции, определенные на (a, b) , то

$$m[f_1 + f_2] \geq m[f_1] + m[f_2]$$

и

$$M[f_1 + f_2] \leq M[f_1] + M[f_2].$$

Построить примеры функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, для которых в последних соотношениях имеет место: а) случай равенства и б) случай неравенства.

400. Пусть функция $f(x)$ определена в области $[a, +\infty)$ и ограничена на каждом сегменте $[a, b] \subset [a, +\infty)$.

Положим:

$$m(x) = \inf_{a < \xi < x} f(\xi)$$

и

$$M(x) = \sup_{a < \xi < x} f(\xi).$$

Построить графики функций $y = m(x)$ и $y = M(x)$, если:

а) $f(x) = \sin x$ и б) $f(x) = \cos x$.

401. С помощью « $\epsilon - \delta$ »-рассуждений доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4.$$

Заполнить следующую таблицу:

ϵ	0,1	0,01	0,001	0,0001	...
δ					

402. На языке « $E - \delta$ » доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty.$$

Заполнить следующую таблицу:

E	10	100	1000	10 000	...
δ					

403. Сформулировать с помощью неравенств следующие утверждения:

а) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$; б) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$; в) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$.

Привести соответствующие примеры.

Сформулировать с помощью неравенств следующие утверждения и привести соответствующие примеры:

404. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$; б) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$; в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$.

405. а) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$; е) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty$;

б) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$; ж) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$;

- в) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$; з) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$;
 г) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$; и) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$.
 д) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty$;
 406. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$; е) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$;
 б) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$; ж) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$;
 в) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$; з) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$;
 г) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$; и) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
 д) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$;

407. Пусть $y = f(x)$. Сформулировать с помощью неравенств, что значит:

- а) $y \rightarrow b-0$ при $x \rightarrow a$; ж) $y \rightarrow b-0$ при $x \rightarrow \infty$;
 б) $y \rightarrow b-0$ при $x \rightarrow a-0$; з) $y \rightarrow b-0$ при $x \rightarrow -\infty$;
 в) $y \rightarrow b-0$ при $x \rightarrow a+0$; и) $y \rightarrow b-0$ при $x \rightarrow +\infty$;
 г) $y \rightarrow b+0$ при $x \rightarrow a$; к) $y \rightarrow b+0$ при $x \rightarrow \infty$;
 д) $y \rightarrow b+0$ при $x \rightarrow a-0$; л) $y \rightarrow b+0$ при $x \rightarrow -\infty$;
 е) $y \rightarrow b+0$ при $x \rightarrow a+0$; м) $y \rightarrow b+0$ при $x \rightarrow +\infty$.

Привести соответствующие примеры.

408. Пусть

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n,$$

где $a_i (i = 0, 1, \dots, n; n \geq 1, a_0 \neq 0)$ — вещественные числа.

Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |P(x)| = +\infty.$$

409. Пусть

$$R(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m},$$

где $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$.

Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = \begin{cases} \infty, & \text{если } n > m; \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{если } n = m; \\ 0, & \text{если } n < m. \end{cases}$$

410. Пусть

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены от x и

$$P(a) = Q(a) = 0.$$

Какие возможные значения имеет выражение

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} ?$$

Найти значения следующих выражений:

$$411. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}.$$

$$412. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}.$$

$$413. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}.$$

$$414. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} \quad (m \text{ и } n \text{ — натуральные числа}).$$

$$415. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}.$$

$$416. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}.$$

$$417. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1) \dots (x^n+1)}{[(nx)^n + 1]^{\frac{n+1}{2}}}.$$

$$418. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 8x + 15}.$$

$$419. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}.$$

$$420. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3}.$$

$$421. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16}.$$

$$422. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1}.$$

$$423. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^3 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}.$$

$$424. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}.$$

$$424.1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}.$$

$$425. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \quad (m \text{ и } n \text{ — натуральные числа}).$$

$$426. \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x - a)}{(x - a)^2} \quad (n - \text{натуральное число}).$$

$$427. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2} \quad (n - \text{натуральное число}).$$

$$428. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) \quad (m \text{ и } n - \text{натуральные числа}).$$

$$429. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(x + \frac{a}{n} \right) + \left(x + \frac{2a}{n} \right) + \dots + \left(x + \frac{(n-1)a}{n} \right) \right].$$

$$430. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(x + \frac{a}{n} \right)^3 + \left(x + \frac{2a}{n} \right)^3 + \dots + \left(x + \frac{(n-1)a}{n} \right)^3 \right].$$

Указание. См. пример 2.

$$431. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 3^3 + \dots + (2n-1)^3}{2^3 + 4^3 + \dots + (2n)^3}.$$

$$432. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^3} - \frac{n}{4} \right).$$

Указание. См. пример 3.

$$433. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 4^3 + 7^3 + \dots + (3n-2)^3}{[1 + 4 + 7 + \dots + (3n-2)]^3}.$$

434. Определить площадь криволинейного треугольника OAM (рис. 3), ограниченного параболой $y = b \left(\frac{x}{a} \right)^2$, осью Ox и прямой

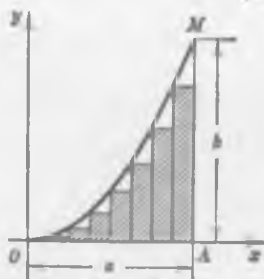


Рис. 3.

$x=a$, рассматривая ее как предел суммы площадей вписанных прямоугольников с основаниями $\frac{a}{n}$, где $n \rightarrow \infty$.

Найти пределы:

$$435. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}.$$

$$436. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}.$$

$$437. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}.$$

$$438. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2 + \sqrt[3]{x}}.$$

$$439. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad (a > 0).$$

$$440. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2-9}.$$

$$441. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3+8}.$$

$$442. \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}.$$

$$443. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}.$$

$$444. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} \quad (n \text{ — целое число}).$$

$$445. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2} - (1+x)}{x}.$$

$$449. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt{x+9}-2}.$$

$$446. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^3}-2}{x+x^3}.$$

$$450. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}} - \sqrt{1+\frac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1-\frac{x}{2}}}.$$

$$447. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}.$$

$$448. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}.$$

$$451. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sqrt[5]{1+5x} - (1+x)}.$$

$$452. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x} \quad (m \text{ и } n \text{ — целые числа}).$$

$$453. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} \sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x} \quad (m \text{ и } n \text{ — целые числа}).$$

$$454. \text{ Пусть } P(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \text{ и } m \text{ — целое число.}$$

$$\text{Доказать, что } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+P(x)} - 1}{x} = \frac{a_1}{m}.$$

Найти пределы:

$$455. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1} \quad (m \text{ и } n \text{ — целые числа}).$$

$$455.1. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-\sqrt{x}} - \frac{2}{1-\sqrt[3]{x}} \right).$$

$$456. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x}) \dots (1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}.$$

$$457. \lim_{x \rightarrow +\infty} [V(x+a)(x+b) - x].$$

$$458. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} + \sqrt{x+Vx} - Vx).$$

$$459. \lim_{x \rightarrow +\infty} x (\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x).$$

$$460. \lim_{x \rightarrow +0} \left(\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} \right).$$

$$461. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1}).$$

$$462. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x}).$$

$$463. \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{2}} \left[(x+1)^{\frac{3}{2}} - (x-1)^{\frac{3}{2}} \right].$$

$$464. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}).$$

$$465. \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt[n]{(x+a_1) \dots (x+a_n)} - x].$$

$$466. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^n + (x + \sqrt{x^2 - 1})^n}{x^n} \quad (n - \text{натуральное число}).$$

$$467. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n - (\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x} \quad (n - \text{натуральное число}).$$

468. Изучить поведение корней x_1 и x_2 квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, у которого коэффициент a стремится к нулю, а коэффициенты b и c постоянны, причем $b \neq 0$.

469. Найти постоянные a и b из условия

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0.$$

470. Найти постоянные a_i и b_i ($i=1, 2$) из условий:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - a_1 x - b_1) = 0$$

и

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - a_2 x - b_2) = 0.$$

Найти пределы:

$$471. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}.$$

$$474. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

$$472. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}.$$

$$474.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x}{x}.$$

$$473. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}$$

$$474.2. \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 3x.$$

(m и n — целые числа).

$$475. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}.$$

$$476. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}.$$

$$477. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}.$$

$$478. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin px - \cos px}.$$

$$479. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right).$$

$$480. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$$

481. Доказать равенства:

a) $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$; б) $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$;

в) $\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a \left(a \neq \frac{2n-1}{2} \pi; n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \right).$

Найти пределы:

$$482. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}.$$

$$485. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} a}{x - a}.$$

$$483. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}.$$

$$486. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sec x - \sec a}{x - a}.$$

$$484. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a}.$$

$$487. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{cosec} x - \operatorname{cosec} a}{x - a}.$$

$$488. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2}.$$

$$489. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+2x) - 2\cos(a+x) + \cos a}{x^2}.$$

$$490. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+2x) - 2\operatorname{tg}(a+x) + \operatorname{tg} a}{x^2}.$$

$$491. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg}(a+2x) - 2\operatorname{ctg}(a+x) + \operatorname{ctg} a}{x^2}.$$

$$492. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) \sin(a+2x) - \sin^2 a}{x}.$$

$$493. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^3 x - 3\sin x + 1}.$$

$$497. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+x) \operatorname{tg}(a-x) - \operatorname{tg}^2 a}{x^2}.$$

$$498. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{ctg}^2 x}{2 - \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^3 x}.$$

$$494. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}.$$

$$499. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^2}.$$

$$495. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)}{1 - 2\cos x}.$$

$$500. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{1 + \cos x}}.$$

$$496. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x}{\cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right)}.$$

$$501. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^3 x}.$$

$$502. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x}.$$

$$503. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos(\sqrt{x})}.$$

$$506. a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}};$$

$$507. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2}.$$

$$508. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^3}{1-x}}.$$

$$509. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin^n \frac{2\pi n}{3n+1} \right).$$

$$510. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}+0} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{8} + x \right) \right]^{\operatorname{tg} 2x}.$$

$$511. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}}.$$

$$512. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x^3}.$$

$$513. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 3x - 2} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$514. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 - 2x}.$$

$$515. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x.$$

$$516. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2} \right)^x,$$

$$(a_1 > 0, a_2 > 0).$$

$$517. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$$

$$518. \lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\operatorname{ctg} \pi x}.$$

$$519. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}.$$

$$504. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}^3 \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}.$$

$$505. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}).$$

$$в) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}.$$

$$519.1. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

$$520. \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}.$$

$$521. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$522. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}.$$

$$523. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$524. \lim_{x \rightarrow 0} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right]^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$525. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x.$$

$$526. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\cos \sqrt{x}}.$$

$$527. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+x}{n-1} \right)^n.$$

$$528. \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}}.$$

$$529. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

$$530. \lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln(x+1) - \ln x].$$

$$531. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} \quad (a > 0).$$

$$532. \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sin \ln(x+1) - \sin \ln x].$$

$$533. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)}.$$

$$535. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 + e^{2x})}{\ln(3 + e^{2x})}.$$

$$534. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\operatorname{tg} \frac{100 + x^2}{1 + 100x^2} \right).$$

$$536. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}\right)}{\ln\left(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}\right)}.$$

$$537. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) + \log(x-h) - 2 \log x}{h^2} \quad (x > 0).$$

$$538. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + ax \right)}{\sin bx}.$$

$$545. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + x \cdot 2^x}{1 + x \cdot 3^x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$539. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}.$$

$$545.1. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \sin x \cos \alpha x}{1 + \sin x \cos \beta x} \right)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$$

$$540. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln \frac{nx + \sqrt{1 - n^2 x^2}}{x + \sqrt{1 - x^2}} \right).$$

$$545.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(\pi x^\beta)}.$$

$$540.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(nx + \sqrt{1 - n^2 x^2})}{\ln(x + \sqrt{1 - x^2})}.$$

$$545.3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(\pi \cdot 2^x)}{\ln[\cos(\pi \cdot 2^x)]}.$$

$$541. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad (a > 0).$$

$$546. \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg}^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right).$$

$$542. \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} \quad (a > 0).$$

$$547. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}.$$

$$543. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a} \quad (a > 0).$$

$$548. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^a}{x^b - a^b} \quad (a > 0).$$

$$544. \lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$549. \lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b} \quad (a > 0).$$

$$550. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} + a^{x-h} - 2a^x}{h^2} \quad (a > 0).$$

$$551. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+a)^{x+a} (x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}.$$

$$552. \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[n]{x} - 1 \right) \quad (x > 0).$$

$$553. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\sqrt[n]{x} - n^{n+1} \sqrt[n]{x} \right) \quad (x > 0).$$

$$554. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a-1 + \sqrt[n]{b}}{a} \right)^n \quad (a > 0, b > 0).$$

$$555. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n \quad (a > 0, b > 0).$$

$$556. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$$

$$557. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{ax+1+bx+1+cx+1}{a+b+c} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$$

$$558. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{ax^2+bx^2}{ax+bx} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$559. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^3-bx^3}{(ax-bx)^2} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$560. \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{ax} - a^{xa}}{a^x - x^a} \quad (a > 0).$$

$$561. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}; \quad \text{ б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}.$$

$$562. \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+2^x) \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right).$$

$$563. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \log_x 2.$$

564. Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad (a > 1, n > 0).$$

565. Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\varepsilon} = 0 \quad (a > 1, \varepsilon > 0).$$

Найти пределы:

$$566. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^2+e^{2x})}; \quad \text{ б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^2+e^{2x})}.$$

$$567. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}.$$

$$568. \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+2) \ln(x+2) - 2(x+1) \ln(x+1) + x \ln x].$$

$$569. \lim_{x \rightarrow +0} \left[\ln(x \ln a) \cdot \ln \left(\frac{\ln ax}{\ln \frac{x}{a}} \right) \right] \quad (a > 1).$$

$$570. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x^2-1}} \cdot \ln^{-2} \frac{x+1}{x-1} \right).$$

$$571. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}.$$

$$572. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3}.$$

$$573. \lim_{x \rightarrow 0} \left(2e^{\frac{x}{x+1}} - 1 \right)^{\frac{x^2+1}{x}}.$$

$$574. \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\sec \frac{\pi x}{2}}.$$

$$575. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^{\alpha+\beta} x}{\sqrt{(1 - \sin^{\alpha} x)(1 - \sin^{\beta} x)}} \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

$$576. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x}; \quad \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2};$$

$$\text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th} x}{x} \quad (\text{см. пример 340}).$$

$$576.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\ln(\operatorname{ch} 3x)} \quad (\text{см. пример 340}).$$

$$577. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{x^2 + x} - \operatorname{sh} \sqrt{x^2 - x}}{\operatorname{ch} x}.$$

$$577.1. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} a}{x - a}; \quad \text{ б) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} a}{x - a}.$$

$$577.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ch} x}{\ln \cos x}.$$

$$578. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln \operatorname{ch} x).$$

$$582. \lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos(\sqrt{x^2 + x} - x).$$

$$579. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{th} x}.$$

$$583. \lim_{x \rightarrow 2} \operatorname{arctg} \frac{x-4}{(x-2)^2}.$$

$$580. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right)^{n^2}.$$

$$584. \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$581. \lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin \frac{1-x}{1+x}.$$

$$585. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x+h) - \operatorname{arctg} x}{h}.$$

$$586. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1+x}{1-x}}{\operatorname{arctg}(1+x) - \operatorname{arctg}(1-x)}.$$

$$587. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \operatorname{arctg} \frac{1}{n(n^2+1)+x} \cdot \operatorname{tg}^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2n} \right) \right].$$

$$588. \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} \right).$$

$$589. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right).$$

$$590. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]^{\operatorname{cosec}(\pi \sqrt{1+n^2})}.$$

$$591. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{100}} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

$$592. \lim_{x \rightarrow +0} x \ln x.$$

$$593. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} - x); \quad \text{ б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x).$$

$$594. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2});$$

$$\text{ б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}).$$

594.1. Найти

$$h = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x),$$

если

$$f(x) = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{x + \sqrt{x^2 + b^2}}.$$

$$595. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 1-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}; \quad \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 1+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}.$$

$$596. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}; \quad \text{ б) } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}.$$

$$597. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}; \quad \text{ б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}.$$

598. Доказать, что

$$\text{ а) } \frac{2x}{1+x} \rightarrow 2+0 \quad \text{ при } x \rightarrow -\infty;$$

$$\text{ б) } \frac{2x}{1+x} \rightarrow 2-0 \quad \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

599. Доказать, что

$$\text{ а) } 2^x \rightarrow 1-0 \quad \text{ при } x \rightarrow -0;$$

$$\text{ б) } 2^x \rightarrow 1+0 \quad \text{ при } x \rightarrow +0.$$

600. Найти $f(1)$, $f(1-0)$, $f(1+0)$, если $f(x) = x + [x^2]$.

601. Найти $f(n)$, $f(n-0)$, $f(n+0)$ ($n=0, \pm 1, \dots$), если $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$.

Найти:

$$602. \lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}.$$

$$605. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^3(\pi \sqrt{n^2 + n}).$$

$$603. \lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right].$$

$$606. \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sin \sin \dots \sin x}_{n \text{ раз}}.$$

$$604. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}).$$

607. Если $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow A} \psi(x) = B$, то следует ли отсюда, что

$$\lim_{x \rightarrow a} \psi(\varphi(x)) = B?$$

Рассмотреть пример: $\varphi(x) = \frac{1}{q}$ при $x = \frac{p}{q}$, где p и q — взаимно простые целые числа и $\varphi(x) = 0$ при x — иррациональном; $\psi(x) = 1$ при $x \neq 0$ и $\psi(x) = 0$ при $x = 0$; причем $x \rightarrow 0$.

608. Доказать теоремы Коши: если функция $f(x)$ определена в интервале $(a, +\infty)$ и ограничена в каждом конечном интервале (a, b) , то

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)];$$

$$б) \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} \quad (f(x) \geq C > 0),$$

предполагая, что пределы в правых частях равенств существуют.

609. Доказать, что если: а) функция $f(x)$ определена в области $x > a$; б) ограничена в каждой конечной области $a < x < b$;

в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = \infty$, то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty.$$

610. Доказать, что если: 1) функция $f(x)$ определена в области $x > a$; 2) ограничена в каждой конечной области $a < x < b$; 3) для некоторого натурального n существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^n} = l,$$

то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{l}{n+1}.$$

611. Доказать, что

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x; \quad б) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x.$$

612. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!) = 2\pi.$$

У к а з а н и е. Использовать формулу (*) примера 72.

Построить график функций:

$$613. \text{ а) } y = 1 - x^{100}; \quad б) y = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x^{2n}) \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

$$614. \text{ а) } y = \frac{x^{100}}{1 + x^{100}} \quad (x \geq 0); \quad б) y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1 + x^n} \quad (x \geq 0).$$

$$615. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}} \quad (x \neq 0).$$

$$616. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}.$$

$$617. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n} \quad (x \geq 0).$$

$$618. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \quad (x \geq 0).$$

$$619. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n} + x^{2n}}} \quad (x \geq 0).$$

$$620. \text{ а) } y = \sin^{1000} x; \quad \text{ б) } y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^{2n} x.$$

$$621. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^n + x^n)}{n} \quad (x \geq 0).$$

$$622. y = \lim_{n \rightarrow \infty} (x-1) \operatorname{arctg} x^n. \quad 624. y = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x + e^{tx}}{1 + e^{tx}}.$$

$$623. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + e^{n(x+1)}}. \quad 625. y = \lim_{t \rightarrow x} \frac{1}{t-x} \ln \frac{t}{x} \quad (x > 0).$$

$$625.1. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x \operatorname{tg}^{2n} \frac{\pi x}{4} + \sqrt{x}}{\operatorname{tg}^{2n} \frac{\pi x}{4} + 1} \quad (x \geq 0).$$

$$625.2. y = \lim_{n \rightarrow \infty} x \operatorname{sgn} |\sin^n(n! \pi x)|.$$

625.3. Построить кривую

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x|^n + |y|^n} = 1.$$

626. Асимптотой (наклонной) для кривой $y = f(x)$ называется прямая $y = kx + b$, для которой

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0.$$

Используя это уравнение, вывести необходимые и достаточные условия существования асимптоты.

627. Найти асимптоты и построить следующие кривые:

$$\text{а) } y = \frac{x^3}{x^3 + x - 2};$$

$$\text{г) } y = \frac{xe^x}{e^x - 1};$$

$$\text{б) } y = \sqrt{x^2 + x};$$

$$\text{д) } y = \ln(1 + e^x);$$

$$\text{в) } y = \sqrt[3]{x^3 - x^2};$$

$$\text{е) } y = x + \arccos \frac{1}{x}.$$

Найти следующие пределы:

$$628. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right].$$

$$629. \lim_{n \rightarrow \infty} [(1+x)(1+x^2)(1+x^4) \dots (1+x^{2^n})], \quad \text{если } |x| < 1.$$

$$630. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \dots \cos \frac{x}{2^n} \right).$$

631. Пусть

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1,$$

где $\psi(x) > 0$ и пусть $\alpha_{mn} \rightarrow 0$ ($m=1, 2, \dots$) при $n \rightarrow \infty$, т. е. $|\alpha_{mn}| < \varepsilon$ при $m=1, 2, \dots$ и $n > N(\varepsilon)$.

Доказать, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi(\alpha_{1n}) + \varphi(\alpha_{2n}) + \dots + \varphi(\alpha_{nn})] = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} [\psi(\alpha_{1n}) + \psi(\alpha_{2n}) + \dots + \psi(\alpha_{nn})], \quad (1) \end{aligned}$$

предполагая, что предел в правой части равенства (1) существует.

Пользуясь предыдущей теоремой, найти:

$$632. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt[3]{1 + \frac{k}{n^3}} - 1 \right). \quad 634. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(a^{\frac{k}{n^3}} - 1 \right) \quad (a > 0).$$

$$633. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{ka}{n^2} \right). \quad 635. \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2} \right).$$

$$636. \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \cos \frac{ka}{n \sqrt{n}}.$$

637. Последовательность x_n задана равенствами:

$$x_1 = \sqrt{a}, \quad x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, \quad x_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}, \quad \dots \quad (a > 0).$$

Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

637.1. Последовательность x_n задается следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \\ x_n = \frac{1}{2} (x_{n-1} + x_{n-2}) \quad (n = 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

637.2. Последовательность y_n определяется с помощью последовательности x_n соотношениями:

$$y_0 = x_0, \quad y_n = x_n - \alpha x_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где $|\alpha| < 1$. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$.

637.3. Последовательность x_n определяется следующим образом:

$$x_0 = 1, \quad x_n = \frac{1}{1 + x_{n-1}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Указание. Рассмотреть разности между x_n и корнями уравнения $x = \frac{1}{1+x}$.

638. Последовательность функций

$$y_n = y_n(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

определяется следующим образом:

$$y_1 = \frac{x}{2}, \quad y_n = \frac{x}{2} - \frac{y_{n-1}^2}{2} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

639. Последовательность функций $y_n = y_n(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) определяется следующим образом:

$$y_1 = \frac{x}{2}, \quad y_n = \frac{x}{2} + \frac{y_{n-1}^3}{2} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

639.1. Пусть $x > 0$ и $y_n = y_{n-1}(2 - xy_{n-1})$ ($n = 1, 2, \dots$). Доказать, что если $y_i > 0$ ($i = 0, 1$), то последовательность y_n сходится и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{1}{x}.$$

Указание. Изучить разность

$$\frac{1}{x} - y_n.$$

639.2. Для нахождения $y = \sqrt{x}$, где $x > 0$, применяется следующий процесс: $y_0 > 0$ — произвольно,

$$y_n = \frac{1}{2} \left(y_{n-1} + \frac{x}{y_{n-1}} \right) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sqrt{x}.$$

Указание. Использовать формулу

$$\frac{y_n - \sqrt{x}}{y_n + \sqrt{x}} = \left(\frac{y_{n-1} - \sqrt{x}}{y_{n-1} + \sqrt{x}} \right)^2 \quad (n \geq 1).$$

640. Для приближенного решения уравнения Кеплера

$$x - \varepsilon \sin x = m \quad (0 < \varepsilon < 1) \quad (1)$$

полагают

$$x_0 = m, x_1 = m + \varepsilon \sin x_0, \dots, x_n = m + \varepsilon \sin x_{n-1}, \dots$$

(метод последовательных приближений).

Доказать, что существует $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ и число ξ является единственным корнем уравнения (1).

641. Если $\omega_h[f]$ есть колебание функции $f(x)$ на сегменте $|x - \xi| \leq h$ ($h > 0$), то число

$$\omega_0[f] = \lim_{h \rightarrow 0} \omega_h[f]$$

называется *колебанием функции $f(x)$ в точке ξ* .

Определить колебание функции $f(x)$ в точке $x=0$, если $f(0)=0$ и при $x \neq 0$ имеем:

а) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$;

д) $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$;

б) $f(x) = \frac{1}{x^2} \cos^2 \frac{1}{x}$;

е) $f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$;

в) $f(x) = x \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right)$;

г) $f(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$;

ж) $f(x) = (1 + |x|)^{\frac{1}{x}}$.

642. Пусть $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.

Доказать, что, каково бы ни было число α , удовлетворяющее условию $-1 \leq \alpha \leq 1$, можно выбрать последовательность $x_n \rightarrow 0$ ($n = 1, 2, \dots$) такую, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \alpha$.

643. Определить

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{и} \quad L = \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} f(x),$$

если:

а) $f(x) = \sin^2 \frac{1}{x} + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$;

б) $f(x) = (2 - x^2) \cos \frac{1}{x}$; в) $f(x) = \left(1 + \cos^2 \frac{1}{x} \right)^{\sec^2 \frac{1}{x}}$.

644. Определить

$$l = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{и} \quad L = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} f(x),$$

если:

а) $f(x) = \sin x$;

в) $f(x) = 2^{\sin x^2}$;

б) $f(x) = x^2 \cos^2 x$;

г) $f(x) = \frac{x}{1 + x^2 \sin^2 x} \quad (x \geq 0)$.

§ 6. О-СИМВОЛИКА

1°. Запись

$$\varphi(x) = O(\psi(x)) \text{ при } x \in X$$

обозначает, что существует постоянная A такая, что

$$|\varphi(x)| \leq A |\psi(x)| \text{ для } x \in X. \quad (1)$$

Аналогично пишут

$$\varphi(x) = O(\psi(x)) \text{ при } x \rightarrow a, \quad (2)$$

если неравенство (1) выполнено в некоторой окрестности U_a точки a ($x \neq a$). В частности, если $\psi(x) \neq 0$ при $x \in U_a$ ($x \neq a$), то соотношение (2) заведомо имеет место, если существует конечный $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \neq 0$. В этом случае будем писать $\varphi(x) = O^*(\psi(x))$.

Если

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^p} = k \neq 0 \quad (p > 0),$$

то $\varphi(x)$ называется *бесконечно малой порядка p относительно бесконечно малой x* . Аналогично, если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x^p} = k \neq 0 \quad (p > 0),$$

то $\varphi(x)$ называется *бесконечно большой порядка p относительно бесконечно большой x* .

2°. Запись

$$\varphi(x) = o(\psi(x)) \text{ при } x \rightarrow a$$

обозначает, что

$$\varphi(x) = \alpha(x) \psi(x) \quad (x \in U_a, x \neq a), \quad (3)$$

где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$. Если $\psi(x) \neq 0$ при $x \in U_a$, $x \neq a$, то равенство (3) эквивалентно утверждению

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0.$$

3°. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются *эквивалентными* ($\varphi(x) \sim \psi(x)$) при $x \rightarrow a$, если

$$\varphi(x) - \psi(x) = o(\psi(x)) \text{ при } x \rightarrow a. \quad (4)$$

Если $\psi(x) \neq 0$ при $x \in U_a$, $x \neq a$, то из (4) имеем

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1.$$

При $x \rightarrow 0$ справедливы следующие соотношения эквивалентности:

$$\sin x \sim x; \quad \operatorname{tg} x \sim x; \quad a^x - 1 \sim x \ln a \quad (a > 0); \quad \ln(1+x) \sim x; \quad \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}.$$

Всобще

$$\varphi(x) + o(\varphi(x)) \sim \varphi(x).$$

При нахождении предела отношения двух бесконечно малых (или бесконечно больших) функций при $x \rightarrow a$ данные функции можно заменять эквивалентными.

645. Считая центральный угол $AOB = x$ (рис. 4) бесконечно малой 1-го порядка, определить порядки малости следующих величин: а) хорды AB ; б) стрелки CD ; в) площади сектора AOB ; г) площади треугольника ABC ; д) площади трапеции ABB_1A_1 ; е) площади сегмента ABC .

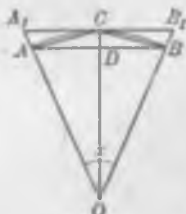


Рис. 4.

646. Пусть $o(f(x))$ — произвольная функция, имеющая при $x \rightarrow a$ более низкий порядок роста, чем функция $f(x)$, и $O(f(x))$ — любая функция, имеющая при $x \rightarrow a$ тот же порядок роста, что и функция $f(x)$, где $f(x) > 0$.

Показать, что

- а) $o(o(f(x))) = o(f(x))$; г) $O(O(f(x))) = O(f(x))$;
 б) $O(o(f(x))) = o(f(x))$; д) $O(f(x)) + o(f(x)) = O(f(x))$.
 в) $o(O(f(x))) = o(f(x))$;

647. Пусть $x \rightarrow 0$ и $n > 0$. Показать, что

- а) $CO(x^n) = O(x^n)$ ($C \neq 0$ — постоянная);
 б) $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$ ($n < m$);
 в) $O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m})$.

648. Пусть $x \rightarrow +\infty$ и $n > 0$. Показать, что

- а) $CO(x^n) = O(x^n)$;
 б) $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$ ($n > m$);
 в) $O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m})$.

649. Показать, что символ $\sim$ обладает свойствами: 1) рефлексивности: $\varphi(x) \sim \varphi(x)$; 2) симметрии: если $\varphi(x) \sim \psi(x)$, то $\psi(x) \sim \varphi(x)$; 3) транзитивности: если $\varphi(x) \sim \psi(x)$ и $\psi(x) \sim \chi(x)$, то $\varphi(x) \sim \chi(x)$.

650. Пусть $x \rightarrow 0$. Доказать следующие равенства:

- а) $2x - x^2 = O(x)$; д) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt[5]{x}$;
 б) $x \sin \sqrt{x} = O\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$; е) $\arctg \frac{1}{x} = O(1)$;
 в) $x \sin \frac{1}{x} = O(|x|)$; ж) $(1+x)^n = 1 + nx + o(x)$.
 г) $\ln x = o\left(\frac{1}{x^e}\right)$ ($e > 0$);

651. Пусть $x \rightarrow +\infty$. Доказать следующие равенства:

- а) $2x^3 - 3x^2 + 1 = O(x^3)$; в) $x + x^3 \sin x = O(x^3)$;
 б) $\frac{x+1}{x^2+1} = O\left(\frac{1}{x}\right)$; г) $\frac{\arctg x}{1+x^2} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$;

д) $\ln x = o(x^e) \quad (e > 0)$;

е) $x^p e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$;

ж) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt{x}$;

з) $x^2 + x \ln^{100} x \sim x^2$.

652. Доказать, что при достаточно большом $x > 0$ имеют место неравенства:

а) $x^2 + 10x + 100 < 0,001x^3$; в) $x^{10}e^x < e^{2x}$.

б) $\ln^{1000} x < \sqrt{x}$;

652.1. Доказать асимптотическую формулу

$$\sqrt{x^2 + px + q} = x + \frac{p}{2} + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

при $x \rightarrow +\infty$.

653. Пусть $x \rightarrow 0$. Выделить главный член вида Cx^n (C — постоянная) и определить порядки малости относительно переменной x следующих функций:

а) $2x - 3x^3 + x^5$;

в) $\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}$;

б) $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$;

г) $\operatorname{tg} x - \sin x$.

654. Пусть $x \rightarrow 0$. Показать, что бесконечно малые

а) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$;

б) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

не сравнимы с бесконечно малой x^n ($n > 0$), каково бы ни было n , т. е. ни при каком n не может иметь место равенство $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = k$, где k — конечная величина, отличная от нуля.

655. Пусть $x \rightarrow 1$. Выделить главный член вида $C(x-1)^n$ и определить порядки малости относительно бесконечно малой $x-1$ следующих функций:

а) $x^3 - 3x + 2$;

в) $\ln x$;

д) $x^x - 1$.

б) $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$;

г) $e^x - e$;

656. Пусть $x \rightarrow +\infty$. Выделить главный член вида Cx^n и определить порядки роста относительно бесконечно большой x следующих функций:

а) $x^3 + 100x + 10\,000$;

в) $\sqrt[3]{x^2-x} + \sqrt{x}$;

б) $\frac{2x^3}{x^3-3x+1}$;

г) $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}$.

657. Пусть $x \rightarrow +\infty$. Выделить главный член вида $C\left(\frac{1}{x}\right)^n$ и определить порядки малости относительно бесконечно малой $\frac{1}{x}$ следующих функций:

а) $\frac{x+1}{x^4+1}$;

в) $\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$;

б) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$;

г) $\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$.

658. Пусть $x \rightarrow 1$. Выделить главный член вида $C \left(\frac{1}{x-1} \right)^n$ и определить порядки роста относительно бесконечно большой $\frac{1}{x-1}$ следующих функций:

а) $\frac{x^3}{x^3-1}$; в) $\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$; д) $\frac{\ln x}{(1-x)^2}$.

б) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; г) $\frac{1}{\sin \pi x}$;

659. Пусть $x \rightarrow +\infty$ и $f_n(x) = x^n$ ($n = 1, 2, \dots$). Доказать, что 1) каждая из функций $f_n(x)$ растет быстрее, чем предшествующая функция $f_{n-1}(x)$; 2) функция e^x растет быстрее, чем каждая из функций $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$).

660. Пусть $x \rightarrow +\infty$ и

$$f_n(x) = \sqrt[n]{x} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Доказать, что 1) каждая из функций $f_n(x)$ растет медленнее, чем предшествующая функция $f_{n-1}(x)$; 2) функция $f(x) = \ln x$ растет медленнее, чем каждая из функций $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$).

661. Доказать, что какова бы ни была последовательность функций

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (x_0 < x < +\infty),$$

можно построить функцию $f(x)$, которая при $x \rightarrow +\infty$ растет быстрее, чем каждая из функций $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$).

§ 7. Непрерывность функции

1°. Непрерывность функции. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* при $x = x_0$ (или в точке x_0), если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

т. е. если функция $f(x)$ определена при $x = x_0$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ такое, что при $|x - x_0| < \delta$ для всех значений $f(x)$, имеющих смысл, выполнено неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на данном множестве* $X = \{x\}$ (интервале, сегменте и т. п.), если эта функция непрерывна в каждой точке множества X .

Если при некотором значении $x = x_0$, принадлежащем области определения $X = \{x\}$ функции $f(x)$ или являющемся предельной точкой этого множества, равенство (1) не выполнено (т. е. или (а) не существует число $f(x_0)$, иными словами, функция не определена в точке $x = x_0$, или (б) не существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, или (в) обе части формулы (1) имеют смысл, но равенство между ними не имеет места), то x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$.

Различают: 1) точки x_0 разрыва первого рода, для которых существуют конечные односторонние пределы:

$$f(x_0-0) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \quad \text{и} \quad f(x_0+0) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$$

и 2) точки разрыва второго рода — все остальные. Разность

$$f(x_0+0) - f(x_0-0)$$

называется скачком функции в точке x_0 .

Если выполнено равенство

$$f(x_0-0) = f(x_0+0),$$

то точка разрыва x_0 называется *устранимой*. Если по меньшей мере один из пределов $f(x_0-0)$ или $f(x_0+0)$ равен символу ∞ , то x_0 называется точкой *бесконечного разрыва*.

Если выполнено равенство

$$f(x_0-0) = f(x_0) \quad (\text{или} \quad f(x_0+0) = f(x_0)),$$

то говорят, что функция $f(x_0)$ *непрерывна слева (справа)* в точке x_0 . Для непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно равенство трех чисел:

$$f(x_0-0) = f(x_0+0) = f(x_0).$$

2°. Непрерывность элементарных функций. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны при значении $x = x_0$, то функции

$$\text{а) } f(x) \pm g(x); \quad \text{б) } f(x)g(x); \quad \text{в) } \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x_0) \neq 0)$$

также непрерывны при $x = x_0$.

В частности: а) целая рациональная функция

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

непрерывна при любом значении x ; б) дробная рациональная функция

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m}$$

непрерывна при всех значениях x , не обращающих знаменателя в нуль.

Вообще основные элементарные функции: x^n , $\sin x$, $\cos x$, $\lg x$, a^x , $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, ... непрерывны во всех точках, где они определены.

Более общий результат следующий: если функция $f(x)$ непрерывна при $x = x_0$ и функция $g(y)$ непрерывна при $y = f(x_0)$, то функция $g(f(x))$ непрерывна при $x = x_0$.

3°. Основные теоремы о непрерывных функциях. Если функция $f(x)$ непрерывна на конечном сегменте $[a, b]$, то: 1) $f(x)$ ограничена на этом сегменте; 2) достигает на нем своей нижней грани m и верхней грани M (теорема Вейерштрасса); 3) принимает на каждом интервале $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ все промежуточные значения между $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ (теорема Коши). В частности, если $f(\alpha)f(\beta) < 0$, то найдется значение $\gamma (\alpha < \gamma < \beta)$ такое, что $f(\gamma) = 0$.

662. Дан график непрерывной функции $y = f(x)$. Для данной точки a и числа $\varepsilon > 0$ указать геометрически число $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ при $|x - a| < \delta$.

663. Требуется изготовить металлическую квадратную пластинку, сторона которой $x_0 = 10$ см. В каких пределах допустимо

изменять сторону x этой пластинки, если площадь её $y = x^2$ может отличаться от проектной $y_0 = 100 \text{ см}^2$ не больше чем а) на $\pm 1 \text{ см}^2$; б) на $\pm 0,1 \text{ см}^2$; в) на $\pm 0,01 \text{ см}^2$; г) на $\pm \varepsilon \text{ см}^2$?

664. Ребро куба заключается между 2 м и 3 м. С какой абсолютной погрешностью Δ допустимо измерить ребро x этого куба, чтобы объем его y можно было вычислить с абсолютной погрешностью, не превышающей $\varepsilon \text{ м}^3$, если: а) $\varepsilon = 0,1 \text{ м}^3$; б) $\varepsilon = 0,01 \text{ м}^3$; в) $\varepsilon = 0,001 \text{ м}^3$?

665. В какой максимальной окрестности точки $x_0 = 100$ ордината графика функции $y = \sqrt{x}$ отличается от ординаты $y_0 = 10$ меньше чем $\varepsilon = 10^{-n}$ ($n \geq 0$)? Определить размеры этой окрестности при $n = 0, 1, 2, 3$.

666. С помощью «е—δ»-рассуждений доказать, что функция $f(x) = x^2$ непрерывна при $x = 5$.

Заполнить следующую таблицу:

ε	1	0,1	0,01	0,001	...
δ					

667. Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$ и $\varepsilon = 0,001$. Для значений $x_0 = 0,1; 0,01; 0,001; \dots$ найти максимально большие положительные числа $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ такие, чтобы из неравенства $|x - x_0| < \delta$ вытекало бы неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Можно ли для данного $\varepsilon = 0,001$ выбрать такое $\delta > 0$, которое годилось бы для всех значений x_0 из интервала $(0,1)$, т. е. такое, что если $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, каково бы ни было значение $x_0 \in (0,1)$?

668. Сформулировать на языке «е—δ» в положительном смысле следующее утверждение: функция $f(x)$, определенная в точке x_0 , не является непрерывной в этой точке.

669. Пусть для некоторых чисел $\varepsilon > 0$ можно найти соответствующие числа $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ такие, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, если только $|x - x_0| < \delta$.

Можно ли утверждать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , если: а) числа ε образуют конечное множество; б) числа ε образуют бесконечное множество двончных дробей $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ ($n = 1, 2, \dots$).

670. Пусть дана функция

$$f(x) = x + 0,001[x].$$

Показать, что для каждого $\varepsilon > 0,001$ можно подобрать $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ такое, что $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$, если только $|x' - x| < \delta$, а для $0 < \varepsilon \leq 0,001$ для всех значений x этого сделать нельзя.

В каких точках нарушается непрерывность этой функции?

671. Пусть для каждого достаточно малого числа $\delta > 0$ существует $\varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0) > 0$ такое, что если $|x - x_0| < \delta$, то выполнено неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Следует ли отсюда, что функция $f(x)$ непрерывна при $x = x_0$? Какое свойство функции $f(x)$ описывается данными неравенствами?

672. Пусть для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ такое, что если $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, то $|x - x_0| < \delta$. Следует ли отсюда, что функция $f(x)$ непрерывна при значении $x = x_0$? Какое свойство функции описывается этими неравенствами?

673. Пусть для каждого числа $\delta > 0$ существует число $\varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0) > 0$ такое, что если $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, то $|x - x_0| < \delta$.

Следует ли отсюда, что функция $f(x)$ непрерывна при $x = x_0$? Какое свойство функции $f(x)$ описывается данными неравенствами?

Рассмотреть пример:

$$f(x) = \begin{cases} \arctg x, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ \pi - \arctg x, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

674. С помощью « $\varepsilon - \delta$ »-рассуждений доказать непрерывность следующих функций: а) $ax + b$; б) x^2 ; в) x^3 ; г) $\sqrt{x}$; д) $\sqrt[3]{x}$; е) $\sin x$; ж) $\cos x$; з) $\arctg x$.

Исследовать на непрерывность и изобразить графически следующие функции:

675. $f(x) = |x|$.

$$676. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{если } x \neq 2; \\ A, & \text{если } x = 2. \end{cases}$$

$$677. f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}, \text{ если } x \neq -1 \text{ и } f(-1) \text{ — произвольно.}$$

$$678. \text{ а) } f_1(x) = \left| \frac{\sin x}{|x|} \right|, \text{ если } x \neq 0 \text{ и } f_1(0) = 1;$$

$$\text{ б) } f_2(x) = \frac{\sin x}{|x|}, \text{ если } x \neq 0 \text{ и } f_2(0) = 1.$$

$$679. f(x) = \sin \frac{1}{x}, \text{ если } x \neq 0 \text{ и } f(0) \text{ — произвольно.}$$

$$680. f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \text{ если } x \neq 0 \text{ и } f(0) = 0.$$

$$681. f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ если } x \neq 0 \text{ и } f(0) = 0.$$

$$682. f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}, \text{ если } x \neq 1 \text{ и } f(1) \text{ — произвольно.}$$

$$683. f(x) = x \ln x^2, \text{ если } x \neq 0 \text{ и } f(0) = a.$$

$$684. f(x) = \operatorname{sgn} x.$$

$$685. f(x) = [x].$$

$$686. f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}].$$

Определить точки разрыва функций и исследовать характер этих точек, если:

$$687. y = \frac{x}{(1+x)^2}.$$

$$688. y = \frac{1+x}{1+x^3}.$$

$$689. y = \frac{x^2-1}{x^3-3x-2}.$$

$$690. y = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}.$$

$$691. y = \frac{x}{\sin x}.$$

$$692. y = \sqrt{\frac{1 - \cos \pi x}{4 - x^2}}.$$

$$693. y = \cos^2 \frac{1}{x}.$$

$$694. y = \operatorname{sgn} \left(\sin \frac{\pi}{x} \right).$$

$$695. y = \frac{\cos \frac{\pi}{x}}{\cos \frac{\pi}{x}}.$$

$$696. y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

$$697. y = \sqrt{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

$$698. y = e^{x + \frac{1}{x}}.$$

$$699. y = \frac{1}{\ln x}.$$

$$700. y = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}.$$

Исследовать на непрерывность и нарисовать эскизы графиков следующих функций:

$$701. y = \operatorname{sgn} (\sin x).$$

$$702. y = x - [x].$$

$$703. y = x[x].$$

$$704. y = [x] \sin \pi x.$$

$$705. y = x^2 - [x^2].$$

$$706. y = \left[\frac{1}{x} \right].$$

$$713. y = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \right).$$

$$707. y = x \left[\frac{1}{x} \right].$$

$$708. y = \operatorname{sgn} \left(\cos \frac{1}{x} \right).$$

$$709. y = \left[\frac{1}{x^2} \right] \operatorname{sgn} \left(\sin \frac{\pi}{x} \right).$$

$$710. y = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{x}.$$

$$711. y = \sec^2 \frac{1}{x}.$$

$$712. y = (-1)^{[x]}.$$

714. $y = \frac{1}{x^2 \sin^2 x}.$

717. $y = e^{-\frac{1}{x}}.$

715. $y = \frac{1}{\sin(x^2)}.$

718. $y = 1 - e^{-\frac{1}{x^2}}.$

716. $y = \ln \frac{x^2}{(x+1)(x-3)}.$

719. $y = \operatorname{th} \frac{2x}{1-x^2}.$

Исследовать на непрерывность и построить графики следующих функций:

720. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^n} (x \geq 0).$

725. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} [x \operatorname{arctg}(n \operatorname{ctg} x)].$

721. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}.$

726. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^n e^{nx}}{1 + e^{nx}}.$

722. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^{2n}}.$

727. $y = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{xt})}{\ln(1 + e^t)}.$

723. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{2n} x.$

728. $y = \lim_{t \rightarrow +\infty} (1+x) \operatorname{th} tx.$

724. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + (2 \sin x)^{2n}}.$

729. Является ли непрерывной функция:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & \text{если } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

730. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{если } x < 0, \\ a+x, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

При каком выборе числа a функция $f(x)$ будет непрерывной?

731. Исследовать следующие функции на непрерывность и выяснить характер точек разрыва, если:

а) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x & \text{при } 1 < x \leq 2; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } |x| \leq 1, \\ 1 & \text{при } |x| > 1; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} & \text{при } |x| \leq 1, \\ |x-1| & \text{при } |x| > 1; \end{cases}$

г) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{ctg}^2 \pi x & \text{для нецелого } x, \\ 0 & \text{для целого } x; \end{cases}$

д) $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x & \text{для рационального } x, \\ 0 & \text{для иррационального } x. \end{cases}$

732. Функция $d = d(x)$ представляет собой кратчайшее расстояние точки x числовой оси Ox от множества точек ее, состоящего из отрезков $0 \leq x \leq 1$ и $2 \leq x \leq 3$. Найти аналитическое выражение функции d , построить ее график и исследовать на непрерывность.

733. Фигура E состоит из равнобедренного треугольника с основанием 1 и высотой 1 и двух прямоугольников с основаниями 1 каждый и высотами, равными 2 и 3 (рис. 5). Функция $S = S(y)$ ($0 \leq y < +\infty$) представляет собой площадь части фигуры E , заключенной между параллелями $Y = 0$ и $Y = y$; а функция $b = b(y)$ ($0 \leq y < +\infty$) есть длина сечения фигуры E параллелью $Y = y$. Найти аналитические выражения функций S и b , построить их графики и исследовать на непрерывность.

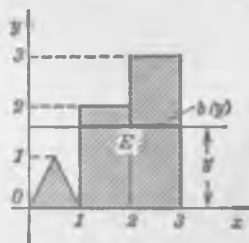


Рис. 5.

734. Доказать, что функция Дирихле

$$\chi(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n(\pi m! x) \right\}$$

разрывна при каждом значении x .

735. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = x\chi(x),$$

где $\chi(x)$ — функция Дирихле (см. предыдущую задачу). Построить эскиз графика этой функции.

736. Доказать, что функция Римана

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x = \frac{m}{n}, \text{ где } m \text{ и } n \text{ взаимно простые числа;} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

разрывна при каждом рациональном значении x и непрерывна при каждом иррациональном значении x . Построить эскиз графика этой функции.

737. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)$, заданную следующим образом:

$$f(x) = \frac{nx}{n+1},$$

если x есть несократимая рациональная дробь $\frac{m}{n}$ ($n \geq 1$), и

$$f(x) = |x|,$$

если x — иррациональное число. Построить эскиз графика этой функции.

738. Функция $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ определена для всех значений аргумента x , кроме $x = 0$. Какое значение следует приписать

функции $f(x)$ в точке $x=0$, чтобы эта функция была непрерывной при $x=0$?

739. Показать, что при любом выборе числа $f(1)$ функция $f(x) = \frac{1}{1-x}$ будет разрывна при $x=1$.

740. Функция $f(x)$ теряет смысл при $x=0$. Определить число $f(0)$ так, чтобы $f(x)$ была непрерывна при $x=0$, если:

$$\text{а) } f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}; \quad \text{г) } f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}};$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{\lg 2x}{x}; \quad \text{д) } f(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}};$$

$$\text{в) } f(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}; \quad \text{е) } f(x) = x^x \quad (x > 0);$$

$$\text{ж) } f(x) = x \ln^2 x.$$

741. Обязательно ли будет разрывна в данной точке x_0 сумма двух функций $f(x) + g(x)$, если: а) функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ разрывна при $x=x_0$; б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывны при $x=x_0$? Построить соответствующие примеры.

742. Обязательно ли произведение двух функций

$$f(x)g(x)$$

терпит разрыв непрерывности в данной точке x_0 , если: а) функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ разрывна в этой точке; б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывны при $x=x_0$? Построить соответствующие примеры.

743. Можно ли утверждать, что квадрат разрывной функции есть также разрывная функция?

Построить пример всюду разрывной функции, квадрат которой есть функция непрерывная.

744. Исследовать на непрерывность функции $f[g(x)]$ и $g[f(x)]$, если:

$$\text{а) } f(x) = \operatorname{sgn} x \text{ и } g(x) = 1 + x^2;$$

$$\text{б) } f(x) = \operatorname{sgn} x \text{ и } g(x) = x(1 - x^2);$$

$$\text{в) } f(x) = \operatorname{sgn} x \text{ и } g(x) = 1 + x - [x].$$

745. Исследовать на непрерывность сложную функцию $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, если

$$f(u) = \begin{cases} u & \text{при } 0 \leq u \leq 1; \\ 2-u & \text{при } 1 < u < 2 \end{cases}$$

и

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \text{ рациональном;} \\ 2-x & \text{при } x \text{ иррациональном} \end{cases}$$

($0 < x < 1$).

746. Доказать, что если $f(x)$ — непрерывная функция, то

$$F(x) = |f(x)|$$

есть также непрерывная функция.

747. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна, то функция

$$f_c(x) = \begin{cases} -c, & \text{если } f(x) < -c; \\ f(x), & \text{если } |f(x)| \leq c; \\ c, & \text{если } f(x) > c, \end{cases}$$

где c — любое положительное число, также непрерывна.

748. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то функции

$$m(x) = \inf_{a \leq \xi \leq x} \{f(\xi)\} \quad \text{и} \quad M(x) = \sup_{a \leq \xi \leq x} \{f(\xi)\}$$

также непрерывны на $[a, b]$.

749. Доказать, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, то функции

$$\varphi(x) = \min[f(x), g(x)] \quad \text{и} \quad \psi(x) = \max[f(x), g(x)]$$

также непрерывны.

750. Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на сегменте $[a, b]$. Доказать, что функции

$$m(x) = \inf_{a \leq \xi \leq x} \{f(\xi)\} \quad \text{и} \quad M(x) = \sup_{a \leq \xi \leq x} \{f(\xi)\}$$

непрерывны слева на сегменте $[a, b]$.

751. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $a \leq x < +\infty$ и существует конечный

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x),$$

то эта функция ограничена в данном промежутке.

752. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и ограничена в интервале $(x_0, +\infty)$. Доказать, что, каково бы ни было число T , найдется последовательность $x_n \rightarrow +\infty$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_n + T) - f(x_n)] = 0.$$

753. Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — непрерывные периодические функции, определенные при $-\infty < x < +\infty$ и

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0.$$

Доказать, что

$$\varphi(x) = \psi(x).$$

754. Доказать, что все точки разрыва ограниченной монотонной функции являются точками разрыва 1-го рода.

755. Доказать, что если функция $f(x)$ обладает следующими свойствами: 1) определена и монотонна на сегменте $[a, b]$; 2) в качестве своих значений принимает все числа между $f(a)$ и $f(b)$, то эта функция непрерывна на $[a, b]$.

756. Показать, что функция $f(x) = \sin \frac{1}{x-a}$, если $x \neq a$ и $f(a) = 0$, принимает на любом сегменте $[a, b]$ все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$, однако не является непрерывной на $[a, b]$.

757. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b) и $x_1, x_2, \dots, x_n$ — любые значения из этого интервала, то между ними найдётся число ξ такое, что

$$f(\xi) = \frac{1}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)].$$

758. Пусть $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b) и

$$l = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{и} \quad L = \overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x).$$

Доказать, что, каково бы ни было число λ , где $l \leq \lambda \leq L$, существует последовательность $x_n \rightarrow a$ ($n = 1, 2, \dots$) такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lambda.$$

§ 8. Обратная функция. Функции, заданные параметрически

1°. Существование и непрерывность обратной функции. Если функция $y = f(x)$ обладает следующими свойствами: 1) определена и непрерывна на интервале (a, b) ; 2) монотонна в строгом смысле на этом интервале, то существует однозначная обратная функция $x = f^{-1}(y)$, определенная, непрерывная и соответственно монотонная в строгом смысле на интервале (A, B) , где $A = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ и $B = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$.

Под *однозначной непрерывной ветвью* многозначной обратной функции данной непрерывной функции $y = f(x)$ понимается любая однозначная непрерывная функция $x = g(y)$, определенная в максимальной области ее существования и удовлетворяющая в этой области уравнению $f[g(y)] = y$.

2°. Непрерывность функции, заданной параметрически. Если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определены и непрерывны в интервале (α, β) и функция $\varphi(t)$ строго монотонна на этом интервале, то система уравнений

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

определяет y как однозначную непрерывную функцию от x :

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)),$$

на интервале (a, b) , где $a = \lim_{t \rightarrow \alpha+0} \varphi(t)$ и $b = \lim_{t \rightarrow \beta-0} \varphi(t)$.

759. Найти обратную функцию дробно-линейной функции

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad-bc \neq 0).$$

В каком случае обратная функция совпадает с данной?

760. Найти обратную функцию $x = x(y)$, если

$$y = x + [x].$$

761. Показать, что существует единственная непрерывная функция $y = y(x)$ ($-\infty < x < +\infty$), удовлетворяющая уравнению Кеплера

$$y - \varepsilon \sin y = x \quad (0 \leq \varepsilon < 1).$$

762. Показать, что уравнение

$$\operatorname{ctg} x = kx$$

для каждого вещественного k ($-\infty < k < +\infty$) имеет в интервале $0 < x < \pi$ единственный непрерывный корень $x = x(k)$.

763. Может ли немонотонная функция $y = f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) иметь однозначную обратную функцию? Рассмотреть пример:

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \text{ рационально;} \\ -x, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

764. В каком случае функция $y = f(x)$ и обратная функция $x = f^{-1}(y)$ представляют одну и ту же функцию?

765. Показать, что обратная функция разрывной функции

$$y = (1 + x^2) \operatorname{sgn} x$$

есть функция непрерывная.

766. Доказать, что если функция $f(x)$ определена и строго монотонна на сегменте $[a, b]$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a) \quad (a \leq x_n \leq b),$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Определить однозначные непрерывные ветви обратных функций для следующих функций:

767. $y = x^2$.

770. $y = \sin x$.

768. $y = 2x - x^2$.

771. $y = \cos x$.

769. $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

772. $y = \operatorname{tg} x$.

773. Показать, что множество значений непрерывной функции

$$y = 1 + \sin x,$$

соответствующих интервалу ($0 < x < 2\pi$), есть сегмент.

774. Доказать равенство

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

775. Доказать равенство

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x \quad (x \neq 0).$$

776. Доказать теорему сложения арктангенсов:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi,$$

где $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$ — функция, принимающая одно из трех значений: 0, 1, -1.

Для каких значений y при данном значении x возможен разрыв функции ε ? Построить на плоскости Oxy соответствующие области непрерывности функции ε и определить значение этой функции в полученных областях.

777. Доказать теорему сложения арксинусов:

$$\arcsin x + \arcsin y = (-1)^\varepsilon \arcsin (x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) + \varepsilon\pi$$

($|x| \leq 1, |y| \leq 1$), где

$$\varepsilon = 0, \text{ если } xy \leq 0 \text{ или } x^2 + y^2 \leq 1,$$

и

$$\varepsilon = \operatorname{sgn} x, \text{ если } xy > 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1.$$

778. Доказать теорему сложения арккосинусов:

$$\arccos x + \arccos y = (-1)^\varepsilon \arccos (xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) + 2\pi\varepsilon$$

($|x| \leq 1, |y| \leq 1$), где

$$\varepsilon = 0, \text{ если } x + y \geq 0,$$

и

$$\varepsilon = 1, \text{ если } x + y < 0.$$

779. Построить графики функций:

а) $y = \arcsin x - \arcsin \sqrt{1-x^2};$

б) $y = \arcsin (2x\sqrt{1-x^2}) - 2\arcsin x.$

780. Найти функцию $y = y(x)$, заданную уравнениями:

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad y = \operatorname{arctg} t \quad (-\infty < t < +\infty).$$

В какой области определена эта функция?

781. Пусть

$$x = \operatorname{ch} t, \quad y = \operatorname{sh} t \quad (-\infty < t < +\infty).$$

В каких областях изменения параметра t переменную y можно рассматривать как однозначную функцию от переменной x ? Найти выражения y для различных областей.

782. Каковы необходимые и достаточные условия того, чтобы система уравнений

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (\alpha < t < \beta)$$

определяла бы y как однозначную функцию от x ?

Рассмотреть пример: $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$.

783. При каких условиях две системы уравнений

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (\alpha < t < \beta)$$

определяют одну и ту же функцию $y = y(x)$?

784. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определены и непрерывны на интервале (a, b) и

$$A = \inf_{a < x < b} \varphi(x), \quad B = \sup_{a < x < b} \varphi(x).$$

В каком случае существует однозначная функция $f(x)$, определенная в интервале (A, B) и такая, что

$$\psi(x) = f(\varphi(x)) \quad \text{при} \quad a < x < b?$$

§ 9. Равномерная непрерывность функции

1°. Определение равномерной непрерывности. Функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной* на данном множестве (интервале, сегменте и т. п.) $X = \{x\}$, если $f(x)$ определена на X и для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых значений $x', x'' \in X$ из неравенства

$$|x' - x''| < \delta$$

следует неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

2°. Теорема Кантора. Функция $f(x)$, определенная и непрерывная на ограниченном сегменте $[a, b]$, равномерно непрерывна на этом сегменте.

785. Цех завода вырабатывает квадратные пластинки, стороны которых x могут принимать значения в пределах от 1 до 10 см. С каким допуском δ можно обрабатывать стороны этих пластинок, чтобы независимо от их длины (в указанных границах) площадь их y отличалась от проектной меньше, чем на ε ? Произвести численный расчет, если:

а) $\varepsilon = 1 \text{ см}^2$; б) $\varepsilon = 0,01 \text{ см}^2$; в) $\varepsilon = 0,0001 \text{ см}^2$.

786. Цилиндрическая муфта, ширина которой ε и длина δ , надета на кривую $y = \sqrt[3]{x}$ и скользит по ней так, что ось муфты остается параллельной оси Ox . Чему должно быть равно δ , чтобы эта муфта свободно прошла участок кривой, определяемый неравенством $-10 \leq x \leq 10$, если: а) $\varepsilon = 1$; б) $\varepsilon = 0,1$; в) $\varepsilon = 0,01$; г) ε произвольно мало?

787. В положительном смысле сформулировать на языке « ε — δ » утверждение: функция $f(x)$ непрерывна на некотором множестве (интервале, сегменте и т. п.), но не является равномерно непрерывной на этом множестве.

788. Показать, что функция

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

непрерывна в интервале $(0, 1)$, но не является равномерно непрерывной в этом интервале.

789. Показать, что функция

$$f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$$

непрерывна и ограничена в интервале $(0, 1)$, но не является равномерно непрерывной в этом интервале.

790. Показать, что функция

$$f(x) = \sin x^2$$

непрерывна и ограничена в бесконечном интервале $-\infty < x < +\infty$, но не является равномерно непрерывной в этом интервале.

791. Доказать, что если функция $f(x)$ определена и непрерывна в области $a \leq x < +\infty$ и существует конечный

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x),$$

то $f(x)$ равномерно непрерывна в этой области.

792. Показать, что неограниченная функция

$$f(x) = x + \sin x$$

равномерно непрерывна на всей оси $-\infty < x < +\infty$.

793. Является ли равномерно непрерывной функция $f(x) = x^2$ на интервале а) $(-l, l)$, где l —любое, сколько угодно большое положительное число; б) на интервале $(-\infty, +\infty)$?

Исследовать на равномерную непрерывность в заданных областях следующие функции:

$$794. f(x) = \frac{x}{4-x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

$$795. f(x) = \ln x \quad (0 < x < 1).$$

$$796. f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (0 < x < \pi).$$

$$797. f(x) = e^x \cos \frac{1}{x} \quad (0 < x < 1).$$

$$798. f(x) = \operatorname{arctg} x \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$799. f(x) = \sqrt{x} \quad (1 \leq x < +\infty).$$

$$800. f(x) = x \sin x \quad (0 \leq x < +\infty).$$

801. Показать, что функция $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ равномерно непрерывна на каждом интервале

$$J_1 = (-1 < x < 0) \quad \text{и} \quad J_2 = (0 < x < 1)$$

по отдельности, но не является равномерно непрерывной на их сумме

$$J_1 + J_2 = \{0 < |x| < 1\}.$$

801.1. Доказать, что если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на каждом из сегментов $[a, c]$ и $[c, b]$, то эта функция является равномерно непрерывной на суммарном сегменте $[a, b]$.

802. Для $\varepsilon > 0$ найти $\delta = \delta(\varepsilon)$ (какое-нибудь!), удовлетворяющее условиям равномерной непрерывности для функции $f(x)$ на данном промежутке, если:

$$\text{а) } f(x) = 5x - 3 \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$\text{б) } f(x) = x^2 - 2x - 1 \quad (-2 \leq x \leq 5);$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{1}{x} \quad (0,1 \leq x \leq 1);$$

$$\text{г) } f(x) = \sqrt{x} \quad (0 \leq x < +\infty);$$

$$\text{д) } f(x) = 2 \sin x - \cos x \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$\text{е) } f(x) = x \sin \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \quad \text{и} \quad f(0) = 0 \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

803. На сколько равных между собой отрезков достаточно разбить сегмент $[1, 10]$, чтобы колебание функции $f(x) = x^2$ на каждом из этих отрезков было меньше 0,0001?

804. Доказать, что сумма и произведение ограниченного числа равномерно непрерывных на интервале (a, b) функций равномерно непрерывны на этом интервале.

805. Доказать, что если ограниченная монотонная функция $f(x)$ непрерывна на конечном или бесконечном интервале (a, b) , то эта функция равномерно непрерывна на интервале (a, b) .

806(н). Доказать, что если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на конечном интервале (a, b) , то существуют пределы

$$A = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \quad \text{и} \quad B = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x).$$

Верна ли эта теорема для бесконечного интервала (a, b) ?

806.1. Доказать, что для того, чтобы функцию $f(x)$, определенную и непрерывную на конечном интервале (a, b) , можно было продолжить непрерывным образом на сегмент $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была равномерно непрерывна на интервале (a, b) .

807. Модулем непрерывности функции $f(x)$ на промежутке (a, b) называется функция

$$\omega_f(\delta) = \sup |f(x_1) - f(x_2)|,$$

где x_1 и x_2 — любые точки из (a, b) , связанные условием $|x_1 - x_2| \leq \delta$.

Доказать, что для равномерной непрерывности функции $f(x)$ на промежутке (a, b) необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega_f(\delta) = 0.$$

808. Получить оценку модуля непрерывности $\omega_f(\delta)$ (см. предыдущую задачу) вида

$$\omega_f(\delta) \leq C\delta^\alpha,$$

где C и α — константы, если:

а) $f(x) = x^3$ $(0 \leq x \leq 1)$;

б) $f(x) = \sqrt{x}$ $(0 \leq x \leq a)$ и $(a < x < +\infty)$;

в) $f(x) = \sin x + \cos x$ $(0 \leq x \leq 2\pi)$.

§ 10. Функциональные уравнения

809. Доказать, что единственная непрерывная функция $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, удовлетворяющая для всех вещественных значений x и y уравнению

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad (1)$$

есть линейная однородная

$$f(x) = ax,$$

где $a = f(1)$ — произвольная константа.

810. Доказать, что монотонная функция $f(x)$, удовлетворяющая уравнению (1), есть линейная однородная.

811. Доказать, что функция $f(x)$, удовлетворяющая уравнению (1) и ограниченная в сколь угодно малом интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, есть линейная однородная.

812. Доказать, что единственная не равная нулю тождественно непрерывная функция $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, удовлетворяющая для всех значений x и y уравнению

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad (2)$$

есть показательная

$$f(x) = a^x,$$

где $a = f(1)$ — положительная постоянная.

813. Доказать, что не равная нулю тождественно функция $f(x)$, ограниченная в интервале $(0, \epsilon)$ и удовлетворяющая уравнению (2), есть показательная.

814. Доказать, что единственная не равная нулю тождественно непрерывная функция $f(x)$ ($0 < x < +\infty$), удовлетворяющая для всех положительных значений x и y уравнению

$$f(xy) = f(x) + f(y),$$

есть логарифмическая

$$f(x) = \log_a x,$$

где a — положительная константа ($a \neq 1$).

815. Доказать, что единственная не равная нулю тождественно непрерывная функция $f(x)$ ($0 < x < +\infty$), удовлетворяющая для всех положительных значений x и y уравнению

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad (3)$$

есть степенная

$$f(x) = x^a,$$

где a — постоянная.

816. Найти все непрерывные функции $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$), удовлетворяющие для всех вещественных значений x и y уравнению (3).

817. Показать, что разрывная функция

$$f(x) = \operatorname{sgn} x$$

удовлетворяет уравнению (3).

818. Найти все непрерывные функции $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$), удовлетворяющие для всех вещественных значений x и y уравнению

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

819. Найти все непрерывные ограниченные функции $f(x)$ и $g(x)$ ($-\infty < x < +\infty$), удовлетворяющие для всех вещественных значений x и y системе уравнений:

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y),$$

$$g(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x),$$

и, сверх того, условиям нормировки:

$$f(0) = 1 \quad \text{и} \quad g(0) = 0.$$

У к а з а н и е. Рассмотреть функцию

$$F(x) = f^2(x) + g^2(x).$$

820. Пусть

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

и

$$\Delta^2 f(x) = \Delta \{ \Delta f(x) \}$$

суть конечные разности функции $f(x)$ соответственно первого и второго порядков.

Доказать, что если функция $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) непрерывная и

$$\Delta^2 f(x) = 0,$$

то эта функция линейная, т. е.

$$f(x) = ax + b,$$

где a и b — постоянные.

ОТДЕЛ II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Производная явной функции

1°. Определение производной. Если x и $x_1 = x + \Delta x$ — значения независимой переменной, то разность

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

называется *приращением* функции $y = f(x)$ на сегменте $[x, x_1]$.

Выражение

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad (1)$$

если оно имеет смысл, носит название *производной*, а сама функция $f(x)$ в этом случае называется *дифференцируемой*.

Геометрически число $f'(x)$ представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке его x ($\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$) (рис. 6).

2°. Основные правила нахождения производной. Если c — постоянная величина и функции $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$ имеют производные, то

1) $c' = 0$;

2) $(cu)' = cu'$;

3) $(u + v - w)' = u' + v' - w'$;

4) $(uv)' = u'v + v'u$;

5) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$;

6) $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ (n — постоянное число);

7) если функции $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ имеют производные, то

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

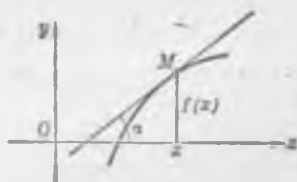


Рис. 6.

3°. Основные формулы. Если x — независимая переменная, то

I. $(x^n)' = nx^{n-1}$

(n — постоянное число).

II. $(\sin x)' = \cos x$.

III. $(\cos x)' = -\sin x$.

IV. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

V. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

VI. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

VII. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\text{VIII. } (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\text{XII. } (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$$

$$\text{IX. } (\operatorname{arccctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$\text{XIII. } (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$$

$$\text{X. } (a^x)' = a^x \ln a$$

$$(e^x)' = e^x.$$

$$\text{XIV. } (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$\text{XI. } (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0);$$

$$\text{XV. } (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (a > 0, a \neq 1; x > 0).$$

4°. Односторонние производные. Выражения

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{и} \quad f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

называются соответственно *левой* или *правой производной* функции $f(x)$ в точке x .

Для существования производной $f'(x)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$f'_-(x) = f'_+(x).$$

5°. Бесконечная производная. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x и

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty,$$

то говорят, что в точке x функция $f(x)$ имеет *бесконечную производную*. В этом случае касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке x перпендикулярна к оси Ox .

821. Определить приращение Δx аргумента x и соответствующее приращение Δy функции $y = \lg x$, если x изменяется от 1 до 1000.

822. Определить приращение Δx аргумента x и соответствующее приращение Δy функции $y = \frac{1}{x^2}$, если x изменяется от 0,01 до 0,001.

823. Переменная x получает приращение Δx . Определить приращение Δy , если:

а) $y = ax + b$; б) $y = ax^2 + bx + c$; в) $y = a^x$.

824. Доказать, что:

а) $\Delta [f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$;

б) $\Delta [f(x) g(x)] = g(x + \Delta x) \Delta f(x) + f(x) \Delta g(x)$.

825. Через точки $A(2, 4)$ и $A'(2 + \Delta x, 4 + \Delta y)$ кривой $y = x^2$ проведена секущая AA' . Найти угловой коэффициент этой секущей, если: а) $\Delta x = 1$; б) $\Delta x = 0,1$; в) $\Delta x = 0,01$; г) Δx произвольно мало.

Чему равен угловой коэффициент касательной к данной кривой в точке A ?

826. Отрезок $1 \leq x \leq 1 + h$ оси Ox с помощью функции $y = x^2$ отображается на ось Oy . Определить средний коэффициент растя-

жения и произвести численный расчет, если: а) $h=0,1$; б) $h=0,01$; в) $h=0,001$.

Чему равен коэффициент растяжения при этом отображении в точке $x=1$?

827. Закон движения точки по оси Ox дается формулой

$$x = 10t + 5t^2,$$

где t — время в секундах и x — расстояние в метрах. Найти среднюю скорость движения за промежуток времени $20 \leq t \leq 20 + \Delta t$ и произвести численный расчет, если: а) $\Delta t = 1$; б) $\Delta t = 0,1$; в) $\Delta t = 0,01$. Чему равна скорость движения в момент времени $t = 20$?

828. Исходя из определения производной, непосредственно найти производные следующих функций: а) x^2 ; б) x^3 ; в) $\frac{1}{x}$;

г) $\sqrt{x}$; д) $\sqrt[3]{x}$; е) $\operatorname{tg} x$; ж) $\operatorname{ctg} x$; з) $\arcsin x$; и) $\arccos x$; к) $\operatorname{arctg} x$.

829. Найти $f'(1)$, $f'(2)$ и $f'(3)$, если

$$f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3.$$

830. Найти $f'(2)$, если

$$f(x) = x^3 \sin(x-2).$$

831. Найти $f'(1)$, если

$$f(x) = x + (x-1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}.$$

832. Найти

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

если функция $f(x)$ дифференцируема в точке a .

833. Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема и n — натуральное число, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] = f'(x). \quad (1)$$

Обратно, если для функции $f(x)$ существует предел (1), то можно ли утверждать, что эта функция имеет производную? Рассмотреть пример функции Дирихле (см. отд. 1, задачу 734).

Пользуясь таблицей производных, найти производные следующих функций:

834. $y = 2 + x - x^2$.

Чему равно $y'(0)$; $y'\left(\frac{1}{2}\right)$; $y'(1)$; $y'(-10)$?

835. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$.

При каких значениях x : а) $y'(x)=0$; б) $y'(x)=-2$; в) $y'(x)=10$?

$$836. y = a^5 + 5a^3x^3 - x^5. \quad 838. y = (x-a)(x-b).$$

$$\sqrt{837. y = \frac{ax+b}{a+b}. \quad \sqrt{839. y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3.}$$

$$840. y = (x \sin \alpha + \cos \alpha)(x \cos \alpha - \sin \alpha).$$

$$\sqrt{841. y = (1+nx^m)(1+mx^n).$$

$$842. y = (1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3.$$

$$842.1. y = (5+2x)^{10}(3-4x)^{20}.$$

$$843. y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}.$$

844. Доказать формулу

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}.$$

Найти производные функций:

$$\sqrt{845. y = \frac{2x}{1-x^2}.$$

$$\sqrt{850. y = \frac{x^p(1-x)^q}{1+x}.$$

$$\sqrt{846. y = \frac{1+x-x^3}{1-x+x^3}.$$

$$\sqrt{851. y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}.$$

$$\sqrt{847. y = \frac{x}{(1-x^2)(1+x)^2}.$$

$$852. y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$\sqrt{848. y = \frac{(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^3}.$$

$$\sqrt{853. y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

$$\sqrt{849. y = \frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}.$$

$$854. y = x\sqrt{1+x^2}.$$

$$\sqrt{855. y = (1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}. \quad 860. y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}.$$

$$\sqrt{856. y = \sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}. \quad 861. y = \sqrt[2]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}}.$$

$$\sqrt{857. y = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

$$862. y = \cos 2x - 2 \sin x.$$

$$858. y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}.$$

$$863. y = (2-x^2) \cos x + 2x \sin x.$$

$$\sqrt{859. y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(x + \sqrt{1+x^2})}. \quad 864. y = \sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x).$$

$$865. y = \sin^n x \cos nx.$$

$$867. y = \frac{\sin^3 x}{\sin x^3}.$$

$$866. y = \sin[\sin(\sin x)].$$

$$868. y = \frac{\cos x}{2 \sin^2 x}.$$

$$869. y = \frac{1}{\cos^n x}.$$

$$870. y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}.$$

$$\sqrt{871. y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2}.$$

872. $y = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x$. 875. $y = \sin [\cos^2 (\operatorname{tg}^2 x)]$.
 876. $y = e^{-x^2}$.
 873. $y = 4 \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x} + \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^4 x}$. 877. $y = 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$.
 874. $y = \sec^2 \frac{x}{a} + \operatorname{cosec}^2 \frac{x}{a}$. 878. $y = e^x (x^2 - 2x + 2)$.
 879. $y = \left[\frac{1-x^2}{2} \sin x - \frac{(1+x)^2}{2} \cos x \right] e^{-x}$.
 880. $y = e^x \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right)$. 882. $y = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
 881. $y = \frac{\ln 3 \cdot \sin x + \cos x}{3^x}$. 883. $y = e^x + e^{x^2} + e^{e^{x^2}}$.
 884. $y = \left(\frac{a}{b} \right)^x \left(\frac{b}{x} \right)^a \left(\frac{x}{a} \right)^b$. ($a > 0, b > 0$).
 885. $y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$ ($a > 0$). 887. $y = \ln (\ln (\ln x))$.
 886. $y = \lg^3 x^3$. 888. $y = \ln (\ln^2 (\ln^3 x))$.
 889. $y = \frac{1}{2} \ln (1+x) - \frac{1}{4} \ln (1+x^2) - \frac{1}{2(1+x)}$.
 890. $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}$.
 891. $y = \frac{1}{4(1+x^4)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^4}{1+x^4}$.
 892. $y = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.
 893. $y = \frac{1}{1-k} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{\sqrt{k}}{1-k} \ln \frac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}}$ ($0 < k < 1$).
 894. $y = \sqrt{x+1} - \ln (1 + \sqrt{x+1})$.
 895. $y = \ln (x + \sqrt{x^2+1})$.
 896. $y = x \ln (x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$.
 897. $y = x \ln^2 (x + \sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2} \ln (x + \sqrt{1+x^2}) + 2x$.
 898. $y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2} \ln (x + \sqrt{x^2+a^2})$.
 899. $y = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}$ ($a > 0, b > 0$).
 900. $y = \frac{2+3x^2}{x^3} \sqrt{1-x^2} + 3 \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$.
 901. $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. 903. $y = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x + \ln \sin x$.
 902. $y = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$. 904. $y = \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

$$905. y = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \ln \sqrt{\frac{1 + \cos x}{\sin x}}.$$

$$906. y = \ln \frac{b + a \cos x + \sqrt{b^2 - a^2} \sin x}{a + b \cos x} \quad (0 \leq |\alpha| < |b|).$$

$$907. y = \frac{1}{x} (\ln^3 x + 3 \ln^2 x + 6 \ln x + 6).$$

$$908. y = \frac{1}{4x^4} \ln \frac{1}{x} - \frac{1}{16x^4}.$$

$$909. y = \frac{3}{2} (1 - \sqrt[3]{1+x^2})^2 + 3 \ln (1 + \sqrt[3]{1+x^2}).$$

$$910. y = \ln \left[\frac{1}{x} + \ln \left(\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x} \right) \right].$$

$$911. y = x [\sin (\ln x) - \cos (\ln x)].$$

$$912. y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x.$$

$$915. y = \operatorname{arctg} \frac{x^a}{a}.$$

$$913. y = \arcsin \frac{x}{2}.$$

$$916. y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{x}.$$

$$914. y = \arccos \frac{1-x}{\sqrt{2}}.$$

$$917. y = \sqrt{x} - \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

$$918. y = x + \sqrt{1-x^2} \cdot \arccos x.$$

$$919. y = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}.$$

$$920. y = \arccos \frac{1}{x}.$$

$$923. y = \arcsin (\sin x - \cos x).$$

$$921. y = \arcsin (\sin x).$$

$$924. y = \arccos \sqrt{1-x^2}.$$

$$922. y = \arccos (\cos^2 x).$$

$$925. y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}.$$

$$926. y = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \right).$$

$$927. y = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \quad (a > b \geq 0).$$

$$928. y = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

$$929. y = \frac{1}{\arccos^2 (x^2)}.$$

$$930. y = \operatorname{arctg} x + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} (x^3).$$

$$931. y = \ln (1 + \sin^2 x) - 2 \sin x \cdot \operatorname{arctg} (\sin x).$$

$$932. y = \ln \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}} \right).$$

$$933. y = \ln \frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}} + \frac{a}{b} \operatorname{arctg} \frac{x}{b} \quad (b \neq 0)$$

$$934. y = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \quad (a > 0).$$

$$935. y = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^3}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

$$936. y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^3+x\sqrt{2}+1}{x^3-x\sqrt{2}+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{x^3-1}.$$

$$937. y = x(\arcsin x)^3 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x.$$

$$938. y = \frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}.$$

$$939. y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$940. y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}.$$

$$941. y = \frac{1}{12} \ln \frac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2x^2-1}.$$

$$942. y = \frac{x^3}{1+x^{12}} - \operatorname{arctg} x^3.$$

$$943. y = \ln \frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^3}}} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{1+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}.$$

$$944. y = \operatorname{arctg} \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}.$$

$$945. y = \operatorname{arctg} \frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}} \quad (a > 0).$$

$$946. y = \frac{3-x}{2} \sqrt{1-2x-x^2} + 2 \arcsin \frac{1+x}{\sqrt{2}}.$$

$$947. y = \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}.$$

$$948. y = \operatorname{arctg} (\operatorname{tg}^3 x).$$

$$949. y = \sqrt{1-x^2} \cdot \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \\ + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} + \arcsin x.$$

$$950. y = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2.$$

$$951. y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}). \quad 952. y = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{1+x^2}).$$

$$953. y = \arcsin \left(\frac{\sin a \sin x}{1 - \cos a \cos x} \right).$$

$$954. y = \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{x^2+2}-x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2}+x\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}.$$

$$955. y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{1+x^4}-x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}.$$

$$956. y = \frac{x \sqrt{1-x^2}}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x \sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$957. y = \arccos (\sin x^2 - \cos x^2).$$

$$958. y = \arcsin (\sin x^2) + \arccos (\cos x^2).$$

$$959. y = e^{m \arcsin x} [\cos (m \arcsin x) + \sin (m \arcsin x)]$$

$$960. y = \operatorname{arctg} e^x - \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}.$$

$$960.1. y = \sqrt{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{1 + x^4}}}.$$

$$960.2. y = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg} \frac{1}{x^2}}}.$$

$$960.3. y = \ln^2 \left(\sec 2 \sqrt[3]{x} \right).$$

$$961. y = x + x^x + x^{x^x} \quad (x > 0).$$

$$962. y = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x} \quad (a > 0, x > 0).$$

$$963. y = \sqrt[3]{x} \quad (x > 0).$$

$$964. y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}.$$

$$965. y = (\ln x)^x : x^{\ln x}.$$

$$965.1. y = \left[\frac{\arcsin (\sin^2 x)}{\arccos (\cos^2 x)} \right]^{\operatorname{arctg}^2 x}.$$

$$966. y = \log_x e.$$

$$967. y = \ln (\operatorname{ch} x) + \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 x}.$$

$$968. y = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} - \ln \left(\operatorname{cth} \frac{x}{2} \right).$$

$$969. y = \operatorname{arctg} (\operatorname{th} x).$$

$$970. y = \arccos \left(\frac{1}{\operatorname{ch} x} \right).$$

$$971. y = \frac{b}{a} x + \frac{2 \sqrt{a^2 - b^2}}{a} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{th} \frac{x}{2} \right) \quad (0 \leq |b| < a).$$

972. Найти производную функции

$$y = \ln (\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x}),$$

вводя промежуточное переменное $u = \cos^2 x$.

Приемом, указанным в примере 972, найти производные функций:

$$973. y = (\arccos x)^2 \left[\ln^2 (\arccos x) - \ln (\arccos x) + \frac{1}{2} \right].$$

$$974. y = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\sqrt[4]{1+x^4}) + \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4}+1}{\sqrt[4]{1+x^4}-1}.$$

$$975. y = \frac{e^{-x^2} \operatorname{arcsin}(e^{-x^2})}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}} + \frac{1}{2} \ln(1-e^{-2x^2}).$$

$$976. y = \frac{a^x}{1+a^{2x}} - \frac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}} \operatorname{arctg} a^{-x}.$$

977. Найти производные и построить графики функций и их производных, если:

а) $y = |x|$; б) $y = x|x|$; в) $y = \ln|x|$.

978. Найти производные следующих функций:

а) $y = |(x-1)^2(x+1)^3|$; в) $y = \arccos \frac{1}{|x|}$;

б) $y = |\sin^3 x|$; г) $y = [x] \sin^3 \pi x$.

Найти производные и построить графики функций и их производных:

$$979. y = \begin{cases} 1-x & \text{при } -\infty < x < 1; \\ (1-x)(2-x) & \text{при } 1 \leq x \leq 2; \\ -(2-x) & \text{при } 2 < x < +\infty. \end{cases}$$

$$980. y = \begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2 & \text{при } a \leq x \leq b; \\ 0 & \text{вне отрезка } [a, b]. \end{cases}$$

$$981. y = \begin{cases} x & \text{при } x < 0; \\ \ln(1+x) & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

$$982. y = \begin{cases} \operatorname{arctg} x & \text{при } |x| \leq 1; \\ \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{2} & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

$$983. y = \begin{cases} x^2 e^{-x^2} & \text{при } |x| \leq 1; \\ \frac{1}{e} & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

984. Производная от логарифма данной функции $y = f(x)$ называется *логарифмической производной* этой функции:

$$\frac{y'}{y} = \frac{d}{dx} \ln |f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Найти логарифмическую производную от функции y , если:

а) $y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; в) $y = (x-a_1)^{\alpha_1} (x-a_2)^{\alpha_2} \dots (x-a_n)^{\alpha_n}$;

б) $y = \frac{x^2}{1-x} \sqrt{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$; г) $y = (x + \sqrt{1+x^2})^n$.

$$956. y = \frac{x \sqrt{1-x^2}}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x \sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$957. y = \arccos (\sin x^2 - \cos x^2).$$

$$958. y = \arcsin (\sin x^2) + \arccos (\cos x^2).$$

$$959. y = e^{m \arcsin x} [\cos (m \arcsin x) + \sin (m \arcsin x)]$$

$$960. y = \operatorname{arctg} e^x - \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}.$$

$$960.1. y = \sqrt{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{1 + x^4}}}.$$

$$960.2. y = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg} \frac{1}{x^2}}}.$$

$$960.3. y = \ln^2 \left(\sec 2 \sqrt[3]{x} \right).$$

$$961. y = x + x^x + x^{x^x} \quad (x > 0).$$

$$962. y = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x} \quad (a > 0, x > 0).$$

$$963. y = \sqrt[5]{x} \quad (x > 0).$$

$$964. y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}.$$

$$965. y = (\ln x)^x \cdot x^{\ln x}.$$

$$965.1. y = \left[\frac{\arcsin (\sin^3 x)}{\arccos (\cos^3 x)} \right]^{\operatorname{arctg}^3 x}.$$

$$966. y = \log_x e.$$

$$967. y = \ln (\operatorname{ch} x) + \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 x}.$$

$$968. y = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} - \ln \left(\operatorname{cth} \frac{x}{2} \right).$$

$$969. y = \operatorname{arctg} (\operatorname{th} x).$$

$$970. y = \arccos \left(\frac{1}{\operatorname{ch} x} \right).$$

$$971. y = \frac{b}{a} x + \frac{2 \sqrt{a^2 - b^2}}{a} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{th} \frac{x}{2} \right) \quad (0 \leq |b| < a).$$

972. Найти производную функции

$$y = \ln (\cos^3 x + \sqrt{1 + \cos^4 x}),$$

вводя промежуточное переменное $u = \cos^2 x$.

Приемом, указанным в примере 972, найти производные функций:

$$973. y = (\arccos x)^2 \left[\ln^2 (\arccos x) - \ln (\arccos x) + \frac{1}{2} \right].$$

$$974. y = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\sqrt[4]{1+x^4}) + \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4}+1}{\sqrt[4]{1+x^4}-1}.$$

$$975. y = \frac{e^{-x^2} \operatorname{arcsin} (e^{-x^2})}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}} + \frac{1}{2} \ln (1-e^{-2x^2}).$$

$$976. y = \frac{a^x}{1+a^{2x}} - \frac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}} \operatorname{arctg} a^{-x}.$$

977. Найти производные и построить графики функций и их производных, если:

а) $y = |x|$; б) $y = x|x|$; в) $y = \ln |x|$.

978. Найти производные следующих функций:

а) $y = |(x-1)^2(x+1)^3|$; в) $y = \arccos \frac{1}{|x|}$;

б) $y = |\sin^3 x|$; г) $y = [x] \sin^3 \pi x$.

Найти производные и построить графики функций и их производных:

$$979. y = \begin{cases} 1-x & \text{при } -\infty < x < 1; \\ (1-x)(2-x) & \text{при } 1 \leq x \leq 2; \\ -(2-x) & \text{при } 2 < x < +\infty. \end{cases}$$

$$980. y = \begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2 & \text{при } a \leq x \leq b; \\ 0 & \text{вне отрезка } [a, b]. \end{cases}$$

$$981. y = \begin{cases} x & \text{при } x < 0; \\ \ln(1+x) & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

$$982. y = \begin{cases} \operatorname{arctg} x & \text{при } |x| \leq 1; \\ \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{2} & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

$$983. y = \begin{cases} x^2 e^{-x^2} & \text{при } |x| \leq 1; \\ \frac{1}{e} & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

984. Производная от логарифма данной функции $y = f(x)$ называется *логарифмической производной* этой функции:

$$\frac{y'}{y} = \frac{d}{dx} \ln |f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Найти логарифмическую производную от функции y , если:

а) $y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; в) $y = (x-a_1)^{\alpha_1} (x-a_2)^{\alpha_2} \dots (x-a_n)^{\alpha_n}$;

б) $y = \frac{x^2}{1-x} \sqrt{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$; г) $y = (x + \sqrt{1+x^2})^n$.

985. Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — дифференцируемые функции от x . Найти производную от функции y , если:

а) $y = \sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}$;

б) $y = \operatorname{arctg} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$;

в) $y = \sqrt[n]{\varphi(x)\psi(x)} \quad (\varphi(x) \neq 0; \psi(x) > 0)$;

г) $y = \log_{\varphi(x)} \psi(x) \quad (\varphi(x) > 0; \psi(x) > 0)$.

986. Найти y' , если:

а) $y = f(x^2)$;

в) $y = f(e^x) \cdot e^{f(x)}$;

б) $y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$;

г) $y = f\{f[f(x)]\}$,

где $f(u)$ — дифференцируемая функция.

986.1. Найти $f'(0)$, если

$$f(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-1000).$$

987. Доказать следующее правило дифференцирования определителя n -го порядка:

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \dots & f_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{f}_{k1}(x) & \dot{f}_{k2}(x) & \dots & \dot{f}_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

988. Найти $F'(x)$, если

$$F(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}.$$

989. Найти $F'(x)$, если

$$F(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}.$$

990. Дан график функции. Приблизительно построить график ее производной.

991. Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0; \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

имеет разрывную производную.

992. При каком условии функция

$$f(x) = x^n \sin \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \text{ и } f(0) = 0$$

а) непрерывна при $x=0$; б) дифференцируема при $x=0$; в) имеет непрерывную производную при $x=0$?

993. При каком условии функция

$$f(x) = |x|^n \sin \frac{1}{|x|^m} \quad (x \neq 0) \quad \text{и} \quad f(0) = 0 \quad (m > 0)$$

имеет: а) ограниченную производную в окрестности начала координат; б) неограниченную производную в этой окрестности?

994. Найти $f'(a)$, если

$$f(x) = (x-a)\varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ непрерывна при $x=a$.

995. Показать, что функция

$$f(x) = |x-a|\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — непрерывная функция и $\varphi(a) \neq 0$, не имеет производной в точке a .

Чему равны односторонние производные $f'_-(a)$ и $f'_+(a)$?

996. Построить пример непрерывной функции, не имеющей производной в данных точках: $a_1, a_2, \dots, a_n$.

997. Показать, что функция

$$f(x) = x^2 \left| \cos \frac{\pi}{x} \right| \quad (x \neq 0) \quad \text{и} \quad f(0) = 0$$

имеет точки недифференцируемости в любой окрестности точки $x=0$, но дифференцируема в этой точке.

Построить эскиз графика этой функции.

998. Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \text{ рационально;} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

имеет производную лишь при $x=0$.

999. Исследовать на дифференцируемость следующие функции:

а) $y = |(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|$; в) $y = |\pi^2 - x^2| \sin^2 x$;

б) $y = |\cos x|$;

г) $y = \arcsin(\cos x)$;

$$д) y = \begin{cases} \frac{x-1}{4}(x+1)^2 & \text{при } |x| \leq 1; \\ |x| - 1 & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Для функции $f(x)$ определить левую производную $f'_-(x)$ и правую производную $f'_+(x)$, если:

1000. $f(x) = |x|$.

1001. $f(x) = [x] \sin \pi x$.

1002. $f(x) = x \left| \cos \frac{\pi}{x} \right| \quad (x \neq 0), \quad f(0) = 0$.

1003. $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$.

$$1004. f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \quad (x \neq 0), \quad f(0) = 0.$$

$$1005. f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}. \quad 1006. f(x) = |\ln|x|| \quad (x \neq 0).$$

$$1007. f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}.$$

$$1008. f(x) = (x-2) \operatorname{arctg} \frac{1}{x-2} \quad (x \neq 2), \quad f(2) = 0.$$

1009. Показать, что функция $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$ непрерывна при $x = 0$, но не имеет в этой точке ни левой, ни правой производной.

1009.1. Пусть x_0 — точка разрыва 1-го рода функции $f(x)$.
Выражения

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-0)}{h}$$

и

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0+0)}{h}$$

называются *обобщенными односторонними* (соответственно левой и правой) *производными* функции $f(x)$ в точке x_0 .

Найти $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ в точках разрыва x_0 функции $f(x)$, если:

$$a) f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x^3}}{x}; \quad b) f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}.$$

$$6) f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x};$$

1010. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq x_0; \\ ax + b, & \text{если } x > x_0. \end{cases}$$

Как следует подобрать коэффициенты a и b , чтобы функция $f(x)$ была непрерывной и дифференцируемой в точке $x = x_0$?

1011. Пусть

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \leq x_0; \\ ax + b, & \text{если } x > x_0, \end{cases}$$

где функция $f(x)$ дифференцируема слева при $x = x_0$.

При каком выборе коэффициентов a и b функция $F(x)$ будет непрерывной и дифференцируемой в точке x_0 ?

1012. На сегменте $a \leq x \leq b$ построить сопряжение двух по-
лупрямых

$$y = k_1(x-a) \quad (-\infty < x < a) \quad \text{и} \quad y = k_2(x-b) \quad (b < x < +\infty)$$

с помощью кубической параболы

$$y = A(x-a)(x-b)(x-c),$$

(где параметры A и c подлежат определению).

1013. Часть кривой $y = \frac{m^2}{|x|}$ ($|x| > c$) дополнить параболой

$$y = a + bx^2 \quad (|x| \leq c)$$

(где a и b — неизвестные параметры) так, чтобы получилась гладкая кривая.

1014. Можно ли утверждать, что сумма

$$F(x) = f(x) + g(x)$$

не имеет производной в точке $x = x_0$, если: а) функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0 , а функция $g(x)$ не имеет производной в этой точке; б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют производной в точке x_0 ?

1015. Можно ли утверждать, что произведение

$$F(x) = f(x)g(x)$$

не имеет производной в точке $x = x_0$, если: а) функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0 , а функция $g(x)$ не имеет производной в этой точке; б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют производной в точке x_0 ?

Полагая $x_0 = 0$, рассмотреть примеры: а) $f(x) = x$, $g(x) = |x|$;
б) $f(x) = |x|$, $g(x) = |x|$.

1016. Что можно сказать о дифференцируемости функции

$$F(x) = f(g(x))$$

в данной точке $x = x_0$, если: а) функция $f(x)$ имеет производную в точке $x = g(x_0)$, а функция $g(x)$ не имеет производной в точке $x = x_0$; б) функция $f(x)$ не имеет производной в точке $x = g(x_0)$, а функция $g(x)$ имеет производную в точке $x = x_0$; в) функция $f(x)$ не имеет производной в точке $x = g(x_0)$ и функция $g(x)$ не имеет производной в точке $x = x_0$?

Полагая $x_0 = 0$, рассмотреть примеры:

а) $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$; б) $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$;
в) $f(x) = 2x + |x|$, $g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|$.

1017. В каких точках график функции

$$y = x + \sqrt[3]{\sin x}$$

имеет вертикальные касательные?

Построить этот график.

1018. Может ли функция $f(x)$ в точке ее разрыва иметь:
а) конечную производную; б) бесконечную производную?

Рассмотреть пример: $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

1019. Если функция $f(x)$ дифференцируема в ограниченном интервале (a, b) и

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty,$$

то обязательно ли

$$1) \lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \infty; \quad 2) \overline{\lim}_{x \rightarrow a} |f'(x)| = +\infty?$$

Рассмотреть пример: $f(x) = \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}$ при $x \rightarrow 0$.

1020. Если функция $f(x)$ дифференцируема в ограниченном интервале (a, b) и

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \infty,$$

то обязательно ли

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty?$$

Рассмотреть пример: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ при $x \rightarrow 0$.

1021. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в интервале $(x_0, +\infty)$ и существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Следует ли отсюда, что существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$?

Рассмотреть пример:

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}.$$

1022. Пусть ограниченная функция $f(x)$ дифференцируема в интервале $(x_0, +\infty)$ и существует $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$; следует ли отсюда, что существует $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ конечный или бесконечный?

Рассмотреть пример:

$$f(x) = \cos(\ln x).$$

1023. Можно ли почленно дифференцировать неравенство между функциями?

1024. Вывести формулы для сумм:

$$P_n = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$$

и

$$Q_n = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \dots + n^2x^{n-1}.$$

У к а з а н и е. Рассмотреть $(x + x^2 + \dots + x^n)'$.

1025. Вывести формулы для сумм:

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$$

и

$$T_n = \cos x + 2 \cos 2x + \dots + n \cos nx.$$

1025.1. Вывести формулу для суммы

$$S_n = \operatorname{ch} x + 2 \operatorname{ch} 2x + \dots + n \operatorname{ch} nx.$$

Указание. $S_n = (\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} 2x + \dots + \operatorname{sh} nx)'$.

1026. Пользуясь тождеством

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \dots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}},$$

вывести формулу для суммы

$$S_n = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}.$$

1027. Доказать, что производная четной дифференцируемой функции есть функция нечетная, а производная нечетной дифференцируемой функции есть функция четная.

Дать геометрическую интерпретацию этого факта.

1028. Доказать, что производная дифференцируемой периодической функции есть функция снова периодическая с тем же периодом.

1029. С какой скоростью возрастает площадь круга в тот момент, когда радиус этого круга $R = 10$ см, если радиус круга растет равномерно со скоростью 2 см/сек?

1030. С какой скоростью изменяются площадь и диагональ прямоугольника в тот момент, когда одна сторона его $x = 20$ м, а другая сторона $y = 15$ м, если первая сторона прямоугольника уменьшается со скоростью 1 м/сек, а вторая возрастает со скоростью 2 м/сек?

1031. Из одного и того же порта одновременно вышли пароход A с направлением на север и пароход B с направлением на восток. С какой скоростью возрастает расстояние между ними, если скорость парохода A равна 30 км/час, а парохода B равна 40 км/час?

1032. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leq x \leq 2; \\ 2x - 2, & \text{если } 2 < x < +\infty, \end{cases}$$

и $S(x)$ — площадь, ограниченная кривой $y = f(x)$, осью Ox и перпендикуляром к оси Ox , проведенным в точке x ($x \geq 0$).

Составить аналитическое выражение функции $S(x)$, найти производную $S'(x)$ и построить график функции $y = S'(x)$.

1033. Функция $S(x)$ есть площадь, ограниченная дугой окружности $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, осью Ox и двумя перпендикулярами к оси Ox , проведенными в точках 0 и x ($|x| \leq a$).

Составить аналитическое выражение функции $S(x)$, найти производную $S'(x)$ и построить график этой производной.

§ 2. Производная обратной функции. Производная функции, заданной параметрически. Производная функции, заданной в неявном виде

1°. Производная обратной функции. Дифференцируемая функция $y = f(x)$ ($a < x < b$) с производной $f'(x) \neq 0$ имеет однозначную непрерывную обратную функцию $x = f^{-1}(y)$, причем обратная функция также дифференцируема и справедлива формула

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

2°. Производная функции, заданной параметрически. Система уравнений

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t) \end{aligned} \right\} (\alpha < t < \beta),$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — дифференцируемые функции и $\varphi'(t) \neq 0$, определяет y в некоторой области, как однозначную дифференцируемую функцию от x :

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)),$$

причем производная этой функции может быть найдена по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

3°. Производная функции, заданной в неявном виде. Если дифференцируемая функция $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению

$$F(x, y) = 0,$$

то производная $y' = y'(x)$ этой неявной функции может быть найдена из уравнения

$$\frac{d}{dx}[F(x, y)] = 0,$$

где $F(x, y)$ рассматривается как сложная функция переменной x .

(Более подробно о дифференцировании неявных функций см. ч. II, отд. VI, § 3.)

1034. Показать, что существует однозначная функция $y = y(x)$, определяемая уравнением

$$y^3 + 3y = x,$$

и найти ее производную y'_x .

1035. Показать, что существует однозначная функция $y = y(x)$, определяемая уравнением

$$y - e \sin y = x \quad (0 \leq e < 1),$$

и найти производную y'_x .

1036. Определить области существования обратных функций $x = x(y)$ и найти их производные, если:

а) $y = x + \ln x$ ($x > 0$); в) $y = \operatorname{sh} x$;

б) $y = x + e^x$; г) $y = \operatorname{th} x$.

1037. Выделить однозначные непрерывные ветви обратных функций $x = x(y)$, найти их производные и построить графики, если:

а) $y = 2x^2 - x^4$; б) $y = \frac{x^2}{1+x^2}$; в) $y = 2e^{-x} - e^{-2x}$.

1038. Построить эскиз графика функции $y = y(x)$ и найти производную y'_x , если: $x = -1 + 2t - t^2$, $y = 2 - 3t + t^3$. Чему равна $y'_x(x)$ при $x = 0$ и при $x = -1$? В какой точке $M(x, y)$ производная $y'_x(x) = 0$?

Найти производные y'_x (параметры положительны), если:

1039. $x = \sqrt{1 - \sqrt{t}}$, $y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}}$.

1040. $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$.

1041. $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

1042. $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$.

1043. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

1044. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

1045. $x = e^{2t} \cos^2 t$, $y = e^{2t} \sin^2 t$.

1046. $x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

1047. Показать, что функция $y = y(x)$, определяемая системой уравнений

$$x = 2t + |t|, \quad y = 5t^2 + 4t|t|,$$

дифференцируема при $t = 0$, однако ее производная в этой точке не может быть найдена по обычной формуле.

Найти производные y'_x от следующих функций, заданных в неявном виде:

1048. $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$.

Чему равно y' при $x = 2$ и $y = 4$ и при $x = 2$ и $y = 0$?

1049. $y^2 = 2px$ (парабола).

1050. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (эллипс).

1051. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ (парабола).

1052. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (астроида).

1053. $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ (логарифмическая спираль).

1054. Найти y'_x , если:

а) $r = a\varphi$ (спираль Архимеда);

б) $r = a(1 + \cos \varphi)$ (кардиоида);

в) $r = ae^{m\varphi}$ (логарифмическая спираль),

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ — полярные координаты.

§ 3. Геометрический смысл производной

1°. Уравнения касательной и нормали. Уравнения касательной MT и нормали MN к графику дифференцируемой функции $y = f(x)$

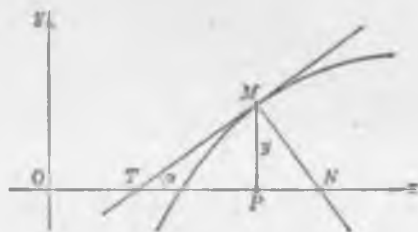


Рис. 7.

в точке его $M(x, y)$ (рис. 7) соответственно имеют вид:

$$Y - y = y'(X - x)$$

и

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

где X, Y — текущие координаты касательной или нормали, а $y' = f'(x)$ — значение производной в точке касания.

2°. Отрезки касательной и нормали. Для отрезков касательной и нормали: PT — подкасательная, PN — поднормаль, MT — касательная, MN — нормаль (рис. 7); учитывая, что $\operatorname{tg} \alpha = y'$, получаем следующие значения:

$$PT = \left| \frac{y}{y'} \right|, \quad PN = |yy'|.$$

$$MT = \left| \frac{y}{y'} \right| \sqrt{1 + y'^2}, \quad MN = |y| \sqrt{1 + y'^2}.$$

3°. Угол между касательной и радиусом-вектором точки касания. Если $r = f(\varphi)$ — уравнение кривой в полярной системе

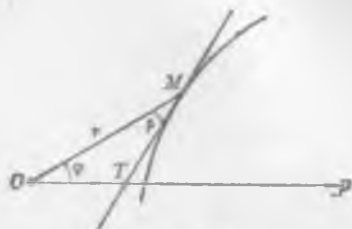


Рис. 8.

координат и β — угол, образованный касательной MT и радиусом-вектором OM точки касания M (рис. 8), то

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r}{r'}$$

1055. Написать уравнения касательной и нормали к кривой

$$y = (x + 1) \sqrt[3]{3 - x}$$

в точках: а) $A(-1, 0)$; б) $B(2, 3)$; в) $C(3, 0)$.

1056. В каких точках кривой

$$y = 2 + x - x^3$$

касательная к ней а) параллельна оси Ox ; б) параллельна биссектрисе первого координатного угла?

1057. Доказать, что парабола

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (a \neq 0, x_1 < x_2)$$

пересекает ось Ox под углами α и β ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$), равными между собой.

1058. На кривой

$$y = 2 \sin x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

определить те участки ее, где «крутизна кривой» (т. е. $|y'|$) превышает 1.

1059. Функции

$$y = x \quad \text{и} \quad y_1 = x + 0,01 \sin 1000\pi x$$

отличаются друг от друга не больше чем на 0,01. Что можно сказать о максимальном значении разности производных этих функций?

Построить соответствующие графики.

1060. Под каким углом кривая

$$y = \ln x$$

пересекает ось Ox ?

1061. Под какими углами пересекаются кривые

$$y = x^2 \quad \text{и} \quad x = y^2?$$

1062. Под какими углами пересекаются кривые

$$y = \sin x \quad \text{и} \quad y = \cos x?$$

1063. При каком выборе параметра n кривая

$$y = \operatorname{arctg} nx \quad (n > 0)$$

пересекает ось Ox под углом, большим 89° ?

1063.1. Показать, что кривая $y = |x|^\alpha$

а) при $0 < \alpha < 1$ касается оси Oy ;

б) при $1 < \alpha < +\infty$ касается оси Ox .

1063.2. Показать, что для графика функции

$$y = \begin{cases} |x|^\alpha, & \text{если } \alpha \neq 0 \quad x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

предельное положение секущей, проходящей через точку $A(0,1)$, есть ось Oy .

1064. Определить угол между левой и правой касательными к кривой: а) $y = \sqrt{1 - e^{-a^2 x^2}}$ в точке $x = 0$; б) $y = \operatorname{arcsin} \frac{2x}{1+x^2}$ в точке $x = 1$.

1065. Показать, что касательная к логарифмической спирали

$$r = ae^{m\varphi}$$

(a и m — постоянные) образует постоянный угол с радиусом-вектором точки касания.

1066. Определить длину подкасательной к кривой

$$y = ax^n,$$

дать способ построения касательной к этой кривой.

1067. Доказать, что у параболы

$$y^2 = 2px$$

а) подкасательная равна удвоенной абсциссе точки касания;
б) поднормаль постоянна.

Дать способ построения касательной к параболе.

1068. Доказать, что показательная кривая

$$y = a^x \quad (a > 0)$$

имеет постоянную подкасательную. Дать способ построения касательной к показательной кривой.

1069. Определить длину нормали к цепной линии

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

в любой ее точке $M(x_0, y_0)$.

1070. Доказать, что у астроида

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (a > 0)$$

длина отрезка касательной, заключенного между осями координат, есть величина постоянная.

1071. При каком соотношении между коэффициентами a , b и c парабола

$$y = ax^2 + bx + c$$

касается оси Ox ?

1072. При каком условии кубическая парабола

$$y = x^3 + px + q$$

касается оси Ox ?

1073. При каком значении параметра a парабола

$$y = ax^2$$

касается кривой $y = \ln x$?

1074. Доказать, что кривые

$$y = f(x) \quad (f(x) > 0)$$

и

$$y = f(x) \sin ax,$$

где $f(x)$ — дифференцируемая функция, касаются друг друга в общих точках.

1075. Показать, что семейства гипербол

$$x^2 - y^2 = a$$

и

$$xy = b$$

образуют ортогональную сетку, т. е. кривые этих семейств пересекаются под прямыми углами.

1076. Доказать, что семейства парабол

$$y^2 = 4a(a - x) \quad (a > 0)$$

и

$$y^2 = 4b(b + x) \quad (b > 0)$$

образуют ортогональную сетку.

1077. Написать уравнения касательной и нормали к кривой

$$x = 2t - t^2, \quad y = 3t - t^3$$

в точках: а) $t = 0$; б) $t = 1$.

1078. Написать уравнения касательной и нормали к кривой

$$x = \frac{2t + t^2}{1 + t^3}, \quad y = \frac{2t - t^2}{1 + t^3}$$

в точках: а) $t = 0$, б) $t = 1$, в) $t = \infty$.

1079. Написать уравнение касательной к циклоиде

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

в произвольной точке $t = t_0$. Дать способ построения касательной к циклоиде.

1080. Доказать, что трактриса

$$x = a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right), \quad y = a \sin t \quad (a > 0, 0 < t < \pi)$$

имеет отрезок касательной постоянной длины.

Написать уравнения касательной и нормали в заданных точках к следующим кривым:

1081. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1, \quad M(6; 6,4).$

1082. $xy + \ln y = 1, \quad M(1; 1).$

§ 4. Дифференциал функции

1°. Дифференциал функции. Если приращение функции $y = f(x)$ от независимой переменной x может быть представлено в виде

$$\Delta y = A(x) dx + o(dx),$$

где $dx = \Delta x$, то линейная часть этого приращения называется *дифференциалом функции* y :

$$dy = A(x) dx.$$

Для существования дифференциала функции $y = f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы существовала конечная производная $y' = f'(x)$, причем имеем:

$$dy = y' dx. \quad (1)$$

Формула (1) сохраняет свою силу и в том случае, если переменная x является функцией от новой независимой переменной (*свойство инвариантности первого дифференциала*).

2°. Оценка малых приращений функции. Для подсчета малых приращений дифференцируемой функции $f(x)$ можно пользоваться формулой

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \Delta x,$$

относительная погрешность которой сколь угодно мала при достаточно малом $|\Delta x|$, если $f'(x) \neq 0$.

В частности, если независимая переменная x определяется с предельной абсолютной погрешностью, равной Δx , то Δy и δy — предельные абсолютная

и относительная погрешности функции $y = f(x)$ — приближенно выражаются следующими формулами:

$$\Delta_y = |y'| \Delta_x$$

$$\delta_y = \left| \frac{y'}{y} \right| \Delta_y$$

1083. Для функции

$$f(x) = x^3 - 2x + 1$$

определить: 1) $\Delta f(1)$; 2) $df(1)$ и сравнить их, если: а) $\Delta x = 1$; б) $\Delta x = 0,1$; в) $\Delta x = 0,01$.

1084. Уравнение движения дается формулой

$$x = 5t^2,$$

где t измеряется в секундах и x — в метрах.

Для момента времени $t = 2$ сек. определить Δx — приращение пути и dx — дифференциал пути и сравнить их, если:

а) $\Delta t = 1$ сек.; б) $\Delta t = 0,1$ сек.; в) $\Delta t = 0,001$ сек.

Найти дифференциал функции y , если:

1085. $y = \frac{1}{x}$.

1088. $y = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}|$.

1086. $y = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$ ($a \neq 0$). 1089. $y = \arcsin \frac{x}{a}$ ($a \neq 0$).

1087. $y = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$.

1090. Найти:

а) $d(xe^x)$;

д) $d(\sqrt{a^2 + x^2})$;

б) $d(\sin x - x \cos x)$;

е) $d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$;

в) $d\left(\frac{1}{x^2}\right)$;

ж) $d \ln(1-x^2)$;

г) $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$;

з) $d\left(\arccos \frac{1}{|x|}\right)$;

и) $d\left[\frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right]$.

Пусть u , v , w — дифференцируемые функции от x . Найти дифференциал функции y , если:

1091. $y = uvw$.

1094. $y = \operatorname{arctg} \frac{u}{v}$.

1092. $y = \frac{u}{v^2}$.

1095. $y = \ln \sqrt{u^2 + v^2}$.

1093. $y = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$.

1096. Найти: а) $\frac{d}{d(x^3)} (x^3 - 2x^6 - x^9)$;

б) $\frac{d}{d(x^2)} \left(\frac{\sin x}{x} \right)$; г) $\frac{d(\lg x)}{d(\operatorname{ctg} x)}$;

в) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$; д) $\frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}$.

1097. В круговом секторе радиус $R = 100$ см и центральный угол $\alpha = 60^\circ$. Насколько изменится площадь этого сектора, если: а) радиус его R увеличить на 1 см; б) угол α уменьшить на 30° ?

Дать точное и приближенное решения.

1098. Период колебания маятника (в секундах) определяется по формуле

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

где l — длина маятника в сантиметрах и $g = 981$ см/сек² — ускорение силы тяжести.

Насколько нужно изменить длину маятника $l = 20$ см, чтобы период T увеличился на 0,05 сек.?

Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенно следующие значения:

1099. $\sqrt[3]{1,02}$.

1102. $\operatorname{arctg} 1,05$.

1100. $\sin 29^\circ$.

1103. $\lg 11$.

1101. $\cos 151^\circ$.

1104. Доказать приближенную формулу

$$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a} \quad (a > 0),$$

где $|x| \ll a$ (соотношение $A \ll B$ между положительными A и B означает, что A весьма мало по сравнению с B).

С помощью этой формулы приближенно вычислить:

а) $\sqrt[5]{5}$; б) $\sqrt[3]{34}$; в) $\sqrt[4]{120}$ и сравнить с табличными данными.

1104.1. Доказать формулу

$$\sqrt{a^2 + x} = a + \frac{x}{2a} - r \quad (a > 0, x > 0),$$

где

$$0 < r < \frac{x^2}{8a^3}.$$

1105. Доказать приближенную формулу

$$\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}} \quad (a > 0),$$

где $|x| \ll a$.

С помощью этой формулы приближенно вычислить:

а) $\sqrt[3]{9}$; б) $\sqrt[4]{80}$; в) $\sqrt[7]{100}$; г) $\sqrt[10]{1000}$.

1106. Сторона квадрата $x = 2,4 \text{ м} \pm 0,05 \text{ м}$. С какими предельной абсолютной и относительной погрешностями можно вычислить площадь этого квадрата?

1107. С какой относительной погрешностью допустимо измерить радиус R шара, чтобы объем его можно было определить с точностью до 1%?

1108. Для определения ускорения силы тяжести с помощью колебания маятника пользуются формулой

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2},$$

где l — длина маятника, T — полный период колебаний маятника. Как отразится на значении g относительная погрешность δ при измерении: а) длины l ; б) периода T ?

1109. Определить абсолютную погрешность десятичного логарифма числа x ($x > 0$), если относительная погрешность этого числа равна δ .

1110. Доказать, что углы по логарифмической таблице тангенсов определяются точнее, чем по логарифмической таблице синусов с тем же самым числом десятичных знаков.

§ 5. Производные и дифференциалы высших порядков

1°. Основные определения. Производные высших порядков от функции $y = f(x)$ определяются последовательно соотношениями (предполагается, что соответствующие операции имеют смысл!):

$$f^{(n)}(x) = \{f^{(n-1)}(x)\}' \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f^{(n)}(x)$ на интервале (a, b) , то кратко пишут: $f(x) \in C^{(n)}(a, b)$. В частности, если $f(x)$ имеет непрерывные производные всех порядков на (a, b) , то употребляется запись: $f(x) \in C^{(\infty)}(a, b)$.

Дифференциалы высших порядков от функции $y = f(x)$ последовательно определяются формулами

$$d^n y = d(d^{n-1} y) \quad (n = 2, 3, \dots),$$

где принято $d^1 y = dy = y' dx$.

Если x — независимая переменная, то полагают:

$$d^2 x = d^3 x = \dots = 0.$$

В этом случае справедливы формулы

$$d^n y = y^{(n)} dx^n \quad \text{и} \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

2°. Основные формулы:

I. $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0); \quad (e^x)^{(n)} = e^x.$

II. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$

$$\text{III. } (\cos x)^{(n)} = \cos \left(x + \frac{n\pi}{2} \right).$$

$$\text{IV. } (x^m)^{(n)} = m(m-1)\dots(m-n+1)x^{m-n}.$$

$$\text{V. } (\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

3°. Формула Лейбница. Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ имеют производные n -го порядка (n -кратно дифференцируемы), то

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)},$$

где $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$ и C_n^i — число сочетаний из n элементов по i .

Аналогично для дифференциала $d^n(uv)$ получаем:

$$d^n(uv) = \sum_{i=0}^n C_n^i d^n u - i u d^i v,$$

где положено $d^0 u = u$ и $d^0 v = v$.

Найти y'' , если:

$$1111. y = x\sqrt{1+x^2}.$$

$$1115. y = (1+x^2) \operatorname{arctg} x.$$

$$1112. y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$1116. y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$1113. y = e^{-x^2}.$$

$$1117. y = x \ln x.$$

$$1114. y = \operatorname{tg} x.$$

$$1118. y = \ln f(x).$$

$$1119. y = x [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)].$$

$$1120. \text{Найти } y(0), y'(0) \text{ и } y''(0), \text{ если}$$

$$y = e^{\sin x} \cos(\sin x).$$

Пусть $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ — дважды дифференцируемые функции. Найти y'' , если:

$$1121. y = u^3.$$

$$1123. y = \sqrt{u^2 + v^2}.$$

$$1122. y = \ln \frac{u}{v}.$$

$$1124. y = u^v \quad (u > 0).$$

Пусть $f(x)$ — трижды дифференцируемая функция. Найти y'' и y''' , если:

$$1125. y = f(x^2).$$

$$1127. y = f(e^x).$$

$$1126. y = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$1128. y = f(\ln x).$$

1129. $y = f(\varphi(x))$, где $\varphi(x)$ — достаточное число раз дифференцируемая функция.

1130. Найти $d^2 y$ для функции

$$y = e^x$$

в двух случаях: а) x — независимая переменная; б) x — промежуточный аргумент.

Считая x независимой переменной, найти d^2y , если:

$$1131. y = \sqrt{1+x^2}. \quad 1132. y = \frac{\ln x}{x}. \quad 1133. y = x^x.$$

Пусть u и v — дважды дифференцируемые функции от переменной x . Найти d^2y , если:

$$1134. y = uv. \quad 1135. y = \frac{u}{v}.$$

$$1136. y = u^m v^n \quad (m \text{ и } n \text{ — постоянные}).$$

$$1137. y = a^x \quad (a > 0). \quad 1139. y = \operatorname{arctg} \frac{u}{v}.$$

$$1138. y = \ln \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Найти производные y'_x , y''_{x^2} , y'''_{x^3} от функции $y = y(x)$, заданной параметрически, если:

$$1140. x = 2t - t^2, \quad y = 3t - t^3.$$

$$1141. x = a \cos t, \quad y = a \sin t.$$

$$1142. x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

$$1143. x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t.$$

$$1144. x = f'(t), \quad y = tf'(t) - f(t).$$

1145. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема достаточное число раз. Найти производные x' , x'' , x''' , x^{IV} обратной функции $x = f^{-1}(y)$, предполагая, что эти производные существуют.

Найти y'_x , y''_{x^2} , и y'''_{x^3} от функции $y = y(x)$, заданной неявно:

$$1146. x^3 + y^2 = 25. \text{ Чему равны } y', y'' \text{ и } y''' \text{ в точке } M(3, 4)?$$

$$1147. y^3 = 2px. \quad 1148. x^2 - xy + y^3 = 1.$$

Найти y'_x и y''_{x^2} , если:

$$1149. y^2 + 2 \ln y = x^4.$$

$$1150. \sqrt{x^2 + y^2} = ae^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}} \quad (a > 0).$$

1151. Пусть функция $f(x)$ определена и дважды дифференцируема при $x \leq x_0$. Как следует подобрать коэффициенты a , b и c , чтобы функция

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \leq x_0; \\ a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c, & \text{если } x > x_0 \end{cases}$$

была дважды дифференцируема.

1152. Точка движется прямолинейно по закону

$$s = 10 + 20t - 5t^2.$$

Найти скорость и ускорение движения. Чему равны скорость и ускорение в момент времени $t = 2$?

1153. Точка $M(x, y)$ равномерно движется по окружности $x^2 + y^2 = a^2$, делая один оборот за T сек. Найти скорость v и ускорение j проекции точки M на ось Ox , если при $t=0$ точка занимала положение $M_0(a, 0)$.

1154. Тяжелая материальная точка $M(x, y)$ брошена в вертикальной плоскости Oxy под углом α к плоскости горизонта с начальной скоростью v_0 . Составить (пренебрегая сопротивлением воздуха) уравнения движения и определить величину скорости v и ускорения j , а также траекторию движения. Чему равны наибольшая высота поднятия точки и дальность полета?

1155. Уравнения движения точки

$$x = 4 \sin \omega t - 3 \cos \omega t, \quad y = 3 \sin \omega t + 4 \cos \omega t$$

(ω — постоянно).

Определить траекторию движения и величину скорости и ускорения.

Найти производные указанного порядка.

1156. $y = x(2x-1)^2(x+3)^3$; найти $y^{(6)}$ и $y^{(7)}$.

1157. $y = \frac{a}{x^6}$; найти y''' .

1158. $y = \sqrt{x}$; найти $y^{(10)}$.

1159. $y = \frac{x^2}{1-x}$; найти $y^{(8)}$.

1160. $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$; найти $y^{(100)}$.

1161. $y = x^2 e^{2x}$; найти $y^{(20)}$.

1162. $y = \frac{e^x}{x}$; найти $y^{(10)}$.

1163. $y = x \ln x$; найти $y^{(5)}$.

1164. $y = \frac{\ln x}{x}$; найти $y^{(5)}$.

1165. $y = x^2 \sin 2x$; найти $y^{(100)}$.

1166. $y = \frac{\cos 3x}{\sqrt{1-3x}}$; найти y''' .

1167. $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$; найти $y^{(10)}$.

1168. $y = x \operatorname{sh} x$; найти $y^{(100)}$.

1169. $y = e^x \cos x$; найти y^{IV} .

1170. $y = \sin^2 x \ln x$; найти $y^{(6)}$.

В следующих примерах, считая x независимой переменной, найти дифференциалы указанного порядка:

1171. $y = x^5$; найти $d^5 y$.

1172. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; найти d^3y .

1173. $y = x \cos 2x$; найти $d^{10}y$.

1174. $y = e^x \ln x$; найти d^4y .

1175. $y = \cos x \cdot \operatorname{ch} x$; найти d^4y .

В следующих примерах найти дифференциалы указанного порядка, если u — функция от x , дифференцируемая достаточное число раз:

1176. $y = u^3$; найти $d^{10}y$.

1177. $y = e^u$; найти d^4y .

1178. $y = \ln u$; найти d^3y .

1179. Найти d^2y , d^3y и d^4y от функции $y = f(x)$, считая x функцией от некоторой независимой переменной.

1180. Выразить производные y'' и y''' от функции $y = f(x)$ через последовательные дифференциалы переменных x и y , не предполагая x независимой переменной.

1181. Показать, что функция

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, удовлетворяет уравнению $y'' + y = 0$.

1182. Показать, что функция

$$y = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, удовлетворяет уравнению $y'' - y = 0$.

1183. Показать, что функция

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные и λ_1, λ_2 — постоянные, удовлетворяет уравнению

$$y'' - (\lambda_1 + \lambda_2) y' + \lambda_1 \lambda_2 y = 0.$$

1184. Показать, что функция

$$y = x^n [C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)],$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные и n — постоянная, удовлетворяет уравнению

$$x^2 y'' + (1 - 2n) x y' + (1 + n^2) y = 0.$$

1185. Показать, что функция

$$y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right),$$

где C_1, C_2, C_3 и C_4 — произвольные постоянные, удовлетворяет уравнению

$$y^{IV} + y = 0.$$

1186. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет производную n -го порядка, то

$$[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b).$$

1187. Найти $P^{(n)}(x)$, если

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n.$$

Найти $y^{(n)}$, если:

$$1188. y = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

$$1189. y = \frac{1}{x(1-x)}.$$

$$1190. y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}.$$

Указание. Разложить функцию на простейшие дроби.

$$1191. y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}.$$

$$1199. y = \sin ax \cos bx.$$

$$1192. y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}.$$

$$1200. y = \sin^2 ax \cos bx.$$

$$1201. y = \sin^4 x + \cos^4 x.$$

$$1202. y = x \cos ax.$$

$$1193. y = \sin^2 x.$$

$$1203. y = x^2 \sin ax.$$

$$1194. y = \cos^2 x.$$

$$1204. y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}.$$

$$1195. y = \sin^3 x.$$

$$1205. y = e^x/x.$$

$$1196. y = \cos^3 x.$$

$$1206. y = e^x \cos x.$$

$$1197. y = \sin ax \sin bx.$$

$$1207. y = e^x \sin x.$$

$$1198. y = \cos ax \cos bx.$$

$$1208. y = \ln \frac{a+bx}{a-bx}.$$

$$1209. y = e^{ax} P(x), \text{ где } P(x) \text{ — многочлен.}$$

$$1210. y = x \operatorname{sh} x.$$

Найти $d^n y$, если:

$$1211. y = x^n e^x.$$

$$1212. y = \frac{\ln x}{x}.$$

1213. Доказать равенства:

$$1) [e^{ax} \sin(bx+c)]^{(n)} = e^{ax} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \sin(bx+c+n\varphi)$$

и

$$2) [e^{ax} \cos(bx+c)]^{(n)} = e^{ax} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \cos(bx+c+n\varphi),$$

где

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{и} \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

1214. Найти $y^{(n)}$, если:

а) $y = \operatorname{ch} ax \cos bx$;

б) $y = \operatorname{ch} ax \sin bx$.

1215. Преобразовав функцию $f(x) = \sin^2 p x$, где p — натуральное число, в тригонометрический многочлен $f(x) = \sum_{k=0}^p A_k \cos 2kx$, найти $f^{(n)}(x)$.

Указание. Положить $\sin x = \frac{1}{2i}(i - \bar{i})$, где $i = \cos x + i \sin x$ и $\bar{i} = \cos x - i \sin x$, и воспользоваться формулой Муавра.

1216. Найти $f^{(n)}(x)$, если:

а) $f(x) = \sin^{2p+1} x$;

б) $f(x) = \cos^{2p} x$;

в) $f(x) = \cos^{2p+1} x$,

где p — целое положительное число (см. предыдущую задачу).
Если

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x),$$

где i — мнимая единица и $f_1(x)$, $f_2(x)$ — действительные функции от действительной переменной x , то по определению принимаем:

$$f'(x) = f_1'(x) + i f_2'(x).$$

1217. Используя тождество

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right),$$

доказать, что

$$\left(\frac{1}{x^2+1} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \sin[(n+1) \operatorname{arctg} x].$$

Указание. Применить формулу Муавра.

1218. Найти n -ю производную от функции

$$f(x) = \operatorname{arctg} x.$$

Найти $f^{(n)}(0)$, если:

1219. а) $f(x) = \frac{1}{(1-2x)(1+x)}$; б) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$.

1220. а) $f(x) = x^2 e^{ax}$; б) $f(x) = \operatorname{arctg} x$; в) $f(x) = \arcsin x$.

1221. а) $f(x) = \cos(m \arcsin x)$; б) $f(x) = \sin(m \arcsin x)$.

1222. а) $f(x) = (\operatorname{arctg} x)^2$; б) $f(x) = (\arcsin x)^2$.

1223. Найти $f^{(n)}(a)$, если

$$f(x) = (x-a)^n \varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную $(n-1)$ -го порядка в окрестности точки a .

1224. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^{2n} \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

(n — натуральное число) в точке $x=0$ имеет производные до n -го порядка включительно и не имеет производной $(n+1)$ -го порядка.

1225. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

бесконечно дифференцируема при $x=0$.

Построить график этой функции.

1226. Доказать, что *многочлены Чебышева*

$$T_m(x) = \frac{1}{2^{m-1}} \cos(m \arccos x) \quad (m=1, 2, \dots)$$

удовлетворяют уравнению

$$(1-x^2) T_m''(x) - x T_m'(x) + m^2 T_m(x) = 0.$$

1227. Доказать, что *многочлены Лежандра*

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} [(x^2-1)^m]^{(m)} \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

удовлетворяют уравнению

$$(1-x^2) P_m''(x) - 2x P_m'(x) + m(m+1) P_m(x) = 0.$$

Указание. Продифференцировать $m+1$ раз равенство $(x^2-1)u' = 2mx$, где $u = (x^2-1)^m$.

1228. *Многочлены Чебышева — Лагерра* определяются формулой

$$L_m(x) = e^x (x^m e^{-x})^{(m)} \quad (m=0, 1, 2, \dots).$$

Найти явное выражение для многочлена $L_m(x)$.

Доказать, что $L_m(x)$ удовлетворяет уравнению

$$xL_m''(x) + (1-x)L_m'(x) + mL_m(x) = 0.$$

У к а з а н и е. Использовать равенство $xu'' + (x-m)u = 0$, где $u = x^m e^{-x}$.

1229. Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, где $f(u)$ и $\varphi(x)$ — n -кратно дифференцируемые функции.

Доказать, что

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^n A_k(x) f^{(k)}(u),$$

где коэффициенты $A_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, n$) не зависят от функции $f(u)$.

1230. Доказать, что для n -й производной сложной функции $y = f(x^2)$ справедлива формула

$$\begin{aligned} \frac{d^n y}{dx^n} = & (2x)^n f^{(n)}(x^2) + \frac{n(n-1)}{1!} (2x)^{n-2} f^{(n-1)}(x^2) + \\ & + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-4} f^{(n-2)}(x^2) + \dots \end{aligned}$$

1231. Многочлены Чебышева — Эрмита определяются формулой

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} (e^{-x^2})^{(m)} \quad (m=0, 1, 2, \dots).$$

Найти явное выражение многочленов $H_m(x)$.

Доказать, что $H_m(x)$ удовлетворяет уравнению

$$H_m''(x) - 2xH_m'(x) + 2mH_m(x) = 0.$$

У к а з а н и е. Использовать равенство $u'' + 2xu = 0$, где $u = e^{-x^2}$.

1232. Доказать равенство

$$\left(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}}.$$

У к а з а н и е. Применить метод математической индукции.

1232.1. Доказать формулу

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^n \ln x) = n! \left(\ln x + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \quad (x > 0).$$

1232.2. Доказать формулу

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \frac{(2n)!}{x^{2n+1}} [C_n(x) \sin x - S_n(x) \cos x],$$

где

$$C_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

И

$$S_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

1233. Пусть $\frac{d}{dx} = D$ обозначает операцию дифференцирования и

$$f(D) = \sum_{k=0}^n \rho_k(x) D^k$$

— символический дифференциальный многочлен, где $\rho_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, n$) — некоторые непрерывные функции от x .

Доказать, что

$$f(D) \{e^{\lambda x} u(x)\} = e^{\lambda x} f(D + \lambda) u(x),$$

где λ — постоянно.

1234. Доказать, что если в уравнении

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k y^{(k)} = 0$$

положить

$$x = e^t,$$

где t — независимая переменная, то это уравнение примет вид:

$$\sum_{k=0}^n a_k D(D-1) \dots (D-k+1) y = 0,$$

где $D = \frac{d}{dt}$.

§ 6. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши

1°. Теорема Ролля. Если: 1) функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a, b]$; 2) $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ внутри этого сегмента; 3) $f(a) = f(b)$, то существует по меньшей мере одно число c из интервала (a, b) такое, что

$$f'(c) = 0.$$

2°. Теорема Лагранжа. Если: 1) функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a, b]$; 2) $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ на интервале (a, b) , то

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c), \text{ где } a < c < b$$

(формула конечных приращений).

3°. Теорема Коши. Если: 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на сегменте $[a, b]$; 2) $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$ на интервале (a, b) ; 3) $f'(x) + g'(x) \neq 0$ при $a < x < b$; 4) $g(a) \neq g(b)$, то

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \text{ где } a < c < b.$$

1235. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3).$$

1236. Функция

$$f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$$

обращается в нуль при $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, но тем не менее $f'(x) \neq 0$ при $-1 \leq x \leq 1$. Объяснить кажущееся противоречие с теоремой Ролля.

1237. Пусть функция $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ в каждой точке конечного или бесконечного интервала (a, b) и

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x).$$

Доказать, что

$$f'(c) = 0,$$

где c — некоторая точка интервала (a, b) .

1238. Пусть: 1) функция $f(x)$ определена и имеет непрерывную производную $(n-1)$ -го порядка $f^{(n-1)}(x)$ на сегменте $[x_0, x_n]$; 2) $f(x)$ имеет производную n -го порядка $f^{(n)}(x)$ в интервале (x_0, x_n) и 3) выполнены равенства

$$f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n) \quad (x_0 < x_1 < \dots < x_n).$$

Доказать, что в интервале (x_0, x_n) существует по меньшей мере одна точка ξ такая, что

$$f^{(n)}(\xi) = 0.$$

1239. Пусть: 1) функция $f(x)$ определена и имеет непрерывную производную $(p+q)$ -го порядка $f^{(p+q)}(x)$ на сегменте $[a, b]$; 2) $f(x)$ имеет производную $(p+q+1)$ -го порядка $f^{(p+q+1)}(x)$ в интервале (a, b) ; 3) выполнены равенства

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(p)}(a) = 0$$

и

$$f(b) = f'(b) = \dots = f^{(q)}(b) = 0.$$

Доказать, что в таком случае

$$f^{(p+q+1)}(c) = 0,$$

где c — некоторая точка интервала (a, b) .

1240. Доказать, что если все корни многочлена

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

с действительными коэффициентами $a_k (k=0, 1, \dots, n)$ вещественны, то его последовательные производные $P'_n(x)$, $P''_n(x)$, $\dots$, $P_n^{(m-1)}(x)$ также имеют лишь вещественные корни.

1241. Доказать, что у многочлена Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{(x^2 - 1)^n\}$$

все корни вещественные и заключены в интервале $(-1, 1)$.

1242. Доказать, что у многочлена Чебышева—Лагерра

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

все корни положительные.

1243. Доказать, что у многочлена Чебышева—Эрмита

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

все корни вещественные.

1244. Найти на кривой $y = x^3$ точку, касательная в которой параллельна хорде, соединяющей точки $A(-1, -1)$ и $B(2, 8)$.

1245. Верна ли формула конечных приращений для функции

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

на сегменте $[a, b]$, если $ab < 0$?

1246. Найти функцию $\theta = \theta(x, \Delta x)$ такую, что

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x + \theta \Delta x) \quad (0 < \theta < 1),$$

если:

а) $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$; в) $f(x) = \frac{1}{x}$;

б) $f(x) = x^3$; г) $f(x) = e^x$.

1246.1. Пусть $f(x) \in C^{(1)}(-\infty, +\infty)$ и для любых x и h справедливо тождество:

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x).$$

Доказать, что

$$f(x) = ax + b,$$

где a и b — постоянные.

1246.2. Пусть $f(x) \in C^{(1)}(-\infty, +\infty)$ и для любых x и h справедливо тождество

$$f(x+h) - f(x) = hf'\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Доказать, что

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

где a , b и c — постоянные.

1247. Доказать, что если $x \geq 0$, то

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

где

$$\frac{1}{4} \leq \theta(x) \leq \frac{1}{2},$$

причем

$$\lim_{x \rightarrow +0} \theta(x) = \frac{1}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = \frac{1}{2}.$$

1248. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{x} & \text{при } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

Определить промежуточное значение c формулы конечных приращений для функции $f(x)$ на сегменте $[0, 2]$.

1249. Пусть $f(x) - f(0) = xf'(\xi(x))$, где $0 < \xi(x) < x$. Доказать, что если

$$f(x) = x \sin(\ln x) \quad \text{при } x > 0 \quad \text{и} \quad f(0) = 0,$$

то функция $\xi = \xi(x)$ разрывна в любом сколь угодно малом интервале $(0, \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$.

1250. Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ в интервале (a, b) . Можно ли для всякой точки ξ из (a, b) указать две другие точки x_1 и x_2 из этого интервала такие, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \quad (x_1 < \xi < x_2)?$$

Рассмотреть пример: $f(x) = x^3 \quad (-1 \leq x \leq 1)$, где $\xi = 0$.

1251. Доказать неравенства:

а) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|;$

б) $px^{p-1}(x-y) \leq x^p - y^p \leq px^{p-1}(x-y)$, если $0 < y < x$ и $p > 1$;

в) $|\arctg a - \arctg b| \leq |a - b|;$

г) $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$, если $0 < b < a$.

1252. Объяснить, почему не верна формула Коши для функций

$$f(x) = x^2 \quad \text{и} \quad g(x) = x^3$$

на сегменте $[-1, 1]$.

1253. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на сегменте $[x_1, x_2]$, причем $x_1 x_2 > 0$. Доказать, что

$$\frac{1}{x_1 - x_2} \left| \frac{x_1}{f(x_1)} - \frac{x_2}{f(x_2)} \right| = f(\xi) - \xi f'(\xi),$$

где $x_1 < \xi < x_2$.

1254. Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема, но не ограничена на конечном интервале (a, b) , то ее производная $f'(x)$ также не ограничена на интервале (a, b) . Обратная теорема не верна (построить пример).

1255. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет в конечном или бесконечном интервале (a, b) ограниченную производную $f'(x)$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на (a, b) .

1256. Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема в бесконечном интервале $(x_0, +\infty)$ и

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0,$$

то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

т. е. $f(x) = o(x)$ при $x \rightarrow +\infty$.

1257. Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема в бесконечном интервале $(x_0, +\infty)$ и

$$f(x) = o(x) \quad \text{при} \quad x \rightarrow +\infty,$$

то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f'(x)| = 0.$$

В частности, если существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = k$, то $k = 0$.

1258. а) Доказать, что если: 1) функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[x_0, X]$; 2) $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ в интервале (x_0, X) ; 3) существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f'(x) = f'(x_0 + 0),$$

то существует соответственно конечная или бесконечная односторонняя производная $f'_+(x_0)$ и

$$f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0).$$

б) Показать, что для функции

$$f(x) = \arctg \frac{1+x}{1-x} \quad (x \neq 1) \quad \text{и} \quad f(1) = 0$$

существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x)$, однако функция $f(x)$ не

имеет односторонних производных $f'_-(1)$ и $f'_+(1)$. Дать геометрическую иллюстрацию этого факта.

Однако в этой точке существуют обобщенные односторонние производные (см. 1009.1).

1259. Доказать, что если $f'(x) = 0$ при $a < x < b$, то

$$f(x) = \text{const} \quad \text{при} \quad a < x < b.$$

1260. Доказать, что единственная функция $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$), имеющая постоянную производную

$$f'(x) = k,$$

есть линейная:

$$f(x) = kx + b.$$

1261. Что можно сказать о функции $f(x)$, если $f^{(n)}(x) = 0$?

1261.1. Пусть $f(x) \in C^{(n)}(-\infty, +\infty)$ и для каждого x существует натуральное число n_x ($n_x \leq n$) такое, что

$$f^{(n_x)}(x) = 0.$$

Доказать, что функция $f(x)$ есть полином.

1262. Доказать, что единственная функция $y = y(x)$ ($-\infty < x < +\infty$), удовлетворяющая уравнению

$$y' = \lambda y \quad (\lambda = \text{const}),$$

есть показательная:

$$y = Ce^{\lambda x},$$

где C — произвольная постоянная.

Указание. Рассмотреть $(ye^{-\lambda x})'$.

1263. Проверить, что функции

$$f(x) = \arctg \frac{1+x}{1-x}$$

и

$$g(x) = \arctg x$$

имеют одинаковые производные в областях:

$$1) x < 1 \quad \text{и} \quad 2) x > 1.$$

Вывести зависимость между этими функциями.

1264. Доказать тождества:

$$a) 2 \arctg x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn} x \quad \text{при} \quad |x| \geq 1;$$

$$б) 3 \arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi \quad \text{при} \quad |x| \leq \frac{1}{2}.$$

1265. Доказать, что если: 1) функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$; 2) имеет конечную производную $f'(x)$ внутри

него; 3) не является линейной, то в интервале (a, b) найдется по меньшей мере одна точка c такая, что

$$|f'(c)| > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|.$$

Дать геометрическую иллюстрацию этого факта.

1266. Доказать, что если: 1) функция $f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ на сегменте $[a, b]$ и 2) $f'(a) = f'(b) = 0$, то в интервале (a, b) существует по меньшей мере одна точка c такая, что

$$|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

1267. Автомобиль, начав двигаться из некоторого начального пункта, закончил свой путь в t сек., пройдя при этом расстояние s м. Доказать, что в некоторый момент времени абсолютная величина ускорения движения автомобиля была не меньше

$$\frac{4s}{t^3} \frac{м}{сек^3}.$$

§ 7. Возрастание и убывание функций. Неравенства

1°. Возрастание и убывание функций. Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на сегменте $[a, b]$, если

$$f(x_2) > f(x_1) \text{ при } a \leq x_1 < x_2 \leq b$$

(или соответственно $f(x_2) < f(x_1)$ при $a \leq x_1 < x_2 \leq b$).

Если дифференцируемая функция $f(x)$ возрастает (убывает) на сегменте $[a, b]$, то

$$f'(x) \geq 0 \text{ при } a \leq x \leq b \text{ (или } f'(x) \leq 0 \text{ при } a \leq x \leq b).$$

2°. Достаточный признак возрастания (убывания) функции. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и внутри него имеет положительную (отрицательную) производную $f'(x)$, то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на $[a, b]$.

Определить промежутки монотонности в строгом смысле (возрастания или убывания) следующих функций:

1268. $y = 2 + x - x^2$.

1273. $y = x + |\sin 2x|$.

1269. $y = 3x - x^3$.

1274. $y = \cos \frac{\pi}{x}$.

1270. $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

1275. $y = \frac{x^3}{2x}$.

1271. $y = \frac{\sqrt{x}}{x+100} (x \geq 0)$.

1276. $y = x^n e^{-x} (n > 0, x \geq 0)$.

1272. $y = x + \sin x$.

1277. $y = x^3 - \ln x^2$.

1278. $f(x) = x \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x \right)$, если $x > 0$ и $f(0) = 0$.

1279. Доказать, что при увеличении числа сторон n периметр p_n правильного n -угольника, вписанного в окружность, возрастает, а периметр P_n правильного n -угольника, описанного около этой окружности, убывает. Пользуясь этим, доказать, что p_n и P_n имеют общий предел при $n \rightarrow \infty$.

1280. Доказать, что функция

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

возрастает на интервалах $(-\infty, -1)$ и $(0, +\infty)$.

1281. Доказать, что целая рациональная функция

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad (n \geq 1, a_n \neq 0)$$

является монотонной (в строгом смысле!) в интервалах $(-\infty, -x_0)$ и $(x_0, +\infty)$, где x_0 — достаточно большое положительное число.

1282. Доказать, что рациональная функция

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m} \quad (a_nb_m \neq 0),$$

отличная от тождественной постоянной, монотонна (в строгом смысле!) в интервалах $(-\infty, -x_0)$ и $(x_0, +\infty)$, где x_0 — достаточно большое положительное число.

1283. Производная монотонной функции обязательно ли является монотонной? Рассмотреть пример: $f(x) = x + \sin x$.

1284. Доказать, что если $\varphi(x)$ — монотонно возрастающая дифференцируемая функция и

$$|f'(x)| \leq \varphi'(x) \quad \text{при } x \geq x_0,$$

то

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varphi(x) - \varphi(x_0) \quad \text{при } x \geq x_0.$$

Дать геометрическую интерпретацию этого факта.

1285. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $a \leq x < +\infty$ и сверх того $f'(x) > k > 0$ при $x > a$, где k — постоянная.

Доказать, что если $f(a) < 0$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет один и только один действительный корень в интервале

$$\left(a, a - \frac{f(a)}{k}\right).$$

1286. Функция $f(x)$ называется *возрастающей в точке x_0* , если в некоторой окрестности $|x - x_0| < \delta$ знак приращения функции $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ совпадает со знаком приращения аргумента $\Delta x_0 = x - x_0$.

Доказать, что если функция $f(x)$ ($a < x < b$) возрастает в каждой точке некоторого конечного или бесконечного интервала (a, b) , то она является возрастающей на этом интервале.

1287. Показать, что функция

$$f(x) = x + x^2 \sin \frac{2}{x}, \text{ если } x \neq 0 \text{ и } f(0) = 0,$$

возрастает в точке $x=0$, но не является возрастающей ни в каком интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, окружающем эту точку, где $\varepsilon > 0$ произвольно мало.

Построить эскиз графика функции.

1288. Доказать теорему: если 1) функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ n -кратно дифференцируемы; 2) $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$ ($k=0, 1, \dots, n-1$); 3) $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$ при $x > x_0$, то имеет место неравенство

$$\varphi(x) > \psi(x) \text{ при } x > x_0.$$

1289. Доказать следующие неравенства:

а) $e^x > 1 + x$ при $x \neq 0$;

б) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$ при $x > 0$;

в) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ при $x > 0$;

г) $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

д) $(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$ при $x > 0, y > 0$ и $0 < \alpha < \beta$.

Дать геометрическую иллюстрацию неравенств а) — г).

1290. Доказать неравенство

$$\frac{2}{\pi} x < \sin x < x \text{ при } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

1291. Доказать, что при $x > 0$ имеет место неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

1292. У арифметической и геометрической прогрессий число членов и крайние члены соответственно одинаковы и все члены прогрессий положительны. Доказать, что у арифметической прогрессии сумма членов больше, чем у геометрической.

1293. Исходя из неравенства

$$\sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2 \geq 0,$$

где x, a_k, b_k ($k=1, \dots, n$) вещественны, доказать неравенство Коши

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

1294. Доказать, что среднее арифметическое положительных чисел не больше среднего квадратичного этих же чисел, т.е.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

1295. Доказать, что среднее геометрическое положительных чисел не больше среднего арифметического этих же чисел, т.е.

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

Указание. Применить метод математической индукции.

1296. Средней порядка s для двух положительных чисел a и b называется функция, определяемая равенством

$$\Delta_s(a, b) = \left(\frac{a^s + b^s}{2} \right)^{\frac{1}{s}}, \text{ если } s \neq 0,$$

и

$$\Delta_0(a, b) = \lim_{s \rightarrow 0} \Delta_s(a, b).$$

В частности, получаем: при $s = -1$ среднее гармоническое; при $s = 0$ среднее геометрическое (доказать!); при $s = 1$ среднее арифметическое; при $s = 2$ среднее квадратичное.

Доказать, что:

1) $\min(a, b) \leq \Delta_s(a, b) \leq \max(a, b)$;
2) функция $\Delta_s(a, b)$ при $a \neq b$ есть возрастающая функция переменной s ;

3) $\lim_{s \rightarrow -\infty} \Delta_s(a, b) = \min(a, b)$;

$\lim_{s \rightarrow +\infty} \Delta_s(a, b) = \max(a, b)$.

Указание. Рассмотреть

$$\frac{d}{ds} [\ln \Delta_s(a, b)].$$

1297(н). Доказать неравенства:

а) $x^\alpha - 1 > \alpha(x - 1)$ при $\alpha \geq 2, x > 1$;

б) $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{x-a}$,

если $n > 1, x > a > 0$;

в) $1 + 2 \ln x \leq x^2$ при $x > 0$.

§ 8. Направление вогнутости. Точки перегиба

1°. Достаточные условия вогнутости. График дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется *вогнутым вверх* или *выпуклым вниз* (вогнутым вниз или выпуклым вверх) на сегменте $[a, b]$, если отрезок кривой

$$y=f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

расположен выше (соответственно ниже) касательной, проведенной в любой точке этого отрезка. Достаточным условием вогнутости графика вверх (вниз), в предположении существования второй производной $f''(x)$ при $a \leq x \leq b$, является выполнение неравенства

$$f''(x) > 0 \quad (f''(x) < 0) \quad \text{при } a < x < b.$$

2°. Достаточное условие точки перегиба. Точки, в которых меняется направление вогнутости графика функции, называются *точками перегиба*. Точка x_0 , для которой либо $f''(x_0)=0$, либо $f''(x_0)$ не существует, причем $f'(x_0)$ имеет смысл, есть точка перегиба, если $f''(x)$ меняет свой знак при переходе через значение x_0 .

1298. Исследовать направление вогнутости кривой

$$y=1+\sqrt[3]{x}$$

в точках $A(-1, 0)$, $B(1, 2)$ и $C(0, 0)$.

Найти промежутки вогнутости определенного знака и точки перегиба графиков следующих функций:

1299. $y=3x^2-x^3$.

1303. $y=x+\sin x$.

1300. $y=\frac{a^2}{a^2+x^2} \quad (a > 0)$.

1304. $y=e^{-x^2}$.

1301. $y=x+x^{\frac{1}{3}}$.

1305. $y=\ln(1+x^2)$.

1302. $y=\sqrt{1+x^2}$.

1306. $y=x \sin(\ln x) \quad (x > 0)$.

1308. Показать, что кривая

1307. $y=x^x \quad (x > 0)$;

$$y=\frac{x+1}{x^2+1}$$

имеет три точки перегиба, лежащие на одной прямой.

Построить график этой функции.

1309. При каком выборе параметра h «кривая вероятности»

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \quad (h > 0)$$

имеет точки перегиба $x=\pm \sigma$?

1310. Исследовать направление вогнутости циклоиды

$$x=a(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t) \quad (a > 0).$$

1311. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в промежутке $a \leq x < +\infty$, причем: 1) $f(a)=A > 0$; 2) $f'(a) < 0$; 3) $f''(x) \leq 0$ при $x > a$.

Доказать, что уравнение $f(x)=0$ имеет один и только один действительный корень в интервале $(a, +\infty)$.

1312. Функция $f(x)$ называется *выпуклой снизу (сверху)* на интервале (a, b) , если для любых точек x_1 и x_2 из этого интервала и произвольных чисел λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$) имеет место неравенство

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

(или соответственно противоположное неравенство

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)).$$

Доказать, что: 1) функция $f(x)$ выпукла снизу на (a, b) , если $f''(x) > 0$, при $a < x < b$; 2) $f(x)$ выпукла сверху на (a, b) , если, $f''(x) < 0$, при $a < x < b$.

1313. Показать, что функции

$$x^n \quad (n > 1), \quad e^x, \quad x \ln x$$

выпуклы снизу на интервале $(0, +\infty)$, а функции

$$x^n \quad (0 < n < 1), \quad \ln x$$

выпуклы сверху на интервале $(0, +\infty)$.

1314. Доказать неравенства и выяснить их геометрический смысл:

$$а) \frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad (x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1);$$

$$б) \frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}} \quad (x \neq y);$$

$$в) x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2}, \text{ если } x > 0 \text{ и } y > 0.$$

1314.1. Пусть $f''(x) \geq 0$ при $a \leq x \leq b$.

Доказать, что

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]$$

при любых $x_1, x_2 \in [a, b]$.

1315. Доказать, что ограниченная выпуклая функция всюду непрерывна и имеет односторонние левую и правую производные.

1316. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в интервале (a, b) и $f''(\xi) \neq 0$, где $a < \xi < b$.

Доказать, что в интервале (a, b) можно найти два значения x_1 и x_2 такие, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

1317. Доказать, что если функция $f(x)$ дважды дифференцируема в бесконечном интервале $(x_0, +\infty)$ и

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

то в интервале $(x_0, +\infty)$ имеется по меньшей мере одна точка ξ такая, что $f''(\xi) = 0$.

§ 9. Раскрытие неопределенностей

1-й случай правила Лопиталя (раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$). Если: 1) функция $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности U_δ^* точки a , где a —число или символ ∞ , и при $x \rightarrow a$ обе стремятся к нулю:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0;$$

2) производные $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют в окрестности U_δ точки a , за исключением, быть может, самой точки a , причем одновременно не обращаются в нуль при $x \neq a$; 3) существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

то имеем:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2-й случай правила Лопиталя (раскрытие неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$). Если: 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ при $x \rightarrow a$ обе стремятся к бесконечности:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty,$$

где a —число или символ ∞ ;

2) производные $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют для всех x , принадлежащих некоторой окрестности U_δ точки a и отличных от a , причем

$$f'(x) + g'(x) \neq 0 \text{ при } x \in U_\delta \text{ и } x \neq a;$$

3) существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

* Под окрестностью U_δ точки a понимается совокупность чисел x , удовлетворяющих неравенству: 1) $0 < |x - a| < \delta$, если a —число, и 2) $|x| > \frac{1}{\delta}$, если a —символ ∞ .

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Аналогичные правила справедливы для односторонних пределов.

Раскрытие неопределенностей видов $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 и т. п. путем алгебраических преобразований и логарифмирования приводится к раскрытию неопределенностей двух основных типов:

$$\frac{0}{0} \text{ и } \frac{\infty}{\infty}.$$

Определить значения следующих выражений:

$$1318. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}.$$

$$1323. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^3}.$$

$$1319. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}.$$

$$1324. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\lg x} - 1}{2 \sin^3 x - 1}.$$

$$1320. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}.$$

$$1325. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^2}.$$

$$1321. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{tg} 4x - 12 \operatorname{tg} x}{3 \sin 4x - 12 \sin x}.$$

$$1326. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}.$$

$$1322. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}.$$

$$1327. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3}.$$

$$1328. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \sqrt{x}} \left(\sqrt{a} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{b}} \right).$$

$$1329. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^2} \quad (a > 0).$$

$$1337. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} \quad (a > 0, n > 0).$$

$$1330. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} \right).$$

$$1338. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}.$$

$$1331. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}.$$

$$1339. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-0,01x}.$$

$$1332. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}.$$

$$1340. \lim_{x \rightarrow 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x).$$

$$1333. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}.$$

$$1341. \lim_{x \rightarrow +0} x^e \ln x \quad (e > 0).$$

$$1334. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\operatorname{th} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right).$$

$$1342. \lim_{x \rightarrow +0} x^x.$$

$$1335. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arsh}(\operatorname{sh} x) - \operatorname{Arsh}(\sin x)}{\operatorname{sh} x - \sin x},$$

$$1343. \lim_{x \rightarrow 0} x^{e^x - 1}.$$

$$1344. \lim_{x \rightarrow 0} (x^{x^x} - 1).$$

где $\operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

$$1336. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^e} \quad (e > 0).$$

$$1345. \lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{k}{1+\ln x}}.$$

$$1346. \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$$

$$1347. \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\lg \frac{\pi x}{2}}.$$

$$1348. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\lg 2x}.$$

$$1349. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}.$$

$$1350. \lim_{x \rightarrow +0} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x.$$

$$1351. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$1357. \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right].$$

$$1358. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - x^a}{x - a} \quad (a > 0).$$

$$1359. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}.$$

$$1360. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} \quad (a > 0).$$

$$1361. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)^x.$$

$$1362. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{th} x)^x.$$

$$1363. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$1363.1. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$1363.2. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$1363.3. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$1369. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} \cdot \frac{\ln(e^x + x)}{x} \right].$$

$$1370. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}} \right].$$

$$1352. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a} \right)^{\operatorname{ctg}(x-a)}.$$

$$1353. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - x \ln a}{b^x - x \ln b} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$1354. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$$

$$1355. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right).$$

$$1356. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right).$$

$$1363.4. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{Arsh} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}},$$

$$\text{где } \operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

$$1364. \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}.$$

$$1365. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$1366. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$1367. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ch} x}{\sqrt[n]{\operatorname{ch} x} - \sqrt[n]{\operatorname{ch} x}}.$$

$$1368. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+e^x}{2} \right)^{\operatorname{cth} x}.$$

$$1368.1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{(\ln x)^x}.$$

1371. Найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x},$$

если кривая $y = f(x)$ входит при $x \rightarrow 0$ в начале координат $(0, 0)$ ($\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$) под углом α .

1372. Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{f(x)} = 1,$$

если непрерывная кривая $y = f(x)$ входит при $x \rightarrow +0$ в начало координат ($\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0$) и при $0 < x < \varepsilon$ целиком остается внутри острого угла, образованного прямыми: $y = -kx$ и $y = kx$ ($k \neq \infty$).

1373. Доказать, что если для функции $f(x)$ существует вторая производная $f''(x)$, то

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

1373.1. Исследовать на дифференцируемость в точке $x=0$ функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}, & \text{если } x \neq 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

1373.2. Найти асимптоту кривой

$$y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} \quad (x > 0).$$

1374. Исследовать возможность применения правила Лопиталя к следующим примерам:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x};$

в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x} (\cos x + 2 \sin x) + e^{-x^2} \sin^2 x}{e^{-x} (\cos x + \sin x)};$

б) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - \sin x}{x + \sin x};$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x + \sin x \cos x}{(x + \sin x \cos x) e^{\sin x}}.$

1375. Найти предел отношения площади кругового сегмента, имеющего хорду b и стрелку h , к площади равнобедренного треугольника, вписанного в этот сегмент, если дуга сегмента при неизменном радиусе R стремится к нулю. Пользуясь полученным результатом, вывести приближенную формулу для площади сегмента:

$$S \approx \frac{2}{3}bh.$$

§ 10. Формула Тейлора

1°. Локальная формула Тейлора. Если: 1) функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $|x - x_0| < \varepsilon$ точки x_0 ; 2) $f(x)$ имеет в этой окрестности производные $f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$ до $(n-1)$ -го порядка включительно; 3) в точке x_0 существует производная n -го порядка $f^{(n)}(x_0)$, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-x_0)^k + o(x-x_0)^n, \quad (1)$$

где

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k=0, 1, \dots, n).$$

В частности, при $x_0=0$ имеем:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n). \quad (2)$$

При указанных условиях представление (1) единственно.

Если в точке x_0 существует производная $f^{(n+1)}(x_0)$, то остаточный член в формуле (1) может быть взят в виде $O((x-x_0)^{n+1})$.

Из локальной формулы Тейлора (2) получаем следующие пять важных разложений:

$$\text{I. } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

$$\text{II. } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}).$$

$$\text{III. } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

$$\text{IV. } (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + o(x^n).$$

$$\text{V. } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

2°. Формула Тейлора. Если: 1) функция $f(x)$ определена на сегменте $[a, b]$; 2) $f(x)$ имеет на этом сегменте непрерывные производные $f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$; 3) при $a < x < b$ существует конечная производная $f^{(n)}(x)$, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x) \quad (a < x < b),$$

где

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!} (x-a)^n \quad (0 < \theta < 1)$$

(остаточный член в форме Лагранжа), или

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a+\theta_1(x-a))}{(n-1)!} (1-\theta_1)^{n-1} (x-a)^n \quad (0 < \theta_1 < 1)$$

(остаточный член в форме Коши).

1376. Многочлен

$$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$$

расположить по целым неотрицательным степеням двучлена $x+1$.

Написать разложения по целым неотрицательным степеням переменной x до членов указанного порядка включительно следующих функций:

1377. $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ до члена с x^4 . Чему равно $f^{(4)}(0)$?1378. $\frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1-2x)^{60}}$ до члена с x^3 .1379. $\sqrt[m]{a^m+x}$ ($a > 0$) до члена с x^2 .1380. $\sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^3}$ до члена с x^3 .1381. e^{2x-x^2} до члена с x^5 .1382. $\frac{x}{e^x-1}$ до члена с x^4 .1385. $\sin(\sin x)$ до члена с x^3 .1383. $\sqrt[3]{\sin x^3}$ до члена с x^{13} .1386. $\{g x$ до члена с x^3 .1384. $\ln \cos x$ до члена с x^6 .1387. $\ln \frac{\sin x}{x}$ до члена с x^6 .

1388. Найти три члена разложения функции $f(x) = \sqrt{x}$ по целым неотрицательным степеням разности $x-1$.

1389. Функцию $f(x) = x^x - 1$ разложить по целым неотрицательным степеням бинома $x-1$ до члена с $(x-1)^3$.

1390. Функцию $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ ($a > 0$) в окрестности точки $x=0$ приближенно заменить параболой 2-го порядка.

1391. Функцию $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$ ($x > 0$) разложить по целым неотрицательным степеням дроби $\frac{1}{x}$ до члена с $\frac{1}{x^3}$.

1392. Найти разложение функции $f(h) = \ln(x+h)$ ($x > 0$) по целым неотрицательным степеням приращения h до члена с h^n (n — натуральное число).

1393. Пусть

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + o(h)$$

($0 < \theta < 1$), причем $f^{(n+1)}(x) \neq 0$.

Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta = \frac{1}{n+1}.$$

1393.1. Пусть при $x \rightarrow 0$ имеем

$$f(x) = 1 + kx + o(x).$$

Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = e^k.$$

1393.2. Пусть $f(x) \in C^{(2)}[0, 1]$ и $f(0) = f(1) = 0$, причем $|f''(x)| \leq A$ при $x \in (0, 1)$. Доказать, что $|f'(x)| \leq \frac{A}{2}$ при $0 \leq x \leq 1$.

1393.3. Пусть $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) — дважды дифференцируемая функция и

$$M_k = \sup_{-\infty < x < +\infty} |f^{(k)}(x)| < +\infty \quad (k=0, 1, 2).$$

Доказать неравенство

$$M_1^2 \leq 2M_0M_2.$$

1394. Оценить абсолютную погрешность приближенных формул:

а) $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ при $0 \leq x \leq 1$;

б) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ при $|x| \leq \frac{1}{2}$;

в) $\lg x \approx x + \frac{x^3}{3}$ при $|x| \leq 0,1$;

г) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ при $0 \leq x \leq 1$.

1395. Для каких x справедлива с точностью до 0,0001 приближенная формула:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}?$$

1395.1. Доказать формулу

$$\sqrt[n]{a^n + x} = a + \frac{x}{na^{n-1}} - r$$

$$(n \geq 2, a > 0, x > 0), \text{ где } 0 < r < \frac{n-1}{2n^2} \cdot \frac{x^2}{a^{2n-1}}.$$

1396. С помощью формулы Тейлора приближенно вычислить:

а) $\sqrt[3]{30}$; г) $\sqrt{e}$; ж) $\arctg 0,8$;

б) $\sqrt[3]{250}$; д) $\sin 18^\circ$; з) $\arcsin 0,45$;

в) $\sqrt[12]{4000}$; е) $\ln 1,2$; и) $(1,1)^{1,2}$

и оценить погрешность.

1397. Вычислить:

а) e с точностью до 10^{-2} ; г) $\sqrt{5}$ с точностью до 10^{-4} ;

б) $\sin 1^\circ$ » » » 10^{-2} ; д) $\lg 11$ » » » 10^{-2} ;

в) $\cos 9^\circ$ » » » 10^{-2} ;

Используя разложения I—V, найти следующие пределы:

$$1398. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}.$$

$$1399. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}.$$

$$1400. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{2}{3}} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}).$$

$$1401. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}).$$

$$1402. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1} \right].$$

$$1403. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} (a > 0).$$

$$1405. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right).$$

$$1404. \lim_{x \rightarrow 0} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]. \quad 1406. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right).$$

$$1406.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - x^3 \sqrt{1-x^2}}{x^6}.$$

$$1406.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}.$$

$$1406.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(\operatorname{tg} x) - x}{x^3}.$$

Для бесконечно малой при $x \rightarrow 0$ величины y определить главный член вида Cx^n (C — постоянная), если

$$1407. y = \operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x).$$

$$1408. y = (1+x)^x - 1. \quad 1409. y = 1 - \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}.$$

$$1410. \text{ При каком подборе коэффициентов } a \text{ и } b \text{ величина} \\ x - (a + b \cos x) \sin x$$

будет бесконечно малой 5-го порядка относительно x ?

1410.1. Подобрать коэффициенты A и B так, чтобы при $x \rightarrow 0$ имело место асимптотическое равенство

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1 + Ax^2}{x + Bx^3} + O(x^3).$$

1410.2. При каких коэффициентах A , B , C и D справедлива при $x \rightarrow 0$ асимптотическая формула

$$e^x = \frac{1 + Ax + Bx^2}{1 + Cx + Dx^3} + O(x^3).$$

1411. Считая $|x|$ малой величиной, вывести простые приближенные формулы для следующих выражений:

а) $\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+x)^2} \quad (R > 0);$ в) $\frac{1}{x} \left[1 - \left(1 + \frac{x}{100} \right)^{-n} \right],$
 б) $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}};$ г) $\frac{\ln 2}{\ln \left(1 + \frac{x}{100} \right)}.$

1412. Считая x малым по абсолютной величине, вывести приближенную формулу вида

$$x = \alpha \sin x + \beta \operatorname{tg} x$$

с точностью до члена с x^3 .

Применить эту формулу для приближенного спрямления дуг малой угловой величины.

1413. Оценить относительную погрешность следующего правила Чебышева: круговая дуга приближенно равна сумме боковых сторон равнобедренного треугольника, построенного на хорде этой дуги и имеющего высотой $\sqrt{\frac{4}{3}}$ ее стрелки.

§ 11. Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значения функций

1°. Необходимое условие экстремума. Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум (максимум или минимум), если функция определена в двухсторонней окрестности точки x_0 и для всех точек x некоторой области: $0 < |x - x_0| < \delta$, выполнено соответственно неравенство

$$f(x) < f(x_0) \text{ или } f(x) > f(x_0).$$

В точке экстремума производная $f'(x_0) = 0$, если она существует.

2°. Достаточные условия экстремума. *Первое правило.* Если 1) функция $f(x)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности $|x - x_0| < \delta$ точки x_0 такой, что $f'(x_0) = 0$ или не существует (критическая точка); 2) $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ в области $0 < |x - x_0| < \delta$; 3) производная $f'(x)$ сохраняет определенный знак слева от x_0 и справа от x_0 , то поведение функции $f(x)$ характеризуется следующей таблицей:

	Знак производной		Вывод
	$x < x_0$	$x > x_0$	
I	+	+	экстремума нет
II	+	—	максимум
III	—	+	минимум
IV	—	—	экстремума нет

Второе правило. Если функция $f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ и в некоторой точке x_0 выполнены условия

$$f'(x_0) = 0 \text{ и } f''(x_0) \neq 0,$$

то в этой точке функция $f(x)$ имеет экстремум, а именно: максимум, когда $f''(x_0) < 0$, и минимум, когда $f''(x_0) > 0$.

Третье правило. Пусть функция $f(x)$ имеет в некотором интервале $|x - x_0| < \delta$ производные $f'(x)$, ..., $f^{n-1}(x)$ и в точке x_0 производную $f^{(n)}(x_0)$, причем

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad (k = 1, \dots, n-1), \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

В таком случае: 1) если n —число четное, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет экстремум, а именно: максимум при $f^{(n)}(x_0) < 0$ и минимум при $f^{(n)}(x_0) > 0$; 2) если n —число нечетное, то в точке x_0 функция $f(x)$ экстремума не имеет.

3°. Абсолютный экстремум. Наибольшее (наименьшее) значение на сегменте $[a, b]$ непрерывной функции $f(x)$ достигается или в критической точке этой функции (т. е. там, где производная $f'(x)$ или равна нулю, или не существует), или в граничных точках a и b данного сегмента.

Исследовать на экстремум следующие функции:

1414. $y = 2 + x - x^2$.

1415. $y = (x - 1)^3$.

1416. $y = (x - 1)^4$.

1417. $y = x^m(1 - x)^n$ (m и n —целые положительные числа).

1418. $y = \cos x + \operatorname{ch} x$.

1419. $y = (x + 1)^{10} e^{-x}$.

1420. $y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}$ (n —натуральное число).

1421. $y = |x|$.

1422. $y = x^{\frac{1}{3}}(1 - x)^{\frac{2}{3}}$.

1423. Исследовать на экстремум в точке $x = x_0$ функцию

$$f(x) = (x - x_0)^n \varphi(x)$$

(n —натуральное число), где функция $\varphi(x)$ непрерывна при $x = x_0$ и $\varphi(x_0) \neq 0$.

1424. Пусть $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $f'(x) = \frac{P_1(x)}{Q^2(x)}$ и x_0 —стационарная точка функции $f(x)$, т. е. $P_1(x_0) = 0$, $Q(x_0) \neq 0$.

Доказать, что

$$\operatorname{sgn} f''(x_0) = \operatorname{sgn} P'_1(x_0).$$

1425. Можно ли утверждать, что если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет максимум, то в некоторой достаточно малой окрестности этой точки слева от точки x_0 функция $f(x)$ возрастает, а справа от нее убывает?

Рассмотреть пример:

$$f(x) = 2 - x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right), \text{ если } x \neq 0 \text{ и } f(0) = 2.$$

1426(н). Доказать, что функция

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ если } x \neq 0, \text{ и } f(0) = 0,$$

имеет в точке $x=0$ минимум, а функция

$$g(x) = xe^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ если } x \neq 0, \text{ и } g(0) = 0$$

не имеет в точке $x=0$ экстремума, хотя

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad g^{(n)}(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Построить графики этих функций.

1427. Исследовать на экстремум функции:

а) $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}} \left(\sqrt{2} + \sin \frac{1}{x} \right)$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$;

б) $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}} \left(\sqrt{2} + \cos \frac{1}{x} \right)$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$.

Построить графики этих функций.

1428. Исследовать на экстремум в точке $x=0$ функцию

$$f(x) = |x| \left(2 + \cos \frac{1}{x} \right), \text{ если } x \neq 0 \text{ и } f(0) = 0.$$

Построить график этой функции.

Найти экстремумы следующих функций:

1429. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.

1437. $y = xe^{-x}$.

1430. $y = 2x^2 - x^4$.

1438. $y = \sqrt{x} \ln x$.

1431. $y = x(x-1)^2(x-2)^3$.

1439. $y = \frac{\ln^2 x}{x}$.

1432. $y = x + \frac{1}{x}$.

1440. $y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$.

1433. $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

1441. $y = \frac{10}{1+\sin^2 x}$.

1434. $y = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$.

1442. $y = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$.

1435. $y = \sqrt{2x-x^2}$.

1443. $y = e^x \sin x$.

1436. $y = x^3 \sqrt{x-1}$.

1444. $y = |x|e^{-|x-1|}$.

Найти наименьшие и наибольшие значения следующих функций:

1445. $f(x) = 2^x$

на сегменте $[-1; 5]$.

1446. $f(x) = x^2 - 4x + 6$

на сегменте $[-3; 10]$.

1447. $f(x) = |x^3 - 3x + 2|$

на сегменте $[-10; 10]$.

1448. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ на сегменте $[0,01; 100]$.

1449. $f(x) = \sqrt{5-4x}$ на сегменте $[-1; 1]$.

Найти нижнюю грань (inf) и верхнюю грань (sup) следующих функций:

1450. $f(x) = xe^{-0,01x}$ на интервале $(0, +\infty)$.

1451. $f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}$ на интервале $(0, +\infty)$.

1452. $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$ на интервале $(0, +\infty)$.

1453. $f(x) = e^{-x^2} \cos x^2$ на интервале $(-\infty, +\infty)$.

1454. Определить нижнюю и верхнюю грани функции $f(\xi) = \frac{1+\xi}{3+\xi^2}$ на интервале $x < \xi < +\infty$.

Построить графики функций

$$M(x) = \sup_{x < \xi < +\infty} f(\xi) \quad \text{и} \quad m(x) = \inf_{x < \xi < +\infty} f(\xi).$$

1454. 1. Пусть

$$M_k = \sup_x \|f^{(k)}(x)\|, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

Найти M_0 , M_1 и M_2 , если $f(x) = e^{-x^2}$.

1455. Определить наибольший член последовательности:

а) $\frac{n^{10}}{2^n}$ ($n=1, 2, \dots$);

б) $\frac{\sqrt[n]{n}}{n+10000}$ ($n=1, 2, \dots$); в) $\sqrt[n]{n}$ ($n=1, 2, \dots$).

1456. Доказать неравенства:

а) $|3x - x^3| \leq 2$ при $|x| \leq 2$;

б) $\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1$, если $0 \leq x \leq 1$ и $p > 1$;

в) $x^m (a-x)^n \leq \frac{m^n n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n}$ при $m > 0$, $n > 0$ и $0 \leq x \leq a$;

г) $\frac{x+a}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leq \sqrt[n]{x^n + a^n} \leq x+a$ ($x > 0$, $a > 0$, $n > 1$);

д) $|a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$.

1456.1. Доказать неравенство

$$\frac{2}{3} \leq \frac{x^2+1}{x^2+x+1} \leq 2$$

при $-\infty < x < +\infty$.

1426(н). Доказать, что функция

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ если } x \neq 0, \text{ и } f(0) = 0,$$

имеет в точке $x=0$ минимум, а функция

$$g(x) = xe^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ если } x \neq 0, \text{ и } g(0) = 0$$

не имеет в точке $x=0$ экстремума, хотя

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad g^{(n)}(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Построить графики этих функций.

1427. Исследовать на экстремум функции:

а) $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}} \left(\sqrt{2} + \sin \frac{1}{x} \right)$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$;

б) $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}} \left(\sqrt{2} + \cos \frac{1}{x} \right)$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$.

Построить графики этих функций.

1428. Исследовать на экстремум в точке $x=0$ функцию

$$f(x) = |x| \left(2 + \cos \frac{1}{x} \right), \text{ если } x \neq 0 \text{ и } f(0) = 0.$$

Построить график этой функции.

Найти экстремумы следующих функций:

1429. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.

1437. $y = xe^{-x}$.

1430. $y = 2x^3 - x^4$.

1438. $y = \sqrt{x} \ln x$.

1431. $y = x(x-1)^2(x-2)^3$.

1439. $y = \frac{\ln^2 x}{x}$.

1432. $y = x + \frac{1}{x}$.

1440. $y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$.

1433. $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

1441. $y = \frac{10}{1+\sin^2 x}$.

1434. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$.

1442. $y = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$.

1435. $y = \sqrt{2x-x^2}$.

1443. $y = e^x \sin x$.

1436. $y = x^3 \sqrt{x-1}$.

1444. $y = |x|e^{-|x-1|}$.

Найти наименьшие и наибольшие значения следующих функций:

1445. $f(x) = 2^x$

на сегменте $[-1; 5]$.

1446. $f(x) = x^3 - 4x + 6$

на сегменте $[-3; 10]$.

1447. $f(x) = |x^3 - 3x + 2|$

на сегменте $[-10; 10]$.

$$1448. f(x) = x + \frac{1}{x} \quad \text{на сегменте } [0,01; 100].$$

$$1449. f(x) = \sqrt{5-4x} \quad \text{на сегменте } [-1; 1].$$

Найти нижнюю грань (inf) и верхнюю грань (sup) следующих функций:

$$1450. f(x) = xe^{-0,01x} \quad \text{на интервале } (0, +\infty).$$

$$1451. f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x} \quad \text{на интервале } (0, +\infty).$$

$$1452. f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^4} \quad \text{на интервале } (0, +\infty).$$

$$1453. f(x) = e^{-x^2} \cos x^2 \quad \text{на интервале } (-\infty, +\infty).$$

$$1454. \text{Определить нижнюю и верхнюю грани функции } f(\xi) = \frac{1+\xi}{3-\xi^2} \quad \text{на интервале } x < \xi < +\infty.$$

Построить графики функций

$$M(x) = \sup_{x < \xi < +\infty} f(\xi) \quad \text{и} \quad m(x) = \inf_{x < \xi < +\infty} f(\xi).$$

1454. 1. Пусть

$$M_k = \sup_x \|f^{(k)}(x)\|, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

Найти M_0 , M_1 и M_2 , если $f(x) = e^{-x^2}$.

1455. Определить наибольший член последовательности:

$$a) \frac{n^{10}}{2^n} \quad (n=1, 2, \dots);$$

$$б) \frac{\sqrt[n]{n}}{n+10000} \quad (n=1, 2, \dots); \quad в) \sqrt[n]{n} \quad (n=1, 2, \dots).$$

1456. Доказать неравенства:

$$a) |3x - x^3| \leq 2 \quad \text{при } |x| \leq 2;$$

$$б) \frac{1}{2^p-1} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1, \quad \text{если } 0 \leq x \leq 1 \text{ и } p > 1;$$

$$в) x^m (a-x)^n \leq \frac{m^n n^m}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n} \quad \text{при } m > 0, n > 0 \text{ и } 0 \leq x \leq a;$$

$$г) \frac{x+a}{2} \leq \sqrt[n]{x^n + a^n} \leq x+a \quad (x > 0, a > 0, n > 1);$$

$$д) |a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

1456.1. Доказать неравенство

$$\frac{2}{3} \leq \frac{x^2+1}{x^2+x+1} \leq 2$$

при $-\infty < x < +\infty$.

1457. Определить «отклонение от нуля» многочлена

$$P(x) = x(x-1)^2(x+2)$$

на сегменте $[-2, 1]$, т. е. найти

$$E_P = \sup_{-2 \leq x \leq 1} |P(x)|.$$

1458. При каком выборе коэффициента q многочлен

$$P(x) = x^2 + q$$

наименее отклоняется от нуля на сегменте $[-1, 1]$, т. е.

$$E_P = \sup_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)| = \min.$$

1459. Абсолютным отклонением двух функций $f(x)$ и $g(x)$ на сегменте $[a, b]$ называется число

$$\Delta = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|.$$

Определить абсолютное отклонение функций:

$$f(x) = x^2 \text{ и } g(x) = x^3$$

на сегменте $[0, 1]$.

1460. Функцию

$$f(x) = x^2$$

на сегменте $[x_1, x_2]$ приближенно заменить линейной функцией

$$g(x) = (x_1 + x_2)x + b$$

так, чтобы абсолютное отклонение функций $f(x)$ и $g(x)$ (см. предыдущую задачу) было наименьшим, и определить это наименьшее абсолютное отклонение.

1461. Определить минимум функции

$$f(x) = \max \{2|x|, |1+x|\}.$$

Определить число вещественных корней уравнения и отделить эти корни, если:

$$1462. x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0.$$

$$1463. x^3 - 3x^2 - 9x + h = 0.$$

$$1464. 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0.$$

$$1465. x^3 - 5x = a.$$

$$1466. \ln x = kx.$$

$$1467. e^x = ax^2.$$

$$1468. \sin^3 x \cdot \cos x = a \quad \text{при } 0 \leq x \leq \pi.$$

$$1469. \operatorname{ch} x = kx.$$

1470. При каком условии уравнение

$$x^3 + px + q = 0$$

имеет: а) один вещественный корень; б) три вещественных корня. Изобразить соответствующие области на плоскости (p, q) .

§ 12. Построение графиков функций по характерным точкам

Для построения графика функции $y = f(x)$ нужно: 1) определить область существования этой функции и исследовать поведение функции в граничных точках последней; 2) выяснить симметрию графика и периодичность; 3) найти точки разрыва функции и промежутки непрерывности; 4) определить нули функции и области постоянства знака; 5) найти точки экстремума и выяснить промежутки возрастания и убывания функции; 6) определить точки перегиба и установить промежутки вогнутости определенного знака графика функции; 7) найти асимптоты в случае существования их; 8) указать те или иные особенности графика. В частных случаях общая схема упрощается.

В задачах, отмеченных звездочкой, точки перегиба определяются приближенно.

Построить графики следующих функций:

1471. $y = 3x - x^3$.

1472. $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$.

1473. $y = (x+1)(x-2)^3$.

1474*. $y = \frac{2-x^2}{1+x^4}$.

1475*. $y = \frac{x^3-1}{x^3-5x+6}$.

1476*. $y = \frac{x}{(1+x)(1-x)^3}$.

1477. $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$.

1478. $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$.

1486. $y = \pm \sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

1487*. $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$.

1488. $y = \sqrt[3]{x^3} - \sqrt[3]{x^2 + 1}$.

1489. $y = (x+2)^{\frac{2}{3}} - (x-2)^{\frac{2}{3}}$.

1490. $y = (x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{2}{3}}$.

1491. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}$.

1479. $y = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$.

1480. $y = \frac{x}{(1-x^2)^4}$.

1481. $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^3}$.

1482*. $y = \frac{x^4+8}{x^3+1}$.

1483. $y = \frac{1}{1+x} - \frac{10}{3x^3} + \frac{1}{1-x}$.

1484. $y = (x-3)\sqrt{x}$.

1485. $y = \pm \sqrt{8x^2 - x^4}$.

1485.1. $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^3+1}}$.

1492. $y = \frac{x^2 \sqrt{x^3-1}}{2x^2-1}$.

1493. $y = \frac{|1+x|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$.

1494. $y = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$.

1495. $y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}$.

$$1496^*. y = \sqrt{\frac{x^2+3}{x^2+1}}.$$

$$1497. y = \sin x + \cos^2 x.$$

$$1498. y = (7 + 2 \cos x) \sin x.$$

$$1499. y = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x.$$

$$1500. y = \cos x - \frac{1}{2} \cos 2x.$$

$$1501. y = \sin^4 x + \cos^4 x.$$

$$1502. y = \sin x \cdot \sin 3x.$$

$$1503. y = \frac{\sin x}{\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}.$$

$$1504. y = \frac{\cos x}{\cos 2x}.$$

$$1514. y = \sqrt{x^2+1} \cdot \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

$$1515. y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$1516. y = x + \operatorname{arctg} x.$$

$$1517. y = \frac{x}{2} + \operatorname{arctg} x.$$

$$1518. y = x \operatorname{arctg} x.$$

$$1519. y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}.$$

$$1524. y = a \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} \quad (a > 0).$$

$$1525. y = \arccos \frac{1-x}{1-2x}.$$

$$1526. y = x^x.$$

$$1529^*. y = x \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \quad (x > 0).$$

$$1530^*. y = \frac{e^{\frac{1}{1-x^2}}}{1+x^2} \quad (\text{без исследования вогнутости}).$$

$$1504.1. y = \frac{\sin x}{2 + \cos x}.$$

$$1505. y = 2x - \operatorname{tg} x.$$

$$1506. y = e^{2x-x^2}.$$

$$1507. y = (1+x^2)e^{-x^2}.$$

$$1508. y = x + e^{-x}.$$

$$1509. y = x^{\frac{2}{3}} e^{-x}.$$

$$1509.1. y = e^{-2x} \sin^2 x.$$

$$1510. y = \frac{e^x}{1+x}.$$

$$1511. y = \sqrt{1 - e^{-x^2}}.$$

$$1512. y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

$$1513. y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

$$1520. y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

$$1521. y = (x+2)e^{\frac{1}{x}}.$$

$$1522. y = 2^{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}.$$

$$1523^*. y = \ln \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}.$$

$$1527^*. y = x^{\frac{1}{x}}.$$

$$1528. y = (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Построить кривые, заданные в параметрической форме:

$$1531. \quad x = \frac{(t+1)^2}{4}, \quad y = \frac{(t-1)^2}{4}.$$

$$1532. \quad x = 2t - t^2, \quad y = 3t - t^3.$$

$$1533^*. \quad x = \frac{t^2}{t-1}, \quad y = \frac{t}{t^2-1}.$$

1534. $x = \frac{t^2}{1-t^2}$, $y = \frac{1}{1+t^2}$.
 1535. $x = t + e^{-t}$, $y = 2t + e^{-2t}$.
 1536. $x = a \cos 2t$, $y = a \cos 3t$ ($a > 0$).
 1537. $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$.
 1538. $x = t \ln t$, $y = \frac{\ln t}{t}$.
 1539. $x = \frac{a}{\cos^3 t}$, $y = a \operatorname{tg}^3 t$ ($a > 0$).
 1540. $x = a (\operatorname{sh} t - t)$, $y = a (\operatorname{ch} t - 1)$ ($a > 0$).

Представив уравнения кривых в параметрической форме, построить эти кривые, если

1541. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ ($a > 0$).

Указание. Положить $y = tx$.

1542. $x^3 + y^3 = x^4 + y^4$.

1543. $x^2 y^2 = x^3 - y^3$.

1544. $x^y = y^x$ ($x > 0$, $y > 0$).

1545. Построить график кривой:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 y = 1.$$

Построить графики функций, заданных в полярной системе координат (φ , r) ($r \geq 0$):

1546. $r = a + b \cos \varphi$ ($0 < a \leq b$).

1547. $r = a \sin 3\varphi$ ($a > 0$). 1548. $r = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$ ($a > 0$).

1549*. $r = a \frac{\ln \varphi}{\varphi - 1}$, где $\varphi > 1$ ($a > 0$).

1550*. $\varphi = \arccos \frac{r-1}{r^2}$.

Построить графики семейств кривых (a — переменный параметр):

1551. $y = x^2 - 2x + a$.

1554. $y = \frac{x}{2} + e^{-ax}$.

1552. $y = x + \frac{a^2}{x}$.

1553. $y = x \pm \sqrt{a(1-x^2)}$.

1555. $y = xe^{-\frac{x}{a}}$.

§ 13. Задачи на максимум и минимум функций

1556. Доказать, что если функция $f(x)$ неотрицательна, то функция

$$F(x) = Cf^2(x) \quad (C > 0)$$

имеет в точности те же точки экстремума, что и функция $f(x)$.

1557. Доказать, что если функция $\varphi(x)$ — монотонно возрастающая в строгом смысле при $-\infty < x < +\infty$, то функции

$$f(x) \text{ и } \varphi(f(x))$$

имеют одни и те же точки экстремума.

1558. Определить наибольшее значение произведения m -й и n -й степеней ($m > 0, n > 0$) двух положительных чисел, сумма которых постоянна и равна a .

1559. Найти наименьшее значение суммы m -й и n -й степеней ($m > 0, n > 0$) двух положительных чисел, произведение которых постоянно и равно a .

1560. В каких системах логарифмов существуют числа, равные своему логарифму?

1561. Из всех прямоугольников данной площади S определить тот, периметр которого наименьший.

1562. Найти прямоугольный треугольник наибольшей площади, если сумма катета и гипотенузы его постоянна.

1563. При каких линейных размерах закрытая цилиндрическая банка данной вместимости V будет иметь наименьшую полную поверхность?

1564. В данный круговой сегмент, не превышающий полуокруга, вписать прямоугольник с наибольшей площадью.

1565. В эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

вписать прямоугольник со сторонами, параллельными осям эллипса, площадь которого наибольшая.

1566. В треугольник с основанием b и высотой h вписать прямоугольник с наибольшим периметром.

Исследовать возможность решения этой задачи.

1567. Из круглого бревна диаметра d вытесывается балка с прямоугольным поперечным сечением, основание которого равно b и высота h . При каких размерах балка будет иметь наибольшую прочность, если прочность ее пропорциональна bh^2 ?

1568. В полусфер радиуса R вписать прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием наибольшего объема.

1569. В шар радиуса R вписать цилиндр наибольшего объема.

1570. В шар радиуса R вписать цилиндр с наибольшей полной поверхностью.

1571. Около данного шара описать конус наименьшего объема.

1572. Найти наибольший объем конуса с данной образующей l .

1573. В прямой круговой конус с углом 2α в осевом сечении и радиусом основания R вписать цилиндр с наибольшей полной поверхностью.

1574. Найти кратчайшее расстояние точки $M(p, p)$ от параболы $y^2 = 2px$.

1575. Найти кратчайшее и наибольшее расстояния точки $A(2, 0)$ от окружности $x^2 + y^2 = 1$.

1576. Найти наибольшую хорду эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 < b < a$), проходящую через вершину $B(0, -b)$.

1577. Через точку $M(x, y)$ эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ провести касательную, образующую с осями координат треугольник, площадь которого наименьшая.

1578. Тело представляет собой прямой круговой цилиндр, заверченный сверху полушаром. При каких линейных размерах это тело будет иметь наименьшую полную поверхность, если объем его равен V .

1579. Поперечное сечение открытого канала имеет форму равнобедренной трапеции. При каком наклоне φ боков «мокрый периметр» сечения будет наименьшим, если площадь «живого сечения» воды в канале равна S , а уровень воды равен h ?

1580. «Извилистостью» замкнутого контура, ограничивающего площадь S , называется отношение периметра этого контура к длине окружности, ограничивающей круг той же площади S .

Какова форма равнобедренной трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$), обладающей наименьшей извилистостью, если основание $AD = 2a$ и острый угол $\angle BAD = \alpha$?

1581. Какой сектор следует вырезать из круга радиуса R , чтобы из оставшейся части можно было свернуть воронку наибольшей вместимости.

1582. Завод A отстоит от железной дороги, идущей с юга на север и проходящей через город B , считая по кратчайшему расстоянию, на a км. Под каким углом φ к железной дороге следует построить подъездной путь от завода, чтобы транспортировка грузов из A в B была наиболее экономичной, если стоимость провоза тонны груза на расстоянии 1 км составляет по подъездному пути p руб., по железной дороге q руб. ($p > q$) и город B расположен на b км севернее завода A ?

1583. Два корабля плывут с постоянными скоростями u и v по прямым линиям, составляющим угол θ между собой. Определить наименьшее расстояние между кораблями, если в некоторый момент расстояния их от точки пересечения путей были соответственно равны a и b .

1584. В точках A и B находятся источники света соответственно силой S_1 и S_2 свечей. На отрезке $AB = a$ найти наименее освещенную точку M .

1585. Светящаяся точка находится на линии центров двух непересекающихся шаров радиусов R и r ($R > r$) и располо-

жена вне этих шаров. При каком положении точки сумма освещенных частей поверхностей шаров будет наибольшая?

1586. На какой высоте над центром круглого стола радиуса a следует поместить электрическую лампочку, чтобы освещенность края стола была наибольшей?

Указание. Яркость освещения выражается формулой

$$I = k \frac{\sin \varphi}{r^2},$$

где φ — угол наклона лучей, r — расстояние источника света от освещаемой площадки, k — сила источника света.

1587. К реке шириной a м построен под прямым углом канал шириной b м. Какой максимальной длины суда могут входить в этот канал?

1588. Суточные расходы при плавании судна состоят из двух частей: постоянной, равной a руб., и переменной, возрастающей пропорционально кубу скорости. При какой скорости v плавание судна будет наиболее экономичным?

1589. Груз весом P , лежащий на горизонтальной шероховатой плоскости, требуется сдвинуть с места приложенной силой. При каком наклоне этой силы к горизонту величина ее будет наименьшей, если коэффициент трения груза равен k ?

1590. В чашку, имеющую форму полушара радиуса a , опущен стержень длины $l > 2a$. Найти положение равновесия стержня.

§ 14. Касание кривых. Круг кривизны. Эволюта

1°. Касание n -го порядка. Говорят, что кривые

$$y = \varphi(x) \quad \text{и} \quad \bar{y} = \psi(x)$$

имеют в точке x_0 касание n -го порядка (в строгом смысле!), если $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) и $\varphi^{(n+1)}(x_0) \neq \psi^{(n+1)}(x_0)$. В этом случае при $x \rightarrow x_0$ имеем:

$$\varphi(x) - \psi(x) = O^{\circ}[x - x_0]^{n+1}.$$

2°. Круг кривизны. Окружность

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = R^2,$$

имеющая с данной кривой $y = f(x)$ касание не ниже 2-го порядка, называется *кругом кривизны* в соответствующей точке. Радиус этого круга

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

называется *радиусом кривизны*, а величина $k = \frac{1}{R}$ — *кривизной*.

3°. Эволюта. Геометрическое место центров (ξ, η) кругов кривизны (центры кривизны)

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1+y'^2}{y''}$$

называется эволютой данной кривой $y=f(x)$.

1591. Подобрать параметры k и b прямой

$$y=kx+b$$

так, чтобы она имела с кривой

$$y=x^3-3x^2+2$$

касание порядка выше первого.

1592. При каком выборе коэффициентов a , b и c парабола

$$y=ax^3+bx+c$$

имеет в точке $x=x_0$ касание 2-го порядка с кривой $y=e^x$?

1593. Какой порядок касания с осью Ox имеют в точке $x=0$ кривые:

а) $y=1-\cos x$; б) $y=\operatorname{tg} x - \sin x$; в) $y=e^x - \left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)$.

1594. Доказать, что кривая $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$ при $x \neq 0$ и $y=0$ при $x=0$ имеет в точке $x=0$ с осью Ox касание бесконечно большого порядка.

1595. Найти радиус и центр кривизны гиперболы

$$xy=1$$

в точках: а) $M(1, 1)$; б) $N(100; 0,01)$.

Определить радиусы кривизны следующих кривых:

1596. Параболы $y^2=2px$.

1597. Эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a \geq b > 0$).

1598. Гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1599. Астронды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

1600. Эллипса $x=a \cos t$, $y=b \sin t$.

1601. Циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

1602. Эвольвенты круга $x=a(\cos t+t \sin t)$, $y=a(\sin t-t \cos t)$.

1603. Доказать, что радиус кривизны линии 2-го порядка

$$y^2=2px-qx^2$$

пропорционален кубу отрезка нормали.

1604. Написать формулу радиуса кривизны линии, заданной в полярных координатах.

Определить радиусы кривизны кривых, заданных в полярных координатах (параметры положительны):

1605. Спирали Архимеда $r = a\varphi$.

1606. Логарифмической спирали $r = ae^{m\varphi}$.

1607. Кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$.

1608. Лемнискаты $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

1609. На кривой $y = \ln x$ найти точку, кривизна в которой наибольшая.

1610. Максимальная кривизна кубической параболы $y = \frac{kx^3}{6}$ ($0 \leq x < +\infty$, $k > 0$) равна $\frac{1}{1000}$. Найти точку x , в которой достигается эта максимальная кривизна.

Составить уравнения:

1611. Эволюты параболы $y^2 = 2px$.

1612. Эволюты эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1613. Эволюты астроида $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

1614. Эволюты трактрисы

$$x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}.$$

1615. Эволюты логарифмической спирали $r = ae^{m\varphi}$.

1616. Доказать, что эволюта циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

есть также циклоида, отличающаяся от данной только положением.

§ 15. Приближенное решение уравнений

1°. Правило пропорциональных частей (метод хорд). Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и

$$f(a)f(b) < 0,$$

причем $f'(x) \neq 0$ при $a < x < b$, то уравнение

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

имеет один и только один действительный корень ξ в промежутке (a, b) . За первое приближение этого корня можно принять значение

$$x_1 = a + \delta_1,$$

где

$$\delta_1 = -\frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a).$$

Применяя далее этот способ к тому из промежутков (a, x_1) или (x_1, b) , на концах которого функция $f(x)$ разнозначна, получим второе приближение x_2 корня ξ и т. д. Для оценки n -го приближения x_n справедлива формула

$$|x_n - \xi| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}, \quad (2)$$

где $m = \inf_{a < x < b} |f'(x)|$, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi.$$

2°. Правило Ньютона (метод касательных). Если $f''(x) \neq 0$ на сегменте $[a, b]$ и $f(a)f'(a) > 0$, то за первое приближение ξ_1 корня ξ уравнения (1) можно принять значение

$$\xi_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Повторяя этот прием, получаем быстро сходящиеся к корню ξ последовательные приближения ξ_n ($n=1, 2, \dots$), точность которых оценивается, например, по формуле (2).

Для грубой ориентировки полезно нарисовать набросок графика функции $y=f(x)$.

Пользуясь методом пропорциональных частей, определить с точностью до 0,001 корни следующих уравнений:

$$1617. x^3 - 6x + 2 = 0.$$

$$1619. x - 0,1 \sin x = 2.$$

$$1618. x^4 - x - 1 = 0.$$

$$1620. \cos x = x^2.$$

Пользуясь методом Ньютона, определить с указанной точностью корни следующих уравнений:

$$1621. x^2 + \frac{1}{x^2} = 10x \text{ (с точностью до } 10^{-3}\text{)}.$$

$$1622. x \lg x = 1 \text{ (с точностью до } 10^{-4}\text{)}.$$

$$1623. \cos x \cdot \operatorname{ch} x = 1 \text{ (с точностью до } 10^{-3}\text{) (для положительных корней).}$$

$$1624. x + e^x = 0 \text{ (с точностью до } 10^{-3}\text{)}.$$

$$1625. x \operatorname{th} x = 1 \text{ (с точностью до } 10^{-4}\text{)}.$$

$$1626. \text{ С точностью до } 0,001 \text{ найти три первых положительных корня уравнения}$$

$$\operatorname{tg} x = x.$$

$$1627. \text{ С точностью до } 10^{-3} \text{ найти два положительных корня уравнения}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}.$$

1604. Написать формулу радиуса кривизны линии, заданной в полярных координатах.

Определить радиусы кривизны кривых, заданных в полярных координатах (параметры положительны):

1605. Спирали Архимеда $r = a\varphi$.

1606. Логарифмической спирали $r = ae^{m\varphi}$.

1607. Кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$.

1608. Лемнискаты $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

1609. На кривой $y = \ln x$ найти точку, кривизна в которой наибольшая.

1610. Максимальная кривизна кубической параболы $y = \frac{kx^3}{6}$ ($0 \leq x < +\infty$, $k > 0$) равна $\frac{1}{1000}$. Найти точку x , в которой достигается эта максимальная кривизна.

Составить уравнения:

1611. Эволюты параболы $y^2 = 2px$.

1612. Эволюты эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1613. Эволюты астроида $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

1614. Эволюты трактрисы

$$x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}.$$

1615. Эволюты логарифмической спирали $r = ae^{m\varphi}$.

1616. Доказать, что эволюта циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

есть также циклоида, отличающаяся от данной только положением.

§ 15. Приближенное решение уравнений

1°. Правило пропорциональных частей (метод хорд). Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и

$$f(a)f(b) < 0,$$

причем $f'(x) \neq 0$ при $a < x < b$, то уравнение

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

имеет один и только один действительный корень ξ в промежутке (a, b) . За первое приближение этого корня можно принять значение

$$x_1 = a + \delta_1,$$

где

$$\delta_1 = -\frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a).$$

Применяя далее этот способ к тому из промежутков (a, x_1) или (x_1, b) , на концах которого функция $f(x)$ разнозначна, получим второе приближение x_2 корня ξ и т. д. Для оценки n -го приближения x_n справедлива формула

$$|x_n - \xi| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}, \quad (2)$$

где $m = \inf_{a < x < b} |f'(x)|$, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi.$$

2°. Правило Ньютона (метод касательных). Если $f''(x) \neq 0$ на сегменте $[a, b]$ и $f(a)f''(a) > 0$, то за первое приближение ξ_1 корня ξ уравнения (1) можно принять значение

$$\xi_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Повторяя этот прием, получаем быстро сходящиеся к корню ξ последовательные приближения ξ_n ($n = 1, 2, \dots$), точность которых оценивается, например, по формуле (2).

Для грубой ориентировки полезно нарисовать набросок графика функции $y = f(x)$.

Пользуясь методом пропорциональных частей, определить с точностью до 0,001 корни следующих уравнений:

$$1617. x^3 - 6x + 2 = 0.$$

$$1619. x - 0,1 \sin x = 2.$$

$$1618. x^4 - x - 1 = 0.$$

$$1620. \cos x = x^2.$$

Пользуясь методом Ньютона, определить с указанной точностью корни следующих уравнений:

$$1621. x^2 + \frac{1}{x^2} = 10x \text{ (с точностью до } 10^{-3}\text{)}.$$

$$1622. x \lg x = 1 \text{ (с точностью до } 10^{-4}\text{)}.$$

1623. $\cos x \cdot \operatorname{ch} x = 1$ (с точностью до 10^{-3}) (для положительных корней).

$$1624. x + e^x = 0 \text{ (с точностью до } 10^{-3}\text{)}.$$

$$1625. x \operatorname{th} x = 1 \text{ (с точностью до } 10^{-4}\text{)}.$$

1626. С точностью до 0,001 найти три первых положительных корня уравнения

$$\operatorname{tg} x = x.$$

1627. С точностью до 10^{-3} найти два положительных корня уравнения

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}.$$

ОТДЕЛ III

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Простейшие неопределенные интегралы

1°. Понятие неопределенного интеграла. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке (a, b) и $F(x)$ — ее первообразная, т. е. $F'(x) = f(x)$ при $a < x < b$, то

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad a < x < b,$$

где C — произвольная постоянная.

2°. Основные свойства неопределенного интеграла:

а) $d \left[\int f(x) dx \right] = f(x) dx$; б) $\int d\Phi(x) = \Phi(x) + C$;

в) $\int A f(x) dx = A \int f(x) dx \quad (A = \text{const}; A \neq 0)$;

г) $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$.

3°. Таблица простейших интегралов:

I. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$.

II. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C \quad (x \neq 0)$.

III. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \arctg x + C, \\ -\operatorname{arctg} x + C. \end{cases}$

IV. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$.

V. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C. \end{cases}$

VI. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$.

VII. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$; $\int e^x dx = e^x + C$.

VIII. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C.$

XII. $\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C.$

IX. $\int \cos x \, dx = \sin x + C.$

XIII. $\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C.$

X. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

XIV. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

XI. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

XV. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

4°. Основные методы интегрирования.

а) Метод введения нового аргумента. Если

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(u) \, du = F(u) + C,$$

где $u = \varphi(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция.

б) Метод разложения. Если

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

то

$$\int f(x) \, dx = \int f_1(x) \, dx + \int f_2(x) \, dx.$$

в) Метод подстановки. Если $f(x)$ — непрерывна, то, полагая

$$x = \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$, получим

$$\int f(x) \, dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt.$$

г) Метод интегрирования по частям. Если u и v — некоторые дифференцируемые функции от x , то

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du.$$

Применяя таблицу простейших интегралов, найти следующие интегралы:

1628. $\int (3-x^2)^2 \, dx.$

1629. $\int x^2 (5-x)^4 \, dx.$

1630. $\int (1-x)(1-2x)(1-3x) \, dx.$

1631. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^3 \, dx.$

1632. $\int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right) \, dx.$

1633. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} \, dx.$

1634. $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x}} \, dx.$

1635. $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt[3]{x}} \, dx.$

1636. $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x\sqrt{x}} \, dx.$

$$1637. \int \frac{(\sqrt{2x} - \sqrt[3]{3x})^2}{x} dx.$$

$$1638. \int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx.$$

$$1639. \int \frac{x^2 dx}{1+x^2}.$$

$$1640. \int \frac{x^2 dx}{1-x^2}.$$

$$1641. \int \frac{x^2+3}{x^2-1} dx.$$

$$1642. \int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx.$$

$$1643. \int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} dx.$$

$$1644. \int (2^x + 3^x)^2 dx.$$

1654. Доказать, что если

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \quad (a \neq 0).$$

Найти интегралы:

$$1655. \int \frac{dx}{x+a}.$$

$$1656. \int (2x-3)^{10} dx.$$

$$1657. \int \sqrt[3]{1-3x} dx.$$

$$1658. \int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}.$$

$$1659. \int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{2}{3}}}.$$

$$1645. \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx.$$

$$1646. \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx.$$

$$1647. \int (1 + \sin x + \cos x) dx.$$

$$1648. \int \sqrt{1 - \sin 2x} dx \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

$$1649. \int \operatorname{ctg}^2 x dx.$$

$$1650. \int \operatorname{tg}^2 x dx.$$

$$1651. \int (a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x) dx.$$

$$1652. \int \operatorname{th}^2 x dx.$$

$$1653. \int \operatorname{cth}^2 x dx.$$

$$1660. \int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x} dx.$$

$$1661. \int \frac{dx}{2+3x^2}.$$

$$1662. \int \frac{dx}{2-3x^2}.$$

$$1663. \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}.$$

$$1664. \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}.$$

$$\begin{array}{ll}
 1665. \int (e^{-x} + e^{-2x}) dx. & 1668. \int \frac{dx}{1 + \cos x}. \\
 1666. \int (\sin 5x - \sin 5\alpha) dx. & 1669. \int \frac{dx}{1 - \cos x}. \\
 1667. \int \frac{dx}{\sin^2 \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)}. & 1670. \int \frac{dx}{1 + \sin x}. \\
 1671. \int [\operatorname{sh}(2x+1) + \operatorname{ch}(2x-1)] dx. & \\
 1672. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}}. & 1673. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}}.
 \end{array}$$

Путем надлежащего преобразования подынтегрального выражения найти следующие интегралы:

$$\begin{array}{ll}
 1674. \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}. & 1686. \int \frac{x^2 dx}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}}. \\
 1675. \int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx. & 1687. \int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}. \\
 1676. \int \frac{x dx}{3-2x^3}. & 1688. \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}. \\
 1677. \int \frac{x dx}{(1+x^2)^2}. & 1689. \int x e^{-x^2} dx. \\
 1678. \int \frac{x dx}{4+x^4}. & 1690. \int \frac{e^x dx}{2+e^x}. \\
 1679. \int \frac{x^3 dx}{x^6-2}. & 1691. \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}. \\
 1680. \int \frac{dx}{(1+x) \sqrt{x}}. & 1692. \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}. \\
 \text{Указание. } \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x}). & 1693. \int \frac{\ln^2 x}{x} dx. \\
 1681. \int \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2}. & 1694. \int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}. \\
 1682. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2+1}}. & 1695. \int \sin^2 x \cos x dx. \\
 1683. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}. & 1696. \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx. \\
 1684. \int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}. & 1697. \int \operatorname{tg} x dx. \\
 1685. \int \frac{x dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}. & 1698. \int \operatorname{ctg} x dx. \\
 & 1699. \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin x - \cos x}} dx.
 \end{array}$$

1700. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx.$ 1710. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}.$
- 1700.1. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}} dx.$ 1711. $\int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} dx.$
- 1700.2. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}} dx.$ 1712. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx.$
- 1700.3. $\int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}} dx.$ Указание.
1701. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{\operatorname{ctg} x}}.$ $\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = d\left(x - \frac{1}{x}\right).$
1702. $\int \frac{dx}{\sin^3 x + 2 \cos^2 x}.$ 1713. $\int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx.$
1703. $\int \frac{dx}{\sin x}.$ 1714. $\int \frac{x^4 dx}{(x^6+1)^4}.$
1704. $\int \frac{dx}{\cos x}.$ 1715. $\int \frac{x^{\frac{n}{2}} dx}{\sqrt{1+x^{n+2}}}.$
1705. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}.$ 1716. $\int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$
1706. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}.$ 1717. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}.$
1707. $\int \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x}} dx.$ 1718. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx.$
1708. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^3 x \sqrt{\operatorname{th}^2 x}}.$ 1719. $\int \frac{2x \cdot 3x}{9x^2 - 4x} dx.$
1709. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$ 1720. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{(1+x^2)^3}}.$

Применяя метод разложения, вычислить интегралы:

1721. $\int x^2 (2-3x^2)^2 dx.$ 1726. $\int \frac{(2-x)^2}{2-x^2} dx.$
- 1721.1. $\int x(1-x)^{10} dx.$ 1727. $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} dx.$
1722. $\int \frac{1+x}{1-x} dx.$ 1728. $\int \frac{x^5}{x+1} dx.$
1723. $\int \frac{x^3}{1+x} dx.$ 1729. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}.$
1724. $\int \frac{x^3}{3+x} dx.$ 1730. $\int x \sqrt{2-5x} dx.$
1725. $\int \frac{(1+x)^3}{1+x^2} dx.$ Указание.
- $x = -\frac{1}{5}(2-5x) + \frac{2}{5}.$

1731. $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{1-3x}}.$

1732. $\int x^3 \sqrt[3]{1+x^2} dx.$

1733. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}.$

Указание.

$$I = \frac{1}{4} [(x+3) - (x-1)].$$

1734. $\int \frac{dx}{x^2 + x - 2}.$

1735. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}.$

1736. $\int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}.$

1737. $\int \frac{x dx}{(x+2)(x+3)}.$

1738. $\int \frac{x dx}{x^4 + 3x^2 + 2}.$

1739. $\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2} \quad (a \neq b).$

1740. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \quad (a^2 \neq b^2).$

1741. $\int \sin^2 x dx.$

1742. $\int \cos^2 x dx.$

1743. $\int \sin x \sin(x+\alpha) dx.$

1744. $\int \sin 3x \cdot \sin 5x dx.$

1745. $\int \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{3} dx.$

1746. $\int \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) dx.$

1747. $\int \sin^3 x dx.$

1748. $\int \cos^3 x dx.$

1749. $\int \sin^4 x dx.$

1750. $\int \cos^4 x dx.$

1751. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx.$

1752. $\int \operatorname{tg}^3 x dx.$

1753. $\int \sin^3 3x \sin^2 2x dx.$

1754. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^2 x}.$

Указание.

$$I = \sin^2 x + \cos^2 x.$$

1755. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos x}.$

1756. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}.$

1757. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx.$

1758. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}.$

1759. $\int \frac{dx}{1+e^x}.$

1760. $\int \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}} dx.$

1761. $\int \operatorname{sh}^2 x dx.$

1762. $\int \operatorname{ch}^2 x \, dx.$

1764. $\int \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} 3x \, dx.$

1763. $\int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 2x \, dx.$

1765. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch}^2 x}.$

Применяя подходящие подстановки, найти следующие интегралы:

1766. $\int x^2 \sqrt[3]{1-x} \, dx.$

1772. $\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1 + \cos^2 x} \, dx.$

1767. $\int x^3 (1-5x^2)^{10} \, dx.$

1773. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \, dx.$

1768. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} \, dx.$

1774. $\int \frac{\ln x \, dx}{x \sqrt{1+\ln x}}.$

1769. $\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$

1775. $\int \frac{dx}{e^{\frac{1}{x}} + e^x}.$

1770. $\int x^{\frac{1}{2}} (2-5x^3)^{\frac{2}{3}} \, dx.$

1776. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$

1771. $\int \cos^3 x \cdot \sqrt{\sin x} \, dx.$

1777. $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x}.$

Применяя тригонометрические подстановки $x = a \sin t$, $x = a \operatorname{tg} t$, $x = a \sin^2 t$ и т. п., найти следующие интегралы (параметры положительны):

1778. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$

1783. $\int x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} \, dx.$

1779. $\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x^3-2}}.$

1784. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$

1780. $\int \sqrt{1-x^2} \, dx.$

Указание. Применить подстановку $x-a = (b-a) \sin^2 t$.

1781. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}.$

1785. $\int \sqrt{(x-a)(b-x)} \, dx.$

1782. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \, dx.$

Применяя гиперболические подстановки $x = a \operatorname{sh} t$, $x = a \operatorname{ch} t$ и т. п., найти следующие интегралы (параметры положительны):

1786. $\int \sqrt{a^2+x^2} \, dx.$

1787. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} \, dx.$

$$1788. \int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx.$$

$$1790. \int \sqrt{(x+a)(x+b)} dx.$$

$$1789. \int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}.$$

Указание. Положить $x+a=(b-a)\operatorname{sh}^2 t$.

Применяя метод интегрирования по частям, найти следующие интегралы:

$$1791. \int \ln x dx.$$

$$1801. \int x^3 \operatorname{ch} 3x dx.$$

$$1792. \int x^n \ln x dx \quad (n \neq -1).$$

$$1802. \int \operatorname{arctg} x dx.$$

$$1793. \int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx.$$

$$1803. \int \arcsin x dx.$$

$$1794. \int \sqrt{x} \ln^2 x dx.$$

$$1804. \int x \operatorname{arctg} x dx.$$

$$1795. \int x e^{-x} dx.$$

$$1805. \int x^3 \arccos x dx.$$

$$1796. \int x^2 e^{-2x} dx.$$

$$1806. \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx.$$

$$1797. \int x^2 e^{-x^2} dx.$$

$$1807. \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$$

$$1798. \int x \cos x dx.$$

$$1808. \int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$$

$$1799. \int x^3 \sin 2x dx.$$

$$1809. \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$$

$$1800. \int x \operatorname{sh} x dx.$$

$$1810. \int \sin x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) dx.$$

Найти интегралы:

$$1811. \int x^2 e^{x^2} dx.$$

$$1818. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

$$1812. \int (\arcsin x)^2 dx.$$

$$1819. \int \sqrt{x^2 + a} dx.$$

$$1813. \int x (\operatorname{arctg} x)^2 dx.$$

$$1820. \int x^2 \sqrt{a^2 + x^2} dx.$$

$$1814. \int x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} dx.$$

$$1821. \int x \sin^2 x dx.$$

$$1815. \int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

$$1822. \int e^{\sqrt{x}} dx.$$

$$1816. \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx.$$

$$1823. \int x \sin \sqrt{x} dx.$$

$$1817. \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$1824. \int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

$$1825. \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

$$1826. \int \sin(\ln x) dx.$$

$$1827. \int \cos(\ln x) dx.$$

$$1828. \int e^{ax} \cos bx dx.$$

$$1829. \int e^{ax} \sin bx dx.$$

$$1830. \int e^{2x} \sin^2 x dx.$$

$$1831. \int (e^x - \cos x)^2 dx.$$

$$1832. \int \frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x} dx.$$

$$1833. \int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx.$$

$$1834. \int \frac{x dx}{\cos^2 x}.$$

$$1835. \int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx.$$

Нахождение следующих интегралов основано на приведении квадратного трехчлена к каноническому виду и применении формул:

$$I. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0).$$

$$II. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (a \neq 0).$$

$$III. \int \frac{x dx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln |a^2 \pm x^2| + C.$$

$$IV. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$$

$$V. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad (a > 0).$$

$$VI. \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C \quad (a > 0).$$

$$VII. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$$

$$VIII. \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad (a > 0).$$

Найти интегралы:

$$1836. \int \frac{dx}{a + bx^2} \quad (ab \neq 0).$$

$$1837. \int \frac{dx}{x^2 - x + 2}.$$

$$1838. \int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1}.$$

$$1839. \int \frac{x dx}{x^4 - 2x^2 - 1}.$$

$$1840. \int \frac{(x+1)}{x^2 + x + 1} dx.$$

$$1841. \int \frac{x dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1}.$$

$$1842. \int \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 2}.$$

$$1843. \int \frac{x^5 dx}{x^6 - x^2 - 2}.$$

1844. $\int \frac{dx}{3 \sin^3 x - 8 \sin x \cos x + 5 \cos^3 x}.$

1845. $\int \frac{dx}{\sin x + 2 \cos x + 3}.$

1846. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} \quad (b \neq 0).$

1848. $\int \frac{ax}{\sqrt{x+x^2}}.$

1847. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$

1849. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}.$

1850. Доказать, что если

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0),$$

то

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{y'}{2} + \sqrt{ay} \right| + C \quad \text{при } a > 0$$

и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-y'}{\sqrt{b^2-4ac}} + C \quad \text{при } a < 0.$$

1851. $\int \frac{x dx}{\sqrt{5+x-x^2}}.$

1858. $\int \frac{dx}{(x+1) \sqrt{x^2+1}}.$

1852. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx.$

1859. $\int \frac{dx}{(x-1) \sqrt{x^2-2}}.$

1853. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}.$

1860. $\int \frac{dx}{(x+2)^2 \sqrt{x^2+2x-5}}.$

1853.1. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin x+\cos^2 x}}.$

1861. $\int \sqrt{2+x-x^2} dx.$

1854. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}.$

1862. $\int \sqrt{2+x+x^2} dx.$

1855. $\int \frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}} dx.$

1863. $\int \sqrt{x^4+2x^2-1} x dx.$

1856. $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2+x+1}}.$

1864. $\int \frac{1-x+x^2}{x \sqrt{1+x-x^2}} dx.$

1857. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+x-1}}.$

1865. $\int \frac{x^2+1}{x \sqrt{x^4+1}} dx.$

§ 2. Интегрирование рациональных функций

Применяя метод неопределенных коэффициентов, найти следующие интегралы:

1866. $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx.$

1867. $\int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$

1868. $\int \frac{x^{10} dx}{x^3 + x - 2}.$

1869. $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx.$

1870. $\int \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$

1871. $\int \frac{x dx}{x^3 - 3x + 2}.$

1872. $\int \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2 (x-1)} dx.$

1873. $\int \left(\frac{x}{x^2 - 3x + 2} \right)^2 dx.$

1874. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}.$

1875. $\int \frac{dx}{x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1}.$

1876. $\int \frac{x^3 + 5x + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$

1877. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}.$

1878. $\int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)}.$

1879. $\int \frac{x dx}{(x-1)^2 (x^2 + 2x + 2)}.$

1880. $\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}.$

1881. $\int \frac{dx}{x^3 + 1}.$

1882. $\int \frac{x dx}{x^3 - 1}.$

1883. $\int \frac{dx}{x^3 - 1}.$

1884. $\int \frac{dx}{x^4 + 1}.$

1885. $\int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}.$

1886. $\int \frac{dx}{x^3 + 1}.$

1887. $\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}.$

1888. $\int \frac{dx}{x^3 - x^4 + x^2 - x^3 + x - 1}.$

1889. $\int \frac{x^2 dx}{x^4 + 3x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 3x + 1}.$

1890. При каком условии интеграл

$$\int \frac{ax^3 + bx + c}{x^3(x-1)^2} dx$$

представляет собой рациональную функцию?

Применяя метод Остроградского, найти интегралы:

1891. $\int \frac{x dx}{(x-1)^2 (x+1)^3}.$

1895. $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}.$

1892. $\int \frac{dx}{(x^3 + 1)^2}.$

1896. $\int \frac{x^3 + 3x - 2}{(x-1)(x^2 + x + 1)^2} dx.$

1893. $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}.$

1897. $\int \frac{dx}{(x^2 - 1)^4}.$

1894. $\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}.$

Выделить алгебраическую часть следующих интегралов:

1898. $\int \frac{x^3+1}{(x^4+x^2+1)^2} dx.$

1900. $\int \frac{4x^5-1}{(x^6+x+1)^2} dx.$

1899. $\int \frac{dx}{(x^3+x+1)^3}.$

1901. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}.$$

1902. При каком условии интеграл

$$\int \frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2} dx$$

представляет собой рациональную функцию?

Применяя различные приемы, найти следующие интегралы:

1903. $\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}} dx.$

1912. $\int \frac{x^{2n-1}}{(x^{2n}+1)^2} dx.$

1904. $\int \frac{x dx}{x^6-1}.$

1913. $\int \frac{dx}{x(x^{10}+2)}.$

1905. $\int \frac{x^3 dx}{x^6+3}.$

1914. $\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}.$

1906. $\int \frac{x^2+x}{x^6+1} dx.$

1915. $\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)} dx.$

1907. $\int \frac{x^3-3}{x(x^6+3x^4+2)} dx.$

1916. $\int \frac{x^4-1}{x(x^4-5)(x^6-5x+1)} dx.$

1908. $\int \frac{x^4 dx}{(x^{10}-10)^2}.$

1917. $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} dx.$

1909. $\int \frac{x^{13} dx}{x^6+3x^4+2}.$

1918. $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1} dx.$

1910. $\int \frac{x^3 dx}{(x^{10}+2x^5+2)^2}.$

1919. $\int \frac{x^3-x}{x^6+1} dx.$

1911. $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1} dx.$

1920. $\int \frac{x^4+1}{x^6+1} dx.$

1921. Вывести рекуррентную формулу для вычисления интеграла

$$I_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} \quad (a \neq 0).$$

Пользуясь этой формулой, вычислить

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^3}.$$

Указание. Использовать тождество

$$4a(ax^2 + bx + c) = (2ax + b)^2 + (4ac - b^2).$$

1922. Применить подстановку $t = \frac{x+a}{x+b}$ для вычисления интеграла

$$I = \int \frac{dx}{(x+a)^m (x+b)^n}$$

(m и n — натуральные числа).

Пользуясь этой подстановкой, найти

$$\int \frac{dx}{(x-2)^3 (x+3)^3}.$$

1923. Вычислить

$$\int \frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}} dx,$$

если $P_n(x)$ есть многочлен степени n относительно x .

Указание. Применить формулу Тейлора.

1924. Пусть $R(x) = R^*(x^2)$, где R^* — рациональная функция. Какими особенностями обладает разложение функции $R(x)$ на рациональные дроби?

1925. Вычислить

$$\int \frac{dx}{1+x^{2n}},$$

где n — целое положительное число.

§ 3. Интегрирование некоторых иррациональных функций

С помощью приведения подынтегральных функций к рациональным функциям найти следующие интегралы:

1926. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

1929. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx.$

1927. $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}.$

1930. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^2 \sqrt{x}}.$

1928. $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}} dx.$

1931. $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} dx.$

$$1932. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}. \quad 1933. \int \frac{x dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} \quad (a > 0).$$

$$1934. \int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}} \quad (n - \text{натуральное число}).$$

$$1935. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{1+x}}.$$

Указание. Положить $x = \left(\frac{u^2-1}{2u}\right)^2$.

1936. Доказать, что интеграл

$$\int R \left[x, (x-a)^{\frac{p}{n}} (x-b)^{\frac{q}{n}} \right] dx,$$

где R — рациональная функция и p, q, n — целые числа, является элементарной функцией, если

$$p + q = kn.$$

где k — целое число.

Найти интегралы от простейших квадратичных иррациональностей:

$$1937. \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}} dx.$$

$$1940. \int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} dx.$$

$$1938. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

$$1941. \int \frac{x dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}.$$

$$1939. \int \frac{dx}{(1-x)^2 \sqrt{1-x^2}}.$$

$$1942. \int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}} dx.$$

Применяя формулу

$$\int \frac{P_n(x)}{y} dx = Q_{n-1}(x)y + \lambda \int \frac{dx}{y},$$

где $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$, $P_n(x)$ — многочлен степени n , $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n-1$ и λ — число, найти следующие интегралы:

$$1943. \int \frac{x^2}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx.$$

$$1947. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+1}}.$$

$$1944. \int \frac{x^{10} dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$1948. \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2-1}}.$$

$$1945. \int x^4 \sqrt{a^2-x^2} dx.$$

$$1949. \int \frac{dx}{(x-1)^2 \sqrt{x^2+3x+1}}.$$

$$1946. \int \frac{x^2-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}} dx.$$

$$1950. \int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{x^2+2x}}.$$

1951. При каком условии интеграл

$$\int \frac{a_1 x^2 + b_1 x + c_1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

представляет собой алгебраическую функцию?

Найти $\int \frac{P(x)}{Q(x)} y dx$, где $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, разлагая рациональную функцию $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на простейшие дроби.

1952. $\int \frac{x dx}{(x-1)^2 \sqrt{1+2x-x^2}}.$

1957. $\int \frac{dx}{(1+x^2) \sqrt{1-x^2}}.$

1953. $\int \frac{x dx}{(x^2-1) \sqrt{x^2-x-1}}.$

1958. $\int \frac{dx}{(x^2+1) \sqrt{x^2-1}}.$

1954. $\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2} dx.$

1959. $\int \frac{dx}{(1-x^2) \sqrt{1+x^2}}.$

1955. $\int \frac{x^3}{(1+x) \sqrt{1+2x-x^2}} dx.$

1960. $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1} dx.$

1956. $\int \frac{x dx}{(x^2-3x+2) \sqrt{x^2-4x+3}}.$

Приводя квадратные трехчлены к каноническому виду, вычислить следующие интегралы:

1961. $\int \frac{dx}{(x^2+x+1) \sqrt{x^2+x-1}}.$

1962. $\int \frac{x^2 dx}{(4-2x+x^2) \sqrt{2+2x-x^2}}.$

1963. $\int \frac{(x+1) dx}{(x^2+x+1) \sqrt{x^2+x+1}}.$

1964. С помощью дробно-линейной подстановки $x = \frac{\alpha + \beta t}{1+t}$ вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{(x^2-x+1) \sqrt{x^2+x+1}}.$$

1965. Найти

$$\int \frac{dx}{(x^2+2) \sqrt{2x^2-2x+5}}.$$

Применяя подстановки Эйлера

1) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{ax + z}$, если $a > 0$;

2) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xz \pm \sqrt{c}$, если $c > 0$;

3) $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = z(x-x_1)$,

найти следующие интегралы:

$$1966. \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

$$1969. \int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx.$$

$$1967. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}.$$

$$1970. \int \frac{dx}{[1 + \sqrt{x(1+x)}]^2}.$$

$$1968. \int x\sqrt{x^2 - 2x + 2} dx.$$

Применяя различные методы, найти следующие интегралы:

$$1971. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$1976. \int \frac{(x^2 - 1) dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^4 + 1}}.$$

$$1972. \int \frac{x dx}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$1977. \int \frac{(x^2 + 1) dx}{(x^2 - 1)\sqrt{x^4 + 1}}.$$

$$1973. \int \frac{dx}{\sqrt{2 + \sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}}}.$$

$$1978. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^4 + 2x^2 - 1}}.$$

$$1974. \int \frac{x + \sqrt{1 + x + x^2}}{1 + x + \sqrt{1 + x + x^2}} dx.$$

$$1979. \int \frac{(x^2 + 1) dx}{x\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}.$$

$$1975. \int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} dx.$$

1980. Доказать, что нахождение интеграла

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}) dx,$$

где R — рациональная функция, сводится к интегрированию рациональной функции.

Интеграл от дифференциального бинома

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx,$$

где m , n и p — рациональные числа, может быть приведен к интегрированию рациональных функций лишь в следующих трех случаях (теорема Чебышева):

Случай 1. Пусть p — целое. Полагаем $x = z^N$, где N — общий знаменатель дробей m и n .

Случай 2. Пусть $\frac{m+1}{n}$ — целое. Полагаем $a + bx^n = z^N$, где N — знаменатель дроби p .

Случай 3. Пусть $\frac{m+1}{n} + p$ — целое. Применяем подстановку $ax^{\frac{1}{n}} + b = z^N$, где N — знаменатель дроби p .

Если $n=1$, то эти случаи эквивалентны следующим:

1) p — целое; 2) m — целое; 3) $m+p$ — целое.

Найти следующие интегралы:

1981. $\int \sqrt{x^3 + x^2} dx.$

1986. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^2}}.$

1982. $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx.$

1987. $\int \frac{dx}{x \sqrt[6]{1+x^2}}.$

1983. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}.$

1988. $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}.$

1984. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

1989. $\int \sqrt[3]{3x-x^3} dx.$

1985. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}.$

1990. В каких случаях интеграл

$$\int \sqrt{1+x^m} dx,$$

где m — рациональное число, представляет собой элементарную функцию?

§ 4. Интегрирование тригонометрических функций

Интегралы вида

$$\int \sin^m x \cos^n x dx,$$

где m и n — целые числа, вычисляются с помощью искусственных преобразований или применением формул понижения.

Найти интегралы:

1991. $\int \cos^5 x dx.$

1996. $\int \sin^6 x \cos^5 x dx.$

1992. $\int \sin^6 x dx.$

1997. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx.$

1993. $\int \cos^6 x dx.$

1998. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x} dx.$

1994. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx.$

1999. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$

1995. $\int \sin^6 x \cos^5 x dx.$

2000. $\int \frac{dx}{\cos^5 x}.$

2001. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}.$

2006. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx.$

2002. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x}.$

2007. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^3 x}}.$

2003. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x}.$

2008. $\int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^3 x}}.$

2004. $\int \operatorname{tg}^3 x dx.$

2009. $\int \frac{dx}{\sqrt{\lg x}}.$

2005. $\int \operatorname{ctg}^3 x dx.$

2010. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\lg x}}.$

2011. Вывести формулы понижения для интегралов:

а) $I_n = \int \sin^n x dx$; б) $K_n = \int \cos^n x dx$ ($n > 2$)

и с помощью их вычислить

$$\int \sin^3 x dx \quad \text{и} \quad \int \cos^3 x dx.$$

2012. Вывести формулы понижения для интегралов:

а) $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$; б) $K_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$ ($n > 2$)

и с помощью их вычислить

$$\int \frac{dx}{\sin^6 x} \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{\cos^7 x}.$$

Следующие интегралы вычисляются с помощью применения формул:

$$\text{I. } \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)].$$

$$\text{II. } \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)].$$

$$\text{III. } \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha - \beta) + \sin (\alpha + \beta)].$$

Найти интегралы:

2013. $\int \sin 5x \cos x dx.$

2016. $\int \sin x \sin (x+a) \sin (x+b) dx.$

2014. $\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx.$

2017. $\int \cos^3 ax \cos^3 bx dx.$

2015. $\int \sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3} dx.$

2018. $\int \sin^3 2x \cdot \cos^3 3x dx.$

Следующие интегралы вычисляются путем применения тождеств:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin[(x + \alpha) - (x + \beta)]$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos[(x + \alpha) - (x + \beta)].$$

Найти интегралы:

$$2019. \int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}.$$

$$2022. \int \frac{dx}{\sin x - \sin a}.$$

$$2020. \int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}.$$

$$2023. \int \frac{dx}{\cos x + \cos a}.$$

$$2021. \int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}.$$

$$2024. \int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+a) dx.$$

Интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x) dx,$$

где R — рациональная функция, в общем случае приводятся к интегрированию рациональных функций с помощью подстановки $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.

а) Если выполнено равенство

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

или

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то выгодно применять подстановку $\cos x = t$ или соответственно $\sin x = t$.

б) Если выполнено равенство

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

то полезно применять подстановку $\operatorname{tg} x = t$.

Найти интегралы:

$$2025. \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}.$$

$$2030. \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}.$$

$$2026. \int \frac{dx}{(2 + \cos x) \sin x}.$$

$$2031. \int \frac{\cos^2 x dx}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^2}.$$

$$2027. \int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2 \cos x} dx.$$

$$2032. \int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx.$$

$$2028. \int \frac{dx}{1 + e \cos x};$$

$$2033. \int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^2}.$$

а) $0 < e < 1$; б) $e > 1$.

$$2034. \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x + \cos^2 x}.$$

$$2029. \int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx.$$

$$2035. \int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$$

2036. $\int \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^6 x + \cos^6 x} dx.$

2039. $\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}.$

2037. $\int \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx.$

2040. $\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2 \cos^2 x)^2}.$

2038. $\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx.$

2041. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x},$$

приведя знаменатель к логарифмическому виду.

2042. Доказать, что

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx = Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x| + C,$$

где A, B, C — постоянные.

Указание. Положить

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x = A(a \sin x + b \cos x) + B(a \cos x - b \sin x),$$

где A и B — постоянные.

Найти интегралы:

2043. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx.$

2044. $\int \frac{dx}{3 + 5 \operatorname{tg} x}.$

2043.1. $\int \frac{\sin x}{\sin x - 3 \cos x} dx.$

2045. $\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^2} dx.$

2046. Доказать, что

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a \sin x + b \cos x + c} dx =$$

$$= Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x + c| + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c},$$

где A, B, C — некоторые постоянные коэффициенты.

Найти интегралы:

2047. $\int \frac{\sin x + 2 \cos x - 3}{\sin x - 2 \cos x + 3} dx.$

2049. $\int \frac{2 \sin x + \cos x}{3 \sin x + 4 \cos x - 2} dx.$

2048. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2 + \sin x + \cos x}} dx.$

2050. Доказать, что

$$\int \frac{a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x}{a \sin x + b \cos x} dx = A \sin x + B \cos x + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x},$$

где A, B, C — постоянные коэффициенты.

Найти интегралы:

$$2051. \int \frac{\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x}{\sin x + \cos x} dx.$$

$$2052. \int \frac{\sin^2 x - \sin x \cos x + 2 \cos^2 x}{\sin x + 2 \cos x} dx.$$

2053. Доказать, что если $(a-c)^2 + b^2 \neq 0$, то

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x} dx = A \int \frac{du_1}{k_1 u_1^2 + \lambda_1} + B \int \frac{du_2}{k_2 u_2^2 + \lambda_2},$$

где A, B — неопределенные коэффициенты, λ_1, λ_2 — корни уравнения

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2),$$

$$u_i = (a - \lambda_i) \sin x + b \cos x \text{ и } k_i = \frac{1}{a - \lambda_i} \quad (i = 1, 2).$$

Найти интегралы:

$$2054. \int \frac{2 \sin x - \cos x}{3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x} dx.$$

$$2055. \int \frac{(\sin x + \cos x) dx}{2 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x}.$$

$$2056. \int \frac{\sin x - 2 \cos x}{1 + 4 \sin x \cos x} dx.$$

2057. Доказать, что

$$\int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^n} = \frac{A \sin x + B \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^{n-1}} + C \int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^{n-2}},$$

где A, B, C — неопределенные коэффициенты.

2058. Найти

$$\int \frac{dx}{(\sin x + 2 \cos x)^3}.$$

2059. Доказать, что

$$\int \frac{dx}{(a+b \cos x)^n} = \frac{A \sin x}{(a+b \cos x)^{n-1}} + B \int \frac{dx}{(a+b \cos x)^{n-1}} + C \int \frac{dx}{(a+b \cos x)^{n-2}} \quad (|a| \neq |b|),$$

и определить коэффициенты A , B и C , если n — натуральное число, большее единицы.

Найти интегралы:

2060. $\int \frac{\sin x \, dx}{\cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}}.$

2062. $\int \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{2 + \sin 2x}}.$

2061. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sqrt{\lg x}} \, dx.$

2063. $\int \frac{dx}{(1 + e \cos x)^2} \quad (0 < e < 1).$

2064. $\int \frac{\cos^{n-1} \frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1} \frac{x-a}{2}} \, dx.$

Указание. Положить $t = \frac{\cos \frac{x+a}{2}}{\sin \frac{x-a}{2}}.$

2065. Вывести формулу понижения для интеграла

$$I_n = \int \left(\frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\sin \frac{x+a}{2}} \right)^n dx$$

(n — натуральное число).

§ 5. Интегрирование различных трансцендентных функций

2066. Доказать, что если $P(x)$ — многочлен степени n , то

$$\int P(x) e^{ax} dx = e^{ax} \left[\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \dots + (-1)^n \frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}} \right] + C.$$

2067. Доказать, что если $P(x)$ — многочлен степени n , то

$$\begin{aligned} \int P(x) \cos ax \, dx = & \frac{\sin ax}{a} \left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(IV)}(x)}{a^4} - \dots \right] + \\ & + \frac{\cos ax}{a^2} \left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(V)}(x)}{a^4} - \dots \right] + C \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \int P(x) \sin ax \, dx = & -\frac{\cos ax}{a} \left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(IV)}(x)}{a^4} - \dots \right] + \\ & + \frac{\sin ax}{a^2} \left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(V)}(x)}{a^4} - \dots \right] + C. \end{aligned}$$

Найти интегралы:

2068. $\int x^3 e^{3x} \, dx.$

2075. $\int e^{ax} \sin^3 bx \, dx.$

2069. $\int (x^2 - 2x + 2) e^{-x} \, dx.$

2076. $\int x e^x \sin x \, dx.$

2070. $\int x^5 \sin 5x \, dx.$

2077. $\int x^2 e^x \cos x \, dx.$

2071. $\int (1 + x^2)^3 \cos x \, dx.$

2078. $\int x e^x \sin^2 x \, dx.$

2072. $\int x^7 e^{-x^2} \, dx.$

2079. $\int (x - \sin x)^3 \, dx.$

2073. $\int x^2 e^{\sqrt{x}} \, dx.$

2080. $\int \cos^2 \sqrt{x} \, dx.$

2074. $\int e^{ax} \cos^3 bx \, dx.$

2081. Доказать, что если R — рациональная функция и числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ соизмеримы, то интеграл

$$\int R(e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \dots, e^{a_n x}) \, dx$$

есть элементарная функция.

Найти следующие интегралы:

2082. $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}.$

2085. $\int \frac{dx}{1 + e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}}}.$

2083. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} \, dx.$

2086. $\int \frac{1 + e^{\frac{x}{2}}}{(1 + e^{\frac{x}{3}})^2} \, dx.$

2084. $\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2}.$

2087. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}.$

2089. $\int \sqrt{e^{2x} + 4e^x - 1} dx.$

2088. $\int \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} dx.$

2090. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x} + \sqrt{1 - e^x}}.$

2091. Доказать, что интеграл

$$\int R(x) e^{ax} dx,$$

где R — рациональная функция, знаменатель которой имеет лишь действительные корни, выражается через элементарные функции и трансцендентную функцию

$$\int \frac{e^{ax}}{x} dx = \text{li}(e^{ax}) + C,$$

где

$$\text{li } x = \int \frac{dx}{\ln x}.$$

2092. В каком случае интеграл

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right) e^x dx,$$

где $P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}$ и $a_0, a_1, \dots, a_n$ — постоянны, представляет собой элементарную функцию?

Найти интегралы:

2093. $\int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x dx.$

2096. $\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx.$

2094. $\int \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-x} dx.$

2097. $\int \frac{x^4 e^{2x}}{(x-2)^2} dx.$

2095. $\int \frac{e^{2x}}{x^2 - 3x + 2} dx.$

Найти интегралы, содержащие функции $\ln f(x)$, $\text{arctg } f(x)$, $\arcsin f(x)$, $\arccos f(x)$, где $f(x)$ — алгебраическая функция:

2098. $\int \ln^n x dx$ (n — натуральное число).

2099. $\int x^2 \ln^3 x dx.$

2100. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx.$

2101. $\int \ln[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}] \cdot \frac{dx}{(x+a)(x+b)}.$

2102. $\int \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$

2103. $\int \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) dx.$

2067. Доказать, что если $P(x)$ — многочлен степени n , то

$$\begin{aligned} \int P(x) \cos ax \, dx = & \frac{\sin ax}{a} \left[P(x) - \frac{P'(x)}{a^2} + \frac{P''(x)}{a^4} - \dots \right] + \\ & + \frac{\cos ax}{a^2} \left[P'(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P'''(x)}{a^4} - \dots \right] + C \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \int P(x) \sin ax \, dx = & -\frac{\cos ax}{a} \left[P(x) - \frac{P'(x)}{a^2} + \frac{P''(x)}{a^4} - \dots \right] + \\ & + \frac{\sin ax}{a^2} \left[P'(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P'''(x)}{a^4} - \dots \right] + C. \end{aligned}$$

Найти интегралы:

2068. $\int x^3 e^{3x} \, dx.$

2075. $\int e^{ax} \sin^2 bx \, dx.$

2069. $\int (x^2 - 2x + 2) e^{-x} \, dx.$

2076. $\int x e^x \sin x \, dx.$

2070. $\int x^{\frac{1}{2}} \sin 5x \, dx.$

2077. $\int x^2 e^x \cos x \, dx.$

2071. $\int (1 + x^2)^3 \cos x \, dx.$

2078. $\int x e^x \sin^2 x \, dx.$

2072. $\int x^7 e^{-x^2} \, dx.$

2079. $\int (x - \sin x)^2 \, dx.$

2073. $\int x^2 e^{\sqrt{x}} \, dx.$

2080. $\int \cos^2 \sqrt{x} \, dx.$

2074. $\int e^{ax} \cos^2 bx \, dx.$

2081. Доказать, что если R — рациональная функция и числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ сопримерны, то интеграл

$$\int R(e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \dots, e^{a_n x}) \, dx$$

есть элементарная функция.

Найти следующие интегралы:

2082. $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}.$

2085. $\int \frac{dx}{1 + e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}}}.$

2083. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} \, dx.$

2086. $\int \frac{1+e^{\frac{x}{2}}}{(1+e^{\frac{x}{4}})^2} \, dx.$

2084. $\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2}.$

2087. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}.$

2089. $\int \sqrt{e^{2x} + 4e^x - 1} dx.$

2088. $\int \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} dx.$

2090. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x} + \sqrt{1 - e^x}}.$

2091. Доказать, что интеграл

$$\int R(x) e^{ax} dx,$$

где R — рациональная функция, знаменатель которой имеет лишь действительные корни, выражается через элементарные функции и трансцендентную функцию

$$\int \frac{e^{ax}}{x} dx = \text{li}(e^{ax}) + C,$$

где

$$\text{li } x = \int \frac{dx}{\ln x}.$$

2092. В каком случае интеграл

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right) e^x dx,$$

где $P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}$ и $a_0, a_1, \dots, a_n$ — постоянны, представляет собой элементарную функцию?

Найти интегралы:

2093. $\int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x dx.$

2096. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx.$

2094. $\int \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-x} dx.$

2097. $\int \frac{x^2 e^{2x}}{(x-2)^2} dx.$

2095. $\int \frac{e^{2x}}{x^2 - 3x + 2} dx.$

Найти интегралы, содержащие функции $\ln f(x)$, $\arctg f(x)$, $\arcsin f(x)$, $\arccos f(x)$, где $f(x)$ — алгебраическая функция:

2098. $\int \ln^n x dx$ (n — натуральное число).

2099. $\int x^3 \ln^3 x dx.$

2100. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx.$

2101. $\int \ln[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}] \cdot \frac{dx}{(x+a)(x+b)}.$

2102. $\int \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$

2103. $\int \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) dx.$

$$2104. \int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

$$2105. \int x \operatorname{arctg}(x+1) dx.$$

$$2106. \int \sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$$

$$2107. \int x \arcsin(1-x) dx.$$

$$2108. \int \arcsin \sqrt{x} dx.$$

$$2109. \int x \arccos \frac{1}{x} dx.$$

$$2110. \int \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} dx.$$

$$2111. \int \frac{\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

$$2112. \int \frac{x \arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

$$2113. \int x \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2) dx.$$

$$2114. \int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$$

$$2115. \int \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Найти интегралы, содержащие гиперболические функции:

$$2116. \int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch}^3 x dx.$$

$$2117. \int \operatorname{ch}^4 x dx.$$

$$2118. \int \operatorname{sh}^3 x dx.$$

$$2119. \int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 2x \operatorname{sh} 3x dx.$$

$$2120. \int \operatorname{th} x dx.$$

$$2121. \int \operatorname{cth}^2 x dx.$$

$$2122. \int \sqrt{\operatorname{th} x} dx.$$

$$2123. \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x + 2 \operatorname{ch} x}.$$

$$2123.1. \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x - 4 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + 9 \operatorname{ch}^2 x}.$$

$$2123.2. \int \frac{dx}{0,1 + \operatorname{ch} x}.$$

$$2123.3. \int \frac{\operatorname{ch} x dx}{3 \operatorname{sh} x - 4 \operatorname{ch} x}.$$

$$2124. \int \operatorname{sh} ax \sin bx dx.$$

$$2125. \int \operatorname{sh} ax \cos bx dx.$$

§ 6. Разные примеры на интегрирование функций

Найти интегралы:

$$2126. \int \frac{dx}{x^2(1+x^2)}.$$

$$2127. \int \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^2}.$$

$$2128. \int \frac{dx}{1+x^6+x^9}.$$

$$2129. \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$$

$$2130. \int x^2 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx.$$

$$2131. \int \frac{x+2}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$2132. \int \sqrt{\frac{x}{1-x}} \sqrt{x} dx.$$

$$2133. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^3}}.$$

2134. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}.$
 2135. $\int \frac{dx}{x \sqrt{1+x^2+x^4}}.$
 2136. $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^4-2x^2-1}}.$
 2137. $\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}} dx.$
 2138. $\int \frac{(1+x) dx}{x+\sqrt{x+x^2}}.$
 2139. $\int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2} dx.$
 2140. $\int (2x+3) \arccos(2x-3) dx.$
 2141. $\int x \ln(4+x^4) dx.$
 2142. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} \cdot \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$
 2143. $\int \frac{x \ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx.$
 2144. $\int x \sqrt{x^2+1} \ln \sqrt{x^2-1} dx.$
 2145. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx.$
 2146. $\int \frac{dx}{(2+\sin x)^2}.$
 2147. $\int \frac{\sin 4x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx.$
 2148. $\int \frac{dx}{\sin x \sqrt{1+\cos x}}.$
 2149. $\int \frac{ax^2+b}{x^2+1} \operatorname{arctg} x dx.$
 2150. $\int \frac{ax^2+b}{x^2-1} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| dx.$
 2151. $\int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx.$
 2152. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$
 2153. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}} dx.$
 2154. $\int \frac{x^2 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$
 2155. $\int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$
 2156. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2} dx.$
 2157. $\int \frac{x \ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2} dx.$
 2158. $\int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx.$
 2159. $\int x(1+x^2) \operatorname{arctg} x dx.$
 2160. $\int x^x(1+\ln x) dx.$
 2161. $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx.$
 2162. $\int \frac{\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)} dx.$
 2163. $\int \frac{dx}{(e^x+1)^2 - (e^x-1)^2}.$
 2164. $\int \sqrt{\operatorname{th}^2 x + 1} dx.$
 2165. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} \cdot e^x dx.$
 2166. $\int |x| dx.$
 2167. $\int x|x| dx.$
 2168. $\int (x+|x|)^2 dx.$
 2169. $\int \{|1+x|-|1-x|\} dx.$
 2170. $\int e^{-|x|} dx.$
 2171. $\int \max(1, x^2) dx.$

2172. $\int \varphi(x) dx$, где $\varphi(x)$ — расстояние числа x до ближайшего целого числа.

2173. $\int [x] |\sin \pi x| dx \quad (x \geq 0).$

2174. $\int f(x) dx$, где $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{при } |x| \leq 1; \\ 1-|x| & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$

2175. $\int f(x) dx$, где $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } -\infty < x < 0; \\ x+1, & \text{если } 0 \leq x \leq 1; \\ 2x, & \text{если } 1 < x < +\infty. \end{cases}$

2176. Найти $\int x f''(x) dx$.

2177. Найти $\int f'(2x) dx$.

2178. Найти $f(x)$, если $f'(x^2) = \frac{1}{x} \quad (x > 0).$

2179. Найти $f(x)$, если $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$.

2180. Найти $f(x)$, если

$$f'(\ln x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ x & \text{при } 1 < x < +\infty \end{cases}$$

и $f(0) = 0$.

2180.1. Пусть $f(x)$ — монотонная непрерывная функция и $f^{-1}(x)$ — ее обратная функция.

Доказать, что если

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f^{-1}(x) dx = x f^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C.$$

Рассмотреть примеры: а) $f(x) = x^n \quad (n > 0)$; б) $f(x) = e^x$; в) $f(x) = \arcsin x$; г) $f(x) = \operatorname{Arth} x$.

ОТДЕЛ IV

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Определенный интеграл как предел суммы

1°. Интеграл в смысле Римана. Если функция $f(x)$ определена на $[a, b]$ и $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, то *интегралом* функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ называется число

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (1)$$

где $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ и $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

Для существования предела (1) необходимо и достаточно, чтобы *нижняя интегральная сумма*

$$\underline{S} = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$$

и *верхняя интегральная сумма*

$$\bar{S} = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i,$$

где

$$m_i = \inf_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x) \text{ и } M_i = \sup_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x),$$

имели общий предел при $\max |\Delta x_i| \rightarrow 0$.

Функции $f(x)$, для которых предел в правой части равенства (1) существует, называются *интегрируемыми* (собственно) на соответствующем промежутке. В частности, а) непрерывная функция; б) ограниченная функция, имеющая конечное число точек разрыва; в) ограниченная монотонная функция, — интегрируемы на любом конечном сегменте. Если функция $f(x)$ не ограничена на сегменте $[a, b]$, то она собственно неинтегрируема на $[a, b]$.

2°. Условие интегрируемости. Необходимым и достаточным условием интегрируемости на данном сегменте $[a, b]$ функции $f(x)$ является выполнение равенства

$$\lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0,$$

где $\omega_i = M_i - m_i$ — колебание функции $f(x)$ на сегменте $[x_i, x_{i+1}]$.

2181. Найти интегральную сумму S_n для функции

$$f(x) = 1 + x$$

на сегменте $[-1, 4]$, разбивая его на n равных промежутков и выбирая значения аргумента ξ_i ($i=0, 1, \dots, n-1$) в серединах этих промежутков.

2182. Для данных функций $f(x)$ найти нижнюю $\underline{S}_n$ и верхнюю $\bar{S}_n$ интегральные суммы на соответствующих сегментах, деля их на n равных частей, если

а) $f(x) = x^3$ $[-2 \leq x \leq 3]$;

б) $f(x) = \sqrt{x}$ $[0 \leq x \leq 1]$;

в) $f(x) = 2^x$ $[0 \leq x \leq 10]$.

2183. Найти нижнюю интегральную сумму для функции $f(x) = x^4$ на сегменте $[1, 2]$, разбивая этот сегмент на n частей, длины которых образуют геометрическую прогрессию. Чему равен предел этой суммы при $n \rightarrow \infty$?

2184. Исходя из определения интеграла, найти

$$\int_0^T (v_0 + gt) dt,$$

где v_0 и g — постоянны.

Вычислить определенные интегралы, рассматривая их как пределы соответствующих интегральных сумм и производя разбиение промежутка интегрирования надлежащим образом:

2185. $\int_{-1}^2 x^2 dx.$

2187. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx.$

2186. $\int_0^1 a^x dx$ ($a > 0$).

2188. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt.$

2189. $\int_a^b \frac{dx}{x^3}$ ($0 < a < b$).

У к а з а н и е. Положить $\xi_i = \sqrt{x_i x_{i+1}}$ ($i=0, 1, \dots, n$).

2190. $\int_a^b x^m dx$ ($0 < a < b$; $m \neq -1$).

У к а з а н и е. Выбрать точки деления так, чтобы их абсциссы x_i образовывали геометрическую прогрессию.

2191. $\int_a^b \frac{dx}{x}$ ($0 < a < b$).

2192. Вычислить интеграл Пуассона

$$\int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx$$

при: а) $|\alpha| < 1$; б) $|\alpha| > 1$.

Указание. Воспользоваться разложением многочлена $\alpha^{2n} - 1$ на квадратичные множители.

2193. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a, b]$. Доказать, что

$$\lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \varphi(\theta_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx,$$

где $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$, $x_i \leq \theta_i \leq x_{i+1}$, $(i=0, 1, \dots, n-1)$ и $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ($x_0 = a$, $x_n = b$).

2193.1. Пусть $f(x)$ ограничена и монотонна на $[0, 1]$. Доказать, что

$$\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

2193.2. Пусть функция $f(x)$ ограничена и выпукла сверху (см. 1312) на сегменте $[a, b]$.

Доказать, что

$$(b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

2193.3. Пусть $f(x) \in C^{(3)}[1, +\infty)$ и $f(x) \geq 0$, $f'(x) \geq 0$, $f''(x) \leq 0$ при $x \in [1, +\infty)$.

Доказать, что

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \frac{1}{2} f(n) + \int_1^n f(x) dx + O(1)$$

при $n \rightarrow \infty$.

2193.4. Пусть $f(x) \in C^{(1)}[a, b]$ и

$$\Delta_n = \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right).$$

Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} n \Delta_n$.

2194. Показать, что разрывная функция

$$f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$$

интегрируема на промежутке $[0, 1]$.

2195. Показать, что функция Римана

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально;} \\ \frac{1}{n}, & \text{если } x = \frac{m}{n}, \end{cases}$$

где m и n ($n \geq 1$) — взаимно простые целые числа, интегрируема на любом конечном промежутке.

2196. Показать, что функция

$$f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right], \text{ если } x \neq 0$$

и $f(0) = 0$, интегрируема на сегменте $[0, 1]$.

2197. Доказать, что функция Дирихле

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально;} \\ 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \end{cases}$$

не интегрируема на любом промежутке.

2198. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и

$$f_n(x) = \sup f(x) \text{ при } x_i \leq x < x_{i+1},$$

где

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b-a) \quad (i=0, 1, \dots, n; n=1, 2, \dots).$$

Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

2199. Доказать, что если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то существует последовательность непрерывных функций $\varphi_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) такая, что

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^c \varphi_n(x) dx \text{ при } a \leq c \leq b.$$

2200. Доказать, что если ограниченная функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то абсолютная величина ее $|f(x)|$ также интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

2201. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на сегменте $[a, b]$, т. е. интеграл $\int_a^b |f(x)| dx$ существует. Является ли эта функция интегрируемой на $[a, b]$?

Рассмотреть пример:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально;} \\ -1, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

2202. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $A \leq f(x) \leq B$ при $a \leq x \leq b$, а функция $\varphi(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[A, B]$. Доказать, что функция $\varphi(f(x))$ интегрируема на $[a, b]$.

2203. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы, то обязательно ли функция $f(\varphi(x))$ также интегрируема?

Рассмотреть пример:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x=0; \\ 1, & \text{если } x \neq 0, \end{cases}$$

и $\varphi(x)$ — функция Римана (см. задачу 2195).

2204. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[A, B]$. Доказать, что функция $f(x)$ обладает свойством *интегральной непрерывности*, т. е.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0,$$

где $[a, b] \subset [A, B]$.

2205. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$. Доказать, что равенство

$$\int_a^b f^2(x) dx = 0$$

имеет место тогда и только тогда, если $f(x) = 0$ во всех точках непрерывности функции $f(x)$, принадлежащих сегменту $[a, b]$.

§ 2. Вычисление определенных интегралов с помощью неопределенных

1°. Формула Ньютона—Лейбница. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a, b]$ и $F(x)$ — ее первообразная, т. е. $F'(x) = f(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

Определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ при $f(x) \geq 0$ геометрически представляет собой площадь S криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью Ox и двумя перпендикулярами к оси Ox : $x=a$ и $x=b$ (рис. 9).

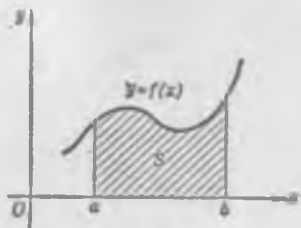


Рис. 9.

2°. Формула интегрирования по частям. Если $f(x)$, $g(x) \in C^{(1)}[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x) f'(x) dx.$$

3°. Замена переменной. Если: 1) функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$; 2) функция $\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на сегменте $[\alpha, \beta]$, где $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$; 3) сложная функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Применяя формулу Ньютона—Лейбница, найти следующие определенные интегралы и нарисовать соответствующие криволинейные площади:

$$2206. \int_{-1}^0 \sqrt[3]{x} dx.$$

$$2209. \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$2207. \int_0^{\pi} \sin x dx.$$

$$2210. \int_{\operatorname{sh} 1}^{\operatorname{sh} 2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$2208. \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$2211. \int_0^2 |1-x| dx.$$

$$2212. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} \quad (0 < \alpha < \pi).$$

$$2213. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + \varepsilon \cos x} \quad (0 \leq \varepsilon < 1).$$

$$2214. \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}} \quad (|a| < 1, |b| < 1, ab > 0).$$

$$2215. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^3 \sin^3 x + b^3 \cos^3 x} \quad (ab \neq 0).$$

2216. Объяснить, почему формальное применение формулы Ньютона — Лейбница приводит к неверным результатам, если:

$$a) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x}; \quad б) \int_0^{2\pi} \frac{\sec^2 x \, dx}{2 + \lg^2 x}; \quad в) \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right) dx.$$

$$2217. \text{Найти} \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) dx.$$

$$2218. \text{Найти} \int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} \, dx.$$

С помощью определенных интегралов найти пределы следующих сумм:

$$2219. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right).$$

$$2220. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right).$$

$$2221. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right).$$

$$2222. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right).$$

$$2223. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} \quad (p > 0).$$

$$2224. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right).$$

Найти

$$2225. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}, \quad 2226. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f \left(a + k \frac{b-a}{n} \right) \right].$$

Отбрасывая равномерно бесконечно малые высших порядков, найти пределы следующих сумм:

$$2227. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{n^2} + \left(1 + \frac{2}{n}\right) \sin \frac{2\pi}{n^2} + \dots \right. \\ \left. \dots + \left(1 + \frac{n-1}{n}\right) \sin \frac{(n-1)\pi}{n^2} \right].$$

$$2228. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{12 + \cos \frac{k\pi}{n}}.$$

$$2229. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2} \quad (x > 0).$$

$$2230. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{2^n}}{n+1} + \frac{\frac{2}{2^n}}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{\frac{n}{2^n}}{n+\frac{1}{n}} \right).$$

2231. Найти:

$$\frac{d}{da} \int_a^b \sin x^3 dx, \quad \frac{d}{da} \int_a^b \sin x^3 dx, \quad \frac{d}{db} \int_a^b \sin x^3 dx.$$

2232. Найти:

$$a) \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt; \quad б) \frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}; \quad в) \frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt.$$

2233. Найти:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos x^2 dx}{x}; \quad б) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} x)^3 dx}{\sqrt{x^2+1}}; \quad в) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{x^2} dx \right)^2}{\int_0^x e^{x^2} dx}.$$

2233. 1. Пусть $f(x) \in C[0, +\infty]$ и $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow +\infty$.

Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx) dx$.

2234. Доказать, что

$$\int_0^x e^{x^2} dx \sim \frac{1}{2x} e^{x^2}$$

при $x \rightarrow \infty$.

2235. Найти

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\lg x} dx}{\int_0^{\lg x} \sqrt{\sin x} dx}.$$

2236. Пусть $f(x)$ — непрерывная положительная функция. Доказать, что функция

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}$$

возрастает при $x \geq 0$.

2237. Найти:

а) $\int_0^2 f(x) dx$, если $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x & \text{при } 1 < x \leq 2; \end{cases}$

б) $\int_0^1 f(x) dx$, если $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 \leq x \leq t, \\ t \cdot \frac{1-x}{1-t} & \text{при } t \leq x \leq 1. \end{cases}$

2238. Вычислить и построить графики интегралов $I = I(\alpha)$, рассматривая их как функции параметра α , если:

а) $I = \int_0^1 x |x - \alpha| dx;$

б) $I = \int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{1 + 2\alpha \cos x + \alpha^2} dx;$ в) $I = \int_0^\pi \frac{\sin x dx}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}}.$

Применяя формулу интегрирования по частям, найти следующие определенные интегралы:

2239. $\int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx.$

2242. $\int_0^{\frac{1}{e}} |\ln x| dx.$

2240. $\int_0^\pi x \sin x dx.$

2243. $\int_0^{\frac{1}{e}} \arccos x dx.$

2241. $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx.$

2244. $\int_0^{\sqrt[3]{3}} x \operatorname{arctg} x dx.$

Применяя подходящую замену переменной, найти следующие определенные интегралы:

$$2245. \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}}.$$

$$2248. \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx.$$

$$2246. \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

$$2249. \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$

$$2247. \int_0^{0.75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

$$2250. \text{Вычислить интеграл } \int_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx, \text{ полагая } x - \frac{1}{x} = t.$$

2251. Объяснить, почему формальная замена $x = \varphi(t)$ приводит к неверным результатам, если:

$$\text{а) } \int_{-1}^1 dx, \text{ где } t = x^{\frac{2}{3}}; \quad \text{в) } \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin^2 x}, \text{ где } \operatorname{tg} x = t.$$

$$\text{б) } \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}, \text{ где } x = \frac{1}{t};$$

2252. Можно ли в интеграле

$$\int_0^3 x \sqrt[3]{1-x^2} dx$$

положить $x = \sin t$?

2253. Можно ли в интеграле $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ при замене переменной $x = \sin t$ в качестве новых пределов взять числа π и $\frac{\pi}{2}$?

2254. Доказать, что если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \int_0^1 f(a + (b-a)x) dx.$$

2255. Доказать равенство

$$\int_0^a x^2 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x f(x) dx \quad (a > 0).$$

2256. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на сегменте $[A, B] \supset [a, b]$. Найти $\frac{d}{dx} \int_a^b f(x+y) dy$ при $[a-x, b-x] \subset [A, B]$.

2257. Доказать, что если $f(x)$ непрерывна на $[0, 1]$, то

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx;$$

$$б) \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

2258. Доказать, что для непрерывной на $[-l, l]$ функции $f(x)$ имеем:

$$1) \int_{-l}^l f(x) dx = 2 \int_0^l f(x) dx,$$

если функция $f(x)$ четная, и

$$2) \int_{-l}^l f(x) dx = 0,$$

если функция $f(x)$ нечетная. Дать геометрическую интерпретацию этих фактов.

2259. Доказать, что одна из первообразных четной функции есть функция нечетная, а всякая первообразная нечетной функции есть функция четная.

2260. Вычислить интеграл

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x + \frac{1}{x}} dx,$$

введя новую переменную

$$t = x + \frac{1}{x}.$$

2261. В интеграле

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx$$

выполнить замену переменного $\sin x = t$.

2262. Вычислить интеграл

$$\int_{e^{-2\pi n}}^1 \left| \cos \left(\ln \frac{1}{x} \right) \right| dx,$$

где n — натуральное число.

2263. Найти

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

2264. Найти интеграл

$$\int_{-1}^3 \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} dx,$$

если

$$f(x) = \frac{(x+1)^2(x-1)}{x^2(x-2)}.$$

2265. Доказать, что если $f(x)$ — непрерывная периодическая функция, определенная при $-\infty < x < +\infty$ и имеющая период T , то

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx,$$

где a — любое число.

2266. Доказать, что при n нечетном функции

$$F(x) = \int_0^x \sin^n x dx \quad \text{и} \quad G(x) = \int_0^x \cos^n x dx$$

периодические с периодом 2π ; а при n четном каждая из этих функций есть сумма линейной функции и периодической функции.

2267. Доказать, что функция

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(x) dx,$$

где $f(x)$ — непрерывная периодическая функция с периодом T , в общем случае, есть сумма линейной функции и периодической функции периода T .

Вычислить интегралы:

2268. $\int_0^1 x(2-x^2)^{13} dx.$

2270. $\int_1^e (x \ln x)^2 dx.$

2269. $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{x^3 + x + 1}.$

2271. $\int_1^9 x \sqrt[3]{1-x} dx.$

$$2272. \int_{-\frac{1}{2}}^{-1} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$2273. \int_0^1 x^{14} \sqrt{1 + 3x^8} dx.$$

$$2274. \int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx.$$

$$2275. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2 + \cos x)(3 + \cos x)}.$$

$$2276. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$$

$$2277. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \sin 3x dx.$$

$$2278. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \sin x)^2 dx.$$

$$2279. \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx.$$

$$2280. \int_0^{\ln 2} \operatorname{sh}^4 x dx.$$

С помощью формул понижения вычислить интегралы, зависящие от параметра n , принимающего целые положительные значения:

$$2281. I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$

$$2284. I_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n dx.$$

$$2282. I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$$

$$2285. I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$2283. I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} x dx.$$

$$2286. I_n = \int_0^1 x^n (\ln x)^n dx.$$

$$2287. I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \right)^{2n+1} dx.$$

Если $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$ есть комплексная функция от действительной переменной x , где $f_1(x) = \operatorname{Re} f(x)$, $f_2(x) = \operatorname{Im} f(x)$ и $i^2 = -1$, то по определению полагают:

$$\int f(x) dx = \int f_1(x) dx + i \int f_2(x) dx.$$

Очевидно, что

$$\operatorname{Re} \int f(x) dx = \int \operatorname{Re} f(x) dx$$

и

$$\operatorname{Im} \int f(x) dx = \int \operatorname{Im} f(x) dx.$$

2288. Пользуясь формулой Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

показать, что

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ 2\pi, & \text{если } m = n \end{cases}$$

(n и m — целые).

2289. Показать, что

$$\int_a^b e^{(\alpha + i\beta)x} dx = \frac{e^{b(\alpha + i\beta)} - e^{a(\alpha + i\beta)}}{\alpha + i\beta}$$

(α и β — постоянные).

Пользуясь формулами Эйлера:

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}),$$

вычислить интегралы (m и n — целые положительные числа):

$$2290. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx. \quad 2293. \int_0^{\pi} \cos^n x \cos nx dx.$$

$$2291. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x} dx. \quad 2294. \int_0^{\pi} \sin^n x \sin nx dx.$$

$$2292. \int_0^{\pi} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} dx.$$

Найти интегралы (n — натуральное число):

$$2295. \int_0^{\pi} \sin^{n-1} x \cos(n+1)x dx. \quad 2297. \int_0^{2\pi} e^{-ax} \cos^{2n} x dx.$$

$$2296. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin(n+1)x dx. \quad 2298. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \cdot \cos 2nx dx.$$

2299. Применяя многократное интегрирование по частям, вычислить интеграл Эйлера: $B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$, где m и n — целые положительные числа.

2300. Многочлен Лежандра $P_n(x)$ определяется следующей формулой: $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Доказать, что

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

2301. Пусть функция $f(x)$ собственнo интегрируема на $[a, b]$ и $F(x)$ — функция такая, что $F'(x) = f(x)$ всюду в $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа внутренних точек $c_i (i=1, \dots, p)$ и точек a и b , где функция $F(x)$ терпит разрыв 1-го рода («обобщенная первообразная»). Доказать, что

$$\int_a^b f(x) dx = F(b-0) - F(a+0) - \sum_{i=1}^p [F(c_i+0) - F(c_i-0)].$$

2302. Пусть функция $f(x)$ собственнo интегрируема на сегменте $[a, b]$ и

$$F(x) = C + \int_a^x f(\xi) d\xi$$

— ее неопределенный интеграл.

Доказать, что функция $F(x)$ непрерывна и во всех точках непрерывности функции $f(x)$ имеет место равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Что можно сказать о производной функции $F(x)$ в точках разрыва функции $f(x)$?

Рассмотреть примеры:

а) $f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$ и $f(x) = 0$ при $x \neq \frac{1}{n}$;

б) $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

Найти неопределенные интегралы от ограниченных разрывных функций:

2303. $\int \operatorname{sgn} x dx$.

2306. $\int x[x] dx \quad (x \geq 0)$.

2304. $\int \operatorname{sgn}(\sin x) dx$.

2307. $\int (-1)^{[x]} dx$.

2305. $\int [x] dx \quad (x \geq 0)$.

2308. $\int_0^x f(x) dx$, где $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$

Вычислить определенные интегралы от ограниченных разрывных функций:

2309. $\int_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^2) dx$.

2310. $\int_0^2 [e^x] dx$.

$$2311. \int_b^{\pi} [x] \sin \frac{\pi x}{b} dx.$$

$$2312. \int_0^{\pi} x \operatorname{sgn}(\cos x) dx.$$

$$2313. \int_1^{a+1} \ln [x] dx, \text{ где } a \text{ — натуральное число.}$$

$$2314. \int_0^1 \operatorname{sgn}[\sin(\ln x)] dx.$$

2315. Найти $\int_E |\cos x| \sqrt{\sin x} dx$, где E — множество тех значений сегмента $[0, 4\pi]$, для которых подынтегральное выражение имеет смысл.

§ 3. Теоремы о среднем

1°. Среднее значение функции. Число

$$M[f] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

называется *средним значением* функции $f(x)$ на промежутке $[a, b]$.

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$M[f] = f(c).$$

2°. Первая теорема о среднем. Если: 1) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ ограничены и соответственно интегрируемы на сегменте $[a, b]$; 2) функция $\varphi(x)$ не меняет знака при $a < x < b$, то

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \mu \int_a^b \varphi(x) dx,$$

где $m \leq \mu \leq M$ и $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$, $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$; 3) если, сверх того, функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то $\mu = f(c)$, где $a \leq c \leq b$.

3°. Вторая теорема о среднем. Если: 1) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ ограничены и собственно интегрируемы на сегменте $[a, b]$; 2) функция $\varphi(x)$ монотонна при $a < x < b$, то

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \varphi(a+0) \int_a^{\xi} f(x) dx + \varphi(b-0) \int_{\xi}^b f(x) dx,$$

где $a \leq \xi \leq b$; 3) если, сверх того, функция $\varphi(x)$ монотонно убывающая (в широком смысле!) и неотрицательная, то

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \varphi(a+0) \int_a^{\xi} f(x) dx \quad (a \leq \xi \leq b);$$

3') если же функция $\varphi(x)$ монотонно возрастающая (в широком смысле) и неотрицательная, то

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \varphi(b-0) \int_a^b f(x) dx \quad (a \leq x \leq b).$$

2316. Определить знаки следующих определенных интегралов:

а) $\int_0^{2\pi} x \sin x dx$;

в) $\int_{-2}^2 x^3 2^x dx$;

б) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$;

г) $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \ln x dx$.

2317. Какой интеграл больше:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx$ или $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$?

б) $\int_0^1 e^{-x} dx$ или $\int_0^1 e^{-x^2} dx$?

в) $\int_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx$ или $\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx$?

2318. Определить средние значения данных функций в указанных промежутках:

а) $f(x) = x^2$ на $[0, 1]$;

б) $f(x) = \sqrt{x}$ на $[0, 100]$;

в) $f(x) = 10 + 2 \sin x + 3 \cos x$ на $[0, 2\pi]$;

г) $f(x) = \sin x \sin(x + \varphi)$ на $[0, 2\pi]$.

2319. Найти среднее значение длины фокального радиуса-вектора эллипса

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi} \quad (0 < e < 1).$$

2320. Найти среднее значение скорости свободно падающего тела, начальная скорость которого равна v_0 .

2321. Сила переменного тока меняется по закону

$$i = i_0 \sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi \right),$$

где i_0 — амплитуда, t — время, T — период и φ — начальная фаза. Найти среднее значение квадрата силы тока.

2321.1. Пусть $f(x) \in C[0, +\infty)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$. Найти

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(x) dx.$$

Рассмотреть пример $f(x) = \arctg x$.

2322. Пусть

$$\int_0^x f(t) dt = xf(\theta x).$$

Найти θ , если:

а) $f(t) = t^n$ ($n > -1$);

б) $f(t) = \ln t$; в) $f(t) = e^t$.

Чему равны $\lim_{x \rightarrow +0} \theta$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta$?

Пользуясь первой теоремой о среднем, оценить интегралы:

2323. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + 0,5 \cos x}.$

2324. $\int_0^1 \frac{x^*}{\sqrt{1+x}} dx.$

2325. $\int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx.$

2326. Доказать равенства:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0$.

2326.1. Найти:

а) $\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{dx}{ax^3 + 1}$; б) $\lim_{a \rightarrow +0} \int_{ae}^{be} f(x) \frac{dx}{x},$

где $a > 0$, $b > 0$ и $f(x) \in C[0, 1]$.

2327. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $\varphi(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) , причем

$$\varphi'(x) \geq 0 \quad \text{при} \quad a < x < b.$$

Доказать вторую теорему о среднем, применяя интегрирование по частям и используя первую теорему о среднем.

Пользуясь второй теоремой о среднем, оценить интегралы:

2328. $\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$

$$2329. \int_a^b \frac{e^{-\alpha x}}{x} \sin x \, dx \quad (\alpha \geq 0; 0 < a < b).$$

$$2330. \int_a^b \sin x^2 \, dx \quad (0 < a < b).$$

2331. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ интегрируемы на промежутке $[a, b]$ вместе со своими квадратами. Доказать *неравенство Коши — Буняковского*

$$\left\{ \int_a^b \varphi(x) \psi(x) \, dx \right\}^2 \leq \int_a^b \varphi^2(x) \, dx \int_a^b \psi^2(x) \, dx.$$

2332. Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на сегменте $[a, b]$ и $f(a) = 0$.

Доказать неравенство

$$M^2 \leq (b-a) \int_a^b f'^2(x) \, dx,$$

где

$$M = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

2333. Доказать равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} \, dx = 0 \quad (p > 0).$$

§ 4. Несобственные интегралы

1°. Несобственная интегрируемость функций. Если функция $f(x)$ собственно интегрируема на каждом конечном сегменте $[a, b]$, то, по определению, полагают:

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \, dx. \quad (1)$$

Если функция $f(x)$ не ограничена в окрестности точки b и собственно интегрируема на каждом сегменте $[a, b-\varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$), то принимают:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) \, dx. \quad (2)$$

Если пределы (1) или (2) существуют, то соответствующий интеграл называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся* (в элементарном смысле!).

2°. Критерий Коши. Для сходимости интеграла (1) необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало число $b = b(\varepsilon)$ такое, что при любых $b' > b$ и $b'' > b$ было бы выполнено неравенство

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Аналогично формулируется критерий Коши для интеграла типа (2).

3°. Признаки абсолютной сходимости. Если $|f(x)|$ несобственно интегрируема, то соответствующий элементарный интеграл (1) или (2) от функции $f(x)$ называется *абсолютно сходящимся* и является интегралом заведомо сходящимся.

Признак сравнения I. Пусть $|f(x)| \leq F(x)$ при $x \geq a$.

Если $\int_a^{+\infty} F(x) dx$ сходится, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится абсолютно.

Признак сравнения II. Если $\psi(x) > 0$ и $\varphi(x) = O^*(\psi(x))$ при $x \rightarrow +\infty$, то интегралы $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ и $\int_a^{+\infty} \psi(x) dx$ сходятся или расходятся одновременно. В частности, это имеет место, если $\varphi(x) \sim \psi(x)$ при $x \rightarrow +\infty$.

Признак сравнения III. а) Пусть

$$f(x) = O^*\left(\frac{1}{x^p}\right) \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

В таком случае интеграл (1) сходится, если $p > 1$, и расходится, если $p \leq 1$.

б) Пусть

$$f(x) = O^*\left(\frac{1}{(b-x)^p}\right) \text{ при } x \rightarrow b-0.$$

В таком случае интеграл (2) сходится, если $p < 1$ и расходится, если $p \geq 1$.

4°. Специальный признак сходимости. Если: 1) функция $\varphi(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$ и 2) функция $f(x)$ имеет ограниченную первообразную

$$F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi,$$

то интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx$$

сходится, вообще говоря, не абсолютно.

В частности, интегралы

$$\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx \quad \text{и} \quad \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (a > 0)$$

сходятся, если $p > 0$.

5°. Главное значение в смысле Коши. Если функция $f(x)$ такова, что при любом $\varepsilon > 0$ существуют собственные интегралы

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx \quad \text{и} \quad \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \quad (a < c < b),$$

то под *главным значением в смысле Коши* (в. п.) понимается число

$$\text{в. п. } \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right].$$

Аналогично

$$\text{в. п. } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(x) dx.$$

Вычислить интегралы:

$$2334. \int_a^{\infty} \frac{dx}{x^2} \quad (a > 0).$$

$$2340. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$2335. \int_0^1 \ln x dx.$$

$$2341. \int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx.$$

$$2336. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$2342. \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$$

$$2337. \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$2343. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^{16}}}.$$

$$2338. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}.$$

$$2344. \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx.$$

$$2339. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}.$$

$$2345. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2} dx.$$

$$2346. \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx \quad (a > 0).$$

$$2347. \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx \quad (a > 0).$$

С помощью формул понижения вычислить следующие несобственные интегралы (n — натуральное число):

$$2348. I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx.$$

$$2349. I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2 + 2bx + c)^2} \quad (ac - b^2 > 0).$$

$$2350. I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1) \dots (x+n)}.$$

$$2351. I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{V(1-x)(1+x)}. \quad 2352. I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^{n+1} x}.$$

$$2353. \text{ а) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx; \quad \text{ б) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \, dx.$$

2354. Найти

$$\int_E e^{-\frac{x}{2}} \frac{|\sin x - \cos x|}{V \sin x} dx,$$

где E — множество тех значений x интервала $(0, +\infty)$, для которых подынтегральное выражение имеет смысл.

2355. Доказать равенство

$$\int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(Vx^2 + 4ab) dx,$$

где $a > 0$ и $b > 0$, предполагая, что интеграл в левой части равенства имеет смысл.

2356. Средним значением функции $f(x)$ на интервале $(0, +\infty)$ называется число

$$M|f| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(\xi) d\xi.$$

Найти средние значения следующих функций:

а) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2(x\sqrt{2})$;

б) $f(x) = \operatorname{arctg} x$; в) $f(x) = \sqrt{x} \sin x$.

2357. Найти:

$$\text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt; \quad \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt}{x^2};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{+\infty} t^{-1} e^{-t} dt}{\ln \frac{1}{x}}; \quad г) \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \int_x^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} dt,$$

где $\alpha > 0$ и $f(t)$ — непрерывная функция на сегменте $[0, 1]$.

Исследовать сходимость интегралов:

$$2358. \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}.$$

$$2368. \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx.$$

$$2359. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$2369. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}.$$

$$2360. \int_0^2 \frac{dx}{\ln x}.$$

$$2370. \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

$$2361. \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$$

$$2370.1. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x}}$$

$$2362. \int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx.$$

$$2371. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}.$$

$$2363. \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n} dx \quad (n \geq 0).$$

$$2372. \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx.$$

$$2364. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n} dx \quad (a \neq 0).$$

$$2373. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx.$$

$$2365. \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx.$$

$$2366. \int_0^{+\infty} \frac{x^n \operatorname{arctg} x}{2+x^2} dx \quad (n \geq 0).$$

$$2374. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}.$$

$$2367. \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n} dx \quad (n \geq 0).$$

$$2375. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r}.$$

$$2376. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x-a_1|^{p_1} |x-a_2|^{p_2} \dots |x-a_n|^{p_n}} \quad (a_1 < a_2 < \dots < a_n).$$

$$2376.1. \int_0^{+\infty} x^a |x-1|^b dx.$$

$$2377. \int_0^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} dx, \text{ где } P_m(x) \text{ и } P_n(x) \text{ — взаимно простые мно-}$$

гочлены соответственно степеней m и n .

Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие интегралы:

$$2378. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

У к а з а н и е. $|\sin x| \geq \sin^3 x$.

$$2379. \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+100} dx.$$

$$2380. \int_0^{+\infty} x^p \sin(x^q) dx \quad (q \neq 0).$$

$$2380.1. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sec x) dx.$$

$$2380.2. \int_0^{+\infty} x^3 \cos(e^x) dx.$$

$$2381. \int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx \quad (q \geq 0).$$

$$2382. \int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^a} dx. \quad 2383. \int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x dx,$$

где $P_m(x)$ и $P_n(x)$ — целые многочлены и $P_n(x) > 0$, если $x \geq a \geq 0$.

2384. Если $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится, то обязательно ли $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$?

Рассмотреть примеры:

$$а) \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx; \quad б) \int_0^{+\infty} (-1)^{[x^2]} dx.$$

2384.1. Пусть $f(x) \in C^{(1)}[x_0, +\infty)$, $|f'(x)| < C$ при $x_0 \leq x < +\infty$ и $\int_{x_0}^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится. Доказать, что $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$.

Указание. Рассмотреть интеграл

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(x) f'(x) dx.$$

2385. Можно ли сходящийся несобственный интеграл

$$\int_a^b f(x) dx$$

от неограниченной функции $f(x)$, определенной на $[a, b]$, рассматривать как предел соответствующей интегральной суммы

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i,$$

где $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ и $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$?

2386. Пусть

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (1)$$

сходится и функция $\varphi(x)$ ограничена.

Обязательно ли сходится интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx? \quad (2)$$

Привести соответствующий пример.

Что можно сказать о сходимости интеграла (2), если интеграл (1) сходится абсолютно?

2387. Доказать, что если $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится и $f(x)$ — монотонная функция, то $f(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$.

2388. Пусть функция $f(x)$ монотонна в промежутке $0 < x \leq 1$ и не ограничена в окрестности точки $x=0$.

Доказать, что если существует

$$\int_0^1 f(x) dx,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

2389. Доказать, что если функция $f(x)$ монотонна и ограничена в интервале $0 < x < a$ и существует несобственный интеграл

$$\int_0^a x^p f(x) dx,$$

то

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{p+1} f(x) = 0.$$

2390. Показать, что:

а) $\text{v. p.} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = 0$; б) $\text{v. p.} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2} = 0$;

в) $\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = 0$.

2391. Доказать, что при $x \geq 0$ существует

$$\operatorname{li} x = \text{v. p.} \int_0^x \frac{d\xi}{\ln \xi}.$$

Найти следующие интегралы:

2392. $\text{v. p.} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3 - 3x + 2}.$

2394. $\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx.$

2393. $\text{v. p.} \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dx}{x \ln x}.$

2395. $\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x dx.$

§ 5. Вычисление площадей

1°. Площадь в прямоугольных координатах. Площадь S плоской фигуры $A_1A_2B_2B_1$ (рис. 10), ограниченной двумя непрерывными кривыми $y=y_1(x)$ и $y=y_2(x)$ ($y_2(x) \geq y_1(x)$) и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$

($a < b$), равна

$$S = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)] dx.$$

2°. Площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в параметрическом виде. Если $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($0 \leq t \leq T$) — параметрические уравнения кусочно гладкой простой замкнутой кривой C ,

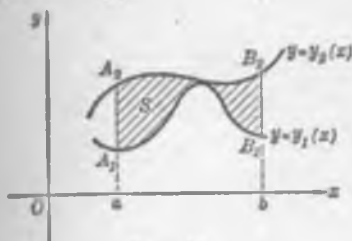


Рис. 10.

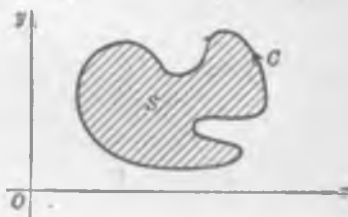


Рис. 11.

пробегаемой против хода часовой стрелки и ограничивающей слева от себя фигуру с площадью S (рис. 11), то

$$S = - \int_0^T y(t) x'(t) dt = \int_0^T x(t) y'(t) dt,$$

или

$$S = \frac{1}{2} \int_0^T [x(t) y'(t) - x'(t) y(t)] dt.$$

3°. Площадь в полярных координатах. Площадь S сектора OAB (рис. 12), ограниченного непрерывной кривой $r = r(\varphi)$ и двумя полупрямыми $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$), равна

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$



Рис. 12.

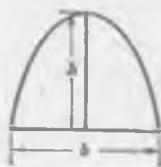


Рис. 13.

2396. Доказать, что площадь прямого параболического сегмента равна

$$S = \frac{2}{3} bh,$$

где b — основание и h — высота сегмента (рис. 13).

Найти площади фигур, ограниченных кривыми, заданными в прямоугольных координатах *):

$$2397. ax = y^2, ay = x^2.$$

$$2398. y = x^2, x + y = 2.$$

$$2399. y = 2x - x^2, x + y = 0.$$

$$2400. y = |\lg x|, y = 0, x = 0,1, x = 10.$$

$$2400.1. y = 2^x, y = 2, x = 0.$$

$$2400.2. y = (x+1)^2, x = \sin \pi y, y = 0 \quad (0 \leq y \leq 1).$$

$$2401. y = x; y = x + \sin^2 x \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

$$2402. y = \frac{x^2}{a^2 + x^2}, y = 0.$$

$$2403. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$2404. y^2 = x^2 (a^2 - x^2).$$

$$2405. y^2 = 2px, 27py^2 = 8(x-p)^3.$$

$$2406. Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1 \quad (A > 1, AC - B^2 > 0).$$

$$2407. y^2 = \frac{x^2}{2a-x} \text{ (циссоида), } x = 2a.$$

$$2408. x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}, y = 0 \text{ (трактриса).}$$

$$2409. y^2 = \frac{x^n}{(1+x^{n+2})^2} \quad (x > 0; n > -2).$$

$$2410. y = e^{-x} |\sin x|, y = 0 \quad (x \geq 0).$$

2411. В каком отношении парабола $y^2 = 2x$ делит площадь круга $x^2 + y^2 = 8$?

2412(н). Выразить координаты точки $M(x, y)$ гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ как функции площади гиперболического сектора $S = OM'M$, ограниченного дугой гиперболы $M'M$ и двумя лучами OM и OM' , где $M'(x, -y)$ — точка, симметричная M относительно оси Ox .

Найти площади фигур, ограниченных кривыми, заданными параметрически:

$$2413. x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \text{ (циклоида) и } y = 0.$$

$$2414. x = 2t - t^2, y = 2t^2 - t^3.$$

$$2415. x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \text{ (развертка круга) и } x = a, y \leq 0.$$

$$2416. x = a(2 \cos t - \cos 2t), y = a(2 \sin t - \sin 2t).$$

*) Все параметры в этом и следующих параграфах отдела IV считаются положительными.

$$2417. x = \frac{c^2}{a} \cos^2 t, y = \frac{c^2}{b} \sin^2 t \quad (c^2 = a^2 - b^2) \text{ (эволюта эллипса)}.$$

$$2417.1. x = a \cos t, y = \frac{a \sin^2 t}{2 + \sin t}.$$

Найти площади фигур, ограниченных кривыми, заданными в полярных координатах:

$$2418. r^2 = a^2 \cos 2\varphi \text{ (лемниската).}$$

$$2419. r = a(1 + \cos \varphi) \text{ (кардиоида).}$$

$$2420. r = a \sin 3\varphi \text{ (трилистник).}$$

$$2421. r = \frac{p}{1 - \cos \varphi} \text{ (парабола), } \varphi = \frac{\pi}{4}, \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

$$2422. r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \quad (0 < e < 1) \text{ (эллипс).}$$

$$2422.1. r = 3 + 2 \cos \varphi.$$

$$2422.2. r = \frac{1}{\varphi}, r = \frac{1}{\sin \varphi} \quad \left(0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

$$2423. r = a \cos \varphi, r = a(\cos \varphi + \sin \varphi) \quad \left(M\left(\frac{a}{2}, 0\right) \in S\right).$$

$$2424. \text{ Найти площадь сектора, ограниченного кривой } \varphi = r \operatorname{arctg} r$$

$$\text{и двумя лучами } \varphi = 0 \text{ и } \varphi = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

$$2424.1. \text{ Найти площадь фигуры, ограниченной кривой } r^2 + \varphi^2 = 1.$$

$$2424.2. \text{ Найти площадь фигуры, ограниченной лепестком кривой } \varphi = \sin(\pi r) \quad (0 \leq r \leq 1).$$

$$2424.3. \text{ Найти площадь фигуры, ограниченной линиями } \varphi = 4r - r^2, \varphi = 0.$$

$$2424.4. \text{ Найти площадь фигуры, ограниченной линиями } \varphi = r - \sin r, \varphi = \pi.$$

$$2425. \text{ Найти площадь фигуры, ограниченной замкнутой кривой}$$

$$r = \frac{2at}{1+t^2}, \quad \varphi = \frac{\pi t}{1+t^2}.$$

Перейдя к полярным координатам, найти площади фигур, ограниченных кривыми:

$$2426. x^2 + y^2 = 3axy \text{ (лист Декарта).}$$

$$2427. x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2).$$

$$2428. (x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy \text{ (лемниската).}$$

Приведя уравнения к параметрическому виду, найти площади фигур, ограниченных кривыми:

2429. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (астроида).

2430. $x^4 + y^4 = ax^2y$.

Указание. Положить $y = tx$.

§ 6. Вычисление длин дуг

1°. Длина дуги в прямоугольных координатах. Длина дуги отрезка гладкой (непрерывно дифференцируемой) кривой

$$y = y(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

равна

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)} dx.$$

2°. Длина дуги кривой, заданной параметрически. Если кривая C задана уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (t_0 \leq t \leq T),$$

где $x(t), y(t) \in C^{(1)}[t_0, T]$, то длина дуги кривой C равна

$$s = \int_{t_0}^T \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

3°. Длина дуги в полярных координатах. Если

$$r = r(\varphi) \quad (\alpha \leq \varphi \leq \beta),$$

где $r(\varphi) \in C^{(1)}[\alpha, \beta]$, то длина дуги соответствующего отрезка кривой равна

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi.$$

Длины дуг пространственных кривых см. в отд. VIII.

Найти длины дуг следующих кривых:

2431. $y = x^{\frac{2}{3}} \quad (0 \leq x \leq 4).$ 2432. $y^2 = 2px \quad (0 \leq x \leq x_0).$

2433. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ от точки $A(0, a)$ до точки $B(b, h).$

2434. $y = e^x \quad (0 \leq x \leq x_0).$

2435. $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} \ln y \quad (1 \leq y \leq e).$

2436. $y = a \ln \frac{a^2}{a^2 - x^2} \quad (0 \leq x \leq b < a).$

2437. $y = \ln \cos x \quad \left(0 \leq x \leq a < \frac{\pi}{2}\right).$

$$2438. x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2} \quad (0 < b \leq y \leq a).$$

$$2439. y^2 = \frac{x^3}{2a - x} \quad \left(0 \leq x \leq \frac{5}{3}a\right).$$

$$2440. x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \quad (\text{астроида}).$$

$$2441. x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t, y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t, c^2 = a^2 - b^2 \quad (\text{эволюта эллипса}).$$

$$2442. x = \cos^4 t, y = \sin^4 t.$$

$$2443. x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

$$2444. x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t) \quad \text{при } 0 \leq t \leq 2\pi$$

(развертка окружности).

$$2445. x = a(\operatorname{sh} t - t), y = a(\operatorname{ch} t - 1) \quad (0 \leq t \leq T).$$

$$2445.1. x = \operatorname{ch}^3 t, y = \operatorname{sh}^3 t \quad (0 \leq t \leq T).$$

$$2446. r = a\varphi \quad (\text{спираль Архимеда}) \quad \text{при } 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

$$2447. r = ae^{m\varphi} \quad (m > 0) \quad \text{при } 0 < r < a.$$

$$2448. r = a(1 + \cos \varphi).$$

$$2449. r = \frac{\rho}{1 + \cos \varphi} \quad \left(|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

$$2450. r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}.$$

$$2451. r = a \operatorname{th} \frac{\varphi}{2} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

$$2452. \varphi = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r}\right) \quad (1 \leq r \leq 3).$$

$$2452.1. \varphi = \sqrt{r} \quad (0 \leq r \leq 5).$$

$$2452.2. \varphi = \int_0^r \frac{\operatorname{sh} \rho}{\rho} d\rho \quad (0 \leq r \leq R).$$

$$2452.3. r = 1 + \cos t, \varphi = t - t \operatorname{tg} \frac{t}{2} \quad (0 \leq t \leq T < \pi).$$

$$2453. \text{Доказать, что длина дуги эллипса}$$

$$x = a \cos t, y = b \sin t$$

равна длине одной волны синусоиды $y = c \sin \frac{x}{b}$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

2454. Парабола $4ay = x^2$ катится по оси Ox . Доказать, что фокус параболы описывает цепную линию.

2455. Найти отношение площади, ограниченной петлей кривой

$$y = \pm \left(\frac{1}{3} - x\right) \sqrt{x},$$

к площади круга, длина окружности которого равна длине контура этой кривой.

§ 7. Вычисление объемов

1°. Объем тела по известным поперечным сечениям. Если объем V тела существует и $S = S(x)$ [$a \leq x \leq b$] есть площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox в точке x , то

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

2°. Объем тела вращения. Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции

$$a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq y(x),$$

где $y(x)$ — непрерывная однозначная функция, равен

$$V_x = \pi \int_a^b y^2(x) dx.$$

В более общем случае, объем кольца, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры $a \leq x \leq b$, $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — непрерывные неотрицательные функции, равен

$$V = \pi \int_a^b [y_2^2(x) - y_1^2(x)] dx.$$

2456. Найти объем чердака, основание которого есть прямоугольник со сторонами a и b , верхнее ребро равно c , а высота равна h .

2457. Найти объем обелиска, параллельные основания которого суть прямоугольники со сторонами A , B и a , b , а высота равна h .

2458. Найти объем усеченного конуса, основания которого суть эллипсы с полуосями A , B и a , b , а высота равна h .

2459. Найти объем параболоида вращения, основание которого S , а высота равна H .

2460. Пусть для кубируемого тела площадь $S = S(x)$ его поперечного сечения, перпендикулярного к оси Ox , изменяется по квадратичному закону:

$$S(x) = Ax^2 + Bx + C \quad [a \leq x \leq b],$$

где A , B и C — постоянные.

Доказать, что объем этого тела равен

$$V = \frac{H}{6} \left[S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b) \right].$$

где $H = b - a$ (формула Симпсона).

2461. Тело представляет собой множество точек $M(x, y, z)$, где $0 \leq z \leq 1$, причем $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, если z рационально,

и $-1 \leq x \leq 0$, $-1 \leq y \leq 0$, если z иррационально. Доказать, что объем этого тела не существует, хотя соответствующий интеграл

$$\int_0^1 S(z) dz = 1.$$

Найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями:

2462. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = \frac{c}{a}x$, $z = 0$.

2463. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (эллипсоид).

2464. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $z = \pm c$.

2465. $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$.

2466. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax$.

2467. $z^2 = b(a - x)$, $x^2 + y^2 = ax$.

2468. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{z^2} = 1$ ($0 < z < a$).

2469. $x + y + z^2 = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

2470. $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = a^2$.

2471. Доказать, что объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры

$$a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq y(x),$$

где $y(x)$ — однозначная непрерывная функция, равен

$$V_v = 2\pi \int_a^b xy(x) dx.$$

Найти объемы тел, ограниченных поверхностями, полученными при вращении отрезков следующих линий:

2472. $y = b \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{1}{3}}$ ($0 \leq x \leq a$) вокруг оси Ox (нейлоид).

2473. $y = 2x - x^2$, $y = 0$: а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy .

2474. $y = \sin x$, $y = 0$ ($0 \leq x \leq \pi$): а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy .

2475. $y = b \left(\frac{x}{a} \right)^2$, $y = b \left| \frac{x}{a} \right|$: а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy .

2476. $y = e^{-x}$, $y = 0$ ($0 \leq x < +\infty$): а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy .

2477. $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ ($0 < a \leq b$) вокруг оси Ox .

2478. $x^2 - xy + y^2 = a^2$ вокруг оси Ox .

2479. $y = e^{-x} \sqrt{\sin x}$ ($0 \leq x < +\infty$) вокруг оси Ox .

2480. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), $y = 0$: а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy ; в) вокруг прямой $y = 2a$.

2481. $x = a \sin^3 t$, $y = b \cos^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$): а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy .

2481.1. Найти объем тела, образованного вращением площади петли кривой

$$x = 2t - t^3, \quad y = 4t - t^3$$

вокруг: а) оси Ox ; б) оси Oy .

2482. Доказать, что объем тела, образованного вращением вокруг полярной оси плоской фигуры

$$0 \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta \leq \pi, \quad 0 \leq r \leq r(\varphi)$$

(φ и r — полярные координаты), равен

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi.$$

Найти объемы тел, образованных вращением плоских фигур, заданных в полярных координатах:

2483. $r = a(1 + \cos \varphi)$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$): а) вокруг полярной оси; б) вокруг прямой $r \cos \varphi = -\frac{a}{4}$.

2484. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$: а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy ; в) вокруг прямой $y = x$.

Указание. Перейти к полярным координатам.

2484.1. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной полувитком спирали Архимеда

$$r = a\varphi \quad (a > 0; 0 \leq \varphi \leq \pi),$$

вокруг полярной оси.

2484.2. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

$$\varphi = \pi r^3, \quad \varphi = \pi,$$

вокруг полярной оси.

2485. Найти объем тела, образованного вращением фигуры

$$a \leq r \leq a\sqrt{2 \sin 2\varphi}$$

вокруг полярной оси.

§ 8. Вычисление площадей поверхностей вращения

Площадь поверхности, образованной вращением гладкой кривой AB вокруг оси Ox , равна

$$P = 2\pi \int_A^B |y| ds,$$

где ds — дифференциал дуги.

Найти площади поверхностей, образованных вращением следующих кривых:

2486. $y = x \sqrt{\frac{x}{a}}$ ($0 \leq x \leq a$) вокруг оси Ox .

2487. $y = a \cos \frac{\pi x}{2b}$ ($|x| \leq b$) вокруг оси Ox .

2488. $y = \operatorname{tg} x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) вокруг оси Ox .

2489. $y^2 = 2px$ ($0 \leq x \leq x_0$): а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy .

2490. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 < b \leq a$): а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy .

2491. $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ ($b \geq a$) вокруг оси Ox .

2492. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ вокруг оси Ox .

2493. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ ($|x| \leq b$): а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy .

2494. $\pm x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ вокруг оси Ox .

2495. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$): а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy ; в) вокруг прямой $y = 2a$.

2496. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ вокруг прямой $y = x$.

2497. $r = a(1 + \cos \varphi)$ вокруг полярной оси.

2498. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$: а) вокруг полярной оси; б) вокруг оси $\varphi = \frac{\pi}{2}$; в) вокруг оси $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

2499. Тело образовано вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $ay = a^2 - x^2$ и осью Ox . Найти отношение поверхности тела вращения к поверхности равновеликого шара.

2500. Фигура, ограниченная параболой $y^2 = 2px$ и прямой $x = p/2$, вращается вокруг прямой $y = p$. Найти объем и поверхность тела вращения.

§ 9. Вычисление моментов. Координаты центра тяжести

1°. Моменты. Если на плоскости Oxy масса M плотности $\rho = \rho(y)$ заполняет некоторый ограниченный континуум Ω (линию, плоскую область) и $\omega = \omega(y)$ — соответствующая мера (длина дуги, площадь) той части континуума Ω , ординаты которой не превышают y , то k -м моментом массы M относительно оси Ox называется число

$$M_k = \lim_{\max \Delta y_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(y_i) y_i^k \Delta \omega(y_i) = \int_{\Omega} \rho y^k d\omega(y) \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

где $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ и $\Delta \omega(y_i) = \omega(y_i) - \omega(y_{i-1})$.

Как частные случаи, получаем при $k=0$ массу M , при $k=1$ — статический момент, при $k=2$ — момент инерции.

Аналогично определяются моменты массы относительно координатных плоскостей.

Если $\rho=1$, то соответствующий момент называется *геометрическим* (момент линии, плоской фигуры, тела и т. д.).

2°. Центр тяжести. Координаты центра тяжести (x_0, y_0) однородной плоской фигуры площади S определяются по формулам

$$x_0 = \frac{M_1^{(y)}}{S}, \quad y_0 = \frac{M_1^{(x)}}{S},$$

где $M_1^{(y)}, M_1^{(x)}$ — геометрические статические моменты фигуры относительно осей Oy и Ox .

2501. Найти статический момент и момент инерции дуги полуокружности радиуса a относительно диаметра, проходящего через концы этой дуги.

2501.1. Найти статический момент дуги параболы

$$y^2 = 2px \quad \left(0 \leq x \leq \frac{p}{2}\right)$$

относительно прямой $x = \frac{p}{2}$.

2502. Найти статический момент и момент инерции однородной треугольной пластинки с основанием b и высотой h относительно основания ($\rho=1$).

2502.1. Найти моменты инерции $I_x = M_2^{(x)}$ и $I_y = M_2^{(y)}$ относительно осей Ox и Oy параболического сегмента, ограниченного кривыми

$$ay = 2ax - x^2 \quad (a > 0) \quad \text{и} \quad y = 0.$$

Чему равны радиусы инерции r_x и r_y , т. е. величины, определяемые соотношениями

$$I_x = Sr_x^2, \quad I_y = Sr_y^2,$$

где S — площадь сегмента?

2503. Найти моменты инерции однородной эллиптической пластинки с полуосями a и b относительно ее главных осей ($\rho=1$).

2504. Найти статический момент и момент инерции однородного кругового конуса с радиусом основания r и высотой h относительно плоскости основания этого конуса ($\rho=1$).

2504.1. Найти момент инерции однородного шара радиуса R и массы M относительно его диаметра.

2505. Доказать первую теорему Гульдена: площадь поверхности, образованной вращением плоской дуги C вокруг не пересекающей ее оси, лежащей в плоскости дуги, равна длине этой дуги, умноженной на длину окружности, описываемой центром тяжести дуги C .

2506. Доказать вторую теорему Гульдена: объем тела, образованного вращением плоской фигуры S вокруг не пересекающей ее оси, расположенной в плоскости фигуры, равен произведению площади S на длину окружности, описываемой центром тяжести этой фигуры.

2507. Определить координаты центра тяжести круговой дуги:
 $x = a \cos \varphi$, $y = a \sin \varphi$ ($|\varphi| \leq \alpha \leq \pi$).

2508. Определить координаты центра тяжести области, ограниченной параболой $ax = y^2$, $ay = x^2$ ($a > 0$).

2509. Определить координаты центра тяжести области $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$).

2510. Определить центр тяжести однородного полушара радиуса a .

2511. Определить координаты центра тяжести $C(\varphi_0, r_0)$ дуги OP логарифмической спирали $r = ae^{m\varphi}$ ($m > 0$) от точки $O(-\infty, 0)$ до точки $P(\varphi, r)$. Какую кривую описывает точка C при движении точки P ?

2512. Определить координаты центра тяжести области, ограниченной кривой $r = a(1 + \cos \varphi)$.

2513. Определить координаты центра тяжести области, ограниченной первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) и осью Ox .

2514. Определить координаты центра тяжести тела, образованного вращением площади $0 \leq x \leq a$; $y^2 \leq 2px$ вокруг оси Ox .

2515. Определить координаты центра тяжести полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($z \geq 0$).

§ 10. Задачи из механики и физики

Составляя соответствующие интегральные суммы и находя их пределы, решить следующие задачи:

2516. Определить массу стержня длины $l = 10$ м, если линейная плотность стержня меняется по закону $\delta = 6 + 0,3x$ кг/м, где x — расстояние от одного из концов стержня.

2517. Какую работу надо затратить, чтобы тело массы m поднять с поверхности Земли, радиус которой R , на высоту h ? Чему равна эта работа, если тело удаляется в бесконечность?

2518. Какую работу надо затратить, чтобы растянуть упругую пружину на 10 см, если сила в 1 кг растягивает эту пружину на 1 см?

Указание. Использовать закон Гука.

2519. Цилиндр диаметра 20 см и длины 80 см заполнен паром под давлением 10 кг/см². Какую работу надо затратить, чтобы уменьшить объем пара в два раза, считая, что температура пара остается постоянной?

2520. Определить силу давления воды на вертикальную стенку, имеющую форму полукруга радиуса a , диаметр которого находится на поверхности воды.

2521. Определить силу давления воды на вертикальную стенку, имеющую форму трапеции, нижнее основание которой $a = 10$ м, верхнее $b = 6$ м и высота $h = 5$ м, если уровень погружения нижнего основания $c = 20$ м.

Составляя дифференциальные уравнения, решить следующие задачи:

2522. Скорость точки меняется по закону:

$$v = v_0 + at.$$

Какой путь пройдет эта точка за промежуток времени $[0, T]$?

2523. Однородный шар радиуса R и плотности δ вращается вокруг своего диаметра с угловой скоростью ω . Определить кинетическую энергию шара.

2524. С какой силой притягивает материальная бесконечная прямая с постоянной линейной плотностью μ_0 материальную точку массы m , находящуюся на расстоянии a от этой прямой?

2525. Определить, с какой силой притягивает круглая пластинка радиуса a и постоянной поверхностной плотности δ_0 материальную точку P массы m , находящуюся на перпендикуляре к плоскости пластинки, проходящем через центр ее Q , на кратчайшем расстоянии PQ , равном b .

2526. Согласно закону Торичелли скорость истечения жидкости из сосуда равна

$$v = c\sqrt{2gh},$$

где g — ускорение силы тяжести, h — высота уровня жидкости над отверстием и $c = 0,6$ — опытный коэффициент.

В какое время опорожнится наполненная доверху вертикальная цилиндрическая бочка диаметра $D = 1$ м и высотой $H = 2$ м через круглое отверстие в дне диаметра $d = 1$ см?

2527. Какую форму должен иметь сосуд, представляющий собой тело вращения, чтобы понижение уровня жидкости при истечении было равномерным?

2528. Скорость распада радия в каждый момент времени пропорциональна его наличному количеству. Найти закон распада радия, если в начальный момент $t = 0$ имелось Q_0 граммов радия, а через время $T = 1600$ лет его количество уменьшится в два раза.

2529. Для случая процесса второго порядка скорость химической реакции, переводящей вещество A в вещество B , пропорциональна произведению концентрации этих веществ. Какой процент вещества B будет содержаться в сосуде через $t = 1$ час., если при $t = 0$ мин. имелось 20% вещества B , а при $t = 15$ мин. его стало 80%?

2530. Согласно закону Гука относительное удлинение ε стержня пропорционально напряжению силы σ в соответствующем поперечном сечении, т. е.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E},$$

где E — модуль Юнга.

Определить удлинение тяжелого стержня конической формы, укрепленного основанием и обращенного вершиной вниз, если радиус основания равен R , высота конуса H и удельный вес γ .

§ 11. Приближенное вычисление определенных интегралов

1°. Формула прямоугольников. Если функция $y = y(x)$ непрерывна и дифференцируема достаточное число раз на конечном сегменте $[a, b]$ и $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$ ($i = 0, 1, \dots, n$), $y_i = y(x_i)$, то

$$\int_a^b y(x) dx = h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) + R_n,$$

где

$$R_n = -\frac{(b-a)h}{2} y'(\xi) \quad (a \leq \xi \leq b).$$

2°. Формула трапеций. При тех же обозначениях имеем:

$$\int_a^b y(x) dx = h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right) + R_n,$$

где

$$R_n = -\frac{(b-a)h^2}{12} y''(\xi) \quad (a \leq \xi \leq b).$$

3°. Параболическая формула (формула Симпсона). Полагая $n = 2k$, получим:

$$\int_a^b y(x) dx = \frac{h}{3} [(y_0 + y_{2k}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2k-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2k-2})] + R_n,$$

где

$$R_n = -\frac{(b-a)h^4}{180} y^{(4)}(\xi) \quad (a \leq \xi \leq b).$$

2531. Применяя формулу прямоугольников ($n = 12$), приближенно вычислить

$$\int_0^{2\pi} x \sin x dx$$

и результат сравнить с точным ответом.

С помощью формулы трапеций вычислить интегралы и оценить их погрешности, если:

$$2532. \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \quad (n=8).$$

$$2533. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \quad (n=12).$$

$$2534. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \sin^2 x} dx \quad (n=6).$$

С помощью формулы Симпсона вычислить интегралы:

$$2535. \int_1^2 \sqrt{x} dx \quad (n=4).$$

$$2537. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \quad (n=10).$$

$$2536. \int_0^{\pi} \sqrt{3 + \cos x} dx \quad (n=6). \quad 2538. \int_0^1 \frac{x dx}{\ln(1+x)} \quad (n=6).$$

2539. Принимая $n=10$, вычислить константу Каталана

$$G = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx.$$

2540. Пользуясь формулой

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},$$

вычислить число π с точностью до 10^{-4} .

2541. Вычислить

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

с точностью до 0,001.

2542. Вычислить $\int_0^1 (e^x - 1) \ln \frac{1}{x} dx$ с точностью до 10^{-4} .

2543. Вычислить с точностью до 0,001 интеграл вероятностей

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

2544. Приблизенно найти длину эллипса, полуоси которого $a=10$ и $b=6$.

2545. Построить по точкам график функции

$$y = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad (0 \leq x \leq 2\pi),$$

приняв

$$\Delta x = \frac{\pi}{3}.$$

ОТДЕЛ V РЯДЫ

§ 1. Числовые ряды. Признаки сходимости знакопостоянных рядов

1°. Общие понятия. Числовой ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

называется *сходящимся*, если существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \text{ (сумма ряда),}$$

где $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. В противном случае ряд (1) называется *расходящимся*.

2°. Критерий Коши. Для сходимости ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало число $N = N(\varepsilon)$ такое, что при $n > N$ и $p > 0$ (n и p — натуральные числа) было выполнено неравенство

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \varepsilon.$$

В частности, если ряд сходится, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

3°. Признак сравнения 1. Пусть, кроме ряда (1), имеем ряд

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \quad (2)$$

Если при $n \geq n_0$ выполнено неравенство

$$0 \leq a_n \leq b_n,$$

то 1) из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1); 2) из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

В частности, если $a_n \sim b_n$ при $n \rightarrow \infty$, то ряды с знакоположительными членами (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно.

4°. Признак сравнения II. Если

$$a_n = O^* \left(\frac{1}{n^p} \right),$$

то а) при $p > 1$ ряд (1) сходится и б) при $p \leq 1$ расходится.

^{*)} Значение символа O^* см. отдел I, § 6, 1°.

5°. Признак Даламбера. Если $a_n > 0$ ($n=1, 2, \dots$) и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

то а) при $q < 1$ ряд (1) сходится и б) при $q > 1$ расходится.

6°. Признак Коши. Если $a_n \geq 0$ ($n=1, 2, \dots$) и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

то а) при $q < 1$ ряд (1) сходится и б) при $q > 1$ расходится.

7°. Признак Раабе. Если $a_n > 0$ ($n=1, 2, \dots$) и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = p,$$

то а) при $p > 1$ ряд (1) сходится и б) при $p < 1$ расходится.

8°. Признак Гаусса. Если $a_n > 0$ ($n=1, 2, \dots$) и

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

где $|\theta_n| < C$ и $\varepsilon > 0$, то а) при $\lambda > 1$ ряд (1) сходится и б) при $\lambda < 1$ расходится; в) при $\lambda = 1$ ряд (1) сходится, если $\mu > 1$, и расходится, если $\mu \leq 1$.

9°. Интегральный признак Коши. Если $f(x)$ ($x \geq 1$) — неотрицательная невозрастающая непрерывная функция, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx.$$

Доказать непосредственно сходимость следующих рядов и найти их суммы:

2546. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \dots$

2547. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \dots$

2548. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} + \dots$

2549. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$

2550. $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots$

2551. а) $q \sin \alpha + q^2 \sin 2\alpha + \dots + q^n \sin n\alpha + \dots$;

б) $q \cos \alpha + q^2 \cos 2\alpha + \dots + q^n \cos n\alpha + \dots$ ($|q| < 1$).

$$2552. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}).$$

$$2553. \text{ Исследовать сходимость ряда } \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx.$$

Указание. Показать, что при $x \neq k\pi$ (k — целое) невозможно, чтобы $\sin nx \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$!

$$2554. \text{ Доказать, что если ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится, то ряд}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n, \text{ где } A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \quad (p_1=1, p_1 < p_2 < \dots),$$

полученный в результате группировки членов данного ряда без нарушения порядка следования их, также сходится и имеет ту же сумму. Обратное неверно; привести пример.

$$2555. \text{ Доказать, что если члены ряда } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ положительны и}$$

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, полученный в результате группировки членов этого ряда, сходится, то данный ряд также сходится.

Исследовать сходимость рядов:

$$2556. 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

$$2557. 0,001 + \sqrt{0,001} + \sqrt[3]{0,001} + \dots$$

$$2558. \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

$$2559. 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots$$

$$2560. \frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \frac{1}{3001} + \dots + \frac{1}{1000n+1} + \dots$$

$$2561. 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \dots + \frac{n}{2n-1} + \dots$$

$$2562. 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots$$

$$2563. \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \dots$$

$$2564. \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} + \dots$$

2565. Доказать, что ряд чисел, обратных членам арифметической прогрессии, расходится.

2566. Доказать, что если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (A)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n (B)$ сходятся и $a_n \leq c_n \leq b_n$ ($n = 1, 2, \dots$), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (C)$ также сходится. Что можно сказать о сходимости ряда (C) , если ряды (A) и (B) расходятся?

2567. Пусть даны два расходящихся ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

с неотрицательными членами.

Что можно сказать о сходимости рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ и б) $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$?

2568. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \geq 0$) сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ также сходится. Обратное утверждение неверно; привести примеры.

2569. Доказать, что если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходятся, то сходятся также ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}.$$

2570. Доказать, что если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = a \neq 0,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

2571. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными и монотонно убывающими членами сходится, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0,$$

2572. Является ли сходящимся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}) = 0$$

при $p = 1, 2, 3, \dots$?

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость следующих рядов:

2573. $a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots$ ($|a_n| < 10$).

2574. $\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \dots + \frac{\sin nx}{2^n} + \dots$

2575. $\frac{\cos x - \cos 2x}{1} + \frac{\cos 2x - \cos 3x}{2} + \dots$
 $\dots + \frac{\cos nx - \cos (n+1)x}{n} + \dots$

2575.1. $\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos x^2}{2^2} + \dots + \frac{\cos x^n}{n^2} + \dots$

У к а з а н и е. Использовать неравенство

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость следующих рядов:

2576. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

2577. $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$

2577.1. $\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \dots$

Пользуясь признаками сравнения, Даламбера или Коши, исследовать сходимость рядов:

2578. $\frac{1000}{1!} + \frac{1000^2}{2!} + \frac{1000^3}{3!} + \dots + \frac{1000^n}{n!} + \dots$

2579. $\frac{(1!)^2}{2!} + \frac{(2!)^2}{4!} + \dots + \frac{(n!)^2}{(2n)!} + \dots$

2580. $\frac{1!}{1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \dots + \frac{n!}{n^n} + \dots$

2581. а) $\frac{2 \cdot 1!}{1} + \frac{2^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{2^3 \cdot 3!}{3^3} + \dots + \frac{2^n n!}{n^n} + \dots$;

б) $\frac{3 \cdot 1!}{1} + \frac{3^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{3^3 \cdot 3!}{3^3} + \dots + \frac{3^n n!}{n^n} + \dots$

$$2582. \frac{(1!)^2}{2} + \frac{(2!)^2}{2^4} + \frac{(3!)^2}{2^6} + \dots + \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} + \dots$$

$$2583. \frac{1000}{1} + \frac{1000 \cdot 1001}{1 \cdot 3} + \frac{1000 \cdot 1001 \cdot 1002}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots$$

$$2584. \frac{4}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \dots$$

$$2585. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2}) (\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2}) \dots (\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2}).$$

$$2585.1. \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

где

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } n = m^2, \\ \frac{1}{n^2}, & \text{если } n \neq m^2 \end{cases}$$

(m — натуральное число).

$$2585.2. \sum_{n=1}^{\infty} nx \prod_{k=1}^n \frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha}.$$

$$2586. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}, \quad 2589. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2 + n + 1)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

$$2587. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{n+1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}, \quad 2589.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n+3n}.$$

$$2588. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}, \quad 2589.2. \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}.$$

$$2590. \sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \\ + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} + \dots$$

Указание. $\sqrt{2} = 2 \cos \frac{\pi}{4}$.

2591. Доказать, что если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad (a_n > 0),$$

то $a_n = o(q_1^n)$, где $q_1 > q$.

2591.1. Пусть для членов знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) выполнено неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \rho < 1 \quad \text{при } n \geq n_0.$$

Доказать, что для остатка ряда

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$$

имеет место оценка

$$R_n \leq a_{n_0} \cdot \frac{\rho^{n-n_0+1}}{1-\rho}, \quad \text{если } n \geq n_0.$$

2591.2. Сколько членов ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(2n)!!]^2}{(4n)!},$$

где $[(2n)!!]^2 = 2 \cdot 4 \dots 2n$, достаточно взять, чтобы соответствующая частная сумма S_n отличалась от суммы ряда S меньше, чем на $\varepsilon = 10^{-4}$?

2592. Доказать, что если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1 \quad (a_n > 0),$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Обратное утверждение неверно. Рассмотрим пример

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

2593. Доказать, что если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad (\text{A})$$

то существует также

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q. \quad (\text{B})$$

Обратное утверждение неверно: если существует предел (Б), то предел (А) может и не существовать. Рассмотрим пример

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^{n+1}}.$$

2594. Доказать, что если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q \quad (a_n \geq 0),$$

то а) при $q < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; б) при $q > 1$ этот ряд расходится (обобщенный признак Коши).

Исследовать сходимость рядов:

$$2595. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n}.$$

$$2597. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 [\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n}.$$

$$2596. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}.$$

$$2597.1. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \cos n}{2 + \cos n} \right)^{2n - \ln n}.$$

Пользуясь признаками Раабе и Гаусса, исследовать сходимость следующих рядов:

$$2598. \left(\frac{1}{2} \right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^p + \dots$$

$$2599. \frac{a}{b} + \frac{a(a+d)}{b(b+d)} + \frac{a(a+d)(b+2d)}{b(b+d)(b+2d)} + \dots$$

$$(a > 0, b > 0, d > 0).$$

$$2600. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n^2 p}}.$$

$$2601. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2 + \sqrt{1})(2 + \sqrt{2}) \dots (2 + \sqrt{n})}.$$

$$2602. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! n^{-p}}{q(q+1) \dots (q+n)} \quad (q > 0).$$

$$2603. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1) \dots (p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q}.$$

$$2604. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \right]^p \cdot \frac{1}{n^q}.$$

$$2605(n) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{p(p+1) \dots (p+n-1)}{q(q+1) \dots (q+n-1)} \right]^a \quad (p > 0, q > 0).$$

2606(n). Доказать, что если для знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) при $n \rightarrow \infty$ выполнено условие

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

то

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right),$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно мало; причем, если $p > 0$, то $a_n \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, т. е. a_n при $n \geq n_0$, монотонно убывая, стремится к нулю, когда $n \rightarrow \infty$.

Определив порядок убывания общего члена a_n , исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если

$$2607. a_n = \frac{n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_p}{n^q + b_1 n^{q-1} + \dots + b_q}, \text{ где } n^q + b_1 n^{q-1} + \dots + b_q > 0.$$

$$2608. a_n = \frac{1}{n^p} \sin \frac{\pi}{n}.$$

$$2609. a_n = (\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n})^p \ln \frac{n-1}{n+1} \quad (n > 1).$$

$$2610. a_n = \ln^p \left(\sec \frac{\pi}{n} \right).$$

$$2611. a_n = \log_b n \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a}}{n} \right) \quad (a > 0, b > 0).$$

$$2612. a_n = \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^p.$$

$$2613. a_n = \frac{1}{n^{1 + \frac{1}{\ln n}}}.$$

$$2614. a_n = \frac{1}{n^{1 + \frac{1}{n}}}.$$

2614.1. Доказать признак Жамэ: знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \geq 0$) сходится, если

$$(1 - \sqrt[n]{a_n}) \frac{n}{\ln n} \geq p > 1 \quad \text{при } n > n_0,$$

и расходится, если

$$(1 - \sqrt[n]{a_n}) \frac{n}{\ln n} \leq 1 \quad \text{при } n > n_0.$$

2615. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) сходится, если существует $\alpha > 0$ такое, что $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geq 1 + \alpha$ при $n \geq n_0$, и расходится, если $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leq 1$ при $n \geq n_0$ (логарифмический признак).

Исследовать сходимость рядов с общим членом:

$$2616. a_n = n^{\ln x} \quad (x > 0).$$

$$2617. a_n = \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}} \quad (n > 1).$$

$$2618. a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}} \quad (n > 1).$$

Пользуясь интегральным признаком Коши, исследовать сходимость рядов с общим членом:

$$2619. a_n = \frac{1}{n \ln^p n} \quad (n > 1).$$

$$2620. a_n = \frac{1}{n (\ln n)^p (\ln \ln n)^q} \quad (n > 2).$$

2620.1. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2 \cdot \ln 3 \dots \ln (n+1)}{\ln (2+p) \cdot \ln (3+p) \dots \ln (n+1+p)} \quad (p > 0).$$

2620.2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(n)}{n^2},$$

где $v(n)$ — число цифр числа n .

2620.3. Пусть $\lambda_n (n = 1, 2, \dots)$ — последовательные положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg} x = x.$$

Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2}.$$

2621. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}.$$

2622. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными монотонно убывающими членами сходится или расходится одновременно с рядом $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

2623. Пусть $f(x)$ — положительная монотонно невозрастающая функция.

Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится, то для остатка его

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$$

справедлива оценка

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx < R_n < f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx.$$

Пользуясь этим, найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

с точностью до 0,01.

2624. Доказать признак Ермакова: пусть $f(x)$ — положительная монотонно убывающая функция и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} = \lambda.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится, если $\lambda < 1$, и расходится, если $\lambda > 1$.

2625. Доказать признак Лобачевского: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными и монотонно стремящимися к нулю членами сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m 2^{-m},$$

где p_m — наибольший номер членов a_n , удовлетворяющих неравенству

$$a_n \geq 2^{-m} \quad (n = 1, 2, \dots, p_m).$$

Исследовать сходимость следующих рядов:

$$2626. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}.$$

$$2627. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^2+n+b}).$$

$$2628. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ctg} \frac{n\pi}{4n-2} - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right).$$

$$2629. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}} \right).$$

$$2630. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^2}.$$

$$2631. \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}.$$

$$2632. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-V^{\frac{1}{n}}}$$

$$2633. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{n^2+1}} - 1 \right).$$

$$2634. \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{a \ln n + b}{c \ln n + d}}.$$

$$2635. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 \left(\sin \frac{1}{n} \right)}.$$

$$2636. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{\pi}{n} \right)^{n^k}.$$

$$2637. \sum_{n=3}^{\infty} \ln \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right).$$

$$2638. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{1/\frac{1}{n}}}.$$

$$2639. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \ln n}{(\ln n)^n}.$$

$$2640. \sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - \frac{b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{2} \right) \\ (a > 0, b > 0, c > 0).$$

$$2641. \sum_{n=1}^{\infty} (n^{n^{\alpha}} - 1).$$

$$2642. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln \frac{1}{n^{\alpha}} - \ln \left(\sin \frac{1}{n^{\alpha}} \right) \right].$$

$$2643. \sum_{n=1}^{\infty} a^{-(b \ln n + c \ln^2 n)} \quad (a > 0).$$

$$2644. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b} (n+b)^{n+a}} \\ (a > 0, b > 0).$$

$$2645. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n+1)!]^n}{2! \cdot 4! \dots (2n)!}.$$

Исследовать сходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ со следующими общими членами:

$$2646. u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x} dx}{1+x^2}.$$

$$2647. u_n = \frac{1}{\int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt[4]{1+x^4} dx}.$$

$$2648. u_n = \int_{\frac{n\pi}{2}}^{\frac{(n+1)\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{x} dx.$$

$$2649. u_n = \int_{\frac{n}{n}}^{\frac{n+1}{n}} e^{-V^{\frac{1}{x}}} dx.$$

$$2650. u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^2 x}{1+x} dx.$$

$$2651. u_n = \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(2n)!}.$$

$$2652. u_n = \frac{\sum_{k=1}^n \ln^2 k}{n^{\alpha}}.$$

Заменяя последовательности x_n ($n=1, 2, \dots$) соответствующими рядами, исследовать сходимость их, если:

$$2653. x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}.$$

$$2654. x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln n)^2}{2}.$$

2655. Сколько примерно надо взять членов ряда, чтобы найти его сумму с точностью до 10^{-5} , если

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}; \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}.$$

§ 2. Признаки сходимости знакопеременных рядов

1°. Абсолютная сходимость ряда. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \quad (2)$$

В этом случае ряд (1) также сходится. Сумма абсолютно сходящегося ряда не зависит от порядка слагаемых.

Для определения абсолютной сходимости ряда (1) достаточно применить к ряду (2) известные признаки сходимости для знакпостоянных рядов.

Если ряд (1) сходится, а ряд (2) расходится, то ряд (1) называется *условно* (не абсолютно) *сходящимся*. Сумму условно сходящегося ряда путем перестановки слагаемых можно сделать равной любому числу (*теорема Римана*).

2°. Признак Лейбница. Знакопередающий ряд

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots + (-1)^{n-1} b_n + \dots$$

($b_n \geq 0$) сходится (вообще говоря, не абсолютно), если а) $b_n \geq b_{n+1}$ ($n=1, 2, \dots$) и б) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. В этом случае для остатка ряда

$$R_n = (-1)^n b_{n+1} + (-1)^{n+1} b_{n+2} + \dots$$

имеем оценку

$$R_n = (-1)^n \theta_n b_{n+1} \quad (0 \leq \theta_n \leq 1).$$

3°. Признак Абеля. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad (3)$$

сходится, если: 1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; 2) числа b_n ($n=1, 2, \dots$) образуют монотонную и ограниченную последовательность.

4°. Признак Дирихле. Ряд (3) сходится, если: 1) частичные суммы $A_n = \sum_{i=1}^n a_i$ ограничены в совокупности; 2) b_n монотонно стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

2656. Доказать, что члены не абсолютно сходящегося ряда можно без перестановки сгруппировать так, что полученный новый ряд будет абсолютно сходящимся.

2657. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ является сходящимся, если выполнены условия: а) общий член этого ряда a_n стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$; б) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, полученный в результате группировки членов данного ряда без нарушения их порядка, сходится; в) число слагаемых a_i , входящих в член $A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i$ ($1 = p_1 < p_2 < \dots$), ограничено.

2658. Доказать, что сумма сходящегося ряда не изменится, если члены этого ряда переставить так, что ни один из них не удаляется от своего прежнего положения больше чем на m мест, где m — некоторое заранее заданное число.

Доказать сходимость следующих рядов и найти их суммы:

2659. $1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \dots$

2660. $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$

2661. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$

Указание. Применить формулу $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n$, где C — постоянная Эйлера и $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$.

2662. Зная, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$, найти суммы рядов, полученных из данного в результате перестановки его членов:

а) $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$

и

б) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$

2663. Члены сходящегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

переставить так, чтобы он стал расходящимся.

Исследовать сходимость знакопеременных рядов:

$$2664. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}. \quad 2665. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n.$$

$$2666. 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots$$

2666.1. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n, \quad (1)$$

где $b_n > 0$ и $b_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следует ли отсюда, что ряд (1) сходится? Рассмотреть пример

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2 + (-1)^n}{n}.$$

$$2667. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin \frac{n\pi}{4}.$$

$$2671. \sum_{n=1}^{\infty} \sin (\pi \sqrt{n^2 + k^2}).$$

$$2668. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}.$$

$$2672. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[Vn]}}{n}.$$

$$2669. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{Vn}{n+100}.$$

$$2673. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{V \frac{n}{n}}.$$

$$2670. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{Vn + (-1)^n}.$$

$$2673.1. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1}.$$

2674. Доказать, что знакочередующийся ряд

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots + (-1)^{n-1} b_n + \dots \quad (b_n > 0)$$

сходится, если

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $p > 0$ (см. 2606 (н)).

Исследовать на абсолютную (кроме 2690) и условную сходимость следующие ряды:

$$2675. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}.$$

$$2677. \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right].$$

$$2676. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}.$$

$$2678. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin \frac{2n\pi}{x}}{n}.$$

$$2679. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}.$$

$$2680. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}.$$

$$2681. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n}+(-1)^{n-1}]^p}.$$

$$2682. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}}.$$

$$2683. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$$

$$2689. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \right]^p.$$

$$2690. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}.$$

$$2684. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^{100}}{2^n}.$$

$$2685. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}.$$

$$2686. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n}.$$

$$2687. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}.$$

$$2688. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}.$$

$$2691. \sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2.$$

Указание. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n^2 \neq 0$.

2692. Пусть

$$R(x) = \frac{a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \dots + a_p}{b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \dots + b_q}$$

— рациональная функция, где $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ и $|b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \dots + b_q| > 0$ при $x \geq n_0$.

Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n R(n).$$

Исследовать сходимость рядов:

$$2693. \frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} - \frac{1}{6^p} + \dots$$

$$2694. 1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{4^p} + \dots$$

$$2695. 1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{1^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{3^p} + \frac{1}{9^p} + \frac{1}{11^p} - \frac{1}{5^p} + \dots$$

$$2696. 1 - \frac{2}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} - \frac{2}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{2}{8^p} + \frac{1}{9^p} + \dots$$

2697. Доказать, что ряды

$$a) \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots;$$

$$б) \cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \dots$$

не абсолютно сходятся в интервале $(0, \pi)$.

2698. Для рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p} \quad (0 < x < \pi)$$

определить для совокупности параметров (p, x) : а) область абсолютной сходимости; б) область неабсолютной сходимости.

2698.1. Исследовать сходимость рядов:

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[n]{n}}{\ln n}; \quad б) \sum_{n=10}^{\infty} \frac{\sin n}{n + 10 \sin n}.$$

$$б) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \left(n + \frac{1}{n} \right)}{\ln(\ln n)};$$

2699. Для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1+p)(2+p)\dots(n+p)}{n! n^q}$$

определить: а) область абсолютной сходимости; б) область условной сходимости.

2700. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n},$$

$$\text{где } \binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}.$$

2701. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1,$$

то можно ли утверждать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ также сходится?

$$\text{Рассмотреть примеры } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} + \frac{1}{n} \right].$$

2702. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — не абсолютно сходящийся ряд и

$$P_n = \sum_{l=1}^n \frac{|a_l| + a_l}{2}, \quad N_n = \sum_{l=1}^n \frac{|a_l| - a_l}{2}.$$

Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{P_n} = 1.$$

2703. Доказать, что сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$$

для каждого $p > 0$ лежит между $\frac{1}{2}$ и 1.

2703.1. Сколько членов ряда следует взять, чтобы получить его сумму с точностью до $\varepsilon = 10^{-4}$, если:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n^3+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt[n]{n}}$.

2704. Доказать, что если члены ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

переставить так, чтобы группу p последовательных положительных членов сменяла группа q последовательных отрицательных членов, то сумма нового ряда будет

$$\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}.$$

2705. Доказать, что гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

останется расходящимся, если, не переставляя его членов, изменить знаки их так, чтобы за p положительными членами следовало бы q отрицательных ($p \neq q$). Сходимость будет иметь место лишь при $p = q$.

§ 3. Действия над рядами

Сумма и произведение рядов. По определению полагают:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n); \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$

где

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1.$$

Равенство а) имеет неформальный смысл, если оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, а равенство б)—если, сверх того, по меньшей мере один из этих рядов сходится абсолютно.

2706. Что можно сказать о сумме двух рядов, из которых а) один ряд сходится, а другой расходится; б) оба ряда сходятся?

2707. Найти сумму двух рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{n^3} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \right].$$

Найти суммы следующих рядов:

$$2708. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n} \right]. \quad 2709. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n}.$$

$$2710. \sum_{n=0}^{\infty} x^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} y^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \quad (|xy| < 1).$$

$$2711. \text{Показать, что } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1.$$

$$2712. \text{Показать, что } \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n \quad (|q| < 1).$$

2713. Показать, что квадрат сходящегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

есть ряд расходящийся.

2714. Доказать, что произведение двух сходящихся рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} \quad (\alpha > 0) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}} \quad (\beta > 0)$$

есть ряд сходящийся, если $\alpha + \beta > 1$, и расходящийся, если $\alpha + \beta < 1$.

2715. Проверить, что произведение двух расходящихся рядов

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^n \quad \text{и} \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}} \right)$$

есть абсолютно сходящийся ряд.

§ 4. Функциональные ряды

1°. Область сходимости. Совокупность X_0 тех значений x , для которых сходится функциональный ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1)$$

называется областью сходимости этого ряда, а функция

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n u_i(x) \quad (x \in X_0)$$

— его суммой.

2°. Равномерная сходимость. Последовательность функций

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

называется равномерно сходящейся на множестве X , если:

1) существует предельная функция

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (x \in X);$$

2) для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать число $N = N(\varepsilon)$ такое, что

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

при $n > N$ и $x \in X$. В этом случае пишут: $f_n(x) \rightarrow f(x)$.

Функциональный ряд (1) называется равномерно сходящимся на множестве X , если равномерно сходится на этом множестве последовательность его частичных сумм:

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

3°. Критерий Коши. Для равномерной сходимости ряда (1) на множестве X необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовало число $N = N(\varepsilon)$ такое, что при $n > N$ и $p > 0$ было выполнено неравенство

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} u_i(x) \right| < \varepsilon \quad \text{для всех } x \in X.$$

4° Признак Вейерштрасса. Ряд (1) сходится абсолютно и равномерно на множестве X , если существует сходящийся числовой ряд

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots \quad (2)$$

такой, что

$$|u_n(x)| \leq c_n \quad \text{при } x \in X \quad (n = 1, 2, \dots).$$

5°. Признак Абеля. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \quad (3)$$

сходится равномерно на множестве X , если: 1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на множестве X ; 2) функции $b_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) ограничены в совокупности и при каждом x образуют монотонную последовательность.

6°. Признак Дирихле. Ряд (3) сходится равномерно на множестве X , если: 1) частичные суммы $\sum_{n=1}^N a_n(x)$ в совокупности ограничены; 2) последова-

тельность $b_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) монотонна для каждого x и равномерно на X стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

7°. Свойства функциональных рядов. а) Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций есть функция непрерывная.

б) Если функциональный ряд (1) сходится равномерно на каждом $[\alpha, \beta] \subset \subset (a, b)$ и существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = A_n \quad (n=1, 2, \dots),$$

то 1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ сходится и 2) имеет место равенство

$$\lim_{x \rightarrow a} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow a} u_n(x) \right\}.$$

в) Если члены сходящегося ряда (1) непрерывно дифференцируемы при $a < x < b$ и ряд производных $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ сходится равномерно на интервале (a, b) , то

$$\frac{d}{dx} \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \text{ при } x \in (a, b).$$

г) Если члены ряда (1) непрерывны и этот ряд сходится равномерно на конечном сегменте $[a, b]$, то

$$\int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx. \quad (4)$$

Вообще формула (4) верна, если $\int_a^b R_n(x) dx \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, где $R_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x)$. Это последнее условие годится также и для случая бесконечных пределов интегриации.

Определить области сходимости (абсолютной и условной) следующих функциональных рядов:

$$2716. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}.$$

$$2720. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{2n}}{2^n} x^n (1-x)^n.$$

$$2717. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n.$$

$$2721. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}.$$

$$2718. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1} \right)^n.$$

$$2722. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^2}.$$

$$2719. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^n.$$

$$2723. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin nx}{1+n^q} \\ (q > 0; \quad 0 < x < \pi).$$

$$2724. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} \quad (\text{ряд Ламберта}).$$

$$2725. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x(x+n)}{n} \right]^n.$$

$$2726. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$$

$$2727. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^n)}.$$

$$2728. \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}.$$

$$2729. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{1}{1+e^{2n}x^2}.$$

$$2730. \sum_{n=1}^{\infty} (2-x) \left(2-x^{\frac{1}{2}}\right) \left(2-x^{\frac{1}{3}}\right) \dots \left(2-x^{\frac{1}{n}}\right) \quad (x > 0).$$

$$2731. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}.$$

$$2732. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n y^n}{x^n + y^n} \quad (x > 0; y > 0).$$

$$2733. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+y^n} \quad (y \geq 0).$$

$$2735. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+x^n)}{n^n} \quad (x \geq 0).$$

$$2734. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{|x|^{n^2} + |y|^{n^2}}.$$

$$2736. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^n \left(x + \frac{y}{n} \right).$$

2737. Доказать, что если ряд Лорана $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ сходится при $x=x_1$ и при $x=x_2$ ($|x_1| < |x_2|$), то этот ряд сходится также при $|x_1| < |x| < |x_2|$.

2738. Определить область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2^{|n|}} x^n$$

и найти его сумму.

2739. Определить области сходимости (абсолютной и условной) рядов Ньютона:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{[n]}}{n!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{x^{[n]}}{n!}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ex)^n y^{[n]}}{n^n},$$

где $x^{[n]} = x(x-1) \dots [x-(n-1)]$.

2740. Доказать, что если ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ сходится при $x = x_0$, то этот ряд сходится также при $x > x_0$.

2741. Доказать, что для равномерной сходимости на множестве X последовательности $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) к предельной функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{x \in X} r_n(x) \right\} = 0,$$

где $r_n(x) = |f(x) - f_n(x)|$.

2742. Что значит, что последовательность $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$): а) сходится на интервале $(x_0, +\infty)$; б) сходится равномерно на каждом конечном интервале $(a, b) \subset (x_0, +\infty)$; в) сходится равномерно на интервале $(x_0, +\infty)$?

2743. Для последовательности

$$f_n(x) = x^n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (0 < x < 1)$$

определить наименьший номер члена $N = N(\varepsilon, x)$, начиная с которого отклонение членов последовательности в данной точке x от предельной функции не превышает 0,001, если $x = \frac{1}{10}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \dots, \frac{1}{\sqrt[n]{10}}, \dots$

Сходится ли эта последовательность равномерно на интервале $(0, 1)$?

2744. Сколько членов ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$$

следует взять, чтобы частная сумма $S_n(x)$ отличалась при $-\infty < x < +\infty$ от суммы ряда меньше чем на ε ? Произвести численный расчет при: а) $\varepsilon = 0,1$; б) $\varepsilon = 0,01$; в) $\varepsilon = 0,001$.

2745. При каких n будет обеспечено выполнение неравенства

$$\left| e^x - \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \right| < 0,001 \quad (0 \leq x \leq 10)?$$

Исследовать последовательности на равномерную сходимость в указанных промежутках:

$$2746. f_n(x) = x^n; \quad \text{а) } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \quad \text{б) } 0 \leq x \leq 1.$$

$$2747. f_n(x) = x^n - x^{n+1}; \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$2748. f_n(x) = x^n - x^{2n}; \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$2749. f_n(x) = \frac{1}{x+n}; \quad 0 < x < +\infty.$$

$$2750. f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}; \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$2751. f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}; \quad \text{а) } 0 \leq x \leq 1-\varepsilon; \quad \text{б) } 1-\varepsilon \leq x \leq 1+\varepsilon;$$

в) $1+\varepsilon \leq x < +\infty$, где $\varepsilon > 0$.

$$2752. f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}; \quad \text{а) } 0 \leq x \leq 1; \quad \text{б) } 1 < x < +\infty.$$

$$2753. f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}; \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$2754. f_n(x) = n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right); \quad 0 < x < +\infty.$$

$$2755. \text{ а) } f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}; \quad -\infty < x < +\infty; \quad \text{б) } f_n(x) = \sin \frac{x}{n}; \\ -\infty < x < +\infty.$$

$$2756. \text{ а) } f_n(x) = \operatorname{arctg} nx; \quad 0 < x < +\infty; \quad \text{б) } f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx; \\ 0 < x < +\infty.$$

$$2757. f_n(x) = e^{n(x-1)}; \quad 0 < x < 1.$$

$$2758. f_n(x) = e^{-(x-n)^2}; \quad \text{а) } -l < x < l, \text{ где } l \text{ — любое положи-} \\ \text{тельное число; б) } -\infty < x < +\infty.$$

$$2759. f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}; \quad 0 < x < 1.$$

$$2760. f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n; \quad \text{а) на конечном интервале } (a, b); \quad \text{б) на} \\ \text{интервале } (-\infty, +\infty).$$

$$2761. f_n(x) = n \left(x^{\frac{1}{n}} - 1 \right); \quad 1 \leq x \leq a.$$

$$2762. f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}; \quad 0 \leq x \leq 2.$$

$$2763. f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}; \\ n^2 \left(\frac{2}{n} - x \right), & \text{если } \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n}; \\ 0, & \text{если } x \geq \frac{2}{n} \end{cases}$$

на сегменте $0 \leq x \leq 1$.

2764. Пусть $f(x)$ — произвольная функция, определенная на сегменте $[a, b]$, и

$$f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Доказать, что

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

при $n \rightarrow \infty$.

2765. Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ в интервале (a, b) и

$$f_n(x) = n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right].$$

Доказать, что $f_n(x) \rightrightarrows f'(x)$ на сегменте $\alpha \leq x \leq \beta$, где $a < \alpha < \beta < b$.

2766. Пусть $f_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{i}{n}\right)$, где $f(x)$ — непрерывная на $(-\infty, +\infty)$ функция. Доказать, что последовательность $f_n(x)$ сходится равномерно на любом конечном сегменте $[a, b]$.

Исследовать характер сходимости следующих рядов:

2767. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ а) на интервале $|x| < q$, где $q < 1$; б) на интервале $|x| < 1$.

2768. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ на сегменте $-1 \leq x \leq 1$.

2768. 1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ на интервале $(0, +\infty)$.

2769. $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$ на сегменте $0 \leq x \leq 1$.

2770. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)$; $-1 \leq x \leq 1$.

2771. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$; $0 < x < +\infty$.

2772. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$; $0 < x < +\infty$.

2773. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\dots(1+nx)}$;

а) $0 \leq x \leq e$, где $e > 0$; б) $e \leq x < +\infty$.

2774. Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость в указанных промежутках следующих функциональных рядов:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x + 2^n}, \quad -2 < x < +\infty;$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^4 x^4}, \quad 0 \leq x < +\infty;$$

$$г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^4 x^4}, \quad |x| < +\infty;$$

$$д) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}} (x^n + x^{-n}), \quad \frac{1}{2} \leq |x| \leq 2;$$

$$е) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}, \quad |x| < a, \text{ где } a \text{ — произвольное положительное}$$

число;

$$ж) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}, \quad |x| < +\infty;$$

$$з) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad |x| < +\infty;$$

$$и) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n \sqrt[n]{n}}, \quad |x| < +\infty;$$

$$к) \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right), \quad |x| < a;$$

$$л) \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, \quad 0 \leq x < +\infty;$$

$$м) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^2}, \quad |x| < +\infty.$$

Исследовать на равномерную сходимость в указанных промежутках следующие функциональные ряды:

2775. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ а) на сегменте $\varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$; б) на сегменте $0 \leq x \leq 2\pi$.

$$2776. \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}; \quad 0 < x < +\infty.$$

$$2777. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{-x+n}; \quad 0 < x < +\infty.$$

У к а з а н и е. Оценить остаток ряда.

$$2778. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin x}; \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

$$2779. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2 + e^x}}; \quad |x| \leq 10.$$

$$2780. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2 + x^2}}; \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$2781. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}; \quad 0 \leq x < +\infty.$$

$$2782. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[1-n]}}{\sqrt{n(n+x)}}; \quad 0 \leq x < +\infty.$$

2783. Может ли последовательность разрывных функций сходиться равномерно к непрерывной функции?

Рассмотреть пример

$$\bar{f}_n(x) = \frac{1}{n} \psi(x) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально;} \\ 1, & \text{если } x \text{ рационально.} \end{cases}$$

2784. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ сходится равномерно на $[a, b]$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ также сходится равномерно на $[a, b]$.

2785. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на $[a, b]$, то обязательно ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ сходится равномерно на $[a, b]$?

Рассмотреть пример $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n$, где $0 \leq x \leq 1$.

2786. Доказать, что абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (0 \leq x \leq 1),$$

где

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x \leq 2^{-(n+1)}; \\ \frac{1}{n} \sin^2(2^{n+1}\pi x), & \text{если } 2^{-(n+1)} < x < 2^{-n}; \\ 0, & \text{если } 2^{-n} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

нельзя мажорировать сходящимся числовым рядом с неотрицательными членами.

2787. Доказать, что если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x),$$

члены которого суть монотонные функции на сегменте $[a, b]$, сходится абсолютно в концевых точках этого сегмента, то данный ряд сходится абсолютно и равномерно на сегменте $[a, b]$.

2788. Доказать, что степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

сходится абсолютно и равномерно на любом сегменте, целиком лежащем внутри его интервала сходимости.

2789. Пусть $a_n \rightarrow \infty$ так, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_n} \right|$ сходится. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x - a_n}$$

сходится абсолютно и равномерно на любом ограниченном замкнутом множестве, не содержащем точек a_n ($n = 1, 2, \dots$).

2790. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

сходится равномерно при $x \geq 0$.

2791. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$$

сходится равномерно в области $x \geq 0$.

2792. Показать, что функция

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

непрерывна и имеет непрерывную производную в области $-\infty < x < +\infty$.

2793. Показать, что функция

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$$

а) определена и непрерывна во всех точках, за исключением целочисленных: $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; б) периодическая с периодом, равным 1.

2794. Показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} [nxe^{-nx} - (n-1)xe^{-(n-1)x}]$$

сходится неравномерно на сегменте $0 \leq x \leq 1$, однако его сумма есть функция, непрерывная на этом сегменте.

2795. Определить области существования функций $f(x)$ и исследовать их на непрерывность, если

$$\text{а) } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n; \quad \text{в) } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}.$$

$$\text{б) } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x + n(-1)^n}{x^2 + n^2};$$

2796. Пусть $r_k (k = 1, 2, \dots)$ — рациональные числа сегмента $[0, 1]$. Показать, что функция

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x - r_k|}{3^k} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

обладает следующими свойствами: 1) непрерывна; 2) дифференцируема в иррациональных точках и недифференцируема в рациональных.

2797. Доказать, что дзета-функция Римана

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

непрерывна в области $x > 1$ и имеет в этой области непрерывные производные всех порядков.

2798. Доказать, что тэта-функция

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

определена и бесконечно дифференцируема при $x > 0$.

2799. Определить область существования функции $f(x)$ и исследовать ее на дифференцируемость, если:

$$a) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}; \quad б) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}.$$

2800. Показать, что последовательность

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} x^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

сходится равномерно на интервале $(-\infty, +\infty)$, но

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right]_{x=1}' \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(1).$$

2801. Показать, что последовательность

$$f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n} \sin n \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

сходится равномерно на интервале $(-\infty, +\infty)$, но

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right]' \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x).$$

2802. При каких значениях параметра α : а) последовательность

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx} \quad (1)$$

($n = 1, 2, \dots$) сходится на сегменте $[0, 1]$; б) последовательность (1) сходится равномерно на $[0, 1]$; в) возможен предельный переход под знаком интеграла

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx?$$

2803. Показать, что последовательность

$$f_n(x) = n x e^{-n x^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

сходится на сегменте $[0, 1]$, но

$$\int_0^1 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

2804. Показать, что последовательность

$$f_n(x) = nx(1-x)^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

сходится неравномерно на сегменте $[0, 1]$, однако

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

2805. Законен ли переход к пределу под знаком интеграла в выражении

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4} dx?$$

Найти:

$$2806. \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1}.$$

$$2807. \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}).$$

$$2808. \lim_{x \rightarrow +0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}.$$

$$2808.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^4}.$$

2809. Законно ли почленное дифференцирование ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}?$$

2810. Законно ли почленное интегрирование ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}} \right)$$

на сегменте $[0, 1]$?

2811. Пусть $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) — бесконечно дифференцируемая функция и последовательность ее производных $f^{(n)}(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) сходится равномерно на каждом конечном интервале (a, b) к функции $\varphi(x)$. Доказать, что $\varphi(x) = Ce^x$, где C — постоянная величина. Рассмотреть пример $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$, $n = 1, 2, \dots$

2811.1. Пусть функции $f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, — определены и ограничены на $(-\infty, +\infty)$ и $f_n(x) \Rightarrow \varphi(x)$ на каждом сегменте

$[a, b]$. Следует ли отсюда, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_x f(x) = \sup_x \varphi(x)?$$

§ 5. Степенные ряды

1°. Интервал сходимости. Для каждого степенного ряда

$$a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

существует замкнутый интервал сходимости: $|x-a| \leq R$, внутри которого данный ряд сходится, а вне расходится. Радиус сходимости R определяется по формуле Коши — Адамара

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Радиус сходимости R может быть вычислен также по формуле

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

если этот предел существует.

2°. Теорема Абеля. Если степенной ряд $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ($|x| < R$) сходится в концевой точке $x=R$ интервала сходимости, то

$$S(R) = \lim_{x \rightarrow R-0} S(x).$$

3°. Ряд Тейлора. Аналитическая в точке a функция $f(x)$ в некоторой окрестности этой точки разлагается в степенной ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Остаточный член этого ряда

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

может быть представлен в виде

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

(форма Лагранжа), или в виде

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta_1(x-a))}{n!} (1-\theta_1)^n (x-a)^{n+1} \quad (0 < \theta_1 < 1)$$

(форма Коши).

Необходимо помнить следующие пять основных разложений:

I. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty).$

II. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty).$

$$\text{III. } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$\text{IV. } (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots \\ \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots \quad (-1 < x < 1).$$

$$\text{V. } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (-1 < x < 1).$$

4°. Действия со степенными рядами. Внутри общего интервала сходимости $|x-a| < R$ имеем:

$$\text{а) } \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) (x-a)^n;$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n.$$

где

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0;$$

$$\text{в) } \frac{d}{dx} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-a)^n;$$

$$\text{г) } \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \right] dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1}.$$

5°. Степенные ряды в комплексной области. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

где

$$c_n = a_n + i b_n, \quad a = \alpha + i\beta, \quad z = x + iy, \quad i^2 = -1.$$

Для каждого такого ряда имеется замкнутый круг сходимости $|z-a| \leq R$, внутри которого данный ряд сходится (и притом абсолютно), а вне расходуется. Радиус сходимости R равен радиусу сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$$

в действительной области.

Определить радиус и интервал сходимости и исследовать поведение в граничных точках интервала сходимости следующих степенных рядов:

$$2812. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

$$2814. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$$

$$2813. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n.$$

$$2815. \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \cdot x^n \quad (0 < \alpha < 1).$$

$$2816. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n. \quad 2817. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n \quad (a > 1).$$

$$2818. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \right]^p \left(\frac{x-1}{2} \right)^n.$$

$$2819. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right]^p x^n.$$

$$2820. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} x^n.$$

$$2821. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) x^n \quad (a > 0, b > 0).$$

$$2822. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$2823. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}} \quad (a > 0).$$

$$2824. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}} x^n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

$$2825. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n+1)!} x^n.$$

$$2828. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n} x^n.$$

$$2826. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n x^n.$$

$$2829. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1 + 2 \cos \frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n} x^n.$$

$$2827. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n. \quad 2830. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}.$$

$$2831. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} x^n \quad (\text{ряд Принсгейма}).$$

$$2831.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{v(n)}}{n} (1-x)^n, \text{ где } v(n) \text{ — число цифр числа } n.$$

$$2831.2. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{\sin n} \right)^n.$$

2832. Определить область сходимости гипергеометрического ряда

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots \\ \dots + \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{1 \cdot 2 \dots n \cdot \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} x^n + \dots$$

Найти область сходимости обобщенных степенных рядов:

$$2833. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n.$$

$$2834. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sin \frac{\pi}{2^n}.$$

$$2836. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n^2} e^{-nx}.$$

$$2835. \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}}.$$

$$2837. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n} (n!)^2}{(3n)!} \lg^n x.$$

2838. Функцию

$$f(x) = x^x$$

разложить по целым неотрицательным степеням бинома $x+1$.

2839. Функцию

$$f(x) = \frac{1}{a-x} \quad (a \neq 0)$$

разложить в степенной ряд: а) по степеням x ; б) по степеням бинома $x-b$, где $b \neq a$; в) по степеням $\frac{1}{x}$. Указать соответствующие области сходимости.

2840. Функцию $f(x) = \ln x$ разложить по целым неотрицательным степеням разности $x-1$ и выяснить интервал сходимости разложения.

Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Написать разложения следующих функций по целым неотрицательным степеням переменной x и найти соответствующие интервалы сходимости:

$$2841. f(x) = \operatorname{sh} x.$$

$$2844. f(x) = a^x \quad (a > 0).$$

$$2842. f(x) = \operatorname{ch} x.$$

$$2845. f(x) = \sin(\mu \arcsin x).$$

$$2843. f(x) = \sin^2 x.$$

$$2846. f(x) = \cos(\mu \arcsin x).$$

2847. Написать три члена разложения функции $f(x) = x^x$ по целым неотрицательным степеням разности $x-1$.

2848. Написать три члена разложения функции $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ ($x \neq 0$) и $f(0) = e$ по целым неотрицательным степеням переменной x .

2849. Функции $\sin(x+h)$ и $\cos(x+h)$ разложить по целым неотрицательным степеням переменной h .

2850. Определить интервал сходимости разложения в степенной ряд функции:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$$

а) по степеням x ; б) по степеням бинома $x-5$, не производя самого разложения.

2850.1. Можно ли утверждать, что

$$\sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} \Rightarrow \sin x \text{ на } (-\infty, +\infty) \text{ при } N \rightarrow \infty?$$

Пользуясь основными разложениями I—V, написать разложения в степенной ряд относительно x следующих функций:

2851. e^{-x^2} .

2852. $\cos^2 x$.

2853. $\sin^3 x$.

2854. $\frac{x^{10}}{1-x}$.

2855. $\frac{1}{(1-x)^2}$.

2856. $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$.

2857. $\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

2858. $\frac{x}{1+x-2x^2}$.

Указание. Разложить данную дробь на простейшие.

2859. $\frac{12-5x}{6-5x-x^2}$.

2860. $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$.

2861. $\frac{1}{1-x-x^2}$.

2862. $\frac{1}{1+x+x^2}$.

2862.1. $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2+x^3}$.

Чему равно $f(1000)(0)$?

2863. $\frac{x \cos \alpha - x^2}{1-2x \cos \alpha + x^2}$.

2864. $\frac{x \sin \alpha}{1-2x \cos \alpha + x^2}$.

2865. $\frac{x \operatorname{sh} a}{1-2x \operatorname{ch} a + x^2}$.

2866. $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

2867. $\ln(1+x+x^2+x^3)$.

2868. $e^{x \cos \alpha} \cos(x \sin \alpha)$.

Указание. Применить формулы Эйлера.

Разложив предварительно производные, путем почленного интегрирования получить разложения в степенной ряд следующих функций:

2869. $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

2870. $f(x) = \arcsin x$.

2871. $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

2872. $f(x) = \ln(1 - 2x \cos \alpha + x^2)$.

2873. Применяя различные методы, найти разложения в степенной ряд следующих функций:

а) $f(x) = (1+x) \ln(1+x)$;

б) $f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$;

в) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2-2x}{1+4x}$;

г) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x}{2-x^2}$;

д) $f(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2}$;

е) $f(x) = \arccos(1-2x^2)$;

ж) $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$;

з) $f(x) = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$.

2874. Используя единственность разложения

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots,$$

найти производные n -го порядка от следующих функций:

а) $f(x) = e^{x^2}$; б) $f(x) = e^{\frac{a}{x}}$; в) $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

2875. Функцию

$$f(x) = \ln \frac{1}{2+2x+x^2}$$

разложить по целым положительным степеням бинома $x+1$.

2876. Функцию

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

разложить в степенной ряд по отрицательным степеням переменной x .

2877. Функцию

$$f(x) = \ln x$$

разложить в степенной ряд по целым положительным степеням дроби $\frac{x-1}{x+1}$.

2878. Функцию

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

разложить в степенной ряд по целым положительным степеням дроби $\frac{x}{1+x}$.

2879. Пусть

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Доказать непосредственно, что

$$f(x)f(y) = f(x+y).$$

2880. Пусть по определению

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Доказать, что

$$а) \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x; \quad б) \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

2881. Написать несколько членов разложения в степенной ряд функции

$$f(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n+1} \right) \right]^{-1}.$$

Производя соответствующие действия со степенными рядами, получить разложения в степенные ряды следующих функций:

2882. $f(x) = (1+x)e^{-x}.$

2887. $f(x) = e^x \sin x.$

2883. $f(x) = (1-x)^2 \operatorname{ch} \sqrt{x}.$

2888. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$

2884. $f(x) = \ln^2(1-x).$

2889. $f(x) = (\operatorname{arctg} x)^2.$

2885. $f(x) = (1+x^2) \operatorname{arctg} x.$

2890. $f(x) = \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^2.$

2886. $f(x) = e^x \cos x.$

Написать три члена разложения (отличные от нуля) в степенной ряд по положительным степеням переменной x следующих функций:

2891. $f(x) = \operatorname{tg} x.$

2893. $f(x) = \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}.$

2892. $f(x) = \operatorname{th} x.$

2894. Пусть разложение $\sec x$ записано в виде

$$\sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Вывести рекуррентное соотношение для коэффициентов E_n (числа Эйлера).

2895. Разложить в степенной ряд функцию

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2ix+x^2}} \quad (|x| < 1).$$

2896. Пусть $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Написать разложение функции

$$F(x) = \frac{f(x)}{1-x}.$$

2897. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ имеет радиус сходимости R_1 , а ряд

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ — радиус сходимости R_2 , то какой радиус сходимости R имеют ряды

$$\text{а) } \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n; \quad \text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n?$$

2898. Пусть

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{и} \quad L = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|}.$$

Доказать, что радиус сходимости R степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ удовлетворяет неравенству

$$l \leq R \leq L.$$

2899. Доказать, что если $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, причем

$$|n! a_n| < M \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где M — постоянная, то: 1) $f(x)$ бесконечно дифференцируема в любой точке a ; 2) справедливо разложение

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (|x| < +\infty).$$

2899.1. Пусть $f(x) \in C^{(\infty)}(a, b)$ и $|f^{(n)}(x)| \leq c^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) при $x \in (a, b)$. Доказать, что функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad (x_0 \in (a, b)),$$

сходящийся в интервале (a, b) .

2899.2. Пусть $f(x) \in C^{(\infty)}[-1, 1]$ и $f^{(n)}(x) \geq 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) при $x \in [-1, 1]$. Доказать, что в интервале $(-1, 1)$ функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

У к а з а н и е. Используя монотонность производных $f^{(n)}(x)$ для остаточного члена $R_n(x)$ ряда Тейлора функции $f(x)$, получить оценку

$$|R_n(x)| \leq |x|^{n+1} f(1).$$

2900. Доказать, что если 1) $a_n \geq 0$ и 2) существует

$$\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S, \quad \text{то} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S.$$

Разложить в степенной ряд функции:

2901. $\int_0^x e^{-t^4} dt.$

2903. $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$

2902. $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$

2904. $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx.$

2905. $\int_0^x \frac{t dt}{\ln(1+t)}$ (написать четыре члена).

Применяя почленное дифференцирование, вычислить суммы следующих рядов:

2906. $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$

2908. $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

2907. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$

2909. $\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \dots$

2910. $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$

У к а з а н и е. Производную ряда умножить на $1-x$.

Применяя почленное интегрирование, вычислить суммы рядов:

2911. $x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$

2912. $x - 4x^3 + 9x^5 - 16x^7 + \dots$

2913. $1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \dots$

2914. Показать, что ряд

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$$

удовлетворяет уравнению

$$y^{IV} = y.$$

2915. Показать, что ряд

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$$

удовлетворяет уравнению

$$xy'' + y' - y = 0.$$

Определить радиус и круг сходимости степенных рядов в комплексной области ($z = x + iy$):

$$2916. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1-i)^n}{n \cdot 2^n}.$$

$$2917. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n z^n}{(n+1)(n+2)}.$$

$$2918. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! z^n}{(1+i)(1+2i)\dots(1+ni)}.$$

$$2919. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{1+i\beta}}.$$

$$2920. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - e^{i\alpha})^n}{n(1 - e^{i\alpha})^n}.$$

2921. Пользуясь формулой бинома Ньютона, приближенно вычислить $\sqrt[3]{9}$ и оценить ошибку, которая получится, если взять три члена разложения.

2922. Приближенно вычислить:

а) $\arctg 1,2$; б) $\sqrt[10]{1000}$; в) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; г) $\ln 1,25$ и оценить соответствующие погрешности.

Пользуясь соответствующими разложениями, вычислить с указанной степенью точности следующие значения функций:

2923. $\sin 18^\circ$ с точностью до 10^{-6} .

2924. $\cos 1^\circ$ с точностью до 10^{-6} .

2925. $\operatorname{tg} 9^\circ$ с точностью до 10^{-6} .

2926. e с точностью до 10^{-6} .

2927. $\ln 1,2$ с точностью до 10^{-6} .

2928. Исходя из равенства

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2},$$

найти число π с точностью до 10^{-4} .

2929. Пользуясь тождеством

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3},$$

вычислить число π с точностью до 0,001.

2930. Пользуясь тождеством

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239},$$

определить число π с точностью до 10^{-9} .

2931. Пользуясь формулой

$$\ln(n+1) = \ln n + 2 \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \dots \right],$$

найти $\ln 2$ и $\ln 3$ с точностью до 10^{-8} .

2932. С помощью разложений подынтегральных функций в ряды вычислить с точностью до 0,001 следующие интегралы:

а) $\int_0^1 e^{-x^2} dx;$

б) $\int_2^4 e^{\frac{1}{x}} dx;$

в) $\int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx;$

г) $\int_0^1 \cos x^2 dx;$

д) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx;$

е) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2};$

ж) $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$

з) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}};$

и) $\int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x} dx;$

к) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx;$

л) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x} dx;$

м) $\int_0^1 x^x dx.$

2933. Найти с точностью до 0,01 длину дуги одной полу-волны синусоиды

$$y = \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

2934. Найти с точностью до 0,01 длину дуги эллипса с полуосями $a=1$ и $b=\frac{1}{2}$.

2935. Провод, подвешенный на двух столбах, расстояние между которыми равно $2l = 20$ м, имеет форму параболы. Вычислить с точностью до 1 см длину провода, если стрелка прогиба $h = 40$ см.

§ 6. Ряды Фурье

1°. Теорема разложения. Если функция $f(x)$ кусочно-непрерывна и имеет кусочно-непрерывную производную $f'(x)$ в интервале $(-l, l)$, причем ее точки разрыва ξ регулярны (т. е. $f(\xi) = \frac{1}{2} [f(\xi-0) + f(\xi+0)]$), то функция $f(x)$ в этом интервале может быть представлена рядом Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (1)$$

где

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

и

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=1, 2, \dots). \quad (2')$$

В частности:

а) если функция $f(x)$ четная, то имеем:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad (3)$$

где

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=0, 1, 2, \dots);$$

б) если функция $f(x)$ нечетная, то получаем:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (4)$$

где

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=1, 2, \dots).$$

Функцию $f(x)$, определенную в интервале $(0, l)$ и обладающую в нем приведенными выше свойствами непрерывности, можно в этом интервале представить как формулой (3), так и формулой (4).

2°. Условие полноты. Для всякой интегрируемой на отрезке $[-l, l]$ вместе со своим квадратом функции $f(x)$ формально построенный ряд (1) с коэффициентами (2), (2') удовлетворяет равенству Ляпунова

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f^2(x) dx.$$

3°. Интегрирование рядов Фурье. Ряд Фурье (1), даже расходящийся, интегрируемой по Риману в интервале $(-l, l)$ функции $f(x)$ можно интегрировать почленно в этом интервале.

2936. Функцию

$$f(x) = \sin^4 x$$

разложить в ряд Фурье.

2937. Каков будет ряд Фурье для тригонометрического многочлена

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n (\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix)?$$

2938. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \operatorname{sgn} x \quad (-\pi < x < \pi).$$

Нарисовать график функции и графики нескольких частных сумм ряда Фурье этой функции.

Пользуясь разложением, найти сумму ряда Лейбница

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

Разложить в ряд Фурье в указанных интервалах следующие функции:

$$2939. f(x) = \begin{cases} A, & \text{если } 0 < x < l; \\ 0, & \text{если } l < x < 2l, \end{cases}$$

где A — постоянная, в интервале $(0, 2l)$.

$$2940. f(x) = x \text{ в интервале } (-\pi, \pi).$$

$$2941. f(x) = \frac{\pi - x}{2} \text{ в интервале } (0, 2\pi).$$

$$2942. f(x) = |x| \text{ в интервале } (-\pi, \pi).$$

$$2943. f(x) = \begin{cases} ax, & \text{если } -\pi < x < 0; \\ bx, & \text{если } 0 < x < \pi, \end{cases}$$

где a и b — постоянные, в интервале $(-\pi, \pi)$.

$$2944. f(x) = \pi^2 - x^2 \text{ в интервале } (-\pi, \pi).$$

$$2945. f(x) = \cos ax \text{ в интервале } (-\pi, \pi) \quad (a — \text{не целое}).$$

$$2946. f(x) = \sin ax \text{ в интервале } (-\pi, \pi) \quad (a — \text{не целое}).$$

2947. $f(x) = \operatorname{sh} ax$ в интервале $(-\pi, \pi)$.
 2948. $f(x) = e^{ax}$ в интервале $(-h, h)$.
 2949. $f(x) = x$ в интервале $(a, a+2l)$.
 2950. $f(x) = x \sin x$ в интервале $(-\pi, \pi)$.
 2951. $f(x) = x \cos x$ в интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Разложить в ряды Фурье следующие периодические функции:

2952. $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$.
 2953. $f(x) = \arcsin(\sin x)$.
 2954. $f(x) = \arcsin(\cos x)$.
 2955. $f(x) = x - [x]$.
 2956. $f(x) = (x)$ — расстояние x до ближайшего целого числа.
 2957. $f(x) = |\sin x|$.
 2958. $f(x) = |\cos x|$.

$$2959. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x} \quad (|\alpha| < 1).$$

2960. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \sec x \quad \left(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}\right).$$

Указание. Вывести соотношение между коэффициентами a_n и a_{n-2} .

2961. Функцию $f(x) = x^2$ разложить в ряд Фурье: а) в интервале $(-\pi, \pi)$ по косинусам кратных дуг; б) в интервале $(0, \pi)$ по синусам кратных дуг; в) в интервале $(0, 2\pi)$.

Нарисовать график функций и графики сумм рядов Фурье для случаев а), б) и в).

Пользуясь этими разложениями, найти суммы рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

2962. Исходя из разложения

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \quad (-\pi < x < \pi),$$

почленным интегрированием получить разложения в ряд Фурье на интервале $(-\pi, \pi)$ функций x^2 , x^3 и x^4 .

2963. Написать равенство Ляпунова для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| < \alpha; \\ 0 & \text{при } \alpha < |x| < \pi. \end{cases}$$

Исходя из равенства Ляпунова, найти суммы рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}.$$

2964. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leq x \leq 1; \\ 1, & \text{если } 1 < x < 2; \\ 3-x, & \text{если } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Пользуясь формулами

$$\cos x = \frac{1}{2}(t + \bar{t}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(t - \bar{t}),$$

где $t = e^{ix}$ и $\bar{t} = e^{-ix}$, получить разложение в ряд Фурье следующих функций:

2965. $\cos^{2m} x$ (m — целое положительное число).

2966. $\frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2}$ ($|q| < 1$).

2967. $\frac{1 - q^2}{1 - 2q \cos x + q^2}$ ($|q| < 1$).

2968. $\frac{1 - q \cos x}{1 - 2q \cos x + q^2}$ ($|q| < 1$).

2969. $\ln(1 - 2q \cos x + q^2)$ ($|q| < 1$).

Разложить в ряд Фурье неограниченные периодические функции:

2970. $f(x) = \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right|$.

2971. $f(x) = \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right|$.

2972. $f(x) = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$.

2973. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \int_0^x \ln \sqrt{\left| \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \right|} dt \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

2974. Разложить в ряд Фурье функции

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad (0 \leq s \leq 4a),$$

дающие параметрическое представление контура квадрата: $0 < x < a$, $0 < y < a$, где s — длина дуги, отсчитанная против хода часовой стрелки от точки $O(0, 0)$.

2975. Как следует продолжить заданную в интервале $(0, \frac{\pi}{2})$ интегрируемую функцию $f(x)$ в интервал $(-\pi, \pi)$, чтобы ее разложение в ряд Фурье имело вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)x \quad (-\pi < x < \pi)?$$

2976. Как следует продолжить заданную в интервале $(0, \frac{\pi}{2})$ интегрируемую функцию $f(x)$ в интервал $(-\pi, \pi)$, чтобы ее разложение в ряд Фурье имело вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n-1)x \quad (-\pi < x < \pi)?$$

2977. Функцию

$$f(x) = x \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

разложить в интервале $(0, \frac{\pi}{2})$:

а) по косинусам нечетных дуг; б) по синусам нечетных дуг. Нарисовать графики суммы рядов Фурье для случаев а) и б).

2978. Функция $f(x)$ антипериодична с периодом π , т. е.

$$f(x + \pi) = -f(x).$$

Какой особенностью обладает ряд Фурье этой функции в интервале $(-\pi, \pi)$?

2979. Какой особенностью обладает ряд Фурье функции $f(x)$ в интервале $(-\pi, \pi)$, если $f(x + \pi) = f(x)$?

2980. Какими особенностями обладают коэффициенты Фурье $a_n, b_n (n=1, 2, \dots)$ функции $y=f(x)$ периода 2π , если график функции: а) имеет центры симметрии в точках $(0, 0), (\pm \frac{\pi}{2}, 0)$; б) имеет центр симметрии в начале координат и оси симметрии $x = \pm \frac{\pi}{2}$?

2981. Как связаны между собой коэффициенты Фурье a_n, b_n и $\alpha_n, \beta_n (n=0, 1, 2, \dots)$ функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, если

$$\varphi(-x) \equiv \psi(x)?$$

2982. Как связаны между собой коэффициенты Фурье a_n, b_n и $\alpha_n, \beta_n (n=0, 1, 2, \dots)$ функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, если

$$\varphi(-x) \equiv -\psi(x)?$$

2983. Зная коэффициенты Фурье a_n, b_n ($n=0, 1, 2, \dots$) интегрируемой функции $f(x)$, имеющей период 2π , вычислить коэффициенты Фурье $\bar{a}_n, \bar{b}_n$ ($n=0, 1, 2, \dots$) «смещенной» функции $f(x+h)$ ($h=\text{const}$).

2984. Зная коэффициенты Фурье a_n, b_n ($n=0, 1, 2, \dots$) интегрируемой функции $f(x)$ периода 2π , вычислить коэффициенты Фурье A_n, B_n ($n=0, 1, 2, \dots$) функции *Стеклова*

$$f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\xi) d\xi.$$

2985. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция с периодом 2π и a_n, b_n ($n=0, 1, 2, \dots$) — ее коэффициенты Фурье. Определить коэффициенты Фурье A_n, B_n ($n=0, 1, 2, \dots$) *свернутой функции*

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt.$$

Пользуясь полученным результатом, вывести равенство Ляпунова.

§ 7. Суммирование рядов

1°. Непосредственное суммирование. Если

$$u_n = v_{n+1} - v_n \quad (n=1, 2, \dots) \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v_\infty,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = v_\infty - v_1.$$

В частности, если

$$u_n = \frac{1}{a_n a_{n+1} \dots + a_{n+m}},$$

где числа a_i ($i=1, 2, \dots$) образуют арифметическую прогрессию со знаменателем d , то

$$v_n = -\frac{1}{md} \cdot \frac{1}{a_n a_{n+1} \dots a_{n+m-1}}.$$

В некоторых случаях искомым ряд удается представить в виде линейной комбинации известных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} = \frac{\pi^3}{32} \quad \text{и т. п.}$$

2°. Метод Абеля. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Сумма степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ в простейших примерах находится с помощью почленного дифференцирования или интегрирования.

3°. Суммирование тригонометрических рядов. Для нахождения сумм рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

их обычно рассматривают как действительную часть и соответственно как коэффициент мнимой части суммы степенного ряда в комплексной области

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \text{ где } z = e^{ix}.$$

Здесь во многих случаях полезен ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln \frac{1}{1-z} \quad (|z| < 1).$$

Найти суммы рядов:

2986. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$

2987. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$

2988. $\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots$

2989. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

2990. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)}$ (m — натуральное число).

2991. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$

2992. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$

2994. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$

2993. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2(n+1)^2}$

2995. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

$$2996. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n+1)}{n!}.$$

$$2999. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}.$$

$$2997. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (n+1)^2}.$$

$$3000. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + n - 2}.$$

$$2998. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (n+1)^2 (n+2)^2}.$$

3001. Пусть $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n.$$

Найти суммы следующих рядов:

$$3002. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{2^n n!} x^n.$$

$$3003. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{(n+1)!} x^n.$$

$$3004. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2 + 1)}{(2n)!} x^{2n}.$$

$$3005. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!}.$$

С помощью почленного дифференцирования найти суммы рядов:

$$3006. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

$$3008. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}.$$

$$3007. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}.$$

$$3009. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d) \dots [a+(n-1)d]}{d \cdot 2d \dots nd} x^n \quad (d > 0).$$

Указание. Производную ряда умножить на $1-x$.

$$3010. \frac{1}{3} \frac{x}{2} + \frac{1.4}{3.6} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1.4.7}{3.6.9} \left(\frac{x}{2}\right)^5 + \dots$$

С помощью почленного интегрирования найти суммы рядов:

$$3011. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}.$$

$$3013. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) x^{2n}}{n!}.$$

$$3012. \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2) x^n.$$

Используя метод Абеля, найти суммы следующих рядов:

$$3014. 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots \quad 3016. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} - \frac{1.3.5}{2.4.6} + \dots$$

$$3015. 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad 3017. 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{5} + \dots$$

Найти суммы следующих тригонометрических рядов:

$$3018. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

$$3020. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin nx}{n}.$$

$$3019. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}.$$

$$3021. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx \sin nx}{n} \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right). \quad 3024. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos (2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

$$3022. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n-1)x}{2n-1}.$$

$$3025. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n(n+1)}.$$

$$3023. \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2-1}.$$

$$3026. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}.$$

3027. Построить кривую

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cdot \sin ny}{n^2} = 0.$$

Найти суммы следующих рядов:

$$3028. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} (2x)^{2n}. \quad 3029. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$$

$$3030. \frac{1!}{x+1} + \frac{2!}{(x+1)(x+2)} + \frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \dots$$

$$3031. \frac{a_1}{a_1+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} + \dots \text{ при условии, что } x > 0,$$

$a_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ расходящийся.

$$3032. \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^6} + \dots, \text{ если а) } |x| < 1; \text{ б) } |x| > 1.$$

$$3033. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}, \text{ если а) } |x| < 1; \text{ б) } |x| > 1.$$

§ 8. Нахождение определенных интегралов с помощью рядов

С помощью разложения подынтегральной функции в ряд вычислить следующие интегралы:

$$3034. \int_0^1 \ln \frac{1}{1-x} dx.$$

$$3036. \int \frac{\ln(1+x)}{x} dx.$$

$$3035. \int_0^1 \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} dx.$$

$$3037. \int_0^1 x^{p-1} \ln(1-x^q) dx \quad (p > 0, q > 0).$$

$$3038. \int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x) dx.$$

$$3039. \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^{2\pi x} - 1}.$$

$$3040. \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^x + 1}.$$

3041. Разложить по целым положительным степеням модуля k ($0 \leq k < 1$) полный эллиптический интеграл 1-го рода

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

3042. Разложить по целым положительным степеням модуля k ($0 \leq k < 1$) полный эллиптический интеграл 2-го рода

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

3043. Выразить длину дуги эллипса

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

с помощью ряда, расположенного по целым положительным степеням эксцентриситета.

Доказать равенства:

$$3044. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

$$3045. \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin ax \, dx = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!} a^{2n+1}.$$

$$3046. \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos nx \, dx = \frac{\pi}{n!} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Найти:

$$3047. \int_0^{2\pi} e^{a \cos x} \cos(a \sin x - nx) \, dx \quad (n \text{ — натуральное число}).$$

$$3048. \int_0^{\pi} \frac{x \sin \alpha}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} dx.$$

Указание. См. пример 2864.

$$3049. \int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx.$$

3050. Доказать формулу

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{a+x} dx &= \frac{1}{a} - \frac{1!}{a^2} + \frac{2!}{a^3} - \dots \\ &\dots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{a^n} + (-1)^n \frac{n!}{a^{n+1}}, \quad (1) \end{aligned}$$

где $a > 0$ и $0 < \theta_n < 1$.

С какой точностью выразится интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{100+x} dx,$$

если в формуле (1) взять два члена?

§ 9. Бесконечные произведения

1°. Сходимость произведения. Бесконечное произведение

$$p_1 p_2 \dots p_n \dots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n \quad (1)$$

называется *сходящимся*, если существует конечный и отличный от нуля предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n p_i = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P.$$

Если $P=0$ и ни один из сомножителей p_n не равен нулю, то произведение (1) называется *расходящимся к нулю*; в противном случае произведение называется *сходящимся к нулю*.

Необходимым условием сходимости является

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1.$$

Сходимость произведения (1) равносильна сходимости ряда

$$\sum_{n=p_0}^{\infty} \ln p_n. \quad (2)$$

Если $p_n = 1 + \alpha_n$ ($n=1, 2, \dots$) и α_n не меняет знака, то для сходимости произведения (1) необходимо и достаточно, чтобы был сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1). \quad (3)$$

В общем случае, когда α_n не сохраняет постоянного знака и ряд (3) сходится, произведение (1) будет сходиться или расходиться к нулю вместе с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1)^2.$$

2°. Абсолютная сходимость. Произведение (1) называется *абсолютно* или *условно* (не абсолютно) *сходящимся* в зависимости от того, абсолютно или условно сходится ряд (2). Необходимым и достаточным условием абсолютной сходимости произведения (1) является абсолютная сходимость ряда (3).

3°. Разложение функций в бесконечные произведения. При $-\infty < x < +\infty$ имеют место разложения

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right), \quad \cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2 \pi^2}\right].$$

В частности, из первого при $x = \frac{\pi}{2}$ получаем формулу Валиса

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}.$$

Доказать следующие равенства:

$$3051. \quad \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$3055. \quad \prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2}{\pi}.$$

$$3052. \quad \prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3}.$$

$$3056. \quad \prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}.$$

$$3053. \quad \prod_{n=2}^{\infty} \left[1 - \frac{2}{n(n+1)}\right] = \frac{1}{3}.$$

$$3057. \quad \prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{x}{2^n} = \frac{\sinh x}{x}.$$

$$3054. \quad \prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right] = 2.$$

$$3058. \prod_{n=0}^{\infty} (1 + x^{2^n}) = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1).$$

$$3059. \frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdots$$

$$3060. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{3n-1} \cdot \frac{3n}{3n+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Доказать сходимость и определить значения следующих бесконечных произведений:

$$3061. \prod_{n=3}^{\infty} \frac{n^2-4}{n^3-1}.$$

$$3063. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}.$$

$$3062. \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{n(n+2)} \right].$$

$$3064. \prod_{n=1}^{\infty} a^{\frac{1-1^n}{n}} \quad (a > 0).$$

3065. Следует ли из сходимости произведений $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ и $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ сходимость произведений: а) $\prod_{n=1}^{\infty} (p_n + q_n)$; б) $\prod_{n=1}^{\infty} p_n^2$; в) $\prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n$; г) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n}$?

Исследовать сходимость следующих бесконечных произведений:

$$3066. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

$$3069. \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right).$$

$$3067. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}.$$

$$3070. \prod_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1} \right)^p.$$

$$3068. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^p} \right).$$

$$3071. \prod_{n=n_0}^{\infty} \frac{n^2 + a_1 n + b_1}{n^2 + a n + b}, \quad \text{где } n^2 + a n + b > 0 \text{ при } n \geq n_0.$$

$$3072. \prod_{n=n_0}^{\infty} \frac{(n-a_1)(n-a_2)\dots(n-a_p)}{(n-b_1)(n-b_2)\dots(n-b_p)}, \quad \text{где } n_0 > b_i \quad (i=1, 2, \dots, p).$$

$$3073. \prod_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}.$$

$$3076. \prod_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{n}}.$$

$$3074. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}.$$

$$3077. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right) e^{-\frac{x}{n}}.$$

$$3075. \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}}.$$

$$3078. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c+n}\right) e^{\frac{x}{n}}, \text{ где } c > 0.$$

$$3079. \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n).$$

$$3083. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^n}{n^p}\right) \cos \frac{x^n}{n^q}.$$

$$3080. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^n}{2^n}\right).$$

$$3084. \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^p.$$

$$3081. \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{x^n}\right].$$

$$3082. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\sqrt[n]{n}}\right) e^{\frac{x}{\sqrt[n]{n}} + \frac{x^2}{2n}}.$$

$$3085. \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\ln(n+x) - \ln n}.$$

3086. Доказать, что произведение $\prod_{n=1}^{\infty} \cos x_n$ сходится, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$.

3087. Доказать, что произведение $\prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha_n\right)$ ($|\alpha_n| < \frac{\pi}{4}$) сходится, если абсолютно сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$.

Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие бесконечные произведения:

$$3088. \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right].$$

$$3092. \prod_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[n]{n} + (-1)^n}.$$

$$3089. \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}\right].$$

$$3093. \prod_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n}.$$

$$3090. \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right].$$

$$3094. \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n^{(-1)^n}}.$$

$$3091. \prod_{n=2}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{\ln n}\right].$$

$$3095. \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}\right].$$

$$3096. \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{7}}\right) \times \\ \times \left(1 - \frac{1}{\sqrt{9}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \dots$$

$$3097. \left(1 + \frac{1}{1^2}\right) \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) \left(1 + \frac{1}{4^2}\right) \left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \left(1 + \frac{1}{6^2}\right) \dots$$

3098. Показать, что произведение

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \dots$$

сходится, хотя ряд

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots$$

расходится.

3099. Показать, что произведение $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n)$, где

$$\alpha_n = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{k}}, & \text{если } n = 2k-1, \\ \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}}, & \text{если } n = 2k, \end{cases}$$

сходится, хотя оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ расходятся.

3100. Пусть

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

(дзета-функция Римана) и p_n ($n=1, 2, \dots$) — последовательные простые числа.

Доказать, что

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \zeta(x).$$

3101. Доказать, что произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n},$$

где p_n ($n=1, 2, \dots$) — последовательные простые числа, расходятся (Эйлер).

3102. Пусть $a_n > 0$ ($n=1, 2, \dots$) и

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{n}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right) \quad (\varepsilon > 0).$$

Доказать, что

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^{\varepsilon}}\right).$$

Указание. Рассмотреть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n n^p = a_1 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p.$$

3103. С помощью формулы Валлиса доказать, что

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

3104. Доказать, что выражение

$$a_n = \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$$

имеет отличный от нуля предел A при $n \rightarrow \infty$.

Вывести отсюда формулу Стирлинга

$$n! = A n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} (1 + \varepsilon_n),$$

где $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ и $A = \sqrt{2\pi}$.

Указание. Искомый предел представить в виде бесконечного произведения

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_1 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Для определения константы A воспользоваться формулой Валлиса.

3105. Согласно Эйлеру гамма-функция $\Gamma(x)$ определяется следующей формулой:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)}.$$

Исходя из этой формулы: а) представить функцию $\Gamma(x)$ в виде бесконечного произведения; б) показать, что $\Gamma(x)$ имеет смысл для всех действительных x , не равных целому отрицательному числу; в) вывести свойство

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x);$$

г) получить значение $\Gamma(n)$ для n целого и положительного.

3106. Пусть функция $f(x)$ собственнo интегрируема на сегменте $[a, b]$ и

$$\delta_n = \frac{b-a}{n}, \quad f_{in} = f(a + i\delta_n) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n (1 + \delta_n f_{in}) = e^{\int_a^b f(x) dx}$$

3107. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} (a+ib)}}{\sum_{i=0}^{n-1} (a+ib)} = \frac{2}{e},$$

где $a > 0$ и $b > 0$.

3108. Пусть $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) — непрерывные функции на интервале (a, b) и $|f_n(x)| \leq c_n$ ($n = 1, 2, \dots$), где ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится.

Доказать, что функция

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(x)] \quad (|f_n(x)| < 1).$$

непрерывна на интервале (a, b) .

3109. Найти выражение для производной функции

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(x)].$$

Каковы достаточные условия существования $F'(x)$?

3110. Доказать, что если $0 < x < y$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(x+1) \dots (x+n)}{y(y+1) \dots (y+n)} = 0.$$

§ 10. Формула Стирлинга

Для вычисления $n!$ при больших значениях n полезна формула Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n + \frac{\theta_n}{12n}} \quad (0 < \theta_n < 1).$$

Пользуясь формулой Стирлинга, приближенно вычислить:

3111. $\lg 100!$

3112. $1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 1999$.

3113. $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 99}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 100}$.

3114. C_{100}^{100} .

3115. $\frac{100!}{20! 30! 50!}$.

3116. $\int_0^1 (1-x^2)^{100} dx$.

3117. $\int_0^{2\pi} \sin^{200} x dx$.

3118. Вывести асимптотическую формулу для произведения
 $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)$.

3119. Приблизленно вычислить C_{2n}^n , если n велико.

3120. Пользуясь формулой Стирлинга, найти следующие пределы:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$;

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}$;

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$;

г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n!}{\ln n^n}$.

§ 11. Приближение непрерывных функций многочленами

1°. Интерполяционная формула Лагранжа. Многочлен Лагранжа

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x-x_0) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)}{(x_i-x_0) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_n)} y_i$$

обладает свойством $P_n(x_i) = y_i$ ($i=0, 1, \dots, n$).

2°. Многочлены Бернштейна. Если $f(x)$ — непрерывная на сегменте $[0, 1]$ функция, то многочлены Бернштейна

$$B_n(x) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) C_n^i x^i (1-x)^{n-i}$$

при $n \rightarrow \infty$ сходятся равномерно на сегменте $[0, 1]$ к функции $f(x)$.

3121. Построить многочлен $P_n(x)$ наименьшей степени n , принимающий заданную систему значений:

x	-2	0	4	5
y	5	1	-3	1

Чему приближенно равны

$$P_n(-1), P_n(1), P_n(6)?$$

3122. Написать уравнение параболы $y = ax^2 + bx + c$, проходящей через три точки: $A(x_0 - h, y_{-1})$, $B(x_0, y_0)$, $C(x_0 + h, y_1)$.

3123. Вывести формулу для приближенного извлечения корней $y = \sqrt{x}$ ($1 \leq x \leq 100$), используя значения $x_0 = 1$, $y_0 = 1$; $x_1 = 25$, $y_1 = 5$; $x_2 = 100$, $y_2 = 10$.

3124. Вывести приближенную формулу вида

$$\sin x^\circ \approx ax + bx^3 \quad (0 \leq x \leq 90; x = \arg x^\circ),$$

используя значения

$$\sin 0^\circ = 0, \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 90^\circ = 1.$$

Пользуясь этой формулой, приближенно найти:

$$\sin 20^\circ, \quad \sin 40^\circ, \quad \sin 80^\circ.$$

3125. Построить для функции $f(x) = |x|$ на сегменте $[-1, 1]$ интерполяционный многочлен Лагранжа, приняв за узлы точки: $x = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$.

3126. Заменяя функцию $y(x)$ многочленом Лагранжа, приближенно вычислить

$$\int_0^1 y(x) dx,$$

где

x	0	0,5	1	1,5	2
$y(x)$	5	4,5	3	2,5	5

3127. Составить многочлены Бернштейна $B_n(x)$ для функций x, x^2, x^3 на сегменте $[0, 1]$.

3128. Написать формулу многочленов Бернштейна $B_n(x)$ для функции $f(x)$, заданной на сегменте $[a, b]$.

3129. Приблизить функцию $f(x) = \frac{|x|+x}{2}$ на сегменте $[-1, 1]$ многочленом Бернштейна $B_4(x)$.

Построить графики функций $y = \frac{|x|+x}{2}$ и $y = B_4(x)$.

3130. Приблизить функцию $f(x) = |x|$ при $-1 \leq x \leq 1$ многочленами Бернштейна четного порядка.

3131. Написать многочлен Бернштейна $B_n(x)$ для функции $f(x) = e^{kx}$ ($a \leq x \leq b$).

3132. Вычислить многочлен $B_n(x)$ для функции $f(x) = \cos x$ на сегменте $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

3133. Доказать, что $|x| = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$ на сегменте $[-1, 1]$, где

$$P_n(x) = 1 - \frac{1-x^2}{2} - \sum_{l=2}^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2l-3)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2l)} (1-x^2)^l.$$

3133. 1. Пусть $f(x) \in C[a, b]$ и

$$M_k = \int_a^b x^k f(x) dx = 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Доказать, что $f(x) \equiv 0$ при $x \in [a, b]$.

Указание. Использовать теорему Вейерштрасса об аппроксимации непрерывной функции многочленами.

3134. Пусть $f(x)$ — непрерывная 2π -периодическая функция и a_n, b_n ($n=0, 1, 2, \dots$) — ее коэффициенты Фурье. Доказать, что тригонометрические многочлены Фейера

$$\sigma_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) (a_i \cos ix + b_i \sin ix)$$

равномерно сходятся к функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$.

3135. Построить многочлен Фейера $\sigma_{n-1}(x)$ для функции

$$f(x) = |x| \quad \text{при } -\pi \leq x \leq \pi.$$

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ОТДЕЛ VI

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Предел функции. Непрерывность

1°. Предел функции. Пусть функция $f(P) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определена на множестве E , имеющем точку сгущения P_0 . Говорят, что

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, P_0) > 0$, такое, что

$$|f(P) - A| < \varepsilon,$$

если только $P \in E$ и $0 < \rho(P, P_0) < \delta$, где $\rho(P, P_0)$ — расстояние между точками P и P_0 .

2°. Непрерывность. Функция $f(P)$ называется *непрерывной в точке* P_0 , если

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0).$$

Функция $f(P)$ *непрерывна в данной области*, если она непрерывна в каждой точке этой области.

3°. Равномерная непрерывность. Функция $f(P)$ называется *равномерно непрерывной* в области G , если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, зависящее только от ε , такое, что для любых точек P' и P'' из G имеет место неравенство

$$|f(P') - f(P'')| < \varepsilon,$$

если только

$$\rho(P', P'') < \delta.$$

Функция, непрерывная в ограниченной и замкнутой области, равномерно непрерывна в этой области.

Определить и изобразить области существования следующих функций:

3136. $u = x + \sqrt{y}$.

3138. $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

3137. $u = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$.

3139. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$.

3140. $u = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$.

3141. $u = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}.$

3144. $u = \arcsin \frac{y}{x}.$

3142. $u = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)^2}.$

3143. $u = \ln(-x - y).$

3145. $u = \arccos \frac{x}{x+y}.$

3146. $u = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin(1 - y).$

3147. $u = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}.$

3149. $u = \ln(xyz).$

3148. $u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

3150. $u = \ln(-1 - x^2 - y^2 + z^2).$

Построить линии уровня следующих функций:

3151. $z = x + y.$

3158. $z = |x| + y.$

3152. $z = x^2 + y^2.$

3159. $z = |x| + |y| - |x + y|.$

3153. $z = x^2 - y^2.$

3159.1. $z = \min(x, y).$

3154. $z = (x + y)^2.$

3159.2. $z = \max(|x|, |y|).$

3155. $z = \frac{y}{x}.$

3159.3. $z = \min(x^2, y).$

3156. $z = \frac{1}{x^2 + 2y^2}.$

3160. $z = e^{\frac{xy}{x^2 + y^2}}.$

3157. $z = \sqrt{xy}.$

3161. $z = x^y \quad (x > 0).$

3162. $z = x^y e^{-x} \quad (x > 0).$

3163. $z = \ln \sqrt{\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2}} \quad (a > 0).$

3164. $z = \operatorname{arctg} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \quad (a > 0).$

3165. $z = \operatorname{sgn}(\sin x \sin y).$

Найти поверхности уровня следующих функций:

3166. $u = x + y + z.$

3168. $u = x^2 + y^2 - z^2.$

3167. $u = x^2 + y^2 + z^2.$

3169. $u = (x + y)^2 + z^2.$

3170. $u = \operatorname{sgn} \sin(x^2 + y^2 + z^2).$

Исследовать характер поверхностей по данным их уравнениям:

3171. $z = f(y - ax).$

3173. $z = xf\left(\frac{y}{x}\right).$

3172. $z = f(\sqrt{x^2 + y^2}).$

3174. $z = f\left(\frac{y}{x}\right).$

3175. Построить график функции

$$F(t) = f(\cos t, \sin t),$$

где

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \geq x, \\ 0, & \text{если } y < x. \end{cases}$$

3176. Найти $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$, если $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$.

3177. Найти $f(x)$, если

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} \quad (x > 0).$$

3178. Пусть

$$z = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - 1).$$

Определить функции f и z , если $z = x$ при $y = 1$.

3179. Пусть

$$z = x + y + f(x - y).$$

Найти функции f и z , если $z = x^2$ при $y = 0$.

3180. Найти $f(x, y)$, если $f\left(x + y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$.

3181. Показать, что для функции

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$$

имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 1; \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = -1,$$

в то время как $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ не существует.

3182. Показать, что для функции

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$$

имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0,$$

тем не менее $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ не существует.

3183. Показать, что для функции

$$f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$$

оба повторных предела $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ и $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ не существуют, тем не менее существует $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$.

3183.1. Существует ли предел

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2}?$$

3183.2. Чему равен предел функции

$$f(x, y) = x^2 e^{-(x^2+y^2)}$$

вдоль любого луча

$$x = t \cos \alpha, \quad y = t \sin \alpha \quad (0 \leq t < +\infty)$$

при $t \rightarrow +\infty$?Можно ли эту функцию назвать бесконечно малой при $x \rightarrow \infty$ и $y \rightarrow \infty$?

3184. Найти

$$\lim_{x \rightarrow a} \left\{ \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right\} \quad \text{и} \quad \lim_{y \rightarrow b} \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right\},$$

если:

а) $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}, \quad a = \infty, \quad b = \infty;$

б) $f(x, y) = \frac{xy}{1 + xy}, \quad a = \infty, \quad b = +0;$

в) $f(x, y) = \sin \frac{xy}{2x + y}, \quad a = \infty, \quad b = \infty;$

г) $f(x, y) = \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy}, \quad a = 0, \quad b = \infty;$

д) $f(x, y) = \log_x(x + y), \quad a = 1, \quad b = 0.$

Найти следующие двойные пределы:

3185. $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2}.$

3189. $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^y}.$

3186. $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}.$

3190. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}.$

3187. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \frac{\sin xy}{x}.$

3191. $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 0}} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{x^2}{x+y}}.$

3188. $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2) e^{-(x+y)}.$

3192. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

3193. По каким направлениям φ существует конечный предел:

а) $\lim_{\rho \rightarrow +0} e^{\frac{x}{x^2 + y^2}}, \quad \text{б) } \lim_{\rho \rightarrow +\infty} e^{x^2 - y^2} \cdot \sin 2xy,$

если $x = \rho \cos \varphi$ и $y = \rho \sin \varphi$?

Найти точки разрыва следующих функций:

$$3194. u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$3197. u = \sin \frac{1}{xy}.$$

$$3195. u = \frac{xy}{x+y}.$$

$$3198. u = \frac{1}{\sin x \sin y}.$$

$$3199. u = \ln(1 - x^2 - y^2).$$

$$3196. u = \frac{x+y}{x^2 + y^2}.$$

$$3200. u = \frac{1}{xyz}.$$

$$3201. u = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

3202. Показать, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

непрерывна по каждой переменной x и y в отдельности (при фиксированном значении другой переменной), но не является непрерывной по совокупности этих переменных.

3203. Показать, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

в точке $O(0, 0)$ непрерывна вдоль каждого луча

$$x = t \cos \alpha, y = t \sin \alpha \quad (0 \leq t < +\infty),$$

проходящего через эту точку, т. е. существует

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = f(0, 0);$$

однако эта функция не является непрерывной в точке $(0, 0)$.

3203.1. Исследовать на равномерную непрерывность линейную функцию

$$u = 2x - 3y + 5$$

в бесконечной плоскости $E^2 = \{|x| < +\infty, |y| < +\infty\}$.

3203.2. Исследовать на равномерную непрерывность в плоскости $E^2 = \{|x| < +\infty, |y| < +\infty\}$ функцию

$$u = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

3203.3. Будет ли равномерно непрерывной функция

$$f(x, y) = \sin \frac{\pi}{1 - x^2 - y^2}$$

в области $x^2 + y^2 < 1$.

3203.4. Дана функция

$$u = \arcsin \frac{x}{y}.$$

Является ли эта функция непрерывной в своей области определения E ?

Будет ли функция u равномерно непрерывной в области E ?

3204. Показать, что множество точек разрыва функции $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y}$, если $y \neq 0$ и $f(x, 0) = 0$, не является замкнутым.

3205. Доказать, что если функция $f(x, y)$ в некоторой области G непрерывна по переменной x и равномерно относительно x непрерывна по переменной y , то эта функция непрерывна в рассматриваемой области.

3206. Доказать, что если в некоторой области G функция $f(x, y)$ непрерывна по переменной x и удовлетворяет условию Липшица по переменной y , т. е.

$$|f(x, y') - f(x, y'')| \leq L |y' - y''|,$$

где $(x, y') \in G$, $(x, y'') \in G$ и L — постоянная, то эта функция непрерывна в данной области.

3207. Доказать, что если функция $f(x, y)$, где $(x, y) \in E$, непрерывна по каждой переменной x и y в отдельности и монотонна по одной из них, то эта функция непрерывна по совокупности переменных в области E (теорема Юнга).

3208. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в области $a \leq x \leq A$, $b \leq y \leq B$, а последовательность функций $\varphi_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) сходится равномерно на $[a, A]$ и удовлетворяет условию $b \leq \varphi_n(x) \leq B$. Доказать, что последовательность функций

$$F_n(x) = f(x, \varphi_n(x)) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

также сходится равномерно на $[a, A]$.

3209. Пусть: 1) функция $f(x, y)$ непрерывна в области R ($a < x < A$; $b < y < B$); 2) функция $\varphi(x)$ непрерывна в интервале (a, A) и имеет значения, принадлежащие интервалу (b, B) . Доказать, что функция

$$F(x) = f(x, \varphi(x))$$

непрерывна в интервале (a, A) .

3210. Пусть: 1) функция $f(x, y)$ непрерывна в области R ($a < x < A$; $b < y < B$); 2) функции $x = \varphi(u, v)$ и $y = \psi(u, v)$ непрерывны в области R' ($a' < u < A'$; $b' < v < B'$) и имеют значения, принадлежащие соответственно интервалам (a, A) и (b, B) . Доказать, что функция

$$F(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

непрерывна в области R' .

Найти точки разрыва следующих функций:

$$3194. u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$3197. u = \sin \frac{1}{xy}.$$

$$3195. u = \frac{xy}{x+y}.$$

$$3198. u = \frac{1}{\sin x \sin y}.$$

$$3199. u = \ln(1 - x^2 - y^2).$$

$$3196. u = \frac{x+y}{x^2 + y^2}.$$

$$3200. u = \frac{1}{xyz}.$$

$$3201. u = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

3202. Показать, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

непрерывна по каждой переменной x и y в отдельности (при фиксированном значении другой переменной), но не является непрерывной по совокупности этих переменных.

3203. Показать, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

в точке $O(0, 0)$ непрерывна вдоль каждого луча

$$x = t \cos \alpha, \quad y = t \sin \alpha \quad (0 \leq t < +\infty),$$

проходящего через эту точку, т. е. существует

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = f(0, 0);$$

однако эта функция не является непрерывной в точке $(0, 0)$.

3203.1. Исследовать на равномерную непрерывность линейную функцию

$$u = 2x - 3y + 5$$

в бесконечной плоскости $E^2 = \{|x| < +\infty, |y| < +\infty\}$.

3203.2. Исследовать на равномерную непрерывность в плоскости $E^2 = \{|x| < +\infty, |y| < +\infty\}$ функцию

$$u = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

3203.3. Будет ли равномерно непрерывной функция

$$f(x, y) = \sin \frac{\pi}{1 - x^2 - y^2}$$

в области $x^2 + y^2 < 1$.

3203.4. Дана функция

$$u = \arcsin \frac{x}{y}.$$

Является ли эта функция непрерывной в своей области определения E ?

Будет ли функция u равномерно непрерывной в области E ?

3204. Показать, что множество точек разрыва функции

$f(x, y) = x \sin \frac{1}{y}$, если $y \neq 0$ и $f(x, 0) = 0$, не является замкнутым.

3205. Доказать, что если функция $f(x, y)$ в некоторой области G непрерывна по переменной x и равномерно относительно x непрерывна по переменной y , то эта функция непрерывна в рассматриваемой области.

3206. Доказать, что если в некоторой области G функция $f(x, y)$ непрерывна по переменной x и удовлетворяет условию Липшица по переменной y , т. е.

$$|f(x, y') - f(x, y'')| \leq L |y' - y''|,$$

где $(x, y') \in G$, $(x, y'') \in G$ и L — постоянная, то эта функция непрерывна в данной области.

3207. Доказать, что если функция $f(x, y)$, где $(x, y) \in E$, непрерывна по каждой переменной x и y в отдельности и монотонна по одной из них, то эта функция непрерывна по совокупности переменных в области E (теорема Юнга).

3208. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в области $a \leq x \leq A$, $b \leq y \leq B$, а последовательность функций $\varphi_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) сходится равномерно на $[a, A]$ и удовлетворяет условию $b \leq \varphi_n(x) \leq B$. Доказать, что последовательность функций

$$F_n(x) = f(x, \varphi_n(x)) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

также сходится равномерно на $[a, A]$.

3209. Пусть: 1) функция $f(x, y)$ непрерывна в области R ($a < x < A$; $b < y < B$); 2) функция $\varphi(x)$ непрерывна в интервале (a, A) и имеет значения, принадлежащие интервалу (b, B) . Доказать, что функция

$$F(x) = f(x, \varphi(x))$$

непрерывна в интервале (a, A) .

3210. Пусть: 1) функция $f(x, y)$ непрерывна в области R ($a < x < A$; $b < y < B$); 2) функции $x = \varphi(u, v)$ и $y = \psi(u, v)$ непрерывны в области R' ($a' < u < A'$; $b' < v < B'$) и имеют значения, принадлежащие соответственно интервалам (a, A) и (b, B) . Доказать, что функция

$$F(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

непрерывна в области R' .

§ 2. Частные производные. Дифференциал функции

1°. Частные производные. Результат частного дифференцирования функции нескольких переменных не зависит от порядка дифференцирования, если все производные, входящие в вычисление, непрерывны.

2°. Дифференциал функции. Если полное приращение функции $f(x, y, z)$ от независимых переменных x, y, z может быть представлено в виде

$$\Delta f(x, y, z) = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\rho),$$

где A, B, C не зависят от $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ и $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$, то функция $f(x, y, z)$ называется дифференцируемой в точке (x, y, z) , а линейная часть приращения $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z$, равная

$$df(x, y, z) = f'_x(x, y, z) dx + f'_y(x, y, z) dy + f'_z(x, y, z) dz, \quad (1)$$

где $dx = \Delta x, dy = \Delta y, dz = \Delta z$, называется дифференциалом этой функции.

Формула (1) сохраняет свое значение и в том случае, когда переменные x, y, z являются некоторыми дифференцируемыми функциями от независимых переменных.

Если x, y, z — независимые переменные, и функция $f(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные до n -го порядка включительно, то для дифференциалов высших порядков имеет место символическая формула

$$d^n f(x, y, z) = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right)^n f(x, y, z).$$

3°. Производная сложной функции. Если $w = f(x, y, z)$ дифференцируема и $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v)$, где функции φ, ψ, χ дифференцируемы, то

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}.$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Для вычисления производных второго порядка функции w полезно пользоваться символическими формулами:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \left(P_1 \frac{\partial}{\partial x} + Q_1 \frac{\partial}{\partial y} + R_1 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 w + \frac{\partial P_1}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial z}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = & \left(P_1 \frac{\partial}{\partial x} + Q_1 \frac{\partial}{\partial y} + R_1 \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(P_2 \frac{\partial}{\partial x} + Q_2 \frac{\partial}{\partial y} + R_2 \frac{\partial}{\partial z} \right) w + \\ & + \frac{\partial P_1}{\partial v} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial v} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial v} \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

где

$$P_1 = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad Q_1 = \frac{\partial y}{\partial u}, \quad R_1 = \frac{\partial z}{\partial u}, \quad P_2 = \frac{\partial x}{\partial v}, \quad Q_2 = \frac{\partial y}{\partial v}, \quad R_2 = \frac{\partial z}{\partial v}.$$

4°. Производная в данном направлении. Если направление l в пространстве $Oxyz$ характеризуется направляющими косинусами:

$\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ и функция $u = f(x, y, z)$ дифференцируема, то производная по направлению l вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.$$

Скорость наибольшего роста функций в данной точке, по величине и направлению, определяется вектором — градиентом функции:

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k,$$

величина которого равна

$$|\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

3211. Показать, что

$$f'_x(x, b) = \frac{d}{dx} [f(x, b)].$$

3212. Найти $f'_x(x, 1)$, если

$$f(x, y) = x + (y - 1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}.$$

3212.1. Найти $f'_x(0, 0)$ и $f'_y(0, 0)$, если

$$f(x, y) = \sqrt[3]{xy}.$$

Является ли эта функция дифференцируемой в точке $O(0, 0)$?

3212.2. Является ли дифференцируемой в точке $O(0, 0)$ функция

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}.$$

3212.3. Исследовать на дифференцируемость в точке $O(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} \quad \text{при } x^2 + y^2 > 0$$

и $f(0, 0) = 0$.

Найти частные производные первого и второго порядков от следующих функций:

3213. $u = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.

3218. $u = \frac{\cos x^2}{y}$.

3214. $u = xy + \frac{x}{y}$.

3219. $u = \lg \frac{x^2}{y}$.

3215. $u = \frac{x}{y^2}$.

3220. $u = x^y$.

3216. $u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

3221. $u = \ln(x + y^2)$.

3217. $u = x \sin(x + y)$.

3222. $u = \text{arctg} \frac{y}{x}$.

3223. $u = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}.$

3226. $u = \left(\frac{x}{y}\right)^z.$

3224. $u = \operatorname{arcsin} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

3227. $u = x^{\frac{y}{z}}.$

3225. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

3228. $u = xy^z.$

3229. Проверить равенство

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

если

а) $u = x^2 - 2xy - 3y^2$; б) $u = xy^z$; в) $u = \arccos \sqrt{\frac{x}{y}}.$

3230. Пусть $f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, если $x^2 + y^2 \neq 0$ и $f(0, 0) = 0$.

Показать, что

$$f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0).$$

3230.1. Существует ли $f''_{xy}(0, 0)$, если

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{при } x^2 + y^2 > 0; \\ 0 & \text{при } x = y = 0. \end{cases}$$

3231. Пусть $u = f(x, y, z)$ — однородная функция измерения n . Проверить теорему Эйлера об однородных функциях на следующих примерах:

а) $u = (x - 2y + 3z)^2$; б) $u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; в) $u = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}.$

3232. Доказать, что если дифференцируемая функция $u = f(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = nu,$$

то она является однородной функцией измерения n .

Указание. Рассмотреть вспомогательную функцию

$$F(t) = \frac{f(tx, ty, tz)}{t^n}.$$

3233. Доказать, что если $f(x, y, z)$ — дифференцируемая однородная функция измерения n , то ее частные производные $f'_x(x, y, z)$, $f'_y(x, y, z)$, $f'_z(x, y, z)$ — однородные функции измерения $n-1$.

3234. Пусть $u = f(x, y, z)$ — дважды дифференцируемая однородная функция измерения n . Доказать, что

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = n(n-1)u.$$

Найти дифференциалы первого и второго порядков от следующих функций (x, y, z — независимые переменные):

3235. $u = x^m y^n$.

3239. $u = e^{xy}$.

3236. $u = \frac{x}{y}$.

3240. $u = xy + yz + zx$.

3237. $u = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3241. $u = \frac{z}{x^2 + y^2}$.

3238. $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

3242. Найти $df(1, 1, 1)$ и $d^2f(1, 1, 1)$, если

$$f(x, y, z) = \sqrt{\frac{x}{y}}.$$

3243. Показать, что если

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

то $d^2u \geq 0$.

3244. Предполагая, что x, y малы по абсолютной величине, вывести приближенные формулы для следующих выражений:

а) $(1+x)^m (1+y)^n$;

б) $\ln(1+x) \cdot \ln(1+y)$;

в) $\operatorname{arctg} \frac{x+y}{1+xy}$.

3245. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить

а) $1,002 \cdot 2,003^2 \cdot 3,004^3$;

в) $\sqrt{1,02^2 + 1,97^2}$;

б) $\frac{1,03^2}{\sqrt[3]{0,98} \sqrt{1,05^2}}$;

г) $\sin 29^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ$;

д) $0,97^{1,05}$.

3246. На сколько изменятся диагональ и площадь прямоугольника со сторонами $x = 6$ м и $y = 8$ м, если первая сторона увеличится на 2 мм, а вторая сторона уменьшится на 5 мм?

3247. Центральный угол сектора $\alpha = 60^\circ$ увеличился на $\Delta\alpha = 1^\circ$. На сколько следует уменьшить радиус сектора $R = 20$ см, чтобы площадь сектора осталась без изменения?

3248. Доказать, что относительная погрешность произведения приближенно равна сумме относительных погрешностей сомножителей.

3249. При измерении радиуса основания R и высоты H цилиндра были получены следующие результаты:

$$R = 2,5 \text{ м} \pm 0,1 \text{ м}; \quad H = 4,0 \text{ м} \pm 0,2 \text{ м}.$$

С какой абсолютной погрешностью Δ и относительной погрешностью δ может быть вычислен объем цилиндра?

3250. Стороны треугольника $a = 200 \text{ м} \pm 2 \text{ м}$, $b = 300 \text{ м} \pm 5 \text{ м}$ и угол между ними $C = 60^\circ \pm 1^\circ$. С какой абсолютной погрешностью может быть вычислена третья сторона треугольника c ?

3251. Показать, что функция

$$f(x, y) = V|xy|$$

непрерывна в точке $(0, 0)$, имеет в этой точке обе частные производные $f'_x(0, 0)$ и $f'_y(0, 0)$, однако не является дифференцируемой в точке $(0, 0)$.

Выяснить поведение производных $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ в окрестности точки $(0, 0)$.

3252. Показать, что функция

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \text{если } x^2 + y^2 \neq 0$$

и

$$f(0, 0) = 0,$$

в окрестности точки $(0, 0)$ непрерывна и имеет ограниченные частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$, однако эта функция недифференцируема в точке $(0, 0)$.

3253. Показать, что функция

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad \text{если } x^2 + y^2 \neq 0$$

и

$$f(0, 0) = 0,$$

имеет в окрестности точки $(0, 0)$ частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$, которые разрывны в точке $(0, 0)$ и неограничены в любой окрестности ее; тем не менее эта функция дифференцируема в точке $(0, 0)$.

3254. Доказать, что функция $f(x, y)$, имеющая ограниченные частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ в некоторой выпуклой области E , равномерно непрерывна в этой области.

3255. Доказать, что если функция $f(x, y)$ непрерывна по переменной x при каждом фиксированном значении y и имеет ограниченную производную $f'_y(x, y)$ по переменной y , то эта функция непрерывна по совокупности переменных x и y .

Найти указанные частные производные в следующих задачах:

3256. $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$, если

$$u = x - y + x^2 + 2xy + y^2 + x^3 - 3x^2y - y^3 + x^4 - 4x^2y^2 + y^4.$$

3257. $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, если $u = x \ln(xy)$.

3258. $\frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3}$, если $u = x^3 \sin y + y^3 \sin x$.

3259. $\frac{\partial^8 u}{\partial x \partial y \partial z}$, если $u = \operatorname{arctg} \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}$.

3260. $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, если $u = e^{xyz}$.

3261. $\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial \xi \partial \eta}$, если $u = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}$.

3262. $\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}$, если $u = (x-x_0)^p (y-y_0)^q$.

3263. $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$, если $u = \frac{x+y}{x-y}$.

3264. $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$, если $u = (x^2 + y^2) e^{x+y}$.

3265. $\frac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}$, если $u = x y z e^{x+y+z}$.

3266. Найти $f_{x^m y^n}^{(m+n)}(0, 0)$, если $f(x, y) = e^x \sin y$.

3267. Показать, что если

$$u = f(xyz),$$

то

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = F(t),$$

где $t = xyz$, и найти функцию F .

3268. Найти $d^4 u$, если $u = x^4 - 2x^3y - 2xy^3 + y^4 + x^3 - 3x^2y - 3xy^2 + y^3 + 2x^2 - xy + 2y^2 + x + y + 1$.

Чему равны производные $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3}$ и $\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$?

Найти полные дифференциалы указанного порядка в следующих примерах:

3269. $d^2 u$, если $u = x^3 + y^3 - 3xy(x-y)$.

3270. $d^2 u$, если $u = \sin(x^2 + y^2)$.

3271. $d^{10} u$, если $u = \ln(x+y)$.

3272. $d^4 u$, если $u = \cos x \operatorname{ch} y$.

3273. $d^3 u$, если $u = xyz$.

3274. d^4u , если $u = \ln(x^x y^y z^z)$.

3275. $d^n u$, если $u = e^{ax+by}$.

3276. $d^n u$, если $u = X(x)Y(y)$.

3277. $d^n u$, если $u = f(x+y+z)$.

3278. $d^n u$, если $u = e^{ax+by+cz}$.

3279. Пусть $P_n(x, y, z)$ — однородный многочлен степени n . Доказать, что

$$d^n P_n(x, y, z) = n! P_n(dx, dy, dz).$$

3280. Пусть

$$Au = x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Найти Au и $A^2 u = A(Au)$, если

а) $u = \frac{x}{x^2+y^2}$; б) $u = \ln \sqrt{x^2+y^2}$.

3281. Пусть

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Найти Δu , если

а) $u = \sin x \operatorname{ch} y$; б) $u = \ln \sqrt{x^2+y^2}$.

3282. Пусть

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2$$

и

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Найти $\Delta_1 u$ и $\Delta_2 u$, если

а) $u = x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz$; б) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Найти производные первого и второго порядков от следующих сложных функций:

3283. $u = f(x^2 + y^2 + z^2)$. 3284. $u = f\left(x, \frac{x}{y}\right)$.

3285. $u = f(x, xy, xyz)$.

3286. Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, если

$$u = f(x+y, xy).$$

3287. Найти

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

если

$$u = f(x+y+z, x^2+y^2+z^2).$$

Найти полные дифференциалы первого и второго порядков от следующих сложных функций (x, y и z — независимые переменные):

3288. $u = f(t)$, где $t = x+y$.

3291. $u = f(t)$, где $t = xyz$.

3289. $u = f(t)$, где $t = \frac{y}{x}$.

3292. $u = f(x^2+y^2+z^2)$.

3290. $u = f(\sqrt{x^2+y^2})$.

3293. $u = f(\xi, \eta)$, где $\xi = ax$, $\eta = by$.

3294. $u = f(\xi, \eta)$, где $\xi = x+y$, $\eta = x-y$.

3295. $u = f(\xi, \eta)$, где $\xi = xy$, $\eta = \frac{x}{y}$.

3296. $u = f(x+y, z)$.

3297. $u = f(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$.

3298. $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$.

3299. $u = f(x, y, z)$, где $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

3300. $u = f(\xi, \eta, \zeta)$, где $\xi = ax$, $\eta = by$, $\zeta = cz$.

3301. $u = f(\xi, \eta, \zeta)$, где $\xi = x^2+y^2$, $\eta = x^2-y^2$, $\zeta = 2xy$.

Найти $d^n u$, если:

3302. $u = f(ax+by+cz)$.

3303. $u = f(ax, by, cz)$.

3304. $u = f(\xi, \eta, \zeta)$, где $\xi = a_1x+b_1y+c_1z$, $\eta = a_2x+b_2y+c_2z$, $\zeta = a_3x+b_3y+c_3z$.

3305. Пусть $u = f(r)$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ и f — дважды дифференцируемая функция. Показать, что

$$\Delta u = F(r),$$

где $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа, и найти функцию F .

3306. Пусть u и v — дважды дифференцируемые функции и Δ — оператор Лапласа (см. задачу 3305). Доказать, что

$$\Delta(uv) = u \Delta v + v \Delta u + 2 \Delta(u, v),$$

где

$$\Delta(u, v) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z}.$$

3307. Показать, что функция

$$u = \ln \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

(a и b — постоянные) удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

3308. Доказать, что если функция $u = u(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа (см. задачу 3307), то функция

$$v = u\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

также удовлетворяет этому уравнению.

3309. Показать, что функция

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}}$$

(a и b — постоянные) удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

3310. Доказать, что если функция $u = u(x, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности (см. задачу 3309), то функция

$$v = \frac{1}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} u\left(\frac{x}{a^2 t}, -\frac{1}{a^2 t}\right) \quad (t > 0)$$

также удовлетворяет этому уравнению.

3311. Доказать, что функция

$$u = \frac{1}{r},$$

где $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, удовлетворяет при $r \neq 0$ уравнению Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

3312. Доказать, что если функция $u = u(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа (см. задачу 3311), то функция

$$v = \frac{1}{r} u\left(\frac{k^2 x}{r^2}, \frac{k^2 y}{r^2}, \frac{k^2 z}{r^2}\right),$$

где k — постоянная и $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, также удовлетворяет этому уравнению.

3313. Доказать, что функция

$$u = \frac{C_1 e^{-ar} + C_2 e^{ar}}{r},$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и C_1, C_2 — постоянные, удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a^2 u.$$

3314. Пусть функции $u_1 = u_1(x, y, z)$ и $u_2 = u_2(x, y, z)$ удовлетворяют уравнению Лапласа $\Delta u = 0$.
Доказать, что функция

$$v = u_1(x, y, z) + (x^2 + y^2 + z^2) u_2(x, y, z)$$

удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\Delta(\Delta v) = 0.$$

3315. Пусть $f(x, y, z)$ есть m раз дифференцируемая однородная функция измерения n .
Доказать, что

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x, y, z) = n(n-1) \dots (n-m+1) f(x, y, z).$$

3316. Упростить выражение

$$\sec x \frac{\partial z}{\partial x} + \sec y \frac{\partial z}{\partial y},$$

если

$$z = \sin y + f(\sin x - \sin y),$$

где f — дифференцируемая функция.

3317. Показать, что функция

$$z = x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right),$$

где f — произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = nz.$$

3318. Показать, что

$$z = yf(x^2 - y^2),$$

где f — произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяет уравнению

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xz.$$

3319. Упростить выражение

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z},$$

если

$$u = \frac{1}{12} x^4 - \frac{1}{6} x^2(y+z) + \frac{1}{2} x^2 yz + f(y-x, z-x),$$

где f — дифференцируемая функция.

3320. Пусть

$$x^2 = uw, \quad y^2 = uw, \quad z^2 = uv$$

и

$$f(x, y, z) = F(u, v, w).$$

Доказать, что

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = uF'_u + vF'_v + wF'_w.$$

Предполагая, что произвольные функции φ , ψ и т. п. дифференцируемы достаточное число раз, проверить следующие равенства:

$$3321. \quad y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad \text{если } z = \varphi(x^2 + y^2).$$

$$3322. \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - xy \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + y^2 = 0, \quad \text{если } z = \frac{y^2}{3x} + \varphi(xy).$$

$$3323. \quad (x^2 - y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + xy \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = xyz, \quad \text{если } z = e^{yz} \varphi\left(\frac{x^2}{ye^{2y^3}}\right).$$

$$3324. \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial u}{\partial y} + \beta z \frac{\partial u}{\partial z} = nu, \quad \text{если } u = x^n \varphi\left(\frac{y}{x^\alpha}, \frac{z}{x^\beta}\right).$$

$$3325. \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = u + \frac{xy}{z}, \quad \text{если } u = \frac{xy}{z} \ln x + x\varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right).$$

$$3326. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{если } u = \varphi(x - at) + \psi(x + at).$$

$$3327. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \text{если } u = x\varphi(x + y) + y\psi(x + y).$$

$$3328. \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \text{если } u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

$$3329. \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u, \\ \text{если } u = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x^{1-n} \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

$$3330. \quad \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{если } u = \varphi[x + \psi(y)].$$

Путем последовательного дифференцирования исключить произвольные функции φ и ψ :

$$3331. \quad z = x + \varphi(xy).$$

$$3336. \quad z = \varphi(x) + \psi(y).$$

$$3332. \quad z = x\varphi\left(\frac{x}{y^2}\right).$$

$$3337. \quad z = \varphi(x)\psi(y).$$

$$3333. \quad z = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

$$3338. \quad z = \varphi(x + y) + \psi(x - y).$$

$$3334. \quad u = \varphi(x - y, y - z).$$

$$3339. \quad z = x\varphi\left(\frac{x}{y}\right) + y\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

$$3335. \quad u = \varphi\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right).$$

$$3340. \quad z = \varphi(xy) + \psi\left(\frac{x}{y}\right).$$

3341. Найти производную функции

$$z = x^2 - y^2$$

в точке $M(1, 1)$, в направлении l , составляющем угол $\alpha = 60^\circ$ с положительным направлением оси Ox .

3342. Найти производную функции

$$z = x^2 - xy + y^2$$

в точке $M(1, 1)$ в направлении l , составляющем угол α с положительным направлением оси Ox . В каком направлении эта производная имеет: а) наибольшее значение; б) наименьшее значение; в) равна 0.

3343. Найти производную функции

$$z = \ln(x^2 + y^2)$$

в точке $M(x_0, y_0)$ в направлении, перпендикулярном к линии уровня, проходящей через эту точку.

3344. Найти производную функции

$$z = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)$$

в точке $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ по направлению внутренней нормали в этой точке к кривой:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

3345. Найти производную функции

$$u = xyz$$

в точке $M(1, 1, 1)$, в направлении $l\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$.

Чему равна величина градиента функции в этой точке?

3346. Найти величину и направление градиента функции

$$u = \frac{1}{r},$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

3347. Определить угол между градиентами функции

$$u = x^2 + y^2 - z^2$$

в точках $A(\varepsilon, 0, 0)$ и $B(0, \varepsilon, 0)$.

3348. На сколько отличается в точке $M(1, 2, 2)$ величина градиента функции

$$u = x + y + z$$

от величины градиента функции

$$v = x + y + z + 0,001 \sin(10^4 \pi \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})?$$

3349. Показать, что в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ угол между градиентами функций

$$u = ax^2 + by^2 + cz^2$$

и

$$v = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2mx + 2ny + 2pz$$

(a, b, c, m, n, p — постоянны и $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$) стремится к нулю, если точка M_0 удаляется в бесконечность.

3350. Пусть $u = f(x, y, z)$ — дважды дифференцируемая функция. Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial l^2} = \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{\partial u}{\partial l} \right)$, если $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — направляющие косинусы направления l .

3351. Пусть $u = f(x, y, z)$ — дважды дифференцируемая функция и

$$l_1 \{ \cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1 \}, \quad l_2 \{ \cos \alpha_2, \cos \beta_2, \cos \gamma_2 \}, \\ l_3 \{ \cos \alpha_3, \cos \beta_3, \cos \gamma_3 \}$$

— три взаимно перпендикулярных направления.

Доказать, что:

$$a) \left(\frac{\partial u}{\partial l_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_3} \right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2;$$

$$б) \frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

3352. Пусть $u = u(x, y)$ — дифференцируемая функция и при $y = x^2$ имеем:

$$u(x, y) = 1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = x.$$

Найти $\frac{\partial u}{\partial y}$ при $y = x^2$.

3353. Пусть функция $u = u(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

и, кроме того, следующим условиям:

$$u(x, 2x) = x, \quad u'_x(x, 2x) = x^2.$$

Найти

$$u''_{xx}(x, 2x), \quad u''_{xy}(x, 2x), \quad u''_{yy}(x, 2x).$$

Полагая $z = z(x, y)$, решить следующие уравнения:

$$3354. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0. \quad 3355. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0. \quad 3356. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

3357. Полагая $u = u(x, y, z)$, решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y \partial z} = 0.$$

3358. Найти решение $z = z(x, y)$ уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y,$$

удовлетворяющее условию: $z(x, x^2) = 1$.

3359. Найти решение $z = z(x, y)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2,$$

удовлетворяющее условиям: $z(x, 0) = 1$, $z'_y(x, 0) = x$.

3360. Найти решение $z = z(x, y)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y,$$

удовлетворяющее условиям: $z(x, 0) = x$, $z(0, y) = y^2$.

§ 3. Дифференцирование неявных функций

1°. Теорема существования. Если: 1) функция $F(x, y, z)$ обращается в нуль в некоторой точке $A_0(x_0, y_0, z_0)$; 2) $F(x, y, z)$ и $F'_z(x, y, z)$ определены и непрерывны в окрестности точки A_0 ; 3) $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, то в некоторой достаточно малой окрестности точки $A_0(x_0, y_0)$ существует единственная однозначная непрерывная функция

$$z = f(x, y), \quad (1)$$

удовлетворяющая уравнению

$$F(x, y, z) = 0$$

и такая, что $z_0 = f(x_0, y_0)$.

2°. Дифференцируемость неявной функции. Если, сверх того, 4) функция $F(x, y, z)$ дифференцируема в окрестности точки $A_0(x_0, y_0, z_0)$, то функция (1) дифференцируема в окрестности точки $A_0(x_0, y_0)$ и ее производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ могут быть найдены из уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Если функция $F(x, y, z)$ дифференцируема достаточное число раз, то последовательным дифференцированием равенств (2) вычисляются также производные высших порядков от функции z .

3°. Неявные функции, определяемые системой уравнений. Пусть функции $F_1(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) удовлетворяют следующим условиям:

1) обращаются в нуль в точке $A_0(x_{10}, \dots, x_{m0}; y_{10}, \dots, y_{n0})$,

2) дифференцируемы в окрестности точки A_0 ;

3) функциональный определитель $\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \neq 0$ в точке A_0 .

В таком случае система уравнений

$$F_l(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

однозначно определяет в некоторой окрестности точки $A_0(x_{10}, \dots, x_{m0})$ систему дифференцируемых функций

$$y_i = f(x_1, \dots, x_m) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

удовлетворяющих уравнениям (3) и условиям

$$f_l(x_{10}, \dots, x_{m0}) = y_{l0} \quad (l = 1, 2, \dots, n).$$

Дифференциалы этих неявных функций могут быть найдены из системы

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial F_l}{\partial x_j} dx_j + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_l}{\partial y_k} dy_k = 0$$

($l = 1, 2, \dots, n$) *).

3361. Показать, что разрывная в каждой точке функция Дирихле

$$y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

удовлетворяет уравнению

$$y^2 - y = 0.$$

3362. Пусть функция $f(x)$ определена в интервале (a, b) . В каком случае уравнение

$$f(x)y = 0$$

имеет при $a < x < b$ единственное непрерывное решение $y = 0$?

3363. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в интервале (a, b) . В каком случае уравнение

$$f(x)y = g(x)$$

имеет в интервале (a, b) единственное непрерывное решение?

3364. Пусть дано уравнение

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (1)$$

и

$$y = y(x) \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (2)$$

— однозначная функция, удовлетворяющая уравнению (1).

1) Сколько однозначных функций (2) удовлетворяет уравнению (1)?

2) Сколько однозначных непрерывных функций (2) удовлетворяют уравнению (1)?

*) При формулировке большинства задач этого раздела без оговорок предполагается, что выполнены условия существования неявных функций и их соответствующих производных.

3) Сколько однозначных непрерывных функций (2) удовлетворяет уравнению (1), если: а) $y(0)=1$; б) $y(1)=0$?

3365. Пусть дано уравнение

$$x^3 = y^3 \quad (1)$$

и

$$y = y(x) \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (2)$$

есть однозначная функция, удовлетворяющая уравнению (1).

1) Сколько однозначных функций (2) удовлетворяет уравнению (1)?

2) Сколько однозначных непрерывных функций (2) удовлетворяет уравнению (1)?

3) Сколько однозначных дифференцируемых функций (2) удовлетворяет уравнению (1)?

4) Сколько однозначных непрерывных функций (2) удовлетворяет уравнению (1), если: а) $y(1)=1$; б) $y(0)=0$?

5) Сколько однозначных непрерывных функций $y=y(x)$ ($1-\delta < x < 1+\delta$) удовлетворяет уравнению (1), если $y(1)=1$ и δ достаточно мало?

3366. Уравнение

$$x^3 + y^3 = x^4 + y^4$$

определяет y как многозначную функцию от x . В каких областях эта функция 1) однозначна, 2) двузначна, 3) трехзначна, 4) четырехзначна? Определить точки ветвления этой функции и ее однозначные непрерывные ветви.

3367. Найти точки ветвления и непрерывные однозначные ветви $y=y(x)$ ($-1 \leq x \leq 1$) многозначной функции y , определяемой уравнением

$$(x^2 + y^2)^3 = x^2 - y^2.$$

3368. Пусть $f(x)$ — непрерывна при $a < x < b$ и $\varphi(y)$ — монотонно возрастает и непрерывна при $c < y < d$. В каком случае уравнение

$$\varphi(y) = f(x)$$

определяет однозначную функцию

$$y = \varphi^{-1}(f(x))?$$

Рассмотреть примеры: а) $\sin y + \operatorname{sh} y = x$; б) $e^{-y} = -\sin^2 x$.

3369. Пусть

$$x = y + \varphi(y), \quad (1)$$

где $\varphi(0)=0$ и $|\varphi'(y)| \leq k < 1$ при $-a < y < a$. Доказать, что при $-e < x < e$ существует единственная дифференцируемая

функция $y = y(x)$, удовлетворяющая уравнению (1), и такая, что $y(0) = 0$.

3370. Пусть $y = y(x)$ — неявная функция, определяемая уравнением

$$x = ky + \varphi(y),$$

где постоянная $k \neq 0$, и $\varphi(y)$ — дифференцируемая периодическая функция периода ω такая, что $|\varphi'(y)| < |k|$. Доказать, что

$$y = \frac{x}{k} + \psi(x),$$

где $\psi(x)$ — периодическая функция с периодом $|k|\omega$.

Найти y' и y'' для функций y , определяемых следующими уравнениями:

3371. $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$. 3372. $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

3373. $y - \varepsilon \sin y = x$ ($0 < \varepsilon < 1$).

3374. $x^y = y^x$ ($x \neq y$). 3375. $y = 2x \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

3376. Доказать, что при

$$1 + xy = k(x - y),$$

где k — постоянная величина, имеет место равенство

$$\frac{dx}{1+x^2} = \frac{dy}{1+y^2}.$$

3377. Доказать, что если

$$x^2 y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

то при $xy > 0$ имеет место равенство

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0.$$

3378. Доказать, что уравнение

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad (a \neq 0)$$

в окрестности точки $x=0$, $y=0$ определяет две дифференцируемые функции: $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$. Найти $y_1'(0)$ и $y_2'(0)$.

3379. Найти y' при $x=0$ и $y=0$, если

$$(x^2 + y^2)^2 = 3x^2 y - y^3.$$

3380. Найти y' , y'' и y''' , если $x^2 + xy + y^2 = 3$.

3381. Найти y' , y'' и y''' при $x=0$, $y=1$, если

$$x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0.$$

3382. Доказать, что для кривой 2-го порядка

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

справедливо равенство

$$\frac{d^3}{dx^3} \left[(y'')^{-\frac{2}{3}} \right] = 0.$$

Для функции $z = z(x, y)$ найти частные производные первого и второго порядков, если:

3383. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. 3386. $z = \sqrt{x^2 - y^2} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.

3384. $z^3 - 3xyz = a^3$.

3385. $x + y + z = e^z$. 3387. $x + y + z = e^{-\alpha x + \beta z}$.

3388. Пусть

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0 \quad (1)$$

и

$$f(x, y, z) = xyz^2.$$

Найти: а) $f'_x(1, 1, 1)$, если $z = z(x, y)$ есть неявная функция, определяемая уравнением (1); б) $f'_x(1, 1, 1)$, если $y = y(x, z)$ есть неявная функция, определяемая уравнением (1). Объяснить, почему эти производные различны.

3389. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ при $x = 1$, $y = -2$, $z = 1$, если $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$.

Найти dz и d^2z , если:

3390. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. 3391. $xyz = x + y + z$.

3392. $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1$. 3393. $z = x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x}$.

3394. Найти du , если

$$u^3 - 3(x+y)u^2 + z^3 = 0.$$

3395. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2) = 0$.

3396. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $F(x-y, y-z, z-x) = 0$.

3397. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, если $F(x, x+y, x+y+z) = 0$.

3398. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, если $F(xz, yz) = 0$.

3399. Найти d^2z , если:

а) $F(x+z, y+z) = 0$; б) $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$.

3399.1. Пусть $z = z(x, y)$ — та дифференцируемая функция, определяемая уравнением

$$z^3 - xz + y = 0,$$

которая при $x = 3$, $y = -2$ принимает значение $z = 2$. Найти $dz(3, -2)$ и $d^2z(3, -2)$.

3400. Пусть $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$, $z = z(x, y)$ — функции, определяемые уравнением $F(x, y, z) = 0$.

Доказать, что

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

3401. Найти $\frac{dx}{dz}$ и $\frac{dy}{dz}$, если $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

3402. Найти $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, $\frac{d^2x}{dz^2}$ и $\frac{d^2y}{dz^2}$ при $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$, если $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}z^2$, $x + y + z = 2$.

3403. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, если $xu - yv = 0$, $yu + xv = 1$.

3403.1. Система уравнений

$$\begin{cases} xe^{u+v} + 2uv = 1, \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x \end{cases}$$

определяет дифференцируемые функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ такие, что $u(1, 2) = 0$ и $v(1, 2) = 0$. Найти $du(1, 2)$ и $dv(1, 2)$.

3404. Найти du , dv , d^2u и d^2v , если

$$u + v = x + y, \quad \frac{\sin u}{\sin v} = \frac{x}{y}.$$

3405. Найти du , dv , d^2u и d^2v при $x = 1$, $y = 1$, $u = 0$, $v = \frac{\pi}{4}$, если

$$e^{\frac{u}{x}} \cos \frac{v}{y} = \frac{x}{\sqrt{2}}, \quad e^{\frac{u}{x}} \sin \frac{v}{y} = \frac{y}{\sqrt{2}}.$$

3406. Пусть

$$x = t + t^{-1}, \quad y = t^2 + t^{-2}, \quad z = t^3 + t^{-3}.$$

Найти $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ и $\frac{d^2z}{dx^2}$.

3407. В какой области плоскости Oxy система уравнений

$$x = u + v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = u^3 + v^3,$$

где параметры u и v принимают всевозможные вещественные значения, определяет z как функцию от переменных x и y ?

Найти производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

3407.1. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $u = 1$, $v = 1$, если

$$\begin{cases} x = u + \ln v, \\ y = v - \ln u, \\ z = 2u + v. \end{cases}$$

3407.2. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ в точке $u = 2$, $v = 1$, если

$$\begin{cases} x = u + v^3, \\ y = u^2 - v^3, \\ z = 2uv. \end{cases}$$

3408. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, если

$$x = \cos \varphi \cos \psi, \quad y = \cos \varphi \sin \psi, \quad z = \sin \varphi.$$

3409. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = v.$$

3410. Пусть $z = z(x, y)$ функция определяется системой уравнений:

$$x = e^{u+v}, \quad y = e^{u-v}, \quad z = uv$$

(u и v — параметры). Найти dz и d^2z , при $u = 0$ и $v = 0$.

3411. Найти $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{d^2z}{dx^2}$, если

$$z = x^2 + y^2,$$

где $y = y(x)$ определяется из уравнения

$$x^2 - xy + y^2 = 1.$$

3412. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, если

$$u = \frac{x+z}{y+z},$$

где z определяется из уравнения

$$ze^z = xe^x + ye^y.$$

3413. Пусть уравнения

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

определяют z как функцию от x и y . Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

3414. Пусть

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v).$$

Найти частные производные первого и второго порядков от обратных функций: $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$.

3415. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, если

а) $x = u \cos \frac{v}{u}$, $y = u \sin \frac{v}{u}$;

б) $x = e^u + u \sin v$, $y = e^u - u \cos v$.

3416. Функция $u = u(x)$ определяется системой уравнений

$$u = f(x, y, z), \quad g(x, y, z) = 0, \quad h(x, y, z) = 0.$$

Найти $\frac{du}{dx}$ и $\frac{d^2u}{dx^2}$.

3417. Функция $u = u(x, y)$ определяется системой уравнений

$$u = f(x, y, z, t), \quad g(y, z, t) = 0, \quad h(z, t) = 0.$$

Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$.

3418. Пусть

$$x = f(u, v, w), \quad y = g(u, v, w), \quad z = h(u, v, w).$$

Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$.

3419. Пусть функция $z = z(x, y)$ удовлетворяет системе уравнений

$$f(x, y, z, t) = 0, \quad g(x, y, z, t) = 0,$$

где t — переменный параметр. Найти dz .

3420. Пусть $u = f(z)$, где z — неявная функция от переменных x и y , определяемая уравнением $z = x + y\varphi(z)$.

Доказать формулу Лагранжа

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left\{ [\varphi(z)]^n \frac{\partial u}{\partial x} \right\}.$$

Указание. Доказать формулу для $n=1$ и применить метод математической индукции.

3421. Показать, что функция $z = z(x, y)$, определяемая уравнением

$$\Phi(x - az, y - bz) = 0, \quad (1)$$

где $\Phi(u, v)$ — произвольная дифференцируемая функция от переменных u и v (a и b — постоянные), являются решением уравнения

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Выяснить геометрические свойства поверхности (1).

3422. Показать, что функция $z = z(x, y)$, определяемая уравнением

$$\Phi\left(\frac{x-x_0}{z-z_0}, \frac{y-y_0}{z-z_0}\right) = 0, \quad (2)$$

где $\Phi(u, v)$ — произвольная дифференцируемая функция от переменных u и v , удовлетворяет уравнению

$$(x-x_0) \frac{\partial z}{\partial x} + (y-y_0) \frac{\partial z}{\partial y} = z - z_0.$$

Выяснить геометрические свойства поверхности (2).

3423. Показать, что функция $z = z(x, y)$, определяемая уравнением

$$ax + by + cz = \Phi(x^2 + y^2 + z^2), \quad (3)$$

где $\Phi(u)$ — произвольная дифференцируемая функция от переменной u и a, b и c — постоянные, удовлетворяет уравнению

$$(cy - bz) \frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx) \frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay.$$

Выяснить геометрические свойства поверхности (3).

3424. Функция $z = z(x, y)$ задана уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = yf\left(\frac{z}{y}\right).$$

Показать, что

$$(x^2 - y^2 - z^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz.$$

3425. Функция $z = z(x, y)$ задана уравнением

$$F(x + zy^{-1}, y + zx^{-1}) = 0.$$

Показать, что

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

3426. Показать, что функция $z = z(x, y)$, определяемая системой уравнений:

$$\begin{cases} x \cos \alpha + y \sin \alpha + \ln z = f(\alpha), \\ -x \sin \alpha + y \cos \alpha = f'(\alpha), \end{cases}$$

где $\alpha = \alpha(x, y)$ — переменный параметр и $f(\alpha)$ — произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = z^2.$$

3427. Показать, что функция

$$z = z(x, y),$$

заданная системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} z &= \alpha x + \frac{y}{\alpha} + f(\alpha), \\ 0 &= x - \frac{y}{\alpha^2} + f'(\alpha), \end{aligned} \right\}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

3428. Показать, что функция $z = z(x, y)$, заданная уравнениями

$$\left. \begin{aligned} [z - f(\alpha)]^2 &= x^2 (y^2 - \alpha^2), \\ [z - f(\alpha)] f'(\alpha) &= \alpha x^2, \end{aligned} \right\}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = xy.$$

3429. Показать, что функция $z = z(x, y)$, заданная уравнениями

$$\left. \begin{aligned} z &= \alpha x + y\varphi(\alpha) + \psi(\alpha), \\ 0 &= x + y\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha), \end{aligned} \right\}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0.$$

3430. Показать, что неявная функция $z = z(x, y)$, определяемая уравнением

$$y = x\varphi(z) + \psi(z),$$

удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

§ 4. Замена переменных

1°. Замена переменных в выражении, содержащем обыкновенные производные. Пусть в дифференциальном выражении

$$A = \Phi(x, y, y'_x, y''_{xx}, \dots)$$

требуется перейти к новым переменным: t — независимой переменной и u — функции, связанным с прежними переменными x и y уравнениями

$$x = f(t, u), \quad y = g(t, u). \quad (1)$$

Дифференцируя уравнения (1), будем иметь:

$$y'_x = \frac{\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial u} u'_t}{\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} u'_t}.$$

Аналогично выражаются высшие производные $y''_{xx}, \dots$. В результате мы получаем:

$$A = \Phi_1(t, u, u'_t, u''_{tt}, \dots).$$

2°. Замена независимых переменных в выражении, содержащем частные производные. Если в дифференциальном выражении

$$B = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dots\right)$$

положить

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad (2)$$

где u и v — новые независимые переменные, то последовательные частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots$ определяются из следующих уравнений:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial v},$$

и т. п.

3°. Замена независимых переменных и функции в выражении, содержащем частные производные. В более общем случае, если имеем уравнения

$$x = f(u, v, w), \quad y = g(u, v, w), \quad z = h(u, v, w), \quad (3)$$

где u, v — новые независимые переменные и $w = w(u, v)$ — новая функция, то для частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots$ получаем такие уравнения:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} \right) = \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v} \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v} \right) = \frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v},$$

и т. п.

В некоторых случаях замены переменных удобно пользоваться полными дифференциалами.

3431. Преобразовать уравнение

$$y' y''' - 3y''^2 = x,$$

приняв y за новую независимую переменную.

3432. Таким же образом преобразовать уравнение

$$y'^2 y^{IV} - 10y' y'' y''' + 15y''^3 = 0.$$

3433. Преобразовать уравнение

$$y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0,$$

приняв x за функцию и $t = xy$ — за независимое переменное.

Вводя новые переменные, преобразовать следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

3434. $x^2 y'' + xy' + y = 0$, если $x = e^t$.

3435. $y''' = \frac{6y}{x^3}$, если $t = \ln |x|$.

3436. $(1 - x^2) y'' - xy' + n^2 y = 0$, если $x = \cos t$.

3437. $y'' + y' \operatorname{th} x + \frac{m^2}{\operatorname{ch}^2 x} y = 0$, если $x = \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}$.

3438. $y'' + p(x) y' + q(x) y = 0$, если $y = ue^{-\frac{r}{2} \int_{x_0}^x p(\xi) d\xi}$, где $p(x) \in C^{(1)}$.

3439. $x^4 y'' + xy y' - 2y^2 = 0$, если $x = e^t$ и $y = ue^{3t}$, где $u = u(t)$.

3440. $(1 + x^2)^3 y'' = y$, если $x = \operatorname{tg} t$ и $y = \frac{u}{\cos t}$, где $u = u(t)$.

3441. $(1 - x^2)^3 y'' = -y$, если $x = \operatorname{th} t$ и $y = \frac{u}{\operatorname{ch} t}$, где $u = u(t)$.

3442. $y'' + (x + y)(1 + y')^2 = 0$, если $x = u + t$ и $y = u - t$, где $u = u(t)$.

3443. $y''' - x^2 y'' + xy' - y = 0$, если $x = \frac{1}{t}$ и $y = \frac{u}{t}$, где $u = u(t)$.

3444. Преобразовать уравнение Стокса

$$y'' = \frac{Ay}{(x-a)^3(x-b)^3},$$

полагая

$$u = \frac{y}{x-b}, \quad t = \ln \left| \frac{x-a}{x-b} \right|$$

и принимая u за функцию переменной t .

3445. Показать, что если уравнение

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x) y = 0$$

преобразовать подстановкой $x = \varphi(\xi)$ в уравнение

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + P(\xi) \frac{dy}{d\xi} + Q(\xi) y = 0,$$

то

$$[2P(\xi)Q(\xi) + Q'(\xi)][Q(\xi)]^{-\frac{3}{2}} = [2p(x)q(x) + q'(x)][q(x)]^{-\frac{3}{2}}.$$

3446. В уравнении

$$\Phi(y, y', y'') = 0,$$

где Φ — однородная функция переменных y, y', y'' , положить

$$y = e^x \int_0^x u \, dx.$$

3447. В уравнении

$$F(x^2 y'', xy', y) = 0,$$

где F — однородная функция своих аргументов, положить

$$u = x \frac{y'}{y}.$$

3448. Доказать, что уравнение

$$y'''(1 + y'^2) - 3y'y''^2 = 0$$

не меняет своего вида при гомографическом преобразовании

$$x = \frac{a_1\xi + b_1\eta + c_1}{a_2\xi + b_2\eta + c_2}, \quad y = \frac{a_2\xi + b_2\eta + c_2}{a_3\xi + b_3\eta + c_3}.$$

Указание. Данное преобразование представить в виде композиции простейших преобразований:

$$x = \alpha X + \beta Y + \gamma, \quad y = Y;$$

$$X = \frac{1}{X_1}, \quad Y = \frac{Y_1}{X_1}$$

и

$$X_1 = a_1\xi + b_1\eta + c_1, \quad Y_1 = a_2\xi + b_2\eta + c_2.$$

3449. Доказать, что шварццан

$$S[x(t)] = \frac{x'''(t)}{x'(t)} - \frac{3}{2} \left[\frac{x''(t)}{x'(t)} \right]^2$$

не меняет своего значения при дробно-линейном преобразовании:

$$y = \frac{ax(t) + b}{cx(t) + d} \quad (ad - bc \neq 0).$$

Преобразовать к полярным координатам r и φ , полагая $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, следующие уравнения:

3450. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}.$

3451. $(xy' - y)^2 = 2xy(1 + y'^2).$

3452. $(x^2 + y^2)^2 y'' = (x + yy')^2.$

3453. Преобразовать к полярным координатам выражение

$$\frac{x + yy'}{xy' - y}.$$

3454. Кривизну плоской кривой

$$K = \frac{|y_{xx}|}{(1 + y_x^2)^{3/2}}$$

выразить в полярных координатах r и φ .

3455. В системе уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y + kx(x^2 + y^2), \quad \frac{dy}{dt} = -x + ky(x^2 + y^2)$$

перейти к полярным координатам.

3456. Преобразовать выражение

$$W = x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2},$$

введя новые функции $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$.

3457. В преобразовании Лежандра каждой точке (x, y) кривой $y = y(x)$ ставится в соответствие точка (X, Y) , где

$$X = y', \quad Y = xy' - y.$$

Найти Y' , Y'' и Y''' .

Вводя новые независимые переменные ξ и η , решить следующие уравнения:

$$3458. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ если } \xi = x + y \text{ и } \eta = x - y.$$

$$3459. y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \text{ если } \xi = x \text{ и } \eta = x^2 + y^2.$$

$$3460. a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1 \quad (a \neq 0), \text{ если } \xi = x \text{ и } \eta = y - bx.$$

$$3461. x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z, \text{ если } \xi = x \text{ и } \eta = \frac{y}{x}.$$

Принимая u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующие уравнения:

$$3462. x \frac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{1 + y^2} \frac{\partial z}{\partial y} = xy, \quad \text{если } u = \ln x \quad \text{и} \quad v = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}).$$

$$3463. (x + y) \frac{\partial z}{\partial x} - (x - y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \text{если } u = \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{и} \quad v = \arctg \frac{y}{x}.$$

$$3464. x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \text{если}$$

$$u = \frac{y}{x} \quad \text{и} \quad v = z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$3465. x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{z}, \quad \text{если}$$

$$u = 2x - z^2 \quad \text{и} \quad v = \frac{y}{z}.$$

$$3466. (x + z) \frac{\partial z}{\partial x} + (y + z) \frac{\partial z}{\partial y} = x + y + z, \quad \text{если}$$

$$u = x + z \quad \text{и} \quad v = y + z.$$

3467. Преобразовать выражение

$$(z + e^x) \frac{\partial z}{\partial x} + (z + e^y) \frac{\partial z}{\partial y} - (z^2 - e^{x+y}),$$

приняв за новые независимые переменные

$$\xi = y + ze^{-x}, \quad \eta = x + ze^{-y}.$$

3468. Преобразовать выражение

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2,$$

полагая

$$x = uv, \quad y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2).$$

3469. В уравнении

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

положить

$$\xi = x, \quad \eta = y - x, \quad \zeta = z - x.$$

3470. Преобразовать уравнение

$$(x - z) \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

приняв x за функцию, а y и z — за независимые переменные.

3471. Преобразовать уравнение

$$(y - z) \frac{\partial z}{\partial x} + (y + z) \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

приняв x за функцию, а

$$u = y - z, \quad v = y + z$$

за независимые переменные.

3472. Преобразовать выражение

$$A = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2,$$

приняв x за функцию и

$$u = xz, \quad v = yz$$

— за независимые переменные.

3473. В уравнении

$$(y + z + u) \frac{\partial u}{\partial x} + (x + z + u) \frac{\partial u}{\partial y} + (x + y + u) \frac{\partial u}{\partial z} = x + y + z$$

положить:

$$e^{\xi} = x - u, \quad e^{\eta} = y - u, \quad e^{\zeta} = z - u.$$

Перейти к новым переменным u, v, w , где $w = w(u, v)$, в следующих уравнениях:

3474. $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = (y - x)z$, если

$$u = x^2 + y^2, \quad v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad w = \ln z - (x + y).$$

3475. $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$, если

$$u = x, \quad v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}, \quad w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}.$$

3476. $(xy + z) \frac{\partial z}{\partial x} + (1 - y^2) \frac{\partial z}{\partial y} = x + yz$, если

$$u = yz - x, \quad v = xz - y, \quad w = xy - z.$$

3477. $\left(x \frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(y \frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = z^2 \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$, если

$$x = ue^w, \quad y = ve^w, \quad z = we^w.$$

3478. Преобразовать выражение

$$(x - y) : \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right),$$

полагая

$$u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v = \operatorname{arctg} z, \quad w = x + y + z,$$

где $w = w(u, v)$.

3479. Преобразовать выражение

$$A = \frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y},$$

полагая $u = xe^z$, $v = ye^z$, $w = ze^z$, где $w = w(u, v)$.

3480. В уравнении

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = u + \frac{xy}{z}$$

положить: $\xi = \frac{x}{z}$, $\eta = \frac{y}{z}$, $\zeta = z$, $w = \frac{u}{z}$, где $w = w(\xi, \eta, \zeta)$.

Преобразовать к полярным координатам r и φ , полагая $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, следующие выражения:

$$3481. w = x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x}. \quad 3483. w = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$$

$$3482. w = x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}. \quad 3484. w = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

$$3485. w = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

$$3486. w = y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

3487. В выражении

$$I = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}$$

положить $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

3488. Решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

введя новые независимые переменные

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at.$$

Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующие уравнения:

$$3489. 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \text{ если}$$

$$u = x + 2y + 2 \quad \text{и} \quad v = x - y - 1.$$

$$3490. (1 + x^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1 + y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \text{ если}$$

$$u = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \quad \text{и} \quad v = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}).$$

$$3491. ax^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2bxy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + cy^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (a, b, c - \text{постоянны}),$$

если

$$u = \ln x \quad \text{и} \quad v = \ln y.$$

$$3492. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ если}$$

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{и} \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

$$3493. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + m^2 z = 0, \text{ если}$$

$$x = e^u \cos v, \quad y = e^u \sin v.$$

$$3494. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial y} (y > 0), \text{ если}$$

$$u = x - 2\sqrt{y} \quad \text{и} \quad v = x + 2\sqrt{y}.$$

$$3495. \quad x^3 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ если}$$

$$u = xy \quad \text{и} \quad v = \frac{x}{y}.$$

$$3496. \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ если}$$

$$u = x + y \quad \text{и} \quad v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

$$3497. \quad xy \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + xy \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \text{ если}$$

$$u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad \text{и} \quad v = xy.$$

$$3498. \quad x^3 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2x \sin y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \sin^2 y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ если}$$

$$u = x \operatorname{tg} \frac{y}{2} \quad \text{и} \quad v = x.$$

$$3499. \quad x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (x > 0, y > 0), \text{ если}$$

$$x = (u + v)^2 \quad \text{и} \quad y = (u - v)^2.$$

$$3500. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right)^2, \text{ если}$$

$$u = x \quad \text{и} \quad v = y + z.$$

3501. С помощью линейной замены

$$\xi = x + \lambda_1 y, \quad \eta = x + \lambda_2 y$$

преобразовать уравнение

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

где A, B и C — постоянные и $AC - B^2 < 0$, к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Найти общий вид функции, удовлетворяющей уравнению (1).
3502. Доказать, что вид уравнения Лапласа

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

не меняется при любой невырожденной замене переменных

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v),$$

удовлетворяющей условиям:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial v}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{\partial \psi}{\partial u}.$$

3503. Преобразовать уравнения

$$\text{а) } \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad \text{б) } \Delta(\Delta u) = 0,$$

полагая $u = f(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3504. Какой вид принимает уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + cw = 0,$$

если положить

$$w = f(u),$$

где $u = (x - x_0)(y - y_0)$?

3505. Преобразовать выражение

$$A = x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x},$$

полагая

$$x + y = X, \quad y = XY.$$

3506. Показать, что уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2(y - y^3) \frac{\partial z}{\partial y} + x^2 y^2 z = 0$$

не меняет своего вида при преобразовании переменных

$$x = uv \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{v}.$$

3507. Показать, что уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

не меняет своего вида при замене переменных

$$u = x + z \quad \text{и} \quad v = y + z.$$

3508. Преобразовать уравнение

$$xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + yz \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + xz \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0,$$

полагая

$$x = \eta \zeta, \quad y = \xi \zeta, \quad z = \xi \eta.$$

3609. Преобразовать уравнение

$$-\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_3} = 0,$$

полагая

$$y_1 = x_1 + x_2 - x_3, \quad y_2 = x_1 + x_2 - x_3, \quad y_3 = x_1 + x_2 - x_3.$$

3510. Преобразовать уравнение

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2xz \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2yz \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0,$$

полагая

$$\xi = \frac{y}{x}, \quad \eta = \frac{z}{x}, \quad \zeta = y - z.$$

Указание. Записать уравнение в виде $A^2 u - Au = 0$, где

$$A = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}.$$

3511. Выражения

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2$$

и

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

преобразовать к сферическим координатам, полагая

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

Указание. Замену переменных представить в виде композиции двух частичных замен

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad z = z$$

и

$$R = r \sin \theta, \quad \varphi = \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

3512. В уравнении

$$z \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2$$

ввести новую функцию w , полагая $w = z^2$.

Приняв u и v за новые независимые переменные и $w = w(u, v)$ за новую функцию, преобразовать следующие уравнения:

$$3513. \quad y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{x}, \quad \text{если } u = \frac{x}{y}, \quad v = x, \quad w = xz - y.$$

$$3514. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad \text{если } u = x + y, \quad v = \frac{y}{x}, \quad w = \frac{z}{x}.$$

$$3515. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad \text{если } u = x + y, \quad v = x - y,$$

$$w = xy - z.$$

$$3516. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = z, \quad \text{если } u = \frac{x+y}{2}, \quad v = \frac{x-y}{2}, \quad w = ze^v.$$

$$3517. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(1 + \frac{y}{x}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

если

$$u = x, \quad v = x + y, \quad w = x + y + z.$$

$$3518. \quad (1-x^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1-y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \text{если } x = \sin u, \\ y = \sin v, \quad z = e^w.$$

$$3519. \quad (1-x^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2x \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{4} z = 0 \quad (|x| < 1), \quad \text{если}$$

$$u = \frac{1}{2}(y + \arccos x), \quad v = \frac{1}{2}(y - \arccos x), \quad w = z \sqrt{1-x^2}.$$

$$3520. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \frac{x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}}{x^2 - y^2} - \frac{3(x^2 + y^2)z}{(x^2 - y^2)^2} \quad (|x| > |y|), \quad \text{если}$$

$$u = x + y, \quad v = x - y, \quad w = \frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

3521. Доказать, что всякое уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

(a, b, c — постоянные) путем замены

$$z = ue^{\alpha x + \beta y},$$

где α и β — постоянные величины и $u = u(x, y)$, можно привести к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c_1 u = 0 \quad (c_1 = \text{const}).$$

3522. Показать, что уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

не изменяет своего вида при замене переменных

$$x' = \frac{x}{y}, \quad y' = -\frac{1}{y}, \quad u' = \frac{u}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}},$$

где u' — функция переменных x' и y' .

3523. В уравнении

$$q(1+q) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (1+p+q+2pq) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + p(1+p) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

где $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ и $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, положить $u = x + z$, $v = y + z$, $w = x + y + z$, считая, что $w = w(u, v)$.

3524. В уравнении

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(x \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(y \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(z \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

положить $x = e^\xi$, $y = e^\eta$, $z = e^\zeta$, $u = e^w$, где $w = w(\xi, \eta, \zeta)$.

3525. Показать, что вид уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$$

не меняется при любом распределении ролей между переменными x , y и z .

3526. Решить уравнение

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

приняв x за функцию от переменных y и z .

3527. Преобразовать уравнение

$$A \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

применяя преобразование Лежандра

$$X = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad Z = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z,$$

где $Z = Z(X, Y)$.

§ 5. Геометрические приложения

1°. Касательная прямая и нормальная плоскость. Уравнение касательной прямой к кривой

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

в точке ее $M(x, y, z)$ имеет вид

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}.$$

Уравнение нормальной плоскости в этой точке:

$$\frac{dx}{dt} (X-x) + \frac{dy}{dt} (Y-y) + \frac{dz}{dt} (Z-z) = 0.$$

2°. Касательная плоскость и нормаль. Уравнение касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке ее $M(x, y, z)$ имеет вид

$$Z - z = \frac{\partial z}{\partial x} (X - x) + \frac{\partial z}{\partial y} (Y - y).$$

Уравнение нормали в точке M есть

$$\frac{X-x}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{Z-z}{-1}.$$

Если уравнение поверхности задано в неявном виде $F(x, y, z) = 0$, то соответственно имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial x} (X-x) + \frac{\partial F}{\partial y} (Y-y) + \frac{\partial F}{\partial z} (Z-z) = 0$$

— уравнение касательной плоскости и

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

— уравнение нормали.

3°. Огибающая кривая семейства плоских кривых. Огибающая кривая однопараметрического семейства кривых $f(x, y, \alpha) = 0$ (α — параметр) удовлетворяет системе уравнений:

$$f(x, y, \alpha) = 0, \quad f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0.$$

4°. Огибающая поверхность семейства поверхностей. Огибающая поверхность однопараметрического семейства поверхностей $F(x, y, z, \alpha) = 0$ удовлетворяет системе уравнений:

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, \quad F'_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0.$$

В случае двухпараметрического семейства поверхностей $\Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$ огибающая поверхность удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \quad \Phi'_\alpha(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \quad \Phi'_\beta(x, y, z, \alpha, \beta) = 0.$$

Написать уравнения касательных прямых и нормальных плоскостей в данных точках к следующим кривым:

3528. $x = a \cos \alpha \cos t$, $y = a \sin \alpha \cos t$, $z = a \sin t$; в точке $t = t_0$.

3529. $x = a \sin^2 t$, $y = b \sin t \cos t$, $z = c \cos^2 t$; в точке $t = \frac{\pi}{4}$.

3530. $y = x$, $z = x^2$; в точке $M(1, 1, 1)$.

3531. $x^2 + z^2 = 10$, $y^2 + z^2 = 10$; в точке $M(1, 1, 3)$.

3532. $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, $x + y + z = 0$; в точке $M(1, -2, 1)$.

3533. На кривой $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ найти точку, касательная в которой параллельна плоскости $x + 2y + z = 4$.

3534. Доказать, что касательная к винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ образует постоянный угол с осью Oz .

3535. Доказать, что кривая

$$x = ae^t \cos t, \quad y = ae^t \sin t, \quad z = ae^t$$

пересекает все образующие конуса $x^2 + y^2 = z^2$ под одним и тем же углом.

3536. Доказать, что локсодрома

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2} \right) = e^{k\varphi} \quad (k = \text{const}),$$

где φ — долгота, ψ — широта точки сферы, пересекает все меридианы сферы под постоянным углом.

3537. Найти тангенс угла, образованного касательной в точке $M_0(x_0, y_0)$ к кривой

$$z = f(x, y), \quad \frac{x - x_0}{\cos \alpha} = \frac{y - y_0}{\sin \alpha},$$

где f — дифференцируемая функция, с плоскостью Oxy .

3538. Найти производную функции

$$u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

в точке $M(1, 2, -2)$ в направлении касательной в этой точке к кривой

$$x = t, \quad y = 2t^2, \quad z = -2t^4.$$

Написать уравнения касательной плоскости и нормали в указанных точках к следующим поверхностям:

3539. $z = x^2 + y^2$; в точке $M_0(1, 2, 5)$.

3540. $x^2 + y^2 + z^2 = 169$; в точке $M_0(3, 4, 12)$.

3541. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; в точке $M_0(1, 1, \frac{\pi}{4})$.

3542. $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$; в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

3543. $z = y + \ln \frac{x}{z}$; в точке $M_0(1, 1, 1)$.

3544. $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$; в точке $M_0(2, 2, 1)$.

3545. $x = a \cos \psi \cos \varphi$, $y = b \cos \psi \sin \varphi$, $z = c \sin \psi$; в точке $M_0(\varphi_0, \psi_0)$.

3546. $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = r \operatorname{ctg} \alpha$; в точке $M_0(\varphi_0, r_0)$.

3547. $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = av$; в точке $M_0(u_0, v_0)$.

3548. Найти предельное положение касательной плоскости к поверхности:

$$x = u + v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = u^3 + v^3,$$

когда точка касания $M(u, v)$ ($u \neq v$) неограниченно приближается к точке $M_0(u_0, u_0)$ линии края $u = v$ поверхности.

3549. На поверхности $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 8$ найти точки, в которых касательные плоскости параллельны координатным плоскостям.

3550. В какой точке эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

нормаль к нему образует равные углы с осями координат?

3551. К поверхности $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ провести касательные плоскости, параллельные плоскости

$$x + 4y + 6z = 0.$$

3552. Доказать, что касательные плоскости к поверхности $xyz = a^3$ ($a > 0$) образуют с плоскостями координат тетраэдр постоянного объема.

3553. Доказать, что касательные плоскости к поверхности

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a} \quad (a > 0)$$

отсекают на осях координат отрезки, сумма которых постоянна.

3554. Доказать, что касательные плоскости к конусу

$$z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

проходят через его вершину.

3555. Доказать, что нормали к поверхности вращения

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad (f' \neq 0)$$

пересекают ось вращения.

3556. Найти проекции эллипсоида

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy = 1$$

на координатные плоскости.

3557. Квадрат $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ разбит на конечное число частей σ диаметра $\leq \delta$. Оценить сверху число δ , если направления нормалей к поверхности

$$z = 1 - x^2 - y^2$$

в любых точках $P(x, y)$ и $P_1(x_1, y_1)$, принадлежащих одной и той же части σ , отличаются меньше чем на 1° .

3558. Пусть

$$z = f(x, y), \quad \text{где } (x, y) \in D, \quad (1)$$

— уравнение поверхности и $\varphi(P_1, P)$ — угол между нормальями к поверхности (1) в точках $P(x, y) \in D$ и $P_1(x_1, y_1) \in D$.

Доказать, что если область D ограничена и замкнута и функция $f(x, y)$ имеет ограниченные производные 2-го порядка в области D , то справедливо неравенство Ляпунова

$$\varphi(P_1, P) < C\rho(P_1, P), \quad (2)$$

где C — постоянная и $\rho(P_1, P)$ — расстояние между точками P и P_1 .

3559. Под каким углом пересекается цилиндр $x^2 + y^2 = a^2$ с поверхностью $bz = xy$ в общей точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$?

где φ — долгота, ψ — широта точки сферы, пересекает все меридианы сферы под постоянным углом.

3537. Найти тангенс угла, образованного касательной в точке $M_0(x_0, y_0)$ к кривой

$$z = f(x, y), \quad \frac{x-x_0}{\cos \alpha} = \frac{y-y_0}{\sin \alpha},$$

где f — дифференцируемая функция, с плоскостью Oxy .

3538. Найти производную функции

$$u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

в точке $M(1, 2, -2)$ в направлении касательной в этой точке к кривой

$$x = t, \quad y = 2t^2, \quad z = -2t^4.$$

Написать уравнения касательной плоскости и нормали в указанных точках к следующим поверхностям:

3539. $z = x^2 + y^2$; в точке $M_0(1, 2, 5)$.

3540. $x^2 + y^2 + z^2 = 169$; в точке $M_0(3, 4, 12)$.

3541. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; в точке $M_0\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$.

3542. $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$; в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

3543. $z = y + \ln \frac{x}{z}$; в точке $M_0(1, 1, 1)$.

3544. $2\frac{x}{z} + 2\frac{y}{z} = 8$; в точке $M_0(2, 2, 1)$.

3545. $x = a \cos \psi \cos \varphi$, $y = b \cos \psi \sin \varphi$, $z = c \sin \psi$; в точке $M_0(\varphi_0, \psi_0)$.

3546. $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = r \operatorname{ctg} \alpha$; в точке $M_0(\varphi_0, r_0)$.

3547. $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = av$; в точке $M_0(u_0, v_0)$.

3548. Найти предельное положение касательной плоскости к поверхности:

$$x = u + v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = u^3 + v^3,$$

когда точка касания $M(u, v)$ ($u \neq v$) неограниченно приближается к точке $M_0(u_0, u_0)$ линии края $u = v$ поверхности.

3549. На поверхности $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 8$ найти точки, в которых касательные плоскости параллельны координатным плоскостям.

3550. В какой точке эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

нормаль к нему образует равные углы с осями координат?

3551. К поверхности $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ провести касательные плоскости, параллельные плоскости

$$x + 4y + 6z = 0.$$

3552. Доказать, что касательные плоскости к поверхности $xyz = a^3$ ($a > 0$) образуют с плоскостями координат тетраэдр постоянного объема.

3553. Доказать, что касательные плоскости к поверхности

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a} \quad (a > 0)$$

отсекают на осях координат отрезки, сумма которых постоянна.

3554. Доказать, что касательные плоскости к конусу

$$z = x f\left(\frac{y}{x}\right)$$

проходят через его вершину.

3555. Доказать, что нормали к поверхности вращения

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad (f' \neq 0)$$

пересекают ось вращения.

3556. Найти проекции эллипсоида

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy = 1$$

на координатные плоскости.

3557. Квадрат $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ разбит на конечное число частей σ диаметра $\leq \delta$. Оценить сверху число δ , если направления нормалей к поверхности

$$z = 1 - x^2 - y^2$$

в любых точках $P(x, y)$ и $P_1(x_1, y_1)$, принадлежащих одной и той же части σ , отличаются меньше чем на 1° .

3558. Пусть

$$z = f(x, y), \quad \text{где } (x, y) \in D, \quad (1)$$

— уравнение поверхности и $\varphi(P_1, P)$ — угол между нормальми к поверхности (1) в точках $P(x, y) \in D$ и $P_1(x_1, y_1) \in D$.

Доказать, что если область D ограничена и замкнута и функция $f(x, y)$ имеет ограниченные производные 2-го порядка в области D , то справедливо неравенство Ляпунова

$$\varphi(P_1, P) < C\rho(P_1, P), \quad (2)$$

где C — постоянная и $\rho(P_1, P)$ — расстояние между точками P и P_1 .

3559. Под каким углом пересекается цилиндр $x^2 + y^2 = a^2$ с поверхностью $bz = xy$ в общей точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$?

Частные случаи формул (1) и (2) при $a=b=0$ соответственно носят названия формулы Маклорена и ряда Маклорена.

Аналогичные формулы имеют место для функции более чем двух переменных.

3°. Особые точки плоских кривых. Точка $M_0(x_0, y_0)$ дифференцируемой кривой $F(x, y)=0$ называется *особой*, если

$$F(x_0, y_0)=0, \quad F'_x(x_0, y_0)=0, \quad F'_y(x_0, y_0)=0.$$

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — изолированная особая точка кривой класса $C^{(2)}$ и числа

$$A = F''_{xx}(x_0, y_0)=0, \quad B = F''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = F''_{yy}(x_0, y_0)$$

не все равны нулю. Тогда, если

1) $AC-B^2 > 0$, то M_0 — *изолированная точка*;

2) $AC-B^2 < 0$, то M_0 — *двойная точка (узел)*;

3) $AC-B^2 = 0$, то M_0 — *точка возврата или изолированная точка*.

В случае $A=B=C=0$ возможны более сложные типы особых точек. У кривых, не принадлежащих классу гладкости $C^{(2)}$, могут быть особенности более сложной природы: точки прекращения, угловые точки и др.

3581. Функцию $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $A(1, -2)$.

3582. Функцию $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $A(1, 1, 1)$.

3583. Найти приращение, получаемое функцией $f(x, y) = x^2y + xy^2 - 2xy$, при переходе от значений $x=1, y=-1$ к значениям $x_1=1+h, y_1=-1+k$.

3584. Разложить $f(x+h, y+k, z+l)$ по целым положительным степеням величин h, k и l , если

$$f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz.$$

3585. В разложении функции

$$f(x, y) = x^y$$

в окрестности точки $A(1, 1)$ выписать члены до второго порядка включительно.

3586. Разложить по формуле Маклорена до членов четвертого порядка включительно функцию

$$f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2}.$$

3587. Вывести приближенные формулы с точностью до членов второго порядка для выражений:

$$a) \frac{\cos x}{\cos y}; \quad б) \arctg \frac{1+x+y}{1-x+y},$$

если $|x|$ и $|y|$ малы по сравнению с 1.

3588. Упростить выражение

$$\cos(x+y+z) - \cos x \cos y \cos z,$$

считая x, y, z малыми по абсолютной величине.

3589. Функцию

$$F(x, y) = \frac{1}{4} [f(x+h, y) + f(x, y+h) + f(x-h, y) + f(x, y-h)] - f(x, y)$$

разложить по степеням h с точностью до h^4 .

3590. Пусть $f(P) = f(x, y)$ и $P_i(x_i, y_i)$ ($i=1, 2, 3$) — вершины правильного треугольника, вписанного в окружность с центром в точке $P(x, y)$ радиуса ρ , причем $x_1 = x + \rho, y_1 = y$. Разложить по целым положительным степеням ρ с точностью до ρ^3 функцию

$$F(\rho) = \frac{1}{3} [f(P_1) + f(P_2) + f(P_3)].$$

3591. Разложить по степеням h и k функцию

$$\Delta_{xy} f(x, y) = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y).$$

3592. Разложить по степеням ρ функцию

$$F(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + \rho \cos \varphi, y + \rho \sin \varphi) d\varphi.$$

Разложить в ряд Маклорена следующие функции:

$$3593. f(x, y) = (1+x)^m (1+y)^n.$$

$$3594. f(x, y) = \ln(1+x+y).$$

$$3595. f(x, y) = e^x \sin y.$$

$$3596. f(x, y) = e^x \cos y.$$

$$3597. f(x, y) = \sin x \operatorname{sh} y.$$

$$3598. f(x, y) = \cos x \operatorname{ch} y.$$

$$3599. f(x, y) = \sin(x^2 + y^2).$$

$$3600. f(x, y) = \ln(1+x) \ln(1+y).$$

3601. Написать три члена разложения в ряд Маклорена функции

$$f(x, y) = \int_0^1 (1+x)^{t^2} dt.$$

3602. Функцию e^{x+y} разложить в степенной ряд по целым положительным степеням биномов $x-1$ и $y+1$.

3603. Написать разложение в ряд Тейлора функции $f(x, y) = \frac{x}{y}$ в окрестности точки $M(1, 1)$.

3604. Пусть z — та неявная функция от x и y , определяемая уравнением $z^3 - 2xz + y = 0$, которая при $x=1$ и $y=1$ принимает значение $z=1$.

Написать несколько членов разложения функции z по возрастающим степеням биномов $x-1$ и $y-1$.

Частные случаи формул (1) и (2) при $a=b=0$ соответственно носят названия формулы Маклорена и ряда Маклорена.

Аналогичные формулы имеют место для функции более чем двух переменных.

3°. Особые точки плоских кривых. Точка $M_0(x_0, y_0)$ дифференцируемой кривой $F(x, y)=0$ называется *особой*, если

$$F(x_0, y_0)=0, \quad F'_x(x_0, y_0)=0, \quad F'_y(x_0, y_0)=0.$$

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — изолированная особая точка кривой класса $C^{(3)}$ и числа

$$A=F''_{xx}(x_0, y_0)=0, \quad B=F''_{xy}(x_0, y_0), \quad C=F''_{yy}(x_0, y_0)$$

не все равны нулю. Тогда, если

1) $AC-B^2 > 0$, то M_0 — *изолированная точка*;

2) $AC-B^2 < 0$, то M_0 — *двойная точка (узел)*;

3) $AC-B^2=0$, то M_0 — *точка возврата или изолированная точка*.

В случае $A=B=C=0$ возможны более сложные типы особых точек. У кривых, не принадлежащих классу гладкости $C^{(3)}$, могут быть особенности более сложной природы: *точки прекращения, угловые точки* и др.

3581. Функцию $f(x, y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $A(1, -2)$.

3582. Функцию $f(x, y, z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $A(1, 1, 1)$.

3583. Найти приращение, получаемое функцией $f(x, y)=x^2y+xy^2-2xy$, при переходе от значений $x=1, y=-1$ к значениям $x_1=1+h, y_1=-1+k$.

3584. Разложить $f(x+h, y+k, z+l)$ по целым положительным степеням величин h, k и l , если

$$f(x, y, z)=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz.$$

3585. В разложении функции

$$f(x, y)=x^p$$

в окрестности точки $A(1, 1)$ выписать члены до второго порядка включительно.

3586. Разложить по формуле Маклорена до членов четвертого порядка включительно функцию

$$f(x, y)=\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

3587. Вывести приближенные формулы с точностью до членов второго порядка для выражений:

$$a) \frac{\cos x}{\cos y}, \quad б) \arctg \frac{1+x+y}{1-x+y},$$

если $|x|$ и $|y|$ малы по сравнению с 1.

3588. Упростить выражение

$$\cos(x+y+z)-\cos x \cos y \cos z,$$

считая x, y, z малыми по абсолютной величине.

3589. Функцию

$$F(x, y)=\frac{1}{4}[f(x+h, y)+f(x, y+h)+f(x-h, y)+f(x, y-h)]-f(x, y)$$

разложить по степеням h с точностью до h^4 .

3590. Пусть $f(P)=f(x, y)$ и $P_i(x_i, y_i)$ ($i=1, 2, 3$) — вершины правильного треугольника, вписанного в окружность с центром в точке $P(x, y)$ радиуса ρ , причем $x_1=x+\rho, y_1=y$. Разложить по целым положительным степеням ρ с точностью до ρ^3 функцию

$$F(\rho)=\frac{1}{3}[f(P_1)+f(P_2)+f(P_3)].$$

3591. Разложить по степеням h и k функцию

$$\Delta_{xy}f(x, y)=f(x+h, y+k)-f(x+h, y)-f(x, y+k)+f(x, y).$$

3592. Разложить по степеням ρ функцию

$$F(\rho)=\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+\rho \cos \varphi, y+\rho \sin \varphi) d\varphi.$$

Разложить в ряд Маклорена следующие функции:

$$3593. f(x, y)=(1+x)^m(1+y)^n.$$

$$3594. f(x, y)=\ln(1+x+y).$$

$$3595. f(x, y)=e^x \sin y.$$

$$3596. f(x, y)=e^x \cos y.$$

$$3597. f(x, y)=\sin x \operatorname{sh} y.$$

$$3598. f(x, y)=\cos x \operatorname{ch} y.$$

$$3599. f(x, y)=\sin(x^2+y^2).$$

$$3600. f(x, y)=\ln(1+x) \ln(1+y).$$

3601. Написать три члена разложения в ряд Маклорена функции

$$f(x, y)=\int_0^1 (1+x)^{t^2} dt.$$

3602. Функцию e^{x+y} разложить в степенной ряд по целым положительным степеням биномов $x-1$ и $y+1$.

3603. Написать разложение в ряд Тейлора функции $f(x, y)=\frac{x}{y}$ в окрестности точки $M(1, 1)$.

3604. Пусть z — та неявная функция от x и y , определяемая уравнением $z^3-2xz+y=0$, которая при $x=1$ и $y=1$ принимает значение $z=1$.

Написать несколько членов разложения функции z по возрастающим степеням биномов $x-1$ и $y-1$.

Изучить типы особых точек следующих кривых и примерно изобразить эти кривые:

3605. $y^2 = ax^3 + x^3.$

3606. $x^3 + y^3 - 3xy = 0.$

3607. $x^2 + y^2 = x^4 + y^4.$

3608. $x^2 + y^4 = x^6.$

3612. Изучить форму кривой $y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)$ в зависимости от значений параметров a, b, c ($a \leq b \leq c$).

Исследовать особые точки трансцендентных кривых:

3613. $y^3 = 1 - e^{-x^2}.$

3614. $y^3 = 1 - e^{-x^3}.$

3515. $y = x \ln x.$

3616. $y = \frac{x}{1 + e^x}.$

3609. $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^2 - y^2).$

3610. $(y - x^2)^2 = x^4.$

3611. $(a+x)y^2 = (a-x)x^3.$

3617. $y = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sin x} \right).$

3618. $y^2 = \sin \frac{\pi}{x}.$

3619. $y^2 = \sin x^2.$

3620. $y^2 = \sin^3 x.$

§ 7. Экстремум функции нескольких переменных

1°. Определение экстремума. Пусть функция $f(P) = f(x_1, \dots, x_n)$ определена в окрестности точки P_0 . Если или $f(P_0) > f(P)$, или $f(P_0) < f(P)$ при $0 < \rho(P_0, P) < \delta$, то говорят, что функция $f(P)$ имеет строгий экстремум (соответственно максимум или минимум) в точке P_0 .

2°. Необходимое условие экстремума. Дифференцируемая функция $f(P)$ может достигать экстремума лишь в стационарной точке P_0 , т. е. такой, что $df(P_0) = 0$. Следовательно, точки экстремума функции $f(P)$ удовлетворяют системе уравнений $f_{x_i}(x_1, \dots, x_n) = 0$ ($i = 1, \dots, n$).

3°. Достаточное условие экстремума. Функция $f(P)$ в точке P_0 имеет:

а) максимум, если $df(P_0) = 0$, $d^2f(P_0) < 0$, при $\sum_{i=1}^n |dx_i| \neq 0$, и б) минимум, если $df(P_0) = 0$, $d^2f(P_0) > 0$ при $\sum_{i=1}^n |dx_i| \neq 0$.

Исследование знака второго дифференциала $d^2f(P_0)$ может быть проведено путем приведения соответствующей квадратичной формы к каноническому виду.

В частности, для случая функции $f(x, y)$ двух независимых переменных x и y в стационарной точке (x_0, y_0) ($df(x_0, y_0) = 0$) при условии, что $D = AC - B^2 \neq 0$, где $A = f_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f_{yy}(x_0, y_0)$ имеем:

1) минимум, если $D > 0$, $A > 0$ ($C > 0$);

2) максимум, если $D > 0$, $A < 0$ ($C < 0$);

3) отсутствие экстремума, если $D < 0$.

4°. Условный экстремум. Задача определения экстремума функции $f(P) = f(x_1, \dots, x_n)$ при наличии ряда соотношений $\varphi_i(P) = 0$ ($i = 1, \dots, m$, $m < n$) сводится к нахождению обычного экстремума для функции Лагранжа

$$L(P) = f(P) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(P),$$

где λ_i ($i = 1, \dots, m$) — постоянные множители. Вопрос о существовании и характере условного экстремума в простейшем случае решается на основании исследования знака второго дифференциала $d^2L(P_0)$ в стационарной точке P_0 функции $L(P)$ при условии, что переменные $dx_1, \dots, dx_n$ связаны соотношениями

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx_j = 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

5°. Абсолютный экстремум. Функция $f(P)$, дифференцируемая в ограниченной и замкнутой области, достигает своих наибольшего и наименьшего значений в этой области или в стационарной точке, или в граничной точке области.

Исследовать на экстремум следующие функции нескольких переменных:

3621. $z = x^2 + (y-1)^2.$

3624. $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y.$

3622. $z = x^2 - (y-1)^2.$

3625. $z = x^2 y^3 (6 - x - y).$

3623. $z = (x - y + 1)^2.$

3626. $z = x^3 + y^3 - 3xy.$

3627. $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2.$

3627.1. $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2.$

3628. $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \quad (x > 0, y > 0).$

3629. $z = xy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (a > 0, b > 0).$

3630. $z = \frac{ax + by + c}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \quad (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0).$

3631. $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}.$

3632. $z = e^{2x+3y} (8x^2 - 6xy + 3y^2).$

3633. $z = e^{x^2-y} (5 - 2x + y).$

3634. $z = (5x + 7y - 25) e^{-(x^2+xy+y^2)}.$

3635. $z = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y.$

3636. $z = \sin x + \cos y + \cos(x-y) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right).$

3637. $z = \sin x \sin y \sin(x+y) \quad (0 \leq x \leq \pi; 0 \leq y \leq \pi).$

3638. $z = x - 2y + \ln \sqrt{x^2 + y^2} + 3 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$

3639. $z = xy \ln(x^2 + y^2).$

3640. $z = x + y + 4 \sin x \sin y.$

3641. $z = (x^2 + y^2) e^{-(x^2+y^2)}.$

3642. $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z.$

3643. $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$

3644. $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$

3645. $u = xy^2 z^3 (a - x - 2y - 3z) \quad (a > 0).$

3646. $u = \frac{a^2}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{b}$

$$(x > 0, y > 0, z > 0, a > 0, b > 0).$$

$$3647. u = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z) \\ (0 \leq x \leq \pi; \quad 0 \leq y \leq \pi; \quad 0 \leq z \leq \pi).$$

$$3648. u = x_1 x_2^2 \dots x_n^n (1 - x_1 - 2x_2 - \dots - nx_n) \\ (x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad \dots, \quad x_n > 0).$$

$$3649. u = x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \dots + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{2}{x_n} \\ (x_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n).$$

3650. Задача Гюйгенса. Между двумя положительными числами a и b вставить n чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ так, чтобы величина дроби

$$u = \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{(a + x_1)(x_1 + x_2) \dots (x_n + b)}$$

была наибольшей.

Найти экстремальные значения заданной неявно функции z от переменных x и y :

$$3651. x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0.$$

$$3652. x^3 + y^3 + z^3 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0.$$

$$3653. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 (x^2 + y^2 - z^2).$$

Найти точки условного экстремума следующих функций:

$$3654. z = xy, \quad \text{если } x + y = 1.$$

$$3655. z = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, \quad \text{если } x^2 + y^2 = 1.$$

$$3656. z = x^2 + y^2, \quad \text{если } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

$$3657. z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2, \quad \text{если } x^2 + y^2 = 1.$$

$$3657.1. z = x^3 + 12xy + 2y^3, \quad \text{если } 4x^2 + y^2 = 25.$$

$$3658. z = \cos^2 x + \cos^2 y, \quad \text{если } x - y = \frac{\pi}{4}.$$

$$3659. u = x - 2y + 2z, \quad \text{если } x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

$$3660. u = x^m y^n z^p, \quad \text{если} \\ x + y + z = a \quad (m > 0, \quad n > 0, \quad p > 0, \quad a > 0).$$

$$3661. u = x^2 + y^2 + z^2, \quad \text{если}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > b > c > 0).$$

$$3662. u = xy^2 z^3, \quad \text{если } x + 2y + 3z = a \\ (x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0, \quad a > 0).$$

3663. $u = xyz$, если $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$.

3663.1. $u = xy + yz$, $x^2 + y^2 = 2$, $y + z = 2$ ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$).

3664. $u = \sin x \sin y \sin z$, если $x + y + z = \frac{\pi}{2}$

($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$).

3665. $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, если $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0$$

$$(a > b > c > 0, \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1).$$

3666. $u = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$,

если $Ax + By + Cz = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$,

$$\frac{\xi}{\cos \alpha} = \frac{\eta}{\cos \beta} = \frac{\zeta}{\cos \gamma}, \text{ где } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

3667. $u = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$, если

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \dots + \frac{x_n}{a_n} = 1 \quad (a_i > 0; i = 1, 2, \dots, n).$$

3668. $u = x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p$ ($p > 1$), если

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a \quad (a > 0).$$

3669. $u = \frac{\alpha_1}{x_1} + \frac{\alpha_2}{x_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{x_n}$, если

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n = 1 \quad (\alpha_i > 0, \beta_i > 0, x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n).$$

3670. $u = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$, если $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a$

$$(a > 0, \alpha_i > 1, i = 1, 2, \dots, n).$$

3671. Найти экстремум квадратичной формы

$$u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

при условии

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1.$$

3672. Доказать неравенство

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2} \right)^n,$$

если $n \geq 1$ и $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Указание. Искать минимум функции $z = \frac{1}{2}(x^n + y^n)$ при условии $x + y = s$.

3673. Доказать неравенство Гёльдера

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^k \right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^{k'} \right)^{\frac{1}{k'}}$$

$$(a_i \geq 0, x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n; k > 1, \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1).$$

Указание. Искать минимум функции

$$u = \left(\sum_{i=1}^n a_i^k \right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^{k'} \right)^{\frac{1}{k'}}$$

при условии

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = A.$$

3674. Доказать неравенство Адамара для определителя $A = |a_{ij}|$ порядка n :

$$A^2 \leq \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right).$$

Указание. Рассмотреть экстремум определителя $A = |a_{ij}|$ при наличии соотношений

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = S_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Определить наибольшие (sup) и наименьшие (inf) значения следующих функций в указанных областях:

3675. $z = x - 2y - 3$, если

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x + y \leq 1.$$

3676. $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$, если $x^2 + y^2 \leq 25$.

3677. $z = x^2 - xy + y^2$, если $|x| + |y| \leq 1$.

3678. $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, если $x^2 + y^2 + z^2 \leq 100$.

3679. $u = x + y + z$, если $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$.

3680. Найти нижнюю грань (inf) и верхнюю грань (sup) функции

$$u = (x + y + z) e^{-(x+y+z)}$$

в области $x > 0, y > 0, z > 0$.

3681. Показать, что функция $z = (1 + e^y) \cos x - ye^y$ имеет бесконечное множество максимумов и ни одного минимума.

3682. Является ли достаточным для минимума функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, чтобы эта функция имела минимум вдоль каждой прямой, проходящей через точку M_0 ?

Рассмотреть пример $f(x, y) = (x - y^2)(2x - y^2)$.

3683. Данное положительное число a разложить на n положительных сомножителей так, чтобы сумма обратных величин их была наименьшей.

3684. Данное положительное число a разложить на n слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

3685. Данное положительное число a разложить на n положительных множителей так, чтобы сумма заданных положительных степеней их была наименьшей.

3686. На плоскости даны n материальных точек $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$ с массами, соответственно равными $m_1, m_2, \dots, m_n$.

При каком положении точки $P(x, y)$ момент инерции системы относительно этой точки будет наименьшим?

3687. При каких размерах открытая прямоугольная ванна данной вместимости V имеет наименьшую поверхность?

3688. При каких размерах открытая цилиндрическая ванна с полукруглым поперечным сечением, поверхность которой равна S , имеет наибольшую вместимость?

3689. На сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ найти точку, сумма квадратов расстояний которой от n данных точек $M_i(x_i, y_i, z_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) была бы минимальной.

3690. Тело состоит из прямого кругового цилиндра, завершенного прямым круговым конусом. При данной полной поверхности тела, равной Q , определить его измерения так, чтобы объем тела был бы наибольшим.

3691. Тело, объем которого равен V , представляет собой прямой прямоугольный параллелепипед, нижнее и верхнее основания которого завершаются одинаковыми правильными четырехугольными пирамидами. При каком угле наклона боковых граней пирамид к их основаниям полная поверхность тела будет минимальной?

3692. Найти прямоугольник данного периметра $2p$, который вращением вокруг одной из своих сторон образует тело наибольшего объема.

3693. Найти треугольник данного периметра $2p$, который вращением вокруг одной из своих сторон образует тело наибольшего объема.

3694. В полушар радиуса R вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

3695. В данный прямой круговой конус вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

3696. В эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

3697. В прямой круговой конус, образующая которого l наклонена к плоскости основания под углом α , вписать прямоугольный параллелепипед с наибольшей полной поверхностью.

3698. В сегмент эллиптического параболоида $\frac{x}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, $z=c$, вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

3699. Найти кратчайшее расстояние точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ от плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

3700. Определить кратчайшее расстояние d между двумя прямыми в пространстве

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$$

и

$$\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

3701. Найти кратчайшее расстояние между параболой $y=x^2$ и прямой $x-y-2=0$.

3702. Найти полуоси центральной кривой второго порядка $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$.

3703. Найти полуоси центральной поверхности второго порядка $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fzx = 1$.

3704. Определить площадь эллипса, образованного пересечением цилиндра

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

плоскостью

$$Ax + By + Cz = 0.$$

3705. Определить площадь сечения эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

плоскостью

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0,$$

где

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

3706. Согласно принципу Ферма свет, исходящий из точки A и попадающий в точку B , распространяется по той кривой, для прохождения которой требуется минимум времени.

Предполагая, что точки A и B расположены в различных оптических средах, разделенных плоскостью, причем скорость распространения света в первой среде равна v_1 , а во второй v_2 , вывести закон преломления света.

3707. При каком угле падения отклонение светового луча (т. е. угол между падающим и выходящим лучами), проходящего через призму с преломляющим углом α и показателем преломления n , будет наименьшим? Определить это наименьшее отклонение.

3708. Переменные величины x и y удовлетворяют линейному уравнению

$$y = ax + b,$$

коэффициенты которого требуется определить. В результате ряда равнооточных измерений для величин x и y получены значения x_i, y_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Пользуясь способом наименьших квадратов, определить наименее вероятные значения коэффициентов a и b .

У к а з а н и е. Согласно способу наименьших квадратов наименее вероятными значениями коэффициентов a и b является те, для которых сумма квадратов погрешностей

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$$

будет наименьшей.

3709. На плоскости дана система n точек $M_i(x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

При каком положении прямой $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ сумма квадратов отклонений данных точек от этой прямой будет наименьшей?

3710. Функцию x^2 на интервале $(1, 3)$ приближенно заменить линейной функцией $ax + b$ так, чтобы абсолютное отклонение

$$\Delta = \sup |x^2 - (ax + b)| \quad (1 \leq x \leq 3)$$

было минимальным.

ОТДЕЛ VII

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

§ 1. Собственные интегралы, зависящие от параметра

1°. Непрерывность интеграла. Если функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в ограниченной области $R[a \leq x \leq A; b \leq y \leq B]$, то

$$F(y) = \int_a^A f(x, y) dx$$

представляет собой функцию, непрерывную на сегменте $b \leq y \leq B$.

2°. Дифференцирование под знаком интеграла. Если, сверх указанного в 1°, частная производная $f'_y(x, y)$ непрерывна в области R , то при $b < y < B$ справедлива формула Лейбница.

$$\frac{d}{dy} \int_a^A f(x, y) dx = \int_a^A f'_y(x, y) dx.$$

В более общем случае, когда пределы интеграции являются дифференцируемыми функциями $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ параметра y и $a < \varphi(y) < A$, $a < \psi(y) < A$ при $b < y < B$, то имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx = \\ = f(\psi(y), y) \psi'(y) - f(\varphi(y), y) \varphi'(y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y) dx \quad (b < y < B). \end{aligned}$$

3°. Интегрирование под знаком интеграла. При условиях 1° имеем:

$$\int_b^B dy \int_a^A f(x, y) dx = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y) dy.$$

3711. Показать, что интеграл

$$F(y) = \int_0^1 f(x, y) dx$$

от разрывной функции $f(x, y) = \operatorname{sgn}(x - y)$ является функцией непрерывной. Построить график функции $u = F(y)$.

3712. Исследовать на непрерывность функцию

$$F(y) = \int_0^1 \frac{y f(x)}{x^2 + y^2} dx,$$

где функция $f(x)$ непрерывна и положительна на сегменте $[0, 1]$.
3713. Найти:

а) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2};$

в) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\pi} x^2 \cos \alpha x dx;$

б) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + \alpha^2} dx;$

г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}.$

3713.1. Найти

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta.$$

3714. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[A, B]$. Доказать, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^x [f(t+h) - f(t)] dt = f(x) - f(a) \quad (A < a < x < B).$$

3714.1 Пусть 1) $\varphi_n(x) \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) на $[-1, 1]$; 2) $\varphi_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ на $0 < \varepsilon \leq |x| \leq 1$; 3) $\int_{-1}^1 \varphi_n(x) dx \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказать, что, если $f(x) \in C[-1, 1]$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f(x) \varphi_n(x) dx = f(0).$$

3715. Можно ли совершить предельный переход под знаком интеграла в выражении

$$\lim_{u \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx?$$

3716. Можно ли вычислить по правилу Лейбница производную функции

$$F(y) = \int_0^1 \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx$$

при $y=0$?

3717. Вычислить $F'(x)$, если

$$F(x) = \int_x^{x^2} e^{-xy^2} dy.$$

3718. Найти $F'(\alpha)$, если:

$$a) F(\alpha) = \int_{\sin \alpha}^{\cos \alpha} e^{\alpha \sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$б) F(\alpha) = \int_{a+\alpha}^{b+\alpha} \frac{\sin \alpha x}{x} dx;$$

$$в) F(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x} dx;$$

$$г) F(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x+\alpha, x-\alpha) dx;$$

$$д) F(\alpha) = \int_0^{\alpha^2} dx \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \sin(x^2 + y^2 - \alpha^2) dy.$$

3719. Найти $F''(x)$, если

$$F(x) = \int_0^x (x+y) f(y) dy,$$

где $f(x)$ — дифференцируемая функция.

3720. Найти $F''(x)$, если

$$F(x) = \int_a^b f(y) |x-y| dy,$$

где $a < b$ и $f(y)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция.

3721. Найти $F''(x)$, если

$$F(x) = \frac{1}{h^2} \int_0^h d\xi \int_0^h f(x+\xi+\eta) d\eta \quad (h > 0),$$

где $f(x)$ — непрерывная функция.

3722. Найти $F^{(n)}(x)$, если

$$F(x) = \int_0^x f(t) (x-t)^{n-1} dt.$$

3722.1. Доказать формулу

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x y^n \cos \left(y + \frac{n\pi}{2} \right) dy \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1)$$

Пользуясь формулой (1), получить оценку:

$$\left| \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \right| \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{при } x \in (-\infty, +\infty).$$

3723. Функцию $f(x) = x^2$ на промежутке $1 \leq x \leq 3$ приближенно заменить линейной функцией $a + bx$ так, чтобы

$$\int_1^3 (a + bx - x^2)^2 dx = \min.$$

3724. Получить приближенную формулу вида

$$\sqrt{1+x^2} \approx a + bx \quad (0 \leq x \leq 1)$$

из условия, что среднее квадратичное отклонение функций $a + bx$ и $\sqrt{1+x^2}$ на данном промежутке $[0, 1]$ является минимальным.

3725. Найти производные от полных эллиптических интегралов

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

и

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (0 < k < 1)$$

и выразить их через функции $E(k)$ и $F(k)$.

Показать, что $E(k)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$E''(k) + \frac{1}{k} E'(k) + \frac{E(k)}{1-k^2} = 0.$$

3726. Доказать, что функция Бесселя целого индекса n

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi$$

3716. Можно ли вычислить по правилу Лейбница производную функции

$$F(y) = \int_0^1 \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx$$

при $y=0$?

3717. Вычислить $F'(x)$, если

$$F(x) = \int_x^{x^2} e^{-xy^2} dy.$$

3718. Найти $F'(\alpha)$, если:

а) $F(\alpha) = \int_{\sin \alpha}^{\cos \alpha} e^{\alpha \sqrt{1-x^2}} dx;$

б) $F(\alpha) = \int_{a+\alpha}^{b+\alpha} \frac{\sin \alpha x}{x} dx;$

в) $F(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x} dx;$

г) $F(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x+\alpha, x-\alpha) dx;$

д) $F(\alpha) = \int_0^{\alpha^2} dx \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \sin(x^2 + y^2 - \alpha^2) dy.$

3719. Найти $F''(x)$, если

$$F(x) = \int_0^x (x+y) f(y) dy,$$

где $f(x)$ — дифференцируемая функция.

3720. Найти $F''(x)$, если

$$F(x) = \int_a^b f(y) |x-y| dy,$$

где $a < b$ и $f(y)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция.

3721. Найти $F''(x)$, если

$$F(x) = \frac{1}{h^2} \int_0^h d\xi \int_0^h f(x+\xi+\eta) d\eta \quad (h > 0),$$

где $f(x)$ — непрерывная функция.

3722. Найти $F^{(n)}(x)$, если

$$F(x) = \int_0^x f(t)(x-t)^{n-1} dt.$$

3722.1. Доказать формулу

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x y^n \cos \left(y + \frac{n\pi}{2} \right) dy \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1)$$

Пользуясь формулой (1), получить оценку:

$$\left| \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \right| \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{при } x \in (-\infty, +\infty).$$

3723. Функцию $f(x) = x^2$ на промежутке $1 \leq x \leq 3$ приближенно заменить линейной функцией $a + bx$ так, чтобы

$$\int_1^3 (a + bx - x^2)^2 dx = \min.$$

3724. Получить приближенную формулу вида

$$\sqrt{1+x^2} \approx a + bx \quad (0 \leq x \leq 1)$$

из условия, что среднее квадратичное отклонение функций $a + bx$ и $\sqrt{1+x^2}$ на данном промежутке $[0, 1]$ является минимальным.

3725. Найти производные от полных эллиптических интегралов

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

и

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (0 < k < 1)$$

и выразить их через функции $E(k)$ и $F(k)$.

Показать, что $E(k)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$E''(k) + \frac{1}{k} E'(k) + \frac{E(k)}{1-k^2} = 0.$$

3726. Доказать, что функция Бесселя целого индекса n

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi$$

удовлетворяет уравнению Бесселя

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0.$$

3727. Пусть

$$I(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\varphi(x) dx}{\sqrt{\alpha-x}},$$

где функция $\varphi(x)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(x)$ на сегменте $0 \leq x \leq a$.

Доказать, что при $0 < \alpha < a$ имеем:

$$I'(\alpha) = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}} + \int_0^{\alpha} \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}} dx.$$

Указание. Положить $x = \alpha t$.

3728. Показать, что функция

$$u(x) = \int_0^1 K(x, y) v(y) dy,$$

где

$$K(x, y) = \begin{cases} x(1-y), & \text{если } x \leq y; \\ y(1-x), & \text{если } x > y, \end{cases}$$

и $v(y)$ непрерывна, удовлетворяет уравнению

$$u''(x) = -v(x) \quad (0 \leq x \leq 1).$$

3729. Найти $F_{xy}''(x, y)$, если

$$F(x, y) = \int_0^{xy} (x-yz) f(z) dz,$$

где $f(z)$ — дифференцируемая функция.

3730. Пусть $f(x)$ — дважды дифференцируемая функция и $F(x)$ — дифференцируемая функция.

Доказать, что функция

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x-at) + f(x+at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(z) dz$$

удовлетворяет уравнению колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

и начальным условиями: $u(x, 0) = f(x)$, $u_t'(x, 0) = F(x)$.

3731. Показать, что если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[0, l]$ и $(x-\xi)^2 + y^2 + z^2 \neq 0$ при $0 \leq \xi \leq l$, то функция

$$u(x, y, z) = \int_0^l \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + z^2}}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Применяя дифференцирование по параметру, вычислить следующие интегралы:

$$3732. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx.$$

$$3734. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx.$$

$$3733. \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx.$$

$$3735. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x} \quad (|a| < 1)$$

3736. Пользуясь формулой

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2 y^2},$$

вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3737. Применяя интегрирование под знаком интеграла, вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

3738. Вычислить интегралы:

$$a) \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx; \quad б) \int_0^1 \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

3739. Пусть $F(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы (см. задачу 3725). Доказать формулы

$$a) \int_0^k F(k) k dk = E(k) - k_1^2 F(k);$$

$$б) \int_0^k E(k) k dk = \frac{1}{3} [(1+k^2) E(k) - k_1^2 F(k)],$$

где $k_1^2 = 1 - k^2$.

3740. Доказать формулу

$$\int_0^x x J_0(x) dx = x J_1(x),$$

где $J_0(x)$ и $J_1(x)$ — функции Бесселя индексов 0 и 1 (см. задачу 3726).

§ 2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость интегралов

1°. Определение равномерной сходимости. Сходящийся несобственный интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x, y) dx, \quad (1)$$

где функция $f(x, y)$ непрерывна в области $a \leq x < +\infty$, $y_1 < y < y_2$, называется *равномерно сходящимся* в интервале (y_1, y_2) , если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $B = B(\varepsilon)$ такое, что при всяком $b \geq B$ имеем:

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \quad (y_1 < y < y_2).$$

Равномерная сходимость интеграла (1) эквивалентна равномерной сходимости всех рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x, y) dx, \quad (2)$$

где $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

Если интеграл (1) сходится равномерно в интервале (y_1, y_2) , то он представляет собой непрерывную функцию параметра y в этом интервале.

2°. Критерий Коши. Для равномерной сходимости интеграла (1) в интервале (y_1, y_2) необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало число $B = B(\varepsilon)$ такое, что

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \quad \text{при } y_1 < y < y_2,$$

если только $b' > B$ и $b'' > B$.

3°. Критерий Вейерштрасса. Для равномерной сходимости интеграла (1) достаточно, чтобы существовала не зависящая от параметра y мажорирующая функция $F(x)$ такая, что

$$1) |f(x, y)| \leq F(x) \text{ при } a \leq x < +\infty$$

$$2) \int_a^{+\infty} F(x) dx < +\infty.$$

4°. Аналогичные теоремы имеют место для несобственных интегралов от разрывных функций.

Определить области сходимости интегралов:

$$3741. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{1+x^2} dx.$$

$$3744. \int_0^2 \frac{dx}{|\ln x|^p}.$$

$$3742. \int_{\pi}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^p + x^q} dx.$$

$$3745. \int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}} dx.$$

$$3743. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p} dx.$$

$$3746. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx \quad (p > 0).$$

При помощи сравнения с рядами исследовать сходимость следующих интегралов:

$$3747. \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x+a} dx.$$

$$3749. \int_{\pi}^{+\infty} \frac{dx}{x^p \sqrt[3]{\sin^2 x}}.$$

$$3748. \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^n \sin^2 x} \quad (n > 0).$$

$$3750. \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx.$$

3751. Сформулировать в положительном смысле, что значит, что интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

сходится неравномерно в заданном интервале (y_1, y_2) ?

3752. Доказать, что если 1) интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

$$3768. \int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^n} \quad (0 < n < 2).$$

$$3769. \int_0^2 \frac{x^\alpha dx}{\sqrt[4]{(x-1)(x-2)^3}} \quad \left(|\alpha| < \frac{1}{2}\right).$$

$$3770. \int_0^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}} dx \quad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

3771. Интеграл называется *равномерно сходящимся при данном значении параметра*, если он равномерно сходится в некоторой окрестности этого значения. Доказать, что интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha dx}{1+a^2 x^2}$$

сходится равномерно при каждом значении $\alpha \neq 0$ и не сходится равномерно при $\alpha = 0$.

3772. Законен ли переход к пределу под знаком интеграла в выражении

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx?$$

3773. Функция $f(x)$ интегрируема в промежутке $(0, +\infty)$. Доказать формулу

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

3773.1. Доказать, что, если $f'(x)$ абсолютно интегрируема на $[a, +\infty]$, то существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3774. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f(x) \sin nx dx = 0,$$

если $f(x)$ абсолютно интегрируема в промежутке $(0, +\infty)$.

3775. Доказать, что если 1) $f(x, y) \Rightarrow f(x, y_0)$ в каждом конечном интервале (a, b) ; 2) $|f(x, y)| \leq F(x)$, где $\int_a^{+\infty} F(x) dx < +\infty$, то

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx.$$

3776. Вычислить интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{x^n}{n}\right)^{-n} \right] dx,$$

используя предельный переход под знаком интеграла.

3776.1. Пусть $f(x)$ — непрерывна и ограничена на $[0, +\infty)$. Доказать, что

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{y f(x)}{x^2 + y^2} dx = f(0).$$

3776.2. Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^n + 1}$$

3777. Доказать, что интеграл

$$F(a) = \int_0^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx$$

есть непрерывная функция параметра a .

3777.1. Показать, что

$$F(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sin \frac{\alpha}{x}}{x^2} dx$$

есть непрерывная функция в интервале $0 < \alpha < 1$.

3778. Определить точки разрыва функции

$$F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1-a^2)x}{x} dx.$$

Построить график функции $y = F(a)$.

Исследовать на непрерывность в указанных промежутках следующие функции:

$$3779. F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{2+x^\alpha} \quad \text{при } \alpha > 2.$$

$$3780. F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx \quad \text{при } \alpha > 0.$$

$$3781. F(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha (\pi-x)^\alpha} dx \quad \text{при } 0 < \alpha < 2.$$

$$3782. F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{|\sin x|^\alpha} dx \quad \text{при } 0 < \alpha < 1.$$

$$3783. F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-x\alpha^2} dx \quad \text{при } -\infty < \alpha < +\infty.$$

§ 3. Дифференцирование и интегрирование несобственных интегралов под знаком интеграла

1°. Дифференцирование по параметру. Если 1) функция $f(x, y)$ непрерывна вместе со своей производной $f'_y(x, y)$ в области $a \leq x < +\infty$, $y_1 < y < y_2$; 2) $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится; 3) $\int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$ сходится равномерно в интервале (y_1, y_2) , то

$$\frac{d}{dy} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$$

при $y_1 < y < y_2$ (правило Лейбница).

2°. Формула интегрирования по параметру. Если 1) функция $f(x, y)$ непрерывна при $x \geq a$ и $y_1 < y < y_2$; 2) $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно в конечном сегменте $[y_1, y_2]$, то

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy. \quad (1)$$

Если $f(x, y) \geq 0$, то формула (1) верна также и для бесконечного промежутка (y_1, y_2) в предположении, что внутренние интегралы равенства (1) непрерывны и одна из частей равенства (1) имеет смысл.

3784. Пользуясь формулой

$$\int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n} \quad (n > 0),$$

вычислить интеграл

$$I = \int_0^1 x^{n-1} \ln^m x dx, \text{ где } m \text{ — натуральное число.}$$

3785. Пользуясь формулой

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}} \quad (a > 0),$$

вычислить интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a)^{n+1}}, \text{ где } n \text{ — натуральное число.}$$

3786. Доказать, что интеграл Дирихле

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

имеет при $\alpha \neq 0$ производную, однако ее нельзя найти с помощью правила Лейбница.

Указание. Положить $\alpha x = y$.

3787. Показать, что функция

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + (x + \alpha)^2} dx$$

непрерывна и дифференцируема в области $-\infty < \alpha < +\infty$.

3788. Исходя из равенства

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy} dy,$$

вычислить интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

3789. Доказать формулу Фруллани

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a} \quad (a > 0, b > 0),$$

где $f(x)$ — непрерывная функция и интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ имеет смысл при любом $A > 0$.

Применяя формулу Фруллани, вычислить интегралы:

$$3790. \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

$$3791. \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax - \sin bx}{x} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

$$3792. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

С помощью дифференцирования по параметру вычислить следующие интегралы:

$$3793. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

$$3794. \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \right)^2 dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

$$3795. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

$$3796. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos mx dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

Вычислить интегралы:

$$3797. \int_0^1 \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} dx \quad (|\alpha| \leq 1). \quad 3799. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx.$$

$$3798. \int_0^1 \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} dx \quad (|\alpha| \leq 1). \quad 3800. \int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2} dx.$$

$$3801. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x \operatorname{arctg} \beta x}{x^2} dx.$$

$$3802. \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2) \ln(1 + \beta^2 x^2)}{x^4} dx.$$

3803. Вычислить интеграл Эйлера—Пуассона

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

исходя из формулы

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} x e^{-x^2 y^2} dy.$$

Пользуясь интегралом Эйлера—Пуассона, найти величины интегралов:

$$3804. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)} dx \quad (a > 0, ac - b^2 > 0).$$

$$3805. \int_{-\infty}^{+\infty} (a_1 x^2 + 2b_1 x + c_1) e^{-(ax^2+2bx+c)} dx \quad (a > 0, ac - b^2 > 0).$$

$$3806. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \operatorname{ch} bx dx \quad (a > 0). \quad 3807. \int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} dx \quad (a > 0).$$

$$3808. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^3} dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

$$3809. \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx \quad (a > 0). \quad 3810. \int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin bx dx \quad (a > 0).$$

$$3811. \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos 2bx dx \quad (n — \text{натуральное число}).$$

3811.1. Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-ax^2 t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0, \delta > 0).$$

3812. Исходя из интеграла

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx \quad (\alpha \geq 0),$$

вычислить интеграл Дирихле

$$D(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx.$$

3812.1. Какой примерно вид имеет график интегрального синуса

$$y = \operatorname{Si} x,$$

где

$$\operatorname{Si} x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

Используя интегралы Дирихле и Фруллани, найти величины интегралов:

$$3813. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - \cos \beta x}{x^2} dx$$

$$(\alpha > 0).$$

$$3814. \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x} dx$$

$$(|\alpha| \neq |\beta|).$$

$$3815. \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x} dx.$$

$$3816. \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x} dx.$$

$$3822. \int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x^2} dx \quad (k \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0).$$

$$3817. \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} \right)^3 dx.$$

$$3818. \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} \right)^4 dx.$$

$$3819. \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx.$$

$$3820. \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x - \sin^4 \beta x}{x} dx$$

$$(\alpha \beta \neq 0).$$

$$3821. \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} dx.$$

3823. Найти разрывной множитель Дирихле

$$D(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin \lambda \cos \lambda x \frac{d\lambda}{\lambda}$$

для различных значений x . Построить график функции $y = D(x)$.

3824. Вычислить интегралы:

$$a) \text{ v. p. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x+b} dx; \quad б) \text{ v. p. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x+b} dx.$$

3825. Пользуясь формулой

$$\frac{1}{1+x^2} = \int_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)} dy,$$

вычислить интеграл Лапласа

$$L = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx.$$

3826. Вычислить интеграл

$$L_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx.$$

Вычислить интегралы:

3827. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx.$

3828. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{(1+x^2)^2} dx.$

3829. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{ax^2+2bx+c} dx \quad (a > 0, ac-b^2 > 0).$

3830. Пользуясь формулой

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-xy^2} dy \quad (x > 0),$$

вычислить интегралы Френеля

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

и

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx.$$

Найти величины интегралов:

3831. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2+2bx+c) dx \quad (a \neq 0).$

3832. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 \cdot \cos 2ax dx.$

3833. $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2 \cdot \cos 2ax dx.$

3834. Доказать формулы:

1) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{a^2-x^2} dx = \frac{\pi}{2a} \sin a\alpha;$

2) $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{a^2-x^2} dx = -\frac{\pi}{2} \cos a\alpha,$

 где $a \neq 0$ и интегралы понимаются в смысле главного значения Коши.

3835. Найти преобразование Лапласа

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (p > 0)$$

 для функции $f(t)$, если:

а) $f(t) = t^n$ (n — натуральное число);б) $f(t) = \sqrt{t}$;д) $f(t) = \cos t$;в) $f(t) = e^{at}$;е) $f(t) = \frac{1-e^{-t}}{t}$;г) $f(t) = te^{-at}$;ж) $f(t) = \sin \alpha \sqrt{t}$.

3836. Доказать формулу (интеграл Липшица)

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} J_0(bt) dt = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (a > 0),$$

где $J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \varphi) d\varphi$ — функция Бесселя 0-го индекса (см. задачу 3726).

3837. Найти преобразование Вейерштрасса

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} f(y) dy,$$

если:

а) $f(y) = 1$;в) $f(y) = e^{2ay}$;б) $f(y) = y^2$;г) $f(y) = \cos ay$.

3838. Многочлены Чебышева — Эрмита определяются формулами

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Доказать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n; \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

3839. Вычислить интеграл

$$\Psi(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x-\xi)^2}{\sigma_2^2} \right]} d\xi$$

$$(\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0),$$

имеющий важное значение в теории вероятностей.

3840. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и абсолютно интегрируема на промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Доказать, что интеграл

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4at}} d\xi$$

удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

и начальному условию

$$\lim_{t \rightarrow +0} u(x, t) = f(x).$$

§ 4. Эйлеровы интегралы

1°. Гамма-функция. При $x > 0$ имеем:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Основное свойство гамма-функции выражается формулой понижения

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Если n — целое положительное число, то

$$\Gamma(n) = (n-1)!; \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}.$$

2°. Формула дополнения. При $0 < x < 1$ имеем:

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

3°. Бета-функция. При $x > 0$ и $y > 0$ имеем:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

Справедлива формула

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

3841. Доказать, что гамма-функция $\Gamma(x)$ непрерывна и обладает непрерывными производными всех порядков в области $x > 0$.

3842. Доказать, что бета-функция $B(x, y)$ непрерывна и обладает непрерывными производными всех порядков в области $x > 0, y > 0$.

С помощью эйлеровых интегралов вычислить следующие интегралы:

$$3843. \int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx.$$

$$3847. \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}.$$

$$3844. \int_0^a x^2 \sqrt{a^2-x^2} dx \quad (a>0).$$

$$3848. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cdot \cos^4 x dx.$$

$$3845. \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx.$$

$$3849. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} \quad (n>1).$$

$$3846. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$$

$$3850. \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx \quad (n \text{ — целое положительное}).$$

Определить область существования и выразить через эйлеровы интегралы следующие интегралы:

$$3851. \int_0^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{1+x^n} dx \quad (n>0).$$

$$3852. \int_0^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(1+x)^n} dx.$$

$$3853. \int_0^{+\infty} \frac{x^a dx}{(a+bx^b)^n} \quad (a>0, b>0, n>0).$$

$$3854. \int_a^b \frac{(x-a)^m (b-x)^n}{(x+c)^{m+n+1}} dx$$

$$(0 < a < b, c > 0).$$

$$3858. \int_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1} x}{(1+k \cos x)^n} dx$$

$$(0 < |k| < 1).$$

$$3855. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} \quad (n>0).$$

$$3859. \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx \quad (n>0).$$

$$3856. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx.$$

$$3860. \int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n} dx.$$

$$3857. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^n x dx.$$

$$3861. \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^p dx.$$

$$3862. \int_0^{+\infty} x^p e^{-ax} \ln x \, dx \quad (a > 0).$$

$$3864.1. \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{1+x^2} \, dx.$$

$$3863. \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} \ln x}{1+x} \, dx.$$

$$3864.2. \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^4} \, dx.$$

$$3864. \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} \ln^2 x}{1+x} \, dx.$$

$$3865. \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{(1+x) \ln x} \, dx.$$

$$3866. \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{1-x} \, dx \quad (0 < p < 1).$$

Указание. Этот интеграл можно рассматривать как

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [B(p, \varepsilon) - B(1-p, \varepsilon)].$$

$$3867. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha x}{\operatorname{sh} \beta x} \, dx \quad (0 < \alpha < \beta).$$

$$3869. \int_a^{a+1} \ln \Gamma(x) \, dx \quad (a > 0).$$

$$3868. \int_0^1 \ln \Gamma(x) \, dx.$$

$$3870. \int_0^1 \ln \Gamma(x) \sin \pi x \, dx.$$

$$3871. \int_0^1 \ln \Gamma(x) \cos 2n\pi x \, dx \quad (n \text{ — натуральное число}).$$

Доказать равенства:

$$3872. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}.$$

$$3873. \int_0^{+\infty} e^{-x^4} \, dx \cdot \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^4} \, dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

$$3874. \prod_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x^n} \, dx = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.$$

$$3875. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^n} \, dx = 1.$$

Используя равенство $\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-xt} \, dt \quad (x > 0)$, найти

интегралы:

$$3876. \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^m} dx \quad (0 < m < 1).$$

$$3877. \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^m} dx \quad (0 < m < 2).$$

3878. Доказать формулы Эйлера:

$$a) \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t} \cos \alpha \cos (\lambda t \sin \alpha) dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \cos \alpha x;$$

$$б) \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t} \cos \alpha \sin (\lambda t \sin \alpha) dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \sin \alpha x$$

$$\left(\lambda > 0, \quad x > 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \right).$$

3879. Найти длину дуги кривой

$$r^n = a^n \cos n\varphi \quad (a > 0, \quad n - \text{натуральное}).$$

3880. Найти площадь, ограниченную кривой

$$|x|^n + |y|^n = a^n \quad (n > 0, \quad a > 0).$$

§ 5. Интегральная формула Фурье

1°. Представление функции интегралом Фурье. Если 1) функция $f(x)$ задана на оси $-\infty < x < +\infty$, 2) кусочно-непрерывна вместе со своей производной $f'(x)$ в каждом конечном промежутке и 3) абсолютно интегрируема на интервале $(-\infty, +\infty)$, то во всех своих точках непрерывности она допускает представление в форме *интеграла Фурье*:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda, \quad (1)$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi \quad \text{и} \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi.$$

В точках разрыва функции $f(x)$ левая часть формулы (1) должна быть заменена на $\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$.

Для четной функции $f(x)$, с тем же замечанием относительно точек разрыва, формула (1) дает:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(\lambda) \cos \lambda x d\lambda, \quad (2)$$

где

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi.$$

Аналогично для нечетной функции $f(x)$ получаем:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} b(\lambda) \sin \lambda x d\lambda, \quad (3)$$

где

$$b(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi.$$

2°. Представление функции интегралом Фурье в интервале $(0, +\infty)$. Функция $f(x)$, заданная в интервале $(0, +\infty)$ и кусочно-непрерывная вместе со своей производной $f'(x)$ на каждом конечном интервале $(a, b) \subset (0, +\infty)$, абсолютно интегрируемая на $(0, +\infty)$, по желанию может быть представлена в данном интервале или формулой (2) (четное продолжение), или формулой (3) (нечетное продолжение).

Представить интегралом Фурье следующие функции:

$$3881. f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < 1; \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

$$3882. f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & \text{если } |x| < 1; \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

$$3883. f(x) = \operatorname{sgn}(x-a) - \operatorname{sgn}(x-b) \quad (b > a).$$

$$3884. f(x) = \begin{cases} h \left(1 - \frac{|x|}{a}\right), & \text{если } |x| \leq a; \\ 0, & \text{если } |x| > a. \end{cases}$$

$$3885. f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2} \quad (a > 0), \quad 3886. f(x) = \frac{x}{a^2 + x^2} \quad (a > 0).$$

$$3887. f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } |x| \leq \pi; \\ 0, & \text{если } |x| > \pi. \end{cases}$$

$$3888. f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } |x| \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{если } |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$3889. f(t) = \begin{cases} A \sin \omega t, & \text{если } |t| \leq \frac{2\pi n}{\omega}; \\ 0, & \text{если } |t| > \frac{2\pi n}{\omega} \quad (n - \text{натуральное число}). \end{cases}$$

$$3890. f(x) = e^{-\alpha|x|} \quad (\alpha > 0).$$

$$3891. f(x) = e^{-\alpha|x|} \cos \beta x \quad (\alpha > 0). \quad 3893. f(x) = e^{-x^2}.$$

$$3892. f(x) = e^{-\alpha|x|} \sin \beta x \quad (\alpha > 0). \quad 3894. f(x) = x e^{-x^2}.$$

3895. Функцию

$$f(x) = e^{-x} \quad (0 < x < +\infty)$$

представить интегралом Фурье, продолжая ее а) четным образом;
б) нечетным образом.

Найти преобразование Фурье

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-itx} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{-l}^l f(t) e^{-itx} dt$$

для функции $f(t)$, если:

$$3896. f(x) = e^{-\alpha|x|} \quad (\alpha > 0). \quad 3898. f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

$$3897. f(x) = xe^{-\alpha|x|} \quad (\alpha > 0). \quad 3899. f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cos \alpha x.$$

3900. Найти функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, если:

$$а) \int_0^{+\infty} \varphi(y) \cos xy dy = \frac{1}{1+x^2};$$

$$б) \int_0^{+\infty} \psi(y) \sin xy dy = e^{-x} \quad (x > 0).$$

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Двойные интегралы

1°. Непосредственное вычисление двойного интеграла. *Двойным интегралом* от непрерывной функции $f(x, y)$, распространенной на ограниченную замкнутую квадрлируемую область Ω , называется число

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0 \\ \max |\Delta y_j| \rightarrow 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j,$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$ и сумма распространяется на те значения i и j , для которых $(x_i, y_j) \in \Omega$.

Если область Ω задана неравенствами

$$a < x < b, y_1(x) < y < y_2(x),$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — непрерывные функции на сегменте $[a, b]$, то соответствующий двойной интеграл может быть вычислен по формуле

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

2°. Замена переменных в двойном интеграле. Если непрерывно дифференцируемые функции

$$x = x(u, v), y = y(u, v)$$

осуществляют одно-однозначное отображение ограниченной и замкнутой области Ω в плоскости Oxy на область Ω' в плоскости Ouv , и якобиан

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

сохраняет постоянный знак в Ω за исключением, быть может, множества меры нуль, то справедлива формула

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega'} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv.$$

В частности, для случая перехода к полярным координатам r и φ по формулам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ имеем:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

3901. Вычислить интеграл

$$\iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} xy \, dx \, dy,$$

рассматривая его как предел интегральной суммы, разбивая область интегрирования на квадраты прямыми

$$x = \frac{i}{n}, \quad y = \frac{j}{n} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1)$$

и выбирая значение подынтегральной функции в правых верхних вершинах этих квадратов.

3902. Составить нижнюю S и верхнюю $\bar{S}$ интегральные суммы для функции $f(x, y) = x^2 + y^2$ в области $1 \leq x \leq 2$, $1 \leq y \leq 3$, разбивая последнюю на прямоугольники прямыми

$$x = 1 + \frac{i}{n}, \quad y = 1 + \frac{2j}{n} \quad (i, j = 0, 1, \dots, n).$$

Чему равны пределы этих сумм при $n \rightarrow \infty$?

3903. Приблизленно вычислить интеграл

$$\iint_{x^2 + y^2 \leq 25} \frac{dx \, dy}{\sqrt{24 + x^2 + y^2}}.$$

аппроксимируя область интегрирования системой вписанных квадратов, вершины которых A_{ij} находятся в целочисленных точках, и выбирая значения подынтегральной функции в вершинах этих квадратов, наиболее удаленных от начала координат. Сравнить полученный результат с точным значением интеграла.

3904. Приблизленно вычислить интеграл

$$\iint_S \sqrt{x+y} \, dS,$$

где S — треугольник, ограниченный прямыми $x=0$, $y=0$ и $x+y=1$, разбив область S прямыми $x=\text{const}$, $y=\text{const}$, $x+y=\text{const}$ на четыре равных треугольника и выбрав значение подынтегральной функции в центрах тяжести этих треугольников.

3905. Область $S \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ разбита на конечное число квадратуемых частей $\Delta S_i (i=1, 2, \dots, n)$ диаметра меньше чем δ . При каком значении δ будет обеспечено выполнение неравенства

$$\left| \iint_S \sin(x+y) \, dS - \sum_{i=1}^n \sin(x_i + y_i) \Delta S_i \right| < 0,001,$$

где $(x_i, y_i) \in \Delta S_i$?

Вычислить интегралы:

$$3906. \int_0^1 dx \int_0^1 (x+y) dy.$$

$$3907. \int_0^1 dx \int_{x^2}^x xy^2 dy.$$

$$3908. \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2 \varphi dr.$$

3909. Доказать равенство

$$\iint_R X(x) Y(y) dx dy = \int_a^A X(x) dx \cdot \int_b^B Y(y) dy,$$

если R — прямоугольник: $a \leq x \leq A$, $b \leq y \leq B$, и функции $X(x)$ и $Y(y)$ непрерывны на соответствующих сегментах.

3910. Вычислить:

$$I = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y) dy,$$

если

$$f(x, y) = F_{xy}''(x, y).$$

3911. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция в промежутке $a \leq x \leq b$. Доказать неравенство

$$\left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx,$$

где знак равенства имеет место лишь, если $f(x) = \text{const}$.

Указание. Рассмотреть интеграл

$$\int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy.$$

3912. Какой знак имеют интегралы:

$$a) \iint_{|x|+|y|<1} \ln(x^2+y^2) dx dy; \quad b) \iint_{-1 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq 1-x} \arcsin(x+y) dx dy?$$

$$b) \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy;$$

3913. Найти среднее значение функции

$$f(x, y) = \sin^2 x \sin^2 y$$

в квадрате: $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$.

3914. Пользуясь теоремой о среднем, оценить интеграл

$$I = \iint_{|x|+|y| \leq 10} \frac{dx dy}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}.$$

3915. Найти среднее значение квадрата расстояния точки круга $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2$ от начала координат.

В задачах 3916–3922 в двойном интеграле $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ расставить пределы интегрирования в том и другом порядке для указанных областей Ω .

3916. Ω — треугольник с вершинами $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$.

3917. Ω — треугольник с вершинами $O(0, 0)$, $A(2, 1)$, $B(-2, 1)$.

3918. Ω — трапеция с вершинами $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 2)$, $C(0, 1)$.

3919. Ω — круг $x^2 + y^2 \leq 1$. 3920. Ω — круг $x^2 + y^2 \leq y$.

3921. Ω — параболический сегмент, ограниченный кривыми $y = x^2$ и $y = 1$.

3922. Ω — круговое кольцо $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.

3923. Доказать формулу Дирихле

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx \quad (a > 0).$$

Изменить порядок интегрирования в следующих интегралах:

$$3924. \int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy.$$

$$3928. \int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$3925. \int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy.$$

$$3929. \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy \quad (a > 0).$$

$$3926. \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x^3} f(x, y) dy.$$

$$3930. \int_1^a dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy.$$

$$3927. \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy.$$

$$3931. \int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy.$$

Вычислить следующие интегралы:

3932. $\iint_{\Omega} xy^2 dx dy$, если область Ω ограничена параболой

$y^2 = 2px$ и прямой $x = \frac{p}{2}$ ($p > 0$).

3933. $\iint_{\Omega} \frac{dx dy}{\sqrt{2a-x}} (a > 0)$, если область Ω ограничена кратчайшей дугой окружности с центром в точке (a, a) радиуса a , касающейся осей координат, и осями координат.

3934. $\iint_{\Omega} |xy| dx dy$, если Ω — круг радиуса a с центром в начале координат.

3935. $\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy$, если Ω — параллелограмм со сторонами $y = x$, $y = x + a$, $y = a$ и $y = 3a$ ($a > 0$).

3936. $\iint_{\Omega} y^2 dx dy$, если Ω ограничена осью абсцисс и первой аркой циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

В двойном интеграле

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

перейти к полярным координатам r и φ , полагая $x = r \cos \varphi$ и $y = r \sin \varphi$, и расставить пределы интегрирования, если:

3937. Ω — круг $x^2 + y^2 \leq a^2$.

3938. Ω — круг $x^2 + y^2 \leq ax$ ($a > 0$).

3939. Ω — кольцо $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$.

3940. Ω — треугольник $0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 1 - x$.

3941. Ω — параболический сегмент $-a \leq x \leq a$; $\frac{x^2}{a} \leq y \leq a$.

3942. В каком случае после перехода к полярным координатам пределы интегрирования будут постоянные?

Перейти к полярным координатам r и φ , полагая $x = r \cos \varphi$ и $y = r \sin \varphi$, и расставить пределы интегрирования в том и другом порядке в следующих интегралах:

$$3943. \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy.$$

$$3945. \int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy.$$

$$3944. \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$3946. \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy.$$

3947. $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$, где область Ω ограничена кривой $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ($x \geq 0$).

Предполагая, что r и φ — полярные координаты, изменить порядок интегрирования в следующих интегралах:

$$3948. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} f(\varphi, r) dr \quad (a > 0).$$

$$3949. \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi, r) dr \quad (a > 0).$$

$$3950. \int_a^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\varphi} f(\varphi, r) dr \quad (0 < a < 2\pi).$$

Перейдя к полярным координатам, заменить двойные интегралы однократными:

$$3951. \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy.$$

$$3952. \iint_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy, \text{ где } \Omega = \{|y| \leq |x|; |x| \leq 1\}.$$

$$3953. \iint_{x^2+y^2 \leq x} f\left(\frac{y}{x}\right) dx dy.$$

Переходя к полярным координатам, вычислить следующие двойные интегралы:

$$3954. \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{x^2+y^2} dx dy.$$

$$3955. \iint_{\pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2} \sin \sqrt{x^2+y^2} dx dy.$$

3956. Квадрат $S \{a < x < a+h, b < y < b+h\}$, ($a > 0, b > 0$) с помощью системы функций

$$u = \frac{y^2}{x}, \quad v = \sqrt{xy}$$

преобразуется в область S' . Найти отношение площади области S' к площади S . Чему равен предел этого отношения при $h \rightarrow 0$?

Вместо x и y ввести новые переменные u и v и определить пределы интегрирования в следующих двойных интегралах:

$$3957. \int_a^b dx \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y) dy \quad (0 < a < b; 0 < \alpha < \beta), \text{ если}$$

$$u = x, \quad v = \frac{y}{x}.$$

$$3958. \int_0^2 dx \int_{1-x}^{2-x} f(x, y) dy, \text{ если } u = x + y, v = x - y.$$

$$3959. \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy, \text{ где область } \Omega \text{ ограничена кривыми} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, x = 0, y = 0 \ (a > 0), \text{ если} \\ x = u \cos^4 v, y = u \sin^4 v.$$

3960. Показать, что замена переменных

$$x + y = \xi, y = \xi \eta$$

переводит треугольник $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x$ в единичный квадрат $0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1$.

3961. При какой замене переменных криволинейный четырехугольник, ограниченный кривыми $xy = 1, xy = 2, x - y + 1 = 0, x - y - 1 = 0$ ($x > 0, y > 0$), перейдет в прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат?

Произведя соответствующие замены переменных, свести двойные интегралы к однократным:

$$3962. \iint_{|x|+|y|<1} f(x+y) dx dy.$$

$$3963. \iint_{x^2+y^2<1} f(ax+by+c) dx dy \ (a^2+b^2 \neq 0).$$

$$3964. \iint_{\Omega} f(xy) dx dy, \text{ где область } \Omega \text{ ограничена кривыми } xy = 1, \\ xy = 2, y = x, y = 4x \ (x > 0, y > 0).$$

Вычислить следующие двойные интегралы:

$$3965. \iint_{\Omega} (x+y) dx dy, \text{ где область } \Omega \text{ ограничена кривой} \\ x^2 + y^2 = x + y.$$

$$3966. \iint_{|x|+|y|<1} (|x|+|y|) dx dy.$$

$$3967. \iint_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy, \text{ где область } \Omega \text{ ограничена эллипсом} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$3968. \iint_{x^2+y^2<1} (x^2+y^2) dx dy.$$

3969. $\iint_{\Omega} (x+y) dx dy$, где область Ω ограничена кривыми $y^2 = 2x$, $x+y=4$, $x+y=12$.

3970. $\iint_{\Omega} xy dx dy$, где область Ω ограничена кривыми $xy=1$, $x+y=\frac{5}{2}$.

$$3971. \iint_{\substack{0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \pi}} |\cos(x+y)| dx dy.$$

$$3972. \iint_{x^2+y^2 < 1} \left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right| dx dy.$$

$$3973. \iint_{\substack{0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 \leq y \leq \frac{1}{2}}} \sqrt{|y-x^2|} dx dy.$$

Вычислить интегралы от разрывных функций:

$$3974. \iint_{x^2+y^2 < 4} \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) dx dy.$$

$$3975. \iint_{\substack{0 \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 0 \leq y \leq \frac{2}{3}}} [x+y] dx dy.$$

$$3976. \iint_{x^2 < y < 4} \sqrt{[y-x^2]} dx dy.$$

3977. Доказать, что

$$\iint_{x^2+y^2 < a^2} x^m y^n dx dy = 0,$$

если m и n — целые положительные числа и по меньшей мере одно из них нечетно.

3978. Найти

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \iint_{x^2+y^2 < \rho^2} f(x, y) dx dy,$$

где $f(x, y)$ — непрерывная функция.

3979. Найти $F'(t)$, если

$$F(t) = \iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq t}} e^{\frac{t}{y}} dx dy.$$

3980. Найти $F'(t)$, если

$$F(t) = \iint_{(x-t)^2 + (y-t)^2 < 1} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

3981. Найти $F'(t)$, если

$$F(t) = \iint_{x^2+y^2 < t^2} f(x, y) dx dy \quad (t > 0).$$

3982. Доказать, что если $f(x, y)$ непрерывна, то функция

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{\xi-x+y}^{x+y-\xi} f(\xi, \eta) d\eta$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y).$$

3983. Пусть линии уровня функции $f(x, y)$ — простые замкнутые кривые и область $S(v_1, v_2)$ ограничена кривыми $f(x, y) = v_1$ и $f(x, y) = v_2$.

Доказать, что

$$\iint_{S(v_1, v_2)} f(x, y) dx dy = \int_{v_1}^{v_2} v F'(v) dv,$$

где $F(v)$ — площадь, ограниченная кривыми $f(x, y) = v_1$ и $f(x, y) = v$.

У к а з а н и е. Область интеграции разбить на части, ограниченные бесконечно близкими линиями уровня функции $f(x, y)$.

§ 2. Вычисление площадей

Площадь области S , расположенной в плоскости Oxy , дается формулой

$$S = \iint_S dx dy.$$

Найти площади, ограниченные следующими кривыми:

3984. $xy = a^2$, $x + y = \frac{5}{2}a$ ($a > 0$).

3985. $y^2 = 2px + p^2$, $y^2 = -2qx + q^2$ ($p > 0$, $q > 0$).

3986. $(x-y)^2 + x^2 = a^2$ ($a > 0$).

Переходя к полярным координатам, вычислить площади, ограниченные следующими кривыми:

3987. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$; $x^2 + y^2 \geq a^2$.

3988. $(x^2 + y^2)^2 = x^2 + y^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

3989. $(x^2 + y^2)^2 = a(x^2 - 3xy^2)$ ($a > 0$).

3990. $(x^2 + y^2)^2 = 8a^2 xy$; $(x-a)^2 + (y-a)^2 \leq a^2$ ($a > 0$).

Вводя обобщенные полярные координаты r и φ по формулам

$$x = ar \cos^{\alpha} \varphi, \quad y = br \sin^{\alpha} \varphi \quad (r \geq 0),$$

где a, b и α — надлежащим образом подобранные постоянные и $\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \alpha abr \cos^{\alpha-1} \varphi \sin^{\alpha-1} \varphi$, найти площади, ограниченные следующими кривыми (параметры считаются положительными):

$$3991. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h} + \frac{y}{k}.$$

$$3992. \frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}; \quad x=0, \quad y=0.$$

$$3993. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^4 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2} \quad (x > 0, \quad y > 0).$$

$$3994. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^4 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2} \quad (x > 0, \quad y > 0).$$

$$3994.1. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^5 = \frac{x^2 y^2}{c^4}.$$

$$3995. \sqrt[3]{\frac{x}{a}} + \sqrt[3]{\frac{y}{b}} = 1; \quad x=0, \quad y=0.$$

Производя надлежащую замену переменных, найти площади фигур, ограниченных кривыми:

$$3996. \quad x+y=a, \quad x+y=b, \quad y=\alpha x, \quad y=\beta x \quad (0 < a < b; \quad 0 < \alpha < \beta).$$

$$3997. \quad xy=a^2, \quad xy=2a^2, \quad y=x, \quad y=2x \quad (x > 0; \quad y > 0).$$

$$3998. \quad y^2=2px, \quad y^2=2qx, \quad x^2=2ry, \quad x^2=2sy \quad (0 < p < q; \quad 0 < r < s).$$

$$3998.1. \quad x^2=ay, \quad x^2=by, \quad x^3=cy^2, \quad x^3=dy^2 \\ (0 < a < b; \quad 0 < c < d).$$

$$3998.2. \quad y=ax^p, \quad y=bx^p, \quad y=cx^q, \quad y=dx^q, \\ (0 < p < q; \quad 0 < a < b; \quad 0 < c < d).$$

$$3999. \quad \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1, \quad \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 2, \\ \frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \quad 4\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \quad (a > 0, \quad b > 0).$$

$$3999.1. \quad \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b} \right)^{\frac{2}{3}} = 1, \quad \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b} \right)^{\frac{2}{3}} = 4, \quad \frac{x}{a} = \frac{y}{b},$$

$$8\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \quad (x > 0, \quad y > 0).$$

$$4000. \quad \frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} = 1, \quad \text{где } \lambda \text{ принимает следующие значения:}$$

$$\frac{1}{3}c^2, \quad \frac{2}{3}c^2, \quad \frac{4}{3}c^2, \quad \frac{5}{3}c^2 \quad (x > 0, \quad y > 0).$$

4001. Найти площадь, ограниченную эллипсом

$$(a_1x + b_1y + c_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2)^2 = 1,$$

где

$$\delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

4002. Найти площадь, ограниченную эллипсами $\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 u} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 u} = c^2$

($u = u_1, u_2$) и гиперболами $\frac{x^2}{\cos^2 v} - \frac{y^2}{\sin^2 v} = c^2$ ($v = v_1, v_2$)

$$(0 < u_1 < u_2; \quad 0 < v_1 < v_2; \quad x > 0, y > 0).$$

Указание. Положить

$$x = c \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = c \operatorname{sh} u \sin v.$$

4003. Найти площадь сечения поверхности

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = a^2$$

плоскостью $x + y + z = 0$.

4004. Найти площадь сечения поверхности

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$$

плоскостью $z = 1 - 2(x + y)$.

§ 3. Вычисление объемов

Объем цилиндрида, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x, y) \geq 0$, снизу плоскостью $z = 0$ и с боков прямой цилиндрической

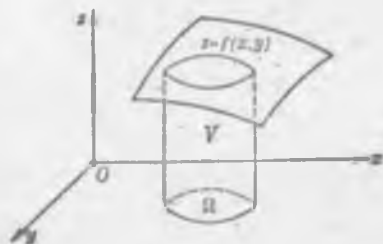


Рис. 14.

поверхностью, вырезающей из плоскости Oxy квадратуемую область Ω (рис. 14), равен

$$V = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy.$$

4005. Нарисовать тело, объем которого равен интегралу

$$V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) dy.$$

4006. Изобразить объемы, выражаемые следующими двойными интегралами:

$$\text{а) } \iint_{\substack{0 \leq x+y \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0}} (x+y) dx dy;$$

$$\text{г) } \iint_{x^2+y^2 < x} \sqrt{x^2+y^2} dx dy;$$

$$\text{б) } \iint_{\substack{x^2+y^2 < 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}} dx dy;$$

$$\text{д) } \iint_{\substack{1 \leq x \leq 2 \\ x \leq y \leq 2x}} \sqrt{xy} dx dy;$$

$$\text{в) } \iint_{|x|+|y| < 1} (x^2+y^2) dx dy;$$

$$\text{е) } \iint_{x^2+y^2 < 1} \sin \pi \sqrt{x^2+y^2} dx dy.$$

Найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями:

$$4007. z = 1 + x + y, z = 0, x + y = 1, x = 0, y = 0.$$

$$4008. x + y + z = a, x^2 + y^2 = R^2, x = 0, y = 0, z = 0 \quad (a \geq R\sqrt{2}).$$

$$4009. z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1, z = 0.$$

$$4010. z = \cos x \cos y, z = 0, |x+y| \leq \frac{\pi}{2}, |x-y| \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$4011. z = \sin \frac{\pi y}{2x}, z = 0, y = x, y = 0, x = \pi.$$

$$4012. z = xy, x + y + z = 1, z = 0.$$

Переходя к полярным координатам, найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями:

$$4013. z^2 = xy, x^2 + y^2 = a^2.$$

$$4014. z = x + y, (x^2 + y^2)^2 = 2xy, z = 0 \quad (x > 0, y > 0).$$

$$4015. z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = x, x^2 + y^2 = 2x, z = 0.$$

$$4016. x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 \geq a|x| \quad (a > 0).$$

$$4017. x^2 + y^2 - az = 0, (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), z = 0 \quad (a > 0).$$

$$4018. z = e^{-(x^2+y^2)}, z = 0, x^2 + y^2 = R^2.$$

$$4019. z = c \cos \frac{\pi \sqrt{x^2+y^2}}{2a}, z = 0,$$

$$y = x \operatorname{tg} \alpha, y = x \operatorname{tg} \beta \quad (a > 0, c > 0, 0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi).$$

$$4020. z = x^2 + y^2, z = x + y.$$

Найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями (параметры предполагаются положительными):

$$4021. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \quad (z > 0).$$

$$4022. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$4023. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, z = 0.$$

$$4024. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 + \frac{z}{c} = 1, \quad z = 0.$$

$$4025. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

$$4026. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

$$4027. z^2 = xy, \quad x + y = a, \quad x + y = b \quad (0 < a < b).$$

$$4028. z = x^2 + y^2, \quad xy = a^2, \quad xy = 2a^2, \quad y = \frac{x}{2}, \quad y = 2x, \quad z = 0.$$

$$4029. z = xy, \quad x^2 = y, \quad x^2 = 2y, \quad y^2 = x, \quad y^2 = 2x, \quad z = 0.$$

$$4030. z = c \sin \frac{\pi xy}{a^2}, \quad z = 0, \quad xy = a^2, \quad y = \alpha x, \quad y = \beta x \quad (0 < \alpha < \beta; x > 0).$$

$$4031. z = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}, \quad z = 0, \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0.$$

$$4032. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z}{c} = 1, \quad \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b} \right)^{\frac{2}{3}} = 1, \quad z = 0.$$

$$4033. z = c \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad z = 0, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = a \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (y \geq 0).$$

$$4033.1. z = ye^{-\frac{xy}{a^2}}, \quad xy = a^2, \quad xy = 2a^2, \quad y = m, \quad y = n, \quad z = 0 \quad (0 < m < n).$$

$$4034. \frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (n > 0).$$

$$4035. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^n + \left(\frac{z}{c} \right)^m = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (n > 0, m > 0).$$

§ 4. Вычисление площадей поверхностей

1°. Случай явного задания поверхности. Площадь гладкой криволинейной поверхности $z = z(x, y)$ выражается интегралом

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy,$$

где Ω — проекция данной поверхности на плоскость Oxy .

2°. Случай параметрического задания поверхности. Если уравнение поверхности задано параметрически:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

где $(u, v) \in \Omega$, Ω — ограниченная замкнутая квадратуемая область и функции x , y и z непрерывно дифференцируемы в области Ω , то для площади поверхности имеем формулу

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

где

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

4036. Найти площадь части поверхности $az = xy$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

4037. Найти площадь поверхности тела, ограниченного поверхностями $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$.

4038. Найти площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, заключенной внутри цилиндра $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b \leq a$).

4039. Найти площадь части поверхности $z^2 = 2xy$, отсекаемой плоскостями $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

4040. Найти площадь части поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, расположенной вне цилиндров $x^2 + y^2 = \pm ax$ (задача Вивiani).

4041. Найти площадь части поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$.

4042. Найти площадь части поверхности $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, заключенной внутри цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

4043. Найти площадь части поверхности $z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$, вырезанной плоскостями $x - y = \pm 1$, $x + y = \pm 1$.

4044. Найти площадь части поверхности $x^2 + y^2 = 2az$, заключенной внутри цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$.

4045. Найти площадь части поверхности $x^2 + y^2 = a^2$, вырезанной плоскостями $x + z = 0$, $x - z = 0$ ($x > 0$, $y > 0$).

4045.1. Найти площадь части поверхности

$$(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} + z = 1,$$

отсекаемую плоскостью $z = 0$.

4045.2. Найти площадь части поверхности

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \frac{2z}{c} = 1,$$

вырезанной плоскостями $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$.

4045.3. Найти площадь части поверхности

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z,$$

вырезанной поверхностью

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (z \geq 0).$$

4045.4. Найти площадь части поверхности

$$\sin z = \operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y,$$

отсекаемой плоскостями $x=1$ и $x=2$ ($y \geq 0$).

4046. Найти поверхность и объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = \frac{1}{3} z^2$, $x + y + z = 2a$ ($a > 0$).

4047. Найти площадь части сферы, ограниченной двумя параллелями и двумя меридианами.

4048. Найти площадь части геликоида

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = h\varphi, \text{ где } 0 < r < a, 0 < \varphi < 2\pi.$$

4049. Найти площадь части поверхности тора

$$x = (b + a \cos \psi) \cos \varphi, y = (b + a \cos \psi) \sin \varphi, z = a \sin \psi$$

($0 < a \leq b$), ограниченной двумя меридианами $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ и двумя параллелями $\psi = \psi_1$, $\psi = \psi_2$.

Чему равна поверхность всего тора?

4050. Найти телесный угол ω , под которым виден из начала координат прямоугольник $x=a > 0$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$.

Вывести приближенную формулу для ω , если a велико.

§ 5. Приложения двойных интегралов к механике

1°. Центр тяжести. Если x_0 и y_0 — координаты центра тяжести пластинки Ω , лежащей в плоскости Oxy , и $\rho = \rho(x, y)$ — плотность пластинки, то

$$x_0 = \frac{1}{M} \iint_{\Omega} \rho x \, dx \, dy, y_0 = \frac{1}{M} \iint_{\Omega} \rho y \, dx \, dy, \quad (1)$$

где $M = \iint_{\Omega} \rho \, dx \, dy$ — масса пластинки.

Если пластинка однородна, то в формулах (1) следует положить $\rho=1$.

2°. Моменты инерции. I_x и I_y — моменты инерции пластинки Ω , лежащей в плоскости Oxy , относительно координатных осей Ox и Oy — выражаются соответственно формулами

$$I_x = \iint_{\Omega} \rho y^2 \, dx \, dy, I_y = \iint_{\Omega} \rho x^2 \, dx \, dy. \quad (2)$$

где $\rho = \rho(x, y)$ — плотность пластинки.

Рассматривается также центробежный момент инерции

$$I_{xy} = \iint_{\Omega} \rho xy \, dx \, dy. \quad (3)$$

Полагая $\rho=1$ в формулах (2) и (3), получим геометрические моменты инерции плоской фигуры.

4051. Найти массу квадратной пластинки со стороной a , если плотность пластинки в каждой точке пропорциональна

расстоянию этой точки от одной из вершин квадрата и равна ρ_0 в центре квадрата.

Найти координаты центра тяжести однородных пластинок, ограниченных следующими кривыми:

4052. $ay = x^3$, $x + y = 2a$ ($a > 0$).

4053. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x = 0$, $y = 0$.

4054. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($x > 0$, $y > 0$).

4055. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = \frac{xy}{c^2}$ (петля).

4056. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ ($x > 0$, $y > 0$).

4057. $r = a(1 + \cos \varphi)$, $\varphi = 0$.

4058. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), $y = 0$.

4059. Найти координаты центра тяжести круглой пластинки $x^2 + y^2 \leq a^2$, если плотность ее в точке $M(x, y)$ пропорциональна расстоянию точки M от точки $A(a, 0)$.

4060. Определить кривую, описываемую центром тяжести переменной площади, ограниченной кривыми:

$$y = \sqrt{2px}, \quad y = 0, \quad x = X.$$

Найти моменты инерции I_x и I_y относительно осей координат Ox и Oy площадей ($\rho = 1$), ограниченных следующими кривыми:

4061. $\frac{x}{b_1} + \frac{y}{h} = 1$, $\frac{x}{b_2} + \frac{y}{h} = 1$, $y = 0$ ($b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $h > 0$).

4062. $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$, $x = 0$, $y = 0$ ($0 \leq x \leq a$).

4063. $r = a(1 + \cos \varphi)$.

4064. $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

4065. $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $x = 2y$, $2x = y$ ($x > 0$, $y > 0$).

4066. Найти полярный момент

$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2) dx dy$$

площади S , ограниченной кривой

$$(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^2 - y^2).$$

4066.1. Найти центробежный момент инерции I_{xy} однородной фигуры, ограниченной кривыми

$$ay = x^2, \quad ax = y^2, \quad (a > 0).$$

4067. Доказать формулу

$$I_i = I_{i_0} + Sd^2,$$

где I_l , I_{l_0} — моменты инерции фигуры S относительно двух параллельных осей l и l_0 , из которых l_0 проходит через центр тяжести фигуры и d — расстояние между этими осями.

4068. Доказать, что момент инерции плоской области S относительно прямой, проходящей через ее центр тяжести $O(0, 0)$ и составляющей угол α с осью Ox , равен

$$I = I_x \cos^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + I_y \sin^2 \alpha,$$

где I_x и I_y — моменты инерции области S относительно осей Ox и Oy и I_{xy} — центробежный момент:

$$I_{xy} = \iint_S \rho xy \, dx \, dy.$$

4069. Найти момент инерции правильного треугольника со стороной a относительно прямой, проходящей через центр тяжести треугольника и составляющей угол α с его высотой.

4070. Определить силу давления воды на боковую стенку $x \geq 0$ цилиндрического сосуда $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, если уровень воды $z = h$.

4071. Шар радиуса a погружен в жидкость постоянной плотности δ на глубину h (считая от центра шара), где $h \geq a$. Найти силу давления жидкости на верхнюю и нижнюю части шаровой поверхности.

4072. Прямой круговой цилиндр, радиус основания которого равен a , а высота b , целиком погружен в жидкость плотности δ так, что центр его находится на глубине h под поверхностью воды, а ось цилиндра составляет угол α с вертикалью. Определить силу давления жидкости на нижнее и верхнее основания цилиндра.

4073. Определить силу притяжения однородным цилиндром $x^2 + y^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq h$, материальной точки $P(0, 0, b)$, если масса цилиндра равна M , а масса точки равна m .

4074. Распределение давления тела на площадку смятия

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

дается формулой $p = p_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$.

Определить среднее давление тела на эту площадку.

4075. Луг, имеющий форму прямоугольника со сторонами a и b , равномерно покрыт скошенной травой с плотностью, равной $\rho \frac{\kappa\Gamma}{\text{м}^2}$. Какую минимальную работу надо затратить, чтобы собрать все сено в центре луга, если работа по транспортировке груза $P \kappa\Gamma$ на расстояние r равна kPr ($0 < k < 1$).

§ 6. Тройные интегралы

1°. Непосредственное вычисление тройного интеграла. Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна и область V ограничена и определяется следующими неравенствами:

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \quad z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y),$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ — непрерывные функции, то тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$, распространенный на область V , может быть вычислен по формуле

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Иногда удобно также применять формулу

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{S(x)} f(x, y, z) dy dz,$$

где $S(x)$ — сечение области V плоскостью $x = \text{const}$.

2°. Замена переменных в тройном интеграле. Если ограниченная кубируемая замкнутая область V пространства $Oxyz$ взаимно однозначно отображается на область V' пространства $O'uvw$ с помощью непрерывно дифференцируемых функций

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w),$$

причем якобиан $J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}$ при $(u, v, w) \in V'$, почти всюду (в смысле меры) сохраняет постоянный знак, то справедлива формула

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| du dv dw.$$

Как частные случаи, имеем: 1) цилиндрическую систему координат φ, r, h , где $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = h$,

■

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, h)} = r,$$

и 2) сферическую систему координат φ, ψ, r , где

$$x = r \cos \varphi \cos \psi, \quad y = r \sin \varphi \cos \psi, \quad z = r \sin \psi,$$

■

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \psi)} = r^2 \sin \psi.$$

Вычислить следующие тройные интегралы:

4076. $\iiint_V xy^2z^3 dx dy dz$, где область V ограничена поверхностями $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $z = 0$.

4077. $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$, где область V ограничена поверхностями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

4078. $\iiint_V xyz dx dy dz$, где область V ограничена поверхностями $x^2+y^2+z^2=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

4079. $\iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz$, где область V ограничена поверхностью

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

4080. $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz$, где область V ограничена поверхностями

$$x^2+y^2=z^2, \quad z=1.$$

Различными способами расставить пределы интегрирования в следующих тройных интегралах:

$$4081. \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz.$$

$$4082. \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz.$$

$$4083. \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} f(x, y, z) dz.$$

Заменить тройные интегралы однократными:

$$4084. \int_0^x d\xi \int_0^\xi d\eta \int_0^\eta f(\zeta) d\zeta. \quad 4085. \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x+y} f(z) dz.$$

4086. Найти

$$\int_a^A dx \int_b^B dy \int_c^C f(x, y, z) dz,$$

если $f(x, y, z) = F'''_{xyz}(x, y, z)$ и a, b, c, A, B, C — постоянные.

Переходя к сферическим координатам, вычислить интегралы:

4087. $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2} dx dy dz$, где область V ограничена поверхностью $x^2+y^2+z^2=z$.

$$4088. \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z^2 dz.$$

4089. Перейти к сферическим координатам в интеграле

$$\iiint_V f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) dx dy dz,$$

где область V ограничена поверхностями $z = x^2 + y^2$, $x = y$, $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.

4090. Произведя соответствующую замену переменных, вычислить тройной интеграл

$$\iiint_V \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz,$$

где V — внутренность эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

4091. Перейдя к цилиндрическим координатам, вычислить интеграл

$$\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz,$$

где область V ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$.

4092. Вычислить интеграл

$$\iiint_V x^2 dx dy dz,$$

где область V ограничена поверхностями $z = ay^2$, $z = by^2$, $y > 0$ ($0 < a < b$), $z = \alpha x$, $z = \beta x$ ($0 < \alpha < \beta$), $z = h$ ($h > 0$).

4093. Найти интеграл $\iiint_V xyz dx dy dz$, где область V расположена в октанте $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ и ограничена поверхностями:

$$z = \frac{x^2 + y^2}{m}, \quad z = \frac{x^2 + y^2}{n}, \quad xy = a^2, \quad xy = b^2, \quad y = \alpha x, \quad y = \beta x$$

$$(0 < a < b; 0 < \alpha < \beta; 0 < m < n).$$

4094. Найти среднее значение функции

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

в области $x^2 + y^2 + z^2 \leq x + y + z$.

4095. Найти среднее значение функции

$$f(x, y, z) = e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}}$$

в области $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

4096. Пользуясь теоремой о среднем, оценить интеграл

$$u = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \frac{dx dy dz}{V(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

где $a^2 + b^2 + c^2 > R^2$.

4097. Доказать, что если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в области V и

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = 0$$

для любой области $\omega \subset V$, то $f(x, y, z) \equiv 0$ при $(x, y, z) \in V$.

4098. Найти $F'(t)$, если:

$$a) F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2+y^2+z^2) dx dy dz,$$

где f — дифференцируемая функция;

$$b) F(t) = \iiint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq t \\ 0 \leq z \leq t}} f(xyz) dx dy dz,$$

где f — дифференцируемая функция.

4099. Найти

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} x^m y^n z^p dx dy dz,$$

где m, n и p — целые неотрицательные числа.

4100. Вычислить интеграл Дирихле

$$\iiint_V x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s dx dy dz$$

$$(p > 0, q > 0, r > 0, s > 0),$$

где область V ограничена плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, полагая

$$x+y+z=\xi, \quad y+z=\xi\eta, \quad z=\xi\eta\zeta.$$

§ 7. Вычисление объемов с помощью тройных интегралов

Объем области V выражается формулой

$$V = \iiint_V dx dy dz.$$

Найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями:

$$4101. z = x^2 + y^2, z = 2x^2 + 2y^2, y = x, y = x^2.$$

$$4102. z = x + y, z = xy, x + y = 1, x = 0, y = 0.$$

$$4103. x^2 + z^2 = a^2, x + y = \pm a, x - y = \pm a.$$

$$4104. az = x^2 + y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2} (a > 0).$$

$$4105. az = a^2 - x^2 - y^2, z = a - x - y, x = 0, y = 0, z = 0 (a > 0).$$

$$4106. z = 6 - x^2 - y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Переходя к сферическим или цилиндрическим координатам, вычислить объемы, ограниченные поверхностями:

$$4107. x^2 + y^2 + z^2 = 2az, x^2 + y^2 \leq z^2.$$

$$4108. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 (x^2 + y^2 - z^2).$$

$$4109. (x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz.$$

$$4110. x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 + z^2 = b^2, x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0) (0 < a < b).$$

В следующих примерах удобно пользоваться обобщенными сферическими координатами

$$r, \varphi \text{ и } \psi \left(r \geq 0; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \right),$$

вводя их по формулам

$$\left. \begin{aligned} x &= ar \cos \alpha \varphi \cos \beta \psi, \\ y &= br \sin \alpha \varphi \cos \beta \psi, \\ z &= cr \sin \beta \psi \end{aligned} \right\}$$

(a, b, c, α, β — постоянные).

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \psi)} = \alpha \beta a b c r^2 \cos^{\alpha-1} \varphi \sin^{\alpha-1} \varphi \cos^{\beta-1} \psi \sin^{\beta-1} \psi.$$

Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями:

$$4111. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x}{h}.$$

$$4112. \left(\frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} + \frac{z^3}{c^3} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

$$4112.1. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}.$$

$$4113. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a}.$$

$$4114. \frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} + \frac{z^4}{c^4} = 1.$$

$$4115. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = 1.$$

Пользуясь подходящей заменой переменных, вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями (параметры предполагаются положительными):

$$4116. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = \frac{x}{h} + \frac{y}{k} (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0).$$

$$4116.1. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = \frac{x}{h} - \frac{y}{k} (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0).$$

$$4117. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^4 = \frac{xyz}{abc} \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0).$$

$$4118. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \left(\frac{z}{c} \right)^2 = 1 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0).$$

$$4118.1. \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0).$$

$$4118.2. \sqrt[3]{\frac{x}{a}} + \sqrt[3]{\frac{y}{b}} + \sqrt[3]{\frac{z}{c}} = 1 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0).$$

$$4118.3. \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c} \right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

$$4119. z = x^2 + y^2, \quad z = 2(x^2 + y^2), \quad xy = a^2, \quad xy = 2a^2, \quad x = 2y, \\ 2x = y \quad (x > 0, y > 0).$$

$$4120. x^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + z^2 = b^2, \quad x^2 - y^2 - z^2 = 0 \quad (x > 0).$$

$$4121. (x^2 + y^2 + z^2)^3 = \frac{a^6 z^2}{x^2 + y^2}.$$

$$4122. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{z}{h} \cdot e^{-\frac{\frac{z^2}{c^2}}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}}.$$

$$4123. \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right), \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

$$x = 0, \quad x = a.$$

$$4124. \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \ln \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}, \quad x = 0, \quad z = 0, \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0,$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

4125. В каком отношении делит объем шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4az$ поверхность $x^2 + y^2 + az = 4a^2$?

4126. Найти объем и поверхность тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = az$, $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$ ($a > 0$).

4127. Найти объем параллелепипеда, ограниченного плоскостями

$$a_i x + b_i y + c_i z = \pm h_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

если

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

4128. Найти объем тела, ограниченного поверхностью
 $(a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 + (a_3x + b_3y + c_3z)^2 = h^2$,
 если

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

4129. Найти объем тела, ограниченного поверхностью

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^n + \frac{z^{2n}}{c^{2n}} = \frac{z}{h} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^{n-1} \quad (n > 1).$$

4130. Найти объем тела, расположенного в положительном октанте пространства $Oxyz$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$) и ограниченного поверхностями:

$$\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^p}{c^p} = 1 \quad (m > 0, n > 0, p > 0), \quad x=0, y=0, z=0.$$

§ 8. Приложения тройных интегралов к механике

1°. Масса тела. Если тело занимает объем V и $\rho = \rho(x, y, z)$ — плотность его в точке (x, y, z) , то масса тела равна

$$M = \iiint_V \rho \, dx \, dy \, dz. \quad (1)$$

2°. Центр тяжести тела. Координаты центра тяжести (x_0, y_0, z_0) тела вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{M} \iiint_V \rho x \, dx \, dy \, dz, \\ y_0 &= \frac{1}{M} \iiint_V \rho y \, dx \, dy \, dz, \\ z_0 &= \frac{1}{M} \iiint_V \rho z \, dx \, dy \, dz. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Если тело однородно, то в формулах (1) и (2) можно положить $\rho = 1$.

3°. Моменты инерции. Моментами инерции тела относительно координатных плоскостей называются соответственно интегралы

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \iiint_V \rho z^2 \, dx \, dy \, dz, & I_{yz} &= \iiint_V \rho x^2 \, dx \, dy \, dz, \\ I_{zx} &= \iiint_V \rho y^2 \, dx \, dy \, dz. \end{aligned}$$

Моментом инерции тела относительно некоторой оси l называется интеграл

$$I_l = \iiint_V \rho r^2 \, dx \, dy \, dz,$$

где r — расстояние переменной точки тела (x, y, z) от оси l . В частности для координатных осей Ox , Oy и Oz соответственно имеем:

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}, \quad I_y = I_{yx} + I_{yz}, \quad I_z = I_{zx} + I_{zy}.$$

Моментом инерции тела относительно начала координат называется интеграл

$$I_0 = \iiint_V \rho (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

Очевидно, имеем:

$$I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx}.$$

4°. Потенциал поля тяготения. Ньютоновым потенциалом тела в точке $P(x, y, z)$ называется интеграл

$$u(x, y, z) = \iiint_V \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r},$$

где V — объем тела, $\rho = \rho(\xi, \eta, \zeta)$ — плотность тела, и

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}.$$

Материальная точка массы m притягивается телом с силой $F = (X, Y, Z)$, проекции которой X, Y, Z на оси координат Ox, Oy, Oz равны:

$$X = km \frac{\partial u}{\partial x} = km \iiint_V \rho \frac{\xi - x}{r^3} d\xi d\eta d\zeta,$$

$$Y = km \frac{\partial u}{\partial y} = km \iiint_V \rho \frac{\eta - y}{r^3} d\xi d\eta d\zeta,$$

$$Z = km \frac{\partial u}{\partial z} = km \iiint_V \rho \frac{\zeta - z}{r^3} d\xi d\eta d\zeta,$$

где k — постоянная закона тяготения.

4131. Найти массу тела, занимающего единичный объем $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, если плотность тела в точке $M(x, y, z)$ дается формулой $\rho = x + y + z$.

4132. Найти массу тела, заполняющего бесконечную область $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$, если плотность тела меняется по закону $\rho = \rho_0 e^{-k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, где $\rho_0 > 0$ и $k > 0$ постоянны.

Найти координаты центра тяжести однородных тел, ограниченных следующими поверхностями:

4133. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z = c$.

4134. $z = x^2 + y^2$, $x + y = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4135. $x^2 = 2\rho z$, $y^2 = 2\rho x$, $x = \frac{\rho}{2}$, $z = 0$.

4136. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4137. $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$ ($z \geq 0$).

$$4138. x^2 + y^2 = 2z, \quad x + y = z.$$

$$4139. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{xyz}{abc} \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0; a > 0, b > 0, c > 0).$$

$$4140. z = x^2 + y^2, \quad z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad x + y = \pm 1, \quad x - y = \pm 1.$$

$$4141. \frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

$$(n > 0, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0).$$

4142. Определить координаты центра тяжести тела, имеющего форму куба:

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

если плотность тела в точке (x, y, z) равна $\rho = x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}}$, где $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, 0 < \gamma < 1$.

Определить моменты инерции относительно координатных плоскостей однородных тел, ограниченных следующими поверхностями (параметры положительны):

$$4143. \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

$$4144. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad 4145. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \quad z = c.$$

$$4146. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a}.$$

$$4147. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c}, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

$$4147.1. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

$$4147.2. \left(\frac{x}{a} \right)^n + \left(\frac{y}{b} \right)^n + \left(\frac{z}{c} \right)^n = 1,$$

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (n > 0; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0).$$

Определить моменты инерции относительно оси Oz однородных тел, ограниченных поверхностями:

$$4148. z = x^2 + y^2, \quad x + y = \pm 1, \quad x - y = \pm 1, \quad z = 0.$$

$$4149. x^2 + y^2 + z^2 = 2, \quad x^2 + y^2 = z^2 \quad (z > 0).$$

$$4149.1. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 z.$$

4150. Найти момент инерции неоднородного шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ массы M относительно его диаметра, если плотность шара в текущей точке $P(x, y, z)$ пропорционально расстоянию этой точки от центра шара.

4151. Доказать равенство

$$I_l = I_{l_0} + Md^2,$$

где I_l — момент инерции тела относительно некоторой оси l , I_{l_0} — момент инерции относительно оси l_0 , параллельной l и проходящей через центр тяжести тела, d — расстояние между осями и M — масса тела.

4152. Доказать, что момент инерции тела, занимающего объем V , относительно оси l , проходящей через его центр тяжести $O(0, 0, 0)$ и образующей углы α, β, γ с осями координат, равен:

$$I_l = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2K_{xy} \cos \alpha \cos \beta - \\ - 2K_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - 2K_{yz} \cos \beta \cos \gamma,$$

где I_x, I_y, I_z — моменты инерции тела относительно осей координат и

$$K_{xy} = \iiint_V \rho xy \, dx \, dy \, dz, \quad K_{xz} = \iiint_V \rho xz \, dx \, dy \, dz,$$

$$L_{yz} = \iiint_V \rho yz \, dx \, dy \, dz$$

— центробежные моменты.

4153. Найти момент инерции однородного цилиндра $x^2 + y^2 \leq a^2$, $z = \pm h$, плотности ρ_0 относительно прямой $x = y = z$.

4154. Найти момент инерции относительно начала координат однородного тела плотности ρ_0 , ограниченного поверхностью

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 (x^2 + y^2).$$

4155. Найти ньютонов потенциал в точке $P(x, y, z)$ однородного шара $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R^2$ плотности ρ_0 .

Указание. Положить, что ось $O\xi$ проходит через точку $P(x, y, z)$.

4156. Найти ньютонов потенциал в точке $P(x, y, z)$ сферического слоя $R_1^2 \leq \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R_2^2$, если плотность $\rho = f(R)$, где f — известная функция и $R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$.

4157. Найти ньютонов потенциал в точке $P(0, 0, z)$ цилиндра $\xi^2 + \eta^2 \leq a^2$, $0 \leq \zeta \leq h$, постоянной плотности ρ_0 .

4158. С какой силой притягивает однородный шар $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R^2$ массы M материальную точку $P(0, 0, a)$ массы m ?

4159. Найти силу притяжения однородным цилиндром $\xi^2 + \eta^2 \leq a^2$, $0 \leq \zeta \leq h$, плотности ρ_0 , точки $P(0, 0, z)$ с единичной массой.

4160. Найти силу притяжения однородным шаровым сектором плотности ρ_0 материальной точки с массой, равной единице, помещенной в его вершине, если радиус шаровой поверхности равен R , а угол осевого сечения сектора равен 2α .

§ 9. Несобственные двойные и тройные интегралы

1°. Случай бесконечной области. Если двумерная область Ω не ограничена и функция $f(x, y)$ непрерывна на Ω , то по определению полагают:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega_n} f(x, y) dx dy, \quad (1)$$

где Ω_n — любая последовательность ограниченных замкнутых квадратируемых областей, исчерпывающая область Ω . Если предел в правой части существует и не зависит от выбора последовательности Ω_n , то соответствующий интеграл называется *сходящимся*; в противном случае — *расходящимся*.

Аналогично определяется несобственный тройной интеграл от непрерывной функции, распространенной на неограниченную трехмерную область.

2°. Случай разрывной функции. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в ограниченной и замкнутой области Ω всюду, за исключением точки $P(a, b)$, то полагают:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \iint_{\Omega - U_{\varepsilon}} f(x, y) dx dy, \quad (2)$$

где U_{ε} есть область диаметра ε , содержащая точку P , и в случае существования предела рассматриваемый интеграл называют *сходящимся*; в противном случае — *расходящимся*.

Предполагая, что вблизи точки $P(a, b)$ имеет место равенство

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{r^{\alpha}},$$

где абсолютная величина функции $\varphi(x, y)$ заключена между двумя положительными числами m и M и $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, получим, что 1) при $\alpha < 2$ интеграл (2) сходится; 2) при $\alpha \geq 2$ — расходится.

Аналогично определяется несобственный интеграл (2), если функция $f(x, y)$ имеет линию разрыва.

Понятие несобственного интеграла от разрывной функции легко переносится на случай тройных интегралов.

Исследовать на сходимость несобственные интегралы с бесконечной областью интеграции ($0 < m \leq |\varphi(x, y)| \leq M < +\infty$):

$$4161. \iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{\varphi(x, y)}{(x^2+y^2)^p} dx dy. \quad 4162. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}.$$

$$4163. \iint_{0 \leq x \leq 1} \frac{\varphi(x, y)}{(1+x^2+y^2)^p} dx dy.$$

$$4164. \iint_{|x|+|y| \geq 1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q} \quad (p > 0, q > 0).$$

$$4165. \iint_{x+y \geq 1} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy.$$

4166. Доказать, что если непрерывная функция $f(x, y)$ неотрицательна и S_n ($n = 1, 2, \dots$) — какая-нибудь последовательность ограниченных и замкнутых областей, исчерпывающая область S , то

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{S_n} f(x, y) dx dy,$$

где левая часть имеет или не имеет смысла одновременно с правой.

4167. Показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\substack{|x| \leq n \\ |y| \leq n}} \sin(x^2 + y^2) dx dy = \pi,$$

тогда как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{x^2 + y^2 \leq 2\pi n} \sin(x^2 + y^2) dx dy = 0$$

(n — натуральное число).

4168. Показать, что интеграл

$$\int_{x \geq 1} \int_{y \geq 1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$$

расходится, хотя повторные интегралы

$$\int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \quad \text{и} \quad \int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

сходятся.

Вычислить интегралы (параметры положительны):

4169. $\iint_{\substack{xy \geq 1 \\ x \geq 1 \\ y \geq 1}} \frac{dx dy}{x^p y^q}.$

4172. $\iint_{x^2 + y^2 \geq 1} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^p}.$

4170. $\iint_{\substack{x+y \geq 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} \frac{dx dy}{(x+y)^p}.$

4173. $\iint_{y \geq x^2 + 1} \frac{dx dy}{x^4 + y^4}.$

4171. $\iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$

4174. $\iint_{0 \leq x \leq y} e^{-(x+y)} dx dy.$

Переходя к полярным координатам, вычислить интегралы:

4175. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2 + y^2)} dx dy.$

4176. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2 + y^2)} \cos(x^2 + y^2) dx dy.$

$$4177. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \sin(x^2+y^2) dx dy.$$

Вычислить интегралы:

$$4178. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f} dx dy,$$

где $a < 0$, $ac - b^2 > 0$.

$$4179. \int \int_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy.$$

$$4180. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xye^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + 2e\frac{x}{a}\frac{y}{b} + \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy \quad (0 < |e| < 1).$$

Исследовать на сходимость несобственные двойные интегралы от разрывных функций ($0 < m \leq |\varphi(x, y)| \leq M < +\infty$):

$$4181. \iint_{\Omega} \frac{dx dy}{x^2 + y^2}, \text{ где область } \Omega \text{ определяется условиями: } |y| \leq x^2; x^2 + y^2 \leq 1.$$

$$4182. \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x, y)}{(x^2+xy+y^2)^p} dx dy.$$

$$4183. \iint_{|x|+|y| \leq 1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q} \quad (p > 0, q > 0).$$

$$4184. \int_0^a \int_0^a \frac{\varphi(x, y)}{|x-y|^p} dx dy. \quad 4185. \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x, y)}{(1-x^2-y^2)^p} dx dy.$$

4186. Доказать, что если 1) функция $\varphi(x, y)$ непрерывна в ограниченной области $a \leq x \leq A$, $b \leq y \leq B$; 2) функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $a \leq x \leq A$ и 3) $p < 1$, то интеграл

$$\int_a^A dx \int_b^B \frac{\varphi(x, y)}{|f(x) - y|^p} dy$$

сходится.

Вычислить следующие интегралы:

$$4187. \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy. \quad 4188. \int_a^a dx \int_b^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} \quad (a > 0).$$

$$4189. \iint_{\Omega} \ln \sin (x-y) d x d y,$$

где область Ω ограничена прямыми $y=0$, $y=x$, $x=\pi$.

$$4190. \iint_{x^2+y^2 \leq x} \frac{d x d y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Исследовать на сходимость следующие тройные интегралы:

$$4191. \iiint_{x^2+y^2+z^2 > 1} \frac{\varphi(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} d x d y d z,$$

где $0 < m \leq |\varphi(x, y, z)| \leq M < +\infty$.

$$4192. \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{\varphi(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} d x d y d z,$$

где $0 < m \leq |\varphi(x, y, z)| \leq M < +\infty$.

$$4193. \iiint_{|x|+|y|+|z| > 1} \frac{d x d y d z}{|x|^p+|y|^q+|z|^r} \quad (p > 0, q > 0, r > 0).$$

$$4194. \int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{f(x, y, z) d x d y d z}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p},$$

где $0 < m \leq |f(x, y, z)| \leq M < +\infty$, а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — непрерывные функции на сегменте $[0, a]$.

$$4195. \iiint_{\substack{|x| \leq 1, \\ |y| \leq 1, \\ |z| \leq 1}} \frac{d x d y d z}{|x+y-z|^p}.$$

Вычислить интегралы:

$$4196. \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{d x d y d z}{x^p y^q z^r}, \quad 4197. \iiint_{x^2+y^2+z^2 \geq 1} \frac{d x d y d z}{(x^2+y^2+z^2)^3}.$$

$$4198. \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{d x d y d z}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}.$$

$$4199. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)} d x d y d z.$$

4200. Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x_1, x_2, x_3)} d x_1 d x_2 d x_3,$$

где $P(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j$ ($a_{ij} = a_{ji}$) — положительно определенная квадратичная форма.

4201. Пусть $K(x, y)$ — непрерывная функция в области $R(a \leq x \leq b; a \leq y \leq b)$ и

$$K_n(x, y) = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b K(x, t_1) K(t_1, t_2) \dots K(t_n, y) dt_1 dt_2 \dots dt_n.$$

Доказать, что

$$K_{n+m+1}(x, y) = \int_a^b K_n(x, t) K_m(t, y) dt.$$

4202. Пусть $f = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — непрерывная функция в области $0 \leq x_i \leq x$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Доказать равенство

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-1}} f dx_n = \int_0^x dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \dots \int_{x_1}^x f dx_1 \quad (n \geq 2).$$

4203. Доказать, что

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} f(t_1) f(t_2) \dots f(t_n) dt_n = \frac{1}{n!} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\}^n,$$

где f — непрерывная функция.

Вычислить следующие многократные интегралы:

4204. а) $\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) dx_1 dx_2 \dots dx_n;$

б) $\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n.$

4205. $I_n = \int_{x_1+x_2+\dots+x_n \leq a} \int_{x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0} dx_1 dx_2 \dots dx_n.$

4206. $\int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-1}} x_1 x_2 \dots x_n dx_n.$

4207. $\int_{x_1+x_2+\dots+x_n \leq 1} \int_{x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0} \sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_n} dx_1 dx_2 \dots dx_n.$

4208. Найти объем n -мерного параллелепипеда, ограниченного плоскостями

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = \pm h_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

если $\Delta = |a_{ij}| \neq 0$.

4209. Найти объем n -мерной пирамиды

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \dots + \frac{x_n}{a_n} \leq 1, \quad x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$(a_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n).$$

4210. Найти объем n -мерного конуса, ограниченного поверхностями

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} = \frac{x_n^2}{a_n^2}, \quad x_n = a_n.$$

4211. Найти объем n -мерного шара

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq a^2.$$

4212. Найти $\int \int \dots \int_{\Omega} x_n^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n$,

где область Ω определяется неравенствами

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq a^2, \quad -\frac{h}{2} \leq x_n \leq \frac{h}{2}.$$

4213. Вычислить

$$\int \int \dots \int_{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1} \frac{dx_1 dx_2 \dots dx_n}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2}}.$$

4214. Доказать равенство

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \int_0^x f(u) \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} du.$$

4215. Доказать равенство

$$\int_0^x x_1 dx_1 \int_0^{x_1} x_2 dx_2 \dots \int_0^{x_n} f(x_{n+1}) dx_{n+1} = \frac{1}{2^n n!} \int_0^x (x^2 - u^2)^n f(u) du.$$

4216. Доказать формулу Дирихле

$$\int \int \dots \int_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_n > 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1}} x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \dots x_n^{p_n-1} dx_1 dx_2 \dots dx_n =$$

$$= \frac{\Gamma(p_1) \Gamma(p_2) \dots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + p_2 + \dots + p_n + 1)} \quad (p_1, p_2, \dots, p_n > 0).$$

4217. Доказать формулу Лиувилля

$$\begin{aligned} & \int \int \dots \int_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_n > 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1}} f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \dots \\ & \dots x_n^{p_n-1} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ & = \frac{\Gamma(p_1) \Gamma(p_2) \dots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + p_2 + \dots + p_n)} \int_0^1 f(u) u^{p_1 + p_2 + \dots + p_n - 1} du \quad (p_1, p_2, \dots, p_n > 0), \end{aligned}$$

где $f(u)$ — непрерывная функция.

Указание. Применить метод математической индукции.

4218. Привести к однократному интегралу n -кратный интеграл ($n \geq 2$)

$$\int \int \dots \int_{\Omega} f(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}) dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

распространенный по области $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2$, где $f(u)$ — непрерывная функция.

4219. Вычислить потенциал на себя однородного шара радиуса R и плотности ρ_0 , т. е. найти интеграл

$$u = \frac{\rho_0}{2} \iiint \iiint \frac{dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2}{r_{1,2}},$$

$$\begin{aligned} & x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \leq R^2 \\ & x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \leq R^2 \end{aligned}$$

где $r_{1,2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$.

4220. Вычислить n -кратный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i + c \right\}} dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

если $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ ($a_{ij} = a_{ji}$) — положительно определенная квадратичная форма.

§ 11. Криволинейные интегралы

1°. Криволинейный интеграл 1-го рода. Если $f(x, y, z)$ — функция, определенная и непрерывная в точках гладкой кривой C

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (t_0 \leq t \leq T) \quad (1)$$

и ds — дифференциал дуги, то по определению полагают

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_{t_0}^T f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

Особенность этого интеграла состоит в том, что он не зависит от направления кривой C .

2°. Механические приложения криволинейного интеграла 1-го рода. Если $\rho = \rho(x, y, z)$ — линейная плотность в текущей точке (x, y, z) кривой C , то масса кривой C равна:

$$M = \int_C \rho(x, y, z) ds.$$

Координаты центра тяжести (x_0, y_0, z_0) этой кривой выражаются формулами

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_C x \rho(x, y, z) ds, \quad y_0 = \frac{1}{M} \int_C y \rho(x, y, z) ds, \quad z_0 = \frac{1}{M} \int_C z \rho(x, y, z) ds.$$

3°. Криволинейный интеграл 2-го рода. Если функции $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ непрерывны в точках кривой (1), пробегаемой в направлении возрастания параметра t , то полагают

$$\begin{aligned} \int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ = \int_{t_0}^T \{ P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + \\ + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t) \} dt. \end{aligned} \quad (2)$$

При изменении направления обхода кривой C этот интеграл изменяет свой знак на обратный. Механически интеграл (2) представляет собой работу переменной силы $\{P, Q, R\}$, точка приложения которой описывает кривую C .

4°. Случай полного дифференциала. Если

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = du,$$

где $u = u(x, y, z)$ — однозначная функция в области V , то независимо от вида кривой C , целиком расположенной в области V , имеем:

$$\int_C P dx + Q dy + R dz = u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1),$$

где (x_1, y_1, z_1) — начальная и (x_2, y_2, z_2) — конечная точка пути. В простейшем случае, если область V односвязна и функции P, Q и R обладают непрерывными частными производными первого порядка, для этого необходимо и достаточно, чтобы в области V были тождественно выполнены следующие условия:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Тогда в простейшем случае стандартной параллелопидальной области V , функцию u можно найти по формуле

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y, z) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y, z) dy + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, z) dz + c,$$

где (x_0, y_0, z_0) — некоторая фиксированная точка области V и c — произвольная постоянная.

Механически этот случай соответствует работе силы, имеющей потенциал.

Вычислить следующие криволинейные интегралы 1-го рода:

4221. $\int_C (x+y) ds$, где C — контур треугольника с вершинами $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ и $B(0, 1)$.

4222. $\int_C y^3 ds$, где C — арка циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

4223. $\int_C (x^2 + y^2) ds$, где C — кривая

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

4224. $\int_C xy ds$, где C — дуга гиперболы

$$x = a \operatorname{ch} t, \quad y = a \operatorname{sh} t \quad (0 \leq t \leq t_0).$$

4225. $\int_C \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \right) ds$, где C — дуга астроида $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

4226. $\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$, где C — выпуклый контур, ограниченный кривыми $r = a$, $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (r и φ — полярные координаты).

4227. $\int_C |y| ds$, где C — дуга лемнискаты

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

4228. $\int_C x ds$, где C — часть логарифмической спирали $r = ae^{k\varphi}$ ($k > 0$), находящаяся внутри круга $r \leq a$.

4229. $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$, где C — окружность $x^2 + y^2 = ax$.

4230. $\int_C \frac{ds}{y^3}$, где C — цепная линия $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.

Найти длины дуг пространственных кривых (параметры положительны):

4231. $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$, от $O(0, 0, 0)$ до $A(3, 3, 2)$.

4232. $x = e^{-t} \cos t$, $y = e^{-t} \sin t$, $z = e^{-t}$, при $0 < t < +\infty$.

4233. $y = a \arcsin \frac{x}{a}$, $z = \frac{a}{4} \ln \frac{a-x}{a+x}$ от $O(0, 0, 0)$ до $A(x_0, y_0, z_0)$.

4234. $(x-y)^2 = a(x+y)$, $x^2 - y^2 = \frac{9}{8} z^2$ от $O(0, 0, 0)$ до $A(x_0, y_0, z_0)$.

4235. $x^2 + y^2 = cz$, $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{c}$ от $O(0, 0, 0)$ до $A(x_0, y_0, z_0)$.

4236. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $\sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{ch} \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right) = a$ от точки $A(a, 0, 0)$ до точки $B(x, y, z)$.

Вычислить криволинейные интегралы 1-го рода, взятые вдоль пространственных кривых:

4237. $\int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds$, где C — часть винтовой линии

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

4238. $\int_C x^2 ds$, где C — окружность

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x + y + z = 0.$$

4239. $\int_C z ds$, где C — коническая винтовая линия

$$x = t \cos t, \quad y = t \sin t, \quad z = t \quad (0 \leq t \leq t_0).$$

4240. $\int_C z ds$, где C — дуга кривой $x^2 + y^2 = z^2$, $y^2 = ax$ от точки

$O(0, 0, 0)$ до точки $A(a, a, a\sqrt{2})$.

4241. Найти массу кривой $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ ($a \geq b > 0$; $0 \leq t \leq 2\pi$), если линейная плотность ее в точке (x, y) равна $\rho = |y|$.

4241.1. Найти массу дуги параболы

$$y^2 = 2px \quad \left(0 \leq x \leq \frac{p}{2} \right),$$

если линейная плотность параболы в текущей точке $M(x, y)$ равна $|y|$.

4242. Найти массу дуги кривой $x = at$, $y = \frac{a}{2} t^2$, $z = \frac{a}{3} t^3$ ($0 \leq t \leq 1$), плотность которой меняется по закону $\rho = \sqrt{\frac{2y}{a}}$.

4243. Вычислить координаты центра тяжести дуги однородной кривой $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ от точки $A(0, a)$ до точки $B(b, h)$.

4244. Определить центр тяжести дуги циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq \pi).$$

4244.1. Найти статические моменты

$$S_y = \int_C x ds, \quad S_x = \int_C y ds$$

дуги C астроиды

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (x \geq 0, y \geq 0)$$

относительно осей координат.

4244.2. Найти момент инерции окружности

$$x^2 + y^2 = a^2$$

относительно ее диаметра.

4244.3. Найти полярные моменты инерции

$$I_0 = \int_C (x^2 + y^2) ds$$

относительно точки $O(0, 0)$ следующих линий: а) контура C квадрата $\max\{|x|, |y|\} = a$; б) контура C правильного треугольника с вершинами в полярных координатах

$$P(a, 0), Q\left(a, \frac{2\pi}{3}\right), R\left(a, \frac{4\pi}{3}\right).$$

4244.4. Найти средний полярный радиус астроиды

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

т. е. число $r_0(r_0 > 0)$, определяемое формулой

$$I_0 = s \cdot r_0^3,$$

где I_0 — полярный момент инерции астроиды, относительно начала координат (см. 4244.3) и s — длина дуги астроиды.

4245. Вычислить координаты центра тяжести контура сферического треугольника $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

4246. Найти координаты центра тяжести однородной дуги

$$x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t \quad (-\infty < t \leq 0).$$

4247. Найти моменты инерции относительно координатных осей одного витка винтовой линии

$$x = a \cos t, y = a \sin t, z = \frac{h}{2\pi} t \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

4248. Вычислить криволинейный интеграл 2-го типа

$$\int_{OA} x dy - y dx,$$

где O — начало координат и точка A имеет координаты $(1, 2)$, если: а) OA — отрезок прямой линии; б) OA — парабола, ось которой есть Oy ; в) OA — ломаная линия, состоящая из отрезка OB оси Ox и отрезка BA , параллельного оси Oy .

4249. Вычислить

$$\int_{OA} x dy + y dx$$

для путей а), б) и в), указанных в предыдущей задаче.

Вычислить следующие криволинейные интегралы 2-го рода, взятые вдоль указанных кривых, в направлении возрастания параметра:

4250. $\int_C (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$, где C — парабола
 $y = x^2 (-1 \leq x \leq 1)$.

4251. $\int_C (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$, где C — кривая
 $y = 1 - |1 - x| \quad (0 \leq x \leq 2)$.

4252. $\oint_C (x + y) dx + (x - y) dy$, где C — эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, пробегаемый против хода часовой стрелки.

4253. $\int_C (2a - y) dx + x dy$, где C — арка циклоиды
 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$.

4254. $\oint_C \frac{(x+y) dx - (x-y) dy}{x^2 + y^2}$, где C — окружность $x^2 + y^2 = a^2$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

4255. $\oint_{ABCD} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, где $ABCD$ — контур квадрата с вершинами $A(1, 0), B(0, 1), C(-1, 0), D(0, -1)$.

4256. $\int_{AB} dx \sin y + dy \sin x$, где AB — отрезок прямой между точками $A(0, \pi)$ и $B(\pi, 0)$.

4257. $\oint_{OmAnO} dy \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - dx$, где OmA — отрезок параболы $y = x^2$ и OnA — отрезок прямой $y = x$.

Убедившись, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить следующие криволинейные интегралы:

4258. $\int_{(-1, 2)}^{(2, 3)} x dy + y dx$.

4259. $\int_{(0, 1)}^{(3, -4)} x dx + y dy$.

4260. $\int_{(0, 1)}^{(2, 3)} (x + y) dx + (x - y) dy$.

$$4261. \int_{(1, -1)}^{(1, 1)} (x-y)(dx-dy).$$

$$4262. \int_{(0, 0)}^{(a, b)} f(x+y)(dx+dy),$$

где $f(u)$ непрерывна.

$$4263. \int_{(2, 1)}^{(1, 2)} \frac{y dx - x dy}{x^2} \text{ вдоль путей, не пересекающих оси } Oy.$$

$$4264. \int_{(1, 0)}^{(6, 8)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ вдоль путей, не проходящих через начало координат.}$$

$$4265. \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \varphi(x) dx + \psi(y) dy, \text{ } \varphi \text{ и } \psi \text{ — непрерывные функции.}$$

$$4266. \int_{(-2, -1)}^{(3, 0)} (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy.$$

$$4267. \int_{(0, -1)}^{(1, 0)} \frac{x dy - y dx}{(x-y)^2} \text{ вдоль путей, не пересекающих прямой}$$

$y = x.$

$$4268. \int_{(1, \pi)}^{(2, \pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}\right) dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}\right) dy \text{ вдоль путей, не пересекающих оси } Oy.$$

$$4269. \int_{(0, 0)}^{(a, b)} e^x (\cos y dx - \sin y dy).$$

4270. Доказать, что если $f(u)$ — непрерывная функция и C — кусочно-гладкий замкнутый контур, то

$$\oint_C f(x^2 + y^2)(x dx + y dy) = 0.$$

Найти первообразную функцию z , если:

$$4271. dz = (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy.$$

$$4272. dz = \frac{y dx - x dy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}.$$

$$4273. dz = \frac{(x^2 + 2xy + 5y^2) dx + (x^2 - 2xy + y^2) dy}{(x+y)^3}.$$

$$4274. dz = e^y [e^y (x - y + 2) + y] dx + e^x [e^y (x - y) + 1] dy.$$

$$4275. dz = \frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^{n+1}\partial y^m} dx + \frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^n\partial y^{m+1}} dy.$$

$$4276. dz = \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+1}\partial y^m} \left(\ln \frac{1}{r} \right) dx - \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^n\partial y^{m+1}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) dy, \quad \text{где}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

4277. Доказать, что для криволинейного интеграла справедлива следующая оценка:

$$\left| \int_C P dx + Q dy \right| \leq LM,$$

где L — длина пути интегрирования и $M = \max \sqrt{P^2 + Q^2}$ на дуге C .

4278. Оценить интеграл

$$I_R = \oint_{x^2+y^2=R^2} \frac{y dx - x dy}{(x^2 + xy + y^2)^3}.$$

Доказать, что $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 0$.

Вычислить криволинейные интегралы, взятые вдоль пространственных кривых (координатная система предполагается правой):

4279. $\int_C (y^2 - z^2) dx + 2yz dy - x^2 dz$, где C — кривая $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ ($0 \leq t \leq 1$), пробегаемая в направлении возрастания параметра.

4280. $\int_C y dx + z dy + x dz$, где C — виток винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), пробегаемый в направлении возрастания параметра.

4281. $\int_C (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$, где C — окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = x \operatorname{tg} \alpha$ ($0 < \alpha < \pi$), пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть со стороны положительных x .

4282. $\int_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, где C — часть кривой Вивиани $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax$ ($z \geq 0$, $a > 0$), пробегаемая против часовой стрелки, если смотреть с положительной части ($x > a$) оси Ox .

4283. $\int_C (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$, где C — контур, ограничивающий часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, пробегаемый так, что внешняя сторона этой поверхности остается слева.

Найти следующие криволинейные интегралы от полных дифференциалов:

$$4284. \int_{(1, 1, 1)}^{(2, 3, -4)} x dx + y^2 dy - z^2 dz.$$

$$4285. \int_{(1, 2, 3)}^{(6, 1, 1)} yz dx + xz dy + xy dz.$$

$$4286. \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \text{ где точка } (x_1, y_1, z_1) \text{ расположена на сфере } x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \text{ а точка } (x_2, y_2, z_2) \text{ — на сфере } x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \text{ } (a > 0, b > 0).$$

$$4287. \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \varphi(x) dx + \psi(y) dy + \chi(z) dz, \text{ где } \varphi, \psi, \chi \text{ — непрерывные функции.}$$

$$4288. \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} f(x + y + z)(dx + dy + dz), \text{ где } f \text{ — непрерывная функция.}$$

$$4289. \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})(x dx + y dy + z dz), \text{ где } f \text{ — непрерывная функция.}$$

Найти первообразную функцию u , если:

$$4290. du = (x^2 - 2yz) dx + (y^2 - 2xz) dy + (z^2 - 2xy) dz.$$

$$4291. du = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{x}\right) dx + \left(-\frac{x}{y} + \frac{x}{y^2}\right) dy - \frac{xy}{z^2} dz.$$

$$4292. du = \frac{(x + y - z) dx + (x + y - z) dy + (x + y + z) dz}{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy}.$$

4293. Найти работу, производимую силой тяжести, когда точка массы m перемещается из положения (x_1, y_1, z_1) в положение (x_2, y_2, z_2) (ось Oz направлена вертикально вверх).

4294. Найти работу упругой силы, направленной к началу координат, величина которой пропорциональна удалению материальной точки от начала координат, если эта точка описывает в направлении, противоположном ходу часовой стрелки, положительную четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

4295. Найти работу силы тяготения $F = \frac{k}{r^2}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, действующей на единичную массу, когда последняя перемещается из точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ в точку $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

1°. Связь криволинейного интеграла с двойным. Если C — замкнутый простой кусочно-гладкий контур, ограничивающий конечную односвязную область S , пробегаемый так, что область S остается слева, и функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка $P'_y(x, y)$ и $Q'_x(x, y)$ в области S и на ее границе, то имеет место формула Грина

$$\oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (1)$$

Формула (1) справедлива также и для конечной области S , ограниченной несколькими простыми контурами, если под границей C последней понимать сумму всех граничных контуров, направление обхода которых выбирается так, что область S остается слева.

2°. Площадь плоской области. Площадь S фигуры, ограниченной простым кусочно-гладким контуром C , равна

$$S = \oint_C x dy = - \oint_C y dx = \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx).$$

В этом параграфе, если не оговорено противное, предполагается, что замкнутый контур интегрирования простой (без точек самопересечения) и пробегается так, что ограниченная им область, не содержащая бесконечно удаленной точки, остается слева (положительное направление).

4296. С помощью формулы Грина преобразовать криволинейный интеграл

$$I = \oint_C \sqrt{x^2 + y^2} dx + y [xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})] dy,$$

где контур C ограничивает конечную область S .

4297. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл

$$I = \oint_K (x + y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy,$$

где K — пробегаемый в положительном направлении контур треугольника ABC с вершинами $A(1, 1)$, $B(3, 2)$, $C(2, 5)$.

Проверить найденный результат, вычисляя интеграл непосредственно.

Применяя формулу Грина, вычислить следующие криволинейные интегралы:

4298. $\oint_C xy^2 dy - x^2 y dx$, где C — окружность $x^2 + y^2 = a^2$.

4299. $\oint_C (x + y) dx - (x - y) dy$, где C — эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

4300. $\oint_C e^x [(1 - \cos y) dx - (y - \sin y) dy]$, где C — пробегаяемый в положительном направлении контур, ограничивающий область $0 < x < \pi$, $0 < y < \sin x$.

4301. $\oint_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)} (\cos 2xy dx + \sin 2xy dy)$.

4302. На сколько отличаются друг от друга криволинейные интегралы

$$I_1 = \int_{AmB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$$

и

$$I_2 = \int_{AnB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy,$$

где AmB — прямая, соединяющая точки $A(1, 1)$ и $B(2, 6)$, и AnB — парабола с вертикальной осью, проходящая через те же точки A и B и начало координат?

4303. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{AmO} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy,$$

где AmO — верхняя полуокружность $x^2 + y^2 = ax$, пробегаяемая от точки $A(a, 0)$ до точки $O(0, 0)$.

У к а з а н и е. Дополнить путь AmO до замкнутого прямолинейным отрезком OA оси Ox .

4304. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{AmB} [\varphi(y) e^x - my] dx + [\varphi'(y) e^x - m] dy,$$

где $\varphi(y)$ и $\varphi'(y)$ — непрерывные функции и AmB — произвольный путь, соединяющий точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, но ограничивающий вместе с отрезком AB площадь $AmBA$ данной величины S .

4305. Определить две дважды непрерывно дифференцируемые функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ так, чтобы криволинейный интеграл

$$I = \oint_C P(x + \alpha, y + \beta) dx + Q(x + \alpha, y + \beta) dy$$

для любого замкнутого контура C не зависел от постоянных α и β .

4306. Какому условию должна удовлетворять дифференцируемая функция $F(x, y)$, чтобы криволинейный интеграл

$$\int_{AmB} F(x, y) (y dx + x dy)$$

не зависел от вида пути интегрирования?

$$I = \oint_C \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2},$$

где C — простой замкнутый контур, не проходящий через начало координат, пробегаемый в положительном направлении.

Указание. Рассмотреть два случая: 1) начало координат находится вне контура; 2) контур C окружает начало координат.

С помощью криволинейных интегралов вычислить площади, ограниченные следующими кривыми:

4308. Эллипсом $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

4309. Астроидой $x = a \cos^3 t$, $y = b \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

4310. Параболой $(x+y)^2 = ax$ ($a > 0$) и осью Ox .

4311. Петлей декартова листа $x^3 + y^3 = 3axy$ ($a > 0$).

Указание. Положить $y = tx$.

4312. Лемнискатой $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

Указание. Положить $y = x \operatorname{tg} \varphi$.

4313. Кривой $x^2 + y^3 = x^2 + y^2$ и осями координат.

4314. Вычислить площадь, ограниченную кривой $(x+y)^{n+m+1} = ax^n y^m$ ($a > 0$, $n > 0$, $m > 0$).

4315. Вычислить площадь, ограниченную кривой

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1 \quad (a > 0, b > 0, n > 0)$$

и осями координат.

Указание. Положить $\frac{x}{a} = \cos \frac{1}{n} \varphi$, $\frac{y}{b} = \sin \frac{1}{n} \varphi$.

4316. Вычислить площадь, ограниченную кривой

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}$$

($a > 0$, $b > 0$, $n > 1$) и осями координат.

4317. Вычислить площадь петли кривой

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1} = c \left(\frac{x}{a}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^n \quad (a > 0, b > 0, c > 0, n > 0).$$

4318. Эпициклоидой называется кривая, описываемая точкой подвижной окружности радиуса r , катящейся без скольжения по неподвижной окружности радиуса R и остающейся вне нее.

Найти площадь, ограниченную эпициклоидой, предполагая, что отношение $\frac{R}{r} = n$ есть целое число ($n \geq 1$).

Разобрать частный случай $r = R$ (кардиоида).

4319. *Гипоциклоидой* называется кривая, описываемая точкой подвижной окружности радиуса r , катящейся без скольжения по неподвижной окружности радиуса R и остающейся внутри нее. Найти площадь, ограниченную гипоциклоидой, предполагая, что отношение $\frac{R}{r} = n$ есть целое число ($n \geq 2$).

Разобрать частный случай $r = \frac{R}{4}$ (астроида).

4320. Вычислить площадь части цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = ax$, вырезанной поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

4320.1. Доказать, что объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox простого замкнутого контура C , расположенного в верхней полуплоскости $y \geq 0$ равен

$$V = -\pi \oint_C y^2 dx.$$

4321. Вычислить

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{X dY - Y dX}{X^2 + Y^2},$$

если $X = ax + by$, $Y = cx + dy$ и простой замкнутый контур C окружает начало координат ($ad - bc \neq 0$).

4322. Вычислить интеграл I (см. предыдущую задачу), если $X = \varphi(x, y)$, $Y = \psi(x, y)$, и простой контур C окружает начало координат, причем кривые $\varphi(x, y) = 0$ и $\psi(x, y) = 0$ имеют несколько простых точек пересечения внутри контура C .

4323. Показать, что если C — замкнутый контур и l — произвольное направление, то

$$\oint_C \cos(l, n) ds = 0,$$

где n — внешняя нормаль к контуру C .

4324. Найти значение интеграла

$$I = \oint_C [x \cos(n, x) + y \cos(n, y)] ds,$$

где C — простая замкнутая кривая, ограничивающая конечную область S , и n — внешняя нормаль к ней.

4325. Найти

$$\lim_{d(S) \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C (F \cdot n) ds,$$

где S — площадь, ограниченная контуром C , окружающим точку (x_0, y_0) , $d(S)$ — диаметр области S , n — единичный вектор внешней нормали контура C и $F\{X, Y\}$ — вектор, непрерывно дифференцируемый в $S + C$.

где

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu,$$

$$M[v] = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - a \frac{\partial v}{\partial x} - b \frac{\partial v}{\partial y} + cv$$

(a, b, c — постоянные), P и Q — некоторые определенные функции и контур C ограничивает конечную область S .

4339. Пусть $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ — компоненты скорости установившегося потока жидкости. Определить количество жидкости, вытекшее за единицу времени из ограниченной контуром C области S (т. е. разность между количествами вышедшей и вошедшей жидкости). Какому уравнению удовлетворяют функции u и v , если жидкость несжимаема и в области S отсутствуют источники и стоки?

4340. Согласно закону Био—Савара электрический ток i , протекающий по элементу проводника ds , создает в точке пространства $M(x, y, z)$ магнитное поле с напряжением

$$dH = ki \frac{(r \times ds)}{r^3},$$

где r — вектор, соединяющий элемент ds с точкой M , и k — коэффициент пропорциональности.

Найти проекции H_x, H_y, H_z напряжения магнитного поля H в точке M для случая замкнутого проводника C .

§ 14. Поверхностные интегралы

1°. Поверхностный интеграл 1-го рода. Если S — кусочно-гладкая двусторонняя поверхность

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v) \quad ((u, v) \in \Omega) \quad (1)$$

и $f(x, y, z)$ — функция, определенная и непрерывная в точках поверхности S , то

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{\Omega} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv, \quad (2)$$

где

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

В частном случае, если уравнение поверхности S имеет вид

$$z = z(x, y) \quad ((x, y) \in \Omega),$$

где $z(x, y)$ — однозначная непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{\sigma} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Этот интеграл не зависит от выбора стороны поверхности S .

Если функцию $f(x, y, z)$ рассматривать как плотность поверхности S в точке (x, y, z) , то интеграл (2) представляет собой массу этой поверхности.

2°. Поверхностный интеграл 2-го рода. Если S — гладкая двусторонняя поверхность, S^+ — ее сторона, характеризующаяся направлением нормали $n \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$, $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ — три функции, определенные и непрерывные на поверхности S , то

$$\iint_{S^+} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS. \quad (3)$$

Если поверхность S задана в параметрическом виде (1), то направляющие косинусы нормали n определяются по формулам:

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \beta = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

где

$$A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \quad C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

и знак перед радикалом выбирается надлежащим образом.

При переходе к другой стороне S^- поверхности S интеграл (3) меняет свой знак на обратный.

4341. На сколько отличаются друг от друга поверхностные интегралы

$$I_1 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS$$

и

$$I_2 = \iint_P (x^2 + y^2 + z^2) dP,$$

где S — поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и P — поверхность октаэдра $|x| + |y| + |z| = a$, вписанного в эту сферу?

4342. Вычислить

$$\iint_S z dS,$$

где S — часть поверхности $x^2 + z^2 = 2az$ ($a > 0$), вырезанная поверхностью $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Вычислить следующие поверхностные интегралы 1-го рода:

4343. $\iint_S (x + y + z) dS$, где S — поверхность

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geq 0.$$

4344. $\iint_S (x^2 + y^2) dS$, где S — граница тела

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1.$$

4345. $\iint_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}$, где S — граница тетраэдра

$$x+y+z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$$

4346. $\iint_S |xyz| dS$, где S — часть поверхности $z = x^2 + y^2$, отсекаемая плоскостью $z = 1$.

4347. $\iint_S \frac{dS}{h}$, где S — поверхность эллипсоида и h — расстояние центра эллипсоида до плоскости, касательной к элементу dS поверхности эллипсоида.

4348. $\iint_S z dS$, где S — часть поверхности геликоида

$$x = u \cos v, y = u \sin v, z = v \quad (0 < u < a; 0 < v < 2\pi).$$

4349. $\iint_S z^2 dS$, где S — часть поверхности конуса

$$x = r \cos \varphi \sin \alpha, y = r \sin \varphi \sin \alpha, z = r \cos \alpha$$

$$(0 \leq r \leq a; 0 \leq \varphi \leq 2\pi) \text{ и } \alpha \text{ — постоянная } (0 < \alpha < \frac{\pi}{2}).$$

4350. $\iint_S (xy + yz + zx) dS$, где S — часть конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вырезанная поверхностью

$$x^2 + y^2 = 2ax.$$

4351. Доказать формулу Пуассона

$$\iint_S f(ax + by + cz) dS = 2\pi \int_{-1}^1 f(u \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) du,$$

где S есть поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

4352. Найти массу параболической оболочки

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad (0 \leq z \leq 1),$$

плотность которой меняется по закону $\rho = z$.

4352.1. Найти массу полусферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (z \geq 0),$$

плотность которой в каждой ее точке $M(x, y, z)$ равна $\frac{z}{a}$.

4352.2. Найти статические моменты однородной треугольной пластинки

$$x + y + z = a \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$$

относительно координатных плоскостей.

4353. Вычислить момент инерции относительно оси Oz однородной сферической оболочки

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (z \geq 0)$$

плотности ρ_0 .

4354. Вычислить момент инерции однородной конической оболочки

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0 \quad (0 \leq z \leq b)$$

плотности ρ_0 относительно прямой

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-b}{0}.$$

4355. Найти координаты центра тяжести части однородной поверхности

$$z = \sqrt{x^2 + y^2},$$

вырезанной поверхностью $x^2 + y^2 = ax$.

4356. Найти координаты центра тяжести однородной поверхности

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad (x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq a).$$

4356.1. Найти полярные моменты инерции

$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS$$

следующих поверхностей S :

а) поверхности куба тах $\{|x|, |y|, |z|\} = a$;

б) полной поверхности цилиндра $x^2 + y^2 \leq R^2$; $0 \leq z \leq H$.

4356.2. Найти моменты инерции треугольной пластинки

$$x + y + z = 1 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$$

относительно координатных плоскостей.

4357. С какой силой притягивает однородная усеченная коническая поверхность

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = r \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 < b \leq r \leq a)$$

плотности ρ_0 материальную точку массы m , помещенную в вершине этой поверхности?

4358. Найти потенциал однородной сферической поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (S) плотности ρ_0 на точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, т. е.

вычислить интеграл

$$u = \iint_S \frac{\rho_0 dS}{r},$$

где $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$.

4359. Вычислить

$$F(t) = \iint_{x+y+z=t} f(x, y, z) dS,$$

где

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 - z^2, & \text{если } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1; \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 + z^2 > 1. \end{cases}$$

Построить график функции $u = F(t)$.

4360. Вычислить интеграл

$$F(t) = \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x, y, z) dS,$$

где

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{если } z \geq \sqrt{x^2 + y^2}; \\ 0, & \text{если } z < \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

4361. Вычислить интеграл

$$F(x, y, z, t) = \iint_S f(\xi, \eta, \zeta) dS,$$

где S — переменная сфера

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = t^2,$$

и

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 < a^2; \\ 0, & \text{если } \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq a^2, \end{cases}$$

предполагая, что

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > a > 0.$$

Вычислить следующие поверхностные интегралы 2-го рода:

4362. $\iint_S (x dy dz + y dz dx + z dx dy)$, где S — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

4363. $\iint_S f(x) dy dz + g(y) dz dx + h(z) dx dy$, где $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ — непрерывные функции и S — внешняя сторона поверхности параллелепипеда $0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq b$; $0 \leq z \leq c$.

4364. $\iint_S (y-z) dy dz + (z-x) dz dx + (x-y) dx dy$, где S — внешняя сторона конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$ ($0 \leq z \leq h$).

4365. $\iint_S \left(\frac{dy dz}{x} + \frac{dz dx}{y} + \frac{dx dy}{z} \right)$, где S — внешняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

4366. $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, где S — внешняя сторона сферы $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

§ 15. Формула Стокса

Если $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ — непрерывно дифференцируемые функции и C — простой замкнутый кусочно-гладкий контур, ограничивающий конечную кусочно-гладкую двустороннюю поверхность S , то имеет место формула Стокса:

$$\oint_C P dx + Q dy + R dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS,$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ — направляющие косинусы нормали к поверхности S , направленной в ту сторону, относительно которой обход контура C совершается против хода часовой стрелки (для правой координатной системы).

4367. Применяя формулу Стокса, вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_C y dx + z dy + x dz,$$

где C — окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox .

Проверить результат непосредственным вычислением.

4368. Вычислить интеграл

$$\int_{AmB} (x^2 - yz) dx + (y^2 - xz) dy + (z^2 - xy) dz,$$

взятый по отрезку винтовой линии

$$x = a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi, \quad z = \frac{h}{2\pi} \varphi$$

от точки $A(a, 0, 0)$ до точки $B(a, 0, h)$.

Указание. Дополнить кривую AmB прямолинейным отрезком и применить формулу Стокса.

4369. Пусть C — замкнутый контур, расположенный в плоскости $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$ ($\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — направляющие косинусы нормали плоскости) и ограничивающий площадку S .

Найти

$$\oint_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

где контур C пробегается в положительном направлении.

Применяя формулу Стокса, вычислить интегралы:

$$4370. \oint_C (y+z) dx + (z+x) dy + (x+y) dz,$$

где C есть эллипс $x = a \sin^2 t, y = 2a \sin t \cos t, z = a \cos^2 t$ ($0 \leq t \leq \pi$), пробегаемый в направлении возрастания параметра t .

$$4371. \oint_C (y-z) dx + (z-x) dy + (x-y) dz,$$

где C — эллипс $x^2 + y^2 = a^2, \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$ ($a > 0, h > 0$), пробегаемый против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox .

$$4372. \oint_C (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz,$$

где C есть кривая $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx, x^2 + y^2 = 2rx$ ($0 < r < R, z > 0$), пробегаемая так, что ограниченная ею на внешней стороне сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ наименьшая область остается слева.

$$4373. \oint_C (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz,$$

где C — сечение поверхности куба $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$ плоскостью $x + y + z = \frac{3}{2}a$, пробегаемое против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox .

$$4374. \oint_C y^2 z^2 dx + x^2 z^2 dy + x^2 y^2 dz,$$

где C — замкнутая кривая $x = a \cos t, y = a \cos 2t, z = a \cos 3t$, пробегаемая в направлении возрастания параметра t .

4375. Доказать, что функция

$$W(x, y, z) = ki \iint_S \frac{\cos(r, n)}{r^2} dS \quad (k = \text{const}),$$

где S — площадка, ограниченная контуром C , n — нормаль к по-

верхности S и r — радиус-вектор, соединяющий точку пространства $M(x, y, z)$ с текущей точкой $A(\xi, \eta, \zeta)$ контура C , являющегося потенциалом магнитного поля H , создаваемого током i , протекающим по контуру C (см. задачу 4340).

§ 16. Формула Остроградского

Если S — кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая объем V , и $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ — функции, непрерывные вместе со своими частными производными 1-го порядка в области $V + S$, то справедлива формула Остроградского:

$$\iiint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S .

Применяя формулу Остроградского, преобразовать следующие поверхностные интегралы, если гладкая поверхность S ограничивает конечный объем V и $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S :

$$4376. \quad \iiint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy.$$

$$4377. \quad \iiint_S yz dy dz + zx dz dx + xy dx dy.$$

$$4378. \quad \iiint_S \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS.$$

$$4379. \quad \iiint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS.$$

$$4380. \quad \iiint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS.$$

4381. Доказать, что если S — замкнутая простая поверхность и l — любое постоянное направление, то

$$\iiint_S \cos(n, l) dS = 0,$$

где n — внешняя нормаль к поверхности S .

4382. Доказать, что объем тела, ограниченного поверхностью S , равен

$$V = \frac{1}{3} \iiint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS,$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S .

4383. Доказать, что объем конуса, ограниченного гладкой конической поверхностью $F(x, y, z) = 0$ и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$, равен

$$V = \frac{1}{3}SH,$$

где S — площадь основания конуса, расположенного в данной плоскости, и H — его высота.

4384. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $z = \pm c$ и

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos u \cos v + b \sin u \sin v, \\ y &= a \cos u \sin v - b \sin u \cos v, \\ z &= c \sin u. \end{aligned} \right\}$$

4385. Найти объем тела, ограниченного поверхностью

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = -u + a \cos v \quad (u \geq 0)$$

и плоскостями: $x = 0$ и $z = 0$ ($a > 0$).

4385.1. Найти объем тела, ограниченного тором

$$\left. \begin{aligned} x &= (b + a \cos \psi) \cos \varphi, \\ y &= (b + a \cos \psi) \sin \varphi, \\ z &= a \sin \psi \end{aligned} \right\} \quad (0 < a \leq b).$$

4386. Доказать формулу

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x, y, z, t) dx dy dz \right\} = \\ = \iint_{x^2+y^2+z^2 = t^2} f(x, y, z, t) dS + \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \frac{\partial f}{\partial t} dx dy dz \quad (t > 0). \end{aligned}$$

С помощью формулы Остроградского вычислить следующие поверхностные интегралы:

$$4387. \iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy,$$

где S — внешняя сторона границы куба $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$.

$$4388. \iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy,$$

где S — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

$$4389. \iint_S (x-y+z) dy dz + (y-z+x) dz dx + (z-x+y) dx dy,$$

где S — внешняя сторона поверхности

$$|x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| = 1.$$

4390. Вычислить

$$\iint_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS,$$

где S — часть конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$ ($0 \leq z \leq h$) и $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к этой поверхности.

Указание. Присоединить часть плоскости

$$z = h, \quad x^2 + y^2 \leq h^2.$$

4391. Доказать формулу

$$\iiint_V \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} = \frac{1}{2} \iint_S \cos(r, n) dS,$$

где S — замкнутая поверхность, ограничивающая объем V , n — внешняя нормаль к поверхности S в текущей точке ее (ξ, η, ζ) , $r = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}$ и r — радиус-вектор, идущий от точки (x, y, z) к точке (ξ, η, ζ) .

4392. Вычислить интеграл Гаусса

$$I(x, y, z) = \iint_S \frac{\cos(r, n)}{r^2} dS,$$

где S — простая замкнутая гладкая поверхность, ограничивающая объем V , n — внешняя нормаль к поверхности S в точке ее (ξ, η, ζ) , r — радиус-вектор, соединяющий точку (x, y, z) с точкой (ξ, η, ζ) и $r = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}$.

Рассмотреть два случая:

- а) когда поверхность S не окружает точку (x, y, z) ,
- б) когда поверхность S окружает точку (x, y, z) .

4393. Доказать, что если

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

и S — гладкая поверхность, ограничивающая конечное тело V , то справедливы следующие формулы:

$$a) \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V \Delta u \, dx \, dy \, dz;$$

$$b) \iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx \, dy \, dz + \\ + \iint_V u \Delta u \, dx \, dy \, dz,$$

где u — функция, непрерывная вместе со своими частными производными до второго порядка включительно в области $V+S$, и $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по внешней нормали к поверхности S .

4394. Доказать вторую формулу Грина в пространстве

$$\iiint_V \left| \frac{\Delta u}{u} \frac{\Delta v}{v} \right| dx \, dy \, dz = \iint_S \left| \frac{\frac{\partial u}{\partial n}}{u} \frac{\frac{\partial v}{\partial n}}{v} \right| dS,$$

где объем V ограничен поверхностью S , n — направление внешней нормали к поверхности S и функции $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ дважды дифференцируемы в области $V+S$.

4395. Функция $u = u(x, y, z)$, обладающая непрерывными производными до второго порядка включительно в некоторой области, называется гармонической в этой области, если

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Доказать, что если u — гармоническая функция в конечной замкнутой области V , ограниченной гладкой поверхностью S , то справедливы формулы:

$$a) \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0;$$

$$b) \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx \, dy \, dz = \iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS,$$

где n — внешняя нормаль к поверхности S .

Пользуясь формулой б), доказать, что функция, гармоническая в области V , однозначно определяется своими значениями на ее границе S .

4396. Доказать, что если функция $u = u(x, y, z)$, — гармоническая в конечной замкнутой области V , ограниченной гладкой поверхностью S , то

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[u \frac{\cos(r, n)}{r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS,$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, идущий из внутренней точки (x, y, z) области V в переменную точку (ξ, η, ζ) поверхности S , $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$, $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности S в точке (ξ, η, ζ) .

4397. Доказать, что если $u = u(x, y, z)$ — функция, гармоническая внутри сферы S радиуса R с центром в точке (x_0, y_0, z_0) , то

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_S u(x, y, z) dS$$

(теорема о среднем).

4398. Доказать, что функция $u = u(x, y, z)$, непрерывная в ограниченной замкнутой области V и гармоническая внутри нее, не может достигать своих наибольшего и наименьшего значений во внутренней точке области, если эта функция не является тождественной постоянной (принцип максимума).

4399. Тело V целиком погружено в жидкость. Исходя из закона Паскаля, доказать, что выталкивающая сила жидкости равна весу жидкости в объеме тела и направлена вертикально вверх (закон Архимеда).

4400. Пусть S_t — переменная сфера $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = t^2$ и функция $f(\xi, \eta, \zeta)$ — непрерывна. Доказать, что функция

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t} \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{t} dS_t$$

удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

и начальным условиям: $u|_{t=0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = f(x, y, z)$.

Указание. Производную $\frac{\partial u}{\partial t}$ выразить тройным интегралом.

§ 17. Элементы теории поля

1°. Градиент. Если $u(\mathbf{r}) = u(x, y, z)$, где $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, есть непрерывно дифференцируемое скалярное поле, то градиентом его называется вектор

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$$

или, короче, $\text{grad } u = \nabla u$, где $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$. Градиент поля u в данной точке (x, y, z) направлен по нормали к поверхности уровня $u(x, y, z) = C$.

проходящей через эту точку. Этот вектор для каждой точки поля по величине

$$|\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

и направлению дает наибольшую скорость изменения функции u .

Производная поля u в некотором направлении $l \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ равна:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{grad } u \cdot l = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.$$

2°. Дивергенция поля и ротация (вихрь) поля. Если

$$a(r) = a_x(x, y, z) i + a_y(x, y, z) j + a_z(x, y, z) k$$

есть непрерывно дифференцируемое векторное поле, то скаляр

$$\text{div } a = \nabla a = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

называется *дивергенцией* или *расходимостью* этого поля.

Вектор

$$\text{rot } a = \nabla \times a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

носит название *ротации* или *вихря* поля.

3°. Поток вектора через поверхность. Если вектор $a(r)$ порождает векторное поле в области Ω , то *поток* вектора через данную поверхность S , расположенную в Ω , в указанную сторону, характеризующую единичным вектором нормали $n \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$, называется интеграл

$$\iint_S a_n dS = \iint_S (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) dS,$$

где $a_n = an$ — нормальная проекция вектора. Формула Остроградского в век-

торной трактовке принимает вид $\iint_S a_n dS = \iiint_V \text{div } a \, dx \, dy \, dz$, где S есть

поверхность, ограничивающая объем V , и n — единичный вектор внешней нормали к поверхности S .

4°. Циркуляция вектора. Линейным интегралом от вектора $a(r)$, взятым по некоторой кривой C (*рабита* поля), называется число

$$\int_C a dr = \int_C a_x dx + a_y dy + a_z dz.$$

Если контур C замкнут, то линейный интеграл называется *циркуляцией* вектора a вдоль контура C .

В векторной форме формула Стокса имеет вид $\oint_C a dr = \iint_S (\text{rot } a)_n dS$,

где C — замкнутый контур, ограничивающий поверхность S , причем направление нормали n к поверхности S должно быть выбрано так, чтобы для наблюдателя, стоящего на поверхности S , головой по направлению нормали, обход контура C совершался против хода часовой стрелки (для правой системы координат).

5°. Потенциальное поле. Векторное поле $\mathbf{a}(\mathbf{r})$, являющееся градиентом некоторого скаляра u :

$$\text{grad } u = \mathbf{a},$$

называется *потенциальным*, а величина u называется *потенциалом* поля.

Если потенциал u — однозначная функция, то

$$\int_{AB} \mathbf{a} d\mathbf{r} = u(B) - u(A).$$

В частности, в этом случае циркуляция вектора $\mathbf{a}$ равна нулю.

Необходимым и достаточным условием потенциальности поля $\mathbf{a}$, заданного в поверхностно односвязной области, является выполнение условия $\text{rot } \mathbf{a} = 0$, т. е. такое поле должно быть безвихревым.

4401. Найти величину и направление градиента поля $u = x^3 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ в точках: а) $O(0, 0, 0)$; б) $A(1, 1, 1)$ и в) $B(2, 0, 1)$. В какой точке градиент поля равен нулю?

4401.1. Пусть $u = xy - z^3$. Найти величину и направление $\text{grad } u$ в точке $M(-9, 12, 10)$.

Чему равна производная $\frac{\partial u}{\partial t}$ в направлении биссектрисы координатного угла xOy ?

4402. В каких точках пространства $Oxyz$ градиент поля

$$u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

а) перпендикулярен к оси Oz ; б) параллелен оси Oz ; в) равен нулю?

4403. Дано скалярное поле

$$u = \ln \frac{1}{r},$$

где $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$. В каких точках пространства $Oxyz$ имеет место равенство $|\text{grad } u| = 1$?

4404. Построить поверхности уровня скалярного поля

$$u = \sqrt{x^3 + y^3 + (z+8)^3} + \sqrt{x^3 + y^3 + (z-8)^3}.$$

Найти поверхность уровня, проходящую через точку $M(9, 12, 28)$.

Чему равен $\text{tgh } u$ в области $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$?

4405. Найти угол φ между градиентами поля

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

в точках $A(1, 2, 2)$ и $B(-3, 1, 0)$.

4406. Пусть дано скалярное поле

$$u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Построить поверхности уровня и поверхности равного модуля градиента поля.

Найти $\inf u$, $\sup u$, $\inf |\text{grad } u|$, $\sup |\text{grad } u|$ в области $1 < z < 2$.

$z = h(u, v, w)$. Как частный случай получить выражение $\operatorname{div} a$ в цилиндрических и сферических координатах.

Указание. Рассмотреть поток вектора a через бесконечно малый параллелепипед, ограниченный поверхностями $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $w = \text{const}$.

4435. Доказать, что:

а) $\operatorname{rot}(a + b) = \operatorname{rot} a + \operatorname{rot} b$; б) $\operatorname{rot}(ua) = u \operatorname{rot} a + \operatorname{grad}(u \times a)$.

4436. Найти: а) $\operatorname{rot} r$; б) $\operatorname{rot}[f(r)r]$.

4436.1. Найти величину и направление $\operatorname{rot} a$ в точке $M(1, 2, -2)$, если $a = \frac{y}{z}i + \frac{z}{x}j + \frac{x}{y}k$.

4437. Найти: а) $\operatorname{rot} cf(r)$; б) $\operatorname{rot}[c \times f(r)r]$ (c — постоянный вектор).

4438. Доказать, что $\operatorname{div}(a \times b) = b \operatorname{rot} a - a \operatorname{rot} b$.

4439. Найти: а) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u)$; б) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} a)$.

4440. Жидкость, заполняющая пространство, вращается вокруг оси $l \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ с постоянной угловой скоростью ω . Найти ротацию вектора линейной скорости v в точке пространства $M(x, y, z)$ в данный момент времени.

4440.1. Найти выражение ротации плоского вектора $a = a(r, \varphi)$ в полярных координатах r и φ .

4440.2. Выразить $\operatorname{rot} a(x, y, z)$ а) в цилиндрических координатах; б) в сферических координатах.

4441. Найти поток вектора r :

а) через боковую поверхность конуса $x^2 + y^2 \leq z^2$ ($0 \leq z \leq h$); б) через основание этого конуса.

4442. Найти поток вектора $a = iyz + jxz + kxy$: а) через боковую поверхность цилиндра $x^2 + y^2 \leq a^2$ ($0 \leq z \leq h$); б) через полную поверхность этого цилиндра.

4443. Найти поток радиуса-вектора r через поверхность $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq 1$).

4444. Найти поток вектора $a = x^2i + y^2j + z^2k$ через положительный октант сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

4445. Найти поток вектора $a = yi + zj + xk$ через полную поверхность пирамиды, ограниченной плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$ ($a > 0$).

Проверить результат, применяя формулу Остроградского.

4445.1. Найти поток вектора $a = x^2i + y^2j + z^2k$ через сферу $x^2 + y^2 + z^2 = x$.

4446. Доказать, что поток вектора a через поверхность S , заданную уравнением $r = r(u, v)$ ($(u, v) \in \Omega$) равен

$$\iint_S a_n dS = \iint_{\Omega} \left(a \frac{\partial r}{\partial u} \frac{\partial r}{\partial v} \right) du dv,$$

где $a_n = an$ и n — единичный вектор нормали к поверхности S .

4447. Найти поток вектора $\mathbf{a} = m\mathbf{r}/r^3$ (m — постоянная) через замкнутую поверхность S , окружающую начало координат.

4448. Найти поток вектора $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \text{grad} \left(-\frac{e_i}{4\pi r_i} \right)$, где e_i — постоянные и r_i — расстояния точек M_i (источники) от переменной точки $M(\mathbf{r})$, через замкнутую поверхность S , окружающую точки M_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

4449. Доказать, что $\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V \nabla^2 u \, dx \, dy \, dz$, где поверхность S ограничивает тело V .

4450. Количество тепла, протекающее в поле температуры u за единицу времени через элемент поверхности dS , равно $dQ = -kng \, \text{grad} \, u \, dS$, где k — коэффициент внутренней теплопроводности и $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности S . Определить количество тепла, накопленное телом V за единицу времени. Используя скорость повышения температуры, вывести уравнение, которому удовлетворяет температура тела (уравнение теплопроводности).

4451. Находящаяся в движении несжимаемая жидкость заполняет объем V . Предполагая, что в области V отсутствуют источники и стоки, вывести уравнение неразрывности.

$$\frac{d\rho}{dt} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

где $\rho = \rho(x, y, z)$ — плотность жидкости, $\mathbf{v}$ — вектор скорости, t — время.

Указание. Рассмотреть поток жидкости через произвольный объем ω , содержащийся в V .

4452. Найти работу вектора $\mathbf{a} = \mathbf{r}$ вдоль отрезка винтовой линии $\mathbf{r} = t\mathbf{a} \cos t + j\mathbf{u} \sin t + kbt$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

4452.1. Найти работу поля $\mathbf{a} = \frac{1}{y}\mathbf{i} + \frac{1}{z}\mathbf{j} + \frac{1}{x}\mathbf{k}$ вдоль прямолинейного отрезка, соединяющего точки $M(1, 1, 1)$ и $N(2, 4, 8)$.

4452.2. Найти работу поля $\mathbf{a} = ie^{y-z} + je^{z-x} + ke^{x-y}$ вдоль прямолинейного отрезка между точками $O(0, 0, 0)$ и $M(1, 3, 5)$.

4452.3. Найти работу поля $\mathbf{a} = (y+z)\mathbf{i} + (2+x)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$ вдоль кратчайшей дуги большого круга сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, соединяющей точки $M(3, 4, 0)$ и $N(0, 0, 5)$.

4453. Найти работу вектора $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{r}$, где f — непрерывная функция, вдоль дуги AB .

4454. Найти циркуляцию вектора $\mathbf{a} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ (c — постоянная): а) вдоль окружности $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$; б) вдоль окружности $(x-2)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

4455. Найти циркуляцию Γ вектора $a = \text{grad} \left(\arctg \frac{y}{x} \right)$ вдоль контура C в двух случаях: а) C не окружает ось Oz ; б) C окружает ось Oz .

4455.1. Дано векторное поле

$$a = \frac{y}{\sqrt{z}} i - \frac{x}{\sqrt{z}} j + \sqrt{xy} k.$$

Вычислив $\text{rot } a$ в точке $M(1, 1, 1)$, приближенно найти циркуляцию Γ поля вдоль бесконечно малой окружности

$$\left. \begin{aligned} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 &= \varepsilon^2, \\ (x-1) \cos \alpha + (y-1) \cos \beta + (z-1) \cos \gamma &= 0, \end{aligned} \right\}$$

где $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

4456. Плоский установившийся поток жидкости характеризуется вектором скорости

$$w = u(x, y) i + v(x, y) j.$$

Определить: 1) количество жидкости Q , протекающее через замкнутый контур C , ограничивающий область S (расход жидкости); 2) циркуляцию Γ вектора скорости вдоль контура C . Каким уравнениям удовлетворяют функции u и v , если жидкость несжимаема и поток безвихревой?

4457. Показать, что поле

$$a = yz(2x + y + z) i + xz(x + 2y + z) j + xy(x + y + 2z) k$$

— потенциальное и найти потенциал этого поля.

4457.1. Убедившись в потенциальности поля

$$a = \frac{2}{(y+z)^{\frac{1}{2}}} i - \frac{x}{(y+z)^{\frac{1}{2}}} j - \frac{x}{(y+z)^{\frac{1}{2}}} k,$$

найти работу поля вдоль пути, соединяющего в положительном октанте точки $M(1, 1, 3)$ и $N(2, 4, 5)$.

4458. Найти потенциал гравитационного поля

$$a = -\frac{m}{r^3} r,$$

создаваемого массой m , помещенной в начале координат.

4459. Найти потенциал гравитационного поля, создаваемого системой масс m_i ($i = 1, 2, \dots, n$), помещенных в точках M_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

4460. Доказать, что поле $a = f(r) r$, где $f(r)$ — однозначная непрерывная функция, является потенциальным. Найти потенциал этого поля.

ЧАСТЬ I

Отдел I

16. 0; 1. 17. $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. 22. $-1,01 < x < -0,99$. 23. $x < -8$;
 $x \geq 12$. 24. $x < -\frac{1}{2}$. 25. $0 < x < \frac{2}{3}$. 26. $|x| \leq 6$. 27. $x > -\frac{1}{2}$. 28. $-\frac{1}{2} <$
 $< x < \frac{1}{2}$. 29. $\frac{5-\sqrt{30}}{10} < x < \frac{5-\sqrt{20}}{10}$; $\frac{5+\sqrt{20}}{10} < x < \frac{5+\sqrt{30}}{10}$.
 31. Второе. 32. Два знака. 33. Не превышает 0,41%. 34. $9,9102 \text{ см}^2 \leq S <$
 $\leq 10,0902 \text{ см}^2$; $\Delta \leq 0,0902 \text{ см}^2$; $\delta \leq 0,91\%$. 35. $3,93 \text{ Г/см}^3 \pm 0,27 \text{ Г/см}^3$; $\delta \leq 7,3\%$.
 36. $\delta \leq 3,05\%$. 37. $172,480 \text{ м}^3 \leq v \leq 213,642 \text{ м}^3$; $v = 192,660 \text{ м}^3 \pm 20,982 \text{ м}^3$;
 $\delta \approx 12\%$. 38. $\Delta \leq 0,17 \text{ мм}$. 39. $\Delta < 0,0005 \text{ м}$. 42. а) $N \geq \frac{1}{e}$; б) $N \geq \sqrt{\frac{2}{e}}$;
 в) $N \geq 1 + \frac{\lg \frac{1}{e}}{\lg 2}$; г) $N \geq \frac{\lg e}{\lg 0,999} \approx 2330 \lg \frac{1}{e}$. 43. а) $N \geq E$; б) $N \geq \left(\frac{\lg E}{\lg 2}\right)^3$;
 в) $N \geq 10^{10}$. 46. 0. 47. 0. 48. 0. 49. $\frac{1}{3}$. 50. $\frac{1-b}{1-a}$. 51. $\frac{1}{2}$. 52. $\frac{1}{2}$. 53. $\frac{1}{3}$.
 54. $\frac{4}{3}$. 55. 3. 56. 1. 57. 2. 67. а) второе; б) первое; в) второе. 72. $e = 2,71828...$
 92. Равен 1, если $a \neq 0$ и принадлежит $[-1, 1]$, или не существует,
 если $a = 0$. 96. $x_3 = 1\frac{1}{8}$. 97. $x_{100} = \frac{1}{20}$. 98. $x_{1000} = \frac{1000^{1000}}{10001} \approx 2,49 \cdot 10^{493}$.
 99. $x_4 = x_3 = -120$. 100. $x_{10} = 20$. 101. 0; 1; 1; 1. 101.1. $-3\frac{1}{2}$; 5; -2; 2.
 102. -1; $1\frac{1}{2}$; 0; 1. 103. 0; 2; 0; 2. 104. -4; 6; -4, 6. 105. $-\frac{1}{2}$; 1; $-\frac{1}{2}$; 1.
 106. $-\infty$; $+\infty$; $-\infty$; $+\infty$. 107. $-\infty$; -1; $-\infty$; $-\infty$. 108. 0; $+\infty$; 0; $+\infty$.
 109. $-\infty$; $+\infty$; $-\infty$; $+\infty$. 110. -5; 1,25; 0; 0. 111. $-\frac{1}{2}$; 1. 112. $-\left(e + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;
 $e + 1$. 113. 0; 1. 114. 1; 2. 115. 0; 1. 116. 0; 1. 117. $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; 0$. 118. Все веще-
 ственные числа, заключенные между 0 и 1, включая последние. 119. 1, 5.
 120. а; б. 127. а) расходится, б) может как сходиться, так и расходиться.
 128. а) нельзя; б) нельзя. 129. Нет. 130. Нет. 144. а) 0; б) 0. 147. $\ln 2$.
 148. $\frac{1}{3}(a+2b)$. 151. $-\infty < x < +\infty$, $x \neq -1$. 152. $-\infty < x < -\sqrt{3}$ и

- $0 < x < \sqrt{3}$. 153. $-1 < x < 1$. 154. а) $|x| > 2$; б) $x > 2$. 155. $4k^2\pi^2 < x < (2k+1)^2\pi^2$ ($k=0, 1, 2, \dots$). 156. $|x| < \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ и $\sqrt{\frac{\pi}{2}}(4k-1) < |x| < \sqrt{\frac{\pi}{2}}(4k+1)$ ($k=1, 2, \dots$). 157. $\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k}$ и $-\frac{1}{2k+1} < x < -\frac{1}{2k+2}$ ($k=0, 1, 2, \dots$). 158. $x > 0$, $x \neq n$ ($n=1, 2, \dots$). 159. $-\frac{1}{3} < x < 1$.
 160. $|x - k\pi| < \frac{\pi}{6}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 161. $10^{\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi} < x < 10^{\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 162. $x = -1, -2, -3, \dots$ и $x \geq 0$. 163. $x < 0$, $x \neq -n$ ($n=1, 2, \dots$). 164. $1 < x < 2$. 165. $x = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$.
 165.1. $x > 4$. 165.2. $k\pi + \frac{\pi}{4} < x < k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k=0, \pm 1, \dots$). 165.3. $0 < x < \frac{\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{2}$. 166. $-1 < x < 2$; $0 < y < 1\frac{1}{2}$.
 167. $2k\pi + \frac{\pi}{3} < x < 2k\pi + \frac{5\pi}{3}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$); $-\infty < y < \lg 3$. 168. $-\infty < x < +\infty$; $0 < y < \pi$. 169. $1 < x < 100$; $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. 170. $x = \frac{p}{2q+1}$, где p и q — целые числа; $y = \pm 1$. 171. $P = 2b + 2\left(1 - \frac{h}{x}\right)x$ ($0 < x < h$); $S = bx\left(1 - \frac{x}{h}\right)$ ($0 < x < h$). 172. $a = \sqrt{100 - 96 \cos x}$ ($0 < x < \pi$).
 $S = 24 \sin x$ ($0 < x < \pi$). 173. $S = \frac{h}{a-b}x^2$, если $0 < x < \frac{a-b}{2}$; $S = h\left(x - \frac{a-b}{4}\right)$, если $\frac{a-b}{2} < x < \frac{a+b}{2}$; $S = h\left[\frac{a+b}{2} - \frac{(a-x)^2}{a-b}\right]$, если $\frac{a+b}{2} < x < a$.
 174. $m(x) = 0$, если $-\infty < x < 0$; $m(x) = 2x$, если $0 < x < 1$; $m(x) = 2$, если $1 < x < 2$; $m(x) = 3$, если $2 < x < 3$; $m(x) = 4$, если $3 < x < +\infty$. 178. $E_y = \{0 < y < 4\}$. 179. $E_y = \{1 < y < 3\}$. 180. $E_y = \{0 < y < 1\}$.
 181. $E_y = \{1 < |y| < +\infty\}$. 182. $E_y = \{1 < y < 2\}$. 183. $a < y < b$ при $a < b$ и $b < y < a$ при $a > b$. 184. $1 < y < +\infty$. 185. $0 > y > -\infty$ и $+\infty > y > 1$. 186. $0 < y < \frac{1}{2}$. 187. $+\infty > y > -\infty$. 188. $0 < y < \frac{1}{2}$ и $\frac{3}{2} < y < 2$.
 189. 0; 0; 0; 0; 24. 190. 0; -6; 4. 191. 1; 1; 1; 2. 192. -1; 0; 1; 2; 4. 193. 1, $\frac{1+x}{1-x}$, $\frac{-x}{2+x}$, $\frac{2}{1+x}$, $\frac{x-1}{x+1}$, $\frac{1+x}{1-x}$. 194. а) $f(x) = 0$, если $x = -1$, $x = 0$ и $x = 1$; $f(x) > 0$, если $-\infty < x < -1$ и $0 < x < 1$; $f(x) < 0$, если $-1 < x < 0$ и $1 < x < +\infty$;
 б) $f(x) = 0$, если $x = \pm \frac{1}{k}$; $f(x) > 0$, если $\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k}$ и $-\frac{1}{2k+1} < x < -\frac{1}{2k+2}$ ($k=0, 1, 2, \dots$); $f(x) < 0$, если $\frac{1}{2k+2} < x < \frac{1}{2k+1}$ и $-\frac{1}{2k} < x < -\frac{1}{2k+1}$ ($k=0, 1, 2, \dots$); в) $f(x) = 0$, если $x \leq 0$ и $x = 1$; $f(x) > 0$, если $0 < x < 1$; $f(x) < 0$, если $1 < x < +\infty$. 195. а) а; б) $2x + h$; в) $a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}$.

197. $f(x) = \frac{7}{3}x - 2$; $f(1) = \frac{1}{3}$; $f(2) = 2\frac{2}{3}$. 198. $f(x) = \frac{7}{6}x^2 + \frac{17}{6}x + 1$; $f(-1) = -\frac{2}{3}$; $f(0,5) = 2\frac{17}{24}$. 199. $f(x) = \frac{10}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 - \frac{29}{6}x + 2$. 200. $f(x) = 10 + 5 \cdot 2^x$.
203. а) $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$); б) $1 < x < e$; в) $x > 0$, $x \neq k$ ($k=0, 1, 2, \dots$). 205. а) $z = x + y$; б) $z = \frac{xy}{x+y}$; в) $z = \frac{x+y}{1-xy}$; г) $z = \frac{x+y}{1+xy}$. 206. $\varphi(\varphi(x)) = x^4$; $\psi(\psi(x)) = 2^{2x}$; $\varphi(\psi(x)) = 2^{2x}$; $\psi(\varphi(x)) = 2^{x^2}$.
207. $\varphi(\varphi(x)) = \operatorname{sgn} x$; $\psi(\psi(x)) = x$ ($x \neq 0$); $\varphi(\psi(x)) = \psi(\varphi(x)) = \operatorname{sgn} x$ ($x \neq 0$). 208. $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x)$; $\psi(\varphi(x)) = \psi(x)$; $\psi(\psi(x)) = \varphi(\psi(x)) = 0$. 209. $-\frac{1-x}{x}$; x ($x \neq 0, x \neq 1$). 210. $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$. 211. $x^2 - 5x + 6$. 212. $x^2 - 2\left(|x| \geq 2\frac{1}{2}\right)$.
213. $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$. 213.1. $f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2$. 221. а) Возрастает при $a > 0$ и убывает при $a < 0$; б) при $a > 0$ убывает в интервале $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ и возрастает в интервале $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$; в) возрастает; г) при $ad - bc > 0$ возрастает в интервалах $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right)$ и $\left(-\frac{d}{c}, +\infty\right)$; д) возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$. 222. Можно, если основание логарифмов больше 1. 224. $\frac{y-3}{2}$ ($-\infty < y < +\infty$). 225. а) $-\sqrt{y}$ ($0 \leq y < +\infty$); б) $\sqrt{y}$ ($0 \leq y < +\infty$). 226. $\frac{1-y}{1+y}$ ($y \neq -1$). 227. а) $-\sqrt{1-y^2}$ ($0 \leq y \leq 1$); б) $\sqrt{1-y^2}$ ($0 \leq y \leq 1$). 228. $\operatorname{Arsh} y = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$ ($-\infty < y < +\infty$). 229. $\operatorname{Arth} y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}$ ($-1 < y < 1$). 230. $x = y$, если $-\infty < y < 1$; $x = \sqrt{y}$, если $1 \leq y \leq 16$; $x = \log_2 y$, если $16 < y < +\infty$. 231. а) Нечетная; б) четная; в) четная; г) нечетная; д) нечетная. 233. а) Периодическая, $T = \frac{2\pi}{\lambda}$; б) периодическая, $T = 2\pi$; в) периодическая, $T = 6\pi$; г) периодическая, $T = \pi$; д) непериодическая; е) периодическая, $T = \pi$; ж) непериодическая; з) непериодическая. 241. $t = 1\frac{2}{3}$ сек, $x = -3\frac{1}{3}$ м. 243. $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$.
244. $y = x - \frac{x^2}{36000}$; 9 км; 36 км. 251. $x_0 = -\frac{d}{c}$; $y_0 = \frac{a}{c}$. 252. $p = \frac{12}{v}$ ($v > 0$). 263. $k = \frac{a}{a_1}$, $m = \frac{a_1b - ab_1}{a_1^2}$, $n = \frac{c}{a_1} - \frac{b_1}{a_1^2}(a_1b - ab_1)$, $x_0 = -\frac{b_1}{a_1}$. 264. $y = \frac{10}{x^2}$.
287. $A = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\sin x_0 = -\frac{a}{A}$, $\cos x_0 = \frac{b}{A}$. 356. $y = 2 \sin x$, если $|x - \pi k| \leq \frac{\pi}{6}$, и $y = (-1)^k$, если $\frac{\pi}{6} < |x - \pi k| < \frac{5\pi}{6}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 357. а) $y = \frac{1}{2}(x + |x|)$; б) и в) $y = x^2$, если $x \geq 0$; $y = 0$, если $x < 0$; г) $y = x$, если $x < 0$; $y = x^4$, если $x \geq 0$. 358. а) $y = 1$; б) $y = 1$, если $1 \leq |x| \leq \sqrt{3}$; $y = 0$, если $|x| < 1$ или $|x| > \sqrt{3}$; в) $y = 1$, если $|x| \leq 1$; $y = 2$, если $|x| > 1$; г) $y = -2$, если $|x| > 2$; $y = 2 - (2 - x^2)^2$, если $|x| \leq 2$. 359. При $x < 0$ имеем:

$$960.1. \frac{x^3}{6 \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{1 + x^4}}} \cdot \sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{1 + x^4})^3} \cdot \sqrt[4]{(1 + x^4)^3}}$$

$$960.2. \frac{1}{x^3 \cos \frac{1}{x^3} \left(\sin \frac{1}{x^3} + \cos \frac{1}{x^3} \right) \sqrt{\operatorname{ctg} \frac{1}{x^3}}}$$

$$960.3. \frac{2^{1 + \sqrt[3]{x}} \ln 2 \cdot \sin \left(2 \sqrt[3]{x} \right) \cdot \ln \left(\sec 2 \sqrt[3]{x} \right)}{3 \sqrt[3]{x^2} \cdot \cos^2 \left(2 \sqrt[3]{x} \right)}$$

$$961. 1 + x^x (1 + \ln x) + x^x x^{x^x} \times \\ \times \left(\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x \right) (x > 0). 962. x^{a-1} x^{x^a} (1 + a \ln x) + a^x x^{a^x} \left(\frac{1}{x} + \ln a \ln x \right) +$$

$$+ x^x a^x \ln a (1 + \ln x) (x > 0). 963. x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x) (x > 0). 964. (\sin x)^{1 + \cos x} \times \\ \times (\operatorname{ctg}^2 x - \ln \sin x) - (\cos x)^{1 + \sin x} (\operatorname{tg}^2 x - \ln \cos x) \left(0 < x - 2k\pi < \frac{\pi}{2}, \right.$$

$$k - \text{целое} \left. \right). 965. \frac{(\ln x)^{x-1}}{x \ln x + 1} [x - 2 \ln^2 x + x \ln x \cdot \ln (\ln x)] (x > 1). 965.1. y' =$$

$$= 2y \left\{ \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} \ln \frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)} + \operatorname{arctg}^2 x \left[\frac{\sin x \cdot \operatorname{sgn}(\cos x)}{\arcsin(\sin^2 x) \sqrt{1 + \sin^2 x}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\cos x \cdot \operatorname{sgn}(\sin x)}{\arccos(\cos^2 x) \sqrt{1 + \cos^2 x}} \right] \right\} \left(x \neq \frac{k\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \dots \right). 966. -\frac{1}{x} (\log_x e)^3$$

$$(x > 0, x \neq 1). 967. \operatorname{th}^2 x. 968. -\frac{2}{\operatorname{sh}^3 x} (x > 0). 969. \frac{1}{\operatorname{ch} 2x}. 970. \frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x} (x \neq 0).$$

$$971. \frac{a + b \operatorname{ch} x}{b + a \operatorname{ch} x}. 972. -\frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos^4 x}}. 973. -\frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} \arccos x \cdot \ln(\arccos x)$$

$$(|x| < 1). 974. -\frac{x^{-1}}{\sqrt{(1 + x^4)^3}}. 975. -\frac{2xe^{-x^2} \arcsin(e^{-x^2})}{(1 - e^{-2x^2})^{3/2}} (x \neq 0).$$

$$976. \frac{4a^2 x \ln a}{(1 + a^2 x)^2} \operatorname{arccotg} a^{-x} (a > 0). 977. a) \operatorname{sgn} x (x \neq 0); б) 2|x|; в) \frac{1}{x} (x \neq 0).$$

$$978. a) (x-1)(x+1)^2(5x-1) \operatorname{sgn}(x+1); б) \frac{3}{2} \sin 2x \cdot |\sin x|; в) \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$(|x| > 1); г) \pi [x] \sin 2\pi x. 979. y' = -1 \text{ при } -\infty < x < 1; y' = 2x - 3$$

$$\text{при } 1 \leq x \leq 2; y' = 1 \text{ при } 2 < x < +\infty. 980. y' = 2(x-a)(x-b) \times$$

$$\times (2x-a-b) \text{ при } x \in [a, b]; y' = 0 \text{ при } x \notin [a, b]. 981. y' = 1 \text{ при } x < 0;$$

$$y' = \frac{1}{1+x} \text{ при } 0 \leq x < +\infty. 982. y' = \frac{1}{1+x^2} \text{ при } -1 < x \leq 1; y' = \frac{1}{2}$$

$$\text{при } |x| > 1. 983. y' = 2xe^{-x^2}(1-x^2) \text{ при } |x| \leq 1; y' = 0 \text{ при } |x| > 1. 984. а) \frac{1-x-x^2}{x(1-x^2)}; б) \frac{54-36x+4x^2+2x^3}{3x(1-x)(9-x^2)} (x \neq 0, x \neq 1, x \neq \pm 3);$$

$$в) \sum_{l=1}^n \frac{\alpha_l}{x - a_l}; г) \frac{n}{\sqrt{1+x^2}}. 985. а) \frac{\varphi(x) \varphi'(x) + \psi(x) \psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}}$$

$$(\varphi^2(x) + \psi^2(x) \neq 0); б) \frac{\varphi'(x) \psi(x) - \varphi(x) \psi'(x)}{\varphi^2(x) + \psi^2(x)} (\varphi^2(x) + \psi^2(x) \neq 0);$$

$$в) \varphi(x) \sqrt{\psi(x)} \left\{ \frac{1}{\varphi(x) \psi(x)} - \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} \ln \psi(x) \right\}; г) \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{1}{\ln \varphi(x)} - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \cdot \frac{\ln \psi(x)}{\ln^2 \varphi(x)}.$$

996. а) $2xf'(x^2)$; б) $\sin 2x[f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)]$; в) $e^{f(x)}[e^x f'(e^x) + f'(x)f(e^x)]$; г) $f'(x) - f'[f(x)] \cdot f'[f[f(x)]]$. 998.1. 1000! 999. $3x^2 + 15$. 999. $6x^2$. 992. а) $n > 0$; б) $n > 1$; в) $n > 2$. 993. а) $n \geq m+1$; б) $1 < n < m+1$. 994. $\Phi(a)$. 995. $f_-(a) = -\Phi(a)$, $f_+(a) = \Phi(a)$.

999. а) Недифференцируема при $x=1$; б) недифференцируема при $x = \frac{2k-1}{2}\pi$, k — целое; в) дифференцируема всюду; г) недифференцируема при $x=k\pi$, k — целое; д) недифференцируема при $x=-1$.

1000. $f_-(x) = f_+(x) = \operatorname{sgn} x$ при $x \neq 0$ и $f_-(0) = -1$, $f_+(0) = 1$.

1001. $f_-(x) = f_+(x) = \pi[x] \cos \pi x$ при $x \neq$ целому числу; $f_-(k) = \pi(k-1)(-1)^k$, $f_+(k) = \pi k(-1)^k$ при k целом. 1002. $f_-(x) = f_+(x) = \left(\cos \frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{x} \sin \frac{\pi}{x}\right) \cdot \operatorname{sgn} \left(\cos \frac{\pi}{x}\right)$ при $x \neq \frac{2}{2k+1}$ (k — целое); $f_-\left(\frac{2}{2k+1}\right) =$

$-(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $f_+\left(\frac{2}{2k+1}\right) = (2k+1)\frac{\pi}{2}$. 1003. $f_-(x) = f_+(x) = \frac{x \cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}$

при $\sqrt{2k\pi} < |x| < \sqrt{(2k+1)\pi}$ ($k=0, 1, 2, \dots$); $f_-(0) = -1$, $f_+(0) = 1$; $f_{\mp}(\sqrt{(2k+1)\pi}) = \mp \infty$, $f_{\pm}(\sqrt{2k\pi}) = \pm \infty$ ($k=1, 2, \dots$). 1004. $f_-(x) =$

$f_+(x) = \frac{1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{1/x}}{\left(1 + e^{1/x}\right)^2}$ при $x \neq 0$; $f_-(0) = 1$, $f_+(0) = 0$. 1005. $f_-(x) =$

$f_+(x) = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$ при $x \neq 0$; $f_-(0) = -1$, $f_+(0) = 1$. 1006. $f_-(x) =$

$f_+(x) = \frac{e}{x}$, где $e = -1$ при $0 < |x| < 1$ и $e = 1$ при $1 < |x| < +\infty$.

$f_-(\mp 1) = -1$, $f_+(\mp 1) = 1$. 1007. $f_-(x) = f_+(x) = \frac{2 \operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2}$ при

$x \neq \mp 1$; $f_-(\mp 1) = \mp 1$, $f_+(\pm 1) = \mp 1$. 1008. $f_-(x) = f_+(x) =$

$= \operatorname{arotg} \frac{1}{x-2} - \frac{x-2}{(x-2)^2+1}$ при $x \neq 2$; $f_{\mp}(2) = \mp \frac{\pi}{2}$. 1009.1. а) $f_-(0) =$

$= -\frac{1}{2}$, $f_+(0) = \frac{1}{2}$; б) $f_-(1) = f_+(1) = \frac{1}{2}$; в) $f_-(0) = f_+(0) = 0$. 1010. а) $2x_0$;

б) $-x_0^2$. 1011. а) $a = f_-(x_0)$; б) $f(x_0) - x_0 f_-(x_0)$. 1012. А =

$= \frac{k_1+k_2}{(b-a)^2}$, $c = \frac{ak_2+bk_1}{k_1+k_2}$. 1013. а) $\frac{3m^2}{2c}$, б) $-\frac{m^2}{2c^3}$. 1014. а) Можно;

б) нельзя. 1015. а) Нельзя, б) нельзя. 1016. а), б), в) Функция $F(x)$

может как иметь производную $F'(x)$, так и не иметь ее. 1017. $x = k\pi$

($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 1018. а) Не может; б) может. 1019. 1) Не обяза-

тельно; 2) обязательно. 1020. Не обязательно. 1021. Не следует. 1022. Не

следует. 1023. Вообще говоря, нельзя. 1024. $P_n = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$;

$$Q_n = \frac{1+x-(n+1)^2 x^n + (2n^2+2n-1)x^{n+1} - n^2 x^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

$$1025. S_n = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}; \quad T_n = \frac{n \sin \frac{x}{2} \sin \frac{2n+1}{2} x - \sin^2 \frac{nx}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}.$$

625. $\frac{1}{x}$. 625.1. $y = \sqrt{x}$ при $0 \leq x < 1$ и $4k-1 < x < 4k+1$; $y = x$ при $4k-3 < x < 4k-2$ и $4k-2 < x < 4k-1$; $y = \frac{1}{2}(\sqrt{x} + x)$ при $x = 2k - 1$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). 625.2. $y = 0$, если x — рационально; $y = x$, если x — иррационально. 625.3. Контур квадрата $\max\{|x|, |y|\} = 1$. 627. а) $x = 1$; $x = -2$, $y = x - 1$; б) $y = x + \frac{1}{2}$ при $x \rightarrow +\infty$, $y = -x - \frac{1}{2}$ при $x \rightarrow -\infty$; в) $y = \frac{1}{3} - x$; г) $y = x$ при $x \rightarrow +\infty$, $y = 0$ при $x \rightarrow -\infty$; д) $y = 0$ при $x \rightarrow -\infty$, $y = x$ при $x \rightarrow +\infty$; е) $y = x + \frac{\pi}{2}$. 628. 0.
629. $\frac{1}{1-x}$. 630. $\frac{\sin x}{x}$. 632. $\frac{1}{6}$. 633. $\frac{a}{2}$. 634. $\frac{1}{2} \ln a$. 635. $\sqrt{e}$. 636. $e^{-\frac{a^3}{6}}$.
637. $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4a})$. 637.1. $\frac{2}{3}$. 637.2. $\frac{b}{1-\alpha}$. 637.3. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
638. $\sqrt{1+x}-1$. 639. $1 - \sqrt{1-x}$. 641. а) 2; б) $+\infty$; в) 0; г) 1; д) 2; е) 1; ж) $2 \operatorname{sh} 1$. 643. а) $l = -1$, $L = 2$; б) $l = -2$, $L = 2$; в) $l = 2$, $L = e$. 644. а) $l = -1$, $L = 1$; б) $l = 0$, $L = +\infty$; в) $l = \frac{1}{2}$, $L = 2$; г) $l = 0$, $L = +\infty$. 645. а) Первого порядка; б) второго; в) первого; г) третьего; д) третьего; е) третьего. 653. а) $2x$; б) x ; в) $\frac{x^2}{2}$; г) $\frac{x^3}{2}$. 655. а) $3(x-1)^3$; б) $\frac{(1-x)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{2}}$; в) $x-1$; г) $e(x-1)$; д) $x-1$. 656. а) x^2 ; б) $2x^2$; в) $x^{\frac{2}{3}}$; г) $x^{\frac{1}{6}}$. 657. а) $\left(\frac{1}{x}\right)^3$; б) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$; в) $-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}$; г) $\left(\frac{1}{x}\right)^3$. 658. а) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)$; б) $\sqrt{2}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}$; в) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}}$; $\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1-x}$; д) $\frac{1}{x-1}$. 663. а) $9,95 < x < 10,05$; б) $9,995 < x < 10,005$; в) $9,9995 < x < 10,0005$; г) $\sqrt{100-e} < x < \sqrt{100+e}$. 664. $\Delta < \frac{e}{27}$; а) $\Delta < 3,7$ мм; б) $\Delta < 0,37$ мм; в) $\Delta < 0,037$ мм. 665. $100[1 - 10^{-(n+1)}]^2 < x < 100[1 + 10^{-(n+1)}]^2$; а) $81 < x < 121$; б) $98,01 < x < 102,01$; в) $99,8001 < x < 100,2001$; г) $99,980001 < x < 100,020001$. 666. $\delta = \min\left(\frac{e}{11}, 1\right)$.
667. $\delta = \frac{ex_0^3}{1+ex_0} \approx 0,001x_0^3$; а) $\delta \approx 10^{-6}$; б) $\delta \approx 10^{-7}$; в) $\delta \approx 10^{-8}$. Нельзя. 669. а) Нельзя; б) можно. 671. Нет; ограниченность в точке x_0 . 672. Нет; если функция $f(x)$ определена в конечном промежутке (a, b) , то эти неравенства выполнены всегда; если по меньшей мере a или b равно символу ∞ , то $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = +\infty$. 673. Нет; однозначность и непрерывность обратной функции. 675. Непрерывна. 676. Непрерывна, если $A = 4$, и разрывна при $x = 2$, если $A \neq 4$. 677. Разрывна при $x = -1$. 678. а) Непрерывна; б) разрывна при $x = 0$. 679. Разрывна при $x = 0$. 680. Непрерывна. 681. Непрерывна. 682. Разрывна при $x = 1$. 683. Непрерывна.

при $a=0$ и разрывна при $a \neq 0$. 684. Разрывна при $x=0$. 685. Разрывна при $x=k$ (k —целое). 686. Разрывна при $x=k^2$ ($k=1, 2, \dots$). 687. $x=-1$ —точка бесконечного разрыва. 688. $x=-1$ —устраняемая точка разрыва. 689. $x=-2$ и $x=1$ —точки бесконечного разрыва. 690. $x=0$ и $x=1$ —устраняемые точки разрыва; $x=-1$ —точка бесконечного разрыва. 691. $x=0$ —устраняемая точка разрыва; $x=k\pi$ ($k=\pm 1, \pm 2, \dots$)—точки бесконечного разрыва. 692. $x=\pm 2$ —устраняемые точки разрыва. 693. $x=0$ —точка разрыва 2-го рода. 694. $x=\frac{1}{k}$ ($k=\pm 1, \pm 2, \dots$)—точки разрыва 1-го рода; $x=0$ —точка разрыва 2-го рода. 695. $x=0$ и $x=\frac{2}{2k+1}$ ($k=0, \pm 1, \dots$)—устраняемые точки разрыва. 696. $x=0$ —точка разрыва 1-го рода. 697. $x=0$ —устраняемая точка разрыва. 698. $x=0$ —точка разрыва 2-го рода. 699. $x=0$ —устраняемая точка разрыва; $x=1$ —точка бесконечного разрыва. 700. $x=0$ —точка бесконечного разрыва; $x=1$ —точка разрыва 2-го рода. 701. $x=k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)—точки разрыва 1-го рода. 702. $x=k$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)—точки разрыва 1-го рода. 703. $x=k$ ($k=\pm 1, \pm 2, \dots$)—точки разрыва 1-го рода. 704. Функция непрерывна. 705. $x=\pm \sqrt{n}$ ($n=1, 2, \dots$)—точки разрыва 1-го рода. 706. $x=\frac{1}{k}$ ($k=\pm 1, \pm 2, \dots$)—точки разрыва 1-го рода; $x=0$ —точка бесконечного разрыва. 707. $x=\frac{1}{k}$ ($k=\pm 1, \pm 2, \dots$)—точки разрыва 1-го рода; $x=0$ —устраняемая точка разрыва. 708. $x=\frac{2}{(2k+1)\pi}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)—точки разрыва 1-го рода; $x=0$ —точка разрыва 2-го рода. 709. $x=\pm \frac{1}{k}$ и $x=\pm \frac{1}{\sqrt{k}}$ ($k=1, 2, \dots$)—точки разрыва 1-го рода, $x=0$ —точка разрыва 2-го рода. 710. $x=\frac{1}{k}$ ($k=\pm 1, \pm 2, \dots$)—точки бесконечного разрыва; $x=0$ —точка разрыва 2-го рода. 711. $x=\frac{2}{(2k+1)\pi}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)—точки бесконечного разрыва; $x=0$ —точка разрыва 2-го рода. 712. $x=\pm \sqrt{n}$ ($n=1, 2, \dots$)—точки разрыва 1-го рода. 713. $x=0, x=1$ и $x=2$ —точки разрыва 1-го рода. 714. $x=k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)—точки бесконечного разрыва. 715. $x=\pm \sqrt{k\pi}$ ($k=0, 1, 2, \dots$)—точки бесконечного разрыва. 716. $x=-1$ и $x=3$ —точки бесконечного разрыва. 717. $x=0$ —точка разрыва 2-го рода. 718. $x=0$ —устраняемая точка разрыва. 719. $x=\pm 1$ —точки разрыва 1-го рода. 720. $y=1$, если $0 < x < 1$; $y=\frac{1}{2}$, если $x=1$; $y=0$, если $x > 1$; $x=1$ —точка разрыва 1-го рода. 721. $y=\operatorname{sgn} x$; $x=0$ —точка разрыва 1-го рода. 722. $y=1$, если $|x| \leq 1$; $y=x^2$, если $|x| > 1$. Функция непрерывна. 723. $y=0$, если $x \neq k\pi$; $y=1$, если $x=k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$); $x=k\pi$ —точки разрыва 1-го рода. 724. $y=x$, если $|x-k\pi| < \frac{\pi}{6}$; $y=\frac{x}{2}$, если $x=k\pi \pm \frac{\pi}{6}$; $y=0$, если $\frac{\pi}{6} < |x-k\pi| < \frac{5\pi}{6}$ ($k=0, \pm 1, \dots$); $x=k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ —точки разрыва 1-го рода. 725. $y=\frac{\pi}{2}x$, если $k\pi < x < k\pi + \frac{\pi}{2}$; $y=-\frac{\pi}{2}x$, если $k\pi + \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \pi$; $y=0$, если $x=k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k=0, \pm 1, \dots$); $x=\frac{k\pi}{2}$ —точки разрыва 1-го рода. 726. $y=x$ при $x \leq 0$; $y=x^2$ при $x > 0$. Функция непрерывна. 727. $y=0$ при $x \leq 0$ и $y=x$ при $x > 0$. Функция непрерывна. 728. $y=-(1+x)$ при $x < 0$; $y=0$ при

$x=0$ и $y=1+x$ при $x>0$; $x=0$ —точка разрыва 1-го рода. 729. Нет. 730. $a=1$. 731. а) Функция непрерывна; б) $x=-1$ —точка разрыва 1-го рода; в) $x=-1$ —точка разрыва 1-го рода; г) $x=k$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)—точки бесконечного разрыва; д) $x \neq k$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)—точки разрыва 2-го рода. 732. $d=-x$ при $-\infty < x < 0$; $d=0$ при $0 \leq x \leq 1$;

$d=x-1$ при $1 < x \leq \frac{3}{2}$; $d=2-x$ при $\frac{3}{2} < x < 2$; $d=0$ при $2 \leq x \leq 3$;

$d=x-3$ при $3 < x < +\infty$. Функция—непрерывна. 733. $S=3y-\frac{y^3}{2}$

при $0 \leq y \leq 1$; $S=\frac{1}{2}+2y$ при $1 < y \leq 2$; $S=\frac{5}{2}+y$ при $2 < y \leq 3$;

$S=\frac{11}{2}$ при $3 < y < +\infty$; функция—непрерывна, $b=3-y$ при $0 \leq y \leq 1$;

$b=2$ при $1 < y \leq 2$; $b=1$ при $2 < y \leq 3$; $b=0$ при $3 < y < +\infty$;

$x=2$ и $x=3$ —точки разрыва 1-го рода. 735. Разрывна при $x \neq 0$ и непрерывна при $x=0$. 737. Разрывна при всех отрицательных значениях и положительных рациональных значениях аргумента. 738. $f(0)=0,5$. 740. а) 1,5; б) 2; в) 0; г) e ; д) 0; е) 1; ж) 0. 841. а) Да; б) нет. 742. а) Нет; б) нет.

743. Нет. Пример: $f(x)=1$, если x —рационально, и $f(x)=-1$, если x —иррационально. 744. а) $f(g(x))$ непрерывна, $g(f(x))$ разрывна при $x=0$;

б) $f(g(x))$ разрывна при $x=-1$, $x=0$ и $x=1$, $g(f(x))=0$ непрерывна;

в) $f(g(x))$ и $g(f(x))$ непрерывны. 745. $f(\varphi(x))=x$. 758. $x=\frac{-dy+b}{cy-a}$;

$a+d=0$. 760. $x=y-k$, если $2k \leq y < 2k+1$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

764. $f(f(x))=x$. 767. $x=-\sqrt{y}$ ($0 \leq y < +\infty$); $x=\sqrt{y}$ ($0 \leq y < +\infty$).

768. $x=1-\sqrt{1-y}$ ($-\infty < y \leq 1$); $x=1+\sqrt{1-y}$ ($-\infty < y \leq 1$).

769. $x=\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ ($-1 \leq y \leq 1$), $x=\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$ ($0 < |y| \leq 1$).

770. $x=(-1)^k \arcsin y + k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) ($-1 \leq y \leq 1$). 771. $x=2k\pi \pm \arccos y$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) ($-1 \leq y \leq 1$). 772. $x=\operatorname{arctg} y + k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) ($-\infty < y < +\infty$). 776. $e=0$, если $xy < 1$; $e=\operatorname{sgn} x$, если $xy > 1$.

779. а) $y=-\frac{\pi}{2}$, если $-1 \leq x \leq 0$; $y=2 \arcsin x - \frac{\pi}{2}$, если $0 \leq x \leq 1$;

б) $y=-(\pi+4 \arcsin x)$, если $-1 \leq x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=0$, если $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$;

$y=\pi-4 \arcsin x$, если $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$. 780. $y=\frac{\pi}{2}-x$ ($-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$).

781. $y=\sqrt{x^2-1}$ ($1 \leq x < +\infty$); $y=-\sqrt{x^2-1}$ ($1 \leq x < +\infty$). 782. Для всех t , для которых $\varphi(t)=x$, где x —произвольное значение функции $\varphi(t)$,

функция $\psi(t)$ должна иметь одно и то же значение. 783. Множество значений $\chi(t)$ при $\alpha < t < \beta$ должно быть интервалом (a, b) . 784. Для всех значений x , для которых $\varphi(x)=u$, где u —произвольное число из интервала (A, B) ,

функция $\psi(x)$ должна принимать одно и то же значение. 785. $|\delta| \leq \frac{8}{20}$ см.

а) 0,5 мм; б) 0,005 мм; в) 0,00005 мм. 786. а) $\delta < \frac{1}{4}$; б) $\delta < 2,5 \cdot 10^{-4}$;

в) $\delta < \frac{5}{2} \cdot 10^{-7}$; г) $\delta < \frac{e^8}{4}$ ($e \leq 1$). 793. а) Да; б) нет. 794. Равномерно

непрерывна. 795. Не является равномерно непрерывной. 796. Равномерно не-

прерывна. 797. Не является равномерно непрерывной. 798. Равномерно

непрерывна. 799. Равномерно непрерывна. 800. Не является равномерно

- непрерывной. 802. а) $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$; б) $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$; в) $\delta = 0,01\varepsilon$; г) $\delta = \varepsilon^2$ ($\varepsilon \leq 1$); д) $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$; е) $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon^2}{3+\varepsilon}\right)$. 803. $n \geq 1\,800\,000$.
808. а) $\omega_f(\delta) \leq 3\delta$; б) $\omega_f(\delta) \leq \sqrt{\delta}$; в) $\omega_f(\delta) \leq \frac{\delta}{\sqrt{2\delta}}$; г) $\omega_f(\delta) \leq \delta \sqrt{2}$.
810. $f(x) = \cos ax$ или $f(x) = \operatorname{ch} ax$. 819. $f(x) = \cos ax$; $g(x) = \pm \sin ax$ ($a = \operatorname{const}$).

Отдел II

821. $\Delta x = 999$; $\Delta y = 3$. 822. $\Delta x = -0,009$; $\Delta y = 990\,000$. 823. а) $\Delta y = a\Delta x$; б) $\Delta y = (2ax + b)\Delta x + a(\Delta x)^2$; в) $\Delta y = a^x(a^{\Delta x} - 1)$. 825. а) 5; б) 4,1; в) 4,01; г) $4 + \Delta x$; 4. 826. $3 + 3h + h^2$; а) 3,31; б) 3,0301; в) 3,003001; 3. 827. а) $v_{cp} = 215 \frac{M}{сек}$; б) $v_{cp} = 210,5 \frac{M}{сек}$; в) $v_{cp} = 210,05 \frac{M}{сек}$; $210 \frac{M}{сек}$. 828. а) $2x$; б) $3x^2$; в) $-\frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0$); г) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ($x > 0$); д) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ($x \neq 0$); е) $\frac{1}{\cos^2 x}$ ($x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}$, $k=0, \pm 1, \dots$); ж) $-\frac{1}{\sin^2 x}$ ($x \neq k\pi$, $k=0, \pm 1, \dots$); з) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($|x| < 1$); и) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($|x| < 1$); к) $\frac{1}{1+x^2}$. 829. -8 ; 0; 0. 830. 4. 831. $1 + \frac{\pi}{4}$. 832. $f'(a)$. 834. $y' = 1 - 2x$; 1, 0, -1, 21. 835. $y' = x^2 + x - 2$; а) -2 ; 1; б) -1 ; 0; в) -4 ; 3. 836. $10a^2x - 5x^4$. 837. $\frac{a}{a+b}$. 838. $2x - (a+b)$. 839. $2(x+2)(x+3)^2(3x^2+11x+9)$. 840. $x \sin 2a + \cos 2a$. 841. $mn[x^{m-1} + x^{n-1} + (m+n)x^{m+n-1}]$. 842. $-(1-x)^2(1-x^2)(1-x^2)^2(1+6x + 15x^2 + 14x^3)$. 842.1. $-20(17+12x)(5+2x)^9(3-4x)^{19}$. 843. $-\left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{9}{x^4}\right)$ ($x \neq 0$). 845. $\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^3}$ ($|x| \neq 1$). 846. $\frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$. 847. $\frac{1-x+4x^2}{(1-x)^2(1+x)^2}$ ($|x| \neq 1$). 848. $\frac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^2}$ ($x \neq 1$). 849. $-\frac{(1-x)^{p-1}[(p+q)+(p-q)x]}{(1+x)^{q+1}}$ ($x \neq -1$). 850. $\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1+x)^3} \times$ $\times [p-(q+1)x-(p+q-1)x^2]$ ($x \neq -1$). 851. $1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ($x > 0$). 852. $-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$ ($x > 0$). 853. $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$ ($x > 0$). 854. $\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$. 855. $\frac{6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5}{\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{(3+x^2)^2}}$ ($x \neq \sqrt[3]{-3}$). 856. $\frac{(n-m)-(n+m)x}{(n+m)^{n+m}\sqrt{(1-x)^n(1+x)^m}}$. 857. $-\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ ($|x| < |a|$). 858. $\frac{2x^2}{1-x^2}\sqrt[3]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$ ($|x| \neq 1$). 859. $-\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. 860. $\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ ($x > 0$). 861. $\frac{1}{27\sqrt[3]{x^2(1+\sqrt[3]{x})^2}} \times$

- $\times \frac{1}{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}})^4}}$ ($x \neq 0, x \neq -1, x \neq -8$). 882. $-2 \cos x (1+2 \sin x)$.
 883. $x^2 \sin x$. 884. $-\sin 2x \cdot \cos (\cos 2x)$. 885. $n \sin^{n-1} x \cdot \cos (n+1) x$.
 886. $\cos x \cdot \cos (\sin x) \cdot \cos [\sin (\sin x)]$. 887. $\frac{2 \sin x (\cos x \sin x^2 - x \sin x \cos x^2)}{\sin^2 x^2}$
 ($x^2 \neq k\pi; k=1, 2, \dots$). 888. $-\frac{1+\cos^2 x}{2 \sin^3 x}$ ($x \neq k\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).
 889. $\frac{n \sin x}{\cos^{n+1} x} \left(x \neq \frac{2k-1}{2} \pi, k-\text{целое} \right)$. 890. $\frac{x^2}{(\cos x + x \sin x)^3}$. 891. $\frac{2}{\sin^2 x}$;
 ($x \neq k\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 892. $1 + \operatorname{tg}^6 x$ ($x \neq (2k+1) \frac{\pi}{2}; k=0, \pm 1, \dots$).
 893. $\frac{8}{3 \sin^4 x \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}}$ ($x \neq k\pi, k-\text{целое}$). 894. $\frac{-16 \cos \frac{2x}{a}}{a \sin^3 \frac{2x}{a}} \left(x \neq \frac{k\pi a}{2}, k-\text{целое} \right)$.
 895. $-3 \operatorname{tg}^3 x \cdot \sec^2 x \cdot \sin (2 \operatorname{tg}^3 x) \cdot \cos [\cos^3 (\operatorname{tg}^3 x)]$ ($x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi, k-\text{целое}$).
 896. $-2xe^{-x^2}$. 897. $-\frac{1}{x^3} 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}} \sec^3 \frac{1}{x} \ln 2$. 898. $x^2 e^x$. 899. $x^2 e^{-x} \sin x$.
 900. $\frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}$ ($x \neq 2k\pi, k-\text{целое}$). 901. $-\frac{1+\ln^2 3}{3^x} \sin x$.
 902. $\sqrt{a^2+b^2} e^{ax} \sin bx$. 903. $e^x [1+e^{e^x} (1+e^{e^{e^x}})]$. 904. $y \left(\ln \frac{a}{b} - \frac{a-b}{x} \right)$ ($x>0$).
 905. $a^a \cdot x^{a^a-1} + ax^{a-1} a^{a^a} \ln a + a^x \cdot a^{a^a} \ln^2 a$. 906. $\frac{6}{x} \lg e \cdot \lg^2 x^2$ ($x \neq 0$).
 907. $\frac{1}{x \ln x \ln (\ln x)}$ ($x>e$). 908. $\frac{6}{x \ln x \ln (\ln^2 x)}$ ($x>e$). 909. $\frac{1}{(1+x)^2 (1+x^2)}$
 ($x>-1$). 910. $\frac{x}{x^4-1}$ ($|x|>1$). 911. $\frac{1}{x(1+x^4)^2}$ ($x \neq 0$). 912. $\frac{1}{3x^2-2}$
 ($|x|>\sqrt{\frac{2}{3}}$). 913. $\frac{2}{(1-x^2)(1-kx^2)}$ ($|x|<1$). 914. $\frac{1}{2(1+\sqrt{x+1})}$
 ($x>-1$). 915. $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. 916. $\ln (x+\sqrt{x^2+1})$. 917. $\ln^2 (x+\sqrt{x^2+1})$.
 918. $\sqrt{x^2+a^2}$. 919. $\frac{1}{a-bx^2} \left(|x|<\sqrt{\frac{a}{b}} \right)$. 920. $-\frac{8}{x^3 \sqrt{1-x^2}}$ ($0<x<1$).
 921. $\frac{1}{\sin x}$ ($0<x-2k\pi<\pi, k-\text{целое}$). 922. $\frac{1}{\cos x} \left(|x-2k\pi|<\frac{\pi}{2}, k-\text{целое} \right)$.
 923. $-\operatorname{ctg}^2 x$ ($0<x-2k\pi<\pi, k-\text{целое}$). 924. $-\frac{1}{\cos x} \left(x \neq \frac{2k-1}{2} \pi, k-\text{целое} \right)$.
 925. $\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}$ ($0<x-2k\pi<\pi, k-\text{целое}$). 926. $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a+b \cos x}$. 927. $-\frac{\ln^2 x}{x^3}$ ($x>0$).
 928. $\frac{1}{x^3} \ln x$ ($x>0$). 929. $\frac{2x}{1+\sqrt[3]{1+x^2}}$. 930. $-\frac{1+x+\frac{1}{x}+\ln \frac{1}{x}}{\left(1+x \ln \frac{1}{x} \right) \left[1+x \ln \left(\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x} \right) \right]}$.

911. $2 \sin(\ln x) \quad (x > 0)$. 912. $\sin x \cdot \ln \operatorname{tg} x \quad \left(0 < x - 2k\pi < \frac{\pi}{2}, k - \text{целое}\right)$.
913. $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \quad (|x| < 2)$. 914. $\frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}} \quad (|x-1| < \sqrt{2})$. 915. $\frac{2ax}{x^4+a^2}$
 $(a \neq 0)$. 916. $\frac{1}{x^2+2} \quad (x \neq 0)$. 917. $\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)} \quad (x \geq 0)$. 918. $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arccos x$
 $(|x| < 1)$. 919. $\arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} \quad (x \geq 0)$. 920. $\frac{1}{|x| \sqrt{x^2-1}} \quad (|x| > 1)$.
921. $\operatorname{sgn}(\cos x) \left(x \neq \frac{2k-1}{2} \pi, k - \text{целое}\right)$. 922. $\frac{2 \operatorname{sgn}(\sin x) \cdot \cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} \quad (x \neq k\pi, k - \text{целое})$. 923. $\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin 2x}} \quad \left(0 < x - k\pi < \frac{\pi}{2}, k - \text{целое}\right)$. 924. $\frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1-x^2}}$
 $(0 < |x| < 1)$. 925. $\frac{1}{1+x^2} \quad (x \neq 1)$. 926. $1 \quad \left(x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k - \text{целое}\right)$. 927. $\frac{1}{a+b \cos x}$.
928. $-\frac{2 \operatorname{sgn} x}{1+x^2} \quad (x \neq 0)$. 929. $\frac{4x}{\sqrt{1-x^4} \arccos^2(x^2)} \quad (|x| < 1)$. 930. $\frac{1+x^2}{1+x^6}$.
931. $-2 \cos x \cdot \operatorname{arctg}(\sin x)$. 932. $\frac{1}{2x \sqrt{x-1} \arccos \frac{1}{\sqrt{x}}} \quad (x > 1)$. 933. $\frac{a^3+b^3}{(x+a)(x^2+b^2)}$
 $(x > -a)$. 934. $\sqrt{a^2-x^2}$. 935. $\frac{1}{x^2+1} \quad (x \neq -1)$. 936. $\frac{1}{x^2+1} \quad (|x| \neq 1)$.
937. $(\arcsin x)^2 \quad (|x| < 1)$. 938. $-\frac{\arccos x}{x^3} \quad (0 < |x| < 1)$. 939. $\frac{x \ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} \quad (x > 1)$.
940. $\frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (|x| < 1)$. 941. $\frac{x^3}{x^4+1} \left(|x| \neq \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. 942. $\frac{12x^3}{(1+x^2)^3}$.
943. $-\frac{1}{(1-x)^3 \sqrt{x}} \quad (x < 1)$. 944. $\frac{1}{2 \sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$. 945. $\frac{1}{\sqrt{ax-x^2}}$
 $(0 < x < a)$. 946. $\frac{x^3}{\sqrt{1-2x-x^2}} \quad (|x+1| < \sqrt{2})$. 947. $\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.
948. $\frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \left(x \neq \frac{2k-1}{2} \pi, k - \text{целое}\right)$. 949. $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \times$
 $\times \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad (|x| < 1)$. 950. $\frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arctg} x$. 951. $\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$. 952. $\frac{1}{2(1+x^2)}$.
953. $\frac{\sin a \operatorname{sgn}(\cos x - \cos a)}{1 - \cos a \cos x} \quad (\cos x \neq \cos a)$. 954. $\frac{1}{(x^4-1) \sqrt{x^2+2}} \quad (0 < |x| < 1)$.
955. $\frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4} \quad (|x| \neq 1)$. 956. $\frac{4}{(1+x^2)^2 \sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$. 957. $\frac{2x(\cos x^2 + \sin x^2)}{\sqrt{\sin(2x^2)}}$
 $\left(0 < |x| < \sqrt{\left(+\frac{1}{2}\right) \pi}, k=0, 1, \dots\right)$. 958. $2x [\operatorname{sgn}(\cos x^2) + \operatorname{sgn}(\sin x^2)]$
 $\left(|x| \neq \frac{k\pi}{2}, k=0, 1, 2, \dots\right)$. 959. $\frac{2m}{\sqrt{1-x^2}} \cdot e^{m(\arcsin x)} \cos m(\arcsin x)$
 $(|x| < 1)$. 960. $\frac{e^x-1}{e^{2x}+1}$.

- 1025.1. $S_n = \frac{n \operatorname{sh} \frac{x}{2} \operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{2} \right) x - \operatorname{sh}^2 \frac{nx}{2}}{2 \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}}$. 1026. $S_n = \frac{1}{2n} \operatorname{ctg} \frac{x}{2n} - \operatorname{ctg} x$.
1029. 40π см²/сек. 1030. 25 м²/сек; $0,4$ м/сек. 1031. 50 км/ч.
1032. $S(x) = \frac{x^2}{2}$, если $0 \leq x \leq 2$; $S(x) = x^2 - 2x + 2$, если $x > 2$;
 $S'(x) = x$, если $0 \leq x \leq 2$; $S'(x) = 2x - 2$, если $x > 2$. 1033. $S(x) =$
 $= \frac{|x|}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{|x|}{a}$; $S'(x) = \sqrt{a^2 - x^2} \operatorname{sgn} x$ ($0 < |x| \leq a$).
1034. $y_x' = \frac{1}{3(y^2 + 1)}$. 1035. $y_x' = \frac{1}{1 - \operatorname{ecos} y}$. 1036. а) $-\infty < y < +\infty$;
 $x_y' = \frac{x}{x+1}$; б) $-\infty < y < +\infty$, $x_y' = \frac{1}{1-x+y}$; в) $-\infty < y < +\infty$,
 $x_y' = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$; г) $-1 < y < 1$; $x_y' = \frac{1}{1-y^2}$. 1037. а) $x_1 = -\sqrt{1 + \sqrt{1-y}}$
 $(-\infty < y \leq 1)$; $x_2 = -\sqrt{1 - \sqrt{1-y}}$ ($0 \leq y \leq 1$); $x_3 = \sqrt{1 - \sqrt{1-y}}$
 $(0 \leq y \leq 1)$; $x_4 = \sqrt{1 + \sqrt{1-y}}$ ($-\infty < y \leq 1$); $x_i' = \frac{1}{4x(1-x^2)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$).
- б) $x_1 = -\sqrt{\frac{y}{1-y}}$ ($0 \leq y < 1$); $x_2 = \sqrt{\frac{y}{1-y}}$ ($0 \leq y < 1$); $x_i' = \frac{x^3}{2y^2}$
 $(i = 1, 2)$; в) $x_1 = -\ln(1 + \sqrt{1-y})$ ($-\infty < y \leq 1$); $x_2 = \ln \frac{1 + \sqrt{1-y}}{y}$
 $(0 < y \leq 1)$; $x_i' = -\frac{1}{2(e^{-x} - e^{-2x})}$ ($i = 1, 2$). 1038. $y_x' = -\frac{3}{2}(1+t)$; -3 ;
 $-\frac{3}{2}$ и $-\frac{9}{2}$; $(-4, 4)$. 1039. $\sqrt{\frac{(1-\sqrt{t})^4}{t(1-\sqrt{t})^2}}$ ($t > 0, t \neq 1$). 1040. $y_x' = -1$
 $(0 < x < 1)$. 1041. $y_x' = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t$ ($0 < |t| < \pi$). 1042. $y_x' = \frac{b}{a} \operatorname{cth} t$ ($|t| > 0$).
1043. $y_x' = -\operatorname{tg} t$ ($t \neq \frac{2k+1}{2}\pi, k$ — целое). 1044. $y_x' = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}$ ($t \neq 2k\pi, k$ —
целое). 1045. $y_x' = \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{tg} \left(t + \frac{\pi}{4} \right)$ ($t \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$). 1046. $y_x' = \operatorname{sgn} t$
 $(0 < |t| < +\infty)$. 1048. $y' = \frac{1-x-y}{x-y}$; $\frac{5}{2}$, $-\frac{1}{2}$. 1049. $\frac{p}{y}$. 1050. $-\frac{b^2 x}{a^2 y}$.
1051. $-\sqrt{\frac{y}{x}}$. 1052. $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. 1053. $\frac{x+y}{x-y}$. 1054. а) $\operatorname{tg}(\varphi + \operatorname{arctg} \psi)$;
б) $-\operatorname{ctg} \frac{3\varphi}{2}$ ($\varphi \neq 0, \varphi \neq \pm \frac{2\pi}{3}$); в) $\operatorname{tg} \left(\varphi + \operatorname{arctg} \frac{1}{m} \right)$. 1055. а) $y =$
 $= \sqrt[3]{4(x+1)}$; $y = -\sqrt[3]{\frac{2}{2}}(x+1)$; б) $y = 3, x = 2$; в) $x = 3, y = 0$.
1056. а) $\left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4} \right)$; б) $(0, 2)$. 1058. $|x| < \frac{\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3} < |x| \leq \pi$.
1059. $\max |y_1' - y'| = 10\pi \approx 31,4$. 1060. $\frac{\pi}{4}$. 1061. $\frac{\pi}{2}$; $\operatorname{arctg} \frac{3}{4} \approx \operatorname{arc} 37^\circ$.
1062. $\operatorname{arctg} 2 \sqrt{2} \approx \operatorname{arc} 70^\circ 30'$. 1063. $n > 57,3$. 1064. а) $2 \operatorname{arctg} \frac{1}{|a|}$; б) $\frac{\pi}{2}$.

1066. $\left| \frac{x}{n} \right|$. 1069. $\frac{y_0^2}{|a|}$. 1071. $b^2 - 4ac = 0$. 1072. $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^3 = 0$.
1073. $a = \frac{1}{2e}$. 1077. а) $3x - 2y = 0$, $2x + 3y = 0$; б) $3x - y - 1 = 0$, $x + 3y - 7 = 0$. 1078. а) $y = x$, $y = -x$; б) $3x - y - 4 = 0$, $x + 3y - 3 = 0$; в) $y = -x$, $y = x$. 1079. $y - 2a = (x - at_0) \operatorname{ctg} \frac{t_0}{2}$. Касательная к циклоиде перпендикулярна к отрезку, соединяющему точку касания с точкой соприкосновения катящегося круга.
1081. $3x + 5y - 50 = 0$, $5x - 3y - 10,8 = 0$. 1082. $x + 2y - 3 = 0$, $2x - y - 1 = 0$. 1083. $\Delta f(1) = \Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$; $df(1) = \Delta x$. а) 5, 1; б) 0,131, 0,1; в) 0,010301, 0,01. 1084. $\Delta x = 20 \Delta t + 5(\Delta t)^2$, $dx = 20 \Delta t$; а) 25 м, 20 м; б) 2,05 м, 2 м; в) 0,020005 м, 0,02 м. 1085. $-\frac{dx}{x^2}$ ($x \neq 0$).
1086. $\frac{dx}{a^2 + x^2}$. 1087. $\frac{dx}{x^2 - a^2}$ ($|x| \neq |a|$). 1088. $\frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}$. 1089. $\frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$ ($|x| < |a|$). 1090. а) $(1+x)e^x dx$; б) $x \sin x dx$; в) $-\frac{3dx}{x^3}$ ($x \neq 0$); г) $\frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} dx$ ($x > 0$); д) $\frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$; е) $\frac{dx}{(1-x^2)^{1/2}}$ ($|x| < 1$); ж) $-\frac{2x dx}{1-x^2}$ ($|x| < 1$); з) $\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ ($|x| > 1$); и) $\frac{dx}{\cos^2 x} \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k - \text{целое} \right)$.
1091. $uv du + uv dv + uv dw$. 1092. $\frac{v du - 2u dv}{v^3}$ ($v \neq 0$). 1093. $-\frac{u du + v dv}{(u^2 + v^2)^{3/2}}$ ($u^2 + v^2 > 0$). 1094. $\frac{v du - u dv}{u^2 + v^2}$ ($u^2 + v^2 > 0$). 1095. $\frac{u du + v dv}{u^2 + v^2}$ ($u^2 + v^2 > 0$).
1096. а) $1 - 4x^3 - 3x^6$; б) $\frac{1}{2x^3} \left(\cos x - \frac{\sin x}{x} \right)$; в) $-\operatorname{ctg} x$ ($x \neq k\pi, k - \text{целое}$); г) $-\operatorname{tg}^2 x$ ($x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k - \text{целое}$); д) -1 ($|x| < 1$). 1097. а) Увеличится на $104,7 \text{ см}^2$; б) уменьшится на $43,6 \text{ см}^2$. 1098. Увеличить на $2,23 \text{ см}$. 1099. 1,007 (по таблицам: 1,0066). 1100. 0,4849 (по таблицам: 0,4848). 1101. $-0,8747$ (по таблицам: $-0,8746$). 1102. $0,8104 = \operatorname{arcs} 46^\circ 26'$ (по таблицам: $\operatorname{arcs} 46^\circ 24'$). 1103. 1,043 (по таблицам: 1,041). 1104. а) 2,25 (по таблицам: 2,24); б) 5,833 (по таблицам: 5,831); в) 10,9546 (по таблицам: 10,9545). 1105. а) 2,083 (по таблицам: 2,080); б) 2,9907 (по таблицам: 2,9907); в) 1,938 (по таблицам: 1,931); г) 1,9954 (по таблицам: 1,9953). 1106. $0,24 \text{ м}^2$; $4,2\%$. 1107. $\delta_R \leq 0,33\%$.
1108. а) $\delta_E = \delta_I$; б) $\delta_E = 2\delta_I$. 1109. $0,43 \delta$. 1111. $\frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}$. 1112. $\frac{3x}{(1-x^2)^{3/2}}$ ($|x| < 1$). 1113. $2e^{-x^2}(2x^2-1)$. 1114. $\frac{2 \sin x}{\cos^3 x} \left(x \neq \frac{2k+1}{2}\pi, k=0, \pm 1, \dots \right)$.
1115. $\frac{2x}{1+x^2} + 2 \operatorname{arctg} x$. 1116. $\frac{3x}{(1-x^2)^2} + \frac{(1+2x^2) \operatorname{arcsin} x}{(1-x^2)^{3/2}}$ ($|x| < 1$).
1117. $\frac{1}{x}$ ($x > 0$). 1118. $\frac{f(x)f''(x) - f'^2(x)}{f^2(x)}$ ($f(x) > 0$). 1119. $-\frac{2}{x} \sin(\ln x)$ ($x > 0$). 1120. $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$. 1121. $2(uu'' + u'^2)$.
1122. $\frac{uu'' - u'^2}{u^3} = \frac{vv'' - v'^2}{v^3}$ ($uv > 0$). 1123. $\frac{(u^2 + v^2)(uu'' + vv'') + (u'v - uv')^2}{(u^2 + v^2)^{3/2}}$ ($u^2 + v^2 > 0$). 1124. $y'' = uv'' \left[\left(v \frac{u''}{u} + v' \ln u \right)^2 + v \frac{uu'' - u'^2}{u^3} + \frac{2u'v'}{u} + v'' \ln u \right]$.

1125. $y' = 4x^3 f''(x^2) + 2f''(x^2); \quad y'' = 8x^3 f'''(x^2) + 12x f''(x^2). \quad 1126. \quad y' = \frac{1}{x^4} f''\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3} f'\left(\frac{1}{x}\right); \quad y'' = -\frac{1}{x^5} f'''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{6}{x^4} f''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{6}{x^6} f'\left(\frac{1}{x}\right).$
1127. $y' = e^{3x} f''(e^x) + e^x f'(e^x); \quad y'' = e^{2x} f'''(e^x) + 3e^{2x} f''(e^x) + e^x f'(e^x).$
1128. $y' = \frac{1}{x^3} [f''(\ln x) - f'(\ln x)]; \quad y'' = \frac{1}{x^3} [f'''(\ln x) - 3f''(\ln x) + 2f'(\ln x)].$
1129. $y' = \varphi'^2(x) f''(\varphi(x)) + \varphi''(x) f'(\varphi(x)); \quad y'' = \varphi'^3(x) f'''(\varphi(x)) + 3\varphi''(x) \varphi'(x) f''(\varphi(x)) + \varphi'''(x) f'(\varphi(x)). \quad 1130. \quad a) \quad e^x dx^2; \quad 6) \quad e^x (dx^2 + d^2x).$
1131. $\frac{dx^2}{(1+x^2)^{3/2}}. \quad 1132. \quad \frac{2 \ln x - 3}{x^3} dx^2 (x > 0); \quad 1133. \quad x^x \left[(1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x} \right] dx^2.$
1134. $u dv + 2du dv + v d^2u. \quad 1135. \quad \frac{(v d^2u - u d^2v) - 2dv (v du - u dv)}{18} (v > 0).$
1136. $u^{m-2} v^{n-3} \{ [m(m-1) v^3 du^2 + 2muv du dv + n(n-1) u^3 dv^2] + uv(mv d^2u + nu d^2v) \}. \quad 1137. \quad a^m \ln a (du^2 \ln a + d^2u).$
1138. $[(v^2 - u^2) du^2 - 4uv du dv + (u^2 - v^2) dv^2 + (u^2 + v^2) (u d^2u + v d^2v)] \times \times (u^2 + v^2)^{-2} (u^2 + v^2 > 0). \quad 1139. \quad [-2uv du^2 + 2(u^2 - v^2) du dv + 2uv dv^2 + + (u^2 + v^2) (v d^2u - u d^2v)] (u^2 + v^2)^{-3} (u^2 + v^2 > 0).$
1140. $y' = \frac{1}{4(1-t)}; \quad y'' = \frac{1}{8(1-t)^2} (t \neq 1).$
1141. $y' = -\frac{1}{a \sin^2 t}; \quad y'' = -\frac{3 \cos t}{a^2 \sin^5 t} \quad (t \neq k\pi, k - \text{целое}).$
1142. $y' = -\frac{1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}}; \quad y'' = \frac{\cos \frac{t}{2}}{4a^2 \sin^7 \frac{t}{2}} \quad (t \neq 2k\pi, k - \text{целое}).$
1143. $y' = \frac{e^{-t}}{\sqrt{2} \cos^3 \left(t + \frac{\pi}{4}\right)}; \quad y'' = \frac{e^{-2t} (2 \sin t + \cos t)}{\sqrt{2} \cos^5 \left(t + \frac{\pi}{4}\right)} \quad \left(t \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k = 0, \pm 1, \dots\right).$
1144. $y' = \frac{1}{f^2(t)}; \quad y'' = -\frac{f''(t)}{f^3(t)} (f'(t) \neq 0). \quad 1145. \quad x' = \frac{1}{y'}; \quad x'' = -\frac{y''}{y'^3}; \quad x''' = -\frac{y' y'' - 3y'^2}{y'^5}; \quad x^{IV} = -\frac{y'^2 y^{IV} - 10y' y'' y''' + 15y'^3}{y'^7} (y' \neq 0).$
1146. $-\frac{x}{y}, -\frac{25}{y^3}, -\frac{75x}{y^5}, -\frac{3}{4}, -\frac{25}{64}, -\frac{225}{1024}. \quad 1147. \quad \frac{p}{y}, -\frac{p^2}{y^3}, \frac{3p^3}{y^5}.$
1148. $y' = \frac{2x-y}{x-2y}, \quad y'' = \frac{6}{(x-2y)^3}, \quad y''' = \frac{54x}{(x-2y)^5}. \quad 1149. \quad y' = \frac{2x^2 y}{1+y^2};$
- $y'' = \frac{2x^2 y}{(1+y^2)^3} [3(1+y^2)^2 + 2x^4(1-y^2)]. \quad 1150. \quad y' = \frac{x+y}{x-y}; \quad y'' = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.$
1151. $a = \frac{1}{2} f''(x_0); \quad b = f''(x_0); \quad c = f(x_0). \quad 1152. \quad 20-10t, -10; 0, -10.$
1153. $v = -\frac{2\pi a}{T} \sin \frac{2\pi}{T} t, \quad j = -\frac{4\pi^2 a}{T^2} \cos \frac{2\pi}{T} t. \quad 1154. \quad x = v_0 t \cos \alpha, y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}; \quad v = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 g t \sin \alpha + g^2 t^2}; \quad j = g; \quad y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^3 \cos^3 \alpha}; \quad \frac{v_0^3 \sin^3 \alpha}{2g}; \quad \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha. \quad 1155. \quad x^2 + y^2 = 25; \quad 5|\omega|, \quad 5\omega^3. \quad 1156. \quad y^{(6)} = 4.6!; \quad y^{(7)} = 0.$
1157. $y''' = -\frac{am(m+1)(m+2)}{x^{m+3}} (x \neq 0). \quad 1158. \quad y^{(10)} = -\frac{17!!}{2^{10} x^9 \sqrt{x}} (x > 0).$

где $n!!$ обозначает произведение натуральных чисел, не превышающих числа n ,

- и одинаковой четности с ним, т. е. $17!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 17$. 1159. $y^{(8)} = \frac{8!}{(1-x)^9}$
 $(x \neq 1)$. 1160. $y^{(100)} = \frac{197!! (399-x)}{2^{100} (1-x)^{100} \sqrt{1-x}}$ ($x < 1$). 1161. $y^{(20)} = 2^{20} e^{2x} \times$
 $\times (x^2 + 20x + 95)$. 1162. $y^{(10)} = e^x \sum_{i=1}^{10} (-1)^i \frac{A_{10}^i}{x^{i+1}}$, где $A_{10}^i = 10 \cdot 9 \dots (11-i)$
и $A_{10}^0 = 1$. 1163. $y^{(6)} = -\frac{6}{x^4}$ ($x > 0$). 1164. $y^{(3)} = \frac{274}{x^2} - \frac{120}{x^4} \ln x$ ($x > 0$).
1165. $y^{(50)} = 2^{50} \left(-\frac{1}{2} x^3 \sin 2x + 50x \cos 2x + \frac{1225}{2} \sin 2x \right)$. 1166. $y^{(4)} =$
 $= \frac{27(1-3x)^2 - 36}{7} \sin 3x - \frac{27(1-3x)^2 - 28}{10} \cos 3x \left(x \neq \frac{1}{3} \right)$. 1167. $y^{(100)} =$
 $= -2^9 \sin 2x - 2^{10} \sin 4x + 2^9 \cdot 3^{10} \sin 6x$. 1168. $y^{(100)} = x \operatorname{sh} x + 100 \operatorname{ch} x$.
1169. $y^{IV} = -4e^x \cos x$. 1170. $y^{(8)} = -\frac{60}{x^6} + \left(\frac{144}{x^5} - \frac{160}{x^3} + \frac{96}{x} \right) \sin 2x +$
 $+ \left(\frac{60}{x^4} - \frac{180}{x^2} + \frac{120}{x^2} + 32 \ln x \right) \cos 2x$. 1171. $120 dx^5$. 1172. $-\frac{15}{8x^3 \sqrt{x}} dx^3$
 $(x > 0)$. 1173. $-1024 (x \cos 2x + 5 \sin 2x) dx^{10}$. 1174. $e^x \left(\ln x + \frac{4}{x} - \frac{6}{x^2} + \right.$
 $\left. + \frac{8}{x^3} - \frac{6}{x^4} \right) dx^4$. 1175. $8 \sin x \operatorname{sh} x dx^6$. 1176. $2u d^{10}u + 20 du d^9u + 90 d^2u d^8u +$
 $+ 240 d^3u d^7u + 420 d^4u d^6u + 252 (d^3u)^2$. 1177. $e^u (du^4 + 6du^3 d^2u + 4du d^3u +$
 $+ 3d^2u^2 + d^4u)$. 1178. $\frac{2du^2}{u^3} - \frac{3du d^2u}{u^2} + \frac{d^3u}{u}$. 1179. $d^2y = y'' dx^2 + y' d^2x;$
 $d^3y = y''' dx^3 + 3y'' dx d^2x + y' d^3x;$ $d^4y = y^{IV} dx^4 + 6y''' dx^2 d^2x + 4y'' dx d^3x +$
 $+ 3y' d^2x^2 + y^4 dx$. 1180. $y'' = \frac{\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}}{d^2x};$ $y^{(4)} = \frac{\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^3x & d^3y \end{vmatrix} - 3d^2x \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}}{d^3x}$.
1187. $P^{(n)}(x) = a_0 n!$ 1188. $\frac{(-1)^{n-1} n! c^{n-1} (ad-bc)}{(cx+d)^{n+1}}$. 1189. $n! \left[\frac{(-1)^n}{x^{n+1}} + \right.$
 $\left. + \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \right]$. 1190. $(-1)^n n! \left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right]$. 1191. $\frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{(1-2x)^{n+1/2}}$
 $\left(x < \frac{1}{2} \right)$. 1192. $\frac{(-1)^{n+1} \cdot 1 \cdot 4 \dots (3n-5) (3n+2x)}{3^n (1+x)^{n+1/2}}$ ($n \geq 2; x \neq -1$).
1193. $-2^{n-1} \cos \left(2x + \frac{n\pi}{2} \right)$. 1194. $2^{n-1} \cos \left(2x + \frac{n\pi}{2} \right)$. 1195. $\frac{3}{4} \sin \left(x + \frac{n\pi}{2} \right) -$
 $- \frac{3^n}{4} \sin \left(3x + \frac{n\pi}{2} \right)$. 1196. $\frac{3}{4} \cos \left(x + \frac{n\pi}{2} \right) + \frac{3^n}{4} \cos \left(3x + \frac{n\pi}{2} \right)$.
1197. $\frac{(a-b)^n}{2} \cos \left[(a-b)x + \frac{n\pi}{2} \right] - \frac{(a+b)^n}{2} \cos \left[(a+b)x + \frac{n\pi}{2} \right]$.
1198. $\frac{(a-b)^n}{2} \cos \left[(a-b)x + \frac{n\pi}{2} \right] + \frac{(a+b)^n}{2} \cos \left[(a+b)x + \frac{n\pi}{2} \right]$.
1199. $\frac{(a-b)^n}{2} \sin \left[(a-b)x + \frac{n\pi}{2} \right] + \frac{(a+b)^n}{2} \sin \left[(a+b)x + \frac{n\pi}{2} \right]$.
1200. $\frac{b^n}{2} \cos \left(bx + \frac{n\pi}{2} \right) - \frac{(2a-b)^n}{4} \cos \left[(2a-b)x + \frac{n\pi}{2} \right] - \frac{(2a+b)^n}{4} \times$

$$\times \cos \left[(2a+b)x + \frac{n\pi}{2} \right]. \quad 1201. 4^{n-1} \cos \left(4x + \frac{n\pi}{2} \right). \quad 1202. a^n x \cos \left(ax + \frac{n\pi}{2} \right) + \\ + na^{n-1} \sin \left(ax + \frac{n\pi}{2} \right). \quad 1203. a^n \left[x^3 - \frac{n(n-1)}{a^2} \right] \sin \left(ax + \frac{n\pi}{2} \right) - 2na^{n-1} x \times \\ \times \cos \left(ax + \frac{n\pi}{2} \right). \quad 1204. (-1)^n e^{-x} [x^3 - 2(n-1)x + (n-1)(n-2)].$$

$$1205. e^x \left\{ \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{x^{k+1}} \right\}.$$

$$1206. e^{x/2} 2^{n/2} \cos \left(x + \frac{n\pi}{4} \right). \quad 1207. e^{x/2} 2^{n/2} \sin \left(x + \frac{n\pi}{4} \right).$$

$$1208. \frac{(n-1)! b^n}{(a^2 - b^2 x^2)^n} [(a+bx)^n + (-1)^{n-1} (a-bx)^n] \quad \left(|x| < \left| \frac{a}{b} \right| \right).$$

$$1209. e^{ax} [a^n P(x) + C_n^1 a^{n-1} P^1(x) + \dots + P^{(n)}(x)]. \quad 1210. \frac{1}{2} \{ [(x+n) - \\ - (-1)^n (x-n)] \operatorname{ch} x + [(x+n) + (-1)^n (x-n)] \operatorname{sh} x \}.$$

$$1211. d^n y = e^x \left[x^n + n^2 x^{n-1} + \frac{n^2 (n-1)^2}{2!} x^{n-2} + \dots + n! \right] dx^n.$$

$$1212. \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left\{ \ln x - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right\} dx^n (x > 0). \quad 1214. \text{ а) } (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \left[\cos \left(n\varphi - \frac{n\pi}{2} \right) \times \right. \\ \times \operatorname{ch} ax \cos \left(bx + \frac{n\pi}{2} \right) - \sin \left(n\varphi - \frac{n\pi}{2} \right) \operatorname{sh} ax \sin \left(bx + \frac{n\pi}{2} \right) \Big]; \quad \text{ б) } (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \times \\ \times \left[\cos \left(n\varphi - \frac{n\pi}{2} \right) \operatorname{ch} ax \sin \left(bx + \frac{n\pi}{2} \right) + \sin \left(n\varphi - \frac{n\pi}{2} \right) \operatorname{sh} ax \cos \left(bx + \frac{n\pi}{2} \right) \right].$$

$$\operatorname{rge} \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad 1215. f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p+k} 2^{n-2p+1} \times$$

$$\times (p-k)^n C_{2p}^k \cos \left[(2p-2k)x + \frac{n\pi}{2} \right]. \quad 1216. \text{ а) } \sum_{k=0}^p (-1)^{p+k} \frac{(2p-2k+1)^n}{2^{2p}} C_{2p+1}^k \times$$

$$\times \sin \left[(2p-2k+1)x + \frac{n\pi}{2} \right]; \quad \text{ б) } \sum_{k=0}^{p-1} 2^{n-2p+1} (p-k)^n C_{2p}^k \cos \left[(2p-2k)x + \right.$$

$$\left. + \frac{n\pi}{2} \right]; \quad \text{ в) } \sum_{k=0}^p \left\{ \frac{(2p-2k+1)^n}{2^{2p}} C_{2p+1}^k \cos \left[(2p-2k+1)x + \frac{n\pi}{2} \right] \right\}.$$

$$1218. \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \sin(n \operatorname{arctg} x) (x \neq 0).$$

$$1219. \text{ а) } \frac{n!}{3} [2^{n+1} + (-1)^n];$$

$$\text{ б) } \frac{n(2n-3)!}{2^{n-1}} (n > 1). \quad 1220. \text{ а) } n(n-1)a^{n-2}; \quad \text{ б) } f^{(2k)}(0) = 0, f^{(2k+1)}(0) =$$

$$= (-1)^k (2k)! \quad (k=0, 1, 2, \dots); \quad \text{ в) } f^{(2k)}(0) = 0, f^{(2k+1)}(0) =$$

$$= [1 \cdot 3 \cdot \dots (2k-1)]^2 \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad 1221. \text{ а) } f^{(2k)}(0) = (-1)^k m^2 (m^2 - 2^2) \dots$$

$$\dots [m^2 - (2k-2)^2], \quad f^{(2k-1)}(0) = 0; \quad \text{ б) } f^{(2k)}(0) = 0, f^s(0) = m, f^{(2k+1)}(0) =$$

$$= (-1)^k m (m^2 - 1^2) \dots [m^2 - (2k-1)^2] \quad (k=1, 2, \dots) \quad 1222. \text{ а) } f^{(2k)}(0) =$$

$$= (-1)^{k-1} \cdot 2 \cdot (2k-1)! \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2k-1} \right), \quad f^{(2k-1)}(0) = 0 \quad (k=1, 2, \dots);$$

$$\text{ б) } f^{(2k)}(0) = 2^{2k-1} [(k-1)!]^2, \quad f^{(2k-1)}(0) = 0 \quad (k=1, 2, \dots). \quad 1223. n! \varphi(a).$$

$$1228. L_m(x) = (-1)^m \left[x^m - m^2 x^{m-1} + \frac{m^2(m-1)^2}{1 \cdot 2} x^{m-2} + \dots + (-1)^m m! \right],$$

$$1231. H_m(x) = (2x)^m - \frac{m(m-1)}{1!} (2x)^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2) \cdot (m-3)}{2!} (2x)^{m-4} - \dots$$

1236. При $x=0$ не существует конечной производной $f'(x)$.

1244. $A(-1, -1)$, $C(1, 1)$. 1245. Не верна. 1246. а) $\theta = \frac{1}{2}$;

$$б) \theta = \frac{\sqrt{x^2 + x\Delta x + \frac{1}{3}(\Delta x)^2} - x}{\Delta x} \quad (x \geq 0, \Delta x > 0); \text{ в) } \theta = \frac{x}{\Delta x} \left(\sqrt{1 + \frac{\Delta x}{x}} - 1 \right)$$

($x(x + \Delta x) > 0$); г) $\theta = \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$. 1248. $c = \frac{1}{2}$ или $\sqrt{2}$. 1250. Вообще говоря, нет.

1261. $f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1}$, где c_i ($i=0, 1, \dots, n-1$) постоянны.

1268. При $-\infty < x < \frac{1}{2}$ функция возрастает, при $\frac{1}{2} < x < +\infty$ убывает.

1269. При $-\infty < x < -1$ функция убывает, при $-1 < x < 1$ возрастает; при $1 < x < +\infty$ убывает.

1270. При $-\infty < x < -1$ функция убывает, при $-1 < x < 1$ функция возрастает; при $1 < x < +\infty$ убывает.

1271. При $0 < x < 100$ функция возрастает; при $100 < x < +\infty$ убывает.

1272. Функция возрастает. 1273. В промежутках $\left(\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$ функция возрастает; в промежутках $\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$

убывает ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 1274. В промежутках $\left(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right)$ и

$\left(-\frac{1}{2k+1}, -\frac{1}{2k+2}\right)$ функция возрастает; в промежутках $\left(\frac{1}{2k+2}, \frac{1}{2k+1}\right)$

и $\left(-\frac{1}{2k}, -\frac{1}{2k+1}\right)$ убывает ($k=0, 1, 2, \dots$). 1275. При $-\infty < x < 0$ функция

убывает; при $0 < x < \frac{2}{\ln 2}$ возрастает; при $\frac{2}{\ln 2} < x < +\infty$ убывает.

1276. При $0 < x < n$ функция возрастает; при $n < x < +\infty$ убывает. 1277. Убывает при $-\infty < x < -1$ и $0 < x < 1$; возрастает при $-1 < x < 0$ и $1 < x < +\infty$.

1278. В промежутках $\left(e^{-\frac{7\pi}{12} + 2k\pi}, e^{\frac{13\pi}{12} + 2k\pi}\right)$ функция возрастает; в промежут-

ках $\left(e^{\frac{19\pi}{12} + 2k\pi}, e^{\frac{17\pi}{12} + 2k\pi}\right)$ убывает ($k=0; \pm 1, \pm 2, \dots$). 1283. Не обязательно.

1289. В точке A кривая вогнута вверх; в точке B вогнута вниз; C —точка перегиба.

1299. График при $-\infty < x < 1$ вогнут вверх; при $1 < x < +\infty$ вогнут вниз, $x=1$ —точка перегиба.

1300. При $|x| < \frac{a}{\sqrt{3}}$ —вогнутость

вниз; при $|x| > \frac{a}{\sqrt{3}}$ —вогнутость вверх, $x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}$ —точки перегиба.

1301. При $x < 0$ —вогнутость вниз; при $x > 0$ —вогнутость вверх; $x=0$ —точка перегиба.

1302. Вогнутость вверх. 1303. При $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ —вогнутость вниз; при $(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi$ —вогнутость вверх; $x=k\pi$ —

точки перегиба ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 1304. При $|x| < \sqrt{\frac{1}{2}}$ —вогнутость

вниз; при $|x| > \sqrt{\frac{1}{2}}$ —вогнутость вверх; $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$ —точки перегиба.

1305. При $|x| < 1$ —вогнутость вверх; при $|x| > 1$ —вогнутость вниз;

- $x = \pm 1$ — точки перегиба. 1306. При $e^{\frac{2k\pi - \pi}{4}} < x < e^{\frac{2k\pi + \pi}{4}}$ — вогнутость вверх; при $e^{\frac{2k\pi + \pi}{4}} < x < e^{\frac{2k\pi + 5\pi}{4}}$ — вогнутость вниз; $x = e^{\frac{k\pi + \pi}{4}}$ — точки перегиба ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 1307. Вогнутость вверх при $0 < x < +\infty$. 1309. $h = \frac{1}{a\sqrt{2}}$.
 1310. Вогнута вниз (при $a > 0$). 1318. $\frac{a}{b}$. 1319. 1. 1320. 2. 1321. —2. 1322. $\frac{1}{3}$.
 1323. $-\frac{1}{3}$. 1324. $\frac{1}{3}$. 1325. $\frac{1}{6}$. 1326. $\frac{1}{2}$. 1327. 1. 1328. $\frac{a-b}{3ab}$. 1329. $\frac{1}{6} \ln a$.
 1330. —2. 1331. 1. 1332. $\left(\frac{a}{b}\right)^2$. 1333. $\frac{1}{6}$. 1334. $\frac{12}{3}$. 1335. 1. 1336. 0. 1337. 0.
 1338. 0. 1339. 0. 1340. 0. 1341. 0. 1342. 1. 1343. 1. 1344. —1. 1345. e^k . 1346. e^{-1} .
 1347. $e^{\frac{1}{\pi}}$. 1348. e^{-1} . 1349. 1. 1350. 1. 1351. 1. 1352. $e^{\frac{1}{\sin 3a}} \left(a \neq \frac{k\pi}{2}, k \text{ — целое}\right)$.
 1353. $e^{\frac{1}{2}(\ln^2 a - \ln^2 b)}$. 1354. $\frac{1}{2}$. 1355. $\frac{1}{2}$. 1356. 0. 1357. $-\frac{1}{2}$. 1358. $a^a (\ln a - 1)$.
 1359. $-\frac{e}{2}$. 1360. $\frac{1}{a}$. 1361. $e^{-\frac{3}{\pi}}$. 1362. 1. 1363. $e^{\frac{1}{a}}$. 1363.1. $e^{-\frac{1}{a}}$.
 1363.2. $e^{\frac{1}{3}}$. 1363.3. $e^{-\frac{1}{3}}$. 1363.4. $e^{-\frac{1}{a}}$. 1364. $e^{-\frac{1}{2}}$. 1365. $e^{-\frac{2}{\pi}}$. 1366. e^{-1} .
 1367. $\frac{m}{n-m}$. 1368. $\sqrt{e}$. 1368.1. 0. 1369. $-\frac{1}{6}$. 1370. a . 1371. $\lg a$. 1373.1. $f'(0) =$
 $= -\frac{1}{12}$. 1373.2. $y = \frac{1}{e} \left(x + \frac{1}{2}\right)$. 1374. а) Правило Лопиталья неприменимо, предел равен нулю; б) правило Лопиталья неприменимо, предел равен 1; в) формально примененное правило Лопиталья дает неверный результат, равный 0, предел не существует; г) применение правила Лопиталья незаконно и приводит к неверному результату, равному нулю, предел не существует. 1375. $\frac{4}{3}$.
 1376. $5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^3$. 1377. $1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4)$;
 —48. 1378. $1 + 60x + 1950x^2 + o(x^2)$. 1379. $a + \frac{x}{ma^m - 1} - \frac{(m-1)x^2}{2m^2a^{2m} - 1} + o(x^2)$.
 1380. $\frac{1}{6}x^2 + x^3 + o(x^3)$. 1381. $1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5)$.
 1382. $1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + o(x^4)$. 1383. $x - \frac{x^3}{18} - \frac{x^{13}}{3240} + o(x^{13})$. 1384. $-\frac{x^3}{2}$;
 $-\frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{45} + o(x^5)$. 1385. $x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. 1386. $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$.
 1387. $-\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} + o(x^6)$. 1388. $1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$.
 1389. $(x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$. 1390. $y = a + \frac{x^3}{2a} + o(x^2)$.
 1391. $\frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$. 1392. $\ln x + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{h^{n-1}}{nx^{n-1}} + o(h^n)$.
 1394. а) Меньше $\frac{3}{(n+1)!}$; б) не превышает $\frac{1}{3840}$; в) меньше $2 \cdot 10^{-6}$; г) меньше $\frac{1}{10}$. 1395. $|x| < 0,222 = \arcsin 12^\circ 30'$. 1396. а) 3,1072; б) 3,0171, в) 1,9961;

- г) 1,64872; д) 0,309017; е) 0,182321; ж) $0,67474 = \arcsin 38^\circ 39' 35''$; а) $0,46676 = \arcsin 26^\circ 44' 37''$; н) 1,12117. 1387. а) 2,718281828; б) 0,01745241; в) 0,98769; г) 2,2361; д) 1,04139. 1388. $-\frac{1}{12}$, 1399. $\frac{1}{3}$, 1400. $-\frac{1}{4}$, 1481. $\frac{1}{3}$, 1402. $\frac{1}{6}$, 1403. $\ln^2 a$, 1404. $\frac{1}{2}$, 1405. 0, 1406. $\frac{1}{3}$, 1406.1. $\frac{19}{90}$, 1406.2. $\frac{1}{2}$, 1406.3. $\frac{1}{2}$, 1407. $\frac{x^7}{30}$, 1408. x^3 , 1409. $\frac{x}{2}$, 1410. $a = \frac{4}{3}$; $b = -\frac{1}{3}$, 1410.1. $A = -\frac{2}{5}$; $B = -\frac{1}{15}$, 1410.2. $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{12}$, $C = -\frac{1}{2}$, $D = \frac{1}{12}$, 1411. а) $\frac{2x}{R^2}$; б) $\frac{4}{3}x$; в) $\frac{An}{100}$; г) $\frac{70}{x}$, 1412. $\alpha = \frac{2}{3}$; $\beta = \frac{1}{3}$, 1413. $\frac{\alpha^4}{180}$, где α — половина центрального угла дуги, 1414. Максимум $y = 2\frac{1}{4}$ при $x = \frac{1}{2}$, 1415. Экстремума нет, 1416. Минимум $y = 0$ при $x = 1$, 1417. Минимум $y = 0$ при $x = 0$, если m — четное, и экстремума нет при $x = 0$, если m — нечетное; максимум $y = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$ при $x = \frac{m}{m+n}$; минимум $y = 0$ при $x = 1$, если n — четное, и экстремума нет при $x = 1$, если n — нечетное, 1418. Минимум $y = 2$ при $x = 0$, 1419. Минимум $y = 0$ при $x = -1$; максимум $y = 10^{10}e^{-9} \approx 1234000$ при $x = 9$, 1420. Максимум $y = 1$ при $x = 0$, если n — нечетное, и экстремума нет при $x = 0$, если n — четное, 1421. Минимум $y = 0$ при $x = 0$, 1422. Максимум $y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{4} \approx 0,529$ при $x = \frac{1}{3}$; минимум $y = 0$ при $x = 1$; экстремума нет при $x = 0$, 1423. Минимум $f(x_0) = 0$, если $\varphi(x_0) > 0$ и n — четное; максимум $f(x_0) = 0$, если $\varphi(x_0) < 0$ и n — четное; $f(x_0)$ — не экстремум, если n — нечетное, 1425. Нет, 1427. а) Минимум $f(0) = 0$; б) минимум $f(0) = 0$, 1428. Минимум $f(0) = 0$, 1429. При $x = 1$ максимум $y = 0$; при $x = 3$ минимум $y = -4$, 1430. Минимум $y = 0$ при $x = 0$; максимум $y = 1$ при $x = \pm 1$, 1431. При $x = \frac{5 - \sqrt{13}}{6} \approx 0,23$ минимум $y \approx -0,76$; при $x = 1$ максимум $y = 0$; при $x = \frac{5 + \sqrt{13}}{6} \approx 1,43$ минимум $y \approx -0,05$; при $x = 2$ экстремума нет, 1432. При $x = -1$ максимум $y = -2$; при $x = 1$ минимум $y = 2$, 1433. При $x = -1$ минимум $y = -1$; при $x = 1$ максимум $y = 1$, 1434. При $x = \frac{7}{5}$ минимум $y = -\frac{1}{24}$, 1435. При $x = 0$ и $x = 2$ — краевой минимум $y = 0$; при $x = 1$ максимум $y = 1$, 1436. При $x = \frac{3}{4}$ минимум $y = -\frac{3}{8}\sqrt[3]{2} \approx -0,46$; при $x = 1$ экстремума нет, 1437. При $x = 1$ максимум $y = e^{-1} \approx 0,368$, 1438. При $x = +0$ краевой максимум $y = 0$; при $x = e^{-2} \approx 0,135$ минимум $y = -\frac{2}{e} \approx -0,736$, 1439. При $x = 1$ минимум $y = 0$; при $x = e^2 \approx 7,389$ максимум $y = \frac{4}{e^2} \approx 0,541$, 1440. При $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) максимум $y = (-1)^k + \frac{1}{2}$; при $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) минимум $y = -\frac{3}{4}$, 1441. При $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) максимум $y = 10$; при $x = \pi(k + \frac{1}{2})$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) минимум $y = 5$, 1442. При $x = 1$ максимум $y = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \approx 0,439$, 1443. При $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

минимум $y = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4} + ik\pi}$; при $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

максимум $y = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4} + ik\pi}$. 1444. При $x = -1$ максимум $y = e^{-2} \approx 0,135$; при $x = 0$ минимум $y = 0$ (угловая точка); при $x = 1$ максимум $y = 1$ (угловая точка). 1445. $\frac{1}{2}$; 32. 1446. 2; 66. 1447. 0; 132. 1448. 2; 100,01. 1449. 1; 3. 1450. 0;

$\frac{100}{e} \approx 36,8$. 1451. 0; 1. 1452. 0; $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}) \approx 1,2$. 1453. $-\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{3\pi}{4}} \approx -0,067$; 1.

1454. $m(x) = -\frac{1}{6}$, если $-\infty < x \leq -3$; $m(x) = \frac{1+x}{3+x^2}$, если $-3 < x \leq -1$; $m(x) = 0$, если $-1 < x < +\infty$; $M(x) = \frac{1}{2}$, если $-\infty < x \leq 1$;

$M(x) = \frac{1+x}{3+x^2}$, если $1 < x < +\infty$. 1455. а) $\frac{14^{10}}{2^{11}} \approx 1,77 \cdot 10^7$; б) $\frac{1}{200}$;

в) $\sqrt[3]{3} \approx 1,44$. 1457. $\frac{9+6\sqrt{3}}{4} \approx 4,85$. 1458. $q = -\frac{1}{2}$. 1459. $\frac{4}{27}$. 1460. $g(x) =$

$= (x_1 + x_2)x - \frac{1}{8}(x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2)$; $\Delta = \frac{1}{8}(x_1 - x_2)^2$. 1461. $\frac{2}{3}$. 1462. Один

корень: $(3, +\infty)$. 1463. Один корень: $-\infty < x_1 < -1$, если $h > 27$; три корня: $-\infty < x_1 < -1$, $-1 < x_2 < 3$ и $3 < x_3 < +\infty$, если $-5 < h < 27$;

один корень: $3 < x_3 < +\infty$, если $h < -5$. 1464. Два корня: $-\infty < x_1 < -1$ и $1 < x_3 < +\infty$. 1465. Один корень: $-\infty < x_1 < -1$, если $-\infty < a < -4$; три корня: $-\infty < x_1 < -1$, $-1 < x_2 < 1$, $1 < x_3 < +\infty$, если $-4 < a < 4$; один корень: $1 < x_1 < +\infty$, если $4 < a < +\infty$.

1466. Один корень: $0 < x_1 < 1$, если $-\infty < k < 0$; два корня: $0 < x_1 < \frac{1}{k}$

и $\frac{1}{k} < x_3 < +\infty$, если $0 < k < \frac{1}{e}$; корней нет, если $k > \frac{1}{e}$. 1467. Корней

нет, если $a < 0$; один корень: $-\infty < x_1 < 0$, если $0 < a < \frac{e^3}{4}$; три корня:

$-\infty < x_1 < 0$, $0 < x_2 < 2$ и $2 < x_3 < +\infty$, если $\frac{e^2}{4} < a < +\infty$. 1468. Два

корня при $|a| < 3\sqrt{3}/16$; нет корней при $|a| > 3\sqrt{3}/16$. 1469. Два корня: $0 < |x_1| < \xi$ и $\xi < |x_2| < +\infty$, где $\xi \approx 1,2$ — положительный корень уравнения: $\operatorname{cth} x = x$, если $|k| > \operatorname{sh} \xi \approx 1,50$; корней нет, если $|k| > \operatorname{sh} \xi$.

1470. а) $\frac{p^3}{27} + \frac{q^3}{4} > 0$; б) $\frac{p^3}{27} + \frac{q^3}{4} < 0$. 1471 *). Симметрия относительно начала

координат. Нули функции: $x = 0$ и $x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1,73$. Минимум $y = -2$ при $x = -1$; максимум $y = 2$ при $x = 1$. Точка перегиба $x = 0$, $y = 0$.

1472. Симметрия относительно оси Oy . Нули $x = \pm\sqrt{1+\sqrt{3}} \approx \pm 1,65$. Минимум $y = 1$ при $x = 0$; максимум $y = 1\frac{1}{2}$ при $x = \pm 1$. Точки перегиба:

$x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0,58$; $y = 1\frac{5}{18}$. 1473. Симметрия относительно точки $A(1, 2)$.

Нули: $x = -1$ и $x = 2$. Минимум $y = 0$ при $x = 2$; максимум $y = 4$ при $x = 0$.

*) К задачам на построение графиков не везде даны полные ответы.

Точка перегиба $x=1$, $y=2$. 1474. Симметрия относительно оси Oy . Нули функции: $x=\pm\sqrt{2}\approx\pm 1,41$. Максимум $y=2$ при $x=0$; минимум $y=1-\frac{\sqrt{5}}{2}\approx-0,12$ при $x=\pm\sqrt{2+\sqrt{5}}\approx\pm 2,06$. Точки перегиба: $x_{1,2}=\pm 0,77$, $y_{1,2}=1,04$; $x_{3,4}\approx\pm 2,67$, $y_{3,4}\approx-0,010$. Асимптота $y=0$. 1475. Точки разрыва: $x=2$ и $x=3$. Нули: $x=\pm 1$. Минимум $y=- (10-\sqrt{96})\approx-0,20$ при $x=\frac{7-\sqrt{24}}{5}\approx 0,42$; максимум $y=- (10+\sqrt{96})\approx-19,80$ при $x=\frac{7+\sqrt{24}}{5}\approx 2,38$. Точка перегиба $x\approx-0,58$, $y\approx-0,07$. Асимптоты: $x=2$, $x=3$ и $y=1$. 1476. Точки разрыва: $x_1=-1$ и $x_2=1$. Нуль функции $x=0$. Точек экстремума нет. Точка перегиба $x\approx-0,22$, $y\approx-0,19$. Асимптоты: $x=-1$, $x=1$ и $y=0$. 1477. Нуль функции $x=0$. Точка разрыва $x=-1$. Минимум $y=0$ при $x=0$; максимум $y=-\frac{13}{27}$ при $x=-4$. Точек перегиба нет. Асимптоты: $x=-1$ и $y=x-3$. 1478. Минимум $y=0$ при $x=-1$; точка перегиба $x=-4$, $y=\frac{81}{625}$. Асимптоты: $x=1$ и $y=1$. 1479. Максимумы $y=-\frac{34\sqrt{17}+142}{32}\approx-8,82$ при $x=-\frac{3+\sqrt{17}}{2}\approx-3,56$ и $y=0$ при $x=0$; минимум $y=\frac{34\sqrt{17}-142}{32}\approx-0,06$ при $x=\frac{\sqrt{17}-3}{2}\approx 0,56$. Точка перегиба $x=\frac{1}{5}$, $y=-\frac{1}{45}$. Асимптоты: $x=-1$ и $y=x-3$. 1480. Симметрия относительно начала координат. Точек экстремума нет; точка перегиба $x=0$, $y=0$. Асимптоты: $x=-1$, $x=1$ и $y=0$. 1481. Минимум $y=13\frac{1}{2}$ при $x=5$; точки перегиба $x=-1$, $y=0$. Асимптоты: $x=1$ и $y=x+5$. 1482. Минимум $y=2\frac{2}{3}$ при $x=2$; максимум $y\approx-3,2$ при $x\approx-2,4$; точка перегиба $x=0$, $y=8$. Асимптоты: $x=-1$ и $y=x$. 1483. Симметрия относительно оси Oy . Нули функции: $x=\pm\frac{\sqrt{10}}{4}\approx\pm 0,79$. Точек экстремума нет. Точки перегиба: $x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\approx\pm 0,71$, $y=-2\frac{2}{3}$. Асимптоты: $x=-1$, $x=0$, $x=1$ и $y=0$. 1484. Область существования: $0\leq x<+\infty$. Нули: $x=0$ и $x=3$. Минимум $y=-2$ при $x=1$; краевой максимум $y=0$ при $x=0$. Вогнутость вверх. 1485. Область существования: $|x|\leq 2\sqrt{2}\approx 2,83$. Симметрия относительно начала координат и осей координат. Нули: $x=0$ и $x=\pm 2\sqrt{2}$. Максимум $|y|=4$ при $x=\pm 2$, минимум $|y|=0$ при $x=0$; краевой минимум $|y|=0$ при $x=\pm 2\sqrt{2}$. Точек перегиба нет. 1485.1. Нуль функции $x=2$. Минимум $y=-\sqrt{5}\approx-2,24$ при $x=-0,5$. Точка перегиба $x_1=-\frac{3+\sqrt{41}}{8}\approx-1,18$; $y_1\approx-2,06$ и $x_2=\frac{\sqrt{41}-3}{8}\approx 0,42$; $y_2\approx-1,46$. Асимптоты: $y=-1$ при $x\rightarrow-\infty$ и $y=1$ при $x\rightarrow+\infty$. 1486. Область существования: $1\leq x\leq 2$ и $3\leq x<+\infty$. Нули: $x=1$, $x=2$ и $x=3$. Максимум $|y|=\frac{1}{3}\sqrt{12}\approx 0,62$ при $x=\frac{6-\sqrt{3}}{3}\approx 1,42$;

краевые минимумы $|y|=0$ при $x=1, 2$ и 3 . 1487. Минимум $y=0$ при $x=1$; максимум $y=\frac{2}{3}\sqrt[3]{4} \approx 1,06$ при $x=-\frac{1}{3}$; точка перегиба $x=-1$,

$y=0$. Асимптота $y=x-\frac{1}{3}$. 1488. Симметрия относительно оси Oy . Минимум $y=-1$ при $x=0$. Вогнутость вниз. Асимптота $y=0$. 1489. Симметрия относительно начала координат. Нуль функции: $x=0$. Минимум $y=-\sqrt[3]{16} \approx -2,52$ при $x=-2$; максимум $y=\sqrt[3]{16}$ при $x=2$. Точка перегиба: $x=0$, $y=0$. Асимптота: $y=0$. 1490. Симметрия относительно оси Oy . Минимум $y=\sqrt[3]{4} \approx 1,59$ при $x=\pm 1$; максимум $y=2$ при $x=0$. Вогнутость вниз. 1491. Симметрия относительно начала координат. Точка разрыва: $x=\pm 1$.

Нуль функции: $x=0$. Минимум $y=\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}} \approx 1,38$ при $x=\sqrt[3]{3}$; максимум $y=-\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}}$ при $x=-\sqrt[3]{3}$. Точки перегиба: $x_1=0$, $y_1=0$ и $x_{2,3}=\pm 3$,

$y_{2,3}=\pm 1\frac{1}{2}$. 1492. Область существования функции: $|x| \geq 1$. Симметрия относительно оси Oy . Краевой минимум $y=0$ при $x=\pm 1$. Вогнутость вниз. Асимптоты: $y=\frac{x}{2}$ при $x \rightarrow +\infty$ и $y=-\frac{x}{2}$ при $x \rightarrow -\infty$. 1493. Область существования функции: $x > 0$. Минимум $y=\frac{3}{2}\sqrt[3]{3} \approx 2,60$ при $x=\frac{1}{2}$.

Вогнутость вверх. Асимптоты $y=x+\frac{3}{2}$ и $x=0$. 1494. Область существования: $x \geq 0$ и $x < -3$. Нуль функции $x=\frac{5+\sqrt{13}}{2} \approx 4,30$. Минимум $y=13$ при $x=-4$; краевой максимум $y=1$ при $x=0$. Вогнутость вверх. Асимптоты: $y=\frac{5}{2}-2x$ при $x \rightarrow -\infty$; $y=-\frac{1}{2}$ при $x \rightarrow +\infty$; $x=-3$ при $x \rightarrow -3-0$.

1495. Минимум $y=0$ при $x=0$; максимум $y=-\sqrt[3]{4} \approx -1,59$ при $x=-2$. Точки перегиба: $x_1=-(2-\sqrt[3]{3}) \approx -0,27$, $y_1=\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{27}-5}{2}} \approx 0,46$; $x_2=$

$-(2+\sqrt[3]{3}) \approx -3,73$, $y_2=-\sqrt[3]{\frac{5+\sqrt[3]{27}}{2}} \approx -1,72$. Асимптота $x=-1$.

1496. Симметрия относительно оси Oy . Функция положительная. Максимум $y=\sqrt[3]{3} \approx 1,73$ при $x=0$, минимум $y=\sqrt[3]{2} \approx 1,41$ при $x=\pm 1$. Точки перегиба $x_{1,2} \approx \pm 0,47$; $y_{1,2} \approx 1,14$ и $x_{3,4} \approx \pm 4,58$, $y_{3,4} \approx 4,55$. Асимптоты $y=\pm x$. 1497. Период функции: $T=2\pi$; основная область $0 \leq x < 2\pi$. Нули функции: $x_1=$

$\pi + \arcsin \frac{\sqrt[3]{5}-1}{2} \approx 1,21\pi$ и $x_2=2\pi - \arcsin \frac{\sqrt[3]{5}-1}{2} \approx 1,79\pi$. Минимумы $y=1$ при $x=\frac{\pi}{2}$ и $y=-1$ при $x=\frac{3\pi}{2}$; максимум $y=1\frac{1}{4}$ при $x=\frac{\pi}{6}$ и $x=\frac{5\pi}{6}$.

Точки перегиба: $x_1=\arcsin \frac{1+\sqrt[3]{33}}{8} \approx 0,32\pi$, $y_1=\frac{19+3\sqrt[3]{33}}{32} \approx 1,13$; $x_2=$
 $=\pi - \arcsin \frac{1+\sqrt[3]{33}}{8} \approx 0,68\pi$, $y_2=\frac{19+3\sqrt[3]{33}}{32}$; $x_3=\pi + \arcsin \frac{\sqrt[3]{33}-1}{8} \approx$

$\approx 1,20\pi$, $y_3 = \frac{19-3\sqrt{33}}{32} \approx 0,055$; $x_4 = 2\pi - \arcsin \frac{\sqrt{33}-1}{8} \approx 1,80\pi$, $y_4 =$
 $= \frac{19-3\sqrt{33}}{32}$. 1498. Период функции 2π ; основная область $-\pi \leq x \leq \pi$.
 Симметрия относительно начала координат. Нули: $x_1 = 0$ и $x_{2,3} = \pm \pi$. Минимум
 $y = -\frac{15}{8}\sqrt{15} \approx -7,3$ при $x = -\arccos \frac{1}{4} \approx -0,42\pi$; максимум $y =$
 $= \frac{15}{8}\sqrt{15} \approx 7,3$ при $x = \arccos \frac{1}{4} \approx 0,42\pi$. Точки перегиба: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$;
 $x_{2,3} = \pm \arccos \left(-\frac{7}{8}\right) \approx \pm 0,84\pi$; $y_{2,3} = \pm \frac{21}{32}\sqrt{15} \approx \pm 2,54$; $x_{4,5} = \pm \pi$,
 $y_{4,5} = 0$. 1499. Период функции: $T = 2\pi$, основная область: $-\pi \leq x \leq \pi$.
 Симметрия относительно начала координат. Нули: $x_1 = 0$ и $x_{2,3} = \pm \pi$. Ми-
 нимумы: $y = -\frac{2}{3}\sqrt{2} \approx -0,94$ при $x = -\frac{3\pi}{4}$ и $x = -\frac{\pi}{4}$, $y = \frac{2}{3}$ при $x =$
 $= \frac{\pi}{2}$; максимумы: $y = -\frac{2}{3}$ при $x = -\frac{\pi}{2}$, $y = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ при $x = \frac{\pi}{4}$ и $x =$
 $= \frac{3\pi}{4}$. Точки перегиба: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm \arcsin \sqrt{\frac{5}{6}} \approx \pm 0,37\pi$, $y_{2,3} =$
 $= \pm \frac{4}{27}\sqrt{30} \approx \pm 0,81$; $x_{4,5} = \pm \left(\pi - \arcsin \sqrt{\frac{5}{6}}\right) \approx \pm 0,63\pi$, $y_{4,5} = \pm \frac{4}{27}\sqrt{30}$;
 $x_{6,7} = \pm \pi$, $y_{6,7} = 0$. 1500. Период функции: $T = 2\pi$; основная область
 $[-\pi, \pi]$. Симметрия относительно оси Oy . Нули функции: $x_{1,2} =$
 $= \pm \arccos \frac{1-\sqrt{3}}{2} \approx \pm 0,62\pi$. Минимумы: $y = \frac{1}{2}$ при $x = 0$; $y = -\frac{1}{2}$
 при $x = \pm \pi$ максимумы: $y = \frac{3}{4}$ при $x = \pm \frac{\pi}{3}$. Точки перегиба: $x_{1,2} =$
 $= \pm \arccos \frac{1+\sqrt{33}}{8} \approx \pm 0,18\pi$, $y_{1,2} \approx 0,63$; $x_{3,4} = \pm \arccos \frac{1-\sqrt{33}}{8} \approx$
 $\approx \pm 0,70\pi$, $y_{3,4} \approx -0,44$. 1501. Период функции: $T = \frac{\pi}{2}$; основная область
 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Симметрия относительно оси Oy . Функция положительная. Мак-
 симум $y = 1$ при $x = 0$; минимум $y = \frac{1}{2}$ при $x = \pm \frac{\pi}{4}$. Точки перегиба
 $x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{8}$, $y_{1,2} = \frac{3}{4}$. 1502. Период функции $T = \pi$; основная область
 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Симметрия относительно оси Oy . Нули функции: $x_1 = 0$ и $x_{2,3} =$
 $= \pm \frac{\pi}{3}$. Минимумы: $y = 0$ при $x = 0$ и $y = -1$ при $x = \pm \frac{\pi}{2}$; максимум
 $y = \frac{9}{16}$ при $x = \pm \arccos \frac{1}{4} \approx \pm 0,21\pi$. Точки перегиба: $x_{1,2} =$
 $= \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1+\sqrt{129}}{16} \approx \pm 0,11\pi$, $y_{1,2} \approx 0,29$; $x_{3,4} = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1-\sqrt{129}}{16} \approx$
 $\approx \pm 0,36\pi$, $y_{3,4} \approx -0,24$. 1503. Период функции: $T = \pi$, основная область:
 $0 \leq x \leq \pi$. Точка разрыва: $x = \frac{3\pi}{4}$. Нули: $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$. Экстремумов нет,
 функция возрастает. Точка перегиба: $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Асимптота $x = \frac{3\pi}{4}$.

1504. Период функции $T=2\pi$, основная область $[-\pi, \pi]$. Симметрия относительно оси Oy . Нули функции: $x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{2}$. Минимум $y=1$ при $x=0$; максимум $y=-1$ при $x=\pm\pi$. Точки перегиба: $x_{1,2} = \frac{\pi}{2}$; $y_{1,2}=0$. Асимптоты $x=\pm\frac{\pi}{4}$ и $x=\pm\frac{3\pi}{4}$. 1504.1. Период функции $T=2\pi$, основная область

$-\pi \leq x \leq \pi$. Функция нечетная. Минимум $y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \approx -0,58$ при

$x = -\frac{2\pi}{3}$; максимум $y = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,58$ при $x = \frac{2\pi}{3}$. Точка перегиба $x_1=0$,

$y_1=0$; $x_{2,3} = \mp\pi$, $y_{2,3}=0$. 1505. Центры симметрии ($k\pi, 2k\pi$). Нули функции:

$x_1=0$, $x_{2,3} \approx \pm 0,37\pi$, ... Максимумы $y = \frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi$ при $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$;

минимумы $y = -\left(\frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi\right)$ при $x = -\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$. Точки

перегиба: $x=k\pi$, $y=2k\pi$. Асимптоты: $x = \frac{2k+1}{2}\pi$ (k —целое). 1506. Сим-

метрия относительно прямой $x=1$. Функция положительна. Максимум

$y=e$ при $x=1$. Точки перегиба $x_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_{1,2} = \sqrt{e} \approx 1,65$.

Асимптота $y=0$. 1507. Симметрия относительно оси Oy . Функция поло-

жительна. Максимум $y=1$ при $x=0$. Точки перегиба: $x_{1,2} =$

$\pm \sqrt{\frac{3}{2}} \approx \pm 1,22$, $y_{1,2} = \frac{5}{2} e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,56$. Асимптота $y=0$. 1508. Функция

положительна. Минимум $y=1$ при $x=0$. Вогнутость вверх. Асимптота

$y=x$ при $x \rightarrow +\infty$. 1509. Функция неотрицательная; нуль $x=0$. Минимум

$y=0$ при $x=0$; максимум $y = \sqrt[3]{\frac{4}{9}} e^{-\frac{2}{3}} \approx 0,39$ при $x = \frac{2}{3}$. Точки перегиба:

$x_1 = \frac{2-\sqrt{6}}{3} \approx -0,15$, $y_1 \approx 0,34$ и $x_2 = \frac{2+\sqrt{6}}{3} \approx 1,48$, $y_2 \approx 0,30$.

Асимптота $y=0$ при $x \rightarrow +\infty$. 1509.1. Функция неотрицательная. Минимум

$y=0$ при $x=k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$); максимумы $y = \frac{1}{2} e^{-\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}$ при

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Точки перегиба $x_k = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$, $y_k = \frac{1}{4} e^{-\left[2k+\frac{1}{2}(-1)^k\right]\pi}$.

1510. Функция положительна при $x > -1$ и отрицательна при $x < -1$.

Минимум $y=1$ при $x=0$. Вогнутость вверх при $x > -1$ и вогнутость вниз

при $x < -1$. 1511. Симметрия относительно оси Oy . Функция неотрицатель-

ная; нуль $x=0$. Минимум $y=0$ (угловая точка) при $x=0$. Вогнутость вниз.

1512. Область существования функции: $x > 0$. Нуль функции $x=1$. Мак-

симум $y = \frac{2}{e} \approx 0,74$ при $x=e^2 \approx 7,39$. Точка перегиба: $x=e^{\frac{1}{2}} \approx 14,33$,

$y = \frac{8}{3} e^{-\frac{1}{3}} \approx 0,70$. Асимптоты: $x=0$ при $x \rightarrow +0$ и $y=0$ при $x \rightarrow +\infty$.

1513. Симметрия относительно начала координат. Нуль $x=0$. Точек экстре-

мума нет; функция возрастающая. Точка перегиба: $x=0$, $y=0$. 1514. Сим-

метрия относительно начала координат. Нуль функции $x=0$. Функция воз-

растает. Вогнутость вверх при $x > 0$ и вогнутость вниз при $x < 0$; $O(0, 0)$ —

точка перегиба. 1515. Область существования функции: $|x| < 1$. Симметрия относительно начала координат. Функция монотонно возрастает. Вогнутость вверх при $x > 0$ и вогнутость вниз при $x < 0$; точка перегиба: $x = 0, y = 0$. Асимптоты: $x = \pm 1$. 1516. Симметрия относительно начала координат. Нуль функции: $x = 0$. Точек экстремума нет, функция возрастающая. Точка перегиба: $x = 0, y = 0$. Асимптоты: $y = x - \frac{\pi}{2}$ при $x \rightarrow -\infty$ и $y = x + \frac{\pi}{2}$ при

$x \rightarrow +\infty$. 1517. Нуль функции $x \approx -5,95$. Минимум $y = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \approx 1,285$ при $x = 1$; максимум $y = -\frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4} \approx 1,856$ при $x = -1$. Вогнутость вверх при $x > 0$ и вогнутость вниз при $x < 0$; точка перегиба $x = 0, y = \frac{\pi}{2}$. Асимптоты: $y = \frac{x}{2} + \pi$ при $x \rightarrow -\infty$ и $y = \frac{x}{2}$ при $x \rightarrow +\infty$. 1518. Симметрия относительно оси Oy . Функция неотрицательна; нуль $x = 0$. Минимум $y = 0$ при $x = 0$. Вогнутость вверх. Асимптоты: $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ при $x \rightarrow -\infty$ и $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ при $x \rightarrow +\infty$. 1519. Симметрия относительно начала координат.

Нуль функции $x = 0$. Минимум $y = -\frac{\pi}{2}$ (угловая точка) при $x = 1$; максимум $y = \frac{\pi}{2}$ (угловая точка) при $x = -1$. Точка перегиба $x = 0, y = 0$. Асимптота $y = 0$. 1520. Симметрия относительно оси Oy . Функция неотрицательна; нуль $x = 0$. Минимум $y = 0$ при $x = 0$ (угловая точка). Вогнутость вниз. Асимптота $y = \pi$. 1521. Точка разрыва функции $x = 0$. Нуль функции $x = -2$. Минимум $y = 4\sqrt{e} \approx 6,59$ при $x = 2$; максимум $y = \frac{1}{e} \approx 0,37$ при $x = -1$.

Точка перегиба $x = -\frac{2}{5}, y = \frac{8}{5}e^{-1/5} \approx 0,13$. Асимптоты: $x = 0$ и $y = x + 3$.

1522. Область существования функции $|x| \geq 1$. Симметрия относительно оси Oy . Краевой максимум $y = 2^{1/2} \approx 2,67$ при $x = \pm 1$. Вогнутость вверх. Асимптота $y = 1$. 1523. Область существования функции $x < 1$ и $x > 2$. Точки пересечения с осями координат $(0, \ln 2)$ и $(1/3, 0)$. Максимум $y \approx 1,12$ при $x = \frac{1 - \sqrt{10}}{3} \approx -0,72$. Асимптоты $x = 1, x = 2$ и $y = 0$. 1524. Область существования функции $|x| \leq a$. Точки пересечения с осями координат: $(0, -a)$ и $(0, 67a, 0)$ (приблизительно!). Функция монотонно возрастает. Краевой минимум $y = -\frac{\pi}{2}a$ при $x = -a$ и краевой максимум $y = \frac{\pi}{2}a$ при $x = a$. Вогнутость вверх.

1525. Область существования функции: $x \leq 0$ и $x \geq \frac{2}{3}$. Краевой минимум $y = 0$ при $x = 0$; краевой максимум $y = \pi$ при $x = \frac{2}{3}$. Вогнутость вниз при $x \leq 0$ и вогнутость вверх при $x \geq \frac{2}{3}$. Асимптота $y = \frac{\pi}{3}$. 1526. Область существования: $x > 0$. Функция положительна. Минимум $y = \left(\frac{1}{e}\right)^{1/e} \approx 0,692$ при $x = \frac{1}{e} \approx 0,368$; краевой максимум $y = 1$ при $x = +0$. Вогнутость

вверх. 1527. Область существования функции $x > 0$. Краевой минимум $y=0$

при $x \rightarrow +0$; максимум $y=e^{\frac{1}{e}} \approx 1,44$ при $x=e$. Асимптота $y=1$.

1528. Область существования: $x > -1$, $x \neq 0$. Функция положительна. Устранимая точка разрыва: $x=0$. Точек экстремума нет, функция убывающая. Вогнутость вверх. Асимптоты: $x=-1$ и $y=1$. 1529. Функция монотонна при $x > 0$. Краевой минимум $y=0$ при $x \rightarrow +0$. Асимптота

$y=e\left(x-\frac{1}{2}\right)$. 1530. Функция положительна. Симметрия относительно оси Oy . Точки разрыва: $x=\pm 1$. Минимум $y=e$ при $x=0$; максимум

$y=\frac{1}{4\sqrt{e}} \approx 0,15$ при $x=\pm \sqrt{3}$. Четыре точки перегиба. Асимптоты: $x=-1$

при $x \rightarrow -1+0$; $x=1$ при $x \rightarrow 1-0$ и $y=0$ при $x \rightarrow \infty$. 1531. Функции x и y — неотрицательны; $x_{\min}=0$ при $t=-1$; $y_{\min}=0$ при $t=1$. Вогнутость вверх при $t > -1$ и вогнутость вниз при $t < -1$. 1532. Точки пересечения с осями координат: $(0, 0)$ при $t=0$; $(\pm 2\sqrt{3}-3, 0)$ при $t=\pm \sqrt{3}$

и $(0, -2)$ при $t=2$; $x_{\max}=1$ и $y_{\max}=2$ при $t=1$ (точка возврата); $y_{\min}=-2$ при $t=-1$. Вогнутость вверх при $t < 1$ и вогнутость вниз при

$t > 1$. 1533. Точка пересечения с осями координат: $(0, 0)$ при $t=0$; $x_{\max}=0$ при $t=0$, $x_{\min}=4$ при $t=2$; y убывает при возрастании t . Точка перегиба

$(-0,08; 0,3)$ при $t \approx -0,32$ (приближенно). Асимптоты: $y=0$, $x=-\frac{1}{2}$

и $y=\frac{x}{2}-\frac{3}{4}$. 1534. Точка пересечения с осью Oy : $(0, 1)$ при $t=0$; точка

пересечения с осью Ox : $(-1, 0)$ при $t=\infty$. Краевые экстремумы: $x_{\min}=0$ и $y_{\max}=1$ при $t=0$; $x_{\max}=-1$ и $y_{\min}=0$ при $t=\infty$. Точек перегиба

нет. Асимптота $y=\frac{1}{2}$. Вогнутость вверх при $|t| > 1$ и вогнутость вниз

при $|t| < 1$. 1535. Функции x и y — положительные; $x_{\min}=1$ и $y_{\min}=1$ при $t=0$ (точка возврата). При $t < 0$ — вогнутость вверх; при $t > 0$ — вогнутость вниз. Асимптота $y=2x$ при $t \rightarrow +\infty$. 1536. Основная область:

$[0, \pi]$. Точки пересечения с осями координат: $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ при $t=\frac{\pi}{6}$;

$\left(0, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ при $t=\frac{\pi}{4}$; $(-a, 0)$ при $t=\frac{\pi}{2}$; $\left(0, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ при $t=\frac{3\pi}{4}$; $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$

при $t=\frac{5\pi}{6}$. Экстремумы: $x_{\max}=a$ и $y_{\max}=a$ при $t=0$; $y_{\min}=-a$ при

$t=\frac{\pi}{3}$; $x_{\min}=-a$ при $t=\frac{\pi}{2}$; $y_{\max}=a$ при $t=\frac{2\pi}{3}$; $x_{\max}=a$ и $y_{\min}=-a$

при $t=\pi$. Вогнутость вверх при $0 < t < \frac{\pi}{2}$; вогнутость вниз при $\frac{\pi}{2} < t < \pi$.

1537. Функции x и y — неотрицательные и периодические; основная область $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Экстремумы: $x_{\min}=0$ и $y_{\max}=1$ при $t=\frac{\pi}{2}$ и $x_{\max}=1$

и $y_{\min}=0$ при $t=0$. Вогнутость вверх. 1538. Область существования: $t > 0$. Симметрия относительно прямой $x+y=0$. Экстремумы: $x_{\min}=-$

$\frac{1}{e} \approx -0,37$, $y=-e \approx -2,72$ при $t=\frac{1}{e}$; $y_{\max}=\frac{1}{e}$, $x=e$ при $t=e$.

Точки перегиба: $x_1=-\sqrt{2e^{-\frac{1}{e^2}}} \approx -0,34$, $y_1=-\sqrt{2e^{\frac{1}{e^2}}} \approx -5,82$ при $t=e^{-\frac{1}{e^2}} \approx 0,24$ и $x_2=\sqrt{2e^{\frac{1}{e^2}}}$, $y_2=\sqrt{2e^{-\frac{1}{e^2}}}$ при $t=e^{\frac{1}{e^2}} \approx 4,10$. При

$t=\frac{1}{e}$ — изменение знака вогнутости. Асимптоты: $x=0$ и $y=0$. 1539. Функции

x и y — периодические с периодом $T=2\pi$, основная область $-\pi < t < \pi$. Симметрия кривой относительно осей координат. Кривая имеет две ветви. Экстремумы: $x_{\min}=a$, $y=0$ при $t=0$; $x_{\max}=-a$, $y=0$ при $t=\pm\pi$. Вогнутость вверх при $-\pi < t < -\pi/2$ и $0 < t < \pi/2$; вогнутость вниз при $-\pi/2 < t < 0$ и $\pi/2 < t < \pi$. 1540. Симметрия относительно оси Oy ; $y_{\min}=0$, $x=0$ при $t=0$. Вогнутость вниз. 1541. Параметрические уравнения:

$x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^3}{1+t^3}$ ($-\infty < t < +\infty$). Симметрия относительно прямой $y=x$. Точка пересечения с осями координат $O(0, 0)$ (двойная точка). $x_{\max}=a\sqrt[3]{4} \approx 1,59a$ при $y=a\sqrt[3]{2} \approx 1,2a$; $y_{\max}=a\sqrt[3]{4}$ при $x=a\sqrt[3]{2}$. Асимптота $x+y+a=0$. 1542. Симметрия относительно начала координат, осей координат и биссектрис координатных углов. $O(0, 0)$ — изолированная точка. Точки пересечения с осями координат: $(\pm 1, 0)$ и $(0, \pm 1)$.

$|x|_{\min}=1$ при $y=0$; $|x|_{\max}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \approx 1,10$ при $|y|=$

$=\sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0,71$; $|y|_{\min}=1$ при $x=0$ $|y|_{\max}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ при $|x|=$

$=\sqrt{\frac{1}{2}}$. 1543. Параметрические уравнения: $x=\frac{1-t^3}{t^2}$, $y=\frac{1-t^3}{t}$, где

$t=\frac{y}{x}$ ($-\infty < t < +\infty$). Кривая имеет две ветви. Симметрия относительно

прямой $x+y=0$. Экстремумы: $x_{\min}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2} \approx 1,89$, $y=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{4} \approx -2,38$

при $t=-\sqrt[3]{2} \approx -1,26$; $y_{\max}=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$, $x=\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$ при $t=-\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx$

$\approx -0,79$. Точки перегиба: $x_1 \approx 2,18$, $y_1 \approx -4,14$ при $t=-\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})} \approx$

$\approx -1,90$; $x_2 \approx 4,14$, $y_2 \approx -2,18$ при $t=-\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7-3\sqrt{5})} \approx -0,53$;

при $t=-\sqrt[3]{2}$ — изменение знака вогнутости. 1544. Кривая состоит из прямой

$y=x$ и гиперболической ветви $x=(1+t)^{\frac{1}{t}}$, $y=(1+t)^{1+\frac{1}{t}}$ ($-1 < t < +\infty$). (e, e) — двойная точка. Вогнутость вверх при $x \neq y$. Асимптоты: $x=1$ и $y=1$. 1545. Область существования: $|x| \geq \ln(1+\sqrt{2}) \approx 0,88$. Симметрия

относительно осей координат. Краевой минимум $|y|=0$ при $x=\pm \ln(1+\sqrt{2})$. Вогнутость вниз при $y > 0$ и вогнутость вверх при $y < 0$. Асимптоты: $y=x$

и $y=-x$. 1546. Область существования функции: $r \geq 0$, $|\varphi| < \alpha$, где $\alpha =$

$=\arccos\left(-\frac{a}{b}\right)$. Кривая замкнута. Симметрия относительно полярной оси.

Максимум $r=a+b$ при $\varphi=0$; краевой минимум $r=0$ при $\varphi=\pm\alpha$.

1547. Область существования: $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi$, $\frac{4\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{3}$. Функ-

ция r — периодическая с периодом $\frac{2\pi}{3}$. Кривая замкнута и имеет три одина-

ковых лепестка. Оси симметрии: $\varphi=\frac{\pi}{6}$, $\varphi=\frac{5\pi}{6}$ и $\varphi=\frac{3\pi}{2}$. Начало коорди-

нат $O(0, 0)$ — тройная точка. При $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ имеем: максимум $r=a$ при $\varphi =$

$=\frac{\pi}{6}$ и минимум $r=0$ при $\varphi=0$ и $\varphi=\frac{\pi}{3}$. 1548. Область существования

функции: $|\varphi| < \frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{2} < |\varphi| < \frac{5}{6}\pi$, период $\frac{2\pi}{3}$. Минимум $r=a$ при $\varphi=0$

и $\varphi=\pm\frac{2\pi}{3}$. Асимптоты: $\varphi=\pm\frac{\pi}{6}$, $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$ и $\varphi=\pm\frac{5\pi}{6}$. 1549. Спираль, имеющая начало координат своей асимптотической точкой; r монотонно убывает при возрастании φ . Асимптота $\varphi=1$. 1550. Область существования $r \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,62$. Краевой максимум $\varphi=\pi$ при $r=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; минимум

$\varphi=\arccos\frac{1}{4} \approx \arcsin 75^\circ 30'$ при $r=2$. Асимптота $r \cos \varphi=1$ при $r \rightarrow +\infty$.

1551. Семейство парабол с вершинами $(1, a-1)$ (минимумы). Точки пересечения с осями координат $(0, a)$ и $(1 \mp \sqrt{1-a}, 0)$ (при $a \leq 1$). Вогнутость вверх. 1552. Семейство гипербол при $a \neq 0$ и прямая $y=x$ при $a=0$. Минимумы $y=2|a|$ при $x=|a|$ и максимумы $y=-2|a|$ при $x=-|a|$ ($a \neq 0$). Асимптоты $y=x$ и $x=0$. 1553. Семейство эллипсов при $0 < a < +\infty$; семейство гипербол при $-\infty < a < 0$; прямая $y=x$ при $a=0$. Все кривые семейств проходят через точки $(-1, -1)$ и $(1, 1)$. При $y \geq x$ имеем: 1) максимум $y=\sqrt{1+a}$ при $x=$

$=\frac{1}{\sqrt{1+a}}$, если $a > 0$; максимум $y=-\sqrt{1+a}$ при $x=-\frac{1}{\sqrt{1+a}}$, если $-1 < a < 0$; краевые минимумы $y=\mp 1$ при $x=\mp 1$ ($a \neq 0$); 2) вогнутость вниз. При $y \leq x$ имеем: 1) минимум $y=-\sqrt{1+a}$ при $x=-\frac{1}{\sqrt{1+a}}$, если

если $a > 0$; минимум $y=\sqrt{1+a}$ при $x=\frac{1}{\sqrt{1+a}}$, если $-1 < a < 0$; краевые максимумы $y=\mp 1$ при $x=\mp 1$; 2) вогнутость вверх. Асимптоты: $y=(1+\sqrt{-a})x$ и $y=(1-\sqrt{-a})x$ при $a < 0$. 1554. Семейство показательных кривых, если $a \neq 0$; прямая $y=1+\frac{x}{2}$, если $a=0$. Общая точка семейства $(0, 1)$. Минимумы $y=\frac{1}{2a}(1+\ln 2a)$ при $x=\frac{1}{a} \ln 2a$, если $a > 0$;

y монотонно возрастает, если $a \leq 0$. Асимптота $y=\frac{x}{2}$. 1555. Семейство кривых, проходящих через точку $(0, 0)$ и имеющих в ней общее касание с прямой $y=x$. Максимум $y=ae^{-1} \approx 0,37a$ при $x=a$, если $a > 0$; минимум $y=ae^{-1}$ при $x=a$, если $a < 0$. Точка перегиба $x=2a$, $y=2ae^{-2} \approx 0,27a$. Асимптота $y=0$. 1558. $\frac{a^{m+n} m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$. 1559. $(m+n) \left(\frac{a^{mn}}{m^m n^n} \right)^{\frac{1}{m+n}}$. 1560. Основание системы логарифмов не должно превышать $e^e \approx 1,445$. 1561. Квадрат со стороной $\sqrt{S}$. 1562. Острые углы треугольника 30° и 60° . 1563. Высота

банки $H=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ равна диаметру ее основания; полная поверхность

$P=\sqrt[3]{54\pi V^2}$. 1564. $\cos \varphi = \frac{\cos \alpha + \sqrt{\cos^2 \alpha + 8}}{4}$, где 2α —дуга сегмента и 2φ —дуга, стягиваемая стороной прямоугольника. 1565. Стороны прямоугольника $a\sqrt{2}$ и $b\sqrt{2}$. 1566. Если $h > b$, то периметр P вписанного прямоугольника с основанием x и высотой y имеет краевой максимум при $y=h$; если $h < b$, то P имеет краевой минимум при $y=0$; если $h=b$, то пери-

- метр P постоянен. 1567. $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$, $h = d \sqrt{\frac{2}{3}}$. 1568. Измерения параллелепипеда $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ и $\frac{R}{\sqrt{3}}$. 1569. $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}} R^3$. 1570. $\pi R^2 (1 + \sqrt{5}) \approx 81\%$ поверхности шара. 1571. Объем конуса равен удвоенному объему шара. 1572. $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}} l^3$. 1573. Если $\lg \alpha < \frac{1}{2}$, то максимум полной поверхности цилиндра достигается при $r = \frac{R}{2(1 - \lg \alpha)}$, где r — радиус основания цилиндра. Если $\lg \alpha \geq \frac{1}{2}$, то при $r = R$ имеем краевой максимум. 1574. $\rho(\sqrt[3]{2} - 1) \times \sqrt{\frac{2 + \sqrt[3]{2}}{2}}$. 1575. 1; 3. 1576. Если $b < \frac{a}{\sqrt{2}}$, то максимум длины хорды $MB = \frac{a^2}{c}$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ и точка M имеет координаты x и y , достигается при $x = \pm \frac{a^2}{c^3} \sqrt{a^2 - 2b^2}$; $y = \frac{b^2}{c^2}$; если $b > \frac{a}{\sqrt{2}}$, то краевой максимум длины хорды $MB = 2b$ достигается при $x = 0$, $y = b$. 1577. $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{b}{\sqrt{2}}$; ab . 1578. Минимум поверхности достигается при $r = h = \sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$, где r — радиус основания цилиндра и h — его высота. 1579. $\varphi = 60^\circ$. 1580. Трапеция, описанная около окружности. Боковые стороны $AB = CD = a \sec^3 \frac{\alpha}{2}$. 1581. $\alpha = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \approx \arcsin 294^\circ$, где α — центральный угол оставшегося сектора. 1582. $\varphi = \arccos \frac{q}{p}$, если $\arccos \frac{q}{p} \geq \arctg \frac{a}{b}$; $\varphi = \arctg \frac{a}{b}$, если $\arccos \frac{q}{p} < \arctg \frac{a}{b}$. 1583. $\frac{|av \mp bu| \sin \theta}{\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta}}$. 1584. $AM = a \left(1 + \sqrt[3]{\frac{S_2}{S_1}}\right)^{-1}$. 1585. Расстояние светящейся точки от центра большего шара равно $x = \frac{a}{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^{1/3}}$, если $a \geq r + R \sqrt{\frac{R}{r}}$ и $x = a - r$, если $r + R < a < r + R \sqrt{\frac{R}{r}}$, где a — расстояние между центрами шаров. 1586. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. 1587. $\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$. 1588. $v = \sqrt{\frac{a}{2k}}$, где k — коэффициент пропорциональности. 1589. $\arctg k$. 1590. При $l < 4a$ угол наклона стержня определяется из формулы $\cos \alpha = \frac{l + \sqrt{l^2 + 128a^3}}{16a}$; при $l > 4a$ положения равновесия нет; 1591. $k = -3$; $b = 3$; $y = 3(1 - x)$. 1592. $a = \frac{1}{2} e^{x_0}$; $b = e^{x_0}(1 - x_0)$; $c = e^{x_0} \left(1 - x_0 + \frac{x_0^2}{2}\right)$. 1593. а) Первый; б) второй; в) второй. 1595. а) $\sqrt{2}$, (2, 2);

- б) 500 000, (150, 500 000) (приблизительно). 1596. $\rho \left(1 + \frac{2x}{p}\right)^{\frac{3}{2}}$. 1597. $\frac{(a^2 - e^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}$, где $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ — эксцентриситет эллипса. 1598. $\frac{(e^2 x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}$, где $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ — эксцентриситет гиперболы. 1599. $3|axy|^{\frac{1}{3}}$. 1600. $\frac{a^3}{b}(1 - e^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}$, где e — эксцентриситет эллипса. 1601. $2\sqrt{2ay}$. 1602. at . 1604. $\frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}$. 1605. $\frac{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2 + r^2}$. 1606. $r\sqrt{1+m^2}$. 1607. $\frac{2}{3}\sqrt{2ar}$. 1608. $\frac{a^2}{3r}$. 1609. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\ln 2}{2}\right)$. 1610. $x_0 \approx 680$ м. 1611. Полукубическая парабола $27\rho\eta^2 = 8(\xi - \rho)^3$. 1612. Астроида $(a\xi)^{2/3} + (b\eta)^{2/3} = c^{2/3}$, где $c^2 = a^2 - b^2$. 1613. Астроида $(\xi + \eta)^{2/3} + (\xi - \eta)^{2/3} = 2a^{2/3}$. 1614. Цепная линия $\eta = a \operatorname{ch} \frac{\xi}{a}$. 1615. Логарифмическая спираль $\rho = mae^{m\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right)}$. 1616. $\xi = pa + a(\tau - \sin \tau)$; $\eta = -2a + a(1 - \cos \tau)$, где $\tau = t - \pi$. 1617. $x_1 = -2,602$; $x_2 = 0,340$; $x_3 = 2,262$. 1618. $x_1 = -0,724$; $x_2 = 1,221$. 1619. $x = 2,087 = \arccos 119^\circ 35'$. 1620. $\pm 0,824$. 1621. $x_1 = 0,472$; $x_2 = 9,999$. 1622. $x_1 = 2,5062$. 1623. $x_1 = 4,730$; $x_2 = 7,853$. 1624. $x = -0,56715$. 1625. $x = \pm 1,199678$. 1626. $x_1 = 4,493$; $x_2 = 7,725$; $x_3 = 10,904$. 1627. $x_1 = 2,081$; $x_2 = 5,940$.

Отдел III

- В ответах этого отдела ради краткости произвольная аддитивная постоянная C опущена. 1628. $27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$. 1629. $\frac{625}{3}x^3 - 125x^4 + 30x^5 - \frac{10}{3}x^6 + \frac{1}{7}x^7$. 1630. $x - 3x^3 + \frac{11}{3}x^5 - \frac{3}{2}x^7$. 1631. $x - \frac{1}{x} - 2 \ln |x|$. 1632. $a \ln |x| - \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2}$. 1633. $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$. 1634. $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^3} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}$. 1635. $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\left(1 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{8}x^3\right)$. 1636. $\frac{4(x^2+7)}{7\sqrt[4]{x}}$. 1637. $2x - \frac{12}{5}\sqrt[6]{72x^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{9x^2}$. 1638. $\ln |x| - \frac{1}{4x^2}$. 1639. $x - \operatorname{arctg} x$. 1640. $-x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$. 1641. $x + 2 \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$. 1642. $\arcsin x + \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. 1643. $\ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2+1}} \right|$. 1644. $\frac{4x}{\ln 4} + 2 \cdot \frac{6x}{\ln 6} + \frac{9x}{\ln 9}$. 1645. $-\frac{2}{\ln 5} \left(\frac{1}{5}\right)^x + \frac{1}{5 \ln 2} \left(\frac{1}{2}\right)^x$. 1646. $\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x$. 1647. $x - \cos x + \sin x$. 1648. $2\sqrt{2} \left[\frac{t}{\pi} \right] + \sqrt{2} \operatorname{sgn} t \cdot \left\{ \cos \frac{t}{\pi} - \cos t \right\}$, где $t = x - \frac{\pi}{4}$ ([] — целая часть). 1649. $-x - \operatorname{ctg} x$.

1650. $-x + \operatorname{tg} x$. 1651. $a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x$. 1652. $x - \operatorname{th} x$. 1653. $x - \operatorname{cth} x$.
 1655. $\ln |x+a|$. 1656. $\frac{1}{22} (2x-3)^{11}$. 1657. $-\frac{1}{4} (1-3x)^{\frac{4}{3}}$. 1658. $-\frac{2}{5} \sqrt{2-5x}$.
 1659. $-\frac{2}{15(5x-2)^{\frac{5}{3}}}$. 1660. $-\frac{5}{2} \sqrt[5]{(1-x)^3}$. 1661. $\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \left(x \sqrt{\frac{3}{2}} \right)$.
 1662. $\frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{2+x}\sqrt{3}}{\sqrt{2-x}\sqrt{3}} \right|$. 1663. $\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \left(x \sqrt{\frac{3}{2}} \right)$.
 1664. $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln |x\sqrt{3} + \sqrt{3x^2-2}|$. 1665. $-\left(e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-2x} \right)$.
 1666. $-x \sin 5x - \frac{1}{5} \cos 5x$. 1667. $-\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$.
 1668. $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$. 1669. $-\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$. 1670. $-\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$.
 1671. $\frac{1}{2} [\operatorname{ch}(2x+1) + \operatorname{sh}(2x-1)]$. 1672. $2 \operatorname{th} \frac{x}{2}$. 1673. $-2 \operatorname{cth} \frac{x}{2}$.
 1674. $-\sqrt{1-x^2}$. 1675. $\frac{1}{4} (1+x^2)^{\frac{4}{3}}$. 1676. $-\frac{1}{4} \ln |3-2x^2|$. 1677. $-\frac{1}{2(1+x^2)}$.
 1678. $\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2}$. 1679. $\frac{1}{8\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^4 - \sqrt{2}}{x^4 + \sqrt{2}} \right|$. 1680. $2 \operatorname{arctg} \sqrt{x}$. 1681. $\cos \frac{1}{x}$.
 1682. $-\ln \left| \frac{1 + \sqrt{x^2+1}}{x} \right|$. 1683. $-\arcsin \frac{1}{|x|}$. 1684. $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. 1685. $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
 1686. $\frac{1}{8} \sqrt[3]{8x^3+27}$. 1687. $2 \operatorname{sgn} x \ln (\sqrt{|x|} + \sqrt{|1+x|})$ ($x(1+x) > 0$).
 1688. $2 \arcsin \sqrt{x}$. 1689. $-\frac{1}{2} e^{-x^2}$. 1690. $\ln(2+e^x)$. 1691. $\operatorname{arctg} e^x$.
 1692. $-\ln(e^{-x} + \sqrt{1+e^{-2x}})$. 1693. $\frac{1}{3} \ln^3 x$. 1694. $\ln |\ln(\ln x)|$. 1695. $\frac{1}{6} \sin^6 x$.
 1696. $\frac{2}{\sqrt{\cos x}}$. 1697. $-\ln |\cos x|$. 1698. $\ln |\sin x|$. 1699. $\frac{3}{2} \sqrt[3]{1-\sin 2x}$.
 1700. $\frac{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}}{a^2 - b^2} (a^2 \neq b^2)$. 1700.1. $-\frac{1}{\sqrt{2}} \ln |\sqrt{2} \cos x + \sqrt{\cos 2x}|$.
 1700.2. $\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin (\sqrt{2} \sin x)$. 1700.3. $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln (\sqrt{2} \operatorname{ch} x + \sqrt{\operatorname{ch} 2x})$.
 1701. $-\frac{4}{3} \sqrt[4]{\operatorname{ctg}^3 x}$. 1702. $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right)$. 1703. $\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$.
 1704. $\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$. 1705. $\ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right|$. 1706. $2 \operatorname{arctg} e^x$.
 1707. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\operatorname{ch} 2x}{\sqrt{2}} + \sqrt{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x} \right)$. 1708. $3 \sqrt[3]{\operatorname{th} x}$. 1709. $\frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^3$.
 1710. $-\frac{1}{\arcsin x}$. 1711. $\frac{2}{3} \ln^{\frac{2}{3}} (x + \sqrt{1+x^2})$. 1712. $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}$.
 1713. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}$. 1714. $-\frac{1}{15(x^3+1)^5}$.

1815. $\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - x$. 1816. $-\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$.
1817. $\frac{x}{2a^3(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \quad (a \neq 0)$. 1818. $\frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} +$
 $+\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{|a|} \quad (a \neq 0)$. 1819. $\frac{x}{2} \sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2} \ln|x + \sqrt{x^2+a}|$.
1820. $\frac{x(2x^2+a^2)}{8} \sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^4}{8} \ln(x + \sqrt{a^2+x^2})$. 1821. $\frac{x^2}{4} -$
 $-\frac{x}{4} \sin 2x - \frac{\cos 2x}{8}$. 1822. $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}$. 1823. $2(6-x)\sqrt{x} \cos \sqrt{x} -$
 $-6(2-x) \sin \sqrt{x}$. 1824. $-\frac{(1-x)e^{\operatorname{arctg} x}}{2\sqrt{1+x^2}}$. 1825. $\frac{(1+x)e^{\operatorname{arctg} x}}{2\sqrt{1+x^2}}$.
1826. $\frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$. 1827. $\frac{x}{2} [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$.
1828. $\frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2+b^2} e^{ax}$. 1829. $\frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2+b^2} e^{ax}$. 1830. $\frac{e^{2x}}{8} (2 - \sin 2x -$
 $-\cos 2x)$. 1831. $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x - e^x (\cos x + \sin x) + \frac{1}{2} e^{2x}$. 1832. $-x +$
 $+\frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) - e^{-x} \operatorname{arctg}(e^x)$. 1833. $-[x + \operatorname{ctg} x \cdot \ln(e \sin x)]$.
1834. $x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x|$. 1835. $\frac{e^x}{x+1}$. 1836. $\frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \left(x \sqrt{\frac{b}{a}} \right)$, если $ab > 0$;
 $\frac{\operatorname{sgn} a}{2\sqrt{-ab}} \ln \left| \frac{\sqrt{|a|} + x\sqrt{|b|}}{\sqrt{|a|} - x\sqrt{|b|}} \right|$, если $ab < 0$. 1837. $\frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{7}}$.
1838. $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{3x+1} \right|$. 1839. $\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 - (\sqrt{2}+1)}{x^2 + (\sqrt{2}-1)} \right|$. 1840. $\frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) +$
 $+\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. 1841. $\frac{1}{2} \ln(x^2-2x \cos \alpha + 1) + \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{arctg} \frac{x - \cos \alpha}{\sin \alpha}$
 $(\alpha \neq k\pi, k - \text{целое})$. 1842. $\frac{1}{4} \ln(x^4-x^2+2) + \frac{1}{2\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x^2-1}{\sqrt{7}}$.
1843. $\frac{1}{9} \ln\{|x^3+1| (x^3-2)^2\}$. 1844. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{3 \sin x - 5 \cos x}{\sin x - \cos x} \right|$.
1845. $\operatorname{arctg} \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1\right)}{2}$. 1846. $\frac{1}{\sqrt{b}} \ln(x\sqrt{b} + \sqrt{a+bx^2})$, если $b > 0$;
 $\frac{1}{\sqrt{-b}} \arcsin \left(x \sqrt{-\frac{b}{a}} \right)$, если $a > 0$ и $b < 0$. 1847. $\arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}}$.
1848. $\ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x} \right|$. 1849. $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(x - \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + 1} \right)$.
1851. $-\sqrt{5+x-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{21}}$. 1852. $\sqrt{x^2+x+1} +$
 $+\frac{1}{2} \ln \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1} \right)$. 1853. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x^2+3}{\sqrt{17}}$.
- 1853.1. $\arcsin \frac{2 \sin x - 1}{3}$. 1854. $\frac{1}{2} \sqrt{x^4-2x^2-1} + \frac{1}{2} \ln|x^2-1 + \sqrt{x^4-2x^2-1}|$.

1855. $-\frac{1}{2} \sqrt{1+x^2-x^4} + \frac{3}{4} \arcsin \frac{2x^2-1}{\sqrt{5}}$. 1856. $-\ln \left| \frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x} \right|$.
1857. $\frac{\sqrt{x^2+x-1}}{x} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{x-2}{|x|\sqrt{5}} \left(\left| x + \frac{1}{2} \right| > \frac{\sqrt{5}}{2} \right)$.
1858. $\frac{-1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1-x+\sqrt{2(1+x^2)}}{1+x} \right|$. 1859. $\arcsin \frac{x-2}{|x-1|\sqrt{2}} (|x| > \sqrt{2})$.
1860. $\frac{1}{5} \frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{x+2} + \frac{1}{5\sqrt{5}} \arcsin \frac{x+7}{|x+2|\sqrt{6}} (|x+1| > \sqrt{6})$.
1861. $\frac{2x-1}{4} \sqrt{2+x-x^2} + \frac{9}{8} \arcsin \frac{2x-1}{3}$. 1862. $\frac{2x+1}{4} \times$
- $\times \sqrt{2+x+x^2} + \frac{7}{8} \ln \left(\frac{1}{2} + x + \sqrt{2+x+x^2} \right)$. 1863. $\frac{x^3+1}{4} \sqrt{x^4+2x^2-1} -$
- $-\frac{1}{2} \ln |x^2+1+\sqrt{x^4+2x^2-1}|$. 1864. $-\sqrt{1+x-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{1-2x}{\sqrt{5}} -$
- $-\ln \left| \frac{2+x+2\sqrt{1+x-x^2}}{x} \right| \left(\left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{\sqrt{5}}{2} \right)$.
1865. $\ln \left| \frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x} \right|$. 1866. $\ln |x-2| + \ln |x+5|$.
1867. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^2} \right|$. 1868. $\frac{x^8}{9} - \frac{x^8}{8} + \frac{3x^7}{7} - \frac{5x^6}{6} + \frac{11x^5}{5} -$
- $-\frac{21x^4}{4} + \frac{43x^3}{3} - \frac{85x^2}{2} + 171x + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{(x+2)^{1024}} \right|$. 1869. $x + \frac{1}{6} \ln |x| -$
- $-\frac{9}{2} \ln |x-2| + \frac{28}{3} \ln |x-3|$. 1870. $x + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{8}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$.
1871. $-\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{9} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right|$. 1872. $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \ln |x^2-1|$.
1873. $-\frac{5x-6}{x^2-3x+2} + 4 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right|$. 1874. $\frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2} + \frac{1}{8} \times$
- $\times \ln \left| \frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{12}} \right|$. 1875. $-\frac{3x^2+3x-2}{8(x-1)(x+1)^2} + \frac{3}{16} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$. 1876. $\operatorname{arctg} x +$
- $+\frac{5}{6} \ln \frac{x^2+1}{x^2+4}$. 1877. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{4} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$. 1878. $-\frac{1}{x-2} - \operatorname{arctg} (x-2)$.
1879. $-\frac{1}{5(x-1)} + \frac{1}{50} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2} - \frac{8}{25} \operatorname{arctg} (x+1)$. 1880. $\ln \left| \frac{x}{1+x} \right| -$
- $-\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1+2x}{\sqrt{3}}$. 1881. $\frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.
1882. $\frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. 1883. $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$.
1884. $\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$. 1885. $\frac{1}{4} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} +$
- $+\frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$. 1886. $\frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{6} \operatorname{arctg} x^2$.
1887. $-\frac{1}{6(1+x)} + \frac{1}{6} \ln \frac{(1+x)^2}{1-x+x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

1715. $\frac{2}{n+2} \ln \left(x^{\frac{n+2}{2}} + \sqrt{1+x^{n+2}} \right)$ при $n \neq -2$; $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln |x|$ при $n = -2$.
1716. $\frac{1}{4} \ln^2 \frac{1+x}{1-x}$. 1717. $\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \sin x \right)$. 1718. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} (\operatorname{tg}^2 x)$.
1719. $\frac{1}{2(\ln 3 - \ln 2)} \ln \left| \frac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x} \right|$. 1720. $2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$. 1721. $\frac{4}{3} x^3 - \frac{12}{5} x^5 + \frac{9}{7} x^7$. 1727.1. $-\frac{(1-x)^{11}}{11} + \frac{(1-x)^{12}}{12}$. 1722. $-x - 2 \ln |1-x|$.
1723. $\frac{1}{2} (1-x)^2 + \ln |1+x|$. 1724. $9x - \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - 27 \ln |3+x|$.
1725. $x + \ln(1+x^2)$. 1726. $\frac{3}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x} \right| + 2 \ln |2-x^2| - x$.
1727. $\frac{1}{99(1-x)^{99}} - \frac{1}{49(1-x)^{49}} + \frac{1}{97(1-x)^{97}}$. 1728. $\frac{x^4}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{2} + x - \ln |x+1|$. 1729. $\frac{1}{3} \left[(x+1)^{\frac{3}{2}} - (x-1)^{\frac{3}{2}} \right]$. 1730. $-\frac{8+30x}{375} (2-5x)^{\frac{3}{2}}$.
1731. $-\frac{1+2x}{10} (1-3x)^{\frac{3}{2}}$. 1732. $\frac{3}{14} (1+x^2)^{\frac{7}{2}} - \frac{3}{8} (1+x^2)^{\frac{4}{2}}$.
1733. $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+3} \right|$. 1734. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right|$. 1735. $\operatorname{arctg} x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}$.
1736. $\frac{1}{10\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} \right| - \frac{1}{5\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}}$. 1737. $\ln \frac{|x+3|^3}{(x+2)^2}$.
1738. $\frac{1}{2} \ln \frac{x^3+1}{x^3+2}$. 1739. $-\frac{2x+a+b}{(a-b)^2(x+a)(x+b)} + \frac{2}{(a-b)^2} \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right|$.
1740. $\frac{1}{a^2-b^2} \left(\frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{x}{b} - \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right)$ ($|a| \neq |b|$). 1741. $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x$.
1742. $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x$. 1743. $\frac{x}{2} \cos \alpha - \frac{1}{4} \sin (2x+\alpha)$. 1744. $\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x$.
1745. $3 \sin \frac{x}{6} + \frac{3}{5} \sin \frac{5x}{6}$. 1746. $-\frac{1}{10} \cos \left(5x + \frac{\pi}{12} \right) + \frac{1}{2} \cos \left(x + \frac{5\pi}{12} \right)$.
1747. $-\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x$. 1748. $\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$. 1749. $\frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x$. 1750. $\frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x$. 1751. $-x - \operatorname{ctg} x$.
1752. $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln |\cos x|$. 1753. $-\frac{3}{16} \cos 2x - \frac{3}{64} \cos 4x + \frac{1}{48} \cos 6x + \frac{3}{128} \cos 8x + \frac{1}{192} \cos 12x$. 1754. $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$. 1755. $-\frac{1}{\sin x} + \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$.
1756. $\frac{1}{2 \cos^2 x} + \ln |\operatorname{tg} x|$. 1757. $\ln |\sin x| - \frac{1}{2} \sin^2 x$.
1758. $\operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x$. 1759. $x - \ln(1+e^x)$. 1760. $x + 2 \operatorname{arctg} e^x$.
1761. $-\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x$. 1762. $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x$. 1763. $\frac{2}{3} \operatorname{sh}^2 x$. 1764. $\frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + \frac{1}{8} \operatorname{sh} 4x$. 1765. $-(\operatorname{th} x + \operatorname{cth} x)$. 1766. $-\frac{3}{140} (9+12x+14x^2) (1-x)^{9/2}$.

1767. $-\frac{1+55x^3}{6600}(1-5x^2)^{12}$. 1768. $-\frac{2}{15}(32+8x+3x^2)\sqrt{2-x}$.
 1769. $-\frac{1}{15}(8+4x^2+3x^4)\sqrt{1-x^2}$. 1770. $-\frac{6+25x^3}{1000}(2-5x^2)^{3/4}$.
 1771. $\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{7}\sin^2 x+\frac{2}{11}\sin^4 x\right)\sqrt{\sin^2 x}$. 1772. $-\frac{1}{2}\cos^2 x+\frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x)$.
 1773. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2 x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^4 x$. 1774. $\frac{2}{3}(-2+\ln x)\sqrt{1+\ln x}$. 1775. $-x-2e^{-\frac{x}{2}}+2\ln(1+e^{x/2})$. 1776. $x-2\ln(\sqrt{1+e^x})$. 1777. $(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2$. 1778. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
 1779. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln|x+\sqrt{x^2-2}|$. 1780. $\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x$.
 1781. $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$. 1782. $-\sqrt{a^2-x^2}+a\arcsin\frac{x}{a}$. 1783. $-\frac{3a+x}{2}\times$
 $\times\sqrt{x(2a-x)}+3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}$. 1784. $2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$. 1785. $\frac{2x-(a+b)}{4}\times$
 $\times\sqrt{(x-a)(b-x)}+\frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$. 1786. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+$
 $+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$. 1787. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$.
 1788. $\sqrt{x^2-a^2}-2a\ln(\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a})$, если $x>a$; $-\sqrt{x^2-a^2}+$
 $+2a\ln(\sqrt{-x+a}+\sqrt{-x-a})$, если $x<-a$. 1789. $2\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})$,
 если $x+a>0$ и $x+b>0$; $-2\ln(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b})$, если $x+a<0$
 и $x+b<0$. 1790. $\frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)}-\frac{(b-a)^2}{4}\ln(\sqrt{x+a}+$
 $+\sqrt{x+b})$, если $x+a>0$ и $x+b>0$. 1791. $x(\ln x-1)$. 1792. $\frac{x^{n+1}}{n+1}\times$
 $\times\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)$ ($n\neq-1$). 1793. $-\frac{1}{x}(\ln^2 x+2\ln x+2)$. 1794. $\frac{2}{3}x^{3/2}\times$
 $\times\left(\ln^2 x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9}\right)$. 1795. $-(x+1)e^{-x}$. 1796. $-\frac{e^{-2x}}{2}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)$.
 1797. $-\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2}$. 1798. $x\sin x+\cos x$. 1799. $-\frac{2x^2-1}{4}\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x$.
 1800. $x\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x$. 1801. $\left(\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{9}\right)\operatorname{sh} 3x-\left(\frac{x^2}{3}+\frac{2}{27}\right)\operatorname{ch} 3x$. 1802. $x\operatorname{arctg} x-$
 $-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. 1803. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$. 1804. $-\frac{x}{2}+\frac{1+x^2}{2}\operatorname{arctg} x$.
 1805. $-\frac{2+x^3}{9}\sqrt{1-x^2}+\frac{x^3}{3}\arccos x$. 1806. $-\frac{\arcsin x}{x}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|$.
 1807. $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$. 1808. $x-\frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$. 1809. $-\sqrt{x}+$
 $+(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}$. 1810. $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\cos x\cdot\ln\operatorname{tg} x$. 1811. $\frac{1}{3}(x^3-1)e^{x^3}$.
 1812. $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$. 1813. $\frac{1+x^2}{2}(\operatorname{arctg} x)^2-$
 $-x\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. 1814. $-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}\ln|1-x^2|+\frac{x^3}{3}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$.

1898. $\frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)^3}{x^3+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. 1899. $\frac{2}{5} \ln \frac{x^3+2x+2}{x^3+x+1/2} + \frac{8}{5} \times$
 $\times \operatorname{arctg} (x+1) - \frac{2}{5} \operatorname{arctg} (2x+1)$. 1900. $a+2b+3c=0$. 1901. $-\frac{8(x-1)(x+1)^2}{x^3+x+2} +$
 $+\frac{1}{16} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$. 1902. $\frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{1}{9} \ln \frac{(x+1)^3}{x^3+x+1} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.
 1903. $\frac{x(3x^2+5)}{8(x^3+1)^3} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} x$. 1904. $\frac{1}{x^2+2x+2} + \operatorname{arctg} (x+1)$. 1905. $\frac{x}{4(x^3+1)} +$
 $+\frac{3}{16\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} - \frac{3}{8\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}$. 1906. $\frac{5x+2}{3(x^3+x+1)} + \frac{1}{9} \times$
 $\times \ln \frac{(x-1)^3}{x^3+x+1} + \frac{8}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. 1907. $\frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^3} + \frac{21}{128} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| -$
 $-\frac{21}{64} \operatorname{arctg} x$. 1908. $\frac{x^2+2x}{6(x^4+x^3+1)}$. 1909. $-\frac{2x+1}{3(x^3+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \times$
 $\times \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. 1902. $a\gamma + c\alpha = 2b\beta$. 1903. $-\frac{1}{96(x-1)^{96}} - \frac{3}{97(x-1)^{97}} -$
 $-\frac{3}{98(x-1)^{98}} - \frac{1}{99(x-1)^{99}}$. 1904. $\frac{1}{8} \ln \left| \frac{x^3-1}{x^3+1} \right| - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^3$. 1905. $\frac{4}{4\sqrt{3}} \times$
 $\times \operatorname{arctg} \frac{x^4}{\sqrt{3}}$. 1906. $\frac{1}{12} \ln \frac{(x^3+1)^2}{x^3-x^3+1} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x^3 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x^3-1}{\sqrt{3}}$.
 1907. $\frac{5}{8} \ln \frac{x^4}{x^4+2} - \ln \frac{x^4}{x^4+1}$. 1908. $-\frac{1}{100} \left(\frac{x^5}{x^{10}-10} + \frac{1}{2\sqrt{10}} \ln \left| \frac{x^5-\sqrt{10}}{x^5+\sqrt{10}} \right| \right)$.
 1909. $\frac{x^4}{4} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^4+1}{(x^4+2)^4}$. 1910. $-\frac{x^5+2}{10(x^{10}+2x^5+2)} - \frac{1}{10} \operatorname{arctg} (x^5+1)$.
 1911. $\frac{1}{n} (x^n - \ln |x^h+1|)$ ($n \neq 0$). 1912. $\frac{1}{2n} \left(\operatorname{arctg} x^n - \frac{x^n}{x^{2n}+1} \right)$ ($n \neq 0$).
 1913. $\frac{1}{20} \ln \frac{x^{10}}{x^{10}+2}$. 1914. $\frac{1}{10(x^{10}+1)} + \frac{1}{10} \ln \frac{x^{10}}{x^{10}+1}$. 1915. $\frac{1}{7} \ln \frac{|x^7|}{(1+x^7)^3}$.
 1916. $\frac{1}{5} \ln \left| \frac{x(x^4-5)}{x^5-5x+1} \right|$. 1917. $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x^3-1}{x\sqrt{3}}$. 1918. $\frac{1}{\sqrt{5}} \times$
 $\times \ln \frac{2x^3+(1-\sqrt{5})x+2}{2x^3+(1+\sqrt{5})x+2}$. 1919. $\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^4-x^3\sqrt{2}+1}{x^4+x^3\sqrt{2}+1}$. 1920. $\operatorname{arctg} x +$
 $+\frac{1}{3} \operatorname{arctg} x^3$. 1921. $I_n = \frac{2ax+b}{(n-1)\Delta(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2n-3}{n-1} \cdot \frac{2a}{\Delta} I_{n-1}$,
 где $\Delta = 4ac - b^2$; $I_3 = \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^3} + \frac{2x+1}{3(x^3+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.
 1922. $I = \frac{1}{(b-a)^{m+n-1}} \int \frac{(1-t)^{m+n-3}}{t^m} dt$; $\frac{1}{625} \left(-\frac{1}{t} + 3t - \frac{t^3}{2} - 3 \ln |t| \right)$, где
 $t = \frac{x-2}{x+3}$. 1923. $-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_{kn}^{(k)}(a)}{k! (n-k) (x-a)^{n-k}} + \frac{P_{nn}^{(n)}(a)}{n!} \ln |x-a|$. 1924. $R(x) =$
 $= P(x^2) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \left[\frac{A_{ij}}{(a_i-x)^{\alpha_j}} + \frac{A'_{ij}}{(a_i+x)^{\alpha_j}} \right]$, где P — многочлен, $\pm a_i$
 ($i=1, \dots, k$) — корни знаменателя и A_{ij} — постоянные коэффициенты.

1925. $-\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{\pi(2k-1)}{2n} \ln \left(1 - 2x \cos \frac{2k-1}{2n} \pi + x^2 \right) +$
 $+\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ \sin \frac{\pi(2k-1)}{2n} \operatorname{arctg} \frac{x - \cos \frac{2k-1}{2n} \pi}{\sin \frac{2k-1}{2n} \pi} \right\}$. 1926. $2\sqrt{x} - 2 \ln(1+\sqrt{x})$.
 1927. $\frac{3}{4} \ln \frac{x\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[6]{x})^2 (1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x})^3} - \frac{3}{2\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}$.
 1928. $\frac{3}{4} t^4 - \frac{3}{2} t^2 - \frac{3}{4} \ln |t-1| + \frac{15}{8} \ln (t^3+t+2) - \frac{27}{8\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{7}}$,
 $t = \sqrt[3]{2+x}$. 1929. $6t - 3t^2 - 2t^3 + \frac{3}{2} t^4 + \frac{6}{5} t^6 - \frac{6}{7} t^7 + 3 \ln(1+t^2) - 6 \operatorname{arctg} t$,
 где $t = \sqrt[6]{x+1}$. 1930. $\frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2} - \frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}$. 1931. $\frac{x^3}{2} - \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} +$
 $+\frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2-1}|$. 1932. $-\frac{3}{2} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$. 1933. $-\frac{at^3}{1+t^4} +$
 $+\frac{a}{4\sqrt{2}} \ln \frac{1+t\sqrt{2}+t^3}{1-t\sqrt{2}+t^3} + \frac{a}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{1-t^2}{t\sqrt{2}}$, где $t = \sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}$.
 1934. $-\frac{n}{a-b} \sqrt{\frac{x-b}{x-a}}$. 1935. $\frac{x}{2} + \sqrt{x} - \frac{1}{2} \sqrt{x(1+x)} - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{x} +$
 $+\sqrt{1+x})$. 1937. $-\frac{3-2x}{4} \sqrt{1+x+x^2} - \frac{1}{8} \ln \left(\frac{1}{2} + x + \sqrt{1+x+x^2} \right)$.
 1933. $-\ln \left| \frac{2-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} \right|$. 1939. $\frac{2-x}{3(1-x)^2} \sqrt{1-x^2}$. 1940. $R +$
 $+\ln(x+1+R) - \sqrt{2} \ln \left| \frac{x+2+\sqrt{2}R}{x} \right|$, где $R = \sqrt{x^2+2x+2}$.
 1941. $\arcsin \frac{1+2x}{\sqrt{5}} + \ln \left| \frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x} \right|$. 1942. $\frac{1-2x}{4} \sqrt{1+x-x^2} -$
 $-\frac{11}{8} \arcsin \frac{1-2x}{\sqrt{5}}$. 1943. $-\frac{19+5x+2x^2}{6} \sqrt{1+2x-x^2} - 4 \arcsin \frac{1-x}{\sqrt{2}}$.
 1944. $\left(\frac{63}{256} x - \frac{21}{128} x^3 + \frac{21}{160} x^5 - \frac{9}{80} x^7 + \frac{x^9}{10} \right) \sqrt{1+x^2} - \frac{63}{256} \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.
 1945. $\left(-\frac{a^4 x}{16} - \frac{a^2 x^3}{24} + \frac{x^5}{6} \right) \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^5}{16} \arcsin \frac{x}{|a|}$. 1946. $\left(\frac{x^2}{3} - \frac{14x}{3} + \right.$
 $\left. + 37 \right) \sqrt{x^3+4x+3} - 66 \ln |x+2 + \sqrt{x^3+4x+3}|$. 1947. $-\frac{1}{2x^2} \sqrt{x^3+1} +$
 $+\frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{x^3+1}}{|x|}$. 1948. $\frac{2x^3+1}{3x^3} \sqrt{x^2-1}$. 1949. $\frac{3x-5}{20(x-1)^2} \sqrt{x^2+3x+1} -$
 $-\frac{11}{40\sqrt{5}} \ln \left| \frac{(x+1)\sqrt{5}+2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1} \right|$. 1950. $\frac{3x+5}{8(x+1)^3} \sqrt{x^2+2x} -$
 $-\frac{3}{8} \arcsin \frac{1}{|x+1|}$, где $x < -2$ или $x > 0$. 1951. $4a(ca_1+bb_1) = 8a^2c_1 +$

$$+ 3b^2a_1 (a \neq 0). \quad 1952. \frac{\sqrt{1+2x-x^3}}{2(1-x)} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1+2x-x^3}}{1-x} \right|.$$

$$1953. \frac{1}{2} \arcsin \frac{x-3}{|x-1|\sqrt{5}} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{3x+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1} \right|. \quad 1954. -\frac{\sqrt{x^3+x+1}}{x+1} +$$

$$+ \ln \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^3+x+1} \right) + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x+2\sqrt{x^3+x+1}}{x+1} \right|. \quad 1955. -\frac{1+x}{2} \times$$

$$\times \sqrt{1+2x-x^3} - 2 \arcsin \frac{1-x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x\sqrt{2}}{|1+x|}. \quad 1956. -\frac{\sqrt{x^3-4x+3}}{x-1} -$$

$$- 2 \arcsin \frac{1}{|x-2|} (x < 1 \text{ или } x > 3). \quad 1957. \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^3}}.$$

$$1958. \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x\sqrt{2} + \sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{2} - \sqrt{x^2-1}} \right|. \quad 1959. \frac{x}{2\sqrt{1+x^3}} +$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^3} + x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^3} - x\sqrt{2}} \right|. \quad 1960. \ln(x + \sqrt{x^3+2}) - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^3+2}}{x}.$$

$$1961. \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{(2x+1)\sqrt{2} + \sqrt{3(x^3+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2} - \sqrt{3(x^3+x-1)}} \right|. \quad 1962. \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{3}} -$$

$$- \frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2+2x-x^3}}{(1-x)\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2+2x-x^3}}{\sqrt{6} - \sqrt{2+2x-x^3}}. \quad 1963. \frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^3+x+1}}.$$

$$1964. -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^3+x+1}}{(x-1)\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{(x+1)\sqrt{2} - \sqrt{3(x^3+x+1)}}{\sqrt{x^3-x+1}} \right|.$$

$$1965. \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}(2x^3-2x+5) - (x+1)}{\sqrt{2}(2x^3-2x+5) + (x+1)} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2x^3-2x+5}}{x+1}.$$

$$1966. \frac{3}{2(2z+1)} + \frac{1}{2} \ln \frac{z^3}{|2z+1|^3}, \quad \text{где } z = x + \sqrt{x^3+x+1}.$$

$$1967. \ln \left| \frac{z-1}{z} \right| - 2 \operatorname{arctg} z, \quad \text{где } z = \frac{1 + \sqrt{1-2x-x^3}}{x}.$$

$$1968. \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{3} [(z-1)^3 + (z-1)^{-3}] + [(z-1)^3 - (z-1)^{-3}] + [(z-1) + (z-1)^{-1}] \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \ln |z-1|, \quad \text{где } z = x + \sqrt{x^3-2x+2}. \quad 1969. -\frac{5}{18(z+1)} - \frac{1}{6(z+1)^3} +$$

$$+ \frac{3}{4} \ln |z-1| - \frac{16}{27} \ln |z-2| - \frac{17}{108} \ln |z+1|, \quad \text{где } z = \frac{\sqrt{x^3+3x+2}}{x+1}.$$

$$1970. \frac{2(3-4z)}{5(1-z-z^2)} + \frac{2}{5\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5+1+2z}}{\sqrt{5-1-2z}} \right|, \quad \text{где } z = -x + \sqrt{x(1+x)}. \quad 1971. \frac{x}{4} \times$$

$$\times (\sqrt{x^3+1} + \sqrt{x^3-1}) + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^3+1}}{x + \sqrt{x^3-1}} \right|. \quad 1972. \frac{1}{3} \sqrt{z} - \frac{1}{3\sqrt{12}} \times$$

$$\times \left(\ln \frac{z\sqrt{3} + \sqrt{12z^3+1}}{z\sqrt{3} - \sqrt{12z^3+1}} - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{12z^3+1}}{z\sqrt{3-1}} \right), \quad \text{где } z = \frac{1+x}{1-x}. \quad 1973. \sqrt{1+x} -$$

$$- \sqrt{1-x} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin x. \quad 1974. \sqrt{1+x+x^3} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+2x+2\sqrt{1+x+x^3}}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^3})^3}.$$

$$1975. \frac{2}{3} \left[(x+1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}} \right] - \frac{2}{5} \left[(x+1)^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{5}{2}} \right]. \quad 1976. -\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x\sqrt{2}}{x^3+1}.$$

$$1977. -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x\sqrt{2} + \sqrt{x^3+1}}{x^2-1} \right|. \quad 1978. \frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}} (|x| > \sqrt{\sqrt{2}-1}).$$

$$1979. \frac{1}{2} \ln \frac{x^2(2x^2+1+2\sqrt{x^3+x^2+1})}{x^3+2+2\sqrt{x^4+x^3+1}}. \quad 1981. \frac{1}{3} \sqrt{(x+x^3)^3} - \frac{1+2x}{8} \times$$

$$\times \sqrt{x+x^3} + \frac{1}{8} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) \text{ при } x > 0. \quad 1982. \frac{6}{5} x^{\frac{5}{6}} - 4x^{\frac{1}{2}} + 18x^{\frac{1}{6}} +$$

$$+ \frac{3x^{\frac{1}{6}}}{1+x^{\frac{1}{3}}} - 21 \operatorname{arctg} x^{\frac{1}{6}}. \quad 1983. \frac{3}{5} z^5 - 2z^3 + 3z, \quad \text{где } z = \sqrt{1+\sqrt[3]{x^3}}.$$

$$1984. -z + \frac{2}{3} z^3 - \frac{z^5}{5}, \quad \text{где } z = \sqrt{1-x^3}. \quad 1985. \frac{1}{6} \ln \frac{z^2+z+1}{(z-1)^3} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2z+1}{\sqrt{3}}, \quad \text{где } z = \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}. \quad 1986. \frac{1}{4} \ln \left| \frac{z+1}{z-1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} z, \quad \text{где}$$

$$z = \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}. \quad 1987. \frac{1}{6} \ln \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{12} \ln \frac{z^3+z+1}{z^3-z+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{z^3-1}{z\sqrt{3}},$$

$$\text{где } z = \sqrt[6]{1+x^6}. \quad 1988. \frac{5}{4} z^4 - \frac{5}{9} z^9, \quad \text{где } z = \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}. \quad 1989. \frac{3z}{2(z^3+1)} -$$

$$- \frac{1}{4} \ln \frac{(z+1)^3}{z^3-z+1} - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{2z-1}{\sqrt{3}}, \quad \text{где } z = \frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}. \quad 1990. m = \frac{2}{k}, \quad \text{где}$$

$$k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad 1991. \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x. \quad 1992. \frac{5}{16} x - \frac{1}{4} \sin 2x +$$

$$+ \frac{3}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x. \quad 1993. \frac{5}{16} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x.$$

$$1994. \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48}. \quad 1995. \frac{\sin^3 x}{5} - \frac{2 \sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9}. \quad 1996. -\frac{\cos 2x}{64} +$$

$$+ \frac{\cos^3 2x}{96} - \frac{\cos^5 2x}{320}. \quad 1997. \frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}. \quad 1998. -\frac{3}{2} \cos x - \frac{\cos^3 x}{2 \sin^2 x} -$$

$$- \frac{3}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|. \quad 1999. -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|. \quad 2000. \frac{\sin x}{2 \cos^3 x} +$$

$$+ \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|. \quad 2001. -8 \operatorname{ctg} 2x - \frac{8}{3} \operatorname{ctg}^3 2x. \quad 2002. \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \frac{3 \operatorname{tg}^2 x}{2} -$$

$$- \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} + 3 \ln |\operatorname{tg} x|. \quad 2003. \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3 \cos^3 x} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|. \quad 2004. \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} -$$

$$- \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln |\cos x|. \quad 2005. -x - \frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} - \operatorname{ctg} x. \quad 2006. \frac{\operatorname{tg}^3 x}{5}.$$

$$2007. -2 \sqrt{\operatorname{ctg} x} + \frac{2}{3} \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}. \quad 2008. \frac{1}{4} \ln \left| \frac{(1+t)^3(1+t^3)}{(1-t)^3(1-t^3)} \right| -$$

$$- \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{1-t^3}{t\sqrt{3}}, \quad \text{где } t = \sqrt[3]{\sin x}. \quad 2009. \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{z^2+z\sqrt{1+1}}{z^3-z\sqrt{2+1}} -$$

- $-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{2}}{z^2-1}, z = \sqrt{\operatorname{tg} x}.$ 2010. $\frac{1}{4} \ln \frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1} + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x^2-1}{\sqrt{3}},$
 где $z = \sqrt[3]{\operatorname{tg} x}.$ 2011. $I_n = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}; K_n = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} +$
 $+\frac{n-1}{n} K_{n-2}; I_0 = -\frac{1}{6} \cos x \sin^5 x - \frac{5}{24} \cos x \sin^3 x - \frac{5}{16} \cos x \sin x + \frac{5}{16} x;$
 $K_0 = \frac{1}{8} \sin x \cos^7 x + \frac{7}{48} \sin x \cos^5 x + \frac{35}{192} \sin x \cos^3 x + \frac{35}{128} \sin x \cos x + \frac{35}{128} x.$
 2012. $I_n = -\frac{\cos x}{(n-1) \sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}; K_n = \frac{\sin x}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} K_{n-2};$
 $I_0 = -\frac{\cos x}{4 \sin^4 x} - \frac{3 \cos x}{8 \sin^2 x} + \frac{3}{8} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|; K_0 = \frac{\sin x}{6 \cos^6 x} + \frac{5 \sin x}{24 \cos^4 x} + \frac{5 \sin x}{16 \cos^2 x} +$
 $+\frac{5}{16} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$ 2013. $-\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{12} \cos 6x.$ 2014. $\frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{8} +$
 $+\frac{\sin 4x}{16} + \frac{\sin 6x}{24}.$ 2015. $\frac{3}{2} \cos \frac{x}{6} - \frac{3}{10} \cos \frac{5x}{6} - \frac{3}{14} \cos \frac{7x}{6} + \frac{3}{22} \cos \frac{11x}{6}.$
 2016. $-\frac{1}{2} \cos(a-b) \cos x - \frac{1}{4} \cos(x+a+b) + \frac{1}{12} \cos(3x+a+b).$ 2017. $\frac{x}{4} +$
 $+\frac{\sin 2ax}{8a} + \frac{\sin 2bx}{8b} + \frac{\sin 2(a-b)x}{16(a-b)} + \frac{\sin 2(a+b)x}{16(a+b)}.$ 2018. $-\frac{3}{16} \cos 2x +$
 $+\frac{3}{64} \cos 4x + \frac{1}{48} \cos 6x - \frac{3}{128} \cos 8x + \frac{1}{192} \cos 12x.$ 2019. $\frac{1}{\sin(a-b)} \times$
 $\times \ln \left| \frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)} \right|,$ если $\sin(a-b) \neq 0.$ 2020. $\frac{1}{\cos(a-b)} \ln \left| \frac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)} \right|,$
 если $\cos(a-b) \neq 0.$ 2021. $\frac{2}{\sin(a-b)} \ln \left| \frac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)} \right|,$ если $\sin(a-b) \neq 0.$
 2022. $\frac{1}{\cos a} \ln \left| \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\cos \frac{x+a}{2}} \right|$ ($\cos a \neq 0$). 2023. $\frac{1}{\sin a} \ln \left| \frac{\cos \frac{x-a}{2}}{\cos \frac{x+a}{2}} \right|$ ($\sin a \neq 0$).
 2024. $-x + \operatorname{ctg} a \cdot \ln \left| \frac{\cos x}{\cos(x+a)} \right|$ ($\sin a \neq 0$). 2025. $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}}.$
 2026. $\frac{1}{6} \ln \frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}.$ 2027. $-\frac{1}{5} (2 \sin x + \cos x) + \frac{4}{5 \sqrt{5}} \times$
 $\times \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} 2}{2} \right) \right|.$ 2028. а) $\frac{2}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right),$ если
 $0 < e < 1;$ б) $\frac{1}{\sqrt{e^2-1}} \ln \left| \frac{e + \cos x + \sqrt{e^2-1} \sin x}{1+e \cos x} \right|,$ если $e > 1.$ 2029. $x - \frac{1}{\sqrt{2}} \times$
 $\times \operatorname{arctg} (\sqrt{2} \operatorname{tg} x).$ 2030. $\frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \left(\frac{a \operatorname{tg} x}{b} \right).$ 2031. $\frac{(2b^2-1)z}{(a^2 z^2 + b^2)} + \frac{1}{2ab^3} \operatorname{arctg} \frac{az}{b}$
 ($ab \neq 0$), где $z = \operatorname{tg} x.$ 2032. $\frac{1}{2} (\sin x - \cos x) - \frac{1}{2 \sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right|.$

$$2033. \frac{\cos x}{a(a \sin x + b \cos x)} \cdot \\ - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \cos x - \sin x}{\sqrt{3} \sin x} \right).$$

$$2034. -\frac{1}{6} \ln \frac{(\sin x + \cos x)^2}{1 - \sin x \cos x} -$$

$$2035. \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\lg 2x}{\sqrt{2}} \right).$$

$$2036. \frac{1}{4} \left\{ \sqrt{2 + \sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} - \sqrt{2 - \sqrt{2}} \operatorname{arotg} \frac{u}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} \right\},$$

если $u = \operatorname{tg} 2x$. 2037. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} - \sin 2x}{\sqrt{2} + \sin 2x}$. 2038. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\sin^2 x)$.

$$2039. \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x \right). \quad 2040. -\frac{x}{4(x^2 + 2)} + \frac{3}{4\sqrt{2}} \operatorname{arotg} \frac{x}{\sqrt{2}}, \text{ где } z = \operatorname{tg} x.$$

$$2041. \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\varphi}{2} \right) \right|, \text{ где } \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ и } \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$2043. -\frac{x}{5} - \frac{3}{5} \ln |\sin x + 2 \cos x|. \quad 2043.1. 0,1x + 0,3 \ln |\sin x - 3 \cos x|.$$

$$2044. \frac{3x}{34} + \frac{5}{34} \ln |5 \sin x + 3 \cos x|.$$

$$2045. -\frac{ab_1 - a_1b}{a^2 + b^2} \cdot \frac{1}{a \sin x + b \cos x} + \frac{aa_1 + bb_1}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\varphi}{2} \right) \right|, \quad \text{где}$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ и } \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad 2047. -\frac{3x}{5} + \frac{4}{5} \ln |\sin x - 2 \cos x + 3| -$$

$$-\frac{6}{5} \operatorname{arctg} \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{2}. \quad 2048. \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) - \frac{1}{2} \ln (\sqrt{2} + \sin x + \cos x).$$

$$2049. \frac{2}{5}x - \frac{1}{5} \ln |3 \sin x + 4 \cos x - 2| + \frac{4}{5\sqrt{21}} \ln \left| \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3} \left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 \right)}{\sqrt{7} - \sqrt{3} \left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 \right)} \right|.$$

$$2051. -\sin x + 3 \cos x + 2\sqrt{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right|. \quad 2052. \frac{1}{5} (\sin x + 3 \cos x) +$$

$$+ \frac{8}{5\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5} - 1 + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{5} + 1 - 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right|. \quad 2054. -\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\cos x}{\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{4} \ln \frac{2 + \sin x}{2 - \sin x}.$$

$$2055. \frac{3}{5} \operatorname{arotg} (\sin x - 2 \cos x) + \frac{1}{10\sqrt{6}} \ln \frac{\sqrt{6} + 2 \sin x + \cos x}{\sqrt{6} - 2 \sin x - \cos x}.$$

$$2056. \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} (\sin x + \cos x) + 1}{\sqrt{2} (\sin x + \cos x) - 1} \right| - \frac{1}{4\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} (\sin x - \cos x)}{\sqrt{3} - \sqrt{2} (\sin x - \cos x)} \right|.$$

$$2058. \frac{2 \sin x - \cos x}{10 (\sin x + 2 \cos x)^3} + \frac{1}{10\sqrt{5}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} 2}{2} \right) \right|. \quad 2059. A =$$

$$= -\frac{b}{(n-1)(a^2 - b^2)}, \quad B = \frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2 - b^2)}, \quad C = -\frac{n-2}{(n-1)(a^2 - b^2)}.$$

$$2060. \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \sin^2 x}}{|\cos x|}. \quad 2061. 2\sqrt{\lg x} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\operatorname{tg} x + \sqrt{2} \operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x - \sqrt{2} \operatorname{tg} x + 1}.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2} \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - 1} \quad (\operatorname{tg} x > 0). \quad 2062. \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{2} \times \\
 & \times \ln (\sin x + \cos x + \sqrt{2 + \sin 2x}). \quad 2063. -\frac{e \sin x}{(1-e^2)(1+e \cos x)} + \frac{2}{(1-e^2)^{3/2}} \times \\
 & \times \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right). \quad 2064. -\frac{2}{n \cos a} \left(\cos \frac{x+a}{2} \right)^n \left(\sin \frac{x-a}{2} \right)^{-n} \quad (\cos a \neq 0). \\
 & 2065. I_n = 2I_{n-1} \cos a - I_{n-2} + \frac{2 \sin a}{n-1} t^{n-1}, \quad \text{где } n > 2 \text{ и } t = \\
 & = \sin \frac{x-a}{2} \left(\sin \frac{x+a}{2} \right)^{-1}. \quad 2068. e^{2x} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{3} + \frac{2x}{9} - \frac{2}{27} \right). \\
 & 2069. -e^{-x} (x^3 + 2). \quad 2070. -\left(\frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{25} + \frac{24x}{625} \right) \cos 5x + \\
 & + \left(\frac{x^4}{5} - \frac{12x^2}{125} + \frac{24}{3125} \right) \sin 5x. \quad 2071. (21 - 10x^2 + x^4) \sin x - (20x - 4x^3) \cos x. \\
 & 2072. -\frac{e^{-x^2}}{2} (x^6 + 3x^4 + 6x^2 + 6). \quad 2073. 2e^t (t^4 - 5t^4 + 20t^3 - 60t^2 + 120t - 120), \\
 & \text{где } t = \sqrt{x}. \quad 2074. e^{ax} \left[\frac{1}{2a} + \frac{a \cos 2bx + 2b \sin 2bx}{2(a^2 + 4b^2)} \right]. \quad 2075. \frac{e^{ax}}{4} \times \\
 & \times \left[\frac{3(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} - \frac{a \sin 3bx - 3b \cos 3bx}{a^2 + 9b^2} \right]. \quad 2076. \frac{e^x}{2} [x(\sin x - \\
 & - \cos x) + \cos x]. \quad 2077. \frac{e^x}{2} [x^2(\sin x + \cos x) - 2x \sin x + (\sin x - \cos x)]. \\
 & 2078. e^x \left[\frac{x-1}{2} - \frac{x}{10} (2 \sin 2x + \cos 2x) + \frac{1}{50} (4 \sin 2x - 3 \cos 2x) \right]. \\
 & 2079. \frac{1}{4} x^4 + \frac{3}{4} x^3 + 3x^2 \cos x - x \left(6 \sin x + \frac{3}{4} \sin 2x \right) - \left(5 \cos x + \frac{3}{8} \cos 2x \right) - \\
 & - \frac{1}{3} \cos^3 x. \quad 2080. \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{x} \sin (2 \sqrt{x}) + \frac{1}{4} \cos (2 \sqrt{x}). \\
 & 2082. x + \frac{1}{1+e^x} - \ln (1+e^x). \quad 2083. e^x - \ln (1+e^x). \quad 2084. -\frac{x}{2} + \\
 & + \frac{1}{3} \ln |e^x - 1| + \frac{1}{6} \ln (e^x + 2). \quad 2085. x - 3 \ln \left\{ \left(1 + e^{\frac{x}{3}} \right) \sqrt{1 + e^{\frac{x}{3}}} \right\} - 3 \operatorname{arctg} e^{\frac{x}{3}}. \\
 & 2086. x + \frac{8}{x}. \quad 2087. -2 \arcsin \left(e^{-\frac{x}{2}} \right). \quad 2088. \ln (e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}) + \\
 & + \arcsin (e^{-x}). \quad 2089. \sqrt{e^{2x} + 4e^x - 1} + 2 \ln (e^x + 2 + \sqrt{e^{2x} + 4e^x - 1}) - \\
 & - \arcsin \frac{2e^x - 1}{e^x \sqrt{5}}. \quad 2090. -\frac{1}{2} e^{-x} (\sqrt{1+e^x} - \sqrt{1-e^x}) + \frac{1}{4} \times \\
 & \times \ln \frac{(\sqrt{1+e^x} - 1)(1 - \sqrt{1-e^x})}{(\sqrt{1+e^x} + 1)(1 + \sqrt{1-e^x})}. \quad 2092. a_1 + \frac{a_2}{11} + \frac{a_3}{21} + \dots + \frac{a_n}{(n-1)!} = 0. \\
 & 2093. e^x \left(1 - \frac{4}{x} \right). \quad 2094. -e^{-x} - \ln (e^{-x}). \quad 2095. e^4 \operatorname{li} (e^{2x-4}) - e^2 \operatorname{li} (e^{2x-2}). \\
 & 2096. \frac{e^x}{x+1}. \quad 2097. \frac{e^{2x}}{2} \left(x^2 + 3x + \frac{21}{2} - \frac{32}{x-2} \right) + 64e^4 \operatorname{li} (e^{2x-4}). \\
 & 2098. x [\ln^n x - n \ln^{n-2} x + n(n-1) \ln^{n-3} x + \dots + (-1)^{n-1} n(n-1) \dots 2 \ln x + \\
 & + (-1)^n n!]. \quad 2099. \frac{x^4}{4} \left(\ln^3 x - \frac{3}{4} \ln^2 x + \frac{3}{8} \ln x - \frac{3}{32} \right). \quad 2100. -\frac{1}{2e^3} \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left(\ln^3 x + \frac{3}{2} \ln^2 x + \frac{3}{2} \ln x + \frac{3}{4} \right). \quad 2101. \ln (x+a) \ln (x+b). \quad 2102. x \ln^2 (x + \\
 & + \sqrt{1+x^2}) - 2 \sqrt{1+x^2} \ln (x + \sqrt{1+x^2}) + 2x. \quad 2103. -\frac{x}{2} + x \ln (\sqrt{1-x} + \\
 & + \sqrt{1+x}) + \frac{1}{2} \arcsin x. \quad 2104. \frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln (x + \sqrt{1+x^2}). \quad 2105. -\frac{x}{2} + \\
 & + \frac{1}{2} \ln (x^2 + 2x + 2) + \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} (x+1). \quad 2106. -\frac{x}{3} + \frac{1}{3} \ln (1+x) + \\
 & + \frac{2x \sqrt{x}}{3} \operatorname{arctg} \sqrt{x}. \quad 2107. -\frac{3+x}{4} \sqrt{2x-x^2} + \frac{2x^2-3}{4} \arcsin (1-x). \\
 & 2108. \frac{1}{2} \sqrt{x-x^2} + \left(x - \frac{1}{2} \right) \arcsin \sqrt{x}. \quad 2109. -\frac{\operatorname{sgn} x}{2} \sqrt{x^2-1} + \frac{x^2}{2} \times \\
 & \times \arccos \frac{1}{x}. \quad 2110. 2|1-\sqrt{x}| + (1+x) \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x}. \quad 2111. \frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} - \\
 & - \ln \sqrt{1-x^2}. \quad 2112. \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}. \quad 2113. x - \operatorname{arctg} x + \\
 & + \left(\frac{1+x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} \right) [\ln (1+x^2) - 1]. \quad 2114. x - \frac{1-x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}. \\
 & 2115. -\ln \sqrt{1+x^2} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln (x + \sqrt{1+x^2}). \quad 2116. -\frac{x}{8} + \frac{\operatorname{sh} 4x}{32}. \\
 & 2117. \frac{3x}{8} + \frac{\operatorname{sh} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sh} 4x}{32}. \quad 2118. \frac{\operatorname{ch}^3 x}{3} - \operatorname{ch} x. \quad 2119. \frac{\operatorname{ch} 6x}{24} - \frac{\operatorname{ch} 4x}{16} - \frac{\operatorname{ch} 2x}{8}. \\
 & 2120. \ln \operatorname{ch} x. \quad 2121. x - \operatorname{cth} x. \quad 2122. 0.5 [\ln (e^{2x} + \sqrt{e^{4x} - 1}) + \arcsin (e^{-2x})]. \\
 & 2123. \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} 3^{-1/3} \left(2 \operatorname{th} \frac{x}{2} + 1 \right). \quad 2123.1. \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{th} x - 2}{\sqrt{5}}. \\
 & 2123.2. \frac{20}{3\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \left(\frac{3 \operatorname{th} \frac{x}{2}}{\sqrt{11}} \right). \quad 2123.3. -\frac{4}{7} x - \frac{3}{7} \ln |3 \operatorname{sh} x - 4 \operatorname{ch} x|. \\
 & 2124. \frac{a \operatorname{ch} ax \sin bx - b \operatorname{sh} ax \cos bx}{a^2 + b^2}. \\
 & 2125. \frac{a \operatorname{ch} ax \cos bx + b \operatorname{sh} ax \sin bx}{a^2 + b^2}. \quad 2126. -\frac{1}{5x^2} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{x} \operatorname{arctg} x. \\
 & 2127. \frac{1}{8} \cdot \frac{x+x^2}{(1-x^2)^2} - \frac{1}{16} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|. \quad 2128. \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{1+x\sqrt{3+x^2}}{1-x\sqrt{3+x^2}} - \\
 & - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1-x^2}{x\sqrt{3}}. \quad 2129. 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln (\sqrt[6]{x} + 1) \quad (x \geq 0). \\
 & 2130. -\frac{1}{24} (15 + 10x + 8x^2) \sqrt{x(1-x)} + \frac{5}{8} \arcsin \sqrt{x} \quad (0 < x < 1). \\
 & 2131. -\frac{2}{x} \sqrt{1-x^2} - \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|} \quad (|x| < 1). \\
 & 2132. -\frac{4}{3} \sqrt{1-x} \sqrt{x} \quad (x > 0). \quad 2133. \frac{1}{15} (8 - 4x^2 + 3x^4) \sqrt{1+x^2}. \\
 & 2134. \frac{1}{2} \ln \frac{(1+z)^2}{1-z+z^2} - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2z-1}{\sqrt{3}}, \quad \text{где } z = \sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}.
 \end{aligned}$$

2135. $-\frac{1}{3} \ln \left| \frac{2+x^3+2\sqrt{1+x^3+x^6}}{x^3} \right|$. 2136. $\frac{1}{2} \arccos \frac{x^2+1}{x^2\sqrt{2}}$.
2137. $-\frac{2+x^2}{x} - \frac{2}{x} \sqrt{1-x^2} - 2 \arcsin x$ ($|x| < 1$). 2138. $-\frac{1}{2} (1+x)^2 +$
 $+\frac{5+2x}{4} \sqrt{x+x^3} + \frac{3}{8} \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x+x^3} \right|$ ($x > 0$; $x < -1$).
2139. $-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x} - \frac{1}{2} \ln \frac{(1+x)^2}{1+x+x^3} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{1+2x}{\sqrt{3}}$.
2140. $-\frac{2x+21}{4} \sqrt{-x^3+3x-2} + \left(x^3+3x - \frac{55}{8} \right) \arccos(2x-3)$ ($1 < x < 2$).
2141. $-x^3 + \frac{x^3}{2} \ln(4+x^4) + 2 \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2}$.
2142. $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \arcsin x + \frac{1}{2} (\arcsin x)^2 + \ln|x|$ ($0 < |x| < 1$).
2143. $(1+\sqrt{1+x^2}) \ln(1+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$. 2144. $-\frac{x^2+7}{9} \sqrt{x^2+1} +$
 $+\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3} \ln \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}$ ($|x| > 1$). 2145. $\left(\frac{3-x}{1-x} - \right.$
 $\left. - \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} \right) \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \arcsin x - \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$ ($0 < x < 1$).
2146. $\frac{\cos x}{3(2+\sin x)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}}$. 2147. $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{7+4\sqrt{2}+\cos 4x}{7-4\sqrt{2}-\cos 4x}$.
2148. $\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}$.
2149. $a \left[x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right] - \frac{a-b}{2} (\operatorname{arctg} x)^2$.
2150. $a \left(x \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \ln|x^2-1| \right) + \frac{a+b}{4} \ln^2 \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$. 2151. $-\frac{\ln x}{2(1+x^2)} +$
 $+\frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{1+x^4}$ ($x > 0$). 2152. $\sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x - \ln(x+\sqrt{1+x^2})$.
2153. $-\ln(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x})$. 2154. $-\frac{6x+x^3}{9} - \frac{2+x^2}{9} \sqrt{1-x^2} \arccos x$
 ($|x| < 1$). 2155. $-\frac{x^2}{6} - \left(x - \frac{x^3}{6} \right) \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 + \frac{2}{3} \ln(1+x^2)$.
2156. $-\frac{x}{4(1+x^2)} - \frac{1-x^2}{4(1+x^2)} \operatorname{arctg} x$. 2157. $\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)} +$
 $+\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}$ ($|x| < 1$). 2158. $-\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} \arcsin x +$
 $+\frac{1}{4} (\arcsin x)^2$ ($|x| < 1$). 2159. $\frac{x}{4} + \frac{x^3}{12} + \frac{1}{4} (1+x^2)^2 \operatorname{arctg} x$. 2160. x^x
 ($x > 0$). 2161. $x - e^{-x} \arcsin(e^x) - \ln(1+\sqrt{1-e^{2x}})$ ($x < 0$). 2162. $x -$
 $-\ln(1+e^x) - 2e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}} - \left(\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}} \right)^2$. 2163. $-\frac{\operatorname{cth} 1}{4} [x - \ln(1+e^x \operatorname{ch} 1)] -$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{e^{-x}}{4 \operatorname{sh} 1}, \quad 2164. \quad -2 \ln (\operatorname{th} x + \sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x} + \sqrt{2} \operatorname{th} x}{\sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x} - \sqrt{2} \operatorname{th} x}. \\
 & 2165. \quad e^x \operatorname{tg} \frac{x}{2}. \quad 2166. \quad \frac{x|x|}{2}. \quad 2167. \quad \frac{x^2|x|}{3}. \quad 2168. \quad \frac{2x^3}{3}(x+|x|). \\
 & 2169. \quad \frac{(1+x)|1+x|}{2} + \frac{(1-x)|1-x|}{2}. \quad 2170. \quad e^x - 1, \text{ если } x < 0; 1 - e^{-x}, \\
 & \text{если } x \geq 0. \quad 2171. \quad x, \text{ если } |x| \leq 1; \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} \operatorname{sgn} x, \text{ если } |x| > 1. \quad 2172. \quad \frac{x}{4} + \\
 & + \frac{1}{4} \left((x) - \frac{1}{2} \right) \left\{ 1 - 2 \left| (x) - \frac{1}{2} \right| \right\}, \quad \text{где } (x) = x - [x]. \quad 2173. \quad \frac{[x]}{\pi} \{ [x] - \\
 & - (-1)^{[x]} \cos \pi x \}. \quad 2174. \quad x - \frac{x^3}{3} \text{ при } |x| \leq 1; \quad x - \frac{x}{2}|x| + \frac{1}{6} \operatorname{sgn} x \text{ при } \\
 & |x| > 1. \quad 2175. \quad x, \text{ если } -\infty < x \leq 0; \frac{x^2}{2} + x, \text{ если } 0 \leq x \leq 1; \quad x^2 + \frac{1}{2}, \text{ если } \\
 & x > 1. \quad 2176. \quad x f'(x) - f(x). \quad 2177. \quad \frac{1}{2} f(2x). \quad 2178. \quad f(x) = 2\sqrt{x}. \quad 2179. \quad x - \frac{x^2}{2}. \\
 & 2180. \quad f(x) = x \text{ при } -\infty < x \leq 0; f(x) = e^x - 1 \text{ при } 0 < x < +\infty.
 \end{aligned}$$

Отдел IV

$$\begin{aligned}
 & 2181. \quad 12 \frac{1}{2}. \quad 2182. \quad \text{а) } \underline{S}_n = 16 \frac{1}{4} - \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}, \quad \overline{S}_n = 16 \frac{1}{4} + \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}; \\
 & \text{б) } \underline{S}_n = \frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\frac{i}{n}}, \quad \overline{S}_n = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i}{n}}; \quad \text{в) } \underline{S}_n = \frac{10 \cdot 230}{n(2^{\frac{n}{2}} - 1)}, \\
 & \overline{S}_n = \frac{10 \cdot 230 \cdot 2^{\frac{10}{n}}}{\pi(2^{\frac{10}{n}} - 1)}. \quad 2183. \quad \underline{S}_n = 31 \cdot \frac{\sqrt[n]{2} - 1}{\sqrt[n]{32} - 1}; \quad \frac{31}{5}. \quad 2184. \quad v_0 T + \frac{1}{2} g T^2. \quad 2185. \quad 3. \\
 & 2186. \quad \frac{a-1}{\ln a}. \quad 2187. \quad 1. \quad 2188. \quad \sin x. \quad 2189. \quad \frac{1}{a} - \frac{1}{b}. \quad 2190. \quad \frac{b^m + 1 - a^m + 1}{m+1}. \\
 & 2191. \quad \ln \frac{b}{a}. \quad 2192. \quad \text{а) } 0, \text{ если } |\alpha| < 1; \quad \text{б) } \pi \ln \alpha^2, \text{ если } |\alpha| > 1. \\
 & 2193.4. \quad \frac{b-a}{2} [f(a) - f(b)]. \quad 2201. \quad \text{Вообще говоря, нет.} \quad 2203. \quad \text{Не обяза-} \\
 & \text{тельно.} \quad 2206. \quad 11 \frac{1}{4}. \quad 2207. \quad 2. \quad 2208. \quad \frac{\pi}{6}. \quad 2209. \quad \frac{\pi}{3}. \quad 2210. \quad 1. \\
 & 2211. \quad 1. \quad 2212. \quad \frac{\pi}{2 \sin \alpha}. \quad 2213. \quad \frac{2\pi}{\sqrt{1-e^2}}. \quad 2214. \quad \frac{1}{\sqrt{ab}} \ln \frac{1 + \sqrt{ab}}{1 - \sqrt{ab}}. \\
 & 2215. \quad \frac{\pi}{2|ab|}. \quad 2216. \quad \text{а) Подынтегральная функция } \frac{1}{x} \text{ и ее первообразная } \ln |x| \\
 & \text{разрывны в промежутке интегрирования } [-1, 1]; \quad \text{б) функция } \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right), \\
 & \text{играющая роль первообразной, разрывна при } 0 < x \leq 2\pi; \quad \text{в) функция } \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \\
 & \text{разрывна при } x = 0. \quad 2217. \quad \frac{2}{3}. \quad 2218. \quad 200 \sqrt{2}. \quad 2219. \quad \frac{1}{2}. \quad 2220. \quad \ln 2. \quad 2221. \quad \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

2222. $\frac{2}{\pi}$. 2223. $\frac{1}{p+1}$. 2224. $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$. 2225. $\frac{1}{e}$. 2226. $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.
2227. $\frac{5}{6}\pi$. 2228. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. 2229. $x + \frac{1}{2}$. 2230. $\frac{1}{\ln 2}$. 2231. 0; $-\sin a^2$; $\sin b^2$.
2232. а) $2x\sqrt{1+x^4}$; б) $\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$; в) $(\sin x - \cos x) \cdot \cos(\pi \sin^2 x)$.
2233. а) 1; б) $\frac{\pi^2}{4}$; в) 0. 2233.1. А. 2235. 1. 2237. а) $\frac{5}{6}$; б) $\frac{t}{2}$.
2238. а) $\frac{1}{3} - \frac{\alpha}{2}$, если $\alpha < 0$; $\frac{1}{3} - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^3}{3}$, если $0 < \alpha \leq 1$; $\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3}$, если $\alpha > 1$;
б) $\frac{\pi}{2}$, если $|\alpha| \leq 1$; $\frac{\pi}{2\alpha^2}$, если $|\alpha| > 1$; в) 2, если $|\alpha| \leq 1$; $\frac{2}{|\alpha|}$, если $|\alpha| > 1$.
2239. $\frac{1}{2} \ln \frac{e}{2}$. 2240. π . 2241. 4π . 2242. $2\left(1 - \frac{1}{e}\right)$. 2243. 1. 2244. $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.
2245. $\frac{1}{6}$. 2246. $\frac{\pi x^4}{16}$. 2247. $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{9+4\sqrt{2}}{7}$. 2248. $2 - \frac{\pi}{2}$. 2249. $\frac{\pi^2}{4}$.
2250. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 2251. а) Обратная функция $x = \pm t^{\frac{1}{2}}$ двужначна;
б) функция $x = \frac{1}{t}$ разрывна при $t=0$; в) не существует однозначной непрерывной ветви функции $x = \text{Arctg } t$, определенной на конечном сегменте и пробегающей значения от 0 до π . 2252. Нет. 2253. Можно.
2256. $f(x+b) - f(x+a)$. 2260. $\frac{3}{2}e^{\frac{b}{2}}$. 2261. $\int_0^1 [f(\arcsin t) - f(\pi - \arcsin t)] dt +$
 $+ \int_{-1}^0 [f(2\pi + \arcsin t) - f(\pi - \arcsin t)] dt$. 2262. 4π . 2263. $\frac{\pi^2}{4}$.
2264. $\text{arctg} \frac{32}{27} - 2\pi$. 2266. $315 \frac{1}{26}$. 2269. $\frac{1}{2} \ln 3 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. 2270. $\frac{5}{27}e^2 - \frac{2}{27}$.
2271. $-66 \frac{6}{7}$. 2272. $-\frac{\pi}{3}$. 2273. $\frac{29}{270}$. 2274. $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$.
2275. $2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$. 2276. $2\pi\sqrt{2}$. 2277. $\frac{1}{6}$. 2278. $\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{4}$.
2279. $\frac{3}{5}(e^\pi - 1)$. 2280. $\frac{3}{8} \ln 2 - \frac{225}{1024}$. 2281. $I_n = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$, если $n=2k$;
 $I_n = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$, если $n=2k+1$. 2282. См. № 2281. 2283. $(-1)^n \left[\frac{\pi}{4} - \right.$
 $\left. - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right) \right]$. 2284. $\frac{2^{2n}}{(2n+1)!} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$. 2285. См. № 2281.
2286. $I_n = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$. 2287. $I_n = (-1)^n \left\{ -\ln \sqrt{2} + \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2} + \dots \right. \right.$
 $\left. \left. + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right] \right\}$. 2290. $\frac{n(2n)!(2n)!}{2^{2n+1} n! n! (n+n)!}$. 2291. 0, если n четное; π ,
если n нечетное. 2292. $(-1)^n \pi$. 2293. $\frac{\pi}{2^n}$. 2294. $\frac{\pi}{2^n} \sin \frac{n\pi}{2}$. 2295. 0. 2296. 0.

2297. $\frac{1}{2^{2n-1}n} (1 - e^{-2\pi n}) \left[C_{2n}^n + 2 \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \frac{n^2}{n^2 + (2n-2k)^2} \right]$, 2298. $\frac{\pi}{4n} (-1)^n - 1$.
2299. $\frac{(n-1)!(n-1)!}{(n+n-1)!}$. 2302. В точках разрыва функции $f(x)$ производная $F'(x)$ может как существовать, так и не существовать. 2303. $|x| + C$.
2304. $\arccos(\cos x) + C$. 2305. $x[x] - \frac{[x]([x]+1)}{2} + C$. 2306. $\frac{x^2[x]}{2} - \frac{[x]([x]+1)(2[x]+1)}{12} + C$. 2307. $C + \frac{1}{\pi} \arccos(\cos \pi x)$. 2308. $\frac{1}{2} (|l+x| - |l-x|) + C$. 2309. -1 . 2310. $14 - \ln 7!$ 2311. $\frac{30}{\pi}$. 2312. $-\frac{\pi^2}{4}$. 2313. $\ln n!$.
2314. $-\operatorname{th} \frac{\pi}{2}$. 2315. $\frac{8}{3}$. 2316. а) —; б) +; в) +; г) —. 2317. а) Второй; б) второй; в) первый. 2318. а) $\frac{1}{3}$; б) $6\frac{2}{3}$; в) 10; г) $\frac{1}{2} \cos \varphi$. 2319. $\frac{n}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = b - \text{малая полуось эллипса}$. 2320. $v_{\text{ср}} = \frac{1}{2} (v_0 + v_1)$, где v_1 — конечная скорость тела. 2321. $\frac{1}{2} i_0^2$. 2321.1. А. 2322. а) $\theta = \sqrt{\frac{1}{n+1}}$; б) $\theta = \frac{1}{e}$; в) $\theta = \frac{1}{x} \ln \frac{e^x - 1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta = 1$. 2323. $\frac{8\pi}{3} \pm \frac{4\pi}{3} \theta$ ($|\theta| < 1$). 2324. Заключается между $\frac{1}{10\sqrt{2}}$ и $\frac{1}{10}$. 2325. $0,01 - 0,005\theta$ ($0 < \theta < 1$). 2326.1. а) 1; б) $f(0) \ln \frac{b}{a}$. 2328. $\frac{\theta}{50\pi}$ ($0 < \theta < 1$). 2329. $\frac{2}{a} \theta$ ($|\theta| < 1$). 2330. $\frac{\theta}{a}$ ($|\theta| < 1$).
2334. $\frac{1}{a}$. 2335. -1 . 2336. π . 2337. π . 2338. $\frac{2}{3} \ln 2$. 2339. $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.
2340. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. 2341. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 2342. $\frac{\pi}{2}$. 2343. $\frac{1}{5} \ln \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$. 2344. 0.
2345. $\frac{\pi}{2} - 1$. 2346. $\frac{a}{a^2+b^2}$. 2347. $\frac{b}{a^2+b^2}$. 2348. $I_n = n!$ 2349. $I_n = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \times \frac{\pi a^{n-1} \operatorname{sign} a}{(ac-b^2)^{n+\frac{1}{2}}}$. 2350. $I_n = n! \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} C_n^k \ln(k+1)$, где C_n^k — число сочетаний из n элементов по k . 2351. $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}$, если n — четное, и $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}$, если n — нечетное. 2352. $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!} \pi$, если n — четное; $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}$, если n — нечетное. 2353. а) $-\frac{\pi}{2} \ln 2$; б) $-\frac{\pi}{2} \ln 2$.
2354. $\frac{2\sqrt{8e^{-\frac{\pi}{8}}}}{1 - e^{-\frac{\pi}{8}}}$. 2356. а) 1; б) $\frac{\pi}{2}$; в) 0. 2357. а) 1; б) $\frac{1}{3}$; в) 1; г) $\frac{1}{a} f(0)$.
2358. Сходится. 2359. Сходится. 2360. Расходится. 2361. Сходится при $p > 0$. 2362. Сходится, если $p > -1$ и $q > -1$. 2363. Сходится, если $m > -1$, $n - m > 1$. 2364. Сходится при $1 < n < 2$. 2365. Сходится при $1 < n < 2$. 2366. Сходится, если $m > -2$, $n - m > 1$. 2367. Сходится при $n > 0$ ($a \neq 0$). 2368. Расходится. 2369. Сходится, если $p < 1$, $q < 1$. 2370. Сходится при

$n > -1$. 2370.1. Сходится. 2371. Сходится, если $\min(p, q) < 1$, $\max(p, q) > 1$.
 2372. Сходится. 2373. Сходится. 2374. Сходится, если $p > 1$, $q < 1$. 2375. Схо-
 дится при $p > 1$, q произвольном, $r < 1$ и при $p = 1$, $q > 1$, $r < 1$. 2376. Схо-
 дится, если $p_i < 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $\sum_{i=1}^n p_i > 1$. 2376.1. Сходится при $\alpha > -1$,
 $\beta > -1$, $\alpha + \beta < -1$. 2377. Сходится, если $P_n(x)$ не имеет корней в проме-
 жулке $[0, +\infty]$ и $n > m+1$. 2378. Сходится не абсолютно. 2379. Сходится
 не абсолютно. 2380. Сходится абсолютно, если $-1 < \frac{p+1}{q} < 0$; сходится
 условно, если $0 < \frac{p+1}{q} < 1$. 2380.1. Сходится. 2380.2. Сходится. 2381. Схо-
 дится абсолютно, если $p > -2$, $q > p+1$; сходится условно, если $p > -2$,
 $p < q \leq p+1$. 2382. Сходится условно при $0 < n < 2$. 2383. Сходится абсо-
 лютно при $n > m+1$; сходится условно при $m < n \leq m+1$. 2385. Нет.
 2392. $\ln \frac{1}{2}$. 2393. 0. 2394. π . 2395. 0. 2397. $\frac{a^2}{3}$. 2398. $4 \frac{1}{2}$. 2399. $4 \frac{1}{2}$. 2400. $9,9 -$
 $-8,1 \lg e \approx 6,38$. 2400.1. $2 - \frac{1}{\ln 2} \approx 0,56$. 2400.2. $\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \approx 0,97$. 2401. $\frac{\pi}{2}$.
 2402. πa^2 . 2403. πab . 2404. $\frac{4}{3} a^3$. 2405. $\frac{88}{15} \sqrt{2} p^3$. 2406. $\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$. 2407. $3\pi a^2$.
 2408. $\frac{\pi a^3}{2}$. 2409. $\frac{2\pi}{n+2}$. 2410. $\frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{\pi}{2} \approx 0,546$. 2411. $(3\pi+2):(9\pi-2)$.
 2412. $x = \operatorname{ch} S$, $y = \operatorname{sh} S$. 2413. $3\pi a^2$. 2414. $\frac{8}{15}$. 2415. $\frac{a^2}{3} (4\pi^2 + 3\pi)$. 2416. $6\pi a^2$.
 2417. $\frac{3\pi}{8} \cdot \frac{c^4}{ab}$. 2417.1. $\pi a^2 \left(\frac{16}{\sqrt{3}} - 9 \right)$. 2418. a^2 . 2419. $\frac{3\pi a^2}{2}$. 2420. $\frac{\pi a^2}{4}$.
 2421. $\frac{p^2}{6} (3 + 4\sqrt{2})$. 2422. $\frac{\pi p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$. 2422.1. 11π . 2422.2. $\frac{1}{\pi}$. 2423. $(\pi-1) \frac{\pi^2}{4}$.
 2424. $\frac{1}{2} \left(1 - \ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right)$. 2424.1. $\frac{2}{3}$. 2424.2. $\frac{1}{\pi}$. 2424.3. $4 \frac{4}{15}$. 2424.4. $\pi \times$
 $\times \left(1 + \frac{\pi^2}{6} \right)$. 2425. $\pi \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) a^2$. 2426. $\frac{3}{2} a^2$. 2427. $\pi a^2 \sqrt{2}$. 2428. a^2 .
 2429. $\frac{3}{8} \pi a^2$. 2430. $\frac{\pi a^2}{8\sqrt{2}}$. 2431. $\frac{8}{27} (10\sqrt{10}-1)$. 2432. $2 \sqrt{x_0 \left(x_0 + \frac{p}{2} \right) +}$
 $+ p \ln \frac{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0 + \frac{p}{2}}}{\sqrt{\frac{p}{2}}}$. 2433. $\sqrt{h^2 - a^2}$. 2434. $x_0 - \sqrt{2} + \sqrt{1 + e^2 x_0} -$
 $- \ln \frac{1 + \sqrt{1 + e^2 x_0}}{1 + \sqrt{2}}$. 2435. $\frac{e^2 + 1}{4}$. 2436. $a \ln \frac{a+b}{a-b} - b$. 2437. $\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} \right)$.
 2438. $a \ln \frac{a}{b}$. 2439. $4a \left(1 + \sqrt{3} \ln \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right)$. 2440. $6a$. 2441. $\frac{4(a^2 - b^2)}{ab}$.
 2442. $1 + \frac{\ln(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{2}}$. 2443. $8a$. 2444. $2\pi^2 a$. 2445. $2 \left(\operatorname{ch} \frac{T}{2} \times \right.$
 $\times \left. \sqrt{\operatorname{ch} T - 1} \right) - \sqrt{2} \ln \frac{\sqrt{2} \operatorname{ch} \frac{T}{2} + \sqrt{\operatorname{ch} T}}{1 + \sqrt{2}}$. 2445.1. $\frac{1}{2} \left(\operatorname{ch}^{\frac{2}{3}} 2T - 1 \right)$.

2446. $\pi a \sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2} \ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})$. 2447. $\frac{\sqrt{1+m^2}}{m} a$. 2448. $8a$.
 2449. $\rho [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$. 2450. $\frac{3\pi a}{2}$. 2451. $a(2\pi - \text{th } \pi)$. 2452. $2 + \frac{1}{2} \ln 3$.
 2452.1. $6\frac{1}{3}$. 2452.2. $\text{sh } R$. 2452.3. T . 2455. $\frac{2\pi}{5\sqrt{3}} \approx 0,73$. 2456. $\frac{6\pi}{6} (2a+c)$.
 2457. $\frac{h}{6} [(2A+a)B + (A+2a)b]$. 2458. $\frac{\pi h}{6} [(2A+a)B + (A+2a)b]$.
 2459. $\frac{1}{2} SH$. 2462. $\frac{2}{3} abc$. 2463. $\frac{4}{3} \pi abc$. 2464. $\frac{8\pi abc}{3}$. 2465. $\frac{16}{3} a^3$.
 2466. $\frac{2}{3} a^3 \left(\pi - \frac{4}{3} \right)$. 2467. $\frac{16}{15} a^2 \sqrt{ab}$. 2468. $\frac{\pi a^3}{2}$. 2469. $\frac{4}{15}$. 2470. $\frac{4\pi \sqrt{2}}{3} a^3$.
 2472. $\frac{3}{7} \pi ab^3$. 2473. а) $\frac{16\pi}{15}$; б) $\frac{8\pi}{3}$. 2474. а) $\frac{\pi^2}{2}$; б) $2\pi^2$. 2475. а) $\frac{4}{15} \pi ab^3$;
 б) $\frac{\pi a^2 b}{6}$. 2476. а) $\frac{\pi}{2}$; б) 2π . 2477. $2\pi^2 a^2 b$. 2478. $\frac{8\pi a^3}{3}$. 2479. $\frac{\pi}{5(1-e^{-\pi})}$.
 2480. а) $5\pi^2 a^3$; б) $6\pi^3 a^3$; в) $7\pi^3 a^3$. 2481. а) $\frac{32}{105} \pi ab^3$; б) $\frac{32}{105} \pi a^2 b$. 2481.1. $V_x =$
 $= \frac{64}{35} \pi$, $V_y = \frac{64}{105} \pi$. 2483. а) $\frac{8}{3} \pi a^3$; б) $\frac{13}{4} \pi^2 a^3$. 2484. а) $\frac{\pi a^3}{4} \left[\sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{2}{3} \right]$;
 б) $\frac{\pi^2 a^3}{4 \sqrt{2}}$; в) $\frac{\pi^3 a^3}{4}$. 2484.1. $\frac{2}{3} (\pi^4 - 6\pi^2) a^3$. 2484.2. $\frac{2}{3} \pi$. 2485. $\frac{\pi^2 a^3}{2 \sqrt{2}}$.
 2486. $\frac{4\pi a^3}{243} \left(21 \sqrt{13} + 2 \ln \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \right)$. 2487. $2a \sqrt{\pi^2 a^3 + 4b^2} + \frac{8b^3}{\pi} \times$
 $\times \ln \frac{\pi a + \sqrt{\pi^2 a^3 + 4b^2}}{2b}$. 2488. $\pi \left[(\sqrt{5} - \sqrt{2}) + \ln \frac{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{5} - 1)}{2} \right]$.
 2489. а) $\frac{2\pi}{3} [(2x_0 + \rho) \sqrt{2\rho x_0 + \rho^2} - \rho^2]$; б) $\frac{\pi}{4} \left[(\rho + 4x_0) \sqrt{2x_0(\rho + 2x_0)} - \right.$
 $\left. - \rho^2 \ln \frac{\sqrt{2x_0} + \sqrt{\rho + 2x_0}}{\sqrt{\rho}} \right]$. 2490. а) $2\pi b^2 + 2\pi ab \frac{\arcsin e}{e}$; б) $2\pi a^2 + \frac{2\pi b^2}{e} \times$
 $\times \ln \left[\frac{a}{b} (1 + e) \right]$, где $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ — эксцентриситет эллипса. 2491. $4\pi^2 ab$.
 2492. $\frac{12}{5} \pi a^3$. 2493. а) $\pi a \left(2b + a \text{sh } \frac{2b}{a} \right)$; б) $2\pi a \left(a + b \text{sh } \frac{b}{a} - a \text{ch } \frac{b}{a} \right)$.
 2494. $4\pi a^2$. 2495. а) $\frac{64}{3} \pi a^3$; б) $16\pi^2 a^3$; в) $\frac{32}{3} \pi a^2$. 2496. $\frac{3\pi}{5} a^3 (4\sqrt{2} - 1)$.
 2497. $\frac{32}{5} \pi a^2$. 2498. а) $2\pi a^3 (2 - \sqrt{2})$; б) $2\pi a^3 \sqrt{2}$; в) $4\pi a^2$. 2499. $\frac{5}{128\sqrt{10}} \times$
 $\times [14\sqrt{5} + 17 \ln(2 + \sqrt{5})] \approx 1,013$. 2500. $V = \frac{4\pi}{3} \rho^3$; $P = 2\pi \rho^3 [(2 + \sqrt{2}) +$
 $+ \ln(1 + \sqrt{2})]$. 2501. $M_1 = 2a^2$; $M_2 = \frac{\pi a^2}{2}$. 2501.1. $\frac{\rho^3}{8} [\sqrt{2} + 5 \ln(1 + \sqrt{2})]$.
 2502. $M_1 = \frac{6h^3}{6}$; $M_2 = \frac{6h^3}{12}$. 2502.1. $I_x = \frac{8}{35} a^4$, $I_y = \frac{8}{5} a^4$, $r_x = a \sqrt{\frac{6}{35}}$, $r_y = a \sqrt{\frac{6}{5}}$.
 2503. $M_2^{(x)} = \frac{\pi ab^3}{4}$; $M_2^{(y)} = \frac{\pi a^3 b}{4}$. 2504. $M_1 = \frac{\pi r^2 h^3}{12}$, $M_2 = \frac{\pi}{30} r^2 h^3$. 2504.1. $I = \frac{2}{5} MR^2$.

2507. $x_0 = a \frac{\sin \alpha}{\alpha}$; $y_0 = 0$. 2508. $\left(\frac{9}{20}a, \frac{9}{20}a\right)$. 2509. $\left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi}\right)$. 2510. $\left(0, 0, \frac{3}{8}a\right)$.
 2511. $\varphi_0 = \varphi - \alpha$, где $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{2m}$; $r_0 = \frac{mr}{\sqrt{1+4m^2}}$. Логарифмическую спираль
 $r_0 = \frac{am}{\sqrt{1+4m^2}} e^{m(\varphi_0 + \alpha)}$. 2512. $\varphi_0 = 0$, $r_0 = \frac{5}{6}a$. 2513. $x_0 = \pi a$, $y_0 = \frac{5}{6}a$.
 2514. $x_0 = \frac{2}{3}a$, $y_0 = 0$. 2515. $\left(0, 0, \frac{a}{2}\right)$. 2516. 75 кг. 2517. $A_h = mg \frac{Rh}{R+h}$,
 где R — радиус Земли; $A_m = mgR$. 2518. 0,5 кг·м. 2519. 1740 кг·м. 2520. $\frac{2}{3}a^3$.
 2521. $708 \frac{1}{3} T$. 2522. $v_0 T + \frac{a}{2} T^2$. 2523. $\frac{4}{15} \text{ лб} \omega^2 R^3$. 2524. Проекция силы при-
 тяжения на координатные оси: $X = 0$, $Y = -\frac{2km\mu_0}{a}$, где k — постоянная
 тяготения. 2525. $2\pi k m \delta_0 \left(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$, где k — постоянная тяготения.
 2526. Примерно 3 часа. 2527. Сосуд должен быть ограничен поверхностью
 образованной вращением кривой $y = Cx^4$ вокруг вертикальной оси Oy .
 2528. $Q = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{1000}}$. 2529. 99,92%. 2530. $\frac{\gamma H^3}{6E}$.

В ответах на приближенное вычисление определенных интегралов даны табличные значения. 2531. —6,2832. 2532. 0,69315. 2533. 0,83566. 2534. 1,4675. 2535. 17,333. 2536. 5,4024. 2537. 1,37039. 2538. 0,2288. 2539. 0,915966. 2540. 3,14159. 2541. 1,463. 2542. 0,3179. 2543. 0,8862. 2544. 51,04.

2545.	x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
	y	0	0,99	1,65	1,85	1,72	1,52	1,42

Отдел V

2546. $\frac{2}{3}$. 2547. $\frac{3}{2}$. 2548. 3. 2549. 1. 2550. $\frac{1}{3}$. 2551. а) $\frac{q \sin \alpha}{1 - 2q \cos \alpha + q^2}$;
 б) $\frac{q \cos \alpha - q^2}{1 - 2q \cos \alpha + q^2}$. 2552. $1 - \sqrt{2}$. 2553. Сходится лишь при $x = k\pi$
 (k — целое). 2556. Расходится. 2557. Расходится. 2558. Сходится. 2559. Расхо-
 дится. 2560. Расходится. 2561. Расходится. 2562. Сходится. 2563. Сходится.
 2564. Расходится. 2566. Может как сходиться, так и расходиться. 2567. а) Мо-
 жет как сходиться, так и расходиться; б) расходится. 2578. Сходится.
 2579. Сходится. 2580. Сходится. 2581. а) Сходится; б) расходится. 2582. Схо-
 дится. 2583. Сходится. 2584. Сходится. 2585. Сходится. 2585.1. Сходится.
 2585.2. Сходится при любых α и x . 2586. Сходится. 2587. Расходится. 2588. Рас-
 ходится. 2589. Сходится. 2589.1. Сходится. 2589.2. Сходится. 2590. Сходится.
 2591.2. $n \geq 13$. 2595. Сходится. 2596. Сходится. 2597. Сходится. 2597.1. Схо-
 дится. 2598. Сходится при $p > 2$. 2599. Сходится при $\frac{b-a}{a} > 1$. 2600. Сходится
 при $p > \frac{3}{2}$. 2601. Сходится. 2602. Сходится при $p+q > 1$. 2603. Сходится

при $q > p$. 2604. Сходится при $\frac{p}{2} + q > 1$. 2605. (н). Сходится при $\alpha(q-p) > 1$. 2607. Сходится при $q > p+1$. 2608. Сходится при $p > 0$. 2609. Сходится при $p > 0$. 2610. Сходится при $p > \frac{1}{2}$. 2611. Сходится при $b \neq 1$. 2612. Сходится при $p > 1$. 2613. Расходится. 2614. Расходится. 2614.2. Сходится при $p+x > 1$. 2616. Сходится при $x < \frac{1}{e}$. 2617. Сходится. 2618. Расходится. 2619. Сходится при $p > 1$. 2620. Сходится при $p > 1$ q произвольном и при $p=1$, $q > 1$. 2620.1. Расходится. 2620.2. Сходится. 2620.3. Сходится. 2621. Расходится. 2623. 1,20. 2626. Сходится при $\alpha > \frac{1}{2}$. 2627. Сходится, если $a = \frac{1}{2}$. 2628. Расходится. 2629. Сходится. 2630. Сходится при $a > 2$. 2631. Сходится. 2632. Сходится. 2633. Сходится. 2634. Сходится, если $c=0$, $\frac{a}{d} < -1$. 2635. Расходится. 2636. Сходится, если $\alpha \neq 0$. 2637. Сходится. 2638. Расходится. 2639. Сходится. 2640. Сходится, если $a = \sqrt{bc}$. 2641. Сходится, если $\alpha < -1$. 2642. Сходится, если $\alpha > \frac{1}{2}$. 2643. Сходится при $a^b > e$, $c=0$ и при $a^c > 1$. 2644. Сходится при $a+b > 1$. 2645. Сходится. 2646. Сходится. 2647. Сходится. 2648. Расходится. 2649. Сходится. 2650. Сходится. 2651. Сходится. 2652. Сходится при $\alpha > 2$. 2653. Сходится. 2654. Сходится. 2655. а) $N > 100\,000$; б) $N \geq 12$; в) $N > 4$. 2659. $\frac{2}{9}$. 2660. $1\frac{3}{7}$. 2661. $\ln 2$. 2662. а) $\frac{3}{2} \ln 2$; б) $\frac{1}{2} \ln 2$. 2664. Сходится. 2665. Сходится. 2666. Сходится. 2666.1. Не следует. 2667. Сходится. 2668. Сходится. 2669. Сходится. 2670. Расходится. 2671. Сходится. 2672. Сходится. 2673. Расходится. 2673.1. Сходится. 2675. Абсолютно сходится при $p > 1$; условно сходится при $0 < p \leq 1$. 2676. Абсолютно сходится при $p > 1$; условно сходится при $0 < p \leq 1$. 2677. Абсолютно сходится при $p > 1$; условно сходится при $\frac{1}{2} < p \leq 1$. 2678. Абсолютно сходится при $|x - \pi k| < \frac{\pi}{4}$ (k — целое); условно сходится при $x = \pi k \pm \frac{\pi}{4}$. 2679. Сходится условно при любом x , не равном целому стрижательному числу. 2680. Абсолютно сходится при $p > 1$; условно сходится при $0 < p \leq 1$. 2681. Абсолютно сходится при $p > 2$; условно сходится при $1 < p \leq 2$. 2682. Абсолютно сходится при $p > 1$; условно сходится при $\frac{1}{2} < p \leq 1$. 2683. Условно сходится. 2684. Абсолютно сходится. 2685. Расходится. 2686. Условно сходится. 2687. Абсолютно сходится при $p > 1$; условно сходится при $\frac{1}{2} < p \leq 1$. 2688. Расходится. 2689. Абсолютно сходится при $p > 2$; условно сходится при $0 < p \leq 2$. 2690. Сходится. 2691. Расходится. 2692. Абсолютно сходится при $q > p+1$; условно сходится при $p < q \leq p+1$. 2693. Абсолютно сходится при $p > 1$, $q > 1$; условно сходится при $0 < p = q \leq 1$. 2694. Абсолютно сходится при $p > 1$; условно сходится при $p=1$. 2695. Абсолютно сходится при $p > 1$; условно сходится при $p=1$. 2696. Абсолютно сходится при $p > 1$, $q > 1$; условно сходится при $0 < p = q \leq 1$. 2698. а) $p > 1$; б) $0 < p \leq 1$. 2698.1. а) Сходится; б) сходится; в) сходится. 2699. а) $q > p+1$; б) $p < q \leq p+1$. 2700. Сходится абсолютно при $m \geq 0$; сходится условно при $-1 < m < 0$. 2703.1. а) $n \geq 1\,000\,000$;

6) $n \geq 1,32 \cdot 10^{16}$. 2706. а) Расходится; б) может как сходиться, так и расходиться.

2707. $\frac{2}{3}$. 2708. $\frac{3}{4}$. 2709. $-\frac{2}{7}$. 2710. $\frac{1+y}{1-xu}$. 2716. Сходится абсолютно при $|x| > 1$. 2717. Сходится абсолютно при $x > 0$; сходится условно при

$x=0$. 2718. Сходится абсолютно при $x > -\frac{1}{3}$ и при $x < -1$. 2719. Сходится абсолютно при $|x| \neq 1$ и сходится условно при $x=-1$. 2720. Сходится абсолютно при $-\frac{\sqrt{17}-3}{6} < x < \frac{1}{3}$ и при $\frac{2}{3} < x < \frac{\sqrt{17}+3}{6}$. 2721. Сходится

абсолютно при $|x - \pi k| \leq \frac{\pi}{6}$ ($k=0, \pm 1 \pm 2, \dots$). 2722. Сходится абсолютно при $p > 1$ и $x \neq k$ ($k=-1, -2, \dots$) и сходится условно при $0 < p \leq 1$, $x \neq k$. 2723. Сходится абсолютно при $q > p+1$ и сходится условно при $p < q \leq p+1$. 2724. Сходится абсолютно при $|x| < 1$. 2725. Сходится абсолютно при $|x| < 1$. 2726. Сходится абсолютно при $|x| \neq 1$. 2727. Сходится абсолютно при $x \neq -1$. 2728. Сходится абсолютно при $x > 0$. 2729. Сходится абсолютно при $0 < |x| < +\infty$, если $|a| > 1$; расходится, если $|a| \leq 1$ или если $x=0$. 2730. Сходится абсолютно при $x=2$ и при $x > e$. 2731. Сходится абсолютно при $x > 1$. 2732. Сходится, если $0 < \min(x, y) < 1$. 2733. Сходится абсолютно при $|x| < 1$, $0 \leq y < +\infty$ и при $|x| > 1$, $y > |x|$; сходится условно при $x=-1$, $0 \leq y < 1$. 2734. Сходится абсолютно при $\max(|x|, |y|) < 1$. 2735. Сходится абсолютно при: 1) $0 \leq x < 1$, $-\infty < y < +\infty$; 2) $x=1$, $y > 1$ и 3) $x > 1$, $y > 2$. 2736. Сходится абсолютно при $|x - \pi k| < \frac{\pi}{4}$, где k — целое число. 2738. $\frac{1}{2} < |x| < 2$; $\frac{6x(x^2-1)}{(2-x)^2(2x-1)^2}$. 2739. а) Сходится абсолютно при $x \geq 0$, сходится условно при $-1 < x < 0$; б) сходится абсолютно при $p+x > 1$ и при $x=0$, 1, 2, ..., сходится условно при $0 < p+x \leq 1$; в) сходится абсолютно при: 1) $|x| < 1$, y — произвольно; 2) $x = \pm 1$, $y > \frac{1}{2}$; 3) x — произвольно, $y=0$, 1, 2, ...; сходится условно при $x=1$, $-\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}$. 2743. При $\epsilon=0,001$ и $x=\sqrt[3]{0,1}$, $N \geq 3m$. Нет. 2744. $n > \frac{1}{e}$. 2745. $n \geq 26$. 2746. а) Сходится равномерно; б) сходится неравномерно. 2747. Сходится равномерно. 2748. Сходится неравномерно. 2749. Сходится равномерно. 2750. Сходится равномерно. 2751. а) Сходится равномерно; б) сходится неравномерно; в) сходится равномерно. 2752. а) Сходится неравномерно; б) сходится равномерно. 2753. Сходится равномерно. 2754. Сходится неравномерно. 2755. а) Сходится равномерно; б) сходится неравномерно. 2756. а) Сходится неравномерно; б) сходится равномерно. 2757. Сходится неравномерно. 2758. а) Сходится равномерно; б) сходится неравномерно. 2759. Сходится равномерно. 2760. а) Сходится равномерно; б) сходится неравномерно. 2761. Сходится равномерно. 2762. Сходится равномерно. 2763. Сходится неравномерно. 2767. а) Сходится равномерно; б) сходится неравномерно. 2768. Сходится равномерно. 2768.1. Сходится неравномерно. 2769. Сходится неравномерно. 2770. Сходится равномерно. 2771. Сходится неравномерно. 2772. Сходится равномерно. 2778. а) Сходится неравномерно; б) сходится равномерно. 2775. а) Сходится равномерно; б) сходится неравномерно. 2776. Сходится неравномерно. 2777. Сходится равномерно. 2778. Сходится равномерно. 2779. Сходится равномерно. 2780. Сходится равномерно. 2781. Сходится равномерно. 2782. Сходится равномерно. 2783. Может. 2785. Не обязательно. 2795. а) Существует и непрерывна при $|x| < 1$; б) существует и непрерывна при $|x| < +\infty$; в) существует при $|x| < +\infty$, разрывна при $x=0$. 2799. а) Существует и дифференцируема при $x \neq -k$ ($k=1, 2, 3, \dots$); б) существует при $|x| < +\infty$, диф-

ференцируема всюду, за исключением $x=0$. 2802. а) α произвольно; б) $\alpha < 1$;

в) $\alpha < 2$. 2805. Нет. 2806. $\frac{1}{2} \ln 2$. 2807. 1. 2808. 1. 2808.1. $\frac{\pi^2}{6}$. 2809. Законно.

2810. Да. 2812. $R=1$; $(-1, 1)$. При $x=-1$ сходится абсолютно, если $p > 1$, и условно, если $0 < p \leq 1$; при $x=1$ сходится абсолютно, если $p > 1$, и рас-

ходится, если $p \leq 1$. 2813. $R=\frac{1}{3}$; $(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$. При $x=-\frac{4}{3}$ сходит-
дится условно; при $x=-\frac{2}{3}$ расходится. 2814. $R=4$; $(-4, 4)$. При $x=\pm 4$

расходится. 2815. $R=+\infty$; $(-\infty, +\infty)$. 2816. $R=\frac{1}{e}$; $(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$. При
 $x=\pm \frac{1}{e}$ расходится. 2817. $R=+\infty$; $(-\infty, +\infty)$. 2818. $R=2$; $(-1, 3)$.

При $x=-1$ сходится абсолютно, если $p > 2$, и условно, если $0 < p \leq 2$; при
 $x=3$ сходится абсолютно, если $p > 2$, и расходится, если $p \leq 2$. 2819. $R=2p$;
 $(-2p, 2p)$. При $x=-2p$ сходится абсолютно, если $p > 2$ и расходится, если
 $p \leq 2$; при $x=2p$ сходится абсолютно, если $p > 2$, и сходится условно, если
 $0 < p \leq 2$. 2820. $R=1$; $(-1, 1)$. При $x=-1$ сходится абсолютно, если $m \geq 0$,
и расходится, если $m < 0$; при $x=1$ сходится абсолютно, если $m \geq 0$, и схо-

дится условно, если $-1 < m < 0$. 2821. $R=\min\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\}$; $(-R, R)$. При

$x=-R$ сходится условно, если $a \geq b$, и абсолютно, если $a < b$; при $x=R$
расходится, если $a \geq b$, и сходится абсолютно, если $a < b$. 2822. $R=\max(a, b)$;
 $(-R, R)$. При $x=\pm R$ расходится. 2823. $R=1$; $(-1, 1)$. При $x=\mp 1$ сходит-
дится абсолютно, если $a > 1$, и расходится, если $a \leq 1$. 2824. $R=1$; $(-1, 1)$.
При $x=\pm 1$ сходится абсолютно. 2825. $R=1$; $(-1, 1)$. При $x=-1$ сходится
условно; при $x=1$ расходится. 2826. $R=1$; $(-1, 1)$. При $x=-1$ расходится;
при $x=1$ сходится условно. 2827. $R=1$; $(-1, 1)$. При $x=\pm 1$ расходится.

2828. $R=\frac{1}{4}$; $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. При $x=\pm \frac{1}{4}$ расходится. 2829. $R=\frac{1}{3}$;

$(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. При $x=\pm \frac{1}{3}$ расходится. 2830. $R=1$; $(-1, 1)$. При $x=\pm 1$
сходится абсолютно. 2831. $R=1$; $(-1, 1)$. При $x=\pm 1$ сходится условно.

2831.1. При $0 < x < 2$ сходится абсолютно; при $x=2$ сходится условно.

2831.2. Сходится лишь при $x=0$. 2832. $R=1$; $(-1, 1)$. При $x=-1$ сходится
абсолютно, если $\gamma-\alpha-\beta > 0$, и сходится условно, если $-1 < \gamma-\alpha-\beta \leq 0$;
при $x=1$ сходится абсолютно, если $\gamma-\alpha-\beta > 0$, и расходится, если

$\gamma-\alpha-\beta \leq 0$. 2833. $x > 0$. 2834. $|x| > \frac{1}{2}$. 2835. $0 < |x| < +\infty$. 2836. $x > -1$.

2837. $|x-k\pi| < \frac{\pi}{4}$, где k —целое число. 2838. $-1+3(x+1)-3(x+1)^2+$

$+(x+1)^3$. 2839. а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}}$ ($|x| < |a|$); б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-b)^n}{(a-b)^{n+1}}$ ($|x-b| <$

$|a-b|$); в) $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{x^{n+1}}$ ($|x| > |a|$). 2840. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$

($0 < x < 2$); $\ln 2$. 2841. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ($|x| < +\infty$). 2842. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

- $(|x| < +\infty)$. 2843. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$ ($|x| < +\infty$). 2844. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n$ ($|x| < +\infty$). 2845. $\mu x + \frac{\mu(1^2 - \mu^2)}{3!} x^3 + \frac{\mu(1^2 - \mu^2)(3^2 - \mu^2)}{5!} x^5 + \dots$ ($|x| < 1$).
 2846. $1 - \frac{\mu^2}{2!} x^2 - \frac{\mu^2(2^2 - \mu^2)}{4!} x^4 - \dots$ ($|x| < 1$). 2847. $1 + (x-1) + (x-1)^2 + \dots + \frac{(x-1)^3}{2} + \dots$ ($0 < x < 2$). 2848. $e \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24} x^2 - \frac{7}{16} x^3 + \dots \right)$ ($|x| < 1$).
 2849. $\sin(x+h) = \sin x + h \cos x - \frac{h^2}{2!} \sin x - \frac{h^3}{3!} \cos x + \dots$ ($|h| < +\infty$);
 $\cos(x+h) = \cos x - h \sin x - \frac{h^2}{2!} \cos x + \frac{h^3}{3!} \sin x + \dots$ ($|h| < +\infty$).
 2850. а) $(-2, 2)$; б) $(3, 7)$. 2850.1. Нет. 2851. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ ($|x| < +\infty$).
 2852. $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$ ($|x| < +\infty$). 2853. $\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^{2n-1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ ($|x| < +\infty$). 2854. $\sum_{n=10}^{\infty} x^n$ ($|x| < 1$). 2855. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$ ($|x| < 1$). 2856. $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} x^{n+1}$ $\left(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right)$. 2857. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ($|x| < 1$).
 2858. $\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-2)^n] x^n$ ($|x| < \frac{1}{2}$). 2859. $\sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{6^n} \right] x^n$ ($|x| < 1$).
 2860. $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[n + \frac{1 - (-1)^n}{2} \right] x^n$ ($|x| < 1$). 2861. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, где $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^{n+1} + (-1)^n \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{n+1} \right]$ (числа Фибоначчи).
 2862. $\frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin \frac{2n(n+1)}{3}$ ($|x| < 1$). 2862.1. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, где $c_n = 1$, если $n = 4k$; $c_n = -1$, если $n = 2k+1$; $c_n = 0$, если $n = 2k+2$ или $n = 2k+3$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). $f^{(1000)}(0) = 1000!$. 2863. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\alpha$ ($|x| < 1$).
 2864. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin n\alpha$ ($|x| < 1$). 2865. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \operatorname{sh} n\alpha$ ($|x| < e^{-|\alpha|}$).
 2866. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!} x^{2n}$ ($|x| < 1$). 2867. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + [1 + (-1)^n] (-1)^{\frac{n}{2}+1}}{n} x^n$ ($-1 < x < 1$). 2868. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n!} x^n$ ($|x| < +\infty$). 2869. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

$$\begin{aligned}
& (|x| \leq 1); \frac{\pi}{4} \cdot 2870. \quad x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| \leq 1). \quad 2871. \quad x + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \times \right. \\
& \times \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \left. \right\} \quad (|x| \leq 1). \quad 2872. \quad -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n} x^n \quad (|x| \leq 1). \quad 2873. \quad a) \quad x + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \quad (-1 \leq x \leq 1); \quad б) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{4n+1} \quad (-1 < x < 1); \\
& в) \quad \arctg 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{2n-1} x^{2n-1} \left(-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2} \right); \quad г) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (-1)^{\left[\frac{n}{2} \right]} \times \right. \\
& \times \frac{x^{2n+1}}{2^n (2n+1)} \left. \right\} \quad (|x| < \sqrt{2}); \quad д) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)} \quad (|x| \leq 1); \quad е) \quad 2|x| \left\{ 1 + \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n}}{2n+1} \left. \right\} \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1 \text{ и } -1 \leq x \leq 0; \quad ж) \quad 1 + \frac{x^2}{2} + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \frac{x^{2n+2}}{2n+1} \right\} \quad (|x| \leq 1); \quad з) \quad -1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{x^{2n+2}}{2n+1} \\
& (|x| \leq 1). \quad 2874. \quad a) \quad e^{x^2} \left[(2x)^n + \frac{n(n-1)}{1!} (2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} \times \right. \\
& \times (2x)^{n-4} + \dots \left. \right]; \quad б) \quad \frac{(-1)^n}{x^{2n}} e^{\frac{1}{x^2}} \left[a^n + \frac{n(n-1)}{1!} a^{n-2} x + \frac{n(n-1)(n-2)}{2!} \times \right. \\
& \times a^{n-4} x^3 + \dots \left. \right]; \quad в) \quad \frac{(-1)^{n-1} n!}{(1+x^2)^n} \left[x^{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)}{3!} x^{n-3} + \right. \\
& + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!} x^{n-5} - \dots \left. \right]. \quad 2875. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x+1)^{2n} \\
& (-2 \leq x \leq 0). \quad 2876. \quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \quad (|x| > 1). \quad 2877. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2n+1} \quad (x > 0). \\
& 2878. \quad \frac{x}{1+x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{x}{1+x} \right)^{n+1} \quad \left(x > -\frac{1}{2} \right). \quad 2881. \quad 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 - \\
& - \frac{1}{24}x^5 - \dots \quad (|x| < 1). \quad 2882. \quad 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!} x^n \quad (|x| < +\infty). \\
& 2883. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(2n)!} - \frac{2}{(2n-2)!} + \frac{1}{(2n-4)!} \right] x^n \quad (|x| < +\infty), \quad \text{где } 0! = 1, \\
& (-1)! = \infty, \quad (-2)! = \infty \text{ и т. д.} \quad 2884. \quad 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \frac{x^{n+1}}{n+1}
\end{aligned}$$

- $(-1 \leq x < 1)$. 2885. $x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} x^{2n+1} (|x| \leq 1)$. 2886. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}}{n!} x^n$
 $(|x| < +\infty)$. 2887. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}}{n!} x^n (|x| < +\infty)$. 2888. $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^{n-1} \times \right.$
 $\times \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) x^n \Big\} (-1 < x < 1)$. 2889. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{3} + \dots \right.$
 $\left. + \frac{1}{2n-1} \right) \frac{x^{2n}}{n} (|x| \leq 1)$. 2890. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n} (|x| \leq 1)$. 2891. $x + \frac{1}{3} x^3 +$
 $+\frac{2}{15} x^5 + \dots (|x| < \frac{\pi}{2})$. 2892. $x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \dots (|x| < \frac{\pi}{2})$.
2893. $-\frac{1}{3} x - \frac{1}{45} x^3 - \frac{2}{945} x^5 - \dots (|x| < \pi)$. 2894. $E_0 = 1, \sum_{k=0}^n \left\{ (-1)^k \times \right.$
 $\times \frac{E_{n-k}}{(2k)! (2n-2k)!} \Big\} = 0$. 2895. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) x^n (|x| < 1)$,
где $P_0(x) = 1$; $P_n(t) = \frac{(2n-1)!!}{n!} \left[t^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} t^{n-2} + \right.$
 $\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} t^{n-4} - \dots \right] (n \geq 1)$ (многочлены Лежандра).
2896. $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$, где $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$. 2897. а) $R \geq \min(R_1, R_2)$; б) $R \geq R_1 R_2$.
2901. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n! (2n+1)} (|x| < +\infty)$. 2902. $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} (|x| \leq 1)$.
2903. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} (|x| < +\infty)$. 2904. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} (|x| \leq 1)$.
2905. $x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{36} + \frac{x^4}{96} - \dots (|x| < 1)$. 2906. $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} (|x| < 1)$. 2907. $\operatorname{arctg} x$
 $(|x| \leq 1)$. 2908. $\operatorname{ch} x (|x| < +\infty)$. 2909. $1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x) (|x| \leq 1)$.
2910. $\frac{1}{\sqrt{1-x}} (-1 \leq x < 1)$. 2911. $\frac{x}{(1-x)^2} (|x| < 1)$. 2912. $\frac{x(1-x)}{(1+x)^2} (|x| < 1)$.
2913. $\frac{2x}{(1-x)^2} (|x| < 1)$. 2916. $R = 2$; $(x-1)^2 + (y-1)^2 < 4$. 2917. $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$;
 $x^2 + y^2 < \frac{1}{2}$. 2918. $R = 1$; $x^2 + y^2 < 1$. 2919. $R = 1$; $x^2 + y^2 < 1$. 2920. $R =$
 $= \left| 2 \sin \frac{\alpha}{2} \right|$; $(x - \cos \alpha)^2 + (y - \sin \alpha)^2 < 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$. 2921. 2,080. 2922. а) 0,87606 =

$= \arcsin 50^\circ 11' 40''$; б) 1,99527; в) 0,60653; г) 0,22314. 2923. 0,30902. 2924. 0,999848. 2925. 0,158. 2926. 2,718282. 2927. 0,1823. 2928. 3,1416. 2929. 3,142. 2930. 3,141592654. 2931. $\ln 2 = 0,69315$; $\ln 3 = 1,09861$. 2932. а) 0,747; б) 2,835; в) 1,605; г) 0,905; д) 1,057; е) 0,119; ж) 0,337; з) 0,927; и) 8,041; к) 0,488;

л) 0,507; м) 0,783. 2933. 3,82. 2934. 4,84. 2935. 20,02 м. 2936. $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x$. 2937. Ряд Фурье совпадает с многочленом $P_n(x)$.

$$2938. \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}; \frac{\pi}{4}. \quad 2939. \frac{A}{2} - \frac{2A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1) \frac{\pi x}{l}.$$

$$2940. 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}. \quad 2941. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}. \quad 2942. \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

$$2943. \frac{(a-b)\pi}{4} - \frac{2(a-b)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)} + (a+b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}.$$

$$2944. \frac{2}{3} \pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx. \quad 2945. \frac{2 \sin \pi a}{\pi} \left[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\pi \cos \pi x}{n^2 - a^2} \right].$$

$$2946. \frac{2 \sin \pi a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n \sin nx}{n^2 - a^2}. \quad 2947. \frac{2 \operatorname{sh} \pi a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n \sin nx}{n^2 + a^2}.$$

$$2948. 2 \operatorname{sh} ah \left[\frac{1}{2ah} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{ah \cos \frac{n\pi x}{h} - \pi n \sin \frac{n\pi x}{h}}{(ah)^2 + (\pi n)^2} \right]. \quad 2949. a + l + \frac{2l}{\pi} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{n\pi a}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} - \cos \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \right) (a < x < a + 2l). \quad 2950. 1 - \frac{1}{2} \cos x +$$

$$+ 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - 1} \cos nx. \quad 2951. \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(4n^2 - 1)^2} \sin 2ax. \quad 2952. \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ (-1)^k \times \right.$$

$$\times \frac{\cos(2k+1)x}{2k+1} \left. \right\}. \quad 2953. \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin(2k+1)x. \quad 2954. \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

$$2955. \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n} \quad (x \neq \text{целому числу}). \quad 2956. \frac{1}{4} -$$

$$- \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2\pi(2n+1)x}{(2n+1)^2}. \quad 2957. \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1}. \quad 2958. \frac{2}{\pi} +$$

$$+ \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1} \cos 2kx. \quad 2959. \frac{\alpha}{1 - \alpha^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \cos nx.$$

$$2960. \frac{4}{\pi} \ln(1 + \sqrt{2}) + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ (-1)^k \left[2 + \frac{8}{\pi} \sum_{m=1}^k \frac{(-1)^m}{m} \sin \frac{m\pi}{2} \right] \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \cos (8k+4)x \Big\} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (-1)^k \left[\frac{\theta}{\pi} \ln (1+\sqrt{2}) + \frac{16}{\pi} \sum_{m=1}^k \frac{(-1)^m}{2m-1} \times \right. \right. \\
& \times \sin (2m-1) \frac{\pi}{4} \Big] \cos 8kx \Big\}. \quad 2961. \text{ а) } \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad (-\pi \leq x < \pi); \\
& \text{б) } 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx - \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin (2k+1)x}{(2k+1)^3} \quad (0 \leq x < \pi); \text{ в) } \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - \\
& - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad (0 < x < 2\pi); \frac{\pi^2}{6}, \frac{\pi^3}{12}, \frac{\pi^3}{8}. \quad 2962. x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}; \\
& x^3 = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} + 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^3}; \quad x^4 = \frac{1}{\pi} \pi^4 + 8\pi^2 \times \\
& \times \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^3} + 48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} \cos nx. \quad 2963. \frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}; \frac{\pi^2 - 3\pi\alpha + 3\alpha^2}{6}. \\
& 2964. \frac{2}{3} - \frac{9}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{2\pi nx}{3} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi nx}{n^2} \quad (0 \leq x < 3). \quad 2965. \frac{1}{2^m} C_{2m}^m + \\
& + \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{k=1}^m C_{2m-k}^{m-k} \cos 2kx. \quad 2966. \sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx \quad (|q| < 1). \quad 2967. 1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos nx \\
& (|q| < 1). \quad 2968. \sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos nx. \quad 2969. -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \cos nx. \quad 2970. -\ln 2 - \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}. \quad 2971. -\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos nx}{n}. \quad 2972. -2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos (2k+1)x}{2k+1}. \\
& 2973. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin (2k+1)x}{(2k+1)^2}. \quad 2974. x(s) = \frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi s}{2a} + \\
& + \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi s}{2a}; \quad y(s) = \frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi s}{2a} + \\
& + \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi s}{2a}. \quad 2975. f(-x) = f(x); \quad f(\pi-x) = -f(x). \\
& 2976. f(-x) = -f(x); \quad f(\pi-x) = f(x). \quad 2977. \text{ а) } - \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{2}{(2k+1)^2} - \frac{8}{\pi} \times \right. \right. \\
& \times \left. \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right] \cos (2k+1)x \Big\} \quad \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2} \right); \text{ б) } \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{2(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} + \frac{8}{\pi} \frac{1}{(2k+1)^2} \right] \times \right. \\
& \times \left. \sin (2k+1)x \right\} \quad \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2} \right). \quad 2978. a_{2n} = b_{2n} = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots). \\
& 2979. a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots).
\end{aligned}$$

2980. а) $a_n = 0$, $b_{2k-1} = 0$; б) $a_n = 0$, $b_{2k} = 0$.

2981. $\alpha_n = a_n$, $\beta_n = -b_n$. 2982. $\alpha_n = -a_n$, $\beta_n = b_n$.

2983. $a_n = a_n \cos nh + b_n \sin nh$, $b_n = b_n \cos nh - a_n \sin nh$.

2984. $A_0 = a_0$.

$A_n = a_n \frac{\sin nh}{nh}$, $B_n = b_n \frac{\sin nh}{nh}$ ($n = 1, 2, \dots$). 2985. $A_0 = a_0^2$, $A_n = a_n^2 + b_n^2$,

$B_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$). 2986. $\frac{1}{2}$. 2987. $\frac{1}{4}$. 2988. $2 \ln 2 - 1$. 2989. $\frac{1}{4}$. 2990. $\frac{1}{m} \times$

$\times \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}\right)$. 2991. $\ln 2 - \frac{1}{2}$. 2992. $\frac{3}{4}$. 2993. 1. 2994. $2(1 - \ln 2)$.

2995. $2e$. 2996. $3e^2$. 2997. $\frac{\pi^2}{3} - 3$. 2998. $\frac{\pi^2}{4} - \frac{39}{16}$. 2999. $\frac{1}{2}(\cos 1 - \sin 1)$.

3000. $\frac{1}{4}(4 \ln 2 - 1)$. 3001. $e^x (\alpha_m x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \dots + \alpha_0)$, где коэффи-

циенты α_k ($k = 0, 1, \dots, m$) определяются из равенства $P(n) = \alpha_m n(n-1) \dots$

$\dots (n-m+1) + \alpha_{m-1} n(n-1) \dots (n-m+2) + \dots + \alpha_1 n + \alpha_0$. 3002. $e^{\frac{x}{2}} \times$

$\times \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 1\right)$. 3003. $\left(x^2 + 1 + \frac{1}{x}\right) e^{-x} - \frac{1}{x}$. 3004. $\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \cos x - \frac{x}{2} \times$

$\times \sin x$. 3005. $\frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}} \operatorname{sh} \sqrt{x} - \operatorname{ch} \sqrt{x}\right)$, если $x \geq 0$; $\frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{\sqrt{|x|}} \sin \sqrt{|x|} -$

$-\cos \sqrt{|x|}\right)$, если $x < 0$. 3006. $\ln \frac{1}{1-x}$. 3007. $2x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2)$

($|x| \leq 1$). 3008. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x}$ ($|x| < 1$). 3009. $(1-x)^{-\frac{a}{d}} - 1$

($|x| < 1$). 3010. $\left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1$. 3011. $\frac{1+x}{(1-x)^3}$ ($|x| < 1$). 3012. $\frac{x(3-x)}{(1-x)^3}$

($|x| < 1$). 3013. $(1+2x^2)e^{x^2}$. 3014. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \ln 2$. 3015. $\frac{\pi}{4}$. 3016. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3017. $\frac{\pi}{2}$. 3018. $\frac{\pi-x}{2}$ ($0 < x < 2\pi$). 3019. $-\ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right|$ ($0 < x < 2\pi$).

3020. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin \frac{x+\alpha}{2}}{\sin \frac{x-\alpha}{2}} \right|$. 3021. $\frac{\pi}{4}$, если $0 < x < 2\alpha$; 0, если $\alpha < x < 2\pi - 2\alpha$;

$-\frac{\pi}{4}$, если $2\pi - 2\alpha < x < 2\pi$. 3022. $\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x$ ($|x| < \pi$). 3023. $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\cos x}{2}\right) -$

$-\frac{x}{2} \sin x$ ($|x| < \pi$). 3024. $\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4} |x|$ ($|x| \leq \pi$). 3025. $\frac{x}{2} (1 + \cos x) -$

$-\sin x \ln \left(2 \cos \frac{x}{2}\right)$ ($|x| < \pi$). 3026. $e^{\cos x} \cos(\sin x)$ ($|x| < +\infty$). 3027. $x = i\pi$.

$y = j\pi$ ($i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 3028. $2(\arcsin x)^2$ ($|x| \leq 1$). 3029. $\frac{4}{4-x} +$

$+\frac{4\sqrt{x}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}} \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2}$, если $x \geq 0$; $\frac{4}{4-x} - \frac{4\sqrt{|x|}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}} \ln \frac{\sqrt{|x|} + \sqrt{4-x}}{2}$,

если $x < 0$. 3030. $\frac{1}{x-1}$. 3031. $\frac{\pi}{x}$. 3032. а) $\frac{x}{1-x}$; б) $\frac{1}{1-x}$. 3033. а) $\frac{x^2}{(1-x)^2}$;

$$6) \frac{x}{(x-1)^2}, \quad 3034. 1. \quad 3035. 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{(2n+1)^2}. \quad 3036. \frac{\pi^2}{12}.$$

$$3037. -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(p+nq)}. \quad 3038. 2 - \frac{\pi^2}{6}. \quad 3039. \frac{1}{24}. \quad 3040. \frac{\pi^2}{12}. \quad 3041. F(k) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 k^{2n} \right\}. \quad 3042. E(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \frac{k^{2n}}{2n-1} \right\}.$$

$$3043. 2\pi a \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \varepsilon^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{\varepsilon^4}{3} - \dots \right], \text{ где } \varepsilon - \text{эксцентриситет эллипса.}$$

$$3047. \frac{2\pi\alpha^q}{\alpha!}. \quad 3048. \ln(1+\alpha) \text{ при } |\alpha| < 1 \text{ и } \frac{1}{\alpha^2} \ln \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \text{ при } |\alpha| > 1.$$

$$3049. 0 \text{ при } |\alpha| \leq 1 \text{ и } \pi \ln \alpha^2 \text{ при } |\alpha| > 1. \quad 3050. 2 \cdot 10^{-6}. \quad 3061. \frac{1}{4}. \quad 3062. 2.$$

$$3063. \frac{3}{7}. \quad 3064. a - \ln^2 a. \quad 3065. \text{ а) Нет; б) да; в) да; г) да. } \quad 3066. \text{ Расходится к}$$

нулю. 3067. Сходится. 3068. Сходится при $p > 1$. 3069. Расходится к нулю.

3070. Сходится при любом p . 3071. Сходится, если $a_1 = a$. 3072. Сходится,

если $\sum_{i=1}^p a_i = \sum_{i=1}^p b_i$. 3073. Расходится к нулю. 3074. Сходится. 3075. Сходится.

3076. Сходится. 3077. Сходится при любом x . 3078. Сходится при любом x .

3079. Сходится при $|x| < 1$. 3080. Сходится при $|x| < 2$. 3081. Сходится

при $|x| > e$. 3082. Сходится при любом x . 3083. Сходится при $|x| < 1$, p ,

произвольных и при $x = \pm 1$, $p > 1$, $q > \frac{1}{2}$. 3084. Сходится при любых x и p .

3085. Расходится. 3086. Сходится условно. 3089. Расходится. 3090. Сходится

абсолютно, если $p > 1$; сходится условно, если $\frac{1}{2} < p \leq 1$. 3091. Рас-

ходится. 3092. Расходится. 3093. Расходится. 3094. Сходится условно.

3095. Сходится условно. 3096. Расходится. 3097. Сходится абсолютно при

$\alpha > 1$; сходится условно при $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$.

$$3109. \quad F^s(x) = F(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(x)}{1 + f_n(x)}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < +\infty, \quad |f'_n(x)| < c_n$$

$$(n=1, 2, \dots), \text{ где } \sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty. \quad 3111. 157,970 + \theta \cdot 0,0004 \quad (0 < \theta < 1).$$

$$3112. 10^{2000} \cdot 7,7 \cdot \left(1 + \frac{\theta}{12000} \right) \quad (|\theta| < 1). \quad 3113. 0,0798 \cdot \left(1 + \frac{\theta}{300} \right) \quad (|\theta| < 1).$$

$$3114. 10^{20} \cdot 1,378 \cdot \left(1 + \frac{\theta}{288} \right) \quad (|\theta| \leq 1). \quad 3115. 10^{42} \cdot 4,792 \cdot \left(1 + \frac{\theta}{120} \right) \quad (|\theta| \leq 1).$$

$$3118. 0,124 \cdot \left(1 + \frac{\theta}{300} \right) \quad (|\theta| < 1). \quad 3117. 0,355 \cdot \left(1 + \frac{\theta}{600} \right) \quad (|\theta| < 1).$$

$$3118. (2n-1)!! = \sqrt{2} (2n)^n e^{-n + \frac{\theta_n}{12n}} \quad (|\theta_n| < 1). \quad 3119. \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} e^{\frac{\theta_n}{6n}} \quad (|\theta_n| < 1).$$

$$3120. \text{ а) } 1; \text{ б) } \frac{e}{2}; \text{ в) } \frac{e}{2}; \text{ г) } 1. \quad 3121. P_1(x) = 1 - \frac{55}{21}x - \frac{1}{14}x^2 + \frac{5}{42}x^3; P_1(-1) \approx 3,43;$$

- $P_2(1) = -1,57$; $P_2(6) \approx 8,43$. 3122. $y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{2h}(x - x_0) + \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{2h^2}(x - x_0)^2$. 3123. $y = 0,808 + 0,193x - 0,00101x^2$. 3124. $\sin x^\circ \approx \frac{5x}{288} \left[1 - \left(\frac{x}{150} \right)^2 \right]$; $\sin 20^\circ \approx 0,341$; $\sin 40^\circ \approx 0,645$; $\sin 80^\circ \approx 0,994$.
3125. $P(x) = \frac{1}{3}(7x^3 - 4x^4)$. 3126. $\frac{7}{3}$.
3127. $B_n(x) = x$; $B_n(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$;
 $B_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) x^2 + \frac{2}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n^2} x$.
3128. $B_n(x) = \sum_{i=0}^n f\left(a + \frac{i}{n}\right) C_n^i \frac{(x-a)^i (b-x)^{n-i}}{i^n}$, где $l = b-a$.
3129. $B_n(x) = \frac{1}{8}(1-x)(1+x)^2 + \frac{1}{16}(1+x)^4$. 3130. $B_{2n}(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{1-x^2}{4} \right)^n \times$
 $\times \sum_{i=1}^n i C_{2n}^{n-i} \left[\left(\frac{1+x}{1-x} \right)^i + \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^i \right]$. 3131. $B_n(x) = e^{2x} \left[1 + (e^{\frac{2x}{n}} - 1) \frac{x-a}{i} \right]^n$,
 где $l = b-a$.
3132. $B_n(x) = \frac{1}{2} \left[\left(\cos \frac{\pi}{2n} + i \frac{2x}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \right)^n + \left(\cos \frac{\pi}{2n} - i \frac{2x}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \right)^n \right]$, где
 $i^2 = -1$. 3135. $\sigma_{2n-1}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{n-k}{2n-1} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$.

ЧАСТЬ II

Отдел VI

3136. Полуплоскость $x \geq 0$. 3137. $|x| \leq 1$; $|y| \geq 1$. 3138. Круг $x^2 + y^2 \leq 1$. 3139. Внешность круга $x^2 + y^2 > 1$. 3140. Кольцо $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$. 3141. Лучи $x \leq x^2 + y^2 < 2x$. 3142. $-1 \leq x^2 + y^2 \leq 1$. 3143. Полуплоскость $x + y < 0$. 3144. Пара вертикальных углов $|y| \leq |x|$ ($x \neq 0$). 3145. Пара вертикальных тупых углов, ограниченных прямыми $y=0$ и $y=-2x$, включая границу без общей вершины $O(0,0)$. 3146. Криволинейный треугольник, ограниченный параболой $y^2 = x$, $y^2 = -x$ и прямой $y=2$, исключая вершину $O(0,0)$. 3147. Семейство концентрических колец $2\pi k \leq x^2 + y^2 \leq \pi(2k+1)$ ($k=0, 1, 2, \dots$). 3148. Внешность конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, включая границу за вычетом вершины. 3149. Совокупность четырех октантов пространства. 3150. Внутренность двуполостного гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = -1$. 3151. Параллельные прямые. 3152. Концентрические окружности. 3153. Семейство равносторонних гипербол с общими асимптотами $y = \pm x$. 3154. Параллельные прямые. 3155. Пучок прямых с вершиной в начале координат, за вычетом вершины. 3156. Семейство подобных эллипсов. 3157. Совокупность равносторонних гипербол, асимптотически приближающихся к осям координат и расположенных в I и III квадрантах. 3158. Семейство двузвенных ломаных линий, вершины которых расположены на оси Oy . 3159. I и III квадранты при $z=0$; семейство двузвенных ломаных линий, звенья которых параллельны осям координат, а вершины расположены на прямой $x+y=0$ при $z > 0$. 3159.1. Линии уровня — стороны углов, параллельные положительным направлениям координат.

натных осей Ox и Oy с вершинами на прямой $y=x$. **3159.2.** Семейство контуров квадратов с общим центром $O(0, 0)$, стороны которых параллельны осям координат Ox и Oy при $z > 0$; точка $O(0, 0)$ при $z = 0$. **3159.3.** Прямые, параллельные оси Ox , если $z < 0$; стороны углов, параллельные координатной оси Ox и положительной полуоси Oy , с вершинами на параболы $y=x^2$, если $z > 0$; положительная полуось Oy , если $z = 0$. **3160.** Пучок окружностей, проходящих через начало координат (не включая этого начала!) и ортогональных к оси Ox . **3161.** Кривые $y = \frac{C}{\ln x}$. **3162.** Кривые $y = \frac{C+x}{\ln x}$.

3163. Семейство окружностей с центрами на оси Ox , ортогональных к окружности $x^2 + y^2 = a^2$. **3164.** Семейство окружностей, ортогональных к оси Oy и проходящих через точки $(-a, 0)$, $(a, 0)$, за вычетом последних. **3165.** Прямые $x = m\pi$ и $y = n\pi$ ($m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), при $z = 0$; система квадратов $m\pi < x < (m+1)\pi$, $n\pi < y < (n+1)\pi$, где $(-1)^{m+n} = z$, при $z = -1$ или $z = 1$. **3166.** Семейство параллельных плоскостей. **3167.** Семейство концентрических сфер с центром в начале координат. **3168.** Семейство двуполостных гиперболоидов при $u < 0$; семейство однополостных гиперболоидов при $u > 0$; конус при $u = 0$. **3169.** Семейство эллиптических цилиндров, общей осью которых является прямая $x+y=0$, $z=0$. **3170.** Семейство концентрических сфер $x^2 + y^2 + z^2 = n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), при $u = 0$; семейство сферических слоев $n\pi < x^2 + y^2 + z^2 < (n+1)\pi$, где $(-1)^n = u$, при $u = -1$ или $u = 1$. **3171.** Цилиндрическая поверхность с направляющей $z=f(y)$, $x=0$, образующие которой параллельны прямой $y=ax$, $z=0$. **3172.** Поверхность вращения кривой $z=f(x)$, $y=0$ вокруг оси Oz . **3173.** Коническая поверхность с вершиной в начале координат и направляющей: $x=1$, $z=f(y)$. **3174.** Коноид с направляющей: $x=1$, $z=f(y)$, образующие которого параллельны плоскости Oxy . **3176.** $f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(x, y)$. **3177.** $\sqrt{1+x^2}$. **3178.** $f(t) = 2t + t^2$; $z = x - 1 +$

$+ \sqrt{y}$ ($x > 0$). **3179.** $f(x) = x^2 - x$; $z = 2y + (x-y)^2$. **3180.** $f(x, y) = x^3 \frac{1-y}{1+y}$.

3183.1. Нет. **3183.2.** 0; нет. **3184.** а) 0, 1; б) $\frac{1}{2}$, 1; в) 0, 1; г) 0, 1; д) 1, ∞ .

3185. 0. **3186.** 0. **3187.** а. **3188.** 0. **3189.** 0. **3190.** 1. **3191.** е. **3192.** $\ln 2$.

3193. а) $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{4} < \varphi < \frac{7\pi}{4}$. **3194.** Точка разрыва:

$x=0$, $y=0$. **3195.** Все точки прямой $x+y=0$. **3196.** $O(0, 0)$ — точка бесконечного разрыва; точки прямой $x+y=0$ ($x \neq 0$) — устранимые точки разрыва. **3197.** Точки, расположенные на осях координат. **3198.** Совокупность точек прямых $x=m\pi$ и $y=n\pi$ ($m, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). **3199.** Точки окружности $x^2 + y^2 = 1$. **3200.** Точки координатных плоскостей: $x=0$, $y=0$ и $z=0$. **3201.** (а, б, с). **3203.1.** Равномерно непрерывна. **3203.2.** Равномерно непрерывна. **3203.3.** Неравномерно непрерывна. **3203.4.** Функция непрерывна на E , но неравномерно. **3212.** $f'_x(x, 1) = 1$. **3212.1.** $f'_x(0, 0) = 0$, $f'_y(0, 0) = 0$; функция недифференцируема в точке $O(0, 0)$. **3212.2.** Функция недифференцируема в точке $O(0, 0)$. **3212.3.** Функция дифференцируема в точке $O(0, 0)$.

3213. $\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^2 - 8xy^2$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 4y^3 - 8x^2y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -16xy$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2$. **3214.** $\frac{\partial u}{\partial x} = y + \frac{1}{y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{x}{y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1 - \frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}$.

3215. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2x}{y^3}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{2}{y^4}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{6x}{y^5}$. **3216.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{3xy^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{y(2x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$.

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^2} = -\frac{x(x^2 - 2y^2)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \quad 3217. \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \sin(x+y) + x \cos(x+y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x \cos(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \cos(x+y) - x \sin(x+y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \cos(x+y) - x \sin(x+y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -x \sin(x+y). \quad 3218. \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2x \sin x^2}{y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\cos x^2}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2 \sin x^2 + 4x^2 \cos x^2}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{2x \sin x^2}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2 \cos x^2}{y^3}. \quad 3219. \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y} \operatorname{ec}^2 \frac{x^2}{y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} \sec^2 \frac{x^2}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2}{y} \sec^2 \frac{x^2}{y} + \frac{8x^2}{y^2} \sin \frac{x^2}{y} \sec^2 \frac{x^2}{y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{2x}{y^2} \sec^2 \frac{x^2}{y} - \frac{4x^3}{y^3} \sin \frac{x^2}{y} \sec^2 \frac{x^2}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x^3}{y^3} \sec^2 \frac{x^2}{y} + \frac{2x^4}{y^4} \sin \frac{x^2}{y} \sec^2 \frac{x^2}{y}. \quad 3220. \quad \frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xy \ln x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$$

$$= y(y-1)x^{y-2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^{y-1}(1+y \ln x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x \quad (x > 0). \quad 3221. \quad \frac{\partial u}{\partial x} =$$

$$= \frac{1}{x+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x+y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{2y}{(x+y^2)^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} =$$

$$= \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^3}. \quad 3222. \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}. \quad 3223. \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2} \quad (xy \neq 1). \quad 3224. \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x \operatorname{sgn} y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{(x^2-y^2) \operatorname{sgn} y}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} =$$

$$= \frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2} \quad (y \neq 0). \quad 3225. \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}. \quad 3226. \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z}{x} \left(\frac{x}{y}\right)^z, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{z}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^z, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \times$$

$$\times \ln \frac{x}{y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{z(z-1)}{x^2} \left(\frac{x}{y}\right)^z, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{z(z+1)}{y^2} \left(\frac{x}{y}\right)^z, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \ln^2 \frac{x}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{z^2}{xy} \left(\frac{x}{y}\right)^z, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{1}{x} \left(\frac{x}{y}\right)^z \left(1+z \ln \frac{x}{y}\right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = -\frac{1}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^z \times$$

$$\times \left(1+z \ln \frac{x}{y}\right) \left(\frac{x}{y} > 0\right). \quad 3227. \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{yu}{xz}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u \ln x}{z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{yu}{z^2} \ln x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y(y-z)u}{x^2 z^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u \ln^2 x}{z^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{yu \ln x}{z^4} (2z+y \ln x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{(z+y \ln x)u}{xz^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = -\frac{yu(z+y \ln x)}{xz^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = -\frac{u \ln x(z+y \ln x)}{z^3} \quad (xz \neq 0). \quad 3228. \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^z}{x} u,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = zy^{z-1} u \ln x, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = y^z u \ln x \ln y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^z(y^z-1)}{x^2} u, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = zy^{z-2} u(z-1+)$$

$$+ zy^z \ln x) \ln x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^z u(1+y^z \ln x) \ln x \ln^2 y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{zy^{z-1}u}{x} (1+y^z \ln x),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{y^z u \ln y}{x} (1+y^z \ln x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = y^{z-1} u \ln x [1+z \ln y (1+y^z \ln x)]$$

($x > 0, y > 0$). 3230. $f_{xy}(0, 0)$ не существует. 3235. $du = x^{m-1}y^{n-1}(my dx + nx dy)$,
 $d^2u = x^{m-3}y^{n-2}[m(m-1)y^2 dx^2 + 2mn xy dx dy + n(n-1)x^2 dy^2]$. 3236. $du =$
 $= \frac{y dx - x dy}{y^3}, \quad d^2u = -\frac{2}{y^3} dy(y dx - x dy). \quad 3237. \quad du = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad d^2u =$

$$= \frac{(y dx - x dy)^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \quad 3228. \quad du = \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}, \quad d^2u = \frac{(y^2 - x^2)(dx^2 - dy^2) - 4xy dx dy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$3239. \quad du = e^{xy} (y dx + x dy); \quad d^2u = e^{xy} [y^2 dx^2 + 2(1 + xy) dx dy + x^2 dy^2].$$

$$3240. \quad du = (y + z) dx + (z + x) dy + (x + y) dz, \quad d^2u = 2(dx dy + dy dz + dz dx).$$

$$3241. \quad du = \frac{(x^2 + y^2) dz - 2z(x dx + y dy)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad d^2u = \frac{2z[(3x^2 - y^2) dx^2 + (x^2 + y^2)^2] + 8xy dx dy + (3y^2 - x^2) dy^2}{(x^2 + y^2)^3} - 4(x^2 + y^2)(x dx + y dy) dz$$

$$- 2(dx - dy)(dy + dz). \quad 3242. \quad dx - dy, \quad 3243. \quad dx - dy, \quad 3244. \quad a) 1 + mx + ny; \quad б) xy; \quad в) x + y.$$

3245. а) 108,972; б) 1,055; в) 2,95; г) 0,502; д) 0,97. 3246. Диагональ уменьшится приблизительно на 3 мм; площадь уменьшится приблизительно на 140 см². 3247. Уменьшится на 1,7 мм. 3249. $\Delta \approx 10,2$ м³; $\delta \approx 13\%$. 3250. $\Delta \approx 7,6$ м. 3251. $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ не ограничены в окрестности точки (0, 0). 3256. $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 24, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = 0,$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = -16. \quad 3257. \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 0. \quad 3258. \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3 \partial y} = -6(\cos x + \cos y).$$

$$3259. \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 0. \quad 3260. \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xyz} (1 + 3xyz + x^2 y^2 z^2). \quad 3261. \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial \xi \partial \eta} = -\frac{6}{r^4} + \frac{48(x - \xi)^2 (y - \eta)^2}{r^5}, \quad \text{где } r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}. \quad 3262. \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = p \ln q.$$

$$3263. \quad \frac{2(-1)^m (m + n - 1)! (nx + my)}{(x + y)^{m + n + 1}}. \quad 3264. \quad e^{x+y} [x^3 + y^3 + 2(mx + ny) + m(m - 1) + n(n - 1)].$$

$$3265. \quad (x + p)(y + q)(z + r) e^{x+y+z}. \quad 3266. \quad \sin \frac{n\pi}{2}.$$

$$3267. \quad F(t) = f'(t) + 3tf''(t) + t^2 f'''(t). \quad 3268. \quad d^4u = 24(dx^4 - 2dx^2 dy - 2dx dy^2 + dy^4); \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 24, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} = -12, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} = -12, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 24.$$

$$3269. \quad d^3u = 6(dx^3 - 3dx^2 dy + 3dx dy^2 + dy^3). \quad 3270. \quad d^2u = -8(x dx + y dy)^3 \times \cos(x^2 + y^2) - 12(x dx + y dy)(dx^2 + dy^2) \sin(x^2 + y^2). \quad 3271. \quad d^{10}u = -\frac{9! (dx + dy)^{10}}{(x + y)^{10}}.$$

$$3272. \quad d^6u = -(dx^6 - 15dx^4 dy^2 + 15dx^2 dy^4 - dy^6) \times \cos x \operatorname{ch} y - 2dx dy (3dx^4 - 10dx^2 dy^2 + 3dy^4) \sin x \operatorname{sh} y. \quad 3273. \quad d^3u = 6 dx dy dz.$$

$$3274. \quad d^4u = 2 \left(\frac{dx^4}{x^3} + \frac{dy^4}{y^3} + \frac{dz^4}{z^3} \right). \quad 3275. \quad d^nu = e^{ax+by} (a dx + b dy)^n. \quad 3276. \quad d^nu =$$

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k X^{(n-k)}(x) Y^{(k)}(y) dx^{n-k} dy^k. \quad 3277. \quad d^nu = f^{(n)}(x + y + z)(dx + dy + dz)^n.$$

$$3278. \quad d^nu = e^{ax+by+cz} (a dx + b dy + c dz)^n. \quad 3280. \quad a) Au = -u, \quad A^2u = u; \quad б) Au = 1, \quad A^2u = 0. \quad 3281. \quad a) \Delta u = 0; \quad б) \Delta u = 0. \quad 3282. \quad a) \Delta_1 u = 9[(x^2 - yz)^2 + (y^2 - xz)^2 + (z^2 - xy)^2], \quad \Delta_2 u = 6(x + y + z); \quad б) \Delta_1 u = \frac{1}{r^4}, \quad \text{где } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\Delta_2 u = 0. \quad 3283. \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2x f'(x^2 + y^2 + z^2); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2f'(x^2 + y^2 + z^2) + 4x^2 f''(x^2 + y^2 + z^2); \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y} = 4xy f''(x^2 + y^2 + z^2).$$

$$3284. \quad \frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 \left(x, \frac{x}{y} \right) + \frac{1}{y} f'_2 \left(x, \frac{x}{y} \right); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} f'_2 \left(x, \frac{x}{y} \right);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{11} \left(x, \frac{x}{y} \right) + \frac{2}{y} f''_{12} \left(x, \frac{x}{y} \right) + \frac{1}{y^2} f''_{22} \left(x, \frac{x}{y} \right); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{x}{y^3} f''_{12} \left(x, \frac{x}{y} \right) -$$

$$-\frac{x}{y^3} f_{32}\left(x, \frac{x}{y}\right) - \frac{1}{y^3} f_2\left(x, \frac{x}{y}\right); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2}{y^4} f_{22}\left(x, \frac{x}{y}\right) + \frac{2x}{y^3} f_2\left(x, \frac{x}{y}\right). \quad 3285. \quad \frac{\partial u}{\partial x} = f_1' + y f_2' + y z f_3'; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x f_2' + x z f_3'; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x y f_3'; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_{11} + y^2 f_{22} + y^2 z^2 f_{33} +$$

$$+ 2y f_{12} + 2yz f_{13} + 2y^2 z f_{23}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 f_{22} + 2x^2 z f_{23} + x^2 z^2 f_{33}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = x^2 y^2 f_{33};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x y f_{22} + x y z^2 f_{33} + x f_{12} + x z f_{13} + 2x y z f_{23} + f_2 + z f_3; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = x y f_{33} +$$

$$+ x y^2 f_{23} + x y^2 z f_{33} + y f_2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = x^2 y f_{23} + x^2 y z f_{33} + x f_3. \quad 3286. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f_{11} +$$

$$+ (x+y) f_{12} + x y f_{22} + f_2. \quad 3287. \quad \Delta u = 3f_{11} + 4(x+y+z) f_{12} + 4(x^2 + y^2 + z^2) f_{22} + 6f_2. \quad 3288. \quad du = f'(t)(dx+dy); \quad d^2u = f''(t)(dx+dy)^2. \quad 3289. \quad du = f'(t) \frac{x dy - y dx}{x^2}; \quad d^2u = f''(t) \frac{(x dy - y dx)^2}{x^3} - 2f'(t) \frac{dx(x dy - y dx)}{x^3}.$$

$$3290. \quad du = f' \cdot \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad d^2u = f'' \cdot \frac{(x dx + y dy)^2}{x^2 + y^2} + f' \cdot \frac{(y dx - x dy)^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$3291. \quad du = f'(t) dt, \quad d^2u = f''(t) dt^2 + f'(t) d^2t, \quad \text{где } dt = yz dx + zx dy + xy dz, \quad d^2t = 2(z dx dy + y dx dz + x dy dz). \quad 3292. \quad du = 2f' \cdot (x dx + y dy + z dz); \quad d^2u = 4f'' \cdot (x dx + y dy + z dz)^2 + 2f' \cdot (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad 3293. \quad du = af_1' dx + bf_2' dy; \quad d^2u = a^2 f_{11}' dx^2 + 2ab f_{12}' dx dy + b^2 f_{22}' dy^2. \quad 3294. \quad du = f_1' \cdot (dx+dy) + f_2' \cdot (dx-dy); \quad d^2u = f_{11}' \cdot (dx+dy)^2 + 2f_{12}' \cdot (dx^2 - dy^2) + f_{22}' \cdot (dx-dy)^2.$$

$$3295. \quad du = f_1' \cdot (y dx + x dy) + f_2' \cdot \frac{y dx - x dy}{y^2}; \quad d^2u = f_{11}' \cdot (y dx + x dy)^2 +$$

$$+ 2f_{12}' \cdot \frac{y^2 dx^2 - x^2 dy^2}{y^3} + f_{22}' \cdot \frac{(y dx - x dy)^2}{y^4} + 2f_1' \cdot dx dy - 2f_2' \cdot \frac{(y dx - x dy) dy}{y^3}.$$

$$3296. \quad du = f_1' \cdot (dx+dy) + f_2' \cdot dz; \quad d^2u = f_{11}' \cdot (dx+dy)^2 + 2f_{12}' \cdot (dx+dy) dz + f_{22}' \cdot dz^2. \quad 3297. \quad du = f_1' \cdot (dx+dy+dz) + 2f_2' \cdot (x dx + y dy + z dz); \quad d^2u = f_{11}' \cdot (dx+dy+dz)^2 + 4f_{12}' \cdot (x dx + y dy + z dz)^2 + 2f_2' \cdot (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad 3298. \quad du = f_1' \cdot \frac{y dx - x dy}{y^2} + f_2' \cdot \frac{z dy - y dz}{z^2};$$

$$d^2u = f_{11}' \cdot \frac{(y dx - x dy)^2}{y^4} + 2f_{12}' \cdot \frac{(y dx - x dy)(z dy - y dz)}{y^2 z^2} +$$

$$+ f_{22}' \cdot \frac{(z dy - y dz)^2}{z^4} - 2f_1' \cdot \frac{(y dx - x dy) dy}{y^3} - 2f_2' \cdot \frac{(z dy - y dz) dz}{z^3}. \quad 3299. \quad du =$$

$$= (f_1' + 2tf_2' + 3t^2 f_3') dt; \quad d^2u = (f_{11}' + 4tf_{12}' + 4t^2 f_{22}' + 6t^2 f_{13}' + 12t^2 f_{23}' + 9t^4 f_{33}' + 2f_2' + 6t f_3') dt^2. \quad 3300. \quad du = af_1' dx + bf_2' dy + cf_3' dz; \quad d^2u = a^2 f_{11}' dx^2 + b^2 f_{22}' dy^2 + c^2 f_{33}' dz^2 + 2ab f_{12}' dx dy + 2ac f_{13}' dx dz + 2bc f_{23}' dy dz.$$

$$3301. \quad du = 2f_1' \cdot (x dx + y dy) + 2f_2' \cdot (x dx - y dy) + 2f_3' \cdot (y dx + x dy); \quad d^2u = 4f_{11}' \cdot (x dx + y dy)^2 + 4f_{22}' \cdot (x dx - y dy)^2 + 4f_{33}' \cdot (y dx + x dy)^2 + 8f_{12}' \cdot (x^2 dx^2 - y^2 dy^2) + 8f_{13}' \cdot (x dx + y dy)(y dx + x dy) + 8f_{23}' \cdot (x dx - y dy)(y dx + x dy) + 2f_1' \cdot (dx^2 + dy^2) + 2f_2' \cdot (dx^2 - dy^2) + 4f_3' \cdot dx dy. \quad 3302. \quad d^2u = f^{(n)}(ax+by+cz)(a dx + b dy + c dz)^n. \quad 3303. \quad d^2u =$$

$$= \left(a dx \frac{\partial}{\partial \xi} + b dy \frac{\partial}{\partial \eta} + c dz \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^n f(\xi, \eta, \zeta), \quad \text{где } \xi = ax, \quad \eta = by, \quad \zeta = cz.$$

$$3304. \quad d^2u = \left[dx \left(a_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + a_2 \frac{\partial}{\partial \eta} + a_3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) + dy \left(b_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + b_2 \frac{\partial}{\partial \eta} + b_3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) + \right.$$

$$+ d_2 \left(c_1 \frac{\partial}{\partial x} + c_2 \frac{\partial}{\partial y} + c_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \Big] \Big| f(\xi, \eta, \zeta).$$

$$3305. \quad F(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r).$$

$$3316. \quad 1. \quad 3319. \quad xyz. \quad 3331. \quad x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = x. \quad 3332. \quad 2x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2z.$$

$$3333. \quad y \frac{\partial z}{\partial y} - x \frac{\partial z}{\partial x} = 0. \quad 3334. \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad 3335. \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} +$$

$$+ z \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad 3336. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0. \quad 3337. \quad z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}. \quad 3338. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$3339. \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z. \quad 3340. \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad 3341. \quad 1 - \sqrt{3}.$$

$$3342. \quad \frac{\partial z}{\partial l} = \cos \alpha + \sin \alpha, \quad a) \quad \alpha = \frac{\pi}{4}; \quad б) \quad \alpha = \frac{5\pi}{4}; \quad в) \quad \alpha = \frac{3\pi}{4} \text{ и } \alpha = \frac{7\pi}{4}.$$

$$3343. \quad \sqrt{\frac{2}{x_0^2 + y_0^2}}. \quad 3344. \quad \frac{1}{ab} \sqrt{2(a^2 + b^2)}. \quad 3345. \quad \frac{\partial u}{\partial l} = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma;$$

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{3}. \quad 3346. \quad |\operatorname{grad} u| = \frac{1}{r_0}; \quad \cos(\operatorname{grad} u, \hat{x}) = -\frac{x_0}{r_0}, \quad \cos(\operatorname{grad} u, \hat{y}) =$$

$$= -\frac{y_0}{r_0}, \quad \cos(\operatorname{grad} u, \hat{z}) = -\frac{z_0}{r_0}, \quad \text{где } r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}. \quad 3347. \quad \frac{\pi}{2}.$$

$$3348. \quad \approx 3142. \quad 3350. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial l^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cos^2 \beta + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cos^2 \gamma +$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cos \alpha \cos \beta + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \cos \alpha \cos \gamma + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \cos \beta \cos \gamma. \quad 3352. \quad \frac{\partial u}{\partial y} =$$

$$= -0,5. \quad 3353. \quad u_{xx}(x, 2x) = u_{yy}(x, 2x) = -4/3x, \quad u_{xy}(x, 2x) = 5/3x.$$

$$3354. \quad z = x\varphi(y) + \psi(y). \quad 3355. \quad z = \varphi(x) + \psi(y). \quad 3356. \quad z = \varphi_0(x) + y\varphi_1(x) + \dots$$

$$+ \dots + y^{n-1}\varphi_{n-1}(x). \quad 3357. \quad u = \varphi(x, y) + \psi(x, z) + \chi(y, z). \quad 3358. \quad u = 1 +$$

$$+ x^2 y + y^2 - 2x^2. \quad 3359. \quad z = 1 + xy + y^2. \quad 3360. \quad z = x + y^2 + 0,5xy(x + y).$$

$$3362. \quad \text{Нули функции } f(x) \text{ не могут целиком заполнять никакой интервал } (\alpha, \beta) \subset (a, b). \quad 3363. \quad \text{Множество нулей функции } f(x) \text{ должно}$$

$$\text{быть нигде не плотным на интервале } (a, b), \text{ причем каждый нуль } \xi \text{ функции } f(x) \text{ одновременно есть нуль функции } g(x) \text{ и сверх того существует}$$

$$\text{конечный предел } \lim_{x \rightarrow \xi} [g(x)/f(x)]. \quad 3364. \quad 1) \text{ Бесчисленное множество;}$$

$$2) \text{ две; } 3) \text{ а) одна; б) две. } 3365. \quad 1) \text{ Бесчисленное множество; } 2) \text{ четыре; } y = x;$$

$$y = -x, \quad y = |x| \text{ и } y = -|x|; \quad 3) \text{ две; } 4) \text{ а) две; б) четыре; } 5) \text{ одна.}$$

$$3366. \quad 1) \text{ Нигде; } 2) 0 < |x| < 1, \quad |x| = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}; \quad 3) x=0, \quad |x|=1;$$

$$4) 1 < |x| < \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}; \text{ однозначные ветви: } y = \varepsilon \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4}}$$

$$\left(|x| < \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \right); \quad y = \varepsilon \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4}} \quad \left(1 < |x| < \right.$$

$$\left. < \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \right), \text{ где } \varepsilon = -1, 1. \quad 3367. \quad \text{Точки ветвления: } (-1, 0), (0, 0), (1, 0);$$

$$y = \varepsilon(x) \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \quad \left(|x| < 1 \right), \text{ где } \varepsilon(x) = -1, 1, \quad \operatorname{sgn} x \text{ и}$$

$$- \operatorname{sgn} x. \quad 3368. \quad \text{Множество значений функции } \varphi(y) \text{ должно иметь общие}$$

$$\text{Точки с множеством значений функции } f(x). \quad 3371. \quad y' = -\frac{x+y}{x-y}; \quad y'' =$$

$$= \frac{2x^2}{(x-y)^2}. \quad 3372. \quad y' = \frac{x+y}{x-y}; \quad y'' = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^2}. \quad 3373. \quad y' = \frac{1}{1-\cos y};$$

$$y' = \frac{-e \sin y}{(1 - \pi \cos y)^2}, \quad 3374. \quad y' = \frac{y^2(1 - \ln x)}{x^2(1 - \ln y)}; \quad y'' = \frac{y^2[y(1 - \ln x)^2 - 2(x - y) \times \times (1 - \ln x)(1 - \ln y) - x(1 - \ln y)^2]}{x^4(1 - \ln y)^3} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{y^2(1 - \ln y)^2}{x^4(1 - \ln y)^3}. \quad 3375. \quad y' = \frac{y}{x}; \quad y'' = 0. \quad 3376. \quad y_1'(0) = -1; \quad y_2'(0) = 1. \quad 3379. \quad y_1'(0) = 0; \quad y_2'(0) = -\sqrt{33}; \quad y_3'(0) = \sqrt{3}. \quad 3380. \quad y' = -\frac{2x+y}{x+2y}; \quad y'' = -\frac{18}{(x+2y)^3}; \quad y''' = -\frac{162x}{(x+2y)^4}. \quad 3381. \quad y' = 0; \quad y'' = -\frac{2}{3};$$

$$y''' = -\frac{2}{3}. \quad 3382. \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{z}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{x^2+z^2}{z^3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{xy}{z^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{y^2+z^2}{z^3}. \quad 3384. \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{z^2-xy}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{z^2-xy}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2xy^2z}{(z^2-xy)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2x^2yz}{(z^2-xy)^3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^3)}{(z^2-xy)^3}. \quad 3385. \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} =$$

$$= \frac{1}{x+y+z-1}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x+y+z}{(x+y+z-1)^3}. \quad 3386. \quad \frac{\partial z}{\partial x} =$$

$$= \frac{xz}{x^2-y^3}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{yz}{x^2-y^3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y^2z}{(x^2-y^3)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{xyz}{(x^2-y^3)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x^2z}{(x^2-y^3)^2}. \quad 3387. \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = -1; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$3388. \quad a) -2; \quad b) -1. \quad 3389. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2}{5}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{5}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{394}{125}.$$

$$3390. \quad dz = -\frac{c^2}{x} \left(\frac{x dx}{a^2} + \frac{y dy}{b^2} \right); \quad d^2z = -\frac{c^4}{z^2} \left[\left(\frac{x^3}{a^3} + \frac{z^3}{c^2} \right) \frac{dx^2}{a^2} + \frac{2xy}{a^2b^2} dx dy + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{y^3}{b^3} + \frac{z^3}{c^2} \right) \frac{dy^2}{b^2} \right]. \quad 3391. \quad dz = -\frac{(1-yz) dx + (1-xz) dy}{1-xy};$$

$$d^2z = -\frac{2\{y(1-yz) dx^2 + [x+y-z(1+xy)] dx dy + x(1-xz) dy^2\}}{(1-xy)^3}.$$

$$3392. \quad dz = \frac{z(y dx + z dy)}{y(x+z)}; \quad d^2z = -\frac{z^2(y dx - x dy)^2}{y^3(x+z)^3}. \quad 3393. \quad dz = dx -$$

$$- \frac{(x-z) dy}{(x-z)^2 + y(y+1)}; \quad d^2z = \frac{2(x-z)(y+1)[(x-z)^2 + y^2]}{[(x-z)^2 + y(y+1)]^3} dy^2.$$

$$3394. \quad du = -\frac{u^2(dx+dy)-z^2 dz}{u[2(x+y)-u]}. \quad 3395. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{4(x-z)(y-z)}{(F_1' + 2zF_3')^2} \times$$

$$\times [F_2'^2 F_{11}' - 2F_1' F_2' F_{12}' + F_1'^2 F_{22}'] - \frac{2(F_1' + 2x F_3')(F_1' + 2y F_3') F_3'}{(F_1' + 2z F_3')^3}. \quad 3396. \quad \frac{\partial z}{\partial x} =$$

$$= \frac{F_1' - F_3'}{F_2' - F_3'}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{F_2' - F_1'}{F_2' - F_3'}. \quad 3397. \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\left(1 + \frac{F_1' + F_3'}{F_2'}\right); \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\left(1 + \frac{F_2'}{F_3'}\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -F_3'^{-2} [F_2'^2 (F_{11}' + 2F_{12}' + F_{22}') - 2(F_1' + F_2') F_3' (F_{12}' + F_{22}') + (F_1' + F_2')^2 F_{22}'].$$

$$3398. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -(x F_1' + y F_2')^{-2} [y^2 z^2 (F_2'^2 F_{11}' - 2F_1' F_2' F_{12}' + F_1'^2 F_{22}') -$$

$$- 2z(x F_1' + y F_2') F_1'^2]. \quad 3399. a) \quad d^2z = -\frac{F_2'^2 F_{11}' - 2F_1' F_2' F_{12}' + F_1'^2 F_{22}'}{(F_1' + F_2')^2} (dx-dy)^2;$$

$$b) \quad d^2z = \frac{F_2'^2 F_{11}' - 2F_1' F_2' F_{12}' + F_1'^2 F_{22}'}{(x F_1' + y F_2')^2} (y dx - x dy)^2. \quad 3399. l. \quad dz = \frac{1}{9} (2dx - dy);$$

$$d^2z = -\frac{2}{243} (2dx^2 - 5dx dy + 2dy^2). \quad 3401. \quad \frac{dx}{dz} = \frac{y-z}{x-y}; \quad \frac{dy}{dz} = \frac{z-x}{x-y}.$$

$$3402. \frac{dx}{dz}=0, \frac{dy}{dz}=-1, \frac{d^2x}{dz^2}=-\frac{d^2y}{dz^2}=-\frac{1}{4}.$$

$$3403. \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{yu - xv}{x^2 + y^2}; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xv - yu}{x^2 + y^2}; \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2} (x^2 + y^2 > 0).$$

$$3403.1. du = -\frac{1}{3} dy; dv = -dx + \frac{1}{3} dy.$$

3404.

$$du = \frac{(\sin v + x \cos v) dx - (\sin u - x \cos u) dy}{x \cos v + y \cos u};$$

$$dv = \frac{-(\sin v - y \cos u) dx}{x \cos v + y \cos u} + \frac{(\sin u + y \cos u) dy}{x \cos v + y \cos u}; \quad d^2u = -d^2v =$$

$$= \frac{(2 dx \cos v - x dv \sin v) dv}{x \cos v + y \cos u} - \frac{(2 dy \cos u - y du \sin u) du}{x \cos v + y \cos u}.$$

3405.

$$du =$$

$$= \frac{1}{2} (dx + dy); \quad dv = \frac{\pi}{4} dy - \frac{1}{2} (dx - dy); \quad d^2u = dx^2; \quad d^2v = \frac{1}{2} (dx - dy)^2.$$

$$3406. \frac{dy}{dx} = 2 \left(t + \frac{1}{t} \right); \quad \frac{dz}{dx} = 3 \left(t^2 + \frac{1}{t^2} + 1 \right); \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2; \quad \frac{d^2z}{dx^2} = 6 \left(t + \frac{1}{t} \right).$$

$$3407. y \geq \frac{x^2}{2}; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -3uv; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2} (u + v) (u \neq v).$$

3407.1.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{3}{2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2}; \quad 3407.2. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{26}{121}; \quad 3408. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \cos^2 \psi}{\sin^2 \varphi}; \quad 3409. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$$

$$= \frac{\sin 2v}{u^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{\cos 2v}{u^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\sin 2v}{u^2}; \quad 3410. dz = 0; \quad d^2z =$$

$$= \frac{1}{2} (dx^2 - dy^2).$$

3411.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2(x^2 - y^2)}{x - 2y};$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{4x - 2y}{x - 2y} + \frac{6x}{(x - 2y)^2}.$$

$$3412. \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y+z} + \frac{(x+1)(y-x)}{(z+1)(y+z)^2} e^{x-z}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x+z}{(y+z)^2} + \frac{(y+1)(y-x)}{(z+1)(y+z)^2} e^{x-z}.$$

$$3413. \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{I} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \chi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial \chi}{\partial u} \right); \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{I} \left(\frac{\partial \chi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \chi}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right); \quad \text{где } I =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v}; \quad 3414. \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{I} \frac{\partial \psi}{\partial v}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{I} \frac{\partial \varphi}{\partial v}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{I^3} \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \right. \right.$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} \right) \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \right)^2 \Big\};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{I^3} \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial u} \Big\}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{I^3} \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 - \right.$$

$$- 2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 \Big\}; \quad \text{где } I = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} -$$

$$- \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial u}; \quad 3415. \text{ а) } \frac{\partial u}{\partial x} = \cos \frac{v}{u}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sin \frac{v}{u}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\left(\sin \frac{v}{u} - \frac{v}{u} \cos \frac{v}{u} \right);$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \cos \frac{v}{u} + \frac{v}{u} \sin \frac{v}{u}; \quad \text{б) } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sin v}{e^u (\sin v - \cos v) + 1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\cos v}{e^u (\sin v - \cos v) + 1};$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-(e^u - \cos v)}{u [e^u (\sin v - \cos v) + 1]}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{e^u + \sin v}{u [e^u (\sin v - \cos v) + 1]}.$$

3416.

$$\frac{du}{dx} = \frac{f}{I_1};$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{I_1^2} \left\{ \frac{\partial(g, h)}{\partial(y, z)} \left(I_1 \frac{\partial}{\partial x} + I_2 \frac{\partial}{\partial y} + I_3 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial(h, f)}{\partial(y, z)} \left(I_1 \frac{\partial}{\partial x} + \right. \right.$$

$$\left. + I_2 \frac{\partial}{\partial y} + I_3 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 g + \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)} \left(I_1 \frac{\partial}{\partial x} + I_2 \frac{\partial}{\partial y} + I_3 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 h \Big\}.$$

$$\text{где } I_1 = \frac{\partial(g, h)}{\partial(y, z)}, \quad I_2 = \frac{\partial(g, h)}{\partial(z, x)}, \quad I_3 = \frac{\partial(g, h)}{\partial(x, y)} \quad \text{и} \quad I = \frac{D(f, g, h)}{D(x, y, z)}.$$

3417. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + I_1 \frac{\partial g}{\partial y}$, где $I_1 = \frac{\partial(g, h)}{\partial(z, t)}$ и $I_2 = \frac{\partial(h, f)}{\partial(z, t)}$. 3418. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{I_1}{I}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{I_2}{I}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{I_3}{I}$, где $I_1 = \frac{\partial(g, h)}{\partial(v, w)}$, $I_2 = \frac{\partial(h, f)}{\partial(v, w)}$, $I_3 = \frac{\partial(f, g)}{\partial(v, w)}$ и $I = \frac{D(f, g, h)}{D(u, v, w)}$. 3419. $dz = -\frac{I_1 dx + I_2 dy}{I_3}$, где $I_1 = \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, t)}$, $I_2 = \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, t)}$, $I_3 = \frac{\partial(f, g)}{\partial(z, t)}$. 3431. $x''^4 + xx'^5 = 0$. 3432. $x^{IV} = 0$. 3433. $\frac{d^2 x}{dt^2} - t \left(\frac{dx}{dt} \right)^3 = 0$. 3434. $\frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0$. 3435. $\frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} - 6y = 0$. 3436. $\frac{d^2 y}{dt^2} + n^2 y = 0$. 3437. $\frac{d^2 y}{dt^2} + m^2 y = 0$. 3438. $u'' + \left[q(x) - \frac{1}{4} p^2(x) - \frac{1}{2} p'(x) \right] u = 0$. 3439. $\frac{d^2 u}{dt^2} + (u+3) \frac{du}{dt} + 2u = 0$. 3440. $\frac{d^2 u}{dt^2} = 0$. 3441. $\frac{d^2 u}{dt^2} = 0$. 3442. $\frac{d^2 u}{dt^2} + 8u \left(\frac{du}{dt} \right)^3 = 0$. 3443. $t^5 \frac{d^3 u}{dt^3} + (3t^4 + 1) \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{du}{dt} = 0$. 3444. $u'' - u' = \frac{A}{(u-b)^2} u$. 3446. $\Phi(1, u, u^3 + u^2) = 0$. 3447. $F(xu' + u^2 - u, u, 1) = 0$. 3450. $\frac{dr}{d\varphi} = r$. 3451. $r'^2 = \frac{1 - \sin 2\varphi}{\sin 2\varphi} r^2$. 3452. $r(r^2 + 2r'^2 - rr'') = r'^3$. 3453. $\frac{r'}{r}$. 3454. $K = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}$. 3455. $\frac{dr}{dt} = kr^3$; $\frac{d\varphi}{dt} = -1$. 3456. $\omega = \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right)$. 3457. $Y'' = x$; $Y' = \frac{1}{2}x^2$; $Y''' = -\frac{Y''}{Y^2}$. 3458. $z = \varphi(x+y)$, где φ — произвольная дифференцируемая функция. 3459. $z = \varphi(x^2 + y^2)$. 3460. $z = \frac{x}{a} + \varphi(y - bz)$. 3461. $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. 3462. $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = e^u \operatorname{sh} v$. 3463. $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial v}$. 3464. $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{2}$. 3465. $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{z}{v} \cdot \frac{z^2 + u}{z^2 - u}$. 3466. $(2u + v - z) \frac{\partial z}{\partial u} + (u + 2v - z) \frac{\partial z}{\partial v} = u + v - z$. 3467. $\frac{e^{x+y} - z^2}{1 - e^{-x} \frac{\partial z}{\partial \xi} - e^{-y} \frac{\partial z}{\partial \eta}}$. 3468. $\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}{u^2 + v^2}$. 3469. $\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$. 3470. $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{x-y}{y}$. 3471. $\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{u}{v}$. 3472. $A = \frac{x^2 - 2xu + u^2 \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 \right]}{x^4 \left(u \frac{\partial x}{\partial u} + v \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2}$. 3473. $\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} + 3u + (e^\xi + e^\eta + e^\zeta) = 0$. 3474. $\frac{\partial w}{\partial v} = 0$. 3475. $\frac{\partial w}{\partial u} = 0$. 3476. $\frac{\partial w}{\partial v} = 0$. 3477. $u^2 \left(\frac{\partial w}{\partial u} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial w}{\partial v} \right)^2 = w^2 \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial v}$. 3478. $\frac{e^{2u} \left(1 - \frac{\partial w}{\partial v} \cos^2 v \right)}{\frac{\partial w}{\partial u}}$. 3479. $A = \frac{\partial w}{\partial u} : \frac{\partial w}{\partial v}$. 3480. $\frac{\partial w}{\partial \zeta} = \frac{\xi \eta}{\zeta}$. 3481. $w = \frac{\partial u}{\partial \varphi}$. 3482. $w = r \frac{\partial u}{\partial r}$. 3483. $w = \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2$. 3484. $w = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$. 3485. $w =$

- $= r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$. 3486. $w = \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$. 3487. $I = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial r} \right)$. 3488. $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$, где φ и ψ — произвольные функции. 3489. $3 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} = 0$.
 3490. $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$. 3491. $a \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial z}{\partial u} \right) + 2b \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + c \left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \frac{\partial z}{\partial v} \right) = 0$.
 3492. $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$. 3493. $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + m^2 z = 0$. 3494. $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$.
 3495. $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2u} \frac{\partial z}{\partial v}$. 3496. $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{2}{u(4 - uv)} \frac{\partial z}{\partial v}$. 3497. $(u^2 - v^2) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} =$
 $= v \frac{\partial z}{\partial u}$. 3498. $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{2u}{u^2 + v^2} \frac{\partial z}{\partial u}$. 3499. $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{1}{u^2 - v^2} \left(v \frac{\partial z}{\partial u} - u \frac{\partial z}{\partial v} \right) = 0$.
 3500. $\left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 1$. 3501. $u = \varphi(x + \lambda_1 y) + \psi(x + \lambda_2 y)$, где λ_1 и λ_2 — корни уравнения $A + 2B\lambda + C\lambda^2 = 0$. 3503. а) $\Delta u = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr}$;
 б) $\Delta(\Delta u) = \frac{d^4 u}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 u}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{du}{dr}$. 3504. $u \frac{d^2 w}{du^2} + \frac{dw}{du} +$
 $+ cw = 0$. 3505. $A = X \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - Y \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial u}{\partial X}$. 3506. $\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) +$
 $+ \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) = 2 \left(\xi \eta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \xi \zeta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \zeta} + \eta \zeta \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \zeta} \right)$. 3509. $\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2} +$
 $+ \frac{\partial^2 z}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y_3^2} = 0$. 3510. $\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} = 0$. 3511. $\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \times$
 $\times \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2$; $\Delta_2 u = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right]$.
 3512. $w \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$. 3513. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0$. 3514. $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$.
 3515. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{1}{2}$. 3516. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 2w$. 3517. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \left(\frac{v}{u} - 1 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$.
 3518. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial v} \right)^2 = 0$. 3519. $\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{w}{4 \sin^2(u - v)}$. 3520. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} +$
 $+ \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$. 3523. $\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 0$. 3524. $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} +$
 $+ (e^w - 1) \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)^2 \right]$. 3526. $x = y\varphi(z) + \psi(z)$. 3527. $A(X, Y) \times$
 $\times \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} - 2B(X, Y) \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} + C(X, Y) \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} = 0$. 3528. $\frac{x - x_0}{-\cos \alpha \sin t_0} =$
 $= \frac{y - y_0}{-\sin \alpha \sin t_0} = \frac{z - z_0}{\cos t_0}$; $z - z_0 = (x - x_0) \cos \alpha \operatorname{tg} t_0 + (y - y_0) \sin \alpha \operatorname{tg} t_0$, где
 $x_0 = a \cos \alpha \cos t_0$, $y_0 = a \sin \alpha \cos t_0$, $z_0 = a \sin t_0$. 3529. $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1$, $y = \frac{b}{2}$;
 $ax - cz = \frac{1}{2}(a^2 - c^2)$. 3530. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$; $x + y + 2z = 4$.
 3531. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{-1}$; $3x + 3y - z = 3$. 3532. $x + z = 2$, $y + 2 = 0$;
 $x - z = 0$. 3533. $M_1(-1, 1, -1)$; $M_2\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{2}\right)$. 3537. $\operatorname{tg} \varphi =$

$$= f'_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f'_y(x_0, y_0) \sin \alpha. \quad 3538. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{16}{243}. \quad 3539. \quad 2x + 4y - z - 5 = 0; \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{-1}. \quad 3540. \quad 3x + 4y + 12z = 169; \quad \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{12}.$$

$$3541. \quad z = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-y); \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-\frac{\pi}{4}}{2}. \quad 3542. \quad ax_0x + by_0y + cz_0z = 1; \quad \frac{x-x_0}{ax_0} = \frac{y-y_0}{by_0} = \frac{z-z_0}{cz_0}. \quad 3543. \quad x + y - 2z = 0; \quad \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-4}. \\ = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}. \quad 3544. \quad x + y - 4z = 0; \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-4}.$$

$$3545. \quad \frac{x}{a} \cos \psi_0 \cos \varphi_0 + \frac{y}{b} \cos \psi_0 \sin \varphi_0 + \frac{z}{c} \sin \psi_0 = 1; \quad \frac{x \sec \psi_0 \sec \varphi_0 - a}{bc} = \frac{y \sec \psi_0 \operatorname{cosec} \varphi_0 - b}{ab} = \frac{z \operatorname{cosec} \psi_0 - c}{ab}. \quad 3546. \quad x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0 - z \operatorname{tg} \alpha = 0;$$

$$\frac{x-r_0 \cos \varphi_0}{\cos \varphi_0} = \frac{y-r_0 \sin \varphi_0}{\sin \varphi_0} = \frac{z-r_0 \operatorname{ctg} \alpha}{-\operatorname{tg} \alpha}. \quad 3547. \quad ax \sin v_0 - ay \cos v_0 + u_0 z = au_0 v_0; \quad \frac{x-u_0 \cos v_0}{a \sin v_0} = \frac{y-u_0 \sin v_0}{-a \cos v_0} = \frac{z-au_0}{u_0}. \quad 3548. \quad \frac{3x}{u_0} - \frac{3y}{u_0^3} + \frac{z}{u_0^3} = 2.$$

$$3549. \quad A(0, \pm 2\sqrt{2}, \mp 2\sqrt{2}); B(\pm 2, \mp 4, \pm 2); C(\pm 4, \mp 2, 0). \quad 3550. \quad x = \pm \frac{a^2}{d},$$

$$y = \pm \frac{b^2}{d}, \quad z = \pm \frac{c^2}{d}, \quad \text{где } d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \quad 3551. \quad x + 4y + 6z = \pm 21.$$

$$3556. \quad x^3 + y^3 - xy = 1, \quad z = 0; \quad 3y^3 + 4z^3 = 4, \quad x = 0; \quad 3x^3 + 4z^3 = 4, \quad y = 0.$$

$$3557. \quad \delta < 0,003. \quad 3559. \quad \cos \varphi = \frac{2bz_0}{a\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad 3563. \quad \frac{\partial u}{\partial n} = x_0 + y_0 + z_0;$$

$$a) \quad x_0 = y_0 = z_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad б) \quad x_0 = y_0 = z_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \quad в) \quad \text{на окружности}$$

$$x + y + z = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1. \quad 3564. \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{2}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^6} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}}.$$

$$3566. \quad x^2 + y^2 = \rho^2. \quad 3567. \quad y = \pm x. \quad 3568. \quad y^2 = 4ax. \quad 3569. \quad \text{Огибающей нет.}$$

$$3570. \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = t^{\frac{2}{3}}. \quad 3571. \quad |xy| = \frac{S}{2\pi}. \quad 3572. \quad y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}. \quad 3574. \quad а) \quad y = 0 - \text{огнивающая (геометрическое место точек перегиба); б) } y = 0 - \text{огнивающая;}$$

$$\text{в) } y = 0 - \text{геометрическое место особых точек (точек возврата); г) } x = 0 - \text{геометрическое место двойных точек, } x = a - \text{огнивающая. } 3575. \quad \text{Тор } (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2. \quad 3576. \quad x^2 \sin^2 \alpha + y^2 \sin^2 \beta + z^2 \sin^2 \gamma - 2xy \cos \alpha \cos \beta - 2xz \cos \alpha \cos \gamma - 2yz \cos \beta \cos \gamma = 1, \quad 3577. \quad |xyz| = \frac{V}{4\pi \sqrt{3}}.$$

$$3578. \quad |z \pm \sqrt{x^2 + y^2}| = \rho \sqrt{2}. \quad 3579. \quad \left| \frac{x}{x_0} \frac{y}{y_0} \right| + \left| \frac{y}{y_0} \frac{z}{z_0} \right| + \left| \frac{z}{z_0} \frac{x}{x_0} \right| < \\ < R^2 (x^2 + y^2 + z^2). \quad 3580. \quad (x-x_0)^3 + (y-y_0)^3 = (z-z_0)^3. \quad 3581. \quad f(x, y) =$$

$$= 5 + 2(x-1)^3 - (x-1)(y+2) - (y+2)^3. \quad 3582. \quad f(x, y, z) = 3[(x-1)^3 + (y-1)^3 + (z-1)^3 - (x-1)(y-1) - (y-1)(z-1) - (z-1)(x-1)] + \\ + (x-1)^3 + (y-1)^3 + (z-1)^3 - 3(x-1)(y-1)(z-1). \quad 3583. \quad \Delta f(1, -1) = \\ = h - 3k + (-h^3 - 2hk + k^3) + (h^3 k + hk^3). \quad 3584. \quad f(x+h, y+k, z+l) = \\ = f(x, y, z) + 2[h(Ax + Dy + E) + k(Dx + By + F) + l(Ex + Fy + Cz)] + \\ + f(h, k, l).$$

$$3585. \quad x^y = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + R_2(1+\theta(x-1), 1+\theta(y-1)) \\ (0 < \theta < 1), \text{ где } R_2(x, y) = \frac{1}{6} x^y \left[\left(\frac{y}{x} dx + \ln x \cdot dy \right)^2 + 3 \left(\frac{y}{x} dx + \ln x \cdot dy \right) \times \right. \\ \left. \times \left(-\frac{y}{x^2} dx^2 + \frac{2}{x} dx dy \right) + \left(\frac{2y}{x^3} dx^3 - \frac{3}{x^2} dx^2 dy \right) \right] \text{ и } dx = x-1, \quad dy = y-1.$$

$$3586. \quad 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{8}(x^2 + y^2)^2. \quad 3587. \quad \text{а) } 1 - \frac{1}{4}(x^2 - y^2); \quad \text{б) } \frac{\pi}{4} +$$

$$+ x - xy. \quad 3588. \quad -(xy + xz + yz). \quad 3589. \quad F(x, y) = \frac{h^2}{4} (f''_{xx} + f''_{yy}) +$$

$$+ \frac{h^4}{48} (f''''_{xxxx} + f''''_{yyyy}) + \dots \quad 3590. \quad F(\rho) = f(x, y) + \frac{\rho^2}{4} [f''_{xx}(x, y) + f''_{yy}(x, y)].$$

$$3591. \quad \Delta_{xy} f(x, y) = hk \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{h^{m-1} k^{n-m-1}}{m! (n-m)!} \frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^m \partial y^{n-m}} \right].$$

$$3592. \quad F(\rho) = f(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{\rho}{2} \right)^{2n} \Delta^n f(x, y), \quad \text{где } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

$$3593. \quad 1 + mx + ny + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + mnxy + \frac{n(n-1)}{2!} y^2 + \dots$$

$$(|x| < 1, |y| < 1). \quad 3594. \quad \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n-1} (m+n-1)!}{m! n!} x^m y^n$$

$$(|x| + |y| < 1). \quad 3595. \quad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^m y^{2n+1}}{m! (2n+1)!}$$

$$(|x| < +\infty, |y| < +\infty). \quad 3596. \quad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^m y^{2n}}{m! (2n)!}$$

$$(|x| < +\infty, |y| < +\infty). \quad 3597. \quad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1} y^{2n+1}}{(2m+1)! (2n+1)!} \quad (|x| < +\infty,$$

$$|y| < +\infty). \quad 3598. \quad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m} y^{2n}}{(2m)! (2n)!} \quad (|x| < +\infty, |y| < +\infty).$$

$$3599. \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2 + y^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x^2 + y^2 < +\infty).$$

$$3600. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{x^m y^n}{mn} \quad (|x| < 1, |y| < 1). \quad 3601. \quad f(x, y) =$$

$$= 1 + \frac{1}{3} \left(x - \frac{x^2}{2} \right) y. \quad 3602. \quad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^m (y+1)^n}{m! n!} \quad (|x| < +\infty,$$

$$|y| < +\infty). \quad 3603. \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [1 + (x-1)] (y-1)^n \quad (-\infty < x < +\infty,$$

$$0 < y < 2). \quad 3604. \quad z = 1 + [2(x-1) - (y-1)] - [8(x-1)^2 - 10(x-1)(y-1) + 3(y-1)^2] + \dots \quad 3605. \quad (0, 0) \text{ — изолированная точка, если } a < 0; \text{ точка}$$

$$\text{возврата, если } a = 0; \text{ двойная, если } a > 0. \quad 3606. \quad (0, 0) \text{ — двойная точка.}$$

3607. $(0, 0)$ — изолированная точка. 3608. $(0, 0)$ — изолированная точка. 3609. $(0, 0)$ — двойная точка. 3610. $(0, 0)$ — точка возврата (второго рода). 3611. $(0, 0)$ — двойная точка. 3612. Если $a < b < c$, то кривая состоит из овала и бесконечной ветви; если $a = b < c$, то $A(a, 0)$ — изолированная точка; если $a < b = c$, то $B(b, 0)$ — двойная точка; если $a = b = c$, то $A(a, 0)$ — точка возврата. 3613. $(0, 0)$ — двойная точка. 3614. $(0, 0)$ — точка возврата. 3615. $(0, 0)$ — точка прекращения. 3616. $(0, 0)$ — угловая точка. 3617. $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) — точки разрыва 1-го рода. 3618. $x = 0$ — точка разрыва 2-го рода. 3619. $x = 0$ — двойная точка. 3620. $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) — точка возврата. 3621. $z_{\min} = 0$ при $x = 0$ и $y = 1$. 3622. Точек экстремума нет. 3623. Нестрогий минимум $z = 0$ в точках прямой $x - y + 1 = 0$. 3624. $z_{\min} = -1$ при $x = 1$ и $y = 0$. 3625. $z_{\max} = 108$ при $x = 2, y = 3$; нестрогий минимум $z = 0$ при $x = 0, 0 < y < 6$; нестрогий максимум $z = 0$ при $x = 0, -\infty < y < 0$ и $6 < y < +\infty$. 3626. $z_{\min} = -1$ при $x = 1$ и $y = 1$. 3627. $z_{\min} = -2$ при $x_1 = -1, y_1 = -1$ и $x_2 = 1, y_2 = 1$; экстремума нет при $x = 0, y = 0$. 3627.1. Максимум $z = 0$ при $x = 0, y = 0$; минимум $z = -1\frac{1}{8}$ при $x = \pm\frac{1}{2}, y = \pm 1$; седло $z = -1$ при $x = 0, y = \pm 1$, и седло $z = -\frac{1}{8}$ при $x = \pm\frac{1}{2}, y = 0$. 3628. Минимум $z = 30$ при $x = 5$ и $y = 2$. 3629. $z_{\min} = -\frac{ab}{3\sqrt{3}}$ при $\frac{x}{a} = -\frac{y}{b} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$; $z_{\max} = \frac{ab}{3\sqrt{3}}$ при $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. 3630. $z_{\max} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ при $x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c}$, если $c > 0$; $z_{\min} = -\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ при $x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c}$, если $c < 0$; экстремума нет, если $c = 0, a^2 + b^2 \neq 0$. 3631. $z_{\max} = 1$ при $x = 0$ и $y = 0$. 3632. Минимум $z = 0$ при $x = 0, y = 0$; седло $z = \frac{1}{2}e^{-2}$ при $x = -\frac{1}{4}, y = -\frac{1}{2}$. 3633. Седло $z = e^2$ при $x = 1, y = -2$. 3634. Максимум $z = e^{-13} \approx 2,26 \cdot 10^{-6}$ при $x = 1, y = 3$; минимум $z = -26 \cdot e^{-\frac{1}{26}} \approx -25,51$ при $x = -\frac{1}{26}, y = -\frac{3}{26}$. 3635. Минимум $z = 7 - 10 \ln 2 \approx 0,0685$ при $x = 1, y = 2$. 3636. $z_{\max} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ при $x = \frac{\pi}{3}$ и $y = \frac{\pi}{6}$. 3637. $z_{\min} = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$ при $x = y = \frac{2\pi}{3}$; $z_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ при $x = y = \frac{\pi}{3}$. 3638. Седло $z = -1 + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{3}{4}\pi \approx 1,70$ при $x = 1, y = 1$. 3639. Минимум $z = -\frac{1}{2e} \approx -0,184$ при $x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2e}} \approx \pm 0,43$; максимум $z = \frac{1}{2e}$ при $x = -y = \pm \frac{1}{\sqrt{2e}}$; экстремума нет в стационарных точках $x = 0, y = \pm 1$ и $x = \pm 1, y = 0$. 3640. Стационарные точки $x = \frac{\pi}{12}(-1)^{m+1} + (m+n)\frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{12}(-1)^{m+1} + (m-n)\frac{\pi}{2}$ ($m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Экстремум $z = m\pi + \left(\frac{\pi}{12} + \sqrt{3}\right)(-1)^{m+1} + 2 \cdot (-1)^n$, если m и n различной четности (максимум при m нечетном и n четном, минимум при m четном и n нечетном); экстремума нет, если m и n одинаковой четности. 3641. $z_{\min} = 0$ при $x = 0$ и $y = 0$;

- нестрогий максимум $z=e^{-1}$ при $x^2+y^2=1$. 3642. $u_{\min}=-14$ при $x=-1$, $y=-2$, $z=3$. 3643. Минимум $u=-6913$ при $x=24$, $y=-144$, $z=-1$.
3644. Минимум $u=4$ при $x=\frac{1}{2}$, $y=1$, $z=1$. 3645. $u_{\max}=\frac{a^7}{7^7}$ при $x=y=z=\frac{a}{7}$; нестрогий экстремум $u=0$ при $y=0$, $x \neq 0$, $z \neq 0$, $x+2y+3z \neq a$.
3646. Минимум $u=\frac{15a^{13}}{4} \sqrt{\frac{a}{16b}}$ при $x=\frac{1}{2} \sqrt[13]{16a^{13}b}$, $y=\frac{1}{4} \sqrt[5]{16a^4b}$, $z=\frac{1}{2} \sqrt[5]{\frac{a^2b^3}{4}}$. 3647. Максимум $u=4$ при $x=y=z=\frac{\pi}{2}$; краевой минимум $u=0$ при $x=y=z=0$ и $x=y=z=\pi$. 3648. $u_{\max}=\left(\frac{2}{n^2+n+2}\right)^{\frac{n^2+n+2}{2}}$ при $x_1=x_2=\dots=x_n=\frac{2}{n^2+n+2}$. 3649. Минимум $u=(n+1)2^{\frac{1}{n+1}}$ при $x_1=2^{\frac{1}{n+1}}$, $x_2=x_1^2, \dots, x_n=x_1^n$. 3650. Числа $a, x_1, x_2, \dots, x_n, b$ составляют геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$. 3651. Минимум $z_1=-2$ и максимум $z_2=6$ при $x=1$, $y=-1$. 3652. $z_{\min}=-(4+2\sqrt{6})$ при $x=y=-(3+\sqrt{6})$; $z_{\max}=2\sqrt{6}-4$ при $x=y=-(3-\sqrt{6})$.
3653. Нестрогий минимум $z=-\frac{a}{2\sqrt{2}}$ при $x^2+y^2=\frac{3a^2}{8}$, $z<0$; нестрогий максимум $z=\frac{a}{2\sqrt{2}}$ при $x^2+y^2=\frac{3a^2}{8}$, $z>0$. 3654. $z_{\max}=\frac{1}{4}$ при $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$. 3655. $z_{\min}=-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}$ при $x=-\frac{be}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y=-\frac{ae}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $z_{\max}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}$ при $x=\frac{be}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y=\frac{ae}{\sqrt{a^2+b^2}}$, где $e=\operatorname{sgn} ab \neq 0$. 3656. $z_{\max}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ при $x=\frac{ab^2}{a^2+b^2}$, $y=\frac{a^2b}{a^2+b^2}$. 3657. $z_{\min}=\lambda_1$, $z_{\max}=\lambda_2$, где λ_1 и λ_2 — корни уравнения $(A-\lambda)(C-\lambda)-B^2=0$ и $\lambda_1<\lambda_2$. 3657.1. Максимум $z=106\frac{1}{4}$ при $x=\pm 1\frac{1}{2}$, $y=\pm 4$; минимум $z=-50$ при $x=\pm 2$, $y=\mp 3$. 3658. Экстремум $z=1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{2}}$ при $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $y=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) (максимум, если k — четное, и минимум, если k — нечетное). 3659. $u_{\min}=-3$ при $x=-\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$, $z=-\frac{2}{3}$; $u_{\max}=3$ при $x=\frac{1}{3}$, $y=-\frac{2}{3}$, $z=\frac{2}{3}$. 3660. $u_{\max}=\frac{a^{m+n+p}m^n n^p}{m+1+p}$ при $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=\frac{a}{m+n+p}$. 3661. $u_{\min}=c^2$ при $x=0$, $y=0$, $z=\pm c$; $u_{\max}=a^3$ при $x=\pm a$, $y=0$, $z=0$. 3662. $u_{\max}=\left(\frac{a}{6}\right)^6$ при $x=y=z=\frac{a}{6}$. 3663. $u_{\min}=-\frac{1}{3\sqrt{6}}$ при $x=y=\frac{1}{\sqrt{6}}$ и $z=-\frac{2}{\sqrt{6}}$.

$$x=z=\frac{1}{\sqrt{6}} \text{ и } y=-\frac{2}{\sqrt{6}}, \quad y=z=\frac{1}{\sqrt{6}} \text{ и } x=-\frac{2}{\sqrt{6}}; \quad u_{\max}=\frac{1}{3\sqrt{6}} \text{ при } \\ x=y=-\frac{1}{\sqrt{6}} \text{ и } z=\frac{2}{\sqrt{6}}, \quad x=z=-\frac{1}{\sqrt{6}} \text{ и } y=\frac{2}{\sqrt{6}}, \quad y=z=-\frac{1}{\sqrt{6}} \text{ и } \\ x=\frac{2}{\sqrt{6}}. \quad 3663.1. \text{ Условный максимум } u=2 \text{ при } x=1, y=1, z=1;$$

$$3664. u_{\max}=\frac{1}{8} \text{ при } x=y=z=\frac{\pi}{6}. \quad 3665. u_{\min}=\lambda_1 \text{ и } u_{\max}=\lambda_2, \text{ где } \lambda_1 \text{ и } \lambda_2 - \\ \text{корни уравнения } \lambda^3 - \left(\frac{\sin^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \beta}{b^2} + \frac{\sin^2 \gamma}{c^2} \right) \lambda + \left(\frac{\cos^2 \alpha}{b^2 c^2} + \frac{\cos^2 \beta}{a^2 c^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{a^2 b^2} \right) = 0$$

$$(\lambda_1 < \lambda_2). \quad 3666. u_{\min} = \frac{R^2(A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma)^2}{A^2 + B^2 + C^2}; \quad u_{\max} = R^2. \quad 3667. u_{\min} =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \right)^{-1} \text{ при } x_i = \frac{1}{a_i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \right)^{-1} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad 3668. u_{\min} = \frac{aP}{aP-1}$$

$$\text{при } x_i = \frac{a}{n} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad 3669. u_{\min} = \left(\sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j \beta_j} \right)^2 \text{ при } x_i =$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha_i}{\beta_i}} \left(\sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j \beta_j} \right)^{-2} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad 3670. u_{\max} =$$

$$= \left(\frac{a}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \alpha_1^{\alpha_1} \alpha_2^{\alpha_2} \dots \alpha_n^{\alpha_n} \text{ при } \frac{x_1}{\alpha_1} = \frac{x_2}{\alpha_2} = \dots = \frac{x_n}{\alpha_n} =$$

$$= \frac{a}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}. \quad 3671. \text{ Экстремумы } u = \lambda \text{ определяются из уравнения}$$

$$|a_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0, \text{ где } \delta_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j \text{ и } \delta_{ii} = 1. \quad 3675. \inf z = -5; \sup z = -2.$$

$$3676. \inf z = -75; \sup z = 125. \quad 3677. \inf z = 0; \sup z = 1. \quad 3678. \inf u = 0;$$

$$\sup u = 300. \quad 3679. \inf u = -\frac{1}{2}; \sup u = 1 + \sqrt{2}. \quad 3680. \inf u = 0; \sup u =$$

$$= e^{-1} \approx 0,37. \quad 3682. \text{ Нет.} \quad 3683. \text{ Минимум равен } \frac{n}{\sqrt[n]{a}}. \quad 3684. \text{ Слагаемые равны.}$$

$$3685. \text{ Множители равны } x_i = \frac{\frac{1}{\alpha_i}}{\left(a \alpha_1^{\frac{1}{\alpha_1}} \alpha_2^{\frac{1}{\alpha_2}} \dots \alpha_n^{\frac{1}{\alpha_n}} \right)^{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n}}} \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

где α_i ($i=1, 2, \dots, n$) — соответствующие показатели степеней; наименьшее

$$\text{значение суммы } \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n} \right) \left(a \alpha_1^{\frac{1}{\alpha_1}} \alpha_2^{\frac{1}{\alpha_2}} \dots \alpha_n^{\frac{1}{\alpha_n}} \right)^{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n}}.$$

$$3686. x = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad y = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i, \text{ где } M = \sum_{i=1}^n m_i. \quad 3687. \text{ Измерения ванны}$$

$$\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \frac{1}{2} \sqrt[3]{2V}. \quad 3688. H = 2R = 2 \sqrt{\frac{S}{3\pi}}, \text{ где } R - \text{ радиус цилиндри-}$$

ческой поверхности и H — ее образующая. **3689.** $x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i$, $y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n y_i$,

$$z = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n z_i, \text{ где } N = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n z_i\right)^2}. \text{ Минимальная}$$

сумма квадратов расстояний равна $n - 2N + \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$. **3690.** Угол

наклона образующих конуса к его основанию равен $\arcsin \frac{2}{3}$. **3691.** Угол

наклона боковых граней пирамид к их основаниям равен $\arcsin \frac{2}{3}$. **3692.** Сто-

роны прямоугольника $\frac{2p}{3}$ и $\frac{p}{3}$. **3693.** Стороны треугольника $\frac{p}{2}$, $\frac{3p}{4}$ и $\frac{3p}{4}$.

3694. Измерения параллелепипеда $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ и $\frac{R}{\sqrt{3}}$. **3695.** Высота паралле-

лепипеда равна $\frac{1}{3}$ высоты конуса. **3696.** Измерения параллелепипеда $\frac{2a}{\sqrt{3}}$,

$\frac{2b}{\sqrt{3}}$ и $\frac{2c}{\sqrt{3}}$. **3697.** Высота параллелепипеда $h = l \sin \alpha \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha - \sqrt{2}}{2 \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{2}}$, если

$\alpha \geq \operatorname{arctg} \sqrt{2}$, и $h = 0$, если $0 < \alpha < \operatorname{arctg} \sqrt{2}$. **3698.** Измерения параллеле-

пипеда a, b и $\frac{c}{2}$. **3699.** $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. **3700.** $d = \frac{1}{\pm \Delta} \begin{vmatrix} x_1 - x_2 y_1 - y_2 z_1 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}$,

где $\Delta = \sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p_1 & m_1 \\ p_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}$. **3701.** $\frac{7}{4\sqrt{2}}$. **3702.** Квадраты

полуосей $a^2 = \lambda_1$ и $b^2 = \lambda_2$ являются корнями уравнения $(1 - \lambda A)(1 - \lambda C) -$

$-\lambda^2 B^2 = 0$. **3703.** Квадраты полуосей $a^2 = \lambda_1$, $b^2 = \lambda_2$ и $c^2 = \lambda_3$ являются кор-

нями уравнения $\begin{vmatrix} A\lambda - 1 & D\lambda & F\lambda \\ D\lambda & B\lambda - 1 & E\lambda \\ F\lambda & E\lambda & C\lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$. **3704.** $\frac{\cos \theta}{|C|} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

3705. $\frac{\pi abc}{\sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma}}$. **3707.** Угол падения равен

$\arcsin \left(n \sin \frac{\alpha}{2} \right)$; отклонение луча равно $2 \arcsin \left(n \sin \frac{\alpha}{2} \right) - \alpha$. **3708.** Иско-

мые коэффициенты a и b определяются из системы уравнений $a[xx] + b[x1] =$

$= [xy]$, $a[x1] + bn = [y1]$, где $[xy] = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ и т. п. Задача имеет опреде-

ленное решение, если $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \neq 0$. **3709.** $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2(\bar{x}\bar{y} - \overline{xy})}{[x^2 - (\bar{x})^2] - [y^2 - (\bar{y})^2]}$.

$p = \bar{x} \cos \alpha + \bar{y} \sin \alpha$, где $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ и т. п. суть сред-

ние значения. **3710.** $4x - \frac{7}{2}$; $\Delta_{\min} = \frac{1}{2}$.

Отдел VII

3711. $F(y)=1$, если $-\infty < y < 0$; $F(y)=1-2y$, если $0 \leq y \leq 1$; $F(y)=-1$, если $1 < y < +\infty$. 3712. $F(y)$ разрывна при $y=0$. 3713. а) $\frac{\pi}{4}$; б) 1; в) $\frac{8}{3}$; г) $\ln \frac{2e}{1+e}$. 3713.1. 0. 3715. Нельзя. 3716. Нельзя. 3717. $F^*(x) = 2xe^{-x^2} - e^{-x^2} - \int_x^{x^2} y^2 e^{-xy^2} dy$. 3718. а) $-(e^{2\alpha} |\sin \alpha| \sin \alpha + e^{2\alpha} |\cos \alpha| \cos \alpha) + \int_{\sin \alpha}^{\cos \alpha} \sqrt{1-x^2} e^{\alpha \sqrt{1-x^2}} dx$; б) $\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{b+\alpha}\right) \sin \alpha (b+\alpha) - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{a+\alpha}\right) \times \times \sin \alpha (a+\alpha)$; в) $\frac{2}{\alpha} \ln(1+\alpha^2)$; г) $f(\alpha, -\alpha) + 2 \int_0^\alpha f'_u(u, v) dx$, где $u = x + \alpha$ и $v = x - \alpha$; д) $2\alpha \int_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha} \sin(y^2 + \alpha^4 - \alpha^2) dy + 2 \int_0^{\alpha^2} \sin 2x^2 \cdot \cos 2\alpha x dx - - 2\alpha \int_0^{\alpha^2} dx \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \cos(x^2 + y^2 - \alpha^2) dy$. 3719. $F''(x) = 3f(x) + 2xf'(x)$. 3720. $F''(x) = 2f(x)$, если $x \in (a, b)$, и $F''(x) = 0$, если $x \notin (a, b)$. 3721. $F''(x) = \frac{\Delta^2 f(x)}{h^2}$, где $\Delta^2 f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$. 3722. $F^{(n)}(x) = (n-1)! f(x)$. 3723. $4x - \frac{11}{3}$. 3724. 0,934 + 0,428x (прибли- зительно). 3725. $\frac{dE}{dk} = \frac{E-F}{k}$; $\frac{dF}{dk} = \frac{E}{k(1-k^2)} - \frac{F}{k}$. 3729. $F''_{xy}(x, y) = = x(2-3y^2)f(xy) + \frac{x}{y^3} f\left(\frac{x}{y}\right) + x^2 y(1-y^2) f''(xy)$. 3732. $\pi \ln \frac{|a|+|b|}{2}$. 3733. 0, если $|a| \leq 1$; $\pi \ln a^2$, если $|a| > 1$. 3734. $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a \ln(1+|a|)$. 3735. $\pi \arcsin a$. 3736. $\frac{\pi}{2} \ln(1 + \sqrt{2})$. 3737. $\ln \frac{b+1}{a+1}$. 3738. а) $\operatorname{arctg} \frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}$; б) $\frac{1}{2} \ln \frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}$. 3741. $a \geq 0$. 3742. $\max(p, q) > 1$. 3743. $\left|\frac{p-1}{q}\right| < 1$. 3744. $p < 1$. 3745. $n < 0$ и $n > \frac{1}{2}$. 3746. $p > \frac{1}{2}$. 3747. Сходится при $a > 0$ и при $a = = -\frac{2n-1}{2} \pi (n=1, 2, \dots)$. 3748. Сходится при $n > 4$. 3749. Сходится при $p > 1$. 3750. Сходится при $-1 < n < 2$. 3755.1. а) Схо- дится равномерно; б) сходится неравномерно. 3755.2. Сходится неравномерно. 3756. Сходится равномерно. 3757. Сходится равномерно. 3758. Сходится равно- мерно. 3759. Сходится неравномерно. 3760. Сходится равномерно. 3760.1. Схо- дится равномерно. 3761. Сходится равномерно. 3762. Сходится неравномерно. 3763. а) Сходится равномерно; б) сходится неравномерно. 3764. Сходится

неравномерно. 3765. Сходится равномерно. 3765. 1. $b \geq 10^9$. 3666. а) Сходится равномерно; б) сходится неравномерно. 3767. Сходится равномерно. 3768. Сходится неравномерно. 3769. Сходится равномерно. 3770. Сходится равномерно.

3772. Нет. 3776. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 3776.2. 1. 3778. $a = \pm 1$. 3779. Непрерывна. 3780. Непрерывна. 3781. Непрерывна. 3782. Непрерывна. 3783. Разрывна при $\alpha = 0$.

3784. $\frac{(-1)^m m!}{n^{m+1}}$. 3785. $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} a^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}$. 3788. $\ln \frac{b}{a}$. 3790. $\ln \frac{b}{a}$.

3791. 0. 3792. $\frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b}$. 3793. $\frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{\alpha}$. 3794. $\ln \frac{(2\alpha)^{2m} (2\beta)^{2p}}{(\alpha+\beta)^{2\alpha+2\beta}}$.

3795. $\arctg \frac{\beta}{m} - \arctg \frac{\alpha}{m}$ ($m \neq 0$). 3796. $\frac{1}{2} \ln \frac{\beta^2 + m^2}{\alpha^2 + m^2}$.

3797. $-\pi (1 - \sqrt{1-\alpha^2})$. 3798. $\pi \ln \frac{1 + \sqrt{1-\alpha^2}}{2}$.

3799. $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha \cdot (1 + |\alpha| - \sqrt{1+\alpha^2})$. 3800. $\frac{\pi}{|\beta|} \ln (|\alpha| + |\beta|)$ ($\beta \neq 0$).

3801. $\frac{\pi}{2} \ln \frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^\alpha \beta^\beta}$ ($\alpha > 0, \beta > 0$). 3802. $\frac{2\pi}{3} [\alpha\beta(\alpha+\beta) + \alpha^3 \ln \alpha +$

$+ \beta^3 \ln \beta - (\alpha^3 + \beta^3) \ln (\alpha + \beta)]$ ($\alpha > 0, \beta > 0$). 3803. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3804. $\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{ac-b^2}{a}}$. 3805. $\frac{(a+2b^2)a_1 - 4abb_1 + 2a^2c_1}{2a^2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{ac-b^2}{a}}$.

3806. $\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}$. 3807. $\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{b^2}{4a}}$. 3808. $\sqrt{\pi} (\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})$. 3809. $\frac{1}{2} \times$

$\times \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}$. 3810. $\frac{b\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}$. 3811. $(-1)^n \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n+1}} + \frac{d^{2n}}{db^{2n}} (e^{-b^2})$.

3812. $(\pi/2) \operatorname{sgn} \beta$. 3812.1. Функция нечетная. При $x > 0$ минимумы в точках $2k\pi$ и максимумы в точках $(2k-1)\pi$, где $k=1, 2, 3, \dots$. Асимптоты $y = \frac{\pi}{2}$

при $x \rightarrow +\infty$ и $y = -\frac{\pi}{2}$ при $x \rightarrow -\infty$. 3813. $\pi \frac{|\beta|}{2} - \sqrt{\pi\alpha}$. 3814. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} \right|$.

3815. 0, если $|\alpha| < |\beta|$; $\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \alpha$, если $|\alpha| = |\beta|$; $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha$, если $|\alpha| > |\beta|$.

3818. $\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \alpha$. 3817. $\frac{\pi}{2} |\alpha|$. 3818. $\frac{3\pi}{8} \alpha |\alpha|$. 3819. $\frac{\pi}{4}$. 3820. $\frac{3}{8} \ln \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|$.

3821. $\frac{\pi}{4}$. 3822. $\frac{\alpha+\beta}{2} \arctg \frac{\alpha+\beta}{k} - \frac{\alpha-\beta}{2} \arctg \frac{\alpha-\beta}{k} + \frac{k}{4} \ln \frac{k^2 + (\alpha-\beta)^2}{k^2 + (\alpha+\beta)^2}$.

3823. $D(x) = 1$ при $|x| < 1$; $D(x) = \frac{1}{2}$ при $x = \pm 1$; $D(x) = 0$

при $|x| > 1$. 3824. а) $\pi \operatorname{sgn} a \cos ab$; б) $\pi \operatorname{sgn} a \sin ab$. 3825. $\frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}$.

3826. $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha e^{-|\alpha|}$. 3827. $\frac{\pi}{4} (1 - e^{-1})$.

3828. $\frac{\pi(1+|\alpha|)}{4} e^{-|\alpha|}$. 3829. $\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}} \cos \frac{bx}{a} e^{-\frac{|\alpha|}{a} \sqrt{ac-b^2}}$.
3830. $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$; $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. 3831. $\sqrt{\frac{\pi}{|a|}} \sin \left(\frac{ac-b^2}{a} + \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} a \right)$.
3832. $\sqrt{\pi} \cos \left(a^2 + \frac{\pi}{4} \right)$. 3833. $\sqrt{\pi} \sin \left(a^2 + \frac{\pi}{4} \right)$. 3835. а) $\frac{n!}{p^{n+1}}$;
 б) $\frac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}$; в) $\frac{1}{p-\alpha}$ при $p > \alpha$; г) $\frac{1}{(p+\alpha)^2}$; д) $\frac{p}{p^2+1}$; е) $\ln \left(1 + \frac{1}{p} \right)$;
 ж) $\frac{\alpha \sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}} e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}$. 3837. а) 1; б) $x^2 + \frac{1}{2}$; в) e^{2ax+a^2} ; г) $\frac{1}{2} e^{-\frac{a^2}{4}} \cos ax$.
3839. $\varphi(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, где $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. 3843. $\frac{\pi}{8}$. 3844. $\frac{\pi n^4}{16}$.
3845. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. 3846. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. 3847. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. 3848. $\frac{3\pi}{512}$. 3849. $\frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}$.
3850. $\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\pi}$. 3851. $\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}} (0 < m < n)$. 3852. $B(n-m, m)$
 $(0 < m < n)$. 3853. $\frac{a^{-p}}{n} \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{m+1}{n}} B \left(\frac{m+1}{n}, p - \frac{m+1}{n} \right) \left(0 < \frac{m+1}{n} < p \right)$.
3854. $\frac{(b-a)^{m+n+1}}{(a+c)^{n+1}(b+c)^{m+1}} B(m+1, n+1) (m > -1, n > -1)$. 3855. $\frac{1}{m} \times$
 $\times B \left(\frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{n} \right) (n < 0 \text{ или } n > 1)$. 3856. $\frac{1}{2} B \left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2} \right) (m > -1,$
 $n > -1)$. 3857. $\frac{\pi}{2 \cos \frac{n\pi}{2}} (|n| < 1)$. 3858. $\frac{2^{n-1}}{(1-k)^{2^2}} B \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right) (n > 0)$.
3859. $\frac{1}{n} \Gamma \left(\frac{1}{n} \right) (n > 0)$. 3860. $\frac{1}{|n|} \Gamma \left(\frac{m+1}{n} \right) \left(\frac{m+1}{n} > 0 \right)$. 3861. $\Gamma(p+1)$
 $(p > -1)$. 3862. $\frac{d}{dp} \left[\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}} \right] (p > -1)$. 3863. $-\frac{\pi^2 \cos p\pi}{\sin^2 p\pi} (0 < p < 1)$.
3864. $\pi^3 \frac{1 + \cos^2 p\pi}{\sin^2 p\pi} (0 < p < 1)$. 3864.1. $\frac{2}{27} \pi^3$. 3864.2. $\frac{3\pi^3}{32\sqrt{2}}$.
3865. $\ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{p\pi}{2}}{\operatorname{tg} \frac{q\pi}{2}} \right| (0 < p < 1, 0 < q < 1; 0 (p=q))$. 3866. $\pi \operatorname{ctg} p\pi$. 3867. $\frac{\pi}{2p} \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2p}$.
3868. $\ln \sqrt{2\pi}$. 3869. $\ln \sqrt{2\pi + a} (\ln a - 1)$.
3870. $\frac{1}{\pi} \left(1 + \ln \frac{\pi}{2} \right)$. 3871. $\frac{1}{4n}$. 3878. $\frac{\pi a^{m-1}}{2\Gamma(m) \cos \frac{m\pi}{2}} (a > 0)$.

$$3877. \frac{\pi a^{m-1}}{2\Gamma(m) \sin \frac{\pi m}{2}} (a > 0). \quad 3878. aB\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2n}\right). \quad 3880. \frac{2a^2}{n} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}.$$

$$3881. f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda. \quad 3882. f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda} \sin \lambda x d\lambda.$$

$$3883. f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda(x-a) - \sin \lambda(x-b)}{\lambda} d\lambda.$$

$$3884. f(x) = \frac{2h}{\pi a} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos a\lambda}{\lambda^2} \cos \lambda x d\lambda.$$

$$3885. \frac{1}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-a\lambda} \cos \lambda x d\lambda. \quad 3886. \frac{x}{a^2 + x^2} = \int_0^{+\infty} e^{-a\lambda} \sin \lambda x d\lambda.$$

$$3887. f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda \pi}{1 - \lambda^2} \sin \lambda x d\lambda. \quad 3888. f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \frac{\lambda \pi}{2}}{1 - \lambda^2} \cos \lambda x d\lambda.$$

$$3889. f(t) = \frac{2A\omega}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \frac{2\pi n\lambda}{\omega}}{\lambda^2 - \omega^2} \sin \lambda t d\lambda. \quad 3890. f(x) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2 + \alpha^2} d\lambda.$$

$$3891. f(x) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{(\lambda - \beta)^2 + \alpha^2} + \frac{1}{(\lambda + \beta)^2 + \alpha^2} \right] \cos \lambda x d\lambda.$$

$$3892. f(x) = \frac{4\alpha\beta}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda \sin \lambda x}{[(\lambda - \beta)^2 + \alpha^2][(\lambda + \beta)^2 + \alpha^2]} d\lambda. \quad 3893. e^{-x^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \cos \lambda x d\lambda. \quad 3894. xe^{-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \sin \lambda x d\lambda.$$

$$3895. a) e^{-x} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{1 + \lambda^2} d\lambda (0 \leq x < +\infty); \quad b) e^{-x} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda \sin \lambda x}{1 + \lambda^2} d\lambda (0 < x < +\infty).$$

$$3896. F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2}.$$

$$3897. F(x) = -i \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\alpha x}{(x^2 + \alpha^2)^2}.$$

$$3898. F(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad 3899. F(x) = e^{-\frac{x^2 + \alpha^2}{2}} \operatorname{ch} \alpha x.$$

$$3900. a) \varphi(y) = e^{-y} (y \geq 0); \quad b) \psi(y) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{y}{1 + y^2} (y \geq 0).$$

Отдел VIII

$$3901. \frac{1}{4}. \quad 3902. \underline{S} = \frac{40}{3} - \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2}; \quad \overline{S} = \frac{40}{3} + \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2}; \quad 13\frac{1}{3}.$$

3903. 9,88. Точное значение $2\pi(7 - \sqrt{24}) \approx 13,20$ 3904. 0,402. Точное значение 0,4.

$$3905. \delta < 0,00022. \quad 3906. 1. \quad 3907. \frac{1}{40}. \quad 3908. \frac{\pi a^2}{3}. \quad 3910. I = F(A, B) - F(A, b) -$$

$-F(a, B) + F(a, b).$ 3912. а) Отрицательный; б) отрицательный; в) положительный. 3913. $\frac{1}{4}.$ 3914. $1,96 < I < 2.$ 3915. $a^2 + b^2 + \frac{R^2}{2}.$

$$3916. \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx. \quad 3917. \int_{-2}^2 dx \int_{\frac{|x|}{3}}^1 f(x, y) dy =$$

$$= \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x, y) dx. \quad 3918. \int_0^1 dx \int_0^{x+1} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx +$$

$$+ \int_1^2 dy \int_{y-1}^1 f(x, y) dx. \quad 3919. \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$3920. \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$3921. \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx.$$

$$3922. \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^1 dx \left\{ \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \right.$$

$$\left. + \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \right\} + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy. \quad 3924. \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^y f(x, y) dx +$$

$$+ \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x, y) dx. \quad 3925. \int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x, y) dx +$$

$$+ \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x, y) dx. \quad 3926. \int_0^1 dy \int_{\sqrt{1-y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx.$$

$$3927. \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$3928. \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$3929. \int_0^a dy \left\{ \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-1} f(x, y) dx + \int_{a+1}^{2a} f(x, y) dx \right\} + \int_a^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^a f(x, y) dx.$$

$$3930. \int_0^1 dy \int_{ey}^e f(x, y) dx. \quad 3931. \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx - \int_{-1}^0 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{2\pi + \arcsin y} f(x, y) dx.$$

$$3932. \frac{p^4}{2!}. \quad 3933. \left(2\sqrt{2} - \frac{8}{3}\right) a \sqrt{a}. \quad 3934. \frac{a^4}{2}. \quad 3935. 14a^4. \quad 3936. \frac{35\pi a^4}{12}.$$

$$3937. \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr. \quad 3938. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr.$$

$$3939. \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{|a|}^{|b|} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr. \quad 3940. \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{cosec} \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right)} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr.$$

$$3941. \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\sin \varphi}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr +$$

$$+ \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr. \quad 3942. \text{ В том случае, если область интегра-}$$

ции ограничена двумя концентрическими окружностями с центром в начале координат и двумя лучами, исходящими из начала координат.

$$3943. \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos \varphi}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin \varphi}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr =$$

$$= \int_0^1 r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi + \int_1^{\sqrt{2}} r dr \int_{\arccos \frac{1}{r}}^{\arcsin \frac{1}{r}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi.$$

$$3944. \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{cosec} \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right)}^1 r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 r dr \int_{\frac{\pi}{4} + \arccos \frac{1}{r\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{4} + \arccos \frac{1}{r\sqrt{2}}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi.$$

$$3945. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\cos \varphi}} r f(r) dr = \frac{\pi}{12} \int_0^{2\sqrt{2}} r f(r) dr + \int_{2\sqrt{2}}^4 \left(\frac{\pi}{3} - \arccos \frac{2}{r} \right) r f(r) dr.$$

$$3946. \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\frac{\sin \varphi}{\cos^3 \varphi}}^{\frac{1}{\cos \varphi}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr = \int_0^1 r dr \int_0^{\arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi + \\ + \int_1^{\sqrt{2}} r dr \int_{\arccos \frac{1}{r}}^{\arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi.$$

$$3947. \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr = \\ = \int_0^a r dr \int_{-\frac{1}{2} \arccos \frac{r^2}{a^2}}^{\frac{1}{2} \arccos \frac{r^2}{a^2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi.$$

$$3948. \int_0^a dr \int_{-\arccos \frac{r}{a}}^{\arccos \frac{r}{a}} f(\varphi, r) d\varphi. \quad 3949. \int_0^a dr \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{r^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{r^2}{a^2}} f(\varphi, r) d\varphi.$$

$$3950. \int_0^a dr \int_r^a f(\varphi, r) d\varphi. \quad 3951. 2\pi \int_0^1 r f(r) dr. \quad 3952. \pi \int_0^1 r f(r) dr +$$

$$+ \int_1^{\sqrt{2}} \left(\pi - 4 \arccos \frac{1}{r} \right) r f(r) dr. \quad 3953. \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\lg \varphi) \cos^2 \varphi d\varphi. \quad 3954. \frac{2\pi a^3}{3}.$$

$$3955. -6\pi^2. \quad 3956. \frac{6}{5} \cdot \frac{b^2 + b(b+h) + (b+h)^2 + (2b+h)\sqrt{b(b+h)}}{\sqrt{a(a+h)}(\sqrt{a} + \sqrt{a+h})(\sqrt{b} + \sqrt{b+h})}; \quad \frac{3}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

$$3957. \int_a^b u du \int_a^b f(u, uv) dv. \quad 3958. \frac{1}{2} \int_1^2 du \int_{-u}^{4-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv.$$

$$3959. 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 v \cos^3 v dv \int_0^a u f(u \cos^4 v, u \sin^4 v) du. \quad 3961. u = xy, v = x - y.$$

3962. $\int_{-1}^1 f(u) du$. 3963. $2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} f(u \sqrt{a^2+b^2+c}) du$. 3964. $\ln 2 \int_1^2 f(u) du$.
 3965. $\frac{\pi}{2}$. 3966. $\frac{4}{3}$. 3967. $\frac{2}{3} \pi ab$. 3968. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 3969. $543 \frac{11}{15}$. 3970. $1 \frac{37}{128} - \ln 2$.
 3971. 2π . 3972. $\frac{9}{16} \pi$. 3973. $\frac{5}{3} + \frac{\pi}{4}$. 3974. $\frac{4}{3} \pi + 8 \ln \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.
 3975. 6. 3976. $\frac{4}{3} (4-3\sqrt{2}+4\sqrt{3})$. 3978. $f(0, 0)$. 3979. $\frac{2}{t} F(t)$,
 если $t > 0$. 3980. $2 \iint_{(x-t)^2+(y-t)^2 < 1} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$. 3981. $F'(t) =$
 $= \int_0^{2\pi} t f(t \cos \varphi, t \sin \varphi) d\varphi$. 3984. $\left(\frac{15}{8} - 2 \ln 2\right) a^3$. 3985. $\frac{2}{3} (p+q) \sqrt{pq}$.
 3986. πa^3 . 3987. $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3} a^3$. 3988. $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{2}}{3} \ln(1+\sqrt{2})$. 3989. $\frac{\pi a^2}{4}$.
 3990. $a^3 \left(\frac{\sqrt{7}}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{14}}{8}\right)$. 3991. $\frac{\pi ab}{4} \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)$. 3992. $\frac{ab}{3} \times$
 $\times \left[\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \left(\frac{a^4}{h^4} + \frac{b^4}{k^4}\right) + \frac{a^2 b^2}{h^2 k^2}\right]$. 3993. $\frac{ab}{6} \left(\frac{a^3}{h^3} + \frac{b^3}{k^3}\right)$. 3994. $\frac{a^4 b k (ak+2bh)}{6h^3 (ak+bh)^3}$.
 3994.1. $\frac{1}{1260} \frac{(ab)^3}{c^4}$. 3995. $\frac{ab}{70}$. 3996. $\frac{(\beta-\alpha)(b^2-a^2)}{2(\alpha+1)(\beta+1)}$. 3997. $\frac{a^3}{2} \ln 2$.
 3998. $\frac{4}{3} (q-p)(s-r)$. 3998.1. $\frac{1}{15} \cdot (b^5-a^5)(c^{-3}-d^{-3})$. 3998.2. $\frac{q-p}{(p+1)(q+1)} \times$
 $\times \left(\frac{q+1}{b^{q-p}} - \frac{q+1}{a^{q-p}}\right) \left(c^{-\frac{p+1}{q-1}} - d^{-\frac{p+1}{q-1}}\right)$. 3999. $\frac{65}{108} ab$. 3999.1. $\frac{189}{16} \left(\arctg \frac{1}{3} + \right.$
 $\left. + \frac{12}{25}\right) ab$. 4000. $\frac{c^2}{6} (\sqrt{10}-2) \arcsin \frac{1}{3}$. 4001. $\frac{\pi}{16}$. 4002. $\frac{c^2}{4} [(v_2-v_1) \times$
 $\times (\operatorname{sh} 2u_2 - \operatorname{sh} 2u_1) - (u_2-u_1)(\sin 2v_2 - \sin 2v_1)]$. 4003. $\frac{2}{3} \pi a^3$. 4004. $\frac{6\pi}{7\sqrt{7}}$.
 4007. $\frac{5}{6}$. 4008. $\frac{\pi R^2 a}{4} - \frac{2}{3} R^3$. 4009. $\frac{88}{105}$. 4010. π . 4011. π . 4012. $\frac{17}{12} - 2 \ln 2$.
 4013. $\frac{4}{3\sqrt{\pi}} \Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right) a^2$. 4014. $\frac{\pi}{8}$. 4015. $\frac{45}{32} \pi$. 4016. $\frac{16}{9} a^3$. 4017. $\frac{\pi a^3}{8}$.
 4018. $\pi(1-e^{-R^2})$. 4019. $2a^3 c \cdot \frac{(\beta-\alpha)(\pi-2)}{\pi^2}$. 4020. $\frac{\pi}{8}$. 4021. $\frac{1}{3} \pi abc (2-\sqrt{2})$.
 4022. $\frac{4}{3} \pi abc (2\sqrt{2}-1)$. 4023. $\frac{3\pi abc}{8}$. 4024. $\frac{2}{3} \pi abc$. 4025. $\frac{abc}{3}$.
 4026. $\frac{2}{9} abc (3\pi+20-16\sqrt{2})$. 4027. $\frac{\pi(b^2-a^2)}{12}$. 4028. $\frac{9}{2} a^4$. 4029. $\frac{3}{4}$.
 4030. $\frac{a^2 c}{\pi} \ln \frac{\beta}{\alpha}$. 4031. $\frac{8}{35}$. 4032. $\frac{75}{256} \pi abc$. 4033. $\frac{\pi^4 a^2 c}{128}$. 4033.1. $(n-m) \times$
 $\times (e^{-1}-e^{-2}) a^2$. 4034. $\frac{abc}{3n^2} \cdot \frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}$. 4035. $\frac{abc}{2m+n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{2}{n}\right)}$.

4036. $\frac{2}{3} \pi a^2 (2 \sqrt{2} - 1)$. 4037. $16a^2$. 4038. $8a^2 \arcsin \frac{b}{a}$. 4039. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.
4040. $8a^2$. 4041. $\pi \sqrt{2}$. 4042. $\frac{\pi a^2}{2}$. 4043. $-\frac{2\pi}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(1 + \frac{7}{4} \ln 3\right) + \frac{8}{3} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$. 4044. $\frac{a^2}{9} (20 - 3\pi)$. 4045. $2a^2$. 4045.1. $\frac{\pi}{6} [3 \sqrt{10} + \ln(3 + \sqrt{10})]$.
- 4045.2. $\frac{1}{3} abc \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^{-1} \left[\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{c^3}\right]$. 4045.3. $\frac{4}{3} ab (2 \sqrt{2} - 1) \times$
 $\times \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a}{b}}$. 4045.4. $\frac{\pi}{2} \ln(e + e^{-1})$. 4046. $S = 4\pi (3 + 2 \sqrt{3}) a^2$; $V = \frac{8\pi}{\sqrt{3}} a^2$.
4047. $(\varphi_2 - \varphi_1) (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) R^2$, где φ_1, φ_2 — долготы меридианов, ψ_1, ψ_2 — широты параллелей, R — радиус сферы. 4048. $\pi \left\{ a \sqrt{a^2 + h^2} + h^2 \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + h^2}}{|h|} \right\}$.
4049. $S = a(\varphi_2 - \varphi_1) [b(\psi_2 - \psi_1) + a(\sin \psi_2 - \sin \psi_1)]$; $4\pi^2 ab$. 4050. $\omega = \arcsin \frac{bc}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}}$; $\omega \approx \frac{bc}{a^2}$. 4051. $\frac{\rho_0 a^2}{3} [2 + \sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2})]$.
4052. $x_0 = -\frac{a}{2}$; $y_0 = \frac{8}{5} a$. 4053. $x_0 = y_0 = \frac{a}{5}$. 4054. $x_0 = y_0 = \frac{25\pi}{315\pi} a$.
4055. $x_0 = \frac{a^2 b}{14c^2}$; $y_0 = \frac{ab^2}{14c^2}$. 4056. $x_0 = y_0 = \frac{\pi a}{8}$. 4057. $x_0 = \frac{5}{6} a$; $y_0 = \frac{16}{9\pi} a$.
4058. $x_0 = \pi a$; $y_0 = \frac{5}{6} a$. 4059. $x_0 = -\frac{a}{5}$; $y_0 = 0$. 4060. Парабола $y_0 =$
 $= \frac{1}{8} \sqrt{30\rho x_0}$. 4061. $I_x = \frac{bh^2}{12}$; $I_y = \frac{h|b_1^3 - b_2^3|}{12} (b = |b_1 - b_2|)$. 4062. $I_x =$
 $= I_y = \frac{a^4}{16} (16 - 5\pi)$. 4063. $I_x = \frac{21\pi a^4}{32}$; $I_y = \frac{49\pi a^4}{32}$. 4064. $I_x = I_y = \frac{3\pi a^4}{4\sqrt{2}}$.
4065. $I_x = I_y = \frac{9}{8} a^4$. 4066. $I_0 = \frac{\pi a^4}{8}$. 4066.1. $\frac{a^4}{12}$. 4069. $I_\alpha = \frac{a^4}{32\sqrt{3}}$.
4070. $X = ah^2$; $Y = 0$, где X, Y — проекции силы давления на оси координат Ox и Oy . 4071. $P_1 = \pi a^2 \delta \left(h - \frac{2}{3} a\right)$; $P_2 = \pi a^2 \delta \left(h + \frac{2}{3} a\right)$. 4072. Проекции силы давления на оси Ox и Oz , расположенные в вертикальной плоскости, проходящей через ось цилиндра, из которых ось Ox — горизонтальная, а ось Oz — вертикальная, соответственно равны: $X_1 = -\pi a^2 \delta \left(h - \frac{b}{2} \cos \alpha\right) \sin \alpha$,
 $Z_1 = -\pi a^2 \delta \left(h - \frac{b}{2} \cos \alpha\right) \cos \alpha$; $X_2 = \pi a^2 \delta \left(h + \frac{b}{2} \cos \alpha\right) \sin \alpha$, $Z_2 =$
 $= \pi a^2 \delta \left(h + \frac{b}{2} \cos \alpha\right) \cos \alpha$. 4073. Проекции силы притяжения на оси Ox, Oy, Oz , соответственно, равны: $X = 0, Y = 0, Z = -\frac{2kmM}{a^2 h} \{ |b| - |b - h| +$
 $+ \sqrt{a^2 + (b - h)^2} - \sqrt{a^2 + b^2} \}$, где k — постоянная тяготения. 4074. $\rho_{cp} = \frac{1}{2} \rho_0$.
4075. $A = \frac{kp}{12} \left\{ 2ab \sqrt{a^2 + b^2} + a^3 \ln \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} + b^3 \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} \right\}$.
4076. $\frac{1}{364}$. 4077. $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}$. 4078. $\frac{1}{48}$.

4079. $\frac{4}{5} \pi abc$. 4080. $\frac{\pi}{6}$. 4081. $\int_0^1 dx \left\{ \int_0^x dz \int_0^{1-x} f(x, y, z) dy + \right.$
 $\left. + \int_x^1 dz \int_{z-x}^{1-x} f(x, y, z) dy \right\} = \int_0^1 dz \left\{ \int_0^z dy \int_{z-y}^{1-y} f(x, y, z) dx + \int_x^1 dy \int_0^{1-y} f(x, y, z) dx \right\}$.
4082. $\int_{-1}^1 dx \int_{|x|}^1 dz \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x, y, z) dy = \int_0^1 dz \int_{-z}^z dy \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x, y, z) dx$.
4083. $\int_0^1 dx \left\{ \int_0^{x^2} dz \int_0^1 f(x, y, z) dy + \int_{x^2}^{x^2+1} dz \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x, y, z) dy \right\} =$
 $= \int_0^1 dz \left\{ \int_0^{\sqrt{z}} dy \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x, y, z) dx + \int_{\sqrt{z}}^1 dy \int_0^1 f(x, y, z) dx \right\} +$
 $+ \int_1^2 dz \int_{\sqrt{z-1}}^1 dy \int_{\sqrt{z-y^2}}^2 f(x, y, z) dx$.
4084. $\frac{1}{2} \int_0^x (x-\xi^2) f(\xi) d\xi$. 4085. $\frac{1}{2} \int_0^1 (2-z^2) f(z) dz + \frac{1}{2} \int_1^2 (2-z)^2 f(z) dz$.
4086. $F(A, B, C) - F(A, B, c) - F(A, b, C) - F(a, B, C) + F(A, b, c) +$
 $+ F(a, B, c) + F(a, b, C) - F(a, b, c)$. 4087. $\frac{\pi}{10}$. 4088. $\frac{\pi}{15} (2\sqrt{2}-1)$.
4089. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\arctg \frac{1}{\cos \varphi}} \cos \psi d\psi \int_{\frac{\sin \psi}{\cos^2 \psi}}^1 r^2 f(r) dr$. 4090. $\frac{\pi^2 abc}{4}$.
4091. $\frac{16\pi}{3}$. 4092. $\frac{2}{27} \left(\frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\beta^3} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}} \right) h^3 \sqrt{h}$.
4093. $\frac{1}{32} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) (b^3 - a^3) \left[(\beta^3 - \alpha^3) \left(1 + \frac{1}{\alpha^2 \beta^3} \right) + 4 \ln \frac{\beta}{\alpha} \right]$. 4094. $\frac{6}{5}$.
4095. $3(e-2)$. 4096. $\mu = \frac{4\pi R^3}{3 \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 6R}}$, где $|\theta| < 1$. 4098. а) $F'(t) =$
 $= 4\pi t^2 f(t^2)$; б) $F'(t) = \frac{3}{t} \left[F(t) + \iiint_V xyz f'(xyz) dx dy dz \right]$, где $t > 0$ и
 $V = \{0 \leq x \leq t, 0 \leq y \leq t, 0 \leq z \leq t\}$. 4099. 0, если одно из чисел m, n и
 p нечетно; $\frac{4\pi}{m+n+p+3} \cdot \frac{(m-1)!!(n-1)!!(p-1)!!}{(m+n+p+1)!!}$, если числа m, n и
 p четные. 4100. $\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}$. 4101. $\frac{3}{35}$. 4102. $\frac{7}{24}$.
4103. $\frac{2}{3} a^3 (3\pi - 4)$. 4104. $\frac{\pi a^3}{6}$. 4105. $\frac{a^2}{24} (3\pi - 4)$. 4106. $\frac{32}{3} \pi$. 4107. πa^3 .
4108. $\frac{\pi^2 a^3}{4 \sqrt{2}}$. 4109. $\frac{1}{2}$. 4110. $\frac{\pi}{3} (2 - \sqrt{2}) (b^3 - a^3)$. 4111. $\frac{\pi}{3} \cdot \frac{a^2 bc}{h}$. 4112. $\frac{\pi^2}{4} abc$.

$$\begin{aligned}
& 4112.1. \frac{a^2 abc}{4\sqrt{2}}. \quad 4113. \frac{5abc}{12} (3 - \sqrt{5}). \quad 4114. \frac{8\pi}{5} abc. \quad 4115. \frac{abc}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right). \\
& 4116. \frac{abc}{60} \left(\frac{a}{h} + \frac{b}{k}\right) \cdot \left(\frac{a^2}{h^3} + \frac{b^2}{k^3}\right). \quad 4116.1. \frac{abc}{60} \cdot \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^4}{\frac{a}{h} + \frac{b}{k}}. \quad 4117. \frac{abc}{554400}. \\
& 4118. \frac{abc}{3}. \quad 4118.1. \frac{abc}{90}. \quad 4118.2. \frac{abc}{1680}. \quad 4118.3. \frac{4\pi}{35} abc. \quad 4119. \frac{9}{4} a^2. \\
& 4120. \frac{1}{3} (b^3 - a^3) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right). \quad 4121. \frac{4\pi}{3} a^3. \quad 4122. \frac{\pi abc^2}{3h} (1 - e^{-1}). \\
& 4123. \frac{3}{2} abc. \quad 4124. 5abc \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{3}\right). \quad 4125. 37:27. \quad 4126. V = \frac{5\pi a^2}{6}; S = \frac{\pi a^3}{6} \times \\
& \times (6\sqrt{2} + 5\sqrt{5} - 1). \quad 4127. \frac{8h_1 h_2 h_3}{|\Delta|}. \quad 4128. \frac{4\pi h^2}{3|\Delta|}. \quad 4129. \frac{\pi^2}{3n \sin \frac{\pi}{n}} \cdot \frac{abc^3}{h}. \\
& 4130. \frac{abc}{mn + mp + np} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)}. \quad 4131. \frac{3}{2}. \quad 4132. 4\pi\rho_0 \left(\frac{1}{k} + \right. \\
& \left. + \frac{2}{k^2} + \frac{2}{k^3}\right) e^{-k}. \quad 4133. \left(0, 0, \frac{3}{4}c\right). \quad 4134. x_0 = y_0 = \frac{2}{5}a; \quad z_0 = \frac{7}{30}a^3. \\
& 4135. x_0 = \frac{7}{18}p; \quad y_0 = 0; \quad z_0 = \frac{7}{176}p. \quad 4136. x_0 = \frac{3}{8}a; \quad y_0 = \frac{3}{8}b; \quad z_0 = \frac{3}{8}c. \\
& 4137. x_0 = y_0 = 0; \quad z_0 = \frac{3a}{8}. \quad 4138. x_0 = y_0 = 1; \quad z_0 = \frac{5}{3}. \quad 4139. x_0 = \frac{9\pi}{448}a; \\
& y_0 = \frac{9\pi}{448}b; \quad z_0 = \frac{9\pi}{448}c. \quad 4140. x_0 = y_0 = 0; \quad z_0 = \frac{7}{20}. \quad 4141. \frac{x_0}{a} = \frac{y_0}{b} = \frac{z_0}{c} = \\
& = \frac{3}{4} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}. \quad 4142. x_0 = \alpha; \quad y_0 = \beta; \quad z_0 = \gamma. \quad 4143. I_{xy} = \frac{abc^3}{60}; \quad I_{yz} = \frac{a^3 bc}{60}; \\
& I_{zx} = \frac{ab^3 c}{60}. \quad 4144. I_{xy} = \frac{4}{15} \pi abc^3; \quad I_{yz} = \frac{4}{15} \pi a^3 bc; \quad I_{zx} = \frac{4}{15} \pi ab^3 c. \quad 4145. I_{xy} = \frac{\pi abc^3}{5}; \\
& I_{yz} = \frac{\pi a^3 bc}{20}; \quad I_{zx} = \frac{\pi ab^3 c}{20}. \quad 4146. I_{xy} = \frac{2abc^3}{225} (15\pi - 16); \quad I_{xz} = \frac{2ab^3 c}{1575} (105\pi - 272); \\
& I_{yz} = \frac{2a^3 bc}{1575} (105\pi - 92). \quad 4147. I_{xy} = \frac{7}{2} \pi abc^3; \quad I_{xz} = \frac{4}{3} \pi ab^3 c; \quad I_{yz} = \frac{4}{3} \pi a^3 bc. \\
& 4147.1. I_{yz} = \frac{15\pi^2}{256\sqrt{2}} a^3 bc; \quad I_{xz} = \frac{15\pi^2}{256\sqrt{2}} ab^3 c; \quad I_{xy} = \frac{\pi^2}{128\sqrt{2}} abc^3. \quad 4147.2. I_{yz} = \\
& = \frac{1}{5\pi^3} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{n}\right)} \cdot a^3 bc; \quad I_{xz} = \frac{1}{5\pi^3} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{n}\right)} \cdot ab^3 c; \quad I_{xy} = \frac{1}{5\pi^3} \times \\
& \times \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{n}\right)} \cdot abc^3. \quad 4148. I_s = \frac{14}{15}. \quad 4149. I_s = \frac{4\pi}{15} (4\sqrt{2} - 5). \quad 4149.1. \frac{\pi}{5} a^3.
\end{aligned}$$

4150. $\frac{4}{9} MR^3$. 4153. $I = \frac{M}{3} \left(a^2 + \frac{2}{3} h^2 \right)$, где $M = 2\pi\rho_0 a^2 h$ — масса цилиндра.

4154. $I_0 = \frac{\pi^2 a^3 \rho_0}{8}$. 4155. $u = 2\pi\rho_0 \left(R^3 - \frac{r^3}{3} \right)$, если $r \leq R$; $u = \frac{4\pi R^3 \rho_0}{3r}$, если

$r > R$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 4156. $u = 4\pi \int_{R_1}^{R_2} f(\rho) \min \left(\frac{\rho^2}{r}, \rho \right) d\rho$, где $r =$

$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 4157. $u = \pi\rho_0 \left\{ (h-z) \sqrt{a^2 + (h-z)^2} + z \sqrt{a^2 + z^2} - [(h-z) \times \right.$
 $\times |h-z| + z|z|] + a^2 \ln \left| \frac{h-z + \sqrt{a^2 + (h-z)^2}}{\sqrt{a^2 + z^2} - z} \right| \Big\}$. 4158. $X=0$; $Y=0$;

$Z = -\frac{kMm}{a|a|}$, если $|a| \geq R$, $Z = -\frac{kMm}{R^3} a$, если $|a| < R$. 4159. $X=0$; $Y=0$;

$Z = -2\pi\rho_0 k \left\{ \sqrt{a^2 + z^2} - \sqrt{a^2 + (h-z)^2} - (|z| - |h-z|) \right\}$. 4160. $X=0$;

$Y=0$; $Z = -\pi k\rho_0 R \sin^2 \alpha$. 4161. Сходится при $p > 1$. 4182. Сходится при

$p > 1$ и $q > 1$. 4163. Сходится при $p > \frac{1}{2}$. 4164. Сходится при $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$.

4165. Расходится. 4169. $\frac{1}{(p-q)(q-1)}$ ($p > q > 1$). 4170. $\frac{1}{p-1}$ ($p > 1$). 4171. 2π .

4172. $\frac{\pi}{p-1}$ ($p > 1$). 4173. $\pi \sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$. 4174. $\frac{1}{2}$. 4175. π . 4176. $\frac{\pi}{2}$.

4177. $\frac{\pi}{2}$. 4178. $\frac{\pi}{\sqrt{\delta}} e^{\frac{\Delta}{\delta}}$, где $\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$ и $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}$. 4179. $\frac{\pi}{e} ab$.

4180. $-\frac{\pi e a^2 b^3}{2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$. 4181. Сходится. 4182. Сходится при $p < 1$. 4183. Сходится

при $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$. 4184. Сходится при $p < 1$. 4185. Сходится при $p < 1$. 4187. $\frac{\pi}{2}$.

4188. πa . 4189. $-\frac{\pi^2}{2} \ln 2$. 4190. 2. 4191. Сходится при $p > \frac{3}{2}$. 4192. Сходится

при $p < \frac{3}{2}$. 4193. Сходится при $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$. 4194. Сходится при $p < 1$.

4195. Сходится при $p < 1$. 4196. $(1-p)^{-1}(1-q)^{-1}(1-r)^{-1}$ ($p < 1$, $q < 1$,

$r < 1$). 4197. $\frac{4\pi}{3}$. 4198. $2\pi B \left(\frac{3}{2}, 1-p \right)$ ($p < 1$). 4199. $\pi^{\frac{3}{2}}$. 4200. $\sqrt{\frac{\pi^3}{\Delta}}$,

где $\Delta = |a_{ij}|$. 4204. а) $\frac{n}{3}$; б) $\frac{n(3n+1)}{12}$. 4205. $\frac{a^n}{n!}$. 4206. $\frac{1}{2^n n!}$.

4207. $\frac{2}{(n-1)!(2n+1)}$. 4208. $\frac{2^n h_1 h_2 \dots h_n}{|\Delta|}$. 4209. $\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{n!}$.

4210. $\frac{\pi^{-\frac{n-1}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} a_1 a_2 \dots a_n$. 4211. $\frac{\pi^{\frac{n}{2}} a^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$. 4212. $\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} a^{n-1} h^3}{12\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$.

4213. $\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$. 4216. $R^n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^1 f(\sqrt{u}) u^{\frac{n}{2}-1} du$. 4219. $u = \frac{16}{15} \pi^2 \rho_0^3 R^3$.

4220. $\sqrt{\frac{\pi^n}{\delta}} e^{-\frac{\Delta}{\delta}}$, где $\delta = |a_{ij}|$ и $\Delta = \begin{vmatrix} a_{ij} & b_i \\ b_j & c \end{vmatrix}$ — окаймленный определитель.
4221. $1 + \sqrt{2}$. 4222. $\frac{256}{15} a^3$. 4223. $2\pi^3 a^3 (1 + 2\pi^3)$. 4224. $\frac{a^3}{6} \left(\operatorname{ch}^{\frac{2}{3}} 2t_0 - 1 \right)$.
4225. $4a^{\frac{7}{3}}$. 4226. $2(e^a - 1) + \frac{\pi}{4} ae^a$. 4227. $2a^3 (-2\sqrt{2})$. 4228. $\frac{2ka^3 \sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$.
4229. $2a^3$. 4230. $\frac{\pi}{a}$. 4231. 5. 4232. $\sqrt{3}$. 4233. $|x_0| + |z_0|$, где $|x_0| < a$.
4234. $\frac{3}{4\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{3z_0^2}{a}} + 2\sqrt{\frac{az_0^2}{3}} \right)$. 4235. $\left(1 + \frac{2z_0}{3c}\right) \sqrt{cz_0}$. 4236. $a\sqrt{2} \times$
 $\times \operatorname{arctg} \frac{|z|}{\sqrt{a^2 - z^2}}$. 4237. $\frac{2\pi}{3} (3a^2 + 4\pi^2 b^2) \sqrt{a^2 + b^2}$. 4238. $\frac{2}{3} \pi a^2$.
4239. $\frac{1}{3} \left[(2 + i_0^2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} \right]$. 4240. $\frac{a^2}{256\sqrt{2}} \left[100\sqrt{38} - 72 - 17 \ln \frac{25+4\sqrt{38}}{17} \right]$.
4241. $2b \left(b + a \frac{\operatorname{arcsin} e}{e} \right)$, где $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ — эксцентриситет эллипса.
- 4241.1. $\frac{2}{3} \rho^3 (2\sqrt{2} - 1)$. 4242. $\frac{a}{8} \left[(3\sqrt{3} - 1) + \frac{3}{2} \ln \frac{3+2\sqrt{3}}{3} \right]$. 4243. $x_0 =$
 $= b - a \sqrt{\frac{h-a}{h+a}}$; $y_0 = \frac{h}{2} + \frac{ab}{2\sqrt{h^2 - a^2}}$. 4244. $x_0 = y_0 = \frac{4}{3} a$. 4244.1. $S_x =$
 $= S_y = \frac{3}{5} a^3$. 4244.2. πa^3 . 4244.3. а) $\frac{32}{3} a^3$; б) $\frac{3\sqrt{3}}{2} a^3$. 4244.4. $r_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$.
4245. $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{4a}{3\pi}$. 4246. $x_0 = \frac{2}{5}$; $y_0 = -\frac{1}{5}$; $z_0 = \frac{1}{2}$. 4247. $I_x = I_y =$
 $= \left(\frac{a^3}{2} + \frac{h^3}{3} \right) \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}$; $I_z = a^3 \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}$. 4248. а) 0; б) $\frac{2}{3}$; в) 2.
4249. а) 2; б) 2; в) 2. 4250. $-\frac{14}{15}$. 4251. $\frac{4}{3}$. 4252. 0. 4253. $-2\pi a^3$. 4254. -2π .
4255. 0. 4256. 0. 4257. $\frac{\pi}{4} - 1$. 4258. 8. 4259. 12. 4260. 4. 4261. -2 .
4262. $\int_0^{a+b} f(u) du$. 4263. $-\frac{3}{2}$. 4264. 9. 4265. $\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx + \int_{y_1}^{y_2} \psi(y) dy$. 4266. 62.
4267. 1. 4268. $\pi + 1$. 4269. $e^a \cos b - 1$. 4271. $z = \frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C$.
4272. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3x-y}{2y\sqrt{2}} + C$. 4273. $z = -\frac{2y^2}{(x+y)^3} + \ln|x+y| + C$. 4274. $z =$
 $= e^{x+y} (x-y+1) + ye^x + C$. 4275. $z = \frac{\partial^{n+m} u}{\partial x^n \partial y^m} + C$. 4276. $z = \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} \times$
 $\times \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right) + C$. 4278. $|I_R| < \frac{8\pi}{R^2}$. 4279. $\frac{1}{35}$. 4280. $-\pi a^3$. 4281. $2\pi \sqrt{2} a^3 \times$
 $\times \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$. 4282. $-\frac{\pi a^3}{4}$. 4283. -4 . 4284. $-53 \frac{7}{12}$. 4285. 0. 4286. $b - a$.

$$4287. \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx + \int_{y_1}^{y_2} \psi(y) dy + \int_{z_1}^{z_2} \chi(z) dz.$$

$$4288. \int_{x_1+y_1+z_1}^{x_2+y_2+z_2} f(u) du.$$

$$V \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

$$4289. \int_{V \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} u f(u) du. \quad 4290. u = \frac{1}{3} (x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz + C. \quad 4291. u =$$

$$= x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} + C. \quad 4292. u = \ln \sqrt{(x+y)^2 + z^2} + \operatorname{arctg} \frac{z}{x+y} + C. \quad 4293. A =$$

$$= -mg(z_2 - z_1). \quad 4294. A = -\frac{k}{2} (a^2 - b^2). \quad 4295. A = k \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \text{ где}$$

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} (i=1, 2). \quad 4296. I = \iint_S y^2 dx dy. \quad 4297. -46 \frac{2}{3}. \quad 4298. \frac{\pi a^4}{2}.$$

$$4299. -2\pi ab. \quad 4300. -\frac{1}{5} (\pi - 1). \quad 4301. 0. \quad 4302. I_1 - I_2 = 2. \quad 4303. \frac{\pi m a^2}{8}.$$

$$4304. mS + e^{x_2} \varphi(y_2) - e^{x_1} \varphi(y_1) - m(y_2 - y_1) - \frac{m}{2} (x_2 - x_1)(y_2 + y_1). \quad 4305. P =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}, Q = kx + \frac{\partial u}{\partial y}, \text{ где } u \text{ — дважды дифференцируемая функция и } k \text{ — посто-}$$

$$\text{янная величина. } 4306. \frac{\partial}{\partial x} [xF(x, y)] = \frac{\partial}{\partial y} [yF(x, y)]. \quad 4307. 1) I = 0; 2) I = 2\pi.$$

$$4308. \pi ab. \quad 4309. \frac{3}{8} \pi ab. \quad 4310. \frac{a^2}{6}. \quad 4311. \frac{3}{2} a^2. \quad 4312. a^2. \quad 4313. \frac{1}{3} + \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}.$$

$$4314. \frac{a^2}{2} B(2m+1, 2n+1). \quad 4315. \frac{ab}{2n} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}. \quad 4316. \frac{ab}{n} \left[1 + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\pi}{\sin \frac{\pi}{n}} \right].$$

$$4317. \frac{abc^2}{2(2n+1)}. \quad 4318. \pi(n+1)(n+2)r^2; 6\pi r^2. \quad 4319. \pi(n-1)(n-2)r^2; 6\pi r^2.$$

$$4320. 4a^2. \quad 4321. \operatorname{sgn}(ad-bc). \quad 4322. I = \sum \operatorname{sgn} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}, \text{ где сумма распростра-}$$

нена на все точки пересечения кривых: $\varphi(x, y) = 0$ и $\psi(x, y) = 0$, лежащие внутри контура C . 4324. $I = 2S$, где S — площадь, ограниченная контуром C .

4325. $X_x(x_0, y_0) + Y'_y(x_0, y_0)$. 4326. Проекции силы на оси координат равны:

$$X = 0; Y = \frac{2kmM}{\pi a^2}, \text{ где } k \text{ — постоянная тяготения. } 4327. u = 2\pi k R \ln \frac{1}{R}, \text{ если}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \leq R, u = 2\pi k R \ln \frac{1}{\rho}, \text{ если } \rho > R. \quad 4328. I_1 = \frac{\pi}{m} \rho^m \cos m\varphi, I_2 =$$

$$= \frac{\pi}{m} \rho^m \sin m\varphi, \text{ если } 0 \leq \rho \leq 1; I_1 = \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \cos m\varphi, I_2 = \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \sin m\varphi, \text{ если}$$

$\rho > 1$. 4329. $u = 2\pi$, если точка $A(x, y)$ лежит внутри контура C ; $u = \pi$, если точка $A(x, y)$ лежит на контуре C ; $u = 0$, если точка $A(x, y)$ лежит вне контура C .

4330. $K_1 = \pi \rho^m \cos m\varphi$, $K_2 = \pi \rho^m \sin m\varphi$, если $0 \leq \rho < 1$; $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, если

$\rho = 1$; $K_1 = -\frac{\pi}{\rho^m} \cos m\varphi$, $K_2 = -\frac{\pi}{\rho^m} \sin m\varphi$, если $\rho > 1$. 4339. $Q =$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy; \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad 4340. H_x = k l \oint_C \frac{1}{r^3} [(\eta - y) dz - (\zeta - z) dy];$$

$$H_y = ki \oint_C \frac{1}{r^3} [(\xi - x) dx - (\eta - y) dy]; \quad H_x = ki \oint_C \frac{1}{r^3} [(\xi - x) dy - (\eta - y) dx].$$

$$4341. I_1 - I_2 = (4\pi - 2\sqrt{3})a^4. \quad 4342. \frac{7}{2}\pi\sqrt{2}a^3. \quad 4343. \pi a^3. \quad 4344. \frac{\pi}{2}(1 + \sqrt{2}).$$

$$4345. \frac{3 - \sqrt{3}}{2} + (\sqrt{3} - 1) \ln 2. \quad 4346. \frac{125\sqrt{5} - 1}{420}. \quad 4347. \frac{4\pi}{3} abc \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right). \quad 4348. \pi^2 [a\sqrt{1+a^2} + \ln(a + \sqrt{1+a^2})]. \quad 4349. \frac{\pi a^4}{2} \sin \alpha \cos^3 \alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right). \quad 4350. \frac{64}{15}\sqrt{2}a^4. \quad 4352. \frac{2\pi(1+6\sqrt{3})}{15}. \quad 4352.1. \pi a^3. \quad 4352.2. \frac{a^3}{2\sqrt{3}}.$$

$$4353. \frac{4}{3}\pi \rho_0 a^4. \quad 4354. \frac{\pi \rho_0 a (3a^2 + 2b^2)\sqrt{a^2 + b^2}}{12}. \quad 4355. x_0 = \frac{a}{2}; y_0 = 0; z_0 = \frac{16}{9\pi}a.$$

$$4356. x_0 = y_0 = \frac{a}{2\sqrt{2}}; z_0 = \frac{a}{\pi}(\sqrt{2} + 1). \quad 4356.1. a) 40a^4; б) \pi R \left[R(R + H^2) + \frac{2}{3}H^3 \right]. \quad 4356.2. \frac{\sqrt{3}}{12}. \quad 4357. \text{Проекция силы притяжения на оси координат}$$

$$X=0; \quad Y=0; \quad Z = \pi k m \rho_0 \ln \frac{a}{b}. \quad 4358. u = 4\pi \rho_0 \min \left(a, \frac{a^2}{r_0} \right), \text{ где } r_0 = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}. \quad 4359. F(t) = \frac{\pi}{18}(3 - t^2)^2, \text{ если } |t| \leq \sqrt{3}; \quad F(t) = 0, \text{ если } |t| > \sqrt{3}.$$

$$4360. F(t) = \frac{\pi(8 - 5\sqrt{2})}{6}t^4. \quad 4361. F=0, \text{ если } t \leq r-a;$$

$$F = \frac{\pi t}{r} [a^2 - (r-t)^2], \text{ если } r-a < t < r+a; \quad F=0, \text{ если } t > r+a (t \geq 0).$$

$$4362. 4\pi a^3. \quad 4363. \left[\frac{f(a) - f(0)}{a} + \frac{g(b) - g(0)}{b} + \frac{h(c) - h(0)}{c} \right] abc. \quad 4364. 0.$$

$$4365. \frac{4\pi}{abc} (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2). \quad 4366. \frac{8\pi}{3} (a+b+c)R^3. \quad 4367. -\pi a^2\sqrt{3}. \quad 4368. \frac{h^3}{3}.$$

$$4369. 2 \text{ пл. } S. \quad 4370. 0. \quad 4371. -2\pi a(a+h). \quad 4372. 2\pi Rr^2. \quad 4373. -\frac{9}{2}a^2. \quad 4374. 0.$$

$$4376. 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz. \quad 4377. 0. \quad 4378. 2 \iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

$$4379. \iiint_V \Delta u dx dy dz, \text{ где } \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad 4380. 0. \quad 4384. \frac{4\pi}{3} \left(a^2 + \frac{b^2}{2} \right) |c|.$$

$$4385. \frac{2}{9}a^3. \quad 4385.1. 2\pi^2 a^2 b. \quad 4387. 3a^4. \quad 4388. \frac{12}{5}\pi a^5. \quad 4389. 1. \quad 4390. -\frac{\pi h^4}{2}.$$

$$4392. а) l=0; б) l=4\pi. \quad 4401. а) \operatorname{grad} u(0) = 3i - 2j - 6k, |\operatorname{grad} u(0)| = 7, \cos \alpha = \frac{3}{7}, \cos \beta = -\frac{2}{7}, \cos \gamma = -\frac{6}{7}; б) \operatorname{grad} u(A) = 6i + 3j, |\operatorname{grad} u(A)| =$$

$$= 3\sqrt{5}, \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \gamma = 0; а) \operatorname{grad} u(B) = 7i, |\operatorname{grad} u(B)| = 7, \cos \alpha = 1, \cos \beta = 0, \cos \gamma = 0; \operatorname{grad} u = 0 \text{ в точке } M(-2, 1, 1).$$

$$4401.1. \operatorname{grad} u(M) = 12i - 9j - 20k, |\operatorname{grad} u(M)| = 25, \cos \alpha = \frac{12}{25}, \cos \beta =$$

- $= -\frac{9}{25}$, $\cos \gamma = -\frac{4}{5}$; $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{3}{\sqrt{2}}$. 4402. а) $xy = z^2$; б) $x = y = 0$ и $x = y = z$;
 в) $x = y = z$. 4403. $r = 1$. 4404. $\frac{4(x^2 + y^2)}{u^3 - 256} + \frac{4z^2}{u^3} = 1$ ($u \geq 16$); $\frac{x^2 + y^2}{960} +$
 $+\frac{z^2}{1024} = 1$; $\max u = 20$. 4405. $\cos \varphi = -\frac{8}{9}$. 4406. Поверхности уровня—
 плоскости конусов; поверхности равного модуля градиента—торы; $\inf u = 0$,
 $\sup u = 1$; $\inf |\operatorname{grad} u| = 0$, $\sup |\operatorname{grad} u| = \frac{1}{2}$. 4407. $\frac{|\Delta c|}{|\operatorname{grad} u(x_0, y_0, z_0)|}$.
 4409. а) $\frac{r}{r}$; б) $2r$; в) $-\frac{r}{r^3}$. 4410. $f'(r)\frac{r}{r}$. 4411. с. 4412. $2r(c \cdot c) - 2c(c \cdot r)$.
 4415.1. а) $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} e_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} e_z$, где $e_r = i \cos \varphi + j \sin \varphi$,
 $e_\varphi = -i \sin \varphi + j \cos \varphi$, $e_z = k$ —орты, касательные к соответствующим ко-
 ординатным линиям; б) $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} e_\varphi$, где $e_r =$
 $= i \cos \varphi \sin \theta + j \sin \varphi \sin \theta + k \cos \theta$, $e_\theta = i \cos \varphi \cos \theta + j \sin \varphi \cos \theta - k \sin \theta$,
 $e_\varphi = -i \sin \varphi + j \cos \varphi$ —орты, касательные к соответствующим координатным
 линиям. 4416. $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{2u}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial r} = |\operatorname{grad} u|$, если $a = b = c$.
 4417. $\frac{\partial u}{\partial l} = -\frac{\cos(l, r)}{r^2}$; $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$, если $l \perp r$. 4418. $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\operatorname{grad} u \operatorname{grad} v}{|\operatorname{grad} v|}$; $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$,
 если $\operatorname{grad} u \perp \operatorname{grad} v$. 4419. $a = \frac{i(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) - j(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) + k(x - y)z}{(x^2 + y^2 + z^2) \sqrt{x^2 + y^2}}$.
 4420. $y = c_1 x$, $z = c_2 x^2$. 4422.1. $\operatorname{div} a(M) = \frac{18}{125}$; $\Pi = \frac{24}{125} \pi e^2$. 4423. 0.
 4425. $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u$, где $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. 4426. $f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$; $f(r) =$
 $= c + \frac{c_1}{r}$, где c и c_1 —постоянные. 4427. а) 3; б) $\frac{2}{r}$. 4428. $\frac{f'(r)}{r} (c \cdot r)$.
 4429. $3f(r) + rf'(r)$; $f(r) = \frac{c}{r^2}$, где c —постоянная. 4430. а) $u \Delta u + (\operatorname{grad} u)^2$;
 б) $u \Delta v + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v$, где Δu —оператор Лапласа. 4431. $\operatorname{div} v = 0$; $\operatorname{div} w =$
 $= -2\omega^2$. 4432. 0, вне притягивающих центров. 4433. $\operatorname{div} a = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_r) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right]$,
 где a_r , a_φ —проекции вектора a на координатные линии $\varphi = \text{const}$ и $r = \text{const}$.
 4434. $\operatorname{div} a = \frac{1}{LMN} \left[\frac{\partial}{\partial u}(MN a_u) + \frac{\partial}{\partial v}(NL a_v) + \frac{\partial}{\partial w}(LM a_w) \right]$, где a_u , a_v , a_w —
 проекции вектора a на соответствующие координатные линии и
 $L = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2}$, $M = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2}$,
 $N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)^2}$. Если r , φ , z —цилиндрические координа-
 ты, то $\operatorname{div} a = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_r) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + r \frac{\partial a_z}{\partial z} \right]$; если r , θ и φ —сферические
 координаты, то $\operatorname{div} a = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a_r \sin \theta) + r \frac{\partial}{\partial \theta}(a_\theta \sin \theta) + r \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right]$.

4436. а) 0; б) 0. 4436.1. $\operatorname{rot} a(M) = -\frac{5}{4}i - j + \frac{5}{2}k$; $|\operatorname{rot} a(M)| = \frac{1}{4}\sqrt{141}$,
 $\cos \alpha = \frac{-5}{\sqrt{141}}$, $\cos \beta = \frac{-4}{\sqrt{141}}$, $\cos \gamma = \frac{10}{\sqrt{141}}$. 4437. а) $\frac{f'(r)}{r} [r \times c]$;

б) $2f(r)c + \frac{f'(r)}{r} [c(r \cdot r) - r(c \cdot r)]$. 4439. а) 0; б) 0. 4440. $\operatorname{rot} v = 2\omega f$.

4440.1. $\operatorname{rot} a = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (ra_\varphi) - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right] k$, где a_φ и a_r — проекции вектора a , соответственно на координатные линии $r = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$.

4440.2. а) $\operatorname{rot} a = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} \right) e_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) e_\varphi + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (ra_\varphi) - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right] e_z$,
 где $a_r = a_x \cos \varphi + a_y \sin \varphi$, $a_\varphi = -a_x \sin \varphi + a_y \cos \varphi$, $a_z = a_z$; б) $\operatorname{rot} a =$
 $= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (a_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right] e_r + \frac{1}{r} \left[\sin \theta \cdot \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (ra_\varphi) \right] e_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (ra_\theta) - \right.$
 $\left. - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right] e_\varphi$, где $a_r = a_x \cos \varphi \sin \theta + a_y \sin \varphi \sin \theta + a_z \cos \theta$, $a_\theta = a_x \cos \varphi \cos \theta +$
 $+ a_y \sin \varphi \cos \theta - a_z \sin \theta$, $a_\varphi = -a_x \sin \varphi + a_y \cos \varphi$. 4441. а) 0; б) πh^3 .

4442. а) 0; б) 0. 4443. п. 4444. $\frac{3\pi}{8}$. 4445. 0. 4445.1. $\frac{\pi}{5}$. 4447. $4\pi m$.

4448. $\sum_{i=1}^n e_i$. 4450. $\operatorname{cp} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (k \operatorname{grad} u)$, где c — удельная теплоемкость и

ρ — плотность тела. 4452. $2\pi^2 b^3$. 4452.1. $8 \frac{20}{21} \cdot \ln 2$. 4452.2. $\frac{3}{4}(3 + e^4 - 12e^{-3})$.

r_B
 4453. $\int_{r_A}^{r_B} f(r) r dr$. 4454. а) 2π ; б) 2π . 4455. а) $\Gamma = 0$; б) $\Gamma = 2\pi n$, где n — чис-

ло оборотов контура C вокруг оси Oz . 4455.1. $\operatorname{rot} a(M) = -j - 2k$,
 $\Gamma = -\pi (\cos \beta + 2 \cos \gamma) e^3$. 4456. $Q = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$;

$\Gamma = \iint_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy$; $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$. 4457. $u = xyz(x + y + z) + C$.

4457.1. $\frac{1}{3}$. 4458. $u = \frac{\pi}{r}$. 4459. $u(x, y, z) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i}$, где r_i — расстояние

переменной точки $M(x, y, z)$ от точки $M_i (i = 1, 2, \dots, n)$. 4460. $u(x, y, z) =$
 $= \int_{r_0}^r t f(t) dt$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Борис Павлович Демидович
**СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ**

М., 1977 г., 528 стр. с илл.

Редактор *М. М. Горячая*
Техн. редактор *С. Я. Шкляр*
Корректор *И. В. Хорошавина*

Сдано в набор 3/XI 1976 г. Подписано к печати 31/II 1977 г.
Бумага 60×90¹/₁₆. Физ. печ. л. 33. Условн. печ. л. 33.
Уч.-изд. л. 32,2. Тираж 200 000 экз.
Цена книги 1 р. 04 к. Заказ № 857.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции и ордена
Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Союзполиграфпрома при Государственном комитете
Совета Министров СССР по делам издательства,
полиграфии и книжной торговли.
Москва, М-54, Валовая, 28

Пу
по пар
следую

а)

пакт в

б)

любой

в)

равна

г)

сущест

д)

невыро

Те

Если в

θ_n , опр

нены п

случай

тором

опреде

Сх

Для д

достато

нок, не

1.4

регрес

уравн

также

станд

иска

уравн

$\Omega \neq$

не вы

нений

кальн

Изучим теперь свойства линеаризованной оценки $\hat{\theta}_1(\lambda)$. Для этого сначала вычислим характеристики независимых случайных величин δ_i :

$$E\delta_i = E[e_i^2 + 2e_i\sqrt{x_i + \theta}] - D e_i = \sigma^2,$$

$$\begin{aligned} D\delta_i &= E[e_i^2 + 2e_i\sqrt{x_i + \theta}]^2 - \sigma^4 = \\ &= E e_i^4 + 4[E e_i^3]\sqrt{x_i + \theta} + 4E e_i^2(x_i + \theta) - \sigma^4 = \\ &= 3\sigma^4 + 4\sigma^2(x_i + \theta) - \sigma^4 = 2\sigma^4 + 4\sigma^2(x_i + \theta) \end{aligned}$$

Следовательно, при любом N

$$E\hat{\theta}_N(\lambda) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E(z_i - x_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\sigma^2 + \theta) = \sigma^2 + \theta$$

(т. е. оценка $\hat{\theta}_N(\lambda)$ смещена),

$$\begin{aligned} D\hat{\theta}_N(\lambda) &= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N D(z_i - x_i) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N D\delta_i = \\ &= \frac{1}{N^2} \left[2N\sigma^4 + 4\sigma^2 \sum_{i=1}^N (x_i + \theta) \right]. \end{aligned}$$

При $N \rightarrow \infty$

$$D\hat{\theta}_N(\lambda) = \frac{2\sigma^2}{N} \left(\sigma^2 + 2\theta + 2 \int x p(x) dx \right) + o(N^{-1}). \quad (1.11)$$

Итак, оценки $\hat{\theta}_N(\lambda)$ являются асимптотически несмещенными, а оценки $\hat{\theta}_N(\lambda)$ смещены. Асимптотические дисперсии оценок выражаются по формулам (1.10) и (1.11). Оценив σ^2 , смещение оценки $\hat{\theta}_N(\lambda)$ можно (в пределе при $N \rightarrow \infty$) устранить, рассмотрев вместо нее оценку $\hat{\theta}_N(\lambda) - \hat{\sigma}^2$. Дисперсии же их по-прежнему будут различаться; для разумных планов эксперимента ξ

$$\lim_{N \rightarrow \infty} ND\hat{\theta}_N(\lambda) < \lim_{N \rightarrow \infty} ND\hat{\theta}_N(\lambda).$$

Пусть, например, $\sigma = 1$, $\theta = 0$,

$$p(x) = \begin{cases} 1, & 1 < x \leq 2, \\ \theta & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

тогда из (1.10) и (1.11) следует, что

$$ND\hat{\theta}_N(\lambda) \rightarrow (\ln 2)/4 \approx 0,17, \quad ND\hat{\theta}_N(\lambda) \rightarrow 8, \quad N \rightarrow \infty.$$

1.3. Состоятельность и асимптотическая нормальность МНК-оценок. В данном пункте без доказательства сформулировано утверждение об асимптотических свойствах МНК-оценок.

Сначала напомним, что планом эксперимента называется произвольная вероятностная мера $\xi = \xi(dx)$ на $(X, \mathcal{A})$ ($\mathcal{A}$ — σ -алгебра борелевских подмножеств множества X). Если

$$\xi = \xi_N = \left\{ \frac{x_1}{1/N}, \dots, \frac{x_N}{1/N} \right\} \quad (1.12)$$

(т. е. $\xi(A) = N^{-1} \sum_{i: x_i \in A} 1$ для любого $A \in \mathcal{A}$), где $x_1, \dots, x_N$ не обяза-

тельно различные точки множества X , которым приписаны равные веса, то, согласно этому плану, измерения $y_i = y(x_i)$ проводятся в точках $x_1, \dots, x_N$.

Пусть функция $\eta(x, \theta)$ определена для всех $x \in X$ и $\theta \in \Omega$ и нелинейна по параметрам θ , а случайные ошибки ε_i одинаково распределены. Введем следующие ограничения:

а) функция $\eta(x, \theta)$ непрерывна на $X \times \Omega$, X — компакт в R^k , Ω — компакт в R^m ;

б) последовательность планов ξ_N слабо сходится к плану ξ , т.е. для любой непрерывной функции $g(x)$ на X при $N \rightarrow \infty$ имеет место

$$\int_X g(x) \xi_N(dx) \rightarrow \int_X g(x) \xi(dx);$$

в) квадратичная форма

$$\int_X [\eta(x, \theta) - \eta(x, \theta')]^2 \xi(dx)$$

равна нулю только при $\theta = \theta'$;

г) производные

$$\partial \eta / \partial \theta_i, \quad \partial^2 \eta / \partial \theta_i \partial \theta_j, \quad i, j = 1, \dots, m,$$

существуют и непрерывны на $X \times \Omega$;

д) θ_0 — внутренняя точка Ω и матрица

$$M(\theta_0, \xi) = \int_X f(x, \theta_0) f^T(x, \theta_0) \xi(dx) \quad (1.13)$$

невырожденная. Здесь θ_0 — истинные значения неизвестных параметров,

$$f^T(x, \theta) = \left(\frac{\partial \eta(x, \theta)}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial \eta(x, \theta)}{\partial \theta_m} \right). \quad (1.14)$$

Теорема 1.1. Пусть имеется схема регрессионного эксперимента (1.1). Если выполнены предположения а) — в), то последовательность МНК-оценок $\hat{\theta}_N$, определенная по (1.4), сильно состоятельна. Если дополнительно выполнены предположения г), д), то при $N \rightarrow \infty$ последовательность распределений случайных векторов $\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta_0)$ сходится к нормальному с нулевым вектором средних и дисперсионной матрицей $\sigma^2 M^{-1}(\theta_0, \xi)$, где матрица $M(\theta_0, \xi)$ определяется по формуле (1.13).

Схему нелинейной регрессии (1.1) иногда называют схемой накопления. Для другой возможной схемы нелинейной регрессии (схемы серий) условия, достаточные для состоятельности и асимптотической нормальности МНК-оценок, несколько более ограничительны [11].

1.4. Численные методы поиска МНК-оценок. Если функция регрессии нелинейна по параметрам, то система нормальных уравнений

$$\frac{\partial Q(\theta)}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

также нелинейна. Для ее решения могут быть использованы стандартные численные процедуры. Все же сводить задачу поиска оценок МНК (1.4) к задаче решения системы нормальных уравнений обычно невыгодно по следующим причинам: если $\Omega \neq R^m$, то в точке минимума $Q(\theta)$ условие $\nabla Q(\theta) = 0$ может не выполняться; множество решений системы нормальных уравнений может быть более широким, чем множество точек локальных минимумов функции Q .

Для поиска минимума функции $Q(\theta)$ могут быть использованы как методы поиска глобального экстремума (если нет уверенности в том, что локальный минимум у функции Q один), так и стандартные методы поиска локального экстремума. Разработаны также специальные методы локальной минимизации, учитывающие специфику функции $Q(\theta)$. Эти методы кратко рассмотрены ниже.

Сначала рассмотрим методы, в которых используются производные $\partial \eta(x, \theta) / \partial \theta_i$ ($i = 1, \dots, m$). Принцип построения этих методов тот же, что и общих методов локальной оптимизации. Большая их часть записывается в виде

$$\theta^{(t+1)} = \theta^{(t)} - \gamma_t [F^T(\theta^{(t)}) F(\theta^{(t)}) + \alpha_t A]^{-1} F^T(\theta^{(t)}) Y(\theta^{(t)}), \quad (1.15)$$

где $\gamma_t > 0$, $\alpha_t \geq 0$, $\theta^{(t)} \in \Omega$ ($t = 0, 1, \dots$), A — неотрицательно определенная матрица, $\theta^{(0)} \in \Omega$ — начальное приближение,

$$Y(\theta) = (y_1 - \eta(x_1, \theta), \dots, y_N - \eta(x_N, \theta))^T,$$

$$F(\theta^{(t)}) = \left\| \frac{\partial \eta(x_i, \theta)}{\partial \theta_i} \right\|_{\theta = \theta^{(t)}} \Big|_{\substack{i=1, \dots, N \\ i=1, \dots, m}}$$

Если $\alpha_t > 0$ ($t = 0, 1, \dots$), то (1.15) называется *методом Марквардта*; если $\alpha_t = 0$, $\gamma_t = \arg \min_y Q(\theta^{(t+1)})$ — *методом Хартли*; если $\alpha_t = 0$, $\gamma_t = 1$ — *методом Гаусса — Ньютона* (иногда методом Гаусса — Ньютона называют метод (1.15) с $\alpha_t = 0$ и с другими способами выбора γ_t).

Суть метода Гаусса — Ньютона состоит в том, что функция $\eta(x, \theta)$ аппроксимируется функцией, линейной по параметрам в окрестности точки θ_n :

$$\eta(x, \theta) \simeq \eta(x, \theta_n) + (\theta - \theta_n)^T \nabla \eta(x, \theta_n). \quad (1.16)$$

Оценки МНК для линейаризованной модели вычисляются по стандартной формуле, в данном случае имеющей вид

$$\theta - \theta_n = (F^T(\theta_n) F(\theta_n))^{-1} F^T(\theta_n) Y(\theta_n). \quad (1.17)$$

Поскольку θ_n неизвестно, то на t -м шаге в приведенной формуле θ_n заменяется на $\theta^{(t)}$.

Если матрицы $F^T(\theta^{(t)}) F(\theta^{(t)})$ плохо обусловлены, то метод Гаусса — Ньютона может сходиться очень медленно или даже расходиться. В указанной ситуации лучше работает метод Марквардта, суть которого в наиболее часто используемом случае $A = I_m$ состоит в том, что на каждом шаге этого метода после линейаризации (1.16) и замены θ_n на $\theta^{(t)}$ вместо МНК-оценки (1.17) вычисляется гребневая оценка (см. п. 1.9 гл. 1).

Если вычисление (или оценивание с помощью конечных разностей) производных функции $\eta(x, \theta)$ трудоемко, то более экономичными могут оказаться методы, не требующие вычисления производных. Аналог метода Гаусса — Ньютона (*DUD-метод*) имеет вид

$$\theta^{(t+1)} = \theta^{(t)} + \gamma_t (\theta^* - \theta^{(t)}),$$

где

$$\begin{aligned}\theta^* &= m_t \left[\sum_{i=1}^N x_{ti} x_{ti}^T \right]^{-1} \sum_{i=1}^N x_{ti} [y_i - \eta(x_{ti}, \theta^{(t)})], \\ m_t &= \sum_{j=0}^{t-1} \omega_{jt} (\theta^{(j)} - \theta^{(t)}) (\theta^{(j)} - \theta^{(t)})^T, \\ x_{ti} &= \sum_{j=1}^{t-1} \omega_{jt} (\theta^{(j)} - \theta^{(t)}) [\eta(x_{ti}, \theta^{(j)}) - \eta(x_{ti}, \theta^{(t)})].\end{aligned}$$

На практике весовые множители ω_{jt} ($t = 0, 1, \dots; j = 0, \dots, t$) обычно выбираются следующим образом:

$$\omega_{jt} = \begin{cases} t^{-1}, & 1 \leq t < m, \quad 1 \leq j \leq t, \\ m^{-1}, & t \geq m, \quad j \geq t - m + 1, \\ 0, & j < t - m + 1 \end{cases}$$

Суть DUD метода состоит в том, что в окрестности точки $\theta^{(t)}$ функция $\eta(x, \theta)$ аппроксимируется линейной по параметрам:

$$\eta(x, \theta) \approx \eta(x, \theta^{(t)}) + (\theta - \theta^{(t)})^T \gamma_t(x).$$

где

$$\gamma_t(x) = \arg \min_{\gamma} \sum_{j=0}^{t-1} \omega_{jt} [\eta(x, \theta^{(j)}) - \eta(x, \theta^{(t)}) - \gamma (\theta^{(j)} - \theta^{(t)})]^2.$$

Напомним, что в методе Гаусса — Ньютона

$$\gamma_t(x) = \partial \eta(x, \theta) / \partial \theta |_{\theta = \theta^{(t)}}.$$

Утверждения о сходимости всех рассмотренных алгоритмов легко формулируются на основе общих теорем о сходимости методов поиска локального экстремума. Все эти алгоритмы имеют недостаток, присущий большинству общих методов локального поиска и заключающийся в том, что для их сходимости требуется хорошее начальное приближение $\theta^{(0)}$.

Упражнения.

1. Предположим, что функция регрессии имеет вид

$$\eta(x, \theta) = \theta_1 \exp \{-\theta_2 x\}.$$

$N = 3$, точки проведения измерений: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, а результаты измерений в этих точках равны $y_1 = 3$, $y_2 = 2$, $y_3 = 1$. Вычислить МНК-оценку (1.4) и линеаризованную МНК-оценку, основанную на рассмотрении схемы измерений вида (1.6).

2. Пусть в условиях предыдущего упражнения заданы начальные значения неизвестных параметров $\theta_1^{(0)} = 3$, $\theta_2^{(0)} = 0.5$. Провести по две итерации методов Хартли и Гаусса — Ньютона. Сравнить с результатами упражнения 1.

3. Проделать то же, что и в упражнении 2, но с начальными значениями параметров $\theta_1^{(0)} = 1$, $\theta_2^{(0)} = 1$. Сравнить с результатами упражнения 2 по значениям функции (1.5) для полученных оценок. Объяснить, чем вызвана существенная разница вычисленных значений функции (1.5).

§ 2. Планирование эксперимента по оцениванию параметров нелинейной регрессии

2.1. Постановка задачи. Теория гл. 3, 4 развита в предположении, что функция регрессии $\eta(x, \theta)$ линейна по неизвестным параметрам. По причинам, указанным в начале § 1, экспериментатору часто приходится иметь дело с нелинейными регрессионными моделями. Рассмотрим возможные постановки задач планирования эксперимента по оцениванию параметров нелинейной регрессии.

Будем рассматривать модель (1.1), т. е. предполагать, что результаты измерений в точках $x_1, \dots, x_N$ записываются в виде

$$y_i = y(x_i) = \eta(x_i, \theta) + \varepsilon_i, \quad (2.1)$$

где

$$x_i \in X, \quad \theta \in \Omega \subset \mathbb{R}^m, \quad E\varepsilon_i = 0, \quad E\varepsilon_i \varepsilon_j = 0 \quad (i \neq j), \quad E\varepsilon_i^2 = \sigma^2,$$

$\eta(x, \theta)$ — функция, нелинейно зависящая от θ и достаточно гладкая по θ .

В качестве метода оценивания неизвестных параметров будем рассматривать МНК (см. § 1): для модели (2.1) оценкой МНК вектора параметров является

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \Omega} \sum_{i=1}^N (y_i - \eta(x_i, \theta))^2. \quad (2.2)$$

Поскольку оценки МНК сильно состоятельные (см. п. 1.3), с вероятностью единица при достаточно больших N величина $\hat{\theta}$ находится в достаточно малой окрестности θ_n — истинного значения неизвестных параметров. В этой окрестности представим $\eta(x, \theta)$ в виде

$$\eta(x, \theta) \cong \eta(x, \theta_n) + \theta^T \nabla_{\theta} \eta(x, \theta_n),$$

т. е. линеаризуем модель. Подставляя это выражение в (2.2) и вычисляя МНК-оценки получившейся линейной регрессионной модели, имеем

$$\hat{\theta} \cong (F^T F)^{-1} F^T Y, \quad (2.3)$$

где

$$Y = (y_1, \dots, y_N)^T, \quad F = \|\eta^T(x_i)\|_{i=1}^N, \\ f(x) = f(x, \theta_n) = \nabla_{\theta} \eta(x, \theta_n). \quad (2.4)$$

Дисперсионная матрица оценки, записанной в правой части приближенного равенства (2.3), равна

$$D[(F^T F)^{-1} F^T Y] = \sigma^2 (F^T F)^{-1}. \quad (2.5)$$

Аналогично § 1 гл. 3 можно определить информационные матрицы, непрерывные планы и нормированные информационные

матрицы планов. Дисперсионная матрица плана ξ равна

$$D(\xi, \theta_n) = M^{-1}(\xi, \theta_n), \quad (2.6)$$

где

$$M(\xi, \theta_n) = \int_{\mathcal{X}} f(x, \theta_n) f^T(x, \theta_n) \xi(dx) \quad (2.7)$$

есть информационная матрица плана ξ . Аналогично § 1 гл. 3, если план $\xi = \xi_n$ дискретный и имеет вид (1.12), то дисперсионная матрица (2.6) этого плана с точностью до множителя σ^2/N совпадает с матрицей (2.5).

Таким образом (см. также теорему 1.1), матрица (2.6) достаточно полно характеризует качество МНК-оценки (2.1) для нелинейной регрессионной модели. Так же как и в гл. 3, качество плана будем определять с помощью выпуклого функционала

$$\Phi[D(\xi, \theta_n)], \quad (2.8)$$

заданного на множестве дисперсионных матриц. В отличие от линейного случая здесь дисперсионная матрица плана и функционал (2.8) зависят от истинного значения неизвестных параметров θ_n . Поэтому результаты предыдущей главы не могут быть использованы непосредственно.

Для поиска оптимальных планов по оцениванию параметров нелинейной регрессии используются три основных подхода: последовательный, байесовский и минимаксный.

Суть последовательного подхода (которому посвящен § 3) состоит в том, что вместо критерия (2.8) используются критерии

$$\Phi[D(\xi, \theta)],$$

где θ обозначает текущее (построенное по результатам предшествующих измерений) значение МНК-оценки. Таким образом, по мере проведения новых измерений уточняется не только МНК-оценка, но и сам критерий для выбора следующих точек измерений. Подход называется последовательным, так как для выбора точек измерений используются результаты предыдущих измерений.

В двух других подходах на основе использования априорной информации о неизвестных параметрах функции регрессии критерий оптимальности формулируется таким образом, что он не зависит от θ_n .

В принципе при каждом фиксированном $\theta \in \Omega$ функционал $\Phi[D(\xi, \theta)]$ может рассматриваться в качестве критерия оптимальности, поэтому задача оптимального планирования может рассматриваться как многокритериальная; в этой задаче могут быть определены компромиссные критерии, для которых оптимальный план уже не зависит от θ . Наиболее распространенными из компромиссных критериев являются байесовские и минимаксные

2.4. Минимаксные планы. Пусть априори известно, что истинные значения параметров принадлежат множеству Ω . Тогда можно определить план

$$\xi_M = \arg \inf_{\xi} \left\{ \sup_{\theta \in \Omega} \Phi[D(\xi, \theta)] \right\}. \quad (2.13)$$

который называется *минимаксным*.

Численное построение минимаксных планов — довольно трудная задача. Простых методов построения непрерывных минимаксных планов не существует, а верхнюю границу для минимального числа точек непрерывного минимаксного плана построить не удается (по тем же причинам, что и для байесовских планов). Поэтому минимаксные планы естественно строить в множествах планов Ξ_N и $\Xi(n)$ (см. § 1 гл. 3). Для построения таких планов следует использовать один из общих методов решения минимаксных задач.

Упражнения.

1. Пусть функция регрессии имеет вид

$$\eta(x, \theta) = \theta_1 \exp(-\theta_2 x), \quad x \geq 0,$$

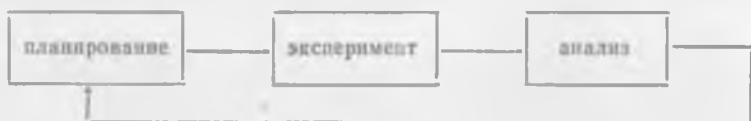
а параметрическое множество Ω состоит из четырех точек. $\Omega = \{(1, 1)^T, (1, 2)^T, (2, 1)^T, (2, 2)^T\}$. Построить байесовский (для равномерного на Ω априорного распределения) и минимаксный D -оптимальные планы.

2. Вывести теорему 2.1 из теоремы 2.2 гл. 3.

§ 3. Последовательное планирование

3.1. Суть последовательного планирования. В гл. 3, 4 и в § 2 этой главы рассматривались оптимальные планы регрессионного эксперимента и методы их построения в рамках статического планирования, когда условия эксперимента предполагались неменяющимися, а оптимальный план представлял собой план проведения всех измерений, отведенных на эксперимент. Такое планирование, однако, не всегда возможно (в частности, иногда со временем меняются условия эксперимента). Чаше статическое планирование в принципе возможно, но правильно построенные последовательные планы позволяют получать существенный выигрыш по сравнению с любыми статическими планами. Типичной является ситуация, возникающая при рассмотриваемом в этом параграфе планировании эксперимента по оцениванию параметров нелинейной регрессии: по мере получения результатов измерений изменяется критерий оптимальности выбора условий проведения новых измерений.

Идея последовательного планирования состоит в следующем. Общее число измерений, отведенное на эксперимент, разбивается на несколько частей, а сам эксперимент разбивается на несколько этапов. На каждом этапе: планируется соответствующая часть измерений; проводятся измерения; полученные результаты и сведения, поступающие извне, анализируются. На схеме процесс эксперимента имеет вид



При статическом планировании обратная связь (обозначенная на схеме стрелкой от блока «анализ» до блока «эксперимент») отсутствует.

Последовательно спланированный эксперимент прекращается, если заданная характеристика точности достигает необходимого значения либо если прекращаются ресурсы, отведенные на эксперимент.

3.2. Линейная регрессия. Для линейной по параметрам регрессии сравнительно просто реализуется описанное ниже последовательное планирование, основанное на следующем принципе: на каждом шаге — наибольшее уточнение оценок параметров в смысле выбранного критерия. В рассматриваемом случае последовательное планирование не имеет преимуществ перед статическим по точности получаемых оценок, однако обладает следующим очень важным качеством: при последовательном планировании легко может быть проконтролирована точность оценок, и поэтому имеется естественный критерий остановки — достижение заданной точности.

По форме алгоритм последовательного планирования для Ф-критерия совпадает с алгоритмом 4.1 из гл. 3 для случая, когда

$$\xi_0 = \left\{ \frac{x_1}{1/N_1}, \dots, \frac{x_{N_0}}{1/N_0} \right\}, \quad N_0 \geq m,$$

и $\gamma_s = 1/(s + N_0 + 1)$ ($s + N_0$ есть число точек плана ξ_s , входящих в него с равными весами).

При использовании этого алгоритма для рекуррентного вычисления МНК-оценок следует пользоваться формулой

$$\hat{\theta}(\xi_{s+1}) = D(\xi_{s+1}) \left[\frac{s + N_0}{s + N_0 + 1} M(\xi_s) \hat{\theta}(\xi_s) + \frac{1}{s + N_0 + 1} y_{s+N_0+1} f(x_{s+N_0+1}) \right],$$

которая вытекает из вида этих оценок, и формулой (4.11) гл. 3 для вычисления $D(\xi_{s+1})$. Асимптотическая оптимальность указанной последовательности планов вытекает из результатов, сформулированных в § 4 гл. 3.

Вернемся к схеме нелинейной регрессии.

3.3. Нелинейная регрессия. Локально оптимальные планы. Поскольку матрица (2.6), характеризующая точность МНК-оценки (2.2), зависит от неизвестных параметров θ , построить статический план, минимизирующий $\Phi[D(\theta, \xi)]$ сразу при всех θ , вообще говоря, невозможно. Тем не менее статические планы

$$\xi_0^* = \arg \inf \Phi[D(\theta, \xi)], \quad (3.1)$$

зависящие от неизвестных параметров θ , имеют, как показано ниже, большое значение при построении оптимальных последовательных планов по оцениванию неизвестных параметров схемы нелинейного регрессионного эксперимента (1.1).

По определению план (3.1) при $\theta = \theta_n$ называется *локально оптимальным*. В частности, план

$$\xi_{\theta_n}^* = \arg \inf_{\xi} \det D(\theta_n, \xi) = \arg \sup_{\xi} \det M(\theta_n, \xi).$$

называется *локально D-оптимальным*.

Иногда локально оптимальные планы удается построить в явном виде. Приведем ряд примеров.

Пример 3.1. $m = k = 1$,

$$\eta(x, \theta) = \theta x / (c + \theta x), \quad x \geq 0, \quad \theta > 0, \quad c = \text{const} > 0. \quad (3.2)$$

Поскольку $m = 1$, то $m(m+1)/2 = 1$. Поэтому, используя теорему 1.4 из гл. 3, получаем, что существует оптимальный план, сосредоточенный в одной точке x^* . Кроме того, ясно, что Ф-оптимальные планы совпадают для любого выпуклого критерия Ф. Для функции регрессии (3.2)

$$f(x, \theta) = \frac{\partial \eta(x, \theta)}{\partial \theta} = \frac{cx}{(c + \theta x)^2},$$

$$M(\theta, \xi) = f^2(x, \theta) = \frac{(cx)^2}{(c + \theta x)^4}, \quad \xi = \begin{Bmatrix} x \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Далее, x^* является решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(cx)^2}{(c + \theta x)^4} \right] = 0, \quad x \geq 0.$$

Отсюда получаем, что $x^* = c\theta^{-1}$. Подставляя это значение в (3.2), получаем, что наилучшим будет тот план, в котором наблюдение проводится в момент, когда функция регрессии достигает значения, равного половине от максимально возможного. Если указанное значение удастся оценить из эвристических соображений, то задача построения локально оптимального плана таким образом легко решается.

Пример 3.2. $m = 2, k = 1$,

$$\eta(x, \theta) = \theta_1 x / (c + \theta_2 x), \quad x \geq 0, \quad c = \text{const} > 0. \quad (3.3)$$

Эта функция регрессии иногда используется для описания кинетических процессов. Соответствующая математическая модель называется *моделью Михаэлиса — Ментен*.

Пусть известно, что $x \leq b$. Покажем, что план

$$\xi^* = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{bc}{2c + b\theta_2} & b \\ 1/2 & 1/2 \end{array} \right\} \quad (3.4)$$

является локально D -оптимальным. Действительно, для плана (3.4)

$$f(x, \theta) = \left(\frac{\partial \eta(x, \theta)}{\partial \theta_1}, \frac{\partial \eta(x, \theta)}{\partial \theta_2} \right)^T = (x/(c + \theta_2 x), -\theta_1 x^2/(c + \theta_2 x)^2)^T,$$

$$M(\theta, \xi^*) = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} f(x_i, \theta) f^T(x_i, \theta) =$$

$$= \frac{b^2}{32(c + b\theta_2)^4} \begin{vmatrix} 20(c + b\theta_2)^2 & -18(c + b\theta_2)\theta_1 b \\ -18(c + b\theta_2)\theta_1 b & 17\theta_1^2 b^2 \end{vmatrix},$$

$$D(\theta, \xi^*) = \frac{2(c + b\theta_2)^2}{\theta_1^4 b^4} \begin{vmatrix} 17\theta_1^2 b^2 & 18\theta_1 b(c + b\theta_2) \\ 18\theta_1 b(c + b\theta_2) & 20(c + b\theta_2)^2 \end{vmatrix},$$

$$d(x, \theta, \xi^*) = \frac{2(c + b\theta_2)^2}{b^4} \frac{x^2}{(c + \theta_2 x)^4} (a_1 x^2 + a_2 x + a_3),$$

где

$$a_1 = 20c^2 + 4bc + b^2\theta_2, \quad a_2 = -2bc(18c + b\theta_2), \\ a_3 = 17b^2c^2.$$

Функция $d(x, \theta, \xi^*)$ принимает максимальное значение, равное 2 в точках плана (3.4), и поэтому в силу теоремы эквивалентности Кифера — Вольфовица план (3.4) локально D -оптимален.

Заметим, что в модель (3.3) параметр θ_1 входит линейно, а локально оптимальный план не зависит от тех параметров, по которым функция регрессии линейна. Можно показать (покажите!), что это справедливо и для любых других функций регрессий.

Пример 3.3. Пусть $m = 2, k = 1$,

$$\eta(x, \theta) = 1/(\theta_1 + \theta_2 x); \quad 0 \leq a \leq x; \quad \theta_1, \theta_2 > 0. \quad (3.5)$$

Положим $\theta_3 = \theta_1/\theta_2$. Покажем, что локально D -оптимальным для функции регрессии (3.5) является план

$$\xi^* = \left\{ \frac{a}{1/2}, \frac{2a + \theta_3}{1/2} \right\}. \quad (3.6)$$

Для этого плана

$$f(x, \theta) = (- (\theta_1 + \theta_2 x)^{-2}, -x (\theta_1 + \theta_2 x)^{-2})^T,$$

$$M(\theta, \xi^*) = \frac{1}{32\theta_1^4 (a + \theta_3)^4} \begin{vmatrix} 17 & 18a + \theta_3 \\ 18a + \theta_3 & 20a^2 + 4a\theta_3 + \theta_3^2 \end{vmatrix},$$

$$D(\theta, \xi^*) = 2\theta_1^4 (a + \theta_3)^4 \begin{vmatrix} 20a^2 + 4a\theta_3 + \theta_3^2 & - (18a + \theta_3) \\ - (18a + \theta_3) & 17 \end{vmatrix},$$

$$d(x, \theta, \xi^*) = \frac{2(a + \theta_3)^2}{(x + \theta_3)^4} [17x^2 - 2x(18a + \theta_3) + 20a^2 + 4a\theta_3 + \theta_3^2].$$

Локальная D -оптимальность плана ξ^* , определяемого по (3.6), следует из того, что максимум функции $d(x, \theta, \xi^*)$ равен 2 и достигается в точках этого плана.

3.4. Последовательное планирование для нелинейной регрессии. Ниже приведены две стратегии последовательного планирования. В основе первой стратегии (алгоритм 3.1 и некоторые его модификации) лежит та же идея, что и при последовательном планировании для линейной регрессии (п. 3.2)— максимальное уточнение оценок параметров на каждом шаге. Эта стратегия может быть использована, когда имеется возможность анализа данных в режиме реального времени.

Алгоритм 3.1.

1) Выбираем такой план

$$\xi_{N_1} = \left\{ \frac{x_1}{1/N_1}, \dots, \frac{x_{N_1}}{1/N_1} \right\},$$

что матрица $M(\theta, \xi_{N_1})$ невырождена при всех $\theta \in \Omega$. Полагаем $j = 0$.

2) Вычисляем оценки МНК

$$\hat{\theta}_{N_j} = \arg \min_{\theta \in \Omega} \sum_{i=1}^{N_j} (y(x_i) - \eta(x_i, \theta))^2 \quad (3.7)$$

и матрицу

$$D(\xi_{N_j}, \hat{\theta}_{N_j}) = N_j \left[\sum_{i=1}^{N_j} f(x_i, \hat{\theta}_{N_j}) f^T(x_i, \hat{\theta}_{N_j}) \right]^{-1} \quad (3.8)$$

(если для вычисления оценок (3.7) используется метод Гаусса — Ньютона, то в процессе вычислений определяется и матрица (3.8)).

3) Отыскиваем точку

$$x_{N_{j+1}} = \arg \max_{x \in X} \varphi(x, \hat{\theta}_{N_j}, \xi_{N_j}),$$

где

$$\varphi(x, \theta, \xi) = f^T(x, \theta) D \frac{\partial \Phi}{\partial D} D \Big|_{D=D(\theta, \xi)} f(x, \theta).$$

4) Если отведенные на эксперимент ресурсы кончились, то в качестве искомой оценки параметров θ выбираем $\hat{\theta}_{N_j}$. В противном случае проводим наблюдение $y(x_{N_{j+1}})$. Полагаем

$$\xi_{N_{j+1}} = \left(1 - \frac{1}{N_{j+1}}\right) \xi_{N_j} + \frac{1}{N_{j+1}} \xi(x_{N_{j+1}}),$$

$N_{j+1} = N_j + 1$, заменяем j на $j + 1$ и переходим к шагу 2).

Вместо алгоритма 3.1 нередко используют его модификации, более удобные в вычислительном или экспериментальном аспекте. Например, на каждой итерации отыскивают сразу несколько точек $x_{N_{j+1}}, \dots, x_{N_{j+q}}$, повторяя шаги 3), 4) с одними и теми же значениями оценок $\hat{\theta}_{N_j}$.

Возможна и другая стратегия последовательного планирования. Согласно этой стратегии, эксперимент проводится в два этапа. На первом этапе, согласно заданному статическому плану,

проводится некоторое число $\alpha(N)$ измерений, по результатам которых строится МНК-оценка $\hat{\theta}_0$ неизвестных параметров. На втором этапе оставшаяся часть измерений $N - \alpha(N)$ проводится согласно статическому плану

$$\xi_* = \arg \min_{\xi \in \Xi} \Phi[D(\xi, \hat{\theta}_0)]. \quad (3.9)$$

Если $\alpha(N)$ достаточно велико, то в качестве оценки неизвестных параметров может быть выбрана МНК-оценка для схемы линейной регрессии

$$y_j = \theta^T f(x_j, \hat{\theta}_0) + e_j, \quad j = 1, \dots, N.$$

Если, кроме того, число $\alpha(N)$ мало по сравнению с N , то большая часть измерений проводится по плану (3.9), который близок к локально оптимальному.

Упражнения.

1. Постройте локально оптимальный план для функции регрессии

$$\eta(x, \theta) = \exp(-\theta x), \quad x \geq 0, \quad \theta > 0.$$

Проведите пять итераций алгоритма 3.1, выбирая значения случайных ошибок из табл. 4 приложения 2 и положив $\theta_n = 1$.

2. Постройте локально D - и A -оптимальные планы для функции регрессии

$$\eta(x, \theta) = \theta_1 \exp\{-\theta_2 x\}, \quad x \geq 0, \quad \theta_1 > 0, \quad \theta_2 > 0.$$

3. Постройте локально D -оптимальный план для функции регрессии

$$\eta(x_1, x_2, \theta) = \theta_1 x_1^{\theta_2} x_2^{1-\theta_2}, \quad 1 \leq x_1 \leq 2, \quad 1 \leq x_2 \leq 2, \quad \theta_1 > 0, \quad 0 < \theta_2 < 1.$$

Глава 6

ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Экстремальным экспериментом называют эксперимент, направленный на отыскание экстремума функции регрессии.

При выборе метода экстремального планирования решающим фактором является стоимость экспериментов. Если стоимость экспериментов высока и их допустимое количество невелико, то наиболее целесообразным может являться статический план, согласно которому измерения проводятся в точках некоторой сетки в заданной подобласти факторного пространства. Часто в качестве планов проведения эксперимента используют последовательные планы, описанные в настоящей главе. При некоторых предположениях эти планы обладают асимптотическим свойством сходимости получаемой последовательности точек к точке локального экстремума функции регрессии.

§ 1. Сходимость псевдоградиентных алгоритмов

1.1. Постановка задачи. Пусть $X = R^n$, η — измеримая функция на X . Предположим, что в любой точке $x \in X$ мы можем вычислять (измерять) реализацию случайной величины $y(x) = \eta(x) + \varepsilon(x)$, где случайные ошибки $\varepsilon(x)$ центрированы ($E\varepsilon(x) = 0$) и взаимно независимы при любых $x_1, x_2, \dots$ из X . Согласно терминологии предыдущих глав, $\eta(x)$ — функция регрессии, часто называемая также *функцией отклика*.

Задача планирования экстремального эксперимента состоит в построении последовательности точек $\{x_k\}_{k=0}^{\infty} \subset X$, сходящейся к точке

$$x^* = \arg \max_{x \in X} \eta(x)$$

(в предположении существования максимума) или такой, что

$$\eta(x_k) \rightarrow \sup_{x \in X} \eta(x), \quad k \rightarrow \infty.$$

Смысл сходимости уточняется ниже.

Задачи планирования экстремального эксперимента обычно формулируются как задачи максимизации. Если стоит задача

минимизации некоторой функции $\bar{\eta}(x)$ по результатам вычисления $\bar{y}(x) = \bar{\eta}(x) + \bar{\varepsilon}(x)$, то, положив

$$\eta(x) = -\bar{\eta}(x), \quad \varepsilon(x) = -\bar{\varepsilon}(x), \quad y(x) = -\bar{y}(x),$$

приходим к сформулированной выше задаче максимизации.

Иногда при решении задач экстремального планирования удается осуществить измерение (со случайными ошибками) градиента $\nabla\eta$ функции η в точке x :

$$z(x) = \nabla\eta(x) + \zeta(x), \quad \nabla\eta(x) = \left(\frac{\partial\eta(x)}{\partial x(1)}, \dots, \frac{\partial\eta(x)}{\partial x(n)} \right)^T,$$

где $z(x)$ и $\zeta(x)$ — реализации случайных векторов размерности n , $E\zeta(x) = 0$, при любых $x_1, x_2, \dots$ из X случайные векторы $\zeta(x_1), \zeta(x_2), \dots$ взаимно независимы.

Если при построении последовательности $\{x_k\}_{k=0}^\infty$ используется хотя бы одна реализация случайного вектора z или измерения (со случайной ошибкой) старших производных функции регрессии, то алгоритм экстремального планирования называется *регулярным*. Если при построении x_k используются только значения случайной функции y и значение k , но не используются измерения производных функции η , то алгоритм экстремального планирования называется *поисковым*.

В данной главе рассматриваются последовательные алгоритмы экстремального планирования, представимые в следующем виде:

$$x_{k+1} = x_k + \gamma_{k+1} s_k, \quad (1.1)$$

где $k \geq 0$ — номер итерации, $x_k \in X$, $\gamma_k \geq 0$ — детерминированный множитель, $s_k \in X$ — реализация случайного вектора, который, вообще говоря, зависит от

$$k, x_0, x_1, \dots, x_k, s_0, s_1, \dots, s_{k-1} \quad (1.2)$$

и реализаций y или z в специальном образом определенном наборе точек из X . Вектор s_k часто называют *направлением движения*, а величину γ_{k+1} — *длиной шага*. Поскольку $\|s_k\|$ в большинстве методов отличается от единицы, необходимо иметь в виду, что истинная длина шага в направлении s_k равна $\gamma_{k+1} \|s_k\|$.

Формула (1.1) является наиболее общей формой записи последовательных алгоритмов экстремального планирования в случае, когда эксперименты направлены на отыскание локального экстремума функции η .

Пример 1.1. Пусть исходный алгоритм имеет вид

$$x_{k+1} = x_k + \Gamma_k z(x_k), \quad (1.3)$$

где $\Gamma_k: X \rightarrow X$ — оператор, зависящий от k и

$$x_0, \dots, x_k, z(x_0), \dots, z(x_k).$$

Для того чтобы привести (1.3) к виду (1.1), достаточно положить

$$s_k = \gamma_{k+1}^{-1} \Gamma_k z(x_k),$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ — последовательность положительных чисел, выбранная произвольным образом.

Пример 1.2. Если исходный алгоритм имеет вид (1.1), но γ_{k+1} — случайные величины, то, положив $\tilde{s}_k = s_k \gamma_{k+1} / \bar{\gamma}_{k+1}$, где $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \dots$ — произвольные положительные числа, приходим к алгоритму вида (1.1) с детерминированными длинами шагов.

При достаточно общих предположениях о функции η и лежащих способах выбора параметров γ_{k+1} , s_k обычно удается доказать сходимость алгоритма (1.1). Это, однако, не означает, что любая предельная точка последовательности (1.1) является точкой локального (а тем более глобального) максимума функции η . Как правило, о предельных точках можно сказать лишь то, что они являются стационарными точками функции η , т. е. такими точками x_* , в которых $\nabla \eta(x_*) = 0$. Впрочем, иногда удается доказать, что предельные точки с вероятностью единица не могут быть точками локальных минимумов функции η .

1.2. Теорема о сходимости алгоритма (1.1). Доказанная ниже теорема, во-первых, позволяет обосновать сходимость широкого класса алгоритмов экстремального планирования, представимых в виде (1.1), во-вторых, отличается среди похожих теорем относительной простотой предположений, и, в-третьих, метод доказательства этой теоремы довольно типичен, что позволяет без труда доказывать похожие утверждения. Сначала сформулируем используемые предположения.

Предположим, что при фиксированном наборе (1.2) существуют условные математические ожидания s_k и $\|s_k\|^2$, которые мы будем обозначать соответственно

$$E\{s_k | \mathcal{B}_k\} \text{ и } E\{\|s_k\|^2 | \mathcal{B}_k\}$$

(где $\mathcal{B}_k$ — σ -алгебра, порожденная случайными векторами $s_0, s_1, \dots, s_{k-1}$) или просто $E s_k$ и $E \|s_k\|^2$.

Пусть на множестве X задана функция η , которая ограничена сверху, дифференцируема, а ее градиент удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой $L < \infty$:

$$\eta(x) \leq \eta^* = \sup \eta(x) < \infty, \quad (1.4)$$

$$\|\nabla \eta(x) - \nabla \eta(z)\| \leq L \|x - z\|. \quad (1.5)$$

Алгоритм (1.1) называется псевдоградиентным, если для всех $k = 0, 1, \dots$

$$[\nabla \eta(x_k)]^T E s_k \geq 0. \quad (1.6)$$

Псевдоградиентность алгоритма (1.1) означает, что при всех $k = 0, 1, \dots$ случайный вектор s_k в среднем направлен под

острым углом к градиенту функции η в точке x_k или что направление s_k в среднем — направление возрастания функции η .

Теперь наложим два условия на длины шагов в алгоритме (1.1). Пусть для некоторых $K_1 \in \mathbb{R}$, $K_2 > 0$ и для последовательности чисел $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty$ выполнено

$$E \|s_k\|^2 \leq \lambda_k - K_1 \eta(x_k) + K_2 [\nabla \eta(x_k)]^T E s_k. \quad (1.7)$$

Это условие означает, что $E \|s_k\|^2$ как функция от k растет не быстрее, чем последовательность $\{\lambda_k\}$ (возможно, $\lambda_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$), а как функция от $x = x_k$ — не быстрее, чем $(-\eta(x))$ или $[\nabla \eta(x)]^T E s_k$. Пусть также для последовательностей чисел $\{\gamma_k\}$, $\{\lambda_k\}$ выполняются условия

$$\gamma_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^\infty \gamma_k = \infty, \quad (1.8)$$

$$\sum_{k=1}^\infty \gamma_k^2 \lambda_{k-1} < \infty. \quad (1.9)$$

Теорема 1.1. Пусть $X = \mathbb{R}^n$, и пусть выполнены условия (1.4)–(1.9) и любое из условий

$$\sum_{k=1}^\infty \gamma_k^2 < \infty, \quad (1.10)$$

$$\lambda_k = 0 \quad (k = 0, 1, \dots), \quad K_1 = 0, \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \gamma_k < 2/(LK_2). \quad (1.11)$$

Тогда при любом $x_0 \in X$ последовательность (1.1) такова, что для нее с вероятностью единица существует предел $\eta(x_k)$ ($k \rightarrow \infty$) и

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} [\nabla \eta(x_k)]^T E \{s_k | \mathcal{B}_k\} = 0 \text{ п. н.} \quad (1.12)$$

Прежде чем доказывать теорему, дадим определение и докажем вспомогательную лемму.

Неотрицательным квазисупермартингалом будем называть такую последовательность неотрицательных случайных величин $v_0, v_1, \dots$, что $E v_0 < \infty$ и при всех $k = 0, 1, \dots$

$$E \{v_{k+1} | v_0, \dots, v_k\} \leq (1 + \alpha_k) v_k + \beta_k,$$

где $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_i\}$ — сходящиеся к нулю последовательности неотрицательных чисел. Если все α_i и β_i равны нулю, то последовательность $v_0, v_1, \dots$ называется неотрицательным супермартингалом.

Лемма 1.1 (о сходимости квазисупермартингалов). Если для определенного выше неотрицательного квазисупермартингала $v_0, v_1, \dots$ выполнены условия

$$\sum_{i=0}^\infty \alpha_i < \infty, \quad \sum_{i=0}^\infty \beta_i < \infty,$$

то величины $E v_k$ равномерно ограничены и существует такая случайная величина v , что $E v < \infty$, $v_k \rightarrow v$ ($k \rightarrow \infty$) с вероятностью единица.

Доказательство леммы Покажем, что из условия $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < \infty$ следует, что $\gamma_0 < \infty$, где $\gamma_0 = \prod_{i=0}^{\infty} (1 + \alpha_i)$. Действительно,

$$\gamma_0 = \prod_{i=0}^{\infty} (1 + \alpha_i) \leq \prod_{i=0}^{\infty} \exp \{ \alpha_i \} = \exp \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \right\} < \infty.$$

Следовательно, произведения

$$\gamma_k = \prod_{i=k}^{\infty} (1 + \alpha_i)$$

ограничены и образуют монотонно невозрастающую последовательность. Положим

$$w_k = \gamma_k v_k + \gamma_{k+1} \sum_{i=k+1}^{\infty} \beta_i.$$

Оценим условное математическое ожидание w_{k+1} относительно $w_0, \dots, w_k$:

$$\begin{aligned} E \{ w_{k+1} | w_0, \dots, w_k \} &= E \{ w_{k+1} | v_0, \dots, v_k \} = \\ &= E \left\{ v_{k+1} \gamma_{k+1} + \gamma_{k+2} \sum_{i=k+2}^{\infty} \beta_i | v_0, \dots, v_k \right\} = \\ &= \gamma_{k+1} E \{ v_{k+1} | v_0, \dots, v_k \} + \gamma_{k+2} \sum_{i=k+2}^{\infty} \beta_i \leq \\ &\leq \gamma_{k+1} (1 + \alpha_k) v_k + \gamma_{k+1} \beta_k + \gamma_{k+2} \sum_{i=k+2}^{\infty} \beta_i = \\ &= \gamma_k v_k + \gamma_{k+1} \beta_k + \gamma_{k+1} \sum_{i=k+1}^{\infty} \beta_i + (\gamma_{k+2} - \gamma_{k+1}) \sum_{i=k+1}^{\infty} \beta_i \leq \\ &\leq \gamma_k v_k + \gamma_{k+1} \beta_k + \gamma_{k+1} \sum_{i=k+1}^{\infty} \beta_i = \gamma_k v_k + \gamma_{k+1} \sum_{i=k+1}^{\infty} \beta_i = w_k. \end{aligned}$$

Следовательно, последовательность $w_0, w_1, \dots$ образует супермартингал и $E w_i \leq E w_0 < \infty$ ($i = 1, 2, \dots$). Эта последовательность неотрицательна (в силу неотрицательности v_i), т.е. ограничена снизу нулем, и поэтому к ней можно применить теорему Дуба о сходимости супермартингалов (см. [45]). Из этой теоремы следует, что последовательность $\{w_k\}$, а значит, и последовательность $\{v_k\}$ с вероятностью единицы к некоторой случайной величине. Равномерная ограниченность $E v_k$ следует из равномерной ограниченности $E w_k$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.1. Из (1.5) и формулы Тейлора вытекает, что для любых $x, z \in X$ имеет место неравенство

$$| \eta(x+z) - \eta(x) - z^T \nabla \eta(x) | \leq \frac{L}{2} \|z\|^2 \quad (1.13)$$

Подставляя в это неравенство x_k вместо x , а x_{k+1} вместо $x+z$ и используя (1.1), получаем

$$|\eta(x_{k+1}) - \eta(x_k) - \gamma_{k+1} s_k^T \nabla \eta(x_k)| \leq \frac{L}{2} \gamma_{k+1} \|s_k\|^2,$$

откуда

$$\eta(x_{k+1}) \geq \eta(x_k) + \gamma_{k+1} s_k^T \nabla \eta(x_k) - \frac{L}{2} \gamma_{k+1} \|s_k\|^2.$$

Это неравенство запишем в виде

$$v_{k+1} \leq v_k - \gamma_{k+1} s_k^T \nabla \eta(x_k) + \frac{L}{2} \gamma_{k+1} \|s_k\|^2.$$

где $v_k = \eta^* - \eta(x_k)$ ($k = 0, 1, \dots$). Возьмем условные математические ожидания от обеих частей последнего неравенства и воспользуемся (1.7):

$$\begin{aligned} E\{v_{k+1} | \mathcal{B}_k\} &\leq v_k - \gamma_{k+1} [\nabla \eta(x_k)]^T E\{s_k | \mathcal{B}_k\} + \frac{L}{2} \gamma_{k+1} E\{\|s_k\|^2 | \mathcal{B}_k\} \leq \\ &\leq v_k \left(1 + \frac{K_1 L}{2} \gamma_{k+1}^2\right) + \gamma_{k+1} [\nabla \eta(x_k)]^T E\{s_k | \mathcal{B}_k\} \left(\frac{K_2 L}{2} \gamma_{k+1} - 1\right) + \\ &\quad + \frac{L}{2} \gamma_{k+1} \lambda_k - \frac{K_1 L}{2} \gamma_{k+1} \eta^*. \quad (1.14) \end{aligned}$$

Из (1.10) и (1.11) при всех достаточно больших k ($k \geq k_0$) имеем $\frac{K_2 L}{2} \gamma_{k+1}^2 \leq 1$; следовательно, учитывая условие псевдоградиентности (1.6), второе слагаемое в правой части (1.14) неположительно, и поэтому из (1.14) следует неравенство

$$E\{v_{k+1} | \mathcal{B}_k\} \leq v_k \left(1 + \frac{K_1 L}{2} \gamma_{k+1}^2\right) + \frac{L}{2} \gamma_{k+1} \lambda_k - \frac{K_1 L}{2} \gamma_{k+1} \eta^*, \quad k \geq k_0. \quad (1.15)$$

Из (1.15) следует, что последовательность $\{v_k\}$ ($k \geq k_0$) образует квазисупермартингал (при выполнении (1.10)) или супермартингал (при выполнении (1.11)). Применяя лемму 1.1 (в случае выполнения (1.11) $\alpha_k = \beta_k = 0$, а в случае выполнения (1.10)

$$\alpha_k = \frac{K_1 L}{2} \gamma_{k+1}^2, \quad \beta_k = \max \left\{0, \frac{L}{2} \gamma_{k+1} \lambda_k - \frac{K_1 L}{2} \gamma_{k+1} \eta^*\right\},$$

получаем, что почти наверное существует $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k$ и величины $E v_k$ равномерно ограничены:

$$E v_k \leq a < \infty, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.16)$$

Теперь перейдем в неравенстве (1.14) к безусловным математическим ожиданиям:

$$\begin{aligned} E v_{k+1} &\leq \left(1 + \frac{K_1 L}{2} \gamma_{k+1}^2\right) E v_k - \gamma_{k+1} \left(1 - \frac{K_2 L}{2} \gamma_{k+1}\right) \times \\ &\quad \times E\{[\nabla \eta(x_k)]^T E\{s_k | \mathcal{B}_k\}\} + \frac{L}{2} \gamma_{k+1} \lambda_k - \frac{K_1 L}{2} \gamma_{k+1} \eta^*. \end{aligned}$$

Перенесем $E v_k$ из правой части этого неравенства в левую, а затем просуммируем получившиеся неравенства по k от нуля до некоторого числа $N < \infty$. Получим

$$\sum_0^N (N) \leq \sum_1^N (N) - \sum_2^N (N) + \sum_3^N (N) - \sum_4^N (N), \quad (1.17)$$

где

$$\Sigma_0(N) = E v_{N+1} - E v_0,$$

$$\Sigma_1(N) = \sum_{k=0}^N \frac{K_1 L}{2} \gamma_{k+1}^2 E v_k,$$

$$\Sigma_2(N) = \sum_{k=0}^N \gamma_{k+1} \left(1 - \frac{K_2 L}{2} \gamma_{k+1}\right) E \{ [\nabla \eta(x_k)]^T E \{s_k | \mathcal{B}_k\} \}$$

$$\Sigma_3(N) = \frac{L}{2} \sum_{k=0}^N \gamma_{k+1}^2 \lambda_k,$$

$$\Sigma_4(N) = \frac{K_1 L}{2} \eta^* \sum_{k=0}^N \gamma_{k+1}^2.$$

Из (1.16) следует, что величина $|\Sigma_0(N)|$ равномерно ограничена по N . Равномерная ограниченность $|\Sigma_2(N)|$, $|\Sigma_4(N)|$ и $|\Sigma_1(N)|$ вытекает соответственно из (1.9); (1.10) или (1.11); (1.11) или (1.16), (1.10). Отсюда и из (1.17) следует, что

$$\Sigma_2(\infty) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{k+1} \left(1 - \frac{K_2 L}{2} \gamma_{k+1}\right) E \{ [\nabla \eta(x_k)]^T E \{s_k | \mathcal{B}_k\} \} < \infty \quad (1.18)$$

(в противном случае получилось бы, что $-\infty$ больше константы).

При выполнении как (1.10), так и (1.11) существует такое $\varepsilon > 0$, что при всех достаточно больших k выполняется неравенство

$$1 - \frac{K_2 L}{2} \gamma_{k+1} \geq \varepsilon,$$

и поэтому из (1.18) следует

$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{k+1} E \{ [\nabla \eta(x_k)]^T E \{s_k | \mathcal{B}_k\} \} < \infty. \quad (1.19)$$

Но

$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{k+1} = \infty, \quad E \{ [\nabla \eta(x_k)]^T E \{s_k | \mathcal{B}_k\} \} \geq 0, \quad k=0, 1, \dots,$$

и поэтому из (1.19) вытекает, что

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} E \{ [\nabla \eta(x_k)]^T E \{s_k | \mathcal{B}_k\} \} = 0,$$

т. е. найдется такая подпоследовательность $\{k_i\}$, что предел

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E \{ [\nabla \eta(x_{k_i})]^T E \{s_{k_i} | \mathcal{B}_{k_i}\} \}$$

существует и равен нулю. Отсюда и из соотношений между сходимостями в среднем, почти наверное и по вероятности (см. [45]) получаем следующее: существует такая подпоследовательность $\{k_i\}$, что

$$[\nabla \eta(x_{k_i})]^T E \{s_{k_i} | \mathcal{B}_{k_i}\} \rightarrow 0$$

почти наверное при $j \rightarrow \infty$. С учетом (1.6) это дает (1.12). Теорема доказана.

1.3. Некоторые следствия теоремы 1.1. Сделанные в теореме 1.1 предположения не позволяют утверждать, что $\eta(x_k) \rightarrow \eta^*$ ($k \rightarrow \infty$) почти наверное. Например, все условия теоремы выполняются при $s_k = 0$. Однако если в условии псевдоградиентности потребовать строгое неравенство для всех x_k , отличных от точек максимума, то можно получить более сильные утверждения. В частности, справедливо

Следствие 1.1. Пусть в дополнение к условиям теоремы 1.1 для всех $k \geq 0$, $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$[\nabla \eta(x_k)]^T E s_k \geq c(\varepsilon) > 0 \quad \text{при} \quad \eta(x_k) \leq \eta^* - \varepsilon \quad (1.20)$$

Тогда $\eta(x_k) \rightarrow \eta^*$ п. н. при $k \rightarrow \infty$.

Следствие 1.2. Пусть в дополнение к условиям теоремы 1.1 множество X^* точек локальных максимумов функций η непусто и

$$\sup_{x \in X} \eta(x) < \eta^* \quad \text{при} \quad \rho(x, X^*) \geq \varepsilon > 0, \quad (1.21)$$

$[\nabla \eta(x_k)]^T E s_k \geq c(\varepsilon) > 0$ при $\rho(x, X^*) \geq \varepsilon > 0$. Тогда с вероятностью единица $\rho(x_k, X^*) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$).

Доказательства следствий просты и предоставляются читателям

Почти тривиальным является утверждение о том, что если функция $\eta(x)$ имеет единственную точку максимума x^* ($\eta(x^*) = \eta^*$) и выполнено (1.21), то из сходимости $\eta(x_k) \rightarrow \eta^*$ почти наверное следует сходимость $x_k \rightarrow x^*$ почти наверное. Этим фактом можно дополнить следствие 1.2.

Особенность теоремы 1.1 и ее следствий состоит в том, что они справедливы и тогда, когда X является сепарабельным гильбертовым пространством.

Задачи оптимизации в функциональных пространствах возникают, например, при отыскании оптимальных управлений для объектов, изменение состояний которых описывается дифференциальными или интегральными уравнениями. При этом оптимизируемый функционал более или менее однозначно определяется существом решаемой задачи, а функциональное пространство, элементами которого являются допустимые управления, может выбираться в довольно широких пределах, и обычно множество допустимых управлений вкладывается в функциональное пространство, в котором отыскание оптимального управления было бы наиболее удобным. Как правило, таким пространством является сепарабельное гильбертово (например, $L_2(A)$, $A \subset R^n$). Для поиска экстремума функционала, заданного на этом пространстве, может быть использован алгоритм (1.1).

1.4. Градиентный алгоритм. В качестве простого примера использования утверждения теоремы 1.1 приведем задачу нахождения достаточных условий для сходимости градиентного алгоритма

$$x_{k+1} = x_k + \gamma_{k+1} z(x_k), \quad (1.22)$$

называемого также *многомерным алгоритмом стохастической аппроксимации Роббинса — Монро*.

Для обоснования сходимости этого алгоритма можно воспользоваться теоремой 1.1. При этом условие (1.6) (и (1.20) из следствия 1.1) выполняется автоматически:

$$[\nabla \eta(x_k)]^T E s_k = \|\nabla \eta(x_k)\|^2.$$

Кроме того, поскольку

$$E \|s_k\|^2 = \|\nabla \eta(x_k)\|^2 + E \|\xi(x_k)\|^2.$$

^{*} $\rho(x, A) = \min_{z \in A} \rho(x, z)$ — расстояние от точки x до множества A .

то из условия $E\|z(x)\|^2 \leq \sigma^2 < \infty$ следует (1.7) с $\lambda_k = \sigma^2$, $K_1 = 0$, $K_2 = 1$.

Непосредственным обобщением градиентного алгоритма (1.22) является алгоритм

$$x_{k+1} = x_k + \gamma_{k+1} \Gamma z(x_k), \quad (1.23)$$

где Γ — положительно определенная матрица. Наличие Γ в (1.23) эквивалентно изменению метрики исходного пространства.

Алгоритм (1.23) называется *обобщенным градиентным*. Условия, достаточные для его сходимости, совпадают, очевидно, с условиями, достаточными для сходимости алгоритма (1.22).

Упражнения.

1. Покажите, что если последовательность $\{\lambda_k\}$ положительна и ограничена, то (1.9) совпадает с (1.10).

2. Пусть помехи при вычислении направления движения s_k отсутствуют, т.е. $\lambda_k = 0$ ($k = 0, 1, \dots$), $K_1 = 0$. Используя доказательство теоремы 1.1, показать, что если выполнены условия (1.4), (1.5), (1.7), (1.8) и при всех k справедливы неравенства

$$0 < \varepsilon_1 \leq \gamma_k \leq 2(1 - \varepsilon_1)/(LK_2).$$

$$[\nabla \eta(x_k)]^T E s_k \geq K \|\nabla \eta(x_k)\|^2, \quad K > 0,$$

то с вероятностью единица $\eta(x_k) \rightarrow \eta^*$ ($k \rightarrow \infty$) со скоростью геометрической прогрессии.

3. Пусть x_0 — точка локального максимума унимодальной функции η . Покажите, что при выполнении предположений, сформулированных в упражнении 2, с вероятностью единица $x_k \rightarrow x_0$ ($k \rightarrow \infty$) со скоростью геометрической прогрессии.

4. Докажите утверждения следствий 1.1 и 1.2.

§ 2. Методы планирования экстремального эксперимента при наличии ограничений

2.1. Задачи условной оптимизации. Если X — подмножество R^n , заданное с помощью некоторых ограничений, то задачу оптимизации на X называют *задачей условной оптимизации*. Для решения таких задач могут быть использованы различные модификации алгоритма (1.1). Выбор той или иной модификации зависит от способа задания множества X , используемого алгоритма и априорной информации о функции η .

Если X имеет простую структуру (например, гиперпараллелепипед), то удобно использовать операцию проектирования (п. 2.2). Если структура X сложна, но количество ограничений невелико, а η и функции, задающие ограничения, обладают свойствами выпуклости, то часто используется метод множителей Лагранжа (п. 2.4). Трудоемкость методов штрафных функций (п. 2.3) почти не зависит от числа ограничений и их сложности, поэтому эти методы в практических вычислениях используются очень часто.

Структура некоторых видов алгоритма (1.1) такова, что учет ограничений затруднений не представляет. В первую очередь это относится к методам случайного поиска, в которых точки, не попадающие в множество X , просто «выбрасываются» (т. е. измерения в них не проводятся), а вместо них генерируются новые случайные точки. Отметим, что сказанное во многом относится и к задачам оптимизации при отсутствии случайных ошибок измерений и наличии ограничений, т. е. к детерминированным задачам условной оптимизации, при решении которых методы учета ограничений во многом те же, что и рассматриваемые в этом параграфе.

Задачи условной оптимизации удобно рассматривать как задачи минимизации, поэтому будем предполагать, что решается задача минимизации функции $V(x)$ (например, можно положить $V(x) = -\eta(x)$), вычисляемой, возможно, со случайной ошибкой.

2.2. Использование операции проектирования. Обозначим через $\pi_X(x)$ проекцию точки $x \in \mathbb{R}^n$ на множество X , т. е. точку

$$\pi_X(x) = \arg \min_{z \in X} \|x - z\|.$$

Если X — замкнутое выпуклое множество, то оператор π_X определяется однозначно. В частности, если

$$X = \{x = (x_1, \dots, x_n)^T \mid a_i \leq x_i \leq b_i \ (i = 1, \dots, n)\},$$

то

$$\pi_X(x) = (\pi_1(x), \dots, \pi_n(x))^T, \quad \pi_i(x) = \begin{cases} a_i, & x_i \leq a_i, \\ x_i, & a_i < x_i < b_i, \\ b_i, & x_i \geq b_i. \end{cases}$$

В тех случаях, когда операция проектирования на X легко осуществима, для поиска максимума функции η часто используется алгоритм

$$x_{k+1} = \pi_X(x_k + \gamma_{k+1}s_k). \quad (2.1)$$

Это модификация алгоритма (1.1), которая обосновывается следующим утверждением.

Теорема 2.1. *Утверждение теоремы 1.1 относительно алгоритма (1.1) справедливо и для алгоритма (2.1).*

Доказательство. Из определения оператора проектирования π_X следует, что для всех $k = 0, 1, \dots$

$$\eta_k = \eta^* - \eta(x_k) \geq \pi_X(\eta^* - \eta(x_k)). \quad (2.2)$$

Доказательство теоремы 1.1 было построено с использованием оценок вида

$$E[\eta^* - \eta(x_{k+1})] \leq E[\eta^* - \eta(x_k)] < \dots \quad (2.3)$$

Для алгоритма (2.1) выполняется (2.2). Поэтому из (2.3) получаем

$$E\{\pi_X[\eta^* - \eta(x_{k+1})]\} \leq E\{\eta^* - \eta(x_{k+1})\} < \dots$$

Следовательно, теорема 1.1 верна для алгоритма (2.1). Теорема доказана.

2.3. Методы штрафных функций. Методы штрафных функций являются одними из наиболее простых и широко применяемых методов решения экстремальных задач с ограничениями. Суть метода внешних штрафных функций заключается в сведении исходной задачи поиска инфимума функции $V(x)$ на множестве X к последовательности задач поиска инфимума некоторых функций $V_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots$) на множестве $X_0 \supset X$, а вспомогательные функции $V_j(x)$ подбираются так, чтобы с ростом номера j они мало отличались от исходной функции $V(x)$ на множестве X и быстро возрастали на множестве $X_0 \setminus X$. Естественно ожидать, что быстрый рост функции $V_j(x)$ вне X приведет к тому, что при больших j нижняя грань этой функции на X_0 будет достигаться в точках, близких к множеству X , и решение вспомогательной задачи будет приближаться к решению исходной.

Пусть фиксированы некоторое множество X_0 , содержащее X , и последовательность функций $\{P_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$, заданных на X_0 . Предполагая, что функция $V(x)$ задана на множестве X_0 , положим

$$V_j(x) = V(x) + P_j(x). \quad (2.4)$$

Последовательность функций $\{P_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$, определенных и неотрицательных на множестве $X_0 \supset X$, называется *последовательностью внешних штрафных функций* множества X на множестве X_0 , если

$$\lim_{j \rightarrow \infty} P_j(x) = \begin{cases} 0, & x \in X, \\ +\infty, & x \in X_0 \setminus X. \end{cases} \quad (2.5)$$

Методом внешних штрафных функций называется алгоритм вида (1.1), где (для всех $k = 0, 1, \dots$) $\gamma_{k+1} \geq 0$, $x_k \in X_0$, s_k — направление на локальный (глобальный) минимум функции $V_k(x)$ или направление псевдоградиента для функции $V_k(x)$, определенной по (2.4).

При теоретическом исследовании детерминированных методов условной локальной минимизации обычно считают, что в методах штрафных функций при всех $k = 0, 1, \dots$ точка x_{k+1} — точка ближайшего локального минимума функции $V_k(x)$, т. е. s_k — направление на локальный минимум функции V_k , а γ_{k+1} — расстояние от x_k до точки локального минимума (так определяемое направление s_k псевдоградиентно для функции V_k). Метод штрафных функций в этих случаях представляет собой последовательность алгоритмов минимизации функций (2.4). Исследование таким образом определенных методов штрафных функций с принципиальной точки зрения несложно и сводится к нахождению условий, при которых последовательность точек минимума функций (2.4) сходится к точке минимума функции $V(x)$.

При планировании экстремального эксперимента нереально считать, что на k -м шаге метода штрафных функций хотя бы приближенно достигается локальный экстремум функции рег-

рессии $V_k(x)$: сложность основной задачи (минимизации $V(x)$) при достаточно просто устроенных множествах X) соизмерима со сложностью задач минимизации любой из функций $V_k(x)$. Этого делать и не нужно. Достаточно на k -й итерации метода штрафных функций делать лишь один шаг в направлении псевдоградиента функции $V_k(x)$. Отметим, что условия сходимости определяемого таким образом метода штрафных функций почти не отличаются от условий сходимости алгоритма (1.1). Это следует из того, что при достаточно быстрой сходимости в (2.5) при k настолько больших, что V_k почти совпадает с V , итерации метода штрафных функций почти совпадают с итерациями алгоритма (2.1), в котором роль X играет X_0 .

Для любого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ существует и может быть построено бесконечно большое число штрафных функций. Например, если X замкнуто, то можно положить

$$P_j(x) = A_j \rho(x, X), \quad x \in \mathbb{R}^n = X_0, \quad j = 1, 2, \dots,$$

где $\{A_j\}$ — некоторая последовательность положительных чисел, $A_j \rightarrow \infty$ ($j \rightarrow \infty$).

Как правило, при решении конкретных задач оптимизации множество X имеет вид

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in X_0; g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, l; \quad g_i(x) = 0, \\ i = l+1, \dots, m\}, \quad (2.6)$$

где $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ — множество простой структуры (возможно, $X = \mathbb{R}^n$), $X \subset X_0$, функции $g_i(x)$ ($i = 1, \dots, m$) определены на X_0 . В качестве последовательности штрафных функций для определенного таким образом множества X можно выбрать

$$P_j(x) = A_j P(x), \quad A_j > 0, \quad j = 1, 2, \dots, \quad A_j \rightarrow \infty, \quad j \rightarrow \infty, \\ P(x) = \sum_{i=1}^l (\max\{0, g_i(x)\})^r + \sum_{i=l+1}^m |g_i(x)|^r, \quad (2.7)$$

где $x \in X_0$, $r \geq 1$ — фиксированное число. Очевидно, что если функции $g_i(x)$ непрерывно дифференцируемы l раз на множестве X_0 , то при любом $r > l$ функция $P(x)$ также l раз непрерывно дифференцируема на X_0 .

В отличие от внешних штрафных функций внутренние штрафные функции определены только на множестве X .

Пусть множество X замкнуто, имеет внутренние точки и существует такая точка $z \in X$, что множество

$$\{x \in X \mid V(x) \leq V(z)\}$$

компактно. Последовательность непрерывных функций

$$q_i: \text{Int } X \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

называется *последовательностью внутренних штрафных функций* для множества X , если выполнены условия:

- а) $0 < q_{i+1}(x) < q_i(x)$ для всех $x \in \text{Int } X$ ($i = 1, 2, \dots$);
 б) $q_i(x) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$ для всех $x \in \text{Int } X$;
 в) $q_i(x_j) \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$ для любой такой последовательности $\{x_j\} \subset \text{Int } X$, что $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j \in X \setminus \text{Int } X$.

Образно говоря, при использовании внешних штрафных функций «штраф платится» при нарушении условия $x \in X$, а при использовании внутренних штрафных функций — при приближении к границе множества X .

Метод внутренних штрафных функций определяется по последовательности $\{q_i(x)\}_{i=1}^\infty$ так же, как метод внешних штрафных функций по последовательности $\{P_i(x)\}_{i=1}^\infty$.

2.4. Метод множителей Лагранжа. Рассмотрим задачу поиска минимума функции $V(x)$ на множестве (2.6), где функции V, g_i ($i = 1, \dots, m$) заданы на X_0 . Функцией Лагранжа для рассматриваемой задачи минимизации называется

$$L(x, \lambda) = V(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) = V(x) + \lambda^T g(x), \quad (2.8)$$

где $x \in X_0$, $g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))^T$,

$$\lambda \in \Lambda_0 = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T \in \mathbb{R}^m \mid \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0\}.$$

Седловой точкой функции Лагранжа (2.8) называется (в случае существования) такая пара $(x^*, \lambda^*) \in X_0 \times \Lambda_0$, что при всех $x \in X_0, \lambda \in \Lambda_0$

$$L(x^*, \lambda) \leq L(x^*, \lambda^*) \leq L(x, \lambda^*). \quad (2.9)$$

Соотношение (2.9) записывается также следующим образом:

$$L(x^*, \lambda^*) = \min_{x \in X_0} \max_{\lambda \in \Lambda_0} L(x, \lambda) = \max_{\lambda \in \Lambda_0} \min_{x \in X_0} L(x, \lambda).$$

Покажем, что задачу поиска минимума выпуклой функции $V(x)$ в случае $l = m$ всегда можно свести к задаче поиска седловой точки функции Лагранжа (2.8).

Теорема 2.2. Пусть множество X имеет вид (2.6), функция V выпукла, $l = m$ и (x^*, λ^*) является седловой точкой функции Лагранжа (2.8) на множестве $X_0 \times \Lambda_0$. Тогда $x^* = \arg \min_{x \in X} V(x)$.

Доказательство. Из (2.8) и (2.9) получаем

$$V(x^*) + \lambda^{*T} g(x^*) \leq V(x^*) + (\lambda^*)^T g(x^*) \leq V(x) + (\lambda^*)^T g(x), \quad x \in X_0, \lambda \in \Lambda_0. \quad (2.10)$$

Левое неравенство перепишем в виде

$$0 \leq (\lambda^* - \lambda)^T g(x^*). \quad (2.11)$$

Поскольку (2.11) справедливо для всех $\lambda > 0$ (в частности, для тех $\lambda > \lambda^*$, у которых все координаты, кроме одной, совпадают с координатами λ^*), то $g(x^*) \leq 0$, т. е. $x^* \in X$. При

$\lambda = 0$ из (2.11) получаем $(\lambda^*)^T g(x^*) \geq 0$. Но $\lambda^* \geq 0$, а $g(x^*) \leq 0$; следовательно,

$$(\lambda^*)^T g(x^*) = 0. \quad (2.12)$$

По условию для всех $x \in X$ имеем $g(x) \leq 0$, и поэтому

$$(\lambda^*)^T g(x) \leq 0. \quad (2.13)$$

Из правого неравенства в (2.10) с учетом (2.12) и (2.13) получаем, что для всех $x \in X$ имеет место неравенство

$$V(x^*) \leq V(x) + (\lambda^*)^T g(x) \leq V(x).$$

Поэтому $x^* = \arg \min_{x \in X} V(x)$. Теорема доказана.

При решении детерминированных задач минимизации под методом множителей Лагранжа обычно понимают следующий метод:

$$x_{k+1} = \arg \min_{x \in X} L(x, \lambda_k),$$

$$\lambda_{k+1} = \pi_{\Lambda} [\lambda_k + \alpha_k g(x_k)], \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $\{\alpha_k\}$ — некоторая последовательность неотрицательных чисел.

При решении стохастических задач методом множителей Лагранжа, так же как и при решении их методами штрафных функций, на k -й итерации ($k = 0, 1, \dots$) делается лишь один шаг псевдоградиентного метода в направлении убывания функции $L(x, \lambda_k)$.

Сходимость методов множителей Лагранжа обычно можно гарантировать лишь в тех случаях, когда стационарная точка функции Лагранжа является седловой точкой этой функции. Здесь под стационарной точкой понимается такая упорядоченная пара (x^*, λ^*) , что

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x} \Big|_{(x, \lambda) = (x_0, \lambda_0)} = 0, \quad \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{(x, \lambda) = (x_0, \lambda_0)} = 0.$$

Упражнения.

1. Приведите примеры последовательностей внешних и внутренних штрафных функций для случая, когда X — единичный гиперкуб.

2. Покажите, что если в (2.6) множество X_0 выпукло, функции $g_i(x)$ ($i = 1, \dots, l$) выпуклы, а функции $g_i(x)$ ($i = l+1, \dots, m$) линейны, то функция (2.7) выпукла.

3. Решить методом множителей Лагранжа экстремальную задачу минимизации квадратичной формы $x^T A x$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $A > 0$) при ограничениях $a^T x = b$ ($a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$).

§ 3. Поисковые алгоритмы

3.1. Сходимость поисковых алгоритмов. В данном пункте приведен результат, основанный на теореме 1.1, который позволяет обосновать сходимость большого числа поисковых алгоритмов экстремального планирования. Предполагается, как и в § 1, что $X = \mathbb{R}^n$.

Согласно п. 1.1, *поисковыми* называются алгоритмы вида (1.1), в которых для вычисления направления движения s_k кроме значений величин (1.2) используются только реализации случайных величин $y(z_i)$ ($i = 1, \dots, l+1$) для некоторых специальным образом выбранных точек $z_1, \dots, z_{l+1}$. Число точек $l+1$, используемых для вычисления s_k , может зависеть от k .

Рассмотрим общий алгоритм, которых охватывает большинство известных поисковых алгоритмов. На k -м шаге этого алгоритма случайным или детерминированным образом выбирается l векторов $q_{k1}, \dots, q_{kl}$ и в $l+1$ точках $x_k, x_k + \alpha_{k+1}q_{k1}, \dots, x_k + \alpha_{k+1}q_{kl}$ вычисляются значения случайной величины y , после чего полагается

$$x_{k+1} = x_k + \gamma_{k+1} \alpha_{k+1}^{-1} \sum_{i=1}^l [y(x_k + \alpha_{k+1}q_{ki}) - y(x_k)] q_{ki}. \quad (3.1)$$

Очевидно, что (3.1) — частный случай (1.1).

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия (1.4), (1.5), (1.8), (1.10), и пусть для любых $x \in X$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 / \alpha_k^2 < \infty, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.2)$$

$$E \left\{ \sum_{i=1}^l (x^T q_{ki})^2 \right\} \geq \lambda \|x\|^2, \quad \lambda > 0, \quad (3.3)$$

$$E \sum_{i=1}^l \|q_{ik}\|^j \leq a_j < \infty \quad j = 1, 2, \dots, 6, \quad (3.4)$$

$$E \xi_{ki} = 0, \quad E \xi_{ki} q_{ki} = 0, \quad E \xi_{ki}^2 \leq \sigma^2 < \infty, \quad (3.5)$$

где

$$\xi_{ki} = y(x_k + \alpha_{k+1}q_{ki}) - \eta(x_k + \alpha_{k+1}q_{ki}), \quad \xi_{k0} = y(x_k) - \eta(x_k).$$

Тогда для алгоритма (3.1) с вероятностью единицы выполняется равенство

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|\nabla \eta(x_k)\| = 0.$$

Прежде чем доказывать теорему, поясним условия (3.2) — (3.5).

Условие (3.2) означает, что «длины пробных шагов» α_k должны стремиться к нулю ($\alpha_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$), причем быстрее, чем «длины рабочих шагов» γ_k .

Условие (3.3) означает, что векторы q_{ki} ($i = 1, \dots, l$) имеют такое распределение, что для любого вектора x единичной длины ($\|x\| = 1$) средний квадрат проекции x хотя бы на один вектор q_{ki} отличен от нуля. Если векторы q_{ki} детерминированные, то условие (3.3) соответствует требованию полноты набора векторов $\{q_{k1}, \dots, q_{kl}\}$, откуда следует, что $l \geq n$, где n — размерность пространства X .

Условие (3.4) является чисто техническим условием конечности первых шести моментов распределений случайных величин $\|q_{ki}\|$. Ясно, что всегда можно обеспечить выполнение этого требования.

Условие (3.5) — это не требующее комментариев условие центрированности и ограниченности дисперсий ошибок измерений, а также некоррелированности ξ_{ki}, q_{ki} .

Из приводимого ниже доказательства теоремы следует, что алгоритм (3.1), вообще говоря, не является псевдоградиентным, т.е. условие псевдо-

градиентности на некоторых шагах (в тех точках, в которых α_k не мало по сравнению с $\|\nabla\eta(x_k)\|$) может нарушаться. Тем не менее, при достаточно больших k условие псевдоградиентности выполняется, что позволяет применить для исследования этого алгоритма теорему 1.1.

Заметим также, что к теореме 3.1 легко могут быть сформулированы следствия, аналогичные следствиям 1.1, 1.2 (сформулируйте!) теоремы 1.1.

Доказательство теоремы 3.1. Используя (3.3)–(3.5), (1.13) и вид алгоритма (3.1), имеем

$$\begin{aligned} [\nabla\eta(x_k)]^T E s_k &= \alpha_{k+1}^{-1} [\nabla\eta(x_k)]^T E \left\{ \sum_{i=1}^l [\eta(x_k + \alpha_{k+1} q_{ki}) - \eta(x_k)] q_{ki} \right\} = \\ &= E \left\{ \sum_{i=1}^l [((\nabla\eta(x_k))^T q_{ki})^2 + \alpha_{k+1}^{-1} |\eta(x_k + \alpha_{k+1} q_{ki}) - \right. \\ &\quad \left. - \eta(x_k) - \alpha_{k+1} [\nabla\eta(x_k)]^T q_{ki}| (\nabla\eta(x_k))^T q_{ki}] \right\} \geq \lambda \|\nabla\eta(x_k)\|^2 - \\ &\quad - \frac{1}{2} L \alpha_{k+1} E \sum_{i=1}^l |(\nabla\eta(x_k))^T q_{ki}| \|q_{ki}\|^2 \geq \|\nabla\eta(x_k)\| \times \\ &\quad \times \left(\lambda \|\nabla\eta(x_k)\| - \frac{1}{2} L a_3 \alpha_{k+1} \right). \end{aligned}$$

Из полученной оценки видно, что в тех случаях, когда α_k мало по сравнению с $\|\nabla\eta(x_k)\|$, выполняется условие псевдоградиентности (1.6). Далее,

$$\begin{aligned} E \|s_k\|^2 &\leq \alpha_{k+1}^{-2} E \left\{ \sum_{i=1}^l [(\eta(x_k + \alpha_{k+1} q_{ki}) - \eta(x_k))^2 + 2\sigma^2] \|q_{ki}\|^2 \right\} \leq \\ &\leq \alpha_{k+1}^{-2} E \left\{ \sum_{i=1}^l \left[\alpha_{k+1} |(\nabla\eta(x_k))^T q_{ki}| + \frac{1}{2} L \alpha_{k+1} \right] \|q_{ki}\|^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2\sigma^2 \alpha_{k+1}^{-2} E \sum_{i=1}^l \|q_{ki}\|^2 \right\} \leq 2a_4 \|\nabla\eta(x_k)\|^2 + \frac{1}{2} a_6 L^2 \alpha_{k+1}^2 + 2\sigma^2 a_2 \alpha_{k+1}^{-2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим те реализации алгоритма (3.1), для которых

$$\|\nabla\eta(x_k)\| \geq \varepsilon > 0 \text{ при всех } k = 0, 1, \dots \quad (3.6)$$

При k настолько больших, что

$$\alpha_k \leq \min \{ \varepsilon, \lambda \varepsilon / (L a_3) \},$$

имеет место неравенство

$$[\nabla\eta(x_k)]^T E s_k \geq \|\nabla\eta(x_k)\| \left(\lambda \|\nabla\eta(x_k)\| - \frac{1}{2} \lambda \varepsilon \right) \geq \frac{1}{2} \lambda \|\nabla\eta(x_k)\|^2;$$

поэтому для рассматриваемых реализаций при достаточно больших k

$$E \|s_k\|^2 \leq 2\sigma^2 a_2 \alpha_{k+1}^{-2} + \left(2a_4 + \frac{1}{2} a_6 L^2 \right) \|\nabla\eta(x_k)\|^2.$$

Следовательно, для этих реализаций выполняются (3.6) и (1.7) с

$$\lambda_k = 2\sigma^2 a_2 / \alpha_{k+1}^2, \quad K_1 = 0, \quad K_2 = (4a_4 + L^2 a_6) / \lambda.$$

Очевидно, что из (3.2) следует (1.9).

Таким образом, для тех реализаций алгоритма (1.1), для которых выполнено (3.6), можно использовать теорему 1.1, из которой получаем, что

при условии (3.6) с вероятностью единица выполняется равенство

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} [\nabla \eta(x_k)]^T E s_k = 0.$$

Но по доказанному выше

$$\|\nabla \eta(x_k)\| \leq (2/\lambda) [\nabla \eta(x_k)]^T E s_k,$$

т. е. при выполнении (3.6) с вероятностью единица выполняется равенство

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|\nabla \eta(x_k)\| = 0.$$

Следовательно, (3.6) выполняется с вероятностью нуль. Это эквивалентно утверждению теоремы. Теорема доказана

3.2. Примеры поисковых алгоритмов. Рассмотрим некоторые частные случаи алгоритма (3.1).

Пример 3.1. Несимметричный вариант алгоритма Кифера — Вольфовица: $l = n$, $q_{ki} = e_i$ ($i = 1, \dots, n$) — орты, т. е. координатные векторы $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$.

Пример 3.2. Симметричный вариант алгоритма Кифера — Вольфовица: $l = 2n$, $q_{ki} = e_i$ ($i = 1, \dots, n$), $q_{k, n+i} = -e_i$ ($i = 1, \dots, n$). При реализации несимметричного варианта алгоритма Кифера — Вольфовица требуется приблизительно в два раза меньше значений случайных величин $y(x)$ на каждом шаге, чем при реализации симметричного варианта, но оценка градиента, получаемая на каждом шаге последнего, точнее.

Пример 3.3. Случайный поиск с односторонней пробой: $l = 1$, случайный вектор q_{k1} равномерно распределен на единичной сфере.

Пример 3.4. Случайный поиск с парной пробой: $l = 2$, случайный вектор q_{k1} равномерно распределен на единичной сфере $q_{k2} = -q_{k1}$.

Пример 3.5. Алгоритм стохастического l -градиента: $1 \leq l \leq n$, q_{ki} — случайные ортонормированные векторы, которые обычно получают с помощью процедуры ортогонализации независимых, равномерно распределенных на единичной сфере случайных векторов. Достоинства алгоритма стохастического l -градиента при малых l наиболее ярко проявляются в тех задачах, в которых n велико.

Пример 3.6. Случайный покоординатный подъем: $l = 1$, $q_{k1} = e_i$ с вероятностью $p_{ki} > 0$ ($i = 1, \dots, n$, $\sum_{i=1}^n p_{ki} = 1$)

Рассмотренные алгоритмы могут быть подвергнуты некоторым преобразованиям. Так, вектор, определяющий направление движения, можно умножить на произвольную положительно определенную матрицу единичной нормы. Нетрудно понять, что условия сходимости преобразованного указанным образом алгоритма не меняются.

Можно также осуществлять изменение x_k лишь в том случае, когда значение $y(x_{k+1})$ больше, чем вновь измеренное $y(x_k)$, т. е. осуществлять случайный поиск с возвратом при неудачном шаге.

Можно из векторов $q_{k1}, \dots, q_{ki}$ выбирать только тот, для которого величина

$$y(x_k + \alpha_{k+1} q_{ki}) - y(x_k)$$

максимальна, т. е. проводить случайный поиск с наилучшей пробой. Можно вместо разности

$$y(x_k + \alpha_{k+1} q_{ki}) - y(x_k)$$

учитывать только ее знак.

3.3. Рандомизованные алгоритмы планирования экстремальных экспериментов для недифференцируемой функции регрессии. Если функция $\eta(x)$ недифференцируема (и, возможно, разрывна), то большая часть алгоритмов поиска ее максимума, рассмотренных в настоящей главе, не обязана сходиться.

Ниже рассмотрен основанный на сглаживании исходной функции способ построения алгоритмов поиска ее максимума. Для сходимости некоторых из этих алгоритмов предположение о дифференцируемости функции η не является обязательным.

Пусть имеется заданная на $X = \mathbb{R}^n$ функция $\eta(x)$, и пусть $h(x)$ — непрерывно дифференцируемая плотность распределения на $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условию $\int \|x\| h(x) dx < \infty$. Сглаженной будем называть функцию

$$\hat{\eta}(x, \beta) = \int h(x') \eta(x - \beta x') dx', \quad (3.7)$$

где $\beta > 0$ — фиксированное число, называемое *параметром сглаживания*.

Замена переменных в (3.7) позволяет записать $\hat{\eta}(x, \beta)$ в виде

$$\hat{\eta}(x, \beta) = \beta^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} h\left(\frac{x-z}{\beta}\right) \eta(z) dz. \quad (3.8)$$

Из (3.8) следует, что функция $\hat{\eta}(x, \beta)$ дифференцируема по x :

$$\begin{aligned} \nabla_x \hat{\eta}(x, \beta) &= \frac{\partial}{\partial x} \hat{\eta}(x, \beta) = \beta^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x} h\left(\frac{x-z}{\beta}\right) \eta(z) dz = \\ &= \beta^{-(n+1)} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla h\left(\frac{x-z}{\beta}\right) \eta(z) dz = \frac{1}{\beta} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla h(z) \eta(x - \beta z) dz. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Легко понять, что функция $\hat{\eta}(x, \beta)$ не менее гладкая, чем $h(x)$.

При малых β функция $\hat{\eta}(x, \beta)$ хорошо приближает $\eta(x)$, а функция $\nabla_x \hat{\eta}(x, \beta)$ — градиент этой функции $\nabla \eta(x)$. Это следует из двух лемм, приведенных ниже.

Лемма 3.1. Если $c_1 = \int_{\mathbb{R}^n} h(z) \|z\| dz < \infty$, функция η непрерывна в точке x и растет из нее не быстрее линейной (т. е. $|\eta(x) - \eta(z)| \leq L \|x - z\|$ для всех $z \in X$, где $L < \infty$), то

$$|\hat{\eta}(x, \beta) - \eta(x)| = O(\beta), \quad \beta \rightarrow 0. \quad (3.10)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} |\hat{\eta}(x, \beta) - \eta(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} h(z) [\eta(x - \beta z) - \eta(x)] dz \right| \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |h(z)| |\eta(x - \beta z) - \eta(x)| dz \leq \int_{\mathbb{R}^n} h(z) L \|\beta z\| dz = \\ &= L\beta \int_{\mathbb{R}^n} h(z) \|z\| dz = c_1 L\beta = O(\beta), \quad \beta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Из утверждения леммы вытекает, в частности, что если функция η удовлетворяет условию Липшица на множестве X и $c_1 < \infty$, то (3.10) имеет место для всех точек $x \in X$.

Лемма 3.2. Если $c_1 < \infty$, функция η дифференцируема и ее градиент удовлетворяет условию Липшица, то

$$\|\nabla_x \hat{\eta}(x, \beta) - \nabla \eta(x)\| = O(\beta), \quad \beta \rightarrow 0.$$

Доказательство. Дифференцируя обе части (3.7) по x , получаем

$$\nabla_x \hat{\eta}(x, \beta) = \beta^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla h(z) \eta(x - \beta z) dz = \int_{\mathbb{R}^n} h(z) \nabla \eta(x - \beta z) dz.$$

Утверждение леммы доказывается повторением выкладки, проведенной при доказательстве предыдущей леммы, с заменой $\eta(x)$ на $\nabla \eta(x)$. Лемма доказана.

Тот факт, что в точках дифференцируемости $\eta(x)$ имеет место соотношение

$$\nabla_x \hat{\eta}(x, \beta) \rightarrow \nabla \eta(x), \quad \beta \rightarrow 0.$$

справедлив и без предположения о дифференцируемости функции η на всем множестве X . Действительно, одно из свойств обобщенных функций состоит в том, что если функция $f(x, \beta)$ зависит от параметра β и стремится при $\beta \rightarrow 0$ к некоторой обобщенной функции $\sigma(x)$, то производная от нее по x (т. е. $\partial f(x, \beta)/\partial x$) при $\beta \rightarrow 0$ стремится к производной от $\sigma(x)$.

В нашем случае это означает, что если

$$\hat{\eta}(x, \beta) \rightarrow \eta(x), \tag{3.11}$$

т. е. $\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta^{-n} h\left(\frac{x-z}{\beta}\right) = \delta(x-z)$ (δ — дельта-функция), то

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta^{-n} \frac{\partial h\left(\frac{x-z}{\beta}\right)}{\partial x} = \frac{\partial \delta(x-z)}{\partial x}.$$

По определению производной от дельта-функции для любой дифференцируемой в точке x функции f имеем

$$\int f(z) \frac{\partial \delta(x-z)}{\partial x} dz = \nabla f(x).$$

Поэтому $\nabla_x \hat{\eta}(x, \beta) \rightarrow \nabla \eta(x)$ при $\beta \rightarrow 0$ в точках дифференцируемости $\eta(x)$ в случае выполнения (3.11).

Заметим, что из леммы 3.1 следует, что (3.11) выполняется при весьма неограниченных условиях.

Пусть $\beta > 0$ фиксировано. Легко построить поисковый алгоритм отыскания стационарных точек функции $\hat{\eta}(x, \beta)$, т. е. таких точек x_β , в которых $\nabla_x \hat{\eta}(x_\beta, \beta) = 0$. Действительно, несмещенной оценкой градиента $\nabla_x \hat{\eta}(x, \beta)$ является

$$s(x, \beta, N) = \frac{1}{N\beta} \sum_{j=1}^N \frac{\nabla h(x_j)}{p(x_j)} y(x - \beta x_j),$$

где $N \geq 1$; x_j ($j = 1, \dots, N$) — независимые реализации случайного вектора, имеющего распределение с плотностью $p(x)$, которая положительна во всех точках $x \in X$ или только в тех, в которых $\|\nabla h(x)\| \neq 0$.

Используя это, алгоритм отыскания точек x_β можно построить следующим образом:

$$x_{k+1} = x_k + \gamma_{k+1} s(x_k, \beta, N). \quad (3.12)$$

Для обоснования сходимости этого алгоритма к одной из точек x_β можно применять теоремы 1.1, 3.1. Отметим, что из указанных выше свойств сглаженных функций вытекает, что при малых β точка x_β близка к одной из стационарных точек функции η .

Если вместо алгоритма (3.12) рассматривать

$$x_{k+1} = x_k + \gamma_{k+1} s(x_k, \beta_k, N), \quad (3.13)$$

где $\beta_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), то легко понять, что (3.13) — типичный поисковый алгоритм отыскания стационарной точки функции η , и для его исследования можно использовать теорему 3.1. При этом для обеспечения сходимости алгоритма (3.13) придется налагать условия гладкости на функцию η .

3.4. Симплексный метод. Хотя формально симплексный метод является типичным поисковым алгоритмом, он заслуживает отдельного рассмотрения по двум причинам: во-первых, наряду с методом крутого восхождения он является одним из наиболее широко используемых методов экспериментальной оптимизации и, во-вторых, представляет собой яркий пример метода, сходимость которого обосновать не удается.

Суть метода состоит в том, что движение к максимуму функции η , заданной на $X = \mathbb{R}^n$, осуществляется последовательным отражением вершин симплекса.

По определению n -мерный симплекс представляет собой многогранник, образованный $n+1$ точками (вершинами), которые не принадлежат одновременно ни одному подпространству меньшей размерности. Симплекс называется *регулярным*, если расстояния между его вершинами равны.

Наиболее простым вариантом симплексного метода является так называемый *последовательный симплексный метод*, предложенный в начале 60-х годов и использующий зеркальное отра-

жение регулярных симплексов относительно граней, противоположных вершинам, в которых значение случайной величины y наименьшее. Многократное отражение симплекса приводит к шаговому движению центра симплекса к цели по траектории некоторой ломаной линии.

Введем матрицу размера $n \times (n+1)$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_n & q_n & \dots & q_n \\ q_n & p_n & \dots & q_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_n & q_n & \dots & p_n \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$q_n = \frac{1}{n\sqrt{2}} (\sqrt{n+1} - 1), \quad p_n = \frac{1}{n\sqrt{2}} (\sqrt{n+1} + n - 1).$$

Координаты z_{ij} ($i=1, \dots, n$; $j=1, \dots, n+1$) вершин z_j ($j=1, \dots, n+1$) регулярного симплекса с длиной ребра $L=1$ определяются строками матрицы A . При этом вершина z_1 будет в начале координат, а векторы, соответствующие вершинам $z_2, \dots, z_{n+1}$, составят одинаковые углы с координатными осями.

Координаты вершин регулярного симплекса с длиной ребра $L=1$ и центром в начале координат определяются строками матрицы

$$\begin{bmatrix} -r_1 & -r_2 & -r_3 & \dots & -r_{n-1} & -r_n \\ R_1 & -r_2 & -r_3 & \dots & -r_{n-1} & -r_n \\ 0 & R_2 & -r_3 & \dots & -r_{n-1} & -r_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & R_n \end{bmatrix},$$

где

$$r_i = (2i(i+1))^{-1/2}, \quad R_i = i^{1/2} (2(i+1))^{-1/2}, \quad i=1, \dots, n.$$

Величины r_i и R_i ($i=1, \dots, n$) представляют собой радиусы вписанной и описанной сфер для i -мерного регулярного симплекса с длиной ребра $L=1$.

Если требуется построить регулярный симплекс с длиной ребра $L \neq 1$ и центром (вершиной) в точке x_0 , отличной от начала координат, то координаты вершин одного из двух указанных симплексов подвергаются очевидному линейному преобразованию: сначала к ним прибавляются соответствующие координаты точки x_0 , а затем полученные величины умножаются на L .

Алгоритм последовательного симплексного поиска состоит в следующем.

Алгоритм 3.1.

- 1) Строим регулярный симплекс Σ_0 , полагаем $k=1$.
- 2) Проводим измерения в вершинах симплекса Σ_0 .
- 3) Выбираем наименьшую величину y_k из результатов измерений $y_1, \dots, y_{n+1}$ в вершинах симплекса Σ_{k-1} .

4) Строим симплекс Σ_k путем замены точки z_l , в которой было получено значение y_l , новой точкой z'_l , координаты которой равны

$$z'_{il} = 2n^{-1} \sum_{j=1}^{n+1} z_{ij} - (1 + 2n^{-1}) z_{il}, \quad i = 1, \dots, n+1$$

(точка z'_l с координатами z'_{il} является зеркальным отражением точки z_l относительно противоположной грани симплекса Σ_{k-1}).

5) Проводим измерение в точке z'_l , получаем y'_l .

6) Если $y'_l < y_l$ ($i = 1, \dots, l-1, l+1, \dots, n+1$), то в качестве z_l выбираем вершину симплекса Σ_{k-1} , соответствующую второму по величине значению из набора $\{y_1, \dots, y_{n+1}\}$, и переходим к шагу 4).

7) Если $k > n+1$ и на предыдущих $n+1$ итерациях наибольшее значение в наборе $\{y_1, \dots, y_{n+1}\}$ оставалось одним и тем же, то повторяем измерение в точке, соответствующей наибольшему значению.

8) Заменяем k на $k+1$, y_l на y'_l и переходим к шагу 3).

Очевидно, приведенный метод не сходится к точке максимума функции η . Тем не менее богатый практический опыт по использованию этого метода для поиска максимума одноэкстремальных функций показывает, что с его помощью удастся достаточно быстро отыскивать область максимума (и отслеживать ее, если функция η нестационарна) при решении многих задач, в которых измерение контролируемых переменных $x \in X$ может проводиться с ошибкой, а случайные величины y , вычисленные в разных точках x , могут быть зависимы между собой и зависеть от времени.

Отметим, что ограничения типа неравенств при проведении симплексного поиска учитываются очень просто: вершины, не удовлетворяющие ограничениям, отбрасываются.

Постоянный размер симплекса не обеспечивает одновременно высокую скорость движения симплекса в начале поиска и точность отыскания экстремума в его конце. Поэтому обычно размеры симплекса уменьшают с ростом номера шага.

Приведем одну из типичных модификаций последовательного симплексного метода, в которой размер симплекса на каждом шаге уменьшается.

После отражения симплекса на каждом шаге выбирается вершина, в которой случайная величина y приняла наибольшее значение, начало координат переносится в эту точку, после чего координаты остальных вершин преобразуются по формуле

$$z'_{ij} = L_k z_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n+1,$$

где k — номер шага, $\{L_k\}$ — последовательность чисел, определяющая закон изменения длин ребер симплексов. Поскольку обычно выбирают $L_k \approx 1$ и предполагают, что функция η достаточно медленно меняется, значения случайной величины y

для вершин нового симплекса не вычисляют, а используют значения этой случайной величины в соответствующих вершинах старого. Исключение составляют те вершины нового симплекса, в которых (или им соответствующих) в течение $n + 1$ предыдущих шагов значения y не вычислялись; в этих вершинах вычисляются значения y . Таким образом, на каждом шаге, кроме нулевого, требуется в среднем лишь немногим более одного вычисления значений y . Последовательность $\{L_k\}$ и длина ребра начального симплекса выбираются из априорных соображений о желательной скорости движения симплекса на начальном и конечном этапах поиска.

Симплексный поиск обладает тем свойством, что изменение длины шага в направлении псевдоградиента γ_k однозначно связано с изменением интервала варьирования, или «длины пробного шага» α_k . Отсюда следует, что условие (3.2) не выполняется, и поэтому теорема 3.1 неприменима. Более того, неприменима и любая другая из известных теорем о сходимости поисковых алгоритмов в достаточно общих постановках задачи экстремального планирования (легко понять, что экстремальную задачу можно сузить настолько, что любой метод оптимизации будет сходиться). По-видимому, при наличии случайных ошибок измерений и при достаточно общих предположениях о функции регрессии симплексный метод не обладает гарантированным свойством сходимости.

3.5. Метод крутого восхождения. Этот метод разрабатывался и применялся для решения задач оптимизации реальных объектов и процессов, и поэтому имеет специфические особенности, хотя и может быть рассмотрен с общих позиций (см. п. 3.1). Суть метода крутого восхождения состоит в следующем. Последовательно проводятся небольшие серии измерений (вычисляются значения случайной величины y в специальном образом определенных точках факторного пространства X). Серии, в каждой из которых по определенным правилам варьируются все факторы (контролируемые переменные), организуются таким образом, чтобы по результатам проведенных измерений можно было легко оценить градиент в некоторой точке. В направлении оценки градиента проводится еще несколько измерений, после чего выбираются условия проведения следующей серии экспериментов. Так последовательно достигается область экстремума, в которой серия обычно планируется таким образом, чтобы можно было оценить коэффициенты квадратичной модели истинной зависимости η в окрестности точки экстремума.

Предположим, что мы хотим по результатам серии измерений в точках $x'_1, \dots, x'_N$ случайной функции $y(x)$ оценить градиент $\nabla \eta(x_0)$ функции регрессии $\eta(x) = Ey(x)$ в некоторой точке $x_0 \in X = \mathbb{R}^n$. Пусть $N > n$ и точки $x'_1, \dots, x'_N$ таковы, что они не лежат в линейном подпространстве $\mathbb{R}^n$ размерности $n - 1$ или меньше. Кроме того, пусть эти точки находятся в настолько ма-

лой окрестности S точки x_0 , что в ней можно предполагать линейную зависимость функции $\eta(x)$ от x :

$$\eta(x) \approx \eta(x_0) + [\nabla \eta(x_0)]^T (x - x_0), \quad x \in S.$$

Положим $x_j = x'_j - x_0$ ($j = 1, \dots, N$). Координаты точек x_j обозначим через $x_j(i)$ ($i = 1, \dots, n$).

Тогда для результатов измерений $y_j = y(x_j + x_0)$ приближенно справедлива линейная регрессионная модель

$$y_j = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_j(i) + \varepsilon_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.14)$$

где $E \varepsilon_j = 0$, $b_0 = \eta(x_0)$, $(b_1, \dots, b_n)^T = \nabla \eta(x_0)$, $b_0, b_1, \dots, b_n$ — неизвестные параметры регрессии.

Положим

$$F = \begin{bmatrix} 1 & x_1(1) & \dots & x_1(n) \\ 1 & x_2(1) & \dots & x_2(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N(1) & \dots & x_N(n) \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y(x_1) \\ y(x_2) \\ \vdots \\ y(x_N) \end{bmatrix}.$$

Из результатов § 1 гл. 1 вытекает, что МНК-оценка $\hat{b} = (b_0, b_1, \dots, b_n)^T$ параметров $b = (b_0, \dots, b_n)^T$ является наилучшей в множестве линейных несмещенных оценок. Исходя из этого, градиент $\nabla \eta(x_0) = (b_1, \dots, b_n)^T$ в стандартных вариантах метода крутого восхождения оценивается вектором $(\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_n)^T$.

Как правило, в методе крутого восхождения план проведения серии измерений выбирается таким образом, чтобы он был симметричен относительно центра проведения измерений, т. е.

$$\sum_{j=1}^N x_j(i) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

и ортогонален, т. е.

$$\sum_{j=1}^N x_j(i) x_j(l) = 0, \quad i \neq l, \quad i, l = 1, 2, \dots, n,$$

Если план $\xi = \{x_1, \dots, x_N\}$ выбран в таком виде, то матрица $F^T F$ диагональна, и вычисление вектора $\hat{b}$ не представляет затруднений, что важно в тех случаях, когда вычисления проводятся без помощи ЭВМ. Более подробно вопросы планирования эксперимента по оцениванию параметров линейных регрессионных моделей вида (3.14) рассмотрены в § 1 гл. 4.

Если все переменные $x(1), \dots, x(n)$ варьировать на двух уровнях: $x(i) = \pm a_i$ ($a_i > 0$ выбираются, исходя из априорных соображений), то в силу симметричности плана ξ , его ортого-

нальности и того, что $\sum_{j=1}^N [x_j(i)]^2 = N a_i^2$ ($i = 1, \dots, n$), полу-

чаем очень простые формулы для оценок:

$$\hat{b}_0 = N^{-1} \sum_{j=1}^N y(x_j), \quad \hat{b}_i = N^{-1} \sum_{j=1}^N a_i^{-1} x_j(i) y(x_j), \quad i = 1, \dots, n.$$

В качестве плана проведения серии измерений часто выбирают либо полный факторный эксперимент (это означает, что измерения проводятся в 2^n точках $(\pm a_1, \pm a_2, \dots, \pm a_n)^T$), либо дробные реплики от него (см. гл. 2). В этих случаях метод крутого восхождения называют также *методом Бокса — Уилсона*.

Для того чтобы определить центр проведения новой серии измерений, обычно (см. также п. 4.1) в направлении оценки градиента $\nabla \eta(x_0)$ выбирается последовательность точек $v_i \in X$ ($i = 1, 2, \dots$), расположенных на равном расстоянии друг от друга, и вычисляются $y(v_i)$ ($i = 1, 2, \dots$) до тех пор, пока не выполнится $y(v_i) < y(v_{i-1})$. Точку v_{i-1} принимают за центр новой серии экспериментов.

Если норма оценки градиента функции регрессии на каком-то шаге мала или если после проверки гипотезы о значимости каждого коэффициента b_i ($i = 1, \dots, n$) регрессионной модели (3.14) при помощи критерия из п. 1.5 гл. 1 оказывается, что все они незначимы, то считается, что достигнута область экстремума. После достижения области экстремума план первого порядка обычно дорабатывается до плана второго порядка, оцениваются коэффициенты квадратичной модели и экстремум функции регрессии аппроксимируется экстремумом указанной модели. При необходимости квадратичная модель строится не один раз, а несколько — каждая следующая в более узкой области.

Таким образом, специфическими чертами, отличающими метод крутого восхождения от других поисковых алгоритмов, являются: а) проведение статистического анализа получаемых экспериментальных данных (в том числе линейного регрессионного анализа для построения линейной или квадратичной модели функции регрессии), б) специфический выбор плана эксперимента на каждом шаге (критериями выбора плана могут быть ортогональность, ротатабельность, простота построения, близость плана к насыщенному, оптимальность); в) выбор направления движения в соответствии с построенными регрессионными моделями (в частности, в качестве направления движения часто выбирается оценка градиента функции регрессии в заданной точке); г) выбор длины шага как случайной величины (по правилам, описанным выше и в § 4).

Рассмотрим теперь вопрос о сходимости метода крутого восхождения. Предположим, что метод состоит в том, что на каждом шаге движение происходит в направлении оценки градиента функции регрессии, а длина шага выбирается следующим образом. Фиксируется некоторая последовательность положительных чисел $\{\gamma_k\}$ и целое число $N > 0$. Пусть s_k — направление движения на k -м шаге, $\|s_k\| = 1$, x_k — центр k -й серии измерений. В на-

правлении s_k из точки x_k проводится не более N измерений в точках

$$x_k + \gamma_{k+1}s_k, \quad x_k + 2\gamma_{k+1}s_k, \quad \dots, \quad x_k + j\gamma_{k+1}s_k$$

до тех пор, пока не выполнится неравенство

$$y(x_k + (i+1)\gamma_{k+1}s_k) < y(x_k + i\gamma_{k+1}s_k), \quad (3.15)$$

где $1 \leq i \leq N$, $y(x_k + (N+1)\gamma_{k+1}s_k) = -\infty$, и центр новой серии измерений переносится в точку

$$x_{k+1} = x_k + i\gamma_{k+1}s_k. \quad (3.16)$$

Спецификой метода крутого восхождения является, в частности, то, что длины шагов — случайные величины. Поэтому теорема 3.1 прямо неприменима. Запишем метод крутого восхождения в виде (3.16) или, что то же самое, в виде (1.1) с заменой s_k на is_k . Заметим, что $0 < a \leq \|s_k\| \leq A < \infty$ ($a=1$, $A=N$) с вероятностью единица и что в этом случае условия сходимости алгоритма (1.1) полностью идентичны условиям сходимости алгоритма

$$x_{k+1} = x_k + \gamma_{k+1}s_k/\|s_k\|.$$

Отсюда следует, что условия сходимости метода (3.16) те же, что и метода

$$x_{k+1} = x_k + \gamma_{k+1}s_k,$$

сходимость которого можно обосновать с помощью теоремы 3.1.

Упражнения.

1. Выпишите условия сходимости описанного в п. 3.4 стандартного варианта метода крутого восхождения.

2. Пусть номер шага k и точка x_k в алгоритме (3.1) фиксированы. Сформулируйте план эксперимента, используемый на k -м шаге несимметричного варианта алгоритма Кифера — Вольфовица. Покажите, что при условии адекватности линейной модели для функции регрессии в кубе (шаре) с центром в точке x_k этот план не является непрерывным D -, A - и Q -оптимальным. Постройте алгоритмы вида (3.1), в которых на каждом шаге используются планы эксперимента, оптимальные в указанных смыслах.

§ 4. Выбор длины шага и направления движения в методе крутого восхождения

4.1. Выбор длины шага. Предположим, что проведена серия измерений в окрестности некоторой точки x_k (без ограничения общности считаем $x_k = 0$) и выбрано направление дальнейшего подъема. Полупрямую, на которой будет выбираться центр новой серии экспериментов, запишем в параметрическом виде: $x = \lambda t$, где

$$t \geq 0, \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T, \quad \|\lambda\| = 1.$$

Если движение происходит в направлении оценки градиента $\hat{b} = (\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_n)^T$ функции η в точке нуль, то $\lambda_i = \hat{b}_i \|\hat{b}_i\|^{-1}$; t — расстояние от x до точки нуль.

Пусть задана некоторая возрастающая последовательность чисел $t_1, t_2, \dots$, зависящая, возможно, от номера серии экспериментов. Примем обозначения: $y(i) = y(\lambda t_i)$, $\eta(i) = \eta(\lambda t_i)$ ($i = 1, 2, \dots$).

Самое простое и наиболее распространенное при расчетах на ЭВМ правило выбора нового центра экспериментов $\bar{x} = x_{k+1}$ состоит в том, что полагают $\bar{x} = \lambda t_1$ (см. § 1—3). При использовании метода крутого восхождения обычно используют другое правило: вычисляют $y(i)$ ($i = 1, 2, \dots$) до тех пор, пока не выполнится условие

$$y(j+1) < y(j), \quad (4.1)$$

и полагают $\bar{x} = \lambda t_j$.

Описываемое ниже правило выбора длины шага (или, что то же самое, нового центра проведения экспериментов) состоит в следующем. Вычисляется $y(i)$ ($i = 1, 2, \dots$) до первого выполнения неравенства (4.1), после чего проводится еще несколько измерений $y(j+2)$, $y(j+3)$, ... до тех пор, пока при некотором $l \geq 2$ не выполнится неравенство либо $y(j+l) \leq y(j) - a$, либо $y(j+l) \geq y(j) + a$. В первом из указанных случаев полагаем $\bar{x} = \lambda t_j$, во втором продолжаем измерять y в точках λt_i до тех пор, пока снова не выполнится (4.1), после чего поступаем аналогично.

Приведенный способ выбора длины шага γ_{k+1} основан на последовательной проверке статистических гипотез с целью определения такой точки вида $t_i \lambda$, что при $t > t_i$ функция $\varphi(t) = \eta(t\lambda)$ убывает. Опишем этот способ более формально. Положим

$$i_0 = 0, \quad i_m = \min \{i = i_{m-1} + 1, \quad i_{m-1} + 2, \dots \mid y(i+1) < y(i)\}, \\ m \geq 1.$$

Построим статистическую процедуру проверки двух гипотез:

$$H_m: \eta(t\lambda) \geq \eta(i_m), \quad G_m: \eta(t\lambda) < \eta(i_m),$$

где $t > t_{i_m}$, t близко к t_{i_m} .

Проверка этих гипотез проводится с целью выяснения, произошло ли уменьшение вычисленного значения y вследствие того, что $\eta(i_m + 1) < \eta(i_m)$, или благодаря случайной ошибке.

Для дискриминации указанных гипотез в точках $t_i \lambda$ ($i > i_m + 1$) проводится еще несколько вычислений y . Положим ($m \geq 1$ фиксировано)

$$u_i = y(i_m + i) - y(i_m), \quad i = 1, 2, \dots$$

При каждом $i = 2, 3, \dots$ принимается гипотеза H_m , если $u_i \geq a$; принимается G_m , если $u_i \leq -a$; проводится новое наблюдение в точке λt_{i_m+i+1} , если $-a < u_i < a$. Здесь $a \geq 0$ обозначает число, значение которого определено ниже.

Если гипотеза H_m отвергается, то полагаем $y_{k+1} = t_{i_m}$. Если эта гипотеза принимается, то считаем, что выполнение неравенства $y(i_m + 1) < y(i_m)$ произошло благодаря случайной ошибке, а функция регрессии в выбранном направлении пока увеличивается. Поэтому продолжаем наблюдать $y(i)$ до момента i_{m+1} , после чего проделываем аналогичную процедуру.

Последовательная проверка гипотез и проведение измерений в выбранном направлении продолжается до тех пор, пока при некотором $m = 1, 2, \dots$ не будет отвергнута гипотеза H_m .

Будем предполагать, что функция регрессии $\eta(x)$ унимодальна, а ошибки измерений $\varepsilon_i = y(i) - \eta(i)$ — взаимно независимые случайные величины, имеющие одинаковое симметричное распределение $P(dx)$ с непрерывной функцией распределения $F(t)$.

Оценим сначала вероятность ошибки первого рода при проверке гипотез H_m .

Лемма 4.1. Для приведенной процедуры проверки гипотезы H_m для вероятности ошибки первого рода α_m (отвергнуть гипотезу, когда она верна) справедливо неравенство

$$\alpha_m \leq \alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(z-a)}{1 + F(z-a) - F(z+a)} dF(z),$$

причем $\alpha_m = \alpha$ при $\eta(x) = \text{const}$.

Доказательство. Положим

$$A_i = \{-a < u_i < a\}, \quad B_i = \{u_i \leq -a\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \alpha_m &= P\{\text{отвергнуть } H_m \mid H_m\} = \sum_{i=1}^m P\left\{\bigcap_{j=1}^{i-1} A_j \cap B_i \mid H_m\right\} \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m P\left\{\bigcap_{j=1}^{i-1} A_j \cap B_i \mid H_m, \eta(x) = \text{const}\right\} = \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{z-a}^{z+a} P(du) \right)^{i-2} \int_{-\infty}^{z-a} P(dt) P(dz) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(z-a) P(dz)}{1 - [F(z+a) - F(z-a)]} = \alpha. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 4.2. Пусть N_i — число наблюдений, требуемых для проверки i -й гипотезы ($i = 1, 2, \dots$), τ — число гипотез, требуемых для того, чтобы впервые отвергнуть H_1 , $N = \sum_{i=1}^{\tau} N_i$ — общее число наблюдений, проводимых до того момента, когда

будет впервые отвергнута H_m . Тогда

$$E\{N | \eta(x) = \text{const}\} = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF(z)}{1 - F(z+a) - F(z-a)}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} E\{N | \eta(x) = \text{const}\} &= E\left\{\sum_{i=1}^{\infty} N_i | \eta(x) = \text{const}\right\} = \\ &= E\{\tau | \eta(x) = \text{const}\} E\{N_1 | \eta(x) = \text{const}\} \end{aligned}$$

(последнее равенство следует из того, что все $E\{N_i | \eta(x) = \text{const}\}$ равны). Используя определение α , имеем

$$E\{\tau | \eta(x) = \text{const}\} = \sum_{i=1}^{\infty} i(1-\alpha)^{i-1}\alpha = 1/\alpha.$$

Далее

$$\begin{aligned} E\{N_1 | \eta(x) = \text{const}\} &= \\ &= \sum_{i=2}^{\infty} i P\{-a < u_i < a \quad (j=2, \dots, i-1), |u_i| \geq a\} = \\ &= \sum_{i=2}^{\infty} i P\left\{\bigcap_{j=2}^{i-1} A_j \cap \bar{A}_i\right\} = \sum_{i=2}^{\infty} i \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{z-a}^{z+a} P(du)\right)^{i-2} [1 - P(A_i)] dF(z) = \\ &= \sum_{i=2}^{\infty} i \int_{-\infty}^{\infty} [F(z+a) - F(z-a)]^{i-2} [1 - F(z+a) + F(z-a)] \times \\ &\quad \times dF(z) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\sum_{i=1}^{\infty} i [F(z+a) - F(z-a)]^{i-1}\right\} \times \\ &\quad \times [1 - F(z+a) + F(z-a)] dF(z) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF(z)}{1 - F(z+a) + F(z-a)}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Положим

$$\psi(a) = E\left\{N \left| \bigcap_{i=1}^{\infty} H_i \right.\right\}, \quad \varphi(a) = E\left\{N \left| \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i \right.\right\}$$

суть средние числа измерений при условиях, что функция регрессии не убывает и не возрастает. Очевидно, что $\psi(a)$ и $\varphi(a)$ возрастают с ростом a , а в случае $\eta(x) = \text{const}$ достигают экстремальных значений (соответственно максимального и минимального).

Если величина a мала, то будет мало значение $\psi(a)$, что обычно нежелательно; если же a велико, то велико и значение $\varphi(a)$, что плохо.

Если в качестве критерия для выбора a использовать среднее число измерений вдоль выбранного направления, то, учитывая сказанное, естественно a задавать из условия

$$E \{N | \eta(x) = \text{const}\} = \gamma, \quad (4.2)$$

где γ — заданное число, являющееся минимальным (по возможным функциям регрессии) средним числом наблюдений при условии, что функция регрессии не убывает.

Для любой функции регрессии выполнено неравенство $\psi(a) \geq \gamma \geq \varphi(a)$, и, следовательно, задание величины a через соотношение (4.2) — это задание нижней границы для $\psi(a)$ и верхней для $\varphi(a)$.

При решении практических задач наиболее естественный выбор γ — от 5 до 20. Конечно, этот выбор должен быть согласован с трудоемкостью алгоритма вычисления направления движения: средние числа вычислений функции регрессии, требуемые для определения s_k и γ_k , должны быть примерно одинаковыми (во всяком случае, иметь один порядок).

Задача определения a из условия (4.2) сводится к решению относительно a уравнения

$$\left[1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF(z)}{1 - F(z+a) + F(z-a)} \right] \times \\ \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(z-a) dF(z)}{1 - F(z+a) + F(z-a)} \right]^{-1} = \gamma. \quad (4.3)$$

Это уравнение можно аналитически решить лишь для простейших видов функции распределений F (см. пример 4.1). В остальных случаях нужно использовать ЭВМ или выбирать a , руководствуясь только интуитивными соображениями.

Пример 4.1. Пусть $\gamma > 4$ и $F(t)$ имеет равномерное распределение на промежутке $[-b, b]$, т. е.

$$dF(z) = \begin{cases} 0, & z < -b, \\ 1/(2b), & -b \leq z \leq b \\ 0, & z > b \end{cases}$$

Отсюда

$$F(z) = \begin{cases} 0, & z < -b, \\ (z+b)/(2b), & -b \leq z \leq b \\ 1, & z > b \end{cases}$$

$$F(z-a) = \begin{cases} 0, & z < a-b, \\ (z-a+b)/(2b), & a-b \leq z \leq a+b, \\ 1, & z > a+b \end{cases}$$

$$F(z+a) = \begin{cases} 0, & z < -a-b, \\ (z+a+b)/(2b), & -a-b \leq z \leq b-a \\ 1, & z > b-a \end{cases}$$

Предположим, что $\gamma > 4$. Тогда из (4.2) следует, что $a < b$. Числитель в левой части (4.2) равен

$$\begin{aligned}
 1 + \int_{-b}^{a-b} \frac{(2b)^{-1} dz}{1 - (z + a + b)/(2b)} + \\
 + \int_{a-b}^{b-a} \frac{(2b)^{-1} dz}{1 - (z + a + b)/(2b) + (z - a + b)/(2b)} + \\
 + \int_{b-a}^b \frac{(2b)^{-1} dz}{1 - 1 + (z - a + b)/(2b)} = 1 + \int_{-b}^{a-b} \frac{dz}{(b-a) - z} + \\
 + \int_{a-b}^{b-a} \frac{dz}{2(b-a)} + \int_{b-a}^b \frac{dz}{z + (b-a)} = 2 + 2 \int_{b-a}^b \frac{dz}{z + (b-a)} = \\
 = 2 \left(1 + \ln \frac{2b-a}{2(b-a)} \right).
 \end{aligned}$$

Аналогично вычисляя знаменатель в левой части (4.3), получаем, что он равен $1/2$.

Таким образом, уравнение (4.3) принимает вид

$$4 \left(1 + \ln \frac{2b-a}{2(b-a)} \right) = \gamma.$$

Решая его, получаем

$$a = 2b [1 - e^{\gamma/4-1}/(2e^{\gamma/4-1} - 1)].$$

4.2. Оптимальный выбор направления движения. В алгоритмах вида (1.1) в качестве $s = s_k$ часто выбирают направление, совпадающее с оценкой (если возможно, то несмещенной) градиента $\theta = \nabla \eta(x_k)$ функции η в точке x_k (далее считаем $x_k = \theta$, $\|s\| = 1$). Это обосновано тем обстоятельством, что при соответствующих условиях гладкости на η в направлении $s = \theta/\|\theta\|$ (где θ — несмещенная оценка градиента $\theta = \nabla \eta(x_k)$) средняя скорость возрастания функции регрессии η максимальна. Однако за счет того, что направление движения s — случайный вектор, функция регрессии в направлении s с некоторой вероятностью может убывать, что с практической точки зрения крайне нежелательно.

Условие возрастания функции η в направлении s может быть записано следующим образом:

$$\frac{\partial \eta}{\partial s}(x^{(k)}) = [\nabla \eta(x^{(k)})]^T s = \theta^T s > 0.$$

Поэтому вероятность возрастания η в направлении s равна

$$P \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial s}(x^{(k)}) > 0 \right\} = P \{ s^T \theta > 0 \} \quad (4.4)$$

и представляет собой естественный критерий оптимального выбора направления движения, который следует максимизировать

по s при $\theta = 0_n$ — истинном значении θ (или, если возможно, при всех $\theta \neq 0$).

Далее предполагается, что в $N \geq 1$ точках $z_1, \dots, z_N$, принадлежащих некоторой достаточно малой окрестности нуля и имеющих координаты $z_j(i)$ ($j = 1, \dots, N, i = 1, \dots, n$), вычислены случайные величины

$$y(z_j) = \theta_0 + \theta^T z_j + \varepsilon_j, \quad (4.5)$$

где ε_j — взаимно независимые, одинаково распределенные случайные величины ($E\varepsilon_j = 0$, $De_j = \sigma^2$), а направление движения s выбирается в виде

$$s = s(A) = AY, \quad (4.6)$$

где

$$Y = (y(z_1), \dots, y(z_N))^T, \quad A \in \mathcal{A},$$

$\mathcal{A}$ — множество матриц порядка $n \times N$. Для простоты положим $\theta_0 = 0$.

Условие (4.5) означает, что постулируется линейная модель регрессии, а (4.6) — что направление движения s выбирается в множестве линейных статистик.

Если $N > n$ и $A = BF^T$, где $F = \|z_j(i)\|_{j=1}^N, i=1}^n$

$$B = \text{const} \left[\sum_{j=1}^N z_j z_j^T \right]^{-1} \quad (4.7)$$

(т. е. матрица B пропорциональна дисперсионной матрице оценок параметров θ линейной регрессионной модели (4.5)), то направление движения, определяемое по (4.6), совпадает с направлением вдоль оценки градиента, получаемой по методу наименьших квадратов (такой выбор направления стандартен для метода крутого восхождения).

Таким образом, рассматриваемая задача состоит в нахождении статистики

$$s^* = \arg \max_{s \in \Xi} P \{s^T \theta > 0\} \quad (4.8)$$

для всех $\theta \in R^n$ при условиях $EY = F\theta$, $DY = \sigma^2 I_N$, где Ξ — множество статистик, записываемых в виде (4.6).

Отметим, что вероятность (4.4) не зависит от $\|s\|$ и $\|\theta\|$, и требование $\|s\| = 1$ налагается только для обеспечения единственности оптимального направления.

Положим

$$\begin{aligned} l(A) &= l(A, \theta) = \theta^T s(A), \quad \chi(A) = \chi(A, \theta) = \\ &= [l(A) - E l(A)] / \sqrt{D l(A)}. \end{aligned}$$

Тогда вероятность (4.4) представляется в виде

$$P \{l(A) > 0\} = P \{\chi(A) > -E l(A) / \sqrt{D l(A)}\}. \quad (4.9)$$

Случайная величина $\chi(A, \theta)$ представляет собой линейную комбинацию случайных величин $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N$, имеет нулевое среднее и дисперсию, равную единице. Если распределение ε_i нормальное, то таким же является и распределение $\chi(A, \theta)$; поэтому вероятность (4.9) полностью характеризуется величиной

$$\kappa(A) = \kappa(A, \theta) = E\chi(A)/\sqrt{D\chi(A)},$$

максимум которой по $A \in \mathcal{A}$ нужно найти. Если распределение случайных величин ε_i в (4.5) не нормальное, но N велико, то в силу центральной предельной теоремы распределение $\eta(A, \theta)$ приближенно нормальное (для любых $A \in \mathcal{A}$, $\theta \in \mathbb{R}^n$), и снова вероятность (4.9) можно характеризовать величиной $\kappa(A)$.

В общем случае распределение случайной величины $\chi(A, \theta)$ зависит от A , θ ; поэтому величина $\kappa(A)$ характеризует вероятность (4.9) лишь приближенно. Как принято говорить в подобных ситуациях, решение задачи максимизации $\kappa(A)$ по $A \in \mathcal{A}$ дает субоптимальное (квазиоптимальное) решение исходной экстремальной задачи (4.8).

Итак, заменяем экстремальную задачу (4.8) на экстремальную задачу нахождения матрицы

$$A^* = \arg \max_{A \in \mathcal{A}} \kappa(A), \quad EY = F\theta, \quad DY = \sigma^2 I_N, \quad \theta \neq 0. \quad (4.10)$$

При решении задач поиска экстремума функций, зависящих от параметров (в данном случае θ), обычно оказывается, что точка экстремума функции также зависит от параметров. Важной особенностью экстремальной задачи (4.10) является то, что удается найти такую точку (т. е. матрицу A^*), в которой достигается максимум функционала $\kappa(A) = \kappa(A, \theta)$ сразу при всех $\theta \neq 0$. Докажем это утверждение.

Теорема 4.1. При всех $\theta \neq 0$ выполнено

$$\max_{A \in \mathcal{A}} \kappa(A) = \sigma^{-1} (\theta^T F^T F \theta)^{1/2}, \quad (4.11)$$

причем указанный максимум достигается, в частности, на матрицах A^* вида

$$A^* = cF^T, \quad c > 0. \quad (4.12)$$

Доказательство. Имеем

$$E\chi(A) = E\theta^T AY = \theta^T AF\theta,$$

$$D\chi(A) = D\theta^T AY = \theta^T ADY (\theta^T A)^T = \sigma^2 \theta^T AA^T \theta.$$

Обозначим через $J(A)$ функционал

$$J(A) = \sigma^2 \kappa^2(A) = (\theta^T AF\theta)^2 / \theta^T AA^T \theta,$$

а через E произвольную $n \times N$ -матрицу. Учитывая тождество $\theta^T EA^T \theta = \theta^T AE^T \theta$, вычислим производную функционала J в точке

A по направлению E :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(A)}{\partial E} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-1} [J(A + \alpha E) - J(A)] = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-1} \left[\frac{(\theta^T A F \theta)^2 + 2\alpha \theta^T A F \theta \theta^T E F \theta + \alpha^2 (\theta^T E F \theta)^2}{\theta^T A A^T \theta + 2\alpha \theta^T E A^T \theta + \alpha^2 \theta^T E E^T \theta} - \frac{(\theta^T A F \theta)^2}{\theta^T A A^T \theta} \right] = \\ &= 2 \frac{\theta^T A F \theta}{(\theta^T A A^T \theta)^2} [\theta^T E (F \theta \theta^T A A^T \theta - A^T \theta \theta^T A F \theta)]. \end{aligned}$$

Опишем все матрицы A , при которых приведенная производная равна нулю при всех B . Выполнение соотношения $\partial J(A)/\partial E = 0$ для всех E эквивалентно тому, что выполнено одно из двух равенств:

$$\theta^T A F \theta = 0, \quad (4.13)$$

$$F \theta \theta^T A A^T \theta = A^T \theta \theta^T A F \theta. \quad (4.14)$$

Если выполнено (4.13), то $J(A) = 0$, и, следовательно, функционал J принимает минимальное значение (равное нулю). Поэтому будем считать, что (4.13) не выполнено, т. е. $\theta^T A F \theta \neq 0$. Соотношение (4.14) эквивалентно тому, что $A^T \theta = c F \theta$, где $c = \theta^T A A^T \theta / \theta^T A F \theta$ — действительное число. Подставляя в выражение для $J(A)$ вместо $A^T \theta$ значение $c F \theta$, получаем, что если для некоторых A, θ выполнено (4.14), то

$$J(A) = \theta^T F^T F \theta.$$

Отсюда следует (4.11) и то, что все матрицы A , для которых при некотором $\theta \neq 0$ выполнено (4.14), являются точками (матрицами) максимума функции $\kappa(A, \theta)$ при том же самом θ . Утверждение о том, что максимум функции $\kappa(A)$ достигается на матрицах вида (4.12), следует из (4.14). Теорема доказана.

Отметим, что из доказательства теоремы следует, что при любом фиксированном θ можно найти такую матрицу A , которая не представима в виде (4.12), но для которой справедливы (4.14) и, следовательно, (4.11). Матрицы же (4.12) являются единственными матрицами, для которых (4.14) и (4.11) выполняются сразу для всех $\theta \neq 0$.

Утверждение теоремы 4.1 состоит в том, что с точки зрения критерия оптимальности $\kappa(A)$ оптимальным направлением движения в классе направлений Ξ является

$$s^* = F^T Y / \|F^T Y\|, \quad (4.15)$$

которое по сравнению со стандартным вариантом выбора направления в методе крутого восхождения (получающегося из (4.6), (4.7)) обладает двумя очевидными дополнительными преимуществами: простотой вычисления и возможностью использования при $N \leq n$. Кроме того, выбор направления движения (4.15) минимально чувствителен к нарушению основного предположения о линейности регрессионной модели. Действительно,

(4.15) с точностью до скалярного множителя совпадает с вектором стандартных оценок метода Монте-Карло (см. гл. 8) вектора $\int x f(x) \mu_n(dx)$, который при стремлении функции $f(x)$ к линейной $\theta_0 + \theta^T x$ сходится к $\theta = \nabla f(x^{(k)})$.

4.3. Планирование эксперимента при использовании направления движения (4.15). Из утверждения теоремы 4.1 следует, что если направление движения $s = s_k$ в алгоритме (1.1) выбирать по формуле (4.15), то на каждом шаге нужно таким образом планировать эксперимент (т. е. выбирать точки наблюдений $z_1, \dots, z_N$), чтобы величина $\theta^T F^T F \theta$ была по возможности наибольшей.

Сформулируем задачу планирования в стандартном для теории планирования регрессионного эксперимента виде. Пусть ξ — произвольный непрерывный план на множестве планирования X ,

$$M(\xi) = \int_X x x^T \xi(dx) \quad (4.16)$$

есть нормированная информационная матрица плана ξ . Для дискретного плана

$$\xi_N = \left\{ \begin{matrix} z_1 & \dots & z_N \\ 1/N & \dots & 1/N \end{matrix} \right\},$$

соответствующего проведению измерений в точках $z_1, \dots, z_N$, матрица (4.16) имеет вид

$$M(\xi_N) = \frac{1}{N} F^T F = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i z_i^T.$$

Рассматривая задачу планирования в множестве непрерывных планов, имеем набор критериев

$$\Phi_\theta(M(\xi)) = \theta^T M(\xi) \theta,$$

зависящих от неизвестного параметра θ . Поскольку истинное значение θ неизвестно, то неизвестен и функционал Φ_θ , который должен быть максимизирован. Как обычно в подобных ситуациях, построим компромиссный критерий и его максимизируем. Двумя наиболее распространенными компромиссными критериями являются байесовский

$$\Phi_B(M(\xi)) = \int_{\Omega} \theta^T M(\xi) \theta v(d\theta) = \text{tr } M(\xi) \int_{\Omega} \theta \theta^T v(d\theta) \quad (4.17)$$

и минимаксный

$$\Phi_M(M(\xi)) = \min_{\theta \in \Omega} \theta^T M(\xi) \theta, \quad (4.18)$$

где Ω — множество, которому априори принадлежит неизвестный параметр θ , $v(d\theta)$ — вероятностная мера на множестве Ω , огражающая априорные сведения о неизвестном параметре.

Поскольку норма градиента (т. е. $\|\theta\|$) нас не интересует (оцениваем только направление), то можно считать, что

$$\Omega \subset S = \{\theta \in \mathbb{R}^n \mid \|\theta\| = 1\}.$$

При полном (или почти полном) отсутствии априорной информации о θ естественно выбирать S в качестве Ω и равномерную вероятностную меру на Ω в качестве $\nu(d\theta)$.

Если $\Omega = S$, то в силу одного из основных свойств экстремального собственного числа неотрицательно определенной матрицы (см. теорему 1.9 из приложения 1) выражение (4.18) совпадает с минимальным собственным числом матрицы $M(\xi)$, а минимаксный критерий Φ_M — с хорошо известным в классической теории регрессионного планирования критерием E -оптимальности, который состоит в максимизации минимального собственного числа информационной матрицы плана.

Для байесовского критерия (4.17) с точки зрения способа построения оптимального плана вид матрицы

$$L = \int_{\Omega} \theta \theta^T \nu(d\theta) \geq 0$$

значения не имеет. Структура непрерывных байесовских оптимальных планов легко может быть определена, если для этого использовать классическую теорему эквивалентности, разработанную в теории планирования регрессионного эксперимента для выпуклых дифференцируемых критериев оптимальности общего вида. Специфика задачи проявляется лишь в частном виде (4.17) критерия оптимальности.

Теорема 4.2. Множество непрерывных байесовских оптимальных (т. е. Φ_B -оптимальных) планов

$$\xi^* = \arg \max_{\xi} \operatorname{tr} LM(\xi) \quad (4.19)$$

совпадает с множеством вероятностных мер, заданных на множестве

$$X_* = \left\{ \arg \max_{x \in X} x^T L x \right\}. \quad (4.20)$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой эквивалентности (теоремой 2.1 из гл. 3) для байесовского критерия оптимальности

$$\Psi[M(\xi)] = -\Phi_B(\xi) = -\operatorname{tr} LM(\xi).$$

В рассмотренном случае функция $\psi(x, \xi)$ равна

$$\psi(x, \xi) = x^T \Psi'(M(\xi)) x = -x^T L x$$

(так как по формуле (3.10) приложения 1 $\partial \operatorname{tr} LM / \partial M = L$). Из теоремы эквивалентности вытекает, что в точках x^* плана (4.19) должно выполняться равенство

$$\begin{aligned} \Psi(x^*, \xi^*) &= \min_{x \in X} \psi(x, \xi^*) = -\max_{x \in X} x^T L x = \operatorname{tr} M(\xi^*) \Psi'(M(\xi^*)) = \\ &= -\operatorname{tr} LM(\xi^*), \end{aligned}$$

откуда следует, что все точки плана (4.19) принадлежат множеству (4.20). Теперь покажем, что любая вероятностная мера $\lambda(dx)$, сосредоточенная на множестве (4.20), является Φ_B -оптимальным планом. Действительно,

$$M(\lambda) = \int_{X_0} x x^T \lambda(dx),$$

$$\text{tr } LM(\lambda) = \text{tr } L \int_{X_0} x x^T \lambda(dx) =$$

$$= \int_{X_0} (\text{tr } L x x^T) \lambda(dx) = \int_{X_0} x^T L x \lambda(dx) = \max_{\xi} \text{tr } LM(\xi),$$

поскольку в силу доказанного выше во всех точках $x \in X_0$ выполнено равенство $x^T L x = \max_{\xi} \text{tr } LM(\xi)$. Теорема доказана.

Упражнения.

1. Сформулируйте условия, достаточные для сходимости алгоритма (1.1), в котором последовательность чисел $\{\gamma_k\}$ выбирается согласно процедуре, описанной в п. 4.1, а направления движений s_k — по формуле (4.15).

2. Решите уравнение (4.3) для случая, когда распределение ошибок измерений имеет плотность $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-|x|^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$.

3. Пусть $\theta = (1, 0, \dots, 0)^T$, $F^T F = I$. Найдите такую матрицу A , которая не представляется в виде (4.12), но для которой выполнено равенство (4.14). Покажите, что для найденной матрицы A при других значениях θ соотношение (4.14) может не выполняться.

4. Пусть $\Omega = \{\theta \in \mathbb{R}^n \mid \|\theta\| = 1\}$, $\nu(d\theta)$ — равномерная вероятностная мера на Ω . Вычислите $\int_{\Omega} \theta \theta^T \nu(d\theta)$. Постройте оптимальный байесовский план

$$\xi_D^* = \arg \min_{\xi \in \Xi} \Phi_B(M(\xi))$$

для множеств планирования $X = \Omega$, $X = [-1, 1] \times \dots \times [-1, 1]$. Здесь критерий Φ_B определяется по формуле (4.17).

Глава 7

ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА ПО ПРОВЕРКЕ ГИПОТЕЗ

В гл. 3—5 рассматривались задачи планирования эксперимента в ситуации, когда регрессионная модель задана и требуется наилучшим образом оценить неизвестные параметры этой модели. На практике уровень априорных знаний часто недостаточен для того, чтобы точно сформулировать модель, и приходится проводить дополнительный эксперимент, предназначенный для проверки гипотез о виде модели. В настоящей главе приведены некоторые результаты, касающиеся двух наиболее изученных постановок задач планирования по проверке гипотез — планирования дискриминирующих и отсеивающих экспериментов. Дискриминирующий эксперимент проводится с целью выявления из нескольких заданных регрессионных моделей истинной, а отсеивающий — для выявления из большого числа факторов заданной модели тех нескольких, которые почти полностью определяют изучаемую зависимость.

§ 1. Планирование дискриминирующих экспериментов

1.1. Постановка задачи. Предположим, что результаты измерений описываются регрессионной моделью.

$$y_i = \eta_i(x_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

где x_i — точки (не обязательно различные) проведения измерений; ε_i ($i = 1, \dots, N$) — взаимно независимые нормально распределенные случайные величины, $E\varepsilon_i = 0$, $D\varepsilon_i = \sigma^2$ ($i = 1, \dots, N$); η_i (истинная функция регрессии) совпадает с одной из двух функций

$$\eta_1(x, \theta_{(1)}), \quad \eta_2(x, \theta_{(2)}),$$

заданных с точностью до неизвестных параметров

$$\theta_{(j)} = (\theta_{j1}, \dots, \theta_{jm_j})^T \in \Omega_j, \quad j = 1, 2,$$

$\Omega_1 \subset R^{m_1}$ и $\Omega_2 \subset R^{m_2}$ — параметрические множества.

Для определенности предположим, что верна первая модель (т. е. $\eta_i(x) = \eta_1(x, \theta_i)$, θ_i — истинные значения неизвестных параметров первой модели).

Пусть эксперимент проведен по плану ξ . Тогда мерой удаленности второй модели от первой (истинной) может служить

$$\Delta_{12}(\xi) = \int_X [\eta_n(x) - \hat{\eta}_2(x, \xi)]^2 \xi(dx), \quad (1.1)$$

где $\hat{\eta}_j(x, \xi) = \eta_j(x, \hat{\theta}_{(j)})$, $\hat{\theta}_{(j)} = \hat{\theta}_{(j)}(\xi)$ ($j = 1, 2$) — МНК-оценка, построенная по плану ξ в предположении, что верна j -я модель. Если план ξ имеет вид

$$\xi = \xi_N = \left\{ \frac{x_1}{1/N}, \dots, \frac{x_N}{1/N} \right\}, \quad (1.2)$$

то

$$\hat{\theta}_{(j)} = \arg \min_{\theta_{(j)} \in \Omega_j} \sum_{i=1}^N [y_i - \eta_j(x_i, \theta_{(j)})]^2,$$

$$\Delta_{12}(\xi_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\eta_n(x_i) - \eta_2(x_i, \hat{\theta}_{(2)})]^2.$$

Величина (1.1) называется параметром нецентральности и показывает, насколько велика сумма квадратов отклонений истинной модели от конкурирующей.

Приведем хорошо известный факт математической статистики, показывающий, что параметр нецентральности можно выбрать в качестве критерия оптимальности плана эксперимента.

Обозначим через $L = L(\xi)$ отношение правдоподобия первой и второй моделей. Пусть план $\xi = \xi_N$ имеет вид (1.2), а ошибки измерений ε_i нормально распределены. Имеем

$$L = \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{\eta}_2(x_i, \xi))^2 - \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{\eta}_1(x_i, \xi))^2 \right] \right\}.$$

Проведем элементарные преобразования. Пусть оценки $\hat{\theta}_{(1)}$ и $\hat{\theta}_{(2)}$ фиксированы. Тогда имеем

$$\begin{aligned} E(y_i - \eta_j(x_i, \hat{\theta}_{(j)}))^2 &= E(\eta_n(x_i) - \eta_j(x_i, \hat{\theta}_{(j)}) - \eta_n(x_i) + y_i)^2 = \\ &= (\eta_n(x_i) - \eta_j(x_i, \hat{\theta}_{(j)}))^2 + E(y_i - \eta_n(x_i))^2; \\ 2\sigma^2 E \ln L &= E \left[\sum_{i=1}^N (y_i - \eta_2(x_i, \hat{\theta}_{(2)}))^2 - \sum_{i=1}^N (y_i - \eta_1(x_i, \hat{\theta}_{(1)}))^2 \right] = \\ &= \sum_{i=1}^N E(y_i - \eta_2(x_i, \hat{\theta}_{(2)}))^2 - \sum_{i=1}^N E(y_i - \eta_1(x_i, \hat{\theta}_{(1)}))^2 = \\ &= \sum_{i=1}^N (\eta_n(x_i) - \eta_2(x_i, \hat{\theta}_{(2)}))^2 + \sum_{i=1}^N E(y_i - \eta_n(x_i))^2 - \\ &- \sum_{i=1}^N (\eta_n(x_i) - \eta_1(x_i, \hat{\theta}_{(1)}))^2 - \sum_{i=1}^N E(y_i - \eta_n(x_i))^2 = \\ &= N\Delta_{12}(\xi_N) - \sum_{i=1}^N (\eta_n(x_i) - \eta_1(x_i, \hat{\theta}_{(1)}))^2. \end{aligned}$$

Используя теорему об асимптотической нормальности МНК-оценок (теорему 1.1 из гл. 5), получаем, что при выполнении ряда естественных условий последовательность величин

$$\sum_{i=1}^N (\eta_n(x_i) - \eta_l(x_i, \hat{\theta}_{(n)}))^2$$

при $N \rightarrow \infty$ по вероятности сходится к константе и поэтому стохастически ограничена. Таким образом,

$$E \ln L \sim \frac{N}{2\sigma^2} \Delta_{12}(\xi_N), \quad N \rightarrow \infty.$$

Следовательно, при больших N (а этот случай и рассматривается в дальнейшем), максимизируя по плану ξ параметр нецентральности (1.1), мы в среднем максимизируем (или почти максимизируем) логарифм отношения правдоподобия первой модели относительно второй. По логарифму же отношения правдоподобия строится оптимальная процедура проверки двух простых статистических гипотез.

План

$$\xi^* = \arg \max_{\xi \in \Xi} \Delta_{12}(\xi) \quad (1.3)$$

будем называть T_{12} -оптимальным. В качестве множества допустимых планов в (1.3) выбрано Ξ — множество всех непрерывных планов.

Так как минимизируемый функционал (1.1) зависит от того, какая модель верна и каковы истинные значения входящих в нее параметров, то и характеристики T_{12} -оптимальных планов зависят от указанных факторов. Поэтому априорное построение T_{12} -оптимальных планов невозможно. Эти планы играют в рассматриваемом случае такую же роль, какую играют локально оптимальные планы при оценивании неизвестных параметров нелинейной регрессии.

1.2. Теорема эквивалентности. С помощью приведенной ниже теоремы в ряде случаев удастся изучить свойства T_{12} -оптимальных планов.

Теорема 1.1. *Предположим, что X , Ω_1 , Ω_2 — компакты, η_j ($j = 1, 2$) непрерывны на $X \times \Omega_j$ и непрерывный план (1.3) единственный. Тогда необходимым и достаточным условием T_{12} -оптимальности непрерывного плана ξ^* является выполнение при всех $x \in X$ неравенства*

$$\varphi_{12}(x, \xi^*) \leq \Delta_{12}(\xi^*), \quad (1.4)$$

где

$$\varphi_{12}(x, \xi) = (\eta_1(x) - \eta_2(x, \theta_{(2)}(\xi)))^2. \quad (1.5)$$

При этом в точках плана ξ^* неравенство (1.4) превращается в равенство.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.2 из гл. 3 и предоставляется читателям.

Основной эвристический смысл теоремы 1.1 состоит в том, что эксперименты по выбору между моделями η_1 и η_2 следует проводить в тех точках $x \in X$, в которых функции η_1 и η_2 максимально различаются при наиболее подходящих значениях неизвестных параметров.

1.3. Построение непрерывных T_{12} -оптимальных планов. Для численного построения непрерывных T_{12} -оптимальных планов можно использовать аналоги алгоритмов 4.1—4.3 из гл. 3, единственным изменением в которых будет вид функции φ . Аналог алгоритма 4.1 из гл. 3 имеет следующий вид.

Алгоритм 1.1.

1) Имеем план ξ_s . Отыскиваем точку

$$x_{(s)} = \arg \max_{x \in X} \varphi_{12}(x, \xi_{(s)}).$$

2) Строим план

$$\xi_{s+1} = (1 - \gamma_s) \xi_s + \gamma_s \xi(x_{(s)})$$

и переходим к шагу 1) с заменой s на $s + 1$.

Последовательность $\{\gamma_s\}$ выбирается по тем же правилам, что и в § 4 гл. 3. Сходимость алгоритма 1.1 и его модификаций обосновывается так же, как и сходимость алгоритма 4.1 из гл. 3.

Приведем пример аналитического построения T_{12} - и T_{21} -оптимальных планов.

Пример 1.1.

$$\eta_1(x) = \gamma, \quad X = [-1, 1], \quad \theta_{(2)} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T,$$

$$\eta_2(x) = \theta_1 + \theta_2 x + \theta_3 x^2, \quad \Omega_2 = \{\theta_{(2)} | \theta_1^2 + \theta_2^2 \geq 1, \theta_2 \geq 0, \theta_3 \geq 0\},$$

$$\Delta_{12}(\xi) = \min_{\theta_{(2)} \in \Omega_2} \int [\gamma - (\theta_1 + \theta_2 x + \theta_3 x^2)]^2 \xi(dx).$$

Ясно, что указанный минимум для любого плана ξ достигается при $\theta_1^2 + \theta_3 = 1$.

Построим T_{12} -оптимальный план в классе планов вида

$$\xi(p) = \begin{Bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ p/2 & 1-p & p/2 \end{Bmatrix}$$

(т. е. выберем оптимальное p), а затем с помощью теоремы 1.1 убедимся в его оптимальности. Имеем

$$\begin{aligned}\Delta_{12}(\xi(p)) &= \min_{\theta_1, \theta_2, \theta_3 = \sqrt{1-\theta_1^2}} \left[\frac{1}{2} p (\gamma - \theta_1 + \theta_2 - \theta_3)^2 + \right. \\ &\quad \left. + (1-p)(\gamma - \theta_1)^2 + \frac{1}{2} p (\gamma - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3)^2 \right] = \\ &= \min_{\theta_1, |\theta_2| \leq 1} \left[\frac{1}{2} p (\gamma - \theta_1 + \theta_2 - \sqrt{1-\theta_1^2})^2 + \right. \\ &\quad \left. + (1-p)(\gamma - \theta_1)^2 + \frac{1}{2} p (\gamma - \theta_1 - \theta_2 - \sqrt{1-\theta_1^2})^2 \right] = \\ &= \min_{\theta_1, |\theta_2| \leq 1} [p(\gamma - \theta_1 - \sqrt{1-\theta_1^2})^2 + p\theta_2^2 + (1-p)(\gamma - \theta_1)^2].\end{aligned}$$

Дифференцируя выражение под знаком минимума по θ_1 и θ_2 и приравнявая производные нулю, получаем, что минимум равен $\Delta_{12}(\xi(p)) = p(1-p)$ и достигается в единственной точке

$$\hat{\theta}_1 = \gamma - p, \quad \hat{\theta}_2 = 0, \quad \hat{\theta}_3 = 1.$$

Таким образом, оптимальное значение p равно $1/2$, и $\hat{\theta}_{(2)} = (\gamma - 1/2, 0, 1)^T$.

Теперь проверим, что план

$$\xi^* = \begin{Bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{Bmatrix}$$

T_{12} -оптимален. Действительно,

$$\begin{aligned}\varphi_{12}(x, \xi^*, \hat{\theta}_{(2)}) &= (\gamma - (\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 x + \hat{\theta}_3 x^2))^2 = \\ &= \left(\gamma - \left(\gamma - \frac{1}{2} - x^2 \right) \right)^2 = \left(\frac{1}{2} - x^2 \right)^2; \quad \Delta_{12}(\xi^*) = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Следовательно, неравенство (1.4) выполняется, и план ξ^* является T_{12} -оптимальным.

Теперь построим T_{21} -оптимальный план:

$$\begin{aligned}\Delta_{21}(\xi) &= \min_{\gamma} \int (\gamma - \theta_1 - \theta_2 x - \theta_3 x^2) \xi(dx) = \int (\theta_2 x + \theta_3 x^2)^2 \xi(dx) = \\ &= \theta_2^2 \left\{ \int (x + \delta x^2)^2 \xi(dx) - \left[\int (x + \delta x^2) \xi(dx) \right]^2 \right\},\end{aligned}$$

где $\delta = \theta_2/\theta_3$, $\hat{\theta}_{(1)} = \gamma = \theta_1$. Далее,

$$\varphi_{21}(x, \xi) = \theta_2^2 \left\{ \int (x + \delta x^2) \xi(dx) + x + \delta x^2 \right\}^2.$$

В соответствии с утверждением теоремы 1.1 точки T_{21} -оптимального плана должны совпадать с точками, в которых функция φ_{21} достигает максимума. Такими точками являются $x_1 = 1$, $x_2 = 1/(4\delta)$. Теперь на основании теоремы 1.1 убеждаемся, что веса этих точек в оптимальном плане равны $1/2$.

1.4. Последовательное планирование. Поскольку заранее неизвестны ни номер истинной модели, ни истинные значения соответствующих параметров, априорное построение T_{12} -оптимальных планов невозможно (неясно даже, какой из критериев оптимальности T_{12} или T_{21} нужно использовать). Поэтому целесообразно использовать последовательные планы, которые (так же как и планы для нелинейной регрессии) можно строить с помощью двух различных стратегий. Аналог алгоритма 3.1 из гл. 5 имеет следующий вид.

Алгоритм 1.2.

1) Имеется эксперимент из N наблюдений, проведенных в соответствии с планом ξ_N вида (1.2). Находим оценки $\hat{\theta}_{(1)}(\xi_N)$ и $\hat{\theta}_{(2)}(\xi_N)$ по формуле

$$\hat{\theta}_j(\xi_N) = \arg \min_{\theta_{(j)} \in \Theta_j} \sum_{i=1}^N (y_i - \eta_j(x_i, \theta_{(j)}))^2, \quad j = 1, 2.$$

2) Отыскиваем точку

$$x_{N+1} = \arg \max_{x \in X} [\eta_1(x, \hat{\theta}_{(1)}(\xi_N)) - \eta_2(x, \hat{\theta}_{(2)}(\xi_N))]^2.$$

3) Проводим $(N+1)$ -е наблюдение в точке x_{N+1} .

4) Переходим к шагу 1) с заменой N на $N+1$.

Начальный план ξ_N следует выбирать так, чтобы оценки $\hat{\theta}_{(j)}(\xi_N)$ определялись единственным образом.

Соображения, лежащие в основе алгоритма 1.2, просты и наглядны: наблюдения проводятся там, где функции $\eta_j(x, \hat{\theta}_{(j)})$ максимально различаются.

1.5. Линейная параметризация. Предположим, что конкурирующие модели линейны по параметрам, т. е.

$$\eta_{(j)}(x, \theta_{(j)}) = \theta_{(j)}^T f_{(j)}(x), \quad j = 1, 2.$$

Предположим также, что экспериментатор располагает априорными распределениями $F_j(d\theta_{(j)})$ неизвестных параметров $\theta_{(j)}$ и априорными вероятностями π_j истинности моделей ($j = 1, 2$). В этом случае оптимальным будем считать план

$$\xi^* = \arg \max_{\xi} \delta(\xi), \quad (1.6)$$

где

$$\delta(\xi) = \sum_{j=1}^2 \pi_j \int \Delta_{jk}(\xi) F_j(d\theta_{(j)}), \quad k \neq j, \quad k = 1, 2.$$

План (1.6) называется байесовским дискриминирующим.

Для линейного случая при отсутствии ограничений на параметры $\theta_{(j)}$ параметр нецентральности Δ_{jk} в предположении верности j -й модели имеет вид

$$\Delta_{jk}(\xi) = \alpha_{(j)}^T M_{(k)}(\xi) \theta_{(j)}, \quad (1.7)$$

где

$$M_{(k)}(\xi) = M_{jj}(\xi) - M_{jk} M_{kk}^{-1}(\xi) M_{kj}(\xi),$$

$$M_{jk}(\xi) = \int f_{(j)}(x) f_{(k)}^T(x) \xi(dx).$$

Из (1.7) следует, что

$$\delta(\xi) = \sum_{j=1}^2 \pi_j \operatorname{tr} M_{(k)}(\xi) [D_j + \theta_{0j} \theta_{0j}^T], \quad (1.8)$$

где $k = 3 - j$ (т. е. $k \neq j$, $k = 1, 2$),

$$\theta_{0j} = \int_{\Omega_j} \theta_{(j)} F(d\theta_{(j)}), \quad D_j = \int_{\Omega_j} (\theta_{(j)} - \theta_{0j})(\theta_{(j)} - \theta_{0j})^T F_j(d\theta_{(j)}).$$

Экстремальная задача (1.6), (1.8) может быть рассмотрена в рамках подхода гл. 3. Для этого достаточно ввести матрицу

$$M(\xi) = \begin{bmatrix} M_{11}(\xi) & M_{12}(\xi) \\ M_{21}(\xi) & M_{22}(\xi) \end{bmatrix}$$

и рассматривать (1.8) как выпуклую функцию от $M(\xi)$.

Упражнения.

1. Постройте T_{12} - и T_{21} -оптимальные планы для функций регрессии

$$\eta_1(x) = \gamma, \quad \eta_2(x) = \theta_1 + \theta_2 x, \quad x \in [-1, 1], \quad \theta_2 \geq 1.$$

2. Сформулируйте теорему эквивалентности для линейных по неизвестным параметрам функций регрессии η_1 и η_2 .

3. Покажите, что функционал $\Delta_{12}(\xi)$ является выпуклым на множестве непрерывных планов Ξ .

4. Докажите справедливость формулы

$$\frac{\partial \Delta_{12}((1-\alpha)\xi_1 + \alpha\xi_2)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \int_X \varphi_{12}(x, \xi_1) \xi_2(dx) - \int_X \varphi_{12}(x, \xi_1) \xi_1(dx),$$

где функция $\varphi_{12}(x, \xi)$ определяется по формуле (1.5).

5. Используя результаты упражнений 3, 4 и необходимое и достаточное условие оптимальности на с. 105, докажите теорему 1.1.

6. Сформулируйте и докажите теорему эквивалентности для критерия оптимальности (1.8).

§ 2. Планирование отсеивающих экспериментов

2.1. Основные понятия. Для многих явлений, зависящих от большого числа факторов, естественно предположить существование небольшого числа значимых факторов (эффектов), которые управляют явлением, а влияние остальных факторов считать не превосходящим ошибку эксперимента. Эксперименты по поиску значимых факторов называются *отсеивающими*, а теория их планирования — *теорией отсеивающих экспериментов*.

Одна из постановок задачи отсеивающего эксперимента такова. Имеется функция отклика (регрессии) $\eta(x, \theta)$, зависящая от управляемых переменных (факторов) $x = (x(1), \dots, x(t))^T$

и неизвестных параметров $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)^T$. Предполагается, что функция отклика зависит от $s < t$ значимых факторов $x(\lambda_i)$, $1 \leq \lambda_i \leq t$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ ($i, j = 1, \dots, s$) т. е. существует такая функция $\bar{\eta}(x(\lambda_1), \dots, x(\lambda_s), \theta)$, что справедливо равенство

$$\eta(x, \theta) = \bar{\eta}(x(\lambda_1), \dots, x(\lambda_s), \theta).$$

С помощью как можно меньшего числа N вычислений функции η (возможно, со случайной ошибкой) в точках $x_1, \dots, x_N$ нужно найти номера значимых факторов. Если последние найдены правильно, то обычно не представляет труда найти хорошие оценки для θ . Целью отсеивающего эксперимента является получение решения об истинности одной из большого числа обычно равноправных гипотез и о номерах значимых параметров.

Как правило, не имеет смысла говорить о близости найденных номеров значимых параметров к истинным: представляется необходимым точно определить номера значимых факторов. Поэтому цель теории отсеивающих экспериментов отличается от цели теории планирования экспериментов по оцениванию параметров, где нужно определять приближенные оценки истинных параметров.

Если N и x_i ($i = 1, \dots, N$) зависят от результатов предыдущих экспериментов, то планирование называется *последовательным*. Если $x_1, \dots, x_N$ заданы до начала проведения экспериментов, то планирование называется *статическим*. Несмотря на большее число необходимых экспериментов, статическое планирование часто предпочтительнее с точки зрения приложений, поскольку оно позволяет, например, проводить эксперименты параллельно.

Планы, в соответствии с которыми требуется проводить число измерений N , меньшее чем общее число факторов t , называются *сверхнасыщенными*. Сущностью теории отсеивающего эксперимента является изучение возможностей создания и само создание таких стратегий планирования для широкого класса практически важных моделей, которые для отсеивания несущественных факторов требуют существенно меньшего, чем t , числа измерений. Оказывается (соответствующие общие результаты приведены в [16]), что при достаточно общих предположениях о виде модели существуют такие планы, которые требуют для отсеивания незначимых факторов всего лишь $C(s) \ln t$ ($t \rightarrow \infty$) измерений, где $C(s)$ — константа, не зависящая от t .

Иллюстрацией последовательного планирования отсеивающих экспериментов является следующая процедура, широко используемая в медицинской практике.

Пример 2.1. Вместо индивидуального обследования крови большой группы доноров для выявления редкого заболевания исследуются небольшие группы. Проверка позволяет обнаружить наличие или отсутствие больных в группе. Полному обследованию далее подвергается только кровь доноров из тех групп,

в которых было обнаружено заболевание. Во многих случаях указанная процедура требует значительно меньшего числа анализов, чем процедура полного индивидуального обследования.

Формальная схема примера 2.1 выглядит следующим образом. Занумеруем доноров числами от 1 до t , эксперименты (состоящие в проверке при наличии заболевания крови некоторой группы доноров) — числами от 1 до N ; будем говорить, что i -й эксперимент дал результат $\eta_i = 1$, если замечено наличие инфекции в i -й группе, и $\eta_i = 0$ в противном случае.

В данном примере статический план эксперимента определяется матрицей размера $N \times t$, состоящей из элементов $x_i(j)$ ($i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, t$), где $x_i(j) = 1$, если в i -м эксперименте проверялась кровь j -го донора, $x_i(j) = 0$ в противном случае.

Пусть число больных доноров равно s ($s < t$), а их номера есть

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)^T, \quad \lambda_1 < \dots < \lambda_s;$$

совокупность всевозможных номеров λ обозначим $\Lambda(s, t)$. Результат эксперимента (вычисляемый без случайной ошибки) η_i есть функция от $x_i(\lambda) = (x_i(\lambda_1), \dots, x_i(\lambda_s))$, а именно логическая сумма (дизъюнкция) величин $x_i(\lambda_1), \dots, x_i(\lambda_s)$:

$$\eta_i = \begin{cases} 0, & \text{если } x_i(\lambda_j) = 0 \text{ для всех } j = 1, \dots, s, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

По указанной причине рассмотренная модель называется *дизъюнктивной*. Планирование для дизъюнктивной модели рассматривается в п. 2.5.

Приведенная схема может быть обобщена в трех направлениях: а) возможна другая зависимость η_i от $x_i(\lambda)$; б) существуют случайные погрешности при измерении η_i , которые независимы при различных измерениях и определяются некоторыми распределениями вероятностей; в) исследуются планы, обеспечивающие восстановление λ с достаточно большой вероятностью.

Общая модель отсеивающего эксперимента такова. Пусть имеется s существенных факторов из общего их количества t ; номера существенных факторов $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ переводятся планом, т. е. $N \times t$ матрицей с элементами

$$x_i(j) \in B = \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, t,$$

в s -набор столбцов

$$a(1) = x(\lambda_1), \dots, a(s) = x(\lambda_s)$$

плана и затем в столбец значений функции отклика $\eta_i = \eta(a_i(1), \dots, a_i(s))$. Распределение измерений $y_i \in Y$ определяется переходными вероятностями

$$P_x(dy_i | \eta_i) = P_x(dy_i | x_i(\lambda_1), \dots, x_i(\lambda_s)).$$

Ошибка происходит, если набор значимых факторов восстановлен неверно. Эта ошибка зависит от плана, неизвестного набора значимых факторов и решающей функции, т. е. отображения

$$d: B^{Nt} \times Y^N \rightarrow [t]^s,$$

где $B^{Nt} = B^{N \times t}$ — множество $(N \times t)$ -планов, $[t]^s = [t] \times \dots \times [t]$

$[t] = \{1, 2, \dots, t\}$. При фиксированном плане и заданном s решением, для которого вероятность ошибки минимальна, является решение максимальной апостериорной вероятности

$$\delta = \arg \max_{\lambda \in [t]^s} P_s(y | x(\lambda_1), \dots, x(\lambda_s)). \quad (2.1)$$

Для того чтобы точно определить (2.1), необходимо сравнить вероятности $P_s(y | x(\lambda))$ для всех $\lambda \in [t]^s$, что требует числа операций не менее, чем порядка $t^s \ln t$.

При вполне реальных для приложений величинах $t \cong 10^4$, $s \cong 10$ имеем $t^s \cong 10^{40}$, а такое количество операций современным ЭВМ недоступно. Поэтому на практике целесообразно использовать либо приближенные решения экстремальной задачи (2.1), либо упрощенные процедуры построения решений. При этом, естественно, при фиксированном числе измерений несколько возрастает вероятность ошибки. Примером упрощенной процедуры построения решения является пофакторный анализ, суть которого состоит в том, что для каждого фактора в отдельности проверяется гипотеза о его значимости, при этом действие других значимых факторов считается «случайным фоном».

Одной из наиболее распространенных постановок задач оптимального планирования в теории отсеивающего эксперимента является следующая. Предположим, что на множестве

$\mathfrak{X} = \bigcup_{x=1}^t [t]^s$ всех возможных комбинаций для значимых факторов задано априорное распределение Q и фиксирована процедура построения решения. План, позволяющий выделить все значимые факторы со средней по распределению Q вероятностью ошибки, не превосходящей γ , называется γ -разделяющим при $\gamma \geq 0$ и *сильно разделяющим* при $\gamma = 0$. В данном случае *оптимальным планом отсеивания* называется γ -разделяющий план минимальной длины. Экстремальная задача нахождения такого плана вполне определена, но она, вообще говоря, настолько сложна, что общие численные методы для ее решения даже не использовались (это связано также с тем, что общие численные методы поиска глобального экстремума на дискретных множествах, подобных $\mathfrak{X}$, развиты слабо). Для этой и подобных ей постановок задач отсеивающего эксперимента в достаточно общих случаях неконструктивными методами получены верхние и нижние оценки границ минимальных длин статических и последовательных планов (в простейших случаях эти границы выведены

п. п. 2.3, 2.4). Что касается конкретных оптимальных или близких к оптимальным планов, то эти планы построены только для некоторых частных (но практически важных) моделей и критериев оптимальности. Несколько подобных планов изучено ниже.

2.2. Комбинаторная модель поиска А. Реньи. Опишем сначала общую логическую задачу, которая называется (*дискретным*) *поиском*. Пусть дано конечное множество

$$X = \{x_1, \dots, x_n\} \quad (2.2)$$

с некоторым фиксированным, но неизвестным элементом $x_i = \theta$, который нужно найти. Для поиска элемента θ проводится серия из N экспериментов (проверок), каждый из которых состоит в следующем: выбирается подмножество $A_i \subset X$ ($i = 1, \dots, N$) и проверяется, принадлежит θ множеству A_i или нет. Проверки должны быть организованы таким образом, чтобы по результатам этих проверок (т. е. по двоичной последовательности длины N ответов «да», «нет») можно было бы однозначно найти неизвестный элемент θ .

Примерами реальных процедур поиска, сводящихся к описанной, являются дискретные варианты большинства алгоритмов поиска локального экстремума одномерных функций и корня уравнения, а также поиск нужной карточки в каталоге библиотeki, радиолокационный поиск, поиск неисправности в приборе.

В рамках общей постановки задачи планирования отсеивающих экспериментов, рассмотренной в п. 2.1, эта постановка задачи соответствует ситуации, когда $Y = \{0, 1\}$, модель дизъюнктивная, ошибки измерений отсутствуют, имеется только один значимый фактор, возможны некоторые ограничения на выбор плана, а рассматриваемые стратегии поиска должны быть сильно разделяющимися. К данной постановке может быть сведена задача поиска нескольких значимых факторов (за счет значительного увеличения n), если известно их число или известна верхняя граница для этого числа.

Рассматриваемая постановка является, таким образом, одной из простейших постановок задач планирования отсеивающих экспериментов. Тем не менее методы получения верхних и нижних границ для длин оптимальных стратегий планирования (поиска) в данной постановке типичны для всей теории и поэтому ниже (п. п. 2.3, 2.4) подробно изучены.

Если все множества A_i ($i = 1, \dots, N$) в приведенной стратегии поиска выбираются независимо от результатов предыдущих $i - 1$ проверок, то стратегия называется *статической*, в противном случае — *последовательной*. Часто удобно использовать *случайные* (рандомизованные) стратегии поиска, в которых выбор всех или части проверок определяется посредством реализации некоторого дополнительного случайного эксперимента.

В классе стратегий поиска, приводящих к однозначному восстановлению неизвестного элемента θ , лучше та стратегия, дли-

на N которой меньше. При этом последовательные стратегии в отличие от статических имеют две характеристики длительности: максимальное $N^{\max}$ и среднее по априорному распределению N число экспериментов плана.

Следуя работам А. Реньи, формализуем задачу планирования экспериментов по поиску неизвестного элемента θ .

Модель А. Реньи задается классом $\mathcal{F}$ функций, определяемых на множестве (2.2) и принимающих два значения: 0 и 1. Каждой из N групповых проверок соответствует функция $f \in \mathcal{F}$, причем результат этой проверки есть $f(\theta)$, где единице соответствует «да», а нулю — «нет». Ясно, что $\mathcal{F}$ состоит из конечного множества функций, т. е.

$$\mathcal{F} = \{f_1(x), \dots, f_k(x)\}, \quad x \in X,$$

а каждая функция $f_i(x)$ ($i = 1, \dots, k$) из этого класса есть характеристическая функция некоторого множества $A_i \subset X$:

$$f_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A_i, \\ 0, & \text{если } x \notin A_i. \end{cases}$$

Приведем два основных класса функций $\mathcal{F}$, используемых в дальнейшем.

Пример 2.2. $\mathcal{F} = \mathcal{F}_n^*$ — совокупность всевозможных характеристических функций наборов из элементов множества $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ длины s . Здесь $k = C_n^s$.

Пример 2.3. Полный класс функций $\mathcal{F} = \mathcal{F}_n$ — совокупность всех $k = 2^n$ функций на множестве (2.2).

Функции из класса $\mathcal{F}$ часто удобно отождествлять с двоичными n -мерными векторами

$$f_i(x) \leftrightarrow \bar{f}_i = (f_{i1}, \dots, f_{in})^T, \quad i = 1, \dots, k,$$

где

$$f_{ij} = f_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_j \in A_i, \\ 0, & \text{если } x_j \notin A_i. \end{cases}$$

В этой терминологии $\mathcal{F}$ — некоторое подмножество множества всех n -мерных двоичных векторов. В частности, любой вектор из $\mathcal{F}_n^*$ содержит ровно s единиц и $n - s$ нулей.

Если в i -м эксперименте проверяется множество $A_{k_i} \subset X$, то результаты проверок представляют собой двоичный N -набор

$$\eta(\theta) = (\eta_1(\theta), \dots, \eta_N(\theta)),$$

где

$$\eta_i(\theta) = f_{k_i}(\theta), \quad i = 1, \dots, N, \quad k_i \in \{1, \dots, k\},$$

а стратегия поиска однозначно определяется набором чисел $k_1, \dots, k_N$ (причем для последовательных стратегий N может зависеть от θ).

Требование *однозначного восстановления* для стратегии поиска выглядит следующим образом: для любых $\theta, \bar{\theta} \in X$ выполнено $\eta(\theta) \neq \eta(\bar{\theta})$.

По определению класс функций $\mathcal{F}$ называется *разделяющим* на множестве (2.2), если для любых $x_i, x_j \in X$ ($i \neq j$) существует такая функция $f \in \mathcal{F}$, что $f(x_i) \neq f(x_j)$.

Очевидно, что в классе функций $\mathcal{F}$ тогда и только тогда существует стратегия поиска, удовлетворяющая условию однозначного восстановления, когда этот класс функций разделяющий.

Свойство разделяемости системы функций $\mathcal{F}$ можно сформулировать так. Образует $k \times n$ -матрицу $F = \{f_{ij}\}$, строки которой соответствуют функциям класса $\mathcal{F}$. Свойство разделяемости означает, что все столбцы матрицы F различны.

Построение статической стратегии для проведения N измерений, обладающей свойством однозначного восстановления, эквивалентно построению такой $N \times n$ -матрицы A , составленной из строк матрицы F , что все ее столбцы различны (это следует из того, что в j -м столбце матрицы A содержатся результаты проверок в предположении $\theta = x_j$). Матрица A называется *матрицей плана*.

Длиной оптимальной статической стратегии поиска в классе функций $\mathcal{F}$ называется величина $N_{\min}^{(ст)}(\mathcal{F})$ — минимально возможное число строк, которое можно выбрать из матрицы $F = \{f_{ij}\}$ таким образом, чтобы в составленной из этих строк матрице все столбцы были различны.

Аналогично определяется $N_{\min}^{(н)}(\mathcal{F})$ — длина оптимальной (в минимаксном смысле) последовательной стратегии в классе $\mathcal{F}$.

Очевидно, что всегда $N_{\min}^{(н)}(\mathcal{F}) \leq N_{\min}^{(ст)}(\mathcal{F})$.

2.3. Нижние границы длины оптимальной стратегии поиска в модели А. Реньи. В этом пункте приведены способы получения нижних границ длин оптимальных стратегий поиска для модели из п. 2.2. Эти способы могут быть обобщены и использованы для получения подобных результатов в более общих постановках задач планирования отсеивающих экспериментов.

Для вывода упомянутых границ нам понадобятся простейшие свойства энтропии — одного из фундаментальных понятий математической теории информации.

Пусть на множестве $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ задано распределение вероятностей $Q(dx)$:

$$q_i = Q\{x = x_i\} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n q_i = 1.$$

Энтропией Шеннона (двоичной) распределения Q называется величина

$$H(Q) = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i,$$

где выражения типа $0 \log_2 0$ следует считать равными нулю.

Очевидно, что для любого распределения вероятностей Q выполняется неравенство $H(Q) \geq 0$, и равенство достигается в том

и только том случае, когда распределение вероятностей Q сосредоточено в одной точке.

Лемма 2.1. Для всех распределений Q , заданных на множестве $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, выполняется неравенство $H(Q) \leq \log_2 n$ и равенство достигается тогда и только тогда, когда $q_i = 1/n$ ($i = 1, \dots, n$), т. е. при равномерном распределении Q .

Доказательство. Рассмотрим разность

$$H(Q) - \log_2 n = - \sum_{i=1}^n q_i \log_2 q_i + \sum_{i=1}^n q_i \log_2 \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n q_i \log_2 \frac{1}{nq_i}.$$

При всех $t > 0$, $t \neq 1$ справедливо строгое неравенство $\ln t < t - 1$. Поэтому

$$q_i \ln \frac{1}{nq_i} \leq q_i \left(\frac{1}{nq_i} - 1 \right) = \frac{1}{n} - q_i,$$

где равенство имеет место только при $q_i = 1/n$; следовательно,

$$\ln 2 (H(Q) - \log_2 n) \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} - \sum_{i=1}^n q_i = 0,$$

откуда и вытекает утверждение леммы. Лемма доказана.

Пусть теперь множество X является произведением двух множеств: $X_1 = \{x_1^{(1)}, \dots, x_{n_1}^{(1)}\}$ и $X_2 = \{x_1^{(2)}, \dots, x_{n_2}^{(2)}\}$. Распределение вероятностей Q на $X = X_1 \times X_2$ определяется вероятностями

$$q_{ij} = Q\{x_i^{(1)}, x_j^{(2)}\}, \quad i = 1, \dots, n_1, \quad j = 1, \dots, n_2.$$

Положим

$$q_i^{(1)} = \sum_{j=1}^{n_2} q_{ij}, \quad q_j^{(2)} = \sum_{i=1}^{n_1} q_{ij}.$$

Обозначим через Q_1 и Q_2 распределения вероятностей на X_1 и X_2 , определяемые соответственно вероятностями $q_i^{(1)}$ ($i = 1, \dots, n_1$) и $q_j^{(2)}$ ($j = 1, \dots, n_2$). Распределения Q_1 и Q_2 называются *маргинальными*.

Лемма 2.2. Пусть $X = X_1 \times X_2$. Тогда в приведенных обозначениях выполнено неравенство $H(Q) \leq H(Q_1) + H(Q_2)$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда распределения Q_1 и Q_2 определяют независимые случайные величины на X_1 и X_2 , т. е. когда $p_{ij} = p_i^{(1)} p_j^{(2)}$ для всех $i = 1, \dots, n_1$, $j = 1, \dots, n_2$.

Доказательство. Имеем

$$H(Q) = - \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} q_{ij} \log_2 q_{ij},$$

$$H(Q_1) = - \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} q_{ij} \log_2 q_i^{(1)}, \quad H(Q_2) = - \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} q_{ij} \log_2 q_j^{(2)}.$$

Отсюда

$$H(Q) - (H(Q_1) + H(Q_2)) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} q_{ij} \log_2 \frac{q_i^{(1)} q_j^{(2)}}{q_{ij}}.$$

Применяя неравенство $\ln t \leq t - 1$, получаем, что для всех $i = 1, \dots, n_1, j = 1, \dots, n_2$ имеет место неравенство

$$q_{ij} \ln \frac{q_i^{(1)} q_j^{(2)}}{q_{ij}} \leq q_{ij} \left(\frac{q_i^{(1)} q_j^{(2)}}{q_{ij}} - 1 \right) = q_i^{(1)} q_j^{(2)} - q_{ij},$$

где равенство достигается лишь в случае $q_i^{(1)} q_j^{(2)} = q_{ij}$.

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \ln 2 |H(Q) - (H(Q_1) + H(Q_2))| &\leq - \sum_{i,j} q_{ij} + \sum_{i,j} q_i^{(1)} q_j^{(2)} = \\ &= -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следствие 2.1 (свойство субаддитивности энтропии Шеннона). Пусть $X = X_1 \times \dots \times X_N$, распределение Q задано на X , и пусть Q_i ($i = 1, \dots, N$) — маргинальные распределения, заданные на X_i . Тогда

$$H(Q) \leq \sum_{i=1}^N H(Q_i),$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда распределения $Q_1, \dots, Q_N$ определяют взаимно независимые случайные величины.

Утверждение следствия вытекает из леммы 2.2.

Перейдем к выводу нижних границ длин оптимальных стратегий поиска.

Учитывая лишь требование однозначного восстановления, имеем, что для длины N любой стратегии, удовлетворяющей этому требованию, справедливо неравенство $2^N \geq n$, поскольку число исходов такой стратегии не может быть меньше числа гипотез. Отсюда вытекает следующее неравенство, справедливое для любого класса функций $\mathcal{F}$:

$$N_{\min}^{(\mathcal{F})} \geq N_{\min}^{(n)}(\mathcal{F}) \geq \lceil \log_2 n \rceil, \quad (2.3)$$

где $\lceil a \rceil$ — наименьшее целое, большее или равное a .

Очевидно, что, чем шире класс функций $\mathcal{F}$, тем точнее нижняя граница (2.3). Покажем, что для полного класса функций $\mathcal{F} = \mathcal{F}_n$ в (2.3) достигается равенство. Для доказательства этого достаточно предъявить такую матрицу плана A размера $\lceil \log_2 n \rceil \times n$, составленную из строк матрицы F , чтобы ее столбцы были различны. Для полного класса функций такой матрицей является матрица A , столбцы которой, занумерованные в порядке возрастания, являются двоичными разложениями чисел $1, 2, \dots, n$.

Теперь покажем, как для вывода нижних границ величин $N_{\min}^{(\mathcal{F})}(\mathcal{F})$ могут быть использованы идеи теории информации.

Предположим, что на множестве X задано распределение $Q(d\theta)$ для неизвестных значений θ :

$$q_i = Q\{\theta = x_i\} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^n q_i = 1.$$

В такой интерпретации θ можно рассматривать как случайную величину на X , а для любой $f \in \mathcal{F}$ результат проверки $f(\theta)$ — как случайную величину на множестве $Y = \{0, 1\}$.

Пусть

$$H(Q) = - \sum_{i=1}^n q_i \log_2 q_i$$

есть энтропия Шеннона распределения Q . В частности, если $Q = Q_0$ — равномерное распределение, т. е.

$$Q(x_i) = q_i = 1/n, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.4)$$

то

$$H(Q) = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \log_2 (1/n) = \log_2 n.$$

Для всех $f \in \mathcal{F}$ примем обозначение $a(f) = P\{f(\theta) = 1\}$. Тогда

$$h(f(\theta)) = -a(f) \log_2 a(f) - (1 - a(f)) \log_2 [1 - a(f)]$$

есть энтропия случайной величины $f(\theta)$. Примем обозначение

$$R(Q, \mathcal{F}) = \max_{f \in \mathcal{F}} h(f(\theta)).$$

Теорема 2.1. Для любого класса функций $\mathcal{F}$ справедливо неравенство

$$N_{\min}^{(\mathcal{F})}(\mathcal{F}) \geq H(Q)/R(Q, \mathcal{F}), \quad (2.5)$$

где Q — произвольное распределение на X .

Доказательство. Пусть статическая стратегия, определяемая набором функций $f_{k_1}(x), \dots, f_{k_N}(x)$ из $\mathcal{F}$, обладает свойством однозначного восстановления. Столбцы $N \times n$ -матрицы плана $A = \{f_{k_i}(x_j)\}$ можно рассматривать как случайные величины $f_{k_i}(\theta)$, а саму матрицу A — как случайный вектор $\zeta = (f_{k_1}(\theta), \dots, f_{k_N}(\theta))^T$, принимающий значения на множестве Y^N . Поскольку значение θ однозначно связано со значением вектора ζ , то и соответствующие энтропии равны: $H(\theta) = H(\zeta)$. В силу свойства субаддитивности энтропии (см. следствие 2.1) имеем

$$H(\zeta) = H(f_{k_1}(\theta), \dots, f_{k_N}(\theta)) \leq \sum_{i=1}^N H(f_{k_i}(\theta)) \leq NR(Q, \mathcal{F}),$$

откуда следует (2.5). Теорема доказана.

Поскольку $H(Q)$ максимальна для распределения (2.4), то и в (2.5) обычно рассматривают равномерное распределение Q_0 : неравенство принимает вид

$$N_{\min}^{(cr)}(\mathcal{F}) \geq (\log_2 n)/R(Q_0, \mathcal{F}). \quad (2.6)$$

Для класса $\mathcal{F} = \mathcal{F}_n^s$ выполняется равенство

$$R(Q_0, \mathcal{F}_n^s) = h\left(\frac{s}{n}\right). \quad (2.7)$$

где $h(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x)$ есть энтропия Шеннона случайного эксперимента с двумя исходами, имеющими вероятности x и $1-x$. Поэтому для $\mathcal{F} = \mathcal{F}_n^s$ неравенство (2.6) принимает вид

$$N_{\min}^{(cr)}(\mathcal{F}_n^s) \geq (\log_2 n)/h(s/n). \quad (2.8)$$

Поскольку при $0 < x < 1/2$ справедливо условие $0 < h(x) < 1$, то при $0 < s < n/2$ оценка (2.8) точнее для класса $\mathcal{F}_n^s$ оценки (2.3).

В следующем утверждении показано, что для класса $\mathcal{F}_n^s$ с помощью комбинаторных рассуждений может быть построена оценка, которая для малых s еще более точна, чем (2.8).

Теорема 2.2. Для любых n и s имеет место неравенство

$$N_{\min}^{(cr)}(\mathcal{F}_n^s) \geq \left\lceil \frac{2(n-1)}{s+1} \right\rceil. \quad (2.9)$$

Доказательство. Для плана, определяемого $N \times n$ -матрицей A , общее число единиц в этой матрице равно Ns . Пусть c_i ($i = 0, 1, \dots, N$) — число столбцов матрицы A , содержащих i единиц. Имеем

$$Ns = \sum_{i=0}^N i c_i \geq c_1 + 2 \sum_{i=2}^N c_i \geq c_1 + 2(n - c_0 - c_1),$$

поскольку $\sum_{i=0}^N c_i = n$. Так как все столбцы в A должны быть различны, $c_0 \leq 1$, $c_1 \leq N$. Поэтому $Ns \geq 2(n-1) - N$, откуда и следует (2.9). Теорема доказана.

2.4. Метод случайного планирования в модели А. Реньи. Для классов функций $\mathcal{F}$, которые удовлетворяют введенному ниже условию однородности, А. Реньи получил верхние оценки длин оптимальных статических стратегий поиска для модели из п. 2.2. Разработанный им метод получил название *метода случайного планирования*. В дальнейшем этот метод был существенно обобщен, в результате чего были получены верхние границы длин оптимальных статических стратегий планирования отсеивающих экспериментов в достаточно общих постановках. Соответствующие утверждения получили название *теорем существования*, поскольку в них доказывается существование плана

с некоторой длиной, но не указывается способ построения такого плана.

По определению класс функций

$$\mathcal{F} = \{f_1(x), \dots, f_k(x)\}$$

называется *однородным*, если для любых $x_i, x_j \in X$ ($i \neq j$) число k_1 функций $f \in \mathcal{F}$, таких, что $f(x_i) = f(x_j)$, не зависит от i, j ($i, j = 1, \dots, n$).

Примерами однородных классов функций являются $\mathcal{F}_n$ и $\mathcal{F}_n^s$ (покажите!).

Рассмотрим схему статического случайного планирования: в i -м эксперименте функция $f_{k_i}(x) \in \mathcal{F}$ выбирается случайно и равновероятно, т. е.

$$P\{k_i = j\} = 1/k, \quad j = 1, \dots, k,$$

причем случайные величины $k_1, \dots, k_N$ взаимно независимы.

Ясно, что при любом N по набору $f_{k_1}(\theta), \dots, f_{k_N}(\theta)$ не всегда возможно однозначно восстановить θ . Обозначим через $P(n, N, \mathcal{F})$ вероятность неоднозначного восстановления θ при указанном выборе функций f_{k_i} .

Теорема 2.3. Если класс функций $\mathcal{F}$ однороден и $n \geq 4$, то

$$P(n, N, \mathcal{F}) < C_n^2 (k_1/k)^N. \quad (2.10)$$

Доказательство. Рассмотрим $N \times n$ -матрицу $A = \|a_{ij}\|$, где

$$a_{ij} = f_{k_i}(x_j), \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n.$$

Столбцы $a^{(i)} = (a_{i1}, \dots, a_{iN})^T$ этой матрицы представляют собой значения случайно выбранных функций в экспериментах при условии, что их аргумент $x = x_j$. По определению $P(n, N, \mathcal{F})$ — вероятность того, что хотя бы одна пара таких столбцов совпадает между собой. Поскольку общее число пар столбцов равно C_n^2 и

$$P\{a^{(i)} = a^{(l)}\} = (k_1/k)^N, \quad j \neq l,$$

то, оценивая вероятность суммы событий суммой их вероятностей, получаем нестрогое неравенство, соответствующее (2.10). Строгое неравенство в (2.10) следует из того, что события $\{m^{(i)} = m^{(l)}\}$ ($j \neq l$) при $n \geq 4$ не являются попарно непересекающимися. Это легко заметить при рассмотрении элементарного события, соответствующего случаю, когда во всех проверках участвует одна и та же функция. Теорема доказана.

Следствие 2.2. При $n \geq 4$ для однородного класса функций $\mathcal{F}$ справедливо неравенство

$$N_{\min}^{(1)}(\mathcal{F}) \leq \left\lceil \frac{\ln C_n^2}{\ln(k/k_1)} \right\rceil. \quad (2.11)$$

Доказательство. Если в методе случайного планирования выбрать такое $N_0 \geq 1$, что

$$C_n^2(k_1/k)^{N_0} \leq 1, \quad (2.12)$$

то в силу теоремы 2.3 для рассматриваемого класса функций $P(n, N_0, \mathcal{F}) < 1$. Следовательно, существует по крайней мере одна матрица A с числом строк не более N_0 и определяющая статическую стратегию поиска, обладающую свойством однозначного восстановления. Неравенство (2.11) следует из (2.12). Следствие доказано.

Пример 2.4. Полный класс функций $\mathcal{F} = \mathcal{F}_n$ (см. пример 2.2). Для этого класса функций, как показано в п. 2.3, $N_{\min}^{(\text{cr})}(\mathcal{F}_n) = \lceil \log_2 n \rceil$. Число функций $f \in \mathcal{F}_n$ таких, что $f(x_i) = f(x_j) = 0$, и таких, что $f(x_i) = f(x_j) = 1$, одинаково и равно 2^{n-2} . Поэтому $\mathcal{F}_n$ — однородный класс функций, для которого $k_1 = 2^{n-1}$, а неравенство (2.11) принимает вид

$$N_{\min}^{(\text{cr})}(\mathcal{F}_n) \leq \lceil \log_2 C_n^2 \rceil.$$

Правая часть этого неравенства асимптотически (при $n \rightarrow \infty$) равна $2 \log_2 n (1 + o(1))$; поэтому для полного класса функций метод случайного планирования дает оценку для $N_{\min}^{(\text{cr})}(\mathcal{F}_n)$, которая при больших n завышена примерно в два раза.

Пример 2.5. Класс функций $\mathcal{F} = \mathcal{F}_n^s$. Этот класс функций однородный, причем

$$k_1/k = \frac{s}{n} \left(\frac{s-1}{n-1} \right) + \left(1 - \frac{s}{n} \right) \left(1 - \frac{s}{n-1} \right), \quad k = C_n^s.$$

Неравенство (2.11) при $n \rightarrow \infty$, $s = \lceil np \rceil$ для любого $0 < p < 1/2$ превращается в асимптотическое неравенство

$$N_{\min}^{(\text{cr})}(\mathcal{F}_n^s) \leq \frac{2 \log_2 n}{h(p)} (1 + o(1)),$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{h}(p) &= -\log_2 \lceil p^2 + (1-p)^2 \rceil \leq h(p) = \\ &= -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p). \end{aligned}$$

Учитывая (2.8), при $n \rightarrow \infty$, $s = \lceil np \rceil$ получаем

$$\frac{\log_2 n}{h(p)} (1 + o(1)) \leq N_{\min}^{(\text{cr})}(\mathcal{F}_n^s) \leq \frac{2 \log_2 n}{h(p)} (1 + o(1)).$$

2.5. Планирование эксперимента для дизъюнктивной модели. Описываемые ниже алгоритмы планирования отсеивающих экспериментов для дизъюнктивной модели широко используются на практике, в частности при поиске нескольких дефектных элементов из большого их числа и в схеме примера 2.1.

Предположим, что задана дизъюнктивная модель и известно, что число значимых факторов не превосходит s ($s \ll t$). Задачи

оценки верхних и нижних границ оптимальных стратегий можно решить с помощью результатов п. п. 2.3, 2.4. Действительно, дизъюнктивную модель можно рассматривать как модель

А. Реньи, в которой $n = \sum_{i=1}^s C_i^t$, а неизвестный элемент θ — подмножество целых чисел от 1 до t , содержащее не более s элементов. Класс функций $\mathcal{F}$ при этом содержит, как следует из определения дизъюнктивной модели, $k = 2^t$ функций, что существенно меньше, чем 2^n (число функций полного класса).

Сначала опишем алгоритм последовательного планирования при условии, что число значимых факторов известно и равно $s \geq 1$.

В первом эксперименте для проверки выбираются первые 2^i факторов, где i определяется из неравенства

$$2^i \leq t/s - 1 < 2^{i+1}. \quad (2.13)$$

Если такого i нет (в случае $t < 2s$), то полагается $i = 0$.

Если результат эксперимента равен нулю, то среди первых факторов нет значимых, и эти факторы из рассмотрения исключаются. Если результат эксперимента — единица, то среди первых 2^i факторов есть по крайней мере один значимый; выделим его i проверками методом деления пополам.

Вторая группа экспериментов аналогична первой, только ищется либо s значимых факторов среди $t - 2^i$ факторов, либо $s - 1$ значимых факторов среди $t - 1$ факторов. Остальные группы экспериментов проводятся аналогично.

Легко доказать (докажите!), что если $s = 1$, то максимальное число экспериментов $N(t, s)$, необходимое для определения значимого фактора с помощью приведенной стратегии, равно $\lceil \log_2 t \rceil$, и поэтому при $s = 1$ стратегия является оптимальной.

Можно показать также, что при $s > 1$ максимальное число экспериментов лишь на небольшое (зависящее от s) число отличается от нижней границы $N^*(t, s)$ для максимального числа произвольной стратегии, которую легко вычислить с помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям п. 2.3.

Л е м м а 2.2. Для приведенного алгоритма

$$N^*(t, s) = \sum_{i=1}^s \log_2(t - s + i) - \log_2 s!$$

Доказательство. Всего существует C_t^s способов выбора s значимых факторов из t — общего их числа. Множество возможных исходов произвольных N экспериментов равно 2^N , и это число в силу требования однозначного восстановления не меньше C_t^s :

$$2^N \geq C_t^s = (t - s + 1)(t - s + 2) \dots (t - 1)t/s!,$$

откуда

$$\begin{aligned} N &\geq \log_2 [1(t-1) \dots (t-s+1)] - \log_2 s! = \\ &= \sum_{i=1}^s \log_2 (t-s+i) - \log_2 s!. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

2.6. Линейная регрессионная модель. Рассмотрим задачу планирования эксперимента по отсеиванию факторов в схеме линейной регрессии. Эта задача является одной из тех задач отсеивающего эксперимента, которые наиболее часто встречаются на практике.

Предположим, что функция регрессии имеет вид

$$\eta(x) = \theta_0 + \theta_1 x(1) + \dots + \theta_t x(t), \quad (2.14)$$

где $x = (x(1), \dots, x(t))^T$, а результат измерения в точке $x_j = (x_j(1), \dots, x_j(t))^T$ — случайная величина $y_j = \eta(x_j) + \varepsilon_j$, где $E\varepsilon_j = 0$, $De_j = \sigma^2$ и ошибки измерений $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ некоррелированы. *Значимым* называется такой фактор $x(i)$, для которого отличен от нуля соответствующий ему коэффициент θ_i .

В задачах отсеивающего эксперимента обычно достаточно предполагать, что факторы варьируются только на двух уровнях, т. е. $x_j(i) \in \{-1, 1\}$.

Задача планирования отсеивающего эксперимента состоит в таком выборе точек x_j ($j = 1, \dots, N$), по результатам измерений y_j в которых можно было бы с наибольшей точностью выделить значимые факторы.

Если общее число факторов t невелико, то для отсеивания незначимых факторов функции регрессии (2.14) можно использовать стратегию, согласно которой строится невырожденный статический план ξ_N для проведения $N > t$ измерений и с помощью, например, t -критерия (см. п. 1.6 гл. 1) проверяется гипотеза о значимости каждого фактора в отдельности. В качестве плана ξ_N обычно выбирают либо дробную реплику полного факторного эксперимента (см. гл. 2), либо один из так называемых планов Плэкета — Бермана. Планы Плэкета — Бермана по свойствам аналогичны дробным репликам, но могут быть построены почти для любых $N \leq 100$, кратных 4, а не только для N вида 2^k . Каталог планов Плэкета — Бермана имеется в [19].

Отметим, что для того, чтобы указанная стратегия была математически строго обоснованной, необходимо после отсеивания каждого из факторов пересчитывать все используемые статистики (в том числе и МНК-оценки); в противном случае статистики не будут соответствовать моделям.

Если число факторов t велико, а число N измерений четно и мало, то относительно хорошие результаты получаются при использовании случайных планов и проверки с помощью t -критерия гипотезы о значимости каждого фактора в отдельности, считая действия всех других факторов входящими в случайный

фон. Указанный способ проверки гипотезы о значимости факторов называется *пофакторным анализом*. При построении случайных планов в рассмотренной стратегии необходимо учитывать, что значения различных факторов $x(i)$ выбираются независимо друг от друга; каждый фактор принимает $N/2$ раз значение $+1$ и $N/2$ раз значение -1 ; значения каждого фактора перемешаны случайно. Другими словами, значения каждого фактора в случайном плане находятся путем случайного выбора без возвращения из $N/2$ чисел $+1$ и $N/2$ чисел -1 . Сформулированный метод построения случайных планов называется *методом случайного баланса*.

МНК-оценка параметра θ_i ($i = 1, \dots, t$), получающаяся при игнорировании всех факторов, кроме $x(i)$, равна

$$\hat{\theta}_i = (\bar{y}_{+i} - \bar{y}_{-i})/2, \quad (2.15)$$

где $\bar{y}_{+i}$ и $\bar{y}_{-i}$ — средние арифметические результатов измерений y_i в $N/2$ точках, где фактор $x(i)$ принимает значения $+1$ и -1 соответственно. Положим

$$X_i = (x_1(i), \dots, x_N(i))^T, \quad i = 1, \dots, t.$$

Тогда $N \times t$ -матрица плана X записывается в виде $X = (X_1, \dots, X_t)$. Пусть матрица плана X фиксирована. Тогда легко считаются среднее, дисперсия и среднеквадратичная ошибка оценок (2.15):

$$E(\hat{\theta}_i | X) = \theta_i + N^{-1} \sum_{i \neq j} \theta_j X_i^T X_j, \quad (2.16)$$

$$D(\hat{\theta}_i | X) = E(\hat{\theta}_i^2 | X) - E^2(\hat{\theta}_i | X) = \sigma^2/N, \quad (2.17)$$

$$E[(\hat{\theta}_i - \theta_i)^2 | X] = \sigma^2/N + \left(\sum_{i \neq j} \theta_j X_i^T X_j \right)^2 / N^2. \quad (2.18)$$

Ортогональность столбцов X_i и X_j матрицы плана $X = (X_1, \dots, X_t)$ означает, что выполнено равенство

$$X_i^T X_j = 0, \quad i \neq j. \quad (2.19)$$

Если бы все столбцы матрицы плана X были ортогональны, то оценка (2.15) была бы несмещенной и обладала наименьшей среднеквадратичной ошибкой для всех $i = 1, \dots, t$. В случае $N < t$ этого достичь невозможно.

Степень неортогональности плана обозначим величиной

$$\max_{i \neq j} |X_i^T X_j| \quad (2.20)$$

Для случайных планов степень их ортогональности (2.20) может быть большой — с ненулевой вероятностью даже равной N . Если для проверки гипотез о значимости факторов использовать пофакторный анализ, то в силу сказанного выше критерием оптимальности плана является степень его неортогональности,

которую следует минимизировать. Сверхнасыщенные планы, для которых степень неортогональности (2.20) минимальна, называются *планами Буса — Кокса*. Эти планы могут быть построены только численно; таблица таких планов содержится в [19].

Рассмотренные планы отсеивания являются статическими. Для отсеивания незначимых факторов линейной регрессионной модели (2.14) могут быть использованы и последовательные планы. Наиболее распространенной последовательной стратегией является стратегия *двухстадийного группового отсеивания*, которая состоит в следующем.

Сначала все факторы (каждый из которых принимает значения только на двух уровнях) делятся на некоторое число групп. Эти группы принимаются за новые факторы и называются *групповыми факторами*. Считается, что групповой фактор принимает значение на верхнем (нижнем) уровне, если все входящие в эту группу факторы принимают значения на том же уровне. Первая стадия состоит в отсеивании незначимых групповых факторов, а вторая — в отсеивании незначимых факторов из тех групп, соответствующие которым групповые факторы оказались значимыми. На обеих стадиях обычно используют упомянутые выше планы Плэкета — Бермана.

Делить факторы на группы следует таким образом, чтобы априорная вероятность их значимости была небольшой и приблизительно одинаковой.

Рассмотренная стратегия двухстадийного группового отсеивания имеет два основных недостатка. Первый состоит в том, что общее число измерений N , требуемое для отсеивания всех незначимых факторов, случайно. Второй заключается в том, что групповой фактор может оказаться незначимым, хотя некоторые из входящих в него одиночных факторов значимы; например, пусть в группу входят два значимых фактора $x(i)$ и $x(j)$, коэффициенты перед которыми θ_i и θ_j по модулю равны, но по знаку противоположны. Второй недостаток можно устранить, если знать предположительные знаки параметров θ_i ($i = 1, \dots, t$) и в одну группу включать факторы, которые не взаимодействуют и знаки параметров θ_i , которых одинаковы.

Упражнения.

1. Сформулируйте задачу поиска карточки в каталоге библиотеки как задачу поиска в комбинаторной модели А. Реньи.

2. Предположим, что имеется одномерная функция f , константа Липшица которой известна, и требуется с точностью $\varepsilon > 0$ найти корень уравнения $f(x) = 0$. Предложите такой алгоритм решения этой задачи, который можно было бы рассматривать как алгоритм поиска в комбинаторной модели А. Реньи.

3. Докажите, что классы функций $\mathcal{F}_n$ и $\mathcal{F}_n^s$, описанные в примерах 2.2 и 2.3, являются однородными.

4. Исследуйте метод случайного планирования для классов функций $\mathcal{F}_n$ и $\mathcal{F}_n^s$ в случае, когда случайный выбор функций производится без возвращения (таким способом получаются верхние границы минимальных длин последовательных стратегий).

5. Докажите, используя результат предыдущего упражнения, что для последовательных стратегий в классе функций $\mathcal{F}_n^s$ при всех $s \leq n/2$ справедливо равенство

$$N_{\min}^{(n)}(\mathcal{F}_n^s) = m + \lceil \log_2(n - sm) \rceil$$

где $m = \lfloor n/s \rfloor - 2$.

6. Пусть $\tilde{\mathcal{F}}_n^s$ — класс индикаторов подмножеств множества $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, содержащих не более s элементов. Докажите, что при всех $s \leq n/2$ выполнено равенство

$$N_{\min}^{(st)}(\tilde{\mathcal{F}}_n^s) = N_{\min}^{(st)}(\mathcal{F}_n^s).$$

Указание. Для доказательства необходимо показать следующее. Если в $N \times n$ -матрице, состоящей из нулей и единиц, все n столбцов различны, а в некоторой ее строке число единиц равно $s' < s$, то в этой строке всегда можно найти $s - s'$ нулей, после замены которых на единицы все столбцы новой $N \times n$ -матрицы оказываются различными.

7. Докажите, что если число значимых факторов дизъюнктивной модели равно единице, то максимальное число экспериментов, необходимое для определения значимого фактора с помощью приведенной в п. 2.5 стратегии поиска, равно $\lceil \log_2 t \rceil$, вследствие чего стратегия является оптимальной.

8. Пусть для приведенной в п. 2.5 стратегии поиска значимых факторов вместо неравенства (2.13) используется неравенство $2^t \leq (t+1)/s - 1 < 2^{t+1}$. Докажите, что максимальное число экспериментов $N_*(t, s)$ в получающейся процедуре групповых проверок равно $N^*(t+1, s)$, где $N^*(t, s)$ определено в формулировке леммы 2.1.

9. Предположим, что функция регрессии η имеет вид (2.14), где $\sigma^2 = 1$, $t = 6$, $\theta_1 = \theta_2 = 1$, а остальные параметры θ_i равны нулю. Постройте дробную реплику 2^{6-3} полного факторного эксперимента, из таблицы нормально распределенных случайных чисел (приложение 2) выберите восемь чисел, считая их случайными ошибками измерений. Постройте МНК-оценки параметров θ_i и с помощью t -критерия проверьте гипотезы о значимости этих параметров.

10. Пусть схема измерений та же, что и в предыдущем примере. Постройте случайный план для проведения $N = 6$ измерений и проведите по факторный анализ.

Указание. Для построения случайного плана можно воспользоваться таблицей нормально распределенных чисел следующим образом. Для каждого фактора значения уровней определяются по знаку последовательно выбранного из таблицы нормально распределенного случайного числа. В тот момент, когда в число уровней фактора войдет $N/2$ плюс или минус единица, остальные уровни выбираются однозначно из условия равенства количеств $+1$ и -1 .

11. Для схемы измерений, рассмотренной в предыдущем упражнении, постройте пять случайных планов и выберите среди них тот, степень неортогональности которого меньше. Проведите по нему пофакторный анализ с теми же ошибками измерений, что и в предыдущем примере, и сравните полученные результаты.

12. Проверьте справедливость формул (2.16)–(2.18), не используя результаты гл. 1.

13. Пусть план X случайный, т.е. получен по методу случайного баланса. Докажите, используя формулы (2.16)–(2.18) и независимость X от случайных ошибок измерений, что

$$E\hat{\theta}_i = \theta_i,$$

$$D\hat{\theta}_i = (N-1)^{-1} \sum_{j=1}^t \theta_j^2 + \sigma^2/N, \quad i = 1, \dots, t,$$

где $\hat{\theta}_i$ — оценки (2.15).

Глава 8

ПЛАНИРОВАНИЕ ИМИТАЦИОННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Данная глава посвящена теории планирования имитационного эксперимента. В § 1 определяется имитационный эксперимент и приводятся примеры имитационных моделей. Поскольку при имитации наибольший интерес представляют средние значения (математические ожидания) некоторых характеристик моделей, то при планировании эксперимента используются в основном те же средства, что и при оптимизации процедур статистического моделирования. Последние подробно описаны в руководствах по статистическому моделированию, и здесь мы ограничились лишь простейшими из известных методов. Задача оценивания нескольких математических ожиданий рассмотрена в § 2. Оказывается, что при оценивании многих характеристик модели, задача выбора оптимальной плотности требует для своего решения тех же средств, что и задачи гл. 3.

§ 1. Имитационный эксперимент

1.1. Понятие «имитационный эксперимент». Появление быстродействующих вычислительных машин позволило создать и развить новую отрасль экспериментирования — вычислительный эксперимент. Понятие «вычислительный эксперимент» как новая область применения ЭВМ впервые было сформулировано Дж. фон Нейманом в 1945 г. в связи с моделированием (вычислением) траекторий нейтронов. В дальнейшем вычислительный эксперимент неоднократно переоткрывался по мере внедрения ЭВМ в различные области науки и техники. При этом выделились два наиболее четко определенных класса экспериментов. Эксперименты, использующие описание исследуемого объекта с помощью уравнений, и эксперименты, использующие непосредственное (формальное) описание объекта. Первый класс в конечном счете сводится ко второму. Так, например, решать уравнение теплопроводности можно, моделируя (имитируя) броуновское движение молекул, т. е. вычисляя последовательно местоположение этих молекул.

Мы далее будем исходить из предположения, что вычислительный эксперимент проводится с объектами, имеющими наи-

более детальное возможное описание. Такой эксперимент мы будем называть *имитационным*.

Во всех случаях описание объекта полагается в основу программы для ЭВМ, которая по заданным исходным данным вычисляет характеристики исследуемой системы. Эти характеристики (наборы чисел) и являются результатом одиночного эксперимента. Они могут содержать случайную погрешность или только погрешность, обусловленную процедурой округления чисел.

Проведение имитационного эксперимента с помощью ЭВМ складывается из следующих этапов.

1. Описание явления или процесса, подлежащего моделированию.

2. Определение количественных характеристик, доступных наблюдению или измерению.

3. Проведение необходимых упрощений, выбор типа модели (т. е. создание собственно математической модели).

4. Перевод модели на язык ЭВМ — выбор языка программирования и создание программы.

5. Анализ результатов расчета. Сравнение с результатами натурного эксперимента или косвенными данными, имеющимися в распоряжении исследователя.

Таким образом, имитационный эксперимент — это воспроизведение с помощью ЭВМ модели функционирования некоторой реальной системы. Модели, изучение которых проводится с помощью имитационного эксперимента, отличаются от других моделей (например, моделей, допускающих аналитическое исследование) возможностью наиболее полного учета всех факторов, связанных с данным явлением.

Моделирование с помощью ЭВМ получило в настоящее время широкое распространение и используется в самых разнообразных отраслях науки и производства.

Модели принято подразделять на детерминированные и вероятностные.

Пример 1.1. Простейшим примером детерминированной модели может служить модель системы, описываемой дифференциальным уравнением или системой таких уравнений. Так, малые колебания маятника (точка массой m находится на конце стержня длиной l , другой конец которого закреплен так, что маятник в целом может отклоняться на угол θ) описываются дифференциальным уравнением

$$ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgl\theta = 0,$$

где t — время, g — ускорение силы тяжести.

Примером такого же типа является широко известное описание распространения тепла в стержне с помощью уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T(t, x)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T(t, x)}{\partial x^2},$$

где T — температура, x — координата точки стержня, a — константа, определяемая свойствами материала.

Детерминированные модели описанного выше типа исследуются аналитически, если они достаточно просты, и с использованием ЭВМ, если вместо одного уравнения в описании модели фигурируют, например, системы большого числа уравнений и искомые функции зависят от большого числа переменных. Имитационный эксперимент с помощью ЭВМ состоит для таких моделей в численном решении соответствующих уравнений. При этом, как правило, требуется замена исходной системы уравнений разностной системой или другая дискретизация, что вносит дополнительную погрешность, обусловленную не существом задачи, а выбором численного метода.

Примерами вероятностных моделей могут служить в первую очередь системы массового обслуживания (СМО). Такие системы часто невозможно исследовать другими способами, кроме имитационного моделирования. Простейшие СМО характеризуются:

а) Случайным потоком заявок. Заявки поступают в случайные моменты времени (которые образуют скачкообразный процесс).

б) Случайным временем обслуживания. Каждая заявка либо застаёт обслуживающее устройство свободным и немедленно начинает обслуживаться, либо становится в очередь. Либо время обслуживания, либо интервалы между поступлениями заявок могут быть детерминированы, но, когда детерминированы и время, и интервалы, задача не представляет интереса.

Современные ЭВМ снабжены датчиками случайных чисел. Мы будем считать далее, что датчик — это программа, которая при обращении к ней присваивает указанной переменной значение, равное реализации равномерно распределенной на $[0, 1]$ случайной величины (с точностью, определяемой разрядностью ЭВМ). Далее с помощью известных приемов, описанных в руководствах по статистическому моделированию, по одной или некоторому множеству реализаций равномерно распределенной случайной величины могут быть получены реализации случайной величины или случайного вектора с заданными законами распределения.

Все это позволяет строить имитационную модель случайного процесса, протекающего в СМО, наблюдая изменения ее состояний во времени.

Пример 1.2. Имитационная модель размещения туристов в гостинице. При проектировании современных туристических комплексов важно заранее предвидеть узкие места в обслуживании. С этой целью предварительно моделируют процесс обслуживания. При моделировании размещения туристов в реальной или проектируемой гостинице необходимо задать:

1. Закон, по которому прибывают туристы, и интервалы времени между прибытием отдельных туристов или групп. Обычно такой закон задают, исходя из статистической обработки реаль-

ных потоков туристов. Он зависит от вида транспорта и расписания прибытия поездов, самолетов и т. п.

2. Распределение вероятностей категорий туристов (иностранцы, правительственные делегации, крупные группы и т. п.)

3. Количество свободных мест в гостинице в начальный момент времени.

4. Время оформления туриста, которое зависит от категории туриста и ряда других факторов.

Модель может быть более или менее подробной. Обычно в ЭВМ хранятся сведения о туристах, размещенных и находящихся в процессе размещения в определенные моменты времени (например, каждые 20 мин.). Каждую количественную характеристику модели можно рассматривать как случайный процесс и применять для обработки данных методы, разработанные в статистике случайных процессов. Моделирование, подобное описанному, применяется для решения вопросов о числе мест в проектируемой гостинице, числе лифтов, размере холла, численности персонала и т. п.

Пример 1.3. Более прозрачным является пример моделирования прохождения частиц (γ -квантов, нейтронов и т. п.) через вещество. Здесь тоже могут быть модели разного уровня сложности. Простейшая из них может быть описана следующим образом.

Каждая частица характеризуется моментом времени t , пространственными координатами $r = (x, y, z)$, направлением движения $\Omega = (u, v, w)$ — единичным вектором ($u^2 + v^2 + w^2 = 1$) и энергией E (или модулем скорости).

Обычно частица движется в веществе, занимающем объем V с границей S , которое мы для простоты считаем однородным набором атомов. Экспериментально устанавливается распределение длины свободного (без столкновений с атомами вещества) пробега l частицы. Обычно это экспоненциальное распределение с плотностью вероятностей $\Sigma(E)\exp\{-l\Sigma(E)\}$, где $\Sigma(E)$ — заданная (полученная экспериментально) функция энергии.

Если частица взаимодействовала с атомом вещества (столкнулась), то она либо поглощается (погибает), либо меняет свою энергию E , направление полета Ω и движется далее по тем же законам, что и раньше. Для полного представления о модели такого рода опишем подробно алгоритм моделирования в гипотетическом простейшем случае. Обозначим через $\alpha_i, \alpha_{i,j}$ ($i, j = 1, 2, \dots$) равномерно распределенные случайные числа.

Алгоритм строится следующим образом.

1) Полагают $t = 0$, а r, E и Ω находят, моделируя их совместное распределение. В простейшем случае может быть $r = r_0, \Omega = \Omega_0, E = E_0$ — точечный (в точке r_0) мононаправленный (в направлении Ω_0), моноэнергетический (с энергией E_0) источник. Полагают также $m = 0$ (m — номер столкновения), $n = 0$ (n — общее число просмотренных историй частиц).

2) Находят пробег до столкновения l_m , моделируя плотность $\Sigma(E_m)e^{-\Sigma(E_m)t_m}$, т. е. $l_m = \frac{1}{\Sigma(E_m)} (-\ln \alpha_{l_1}^{(m)})$. Полагают $r_{m+1} = r_m + l_{m+1}\Omega_m$, l_m делится на модуль скорости движения частицы $|v|$. Находим $t_{m+1} = t_m + l_m|v|^{-1}$.

3) Если r_{m+1} находится внутри объема V , то переходим к шагу 4); в противном случае добавляем единицу к счетчику частиц, покинувших объем, и переходим к шагу 7.

4) С вероятностью $p(E_m) = \Sigma_n(E_m)/\Sigma(E_m)$ частица поглощается, а с вероятностью $1 - p(E_m)$ рассеивается (здесь p и Σ_n — заданные функции). Если происходит поглощение, то переходим к шагу 7), если рассеивание — к шагу 5).

5) Подсчитываем $E_{m+1} = \alpha_j E_m$ (такой закон изменения энергии выбран для примера) и Ω_{m+1} . Величина Ω_{m+1} строится (в нашем примере) независимо от r , E , t , а Ω_m — как изотропное направление:

$$u = \cos 2\pi\alpha_{j_1} \sin 2\pi\alpha_{j_2},$$

$$v = \cos 2\pi\alpha_{j_1} \cos 2\pi\alpha_{j_2},$$

$$w = \sin 2\pi\alpha_{j_1}.$$

6) Заменяем m на $m + 1$ и переходим к шагу 2).

7) Увеличиваем на единицу счетчик общего числа рассмотренных частиц, проверяем, не превзошло ли его содержимое заданного числа N . Если нет, то переходим к шагу 1), если да, то прекращаем расчет.

В результате моделирования можно оценить следующие, выбранные нами, характеристики: вероятность поглощения примерно равна k_1/N и вероятность выхода из системы примерно равна $1 - k_1/N$, где k_1 — число поглотившихся частиц. В соответствии с законом больших чисел k_1/N при $N \rightarrow \infty$ сходится к соответствующей вероятности.

Большое количество примеров детерминированных математических моделей можно найти в учебниках по физике, механике жидкости и газа и т. п. Примеры статистических моделей содержатся в курсах теории вероятностей и статистического моделирования. И те и другие модели широко используются в физике, химии, биологии, медицине, социологии и других областях науки и техники.

Рассмотренный нами пример 1.3, как легко видеть, представляет собой пример моделирования марковского процесса. Состояние частицы в момент времени t_{m+1} зависит только от состояния в предшествующий момент t_m . В этом случае сравнительно легко записать в явном виде переходную плотность.

Значительно труднее классифицировать случайный процесс примера 1.2. Модели такого типа обычно состоят из блоков, взаимодействующих между собой. Каждый из таких блоков может быть удобным образом описан случайным процессом определенного типа или детерминированным образом (в виде конеч-

ного автомата). Обычно блоки подсистемы, на которые разбиваются сложные системы массового обслуживания, описываются скачкообразными марковскими процессами, вероятностными или конечными автоматами.

Н. П. Бусленко ввел достаточно общее понятие «агрегат», которое в частных случаях описывает каждую из перечисленных выше подсистем. Системы, которые состоят из подсистем, являющихся агрегатами, называют агрегативными системами.

Вопросы описания таких систем и автоматизации составления программ для их моделирования достаточно хорошо изучены (см. учебники по статистическому моделированию [14, 17, 29]).

Существенно менее разработанной является теория планирования имитационного эксперимента. Заметим предварительно, что имитационный эксперимент доставляет, вообще говоря, больше возможностей для планирования, чем натурный, так как при имитационном эксперименте распределения случайных величин находятся в распоряжении экспериментатора, а при натурном даются природой.

Отсюда следует прежде всего, что все методы планирования эксперимента, разработанные для натурального эксперимента могут быть использованы и в имитационном эксперименте.

Другие методы планирования подразделяются на общие методы и методы, специфические для марковских моделей.

Как и в общем случае, непосредственной целью планирования имитационного эксперимента является минимизация затрат. Если результатом экспериментирования является одно число — оценка математического ожидания моделируемой случайной величины ξ по N ее независимым реализациям, то затраты на проведение имитационного эксперимента (трудоемкость) определяются величиной $lD\xi$, где l — среднее время ЭВМ, необходимое для получения одной реализации ξ .

Далее рассматриваются наиболее простые и распространенные методы планирования имитационных экспериментов.

1.2. Простейшие методы планирования имитационных экспериментов. А. Метод зависимых испытаний. Пусть модель зависит от некоторого числового параметра x , а в результате моделирования на ЭВМ мы получаем реализацию случайного процесса $\xi(x, \omega)$, где $\omega = \omega(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$; через $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ здесь и далее обозначены псевдослучайные числа, получаемые последовательно с помощью программного датчика. При изучении зависимости модели от параметра x планирование состоит в том, что моделирование при разных значениях x производится по одной и той же последовательности случайных чисел.

Так, вычисления $\xi(x_0, \omega)$ и $\xi(x_0 + h, \omega)$ по одной и той же последовательности случайных чисел ω дают возможность оценить разность $E[\xi(x_0 + h, \omega) - \xi(x_0, \omega)]$ с большей точностью, чем при вычислении $\xi(x_0 + h, \omega)$ и $\xi(x_0, \omega')$, где ω и ω' независимы. Это необходимо иметь в виду при проведении имитационных экспериментов с целью оптимизации.

Б. Метод противоположной переменной. Как правило, целью моделирования является оценка некоторых средних характеристик модели. Отображение $\omega = \omega(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ сводит (по крайней мере теоретически) задачу к задаче оценивания интеграла по единичному гиперкубу. Размерность гиперкуба заранее неизвестна. Тем не менее можно применять квадратурные формулы со случайными узлами, которые нечувствительны к размерности интеграла.

Так, например, наряду с реализацией случайного процесса $\xi(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ можно использовать $\xi(1 - \alpha_1, 1 - \alpha_2, \dots, 1 - \alpha_N)$. Процесс $\frac{1}{2} [\xi(\alpha_1, \dots, \alpha_N) + \xi(1 - \alpha_1, \dots, 1 - \alpha_N)]$ будет иметь те же средние характеристики, но с меньшими дисперсиями. Известны более сложные квадратурные формулы, применяемые для аналогичных целей.

В. Расщепление и рулетка. Этот общий прием уместно пояснить на простейшем примере системы массового обслуживания с одним прибором. Пусть в систему через случайные промежутки времени поступают заявки, которые ставятся в очередь, если имеются заявки, уже находящиеся в очереди или в процессе обслуживания. Если очереди нет и прибор свободен, то заявка немедленно поступает на обслуживание. Состояние системы обычно характеризуют числом n заявок, находящихся в системе в данный момент. Моделирование состоит в прослеживании изменений числа n . Интерес представляют вероятности $p_n(t)$ того, что в системе в момент времени t находится n требований. Если для системы существует стационарный режим, то существует предел $p_n = \lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t)$. Если заявки поступают редко и обслуживаются быстро, то p_n при большом n — величина малая, и оценить ее трудно (большого числа заявок в системе практически не бывает).

В этих случаях можно поступать так. Разделим время функционирования системы на отрезки длины T и зададимся некоторыми $n = N$ и m . Если k_0 — первое значение такое, что по истечении времени $k_0 T$ число требований в системе превзойдет N , то с этого момента времени будем рассматривать m идентичных систем, снабжая все характеристики «весом» по $1/m$ каждую. Некоторый момент времени $k_1 T$ окажется опять таким, что число требований, хотя бы в одной из систем, будет $2N$ ($k_1 > k_0$). Эту систему мы опять делим на m (или какое-нибудь другое число m_1) систем, домножая ее характеристики на $1/m$. Этот прием и носит название «расщепление». При этом выделяются перспективные для нас системы.

Очевидно, что при таком расщеплении накапливается с течением времени много систем, для нас неперспективных. Среди них проводится «лотерея». «Выигравшая» система сохраняется, и ей приписывается вес, равный суммарному весу всех участвовавших в лотерее систем. Это и есть «рулетка».

Методика выбора параметров расщепления и рулетки и составляет задачу планирования эксперимента, которая изучена недостаточно.

Перечисленные методы применимы при моделировании широкого класса систем. Во всяком случае все агрегативные системы могут моделироваться с их использованием.

1.3. Методы существенной выборки. Предположим, что моделируемая система может находиться в некотором множестве состояний X . Поведение системы во времени $x(t)$ можно рассматривать как реализацию случайного процесса. Прослеживая это поведение на временном промежутке $[0, T]$ от начала функционирования системы до времени T , можно оценивать средние характеристики системы по этому промежутку. Иными словами, «прослеживание» траекторий есть осуществление их случайного выбора в соответствии с мерой μ , определенной на этих траекториях алгоритмом моделирования. Если $f(x)$ — характеристика системы, то $\int f(x) \mu(dx)$ — средняя характеристика системы. Несмотря на прозрачность такой трактовки, задание в явном алгоритмическом виде функции f и меры μ в реальных задачах связано со значительными трудностями.

Рассмотрим подробно более конкретную задачу. Будем рассматривать системы с множеством состояний X , которые случайно изменяют свое состояние в дискретные моменты времени.

Последовательность состояний $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_k$ ($x_i \in X$), в которых система находится в процессе своего функционирования, принято называть ее *траекторией*.

Имеются два случая, требующих различных методов исследования.

Случай 1. В X' имеется особое состояние $\{a\}$ (поглощающее). Попав в это состояние, система (частица) более из него не выходит (поглощается, погибает). На языке теории надежности попадание в $\{a\}$ означает выход системы из строя. В рассматриваемом случае предполагается, что с вероятностью единица каждая траектория $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_k$ обрывается при некотором k .

Случай 2. Поглощающее состояние отсутствует. Траектория системы бесконечна, однако, при достаточно большом T можно считать, что $x(t)$ для $t > T$ является стационарным процессом.

Рассмотрим подробно случай 1. Предположим, что на $X = X' \setminus \{a\}$ заданы вероятностная мера μ и траектория длины k : $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_k$, которой соответствует плотность вероятности $q_k(x_0, \dots, x_k)$, заданная по отношению к мере $\mu(dx_0) \otimes \dots \otimes \mu(dx_k) = d\mu(\Xi_k)$, где $\Xi_k = (x_0, \dots, x_k)$, так что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int q_k(\Xi_k) d\mu^{k+1}$$

сходится и его сумма равна единице.

Тем самым определен скачкообразный случайный процесс, который будем обозначать $\{q_k\}$.

Имитационный эксперимент заключается в вычислении траекторий процесса и изучении поведения некоторого функционала на этих траекториях. В частности, могут быть исследованы средняя стоимость функционирования системы, средняя прибыль, которую эта система дает, вероятность выхода ее из строя и др.

Функционал, который мы обозначим ζ , зависит, вообще говоря, от бесконечного числа переменных $\zeta = \zeta(x_0, x_1, \dots, x_k, \dots)$. Если траектория обрывается в точке x_k , то полагаем $\zeta(x_0, \dots, x_k, a, a, \dots) = f^{(k)}(\Xi_k)$.

В этих обозначениях выражение для математического ожидания случайного функционала $E\zeta$ имеет вид

$$E\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \int d\mu^{k+1} f^{(k)}(\Xi_k) q_k(\Xi_k). \quad (1.1)$$

В случае существования второго момента

$$E\zeta^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \int d\mu^{k+1} (f^{(k)}(\Xi_k))^2 q_k(\Xi_k). \quad (1.2)$$

Если совокупность функций $\{q'_k\}$ определяет другой процесс, траектории которого обрываются в a с вероятностью единица и при всех k выполняются условия

$$q'_k(\Xi_k) > 0, \text{ если } q(\Xi_k) > 0, \quad (1.3)$$

то могут быть определены функции

$$r^{(k)}(\Xi_k) = q_k(\Xi_k)/q'_k(\Xi_k).$$

Функцию r траекторий Ξ_k , которая принимает на Ξ_k значение $r^{(k)}(\Xi_k)$, называют *производной Радона — Никодима меры, индуцированной случайным процессом $\{q_k\}$ по мере, индуцированной процессом $\{q'_k\}$* .

Очевидно, что $E\zeta = E\zeta'$, где $\zeta'_k = r^{(k)}(\Xi_k) f^{(k)}(\Xi_k)$,

$$E\zeta' = \sum_{k=0}^{\infty} \int d\mu^{k+1} r^{(k)}(\Xi_k) f^{(k)}(\Xi_k) q'_k(\Xi_k).$$

Это означает, что нужную нам характеристику $E\zeta$ мы можем вычислить также, моделируя процесс $\{q'_k\}$ и вычисляя на его траекториях Ξ'_k функционал $\{\zeta'_k\}$.

Вообще говоря, $E\zeta^2 \neq E\zeta'^2$, что позволяет планировать имитационный эксперимент методом введения «фиктивной модели». Фиктивная модель описывается случайным процессом $\{q'_k\}$. Она связана с исходной только условиями (1.3), которые можно трактовать как условия подобия моделей.

С помощью использования фиктивной модели можно, например, при изучении аварий высоконадежных систем получать аварийные ситуации значительно чаще, чем при использовании исходной модели. При оценивании малых вероятностей непосредственное моделирование может быть связано с неоправданно большими затратами машинного времени (событие, вероятность которого очень мала, нужно ждать очень долго).

Что касается выбора оптимальной фиктивной модели при оценивании $E\xi$, то соответствующий результат следует из общей теории метода Монте-Карло.

Пусть μ — вероятностная мера на X и f — μ -интегрируемая функция. Рассмотрим задачу оценивания интеграла $J = \int f(x) \mu(dx) = \int f(x) \frac{d\mu}{d\nu}(x) \nu(dx)$, где ν — вероятностная мера, абсолютно непрерывная по отношению к μ , а $d\mu/d\nu$ является производной Радона — Никодима меры μ по мере ν . Его несмещенными оценками будут среднеарифметические оценки вида

$$x_\nu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(y_i) \frac{d\mu}{d\nu}(y_i),$$

где y_i независимы и распределены по закону ν .

Теорема 1.1. Дисперсия случайной величины x_ν достигает своего наименьшего значения при $\nu = \nu_0$, где

$$\nu_0(dx) = |f(x)| \mu(dx) \cdot \bar{J}^{-1}, \quad (1.4)$$

$$\bar{J} = \int |f(x)| \mu(dx),$$

и равна

$$Dx_{\nu_0} = \left(\int |f| \mu(dx) \right)^2 - \left(\int |f(x)| \mu(dx) \right)^2.$$

Доказательство. Из неравенства Коши — Буняковского следует неравенство

$$\begin{aligned} \int f^2(x) \left(\frac{d\mu}{d\nu}(x) \right)^2 \nu(dx) &\geq \left(\int |f(x)| \frac{d\mu}{d\nu}(x) \nu(dx) \right)^2 = \\ &= \left(\int |f(x)| \mu(dx) \right)^2. \end{aligned}$$

С другой стороны, $E x_\nu^2 = \frac{1}{N} \int f^2(x) \left(\frac{d\mu}{d\nu}(x) \right)^2 \nu(dx)$, и при $\nu = \nu_0$ $E x_{\nu_0}^2 = \left(\int |f| \mu(dx) \right)^2$. Теорема доказана.

Если теперь мы применим полученные результаты к задаче вычисления интеграла $E\xi'$ с помощью среднеарифметического реализаций ξ' , то оптимальная плотность траекторий должна выражаться следующим образом:

$$\{(q_k')_{\text{опт}}\} = \{ |f_k(x_0, \dots, x_k)| \bar{J}^{-1} \}. \quad (1.5)$$

где $\bar{J} = E|\xi|$. При таком выборе плотностей дисперсия оценки для неотрицательных f_k равна нулю. Обычно используются плотности, близкие к (1.5), что дает возможность сокращать время моделирования.

Особый интерес может представлять случай, когда система описывается в множестве состояний X цепью Маркова. В этом случае процесс определяется плотностью начального распределения $p_0(x)$ и переходной плотностью $p(x \rightarrow y)$, для которой выполнено $\int p(x \rightarrow y) dy = 1 - g(x)$, где $g(x)$ — вероятность обрыва траектории и

$$q_k(x_0, \dots, x_k) = p_0(x_0) p(x_1 \rightarrow x_2) \dots p(x_{k-1} \rightarrow x_k) g(x_k).$$

Если при этом

$$f_k(x_0, \dots, x_k) = f_0(x_0) f(x_0, x_1) \dots f(x_{k-1}, x_k) \bar{f}_1(x_k),$$

т. е. f_k имеет марковскую структуру, то оптимальный случайный процесс также будет марковским. Соответствующие результаты можно найти в руководствах по методу Монте-Карло.

Рассмотрим случай, когда траектории процесса не обрываются, но существует стационарное распределение вероятностей, и моделируемый процесс является марковским.

Распределение начального состояния предполагается произвольным. В течение некоторого промежутка времени $[0, T]$ процесс находится в переходном режиме, а затем при достаточно большом T распределение его вероятностей можно считать стационарным. Характеристики стационарного режима, вычисляемые в процессе моделирования, имеют, таким образом, погрешности двух сортов: систематическую (она убывает для широкого класса процессов как $O(1/T)$) и случайную (порядка $O(1/\sqrt{T})$). О величине систематической погрешности можно судить, моделируя на $[0, T]$ по крайней мере две независимые траектории процесса.

Случайная погрешность играет в большинстве случаев основную роль при анализе погрешности. Ее уменьшения можно достичь за счет применения случайных квадратурных формул (в частности, метода противоположной переменной), расщепления и рулетки, которые очень просто реализуются, а также других приемов. Последние при вычислении характеристик стационарного распределения могут иметь специфические особенности.

Особенностями такого рода, например, обладает метод существенной выборки. Этому методу для стационарного случая посвящена обширная специальная литература. Далее рассматривается один из его вариантов для случайного процесса, имеющего возвратные состояния. Процессы такого типа, описывающие многие задачи теории массового обслуживания, носят название *процессы регенерации*.

Процессы регенерации, начиная свою траекторию из некоторого фиксированного состояния, возвращаются в это состояние

через случайные промежутки времени, которые называют *этапами*. На каждом этапе начинается как бы новый процесс, который не зависит от процессов на предыдущих этапах.

Если $w(\xi(t))$ — функционал на траекториях процесса ξ , то при сделанных предположениях среднее $T^{-1} \int_0^T w(\xi(t)) dt$ при $T \rightarrow \infty$ будет стремиться к $\int w(x) \mu(dx)$, где μ — стационарное распределение состояний ξ .

Пусть $T_0 = 0$, T_i ($i = 1, 2, \dots$) — моменты времени, когда процесс попадает в некоторое фиксированное (возвратное) состояние. Предполагаем, что величины $\int_{T_{i-1}}^{T_i} w(\xi(t)) dt$ могут быть непосредственно вычислены в процессе моделирования.

Тогда

$$T_m^{-1} \int_0^{T_m} w(\xi(t)) dt = \left(\sum_{i=1}^m \int_{T_{i-1}}^{T_i} w(\xi(t)) dt \right) / \left(\sum_{i=1}^m (T_i - T_{i-1}) \right).$$

Правая часть этого равенства представима в виде

$$\sum_{i=1}^m X_i / \sum_{i=1}^m Y_i, \quad (1.6)$$

где X_i и Y_i — случайные величины, X_i независимы в совокупности и Y_i также. Если числитель и знаменатель (1.6) умножить на m^{-1} , то получим отношение двух средних арифметических независимых, одинаково распределенных случайных величин.

В курсах математической статистики (см. также [17, с. 142]) доказывается, что такое отношение является асимптотически несмещенной оценкой для $\int w(x) \mu(dx)$ и имеет асимптотически по m нормальное распределение с дисперсией

$$\sigma^2 = \frac{1}{m} \left[\frac{DX_i}{(EY_i)^2} - 2 \frac{EX_i}{(EY_i)^2} \text{cov}(X_i, Y_i) + \frac{DY_i (EX_i)^2}{(EY_i)^4} \right]. \quad (1.7)$$

Опуская индекс i и полагая $X = f(\omega)$, $Y = g(\omega)$, где ω — случайная величина, распределенная по закону $P(d\omega)$, получаем

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{m(EY)^2} \left[(EY)^2 \int (f(\omega) - EX)^2 P(d\omega) - \right. \\ &\quad \left. - 2EXEY \int (f(\omega) - EX)(g(\omega) - EY) P(d\omega) + \right. \\ &\quad \left. + (EX)^2 \int (g(\omega) - EY)^2 P(d\omega) \right] = \\ &= \frac{1}{m(EY)^2} \int (f(\omega)EY - g(\omega)EX)^2 P(d\omega). \end{aligned}$$

Теперь предположим, что применяется существенная выборка, т. е. вместо меры P выбрана мера Q , абсолютно непрерывная по отношению к P . Тогда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E \left[\frac{\sum_{i=1}^m f(\omega_i)}{\sum_{i=1}^m g(\omega_i)} \right] = \lim_{m \rightarrow \infty} E \left[\frac{\sum_{i=1}^m f(\xi_i) \frac{dP}{dQ}(\xi_i)}{\sum_{i=1}^m g(\xi_i) \frac{dP}{dQ}(\xi_i)} \right]$$

Асимптотическая дисперсия σ_Q^2 отношения средних $\sum f \frac{dP}{dQ} / \sum g \frac{dP}{dQ}$ вычисляется в соответствии с (1.7). Простые выкладки дают

$$\sigma_Q^2 = \frac{1}{m(EY)^4} \int (f(\omega)EY - g(\omega)EX)^2 \frac{dP}{dQ}(\omega) Q(d\omega).$$

Нетрудно убедиться, что оптимальная в смысле величины дисперсии мера $Q_0(d\omega)$ дается формулой

$$Q_c(d\omega) = C |f(\omega)EY - g(\omega)EX| P(d\omega), \quad (1.8)$$

где C — константа нормировки.

Приведенные рассуждения показывают принципиальную возможность планирования имитационного эксперимента при вычислении характеристик стационарного распределения случайного процесса.

Как и в случае марковского процесса, желательно, чтобы мера Q_0 соответствовала некоторому марковскому процессу. Этого, однако, не всегда можно добиться. Соответствующие исследования для некоторых случаев содержатся в специальной литературе по методу Монте-Карло.

Упражнения.

1. Пусть $q_k(\Xi_k) = p_0(x_0) p(x_1 \rightarrow x_2) \dots p(x_{k-1} \rightarrow x_k) g(x_k)$, т. е. $\{q_k\}$

определяют марковскую цепь с поглощением.

При каких условиях функционал

$$\xi^* = \{\xi_k^*\}, \quad \xi_k^* = [q_k(\Xi_k)]^{-1} f_1(x_0) f(x_0, x_1) \dots f(x_{k-1}, x_k) f_0(x_k) \quad (1.9)$$

является несмещенной оценкой для $E\xi^*$?

2. Пусть интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int |f(x, y)| p(x \rightarrow y) \varphi(y) \mu(dy) + |f_1(x)| g(x) \quad (1.10)$$

имеет итерационное решение $\bar{\varphi}(x)$.

Покажите, что при положительных f_0 , f и f_1 :

а) функции $\bar{p}_0(x) = f_0(x) p_0(x) \bar{\varphi}(x) / \int \bar{\varphi}(x) f_0(x) p_0(x) \mu(dx)$ и $\bar{p}(x \rightarrow y) = f(x, y) p(x \rightarrow y) \bar{\varphi}(y) / \bar{\varphi}(x)$ могут быть выбраны в качестве плотности начального распределения и переходной плотности соответственно для марковского процесса;

б) для выбранных таким образом плотностей дисперсия функционала (1.9) обращается в нуль;

в) получите аналогичные а) и б) факты для функционала (1.9), если

$$\bar{p}_0(x) = f_1(x) p_0(x) \Phi^*(x) / \int \Phi^*(x) f_1(x) p_0(x) \mu(dx),$$

$$\bar{p}(x \rightarrow y) = f(y, x) / p(y \rightarrow x) \Phi^*(y) / \Phi^*(x),$$

где $\Phi^*(x)$ является итерационным решением уравнения

$$\Phi^*(x) = \int f(y, x) p(y \rightarrow x) \Phi^*(y) \mu(dy) + f_0(x) g(x),$$

«сопряженного» к (1.10).

§ 2. Метод существенной выборки при одновременном оценивании нескольких интегралов

2.1. Постановка задачи. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}$ — σ -алгебра борелевских подмножеств множества X , ν — некоторая σ -конечная мера на $\mathcal{B}$,

$$g_i \in L^2(X, \nu), \quad i = 1, \dots, m,$$

$$X_* = \left\{ x \in X \mid \sum_{i=1}^m g_i^2(x) > 0 \right\}.$$

$\mathcal{A}_m^{\geq}$ — множество неотрицательно определенных $m \times m$ -матриц,

$\mathcal{A}_m^{>}$ — множество положительно определенных $m \times m$ -матриц.

Очевидно, что $X_* \in \mathcal{B}$, т. е. X_* — измеримое множество.

Пусть выбрана вероятностная мера $P(dx) = p(x)\nu(dx)$ на $(X, \mathcal{B})$, где $p = dP/d\nu$ — плотность распределения по мере ν , и получены N независимых реализаций $x_1, \dots, x_N$ случайного вектора с этим распределением. Интегралы

$$J_i = \int g_i(x) \nu(dx), \quad i = 1, \dots, m,$$

оцениваются по формуле

$$\hat{J}_i = N^{-1} \sum_{j=1}^N g_i(x_j) / p(x_j), \quad (2.1)$$

что соответствует подсчету интегралов по методу Монте-Карло. Положим

$$g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))^T, \quad J = (J_1, \dots, J_m)^T,$$

$$\hat{J} = (\hat{J}_1, \dots, \hat{J}_m)^T.$$

$\mathcal{P}$ — множество таких плотностей распределений $p(x)$ на X , что $p(x) > 0$ при ν почти всех $x \in X_*$, т. е.

$$\mathcal{P} = \left\{ p \mid \int_X p(x) \nu(dx) = 1, \quad p \geq 0, \quad p|_{X_*} > 0 \pmod{\nu} \right\}.$$

Очевидно, что $\mathcal{P}$ — выпуклое множество. Действительно, для любых $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ и $\alpha \in [0, 1]$ имеем

$$p_\alpha(x) = \alpha p_1(x) + (1 - \alpha) p_2(x) \geq 0,$$

$$p_\alpha(x) > 0 \pmod{\nu},$$

$$\int_{\mathcal{X}} p_\alpha(x) \nu(dx) = \alpha \int_{\mathcal{X}} p_1(x) \nu(dx) + (1 - \alpha) \int_{\mathcal{X}} p_2(x) \nu(dx) = 1,$$

т. е. $p_\alpha \in \mathcal{P}$.

Далее, не оговаривая особо, считаем, что $\nu(X_*) > 0$.

Лемма 2.1. Если $p \in \mathcal{P}$, то $E\hat{J} = J$ (т. е. оценки (2.1) несмещенные), а дисперсионная матрица оценок (2.1) равна

$$D\hat{J} = E(\hat{J} - J)(\hat{J} - J)^T = N^{-1} \left[\int_{\mathcal{X}} \frac{g(x) g^T(x)}{p(x)} \nu(dx) - JJ^T \right]. \quad (2.2)$$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 4.2 гл. 4

$$\begin{aligned} E\hat{J}_i &= E \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [g_i(x_j)/p(x_j)] = E [g_i(x_1)/p(x_1)] = \\ &= \int_{\mathcal{X}} [g_i(x)/p(x)] p(x) \nu(dx) = \int_{\mathcal{X}} g_i(x) \nu(dx) = J_i, \end{aligned}$$

$$E(\hat{J}_i - J_i)(\hat{J}_i - J_i) = E\hat{J}_i\hat{J}_i - J_iJ_i,$$

$$\begin{aligned} E\hat{J}_i\hat{J}_i &= N^{-2} \sum_{j, k=1}^N E \{ [g_i(x_j) g_i(x_k)] / [p(x_j) p(x_k)] \} = \\ &= N^{-2} \left\{ N(N-1) J_i J_i + N \int_{\mathcal{X}} \{ [g_i(x) g_i(x)] / p(x) \} \nu(dx) \right\} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{N} \right) J_i J_i + \frac{1}{N} \int_{\mathcal{X}} \{ [g_i(x) g_i(x)] / p(x) \} \nu(dx). \end{aligned}$$

Полученные формулы эквивалентны приведенным в утверждении леммы. Лемма доказана.

От дисперсионной матрицы оценок (2.2) перейдем к нормированной дисперсионной матрице $D(p) = ND\hat{J}$, которая уже не зависит от N , а зависит только от p . Матрица

$$D(p) = \int [g(x) g^T(x)/p(x)] \nu(dx) - JJ^T = \|d_{ij}(p)\|_{i,j=1}^m \quad (2.3)$$

определяет качество оценок (2.2) в зависимости от плотности распределения p . Аналогично классической теории планирования эксперимента по оцениванию параметров линейных регрессионных моделей (см. гл. 3) ниже будет рассматриваться задача минимизации функционалов от матриц (2.3).

Из свойств дисперсионных матриц следует, что $D(p) \in \mathcal{M}_m^+$ для всех $p \in \mathcal{P}$.

Пусть Φ — некоторый функционал, заданный на $\mathcal{M}_m^+$. Задачей оптимального выбора плотности распределения элементов выборки $x_1, \dots, x_N$ будем считать экстремальную задачу нахождения плотности

$$p^* = \arg \min_{p \in \mathcal{P}} \Phi[D(p)]. \quad (2.4)$$

Плотность p^* в случае ее существования будем называть *оптимальной*.

Сначала рассмотрим вопрос о том, какие критерии оптимальности могут быть использованы для выбора оптимальных плотностей.

2.2. О критериях оптимальности. Задача выбора критерия оптимальности мало чем отличается от соответствующей задачи в классической теории планирования эксперимента. В принципе в качестве Φ может быть выбран любой выпуклый функционал на множестве $\mathcal{M}_m^+$. Достаточно полный перечень используемых в теории планирования эксперимента критериев содержится в гл. 3. Напомним несколько из них.

Критерий D -оптимальности:

$$\Phi[D] = \ln \det D. \quad (2.5)$$

Критерий линейной оптимальности (или L -оптимальности):

$$\Phi[D] = \text{tr } LD, \quad (2.6)$$

где L — произвольная матрица из $\mathcal{M}_m^+$. Частным случаем критерия (2.6) является критерий

$$\Phi[D] = \sum_{i=1}^m a_i^2 d_{ii} \quad (a_i \in \mathbb{R}), \quad (2.7)$$

соответствующий случаю диагональной матрицы L .

Укажем также критерий E -оптимальности

$$\Phi[D] = \lambda_{\max}(D) \quad (2.8)$$

(здесь $\lambda_{\max}(D)$ — максимальное собственное число матрицы D) и MV -оптимальности

$$\Phi[D] = \max_{i=1, \dots, m} d_{ii}. \quad (2.9)$$

Плотность, оптимальную в смысле одного из указанных критериев, будем называть соответственно D -, L -, E - или MV -оптимальной плотностью.

Задача выбора критерия оптимальности может быть сложной и плохо формализованной. Но в некоторых постановках задачи нахождения оптимальной плотности способ выбора Φ однозначен. Так, если при оценивании коэффициентов Фурье функции регрессии погрешность оценки регрессии определять

через норму пространства L^2 , то приходим к L -критерию (2.6) (см. § 4 гл. 4). Другой пример — при оптимизации векторных алгоритмов метода Монте-Карло оценивания функционалов от решений систем линейных интегральных уравнений естественно возникает MV -критерий [29].

2.3. Ограничения на критерий оптимальности. Ниже перечислены встречающиеся в данной главе ограничения на критерий оптимальности Φ :

а) если $A, B \in \mathcal{M}_m^{\geq}$ и $A \geq B$, то $\Phi(A) \geq \Phi(B)$ (монотонность);
 б) если $A, B \in \mathcal{M}_m^{\geq}$ и $A > B$, то $\Phi(A) > \Phi(B)$ (строгая монотонность);

в) если $A, B \in \mathcal{M}_m^{\geq}$ и $\alpha \in (0, 1)$, то

$$\Phi[\alpha A + (1 - \alpha) B] \leq \alpha \Phi(A) + (1 - \alpha) \Phi(B) \quad (2.10)$$

(выпуклость на множестве $\mathcal{M}_m^{\geq}$);

г) в (2.10) для $A \neq B$ имеет место строгое неравенство (строгая выпуклость);

д) существует такая плотность $p \in \mathcal{P}$, что $\Phi[D(p)] < \infty$;

е) для $A \in \mathcal{M}_m^{\geq}$ выполнено $\Phi(A) < \infty$, если и только если $\|A\| < \infty$;

ж) $\Phi(A)$ дифференцируем по элементам матрицы A (гладкость).

Условия а) — г), ж) в теории планирования регрессионного эксперимента стандартны, а условия д) и е) специфичны для данной постановки. Условие е) накладывается в тех случаях, когда необходимо оценить все m интегралов J_i . При невыполнении условия е) может оказаться, что некоторые из дисперсий $d_{ii}(p^*)$, соответствующих оптимальной плотности, бесконечны; если же условие е) выполнено и оптимальная плотность p^* существует, то при ее использовании дисперсии $d_{ii}(p^*)$ всех оценок (2.1) конечны. При невыполнении условия д) экстремальная задача (2.4) тривиальна: ее решением является любая плотность $p \in \mathcal{P}$, при этом все решения одинаково плохи. Условие д) выполнено, например, если выполнено условие е), мера ν конечна и $g_i \in L_2(X, \nu)$ ($i = 1, \dots, m$); в этом случае в качестве p можно взять константу, т. е. равномерную плотность $p(x) = [\nu(X_*)]^{-1}$.

Из выписанных критериев (2.5) — (2.9) условиям а) — г), е), ж) удовлетворяют критерии (2.5), (2.7) и (2.6) при $L \geq 0$. Критерии (2.8) и (2.9) удовлетворяют условиям а) — в), е). Если $L \in \mathcal{M}_m^{\geq} \setminus \mathcal{M}_m^{\geq}$, то для критерия (2.6) не выполняется г); если, кроме того, в матрице L имеется нулевая строка, то для критерия (2.6) не выполняется также е). Все эти факты либо хорошо известны (см. гл. 3), либо легко проверяемы.

2.4. Существование и единственность оптимальных плотностей. Кроме приведенных условий а) — ж) на критерий оптимальности ниже будут использованы следующие два условия на функции $g_1, \dots, g_m$:

з) функции $g_1(x), \dots, g_m(x)$ линейно независимы на любом таком измеримом подмножестве Y множества X_* , что $v(Y) > 0$ (условие v -регулярности набора функций $\{g_1, \dots, g_m\}$, см. [14]);
и) функции $g_1(x), \dots, g_m(x)$ линейно независимы на любом таком измеримом подмножестве Y множества X_* , что $v(Y) = v(X_*)$.

Прежде чем формулировать утверждения о существовании и единственности оптимальных плотностей, докажем несколько вспомогательных лемм о свойствах дисперсионных матриц, функционалов Φ и оптимальных плотностей.

Для любых $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ и $\alpha \in (0, 1)$ положим

$$D(\alpha, p_1, p_2) = \alpha D(p_1) + (1 - \alpha) D(p_2) - D[\alpha p_1 + (1 - \alpha) p_2]. \quad (2.11)$$

Лемма 2.2. Для любых $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ и $\alpha \in (0, 1)$ имеет место

$$D(\alpha, p_1, p_2) = \int_X v(x) g(x) g^T(x) v(dx), \quad (2.12)$$

где

$$v(x) = \alpha(1 - \alpha) [p_1(x) - p_2(x)]^2 \{p_1(x) p_2(x) [\alpha p_1(x) + (1 - \alpha) p_2(x)]\}^{-1} \geq 0,$$

и, кроме того, матрица $D(\alpha, p_1, p_2)$ неотрицательно определена.

Доказательство. Проводим элементарные алгебраические преобразования:

$$\begin{aligned} D(\alpha, p_1, p_2) &= \int_X g(x) g^T(x) \frac{\alpha}{p_1(x)} v(dx) + \\ &+ \int_X g(x) g^T(x) \frac{1 - \alpha}{p_2(x)} v(dx) - \int_X \{g(x) g^T(x) [\alpha p_1(x) + \\ &+ (1 - \alpha) p_2(x)]\} v(dx) = \int_X g(x) g^T(x) \left[\frac{\alpha}{p_1(x)} + \frac{1 - \alpha}{p_2(x)} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{\alpha p_1(x) + (1 - \alpha) p_2(x)} \right] v(dx) = \int_X v(x) g(x) g^T(x) v(dx). \end{aligned}$$

В результате мы получили (2.12). Неотрицательная определенность матрицы (2.12) следует из определения: для любого $a = (a_1, \dots, a_m)^T \in \mathbb{R}^m$ имеет место

$$\begin{aligned} a^T D(\alpha, p_1, p_2) a &= \sum_{i, j=1}^m a_i a_j \int_X v(x) g_i(x) g_j(x) v(dx) = \\ &= \int_X v(x) \sum_{i, j=1}^m a_i g_i(x) a_j g_j(x) v(dx) = \\ &= \int_X v(x) \left[\sum_{i=1}^m a_i g_i(x) \right]^2 v(dx) \geq 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 2.3. Пусть выполнено условие з), $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$, $p_1 \not\equiv p_2 \pmod{\nu}$, $\alpha \in (0, 1)$. Тогда $D(\alpha, p_1, p_2) \in \mathcal{A}_m^>$.

Доказательство. Матрица (2.12) записывается в виде

$$D(\alpha, p_1, p_2) = \int_Z v(x) g(x) g^T(x) v(dx),$$

где $Z \in \mathcal{B}$ — такое подмножество множества X , на котором $v(x) > 0$. В силу того что $p_1 \not\equiv p_2 \pmod{\nu}$ и $\alpha \in (0, 1)$, имеем $v(Z) > 0$.

По условию функции $g_1(x), \dots, g_m(x)$ линейно независимы на любом подмножестве Y множества Z ненулевой меры ν . Поэтому и функции

$$h_i(x) = \sqrt{v(x)} g_i(x), \quad i = 1, \dots, m,$$

обладают тем же свойством. Действительно, выражение

$$\sum_{i=1}^m c_i h_i(x) = \sqrt{v(x)} \sum_{i=1}^m c_i g_i(x)$$

при всех $x \in Y$ равно нулю в том и только том случае, когда $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$.

Теперь покажем, что $D(\alpha, p_1, p_2) > 0$. Для любого

$$a = (a_1, \dots, a_m)^T \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$$

имеем

$$\begin{aligned} a^T D(\alpha, p_1, p_2) a &= \sum_{i,j=1}^m a_i a_j \int_Z h_i(x) h_j(x) v(dx) = \\ &= \int_Z \left(\sum_{i=1}^m a_i h_i(x) \right)^2 v(dx) > 0. \end{aligned}$$

Обозначим через $\bar{\mathcal{P}}$ замыкание множества $\mathcal{P}$, состоящее из заданных на X_0 неотрицательных обобщенных функций $q(x)$, для которых

$$\int_{X_0} q(x) v(dx) \leq 1.$$

Пусть $q^* \in \bar{\mathcal{P}}$ — решение задачи минимизации $\Phi[D(p)]$ на множестве $\bar{\mathcal{P}}$, которое всегда существует.

Две следующие леммы показывают, что при малоограниченных условиях $q^* \in \mathcal{P}$, откуда, в частности, вытекает корректность определения экстремальной задачи (2.4).

Лемма 2.4. Если выполнено условие и), $q \in \bar{\mathcal{P}}$ и $\|D(q)\| < \infty$, то $D(q) + JJ^T \in \mathcal{A}_m^>$.

Для доказательства нужно записать $D(q) + JJ^T$ в виде (2.12) с заменой $v(x)$ на $1/q(x)$ и повторить доказательство леммы 2.3.

Лемма 2.5 Пусть выполнены условия б), д), е), и). Тогда

$$p^* = \arg \min_{p \in \mathcal{P}} \Phi[D(p)] \in \mathcal{P}.$$

Доказательство. Нужно показать, что вероятностная мера $P^*(dx) = p^*(x)v(dx)$ абсолютно непрерывна относительно меры v и $P^*(X_*) = 1$. Предположим противное, т. е. что $p^* \notin \mathcal{P}$. Тогда существует такое $Y \subset X_*$, что $q = P^*(X_* \setminus Y) < 1$, но $v(Y \cap X_*) = 0$. В силу условия д) и определения p^* имеем $q > 0$.

Положим

$$p(x) = \begin{cases} q^{-1}p^*(x) & \text{при } x \in X_* \setminus Y, \\ 1 & \text{при } x \in Y. \end{cases}$$

Имеем $p \in \mathcal{P}$,

$$D(p^*) - D(p) = D(p^*) - [q(D(p^*) + JJ^T) - JJ^T] = (1-q)[D(p^*) + JJ^T].$$

По лемме 2.4 эта матрица положительно определена. Из условия б) получаем

$$\Phi[D(p)] < \Phi[D(p^*)].$$

Это неравенство противоречит тому, что p^* — оптимальная плотность. Лемма доказана.

Далее будем вместо $\Phi[D(p)]$ писать $\Phi(p)$, а символом Φ обозначать не только функционал, заданный на $\mathcal{M}_v^2$, но и индуцированный им функционал на множестве $\mathcal{P}$.

Лемма 2.6. Если выполнены условия а), в), д), то Φ — выпуклый функционал на $\mathcal{P}$. Если, кроме того, выполнены либо г), либо б) и з), то Φ — строго выпуклый функционал на $\mathcal{P}$.

Доказательство. По лемме 2.2 для любых $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$, $p_1 \neq p_2$ (inod v) и любого $\alpha \in (0, 1)$ имеем

$$\alpha D(p_1) + (1 - \alpha) D(p_2) \geq D(\alpha p_1 + (1 - \alpha) p_2), \quad (2.13)$$

откуда, используя условие а), получаем

$$\Phi[\alpha D(p_1) + (1 - \alpha) D(p_2)] \geq \Phi(\alpha p_1 + (1 - \alpha) p_2). \quad (2.14)$$

В силу предположения в) имеем

$$\alpha \Phi(p_1) + (1 - \alpha) \Phi(p_2) \geq \Phi[\alpha D(p_1) + (1 - \alpha) D(p_2)]. \quad (2.15)$$

Из неравенств (2.14) и (2.15) вытекает

$$\alpha \Phi(p_1) + (1 - \alpha) \Phi(p_2) \geq \Phi(\alpha p_1 + (1 - \alpha) p_2). \quad (2.16)$$

Последнее неравенство означает, что функционал Φ на множестве $\mathcal{P}$ выпуклый. Строгая выпуклость Φ эквивалентна строгому неравенству в (2.16), которое следует либо из строгого неравенства в (2.13) и (2.14) (следствие предположений б), з) и леммы 2.1), либо из строгого неравенства в (2.15) (следствие предположения г)). Лемма доказана.

Сравнивая полученные результаты с результатами оптимального планирования эксперимента по оцениванию параметров ли-

нейной регрессии (см. гл. 3), отметим несколько существенных различий

Во-первых, в силу леммы 2.5 оптимальную плотность следует искать в множестве измеримых функций, поэтому в отличие от классической задачи оптимального регрессионного планирования дискретность мер не только не является желательным свойством, но и вообще недопустима.

Во-вторых, в силу леммы 2.6 при выполнении условий б), д), з) нестрого выпуклый функционал Φ на $\mathcal{M}_m^+$ превращается в строго выпуклый на $\mathcal{P}$. Это весьма существенно при изучении таких критериев, как (2.8), (2.9) и (2.6) при $L \in \mathcal{M}_m^+ \setminus \mathcal{M}_m^+$.

В-третьих, для того чтобы гарантировать существование оптимальной плотности p^* , приходится налагать дополнительные условия — д) и е). Разумеется, оптимальные плотности могут существовать и при невыполнении условия е) (см. ниже пример 2.1). Все же условия д) и е) удобны — они просты и малоограничительны. Конечно, при их невыполнении оптимальная плотность в множестве $\mathcal{P}$ может не существовать (это также иллюстрируется примером 2.1).

В-четвертых, поскольку дисперсионная матрица (2.2) (а следовательно, и (2.3)) зависит от неизвестных параметров J , то от них зависит и оптимальная плотность p^* . В этом смысле изучаемая задача аналогична задаче планирования эксперимента по оцениванию параметров нелинейной регрессии, а оптимальная плотность (2.4) соответствует локально оптимальному плану. Для нахождения оптимальной плотности, соответствующей истинным значениям параметров J , необходимо применять последовательный подход, заключающийся в том, что по мере уточнения оценок неизвестных параметров $\hat{J}$ видоизменяется и критерий выбора оптимальной плотности, записываемый в виде

$$\Phi \left[\int [g(x) g^T(x)/p(x)] v(dx) - \bar{J} \bar{J}^T \right].$$

Техника здесь стандартная, и мы не будем на ней останавливаться. Кроме последовательного подхода возможны также байесов и минимаксный. Постановка задач и характер получаемых результатов будут аналогичны результатам классической теории планирования эксперимента (см. гл. 5).

Пример 2.1. Пусть критерий оптимальности имеет вид (2.7) при $a_1 = 1$, $a_2 = \dots = a_m = 0$, т. е.

$$\Phi[D(p)] = d_{11}(p).$$

Для этого критерия не выполняется условие е). Оптимальная плотность в силу утверждения из п. 2.6 имеет вид

$$p^*(x) = |g_1(x)| / \int |g_1(z)| v(dz).$$

Если $g_1(x)$ обращается в нуль на множестве ненулевой меры v , а функция $g_j(x)$ для некоторого $j \in \{2, 3, \dots, m\}$ на этом

множестве в нуль не обращается, то $p^* \notin \mathcal{P}$, а оценка J_1 интеграла J_1 смещена. В то же время, если $g_1(x)$ в нуль не обращается, то $p^* \in \mathcal{P}$.

2.5. Необходимые и достаточные условия оптимальности для дифференцируемых критериев.

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия а) — в), д), е), и). Тогда оптимальная плотность $p^* \in \mathcal{P}$ существует и множество $\mathcal{P}^*$ оптимальных плотностей выпукло, а если дополнительно выполнено либо г), либо з), то $\mathcal{P}^*$ состоит из единственной по модулю v плотности. Если, кроме того, выполнено ж), то необходимым и достаточным условием оптимальности плотности p^* является выполнение для v -почти всех $x \in X$ равенства

$$\varphi(x, p^*) = \operatorname{tr} \frac{\partial \Phi}{\partial D} (D + JJ^T) |_{D=D(p^*)}, \quad (2.17)$$

$$\text{где} \quad \varphi(x, p) = \left[g^T(x) \frac{\partial \Phi}{\partial D} \Big|_{D=D(p)} g(x) \right] / p^2(x). \quad (2.18)$$

Доказательство. Из утверждений лемм 2.5 и 2.6 вытекает первая часть утверждения теоремы. Используя теперь необходимые и достаточные условия экстремума для выпуклого дифференцируемого по всем допустимым направлениям функционала на выпуклом множестве (см. сноску на с. 105), получаем, что нам осталось вычислить производную

$$\Pi(p, h) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \Phi[(1 - \alpha)p + \alpha h] |_{\alpha=0+} \quad (2.19)$$

и определить, при каких $p \in \mathcal{P}$ для произвольной плотности распределения $h(x)$ на X будет выполнено неравенство $\Pi(p, h) \geq 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \Pi(p, h) &= \operatorname{tr} \frac{\partial \Phi}{\partial D} \Big|_{D=D(p)} \frac{\partial D[(1 - \alpha)p + \alpha h]}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0+} = \\ &= \operatorname{tr} \frac{\partial \Phi}{\partial D} \Big|_{D=D(p)} \int g(x) g^T(x) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{(1 - \alpha)p(x) + \alpha h(x)} \right] \Big|_{\alpha=0+} = \\ &= \operatorname{tr} \frac{\partial \Phi}{\partial D} \Big|_{D=D(p)} \int g(x) g^T(x) p^{-2}(x) [p(x) - h(x)] v(dx) = \\ &= \operatorname{tr} \frac{\partial \Phi}{\partial D} (D + JJ^T) |_{D=D(p)} - \\ &- \operatorname{tr} \frac{\partial \Phi}{\partial D} \Big|_{D=D(p)} \int g(x) g^T(x) p^{-2}(x) h(x) v(dx) = \\ &= \operatorname{tr} \frac{\partial \Phi}{\partial D} (D + JJ^T) |_{D=D(p)} - \int \varphi(x, p) h(x) v(dx). \end{aligned}$$

Таким образом, $\Pi(p, h) \geq 0$ для всех h тогда и только тогда, когда для v -почти всех $x \in X$ выполнено неравенство

$$\varphi(x, p) \leq \operatorname{tr} \frac{\partial \Phi}{\partial D} (D + JJ^T) |_{D=D(p)}.$$

Утверждение теоремы вытекает из того, что для любой плотности p выполнено

$$\int \varphi(x, p) p(x) v(dx) = \operatorname{tr} \frac{\partial \Phi}{\partial D} (D + JJ^T) |_{D=D(p)} \quad (2.20)$$

Теорема доказана.

Доказанная теорема — аналог теоремы эквивалентности (теоремы 2.2 из гл. 3), играющей центральную роль в теории планирования регрессионного эксперимента.

2.6. Оптимальные плотности для линейных критериев. Если критерий оптимальности Φ линеен, т. е. имеет вид (2.6), то из (2.17) и из равенства $\partial \operatorname{tr} LD / \partial D = L$ следует выражение для оптимальной плотности

$$p^*(x) = [g^T(x) L g(x)]^{1/2} \int [g^T(z) L g(z)]^{1/2} v(dz). \quad (2.21)$$

Это выражение может быть получено и элементарным образом. Отметим также, что формула (2.21) определяет L -оптимальную плотность даже в том случае, когда не выполнены одно или оба из условий д), е). Единственность (по модулю v) L -оптимальной плотности (2.21) вытекает из того, что для L -критерия соотношение (2.21) эквивалентно необходимому и достаточному условию оптимальности (2.17).

2.7. Алгоритмы построения оптимальных плотностей для дифференцируемых критериев. Если критерий оптимальности Φ дифференцируем (т. е. выполняется условие ж)), но его вид отличается от (2.6), то оптимальная плотность p^* в случае ее существования, так же как и для L -критерия, имеет вид (2.21), хотя матрица

$$L = c \frac{\partial \Phi}{\partial D} \Big|_{D=D(p^*)}, \quad c = \operatorname{const} > 0, \quad (2.22)$$

заранее и неизвестна. Задача построения оптимальной плотности эквивалентна в этом случае задаче оптимального выбора элементов матрицы L . Указанная задача, которая может решаться с помощью общих методов поиска глобального экстремума, в ситуациях, когда функционал Φ зависит только от диагональных элементов матрицы D , имеет не слишком сложный вид, поскольку матрица L диагональна. В тех случаях, когда m велико, а X дискретно или имеет малую размерность, более эффективными методами построения оптимальных плотностей могут оказаться методы, описанные ниже и существенно использующие специфику задачи. Эти методы аналогичны методам построения оптимальных планов для регрессионных экспериментов, основываются на выведенном в доказательстве теоремы 2.1 выражении для производной $\Pi(p, h)$ и являются псевдоградиентными в множестве $\mathcal{P}$.

Общий вид методов таков:

$$p_{k+1}(x) = (1 - \alpha_k) p_k(x) + \alpha_k h_k(x). \quad (2.23)$$

Здесь $p_0 \in \mathcal{P}$ — начальная плотность, выбираемая так, чтобы $\Phi(p_0) < \infty$ (например, p_0 — равномерная плотность); $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ — последовательность неотрицательных чисел, выбор которой может производиться в полном соответствии с рекомендациями § 4 гл. 3. В качестве h_k можно выбирать любую плотность, для которой $\Pi(p_k, h_k) < 0$, например плотность, пропорциональную индикатору множества положительности функции

$$\varphi(x, p_k) - \text{tr}(D + JJ^T) \frac{\partial \Phi}{\partial D} \Big|_{D=D(p_k)} + e_k, \quad (2.24)$$

где $e_k \geq 0$, $e_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$).

Выбирая p_0 и h_k ограниченными, получаем, что $p_k \in L^2(X, \nu)$ для всех $k = 0, 1, \dots$; в силу теоремы 2.1 оптимальная плотность p^* также принадлежит $L^2(X, \nu)$. Поэтому для обоснования сходимости алгоритма (2.23) можно использовать, например, результаты, приведенные в § 1 гл. 6.

Как и в теории планирования регрессионного эксперимента, имеет смысл рассматривать алгоритм (2.23), в котором $\alpha_k < 0$ при некоторых $k = 0, 1, \dots$. Если $\alpha_k < 0$, то должно выполняться неравенство

$$|\alpha_k| \leq \left\{ \sup_x [h_k(x)/p_k(x)] - 1 \right\}^{-1},$$

которое эквивалентно неотрицательности функции $p_{k+1}(x)$. При этом для обеспечения псевдоградиентности алгоритма (2.23) необходимо требование $\Pi(p_k, h_k) > 0$, которому удовлетворяет, в частности, плотность h_k , пропорциональная индикатору отрицательности функции (2.24) с $e_k \leq 0$. Принципы построения алгоритмов типа (2.23) с $\alpha_k \in (-1, 1)$ изложены в § 4 гл. 3 для задач построения оптимальных планов регрессионных экспериментов. Эти принципы остаются без изменений.

2.8. Минимаксные критерии. Подавляющее большинство встречающихся на практике недифференцируемых критериев оптимальности Φ относится к классу минимаксных, т. е. представимых в виде

$$\Phi[D] = \max_{\gamma \in \Gamma} \Phi_{\gamma}[D], \quad (2.25)$$

где Γ — некоторое компактное множество, а все функционалы Φ_{γ} ($\gamma \in \Gamma$) выпуклы и дифференцируемы. В следующей теореме приведены необходимые и достаточные условия оптимальности для минимаксных критериев. Доказательство теоремы, по сути, совпадает с доказательством аналогичного утверждения из теории оптимального регрессионного планирования (см. п. 2.5 из гл. 3).

Теорема 2.2. Пусть критерий Φ имеет вид (2.25), где Γ — компакт, все функционалы Φ_{γ} ($\gamma \in \Gamma$) удовлетворяют условиям а), в), д), ж) и при любой фиксированной матрице $D \in \mathcal{M}_n^2$ функция $\Phi_{\gamma}[D]$ непрерывна по γ . Тогда необходимым и достаточным условием того, что p^* — оптимальная плотность для критерия (2.25), является выполнение для некоторого $\gamma \in \Gamma(p^*)$ неравенства

$$\sup_{x \in X} \Phi_{\gamma}(x, p^*) \leq \text{tr} \frac{\partial \Phi_{\gamma}}{\partial D}(D + JJ^T) \Big|_{D=D(p^*)} \quad (2.26)$$

где Φ_γ определяется по формуле (2.18) с заменой Φ на Φ_γ .

$$\Gamma(p^*) = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma = \arg \max_{\gamma \in \Gamma} \Phi_\gamma[D(p^*)]\}$$

Доказательство. Согласно общей теории экстремальных задач (см. с. 105, 113), необходимым и достаточным условием оптимальности плотности p^* является выполнение неравенства

$$\inf_h \sup_{\gamma \in \Gamma(p^*)} \Pi_\gamma(p^*, h) \geq 0, \quad (2.27)$$

где Π_γ определяется по формуле (2.19) с заменой Φ на Φ_γ , а инфимум берется по всем плотностям распределений на X . Выражение для производной Π было получено при доказательстве теоремы 2.1. Имеем

$$\Pi_\gamma(p^*, h) = \text{tr} \frac{\partial \Phi_\gamma}{\partial D} (D + JJ^T) \big|_{D=D(p^*)} - \int \Phi_\gamma(x, p^*) h(x) v(dx).$$

С учетом этого выражения неравенство (2.27) может выполняться в том и только том случае, когда для некоторого $\gamma \in \Gamma(p^*)$ выполнено (2.26). Теорема доказана.

Условия существования и единственности оптимальных плотностей для минимаксных критериев в теореме 2.2 не приведены, поскольку они содержатся в формулировке теоремы 2.1. Отметим также, что условие (2.26) в отличие от (2.17) неконструктивно и не может служить основой для построения оптимальных плотностей — оно может быть использовано лишь при проверке плотности на оптимальность.

Для широкого класса недифференцируемых критериев оптимальности явный вид оптимальных плотностей может быть определен с помощью следующего утверждения.

Теорема 2.3 *Предположим, что оптимальная плотность p^* для критерия Φ единственна по модулю v и существует такая последовательность $\{\Phi_i\}_{i=1}^\infty$ функций на $\mathcal{A}_m^{\geq}$ удовлетворяющих условиям б), г) — ж), что для всех $A \in \mathcal{A}_m^{\geq}$ выполнено*

$$\Phi_1(A) \leq \Phi_2(A) \leq \dots \leq \Phi_i(A) \leq \dots \leq \Phi(A), \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \Phi_i(A) = \Phi(A).$$

Тогда плотность p^* имеет вид (2.21).

Доказательство. Поскольку критерии Φ_i дифференцируемы, то соответствующие им оптимальные плотности p_i^* в силу (2.21), (2.22) имеют вид

$$p_i^*(x) = [g^T(x) L_i g(x)]^{1/2} / \int [g^T(z) L_i g(z)]^{1/2} v(dz), \quad (2.28)$$

где L_i ($i = 1, 2, \dots$) — некоторые неотрицательно определенные матрицы, причем можно считать, что $\|L_i\| = 1$.

Из леммы 2.5 следует, что

$$p_i^* = \arg \min_{p \in \mathcal{P}} \Phi(p) = \arg \min_{p \in \mathcal{P}} \Phi(p),$$

где $\mathcal{P}$ — компакт. Используя теперь строгую выпуклость критериев Φ_i и их монотонную сходимость к Φ , применяем лемму 1.11 из [42] и получаем слабую сходимость последовательности плотностей $p_i^*(x)$ к $p^*(x)$. Отсюда следует, в частности, что последовательность матриц $\{D(p_i^*)\}$ сходится при $i \rightarrow \infty$ к $D(p^*)$.

Выберем из последовательности матриц $\{L_i\}$ сходящуюся к некоторой матрице L подпоследовательность $\{L_{i_j}\}$ и отметим, что $L \in \mathcal{M}_m^{\geq}$ и $\|L\| = 1$. Определим плотность ρ_* по формуле (2.21). Поскольку последовательность матриц $D(\rho_{i_j})$ сходится при $j \rightarrow \infty$ как к $D(\rho^*)$, так и к $D(\rho_*)$, то $D(\rho^*) = D(\rho_*)$, и, следовательно, плотность ρ^* оптимальна. Наконец, в силу единственности ρ^* предел последовательности $\{L_i\}$ существует и равен L . Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекает, что для широкого класса недифференцируемых строго выпуклых на множестве $\mathcal{P}$ критериев оптимальности Φ оптимальная плотность ρ^* имеет вид (2.21), а задача ее построения сводится к задаче оптимального выбора элементов матрицы L в указанном представлении.

2.9. Критерий E -оптимальности. Определим последовательность строго выпуклых дифференцируемых критериев Φ_i по формуле

$$\Phi_i(A) = (\operatorname{tr} A^i)^{1/i} \quad (2.29)$$

для всех $A \in \mathcal{M}_m^{\geq}$. Покажем, что таким образом определенная последовательность функционалов Φ_i монотонно сходится к функционалу (2.8).

В силу теоремы 1.11 из приложения 1 для любой матрицы

$$A \in \mathcal{M}_m^{\geq} \text{ и всех } i = 1, 2, \dots \text{ имеет место равенство } \operatorname{tr} A^i = \sum_{j=1}^m \lambda_j^i,$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — собственные числа матрицы A . Монотонность сходимости последовательности (2.29) к $\Phi(A) = \max_{1 \leq i \leq m} \lambda_i$ вы-

текает из неравенства

$$\left(\sum_{j=1}^m a_j^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^m a_j^q \right)^{1/q}, \quad 1 \leq p \leq q \leq \infty, \quad (2.30)$$

которое является следствием неравенства Гёльдера (теорема 2.1 из приложения 1) (в неравенстве (2.30) $a_1, \dots, a_m$ — произвольные неотрицательные числа).

Применяя лемму 2.6 и теорему 2.3, получаем, что при выполнении условия 3) оптимальная плотность для критерия E -оптимальности единственна по модулю v и имеет вид (2.21).

2.10. Критерий MV -оптимальности. Сначала упростим для MV -критерия (2.9) формулировку теоремы 2.2. Для этого укажем, что в представлении (2.25) для критерия MV -оптимальности

$$\Gamma = \{1, 2, \dots, m\}, \quad \Phi_\gamma(D) = \operatorname{tr} E_\gamma D,$$

где γ -й диагональный элемент матрицы E_γ равен единице, а остальные элементы E_γ — нули. Все условия теоремы 2.2 для MV -критерия (2.9) выполнены, и поэтому необходимым и достаточным условием MV -оптимальности плотности ρ^* является выполнение для некоторого $\gamma \in \Gamma(\rho^*)$ неравенства

$$\sup_{x \in X} \{g_\gamma^*(x) [\rho^*(x)]^{-1}\} \leq \int [g_\gamma^*(z) \rho^*(z)] v(dz),$$

которое вытекает из (2.26) в силу того, что

$$\frac{\partial \Phi_v(D)}{\partial D} = \frac{\partial \operatorname{tr} E_v D}{\partial D} = E_v,$$

$$\operatorname{tr} \frac{\partial \Phi_v}{\partial D} (D + JJ^T)|_{D=D(p)} = d_{vv}(p) + J_v^2 = \int [g_v^2(z)/p(z)] v(dz),$$

$$\Phi_v(x, p) = g^T(x) E_v g(x)/p^2(x) = g_v^2(x)/p^2(x).$$

Рассмотрим последовательность критериев Φ_i , определяемых по формуле

$$\Phi_i(D) = [\operatorname{tr} (D \oplus I_m)^i]^{1/i} = \left(\sum_{j=1}^m d_{ij}^i \right)^{1/i}, \quad (2.31)$$

где $\oplus$ — поэлементное произведение матриц, I_m — единичная $m \times m$ -матрица. Строгая выпуклость критериев (2.31) следует из неравенства Минковского, а их дифференцируемость очевидна. Факт монотонной сходимости последовательности $\Phi_i(A)$ к $\Phi(A)$ для всех $A \in \mathcal{M}_m^+$ вытекает из неравенства (2.30). Если выполнено условие 3), то критерий MV -оптимальности (2.9) в силу леммы 2.6 является строго выпуклым на множестве $\mathcal{P}$ и поэтому имеет единственную по модулю v плотность p^* . Применяя теорему 2.3, получаем, что при выполнении условия 3) MV -оптимальная плотность p^* выражается по формуле (2.21). Из доказательства теоремы 2.3 вытекает также, что матрица L в представлении (2.27) для MV -оптимальной плотности диагональна (действительно, все матрицы L_i из формул (2.28) диагональны, а $L = \lim_{i \rightarrow \infty} L_i$).

Как следствие теоремы 2.3 мы получили результат Г. А. Михайлова [29] о том, что MV -оптимальная плотность p^* имеет вид

$$p^*(x) = \left[\sum_{i=1}^m \lambda_i g_i^2(x) \right]^{1/2} / \int \left[\sum_{i=1}^m \lambda_i g_i^2(z) \right]^{1/2} v(dz),$$

где

$$\lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \quad i = 1, \dots, m.$$

Упражнения.

1. Приведите пример критерия оптимальности, который является выпуклым, но не строго выпуклым.
2. Выпишите в явном виде оптимальную плотность для рассмотренных в § 2 гл. 3 критериев Q -оптимальности и оптимальности для экстраполяции в точку.
3. Упростите формулировку теоремы 2.2 для случаев, когда критерий оптимальности Φ является: а) критерием E -оптимальности; б) G -оптимальности (см. § 2 гл. 3).
4. Упростите формулировку теоремы 2.3 для случая, когда критерий оптимальности Φ является критерием G -оптимальности.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МАТРИЦ

§ 1. Матричная алгебра

1.1. Определения и обозначения. Приведем определения и обозначения, используемые в данном приложении

$\mathcal{M}_{m \times n}$ — множество вещественных $m \times n$ -матриц, имеющих m строк и n столбцов;

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_{n \times n};$$

a_{ij} ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$) — элементы матрицы $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, $A = \|a_{ij}\|_{m \times n}$;

$0 \in \mathcal{M}_{m \times n}$ — матрица, состоящая из нулей;

$I_n \in \mathcal{M}_n$ — единичная матрица (ее диагональные элементы равны единице, а внедиагональные — нулю);

$\lambda_1(B), \dots, \lambda_n(B)$ — собственные числа матрицы $B \in \mathcal{M}_n$, т.е. корни характеристического уравнения

$$\det(B - \lambda I_n) = 0.$$

$$\lambda_{\min}(B) = \min_i \lambda_i(B) \quad \lambda_{\max}(B) = \max_i \lambda_i(B);$$

$$\lambda_i = \lambda_i(A), \quad i = 1, \dots, n, \quad A \in \mathcal{M}_n.$$

Квадратная матрица называется *верхней треугольной*, если все ее элементы ниже главной диагонали равны нулю.

Следом квадратной матрицы $A \in \mathcal{M}_n$ называется сумма ее диагональных элементов $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Рангом произвольной матрицы называется размерность линейного пространства, порожденного столбцами этой матрицы

Матрица $A \in \mathcal{M}_n$ называется *невыврожденной*, если $\det A \neq 0$.

Обратной для невырожденной матрицы $A \in \mathcal{M}_n$ называется такая матрица $A^{-1} \in \mathcal{M}_n$, что $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$.

Обобщенной обратной матрицей для $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ называется такая матрица $A^- \in \mathcal{M}_{n \times m}$, что для любого $b \in \mathbb{R}^m$, при котором система уравнений $Ax = b$ совместна, вектор $x = A^-b$ является ее решением.

Квадратная матрица A называется *симметричной*, если $A = A^T$.

Симметричная матрица $A \in \mathcal{M}_n$ называется *положительно (неотрицательно) определенной*, если для любого $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ выполнено $a^T A a > 0$ (соответственно, $a^T A a \geq 0$).

$\mathcal{M}_n^{\geq}$ — множество неотрицательно определенных $n \times n$ -матриц.

$\mathcal{M}_n^{>}$ — множество положительно определенных $n \times n$ -матриц.

Для любых матриц $A, B \in \mathcal{M}_n^{>}$ запись $A > B$ ($A \geq B$) означает, что $A - B \in \mathcal{M}_n^{>}$ (соответственно, $A - B \in \mathcal{M}_n^{\geq}$).

Матрицы называются *согласованными* относительно некоторой операции, если эта операция определена.

1.2. Симметричные, положительные и неотрицательно определенные матрицы.

Теорема 1.1 (теорема о спектральном разложении). Если A — симметричная $n \times n$ -матрица, то выполнено

$$P^T A P = \Lambda \quad A = P \Lambda P^T, \quad (1.1)$$

где P — ортогональная $n \times n$ -матрица (т.е. $P^T P = P P^T = I_n$), столбцами которой являются ортонормированные собственные векторы матрицы A , Λ — матрица, на главной диагонали которой стоят $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (собственные числа матрицы A), а внедиагональные элементы равны нулю.

Доказательство имеется в [5, 9, 35].

Теорема 1.2. Матрица $A \in \mathcal{M}_n$ неотрицательно определена тогда и только тогда, когда существует матрица $F \in \mathcal{M}_n$, такая, что $A = F^T F$.

Теорема 1.3. Матрица $A \in \mathcal{M}_n$ положительно определена тогда и только тогда, когда существует невырожденная матрица $F \in \mathcal{M}_n$, такая, что $A = F^T F$.

В теоремах 1.2 и 1.3 необходимость вытекает из теоремы 1.1, а достаточность — из определения неотрицательной (положительной) определенности.

Теорема 1.4. Любую матрицу $A \in \mathcal{M}_n^>$ можно представить в виде $A = F^T F$, где матрица $F \in \mathcal{M}_n$ невырождена и является верхней треугольной. Доказательство имеется в [9].

Теорема 1.5. Если $A \in \mathcal{M}_n^>$, то

$$\lambda_i > 0, \quad a_{ii} > 0, \quad \det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i, \\ a_{ij} < (a_{ii} + a_{jj})/2, \quad (1.2)$$

где $i, j = 1, \dots, n$.

Если $A \in \mathcal{M}_n^>$, то

$$\lambda_i > 0, \quad a_{ii} > 0, \quad \det A > 0, \quad a_{ij} < (a_{ii} + a_{jj})/2, \quad j, i = 1, \dots, n.$$

Теорема 1.6. Если $A \in \mathcal{M}_n^>$, $B \in \mathcal{M}_n^>$, то $A + B \in \mathcal{M}_n^>$.

Теорема 1.7. Если $A \in \mathcal{M}_n^>$, то $A^{-1} \in \mathcal{M}_n^>$.

Теорема 1.8. Пусть $A \in \mathcal{M}_n^>$, $B \in \mathcal{M}_{n \times m}$, $\text{rang } B = m \leq n$. Тогда $B^T A B \in \mathcal{M}_m^>$. В частности, $B^T B \in \mathcal{M}_m^>$.

Доказательства теорем 1.5—1.8 вытекают из определений неотрицательной и положительной определенности матриц и теорем 1.1—1.3. Комментария требует только вывод формулы (1.2). Эта формула следует из того, что

$$(e_i - e_j)^T A (e_i - e_j) = e_i^T A e_i + e_j^T A e_j - 2e_i^T A e_j = a_{ii} + a_{jj} - 2a_{ij} \geq 0,$$

где $e_i \in \mathbb{R}^n$ — вектор, все компоненты которого равны нулю кроме i -й, равной единице.

Теорема 1.9. Пусть матрица $A \in \mathcal{M}_n$ симметрична, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ — ее собственные числа и $P_1, \dots, P_n$ — соответствующие им ортонормированные собственные векторы. Тогда

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \left\{ \frac{a^T A a}{a^T a} \right\} = \sup_{\|a\|=1} a^T A a = \lambda_1, \quad (1.3)$$

$$\inf_{a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \left\{ \frac{a^T A a}{a^T a} \right\} = \inf_{\|a\|=1} a^T A a = \lambda_n. \quad (1.4)$$

причем экстремумы достигаются соответственно на P_1 и P_n

Доказательство Формулы (1.1) перепишем в виде:

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i P_i^T, \quad \sum_{i=1}^n P_i P_i^T = I_n$$

В силу того, что $\{P_i\}_{i=1}^n$ — базис в $\mathbb{R}^n$ любой вектор $a \in \mathbb{R}^n$ представим в виде

$$a = \sum_{i=1}^n c_i P_i$$

Поэтому

$$\frac{a^T A a}{a^T a} = \sum_{i=1}^n c_i^2 \lambda_i \left(\sum_{i=1}^n c_i^2 \right)^{-1}$$

Очевидно, что супремум и инфимум этого выражения относительно векторов $(c_1, \dots, c_n)^T$ равны соответственно λ_1 и λ_n , причем супремум достигается при $a = P_1$, а инфимум — при $a = P_n$. Теорема доказана.

1.3. След.

Теорема 1.10. а) Если $A \in \mathcal{M}_n$, $c \in \mathbb{R}$, то $\text{tr } A = \text{tr } A^T$, $\text{tr } cA = c \text{tr } A$;
б) если $A, B \in \mathcal{M}_n$, то

$$\text{tr } (A + B) = \text{tr } A + \text{tr } B; \quad (1.5)$$

в) если $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$, $B \in \mathcal{M}_{m \times n}$, то

$$\text{tr } AB = \text{tr } BA; \quad (1.6)$$

г) если $a, b \in \mathbb{R}^n$, то

$$\text{tr } ab^T = a^T b;$$

д) если $A \in \mathcal{M}_n$, $b \in \mathbb{R}^n$, то

$$\text{tr } (Abb^T) = \text{tr } (bb^T A) = b^T A b;$$

е) если $A, P \in \mathcal{M}_n$, $P^T P = I_n$, то

$$\text{tr } PAP^T = \text{tr } A. \quad (1.7)$$

Все утверждения теоремы легко следуют из определения операции trace (след).

Теорема 1.11. Если A — симметричная матрица из $\mathcal{M}_n$, то

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (1.8)$$

$$\text{tr } A^s = \sum_{i=1}^n \lambda_i^s \quad s = -1, 0, 1, 2, \dots$$

Доказательство следует из теоремы 1.1 и формулы (1.7) с учетом того, что при $PP^T = I_n$ выполнено $(P^T A P)^s = P^T A^s P$.

Теорема 1.12. Пусть A — симметричная $n \times n$ -матрица. Необходимым и достаточным условием ее неотрицательной определенности является выполнение для всех $B \in \mathcal{M}_n^+$ неравенства $\text{tr } AB \geq 0$.

Доказательство По теореме 1.1 имеем

$$A = P \Lambda P^T = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i P_i^T.$$

где P_i — ортонормированные собственные векторы матрицы A , соответствующие собственным числам λ_i . Отсюда следует:

$$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i P_i^T B = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i^T B P_i.$$

Поскольку $B \in \mathcal{M}_n^{\geq}$, величины $P_i^T B P_i$ ($i = 1, \dots, n$) неотрицательны.

Если $A \in \mathcal{M}_n^{\geq}$, то по теореме 1.5 $\lambda_i \geq 0$, поэтому $\operatorname{tr} AB \geq 0$. С другой стороны, если $\operatorname{tr} AB \geq 0$ для всех $B \geq 0$, то это справедливо и для матрицы $B = P_i P_i^T$. Следовательно,

$$\operatorname{tr} A P_i P_i^T = \operatorname{tr} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j P_j P_j^T \right) P_i P_i^T = \lambda_i \geq 0$$

Отсюда с учетом теоремы 1.1 следует, что $A \geq 0$. Теорема доказана.

1.4. Ранг.

Теорема 1.13. Для любых согласованных матриц A, B выполнено

а) $\operatorname{rang} AB \leq \min(\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B)$;

б) $\operatorname{rang}(A+B) \leq \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B$.

Доказательство. а) Столбцы матрицы AB являются линейными комбинациями столбцов матрицы A , поэтому число линейно независимых столбцов в матрице AB не больше, чем в матрице A . Следовательно, $\operatorname{rang} AB \leq \operatorname{rang} A$. Аналогично $\operatorname{rang} AB \leq \operatorname{rang} B$.

б) Пусть матрицы A и B имеют размер $p \times q$. Обозначим через $a_1, \dots, a_q$ и $b_1, \dots, b_q$ столбцы матриц A и B соответственно, и пусть

$$D = (A, B) = (a_1, \dots, a_q, b_1, \dots, b_q)$$

есть блочная матрица, составленная из матриц A и B .

Запишем матрицу $A+B$ в виде

$$A+B = (a_1 + b_1, \dots, a_q + b_q).$$

Поскольку размерность пространства, порожденного набором векторов $\{a_1, \dots, a_q, b_1, \dots, b_q\}$ не меньше, чем размерность пространства для векторов $\{a_1 + b_1, \dots, a_q + b_q\}$, то $\operatorname{rang}(A+B) \leq \operatorname{rang} D$.

Покажем теперь, что $\operatorname{rang} D \leq \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B$. Для этого удалим из набора $\{a_1, \dots, a_q, b_1, \dots, b_q\}$ все векторы b_i , линейно зависящие от векторов a_j ($j = 1, \dots, q$). Матрицу, составленную из оставшихся векторов b_i , обозначим через B_0 . Имеем:

$$\operatorname{rang} D = \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B_0,$$

$$\operatorname{rang} B_0 \leq \operatorname{rang} B.$$

откуда и вытекает требуемое. Теорема доказана.

Теорема 1.14. Пусть $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$, $B \in \mathcal{M}_n$, $C \in \mathcal{M}_m$, $\det B \neq 0$, $\det C \neq 0$. Тогда

$$\operatorname{rang} BAC = \operatorname{rang} A.$$

Доказательство. В силу предыдущей теоремы

$$\operatorname{rang} A \geq \operatorname{rang} AC \geq \operatorname{rang} ACC^{-1} = \operatorname{rang} A.$$

Поэтому $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} AC$. Аналогично $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} BAC$. Теорема доказана.

Теорема 1.15. Если матрица симметрична, то ее ранг равен числу ненулевых ее собственных значений.

Доказательство следует из теорем 1.1 и 1.14.

1.5. Обратные матрицы. Теорема 1.16 (формула Фробеннуса). Пусть матрица A разбита на блоки:

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix},$$

где B и E — квадратные матрицы. Тогда, если существуют B^{-1} и E^{-1} , где

$$F = E - DB^{-1}C, \text{ то}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} + B^{-1}CF^{-1}DB^{-1} & -B^{-1}CF^{-1} \\ -F^{-1}DB^{-1} & F^{-1} \end{bmatrix},$$

а если существуют E^{-1} и G^{-1} , где $G = B - CE^{-1}D$, то

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} G^{-1} & -G^{-1}CE^{-1} \\ -E^{-1}DG^{-1} & E^{-1} + E^{-1}DG^{-1}CE^{-1} \end{bmatrix}.$$

Доказательство следует из определения обратной матрицы.

Теорема 1.17. Если $A \in \mathcal{M}_n$, $B \in \mathcal{M}_{n \times m}$, $C \in \mathcal{M}_m$, $D \in \mathcal{M}_{m \times n}$ и все написанные ниже обратные матрицы существуют, то

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}. \quad (1.9)$$

Доказательство. Умножим правую часть (1.9) справа на $(A + BCD)$:

$$\begin{aligned} A^{-1}(A + BCD) - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}(A + BCD) &= \\ &= I_n + A^{-1}BCD - A^{-1}BC(I_m + DA^{-1}BC)^{-1}D(I_n + A^{-1}BCD) = \\ &= I_n + A^{-1}BCD - A^{-1}BC(I_m + DA^{-1}BC)^{-1}(D + DA^{-1}BCD) = \\ &= I_n + A^{-1}BCD - A^{-1}BC(I_m + DA^{-1}BC)^{-1}(I_m + DA^{-1}BC)D = \\ &= I_n + A^{-1}BCD - A^{-1}BCD = I_n. \end{aligned}$$

Аналогичный результат получается, если правую часть (1.9) умножить на $(A + BCD)$ слева. Теорема доказана.

Теорема 1.18. В предположении, что все написанные ниже обратные матрицы существуют, справедливо:

$$a) \quad (I_n + AB)^{-1} = I_n - A(I_m + BA)^{-1}B \quad (1.10)$$

для $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$, $B \in \mathcal{M}_{m \times n}$

$$б) \quad (A + ab^T)^{-1} = A^{-1} - (1 + b^T A^{-1}a)^{-1} A^{-1}ab^T A^{-1}$$

для $A \in \mathcal{M}_n$, $a, b \in \mathbb{R}^n$;

$$\begin{aligned} в) \quad [(1 - \alpha)A + abb^T]^{-1} &= \\ &= (1 - \alpha)^{-1} [A^{-1} - \alpha A^{-1}bb^T A^{-1} / (1 - \alpha + ab^T A^{-1}b)] \end{aligned} \quad (1.11)$$

для $A \in \mathcal{M}_n$, $b \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in (0, 1)$;

$$г) \quad \det(A + BB^T) = \det A \det(I_m + B^T A^{-1}B) \quad (1.12)$$

для $A \in \mathcal{M}_n$, $B \in \mathcal{M}_{n \times m}$.

Все формулы легко получить из (1.9).

Теорема 1.19. Если $A \in \mathcal{M}_n^>$, то $\text{tr } A^{-1} \geq n^2 / \text{tr } A$

Доказательство. Пусть $B \in \mathcal{M}_n^>$ и $\lambda_i(B)$ ($i = 1, \dots, n$) — собственные числа матрицы B . Из утверждения теоремы 1.5 вытекает, что

$$\det B = \prod_{i=1}^n \lambda_i(B).$$

Согласно (1.8) имеем

$$\text{tr } B = \sum_{i=1}^n \lambda_i(B).$$

Используя эти соотношения, неравенство

$$\left(\prod_{i=1}^n \lambda_i(B) \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i(B)$$

между средним арифметическим и средним геометрическим перепишем в виде

$$\text{tr } B \geq n (\det B)^{1/n}$$

Применяя это неравенство к матрицам $B = A^{-1}$ и $B = A$, получаем

$$\text{tr } A^{-1} \geq n [(\det A^{-1})]^{1/n} = n (\det A)^{-1/n} \geq n [(\text{tr } A)/n]^{-1} = n^2 / \text{tr } A.$$

Теорема доказана.

1.6. Обобщенные обратные матрицы. Можно показать, что обобщенная обратная матрица всегда существует, но вообще говоря, неединственна. Если $m = n$ и у матрицы A существует обратная A^{-1} , то, очевидно, $A^{-} = A^{-1}$.

Теорема 1.20. Матрица A^{-} — обобщенная обратная для A тогда и только тогда, когда

$$AA^{-}A = A. \quad (1.13)$$

Доказательство. Пусть A^{-} — обобщенная обратная матрица. Выберем в качестве b i -й столбец a_i матрицы A . Система $Ax = a_i$, очевидно, совместна, а $x = A^{-}a_i$ — ее решение, т.е. $AA^{-}a_i = a_i$ для всех $i = 1, \dots, n$. Но это и эквивалентно тому, что выполнено (1.13).

Пусть теперь выполнено (1.13) и x — какое-либо решение уравнения $Ax = b$. Тогда имеем:

$$AA^{-}b = AA^{-}(Ax) = Ax = b.$$

т.е. $A^{-}b$ — решение уравнения $Ax = b$. Теорема доказана.

Следствие 1.1. Пусть A^{-} — обобщенная обратная матрицы $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, $z \in \mathbb{R}^n$ — произвольный вектор. Тогда

$$\bar{a} = A^{-}b + (A^{-}A - I_n)z$$

есть решение совместной системы уравнений $Aa = b$.

Доказательство.

$$A\bar{a} = AA^{-}b + (AA^{-}A - A)z = AA^{-}b + (A - A)z = AA^{-}b = AA^{-}Aa = Aa = b.$$

Следствие доказано.

Рассмотрим один из способов построения обобщенной обратной A^{-} для матрицы $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ ранга r . Переставив, если это необходимо, строки и столбцы матрицы A , запишем A в виде блочной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

где B — невырожденная $r \times r$ -матрица. Тогда, как нетрудно проверить по формуле (1.13), обобщенными обратными для матрицы (1.14) являются

$$A^{-} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

и, в случае $m = n$,

$$A^{-} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -K \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}.$$

где матрица K такова, что $BK = C$ и $DK = E$.

1.7. Лемма о произведении определителей. Пусть μ — некоторая σ -конечная мера на $(X, \mathcal{B})$. Для двух заданных на множестве X измеримых функций f, g обозначим

$$(f, g) = \int_X f(x) g(x) \mu(dx).$$

Теорема 1.21 (лемма о произведении определителей). Пусть $(\varphi_i)_{i=1}^n$ и $(\psi_i)_{i=1}^n$ — два набора таких функций на X , что $(\varphi_i, \psi_j) < \infty$ для всех $i, j = 1, \dots, n$. Тогда имеет место тождество

$$I = \int_{X^n} \det \|\varphi_i(x_j)\|_{j, i=1}^n \det \|\psi_k(x_l)\|_{l, k=1}^n \mu(dx_1) \dots \mu(dx_n) = \\ = n! \det \|(\varphi_i, \psi_k)\|_{i, k=1}^{2n}. \quad (1.16)$$

Доказательство. Разложим определитель $\det \|\varphi_i(x_j)\|_{j, i=1}^n$ (j — номер строки) по элементам первого столбца, обозначая через Δ_j соответствующий минор:

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} \varphi_2(x_1) & \varphi_3(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_2(x_{j-1}) & \varphi_3(x_{j-1}) & \dots & \varphi_n(x_{j-1}) \\ \varphi_2(x_{j+1}) & \varphi_3(x_{j+1}) & \dots & \varphi_n(x_{j+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_2(x_n) & \varphi_3(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}.$$

Получим

$$I = \int_{X^n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \Delta_j \varphi_1(x_j) \det \|\psi_k(x_l)\|_{l, k=1}^n \mu(dx_1) \dots \mu(dx_n) = \\ = \sum_{j=1}^n \int_{X^{n-1}} (-1)^j \Delta_j \left[\int_X \varphi_1(x_j) \det \|\psi_k(x_l)\|_{l, k=1}^n \mu(dx_j) \right] \mu(dx_1) \dots \\ \dots \mu(dx_{j-1}) \mu(dx_{j+1}) \dots \mu(dx_n).$$

Допишем строку определителя $\det \|\psi_k(x_l)\|_{l, k=1}^n$ с номером j на $\varphi_1(x_j)$ и проинтегрируем элементы этой строки по x_j . Перестановка проинтегрированной строки на первое место вызовет появление множителя $(-1)^{j-1}$.

Изменим теперь нумерацию первых $j-1$ переменных интегрирования, обозначая x_2 вместо x_1 , x_3 вместо x_2 , ..., x_j вместо x_{j-1} . Получим

$$I = n \int_{X^{n-1}} \mu(dx_2) \dots \mu(dx_n) \det \|\varphi_i(x_j)\|_{i, i=2}^n \times \\ \times \begin{vmatrix} (\varphi_1, \psi_1) & (\varphi_1, \psi_2) & \dots & (\varphi_1, \psi_n) \\ \psi_1(x_2) & \psi_2(x_2) & \dots & \psi_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_1(x_n) & \psi_2(x_n) & \dots & \psi_n(x_n) \end{vmatrix}.$$

Таким образом, мы понизили на единицу порядок одного из определителей и проинтегрировали строку второго. Повторение этой операции еще $n-1$ раз приводит, очевидно, к (1.16). Теорема доказана.

Следствие 1.2. Пусть μ — дискретная мера, сосредоточенная в точках $x_1, \dots, x_N$ с весами $p_i > 0$ ($i = 1, \dots, N$). Тогда

$$\det \left\| \sum_{i=1}^N p_i \varphi_k(x_i) \varphi_l(x_i) \right\|_{k, l=1}^n = \\ = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq N} p_{i_1} \dots p_{i_n} \det \|\varphi_k(x_{i_p})\|_{k, p=1}^n \det \|\varphi_l(x_{i_q})\|_{l, q=1}^n. \quad (1.17)$$

Доказательство. В рассматриваемом случае тождество (1.16) записывается в виде

$$I = n! \det \left| \sum_{l=1}^N p_l \varphi_k(x_l) \psi_l(x_l) \right|_{k, l=1}^n - \\ - \sum_{i_1=1}^N \dots \sum_{i_n=1}^N p_{i_1} \dots p_{i_n} \det \left| \varphi_k(x_{i_p}) \right|_{k, p=1}^n \det \left| \psi_l(x_{i_q}) \right|_{l, q=1}^n.$$

Поскольку при совпадении значений i_p ($p = 1, \dots, n$) определители в правой части выписанного тождества обращаются в нуль, то

$$I = \sum_{i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n} p_{i_1} \dots p_{i_n} \det \left| \varphi_k(x_{i_p}) \right|_{k, p=1}^n \det \left| \psi_l(x_{i_q}) \right|_{l, q=1}^n.$$

Перестановка одних и тех же столбцов (строк) в определителях, стоящих под знаком суммы, не меняет их произведения, поэтому

$$I = n! \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq N} p_{i_1} \dots p_{i_n} \det \left| \varphi_k(x_{i_p}) \right|_{k, p=1}^n \det \left| \psi_l(x_{i_q}) \right|_{l, q=1}^n.$$

Полученное тождество эквивалентно (1.17). Следствие доказано.

В случае $p_i = 1$ ($i = 1, \dots, N$) формула (1.17) называется *формулой Бине — Коши*.

§ 2. Неравенства выпуклости

2.1. Неравенства общего характера

Теорема 2.1 (неравенство Гельдера). Пусть $p \geq 1$, $q = p/(p-1)$, ν — σ -конечная мера на измеримом пространстве $(X, \mathfrak{M})$, f и g — неотрицательные функции на X , $f \in L^p(X, \nu)$, $g \in L^q(X, \nu)$. Тогда справедливо неравенство

$$\int_X f(x) g(x) \nu(dx) \leq \left(\int_X f^p(x) \nu(dx) \right)^{1/p} \left(\int_X g^q(x) \nu(dx) \right)^{1/q}, \quad (2.1)$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда при ν -почти всех $x \in X$ выполнено

$$f^p(x) \left| \int_X f^p(z) \nu(dz) \right| = g^q(x) \left| \int_X g^q(z) \nu(dz) \right|.$$

Доказательство имеется в [2, 5].

Следствие 2.1. Для любых $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q}, \quad (2.2)$$

где $p \geq 1$, $q = p/(p-1)$.

Неравенство (2.2) получается из (2.1) для случая, когда мера ν сосредоточена в n точках с единичными весами.

Следствие 2.2 (неравенство Коши). Для любых векторов $a, b \in \mathbb{R}^n$ справедливо

$$(a^T b)^2 \leq (a^T a) (b^T b), \quad (2.3)$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы a и b линейно зависимы.

Неравенство (2.3) — частный случай неравенства (2.2) при $p = q = 2$. Приведем другие формы неравенства (2.3).

Следствие 2.3. Для любых $a, b \in \mathbb{R}^n$ $A \in \mathcal{M}_n^>$ выполнено

$$(a^T A b)^2 \leq (a^T A a) (b^T A b).$$

Доказательство следует из (2.3) и теоремы 1.2.

Следствие 2.4. Для любых $a, b \in \mathbb{R}^n$ $A \in \mathcal{M}_n^>$ справедливо

$$(a^T b)^2 \leq (a^T A a) (b^T A^{-1} b),$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы a и $A^{-1}b$ линейно зависимы.

Доказательство следует из следствия 2.2 и теоремы 1.3.

Следствие 2.5. Для любых $A \in \mathcal{M}_n^>$, $b \in \mathbb{R}^n$ имеет место

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n: \|a\|=1} \left\{ \frac{(a^T b)^2}{a^T A a} \right\} = b^T A^{-1} b, \quad (2.4)$$

причем верхняя грань в (2.4) достигается на векторе

$$a = A^{-1}b / \|A^{-1}b\|.$$

2.2. Неравенства выпуклости.

Теорема 2.2. Пусть $A, B \in \mathcal{M}_n^>$, $\alpha \in (0, 1)$. Тогда справедливо неравенство

$$\det(\alpha A + (1 - \alpha) B) \geq (\det A)^\alpha (\det B)^{1-\alpha}, \quad (2.5)$$

причем равенство имеет место только при $A = B$.

Прежде чем доказывать теорему, докажем лемму.

Лемма 2.1. Если $A \in \mathcal{M}_n^>$, то выполнено

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{-x^T A x\} dx_1 \dots dx_n = \pi^{n/2} (\det A)^{-1/2}.$$

Доказательство. Пусть P — ортогональная матрица, приводящая матрицу A к диагональному виду: $P^T A P = \Lambda$. Сделаем замену переменных $x = P y$ в интеграле I . Тогда

$$x^T A x = (P y)^T A P y = y^T \Lambda y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2.$$

Далее,

$$dx_1 \dots dx_n = dy_1 \dots dy_n.$$

поскольку якобиан преобразования $x = P y$ равен $|\det P| = 1$. Имеем:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \right\} dy_1 \dots dy_n = \\ &= \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{-\lambda_i y_i^2\} dy_i = \pi^{n/2} (\lambda_1 \dots \lambda_n)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Учитывая то, что $\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ (см. теорему 1.5), получаем утверждение леммы. Лемма доказана.

Заметим, что утверждение леммы хорошо известно специалистам по теории вероятностей и математической статистике: дело в том, что в общем виде плотность многомерного нормального распределения записывается в виде $I^{-1} \exp \{-(x-a)^T A (x-a)\}$, где $a \in R^n$.

Доказательство теоремы 2.2. В силу леммы 2.1 имеем:

$$\frac{\pi^{n/2}}{\det(\alpha A + (1-\alpha)B)} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{-\alpha x^T A x - (1-\alpha) x^T B x\} dx_1 \dots dx_n$$

Используем неравенство Гельдера (2.1) с $p = 1/\alpha$, $q = 1/(1-\alpha)$, $f(x) = \exp \{-\alpha x^T A x\}$, $g(x) = \exp \{-(1-\alpha) x^T B x\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\pi^{n/2}}{[\det(\alpha A + (1-\alpha)B)]^{1/2}} &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{-x^T A x\} dx_1 \dots dx_n \right)^{\alpha} \times \\ &\times \left(\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{-x^T B x\} dx_1 \dots dx_n \right)^{1-\alpha} = \frac{\pi^{n\alpha/2} \pi^{n(1-\alpha)/2}}{(\det A)^{\alpha/2} (\det B)^{(1-\alpha)/2}} \end{aligned}$$

Отсюда и следует (2.5). Теорема доказана.

Следствие 2.6 (логарифмическая вогнутость определителя). Пусть $A, B \in \mathcal{A}_n^+$, $\alpha \in (0, 1)$, $A \neq B$. Тогда справедливо

$$\ln \det [\alpha A + (1-\alpha)B] > \alpha \ln \det A + (1-\alpha) \ln \det B. \quad (2.6)$$

Неравенство (2.6) получается путем логарифмирования обеих частей неравенства (2.5).

Теорема 2.3. Пусть $A, B \in \mathcal{A}_n^+$, $\alpha \in [0, 1]$. Тогда выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \lambda_{\max} [(1-\alpha)A + \alpha B] &\leq (1-\alpha) \lambda_{\max}(A) + \alpha \lambda_{\max}(B), \\ \lambda_{\min} [(1-\alpha)A + \alpha B] &\geq (1-\alpha) \lambda_{\min}(A) + \alpha \lambda_{\min}(B). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Доказательство следует из (1.3), (1.4) и того, что для любого $c > 0$ и для любых функций f, g , заданных на одном и том же множестве, выполнено

$$\begin{aligned} \sup(f+g) &\leq \sup f + \sup g, \quad \inf(f+g) \geq \inf f + \inf g, \\ \sup cf &= c \sup f, \quad \inf cf = c \inf f. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Теорема 2.4. Пусть $A, B \in \mathcal{A}_n^+$, $\alpha \in (0, 1)$. Тогда

$$\alpha A^{-1} + (1-\alpha) B^{-1} \geq [\alpha A + (1-\alpha) B]^{-1}, \quad (2.9)$$

причем равенство достигается только при $A = B$.

Для доказательства теоремы потребуется следующая лемма.

Лемма 2.2. Если $A \in \mathcal{A}_n^+$, то $A + A^{-1} \geq 2I_n$, причем равенство имеет место только при $A = I_n$.

Доказательство леммы. Используя теорему 1.3, представим матрицу A в виде $A = F^T F$, где $\det F \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} A + A^{-1} - 2I_n &= F^T F + F^{-1} (F^T)^{-1} - 2I_n = (F^T - F^{-1})(F - (F^T)^{-1}) = \\ &= (F^T - F^{-1})(F - (F^{-1})^T) = (F - (F^{-1})^T)^T (F - (F^{-1})^T). \end{aligned}$$

По теореме 1.2 $A + A^{-1} - 2I_n \geq 0$, причем знак равенства имеет место в том случае, когда $F - (F^{-1})^T = 0$, т.е. $F^T = F^{-1}$, что эквивалентно тому, что $A = I_n$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.4. Неравенство (2.9) эквивалентно следующему:

$$(\alpha A + (1 - \alpha) B) (\alpha A^{-1} + (1 - \alpha) B^{-1}) \geq I_n$$

Запишем цепочку неравенств, эквивалентных приведенному:

$$\alpha^2 I_n + \alpha (1 - \alpha) AB^{-1} + \alpha (1 - \alpha) BA^{-1} + (1 - \alpha)^2 I_n \geq I_n.$$

$$\alpha (1 - \alpha) [AB^{-1} + BA^{-1}] + I_n - 2\alpha I_n + 2\alpha^2 I_n \geq I_n.$$

$$\alpha (1 - \alpha) [AB^{-1} + BA^{-1} - 2I_n] \geq 0,$$

$$AB^{-1} + BA^{-1} - 2I_n \geq 0.$$

Применяя утверждение леммы 2.1 к матрице AB^{-1} , получаем требуемое. Теорема доказана.

§ 3. Матричный анализ

3.1. Дифференцирование и интегрирование матриц по параметру. Пусть элементы матрицы $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$ зависят от некоторого параметра t . Положим

$$\frac{\partial A(t)}{\partial t} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial t} & \dots & \frac{\partial a_{1m}}{\partial t} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial a_{n1}}{\partial t} & \dots & \frac{\partial a_{nm}}{\partial t} \end{bmatrix}$$

(для скалярного параметра t),

$$\int A(t) dt = \begin{bmatrix} \int a_{11}(t) dt & \dots & \int a_{1m}(t) dt \\ \dots & \dots & \dots \\ \int a_{n1}(t) dt & \dots & \int a_{nm}(t) dt \end{bmatrix}.$$

Теорема 3.1. Для любых согласованных прямоугольных матриц A, B выполняются равенства

$$\frac{\partial}{\partial t} (AB) = \frac{\partial A}{\partial t} B + A \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} \left(\frac{\partial A}{\partial t} B \right) + \operatorname{tr} \left(A \frac{\partial B}{\partial t} \right). \quad (3.2)$$

Для квадратной невырожденной матрицы $A \in \mathcal{M}_n$ выполняются равенства

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} \frac{\partial A}{\partial t}, \quad (3.3)$$

$$\int \operatorname{tr} A(t) dt = \operatorname{tr} \int A(t) dt, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} A^{-1} = -A^{-1} \frac{\partial A}{\partial t} A^{-1}, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \det A = \operatorname{tr} A^{-1} \frac{\partial A}{\partial t}, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \det A = \det A \cdot \operatorname{tr} A^{-1} \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (3.7)$$

Доказательство. Формулы (3.1)–(3.4) следуют из определения. Формула (3.5) следует из того, что

$$0 = \frac{\partial I_n}{\partial t} = \frac{\partial AA^{-1}}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t} A^{-1} + A \frac{\partial A^{-1}}{\partial t}.$$

Формула (3.6) следует из (3.7), а последняя формула будет доказана позднее — при доказательстве теоремы 3.4.

3.2. Матричное дифференцирование. Пусть имеется функционал $\Phi: \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}$, $X = \|x_{ij}\| \in \mathcal{M}_n$ и существуют непрерывные частные производные $\partial\Phi(X)/\partial x_{ij}$ ($i, j = 1, \dots, n$) по элементам матрицы X , где элементы x_{ij} рассматриваются как независимые параметры. Производной функционала Φ по матрице X называется матрица $\partial\Phi/\partial X$, составленная из этих частных производных:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x_{11}} & \dots & \frac{\partial\Phi}{\partial x_{1n}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x_{n1}} & \dots & \frac{\partial\Phi}{\partial x_{nn}} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

При сформулированных предположениях функционал Φ имеет производную Фреше^{*}), которая сопоставляет матрице $A \in \mathcal{M}_n$ число $\text{tr} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial X} \right)^T A$. Это вытекает из того, что при $A \in \mathcal{M}_n$, $\|A\| \rightarrow 0$ выполнено

$$\Phi(X + A) = \Phi(X) + \text{tr} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial X} \right)^T A + o(\|A\|).$$

Теорема 3.2 (производная сложной функции). Пусть t — вещественный параметр, $X = X(t) \in \mathcal{M}_n$ — матрица, зависящая от t . Тогда

$$\frac{\partial\Phi(X(t))}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial\Phi(X)}{\partial x_{ij}} \frac{\partial x_{ij}}{\partial t},$$

что записывается также в виде

$$\frac{\partial\Phi(X(t))}{\partial t} = \text{tr} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial X} \right)^T \frac{\partial X}{\partial t} \quad (3.9)$$

Доказательство следует из определения и обычного правила дифференцирования сложной функции.

Рассмотрим, как вычисляются производные функционалов типа $\text{tr} a e^{AX}$

Теорема 3.3. Пусть $A, B, X \in \mathcal{M}_n$, $a, b \in \mathbb{R}^n$. Тогда справедливы равенства

$$\frac{\partial \text{tr} XA}{\partial X} = A^T, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial X} a^T X b = ab^T, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \text{tr} X^T A X = (A + A^T) X, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \text{tr} X A X^T = X (A + A^T), \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \text{tr} X^T A X^T = X^T A + A X^T, \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \text{tr} X A X = X^T A^T + A^T X^T, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \text{tr} X^T A X B = (A + A^T) X B \quad (3.16)$$

^{*}) Исходя из вида производной Фреше, правильнее было бы производной функционала Φ по X называть не матрицу (3.8), а матрицу, транспонированную к правой части (3.8).

Если матрица X невырождена, то выполнено

$$\frac{\partial}{\partial X} \operatorname{tr} AX^{-1} = -(X^{-1}AX^{-1})^T. \quad (3.17)$$

Доказательство. Сначала докажем (3.10). Ясно, что

$$\operatorname{tr} AX = \sum_{i,j=1}^n x_{ij} a_{ji}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \operatorname{tr} AX}{\partial x_{ij}} = a_{ji}.$$

Отсюда и из (3.8) вытекает (3.10).

Формула (3.11) является очевидным следствием (3.10).

Докажем (3.12). Из определения следует:

$$\frac{\partial X}{\partial x_{ij}} = E_{ij}, \quad \frac{\partial X^T}{\partial x_{ij}} = E_{ji},$$

где $E_{ij} \in \mathcal{M}_n$ — матрица, все элементы которой равны нулю, кроме элемента, стоящего на пересечении i -й строки и j -го столбца, равного единице. Отсюда, используя (3.1), получаем:

$$\frac{\partial X^T AX}{\partial x_{ij}} = E_{ji}AX + X^T AE_{ij}.$$

Из (3.3) и (1.5) теперь имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{tr} X^T AX}{\partial x_{ij}} &= \operatorname{tr} \frac{\partial X^T AX}{\partial x_{ij}} = \operatorname{tr} [E_{ji}AX + X^T AE_{ij}] = \\ &= \operatorname{tr} E_{ji}AX + \operatorname{tr} X^T AE_{ij} = (AX)_{ji} + (X^T A)_{ji} = (AX)_{ji} + (A^T X)_{ji}. \end{aligned}$$

т.е. это выражение равно (i, j) -му элементу матрицы $(A + A^T)X$. Отсюда и следует (3.12).

Формулы (3.13)–(3.16) доказываются аналогично.

Докажем теперь (3.17). Из (3.5) получаем:

$$\frac{\partial X^{-1}}{\partial x_{ij}} = -X^{-1} \frac{\partial X}{\partial x_{ij}} X^{-1} = -X^{-1} E_{ij} X^{-1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{tr} AX^{-1}}{\partial x_{ij}} &= \operatorname{tr} A \frac{\partial X^{-1}}{\partial x_{ij}} = -\operatorname{tr} AX^{-1} E_{ij} X^{-1} = \\ &= -\operatorname{tr} X^{-1} AX^{-1} E_{ij} = -(X^{-1}AX^{-1})_{ji} \end{aligned}$$

Отсюда и вытекает (3.17). Теорема доказана.

Остановимся, наконец, на вычислении производных от функционалов, выражающихся через определитель.

Теорема 3.4. Если существуют выписанные обратные матрицы, то для любых $A, X \in \mathcal{M}_n$:

$$\frac{\partial \det X}{\partial X} = (\det X) (X^T)^{-1}, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \ln \det X = (X^T)^{-1}, \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \ln \det X^T X = 2X(X^T X)^{-1}, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \ln \det X^T AX = AX(X^T A^T X)^{-1} + A^T X(X^T AX)^{-1}. \quad (3.21)$$

Доказательство. Сначала докажем (3.18). Для того чтобы считать $\partial \det X / \partial x_{ij}$, разложим $\det X$ по элементам i -й строки:

$$\det X = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} x_{ij} X_{ij}$$

Здесь X_{ij} — алгебраическое дополнение элемента x_{ij} матрицы X . Следовательно, $\partial \det X / \partial x_{ij} = (-1)^{i+j} X_{ij}$, а формула (3.18) вытекает из того, что элементы x^{ij} обратной к X матрицы X^{-1} определяются по формуле:

$$x^{ij} = (-1)^{i+j} X_{ji} / \det X$$

Из (3.18) сразу следует (3.19). Кроме того, из (3.18) и (3.9) вытекает недоказанная в теореме 3.1 формула (3.7).

Докажем теперь (3.21). Имеем:

$$\frac{\partial X^T A X}{\partial x_{ij}} = E_{ji} A X + X^T A E_{ij}$$

Используя (3.18), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \ln \det X^T A X &= \operatorname{tr} (X^T A^T X)^{-1} [E_{ji} A X + X^T A E_{ij}] = \\ &= \operatorname{tr} [(X^T A^T X)^{-1} X^T A]^T E_{ji} + \operatorname{tr} A X (X^T A^T X)^{-1} E_{ji} = \\ &= [A^T X (X^T A X)^{-1} + A X (X^T A^T X)^{-1}]_{ji}. \end{aligned}$$

Отсюда и следует (3.21). Формула (3.20) — очевидное следствие (3.21). Теорема доказана.

Если матрица X невырождена, то выполнено

$$\frac{\partial}{\partial X} \operatorname{tr} AX^{-1} = -(X^{-1}AX^{-1})^T. \quad (3.17)$$

Доказательство. Сначала докажем (3.10). Ясно, что

$$\operatorname{tr} AX = \sum_{i,j=1}^n x_{ij} a_{ji}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \operatorname{tr} AX}{\partial x_{ij}} = a_{ji}.$$

Отсюда и из (3.8) вытекает (3.10).

Формула (3.11) является очевидным следствием (3.10).

Докажем (3.12). Из определения следует:

$$\frac{\partial X}{\partial x_{ij}} = E_{ij}, \quad \frac{\partial X^T}{\partial x_{ij}} = E_{ji},$$

где $E_{ij} \in \mathcal{M}_n$ — матрица, все элементы которой равны нулю, кроме элемента, стоящего на пересечении i -й строки и j -го столбца, равного единице. Отсюда, используя (3.1), получаем:

$$\frac{\partial X^T AX}{\partial x_{ij}} = E_{ji}AX + X^T AE_{ij}.$$

Из (3.3) и (1.5) теперь имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{tr} X^T AX}{\partial x_{ij}} &= \operatorname{tr} \frac{\partial X^T AX}{\partial x_{ij}} = \operatorname{tr} [E_{ji}AX + X^T AE_{ij}] = \\ &= \operatorname{tr} E_{ji}AX + \operatorname{tr} X^T AE_{ij} = (AX)_{ji} + (X^T A)_{ji} = (AX)_{ji} + (A^T X)_{ji}. \end{aligned}$$

т.е. это выражение равно (i, j) -му элементу матрицы $(A + A^T)X$. Отсюда и следует (3.12).

Формулы (3.13)–(3.16) доказываются аналогично.

Докажем теперь (3.17). Из (3.5) получаем:

$$\frac{\partial X^{-1}}{\partial x_{ij}} = -X^{-1} \frac{\partial X}{\partial x_{ij}} X^{-1} = -X^{-1} E_{ij} X^{-1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{tr} AX^{-1}}{\partial x_{ij}} &= \operatorname{tr} A \frac{\partial X^{-1}}{\partial x_{ij}} = -\operatorname{tr} AX^{-1} E_{ij} X^{-1} = \\ &= -\operatorname{tr} X^{-1} AX^{-1} E_{ij} = -(X^{-1}AX^{-1})_{ji} \end{aligned}$$

Отсюда и вытекает (3.17). Теорема доказана.

Остановимся, наконец, на вычислении производных от функционалов, выражающихся через определитель.

Теорема 3.4. Если существуют выписанные обратные матрицы, то для любых $A, X \in \mathcal{M}_n$:

$$\frac{\partial \det X}{\partial X} = (\det X) (X^T)^{-1}, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \ln \det X = (X^T)^{-1}, \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \ln \det X^T X = 2X (X^T X)^{-1}, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \ln \det X^T A X = AX (X^T A^T X)^{-1} + A^T X (X^T A X)^{-1}. \quad (3.21)$$

Доказательство. Сначала докажем (3.18). Для того чтобы считать $\partial \det X / \partial x_{ij}$, разложим $\det X$ по элементам i -й строки:

$$\det X = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} x_{ij} X_{ij}$$

Здесь X_{ij} — алгебраническое дополнение элемента x_{ij} матрицы X . Следовательно, $\partial \det X / \partial x_{ij} = (-1)^{i+j} X_{ij}$, а формула (3.18) вытекает из того, что элементы x^{ij} обратной к X матрицы X^{-1} определяются по формуле:

$$x^{ij} = (-1)^{i+j} X_{ij} / \det X$$

Из (3.18) сразу следует (3.19). Кроме того, из (3.18) и (3.9) вытекает недоказанная в теореме 3.1 формула (3.7).

Докажем теперь (3.21). Имеем:

$$\frac{\partial X^T A X}{\partial x_{ij}} = E_{ji} A X + X^T A E_{ij}$$

Используя (3.18), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \ln \det X^T A X &= \operatorname{tr} (X^T A^T X)^{-1} [E_{ji} A X + X^T A E_{ij}] = \\ &= \operatorname{tr} [(X^T A^T X)^{-1} X^T A]^T E_{ji} + \operatorname{tr} A X (X^T A^T X)^{-1} E_{ji} = \\ &= [A^T X (X^T A X)^{-1} + A X (X^T A^T X)^{-1}]_{ji}. \end{aligned}$$

Отсюда и следует (3.21). Формула (3.20) — очевидное следствие (3.21). Теорема доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С НИМ

Случайный вектор $Y = (y_1, \dots, y_N)^T$ имеет невырожденное нормальное распределение, если его плотность распределения равна

$$p(y) = \frac{(\det A)^{1/2}}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp \{-(y - \mu)^T A (y - \mu)\}. \quad (1)$$

или в краткой записи: $Y \sim N(\mu, \sigma^2 A^{-1})$. При этом $EY = \mu$, $DY = \sigma^2 A^{-1}$.

Случайная величина ξ имеет (центральное) χ^2 -распределение с k степенями свободы, если

$$\xi = \sum_{i=1}^k y_i^2, \quad (2)$$

где $y_i \sim N(0, 1)$, y_i независимы, или в краткой записи: $\xi \sim \chi^2(k)$. Плотностью распределения случайной величины $\xi \sim \chi^2(k)$ является

$$p_k(x) = [2^{k/2} \Gamma(k/2)]^{-1} x^{k/2-1} e^{-x/2}, \quad x \geq 0. \quad (3)$$

Из (1) и (2) следует, что если $Y \sim N(\mu, \sigma^2 A^{-1})$, то

$$(Y - \mu)^T A (Y - \mu) \sim \sigma^2 \chi^2(N), \quad (4)$$

где N — размерность вектора Y .

Теорема 1. Пусть $Y \sim N(0, I_N)$, A — симметричная $N \times N$ -матрица. Для того чтобы квадратичная форма $Y^T A Y$ имела χ^2 -распределение, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено $A^2 = A$. При этом число степеней свободы χ^2 -распределения равно $\text{tr } A$.

Доказательство имеется в [35].

Распределением Стьюдента (или t -распределением) с k степенями свободы называется распределение случайной величины $t = y/\sqrt{\xi/k}$, где случайные величины y и ξ независимы, $y \sim N(0, 1)$, $\xi \sim \chi^2(k)$.

Случайная величина F имеет распределение Фишера с k_1 и k_2 степенями свободы ($F \sim F(k_1, k_2)$), если $F = \frac{\xi_1}{k_1} \bigg/ \frac{\xi_2}{k_2}$, где $\xi_1 \sim \chi^2(k_1)$, $\xi_2 \sim \chi^2(k_2)$ и случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы. Из определения следует, что если случайная величина t имеет распределение Стьюдента с k степенями свободы, то $t^2 \sim F(1, k)$.

Ниже приведены четыре таблицы. В таблице 1 содержатся значения p_α — модуля $\alpha/2$ -квантиля стандартного нормального распределения. Число p_α удовлетворяет соотношениям

$$\alpha/2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-p_\alpha} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{p_\alpha}^{\infty} e^{-t^2/2} dt,$$

$$1 - \alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-p_\alpha}^{p_\alpha} e^{-t^2/2} dt.$$

В таблице 2 приведены значения $t_{\alpha}(k)$ — модуля $\alpha/2$ -квантиля t -распределения Стьюдента с k степенями свободы. Если $t_{(k)}$ — случайная величина с указанным распределением, то выполнено

$$\alpha/2 = P\{t_{(k)} < -t_{\alpha}(k)\} = P\{t_{(k)} > t_{\alpha}(k)\}$$

$$1 - \alpha = P\{|t_{(k)}| \leq t_{\alpha}(k)\}.$$

В таблице 3 приведены значения $F_{\alpha}(k, n)$ — $(1 - \alpha)$ -квантиля распределения Фишера с k и n степенями свободы. Если $F \sim F(k, n)$, то

$$P\{F > F_{\alpha}(k, n)\} = \alpha$$

В таблице 4 приведено 350 нормально распределенных случайных чисел (т. е. независимых реализаций случайной величины, имеющей нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией, равной единице)

Т а б л и ц а 1. Значения n_{α}

α	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
n_{α}	1,28	1,64	1,95	2,33	2,56	3,09	3,29

Т а б л и ц а 2. Значения $t_{\alpha}(k)$

α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	∞
0,1	6,31	2,92	2,35	2,13	2,02	1,91	1,90	1,86	1,83	1,81	1,64
0,05	12,71	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26	2,23	1,96
0,01	63,66	9,93	5,84	4,60	4,03	3,71	3,50	3,36	3,25	3,17	2,56
0,001	636,67	31,60	12,92	8,61	6,87	5,96	5,44	5,04	4,78	4,59	3,29

Т а б л и ц а 3. Значения $F_{\alpha}(k, n)$
 $\alpha = 0,05$

n	k										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,37
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,54
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,00

$$\alpha = 0,01$$

n	h										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	∞
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6023	6056	6366
2	98,5	99,0	99,2	99,2	99,3	99,3	99,4	99,4	99,4	99,4	99,5
3	34,1	30,8	29,4	28,7	28,2	27,9	27,7	27,5	27,3	27,2	26,1
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8	14,7	14,5	13,5
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,5	10,3	10,2	10,1	9,02
6	13,7	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	6,88
7	12,2	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	5,65
8	11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	4,86
9	10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	4,31
10	10,0	7,56	6,55	5,89	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	3,91
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	1,00

Таблица 4. Нормально распределенные случайные числа

0,46	0,14	2,45	-0,32	-0,07	0,30	-0,29	1,30	0,24	-0,96
0,06	-2,53	-0,53	-0,19	0,54	-1,56	0,19	-1,19	0,02	0,52
1,47	-0,35	-0,63	0,70	0,93	1,37	0,79	-0,96	-0,85	-1,86
1,02	-0,47	1,28	3,52	0,57	-1,85	0,19	1,19	-0,50	-0,27
1,39	-0,55	0,05	0,32	2,94	1,97	-0,26	0,41	0,44	-0,03
0,91	-0,51	-0,52	0,60	0,88	-0,93	1,58	0,16	-1,88	0,37
1,18	-1,05	0,01	0,77	0,97	0,71	1,09	-0,63	-0,25	-0,70
-1,50	-0,49	-0,16	-0,14	1,03	0,20	0,45	0,75	-0,42	-0,43
-0,69	0,76	-1,62	-0,34	-0,51	-2,05	-0,46	-0,22	0,86	-0,46
1,37	0,22	0,38	0,76	0,18	-0,74	0,96	-1,53	-0,26	0,12
-0,48	1,68	-0,06	-1,23	-0,49	0,85	-0,49	-1,98	-2,83	-0,24
-1,38	-0,15	1,36	-0,56	-0,26	-0,21	0,22	0,78	0,95	-0,87
-1,01	0,60	-0,92	1,60	0,06	0,41	-0,17	0,31	-0,97	-1,02
-0,01	-0,90	0,01	-0,72	1,15	-0,12	1,10	0,48	-1,69	0,42
1,39	-1,16	-0,91	1,23	-0,20	-0,25	1,24	-2,57	-0,56	0,06
-1,79	-0,26	1,24	1,05	-0,51	-1,63	-0,15	-0,39	-0,63	0,56
-0,10	-0,38	-1,38	0,36	-0,99	-0,12	-1,70	-2,83	-1,11	-2,36
-1,34	1,83	-0,96	0,42	0,97	-1,14	-1,04	0,36	-1,73	1,96
1,04	0,53	0,73	1,38	0,98	-1,33	1,62	-1,04	0,52	-0,28
0,28	-2,06	0,72	-0,87	-1,10	-1,40	1,05	0,08	-0,57	0,93
-1,80	-2,01	-1,63	0,54	0,25	-0,17	0,03	0,08	0,47	-1,03
-1,19	1,18	1,11	0,88	1,26	-0,20	0,15	-0,38	-0,31	0,48
0,66	-1,14	1,15	-1,21	-0,93	0,42	0,29	-0,99	0,61	2,71
-0,44	0,36	-1,94	0,89	-0,23	0,60	0,87	-0,44	-0,22	-0,06
-1,40	-0,23	0,38	-0,65	-0,58	0,24	-0,29	0,51	0,74	-0,30
0,20	0,21	-1,08	-0,22	-0,29	1,22	1,12	0,00	-2,02	-0,59
0,16	0,27	-0,31	0,08	-2,83	-0,44	-0,79	-1,27	-0,62	-1,05
2,27	0,61	0,61	-0,75	0,25	1,29	0,06	-1,79	-0,70	-1,35
0,04	-0,31	0,12	0,79	-0,58	-0,54	0,48	-0,10	0,48	0,10
-1,13	-2,10	0,92	0,14	0,45	-1,66	1,04	-1,36	-0,59	-1,02
0,77	0,08	-1,47	0,03	-2,13	0,66	0,08	-0,88	-0,58	0,55
0,37	-1,66	-0,85	0,23	-0,66	0,34	-0,09	-0,16	-3,12	0,42
-0,51	-0,34	0,21	-0,74	1,04	0,01	0,43	-0,83	0,19	0,07
0,29	-0,52	1,27	-1,21	-0,99	0,11	-0,53	-0,81	0,07	0,52
1,03	2,99	-0,57	-0,49	-1,11	1,30	-1,43	-1,34	-3,00	0,48

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адлер Ю. П., Маркова Е. В., Грановский Ю. В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. — М.: Наука, 1976.
2. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979.
3. Асатурян В. И. Теория планирования эксперимента. — М.: Радио и связь, 1983.
4. Бежаева З. И., Малютов М. Б. Введение в теорию планирования регрессионных экспериментов: Учебное пособие. — М.: МИЭМ, 1983.
5. Беллман Р. Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1976.
6. Беляев Ю. К., Чепурин Е. В. Основы математической статистики. — М.: МГУ, 1982—1983.
7. Боровков А. А. Математическая статистика. — М.: Наука, 1984.
8. Бродский В. З. Введение в факторное планирование эксперимента. — М.: Наука, 1976.
9. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967.
10. Горский В. Г., Адлер Ю. П. Планирование промышленных экспериментов. — М.: Металлургия, 1974.
11. Демиденко Е. З. Линейная и нелинейная регрессия. — М.: Финансы и статистика, 1981.
12. Денисов В. И. Математическое обеспечение системы ЭВМ — экспериментатор. — М.: Наука, 1976.
13. Дюге Д. Теоретическая и прикладная статистика. — М.: Наука, 1972.
14. Ермаков С. М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. — М.: Наука, 1975.
15. Ермаков С. М. Об оптимальных несмещенных планах регрессионных экспериментов//Труды МИАН СССР. Вып. III. — 1970. — С. 252—257.
16. Ермаков С. М., Бродский В. З., Жигляевский А. А. и др. Математическая теория планирования эксперимента. — М.: Наука, 1983.
17. Ермаков С. М., Михайлов Г. А. Статистическое моделирование. — М.: Наука, 1982.
18. Жигляевский А. А. Математическая теория глобального случайного поиска. — Л.: ЛГУ, 1985.
19. Клейнен Дж. Статистические методы в имитационном моделировании. — М.: Статистика, 1978.
20. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. — М.: Наука, 1974.
21. Крамер Г. Математические методы статистики. — М.: Мир, 1975.
22. Красовский Г. И., Филаретов Г. Ф. Планирование эксперимента. — Минск: БГУ, 1982.
23. Круг Г. К., Сосулин Ю. А., Фатуев В. А. Планирование эксперимента в задачах идентификации и экстраполяции. — М.: Наука, 1977.
24. Малютов М. Б. Нижние границы для средней длительности последовательно планируемого эксперимента//Известия вузов: Математика. — 1983. — № 11. — С. 19—40.
25. Малютов М. Б. Планирование и анализ в линейной регрессионной модели//Планирование оптимальных экспериментов. — М.: МГУ, 1975. — С. 9—50.

26. Маркова Е. В., Лисенков А. Н. Комбинаторные планы в задачах многофакторного эксперимента. — М.: Наука, 1979.
27. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1980.
28. Марчук Г. И., Ермаков С. М. О некоторых проблемах теории планирования эксперимента//Математические методы планирования эксперимента. — Новосибирск: Наука, 1981. — С. 3—17.
29. Михайлов Г. А. Оптимизация весовых методов Монте-Карло. — М.: Наука, 1986.
30. Мостеллер Ф., Тьюки Дж. Анализ данных и регрессия. — М.: Финансы и статистика, 1982.
31. Налимов В. В., Голикова Т. И. Логические основания планирования эксперимента. — М.: Металлургия, 1981.
32. Налимов В. В., Чернова Н. А. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. — М.: Наука, 1965.
33. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. — М.: Наука, 1983.
34. Пшеничный Б. Н. Необходимые условия экстремума. — М.: Наука, 1982.
35. Рао С. Р. Линейные статистические методы и их применения. — М.: Наука, 1968.
36. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. — М.: Мир, 1980.
37. Сеге Г. Ортогональные полиномы. — М.: Физматгиз, 1952.
38. Статистические методы в инженерных исследованиях (лабораторный практикум): Учебное пособие/Под ред. Г. К. Круга. — М.: Высшая школа, 1983.
39. Тараканов В. Е. Комбинаторные задачи и $(0, 1)$ -матрицы. — М.: Наука, 1985.
40. Успенский А. Б., Федоров В. В. Вычислительные аспекты метода наименьших квадратов при анализе и планировании регрессионных экспериментов. — М.: МГУ, 1975.
41. Федоров В. В. Теория оптимального эксперимента. — М.: Наука, 1971.
42. Федоров В. В. Численные методы максимина. — М.: Наука, 1979.
43. Холл М. Комбинаторика. — М.: Мир, 1970.
44. Шеффе Г. Дисперсионный анализ. — М.: Наука, 1980.
45. Ширяев А. Н. Вероятность. — М.: Наука, 1980.
46. Atkinson A. C. Developments in the design of experiments//International Statistical Review. — 1982. — V. 50. — P. 161—177.
47. Bandemer H., Näther W. Theorie und Anwendung der optimalen Versuchsplanung II, Handbuch für die Anwendung. — Berlin: Akademie-Verlag, 1980.
48. Bandemer H. et al. Theorie und Anwendung der optimalen Versuchsplanung I, Handbuch zur Theorie. — Berlin: Akademie-Verlag, 1977.
49. Fisher R. A. The design of experiments. — London: Olyver and Boyd, 1935.
50. Silvey S. D. Optimal design. — New York: Chapman & Hall, 1980.
51. Steinberg D. M., Hunter W. G. Experimental designs: review and comment//Technometrics. — 1984. — V. 26, № 1. — P. 71—130.
52. Toutenburg H. Prior information in linear models. — Chichester: J. Wiley & Sons, 1984.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Алгоритм градиентный 217
- обобщенный градиентный 218
- поисковый 211, 222
- псевдоградиентный 212
- регулярный 211
- стохастического i -градиента 226
- стохастической аппроксимации Кифера — Вольфовица 226
- — — Роббинса — Монро 217
- экстремального планирования 211
- Анализ дисперсионный 8, 50
- — — однофакторный 51
- матричный 308
- пофакторный 268
- регрессионный 8
- — — линейный 13
- — — нелинейный 192

Блок 70

- Блок-схема двумерная 70
- правильная 71
- равноповторная 71
- сбалансированная 71
- симметричная 71
- частично сбалансированная 71

Вектор базисных функций 84

- неизвестных параметров 84
- результатов измерений 14
- случайных ошибок 19

Вогнутость определителя логарифмическая 317

Геометрия проективная 77

- Гипотеза значимости 29
- о параметрах линейной регрессии 29, 47

Датчик случайных чисел 273

Дисперсионного анализа таблица 50

- Дисперсия обобщенная 102
- оценки поверхности отклика 101
- — — — — нормированная 101

Дифференцирование матричное 309

- Длина оптимальной последовательной стратегии 259
- — — статической стратегии 259
- шага 211

Задача дисперсионного анализа 50

- непараметрического оценивания 172
- смешанного планирования 176
- оптимального взвешивания 143
- оптимального планирования 95
- оценивания регрессии 172
- планирования устойчивая (робастная) 172
- условной оптимизации 218

Имитация эксперимента с помощью ЭВМ 12

Информация о параметрах априорная 41

Квадрат греко-латинский 66

— латинский 62

Квадраты латинские ортогональные 66

Квазисупермартингал неотрицательный 213

Класс функций однородный 264

— — — полный 258

Комбинация выпуклая 92

Критерий байесовский 11, 178, 244

— компромиссный 11

— линейный 100

— минимаксный 113, 244, 294

— оптимальности 95, 286

— A 100

— D 95

— — — обобщенный 99

— D_s 99

— E 102

— O 102

— L 100

— MV 102

— Q 101

— T 249

Куб латинский 69

Лемма о произведении определителей 304

Матрица Адамара 147

— верхняя треугольная 298

— данных 14, 18

— дисперсионная 24

— информационная (Фишера) 86

— невырожденная 298

— неотрицательно определенная 298

— обобщенная обратная 298

— обратная 298

— ортогональная 299

— плана 14, 18, 259

— — — дисперсионная 87, 201

— — — — — нормированная 87

— — — — — информационная 87, 201

— — — — — байесовская 162

— — — — — нормированная 87

— положительно определенная 298

— симметричная 298

Метод Бокса — Уилсона 234

— Гаусса — Ньютона 198

— зависимых испытаний 276

— крутого восхождения 232

— Марквардта 198

— множителей Лагранжа 223

— противоположной переменной 277

— симплексный 229

— случайного бланка 268

— — — планирования 263

— существенной выборки 278, 284

— факторного планирования 53

— Хартли 198

Метод штрафных функций 220

— — — внешних 220

— — — внутренних 221

— DUD 198

Множество выпуклое 90

— дискретных планов 84

— информационных матриц 90

— непрерывных планов 86

— параметрическое 41

— планирования 83, 149

Модель вероятностная 272

— детерминированная 272

— дизъюнктивная 255

— Михаэлиса — Ментен 206

— регрессионная линейная 18

— — — классическая 24, 84

— — — неполного ранга 34

— — — обобщенная 30

— — — смешанная 43

— — — нелинейная 192

— Реньи 267

— факторная 53

— фиктивная 279

Набор функций v -регулярный 288

Направление движения 211

Неравенства выпуклости 306

Неравенство Гельдера 305

— Коши 305

— Фишера 77

Образец 70

Общее среднее 54, 72

Оператор проектирования 219

— сопряженный 166

Оценка байесовская 44

— гребневая 39

— Джеймса — Стейна 39

— линейная 20

— — — однородная 20

— максимального правдоподобия 28, 194

— минимаксная 42

— MNK 16, 194

— — — линеаризованная 195

— — — нелинейная 195

— — — обобщенная 31

— — — стандартная 21

— — — эмпирическая 16

— несмещенная 20

— НЛН 21

— проекционная 186

— — — асимптотически оптимальная 188

— сжимающая 39

— ядерного типа 184

Ошибка случайная 18, 84

— — — некоррелированная 84

— — — равнооточная 84

— — — центрированная 84

Параметр регрессии 15, 18, 192

— сглаживания 227

План байесовский оптимальный 202, 245

— Буса — Кокса 269

— глобально оптимальный 155

— дискретный 84

— латинский 63

— линейно оптимальный 100

— локально оптимальный 206

— — D -оптимальный 206

— минимаксный 204

— насыщенный 145, 234

— невырожденный 87

— неполнооблочный сбалансированный

(BIB) 74

— — — частично сбалансированный (PBIB)

75

— непрерывный 85, 86

— несмещенный 179, 180

План обобщенно D -оптимальный 99

— оптимальный 95

— — — для экстраполяции в точку 101

— ортогональный 104

— отсеивания оптимальный 256

— первого порядка 139

— Плэкета — Бермана 267

— робастный 172, 179

— ротатабельный 104

— сверхнасыщенный 254

— сильно разделяющий 256

— симметричный 55

— точный 84

— факторный 54

— — — двухуровневый 55

— — — дробный 54

— — — полный 54

— эксперимента 84, 149

— A -оптимальный 100

— D -оптимальный 97, 150

— D_g -оптимальный 99

— E -оптимальный 102

— G -оптимальный 102, 150

— L -оптимальный 100

— MV -оптимальный 102

— Q -оптимальный 101

— T -оптимальный 249

— Φ -оптимальный 95

— Ψ -оптимальный 97

— γ -разделяющий 256

Планирование эксперимента 11

— — дискриминирующего 8, 247

— — имитационного 8, 276

— — несмещенное 180

— — отсеивающего 253

— — последовательное 204, 252, 254

— — регрессионного 8, 83, 192

— — статическое 254

— — факторного 8, 53

— — экстремального 8, 210

Плотность оптимальная 286

Погрешности систематическая 10, 174

— случайная 10, 174

— суммарная 174

Подход байесовский 201

— минимаксный 201

— последовательный 201

Подъем случайный по координатам 226

Поиск дискретный 257

— — — случайный с односторонней пробой 226

— — — с парной пробой 226

Полуреплика 57

Последовательность планов асимптотически

оптимальная 156, 221

— — — штрафных функций внешних 220

— — — внутренних 221

Производная функционала по матрице 309

Пространство гильбертово с воспроизводи-

щим ядром 154

Процедура Федорова — Уинна 128

Процесс регенерации 281

Прямоугольник латинский 68

Разрешающая способность плана 60

Ранг матрицы 298

Распределение маргинальное 261

— нормальное 28, 312

— Стьюдента 30, 312

— Фишера 48, 312

— χ^2 312

Расщепление и рулетка 277

Регрессия линейная 15, 19, 84, 149, 267

— нелинейная 15, 192

— описательная 13

— полиномиальная 114

— тригонометрическая 127

— эмпирическая 15

Реплика дробная 55

Симплекс-план 146
 Симплекс-регулярный 229
 Система латинских квадратов плана 67
 — массового обслуживания (СМО) 273
 — нормальных уравнений 16
 След матрицы 296
 Соотношение генерирующее 58
 — определяющее 57, 64
 Способ обработки 70
 Структура двухэтапного группового от-
 севания 269
 — поиска оптимального 259
 — последовательная 257
 — статическая 257
 Структура линейная 70
 Сумма квадратов остаточная 45
 — отклонений возмущенная 31
 Суперматрица координатная 213
 Схемы линейной регрессии 18
 — накопления 188
 — регрессионного эксперимента 192

Теорема Аткинсона — Фаддона 249
 — Бокса 142
 — Гаусса — Маркова 24
 — Ермакова — Золотухина 183
 — Жигляевского 187, 242, 292, 305
 — Каратеодори 93
 — Кифера — Вольфовица 188
 — Кука — Ольмана 42
 — Малютова 153
 — Нейтера 160
 — Поляка — Цыпкина 213, 221
 — Ренки 262, 264
 — Сакса — Ильясэйдера 156
 — Федорова 129, 202
 — Хелли 91
 — эквивалентности 106, 108, 109, 160, 161, 249, 293
 Теория возмущений линейная 167
 — матриц 8, 298
 — отсеивающих экспериментов 253
 Точка крайняя 92
 — седловая функции Лагранжа 222
 — стационарная 212

Уровень фактора 50, 53, 56
 Условие Липшица 212

Условие несмещенности 20
 Условия проведения измерений 83

Фактор 50, 53
 — групповой 269
 — значимый 267
 Формула Бине — Коши 305
 — малых возмущений 167
 — Фробениуса 301
 Функционал выпуклый
 — дифференцируемый 106, 109
 — многозначный 6
 — однородный 95
 Функция Билинейная 84
 — Лагранжа 222
 — отклика 210
 — параметрическая 37, 43
 — векторная 37
 — — оцениваемая 37, 46
 — правдоподобия 28, 194
 — регрессии 19, 192
 — — квадратичная 54
 — — линейная 19, 54, 84, 149, 287
 — — нелинейная 192
 — — неполная квадратичная 54
 — — полиномиальная 114
 — — тригонометрическая 122
 — сглаженная 227

Число собственное 298

Эксперимент 9
 — активный 10
 — дискриминирующий 247
 — имитационный 272
 — классический 53
 — отсеивающий 253
 — пассивный 11
 — регрессионный 83, 192
 — факторный полный 54
 Элемент 70
 Эллипсоид рассеяния 98
 Эпиграфия Шеннона 259
 Эффект блока 72
 — взаимодействия 54
 — главный 54
 — образца 72
 — столбца 72
 — элемента 72

*Сергей Михайлович Ермаков,
Анатолий Александрович Жигляевский*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Редактор *Т. В. Шароватова*
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технический редактор *Л. В. Лихачева*
Корректоры *Т. С. Вайсберг, Л. С. Сомова*

ИБ № 12744

Сдано в набор 24.04.85. Подписано к печати 11.12.86.
Формат 60×90¹/₁₆. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная.
Печать высокая. Усл. печ. л. 20. Усл. кр.-отт. 20. Уч.-изд. л. 21,44.
Тираж 20600 экз. Заказ 91. Цена 1 р.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Отпечатано с матриц Ленинградской типографии № 2 го-
ловного предприятия ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Ев-
гении Соколовой Союзполиграфпрома при Государствен-
ном комитете СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли 198052, Ленинград, Л-52, Измайлов-
ский проспект, 29 в Ленинградской типографии № 4 ор-
дена Трудового Красного Знамени Ленинградского объеди-
нения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союз-
полиграфпрома при Государственном комитете СССР по
делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
191126, Ленинград, Социалистическая ул., 14.