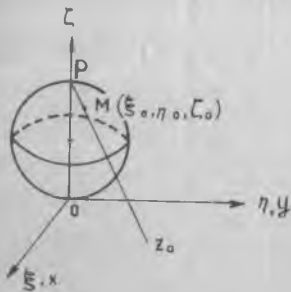


Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами

III



„ЎЗБЕНИСТОН“

54
2731

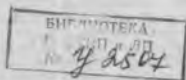
А. САЪДУЛЛАЕВ, Г. ХУДОЙБЕРГАНОВ,
Х. МАНСУРОВ, А. ВОРИСОВ, Т. ТҒЙЧИЕВ

МАТЕМАТИК АНАЛИЗ КУРСИДАН МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР ТҒПЛАМИ

3

(КОМПЛЕКС АНАЛИЗ)

*Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус
таълим вазирлиги университетлар талабалари
учун ўқув қўлланма сифатида тавсия этган*



ТОШКЕНТ
«ЎЗБЕКИСТОН»
2000

Тақризчилар — ф.м.ф. доктори, проф Ш Ярмухамедов,
ф.м.ф.н. доцент М Мадраимов

Муҳаррир — И Аҳмаджонов

1602070000—56
C—3000
351(04)99

ISBN 5-640-01778-3

© «ЎЗБЕКИСТОН» нашрияти, 2000 и

СЎЗ БОШИ

Ушбу китоб 1993 (I том) ва 1995 (II том) йилларда ўқув қўлланма сифатида чоп этилган «Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплам»ларининг давоми бўлиб, у комплекс ўзгарувчили функцияларнинг анализи бўйича мисол ва масалаларни уз ичига олади.

Бу китобда ҳам аввалгиларидаги аъъаналар, жумладан таърифлар, теоремалар, тасдиқлар қисқа, аниқ ва раён бўлишига, уларга доир мисол ва масалаларни ечиб курсатишда дастлаб содда ва муайян тасаввур ҳосил қилингандан кейингина мураккабларини ечишга утилишига алоҳида эътибор бердик.

Мисол ва масалаларни шарҳлаб, уларни ечиб курсатилдан қўзланган мақсад, бир томондан, комплекс анализ курсидан олинган назарий билимлардан мисол ва масалаларни ечишда фойдалана борилишини намоён қилиш бўлса, иккинчи томондан, табиий фанларга оид масалаларни ечишга тайёрлашдан иборатдир.

Маълумки, ҳақиқий ва комплекс ўзгарувчили функциялар анализи орасида ўхшашликлар ва тафовутлар бор. Биз мазкур китобнинг ҳар бир бобида келтирилган мисол ва масалаларда ана шу ўхшашликлар ва тафовутларни аниқлаб боришга ҳаракат қилдик. Айни вақтда комплекс анализга хос бўлган усуллар алоҳида таъкидланди ва улар ёрдамида алгебра ва ҳақиқий ўзгарувчили функциялар анализининг айрим масалаларини (масалан, чегирмалар ёрдамида аниқ интегралларни ҳисоблаш) содда ҳал этилиши кўрсатилди.

Мазкур китоб университетлар ва педагогика институтлари талабалари учун мўлжалланган бўлиб, ўқув адабиёти Давлат таълим стандартининг бакалавр мутахассислиги Б.01.01.00 — «Математика», Б.01.02.00 — «Татбиқий математика ва информатика» ва Б.01.03.00 — «Механика» йўналишларига мос келади.

Кулланма олти бобдан иборат бўлиб, унда комплекс сонлар, комплекс аргументли функциялар, элементар функциялар ва улар сздамида бажариладиган конформ акслантиришлар, комплекс аргументли функциянинг интеграли, қаторлар, чегирмалар назарияси мавзулари баён этилган.

Кулланмада 161 та мисол ва масалалар батафсил ечим билан таъминланган ҳамда 2076 та мисол ва масалалар мустақил ечиш учун тавсия этилган.

Кулланма қўлёзмасини ўқиб, унинг мукамаллашишига уз ҳиссаларини қўшган Тошкент давлат университети математик анализ кафедраси аъзоларига муаллифлар уз миннатдорчиликларини билдирадilar.

КОМПЛЕКС СОНЛАР

1-§. Комплекс сон тушунчаси. Комплекс сонлар устида амаллар

Комплекс сон тушунчаси укувчига алгебра курсидан маълум. Мазкур курсда аргументи комплекс узгарувчи булган функцияларга доир мисол ва масалалар билан шуғулланишимизни эътиборга олиб, комплекс сонлар туғри-сидаги маълумотларни келтирамыз.

Маълумки, комплекс сон

$$z = x + iy \quad (1)$$

куринишда ифодаланади, бунда x ва y лар ҳақиқий сонлар, i эса ($i^2 = -1$) мавҳум бирликдир.

Одатда x ҳақиқий сонга z комплекс соннинг ҳақиқий қисми дейилиб, $y \operatorname{Re} z$ каби белгиланади:

$$x = \operatorname{Re} z$$

(Re — латинча *realis* — «ҳақиқий» деган маънони англатувчи сўздан олинган).

y ҳақиқий сонни эса z комплекс соннинг мавҳум қисми дейилиб, $y \operatorname{Im} z$ каби белгиланади:

$$y = \operatorname{Im} z$$

(Im — латинча *imaginaris* — «мавҳум» деган маънони англатувчи сўздан олинган).

Агар (1) да $y=0$ булса,

$$z = x + i0 = x$$

булиб, z ҳақиқий x сонга тенг бўлади.

Агар (1) да $x=0$ булса,

$$z = 0 + iy = iy$$

булиб, бу ҳолда z соф мавҳум сон бўлади.

(1) да $x=0$, $y=0$ булса, z комплекс сон 0 га тенг бўлади.

Иккита

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2 \quad (2)$$

комплекс сонлар берилган бўлсин.

Агар (2) да $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ бўлса, у ҳолда z_1 ва z_2 комплекс сонлар *бир-бирига тенг* дейилади ва $z_1 = z_2$ каби ёзилади.

Агар (2) да $x_2 = x_1$, $y_2 = -y_1$ бўлса, у ҳолда z_2 комплекс сон z_1 га *қушма комплекс сон* дейилади ва $\bar{z}_1$ каби белгиланади. Демак,

$$z = x + iy \text{ бўлса, } \bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy \text{ бўлади.}$$

Масалан, $z = 5 + \frac{1}{2}i$ комплекс соннинг қушмаси $\bar{z} = 5 - \frac{1}{2}i$ бўлади, $z = 2 - 3i$ комплекс соннинг қушмаси $\bar{z} = 2 + 3i$ бўлади.

Энди комплекс сонлар устида амалларни келтирамиз.

Иккита

$z_1 = x_1 + iy_1$ ва $z_2 = x_2 + iy_2$ комплекс сон берилган бўлса, ушбу $(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ йиғинди ҳам комплекс сон бўлиб, z_1 ва z_2 комплекс сонларнинг йиғиндиси дейилади ва $z_1 + z_2$ каби белгиланади:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Қушиш амали қуйидаги хоссаларга эга:

1°. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (коммутативлик).

2°. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ (ассоциативлик).

Ушбу

$$(x_1, x_2 - y_1, y_2) + i(x_1, y_2 + y_1, x_2)$$

комплекс сон z_1 ва z_2 комплекс сонларнинг *қушма* дейилади ва z_1, z_2 каби белгиланади:

$$z_1, z_2 = (x_1, x_2 - y_1, y_2) + i(x_1, y_2 + y_1, x_2).$$

z_1, z_2 қушма $(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2)$ ифодани ҳадма-ҳад қушма-тиришдан ҳосил бўлишини куриш қийин эмас:

$$\begin{aligned} (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) &= x_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 = \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2). \end{aligned}$$

Қушма-тириш амали қуйидаги хоссаларга эга:

1°. $z_1, z_2 = z_2, z_1$ (коммутативлик).

2°. $z_1(z_2, z_3) = (z_1, z_2)z_3$ (ассоциативлик).

3°. $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$ (дистрибутивлик).

Ушбу

$$\frac{x_1 x_3 + y_1 y_3}{x_1^2 + y_1^2} + i \frac{y_1 x_3 - x_1 y_3}{x_1^2 + y_1^2}$$

комплекс сон z_1 ва z_2 комплекс сонларнинг нисбати дейилади ва $\frac{z_1}{z_2}$ каби белгиланади. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$ нисбатни ҳисоблашда касрнинг сурат ва махражини $z_1 = x_1 - iy_1$ га купайтирилди:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Бирор z комплекс сон берилган бўлсин. Ушбу

$$\underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ та}}$$

комплекс сон z комплекс соннинг n — даражаси дейилади ва z^n каби белгиланади:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ та}}$$

1-мисол. Ушбу

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_2 = 1 - i\sqrt{3}$$

комплекс сонларнинг йигиндиси, айирмаси, купайтмаси ва нисбатини топинг.

Юқорида келтирилган қоидалардан фойдаланиб топамиз:

$$z_1 + z_2 = 1 + i\sqrt{3} + 1 - i\sqrt{3} = (1 + 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{3})i = 2,$$

$$z_1 - z_2 = 1 + i\sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3} = (1 - 1) + (\sqrt{3} + \sqrt{3})i = 2\sqrt{3}i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3}) =$$

$$= (1 - i\sqrt{3}(-\sqrt{3})) + i(1(-\sqrt{3}) + \sqrt{3} \cdot 1) = 4 + i \cdot 0 = 4,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} = \frac{(1 + i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})}{(1 - i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{-2}{4} + i \frac{2\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$4. a) \frac{1-i}{(1+i)(1-2i)}; \quad б) 2i + \frac{1-2i}{2i+1}.$$

$$5. a) \frac{1+2i}{1-2i} - \frac{1}{2i}; \quad б) \frac{1}{1} + \frac{1}{2i} - \frac{1}{i}.$$

$$6. a) \frac{i}{1+\frac{1}{1-i}}; \quad б) \frac{1-\frac{1-i}{1-i}}{i}.$$

$$7. a) \frac{2-3i}{(1+2i)3i}; \quad б) \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{1-i}\right)(1+i\sqrt{3}).$$

$$8. a) (1+i)(1-2i)(1-i); \quad б) \frac{(2-i)i}{(1-i)(2+i)}.$$

$$9. \frac{(1-i)(2+i)}{(2-i)i}.$$

Қуйидаги тенгликларни исботланг:

$$10. a) z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z; \quad б) z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z;$$

$$в) \overline{(\bar{z})} = z.$$

$$11. a) \overline{(z_1 - z_2)} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2;$$

$$б) \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0).$$

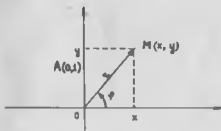
2-§. Комплекс соннинг геометрик тасвири. Комплекс текислик

Текисликда туғри бурчакли Oxy Декарт координаталар системасини олайлик. Ox ўқда (абсциссалар ўқида) комплекс соннинг ҳақиқий қисмини, Oy ўқда (ординаталар ўқида) мос комплекс соннинг мавҳум қисмини жойлаштирамиз. Натижада,

$$z = x + iy$$

комплекс сон текисликда координаталари x ва y булган $M(x, y)$ нуқтани ифодалайди (1-чизма).

Шу $M(x, y)$ нуқта $z = x + iy$ комплекс соннинг геометрик тасвири дейилади. Масалан, i комплекс соннинг геометрик тасвири текисликнинг $A(0, 1)$ нуқтаси булади (1-чизма).



1- чизма

Демак, ҳар бир комплекс сон текисликда битта нуқта-ни ифодалайди.

Аксинча, текисликдаги ҳар бир нуқта ҳақиқий қисми шу нуқтанинг абсциссасига, мавҳум қисми эса ордината-сига тенг бўлган комплекс сонни ифодалайди.

Бу ҳол комплекс сонлар тўплами билан текислик нуқ-талари тўплами орасида ўзаро бир қийматли мослик бор-лигини кўрсатади. Шунини эътиборга олиб, *комплекс сон де-ганда текислик нуқтасини, текислик нуқтаси деганда ком-плекс сонни тушунавериш мумкин.*

1- чизмада $\overline{OM}$ векторга $M(x, y)$ нуқтанинг *радиус век-тори* дейилиб, бу векторнинг узунлиги r га $z = x + iy$ *ком-плекс соннинг модули* дейилади. Комплекс соннинг модули $|z|$ каби белгиланади. Пифагор теоремасига кура

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (*)$$

булади. $\overline{OM}$ вектор билан $\overline{OX}$ вектор орасидаги φ бурчак z комплекс соннинг аргументи дейилади ва $\varphi = \arg z$ каби белгиланади.

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & \text{агар } x \geq 0, y \geq 0 \text{ бўлса,} \\ \arctg \frac{y}{x} + \pi, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса,} \\ \arctg \frac{y}{x} + 2\pi, & \text{агар } x \geq 0, y < 0 \text{ бўлса.} \end{cases} \quad (**)$$

тенгликнинг уринли бўлишини куриш қийин эмас.

1- чизмадан

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}$$

эканлиги ва бундан

$$z = x + iy = r \cos \varphi + i r \sin \varphi = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (3)$$

ифодага эга буламиз. Бу ифода z комплекс соннинг *тригонометрик ифодаси* (шакли) дейилади.

Одатда

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (4)$$

тенгликни *Эйлер формуласи* дейилади. Бу муносабат кейинроқ, $w = e^z$ функцияси урганилганда, исбот қилинади. (3) ва (4) муносабатлардан

$$z = r e^{i\varphi}$$

булишлиги келиб чиқади.

1- теорема. Иккита z_1 ва z_2 комплекс сон купайтмасининг модули шу комплекс сонлар модулларининг купайтмасига тенг:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|.$$

Иккита комплекс сон купайтмасининг аргументи шу комплекс сонлар аргументларининг йингидисига тенг:

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2.$$

2- теорема. Ушбу

$$\begin{aligned} |z^n| &= |z|^n, & (n \in \mathbb{N}) \\ \arg z^n &= n \arg z \end{aligned} \quad (5)$$

тенгликлар ўринлидир.

3- теорема. Иккита комплекс сон нисбати $\frac{z_1}{z_2}$ учун

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

тенгликлар ўринлидир.

* Комплекс сонлар аргументларига доир келтириладиган тенгликларда комплекс сон аргументи шу сонга мос радиус векторнинг текисликдаги ҳолати маъносига тушунилади.

(3) муносабат ва 2- теоремадан

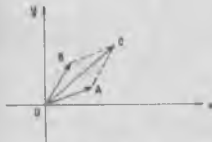
$$[r(\cos\varphi + i \sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad (6)$$

булиши келиб чиқади. Бу *Муавр формуласи* дейилади.

4- м и с о л. Ихтирий z_1 ҳамда z_2 комплекс сонлар учун

$$\|z_1\| - \|z_2\| \leq \|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\|$$

бўлишини курсатинг.



2- чизма

z_1 ва z_2 комплекс сонлар 2- чизмада курсатилган $\overline{OA}$ ҳамда $\overline{OB}$ векторлар орқали ифодаланган дейлик. Унда $\overline{OC}$ вектор $z_1 + z_2$ комплекс сонни ифодалайди. $\overline{OA}$ векторнинг узунлиги $|z_1|$, $\overline{OB}$ векторнинг узунлиги $|z_2|$ ҳамда $\overline{OC}$ векторнинг узунлиги эса $|z_1 + z_2|$ эканлиги ва учбурчак бир томонининг узунлиги қолган икки томони узунликлари йиғиндисидан катта эмас, айирмасидан эса кичик эмаслигидан берилган тенгсизликнинг уринли бўлиши келиб чиқади.

5- м и с о л. Қуйидаги

$$1) z = 3i, \quad 2) z = 1 + \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7} \quad 3) z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$$

комплекс сонларнинг модули ҳамда аргументини топинг.

Берилган комплекс сонларнинг модули ҳамда аргументларини (*) ва (**) формулалардан фойдаланиб топамиз:

1) $z = 3i$ комплекс сонда $x=0$, $y=3$ бўлиб,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9} = 3.$$

$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = -1$, яъни $\varphi = \frac{\pi}{2}$ булади.

Демак, $|3i| = 3$, $\arg(3i) = \frac{\pi}{2}$.

2) $z = 1 + \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$ комплекс сонда

$$x = 1 + \cos \frac{\pi}{7}, y = \sin \frac{\pi}{7}$$

булади. Унда

$$\begin{aligned}|z| &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1 + \cos \frac{\pi}{7})^2 + (\sin \frac{\pi}{7})^2} = \\&= \sqrt{2(1 + \cos \frac{\pi}{7})} = \sqrt{4 \cos^2 \frac{\pi}{14}} = 2 \cos \frac{\pi}{14}\end{aligned}$$

булади.

Берилган комплекс сон учун $x > 0$, $y > 0$ бўлганлиги сабабли

$$\begin{aligned}\arg z &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \frac{\sin \frac{\pi}{7}}{1 + \cos \frac{\pi}{7}} = \\&= \operatorname{arctg} \frac{2 \sin \frac{\pi}{14} \cos \frac{\pi}{14}}{2 \cos^2 \frac{\pi}{14}} = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \frac{\pi}{14}) = \frac{\pi}{14}.\end{aligned}$$

булади. Демак,

$$\begin{aligned}|1 + \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}| &= 2 \cos \frac{\pi}{14}, \\ \arg(1 + \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}) &= \frac{\pi}{14}.\end{aligned}$$

3) $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$ комплекс сонда $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ була-

ди. Унда

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

булади. Қаралаётган комплекс сон учун $x > 0$, $y < 0$ бўлганлиги сабабли

$$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2\pi = -\operatorname{arctg} 1 + 2\pi = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$$

булади. Демак,

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2}} (1-i) \right| = 1,$$

$$\arg\left(\frac{1}{\sqrt{2}} (1-i)\right) = \frac{7\pi}{4}.$$

6-мисол. Ушбу

$$z = -1 + i\sqrt{3}$$

комплекс сонни тригонометрик шаклда ифодаланг.

Берилган комплекс сонда $x = -1$, $y = \sqrt{3}$ булиб,

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+3} = 2.$$

$$\varphi = \arg z = \arctg \frac{y}{x} + \pi = \arctg(-\sqrt{3}) + \pi = \frac{2\pi}{3}$$

булади. У ҳолда (3) формулага кура берилган комплекс сон ушбу

$$z = -1 + i\sqrt{3} = 2(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$$

тригонометрик курунишга эга булади.

7-мисол. Агар $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, ($a_j \in R$, $j=1, 2, \dots, n$) булса, у ҳолда $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$ бўлишини кўрсатинг.

Ихтиёрий иккита комплекс сон z_1, z_2 учун

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,$$

тенгликлар уринлидир (қ. 3-мисол).

Бундан

$$\begin{aligned} \overline{P(z)} &= \overline{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n} = \\ &= \overline{a_0} \cdot \bar{z}^n + \overline{a_1} \bar{z}^{n-1} + \dots + \overline{a_{n-1}} \bar{z} + \overline{a_n} = \\ &= a_0 \bar{z}^n + a_1 \bar{z}^{n-1} + \dots + a_{n-1} \bar{z} + a_n = P(\bar{z}). \end{aligned}$$

8-мисол. Ушбу

$$A_n = 1 + r \cos \varphi + r^2 \cos 2\varphi + \dots + r^{n-1} \cos(n-1)\varphi,$$

$$B_n = r \sin \varphi + r^2 \sin 2\varphi + \dots + r^{n-1} \sin(n-1)\varphi$$

йиғиндиларни топинг.

Бу тенгликлардан иккинчисини i га купайтириб, сўнгра уларни ҳадлаб қушамиз:

$$\begin{aligned} A_n + iB_n &= (1 + r \cos \varphi + r^2 \cos 2\varphi + \dots + r^{n-1} \cos(n-1)\varphi) + \\ &+ i(r \sin \varphi + r^2 \sin 2\varphi + \dots + r^{n-1} \sin(n-1)\varphi) = \\ &= 1 + r(\cos \varphi + i \sin \varphi) + r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) + \dots + \\ &+ r^{n-1}(\cos(n-1)\varphi + i \sin(n-1)\varphi). \end{aligned}$$

Агар

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

дейилса, у ҳолда

$$A_n + iB_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}$$

булади. Геометрик прогрессиянинг ҳадлар йиғиндисини топиш формуласидан фойдалансак, унда

$$A_n + iB_n = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

булиши келиб чиқади.

Равшанки,

$$\frac{1 - z^n}{1 - z} = \frac{1 - r^n(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n}{1 - r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \frac{(1 - r^n \cos n\varphi) - ir^n \sin n\varphi}{(1 - r \cos \varphi) - ir \sin \varphi}$$

Демак,

$$A_n + iB_n = \frac{(1 - r^n \cos n\varphi) - ir^n \sin n\varphi}{(1 - r \cos \varphi) - ir \sin \varphi}$$

Кейинги тенгликнинг ўнг томонидаги касрнинг сурат ва махражини махражнинг қўшмасига купайтириб, топамиз:

$$\begin{aligned} A_n + iB_n &= \frac{[(1 - r^n \cos n\varphi) - ir^n \sin n\varphi][(1 - r \cos \varphi) + ir \sin \varphi]}{(1 - r \cos \varphi)^2 + r^2 \sin^2 \varphi} = \\ &= \frac{(1 - r^n \cos n\varphi)(1 - r \cos \varphi) + r^{n+1} \sin \varphi \sin n\varphi}{r^2 - 2r \cos \varphi + 1} + \\ &+ i \frac{(1 - r^n \cos n\varphi)r \sin \varphi - (1 - r \cos \varphi)r^n \sin n\varphi}{r^2 - 2r \cos \varphi + 1} = \\ &= \frac{r^{n+1} \cos(n-1)\varphi - r^n \cos n\varphi - r \cos \varphi + 1}{r^2 - 2r \cos \varphi + 1} + \\ &+ i \frac{r^{n+1} \sin(n-1)\varphi - r^n \sin n\varphi + r \sin \varphi}{r^2 - 2r \cos \varphi + 1}. \end{aligned}$$

Комплекс сонларнинг ҳақиқий ҳамда мавҳум қисмларини тенглаштириш натижасида

$$A_n = \frac{r^{n+1} \cos(n-1)\varphi - r^n \cos n\varphi - r \cos \varphi + 1}{r^2 - 2r \cos \varphi + 1}$$

$$B_n = \frac{r^{n+1} \sin(n-1)\varphi - r^n \sin n\varphi + r \sin \varphi}{r^2 - 2r \cos \varphi + 1}$$

булади.

Демак,

$$1 + r \cos \varphi + r^2 \cos 2\varphi + \dots + r^{n-1} \cos(n-1)\varphi =$$

$$= \frac{r^{n+1} \cos(n-1)\varphi - r^n \cos n\varphi - r \cos \varphi + 1}{r^2 - 2r \cos \varphi + 1},$$

$$r \sin \varphi + r^2 \sin 2\varphi + \dots + r^{n-1} \sin(n-1)\varphi =$$

$$= \frac{r^{n+1} \sin(n-1)\varphi - r^n \sin n\varphi + r \sin \varphi}{r^2 - 2r \cos \varphi + 1}$$

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

12. Ушбу $z_1 = x_1 + iy_1$ ва $z_2 = x_2 + iy_2$ комплекс сонлар учун $z_1 + z_2$ ва $z_1 - z_2$ ларнинг геометрик маъносини аниқланг ва уларни чизмада тасвирланг.

13. Агар z_1, z_2, z_3 нуқталар параллелограммнинг кетма-кет жойлашган учлари бўлса, у ҳолда параллелограммнинг z_2 га қарама-қарши бўлган z_4 учини топинг.

Куйидаги комплекс сонларнинг модули ва аргументини топинг ҳамда уларни тригонометрик шаклга келтиринг:

14. а) i ; б) -3 .

15. а) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

16. а) $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

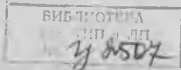
17. а) $\frac{1-i}{1+i}$; б) $\frac{1+i}{1-i}$.

18. а) $-\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$; б) bi ($b \neq 0$).

19. а) $-\cos \varphi - i \sin \varphi$; б) $1 - \cos \alpha + i \sin \alpha$.

20. $-\sin \alpha + i(1 + \cos \alpha)$, $0 < \alpha < \pi$.

21. Муавр формуласидан фойдаланиб, $\cos 3\varphi$ функцияни $\cos \varphi$ ёрдамида ифодаланг.



22. Муавр формуласидан фойдаланиб, $\sin 5\varphi$ функциясини $\sin \varphi$ ёрдамида ифодаланг.

Амалларни бажаринг, ҳосил бўлган комплекс сонларнинг модули ва аргументини топиб, уларни комплекс текисликда тасвирланг:

23. а) $(1+i\sqrt{3})^3$; б) $(-4+3i)^3$.

24. а) $(1+i)^{10}$; б) $(1+i)^3(1-i\sqrt{3})^{-4}$.

25. а) $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{24}$; б) $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{18}$.

26. а) $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{25}$; б) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{28}$.

27. $\frac{(1+i\sqrt{3})^{12}}{(1+i)^{10}}$.

Кўрсатма. 23—27- мисолларни ечишда комплекс соннинг тригонометрик шакли ва Муавр формуласидан фойдаланинг.

28. Ушбу

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

тенгликни исботланг.

Муавр формуласидан фойдаланиб 29—33- мисоллардаги ифодаларни соддалаштиринг.

29. $(\sqrt{3} - i)^n$.

30. $(1+i)^n$.

31. $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^8 + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^8$.

32. $(1 + \cos \alpha + i \sin \alpha)^n$.

33. $\left(\frac{1 + i \operatorname{tg} \alpha}{1 - i \operatorname{tg} \alpha}\right)^n$ (α — ҳақиқий сон).

34. Агар $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \alpha$ булса, у ҳолда $z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\alpha$

тенгликнинг уринли эканлигини исботланг.

35. $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ бўлсин. Ушбу

а) $P(z) = \overline{P(\bar{z})}$; б) $P(z) = -\overline{P(\bar{z})}$

тенглик z нинг ихтиёрий қийматида уринли бўлиши учун $P(z)$ кўпхаднинг коэффициентлари қандай бўлиши керак?

Йиғиндиларни топинг:

36. а) $1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$;

б) $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$.

37. а) $\cos x + \cos 3x + \dots + \cos (2n-1)x$;

б) $\sin x + \sin 3x + \dots + \sin (2n-1)x$.

38. $\sin x - \sin 2x + \dots + (-1)^{n-1} \sin nx$.

39. а) $\cos \alpha + \cos(\alpha + \beta) + \dots + \cos(\alpha + n\beta)$;

б) $\sin \alpha + \sin(\alpha + \beta) + \dots + \sin(\alpha + n\beta)$.

3-§. Комплекс текисликда соҳа

1°. Маълумки, текисликнинг барча нуқталари тўплами билан барча комплекс сонлар тўплами орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд. Бунда барча ҳақиқий сонларнинг геометрик тасвири абсциссалар ўқини, барча соф мавҳум сонларнинг геометрик тасвири $((0,0)$ нуқтадан фарқли) эса ординаталар ўқини ифодалайди. Шунинг учун абсциссалар ўқини *ҳақиқий ўқ*, ординаталар ўқини эса *мавҳум ўқ* дейилади.

xOy текисликнинг ҳар бир нуқтаси комплекс сонни ифодалаганлиги сабабли шу текисликни комплекс текислик дейилади ва S ҳарфи билан белгиланади. Комплекс сонлардан ташкил топган бирор тўпламнинг S текисликдаги геометрик тасвири шу текисликда, табиийки бирор шаклни аниқлайди.

9-мисол. $z_0 = x_0 + iy_0 \in S$ тайинланган нуқта бўлсин. Ушбу $|z - z_0| < \rho$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча нуқталар тўпламини S текисликда тасвирланг. Бу ерда $\rho > 0$ ҳақиқий сон.

z комплекс сонни $x + iy$ га тенг деб оламиз. Унда

$$z - z_0 = (x + iy) - (x_0 + iy_0) = (x - x_0) + i(y - y_0)$$

булиб, бу $z - z_0$ комплекс соннинг модули

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

бўлади. Натижада, қаралаётган тенгсизлик қуйидаги

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \rho.$$

яъни

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\rho^2$$

куринишга келади. Бу маркази (x_0, y_0) нуқтада, радиуси ρ га тенг булган очик доирадир.

Демак,

$$|z-z_0|<\rho$$

тенгсизлики қаноатлантирувчи нуқталарнинг геометрик урни S да маркази z_0 нуқтада, радиуси ρ булган очик доира булар экан.

10-мисол. Комплекс текислик S да ушбу

$$|z-a|<|1-a\bar{z}|$$

тенгсизлики қаноатлантирувчи нуқталарнинг геометрик урини топинг, бунда a — ҳақиқий сон.

Аввалгидек,

$$z=x+iy$$

деб оламиз. Унда $\bar{z}=x-iy$ булади.

Равшанки,

$$\begin{aligned} z-a &= x+iy-a = x-a+iy, \\ 1-a\bar{z} &= 1-(ax-iaiy) = 1-ax+iy. \end{aligned}$$

Бу комплекс сонларнинг модуллари

$$|z-a| = \sqrt{(x-a)^2+y^2}, \quad |1-a\bar{z}| = \sqrt{(1-ax)^2+a^2y^2}$$

булиб, берилган тенгсизлик қуйидаги

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2} < \sqrt{(1-ax)^2+a^2y^2}$$

куринишни олади. Бу тенгсизликда содда алмаштиришлар бажариб ушбу

$$(1-a^2)(x^2+y^2) < (1-a^2)$$

тенгсизликка келамиз.

а) агар $1-a^2>0$ бўлса, у ҳолда

$$x^2+y^2<1$$

булиб, бу маркази $(0, 0)$ нуқтада, радиуси 1 га тенг булган очик доира булади.

б) агар $1-a^2<0$ бўлса, у ҳолда

$$x^2+y^2>1$$

булиб, бу маркази $(0, 0)$ нуқтада, радиуси 1 га тенг булган ёпиқ доиранинг ташқи қисми булади.

2°. Энди комплекс текисликда эгри чизиқ ҳамда соҳа тушунчаларини келтирамиз.

Айтайлик,

$$x=x(t), \quad y=y(t)$$

функциялар $[\alpha, \beta]$ да $([\alpha, \beta] \subset R)$ аниқланган ва узлуксиз булсин. Унда

$$z=x+iy$$

комплекс сон ҳақиқий узгарувчи t га боғлиқ булиб,

$$z=z(t)=x(t)+iy(t)$$

ҳақиқий аргументли комплекс қийматли функцияга эга буламиз.

Равшанки, t узгарувчи $[\alpha, \beta]$ сегментда узгарганда $z(t)$ функциянинг қийматлари S да узгариб, бирор эгри чизиқни ташкил этади. Шу сабабли

$$z=z(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

функцияга эгри чизиқнинг параметрик тенгламаси дейилади.

Агар $z=z(t)$ да $\forall t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$ учун $t_1 \neq t_2$ булишидан $z(t_1) \neq z(t_2)$ бўлиши келиб чиқса, у ҳолда $z=z(t)$ эгри чизиқ содда чизиқ дейилади.

Агар $z(\alpha)=z(\beta)$ бўлса, $z=z(t)$ эгри чизиқ ёпиқ чизиқ дейилади.

11-мисол. Ушбу

$$z=z(t)=z_0+re^{it} \quad (-\pi \leq t \leq \pi) \quad (7)$$

Функция аниқлаган эгри чизиқни топинг, бунда z_0 — комплекс сон, $r>0$ узгармас сон.

Агар

$$z=x+iy, \quad z_0=x_0+iy_0$$

дейлиб,

$$e^{it}=\cos t+i\sin t$$

бўлишини эътиборга олсак, унда (7) тенглик

$$x+iy = x_0+iy_0 = r \cos t + i r \sin t,$$

яъни

$$x+iy = (x_0+r \cos t) + i(y_0+r \sin t)$$

куринишга келади. Кейинги тенгликда ҳақиқий ва мавҳум қисмларини бир-бирига тенглаб,

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos t, \\ y = y_0 + r \sin t \end{cases} \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. Бу маркази (x_0, y_0) радиуси r бўлган айланалир. Демак,

$$z = z(t) = z_0 + r e^{it}$$

функция маркази (x_0, y_0) нуқтада радиуси r га тенг бўлган айланани ифодалар экан.

Изоҳ. бу айланани $|z - z_0| = r$ тенглама билан ҳам ифдалаш мумкин.

12-мисол. Ушбу

$$z = \frac{a+b}{2} e^{it} + \frac{a-b}{2} e^{-it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

функция аниқлайдиган эгри чизиқни топинг, бунда a, b — ўзгармас ҳақиқий сонлар.

z комплекс сонни $z = x+iy$ деб, сунгра

$$\begin{aligned} e^{it} &= \cos t + i \sin t, \\ e^{-it} &= \cos t - i \sin t \end{aligned}$$

муносабатлардан фойдаланиб,

$$x+iy = \frac{a+b}{2} (\cos t + i \sin t) + \frac{a-b}{2} (\cos t - i \sin t);$$

яъни

$$x+iy = a \cos t + ib \sin t$$

булишини топамиз. Кейинги тенгликда ҳақиқий ва мавҳум қисмларни бир-бирига тенглаштириб,

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

тенгликларга келамиз. Бу ярим ўқлари a ва b бўлган эллипсдир. Демак,

$$z = \frac{a+b}{2} e^{it} + \frac{a-b}{2} e^{-it}$$

функция эллипсни ифодалар экан.

13-мисол. Ушбу

$$z = a(\cos^3 t + i \sin^3 t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

функция аниқлаган эгри чизиқни топинг, бунда a — ўзгармас мусбат сон.

Агар $z = x+iy$ дейилса, унда

$$x+iy = a(\cos^3 t + i \sin^3 t) = a \cos^3 t + ia \sin^3 t$$

булиб,

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = b \sin^3 t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

булади. Кейинги тенгликларни

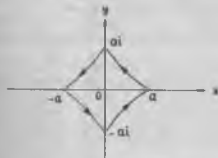
$$\begin{aligned} x^{\frac{2}{3}} &= a^{\frac{2}{3}} \cos^2 t, \\ y^{\frac{2}{3}} &= a^{\frac{2}{3}} \sin^2 t \end{aligned}$$

куринишда ёзсак, ундан

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

булиши келиб чиқади. Бу чизиқ астроидадир. Демак,

$$z = a(\cos^3 t + i \sin^3 t)$$



3-чизма

астроиданинг параметрик тенгламаси (3-чизма).

$$x+iy = x_0+iy_0 = r \cos t + i r \sin t,$$

яъни

$$x+iy = (x_0+r \cos t) + i(y_0+r \sin t)$$

куринишга келади. Кейинги тенгликда ҳақиқий ва мавҳум қисмларини бир-бирига тенглаб,

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + r \cos t, \\ y &= y_0 + r \sin t \end{aligned} \right\} \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. Бу маркази (x_0, y_0) радиуси r бўлган айланадир. Демак,

$$z = z(t) = z_0 + re^{it}$$

функция маркази (x_0, y_0) нуқтада радиуси r га тенг бўлган айланани ифодалар экан.

Изоҳ: бу айланани $|z-z_0|=r$ тенглама билан ҳам ифодалаш мумкин.

12-мисол. Ушбу

$$z = \frac{a+b}{2} \cdot e^{it} + \frac{a-b}{2} \cdot e^{-it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

функция аниқлайдиган эгри чизиқни топинг, бунда a, b — узгармас ҳақиқий сонлар.

z комплекс сонни $z=x+iy$ деб, сўнгра

$$\begin{aligned} e^{it} &= \cos t + i \sin t, \\ e^{-it} &= \cos t - i \sin t \end{aligned}$$

муносабатлардан фойдаланиб,

$$x+iy = \frac{a+b}{2} (\cos t + i \sin t) + \frac{a-b}{2} (\cos t - i \sin t);$$

яъни

$$x+iy = a \cos t + ib \sin t$$

булишини топамиз. Кейинги тенгликда ҳақиқий ва мавҳум қисмларни бир-бирига тенглаштириб,

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= b \sin t \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

тенгликларга келамиз. Бу ярим ўқлари a ва b бўлган эллипсдир. Демак,

$$z = \frac{a+b}{2} \cdot e^{it} + \frac{a-b}{2} \cdot e^{-it}$$

функция эллипсни ифодалар экан.

13-мисол. Ушбу

$$z = a(\cos^3 t + i \sin^3 t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

функция аниқлаган эгри чизиқни топинг, бунда a — ўзгармас мусбат сон.

Агар $z = x + iy$ дейилса, унда

$$x + iy = a(\cos^3 t + i \sin^3 t) = a \cos^3 t + ia \sin^3 t$$

булиб,

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

булади. Кейинги тенгликларни

$$x^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cos^2 t,$$

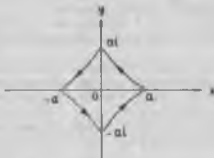
$$y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \sin^2 t$$

қўринишда ёзсак, ундан

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу чизиқ астроидадир. Демак,

$$z = a(\cos^3 t + i \sin^3 t)$$



3-чизма

астроиданинг параметрик тенгламаси (3- чизма).

3°. Комплекс текислик C да бирор z_0 нуқта ($z_0 \in C$) ҳамда $\epsilon > 0$ сон олайлик.

1- таъриф. Ушбу

$$\{z \in C : |z - z_0| < \epsilon\}$$

туپлам z_0 нуқтанинг ϵ атрофи дейилади ва $V(z_0, \epsilon)$ каби белгиланади:

$$V(z_0, \epsilon) = \{z \in C : |z - z_0| < \epsilon\}.$$

Равшанки, z_0 нуқтанинг ϵ атрофи маркази z_0 нуқтада, радиуси ϵ булган очик доира булади (4- чизма).



4-чизма

C да бирор D туپлам берилган булсин ($D \subset C$). Агар $z_0 \in D$ нуқтанинг шундай ϵ атрофи $V(z_0, \epsilon)$ мавжуд булсаки, бу атрофнинг барча нуқталари шу D туپламга тегишли булса ($V(z_0, \epsilon) \subset D$), у ҳолда z_0 нуқта D туپлам-

нинг ички нуқтаси дейилади.

2- таъриф. Агар D туپламнинг ҳар бир нуқтаси унинг ички нуқтаси булса, у ҳолда D очик туپлам дейилади.

C да бирор F туپлам берилган булсин ($F \subset C$).

3- таъриф. Агар $z_0 \in C$ нуқтанинг ихтиёрий $V(z_0, \epsilon)$ атрофида (ϵ — ихтиёрий мусбат сон) F туپламнинг z_0 нуқтадан фарқли камида битта нуқтаси булса, z_0 нуқта F туپламнинг лимит нуқтаси дейилади.

4- таъриф. Агар F тупламнинг ($F \subset C$) барча лимит нуқталари шу тупламга тегишли булса, F епик туплам дейилади.

5-таъриф. Агар D тупламнинг ($D \subset C$) ихтиёрий z_1, z_2 ($z_1 \in D, z_2 \in D$) нуқталарини бирлаштирувчи шундай узлуксиз γ эгри чизик топилсаки, у D тупламга тегишли булса ($\gamma \subset D$), D боғламли туплам дейилади.

6-таъриф. Агар D ($D \subset C$) туплам очик ҳамда боғламли туплам булса, бундай туплам соҳа деб аталади.

D соҳанинг узига тегишли булмаган лимит нуқталаридан ташкил топган туплам D соҳанинг чегараси дейилади ва ∂D каби белгиланади.

тўплам D каби белгиланади.

Демак,

$$D = D \cup \partial D$$

Агар D соҳанинг чегараси ∂D боғламли тўплам бўлса, D бир боғламли, акс ҳолда эса *кўп боғламли соҳа* дейилади.

D соҳа чегараси ∂D нинг боғламли компоненталари сонига қараб D соҳани *бир боғламли, икки боғламли, ... n боғламли соҳа* деб атаймиз.

Соҳа чегарасининг мусбат йўналиши деб шундай йўналишни қабул қиламизки, кузатувчи бу йўналиш буйлаб ҳаракат қилганда соҳа унга нисбатан ҳар доим чап томонда жойлашган бўлади.

Масалан, 5-чизмада а) бир боғламли, б) икки боғламли, в) уч боғламли соҳалар тасвирланган бўлиб, соҳа чегараларининг мусбат йўналишлари стрелкалар билан кўрсатилган.



5-чизма

14- м и с о л. Комплекс текислик C да ушбу

$$0 < \operatorname{Re}(iz) < 1$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталарнинг геометрик ўрнини топинг.

$z = x + iy$ бўлсин дейлик. Унда

$$\operatorname{Re}(iz) = \operatorname{Re}(i(x + iy)) = \operatorname{Re}(-y + ix) = -y$$

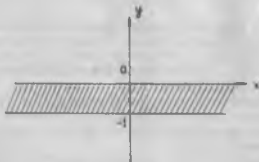
бўлиб, берилган тенгсизликлар

$$0 < -y < 1,$$

яъни

$$-1 < y < 0$$

тенгсизликларга келади. С текисликнинг мавҳум қисми — $-1 < y < 0$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи z нуқталари туплами $y = -1$ ва $y = 0$ горизонтал тўғри чизиқлар орасидаги текислик қисмидан иборат бўлади. Бу соҳа 6-чизмада тасвирланган.



6-чизма

15-мисол. Сда ушбу

$$|z-i| + |z+i| < 4$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталарнинг геометрик ўрнини топинг.

Равшанки, қуйилади

$$\{z \in \mathbb{C} : |z-i| + |z+i| = 4\}$$

туплам соҳанинг чегараси бўлади. Агар $z = x+iy$ дейилса, унда

$$\begin{aligned} |z-i| + |z+i| &= |x+iy-i| + |x+iy+i| = \\ &= |x+(y-1)i| + |x+(y+1)i| = \\ &= \sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \end{aligned}$$

булиб,

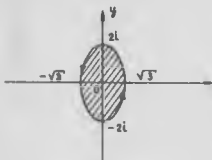
$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 4,$$

яъни

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

бўлади. Бу эса ярим уқлари $\sqrt{3}$ ва 2 булган эллипсдир.

Демак, изланаётган нуқталар тўпламининг чегараси эллипс бўлиб, берилган тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталарнинг геометрик ўрни шу эллипс билан уралган



7-чизма

текислик қисмидир. Бу нуқталар тўплами бир боғламли соҳа бўлиб, у ва унинг чегарасининг мусбат йуналиши 7-чизмада тасвирланган.

16-мисол. Ушбу

$$\left| \frac{z}{1} - 1 \right| \leq \arg z, \quad (z \neq 0)$$

тенгсизликни исботданг.

z комплекс сонни

$$z = re^{i\varphi}$$

кўрсаткичли кўринишида ёзамиз. Бунда r — z комплекс соннинг модули, φ эса унинг аргументи.

Унда берилган тенгсизликни қуйилагича

$$\left| \frac{re^{i\varphi}}{1} - 1 \right| \leq \varphi.$$

яъни

$$|e^{i\varphi} - 1| \leq \varphi$$

кўринишда ҳам ифодалаш мумкин.

Маркази $(0, 0)$ нуқтада, радиуси 1 га тенг бўлган айланани олайлик (8-чизма).



8-чизма

Бу айланадаги $z=1$ ҳамда $z=e^{i\varphi}$ нуқталарни тўғри чизик кесмаси билан бирлаштиришдан ҳосил булган ватарнинг узунлиги

$$|e^{i\varphi} - 1|,$$

айлана ёйининг узунлиги эса φ га тенг булади.

Маълумки, ватарнинг узунлиги шу ватарга тортилган ёй узунлигидан катта бўлмайди:

$$|e^{i\varphi} - 1| \leq \varphi.$$

Бу эса берилган тенгсизликнинг уринли бўлишини курсатади.

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

Қунидаги функциялар аниқлаган эгри чизикларни топиш:

40. $z = 1 - it, \quad 0 \leq t \leq 2.$

41. $z = a + (b-a)t, \quad 0 \leq t \leq 1; \quad a, b \in \mathbb{C}.$

42. а) $z = Re^{it}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \quad (R > 0),$

б) $z = Re^{it}, \quad \pi \leq t \leq 2\pi \quad (R > 0);$

в) $z = Re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (R > 0).$

43. $z = t + \frac{i}{t}, \quad -\infty < t < 0.$

44. $z = t + it^2, \quad 0 \leq t < \infty.$

45. $z = t^2 + it^4, \quad -\infty < t < \infty.$

$$46. z = a(\cos t + i \sin t), \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2} \quad (a > 0).$$

$$47. z = ae^{it} + \frac{1}{a}e^{-it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (a > 1).$$

$$48. z = 1 + e^{-it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$49. z = e^{2it} - 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$50. z = \begin{cases} e^{it}, & 0 \leq t < 1, \\ t - 2, & 1 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

$$51. z = i \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$52. z = 1 + i \cos^2 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$53. z = t + i\sqrt{1-t^2}, \quad -1 \leq t \leq 1 \quad (\text{арифметик илдиэ олинади}).$$

$$54. z = -t + i\sqrt{1-t^2}, \quad -1 \leq t \leq 0 \quad (\text{арифметик илдиэ олинади}).$$

$$55. z = a(t + i - ie^{-it}); \quad -\infty < t < \infty, \quad a > 0.$$

$$56. z = a + at - ibe^{-it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Айтайлик ү эгри чизик $z = z(t)$, $0 \leq t \leq 1$, функция ёрдамида берилган булсин. Куйидаги тенгламалар ёрдамида берилган $z = z_1(t)$, $0 \leq t \leq 1$ функциялар аниқлаган эгри чизикларни топинг.

$$57. z_1(t) = z(1-t).$$

$$58. z_1(t) = \begin{cases} z(2t), & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ z(2-2t), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$$59. z_1(t) = z(\sin^2 \pi t).$$

Куйидаги тенгламалар ёрдамида берилган чизиклар оиласини аниқланг:

$$60. \text{ а) } \operatorname{Re} \frac{1}{z} = c; \quad \text{ б) } \operatorname{Im} \frac{1}{z} = c \quad (-\infty < c < +\infty).$$

$$61. \text{ а) } \operatorname{Re} z^2 = c; \quad \text{ б) } \operatorname{Im} z^2 = c \quad (-\infty < c < +\infty).$$

$$62. \left| \frac{z-z_1}{z-z_2} \right| = \lambda \quad (\lambda > 0); \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

$$63. \arg \frac{z-z_1}{z-z_2} = \alpha \quad (0 \leq \alpha < 2\pi); \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

64. Ушбу

$$\text{ а) } z = \bar{z}; \quad \text{ б) } z = |z|; \quad \text{ в) } z = \arg z.$$

тенгламаларни қаноатлантирувчи z ларни топинг.

Чегараси 65—69- мисоллардаги функциялар ёрдамида аниқланган ∂D чизиқдан иборат бўлган D соҳани тенгсизликлар ёрдамида ифодаланг ва чизмада тасвирланг:

65. $z = a + \rho e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $\rho > 0$.
 66. $z = -it$, $-\infty < t < +\infty$.
 67. $z = \rho^2$, $-\infty < \rho < +\infty$.
 68. $z = t + i^2$, $-\infty < t < +\infty$.
 69. $z = ae^{i\varphi} + \frac{1}{a}e^{-i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $a > 1$.

Комплекс текислик C да қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи нуқталарнинг геометрик уринларини топинг ва уларни чизмада курсатинг:

70. а) $\operatorname{Re} z > 2$; б) $\operatorname{Im} z \leq 0$.
 71. а) $|\operatorname{Re} z| < 1$; б) $|\operatorname{Im} z| < 1$, $0 < \operatorname{Re} z < 1$.
 72. а) $|z| \leq 2$; б) $|z + i| > 1$.
 73. а) $|z - i| > 1$; б) $0 < |z + i| < 2$.
 74. а) $1 < |z - 1| < 3$; б) $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$.
 75. а) $0 < \arg \frac{z-1}{z+i} < \frac{\pi}{2}$; б) $|\pi - \arg z| < \frac{\pi}{4}$.
 76. а) $\operatorname{Im} \frac{z}{1+i} = 0$; б) $\operatorname{Re} \frac{z}{i} = 0$.
 77. а) $|z + i| = |z - i|$; б) $|z + i| + |z - 1| = 4$.
 78. а) $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{1}{a}$ ($a > 0$); б) $\operatorname{Re} \frac{z-1}{z+i} = 0$.
 79. а) $\operatorname{Im} \frac{z-1}{z+i} = 0$; б) $\operatorname{Re} \frac{z-a}{z+a} = 0$ ($a > 0$).
 80. а) $\operatorname{Re} \frac{1}{z} < \frac{1}{2}$; б) $|z-2| - |z+2| < 2$.
 81. а) $|1+z| < |1-z|$; б) $\operatorname{Re}[z(1-i)] < \sqrt{2}$.
 82. а) $|z| > 1 - \operatorname{Re} z$; б) $\operatorname{Re} z^2 > \operatorname{Im} z^2$.
 83. а) $|z - z_1| = |z - z_2|$; $z_1, z_2 \in C$;
 б) $|z - 1| = \operatorname{Re} z$.
 84. а) $\alpha < \arg z < \beta$; б) $\alpha < \arg(z - z_0) < \beta$.
 ($0 \leq \alpha < \beta < 2\pi$).
 85. $|z| = \operatorname{Re} z + 1$.
 86. $|2z| > |1+z^2|$.
 87. а) $|z| < \arg z$, агар $0 \leq \arg z \leq 2\pi$ бўлса;
 б) $|z| < \arg z$, агар $0 \leq \arg z \leq 2\pi$ бўлса.

Комплекс текислик C нинг қуйидаги гулпларини тенгсизликлар ёрдамида ёзинг.

88. а). Мавҳум уқнинг унғ томонида жойлашган ярим текислик;

б). Биринчи квадрат.

89. а). Ҳақиқий уқдан юқорида ва ундан 2 бирлик масофа узоқликда жойлашган ярим текислик;

б). Ихтиёрий нуқтасидан мавҳум уқгача булган масофа 1 дан кичик булган йулак.

90. Маркази $z=0$ нуқтада, радиуси 1 га тенг булган ва мавҳум уқдан чап томонда жойлашган ярим доира.

91. Фараз қилайлик, A, E — ҳақиқий, B — комплекс сон бўлиб, $AE < |B|^2$ шарт бажарилсин. У ҳолда ушбу

$$A \cdot |z|^2 + \bar{B}z + B\bar{z} + E = 0 \quad (A > 0)$$

тенглама айлананинг тенгламаси эканини исботланг ва бу айлананинг маркази ҳамда радиусини топинг.

92. Айтайлик, a комплекс сон $\operatorname{Im} a > 0$ шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий сон бўлсин. Ушбу $\left| \frac{z-a}{z-\bar{a}} \right|$ нисбатнинг

қуйи ярим текисликда бирдан катта, юқори ярим текисликда бирдан кичик ва ҳақиқий уқда бирга тенг эканлигини исботланг.

4-§. Комплекс сонлар кетма-кетлиги ва унинг limiti

Фараз қилайлик, f ҳар бир $n (n \in \mathbb{N})$ натурал сонга бирор z_n нуқтани ($z_n \in \mathbb{C}$) мос қуювчи акслантириш булсин:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} (n \rightarrow z_n).$$

Бу акслантириш тасвирларидан тузилган

$$z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots$$

ифода *комплекс сонлар кетма-кетлиги дейилади* ва у $\{z_n\}$ каби белгиланади.

Масалан, $\left\{ \frac{1}{n} + i \frac{1}{n} \right\}$:

$$1 + i, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i, \quad \dots, \quad \frac{1}{n} + \frac{1}{n}i, \quad \dots$$

комплекс сонлар кетма-кетлигидир.

Бирор $\{z_n\}$:

$$z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots$$

комплекс сонлар кетма-кетлиги ҳамда a комплекс сон берилган бўлсин.

7-таъриф. Агар $\forall \epsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай натурал $n_0 = n_0(\epsilon)$ сон топилсаки, барча $n > n_0$ сонлар учун

$$|z_n - a| < \epsilon$$

тенгсизлик бажарилса, a комплекс сон $\{z_n\}$ кетма-кетлигининг *лимити деб аталади* ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \text{ ёки } n \rightarrow \infty \text{ да } z_n \rightarrow a$$

каби белгиланади.

Агар $\{z_n\}$ комплекс сонлар кетма-кетлиги $a(a \in C)$ лимитга эга бўлса, у *яқинлашувчи кетма-кетлик* дейилади.

8-таъриф. Агар $\forall \epsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай натурал $n_0 = n_0(\epsilon)$ сон топилсаки, барча натурал $n > n_0$ сонлар учун

$$|z_n| > \epsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $\{z_n\}$ кетма-кетлигининг *лимити чексиз катта сон дейилади* ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty \text{ ёки } n \rightarrow \infty \text{ да } z_n \rightarrow \infty$$

каби белгиланади.

Бирор $\{z_n\}$ комплекс сонлар кетма-кетлиги берилган бўлиб, z_n нинг ҳақиқий қисми $x_n = \operatorname{Re} z_n$, мавҳум қисми $y_n = \operatorname{Im} z_n$ бўлсин ($n = 1, 2, 3, \dots$)

Унда

$$z_n = x_n + iy_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

булади. Натижада иккита $\{x_n\}$ ҳамда $\{y_n\}$ ҳақиқий сонлар кетма-кетлигига эга бўламиз.

4-теорема. $\{z_n\}$ комплекс сонлар кетма-кетлиги $(z_n = x_n + iy_n, n = 1, 2, \dots)$ яқинлашувчи бўлиши учун $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ сонлар кетма-кетликларининг яқинлашувчи бўлиши зарур ва етарли.

Бу теорема комплекс сонлар кетма-кетлигининг лимитини урганишни ҳақиқий сонлар кетма-кетлигининг лимитини урганишга келтирилишини ифодалайди.

Маълумки, [1] да ҳақиқий сонлар кетма-кетлиги ва унинг лимитига доир мисол ва масалалар ва кетма-кетликлар устида амаллар батафсил урганилган.

5-теорема. Иккита $\{z_n\}$ ва $\{z'_n\}$ яқинлашувчи кетма-кетликлар берилган бўлиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z'_n = a', \quad (a \in C, a' \in C)$$

булсин. У ҳолда

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \pm z'_n) = a \pm a';$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \cdot z'_n = a \cdot a';$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{z'_n} = \frac{a}{a'} \quad (a' \neq 0).$$

тенгликлар уринилидир.

Бу тенгликларнинг биттасини, мисол учун 2) ни исботлаймиз.

Айтайлик,

$$\begin{aligned} z_n &= x_n + iy_n, & z'_n &= x'_n + iy'_n, \\ a &= \alpha + i\beta, & a' &= \alpha' + i\beta' \end{aligned}$$

булсин. Унда 4-теоремага кўра

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \alpha, & \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= \beta, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n &= \alpha', & \lim_{n \rightarrow \infty} y'_n &= \beta' \end{aligned}$$

булади.

Энди

$$\begin{aligned} z_n \cdot z'_n &= (x_n + iy_n)(x'_n + iy'_n) = \\ &= (x_n \cdot x'_n - y_n \cdot y'_n) + i(x_n \cdot y'_n + x'_n \cdot y_n) \end{aligned}$$

ҳамда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot x'_n - y_n \cdot y'_n) = \alpha\alpha' - \beta\beta',$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y'_n + x'_n \cdot y_n) = \alpha\beta' + \alpha'\beta$$

булишини эътиборга олиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \cdot z'_n) = (\alpha\alpha' - \beta\beta') + i(\alpha\beta' + \alpha'\beta) = a \cdot a'$$

Эканини топамиз.

17-мисол. Ушбу

$$\{z_n\} = \{a^n\} \quad (a \in \mathbb{C})$$

комплекс сонлар кетма-кетлигини яқинлашувчиликка текширинг.

Ихтиерий $\varepsilon > 0$ сонни олиб, унга кўра n_0 натурал сонни қуйидагича

$$n_0 = n_0(\varepsilon) = \lceil \log_{|a|} \varepsilon \rceil$$

аниқланса, ($|a| < 1$ булганда $|a|^n < \varepsilon$ тенгсизликни ечиб топилади):

$$|a|^n < \varepsilon \Rightarrow \log_{|a|} |a|^n > \log_{|a|} \varepsilon \Rightarrow n > \log_{|a|} \varepsilon$$

У ҳолда барча $n > n_0$ учун

$$|z_n| = |a|^n < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Бу эса 7-таърифга биноан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$$

булишини билдиради.

Демак, берилган кетма-кетлик, $|a| < 1$ бўлганда яқинлашувчи булиб, унинг лимиги 0 га тенгдир.

$a = 1$ булса, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$ эканлиги равшан. Бошқа ҳамма

ҳолларда, яъни $|a| \geq 1$, $a \neq 1$ булганда $\{z_n\}$ кетма-кетликнинг узоқлашувчи эканлигини курсатиш қийин эмас.

18-мисол. Ушбу

$$\{z_n\} = \left\{ \frac{1}{n} (1 + e^{i\varphi} + e^{i2\varphi} + \dots + e^{in\varphi}) \right\} \quad (0 < \varphi < 2\pi)$$

кетма-кетликнинг лимитини топинг.

Берилган кетма-кетликнинг умумий ҳади

$$z_n = \frac{1}{n} (1 + e^{i\varphi} + e^{i2\varphi} + \dots + e^{in\varphi})$$

булиб, прогрессия ҳадлари йиғиндисини топиш формуласига кура

$$1 + e^{i\varphi} + e^{i2\varphi} + \dots + e^{in\varphi} = \frac{1 - e^{i(n+1)\varphi}}{1 - e^{i\varphi}}$$

булади. Демак,

$$z_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - e^{i(n+1)\varphi}}{1 - e^{i\varphi}}$$

Агар $0 < \varphi < 2\pi$ бўлганда $1 - e^{i\varphi} \neq 0$ бўлишини ҳисобга ол-
сак, унда

$$\left| \frac{1 - e^{i\varphi}}{1 - e^{i\theta}} \right|$$

миқдорнинг чегараланганлигини аниқлаймиз.

Унда шундай ўзгармас $M > 0$ сон топиладики, $\forall n \in \mathbb{N}$
учун

$$\left| \frac{1 - e^{i\varphi}}{1 - e^{i\theta}} \right| \leq M$$

тенгсизлик бажарилади. Демак,

$$0 \leq |z_n| \leq \frac{1}{n} M.$$

Кейинги тенгсизликдан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Унда

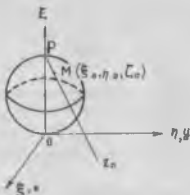
$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (1 + e^{i\varphi} + e^{i2\varphi} + \dots + e^{in\varphi}) = 0$$

булади.

R^3 фазода (ξ, η, ζ) Декарт координаталари системаси-
ни олайлик. Бу фазода $S = \{(\xi, \eta, \zeta) \in R^3 : \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\}$
сферани қараймиз. Фараз қилайлик ξ ва η уқлар мос ра-
вишда x ва y билан устма-уст тушсин (9- чизма).

Равшанки, қаралаётган S сфера Oxy текислигига коор-
дината бошида уринади. Комплекс текисликда $z_0 = x + iy_0$
нуқта олиб, бу нуқтани сферанинг P нуқтаси билан туғри
чизиқ кесмаси ёрдамида бирлаштирамиз. Натижада бу туғри
чизиқ сферани $M((\xi_0, \eta_0, \zeta_0))$ нуқтада кеседи. Демак, ком-
плекс текисликдаги ҳар бир нуқта S сферадаги бирор нуқта
билан ифодаланади, ва аксинча, S сферадаги ҳар бир нуқ-
тага (P нуқтадан бошқа) комплекс текисликда ягона нуқ-
та мос келади.

Шундай қилиб, $S \setminus \{P\}$ туплам билан комплекс текис-
лик уртасида узаро бир қийматли мослик ўрнатилади. Одат-
да бу мослик *комплекс текисликнинг стереографик проек-
цияси* дейилади. Агар z_0 нуқта ∞ га интилса, бу z_0 нуқтага
 S сферада мос келувчи нуқтанинг P га яқинлашишини



9-ИЗРАС

куриш қийин эмас. Бу ҳол P нуқтага комплекс текисликда $z=\infty$ нуқтани мос қўйиш табиийлигини кўрсатади. Демак, комплекс текислигидаги ягона $z=\infty$ нуқта S сферада P нуқта билан ифодаланади. Комплекс текислик чексиз узоқлашган нуқта $z=\infty$ билан биргаликда кенгайтирилган комплекс текислик деб аталади ва $\bar{C}$ каби белгиланади. S сферадаги $M(\xi, \eta, \zeta)$ ва комплекс текисликдаги $z=x+iy$ нуқта орасидаги мослик қуйидаги формулалар ёрдамида аниқланади:

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1+|z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}$$

$$\left(x = \frac{\xi}{1-\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta} \right).$$

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

93. $\{z_n\}$ комплекс сонлар кетма-кетлиги берилган бўлсин. $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ бўлиши учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} = 0$$

тенгликнинг бажарилиши зарур ва старли эканлигини исботланг.

94. $\{z_n\}$ кетма-кетлик ∞ га интилиши учун ҳақиқий сонлар кетма-кетлиги $\{|z_n|\}$ нинг limiti $+\infty$ булиши зарур ва етарли эканлигини исботланг.

95. Айтайлик, $\{z_n\}$ комплекс сонлар кетма-кетлиги берилган булиб, бирор $n_0 \in N$ номердан бошлаб барча $n > n_0$ лар учун $|z_n| \leq M < \infty$ булсин. У ҳолда $\{z_n\}$ кетма-кетликдан чекли лимитга яқинлашувчи $\{z_{n_k}\}$ қисмий кетма-кетлик ажрагиш мумкин эканлигини исботланг.

96. Ихтиёрий $\{z_n\}$ кетма-кетликдан чекли ёки ∞ лимитга яқинлашувчи $\{z_{n_k}\}$ қисмий кетма-кетлик ажрагиш мумкин эканлигини исботланг.

Куйидаги мисолларда a параметрнинг қандай қийматларида берилган кетма-кетликларнинг яқинлашувчи ёки limiti ∞ булишини аниқланг

97. $\{na^n\}$.

98. $\left\{\frac{a^n}{n}\right\}$.

99. $\left\{\frac{a^n}{1+a^n}\right\}$.

100. $\{1+a+\dots+a^n\}$.

101. $\left\{\frac{a^n}{1^2} + \frac{a^n}{2^2} + \dots + \frac{a^n}{n^2}\right\}$.

Кетма-кетликларнинг лимитларини ҳисобланг:

102. $\left\{\frac{a^n}{1+a^{2n}}\right\}, \quad |a| < 1.$

103. $\left\{\frac{a^n}{1+a^{2n}}\right\}, \quad |a| > 1.$

104. $\left\{\frac{a^n}{1^2} + \frac{a^n}{2^2} + \dots + \frac{a^n}{n^2}\right\}, \quad |a| > 1.$

105. $\left\{\frac{1}{\sqrt[n]{n}} (1 - e^{-\varphi} + e^{-2\varphi} - \dots + (-1)^n e^{-n\varphi})\right\}, \quad -\pi < \varphi < \pi.$

106. $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A \neq \infty$ булса,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_n}{n} = A$$

тенгликни исботланг.

107. Агар $\lim (x_n + iy_n) = \infty$ булса, у ҳолда $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликларнинг лимитлари ҳақида нима дейиш мумкин?

108. Ҳисобланг:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{2} + \dots + \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi}{4} \right).$$

109. Ҳисобланг.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{5} \sin \frac{\pi}{6} + \frac{16}{5^2} \sin \frac{\pi}{3} + \dots + \frac{4^n}{5^n} \sin \frac{n\pi}{6} \right).$$

110—112- мисоллардаги тулламларнинг лимит нуқталарини топинг:

$$110. z = 1 + (-1)^n \frac{n}{n+1}, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

$$111. z = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \quad (m, n — \text{ихтиёрий бутун сонлар}).$$

$$112. z = \frac{p}{m} + i \frac{q}{n} \quad (m, n, p, q — \text{ихтиёрий бутун сонлар}).$$

Куйидаги кетма-кетликларнинг яқинлашувчи эканлигини исботланг ва лимитини ҳисобланг:

$$113. \left\{ \frac{1}{n+1} [n+1 + nz + (n-1)z^2 + \dots + z^n] \right\}, \quad |z| \leq 1, \quad z \neq 1.$$

$$114. \left\{ \frac{1}{2n+1} [2n+1 - (2n-1)z^2 + (2n-3)z^4 - \dots + (-1)^n z^{2n}] \right\} \\ |z| \leq 1, \quad z \neq \pm i.$$

$$115. \left\{ \sum_{k=0}^n \sqrt{\frac{n-k}{n}} z^k \right\}, \quad |z| \leq 1, \quad z \neq 1.$$

116. $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq 0$ лимитнинг мавжуд булиши учун ушбу

$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| \neq 0$ ва $\lim_{n \rightarrow \infty} \arg z_n$ лимитларнинг мавжуд булиши за-

рур ва етарли эканлигини исботланг. Қайси ҳолларда $\{z_n\}$ кетма-кетликнинг яқинлашиши фақат $\{|z_n|\}$ кетма-кетликнинг яқинлашишига тенг кучли бўлади?

117. Фараз қилайлик, φ — ҳақиқий сон булсин. 116-мисолдан фойдаланиб ушбу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{e^{i\varphi}}{n} \right)^n = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

тенгликни исботланг.

118. S комплекс текисликдаги ушбу

$$а) z = 1; \quad б) z = -1; \quad в) z = i; \quad г) z = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

нуқталарнинг S Риман сферасидаги образларини топинг.

119. Агар $M(z)$ нуқтанинг S сферадаги координаталари (ξ, η, ζ) бўлса, у ҳолда

$$а) M(-z); \quad б) M(z); \quad в) M\left(\frac{1}{z}\right).$$

нуқталарнинг сфералаги координаталарини топинг.

S текисликдаги қуйидаги тўпламларга Риман сферасида қандай тўпламлар мос келишини аниқланг:

$$120. а) \operatorname{Re} z > 0; \quad б) \operatorname{Re} z < 0.$$

$$121. а) \operatorname{Im} z > 0; \quad б) \operatorname{Im} z < 0$$

$$122. а) |z| > 1; \quad б) |z| < 1$$

123. Риман сферасидаги O ва P дан фарқли $M(z_1)$ ва $M(z_2)$ нуқталар фақат

$$z_1 z_2 = -1$$

шарт бажарилгандагина диаметрал қарама-қарши нуқталар бўлишини исботланг.

124. Риман сферасидаги ҳар бир айланата комплекс текисликда айлана ёки тўғри чизиқ мос келишини, жумладан, тўғри чизиқнинг фақат Риман сферасининг P нуқтасидан ўтган айланаларгагина мос келишини исботланг.

125. a параметрнинг қандай қийматида ушбу айланалар Риман сферасининг катта айланаларига мос келади:

$$а) |z - a| = a \quad (a > 0);$$

$$б) |z + \frac{a}{2}| = a \quad (a > 0);$$

$$в) |z - i| = a \quad (a > 0);$$

$$г) |z - 2ai| = a \quad (a > 0)?$$

126. Сфера қандай алмаштирилганда z нуқтанинг образи $\frac{1}{z}$ нуқтанинг образига ўтади?

127. Айтайлик, $z_1, z_2 \in S$ нуқталар берилган бўлсин. Сферик метрикада z_1 ва z_2 нуқталарнинг орасидаги масофа деганда, уларнинг Риман сфераси S даги образлари орасидаги масофа тушунилади ва у $\rho(z_1, z_2)$ каби белгиланади. Ушбу

$$a) \rho(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2} \sqrt{1+|z_2|^2}} \quad (z_1 \neq \infty; z_2 \neq \infty),$$

$$b) \rho(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}.$$

формулаларни исботланг.

Комплекс сонлар текислиги S даги ушбу тенгсизликларни қаноатлантирувчи нуқталар тўпламини топинг:

$$128. \rho(z, 0) < R; \quad 0 < R < 1.$$

$$129. \rho(z, \infty) < R; \quad 0 < R < 1.$$

$$130. \rho(z, i) > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$131. \frac{1}{2} < \rho(z, 1) < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

132. Текисликдаги параллел тўғри чизиқлар оиласига Риман сферасида нима мос келади?

133. Стереографик проекция натижасида сферадаги чи-зиқлар орасидаги бурчак ва уларнинг текисликдаги об-разлари орасидаги бурчак бир-бирига тенг булишини ис-ботланг.

КОМПЛЕКС АРГУМЕНТЛИ ФУНКЦИЯЛАР

1-§. Комплекс аргументли функциялар,
уларнинг лимити, узлуксизлиги

1°. Комплекс аргументли функция тушунчаси. Комплекс сонлар текислиги C да бирор E тўплам берилган бўлсин ($E \subset C$).

1-таъриф. Агар E тўпламдаги ҳар бир z комплекс сонга f қоида ёки қонунга қўра битта w комплекс сон мос қўйилган бўлса, E тўпламда функция берилган (аниқланган) деб аталади ва у

$$f: z \rightarrow w \text{ ёки } w = f(z)$$

каби белгиланади.

Бунда E тўплам функциянинг аниқланиш тўплами, z эркин узгарувчи ёки функция аргументи, w эса z узгарувчининг функцияси дейилади.

Масалан, f — ҳар бир комплекс z сонга унинг квадрати мос қўйувчи қоида бўлсин. Унда

$$f: z \rightarrow z^2 \text{ ёки } w = z^2$$

функцияга эга бўламиз.

Айтайлик,

$$w = f(z)$$

функция бирор E ($E \subset C$) тўпламда берилган бўлсин. Бу функцияни

$$w = u + iv = f(x + iy) \quad (x \in R, y \in R)$$

қўринишда ҳам ёзиш мумкин. Бу эса E тўпламда икки ўзгарувчили иккита

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

функцияларнинг аниқланишига олиб келади. Бундан битта комплекс ўзгарувчи $w = f(z)$ функциянинг берилиши иккита икки ўзгарувчи ҳақиқий функциялар

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

берилишига эквивалент эканлиги келиб чиқади.
Масалан,

$$w = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

муносабат ушбу ($w = u + iv$)

$$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2, \\ v &= 2xy \end{aligned}$$

муносабатларга эквивалент бўлади.
1-мисол. Ушбу

$$f(z) = \frac{z+3}{z+5}$$

функциянинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини топинг.

$f(z)$ функциянинг ҳақиқий қисмини u , мавҳум қисмини эса v деб олайлик. Унда

$$f(z) = u + iv$$

бўлади. $z = x + iy$ булишини эътиборга олиб, топамиз:

$$\begin{aligned} u + iv &= \frac{z+3}{z+5} = \frac{x+(y+3)i}{x+(y+5)i} = \\ &= \frac{(x+3)+iy[(x+5)+2y]}{(x+3)^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2 + 6x + 15}{x^2 + y^2 + 10x + 25} + \\ &+ i \frac{2y}{x^2 + y^2 + 10x + 25}. \end{aligned}$$

Демак,

$$u = u(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + 6x + 15}{x^2 + y^2 + 10x + 25},$$

$$v = v(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 10x + 25}.$$

$w=f(z)$ функция $E \subset C$ тўпламда берилган бўлиб, z ўзгарувчи E тўпламда ўзгарганда функциянинг мос қийматларидан иборат тўплам

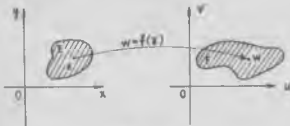
$$F = \{f(z): z \in E\}$$

ни қарайлик. Одатда бу тўплам функция қийматлари тўла-ми дейилади.

Демак, E тўпламда ($E \subset C$)

$$w = f(z)$$

функциянинг берилиши Oxy — комплекс текислигидаги E тўпламни (тўплам нуқталарини) Ouv — комплекс текислигидаги F тўпламга (тўплам нуқталарига) акс этгиришдан иборат экан. (10-чизма). Шу сабабли $w=f(z)$ ни E тўпламни F тўпламга акслантириш деб ҳам юритилади.



10-чизма

Айтайлик, $w=f(z)$ функция E тўпламда ($E \subset C$) берилган бўлиб, F эса шу функция қийматларидан иборат тўплам бўлсин:

$$F = \{f(z): z \in E\}.$$

Сўнгра F тўпламда ўз навбатида бирор $\zeta = \varphi(w)$ функция берилган бўлсин. Натижада E тўпламдан олинган ҳар бир z га F тўпламда битта w ($f: z \rightarrow w$) сон ва F тўпламдан олинган бундай w сонга битта ζ ($\varphi: w \rightarrow \zeta$) сон ($\zeta \in C$) мос қўйилади:

$$z \xrightarrow{f} w \xrightarrow{\varphi} \zeta$$

Демак, E тўпламдан олинган ҳар бир z га битта ζ сон ($\zeta \in C$) мос қўйилиб, $z \rightarrow \zeta$ функцияси ҳосил бўлади.

Одатда бундай функция мураккаб функция дейила-
ди ва

$$\zeta = \varphi(f(z))$$

каби белгиланади.

$w=f(z)$ функция E тупламда берилган бўлиб, F туплам эса шу функция қийматларидан иборат туплам бўлсин. Энди F тупламдан олинган ҳар бир w комплекс сонга E тупламда фақат битта z сон мос келсин дейлик. Бу ҳолда F тупламдан олинган ҳар бир w га E тупламда битта z мос қўйилишини ифодалайдиган функцияга келамиз. Одатда бу функция $w=f(z)$ функцияга нисбатан *тескари функция* дейилади ва у $z=f^{-1}(w)$ каби белгиланади.

Фараз қилайлик, $w=f(z)$ функция E ($E \subset C$) тупламда берилган бўлсин.

2-таъриф. Агар аргумент z нинг E тупламдан олинган ихтиёрий z_1 ва z_2 қийматлари учун $z_1 \neq z_2$ бўлишидан $f(z_1) \neq f(z_2)$ бўлиши келиб чиқса, $f(z)$ функция E тупламда бир япроқли (ёки бир варақли) функция деб аталади.

2-мисол. Ушбу

$$f(z) = \frac{1}{z-1}$$

функцияни $E=\{z \in C : |z| < 1\}$ да бир япроқликка текширинг.

Фараз қилайлик, $z_1, z_2 \in E$ лар учун

$$f(z_1) = f(z_2),$$

яъни

$$\frac{1}{z_1-1} = \frac{1}{z_2-1}$$

бўлсин. Кейинги тенгликдан

$$z_1-1 = z_2-1$$

ёки

$$z_1 = z_2$$

бўлиши келиб чиқиб, бу $f(z)$ функциянинг бир япроқли эканлигини кўрсатади.

2'. Функция лимити. Фараз қилайлик. $w=f(z)$ функция E ($E \subset C$) тупламда берилган бўлиб, z_0 нуқта шу E тупламининг лимит нуқтаси бўлсин.

3-таъриф. Агар $\forall \epsilon > 0$ сон учун шундай $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ сон топилсаки, аргумент z нинг $0 < |z - z_0| < \delta$ тенгсизликни қаноат-
лантирувчи барча $z \in E$ ($z \neq z_0$) қийматларидан

$$|f(z) - A| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда A комплекс сон $f(z)$ функци-
янинг $z \rightarrow z_0$ даги limiti деб аталади ва

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$$

каби белгиланади.

$f = u + iv$ функциянинг limitини ҳисоблаш u ва v лар-
нинг limitларини ҳисоблашга келтирилиши мумкин.

1-теорема. $w = f(z)$ функция $z \rightarrow z_0$ ($z_0 = x_0 + iy_0$) да $A = \alpha + i\beta$
limitга эга

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$$

бўлиши учун

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = \alpha,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = \beta$$

бўлиши зарур ва етарли.

Демак,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(x + iy) = \alpha + i\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = \alpha, \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = \beta \end{cases} \quad (1)$$

бўлади.

3-мисол. Ушбу

$$f(z) = \frac{1}{|z|} \quad (z \neq 0)$$

функциянинг $z \rightarrow 0$ даги limiti мавжуд бўладими?

Аввало берилган функциянинг ҳақиқий ҳамда мавҳум
қисмларини топайлик:

$$f(z) = \frac{1}{|z|} = \frac{x + iy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$v(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ да

$$u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

функциянинг limiti мавжуд эмас, чунки

$$x \rightarrow 0, y = kx \rightarrow 0 \quad (k = \text{const})$$

да

$$u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}}$$

булиб, k нинг турли қийматида функция limiti турлича бўлади.

Юқорида келтирилган 1-теоремага кўра $z \rightarrow 0$ да берилган функциянинг limiti мавжуд бўлмайди.

4-мисол. Ушбу

$$f(z) = \frac{z \operatorname{Re} z}{|z|} \quad (z \neq 0)$$

функциянинг $z \rightarrow 0$ даги лимитини топинг.

Берилган $f(z)$ функциянинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини топамиз:

$$f(z) = \frac{z \operatorname{Re} z}{|z|} = \frac{(x+iy)x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$u(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Равшанки,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} u(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} v(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Яна I-теоремага кура

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{|z|} = 0$$

булади.

Айтайлик, $f_1(z)$ ҳамда $f_2(z)$ функциялар E тўпланда берилган ($E \subset C$) бўлиб, z_0 нуқта шу E тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

Агар

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) = A_1, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z) = A_2$$

булса, у ҳолда

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f_1(z) \pm f_2(z)| = A_1 \pm A_2$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f_1(z) \cdot f_2(z)| = A_1 \cdot A_2,$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{A_1}{A_2} \quad (A_2 \neq 0)$$

булади.

3°. Функциянинг узлуксизлиги.

Фараз қилайлик, $w=f(z)$ функция E ($E \subset C$) тўпланда берилган бўлиб, z_0 нуқта шу E тўпламнинг узига тегишли булган лимит нуқтаси бўлсин.

4-таъриф. Агар $\forall \epsilon > 0$ сон учун шундай $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ сон топилсаки, аргумент z нинг $|z - z_0| < \delta$ тенгсизлигини қаноатлантирувчи барча $z \in E$ қийматларида

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $f(z)$ функция z_0 нуқтада узлуксиз деб аталади.

(Равшанки, бу ҳолда

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

бўлади).

Одатда $z - z_0$ айирма функция аргументининг орттирмаси дейилиб, уни Δz каби белгиланади:

$$\Delta z = z - z_0$$

$f(z) - f(z_0)$ айирма эса функция орттирмаси дейилиб, уни Δf каби белгиланади:

$$\Delta f = f(z) - f(z_0)$$

Шу тушунчалардан фойдаланиб, z_0 нуқтада функция узлуксизлиги 4-таърифни қуйидагича ҳам айтиш мумкин:

Агар

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta f = 0$$

булса, $f(z)$ функция z_0 нуқтада узлуксиз дейилади.

5-таъриф. Агар $f(z)$ функция E тупламнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз булса, у ҳолда $f(z)$ функция E тупламда узлуксиз дейилади.

5-мисол. Ушбу

$$f(z) = z^3$$

функциянинг ихтиёрий z_0 нуқтада узлуксизлигини исботланг.

$f(z) - f(z_0)$ айирмани қарайлик:

$$f(z) - f(z_0) = z^3 - z_0^3 = (z - z_0)(z^2 + zz_0 + z_0^2).$$

$z \rightarrow z_0$ бўлгани учун шундай $M > 0$ сон топиладики,

$$|z| < M, \quad |z_0| < M$$

тенгсизликлар уринли бўлади.

Энди $\forall \epsilon > 0$ сонга кўра δ ни $\delta = \frac{\epsilon}{3M^2}$ деб олсак, у ҳолда

$|z - z_0| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча z лар учун

$$\begin{aligned} |z^3 - z_0^3| &= |z - z_0| |z^2 + zz_0 + z_0^2| < \\ &< 3M^2 |z - z_0| < 3M^2 \delta = \epsilon \end{aligned}$$

муносабат бажарилади. Бу эса 4-таърифга кўра, $f(z) = z^3$ функциянинг ихтиёрий z_0 нуқтада узлуксиз эканини билдиради.

6-мисол. Ушбу

$$f(z) = \frac{1}{z} \quad (z \neq 0)$$

функцияни узлуксизликка текширинг.

$\forall z_0 \in C (z_0 \neq 0)$ нуқтани олайлик. Бунга Δz орттирма бериб, функция орттирмасини топамиз:

$$\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \frac{1}{z_0 + \Delta z} - \frac{1}{z_0} = \frac{-\Delta z}{z_0(z_0 + \Delta z)}.$$

Энди $\Delta z \rightarrow 0$ да Δf нинг лимитини ҳисоблаймиз:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[-\frac{\Delta z}{z_0(z_0 + \Delta z)} \right] = 0.$$

Демак, берилган функция $\forall z_0 \in C, (z_0 \neq 0)$ нуқтада узлуксиз булади.

2-теорема. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ функциянинг $z_0 = x_0 + iy_0$ нуқтада узлуксиз бўлиши учун $u = u(x, y)$ ҳамда $v = v(x, y)$ функцияларнинг (x_0, y_0) нуқтада узлуксиз бўлиши зарур ва етарли.

$w = f(z)$ функция $E (E \subset C)$ тўпламда берилган бўлсин.

6-таъриф. Агар $\forall \epsilon > 0$ сон учун шундай $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ сон топилсаки, E тўпламнинг $|z' - z''| < \delta$ тенгсизлигини қаноатлантирувчи ихтиёрий z' ва $z'' (z' \in E, z'' \in E)$ нуқталарида

$$|f(z') - f(z'')| < \epsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(z)$ функция E тўпламда текис узлуксиз дейилади.

3-теорема (Кантор теоремаси). Агар $f(z)$ функция чегараланган ёпиқ тўпламда узлуксиз бўлса, функция шу тўпламда текис узлуксиз бўлади.

7-мисол. Ушбу

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$$

функция $E = \{z \in C, 0 < |z| \leq R\}$ тўпламда текис узлуксиз бўладими?

Берилган функция E тўпламда узлуксиз бўлади, чунки

$$f(z) = e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

булиб, $u(x, y) = e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}$, $v(x, y) = 0$ функциялар $\{(x, y) \in R^2: 0 < x^2 + y^2 \leq R^2\}$ да узлуксиз.

Агар

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{|z|}} = 0$$

булишини эътиборга олсак ва

$$f(0) = 0$$

булсин деб қарасак, унда берилган функция чегараланган ёпиқ $\{z \in C: |z| \leq R\}$ тўпلامда узлуксиз бўлиб қолади. Кантор теоремасига кура бу функция $\{z \in C: |z| \leq R\}$ да текис узлуксиз бўлади. Бундан эса берилган функциянинг E да текис узлуксизлиги келиб чиқади.

8-мисол. Ушбу

$$f(z) = \frac{1}{z^n}$$

функция $E = \{z \in C: 0 < |z| \leq R\}$ тўпلامда текис узлуксиз буладими?

$\forall \delta > 0$ сон олинганда ҳам $\varepsilon = 1$ ва E тўпلامга тегишли булган

$$z^1 = \frac{1}{z}, \quad z^n = \frac{1}{z^n}$$

нуқталар учун

$$|z' - z^n| = \left| \frac{1}{n} - \frac{i}{n} \right| = \frac{1}{n} |1 - i| = \frac{\sqrt{2}}{n}$$

булиб, n нинг старлича катта қилиб олиниши ҳисобига уни $\forall \delta$ дан кичик қила олиш мумкин бўлсада

$$|f(z) - f(z')| = |n^1 - (-n^1)| = 2n^1 > 1 = \varepsilon$$

булади. Бу эса берилган функция $E = \{z \in C: 0 < |z| \leq R\}$ тўпلامда текис узлуксиз эмаслигини билдиради.

МИСОЛЛАР ВА МАСАЛАЛАР

Функцияларни берилган соҳаларда бир япроқликка текширинг:

1. $f(z) = z^2$, $E = \{ \operatorname{Re} z > 0 \}$.
2. $f(z) = z^2$, $E = \{ \operatorname{Im} z > 0 \}$.
3. $f(z) = z^2$, $E = \{ 0 < \arg z < \frac{\pi}{2} \}$.
4. $f(z) = z^2$, $E = \{ |z| < 1 \}$.
5. $f(z) = z^2$, $E = \{ |z| < 1, 0 < \arg z < \frac{3\pi}{2} \}$.
6. $f(z) = z^2$, $E = \{ |z| > 2 \}$.
7. $f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$, $E = \{ |z| < 1 \}$.
8. $f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$, $E = \{ |z| < 2 \}$.
9. $f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$, $E = \{ |z| > 2 \}$.
10. $f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$, $E = \{ \operatorname{Im} z > 0 \}$.
11. $f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$, $E = \{ \operatorname{Re} z > 0 \}$.
12. $f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$, $E = \{ \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2} \}$.
13. $f(z) = \frac{1}{z+2}$, $E = \{ |z| < 2 \}$.
14. $f(z) = \frac{1}{z+2}$, $E = \{ |z| > 2 \}$.
15. $f(z) = \frac{1}{z+2}$, $E = \{ \operatorname{Re} z > 3 \}$.
16. $f(z) = e^z (\cos y + i \sin y)$, $E = \{ \operatorname{Im} z > 0 \}$.
17. $f(z) = e^z (\cos y + i \sin y)$, $E = \{ 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi \}$.
18. $f(z) = e^z (\cos y + i \sin y)$, $E = \{ |z| < 1 \}$.
19. $f(z) = e^z (\cos y + i \sin y)$, $E = \{ 0 < \operatorname{Re} z < 1 \}$.
20. $f(z) = \frac{1}{4} \left(z + \frac{1}{z} \right)^2$, $E = \{ |z| < 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{2} \}$.

21. Ушбу $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{z}$ ($z \neq 0$) функциянинг $z \rightarrow 0$ даги лимити мавжудми? Мавжуд бўлса, уни топинг.

22. Ушбу $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z^2}{|z|^2}$ ($z \neq 0$) функциянинг $z \rightarrow 0$ даги ли-

мити мавжудми? Мавжуд булса, уни топинг.

Қуйидаги функцияларни узлуксизликка текширинг:

$$23. f(z) = z^2.$$

$$24. f(z) = \frac{1}{1-|z|}.$$

$$25. f(z) = \frac{1}{z^2-1}.$$

$$26. f(z) = \frac{|z+1|}{z^2+z^3}.$$

$$27. f(z) = \arg z, \quad (z \neq 0).$$

$$28. f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+e^n} \quad (0 < \arg z < \frac{\pi}{2})$$

$$29. f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z}}, & \text{агар } z \neq 0 \text{ булса,} \\ 1, & \text{агар } z = 0 \text{ булса.} \end{cases}$$

$$30. f(z) = \operatorname{Sgn}(e^z - 1).$$

$$31. f(z) = \begin{cases} z+1, & \text{агар } \operatorname{Im} z > 0 \text{ булса,} \\ z^2, & \text{агар } \operatorname{Im} z \leq 0 \text{ булса.} \end{cases}$$

32. Агар $f(z)$ функция z_0 нуқтада узлуксиз булса, у ҳолда $|f(z)|$ функциянинг ҳам шу нуқтада узлуксиз булишини исботланг.

33. $f(z)$ функция z_0 нуқтада узлуксизлигининг геометрик талқинини ифодаланг.

34. Агар $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ функция z_0 нуқтада узлуксиз булса, у ҳолда $\overline{f(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$ функциянинг ҳам шу нуқтада узлуксиз булишини исботланг.

35. Агар $f(z)$ функция $a \in C$ нуқтада узлуксиз булса, $\varphi(z) = f(bz+c)$ ($b \neq 0$) функция $\frac{a-c}{b}$ нуқтада узлуксиз бўлишини исботланг.

36. Бутун комплекс текисликда аниқланган ва ҳар бир $z_0 \in C$ нуқтада узилишга эга бўлган функцияга мисол келтиринг.

37. Фақат биргина $z_0 \in C$ нуқтада узлуксиз, бошқа барча нуқталарда эса узилишга эга бўлган функцияга мисол келтиринг.

38. Бутун комплекс текислик C да аниқланган, $z=-1$ ва $z=1$ нуқталарда узлуксиз, қолган барча нуқталарда эса узилишга эга булган функцияни тузинг.

39. Агар $f(z)+g(z)$ функция z_0 нуқтада узилишга эга булса, у ҳолда $f(z)$ ва $g(z)$ функцияларнинг камида биттаси z_0 нуқтада узилишга эга бўлишини исботланг.

40. Агар $f(z)$ ва $g(z)$ функцияларнинг ҳар бири z_0 нуқтада узилишга эга булса, у ҳолда $f(z)+g(z)$ функция ҳам z_0 нуқтада узилишга эга бўлиши шартми?

41. Агар $f(z)$ ва $g(z)$ функцияларнинг ҳар бири z_0 нуқтада узилишга эга булса, у ҳолда $f(z) \cdot g(z)$ функция ҳам z_0 нуқтада узилишга эга бўлиши шартми?

Куйидаги функцияларни берилган соҳаларда текис узлуксизликка текширинг:

$$42. f(z) = z^d, \quad E = \{d < 1\}.$$

$$43. f(z) = z^d, \quad E = C.$$

$$44. f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \quad E = \{0 < d < 1\}.$$

$$45. f(z) = \frac{(\operatorname{Re} z)^d}{z}, \quad E = \{0 < d < 1\}.$$

$$46. f(z) = \frac{1}{1-z}, \quad E = \{d < 1\}.$$

$$47. f(z) = \frac{1}{1+z^2}, \quad E = \{d < 1\}.$$

$$48. f(z) = \frac{1}{z}, \quad E = \{r < d < +\infty\}, \quad r > 0.$$

$$49. f(z) = \frac{1}{z}, \quad E = \{0 < d < +\infty\}.$$

50. $f(z)$ функция z_0 нуқтада текис узлуксиз деган жумла маънога эгами?

51. Агар $f(z)$ функция $E \subset C$ тупламда узлуксиз бўлса, у берилган тупламда текис узлуксиз буладими?

52. $\{d < R\}$ доирада текис узлуксиз функция чегараланган буладими?

53. Агар $f(z)$ функция $E_1 = \{a_1 \leq \operatorname{Re} z \leq b_1, a_2 \leq \operatorname{Im} z \leq b_2\}$ ва $E_2 = \{b_1 < \operatorname{Re} z \leq c_1, b_2 \leq \operatorname{Im} z \leq c_2\}$ тўртбурчакларда текис узлуксиз булса, у ҳолда бу функция

$$E = \{a_1 \leq \operatorname{Re} z \leq c_1, a_2 \leq \operatorname{Im} z \leq c_2\}$$

тўртбурчакда ҳам текис узлуксиз бўлишини исботланг.

54. Агар 53-мисолдаги E_2 тўртбурчак ўрнига

$$E_2 = \{b_1 < \operatorname{Re} z \leq c_1, b_2 < \operatorname{Im} z \leq c_2\}$$

тўплам олинса, $f(z)$ функциянинг E гуртбурчакда текис узлуксизлиги ҳақида нима дейиш мумкин?

55. Агар $f(z)$ ва $g(z)$ функциялар $M \subset C$ тўпламда текис узлуксиз бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\alpha, \beta \in C$ лар учун $\alpha f(z) + \beta g(z)$ функция ҳам M тўпламда текис узлуксиз бўлишини исботланг.

56. Агар $f(z)$ ва $g(z)$ функциялар бирор $M \subset C$ тўпламда текис узлуксиз бўлса, $\phi(z) = f(z)g(z)$ функция шу тўпламда текис узлуксиз бўладими?

57. Агар $f(z)$ функция D ва G тўпламларда ($D \subset C, G \subset C$) текис узлуксиз бўлса, у ҳолда унинг $D \cap G$ тўпламда текис узлуксиз бўлишини исботланг.

58. Агар $f(z)$ функция $\{|z| \leq R\}$ доирада текис узлуксиз бўлмаса, у ҳеч бўлмаганда $\{|z| \leq R\}$ доирадаги бирор нуқтада узилишга эга эканлигини исботланг.

59. Чегараланган $\{z \in D\}$ доирада $f(z)$ функция текис узлуксиз бўлиши учун, унинг $\{z \in D\}$ доирада узлуксиз бўлиб, ихтиёрий $\xi \in \{z \in D\}$ нуқтада чекли

$$\lim_{z \rightarrow \xi} f(z)$$

лимитнинг мавжуд бўлиши зарур ва етарлилигини исботланг.

Айтайлик, $f(z)$ функция кенгайтирилган комплекс текислик S даги M тўпламда аниқланган бўлсин.

Агар ихтиёрий $\epsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ сон топилсаки, $p(z, z_0) < \delta$ ($z_0 \in M$) тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $z \in M$ лар учун $p(f(z), f(z_0)) < \epsilon$ бўлса, у ҳолда $f(z)$ функция $z_0 \in M$ нуқтада сферик метрика бўйича узлуксиз деб аталади. Бу ерда

$$p(z, \xi) = \begin{cases} \frac{|z - \xi|}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |\xi|^2}}, & z \neq \infty, \xi \neq \infty, \\ \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}}, & z \neq \infty, \xi = \infty, \\ 0, & z = \infty, \xi = \infty. \end{cases}$$

z ва ξ нуқталар орасидаги сферик масофа.

Сферик метрикада текис узлуксизлик таърифи ҳам шу каби киритилади.

Куйидаги функцияларнинг сферик метрика бўйича кенгайтирилган комплекс текислик C да узлуксиз эканлигини исботланг.

$$60. f(z) = \frac{1}{z}.$$

$$61. f(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

$$62. f(z) = e^z.$$

$$63. f(z) = \frac{1}{z^2-2}.$$

Агар $f(z)$ ва $g(z)$ функциялар M тўпلامда ($M \subset C$) сферик метрика бўйича узлуксиз бўлса, 64—66-мисолларда келтирилган функцияларнинг M тўпلامда сферик метрика бўйича узлуксиз бўлиши шартми?

$$64. f(z)+g(z)$$

$$65. f(z) \cdot g(z)$$

$$66. \frac{f(z)}{g(z)}$$

67. Айтайлик, $f(z)$ функция M тўпلامда сферик метрика бўйича узлуксиз ва $R(z)$ функция z узгарувчига нисбатан рационал функция бўлсин. $g(z) = R(f(z))$ мураккаб функциянинг M тўпلامда сферик метрика бўйича узлуксиз бўлишини исботланг.

2-§. Функциянинг дифференциалланувчилиги. Коши-Риман шартлари

1°. Бирор E соҳада ($E \subset C$) $w = f(z)$ функция берилган бўлсин. Ихтиёрий $z_0 \in E$ нуқта олиб, унга шундай Δz орттирма берайликки, $z_0 + \Delta z \in E$ бўлсин. Натижада, $f(z)$ функция ҳам z_0 нуқтада

$$\Delta w = \Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$

орттирмага эга булади.

7-таъриф. Агар $\Delta z \rightarrow 0$ да $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ нисбатнинг limiti

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

мавжуд ва чекли бўлса, бу лимит комплекс узгарувчи $f'(z)$ функциянинг z_0 нуқтадаги ҳосиласи деб аталади ва $f'(z_0)$ каби белгиланади.

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

9-мисол. Ушбу

$$f(z) = z^2$$

функциянинг $\forall z_0 \in C$ нуктадаги ҳосиласини топинг.

z_0 нуктага Δz орттирма бериб, шу нуктада функция орттирмасини ҳисоблаймиз:

$$\Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = (z_0 + \Delta z)^2 - z_0^2 = 2z_0\Delta z + (\Delta z)^2.$$

Унда

$$\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = 2z_0 + \Delta z$$

бўлиб,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = 2z_0$$

булади. Демак,

$$f'(z_0) = 2z_0.$$

10-мисол. Ушбу

$$f(z) = |z| \cdot \operatorname{Re} z$$

функциянинг $z=0$ нуктадаги ҳосиласи нол бўлишини кўрсатинг.

Берилган функциянинг $z=0$ нуктадаги ҳосиласини 7-таърифга кўра топамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta z) - f(0)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta z| \cdot \operatorname{Re} \Delta z}{\Delta z} = \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta z| \cdot \Delta x}{\Delta z} \quad (\Delta z = \Delta x + i\Delta y) \end{aligned}$$

Равшанки, $\Delta z \rightarrow 0$ да Δx ҳам нолга интилади. Демак,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta z|}{|\Delta z| + i\Delta y} \Delta x = 0.$$

Бу эса $f'(0) = 0$ эканини билдиради.

Фараз қилайлик, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ функция $z_0 = x_0 + iy_0$ ($z_0 \in C$) нуқтанинг бирор атрофида аниқланган бўлсин.

8-таъриф. Агар $u(x, y)$ ва $v(x, y)$ функциялар x, y ўзгаришларнинг функцияси сифатида (x_0, y_0) нуқтада дифференциалланувчи бўлса, $f(z)$ функция z_0 нуқтада ҳақиқий анализ маъносида дифференциалланувчи дейилади.

Бу ҳолда $du(x_0, y_0) + i dv(x_0, y_0)$ ифода $f(z)$ функциянинг z_0 нуқтадаги дифференциали дейилади:

$$df = du + i dv.$$

4-теорема. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ функциянинг z_0 нуқтада $f'(z_0)$ ҳосилга эга бўлиши учун бу функциянинг $z_0(x_0, y_0)$ нуқтада ҳақиқий анализ маъносида дифференциалланувчи бўлиб,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (2)$$

шартларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Одатда (2) шартлар Коши-Риман шартлари дейилади.

Комплекс анализда ушбу

$$dz = dx + i dy, \quad d\bar{z} = dx - i dy;$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

белгилашлар ёрдамида $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ функциянинг тўла дифференциали $df = du + i dv$

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

кўринишда қулай ифодаланади.

Юқорида келтирилган (2) Коши-Риман шартлари

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

тенгликка эквивалент бўлишини исботлаш қийин эмас. Демак, 4-теоремани қуйидагича ҳам ифодалаш мумкин.

4'-теорема. $w = f(z)$ функция $z = z_0$ нуқтада ҳосилга эга бўлишиги учун унинг ҳақиқий анализ маъносида $df(z_0)$ диф-

ференциали мавжуд бўлиб, $\left. \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|_{z=z_0} = 0$ тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Агар $w = f(z)$ функция z_0 нуқтада ҳосилага эга бўлса, бу нуқтада $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ бўлиб, f нинг ҳосиласи $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}$ дифференциали эса

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz = f'(z_0) dz$$

кўринишда бўлади. Комплекс анализда ҳосилага эга бўлган функциялар C — дифференциалланувчи функциялар дейилади.

Амалиётда функцияларни C — дифференциалланувчиликка текширишда Коши-Риман шартларидан фойдаланилади.

11-мисол. Ушбу

$$f(z) = z^2$$

функциянинг ҳосиласи мавжудлигини текширинг.

Равшанки, $f(z) = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$ бўлиб, $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$ функциялар (x, y) бўйича дифференциалланувчи.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x.$$

тенгликлардан (2) шартларнинг бажарилишини кураимиз. Бу эса функция текисликнинг ҳар бир нуқтасида ҳосилага эга эканлигини курсатади.

12-мисол. Ушбу

$$f(z) = z^2$$

функциянинг ҳосиласи мавжудлигини текширинг.

Қаралаётган

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 - 2ixy$$

функция учун

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = -2xy$$

булиб, (2) тенгликлар $(0, 0)$ нуқтадан бошқа ҳеч бир нуқтада бажарилмайди. Демак, $f(z)=z^2$ функция $z_0 \neq 0$ нуқталарда ҳосилага эга эмас, $z_0=0$ нуқтада эса унинг ҳосиласи мавжуд ва $f'(0)=0$.

13-мисол. Ушбу

$$f(z) = |z|^2 + i [\operatorname{Re} z \operatorname{Im} z]^2$$

функцияни C — дифференциалланувчанликка текширинг.
Бу функция учун

$$u(x, y) = |z|^2 = x^2 + y^2,$$

$$v(x, y) = [\operatorname{Re} z \operatorname{Im} z]^2 = x^2 y^2$$

булиб, u ва v функциялар R^2 да дифференциалланувчи.
Энди (2) шартларни текширайлик:

$$\begin{cases} 2x = 2x^3 y, \\ 2y = -2xy^3. \end{cases}$$

тенгликлардан кўринадики, Коши-Риман шартлари фақат $x=0, y=0$ нуқтада бажарилади. Демак, берилган функция фақат $z_0=0$ нуқтада C — дифференциалланувчи.

14-мисол. Ушбу

$$f(z) = |z|^4 [\operatorname{Re} z]^2$$

функцияни C — дифференциалланувчанликка текширинг.
Равшанки,

$$u(x, y) = (x^2 + y^2)x^2,$$

$$v(x, y) = 0$$

булиб, бу функциялар ҳақиқий анализ маъносида дифференциалланувчи бўлиб,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 + 2y^2 x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2 y$$

булганлигидан Коши-Риман шартлари $x \neq 0$ тўғри чизик нуқталари учунгина бажарилади. Демак, берилган функция фақат $\{x=0\}$ тупламда C — дифференциалланувчи бўлади.

15-мисол. Ушбу

$$w = f(z) = \bar{z}$$

функцияни C — дифференциалланувчанликка текширинг.

Равшанки, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 1$ бўлиб, бу қаралаётган функцияни текисликнинг бирорта нуқтасида ҳам C — дифференциалланувчи эмаслигини кўрсатади.

16-мисол. Ушбу

$$f(z) = \sqrt[3]{\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z}$$

функцияни C — дифференциалланувчанликка текширинг.
Берилган функция учун

$$u(x, y) = \sqrt[3]{xy}, \quad v(x, y) = 0$$

булиб, $z=0$ нуқтада Коши-Риман шартлари бажарилади:

$$\frac{\partial u(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial v(0,0)}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u(0,0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(0,0)}{\partial x} = 0.$$

Бироқ,

$$\lim_{\substack{\Delta y=0 \\ \Delta z=\Delta x \rightarrow 0}} \frac{\Delta f(0)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta y=0 \\ \Delta z=\Delta x \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta y=0 \\ \Delta z=\Delta x \rightarrow 0}} \frac{\sqrt[3]{\Delta x - \Delta y}}{\Delta z} = 0.$$

$$\lim_{\substack{\Delta x=\Delta y \\ \Delta z=(1+i)\Delta x \rightarrow 0}} \frac{\Delta f(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{(1+i)\Delta x} = \infty$$

булгани сабабли $\Delta z \rightarrow 0$ да $\frac{\Delta f(0)}{\Delta z}$ нинг limiti мавжуд эмас.

Бинобарин, қаралаётган функция $z=0$ нуқтада C — дифференциалланувчи эмас ($u = \sqrt[3]{xy}$ функция $(0, 0)$ нуқтада ҳақиқий анализ маъносида дифференциалланувчи эмас).

Кутб координаталар системасида $f(z) = u + iv$ функция учун Коши-Риман шартлари

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \end{cases} \quad (2')$$

қуринишда бўлади. Бунинг исбот қилишни уқувчига ҳавола қиламиз.

Фараз қилайлик, $w=f(z)$ функция бирор E соҳада ($E \subset C$) берилган бўлсин.

9-таъриф. Агар $f(z)$ функция $z_0(z_0 \in C)$ нуқтанинг факат узида эмас, балки унинг бирор $v(z_0, \epsilon)$ атрофида C — дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда $f(z)$ функцияси z_0 нуқтада голоморф функция дейилади.

10-таъриф. Агар $f(z)$ функция E соҳанинг ҳар бир нуқтасида голоморф бўлса, функция E соҳада голоморф дейилади.

Одатда E соҳада голоморф бўлган функциялар синфи $\sigma(E)$ каби белгиланади.

11-таъриф. Агар $g(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)$ функция $z=0$ нуқтада голоморф бўлса, $f(z)$ функция « ∞ » нуқтада голоморф дейилади.

12-таъриф. Агар $f(z)$ функция $z_0(z_0 \in C)$ нуқтада голоморф бўлса, $f(z)$ функция z_0 нуқтада антиголоморф дейилади.

17-мисол. Ушбу

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2i|xy|$$

функцияни C — дифференциалланувчанликка текширинг.

Берилган функциянинг ҳақиқий қисми $u(x, y)$ ҳамда мавҳум қисми $v(x, y)$ ларни топамиз.

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = x^2 - y^2 + 2i|xy| = \begin{cases} \text{агар } xy > 0 \text{ бўлса, } x^2 - y^2 + 2ixy, \\ \text{агар } xy < 0 \text{ бўлса, } x^2 - y^2 - 2ixy. \end{cases}$$

Демак,

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = \begin{cases} \text{агар } xy > 0 \text{ бўлса, } 2xy, \\ \text{агар } xy < 0 \text{ бўлса, } -2xy. \end{cases}$$

Энди $u(x, y)$ ва $v(x, y)$ функциялар учун Коши-Риман шартларини текширамыз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \begin{cases} \text{агар } xy > 0 \text{ бўлса, } 2x, \\ \text{агар } xy < 0 \text{ бўлса, } -2x, \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \begin{cases} \text{агар } xy > 0 \text{ бўлса, } 2y, \\ \text{агар } xy < 0 \text{ бўлса, } -2y. \end{cases}$$

Равшанки, $xy > 0$ бўлганда, яъни I ва III чоракларда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

бўлади. Демак, берилган функция

$$E = \left\{ z \in \mathbb{C}: 0 < \arg z < \frac{\pi}{2} \right\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C}: \pi < \arg z < \frac{3\pi}{2} \right\}$$

да голоморф бўлади. $xy < 0$ бўлганда, яъни II ва IV чоракларда функция Коши-Риман шартларини бажармайди. Демак, бу чоракларда функция C — дифференциалланувчи бўла олмайди.

$w = e^z$ — функция учун

$$u(x, y) = e^x \cos y,$$

$$v(x, y) = e^x \sin y.$$

бўлиб, C — текисликнинг барча нуқталарида Коши-Риман шартларининг бажарилишини, яъни функция голоморф эканлигини кўрамиз.

$w = z\bar{z}$ функция фақат $z=0$ нуқтада C — дифференциалланувчи бўлиб,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = z, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Big|_{z=0} = 0,$$

у бу нуқтада голоморф эмас.

3°. Фараз қилайлик, R^2 фазодаги E соҳада ($E \subset R^2$) $F = F(x, y)$ функция берилган бўлиб, у шу соҳада иккинчи тартибли $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2}$ узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга

бўлсин.

13-таъриф. Агар E соҳанинг ҳар бир нуқтасида

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \quad (3)$$

тенглик бажарилса, $F = F(x, y)$ функция E соҳада гармоник функция дейилади.

(3) тенгламани Лаплас тенгламаси дейилади. Бу тенглама ушбу

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Лаплас оператори ёрдамида қуйидагича

$$\Delta F = 0$$

шаклда ҳам ёзилади.

Лаплас оператори учун

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

булишини эътиборга олсак, унда (2) тенгликни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0 \quad (3')$$

шаклда ёиш мумкинлигини курамиз.

5-теорема. E соҳада ($E \subset C$) голоморф булган ҳар қандай $f(z)$ функциянинг ҳақиқий ва маъхум қисмлари $u(x, y)$ ва $v(x, y)$ функциялар шу соҳада гармоник бўладилар.

Эслатма. Ихтиерий иккита $u(x, y)$ ва $v(x, y)$ гармоник функциялар учун $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ функциянинг голоморф бўлиши шарт эмас f нинг голоморф бўлиши учун u ва v лар Коши-Риман шартлари орқати боғланган бўлишлари лозим. Бундай ҳолда u ва v гармоник функциялар ҳам гармоник функциялар дейилади.

18-мисол $f(z) = z$ функцияси учун $u(x, y) = x$ ва $v(x, y) = -y$ функциялар гармоник, аммо қўшма гармоник функциялар эмас.

Бир боғламли ($E \subset C$) соҳада $u(z) = u(x, y)$ гармоник функция бўлиб, $z_0 \in E$ тайинланган нуқта булсин. У ҳолда

$$v(z) = \int -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

интеграл $u(z)$ функцияга қўшма гармоник функция $v(z)$ ни аниқлайди.

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

Қуйидаги 68—72-мисоллардаги функцияларнинг ҳосилалар қийматларини шу ҳосилалар мавжуд булган нуқталарда ҳисобланг:

68. $f(z) = 2z + 1$.

69. $f(z) = z^3$.

$$70. f(z) = \frac{1}{z}.$$

$$71. f(z) = \frac{1}{z+2}.$$

$$72. f(z) = e^z (\cos y + i \sin y), \quad (z = x + iy).$$

Ушбу функцияларни C — дифференциалланувчиликка текширинг:

$$73. f(z) = \operatorname{Re} z.$$

$$74. f(z) = (\operatorname{Re} z)^2.$$

$$75. f(z) = \operatorname{Re} z'.$$

$$76. f(z) = [\operatorname{Re} z]^2 + [\operatorname{Im} z]^2.$$

$$77. f(z) = |z|^2.$$

$$78. f(z) = [\operatorname{Re} z]^2 + i[\operatorname{Im} z]^2.$$

$$79. f(z) = [\operatorname{Re} z]^2 - i[\operatorname{Im} z]^2.$$

$$80. f(z) = z \operatorname{Re} z.$$

$$81. f(z) = z \operatorname{Im} z.$$

$$82. f(z) = 2xy - i(x^2 - y^2), \quad (z = x + iy).$$

$$83. f(z) = z \operatorname{Im} z \quad \text{функция учун } f'(0) \text{ ни ҳисобланг.}$$

84—87-мисолларда берилган $f(z)$ функциялари учун шундай a, b, c узгармасларни топингки, натижада $f(z)$ функциялар голоморф булиб қолсин:

$$84. f(z) = x + ay + i(bx + cy).$$

$$85. f(z) = x^2 - ay^2 + ibxy.$$

$$86. f(z) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} + i \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

$$87. f(z) = \cos x(chy + ash y) + i \sin x(chy + bsh y).$$

88. Ушбу $f(z) = |x^2 - y^2| + 2ixy$ функция голоморф бўлган соҳаларни топинг.

89. Ушбу $f(z) = |x^2 - y^4| + 2ixy$ функция голоморф бўлган соҳаларни топинг.

90. Агар $f(z)$ функция z_0 нуқтада антиголоморф бўлса, у ҳолда шу нуқтада

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

шартини бажарилишини исботланг.

91. Агар $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ($z \neq 0$) ва $f(z) = u(\rho, \varphi) + i v(\rho, \varphi)$ бўлса, у ҳолда $f'(z)$ ни қуйидаги

$$f'(z) = \frac{1}{z} \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{1}{z} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} + i \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right)$$

$$f'(z) = \frac{1}{iz} \frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{1}{z} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} - i \frac{\partial v}{\partial \rho} \right)$$

кўринишларда ифодадаш мумкинлигини исботланг.

92. Ушбу $f(z) = z^n$ функция учун Коши-Риман шартларининг бажарилишини текширинг ва

$$(z^n)' = n z^{n-1}$$

тенгликни исботланг.

93. Айтилик, $f(z) = u + iv = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ голоморф функция берилган бўлсин. Агар u, v, ρ, φ функциялардан би-рортаси ўзгармас бўлса, у ҳолда $f(z)$ функциянинг ўзи ҳам ўзгармас бўлишини исботланг.

94. Ушбу $f(z) = \sqrt{|xy|}$ функция учун $z=0$ нуқтада Коши-

Риман шартларининг бажарилишини, лекин шу нуқтада функциянинг ҳосиласи мавжуд эмаслигини исботланг.

Агар $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ функция $z_0 = x_0 + i y_0$ нуқтада дифференциалланувчи бўлса, 95—99-тенгликларнинг ўринли эканлигини исботланг:

$$95. f'(z_0) = u'_x(x_0, y_0) + i v'_x(x_0, y_0)$$

$$96. f'(z_0) = v'_y(x_0, y_0) - i u'_y(x_0, y_0).$$

$$97. f'(z_0) = u'_x(x_0, y_0) - i u'_y(x_0, y_0).$$

$$98. f'(z_0) = v'_y(x_0, y_0) + i v'_x(x_0, y_0).$$

$$99. |f'(z_0)|^2 = (u'_x)^2 + (u'_y)^2 = (u'_x)^2 + (v'_x)^2 = (v'_y)^2 + (v'_x)^2 = (v'_x)^2 + (v'_y)^2.$$

100. Фараз қилайлик, $f(z)$ функция E соҳада голоморф бўлиб, шу соҳада $f'(z) = 0$ бўлсин. У ҳолда $f(z) = \text{const}$ эканлигини исботланг.

101. Айтилик, $f(z)$ функция E соҳада дифференциалланувчи бўлиб,

$$A \operatorname{Re} f(z) + B \operatorname{Im} f(z) + C = 0$$

бўлсин. Бу ерда A, B, C лар узгармас сонлар ва уларнинг камида биттаси нолдан фарқли. $f(z) = \text{const}$ эканлигини исботланг.

102. Фараз қилайлик, $f(z)$ функция D соҳада дифференциалланувчи, $f(t)$ эса бутун ҳақиқий ўқда монотон ва узлуксиз дифференциалланувчи функция бўлсин. Агар

$$\operatorname{Re} f(z) = f(\operatorname{Im} f(z))$$

тенглик бажарилса, $f(z) = \text{const}$ эканлигини исботланг.

103. Агар $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ функция учун z нуқтада ушбу

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[\operatorname{Re} \frac{\Delta w}{\Delta z} \right]$$

лимит мавжуд бўлса, у ҳолда u_x^1 ва v_x^1 хусусий ҳосилаларнинг мавжуд бўлиб, $u_x^1 = v_x^1$ тенгликнинг бажарилишини исботланг.

104. Агар $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ функция учун z нуқтада ушбу

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[\operatorname{Im} \frac{\Delta w}{\Delta z} \right]$$

лимит мавжуд бўлса, у ҳолда u_x^1 ва v_x^1 хусусий ҳосилаларнинг мавжуд бўлиб, $u_x^1 = -v_x^1$ тенгликнинг бажарилишини исботланг.

105. Фараз қилайлик, $w = f(z) = u + iv$ функция z нуқтада куйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) u, v — дифференциалланувчи,

2) $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta w}{\Delta z} \right]$ — мавжуд.

У ҳолда z нуқтада ёки $f(z)$, ёки $\overline{f(z)}$ функциянинг дифференциалланувчи эканлигини исботланг.

106. $w(z)$ функцияга тескари бўлган $z(w)$ функция учун ушбу

$$dz = \frac{\overline{w_1} dw - w_1 d\overline{w}}{|w_1|^2 - |\overline{w_1}|^2}$$

тенгликнинг уринли эканлигини исботланг. Бу ерда

$$w_1 = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad w_2 = \frac{\partial \overline{w}}{\partial z}, \quad \overline{w_2} = \frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{z}}$$

белгилашлар киритилган.

107. $w(z)$ акслантиришнинг якобиани учун

$$J_{w(z)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \left| \frac{\partial w}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} \right|^2$$

тенгликни исботланг.

108—112-мисоллардаги функциялар учун $\frac{\partial f}{\partial z}$ ва $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ лар-

ни ҳисобланг:

108. $f(z) = |z|$.

109. $f(z) = e^{-i}(\cos y - i \sin y)$, ($z = x + iy$).

110. $f(z) = |z - a|^p$, $-\infty < p < \infty$.

111. $f(z) = \sqrt{|z - a|^2} + |z - b|^2$.

112. $f(z) = \frac{|z - a| + |fz + a|}{|z - a| - |fz + a|}$.

113—117-мисоллардаги функциялар учун $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}}$ ни то-

пинг.

113. $f(z) = |z|^p$, $-\infty < p < \infty$.

114. $f(z) = e^{i|z|}$, $-\infty < p < \infty$.

115. $f(z) = \ln |z - a|$.

116. $f(z) = \ln(1 + |z|^2)$.

117. $f(z) = \arctg \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$.

Голоморф $f(z)$ функция учун 118—122-мисоллардаги тенгликларнинг уринли эканлигини исботланг.

118. $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} (f(z)) = \frac{1}{2} f'(z) \frac{f'(z)}{f(z)}$.

119. $\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} (f(z))^p = \frac{p^2}{4} |f'(z)|^{p-2} |f''(z)|^2$, $-\infty < p < \infty$.

120. $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} |\operatorname{Re} f(z)| = \frac{1}{2} f'(z)$.

121. $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} |\operatorname{Im} f(z)| = \frac{1}{2i} f'(z)$.

функциялар E соҳада қўшма гармоник функциялар бўлишини исботланг.

154. Фараз қилайлик, u, v функциялар E соҳада қўшма гармоник функциялар бўлиб, E соҳанинг ҳеч бир нуқта-сида u ва v функциялар бир вақтда нолга айланмасин. У ҳолда

$$U(x, y) = \ln[u^2(x, y) + v^2(x, y)]$$

функциянинг E соҳада гармоник функция эканлигини исботланг.

155. Агар u, v_1 ва u, v_2 лар E соҳадаги икки жуфт қўшма гармоник функциялар бўлса,

$$v_2(x, y) - v_1(x, y) = \text{const}$$

еканлигини исботланг.

156—164-мисолларда берилган кўринишдаги узгармасдан фарқи гармоник функциялар мавжудми? Мавжуд бўлса, уларни топинг:

156. $u = \varphi(x)$.

157. $u = \varphi(ax + by)$ (a ва b лар ҳақиқий сонлар).

158. $u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

159. $u = \varphi(x, y)$.

160. $u = \varphi(x^2 + y^2)$.

161. $u = \varphi\left(\frac{x^2 + y^2}{x}\right)$.

162. $u = \varphi(x^2 + y)$.

163. $u = \varphi(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

164. $u = \varphi(x^2 - y^2)$.

165—168-мисолларда берилган чиқиқларнинг устида узгармас қийматни қабул қилувчи гармоник функциялар ни топинг.

165. $x = c$

166. $y = cx$

167. $x^2 + y^2 = c$

168. $x^2 + y^2 = cx$

169. Ушбу $\text{Re} f(z) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$, $f(0) = 0$ шартларни қаноатлантирувчи голоморф $f(z)$ функцияни топинг.

170. Фараз қилайлик, $f(z), g(z) \in \sigma(E)$ бўлсин. Агар $f(z) = \overline{g(z)} + c$ (c — ҳақиқий узгармас) бўлгандагина $f(z) + g(z)$

ийгиндининг E соҳада ҳақиқий қийматларни қабул қили-шини исботланг.

171. $f(z), g(z) \in \sigma(E)$ ва $g(z) \neq 0$ бўлсин. $f(z) = c \overline{g(z)}$ (c — манфий бўлмаган узгармас) шарт бажарилгандагина $f(z) g(z)$ кўпайтманинг E соҳада манфий бўлмаган қий-

матларни қабул қилишини исботланг.

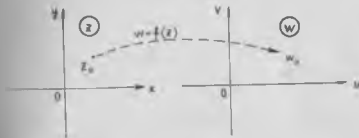
172. $f(z), g(z) \in \sigma(E)$ ва $g(z) \neq 0$ бўлсин. Фақат $f(z) = c \overline{g(z)}$ (c — ҳақиқий узгармас) шарт бажарилгандагина $f(z) \overline{g(z)}$ кўпайтманинг E соҳада ҳақиқий қийматларни қабул қили-шини исботланг.

3-§. Ҳосила модули ва аргументининг геометрик маъноси. Конформ акслантиришлар

Фараз қилайлик,

$$w = f(z)$$

функция бирор $E \subset \mathbb{C}$ соҳада берилган бўлсин. Уни (z) текислиқнинг нуқталарини (w) текислик нуқталарига акслантириш деб қараймиз (11-чизма).



11-чизма

Айтайлик, $w = f(z)$ функция $z_0 \in E$ нуқтада $f'(z_0) (f'(z_0) \neq 0)$ ҳосилага эга бўлсин. Ҳосила таърифидан фойдаланиб, то-памиз:

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|w - w_0|}{|z - z_0|},$$

$$(w_0 = f(z_0)).$$

$|z - z_0|$ етарлича кичик булганда $|z - z_0|$ ҳамда $|w - w_0|$ миқдорлар пропорционал булиб, $|f'(z_0)|$ эса шу пропорционалликнинг коэффициентини ифодалайди:

$$|w - w_0| = |f'(z_0)| |z - z_0| + o(|z - z_0|)$$

$w = f(z)$ акслантириш ёрдамида $|z - z_0| = r$ айлана, чексиз кичик миқдор $\alpha(|z - z_0|)$ эътиборга олинмаса.

$$|w - w_0| = |f'(z_0)| r$$

айланага аксланади. Агар $|f'(z_0)| < 1$ булса, унда $|z - z_0| = r$ айлана сиқилади, $|f'(z_0)| > 1$ булганда эса айлана чузилади.

Демак, функция ҳосиласининг модули $w = f(z)$ акслантиришда «чузилиш» коэффициентини билдирар экан (12-чизма).



12-чизма

Энди $w = f(z)$ акслантириш z_0 нуқтадан ўтувчи γ силлиқ чизиқни (w) текисликдаги Γ чизиққа акслантирсин (13-чизма).



13-чизма

Ушбу

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{w - w_0}{z - z_0} = f'(z_0)$$

ҳосабатлан

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \arg(w - w_0) = \arg f'(z_0) + \lim_{z \rightarrow z_0} \arg(z - z_0)$$

булиши келиб чиқади. Агар

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \arg(w - w_0) = \beta,$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \arg(z - z_0) = \alpha.$$

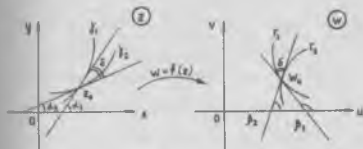
булишини эътиборга олсак, унда

$$\beta = \alpha + \arg f'(z_0)$$

булишини топамиз.

Демак, функция ҳосиласининг аргументи $w=f(z)$ акслантиришда γ чизикни қандай бурчакка буришини билдирар экан.

Агар z_0 нуқтадан ўтувчи икки γ_1 ва γ_2 эгри чизиклар орасидаги бурчак α бўлса, $w=f(z)$ акслантиришда бу чизикларнинг акслари Γ_1 ва Γ_2 лар орасидаги бурчак ҳам α га тенг булади (14-чизма).



14-чизма.

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 + \arg f'(z_0), \\ \beta_2 = \alpha_2 + \arg f'(z_0) \end{cases}$$

бўлганлигидан, $\beta_2 - \beta_1 = \alpha_2 - \alpha_1$ эканлиги келиб чиқади.

Фараз қилайлик, $w=f(z)$ функция $E(E \subset C)$ соҳада берилган бўлиб, $z_0 \in E$ бўлсин.

14-таъриф. Агар $w=f(z)$ акслантириш

1) маркази z_0 нуқтада бўлган чексиз кичик айланани чексиз кичик айланага утказиш хоссасига,

2) z_0 нуқтадан ўтувчи ҳар қандай иккита чизик орасидаги бурчакнинг миқдорини ҳам, йўналишини ҳам сақлаш хоссасига эга бўлса, $w=f(z)$ акслантириш z_0 нуқтада конформ акслантириш деб аталади.

Агар бу таърифдаги 2-шартда бурилиш бурчагининг миқдори узгармай, йўналиши қарама-қаршисига узгарса, бундай акслантириш II тур конформ акслантириш дейилади.

15-таъриф. Агар $E(E \subset C)$ соҳада аниқланган $w=f(z)$ акслантириш учун

1) $w=f(z)$ функция E соҳада бир япроқли функция,

2) E соҳанинг ҳар бир нуқтасида конформ бўлса, берилган акслантириш E соҳада конформ акслантириш деб аталади.

Конформ акслантиришлар қуйидаги хоссаларга эга:

1°. Конформ акслантиришга тескари бўлган акслантириш ҳам конформ акслантириш бўлади.

2°. Иккита конформ акслантиришнинг суперпозицияси яна конформ акслантириш бўлади.

19-мисол. Ушбу $w=z^3$ функцияси ёрдамида берилган акслантиришни конформлиikka текширинг.

Бу функция текисликнинг барча нуқталарида голоморф бўлиб, унинг ҳосиласи $w'=3z^2$ координаталар бошидан ташқари барча нуқталарда нолдан фарқлидир: $w' \neq 0$. Демак, иккиёрий $z \neq 0$ нуқтада акслантириш конформдир. $z=0$ нуқтада бу акслантириш конформ эмас: $|z|=r$ айлана $|w|=r^3$ ай-

ланага утади, лекин $\gamma: \{y=0\}$ гуғри чизик билан $\gamma: \{y=\frac{1}{2}\}$

гуғри чизиклар орасидаги бурчак $\frac{\pi}{6}$ бўлгани ҳолда улар-

нинг акслари $\Gamma_1: \{y=0\}$ ва $\Gamma_2: \{x=0\}$ лар орасидаги бурчак $\frac{\pi}{2}$

га тенгдир. Демак, акслантиришимиз $z=0$ нуқтада бурчак сақланиши хоссасига эга эмас.

$w=z^3$ акслантириш $E_1: \{0 < \arg z < \frac{2\pi}{3}\}$.

$E_2: \{\frac{2\pi}{3} < \arg z < \frac{4\pi}{3}\}$ ва $E_3: \{\frac{4\pi}{3} < \arg z < 2\pi\}$

соҳаларда бир япроқли. Демак, бу акслантириш шу соҳаларда конформдир.

Умуман олганда, $w = z^3$ акслантириш учини координата бошида ва кенглиги $\frac{2\pi}{3}$ дан катта бўлмаган ихтиёрий

$$D = \left\{ \alpha < \arg z < \alpha + \frac{2\pi}{3} \right\}, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{4\pi}{3},$$

чексиз секторда конформ бўлади.

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

Фараз қилайлик, $\gamma - z_0$ нуқтадан чиқувчи $\arg(z - z_0) = \varphi$ нур бўлсин. 173—187-мисоллардаги акслантиришлар учун z_0 нуқтадаги чўзилиш коэффициенти $R(\varphi)$ ва бурилиш бурчаги $\alpha(\varphi)$ ни топинг:

173. $w = z^3, \quad z_0 = i.$

174. $w = z^2, \quad z_0 = 1.$

175. $w = 2z + iz, \quad z_0 = 0.$

176. $w = z^2, \quad z_0 = -\frac{1}{4}.$

177. $w = z^2, \quad z_0 = 1 + i.$

178. $w = z^2, \quad z_0 = -3 + 4i.$

179. $w = z^2, \quad z_0 = 1.$

180. $w = z^2, \quad z_0 = -\frac{1}{4}.$

181. $w = z^2, \quad z_0 = 1 + i.$

182. $w = z^2, \quad z_0 = -3 + 4i.$

183. $w = z^2 + 2z, \quad z_0 = i.$

184. $w = ie^{2iy}(\cos 2y + i \sin 2y), \quad z_0 = 0.$

185. $w = -iz^2, \quad z_0 = -i.$

186. $w = \frac{z - iz}{z + iz}, \quad z_0 \neq 0.$

187. $w = \frac{1 - iz}{1 + iz}, \quad z_0 = -i.$

188—194-мисолларда берилган $w = f(z)$ акслантиришлар натижасида текисликнинг қайси қисми сиқилади, қайси қисми эса чўзилади?

188. $w = z^2.$

189. $w = z^2 + 2z.$

190. $w = \frac{1}{z}.$

$$191. w = e^x(\cos y + i \sin y).$$

$$192. w = e^{2x}(\cos 2y + i \sin 2y).$$

$$193. w = z^2 - 4z.$$

$$194. w = \frac{1+i}{z}.$$

Шундай нуқталар тупламини топингки, шу нуқталарда 195—200-мисоллардаги акслантиришларнинг чўзилиш коэффициенти 1 га тенг бўлсин.

$$195. w = z^2.$$

$$196. w = z^3.$$

$$197. w = z^2 - 2z.$$

$$198. w = \frac{1}{z}.$$

$$199. w = \frac{1+iz}{1-iz}.$$

$$200. w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc \neq 0, \quad c \neq 0.$$

Шундай нуқталар тупламини топингки, 201—206-мисоллардаги акслантиришларнинг шу нуқталардаги бурилиш бурчаги 0 га тенг бўлсин.

$$201. w = iz^2.$$

$$202. w = -z^3.$$

$$203. w = z^2 - 2z.$$

$$204. w = \frac{1}{z}.$$

$$205. w = \frac{1+iz}{1-iz}.$$

$$206. w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc = 1, \quad c \neq 0.$$

207. Айттайлик, $w=f(z)$ функция z_0 нуқтада голоморф бўлсин ва γ_1, γ_2 силлиқ чизиклар z_0 нуқтадан ўтиб, қуйидаги шартлар бажарилсин:

$$\begin{cases} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(z_0), & z \in \gamma_1; \\ \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(z_0), & z \in \gamma_2. \end{cases}$$

Агар $f'(z_0) \neq 0$ бўлса, у ҳолда γ_1 ва γ_2 чизикларнинг z_0 нуқтада тўғри бурчак остида кесишишини исботланг.

208. Фараз қилайлик, $w=f(z)$ функция z_0 нуқтада голоморф бўлсин ва z_0 нуқтадан ўтувчи силлиқ γ_1, γ_2 чизиклар учун қуйидаги шартлар бажарилсин:

$$\begin{cases} |f(z)| = |f(z_0)|, & z \in \gamma_1; \\ \arg f(z) = \arg f(z_0), & z \in \gamma_2. \end{cases}$$

Агар $f'(z_0) \neq 0$ бўлса, у ҳолда γ_1 ва γ_2 чизиқлар z_0 нуқтада тўғри бурчак остида кесишишини исботланг.

209. Ушбу $w=2z$ акслантиришни конформликка текширинг.

210. Ушбу $w=(z-2_0)^2$ акслантиришни конформликка текширинг.

211. $f(z) = \frac{1}{z-2}$ функциянинг $z=\infty$ нуқтада конформ эканлигини исботланг.

212—220-мисоллардаги функцияларни берилган E соҳада конформликка текширинг:

212. $f(z) = z + \frac{1}{z}$, $E = \{|z| < 1\}$.

213. $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc \neq 0$; $E = \{|z| < \infty\}$.

214. $f(z) = z^2$, $E = \{3 < |z+2| < 4, 0 < \arg(z+2) < \frac{3\pi}{2}\}$.

215. $f(z) = z^2$, $E = \{1 < |z| < 2, 0 < \arg z < \frac{3\pi}{2}\}$.

216. $f(z) = e^{i(\cos y + i \sin y)}$, $E = \{|z| < 4\}$.

217. $f(z) = e^{i(\cos y + i \sin y)}$, $E = \{|z| < 1\}$.

218. $f(z) = e^{i(\cos y + i \sin y)}$, $E = \{|\operatorname{Re}[(1+i)z]| < \pi\}$.

219. $f(z) = z^2$, $E = \{\operatorname{Im} z > 0\}$.

220. $f(z) = z + \frac{1}{z}$, $E = \{|z-i| < \sqrt{2}\}$.

221. Ушбу $f(z) = x + e^x \cos y + i(y + e^x \sin y)$ функциянинг $\{\operatorname{Re} z < 0\}$ ярим текисликда конформ эканлигини исботланг.

222. Айтайлик, $f(z)$ функция қавариқ $E \subset C$ соҳада голоморф бўлсин. Агар шундай ҳақиқий ўзгармас α сони мавжуд бўлиб, E соҳада

$$\operatorname{Re}\{e^{\alpha} f'(z)\} \neq 0$$

бўлса, у ҳолда $f(z)$ функция E соҳада бир япроқли бўлишини исботланг.

223. Ушбу $f(z) = z^3 - 3z$ функциянинг

$$E = \{(\operatorname{Re} z)^2 > 1 + (\operatorname{Im} z)^2, \operatorname{Re} z > 0\}$$

соҳада конформ эканлигини исботланг.

224. $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ кўпхаднинг даражаси иккидан катта булмагандагина $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ ярим текисликда конформ бўлиши мумкинлигини исботланг.

225. $f(z) = z^2 + az + b$ кўпхал $z_0 = -\frac{a}{2}$ нуқтадан ўтувчи бирорта тўғри чизиқнинг бир томонида ўтувчи ихтиёрий E соҳада конформ бўлишини исботланг.

226. Айтайлик, a, b ва z_0 — берилган комплекс сонлар бўлсин. R нинг шундай энг катта қийматини топингки, $f(z) = z^2 + az + b$ функция $\{|z - z_0| < R\}$ доирада конформ бўлсин.

227. $z = \infty$ нуқтада голоморф бўлган $f(z)$ функция шу нуқтада конформ бўлиши учун

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [z(f(z) - f(\infty))] \neq 0$$

шартнинг бажарилиши зарур ва етарли эканлигини исботланг.

228. Фараз қилайлик, $n \geq 2$ бутун сон ва α — ихтиёрий ҳақиқий сон бўлсин.

$$f(z) = z^n + ne^{\alpha z} z$$

функциянинг $\{|z_0| < 1\}$ доирада конформ эканлигини исботланг.

229. Ушбу $f(z) = z^2 + az$ функция фақат $\operatorname{Im} a \geq 0$ бўлгандагина $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ ярим текисликда конформ бўлишини исботланг.

Куйидаги тасдиқларни исботланг:

230. Ушбу $f(z) = z^2$ функция E соҳада конформ бўлиши учун E ва $-E$ ($-E = \{-z: z \in E\}$) соҳалар умумий нуқтага эга бўлмаслиги зарур ва етарлидир.

231. Ушбу $f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ функция E соҳада конформ бўлиши учун E ва $\frac{1}{E}$ ($\frac{1}{E} = \left\{ \frac{1}{z}: z \in E \right\}$) соҳалар умумий нуқ-

тага эга бўлмаслиги зарур ва етарлидир.

232. Ушбу $f(z) = e^{i(\cos y + i \sin y)}$ функция E соҳада конформ бўлиши учун E ва $E + 2\pi i$ ($E + 2\pi i = \{z + 2\pi i, z \in E\}$) соҳалар умумий нуқтага эга бўлмаслиги зарур ва етарлидир.

III боб

ЭЛЕМЕНТАР ФУНКЦИЯЛАР ВА УЛАР ЁРДАМИДА БАЖАРИЛАДИГАН КОНФОРМ АКСЛАНТИРИШЛАР

Конформ акслантириш назариясида асосан қуйидаги икки масала ўрганилади:

1-масала C комплекс текисликдаги бирор E соҳада ($E \subset C$) $w=f(z)$ акслантириш берилган ҳолда соҳанинг аксини, яъни $w(E)$ ни топиш.

2-масала. Иккита ихтиёрий $E \subset C$, $F \subset C$ соҳалар берилган ҳолда E соҳани F соҳага акслантирувчи конформ $w=f(z)$ акслантиришни топиш.

Бу масалаларни ҳал қилишда қуйидаги тасдиқлардан фойдаланилади.

1-теорема (Риман теоремаси). Агар E ва F лар мос равишда кенгайтирилган комплекс текислик C ҳамда C лардан олинган ва чегараси 2 та нуқтадан кам бўлмаган (континуум бўлган) бир боғламли соҳалар бўлса, E соҳани F соҳага конформ акслантирувчи $w=f(z)$ функция мавжуд.

2-теорема (соҳанинг сақланиш принципи). Агар $f(z)$ функция E соҳада голоморф бўлиб, $f(z) \neq \text{const}$ бўлса, $f(E)$ ҳам соҳа бўлади.

Амалиётда купинча берилган D соҳани узидан содда-роқ бўлган соҳага, масалан бирлик доира ёки юқори ярим текисликка конформ акслантириш масаласини ечиш талаб қилинади. Бу масалани ҳал қилишда биз комплекс аргументли элементар функциялар синфини, биринчи навбатда уларнинг геометрик хоссаларини, татбиқ қилиш услубларини ўрганишимиз зарур.

1-§. Чизиқли функция

1-таъриф. Ушбу

$$w = az + b \quad (a, b \in C, a \neq 0)$$

қурилишдаги функция чизиқли функция (акслантириш) деб аталади.

Чизиқли функция C_z комплекс текисликни C комплекс текисликка конформ акслантиради.

Чизиқли функциянинг хусусий ҳолларини қараймиз:
1°. Айтайлик,

$$w = z + b \quad (b \in C)$$

булсин. Бу функция параллел кучиришни амалга оширади.

2°. Айтайлик,

$$w = ze^{\alpha} \quad (\alpha \in R)$$

булсин. Бу функция C_z текисликдаги ҳар бир z нуқтани координата боши атрофида соат стрелкасига тескари йўналишда α бурчакка буришни амалга оширади.

Масалан,

$$w = iz = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) z = e^{i\frac{\pi}{2}} z$$

функция координата боши атрофида 90° га,

$$w = -z$$

эса 180° га буришни амалга оширади.

3°. Айтайлик,

$$w = kz \quad (k > 0)$$

булсин. Бу функция берилган соҳани унга ўхшаш соҳага чузиб ($k > 1$ да) ёки сиқиб ($k < 1$ да) акслантиради.

Умуман,

$$w = az + b \quad (a, b \in C)$$

функция ёрдамида акслантириш C_z текисликдаги соҳани «чузиш», бирор бурчакка буриш ҳамда параллел кучириш ни амалга оширади. Амалиётда бу функциянинг шу хоссаларидан фойдаланилади.

1 - мисол. Учлари

$$A = 3 + 2i, \quad B = 7 + 2i, \quad C = 5 + 4i$$

нуқталарда бўлган ABC учбурчакнинг ушбу

$$w = iz + 1$$

чизиқли функция ёрдамидаги аксини топинг.

Берилган чизиқли $w = iz + 1$ функция ABC учбурчакнинг A_1, B_1, C_1 учбурчакка акслантиради. Бунда A_1, B_1, C_1 нуқталар мос равишда A, B, C нуқталарнинг акси булади:

$$A = w(A), \quad B = w(B), \quad C = w(C).$$

Равшанки,

$$w(A) = i(3+2i)+1 = -1+3i,$$

$$w(B) = i(7+2i)+1 = -1+7i,$$

$$w(C) = i(5+4i)+1 = -3+5i.$$

Демак,

$$A_1 = -1+3i, \quad B_1 = -1+7i, \quad C_1 = -3+5i.$$

Шундай қилиб, $w = iz+1$ функция учлари $3+2i$; $7+2i$; $5+4i$ нуқталарда булган ABC учбурчакни учлари $-1+3i$; $-1+7i$; $-3+5i$ нуқталарда булган $A_1B_1C_1$ учбурчакка акслантирар экан (15-чизма).



2-мисол. (z) текисликдаги $D = \{z \in C : |z - z_0| < r\}$ доирани (w) текисликдаги $\{w \in C : |w| < 1\}$ бирлик доирага акслантирувчи чизикли функцияни топим.

Ушбу

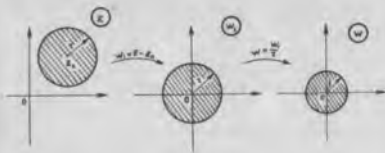
$$w = \frac{z - z_0}{r}$$

функцияни қарайлик. Бу функция берилган D доирани (w_1) текисликда маркази координата бошида бўлган $|w_1| < r$ доирага акслантиради (16-чизма).

Энди

$$w = \frac{1}{r} w_1$$

функцияни қараймиз. Бу функция $|w_1| < r$ доирани бирлик доира $|w| < 1$ га акслантиради (16-чизма).



16-чизма

Шундай қилиб,

$$w = \frac{1}{r}(z - z_0)$$

чизикли функция (z) текисликдаги D доирани (w) текисликдаги $\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ — бирлик доирага акслантиради.

Фараз қилайлик, $w = f(z)$ функция $\mathbb{C}$ текисликдаги бирор E соҳада берилган бўлсин.

2-таъриф. Агар $a \in E$ нуқтада

$$f(a) = a$$

тенглик бажарилса, у ҳолда $z=a$ нуқта $w=f(z)$ акслантиришнинг қўзғалмас нуқтаси дейилади.

$w = az + b$ чизикли акслантириш $a \neq 1$ булганда иккита

$$z_1 = \infty, \quad z_2 = \frac{b}{1-a}$$

қўзғалмас нуқталарга эга.

Агар $a=1$ булса, $z=\infty$ шу чизикли акслантиришнинг каррали қўзғалмас нуқтаси бўлади.

3-мисол. (z) текисликдаги $z_0=1+i$ нуқтани қўзғалмас қолдириб, $z_1=2+i$ нуқтани эса $w_1=4-3i$ нуқтага утказадиган чизикли акслантиришни топинг.

Изланаётган чизикли акслантиришни

$$w = az + b \tag{1}$$

куринишда излаймиз.

Модомики, $z_0=1+i$ қўзғалмас нуқта бўлиши керак экан, унда

$$az_0 + b = z_0 \tag{2}$$

бўлади.

(1) ҳамда (2) муносабатлардан

$$w - z_0 = a(z - z_0)$$

булиши келиб чиқади.

$z_1 = 2 + i$ нукта акслантириш натижасида $w_1 = 4 - 3i$ нуктага ўтишидан фойдаланиб

$$w_1 - z_0 = a(z_1 - z_0)$$

булишини топамиз. Демак,

$$4 - 3i - (1 + i) = a[2 + i - (1 + i)].$$

Бу тенгликдан ($a = 3 - 4i$) бўлиши келиб чиқади.

Шундай қилиб, изланаётган акслантириш:

$$w = z_0 + a(z - z_0) = 1 + i + (3 - 4i) \times [z - (1 + i)] = (3 - 4i)z - 6 + 2i.$$

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

1. Ихтиёрий сондаги чизиқли функцияларнинг суперпозицияси яна чизиқли функция бўлишини исботланг.

2. Ихтиёрий чизиқли акслантириш тўғри чизиқни тўғри чизиққа, айланани айланага акслантиришини исботланг.

Берилган D соҳанинг $w = f(z)$ чизиқли функция ёрдамидаги аксини топинг:

3. $D = \{|z - 1| < 2\}$, $w = 1 - 2iz$.

4. $D = \{\operatorname{Re} z < 1\}$, $w = (1 + i)z + 1$.

5. $D = \{0 < \operatorname{Re} z < 1\}$, $w = 2iz + 1 - i$.

6. $D = \{|z| < 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}\}$, $w = 2iz + 1 - i$.

7. $D = \{|z - 1 - i| < \sqrt{2}\}$, $w = iz + 1 + i$.

8. $D = \{0 < \operatorname{Re} z < 2, \operatorname{Im} z < 0\}$, $w = i - 2z$.

9. D — учлари $A = 1 + i$, $B = 5 + i$, $C = 1 + 3i$, $E = 5 + 3i$ нукталарда бўлган $ABCE$ тўртбурчак ва $w = 2z - 1 + i$.

10. $D = \left\{ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} < 1 \right\}$, $w = -iz + 3$.

11. $D = \{(\operatorname{Re} z)^2 + \operatorname{Im} z < 1\}$, $w = -z + 1$.

12. $D = \{|z - 1| < 2, |z + 1| < 2\}$, $w = \frac{1+i}{2}z + 1$.

13. Учлари $A = 0$, $B = 1$, $C = i$ нукталарда булган ABC учбурчакни учлари $A_1 = 0$, $B_1 = 2$, $C_1 = 1 + i$ нукталарда бўлган, берилган учбурчакка ўхшаш $A_1B_1C_1$ учбурчакка акслантирувчи чизиқли функцияни топинг.

14. Учлари $A=3+2i$, $B=7+2i$, $C=5+4i$ нукталарда булган ABC учбурчакни учлари $A_1=0$, $B_1=-2i$, $C_1=1-i$ нукталарда булган, берилган учбурчакка ухшаш $A_1B_1C_1$ учбурчакка акслантирувчи функцияни топинг.

15. Ушбу $\{|z-i|<2\}$ доирани $\{|w-2|<4\}$ доирага акслантирувчи чизикли функцияни топинг.

16. Ушбу $\{|z-z_1|<R\}$ доирани $\{|w-w_1|<R\}$ доирага акслантирувчи чизикли функцияни топинг.

17. Ушбу $z_1=1+2i$ нуктани кузгалмас қолдириб, $z_2=i$ нуктани эса $w_2=-i$ нуктага утказадиган чизикли акслантиришни топинг.

Куйидаги акслантиришлар учун чекли кузгалмас нукта z_0 (агар у мавжуд булса), бурилиш бурчаги φ ва чузилиш коэффициенти k ни топинг. Акслантиришни $w-z_0=\lambda(z-z_0)$ каноник курунишга келтиринг.

18. $w = 2z + 1 - 3i$.

19. $w = iz + 4$.

20. $w = z + 1 - 2i$.

21. $w - w_1 = a(z - z_0)$ ($a \neq 0$).

22. $w = az + b$ ($a \neq 0$).

23. Юқори ярим текисликни ўзини ўзига акслантирувчи чизикли функциянинг умумий курунишини топинг.

24. Юқори ярим текисликни қуйи ярим текисликка акслантирувчи чизикли функциянинг умумий курунишини топинг.

25. Юқори ярим текисликни ўнг ярим текисликка акслантирувчи чизикли функциянинг умумий курунишини топинг.

26. Ўнг ярим текисликни ўзини ўзига акслантирувчи чизикли функциянинг умумий курунишини топинг.

27. $\{0 < x < 1\}$ соҳани («йулак»ни) ўзини ўзига акслантирувчи чизикли функциянинг умумий курунишини топинг.

28. Ушбу $\{-2 < y < 1\}$ «йулак»ни ўзини ўзига акслантирувчи чизикли функциянинг умумий курунишини топинг.

29. $y=x$ ва $y=x-1$ тўғри чизиклар билан чегараланган «йулак»ни ўзини ўзига акслантирувчи чизикли функциянинг умумий курунишини топинг.

Куйидаги мисолларда берилган тўғри чизиклар билан чегараланган «йулак»ларни $\{0 < \operatorname{Re} w < 1\}$ йулакка акслантирувчи ва берилган шартни қаноатлантирувчи чизикли $w(z)$ функцияни топинг:

30. $x = a$, $x = a+b$; $w(a) = 0$.

$$31. x=a, \quad x=a+b; \quad w\left(a+\frac{b}{2}\right)=\frac{1}{2}+i, \quad \operatorname{Im} w\left(a+\frac{b}{2}+i\right)<1,$$

$$32. y=kx, \quad y=kx+b; \quad w(0)=0.$$

$$33. y=kx+b_1, \quad y=kx+b_2; \quad w(ib_1)=0.$$

34. Куйидаги ($|d|<1$) доирани ($|w-w_0|<R$) доирага акслантирувчи шундай чизиқли функцияни топингки, доираларнинг марказлари бир-бирига мос келсин ва биринчи доиранинг горизонтал диаметри иккинчи доира ҳақиқин ўқнинг мусбат йуналиши билан α бурчак ҳосил қилувчи диаметрига акслансин.

2-§. Каср чизиқли функция

1°. 3-таъриф. Ушбу

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C})$$

куринишдаги функция *каср-чизиқли функция* (*каср чизиқли акслантириш*) деб аталади. Бунда

$$ad - bc \neq 0$$

деб қараймиз, акс ҳолда $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ булиб, w функция ўзгармасга айланади.

Каср чизиқли функция кенгайтирилган (z) комплекс текисликни кенгайтирилган (w) комплекс текисликка конформ акслантиради.

Умуман, ҳар қандай каср чизиқли акслантириш, чизиқли акслантириш билан $w = \frac{1}{z}$ кўринишдаги акслантиришни кетма-кет бажарилишидан иборат. Ҳақиқатан ҳам, $c \neq 0$ десак,

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{b-c\frac{a}{c}}{d}}{z+\frac{d}{c}}$$

булиб, ушбу

$$w_1 = z + \frac{d}{c}, \quad w_2 = \frac{1}{w_1}$$

белгилашлар ёрдамида

$$w = \frac{a}{c} + \frac{b-\frac{ad}{c}}{z}$$

булишини топамиз.

4-мисол. Ушбу

$$w = \frac{1}{z}$$

акслантириш (z) текисликдаги тўғри чизиқни ёки айлани (w) текисликдаги тўғри чизиққа ёки айланага ўтказишни исботланг.

Маълумки, R^2 текисликда

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0 \quad (3)$$

тенглама ($A=0$ бўлганда) тўғри чизиқни ёки ($A \neq 0$, $B^2 + C^2 - AD > 0$ бўлганда) айланани ифодалайди.

Энди

$$x^2 + y^2 = z \cdot \bar{z},$$

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2},$$

$$y = -\frac{i(z - \bar{z})}{2}$$

булишини эътиборга олиб, (3) тенгламани қуйдагича ёзамиз:

$$Az \bar{z} + E\bar{z} + Fz + D = 0 \quad (4)$$

Бунда $E = B + Ci$.

Шундай қилиб, (4) тенглама (z) текисликда тўғри чизиқ ёки айлананинг комплекс аргументлик курунишидаги ифодаси булади ва аксинча.

(4) нинг $w = \frac{1}{z}$ акслантириш ёрдамида ҳосил булган аксини топиш учун ундаги z ўрнига $\frac{1}{w}$ ни қўямиз. Натижада

$$A \frac{1}{w \bar{w}} + E \frac{1}{w} + F \frac{1}{\bar{w}} + D = 0,$$

яъни

$$Dw \bar{w} + Ew + F \bar{w} + A = 0 \quad (5)$$

тенглама ҳосил булади. (4) ҳамда (5) муносабатларни солиштириб, (5) нинг ҳам (w) текисликда тўғри чизиқ ёки айлана булишини топамиз.

2*. Каср чизиқли акслантиришлар қатор хоссаларга эга.

1-хосса. Каср чизиқли акслантиришларнинг суперпозицияси яна каср чизиқли акслантириш булади; каср чизиқли акслантиришга тесқари бўлган акслантириш ҳам каср чизиқли булади.

2-хосса. Ихтиёрий каср чизиқли акслантириш S_z даги айлана ёки тўғри чизиқни S_w даги айлана ёки тўғри чизиққа акслантиради.

Бу хоссани каср чизиқли акслантиришнинг доиравийлик хоссаси дейилади (тўғри чизиқ одатда радиуси чексизга тенг бўлган айлана деб қаралади).

Изоҳ. Каср чизиқли функция ёрдамида айланани айланага ёки тўғри чизиққа акслантиришини аниқлаш учун унинг маҳражини нолга айлантирувчи $z = -\frac{d}{c}$ нуқтани қаралаётган айланага тегишли ёки тегишли эмаслигини текшириш кифоядир.

Масалан,

$$w = \frac{1}{z-2}$$

акслантириш $\{z: |z|=1\}$ айланани айланага, $\{z: |z|=2\}$ айланани эса тўғри чизиққа утказди.

Текисликдаги γ тўғри чизиққа нисбатан симметрик нуқталар тушунчаси ўқувчига элементар математикадан маълум. Энди бу тушунчани айланага нисбатан таърифлайлик.

4-таъриф. Агар z ва z^* нуқталар учи $\gamma = \{z \in C: |z-z_0|=R\}$ айлана марказида бўлган битта нурда ётиб, улардан айлана марказигача бўлган масофалар кўпайтмаси γ айлана радиусининг квадратиغا тенг бўлса, яъни

$$\begin{cases} \arg(z_1^* - z_0) = \arg(z_1 - z_0), \\ |z_1^* - z_0| |z_1 - z_0| = R^2 \end{cases}$$

тенгликлар ўрикли бўлса, z_1 ва z_1^* нуқталар C комплекс текисликдаги γ айланага нисбатан симметрик нуқталар дейилади.

Агар z_1 ва z_1^* нуқталар γ айланага нисбатан симметрик нуқталар бўлса, у ҳолда

$$z_1^* - z_0 = \frac{R^2}{z_1 - z_0} \quad (6)$$

бўлади.

3-хосса. Ҳар қандай каср чизиқли акслантириш натижасида (z) текисликдаги γ айлана ёки тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлган z_1 ва z_1^* нуқталарининг акси (w) те-

кисликда γ айлананинг акси бўлган $w(\gamma)$ айлана ёки тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлган w ва w_1^* нуқталардан иборат бўлади.

Бу хосса каср чизиқли акслантиришда *симметрикликнинг сақланиш хоссаси* дейилади.

4-хосса. (z) текисликда берилган ҳар хил z_1, z_2, z_3 нуқталарни (w) текисликда берилган ҳар хил w_1, w_2, w_3 нуқталарга акслантирувчи каср чизиқли функция мавжуд ва у ягонадир.

Бу акслантириш ушбу

$$\frac{w-w_1}{w_2-w_1} \cdot \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \cdot \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} \quad (7)$$

муносабатдан топилади.

5-хосса. Ушбу

$$w = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad |a| > 0 \quad (8)$$

каср чизиқли функция юқори ярим текислик $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ ни бирлик доира $\{|w| < 1\}$ га акслантиради, бунда θ - ихтиёрий ҳақиқий сон.

6-хосса. Ушбу

$$w = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad |a| < 1 \quad (9)$$

каср чизиқли функция (z) текисликдаги бирлик доира $\{|z| < 1\}$ ни (w) текисликдаги бирлик доира $\{|w| < 1\}$ га акслантиради, бунда θ — ихтиёрий ҳақиқий сон.

5-мисол. (z) текисликдаги $E = \{z \in C : 1 < |z| < 2\}$ соҳа (ҳалқа)

$$w = \frac{z+1}{z+2}$$

каср чизиқли функция ёдрамида (w) текислигидаги қандай соҳага аксланади?

Бу мисолни икки усулда ечамиз.

Биринчи усул. Аввало

$$w = \frac{z+1}{z+2}$$

ни z га нисбатан ечамиз. Натижада

$$z = \frac{1-2w}{w-1}$$

бўлади.

Ҳақиқат $E = \{z \in C : 1 < |z| < 2\}$ соҳанинг (w) текисликдаги акси

$$F = w(E) = \left\{ w \in C : 1 < \left| \frac{1-2w}{w-1} \right| < 2 \right\}$$

булишини топамиз.

Равшанки,

$$\begin{aligned} 1 < \left| \frac{1-2w}{w-1} \right| &\Rightarrow |w-1| < |1-2w| \Rightarrow \\ &\Rightarrow |u+iv-1| < |1-2(u+iv)| \Rightarrow (u-1)^2 + v^2 < \\ &< (2u-1)^2 + (2v)^2 \Rightarrow 3u^2 - 2u + 3v^2 > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(u - \frac{1}{3}\right)^2 + v^2 > \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow |w-1| > \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Шунингдек:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1-2w}{w-1} \right| < 2 &\Rightarrow |1-2w| < 2|w-1| \Rightarrow \\ &\Rightarrow |1-2(u+iv)| < 2|u+iv-1| \Rightarrow \\ &\Rightarrow (2u-1)^2 + (2v)^2 < 4[(u-1)^2 + v^2] \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4u < 3 \Rightarrow u < \frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{Re} w < \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Бўлалай Демак,

$$F = w(E) = \left\{ w \in C : \left| w - \frac{1}{3} \right| > \frac{1}{3}, \operatorname{Re} w < \frac{3}{4} \right\}.$$

Шундай қилиб, (z) текисликдаги $E = \{z \in C : 1 < |z| < 2\}$ соҳа

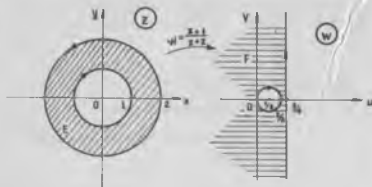
$$w = \frac{z+1}{z-2}$$

функция ёрдамида

$$F = w(E) = \left\{ w \in C : \left| w - \frac{1}{3} \right| > \frac{1}{3}, \operatorname{Re} w < \frac{3}{4} \right\}$$

соҳага аксланади (17-чизма).

Иккинчи усул. E соҳанинг чегараси $\gamma_1 : |z| = 1$, $\gamma_2 : |z| = 2$ бўлган иккита айланадан иборат. Берилган каср чизиқли функцияни чексизга айлантирадиган нуқта $z_0 = -2$ бўлиб, бу нуқта иккинчи айланага тегишлидир: $z_0 \in \gamma_2$, $w(z_0) = \infty$. Демак γ_1 айлананинг акси айлана бўлиб, γ_2 нинг акси тўғри чизиқдир. γ_1 нинг аксини топиш учун γ_1 га те-



17-чизма

гишли учта $z_1=1$, $z_2=-1$, $z_3=i$ нуқталарни қарайлик. Бу нуқталарнинг акси

$$w(z_1) = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3}, \quad w(z_2) = 0, \quad w(z_3) = \frac{1+i}{1+2i} = \frac{1+i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{1-2i+i-2}{1-4i^2} = \frac{-1-i}{1+4} = -\frac{1}{5} - \frac{i}{5}$$

бўлиб, бу учта нуқтадан ўтувчи айлананинг тенгламаси $|w - \frac{1}{3}| = \frac{1}{3}$ дир. γ нинг аксини топиш учун, унга тегишли $z=2i$, $z=-2i$ нуқталарнинг аксини топамиз:

$$w(2i) = \frac{1+2i}{2+2i} = \frac{2+4i-2i+4}{8} = \frac{6+2i}{8} = \frac{3}{4} + \frac{i}{4}; \quad w(-2i) = \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{2-4i+2i+4}{8} = \frac{3}{4} - \frac{i}{4}$$

Бу нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизиқ $\operatorname{Re} w = \frac{3}{4}$ дир.

Демак, $\{1 < |z| < 2\}$ соҳанинг акси $\left\{ \left| w - \frac{1}{3} \right| > \frac{1}{3}, \operatorname{Re} w < \frac{3}{4} \right\}$

эканлигини курамиз (17-чизма).

6-мисол. Ушбу $x=0$ чизиқнинг

$$w = \frac{1}{z-1}$$

акслантириш ёрдамидаги аксини топинг.

$z_0=1$ нуқта $\{x=0\}$ тўғри чизиққа тегишли эмас. Демак, қаралаётган чизиқ $w = \frac{1}{z-1}$ акслантириш ёрдамида айланага ўтади. Бу айланани топиш учун $x=0$ тўғри чизиқда

$$z_1=-i, \quad z_2=0, \quad z_3=i$$

нуқталарни оламиз. Уларнинг акси

$$w_1 = w(z_1) = \frac{1}{-i-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$w_2 = w(z_2) = -1,$$

$$w_3 = w(z_3) = \frac{1}{i-1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

булади. (w) текисликда бу w_1, w_2, w_3 нуқталардан ўтувчи айлананинг тенгламаси

$$u^2+v^2+au+bv+c=0 \quad (10)$$

бўлсин дейлик. Бу тенгламадаги номаълум a, b, c ларни топиш учун w_1, w_2 ва w_3 нуқталарнинг координаталарини (10) тенгламага қўямиз. Натижада

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + a\left(-\frac{1}{2}\right) + b\frac{1}{2} + c = 0, \text{ яъни } 1-a+b+2c=0,$$

$$1+0+a+0+c=0, \text{ яъни } 1-a+c=0,$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + a\left(-\frac{1}{2}\right) + b\left(-\frac{1}{2}\right) + c = 0, \text{ яъни } 1-a-b+2c=0$$

булиб,

$$\begin{cases} 1-a+b+2c=0, \\ 1-a+c=0, \\ 1-a-b+2c=0 \end{cases}$$

система ҳосил булади. Бу системанинг счими

$$a=1, \quad b=c=0$$

булади. Демак, $x=0$ тўғри чизиқнинг берилган акслантириш ёрдамидаги акси

$$u^2+u+v=0,$$

яъни

$$\left\{w \in \mathbb{C} : \left|w + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\right\}$$

айланадан иборат экан.

$$38. -1 \leq x \leq 1, y = 0.$$

$$39. |z| = 1, 0 < \arg z < \pi.$$

$$40. z = \cos t (\cos t + i \sin t), -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

$$41. y = x + b \text{ — параллел тўғри чизиклар оиласи.}$$

$$42. y = kx \text{ — тўғри чизиклар оиласи.}$$

$$43. z \neq 0 \text{ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиклар оиласи.}$$

$$44. y = x^2.$$

$$45. x^2 + y^2 = ax \text{ — айланалар оиласи.}$$

$$46. x^2 + y^2 < cx \ (c > 0) \text{ — доиралар оиласи.}$$

$$47. x^2 + y^2 < cx \ (c < 0) \text{ — доиралар оиласи.}$$

$$48. x^2 + y^2 < cy \ (c > 0) \text{ — доиралар оиласи.}$$

$$49. y > cx \ (c > 0) \text{ — ярим текисликлар оиласи.}$$

50. $|z - a| < R$ — доиралар оиласи; бу ерда a — тайинланган нуқта, $R > 0$ эса $R < |a|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ўзгармас.

51. $|z - a| < R$ — доиралар оиласи; бу ерда a — фиксирланган нуқта, R эса $R > |a|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ўзгармас.

52. Ушбу $\{|z| = 1\}$ айлананинг $w = \frac{1}{z-1}$ акслантириш ёрдамидаги аксини топинг.

Ушбу $w = \frac{z-i}{2z+i}$ акслантириш қуйидаги чизикларнинг қайси бирини тўғри чизикқа ва қайси бирини айланага акслантиришини уларнинг аксларини топмасдан аниқланг.

$$53. |z + i| = \frac{1}{2}.$$

$$54. |z| = 1.$$

$$55. x = -1.$$

$$56. x - 2y = 1.$$

$$57. x - 2y + 1 = 0.$$

$$58. |z| = \frac{1}{2}.$$

Қуйидаги чизикларнинг

$$w = \frac{z-1}{z+1+i}$$

акслантириш ёрдамидаги аксининг тўғри чизик бўлишини исботланг ва уларнинг тенгламасини топинг.

К ў р с а т м а . Тўғри чизик иккита нуқта ёрдамида аниқланишидан фойдаланинг.

$$59. x^2 + y^2 = \sqrt{2}$$

$$60. x^2 + y^2 + 2y = 0.$$

$$61. y = x.$$

Берилган D соҳанинг каср чизиқли $w=f(z)$ аксланти-
риш ердамидаги аксини топинг.

$$62. D = \{ |z| < 1 \}, w = \frac{z-1}{z+i}.$$

$$63. D = \{ x > 0, y > 0 \}, w = \frac{1}{z}.$$

$$64. D = \{ |z| > 1 \}, w = \frac{z+i}{z-i}.$$

$$65. D = \{ \operatorname{Im} z > 1 \}, w = \frac{z-1}{z}.$$

$$66. D = \{ 0 < \operatorname{Re} z < 1 \}, w = \frac{1}{z}.$$

$$67. D = \{ 0 < \arg z < \frac{\pi}{4} \}, w = \frac{1}{z}.$$

$$68. D = \{ |z| < 1, |z-1| < \sqrt{2} \}, w = \frac{z-1}{z+i}.$$

$$69. D = \{ |z-1| < 2 \}, w = \frac{2iz}{z+3}.$$

$$70. D = \{ |z-1| < 2 \}, w = \frac{z+1}{z-2}.$$

$$71. D = \{ |z-1| < 2 \}, w = \frac{z-1}{2z-6}.$$

$$72. D = \{ \operatorname{Re} z < 1 \}, w = \frac{z}{z-1+i}.$$

$$73. D = \{ \operatorname{Re} z < 1 \}, w = \frac{z}{z-2}.$$

$$74. D = \{ \operatorname{Re} z < 1 \}, w = \frac{z-3+i}{z+1+i}.$$

$$75. D = \{ |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0 \}, w = \frac{1-z}{1+z}.$$

$$76. D = \{ z \in [-2, 1] \}, w = \frac{z+2}{1-z}.$$

$$77. D = \{ |z-i| > 1, \operatorname{Im} z > 0 \}, w = \frac{1}{z}.$$

$$78. D = \{ 1 < |z| < 2 \}, w = \frac{z}{z-1}.$$

$$79. D = \{ x > 0, y > 0 \}, w = \frac{z-i}{z+i}.$$

$$80. D = \{ |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0 \}, w = \frac{2z-1}{2+iz}.$$

$$81. D = \{ 0 < \arg z < \frac{\pi}{4} \}, w = \frac{z-1}{z+1}.$$

$$82. D = \{ 0 < x < 1 \}, w = \frac{z-1}{z}.$$

$$83. D = \{ 0 < x < 1 \}, w = \frac{z-1}{z-2}.$$

$$84. D = \{ 1 < |z| < 2 \}, w = \frac{z-1}{z+1}.$$

$$85. D = \{ z: \operatorname{Re} z > 0, |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2} \} \text{ соҳани}$$

$$G = \{ w: 0 < \operatorname{Re} w < 1 \} \text{ йўлакка акслантирувчи каср чизиқ-}$$

ли функцияни топинг.

Комплекс текисликда $z_1 = 1+i$ нукта учун қуйидаги чизикларга нисбатан симметрик бўлган нуқтани топинг:

$$86. x = 0.$$

$$87. y = 0.$$

$$88. |z| = 2.$$

$$89. |z| = \sqrt{2}.$$

$$90. |z-1-i| = 2.$$

Қуйидаги Γ чизиқ учун $\{ |z| = 1 \}$ айланага нисбатан симметрик бўлган чизиқни топинг:

$$91. \Gamma = \{ x=1 \}.$$

$$92. \Gamma = \{ y=2 \}.$$

$$93. \Gamma = \{ |z| = 2 \}.$$

$$94. \Gamma = \{ \arg z = \alpha \}.$$

95. Айтайлик, Γ — айлана ёки тўғри чизиқ бўлиб, P ва P^* нуқталар Γ га нисбатан симметрик бўлган нуқталар бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $M_1, M_2 \in \Gamma$ нуқталар учун

$$\frac{|M_1 P|}{|M_1 P^*|} = \frac{|M_2 P|}{|M_2 P^*|}$$

тенгликнинг уринли булишини исботланг.

96. Фараз қилайлик, z_1 ва z_2 нуқталар Γ тўғри чизиққа нисбатан симметрик нуқталар бўлсин. У ҳолда z_1 ва z_2 нуқталардан ўтувчи ихтиёрий айлана Γ тўғри чизиқ билан тўғри бурчак остида кесишишини исботланг.

97. Айтайлик, z_1 ва z_2 нуқталар Γ айланага нисбатан симметрик нуқталар бўлсин. У ҳолда z_1 ва z_2 нуқталардан

ўтувчи ихтиёрий айлана Γ айлана билан тўғри бурчак остида кесишишини исботланг.

98. z_1, z_1^*, z_2, z_2^* нуқталар берилган бўлсин. Бу нуқталар учун шундай шартни топингки, агар шу шарт бажарилса, шундай Γ айлана ёки тўғри чизик топилсинки, z_k ва z_k^* ($k=1, 2$) нуқталар Γ чизикда нисбатан симметрик бўлсин.

99. Айтайлик, $\bar{C}$ дан олинган ихтиёрий бир-биридан фарқли z_1, z_2, z_3 нуқталар берилган бўлсин. z_3 нуқтадан ўтувчи ва z_1, z_2 нуқталар Γ га нисбатан симметрик булган шундай ягона Γ чизик (айлана ёки тўғри чизик) мавжуд эканлигини исботланг.

Куйидаги шартларни қаноатлантирувчи каср-чизикли $w(z)$ акслантиришни топинг:

100. $w(0)=4,$	$w(1+i)=2+2i,$	$w(2i)=0.$
101. $w(0)=0,$	$w(1+i)=2+2i,$	$w(2i)=4.$
102. $w(0)=0,$	$w(1+i)=\infty,$	$w(2i)=2i.$
103. $w(i)=2,$	$w(\infty)=1+i,$	$w(-i)=0.$
104. $w(i)=0,$	$w(\infty)=1,$	$w(-i)=\infty.$
105. $w(i)=-2,$	$w(\infty)=2i,$	$w(-i)=2.$
106. $w(-1)=0,$	$w(i)=2i,$	$w(1+i)=1-i.$
107. $w(-1)=i,$	$w(i)=\infty,$	$w(1+i)=1.$
108. $w(-1)=i,$	$w(\infty)=1,$	$w(i)=1+i.$
109. $w(-1)=\infty,$	$w(\infty)=i,$	$w(i)=1.$
110. $w(-1)=-0,$	$w(\infty)=\infty,$	$w(i)=1.$

111. Ихтиёрий каср чизикли акслантиришнинг камида битта (чекли ёки чексиз) қўзғалмас нуқтага эга эканлигини исботланг.

112. Ўзгармасдан фарқли булган ихтиёрий каср чизикли акслантиришнинг кули билан иккита (чекли ёки чексиз) қўзғалмас нуқтага эга бўлиши мумкинлигини исботланг.

113. Икки 1 ва i нуқталарни қўзғалмас қолдирувчи, 0 нуқтани эса -1 нуқтага акслантирувчи каср-чизикли функцияни топинг.

114. $\frac{1}{2}$ ва 2 нуқталарни қўзғалмайдиган, $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$ нуқтани эса ∞ га акслантирувчи каср чизикли функцияни топинг.

115. i нуқта икки каррали қўзғалмас нуқтаси булган ва 1 нуқтани ∞ га акслантирувчи каср-чизикли функцияни топинг.

116. Юқори ярим текисликни ўзини ўзига акслантирувчи каср-чизикли функциянинг умумий кўринишини топинг.

117. Юқори ярим текислиқни қуйи ярим текисликка акслантирувчи каср-чизикли функциянинг умумий қурилишини топинг.

118. Юқори ярим текислиқни ўнг ярим текисликка акслантирувчи каср-чизикли функциянинг умумий қурилишини топинг.

119. Ушбу $\{|z| < R\}$ доирани $\{Re w > 0\}$ ўнг ярим текисликка акслантирувчи ва

$$w(R) = 0, \quad w(-R) = \infty, \quad w(0) = 1$$

шартларни қаноатлантирувчи $w(z)$ функцияни топинг. Бу акслантириш ёрдамида юқори ярим доира қаерга аксланади?

120. Ушбу $\{Im z > 0\}$ юқори ярим текислиқни $\{|w - w_0| < R\}$ доирага шундай акслантирингки, i нуқта доиранинг марказига утсин ва акслантирувчи функция ҳосиласининг аргументи i нуқтада нолга тенг бўлсин.

121. Ушбу $\{|z| < 1\}$ бирлик доирани $\{Im w > 0\}$ юқори ярим текисликка шундай акслантирингки, -1 , 1 , i нуқталар мос равишда -1 , 0 , 1 нуқталарга утсин.

122. Ушбу $\{|z - 2| < 1\}$ доирани $\{|w - 2i| < 2\}$ доирага шундай акслантирингки,

$$w(2) = i \quad \text{ва} \quad \arg w'(2) = 0$$

бўлсин.

123. Ушбу $\{Re z > 0, Im z > 0\}$ квадрантни $\{|w| < 1\}$ доирага каср-чизикли функция ёрдамида акслантириш мумкинми?

D соҳани G соҳага конформ акслантирувчи ва қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $w(z)$ функцияни топинг.

$$124. \quad D = \{Im z > 0\}, \quad G = \{|w| < 1\}, \\ w(2i) = 0, \quad \arg w'(2i) = 0.$$

$$125. \quad D = \{Im z > 0\}, \quad G = \{|w| < 1\}, \\ w(a + bi) = 0, \quad \arg w'(a + bi) = \theta \quad (b > 0).$$

$$126. \quad D = \{Im z > 0\}, \quad G = \{|w - w_0| < R\}, \\ w'(i) = w_0, \quad w(i) > 0.$$

$$127. \quad D = \{|z| < 2\}, \quad G = \{Re w > 0\}, \\ w(0) = 1, \quad \arg w'(0) = \frac{\pi}{2}.$$

$$128. \quad D = \{|z - 4i| < 2\}, \quad G = \{Im w > Re w\}, \\ w(4i) = -4, \quad w'(2i) = 0.$$

$$129. \quad D = \{Im z > 0\}, \quad G = \{Im w > 0\}, \\ w(a) = b, \quad \arg w(a) = \alpha \quad (\alpha > 0, Im b > 0).$$

Қўрсатма. Аввал иккала ярим текислиқни бирлик доирага акслантириб олинг.

$$130. \quad D = \{Im z > 0\}, \quad G = \{Im w < 0\}, \\ w(a) = a, \quad \arg w'(a) = -\frac{\pi}{2} \quad (Im a > 0).$$

$$131. \quad D = \{|z| < 1\}, \quad G = \{|w| < 1\}, \\ w\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \arg w'\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

$$132. \quad D = \{|z| < 1\}, \quad G = \{|w| < 1\}, \\ w\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \arg w'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$133. \quad D = \{|z| < 1\}, \quad G = \{|w| < 1\}, \\ w(0) = 0, \quad \arg w'(0) = -\frac{\pi}{2}.$$

$$134. \quad D = \{|z| < 1\}, \quad G = \{|w| < 1\}, \\ w(a) = a, \quad \arg w'(a) = \alpha \quad (|a| < 1).$$

$$135. \quad D = \{|z| < R_1\}, \quad G = \{|w| < R_2\}, \\ w(a) = b, \quad \arg w'(a) = \alpha \quad (|a| < R_1, |b| < R_2).$$

$$136. \quad D = \{|z| < 1\}, \quad G = \{|w - 1| < 1\}, \\ w(0) = \frac{1}{2}, \quad w(1) = 0.$$

137. $\{|z| < 1\}$ доирани $\{Re w > 0\}$ ўнг ярим текисликка акслантирувчи шундай каср-чизикли $w(z)$ функциянинг умумий қурилишини топингки,

$$w(z_1) = 0, \quad w(z_2) = \infty$$

шартлар бажарилсин. Бу ерда z_1, z_2 нуқталар $\{|z| = 1\}$ айлананинг $\arg z_1 < \arg z_2$ тенгсизлиқни қаноатлантирувчи берилган нуқталари.

138. $\{|z| < R\}$ доирани ўзини ўзига акслантирувчи ва $w(a) = 0$ ($|a| < R$) шартни қаноатлантирувчи каср-чизикли функциянинг умумий қурилишини топинг.

139. $\{|z| < R\}$ доирани ўзини ўзига акслантирувчи ва $w(a) = b$ ($|a| < R, |b| < R$) шартни қаноатлантирувчи каср-чизикли $w(z)$ функциянинг умумий қурилишини топинг.

140. $\{|z| < R\}$ доирани ўзини ўзига акслантирувчи ва $w(\pm R) = \pm R$ шартларни қаноатлантирувчи каср-чизикли $w(z)$ функциянинг умумий қурилишини топинг.

141. $\{|z| < 1\}$ доирани ўзини ўзига шундай акслантирингки, ҳақиқий ўқнинг $\{y=0, 0 \leq x \leq a\}$ ($a < 1$) кесмаси ҳақиқий ўқнинг координата бошига нисбатан симметрик бўлган кесмасига акслансин. Ҳосил бўлган кесманинг узунлигини ҳисобланг.

117. Юқори ярим текислиқни қўйи ярим текислиққа акслантирувчи каср-чизикли функциянинг умумий қўринишини топинг.

118. Юқори ярим текислиқни ўнг ярим текислиққа акслантирувчи каср-чизикли функциянинг умумий қўринишини топинг.

119. Ушбу $\{z \mid \operatorname{Re} z < R\}$ доирани $\{R e w > 0\}$ ўнг ярим текислиққа акслантирувчи ва

$$w(R) = 0, \quad w(-R) = \infty, \quad w(0) = i$$

шартларни қаноатлантирувчи $w(z)$ функцияни топинг. Бу акслантириш ёрдамида юқори ярим доира қаерга аксланади?

120. Ушбу $\{Im z > 0\}$ юқори ярим текислиқни $\{w \mid w_0 < R\}$ доирага шундай акслантирингки, i нуқта доиранинг марказига ўтсин ва акслантирувчи функция ҳосиласининг аргументи i нуқтада нолга тенг бўлсин.

121. Ушбу $\{z \mid |z| < 1\}$ бирлик доирани $\{Im w > 0\}$ юқори ярим текислиққа шундай акслантирингки, $-1, 1, i$ нуқталар мос равишда $0, 1$ нуқталарга ўтсин.

122. Ушбу $\{z \mid |z - 2| < 1\}$ доирани $\{w \mid |w - 2i| < 2\}$ доирага шундай акслантирингки,

$$w(2) = i \quad \text{ва} \quad \arg w'(2) = 0$$

бўлсин.

123. Ушбу $\{Re z > 0, Im z > 0\}$ квадрантни $\{w \mid |w| < 1\}$ доирага каср-чизикли функция ёрдамида акслантириш мумкинми?

D соҳани G соҳага конформ акслантирувчи ва қўйидаги шартларни қаноатлантирувчи $w(z)$ функцияни топинг

124. $D = \{Im z > 0\}, \quad G = \{w \mid |w| < 1\},$
 $w(2i) = 0, \quad \arg w(2i) = 0.$
125. $D = \{Im z > 0\}, \quad G = \{w \mid |w| < 1\},$
 $w(a+bi) = 0, \quad \arg w(a+bi) = \theta \ (b > 0).$
126. $D = \{Im z > 0\}, \quad G = \{w \mid |w - w_0| < R\},$
 $w'(i) = w_0, \quad w'(i) > 0.$
127. $D = \{z \mid |z| < 2\}, \quad G = \{Re w > 0\},$
 $w(0) = 1, \quad \arg w'(0) = \frac{\pi}{2}.$
128. $D = \{z \mid |z - 4i| < 2\}, \quad G = \{Im w > Re w\},$
 $w(4i) = -4, \quad w(2i) = 0.$
129. $D = \{Im z > 0\}, \quad G = \{Im w > 0\},$
 $w(a) = b, \quad \arg w(a) = \alpha \ (Im a > 0, Im b > 0).$

Курсатма. Аввал иккала ярим текислиқни бирлик доирага акслантириб олинг.

130. $D = \{Im z > 0\}, \quad G = \{Im w < 0\},$
 $w(a) = a, \quad \arg w'(a) = -\frac{\pi}{2} \ (Im a > 0).$
131. $D = \{z \mid |z| < 1\}, \quad G = \{w \mid |w| < 1\},$
 $w(\frac{1}{2}) = 0, \quad \arg w'(\frac{1}{2}) = 0.$
132. $D = \{z \mid |z| < 1\}, \quad G = \{w \mid |w| < 1\},$
 $w(\frac{1}{2}) = 0, \quad \arg w'(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2}.$
133. $D = \{z \mid |z| < 1\}, \quad G = \{w \mid |w| < 1\},$
 $w(0) = 0, \quad \arg w'(0) = -\frac{\pi}{2}.$
134. $D = \{z \mid |z| < 1\}, \quad G = \{w \mid |w| < 1\},$
 $w(a) = a, \quad \arg w'(a) = \alpha \ (a < 1).$
135. $D = \{z \mid |z| < R_1\}, \quad G = \{w \mid |w| < R_2\},$
 $w(a) = b, \quad \arg w'(a) = \alpha \ (a < R_1, b < R_2).$
136. $D = \{z \mid |z| < 1\}, \quad G = \{w \mid |w - 1| < 1\},$
 $w(0) = \frac{1}{2}, \quad w(1) = 0.$

137. $\{z \mid |z| < 1\}$ доирани $\{Re w > 0\}$ ўнг ярим текислиққа акслантирувчи шундай каср-чизикли $w(z)$ функциянинг умумий қўринишини топингки,

$$w(z_1) = 0, \quad w(z_2) = \infty$$

шартлар бажарилсин. Бу ерда z_1, z_2 нуқталар $\{z \mid |z| = 1\}$ айлананинг $\arg z_1 < \arg z_2$ тенгсизлиқни қаноатлантирувчи берилган нуқталари.

138. $\{z \mid |z| < R\}$ доирани узини узига акслантирувчи ва $w(a) = 0 \ (|a| < R)$ шартни қаноатлантирувчи каср-чизикли функциянинг умумий қўринишини топинг.

139. $\{z \mid |z| < R\}$ доирани узини узига акслантирувчи ва $w(a) = b \ (|a| < R, |b| < R)$ шартни қаноатлантирувчи каср-чизикли $w(z)$ функциянинг умумий қўринишини топинг.

140. $\{z \mid |z| < R\}$ доирани узини узига акслантирувчи ва $w(\pm R) = \pm R$ шартларни қаноатлантирувчи каср-чизикли $w(z)$ функциянинг умумий қўринишини топинг.

141. $\{z \mid |z| < 1\}$ доирани узини узига шундай акслантирингки, ҳақиқий ўқнинг $(y=0, 0 \leq x < a) \ (a < 1)$ кесмаси ҳақиқий ўқнинг координата бошига нисбатан симметрик бўлган кесмасига акслансин. Ҳосил бўлган кесманинг узунлигини ҳисобланг.

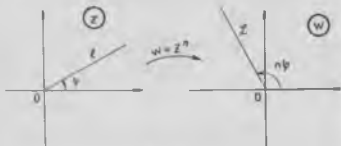
3-§. Даражали функция

5-таъриф. Ушбу

$$w = z^n \quad (n \in \mathbb{N}, n > 1)$$

қурилишдаги функция даражали функция дейилади. Даражали функция бутун комплекс текислик C да голоморф. Бу функция ёрдамида бажариладиган акслантириш ихтиёрий $z \in C \setminus \{0\}$ нуқтада конформ бўлади: $w' = nz^{n-1}$ ҳосила $C \setminus \{0\}$ да нолдан фарқлидир.

Агар $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\psi}$ дейилса, $\rho = r^n$, $\psi = n\varphi$ эканлигини курамиз. Бу тенгликлардан $w = z^n$ функция аргументи φ га тенг булган, 0 нуқтадан чиқувчи l нурни, аргументи $n\varphi$ га тенг булган l нурга акслантиришини курамиз. (18-чизма).



18-чизма

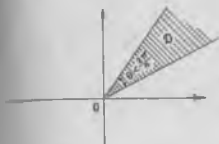
Агарда биз (z) текислигида орасидаги бурчаги $\frac{2\pi}{n}$ дан кичик булган иккита нур билан чегараланган D соҳани қарасак (19-чизма), $w = z^n$ функцияни бу соҳада бир япроқли эканлигини курамиз.

Масалан, $w = z^n$ функция

$$\frac{2k\pi}{n} < \arg z < \frac{2(k+1)\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

соҳаларнинг ҳар бирида бир япроқли, демак, конформ булиб, уларнинг ҳар бирини (w) текислигидаги $C \setminus R^+$ соҳага акслантиради (20-чизма).

Жумладан, $w = z^n$ функцияси $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$ соҳани $\operatorname{Im} w > 0$ юқори ярим текисликка конформ акслантиради.



19-чизма



20-чизма

10-мисол. Ушбу

$$w = z^3$$

даражати функция ёрдамида (z) текисликдаги $E = \{z \in \mathbb{C} : \arg z = \frac{\pi}{4}\}$ тўламнинг (w) текисликдаги аксини топинг.

Берилган E тўламни

$$E = \{z \in \mathbb{C} : \arg z = \frac{\pi}{4}\} = \{\varphi = \frac{\pi}{4}, 0 < r < \infty\}$$

деб

$$w(E) = \{w \in \mathbb{C} : \psi = \frac{3\pi}{4}, 0 < \rho < +\infty\} = \{w \in \mathbb{C} : \arg w = \frac{3\pi}{4}\}$$

бўлишини топамиз.

11-мисол. Ушбу

$$w = z^4$$

даражати функция ёрдамида (z) текисликдаги

$$E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \frac{\pi}{8} < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$$

соҳанинг (w) текисликдаги аксини топинг.

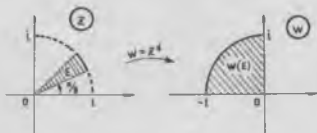
Берилган E соҳани

$$E = \{0 \leq r < 1, \frac{\pi}{8} < \varphi < \frac{\pi}{4}\}$$

деб.

$$w(E) = \{0 \leq \rho < 1, \frac{\pi}{2} < \psi < \pi\} = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1, \frac{\pi}{2} < \arg w < \pi\}$$

бўлишини топамиз (21-чизма).



21-чизма.

12-мисол. (z) текисликдаги

$$E = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$$

секторни (w) текисликдаги $\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ бирлик доирага шундай акслантирингки, $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ нукта $w_1 = 0$ нуктага, $z_2 = 0$ нукта эса $w_2 = 1$ нуктага ўтсин.

Берилган $E = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$ секторни $w = z^4$ функция ёрдамида $\{t \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} t > 0\}$ юқори ярим текисликка акслантирамыз. Унда $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ нукта $t_1 = z_1^4 = i$ нуктага, $z_2 = 0$ нукта эса $t_2 = 0$ нуктага ўтади. Сўнгра $\{t \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} t > 0\}$ юқори ярим текисликни $\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ бирлик доирага шундай акслантирайликки, $t_1 = i$ нукта $w_1 = 0$ га ўтсин (22-чизма).



22-чизма.

Равшанки, бундай акслантиришнинг умумий кўриниши

$$w = e^{i\theta} \frac{1-i}{1+i}$$

бутили (2-§ га). $t_2=0$ нуқтанинг $w_2=1$ нуқтага аксланишидан фойдаланиб,

$$1 = e^{i\theta} \frac{1-i}{1+i} = -e^{i\theta}$$

яъни, $e^{i\theta} = -1$ булишини топамиз. Демак,

$$w = (-1) \frac{1-i}{1+i} = -\frac{1-i}{1+i}$$

булади. Агар $t=z^4$ эканини эътиборга олсак, унда

$$w = -\frac{1-i}{z^4+i}$$

булиб, у изланаётган акслантириш булади.

Амалиётда $w=z^4$ функциясида бурчакли соҳаларни узидан соддароқ соҳаларга акслантиришда фойдаланилади.

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

Қуйидаги тупламларнинг $w=z^2$ акслантириш ердамидаги аксини топинг:

142. $\operatorname{Re} z = a, (a > 0).$

143. $\operatorname{Im} z = a, (a > 0).$

144. $\arg z = \alpha, (0 < \alpha \leq \pi).$

145. $|z| = r, \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}.$

146. $\operatorname{Im} z > 0.$

147. $\operatorname{Re} z > 0.$

148. $\pi < \arg z < \frac{3\pi}{2}.$

149. $|z| < 1, \frac{3\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{4}.$

150. $\operatorname{Im} z < -1.$

151. $\operatorname{Re} z > 1.$

152. $|z| < 2, 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}.$

153. $|z| > \frac{1}{2}, \operatorname{Re} z > 0$

Қуйидаги E тупламнинг берилган акслантириш ёрдамидаги аксини топинг:

154. $E = \{ |z| < 1, \arg z = \frac{\pi}{4} \}, w = z^3.$

$$155. E = \{ |z| > 1, \arg z = \frac{\pi}{3} \}, w = z^3.$$

$$156. E = \{ |z| = 2, \frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{3} \}, w = z^6.$$

$$157. E = \{ |\arg z| < \frac{\pi}{8}, z \in [0, 1] \}, w = z^8.$$

158. $D = \{ |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0 \}$ ярим доирани $G = \{ \operatorname{Im} w > 0 \}$ юқори ярим текисликка шундай акслантирингки, натижада

$$w(-1) = 0, \quad w(0) = 1, \quad w(1) = \infty$$

шартлар бажарилсин.

159. $D = \{ |z| > 1, \operatorname{Im} z > 0 \}$ соҳани $G = \{ \operatorname{Im} w > 0 \}$ юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи функцияни топинг.

$D = \{ |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0 \}$ ярим доирани $G = \{ \operatorname{Im} w > 0 \}$ ярим текисликка конформ акслантирувчи ва қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $w(z)$ функцияни топинг:

$$160. w(1) = -1, \quad w(-1) = 1, \quad w(0) = \infty$$

$$161. w\left(\frac{1}{2}\right) = i, \quad \arg w'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

$D = \{ |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0 \}$ ярим доирани $G = \{ |w| < 1 \}$ доирага конформ акслантирувчи ва қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $w(z)$ функцияни топинг:

$$162. w(1) = 1, \quad w(-1) = -1, \quad w(0) = -i.$$

$$163. w\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \arg w'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Қуйидаги соҳаларни $\{ \operatorname{Im} w > 0 \}$ юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи $w(z)$ функцияни топинг:



23-чизма.

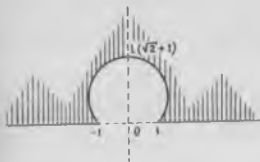
$$164. |z| < 1, |z - i| > 1.$$

$$165. |z| > 1, |z - i| < 1.$$

$$166. |z| > 2, |z - \sqrt{2}| < \sqrt{2}.$$

167. 23-чизмада тасвирланган соҳани $\{ \operatorname{Im} w > 0 \}$ юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи $w(z)$ функцияни топинг.

168. 24-чизмада тасвирланган соҳани $\{ \operatorname{Im} w > 0 \}$ юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи $w(z)$ функцияни топинг.



24-чи сурат

169. $\{|z| < 1\}$ доирани $\{w \in (-\infty, -\frac{1}{4}]\}$ соҳага конформ акслантирувчи ва

$$w(0) = 0, \quad w'(0) > 0$$

шартларни қаноатлантирувчи $w(z)$ функцияни топинг.

170. $\{|\arg z| < \frac{\pi}{4}\}$ бурчакни $\{|w| < 1\}$ доирага конформ акслантирувчи ва

$$w(1) = 0, \quad \arg w'(1) = \pi$$

шартларни қаноатлантирувчи $w(z)$ функцияни топинг.

4-§. Жуковский функцияси

6-таъриф. Ушбу

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (11)$$

функция Жуковский функцияси деб аталади.

Бу функция $z=0$ ва $z=\infty$ нуқталардан ташқари бутун текисликда голоморф функциядир.

Жуковский функциясининг ҳосиласи $w' = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right)$

бўлиб, $\{+1; -1\}$ нуқталардан ташқарида $w' \neq 0$ дир.

$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ функция ёрдамида акслантириш $\{+1; -1\}$

нуқталардан ташқарида ($z=0$, $z=\infty$ нуқталарда ҳам) конформдир.

(11) функция бирор E соҳада ($E \subset C$) бир япроқли бўлиши учун бу соҳа ушбу

$$z_1 z_2 = 1$$

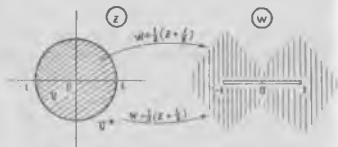
муносабатни қаноатлантирувчи z_1 ва z_2 нуқталарга эга бўлмаслиги зарур ва етарли.

Сда бирлик доира $U = \{z \in C : |z| < 1\}$ ни олайлик. Жуковский функцияси

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

бу доирада бир япроқли ва уни (w) текисликдаги $[-1, 1]$ кесманинг ташқарисига акслантиради.

Худди шунингдек, Жуковский функцияси бирлик доиранинг ташқариси $U^* = \{z \in C : |z| > 1\}$ ни $[-1, 1]$ сегментининг ташқарисига конформ акслантиради (25-чизма).



25-чизма.

Агар Жуковский функцияси

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

да

$$z = re^{i\varphi}, \quad w = u + iv$$

лейилса, унда

$$u + iv = \frac{1}{2} \left(re^{i\varphi} + \frac{1}{r} e^{-i\varphi} \right)$$

булиб,

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi, \\ v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi \end{cases} \quad (12)$$

бўлади. (12) дан (11) акслантириш учун қуйидагилар келиб чиқади:

1) (z) текисликдаги $\{z \in C: |z|=r, r>1\}$ айлана (w) текисликдаги фокуслари $(-1, 0)$ ва $(1, 0)$ нуқталарда, ярим ўқлари

$$a = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right), \quad b = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right)$$

булган эллипсга аксланади.

2) (z) текисликдаги $\{z \in C: |z|=r, r<1\}$ айлана (w) текисликдаги фокуслари $(-1, 0)$ ва $(1, 0)$ нуқталарда ярим ўқлари

$$a = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right), \quad b = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} - r \right)$$

булган эллипсга аксланади.

3) (z) текисликдаги $\{z \in C: \arg z=0\}$ нур (w) текисликдаги $\{w \in C: \arg w=0\}$ нурга, $\{z \in C: \arg z=\pi\}$ нур $\{w \in C: \arg w=\pi\}$ нурга аксланади.

4) (z) текисликдаги $\{z \in C: \arg z = \frac{\pi}{2}\}$ ҳамда $\{w \in C: \arg w = \frac{3\pi}{2}\}$ нурларнинг ҳар бири (w) текисликдан $\{w \in C: u=0\}$ тўғри чизиққа аксланади.

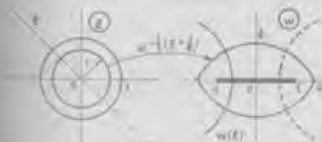
5) (z) текисликдаги

$$\left\{ z \in C: \arg z = \varphi; \varphi \neq 0, \varphi \neq \frac{\pi}{2}, \varphi \neq \pi, \varphi \neq \frac{3\pi}{2} \right\}$$

нур (w) текисликдаги ушбу

$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi} = 1$$

гиперболаининг мос «шоҳчасига» аксланади (26-чизма).



13-мисол. Жуковский функцияси ёрдамида

$$I = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, \frac{3\pi}{4} < \arg z < \frac{7\pi}{4}\}$$

ёйнинг аксини топинг.

Равшанки,

$$I = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, \frac{3\pi}{4} < \arg z < \frac{7\pi}{4}\} = \{r = 1, \frac{3\pi}{4} < \varphi < \frac{7\pi}{4}\}.$$

(12) муносабатларга кўра

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi = \cos \varphi,$$

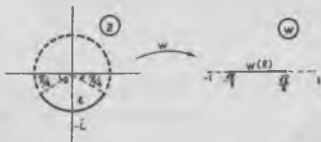
$$v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi = 0$$

булади.

Агар $\frac{3\pi}{4} < \varphi < \frac{7\pi}{4}$ бўлганда $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos \varphi < \frac{\sqrt{2}}{2}$ бўлишини эътиборга олсак,

$$w(I) = \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2} < u < \frac{\sqrt{2}}{2}, v = 0 \right\} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

эканини топамиз (27-чизма).



27-чизма

14-мисол. Жуковский функцияси

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

ёрдамида

$$I = \{z \in \mathbb{C} : \arg z = \frac{3\pi}{4}\}$$

нурнинг аксини топинг.

Аввало I ни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$I = \left\{ \varphi = \frac{3\pi}{4}, 0 \leq r < \infty \right\}.$$

Сунг

$$w = u + iv \quad (z = re^{i\varphi})$$

деб, (12) муносабатлардан топамиз:

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(r + \frac{1}{r} \right).$$

$$v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(r - \frac{1}{r} \right).$$

Равшанки, бу чизиқнинг тенгламаси $w(h) = \{u^2 - v^2 = \frac{1}{2}, u < 0\}$ гипербола бўлагидир (28-чизма).



28-чизма

15-мисол. Жуковский функцияси ёрдамида (z) текисликдаги

$$E = \left\{ z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{4} \right\}$$

соҳанинг аксини топинг.

Берилган E соҳанинг чегараси l_1 , l_2 ва l_3 чизиқлардан ташкил топган: $\partial E = l_1 \vee l_2 \vee l_3$. Бунда

$$l_1 = \left\{ z = r e^{i\varphi} \in \mathbb{C} : \varphi = 0, 0 < r < 1 \right\},$$

$$l_2 = \left\{ z = r e^{i\varphi} \in \mathbb{C} : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, r = 1 \right\},$$

$$I_3 = \left\{ z = r e^{i\varphi} \in C: \varphi = \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq 1 \right\},$$

Жуковский функцияси ёрдамида бу чизикларнинг аксини топамиз. Бунда (12) формулалардан фойдаланамиз

$$w(I_1) = \left\{ w = u + iv \in C: u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi, v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi \right\} = \\ = \left\{ u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right), v = 0; 0 < r < 1 \right\} = \{1 < u < \infty, v = 0\} = I_1',$$

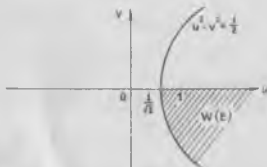
$$w(I_2) = \left\{ w = u + iv \in C: u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi, v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi \right\} = \\ = \left\{ u = \cos \varphi, v = 0; 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \right\} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \leq u \leq 1, v = 0 \right\} = I_2',$$

$$w(I_3) = \left\{ w = u + iv \in C: u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi, v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi \right\} = \\ = \left\{ u = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(r + \frac{1}{r} \right), v = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(r - \frac{1}{r} \right), 0 \leq r \leq 1 \right\} = \\ = \left\{ u^2 - v^2 = \frac{1}{2}, v \leq 0 \right\} = I_3'.$$

Агар $w(E) = F$ дейилса, унда $\partial F = I_1' \cup I_2' \cup I_3'$ бўлади. Демак,

$$w(E) = F = \left\{ u^2 - v^2 > \frac{1}{2}, u > 0, v < 0 \right\}$$

бўлади (29-чизма).



29-чизма
110

16-мисол Ушбу

$$w = \frac{z}{z^2 + 1}$$

акслантириш ёрдамида (z) текисликдаги ушбу

$$E = \{z \in C: |z| < 1\}$$

соҳанинг (доиранинг) (w) текисликдаги аксини топимиз.

Аввало берилган $w = \frac{z}{z^2 + 1}$ функцияни

$$w = \frac{1}{z \left(\frac{1}{z} + 1 \right)}$$

қуринишда ёзиб оламиз. Агар $w_1 = \frac{1}{z + \frac{1}{z}}$ дейилса, унда

$$w = \frac{1}{2w_1}$$

бўлади.

Маълумки, $w_1 = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ функция (Жуковский функцияси) бирлик доира

$$E = \{z \in C: |z| < 1\}$$

ни $[-1, 1]$ кесманинг ташқарисига акслантиради.

Қаср чизикли

$$w = \frac{1}{2w_1}$$

функция $[0, 1]$ кесмани $\left[\frac{1}{2}, +\infty \right)$ нурга, $[-1, 0]$ кесмани

эса $(-\infty; -\frac{1}{2}]$ нурга акслантиради. Демак, берилган соҳанинг аксини

$$w(E) = \left\{ w \in C: w \in \left\{ (-\infty; -\frac{1}{2}] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty \right) \right\} \right\}$$

бўлади (30-чизма).



30-чизма

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

Жуковский функциясини қуйидаги соҳаларда бир япроқликка текширинг:

- 171. $|z| > 2$.
- 172. $|z| < 2$.
- 173. $|z| < 2$, $0 < \arg z < \frac{3\pi}{2}$.
- 174. $\operatorname{Im} z > 0$.
- 175. $\operatorname{Im} z < 0$.
- 176. $\operatorname{Re} z > 0$.
- 177. $\operatorname{Re} z < 0$.
- 178. $0 < \arg z < \frac{3\pi}{4}$.
- 179. $\operatorname{Im} z > (\operatorname{Re} z)^2$.
- 180. $\operatorname{Im} z < (\operatorname{Re} z)^2$.

Жуковский функцияси ёрдамида қуйидаги тўпламларнинг аксини топинг:

- 181. $|z| = \frac{1}{2}$.
- 182. $|z| = 2$.
- 183. $\arg z = \frac{\pi}{4}$.
- 184. $|z| > 2$.
- 185. $|z| < \frac{1}{2}$.
- 186. $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$.
- 187. $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$, $z \in [0, i]$.

$$188. |z| < 1, z \in [0, 1].$$

$$189. \operatorname{Im} z > 0, z \in \left\{ |z| = 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} < \arg z < \pi \right\}.$$

$$190. |z| < 1, \operatorname{Im} z < 0, z \in \left[-i, -\frac{i}{2} \right]$$

$$191. |z| < 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}.$$

$$192. |z| < 1, +\frac{5\pi}{4} < \arg z < +\frac{7\pi}{4}.$$

$$193. \operatorname{Im} z > 0.$$

$$194. \operatorname{Im} z < 0.$$

$$195. |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0.$$

$$196. |z| < 1, \operatorname{Im} z < 0.$$

$$197. |z| > 1, \operatorname{Im} z < 0.$$

$$198. |z| > 1, \operatorname{Im} z > 0.$$

$$199. |z| < R, \operatorname{Im} z > 0.$$

$$200. R < |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0.$$

$$201. \frac{1}{R} < |z| < R, \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z > 0.$$

$$202. \frac{\pi}{2} - \alpha < \arg z < \frac{\pi}{2} + \alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right).$$

203. $\{|z| < 1, z \in [a, 1]\}$, $(0 < a < 1)$ соҳанинг Жуковский функцияси ёрдамидаги аксини топинг.

204. $\{|z| < 1, z \in [a, 1]\}$, $(-1 < a < 0)$ соҳанинг Жуковский функцияси ёрдамидаги аксини топинг.

$$205. \left\{ |z - ih| > \sqrt{1 + h^2} \right\} \text{ соҳанинг } w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \text{ Жуковский}$$

функцияси ёрдамидаги акси учлари $w = \pm 1$ нуқталарда бўлган ва $w = ih$ нуқтадан ўтувчи айлананинг ёйи бўйича қирқилган (w) текислиги бўлишини исботланг.

206. Жуковский функцияси билан фойдаланиб 31-чизмада тасвирланган соҳани $\{|w| < 1\}$ бирлик доирага конформ акслантирувчи $w(z)$ функцияни топинг.

207. 32-чизмада тасвирланган соҳани $\{|w| < 1\}$ бирлик доирага конформ акслантирувчи $w(z)$ функцияни топинг.

208. $\{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ ярим доирани $\{|w| < 1\}$ доирага конформ акслантирувчи ва

$$w\left(\frac{i}{2}\right) = 0, \arg w'\left(\frac{i}{2}\right) = 0$$

шартларни қаноатлантирувчи $w(z)$ функцияни топинг.



31-чизма



32-чизма

209. $D = \{z \mid |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ ярим доиранинг

$$w' = \frac{1}{z^2 + 1}$$

акслантириш ёрдамидаги акси $w(D)$ ни топинг.

210. $D = \{0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$ бурчакнинг

$$w' = \frac{1}{2} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right)$$

акслантириш ёрдамидаги акси $w(D)$ ни топинг.

5-§. e^z функцияси. Тригонометрик функциялар

I*. Маълумки $n \rightarrow \infty$ да

$$\left\{ \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n \right\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots; z \in \mathbb{C})$$

кетма-кетликнинг limiti e^z га тенг.

Комплекс текислик $\mathbb{C}$ да ихтиёрий z ни олиб, қуйидаги

$$\left\{ \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n \right\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

кетма-кетликни қараймиз, $n \rightarrow \infty$ да бу кетма-кетликнинг limiti мавжуд бўлади ва бу лимитга z комплекс сони учун e^z нинг қиймати дейилади:

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Агар $z = x + iy$ десак

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (13)$$

тенглик уринли (қ. 1-боб, 4-§, 117-мисол).

Кўрсаткичли $w=e^z$ функциянинг асосий хоссаларини келтирамиз:

1) e^z функция C текисликда голоморф ва унинг ҳосиласи

$$(e^z)' = e^z$$

бўлади.

2) e^z функция учун

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2} \quad (z_1 \in C, z_2 \in C)$$

бўлади.

3) e^z функция даврий бўлиб, унинг асосий даври $2\pi i$ бўлади:

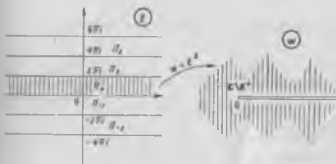
$$e^{z+2\pi i} = e^z.$$

4) $\forall z \in C$ учун $(e^z)' \neq 0$ бўлиб, $w=e^z$ функция ёрдамидаги акслантириш C текисликнинг ҳар бир нуқтасида конформ акслантириш бўлади.

(13) тенгликка кўра, $|e^z| = e^x$, $\arg e^z = y$. Демак, $w=e^z$ функция (z) текисликдаги $\{x=x_0\}$ тўғри чизиқни $|w|=e^{x_0}$ айланага, $\{y=y_0\}$ тўғри чизиқни эса $\{\arg w=y_0\}$ нурга акслантиради. $w=e^z$ функция $P=\{y_0 < \operatorname{Im} z < y_0 + 2\pi\}$ соҳада бир япроқли бўлади. Жумладан, $w=e^z$ функция ушбу

$$P_k = \{2k\pi < \operatorname{Im} z < 2(k+1)\pi\}, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

соҳаларнинг ҳар бирини (w) текисликдаги $C \setminus R^+$ га конформ акслантиради (33-чизма). Худди шунга ўхшаш $w=e^z$



33-чизма

функция $\{0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ соҳани юқори ярим текисликка акслантиради.

17-мисол. Курсаткичи

$$w = e^z$$

функциянинг $z = 1 \pm \frac{\pi}{2}i$ ҳамда $z = k\pi i$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) нуқталардаги қийматларини топинг.

(13) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$w\left(1 \pm \frac{\pi}{2}i\right) = e^{1 \pm \frac{\pi}{2}i} = e^1 e^{\pm \frac{\pi}{2}i} = e \left[\cos\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) \right] = e(\pm i) = \pm ie$$

$$w(k\pi i) = e^{k\pi i} = \cos k\pi + i \sin k\pi = \cos k\pi = (-1)^k \\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

18-мисол. Курсаткичи

$$w = e^z$$

функция C текисликдаги

$$D = \left\{ z \in C : 0 < \operatorname{Re} z < 1, 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2} \right\}$$

туғри тўртбурчакли соҳани C текисликдаги қандай соҳага акслантиради?

$z = x + iy$ ҳамда $w = re^{i\psi}$ деб олайлик. Унда D соҳада

$$e^x < r < e^1, 0 < \psi < \frac{\pi}{2}$$

булади. Шуларни эътиборга олиб топамиз:

$$w(D) = \left\{ w = re^{i\psi} \in C : 1 < r < e, 0 < \psi < \frac{\pi}{2} \right\}$$

D ҳамда $w(D)$ соҳалар 34-чизмада тасвирланган.

19-мисол. Ушбу

$$w = e^z$$

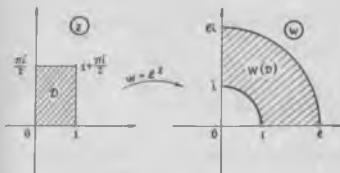
акслантириш ёрдамида C текисликдаги

$$D = \{ z \in C : \operatorname{Re} z > 0, -\pi < \operatorname{Im} z < \pi \}$$

соҳани - ярим йулакнинг C текисликдаги аксини топинг.

Равшанки, $z = x + iy$, $w = re^{i\psi}$ дейилса, унда

$$D = \{(x, y) \in R^2 : x > 0, -\pi < y < \pi\}$$



34-чизма

бўлиб, бу соҳада

$$\rho > 1, \quad -\pi < \psi < \pi$$

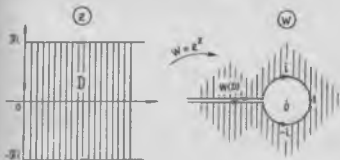
бўлади. Демак,

$$\begin{aligned} w(D) &= \{w = \rho e^{i\psi} \in \mathbb{C} : \rho > 1, \quad -\pi < \psi < \pi\} = \\ &= \{w \in \mathbb{C} : |w| > 1, \quad w \notin (-\infty, -1]\}. \end{aligned}$$

Бу $w(D)$ соҳа $[-\infty, -1]$ нур бўйича қирқилган

$$\{w \in \mathbb{C} : |w| > 1\}$$

доиранинг ташқарисини ифодалайди (35-чизма).



35-чизма

20-м исол. $\mathbb{C}$ текисликда мавҳум уққа параллел қилиб олинган ва $\mathbb{H}$ кенгликка эга бўлган

$$D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < H\}$$

соҳани (йўлакни) C_w текисликдаги ушбу
 $(w \in \mathbb{C} : |w| < 1)$

бирлик доирага конформ акслантиринг.

Бу масалани бир нечта акслантиришларни кетма-кет
 бажариш билан ҳал қиламиз:

1) берилган D соҳани

$$w_1 = e^{\frac{\pi}{H} z} = iz$$

акслантириш ёрдамида

$$D_1 = \{w_1 \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} w_1 < H\}$$

соҳага акслантирамыз,

2) бу D_1 соҳани

$$w_2 = \frac{\pi}{H} w_1$$

акслантириш ёрдамида

$$D_2 = \{w_2 \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} w_2 < \pi\}$$

соҳага акслантирамыз,

3) D_2 соҳани қуйидаги

$$w_3 = e^{w_2}$$

акслантириш ёрдамида

$$D_3 = \{w_3 \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w_3 > 0\}$$

соҳага (юқори ярим текисликка) акслантирамыз.

4) D_3 соҳани

$$w = \frac{w_3 - i}{w_3 + i}$$

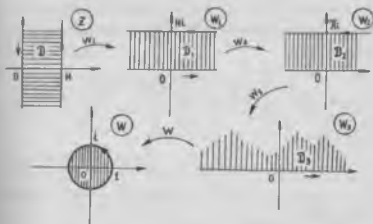
каср чизиқли акслантириш ёрдамида

$$D_4 = \{w_4 \in \mathbb{C} : |w_4| < 1\}$$

соҳага — бирлик доирага акслантирамыз. Демак, излана-
 ётган акслантиришни қуйидагича

$$w = \frac{w_1 - i}{w_1 + i} = \frac{e^{\frac{\pi}{H} z} - i}{e^{\frac{\pi}{H} z} + i} = \frac{e^{\frac{\pi}{H} z} - i}{e^{\frac{\pi}{H} z} + i}$$

булишини топамиз (36-чизма).



36-сурат

21-мисол. Ушбу

$$D = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi, z \in [a, +\infty)\}$$

соҳани $([a, +\infty)$ нур бўйича қирқилган йулакни $a \in \mathbb{R}$ юқори ярим текисликка конформ акслантиринг.

Берилган D соҳани олдин

$$w_1 = e^z$$

функция ёрдамида $(-\infty, 0]$ ва $[e^a, +\infty)$ нурлар бўйича кесилган (w_1) текисликка акслантирамиз:

$$D_1 = \{w_1 \in \mathbb{C} : w_1 \in (-\infty, 0] \cup [e^a, +\infty)\}$$

Сунгра D_1 соҳани

$$w_2 = \frac{w_1 - e^0}{w_1}$$

акслантириш ёрдамида $[0, +\infty)$ нур бўйича кесилган (w_2) текисликка акслантирамиз:

$$D_2 = \{w_2 \in \mathbb{C} : w_2 \in [0, +\infty)\}$$

Нихоят, ҳосил булган D_2 соҳани ушбу

$$w = \sqrt{w_2}, \quad \sqrt{-1} = i$$

акслантириш ёрдамида (w) текисликнинг юқори ярим қисмига акслантирамиз ($\sqrt{w_2}$ — функция қуйида, 6-§ да келтирилади).

Натижада,

$$w = \sqrt{w_2} = \sqrt{\frac{w_1 - e^{\alpha}}{w_1}} = \sqrt{\frac{e^z - e^{\alpha}}{e^z}} = \sqrt{1 - e^{\alpha - z}}, \quad \sqrt{-1} = i$$

булади. Демак,

$$w = \sqrt{1 - e^{\alpha - z}}, \quad \sqrt{-1} = i$$

акслантириш берилган D соҳани юқори ярим текисликка акслантиради.

2°. (13) тенгликда $x=0$ десак,

$$\begin{cases} e^{iy} = \cos y + i \sin y, \\ e^{-iy} = \cos y - i \sin y \end{cases} \quad (14)$$

тенгликларга эга бўлиб, бундан

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \quad (15)$$

ифодаларни оламиз. (15) формулалар ихтиёрий ҳақиқий сон учун ўринли бўлиб, улардан биз

$$w = \cos z, \quad w = \sin z$$

функцияларни аниқлашда фойдаланишимиз мумкин.

7-таъриф. z комплекс аргумент учун тригонометрик функциялар қуйидагича аниқланади:

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \\ \operatorname{tg} z &= \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}, \\ \operatorname{ctg} z &= \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Тригонометрик функцияларнинг асосий хоссаларини келтирамиз:

1) $\cos z$ ва $\sin z$ функциялар C комплекс текисликда гомоморф ва уларнинг ҳосилалари

$$(\cos z)' = -\sin z$$

$$(\sin z)' = \cos z$$

булади.

2) $\operatorname{tg} z$ функция

$$\{z \in C: z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

тўпламда, $\operatorname{ctg} z$ функция эса

$$\{z \in C: z \neq k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

тўпламда голоморф бўлади.

3) $\sin z$, $\operatorname{ctg} z$, $\operatorname{tg} z$ тоқ функциялар, $\cos z$ эса жуфт функция булади.

4) Тригонометрик функциялар даврий булиб, $\cos z$ ва $\sin z$ нинг даври 2π га, $\operatorname{tg} z$ ва $\operatorname{ctg} z$ нинг даври π га тенгдир.

5) Ҳақиқий узгарувчи тригонометрик функциялар орасидаги муносабатларни ифодаловчи формулалар комплекс узгарувчи булган ҳолда ҳам уринли бўлади.

6) Ушбу

$$\begin{aligned} \cos iz &= \operatorname{ch} z, & i \sin z &= -\operatorname{sh} z; \\ \cos z &= \operatorname{ch} iz, & \sin z &= -i \operatorname{sh} iz \end{aligned}$$

муносабатлар уринли, бунда

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} \quad (17)$$

Одатда (17) функциялар *гиперболик функциялар* дейилади.

7) Тригонометрик функциялар ёрдамида бажариладиган акслантиришлар бир нечта (маълум) акслантиришларнинг композицияси натижасидан иборат бўлади.

Масалан,

$$w = \sin z$$

функция ёрдамида бажариладиган акслантириш

$$w_1 = iz, \quad w_2 = e^{w_1}, \quad w_3 = \frac{1}{i} w_2.$$

акслантиришлар композициясидан иборат бўлади:

$$w = \sin z = \frac{1}{2} \left(w_3 + \frac{1}{w_3} \right).$$

Шунингдек,

$$w = \operatorname{tg} z$$

функция ёрламида бажариладиган акслантиришлар ушбу

$$w_1 = 2iz, \quad w_2 = e^{w_1}$$

акслантиришлар композициясидан иборат булади:

$$w = \operatorname{tg} z = -i \frac{w_2 - 1}{w_2 + 1}.$$

22-мисол. Ушбу

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \quad (z \in \mathbb{C})$$

тенгликнинг уринли булишини исботланг.

Маълумки,

$$\sin z = \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2}$$

Унда

$$\sin^2 z = \left(\frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} \right)^2 = -\frac{1}{4} (e^{i2z} - 2 + e^{-2iz}),$$

$$\cos^2 z = \left(\frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (e^{i2z} + 2 + e^{-2iz})$$

булиб, бу тенгликларни ҳадма-ҳад қушсак,

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

булади.

23-мисол. Ихтиёрий ($z \in \mathbb{C}$) комплекс сон учун ушбу

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad (18)$$

Эйлер формуласини исботланг.

Тригонометрик функцияларнинг таърифига кура

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

булиб, бу тенгликлардан

$$\cos z + i \sin z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} + \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = e^{iz}$$

экани келиб чиқади.

24-мисол. Ихтиёрий $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}$ учун

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

тенгликларнинг уринли булишини курсатинг.

Эйлер формуласидан фойдаланиб, топамиз:

$$\cos(z_1 + z_2) + i \sin(z_1 + z_2) = e^{i(z_1 + z_2)}.$$

Равшанки,

$$e^{i(z_1 + z_2)} = e^{iz_1} e^{iz_2}$$

Яна Эйлер формуласига кўра

$$e^{iz_1} = \cos z_1 + i \sin z_1, \quad e^{iz_2} = \cos z_2 + i \sin z_2$$

булади. Натижада

$$\begin{aligned} \cos(z_1 + z_2) + i \sin(z_1 + z_2) &= (\cos z_1 + i \sin z_1)(\cos z_2 + i \sin z_2) = \\ &= (\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2) + i(\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2) \end{aligned} \quad (19)$$

тенгликка келамиз. Бу тенгликда z_1 ни $-z_1$ га, z_2 ни $-z_2$ га алмаштириб, $\cos z$ функциянинг жуфт, $\sin z$ функциянинг тоқ эканлигини эътиборга олиб, топамиз:

$$\begin{aligned} \cos(z_1 + z_2) - i \sin(z_1 + z_2) &= \\ (\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2) - i(\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2) \end{aligned} \quad (20)$$

(19) ҳамда (20) тенгликларни ҳадлаб қушсак,

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$

(19) тенгликдан (20) тенгликни ҳадлаб айирсак,

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

эқани келиб чиқади.

25-мисол. Ушбу

$$w = \cos z$$

функциянинг комплекс текислик C да чегараланмаганлигини кўрсатини.

Маълумки,

$$\cos z = \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2}.$$

Бу тенгликда $z = iy$ деб оламиз. Унда

$$\cos(iy) = \frac{e^{-i(iy)} + e^{i(iy)}}{2} = \frac{e^{-y} + e^y}{2}$$

булади. Равшанки,

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^{-y} + e^y}{2} = +\infty$$

Бу эса $w = \cos z$ функциянинг C да чегараланмаганлигини билдиради.

26-мисол. Ушбу

$$a) \cos \frac{\pi}{4}; \quad б) \operatorname{sh} i; \quad в) \operatorname{ctg} \frac{1}{2}$$

комплекс сонларнинг ҳақиқий ҳамда мавҳум қисмларини топинг.

а) ҳолни қараймиз. $z = x + iy$ деб, топамиз:

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy).$$

6-хоссага кура

$$\cos(iy) = \operatorname{ch} y, \quad \sin(iy) = i \operatorname{sh} y$$

булишини эътиборга олсак,

$$\cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$$

булади. Бу тенгликдан

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \cos(x + iy) &= \cos x \operatorname{ch} y, \\ \operatorname{Im} \cos(x + iy) &= -\sin x \operatorname{sh} y \end{aligned} \quad (21)$$

булиши хелиб чиқади. Равшанки,

$$\cos i \frac{\pi}{4} = \cos\left(0 + i \frac{\pi}{4}\right).$$

(21) муносабатларда $x=0$, $y = \frac{\pi}{4}$ дейилса, унда

$$\operatorname{Re} \cos i \frac{\pi}{4} = \cos 0 \quad \operatorname{ch} \frac{\pi}{4} = \operatorname{ch} \frac{\pi}{4},$$

$$\operatorname{Im} \cos i \frac{\pi}{4} = -\sin 0 \quad \operatorname{sh} \frac{\pi}{4} = 0$$

булишини топамиз.

б) ҳолни қарайлик

$$\operatorname{sh} z = i \sin(iz)$$

тенгликдан фойдаланиб топамиз:

$$\operatorname{sh} i = i \sin(i \cdot i) = i \sin(-1) = \sin 1 \cdot i$$

Демак,

$$\operatorname{Re} \operatorname{sh} i = 0, \quad \operatorname{Im} \operatorname{sh} i = \sin 1.$$

в) ҳолни қараймиз.

$$\cos(iz) = \operatorname{ch} z, \quad \sin(iz) = i \operatorname{sh} z$$

муносабатларда $z = \frac{1}{2}$ дейилса,

$$\cos\left(i \cdot \frac{1}{2}\right) = \operatorname{ch} \frac{1}{2}, \quad \sin\left(i \cdot \frac{1}{2}\right) = i \operatorname{sh} \frac{1}{2}$$

булиб,

$$\operatorname{ctg}\left(i \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{\cos(i \cdot \frac{1}{2})}{\sin(i \cdot \frac{1}{2})} = -i \operatorname{cth} \frac{1}{2}$$

булади. Демак,

$$\operatorname{Re} \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \operatorname{Im} \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\right) = -\operatorname{cth} \frac{1}{2}.$$

27-мисол. Ушбу

$$w = \sin z$$

функция ёрдамида бажариладиган акслантириш (z) текислигидаги

$$D = \left\{ z \in C: -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Im} z > 0 \right\}$$

соҳани (ярим йўлакни) (w) текисликдаги қандай соҳага акслантиради?

Берилган $w = \sin z$ функция ёрдамида бажариладиган акслантириш бизга маълум булган

$$w_1 = iz, \quad w_2 = e^{w_1}, \quad w_3 = \frac{w_2}{i}$$

акслантиришлар композициясидан иборат булиб,

$$w = \sin z = \frac{1}{2} \left(w_1 + \frac{1}{w_1} \right)$$

булади. Бинобарин, бу акслантиришларни кетма-кет бажариш натижасида $w = \sin z$ учун $w(D)$ топилади:

1) D соҳа $w_1 = iz$ акслантириш натижасида

$$D_1 = \left\{ w_1 \in C: \operatorname{Re} w_1 < 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} w_1 < \frac{\pi}{2} \right\}$$

соҳага ўтади.

2) D_1 соҳа $w_2 = e^{w_1}$ акслантириш натижасида

$$D_2 = \left\{ w_2 \in C: |w_2| < 1, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg w_2 < \frac{\pi}{2} \right\}$$

ярим доирага ўтади.

3) D_2 соҳа $w_1 = \frac{1}{i} w_2$ акслантириш натижасида

$$D_2 = \{w_1 \in \mathbb{C}: |w_1| < 1, \pi < \arg w_1 < 2\pi\}$$

соҳага ўтади.

4) D_3 соҳа $w = \sin z = \frac{1}{2} \left(w_1 + \frac{1}{w_1} \right)$ акслантириш натижа-

сида

$$w(D) = \{w \in \mathbb{C}: \operatorname{Im} w > 0\}$$

соҳага ўтади.

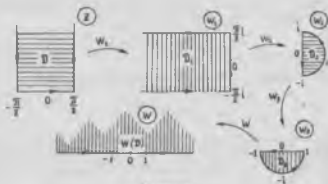
Демак, $w = \sin z$ акслантириш (z) текисликдаги

$$D = \{z \in \mathbb{C}: -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z > 0\}$$

соҳани (w) текисликдаги

$$w(D) = \{w \in \mathbb{C}: \operatorname{Im} w > 0\}$$

соҳага акслантирар экан (37-чизма).



37-чизма

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

Қуйидаги комплекс сонларнинг модули ва аргументи-
ни топинг.

211. e^{2+i}

213. e^{3+4i}

212. e^{2-3i}

214. e^{-3-4i}

e^z функциясининг қуйидаги нуқталардаги қийматларини топинг.

215. $z=2\pi i$.

217. $z = \frac{\pi i}{2}$.

219. $z = \frac{\pi i}{4}$.

216. $z=\pi i$.

218. $z = -\frac{\pi i}{2}$.

220. e^z функцияси фақат ҳақиқий қийматларни қабул қиладиган барча z нуқталар тўпламини топинг.

221. e^z функцияси фақат соф мавҳум қийматларни қабул қиладиган барча z нуқталар тўпламини топинг.

Қуйидаги тўпламларнинг $w=e^z$ акслантириш ёрдамидаги аксини топинг:

222. $\operatorname{Re} z=1$.

229. $\operatorname{Im} z=C$.

223. $\operatorname{Im} z = \frac{\pi}{2}$.

230. $\operatorname{Im} z=k \cdot \operatorname{Re} z+b$.

224. $\operatorname{Re} z=-1$.

231. $-\pi < \operatorname{Im} z < 0$.

225. $\operatorname{Im} z = -\frac{3\pi}{2}$.

232. $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$.

226. $\operatorname{Im} z=\operatorname{Re} z-1$.

233. $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}$.

227. $\operatorname{Im} z=\operatorname{Re} z$.

234. $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi, \operatorname{Re} z > 0$.

228. $\operatorname{Re} z=C$.

235. $\alpha < \operatorname{Im} z < \beta$ ($0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$).

236. $y=x$ ва $y=x+2\pi$ тўғри чизиқлар орасидаги йўлак.

237. $\{\operatorname{Re} z < 0, 0 < \operatorname{Im} z < \alpha \leq 2\pi\}$ - ярим йўлак.

238. $\{\operatorname{Re} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < \alpha \leq 2\pi\}$ - ярим йўлак.

239. $\{\alpha < \operatorname{Re} z < \beta, \gamma < \operatorname{Im} z < \delta\}$ ($\delta - \gamma \leq 2\pi$) - тўғри бурчакли тўртбурчак.

240. $D = \{\operatorname{Re} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\}$ соҳанинг $w=e^z$ акслантириш ёрдамидаги аксини топинг.

241. $D=\{z: 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0\}$ соҳанинг $w=e^z$ акслантириш ёрдамидаги аксини топинг.

Қуйидаги мисолларда айtilган чизмаларда тасвирланган соҳаларни $\{\operatorname{Im} w > 0\}$ юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи бирорта $w(z)$ функцияни топинг.

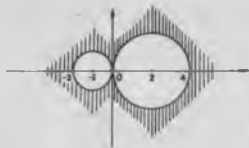
242. 38-чизма.

243. 39-чизма.

244. 40-чизма.

245. $y=x$ ва $y=x+b$ тўғри чизиқлари орасидаги йўлакни юқори ярим текисликка конформ акслантиринг.

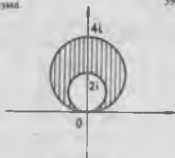
246. $\{|z|=2\}$ ва $\{|z-1|=1\}$ айланалар билан чегараланган доиравий ойчани юқори ярим текисликка конформ акслантиринг.



38-чизма



39-чизма



40-чизма

247. $\{ |z|=2 \}$ ва $\{ |z-3|=1 \}$ айланалар билан чегараланган соҳани юқори ярим текисликка конформ акслантиринг.

248. $\{ |z| > 1, \operatorname{Im} z < 1 \}$ соҳани $\{ |w| < 1 \}$ доирага конформ акслантирувчи ва

$$w(-3i) = \frac{1+i}{2}, \quad \arg w'(-3i) = \frac{\pi}{2}$$

шартларни қаноатлантирувчи $w(z)$ функцияни топинг.

249. $\{ |z| > 1, \operatorname{Im} z < 1 \}$ соҳани $\{ \operatorname{Im} w > 0 \}$ юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи ва ушбу

$$w(-3i) = 1+i, \quad \arg w'(-3i) = \pi$$

шартларни қаноатлантирувчи $w(z)$ функцияни топинг.

Тригонометрик функцияларнинг таърифларидан фойдаланиб қуйидаги тенгликларни исботланг:

250. $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$

251. $\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2.$

252. $\cos z_1 + \cos z_2 = 2 \cos \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot \cos \frac{z_1 - z_2}{2}.$

253. $\operatorname{sh}\left(z + \frac{\pi i}{2}\right) = i \operatorname{ch} z.$

260. $\cos(iz) = \operatorname{ch} z.$

254. $\operatorname{ch}\left(z + \frac{\pi i}{2}\right) = i \operatorname{sh} z.$

261. $\operatorname{ch}(iz) = \cos z.$

255. $\operatorname{sh}(z + \pi i) = -\operatorname{sh} z.$

262. $\operatorname{tg}(iz) = i \operatorname{th} z.$

256. $\operatorname{ch}(z + \pi i) = -\operatorname{ch} z.$

263. $\operatorname{th}(iz) = i \operatorname{tg} z.$

257. $\operatorname{th}(z + \pi i) = \operatorname{th} z.$

264. $\operatorname{ctg}(iz) = -i \operatorname{cth} z.$

258. $\operatorname{ch}(z + 2\pi i) = \operatorname{ch} z.$

265. $\operatorname{cth}(iz) = -i \operatorname{ctg} z.$

259. $\sin(iz) = i \operatorname{sh} z.$

Қуйидаги комплекс аргументли функцияларни ҳақиқий аргументли тригонометрик ва гиперболик функциялар сўрамада ифодаланг ҳамда берилган функцияларнинг молуларини топинг:

266. $\sin z.$

269. $\operatorname{sh} z.$

267. $\cos z.$

270. $\operatorname{ch} z.$

268. $\operatorname{tg} z.$

271. $\operatorname{th} z.$

Қуйидаги комплекс сонларнинг ҳақиқий ҳамда мавҳум қисмларини топинг:

272. $\sin(i\pi).$

277. $\sin(2i).$

273. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + i\right).$

278. $\operatorname{tg}(2-i).$

274. $\operatorname{ch}(2i).$

279. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - i \ln 2\right).$

275. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} i\right).$

280. $\operatorname{cth}(2+i).$

276. $\cos(2+i).$

Қуйидаги функциялар фақат ҳақиқий қийматларни қабул қиладиган z нуқталар тўпламини топинг:

281. $\cos z.$

284. $\operatorname{tg} z.$

282. $\operatorname{ch} z.$

285. $\operatorname{cth} z.$

283. $\sin z.$

z нинг қандай қийматларида қуйидаги функциялар соф мавҳум қийматларни қабул қилади?

286. $\sin z.$

289. $\operatorname{ctg} z.$

287. $\operatorname{sh} z.$

290. $\operatorname{th} z.$

288. $\cos z.$

Куйидаги функцияларни бир япроқликка текширинг.

291. $\sin z$.

293. $\operatorname{tg} z$.

295. $\operatorname{sh} z$.

292. $\cos z$.

294. $\operatorname{ctg} z$.

296. $\operatorname{ch} z$.

Куйидаги тўпламларнинг $w = \cos z$ акслантириш ёрдамидаги аксини топинг.

297. $x=c, y=c$ — Декарт тури.

298. $\{0 < x < \frac{\pi}{2}, y > 0\}$ — ярим йўлак.

299. $\{-\pi < x < 0, y > 0\}$ — ярим йўлак.

300. $\{-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y > 0\}$ — ярим йўлак.

301. $\{0 < x < \pi\}$ — йўлак.

302. $\{0 < x < \pi, -h < y < h\} (h > 0)$ — тўғри бурчакли туртбурчак.

Куйидаги D соҳани берилган $w = f(z)$ акслантириш ёрдамидаги аксини топинг.

303. $D = \{-\frac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}\}, w = \operatorname{tg} z$.

304. $D = \{|\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{4}\}, w = \operatorname{th} z$.

305. $D = \{0 < \operatorname{Re} z < \pi\}, w = \operatorname{tg} z$.

306. $D = \{0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}\}, w = \operatorname{ctg} z$.

307. $D = \{0 < \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z > 0\}, w = \operatorname{tg} \pi z$.

308. $D = \{0 < \operatorname{Im} z < \pi\}, w = \operatorname{ch} z$.

309. $D = \{\operatorname{Re} z > 0, -1 < \operatorname{Im} z < 0\}, w = \operatorname{ch} \pi z$.

310. $D = \{\operatorname{Re} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < 1, z \in [\frac{i}{2}, \frac{1+i}{2}]\}, w = \operatorname{ch} \pi z$.

311. $D = \{|\operatorname{Im} z| < \pi, \operatorname{Re} z > 0\}, w = \operatorname{sh} z$.

312. $D = \{0 < \operatorname{Re} z < 2\pi, \operatorname{Im} z > 0\}, w = \sin z$.

313. $D = \{\operatorname{Re} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}, w = \operatorname{ch} z$.

314. $D = \{0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0\}, w = \operatorname{tg} z$.

315. $D = \{0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}\}, w = \operatorname{tg} z$.

316. $D = \{0 < \operatorname{Im} z < \pi\}, w = \operatorname{cth} z$.

317. $D = \{\operatorname{Re} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}, w = \operatorname{cth} z$.

318. $D = \{|z-1| > 1, |z+1| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ соҳани $\{\operatorname{Im} w > 0\}$ юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи функцияни топинг.

Қуйидаги мисолларда айтилган чизмаларда тасвирлан-
 сохаларни $\{Im w > 0\}$ юқори ярим текисликка конформ
 акслантирувчи бирорта $w(z)$ функцияни топинг.

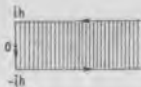
319. 41-чизма.

320. 42-чизма.

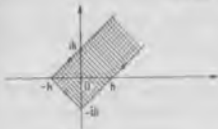
321. 43-чизма.



41-чизма.



42-чизма.



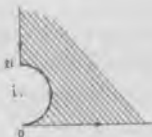
43-чизма.

322. 44-чизма.

323. 45-чизма.



44-чизма.



45-чизма.

6-§. Кўп қийматли функциялар

Комплекс аргументли функциялар назариясида голоморф функцияга тескари бўлган функцияни ўрганиш масаласи ҳам муҳим уринда туради. Аксарият ҳолларда бундай функциялар бир қийматли бўлмай, аргументнинг битта қийматиغا бир нечта (баъзи ҳолларда чексиз кўп) комплекс сон мос қўйилади. Бундай функцияларни қатъий математик асосда бериш йўлида комплекс анализга Риман сиртлари термини киртилади. Биз бу ерда энг содда кўп қийматли функцияларни қараш билан кифояланамиз.

1°. $w = \sqrt[n]{z}$ ($n \geq 2$ - бутун сон) функцияси.

8-таъриф. Ушбу

$$w^n = z \quad (22)$$

тенгламанинг ечимларига z комплекс соннинг n -даражали илдизлари дейилади ва $w = \sqrt[n]{z}$ каби белгиланади.

(22) тенгламани ечиш учун z ва w комплекс сонларнинг тригонометрик шаклларида фойдаланамиз. $z = re^{i\theta}$, $z = Re^{i\varphi}$ деб белгилаб,

$$R^n e^{i n \varphi} = r e^{i \theta}$$

тенгламага эга булаемиз. Бу тенгламадан $R^n = r$, $e^{i n \varphi} = e^{i \theta}$ муносабатларга келамиз. Бундан

$$R = \sqrt[n]{r}, \quad \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Демак, (22) тенгламанинг умумий ечими

$$w = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

булади. Бу ечимлар k нинг $0, 1, 2, \dots, (n-1)$ қийматларида бир-биридан фарқ қилиб, k нинг бошқа қийматларида эса улар такрорланади. Шунинг учун ҳам $\sqrt[n]{z}$ n та қийматли бўлиб, бу қийматлар

$$\sqrt[n]{z} \cdot e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, (n-1) \quad (23)$$

дир.

$w = \sqrt[n]{z}$ нинг функционал хоссаларини ўрганишда тубандаги содда, лекин муҳим теоремадан фойдаланилади

3-теорема. (Тескари функциянинг конформлиги ҳақида). Фараз қилайлик $\xi=f(\eta)$ функцияси (η) текисликдаги D соҳани (ξ) текисликдаги G соҳага конформ акслантирувчи функция бўлсин. У ҳолда бу функцияга тескари бўлган $\eta=f^{-1}(\xi)$ функция G ни D га конформ акслантиради.

Китобхонга $z=w^n$ функциянинг бир япроқли булади-ган соҳалари 3-§ дан маълум: $z=w^n$ функция ушбу ҳар бир

$$D_k = \left\{ \frac{2k\pi}{n} < \arg w < \frac{2(k+1)\pi}{n} \right\}, \quad k=0, 1, 2, \dots, (n-1),$$

соҳада бир япроқли бўлиб, бу соҳани у

$$G = C \setminus R,$$

соҳага конформ акслантиради. $k=0$ десак, $z=w^n$ функция

$$D_0 = \left\{ 0 < \arg w < \frac{2\pi}{n} \right\} \text{ соҳани } G \text{ га конформ акслантиради.}$$

3-теоремага кура бу акслантиришнинг тескарисини G ни D_0 га конформ акслантиради. Бу тескари функция (23) лаги

$$\sqrt[n]{z} e^{i \frac{2\pi k}{n}}$$

га мос келиб, бу бир қийматли функцияга $\sqrt[n]{z}$ кўп қийматли функциянинг **0-тармоғи** дейилади ва у $(\sqrt[n]{z})_0$ каби белгиланади. Худди шундай, $z=w^n$ функция

$$D_1 = \left\{ \frac{2\pi}{n} < \arg w < 2 \frac{2\pi}{n} \right\}$$

соҳани ҳам G га конформ акслантиради. Бу функциянинг тескарисини G ни D_1 га акслантириб, унга $\sqrt[n]{z}$ нинг **1-тар-**

моғи дейилади ва у $(\sqrt[n]{z})_1$ каби белгиланади. Бу жараёни

давом эттириб, $\sqrt[n]{z}$ кўп қийматли функциядан биз n та

бир қийматли тармоқлар $(\sqrt[n]{z})_0, (\sqrt[n]{z})_1, \dots, (\sqrt[n]{z})_{n-1}$ ларни

ажрата оламиз. Бу ҳар бир $(\sqrt[n]{z})_k, k=0, 1, \dots, (n-1)$, тар-

моқ G да бир қийматли ва уни D_k соҳага конформ акслантиради.

Бу тармоқларнинг ўзаро боғланганлигини кўриш учун (z) текислигида r радиусли айлана γ бўйлаб мусбат йўналишда z нуқтани ҳаракатлантирайлик (46-чизма).

z нуқта A дан B орқали A' га қараб ҳаракатланганда

$$(\sqrt[n]{z})_0 = \sqrt[n]{z} \cdot e^{\frac{2\pi i k}{n}}$$

функциянинг қийматлари $\sqrt[n]{r}$ дан $\sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{2\pi i}{n}}$ гача ўзгариб,

олдинги қийматга қайтиб келмасдан, $(\sqrt[n]{z})_1$ тармоқнинг

бошланғич қийматига келади. Шундай қилиб, z нуқта γ айлана бўйлаб бир марта айланса, $w = \sqrt[n]{z}$ функциянинг



46-чизма.



47-чизма.

қийматлари 0-тармоқдан 1-тармоққа ўтади; агар γ бўйлаб 2-марта айланса, қийматлар $(\sqrt[n]{z})_2$ тармоққа мос ўзгаради

ва ҳоказо. Бу жараён z нуқта γ бўйлаб n марта айлангунча давом қилади; n - марта ҳаракат қилиб A' нуқтага келганда $\sqrt[n]{z}$ нинг қийматлари яна қайтиб $(\sqrt[n]{z})_0$ тармоққа келади.

$w = \sqrt[n]{z}$ ни тасвирловчи сирт, $n=2$ ҳолда 47-чизмада берилган. Бу ерда O ва O' нуқталар, I ва I' , γ ва γ' қирралар бирлашган (ёпишган) деб фараз қилинади.

Бу сирт $w = \sqrt[n]{z}$ функциянинг Риман сирти дейилиб, O нуқта тармоқланиш нуқтаси дейилади.

28-мисол. $D=C \setminus R^+$ соҳани бирлик доирага конформ акслантиринг.

$(\sqrt{z})_0$ тармоқнинг хоссасига кўра $w_1 = (\sqrt{z})_0$ функция D ни юқори ярим текисликка конформ акслантиради.
 $w = \frac{z-1}{z+1}$ каср чизиқли функция эса юқори ярим текис-
 ликни бирлик доирага акслантиради. Демак,

$$w = \frac{(\sqrt{z})_0 - 1}{(\sqrt{z})_0 + 1}$$

функция $C \setminus R^+$ ни бирлик доирага конформ акслантиради.

29-мисол. $w = (\sqrt[3]{z})_0$ функцияси

$$G = \{z \in C: \alpha < \arg z < \beta\}, \quad 0 \leq \alpha < \beta < 2\pi$$

бурчакли соҳани қайси соҳага акслантиради?

Берилган функция G ни

$$\left\{ \frac{\alpha}{3} < \arg w < \frac{\beta}{3} \right\}$$

соҳага акслантиришини кўриш қийин эмас.

$w = \sqrt[3]{z}$ кўп қийматли функцияда $(\sqrt[3]{z})_0, (\sqrt[3]{z})_1, \dots,$

$(\sqrt[3]{z})_n$ бир қийматли функцияларнинг ҳосил қилиниши
 кўп қийматли функциялардан тармоқ ажратиш дейилиб,
 бу ерда биз тармоқ ажратишнинг битта услубини бердик.

Бу тармоқлардан одатда $w = (\sqrt[3]{z})_0$ тармоқ кўп ишлатилади.

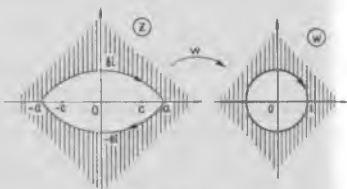
Амалиётда бу функциялардан бурчак соҳаларни кичрай-
 тириш (сиқиш) учун фойдаланилади.

Баъзи бир масалаларни ечишда кўп қийматли $w = \sqrt[3]{z}$

функциянинг бир қийматли тармоқларини берилган шарт-
 ларга қараб ҳам ажратишга тўғри келади. Масалан, $n=2$
 бўлганда, икки қийматли $w = \sqrt{z}$ функциянинг иккита бир
 қийматли $(w)_0$ ва $(w)_1$ тармоқларини қуйидагича ҳам аж-
 ратиш мумкин:



48-чи兹ма



49-чи兹ма

эллипси $\frac{w_1^2}{\left(\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2} + \frac{w_2^2}{\left(\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2} = 1$ эллипсга акслантирани

Бу эллипснинг фокуслари $(-1, 0)$, $(1, 0)$ нуқталарда жойлашган бўлиб, унинг ташқарисини

$$w_2 = w_1 + \sqrt{w_1^2 - 1}, \quad w_2(\infty) = \infty$$

функция $|w_2| = R$, $R > 1$ айдана ташқарисига акслантирилади (31-мисолга қаранг). Бунда R ушбу

$$\frac{1}{2} \left(R + \frac{1}{R} \right) = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

$$\frac{1}{2} \left(R - \frac{1}{R} \right) = \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

системани қаноатлантириб, бундан эса $R = \frac{a+b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ эканлиги келиб чиқади. Энди

$$w_1 = \frac{w_2}{R} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a+b} w_2$$

акслантириш ёрдамида R радиусли доира ташқарисини бирлик доира ташқарисига утказамиз. Демак,

$$w = e^{i\varphi} w_1 = e^{i\varphi} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a+b} w_2 = e^{i\varphi} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a+b} \left(w_1 + \sqrt{w_1^2 - 1} \right) = e^{i\varphi} \frac{1}{a+b} \left[z + \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)} \right]$$

функция берилган $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипснинг ташқарисини

бирлик доира ташқарисига акслантирар экан. Агар $\arg w(\infty) = 0$ эканлигини эътиборга олсак $\varphi = 0$ бўлиши келиб чиқади. Шундай қилиб, изланаётган акслантириш

$$w = \frac{1}{a+b} \left[z + \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)} \right]$$

куринишда бўлади.

2°. $w = \operatorname{Ln} z$ функцияси.

9-таъриф. Ушбу

$$e^w = z \quad (24)$$

тенгламанинг ечимлари z комплекс соннинг логарифми дейилади ва $w = \operatorname{Ln} z$ каби белгиланади.

Тенгламани ечиш учун z ни $z = re^{i\varphi}$ куринишда, w ни эса $w = u + iv$ шаклида ифодалаймиз:

$$e^{u+iv} = re^{i\varphi}$$

Бундан $e^u = r$, $e^{iv} = e^{i\varphi}$ тенгликларга эга бўлиб, ечим

$$u = \ln r, \quad v = \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$$

муносабатга эга бўламиз. Бундан

$$(e^{iw})^2 - 2ze^{iw} + 1 = 0$$

тенглама ҳосил булади. Кейинги тенгламани e^{iw} га нисбатан ечиб, топамиз:

$$e^{iw} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$$

ёки

$$iw = \text{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

Демак,

$$w = \text{Arc} \cos z = -i \text{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

Бу тенгликдан кўриниб турибдики, логарифмик функция каби $\text{Arc} \cos z$ функция ҳам бир қийматли эмас. (У кўп қийматли функциядир). $\text{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$ функциянинг бош қиймати $w = \text{arc} \cos z$ деб олинади. Шундай қилиб,

$$w = \arg \cos z = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

39-мисол. $\text{Arc} \cos \frac{1}{2}$ нинг барча қийматларини топинг.
Юқоридаги 38-мисолда исботланган тенгликка кура:

$$\begin{aligned} \text{Arc} \cos \frac{1}{2} &= -i \text{Ln}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 1}\right) = -i \text{Ln}\left(\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \\ &= -i\left(\ln 1 \pm i \frac{\pi}{3} + 2k\pi i\right) = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k = 0; \pm 1; \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Бу ерда $\arg\left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$ деб олинади.

40-мисол. Ушбу

$$\cos z = 2$$

тенгламанинг барча илдизларини топинг.

$\cos z = 2$ тенглама $z = \text{Arc} \cos 2$ тенгламага эквивалент булгани учун, 38-мисолдан фойдаланиб, топамиз:

$$\begin{aligned} z = \text{Arc} \cos 2 &= -i \ln(2 \pm \sqrt{3}) = -i(\ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi i) = \\ &= 2k\pi - i \ln(2 \pm \sqrt{3}) \end{aligned}$$

41-мисол. Ушбу

$$\sin z + \cos z = 2.$$

тенгламанинг барча илдизларини топинг.

Қаралаётган тенгламани ечиш учун $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ учун ўринли бўлган

$$\begin{aligned} \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) &= \sin \alpha, \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

тенгликлардан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right) + \cos z &= 2 \Rightarrow 2 \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{\pi}{4} = 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Rightarrow z - \frac{\pi}{4} = \text{Arc} \cos \sqrt{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow z = \frac{\pi}{4} - i \ln(\sqrt{2} + \sqrt{2-1}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi - i \ln(\sqrt{2} \pm 1). \end{aligned}$$

Энди $w = \text{Arc} \cos z$ функция ёрдамида акслантириш масаласини қарайлик.

Маълумки, $w = \cos z$ функция бутун комплекс текисликда аниқланган ва

$$(z: -\pi < \text{Re} z < 0, \text{Im} z > 0)$$

ярим йўлакда бир япроқли бўлиб, бу йўлакни

$$\{w: \text{Im} w > 0\}$$

юқори ярим текисликка конформ акслантиради. $\forall z \in \mathbb{C}$ учун

$$\cos(-z) = \cos z$$

ва

$$\cos(z + 2k\pi) = \cos z, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

тенгликлар ўринли бўлгани учун ушбу

$$\{z: 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z < 0\}$$

ва

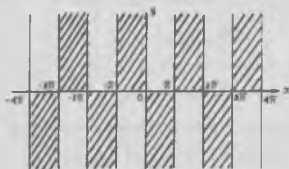
$$\{z: \pi < \operatorname{Re} z < 2\pi, \operatorname{Im} z > 0\}$$

ярим йўлақлар ҳам $w = \cos z$ функция ёрдамида юқори ярим текисликка конформ аксланади. Бу жараёни давом эттириб $w = \cos z$ функция

$$\{z: -\pi + 2k\pi < \operatorname{Re} z < 2k\pi, \operatorname{Im} z > 0\},$$

$$\{z: 2k\pi < \operatorname{Re} z < \pi + 2k\pi, \operatorname{Im} z < 0\}, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ярим йўлақларнинг ҳар бирини (52-чизма)



52-чизма

$$\{w: \operatorname{Im} w > 0\}$$

юқори ярим текисликка конформ акслантиришини топамиз.

Равшанки, $w = \operatorname{Arc} \cos z$ функция

$$\{z: \operatorname{Im} z > 0\}$$

юқори ярим текисликда чексиз кўп қийматли бўлиб,

$$\operatorname{Arc} \cos z = -i \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)$$

тенглик ёрдамида унинг бир қийматли тармоқларини ажратиш мумкин. Уларни

$$(\operatorname{Arc} \cos z)_k = -i \left(\operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 - 1}) \right)_k, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

тенглик ёрдамида аниқланади. Масалан, $k=0$ бўлса,

$$(\operatorname{Arc} \cos z)_0 = \arccos z = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

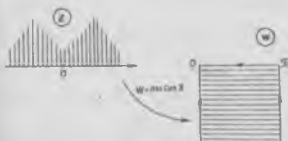
функция

$$\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$$

соҳани

$$\{w : 0 < \operatorname{Re} w < \pi, \operatorname{Im} w < 0\}$$

ярим йулакка конформ акслантиради (53-чизма).



53-чизма

42-мисол. $D = \{z : |z-1| > 1, |z-2| < 2\}$ соҳани $G = \{w : 0 < \operatorname{Re} w < \pi, \operatorname{Im} w > 0\}$ ярим йулакка конформ акслантирувчи бирорта $w(z)$ функцияни топини.

$$w_1 = \frac{1}{2}, w_2 = w_1 + \frac{1}{2}, w_3 = 4\pi w_2, w_4 = e^{w_3}$$

акслантиришларни кегма-кет бажариш ёрдамида D ни $\{w_4 : \operatorname{Im} w_4 > 0\}$ юқори ярим текисликка конформ акслантириб оламиз.

$$w_5 = \arccos w_4$$

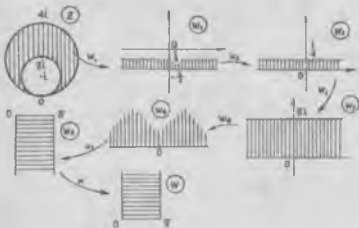
акслантиришни ёрдамида, юқори ярим текислик

$$\{w_5 : 0 < \operatorname{Re} w_5 < \pi, \operatorname{Im} w_5 < 0\}$$

ярим йулакка аксланади. Бу ярим йулакни G соҳага акслантириш учун эса

$$w = \pi - w_5$$

Функцияни олиш кифоя. Олинган функциялар D соҳани қайси йўл билан G соҳага акслантириши 54-чизмада курсатилган.



34-чи рақам

Шундай қилиб, масала шартини қаноатлантирувчи функция

$$\begin{aligned}
 w &= \pi - w_5 = \pi - \arccos w_4 = \pi - \arccos e^{w_1} = \\
 &= \pi - \arccos e^{4\pi w_2} = \pi - \arccos e^{4\pi(w_1 + \frac{1}{4})} = \\
 &= \pi - \arccos e^{\frac{4\pi}{3}} \text{ экан.}
 \end{aligned}$$

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

Қуйидаги илдишларнинг барча қийматларини топинг:

324. $\sqrt{1-i}$

328. $\sqrt[3]{1}$

325. $\sqrt[4]{-1}$

329. $\sqrt[3]{-2+2i}$

326. $\sqrt{i}$

330. $\sqrt{-8}$

327. $\sqrt{3+4i}$

331. $\sqrt[3]{-4+3i}$

Тенгламаларни ечинг:

332. $z^2=i$

336. $z^2+1=0$

333. $z^2=3-4i$

337. $z^4=1+i$

334. $z^3=-1$

338. $\bar{z}=z^3$

335. $z^4=64$

339. $|z|-z=1+2i$

340. Агар $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ ва $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ бўлса, у ҳолда z_1, z_2, z_3 нуқталарнинг бирлик айланага ички чизилган мунтазам учбурчакнинг учлари эканлигини исботланг.

341. Агар мунтазам n — бурчакнинг маркази $z=0$ нуқтада бўлиб, битта z_1 учи берилган бўлса, қолган учларини топинг.

342. Агар z_1 ва z_2 лар мунтазам n — бурчакнинг иккита қўшни учи бўлса, у ҳолда z_3 билан қўшни бўлган учинчи $z_3 (z_3 \neq z_1)$ учини топинг.

$w = \sqrt{z}$ функциянинг қуйида берилган шартни қаноатлантирувчи бир қийматли тармоғи ёрдамида D соҳанинг аксини топинг:

$$343. D = \{ \operatorname{Re} z > 0 \}, \sqrt{z}|_{z=1} = 1.$$

$$344. D = \{ z \in (-\infty, +1] \}, \sqrt{z}|_{z=4} = 2.$$

$$345. D = \{ |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0 \}, \sqrt{z}|_{z=-1} = \frac{1+i}{2}.$$

$$346. D = \{ |z| > 1, \frac{3\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{4} \}, \sqrt{z}|_{z=-1} = i.$$

$$347. D = \{ (\operatorname{Im} z)^2 > 2 \operatorname{Re} z + 1 \}, \sqrt{z}|_{z=-1} = -i.$$

$$348. D = \{ \operatorname{Im} z > 0, (\operatorname{Im} z)^2 > 4 \operatorname{Re} z + 4 \}, \sqrt{z}|_{z=-1} = i.$$

349. $D = \{ |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0 \}$ соҳанинг $w = z^{\frac{1}{2}}$ акслантиришнинг $w\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1-i}{2}$ шартни қаноатлантирувчи бир қийматли тармоғи ёрдамидаги аксини топинг.

350. $D = \{ |z| > 4, \operatorname{Re} z > 0 \}$ соҳанинг $w = z^{-\frac{1}{2}}$ акслантиришнинг $w(9) = -\frac{1}{27}$ шартни қаноатлантирувчи бир қийматли тармоғи ёрдамидаги аксини топинг.

351. $\left\{ -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2} \right\}$ бурчакни $\{\operatorname{Im} w > 0\}$ юқори ярим текисликка шундай акслантирингки, $w(1-i)=2$, $w(i)=-1$, $w(0)=0$ шартлар бажарилсин.

Қуйидаги соҳаларни $\{\operatorname{Im} w > 0\}$ юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи $w(z)$ функцияни топинг.

$$352. \operatorname{Im} w > 0, z \in [0, a].$$

$$353. |z| < R, 0 < \arg z < \alpha \quad (0 < \alpha \leq 2).$$

$$354. |z| > R, 0 < \arg z < \alpha \quad (0 < \alpha \leq 2).$$

355. $|z| < 1, |z-i| < 1$.

356. $|z| > 1, |z-i| > 1$.

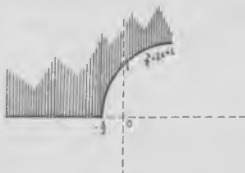
357. $z \in [-1, 1]$.

358. $z \in [-i, i]$.

359. $z \in [z_1, z_2]$.

360. $z \in ((-\infty, -R] \cup [R, +\infty)), R > 0$.

361. $\{|z|=1\}$ айлананинг ёйи бўйича $z=1$ нуқтадан $z=e^{i\alpha}$, $0 < \alpha < \pi$ нуқтагача қирқилган $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ юқори ярим текисликни $\{\operatorname{Im} w > 0\}$ юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи $w(z)$ функцияни топинг.



35-чиёрма

362. $\{|z|=1\}$ айлананинг ёйи бўйича $z=1$ нуқтадан $z=e^{i\alpha}$, $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < \beta < 2$, нуқтагача қирқилган $\{0 < \arg z < \pi/2\}$ секторни $\{\operatorname{Im} w > 0\}$ юқори ярим текисликка конформ акслантиринг.



36-чиёрма



37-чиёрма

Қуйидаги мисолларда айтылган чизмаларда тасвирланган соқаларни ($\operatorname{Im} w > 0$) юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи бирорга $w(z)$ функцияни топинг:

363. 55-чизма.

364. 56-чизма.

365. 57-чизма.

366. 58-чизма.

367. 59-чизма.

368. 60-чизма.



58-чизма



59-чизма



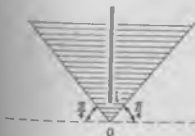
60-чизма

369. 61-чизма.

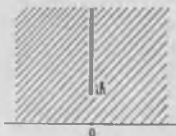
370. 62-чизма.

371. 63-чизма.

372. 64-чизма.



61-чизма



62-чизма



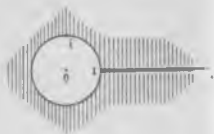
64-чизма



65-чизма



66-чизма



67-чизма

373. 65-чизма.

374. 66-чизма.

375. $\{y^2 > 4(x+1)\}$ соҳани $\{|w| < 1\}$ доирага конформ акслантирувчи ва

$$w(-4)=0, \arg w'(-4)=0$$

шартларни қаноатлантирувчи $w(z)$ функцияни топинг.

376. $[0, i]$ кесма буйича қирқилган $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ юқори ярим текисликни $\{|w| < 1\}$ доирага конформ акслантирувчи ва

$$w\left(\frac{5i}{4}\right) = 0, w(i) = -i$$

шартларни қаноатлантирувчи $w(z)$ функцияни топинг.

377. $[-a, -1], a > 1$ кесма ва $[1, +\infty)$ нур буйича қирқилган бирлик доиранинг ташқарисини $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ юқори ярим текисликка конформ акслантиринг.

Жуковский функциясига тескари булган

$$w = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

функциянинг берилган шартни қаноатлантирувчи бир қийматли тармоғи ёрдамида D соҳанинг аксини топинг:

378. $D = \left\{ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{1-a^2} < 1 \right\} \quad (0 < a < 1), \quad w(0) = i.$

379. $D = \{z \in (-\infty, -1], z \in [1, +\infty)\}, \quad w(0) = i.$

380. $D = \{\operatorname{Im} z > 0\}, \quad w(+i\infty) = 0.$

381. $D = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-1} < 1, y > 0 \right\} \quad (a > 1), \quad w(+i0) = i.$

382. $D = \left\{ \frac{x^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} > 1, x > 0, y > 0 \right\} \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2}),$

$w(+\infty) = 0$

383. $D = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-1} < 1, z \in [-1, 1] \right\} \quad (a > 1), \quad w(+i0) = -i.$

384. $D = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-1} < 1, \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2-1} > 1 \right\} \quad (a > b > 1), \quad w(z) > 1,$

агар $b < z < a$ булса.

385. Жуковский функциясидан фойдаланиб $[-c, c] \quad (c > 0)$ кесманинг ташқарисини $\{|w| > 1\}$ — бирлик доиранинг ташқарисига конформ акслантирувчи ва

$$w(\infty) = \infty, \quad \arg w'(\infty) = \alpha$$

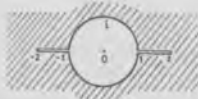
шартларни қаноатлантирувчи $w(z)$ функцияни топинг.



87-қўзма



88-қўзма



89-қўзма

386. $D = \{ \operatorname{Im} z > 0 \} \setminus \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, y > 0 \right\}$ соҳани юқори

ярим текисликка конформ акслантиринг.

Қуйидаги мисоллардаги чизмаларда тасвирланган соҳаларни $\{ \operatorname{Im} w > 0 \}$ юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи бирорта $w(z)$ функцияни топинг.

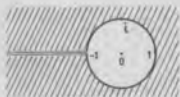
387. 67-чизма. 392. 72-чизма.

388. 68-чизма. 393. 73-чизма.

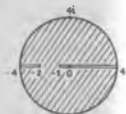
389. 69-чизма. 394. 74-чизма.

390. 70-чизма. 395. 75-чизма.

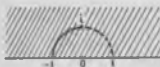
391. 71-чизма. 396. 76-чизма.



70-чизма



71-чизма



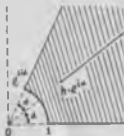
72-чизма



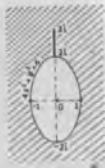
73-чизма



74-чизма



75-чизма



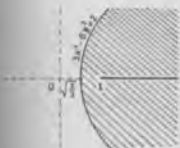
76-чизма.



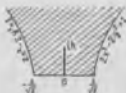
77-чизма.



78-чизма.



79-чизма



80-чизма.

397. 77-чизма.

398. 78-чизма.

399. 79-чизма.

400. 80-чизма.

Куйидаги мисолардаги чизмаларла тасвирланган соҳаларни $\{|w| < 1\}$ бирлик доирага конформ акслантирувчи бирорта $w(z)$ функцияни топинг:

401. 81-чизма.

402. 82-чизма.

403. 83-чизма.

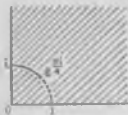
404. 84-чизма.

405. 85-чизма.

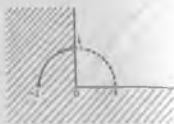
406. $D = \{x^2 - y^2 < 1\}$ соҳани $\{|w| < 1\}$ доирага конформ акслантирувчи ва

$$w(0)=0, w(1)=1$$

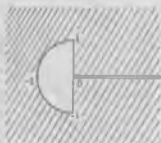
шартларни қаноатлантирувчи $w(z)$ функцияни топинг.



81-чизма.



82-чизма.



83-чизма.



84-чизма.



85-чизма.

407. $D = \left\{ -\frac{\pi}{n} < \arg z < \frac{\pi}{n}, |z| < 1 \right\}$ секторнинг $W = \frac{z}{(1+z^n)^{1/n}}$

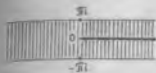
($w(z) > 0$, агар $z > 0$ бўлса) акслантириш ёрдамидаги аксини топинг.

Кўрсатма. $w_1 = z^n$, $w_2 = \frac{w_1}{(1+w_1)^2}$, $w_3 = \sqrt{w_2}$ деб белгиланса, $w = w_3 \circ w_2 \circ w_1$ бўлади.

Куйидаги чизмаларда тасвирланган соҳаларни ($\operatorname{Im} w > 0$) юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи бирорта $w(z)$ функцияни топинг:

408. 86-чизма.

409. 87-чизма.



86-чизма



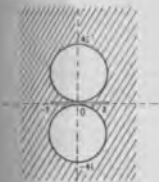
87-чизма

410. 88-чизма.

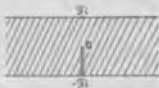
411. 89-чизма.

412. 90-чизма.

413. 91-чизма.



88-чизма



89-чизма



90-чизма

414. 92-чизма.

415. 93-чизма.



91-чизма



92-чизма



93-чизма

416. $D=\{0<\operatorname{Im} z<\pi, z\in[0, id]\}$, $0<d<\pi$, соҳани $\{\operatorname{Im} w>0\}$ юқори ярим текисликка конформ акслантиринг.

Куйидаги логарифмларнинг барча қийматларини топинг:

417. $\operatorname{Ln} 4$	426. $\operatorname{Ln}(-2+3i)$.
418. $\ln(-1)$.	427. Lne .
419. $\operatorname{Ln}(-i)$.	428. Lne .
420. $\operatorname{Ln}(1-i)$.	429. $\ln(1+i)$.
421. $\ln i$.	430. $\operatorname{Ln}(1+i)$.
422. $\operatorname{Ln} i$.	431. $\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
423. $\operatorname{Ln} \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.	432. $\operatorname{Ln}(1+i\sqrt{3})$.
424. $\operatorname{Ln} \frac{1-i}{\sqrt{2}}$.	433. $\operatorname{Ln}(ei)$.
425. $\operatorname{Ln}(2-3i)$.	

434. $\operatorname{Ln}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, α — ҳақиқий сон.

Тенгламаларни счинг:

435. $1=e^{-\pi}$.	436. $\ln z = 1 + \frac{\pi i}{2}$.	437. $e^{-\pi}$.

438. Ушбу фикрлаш кетма-кетлигидаги И. Бернулли парадоксига олиб келадиган хатони топинг:

- 1) $(-z)^2 = z^2$.
- 2) $\operatorname{Ln}((-z)^2) = \operatorname{Ln}(z^2)$.
- 3) $\operatorname{Ln}(-z) + \operatorname{Ln}(-z) = \operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} z$.
- 4) $2\operatorname{Ln}(-z) = 2\operatorname{Ln} z$.

Демак, ихтиёрий $z \neq 0$ учун

$$\operatorname{Ln}(-z) = \operatorname{Ln}(z).$$

Куйидаги даражаларнинг барча қийматларини топинг.

439. $i^{\sqrt{2}}$.	444. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^i$.	448. $(-1)^i$.
440. $(-2)^{\sqrt{2}}$.	445. $(-3+4i)^{1+i}$.	449. $(-1)^{\sqrt{3}}$.
441. 2^i .	446. $(3-4i)^{1+i}$.	450. e^i .
442. 1^{-i} .	447. 1 .	451. $(-i)^i$.
443. $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$.		

Куйидаги мисолларда a ва b лар берилган ҳолларда $a^b = b$ тенгламани ечинг.

452. $a=2, b=i$. 454. $a=e, b=e$.

453. $a=i, b=1$. 455. $a=i, b=i$.

456. $a^{2a}, (a^a)^2, (a^2)^a$ ларнинг қийматлар тўплами устма-уст тушадими?

457. α нинг қандай қийматларида $(a^2)^a$ ва a^{2a} ларнинг қийматлар тўплами устма-уст тушади?

458. α нинг қандай қийматларида $(a^3)^a$ ва a^{3a} ларнинг қийматлар тўплами устма-уст тушади?

Куйидаги тўпламларнинг $w=\ln z$ акслантириш ёрдамидаги аксини топинг.

459. $|z|=R; \arg z=\varphi$ — поляр түр.

460. $r=Ae^{kt}$ ($A>0$) — логарифмик спираль.

461. $0<\arg z<\alpha\leq 2\pi$ — бурчак.

462. $|z|<1, 0<\arg z<\alpha\leq 2\pi$ — сектор.

463. $[r_1, r_2]$ кесма бўйича қирқилган $\{r_1<|z|<r_2\}$ ҳалқа.

Куйидаги соҳаларнинг $w=\ln z$ функциянинг қўйилган шартни қаноатлантирувчи бир қийматли тармоғи ёрдамидаги аксини топинг.

464. $D=\{\operatorname{Im} z>0\}$,

$w(i) = \frac{\pi i}{2}$.

465. $D=\{z\in(-\infty, 0]\}$,

$w(1)=4\pi i$.

466. $D=\{z\in(-\infty, 0]\}$,

$w(-i) = -\frac{\pi i}{2}$.

467. $D=\{z\in[0, +\infty)\}$,

$w(i) = \frac{5\pi i}{2}$.

468. $D=\{z\in[0, +\infty)\}$,

$w(-1) = -\pi i$.

469. $D=\{z\in[0, +\infty)\}$,

$w(-i) = -\frac{\pi i}{2}$.

470. $D=\{z\in[0, +\infty)\}$,

$w\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right) = \frac{10\pi i}{3}$.

471. $D=\{z\in[0, +\infty)\}$,

$w(-1) = -\pi i$.

472. $D=\{z\in(-\infty, 0], z\in[1, +\infty)\}$, $w(i) = \frac{\pi i}{2}$.

473. $D=\{|z|<1, \operatorname{Im} z>0\}$,

$w(i-i0) = -\frac{3\pi i}{2}$.

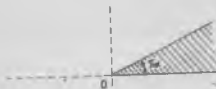
474. $D=\{|z|<1, z\in[0, 1]\}$,

$w(-1+0) = -\pi i$.

475. $\{\operatorname{Im} z>0\}$ юқори ярим текисликни $\{0<\operatorname{Im} w<2\pi\}$ йулакка конформ акслантиринг.

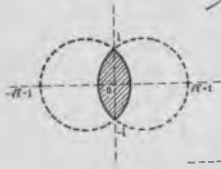
Куйидаги мисолларда берилган чизмаларда тасвирланган соҳаларни $\{0<\operatorname{Im} w<1\}$ йулакка конформ акслантирувчи бирорта $w(z)$ функцияни топинг.

476. 94-чизма.
477. 95-чизма.

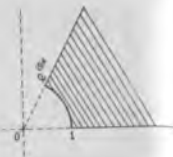


94-чизма

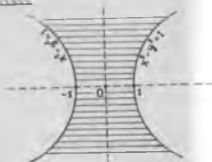
478. 96-чизма.
479. 97-чизма.
480. 98-чизма.



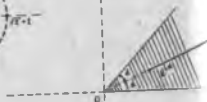
96-чизма



95-чизма



97-чизма



98-чизма

481. $\{ |mz| < \pi \}$ йўлакни $\{ |mw| < \pi \}$ йўлакка конформ акслантирувчи ва ушбу

$$w(\pi i) = +\infty, \quad w(+\infty) = -\pi i, \quad w(-\pi i) = -\infty$$

шартларни қаноатлантирувчи $w(z)$ функцияни топинг.

z нинг қандай қийматларида қуйидаги функциялар 0 га айланади?

482. $\sin z$ 483. $\cos z$ 484. $\operatorname{sh} z$ 485. $\operatorname{ch} z$

Қуйидаги тенгликларни қаноатлантирувчи z нинг барча қийматларини топинг:

486. $|\operatorname{tg} z| = 1$ 487. $|\operatorname{th} z| = 1$.

Қуйидаги тенгликларни исботланг. Бу тенгликларда илдининг барча қийматлари олинган:

488. $\operatorname{Arc} \sin z = -i \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)$

489. $\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+i}{1-i} = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+i}{1-i}$

490. $\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z-i}{z+i}$

491. $\operatorname{Arc} \operatorname{ch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$

492. $\operatorname{Arc} \operatorname{sh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$

493. $\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+i}{1-i}$

494. $\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z-i}{z+i}$

Қуйидаги ифодаларнинг барча қийматларини топинг:

495. $\operatorname{Arccos} 1$

500. $\operatorname{Arc} \operatorname{tg} 2i$

496. $\operatorname{Arc} \sin \frac{1}{2}$

501. $\operatorname{Arc} \operatorname{tg}(1+2i)$

497. $\operatorname{Arc} \sin 2$

502. $\operatorname{Arc} \operatorname{ctg}(1+i)$

498. $\operatorname{Arc} \sin i$

503. $\operatorname{Ar} \operatorname{ch} 2i$

499. $\operatorname{Arctg} 1$

504. $\operatorname{Ar} \operatorname{th}(1-i)$

Қуйидаги тенгламаларнинг барча илдиларини топинг:

505. $\sin z = \frac{4}{3}$

509. $\operatorname{tg} z = \frac{5}{3}$

506. $\sin z = \frac{5}{3}$

510. $\operatorname{ctg} z = -\frac{3}{5}$

507. $\cos z = \frac{3}{4}$

511. $\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}$

508. $\cos z = \frac{3+i}{4}$

512. $\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}$

$$513. \sin z - \cos z = 3.$$

$$514. \sin z - \cos z = i.$$

$$515. \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z = 1.$$

$$516. \operatorname{sh} z - \operatorname{ch} z = 2i.$$

$$517. 2\operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z = i.$$

$$518. \cos z = \operatorname{ch} z.$$

$$519. \sin z = i \operatorname{sh} z.$$

$$520. \cos z = i \operatorname{sh} 2z.$$

Куйидаги соҳаларнинг $w=f(z)$ акслантиришнинг берилган шартларни қаноатлантирувчи бир қийматли тармоғи ёрдамидаги аксини топинг.

$$521. D = \{\operatorname{Re} z > 0\}, w = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}), w(+0) = \pi i$$

$$522. D = \{\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}, w = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}), w(2) > 0.$$

$$523. D = \{(\operatorname{Im} z)^2 - (\operatorname{Re} z)^2 < \frac{1}{2}\}, w = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}),$$

$$w(0) = 2\pi i.$$

$$524. D = \{z \in (-\infty, -1], z \in [1, +\infty)\}, w = \operatorname{Arcsin} z, w(0) = 0.$$

$$525. D = \{\operatorname{Im} z > 0\}, w = \operatorname{Arc} \cos z, w(0) = -\frac{\pi}{2}.$$

Куйидаги соҳаларнинг $w=\operatorname{arcsin} z$ акслантириш ёрдамидаги аксини топинг:

$$526. D = \{\operatorname{Im} z > 0\}.$$

$$527. D = \{\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}.$$

$$528. D = \{\operatorname{Re} z < 0, z \in (-\infty, -1]\}.$$

7-§. Симметрия принципи

Бир соҳани иккинчи соҳага конформ акслантиришда симметрия принциpidан кенг фойдаланилади. Бу принцип аналитик давом эттиришга асосланган.

Айтайлик, E тўпламда ($E \subset C$) бирор $f(z)$ функция берилган бўлсин.

10-таъриф. Агар D соҳада ($E \subset D$) шундай $F(z)$ функция топилсаки, $\forall z \in E$ учун

$$F(z) = f(z)$$

булса, у ҳолда $F(z)$ функция $f(z)$ функциянинг E тўпламдан D соҳага аналитик давоми дейилади.

4-теорема. Агар $a(a \in D)$ нукта E тўпламнинг лимит нуктаси булса, E тўпламдан D соҳага аналитик давом ягона булади.

Хусусан, E тўплам D соҳага тегишли бўлган эгри чизик ёки шу соҳанинг бирор қисми бўлса, у ҳолда $f(z)$ функциянинг D соҳага аналитик давоми биттадан кўп бўлмайди.

43-мисол. Ушбу

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots$$

функциянинг аналитик давомини топинг.

Равшанки, бу $f(z)$ функция

$$E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

тўпланда (бирлик доирада) голоморф.

Куйидаги

$$F(z) = \frac{1}{1-z}$$

функцияни қарайлик. Бу функция $D = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ соҳада голоморф бўлади.

Иккинчи томондан $\forall z \in E$ учун $F(z) = f(z)$ тенглик бажарилади.

Демак, $F(z) = \frac{1}{1-z}$ функция $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ функциянинг

$E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ тўпландан $D = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ соҳага аналитик давоми бўлади.

Фараз қилайлик, $f_1(z)$ функция D_1 соҳада ($D_1 \subset \mathbb{C}$) берилган ҳамда шу соҳада конформ бўлсин. Бунда D_1 соҳанинг чегараси ∂D_1 нинг бирор қисми γ ($\gamma \subset \partial D_1$) айлана ёйи ёки тўғри чизик кесмасидан иборат. Бу $f_1(z)$ акслантириш D_1 соҳани G_1 соҳага, γ чизикни Γ чизикқа (Γ — айлана ёйи ёки тўғри чизик кесмаси) акслантирсин:

$$G_1 = f_1(D_1),$$

$$\Gamma = f_1(\gamma).$$

D_2 соҳанинг γ ёйга нисбатан симметрик бўлган соҳаси D_2 , G_1 соҳанинг Γ ёйга нисбатан симметрик бўлган соҳаси эса G_2 бўлсин. $f_2(z)$ функцияни D_2 соҳада шундай аниқлаймизки, унинг қийматлари $f_1(z)$ функциянинг G_1 даги қийматларига Γ ёйга нисбатан симметрик бўлган қийматларни қабул қилсин. У ҳолда $f_2(z)$ функция D_2 ни G_2 га, ушбу

$$w = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1, \\ f_1(z) = f_2(z), & z \in \gamma, \\ f_2(z), & z \in D_2 \end{cases}$$

функция эса $D_1 \cup \gamma \cup D_2$ соҳани $G_1 \cup \Gamma \cup G_2$ соҳага конформ акслантиради (99-чизма).



99-чизма

Одатда юқоридаги тасдиқ симметрия принципи ёки Риман-Шварц теоремаси деб аталади.

Э с л а т м а . Агар γ ва Γ лар ҳақиқий ўқдаги кесмалар бўлса, у ҳолда $f_2(z)$ функция ушбу

$$f_2(z) = \overline{f_1(\bar{z})}$$

тенглик ёрдамида аниқланади.

44-мисол. Ушбу

$$D = \{z \in \mathbb{C} : z \in [-1, 1], z \in [-i, i]\}$$

соҳани юқори ярим текислик

$$\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > 0\}$$

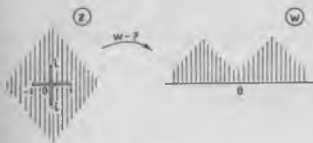
ка конформ акслантирувчи $w=w(z)$ функцияни топинг (100-чизма).

Қуйидаги

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0, z \in [0, i]\}$$

соҳада

$$w_1 = z^2$$



100-чизма

2. функцияни қараймиз. Равшанки, бу акслантириш D_1 соҳада конформ бўлади.

Энди D_1 соҳани юқори ярим текисликка акслантира-миз. Бу қуйидаги

$$\begin{aligned} w_1 &= z^2, \\ w_2 &= w_1 + 1, \\ w_3 &= \sqrt{w_2}, \quad \sqrt{-1} = i \end{aligned} \quad (27)$$

акслантиришларни кетма-кет бажариш натижасида содир бўлади. ((27) акслантиришларнинг бажарилиши жараёни 101-чизмада тасвирланган).



101-чизма

Шундай қилиб, D_1 соҳа ушбу

$$w_1 = \sqrt{w_2} = \sqrt{w_1 + 1} = \sqrt{z^2 + 1}, \quad \sqrt{-1} = i$$

Функция ёрдамида

$$G_1 = \{w_1 \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w_1 > 0\}$$

юқори ярим текисликка конформ аксланар экан.

Энди симметрия принциpidан фойдаланиб, D соҳани

$$w_1 = \sqrt{z^2 + 1}, \quad \sqrt{-1} = i$$

функция ёрдамида

$$G = \{w_1 \in \mathbb{C} : w_1 \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\}$$

соҳага конформ акслантирамиз. Бу соҳани юқори ярим текислик

$$\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > 0\}$$

ка конформ акслантириш қуйидаги

$$w_4 = \frac{w_1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - w_1},$$

$$w = \sqrt{w_4}, \quad \sqrt{-1} = i$$

акслантиришларни кетма-кет бажарилиши натижасида бўлади.

Демак, $D = \{z \in \mathbb{C} : z \in [-1, 1], z \in [-i, i]\}$ соҳани юқори ярим текислик $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > 0\}$ ка конформ акслантирувчи функция

$$w = \sqrt{w_4} = \sqrt{\frac{w_1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - w_1}} = \sqrt{\frac{\sqrt{z^2 + 1} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{z^2 + 1}}}, \quad \sqrt{-1} = i$$

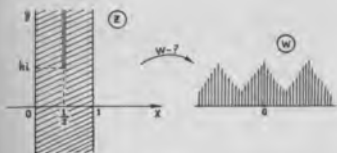
бўлади.

45-мисол. Ушбу $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}, h \leq \operatorname{Im} z < \infty\}$ нур бўйича қирқилган қуйидаги

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$$

соҳани (йўлакни)

$$\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > 0\}$$



102-чизма

юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи функцияни топинг (102-чизма).

Куйидаги

$$D_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < \frac{1}{2} \right\}$$

соҳани қараймиз. Бу соҳа

$$\begin{aligned} w_1 &= iz, \\ w_2 &= 2\pi w_1, \\ w_3 &= e^{w_2} \end{aligned} \quad (28)$$

акслантиришларни бирин-кетин бажариш натижасида

$$G_1 = \{w_3 \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w_3 > 0\}$$

юқори ярим текисликка конформ аксланади ((28) акслантиришларнинг бажарилиши жараёни 103-чизмада тасвирланган).

Симметрия принциpidан фойдаланиб, берилган соҳа

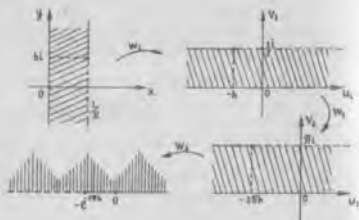
$$w_3 = e^{w_2} = e^{2\pi w_1} = e^{2\pi iz}$$

функция ёрдамида

$$G = \left\{ w_3 \in \mathbb{C} : w_3 \in [-e^{-2\pi i}, +\infty) \right\}$$

соҳага конформ аксланишини толамиз.

Бу G соҳа



103-норма.

$$w_2 = w_1 + e^{-i\theta}$$

$$w = \sqrt{w_2}, \quad \sqrt{-1} = i$$

акслантиришлар ёрдамида

$$\{w \in C : \operatorname{Im} w > 0\}$$

юқори ярим текисликка аксланади.

Демак, берилган соҳани юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи функция ушбу

$$w = \sqrt{w_1} = \sqrt{e^{2\pi iz} + e^{-2\pi iz}}$$

куринишда булади.

46-мисол. Ушбу

$$D = \left\{ z \in C : z \in \left[0, e^{\frac{2\pi i}{n}} \right]; k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \right\}$$

соҳани

$$\{w \in C : |w| > 1\}$$

соҳага конформ акслантирувчи функцияни топинг (104-чизма).



104-чизма

Куйидаги

$$D_0 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}\}$$

соҳани (секторни) қараймиз. Бу соҳа

$$\begin{aligned} w_1 &= z^{\frac{1}{n}}, \\ w_2 &= w_1 + \sqrt{w_1^2 - 1}, \quad \sqrt{-1} = i \\ w &= w_2^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (29)$$

акслантиришларни бирин-кетин бажариш натижасида ушбу

$$G_0 = \{w \in \mathbb{C} : 0 < \arg w < \frac{2\pi}{n}, |w| > 1\}$$

соҳага конформ аксланади ((29) акслантиришларнинг бажарилиши жараёни 105-чизмада тасвирланган).

Бу ерда

$$w = w_2^{\frac{1}{2}} = \left(w_1 + \sqrt{w_1^2 - 1} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(z^{\frac{1}{n}} + \sqrt{z^{\frac{2}{n}} - 1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

акслантиришнинг

$$w(1) = 1, \quad w(\infty) = w_1, \quad w\left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right) = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$



105-чизма

шартларни қаноатлантирувчи бир қийматли тармоғи олинган.

Симметрия принциpidан фойдаланиб,

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \frac{4\pi}{n}, z \in \left[0, e^{\frac{2\pi i}{n}} \right] \right\}$$

соҳа

$$w = \left(z^{\frac{n}{2}} + \sqrt{z^n - 1} \right)^{\frac{2}{n}}$$

функция ёрдамида

$$\left\{ w \in \mathbb{C} : |w| > 1, 0 < \arg w < \frac{4\pi}{n} \right\}$$

соҳага конформ аксланишини топамиз.

Айтайлик,

$$D_k = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{2k\pi}{n} < \arg z < \frac{2(k+1)\pi}{n} \right\}, k = 1, \dots, n-1$$

булсин.

Равшанки,

$$w = \left(z^{\frac{n}{2}} + \sqrt{z^n - 1} \right)^{\frac{2}{n}}$$

акслантириш D_k соҳани

$$G_k = \left\{ w \in C: |w| > 1, \frac{2k\pi}{n} < \arg w < \frac{2(k+1)\pi}{n} \right\}, k = 1, 2, \dots, n-1$$

соҳага конформ акслантиради. Шунинг учун эътиборга олиб, симметрия принципини n марта қўллаш натижасида

$$w = \left(z^{\frac{1}{n}} + \sqrt{z^n - 1} \right)^2$$

функция берилган

$$D = \left\{ z \in C: z \in \left[0, e^{\frac{2k\pi i}{n}} \right], k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \right\}$$

соҳани

$$\{w \in C: |w| > 1\}$$

соҳага конформ акслантиришини топамиз.

47-мисол. Симметрия принциpidан фойдаланиб, ушбу

$$D = \{z \in C: |z| < 1\}$$

соҳанинг (бирлик доиранинг)

$$w = \frac{z}{\sqrt{(1+z^2)^2}}$$

функция ёрдамидаги тасвирини (образини) топинг.

D — бирлик доиранинг учлари $z=0$ нуқтада ва кенглиги $\frac{2\pi}{n}$ га тенг бўлган $D_0, D_1, D_2, \dots, D_{n-1}$ n та секторга ажратамиз. Равшанки,

$$D_0 = \left\{ z \in C: -\frac{\pi}{n} < \arg z < \frac{\pi}{n}, |z| < 1 \right\}$$

Сўнг берилган w функцияни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\begin{aligned} w &= \frac{z}{\sqrt{(z^n+1)^2}} = \sqrt{\frac{z^n}{z^{2n}+2z^n+1}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{z^n+2+\frac{1}{z^n}}} = \frac{1}{\sqrt{2\left(1+\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)\right)}} \end{aligned}$$

Агар

$$w_1 = z^2,$$

$$w_2 = \frac{1}{2} \left(w_1 + \frac{1}{w_1} \right),$$

$$w_3 = w_2 + 1,$$

$$w_4 = \frac{1}{2w_3}$$

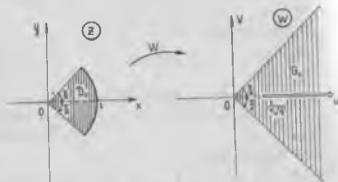
дейилса, унда w функция ушбу

$$w = \left(\sqrt{w_4} \right)_0$$

куринишга келади. Бу акслантиришлардан фойдаланиб, D_0 нинг тасвири (образи)

$$G_0 = \left\{ w \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}, w \in \left[\frac{1}{\sqrt{4}}, +\infty \right) \right\}$$

булишини топамиз (106-чизма).



106-чизма

Шу мулоҳаза асосида, симметрия принципини n марта қўллаш натижасида

$$w = \frac{1}{z^n (z^n + 1)^2}$$

функция бирлик доира $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ни n та

$$\left\{ \arg w = \frac{2\pi k}{n}, |w| \geq \frac{1}{\sqrt{4}}, k = 0, n-1 \right\}$$

нур бўйича қирқилган (w) текислигига акслантиришини топамиз.

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

529. $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$, $(-i\infty, -i)$ ва $[i, +i\infty)$

нурлар бўйича кесилган (z) текисликни бирлик доиранинг ташқарисига конформ акслантирувчи функцияни топинг.

530. $D = \{z : z \in [-a, b], z \in [-ci, ci]\}$
($a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$)

соҳани юқори ярим текисликка конформ акслантиринг.

531. $D = \{z : z \in [-a, b], z \in [-ci, ci]\}$
($a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$)

соҳани бирлик доиранинг ташқарисига конформ акслантиринг.

532. $[-a, +\infty)$ ($a \geq 0$) нур ва $[-ci, ci]$ ($c > 0$)

кесма бўйича қирқилган текисликни юқори ярим текисликка конформ акслантиринг.

533. $D = \{z : z \in [-1, 1], z \in [-i, i]\}$

соҳани бирлик доиранинг ташқарисига конформ акслантиринг.

534. $D = \{z : z \in \{|z|=1, \operatorname{Im} z < 0\}, z \in \{\operatorname{Re} z=0, \operatorname{Im} z < 0\}\}$

соҳани бирлик доиранинг ташқарисига конформ акслантиринг.

535. $D = \{z : z \in [-\alpha i, 0] (\alpha < 1), z \in \{|z|=1, \operatorname{Im} z < 0\}\}$

соҳани юқори ярим текисликка конформ акслантиринг.

536. Пастки мавҳум ярим уқ ва учлари $\pm i$ нуқталарда бўлган ҳамда $z = -i$ нуқтадан ўтувчи ярим айлана ёйи бўйича қирқилган (z) текислигини (107-чизма) ($w \operatorname{Im} w > 0$) юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи $w(z)$ функцияни топинг.

537. $(-\infty, -1]$ ва $[1, +\infty)$ нурлар ва учлари $\pm i$ нуқталарда бўлган ҳамда $z = i$ нуқтадан ўтувчи ярим айлана ёйи бўйича қирқилган (z) текислигини (108-чизма) ($w \operatorname{Im} w > 0$) юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи $w(z)$ функцияни топинг.



107-чизма



108-чизма



109-чизма

конформ акслантиринг.

540. 110-чизмада тасвирланган соҳани бирлик доиранинг ташқарисига конформ акслантиринг.

541.

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\sin^2 \beta} = 1$$

538. $[-1, 1]$ кесма ва учлари нукталарда бўлган ҳамда $z = -1$ нуктадан ўтувчи айлана сий буйича қирқилган (z) текислигини (109-чизма) $\{w: \operatorname{Im} w > 0\}$ юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи $w(z)$ функцияни топинг.

539.

$D = \{z: |z| > 1, \operatorname{Re} z \in [a, b], \operatorname{Im} z \in [-bi, -i], \operatorname{Re} z \in [1, a], \operatorname{Im} z \in [-a, -1]\} (a > 1, b > 1)$ соҳани юқори ярим текисликка



110-чизма

гиперболанинг ўнг шохчаси орасидаги соҳани юқори ярим текисликка конформ акслантиринг.

542.

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1$$

гипербола ўнг шохчаси ташқарисини юқори ярим текисликка конформ акслантиринг.

543. $\frac{1}{z^2} - \frac{1}{b^2} = 1$ гиперболанинг шохлари орасидаги

соҳани юқори ярим текисликка конформ акслантиринг.

Қуйидаги мисолларда берилган соҳаларни юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи бирорта функцияни топинг.

544.

$$\{x = \frac{1}{h}, h_1 \leq y \leq \infty\} \text{ ва } \{x = \frac{1}{h}, -\infty < y \leq h_1\}$$

$(h_1 < h)$ нулар буйича қирқилган $(0 < x < 1)$ йулак.

545. $\{0 \leq x \leq h, y = 0\} (h < 1)$ кесма буйича қирқилган $(x < 1)$ йулак.

546.

$$\{0 \leq x \leq h_1, y = 0\} \text{ ва } \{1 - h_2 \leq x \leq 1, y = 0\}$$

$(h_1 < 1)$ кесмалар буйича қирқилган $\{0 < x < 1\}$ йулак.

547. $\{x = \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq h\}$ кесма буйича қирқилган $\{0 < x < \pi, y > 0\}$ ярим йулак.

548. $\{x = \frac{\pi}{2}, h \leq y < \infty\}$ ($h > 0$) нур буйича қирқилган $\{0 < x < \pi, y > 0\}$ ярим йулак.

549. $\{x = \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq h_1\}$ кесма ва $\{x = \frac{\pi}{2}, h_2 \leq y < \infty\}$ ($h_2 > h_1$) нур буйича қирқилган $\{0 < x < \pi, y > 0\}$ ярим йулак.

550. $\{|z-1|=1\}$, $\{|z+1|=1\}$ айланалар билан чегараланган ва $\{2 \leq x < \infty, y=0\}$ нур буйича қирқилган соҳа.

551. $\{|z-1|=1\}$, $|z-2|=2$ айланалар билан чегараланган ва $\{y=0, 2 \leq x \leq a\}$ ($a < 4$) кесма буйича қирқилган соҳа.

552. $\{|z-1|=1\}$, $\{|z-2|=2\}$ айланалар билан чегараланган ҳамда $\{y=0, 2 \leq x \leq a\}$ ва $\{y=0, b \leq x < \infty\}$ ($a < b$) кесмалар буйича қирқилган соҳа.

553. Мавҳум уқ ва $\{|z-1|=1\}$ айлана билан чегараланган ҳамда $\{y=0, 2 \leq x \leq a\}$ кесма ва $\{y=0, b \leq x < \infty\}$ ($a < b$) нур буйича қирқилган соҳа.

554. $\{|z-1|=1\}$, $\{|z+1|=1\}$ айланалар билан чегараланган ва $\{x=0, -\alpha \leq y \leq \beta\}$ ($\alpha \geq 0, \beta \geq 0$) кесма буйича қирқилган соҳа.

555. $\{x=0, 0 \leq y \leq h\}$ кесма буйича қирқилган $\{|z-1| > 1, |z+1| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ соҳа.

556. $y^2 = 4\alpha^2(x + \alpha^2)$ парабола ичи.

557. $y^2 = 4\alpha^2(x + \alpha^2)$ парабола ичини бирлик доирага конформ акслантиринг.



111-схема.



112-схема.



113-схема.

Қуйидаги мисоллардаги чизмаларда тасвирланган соҳаларни $\{w: \operatorname{Im} w > 0\}$ юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи бирорта $w(z)$ функцияни топинг:

558. 111-чизма.

564. 117-чизма.

559. 112-чизма.

565. 118-чизма.

560. 113-чизма.

566. 119-чизма.

561. 114-чизма.

567. 120-чизма.

562. 115-чизма.

568. 121-чизма.

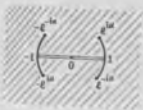
563. 116-чизма.



111-чизма.



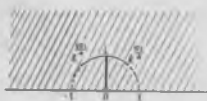
115-чизма.



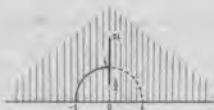
116-чизма.



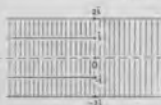
117-чизма.



118-чизма.



119-низма



120-низма



121-низма

569. $\left\{v^2 < 2p\left(x + \frac{p}{2}\right)\right\} \quad (p > 0)$ соҳани $\{w, \operatorname{Im} w > 0\}$ юқори

ярим текисликка конформ акслантирувчи $w(z)$ функцияни топинг.

570. $\left\{\frac{x^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} > 1, x > 0\right\} \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ соҳани $\{w, \operatorname{Im} w > 0\}$

юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи $w(z)$ функцияни топинг.



122-низма



123-низма

Куйидаги мисоллар чизмаларида тасвирланган соҳаларни $\{w: |w| < 1\}$ доирага конформ акслантирувчи $w(z)$ функцияни топинг:

571. 122-чизма. 572. 123-чизма.

Куйидаги мисоллар чизмаларида тасвирланган соҳаларни $\{w: \text{Im} w > 0\}$ юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи $w(z)$ функцияни топинг:

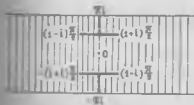
573. 124-чизма. 575. 126-чизма.

574. 125-чизма.



124-чизма.

125-чизма



126-чизма

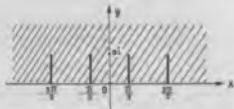
576.

$$D = \{z: \text{Im} z > 0, z \in \{ \text{Re} z = \frac{\pi}{2} + k\pi, 0 \leq \text{Im} z \leq a, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \} \}$$

соҳани (127-чизма) $\{w: \text{Im} w > 0\}$ юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи функцияни топинг.

577. $\{z: |z| < 1\}$ — бирлик доирани

$$\{w: |w| \leq 1, \arg w = \frac{2\pi k}{n}, k=0, n-1\}$$



(27-чизма)

«юлдуз»нинг ташқарисига конформ акслантирувчи $w(z)$ функцияни топинг.

578. Бирлик доиранинг ташқарисини

$$\{w: |w| \leq 1, \arg w = \frac{2\pi k}{n}, k = 0, n-1\}$$

«юлдуз»нинг ташқарисига конформ акслантирувчи $w(z)$ функцияни топинг.

579.

$$\{-a \leq x \leq a, y = \frac{\pi}{2} + k\pi\} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

кесмалар буйича қирқилган (z) текисликни ҳақиқий ўқдаги $[k\pi - b, k\pi + b]$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots; 0 < b < \frac{\pi}{2}$) кесмалар буйича

қирқилган (w) текисликка конформ акслантирувчи $w(z)$ функцияни топинг.

580. $\{0 \leq y < \infty, x = \frac{\pi}{2}\} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

нурлар буйича қирқилган текисликни юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи функцияни топинг.

581.

$$\{z: z \in [k\pi i, k\pi i + \infty], (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)\}$$

соҳани $\{w: \operatorname{Im} w > 0\}$ ярим текисликка конформ акслантирувчи $w(z)$ функцияни топинг.

582.

$$\{z: \operatorname{Im} z > 0, z \in [k\pi, k\pi + \pi i], (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)\}$$

соҳани $\{w: \operatorname{Im} w > 0\}$ ярим текисликка конформ акслантирувчи $w(z)$ функцияни топинг.

583.

$$\{z: \operatorname{Im} z > 0: z \in [2k, 2k+2i], z \in [2k+1, 2k+1+i] \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)\}$$

соҳани $\{w: \operatorname{Im} w > 0\}$ ярим текисликка конформ акслантирувчи $w(z)$ функцияни топинг.

КОМПЛЕКС АРГУМЕНТЛИ ФУНКЦИЯЛАРНИНГ
ИНТЕГРАЛИ

1-§. Интеграл тушунчаси

Комплекс текислик S да бирор туғриланувчи $\gamma = \overline{AB}$ эгри чизиқни олайлик.

$\gamma = \overline{AB}$ эгри чизиқни A дан B га қараб $z_0, z_1, \dots, z_n$ нуқталар ёрдамида n та $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ ёйларга ажратамиз ($\overline{AB}$ ёйининг бошини z_0 нуқта, охирини z_n нуқта тасвирлайди (128-чизма). γ_k -ёйларнинг ($k = 1, 2, \dots, n$) узунликлари l_k ларнинг ($k = 1, 2, \dots, n$) энг каттасини λ билан

белгилаймиз:

$$\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} l_k$$



Айтайлик, γ эгри чизиқда $f(z)$ функция берилган бўлсин. Юқоридаги ҳар бир γ_k ёйда ихтиёрий ξ_k нуқта олиб, сунг берилган функциянинг шу нуқтадаги $f(\xi_k)$ қийматини $z_k - z_{k-1}$ га кўпайтириб, ушбу

128-чизма

$$G = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (z_k - z_{k-1}) \quad (1)$$

йиғиндини тузамиз. Одатда бу йиғинди $f(z)$ функциянинг интеграл йиғиндисидеялайди.

Равшанки, $f(z)$ функциянинг интеграл йиғиндисидея эгри чизиқнинг бўлинишига ҳамда ҳар бир γ_k да олинган нуқталарга боғлиқ бўлади.

1-таъриф. Агар $\lambda \rightarrow 0$ да $f(z)$ функциянинг интеграл йиғиндисидея эгри чизиқнинг бўлиниш усулига ҳамда γ_k да ξ_k нуқтанинг танлаб олинишига боғлиқ бўлмаган ҳолда чекли лимитга эга бўлса, бу лимит $f(z)$ функциянинг γ эгри чизиқ бўйича интегралидея аталади ва

$$\int_{\gamma} f(z) dz \quad (2)$$

каби белгиланади. Демак,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (z_k - z_{k-1}).$$

$$\text{Агар } z = x + iy, f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = u + iv$$

дейилса, унда (2) интеграл 2 — тур эгри чизикли интеграллар билан қуйидагича боғланган

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy \quad (3)$$

1- теорема. $f(z)$ функциянинг γ эгри чизик бўйича интеграл

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

нинг мавжуд бўлиши учун қуйидаги

$$\int_{\gamma} u dx - v dy, \int_{\gamma} v dx + u dy$$

эгри чизикли интегралларнинг мавжуд бўлиши зарур ва етарли.

Хусусан, $f(z)$ функция узлуксиз бўлса, унинг интеграли

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

мавжуд бўлади.

Интегралнинг хоссалари.

1°. Агар $f(z)$ ва $g(z)$ функциялар $\gamma \subset C$ γ эгри чизикда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\int_{\gamma} [af(z) + bg(z)] dz = a \int_{\gamma} f(z) dz + b \int_{\gamma} g(z) dz \quad (4)$$

бўлади, бунда a, b — комплекс сонлар.

2°. Агар $f(z)$ функция γ эгри чизикда берилган ва узлуксиз бўлиб, $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$ бўлса,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz \quad (5)$$

бўлади.

3°. Агар $f(z)$ функция γ эгри чизикда берилган ва узлуксиз бўлса,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz \quad (6)$$

бўлади. Бу ерда γ — берилган ориентация (йўналиш) га тескари ориентация билан олинган чизик (129-чизма).

4°. Агар $f(z)$ функция γ эгри чизикда берилган ва узлуксиз бўлса,

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| \cdot |dz| \quad (7) \quad \text{129-чизма}$$

бўлади, бунда $|dz| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ ($z = x + iy$).

Жумладан,

$$M = \max_{\gamma} |f(z)|,$$

$l(\gamma)$ — γ эгри чизикнинг узунлиги бўлса,

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot l(\gamma)$$

бўлади.

5°. Агар $f(z)$ функция γ эгри чизикда берилган ва узлуксиз γ эгри чизик ушбу

$$z = z(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

тенглама билан берилган бўлиб, $z'(t) \neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) \cdot z'(t) dt \quad (8)$$

бўлади.

Бу формуладан комплекс аргументли функция интегрални ҳисоблашда фойдаланилади.

1 — мисол. Ушбу

$$\int_{\gamma} dz$$

интегрални ҳисобланг, бунда γ чизик боши a ($a \in \mathbb{C}$) нуқтада, охири b ($b \in \mathbb{C}$) нуқтада бўлган эгри чизик.

Равшанки, $f(z) = 1$ функциянинг интеграл йиғиндиси

$$\begin{aligned}\sigma &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) = \\ &= z_1 - z_0 + z_2 - z_1 + \dots + z_n - z_{n-1} = z_n - z_0\end{aligned}$$

булади. Агар

$$\int_{\gamma} dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma$$

ва $z_0 = a$, $z_n = b$ эканини эътиборга олсак, унда

$$\int_{\gamma} dz = b - a$$

булишини топамиз.

2 — мисол. Ушбу

$$I_n = \int (z - a)^n dz \quad (n - \text{бутун сон})$$

интегрални ҳисобланг, бунда $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = \rho, \rho > 0\}$ айланадан иборат (йуналиш соат стрелкасига қарама-қарши олинган).

γ айлананинг тенгламасини қуйидаги

$$z = z(t) = a + \rho e^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

қурунишда ёзиб оламиз. Унда

$$dz = d(a + \rho e^{it}) = i\rho e^{it} dt$$

булиб, (8) формулага кура

$$I_n = \int_{\gamma} (z - a)^n dz = i\rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{in(t+\pi)} dt$$

булади.

Агар $n \neq -1$, бўлса,

$$I_n = i\rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = i\rho^{n+1} \left[\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \right]_0^{2\pi} = 0$$

бўлади

Агар $n = -1$ бўлса,

$$I_{-1} = i \int_0^{2\pi} e^{i0} dt = 2\pi i$$

Бўлади Демак,

$$\oint_{|z-a|=\rho} (z-a)^n dz = \begin{cases} 0, & \text{агар } n \neq -1 \text{ бўлса,} \\ 2\pi i, & \text{агар } n = -1 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

3- м и с о л. Агар γ эгри чизик юзаси S га тенг бўлган соҳани чегараловчи ёпиқ чизик бўлса, у ҳолда

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z} dz = S$$

тенгликнинг ўринли бўлишини исботланг.

Бундан буён $\oint$ — белги ёпиқ контур γ бўйича олинган интегрални билдиради.

Равшанки,

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y) = x$$

учун

$$u(x, y) = x, \quad v(x, y) = 0$$

бўлади. (3) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\oint_{\gamma} x dz = \oint_{\gamma} x dx + i \oint_{\gamma} x dy$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги ҳар бир эгри чизикли интегралга Грин формуласини қўлласак, натижада

$$\oint_{\gamma} x dz = \iint_{(S)} 0 dx dy + i \iint_{(S)} dx dy = i \iint_{(S)} dx dy = iS$$

бўлиши келиб чиқади.

4- мисол. Ушбу

$$\int_{\gamma} x \, dz$$

интегрални ҳисобланг, бунда γ эгри чизиқ

$$\{z \in C : |z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \pi\}$$

дан иборат (чизиқнинг боши $z = 1$ нуқтада).

Аввало γ эгри чизиқни қуйидагича

$$z = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

параметрик ҳуринишда ёзиб оламиз. Унда (8) формулага кўра

$$\int_{\gamma} x \, dz = \int_0^{\pi} \cos t \cdot d(e^{it})$$

бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги аниқ интегрални ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos t \, d(e^{it}) &= \int_0^{\pi} \cos t \, d(\cos t + i \sin t) = \int_0^{\pi} \cos t \, d(\cos t) + \\ &+ i \int_0^{\pi} \cos t \, d(\sin t) = \frac{\cos^2 t}{2} \Big|_0^{\pi} + i \left[\cos t \sin t \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin^2 t \, dt \right] = \\ &= i \int_0^{\pi} \sin^2 t \, dt = i \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} \, dt = i \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{i\pi}{2}. \end{aligned}$$

Демак,

$$\int_{\gamma} x \, dz = \frac{i\pi}{2}.$$

5- мисол. Ушбу

$$\int_{\gamma} |z| \, z \, dz$$



130-чизма

интегрални ҳисобланг, бунда γ эгри чизиқ

$$\{z \in C : |z| = 1, \operatorname{Im} z > 0\}$$

юқори ярим айлана ҳамда $[-1, 1]$ кесмадан иборат бўлган ёпиқ чизиқ (130-чизма).

Агар γ_1 деб $\{z = x + iy \in C : -1 \leq x \leq 1, y = 0\}$ ни, γ_2 деб $\{z \in C : |z| = 1, \operatorname{Im} z < 0\}$ ни белгиласак, унда

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

бўлиб, интегралнинг 2π — хоссасига кўра

$$\oint_{\gamma} |z| \cdot z \, dz = \int_{\gamma_1} |z| \cdot z \, dz + \int_{\gamma_2} |z| \cdot z \, dz$$

бўлади. Бу тенгликнинг унг томонидаги интегралларни алоҳида-алоҳида ҳисоблаймиз:

$$\int_{\gamma_1} |z| \cdot z \, dz = \int_{-1}^1 x |x| \, dx = \int_{-1}^0 x (-x) \, dx + \int_0^1 x^2 \, dx = 0.$$

Кейинги

$$\int_{\gamma_2} |z| \cdot z \, dz$$

интегрални ҳисоблаш учун $z = e^{it}$ ($0 \leq t \leq \pi$) деймиз. Унда

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} |z| \cdot z \, dz &= \int_0^{\pi} |e^{it}| e^{-2it} d(e^{it}) = \\ &= \int_0^{\pi} 1 \cdot e^{-it} i e^{it} dz = i \int_0^{\pi} dz = i\pi \end{aligned}$$

бўлади. Демак,

$$\oint_{\gamma} |z| \cdot z \, dz = i\pi.$$

6 — мисол. Агар $f(z)$ функция O нуқтанинг бирор атрофида узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i f(0) \quad (9)$$

тенгликнинг ўринли булишини исботланг. Бу ерда $\gamma_r = \{z \in C : |z| = r\}$ айлана.

$f(z)$ функция $z = 0$ нуқтада узлуксиз. Таърифга биноан $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $|z| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $z \in C$ лар учун

$$|f(z) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бинобарин, $r < \delta$ тенгсизликлари қаноатлантирувчи барча r лар учун

$$\left| f(re^{i\varphi}) - f(0) \right| < \frac{\epsilon}{2\pi} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi) \quad (10)$$

тенгсизлик бажарилади.

γ_r ёпиқ чизиқни $z = re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ шаклида ифодаласак,

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z} dz = i \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) d\varphi$$

булиб, бундан

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z} dz - 2\pi i f(0) \right| &= \left| i \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) d\varphi - 2\pi i f(0) \right| = \\ &= \left| \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) d\varphi - \int_0^{2\pi} f(0) d\varphi \right| \leq \\ &= \left| \int_0^{2\pi} [f(re^{i\varphi}) - f(0)] d\varphi \right| \leq \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi}) - f(0)| d\varphi. \end{aligned}$$

(10) муносабатга қўра охириги интеграл ϵ дан катта эмас. Демак, $r < \delta$ лар учун

$$\left| \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z} dz - 2\pi i f(0) \right| < \epsilon$$

булиб, бу

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i f(0)$$

булишини курсатади.

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

1. Ушбу

$$\int_{\gamma} z dz$$

интегрални ҳисобланг, бунда γ чизиқ боши a ($a \in \mathbb{C}$) нуқтада, охири b ($b \in \mathbb{C}$) нуқтада бўлган эгри чизиқ.

Интегралларни ҳисобланг.

2. $\int_{\gamma} \operatorname{Im} z \, dz$, бунда γ боши 0 ва охири $2 + i$ нуқтада бўлган

туғри чизик кесмаси.

3. $\int_{\gamma} x \, dz$, $\gamma: z = 2 + i$ нуқтанинг радиус вектори.

4. $\int_{\gamma} x \, dz$, $\gamma: |z - a| = R$,

5. $\int_{\gamma} |z| \, dz$, γ : боши $(-1, 0)$ нуқтада, охири $(1, 0)$ нуқ-

тада бўлган кесма.

6. $\int_{\gamma} |z| \, dz$, $\gamma: (-1, 0)$ нуқтадан $(1; 0)$ нуқтага қараб йўнал-

ган юқори ярим бирлик айлана.

Агар γ боши $z_1 = -2$ нуқтада, охири $z_2 = 2$ нуқтада бўлган $\{|z| = 2, \operatorname{Im} z \leq 0\}$ айлана бўлаги бўлса, қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

7. $\int_{\gamma} \bar{z} \, dz$

9. $\int_{\gamma} |z| \, dz$

8. $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$

10. $\int_{\gamma} z |z| \, dz$

11. $\int_{\gamma} (2x - 3iy) \, dz$.

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг, бунда γ боши $z_1 = 1$ нуқтада, охири $z_2 = i$ нуқтада бўлган кесма.

12. $\int_{\gamma} \bar{z} \, dz$.

13. $\int_{\gamma} \operatorname{Im} z \, dz$.

14. $\int_{\gamma} \frac{1}{|z|} \, dz$

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг.

15. $\oint_{|z|=1} z \bar{z} \, dz$.

17. $\oint_{|z|=1} \operatorname{Re} z \, dz$.

16. $\oint_{|z|=2} z \operatorname{Im} z^2 \, dz$.

18. $\oint_{|z|=1} \ln z \, dz$

19. $\int_{\gamma} [(y+1) - ix] \, dz$, $\gamma: z_0 = 1$ ва $z_1 = -i$

нуқталарни туташтирувчи тўғри чизик кесмаси.

$$20. \oint_{\gamma} \frac{dz}{z-(1+i)}, \quad \gamma: |z-(1+i)|=1$$

$$21. \int_{\gamma} (x^2 + iy^2) dz, \quad \gamma: z_0 = 1+i \text{ ва } z_1 = 2+3i$$

нуқталарни туташтирувчи тўғри чизик кесмаси.

$$22. \oint_{\gamma} \bar{z} dz, \quad \gamma: x = \cos t, y = \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

$$23. \oint_{\gamma} \frac{dz}{z-4}, \quad \gamma: x = 3\cos t, y = 2\sin t - \text{эллипс.}$$

$$24. \oint_{\gamma} \frac{dz}{z}, \quad \gamma: x = \cos t, y = \sin t - \text{айлана.}$$

$$25. \int_{\gamma} y dz, \quad \gamma: z = 2+i \text{ нуқтанинг радиус вектори.}$$

$$26. \int_{\gamma} y dz, \quad \gamma: |z|=1, 0 \leq \arg z \leq \pi - \text{ярим айлана (чизик)}$$

нинг боши $z=1$ нуқтада).

$$27. \oint_{\gamma} y dz, \quad \gamma: |z-a|=R - \text{айлана.}$$

$$28. \int_{\gamma} |z| dz, \quad \gamma: z = 2-i \text{ нуқтанинг радиус вектори.}$$

$$29. \int_{\gamma} |z| dz; \quad \gamma: |z|=1, 0 \leq \arg z \leq \pi \text{ (чизикнинг боши } z=1$$

нуқтада).

$$30. \int_{\gamma} |z| dz; \quad \gamma: |z|=1, \operatorname{Re} z \geq 0 \text{ (чизикнинг боши } z=-1$$

нуқтада).

$$31. \oint_{\gamma} |z| dz; \quad \gamma: |z|=R - \text{айлана.}$$



(31)-чизма

$$32. \int_{\gamma} \frac{z}{z} dz \quad \gamma: [1] - \text{чизмада тасвир}$$

ланган ярим ҳалқанинг чегараси.

$$33. \int_{\gamma} (z-a)^n dz \quad (n - \text{бутун сон}); \quad \gamma: |z-a| = R, \quad 0 \leq \arg$$

$(z-a) \leq \pi$ — ярим айлана (чизиқнинг боши $z=a+R$ нуқтада).

$$34. \oint_{\gamma} (z-a)^n dz \quad (n - \text{бутун сон}); \quad \text{маркази } a \text{ нуқтада, то-}$$

монлари координата ўқларига параллел бўлган квадрат-
нинг периметри.

35. Агар ўғри чизиқ юзи S га тенг бўлган соҳани чега-
раловчи ёпиқ чизиқ бўлса, у ҳолда

$$\oint_{\gamma} y \, dz = -S$$

тегликнинг уринли бўлишини исботланг.

36. Агар ўғри чизиқ юзи S га тенг бўлган соҳани чега-
раловчи ёпиқ чизиқ бўлса, у ҳолда

$$\oint_{\gamma} \bar{z} \, dz = 2i S$$

тегликнинг ўринли бўлишини исботланг.

Куйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$37. \int_{\gamma} e^z dz; \quad \gamma: z_0 = 0 \text{ ва } z_1 = \pi - i \text{ нуқталарни туташти-}$$

рувчи тўғри чизиқ кесмаси.

$$38. \int_{\gamma} e^{\frac{1}{z}} \operatorname{Re} z \, dz; \quad \gamma: z_0 = 0 \text{ ва } z_1 = 1+i \text{ нуқталарни туташ-}$$

тирувчи тўғри чизиқ кесмаси.

$$39. \int_{\gamma} e^z dz, \quad \gamma: y = x^2 \text{ параболанинг } z_0 = 0 \text{ ва } z_1 = 1+i$$

нуқталарни туташтирувчи бўлаги.

$$40. \int_{\gamma} \cos z \, dz; \quad \gamma: z_0 = \frac{\pi}{2} \text{ ва } z_1 = \pi + i \text{ нуқталарни туташ-}$$

тирувчи тўғри чизиқ кесмаси.

$$41. \int_{\gamma} \operatorname{Re} (\sin z) \cos z \, dz; \quad \gamma: x = \frac{\pi}{4}, \quad -1 \leq y \leq 1 - \text{кесма.}$$

$$42. \int_{\gamma} z \operatorname{Im} (z^2) \, dz; \quad \gamma: x = 1, \quad -1 \leq y \leq 1 - \text{кесма.}$$

Агар γ : боши $z_0 = 0$ охири $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ нуқтада бўлган туғри чизиқ кесмаси бўлса, у ҳолда қуйидаги интегрални ҳисобланг:

43. $\int_{\gamma} e^z dz$.

44. $\int_{\gamma} e^{z^2} \operatorname{Re} z dz$.

45. $\int_{\gamma} e^{z^2} \operatorname{Re} z dz$.

46. $\int_{\gamma} \frac{|z|}{|z|+1} dz$.

47. $\oint_{|z|=1} |z-1| |dz|$.

48. Агар γ чизиқ $z_0 = 0$ нуқтадан $z_1 = i$ нуқтага қараб йуналган туғри чизиқ кесмаси бўлса,

$$\int_{\gamma} z \sin z dz$$

интегрални ҳисобланг.

49. Ушбу

$$\int_{|z|=r} \frac{|dz|}{|z-a|^2} = \frac{2\pi r}{|a|^2 - r^2}, \quad |a| \neq r,$$

тенгликни исботланг.

50. Агар $|a| \neq R$ бўлса,

$$\oint_{|z|=R} \frac{|dz|}{|z-a||z+a|} < \frac{2\pi R}{R^2 - |a|^2}$$

тенгсизликни исботланг.

Қуйидаги мисолларда интеграл остида кўп қийматли функциянинг интеграллаш чизигининг бирорта нуқтасида берилган шартни қаноатлантирувчи бир қийматли тармоғи туради. Агар чизиқ ёпиқ бўлса, уша нуқта интеграл-

лаш чизигининг бошланғич нуқтаси деб қабул қилинади (интегралнинг қиймати шу бошланғич нуқтанинг танла-нишига боғлиқ бўлиши мумкин эканлигини ёдда тутиш керак).

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}}$$
 ни ҳисобланг.

51. $\gamma: |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0; \sqrt{1} = 1$ — ярим айлана.

52. $\gamma: |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0; \sqrt{1} = -1$ — ярим айлана.

53. $\gamma: |z| = 1, \operatorname{Im} z \leq 0; \sqrt{1} = -1$ — ярим айлана.

54. $\gamma: |z| = 1, \sqrt{1} = 1$ — айлана.

55. $\gamma: |z| = 1; \sqrt{-1} = i$ — айлана.

56. $\int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt[4]{z^3}}$ ни ҳисобланг, бу ерда

$$\gamma: |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0; \sqrt[4]{1} = 1.$$

57. $\int_{\gamma} \sqrt{z} dz$ ни ҳисобланг, бу ерда $\gamma: z_0 = -2$ нуқтадан z_1

$= 2$ нуқтага қараб йуналган ($|z| = 2, \operatorname{Im} z \leq 0$ ярим айлана ва $\sqrt[4]{1} = i$ шартни қаноатлантирувчи бир қийматли тармоқ олинган).

$\oint_{\gamma} \operatorname{Ln} z dz$ ни ҳисобланг.

58. $\gamma: |z| = 1; \operatorname{Ln} 1 = 0$.

59. $\gamma: |z| = 1; \operatorname{Ln} i = \frac{\pi}{2}$.

60. $\gamma: |z| = R, \operatorname{Ln} R = \ln R$.

61. $\gamma: |z| = R; \operatorname{Ln} R = \ln R + 2\pi i$.

62. n — бутун сон ва $\operatorname{Ln} 1 = 0$ бўлса,

$$\oint_{|z|=1} z^n \operatorname{Ln} z dz$$

интегрални ҳисобланг.

63. n — бутун сон ва $\operatorname{Ln}(-1) = \pi i$ бўлса,

$$\oint_{|z|=1} z^n \operatorname{Ln} z dz$$

интегрални ҳисобланг.

64. Кўп қийматли a' функциясининг ҳар қандай тар-моғи олинганда ҳам

$$\oint_{|q|=1} a' dz = 0$$

тенгликнинг ўринли бўлишини исботланг.

65. α — ихтиёрий комплекс сон ва $1^\alpha = 1$ бўлса,

$$\oint_{|q|=1} z^\alpha dz$$

интегрални ҳисобланг.

• • •

66. Агар $f(z)$ функция $z = a$ нуқтанинг бирор атрофида узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\lim_{r \rightarrow 0} \oint_{|z-a|=r} \frac{f(z) dz}{z-a} = 2\pi i f(a)$$

тенгликнинг ўринли бўлишини исботланг.

67. Айтайлик, $f(z)$ функция кенгайтирилган комплекс текислик C да узлуксиз бўлсин. Агар γ_a чизиқ a ($a \in C$) нуқтадан $a + 1$ нуқтага қараб йўналган тўғри чизиқ кесмаси бўлса, у ҳолда

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\gamma_a} f(z) dz = f(\infty)$$

тенгликнинг ўринли бўлишини исботланг.

68. Фараз қилайлик, $f(z)$ функция $\{Im z \geq 0\}$ юқори ярим текисликда узлуксиз бўлиб,

$$|f(z)| \leq M \cdot |z|^m$$

тенгсизлик бажарилсин. Агар γ_R чизиқ $z_0 = R$ нуқтадан $z_1 = -R$ нуқтага қараб йўналган $|z| = R$, $Im z \geq 0$ ярим айлана бўлса, ушбу

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) e^{az} dz \right| \leq \pi M R^m$$

тенгсизлиكنи исботланг.

Кўрсатма. $\sin \varphi > \frac{2}{\pi} \varphi$ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) тенгсизликдан фойдаланинг.

69. Айтайлик, $f(z)$ функция

$$-\alpha \leq \arg z \leq \alpha \quad (0 < \alpha < \pi)$$

турчакда узлуксиз булиб, $|\arg z| \leq \alpha$ лар учун $z \rightarrow \infty$ да $f(z)$ A булсин. Агар γ_R чизик $z_0 = Re^{i\alpha}$ нуқтадан $z_1 = Re^{i\alpha}$ нуқтага қараб йуналган

$$|z| = R, |\arg z| \leq \alpha$$

сй булса, у ҳолда ушбу

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 2i\alpha A$$

тенгликнинг уринли булишини исботланг.

Куйидаги тасдиқларни исботланг.

70. Фараз қилайлик, $f(z)$ функция

$$\{x \geq x_0, 0 \leq y \leq h\}$$

ярим йулакда узлуксиз булиб, ушбу

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x + iy) = A$$

лимит у га бонлиқ булмаган ҳолда ва у узгарувчига нисбатан текис равишда мавжуд булсин. Агар β_h — пастдан юқорига қараб йуналган $0 \leq y \leq h$ вертикал туғри чизик кесмаси булса, у ҳолда

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\beta_h} f(x) dz = iA h$$

булади

71. Айтайлик, $f(z)$ функция $0 < |z - a| \leq r_0$,

$$0 \leq \arg(z - a) \leq \alpha \quad (0 < \alpha \leq 2\pi)$$

секторда узлуксиз булиб,

$$\lim_{r \rightarrow 0} [(z - a) f(z)] = A$$

лимит мавжуд булсин. Агар γ_r чизик шу секторда ётган ва йуналиши мусбат бўлган $|z - a| = r$ айлана сйи булса, у ҳолда

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(r) dz = iA\alpha$$

булади

72. Фараз қилайлик, $f(z)$ функция

$$|z| \geq R_0, 0 \leq \arg z \leq \alpha \quad (0 < \alpha \leq 2\pi)$$

соҳада узлуксиз бўлиб,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = A$$

лимит мавжуд бўлсин. Агар Γ_R чизиқ шу соҳада ётган ва йуналиши координата бошига нисбатан мусбат бўлган ($|z| = R$) айлана ёни бўлса, у ҳолда

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = iA\alpha$$

бўлади.

2- §. Коши теоремаси

Комплекс узгарувчи функциялар назариясида фундаментал теоремалардан бири Кошининг интеграл теоремасидир.

2-теорема. (Кошининг интеграл теоремаси). Фараз қилайлик, $f(z)$ функцияси комплекс текислик S даги бир боғламли D соҳада голоморф бўлсин. У ҳолда D га тегишли бўлган ихтиёрӣ тўғриланувчи ёпиқ эгри чизиқ γ бўйича олинган интеграл нолга тенг бўлади:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Юқорида биз курдикни (2 — мисол)

$$f(z) = \frac{1}{z-a}$$

функциясида $\gamma: |z-a| = r$ айлана бўйича олинган интеграл $2\pi i$ га тенг. Бу мисолда $f(z)$ функцияси $S \setminus \{a\}$ да голоморф бўлиб, бу соҳа бир боғламли эмас. Шунинг учун ҳам $\oint f(z) dz \neq 0$ бўлади.



132-чизма

2-теорема тубандагича ҳам ёзилиши мумкин.

2'-теорема. Фараз қилайлик, $D \subset S$ бир боғламли, чегараси тўғриланувчи ёпиқ чизиқдан ташкил топган соҳа бўлсин. Агар $f(z)$ функцияси D соҳаининг

ёниги D нинг бирор атрофида голоморф бўлса (132-чизма), у ҳолда

$$\oint_D f(z) dz = 0$$

бўлади.

Бу теоремани $f(z)$ функция фақат D да голоморф бўлган ҳол учун ҳам исботлаш мумкин.

3-теорема. $D \subset S$ бир боғламли, чегараси тўғриланувчи соҳа бўлиб, $f(z)$ функцияси D да голоморф, D да узлуксиз бўлсин. У ҳолда

$$\oint_D f(z) dz = 0$$

бўлади.

4-теорема. (Куп боғламли соҳа учун). Фараз қилайлик, $D \subset S$ чегараси $\Gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ тўғриланувчи чизиқлардан ташкил топган куп боғламли соҳа бўлсин (133-чизма). Агар $f(z)$ D да голоморф, D да узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\oint_D f(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz = 0 \quad (11)$$

тенглик ўринлидир.

(11) тенгликни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин

$$\oint f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k} f(z) dz \quad (12)$$

Натижа. Фараз қилайлик; $D (D \subset S)$ бир боғламли соҳа бўлиб, γ_1, γ_2 чизиқларнинг ҳар бири ($\gamma_1 \subset D, \gamma_2 \subset D$) боши z_0 ва охири z_1 нуктада бўлган чизиқлар бўлсин (134-чизма). Агар $f(z) \in O(D)$ бўлса, у ҳолда



133-чизма



134-чизма

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz \quad (13)$$

булади.

(13) тенглик, қаралаётган интегралнинг z_0 ва z нукталаригагина боғлиқ булиб, интеграллаш йулига боғлиқ булмаслигини билдиради. Шунинг эътиборига олиб, (13) интегрални

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz \quad (14)$$

каби белгилаш ҳам мумкин.

Агар (14) интегралда z_0 нуктани тайинлаб, z ни эса утгарувчи сифатида қаралса, (14) интеграл z утгарувчининг функцияси булади:

$$F(z) = \int_{\gamma_0} f(z) dz$$

5-теорема. Агар $f(z)$ функция бир боғламли $D \subset C$ соҳада голоморф булса, у ҳолда $F(z)$ функция ҳам D соҳада голоморф булиб,

$$F'(z) = f(z) \quad (z \in D)$$

булади.

Бу теоремадан куринадики, бир боғламли соҳада голоморф функция $f(z)$ нинг бошланғич функцияси мавжуддир.

6-теорема. Агар $\Phi(z)$ функция $D (D \subset C)$ соҳада $f(z)$ нинг бошланғич функцияси булса, у ҳолда

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = \Phi(z) - \Phi(z_0) = \Phi(z) \quad (15)$$

формула (Ньютон — Лейбниц формуласи) уринли булади. Бунда z_0 ва z нукталар D соҳага тегишли ихтиёрий нукталар.

7-мисол. Ушбу

$$\int \frac{z^2}{z-2i} dz$$

интегрални ҳисобланг, бунда $\gamma = \{z \in C : |z| = 1\}$.

Агар $D (D \subset C)$ соҳа деб қуйидаги

$$D = \{z \in C : |z| < \frac{3}{2}\}$$

соҳа олинса, унда биринчидан

$$f(z) = \frac{z^2}{z-2i}$$

функция голоморф булади, иккинчидан қаралаётган ёпиқ чизик у шу соҳага тегишли булади: $\gamma \subset D, 2i \notin D$.

Унда 2-теоремага кура

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \oint_{\gamma} \frac{z^2}{z-2i} dz = 0$$

булади.

8-мисол. Агар $f(z)$ функция ушбу

$$D = \{z \in C : r < |z-d| < R\}$$

соҳада (ҳалқала) голоморф бўлса, у ҳолда

$$\oint_{|z-d|=r} f(z) dz \quad (r < \rho < R)$$

интегралнинг қиймати ρ га боғлиқ эмаслигини кўрсатинг.

Ихтиёрий ρ_1, ρ_2 сонларни ($r < \rho_1 < R, r < \rho_2 < R$) оланлик. Улар учун $\rho_1 < \rho_2$ бўлсин деб, ушбу

$$\gamma_1 = \{z \in C : |z-d| = \rho_1\}, \gamma_2 = \{z \in C : |z-d| = \rho_2\}$$

ёпиқ чизикларни қарайлик.

Равшанки,

$$G = \{z \in C : \rho_1 < |z-d| < \rho_2\}$$

соҳа учун

$$\bar{G} \subset \{z \in C : r < |z-d| < R\}$$

булади. Унда 4-теоремадан

$$\oint_{\gamma_2} f(z) dz = \oint_{\gamma_1} f(z) dz$$

булиши келиб чиқади. Демак,

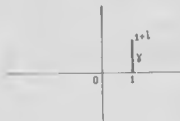
$$\oint_{|z-d|=\rho_1} f(z) dz = \oint_{|z-d|=\rho_2} f(z) dz$$

9-мисол. Ушбу

$$\int_1^{1+i} z^i dz$$

интегрални ҳисобланг.

Равшанки, $f(z) = z_1$ функция бутун комплекс текислик Сда голоморф. Бинобарин, берилган интеграл $z_0 = 1$, $z_1 = 1 + i$ нуқталарни бирлаштирувчи йўлга боғлиқ бўлмайди. Шундан фойдаланиб интеграллаш чизиги γ сифатида



135-чизма

$$\gamma = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x = 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

тўғри чизик кесмасини оламиз (135-чизма).

Бу γ чизикда

$$z = 1 + iy, \quad dz = i dy$$

булишидан фойдаланиб толамиз:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^2 dz &= \int_{\gamma} z^2 dz = \int_0^1 (1 + iy)^2 i dy = \\ &= i \int_0^1 (1 + 2iy - y^2) dy = i \left(y + iy^2 - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 = -1 + \frac{2}{3}i. \end{aligned}$$

10-мисол. Ушбу

$$\int_{\gamma} \frac{\ln z}{z} dz$$

интегрални ҳисобланг, бунда γ эгри чизик боши $z_0 = 1$ ва охири $z_1 = +i$ нуқталарда бўлган $y^2 = 1 - x$ параболанинг ёйи.

Қуйидаги

$$D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

бир боғламли соҳани қарайлик. Қаралаётган γ эгри чизик шу соҳага тегишли бўлади: $\gamma \subset D$.

Иккинчи томондан, D соҳада $\Phi(z) = \frac{1}{2} \ln^2 z$ функциян учун

$$\Phi'(z) = \left(\frac{1}{2} \ln^2 z \right)' = \frac{\ln z}{z}$$

булганлиги сабабли, $\Phi(z)$ функция $f(z) = \frac{\ln z}{z}$ нинг бошланғич функцияси бўлади. Ньютон — Лейбниц формуласидан фойдаланиб толамиз:

200

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{\ln z}{z} dz &= \frac{\ln^2 z}{2} \Big|_1^{+i} = \frac{1}{2} [\ln^2(+i) - \ln^2 1] = \\ &= \frac{1}{2} \ln^2(+i) = \frac{1}{2} [\ln|1| + i + i \arg(+i)]^2 = \frac{1}{2} i^2 \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 = -\frac{\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

11-мисол. Ушбу

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$$

интегралнинг қиймати $z_0 = 1$ ва $z_1 = 2$ нуқталарни бирлаштирувчи йўлга боғлиқ бўладими (йўл координата бошидан ўтмайди деб фарз қилинади)?

Равшанки,

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

функция $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ соҳада голоморф. Аини пайтда бу бир боғламли соҳа эмас. Демак, Кошининг интеграл теоремасидан фойдаланиб бўлмайди.

$z_0 = 1$ ва $z_1 = 2$ нуқталарни бирлаштирувчи иккита γ_1 ҳамда γ_2 чизикларни

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \{z = x + iy \in \mathbb{C} : 1 \leq x \leq 2, y = 0\}, \\ \gamma_2 &= \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \cup \gamma_1 \end{aligned}$$

деб оламиз (136-чизма).



136-чизма

γ_1 чизикда $z = x$, $dz = dx$ бўлиб,

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_1} \frac{dx}{x} = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2$$

бўлади.

201

булганлигидан

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2xb) dx - i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin(2xb) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

булиши келиб чиқади. Бу тенгликнинг ҳақиқий қисмларини тенглаштириб

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2xb) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

яъни

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(2xb) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$$

булишини топамиз.

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

Қуйидаги интегралларни Ньютон — Лейбниц формуласидан фойдаланмасдан ҳисобланг.

$$73. \int_{|z|=1} \frac{e^z}{(z+4)^2} dz$$

$$78. \int_0^1 z \cos z dz$$

$$74. \int_{|z|=1/2} \frac{\sin \frac{1}{z}}{z+1} dz$$

$$79. \int_1^i z \sin z dz$$

$$75. \int_{|z|=1} z dz$$

$$80. \int_{-i}^i z e^{z^2} dz$$

$$76. \int_{|z|=1} (2z+1) dz$$

$$81. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin z dz$$

$$77. \int_{|z|=1} (z^3 - z) e^{\frac{1}{z}} dz$$

$$82. \int_0^{\ln 2} z e^z dz$$

$$83. \oint_{\gamma} (z-a)^n dz \quad (n \text{ — бутун сон}), \text{ бунда } \gamma \text{ чизиқ } z=a$$

нуқтани ўз ичида сақловчи ихтиёрий соҳани чегараловчи ёпиқ тўғрилланувчи Жордан чизиғи.

Қуйидаги функцияларнинг бошланғич функцияларини топинг.

$$84. e^z$$

$$89. e^z \cos bz$$

$$85. \operatorname{ch} az$$

$$90. z e^z$$

$$86. \operatorname{sh} az$$

$$91. z^2 \operatorname{ch} az$$

$$87. \cos az$$

$$92. z \cos az$$

$$88. \sin az$$

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг.

$$93. \int_{\gamma} \frac{dz}{z}; \quad \gamma \text{ чизиқ } z_0 = -i \text{ нуқтадан } z_1 = i \text{ нуқтага қараб}$$

йўналган $y^2 = x + 1$ параболанинг ёйи.

$$94. \int_{\gamma} \frac{dz}{z}; \quad \gamma \text{ чизиқ } z_0 = -i \text{ нуқтадан } z_1 = i \text{ нуқтага қараб}$$

йўналган $|z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0$ айлана ёйи.

$$95. \int_{|z|=1} \sin z dz$$

$$96. \int_0^{1+i} z e^{-z} dz$$

$$97. \int_{\gamma} \ln(z+1) dz, \text{ бунда } \gamma \text{ чизиқ } z_0 = -1-i \text{ нуқтадан } z_1 = -1+i \text{ нуқтага қараб йўналган ва } (-\infty, -1] \text{ нуқри кес-}$$

майдиган ихтиёрий тўғрилланувчи эгри чизиқ.

Қуйидаги функциялар берилган соҳаларда бошланғич функцияга эга эмаслигини кўрсатинг.

$$98. f(z) = \frac{1}{z}; \quad D = \{0 < |z| < \infty\}.$$

$$99. f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1}; \quad D = \{0 < |z| < 1\}.$$

$$100. f(z) = \frac{1}{1+z^2}; \quad D = \{1 < |z| < \infty\}.$$

$$101. f(z) = \frac{1}{z(1-z)}; \quad D = \{0 < |z| < 1\}.$$

102. Агар интеграллаш йули $\pm i$ нуқталардан утмаса, у ҳолда ушбу

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \text{ — бутун сон})$$

тенгликнинг ўринли бўлишини исботланг.

103. $\{z \neq \pm i\}$ соҳада $\int \frac{dz}{z^2+1}$ интегралнинг қиймати $\text{Arc tg } z$

функциянинг қийматлар тўплами билан устма-уст туши-
шини, яъни

$$\int_0^z \frac{dz}{z^2+1} = \text{Arc tg } z$$

тенгликнинг ўринли бўлишини исботланг.

104. $\int \frac{\ln z}{z} dz$ интегрални ҳисобланг. Бу ерда $(\ln z)$

орқали куп қийматли $\ln z$ функциянинг $\ln i = 2\pi i$ шарт-
ни қаноатлантирувчи бир қийматли тармоғи белгиланган
ва интеграл $C(-\infty, 0]$ соҳада ётувчи чизик бўйлаб олин-
ган.

Қуйидаги тасдиқларни исботланг.

105. Агар $f(z)$ функция $U = \{ |z - a| < R \}$ доирада голо-
морф бўлиб, $\forall z \in U$ учун $|f(z)| \leq M$ тенгсизлик бажари-
лса, у ҳолда $\forall z_1, z_2 \in U$ нуқталар учун

$$\left| \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz \right| \leq M |z_2 - z_1|$$

бўлади.

106. Агар $f(z)$ функция $U = \{ |z - a| < R \}$ доирада голо-
морф бўлиб, $\forall z \in U$ учун $\text{Re } f(z) \geq M > 0$ тенгсизлик ба-
жарилса, у ҳолда $\forall z_1, z_2 \in U$ нуқталар учун

$$\left| \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz \right| \geq M |z_2 - z_1|$$

бўлади.

107. 106-мисолдаги тасдиқ $\text{Re } f(z) \geq M$ ($z \in U$) шартин
 $\text{Re } \{e^{if(z)}\} \geq M$ шарт билан ўзгартирилганда ҳам уш-
ни сақлайди (бу шартдаги f ҳақиқий сон z нуқтанинг та-
лашига боғлиқ эмас).

108. Агар $f(z)$ ва $g(z)$ функциялар бир боғламли чегараланган $D \subset C$ соҳада голоморф бўлса, у ҳолда $\forall a, b \in D$ нукталар учун ушбу

$$\int_a^b f(z) dg(z) = f(z)g(z) \Big|_a^b - \int_a^b f'(z)g(z) dz$$

булаклаб интеграллаш формуласи уринли бўлади.

109. Айтайлик, $f(z)$ функция $\{r < |z| < R\}$ ҳалқада голоморф бўлиб, γ чизиқ $\{|z| \leq r\}$ доирани уз ичида сақловчи ва $\{|z| < R\}$ доиранинг ичида ётувчи соҳани чегараловчи мусбат йуналишли содда, бўлакли — силлиқ булган чизиқ бўлсин (138-чизма). У ҳолда

$$\oint_{\gamma} f(z) dz$$

интегралнинг қиймати шундай γ чизиқнинг танланишига боғлиқ бўлмайди.

110. Фараз қилайлик, $f(z)$ функция ёпиқ, бўлакли — силлиқ γ_1 ва γ_2 чизиқларнинг орасида жойлашган икки боғламли чегараланган $D \subset C$ соҳада голоморф бўлиб, унинг ёпиғи D да узлуксиз бўлсин. $f(z)$ функция D соҳада бошланғич функцияга эга бўлиши учун

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = 0$$

тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

111. Айтайлик, $f(z)$ функция n та ёпиқ, бўлакли — силлиқ $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ чизиқлар билан чегараланган n боғламли D соҳада голоморф бўлсин. У ҳолда $f(z)$ функция D соҳада бошланғич функцияга эга бўлиши учун

$$\oint_{\gamma_k} f(z) dz = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, (n-1))$$

шартларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир. (Бу ерда γ_n контур билан чегараланган соҳа барча γ_k ($k = 1, n-1$) чизиқларни уз ичида сақлайди деб фараз қилинади.

112. $f(z)$ функция $\{-a < \operatorname{Im} z < a\}$ йулакда голоморф бўлиб,



138-чизма

$z \rightarrow \infty$ ($-a < \operatorname{Im} z < a$) да $f(z) \rightarrow 0$

бўлсин. Агар

$$\int f(x) dx$$

интеграл яқинлашса, у ҳолда $\forall \alpha \in (-a, a)$ учун

$$\int_{i\alpha - \infty}^{i\alpha + \infty} f(z) dz$$

интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб, унинг қиймати α га боғлиқ бўлмайди.

Курсатма. Коши теоремасини

$$(-R_1 < \operatorname{Re} z < R_2, \quad 0 < |\operatorname{Im} z| < |a|)$$

тўртбурчакларнинг бирига қўлаб, кейин $R_1 \rightarrow +\infty$, $R_2 \rightarrow +\infty$ да лимитга ўтинг.

113. Фараз қилайлик, $f(z)$ функция $\{0 \leq y \leq h\}$ йўлакда голоморф бўлиб,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x + iy) = 0$$

бўлсин. Агар $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x + ih) dx$$

интеграл ҳам мавжуд бўлиб, иккала интегралнинг қийматлари тенг бўлади.

114. Айтайлик, $f(z)$ функция

$$\{0 \leq \arg z \leq \alpha\} \quad (0 < \alpha \leq 2\pi)$$

бурчакда голоморф бўлиб,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$$

бўлсин. Агар

$$\int_0^\infty f(x) dx$$

мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\gamma = \{z = re^{i\alpha}, \quad 0 \leq r < \infty\}$$

нур буйича олинган

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

интеграл ҳам мавжуд бўлиб, иккала интегралнинг қийматлари тенг бўлади.

Кўрсатма. 113 — 114-мисолларни ечишда 70 — 72-мисолларнинг натижаларидан фойдаланинг.

3-§. Кошининг интеграл формуласи

Комплекс текислик C да чегараси туғриланувчи чизик булган, чегараланган D соҳани ($D \subset C$) қарайлик. Кузатувчи бу соҳа чегараси dD буйлаб ҳаракат қилганда соҳа ҳар доим чап томонда қолсин (139-чизма).

7-теорема. Агар $f(z)$ функция D соҳада голоморф бўлиб, D да эса узлуксиз бўлса, у ҳолда



(139-чизма)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \begin{cases} f(z), & \text{агар } z \in D \text{ булса,} \\ 0, & \text{агар } z \notin D \text{ булса} \end{cases} \quad (20)$$

тенглик урикли бўлади.

Одатда (20) формула Кошининг интеграл формуласи дейилади. Бу формула $f(z)$ нинг $z \in D$ нуқтадаги қийматини чегарадаги қийматлар билан боғлайдиган формуладир.

13-мисол. Ушбу

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z+i} dz$$

интегрални ҳисобланг, бунда $\gamma = \{z \in C : |z+i| = 3\}$ айланадан иборат.

Равшанки,

$$D = \{z \in C : |z+i| < 3\}$$

соҳа ҳамда $f(z) = \sin z$ функция учун 7-теорема шартлари ажарилади. (20) формулага кура

$$2\pi i f(a) = \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a} dz \quad \text{булиб, бундан}$$

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z-i} dz = 2\pi i \sin(-i) =$$

$$= 2\pi i \frac{1}{2i} (e - e^{-1}) = 2\pi \operatorname{sh} 1$$

тенгликка эга буламиз.

14-мисол. Ушбу

$$\oint \frac{dz}{z^2+9}$$

интегрални ҳисобланг, бунда γ эгри чизиқ S текислик-нинг $\pm 3i$ нуқталаридан утмайдиган ихтиёрий ёпиқ чизиқ.

Фараз қилайлик, γ ёпиқ чизиқ билан чегараланган туплам D булсин.

а) $\pm 3i$ нуқталар D соҳага тегишли бўлмасин: $\pm 3i \notin D$. Бу ҳолда

$$\varphi(z) = \frac{1}{z^2+9} \in O(\bar{D})$$

булиб, 2-теоремага кура

$$\oint_{\gamma} \varphi(z) dz = \oint_{\gamma} \frac{dz}{z^2+9} = 0$$

булади.

б) $+3i \in D$, $-3i \notin \bar{D}$ булсин. Бу ҳолда, аввало интеграл остидаги функцияни

$$\frac{1}{z^2+9} = \frac{1}{(z+3i)(z-3i)} = \frac{\frac{1}{z+3i}}{z-3i}$$

куринишида ёзиб оламиз. Унда

$$f(z) = \frac{1}{z+3i}, \quad a = -3i$$

лар учун 7-теореманинг шарти бажарилганлиги сабабли (20) формулага асосан

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^2+9} = \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-3i} dz = 2\pi i f(3i) = \frac{2\pi i}{3i+3i} = \frac{\pi}{3}$$

булади.

в) $-3i \in D$, $3i \notin \bar{D}$ булсин. Бунда, юқоридаги б) ҳолда-гига ўхшаш мулоҳаза юритиш билан топамиз:

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^2+9} = \oint_{\gamma} \frac{-\frac{1}{z-3i}}{z^2+9} dz = 2\pi i \frac{-1}{z-3i} \Big|_{z=3i} = -\frac{\pi}{3}$$

г) $3i \in D$, $-3i \in D$ бўлсин. Бу ҳолда, аввало интеграл остидаги функцияни содда касрларга ажратамиз:

$$\frac{1}{z^2+9} = \frac{1}{(z+3i)(z-3i)} = \frac{1}{6i} \left(\frac{1}{z-3i} - \frac{1}{z+3i} \right).$$

У ҳолда

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^2+9} = \frac{1}{6i} \left[\oint_{\gamma} \frac{dz}{z-3i} - \oint_{\gamma} \frac{dz}{z+3i} \right] = \frac{1}{6i} \cdot 2\pi i (1-1) = 0$$

булишини топамиз.

15-мисол. Ушбу

$$\oint_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2+4} dz$$

интегрални ҳисобланг, бунда $\gamma = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x^2 + y^2 + 6y = 0\}$ ёниқ чизиқдан иборат.

Равшанки

$$x^2 + y^2 + 6y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2 \cdot 3y + 9 - 9 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 + (y+3)^2 = 3^2 \Rightarrow |z+3i| = 3.$$

Демак, $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z+3i| = 3\}$. Бу айлана билан чегараланган соҳани D дейлик:

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z+3i| < 3\}.$$

Ушбу $f(z) = \frac{\sin z}{z^2+4}$ функция учун берилган интеграл қуиладигача

$$\oint_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2+4} dz = \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z^2+4} dz$$

ёзилади. $f(z) \in \sigma(D)$ бўлишини эътиборга олиб, Кошининг интеграл формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z^2+4} dz = 2\pi i f(-2i) = \\ = 2\pi i \frac{\sin(-2i)}{-2i-2i} = \frac{\pi}{2} \sin(2\pi i) = \frac{\pi}{2} i \operatorname{sh} 2.$$

Демак,

$$\oint_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2 + 4} dz = \frac{\pi}{2} i \sin 2.$$

(20) формуладаги $\frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$ интегралга Коши интегралли дейилади. Коши интеграллида $-\sigma D$ контур соҳа чегараси бўлиб, $f(\xi)$ функция D соҳада голоморфдир. Энди, фараз қилайлик, C текисликда ихтиёрий тўғриланувчи контур Γ ва Γ да аниқланган ва узлуксиз функция $f(\xi)$ берилган бўлсин. У ҳолда ушбу

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

интегралга Коши типидagi интеграл дейилади

8-теорема. Коши типидagi интеграл $C \setminus \Gamma$ соҳада $F(z)$ функциясини аниқлаб, бу функция ушбу хоссаларга эгадир:

а) $F(z)$ функцияси $C \setminus \Gamma$ да голоморф,

б) $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0$,

в) $F(z)$ функциянинг исталган тартибли ҳосиласи $F^{(n)}(z)$ мавжуд ва

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi.$$

Н а т и ж а . Голоморф функция исталган тартибли ҳосиллага эгадир.

Ҳақиқатан ҳам, голоморф функцияни Коши интегралли ёрдамида ифодалаш мумкин. Коши интегралининг исталган тартибли ҳосиласи мавжудлигидан берилган функция ҳам исталган тартибли ҳосиллага эга:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_D \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi \quad (21)$$

16-мисол. Ушбу

$$\oint_{\gamma} \frac{e^z dz}{(z+2)^2}$$

интегрални ҳисобланг, бунда γ чизиқ C текисликдаги $z = -2$ нуқтани ўз ичига оладиган ихтиёрий ёпиқ контур.

γ контур билан чегараланган соҳани D деб белгилаймиз.

Равшанки, $f(z) = e^z$ учун $f'''(z) = e^z$ булади. Бу функция ва D соҳа учун 8-теореманинг шартлари бажарилади. Унда (21) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\oint_{\gamma} \frac{e^z dz}{(z+2)^4} = \frac{2\pi i}{3!} f'''(-2) = \frac{2\pi i}{6} e^{-2} = \frac{\pi i}{3e^2}.$$

17-мисол. Ушбу

$$\oint_{\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma} \frac{z+1}{z(z-1)^2(z-3)} dz$$

интегрални ҳисобланг.

$z_0 = 0$, $z_1 = 1$ нуқталар $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ айлана билан чегараланган $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ доирага тегишли бўлиб, $z_2 = 3$ нуқта эса шу доирага тегишли эмас. $z_0 = 0$ ва $z_1 = 1$ нуқталарни $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ доирага тегишли ва ўзаро кесишмайдиган γ_1 ва γ_2 ёпиқ чизиклар билан ўраймиз. Бу γ_1 , γ_2 чизиклар ҳамда $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ айлана билан чегараланган уч боғламли соҳани D билан белгилаймиз (140-чизма).



140-чизма

Қаралаётган интегралда интеграл остидаги

$$\frac{z+1}{z(z-1)^2(z-3)}$$

функция D соҳада голоморф булади. 4-теоремадан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=2} \frac{z+1}{z(z-1)^2(z-3)} dz &= \oint_{\gamma_1} \frac{z+1}{z(z-1)^2(z-3)} dz + \\ &+ \oint_{\gamma_2} \frac{z+1}{z(z-1)^2(z-3)} dz = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Агар

$$I_1 = \oint_{\gamma_1} \frac{z+1}{z(z-1)^2(z-3)} dz$$

интегралда

$$f(z) = \frac{z+1}{(z-1)^2(z-3)}$$

дейлиб, (20) формуладан фойдаланилса

$$I_1 = \oint_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i \cdot \frac{1}{-3} = -\frac{2}{3}\pi i$$

булиши келиб чиқади.

(21) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} I_2 &= \oint_{\gamma_2} \frac{z+1}{z(z-1)^2(z-3)} dz = \oint_{\gamma_2} \frac{\frac{z+1}{z(z-3)}}{(z-1)^2} dz = \\ &= 2\pi i \left(\frac{z+1}{z(z-3)} \right)'_{z=1} = 2\pi i \left(\frac{-z^2-2z+3}{(z^2-3)^2} \right)'_{z=1} = 0. \end{aligned}$$

Шундай қилиб,

$$\oint_{|d-a| < (z-1)^2(z-3)} \frac{z+1}{z(z-1)^2(z-3)} dz = I_1 + I_2 = -\frac{2}{3}\pi i$$

булади.

18 - мисол. Агар $f(z)$ функция комплекс текислик S да голоморф ва чегараланган бўлса, у ҳолда $f(z)$ функци-
янинг S да узгармас булишини исботланг.

Ушбу

$$\oint_{|z|=r} \frac{f(z) dz}{(z-a)(z-b)} \quad (|a| < r, |b| < r, a \neq b)$$

интегрални қараймиз. Уни Кошининг интеграл формула-
сидан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=r} \frac{f(z) dz}{(z-a)(z-b)} &= \frac{1}{a-b} \left[\oint_{|z|=r} \frac{f(z) dz}{z-a} - \right. \\ &\left. - \oint_{|z|=r} \frac{f(z) dz}{z-b} \right] = \frac{1}{a-b} 2\pi i [f(a) - f(b)]. \quad (22) \end{aligned}$$

Шартга кура $f(z)$ чегараланган функция $|f(z)| < M$.

Унда

$$\begin{aligned} \left| \oint_{|z|=r} \frac{f(z) dz}{(z-a)(z-b)} \right| &\leq \oint_{|z|=r} \frac{|f(z)| |dz|}{|z-a||z-b|} \leq \\ &\leq \frac{M}{(r-|a|)(r-|b|)} \oint_{|z|=r} |dz| = \frac{2\pi M r}{(r-|a|)(r-|b|)} \end{aligned}$$

булади. Демак,

$$0 \leq \left| \oint_{|z|=r} \frac{f(z) dz}{(z-a)(z-b)} \right| \leq \frac{2\pi M r}{(r-|a|)(r-|b|)}. \quad (23)$$

Равшанки,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2Mbr}{(r-a)(r-b)} = 0. \quad (24)$$

(22), (23) ва (24) муносабатлардан

$$\frac{1}{a-b} 2\pi i [f(a) - f(b)] = 0,$$

яъни

$$f(a) = f(b)$$

булиши келиб чиқади. Бу эса $f(z)$ функциянинг S да ўзгармас, яъни $f(z) = \text{const}$ булишини билдиради.

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг.

115. $\oint_{|z|=1} \frac{z^2 dz}{z-2}$

125. $\oint_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2} dz}{z^2-6z}$

116. $\oint_{|z-2|=1} \frac{dz}{z^2+9}$

126. $\oint_{|z|=1} \frac{e^{z^2} dz}{z}$

117. $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-1)^2(z+1)^2}$

127. $\oint_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^2+1}$

118. $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}$

128. $\oint_{|z+1|=1} \frac{dz}{z^2+1}$

119. $\oint_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^2+1}$

129. $\oint_{|z|=2} \frac{z^2 dz}{z+i}$

120. $\oint_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^2}$

130. $\oint_{|z|=1/2} \frac{z^2 dz}{z+i}$

121. $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z(1-z)} dz$

131. $\oint_{|z-1|=2} \frac{\sin z}{z} dz$

122. $\oint_{|z|=1/2} \frac{e^z}{z(1-z)^2} dz$

132. $\oint_{|z-1|=1} \frac{\cos z}{z-\pi} dz$

123. $\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz dz}{z^2+4z+3}$

133. $\oint_{|z-1|=1/2} \frac{z dz}{z^2-1}$

124. $\oint_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2} dz}{z^2-6z}$

134. $\oint_{|z+2|=2} \frac{z dz}{z^2-1}$

$$135. \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z+1)^2} dz.$$

$$136. \oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{(z+1)^2(z-2)} dz.$$

$$137. \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1} dz.$$

$$138. \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1} dz.$$

$$139. \oint_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2} dz.$$

$$140. \oint_{|z-i|=1} \frac{e^{-\pi z}}{(z-i)^2} dz.$$

$$141. \oint_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} dz.$$

$$142. \oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^2(z-1)} dz.$$

$$151. \oint \frac{\operatorname{sh}(z+1)}{z^2+1} dz; \gamma: x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} \text{ астроида.}$$

$$152. \oint_{|z|=2} \frac{\sin z \sin(z-1)}{z^2-z} dz.$$

$$153. \oint_{|z|=1} \frac{\cos z dz}{z^3}.$$

$$154. \oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh}^2 z dz}{z}.$$

$$155. \oint_{|z-1|=1} \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{(z-1)^2(z-3)} dz.$$

$$156. \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z^2-1)^2} dz.$$

$$143. \oint_{|z-1|=1} \frac{e^z}{z^2+z} dz.$$

$$144. \oint_{|z|=1} \frac{e^z \cos \pi z}{z^2+2z} dz.$$

$$145. \oint_{|z-2|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{z^2-1} dz.$$

$$146. \oint_{|z-1-i|=1} \frac{\sin \pi(z-1)}{z^2-2z+2} dz.$$

$$147. \oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh} z dz}{ze^{z+2}}.$$

$$148. \oint_{|z|=3} \frac{\cos(z+\pi i)}{z(e^z+2)} dz.$$

$$149. \oint_{|z|=5} \frac{dz}{z^2+16}.$$

$$150. \oint_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2+9)(z+9)}.$$

$$157. \oint_{|z-i|=1} \frac{z}{(z-2)^2(z+4)} dz.$$

$$158. \oint_{|z-2|=3} \frac{\operatorname{ch} e^{\pi z}}{z^3-4z^2} dz.$$

$$159. \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\cos \frac{z}{z+1}}{z^3} dz.$$

$$160. \oint_{|z-3|=1} \frac{e^z dz}{(z^2+4)^2}.$$

$$161. \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1-\sin z}{z^2} dz.$$

$$162. \oint_{|z-1|=1} \frac{f^k}{(z-1)^2} dz.$$

$$163. \oint_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}, \quad (|a| < r < |b|; \quad n = 1, 2, \dots).$$

$$164. \oint_{\gamma} \frac{dz}{z(z^2-1)}, \quad \text{бунда } \gamma \text{ чизиқ } z_0 = 0 \text{ ва } z_{1,2} = \pm 1 \text{ нукта-}$$

лардан ўтмайдиغان ихтиёрий ёпиқ контур.

$$165. \oint_{\gamma} \frac{z^2}{z(1-z)} dz, \quad \gamma: z_0 = 0 \text{ ва } z_1 = 1 \text{ нукталардан ўтмай-}$$

диган ёпиқ контур.

166. Агар $\omega_n(z) = (z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)$ ($z_i \neq z_j, \quad i \neq j$) булиб, γ чизиқ бирорта ҳам $z_i (i=1, n)$ нуктадан ўтмаса, ушбу

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{\omega_n(z)}$$

интегралнинг неча хил бир-биридан фарқли қийматни қабул қилиши мумкин эканлигини аниқланг.

$$167. \oint_{|z-a|=a} \frac{z dz}{z^2-1}, \quad (a > 1).$$

$$168. \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{e^z dz}{z^2+a}, \quad \text{бу ерда } \gamma \text{ чизиқ билан чегараланган соҳа}$$

$\{|z| \leq a\}$ доирани ўз ичида сақлайди.

$$169. \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{e^z}{(z-a)} dz, \quad \text{бунда } \gamma \text{ чизиқ билан чегараланган}$$

соҳа a нуктани ўз ичида сақлайди.

170. Агар $\gamma: |z|=2$ — айлана булиб, $a > 0$ учун $\operatorname{Ln} a = \ln a$ шарт бажарилса,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} z^2 \operatorname{Ln} \frac{z+1}{z-1} dz$$

интегрални ҳисобланг.

171. Агар $\gamma: |z-1| = 1$ айлана булиб, $a > 0$ учун $\operatorname{Ln} a = \ln a$ шарт бажарилса, ва $z = 1 + i$ интеграллашнинг бошлангич нуқтаси булса, у ҳолда

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} z^3 \operatorname{Ln} \frac{z+1}{z-1} dz$$

интегрални ҳисобланг.

172. Айтайлик, $f(z)$ функция координата бошини узичига олувчи ва содда ёпиқ контур γ билан чегараланган $D \subset C$ соҳада голоморф булсин. Куп қийматли $\operatorname{Ln} z$ функциясининг ихтиёрий бир қийматли тармоғи олинганда ҳам

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f'(z) \operatorname{Ln} z dz = f(z_0) - f(0)$$

тенгликнинг уринли булишини исботланг. Бу ерда z_0 — интеграллашнинг бошлангич нуқтаси.

173. Ушбу теоремани исботланг (чегараланмаган соҳа учун Кошининг интеграл формуласи).

Фараз қилайлик, D соҳа чегараланмаган соҳа булиб, $f(z) \in \sigma(D)$ бўлсин. Агар

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A$$

булса, унда бундай ҳол учун Кошининг интеграл формуласи қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a} dz = \begin{cases} f(a) - A, & a \in D, \\ -A, & a \notin \bar{D}. \end{cases}$$

$f(z)$ функциянинг n — тартибли ҳосиласи учун интеграл формула эса (21) формула кўринишига эга булади.

Кўрсатма. Аввал $D_R = D \setminus \{|z| \geq R\}$ соҳа учун Кошининг интеграл формуласини қўллаб, кейин R ни ∞ га интилитринг.

174. Айтайлик, γ чизиқ чегараланган D соҳанинг чегараси булиб, $f(z) \in \sigma(C \setminus D)$ булсин. Агар $O \in D$ бўлса, у ҳолда ушбу

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{az-z^2} dz = \begin{cases} 0, & a \in D, \\ \frac{f(a)}{a}, & a \notin \bar{D} \end{cases}$$

формуланинг уринли эканлигини исботланг.

175. Агар $D = \{ |z| < 1 \}$ бўлиб, $f(z)$ ва $g(z) \in \sigma(D) \cap C(\bar{D})$ бўлса, у ҳолда ушбу

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\alpha|=1} \left[\frac{f(z)}{z-\alpha} + \frac{g(z)}{\alpha z-1} \right] dz = \begin{cases} f(\alpha), & |\alpha| < 1, \\ g\left(\frac{1}{\alpha}\right), & |\alpha| > 1 \end{cases}$$

формуланнинг уринли эканлигини исботланг.

176. Агар $\sigma = \{ |z| < R \}$ бўлиб, $f(z) \in \sigma(D) \cap C(\bar{D})$ бўлса,

$$\iint_{|z| \leq R} f(z) \, dx \, dy$$

интегрални ҳисобланг.

177. Айтайлик, чегараси чекли сондаги ёпиқ, бўлақли-силлиқ чизиклардан иборат бўлган чегараланган $D \subset C$ соҳа берилган бўлиб, $f(z) \in \sigma(D) \cap C(\bar{D})$ бўлсин.

$M = \max_{z \in \bar{D}} |f(z)|$, z нуқтадан D соҳанинг чегарасигача бўлган

масофани ρ ва D соҳа чегарасининг тулиқ узунлигини L деб белгилаймиз. У ҳолда D соҳада ушбу

$$\left| \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \right| \leq \frac{M L}{2\pi \rho^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

тенгсизликнинг уринли бўлишини исботланг.

178. Фараз қилайлик, $D = \{ |z| < R \}$ бўлиб, $f(z) \in \sigma(D) \cap C(\bar{D})$ бўлсин. Агар $M = \max_{|z|=R} |f(z)|$ бўлса, у ҳолда D соҳада

$$\left| \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \right| \leq \frac{MR}{(R-|z|)^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

тенгсизликнинг уринли бўлишини исботланг.

V б о б

ҚАТОРЛАР

I-§. Сонли қаторлар

Бирор

$$z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots$$

комплекс сонлар кетма-кетлиги берилган булсин. Бу кетма-кетлик ҳадларидан тузилган ушбу

$$z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots$$

ифода **қатор** дейилади ва $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ каби белгиланади:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots \quad (I)$$

Бунда $z_1, z_2, \dots$ комплекс сонлар **қаторнинг ҳадлари** дейилади. (I) қатор ҳадларидан ташкил топган

$$\begin{aligned} S_1 &= z_1, \\ S_2 &= z_1 + z_2, \\ S_n &= z_1 + z_2 + \dots + z_n \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

йигиндилар қаторнинг **қисмий йиғиндилари** дейилади.

I-таъриф. Агар (I) қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{S_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи булса, (I) қатор яқинлашувчи,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

эса **қатор йиғиндиси** дейилади. Акс ҳолда, агар $\{S_n\}$ яқинлашувчи булмаса, (I) қатор **узоқлашувчи** дейилади.

Айтайлик,

$$z_n = x_n + iy_n \quad (x_n \in R, y_n \in R, n=1, 2, \dots)$$

бўлсин. Унда

$$S_n = \sum_{k=1}^n z_k = \sum_{k=1}^n (x_k + iy_k) = \sum_{k=1}^n x_k + i \sum_{k=1}^n y_k$$

бўлади.

1-теорема. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ қаторнинг яқинлашувчи бўлиши учун

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

қаторлар яқинлашувчи бўлиши зарур ва етарли.

Демак, математик анализ курсида урганилган қаторлар ва улар ҳақидаги маълумот ва тасдиқлар комплекс ҳадли қаторлар учун ҳам ўринли бўлади. Жумладан, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ қатор яқинлашувчи бўлса,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$$

бўлади (қатор яқинлашишининг зарурий шартин).

1-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{in}$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг.

Бу қатор учун

$$z_n = e^{in} = \cos n + i \sin n \Rightarrow |z_n| = 1$$

бўлиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 1 \neq 0$$

бўлади. Демак, берилган қатор узоқлашувчи (қатор яқинлашишининг зарурий шартин бажарилмайди).

2-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n}$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг.

Бу қаторнинг умумий ҳади учун

$$z_n = \frac{e^{in}}{n} = \frac{\cos n + i \sin n}{n} = \frac{\cos n}{n} + i \frac{\sin n}{n}$$

булади. Равшанки,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos n, \sum_{n=1}^{\infty} \sin n$$

қаторлар яқинлашувчи. Унда 1-теоремага кура берилган қатор ҳам яқинлашувчи булади.

3-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг.

Берилган қаторнинг умумий ҳадини қуйидагича ёзиб оламиз:

$$z_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1})} = \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} = \frac{\sqrt{n}}{n+1} - \frac{1}{n+1}$$

Бизга

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

қаторларининг узоқлашувчи бўлиши маълум. Унда, 1-теоремага кура, берилган қатор узоқлашувчи булади.

4-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{2^n}$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг.

Бу қаторнинг

$$z_n = \frac{\cos(n)}{2^n}, \quad z_{n+1} = \frac{\cos(n+1)}{2^{n+1}}$$

ҳадларини олиб,

$$\frac{z_{n+1}}{z_n}$$

нисбатни қараймиз:

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{\cos(n+1)}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{\cos n} = \frac{1}{2} \frac{\cos(n+1)}{\cos n}$$

Агар

$$\cos n = \frac{1}{2}(e^{-in} + e^{in}), \quad \cos(n+1) = \frac{1}{2}(e^{-i(n+1)} + e^{i(n+1)})$$

қанини эътиборга олсак, унда $\frac{z_{n+1}}{z_n}$ учун

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-(n+1)} + e^{n+1}}{e^{-n} + e^n} = \frac{1}{2} \frac{e^{-2(n+1)} + 1}{e^{-2n} + 1}$$

булиши келиб чиқади. Кейинги тенгликдан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \frac{1}{2} e > 1$$

қанини топамиз. Демак, берилган қатор узоқлашувчи.

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

1. Айтайлик, $z_n = x_n + iy_n$ ($x_n \in R$, $y_n \in R$, $n = 1, 2, \dots$) бўлсин. Унда

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

қаторнинг абсолют яқинлашувчи бўлиши учун

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ ва } \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

қаторларининг абсолют яқинлашувчи бўлиши зарур ва етарли эканлигини исботланг.

2. Қуйидаги шартларнинг бирортаси бажарилганда

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

қаторнинг абсолют яқинлашишини исботланг:

1) $|z_n| < M\rho^n$ ($n > n_0$). Бу ерда $M < \infty$ ва $0 < \rho < 1$.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \rho < 1$.

Қуйидаги мисоллардаги шартлар бажарилганда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$

қаторнинг абсолют яқинлашишини исботланг:

3. $|z_n| < M n^{-\alpha}$ ($n > n_0$), $\alpha > 1$, $M < \infty$.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \left(1 - \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \right) \right] = \alpha > 1$.

$$5. |z_n| < M \frac{1}{n (\ln n)^\alpha} \quad (n > n_0), \quad \alpha > 1, \quad M < \infty.$$

6. Айтайлик, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ қатор яқинлашувчи бўлиб, $\operatorname{Re} z_n \geq 0$,

$\operatorname{Im} z_n \geq 0$ бўлсин. У ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ва $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^2$ қаторларнинг абсолют яқинлашишини исботланг.

7. Фараз қилайлик, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ва $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^2$ қаторлар яқинлашувчи бўлиб, $\operatorname{Re} z_n > 0$ бўлсин. У ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2$ қаторнинг яқинлашувчи эканлигини исботланг.

8. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ қатор яқинлашувчи бўлиб,

$$|\arg z_n| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

бўлса, у ҳолда берилган қаторнинг абсолют яқинлашишини исботланг.

9. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ қатор яқинлашувчи бўлиб,

$$0 < \alpha < \arg z_n < \pi - \alpha, \quad n = 1, 2, \dots,$$

бўлса, у ҳолда берилган қаторнинг абсолют яқинлашишини исботланг.

Қаторларни шартли яқинлашишга текширишда ва бошқа куп масалаларда Абель алмаштиришидан фойдаланилади. Интегралларни ҳисоблашда булаклаб интеграллаш амали қанчалик муҳим бўлса, Абель алмаштириши йиғиндилар учун шунчалик муҳимдир.

10. Ушбу формула (Абел ь а л м а ш т и р и ш и) ни исботланг:

$$\sum_{k=m}^n a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) - S_{n-1} b_n + S_n b_m.$$

Бу ерда $1 \leq m \leq n$, $S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ ($k \geq 1$), $S_0 = 0$, a_k ва b_k лар ихтиёрий комплекс сонлар.

11. Айтайлик, $\sum a_n b_n$ комплекс ҳадли қатор берилган бўлиб, $b_n > 0$ бўлсин. Бу қаторнинг яқинлашувчи бўлиши учун $\sum a_n$ қаторнинг қисмий йиғиндилари чегараланган бўлиши ва $\{b_n\}$ сонлар кетма-кетлигининг нолга монотон интилиши етарли эканлигини исботланг (Дирихле аломати).

Курсатма. Абель алмаштиришидан фойдаланинг.

12. Фараз қилайлик, $\sum a_n b_n$ қатор берилган бўлиб, b_n лар ҳақиқий сонлардан иборат бўлсин. Бу қатор яқинлашувчи бўлиши учун $\sum a_n$ қатор яқинлашувчи ва $\{b_n\}$ кетма-кетлик монотон ва чегараланган бўлиши етарли эканлигини исботланг (Абель аломати).

Куйидаги мисоллардаги шартлар бажарилганда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

қаторнинг яқинлашувчи бўлишини исботланг.

13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n b^n} = 0$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} |b_n - b_{n+1}|$ қатор яқинлашувчи.

15. $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ бўлса, $\left\{ \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right\}$ кетма-кетлик чегараланган.

16. Айтайлик, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ қатор берилган бўлиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = q$$

бўлсин. Агар $q < 1$ бўлса, қаторнинг абсолют яқинлашувчи ва $q > 1$ бўлса, унинг узоқлашувчи бўлишини исботланг.

17. Фараз қилайлик, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ қатор берилган бўлиб,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = 1$ бўлсин. Қаторнинг абсолют яқинлашувчи бўлиши учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| - 1 \right) < -1$$

тенгсизлиkning бажарилиши етарли эканлигини исботланг (Раабде аломати).

18. Айтايлик,

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = 1 + \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

бўлиб, бу ерда a сони n га боғлиқ бўлмай, $a < -1$ бўлсин. У ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

қаторнинг абсолют яқинлашишини исботланг (Гаусс аломати).

Қуйидаги қаторларнинг яқинлашувчи эканлигини курсатинг (Дирихле аломатидан фойдаланинг).

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{\sqrt{n}} \quad (\alpha \neq 2k\pi, k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$21. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

Қуйидаги қаторларни яқинлашувчиликка текширинг.

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2(i-1)} i^p}{n^2}$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+i)^2 n}$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{5^n}$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin n\alpha}{3^n}$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{n^2}$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{\sqrt{n}}$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^{n/2} \cos n\alpha}$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{\ln n}$$

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sin n\alpha}$$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^{3/2}}$$

$$33. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\lg n}$$

$$34. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n\alpha}}{n^2}$$

$$35. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n + (2n-1)\alpha|^2}$$

$$36. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2+i)^n}{2^n}$$

$$37. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n(2-i)^{n+1}}{n(3-2i)-3} \right]^n$$

$$38. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+1} \left(\frac{1}{n+1} \right)^{n^2}$$

$$39. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2i}{n} \right)^n$$

$$40. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{(n+1)^2}$$

$$41. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2i)^n}$$

$$42. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(in)^n}$$

$$43. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n\alpha}}{n}$$

$$44. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{i\alpha}$$

$$45. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin n\alpha}{3^n}$$

Қуйидаги қаторларнинг ҳақиқий параметр α нинг қандай қийматларида яқинлашувчи бўлишини аниқланг:

$$46. \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} e^{n\alpha}$$

$$47. \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} e^{i^n}$$

$$48. \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + 1)^{-\alpha} (e^{i^2} - 1)$$

$$49. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha+1)(\alpha+2) \dots (\alpha+n)}{n!} i^n$$

$$50. \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{(\ln(e^2+1))^n}{n}$$

$$51. \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\frac{n}{2}} (1+i)^n (\ln \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4n})^n$$

2-§. Функционал қаторлар

Бирор $D(D \subset C)$ тўпламда аниқланган $u_1(z)$, $u_2(z)$, $u_3(z)$, ..., $u_n(z)$, ... функциялар кетма-кетлиги берилган бўлсин. Бу кетма-кетликдан тузилган ушбу

$$u_1(z) + u_2(z) + \dots + u_n(z) + \dots$$

ифода **функционал қатор** дейлади ва $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ каби белгиланади:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + \dots + u_n(z) + \dots \quad (2)$$

Одатда

$$\begin{aligned} S_1(z) &= u_1(z), \\ S_2(z) &= u_1(z) + u_2(z), \\ &\dots \end{aligned}$$

$$S_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + \dots + u_n(z)$$

йигиндилар (2) функционал қаторнинг қисмий йигиндилари.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z)$$

ни эса қаторнинг йигиндиси дейлади.

2-таъриф. Агар (2) функционал қаторнинг қисмий йигиндиларидан иборат

$$\{S_n(z_0)\} \quad (z_0 \in D), \quad n=1, 2, \dots$$

кетма-кетлик яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлса, (2) функционал қатор z_0 нуктада яқинлашувчи (узоқлашувчи) дейлади.

(2) функционал қаторнинг барча яқинлашиш нукталаридан ташкил топган M тўплам ($M \subset D$) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ **функционал қаторнинг яқинлашиш тўплами** дейлади. Қаторнинг йигиндиси $S(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z)$

M тўпламда аниқланган функцияйдир.

3-таъриф. Агар $\forall \epsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топилсаки, $\forall n > n_0$ ва $\forall z \in M$ учун

$$|S_n(z) - S(z)| < \epsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $\{S_n(z)\}$ функционал кетма-кетлик M тўпламда $S(z)$ га текис яқинлашади дейлади.
2-теорема (Вейерштрасс аломати). Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + \dots + u_n(z) + \dots$$

функционал қаторнинг ҳар бир ҳади M тўпламда ($M \subset C$)

$$|u_n(z)| \leq a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

тенгсизликларни қаноатлантирса ва

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

сонли қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ функционал қатор M тўпламда текис яқинлашувчи бўлади.
5-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n z}{n^2}$$

функционал қаторнинг яқинлашиш тўпламини топинг.
Бу қаторнинг умумий ҳадини қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\begin{aligned} u_n(z) &= \frac{\sin n z}{n^2} = \frac{e^{i n z} - e^{-i n z}}{2i n^2} = \frac{e^{i n z} + n^2 - n^2 - e^{-i n z}}{2i n^2} = \\ &= \frac{e^{i n z} - e^{-n^2} - e^{-i n z}}{2i n^2} \end{aligned}$$

Агар $z \neq 0$ бўлса, унда

$$|u_n(z)| = \left| \frac{\sin n z}{n^2} \right| \geq \frac{1}{n^2} |e^{-n^2}| - |e^{-n^2}| = \frac{1}{n^2} |e^{-n^2}| - e^{-n^2}$$

булиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n(z)| = 0$$

бўлади. Демак, $z = x + iy$, $y \neq 0$ нукталарда берилган функционал қатор узоқлашувчи бўлади.

Агар $y=0$ бўлса, унда

$$|u_n(z)| = \frac{\sin nx}{n^2}$$

булиб, берилган қатор ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

қаторга айланади. Равшанки, бу қаторнинг ҳадлари учун $\frac{\sin nx}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ тенгсизлик уринди булиб, $\sum \frac{1}{n^2}$ сонли қатор яқинлашувчи. Вейерштрасс аломатига кура берилган функционал қатор

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\}$$

туپламда текис яқинлашувчидир.

6-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$$

функционал қаторнинг яқинлашиш соҳасини топинг.

Бу қаторнинг

$$u_n(z) = \frac{z^n}{1-z^n}, \quad u_{n+1}(z) = \frac{z^{n+1}}{1-z^{n+1}}$$

ҳадлари учун

$$\left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = \left| \frac{z^{n+1}}{1-z^{n+1}} \cdot \frac{1-z^n}{z^n} \right| = \left| z \cdot \frac{1-z^n}{1-z^{n+1}} \right|$$

булиб, $|z| < 1$ бўлганда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = |z| < 1$$

булади. Демак,

$$|z| < 1$$

бўлганда берилган қатор яқинлашувчи булади.

Агар $|z| > 1$ бўлса,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n(z)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z^n}{1-z^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{1-\frac{1}{z^n}} \right| = 1 \neq 0$$

булиб, қатор узоқлашувчи бўлади.

$|z| = 1$ бўлганда $z = e^{i\theta}$ дейилса, унда

$$|u_n(z)| = \left| \frac{z^n}{1-z^n} \right| = \left| \frac{e^{in\theta}}{1-e^{in\theta}} \right| = \frac{1}{|1-e^{in\theta}|}$$

булиб,

$$\{ |u_n(z)| \} = \left\{ \frac{1}{|1-e^{in\theta}|} \right\}$$

кетма-кетлик узоқлашувчи булади. Демак, берилган қаторнинг яқинлашиш соҳаси

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

бирлих доирадан иборат булади.

7-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right)$$

функционал қаторнинг текис яқинлашадиган туپламини топинг.

Равшанки, $|z| < 1$ ҳамда $|z| > 1$ бўлганда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n(z)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left| z^n + \frac{1}{z^n} \right| = +\infty$$

булади. Бинобарин, бу ҳолда берилган функционал қатор узоқлашувчи булади.

Энди $|z| = 1$ бўлган ҳолни қараймиз. Бу ҳолда

$$z = e^{i\theta}$$

булиб,

$$|u_n(z)| = \left| \frac{1}{n^2} (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) \right| = \frac{2|\cos n\theta|}{n^2} \leq \frac{2}{n^2}$$

булади. Маълумки,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$$

қатор яқинлашувчи. Вейерштрасс аломатига кура берилган қатор текис яқинлашувчи.

Шундай қилиб, берилган функционал қаторнинг

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$$

айланада текис яқинлашувчи булишини топдик.

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

Қуйидаги функционал қаторларнинг берилган тўпламларда абсолют яқинлашишини исботланг.

$$52. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{(n!)^2} \frac{z^n}{n^2}; \quad |z| < \frac{1}{2}$$

$$53. \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} z^n; \quad |z| < 1, \quad -\infty < \alpha < \infty$$

$$54. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2} z^n; \quad |z| < e.$$

$$55. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+z) \ln^2 n}; \quad z \neq -2, -3, -4, \dots$$

$$56. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z(z+1) \dots (z+n)}{n!}; \quad \operatorname{Re} z < -1.$$

$$57. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+2)(z+4) \dots (z+2n)}; \quad z \neq -2, -4, -6, \dots$$

$$58. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+nz+3)(z+2n+1)}; \quad \operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$$

59. Айтайлик, D тўпланда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ функционал қатор берилган бўлиб.

$$R_n(z) = \sum_{k=1}^n u_k(z)$$

қаторнинг қолдиғи булсин. У ҳолда берилган функционал қаторнинг D тўпланда текис яқинлашиши учун ушбу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in D} |R_n(z)| = 0$$

тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарли эканлигини исботланг.

Қуйидаги функционал қаторларнинг берилган тўпламларда текис яқинлашишини кўрсатинг.

$$60. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2n}; \quad D = \{|z| \geq 1\}$$

$$61. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} e^{-nz}; \quad D = \{|z| \leq \rho < \frac{1}{2}\}.$$

$$62. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} J_n; \quad D = \{\operatorname{Re} z \geq \delta > 0\}.$$

$$63. \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}; \quad D = \{\operatorname{Re} z \geq \delta > 1\}.$$

$$64. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-z}; \quad D = \{\operatorname{Re} z \geq \delta > 0\}$$

$$65. \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos nz; \quad D = \{|\operatorname{Im} z| \leq \delta < \ln 2\}$$

$$66. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^2}; \quad D = \{|z| \leq R < \infty\}.$$

$$67. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + z^2}; \quad D = \{|z| \leq R < \infty\}.$$

$$68. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n)^2}; \quad D = \{\operatorname{Re} z \leq 0\}.$$

$$69. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^2 + z^2}; \quad D = \{\operatorname{Re} z \leq \delta < -1\}.$$

70. $\sum_{n=1}^{\infty} (z^n - z^{n-1})$ функционал қаторнинг $D = \{|z| < 1\}$ до-
иралда нотекис яқинлашишини исботланг.

71. $\sum_{n=1}^{\infty} z^{ln n}$ қаторнинг $\forall \varepsilon > 0$ учун $\{\operatorname{Re} z \geq 1 + \varepsilon\}$ ярим те-
кисликда абсолют ва текис яқинлашишини ва $\{\operatorname{Re} z > 1\}$
ярим текисликда нотекис яқинлашишини исботланг.

Агар $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 1$ булса, у ҳолда қуйидаги тасдиқларни
исботланг.

72. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ қатор ($|z| \leq \rho < 1$) тупламда текис яқинлаша-

ди

73. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{nz}$ қатор ($\operatorname{Re} z \geq \delta > 0$) тупламда текис яқин-

лашади.

74. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} \cos nz$ қатор ($| \operatorname{Im} z | \leq \delta < \ln 2$) тупламда текис яқинлашади.

75. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n R^n}{z^n + \epsilon^n}$ қатор ($|z| \leq \rho < \min(1, \frac{1}{R})$) тупламда текис яқинлашади.

76. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-nz}$ қатор ($\operatorname{Re} z \geq \delta > 0$) тупламда текис яқинлаша-

ди.

77. Қуйидаги тасдиқни исботланг: ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nz}$$

функционал қатор ($\operatorname{Re} z < 0$) ярим текисликда нотекис яқинлашади; $\forall \epsilon > 0$ сони учун ($\operatorname{Re} z \geq 1 + \epsilon$) ярим текисликда текис яқинлашади; ($\operatorname{Re} z > 1$) ярим текисликда эса нотекис яқинлашади.

Қуйидаги функционал қаторларнинг яқинлашиш соҳасини топинг:

$$78. \sum_{n=0}^{\infty} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right)$$

$$82. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-i)^n}{z+n}$$

$$79. \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{n} + \frac{n}{z} \right)$$

$$83. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{z^n + 1}$$

$$80. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{z(z+n)}{n} \right]^n$$

$$84. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1+z^n}$$

$$81. \sum_{n=1}^{\infty} e^{z \ln n}$$

$$85. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(4+2)(4+z^2) \dots (4+n^2)}$$

Қуйидаги функционал қаторларнинг текис яқинлашадиган тупламларини топинг.

$$86. \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nz}$$

$$87. \sum_{n=1}^{\infty} e^{-z \ln n}$$

$$88. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi z}{n}$$

3-§. Даражали қаторлар

1. Даражали қаторларнинг яқинлашиш радиуси ҳамда яқинлашиш доираси.

Функционал қаторлар орасида уларнинг хусусий ҳоли бўлган

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots \quad (3)$$

ёки умумийроқ

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1 (z-a) + c_2 (z-a)^2 + \dots \quad (4)$$

$$+ c_3 (z-a)^3 + \dots + c_n (z-a)^n + \dots$$

қаторлар (бунда $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ ҳамда a — комплекс сонлар) математика ва унинг татбиқларида муҳим роль уйнайди.

(3) ва (4) қаторлар **даражали қаторлар** дейилади.

Агар (4) қаторда $z-a=\xi$ дейилса, у ҳолда (4) қатор ξ узгарувчига нисбатан (3) кўринишдаги қаторга келади. Бинобарин, (3) кўринишдаги қаторларни урганиш биз учун етарли бўлади.

Одатда, $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ комплекс сонлар (3) даражали қаторнинг **коэффициентлари** дейилади.

3-теорема (Абель теоремаси). Агар

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots$$

даражали қатор z нинг $z=z_0$ ($z_0 \neq 0$) қийматида яқинлашувчи бўлса, у ҳолда қатор

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < |z_0|\}$$

доирада абсолют яқинлашувчи бўлади.

Агар $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ даражали қатор z нинг $z=z_1$ қийматида узоқлашувчи бўлса, у ҳолда қатор

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| > |z_1|\}$$

тўпламда узоқлашувчи бўлади.

Абель теоремасидан кўринадики, (3) даражали қатор учун шундай r сони ($0 < r \leq +\infty$) мавжуд бўларканки, (3) қатор $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ доирада яқинлашувчи, унинг ташқарисида, яъни $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$ тўпламда узоқлашувчи бўлади. Бу r сон (3) даражали қаторнинг *яқинлашиш радиуси*,

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$$

доира эса унинг *яқинлашиш соҳаси* дейилади.

(3) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}} \quad (5)$$

формула (Коши - Адамар формуласи) ёрдамида топилади.

(3) даражали қатор узининг яқинлашиш соҳасига тегишли бўлган ихтиёрий

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}, \quad (\rho < r)$$

ёпиқ доирада текис яқинлашувчи бўлади.

2°. Даражали қаторларнинг хоссалари.
Бирор

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots \quad (6)$$

даражали қатор берилган бўлиб,

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$$

унинг яқинлашиш соҳаси бўлсин. У ҳолда

1) (6) қаторнинг йиғиндиси $S(z)$ функция U да голоморф функция бўлади.

2) (6) қаторни U да ҳадлаб дифференциаллаш мумкин:

$$\frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz} (c_n z^n) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$$

3) (3) қаторни ҳаллаб интеграллаш мумкин:

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int c_n z^n \right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int z^n dz,$$

бунда, γ — U га тегишли бўлган ихтиёрий силлиқ чизиқ.
8-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$$

даражали қаторнинг яқинлашиш соҳасини топинг.

Равшанки, даражали қаторнинг яқинлашиш соҳасини топиш учун унинг яқинлашиш радиусини топиш лозим бўлади. Берилган қаторнинг яқинлашиш радиусини (5) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1 \right).$$

Демак, даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

бирлик доирадан иборат экан. Қатор $|z| < 1$ соҳада яқинлашувчи. Берилган қатор соҳанинг чегараси $|z| = 1$ да ҳам яқинлашувчидир.

9-мисол. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ қаторнинг яқинлашиш радиуси $r = 1$ га тенг. Қатор $|z| < 1$ да яқинлашувчи бўлиб, чегара $|z| = 1$ нинг ҳар бир нуқтасида узоқлашувчидир.

10-мисол. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ қаторни қарайлик. (5) формулага кура $r = 1$ дир. Демак қатор $|z| < 1$ соҳада яқинлашувчи бўлади. Чегарада ётувчи $z = 1$ нуқтада қатор $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ кюринишда бўлиб,

у узоқлашувчидир. $z = -1$ нуқта учун эса $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ Лейбниц

қатори ҳосил бўлиб, бу нуқтада қатор яқинлашувчи бўлади. Демак, қатор $|z| = 1$ айлананинг баъзи нуқталарида яқинлашувчи, баъзи нуқталарида эса узоқлашувчидир.

11-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} [2 + (-1)^n]^n z^n$$

даражали қаторнинг яқинлашиш соҳасини топмиз.

(5) формуладан фойдаланиб берилган даражали қаторнинг яқинлашиш радиусини топамиз:

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|2 + (-1)^n|^n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} |2 + (-1)^n|} = \frac{1}{3}.$$

Демак, қаторнинг яқинлашиш соҳаси

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{3}\}$$

доирадан иборат.

12-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sin in) z^n$$

даражали қаторнинг яқинлашиш соҳасини топмиз.

Берилган қаторнинг n — коэффиценти

$$c_n = \sin in$$

ни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$c_n = \sin in = \frac{e^{-n} - e^n}{2i}.$$

Унда

$$|c_n| = \frac{|e^{-n} - e^n|}{2} = \frac{e^n}{2} \left(1 - \frac{1}{e^n}\right)$$

бўлиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{e^n}{2} \left(1 - \frac{1}{e^n}\right)} = e$$

булади. Демак, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r = \frac{1}{e}$ бўлиб, яқинлашиш соҳаси эса

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{e}\}$$

бўлади.

13-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \quad (|z| < 1)$$

даражали қаторнинг йиғиндисини топинг.

Берилган қаторнинг яқинлашиш радиуси $r=1$ бўлиб, яқинлашиш соҳаси

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

бирлик доирадан иборат бўлади. Бу қаторнинг йиғиндисини $S(z)$ дейлик:

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

Қаторни U да, яъни $z \in U$ деб ҳақлаб дифференциаллаймиз:

$$S'(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^{2n+1}}{2n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^2)^n = \frac{1}{1-z^2}$$

Демак,

$$S'(z) = \frac{1}{1-z^2}$$

Кейинги тенгликнинг ҳар икки томонини интеграллаб, топамиз

$$\int_0^z S'(z) dz = \int_0^z \frac{1}{1-z^2} dz \Rightarrow S(z) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} + c$$

Равшанки, $S(0)=0$. Унда $c=0$ бўлади. Демак, берилган қаторнинг йиғиндисини

$$S(z) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$$

булар экан

Функцияларни даражали қаторларга ёйиш. Функцияларни даражали қаторларга ёйиш қаторлар теориясидаги муҳим масалалардан ҳисобланади. Бу масала қуйидаги теорема ёрдамида ҳал этилади.

4-теорема. Агар $f(z)$ функция $D \subset C$ соҳада голоморф бўлса, у ҳолда D соҳадаги ихтиёрий

$$U = \{z \in C : |z-a| < r\} \quad (\forall a \in D)$$

доирада ($U \subset D$) уни даражалли қаторга ёйиш мумкин:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \quad (7)$$

Бу ерда c_n коэффициентлар

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad 0 < \rho < r,$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots)$$

формулалар ёрдамида ҳисобланадилар.

Одатда, (7) қатор $f(z)$ функциянинг a нуқтадаги Тейлор қатори дейилади. 4-теоремада келтирилган (7) даражалли қаторни U да исталган марта ҳадлаб дифференциаллаш ҳамда интеграллаш мумкин. Улар натижасида ҳосил бўлган қаторлар соҳага тегишли бўлган ихтиёрий ёпиқ доирада текис яқинлашувчи бўлади. Амалиётда купчилик масалаларни ҳал қилишда элементар функциялар ёйилмаларидан фойдаланилади:

$$1) \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n; \quad |z| < 1,$$

$$2) \quad e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \quad z \in C,$$

$$3) \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad z \in C$$

$$4) \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}; \quad z \in C,$$

$$5) \quad \sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad z \in C,$$

$$6) \quad \cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}; \quad z \in C,$$

$$7) \quad (1+z)^a = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} z^n, \quad |z| < 1.$$

$$8) \ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} \quad |z| < 1$$

14-мисол. Ушбу

$$f(z) = ze^{-z}$$

функцияни $a=1$ нуқтада Тейлор қаторига ёйинг.

Аввало берилган функцияни

$$f(z) = [1 + (z-1)] e^{-1+(z-1)} = [1 + (z-1)] e^{-1} e^{-(z-1)}$$

қуринишида ёзиб оламиз. Сўнг 2) муносабатдан фойдаланиб

$$e^{-(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{n!}$$

бўлишини топамиз. Натижада

$$\begin{aligned} f(z) &= ze^{-z} = [1 + (z-1)] e^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{n!} = \\ &= e^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-1} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!} \right) (z-1)^n = \\ &= e^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!} (-1)^{n+1} e^{-1} (z-1)^n \end{aligned}$$

бўлади.

15-мисол. Ушбу

$$f(z) = \sin^2 z$$

функцияни $a=0$ нуқта атрофида Тейлор қаторига ёйинг.

Равшанки,

$$\sin^2 z = \frac{1 - \cos 2z}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2z$$

Энди 4) муносабатдан фойдаланиб

$$\begin{aligned} \cos 2z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} z^{2n} = \\ &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n} \end{aligned}$$

булишини топамиз. Натижада

$$f(z) = \sin^2 z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}$$

булади. Бу берилган функциянинг $a=0$ нуқтадаги Тейлор қаторидир.

16-мисол. Ушбу

$$f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}$$

функцияни $a=0$ нуқта атрофида Тейлор қаторига ёйинг ва унинг яқинлашиш радиусини топинг.

Берилган функция $C \setminus \{-1\}$ тўпلامда голоморф булади. Қаралаётган функцияни

$$f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2} = z^2 \cdot \varphi(z)$$

куринишида ёзиб оламиз, бунда

$$\varphi(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$$

булади. Равшанки,

$$\frac{1}{(1+z)^2} = -\left(\frac{1}{1+z}\right)'$$

1) — тенгликдан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n.$$

Унда

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{(1+z)^2} = -\left(\frac{1}{1+z}\right)' = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n\right)' = \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^n z^n]' = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n z^{n-1} \end{aligned}$$

булади. Натижада берилган функция учун

$$f(z) = -z^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n z^{n+1}$$

ёйилмага келамиз. Кейинги даражали қатор $\{|z| < 1\}$ да яқинлашади, $\{|z| > 1\}$ да эса узоқлашади. Демак, қаторнинг яқинлашиш радиуси $r=1$ бўлади.

4°. Даражали қаторларнинг баъзи татбиқлари.

1) Фараз қилайлик, $f(z)$ функция бирор $a \in C$ нуқтанинг атрофида голоморф бўлсин. Агар

$$f(a)=0$$

бўлса, a сони $f(z)$ функциянинг *ноли* дейилади. Агар

$$f(a)=f'(a)=f''(a)=\dots=f^{(n-1)}(a)=0, \quad f^{(n)}(a)\neq 0$$

бўлса, a сони $f(z)$ функциянинг n — *тартибли* ёки *n* *краттали ноли* дейилади. Хусусан, $n=1$ да a *оддий ноли* дейилади.

Агар $f(z)$ функция $z=\infty$ да голоморф бўлиб,

$$f(\infty)=0$$

бўлса, — *нуқта функция ноли* дейилади. Функциянинг бундай нолининг тартиби

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

функциянинг $z=0$ нуқтадаги ноли тартиби билан аниқланади.

17-мисол. Агар $f(z)$ функция $a \in C$ нуқтанинг атрофида голоморф бўлиб, a сон функциянинг k — тартибли ноли бўлса,

$$f(z)=(z-a)^k \varphi(z)$$

бўлиши кўрсатилсин, бунда $\varphi(z)$ функция a нуқта атрофида голоморф ва $\varphi(a)\neq 0$.

Бу масалани ҳал қилишда $f(z)$ функциянинг Тейлор қаторига ёйилмаси

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n \quad (8)$$

дан фойдаланамиз.

Модомики, a сони $f(z)$ функциянинг k — тартибли ноли экан, унда

$$f(a)=f'(a)=f''(a)=\dots=f^{(k-1)}(a)=0, \quad f^{(k)}(a)\neq 0$$

булиб, (8) тенглик ушбу

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k + \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} (z-a)^{k+1} + \dots = \\ &= (z-a)^k \left[\frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} (z-a) + \dots \right] \end{aligned}$$

куринишга келади. Кейинги тенгликда

$$\varphi(z) = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} (z-a) + \dots$$

деб белгиласак, унда $\varphi(z) \in O\{a\}$, $\varphi(a) \neq 0$ бўлиб,

$$f(z) = (z-a)^k \varphi(z)$$

булади.

18-мисол. Агар $f(z)$ функция $a \in C$ нуқтанинг атрофида голоморф бўлиб, ушбу

$$f(z) = (z-a)^k \varphi(z)$$

куринишга эга бўлса, у ҳолда a сон $f(z)$ функциянинг k — тартибли ноли бўлишини кўрсатинг, бунда $\varphi(z)$ функция a нуқтанинг атрофида голоморф ва $\varphi(a) \neq 0$.

Равшанки, $f(a) = 0$. $f(z)$ функциянинг ҳосилаларини олиб, уларнинг a нуқтадаги қийматларини топамиз:

$$\begin{aligned} f'(z) &= k(z-a)^{k-1} \varphi(z) + (z-a)^k \varphi'(z), \quad f'(a) = 0; \\ f''(z) &= k(k-1)(z-a)^{k-2} \varphi(z) + (z-a)^{k-1} k \varphi'(z) + \\ &+ k(z-a)^{k-1} \varphi'(z) + (z-a)^k \varphi''(z), \quad f''(a) = 0 \end{aligned}$$

Шу йул билан $f^{(k-1)}(a) = 0$ ва айни пайтда $f^{(k)}(a) \neq 0$ бўлиши кўрсатилади. Бу эса a сони $f(z)$ функциянинг k -тартибли ноли эканини билдиради.

19-мисол. Ушбу

$$f(z) = z^2(e^z - 1)$$

функция учун $a=0$ нуқта нечанчи тартибли ноль бўлади?

Маълумки, e^z функциянинг Тейлор қаторига ёйилмаси

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

бўлади. Шунинг эътиборга олиб топамиз:

$$f(z) = z^2(e^{z^2} - 1) = z^2\left(1 + z^2 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \dots - 1\right) = \\ = z^4\left(1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{3!} + \dots\right) = z^4 \cdot \varphi(z),$$

бунда

$$\varphi(z) = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{3!} + \dots$$

Равшанки, $\varphi(z) \in O\{0\}$, $\varphi(0) = 1 \neq 0$. Демак, $\sigma = 0$ сон берилган функциянинг 4-тартибли ноли булар экан.

20-мисол. Агар a нуқта $f(z)$ функциянинг n — тартибли, $g(z)$ функциянинг m — тартибли ноли бўлса, a нуқта $f(z)g(z)$ функциянинг нечанчи тартибли ноли бўлади?

a нуқта $f(z)$ функциянинг n — тартибли ноли. Демак,

$$f(z) = (z - a)^n \varphi(z), \quad \varphi(z) \in O\{a\}, \quad \varphi(a) \neq 0;$$

a нуқта $g(z)$ функциянинг m — тартибли ноли. Демак,

$$g(z) = (z - a)^m \psi(z), \quad \psi(z) \in O\{a\}, \quad \psi(a) \neq 0.$$

Унда

$$f(z)g(z) = (z - a)^n \varphi(z) (z - a)^m \psi(z) = (z - a)^{n+m} \varphi(z)\psi(z)$$

бўлиб, $\varphi(z)\psi(z) \in O\{a\}$, $\varphi(a)\psi(a) \neq 0$ бўлади. Бу эса a нуқтани $f(z)g(z)$ функциянинг $n+m$ — тартибли ноли бўлишини билдиради.

21-мисол. Ушбу

$$f(z) = \frac{z^2 + 9}{z^4}$$

функциянинг нолларини аниқланг ва уларнинг тартибини топинг.

Равшанки, бу функция

$$a_1 = 3i, \quad a_2 = -3i, \quad a_3 = \infty$$

нуқталарда нолга айланади ва

$$f'(3i) \neq 0; \quad f'(-3i) \neq 0$$

бўлганлиги сабабли $3i$ ва $-3i$ сонлар берилган функциянинг оддий ноллари бўлади.

Энди функциянинг $a_3 = \infty$ нолининг тартибини аниқлаймиз. Равшанки,

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{z^2 + 9}{\left(\frac{1}{z}\right)^4} = z^2 + 9z^4$$

функциянинг $z=0$ даги нолининг тартиби, 2 га тенг.

Демак, $z=\infty$ нукта берилган функциянинг 2-тартибли ноли булади.

Айтайлик, $f(z)$ функция $U=\{z \in C: |z-a| < r\}$ доирада голоморф бўлиб,

$$M = \max_{z \in U} |f(z)|$$

булсин. У ҳолда $f(z)$ функциянинг a нукта атрофида Тейлор қатори

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

коэффициентлари учун ушбу

$$|c_n| \leq \frac{M}{r^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (9)$$

тенгсизлик уринли булади. Бу тенгсизликлар Коши тенгсизлиги дейилади.

22-мисол. Агар $f(z)$ функция C да голоморф бўлиб,

$$|f(z)| \leq M |z|^n$$

($n \geq 0$ бутун сон) тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $f(z)$ нини ларажаси m дан юқори булмаган кўпхал бўлишини исботланг.

$f(z)$ функция C да голоморф бўлганлиги сабабли

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

тенглик уринли булади.

Энди ихтиёрий $\rho > 0$ сонни олиб, ушбу

$$\gamma_\rho = \{z \in C: |z| = \rho\}$$

айланани қараймиз. Шартга кўра γ_ρ айланада

$$|f(z)| \leq M \rho^n$$

булди. Коши тенгсизлигидан фойдаланиб топамиз:

$$|c_n| \leq \frac{M \rho^m}{\rho^n} = \frac{M}{\rho^{n-m}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Кейинги тенгсизликдан ихтиёрий $n > m$ учун $\rho \rightarrow \infty$ да

$$c_n = 0$$

булиши келиб чиқади. Демак,

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_m z^m.$$

Бу теоремадан хусусий ҳол $m=0$ учун Лиувилл теоремаси келиб чиқади. Агар $f(z)$ функцияси бутун текисликда голоморф бўлиб, $|f(z)| \leq M$ бўлса, у ўзгармас функциядир: $f(z) = \text{const.}$

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

Қуйидаги даражали қаторларнинг яқинлашиш радиуслари ва яқинлашиш соҳаларини топинг:

$$89. \sum_{n=0}^{\infty} e^n z^n.$$

$$96. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sin^n n}$$

$$90. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{in} \right)^n.$$

$$97. \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n.$$

$$91. \sum_{n=1}^{\infty} \left(ch \frac{1}{n} \right) z^n.$$

$$98. \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1-i} \right)^n.$$

$$92. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\ln n} \right)^n.$$

$$99. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n.$$

$$93. \sum_{n=0}^{\infty} (\cos n) z^n.$$

$$100. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n.$$

$$94. \sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^n.$$

$$101. \sum_{n=0}^{\infty} n! e^{-n^2} z^n.$$

$$95. \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha z^n, \quad \alpha - \text{ихтиёрий}$$

$$102. \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

ҳақиқий сон.

$$103. \sum_{n=0}^{\infty} [3 + (-1)^n] z^n$$

$$104. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$105. \sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$$

$$106. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$$

$$107. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$$

$$108. \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$$

$$109. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+1)^n}{1+in}$$

$$110. \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(z+1)^n}{3^n}$$

$$111. \sum_{n=0}^{\infty} (n+a^n) z^n$$

$$112. \sum_{n=0}^{\infty} z^{1^n}$$

$$113. \sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^n$$

$$114. \sum_{n=1}^{\infty} (2z)^n$$

$$115. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1+i)^n}{(1-i)^n + 1}$$

$$116. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)}{n!} \frac{(\alpha-n+1)}{n!} z^n$$

$$117. \sum_{n=0}^{\infty} [\ln(n+2)]^k z^n$$

$$118. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^\alpha}, \alpha > 0$$

$$119. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$$

$$120. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(kn)! z^n}{n!(n+1)! - (n+k-1)!}$$

$$121. \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} z^n$$

$$122. \sum_{n=0}^{\infty} n! e^{-n} z^n, \alpha > 1$$

$$123. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2+i)^n}{z^n} z^n$$

$$124. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{n!}$$

$$125. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2^n}$$

$$126. \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n}} z^n$$

$$127. \sum_{n=0}^{\infty} i^n z^n$$

$$128. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi i}{n} \right) z^n$$

$$129. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos^n \frac{\pi i}{n} \right) z^n$$

$$130. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\operatorname{sh}^n(1+in)}$$

Агар $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $R(0 < R < \infty)$ бўлса, у ҳолда қуйидаги қаторларнинг яқинлашиш радиусларини (R_1) топинг:

$$131. \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1) c_n z^n.$$

$$138. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{1 + |c_n|} z^n.$$

$$132. \sum_{n=0}^{\infty} n^k c_n z^n, \quad (k = 1, 2, \dots).$$

$$139. \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (z-1)^n.$$

$$133. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n} z^n.$$

$$140. \sum_{n=0}^{\infty} \left[2 + (-1)^n \right]^n c_n z^n.$$

$$134. \sum_{n=0}^{\infty} n^n c_n z^n.$$

$$141. \sum_{n=0}^{\infty} n^n c_n (z+i)^n.$$

$$135. \sum_{n=0}^{\infty} c_n^k z^n, \quad (k = 1, 2, \dots).$$

$$142. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} c_n z^n.$$

$$136. \sum_{n=0}^{\infty} (1 + z_0^n) c_n z^n.$$

$$143. \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 (z + 2i)^n.$$

$$137. \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{nk}, \quad (k = 1, 2, \dots).$$

$$144. \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} z^{2n}.$$

Агар $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ва $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ даражали қаторларнинг яқинлашиш радиуслари мос равишда r_1 ва r_2 бўлса, у ҳолда қуйидаги қаторларнинг яқинлашиш радиусларини (R) топинг:

$$145. \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n.$$

$$146. \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$$

$$147. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} z^n.$$

Қуйидаги даражали қаторларнинг йиғиндиларини топинг:

$$148. \sum_{n=1}^{\infty} n z^n \quad (|z| < 1). \quad 149. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad (|z| < 1).$$

$$150. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} \quad (|z| < 1).$$

177. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(1+z)^n}$ функционал қаторнинг

$$\{ |z| \geq 0, |\arg z| \leq \frac{\pi}{4} \}$$

ёпиқ соҳада абсолют яқинлашувчи, лекин текис яқинлашувчи эмаслигини курсатинг.

Изоҳ. Бу мисол шуни кўрсатадики, функционал қаторнинг ҳатто ёпиқ соҳада абсолют яқинлашувчи эканлигидан ҳам унинг шу соҳада текис яқинлашиши келиб чиқмайди.

178. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-i)^n z^n}{(1+z)^n}$ қаторнинг 177-мисолдаги соҳада текис

ва абсолют яқинлашувчи эканлиги ва абсолют текис яқинлашувчи эмаслигини (яъни, абсолют қийматларидан тuzилган қатор текис яқинлашмаслигини исботланг.)

$f^{(n)}(0)$ ни тўғридан-тўғри ҳисоблаш ёрдамида қуйидаги формулаларнинг $\forall z \in C$ учун ўринли эканлигини исботланг:

179. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{z_0}}{n!} (z - z_0)^n, z_0 \in C$ — ихтиёрий тайин-

ланган нуқта.

180. $\operatorname{ch} az = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n}}{(2n)!} z^{2n}.$

181. $\operatorname{sh} az = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$

182. $\sin az = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$

183. $\cos az = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n}}{(2n)!} z^{2n}.$

Қуйидаги мисолларда берилган $f(z)$ функцияни $z=a$ нуқтанинг атрофида Тейлор қаторига ёйинг ва қаторнинг яқинлашиш радиуси R ни топинг.

184. $f(z) = \frac{1}{1-z}, a = 0.$

190. $f(z) = \cos^2 z, a = \pi.$

185. $f(z) = \frac{1}{3-z}, a = 1.$

191. $f(z) = \frac{1}{z^2+4}, a = i.$

186. $f(z) = \frac{1}{3-z}, a = \infty.$

192. $f(z) = \frac{z}{z^2+4}, a = 2.$

187. $f(z) = e^{iz}, a = 0.$

193. $f(z) = \int_0^z e^{\xi^2} d\xi, a = 0.$

188. $f(z) = \frac{1}{z-1}, a = 2.$

194. $f(z) = \int_0^z \xi \sin \xi^3 d\xi, a = 0.$

189. $f(z) = \cos 2z, a = 1.$

195. Кўп қийматли $f(z) = \sqrt{z+i}$ функциянинг $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

шартни қаноатлантирувчи бир қийматли тармоғи; $a=0.$

196. $f(z) = \sqrt[3]{z}, \sqrt[3]{-8} = -2; a = -8.$

197. $f(z) = \ln z; \ln 1 = 2\pi i; a = 2.$

198. $f(z) = \ln z; a = 1.$

199. $f(z) = (1-z)e^z; a = 0.$

200. $f(z) = \sin 2z - 2\sin z; a = 0.$

201. $f(z) = \operatorname{ch}^2 z; a = 0.$

202. $f(z) = (b+z)^a (b^a = e^{a \ln b}); a = 0.$

203. $f(z) = \frac{1}{cz+d} (d \neq 0); a = 0.$

204. $f(z) = \frac{z}{z^2-4z+13}; a = 0.$

205. $f(z) = \ln \frac{1+z}{1-z}; a = 0.$

206. $f(z) = \operatorname{Aretg} z, \operatorname{Arcrtg} 0 = 0; a = 0.$

207. $f(z) = \operatorname{Arcsh} z, \operatorname{Arcsh} 0 = 0; a = 0.$

208. $f(z) = \ln(z^2 - 3z + 2); a = 0.$

209. $f(z) = \int_0^z \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi; a = 0.$

$$238. \frac{z^{2n+1}z^n + z^n}{(1+z)^{n+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m, \quad (|z| < 1)$$

$$239. \frac{1}{(1-z)^{m+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+1)(m+2) \dots (m+n)}{n!} z^n, \quad m=1, 2, \dots$$

Куйидаги мисоллардаги рационал функцияларни $z=0$ нукта атрофида Тейлор қаторига ёйинг.

$$240. f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$$

$$243. f(z) = \frac{1}{(1-z)^2(z^2+4)}$$

$$241. f(z) = \frac{3z-5}{z^2-5z+6}$$

$$244. f(z) = \frac{z^3}{(z^2+1)(z-1)}$$

$$242. f(z) = \frac{z}{(z^2+1)(z^2-4)}$$

$$245. f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2(z^2+4)}$$

Баъзи бир ҳолларда унинг сурат ва маҳражини мос купайтувчига купайтириш ёрдамида соддалаштириш мумкин.

$$246. f(z) = \frac{1}{1+z+z^2}$$

$$248. f(z) = \frac{1}{(1+z)(1+z^2)(1+z^3)}$$

$$247. f(z) = \frac{2z-1}{4z^2-2z+1}$$

$$249. f(z) = \frac{1}{(1-z^4)(1+z+z^2+z^3)}$$

Кўрсаткичли ва тригонометрик функцияларнинг комбинациясидан иборат бўлган функцияни Тейлор қаторига ёйишда функцияни фақат кўрсаткичли функцияларнинг комбинацияси шаклида тасвирлаб олиш яхши натижа беради.

$$250. f(z) = \cos^3 z$$

$$253. f(z) = e^z \sin z$$

$$251. f(z) = \sin^4 z + \cos^4 z$$

$$254. f(z) = \operatorname{ch} z \cos z$$

$$252. f(z) = \cos^2 z + \operatorname{ch}^2 z$$

Куйидаги $(1+z)^n$ функциянинг Тейлор қаторига ёйилмасидан фойдаланиб, ушбу тенгликларни исботланг:

$$255. \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} z^{2n}, \quad (|z| < 1)$$

$$256. \sqrt{1+z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} n!(n-1)!} z^{2n}, \quad (|z| < 1)$$

$$257. \ln(z + \sqrt{1+z^2}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}.$$

$$258. \operatorname{arcsin} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \quad (|z| < 1).$$

Куйидаги мисоллардаги тенгликларни исботланг:

$$259. \ln \frac{1+z}{1-z} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}; \quad (|z| < 1).$$

$$260. \operatorname{arctg} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}; \quad (|z| < 1).$$

$$261. \frac{1}{2} \operatorname{arctg} z + \frac{1}{4} \ln \frac{1+z}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n+1}}{4n+1}; \quad (|z| < 1).$$

$$262. \frac{1-z}{z} \ln(1-z) = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)} \quad (|z| < 1).$$

Куйидаги мисолларда $f(z)$ функциянинг $z=0$ нукта атрофидаги Тейлор қаторига ёйилмасининг биринчи учта нолдан фарқли ҳадини топинг.

К ў р с а т м а . Номатлум коэффициентлар усулидан фойдаланинг.

$$263. f(z) = \frac{z}{\ln(1+z)}.$$

$$266. f(z) = \frac{z}{\operatorname{arcsin} z}.$$

$$264. f(z) = \operatorname{tg} z.$$

$$267. f(z) = \frac{z}{(1-z^2) \sin z}.$$

$$265. f(z) = \frac{z}{\operatorname{arctg} z}.$$

$$268. f(z) = e^{e^{\sin z}}.$$

269. Ушбу

$$\frac{1}{1-z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

ёйилмадаги c_n коэффициентлар

$$c_n = c_{n-1} + c_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

муносабатни қаноатлантиришини исботланг. c_n коэффициентларни ва қаторнинг яқинлашиш радиусини топинг.

Эслатма. c_n сонларга Фибоначчи сонлари деб ата-лади.

Куйидаги мисолларда $z=0$ нуқтанинг бирор атрофида голоморф бўлган ва берилган тенглама ҳамда шартларни қаноатлантирувчи $f(z)$ функцияни $z=0$ нуқтада Тейлор қаторига ёйинг:

$$270. f'(z)=f(z); f(0)=1.$$

$$271. (1+z^2)f''(z)=1; f(0)=0.$$

$$272. f''(z)+zf'(z)=0; f'(0)=1, f(0)=0.$$

$$273. f''(z)+\alpha^2 f(z)=0; f'(0)=0, f(0)=1.$$

$$274. (1-z^2)f''(z)-zf'(z)=0; f'(0)=0, f(0)=1.$$

$$275. f''(z)+\frac{1}{z}f'(z)+f(z)=0; f(0)=1, f'(0)=0.$$

$$276. (1-z^2)f'''(z)-5zf''(z)-4f'(z)=0; f(0)=1, f'(0)=0.$$

$$277. f(z) = \frac{\arcsin z}{\sqrt{1-z^2}} \text{ функциянинг}$$

$$(1-z^2)f''(z)-zf'(z)=1; f(0)=0,$$

дифференциал тенгламани қаноатлантиришидан фойдаланиб,

$$\frac{\arcsin z}{\sqrt{1-z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

тенгликнинг ўринли эканлигини исботланг.

Голоморф функциянинг ноллари

Куйидаги мисолларда берилган $f(z)$ функциянинг $z=a$ нуқтадаги нолининг тартибини аниқланг:

$$278. f(z)=\sin z+3\sin^2 z; a=k\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$279. f(z)=\sin(z-1)\cos^3 \frac{1}{2} z; a=1$$

$$280. f(z)=6\sin z^2+z^2(z^2-6); a=0.$$

$$281. f(z)=e^z - e^{az}; a=0.$$

$$282. f(z)=2(\operatorname{ch} z-1)-z^2; a=0.$$

$$283. f(z)=\frac{\sin z}{z}; a=k\pi, k=\pm 1, \pm 2, \dots$$

$$284. f(z)=z\sin z - z^2; a=0.$$

$$285. f(z)=\ln(1+z)-z+\frac{z^2}{2}; a=0.$$

$$286. f(z)=\sqrt{1+z}-1; \sqrt{1}=1; a=0.$$

$$287. f(z) = e^{2z} - e^{an2z}; a=0.$$

Агар $z=a$ нуқта $f(z)$ функция учун n — тартибли, $g(z)$ функция учун m — тартибли ноль бўлса, у ҳолда $z=a$ нуқта қуйидаги функциялар учун қандай нуқта бўлади?

$$288. f(z)+g(z).$$

$$290. f'(z) g(z).$$

$$289. \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

$$291. f'(z) g'(z).$$

$$292. c_1 f(z) + c_2 g(z); c_1 \text{ ва } c_2 \text{ лар ўзгармас сонлар.}$$

Қуйидаги мисолларда $f(z)$ функциянинг барча нолларини топинг ва уларнинг тартибини аниқланг.

$$293. f(z) = z^2 + 9.$$

$$310. f(z) = \frac{(1-\cos z)^2}{\sin z}.$$

$$294. f(z) = \sin z - 1.$$

$$311. f(z) = (e^z - e^{z^2}) \ln(1-z).$$

$$295. f(z) = \frac{z^2}{z^2 + \cos z}.$$

$$312. f(z) = z \cos^2 z.$$

$$296. f(z) = z^4 + 4z^2.$$

$$313. f(z) = (z^2 + 2z + 1)(e^z - 1).$$

$$297. f(z) = z \sin z.$$

$$314. f(z) = (z^2 + 1)^3 \operatorname{tg} z.$$

$$298. f(z) = z^2 \sin z.$$

$$315. f(z) = (1 - e^z)(z^2 - 4)^3.$$

$$299. f(z) = 1 + \operatorname{ch} z.$$

$$316. f(z) = 1 - \cos z.$$

$$300. f(z) = (z^2 + \pi^2)(1 + e^{-z}).$$

$$317. f(z) = \frac{(z^2 - e^{z^2})^2 \sin z}{z}.$$

$$301. f(z) = 1 + \cos z.$$

$$318. f(z) = \frac{1 - \operatorname{ctg} z}{z}.$$

$$302. f(z) = 1 - e^z.$$

$$319. f(z) = e^{z^2}.$$

$$303. f(z) = \frac{z^2}{1 - \sin z}.$$

$$320. f(z) = \sin^2 z.$$

$$304. f(z) = (z^2 + 1)^3 \operatorname{sh} z.$$

$$321. f(z) = \frac{\sin^3 z}{z}.$$

$$305. f(z) = (z + \pi i) \operatorname{sh} z.$$

$$322. f(z) = \sin z^3.$$

$$306. f(z) = \frac{\sin^2 z}{z}.$$

$$323. f(z) = \cos^3 z.$$

$$307. f(z) = \frac{(1 - \operatorname{sh} z)^2}{z}.$$

$$324. f(z) = (\sqrt{z} - 2)^3.$$

$$308. f(z) = \cos z^3.$$

$$325. f(z) = (1 - \sqrt{2 - 2\cos z})^2.$$

$$309. f(z) = \frac{z^2}{1 + z - e^z}.$$

Ягоналик теоремаси

326. Куйидаги тасдиқни исботланг (ягоналик теоремаси): *Айтайлик, $f(z)$ ва $g(z)$ функциялар $D \subset C$ соҳада голоморф бўлиб, камида битта лимит нуқтага эга булган $E \subset D$ тўпламда $f(z) = g(z)$ бўлсин. У ҳолда барча $z \in D$ лар учун $f(z) = g(z)$ бўлади.*

Ҳақиқий анализдаги маълум формулалар ва ягоналик теоремасидан фойдаланиб, қуйидаги формулаларнинг комплекс узгарувчиларнинг ихтиёрий қийматлари учун уринли эканлигини исботланг:

$$327. \sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

$$328. e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

$$329. \sin 2z = 2 \sin z \cos z.$$

$$330. \operatorname{ch} 2z = \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z.$$

$$331. \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2.$$

$$332. \operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2.$$

$$333. \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2.$$

$$334. \cos z_1 + \cos z_2 = 2 \cos \frac{z_1+z_2}{2} \cos \frac{z_1-z_2}{2}.$$

$$335. \operatorname{sh} z_1 + \operatorname{sh} z_2 = 2 \operatorname{sh} \frac{z_1+z_2}{2} \operatorname{ch} \frac{z_1-z_2}{2}.$$

$$336. \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \text{ тенглик ёрдамида аниқланган } \cos z$$

функция ОХ ўқида $\cos x$ функцияси билан устма-уст тушадиган ва комплекс текислик C да голоморф булган ягона функция эканлигини исботланг.

$$337. \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \text{ тенглик ёрдамида аниқланадиган } \sin z$$

функция ОХ ўқида $\sin x$ функцияси билан устма-уст тушадиган ва C да голоморф булган ягона функция бўлишини кўрсатинг.

$$338. e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \text{ тенглик ёрдамида аниқланадиган } e^z$$

функция ОХ ўқида e^x функцияси билан устма-уст тушадиган ва C да голоморф булган ягона функция эканлигини исботланг.

$$339. f(z) = \sin \frac{1}{z} \text{ функция } O \text{ нуқтага интилувчи чексиз кўп}$$

сондаги $z_k = \frac{1}{k\pi}$, $k = 1, 2, \dots$ нуқталарда 0 га айланади, лекин $f(z) \neq 0$. Бу факт ягоналик теоремасига зид эмасми?

340. $f(z) = \sin \frac{1}{1-z}$ функция $z=1$ нуқтага интилувчи чек
сиз кўп сондаги нуқталарда нолга интилади, лекин
 $f(z) \neq \text{const}$. Бу факт ягоналик теоремасига зид эмасми?

341. Комплекс текислик S да голоморф ва узгармасдан
фарқли булган функция нолларининг кетма-кетлиги ли-
мит нуқтага эга бўлиши мумкинми?

342. $z=0$ нуқтада голоморф булган ва $z = \frac{1}{n} (n=1, 2, \dots)$
нуқталарда қуйидаги мисоллардаги қийматларни қабул
қиладиган $f(z)$ функция мавжудми?

342. $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, \dots$

343. $0, \frac{1}{1}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{6}, \dots, 0, \frac{1}{11}, \dots$

344. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}, \dots$

345. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$

$z=0$ нуқтада голоморф булган ва $n=1, 2, \dots$ лар учун
қуйидаги мисоллардаги шартларни қаноатлантирувчи $f(z)$
функция мавжудми?

346. $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ 353. $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$

347. $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ 354. $f\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-n}$

348. $f\left(\frac{1}{n}\right) = \sin \frac{\pi n}{2}$ 355. $|f\left(\frac{1}{n}\right)| < e^{-n}$

349. $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cos \pi n$ 356. $2^{-n} < |f\left(\frac{1}{n}\right)| < 2^{1-n}$

350. $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$ 357. $n^{-1} < f\left(\frac{1}{n}\right) < 2n^{-1}$

351. $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\cos^2 \pi n}{2n+1}$ 358. $|f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{\cos \pi n}{2n+1}| < \frac{1}{n^2}$

352. $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n \cos \pi n}$

Қуйидаги мисоллардаги $a_n (n=2, 3, \dots)$ лар учун $|z| < 1$
бирлик доирада голоморф булган ва $f\left(\frac{1}{n}\right) = a_n$ шартларни
қаноатлантирувчи $f(z)$ функция мавжудми?

$$359. a_n = (-1)^n.$$

$$360. a_n = \frac{1 - (-1)^n}{n}.$$

$$361. a_n = \frac{n+1}{n}.$$

$$362. a_{2k} = a_{2k+1} = \frac{1}{2k}; \quad k = 1, 2, \dots$$

$\{|z-1| < 2\}$ доирада голоморф бўлган ва қуйидаги ми-
соллардаги шартларни қаноатлантирувчи ($n=1, 2, 3, \dots$)
 $f(z)$ функция мавжуд бўлса, шу функцияни топинг.

$$363. f\left(\frac{n+1}{n}\right) = f\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

$$364. f\left(\frac{n}{n+1}\right) = -f\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = -\frac{1}{(n+1)}.$$

$$365. f\left(\frac{n}{n+1}\right) = -f\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

$$366. f\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

367. Фараз қилайлик, $f(z)$ функция D соҳанинг ёпиғи
 D да голоморф бўлсин. Ихтиёрий тайинланган a сони учун

$$f(z) = a$$

тенгламанинг чекли сондаги ечимларигина D соҳада ёти-
шини исботланг.

368. Айтайлик, $f(z)$ ва $g(z)$ функциялар D соҳада голо-
морф бўлиб, шу соҳада ушбу

$$F'(z) = P(z, f(z))$$

дифференциал тенгламани қаноатлантирсин. Бу ерда $P(z, w)$ — ўз ўзгарувчиларига нисбатан қўпқад. Агар бирор $z_0 \in D$ нуқтада $f(z_0) = g(z_0)$ тенглик бажарилса, у ҳолда D соҳада

$$f(z) = g(z)$$

булишини исботланг.

369. Фараз қилайлик, $f(z)$ ва $g(z)$ функциялар D соҳада
голоморф бўлиб, шу соҳада ушбу

$$F^{(n)}(z) = P(z, F, F', \dots, F^{(n-1)})$$

дифференциал тенгламани қаноатлантирсин. Бу ерда P —
ўз ўзгарувчиларига нисбатан қўпқад. Агар бирор $z_0 \in D$ учун

$$f(z_0) = g(z_0), \quad f'(z_0) = g'(z_0), \quad \dots, \quad f^{(n-1)}(z_0) = g^{(n-1)}(z_0)$$

тенгликлар бажарилса, у ҳолда $f(z)=g(z)$ бўлишини исботланг.

370. $f(z)=f(2z)$ функционал тенглама $z=0$ нуқтада голоморф ва ўзгармасдан фарқли бўлган ечимга эга бўлиши мумкин эмаслигини исботланг.

371. Айтайлик, даврий $f(z)$ функция $z=\infty$ нуқтани ўз ичида сақловчи бирорта D соҳада голоморф бўлсин. У ҳолда D да $f(z)=\text{const}$ эканлигини исботланг.

Коши тенгсизликлари ва модулнинг максимум принципи

Айтайлик. $\{ |z| < R \}$ доирала $f(z)$ функция ушбу

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

сериалга ёйилган бўлсин. Куйидаги тасдиқларни исботланг.

372. Ихтиёрий $r < R$ учун

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^2 d\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n}$$

тенглик уринли.

373. Маълумки, Коши тенгсизликларига асосан, агар

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = M(r) \quad (r < R)$$

бўлса, у ҳолда

$$|c_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

тенгсизликлар уринли бўлар эди. Агар бу Коши тенгсизликларининг бирортаси тенгликка айланса, яъни $|c_k| = \frac{M(r)}{r^k}$

бўлса, у ҳолда берилган функция ушбу

$$f(z) = c_k z^k$$

қурилишга эга бўлади.

Курсатма. 372-мисолдаги тенгликдан келиб чиқадиган

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} \leq [M(r)]^2$$

тенгсизликдан фойдаланинг.

374. Агар ρ берилган қаторнинг яқинлашиш радиусидан катта бўлмаган ихтиёрий сон бўлиб,

$$M = M(\rho) = \max_{|d|=\rho} |f(z)|$$

булса, у ҳолда $z=0$ нуқтадан $f(z)$ функциянинг энг яқин нолигача булган масофа

$$\frac{\rho|c_0|}{M+|c_0|}$$

дан кичик эмас.

Қўрсатма. $\{|f(z)-c_0| < |c_0|\}$ соҳада $f(z)$ функция нолга тенг эмаслигини курсатиб, Коши тенгсизликларидан фойдаланган ҳолда $|f(z)-c_0|$ ни баҳоланг.

375. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ функция $|d| \leq \rho$ да голоморф булсин

Ушбу

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n z^n}{n!}$$

қаторнинг бутун комплекс текислик C да яқинлашувчи ва унинг йиғиндисини учун қуйидаги

$$|\varphi(z)| < M e^{\frac{|z|}{\rho}} \text{ ва } |\varphi^{(k)}(z)| < \frac{M}{\rho^k} e^{\frac{|z|}{\rho}} \quad (M - \text{ўзгармас})$$

тенгсизликларнинг уринли бўлишини курсатинг.

376. Ихтиёрий

$$P_n(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n \quad (c_n \neq 0, n \geq 1)$$

қўлхал ҳеч бўлмаганда битта нолга эга эканлигини исботланг (алгебраларнинг асосий теоремаси).

377. Қуйидаги тасдиқни исботланг: агар $f(z)$ функция $D \subset C$ соҳада голоморф бўлиб, унинг модули $|f|$ бирорта нчки $z_0 \in D$ нуқтада (локал) максимумга эришса, у ҳолда $f(z) = \text{const}$ булади (модулнинг максимум принципи).

378. Агар $f(z) \in O(D) \cap C(D)$ булса, у ҳолда $|f|$ максимумга фақат соҳанинг чегараси ∂D да эришишини исботланг.

379. Агар $f(z) \in O(D)$ ва $\forall z \in D$ учун $f(z) \neq 0$ булса, у ҳолда $|f(z)|$ нинг D соҳанинг ичида минимумга эришиши мумкин эмаслигини исботланг.

380. 379-мисолдаги $f(z) \neq 0$ шарт олиб ташланса, у ҳолда мисолдаги тасдиқ туғри бўладими?

381. Айтайлик, $f(z) \neq \text{const}$ ва $f(z) \in O(D)$ бўлиб, $|f(z)| = c$ чизиқ билан чегараланган соҳа ва чизиқнинг узи D соҳада тулиқ ётсин. У ҳолда $|f(z)| = c$ чизиқ билан чегараланган соҳанинг ичида $f(z)$ функциянинг камида битта ноли ётишини исботланг.

382. Агар $P(z) — n —$ тартибли купҳад бўлса, $|P(z)| = c$ эллипснинг n тадан куп булмаган боғламли компоненталарга ажралиши мумкинлигини исботланг.

383. Куйидаги тасдиқни исботланг: агар $f(z)$ функция $U = \{z \mid z < 1\}$ доирада голоморф бўлиб, $f(0) = 0$ ва $\forall z \in U$ учун $|f(z)| \leq 1$ бўлса, у ҳолда $\forall z \in U$ учун

$$|f(z)| \leq |z|$$

тенгсизлик уринли бўлади. Агар бирорта $z \neq 0$ ва $z \in U$ нуқтада $|f(z)| = |z|$ бўлса, у ҳолда U нинг ҳамма ерида $|f(z)| = |z|$, яъни $f(z) = e^{i\alpha} z$ (α — ҳақиқий сон) бўлади (Шварц леммаси).

384. Агар $f(z)$ функция $U = \{z \mid z < 1\}$ доирада голоморф бўлиб, $\forall z \in U$ учун $|f(z)| \leq 1$ ва $f(a) = 0$ ($|a| < 1$) бўлса, у ҳолда $\forall z \in U$ учун ушбу

$$|f(z)| \leq \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|$$

тенгсизликнинг уринли бўлишини исботланг.

Кўрсатма. $\varphi(z) = \frac{1-\bar{a}z}{z-a} f(z)$ ёрдамчи функцияни қаранг.

385. Агар $f(z) \in O(D) \cap C(D)$ ва $f \neq \text{const}$ бўлиб, $|f(z)|_{\infty} = \text{const}$ бўлса, у ҳолда $f(z)$ функциянинг D соҳада камида битта нолга эга бўлишини исботланг.

386. Айтайлик, $f(z) \in O(\{z \mid z < R\})$ бўлиб, $f(0) = 0$ ва $\forall z \in \{z \mid z < R\}$ учун $|f(z)| < M$ бўлсин. У ҳолда

$$|f'(0)| \leq \frac{M}{R}$$

бўлишини ва бу тенгсизлик

$$f(z) = Me^{i\varphi} \frac{z}{R}$$

бўлгандагина тенгликка айланишини исботланг.

387. Фараз қилайлик, $f(z)$ функция $\{|z| < R\}$ доирада голоморф булиб, уша ерда $|f(z)| < M$ ва $f(a) = 0$ ($|a| < R$), булсин U ҳолда куйидаги

$$|f(z)| \leq M \frac{R|z-a|}{R^2-a^2} \quad (|z| < R)$$

бу

$$f'(a) \leq \frac{MR}{R^2-a^2}$$

тенгсизликларнинг уринли булишини исботланг.

388. $f(z)$ функция $\{Re z < 1\}$ йулакда голоморф ва $f(0) = 0$ булиб, шу йулакда $|f(z)| < 1$ тенгсизлики қаноатлантирсин. У ҳолда шу йулакда

$$|f(z)| \leq |z|$$

тенгсизликининг бажарилишини исботланг.

389. $f(z)$ функция $\{Re z > 0\}$ ярим текисликда голоморф ва чегараланган булсин. Агар $f(z)$ функция шу ярим текисликда ётувчи $\{z_n\}$ кетма-кетлик нуқталарида

нолга айланса, у ҳолда ёки $f(z) \equiv 0$ булишини, ёки $\sum_{n=1}^{\infty} Re \frac{1}{z_n}$

қаторнинг яқинлашишини исботланг.

390. $f(z)$ функция $\{|z| < R\}$ доирада голоморф ва чегараланган булиб, шу доирада ётувчи $\{z_n\}$ кетма-кетлик нуқталарида нолга айлансин. У ҳолда ё $f(z) \equiv 0$ булишини, ёки

$\sum_{n=1}^{\infty} (R - |z_n|)$ қаторнинг яқинлашувчи булишини исботланг.

Курсатма. 387-мисолдан фойдаланинг.

391. $f(z)$ функция D соҳада голоморф булиб,

$$\inf_D |f(z)| = \mu > 0$$

булсин. У ҳолда ё $f(z) \equiv \mu e^{i\theta}$, ёки D соҳанинг ҳар бир ички нуқтасида $|f(z)| > \mu$ булишини исботланг.

392. Айтايлик, $p(z) - n$ -тартибли кўпхад ва $M(r) = \max_{|z|=r} |p(z)|$

булсин. У ҳолда $0 < r_1 < r_2$ лар учун

266

$$\frac{M(r_1)}{r_1^n} \geq \frac{M(r_2)}{r_2^n}$$

тенгсизликининг уринли булишини ва бу тенгсизлик $p(z) = az^n$ булгандагина бирорта r_1, r_2 жуфтлик учун тенгликка айланишини исботланг.

393. Фараз қилайлик, $f(z) \in \mathcal{O}(D) \cap C(D)$ булиб, $|f(z)|_{D_0} = \text{const}$ булсин. Агар D да $f(z) \equiv \text{const}$ булса, у ҳолда D соҳанинг камида битта нуқтасида $f(z)$ функция нолга тенг булишини исботланг.

4-§. Лоран қатори

Ушбу

$$f(z) = c_{-n} \frac{1}{(z-a)^n} + c_{-(n-1)} \frac{1}{(z-a)^{n-1}} + \dots + c_{-1} \frac{1}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots$$

ифола Лоран қатори дейилади ва

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

каби белгиланади. Бунда $c_{-n}, c_{-(n-1)}, \dots, c_{-1}, c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ комплекс сонлар Лоран қаторининг коэффицентлари, a эса бирор комплекс сон.

Лоран қатори

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad (10)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n \quad (11)$$

қаторлар ийгиндиси сифатида ифодаланади. (10) қаторга Лоран қаторининг *туғри қисми*, (11) га эса *бош қисми* дейилади.

(10) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}} \quad (12)$$

формула ердамида топилиб, унинг яқинлашиш соҳаси, $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$ булади.

(11) қаторнинг яқинлашиш радиуси

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \quad (13)$$

формула ёрдамида топилади ва унинг яқинлашиш соҳаси

$$\{z \in C: |z-a| > r\}$$

булади. Берилган Лоран қаторининг яқинлашиш соҳаси

$$\{z \in C: |z-a| < R\} \cap \{z \in C: |z-a| > r\} = \{z \in C: r < |z-a| < R\}$$

тўпладан (ҳалқадан) иборат булади.

5-теорема. Агар $f(z)$ функция $U = \{r < |z-a| < R\}$ соҳада (ҳалқада) голоморф бўлса, у шу ҳалқада Лоран қаторига ёйилади:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n. \quad (14)$$

Қаторнинг коэффициентлари ушбу

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad (n=0; \pm 1; \pm 2, \dots) \quad (15)$$

формулар ёрдамида топилади ($r < \rho < R$).

Агар $M = \max_{|z-a|=\rho} |f(z)|$ десак, Лоран қатори (14) нинг коэффициентлари учун

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n} \quad (n=0; \pm 1; \pm 2, \dots) \quad (16)$$

тенгсизлик уринли бўлади. Одатда (16) Коши тенгсизлик-лари дейилади.

Лоран қаторини яқинлашиш соҳасида ҳаллаб дифференциаллаш

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \right)' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [c_n (z-a)^n]'$$

шунингдек ҳаллаб интеграллаш

$$\int \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \right] dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int c_n (z-a)^n dz$$

мумкин.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n+1}$$

Доран қаторининг яқинлашиш нуқталари тўпламини то-
пинг.

Равшанки,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{3^n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n+1}$$

Бу тенгсизликнинг ўнг томонидаги ҳар бир қаторнинг
яқинлашиш радиуси ҳамда яқинлашиш соҳасини топамиз:

(12) формуладан фойдаланиб $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n+1}$ даражали қатор-
нинг яқинлашиш радиуси

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n+1}} = 3.$$

яқинлашиш доираси эса $\{|z| < 3\}$ бўлишини топамиз. Бу
қаторнинг умумий ҳади учун $\{|z| = 3\}$ да

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z^n}{3^n+1} \right| = 1 \neq 0$$

бўлганидан, унинг $\{|z| = 3\}$ да узоқлашувчи эканлиги ке-
либ чиқади.

Энди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{3^n+1} \quad (17)$$

қаторни

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{3^n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{3^{-n}+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n+1} \cdot \frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n+1} w^n$$

$(w = \frac{1}{z})$ курунишда ёзиб оламиз. Равшанки,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n+1} w^n$$

қатор $\{|w| < 1\}$ да, (17) қатор эса

$$\{|w| < 1\} = \left\{ \left| \frac{1}{z} \right| < 1 \right\} = \{|z| > 1\}$$

да яқинлашувчи бўлади.

Берилган Лоран қаторининг яқинлашиш нуқталаридан иборат тўплам

$$\{|z| < 3\} \cap \{|z| > 1\} = \{1 < |z| < 3\}$$

ҳалқадан иборат булар экан.

24-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2+1}$$

Лоран қаторининг яқинлашиш нуқталари тўпламини топинг.

Бу қаторнинг коэффициентлари

$$c_n = \frac{1}{n^2+1}, \quad c_{-n} = \frac{1}{(-n)^2+1} = \frac{1}{n^2+1}$$

булиб, (12) ва (13) формулаларга кўра

$$R=1; \quad r=1$$

булади. Бу ҳолда берилган Лоран қаторининг яқинлашиш соҳаси $\{r < |z| < R\}$ тўплам — бўш тўплам бўлади. $|z|=1$ да

$$\left| \frac{z^n}{n^2+1} \right| = \frac{1}{n^2+1}$$

булганлиги сабабли

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2+1}$$

қатор яқинлашувчи (абсолют яқинлашувчи) булади.

Шундай қилиб, берилган Лоран қаторининг яқинлашиш нуқталаридан иборат тўплам $\{|z|=1\}$ айлана бўлади.

25-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin in}{(z-i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!}$$

Лоран қаторининг яқинлашиш соҳасини топинг.

Аввало Лоран қаторининг туғри қисми

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!}$$

ни қараймиз. Бу даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}} = \infty$$

булиб, яқинлашиш соҳаси $\{|z-i| < \infty\}$ булади. Энди берилган қаторнинг бош қисми

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin in}{(z-i)^n}$$

ни қараймиз. Бу қатор учун

$$\begin{aligned} c_n &= \sin in = \frac{1}{2i} [e^{i(in)} - e^{-i(in)}] = \\ &= \frac{1}{2i} (e^{-n} - e^n) = -\frac{e^n}{2i} \left(1 - \frac{1}{e^{2n}}\right) \end{aligned}$$

булиб,

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = e$$

булади. Демак, қаторнинг яқинлашиш соҳаси $\{|z-i| > e\}$. Шундай қилиб берилган Лоран қаторининг яқинлашиш соҳаси $\{e < |z-i| < \infty\}$ булар экан.

26-мисол. Ушбу

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

функцияни $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ да Лоран қаторига ёйинг.

Равшанки, берилган функция $f = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ ҳалқадан голоморф. Бинобарин, уни Лоран қаторига ёйиш мумкин бўлади.

Аввало $f(z)$ функцияни

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

қўринишида ёзиб оламиз. Сўнг бу тенгликнинг унг томонидаги функцияларнинг ҳар бирини қаторга ёйамиз:

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \left(\frac{1}{z}\right) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$$

Бу қатор $\{|z| < 2\}$ да яқинлашади.

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

Бу қатор эса $\{|z| > 1\}$ да яқинлашади.

Натижада берилган функция

$$f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} z^n - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

қаторга ёйилиб, у $\{1 < |z| < 2\}$ да яқинлашувчи бўлади
27-мисол. Ушбу

$$f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$$

функцияни $V = \{0 < |z| < \infty\}$ ҳалқала z нинг даражалари бўйича
Лоран қаторига ёйинг.

3-§ да келтирилган (2) формуладан фойдаланиб $e^{\frac{1}{z}}$ функ-
цияни қаторга ёйамиз:

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^3} + \dots$$

Бу қатор $\{|z| > 0\}$ да яқинлашувчи бўлади. Шунини эътибори
олиб толамиз:

$$f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}} = z^3 \left(1 + \frac{1}{1!} \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} + \dots\right) = z^3 + z^2 + \frac{z}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{(n+3)!}$$

Бу берилган функция z нинг даражалари бўйича ёйилма-
сидир.

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

Куйидаги мисолларда Лоран қаторининг яқинлашувчи
нуқталари тўпламини топинг.

$$394. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

$$395. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{(z+1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{(n+1)^n}.$$

$$396. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z+1-i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} n(z+1-i)^n.$$

$$397. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (b \neq 0).$$

$$398. -\frac{1}{2(z-1)} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{(2i)^n}.$$

$$399. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2i)^n}{6^n}.$$

$$400. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(z-2+i)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (1+in)(z-2+i)^n.$$

$$401. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

$$402. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n 2^n}.$$

$$403. -\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n.$$

$$404. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$405. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{9} (z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+1}{9 \cdot 2^{n+1}} (z-1)^n.$$

$$406. \sum_{n=1}^{\infty} (n+2) i^{n+1} (z-i)^n.$$

$$407. \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} z^n.$$

$$408. \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{\cosh n}, \quad \alpha > 0.$$

$$409. \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2^{-n^2} + 1)^{-1} (z-a)^{2n}.$$

$$410. \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-n^2} (z+1)^n.$$

$$411. \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-n^2} z^n.$$

$$412. \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n z^n.$$

413. Фараз қилайлик, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ Лоран қатори $\{r \leq |z-a| \leq R\}$ ёпиқ ҳалқада яқинлашсин. Бу қаторнинг коэффицентлари учун ушбу

$$|c_n| \leq M \left(\frac{1}{r^n} + \frac{1}{R^n} \right) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

тенгсизликларнинг уринли бўлишини исботланг. Бу ерда M — n га боғлиқ булмаган бирорта узгармас сон.

414. Айтайлик, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ ва $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ Лоран қаторлари $\{r < |z-a| < R\}$ ҳалқада мос равишда $f(z)$ ва $g(z)$ йигиндиларга эга булсин. У ҳолда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \text{ бу ерда } c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}.$$

Лоран қатори уша ҳалқада $f(z) \cdot g(z)$ йигиндига эга бўлишини исботланг.

415. Қуйидаги теоремани исботланг (функциянинг Лоран қаторига ёйилмасининг ягоналиги ҳақида):

Айтайлик:

$$D = \{r_1 < |z-a| < R_1\} \text{ ва } G = \{r_2 < |z-a| < R_2\}$$

булиб, $\gamma_p = \{|z-a|=r\} \subset D$ ва $\gamma_p \subset G$ булсин. Агар

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \text{ ва } g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$$

Лоран қаторлари мос равишда D ва G ҳалқаларда яқинлашса ҳамда

$$f(z)|_{\gamma_p} = g(z)|_{\gamma_p}$$

булса, у ҳолда бу қаторларнинг коэффицентлари бири-бирига айнан тенг бўлади:

$$a_n = b_n \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

яъни қаторлар устма-уст тушади.

Қуйидаги мисолларда $f(z)$ функцияни кўрсатилган ҳалқада ёки кўрсатилган $z = z_0$ нуқтанинг атрофида Лоран қаторига ёйинг. Кейинги ҳолда қаторнинг яқинлашиш соҳасини топинг:

$$416. f(z) = \frac{1}{z-2}; \quad z_0 = 0.$$

$$417. f(z) = \frac{1}{z-2}; \quad z_0 = \infty.$$

$$418. f(z) = \frac{1}{(z-a)^k}; \quad (a \neq 0, \quad k - \text{натурал сон}); \quad z_0 = 0.$$

$$419. f(z) = \frac{1}{(z-a)^k}; \quad (a \neq 0, \quad k - \text{натурал сон}); \quad z_0 = \infty.$$

$$420. f(z) = \frac{1}{z(1-z)}; \quad z_0 = 0.$$

$$421. f(z) = \frac{1}{z(1-z)}; \quad z_0 = 1.$$

$$422. f(z) = \frac{1}{z(1-z)}; \quad z_0 = \infty.$$

$$423. f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}; \quad V = \{0 < |z| < 1\}.$$

$$424. f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}; \quad V = \{2 < |z| < \infty\}.$$

$$425. f(z) = \frac{1}{z(z-1)}; \quad V = \{0 < |z| < 1\}.$$

$$426. f(z) = \frac{1}{z(z-1)}; \quad V = \{2 < |z-1| < \infty\}.$$

$$427. f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}; \quad z_0 = 1.$$

$$428. f(z) = \frac{1}{z^2 - 3iz - 2}; \quad z_0 = 2i.$$

$$429. f(z) = \frac{1}{(z-3)^2}; \quad z_0 = -1.$$

$$430. f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}; \quad z_0 = 1.$$

$$431. f(z) = \frac{\sin z}{z}; \quad z_0 = 0.$$

$$432. f(z) = z^4 \cos \frac{1}{z}; \quad z_0 = 0.$$

$$433. f(z) = \frac{e^z - 1}{z}; \quad z_0 = 0.$$

$$434. f(z) = \frac{1 - \cos z}{z}; \quad z_0 = 0.$$

$$435. f(z) = \frac{\sin^2 z}{z}; \quad z_0 = 0.$$

$$436. f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}; \quad V = \{2 < |z| < 3\}.$$

$$437. f(z) = \frac{1}{z+z^2}; \quad V = \{0 < |z| < 1\}.$$

$$438. f(z) = \frac{z}{z^2-1}; \quad V = \{1 < |z+2| < 3\}.$$

$$439. f(z) = \frac{1}{1+z^2}; \quad V = \{0 < |z-i| < 2\}.$$

$$440. f(z) = \frac{z+2}{z^2-4z+3}; \quad V = \{2 < |z-1| < +\infty\}.$$

$$441. f(z) = \frac{z^2}{z}; \quad z_0 = 0.$$

$$442. f(z) = \frac{z^2}{z}; \quad z_0 = 0.$$

$$443. f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}; \quad z_0 = 0.$$

$$444. f(z) = \frac{1}{z} \sin^2 \frac{2}{z}; \quad z_0 = 0.$$

$$445. f(z) = \frac{1-e^{-z}}{z}; \quad z_0 = 0.$$

$$446. f(z) = \frac{2z+3}{z^2+3z+2}; \quad V = \{1 < |z| < 2\}.$$

$$447. f(z) = \frac{z^2-z+1}{z^2-3z+2}; \quad V = \{1 < |z| < 2\}.$$

$$448. f(z) = \frac{1}{z^2+2z-8}; \quad V = \{1 < |z+2| < 4\}.$$

$$449. f(z) = \frac{1}{(z^2-4)^2}; \quad V = \{4 < |z+2| < \infty\}.$$

$$450. f(z) = \frac{2z-3}{z^2-3z+2}; \quad V = \{0 < |z-2| < 1\}.$$

$$451. f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}; \quad V = \{2 < |z| < \infty\}.$$

$$452. f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z+2)}; \quad V = \{1 < |z| < 2\}.$$

$$453. f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2-4)}; \quad V = \{1 < |z| < 2\}.$$

$$454. f(z) = z^2 e^z; \quad V = \{0 < |z| < \infty\}.$$

$$455. f(z) = z^2 \sin \frac{(z+1)\pi}{z}. \quad V = \{0 < |z| < \infty\}.$$

$$456. f(z) = z^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{z}. \quad z_0 = 0.$$

$$457. f(z) = \frac{ze^{2z}}{z-1}. \quad z_0 = 1.$$

$$458. f(z) = 2 \sin^2 z + \cos \frac{1}{z}. \quad z_0 = 0.$$

$$459. f(z) = \frac{z}{z-1} + \cos \frac{1}{z^2}. \quad z_0 = 0.$$

$$460. f(z) = z \cos \frac{1}{2z+1}. \quad z_0 = -\frac{1}{2}.$$

$$461. f(z) = z^2 \sin \frac{z}{z-1}. \quad z_0 = 1.$$

$$462. f(z) = \frac{z}{z^2+2z+2}; \quad z_0 = 0.$$

$$463. f(z) = \frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}; \quad z_0 = 2.$$

$$464. f(z) = \frac{z^3-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}; \quad V = \{1 < |z| < 2\}.$$

$$465. f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}; \quad z_0 = i.$$

$$466. f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}; \quad z_0 = \infty.$$

$$467. f(z) = \sin z \sin \frac{1}{z}. \quad V = \{0 < |z| < \infty\}.$$

$$468. f(z) = e^{ze^{\frac{1}{z}}}. \quad V = \{0 < |z| < \infty\}.$$

$$469. f(z) = \sin \frac{z}{1-z}. \quad z_0 = 1.$$

Куйидаги мисолларда берилган функцияларни $V = \{1 < |z| < 2\}$ ҳалқада z нинг даражалари бўйича Лоран қаторига ёйинг:

$$470. f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}.$$

$$471. f(z) = \frac{z^4+1}{(z-1)(z+2)}.$$

$$472. f(z) = \frac{z}{(z^2+1)(z+2)}.$$

$$473. f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z+2)}.$$

$$474. f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2-4)}.$$

$$475. f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2(z^2+4)}.$$

Қуйидаги мисолларда функцияларни берилган V ҳалқа-
да $(z-a)$ нинг даражалари буйича Лоран қаторига ёйинг

$$476. f(z) = \frac{1}{z(z-3)^2}; \quad a=1; \quad V=\{1 < |z-1| < 2\}.$$

$$477. f(z) = \frac{1}{(z^2-9)z^2}; \quad a=1; \quad V=\{1 < |z-1| < 2\}.$$

$$478. f(z) = \frac{z+i}{z^2}; \quad a=i \quad \text{ва} \quad -i \in V.$$

$$479. f(z) = \frac{z^2-1}{z^2+1}; \quad a=1 \quad \text{ва} \quad 2i \in V.$$

$$480. f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}; \quad a=0, \quad \text{ва} \quad -\frac{1}{2} \in V.$$

$$481. f(z) = \frac{2z}{z^2-2i}; \quad a=1 \quad \text{ва} \quad -1 \in V.$$

$$482. f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-2)}; \quad a=-1, \quad V=\{0 < |z+1| < 3\}.$$

$$483. f(z) = \frac{1}{(z^2-1)(z^2+4)}; \quad a=0, \quad V=\{|z| > 2\}.$$

$$484. f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z-2}; \quad a=2, \quad V=\{0 < |z-2| < \infty\}.$$

Қуйидаги мисолларда функцияларни $z=a$ нуқтанинг
агрофида Лоран қаторига ёйиш мумкинми?

$$485. f(z) = \frac{z}{\sin z-1}; \quad a=\infty.$$

$$486. f(z) = \cos \frac{1}{z}; \quad a=0.$$

$$487. f(z) = \cos \frac{1}{z}; \quad a=\infty.$$

$$488. f(z) = \sec \frac{1}{z-1}; \quad a=1.$$

$$489. f(z) = \operatorname{ctg} z \quad a=\infty.$$

$$490. f(z) = \operatorname{th} \frac{1}{z}; \quad a=0.$$

$$491. f(z) = \frac{z^2}{\sin z}; \quad a = 0.$$

$$492. f(z) = \frac{z}{\sin z - 1}; \quad a = \infty.$$

5-§. Функциянинг яккаланган махсус нуқталари

Бирор $f(z)$ функцияни қарайлик. Бу функция учун a нуқтада ($a \in \bar{C}$) голоморфлик шarti бажарилмаса, a $f(z)$ функциянинг **махсус нуқтаси** дейилади.

4-т а ъ р и ф . Агар a махсус нуқтанинг шундай

$$U(a) = \{z \in C: 0 < |z - a| < \epsilon\}$$

атрофи топилсаки, $f(z)$ функция $U(a)$ да голоморф булса, a нуқта $f(z)$ функциянинг яккаланган махсус нуқтаси дейилади.

Фараз қилайлик, a нуқта $f(z)$ функциянинг яккаланган махсус нуқтаси бўлсин.

1) Агар

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A$$

(A — чекли сон) бўлса, a нуқта $f(z)$ функциянинг **бартараф қилинадиган махсус нуқтаси** дейилади.

2) Агар

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$$

бўлса, a нуқта $f(z)$ функциянинг **қутб нуқтаси** дейилади.

3) Агар $z \rightarrow a$ да $f(z)$ функциянинг лимити мавжуд булма-са, a нуқта $f(z)$ **функциянинг ўта махсус нуқтаси** дейилади.

Э с л а т м а . a нуқта $f(z)$ функциянинг бартараф қилинадиган махсус нуқтаси бўлса,

$$f(a) = \lim_{z \rightarrow a} f(z)$$

деб олиниши натижасида махсуслик бартараф этилади. Агар a нуқта $f(z)$ функциянинг қутби бўлса, у ҳолда шу нуқта $\frac{1}{f(z)}$ функциянинг ноли булади. $\frac{1}{f(z)}$ функция нолининг

тартибига $f(z)$ функция қутбининг тартиби дейилади.

Энди функциянинг махсус нуқталари билан унинг Лоран қатори орасидаги боғланишни ифодаладиган тасдиқларни келтирамиз.

6-теорема. $f(z)$ функциянинг яккаланган махсус a нуқтаси унинг бартараф қилиш мумкин бўлган махсус нуқта-си бўлиши учун $f(z)$ функциянинг a нуқта атрофида Лоран қаторига ёйилмасида бош қисмининг бўлмаслиги, яъни

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

бўлиши зарур ва етарли.

7-теорема. $f(z)$ функциянинг яккаланган махсус a нуқтаси унинг қутби бўлиши учун $f(z)$ функциянинг a нуқта атрофида Лоран қаторига ёйилмасида бош қисм таркиби-да чекли сондаги нолдан фарқли ҳадларининг бўлиши, яъни

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n(z-a)^n \quad (m>0)$$

бўлиши зарур ва етарли.

8-теорема. $f(z)$ функциянинг яккаланган махсус a нуқтаси унинг ўта махсус нуқтаси бўлиши учун $f(z)$ функция-нинг a нуқта атрофида Лоран қаторига ёйилмасида бош қисм таркибида чексиз кўп сондаги нолдан фарқли ҳадла-рининг бўлиши зарур ва етарли.

28-мисол. Ушбу

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$$

функция учун $z=0$ нуқта қандай махсус нуқта бўлади?

Аввало $\cos z$ функцияни $z=0$ нуқта атрофида даража-ли қаторга ёйамиз:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

У ҳолда

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2} = \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} + \dots \quad (18)$$

бўлади. Кейинги тенгликда $z \rightarrow 0$ да ҳадлаб лимитга ўтиб, топамиз:

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \frac{1}{2}.$$

Демак, $z=0$ берилган функциянинг бартараф қилиш мум-кин бўлган махсус нуқтаси экан.

Шу хулосага (18) ёйилма ва 5-теоремага кўра ҳам келиши мумкин.

29-мисол. Ушбу

$$f(z) = \frac{z}{e^z + 1}$$

функциянинг махсус нуқтасини аниқланг.

Бу функция $\{0 < |z - \pi i| < \pi\}$ да голоморф бўлиб, $z = \pi i$ нуқтада голоморф булмайди. Бинобарин πi нуқта махсус нуқта бўлади.

$$\lim_{z \rightarrow \pi i} \frac{z}{e^z + 1} = \infty$$

бўлишидан πi нуқта берилган функциянинг қутб нуқтаси эканлиги келиб чиқади.

30-мисол. Ушбу

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

функция учун $a = 0$ нуқта ўта махсус нуқта бўлишини кўрсатинг.

Берилган $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ функция $\{0 < |z| < \infty\}$ да голоморф бўлиб, $a = 0$ нуқта унинг махсус нуқтасидир. Махсус нуқтанинг характерини аниқлаш мақсадида $z \rightarrow 0$ да $f(z)$ функциянинг лимитини қараймиз.

Айтайлик, $z = x$ булсин. Бу ҳолда

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ (z=x) \\ x \rightarrow 0}} e^{\frac{1}{z}} = \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} e^{\frac{1}{x}} = \infty,$$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ (z=ix) \\ x \rightarrow 0}} e^{\frac{1}{z}} = \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} e^{\frac{1}{ix}} = 0.$$

Демак, $z \rightarrow 0$ да $f(z)$ функциянинг лимити мавжуд эмас. $a = 0$ нуқта берилган функциянинг ўта махсус нуқтаси бўлади.

31-мисол. Ушбу

$$f(z) = \frac{z^2}{(1-z)^2}$$

функциянинг барча махсус нуқталарини топинг ва уларнинг характерини аниқланг.

Берилган функция $\{0 < |z - 1| < \infty\}$ да голоморф бўлиб, $a_1 = 1$ ҳамда $a_2 = \infty$ унинг махсус нуқталари бўлади.

$$508. f(z) = \frac{1}{1 - \cos z}, \quad a = 0.$$

$$509. f(z) = \frac{z}{(e^z - 1)^2}; \quad a = 0.$$

$$510. f(z) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{z}; \quad a = \infty.$$

$$511. f(z) = \operatorname{tg} \pi z; \quad a = \pm \frac{1}{2}; \quad \pm \frac{3}{2}; \dots$$

$$512. f(z) = \frac{1}{\sin z + 1 + \frac{1}{z^2}}; \quad a = 0.$$

$$513. f(z) = \frac{\sin z}{z - \sin z}; \quad a = 0.$$

$$514. f(z) = \frac{1}{1 - \sin z}; \quad a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Куйидаги мисоллардаги функцияларнинг $z = a$ нуқтадаги кутбининг тартибини аниқланг.

$$515. f(z) = \frac{\cos \frac{1}{z}}{\sin^2(z-1)}; \quad a = 1.$$

$$516. f(z) = \frac{1}{\sin^2 z}; \quad a = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$517. f(z) = \frac{z^2 - 3iz + 2}{z^2 - 4z^2(z-1)^2}; \quad a = 2 \quad \text{ва} \quad a = 1.$$

$$518. f(z) = \frac{\cos \pi z + 1}{(z^2 - z - 2)^3}; \quad a = -1 \quad \text{ва} \quad a = 2.$$

519. Фараз қилайлик, $f(z)$ ва $g(z)$ функциялар $z=a$ нуқтада голоморф булиб, $f(a)=g(a)=0$ булсин. У ҳолда $z=a$ нуқта $F(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ функция учун яккаланган махсус нуқта булиб, муҳим махсус нуқта була олмаслигини исботланг.

Куйидаги мисоллардаги функциялар учун $z=a$ нуқтанинг ута махсус нуқта булишини курсатинг.

$$520. f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}; \quad a = 0.$$

$$521. f(z) = e^z; \quad a = \infty.$$

$$522. f(z) = e^{-\frac{1}{z}}; \quad a = \infty.$$

$$523. f(z) = \sin z; \quad a = \infty.$$

$$524. f(z) = \sin \frac{\pi}{z^2}; \quad a = 0.$$

$$525. f(z) = z^2 \cos \frac{\pi}{z}; \quad a = 0.$$

$$526. f(z) = e^{i\pi z}; \quad a = \frac{\pi}{2}.$$

$$527. f(z) = \sin e^z; \quad a = \infty.$$

$$528. f(z) = \cos \frac{z}{z+1}; \quad a = -1.$$

$$529. f(z) = \sin \frac{\pi}{z^2+1}; \quad a = -1.$$

Куйидаги мисоллардаги функцияларнинг барча яккаланган махсус нуқталарини топинг ва уларнинг характерини аниқланг.

$$530. f(z) = \frac{z}{\sin z}.$$

$$534. f(z) = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}.$$

$$531. f(z) = \frac{1 - \cos z}{\sin^2 z}.$$

$$535. f(z) = z(e^{1/z} - 1).$$

$$532. f(z) = z^2 \sin \frac{z}{z+1}.$$

$$536. f(z) = e^{-\sin^2 z}.$$

$$533. f(z) = \frac{1}{z^2-1} \cos \frac{\pi z}{z+1}.$$

$$537. f(z) = \sin e^z.$$

$$538. f(z) = \frac{1}{\sin^2 z} \quad \text{функция учун } z = 0 \text{ нуқтанинг якка-}$$

ланмаган махсус нуқта бўлишини курсатинг.

539. Ушбу

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} = 1 + z^2 + z^4 + z^8 + \dots$$

функция учун $\{|z|=1\}$ бирлик айлананинг ҳар бир нуқта-си яккаланмаган махсус нуқта бўлишини исботланг.

Куйидаги мисоллардаги функцияларнинг барча махсус нуқталарини топинг ва уларнинг характерини аниқланг (қутблар учун уларнинг тартибини курсатинг).

$$540. f(z) = \frac{z+1}{(z-1)^2 z(z+1)}$$

$$543. f(z) = e^{\frac{1}{z-2i}}.$$

$$541. f(z) = \operatorname{ctg} z.$$

$$544. f(z) = \cos \frac{1}{z+i}.$$

$$542. f(z) = \frac{1}{(z^2+i)^3}.$$

Куйидаги мисоллардаги функциялар учун $z = 0$ нукта-
нинг характериини аниқланг.

$$545. f(z) = e^{\frac{\sin z}{z}}.$$

$$548. f(z) = (e^z - 1 - z) \operatorname{ctg}^2 z.$$

$$546. f(z) = \frac{z+3}{\ln(1-2z)}.$$

$$549. f(z) = \frac{\sin 2z}{\cos z - 1 + \frac{1}{z^2}}.$$

$$547. f(z) = \frac{e^z}{\sin z - z + \frac{1}{6}z^3}.$$

$$550. f(z) = e^{z^2 - z}.$$

Фараз қилайлик, $f(z)$ ва $g(z)$ функциялар $z = a$ нукта-
да мос равишда n ва m — тартибли кутбга эга бўлсин. У
ҳолда куйидаги мисоллардаги функциялар $z = a$ нуктада
қандай махсусликка эга бўлади?

$$551. f(z) + g(z).$$

$$553. \frac{f(z)}{g(z)}.$$

$$552. f(z) g(z).$$

$$554. f^k(z) g^l(z) \quad (k, l \in \mathbb{N}).$$

Фараз қилайлик, $f(z)$ ва $g(z)$ функциялар берилган
булиб, $z = a$ нукта $f(z)$ функция учун ута махсус нукта ва
 $g(z)$ ($g(z) \neq 0$) функция $z = a$ нуктада голоморф бўлсин. У ҳолда
 $z = a$ нуктанинг куйидаги функциялар учун ута махсус нукта
булишини кўрсатинг.

$$555. f(z) + g(z).$$

$$556. f(z) g(z).$$

$$557. \frac{f(z)}{g(z)}.$$

Агар $f(z)$ функция $z = \infty$ нуктанинг бирор атрофида го-
ломорф булса, у ҳолда куйидаги мисоллардаги тасдиқ-
ларни исботланг:

558. $z = \infty$ нукта $f(z)$ функциянинг k — тартибли кутби
бўлиши учун ушбу

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [z^{-k} f(z)] = A \quad (\neq 0; \infty)$$

шартнинг бажарилиши зарур ва старлидир.

559. $z = \infty$ нукта $f(z)$ функциянинг k — тартибли ноли
булиши учун ушбу

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [z^k f(z)] = A \quad (\neq 0; \infty)$$

шартнинг бажарилиши зарур ва старли.

Куйидаги функциялар учун $z = \infty$ нуктанинг харе-
ктариини аниқланг.

$$560. f(z) = \frac{z^2 + 3z^4 - 2z^3 + 1}{z^{10} - z^3 + z^2 + z + 2i}.$$

$$563. f(z) = z^3 \sin \frac{1}{z}.$$

$$561. f(z) = \frac{3z^8 + 1}{z + 2}.$$

$$564. f(z) = z^3 \operatorname{tg} \frac{1}{z^2}.$$

$$562. f(z) = (z^2 + 1)^{10} e^{-z}.$$

565. Айтайлик, $f(z)$ функция $\{0 < |z-a| < r\}$ да голоморф бўлиб, $z=a$ нуктада қутбга эга бўлсин. У ҳолда $\{|z-a| < r\}$ доирала ушбу

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & 0 < |z-a| < r, \\ 0, & z=a. \end{cases}$$

тенглик ёрдамида аниқланган $g(z)$ функция $z=a$ нуктанинг бирор атрофида голоморф бўлишини кўрсатинг.

566. Фараз қилайлик, $f(z)$ функция ушбу

$$f(z) = (z-a)^m \varphi(z)$$

кўринишда ифодалансин. Бу ерда m — бутун сон, $\varphi(z)$ функция эса $z=a$ нуктада голоморф ва $\varphi(a) \neq 0$. У ҳолда агар $m > 0$ бўлса $f(z)$ функция $z=a$ нуктада m — тартибли нолга, $m < 0$ бўлса, m — тартибли қутбга эга бўлишини исботланг.

567. $f(z)$ функция чекли $z=a$ нуктада голоморф бўлиб, шу нуктада m — тартибли нолга эга бўлсин. У ҳолда $z=a$ нукта $F(z) = f^{(n)}(z)$ ($n < m$) функция учун нечанчи тартибли ноль булади?

568. $f(z)$ функция чекли $z=a$ нуктада m — тартибли қутбга эга бўлсин. У ҳолда $z=a$ нукта $F(z) = f^{(n)}(z)$ функция учун нечанчи тартибли қутб булади?

569. $f(z)$ функция $z=\infty$ нуктада голоморф бўлиб, шу нуктада m — тартибли нолга эга бўлсин. У ҳолда $F(z) = f^{(n)}(z)$ функция $z=\infty$ нуктада нечанчи тартибли нолга эга булади?

Куйидаги функцияларнинг барча махсус нукталарини топинг, уларнинг характерини аниқланг ва функцияларни $z=\infty$ нуктада текширинг.

$$570. f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}.$$

$$573. f(z) = \frac{1}{11z^2 + 4i}.$$

$$571. f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}.$$

$$574. f(z) = \frac{e^z}{1+z^2}.$$

$$572. f(z) = \frac{z^4}{1+z^4}.$$

$$575. f(z) = \frac{z^2 + 1}{e^z}.$$

$$576. f(z) = ze^{-z}.$$

$$577. f(z) = \frac{1}{z^3} e^z.$$

$$578. f(z) = \frac{1}{(z+1)^3} e^{\frac{1}{z+1}}.$$

$$579. f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}.$$

$$580. f(z) = \frac{e^z}{z(1-e^{-z})}.$$

$$581. f(z) = \frac{1-e^z}{2+e^z}.$$

$$582. f(z) = \frac{1}{z^3(2-\cos z)}.$$

$$583. f(z) = \frac{\sin z}{z^3(z^2+4)^2}.$$

$$584. f(z) = \operatorname{tg} \frac{1}{z}.$$

$$585. f(z) = \frac{z^2}{\cos z - 1}.$$

$$586. f(z) = z \operatorname{ctg} iz.$$

$$587. f(z) = \sin z \cdot e^{\frac{1}{\sin z}}.$$

$$588. f(z) = \frac{z^4+1}{z^4-1}.$$

$$589. f(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}.$$

$$590. f(z) = z \cos \frac{1}{z} - z.$$

$$591. f(z) = z^3 \sin \frac{1}{z} - z^2.$$

$$592. f(z) = \operatorname{th} z.$$

$$593. f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}.$$

$$594. f(z) = ze^{\frac{1}{z}}.$$

$$595. f(z) = e^{1-\frac{1}{z}}.$$

$$596. f(z) = e^{\frac{z-1}{z}}.$$

$$597. f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z - 1}.$$

$$598. f(z) = \operatorname{tg} z.$$

$$599. f(z) = \operatorname{tg}^2 z.$$

$$600. f(z) = \frac{\operatorname{ctg} z}{z^2}.$$

$$601. f(z) = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}.$$

$$602. f(z) = \frac{1}{\sin z - \sin a}.$$

$$603. f(z) = \frac{1}{\cos z + \cos a}.$$

$$604. f(z) = \sin \frac{1}{1-z}.$$

$$605. f(z) = \frac{z^3}{(z^2-4)^2 \cos \frac{1}{z-1}}.$$

$$606. f(z) = \operatorname{ctg} \frac{1}{z}.$$

$$607. f(z) = \operatorname{ctg} \frac{1}{z} - \frac{1}{z}.$$

$$608. f(z) = \sin \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}.$$

$$609. f(z) = e^{-z} \cos \frac{1}{z}.$$

$$610. f(z) = e^{\operatorname{ctg} \frac{1}{z}}.$$

$$611. f(z) = e^{\operatorname{tg} \frac{1}{z}}.$$

$$612. f(z) = \sin \left(\frac{1}{\sin \frac{1}{z}} \right).$$

$$613. f(z) = \sin \left(\frac{1}{\cos \frac{1}{z}} \right).$$

Фараз қилайлик, $P_n(z)$ ва $Q_m(z)$ лар мос равишда n ва m -тартибли кўпхадлар бўлсин. У ҳолда қуйидаги функцияларнинг $z = \infty$ нуқтадаги характериини аниқланг:

614. $P_n(z) + Q_m(z)$. 617. $P_n(z)e^{\frac{1}{Q_m(z)}}$
 615. $\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ 618. $\frac{1}{P_n(z)} + \frac{1}{Q_m(z)}$
 616. $P_n(z) \cdot Q_m(z)$. 619. $\frac{P_n(z)}{Q_m(z)} - \frac{Q_m(z)}{P_n(z)}$.

620. Айтайлик, $f(z)$ ва $g(z)$ функциялар $z = \infty$ нуқтада мос равишда m ва n - тартибли қутбларга эга бўлсин. У ҳолда $z = \infty$ нуқтанинг ушбу

$$F(z) = f[g(z)]$$

функция учун m, n - тартибли қутб бўлишини исботланг.

Кенгайтирилган комплекс текислик $\bar{C}$ да фақат қуйидаги махсусликларга эга бўлган функцияларга мисоллар тузинг.

621. $z = \infty$ нуқта — иккинчи тартибли қутб.

622. $z = 0$ нуқта — иккинчи тартибли қутб, Лоран қаторига ёйилмасининг бош қисми $\frac{c_{-2}}{z^2}$ га тенг ва $z = \infty$ нуқта оддий қутб.

623. $z_k = w^k$ нуқталар — оддий қутблар, бу ерда

$$w = e^{\frac{2\pi i}{n}} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Кенгайтирилган комплекс текислик $\bar{C}$ да фақат қуйида берилган махсусликларга эга бўлган функцияларнинг умумий қуринишини топинг.

624. Битта оддий қутб.

625. Битта n — тартибли қутб.

626. Лоран қаторига ёйилмасининг бош қисми $\frac{1}{z^2}$ га тенг ва $z = 0$ нуқта иккинчи тартибли қутб.

627. n та биринчи тартибли қутблар.

628. $z = 0$ нуқта — n -тартибли қутб ва $z = \infty$ нуқта — m -тартибли қутб.

629. Айтайлик, $f(z)$ функция $D \subset C$ соҳада бир қийматли бўлиб, шу соҳада қутблардан бошқа махсус нуқталарга эга бўлмасин. У ҳолда

VI 606

ЧЕГИРМАЛАР НАЗАРИЯСИ

1-§. Чегирмалар ва уларни ҳисоблаш

Фараз қилайлик, $f(z)$ функция $\{0 < |z-a| < \delta\}$ да голоморф бўлсин, яъни a бу функциянинг яқкаланган махсус нуқтаси бўлсин.

1-таъриф. *Ушбу*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} f(z) dz \quad (0 < \rho < \delta)$$

интеграл $f(z)$ функциянинг a нуқтадаги чегирмаси дейилади ва $\text{res } f(z)$ каби белгиланади:

$$\text{res } f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} f(z) dz.$$

Равшанки, $f(z)$ функция a нуқтада голоморф бўлса,

$$\text{res } f(z) = 0$$

бўлади.

Айтайлик, $f(z)$ функция $\{r < |z| < \infty\}$ да голоморф бўлсин.

2-таъриф. *Ушбу*

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho} f(z) dz \quad (r < \rho)$$

интеграл $f(z)$ функциянинг $z = \infty$ нуқтадаги чегирмаси дейилади ва $\text{res } f(z)$ каби белгиланади:

$$\text{res } f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho} f(z) dz.$$

1-теорема. Агар $f(z)$ функция $\{0 < |z-a| < r\}$ соҳада — ҳалқада Лоран қатори

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

га ёйилган бўлса, у ҳолда $f(z)$ функциянинг $z = a$ нуқтадаги чегирмаси c_{-1} га тенг, яъни

$$\text{res } f(z) = c_{-1}$$

бўлади.

Агар $f(z)$ функция $\{r < |z| < \infty\}$ ҳалқада Лоран қатори

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

га ёйилган бўлса, у ҳолда $f(z)$ функциянинг $z = \infty$ нуқтадаги чегирмаси — c_1 га тенг, яъни

$$\text{res } f(z) = -c_1$$

бўлади.

2-теорема. Агар $f(z)$ функция $C_1\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ тўтлаида голоморф бўлса, у ҳолда

$$\sum_{k=1}^n \text{res } f(z) + \text{res } f(z) = 0$$

бўлади.

Энди функция чегирмаларини ҳисоблашда фойдаланидиган формулаларни келтираемиз:

1) Агар $z = a$ нуқта $f(z)$ функциянинг биринчи тартибли қутб нуқтаси бўлса,

$$\text{res } f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) \quad (1)$$

бўлади

2) Агар $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ учун $\varphi(z)$ ва $\psi(z)$ функциялар a нуқтада голоморф бўлиб, $\varphi(a) \neq 0$, $\psi'(a) \neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\text{res } f(z) = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)} \quad (2)$$

бўлади.

3) Агар $z = a$ нуқта $f(z)$ функциянинг n -тартибли кутб нуқтаси бўлса,

$$\operatorname{res} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1} [(z-a)^n f(z)]}{dz^{n-1}} \quad (3)$$

бўлади.

4) Агар $z = \infty$ нуқтада $f(z)$ функция голоморф бўлса,

$$\operatorname{res} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z[f(\infty) - f(z)] \quad (4)$$

бўлади.

5) Агар $f(z) = \varphi\left(\frac{1}{z}\right)$ бўлиб, $\varphi(z)$ функция $z = 0$ нуқтада голоморф бўлса,

$$\operatorname{res} f(z) = -\varphi'(0) \quad (5)$$

бўлади.

1-мисол. Ушбу

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$$

функциянинг $z = 1$ нуқтадаги чегирмасини топинг.

Берилган функцияни $z = 1$ нуқтанинг тешик атрофи $0 < |z-1| < \varepsilon$ да $(z-1)$ нинг даражалари бўйича Лоран қаторига ёйамиз:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^z}{(z-1)^2} = \frac{e}{(z-1)^2} e^{z-1} = \frac{e}{(z-1)^2} [1 + (z-1) + \\ &+ \frac{(z-1)^2}{2!} + \frac{(z-1)^3}{3!} + \dots] = \frac{e}{(z-1)^2} + \frac{e}{z-1} + \frac{e}{2} + \frac{e(z-1)}{3!} + \dots \end{aligned}$$

Бу ёйилмадан $c_{-1} = e$ булиши келиб чиқади.

1-теоремадан фойдаланиб, берилган функциянинг $z = 1$ нуқтадаги чегирмаси

$$\operatorname{res} f(z) = \operatorname{res}_{z=1} \frac{e^z}{(z-1)^2} = e$$

бўлишини топамиз.

2-мисол. Ушбу

$$f(z) = z^2 \sin \frac{\pi}{z}$$

функциянинг $z = \infty$ нуқтадаги чегирмасини топинг.

Берилган функцияни z нинг даражалари бўйича Лоран қаторига ёйамиз:

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 \sin \frac{\pi}{z} = z^2 \left[\frac{\pi}{z} - \frac{\left(\frac{\pi}{z}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{z}\right)^5}{5!} - \dots \right] = \\ &= \pi z - \frac{\pi^3}{6} \cdot \frac{1}{z} + \frac{\pi^5}{120} \cdot \frac{1}{z^3} - \dots \end{aligned}$$

Демак, $c_{-1} = -\frac{\pi^3}{6}$ ва функциянинг $z = \infty$ нуқтадаги чегирмаси

$$\operatorname{res}_{z=\infty} z^2 \sin \frac{\pi}{z} = \frac{\pi^3}{6}$$

бўлади.

3-мисол. Ушбу

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}$$

функциянинг барча махсус нуқталаридаги чегирмаларини ҳисобланг.

Берилган функцияни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)(z-1)^2}$$

Демак, $a_1 = i$, $a_2 = -i$ нуқталар функциянинг биринчи тартибли, $a_3 = 1$ нуқта эса 2-тартибли қутб нуқталари бўлади.

(1), (3) ва (4) формулалардан фойдаланиб, функциянинг чегирмаларини топамиз:

$$\operatorname{res}_{z=i} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(z+i)(z-1)^2} = \frac{1}{2i(-1)^2} = \frac{1}{2i};$$

$$\operatorname{res}_{z=-i} f(z) = \lim_{z \rightarrow -i} (z+i) f(z) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{1}{(z-i)(z-1)^2} = \frac{1}{4};$$

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=1} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} [(z-1)^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{1}{z^2+1} \right]' = \\ &= -\lim_{z \rightarrow 1} \frac{2z}{(z^2+1)^2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z(f(\infty) - f(z)) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{(z^2+1)(z-1)^2} = 0.$$

4-мисол. Ушбу

$$f(z) = \operatorname{ctg} \pi z$$

функциянинг барча чекли махсус нуқталаридаги чегирмаларини топинг.

Равшанки,

$$f(z) = \operatorname{ctg} \pi z = \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$$

булиб, $a = n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) нуқталар унинг C даги махсус нуқталари бўлади. Берилган функциянинг бу нуқталардаги чегирмаларини (2) формуладан фойдаланиб топамиз:

Агар $\varphi(z) = \cos \pi z$, $\psi(z) = \sin \pi z$ дейилса, унда $\varphi(n) = \cos \pi n = 0$, $\psi'(n) = \pi \cos \pi n \neq 0$ бўлади. Демак,

$$\operatorname{res}_{z=n} \operatorname{ctg} \pi z = \frac{\varphi(n)}{\psi'(n)} = \frac{\cos \pi n}{\pi \cos \pi n} = \frac{1}{\pi} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

5-мисол. Ушбу

$$f(z) = \cos \pi \frac{z+2}{2z}$$

функциянинг $z = \infty$ нуқтадаги чегирмасини ҳисобланг.

Берилган функциянинг $z = \infty$ нуқтадаги чегирмасини (5) формуладан фойдаланиб ҳисоблаймиз.

Агар

$$\varphi(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \cos \frac{1+2i}{2} \pi$$

дейилса, бу функция $z = 0$ нуқтада голоморф. Демак,

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) &= -\varphi'(0) = -\left[\cos\left(\frac{1+2i}{2} \pi\right) \right]_{z=0} = \\ &= -\left[-\sin\left(\frac{1+2i}{2} \pi\right) \right]_{z=0} = \pi \sin \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

бўлади.

6-мисол. Ушбу

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4(z^2+9)}$$

функциянинг барча чекли махсус ҳамда $z = \infty$ нуқтадаги чегирмаларини ҳисобланг.

Берилган функцияни

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2+9)} = \frac{e^z}{z^2(z-3i)(z+3i)}$$

кўринишда ёзиб, унинг махсус нуқталари: $a_1=3i$, $a_2=-3i$ — биринчи тартибли қутб нуқталар, $a_3=0$ — иккинчи тартибли қутб нуқта ва $z=\infty$ — ўта махсус нуқта булишини аниқлаймиз. $\operatorname{res}_{z=3i} f(z)$, $\operatorname{res}_{z=-3i} f(z)$ ларни ҳисоблашда (1) формуладан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{z=3i} f(z) &= \operatorname{res}_{z=3i} (z-3i)f(z) = \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{e^z}{z^2(z+3i)} = \\ &= e^{3i} \frac{1}{-9-6i} = -\frac{1}{54} (\sin 3 - i \cos 3),\end{aligned}$$

$$\operatorname{res}_{z=-3i} f(z) = \operatorname{res}_{z=-3i} (z+3i)f(z) = -\frac{1}{54} (\sin 3 + i \cos 3).$$

(3) формулага кура $\operatorname{res}_{z=0} f(z)$ ни ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{z=0} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} (z^2 f(z)) = \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{e^z}{z^2+9} \right]' = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z(z^2-2z+9)}{(z^2+9)^2} = \frac{1}{9}.\end{aligned}$$

$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z)$ ни ҳисоблашда эса 2-теоремадан фойдаланса бўлади:

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\sum_{k=1}^3 \operatorname{res}_{z=a_k} f(z) = \frac{1}{27} (\sin 3 - 3).$$

7-мисол. Агар $z=a$ нуқта $f(z)$ функциянинг n -тартибли ноли бўлса,

$$\operatorname{res}_{z=a} \left[\frac{f'(z)}{f(z)} \right]$$

ни топинг.

Маълумки, $z=a$ нуқта $f(z)$ функциянинг n -тартибли ноли бўлса, функцияни ушбу

$$f(z) = (z-a)^n \varphi(z)$$

қуринишда ифодалаш мумкин. Бунда $\varphi(z)$ функция $z=a$ нуктада голоморф ва $\varphi(a) \neq 0$. Бундан $f(z)$ функциянинг ҳосиласи

$$f'(z) = (z-a)^{n-1} [n\varphi(z) + (z-a)\varphi'(z)]$$

булиб,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(z-a)^{n-1} [n\varphi(z) + (z-a)\varphi'(z)]}{(z-a)^n \varphi(z)} = \frac{n\varphi(z) + (z-a)\varphi'(z)}{(z-a)\varphi(z)}$$

қуринишда ифодаланadi. Демак, $\frac{f'(z)}{f(z)}$ функцияси учун $z=a$ нукта биринчи тартибли кутб булади. Унда (1) формулага биноан

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \left[\frac{f'(z)}{f(z)} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \frac{n\varphi(z) + (z-a)\varphi'(z)}{(z-a)\varphi(z)} = \frac{n\varphi(a)}{\varphi(a)} = n. \end{aligned}$$

Демак,

$$\operatorname{res}_{z=a} \left[\frac{f'(z)}{f(z)} \right] = n.$$

8-мисол. Агар $z=a$ нукта $f(z)$ функцияси учун k -тартибли кутб бўлса,

$$\operatorname{res}_{z=a} \left[\frac{f'(z)}{f(z)} \right]$$

ни топинг.

$z=a$ нуктани k -тартибли кутб бўлишдан, уни $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^k}$

қуринишда ифодалаш мумкин, бу ерда $\varphi(z)$ функция a нуктада голоморф ва $\varphi(a) \neq 0$. Худди 7-мисолдагидек, $z=a$ нуктада $\frac{f'(z)}{f(z)}$ функцияси учун 1-тартибли кутб бўлишини ва

$$\operatorname{res}_{z=a} \left[\frac{f'(z)}{f(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \left[\frac{f'(z)}{f(z)} \right] = -k$$

бўлишини куриш қийин эмас.

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

Қуйидаги мисоллардаги чегирмаларни Лоран қаторининг c_{-1} коэффицентини аниқлаш ёрдамида ҳисобланг.

1. $\operatorname{res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^2}$.

4. $\operatorname{res}_{z=1} ze^{\frac{1}{z-1}}$.

2. $\operatorname{res}_{z=0} e^{\frac{1}{z}}$.

5. $\operatorname{res}_{z=0} z^2 e^{\frac{1}{z}}$.

3. $\operatorname{res}_{z=\frac{\pi}{2}} \frac{\cos z}{z-\frac{\pi}{2}}$.

6. $\operatorname{res}_{z=0} \frac{z^2}{z^2+1}$.

Қуйидаги функцияларнинг $z=a$ нуктадаги чегирмаларини топинг:

7. $f(z) = \frac{z^2+1}{(z+2)^2(z-3)}$, $a=3$.

8. $f(z) = \frac{z^2+1}{(z+2)^2(z-3)}$, $a=-2$.

9. $f(z) = \frac{z \cos z}{z^2(z+4)}$, $a=0$.

10. $f(z) = \lg z$, $a=\frac{\pi}{2}$.

11. $f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$, $a=-2$.

12. $f(z) = \sin \frac{1}{z-1}$, $a=1$.

Қуйидаги функцияларнинг барча чекли махсус нуктадаги чегирмаларини топинг.

13. $f(z) = \frac{1}{z+2}$.

18. $f(z) = \frac{z^2}{(z+2)(z-1)}$.

14. $f(z) = \frac{z^2}{1+z^2}$.

19. $f(z) = \frac{\sin z}{z^2 - \frac{1}{4}}$.

15. $f(z) = \frac{z^2}{(1+z)^2}$.

20. $f(z) = \frac{1}{\sin z}$.

16. $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$.

21. $f(z) = z^2 \cos \frac{1}{z-2}$.

17. $f(z) = \frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$.

22. $f(z) = \frac{z^{2n}}{(z-1)^2}$, $n=1, 2, \dots$.

$$23. f(z) = \frac{z^2}{z^3(z+1)}$$

$$30. f(z) = \frac{1}{\sin \pi z}$$

$$24. f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$$

$$31. f(z) = \operatorname{th} z$$

$$25. f(z) = \frac{12z}{z^2 - 4}$$

$$32. f(z) = \operatorname{cth}^2 z$$

$$26. f(z) = \frac{z^4}{1 - \sin^2 z}$$

$$33. f(z) = \frac{\cos z}{(z-1)^2}$$

$$27. f(z) = \cos \frac{1}{z} + z^4$$

$$34. f(z) = \frac{1}{e^z + 1}$$

$$28. f(z) = e^{z^2} + \frac{1}{z^2}$$

$$35. f(z) = \frac{\sin \pi z}{(z-1)^3}$$

$$29. f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^3(z-3)}$$

$$36. f(z) = \frac{1}{\sin z^2}$$

Куйидаги функцияларнинг $z = \infty$ нуқтадаги чегирмаларини топинг.

$$37. f(z) = \frac{z^4 + 1}{z^3 - 1}$$

$$40. f(z) = \frac{(z^{25} + 1) \cos \frac{1}{z}}{(z^3 + 2)(z^2 - 1)}$$

$$38. f(z) = \frac{\sin \frac{1}{z}}{z - 1}$$

$$41. f(z) = z \cdot \cos^2 \frac{\pi}{z}$$

$$39. f(z) = \frac{\cos^2 \frac{1}{z}}{z + 1}$$

42. Ихтиёрий жуфт $f(z)$ функция учун ушбу

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0$$

тенгликнинг бажарилишини курсатинг (бу ердаги чегирмалар маънога эга деб фарз қилинади).

43. Ихтиёрий жуфт $f(z)$ функция учун

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = -\operatorname{res}_{z=-a} f(z),$$

ва тоқ $f(z)$ функция учун

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \operatorname{res}_{z=-a} f(z)$$

тенгликларнинг бажарилишини исботланг (бу ердаги чегирмалар маънога эга деб фарз қилинади).

44. Айтайлик, $f(z)=g(az)$, $a \neq 0$ булсин. У ҳолда

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{a} \operatorname{res}_{z=az_0} g(z)$$

бўлишини исботланг.

Қуйидаги функцияларнинг барча махсус нуқталаридаги ва $z=\infty$ нуқтадаги чегирмаларини ҳисобланг (бунда $z=\infty$ нуқта махсус нуқталарнинг лимит нуқтаси булмаган ҳол қаралали).

45. $f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}.$

48. $f(z) = \frac{1+z^4}{z^6(z+2)}.$

46. $f(z) = \frac{z^3}{(z^2+1)^2}.$

49. $f(z) = \frac{1+z^{10}}{z^4(z^2+4)}.$

47. $f(z) = \frac{1}{z^6(z-2)}.$

50. $f(z) = \frac{z^{2n}}{(1+z)^n}$ (n — натурал сон).

51. $f(z) = \frac{1+z^{2n}}{z^n(z-a)}$ $a \neq 0$ (n — натурал сон).

52. $f(z) = \frac{1}{z(1-z^2)}.$

60. $f(z) = \operatorname{ctg}^2 z.$

53. $f(z) = \frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}.$

61. $f(z) = \operatorname{ctg}^3 z.$

54. $f(z) = \frac{\sin 2z}{(z+1)^3}.$

62. $f(z) = \cos \frac{1}{z-2}.$

55. $f(z) = \sin z - \sin \frac{1}{z}.$

63. $f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z-2}.$

56. $f(z) = \frac{\cos z}{(z^2+1)^2}.$

64. $f(z) = e^{\frac{z+1}{z}}.$

57. $f(z) = \frac{1+z^4}{z^3(z^4+1)} \cos z \operatorname{ch} z.$

65. $f(z) = \sin \frac{z}{z+1}.$

58. $f(z) = \frac{\sin z}{(z^2+1)^2}.$

66. $f(z) = \cos \frac{z^2+4z-1}{z+3}.$

59. $f(z) = \operatorname{tg} z.$

67. $f(z) = \frac{1}{z(1-e^{-hz})}$ ($h \neq 0$).

$$68. f(z) = z^n \sin \frac{1}{z} \quad (n - \text{бутун сон}).$$

$$69. f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}.$$

$$70. f(z) = \frac{\sqrt{z}}{\sin \sqrt{z}}.$$

$$71. f(z) = \frac{\lg z}{z^n} \quad (n - \text{натурал сон}).$$

Куйндаги чегирмаларни ҳисобланг:

$$72. \operatorname{res}_{z=0} \frac{z^{n-1}}{\sin^n z}, \quad n=1, 2, \dots$$

$$73. \operatorname{res}_{z=0} \frac{\sin 3z - 3 \sin z}{\sin z (\sin z - z)}.$$

$$74. \operatorname{res}_{z=0} \frac{\lg z - z}{(1 - \cos z)^2}.$$

$$75. \operatorname{res}_{z=0} \frac{z^{n-1}}{\operatorname{sh}^n z}, \quad n=2, 3, \dots$$

$$76. \operatorname{res}_{z=0} z^{n-1} \operatorname{ctg}^n z, \quad n=2, 3, \dots$$

$$77. \operatorname{res}_{z=0} \frac{z}{\operatorname{ch} z - 1 - \frac{z^2}{2}}.$$

78. $f(z)$ ва $g(z)$ функциялар чекли $z = a$ нуқтада голоморф бўлиб, шу нуқтада m -тартибли нолга эга бўлсин. У ҳолда

$$\operatorname{res}_{z=a} \left\{ \frac{f(z)}{g(z)} \cdot \frac{1}{z-a} \right\} = \frac{f^{(m-1)}(a)}{g^{(m-1)}(a)}$$

тенгликнинг уринли бўлишини кўрсатинг.

79. Агар функциянинг $z = \infty$ нуқта атрофидаги ёйилмаси

$$f(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots$$

куринишга эга бўлса, $\operatorname{res}_{z=\infty} \{|f(z)|^2\}$ ни топинг.

80. Агар $g(z)$ функция $z = a$ нуқтада голоморф бўлиб, $f(z)$ функция $z = a$ нуқтада оддий кутбга эга ва $\operatorname{res}_{z=a} f(z) = A$ бўлса, у ҳолда $\operatorname{res}_{z=a} [f(z) g(z)]$ ни топинг.

81. Агар $g(z)$ функция a нуқтада голоморф, $f(z)$ функция эса $z = a$ нуқтада k -тартибли қутбга ва

$$\frac{c_{-1}}{z-a} + \dots + \frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$$

бош қисмга эга бўлса, у ҳолда $\operatorname{res}_{z=a}[f(z) \cdot g(z)]$ ни топинг.

82. Агар $z = a$ нуқта $f(z)$ функциянинг n -тартибли ноли бўлиб, $g(z)$ функция a нуқтада голоморф бўлса, у ҳолда

$$\operatorname{res}_{z=a} \left[g(z) \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \right]$$

ни топинг.

83. Агар $z = a$ нуқта $f(z)$ функциянинг n -тартибли қутб нуқтаси бўлиб, $f(z)$ функция a нуқтада голоморф бўлса, у ҳолда

$$\operatorname{res}_{z=a} \left[f(z) \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \right]$$

ни топинг.

84. Айтайлик, $g(z)$ функция $z = a$ нуқтада голоморф бўлиб, $g'(a) \neq 0$ бўлсин. Агар $f(\xi)$ функция $\xi = g(a)$ нуқтада 1-тартибли қутбга эга ва

$$\operatorname{res}_{\xi=g(a)} f(\xi) = A$$

бўлса, у ҳолда

$$\operatorname{res}_{z=a} f[g(z)]$$

ни топинг.

85. Агар $f(z)$ функция $z = \infty$ нуқтада k -тартибли қутбга эга бўлса, у ҳолда

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} (z^{k+1} f^{(k+1)}(z))$$

тенгликнинг ўринли бўлишини курсатинг.

2- §. Интегралларни чегирмалар ёрдамида ҳисоблаш

Чегирмалар ёрдамида турли интегралларни ҳисоблаш муаммолари ҳақида қуйида келтириладиган теорема муҳим рол ўйнайди.

1°. 3- теорема (Коши теоремаси). Фараз қилаялмиқ,

1) $f(z)$ функция

$$D \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

соҳда голоморф ($D \subset \mathbb{C}$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in D$)

2) $f(z)$ функцияси соҳани чегарасигача аниқланган ва $D \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ да узлуксиз.

3) ∂D — тўғриланувчи ёпиқ контур бўлсин. У ҳолда

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z) \quad (6)$$

формула ўринлидир.

Изоҳ: (6) формула $\infty \in D$ бўлган ҳол учун ўринлидир. Фақат бу ҳолда $z = \infty$ ни $f(z)$ учун махсус нуқта деб ҳисоблаш ҳамда ∂D чизиқ ориентациясини соат стрелкаси йўналишида олиш kifойадир.

Юқорида келтирилган Коши теоремасидан фойдаланиб ёпиқ контур бўйича олинган интегралларни ҳисоблаймиз.

9- мисол. Ушбу

$$\oint_{|z|=3} \frac{1}{z^2+4z} dz$$

интегрални ҳисобланг.

Бу ҳолда интеграл остидаги функция

$$f(z) = \frac{1}{z^2+4z}.$$

интеграллаш контури $\{z \in \mathbb{C} \mid |z|=3\}$ айлана, D соҳа эса $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|<3\}$ доирадан иборат. $f(z)$ функцияни

$$f(z) = \frac{1}{z^2+4z} = \frac{1}{z(z^2+4)} = \frac{1}{z(z+2i)(z-2i)}$$

кўринишда ёзиб, $a_1=0$, $a_2=-2i$, $a_3=2i$ лар функциянинг 1- тартибли кутб нуқталари эканини аниқлаймиз. Равшаники, a_1, a_2, a_3 махсус нуқталар D соҳага тегишли бўлади. 3- теореманинг барча шартлари бажарилиб, шу теоремага кўра

$$\oint_{|z|=3} \frac{1}{z^2+4z} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^3 \operatorname{res}_{z=a_k} \frac{1}{z^2+4z}$$

бўлади.

Унг томондаги чегирмаларни (1) формулага кўра ҳисоб-
лаймиз:

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = \operatorname{res}_{z=0} \frac{1}{z^3+4z} = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{1}{z^3+4z} = \frac{1}{4},$$

$$\operatorname{res}_{z=2i} f(z) = \operatorname{res}_{z=2i} \frac{1}{z^3+4z} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{1}{z(z-2i)} = -\frac{1}{8},$$

$$\operatorname{res}_{z=2i} f(z) = \operatorname{res}_{z=2i} \frac{1}{z^3+4z} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{1}{z(z+2i)} = -\frac{1}{8}.$$

Натижада

$$\oint_{|z|=3} \frac{1}{z^3+4z} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \right) = 0$$

булишини топамиз.

10- мисол. Ушбу

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z^2+1} dz$$

интегрални ҳисобланг, бунда $\gamma: x^2+y^2=2x$ айланадан иборат.

Равшанки,

$$x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\},$$

D соҳа эса $D = \{z : |z-1| < 1\}$ доирадир.

Энди $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ функциянинг D соҳага тегишли бўлган

махсус нуқталарини топамиз:

$$z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_k = \cos \frac{\pi+2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi+2k\pi}{4} \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

z_0, z_1, z_2, z_3 махсус нуқталардан

$$z_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i),$$

$$z_1 = \cos \frac{\pi+6\pi}{4} + i \sin \frac{\pi+6\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - i)$$

лар D соҳага тегишли бўлади. Шунинг эътиборга олиб, (6) формуладан

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2+1} dz = 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=z_0} \frac{1}{z^2+1} + \operatorname{res}_{z=z_1} \frac{1}{z^2+1} \right)$$

булишини топамиз. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги чегирмаларни ҳисоблаймиз:

$$\operatorname{res}_{z=z_0} \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z^2+1)'} \Big|_{z=z_0} = \frac{1}{4z_0},$$

$$\operatorname{res}_{z=z_1} \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z^2+1)'} \Big|_{z=z_1} = \frac{1}{4z_1}.$$

Натижада

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z^2+1} dz = 2\pi i \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{-a} \right)$$

булади.

Агар

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{-a} = \frac{1}{\left[\frac{a}{2}(1+i)\right]} + \frac{1}{\left[\frac{a}{2}(1-i)\right]} = \frac{4}{\sqrt{2}} \left[\frac{(1-i)^2 + (1+i)^2}{((1+i)(1-i))^2} \right] = -\sqrt{2}$$

булишини ҳисобга олсак, унда

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z^2+1} dz = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pi i$$

эканини топамиз.

11-мисол. Ушбу

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{(z-3)(z^3-1)} dz$$

интегрални ҳисобланг.

(6) формулага кўра $f(z) = \frac{1}{(z-3)(z^3-1)}$ учун

$$\oint_{|z|=2} f(z) dz = -2\pi i \left[\operatorname{res}_{z=3} f(z) + \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) \right]$$

булади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги чегирмаларни ҳисоблаймиз:

$$\operatorname{res}_{z=3} f(z) = \lim_{z \rightarrow 3} (z-3)f(z) = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{242}.$$

Агар

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)(z^3-1)} = \frac{1}{z^3} \frac{1}{\left(1-\frac{3}{z}\right)\left(1-\frac{1}{z^3}\right)}$$

эканини эътиборга олсак, унда $z = \infty$ нуқта $f(z)$ функция-нинг 6- тартибли ноли бўлишини аниқлаймиз. Бу функциянинг Лоран қатори

$$f(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_0}{z^2} + \dots$$

булиб, $c_{-1} = 0$ бўлади. Демак,

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Шундай қилиб,

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{(z-3)(z^3-1)} dz = -2\pi i \left(\frac{1}{242} + 0 \right) = -\frac{\pi i}{121}.$$

12- мисол. Ушбу

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} z^k e^z dz \quad (k - \text{бутун сон, } r > 0)$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интеграл (6) формулага қура

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} z^k e^z dz = \operatorname{res}_{z=0} z^k e^z$$

бўлади. Чегирмани ҳисоблаш учун $f(z) = z^k e^z$ функцияни $z=0$ нуқтанинг уйилган атрофида Лоран қаторига ёямиз:

$$\begin{aligned} f(z) = z^k e^z &= z^k \left[1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^k}{k!} + \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} + \dots \right] \\ &= z^k + 2z^{k+1} + \frac{z^2}{2!} z^{k+2} + \dots + \\ &\quad \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{1}{z} + \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} \cdot \frac{1}{z^2} + \dots \end{aligned}$$

Бу тенгликдан

$$c_{-1} = \begin{cases} \frac{2^{k+1}}{(k+1)!}, & \text{агар } k \geq -1 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } k < -1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлиши келиб чиқади.

Энди

$$c_{-1} = \operatorname{res}_{z=0} z^k e^{\frac{1}{z}}$$

булишини эътиборга олиб,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} z^k e^{\frac{1}{z}} dz = \begin{cases} \frac{2^{k+1}}{(k+1)!}, & \text{агар } k \geq -1 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } k < -1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

булишини топамиз.

13- мисол. Агар $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 3\}$ бўлса, ушбу

$$\int_D \sin \frac{z}{z+1} dz$$

интегрални ҳисобланг.

$f(z) = \sin \frac{z}{z+1}$ деб, сўнг (6) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\int_D f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=-1} f(z).$$

Энди $f(z)$ функциянинг чегирмасини (4) формулага кура ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=-1} f(z) &= \lim_{z \rightarrow -1} z(f(\infty) - f(z)) = \lim_{z \rightarrow -1} z \left(\sin 1 - \sin \frac{z}{z+1} \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \left(2z \cos \frac{1+\frac{z}{z+1}}{2} \cdot \sin \frac{1-\frac{z}{z+1}}{2} \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \left(\cos \frac{2z+1}{2(z+1)} \cdot \frac{\sin \frac{2(z+1)}{2(z+1)}}{\frac{1}{2(z+1)}} \cdot \frac{2z}{2(z+1)} \right) = \cos 1. \end{aligned}$$

Демак,

$$\int_D \sin \frac{z}{z+1} dz = 2\pi i \cos 1.$$

2°. Аниқ интегралларни чегирмалар ёрдамида ҳисоблаш

Аниқ интегралларни ҳам чегирмалар ёрдамида ҳисоблаш мумкин. Бунда аниқ интеграллар комплекс узгарувчи функциянинг контур бўйича олинган интегралга келтирилиб топилади.

1) $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx$ кўринишдаги интегралларни ҳисоблаш.

Ушбу

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx \quad (7)$$

интеграл берилган бўлиб, уни ҳисоблаш талаб этилсин, бунда $R(\cos x, \sin x)$ — $\cos x$ ва $\sin x$ ларнинг рационал функцияси ва у $[0, 2\pi]$ да узлуксиз.

Эйлер формуласига кура

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

булишини эътиборга олиб, сўнг

$$z = e^{ix}$$

деб белгилашни киритсак, унда

$$x \in [0, 2\pi] \Rightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin x = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right),$$

$$dx = \frac{1}{iz} dz$$

бўлиб, берилган (7) интеграл қуйидагича

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx = \oint_{|z|=1} \tilde{R}(z) dz$$

бўлади, бунда

$$\tilde{R}(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)\right)$$

14- мисол. Ушбу

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x - 2}$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $e^{ix}=z$ белгилашни киритамиз. Унда

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x - 2} = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2} dz}{\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{z}\right)} = \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 4z + 1}$$

бўлади. Интеграл остидаги

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 4z + 1}$$

функция учун $z_1 = 2 + \sqrt{3}$ ва $z_2 = 2 - \sqrt{3}$ нуқталар 1- тартибли қутб нуқталари бўлиб, улардан $z_2 = 2 - \sqrt{3}$ нуқта $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ соҳага тегишли бўлади: $z_2 = 2 - \sqrt{3} \in D$. Унда Кошининг чегирмалар ҳақидаги теоремасига асосан

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz = \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2 - 4z + 1} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=z_2} f(z)$$

Функция чегирмасини ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=z_2} f(z) &= \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2) f(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2) \cdot \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{1}{z_2 - z_1} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Демак,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos x - 2} dx = \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2 - 4z + 1} dz = 2\pi i \frac{2}{i} \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

15- мисол. Ушбу

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{5 + 3 \cos \varphi} d\varphi$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $e^{i\varphi}=z$ алмаштиришни бажарамиз. Натижада

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{5+3\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{z}}{5+3\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)} dz = \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{3z^2+10z+3} dz$$

бўлади. Интеграл остидаги

$$f(z) = \frac{1}{3z^2+10z+3}$$

функциянинг $D=\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ соҳага тегишли битта $z = -\frac{1}{3}$ махсус нуқтаси бўлиб, у 1- тартибли қутбдан иборат. Унда

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{3z^2+10z+3} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=-\frac{1}{3}} \frac{1}{3z^2+10z+3}$$

бўлади. Равшанки,

$$\operatorname{res}_{z=-\frac{1}{3}} \frac{1}{3z^2+10z+3} = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{3}} \left(z + \frac{1}{3}\right) \frac{1}{3(z+\frac{1}{3})(z+3)} = \frac{1}{8}.$$

Демак,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{5+3\cos\varphi} d\varphi = \frac{2}{i} 2\pi i \cdot \frac{1}{8} = \frac{\pi}{2}.$$

16- мисол. Ушбу

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{2-\sin^2 \varphi}$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $e^{2i\varphi}=z$ алмаштиришни бажарсак,

$$\varphi \in [0, \pi] \Rightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z|=1\}$$

$$d\varphi = \frac{1}{2iz} dz,$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2} = \frac{1+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}{2},$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2} = \frac{1-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}{2}$$

бўлиб,

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{2-\sin^2 \varphi} = \frac{1}{2i} \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}{2}}{2-\frac{1-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}{2}} dz = \frac{1}{2i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z} \cdot \frac{(z+1)^2}{z^2+6z+1} dz.$$

тенглик ўринлидир.

Энди кейинги тенгликнинг ўнг томонидаги чегирмани ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=i} \frac{1}{(z^2+1)^3} &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{dz^2} (z-i)^3 \frac{1}{(z-i)^3(z+i)^3} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{1}{(z+i)^3} \right)' = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow i} \frac{-3}{(z+i)^4} = -\frac{3}{16i}. \end{aligned}$$

Натижада

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = 2\pi i \cdot \frac{3}{16i} = \frac{3}{8} \pi$$

булишини топамиз.

18- мисол. Ушбу

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} \quad (n - \text{натурал сон})$$

интегрални ҳисобланг.

Аввало берилган интегрални

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

қуринишда ёзиб оламиз.

Энди

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^n} = \frac{1}{(z+i)^n(z-i)^n}$$

десак, бу функция $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ да $z=i$ махсус нуқтага, n - тартибли қутбга эга.

Равшанки,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \cdot \max_{|z|=r} |f(z)| = 0 \quad (\gamma_r = \{ |z|=r, 0 \leq \arg z \leq \pi \}).$$

Унда 4- теоремага кура

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=i} f(z)$$

булади.

(1) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} \operatorname{res} f(z) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z-i)^n \frac{1}{(z+i)^n (z-i)^n} \right] = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\frac{1}{(z+i)^n} \right] = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{1}{2i}. \end{aligned}$$

Натижада

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \pi$$

булиб, берилган интеграл учун

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2}$$

булишини топамиз.

Энди

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} R(x) dx$$

кўринишдаги хосмас интегралларни қарайлик.

Агар $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \max_{|z| \leq R} |R(z)| = 0$ бўлса, у ҳолда Жордан леммасига кўра

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0$$

булади, бунда

$$f(z) = e^{\lambda z} R(z).$$

4-теоремага кўра биз

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} R(x) dx = 2\pi i \sum_{\substack{\lim_{|z| \rightarrow \infty} R(z) = 0 \\ \operatorname{Im} z > 0}} \operatorname{res}[e^{\lambda z} R(z)] \quad (14)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенгликдан

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos \lambda x dx = -2\pi \operatorname{Im} \left\{ \sum_{\substack{\lim_{|z| \rightarrow \infty} R(z) = 0 \\ \operatorname{Im} z > 0}} \operatorname{res}[e^{\lambda z} R(z)] \right\} \quad (15)$$

ҳамда

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin \lambda x dx = 2\pi \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\operatorname{Im} z < 0} \operatorname{res} \left[e^{i\lambda z} R(z) \right] \right\} \quad (16)$$

формулар келиб чиқади.

19-мисол. Ушбу

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 2x + 2} dx$$

интегрални ҳисобланг.

$f(z)$ функция деб

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 - 2z + 2} = \frac{e^{iz}}{[z - (1+i)][z - (1-i)]}$$

ни олаимиз. Бу функциянинг 2 та: $z_1 = 1+i$ ва $z_2 = 1-i$ қутб нуқталари бўлиб, улардан $z_1 = 1+i \in \{\operatorname{Im} z > 0\}$ бўлади.

$$R(z) = \frac{1}{z^2 - 2z + 2} \text{ функция учун } z \rightarrow \infty \text{ да } R(z) \sim \frac{1}{z^2} \text{ бўлган}$$

лигидан 2-лемма шартининг бажарилиши таъминланади. Унда (16) формулага кура

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 2x + 2} dx = 2\pi \operatorname{Re} \left[\operatorname{res}_{z=1+i} f(z) \right]$$

бўлади.

(1) формуладан фойдаланиб $\operatorname{res} f(z)$ ни ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \operatorname{res} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 1+i} \left\{ \frac{e^{iz}}{[z - (1+i)][z - (1-i)]} [z - (1+i)] \right\} = \\ &= \frac{e^{i(1+i)}}{2i} = \frac{e^{-1}}{2i} (\sin 1 - i \cos 1). \end{aligned}$$

Демак,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 2x + 2} dx = 2\pi \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-1}}{2i} (\sin 1 - i \cos 1) \right] = \pi e^{-1} \sin 1.$$

20-мисол. Ушбу

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 x}{x^2 + 1} dx$$

интегрални ҳисобланг.

Авалло берилган интегрални

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 x}{x^2 + 1} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + \cos 2x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 1} dx = \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 1} dx \end{aligned}$$

қурилишда ёзиб олаимиз.

Энди

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 1} dx$$

интегрални (15) формуладан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 1} dx = -2\pi \operatorname{Im} \left[\operatorname{res}_{z=i} \frac{e^{2iz}}{z^2 + 1} \right] = -2\pi \operatorname{Im} \left(\frac{e^{-2}}{2i} \right) = \pi e^{-2}.$$

Демак,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \pi e^{-2} = \frac{\pi}{2} (1 + e^{-2}).$$

21-мисол. Ушбу

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остилаги функция жуфт функция бўлганли-

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx$$

бўлади.

Равшанки,

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 + 1} = \frac{ze^{iz}}{(z-i)(z+i)}$$

функциянинг битта махсус нуқтаси $z = i$ бўлиб, у қутб нуқ- тадир. $z = i \in \{\operatorname{Im} z > 0\}$. $R(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$ функция учун $z \rightarrow \infty$ да

$R(z) = \frac{1}{z}$ бўлади. Булар қаралаётган интегралга нисбатан

(14) формулани қўллаш мумкинлигини кўрсатади. (16) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1} dx = 2\pi \operatorname{Re} \left[\operatorname{res}_{z=i} \frac{ze^{iz}}{z^2+1} \right] = 2\pi \operatorname{Re} \frac{ie^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}.$$

Демак,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{e}.$$

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

Куйидаги интегралларни ҳисобланг:

86. $\oint_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z^2(1+z)}$

87. $\oint_{|z-i|=1} \frac{z^2-1}{z^2-i^2} dz$

88. $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$

89. $\oint_{\gamma} \frac{z^2+1}{(2z+3)^2 z^2} dz$; $\gamma = \left\{ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \right\}$ — эллипс

90. $\oint_{|z|=2} \operatorname{tg} z dz$

95. $\oint_{|z|=2} (2z-1) \cos \frac{z}{z-1} dz$

91. $\oint_{|z|=3} \frac{(1+i)z dz}{z^2+4}$

96. $\oint_{|z|=4} \frac{e^{z-1}}{z-2} dz$

92. $\oint_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z^2+1}$

97. $\oint_{|z|=2} \frac{1 dz}{1+2 \sin^2 z}$

93. $\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z} dz$

98. $\oint_{|z|=1} z^i \sin \frac{1}{z} dz$

94. $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2+1} dz$

99. $\oint_{|z|=1} \frac{z dz}{z^2+1}$

$$100. \int \frac{\cos \frac{z}{2}}{z^2 - 4} dz; \quad \gamma = \left\{ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \right\} - \text{эллипс.}$$

$$101. \int \frac{(z+1)dz}{z^2 + 2z - 3}; \quad \gamma = \{x^2 + y^2 = 16\} - \text{айлана.}$$

$$102. \int \frac{z \sin \frac{z}{2}}{(z-1)^2} dz; \quad \gamma = \left\{ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} = 1 \right\} - \text{эллипс.}$$

$$103. \int_{|z|=1} z^2 \sin \frac{1}{z} dz.$$

$$109. \int_{|z|=1} \frac{\sin \frac{1}{z}}{z(z+1)^2(z+2)(z+4)} dz.$$

$$104. \int_{|z|=1} \frac{z^2 dz}{(z^2 + 1)(z^2 + 2)}.$$

$$110. \int_{|z|=1} \frac{z^2 dz}{(z^2 + 4)^2}.$$

$$105. \int_{|z|=3} \frac{dz}{z(z+2)(z+4)}.$$

$$111. \int_{|z|=4} \frac{e^z dz}{(z-\pi)^3}.$$

$$106. \int_{|z|=2} \frac{z dz}{z^2 - 1}.$$

$$112. \int_{|z|=1} \frac{z^2 dz}{\sin^3 z \cos z}.$$

$$107. \int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-1)^2}.$$

$$113. \int_{|z|=1} \sin z dz.$$

$$108. \int_{|z|=1} \frac{z^2 + z^3}{z^2 + 1} dz.$$

$$114. \int_{|z|=\sqrt{3}} \frac{\sin \pi z}{z^2 - z} dz.$$

$$115. \int \frac{e^{2z} dz}{z^2 + 1}; \quad \gamma = \{x^2 + y^2 = 2x\}.$$

$$116. \int_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z^2 + 2z^2 + 1}.$$

$$117. \int_{|z|=1} \frac{ze^z}{(z-1)^2(z+2)} dz; \quad \gamma = \{x^2 + y^2 = 3\}.$$

$$118. \int_{|z|=1} (z+1)e^z dz.$$

$$119. \int \frac{\sin \pi z}{(z^2 - 1)^2}; \quad \gamma = \left\{ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \right\}.$$

$$120. \oint_{|z|=2} z \sin \frac{z+1}{z-1} dz$$

$$121. \oint_{|z|=2} \frac{z^3 e^z dz}{z+1}$$

$$122. \oint_{|z-1|=1} \frac{\sin z dz}{(z^3 - z)(z-1)}$$

$$123. \oint_{|z|=R} \operatorname{tg} n z dz, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$124. \oint_{|z|=r} \sin \frac{1}{z} dz$$

$$125. \oint_{\gamma} \frac{z dz}{(z-1)(z-2)^2}, \quad \gamma = \left\{ |z-2| = \frac{1}{2} \right\}$$

$$126. \oint_{|z|=1} \frac{z^3 dz}{2z^6 + 1}$$

$$127. \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2(z^2-9)} dz$$

$$128. \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \sin^2 \frac{1}{z} dz$$

$$129. \oint_{|z|=3} (1+z+z^2)(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}}) dz$$

$$130. \oint_{|z|=3} \frac{z dz}{\sin z (1 - \cos z)}$$

$$131. \int_D \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}, \quad D = \{ |z-1-i| < 2 \}$$

$$132. \int_D \frac{\sin z}{(z+1)^3} dz; \quad D = \left\{ x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} < 2^{\frac{1}{2}} \right\}$$

$$133. \int_D \frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2}; \quad D = \{ 2 < |z| < 4 \}$$

$$134. \int_D \frac{z}{z+3} e^{\frac{1}{z}} dz; \quad D = \{ |z| > 4 \}$$

$$135. \int_{\partial D} \frac{dz}{z^2(z-1)} dz, \quad D = \{ |z| < 2 \}.$$

$$136. \int_{\partial D} \frac{z^2 \sin \frac{1}{z}}{(z-1)(z-2)} dz, \quad D = \{ |z| < 3 \}$$

$$137. \int_{\partial D} \frac{z^2}{z^4-1} dz, \quad D = \{ |z| < 2 \}.$$

$$138. \int_{\partial D} \sin \frac{1}{z-1} dz, \quad D = \{ |z-1| > 1 \}.$$

$$139. \int_{\partial D} e^{1-z} \frac{dz}{z}, \quad D = \{ |z-2| + |z+2| < 6 \}.$$

$$140. \int_{\partial D} z \cos \frac{z}{z+1} dz, \quad D = \{ |z| > 2 \}.$$

$$141. \int_{\partial D} \frac{\cos z}{z} dz, \quad D = \{ |z| > 1 \}.$$

$$142. \int_{\partial D} \frac{e^{xz}}{2z^2-1} dz, \quad D = \{ |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0 \}.$$

$$143. \int_{\partial D} \frac{z dz}{e^{z^2}-1}, \quad D = \{ |z| > 4 \}.$$

$$144. \int_{\partial D} \frac{z^3 dz}{e^{z^2}-1}, \quad D = \{ |z| < 4 \}.$$

145. $D = \{ \operatorname{Im} z > 0 \}$ ярим текисликнинг чегараси бўйича олинган

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{e^z}{(z-i)^2} dz$$

интеграл шу интеграл остидаги функциянинг шу ярим текисликдаги чегирмаларининг йигиндисига тенг эканлигини кўрсатинг ва унинг қийматини топинг.

Кўрсатма. Кошининг чегирмалар ҳақидаги теоремасини $\{ \operatorname{Im} z > 0, |z| < R \}$ ярим доиранинг чегараси бўйича олинган интегралга қўлланг ва кейин R ни ∞ га интиштириб лимитга утинг.

Қуйидаги мисолларда чегараланмаган соҳанинг чегараси бўйича олинган интегралларга Кошининг чегирмалар ҳақидаги теоремасини қўллаш мумкинлигига ишонч ҳосил қилинг ва уларни ҳисобланг:

$$146. \int_{|D|} \frac{ze^{-z}}{z^2-1} dz; \quad D = \{\operatorname{Re} z > 0\}.$$

$$147. \int_{|D|} \frac{e^{-z}}{\sin z} dz; \quad D = \{-\frac{\pi}{4} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{4}\}.$$

$$148. \int_{|D|} \frac{z^3}{(z-1)^2} e^{-z} dz; \quad D = \{-\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{6}\}.$$

Қуйидаги мисоллардаги интегралларга Кошининг чегирмалар ҳақидаги теоремасини қўллаш мумкин эмаслигини кўрсатинг.

$$149. I = \int_{|D|} e^{-z^2} dz; \quad D = \{\operatorname{Im} z > 0\}.$$

$$150. I = \int_{|D|} \frac{\sin z}{1+z^2} dz; \quad D = \{\operatorname{Im} z > 0\}.$$

Аниқ интегралларни чегирмалар ёрдамида ҳисоблаш

Бу бўлимдаги барча мисолларда аниқ интегралларни ҳисоблаш талаб қилинганда, агар интеграл хосмас ва узоқлашувчи бўлса, у ҳолда унинг бош қийматини топиш тушунилади¹.

Қуйидаги мисолларда интегралларни ҳисобланг.

$$151. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin x + 2}.$$

$$153. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - \cos x}.$$

$$152. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5+4 \cos x)^2}.$$

$$154. \int_0^{2\pi} \operatorname{tg}(x+i) dx.$$

¹ Айтайлик, $f(x)$ функция $[a, b]$ да узлуksиз бўлиб, $\int_a^b f(x) dx$

интеграл узоқлашсин. У ҳолда

$$\lim_{p \rightarrow a} \left[\int_a^p f(x) dx + \int_{c+p}^b f(x) dx \right]$$

лимитта $f(x)$ функция **интегралнинг бош қиймати** деб аталади ва у

В.р. $\int_a^b f(x) dx$ каби белгиланади.

$f(x)$ функциянинг $[a, b]$ кесмадаги узилиш нуқталари сонини бир нечта бўлганда ҳам интегралнинг бош қиймати шу каби аниқланади.

$$155. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \cos x} \quad (a > 1).$$

$$156. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{13 + 12 \sin x}.$$

$$157. \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{13 + 12 \cos x} dx.$$

$$158. \int_0^{2\pi} \frac{\cos^4 x}{1 + \sin^2 x} dx.$$

$$159. \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}(x - ia) dx, \quad (a > 0).$$

$$160. \int_0^{2\pi} e^{2ia} \operatorname{ctg}(x - ia) dx, \quad (a > 0).$$

$$161. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b \cos x)^2}, \quad (a > b > 0).$$

$$162. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b \cos^2 x)^2}, \quad (a > 0, b > 0).$$

$$163. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2a \cos x + a^2} \quad (a - \text{комплекс сон ва } a \neq \pm 1).$$

$$164. \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x dx}{1 - 2a \cos x + a^2} \quad (a - \text{комплекс сон ва } a \neq \pm 1).$$

$$165. \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(n \sin x) dx \quad (n - \text{бутун сон}).$$

$$166. \int_0^{2\pi} \operatorname{tg}(x + ia) dx \quad (a - \text{хақиқий сон}).$$

$$167. \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}(x + a) dx \quad (a - \text{комплекс сон ва } \operatorname{Im} a \neq 0).$$

$$168. \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x dx}{1 - 2a \cos x + a^2} \quad (a > 1).$$

$$202. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)e^{\alpha x}}{x^2-2x+2} dx.$$

$$203. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x} dx}{x^2-2ix-2}.$$

$$204. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x} dx}{(x^2+4ix-5)^2}.$$

$$205. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-3)e^{i\alpha x}}{x^2-6x+109} dx.$$

$$206. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)e^{-i\alpha x}}{x^2-2ix+5} dx.$$

$$207. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\alpha x}}{(x^2+4ix-5)^2} dx.$$

Қуйидаги интегралларни Жордан леммаларидан фойдаланиб ҳисобланг:

$$208. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos \alpha x}{x^2-2x+10} dx.$$

$$209. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{x^2-2x+10} dx.$$

$$210. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{x^2+4x+20} dx.$$

$$211. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1) \sin 2x}{x^2+2x+2} dx.$$

$$212. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \sin x}{x^4+3x^2+4} dx.$$

$$218. \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2+a^2} dx \quad (a > 0).$$

$$219. \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2+b^2} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

$$220. \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+a^2} dx \quad (a > 0).$$

$$221. \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+a^2)^2} dx \quad (a > 0).$$

$$213. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+5x) \sin x}{x^4+10x^2+9} dx.$$

$$214. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2x^3+13x) \sin x}{x^6+13x^2+36} dx.$$

$$215. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1) \cos 2x}{x^2-4x+5} dx.$$

$$216. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+2x+10} dx.$$

$$217. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2-2x+10} dx.$$

$$222. \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{x^2+b^2} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

$$223. \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2} dx \quad (a > 0).$$

$$224. \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

$$225. \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2+x^2+1} dx \quad (a > 0).$$

Қуйидаги интегралларнинг бош қийматларини топинг:

$$226. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx \quad (\alpha > 0).$$

$$227. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx \quad (\alpha < 0).$$

$$228. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2-5x+6} dx.$$

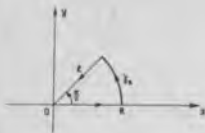
$$229. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{(x^2+4)(x-1)} dx.$$

$$230. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1-x^2} dx.$$

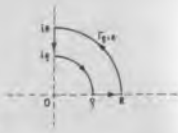
$$231. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x-t)} \quad (a > 0, -\infty < t < \infty).$$

$$232. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-e^{i\alpha x}}{x^2} dx \quad (\alpha > 0).$$

$$233. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-e^{i\alpha x}}{x^2} dx \quad (\alpha < 0).$$



142-чизма.



143-чизма.

Курсатма. 250 ва 251-мисолларни ечишда 143-чизмада курсатилган $\Gamma_{p,R}$ контур бўйича олинган ушбу

$$\oint_{\Gamma_{p,R}} z^{p-1} e^{-az} dz$$

интегралдан фойдаланинг.

$$252. \int_0^{+\infty} \cos x^p dx \quad (p > 1).$$

$$253. \int_0^{+\infty} \sin x^p dx \quad (|p| > 1).$$

$$254. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^p}{x^p} dx \quad (p > \frac{1}{2}).$$

3-§. Аргумент принципи. Руше теоремаси

Фараз қилайлик, комплекс текисликда бирор γ содда ёпиқ эгри чизиқ ҳамда z_0 ($z_0 \in \gamma$) нуқта берилган бўлсин: $\gamma \subset C$, $z_0 \in C$. Бу эгри чизиқда

$$\varphi(z) = \arg(z - z_0) \quad (z \in \gamma)$$

функцияни қарайлик.

Одатда, $\varphi(z) = \arg(z - z_0)$ функция охириги ҳамда бошланғич нуқталаридаги қийматлари айирмасининг 2π га нисбати γ чизиқнинг z_0 нуқтага нисбатан индекси дейилади ва у

$$\operatorname{ind}_0 \gamma$$

каби белгиланади.

Бу $\operatorname{ind}_0 \gamma$ сон боши z_0 нуқтада охири z нуқтада ($z \in \gamma$) бўлган $z - z_0$ векторнинг z_0 нуқта атрофидаги тулиқ айланишлар сонини ифодалайди. Агар векторнинг йуналиши мусбат булса, $\operatorname{ind}_0 \gamma > 0$, манфий булса, $\operatorname{ind}_0 \gamma < 0$ бўлади.

Куйидаги

а) $z = a + \rho e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi, |a| < \rho$

б) $z = a + \rho e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi, |a| > \rho > 0$

ёлиқ чизикларнинг $z_0 = 0$ нуқтага нисбатан индексини ҳисобланг.

Равшанки,

$$z = a + \rho e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

маркази a нуқтада, радиуси ρ га тенг бўлган айланани ифодалайди. Демак,

$$\gamma = \{z \in C : |z - a| = \rho\}$$

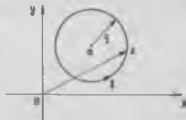
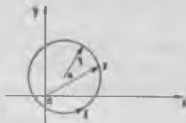
а) Бу ҳолда $|a| < \rho$ бўлгани сабабли $z_0 = 0$ нуқта γ айлана билан чегараланган доиранинг ичида ётади. 144-а чизма. t узгарувчи 0 дан 2π гача узгарганда $z - z_0 = \bar{z}$

вектор 0 нуқта атрофида тулиқ бир марта айланади. Демак, $\operatorname{ind}_0 \gamma = 1$;

б) Бу ҳолда $|a| > \rho$ бўлганлиги сабабли $z_0 = 0$ нуқта γ айлана билан чегараланган доиранинг ташқарисиди ётади 144-б. t узгарувчи 0 дан 2π гача узгарганда $z - z_0 = \bar{z}$ век-

тор 0 нуқта атрофини бир марта ҳам тулиқ айланмаганлиги сабабли $\operatorname{ind}_0 \gamma = 0$ бўлади.

Айтайлик, комплекс текисликда бирор D соҳа берилган булсин: $D \subset C$.



144-чизма

Агар D соҳада $f(z)$ голоморф функция кутбдан бошқа махсус нуқтага эга бўлмаса, $f(z)$ функция D да мероморф функция дейилади.

5 - теорема (аргумент принципи). *Фараз қилайлик, $f(z)$ функция чегараси бўлакли — силлиқ чизиқдан иборат бўлган чегараланган D соҳанинг ($D \subset C$) ёниги $\bar{D}$ да мероморф бўлиб, ∂D да функциянинг ноллари ҳам, кутблари ҳам ётмасин.*

Агар N ва P лар мос равишда $f(z)$ функциянинг D соҳадаги ноллари ва кутбларининг умумий сони булса (ҳар бир ноль ва кутб неча карралаи бўлса, шунча марта ҳисобланади), у ҳолда

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (17)$$

булади.

Юқоридаги (17) тенгликни

$$N - P = \text{ind}_0 \partial D^* \quad (18)$$

куринишда ҳам ёзиш мумкин, бунда $\partial D^* = f(\partial D)$.

6 - теорема (Руше теоремаси). *Фараз қилайлик, $f(z)$ ва $g(z)$ функциялар D соҳанинг ёниги $\bar{D}$ да голоморф бўлиб, ихтиёрий $z \in \partial D$ учун*

$$|f(z)| > |g(z)| \quad (19)$$

тенгсизлик бажарилсин. У ҳолда $f(z)$ ва $f(z) + g(z)$ функцияларнинг D соҳадаги ноллари сони бир-бирига тенг булади.

22-мисол. Ҳар қандай n -даражали

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

($a_0 \neq 0$, $n \geq 1$) кўпхад n та илдизга эга эканлигини исботланг.

Агар

$$f(z) = a_0 z^n,$$

$$g(z) = a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

десак, унда

$$P_n(z) = f(z) + g(z)$$

булади.

Равшанки,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{g(z)}{f(z)} = 0.$$

Унда шундай $R > 0$ сон топиладики, $\forall z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R\}$ учун

$$\left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1 \quad (20)$$

бўлади

Агар $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, $\partial D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ дейилса, унда (20) муносабатга кўра ∂D да

$$|f(z)| > |g(z)|$$

тенгсизлик бажарилади. Руше теоремасига биноан,

$$f(z) = a_0 z^n, \quad g(z) + f(z) = P_n(z)$$

функцияларнинг D соҳадаги нолларининг сони бир-бирига тенг бўлади.

Равшанки, $z = 0$ нуқта $f(z)$ функциянинг n каррали ноли. Бинобарин, $P_n(z)$ купҳаднинг D соҳадаги нолларининг сони ҳам n га тенг бўлади.

Яна (20) тенгсизликдан фойдаланиб, $\forall z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R\}$ да $P_n(z) \neq 0$ бўлишини топамиз. Демак, $P_n(z)$ купҳаднинг барча ноллари n га тенг бўлади.

2.2 - м и с о л. Айтайлик, $f(z)$ функция D соҳанинг ёпиғи $\bar{D}$ да мероморф бўлиб, ∂D да узлуксиз бўлсин. Агар $\forall z \in \partial D$ учун $\operatorname{Im} f(z) \neq 0$ бўлса, $f(z)$ функциянинг D соҳадаги ноллари ва қутблари сони бир-бирига тенг бўлишини исботланг.

$f(z)$ функциянинг D соҳадаги нолларининг умумий сони N , қутбларининг умумий сони P бўлсин. Масаланинг шартидан $f(z)$ функциянинг ∂D да ноллари ҳам, қутб нуқталари ҳам бўлмаслигини топамиз. Аргумент принципа кўра

$$N - P = \operatorname{ind}_0 \partial D^* \quad (21)$$

оулади, бунда $\partial D^* = f(\partial D)$

Шартга кўра $\forall z \in \partial D$ учун $\operatorname{Im} f(z) \neq 0$. Бинобарин, ∂D^* тўпلام ёки $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > 0\}$, ёки $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w < 0\}$ ярим те-
кисликда ётади ($w = f(z)$). Равшанки, бу ҳолларда $w = f(z)$

нуқта ∂D^* чегара бўйлаб ҳаракатланганда $\vec{w} = \vec{f}(z)$ вектор $w = 0$ нуқтанинг атрофида бирор марта ҳам тўлиқ айлана олмайди. Демак,

$$\text{ind}_0 \partial D^* = 0 \quad (22)$$

булади. (21) ва (22) муносабатлардан

$$N = P$$

булиши келиб чиқади.

24 - мисол. Ушбу

$$e^z + 2z^2 - 1 = 0$$

тенглама $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ соҳада нечта илдиэга эга бўлади?

Аввало

$$f(z) = 2z^2, \quad g(z) = e^z - 1$$

деб оламиз. Унда берилган тенглама куйидаги

$$f(z) + g(z) = 0$$

қурилишни олади.

Сўнг $\forall z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ учун $|g(z)|$ ни баҳолаймиз

$$|g(z)| = |e^z - 1| \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \dots < 2 = |2z^2| = |f(z)|.$$

Руше теоремасига кўра

$$\begin{aligned} f(z) &= 2z^2 = 0, \\ f(z) + g(z) &= e^z - 1 + 2z^2 = 0 \end{aligned}$$

тенгламаларнинг $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ соҳадаги илдиэлари сони тенг бўлади. Равшанки, $f(z) = 2z^2 = 0$ тенглама икки та илдиэга эга. Бинобарин, берилган

$$e^z - 1 + 2z^2 = 0$$

тенглама D да икки та илдиэга эга бўлади.

25 - мисол. Ушбу

$$z + \lambda - e^z = 0 \quad (\lambda > 1) \quad (23)$$

тенгламанинг $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z < 0\}$ ярим текисликда ягона илдиэга (ҳақиқий илдиэга) эга булишини исботланг.

Аввало куйидаги белгилашларни қиламиз:

$$\begin{aligned} \gamma_R &= \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \text{Re } z \leq 0\} \\ I &= \{z = iy : -R \leq y \leq R\} \end{aligned}$$

Сўнг ушбу

$$\Gamma_R = \gamma_R \cup I$$

эпик чизиқни оламиз.

Агар

$$f(z) = z + \lambda, \quad g(z) = -e^z$$

дейилса, унда берилган тенглама ушбу

$$f(z) + g(z) = 0$$

қурилишни олади.

Равшанки,

$$\forall z \in I \text{ учун } |f(z)| = |\lambda + iy| = \sqrt{\lambda^2 + y^2} \geq \lambda > 1,$$

$$|g(z)| = |-e^{iy}| = 1;$$

$\forall z \in \gamma_R$ учун, $R > \lambda + 1$ бўлганда

$$|f(z)| = |z + \lambda| \geq |z| - \lambda = R - \lambda > 1,$$

$$|g(z)| = |e^{-iz}| = e^{-y} \leq 1$$

булади. Руше теоремасига кўра Γ_R эпик чизиқ билан чегараланган соҳада (ярим доиранинг ичида)

$$\begin{aligned} f(z) &= z + \lambda = 0, \\ f(z) + g(z) &= z + \lambda - e^z = 0 \end{aligned}$$

тенгламанинг илдиэлари сони тенг бўлади. Демак, берилган тенглама $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z < 0\}$ ярим текисликда ягона илдиэга эга. Энди бу илдиэнинг ҳақиқий эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун

$$x + \lambda - e^x = 0$$

тенглама $(-\infty, 0)$ ораликда илдиэга эгаллигини кўрсатиш кифоя. $\varphi(x) = x + \lambda - e^x$ деб белгиласак, бу функция $(-\infty, 0)$ ораликда узлуксиз ва четки нуқталарда турли ишорали қийматларни қабул қилади: $\varphi(0) = \lambda - 1 > 0$ ва $\varphi(-\infty) = -\infty$. Демак, $\varphi(x) = 0$ тенглама $(-\infty, 0)$ ораликда илдиэга эга.

26- мисол. Руше теоремасидан фойдаланиб, қуйидаги Гурвиц теоремасини исботланг. D соҳада голоморф булган $F_n(z)$ функциялар кетма-кетлиги берилган бўлиб, бу кетма-кетлик шу соҳада $F(z)$ функцияга текис яқинлашсин. Айтايлик, Γ чизиқ D соҳада ўзи чегараланган соҳа билан бирга тўлиқ ётувчи ёпиқ тўриланувчи Жордан чизиги бўлиб, $\forall z \in \Gamma$ учун $F(z) \neq 0$ шарт бажарилсин. У ҳолда шундай натурал $n_0 = n_0(\Gamma)$ сон топиладики, ихтиёрий $n \geq n_0$ учун барча $F_n(z)$ ва $F(z)$ функциялар Γ билан чегараланган соҳанинг ичида бир хил сондаги нолларга эга бўлади.

$F(z)$ функция Γ да узлуксиз ва $\forall z \in \Gamma$ учун $F(z) \neq 0$ булгани учун

$$\inf_{\Gamma} |F(z)| = m > 0$$

бўлади. Γ да $F_n(z) = F(z)$ бўлганлиги сабабли шундай $n_0 = n_0(\Gamma)$ топиладики, $\forall n \geq n_0$ ва $z \in \Gamma$ лар учун

$$|F_n(z) - F(z)| < \frac{m}{2}$$

тенгсизлик бажарилади. $n \geq n_0$ лар учун

$$F_n(z) = F(z) + [F_n(z) - F(z)]$$

деб ёза оламиз. Агар $f(z) = F(z)$ ва $g(z) = F_n(z) - F(z)$ деб белгиласак, бу функциялар Γ чизиқ билан чегараланган соҳанинг ёпиғида голоморф бўлиб, $\forall z \in \Gamma$ учун

$$|f(z)| \geq m > \frac{m}{2} > |g(z)|$$

бўлади. У ҳолда $n > n_0$ лар учун Руше теоремасини қўлаб, Γ чизиқ билан чегараланган соҳанинг ичида $F(z)$ ва $F_n(z) = f(z) + g(z)$ функцияларининг ноллари сони тенглигини топамиз.

27- мисол. Агар $\rho < \frac{\pi}{2}$ бўлса, етарлича катта булган барча n лар учун

$$F_n(z) = 1 - \frac{z}{2^1} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

қўлҳаллар ёпиқ $\{|z| \leq \rho\}$ доирада нолга эга бўлмаслигини исботланг.

Ушбу

$$F(z) = \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

функцияни оламиз. Маълумки, бу қатор S да яқинлашиб, ундаги ихтиёрий ёпиқ доирада, хусусан, $\{|z| \leq \rho\}$ ($\rho < \frac{\pi}{2}$)

доирада текис яқинлашди: $\{|z| \leq \rho\}$ да $F_n(z) = F(z)$. $\{|z| \leq \rho\}$ да $F(z) = \cos z \neq 0$ булгани учун, Гурвиц теоремасига кура, шундай $n_0 = n_0(\rho)$ мавжудки, $\forall n \geq n_0$ ва $|z| \leq \rho < \frac{\pi}{2}$ лар учун

$$F_n(z) \neq 0$$

бўлади.

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

Қуйидаги параметрик тенгламалар ёрдамида берилган чизиқларнинг $z_0 = 0$ нуқтага нисбатан индексини ҳисобланг.

255. $z = \rho e^{i\alpha t}, 0 \leq t \leq 2\pi, \rho > 0.$

256. $z = \frac{1}{2} \cos t + i \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi.$

257. $z = 2 \cos t - i \sin t, 0 \leq t \leq 6\pi.$

258. $z = 1 + i \sin^2 t, 0 \leq t \leq 2\pi.$

259. $f(z)$ функция D соҳанинг ёпиғи $\bar{D}$ да мероморф бўлиб, ∂D да узлуксиз бўлсин. Агар $\forall z \in \partial D$ учун

$$\operatorname{Re} f(z) \neq 0$$

бўлса, у ҳолда $f(z)$ функциянинг D соҳадаги ноллари ва қўтблари сони бир-бирига тенг бўлишини исботланг.

260. $f(z)$, $F(z)$ лар D соҳанинг ёпиғи $\bar{D}$ да голоморф бўлиб, $\forall z \in \partial D$ учун $\operatorname{Im} \frac{f(z)}{F(z)} \neq 0$ бўлсин (бу ерда D чегараланган соҳа). У ҳолда $F(z)$ ва $F(z) + f(z)$ функцияларининг D соҳадаги нолларининг сони бир-бирига тенг эканлигини исботланг.

Қуйидаги тенгламаларнинг D соҳадаги илдизлари сони-ни топинг:

261. $z^4 - 3z + 1 = 0; \quad D = \{|z| < 1\}.$

262. $2z^4 - 5z + 2 = 0; \quad D = \{|z| < 1\}.$

$$263. z^4 - 7z^3 - 3z^2 + 1 = 0;$$

$$264. z^4 - 3z^2 - 1 = 0;$$

$$265. e^z - 2z = 1;$$

$$266. 0.9e^{z+1} = 2z;$$

$$267. 1 + 2z - z^2 = 0;$$

$$268. z^3 - 5z^2 + z^2 - 2 = 0;$$

$$269. z^4 - 4z^2 + z^2 - 1 = 0;$$

$$270. z^3 - 12z + 2 = 0;$$

$$271. z^4 - 9z + 1 = 0;$$

$$272. z^4 - 6z + 10 = 0;$$

$$273. z^4 + z^3 - 4z + 1 = 0;$$

$$274. z^6 - 2z^4 + z^2 - 8z - 2 = 0;$$

$$275. 2z^4 - z^3 + 3z^2 - z + 8 = 0;$$

$$276. z^4 - 5z^2 + z^2 - 2 = 0;$$

277. Агар $\varphi(z)$ функция $\{|z| \leq 1\}$ ёпиқ доирада голоморф бўлиб, $|\varphi(z)| < 1$ бўлса,

$$z^n = \varphi(z) \quad (n - \text{натурал сон})$$

тенглама $\{|z| < 1\}$ бирлик доирада нечта илдиизга эга?

278. Фараз қилайлик, $\gamma \in C$ контурнинг барча нуқтала-рида

$$|a_n z^n| > |a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n+1} z^{n+1} + \dots + a_k z^k|$$

тенгсизлик бажарилсин. Агар $z = 0$ нуқта γ контур билан чегараланган соҳанинг ичида ётса,

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_k z^k$$

кўпхад шу контурнинг ичида k та илдиизга эга, агар $z = 0$ нуқта γ контур билан чегараланган соҳанинг ичида ётмаса, у ҳолда шу кўпхаднинг контурнинг ичида бирорта ҳам илдиизга эга эмаслигини исботланг.

$$279. z^4 - 5z + 1 = 0 \text{ тенглама}$$

а) $\{|z| < 1\}$ доирада,

б) $\{1 < |z| < 3\}$ ҳалқала

нечта илдиизга эга?

$$280. z^4 - 8z + 10 = 0 \text{ тенгламанинг}$$

а) $\{|z| < 1\}$ доирада,

б) $\{1 < |z| < 3\}$ ҳалқала

нечта илдииз ётади?

$$281. \text{Агар } |\alpha_1| > |\alpha_1| + |\alpha_2| + 1 \text{ шарт бажарилса,}$$

$z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \dots + \alpha_n = 0$ (n — натурал сон) тенгламанинг нечта илдииз $\{|z| < 1\}$ доирада ётишини аниқланг.

$$D = \{|z| < 1\}.$$

$$D = \{1 < |z| < 2\}$$

$$D = \{|z| < 1\}.$$

$$D = \{|z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}.$$

$$D = \{|z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}.$$

$$D = \{|z| < 1\}.$$

$$D = \{|z| < 1\}.$$

$$D = \{|z| < 2\}.$$

$$D = \{|z| < 2\}.$$

$$D = \{|z| < 1\}.$$

$$D = \{|z| < 1\}.$$

$$D = \{1 < |z| < 2\}$$

$$D = \{|z| < 1\}.$$

$$D = \{|z| < 1\}.$$

$$D = \{|z| < 1\}.$$

282. $z^n - 4z^n + 1 = 0$ (n — натурал сон) тенглама $\{|z| < 1\}$ доирада нечта илдиизга эга?

283. Агар $|a| > \frac{1}{n}$ бўлса,

$$e^z = az^n \quad (n - \text{натурал сон})$$

тенглама $\{|z| < R\}$ доирада нечта илдиизга эга?

284. $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ ўнг ярим текисликда

$$z = \lambda - e^z \quad (\lambda > 1)$$

тенглама ягона (y ҳам бўлса ҳақиқий) илдиизга эга эканлигини исботланг.

285. Ихтиёрий комплекс a сони учун $n \geq 2$ булганда

$$1 + z + az^n = 0$$

тенглама $\{|z| \leq 2\}$ доирада ҳеч булмаганда битта илдиизга эга бўлишини исботланг.

286. $\{|z| \leq 1\}$ доирада

$$ze^{\lambda z} = 1 \quad (\lambda > 1)$$

тенгламанинг ягона (y ҳам бўлса ҳақиқий) илдиизи ётишини исботланг.

287. $\{\operatorname{Re} z \geq 0\}$ ярим текисликда

$$az^3 - z + b = e^{z(z+2)} \quad (a > 0; b > 2)$$

тенглама ечимга эга эмаслигини исботланг.

288. $f(z)$ функция $\{|z| < 1\}$ доирада голоморф бўлса, қуйидаги тасдиқни исботланг:

шундай $p > 0$ сон топиладики, $\forall w \in \{|w| < p\}$ учун

$$z = wf(z)$$

тенглама $\{|z| < 1\}$ доирада 1 та илдиизга эга бўлади.

289. Агар $f(z) \in O\{|z| < 1\}$ бўлиб, $f(0) \neq 0$ бўлса, қуйидагини исботланг:

$\exists r > 0$ сон топиладики,

$$\forall w \in \{0 < |w| < r\} \text{ учун}$$

$$z = wf(z)$$

тенглама $\{|z| < 1\}$ доирада m та бир-биридан фарқли илдиизга эга бўлади.

290. $z \sin z = 1$ тенглама фақат ҳақиқий илдиизларга эга бўлишини исботланг.

Кўрсатма. Берилган тенгламанинг $\left[-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi, \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]$ кесмадаги ҳақиқий илдиэларининг сонини аниқлаб, уни шу тенгламанинг $\left\{z < \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}$ доирадаги барча илдиэлари нинг сони билан солиштиринг.

291. $igz = z$ тенглама фақат ҳақиқий илдиэларга эга були шини исботланг.

292. Ихтиёрий $R > 0$ сони учун бирор $n_0 = n_0(R)$ но мердан бошлаб барча $n \geq n_0$ лар учун

$$P_n(z) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!}$$

купҳадларнинг $\{|z| < R\}$ ёпиқ доирада нолга эга эмасли гини исботланг.

293. $\rho > 0$ сони ҳар қандай кичик қилиб олинганида ҳам, етарлича катта n лар учун

$$F_n(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \dots + \frac{1}{nz^n}$$

функциянинг барча ноллари $\{|z| < \rho\}$ доирада ётишини исботланг.

294. Агар $0 < \rho < 1$ бўлса, етарлича катта n лар учун

$$P_n(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \dots + nz^{n-1}$$

купҳаднинг $\{|z| < \rho\}$ доирада илдиэга эга эмаслигини исботланг.

295. S да голоморф бўлган $f(z)$ функция комплекс те кислик S нинг ихтиёрий чекли қисмида текис яқинла шувчи $\{P_n(z)\}$ купҳадлар кетма-кетлигининг лимити булсин. Агар барча $P_n(z)$ купҳадлар фақат ҳақиқий илдиэларга эга булса, у ҳолда $f(z)$ функция ва унинг барча ҳосилалари ҳам фақат ҳақиқий илдиэга эга булишини исботланг.

296. Агар a ихтиёрий ҳақиқий сон бўлса, у ҳолда

$$f(z) = e^{-z^2+az}$$

функциянинг барча ҳосилалари фақат ҳақиқий илдиэга эга булишини исботланг.

297. $f(z)$ функция $D \subset C$ соҳанинг ёпиғи $\bar{D}$ да мероморф бўлиб, ∂D да узлуксиз булсин. Агар $\forall z \in \partial D$ учун

$$|f(z)| > 1$$

шарт бажарилса, у ҳолда $f(z) = 1$ тенгламанинг D соҳадаги илдиэлари сони $f(z)$ функциянинг шу соҳадаги ноллари сонига тенг эканлигини исботланг.

298. $f(z)$ функция $D \subset C$ соҳанинг ёпиғи $\bar{D}$ да мероморф бўлиб, ∂D да узлуксиз булсин. Агар $\forall z \in \partial D$ учун

$$|f(z)| < 1$$

шарт бажарилса, у ҳолда $f(z) = 1$ тенгламанинг D соҳадаги илдиэлари сони $f(z)$ функциянинг шу соҳадаги ноллари сонига тенг эканлигини исботланг.

299. $z^6 + z^5 + 6z^4 + 5z^3 + 8z^2 + 4z + 1$ купҳаднинг унг ярим текисликдаги илдиэлари сонини топинг.

300. $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2 = 0$ тенгламанинг

а) ўнг ярим текисликдаги,

б) биринчи квадрантдаги илдиэлари сонини топинг.

301. $2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z + 1 = 0$ тенглама ҳар бир квадрантда нечадан илдиэга эга?

302. $z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3 = 0$ тенгламанинг илдиэлари қайси квадрантларда ётади?

ИЛОВА

I. Каср-чизикли функция

1) Ангармоник нисбат.

$$z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$

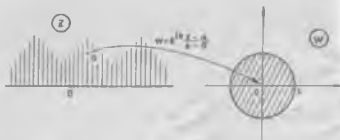
нуқталарни мос равишда $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$ нуқталарга акслантирувчи каср-чизикли функция ушбу

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$$

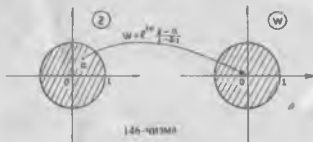
ангармоник нисбатдан топилади.

$$2) w = e^{i\theta} \frac{z-a}{z-\bar{a}}, \quad \operatorname{Im} a > 0 \text{ ва } D = \{z : \operatorname{Im} z > 0\} \text{ булса, } w(D) = \{W : |W| < 1\}$$

булади (145-чизма).



145-чизма.



146-чизма

3) $w = e^{\frac{z-i\pi}{1-iz}}$, $|a| < 1$ ва $D = \{z: |z| < 1\}$ бўлса, $w(D) = \{w: |w| < 1\}$

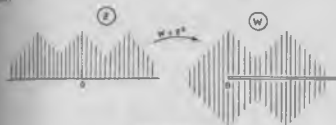
бўлади (146-чизма)

II. Даражали функция ва унга тескари бўлган функциялар :

1) $w = z^2$ ва $D = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ бўлса, $w(D) = C \setminus \mathbb{R}^+$ бўлади (147-чизма).

2) $w = z^2$ ва $D = \{z: \operatorname{Im} z < 0\}$ бўлса, $w(D) = C \setminus \mathbb{R}^+$ бўлади (148-чизма).

(147)



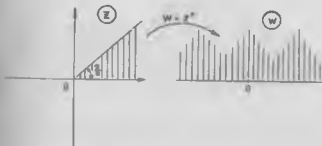
147-чизма



148-чизма

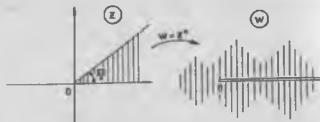
3) $w = z^n$ ва $D = \{z: 0 < \arg z < \frac{\pi}{n}\}$ бўлса, $w(D) = \{w: \operatorname{Im} w > 0\}$ бўлади

(149-чизма).



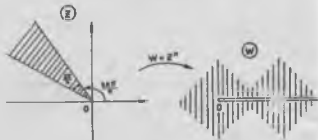
149-чизма

4) $w = z^n$ ва $D = \{z: 0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}\}$ бўлса, $w(D) = C \setminus R^+$ бўлади (150-чизма).



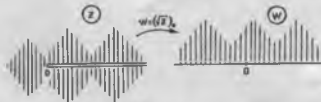
150-чизма

5) $w = z^n$ ва $D = \{z: \frac{2\pi k}{n} < \arg z < \frac{2\pi(k+1)}{n}\}$, $k=0, 1, \dots, n-1$, бўлса, $w(D) = C \setminus R^+$ бўлади (151-чизма).



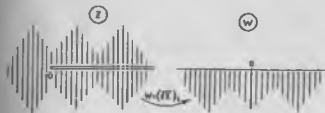
151-чизма

6) $w = (\sqrt{z})_0$ (ёки $w = \sqrt{z}$, $\sqrt{-1} = i$) ва $D = C \setminus R^+$ бўлса, $w(D) = \{w: \operatorname{Im} w > 0\}$ бўлади (152-чизма).



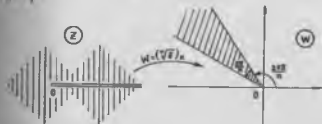
152-чизма

7) $w = (\sqrt{z})_1$ (ёки $w = \sqrt{z}$, $\sqrt{-1} = -i$) ва $D = C \setminus R^+$ бўлса, $w(D) = \{w: \operatorname{Im} w < 0\}$ бўлади (153-чизма).



153-чизма

8) $w = (\sqrt[n]{z})_k$, $k=0, 1, \dots, n-1$ ва $D = C \setminus R^+$ бўлса, $w(D) = \{w: \frac{2\pi k}{n} < \arg w < \frac{2\pi(k+1)}{n}\}$ бўлади (154-чизма).



154-чизма

III. Жуковский функцияси ва унга тескари функция

1) $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ ва $D = \{z: |z| < 1\}$ бўлса, $w(D) = \{w: w \in [-1, 1]\}$

бўлади (155-чизма).

2) $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ ва $D = \{z: |z| > 1\}$ бўлса, $w(D) = \{w: w \in [-1, 1]\}$

бўлади (156-чизма).



155-чизма



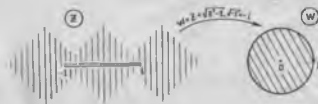
156-чизма

3) $w = z + \sqrt{z^2 - 1}, \sqrt{-1} = i$ (ёки $w(w) = -w$) ва $D = \{z : z \in [-1, 1]\}$ бўлса, $w(D) = \{w : |w| > 1\}$ бўлади (157-чизма).



157-чизма

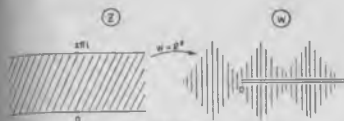
4) $w = z + \sqrt{z^2 - 1}, \sqrt{-1} = -i$ (ёки $w(w) = 0$) ва $D = \{z : z \in [-1, 1]\}$ бўлса, $w(D) = \{w : |w| < 1\}$ бўлади (158-чизма)



158-чизма

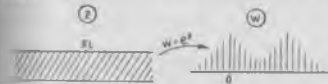
IV. Курсаткичи ва логарифмик функциялар

1) $w = e^z$ ва $D = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$ бўлса, $w(D) = C \setminus R^+$ бўлади (159-чизма).



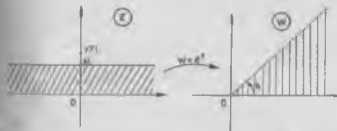
159-чизма

2) $w = e^z$ ва $D = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ бўлса, $w(D) = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ бўлади (160-чизма)



160-чизма

3) $w = e^z$ ва $D = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < h, h < 2\pi\}$ бўлса, $w(D) = \{w : 0 < \arg w < h\}$ бўлади (161-чизма).

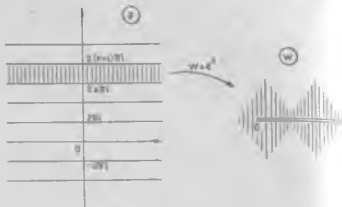


161-чизма

4) $w = e^z$ ва $D = \{z : 2k\pi < \operatorname{Im} z < 2(k+1)\pi\}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) бўлса, $w(D) = C \setminus R^+$ бўлади. (162-чизма).

5) $w = (Ln z)_0 = \ln z$ ва $D = C \setminus R^+$ бўлса, $w(D) = \{w : 0 < \operatorname{Im} w < 2\pi\}$ бўлади (163-чизма)

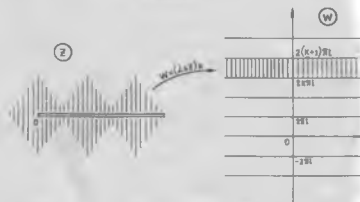
6) $w = (Ln z)_1$ ва $D = C \setminus R^+$ бўлса, $w(D) = \{w : 2k\pi < \operatorname{Im} w < 2(k+1)\pi\}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) бўлади (164-чизма).



162-қизма



163-қизма

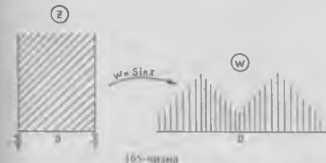


164-қизма

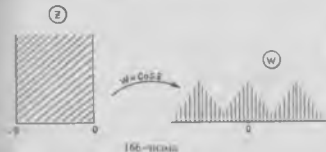
У. Тригонометрик ва тескари тригонометрик функциялар

1) $w = \sin z$ ва $D = \{z: -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z > 0\}$ бўлса, $w(D) = \{w: \operatorname{Im} w > 0\}$

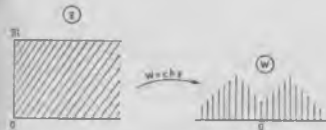
булади (165-қизма)



2) $w = \cos z$ ва $D = \{z: -\pi < \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ бўлса, $w(D) = \{w: \operatorname{Im} w > 0\}$ булади (166-қизма).



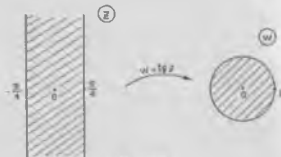
3) $w = \operatorname{ch} z$ ва $D = \{z: 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0\}$ бўлса, $w(D) = \{w: \operatorname{Im} w > 0\}$ булади (167-қизма)



167-қизма

4) $w = \lg z$ ва $D = \left\{ z : -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4} \right\}$ бўлса, $w(D) = \{w : |w| < 1\}$ бўлади (168-чизма).

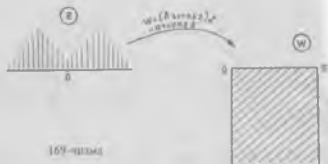
чизма).



(168-чизма)

5) $w = \operatorname{Arccos} z$ ва $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ бўлса, $w(D) = \{w : 0 < \operatorname{Re} w < \pi, \operatorname{Im} w < 0\}$ бўлади (169-чизма).

6) $w = \operatorname{Arccos} z$, $w(0) = -\frac{\pi}{2}$ ва $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ бўлса, $w(D) = \{w : -\pi < \operatorname{Re} w < 0, \operatorname{Im} w > 0\}$ бўлади (170-чизма).



(169-чизма)



(170-чизма)

ЖАВОБЛАР ВА КЎРСАТМАЛАР

1606

1. а) $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = -1$; 6) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2}$. в) $\operatorname{Re} z = 1$, $\operatorname{Im} z = -1$.
 2. а) $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = -1$; 6) $\operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{3}{2}$. в) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{3}{2}$. 3. а) $\operatorname{Re} z = 1$, $\operatorname{Im} z = 0$; 6) $\operatorname{Re} z = 2$, $\operatorname{Im} z = 1$. 4. а) $\operatorname{Re} z = \frac{2}{5}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{1}{5}$; 6) $\operatorname{Re} z = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{Im} z = \frac{4}{5}$. 5. а) $\operatorname{Re} z = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{Im} z = \frac{4}{5}$.
 6) $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = -\frac{7}{6}$. 6. а) $\operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} z = 0$; 6) $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = 0$.
 7. а) $\operatorname{Re} z = -\frac{7}{15}$, $\operatorname{Im} z = \frac{4}{15}$. 6) $\operatorname{Re} z = \frac{3\sqrt{3}-1}{2}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.
 8. а) $\operatorname{Re} z = 2$, $\operatorname{Im} z = -4$; 6) $\operatorname{Re} z = -0.1$, $\operatorname{Im} z = 0.7$. 9. $\operatorname{Re} z = -\frac{1}{5}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{3}{5}$. 12. $z_1 + z_2$ ва $z_1 - z_2$ векторлар z_1 ва z_2 векторларга қурилган параллелограммнинг диагоналларига тенг. 13. $z_1 + z_2 - z_3$. 14. а) $|z| = 1$, $\arg z = \frac{\pi}{2}$; 6) $|z| = 3$, $\arg z = \pi$. 15. а) $|z| = 1$, $\arg z = \frac{\pi}{3}$; 6) $|z| = 1$, $\arg z = \frac{4\pi}{3}$. 16. а) $|z| = 1$, $\arg z = \frac{\pi}{3}$; 6) $|z| = 1$, $\arg z = \frac{5\pi}{3}$. 17. а) $|z| = 1$, $\arg z = \frac{\pi}{4}$; 6) $|z| = 1$, $\arg z = \frac{5\pi}{4}$. 18. а) $|z| = 1$, $\arg z = \frac{\pi}{4}$; 6) $|z| = |b|$.

$$\arg z = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{агар } b > 0 \text{ бўлса,} \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{агар } b < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

19. а) $|z| = 1$, $\arg z = \pi + \varphi$. $-\cos \varphi - i \sin \varphi = \cos(\pi + \varphi) + i \sin(\pi + \varphi)$; 6) $|z| = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$, $\arg z = \frac{\pi - \alpha}{2}$. $1 - \cos \alpha + i \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\pi - \alpha}{2} + i \sin \frac{\pi - \alpha}{2} \right)$.

Кўрсатма $x = 1 - \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$, $0 < \alpha \leq 2\pi$. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = 2\sin \frac{\alpha}{2}$. Чунки $0 < \frac{\alpha}{2} \leq \pi$ бўлганлиги сабабли $\sin \frac{\alpha}{2} \geq 0$ бўлади.

$$\sin \varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{\sin \alpha}{2\sin \frac{\alpha}{2}} = \cos \frac{\alpha}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

ва

$$\cos \varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{1 - \cos \alpha}{2\sin \frac{\alpha}{2}} = \sin \frac{\alpha}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

тенгликлардан $\arg z = \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ эканлигини куриш қийин эмас. 20.

$$|z| = 2\cos \frac{\alpha}{2}, \quad \arg z = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} \sin \alpha + i(1 + \cos \alpha) = 2\cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\pi + \alpha}{2} + i \sin \frac{\pi + \alpha}{2} \right)$$

$$21. \cos 3\varphi = 4\cos^3 \varphi - 3\cos \varphi$$

Кўрсатма: $n=3$ бўлган ҳолда (6) — Муавр формуласини ёзамиз:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi$$

Бу тенглиkning чап томонини соддалаштириш ва тенглиkning иккита томонидаги комплекс сонларнинг ҳақиқий қисмларини тенглаштириш натижасида керакли тенгликни ҳосил қилиш қийин эмас.

$$22. \sin 5\varphi = 16\sin^5 \varphi - 20\sin^3 \varphi + 5\sin \varphi. \quad 23. \text{ а) } z = -8; |z| = 8, \arg z = \pi$$

$$\text{б) } |z| = 125, \arg z = \frac{3\pi}{2} + 3\arctg \frac{4}{3}. \quad 24. \text{ а) } z = 32i; |z| = 32, \arg z = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{б) } z = \frac{1}{4}; |z| = \frac{1}{4}, \arg z = 0. \quad 25. \text{ а) } z = 1; |z| = 1, \arg z = 0; \quad \text{б) } z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|z| = 1, \arg z = \frac{2\pi}{3}. \quad 26. \text{ а) } z = 2^{14} \sqrt{2}(1+i); |z| = 2^{14} \sqrt{2}, \arg z = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{б) } z = 2^n(1 - i\sqrt{3}); |z| = 2^n, \arg z = \frac{5\pi}{3}. \quad 27. z = 2^{10}i; |z| = 2^{10}, \arg z = \frac{\pi}{2}$$

$$29. 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{6} - i \sin \frac{n\pi}{6} \right) \quad 30. z^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2} \right) \quad 31. 2\cos \frac{2n\pi}{3}$$

$$32. 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{n\alpha}{2} + i \sin \frac{n\alpha}{2} \right) \quad 33. \frac{1 + i \operatorname{tg} n\alpha}{1 - i \operatorname{tg} n\alpha} \quad 35. \text{ а) Барча коэффи}$$

циентлар ҳақиқий; б) Барча коэффициентлар соф маълум. 36.

$$\text{а) } \frac{\sin \frac{(n+1)\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}}; \quad \text{б) } \frac{\sin \frac{(n+1)\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}}. \quad 37. \text{ а) } \frac{\sin 2n\pi}{2 \sin \pi}; \quad \text{б) } \frac{\sin^2 n\pi}{\sin \pi}$$

$$38. \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \cos \frac{n\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}, \text{ агар } n - \text{тоқ сон бўлса}; -\frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \sin \frac{n\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}, \text{ агар}$$

$$n - \text{жуфт сон бўлса. 39. а) } \frac{\sin \frac{n+1}{2}\beta}{\sin \frac{\beta}{2}} \cos\left(\alpha + \frac{n\beta}{2}\right); \text{ б) } \frac{\sin \frac{n+1}{2}\beta}{\sin \frac{\beta}{2}} \sin\left(\alpha + \frac{n\beta}{2}\right);$$

40. $\{x=1, -2 \leq y \leq 0\}$ — тўғри чизик кесмаси. 41. $z=a$ нуқтадан $z=b$ нуқтага қараб йўналган тўғри чизик кесмаси. 42. а) $\{|z|=R, \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ — айлана ёйи; б) $\{|z|=R, \operatorname{Im} z \leq 0\}$ — ластки ярим айлана; в) $\{|z|=R\}$ — айлана. 43. $y=\frac{1}{x}$ гиперболанинг III чоракда жойлашган бўлаги

44. $y=x^2$ параболаанинг унг ярим бўлаги. 45. $y=x^2$ параболаанинг икки марта босиб ўтилган унг ярим бўлаги. 46. $\{|z|=a, \operatorname{Re} z \leq 0\}$ — чап ярим

айлана 47. $\left\{ \frac{x^2}{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2} = 1 \right\}$ — эллипс. 48. $\{|z-1|=1\}$ — айлана.

49. Икки марта босиб ўтилган $\{|z+1|=1\}$ айлана. 50. $\{|z|<1, \operatorname{Im} z>0\}$ юқори ярим доиранинг чегараси. 51. Икки марта босиб ўтилган $z=i$ ва $z=-i$ нуқталарни туташтирувчи тўғри чизик кесмаси. 52. Тўрт марта босиб ўтилган $z=1$ ва $z=-1+i$ нуқталарни туташтирувчи тўғри чизик кесмаси. 53. $\{|z|=1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ — юқори ярим айлана. 54. $\{|z|=1\}$ — айлана-

нинг биринчи чоракда ётган бўлаги. 55. $\begin{cases} x = a(\cos t - \sin t), \\ y = a(\cos t + \sin t), \end{cases}$ — циклонда.

56. $\begin{cases} x = at - b \sin t, \\ y = a - b \cos t, \end{cases}$ циклонданинг I чоракдаги ёйи. 57. Берилган йўна-

лишга тескари йўналишда босиб ўтилган y эгри чизик 58. Икки марта босиб ўтилган y эгри чизик 59. Икки марта босиб ўтилган y эгри чизик 60. а) $\{c(x^2+y^2)=x\}$ — координата бошида мавҳум ўққа уринувчи айланалар оиласи ($c \neq 0$) ва мавҳум ўқнинг ўзи ($c=0$); б) $\{c(x^2+y^2)+y=0\}$ — координата бошида ҳақиқий ўққа уринувчи айланалар оиласи ($c \neq 0$) ва ҳақиқий ўқнинг ўзи ($c=0$). 61. а) $\{x^2-y^2=c\}$ — гиперболалар оиласи.

б) $\{x=\frac{c}{y}\}$ — гиперболалар оиласи. 62. Ҳар бир чизик Апполоний ай-

ланасидан иборат, яъни шундай чизикки ҳар бир нуқтасидан z_1 ва z_2 нуқталаргача бўлган масофалар нисбати ўзгармас сонга тенг. 63. Четки нуқталари z_1 ва z_2 нуқталарда бўлган айлана ёйлари оиласи (бу оиллага z_1 ва z_2 нуқталарни туташтирувчи иккита тўғри чизик кесмаси ҳам кирди; бу кесмаларнинг бири чексиз узоклашган нуқтадан ўтади). 64. а) $z=x, -\infty < x < +\infty$ б) $z=x \geq 0$ в) $z=x \leq 0$. 65. $D=\{|z-a|<\rho\}$ 66. $D=\{\operatorname{Re} z > 0\}$.

67. $D=\{0 < \arg z < 2\pi\}$. 68. $D=\{\operatorname{Im} z > (\operatorname{Re} z)^2\}$ 69. $D=\left\{ \frac{x^2}{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2} < 1 \right\}$.

70. а) $\{x > 2\}$ — ярим текислик ($x=2$ тўғри чизиқнинг нуқталари кирмайди); б) $\{y \leq 0\}$ — ярим текислик ($y=0$ тўғри чизиқнинг нуқталари кирмайди). 71. а) $\{-1 < x < 1\}$ — йулак; б) учлари — i , $1-i$, $1+i$ ва i нуқталарда бўлган тўғри бурчакли тўртбурчакнинг ичи. 72. а) Маркази $z=0$ нуқтада ва радиуси 2 га тенг бўлган ёпиқ доира; б) Маркази $z=-i$ нуқтада ва радиуси 1 га тенг бўлган доиранинг ташқариси. 73. а) Маркази $z=i$ нуқтада ва радиуси 1 га тенг бўлган доиранинг ташқариси б) $z=0$ нуқта олиб ташланган маркази $z=-i$ нуқтада ва радиуси 2 га тенг бўлган доира — ҳалқа. 74. а) Марказлари $z=1$ нуқтада ва радиуслари 1 ва 3 га тенг бўлган айланалар орасидаги $\{1 < (x-1)^2 + y^2 < 9\}$ ҳалқа; б) Ҳақиқий ўқдан юқори жойлашган, учи $z=0$ нуқтада бўлган ҳамда $\{\arg z = 0\}$ ва $\left\{\arg z = \frac{\pi}{3}\right\}$ нурлар билан чегараланган чексиз сектор.

75. а) $\{x > 0, x^2 + y^2 < 1\}$ — маркази координата бошида ва радиуси 1 га тенг бўлган ўнг ярим доира; б) учи $z=0$ нуқтада бўлган $\left\{\arg z = \frac{3\pi}{4}\right\}$ ва

$\left\{\arg z = \frac{5\pi}{4}\right\}$ нурлар билан чегараланган ҳамда $\frac{\pi}{2}$ катталикдаги кенгликка эга бўлган чексиз бурчакнинг ичи. 76. а) $\{x-y=0\}$ — тўғри чизиқ;

б) $\{y=0\}$ — тўғри чизиқ. 77. а) $\{y=0\}$ — тўғри чизиқ. б) $\left\{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1\right\}$

— эллипс. 78. а) Диаметри $[0, a]$ кесмадан иборат бўлган $\left\{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2\right\}$ айлана; б) маркази $z=0$ нуқтада ва радиуси

1 га тенг бўлган айлана. 79. а) Ҳақиқий ўқ. б) Маркази $z=0$ нуқтада ва радиуси a га тенг бўлган айлана. 80. а) $\{(x-1)^2 + y^2 > 1\}$ — маркази $z=1$ нуқтада ва радиуси 1 га тенг бўлган ёпиқ доиранинг ташқариси;

б) $\left\{x^2 - \frac{y^2}{3} = 1\right\}$ гиперболанинг чап шохчасининг ўнг томонида жойлашган текислик қисми. 81. а) $\{\operatorname{Re} z < 0\}$ — ярим текислик; б) $\{x^2 + y^2 = 1\}$

айлананинг $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ нуқтасига ўтказилган уринма билан чегараланган ва $z=0$ нуқтани сақловчи ярим текислик. 82. а) $\{y^2 = 1-2x\}$ парабола билан чегараланган ва $z=1$ нуқтани сақловчи ярим текислик; б) учлари $z=0$ нуқтада ва $\left\{\arg z = -\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}\right\}$, $k=1, 2, 3, 4$ нурлар биссектрисалари бўлган $\frac{\pi}{4}$ кенгликдаги тўртта чексиз бурчакнинг ичи. 83. а) z_1 ва z_2

нуқталарни туташтирувчи тўғри чизиқ кесмасининг уртасидан ўтувчи кесмага перпендикуляр тўғри чизиқ; б) Мавҳум ўқ директрисаси бўлган ва фокус $z=1$ нуқтада жойлашган парабола. 84. а) Учи координата бошида, кенглиги $\beta - \alpha$ га тенг бўлган ҳамда $\{\arg z = \alpha\}$ ва $\{\arg z = \beta\}$ нурлар билан чегараланган бурчакнинг ичи; б) учи фақат $z=z_0$ нуқтада бўлган

а) даги бурчакнинг ўзи. 85. $\{y^2 = 2x+1\}$ — парабола. 86. $\{|z-i| = \sqrt{2}\}$ ва

$\{z+i|\sqrt{2}\}$ доираларнинг ичидан уларнинг умумий қисми чиқариб

ташланган. 87. а) $|r| = \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ — Архимед спирални ва $\{0 \leq x \leq 2\pi\}$ кесма билан чегараланган соҳанинг ичи; б) а) даги соҳа ҳақиқий ўқнинг $(0, 2\pi)$ интервали билан тўлдирилган. 88. а) $\{Re z > 0\}$; б) $\{Re z > 0, Im z > 0\}$. 89. а) $\{Im z \geq 2\}$; б) $\{|Re z| < 1\}$. 90. $\{|z| < 1, Re z < 0\}$. 91. Айланининг марка-

зи $z = -\frac{B}{A}$ нуқтада, радиуси эса $\sqrt{\frac{|B|^2 - AC}{A^2}}$ га тенг. 97. Параметрнинг

барча қийматларида 98. Параметрнинг барча қийматларида 99. $|a| < 1$, $|a| > 1$ ва $a = 1$ да 100. $|a| < 1$, $|a| > 1$ ва $a = 1$ да 101. Параметрнинг барча қийматларида 102. 0 103. 0 104. — 105. 0 107. $\{x\}$ ва $\{y\}$ кетма-кетликларнинг ҳеч бўлмаганда биттаси чегараланган. Агар иккала $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар чегараланмаган бўлса, у ҳолда уларнинг иккаласи ҳам лимитга эга бўлмаслиги мумкин. Масалан, $x_n = n \sin \frac{\pi n}{2}$, $y_n = n \cos \frac{\pi n}{2}$

бўлсин. Унда $\{x_n + iy_n\} \rightarrow \infty$ лекин $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ва $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ — мавжуд эмас.

Агарда бу кетма-кетликлардан бирортаси, масалан, $\{y_n\}$ чегараланган ($|y_n| \leq M$) бўлса, у ҳолда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ бўлади. Чунки

$$|x_n| \geq |x_n + iy_n| - |y_n| \geq |x_n + iy_n| - M \rightarrow \infty.$$

Бу ҳолда ҳам $\{y_n\}$ кетма-кетлигининг лимити мавжуд бўлмаслиги мум-

кин 108. $\frac{1}{1+z}$ 109. $\frac{1}{41-204i}$ 110. $z = 0$ ва $z = 2$. 111. $z = 0$, $z = \frac{1}{2}$, $z = 1$

(m, n — ихтиёрий бутун сон). 112. Комплекс текислигининг барча нуқта-
лари 113. $\frac{1}{1+z}$ 114. $\frac{1}{1+z}$ 115. $\frac{1}{1+z}$ 116. Ушбу $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ лимит 0 ёки

0 га тенг бўлганда 118. а) $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ б) $(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ в) $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

г) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 119. а) $(-\frac{1}{2}, -\eta, \zeta)$ б) $(\xi, -\eta, \zeta)$ в) $(\xi, -\eta, 1-\zeta)$

120. а) $\{\xi > 0\}$ ярим фазода ётувчи ярим сфера; б) $\{\xi < 0\}$ ярим фазода ётувчи ярим сфера 121. а) $\{\eta > 0\}$ ярим фазода ётувчи ярим сфера; б) $\{\eta < 0\}$ ярим фазода ётувчи ярим сфера. 122. а) Юқори ярим сфера; б) қуни ярим сфера 125. а) $a = \infty$, б) $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$; в) $a = \sqrt{2}$. г) a нинг ҳеч

қандай қийматида 126. Сфера ўзининг (z) текислигининг ҳақиқий ўқига параллел диаметри атрофида 180° га бурилганида. 128. Маркази $z=0$

нуқтада ва радиуси $\sqrt{1-R^2}$ га тенг бўлган доира 129. Маркази $z=0$

нуқтада ва радиуси $\frac{1}{2}\sqrt{1-K^2}$ га тенг бўлган доиранинг ташқариси.

130. Ҳақиқий ўқдан юқорида жойлашган ярим текислик. 131. Мавҳум ўқдан унг томонда жойлашган ярим текисликдан маркази $z=2$ нуқтада ва радиуси $\sqrt{5}$ га тенг бўлган доира чиқариб ташланган. 132. Қутб нуқтада бир-бирига ўринувчи айланалар оиласи; бунда текисликдаги координата бошидан ўтувчи тўғри чизиққа катта айлана мос келади.

Ибоб

1. Бир япроқли. 2. Бир япроқли. 3. Бир япроқли. 4. Бир япроқли эмас. 5. Бир япроқли эмас. 6. Бир япроқли эмас. 7. Бир япроқли. 8. Бир япроқли эмас. 9. Бир япроқли. 10. Бир япроқли. 11. Бир япроқли эмас. 12. Бир япроқли эмас. 13. Бир япроқли. 14. Бир япроқли. 15. Бир япроқли. 16. Бир япроқли эмас. 17. Бир япроқли. 18. Бир япроқли. 19. Бир япроқли эмас. 20. Бир япроқли. 21. Мавжуд эмас. 22. Мавжуд эмас. 23. Бутун комплекс текисликда узлуксиз. 24. $\{z \mid |z| \neq 1\}$ да узлуксиз. 25. $\{z \mid |z| = 1\}$ да узлуксиз.

26. $\{z \mid -1 < 0\}$ да узлуксиз. 27. $C \setminus R$ да узлуксиз. 28. $\{z \mid |z| = 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}\}$

да узилишга эга. 29. $C \setminus \{0\}$ да узлуксиз. 30. $C \setminus \{0\}$ да узлуксиз.

31. $\{z \in R: z \neq \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\}$ да узилишга эга. 40. Шарт эмас. Масалан,

$f(z) = \frac{1}{z-2}$ ва $g(z) = 1 - \frac{1}{z-2}$ 41. Шарт эмас. Масалан, $f(z) = \frac{z-z_0}{z-z_0}$

ва $g(z) = \frac{z-z_0}{z-z_0}$ 42. Текис узлуксиз. 43. Текис узлуксиз эмас. 44. Текис

узлуксиз эмас. 45. Текис узлуксиз. 46. Текис узлуксиз эмас. 47. Текис узлуксиз эмас. 48. Текис узлуксиз. 49. Текис узлуксиз эмас. 64. Шарт эмас. Масалан, $f(z) = z + \sin z$ ва $g(z) = -z$ 65. Шарт эмас. 66. Шарт эмас. 68. $f'(z) = 2$,

$z \in C$ 69. $f'(z) = 3z^2$, $z \in C$ 70. $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$, $z \neq 0$ 71. $f'(z) = -\frac{1}{(z+2)^2}$, $z \neq -2$

72. $f'(z) = e^z(\cos y + i \sin y)$, $z \in C$ 73. Ҳеч ерда C дифференциалланувчи эмас. 74. $\{Re z = 0\}$ — тўғри чизиқ нуқталарида C — дифференциалланувчи. 75. $z=0$ нуқтада C — дифференциалланувчи. 76. $\{Re z = 0\}$ ва $\{Im z = 0\}$ тўғри чизикларда C — дифференциалланувчи. 77. $z=0$ нуқтада C — дифференциалланувчи. 78. $\{Re z = Im z\}$ тўғри чизиқда C — дифференциалланувчи. 79. $\{Re z + Im z = 0\}$ тўғри чизиқда C — дифференциалланувчи. 80. $z=0$ нуқтада C — дифференциалланувчи. 81. $z=0$ нуқтада C — дифференциалланувчи. 82. Ҳамма ерда C — дифференциалланувчи. 83. $f'(0) = 0$.

84. $a=1$, $b=-a$; $f(z) = (1-a)z$. 85. $a=1$, $b=2$; $f(z) = z^2$. 86. $a=-1$; $f(z) = \frac{1}{z}$.

87. $a=b=-1$; $f(z) = e^{-i}(\cos x + i \sin x) = e^z$. 88. $E = \{x^2 - y^2 > 0\}$ тўғраламда голоморф ва $f(z) = z^2$. 89. Функция ушбу

$$E = \{0 < \arg z < \frac{\pi}{2}\} \cup \{\pi < \arg z < \frac{3\pi}{2}\}$$

$$F = \left\{ \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{4} \right\} \cup \left\{ \frac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{7\pi}{4} \right\}$$

тупламларда голоморф ва мос равишда бу тупламларда $f(z) = z^2$

ҳамда $f(z) = -z^2$. 108. $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2} \right) = 0$ 109. $\frac{\partial f}{\partial z} =$

$= -\frac{1}{2} (\cos t - i \sin t) \frac{\partial f}{\partial z} = 0$ 110. $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{p}{2} \frac{|z-a|^p}{z-a}$; $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{p}{2} \frac{|z-a|^p}{z-a}$.

111. $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z-a-b}{2\sqrt{(z-a)^2 + (z-b)^2}}$; $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{2\bar{z}-\bar{a}-\bar{b}}{2\sqrt{(z-a)^2 + (z-b)^2}}$ 112. $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2iz}{a^2-z^2}$.

$\frac{|z-a|^2}{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2a}{z^2-\bar{a}^2}$ $\frac{|z-a|^2}{(z+a)(\bar{z}-\bar{a})^2}$ 113. $\frac{p^2}{4} |z|^{p-2}$.

114. $\frac{p}{4} e^{p/2} \left(p + \frac{1}{|a|} \right)$ 115. 0 116. $\frac{1}{(1+i)^2}$ 117. $\frac{1}{4z(1+i)^2}$ 124. Йўқ, агар

const бўлса. 127. $f(u) = au + b$. 128. $|f(z)|$ — гармоник эмас. $\arg f(z)$ ва $\ln |f(z)|$

лар гармоник функциялар 129. $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ 130. $v(x, y) =$

$= 2xy + y + c$ 131. $v(x, y) = -\frac{1}{2} \frac{y^2}{x^2 + y^2} + c$ 132. $v(x, y) = -\frac{1}{2} (x^2 - y^2) + c$.

133. $v(x, y) = \arg z + c$ 134. $v(x, y) = -\frac{1}{2} (x^2 - y^2) + c$ 135. $v(x, y) = 2xy - \frac{1}{2} (x^2 - y^2) + c$.

136. $v(x, y) = x \cos y \sinh x - y \sin y \cosh x + c$ 137. $v(\rho, \varphi) = \rho \sin \varphi - \ln \rho \cos \varphi + c$.

138. $f(z) = z^2 + ci$ 139. $f(z) = z^2 + c$ 140. $f(z) = z^2 + 2iz - i + c$ 141. $f(z) = \frac{1}{z} + ci$.

142. $f(z) = z + \frac{1}{z} + c$ 143. $f(z) = z^2 + (5-i)z - \frac{1}{z} + ci$ 144. $f(z) = \frac{1}{z^2} + ci$.

145. $f(z) = \frac{1}{2z} + iz^2 + 3i + c$ 146. Мавжуд эмас, чунки берилган $u(x, y) = e^z$

функция гармоник функция эмас. 156. $u = c_1 x + c_2$. Курсатма. $u = \varphi(x)$ фун-

кция гармоник функция бўлиши учун $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi''(x) = 0$ бўли-

ши керак. Бу ердан $\varphi(x) = c_1 x + c_2$ эканлигини кўриш қийин эмас.

157. $u = c_1(ax + by) + c_2$ 158. $u = c_1 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + c_2$ 159. $u = c_1 xy + c_2$.

160. $u = c_1 \ln(x^2 + y^2) + c_2$ 161. $u = \frac{c_1 x}{x^2 + y^2} + c_2$ 162. Мавжуд эмас.

163. $u = c_1 \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + c_2$ 164. $u = c_1(x^2 - y^2) + c_2$ 165. $Ax + B$.

166. $\text{Arctg } \frac{y}{x} + B$ 167. $\text{Ain}(x^2+y^2) + B$ 168. $\frac{1}{x^2+y^2} + B$ 169. $f(z) = (1-2i)z$
 173. $R(\varphi)=2; \alpha(\varphi)=-2\varphi-\frac{\pi}{2}$ 174. $R(\varphi)=2; \alpha(\varphi)=0$ 175. $R(\varphi) = \sqrt{5+4\sin 2\varphi}$
 176. $R(\varphi)=\frac{1}{2}; \alpha(\varphi)=\pi; \alpha(\varphi)=\arctg\left(\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1-i}{2}\varphi}\right)$ 177. $R(\varphi)=2\sqrt{2}; \alpha(\varphi) = \frac{\pi}{4}$
 178. $R(\varphi)=10; \alpha(\varphi)=\pi - \arctg \frac{4}{3}$ 179. $R(\varphi)=3; \alpha(\varphi)=0$ 180. $R(\varphi) = \frac{3}{16};$
 $\alpha(\varphi)=0$ 181. $R(\varphi)=6; \alpha(\varphi) = \frac{\pi}{2}$ 182. $R(\varphi)=75; \alpha(\varphi)=-2\arctg \frac{4}{3}$
 183. $R(\varphi)=2\sqrt{2}; \alpha(\varphi)=\frac{\pi}{4}$ 184. $R(\varphi)=2; \alpha(\varphi)=\frac{\pi}{2}$ 185. $R(\varphi)=2; \alpha(\varphi)=\pi$
 186. $R(\varphi)=\frac{1}{2}|z_0|; \alpha(\varphi)=-\arg z_0$ 187. $R(\varphi)=\frac{1}{2}; \alpha(\varphi)=-\frac{\pi}{2}$ 188. $\{|z|<\frac{1}{2}\}$
 сикилади. $\{|z|>\frac{1}{2}\}$ чузилади. 189. $\{|z+1|<\frac{1}{2}\}$ сикилади. $\{|z+1|>\frac{1}{2}\}$ чузи-
 лади 190. $\{|z|>1\}$ сикилади. $\{|z|<1\}$ чузилади 191. $\{\text{Re}z<0\}$ сикилади. $\{\text{Re}z>0\}$
 чузилади 192. $\{\text{Re}z<-\ln\sqrt{2}\}$ сикилади. $\{\text{Re}z>-\ln\sqrt{2}\}$ чузилади. 193.
 $\{|z-2|<\frac{1}{2}\}$ сикилади. $\{|z-2|>\frac{1}{2}\}$ чузилади 194. $\{|z|>1\}$ сикилади. $\{|z|<1\}$
 чузилади 195. $|z|=\frac{1}{2}$ 196. $|z|=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 197. $|z-1|=\frac{1}{2}$ 198. $|z|=1$ 199. $|z+i|=\sqrt{2}$
 200. $|cz+d|=\sqrt{|ad-bc|}$ 201. $\arg z_0=\frac{3\pi}{2}$ 202. $\text{Re} z_0=0$ 203. $1<z_0<+\infty$
 204. $\text{Im}[(1+i)z_0]=0$ 205. $\text{Im}[(1-i)(z_0+i)]=0$ 206. $\text{Im}(cz_0+d)=0$ 209. Бутун
 комплекс текисликда конформ 210. Четараси $z=2$ нуқтадан утувчи тугри
 чизикдан утувчи ихтиёрий ярим текисликда конформ. 212. Конформ.
 213. Конформ. 214. Конформ. 215. Конформ эмас. 216. Конформ эмас.
 217. Конформ 218. Конформ 219. Конформ эмас. 220. Конформ.
 226. $R=z_0+\frac{\pi}{2}i$.

III боб

3. $\{|w-1+2i|<4\}$ 4. $\{\text{Re}w+\text{Im}w<3\}$ 5. $\{-1<\text{Im}z<1\}$ 6. $\{|w-(1-i)|<2\}$.
 $\frac{\pi}{2}<\arg(w-1+i)<\pi$ 7. $\{|w|<\sqrt{2}\}$ 8. $\{-4<\text{Re}w<0, \text{Im}w>1\}$ 9. Учлари $A=1+3i$,
 $B_1=9+3i$, $C_1=1+7i$, $E_1=9+7i$ нуқталарда булган A, B_1, C_1, E_1 тўртбурчак
 10. $\left\{\frac{(\text{Re } w-3)^2}{9} + \frac{(\text{Im } w)^2}{16} < 1\right\}$ 11. $\{(\text{Re}w-1)^2 - (\text{Im}w < 1)\}$ 12. $\left\|w - \left(1 + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\right| < 2, \left|w + \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} - 1\right)\right| < 2\right\}$ 13. $w=(1+i)(1-z)$ 14. $w = -\frac{1}{2}iz - 1 + \frac{3}{2}i$.

15. $w = 2z + 2 - 2i$. 16. $w = w_0 + \frac{R}{r}(z - z_0)$. 17. $w = (2+i)z + 1 - 3i$. 18. $z_0 = -1 + 3i$, $\varphi = 0$, $k = 2$; $w + 1 - 3i = 2(z + 1 - 3i)$. 19. $z_0 = 2 + 2i$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $k = 1$; $w - 2 - 2i = i(z - 2 - 2i)$. 20. Чекли қўзғалмас нуқтаси йўқ. 21. Агар $a = 1$ бўлса, чекли қўзғалмас нуқтаси йўқ; агар $a \neq 1$ бўлса, у ҳолда $z_0 = \frac{w_1 - az_1}{1-a}$, $\varphi = \arg a$, $k = |a|$; $w - \frac{w_1 - az_1}{1-a} = a \left(z - \frac{w_1 - az_1}{1-a} \right)$. 22. Агар $a = 1$ бўлса, чекли қўзғалмас нуқтаси йўқ. Агар $a \neq 1$ бўлса, у ҳолда $z_0 = \frac{b}{1-a}$, $\varphi = \arg a$, $k = |a|$; $w - \frac{b}{1-a} = a \left(z - \frac{b}{1-a} \right)$. 23. $w = az + b$; $a, b \in R$ ва $a > 0$. 24. $w = -az + b$, $a, b \in R$ ва $a > 0$. 25. $w = -i(az + b)$; $a, b \in R$ ва $a > 0$. 26. $w = az + bi$; $a, b \in R$ ва $a > 0$. 27. $w = z + bi$; ёки $w = -z + 1 + bi$; $b \in R$. 28. $w = z + b$; ёки $w = -z - i + b$; $b \in R$. 29. $w = z + b(i + i)$; ёки $w = -z + 1 + b(i + i)$; $b \in R$. 30. $w = \frac{z-a}{b}$. 31. $w = \frac{-z+a+b}{b} + i$. 32. $w = \frac{\sqrt{1+k^2}}{b} e^{-i\frac{\pi}{2} + \arg b} z$. 33. $w = \frac{\sqrt{1+k^2}}{b_1 - ib_2} e^{-i\frac{\pi}{2} + \arg(b_1 - ib_2)} (z - ib_1)$.

34. $w = e^{iR} z + w_0$. 35. $u = 0$. 36. $v = 0$. 37. $\arg w = \frac{7\pi}{4}$. 38. $\{|u| \geq 1, v = 0\}$. 39. $\{|w| = 1, \pi < \arg w < 2\pi\}$. 40. $u = 1$.

- Кўрсатма $w = \frac{1}{z} = \frac{\cos t - i \sin t}{\cos t} = 1 - i \tan t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Бу ердан $u = 1$, $v = -\tan t$ параметр $-\frac{\pi}{2}$ ва $\frac{\pi}{2}$ оралиқдаги қийматларни қабул қилганда $-\infty < v < +\infty$ бўлишини кўриш қийин эмас. 41. $\{b(u^2 + v^2) + u + v = 0\} \rightarrow v = -u$ тўғри чизигига координата бошида уринувчи айланалар оиласи (тўғри чизикнинг ўзи ҳам бу оиллага киради). 42. $\{v = -ku\} \rightarrow$ тўғри чизиклар оиласи. 43. Координата боши ва $w_0 = \frac{1}{z_0}$ нуқтадан ўтувчи айланалар оиласи (бу оиллага, шунингдек, $w = 0$ ва $w = w_0$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизик ҳам киради). 44. $\{u^2 = -\frac{v^2}{v+1}\}$ — гиперболлар оиласи. 45. Мавҳум уққа параллел бўлган $\{u = \frac{1}{a}\}$ тўғри чизиклар оиласи (мавҳум уқнинг ўзи ҳам бу оиллага киради). 46. $\{\operatorname{Re} w > \frac{1}{c}\}$ — ярим текисликлар оиласи. 47. $\{\operatorname{Re} w < \frac{1}{c}\}$ — ярим текисликлар оиласи. 48. $\{\operatorname{Im} w < -\frac{1}{c}\}$ — ярим текисликлар оиласи. 49. $\{\operatorname{Im} w < -c \operatorname{Re} w\}$ — ярим текисликлар оиласи. 50. $\left\{ w = \frac{|a|^2}{a(|a|^2 - R^2)} \right\}$.

$$< \frac{R}{|d|^2 - R^2} \Big| - \text{доиралар оиласи.} \quad 51. \left\| w - \frac{|d|^2}{m|d|^2 - R^2} \right\| > \frac{R}{R^2 - |d|^2}.$$

$$52. \left\{ \operatorname{Re} w = \frac{1}{2} \right\} \quad 53. \text{Тўғри чизик.} \quad 54. \text{Айлана.} \quad 55. \text{Айлана.} \quad 56. \text{Тўғри чизик}$$

$$57. \text{Айлана} \quad 58. \text{Тўғри чизик} \quad 59. u + v = \frac{1}{2} \quad 60. v = \frac{1}{2} \quad 61. u - v = -1 \quad 62. v > u.$$

$$63. u > 0, v < 0. \quad 64. u > 0. \quad 65. \left| w - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}. \quad 66. \left| w - \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{2} \quad u > 0. \quad 67. \frac{7\pi}{4} < \arg w < 2\pi.$$

$$68. \frac{3\pi}{4} < \arg w < \frac{3\pi}{2}. \quad 69. |w| < 1. \quad 70. |w - 2| > 4. \quad 71. \operatorname{Re} w < \frac{1}{4}. \quad 72. \operatorname{Re} w - \operatorname{Im} w < 1$$

$$73. |w| < 1. \quad 74. |w| > 1. \quad 75. \frac{3\pi}{2} < \arg w < 0. \quad 76. w \in \{0, +\infty\}. \quad 77. -\frac{1}{2} < \operatorname{Im} w < 0.$$

$$78. \operatorname{Re} w > -1, \left| w - \frac{2}{3} \right| > \frac{4}{3}. \quad 79. |w| < 1, \operatorname{Im} w < 0. \quad 80. |w| = 1 \text{ ва } \left| w + \frac{3}{4} \right| = \frac{3}{4} \text{ ай-}$$

$$\text{лана ёйлари билан чегараланган, } w=0 \text{ нуқтани ўз ичида сақловчи соҳа.} \quad 81. \operatorname{Im} w < 0, \left| w - \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right| > \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$82. \operatorname{Re} w < 1, \left| w - \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{2}. \quad 83. \left| w - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2},$$

$$\left| w - \frac{3}{4} \right| > \frac{1}{4}. \quad 84. \operatorname{Re} w > \frac{1}{2}, \left| w - \frac{4}{3} \right| > \frac{2}{3}. \quad 85. w = -\frac{d}{z} + 1 + hi \text{ ёки } w = \frac{d}{z} +$$

$$+hi, h \in \mathbb{R}. \quad 86. -1 + i. \quad 87. 1 - i. \quad 88. 2(1 + i). \quad 89. 1 + i. \quad 90. \infty. \quad 91. \left| z^* - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}.$$

92. $\left| z^* - \frac{i}{4} \right| = \frac{1}{4}$. 93. $|z^*| = \frac{1}{2}$. 94. $\arg z^* = \alpha$. 98. $\frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z_2^* - z_1^*}{z_1^* - z_2^*} = 0$. 99. Кўр-
сатма. Аввал $z_1 = 0$, $z_2 = \infty$ ва $z_3 = 1$ бўлган ҳолда γ айлананинг
мавжудлигини курсатинг. Умумий ҳолда исботлаш учун $w = L(z)$ берил-
ган z_1, z_2, z_3 нуқталарни мос равишда $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$, $w_3 = 1$ нуқталарга
акслантирувчи каср чизикли функция бўлсин деб фараз қиламиз. У
ҳолда $z = L^{-1}(w)$ каср чизикли функция $\{|w| = 1\}$ айланани z нуқтадан
ўтувчи Γ айлана ёки тўғри чизикқа акслантиради. Γ чизикнинг масала
шартларини қаноатлантирувчи чизик бўлишини исботлаш қийин эмас.

$$100. w = 2iz + 4. \quad 101. w = \frac{2z}{z - i}. \quad 102. w = \frac{(i - 1)z}{z - 1 - i}. \quad 103. w = (1 + i) \frac{z + i}{z - 1}$$

$$104. w = \frac{z - i}{z + i}. \quad 105. w = 2i \frac{z - 1}{z + 1}. \quad 106. w = -\frac{2i(z + 1)}{4z - 1 - 5i}. \quad 107. w = \frac{(1 + 2i)z + 6 - 3i}{5(z - i)}$$

$$108. w = \frac{(1 + i)z + 1 + 3i}{(1 + i)z + 3 + i}. \quad 109. w = \frac{iz + 2 + i}{z + 1}. \quad 110. w = \frac{1 - i}{2}(z + 1)$$

$$113. w = \frac{(-1 + 3i)z + 1 - i}{(1 + i)z - 1 + i}. \quad 114. w = \frac{z(1 - 4i) - 2(1 - i)}{2z(1 - i) - (4 - i)}. \quad 115. w = \frac{z(3 - i) - (1 + i)}{(1 + i)(1 - z)}$$

$$116. w = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ бу ерда } a, b, c, d - \text{ҳақиқий сонлар ва } ad - bc > 0.$$

$$117. w = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ бу ерда } a, b, c, d - \text{ хакикий сонлар ва } ad-bc < 0.$$

$$118. w = i \frac{az+b}{cz+d}, \text{ бу ерда } a, b, c, d - \text{ хакикий сонлар ва } ad-bc < 0.$$

$$119. w = \frac{R-z}{R+z}. \text{ Бу акслантириш ердаида юкори ярим доира (} \operatorname{Re} w > 0,$$

$$|\operatorname{Im} w| < 0) \text{ сохата аксланади. } 120. w = w_0 + iR \frac{z-i}{z+i}, \quad 121. w = i \frac{1-z}{1+z}.$$

$$122. w = \frac{2(z-2+i)}{z+iz-2i}, \quad 123. \text{ Мумкин эмас. } 124. w = i \frac{z-2i}{z+2i}, \quad 125.$$

$$w = e^{\left(\frac{1}{2}+i\right)} \frac{z-(a+bi)}{z-(a-bi)}, \quad 126. w = R i \frac{z-i}{z+i} + w_0, \quad 127. w = -\frac{z-2i}{z+2i}, \quad 128.$$

$$w = -i \frac{z+2}{z-2-4i}, \quad 129. \frac{w-b}{w-a} = e^{i\theta} \frac{z-a}{z-a}, \quad 130. \frac{w-a}{w-a} = i \frac{z-a}{z-a}, \quad 131.$$

$$w = \frac{2z-1}{2-z}, \quad 132. w = \frac{2iz+1}{2+iz}, \quad 133. w = -iz, \quad 134. \frac{w-a}{1-aw} = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-az}, \quad 135.$$

$$R_2 \frac{w-b}{R_2^2-bw} = e^{i\theta} R_1 \frac{z-a}{R_1^2-az}, \quad 136. w = \frac{1-z}{z+2}, \quad 137. w = k e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \arg \frac{z}{a}\right)} \frac{z-z_1}{z-z_2}, \text{ бу}$$

$$\text{ерда } k > 0. 138. w = R^2 e^{i\theta} \frac{z-a}{R^2-az}, \quad 139. \frac{w-b}{R^2-bw} = e^{i\theta} \frac{z-a}{R^2-az}, \quad 140. w =$$

$$= R^2 \frac{z-a}{R^2-az}, \text{ бу ерда } a - \text{ хакикий сон ва } |a| < R. 141. w = \pm \frac{az-1+\sqrt{1-a^2}}{(1-\sqrt{1-a^2})z-a}.$$

$$\rho = 2 \frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}, \quad 142. \operatorname{Re} w = a^2 - \frac{1}{4a^2} (\operatorname{Im} w)^2, \quad 143. \operatorname{Re} w = -a^2 + \frac{1}{4a^2} (\operatorname{Im} w)^2.$$

$$144. \arg w = 2\alpha. 145. |w| = r^2, \quad \pi < \arg w < \frac{3\pi}{2}. 146. w \in (0, +\infty). 147. w \in (-\infty, 0).$$

$$148. \operatorname{Im} w > 0. 149. |w| < 1, \quad \frac{\pi}{2} < \arg w < \pi. 150. \operatorname{Re} w < -1 + \frac{1}{4} (\operatorname{Im} w)^2.$$

$$151. \operatorname{Re} w > 1 - \frac{1}{4} (\operatorname{Im} w)^2. 152. |w| < 4, \operatorname{Im} w > 0. 153. |w| > \frac{1}{4}, \quad w \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right].$$

$$154. |w| < 1, \arg w = \pi. 155. |w| > 1, \arg w = \pi. 156. |w| = 64, \quad \pi < \arg w < 2\pi.$$

$$157. w \in (-\infty, 1]. 158. w = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2. 159. w = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2. 160. w = -\frac{z^2+1}{2z}.$$

$$161. w = \frac{-2z^2+3z-2}{2z^2+3z+2}, \quad 162. w = \frac{z^2+2z+1}{iz^2+2z+i}, \quad 163. w = \frac{2z^2+3iz+2}{2z^2-3iz+2}.$$

$$164. w = -\left(\frac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^2, \quad 165. w = \left(\frac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^2, \quad 166. w = \left[\frac{z-\sqrt{2}(1-i)}{z-\sqrt{2}(1+i)}\right]^2.$$

$$167. w = \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2 \quad 168. w = \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^4 \quad 169. w = \frac{z}{(1-z)^2} \quad 170. w = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

171. Бир япроқли. 172. Бир япроқли эмас. 173. Бир япроқли эмас. 174. Бир япроқли. 175. Бир япроқли. 176. Бир япроқли эмас. 177. Бир япроқли эмас. 178. Бир япроқли эмас. 179. Бир япроқли. 180. Бир япроқли эмас.

$$181. \frac{1}{15} u^2 + \frac{1}{10} v^2 = 1 \quad 182. \frac{1}{15} u^2 + \frac{1}{10} v^2 = 1 \quad 183. u^2 - v^2 = \frac{1}{2}, u > 0 \quad 184.$$

$$\frac{1}{25} u^2 + \frac{1}{9} v^2 > 1 \quad 185. \frac{1}{15} u^2 + \frac{1}{10} v^2 > 1 \quad 186. u^2 - v^2 < \frac{1}{2} \quad 187. u^2 -$$

$$-v^2 < \frac{1}{2} \quad w \in (-1, +\infty) \quad 188. w \in [-1, +\infty) \quad 189. w \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \quad w \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty \right)$$

$$190. \operatorname{Im} w > 0, w \in \left[0, \frac{3i}{4} \right] \quad 191. \frac{3\pi}{2} < \arg w < 2\pi \quad 192. u^2 - v^2 < \frac{1}{2}, v > 0$$

$$193. w \in \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\} \quad 194. w \in \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\} \quad 195. \operatorname{Im} w < 0$$

$$196. \operatorname{Im} w > 0 \quad 197. \operatorname{Im} w < 0 \quad 198. \operatorname{Im} w > 0 \quad 199. \frac{4u^2}{\left(R + \frac{1}{R}\right)^2} + \frac{4v^2}{\left(R - \frac{1}{R}\right)^2} = 1 \text{ эллипс}$$

$$\text{ичининг юқори ярми} \quad 200. \frac{4u^2}{\left(R + \frac{1}{R}\right)^2} + \frac{4v^2}{\left(R - \frac{1}{R}\right)^2} = 1 \text{ эллипс ичининг паст-}$$

$$\text{ки ярми} \quad 201. \left[1, \frac{1}{2} \left(R + \frac{1}{R} \right) \right] \text{ косма буйица қўрилган} \quad \frac{4u^2}{\left(R + \frac{1}{R}\right)^2} + \frac{4v^2}{\left(R - \frac{1}{R}\right)^2} = 1$$

$$\text{эллипс ичининг унг ярми} \quad 202. \frac{u^2}{\sin^2 \alpha} - \frac{v^2}{\cos^2 \alpha} = 1 \text{ гиперболанинг шох-}$$

$$\text{лари орасидаги соҳа} \quad 203. w \in \left[-1, \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) \right] \quad 204. w \in \left\{ (-\infty, \frac{1}{2} \left(a + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{1}{a} \right) \cup [1, +\infty) \right\} \quad 206. w = \frac{z^2 + 2iz + 1}{z^2 - 2iz + 1} \quad 207. w = \frac{z^2 + 2iz + 1}{z^2 - 2iz + 1} \quad r = ($$

$$-2\sqrt{2} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^2 \quad 208. w = \frac{2i(1+z^2) - 3z}{3iz - 2(1+z^2)} \quad 209. w(D) = \{ Re z > \frac{1}{2}, z \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \}$$

$$210. w(D) = \{ z \in (-\infty, -1], z \in [1, +\infty) \} \quad 211. |e^{i\theta}| = e^{\theta}, \arg e^{i\theta} = \theta \quad 212.$$

$$|e^{-i\theta}| = e^{\theta}, \arg e^{-i\theta} = -\theta \quad 213. |e^{i\theta}| = e^{\theta}, \arg e^{i\theta} = \theta \quad 214. |e^{-i\theta}| = e^{\theta}, \arg e^{-i\theta} = -\theta$$

$$\arg e^{-i\theta} = -\theta \quad 215. 1 \quad 216. -1 \quad 217. i \quad 218. -i \quad 219. \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 220. \operatorname{Im} z = k\pi.$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad 221. \operatorname{Im} z = \frac{(2k+1)\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad 222. |w| = e$$

$$223. \arg w = \frac{\pi}{2} \quad 224. |w| = \frac{1}{e} \quad 225. \arg w = \frac{\pi}{2} \quad 226. |w| = e^{i\pi} \quad \dots \quad \text{спираль} \quad 227. \{ |w| = e^{\theta}, -\infty < \theta < \infty \} \text{ — спираль} \quad 228. \{ |w| = e^{\theta}, \dots \} \text{ — спираль}$$

$$230. k=0 \text{ бўлса, } \arg w = b \quad 231. \operatorname{Im} w < 0, k \neq 0 \text{ бўлса, } \rho = e^{\frac{b-\psi}{k}} \quad (-\infty < \psi < \infty) \text{ — спираль}$$

$$232. w \in (-\infty, 0) \quad 233. \operatorname{Re} w > 0 \quad 234. |w| > 1, w \in [1, +\infty) \quad 235. \alpha < \arg w < \beta, \quad 236. \rho = e^{\theta} \text{ спираль буйица қўрилган бутун текислик} \quad 237. |w| < 1, 0 < \arg w < \alpha$$

$$238. |w| > 1, 0 < \arg w < \alpha \quad 239. e^{\theta} < |w| < e^{\theta}, \gamma < \arg w < \delta \quad 240. |w| > 1, \operatorname{Im} w > 0$$

$$241. |w| < 1, \operatorname{Im} w > 0 \quad 242. w = e^{\frac{\pi i + i\pi}{2}} \quad 243. w = e^{\frac{\pi i}{2}} \quad 244. w = e^{\frac{\pi i}{2}}$$

$$245. w = e^{\frac{\pi i + i\pi}{2}} \quad 246. w = e^{\frac{2\pi i}{2}} \quad 247. w = e^{\frac{2\pi i + i\pi}{2}} \quad 248. w = e^{\frac{2\pi i + i\pi}{2}}$$

$$249. w = e^{\frac{2\pi i + i\pi}{2}} \quad 250. \operatorname{Im} z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, |\operatorname{Im} z| = \sqrt{\sinh^2 y + \sin^2 x}$$

$$251. \operatorname{Im} z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, |\operatorname{Im} z| = \sqrt{\sinh^2 y + \sin^2 x}$$

$$252. \operatorname{Im} z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, |\operatorname{Im} z| = \sqrt{\sinh^2 y + \sin^2 x}$$

$$253. \operatorname{Im} z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, |\operatorname{Im} z| = \sqrt{\sinh^2 y + \sin^2 x}$$

$$254. \operatorname{Im} z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, |\operatorname{Im} z| = \sqrt{\sinh^2 y + \sin^2 x}$$

$$255. \operatorname{Im} z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, |\operatorname{Im} z| = \sqrt{\sinh^2 y + \sin^2 x}$$

$$256. \operatorname{Im} z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, |\operatorname{Im} z| = \sqrt{\sinh^2 y + \sin^2 x}$$

$$257. \operatorname{Im} z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, |\operatorname{Im} z| = \sqrt{\sinh^2 y + \sin^2 x}$$

$$258. \operatorname{Im} z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, |\operatorname{Im} z| = \sqrt{\sinh^2 y + \sin^2 x}$$

$$259. \operatorname{Im} z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, |\operatorname{Im} z| = \sqrt{\sinh^2 y + \sin^2 x}$$

$$260. \operatorname{Im} z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, |\operatorname{Im} z| = \sqrt{\sinh^2 y + \sin^2 x}$$

$$261. \operatorname{Im} z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, |\operatorname{Im} z| = \sqrt{\sinh^2 y + \sin^2 x}$$

$$262. \operatorname{Im} z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, |\operatorname{Im} z| = \sqrt{\sinh^2 y + \sin^2 x}$$

$$263. \operatorname{Im} z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, |\operatorname{Im} z| = \sqrt{\sinh^2 y + \sin^2 x}$$

$$264. \operatorname{Im} z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, |\operatorname{Im} z| = \sqrt{\sinh^2 y + \sin^2 x}$$

$$265. \operatorname{Im} z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, |\operatorname{Im} z| = \sqrt{\sinh^2 y + \sin^2 x}$$

$$167. w = \left(\frac{z+i}{z-i} \right)^2 \quad 168. w = \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^4 \quad 169. w = \frac{z}{(1-z)^2} \quad 170. w = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

171. Бир япроқли 172. Бир япроқли эмас. 173. Бир япроқли эмас. 174. Бир япроқли. 175. Бир япроқли 176. Бир япроқли эмас. 177. Бир япроқли эмас. 178. Бир япроқли эмас. 179. Бир япроқли 180. Бир япроқли эмас

$$181. \frac{16}{25}u^2 + \frac{16}{9}v^2 = 1 \quad 182. \frac{16}{25}u^2 + \frac{16}{9}v^2 = 1 \quad 183. u^2 - v^2 = \frac{1}{2}, u > 0 \quad 184.$$

$$\frac{16}{9}u^2 + \frac{16}{9}v^2 = 1 \quad 185. \frac{16}{25}u^2 + \frac{16}{9}v^2 > 1 \quad 186. u^2 - v^2 < \frac{1}{2} \quad 187. u^2 -$$

$$-v^2 < \frac{1}{2}, w \in (-1, +\infty). \quad 188. w \in [-1, +\infty). \quad 189. w \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right], w \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty \right)$$

$$190. \operatorname{Im} w > 0, w \in \left[0, \frac{3i}{4} \right]. \quad 191. \frac{3\pi}{2} < \arg w < 2\pi. \quad 192. u^2 - v^2 < \frac{1}{2}, v > 0.$$

$$193. w \in ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty)) \quad 194. w \in ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty)) \quad 195. \operatorname{Im} w < 0$$

$$196. \operatorname{Im} w > 0. \quad 197. \operatorname{Im} w < 0. \quad 198. \operatorname{Im} w > 0. \quad 199. \frac{4u^2}{\left(R + \frac{1}{R}\right)^2} + \frac{4v^2}{\left(R - \frac{1}{R}\right)^2} = 1 \text{ эллипс}$$

$$\text{ичининг юқори ярми. } 200. \frac{4u^2}{\left(R + \frac{1}{R}\right)^2} + \frac{4v^2}{\left(R - \frac{1}{R}\right)^2} = 1 \text{ эллипс ичининг паст-}$$

$$\text{ки ярми. } 201. \left[1, \frac{1}{2} \left(R + \frac{1}{R} \right) \right] \text{ кесма буйича юзрилган } \frac{4u^2}{\left(R + \frac{1}{R}\right)^2} + \frac{4v^2}{\left(R - \frac{1}{R}\right)^2} = 1$$

$$\text{эллипс ичининг унг ярми. } 202. \frac{u^2}{\sin^2 \alpha} - \frac{v^2}{\cos^2 \alpha} = 1 \text{ гиперболанинг шох-}$$

$$\text{лари орасидаги соҳа. } 203. w \in \left[-1, \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) \right]. \quad 204. w \in \left\{ (-\infty, \frac{1}{2} \left(a + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{1}{a} \right) \right\} \cup [-1, +\infty)) \quad 206. w = \frac{z^2 + 2iz + 1}{z^2 - 2iz + 1} \quad 207. w = \frac{t^2 + 2it + 1}{t^2 - 2it + 1}, t \in (-$$

$$-2\sqrt{2} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^2 \quad 208. w = \frac{2i(1+z^2)-3z}{3iz-2(1+z^2)} \quad 209. w(D) = \left\{ \operatorname{Re} z > \frac{1}{2}, z \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right\}$$

$$210. w(D) = \{ z \in (-\infty, -1], z \in [1, +\infty) \}. \quad 211. |e^{2+i}| = e^2, \arg e^{2+i} = 1. \quad 212.$$

$$|e^{2-i}| = e^2, \arg e^{2-i} = 2\pi - 3. \quad 213. |e^{1+2i}| = e^1, \arg e^{1+2i} = 4. \quad 214. |e^{-3-4i}| = \frac{1}{e^3},$$

$$\arg e^{-3-4i} = 2\pi - 4. \quad 215. i. \quad 216. -i. \quad 217. i. \quad 218. -i. \quad 219. \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad 220. \operatorname{Im} z = kx,$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad 221. \operatorname{Im} z = \frac{(2k+1)\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad 222. |w| = e$$

223. $\arg w = \frac{\pi}{2}$ 224. $|w| = \frac{1}{e}$ 225. $\arg w = \frac{\pi}{2}$ 226. $\{|w| = e^{\psi}, -\infty < \psi < \infty\}$ — спираль 227. $\{|w| = e^{\psi}, -\infty < \psi < \infty\}$ — спираль 228. $\{|w| = e^{\psi}, -\infty < \psi < \infty\}$ — спираль 229. $\arg w = c$ 230. $k=0$ бўлса, $\arg w = b$ 231. $\operatorname{Im} w < 0$, $k \neq 0$ бўлса, $\rho = e^{\frac{\psi-b}{k}}$ ($-\infty < \psi < \infty$) — спираль 232. $w \in (-\infty, 0)$ 233. $\operatorname{Re} w > 0$ 234. $|w| > 1$, $w \in (1, +\infty)$ 235. $\alpha < \arg w < \beta$ 236. $\rho = e^{\psi}$ спираль бўйича қирқилган бутун текислик 237. $|w| < 1$, $0 < \arg w < \alpha$ 238. $|w| > 1$, $0 < \arg w < \alpha$ 239. $e^{\alpha} < |w| < e^{\beta}$, $\gamma < \arg w < \delta$ 240. $|w| > 1$, $\operatorname{Im} w > 0$ 241. $|w| < 1$, $\operatorname{Im} w > 0$ 242. $w = e^{\frac{3\pi i}{2} + \frac{2\pi i}{3}}$ 243. $w = e^{\frac{2\pi i}{2}}$ 244. $w = e^{\frac{4\pi i}{2}}$ 245. $w = e^{\frac{(\pi-1)i}{b}}$ 246. $w = e^{\frac{2\pi i}{2}}$ 247. $w = e^{\frac{(\pi+2)i}{2(2-1)}}$ 248. $w = -\frac{e^{\frac{2\pi i}{2}}}{e^{\frac{2\pi i}{2}} + 2 + i}$ 249. $w = \frac{2e^{\frac{(\pi-1)i}{b}}}{1 + e^{\frac{2\pi i}{2}}}$ 250. $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$, $|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y}$ 251. $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$, $|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x + \sinh^2 y}$ 252. $\operatorname{tg} z = \frac{\sin 2x + i \sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}$ 253. $\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cosh y + i \operatorname{ch} x \sinh y$, $|\operatorname{sh} z| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 x + \sinh^2 y}$ 254. $\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cosh y + i \operatorname{sh} x \sinh y$, $|\operatorname{ch} z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x + \sinh^2 y}$ 255. $\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} 2x + i \sinh 2y}{\cosh 2x + \cosh 2y}$ 256. $0; \operatorname{sh} x$ 257. $\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sh} 1$; $\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sh} 1$ 258. $\cos 2; 0$ 259. $0; \operatorname{th} \frac{\pi}{2}$ 260. $\cos 2 \operatorname{ch} 1$; $-\sin 2 \operatorname{sh} 1$ 261. $0; \operatorname{sh} 2$ 262. $\frac{\sin 4}{2(\cos^2 2 + \sinh^2 1)}$; $\frac{\sin 4}{2(\cos^2 2 + \sinh^2 1)}$ 263. $\frac{8}{17}$; $\frac{15}{17}$ 264. $\frac{\operatorname{sh} 4}{\operatorname{ch} 4 - \cos 2}$; $-\frac{\sin 2}{\operatorname{ch} 4 - \cos 2}$ 265. $\operatorname{Im} z = 0$; $\operatorname{Re} z = k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 266. $\operatorname{Im} z = 0$; $\operatorname{Re} z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 267. $\operatorname{Im} z = 0$; $\operatorname{Re} z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 268. $\operatorname{Im} z = 0$; $\operatorname{Re} z = k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 269. $\operatorname{Re} z = \frac{k\pi}{2}$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 270. $\operatorname{Im} z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 271. $x=c$ тўғри чизиклар синфи фокуслари ± 1 нуқталарда бўлган $\frac{x^2}{\cos^2 c} - \frac{y^2}{\sin^2 c} = 1$ гиперболалар синфига аксланади; $y=c$ эса фокуслари ± 1 нуқталарда бўлган

- $\frac{u^2}{ch^2c} - \frac{u^2}{sh^2c} = 1$ эллипсларга аксланади 298. Түртинчи квадрант 299.
 $\operatorname{Im} w > 0$. 300. $\operatorname{Re} z > 0$, $z \in [0, 1]$. 301. $w \in ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$. 302.
 $\frac{(\operatorname{Re} w)^2}{ch^2h} + \frac{(\operatorname{Im} w)^2}{sh^2h} < 1$, $w \in \{-chh, -1\} \cup [1, chh]$. 303. $|w| < 1$ 304. $|w| < 1$
 305. $w \in \{-i, i\}$ 306. $|w| > 1$, $\operatorname{Re} w > 0$ 307. $\operatorname{Im} w > 0$, $w \in [0, i]$ 308. $w \in ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$ 309. $\operatorname{Im} w < 0$ 310. $\operatorname{Im} w > 0$, $w \in [0, sh \frac{\pi}{2}]$. 311. $w \in (-\infty, 0]$.
 $w \in [-i, i]$. 312. $w \in [-1, 1]$, $w \in [0, +i\infty)$. 313. $\operatorname{Im} w > 0$. 314. $\operatorname{Im} w > 0$.
 $w \in [0, i]$. 315. $|w| < 1$, $\operatorname{Re} w > 0$. 316. $w \in ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$ 317. $\operatorname{Re} w > 0$.
 $w \in [1, +\infty)$. 318. $w = \cos \frac{\pi(z+2)}{2r}$. 319. $w = -\cos \frac{\pi z}{h}$. 320. $w = \operatorname{sh} \frac{\pi z}{2h}$
 321. $w = \operatorname{sh} \frac{\pi(z-i\tau+h)}{2h}$ 322. $w = -\cos \frac{2\pi h}{z}$. 323. $w = -ch \frac{2\pi}{z}$. 324.
 $\pm \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{\sqrt{2}+1} - i\sqrt{\sqrt{2}-1})$. 325. $\pm \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)$, $\pm \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i)$. 326.
 $\pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $-i$ 327. $\pm(2+i)$ 328. $1, -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$ 329. $\sqrt{5} \left[\cos \frac{(2k+1)\pi}{3} + \right.$
 $\left. + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{3} \right]$ ($k=0, 1, 2$) 330. $\pm \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3}+i)$, $\pm \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3}-i)$, $\pm \sqrt{2}$ 331.
 $\sqrt{5} \left[\cos \frac{(2k+1)\pi - \operatorname{arctg} \frac{3}{4}}{5} + i \sin \frac{(2k+1)\pi - \operatorname{arctg} \frac{3}{4}}{5} \right]$ ($k=0, 1, 2, 3, 4$). 332.
 $z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $z_2 = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. 333. $z_1=2-i$, $z_2=-2+i$. 334. $z_1=-1$, $z_2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $z_3=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 335. $z_k = 2 \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2} \right)^k$ ($k=0, 1, 2, 3, 4, 5$) 336. $z_k = e^{\frac{2\pi i k}{7}}$
 ($k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$). 337. $z_k = \sqrt[7]{2} e^{\frac{2\pi i k}{7}}$ ($k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$). 338.
 $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=-1$, $z_4=i$, $z_5=-i$. 339. $z = \frac{3}{2} - 2i$. 341. $z_k = z_1 \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + \right.$
 $\left. + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right)$ ($k=0, 1, 2, \dots, n-1$). 342. $z_1=z_2+(z_2-z_1) \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)$. 343.
 $\left\{ 0 \leq \arg w < \frac{\pi}{4} \right\} \cup \left\{ \frac{7\pi}{4} < \arg w \leq 2\pi \right\}$. 344. $\operatorname{Re} w > 0$, $w \in [0, 1]$ 345. $|w| < 1$.

$$0 < \arg w < \frac{\pi}{2} \quad 346. |w| > 1, \left| \frac{\pi}{2} - \arg w \right| < \frac{\pi}{n} \quad 347. \operatorname{Im} w < -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad 348. \operatorname{Re} w > 0,$$

$$|\operatorname{Im} w| > 1 \quad 349. \left\{ |w| < 1, 0 \leq \arg w < \frac{\pi}{2} \right\} \cup \left\{ |w| < 1, \pi < \arg w \leq 2\pi \right\}. \quad 350. |w| < \frac{1}{8},$$

$$|\pi - \arg w| < \frac{3\pi}{4} \quad 351. w = \frac{2(\sqrt[3]{4}+1)e^{\frac{\pi}{3}} z^{\frac{4}{3}}}{(\sqrt[3]{4}-2)e^{\frac{\pi}{3}} z^{\frac{4}{3}} + 3\sqrt[3]{4}} \quad 352. w = \sqrt{z^2 + a^2}, \sqrt{-1} = i$$

$$353. w = \left(\frac{\frac{1}{z^a} + R^{\frac{1}{a}}}{\frac{1}{z^a} - R^{\frac{1}{a}}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad 354. w = \left(\frac{\frac{1}{z^a} + R^{\frac{1}{a}}}{\frac{1}{z^a} - R^{\frac{1}{a}}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad 355. w = \left(\frac{2z + \sqrt{1-z}}{2z - \sqrt{1-z}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad 356.$$

$$w = \left(\frac{2z + \sqrt{1-z}}{2z - \sqrt{1-z}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad 357. w = \sqrt{\frac{z+1}{1-z}} \quad 358. w = \sqrt{\frac{z+1}{1-z}} \quad 359. w = \sqrt{\frac{z-1}{1-z}} \quad 360.$$

$$w = \sqrt{\frac{z+R}{1-R}} \quad 361. w = \sqrt{\left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{\frac{1}{2}} + R^2}^{\frac{1}{2}} \quad 362. w = \sqrt{\left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{\frac{1}{2}} + R^2}^{\frac{1}{2}} \quad 363.$$

$$w = \left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad 364. w = \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad 365. w = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{\frac{1}{2}} \quad 366. w = \sqrt{\frac{z}{z-1}} \quad 367.$$

$$w = \sqrt{\frac{z^2+4}{z^2+1}} \quad 368. w = e^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{z+1}{z-1}} \quad 369. w = \frac{z^2}{\sqrt{z^4-1}} \quad 370. w = \frac{\sqrt{z^2+R^2}}{z} \quad 371.$$

$$w = e^{-\frac{\pi}{4}} \sqrt{z-i} \quad 372. w = \sqrt{\frac{(1-z)^{\frac{1}{2}} - (1+z)^{\frac{1}{2}}}{(1-z)^{\frac{1}{2}} + (1+z)^{\frac{1}{2}}}} + 1 \quad 373. w = \left(\frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{-1} = i \quad 374. w = \left(\frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \sqrt{-1} = -i \quad 375. w = \frac{2i - \sqrt{z}}{\sqrt{z}} \quad 376. w = \frac{3+4i\sqrt{z^2+1}}{3+4i\sqrt{z^2+1}}$$

$$377. w = \sqrt{\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} + a + \frac{1}{a} \right)} \quad 378. \alpha < \arg w < \pi - \alpha, \alpha = \arcsin \sqrt{1-a^2} \quad 379.$$

$$|\operatorname{Im} w| > 0 \quad 380. |w| < 1, |\operatorname{Im} w| < 0 \quad 381. |w| < a + \sqrt{a^2-1}, |\operatorname{Im} w| > 0 \quad 382. |w| < 1,$$

$$-\arg w < 0 \quad 383. a - \sqrt{a^2-1} < |w| < 1 \quad 384. b + \sqrt{1+b^2} < |w| < a + \sqrt{1+a^2} \quad 385.$$

$$w = \frac{az-b\sqrt{z^2-(a^2-b^2)}}{a^2-b^2} \quad 387. w = i \frac{2+\sqrt{z^2+4}}{z}$$

388. $w = z - 1 + \sqrt{z^2 - 2z - 8}$ 389. $w = \sqrt{\frac{2z^2 + 3z + 2}{-2z^2 + 3z - 3}}$ 390. $w = i \frac{z-1}{\sqrt{z}}$
391. $w = \sqrt{\frac{z^2 + 10z + 16}{z^2 + 17z + 16}}$ 392. $w = \sqrt{\frac{z^2 + 1}{z - 1}}$ 393. $w = \sqrt{1 + \frac{z^2(1 - h^2)^2}{h^2(1 + z^2)^2}}$
394. $w = \sqrt{1 - \frac{z^2(1 - h^2)^2}{h^2(1 + z^2)^2}}$ 395. $w = \sqrt{1 + \frac{z^2(1 - h^2)^2}{h^2(1 + z^2)^2}}$ 396. $w = \frac{1}{z-1} \times$
 $\times \sqrt{\frac{2\sqrt{3}t}{t^2 - 4t - 1}}, t = \frac{1}{4}(z + \sqrt{z^2 + 3})$ 397. $w = \left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2\alpha}}$
 $+ \left(z - \sqrt{z^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2\alpha}}, \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$ 398. $w = \left[\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2\alpha}} - \left(z - \sqrt{z^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2\alpha}}\right], \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$ 399. $w = \left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2\alpha}}, \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$
400. $w = \sqrt{h^2(1 + h^2) - z^2(z^2 - 1)}$ 401. $w = \frac{z^2 - (1 + z^2)\sqrt{z^2 - 1}}{z^2 - z^2 + 1}$ 402.
 $w = \frac{3t - 2i(t+1)\sqrt{t^2 - t + 1}}{2t^2 + t + 2}, t = (-iz)^{\frac{2}{3}}$ 403. $w = \frac{t - 2i(t-1)\sqrt{t^2 - t + 1}}{2t^2 - 3t + 2}$
 $t = \left(\frac{1 - iz}{z - i}\right)^{\frac{2}{3}}$ 404. $w = \frac{t - 2i(t-1)\sqrt{t^2 - t + 1}}{2t^2 - 3t + 2}$ 405.
 $w = \frac{t^3 - 3t^{\frac{1}{2}} + 1}{t^3 + 2t^{\frac{1}{2}} - 1}, t = \frac{1(1 - \sqrt{3}it + 1)}{z + (2 - \sqrt{3})i}$ 406. $w = \frac{2 - 2i + (z + \sqrt{z^2 - 2})^2}{2 + 2i - (z + \sqrt{z^2 - 2})^2}$ 407.
 $\frac{\pi}{\alpha} = \arg w = \frac{\pi}{\alpha}, w = \left(\sqrt{\frac{1}{4}} - i\right)$ 408. $w = \sqrt{1 - z}$ 409. $w = \sqrt{\frac{1 - z^2}{z^2 - 1}}$
410. $w = \sqrt{\frac{e^{\frac{2\pi}{3}} - e^{\frac{4\pi}{3}}}{e^{-2\pi} - e^{\frac{4\pi}{3}}}}$ 411. $w = \sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{sh} z}}$ 412. $w = \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2} \operatorname{sh} z}}$
413. $w = \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{2}}$ 414. $w = \sqrt{1 + \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{2}}{\operatorname{ar}^2 \frac{\pi}{2}}}$ 415. $w = \operatorname{sh} \frac{\sqrt{2}}{2}$

416. $w = \sqrt{\left(\frac{e^z-1}{e^z+1}\right)^2 + \pi^2 \frac{5}{2}}$ 417. $\ln 4 + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ 418. πi 419. $(2k+1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$
420. $\ln \sqrt{2} + \frac{1}{4}(8k+7)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ 421. $\frac{\pi i}{2}$ 422. $\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ 423. $\left(2k + \frac{1}{4}\right)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ 424. $\left(2k - \frac{1}{4}\right)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ 425. $\frac{1}{2} \ln 13 + \left(2k\pi - \operatorname{arctg} \frac{3}{2}\right)i$, $k \in \mathbb{Z}$ 426. $\frac{1}{2} \ln 13 + \left[\left(2k+1\right)\pi - \operatorname{arctg} \frac{3}{2}\right)i$, $k \in \mathbb{Z}$ 427. 1 428. $1+2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ 429. $\frac{1}{2} \ln 2 + i \frac{\pi}{4}$ 430. $\frac{1}{2} \ln 2 + i \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ 431. $-i \frac{\pi}{4}$ 432. $\ln 2 + i \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ 433. $1 + i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ 434. $i(\alpha + 2k\pi)$ 435. $z = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ 436. $z = ei$ 437. $z = \frac{ik\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ 438. $2\operatorname{Ln} z \neq \operatorname{Ln} z^2$, чунки $2\operatorname{Ln} z$ нинг қийматлар туплами $\operatorname{Ln} z^2$ нинг қийматлар тупламининг бир қисминигина ташкил қилади, холос 439. $[\cos(2k\sqrt{2}\pi) + \sin(2k\sqrt{2}\pi)]$, $k \in \mathbb{Z}$ 440. $2^{\sqrt{2}} [\cos(2k+1)\pi\sqrt{2} + \sin(2k+1)\pi\sqrt{2}]$, $k \in \mathbb{Z}$ 441. $e^{2in}(\cos \ln 2 + i \sin \ln 2)$, $k \in \mathbb{Z}$ 442. $e^{2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$ 443. $\frac{i-1}{\sqrt{2}} e^{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$ 444. $e^{-\frac{4}{3} - \frac{2}{3}ik}$, $k \in \mathbb{Z}$ 445. $-5e^{\frac{\operatorname{arctg} 4}{3} + (2k+1)\pi i} \left\{ \cos(\ln 5 - \operatorname{arctg} \frac{4}{3}) + \right.$
 $\left. + i \sin(\ln 5 - \operatorname{arctg} \frac{4}{3}) \right\}$, $k \in \mathbb{Z}$ 446. $5e^{\frac{\operatorname{arctg} 4}{3} + (2k+1)\pi i} \left\{ \cos(\ln 5 - \operatorname{arctg} \frac{4}{3}) + \right.$
 $\left. + i \sin(\ln 5 - \operatorname{arctg} \frac{4}{3}) \right\}$, $k \in \mathbb{Z}$ 447. $e^{2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$ 448. $e^{(2k+1)\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$
449. $e^{(2k+1)\sqrt{3}i}$, $k \in \mathbb{Z}$ 450. $e^{2k\pi+i}$, $k \in \mathbb{Z}$ 451. $e^{\frac{4k+1}{2}\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$
452. $\frac{(4k+1)i}{\ln 2 + 2\pi m i}$; $k, m \in \mathbb{Z}$ 453. $\frac{4k}{4m+1}$; $k, m \in \mathbb{Z}$ 454. $\frac{1+2k\pi i}{1+2m\pi i}$; $k, m \in \mathbb{Z}$
455. $\frac{4k+1}{4m+1}$; $k, m \in \mathbb{Z}$ 456. a^m ва $(a^n)^2$ ларнинг қийматлар туплами устма-уст тушади, $(a^n)^{\alpha}$ нинг қийматлар туплами, умуман олганда, устма-уст тушиши шарт эмас. 457. $\alpha = \frac{k}{2m+1}$; $k, m \in \mathbb{Z}$ 458. $\alpha = \frac{k}{3m-1}$; $k, m \in \mathbb{Z}$
459. Тўғри бурчакли $Rew = c$, $Imw = c$ — Декарт тури. 460. Тўғри чизиқлар 461. $\{0 < Imw < \alpha\}$ — йўлак 462. $\{Rew < 0, 0 < Imw < \alpha\}$ — ярим йўлак 463. $\{\ln r_1 < Rew < \ln r_2, 0 < Imw < 2\pi\}$ — тўғри бурчакли тўртбурчак. 464. $0 < Imw < \pi$ 465. $3\pi < Imw < 5\pi$ 466. $-\pi < Imw < \pi$ 467. $2\pi < Imw < 4\pi$ 468. $0 < Imw < 2\pi$ 469. $-2\pi < Imw < 0$ 470. $2\pi < Imw < 4\pi$ 471. $-2\pi < Imw < 0$.

472. $|Imw| < \pi$, $w \in [0, +\infty)$. 473. $\left|\frac{3\pi}{2} + Imw\right| < \frac{\pi}{2}$, $Re w < 0$. 474. $-2\pi < Imw < 0$, $Re w < 0$. 475. $w = 2lnz$. 476. $w = \frac{1}{\alpha} lnz$. 477. $w = \frac{1}{\alpha} ln\left(z^{1/\alpha} + z^{-1/\alpha}\right)$

478. $w = \frac{2}{\pi} ln \frac{z+i}{z-i}$. 479. $w = \frac{2}{\pi} ln\left(z + \sqrt{z^2 - 2}\right) - \frac{1}{2}$. 480. $w = -\frac{1}{2\pi} ln\left(1 + z^{-\frac{\pi}{\alpha}}\right)$

481. $w = 2ln \frac{1 + \frac{z^{1/2}}{1 + ie^{i/2}}}{1 + ie^{i/2}}$. 482. $z = k\pi$, $k \in Z$. 483. $z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$, $k \in Z$. 484. $z = k\pi$, $k \in Z$. 485. $z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$, $k \in Z$. 486. $Re z = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$. 487. $Im z = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

495. $2k\pi$, $k \in Z$. 496. $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in Z$. 497. $\frac{4k+1}{2}\pi - i \ln(2\sqrt{3})$, $k \in Z$

498. $k\pi - i \ln\left[\sqrt{2} + (-1)^k\right]$, $k \in Z$. 499. $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$. 500. $\frac{3k+1}{2}\pi + i \ln \frac{3}{2}$, $k \in Z$

501. $\frac{1}{4} \left[\arctg \frac{1}{2} + (2k+1)\pi \right] + \frac{1}{4} \ln 5$. 502. $\frac{\arctg 2}{2} + k\pi - \frac{1}{4} \ln 5$, $k \in Z$. 503. $\ln(\sqrt{5} \pm 2) + \left(2k \pm \frac{1}{2}\right)\pi i$, $k \in Z$. 504. $\frac{1}{4} \ln 5 + \left[\frac{1}{2} \arctg 2 + \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right]$, $k \in Z$

505. $z = (-1)^k \ln 3 + k\pi$, $k \in Z$. 506. $z = \pm i \ln 3 + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$. 507. $z = \pm \left(-i \ln 2 + \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi$, $k \in Z$. 508. $z = \pm \left(-\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi$, $k \in Z$

509. $z = i \ln 2 + \pi \left(k + \frac{1}{2}\right)$, $k \in Z$. 510. $z = i \ln 2 + \pi \left(k + \frac{1}{2}\right)$, $k \in Z$. 511. $z = (-1)^k \frac{\pi}{4} + k\pi i$, $k \in Z$. 512. $z = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi i$, $k \in Z$. 513. $z = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi - i \ln \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$, $k \in Z$

514. $z = \frac{\pi}{4} + 2k\pi - i \ln \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ на $z = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi - i \ln \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$, $k \in Z$. 515. $z = 2k\pi$, $k \in Z$. 516. $z = -\ln 2 + (2k+1)\pi i$, $k \in Z$. 517. $z = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i$ на $z = -\ln 3 + \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi i$, $k \in Z$. 518. $z = k\pi(1 \pm i)$, $k \in Z$. 519. $z = k\pi(1 \pm i)$ на $z = \frac{(2k+1)\pi}{1 \pm i}$, $k \in Z$. 520.

$z = \frac{(4k+1)\pi}{2(1 \pm 2i)}$ на $z = \frac{(4k-1)\pi}{2(1-2i)}$, $k \in Z$. 521. $\frac{\pi}{2} < Imw < \frac{3\pi}{2}$, $Re w < 0$. 522. $0 < Imw < \frac{\pi}{2}$, $Re w > 0$. 523. $\frac{7\pi}{4} < Imw < \frac{9\pi}{4}$ на $Re w > 0$. 524. $|Re w| < \frac{\pi}{2}$

525. $-\pi < Re w < 0$ на $Imw > 0$. 526. $-\frac{\pi}{2} < Re w < \frac{\pi}{2}$ на $Imw > 0$.

527. $0 < Re w < \frac{\pi}{2}$, $Im w > 0$. 528. $-\frac{\pi}{2} < Re w < 0$. 529. $w = \frac{\sqrt{1+i} - \sqrt{1-i}}{2}$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{1+z^2} + \sqrt{1-z^2} \right)$. 530. $w = \frac{\sqrt{1+z^2} - \sqrt{1-z^2}}{2\sqrt{2}}$. 531. $w = \frac{1}{2} \times \left[\sqrt{z^2 + c^2} + \alpha + \sqrt{\left(\sqrt{z^2 + c^2} + \alpha\right)^2 - b^2} \right]$ бу сраа $\alpha = \frac{1}{2} \left(\sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{b^2 + c^2} \right)$, $\beta = \frac{1}{2} \left(\sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2} \right)$. 532. $w = \sqrt{\sqrt{z^2 + c^2} + \sqrt{a^2 + c^2}}$

533. $w = \sqrt{z^2 + \sqrt{z^4 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{z^2 + 1} + \sqrt{z^2 - 1} \right)$. 534. $w = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 - 1} + \sqrt{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 - 1} \right]$

Кўрсатма. Каср чиқиқди ақслантириш ёрдамида 533-масалага келтирилади.

535. $w = \frac{\sqrt{z^2 - 1} + z - i}{\sqrt{\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha + 1} (z - i) - \sqrt{z^2 - 1}}}$

Кўрсатма. Каср чиқиқди ақслантириш ёрдамида 530-масалага келтирилади.

536. $w = \frac{1 + \sqrt{1 + i\pi}}{1 - \sqrt{1 + i\pi}}$

Кўрсатма. $w = -\frac{z+i}{z-i}$ каср чиқиқди ақслантириш ёрдамида ечиши келтирилган 44-мисолга олиб келинади.

537. $w = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2}$. 538. $w = \sqrt{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 + \cos^2 \frac{\theta}{2}} + i \cos \frac{\theta}{2}$

539. $w = \frac{\sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} + \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{b^2}\right) + \sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) + \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{b^2}\right)}}{\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^2}\right)}$

Кўрсатма. Жуковский функцияси қаралетган соҳиди 530-мисолдан содда ақслантирилади.

$$540. w = \frac{-1}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} \left(\sqrt{\sqrt{z^4 + 4} + 2} + \sqrt{\sqrt{z^4 + 4} - \sqrt{5}} \right)$$

Кўрсатма. $w_1 = z^2$ функция $[0, 1+i]$ ва $[0, -1+i]$ кесмалар бўйича қирилган юқори ярим текислиқни 532-мисолнинг шартда берилган соҳага акслантиради. 532-мисолнинг жавобидан ва симметрия принциpidан фойдаланиб, қиририлатган функцияни топиш қийин эмас. 541.

$$w = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)^{\frac{\pi}{2}} + \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)^{-\frac{\pi}{2}} + 2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)^{\frac{\pi}{4}} + \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)^{-\frac{\pi}{4}} \right]$$

Кўрсатма. $w_1 = \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)^{\frac{\pi}{2}}$ функция ёрдамида берилган соҳа

нинг юқориги ярим қисми ($|w_1| > 1, \operatorname{Im} w_1 > 0$) соҳага аксланади. Жуковский функцияси бу соҳани юқори ярим текислиққа акслантиради. Симметрия принциpidан фойдаланиб масала шартда берилган соҳанинг ($-w_1, -1$) нур бўйича қирилган бутун текислиққа аксланишини топамиз. Бу соҳани юқори ярим текислиққа акслантириш қийин

эмас. 542. $w = \left[e^{-\frac{\pi}{2} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)} \right]^{\frac{1}{2(1-i)}} - \left[e^{-\frac{\pi}{2} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)} \right]^{\frac{1}{2(1+i)}}$

543. $w = \left[e^{-\frac{\pi}{2} \frac{z + \sqrt{z^2 - 1}}{i}} \right]^{\frac{1}{2}}$ Бу ерда $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\alpha = \arctg \frac{b}{a}$, $\rho = \frac{1}{2 \arctg \frac{b}{a}}$

544. $w = \sqrt{\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{e^{2i\alpha} \sin \alpha - \sin \beta}}$

Кўрсатма. Аввал $\left\{ 0 < x < \frac{1}{2} \right\}$ яўлакни юқори ярим текислиққа

акслантирувчи функцияни топиш. Симметрия принциpidа кўра бу функция берилган соҳани ҳақиқий ўқдаги нурлар бўйлаб қирилган бутун текислиққа акслантиради.

545. $w = \sqrt{\frac{\cos 2z - \cos 2h}{1 - \cos 2h}}$ 546. $w = \sqrt{\frac{\cos 2z - \cos 2h}{\cos 2z + \cos 2h}}$ 547. $w = \sqrt{\cos 2z + \cos 2h}$

548. $w = \sqrt{\frac{\cos 2z + \cos 2h}{\cos 2z + 1}}$ 549. $w = \sqrt{\frac{\cos 2z + \cos 2h}{\cos 2z + \cos 2h_2}}$ 550. $w = \sqrt{\frac{\sin \frac{\pi}{2}}{1 + \sin \frac{\pi}{2}}}$

$$551. w = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{4\pi}{z}}{\cos \frac{4\pi}{z} - \cos \frac{4\pi}{a}}} \quad 552. w = \sqrt{\frac{\cos \frac{4\pi}{z} - \cos \frac{4\pi}{a}}{\cos \frac{4\pi}{z} - \cos \frac{4\pi}{a}}} \quad 553. w = \sqrt{\frac{\cos \frac{2\pi}{z} - \cos \frac{2\pi}{a}}{\cos \frac{2\pi}{z} - \cos \frac{2\pi}{a}}}$$

$$554. w = \sqrt{\frac{-\frac{2a}{b} - \frac{2a}{z}}{\frac{2a}{b} - \frac{2a}{z}}} \quad 555. w = \sqrt{\frac{\cosh \frac{\pi}{z} - \cosh \frac{\pi}{a}}{1 - \cosh \frac{\pi}{a}}} \quad 556. w = i c h \frac{\pi \sqrt{z}}{2a}$$

Кўрсатма. Аввал параболанинг симметрия ўқи бўйлаб кесим ўтказиб, $w_1 = \sqrt{z}$ функция ёрдамида параболанинг юқориги ярмини ярим йўлакка акслантиринг. Кейин ярим йўлакни юқори ярим текисликка акслантиринг ва симметрия принциpidан фойдаланинг

$$557. w = i h^2 \frac{\pi \sqrt{z}}{4a} \quad 558. w = \sqrt{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{1+z^2}}{\sqrt{3} - \sqrt{1+z^2}}} \quad 559. w = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1-z^2}}{\sqrt{2} - \sqrt{1-z^2}}}$$

$$560. w = \sqrt{\frac{z\sqrt{34} + \sqrt{4z^4 + 17z^2 + 4}}{5z - \sqrt{4z^4 + 17z^2 + 4}}} \quad 561. w = \sqrt{\frac{4 + z^2 + \frac{4}{3}z^4 + 17z^2 + 16}{(4 + z^2)\sqrt{34} + 5\sqrt{4z^4 + 17z^2 + 16}}}$$

$$562. w = \sqrt{\frac{z + i\sqrt{z^2 - 1}}{(z - i)\sqrt{3} + 3\sqrt{z^2 - 1}}} \quad 563. w = \sqrt{\frac{z^2 + 1 + \sqrt{z^4 - 2z^2 \cos 2\alpha + 1} + 2z(1 + \sin \alpha)}{z^2 + 1 + \sqrt{z^4 - 2z^2 \cos 2\alpha + 1} - 2z(1 + \sin \alpha)}}$$

$$564. w = \frac{\sqrt{z^2 + 1}}{z} \sqrt{z^2 + 1 + \sqrt{z^4 + 1}} \quad 565. w = \frac{1}{z}$$

$$\times \sqrt{(z^2 - 1)(z^2 - 1 + \sqrt{z^4 + 1}) + 2(2 + \sqrt{2})z^2} \quad 566. w = \sqrt{\frac{\sqrt{4z^4 + 17z^2 + 4} - 3z}{\sqrt{4z^4 + 17z^2 + 4} - 5z}}$$

$$567. w = \sqrt{1 - \sqrt{1 + w^2}} \quad 568. w = \sqrt{\frac{\sqrt{\cosh^2 \frac{\pi}{z} + \sinh^2 \frac{\pi}{z}} - \cosh \frac{\pi}{z}}{\sqrt{\cosh^2 \frac{\pi}{z} + \sinh^2 \frac{\pi}{z}} - \cosh \frac{\pi}{z}}} \quad 569. w = i c h \left(\sqrt{\frac{z}{2p}} \right)$$

$$570. w = i c h \left(\frac{\pi}{2a} \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \right) \quad 571. w = \left(-z^{\frac{1}{2}} + \sqrt{z^3 - 1} \right)^{\frac{1}{3}} \quad 572. w =$$

$$\left((i - \sqrt{1 - i})^{\frac{1}{2}} \right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 - 2\sqrt{2}}{2z^2} \left((z^{\frac{1}{2}} + 1 + \sqrt{z^2 + 1})^{\frac{1}{2}} \right) \quad 573. w = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{5}} - \sqrt{2 - \sqrt{5} + 4}}{\sqrt{z^2 + 4 + \sqrt{5}}}$$

$$574. w = \sqrt{z + \sqrt{1 + \sqrt{z^2 + 4}}} \quad 575. w = \sqrt{\operatorname{sh} \frac{z}{2} - \sqrt{\operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 \frac{z}{2}}} + \sqrt{\operatorname{ch} \frac{z}{2} - \sqrt{\operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 \frac{z}{2}}} \quad 576. w = \arcsin \frac{\sin z}{\operatorname{ch} z}$$

Курсатма. $w_1 = \sin z$ функция $D_0 = \left\{ z : -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z > 0 \right\}$ ярим яўлакин юқори ярим текисликка акслантиради, бунда $\pm \frac{\pi}{2} + ai$ нуқталар $\pm cha$ нуқталарга утади. Бу срадан $w = \arcsin \frac{\sin z}{\operatorname{ch} z}$ функция D_0 соҳани $G_0 = \left\{ w : -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} w < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} w > 0 \right\}$ ярим яўлақка акслантиришни топиш қийин эмас. Бунда $\left\{ \operatorname{Re} z = \pm \frac{\pi}{2}, 0 \leq \operatorname{Im} w < \infty \right\}$ нурларга $\left\{ \operatorname{Re} w = \pm \frac{\pi}{2}, 0 \leq \operatorname{Im} w < \infty \right\}$ нурлар мос келади. Симметрия принципини

чексиз кўп (санокли) марта қўллаб, $w = \arcsin \frac{\sin z}{\operatorname{ch} z}$ масала шартини қаноатлантирувчи функция эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

$$577. w = \frac{(1+z^2)^{\frac{1}{2}}}{2z} \quad 578. w = \frac{(1+z^2)^{\frac{1}{2}}}{2z} \quad 579. w = \frac{\operatorname{arcsin} \frac{\operatorname{sh} z}{1}}{\operatorname{arcsin} \frac{\operatorname{sh} z}{1}}$$

$$580. w = \arcsin e^{2z}$$

Курсатма. $D_0 = \left\{ z : 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2} \right\}$ деб олиб, 576-мисолини ечиш усулидан фойдаланамиз.

$$581. w = i \ln \left(e^{-z} + \sqrt{e^{-2z} - 1} \right) \quad 582. w = i \ln \frac{\cos z + \sqrt{\cos^2 z - \operatorname{ch}^2 \pi}}{\operatorname{sh} \pi}$$

$$583. w = i \ln \frac{\sqrt{\cos^2 \frac{z}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{z}{2}} + \sqrt{\cos^2 \frac{z}{2} - \operatorname{ch}^2 \pi}}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \pi + \operatorname{sh}^2 \frac{z}{2}}}$$

IV 606

$$1. \frac{1}{3}(b^2 - a^2), 2. 1 + \frac{1}{2}, 3. 2 + i, 4. \pi R^2, 5. 1, 6. 2, 7. 4\pi, 8. \pi, 9. 8, 10. 0, 11. 10\pi, 12. i, 13. -\frac{1}{2} + i, 14. \frac{1-i}{\sqrt{2}} \ln(3-2\sqrt{2}), 15. 0, 16. -16\pi, 17. \pi, 18. 2\pi, 19. -1, 20. 2\pi, 21. -\frac{19}{4} + 9i, 22. 2\pi, 23. 0, 24. 2\pi, 25. 1 + \frac{1}{2}, 26. -\frac{\pi}{2}, 27. -\pi R^2, 28. \sqrt{5}\left(1 - \frac{i}{2}\right)$$

$$29. 2, 30. 2i, 31. 0, 32. \frac{4}{3}, 33. \begin{cases} \frac{2\pi i}{n+1} [(-1)^{n+1} - 1], & \text{агар } n \neq -1 \text{ бўлса,} \\ \pi i, & \text{агар } n = -1 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$34. \begin{cases} 0, & \text{агар } n = -1 \text{ бўлса,} \\ 2\pi i, & \text{агар } n = -1 \text{ бўлса.} \end{cases} \quad 37. (1 + e^{\pi i}), \quad 38. \frac{1}{4}(1 + i)(e^2 - 1).$$

$$39. -1 + e \cos i + e \sin i, 40. -(1 + \operatorname{sh} i), 41. \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2 + \frac{1}{2} i, 42. -\frac{4}{3}, 43. e^{\frac{1}{2} + i\sqrt{2}} - 1.$$

$$44. \frac{\pi-1}{8}(1 + i\sqrt{3}), 45. \frac{1}{8}(1 - i\sqrt{3}) \cdot \left[e^{-\frac{1}{2} + i\sqrt{2}} - 1 \right], 46. \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}(1 - \ln 2), 47. 8,$$

$$48. -\pi e^{1/2}, 51. -2(1 - i).$$

Курсатма. $\sqrt{z} = 1$ шарт икки қийматли $\sqrt{z}$ функциясининг бир қийматли $(\sqrt{z})_0$ тармоғини ажратиш имконини беради. Бу ҳолда $\sqrt{z} = (\sqrt{z})_0 = \sqrt{z} \left[\cos \frac{\operatorname{arg} z + 0}{2} + i \sin \frac{\operatorname{arg} z + 0}{2} \right] = \sqrt{z} e^{i \frac{\operatorname{arg} z}{2}}$ бўлиб, $z = e^{i\varphi}$,

$$0 \leq \varphi \leq \pi, \text{ бўлгани учун } \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int \frac{e^{i\varphi} d\varphi}{e^{i\frac{\varphi}{2}}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\varphi}{2}} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = -2(1 - i)$$

$$\text{бўлади } 52. 2(1 - i), 53. -2(1 + i), 54. -4, 55. 4i, 56. 2\sqrt{2} - 4 + i2\sqrt{2}, 57. \frac{4}{3}\sqrt{2}[\sqrt{2} + i(\sqrt{2} + 2)], 58. 2\pi, 59. -2\pi, 60. 2\pi R, 61. 2\pi R.$$

Курсатма. Берилган шарт кўп қийматли $\operatorname{Ln} z$ функциясининг бир қийматли $(\operatorname{Ln} z)_0 = \ln z + 2\pi i$ тармоғини ажратиш имконини беради. У ҳолда $z = Re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ бўлганлиги учун

$$\oint \operatorname{Ln} z dz = \oint (\ln z + 2\pi i) dz = R \int_0^{2\pi} (\ln R + i(\varphi + 2k\pi)) d\varphi.$$

бўлади Булаклаб интеграллаш натижасида

$$\oint \operatorname{Ln} z dz = 2\pi R i$$

натижасини топиш қийин эмас.

$$62. \begin{cases} \frac{2\pi i}{n+1}, & \text{агар } n \neq -1 \text{ бўлса,} \\ -2\pi i, & \text{агар } n = -1 \text{ бўлса.} \end{cases} \quad 63. \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1} 2\pi i}{n+1}, & \text{агар } n \neq -1 \text{ бўлса,} \\ -2\pi i, & \text{агар } n = -1 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$65. \begin{cases} \frac{2\cos \alpha}{1 + \alpha}, & \text{агар } \alpha \neq -1 \text{ бўлса,} \\ 2\pi i, & \text{агар } \alpha = -1 \text{ бўлса.} \end{cases} \quad 73. 0, 74. 0, 75. \frac{1}{2} + i, 76. -2(1 + i)$$

$$77. -7e^{-1} + (3-2i)e. 78. e^{-1} - 1. 79. \cos i - \sin i - ie^{-1}. 80. 0. 81. 1 + \pi h i. 82. 2\pi i - 1.$$

$$83. \begin{cases} 0, & n \neq -1, & n - \text{бутун} \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases} \quad 84. \frac{1}{a} e^{az} + c \quad 85. \frac{1}{a} shaz + c \quad 86. \frac{1}{a} chaz + c$$

$$87. \frac{1}{a} \sin az + c \quad 88. -\frac{1}{a} \cos az + c \quad 89. e^{az} \frac{a \cos bz + b \sin bz}{a^2 + b^2} + c \quad 90. \frac{1}{a} \left(z - \frac{1}{a} \right) e^{az} + c$$

$$91. \frac{1}{a} shaz - \frac{2i}{a^2} chaz + \frac{2}{a^2} shaz + c. \quad 92. \frac{1}{a} \sin az + \frac{1}{a} \cos az + c. \quad 93. -\pi i$$

$$94. \pi i. \quad 95. sh i. \quad 96. 2e^{-1} + 1 + \pi e^{-1} i. \quad 97. -2i. \quad 106. -\frac{9\pi^2}{8} \quad \text{Қўр-}$$

сатма: берилган шартдан: $(\operatorname{Ln} z)_1 = \ln z + 2\pi i$ эканлигини топамиз. У ҳолда

$$\int_1^z \frac{(\operatorname{Ln} z)_1}{z} dz = \int_1^z \frac{\ln z + 2\pi i}{z} dz = \int_1^z \frac{\ln z}{z} dz + 2\pi i \int_1^z \frac{dz}{z} = -\frac{\pi^2}{8} - \pi^2 = -\frac{9\pi^2}{8}$$

эканлигини кўриш қийин эмас. 115. $-8\pi i$. 116. $\frac{\pi}{3}$ 117. $\frac{3\pi i}{8}$ 118. 0

119. $2\pi i sh i$. 120. $-\frac{\pi i}{4}$ 121. $2\pi i$. 122. $(2-e)\pi i$. 123. $\pi i \cos i$. 124. $-\frac{\pi i}{3}$ 125.

$e^{\frac{16}{3}} - 1$ πi . 126. $2\pi i$. 127. π . 128. $-\pi$. 129. $-2\pi i$. 130. 0. 131. 0. 132. 0. 133. πi . 134.

πi . 135. πe^{-1} . 136. $\frac{2}{9} \pi i (\cos 2 - \cos 1 - 3 \sin 1)$. 137. 0. 138. $2\pi i sh i$. 139. 0

140. $-\pi ch i$. 141. $-\frac{\pi i}{3}$ 142. $-\frac{\pi i}{2e}$. 143. 0. 144. πi . 145. $i \frac{1}{2} \pi ch i$. 146. $\pi sh \pi$

147. 0. 148. $\frac{2}{3} \pi ch \pi$. 149. 0. 150. $-\frac{\pi}{3}$ 151. $i 2\pi \sin i ch i$. 152. 0. 153. $-\pi i$. 154. πi .

155. $-\frac{4(e-2)\sqrt{2}}{8}$ 156. 0. 157. $-\frac{\pi i}{2}$ 158. $-\frac{\pi}{2} \pi i$ 159. π^2 160. $-\frac{3\pi\sqrt{e}}{32}$

161. $-2\pi i$. 162. $-\frac{1+i}{3} e^{-1}$ 163. $-2\pi i(b-a)^{-n}$ 164. $-2\pi i$, агар 0 нукта у кон-

тур билан чегараланган соҳага тегишли, 1 ва -1 нукталар эса тегиш-
ли бўлмаса; πi , агар у контур билан чегараланган соҳага -1 ёки 1
нукталарнинг фақат биттаси тегишли бўлиб, 0 нукта тегишли бўлма-
са ва ҳоказо. Хуллас интеграл бешта ҳар хил ($-2\pi i$; $-\pi i$; 0; πi ; $2\pi i$)
қийматларни қабул қилиши мумкин. 165. а) $2\pi i$, агар 0 нукта контур-
нинг ичида ва 1 нукта контурнинг ташқарисида ётса; б) $-\pi i e$, агар
1 нукта контурнинг ичида ва 0 нукта контурнинг ташқари-
сида ётса; в) $2\pi i \left(1 - \frac{1}{2} \right)$, агар 0 ва 1 нукталар контурнинг ичида

ётса; г) 0, агар 0 ва 1 нукталар контурнинг ташқарисида ётса

166. $\begin{cases} 2^n - 1, & \text{агар } n > 1 \text{ бўлса,} \\ 2, & \text{агар } n = 1 \text{ бўлса.} \end{cases}$ 167. $\frac{\pi i}{2}$. 168. $\frac{\sin a}{a}$ 169. $e^{a/2} \left(1 + \frac{a}{2} \right)$

Курсатма: Функциянинг ҳосиласи учун Кошининг интеграл формуласидан фойдаланинг. 170. $\frac{2}{3}$. 171. $1 - \frac{2i}{3}$. 172. Курсатма. Қўй қийматли $\text{Ln} z$ функциянинг ихтиёрий бир қийматли тармоғи $(\text{Ln} z)_k = \text{Ln} z + 2\pi i k$ ни оламин. У ҳолда $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f'(z)(\text{Ln} z)_k dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (\text{Ln} z)_k d f(z) = ((\text{бўлак-лаб интегралтаймиз})) = \frac{1}{2\pi i} [(\text{Ln} z)_k f(z)]_{\gamma} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \times$
 $\times \{[(\text{Ln} z)_k + 2\pi i] f(z_0) - [(\text{Ln} z)_k f(z_0)]\} - f(0) = f(z_0) - f(0)$ бўлади. Бу ерда биз Кошининг интеграл формуласига кўра $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z} dz =$
 $= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-0} dz = f(0)$ бўлишидан фойдаландик.

ҲАВВА

22. Абсолют яқинлашувчи. 23. Абсолют яқинлашувчи. 24. Шартли яқинлашувчи. 25. Яқинлашувчи. 26. Яқинлашувчи. 27. Яқинлашувчи. 28. Узоқлашувчи. 29. Яқинлашувчи. 30. Яқинлашувчи. 31. Узоқлашувчи. 32. Яқинлашувчи. 33. Узоқлашувчи. 34. Яқинлашувчи. 35. Яқинлашувчи. 36. Узоқлашувчи. 37. Яқинлашувчи. 38. Абсолют яқинлашувчи. 39. Абсолют яқинлашувчи. 40. Узоқлашувчи. 41. Абсолют яқинлашувчи. 42. Абсолют яқинлашувчи. 43. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Шартли яқинлашувчи, } \varphi = 2k\pi, \\ \text{узоқлашувчи, } \varphi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$ 44. Узоқлашувчи. 45.

Абсолют яқинлашувчи. 46. $\alpha > 0$. 47. $\alpha > 1$. 48. $\alpha > 0$. 49. $\alpha < 0$. 50. α — ихтиёрий ҳақиқий сон. 51. $\alpha < 0$. 78. $\frac{1}{2} - i$. 79. $|z| > 1$. 80. $|z| < 1$. 81. $\text{Re} z < 1$. 82. $z = 0, \pm 1$.

83. $|z| > 1$. 84. $|z| = 1$. 85. $r = 4^n$ ($k, n = 1, 2, \dots$). 86. $\text{Re} z > \delta$, бу ерда $\delta > 0$ — ихтиёрий сон. 87. $\text{Re} z \geq 1 + \delta$, бу ерда $\delta > 0$ — ихтиёрий сон. 88. Ҳақиқий ўқининг ихтиёрий $[2k\pi + \epsilon, 2(k+1)\pi - \epsilon]$ кесмасида текис яқинлашадиган. 89. $R = 1$. 90. $R = \infty$. 91. $R = 1$. 92. $R = \infty$. 93. $R = \frac{1}{2}$. 94. $R = \frac{1}{2}$. 95. $R = 1$.

96. $R = 0$. 97. $R = 1$. 98. $R = \sqrt{2}$. 99. $R = \frac{1}{2}$. 100. $R = \frac{1}{2}$. 101. $R = +\infty$. 102. $R = 1$.

103. $R = \frac{1}{4}$. 104. $R = \infty$. 105. $R = 0$. 106. $R = 2$. 107. $R = c$. 108. $R = 1$. 109. $R = 1$.

110. $R = 3$; $|z| = 1$ — $|z| < 3$. 111. $R = \begin{cases} 1, & \text{агар } |a| \leq 1 \text{ бўлса,} \\ \frac{1}{|a|}, & \text{агар } |a| > 1 \text{ бўлса.} \end{cases}$ 112. $R = 1$. 113. $R = 1$.

$$114. R = \frac{1}{2} \quad 115. R=1, |z+1|+1 < 1 \quad 116. R = \begin{cases} \infty, & \alpha \in \mathbb{N} \\ 1, & \alpha \notin \mathbb{N} \end{cases} \quad 117. R=1 \quad 118. R=\infty \\ 119. R=\frac{1}{4} \quad 120. R=k+1 \quad 121. R=1 \quad 122. R=\infty \quad 123. R=0 \quad 124. R=3; |z-2| < 3 \\ 125. R=\sqrt{2} \quad 126. R=1 \quad 127. R=1 \quad 128. R=1 \quad 129. R=1 \quad 130. R=\infty \quad 131. R \quad 132. R$$

$$133. R=1 \quad 134. R=1 \quad 135. R=1 \quad 136. \begin{cases} R, & \text{агар } |z_0| \leq 1 \text{ бўлса,} \\ \frac{R}{|z_0|}, & \text{агар } |z_0| > 1 \text{ бўлса.} \end{cases} \quad 137. R \quad 138. \max\{R, 1\}$$

$$139. R \quad 140. \frac{R}{3} \leq R_1 \leq R \quad 141. 0 \quad 142. R \quad 143. R' \quad 144. R \geq R' \quad 145. R \leq \min\{r_1, r_2\}$$

$$146. R \geq r_1, r_2 \quad 147. R = \frac{r_1}{r_2} \quad 148. \frac{z}{1-z} \quad 149. -\ln(1-z) \quad 150. \ln(1+z) \quad 151. |z|+1$$

$z=-1$ бўлганда шартли яқинлашади; $z=-1$ нуқтада эса узоқлашади
152. $|z+1|+1$ айланада абсолют яқинлашади 153. $|z|=1, z \neq \frac{1}{2}$, нуқталарида яқинлашади; бирлик айлананинг куби 1 га тенг бўлган учта нуқтада узоқлашади. 154. Бирлик айлананинг $|z|=1, z \neq \frac{1}{2}$, нуқталарида яқинлашиб, қолган тўртта нуқтасида узоқлашади. 155. Яқинлашиб, соҳаси чегарасининг ихтиёрий $z=-1$ нуқтасида яқинлашади 156. Чегаранинг ихтиёрий $z = e^{\frac{2k\pi i}{p}}$ ($k=0, 1, \dots, p-1$) нуқтасида яқинлашади

157. Чегаранинг $z = \frac{1}{2}$ ва $z=-1$ нуқталарида яқинлашади. 158. Чегарада абсолют яқинлашади 159. Чегаранинг $z=1$ нуқталарида яқинлашади 160. Чегарада яқинлашади. 161. Чегарада яқинлашади. 162. Чегаранинг ихтиёрий $z = \frac{1}{4}$ нуқтасида яқинлашади. 163. Чегаранинг $z = \pm \frac{1}{2}$

нуқталарида яқинлашади. 164. Чегаранинг $z=-1$ ва $z = \frac{1}{2}$ нуқталарида яқинлашади. 165. Чегаранинг $z=1$ ва $z=\pm i$ нуқталарида яқинлашади 166. Чегаранинг $z=1$ ва $z=\pm i$ нуқталарида яқинлашади 169. Масалан,

$$c_n = (-1)^n. \quad 171. \text{ Курсатма } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i(2n+1)\varphi}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\varphi}{2n+1} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1} \text{ ёрдамчи қатор оламиз. Бу қаторнинг яқинлашувчи}$$

эканлиги Дирихле аломатидан келиб чиқади. Энди унинг Яйгиндисини топамиз. Абелнинг иккинчи теоремасига асосан z ўзгарувчи e^{φ} га 0 ва e^{φ} ($\varphi \neq 0, \pi$) нуқталарни туташтирувчи радиус бўйича интегралда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i(2n+1)\varphi}}{2n+1} = \lim_{z \rightarrow e^{\varphi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \text{ тенгликни оламиз. Ечими билан келти-$$

риган 13-мисолга кўра $|z| < 1$ да $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$ бўлганлиги сабаб-

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$ бўлади. Бу тенглик ва $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\omega}{2n+1} =$

$= \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i(2n+1)\omega}}{2n+1}$ эканлигидан исбот қилиш керак бўлган тенгликни

ҳосил қилиш қўйин эмас. 184. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}; R=1$ 185. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}; R=2$ 186.

$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}; R=3$ 187. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; R=\infty$ 188. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n; R=1$ 189.

$\sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(2 + \frac{n\pi}{2}\right) \frac{z^n}{n!}; R=\infty$ 191. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \left[\frac{(1-i)^n}{3^{n+1}} - 1 \right] (z-i)^n; R=1$ 193

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n!(2n+1)}; R=\infty$ Курсатма: $f(z) \in O(C)$ эканлиги равшан. Икхтерий

C учун уринли бўлган ушбу $e^{\frac{z^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}$ қаторни ҳадтаб интеграллаш

лишжасида $f(z)$ функциянинг даражали қаторга ёйилмасини ҳосил қиламиз

195. $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{z}{i} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \left(\frac{z}{i} \right)^n \right); R=\infty$ Курсатма. Берилган

шарт асосида куп қийматли $\sqrt{z+i}$ функциянинг бир қийматли $(\sqrt{z+i})_0$

шароити ажратиб оламиз ва элементар функциялар ёйилмалари учун кел-

тирилган (7) формуладан фойдалансак (бизнинг ҳолда $\alpha = \frac{1}{2}$), керакли

натижани ҳосил қиламиз. 196. $-2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(1-\frac{1}{2}) \dots (n-1-\frac{1}{2})}{n!} (z+8)^n; R=\infty$

197. $\ln 2 + 2\pi i + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2-2)^n}{2^n n}; R=2$ 198. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{n}; R=1$

199. $1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} z^{n+1}; R=\infty$ 200. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1-2^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}; R=\infty$

201. $\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{(2n)!} \frac{z^n}{2^n}; R=\infty$ 202. $b^a \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{n} \right) \left(\frac{z}{b} \right)^n; R=|b|$ Бу ерда

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \binom{\alpha}{n} = \frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n!} (n=1, 2, \dots). \quad 203. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{d^{n+1}}, \quad R = \left| \frac{d}{c} \right|$$

$$204. \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-3i)^n - (2+3i)^n}{13^n} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \quad q = \sqrt{13}. \text{ Бу ерда } c_n = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^m \times$$

$$\times \binom{n}{2m+1} 2^{n-2m-1} 3^{2m}. \quad 205. 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2^{n+1}}; \quad R=1. \quad 206. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2^{n+1}}; \quad R=1$$

$$207. z + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n! (2n+1)} z^{2n+1}, \quad R=1. \quad 208. \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n} \right) \frac{z^n}{n}; \quad R=1$$

$$209. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}; \quad R=\infty \quad 210. \frac{1}{3} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^{2n}}{3^{n+1}}; \quad R=1$$

$$211. \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-i)^n}{2^{n/2}} [(z-1)^{2n} + (z-1)^{2n+1}]; \quad R=2. \quad 212. \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n (z-1)^n,$$

$$R=1. \quad 213. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(1+\frac{\pi n}{2})}{n!} (z-1)^{2n}; \quad R=\infty \quad 214. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^{3n}; \quad R=1$$

$$215. \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^{2n}; \quad R=1 \quad 216. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} z^{2n}; \quad 217. f'(i) = \frac{\ln(1+i)}{chi},$$

$$f^{(5)}(i) = \frac{5! \ln(1+5i)}{ch^5}, \quad R=e. \text{ Курсатма. Катор коэффициентни } c_n$$

$$\text{хисоблаш учун берилган } c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (n=1, 2, \dots) \text{ формуладан фойда-}$$

$$\text{даланинг. } 218. f(-i)=0, f'(-i)=2+i, f^{(5)}(-i)=(26+5i)4!; \quad R=1. \quad 219. f'(1)=0,$$

$$f^{(3)}(-1) = \frac{\ln^3(1+i)}{10^3} \cdot 3! \cdot 3!; \quad R = \frac{1}{\ln(1+i)}. \quad 220. f(0)=0, f^{(12)}(0) =$$

$$= \frac{4 \ln(10\pi)}{10^4}; \quad R=3e. \quad 224. \frac{1}{sh1} - \frac{ch1}{sh^2 1} (z+i)^n + \frac{1+ch^2 1}{sh^3 1} (z+i)^{n+1}; \quad R=1$$

$$225. 1 + z^2 + \frac{z^4}{3} + \dots \quad 226. 1 - \frac{z^2}{4} - \frac{z^4}{96} + \dots \quad 227. 1 + z^2 - \frac{1}{2} z^4 +$$

$$+ \frac{3}{8} z^6 - \frac{3}{4} z^8 + \dots \quad 228. 1 + z + z^3 + \frac{3}{6} z^5 - \frac{5}{8} z^7 + \frac{1}{10} z^9 + \dots$$

$$229. -z = \frac{1}{2} z^2 + \frac{3}{2} z^4 + \frac{5}{2} z^6 + \dots \quad 240. \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^{n+1} - 2^{-n-1}] z^n$$

$$241. -\sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n-1} + 3^{-n-1}) z^n. \quad 242. \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^{n+1} - 4^{-n-1}] z^{2n+1}$$

$$\begin{aligned}
243. & \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(1+(-1)^n 4^{-n-1}) \right] z^{2n} \quad 244. - \sum_{n=0}^{\infty} (z^{4n} + z^{4n-1}) \quad 245. \frac{1}{25} \sum_{n=0}^{\infty} \left[5n+6 + \right. \\
& \left. + (-1)^n 4^{-n-1} \right] z^{2n} \quad 246. \sum_{n=0}^{\infty} (z^{3n} - z^{3n+1}) \quad 247. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2^{3n+2} z^{3n+2} - 2^{3n} z^{3n}) \\
248. & \sum_{n=0}^{\infty} (z^{3n} - z^{3n+1}) \quad 249. \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) (z^{3n} - z^{3n+1}) \quad 250. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{4} \left(\frac{z}{2n} \right)! \\
251. & 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{4n-1}}{(2n)!} z^{2n} \quad 252. 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{4n+1}}{(4n)!} z^{4n} \quad 253. \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{\pi n}{4} \frac{z^n}{n!} \\
254. & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{2n} \frac{z^{2n}}{(4n)!} \quad 263. 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12} + \dots
\end{aligned}$$

Кўрсатма Номалум коэффициентлар усули қуйидагидан иборат. Айтайлик, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ ва $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$ сийлмалар

номалум бўлиб, $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ функция a нуқтанинг атрофида голоморф бўлсин ва бу функцияни $(z-a)$ нинг даражалари бўйича Тейлор қаторига ейиш талаб қилинсин. У ҳолда

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

деб фарз қилиб,

$$f(z) h(z) = g(z)$$

тенгликдаги мос даражалар олдидаги коэффициентларни тенглаш ёр-

$$c_0 b_n + c_1 b_{n-1} + \dots + c_n b_0 = a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{cases} c_0 b_0 = a_0, \\ c_0 b_1 + c_1 b_0 = a_1, \\ c_0 b_2 + c_1 b_1 + c_2 b_0 = a_2, \\ \dots \\ c_0 b_n + c_1 b_{n-1} + \dots + c_n b_0 = a_n, \\ \dots \end{cases} \quad (1)$$

җангламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу системадан эса $c_0, c_1, c_2, \dots$ номалумларни кетма-кет топиш мумкин.

Бизнинг мисолда $g(z) = z$ ва $h(z) = \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$ бўлиб,

(*) система ўрнига ушбу

$$\begin{cases} c_0 \cdot 1 = 1, \\ c_0 \left(-\frac{1}{2}\right) + c_1 \cdot 1 = 0, \\ c_0 \left(\frac{1}{3}\right) + c_1 \left(-\frac{1}{2}\right) + c_2 \cdot 1 = 0 \\ \dots \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз. Бу системадан $c_0 = 1$, $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = -\frac{1}{12}$, эканлигини топиш қийин эмас.

264. $z + \frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^3 + \dots$ 265. $1 + \frac{z^2}{3} - \frac{4}{45}z^4 + \dots$ 266. $1 - \frac{z^2}{6} - \frac{17}{360}z^4 + \dots$

267. $1 + 2z + \frac{19}{6}z^2 + \dots$ 268. $1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots$ 269. $c_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$, $n \geq 0$, $R = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 270. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ 271. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$

272. $1 - \frac{z^2}{2 \cdot 3} + \frac{z^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{z^8}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \dots$ 273. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(kz)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin kz$

Кўрсатма $f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots + c_n z^n + \dots$ деб олиб, номаълум коэффицентлар усулидан фойдаланиш еридамида c_n ($n = 1, 2, \dots$) коэффицентларни топамиз. Берилган шартлардан фойдалансак $f(z) = z + c_1 z^2 + c_2 z^3 + \dots + c_n z^n + \dots$. Бу даражали қаторни икки марта ҳаллаб дифференциаллаймиз. $f'(z)$ ва $f''(z)$ ларни берилган тенгламага олиб бориб қўйиб, номаълум коэффицентларни топиш учун ушбу

$$\begin{cases} 2c_2 = 0, \\ 6c_3 + \lambda^3 = 0, \\ 4 \cdot 3c_4 + \lambda^2 c_2 = 0 \\ \dots \\ (n+2)(n+1)c_{n+2} + \lambda^2 c_n = 0. \end{cases}$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу ердан

$$c_2 = 0, \quad c_3 = -\frac{\lambda^3}{6}, \quad c_4 = 0, \quad \dots, \quad c_{n+2} = -\frac{\lambda^2}{(n+2)(n+1)} c_n, \dots$$

эканлигини топамиз. Демак, $k = 0, 1, 2, \dots$ лар учун $c_{2k} = 0$ экан. Математик индукция усулидан фойдаланиб,

$$c_{2k+3} = -\frac{\lambda^2}{(2k+1+2)(2k+1+1)} c_{2k+1} = (-1)^{k+1} \frac{\lambda^{2k+3}}{(2k+3)!}$$

тенгликнинг ўринли эканлигини кўрсатиш қийин эмас. Бу ердан қарақли ёйилмани ҳосил қиламиз.

$$274. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \quad 275. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} \quad 276. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} z^{2n}$$

$$278. 1 \quad 279. 5 \quad 280. 15 \quad 281. 3 \quad 282. 4 \quad 283. 1 \quad 284. 4 \quad 285. 3 \quad 286. 1 \quad 287. 3.$$

$$288. \geq \min(n, m). 289. \begin{cases} n - m, n > m, \\ \text{одний нуқта, } n = m, \\ \text{максус нуқта, } n < m. \end{cases} \quad 290. n + m - 1. \quad 291. 2n + 3m.$$

$$292. \begin{cases} \min(n, m), n \neq m, \\ 2n, n = m. \end{cases} \quad 293. z = \pm 3i \text{ нуқталар — 1-тартибли ноллар.}$$

$$294. (4k+1)\frac{\pi}{2}, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ нуқталар — 2-тартибли ноллар. } 295. z=0$$

$$\text{— 3-тартибли ноль. } 296. z=0 \text{ — 2-тартибли ноль, } z=2i \text{ — 1-тартибли ноль. } 297. z=0 \text{ — 2-тартибли ноль, } z=k\pi (k=\pm 1, \pm 2, \dots) \text{ 1-тартибли ноллар. } 298. z=0 \text{ — 3-тартибли ноль, } z=k\pi (k=\pm 1, \pm 2, \dots) \text{ 1-тартибли ноллар. } 299. z=(2k+1)\pi i (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ — 2-тартибли ноллар.}$$

$$300. z=\pm ki \text{ — 2-тартибли ноллар, } z=(2k+1)\pi i (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ — одний ноллар. } 301. z=(2k+1)\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ — 2-тартибли ноллар. } 302. z=2k\pi i (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ — одний ноллар. } 303. z=0 \text{ — 5-тартибли ноль. } 304. z=\pm i \text{ — 3-тартибли ноллар; } z=k\pi i (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ — одний ноллар. } 305. z=-\pi i \text{ — 2-тартибли ноль; } z=k\pi i (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ — одний ноллар. } 306. z=0 \text{ — одний ноль; } z=k\pi i (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ 2-тартибли ноллар. } 307. z=(4k+1)\frac{\pi}{2} (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ — 2-}$$

$$\text{тартибли ноллар. } 308. z=\sqrt[3]{(2k+1)\frac{\pi}{2}} \text{ ва } z=\frac{1}{2}\sqrt[3]{(2k+1)\frac{\pi}{2}} (1\pm i\sqrt{3})$$

$$(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ — одний ноллар. } 309. z=0 \text{ — одний ноль. } 310. z=0 \text{ — 3-тартибли ноль. } 311. z=0 \text{ — 2-тартибли ноль. } 312. z=0 \text{ — одний ноль; } z=\frac{1}{2}(2k+1)\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ — 2-тартибли ноллар. } 313. z=-1-2-$$

$$\text{тартибли ноль; } z=2\pi i k (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ — одний ноллар. } 314. z=\pm i \text{ — 3-тартибли ноллар; } z=k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ — одний ноллар. } 315. z=\pm 2-3 \text{ — тартибли ноллар; } z=2k\pi i (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ — одний ноллар. } 316. z=2k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ — 2-тартибли ноллар. } 317. z=\pm \pi i \text{ — 3-тартибли ноллар, қолган барча } z=k\pi (k=0, \pm 2, \pm 3, \dots) \text{ нуқталар — одний ноллар. } 318. z=\frac{\pi}{4}+k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ — одний ноллар.}$$

$$319. \text{ Ноллари йуқ. } 320. z=k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ — 3-тартибли ноллар.}$$

$$321. z=0 \text{ — 2-тартибли ноль; } z=k\pi (k=\pm 1, \pm 2, \dots) \text{ — 3-тартибли ноллар.}$$

$$322. z=0 \text{ — 3-тартибли ноль; } z=\sqrt[3]{k\pi} \text{ ва } z=\frac{1}{2}\sqrt[3]{k\pi} (1\pm i\sqrt{3}) (k=\pm 1,$$

$$\pm 2, \dots) \text{ — одний ноллар. } 323. z=(2k+1)\frac{\pi}{2} (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ — 3-тар-}$$

$$\text{тибли ноллар. } 324. z=4 \text{ нуқта илдизнинг бир қийматли } (\sqrt[4]{z})_0 \text{ тармоғи}$$

$$\text{учун 3-тартибли ноль бўлади. } 325. \text{ Бу мисолда 2 та функция берилган,}$$

чунки $w = \sqrt{z}$ функция икки қийматли функциядир. Бу функциянинг биринчи бир қийматли тармоғи учун $z = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ нуқталар, иккинчи

бир қийматли тармоғи учун эса $z = (2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

нуқталар 2-тартибли ноль бўлади. 339. Энд эмас, чунки функция нолларининг лимит нуқтаси $a = 0$ нуқтада функция голоморф эмас. 340. Энд эмас, чунки $z = 1$ нуқтада функция голоморф эмас. 341. Фақат чексиз узоқлашган нуқтагина лимит нуқта бўлиши мумкин. Масалан, $f(z) = \sin z \in O(C)$ ва $a_n = n\pi$ ($n = 1, 2, \dots$) бўлса, $f(a_n) = 0$ ва $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

бўлади. 342. Мавжуд эмас. Кўрсатма. Айтайлик, $f(z)$ функция $z = 0$ нуқтада голоморф бўлса, унда шундай $V(0, \epsilon)$ атроф топиладик

$f(z) = O(V(0, \epsilon))$ бўлади. $E = \left\{ \frac{1}{2n-1} \right\}_{n=1}^{\infty}$ деб белгилаймиз. E тўпламининг

лимит нуқтаси 0 бўлиб, $0 \in V(0, \epsilon)$. $V(0, \epsilon)$ да $g(z) = 0$ деб олсак, шартга кўра $\forall z \in E$ учун $f(z) = g(z)$ бўлади. Ягоналик теоремасига кўра

$V(0, \epsilon)$ да $f(z) = 0$ бўлади, лекин шартга кўра $f\left(\frac{1}{2n}\right) = 1$, $n = 1, 2, \dots$

эди. Зиддият қўйилган масала шартини қаноатлантирувчи функциянинг мавжуд эмаслигини кўрсатади. 343. Мавжуд эмас. 344. Мавжуд эмас.

345. Мавжуд $\left(f(z) = \frac{1}{z+1}\right)$. 346. Мавжуд. Кўрсатма. Айтайлик

$f(z)$ функция 0 нуқтанинг $V(0, \epsilon) = D$ атрофида голоморф бўлсин

$E = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ деб оламиз. E тўпламининг лимит нуқтаси $0 \in D$. $g(z) = z^2$ де

сак, $g(z) \in O(D)$ бўлиб, $g(z)\Big|_E = g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} = f\left(\frac{1}{n}\right) = f(z)\Big|_E$. У ҳолда

ягоналик теоремасига кўра D да $f(z) = g(z) = z^2$ бўлиб, бу функция қўйилган масала шартини қаноатлантиради. 347. Мавжуд эмас. 348. Мавжуд эмас. 349. Мавжуд эмас. 350. Мавжуд. 351. Мавжуд. 352. Мавжуд эмас. 353. Мавжуд эмас. 354. Мавжуд эмас. 355. Мавжуд. 356. Мавжуд эмас. 357. Мавжуд эмас. 358. Мавжуд эмас. 359. Мавжуд эмас. 360. Мавжуд эмас. 361. Мавжуд; $f(z) = 1 + z$. 362. Мавжуд эмас. 363. Мавжуд эмас. 364. Мавжуд; $f(z) = (z-1)^2$. 365. Мавжуд; $f(z) = (z-1)^2$. 366. Мавжуд эмас. 376. Кўрсатма. Тескарисини фарз қиламиз. Айтайлик $P_n(z)$ қўлҳал бирорта ҳам нолга эга бўлмасин. У ҳолда $f(z) = \frac{1}{P_n(z)}$ функция C да

голоморф бўлади. $z \rightarrow \infty$ да $f(z) \rightarrow 0$ бўлганлиги сабабли (чунки $z \rightarrow \infty$ да $P_n(z) \sim c_n z^n$), $f(z)$ функция бутун комплекс текислик C да чегараланган. Дарҳақиқат, $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0 \Rightarrow \exists R > 0 \forall z \in \{z \mid |z| > R\}$ учун $|f(z)| < 1$ бу

лади. Агар $\max_{|z|=R} |f(z)| = M$ десак, у ҳолда $\forall z \in C$ учун $|f(z)| \leq M + 1$ тенг

сизлик бажарилади. Унда Лиувиль теоремасига кўра $f(z) = \text{const}$ ёки $P_n(z) =$

и соны бўлади. Бу эса $P_n(z)$ нинг берилишига зид, чунки шартга кўра $n \geq 1$ да $c_n \neq 0$ эди. Зиддият фаразнинг нотўғри, тасдиқнинг тўғрилигини исботлайди. 380. Айюк, Масалан, $f(z) = z$ ва $D = \{ |z| < 1 \}$. 394. $2 < |z| < 4$.

395. $2 < |z+1| < \infty$. 396. $\emptyset$. 397. $\begin{cases} |a| < |z| < |b|, \text{ агар } |a| < |b| \text{ бўлса,} \\ \emptyset, \text{ агар } |a| > |b| \text{ бўлса,} \end{cases}$

398. $0 < |z-1| < 2$ 399. $5 < |z+2i| < 6$ 400. $0 \leq |z-2+i| < 1$ 401. $1 < |z| < 2$.
402. $1 < |z| < 2$ 403. $0 < |z-1| < 1$ 404. $1 < |z| < 2$ 405. $1 < |z-1| < 2$.
406. $0 < |z-1| < 1$ 407. $\frac{1}{2} < |z| < 2$ 408. $e^{-1} < |z-1| < e$ 409. $0 < |z-d| < 1$.

410. $0 < |z+1| < \infty$. 411. $|z| = 1$ 412. $\emptyset$. 416. $-\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n; |z| < 2$.

417. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{z^{n+1}}, |z| > 2$. 418. $\frac{(-1)^k}{a^k} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} \left(\frac{z}{a}\right)^n; |z| < a$.

419. $\frac{1}{z^k} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} \left(\frac{a}{z}\right)^n; |a| > a$ 420. $\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n, |a| < 1$. 421. $-\frac{1}{z-1} +$
 $+\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n, 0 < |z-1| < 1$. 422. $-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^n}; |a| > 1$ 423. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n$.

424. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1\right) z^n$ 425. $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ 426. $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(z-1)^{n+1}}$ 427. $-\frac{1}{z-1} -$
 $-\sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n; 0 < |z-1| < 1$ 428. $-\frac{1}{z-2i} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-2i}{i}\right)^n; 0 < |z-2i| < 1$.

429. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z+1)^{n-1}}{2^{n+1}} (z+1) < 1$ 430. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{(-i-1)^{n+1}} - \frac{1}{(i-1)^{n+1}} \right] (z-1)^{n+1}$
 $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \left[\frac{(n+1)\pi}{2} \right]}{2^{\frac{n+1}{2}}} (z-1)^n; |z-1| < \sqrt{2}$ да ва $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \times$

$\times \frac{(1-i)^{n-1} - (1+i)^{n-1}}{2i} \frac{1}{(z-1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-i)^{n-1} \sin \left[\frac{(n-1)\pi}{4} \right]}{(z-1)^n}; |z-1| > \sqrt{2}$ да

431. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}, |z| < \infty$ 432. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)! z^{2n+1}} = z^4 - \frac{z^2}{2!} + \frac{1}{4!} -$

$+\frac{1}{6!} - \frac{1}{8!} + \frac{1}{10!} - \dots, 0 < |z| < \infty$. 433. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!}; |z| < \infty$.

$$434. \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} - \frac{1}{24z^4} + \dots; 0 < |z| < \infty. \quad 435. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1} z^{2n-1}}{(2n)!}; |z| < \infty$$

$$436. -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n; \quad 437. \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad 438.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+2)^n} - \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z+2}{3}\right)^n. \quad 439. -\frac{1}{2(z-1)} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (z-1)^n \frac{(1+3)^n}{120^n} \quad 440.$$

$$\frac{1}{z-1} + 5 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n-2}}{(z-1)^n} \quad 441. \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} \quad 442. \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+3)!} \quad 443.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{(1 \cdot n)!} z^{2n-1} \quad 444. \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{(2n)! z^{2n+1}} \quad 445. \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{(n+1)!} z^n \quad 446.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n \quad 447. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{z^{n+1}} \quad 448. \text{Қаторга ёймиш}$$

$$\text{МЕҲМОИ} \quad 449. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 4^{n-1}}{(z+2)^{n+1}} \quad 450. \frac{1}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n \quad 451. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{n-1}}{z^n} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}. \quad 452. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-3n-4}{9} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{9 \cdot 2^{n+1}}. \quad 453. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5} z^{2n} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5 \cdot 4^{n+1}} z^{2n}. \quad 454. z^2 + z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n! z^{n-2}} \quad 455. -n! z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^{2n+1}}{(2n+1)!} \times$$

$$\times z^{2n+1} \quad 463. \frac{1}{z-2} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2+i)^{n+1} - (2-i)^{n+1}}{2^{n+1}} (z-2)^n; 0 < |z-2| < \sqrt{5}$$

$$464. \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{2n}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2^{n+1}} \quad 465. -\frac{1}{4(z-i)} - \frac{1}{4(z+i)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)^n (z-i)^n}{2^{n+1}};$$

$$0 < |z-i| < 2 \quad 466. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{z^{2n+1}}; |z| > 1. \quad 467. \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-2n} z^{-2n}, \text{бу}$$

$$\text{срада } c_{2n} = c_{-2n} = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!(2n+2k+1)!}; (n=0, 1, 2, \dots). \text{ Курсатма}$$

$$f_1(z) = \sin z \text{ ва } f_2(z) = \sin \frac{1}{z} \text{ деб белгилаб, } f(z) \text{ ни } z \text{ нинг мусбат даражалари}$$

$$\text{ри бўйича ва } f_2(z) \text{ ни } z \text{ нинг манфий даражалари бўйича қаторга ёймиш}$$

$$f_1(z) = \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (|z| < \infty),$$

$$f_2(z) = \sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)! z^{2n+1}} \quad (|z| > 0).$$

У ҳолда бу қаторларни купайтириш ердамида $V = \{0 < |z| < \infty\}$ ҳалқада яқинлашувчи керакли Лоран қаторини топамиз:

$$468. \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n}, \text{ бу ерда } c_n = c_{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n+k)!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

$$469. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log(n+1)}{n!} z^n = (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 470. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-(-1)^{n+1}}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

$$471. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = \frac{1}{1-z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 472. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n!} z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n!} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-(-1)^{n+1}}{n!} z^n = 473. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n!} z^n$$

$$474. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n!} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 475. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n!} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n!} z^n$$

$$476. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-(-1)^{n+1}}{n!} (z-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{9 \cdot 2^{n+2}} (z-1)^n = 477. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(-1)^n}{n!} (z-1)^n +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} - 2^{n+1}}{27 \cdot 2^{n+3}} (z-1)^n = 478. \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) 2^{n+1} (z-1)^n.$$

$$479. 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} 2^{-\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{2} (z-1)^n = 480. - \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-2} z^n.$$

$$481. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n!} (z-1)^n = 482. \frac{1}{3(z+1)} - \frac{8}{9} + \frac{19}{27} (z+1) -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{3^{n+2}} (z+1)^n = 483. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^{n+4}}{5} z^{2n} = 484. (z-2)^3 + 6(z-2)^2 +$$

$$+ \frac{23}{2} (z-2) + 5 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{48n^2 + 72n + 23}{(2n+2)!} (z-2)^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{(2n+2)!} \times$$

$$\times (16n^2 + 24n + 5) (z-2)^{2n}. 485. \text{Йуқ. Курсатма. Берилган } f(z) = \frac{1}{\sin z-1}$$

функция $a = \infty$ нуқтанинг бирор уйилган атрофида голоморф бўлиши етарли $f(z)$ функциянинг голоморфлиги $z_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) нуқталарда бузилганлиги ва $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \infty$ бўлгани учун $a = \infty$ нуқтанинг ихтиёрий

уйилган атрофини олганимизда ҳам бу атрофда $f(z)$ функция голоморф бўла олмайди (чунки бу атрофда $\{z_k\}$ кетма-кетлиқнинг чексиз кўп сондаги нуқталари етди). 486. Ҳа 487. Ҳа 488. Йуқ 489. Йуқ 490. Йуқ 491. Йуқ 492. Йуқ 515. 1 516. $a=0$ — 2-тартибли қутб; $a=k\pi$ ($k=\pm 1, \pm 2, \dots$) — 3-тартибли қутблар. 517. $a=2$ — 1-тартибли қутб; $a=1$ — 2-тартибли қутб. 518. $a=-1$ — 1-тартибли қутб, $a=2$ — 3-тартибли қутб. 530. $z=0$

— бартараф қилинадиган махсус нуқта; $z=k\pi$ ($k=\pm 1, \pm 2, \dots$) — қутблар 531. $z=0$ — бартараф қилинадиган махсус нуқта; $z=\pm(2n-1)\pi$ ($n \in \mathbb{N}$) — қутблар 532. $z=\infty$ — қутб нуқта; $z=-1$ — ўта махсус нуқта. 533. $z=\infty$ ва $z=1$ — бартараф қилинадиган махсус нуқталар; $z=-1$ ўта махсус нуқта 534. $z=0$ — бартараф қилинадиган махсус нуқта; $z=k\pi$ ($k=\pm 1, \pm 2, \dots$) — қутблар 535. $z=\infty$ — бартараф қилинадиган махсус нуқта; $z=0$ — ўта махсус нуқта. 536. $z=\frac{1}{k}$ ($k=\pm 1, \pm 2, \dots$) — ўта махсус нуқталар. 537. $z=0$

ўта махсус нуқта. 538. Курсатма $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ функция учун

$z=\frac{1}{k}$ ($k=\pm 1, \pm 2, \dots$) қутб нуқталар бўлиб, $z=0$ нуқта бу қутб нуқталар-

нинг лимит нуқтаси бўлади. $z=0$ нуқтанинг ихтиёрий тешик атрофини олганимизда ҳам $f(z)$ функциянинг чексиз кўп махсус нуқталари (қутблар) ётганлиги сабабли $z=0$ нуқта $f(z)$ функция учун яққаланган махсус нуқта бўла олмайди. Функциянинг бундай нуқталарига унинг яққаланмаган махсус нуқталарни дейилади 540. $z=1$ — 3-тартибли қутб; $z=0$ ва $z=-1$ — 1-тартибли қутблар. 541. $z=k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) — 1-тартибли

қутблар 542. $z=\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ — 3-тартибли қутблар 543. $z=2i$ — ўта мах-

сус нуқта. 544. $z=-1$ — ўта махсус нуқта. 545. Бартараф қилинадиган махсус нуқта. 546. Бартараф қилинадиган махсус нуқта. 547. 5-тартибли қутб 548. 1-тартибли қутб. 549. 3-тартибли қутб 550. Ўта махсус нуқта 551. Агар $n \neq m$ бўлса, $\max(n, m)$ - тартибли қутб; агар $n=m$ бўлса, тартиби n дан катта бўлмаган қутб нуқта (хусусан, бартараф қилинадиган махсус нуқта). 552. $(n+m)$ — тартибли қутб 553. Агар $n>m$ бўлса, $(n-m)$ — тартибли қутб; агар $n \leq m$ бўлса, у ҳолда $z=0$ нуқта $(m-n)$ - тартибли ноль. 554. $(kn+lm)$ — тартибли қутб 557. $m-n$ 558. $m+n$ 569. $m+n$. 570. $z=0$ ва $z=\pm 1$ — 1-тартибли қутблар; $z=\infty$ — 3-тартибли

ноль. 571. $z=-1$ ва $z=\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ — 1-тартибли қутблар; $z=\infty$ — 3-тартибли

ноль. 572. $z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ва $z=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ — 1-тартибли қутблар; $z=\infty$ — тўғри нуқта.

573. $z=0$ — 1-тартибли қутб; $z=\pm 2i$ — 2-тартибли қутблар; $z=\infty$ — 5-тартибли ноль 574. $z=\pm i$ — 1-тартибли қутблар; $z=\infty$ — ўта махсус нуқта 575. $z=\infty$ — ўта махсус нуқта. 576. $z=\infty$ — ўта махсус нуқта 577. $z=0$ — 3-тартибли қутб, $z=\infty$ — ўта махсус нуқта. 578. $z=-1$ — ўта махсус нуқта; $z=\infty$ — 3-тартибли ноль. 579. $z=2k\pi$ ($k=\pm 1, \pm 2, \dots$) — 1-тартибли қутблар; $z=\infty$ — қутбларнинг лимит нуқтаси 580. $z=0$ — 2-тартибли қутб, $z=2k\pi$ ($k=\pm 1, \pm 2, \dots$) — 1-тартибли қутблар; $z=\infty$ — қутбларнинг лимит нуқтаси 581. $z=\pi(2k+1)\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) — 1-тартибли қутблар; $z=\infty$ — қутбларнинг

лимит нуқтаси. 582. $z=0$ — 3-тартибли қутб; $z=2k\pi \pm \ln(2+\sqrt{3})$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) — 1-тартибли қутблар; $z=\infty$ — қутбларнинг лимит нуқтаси 583. $z=0$ — 1-тартибли қутб; $z=\pm 2i$ — 2-тартибли қутблар; $z=\infty$ — ўта махсус нуқта. 584. $z=0$ — қутбларнинг лимит нуқтаси; $z=\infty$ — тўғри нуқта (оддий ноль). 585. $z=0$ — бартараф қилинадиган махсус нуқта; $z=2k\pi$ ($k=\pm 1, \pm 2, \dots$) — 2-тартибли қутблар; $z=\infty$ — қутбларнинг лимит нуқтаси. 586. $z=0$ — бартараф қилинадиган махсус нуқта; $z=ik\pi$ ($k=\pm 1, \pm 2, \dots$) — 1-тартибли қутблар; $z=\infty$ — қутбларнинг лимит нуқтаси.

587. $z = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) — ўта махсус нуқталар; $z = \infty$ — яккаланмаган махсус нуқта. 588. $z = \pm 1$ ва $z = \pm i$ — 1-тартибли қутблар; $z = \infty$ — тўғри нуқта. 589. $z = 0$ — бартараф қилинадиган махсус нуқта; $z = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) — 1-тартибли қутблар; $z = \infty$ — қутбларнинг лимит нуқтаси. 590. $z = 0$ — ўта махсус нуқта; $z = \infty$ — оддий ноль. 591. $z = 0$ — ўта махсус нуқта; $z = \infty$ — тўғри нуқта. 592. $z = k\pi i$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) — 1-тартибли қутблар; $z = \infty$ — қутбларнинг лимит нуқтаси. 593. $z = 0$ — ўта махсус нуқта; $z = \infty$ — тўғри нуқта. 594. $z = 0$ — ўта махсус нуқта; $z = \infty$ — 1-тартибли қутб. 595. $z = 1$ — ўта махсус нуқта; $z = \infty$ — тўғри нуқта. 596. $z = 0$ — ўта махсус нуқта; $z = \infty$ — ўта махсус нуқта. 597. $z = 1$ — ўта махсус нуқта; $z = 2k\pi i$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) — 1-тартибли қутблар; $z = \infty$ — қутбларнинг лимит нуқтаси. 598. $z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) — 1-тартибли қутблар; $z = \infty$ — қутб-

ларнинг лимит нуқтаси. 599. $z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) — 2-тартиб-

ли қутблар; $z = \infty$ — қутбларнинг лимит нуқтаси. 600. $z = 0$ — 3-тартибли қутб; $z = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) — 1-тартибли қутблар; $z = \infty$ — қутбларнинг лимит нуқтаси. 601. $z = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) — 1-тартибли қутблар; $z = \infty$ — қутбларнинг лимит нуқтаси. 602. Агар $a = m\pi + \frac{\pi}{2}$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

бўлса, у ҳолда $z = 2k\pi + a$ ва $z = (2k+1)\pi - a$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 1-тартибли қутблар; агар $a = m\pi + \frac{\pi}{2}$ бўлиб, m жуфт сон бўлса, $z = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ва m тоқ

сон бўлса, $z = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}$ лар — 2-тартибли қутблар; $z = \infty$ — барча

ҳолларда ҳам қутбларнинг лимит нуқтаси. 603. Агар $a = m\pi$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) бўлса, у ҳолда $z = (2k+1)\pi \pm a$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) — 1-тартибли қутблар; агар $a = m\pi$ бўлиб, m тоқ сон бўлса, $z = 2k\pi$ ва m жуфт сон бўлса, $z = (2k+1)\pi$ лар — 2-тартибли қутблар; $z = \infty$ — барча ҳолларда ҳам қутбларнинг лимит нуқтаси. 604. $z = 1$ — ўта махсус нуқта; $z = \infty$ — оддий нуқта. 605. $z = -2$ — 2-тартибли қутб; $z = 2$ — ўта махсус нуқта; $z = \infty$ — 3-тартибли қутб. 606 ва 607. $z = \frac{1}{k\pi}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) — 1-тартибли қутб-

лар, $z = 0$ — қутбларнинг лимит нуқтаси; $z = \infty$ — 1-тартибли қутб. 608. $z = 0$ — ўта махсус нуқта; $z = \infty$ — оддий ноль. 609. $z = 0$ — ўта махсус нуқта; $z = \infty$ — ўта махсус нуқта. 610. $z = \frac{1}{k\pi}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) — ўта махсус нуқ-

талар; $z = 0$ — ўта махсус нуқталарнинг лимит нуқтаси; $z = \infty$ — ўта махсус нуқта. 611. $z = \frac{2}{(2k+1)\pi}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) — ўта махсус нуқталар;

$z = 0$ — ўта махсус нуқталарнинг лимит нуқтаси; $z = \infty$ — тўғри нуқта. 612. $z = \frac{1}{k\pi}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) — ўта махсус нуқталар; $z = 0$ —

ўта махсус нуқталарнинг лимит нуқтаси; $z = \infty$ — ўта махсус нуқта. 613. $z = \frac{2}{(2k+1)\pi}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) — ўта махсус нуқталар; $z = 0$ — ўта махсус

нуқталарнинг лимит нуқтаси; $z = \infty$ — тўғри нуқта. 614. Агар $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ бўлса, у ҳолда $z = \infty$ нуқта $\max\{n, m\}$ - тартибли қутб бўлади. Агар $n = m$ бўлса, у ҳолда $z = \infty$ нуқта n тартибли n бўлган қутб нуқта n тартибли

нуқта бўлади. 615. $\begin{cases} (n-m) - \text{тартибли кутб, агар } n > m \text{ бўлса,} \\ \text{туғри нуқта, агар } n \leq m \text{ бўлса,} \\ (m-n) - \text{тартибли ноль, агар } n < m \text{ бўлса.} \end{cases}$ 616. $(n+m)$ -

тартибли кутб. 617. n -тартибли кутб. 618. $z=0$ — туғри нуқта (агар $n=m$ бўлса, $\sin(n, m)$ - тартибли ноль ва агар $n \neq m$ бўлса, тартибли n дан

кичик бўлмаган ноль). 619. $\begin{cases} |n-m| - \text{тартибли кутб, агар } n \neq m \text{ бўлса,} \\ \text{туғри нуқта, агар } n = m \text{ бўлса.} \end{cases}$

621. Масалан, $f(z)=z^2$ 622. Масалан, $f(z)=\frac{1}{z^2}+z$. 623. Масалан,

$f(z)=\frac{1}{z^n-1}$ 624. $\frac{dz}{z-a}$ ($a \neq 0$) ёки $az+b$ ($a \neq 0$) 625. $\frac{dz}{(z-a)^n}$ ($a \neq 0$) ёки

$a_0+a_1z+\dots+a_nz^n$ ($a_n \neq 0$) 626. $\frac{1}{z}+c$ 627. $\frac{a_0+a_1z+\dots+a_nz^n}{(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_n)}$ ($a_1 \neq a_2$, агар

$k=1$ бўлса ва ҳеч бўлмаганда a_n лардан бирортаси $\neq 0$ бўлса), ёки

$\frac{a_0+a_1z+\dots+a_nz^n}{(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_{n-1})}$ ($a_n \neq 0$ ва $k \neq 1$ бўлганида a_1, a_2) 628. $\frac{a_0+a_1z+\dots+a_nz^n}{z^n}$

($a_n \neq 0, a_{n-1} \neq 0$). 631. Қўрсатма. $A = \infty$ бўлсин. У ҳолда $\{z_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ десак,

$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ ва $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{z_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(in) = -i \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n = \infty = A$

бўлади. $A \neq 0$ бўлсин. У ҳолда $\{z_n\}$ кетма-кетликни топиш учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} = A$$

тенгламани счамиз. Бу тенгламадан

$$\frac{1}{z_n} = \text{Arc sin } A = \frac{1}{i} \text{Ln}(1 + \sqrt{1 - A^2})$$

ёки

$$z_n = \frac{i}{\text{Ln}(1 + \sqrt{1 - A^2})} = \frac{i}{\ln(1 + \sqrt{1 - A^2}) + 2k\pi i}; \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

эканлигини топамиз. Энди

$$z_n = \frac{i}{\ln(1 + \sqrt{1 - A^2}) + 2\pi k i}; \quad n = 1, 2, \dots$$

деб олсак (бу ерда $\sqrt{1 - A^2}$ нинг битта қиймати олинган), $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$

ва $f(z_n) = A$ ($n = 1, 2, \dots$) шартлар бажарилади. Демак, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$

632. $A = -$ бўлса, $\{z_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$; $A = 0$ бўлса, $\{z_n\} = \left\{-\frac{1}{n}\right\}$; $A \neq 0, -$ бўлса,

$\{z_n\} = \left\{\frac{1}{\ln A + 2\pi n i}\right\}$. 635. $z = a$ нукта $F(z)$ функциянинг яқкаланмаган мах-

сус нуктаси бўлади. Кўрсатма. Пикар теоремасига кўра ихтиёрий чекли $A_n A_0$ (A_0 — бирорта чекли комплекс сон) сон учун a нуктага интилувчи шундай $\{z_n\}$ кетма-кетлик топиладикки,

$$f(z_n) = A \quad (n=1, 2, \dots)$$

тенглик бажарилди. 0 ва 1 сонларини оламиз. A_0 бир вақтнинг узида уларнинг ҳар иккаласига тенг бўла олмайди. Шунинг учун Пикар теоремасига кўра a нуктага интилувчи шундай $\{z_n\}$ кетма-кетлик топиладикки, барча $n=1, 2, \dots$ лар учун ёки $f(z_n)=0$ ёки $f(z_n)=1$ бўлади. Барча z_n нукталар $F(z)$ функциянинг қутблари бўлади, a нукта $\{z_n\}$ кетма-кетликнинг лимит нуктаси (функция қутб нукталарининг лимит нуктаси) сифатида $F(z)$ функциянинг яқкаланмаган махсус нуктаси бўлади. 636. $z=0$ — ўта махсус нукта; чекли A_0 мавжуд эмас. 637. $z=0$ — ўта махсус нукта; $A_0=0$. 638. $z=-$ — ўта махсус нукта; $A_0=0$. 639. $z=0$ — ўта махсус нукта; чекли A_0 мавжуд эмас. 640. $z=-$ — ўта махсус нукта; $A_0=i$. 641. $z=-$ — ўта махсус нукта; $A_0=-i$.

VI боб

$$1. 1. 2. -1. 3. \frac{\sqrt{2}}{2}. 4. \frac{3}{2}. 5. -\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}. 6. \frac{1}{n!}. 7. \frac{21}{23}. 8. -\frac{31}{25}. 9. -\frac{7}{64}. 10. -1$$

$$11. 1. 12. 4. 13. \operatorname{res}_{z=1} f(z) = 1; \operatorname{res}_{z=1} f(z) = -\frac{1}{2}; \operatorname{res}_{z=-1} f(z) = -\frac{1}{2}. 14. \operatorname{res}_{\substack{z=0 \\ z=e^4}} f(z) =$$

$$= \frac{1-i}{4\sqrt{2}}; \operatorname{res}_{\substack{z=0 \\ z=e^4}} f(z) = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}; \operatorname{res}_{\substack{z=0 \\ z=e^4}} f(z) = -\frac{1-i}{4\sqrt{2}}; \operatorname{res}_{\substack{z=0 \\ z=e^4}} f(z) = -\frac{1-i}{4\sqrt{2}}$$

$$15. \operatorname{res}_{z=1} f(z) = 1. 16. \operatorname{res}_{z=1} f(z) = -\frac{1}{16}. \operatorname{res}_{z=-1} f(z) = \frac{1}{16}. 17. \operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0;$$

$$\operatorname{res}_{z=1} f(z) = 1. 18. \operatorname{res}_{z=1} f(z) = \frac{e}{3}; \operatorname{res}_{z=-1} f(z) = -\frac{1}{3e^2}. 19. \operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0;$$

$$\operatorname{res}_{z=1} f(z) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}. 20. \operatorname{res}_{z=k} f(z) = (-1)^k, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots. 21. \operatorname{res}_{z=1} f(z) = -\frac{143}{24}.$$

$$22. \operatorname{res}_{z=1} f(z) = C_{2n}^{-1}. 23. \operatorname{res}_{z=1} f(z) = e; \operatorname{res}_{z=0} f(z) = -5. 24. \operatorname{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{24}.$$

$$25. \operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0; \operatorname{res}_{z=\frac{\pi}{2}} f(z) = \frac{1}{\pi}; \operatorname{res}_{z=\frac{\pi}{2}+n\pi} f(z) = \frac{-1}{\pi^2(2n+1)(4n+1)}, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$26. \operatorname{res}_{z=(-1)^n \frac{\pi}{2}+n\pi} f(z) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{\pi}{6}+2n\pi}, & n - \text{жұфт сөн}, \\ \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\pi}{6}+(2n-1)\pi}, & n - \text{тоқ сөн}. \end{cases}$$

$$\operatorname{res}_{z=(-1)^n \frac{\pi}{2}+n\pi} f(z) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\pi}{6}+2n\pi}, & n - \text{жұфт сөн}, \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{\pi}{6}+(2n-1)\pi}, & n - \text{тоқ сөн}. \end{cases} \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$27. \operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0. \quad 28. \operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0. \quad 29. \operatorname{res}_{z=0} f(z) = -\frac{1}{6}; \operatorname{res}_{z=1} f(z) = \frac{2}{27} \sin^2 \frac{3}{2}$$

$$30. \operatorname{res}_{z=0} f(z) = \frac{(-1)^n}{n}; \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad 31. \operatorname{res}_{z=(n+\frac{1}{2})\pi} f(z) = 1, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$32. \operatorname{res}_{z=n\pi} f(z) = 0, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad 33. \operatorname{res}_{z=1} f(z) = \sin 1 \quad 34. \operatorname{res}_{z=(2n+1)\pi} f(z) =$$

$$=-1, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad 35. \operatorname{res}_{z=1} f(z) = 0 \quad 36. \operatorname{res}_{z=0} f(z) = 1.$$

$$\operatorname{res}_{z=\frac{1}{2}k\sqrt{\pi}} f(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi k}}; \quad k=0, 1, 2, \dots \text{ ба } n=1, 2, 3, \dots \quad 37. 0. \quad 38. 0. \quad 39. -1 \quad 40. -1$$

$$41. \pi^2 \quad 45. \operatorname{res}_{z=\pm 1} f(z) = -\frac{1}{2}; \quad \operatorname{res}_{z=0} f(z) = 1; \quad \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0 \quad 46. \operatorname{res}_{z=1} f(z) = -\frac{1}{4};$$

$$\operatorname{res}_{z=-1} f(z) = \frac{1}{4}; \quad \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0. \quad 47. \operatorname{res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{64}; \quad \operatorname{res}_{z=1} f(z) = -\frac{1}{64};$$

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0. \quad 48. \operatorname{res}_{z=1} f(z) = \frac{257}{64}; \quad \operatorname{res}_{z=2} f(z) = -\frac{1}{64}; \quad \operatorname{res}_{z=1} f(z) = -8$$

$$49. \operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0; \quad \operatorname{res}_{z=1} f(z) = -\frac{1023}{256} i; \quad \operatorname{res}_{z=-1} f(z) = \frac{1023}{256} i; \quad \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

$$50. \operatorname{res}_{z=-1} f(z) = (-1)^{n+1} \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}; \quad \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = (-1)^n \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!};$$

$$51. \operatorname{res}_{z=0} f(z) = a^n + a^{-n}; \quad \operatorname{res}_{z=0} f(z) = -a^{-n}; \quad \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -a^{-n}. \quad 52. \operatorname{res}_{z=0} f(z) = 1;$$

$$\operatorname{res}_{z=1} f(z) = -\frac{1}{2}; \quad \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0. \quad 53. \operatorname{res}_{z=1} f(z) = 0; \quad \operatorname{res}_{z=1} f(z) = 1;$$

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -1. \quad 54. \operatorname{res}_{z=1} f(z) = 2 \sin 2; \quad \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -2 \sin 2. \quad 55. \operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0;$$

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0; \quad 56. \operatorname{res}_{z=1} f(z) = -\frac{1}{4e}; \quad \operatorname{res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{4e}; \quad \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

$$57. \operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0; \operatorname{res}_{z=0} f(z) = -\frac{1}{4} e^{\frac{3\pi i}{4}} \left(\cos \sqrt{2} + ch\sqrt{2} \right); k=0, 1, 2, 3;$$

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0. \quad 58. \operatorname{res}_{z=1} f(z) = -\frac{1}{4e}; \operatorname{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{2e} \quad 59. \operatorname{res}_{z=2\pi i} f(z) = -$$

$$-1 (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad 60. \operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0 (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad 61. \operatorname{res}_{z=0} f(z) = -$$

$$-1 (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad 62. \operatorname{res}_{z=2} f(z) = \operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0. \quad 63. \operatorname{res}_{z=2} f(z) = -$$

$$-\operatorname{res}_{z=0} f(z) = -\frac{143}{24} \quad 64. \operatorname{res}_{z=2} f(z) = -\operatorname{res}_{z=0} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}$$

$$65. \operatorname{res}_{z=1} f(z) = -\operatorname{res}_{z=0} f(z) = -\cos 1 \quad 66. \operatorname{res}_{z=3} f(z) = -\operatorname{res}_{z=0} f(z) = -\sin 2 \times$$

$$\times \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{2n}}{(2n-1)!(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)!} \right] \quad 67. \operatorname{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{2}; \operatorname{res}_{z=\frac{1}{2}\pi i} f(z) =$$

$$= \frac{1}{2k\pi i} (k = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad 68. \operatorname{res}_{z=0} f(z) = -\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{агар } n < 0 \text{ еки } n > 0 \text{ ва тоқ сон бўлса,} \\ \frac{(-1)^{n/2}}{(n+1)!}, & \text{агар } n = 0 \text{ еки } n > 0 \text{ ва жуфт сон бўлса.} \end{cases} \quad 69. \operatorname{res}_{z=\frac{1}{2}\pi i} f(z) =$$

$$= (-1)^{k+1} \frac{1}{k^2 \pi^2} (k = \pm 1, \pm 2, \dots), \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{1}{6} \quad 70.$$

$$\operatorname{res}_{z=\pm \frac{1}{2}\pi i} f(z) = (-1)^k 2k^{-1} \pi^2 (k=1, 2, \dots), \quad 72. 1 \quad 73. 24 \quad 74. \frac{1}{3} \quad 75. 0 \quad 76. -\frac{1}{3}$$

$$77. -\frac{1}{3} \quad 79. -2c_2 c_1 \quad 80. Ag(a) \quad 81. c_{-k} g(a) + \frac{c_{-k} g^{(1)}(a)}{1!} + \dots + \frac{c_{-k} g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}.$$

$$82. ng(a) \quad 83. -ng(a) \quad 84. \frac{1}{x^2} \quad 86. (1-2e^{-1})\pi i \quad 87. 2(1-e^{-1})\pi i \quad 88. 2\pi i \quad 89. 0$$

$$90. -4\pi i \quad 91. 2\pi i \quad 92. \frac{\pi}{2} \quad 93. -\pi i \quad 94. -2\pi i \quad 95. -2\pi i (\cos 1 + \sin 1) \quad 96. 2\pi i$$

$$97. -\frac{\pi^2}{2} \quad 98. -\frac{\pi}{2} \quad 99. -\frac{4}{3} \ln 3 \pi i \quad 100. 0 \quad 101. 2\pi i \quad 102. \frac{\sin 1 - 4 \cos 1}{4!} \quad 103. 0$$

$$104. 2\pi i \quad 105. -\frac{\pi i}{4} \quad 106. 2\pi i \quad 107. 0 \quad 108. 2\pi i \quad 109. \frac{\sin \frac{1}{2}}{36} \pi i \quad 110. -2\pi i \quad 111. \pi i$$

$$112. 2\pi i \quad 113. 0 \quad 114. 0 \quad 115. \frac{1}{3} e^{1/2} \pi i \quad 116. \{\cos 1 + \sin 1 + i(\sin 1 - \cos 1)\} \frac{\pi}{2} \quad 117. 0.$$

$$118. 3\pi i \quad 119. 0 \quad 120. 4\pi i (\cos 1 - \sin 1) \quad 121. -\frac{2\pi i}{3} \quad 122. \frac{\pi}{2} (i-1) \sin 1 \quad 123. -4\pi i.$$

124. 2π . 125. -2π . 126. π . 127. $-\frac{2\pi}{3}$. 128. 0. 129. 2π . 130. 0. 131. $-\frac{\pi}{2}$.
 132. $\pi \sin 1$. 133. $-\frac{3\pi}{4}$. 134. $\frac{16}{3}\pi$. 135. 0. 136. 0. 137. 2π . 138. -2π . 139. 2π .
 140. $\pi (\cos 1 + 2\sin 1)$. 141. 0. 142. $\frac{\pi}{3}(1 - 1)e^{\frac{\pi}{3}}$. 143. -10π . 144. 0. 145. $-\frac{2\pi}{9}$.
 146. $\frac{\pi}{n}$. 147. π . 148. 0. 149. $1 > 0$, лекин чегирмаларнинг Ягиндиси 0 га тенг. 150. $1 = 0$, лекин чегирмаларнинг Ягиндиси $\neq 0$. 151. $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. 152. $\frac{10}{27}\pi$.
 153. $\frac{2}{3}\pi$. 154. π . 155. $-\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$. 156. $\frac{2\pi}{3}$. 157. $\frac{13}{45}\pi$. 158. $2\pi(\sqrt{2}-1)$. 159. π .
 160. $2\pi e^{-1}$. 161. $\frac{2\pi a}{(a-b)^{3/2}}$. 162. $\frac{(2a+b)\pi}{[a(a+b)]^{1/2}}$. 163. $\frac{2\pi}{1-a^2}$, агар $|a| < 1$ бўлса, $-\frac{2\pi}{a^2-1}$, агар $|a| > 1$ бўлса, 0 (бош қиймат), агар $|a|=1$, $\sin 1$ бўлса, $(a=1)$ бўлганда бош қиймат мавжуд эмас). 164. $\frac{\pi(a^2+1)}{1-a^2}$, агар $|a| < 1$ бўлса; $\frac{\pi(a^2+1)}{a(a^2-1)}$, агар $|a| > 1$ бўлса; $\frac{\pi}{2}$ (бош қиймат), агар $|a|=1$, $a \neq \pm 1$ бўлса ($a=\pm 1$ бўлганда бош қиймат мавжуд эмас). 165. $\begin{cases} \frac{2\pi}{\pi^2}, & \text{агар } n \geq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } n < 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$ 166. π ва 0 бўлганда интегралнинг бош қиймати 0 га тенг. 167. $-2\pi \operatorname{sign}(Ima)$. 168. $\frac{\pi}{a}$. 169. π . 170. π . 171. $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.
 172. $\frac{\pi}{2}$. 173. 0. 174. $\frac{\pi}{a}(1 - \sqrt{1-a})$. 175. $\frac{\pi}{a}$. 176. $\pi \frac{1+a^2}{1-a^2}$. 177. $2\pi \frac{a^n}{1-a^2}$.
 178. $\begin{cases} 0, & \text{агар } n = 2k \text{ бўлса,} \\ 2\pi \frac{(-1)^k a^{2k+1}}{1-a^2}, & \text{агар } n = 2k+1 \text{ бўлса} \end{cases}$ 179. $\frac{2\pi}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^n$. 180. $\pi 2^{1-n} (-1)^n$.
 181. $\frac{\pi}{6}$. 182. $\frac{\pi}{2}$. 183. $\frac{\pi}{4}$. 184. $\frac{\pi}{4}$. 185. $\frac{\pi}{12}$. 186. 0. 187. $\pi\sqrt{2}$. 188. $\frac{4\pi}{3}$.
 189. $\frac{\pi}{4}$. 190. 0. 191. $-\frac{\pi}{27}$. 192. $\frac{\pi}{4a}$. 193. $\frac{\pi}{ab(a+b)}$. 194. $\frac{3\pi\sqrt{2}}{16a}$. 195. 0.

$$196. \frac{\pi}{32} a^{-\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{2}} \quad 197. \frac{\pi(2a+b)}{2ab(a+b)} \quad 198. 0 \quad 199. \frac{\pi}{2n \sin \frac{\pi}{2n}} \quad 200. a^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{a}{\pi}} \times$$

$$2^{\frac{1}{2}} + \frac{(2n-3)!!}{(n-1)!} \quad 201. \frac{\pi}{n} \frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{n}} \quad 202. \frac{\pi}{2} \quad 203. -\frac{2\pi}{e} \sin 1 \quad 204. 0 \quad 205. \pi e^{1-\pi}$$

$$206. \pi(1-\eta)e^{-\eta} \quad 207. \frac{3\pi e^{-2}}{32} \quad 208. \frac{\pi}{3e^2} (\cos 1 - 3 \sin 1) \quad 209. \frac{\pi}{3e^2} (3 \cos 1 + \sin 1).$$

$$210. \frac{\pi}{2e^2} (2 \cos 2 + \sin 2) \quad 211. \pi e^{-2} \cos 2 \quad 212. \frac{\pi}{2} e^{-1} (4-e) \quad 213. \frac{\pi}{2} (e^{-1} + e^{-3}).$$

$$214. \pi(e^{-1} + e^{-3}) \quad 215. \pi e^{-2} (\cos 4 - \sin 4) \quad 216. \pi e^{-1} (\cos 1 + \frac{1}{3} \sin 1) \quad 217. \pi e^{-1} (\frac{1}{3} \cos 1 -$$

$$-\sin 1) \quad 218. \frac{\pi}{2a} e^{-a} \quad 219. \frac{\pi e^{-ab}}{2b} \quad 220. \frac{\pi}{2} e^{-a} \quad 221. \frac{\pi}{4a} e^{-a} \quad 222. \frac{\pi}{2} e^{-ab}.$$

$$223. \frac{\pi(a^2-3a+1)}{16a^3} e^{-a} \quad 224. \frac{\pi}{2(b-a)^2} \left(\frac{e^{-a}}{a} - \frac{e^{-b}}{b} \right) \quad 225. \frac{\pi}{3} \left[2 \sin \frac{a}{2} -$$

$$- \sin \left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{3} \right) \right] e^{-\frac{a\sqrt{3}}{2}} \quad 226. \pi i \quad 227. -\pi i \quad 228. \pi(2 \sin 2 - 3 \sin 3) \quad 229. \frac{\pi}{3} (\cos 1 - \frac{1}{e}).$$

$$230. \frac{\pi}{4} [e^{-i\pi} - \sin i \cos i] \quad 231. -\frac{\pi}{2} \frac{1}{1+e^{i\pi}} \quad 232. \pi i \quad 233. -\pi i \quad 234. \pi i \quad 235. -\pi i.$$

236. $\frac{\pi}{2}$ Курсатма Берилган интегрални ҳисоблаш учун 141-қизмада курсатилган $\Gamma_{\alpha\alpha}$ эпик контурни олиб, ушбу

$$I_{p,R} = \oint_{\Gamma_{p,R}} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

белгилашни киритамиз. Бу интегралнинг қиймати 0 га тенг, чунки $\frac{e^{iz}}{z}$

функция $\Gamma_{\alpha\alpha}$ контур билан чегараланган соҳанинг ичида голоморф. Иккинчи томондан эса

$$0 = I_{p,R} = \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \quad (1)$$

$\frac{e^{iz}}{z}$ функциянинг $z=0$ нуқта атрофидаги Лоран қаторига ёйилмасининг бош қисми $\frac{1}{z}$ га тенг бўлганлиги сабабли (чунки $z=0$ нуқта бу функция учун 1-тартибли қутб),

$$\frac{e^z}{z} = \frac{1}{z} + g(z)$$

бўлади. Бу ердаги $g(z)$ функция $z=0$ нуктада голоморф. Агар $z \in \gamma$, бўлса, унда $z = re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $dz = ir e^{i\varphi} d\varphi$ ва

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{e^z}{z} dz = \int_{\gamma_\rho} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_\rho} g(z) dz = i \int_0^\pi d\varphi + \int_{\gamma_\rho} g(z) dz = -i\pi + \int_{\gamma_\rho} g(z) dz$$

бўлади. $g(z)$ функция $z=0$ нуктанинг атрофида чегараланган бўлгани учун (чунки у $z=0$ нуктада голоморф) $\rho \rightarrow 0$ да $\int_{\gamma_\rho} g(z) dz \rightarrow 0$ бўлади. У

ҳолда охириги тенгликдан ушбу

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} \frac{e^z}{z} dz = -i\pi \quad (2)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Жордан леммасига кўра

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^z}{z} dz = 0 \quad (3)$$

бўлади. Уидан ташқари

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz = \int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz = \int_{\gamma} \frac{e^z - e^{-z}}{z} dz = 2i \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \quad (4)$$

тенглик тузилади. Ўшдан (1) тенгликда ρ ни 0 га, R ни ∞ га интeлитириб леммага ўтказамиз (бу ерда (2), (3) ва (4) тенгликлардан фойдаланамиз).

$$0 = -i\pi + 0 + 2i \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} \frac{\sin x}{x} dx$$

Бу тенгликдан

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

эканлиги келиб чиқади.

$$237. \frac{\pi}{2} \quad 238. -\frac{\pi}{2} \quad 239. \pi(e^{-ab} - \frac{1}{2}) \quad 240. \frac{\pi}{2b^2}(1 - e^{-ab}) \quad 241. \frac{\pi}{4b^2} [2 - (2 + e^{-ab})e^{-ab}] \quad 242. \frac{\pi}{2} \quad 243. \pi(b-a) \quad 244. \frac{\pi}{2} \quad 245. \frac{\pi}{8} \quad 246. \frac{\pi}{2} \quad 247. \frac{\pi}{2b^2} -$$

$$-\frac{\pi}{4b}(1-e^{-2ab}). \quad 248. \quad \frac{\pi}{2a}(1-a+\frac{a^2}{2}-e^{-a}). \quad 249. \quad I_1 = I_2 = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$

$$250. \frac{\Gamma(p) \cos \frac{\pi p}{2}}{a^p}. \quad 251. \frac{\Gamma(p) \sin \frac{\pi p}{2}}{a^p}. \quad 252. \frac{1}{p} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \cos \frac{\pi}{2p}. \quad 253. \frac{1}{p} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \sin \frac{\pi}{2p}$$

$$254. \frac{1}{p-1} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \cos \frac{\pi}{2p}, \quad p=1 \text{ бўлганда интегралнинг қиймати } \frac{\pi}{2} \text{ га тенг.}$$

255. -2 256. 1. 257. -3 258. 0. 261. 1 262. 1 263. 5 264. 2 265. 1 266. 1 267. 0. 268. 4 269. 5. 270. 1 271. 1. 272. 6 273. 3. 274. 1 275. 0 276. 0. 277. n 279. а) 1 б) 3. 280. а) 0 б) 4 281. 2. 282. n. 283. n. 293. Курсатма. Гурвиц теоремасидан фойдаланинг. 297. Курсатма. Масала шартидан $f(z)$ функция D соҳада чекли сондаги $a_1, a_2, \dots, a_n$ нолларга ва $b_1, b_2, \dots, b_m$ қутбларга эга бўлиши келиб чиқади. Унда

$$f(z) = \frac{(z-a_1) \dots (z-a_n)}{(z-b_1) \dots (z-b_m)} f_1(z)$$

деб олишимиз мумкин. Бу ерда $f_1(z) \in \sigma(D)$ ва $\forall z \in D$ учун $f_1(z) \neq 0$. Агар $\varphi(z) = (z-a_1) \dots (z-a_n) f_1(z)$ ва $g(z) = -(z-b_1) \dots (z-b_m)$ деб белгиласак, $\varphi(z)$ ва $g(z)$ функцияларнинг D соҳадаги ноллари устма-уст тушади ҳамда масала шартидан $\forall z \in \partial D$ учун $|\varphi(z)| > |g(z)|$ тенгсизликнинг бажарилиши келиб чиқади. У ҳолда Руше теоремасига кўра $\varphi(z)$ (ўз навбатида $f(z)$) ва $\varphi(z) + g(z)$ функцияларнинг D соҳадаги ноллари сони тенг бўлади. Ушбу $f(z) - 1 = \frac{\varphi(z) + g(z)}{(z-b_1) \dots (z-b_m)}$ тенгликдан эса исбот келиб чи-

қади 299. 0 300. а) 2. б) 1. 301. Ҳар бир квадрантда биттадан илдиэга эга. 302. Иккинчи ва учинчи квадрантларда иккитадан илдиэга эга.

Адабиётлар

1. Худойберганов Г., Ворисов А., Мансуров Х. Комплекс анализ (маърузалар). — Т. «Университет», 1998.
2. Саъдуллаев А., Мансуров Х., Худойберганов Г., Ворисов А., Фуломов Р. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами 1-қисм. — Т., «Ўзбекистон», 1993; 2-қисм, — Т. «Ўзбекистон», 1995.
3. Мақсудов Ш., Салоҳиддинов М., Сирожиiddинов С. Комплекс узғарувчининг функциялари назарияси. — Т., «Уқитувчи», 1979.
4. Мақсудов Ш. Аналитик функциялар назариясидан машқлар — Т. «Уқитувчи», 1978.
5. Волковский Л. И., Луиц Г. Л., Араманович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного, 3-нашри М., «Наука», 1975.
6. Евграфов М. А., Бежанов К. А., Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Сборник задач по теории аналитических функций, 2-нашри. М., «Наука», 1972.
7. Ангилейко И. М., Козлова Р. В. Задачи по теории функции комплексной переменной. Минск, «Вышэйшая школа», 1976.
8. Маркушевич А. И., Маркушевич Л. А. Введение в теорию аналитических функций, М., «Просвещение», 1977.
9. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1976.
10. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного, 4-нашри, М., «Наука», 1973.
11. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ, 2-нашри, 1-қ. М., «Наука», 1976.
12. Привалов И. И. Введение в теорию функции комплексного переменного. М., Госиздат физ.-мат. литературы, 1977.

МУНДАРИЖА

Сўз боши	3

I боб Комплекс сонлар

1-§. Комплекс сон тушунчаси. Комплекс сонлар устида амаллар	5
2-§. Комплекс соннинг геометрик тасвири. Комплекс текислик	10
3-§. Комплекс текисликда соҳа	19
4-§. Комплекс сонлар кетма-кетлиги ва унинг limiti	31

II боб. Комплекс аргументли функциялар

1-§. Комплекс аргументли функциялар, уларнинг limiti, узлуксизлиги	41
2-§. Функциянинг дифференциалланувчилиги. Коши-Риман шартлари	55
3-§. Ҳосила модули ва аргументининг геометрик маъноси. Конформ акслантиришлар	71

III боб. Элементар функциялар ва улар ёрдамида бажариладиган конформ акслантиришлар

1-§. Чизикли функция	79
2-§. Каср чизикли функция	85
3-§. Даражали функция	100
4-§. Жуковский функцияси	105
5-§. e^z функцияси. Тригонометрик функциялар	114
6-§. Кўп қийматли функциялар	132
7-§. Симметрия принципи	162

IV боб. Комплекс аргументли функциянинг интеграл

1-§. Интеграл тушунчаси	181
2-§. Коши теоремаси	196
3-§. Кошининг интеграл формуласи	209

Р	220
аторлар	228
рлар	235
.....	267
яккаланган махсус нуқталари	279

ириясн

уларни ҳисоблаш	292
и чегирмалар ёрдамида ҳисоблаш	303
иципи. Руше теоремаси	330
.....	342
ар	351
.....	396

*Азимбой Саъдуллаев, Гулмирза Худойберганов,
Хожиакбар Мансуров, Азизжон Ворисов, Тохир Туйчиев*

СБОРНИК ПРИМЕРОВ И ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

На узбекском языке

Учебник для студентов университетов

Издательство «Ўзбекистон»—2000.
Ташкент, 700129, Навои, 30.

Бадий муҳаррир *Т. Қаноатов*
Техник муҳаррир *М. Хужамқулова*
Мусаҳҳиҳ *Н. Умарова*

Теришга берилди 30.06.99. Босишга рухсат этилди 22.03.2000. Бичими
84×108/32. «Таймс» гарнитурда офсет босма усулида босилди.
Шартли бос т. 21,0. Нашр т. 20,98. Буюртма № 952. 2000 нусхада чоп

V боб. Қаторлар

1-§. Сонли қаторлар	220
2-§. Функционал қаторлар	228
3-§. Даражали қаторлар	235
4-§. Лоран қатори	267
5-§. Функциянинг яккаланган махсус нуқталари	279

VI боб. Чегирмалар назарияси

1-§. Чегирмалар ва уларни ҳисоблаш	292
2-§. Интегралларни чегирмалар ёрдамида ҳисоблаш	303
3-§. Аргумент принципи. Руше теоремаси	330
Илова	342
Жавоблар ва курсатмалар	351
Адабиётлар	396

*Азимбой Саъдуллаев, Гулмирза Худойберганов,
Хожиакбар Мансуров, Азизжон Ворисов, Тохир Туйчиев*

**СБОРНИК ПРИМЕРОВ И ЗАДАЧ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ**

На узбекском языке

Учебник для студентов университетов

Издательство «Ўзбекистон» — 2000.
Ташкент, 700129, Навои, 30.

Бадий муҳаррир *Т. Қаноатов*
Техник муҳаррир *М. Хужамқуллова*
Мусаҳҳиҳ *Н. Умарова*

Теришга берилди 30.06.99. Босишга рухсат этилди 22.03.2000. Бичими
84×108¹/32. «Таймс» гарнитурда офсет босма усулида босилди.
Шартли бос. т. 21,0. Нашр т. 20,98. Буюртма № 952. 2000 нусхада чоп
этилди. Баҳоси шартнома асосида.

«Ўзбекистон» нашриёти, 700129, Тошкент, Навоий кучаси, 30.
Нашр № 229-96.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитаси, Тошкент матбаа
комбинатида босилди, 700129, Тошкент, Навоий, 30.

Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами/А. Саъдуллаев, Г. Худойберганов, Х. Мансуров ва бошқ. [3-китоб]: (Комплекс анализ).— Т.: Ўзбекистон, 2000.— 400 б.

1. Саъдуллаев А. ва бошқ.

Қўлланма университетлар ҳамда педагогика институтлари, шунингдек, олий техника уқув юр்தларининг олий математика чуқур дастур асосида ўқитиладиган факультетлари талабалари учун муъжалланган.

Қўлланма уқув адабиети Давлат таълим стандартининг бакалавр мутахассислиги Б.01.01.00 — «Математика», Б.01.02.00—«Татбикий математика ва информатика» ва Б.01.03.00 — «Механика» иуналишлари га мос келади.

Қўлланма комплекс анализга кириш, элементар функциялар ва улар ердамида бажариладиган конформ акслантиришлар, комплекс ўзгарувчили функцияларнинг дифференциал ва интеграл ҳисоби мавзуларини ўз ичига олади. Қўлланмада 2237 та мисол ва масалалар келтирилган бўлиб, уларнинг аксарияти батафсил ечим ва кўрсатмалар билан таъминланган.

ББК 22.161я73

№ 30—2000

Алишер Навоий номидаги
Ўзбекистон Республикасининг
Давлат кутубхонаси



Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тупла-
ми/А. Саъдуллаев, Г. Худойберганов, Х. Мансуров ва бошқ.
[3-китоб]: (Комплекс анализ).— Т.: Узбекистон, 2000.—
400 б.

1. Саъдуллаев А. ва бошқ.

Қўлланма университетлар ҳамда педагогика институтлари, шунинг-
дек, олий техника ўқув юр்தларининг олий математика чуқур дастур
асосида ўқитиладиган факультетлари талабалари учун муъжалланган.

Қўлланма ўқув адабиети Давлат таълим стандартининг бакалавр
мутахассислиги Б.01.01.00 — «Математика», Б.01.02.00—«Татбиқий ма-
тематика ва информатика» ва Б.01.03.00 — «Механика» йуналишлари-
га мос келади.

Қўлланма комплекс анализга кириш, элементар функциялар ва
улар ёрдамида бажариладиган конформ акслантиришлар, комплекс
ўзгарувчили функцияларнинг дифференциал ва интеграл ҳисоби мав-
зуларини ўз ичига олади. Қўлланмада 2237 та мисол ва масалалар кел-
тирилган бўлиб, уларнинг аксарияти батафсил ечим ва курсатмалар
билан таъминланган.

ББК 22.161я73

№ 30—2000

Алишер Навоий номидаги
Ўзбекистон Республикасининг
Давлат кутубхонаси



22.161
М 131

Муаллифлар:

А. САЪДУЛЛАЕВ, Ҳ. МАНСУРОВ,
Г. ХУДОЙБЕРГАНОВ, А. ВОРИСОВ, Р. ҒУЛОМОВ

Такризчилар: физика-математика фанлари доктори, профессор
А. АЪЗАМОВ
Самарқанд давлат университети математик анализ кафедраси

ISBN 5-640-01328-1

С 1602070000—76
М 351 (04)—93⁹³

© УЗБЕКИСТОН нашриёти, 1993 .

СУЗ БОШИ

Ўзбекистон жумҳуриятида тил ҳақидаги қонун қабул қилинганидан сўнг, деярли ҳамма фанлар бўйича ўзбек тилидаги адабиётларнинг тақчиллигини сезилиб қолди. Математик анализ бўйича Т. Азларов ва Ҳ. Мансуров томонидан ёзилган икки жилдлик китоб бу масалага маълум қадар жавоб бўлди. Шу билан бирга бу китобларга мос мисол ва масалалар тўплами яратиш эҳтиёжи туғилди.

Ушбу китоб Тошкент Давлат университети математика факультети ўқитувчиларининг бир гуруҳи томонидан тайёрланган бўлиб, у математика ихтисослиги бўйича мутахассислар тайёрлаш дастури ва юқорида қайд этилган китоблар асосида ёзилган.

Китобнинг бу қисмига дастлабки тушунчалар, сонли кетма-кетлик ва унинг лимити, функция ва унинг лимити, функция узлуксизлиги ва текис узлуксизлиги, функциянинг ҳосила ва дифференциали, дифференциал ҳисобнинг асосий теоремалари ва татбиқлари, аниқмас ва аниқ интеграллар, аниқ интегралларнинг баъзи бир татбиқлари ва сонли қаторлар мавзулари киритилган.

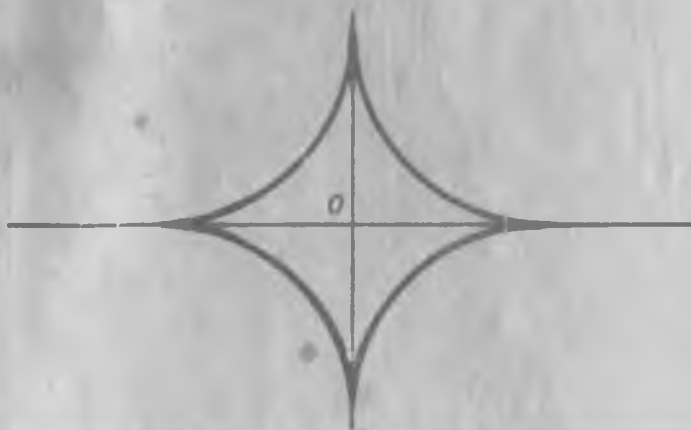
Қўлланмани ёзишда муаллифлар ҳар бир математик тушунча ва тасдиқларни мос мисол ва масалаларни тўлиқ ва синчиклаб таҳлил қилиб ечиш орқали ўқувчиларга етказишга ҳаракат қилдилар. Қўлланмада 244 та мисол ва масала батафсил ечиб кўрсатилган

2364-10

УЗБЕКИСТОН

Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами

I



ОЛИЙ ЎҚУВ ЮРТЛАРИ УЧУН



517
11-34

Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами I

*Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги
университетлар талабалари учун
ўқув қўлланма сифатида
тавсия этган*

ТОШКЕНТ
«ЎЗБЕКИСТОН»
1993

2017 1103 - 03
11948

бўлиб, 1502 та мисол ва масала мустақил ечиш учун тавсия этилган.

Ушбу китобни ёзишда Тошкент Давлат университетида кўп йиллар мобайнида математик анализ курси бўйича олиб борилган дарслар катта ёрдам берди. Шу билан бирга китоб қўлёзмаси тайёр бўлгач, у машқ дарсларида синовдан ўтказилди.

Китоб қўлёзмасини ўқиб, унинг яхшиланишига ўз ҳиссаларини қўшган профессор А. Аъзамов, доцентлар М. Зоҳиров, А. Назаров, А. Жалиловларга муаллифлар миннатдорчилик билдирадilar.

Қўлланмадаги камчиликларни бартараф этиш ва унинг сифатини яхшилаш борасидаги фикр-мулоҳазалар учун муаллифлар олдиндан ўз миннатдорчиликларини билдирадilar.

ДАСТЛАБКИ ТУШУНЧАЛАР

1-§. ТҮПЛАМ. ТҮПЛАМЛАР УСТИДА АМАЛЛАР

Тўплам тушунчаси математиканинг бошланғич, айти пайтда муҳим тушунчаларидан биридир. Тўплами ташкил этган нарсалар (предметлар) унинг элементлари дейилади. Одатда тўпламлар бош ҳарфлар билан, унинг элементлари эса кичик ҳарфлар билан белгиланади. Тўпламлар элементларининг сони нуқтаи назаридан икки хил бўлади: 1) чекли тўпламлар, масалан, $A = \{2, 4, 6, 8\}$ тўплам, 2) чексиз тўпламлар, масалан, $N = \{1, 2, 4, \dots\}$ тўплам.

Иккита A ва B тўплам берилган бўлсин. Агар A тўпламнинг ҳар бир элементи B тўпламнинг ҳам элементи бўлса, A тўплам B тўпламнинг қисми ёки қисмий тўплами деб аталади ва $A \subset B$ каби ёзилади.

1-таъриф. Агар $A \subset B$ ва $B \subset A$ бўлса, у ҳолда A ва B тўпламлар бир-бирига тенг тўпламлар деб аталади ва $A = B$ каби ёзилади.

2-таъриф. A ва B тўпламларнинг барча элементларидан ташкил топган тўплам A ва B тўпламлар йиғиндиси (бирлашмаси) деб аталади ва $A \cup B$ каби ёзилади.

3-таъриф. A ва B тўпламларнинг умумий элементларидан ташкил топган тўплам A ва B тўпламлар қўпайтмаси (кесишмаси) деб аталади ва $A \cap B$ каби ёзилади.

4-таъриф. A тўпламнинг B тўпламга тегишли бўлмаган элементларидан тузилган тўплам A тўпламдан B тўпламнинг айирмаси деб аталади ва $A \setminus B$ каби ёзилади.

5-таъриф. A тўпламнинг B тўпламга тегишли бўлмаган элементларидан ва B тўпламнинг A тўпламга тегишли бўлмаган элементларидан тузилган тўплам A ва B тўпламларнинг симметрик айирмаси деб аталади ва $A \Delta B$ каби ёзилади.

6-таъриф. Биринчи элементи A тўпладан, иккинчи элементи B тўпладан олинган (a, b) ($a \in A, b \in B$) кўринишдаги жуфтликлардан тузилган тўпламга A ва B тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси ёки тўғри кўпайтмаси деб аталади ва $A \times B$ каби ёзилади.

1-мисол. $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 4\}$ бўлсин. U ҳолда
 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}, A \cap B = \{2\};$
 $A \setminus B = \{1, 3\}, B \setminus A = \{4\}, A \Delta B = \{1, 3, 4\};$
 $A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4)\}$

бўлади.

7-таъриф. Агар A тўплам U тўпламнинг қисми, яъни $A \subset U$ бўлса, ушбу

$$U \setminus A = \{x : x \in U, x \notin A\}$$

тўплам A тўпламни U тўпламга тўлдирувчи тўплам деб аталади ва CA ёки $C_u A$ каби белгиланади.

Қуйидаги хоссалар ўринлидир:

1°. $C(CA) = A.$

2°. $C(A \cup B) = CA \cap CB.$

3°. $C(A \cap B) = CA \cup CB.$

4°. $A \setminus CA = \emptyset, A \cup CA = U$ ($\emptyset$ -буш тўплам).

2-мисол. Ушбу

$$A \setminus B = A \cap CB$$

тенглик ўринли эканини кўрсатинг.

Икки тўпламнинг бир-бирига тенг бўлиши таърифига асосан берилган тенгликнинг ўринли бўлишини кўрсатиш учун

$$A \setminus B \subset A \cap CB \text{ ва } A \cap CB \subset A \setminus B$$

муносабатларнинг бажарилишини кўрсатиш етарли.

$\forall a \in A \setminus B$ бўлсин, у ҳолда:

$$a \in A, a \notin B \Rightarrow a \in A, a \in CB \Rightarrow a \in A \cap CB.$$

Демак, $A \setminus B \subset A \cap CB.$

Энди $\forall a \in A \cap CB$ бўлсин:

$$a \in A \cap CB \Rightarrow a \in A, a \in CB \Rightarrow a \in A, a \notin B \Rightarrow a \in A \setminus B.$$

Демак, $A \cap CB \subset A \setminus B.$ Натижада

$$A \setminus B \subset A \cap CB, A \cap CB \subset A \setminus B \Rightarrow A \setminus B = A \cap CB$$

бўлишини топамиз.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги муносабатларнинг ўринли бўлишини кўрсатинг:

1. $A \cap B \subset A \subset A \cup B$.
2. $A \cap (A \cup B) = A$.
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
5. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
6. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
7. $A \cup (CA \cap B) = A \cup B$.
8. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
9. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
10. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \cap (CA \cup CB)$.

2-§. ҲАҚИҚИЙ СОНЛАР

Q — барча рационал сонлардан иборат тўплам бўлсин.

6-таъриф. *Рационал сонлар тўплами Q нинг қисмлари A ва A' тўпламлар*

- 1) $A \neq \emptyset, A' \neq \emptyset$,
- 2) $A \cup A' = Q$,
- 3) $\forall a \in A, \forall a' \in A' \Rightarrow a < a'$

шартларни қаноатлантирсин. У ҳолда A ва A' тўпламлар Q тўпламда кесим бажаради дейилади ва бу кесим (A, A') каби белгиланади. A тўплам кесимнинг қуйи синфи, A' тўплам кесимнинг юқори синфи дейилади.

Q тўпламда бажарилган ҳар қандай кесим фақат икки турли бўлиши мумкин:

1) қуйи синфида энг катта элемент ёки юқори синфида энг кичик элемент мавжуд бўлган кесим. Бундай кесим **рационал кесим** деб аталади.

2) қуйи синфида энг катта элемент мавжуд бўлмаган ва юқори синфида энг кичик элемент мавжуд бўлмаган кесим. Бундай кесим **иррационал кесим** деб аталади.

Биз 1-турдаги кесимга унга мос энг катта ёки энг кичик рационал сонни мос қўямиз. Бу келишувга кўра 2-турдаги кесим учун бирор рационал сонни мос қўйиб бўлмайди.

7-таъриф. *Рационал сонлар тўплами Q да бажарилган иккинчи тур кесим (иррационал кесим) иррационал сонни аниқлайди дейилади.*

Берилган кесим (A, A') аниқлаган сон $\alpha = (A, A')$ кўринишда ҳам ёзилади. Рационал ва иррационал сонлар битта умумий ном билан **ҳақиқий сонлар** дейилади. Барча ҳақиқий сонлар тўплами R ҳарфи билан белгиланади.

Ҳақиқий сонлар тўплами қуйидаги хоссаларга эга:

1°. Ҳақиқий сонлар тўплами тартибланган тўплам.

2°. Ҳақиқий сонлар тўплами зич тўплам.

3°. Ҳақиқий сонлар тўплами тўлиқ (узлуксиз) тўплам.

Ҳақиқий сонлар устида арифметик амаллар бажарилади (қаранг: [1], 2-боб, 7-§).

3-мисол. Ушбу $x^3 = 2$ тенгламани қаноатлантирувчи ҳақиқий соннинг мавжудлигини кўрсатилг.

Қуйидаги рационал сонлар тўпламини оламиз:

$$A' = \{r : r \in Q, r^3 > 2\},$$

$$A = \{r : r \in Q, r^3 < 2\}.$$

Бу A, A' тўпamlар Q да (A, A') кесим бажаради, чунки:

1) $1 \in A, 2 \in A' \Rightarrow A \neq \emptyset, A' \neq \emptyset$.

2) $\forall a \in A, \forall a' \in A' \Rightarrow a^3 < 2 < (a')^3 \Rightarrow a^3 < (a')^3 \Rightarrow a < a'$.

3) $A \cup A' = Q$.

Бу кесим бирор α ҳақиқий сонни аниқлайди:

$$\alpha = (A, A').$$

Энди A тўпламда энг катта, A' тўпламда эса энг кичик элемент (сон) мавжуд эмаслигини кўрсатамиз.

A' тўпламда r_0 сонни ($r_0 > 1$) олиб, унинг ёрдамида ушбу $r_0 - \frac{1}{n}$ рационал сонни қараймиз. (Бунда n натурал сон $n > \frac{3r_0^2}{r_0^3 - 2}$ тенгсизликни қаноатлантирсин ($n = \left[\frac{3r_0^2}{r_0^3 - 2} \right] + 1$ деб олиш мумкин). Агар

$$\begin{aligned} \left(r_0 - \frac{1}{n}\right)^3 &= r_0^3 - \frac{3r_0^2}{n} + \frac{3r_0}{n^2} - \frac{1}{n^3} > r_0^3 - \frac{3r_0^2}{n} + \frac{3r_0}{n^2} - \\ &- \frac{1}{n^3} = r_0^3 - \frac{3r_0^2}{n} + \frac{3r_0 - 1}{n^2} > r_0^3 - \frac{3r_0^2}{n} > 2 \end{aligned}$$

бўлишини эътиборга олсак, унда $\left(r_0 - \frac{1}{n}\right) \in A'$ бўлишини топамиз. Шундай қилиб $r_0 \in A'$ сон олинганда, бу сондан кичик бўлган шундай $r_0 - \frac{1}{n}$ сон мавжудки, $r_0 - \frac{1}{n} \in A'$ бўлади. Бу эса A' тўпламнинг элементлари орасида энг кичиги мавжуд эмаслигини кўрсатади. Худди шу йўл билан A тўпламнинг элементлари орасида энг каттаси мавжуд эмаслиги кўрсатилади. Демак, (A, A') иккинчи тур кесим бўлиб, у α иррационал сонни аниқлайди.

Ҳақиқий сонлар устида арифметик амаллар бажариш қондасидан фойдаланиб $\alpha^3 = 2$ эканлигини кўриш қийин эмас.

Юқорида кўрсатилган усул билан мураккаброқ ҳақиқий сонларга, масалан, $\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}$, $\sqrt[3]{1 + 3 + \sqrt{2}}$ сонларга мос кесимларни қуриш ҳам қийин эмас.

3-§. ҲАҚИҚИЙ СОННИНГ АБСОЛЮТ ҚИЙМАТИ

Бирор $x \in R$ ($x \neq 0$) сонни олайлик. Равшанки, x , $-x$ сонларидан бири албатта мусбат бўлади. Бу мусбат сон x соннинг абсолют қиймати деб аталади ва уни $|x|$ кўринишида белгиланади. Ноль соннинг абсолют қиймати деб ноль соннинг ўзи олинади. Демак,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса,} \\ -x, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Ҳақиқий соннинг абсолют қиймати қуйидаги хоссаларга эга:

1°. $\forall x \in R$ сон учун

$$|x| \geq 0, |x| = |-x|, x \leq |x|, -x \leq |x|$$

муносабатлар ўринлидир.

2°. Ушбу

$$|x| < a \Rightarrow -a < x < a, (a > 0)$$

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

муносабатлар ўринлидир.

3°. Ушбу

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$|x - y| \geq ||x| - |y||,$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|,$$

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0).$$

муносабатлар ўринлидир.

4-§. СОНЛИ ТУПЛАМЛАРНИНГ ЧЕГАРАЛАРИ

Элементлари ҳақиқий сонлардан иборат тўплам сонли тўплам деб аталади. Масалан,

$$\{x : x \in R, a \leq x \leq b\} = [a, b], \quad (1)$$

$$\{x : x \in R, a < x < b\} = (a, b), \quad (2)$$

$$\{x : x \in R, a \leq x < b\} = [a, b), \quad (3)$$

$$\{x : x \in R, a < x \leq b\} = (a, b], \quad (4)$$

тўпламлар сонли тўпламлардир. (1) тўплам сегмент ёки кесма, (2) тўплам интервал, (3) ва (4) тўпламлар ярим интерваллар деб аталади.

Бирор E тўплам ($E \subset R$) берилган бўлсин.

8-таъриф. Агар шундай M сон (m сон) мавжуд бўлсаки, $\forall x \in E$ учун $x \leq M$ ($x > m$) тенгсизлик бажарилса, E тўплам юқоридан (қуйидан) чегараланган дейилади.

9-таъриф. Агар $\forall M$ сон ($\forall m$ сон) олинганда ҳам шундай $x_0 \in E$ топилсаки $x_0 > M$ ($x_0 < m$) тенгсизлик бажарилса, E тўплам юқоридан (қуйидан) чегараланмаган дейилади.

10-таъриф. Агар E тўплам ҳам қуйидан, ҳам юқоридан чегараланган бўлса, E тўплам чегараланган дейилади.

1-теорема. Ҳар қандай юқоридан чегараланган тўплам учун уни юқоридан чегараловчи сонлар ичида энг кичиги мавжуд.

11-таъриф. Юқоридан чегараланган E тўплам учун уни юқоридан чегараловчи сонларнинг энг кичиги тўпламнинг аниқ юқори чегараси дейилади ва $\sup E$ каби белгиланади.

Равшанки,

$$\sup E = a \iff \begin{cases} (1) \forall x \in E \text{ учун } x \leq a, \\ (2) \forall \varepsilon > 0 \text{ учун } \exists x_0 \in E, x_0 > a - \varepsilon. \end{cases}$$

2-теорема. Ҳар қандай қуйидан чегараланган тўплам учун уни қуйидан чегараловчи сонлар орасида энг каттаси мавжуд.

12-таъриф. Қуйидан чегараланган E тўплам учун уни қуйидан чегараловчи сонларнинг энг каттаси тўпламнинг аниқ қуйи чегараси деб аталади ва $\inf E$ каби белгиланади.

Равшанки,

$$\inf E = b \iff \begin{cases} (1) \forall x \in E \text{ учун } x \geq b \\ (2) \forall \varepsilon > 0 \text{ учун } \exists x_0 \in E, x_0 < b + \varepsilon. \end{cases}$$

4-мисол. Агар E тўплам ($E \subset R$) юқоридан чегараланган бўлиб, $E_1 \subset E$ бўлса, у ҳолда

$$\sup E_1 \leq \sup E$$

бўлишини кўрсатинг.

E тўплам юқоридан чегараланган, $E_1 \subset E$ бўлгани сабабли E_1 тўплам ҳам юқоридан чегаралангандир.

Демак, 1-теоремага кўра, $\sup E_1$ ва $\sup E$ лар мавжуд. Уларни мос равишда a ва b билан белгилайлик:

$$\sup E_1 = a, \sup E = b.$$

Энди $a \leq b$ бўлишини исботлаймиз. Тескарисини фараз қилайлик, яъни $a > b$ бўлсин. У ҳолда ҳар доим $a > \alpha > b$ тенгсизликни қаноатлантирувчи α рационал сонни топиш мумкин. $a = \sup E_1$ бўлгани учун, шундай $a^* \in E_1$ мавжудки, $a^* > \alpha$, демак, $a^* > b$ бўлади. Аммо $a^* \in E_1$ ва $E_1 \subset E$ бўлгани учун $a^* \leq b$. Шундай қилиб, $b < a^* \leq b$ тенгсизликларга эга бўлдик. Бу эса $\alpha > b$ тенгсизликка зид. Демак, $a \leq b$, яъни $\sup E_1 \leq \sup E$ бўлади.

Мисол ва масалалар

11. $\sqrt{3}$ сонни аниқловчи кесим тузинг.
 12. Ушбу $x^2 = 2$ тенглама рационал сонлар тўпламида ечимга эга эмаслигини кўрсатинг.
 13. Кесим ёрдамида $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18}$ эканини кўрсатинг.
 14. Кесим ёрдамида $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ эканини кўрсатинг.
 15. Кесим ёрдамида $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ бўлишини кўрсатинг.
 16. Ушбу $x^3 = 3$ тенгламани қаноатлантирувчи ҳақиқий соннинг мавжудлигини кўрсатинг.
- Берилган A ва B тўпламларга кўра $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ тўпламларни топинг.
17. $A = \{x \in R: x^2 - 5x + 6 \leq 0\}$,
 $B = \{x \in R: 2x^2 - 5x < 0\}$.
 18. $A = \{x \in R: |x| + |x - 1| \leq 3\}$,
 $B = \{x \in R: x^2 - 5|x| + 6 < 0\}$.
 19. $A = \{(x, y) \in R \times R: |x| + |y| \leq 1\}$,
 $B = \{(x, y) \in R \times R: x + y > 1\}$.
 20. $A = \{(x, y) \in R \times R: xy \leq 0\}$,
 $B = \{(x, y) \in R \times R: y > x^2\}$.
 21. $A = \{x \in R: 1 < |x - 3| \leq 2\}$,
 $B = \{x \in R: 2|x| < 3\}$.
 22. $A = \{(x, y) \in R \times R: x^3 > y^3\}$,
 $B = \{(x, y) \in R \times R: x^2 > y^2\}$.
 23. $A = \{(x, y) \in R \times R: \sin(x - y) = 0\}$,
 $B = \{(x, y) \in R \times R: \cos(x + y) = 0\}$.
 24. $A = \{(x, y) \in R \times R: |\cos xy| > 1\}$,
 $B = \{(x, y) \in R \times R: |\cos xy| \leq 1\}$.
 25. $A = \{(x, y) \in R \times R: x^2 + y^2 = 0\}$,
 $B = \{(x, y) \in R \times R: x^2 - y^2 = 0\}$.
 26. Агар $A \subset B$ бўлса, $\inf A > \inf B$ эканини кўрсатинг.

27. $A = \{x\}$ ва $B = \{y\}$ ҳақиқий сонлар тўплари берилган бўлиб, $\{x + y\}$ тўплаган эса $\{x + y: x \in A, y \in B\}$ йиғиндилардан иборат тўплаган бўлсин. Унда

$$\begin{aligned}\sup \{x + y\} &= \sup \{x\} + \sup \{y\}, \\ \inf \{x + y\} &= \inf \{x\} + \inf \{y\}\end{aligned}$$

бўлишини исботланг.

28. $A = \{x\}$ ва $B = \{y\}$ манфий бўлмаган ҳақиқий сонлар тўплалари берилган бўлиб, $\{x \cdot y\}$ тўплаган эса $\{x \cdot y: x \in A, y \in B\}$ кўпайтмалардан иборат тўплаган бўлсин. Унда

$$\begin{aligned}\sup \{x \cdot y\} &= \sup \{x\} \cdot \sup \{y\}, \\ \inf \{x \cdot y\} &= \inf \{x\} \cdot \inf \{y\}\end{aligned}$$

бўлишини исботланг.

29. $A = \{x\}$ ҳақиқий сонлар тўплами берилган бўлиб, $\{-x\}$ тўплаган — x сонлардан ($x \in A$) иборат тўплаган бўлсин. Унда

$$\begin{aligned}\sup \{-x\} &= -\inf \{x\}, \\ \inf \{-x\} &= -\sup \{x\}\end{aligned}$$

бўлишини кўрсатинг.

30. Ушбу

$$\left\{ \frac{m}{n} \right\} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, m < n \right\}$$

тўплаганнинг аниқ юқори чегараси $\sup \left\{ \frac{m}{n} \right\}$ ва аниқ қуйи чегараси $\inf \left\{ \frac{m}{n} \right\}$ ларни топинг.

II боб

СОНЛАР КЕТМА-КЕТЛИГИ ВА УНИНГ ЛИМИТИ

1-§. СОНЛАР КЕТМА-КЕТЛИГИ ТУШУНЧАСИ

Фараз қилайлик, f ҳар бир натурал сон $n \in \mathbb{N}$ га бирор ҳақиқий $x_n \in \mathbb{R}$ сонни мос қўювчи акслантириш бўлсин:

$$f: n \rightarrow x_n.$$

Бу акслантириш қийматларидан тузилган

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

(1)

ифода ҳақиқий сонлар кетма-кетлиги (қисқача сонлар кетма-кетлиги) дейилади ($\{x_n\}$ кўринишда белгиланади).

x_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) сонлар (1) кетма-кетликнинг ҳадларини дейилади.

Мисоллар:

$$1) x_n = \frac{1}{n} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

$$2) y_n = (-1)^n : -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$$

$$3) z_n = \frac{(-1)^n}{n} : -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}, \dots$$

$$4) u_n = 1 : 1, 1, 1, \dots, 1, \dots$$

1-таъриф. Агар шундай ўзгармас M сони мавжуд бўлсаки, $\forall n \in N$ учун $x_n \leq M$ ($x_n \geq M$) бўлса, у ҳолда $\{x_n\}$ кетма-кетлик юқоридан (қуйидан) чегараланган дейилади.

Бу таърифни қисқача

$$\exists M \in R, \forall n \in N : x_n \leq M \quad (x_n \geq M)$$

каби ифодалаш мумкин. Масалан,

$$-1, -2, -3, \dots, -n, \dots$$

кетма-кетлик юқоридан,

$$1, 4, 9, \dots, n^2, \dots$$

кетма-кетлик эса қуйидан чегаралангандир.

Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик ҳам қуйидан, ҳам юқоридан чегараланган бўлса, у чегараланган кетма-кетлик дейилади.

2-таъриф. Агар шундай ўзгармас $M > 0$ сон мавжуд бўлсаки, $\forall n \in N$ учун $|x_n| \leq M$ бўлса, у ҳолда $\{x_n\}$ кетма-кетлик чегараланган дейилади.

Бу таърифни қисқача

$$\exists M > 0, \forall n \in N, |x_n| \leq M$$

каби ифодалаш мумкин. Масалан, ушбу

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

кетма-кетлик чегараланган кетма-кетликдир.

1-мисол. Ушбу

$$\frac{2}{1!}, \frac{4}{2!}, \frac{8}{3!}, \dots, \frac{2^n}{n!}, \dots$$

кетма-кетликнинг юқоридан чегараланганлигини исботланг.

Бу кетма-кетликнинг n -ва $(n+1)$ -хадлари

$$x_n = \frac{2^n}{n!}, \quad x_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

учун

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{2^n}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{2}$$

тенглик ўринли бўлади. Агар ихтиёрий натурал n ($n > 1$) сон учун $\frac{n+1}{2} > 1$ эканини эътиборга олсак, унда

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} > 1 \Rightarrow x_n > x_{n+1}$$

бўлишини кўрамиз. Демак,

$$x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_n > x_{n+1} > \dots$$

Бундан эса ихтиёрий $n > 1$ учун

$$x_n < x_1 = 2$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, шундай M сони, яъни $M = 2$ сон топилдики, $\forall n \in N$ учун $x_n = \frac{2^n}{n!} < 2$ бўлди. Бу эса берилган кетма-кетлик юқоридан чегараланганлигини билдиради. $x_n > 0$ эканлигини назарга олсак, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг чегараланганлигини кўрамиз.

2-мисол. Ушбу

$$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \dots, \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ та илдиз}}, \dots \quad (2)$$

кетма-кетликнинг чегараланганлигини исботланг.

$$\text{Равшанки, } x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ та илдиз}} \text{ бўлиб, } \forall n \in N$$

учун $x_n > \sqrt{2}$ бўлади. Бу кетма-кетликнинг қуйидан чегараланганлигини билдиради.

Агар

$$2 = \sqrt{2+2} > \sqrt{2+\sqrt{2}} = x_2,$$

$$2 = \sqrt{2+\sqrt{2+2}} > \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = x_3,$$

$$2 = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + 2}}}}{(n-1) \text{ та илдиэ}} >$$

$$> \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}{n \text{ та илдиэ}} = x_n$$

бўлишини эътиборга олсак, математик индукция усулидан фойдаланиб $\forall n \in N$ учун $x_n < 2$ эканини аниқлаймиз. Шундай қилиб, (2) кетма-кетликнинг ҳам қуйидан, ҳам юқоридан чегараланганлиги кўрсатилди. Демак, берилган кетма-кетлик чегаралангандир.

3-мисол. Ушбу $\{x_n\} = \{\sqrt[n]{n}\}$:

$$1, \sqrt[2]{2}, \sqrt[3]{3}, \dots, \sqrt[n]{n}, \dots$$

кетма-кетликнинг юқоридан чегараланмаганлигини кўрсатинг.

Ихтиёрый мусбат M сонни олайлик. Бу сонга кўра $n_0 = [M + 1]^2$ олинса, унда

$$x_{n_0} = \sqrt[n_0]{n_0} = \sqrt[M+1]{[M+1]^2} = [M+1] > M \quad (3)$$

бўлади. Бу эса $\{\sqrt[n]{n}\}$ кетма-кетликнинг юқоридан чегараланмаганлигини билдиради.

4-мисол. Ушбу

$$\{x_n\} = \left\{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$$

кетма-кетликнинг юқоридан чегараланмаганлигини исботланг.

Равшанки,

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} >$$

$$> 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Демак,

$$x_n > \sqrt{n}.$$

Юқоридаги (3) муносабатдан фойдалансак, ҳар қандай M учун шундай $n_0 \in N$ мавжудки, бу n_0 учун

$$|x_{n_0}| > M$$

бўлади.

Демак,

$$M > 0, \exists n_0 \in N : x_{n_0} > \sqrt{n_0} > M.$$

Бу эса берилган кетма-кетликнинг юқоридан чегараланмаганлигини билдиради.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги кетма-кетликларнинг чегараланганлигини исботланг:

$$1. x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

$$2. x_n = \sqrt{n^2 + (n-1) \sin n} - n.$$

$$3. x_n = \log_{(n+1)} 2.$$

$$4. x_n = \frac{\log_2 n}{n}.$$

$$5. x_n = \frac{n}{4+n^2}.$$

$$6. x_n = \frac{n^2}{2^n}.$$

$$7. x_n = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n}, (n \geq 2).$$

$$8. x_n = \sin 1 + \frac{\sin 2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{\sin n}{(n-1)n}, (n \geq 2).$$

$$9. x_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}, (\alpha \geq 2).$$

$$10. x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$11. x_n = \underbrace{\sin \sin \dots \sin x}_{n \text{ та}}.$$

Қуйидаги кетма-кетликларнинг чегараланмаганлигини исботланг:

$$12. x_n = \frac{3^n}{n^2}.$$

$$13. x_n = (-1)^n n.$$

$$14. x_n = \begin{cases} \sqrt{n}, & \text{агар } n \text{ жуфт бўлса,} \\ \frac{1}{n}, & \text{агар } n \text{ тоқ бўлса.} \end{cases}$$

$$15. x_n = \begin{cases} \sqrt[3]{n}, & \text{агар } n = k^3 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } n \neq k^3 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$16. x_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}, (\alpha \leq 1).$$

$$17. x_n = \log_3 (n^2 + n).$$

18. Агар $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ чегараланган кетма-кетликлар бўлса, у ҳолда $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n y_n\}$ кетма-кетликларнинг чегараланган эканлигини кўрсатинг.

19. Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар чегараланмаган бўлса, $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$ кетма-кетликлар ҳақида нима дейиш мумкин?

20. Агар $\{x_n\}$ чегараланган, $\{y_n\}$ эса чегараланмаган кетма-кетлик бўлса, у ҳолда $\{x_n + y_n\}$ кетма-кетликнинг чегараланмаганлигини кўрсатинг.

21. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун $x_n + x_{n+1}$ йиғинди чегараланган бўлса, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг чегараланган бўлиши шартми?

22. Агар $\{x_n\}$ чегараланган кетма-кетлик бўлса, у ҳолда $y_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ кетма-кетлик ҳам чегараланган эканлигини кўрсатинг. Тескариси ўринлими?

23. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун $\{x_n^2 - x_n\}$ айирма чегараланган бўлса, у ҳолда $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг чегараланган бўлишини кўрсатинг.

24. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун $x_n^2 + \frac{1}{x_n}$ йиғинди чегараланган бўлса, у ҳолда $\{x_n\}$ ва $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ кетма-кетликларнинг чегараланган бўлишини кўрсатинг.

25. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун $x_n > 0$ ва $x_{n+1} \leq x_n(1 - x_n)$, $n \geq 1$ шартлар [бажарилса, $\{nx_n\}$ кетма-кетликнинг чегараланган бўлишини кўрсатинг.

Фараз қилайлик,

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

кетма-кетлик берилган бўлсин.

3-таъриф. Агар $\forall n \in \mathbb{N}$ учун

$$x_n \leq x_{n+1} (x_n < x_{n+1})$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $\{x_n\}$ ўсувчи (қатъий ўсувчи) кетма-кетлик дейилади.

4/1948

Агар $\forall n \in N$ учун

$$x_n > x_{n+1} (x_n > x_{n+1})$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $\{x_n\}$ камаювчи (қатъий камаювчи) кетма-кетлик дейилади.

4-таъриф. Ўсувчи ва камаювчи кетма-кетликлар монотон кетма-кетликлар дейилади.

Масалан

1, 2, 2, 3, 3, 3, . . . , ўсувчи,

2, 2^2 , 2^3 , . . . , 2^n . . . , қатъий ўсувчи,

1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, . . . , $\frac{1}{n}$, . . . , қатъий камаювчи,

1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, . . . , $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n}$, . . . камаювчи

кетма-кетликлар бўлади.

Юқоридаги таърифдан бевосита, $\forall n \in N$ учун

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} \leq 1 (x_n > 0) \text{ ёки } x_n - x_{n+1} \leq 0$$

бўлганда $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ўсувчи,

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} > 1 (x_n > 0) \text{ ёки } x_n - x_{n+1} > 0$$

бўлганда эса кетма-кетликнинг камаювчи бўлиши келиб чиқади.

5-мисол. Ушбу $\{x_n\} = \left\{\frac{n}{2^n}\right\}$:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{2^2}, \dots, \frac{n}{2^n}, \dots$$

кетма-кетликнинг камаювчи эканлигини кўрсатинг.

$$x_n = \frac{n}{2^n} \text{ ва } x_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

лар учун

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

бўлади. Бу тенгсизликдан эса

$$x_n > x_{n+1}$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $\forall n \in N$ учун

$$x_n > x_{n+1}$$

бўлади. Бу эса берилган кетма-кетликнинг камаювчи эканини билдиради.

6-мисол. Ушбу

$$\{x_n\} = \left\{ 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} \right\} (n \geq 2)$$

кетма-кетликнинг ўсувчи эканлигини кўрсатинг.

Берилган кетма-кетликнинг

$$x_n = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n-1)},$$

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n+1)}$$

ҳадларини олиб, уларнинг айирмаси

$$x_{n+1} - x_n$$

ни қараймиз:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} - \\ &- \left(1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} \right) = \frac{1}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

Равшанки, $\forall n \in N$ учун

$$\frac{1}{n(n+1)} > 0.$$

Демак, $\forall n \in N$ учун

$$x_{n+1} - x_n > 0 \Leftrightarrow x_{n+1} > x_n$$

бўлади ва бу берилган кетма-кетликнинг ўсувчи эканини билдиради.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги кетма-кетликларнинг ўсувчи ёки камаювчи бўлишини аниқланг:

26. $x_n = \frac{3^n}{n!}.$

27. $x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 1 - \frac{1}{4x_n} \quad (n \geq 1).$

28. $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad x_1 > 0, \quad a > 0.$

29. $x_{n+1} = x_n(2 - x_n)$, $0 < x_n < 1$ ($n > 1$).

30. n_0 ни қандай танланса, $n > n_0$ лар учун қуйидаги кетма-кетликлар монотон бўлади:

а) $x_n = \frac{3^n}{n^n}$; б) $x_n = \frac{n^2}{2^n}$; в) $x_n = \frac{n!}{n^n}$.

Қуйидаги кетма-кетликларнинг монотон ва чегараланганлигини кўрсатинг:

31. а) $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1}$.

б) $y_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$.

32. $x_1 = 9$, $x_{n+1} = (x_n - 3)^2$ кетма-кетликнинг ўсувчи эканини исботланг.

2-§. СОНЛАР КЕТМА-КЕТЛИГИНИНГ ЛИМИТИ

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (1)$$

сонлар кетма-кетлиги ҳамда бирёр a сон ($a \in R$) берилган бўлсин.

5-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай натурал $n_0 = n_0(\varepsilon)$ сон топилсаки, барча $n > n_0$ натурал сонлар учун

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи дейилади, а сон эса $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити деб аталади ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ ёки } x_n \rightarrow a$$

каби белгиланади.

Бу таърифни қисқача

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

каби ифодалаш мумкин.

7-мисол. Ушбу

$$\{x_n\} = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}: \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

кетма-кетликнинг лимити $a = 1$ бўлишини кўрсатинг.

Ихтиёрий мусбат ε сонни олампиз. Бу $\varepsilon > 0$ сонга кўра $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ дейилса, у ҳолда $\forall n > n_0$ учун

$$|x_n - a| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n_0+1} < \varepsilon$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

8-мисол. Ушбу

$$\{x_n\} = \left\{ \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right\}: -1, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \dots$$

кетма-кетликнинг лимити ноль бўлишини таърифга асосан исбот қилинг.

Ихтиёрий мусбат ε сонни олайлик. Унда бу $\varepsilon > 0$ сонга кўра шундай натурал n_0 ($n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$) сон топилишини кўрсатиш керакки, $n > n_0$ бўлган барча натурал n сонлар учун (демак, топилган n_0 сондан кейин келадиган натурал сонлар учун)

$$|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилсин. Юқорида айтилган n_0 сонни топиш, одатда $|x_n| < \varepsilon$ тенгсизликни ечиш орқали амалга оширилади:

$$|x_n| = \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| < \varepsilon.$$

Равшанки,

$$\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < \sqrt{n} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Демак, n_0 натурал сон сифатида $\left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rceil + 1 = n_0$ олинса, унда $\forall n > n_0$ учун

$$\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - 0 \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

бўлади. Кетма-кетлик лимити таърифига биноан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$$

бўлади.

Эслатма. Шунн таъкидлаш лозимки, кетма-кетлик лимити таърифидаги берилган $\varepsilon > 0$ га кўра топиладиган $n_0 = n_0(\varepsilon)$ натурал сонлар (яъни $\forall n > n_0$ учун $|x_n - a| < \varepsilon$ тенгсизлик бажариладиган) жуда кўп бўлади. Улардан бирини олиш етарлидир.

6-таъриф. Агар

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

бўлса, у ҳолда $\{x_n\}$ ни чексиз кичик миқдор деб аталади. Масалан:

$$1) \{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}; \quad 2) \{x_n\} = \left\{-\frac{1}{n}\right\}; \quad 3) \{x_n\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$$

лар чексиз кичик миқдорлар бўлади.

7-таъриф. Агар $\forall E > 0$ сон олинганда ҳам шундай натурал n_0 сон топилсаки, $\forall n > n_0$ учун

$$|x_n| > E$$

бўлса, $\{x_n\}$ ни чексиз катта миқдор деб аталади.

Агар $\forall E > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топилсаки, $\forall n > n_0$ учун $x_n > E$ ($x_n < -E$) бўлса, унда $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити $+\infty$ ($-\infty$) деб олинади ва $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$) каби белгиланади.

9-мисол. Ушбу

$$\{x_n\} = \{2^{\sqrt{n}}\}: \quad 2, 2^{\sqrt{2}}, 2^{\sqrt{3}}, \dots, 2^{\sqrt{n}}, \dots$$

кетма-кетликнинг лимити $+\infty$ эканини кўрсатинг.

Ихтиёрий $E > 0$ сонни олайлик. Унда бу сонга кўра шундай $n_0 \in N$ ($n_0 = n_0(E)$) сон топилишини кўрсатиш керакки, барча $n > n_0$ учун

$$x_n = 2^{\sqrt{n}} > E$$

тенгсизлик бажарилсин.

Олдинги мисолни ечиш жараёнида айтганимиздек, n_0 сон

$$2^{\sqrt{n}} > E \quad (4)$$

тенгсизликни ечиш орқали аниқланади.

Равшанки,

$$2^{\sqrt{n}} > E \Leftrightarrow \log_2 2^{\sqrt{n}} > \log_2 E \Rightarrow \sqrt{n} > \log_2 E.$$

$0 < E \leq 1$ бўлганда, $n_0 = n_0(E) = 1$ дейилса, $E > 1$ бўлганда, $n_0 = [\log_2^2 E]$ дейилса, унда $\forall n > n_0$ учун ҳар доим (4) тенгсизлик бажарилади:

$$x_n = 2^{\sqrt{n}} > E.$$

Бу эса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\sqrt{n}} = +\infty$$

эканини билдиради.

$\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар берилган бўлсин.

Қуйидаги

$$x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots$$

$$x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n, \dots$$

$$x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \dots, x_n \cdot y_n, \dots$$

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \dots, \frac{x_n}{y_n}, \dots \quad (y_n \neq 0, n = 1, 2, \dots)$$

кетма-кетликлар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликларнинг мос равишда йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва нисбати деб аталади ва

$$\{x_n + y_n\}, \{x_n - y_n\}, \{x_n \cdot y_n\}, \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$$

каби белгиланади.

3-§. ЛИМИТГА ЭГА БЎЛГАН КЕТМА-КЕТЛИКЛАР ҲАҚИДА ТЕОРЕМАЛАР

Айтайлик, $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар берилган бўлиб, улар чекли лимитга эга бўлсин:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b.$$

У ҳолда:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b;$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$$

бўлади.

4) агар $\forall n \in N$ учун $x_n \leq y_n$ бўлса, $a \leq b$ бўлади.

Эслатма. Агар $\forall n \in N$ учун $x_n < y_n$ бўлса, $a < b$ бўлиши шарт эмас. Масалан, $x_n = \frac{1}{n+1}$, $y_n = \frac{1}{n}$ кетма-кетликлар учун $x_n < y_n$ ва $a = b = 0$.

Лимитларга доир мисол ва масалалар кўпинча 1) — 3) қоидалар ёрдамида ечилади.

10-мисол. Ушбу $\{x_n\} = \left\{ \frac{5\sqrt[n]{n}}{n+1} \right\}$ кетма-кетликнинг лимитини топинг.

Бу кетма-кетликнинг лимити қуйидагича топилади:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5\sqrt[n]{n}}{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5\sqrt[n]{n}/n}{(n+1)/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{\sqrt[n]{n}}}{1 + \frac{1}{n}} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{\sqrt[n]{n}}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = 0. \end{aligned}$$

Бу ерда биз фойдаланган $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{\sqrt[n]{n}} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ муносабатлар бевосита лимит таърифига кўра исбот қилинади.

11-мисол. Ушбу $\{x_n\} = \{\sqrt[n]{n}\}$;

$$1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \dots, \sqrt[n]{n}, \dots$$

кетма-кетликнинг лимитини топинг.

Равшанки, $\forall n \geq 2$ да $\sqrt[2n]{n} > 1$ бўлади. Агар

$$\alpha_n = \sqrt[n]{n} - 1 \Rightarrow \sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n \Rightarrow \sqrt[n]{n} = (1 + \alpha_n)^n$$

дейилса, сўнг Бернулли тенгсизлигидан фойдаланилса (Азларов Т., Мансуров Х. «Математик анализ» I жилди, 66-бетга қаранг), унда

$$\sqrt[n]{n} = (1 + \alpha_n)^n > 1 + n\alpha_n > n\alpha_n$$

бўлишини топамиз. Кейинги тенгсизликдан

$$\alpha_n < \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

бўлиши келиб чиқади. Натижада ушбу

$$1 < \sqrt[n]{n} < \left(1 + \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^n \quad (5)$$

тенгсизликка келамиз. Агар

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^n = 1$$

эканини ҳисобга олсак, у ҳолда 5) ва юқоридаги 4) қоида-
га кўра

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

бўлишини топамиз.

5) $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ ва $\{z_n\}$ кетма-кетликлар берилган бўлсин.
Агар $\forall n \in N$ учун $x_n \leq y_n \leq z_n$ бўлиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$$

булса, у ҳолда $\{y_n\}$ кетма-кетликнинг limiti мавжуд бў-
либ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$$

бўлади.

12-мисол. Ушбу $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \cos n \right\}$ кетма-кетликнинг
limitини топинг.

Равшанки, бир томондан, $x_n = \frac{1}{n} \cos n$ учун

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \cos n \leq \frac{1}{n}$$

тенгсизлик бажарилади, иккинчи томондан,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right) = 0.$$

Унда $\{x_n\} = \left\{ \frac{\cos n}{n} \right\}$ кетма-кетлик ҳам limitга эга бў-
либ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos n = 0$$

бўлади.

6) Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи бўлиб, юқоридан че-
гараланган бўлса, унинг чекли limiti мавжуд бўлади.

Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик камаювчи бўлиб, қуйидан чега-
раланган бўлса, унинг чекли limiti мавжуд бўлади.

13-мисол. Биринчи ҳади $x_0 = 2$, кейинги ҳадлари эса
 $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right)$ қоида ёрдамида аниқланадиган кетма-
кетликнинг limiti мавжуд эканлигини кўрсатинг ва шу ли-
митни топинг.

Аввало $x_0 = 2$ ва $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right)$ ($n \geq 0$) бўлганлиги дан $x_n > 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) бўлиши равшан.

Энди $x_{n+1} - x_n$ айирмани қараймиз:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{2} \left(x_n - x_{n-1} + \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(x_n - x_{n-1} + \frac{x_{n-1} - x_n}{x_{n-1} x_n} \right) \leq \frac{1}{2} (x_n - x_{n-1} + \\ &\quad + x_{n-1} - x_n) = 0. \end{aligned}$$

Демак,

$$x_{n+1} - x_n \leq 0 \Rightarrow x_n \geq x_{n+1}$$

тенгсизлик бажарилиб, бу берилган кетма-кетликнинг камаювчи бўлишини билдиради. Шундай қилиб, берилган кетма-кетлик камаювчи ва қуйидан чегараланган экан. Унда кетма-кетлик чекли лимитга эга бўлади. Бу лимитни c билан белгилаб

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right)$$

тенгликда лимитга ўтсак, у ҳолда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right) \Rightarrow c = \frac{1}{2} \left(c + \frac{1}{c} \right) \Rightarrow c^2 = 1$$

бўлиши келиб чиқади. Яқинлашувчи кетма-кетликларнинг хоссаларига кўра $x_n > 0$ бўлгани учун $c = 1$, яъни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

муносабатга эга бўламиз.

7) $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиши учун, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ сон мавжуд бўлиб, $\forall n > n_0$ ва $\forall m > n_0$ ларда ($n \neq m$)

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли (Коши критерийси).

14-мисол. Ушбу

$$\{x_n\} = \left\{ \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos n!}{n(n+1)} \right\}$$

кетма-кетликнинг яқинлашувчи эканини исботланг.

Берилган кетма-кетлик учун ($n > m$)

$$x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos n!}{n(n+1)},$$

$$x_m = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos m!}{m(m+1)}$$

булиб,

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= \left| \frac{\cos(m+1)!}{(m+1)(m+2)} + \frac{\cos(m+2)!}{(m+2)(m+3)} + \dots + \right. \\ &+ \left. \frac{\cos n!}{n(n+1)} \right| \leq \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \frac{1}{(m+2)(m+3)} + \dots + \\ &+ \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} \right) + \left(\frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+3} \right) + \dots + \\ &+ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{m+1} \end{aligned}$$

булади.

Агар $\forall \varepsilon > 0$ сонга кўра $n_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ дейилса, у ҳолда $n > m > n_0$ бўлганда

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{m+1} < \frac{1}{n_0+1} < \varepsilon$$

булади. Демак, Коши критерийсига кўра берилган кетма-кетлик чекли лимитга эга.

15- мисол. Ушбу

$$\{x_n\} = \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right\}$$

кетма-кетликнинг яқинлашувчи эмаслигини кўрсатинг.

Коши критерийсига кўра бу кетма-кетликнинг яқинлашувчи эмаслигини исботлаш учун шундай $\varepsilon_0 > 0$ сон ва ихтиёрий натурал n учун шундай $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$ топилиб, $n_0 > n$ ва $m_0 > n$ бўлганда

$$|x_{n_0} - x_{m_0}| > \varepsilon_0$$

бажарилишини кўрсатиш керак.

$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}$, $n_0 = n + 1$, $m_0 = 2(n + 1)$ (равшанки $n_0 > n$, $m_0 > n$) бўлганда

$$\begin{aligned} |x_{2(n+1)} - x_n| &= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2(n+1)} > \\ &> \frac{n+1}{2(n+1)} = \frac{1}{2} > \varepsilon_0 \end{aligned}$$

булади. Демак, берилган кетма-кетлик лимитга эга эмас.

Мисол ва масалалар

Сонлар кетма-кетлиги лимити таърифига кўра кўрсатилган сонлар берилган кетма-кетликларнинг лимити эканлигини исботланг:

$$33. x_n = \frac{(-1)^n}{2n+5}, \quad a = 0.$$

$$34. x_n = \frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}, \quad a = 0.$$

$$35. x_n = \frac{3^n}{n!}, \quad a = 0.$$

$$36. x_n = \frac{\log_2 n}{\sqrt[n]{n}}, \quad a = 0.$$

$$37. x_n = \frac{n+1}{n}, \quad a = 1.$$

$$38. x_n = \frac{2n^2+3n+1}{4n^2-5n+6}, \quad a = \frac{1}{2}.$$

$$39. x_n = \sqrt[n]{2}, \quad a = 1.$$

Қуйидаги сонлар кетма-кетликларининг лимитини топинг:

$$40. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{4n+1}{n}}.$$

$$41. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-1}).$$

$$42. \lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt{n^4+n+1} - \sqrt{n^4+1}).$$

$$43. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{12} + (n+2)^{10}}{(n-1)^{12} + 1}.$$

$$44. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2^n + \cos n}{2^n + \sin n}.$$

$$45. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1+a^n}, \quad (a > 0).$$

$$46. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + 3b^n}{5a^n + 7b^n}, \quad (a > 0, b > 0).$$

$$47. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right).$$

$$48. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{4n^2-1} \right).$$

$$49. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)}{n^3}.$$

$$50. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \dots \cos \frac{x}{2^n} \right).$$

$$51. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a + a^2 \cdot 2 + \dots + n \cdot a^n}{n a^{n+2}}, \quad (a > 1).$$

$$52. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^3 + n + 1}.$$

$$53. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 5^n}.$$

$$54. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n \cdot 3^2 + 2^{n-1} \cdot 3 + \dots + 2^2 \cdot 3^n}.$$

$$55. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1^n + 2^n + \dots + n^n}.$$

$$56. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right).$$

$$57. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}} \right).$$

Коши критерийсидан фойдаланиб қуйидаги кетма-кетликларнинг чекли лимитга эга бўлишини кўрсатинг:

$$58. x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}.$$

$$59. x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}.$$

$$60. x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

$$61. x_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{учун } \alpha > 1 \text{ бўлса яқинла-}$$

шувчи, $\alpha \leq 1$ бўлса узоқлашувчи эканлигини кўрсатинг.

62. $\{x_n\}$ кетма-кетлик Коши критерийсини қаноатлантирса, $\{x_n^2\}$, $\{\sqrt{|x_n|}\}$ лар ҳам Коши критерийсини қаноатлантиришини кўрсатинг.

63. Агар $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ кетма-кетликлар Коши критерийсини қаноатлантирса, $\{x_n + y_n\}$ ($n \geq 1$), $\{x_n y_n\}$ ҳам Коши критерийсини қаноатлантиришини кўрсатинг.

64. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун $|x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{2^n}$ бўлса, $\{x_n\}$ Коши критерийсини қаноатлантиришини кўрсатинг.

4-5. КЕТМА-КЕТЛИКНИНГ ҚҲЙИ ВА ЮҚОРИ ЛИМИТЛАРИ

Фараз қилайлик, ихтиёрий

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

кетма-кетлик берилган бўлсин. Бу кетма-кетлик ҳадларидан тузилган ушбу $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$ ($n_1 < \dots < n_k < \dots$, $n_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \dots$) кетма-кетлик берилган $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетлиги деб аталади.

$\{x_n\}$ кетма-кетликнинг яқинлашувчи қисмий кетма-кетлигининг лимити берилган кетма-кетликнинг қисмий лимити деб аталади.

$\{x_n\}$ кетма-кетлик қисмий лимитларининг энг каттаси берилган кетма-кетликнинг юқори лимити деб аталади ва

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

каби белгиланади.

$\{x_n\}$ кетма-кетлик қисмий лимитларининг энг кичиги берилган кетма-кетликнинг қуйи лимити деб аталади ва

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

каби белгиланади.

Кетма-кетликнинг юқори ва қуйи лимитларини қуйидагича ҳам ифодалаш мумкин:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = L \iff \begin{cases} 1^\circ. \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 \Rightarrow x_n < L + \varepsilon \\ 2^\circ. \forall \varepsilon > 0, \forall N, \exists n > N \Rightarrow x_n > L - \varepsilon, \end{cases}$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = l \iff \begin{cases} 1^\circ. \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 \Rightarrow x_n > l - \varepsilon \\ 2^\circ. \forall \varepsilon > 0, \forall N, \exists n > N \Rightarrow x_n < l + \varepsilon. \end{cases}$$

16- мисол. Ушбу

$$\{x_n\} = \left\{ 1 + \cos \frac{n\pi}{2} \right\}$$

кетма-кетликнинг қуйи ва юқори лимитларини топинг.

Берилган кетма-кетликнинг

$$\{x_{2m-1}\} \text{ ва } \{x_{2m}\}$$

қисмий кетма-кетликларини қараймиз.

Равшанки,

$$x_{2m-1} = 1 + \cos \frac{(2m-1)\pi}{2} = 1$$

бўлади. Демак, берилган кетма-кетликнинг

$$\{x_{2m-1}\}: x_1, x_3, x_5, \dots, x_{2m-1}, \dots$$

қисмий кетма-кетлиги лимитга эга ва у 1 га тенг:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_{2m-1} = 1.$$

Энди $\{x_{2m}\}$ қисмий кетма-кетликни қараймиз:

$$x_{2m} = 1 + \cos m\pi.$$

Агар

$$\cos m\pi = \begin{cases} 1, & \text{агар } m = 2k, \\ -1 & \text{агар } m = 2k - 1 \end{cases}$$

эканини эътиборга олсак, унда

$$\{x_{2m}\} = \{1 + (-1)^m\} = \{0, 2, 0, 2, \dots\}$$

булишини кўрамиз. $\{x_{2m}\} = \{0, 2, 0, 2, \dots\}$ қисмий кетма-кетлик яқинлашувчи эмас. Бу кетма-кетликда

$$x_{4k} = 2, \quad x_{4(k-1)} = 0$$

бўлиб, 2 ва 0 сонлари қисмий лимит эканлигини кўрамиз.

Энди

$$\{x_{4k-2}\}: x_2, x_6, x_{10}, \dots, x_{4k-2}, \dots$$

кетма-кетликларни қарайлик.

$\{x_{4k}\}$ кетма-кетлик учун $\forall k \in N$ да

$$x_{4n} < x_{4(k+1)} \quad \text{ва} \quad x_{4k} < 2$$

бўлади. Демак, $\{x_{4k}\}$ кетма-кетлик ўсувчи ва у юқоридан чегараланган. Унда бу кетма-кетликнинг лимити мавжуд ва

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{4k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4k}{4k+1}\right) = 2.$$

Шундай қилиб, берилган кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетликлари лимитлари орасида энг каттаси 2, энг кичиги эса 0 га тенг эканлигини кўриш қийин эмас. Демак,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \cos \frac{n\pi}{2}\right) = 2,$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \cos \frac{n\pi}{2}\right) = 0.$$

17- мисол. Агар $\alpha_n = \sup_{k > n} \{x_k\}$ бўлса, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$; эканлиги кўрсатилсин.

Аввало $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ мавжудлигини кўрсатамиз:

$$\alpha_1 = \sup_{k \geq 1} \{x_k\}, \dots, \alpha_{n+1} = \sup_{k \geq n+1} \{x_k\}.$$

Бундан куринадики, $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_{n+1} \dots$, яъни $\{\alpha_n\}$ кетма-кетлик монотон камаювчи экан. У ҳолда чекли ёки чексиз $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ мавжуд.

1- ҳолат. $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$ бўлиб, α чекли сон бўлсин. У ҳолда $\forall \varepsilon > 0$, $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ топиладики, $\forall n > n_0$ учун $\alpha - \varepsilon < \alpha_n < \alpha + \varepsilon$ бўлади.

$\alpha_n = \sup_{k > n} x_k$ экани сабабли

$$\alpha - \varepsilon < \sup_{k > n} x_k < \alpha + \varepsilon.$$

Равшанки, барча $n > 1$ лар учун

$$x_n \leq \sup_{k > n} x_k < \alpha + \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N},$$

$$\forall n > n_0, x_n < \alpha + \varepsilon \quad (1)$$

эканлигини кўраемиз.

$\alpha_n = \sup_{k > n} x_k$ сабабли, ўша берилган $\forall \varepsilon > 0$ учун шундай $n > n_0$ $k(e) \in \mathbb{N}$ топиладики, унинг учун

$$x_{k(e)} > \alpha_n - \varepsilon$$

бўлади. Аммо, барча $n > 1$ лар учун $\alpha_n > \alpha$, шу сабабли

$$x_{k(e)} > \alpha_n - \varepsilon > \alpha - \varepsilon \Rightarrow x_{k(e)} > \alpha - \varepsilon. \quad (2)$$

(1) ва (2) лардан куринадики,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k > n} x_k.$$

2- ҳол. $\alpha = -\infty$ бўлсин. У ҳолда:

$$\begin{aligned} \forall E > 0, \exists n_0 = n_0(E) \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, \alpha_n < -E \Rightarrow \\ \Rightarrow \sup_{k > n} \{x_k\} < -E \Rightarrow x_n < -E. \end{aligned}$$

Шу сабабли:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k > n} x_k = -\infty.$$

18- мисол. а) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$;

$$б) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$$

эканини кўрсатинг.

$\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликларнинг юқори ва қуйи лимитлари чекли сон бўлган ҳоли билан чекланамиз.

Юқорида келтирилган мисолларга асосан:

$$\begin{aligned} а) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k > n} \{x_k\} + \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k > n} \{y_k\} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{k > n} \{x_k\} + \sup_{k > n} \{y_k\}) > \\ &> \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k > n} \{x_k + y_k\} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{x_n + y_n\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} б) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [(x_n + y_n) + (-x_n)] \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n). \end{aligned}$$

$$\text{Бундан: } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n).$$

19- мисол. Агар $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ мавжуд бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\{y_n\}$ учун

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

эканлигини кўрсатинг.

Юқорида келтирилган мисолларга асосан:

$$а) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$б) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) > \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Булардан

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \text{ экани келиб чиқади.}$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги кетма-кетликларнинг юқори ва қуйи лимитларини топинг:

$$65. x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}.$$

$$66. x_n = n^{(-1)^n}.$$

$$67. x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}.$$

$$68. x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos^2 \frac{n\pi}{2}.$$

$$69. x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

$$70. x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3}.$$

$$71. x_n = -n[2 + (-1)^n].$$

$$72. x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \sin \frac{n\pi}{4}.$$

$$73. x_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}.$$

$$74. x_n = \cos^n \frac{2n\pi}{3}.$$

Исботланг:

$$75. \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

$$76. \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = -\lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

77. $\{x_{n(k)}, k \geq 1\}, \{x_n\}$ кетма-кетликнинг ихтиёрий қисмий кетма-кетлиги бўлса, у ҳолда

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n(k)},$$

$$б) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_{n(k)} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

эканлигини кўрсатинг.

$$78. \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{k \geq n} \inf \{x_k\} \text{ эканини кўрсатинг.}$$

$$79. \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = \max\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2, (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)^2\right)$$

эканини кўрсатинг.

$$80. \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

эканини кўрсатинг.

$$81. \text{Агар } x_n > 0, y_n > 0 \text{ бўлса, } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

бўлишини кўрсатинг.

ФУНКЦИЯ ВА УНИНГ ЛИМИТИ

1-§. ФУНКЦИЯ ТУШУНЧАСИ

X ва Y ҳақиқий сонларнинг бирор тўпламлари бўлсин: 1-таъриф. Агар X тўпламдаги ҳар бир x сонга бирор қоида ёки қонунга кўра Y тўпламдан битта y сон мос қўйилса, X тўпламда функция берилган (аниқланган) деб аталади ва $f: x \rightarrow y$ ёки $y = f(x)$ каби белгиланади.

Бунда X — функциянинг аниқланиш тўплами (соҳаси), Y — функциянинг ўзгаруш тўплами (соҳаси) деб аталади. x — эркин ўзгарувчи (функция аргументи), y эса эрксиз ўзгарувчи (x ўзгарувчининг функцияси) деб аталади.

Масалан: 1) f — ҳар бир ҳақиқий x сонга унинг бутун қисми $[x]$ ни мос қўювчи қоида бўлсин. Демак, $f: x \rightarrow [x]$ ёки $y = [x]$ функцияга эга бўламиз. Бу функциянинг аниқланиш тўплами $X = R$, ўзгариш тўплами эса $Y = Z$ бўлади.

2) Ҳар бир рационал сонга 1 ни, ҳар бир иррационал сонга 0 ни мос қўйиш натижасида функция ҳосил бўлади. Уни Дирихле функцияси дейилади ва $D(x)$ каби белгиланади:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \in R \text{ рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \in R \text{ иррационал сон бўлса.} \end{cases}$$

Дирихле функциясининг аниқланиш соҳаси $X = R$, ўзгариш соҳаси $Y = \{0, 1\}$ бўлади.

1-мисол. Ушбу

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

$\sqrt{1-x^2}$ ифода каср махражида эканлигини ҳисобга олиб, $1-x^2 > 0$ муносабатга эга бўламиз, яъни $|x| < 1$.

Демак, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси $(-1, 1)$ интервалдан иборат.

2-мисол. Ушбу

$$y = \sqrt{\log_{1,990} \sin x}$$

функциянинг аниқланиш соҳаси ва функция қийматлари тўпламини топинг.

$$\sqrt{\log_{1,990} \sin x} \text{ ифода } \log_{1,990} \sin x \geq 0$$

муносабатни қаноатлантирувчи x ларда маънога эга эканлигини ҳисобга олиб, $\sin x > 1$ тенгсизликка эга бўламиз.

$\sin x$ функциянинг энг катта қиймати 1 эканидан $\sin x = 1$, яъни $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ бўлади. Демак, функциянинг аниқланиш соҳаси $\left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ тўпладан иборат.

Энди k нинг ҳар бир $k \in \mathbb{Z}$ қийматида $\sin \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) = 1$ бўлгани учун, функциянинг аниқланиш соҳасидан олинган ҳар қандай x да $\log_{1.990} \sin x = 0$ бўлади. Шундай қилиб, қаралаётган функциянинг қийматлари тўплами $\{0\}$ тўпладан иборат.

$y = f(x)$ функция X тўпламда аниқланган бўлсин.

2- таъриф. Агар шундай ўзгармас M (ўзгармас m) сон топилсаки, $\forall x \in X$ учун

$$f(x) \leq M \text{ (} f(x) \geq m \text{)}$$

бўлса, $f(x)$ функция X тўпламда юқоридан (қуйидан) чегараланган деб аталади. Агар $f(x)$ функция ҳам юқоридан, ҳам қуйидан чегараланган бўлса, яъни шундай ўзгармас M ва m сонлар топилсаки, $\forall x \in X$ учун

$$m \leq f(x) \leq M$$

бўлса, $f(x)$ функция X тўпламда чегараланган деб аталади.

3- мисол. Ушбу

$$f(x) = 2^{\cos^2 x} + 3 \sin 2x$$

функциянинг чегараланганлигини кўрсатинг. Равшанки, бу функция $R = (-\infty, +\infty)$ да аниқланган;

$$|2^{\cos^2 x} + 3 \sin 2x| \leq |2^{\cos^2 x}| + 3 |\sin 2x| \leq 2 + 3 = 5.$$

Демак, функция R да чегараланган.

Функциянинг юқоридан (қуйидан) чегараланмаганлиги бундай таърифланади.

3- таъриф. Агар ихтиёрий M (ихтиёрий m) сон олинганда ҳам, шундай $x_0 \in X$ ($x'_0 \in X$) сон топилсаки,

$$f(x_0) > M \text{ (} f(x'_0) < m \text{)}$$

бўлса, $f(x)$ функция X тўпламда юқоридан (қуйидан) чегараланмаган дейилади.

4- мисол. Ушбу $f(x) = x^2$; $x \in (0, +\infty)$ функциянинг юқоридан чегараланмаганлигини кўрсатинг.

Бу функция юқоридан чегараланган бўлсин дейлик, яъни шундай M сони топилиб, барча $x \in (0, +\infty)$ лар учун $x^2 < M$ муносабат ўринли. Бу тенгсизликдан кўринадики, $M > 0$. Энди $x_0 = \sqrt{M+1}$ сонни қарайлик. Функциянинг бу нуқтадаги қиймати $f(x_0) = x_0^2 = (\sqrt{M+1})^2 = M + 2\sqrt{M+1}$ га тенг.

Фаразимишга кўра $f(x) < M$, $f(x_0)$ эса $M + 2\sqrt{M+1}$ га тенг бўлиб, у ҳар доим M дан катта. Бу зиддият қаралаётган функциянинг юқоридан чегараланмаганилигини кўрсатади.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳаларини топинг:

1. $f(x) = \sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}$.

2. $f(x) = \lg(1-x^2)$.

3. $f(x) = 3 - 2\cos x$.

4. $f(x) = \sqrt{-\log_6(x-x^2)}$.

5. $f(x) = 5^x - 2^{x+1}$.

6. $f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{16-x^2}$.

7. $f(x) = \arcsin x + \sqrt{\frac{2}{nx-1}}$.

8. $f(x) = |x| - 2$.

9. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|-2|x-1|}}$.

10. $f(x) = \log_{\cos x} \sin x$.

11. $f(x) = \sqrt{\cos x}$.

12. $f(x) = \ln \cos x$.

13. $f(x) = \arccos(3-x)$.

14. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{1-|x|}}$.

15. $f(x) = \sqrt{x^2 - |x| - 2}$.

16. $f(x) = \log_{(x+1)}(x^3 - 3x + 2)$.

17. Аналитик усулда берилган, аниқланиш соҳаси фақат битта сондан иборат функцияга мисол келтиринг.

18. Аналитик усулда берилган, аниқланиш соҳаси $[1, 2]$ сегментнинг нуқталари бўлган функцияга мисол келтиринг.

Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳалари ва функция қийматлари тўпламларини топинг:

$$19. f(x) = \log_2(-x).$$

$$20. f(x) = \sqrt{\lg \cos x} + 4.$$

$$21. f(x) = \frac{|x|}{x} e^{x^2}.$$

$$22. f(x) = 2^{\log_2 x}.$$

$$23. f(x) = ||x| - 1| - x.$$

$$24. f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

$$25. f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

$$26. f(x) = \cos \sqrt{x + 100}.$$

$$27. f(x) = \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{tg} x.$$

$$28. f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x.$$

29. Аналитик усулда берилган, қийматлар тўплами қуйидагича бўлган функцияларга мисоллар келтиринг:

а) фақат битта сондан иборат;

б) иккита сондан иборат;

в) натурал сонлардан иборат;

г) барча бутун сонлардан иборат;

д) $(0, 1)$ интервал нуқталаридан иборат бўлсин.

Қуйидаги функцияларнинг чегараланганлигини кўрсатинг:

$$30. f(x) = \frac{1}{x - 10}, \quad x \in [0, 5].$$

$$31. f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$32. f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x^2 - 1|}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 1.$$

$$33. f(x) = \frac{2 \sin x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

$$34. f(x) = \frac{1}{x} \sin x.$$

35. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар X тўпламда аниқланган бўлиб, чегараланган бўлса, у ҳолда

а) $f(x) + g(x)$;

б) $f(x) - g(x)$;

в) $f(x) \cdot g(x)$;

г) $|f(x)|$

функциялар ҳам X тўпلامда чегараланганлигини кўрсатинг;

д) қандай шарт бажарилса, $\frac{f(x)}{g(x)}$ функция ҳам X тўпلامда чегараланган бўлади?

36. $f(x)$ функция X тўпلامда аниқланган ва чегараланган бўлсин, у ҳолда ушбу функцияларнинг X да чегараланганлигини кўрсатинг:

а) $\sqrt[n]{f(x)}$;

д) $\arcsin f(x)$;

б) $a^{f(x)}$;

е) $\arccos f(x)$;

в) $\cos f(x)$;

ё) $\operatorname{arctg} f(x)$;

г) $\sin f(x)$;

ж) $\operatorname{arccotg} f(x)$.

Қуйидаги функцияларнинг ўз аниқланиш соҳаларида чегараланмаганлигини кўрсатинг:

37. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

42. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot x$.

38. $f(x) = |x + 2|$.

43. $f(x) = x \sin x$.

39. $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$.

44. $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

40. $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

45. $f(x) = \frac{1}{\operatorname{arcsin} x}$.

41. $f(x) = |x| + |2x + 1|$.

46. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар X тўпلامда аниқланган ва чегараланмаган бўлсин. $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг айирмаси X тўпلامда чегараланган бўлиши мумкинми? Мисоллар келтиринг.

47. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар X тўпلامда аниқланган бўлиб, $f(x)$ функция X да чегараланган, $g(x)$ эса чегараланмаган бўлсин. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар орасида арифметик амаллар бажариш натижасида ҳосил бўлган функцияларнинг чегараланганлиги ҳақида нима дейиш мумкин? Мисоллар келтиринг.

48. Ихтиёрий функциянинг квадрати қуйидан чегараланганлигини исботланг.

4- таъриф. Агар $\forall x_1, x_2 \in X$ лар учун $x_1 < x_2$ бўлишидан $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$) бўлса, $f(x)$ функция X тўпلامда ўсувчи (қатъий ўсувчи) деб аталади.

Агар $\forall x_1, x_2 \in X$ лар учун $x_1 < x_2$ бўлишидан $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$) бўлса, $f(x)$ функция X тўпلامда камаювчи (қатъий камаювчи) деб аталади.

Ўсувчи ва камаювчи функция монотон функциялар деб аталади.

5-мисол. Ушбу

$$f(x) = x^3 \quad (x \in R)$$

функциянинг қатъий ўсувчи эканини исботланг.

$\forall x_1, x_2 \in R$ нуқталарни олиб, $x_1 < x_2$ бўлсин деб қарайлик. У ҳолда

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1 \cdot x_2 + x_1^2) = \\ &= (x_2 - x_1) \left[\left(x_2 + \frac{1}{2} x_1 \right)^2 + \frac{3}{4} x_1^2 \right] > 0 \end{aligned}$$

бўлади.

Демак, $\forall x_1, x_2 \in R, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Бу эса $f(x) = x^3$ функциянинг R да қатъий ўсувчи эканини билдиради.

6-мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

функциянинг $[0; +\infty) = X$ да камаювчи эканини кўрсатинг.

$\forall x_1, x_2 \in X$ нуқталарни олиб, $x_1 < x_2$ бўлсин деб қарайлик. У ҳолда $f_1(x) = x^2$ учун

$$f_1(x_2) - f_1(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0$$

бўлади. Демак,

$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f_1(x_1) < f_1(x_2).$$

Бу эса $f_1(x) = x^2$ функциянинг, жумладан, $f_2(x) = x^2 + 1$ функциянинг қаралаётган ораликда ўсувчи эканини билдиради.

Энди $\forall x_1, x_2 \in X$ нуқталар учун $x_1 < x_2$ бўлган ҳолда $f(x_2) - f(x_1)$ айирмани қарайлик.

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{1+x_2^2} - \frac{1}{1+x_1^2} = \frac{1}{f_2(x_2)} - \frac{1}{f_2(x_1)}.$$

$f_2(x_2) > f_2(x_1)$ бўлганидан $\frac{1}{f_2(x_2)} - \frac{1}{f_2(x_1)} < 0$ эканини топамиз. Демак, $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$, яъни $f(x)$ функция X тўпламда камаювчи.

5-таъриф. Агар шундай ўзгармас T ($T \neq 0$) сони мавжуд бўлсаки, $\forall x \in X$ учун

$$x + T \in X, x - T \in X,$$

$$f(x + T) = f(x)$$

бўлса, $f(x)$ функция даврий функция дейилади ва бу шартларни қаноатлантирувчи мусбат T ларнинг энг кичиги (агар у мавжуд бўлса) функциянинг даври деб аталади.

7-мисол. Ушбу

$$f(x) = 3 \cos x + \cos 2x$$

функциянинг даврий функция эканини кўрсатинг.

Функциянинг аниқланиш соҳаси бутун сонлар ўқидан иборатдир. Фараз қилайлик, бирор $T > 0$ учун

$$3 \cos(x + T) + \cos(2(x + T)) = 3 \cos x + \cos 2x$$

муносабат ўринли бўлсин. $x = 0$ да

$$3 \cos T + \cos 2T = 4$$

тенгламага эга бўлиб,

$$\cos T \leq 1, \cos 2T \leq 1$$

тенгсизликларни эътиборга олсак,

$$3 \cos T + \cos 2T \leq 4$$

бўлади.

Демак, T қуйидаги тенгламалар системасини қаноатлантиради:

$$\begin{cases} \cos T = 1, \\ \cos 2T = 1. \end{cases}$$

Бу тенгламалар системасининг энг кичик мусбат ечими $T = 2\pi$ экани равшандир.

Энди $T = 2\pi$ сонни берилган функциянинг даври эканини текшириш қийин эмас: $\forall x \in \mathbb{R}$ учун

$$3 \cos(x + 2\pi) + \cos(2(x + 2\pi)) = 3 \cos x + \cos 2x$$

тенглик ўринлидир. Шундай қилиб, қаралаётган функция даврий бўлиб, унинг даври 2π га тенг экан.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг ўсувчи ёки камаювчи эканини аниқланг:

49. $f(x) = 2^{x^2+1}$.

50. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

51. $f(x) = \frac{1}{\cos x}$, $x \in [-\pi, \pi]$, $|x| \neq \frac{\pi}{2}$.

52. $f(x) = \sqrt{x} \sin x$.

$$53. f(x) = \arccos |x|.$$

$$54. f(x) = \sin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$55. f(x) = \arctg x - x.$$

$$56. f(x) = \frac{x-1}{|x|-1}.$$

$$57. f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

$$58. f(x) = \frac{2 - \sin x}{2 + \sin x}, \quad x \in [0, 2\pi].$$

$$59. f(x) = 2 \cdot 3^{1-x} - 9^{-x}.$$

$$60. f(x) = x - \varepsilon \sin x \quad (0 < \varepsilon \leq 1).$$

61. Агар $f(x)$ функция X тўпلامда аниқланган бўлиб, монотон бўлса, у ҳолда $y = -f(x)$ функциянинг ҳам монотонлигини исботланг.

62. Агар $f(x) > 0$ тенгсизлик барча $x \in X$ лар учун ўринли ва $f(x)$ монотон бўлса, у ҳолда $y = \frac{1}{f(x)}$ функциянинг ҳам монотонлигини исботланг.

63. Монотон функциялардан тузилган мураккаб функциянинг монотонлигини исботланг.

Қуйидаги функцияларнинг даврий функция эканини кўрсатинг.

$$64. f(x) = \operatorname{tg}(\sin x).$$

$$65. f(x) = \sqrt{\sin 3x}.$$

$$66. f(x) = 2^{|\sin x - \cos x|}.$$

$$67. f(x) = \lg \sin x - \lg \cos x.$$

$$68. f(x) = \sin^2 x.$$

$$69. f(x) = |\cos x|.$$

$$70. f(x) = \{2x\}.$$

$$71. f(x) = \cos \sqrt{2} x.$$

72. $f(x) = [2x + 5] - 2x$, бу ерда $[a]$ — қаралаётган a соннинг бутун қисmini билдиради.

$$73. f(x) = \cos(\sin x).$$

$$74. f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x.$$

75. $f(x)$ функция $X = R$ тўпلامда аниқланган бўлиб, унинг графиги $x = a$, $x = b$ ($a \neq b$) чизиқларга нисбатан симметрик бўлса, у ҳолда унинг даврийлигини исботланг.

76. $f(x)$ функция X тўпلامда аниқланган бўлиб, шундай $T \neq 0$ сони топилсаки, ҳар қандай $x \in X$ лар учун $x + T \in X$, $x - T \in X$ бўлиб, қуйидаги шартлардан биттаси бажарилса, унинг даврийлигини исботланг:

$$1) f(x+T) = -f(x);$$

$$2) f(x+T) = \frac{1}{f(x)};$$

$$3) f(x+T) = \frac{f(x)+a}{bf(x)-1};$$

$$4) f(x+T) = \frac{1}{1-f(x)};$$

$$5) f(x+T) = f(x).$$

77. $f(x) = \cos x + \sin ax$ даврий функция бўлса, u ҳолда a рационал сон эканлигини исботланг.

78. Бутун сонлар ўқидан битта нуқта чиқариб ташланган тўпلامда аниқланган функциянинг даврий эмаслигини исботланг.

$y = f(x)$ функция $X(X \subset R)$ тўпلامда аниқланган бўлиб, $\forall x \in X$ учун $-x \in X$ бўлсин.

6-таъриф. Агар $\forall x \in X$ учун $f(-x) = f(x)$ бўлса, $f(x)$ жуфт функция, $f(-x) = -f(x)$ бўлса, $f(x)$ функция тоқ функция деб аталади.

8-мисол. Ушбу

$$f(x) = \log_2(x + \sqrt{1+x^2})$$

функциянинг жуфт ёки тоқ функция эканини аниқланг.

$\forall x \in R$ ларда $x + \sqrt{1+x^2} > 0$ бўлгани учун функциянинг аниқланиш соҳаси R дан иборат.

$$\begin{aligned} \forall x \in R \quad \text{учун} \quad f(-x) &= \log_2(-x + \sqrt{1+x^2}) = \\ &= \log_2\left(\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot (-x + \sqrt{1+x^2})\right) = \log_2 \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} = \\ &= \log_2(x + \sqrt{1+x^2})^{-1} = -\log_2(x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x) \end{aligned}$$

бўлади. Бу эса қаралаётган функциянинг тоқ эканини билдиради.

$y = f(x)$ функция X тўпلامда аниқланган бўлиб, Y эса функция қийматларидан иборат тўпلام бўлсин: $Y = \{f(x) : x \in X\}$. Шу билан бирга Y тўпلامдан олинган ҳар бир y га X тўпلامдан фақат битта x мос келсин, яъни $x_1 \neq x_2$ бўлганда $f(x_1) \neq f(x_2)$ бўлсин. Бу ҳолда Y тўпلامдан олинган ҳар бир y га X тўпلامда битта x мос қўйилишини нфодалайдиган функцияга келамиз. Бу функция $y = f(x)$ га нисбатан **тескари функция** дейилади ва u $x = f^{-1}(y)$ каби белгиланади.

9-мисол. Ушбу $y = f(x) = 2x + 1$, $x \in [0, 1]$ функцияга нисбатан тескари функцияни топинг.

Бу функциянинг қийматлари тўплами [1, 3] оралиқни ташкил этади. [1, 3] оралиқда аниқланган $x = f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$ функция берилган $y = 2x + 1$ функцияга нисбатан тескари функция бўлади.

$y = f(x)$ функция X тўпланда аниқланган бўлиб, $z = \varphi(y)$ функция ўз навбатида $Y = \{f(x) : x \in X\}$ $\{f : X \rightarrow Y\}$ тўпланда аниқланган бўлсин:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\varphi} Z.$$

Натижада X тўпландан олинган ҳар бир x га битта $z \in Z$ сон мос қўйилади. Бундай ҳолда f ва φ функцияларнинг мураккаб функцияси берилган дейилади ва $z = \varphi(f(x))$ каби белгиланади.

10-мисол. Ушбу

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = 2^x$$

функциялар ёрдамида мураккаб функциялар топинг.

Бу мураккаб функциялар қуйидагича бўлади:

$$f(g(x)) = [g(x)]^2 = (2^x)^2 = 2^{2x};$$

$$g(f(x)) = 2^{f(x)} = 2^{x^2};$$

$$f(f(x)) = [f(x)]^2 = (x^2)^2 = x^4;$$

$$g(g(x)) = 2^{g(x)} = 2^{2^x}.$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг жуфт ёки тоқлигини аниқланг:

79. $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}.$

80. $f(x) = x + \frac{1}{x}.$

81. $f(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{x}}}.$

82. $f(x) = \sqrt{x^4 - |x|} \cdot \log_2 x^2.$

83. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ — рационал сон бўлса,} \\ -1, & \text{агар } x \text{ — иррационал сон бўлса.} \end{cases}$

84. $f(x) = \sin \sqrt{x}.$

85. $f(x) = \arccos |x|.$

86. $f(x) = \frac{1 + \sin x}{\sin x}.$

$$87. f(x) = \frac{|\sin x|}{1 - \cos x}.$$

$$88. f(x) = (x - 1)^2 \sin^2 x.$$

$$89. f(x) = \arcsin (\arccos x).$$

$$90. f(x) = \left| \frac{10^x + 1}{10^x - 1} \right|.$$

91. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар жуфт функциялар бўлса, улардан тузилган мураккаб функцияларнинг ҳам жуфт функция бўлишини исботланг.

92. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар тоқ функциялар бўлса, улардан тузилган мураккаб функцияларнинг тоқ функция бўлишини исботланг.

93. О нуқтага нисбатан симметрик бўлган X тўпламда аниқланган ҳар қандай $f(x)$ функция жуфт ва тоқ функциялар йиғиндиси кўринишида ифодаланишини исботланг.

94. $f(x) = 2^x$ функцияни жуфт ва тоқ функциялар йиғиндиси кўринишида ифодаланг:

95. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса,} \\ x, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса} \end{cases}$ функцияни жуфт ва тоқ функциялар йиғиндиси кўринишида ифодаланг.

96. Жуфт ва тоқ функциялардан тузилган мураккаб функцияларнинг жуфт ёки тоқлиги ҳақида нима дейиш мумкин?

Қуйидаги функцияларга нисбатан тескари бўлган функцияларни топинг:

$$97. f(x) = (x + 1)^2, \quad x \in [-1; +\infty).$$

$$98. f(x) = \sin x, \quad x \in \left[-10; -\frac{11}{4}\pi\right].$$

$$99. f(x) = \frac{2x + 1}{x} \cdot \frac{1 - x^2}{2}.$$

$$100. f(x) = -e^{\frac{1 - x^2}{2}}, \quad x \in [0; +\infty).$$

$$101. f(x) = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, \quad x \in (0; -\infty).$$

$$102. f(x) = \pi - \arcsin x, \quad x \in [-1; 1].$$

$$103. f(x) = 2^{x^2 - 2x}, \quad x \in (-\infty; 1].$$

104. a ва b ларнинг қандай қийматларида $f(x) = ax + b$ тескари функцияга эга бўлиб, $y = f(x)$ билан бир хил бўлади?

105. $\alpha \in \mathbb{R}$ нинг қандай қийматида $f(x) = x^\alpha, x > 0$ тескари функцияга эга бўлиб, $y = f(x)$ билан бир хил бўлади?

Қуйидаги функциялар бўйича шу функцияларнинг мураккаб функцияларини топинг:

$$106. f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x}.$$

$$107. f(x) = \sqrt{1-x^2}, g(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

$$108. f(x) = x^5, g(x) = x + 5.$$

$$109. f(x) = e^x, g(x) = \ln x.$$

$$110. f(x) = \operatorname{sgn} x, g(x) = 1 + x^2.$$

$$111. f(x) = \operatorname{sgn} x, g(x) = 1 + x - [x].$$

$$112. f(x) = \ln x^2, g(x) = \sin x.$$

$$113. f(x) = \begin{cases} x, & \text{агар } x \in [0; +\infty) \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \in (-\infty; 0) \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \in [0; +\infty) \text{ бўлса,} \\ x^2, & \text{агар } x \in (-\infty; 0) \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$114. f(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \text{ бўлса, } f(f(\dots f(x))) \dots (n \text{ мар-})$$

та) ни топинг.

Текисликда Декарт координаталар системасини олами. Текисликнинг $(x, f(x))$ каби аниқланган нуқталаридан иборат ушбу

$$\{(x, f(x))\} = \{(x, f(x)) : x \in X, y = f(x) \in Y\}$$

тўплам $y = f(x)$ функциянинг **графи**ги деб аталади.

Мураккаб функцияларнинг графиги уларнинг ординаталари устида аналитик (қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш, даражага кўтариш, илдиз чиқариш, логарифмлаш ва ҳ. к.) амаллар бажариш ёрдамида тақрибан чизилади. Функцияларни тўлиқ текшириш, уларнинг аниқ графикларини ифодалаш билан биз кейинроқ батафсил шуғулланамиз.

11-мисол. Ушбу

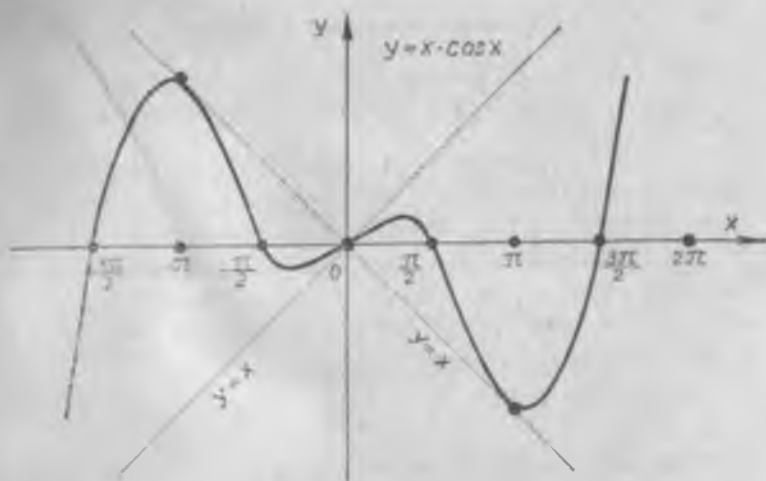
$$y = x \cos x, x \in R$$

функциянинг графигини чизинг.

Функция тоқ бўлгани учун, унинг графигини $[x \geq 0]$ лар учун яшаш етарли. Қаралаётган функциянинг ординаталари $y_1 = x$ ва $y_2 = \cos x$ функцияларнинг ординаталарини кўпайтириш натижасида ҳосил бўлади.

Функция графиги координаталар бошидан ўтиб, Ox ўқини $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in Z, \cos x = 0$) нуқталарда кеседи. $-1 \leq \cos x \leq 1$

бўлгани учун, $x \geq 0$ ларда $-x \leq x \cos x \leq x$ бўлади. Демак, $y = x \cos x$ функциянинг графиги $y = x$ ва $y = -x$ чизиклар орасида ётади. $x = 2k\pi$ нуқталарда $\cos x = 1$ бўлгани учун, функция графиги $y = x$ чизик билан $x = 2k\pi$ нуқталарда умумий қийматларга эга, $x = \pi + 2k\pi$ нуқталарда эса $y = -x$ чизик билан умумий нуқталарга эгадир ($\cos x = -1, x = \pi + 2k\pi, k \in Z$), $0 < x < 1$ да $0 < x \cos x <$



1- чизма.

$\leq \cos x$, яъни $x \cos x \leq x$. Бу эса функция графиги $y = \cos x$ ва $y = x$ функцияларнинг графигидан пастда жойлашганлигини билдиради.

$x = 1$ да $y = x \cos x$ ва $y = \cos x$ функцияларнинг графиги кесишади. $y = \cos 1 \approx 0,54$. Агар $x > 1$ бўлса, $|x \cos x| > |\cos x|$. Шу маълумотларга асосланиб берилган функциянинг графигини чизамиз (1-чизма).

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг графикларини чизинг:

115. $f(x) = x \sin x$.

124. $f(x) = [x^2]$.

116. $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

125. $f(x) = |x-1| + |x-2| - |x-3|$.

117. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

126. $f(x) = [|x|]$.

118. $f(x) = \operatorname{sgn} \cos x$.

127. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$.

119. $f(x) = \ln \sin x$.

128. $f(x) = e^x \cos x$.

120. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

129. $f(x) = e^{-x} \cos x$.

121. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}$.

130. $f(x) = 2^{\lg x}$.

122. $f(x) = [x]$.

131. $f(x) = x + \sin x$.

123. $f(x) = \left[\frac{1}{x} \right]$.

2-§. ФУНКЦИЯНИНГ ЛИМИТИ

$X = \{x\}$ ҳақиқий сонлар тўплами берилган бўлиб, a нуқта унинг лимит нуқтаси бўлсин. Бу тўпланда $y = f(x)$ функция аниқланган.

7-таъриф (Гейне таърифи). Агар X тўпламнинг нуқталаридан тузилган a га интилувчи ҳар қандай $\{x_n\}$ ($x_n \neq a$, $n = 1, 2, \dots$) кетма-кетлик олинганда ҳам мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ҳамма вақт ягона b (чекли ёки чексиз) лимитга интилса, шу b га $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги (ёки $x \rightarrow a$ даги) лимити деб аталади ва уни $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ёки $x \rightarrow a$ да $f(x) \rightarrow b$ каби белгиланади.

12-мисол. Ушбу

$$f(x) = x^5$$

функциянинг $x \rightarrow 2$ даги лимити 32 га тенг эканини кўрсатинг.

2 га интилувчи ихтиёрий $\{x_n\}$ ($x_n \neq 2$, $n = 1, 2, \dots$) кетма-кетликни оламыз. Мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик қуйидаги $\{f(x_n)\} = \{x_n^5\}$ кўринишда бўлади. Яқинлашувчи кетма-кетликлар устидаги арифметик амалларга биноан:

$$\lim_{x_n \rightarrow 2} f(x_n) = \lim_{x_n \rightarrow 2} x_n^5 = 2^5 = 32.$$

Демак, таърифга кўра:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 32.$$

13-мисол. Ушбу

$$f(x) = \cos \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

функциянинг $x \rightarrow 0$ да лимитга эга эмаслигини кўрсатинг.

Нолга интилувчи иккита турли

$$\{x'_n\} = \left\{ \frac{2}{(4n+1)\pi} \right\}, \quad \{x''_n\} = \left\{ \frac{1}{2n\pi} \right\}$$

кетма-кетликларни олайлик. У ҳолда

$$f(x'_n) = \cos \frac{(4n+1)\pi}{2} = 0,$$

$$f(x''_n) = \cos 2n\pi = 1$$

бўлиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n) = 1$$

бўлади.

Бу эса $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ функциянинг $x = 0$ нуқтада limiti мавжуд эмаслигини кўрсатади.

8-таъриф (Коши таърифи). Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, аргумент x нинг $0 < |x - a| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида $|f(x) - b| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, b сон $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги ($x \rightarrow a$ даги) limiti деб аталади.

14-мисол. Ушбу

$$f(x) = \sin x$$

функциянинг $x = \frac{\pi}{2}$ нуқтадаги limiti 1 га тенг экани кўрсатилсин.

$\forall \varepsilon > 0$ сонга кўра δ ни $\delta = \varepsilon$ деб олсак, у ҳолда $|x - \frac{\pi}{2}| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x лар учун

$$\begin{aligned} |\sin x - 1| &= \left| \sin x - \sin \frac{\pi}{2} \right| = \\ &= \left| 2 \sin \frac{x - \frac{\pi}{2}}{2} \cdot \cos \frac{x + \frac{\pi}{2}}{2} \right| < \\ &< \left| 2 \sin \frac{x - \frac{\pi}{2}}{2} \right| < \left| x - \frac{\pi}{2} \right| < \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

муносабат бажарилади. Бундан, таърифга кўра, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$

экани келиб чиқади.

$X = \{x\}$ ҳақиқий сонлар тўплами берилган бўлиб, a нуқта унинг ўнг (чап) лимит нуқтаси бўлсин. Шу тўпланда $f(x)$ функция аниқланган.

9-таъриф (Гейне таърифи). Агар X тўпламнинг нуқталаридан тузилган ва ҳар бир ҳади a дан катта (кичик) бўлиб a га интилувчи ҳар қандай $\{x_n\}$ кетма-кетлик олинганда ҳам мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ҳамма вақт ягона b га интилса, шу b ни $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги ўнг (чап) limiti деб аталади.

10-таъриф (Коши таърифи). Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta = \delta(\varepsilon)$ сон топилсаки, аргумент x нинг $a < x < a + \delta$ ($a - \delta < x < a$) тенгсизликларни қаноатлантирувчи барча $x \in X$ қийматларида $|f(x) - b| < \varepsilon$ тенг-

сизлик бажарилса, b сон $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги ўнг (чап) limiti деб аталади.

Функциянинг ўнг (чап) limitлари қуйидагича белгилади:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b \text{ ёки } f(a+0) = b,$$

$$(\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b \text{ ёки } f(a-0) = b).$$

15-мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ \frac{\cos x}{2}, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

функциянинг $x = 0$ нуқтадаги ўнг ва чап limitларини топинг.

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \sin x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Мисол ва масалалар

Функция limiti таърифларидан фойдаланиб қуйидаги муносабатларни исботланг:

$$132. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6.$$

$$133. \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0.$$

$$134. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} = 0.$$

$$135. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} = 2.$$

$$136. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

$$137. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-3} = \infty.$$

$$138. \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0.$$

$$139. \lim_{x \rightarrow 3} x^4 = 81.$$

$$140. \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Қуйидаги функциялар a нуктада лимитга эга эмаслигини исботланг:

$$141. f(x) = \frac{|x|}{x}, a = 0.$$

$$142. f(x) = \sin \frac{1}{x}, a = 0.$$

$$143. f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{1}{x}, a = 0.$$

$$144. f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + x + 1, & \text{агар } x \geq 1 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x < 1 \text{ бўлса,} \end{cases} a = 1.$$

$$145. f(x) = x - [x], a = 2.$$

$$146. f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса,} \\ b + x, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса, } b \neq 1. \end{cases} a = 0,$$

147. Дирихле функциясининг бирорта нуктада ҳам лимити мавжуд эмаслигини исботланг.

148. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,} \end{cases}$
 функция қандай нукталарда лимитга эга?

149. $f(x) = [x] \cdot \frac{1}{x}$ функциянинг $x \rightarrow 0$ даги лимити мавжудми?

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган нуктадаги ўнг ва чап лимитларини топинг:

$$150. f(x) = \operatorname{th} \frac{1}{x}, a = 0.$$

$$151. f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ \cos x, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса,} \end{cases} a = 0.$$

$$152. f(x) = \operatorname{sgn} x^2, a = 0.$$

$$153. f(x) = \operatorname{sgn} \cos x, a = \frac{\pi}{2}.$$

$$154. f(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{3 - x}}, a = 3.$$

$$155. f(x) = \frac{1}{x - [x]}, a = -1.$$

$$156. f(x) = x + [x^2], a = 10.$$

157. $f(x)$ функциянинг a нуктада бир томонли лимитлар таърифлари инкорини Коши ва Гейне бўйича келтиринг.

158. Функциянинг a нуқтада бир томонли лимитлари мавжуд бўлишидан унинг шу нуқтада лимитга эга бўлиши келиб чиқадими?

$X (X \subset R)$ тўплам берилган бўлиб, a унинг лимит нуқтаси бўлсин. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар a нуқтада чекли лимитга эга бўлиб,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$$

бўлсин. У ҳолда

$$1) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = b \pm c,$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = b \cdot c,$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}, \quad c \neq 0$$

бўлади.

16-мисол. Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left((10 \sin^2 x + 3 \cos^3 x + \frac{x-1}{x+2}) \right)$$

ни топинг.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos^3 x = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x+2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x-1)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x+2)} = -\frac{1}{2}.$$

Демак,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(10 \sin^2 x + 3 \cos^3 x + \frac{x-1}{x+2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} 10 \sin^2 x + \\ &+ \lim_{x \rightarrow 0} 3 \cos^3 x + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x+2} = 0 + 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2 \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Функция лимитининг мавжудлиги ҳақида теоремалар

1°. Агар x нинг a нуқтанинг $U_\delta(a)$ атрофидан олинган қийматларида

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$$

бўлиб, $x \rightarrow a$ да $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар лимитга эга ҳамда

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = b$$

булса, у ҳолда $f(x)$ функция ҳам лимитга эга ва

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = b$$

бўлади.

2°. $X \subset R$ тўплам берилган бўлиб, a шу тўпламнинг лимит нуқтаси ва барча $x \in X$ лар учун $x \leq a$ бўлсин. Агар $f(x)$ функция X тўпламда ўсувчи (камаювчи) бўлиб, юқоридан (қуйиндан) чегараланган бўлса, $f(x)$ функция a нуқтада чекли лимитга эга.

11-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta = \delta(\varepsilon)$ сон топилсаки, аргумент x нинг

$$0 < |x' - a| < \delta, \quad 0 < |x'' - a| < \delta$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий x' ва x'' ($x' \in X$, $x'' \in X$) қийматларида

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

бўлса, $f(x)$ функция учун a нуқтада Коши шарти бажарилади дейилади.

$f(x)$ функция a нуқтада чекли лимитга эга бўлиши учун унинг бу нуқтада Коши шартини қаноатлантириши зарур ва етарли (Коши критерийси).

17-мисол. Ушбу

$$f(x) = x^3 \cos \frac{1}{x}$$

функция учун $a = 0$ нуқтада Коши шартининг бажарилишини кўрсатинг.

Ҳақиқатан ҳам, $\forall \varepsilon > 0$ сон олиб, δ ни $\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$ деб қаралса, x нинг

$$0 < |x' - a| = |x'| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}},$$

$$0 < |x'' - a| = |x''| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий x' , x'' қийматлари учун қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned} |f(x'') - f(x')| &= \left| x''^3 \cos \frac{1}{x''} - x'^3 \cos \frac{1}{x'} \right| \leq \left| x''^3 \cos \frac{1}{x''} \right| + \\ &+ \left| x'^3 \cos \frac{1}{x'} \right| \leq |x''^3| + |x'^3| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Бу эса қаралаётган функциянинг $x = 0$ нуқтада Коши шартининг бажарилишини кўрсатади.

Функцияларни таққослаш

$X \subset R$ тўпلامда $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар аниқланган бўлсин. Бирор a нуқтанинг $U_\delta(a)$ ($U_\delta(a) \subset X$) атрофида $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар қуйидагича таққосланади.

12-таъриф. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар учун шундай ўзгармас $\delta > 0$ ва $C > 0$ сонлар топилсаки, барча $x \in U_\delta(a)$ лар учун

$$|f(x)| \leq C |g(x)|$$

бўлса, у ҳолда $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функция $g(x)$ функцияга нисбатан чегараланган дейилади ва $f(x) = O(g(x))$ каби белгиланади.

Агар $f(x) = O(g(x))$ ва $g(x) = O(f(x))$ бўлса, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $x \rightarrow a$ да бир хил тартибли функциялар дейилади.

Агар

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

бўлса, $x \rightarrow a$ да $g(x)$ ва $f(x)$ лар эквивалент функциялар деб аталади ва $f(x) \sim g(x)$ каби белгиланади.

18-мисол. Ушбу

$$f(x) = \sqrt{|x| + \sqrt{|x|}} \text{ ва } g(x) = \sqrt[3]{|x|}$$

функцияларнинг $x \rightarrow 0$ да ўзаро эквивалентлигини кўрсатинг.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|x| + \sqrt{|x|}}}{\sqrt[3]{|x|}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 + \sqrt{|x|}} = 1.$$

Демак, қаралаётган функциялар ўзаро эквивалент.

13-таъриф. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар учун

$$f(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$$

бўлиб, бунда $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ бўлса, у ҳолда $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функция $g(x)$ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик функция деб аталади ва $f(x) = o(g(x))$ каби белгиланади.

19-мисол. Ушбу $|x|^{5/2} = o(x^2)$ муносабат $x \rightarrow 0$ да ўринли эканини кўрсатинг. $|x|^{5/2} = \sqrt{|x|} \cdot x^2$ тенгликдан ва

$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|} = 0$ эканлигидан $|x|^{\frac{5}{2}} = o(x^2)$ эканлиги келиб чиқади.

Лимит ҳисоблашга онд бўлган мисолларда кўпинча қуйидаги ажойиб лимитлардан фойдаланилади:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0).$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

20-мисол. Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \cdot \sin 2x)}{x^3}$$

лимитни ҳисобланг

Бу ифода $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликдир.

$x \rightarrow 0$ да $x \sin 2x \rightarrow 0$ эканини ҳисобга олиб топамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \sin 2x)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(x \sin 2x) \cdot \sin 2x}{x \cdot (\sin 2x) \cdot 2x} = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \sin 2x)}{x \sin 2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2. \end{aligned}$$

21-мисол. Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x}$$

лимитни ҳисобланг.

$\frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x}$ ифоданинг кўринишини қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\begin{aligned} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x} &= \frac{e^{x^2} - 1 + 1 - \cos x}{\sin^2 x} = \frac{e^{x^2} - 1}{\sin^2 x} + 2 \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{e^{x^2} - 1}{\sin^2 x} + 2 \cdot \frac{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{e^{x^2} - 1}{\sin^2 x} + \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Бундан эса

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{x^2} - 1}{x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

22-мисол. Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

лимитни ҳисобланг.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x - 1)^{-\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot 4}{x^2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.\end{aligned}$$

23-мисол. Агар $x \rightarrow 0$ да $f(x) \rightarrow 0$ бўлса, у ҳолда $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + f(x^2)] = 0$ эканини исботланг. Шартга кўра $x \rightarrow 0$ да $f(x) \rightarrow 0$. Бу эса Гейне таърифига кўра, ҳар қандай нолга интилувчи $\{x_n\}$ ($x_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$) кетма-кетликни олганимизда [ҳам, мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ҳамма-вақт ягона 0 лимитга интилишини англатади.

$y_n = x_n^2$ деб олсак, $n \rightarrow \infty$ да $y_n \rightarrow 0$ бўлиб, юқоридаги таърифга биноан $f(y_n) = f(x_n^2) \rightarrow 0$ муносабатга эга бўламиз. Демак, $f(x^2)$ функция ҳам $x \rightarrow 0$ да нолга интилар экан. Чекли лимитга эга бўлган функциялар устидаги арифметик амалларга кўра $f(x) + f(x^2)$ функциянинг $x \rightarrow 0$ да 0 га интилишини топамиз.

Энди $x \rightarrow 0$ да $f(x) + f(x^2) \rightarrow 0$ бўлсин. $x \rightarrow 0$ да $f(x)$ нинг нолга интилиши ҳақида нима дейиш мумкин?

Мисол сифатида ушбу

$$f(x) = \begin{cases} (-1)^n, & \text{агар } x = \frac{1}{2^{2^n}} \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \neq \frac{1}{2^{2^n}} \text{ бўлса,} \end{cases}$$

функцияни қарайлик. У ҳолда

$$f(x^2) = \begin{cases} (-1)^{n+1}, & \text{агар } x = \frac{1}{2^{2^n}} \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \neq \frac{1}{2^{2^n}} \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлиб, $x \rightarrow 0$ да $f(x) + f(x^2) \rightarrow 0$ бўлади. Лекин $x \rightarrow 0$ да $f(x)$ функциянинг limiti мавжуд эмас. Шундай қилиб, исбот қилинган муносабатнинг тескариси ҳар доим ўринли бўлиши шарт эмас экан.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги лимитларни топинг:

$$159. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} \quad (a > 0).$$

$$160. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x^3-8}.$$

$$161. \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x^3}-8}{\sqrt{x}-4}.$$

$$162. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n-1}{x^m-1} \quad (m, n \in \mathbb{N}).$$

$$163. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1} \quad (n, m \in \mathbb{N}).$$

$$164. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{n}{1-x^n} - \frac{m}{1-x^m} \right) \quad (n, m \in \mathbb{N}).$$

$$165. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}.$$

$$166. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{4}{x}} - \sqrt[4]{1+\frac{3}{x}}}{1 - \sqrt[5]{1-\frac{5}{x}}}.$$

$$167. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[n]{1+ax} \cdot \sqrt[m]{1+bx} - 1} \quad (n, m \in \mathbb{N}).$$

$$168. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n - (\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$169. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}.$$

$$170. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Куйидаги лимитларни топинг:

$$171. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx^3}{nx^3}.$$

$$172. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}.$$

$$173. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 6x - \sin 7x}.$$

$$174. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x^3 - 1}{\sin^6 2x}.$$

$$175. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}.$$

$$176. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sin 2x \cdot \sin x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right).$$

$$177. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi^2 - x^2}.$$

$$178. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos x}}{\operatorname{tg} x^3}.$$

$$179. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{x}.$$

$$180. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}.$$

$$181. \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\cos \frac{1}{x} - \cos \frac{3}{x} \right).$$

$$182. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \pi \sqrt{n^2 + 2n}.$$

$$183. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos^2 2x \cdot \cos^3 3x}{x^3}.$$

$$184. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{n^3} + \sin \frac{2}{n^2} + \dots + \sin \frac{n}{n^2} \right).$$

$$185. \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x^2 - a^2}}.$$

$$186. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\lg^2 x}.$$

$$187. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x}.$$

$$188. \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + \cos x)^{\frac{1}{2x}}.$$

$$189. \lim_{x \rightarrow \infty} x (3^{\frac{1}{x}} - 1).$$

$$190. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ix} - e^{ix}}{\operatorname{tg} x}.$$

$$191. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch} x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$192. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x^2}} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$193. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin 4x - \cos 4x} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$194. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}.$$

195. $f(x) = \sin x$ функция $x \rightarrow +\infty$ да лимитга эга эмаслигини кўрсатинг.

196. $f(x) = \operatorname{sgn} \sin \frac{1}{x}$ функция $x \rightarrow 0$ да лимитга эга эмаслигини кўрсатинг.

197. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар a нуқтада лимитга эга бўлмаса, $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ функцияларнинг бу нуқтада лимити ҳақида нима дейиш мумкин? Мисоллар келтиринг.

$$198. \lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) + \frac{1}{|f(x)|} \right) = 0 \text{ бўлса, } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ ни топинг.}$$

199. Агар $f(x) > 0$ бўлиб, $\lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) + \frac{1}{f(x)} \right) = 2$ бўлса, у ҳолда $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ эканини исботланг.

200. Агар $f(x)$ функция даврий бўлиб, $x \rightarrow \infty$ да $f(x) \rightarrow c$ бўлса, у ҳолда $f(x) = c$ эканлигини кўрсатинг.

201. Даврий функция $x \rightarrow -\infty$ да чексиз катта бўлиши мумкинми?

202. Даврий функция чегараланмаган бўлиши мумкинми?

203. $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2^1} \cos \frac{x}{2^2} \dots \cos \frac{x}{2^n}$ ни топинг.

204. $[0, +\infty)$ оралиқда аниқланган, қийматлар тўплами $[0, +\infty)$ оралиқдан иборат $f(x)$ функция $x=0$ нуқта атрофида чегараланган бўлиб, бу функция учун ихтиёрий $x \geq 0$, $y \geq 0$ ларда $f(x+y) = f(x) + f(y)$ муносабат ўринли бўлса, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ лимит мавжудлигини исботланг.

α ва β ларнинг қандай қийматларида $f(x)$ функция чексиз кичик бўлади?

205. $f(x) = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2} - \alpha x - \beta, x \rightarrow \infty.$

206. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3} - \alpha x - \beta, x \rightarrow +\infty.$

207. $f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1} - \alpha x - \beta, x \rightarrow +\infty.$

208. $f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta}, x \rightarrow +0.$

209. $f(x) = (1 - x^\alpha)^{x^\beta}, x \rightarrow +0.$

210. $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x^\beta}, x \rightarrow +0.$

Қуйидаги муносабатларни исботланг:

211. $o(o(f)) = o(f).$

212. $O(o(f)) = o(f).$

213. $O(O(f)) = O(f).$

214. $o(f) + O(f) = O(f).$

215. $o(f) \cdot O(f) = o(f).$

IV боб

ФУНКЦИЯНИНГ УЗЛУКСИЗЛИГИ ВА ТЕКИС УЗЛУКСИЗЛИГИ

1-§. ФУНКЦИЯНИНГ УЗЛУКСИЗЛИГИ

$X \subset R$ тўпламда $f(x)$ функция аниқланган бўлиб, $x_0 (x_0 \in X)$ тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

1-таъриф (Коши таърифи). $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ сон топилсаки, функция аргументи

$x \in X$ нинг $|x - x_0| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз дейилади.

1-мисол. Ушбу

$$f(x) = \sqrt{x+11}$$

функциянинг $x_0 = 5$ нуқтада узлуксиз эканини кўрсатинг.

$\forall \varepsilon > 0$ сон олиб, бу ε сонга кўра $\delta > 0$ сонни $\delta = 4\varepsilon$ бўлсин деб қаралса, у ҳолда $|x - 5| < \delta$ бўлганда

$$\begin{aligned} |f(x) - f(5)| &= |\sqrt{x+11} - 4| = \\ &= \frac{|x-5|}{\sqrt{x+11} + 4} < \frac{|x-5|}{4} < \frac{\delta}{4} = \varepsilon \end{aligned}$$

бўлади.

Бу эса қаралаётган функциянинг $x_0 = 5$ нуқтада узлуксиз эканини билдиради.

2-таъриф (Гейне таърифи). Агар X тўпلامнинг элементларидан тузилган ва x_0 га интилувчи ҳар қандай $\{x_n\}$ кетма-кетлик олинганда ҳам функция қийматларидан тузилган мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ҳамма вақт ягона $f(x_0)$ га интилса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз деб аталади.

2-мисол. Ушбу

$$f(x) = x \cdot D(x)$$

функциянинг $x_0 = 0$ нуқтадаги узлуксиз эканини кўрсатинг. Бу ерда $D(x)$ — Дирихле функцияси.

Ихтиёрий нолга интилувчи $\{x_n\}$ кетма-кетлик оламин. У ҳолда мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик

$$f(x_n) = x_n \cdot D(x_n)$$

кўринишга эга бўлади.

Маълумки, Дирихле функцияси чегараланган. $\{x_n\}$ кетма-кетлик чексиз кичик бўлгани учун $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ҳам чексиз кичик бўлади. Демак, $n \rightarrow \infty$ да $f(x_n) \rightarrow 0$ бўлади. Бу эса қаралаётган функциянинг $x_0 = 0$ нуқтада узлуксиз эканини билдиради.

Агар $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

муносабат ўринли бўлса, ушбу

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

муносабат ҳам ўринли бўлади. Одатда $x - x_0$ айирма *аргумент орттирмаси*, $f(x) - f(x_0)$ эса *функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси* дейилади.

Улар мос равишда Δx ва $\Delta y (\Delta f(x_0))$ каби белгиланади:

$$\Delta x = x - x_0, \Delta y = \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0).$$

Демак, $x = x_0 + \Delta x$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Натижада, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ муносабат

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = 0$$

кўринишга эга бўлади.

Шундай қилиб, $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада узлуксизлиги, бу нуқтада аргументнинг чексиз кичик орттирмасига функциянинг ҳам чексиз кичик орттирмаси мос келиши сифатида ҳам таърифланиши мумкин.

3-мисол. Ушбу

$$f(x) = \cos x$$

функциянинг $\forall x_0 \in R$ нуқтада узлуксиз бўлишини кўрсатинг.

$\forall x_0 \in R$ нуқтани олиб, унга Δx орттирма берайлик. Натижада $f(x) = \cos x$ функция ҳам ушбу

$$\Delta y = \cos(x_0 + \Delta x) - \cos x_0$$

орттирмага эга бўлиб, $-\pi < \Delta x < \pi$ бўлганда

$$\begin{aligned} |\Delta y| &= |\cos(x_0 + \Delta x) - \cos x_0| = \\ &= \left| 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \sin \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) \right| \leq 2 \cdot \frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x| \end{aligned}$$

муносабатга эга бўламиз. Бундан эса $\Delta x \rightarrow 0$ да $\Delta y \rightarrow 0$ бўлиши келиб чиқади.

Демак, $f(x) = \cos x$ функция $x_0 \in R$ нуқтада узлуксиз.

3-таъриф. Агар $f(x)$ функция X тўпламнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, функция X тўпланда узлуксиз деб аталади.

4-мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 2, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

функцияни $x_0 = 0$ нуқтада узлуксизликка текширинг.

Маълумки,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Лекин бу лимит қиймат функциянинг O нуқтадаги қиймати билан устма-уст тушмайди. Демак, бу функция $x_0 = 0$ нуқтада узлуксиз эмас.

1. $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда аниқланган бўлиб, $x_0 (x_0 \in X)$ тўпламнинг (ўнг ва чап) лимит нуқтаси бўлсин.

$x \rightarrow x_0$ да $f(x)$ функция учун қуйидаги 3 ҳолдан биттасигина бажарилади:

1°. Чекли $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ чап ва ўнг лимитлар мавжуд ва

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0) \quad (1)$$

тенгликлар ўринли.

Бу ҳолда $f(x)$ функция $x = x_0$ да узлуксиз бўлади.

2°. $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ лар мавжуд, лекин (1) тенгликлар бажарилмайди. У ҳолда $f(x)$ $x = x_0$ нуқтада 1-тур узилишга эга дейилади.

3°. $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ ларнинг бирортаси чексиз ёки мавжуд эмас. Бу ҳолда функция x_0 нуқтада 2-тур узилишга эга дейилади.*

4°. $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$ бўлса, бундай узилиш, бартараф қилиш мумкин бўлган узилиш дейилади.

5-мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция учун $x_0 = 0$ бартараф қилиш мумкин бўлган узилиш нуқтаси эканини кўрсатайлик.

Маълумки,

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \text{ бўлиб, } x \rightarrow 0 \text{ да}$$

$x \sin \frac{1}{x}$ функция 0 га интилади.

Демак, $x \rightarrow 0$ да $f(x)$ функция чекли лимитга эга, лекин бу лимит $f(0) = 1$ билан тенг эмас, яъни $x_0 = 0$ қаралаётган функция учун бартараф қилиш мумкин бўлган узилиш нуқтасидир. Бунда $f(0) = 0$ деб олиш билан, функция узилишидан қутулинади.

* Баъзан $f(x)$ функция x_0 нуқтада аниқланмаган ($x_0 \in X$) бўлиб, $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ ларнинг мавжуд ёки мавжудмаслигига қараб $f(x)x_0$ да биринчи ёки иккинчи тур узилишга эга, деган фикр ҳам ишлатилади.

6-мисол. Ушбу

$$f(x) = [x]$$

функциянинг $x_0 = 2$ нуқтада биринчи тур узилишга эга эканини кўрсатинг.

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} [x] = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} [x] = 2.$$

Демак, функция $x_0 = 2$ нуқтада биринчи тур узилишга эга.

Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ — рационал бўлса,} \\ -1, & \text{агар } x \text{ — иррационал бўлса.} \end{cases}$$

функциянинг $\forall x_0 \in R$ нуқтадаги лимити мавжуд эмас, демак, бу функция x_0 нуқтада иккинчи тур узилишга эга.

$f(x) = \operatorname{ctg} x$ функциянинг $x_0 = \pi$ нуқтадаги ўнг ва чап лимитлари

$$\lim_{x \rightarrow \pi+0} \operatorname{ctg} x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pi-} \operatorname{ctg} x = +\infty$$

бўлади.

Демак, $f(x) = \operatorname{ctg} x$ функция $x_0 = \pi$ нуқтада иккинчи тур узилишга эга.

2. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар X тўпلامда аниқланган бўлиб, $x_0 \in X$ нуқта X тўпلامнинг лимит нуқтаси бўлсин.

Агар $f(x)$ ва $g(x)$ x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$f_1(x) \pm g(x), \quad f_1(x) \cdot g(x),$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0, \quad \forall x \in X);$$

функциялар ҳам x_0 нуқтада узлуксиз бўлади.

7-мисол. Ушбу

$$f(x) = 3x^3 + \sin^3 x$$

функциянинг $X = R$ да узлуксизлигини кўрсатинг.

$\varphi(x) = x$, $g(x) = \sin x$ функциялар R да узлуксиз. $f(x)$ функцияни

$$f_1(x) = 3 \cdot x \cdot x \cdot x + \sin^2 x \cdot \sin x$$

кўринишда ёзамиз. У ҳолда узлуксиз функциялар устидаги арифметик амалларга кўра $f(x)$ функциянинг R да узлуксизлиги келиб чиқади.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг узлуксизлигини курсатинг:

1. $f(x) = \sin x$.

2. $f(x) = x^4$.

3. $f(x) = \sqrt{x}$.

4. $f(x) = |x|$.

5. $f(x) = \operatorname{sh} x$.

6. $f(x) = xe^{\frac{\sin x}{x}}$.

7. $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада бир томондан (ундан ва чапдан) узлуксиз бўлиши таърифларини келтиринг.

8. $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада узлуксиз бўлиши зарурий ва етарли шартларини ифодаланг.

9. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда $|f(x)|$ функциянинг ҳам шу нуқтада узлуксиз бўлишини исботланг.

10. $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксизлигининг геометрик талқинини ифодаланг.

11. Агар $f(x)$ функция a нуқтада узлуксиз бўлса, $\varphi(x) = f(bx + c)$ ($b \neq 0$) функция $\frac{a-c}{b}$ нуқтада узлуксиз бўлишини исботланг.

Қуйидаги функцияларнинг узилиш нуқталарини аниқланг ва графикларини чизинг:

12. $f(x) = \frac{|x+2|}{x+2}$.

17. $f(x) = \frac{|x-1|}{x^2 - x^3}$.

13. $f(x) = \operatorname{sgn}(e^x - 1)$.

18. $f(x) = \operatorname{sgn} \sin x$.

14. $f(x) = x - [x]$.

19. $f(x) = \frac{x}{\sin x}$.

15. $f(x) = \frac{1}{x - [x]}$.

20. $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

16. $f(x) = \left[\frac{1}{x} \right]$.

21. $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$.

22. $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ x^2, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$

23. Ҳеч бир нуқтада узлуксиз бўлмаган функцияга мисол келтиринг.

24. Фақат биргина $x_0 \in R$ нуқтада узлуксиз, бошқа нуқталарда узлуксиз бўлмаган функцияларга мисол келтиринг.

25. $f(x) + g(x)$ функция биринчи тур узилишга эга бўл-

са, у ҳолда $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг камида биттаси биринчи тур узилишга эга бўлиши шартми?

26. $f(x) \cdot g(x)$ функция иккинчи тур узилишга эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг жуда бўлмаганда биттаси иккинчи тур узилишга эга бўлиши шартми?

3. $f(x)$ функция X тўпلامда аниқланган бўлиб, $x_0 \in X$ нуқтада узлуксиз бўлсин. У ҳолда

1) x_0 нуқтанинг етарли кичик атрофида функция чегараланган бўлади.

2) Агар $f(x_0) \neq 0$ бўлса, x_0 нуқтанинг етарли кичик атрофида $f(x)$ ўз ишорасини сақлайди.

(Булар узлуксиз функцияларнинг локал хоссалари.)

$y = f(x)$ функция X тўпلامда $z = \varphi(y)$ функция Y тўпلامда аниқланган бўлиб, улар ёрдамида $z = \varphi(f(x))$ мураккаб функция тузилган бўлсин.

Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада, $z = \varphi(y)$ функция x_0 га мос келган $f(x_0)$ нуқтада узлуксиз бўлса, $z = \varphi(f(x))$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлади. (Мураккаб функция узлуксизлиги ҳақидаги теорема).

1-теорема (Больцано—Кошининг биринчи теоремаси). Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган узлуксиз бўлиб, сегментнинг четки нуқталарида ҳар хил ишорали қийматларга эга бўлса, у ҳолда шундай $c (a < c < b)$ нуқта топиладики, у нуқтада функция нолга айланади: $f(c) = 0$.

2-теорема (Больцано—Кошининг иккинчи теоремаси). Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, унинг четки нуқталарида $f(a) = A$, $f(b) = B$ қийматларга эга ва $A \neq B$ бўлса, A ва B орасида ҳар қандай C сон олинганда ҳам a билан b орасида шундай c нуқта топиладики,

$$f(c) = C$$

бўлади.

3-теорема (Вейерштрасснинг биринчи теоремаси). Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлса, у шу сегментда чегараланган бўлади.

4-теорема (Вейерштрасснинг иккинчи теоремаси). Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлса. Функция шу сегментда ўзининг аниқ юқори ҳамда аниқ қуйи чегараларига эришади.

(Юқорида келтирилган Больцано—Кошининг ва Вейерштрасс теоремалари узлуксиз функцияларнинг глобал хоссаларидир).

8-мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{|x| - x}{x^2}$$

функцияни узлуксизликка текширинг.
Маълумки,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса,} \\ -x, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Бундан фойдаланиб, топамиз:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ -\frac{2}{x}, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$x = 0$ нуқтада функция аниқланмаган бўлиб,

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = +\infty$$

муносабатлар ўринлидир.

Бу эса таърифга кўра $x = 0$ нуқта $f(x)$ функция учун иккинчи тур узилиш нуқтаси эканини билдиради.

9-мисол Бутун сонлар ўқида аниқланган, $x = 1$, $x = -1$ нуқталарда узлуксиз, қолган барча нуқталарда узилишга эга бўлган функцияни тузинг.

Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{агар } x \text{ — рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ — иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарайлик.

Бу функцияни

$$f(x) = (x^2 - 1)D(x)$$

Дирихле функцияси ёрдамида ҳам ёзиш мумкин.

Маълумки, Дирихле функцияси сонлар ўқининг ҳамма нуқталарида узилишга эга. 1 га интилувчи ихтиёрий $\{x_n\}$ кетма-кетлик олайлик, у ҳолда мос функция қийматларидан иборат бўлган $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик $n \rightarrow \infty$ да нолга интилади. Бу эса функциянинг $x = 1$ нуқтада узлуксиз эканини англатади.

Функциянинг $x = -1$ нуқтада узлуксизлиги худди шунга ўхшаш кўрсатилади.

Энди ихтиёрий $a \in \mathbb{R}$, $a \neq \pm 1$ га интилувчи рационал сонлар ва иррационал сонлар кетма-кетлигини қарасак, мос функция қийматларидан иборат кетма-кетликлар $a^2 - 1$ га ва 0 га интилади. $a \neq \pm 1$ бўлгани учун $a^2 - 1 \neq 0$. Де-

мак, қаралаётган функция $x = 1$, $x = -1$ нуқталардан бошқа барча нуқталарда узилишга эга.

10-мисол. Ушбу

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$$

функцияни узлуксизликка текширинг ва унинг графигини чизинг.

$f(x)$ функциянинг $x = 0$, $x > 0$, $x < 0$ нуқталардаги қийматларини қарайлик:

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^0 - n^0}{n^0 + n^0} = 0.$$

$x > 0$ лар учун

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n^{-2x}}{1 + n^{-2x}} = 1.$$

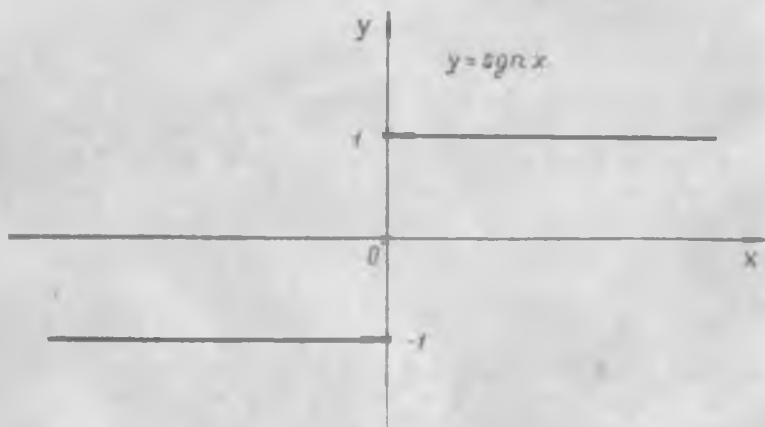
$x < 0$ лар учун эса

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n^{-2x}}{1 + n^{-2x}} = -1$$

булади. Демак,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \\ -1, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Бу функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ бўлиб, маълумки у $x = 0$ нуқтада биринчи тур узилишга эга (2-чизма).



2-чизма.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларни узлуксизликка текширинг ва улар графикларини чизинг:

$$27. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^n} \quad (x \geq 0). \quad 35. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + e^{nx}}{1 + xe^{nx}}.$$

$$28. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \quad (x \geq 0).$$

$$29. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}. \quad 36. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + (2 \sin x)^{2n}}.$$

$$30. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1+x^{2n}}. \quad 37. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^x x^{2n} + x^2 + 1}{x^{2n} + 1}.$$

$$31. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+e^{n(x+1)}}. \quad 38. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x \operatorname{arctg}(n \operatorname{ctg} x)).$$

$$32. f(x) = x^2 - [x^2]. \quad 39. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{2n} x.$$

$$33. f(x) = \frac{1}{\sin x^2}. \quad 40. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}.$$

$$34. f(x) = \operatorname{sgn}\left(\cos \frac{1}{x}\right). \quad 41. f(x) = [x] \sin \pi x.$$

Қуйидаги функцияларни a нинг қандай қийматларида узлуксиз бўлишини аниқланг:

$$42. f(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^n - 1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ a, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$43. f(x) = \begin{cases} x \operatorname{ctg} x, & \text{агар } x \neq 0, |x| < \frac{\pi}{2} \text{ бўлса,} \\ a, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$44. f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ a, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases} \quad (c > 0)$$

$$45. f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh} x}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ a, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$46. f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ a, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$47. f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ a, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$48. f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса,} \\ a+x, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

49. Монотон функциянинг узлуксизлиги ва узилиши ҳақидаги теоремаларни келтиринг.

50. Қуйидаги функциялардан тузилган мураккаб функцияларни узлуксизликка текширинг:

а) $f(x) = \operatorname{sgn} x, \quad g(x) = 1 + x^2;$

б) $f(x) = \operatorname{sgn} x, \quad g(x) = -1 + x^2;$

в) $f(x) = \operatorname{sgn} x, \quad g(x) = 1 + x - [x].$

51. $f(g(x))$ мураккаб функция x_0 нуқтада биринчи тур (иккинчи тур) узилишга эга бўлса, $g(x)$ нинг x_0 нуқтада албатта биринчи тур (иккинчи тур) узилишга эга бўлиши шартми?

52. Монотон, лекин узлуксиз бўлмаган функцияларга мисол келтиринг.

53. Вейерштрасс теоремаларида $[a, b]$ сегмент ўрнига $[a, b]$ ёки $[a, b] \cup [c, d]$ қаралса, тасдиқ ўринли бўладими?

54. $[a, b]$ сегментда чегараланган ихтиёрий $f(x)$ функция узлуксиз бўладими?

55. Узлуксиз бўлмаган функциялар учун Вейерштрасс теоремалари ўринлими?

56. $xe^x = 1$ тенглама $(0,1)$ ораликда ҳеч бўлмаганда битта илдизга эга эканини кўрсатинг.

57. Агар $f(x)$ функция $\{x_1\}$ ва $\{x_2\}$ тўпламларда узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг $\{x_1\} \cup \{x_2\}$ тўпلامда узлуксизлиги ҳақида нима дейиш мумкин?

58. $f(x)$ функция узлуксиз бўлиб,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{2k+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^{2k+1}} = 1 \quad (k \in \mathbb{N})$$

муносабат бажарилса, у ҳолда шундай a нуқта топилиб, $f(a) = 0$ бўлишини кўрсатинг.

59. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$p(x) = \max_{\forall x \in [a, b]} \{f(x), g(x)\}, \quad q(x) = \min_{\forall x \in [a, b]} \{f(x), g(x)\}$$

функциялар ҳам $[a, b]$ да узлуксизлигини кўрсатинг.

60. $f(x)$ функция $[a, c]$ ва $[c, b]$ сегментларда узлуксиз бўлсин. $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлиши учун етарли шарти келтиринг ва исботланг.

61. Агар $f(x)$ функция $\forall [a, b] \subset X$ сегментда узлуксиз бўлса, у ҳолда у X тўпلامда узлуксиз бўлишини исботланг ($a < b$).

62. Тескари функция мавжудлиги ва узлуксизлиги ҳақидаги теоремани келтиринг.

63. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган бўлиб, қатъий монотон бўлса, у ҳолда унга тескари функциянинг узлуксизлигини исботланг.

64. $f(x)$ функция $[0, 1]$ оралиқда аниқланган, монотон бўлиб, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ бўлсин. Агар $\forall x \in [0, 1]$ учун шундай $n \in \mathbb{N}$ топилсаки,

$$\underbrace{f(f(f \dots f(f(x)) \dots))}_{n \text{ та}}} = x$$

муносабат бажарилса, $[0, 1]$ оралиқда $f(x) = x$ эканини исботланг.

65. $f(x)$ функция R да узлуксиз бўлиб, $\forall x \in R$ учун $f(f(x)) = x$ муносабат бажарилса, у ҳолда шундай c нуқта топилиб, $f(c) = 0$ бўлишини исботланг.

66. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар узлуксиз ва бир хил даврли бўлсин. Агар

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)] = 0$$

бўлса,

$$f(x) = g(x)$$

эканлигини исботланг.

2-§. ФУНКЦИЯНИНГ ТЕКИС УЗЛУКСИЗЛИГИ

Бирор $y = f(x)$ функция X тўпلامда берилган бўлсин.

4-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta(\varepsilon) > 0$ сон топилсаки, X тўпلامнинг $|x' - x''| < \delta$ тенгсизлигини қаноатлантирувчи ихтиёрий x' ва x'' ($x', x'' \in X$) нуқталарида

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция X тўпلامда текис узлуксиз деб аталади.

Бу таърифни қисқача

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x', x'' \in X: |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

кўринишда ифодалаш мумкин.

11-мисол. Ушбу

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

функциянинг $X = [1, 2]$ тўпламда текис узлуксизлигини кўрсатинг.

$\forall \varepsilon > 0$ сон учун $\delta(\varepsilon) > 0$ сонни $\delta = 3\varepsilon$ деб олсак, унда $|x' - x''| < \delta = 3\varepsilon$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall x', x'' \in [1, 2]$ ларда

$$\begin{aligned} \left| \sqrt[3]{x'} - \sqrt[3]{x''} \right| &= \frac{|x' - x''|}{\sqrt[3]{x'^2} + \sqrt[3]{x'x''} + \sqrt[3]{x''^2}} \leq \\ &\leq \frac{|x' - x''|}{3} < \frac{\delta}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

бўлишини топамиз. Бу эса, таърифга кўра, берилган $f(x) = \sqrt[3]{x}$ функциянинг $X = [1, 2]$ да текис узлуксиз эканини билдиради.

$f(x)$ функция X да текис узлуксиз эмаслигини тубандигича таърифлаш мумкин.

5-таъриф Шундай мусбат ε сони мавжуд бўлиб, $\forall \delta > 0$ сон олинганда ҳам $|x' - x''| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи шундай $x', x'' \in X$ нуқталар топилсаки

$$|f(x') - f(x'')| > \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция X тўпламда текис узлуксиз эмас дейилади.

Бу таърифни қисқача

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x' \in X, \exists x'' \in X: |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| > \varepsilon$$

кўринишда ифодалаш мумкин.

12-мисол. Ушбу

$$f(x) = x^2$$

функция $X = (0, +\infty)$ тўпламда текис узлуксиз эмаслигини кўрсатинг. Ихтиёрий мусбат δ сонни олайлик. Агар $\varepsilon = 1$ ва $x' = \frac{1}{\delta}$, $x'' = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$ деб олинса, унда

$$|x' - x''| = \left| \frac{1}{\delta} - \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right) \right| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

бўлиб.

$$|f(x') - f(x'')| = |x'^2 - x''^2| = \left| \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{\delta} \right)^2 \right| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1 = \varepsilon.$$

Бу эса $f(x) = x^2$ функциянинг $X = (0, +\infty)$ тўпلامда текис узлуксиз эмаслигини билдиради.

5-теорема (Кантор теоремаси). Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлса, у шу сегментда текис узлуксиз бўлади.

Масалан, ушбу

$$f(x) = \sqrt{x}$$

функция, $[0, 1]$ сегментда текис узлуксиз бўлади, чунки бу функция шу сегментда узлуксиздир.

13-мисол. Ушбу

$$f(x) = \ln x$$

функция $X = (0, 1)$ тўпلامда текис узлуксиз эмаслигини кўрсатинг.

Ихтиёрий мусбат δ сонни олиб, $\varepsilon = \frac{1}{2} \ln 2$ ва $x' = \frac{1}{n}$, $x'' = \frac{1}{2n}$ дейлик. n ни етарлича катта қилиб олиш ҳисобига

$$|x' - x''| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \right| = \frac{1}{2n} < \delta$$

тенгсизликка эришиш мумкин. Унда

$$|f(x') - f(x'')| = \left| \ln \frac{1}{n} - \ln \frac{2}{n} \right| = \ln 2 > \frac{1}{2} \ln 2 = \varepsilon$$

бўлади. Бу эса $f(x) = \ln x$ функциянинг $(0, 1)$ да текис узлуксиз эмаслигини билдиради.

$f(x)$ функция X тўпلامда берилган бўлиб, δ ихтиёрий мусбат сон бўлсин.

6-таъриф. Ушбу

$\omega(f; \delta) = \sup \{ |f(x') - f(x'')| : \forall x', x'' \in X : |x' - x''| \leq \delta \}$
 $f(x)$ функциянинг X тўпلامдаги узлуксизлик модули деб аталади.

6-теорема. $f(x)$ функция X тўпلامда текис узлуксиз бўлиши учун

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega(f; \delta) = 0$$

лимит муносабатнинг бажарилиши зарур ва етарли.

14-мисол. Ушбу

$$f(x) = x^2 + 1$$

функциянинг $X = [0, 1]$ сегментдаги узлуксизтик модулини топинг ва $f(x)$ нинг X да текис узлуксизлигини кўрсатинг.

$X = [0, 1]$ да ихтиёрий x' нуқта олиб, x'' нуқтани эса $x'' = x' - \delta$ деб қарайлик ($0 < \delta < 1$). Равшанки, $2\delta - \delta^2 > 0$ ва

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| &= |(x'^2 + 1) - (x''^2 + 1)| = \\ &= |2x'\delta - \delta^2| \leq 2\delta - \delta^2. \end{aligned}$$

Демак,

$$\begin{aligned} \omega(f; \delta) &= \sup \{ |f(x') - f(x'')| : \forall x', x'' \in X : \\ & : |x' - x''| \leq \delta \} \leq 2\delta - \delta^2. \end{aligned}$$

Агар $x' = 1$, $x'' = 1 - \delta$ нуқталар учун $|x' - x''| \leq \delta$ ва $|f(x') - f(x'')| = 2\delta - \delta^2$ бўлишини эътиборга олсак, унда $\omega(f; \delta) = 2\delta - \delta^2$ эканини топамиз. Бундан эса:

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega(f; \delta) = \lim_{\delta \rightarrow +0} (2\delta - \delta^2) = 0.$$

Демак, берилган $f(x) = x^2 + 1$ функция $[0, 1]$ да текис узлуксиз.

15-мисол. Ушбу

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

функциянинг $X = (0, +\infty)$ тўпламдаги узлуксизлик модулини топинг ва $f(x)$ функцияни текис узлуксизликка текширинг.

Ихтиёрий мусбат δ сонни олайлик.

Равшанки,

$$|f(x') - f(x'')| = \left| \sin \frac{1}{x'} - \sin \frac{1}{x''} \right| \leq 2 \quad (x', x'' \in X).$$

Жумладан $|x' - x''| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий x' ва x'' лар учун ҳам

$$\left| \sin \frac{1}{x'} - \sin \frac{1}{x''} \right| \leq 2$$

бўлади. Демак,

$$\omega\left(\sin \frac{1}{x}; \delta\right) \leq 2.$$

Иккинчи томондан,

$$x'_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, \quad x''_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

дейилса, унда n ни етарлича катта қилиб олиш ҳисобига бу x'_n ва x''_n лар учун

$$|x'_n - x''_n| < \delta$$

тенгсизликка эришиш мумкин. Унда

$$\begin{aligned} \left| \sin \frac{1}{x'_n} - \sin \frac{1}{x''_n} \right| &= \left| \sin \left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) \right| = 2 \end{aligned}$$

бўлади.

Демак,

$$\omega\left(\sin \frac{1}{x}; \delta\right) = 2.$$

Аммо

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega\left(\sin \frac{1}{x}; \delta\right) = 2 \neq 0$$

бўлгани сабабли $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ функция $(0; +\infty)$ да текис узлуксиз эмас.

16-мисол. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар бирор $\{x\}$ тўпламда текис узлуксиз бўлса, $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$ функцияни текис узлуксизликка текширинг.

Аввало $\{x\} = [a, b]$ бўлган ҳолни қарайлик. Шартга кўра $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ да текис узлуксиз. $\forall x' \in [a, b], \forall x'' \in [a, b]$ нуқталарни олиб қуйидаги айирмани қараймиз:

$$\begin{aligned} \varphi(x') - \varphi(x'') &= f(x')g(x') - f(x'')g(x'') = f(x')g(x') - \\ &\quad - f(x')g(x'') + f(x')g(x'') - f(x'')g(x'') = \\ &= f(x')[g(x') - g(x'')] + g(x'')[f(x') - f(x'')]. \end{aligned}$$

Вейерштрасснинг иккинчи теоремага биноан

$$A = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|, \quad B = \sup_{x \in [a, b]} |g(x)|$$

ларга эга бўламиз. Бундан эса

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leq A |g(x') - g(x'')| + B \cdot |f(x') - f(x'')|$$

бўлади. Равшанки, $\varphi(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментда текис узлуксизлиги учун, $f(x)$ ва $g(x)$ ларнинг бу сегментда текис узлуксизлиги кифоя.

Агар қаралаётган $[a, b]$ сегмент ўрнига $(-\infty; +\infty)$ оралиқни олсак, умуман айтганда, $\varphi(x)$ текис узлуксиз бўлмасдан қолиши мумкин. Масалан, $f(x) = x$, $g(x) = x$ функциялар бутун сонлар ўқида текис узлуксиз, лекин $f(x) - g(x) = x^2$ функция қаралаётган оралиқда текис узлуксиз эмас.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларни текис узлуксизликка текширинг:

67. $f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (0 < x < \pi).$

68. $f(x) = x \cdot \sin x \quad (0 \leq x < +\infty).$

69. $f(x) = x^2 \quad (-e < x < e).$

70. $f(x) = e^x \quad (-\infty < x < +\infty).$

71. $f(x) = \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{x} \quad (0 < x < 1).$

72. $f(x) = x \sin \frac{1}{x} \quad (0 < x < \pi).$

73. $f(x) = \sin \sqrt{x} \quad (1 \leq x < +\infty).$

74. $f(x) = e^{-\arcsin x} \quad (-1 \leq x \leq 1).$

75. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ e^{-x}, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$

76. $f(x) = \sin |x|^\alpha, \quad \alpha > 0.$

Қуйидаги функцияларнинг берилган оралиқдаги узлуксизлик модулларини топинг ва текис узлуксизликка текширинг:

77. $f(x) = x^3 \quad (-e \leq x \leq e).$

78. $f(x) = \frac{1}{x} \quad (0 < a < x < +\infty).$

79. $f(x) = \sin x + \cos x \quad (0 \leq x \leq 2\pi).$

80. $f(x) = \frac{1}{x^2} \quad (0 < x < 1).$

81. $f(x) = x^3 \quad (-\infty < x < +\infty).$

82. Агар $\delta_1 < \delta_2$ бўлса, $\omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$ тенгсизликни исботланг.

83. Агар $f(x)$ функция X тўпلامда чегараланган бўлса, у ҳолда $\forall \delta > 0$ учун $\omega(f; \delta) < +\infty$ эканини исботланг.

84. Агар $f(x)$ функция чегараланган X тўпلامда аниқланган бўлиб, чегараланмаган бўлса, у ҳолда $\forall \delta > 0$ учун $\omega(f; \delta) = +\infty$ эканлигини исботланг.

85. $f(x)$ функция a нуқтада текис узлуксиз, деган жумла маънога эгами?

86. (a, b) оралиқда текис узлуксиз функция чегараланган бўладими? (97-масалага қаранг.)

87. Функция текис узлуксизлигининг геометрик талқинини ифодаланг.

88. Агар $f(x)$ функция X тўпلامда узлуксиз бўлса, у берилган тўпلامда текис узлуксиз бўладими?

89. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ ва $[b, c]$ сегментларда текис узлуксиз бўлса, у ҳолда у $[a, c]$ сегментда ҳам текис узлуксизлигини исботланг.

90. Агар 89-мисолда $[b, c]$ сегмент ўрнига (b, c) оралиқ олинса, $f(x)$ функциянинг $[a, c]$ сегментда текис узлуксизлиги ҳақида нима дейиш мумкин?

91. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар X тўпلامда текис узлуксиз бўлса, у ҳолда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ лар учун $\alpha f(x) + \beta g(x)$ функция ҳам X тўпلامда текис узлуксиз эканини исботланг.

92. Мураккаб функциянинг текис узлуксиз бўлиши учун бирорта етарли шарт келтиринг ва исботланг.

93. Агар $f(x)$ функция A ва B тўпلامларда текис узлуксиз бўлса, у ҳолда $A \cap B$ тўпلامда ҳам текис узлуксиз бўлишини исботланг.

94. Узлуксиз даврий функция текис узлуксиз бўлишини исботланг.

95. Интервалда (чекли ёки чексиз) узлуксиз, чегараланган монотон функциянинг текис узлуксизлигини исботланг.

96. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда текис узлуксиз бўлмаса, у ҳолда унинг ҳеч бўлмаганда $[a, b]$ оралиқдаги бирорта нуқтада узилишга эга эканлигини исботланг.

97. Чекли (a, b) оралиқда $f(x)$ функция текис узлуксиз бўлиши учун, унинг (a, b) оралиқда узлуксиз бўлиб, чекли

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x), \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$$

лимитларнинг мавжудлиги зарур ва етарлилигини исботланг.

98. $f(x)$ функция $[0; +\infty]$ оралиқда текис узлуксиз бўлса, у ҳолда $x \rightarrow +\infty$ да

$$f(x) = o(x)$$

эканлигини исботланг.

99. X тўпламда α тартибли Гёльдер шартини қаноатлантирувчи функциянинг текис узлуксизлигини исботланг.

100. $f(x)$ функция $[0, 1]$ сегментдаги барча рационал сонлар тўплами Q_0 да аниқланган бўлсин. $[0, 1]$ да узлуксиз $g(x)$ функция мавжуд бўлиб, $\forall x \in Q_0$ ларда $f(x) = g(x)$ тенглик бажарилиши учун, $f(x)$ функциянинг Q_0 да текис узлуксиз бўлиши зарур ва етарлилигини исботланг.

V боб

ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛА ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАРИ

1. §. ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛАСИ

1°. Функция ҳосиласининг таърифи $y = f(x)$ функция x_0 нуқтанинг ($x_0 \in R$) бирор атрофида берилган бўлсин. Бу функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \quad (1)$$

нинг аргумент орттирмаси Δx га нисбати

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \quad (\Delta x \neq 0)$$

ни қараймиз.

1-таъриф. Агар $\Delta x \rightarrow 0$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбатнинг limiti

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (2)$$

мавжуд ва чекли бўлса, бу лимит $y = f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи деб аталади ва $f'(x_0)$ ёки $y'_{x=x_0}$

ёки $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$ кўринишларда белгиланади.

Демак,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

$y = f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи қуйидагича ҳам таърифланиши мумкин:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (3)$$

1- мисол. Ушбу $y = f(x) = x^2$ функциянинг $x = x_0$ тадаги ҳосиласини топинг.

Бу функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмасы (1) га кўра

$$\Delta f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2$$

бўлади. Унда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

бўлади.

$$\text{Демак, } f'(x_0) = (x^2)'_{x=x_0} = 2x_0.$$

2- мисол. Ушбу $f(x) = e^x$ функциянинг $x_0 = 1$ нуқтадаги ҳосиласини топинг.

Юқоридаги (3) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} f'(1) &= (e^x)'_{x=1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e(e^{x-1} - 1)}{x - 1} = \\ &= e \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} = e \cdot \ln e = e. \end{aligned}$$

Демак,

$$f'(1) = (e^x)'_{x=1} = e.$$

3- мисол. Ушбу $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$, $f(0) = 0$ функция $x=0$ нуқтада ҳосиллага эга эмас. Ҳақиқатан ҳам бу функция учун

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \cdot \sin \frac{1}{x}}{x} = \sin \frac{1}{x}$$

бўлиб, $x \rightarrow 0$ да

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin \frac{1}{x}$$

нисбат лимитга эга эмас. Демак, берилган функция $x = 0$ нуқтада ҳосиллага эга бўлмайди.

4- мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{агар } x \text{ — рационал сон бўлса,} \\ -x^2, & \text{агар } x \text{ — иррационал сон бўлса,} \end{cases}$$

функциянинг $x = 0$ нуқтадаги ҳосиласи $f'(0) = 0$ бўлишини исботланг.

Берилган функция учун:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} x, & \text{агар } x \text{ — рационал сон бўлса,} \\ -x, & \text{агар } x \text{ — иррационал сон бўлса,} \end{cases}$$

бўлиб, унинг лимити $x \rightarrow 0$ да 0 бўлади.

Демак,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$$

Бу эса

$$f'(0) = 0$$

бўлишини билдиради.

5- мисол. Агар $\varphi(x)$ функция $x = a$ нуқтада узлуксиз бўлса, ушбу

$$f(x) = (x - a) \cdot \varphi(x)$$

функциянинг $x = a$ нуқтадаги ҳосиласи $f'(a) = \varphi(a)$ бўлишини кўрсатинг.

Берилган функциянинг $x = a$ нуқтадаги орттирмаси

$$\begin{aligned} \Delta f(a) &= f(a + \Delta x) - f(a) = (a + \Delta x - a) \cdot \varphi(a + \Delta x) - \\ &\quad - (a - a) \cdot \varphi(a) = \Delta x \cdot \varphi(a + \Delta x) \end{aligned}$$

бўлади. Унда

$$\frac{\Delta f(a)}{\Delta x} = \frac{\Delta x \cdot \varphi(a + \Delta x)}{\Delta x} = \varphi(a + \Delta x)$$

бўлиб,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(a + \Delta x)$$

бўлиши келиб чиқади. $\varphi(x)$ функциянинг $x = a$ нуқтада узлуксиз эканини эътиборга олиб, топамиз:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(a + \Delta x) = \varphi(a).$$

Демак,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x} = \varphi(a).$$

Бу эса $f'(a) = \varphi(a)$ эканини билдиради.

2°. Бир томонли ҳосилалар

2- таъриф. Агар $\Delta x \rightarrow +0$ ($\Delta x \rightarrow -0$) да $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбат-

нинг limiti

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ \left(\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right) \end{aligned}$$

мавжуд ва чекли бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ўнг (чап) ҳосиласи деб аталади ва уни $f'(x_0+0)$ ($f'(x_0-0)$) каби белгилади.

Функциянинг ўнг ва чап ҳосилалари бир томонли ҳосилалар деб аталади.

6-мисол. Ушбу

$$f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}, \quad f(0) = 0$$

функциянинг $x = 0$ нуқтадаги ўнг ва чап ҳосилаларини топинг.

Бу функциянинг $x = 0$ нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta f(0) = f(0 + \Delta x) - f(0) = f(\Delta x) = \Delta x^2 \cos \frac{1}{\Delta x}$$

бўлиб,

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \frac{\Delta x^2 \cos \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \Delta x \cos \frac{1}{\Delta x}$$

бўлади. Агар

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \Delta x \cos \frac{1}{\Delta x} = 0,$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \Delta x \cos \frac{1}{\Delta x} = 0$$

эканлигини эътиборга олсак, унда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = 0,$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = 0$$

бўлишини топамиз.

Демак, берилган функциянинг $x = 0$ нуқтадаги ўнг ҳосиласи $f'(0+0) = 0$, чап ҳосиласи $f'(0-0) = 0$ бўлади.

7-мисол. [Ушбу $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$ функциянинг $x = 0$ нуқтадаги ўнг ва чап ҳосилаларини топинг. Бу функциянинг $x = 0$ нуқтадаги орттирмаси

$$\begin{aligned} \Delta f(0) &= f(0 + |\Delta x|) - f(0) = f(\Delta x) - f_-(0) = \\ &= \sqrt{1 - e^{-(\Delta x)^2}} - \sqrt{1 - e^{-0}} = \sqrt{1 - e^{-(\Delta x)^2}} \end{aligned}$$

бўлиб,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x} \cdot \sqrt{1 - e^{-(\Delta x)^2}} = \\ &= \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \cdot \sqrt{\frac{1 - e^{-(\Delta x)^2}}{(\Delta x)^2}} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \sqrt{\frac{1}{e^{\Delta x^2}} \cdot \frac{e^{\Delta x^2} - 1}{(\Delta x)^2}} \end{aligned}$$

бўлади. Агар

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{e^{0(\Delta x)^2}} \cdot \frac{e^{\Delta x^2} - 1}{(\Delta x)^2}} \sqrt{1 \cdot \ln e} = 1$$

эканини эътиборга олсак, унда

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \\ \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1. \end{aligned}$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$f'(+0) = 1, \quad f'(-0) = -1.$$

8-мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ x \cos \frac{1}{x}, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг $x=0$ нуқтадаги бир томонли ҳосилаларини топинг.

Бу функция учун

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} &= \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \quad (\Delta x \leq 0) \\ \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} &= \cos \frac{1}{\Delta x} \quad (\Delta x > 0) \end{aligned}$$

бўлиб,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$$

бўлади. Демак, берилган функциянинг $x=0$ нуқтадаги чап ҳосиласи $f'(-0) = 1$ бўлади. Бироқ $\Delta x \rightarrow +0$ да $\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \cos \frac{1}{\Delta x}$ нисбат лимитга эга эмас. Демак, берилган функция $x=0$ нуқтада ўнг ҳосилага эга эмас.

9- мисол. Ушбу $f(x) = x \cdot \cos \frac{1}{x}$ функциянинг $(f(0) = 0)$ $x=0$ нуқтадаги ўнг ва чап ҳосилаларининг мавжуд эмаслигини кўрсатинг.

Бу функциянинг $x = 0$ нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta f(0) = f(0 + \Delta x) - f(0) = \Delta x \cdot \cos \frac{1}{\Delta x}$$

бўлиб,

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \frac{\Delta x \cdot \cos \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \cos \frac{1}{\Delta x}$$

бўлади. $\Delta x \rightarrow \pm 0$ да

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \cos \frac{1}{\Delta x}$$

нисбат лимитга эга эмас.

Демак, берилган функция $x = 0$ нуқтада ўнг ва чап ҳосилаларга эга эмас.

3°. Чексиз ҳосилалар.

$y = f(x)$ функция x_0 нуқтанинг ($x_0 \in R$) бирор атрофида берилган бўлиб, у x_0 нуқтада узлуксиз бўлсин.

3- таъриф. Агар $\Delta x \rightarrow 0$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбатнинг limiti

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$+\infty$ (ёки $-\infty$) бўлса, уни ҳам $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи дейилади. Бундай ҳосила чексиз ҳосила деб аталади.

Демак,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = +\infty \text{ (ёки } -\infty).$$

Бир томонли чексиз ҳосилалар ҳам худди шунга ўхшаш таърифланади.

10- мисол. Ушбу $f(x) = \sqrt[3]{x}$ функциянинг $x = 0$ нуқтадаги ҳосиласини топинг.

Бу функциянинг $x = 0$ нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta f(0) = f(0 + \Delta x) - f(0) = \sqrt[3]{\Delta x}$$

бўлиб,

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^3}}$$

бўлади. Бундан эса

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^3}} = +\infty$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, берилган функциянинг $x = 0$ нуқтадаги ҳосиласи $+\infty$ бўлади.

11-мисол. Ушбу $f(x) = \sqrt[3]{\cos x}$ функциянинг $x = \frac{\pi}{2}$ нуқтадаги ҳосиласи топилсин. Бу функциянинг $x = \frac{\pi}{2}$ нуқтадаги орттирмаси

$$\begin{aligned} \Delta f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= f\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt[3]{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right)} - \\ &- \sqrt[3]{\cos \frac{\pi}{2}} = \sqrt[3]{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right)} = \sqrt[3]{-\sin \Delta x} = \\ &= -\sqrt[3]{\sin \Delta x} \end{aligned}$$

бўлиб.

$$\frac{\Delta f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\Delta x} = -\frac{\sqrt[3]{\sin \Delta x}}{\Delta x} = -\sqrt[3]{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^3}}$$

бўлади. Бундан эса

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[-\sqrt[3]{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^3}} \right] = -\infty$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, берилган функциянинг $x = \frac{\pi}{2}$ нуқтадаги ҳосиласи $-\infty$ бўлар экан.

12-мисол. Ушбу $f(x) = \sqrt[3]{x^3}$ функциянинг $x = 0$ нуқтадаги ўнг ва чап ҳосилаларини топинг.

Бу функциянинг $x = 0$ нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta f(0) = f(0 + \Delta x) - f(0) = \sqrt[3]{\Delta x^3}$$

бўлиб,

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x^3}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^3}}$$

бўлади. Равшанки,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^3}} = +\infty$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}} = -\infty$$

бўлади. Демак, берилган функциянинг $x = 0$ нуқтадаги ўнг ҳосиласи $f'(+0) = +\infty$, чап ҳосиласи $f'(-0) = -\infty$ экан.

13- мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 1 \text{ бўлса,} \\ \sqrt{x-1}, & \text{агар } x > 1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг $x = 1$ нуқтадаги ўнг ва чап ҳосилаларини топинг.

Бу функциянинг $x = 1$ нуқтадаги орттормаси

$$\Delta f(1) = f(1 + \Delta x) - f(1) = \begin{cases} 0, & \text{агар } \Delta x < 0 \text{ бўлса,} \\ \sqrt{\Delta x}, & \text{агар } \Delta x > 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлиб,

$$\frac{\Delta f(1)}{\Delta x} = \begin{cases} 0, & \text{агар } \Delta x < 0 \text{ бўлса,} \\ \sqrt{\Delta x} \cdot \frac{1}{\Delta x}, & \text{агар } \Delta x > 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} = +\infty,$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} 0 = 0.$$

Берилган функциянинг $x = 1$ нуқтадаги ўнг ҳосиласи $f'(+1) = +\infty$, чап ҳосиласи $f'(-1) = 0$ дан иборат.

4°. Функция ҳосиласининг геометрик ва механик маънолари.

$f(x)$ функция (a, b) оралиқда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $x_0 \in (a, b)$ нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлсин. У ҳолда $f(x)$ функция графигига $M_0(x_0, f(x_0))$ нуқтада ўтказилган урунма мавжуд. Функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи $f'(x_0)$ эса бу урунманинг бурчак коэффициентини ифодалайди. Урунманинг тенгламаси

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad (4)$$

кўринишда бўлади.

14- мисол. Ушбу $f(x) = \cos x$ функция графигига $M_0\left(\frac{\pi}{6}, f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ нуқтада ўтказилган урунма тенгламасини топинг.

Берилган функциянинг ҳосиласи $f'(x) = -\sin x$ га тенг. Агар

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

бўлишини эътиборга олсак, унда (4) формулага кўра $M_0\left(\frac{\pi}{6}, f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ нуқтадан ўтувчи уринма тенгламасини

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

ёқанини топамиз.

Агар $f'(x_0) = \pm \infty$ бўлса, $f(x)$ функция графигига $(x_0, f(x_0))$ нуқтадан ўтказилган уринма Ox ўққа перпендикуляр бўлади.

Моддий нуқтанинг тўғри чизиqli ҳаракати $s = f(t)$ функция билан ифодаланган бўлсин, бунда t — вақт, s шу вақт ичида ўтилган йўл (масофа).

$s = f(t)$ функциянинг t_0 нуқтадаги ҳосиласи $f'(t_0)$ ҳаракат қилаётган моддий нуқтанинг t_0 пайтдаги оний тезлигини билдиради.

5°. Тескари функциянинг ҳосиласи.

Агар $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада $f'(x_0) \neq 0$ ҳосиллага эга бўлса, бу функцияга тескари $x = f^{-1}(y)$ функция x_0 нуқтага мос бўлган $y_0 = f(x_0)$ нуқтада ҳосиллага эга ва

$$(f^{-1}(y))'_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

бўлади.

15-мисол. Ушбу $y = \arcsin x$ функциянинг ҳосиласини топинг.

Равшанки, $y = \arcsin x$ функция $x = \sin y$ функцияга $\left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$ тескари функциядир. Унда юқоридаги қоидага кўра

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'}$$

бўлади. Маълумки, $(\sin y)' = \cos y$. Демак,

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1).$$

6°. Ҳосилалар жадвали.

Қуйида элементар функцияларнинг ҳосилаларини топиш формулаларини келтирамиз:

$$1) (x^\mu)' = \mu \cdot x^{\mu-1}, \quad (\mu > 0).$$

$$2) (a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad (a > 0, a \neq 1).$$

$$3) (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1).$$

$$4) (\sin x)' = \cos x.$$

$$5) (\cos x)' = -\sin x.$$

$$6) (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$7) (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$8) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

$$9) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

$$10) (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$11) (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$12) (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

$$13) (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$$

$$14) (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$$

$$15) (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$16) (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad (x \neq 0).$$

7°. Ҳосила ҳисоблашнинг содда қоидаларини. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $x \in (a, b)$ нуқтада $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$) функциялар ҳам ҳосилага эга ва

$$1) [f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$2) [f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x);$$

$$3) \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

бўлади.

16- мисол. Ушбу

$$y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$$

функциянинг ҳосиласини топинг.

Бу функциянинг ҳосиласини топишда юқоридаги қондан ҳамда ҳосилалар жадвалидан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} y' &= (x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})' = (x + x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}})' = \\ &= (x)' + (x^{\frac{1}{2}})' + (x^{\frac{1}{3}})' = 1 + \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} + \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \\ &= 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad (x > 0). \end{aligned}$$

17- мисол. Ушбу

$$f(x) = x \cdot |x|$$

функциянинг ҳосиласини топинг:

а) $x > 0$ бўлсин. У ҳолда $f(x) = x \cdot |x| = x^2$ бўлиб, $f'(x) = 2x$ бўлади.

б) $x < 0$ бўлсин. У ҳолда $f(x) = x \cdot |x| = -x^2$ бўлиб, $f'(x) = -2x$ бўлади.

в) $x = 0$ бўлсин. У ҳолда, ҳосила таърифига кўра:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \cdot |\Delta x|}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\Delta x| = 0. \end{aligned}$$

Демак, берилган функциянинг ҳосиласи:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса,} \\ 2x, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

8° Мураккаб функциянинг ҳосиласи

$u = f(x)$ функция (a, b) оралиқда. $y = F(u)$ функция эса (c, d) оралиқда берилган бўлиб,

$$y = F(f(x))$$

мураккаб функцияга эга бўлайлик.

Агар $u = f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлиб, $y = F(u)$ функция эса x_0 нуқтага мос $u_0 (u_0 = f(x_0))$ нуқтада $F'(u_0)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда мураккаб функция $F(f(x))$ ҳам x_0 нуқтада ҳосилага эга ва

$$[F(f(x))]'_{x=x_0} = F'(u_0) \cdot f'(x_0) \quad (5)$$

бўлади.

18- мисол. Ушбу

$$y = \sin 5\sqrt{x}$$

функциянинг ҳосиласини топинг.

Равшанки, бу мураккаб функция бўлиб, уни

$$y = F(u) = \sin u, \quad u = f(x) = 5\sqrt{x}$$

деб қараш мумкин. (5) формулага кўра:

$$\begin{aligned} y' &= (\sin 5\sqrt{x})' = (\sin u)'_{u=5\sqrt{x}} \cdot (5\sqrt{x})' = \\ &= \cos 5\sqrt{x} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5 \cdot \cos 5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0) \end{aligned}$$

19- мисол. Ушбу

$$y = \ln(10x^4 + 2x^2 + 1)$$

функциянинг ҳосиласини топинг.

Равшанки,

$$y = F(u) = \ln u, \quad u = f(x) = 10x^4 + 2x^2 + 1.$$

(5) формулага кўра

$$\begin{aligned} y' &= (\ln(10x^4 + 2x^2 + 1))' = \\ &= (\ln u)'_{u=10x^4+2x^2+1} \cdot (10x^4 + 2x^2 + 1)' = \\ &= \frac{1}{10x^4 + 2x^2 + 1} \cdot (40x^3 + 4x) = \frac{4x(10x^2 + 1)}{10x^4 + 2x^2 + 1}. \end{aligned}$$

20- мисол. Ушбу

$$y = \arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

функциянинг ҳосиласини топинг. Бу функциянинг ҳосиласи қуйидагича топилади:

$$\begin{aligned} y' &= \left[\arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \right]' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \times \\ &= \frac{-(1+x^2) \cdot 2x - (1-x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-4x}{\sqrt{\frac{4x^2}{(1+x^2)^2} \cdot (1+x^2)^2}} = \\ &= \frac{-4x}{2 \cdot |x| \cdot (1+x^2)}. \end{aligned}$$

Демак,

$$y' = \begin{cases} -\frac{2}{1+x^2}, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ \frac{2}{1+x^2}, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Берилган функция $x = 0$ нуқтада эса ҳосилага эга эмас.

Мисол ва масалалар

I Ҳосила таърифидан фойдаланиб қуйидаги функцияларнинг ҳосилаларини топинг:

1. $f(x) = \sqrt{x}$.

2. $f(x) = 2^x \cdot \sin x$.

3. $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x}$

4. $f(x) = 2^{x+1}$.

5. $f(x) = \ln x$.

6. $f(x) = \sin 5x$.

7. $f(x) = \operatorname{arctg} 3x$.

8. $f(x) = 2 \sin 3x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

9. $f(x) = 1 + \ln 2x$, $x_0 = 1$.

10. $f(x) = x + \operatorname{tg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

11. $f(x) = 5|x+1|$, $x_0 = -2$.

12. $f(x) = x^3$, $x_0 = 0, 1$.

13. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 0$.

14. $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$

15. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} \cdot \cos \frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$

16. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$

Ҳосила таърифидан фойдаланиб қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари мавжудлигини текширинг.

$$17. f(x) = |x|, x_0 = 0.$$

$$18. f(x) = |(x-1)(x-2)|, x_0 = 1, x_0 = 2.$$

$$19. f(x) = |x^2|, x_0 = 0$$

$$20. f(x) = x|x|, x_0 = 0.$$

$$21. f(x) = |\sin x|, x_0 = \pi.$$

$$22. f(x) = |x^2 - x|, x_0 = 1.$$

$$23. f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ x^4, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса,} \end{cases} \\ x_0 = 0.$$

$$24. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ x^2, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

$$25. f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos \frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

$$26. f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса} \end{cases} \\ x_0 = 0.$$

$$27. f(x) = \begin{cases} x^2 \left| \cos \frac{\pi}{x} \right|, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \end{cases} \\ x_0 = 0$$

$$28. f(x) = \begin{cases} x, & \text{агар } x \text{ — рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ — иррационал сон бўлса,} \end{cases} \\ x_0 = 0.$$

$$29. \text{ Ушбу } f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{агар } x \text{ — рационал сон бўлса,} \\ 2(x-1), & \text{агар } x \text{ — иррационал сон бўлса.} \end{cases}$$

Функциянинг ҳосилалари мавжуд бўлган нуқталарини аниқланг ва бу нуқталарда ҳосилаларни топинг.

II. Қуйидаги функцияларнинг ўнг ва чап ҳосилалари мавжудлигини текширинг.

$$30. f(x) = |2^x - 2|, x_0 = 1.$$

$$31. f(x) = \sqrt{\sin x^2}, \quad x_0 = 0, \quad x_0 = \sqrt{\pi}$$

$$32. f(x) = \arccos \frac{1}{x}, \quad x_0 = 1, \quad x_0 = -1.$$

$$33. f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \\ x_0 = 0. \end{cases}$$

$$34. f(x) = \begin{cases} x, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ \sqrt[3]{x^4} \ln x, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ x_0 = 0. \end{cases}$$

$$35. f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \\ x_0 = 0. \end{cases}$$

$$36. f(x) = \begin{cases} \frac{|\sin x|}{|x|}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \\ x_0 = 0. \end{cases}$$

$$37. 37. f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x^2}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$$38. f(x) = |x - 1| \cdot e^x, \quad x_0 = 1.$$

$$39. f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \\ x_0 = 0, \end{cases}$$

$$40. f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \\ x_0 = 0, \quad x_0 = 1. \end{cases}$$

III. Қуйидаги функцияларнинг берилган нуқтадаги тес-
кари функцияларни ва уларнинг ҳосилаларини топинг:

$$41. y = 2x - \frac{\cos x}{2}, \quad y_0 = -\frac{1}{2}.$$

$$42. y = 2x^3 - x^4, x > 1, y_0 = 0.$$

$$43. y = 0,1x + e^{0,1x}, y_0 = 1.$$

$$44. \text{Агар } x = \operatorname{sh} y \text{ бўлса, } y'(x) \text{ ни топинг.}$$

45. Агар $y = x + \sin x$ бўлса, $x \in \mathbb{R}$ қандай нуқталарда бу функцияга тескари функция $+\infty$ ҳосилага эга бўлади?

IV. Ҳосалалар жадвали ва қондалари ёрдамида қуйидаги функцияларнинг ҳосилаларини ҳисобланг:

$$46. y = \frac{\ln 3}{x} + e^2.$$

$$47. y = 7x^{25} + 25x^{-7}$$

$$48. y = x^{\sqrt{2}} - x^{-1/\sqrt{2}}.$$

$$49. y = \frac{ax + b}{cx + d}, c \neq 0.$$

$$50. y = 5x \sin x.$$

$$51. y = (x + 1) \operatorname{tg} x.$$

$$52. f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$53. y = (x^3 - 7x + 8)e^x$$

$$54. y = e^{ax} \cdot (a \sin bx - b \cos bx).$$

$$55. y = 2^x \ln |x|.$$

$$56. y = \log_x 2.$$

$$57. y = \log_x 2^x.$$

$$58. y = \operatorname{sh}^3 x - \operatorname{ch}^3 x$$

$$59. y = \sqrt{x^3 - a^3}.$$

$$60. y = x \sqrt[3]{x^3 + 1}.$$

$$61. y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}.$$

$$62. y = \sin^3(\cos x) + \cos^2(\sin x).$$

$$63. y = \sin(\sin(\sin x)).$$

$$64. y = 2^{\cos x + \operatorname{tg} x}.$$

$$65. y = e^x \cdot \sin x.$$

66. $y = e^{x^a} \cos 2x.$
67. $y = e^{e^x} + x^{e^x}.$
68. $y = x^x.$
69. $y = \ln(\ln(\ln x)).$
70. $y = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a}, a < 0,$
71. $y = \ln |x|.$
72. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}).$
73. $y = \ln \sin x.$
74. $y = \sin(\ln x).$
75. $y = \arcsin \frac{x}{a}.$
76. $y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x^2}.$
77. $y = \arccos \frac{1}{x}.$
78. $y = \arcsin(\sin x).$
79. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x).$
80. $y = \sin(\arcsin x).$
81. $y = \ln \frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}} + \frac{a}{b} \operatorname{arctg} \frac{x}{b}; a, b > 0.$
82. $y = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}, a > 0$
83. $y = \frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}.$
84. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} + \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}.$
85. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}.$
86. $y = \ln(e^x \sqrt{1+e^{2x}}).$
87. $y = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{1+x^2}).$
88. $y = (\sin x)^{\cos x}.$

$$89. y = \operatorname{sh}(\operatorname{tg} x).$$

$$90. y = \operatorname{th}(\cos x).$$

$$91. y = \ln(\operatorname{sh} x).$$

$$92. y = \lg(\operatorname{ch} x).$$

$$93. y = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} x).$$

$$94. f(x) = x(x-1)(x-2) \dots (x-1000); f'(0) \text{ ни то-} \\ \text{пинг.}$$

$$95. \text{Ушбу}$$

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ f_{k1}(x) & \dots & f_{kn}(x) \\ f_{n1}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ f_{k1}(x) & \dots & f_{kn}(x) \\ f_{n1}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

муносабатни исботланг.

96. Бутун сонлар ўқида аниқланган ва иккита нуқтада ҳосилага эга бўлмаган функцияга мисол келтиринг.

97. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар X тўпламда аниқланган бўлиб, $f(x)$ x_0 да ҳосилага эга, $g(x)$ эса бу нуқтада ҳосилага эга бўлмасин. У ҳолда

$$a) f(x) \pm g(x),$$

$$б) f(x) \cdot g(x)$$

функцияларнинг x_0 нуқтадаги ҳосилалари ҳақида нима дейиш мумкин? Мисоллар келтиринг.

98. Агар 97- мисолда $f(x)$ функция ҳам x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлмаса, у ҳолда $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ функцияларнинг x_0 нуқтадаги ҳосилалари ҳақида нима дейиш мумкин? Мисоллар келтиринг.

99. Бутун сонлар ўқида аниқланган ва фақат n та нуқтада ҳосилага эга бўлган функцияга мисол келтиринг.

100. Ҳосилага эга бўлган жуфт функциянинг ҳосиласи тоқ функция эканини исботланг.

101. Ҳосилага эга бўлган тоқ функциянинг ҳосиласи жуфт функция эканини исботланг.

102. Ҳосиласи жуфт функция бўлган, ўзи тоқ бўлмаган функцияга мисол келтиринг.

103. Агар $f(x)$ функциянинг ҳосиласи $f'(x)$ тоқ функция бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция жуфт эканини исботланг.

104. Агар ҳосилага эга бўлган $f(x)$ функция даврий бўлиб, унинг даври T га тенг бўлса, у ҳолда $f'(x)$ ҳам дав-

рий бўлиб, унинг ҳам даври T га тенг бўлишини исботланг.

105. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлса, функция x_0 нуқтанинг бирор атрофида ҳосилага эга бўладими?

106. Бутун сонлар ўқида аниқланган бўлиб, ихтиёрий $x \in R$ нуқтада ҳосилага эга бўлмаган, лекин квадрати $\forall x \in R$ нуқтада ҳосилага эга бўлган функцияга мисол келтиринг.

107. x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлмаган $f(x)$ ва $g(x)$ функциялардан тузилган мураккаб функцияларнинг ҳосилалари ҳақда нима дейиш мумкин? Мисоллар келтиринг.

108. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $\left\{ n \left(f \left(x_0 + \frac{1}{n} \right) - f(x_0) \right) \right\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи эканини исботланг. Тасдиқнинг тескарсиси ўринлими?

109. Агар $f(x) < g(x)$ бўлса, бу тенгсизликдан ҳосила олиш ўринлими?

110. а) $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$;

б) $1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \dots + n^2x^{n-1}$;

в) $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$;

г) $\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$

Йиғиндиларни ҳисоблаш формулалари топилсин.

111. $y = |\sin^2 x|$ ва $y = [x] \sin^2 \pi x$ функцияларнинг ҳосилалари топилсин.

112. $f(x)$ функция бутун сонлар ўқида аниқланган ва $\forall x \in R$ учун $f'(x)$ мавжуд бўлсин. Агар $|f'(x)| \leq M$ тенгсизлик $\forall x \in R$ учун ўринли бўлса, қандай $\delta > 0$ лар учун $|x| < \delta$ тенгсизликдан $|f(x) - f(0)| < \epsilon$ тенгсизлик келиб чиқади? ($\forall \epsilon > 0$).

113. $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ функциялар X тўпламда аниқланган бўлиб, $x \in X$ нуқтада $f'_i(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин, $i = \overline{1, n}$. У ҳолда

$$(f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x))' = \sum_{k=1}^n f_1(x) \cdot \dots \cdot f_{k-1}(x) \cdot f'_k(x) \cdot f_{k+1}(x) \cdot \dots \cdot f_n(x)$$

формулани исботланг.

114. Қандай нуқталарда $y = \frac{x+2}{x-2}$ функция графигига

ўтказилган уринма Ox ўқнинг мусбат йўналиши билан 135° ли бурчак ташкил этади?

115. $y = \sin x$ функция графиги абсциссалар ўқини қандай бурчаклар остида кесади?

Қандай нуқталарда қуйидаги $y = f(x)$ функциялар графигига ўтказилган уринмалар Ox ўққа параллел бўлади?

116. $y = (3 - x^2)e^x$.

117. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$.

118. $y = |x - 5| \cdot (x - 3)^3$.

Қандай нуқталарда қуйидаги $y = f(x)$ функциялар графигига ўтказилган уринмалар берилган тўғри чизиқларга параллел бўлади?

119. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, $y = 3x$.

120. $f(x) = x^3 - 7x + 3$, $5x + y - 3 = 0$.

121. $f(x) = \ln(4x - 1)$, $y = x$.

122. $f(x) = \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos 3x$, $y = -x$.

Қандай нуқталарда қуйидаги $y = f(x)$ функциялар графигига ўтказилган уринмалар берилган тўғри чизиқларга перпендикуляр бўлади?

123. $f(x) = x^3 + 2x - 1$, $x + y = 0$.

124. $f(x) = \sin x$, $x - 10 = 0$.

125. $f(x) = \ln x$, $2y + x + 1 = 0$.

126. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x + y = 0$.

127. $y = -\sqrt{2x^3}$, $4x - 3y + 2 = 0$.

$y = f(x)$ функция графигига берилган нуқтада ўтказилган уринма тенгламасини ёзинг:

128. $y = \sqrt{5 - x^2}$, $x = 1$.

129. $y = \operatorname{arctg} 2x$, $x = 0$.

130. $y = \ln \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x + 1}$, $x = 0$.

131. $y = 4 \operatorname{ctg} x - \frac{\cos x}{\sin^3 x}$, $x = \frac{\pi}{2}$.

132. $y = |x - 1| \sqrt[3]{x + 2}$, $x = 6$.

133. $y = e^x$, $x = 1$.

Қуйидаги функцияларнинг графиклари қайси нуқталарда қандай бурчак остида кесишишларини аниқланг:

134. $y_1 = \sqrt{2} \sin x$, $y_2 = \sqrt{2} \cos x$.

$$135. y_1 = \frac{1}{x}, y_2 = \sqrt{x}.$$

$$136. y_1 = \ln x, y_2 = \frac{x^2}{2e}.$$

$$137. y_1 = x^3, y_2 = \frac{1}{x^2}.$$

$$138. y_1 = x^2, x = y^2.$$

Қуйидаги функцияларнинг графикларига берилган нуқталарда ўтказилган бир томонли уринмалар орасидаги бурчакни топинг:

$$139. y = |x|, M(0, 0).$$

$$140. y = \sqrt[3]{x^3}, M(0, 0).$$

$$141. y = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{2x}{1+x^2}, M\left(1, \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right).$$

$$142. y = \sqrt{2x^3 + 9x^2}, M(0, 0).$$

$$143. y = \begin{cases} -\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \end{cases} M(0, 0).$$

$$144. y = \sqrt{1 - e^{-a^2 x^2}}, M(0, 0).$$

145. Параметр n нинг қандай қийматида $y = \operatorname{arctg} nx$ ($n > 0$) чизик Ox ўқ билан 89° дан катта бурчак остида кесишади?

146. $y = |x|^\alpha$ чизик $0 < \alpha < 1$ бўлганда Oy ўққа, $1 < \alpha < +\infty$ бўлганда Ox ўққа уринишини исботланг.

2-§. ФУНКЦИЯНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛИ

1°. Функциянинг дифференциалланувчи бўлиши тушунчаси. $y = f(x)$ функция x_0 нуқтанинг ($x_0 \in R$) бирор атрофида берилган бўлсин. Бу функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

ни қарайлик. Равшанки, бу орттирма Δx га боғлиқдир.

4-таъриф. Агар $y = f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси Δy ни

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \quad (6)$$

(бунда A — ўзгармас, $\alpha = \alpha(\Delta x)$ бўлиб, $\Delta x \rightarrow 0$ да $\alpha(\Delta x) \rightarrow$

→0) кўринишда ифодалаш мумкин бўлса, функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи деб аталади.
(6) муносабатни қуйидагича

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = A \Delta x + O(\Delta x) \quad (7)$$

ёзиш ҳам мумкин.

$A \Delta x$ га функциянинг дифференциали дейилади. Функция дифференциали $dy = df(x_0)$ каби белгиланади: $df(x_0) = A \Delta x$ бўлиб, $\Delta x = dx$ ни эътиборга олсак, $df(x_0) = A dx$ бўлади.

21- мисол. Ушбу

$$f(x) = x^3 + x^2 + 1$$

функциянинг $x_0 (\forall x_0 \in R)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлишини кўрсатинг.

Бу функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмасини топамиз:

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0) &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^3 + (x_0 + \Delta x)^2 + 1 - (x_0^3 + x_0^2 + 1) = 3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot \Delta x^2 + \\ &+ \Delta x^3 + 2x_0 \Delta x + \Delta x^2 = (3x_0^2 + 2x_0) \Delta x + \\ &+ (3x_0 \Delta x + \Delta x + \Delta x^2) \cdot \Delta x. \end{aligned}$$

Агар $A = 3x_0^2 + 2x_0$, $\alpha = \alpha(\Delta x) = (3x_0 + 1)\Delta x + \Delta x^2$ дейилса, у ҳолда

$$\Delta f(x_0) = A \Delta x + \alpha(\Delta x)$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса берилган функциянинг x_0 нуқтада дифференциалланувчи эканини билдиради.

22- мисол. Ушбу

$$f(x) = x \cdot \arctg \frac{1}{x}, \quad f(0) = 0$$

функция $x = 0$ нуқтада дифференциалланувчи бўладими?

Бу функциянинг $x = 0$ нуқтадаги орттирмасини топамиз:

$$\Delta f(0) = f(0 + \Delta x) - f(0) = \Delta x \cdot \arctg \frac{1}{\Delta x}.$$

Бу тенгликдан кўринадики, берилган функциянинг $x = 0$ нуқтадаги орттирмаси $\Delta f(0)$ ни (7) кўринишда ифодалаб бўлмайди. Демак, функция $x = 0$ нуқтада дифференциалланувчи бўлмайди.

23- мисол. Ушбу

$$f(x) = a^x$$

функциянинг x_0 нуқтада ($\forall x_0 \in R$) дифференциалланувчи бўлишини кўрсатинг.

Бу функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмасини топамиз:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1).$$

Агар

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} &= \ln a \Rightarrow \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a + \alpha \Rightarrow \\ &\Rightarrow a^{\Delta x} - 1 = \Delta x \cdot \ln a + \alpha \cdot \Delta x \\ (\alpha &= \alpha(\Delta x) : \Delta x \rightarrow 0 \text{ да } \alpha \rightarrow 0) \end{aligned}$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0) &= a^{x_0}(\ln a \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x) = \\ &= a^{x_0} \cdot \ln a \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x \cdot a^{x_0} \end{aligned}$$

эканлиги аниқланади. Демак,

$$\Delta f(x_0) = A \Delta x + \alpha_1(\Delta x) \cdot \Delta x.$$

$$\text{бунда } A = a^{x_0} \ln a, \quad \alpha_1(\Delta x) = \alpha \cdot a^{x_0}.$$

Бу эса берилган функциянинг x_0 нуқтада ($\forall x_0 \in R$) дифференциалланувчи эканини билдиради.

1-теорема. $f(x)$ функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлиши учун унинг шу нуқтада чекли $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлиши зарур ва етарли.

Функция дифференциалланувчи бўлса,

$$df(x_0) = f'(x_0)dx \quad (8)$$

эканлигини кўриш қийин эмас.

24- мисол. Ушбу

$$f(x) = \sqrt{1-x} \cdot \arcsin \sqrt{x}$$

функция $x_0 = \frac{1}{2}$ нуқтада дифференциалланувчи бўлади, чунки

бу функция $x_0 = \frac{1}{2}$ нуқтада чекли ҳосилага эга.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \sqrt{1-x} + \\ &+ \arcsin \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot (-1) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\arcsin \sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}} \end{aligned}$$

булиб,

$$f' \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2 \sqrt{\frac{1}{2}}} - \frac{\arcsin \sqrt{\frac{1}{2}}}{2 \sqrt{1 - \frac{1}{2}}} =$$

$$= (\sqrt{2})^{-1} \left(1 - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

булади.

Юқорида келтирилган теоремага кўра берилган функция $x_0 = \frac{1}{2}$ нуқтада дифференциалланувчи бўлади.

25- мисол. Ушбу

$$f(x) = x \cdot \cos \frac{1}{x}, \quad f(0) = 0$$

функция $x = 0$ нуқтада дифференциалланувчи бўлмайди, чунки бу функция $x = 0$ нуқтада ҳосилага эга эмас.

Бунини $\Delta x \rightarrow 0$ да

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{\Delta x \cdot \cos \frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \cos \frac{1}{\Delta x}$$

нисбатнинг лимитга эга эмаслигидан топамиз.

26- мисол. Ушбу

$$y = \sqrt{x}$$

функция $x = 0$ нуқтада дифференциалланувчи бўлмайди, чунки бу функция $x = 0$ нуқтада чекли ҳосилага эга эмас.

27- мисол. Ушбу

$$y = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$$

функциянинг дифференциалини топинг.

Бу функциянинг дифференциалини (8) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$dy = d \left(\ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} \right) = \left(\ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} \right)' \cdot dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \left[\ln(1 - \sin x) - \ln(1 + \sin x) \right] \right)' dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{-\cos x}{1 - \sin x} - \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right) dx = -\frac{1}{\cos x} dx.$$

2°. Тақрибий формулалар.

$y = f(x)$ функция (a, b) оралиқда берилган бўлиб, $x_0 \in (a, b)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. Бу ҳолда

$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x$ бўлади. Равшанки, Δx етарлича кичик бўлганда ушбу

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x,$$

яъни

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x \quad (9)$$

тақрибий формулага келамиз.

28- мисол. Ушбу

$$\sqrt{1,2}, \sqrt{1,02}, \sqrt{1,002}$$

миқдорларнинг тақрибий қийматларини топинг.

Ушбу

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

функцияни қарайлик. Бу функциянинг ҳосиласи

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \quad (x \neq -1)$$

эканлигини эътиборга олиб, сўнг (9) формуладан фойдаланиб, топамиз:

$$\sqrt{1+(x_0+\Delta x)} \approx \sqrt{1+x_0} + \frac{1}{2\sqrt{1+x_0}} \cdot \Delta x.$$

Агар $x_0 = 0$, $\Delta x = 0,2$ дейилса, унда

$$\sqrt{1+0,2} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,2$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $\sqrt{1,2} \approx 1,1$.

Агар $x_0 = 0$, $\Delta x = 0,02$ дейилса, унда

$$\sqrt{1+0,02} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,02$$

бўлади. Демак, $\sqrt{1,02} \approx 1,01$.

Агар $x_0 = 0$, $\Delta x = 0,002$ дейилса, унда

$$\sqrt{1+0,002} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,002$$

бўлади. Демак, $\sqrt{1,002} \approx 1,001$.

29- мисол. Ушбу

$$\cos 60^\circ 6'$$

миқдорнинг тақрибий қийматини топинг.

(9) формулага кўра:

$$\cos(x_0 + \Delta x) \approx \cos x_0 + (-\sin x_0) \cdot \Delta x.$$

$x_0 = \frac{\pi}{3}$, $\Delta x = \frac{\pi}{1800}$ деб олинса, унда:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{1800}\right) &\approx \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\pi}{1800} = \\ &= 0,5 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{1800} \approx 0,4985. \end{aligned}$$

Демак,

$$\cos 60^\circ 6' \approx 0,4985.$$

Мисол ва масалалар

1. Қуйидаги функцияларни берилган нуқталарда дифференциалланувчанликка текширинг:

147. $f(x) = 2x^3 + 7x - 1$, $\forall x_0 \in R$.

148. $f(x) = e^{2x}$, $\forall x_0 \in R$.

149. $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x^2}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \\ & x_0 = 0. \end{cases}$

150. $f(x) = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$, $x_0 = 0$, $x_0 = 1$.

151. $f(x) = 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$, $x_0 = \frac{1}{\pi}$.

152. $f(x) = 3 \cos 2x - \sqrt{1 - \sin 2x} (\sin x + \cos 2x)$,
 $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

153. $f(x) = \ln(1 + \sin^2 x) - 2 \sin x \arctg \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

154. $f(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$, $x_0 = 1$, $x_0 = -1$, $x_0 = 0$.

155. $f(x) = (\operatorname{ch} x)^{\operatorname{sh} x}$, $x_0 = 0$.

156. $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x + 1}$, $x_0 = 0$.

157. $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

$$158. f(x) = \max(7x - 6x^2, |x|^3), \quad x_0 = 0.$$

$$159. f(x) = \sqrt[3]{\arctg \sqrt[3]{\cos \ln^2 x}}, \quad x_0 = 1.$$

$$160. f(x) = (\sqrt{1 + 3^x})^{\ln x^2}, \quad x_0 = 1.$$

$$161. f(x) = \cos^4 x \cdot \cos nx, \quad \forall x_0 \in R.$$

$$162. f(x) = 2^{\sin^2 x}, \quad \forall x_0 \in R.$$

$$163. f(x) = 2^{\cos^2 x}, \quad \forall x_0 \in R.$$

2. Қуйыдағы функцияларнинг дифференциални топинг.

$$164. f(x) = \ln \ln \left(\frac{x}{2} \right).$$

$$165. f(x) = \cos \frac{1}{\log_2 x}.$$

$$166. f(x) = 10^{\frac{x}{\log_2 x}}.$$

$$167. f(x) = e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}.$$

$$168. f(x) = \ln \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} \cos x}{\sqrt{3} + \sqrt{2} \cos x}.$$

$$169. f(x) = \arctg e^{\frac{x}{2}} - \ln \sqrt{\frac{e^x}{e^x + 1}}.$$

$$170. f(x) = x^{x^2}.$$

$$171. f(x) = x^{e^x}.$$

$$172. f(x) = 5^{x^x}.$$

$$173. f(x) = |\sin x|^{\cos x}.$$

$$174. f(x) = \sqrt[x]{x}, \quad (x > 0).$$

$$175. f(x) = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x}, \quad a > 0, x > 0.$$

$$176. f(x) = \frac{\log_x e}{e}.$$

$$177. f(x) = \ln^2(\sec 2\sqrt[3]{x}).$$

$$178. f(x) = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x}).$$

$$179. f(x) = \ln \frac{1 + \sqrt{\sin x}}{1 - \sqrt{\sin x}} + 2 \arctg \sqrt{\sin x}.$$

$$180. f(x) = \arctg \frac{\ln x}{x}, \quad x_0 = \frac{1}{e}, \quad x_0 = e.$$

$$181. f(x) = \left(\frac{1}{x} + \ln \frac{x-1}{x} \right), \quad x_0 = -1.$$

$$182. f(x) = \frac{x^3 2^x}{x^2}, \quad x_0 = 1, \quad x_0 = 2.$$

$$183. f(x) = \frac{(2x-1)\sqrt[3]{2+3x}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}, \quad x_0 = 1.$$

3. Қуйидаги функцияларнинг берилган нуқталарда тақрибий қийматларини топинг.

$$184. f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x = 65, \quad x = 125, 1324.$$

$$185. f(x) = \sin x, \quad x = 29^\circ, \quad x = 359^\circ.$$

$$186. f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x = 44^\circ 50'.$$

$$187. f(x) = \ln \operatorname{tg} x, \quad x = 47^\circ 15'.$$

$$188. f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}, \quad x = 0, 15.$$

$$189. f(x) = \cos x, \quad x = 151^\circ.$$

$$190. f(x) = \lg x, \quad x = 11.$$

3-§. ЮҚОРИ ТАРТИБЛИ ҲОСИЛА ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАР

1°. Функциянинг юқори тартибли ҳосилалари

$y = f(x)$ функция x_0 нуқтанинг бирор атрофида берилган бўлиб, шу атрофда $f'(x)$ ҳосиллага эга бўлсин. Агар $f'(x)$ ҳам x_0 нуқтада ҳосиллага эга бўлса, уни $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги *иккинчи тартибли ҳосиласи* деб аталади ва

$$y''_{x_0} \text{ ёки } f''(x_0), \text{ ёки } \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=x_0}$$

каби ёзилади. Демак,

$$y'_{x_0} = (y')'_{x=x_0}, \quad f''(x_0) = (f'(x))'_{x=x_0},$$

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=x_0} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=x_0}.$$

$f(x)$ функциянинг учинчи, тўртинчи ва ҳ. к. тартибдаги ҳосилалари худди шунга ўхшаш таърифланади.

Умуман, агар $y = f(x)$ функциянинг $(n-1)$ -тартибли $f^{n-1}(x)$ ҳосиласи x_0 нуқтанинг бирор атрофида мавжуд бўлиб, бу $f^{n-1}(x)$ функция x_0 нуқтада ҳосиллага эга бўлса, уни $y = f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги n -тартибли ҳосиласи деб аталади ва

$$y_{x=x_0}^{(n)}, f^{(n)}(x_0), \left. \frac{d^n y}{dx^n} \right|_{x=x_0}$$

белгиларнинг бири орқали ёзилади.

Шундай қилиб,

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))',$$

$$\left(\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{(n-1)} y}{dx^{n-1}} \right) \right)$$

бўлади.

30-мисол. Ушбу $y = \ln \sin x$ функциянинг учинчи тартибли ҳосиласини топинг.

Функциянинг учинчи тартибли ҳосиласини топиш учун унинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топиш керак бўлади:

$$y' = (\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x,$$

$$y'' = (y')' = (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$y''' = (y'')' = \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \right)' = -\frac{-2 \sin x \cos x}{\sin^4 x} = \frac{2 \cos x}{\sin^3 x}.$$

Демак,

$$y''' = \frac{2 \cos x}{\sin^3 x}.$$

31-мисол. Ушбу

$$y = \frac{x^2}{1-x}$$

функциянинг саккизинчи тартибли ҳосиласини топинг.

Аввало берилган функцияни

$$y = \frac{x^2}{1-x} = \frac{-(1-x^2)+1}{1-x} = -(1+x) +$$

$$+ \frac{1}{1-x} = -(1+x) + (1-x)^{-1}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Шундан кейин унинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned}
 y' &= [-(1+x) + (1-x)^{-1}]' = -1 + (-1)(1-x)^{-2}, \\
 y'' &= [-1 + (-1) \cdot (1-x)^{-2}]' = 0 + (-1) \cdot (-2)(1-x)^{-3}, \\
 y''' &= [(-1)(-2) \cdot (1-x)^{-3}]' = (-1)(-2)(-3)(1-x)^{-4} = \\
 &= (-1)^3 \cdot 3! (1-x)^{-4}.
 \end{aligned}$$

Шу йўл билан

$$y^8 = (-1)^8 \cdot 8! (1-x)^{-9} = 8! (1-x)^{-9}$$

бўлишни топамиз.

2°. Содда қоидалар ва асосий формулалар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар x_0 нуқтанинг бирор атрофида аниқланган бўлиб, улар шу атрофда $f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда

$$1) [c \cdot f(x)]^{(n)} = c \cdot f^{(n)}(x), \quad c = \text{const.}$$

$$2) [f(x) \pm g(x)]^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x),$$

$$\begin{aligned}
 3) [f(x) \cdot g(x)]^{(n)} &= f^{(n)}(x) \cdot g(x) + C_n^1 f^{(n-1)}(x) \cdot g'(x) + \\
 &+ C_n^2 f^{(n-2)}(x) \cdot g''(x) + \dots + C_n^{n-1} f'(x) \cdot g^{(n-1)}(x) + \\
 &+ f(x) \cdot g^{(n)}(x)
 \end{aligned}$$

(Лейбниц формуласи) бўлади.

Энди асосий формулаларни келтирамиз:

$$1) y = a^x \text{ бўлса, } y^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a, \quad a > 0.$$

$$2) y = e^x \text{ бўлса, } y^{(n)} = e^x.$$

$$3) y = \sin x \text{ бўлса, } y^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

$$4) y = \cos x \text{ бўлса, } y^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

$$5) y = \ln x \text{ бўлса, } y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}.$$

$$6) y = \frac{1}{x} \text{ бўлса, } y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^{n+1}}.$$

$$7) y = x^m \text{ бўлса, } y^{(n)} = m(m-1) \dots (m-n+1) x^{m-n}.$$

$$8) y = (1+x)^\alpha \text{ бўлса, } y^{(n)} = (\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

32-мисол. Ушбу

$$y = e^{2x} \sin^3 x$$

функциянинг n -тартибли ҳосиласини топинг.

Берилган функцияни

$$y = e^{2x} \sin^2 x = e^{2x} \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} (e^{2x} - e^{2x} \cdot \cos 2x)$$

кўринишда ёзиб оламиз. Шундан кейин унинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$y' = 1 \cdot e^{2x} \cdot \left[1 - 2^{\frac{1}{2}} \cdot \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

Юқоридаги формулалардан фойдаланиб

$$y^{(n)} = 2^{n-1} e^{2x} \left[1 - 2^{\frac{n}{2}} \cos \left(2x + n \cdot \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

булиши топилади.

33-мисол. Ушбу $y = \sin ax$ функциянинг n -тартибли ҳосиласини топинг.

Равшанки,

$$y' = (\sin ax)' = \cos ax \cdot a = a \cdot \sin \left(ax + \frac{\pi}{2} \right).$$

Юқоридаги 3)-формуладан фойдаланиб

$$y^{(n)} = a^n \sin \left(ax + n \cdot \frac{\pi}{2} \right)$$

булишини топамиз.

34-мисол. Ушбу

$$y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

функциянинг n — тартибли ҳосиласини топилсин.

Берилган функцияни

$$y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Юқорида келтирилган содда қоида ва (8) формуладан фойдаланиб, топамиз:

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right)^{(n)} = \left(\frac{1}{x-2} \right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x-1} \right)^{(n)} = \\ &= [(x-2)^{-1}]^{(n)} - [(x-1)^{-1}]^{(n)} = (-1)(-1-1) \dots \\ &\dots (-1-n+1)(x-2)^{-1-n} - [(-1)(-1-1) \dots \\ &\dots (-1-n+1)(x-1)^{-1-n}] = (-1)^n \cdot n! [(x-2)^{-n-1} - \\ &- (x-1)^{-n-1}] = (-1)^n \cdot n! \left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right]. \end{aligned}$$

Демак,

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right].$$

35-мисол. $y = x \cdot \cos ax$ функциянинг n -тартибли ҳосиласини топинг.

Бу функциянинг n -тартибли ҳосиласини топишда Лейбниц формуласидан фойдаланамиз. Лейбниц формуласида $f(x) = \cos ax$, $g(x) = x$ деймиз. Агар

$$f^{(n)}(x) = (\cos ax)^{(n)} = a^n \cos \left(ax + n \cdot \frac{\pi}{2} \right),$$

$$g'(x) = 1, \quad g''(x) = g'''(x) = \dots = g^{(n)}(x) = 0.$$

булишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= (f(x) \cdot g(x))^{(n)} = (x \cdot \cos ax)^{(n)} = \\ &= x a^n \cos \left(ax + n \cdot \frac{\pi}{2} \right) + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cos \left(ax + (n-1) \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= x a^n \cos \left(ax + n \cdot \frac{\pi}{2} \right) + n a^{n-1} \cos \left(ax + \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= x a^n \cos \left(ax + n \cdot \frac{\pi}{2} \right) + n a^{n-1} \sin \left(ax + \frac{n\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

булишини топамиз. Демак,

$$y^{(n)} = x a^n \cos \left(ax + n \cdot \frac{\pi}{2} \right) + n a^{n-1} \sin \left(ax + n \cdot \frac{\pi}{2} \right).$$

36-мисол. Агар $x = a$ нуқтанинг атрофида $\varphi(x)$ функция $(n-1)$ -тартибли узлуксиз ҳосиллага эга бўлса, у ҳолда

$$y = y(x) = (x-a)^n \cdot \varphi(x)$$

функциянинг $x = a$ нуқтадаги n -тартибли ҳосиласини топинг.

Айтайлик,

$$f(x) = (x-a)^n, \quad g(x) = \varphi(x)$$

бўлсин. У ҳолда

$$\begin{aligned} (f(x))^{(n-1)} &= [(x-a)^n]^{(n-1)} = \\ &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot (x-a) = n! (x-a), \\ [g(x)]^{(n-1)} &= \varphi^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

бўлади. Лейбниц формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned}
 y^{(n-1)} &= [f(x) \cdot g(x)]^{(n-1)} = [(x-a)^n \cdot \varphi(x)]^{(n-1)} = \\
 &= [(x-a)^n]^{(n-1)} \cdot \varphi(x) + C_{n-1}^1 [(x-a)^n]^{(n-2)} \cdot \varphi'(x) + \dots + \\
 &+ C_{n-1}^{n-2} [(x-a)^n]' \cdot \varphi^{(n-2)}(x) + (x-a)^n \varphi^{(n-1)}(x) = \\
 &= n! (x-a) \varphi(x) + (n-1)(n-1)n(n-2) \dots 2 \dots \\
 &\dots (x-a)^2 \varphi'(x) + \dots + (n-1)n(x-a) \\
 &- a)^{n-1} \varphi^{(n-2)}(x) + (x-a)^n \varphi^{(n-1)}(x).
 \end{aligned}$$

Энди

$$y^{(n-1)} = n! (x-a) \varphi(x) + \alpha (x-a).$$

деб оламиниз, бунда

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha = 0$$

бўлади. Равшанки,

$$y^{(n-1)}(a) = 0.$$

Шуни эътиборга олиб, сўнгра ҳосила таърифидан фойдаланиб, топамиз:

$$\begin{aligned}
 y^{(n)}(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{y^{(n-1)}(x) - y^{(n-1)}(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{y^{(n-1)}(x)}{x-a} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{n! (x-a) \varphi(x) + \alpha (x-a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} [n! (x-a) \varphi(x) + \alpha] = \\
 &= n! \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x).
 \end{aligned}$$

Шартга кўра $\varphi(x)$ функция $x=a$ нуқтада узлуксиз.

Демак,

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \varphi(a).$$

Натижада берилган функциянинг $x=a$ нуқтадаги n -тартибли ҳосиласи

$$y^{(n)}(a) = n! \varphi(a).$$

бўлиши келиб чиқади.

3°. Функциянинг юқори тартибли дифференциаллари

$y = f(x)$ функция x_0 нуқтанинг бирор атрофида берилган бўлиб, шу атрофда икки марта дифференциалланувчи бўлсин. $f(x)$ функция дифференциали $dy = df(x)$ нинг дифференциали берилган функциянинг иккинчи тартибли дифференциали деб аталади ва

$$d^2y \text{ ёки } d^2f(x)$$

каби ёзилади. Демак, $d^2y = d(dy)$ ёки $d^2f(x) = d(df(x))$.
Юқорида келтирилган функциянинг иккинчи тартибли дифференциали қуйидагича изоҳланади;

а) dy фақат x нинг функцияси деб фарз қилинади, яъни $f'(x)dx$ нинг дифференциали ҳисобланганда dx ўзгармас кўпаяувчи деб қаралади.

б) $f'(x)$ нинг дифференциали ҳисобланганда x нинг ортирмаси $\Delta x = dx$ ни биринчи тартибли дифференциал $dy = f'(x)dx$ ни ҳисоблагандаги dx нинг қийматига тенг деб қаралади.

$f(x)$ нинг учинчи, тўртинчи ва x к. тартибдаги дифференциаллари худди шунга ўхшаш таърифланади.

Умуман, $f(x)$ функциянинг n -тартибли дифференциали $d^n f(x)$ ни

$$d^n f(x) = d(d^{n-1} f(x))$$

деб таърифланади.

Функциянинг ҳосилалари билан унинг дифференциаллари орасида

$$d^n y = y^{(n)} dx^n \quad \text{ёки} \quad d^n f(x) = f^{(n)}(x) dx^n \quad (10)$$

боғланиш мавжуд.

37-мисол. Ушбу $y = \ln x$ функциянинг 100-тартибли дифференциалини топинг.

(10) формулага кўра

$$d^{100}y = d^{100}(\ln x) = (\ln x)^{100} dx^{100}$$

бўлади. Агар

$$(\ln x)^{(100)} = \frac{(-1)^{100-1} (100-1)!}{x^{100}} = -\frac{99!}{x^{100}}$$

бўлишини ҳисобга олсак, унда

$$d^{100}y = -\frac{99!}{x^{100}} dx^{100}$$

ёкани келиб чиқади.

4°. Содда қоидалар ва асосий формулалар
 $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар x_0 нуқтанинг бирор атрофида аниқланган бўлиб, улар шу атрофда $f^{(n)}(x)$ ва $g^{(n)}(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда

$$1) d^n(c \cdot f(x)) = c \cdot d^n f(x), \quad c — \text{const},$$

$$2) d^n(f(x) \pm g(x)) = d^n f(x) \pm d^n g(x),$$

$$3) \quad d^n(f(x) \cdot g(x)) = d^n f(x) \cdot g(x) + C_n^1 d^{n-1} f(x) \cdot dg(x) + \\ + C_n^2 d^{n-2} f(x) \cdot d^2 g(x) + \dots + C_n^{n-1} df(x) d^{n-1} g(x) + \\ + f(x) d^n g(x)$$

(Лейбниц формуласи) бўлади.

Энди асосий формулаларни келтирамиз:

$$1) \quad y = a^x \text{ бўлса, } d^n y = a^x \ln^n a dx^n.$$

$$2) \quad y = e^x \text{ бўлса, } d^n y = e^x dx^n.$$

$$3) \quad y = \sin x \text{ бўлса, } d^n y = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) dx^n.$$

$$4) \quad y = \cos x \text{ бўлса, } d^n y = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) dx^n.$$

$$5) \quad y = \ln x \text{ бўлса, } d^n y = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n} dx^n.$$

$$6) \quad y = \frac{1}{x} \text{ бўлса, } d^n y = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} dx^n.$$

$$7) \quad y = x^m \text{ бўлса, } d^n y = m(m-1) \dots (m-n+1) \times \\ \times x^{m-n} dx^n,$$

$$8) \quad y = (1+x)^\alpha \text{ бўлса, } d^n y = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1) (1+x)^{\alpha-n} dx^n.$$

38-мисол. Агар $y = f(x)$ функция n -тартибли ҳосиллага эга бўлса,

$$d^n f(ax+b) = a^n f^{(n)}(ax+b) dx^n$$

бўлишини кўрсатинг (a, b — ўзгармас сонлар).

(10) формулага кўра

$$d^n f(ax+b) = [f(ax+b)]^n dx^n$$

бўлади. Энди $f(ax+b)$ нинг n — тартибли ҳосиласини ҳисоблаймиз. Равшанки,

$$[f(ax+b)]' = f'(ax+b) \cdot (ax+b)' = a \cdot f'(ax+b),'$$

$$[f(ax+b)]'' = [af'(ax+b)]' = a [f'(ax+b)]' = \\ = a \cdot f''(ax+b) \cdot (ax+b)' = a^2 f''(ax+b),$$

$$[f(ax+b)]''' = [a^2 \cdot f''(ax+b)]' = a^2 [f''(ax+b)]' = \\ = a^2 \cdot f'''(ax+b) \cdot (ax+b)' = a^3 f'''(ax+b).$$

Бу муносабатлардан фойдаланиб қаралаётган функциянинг n — тартибли ҳосиласи учун ушбу

$$[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b) \quad (11)$$

формулани ёзамиз. Унинг тўғрилигини математик индукция усули ёрдамида кўрсатиш қийин эмас. Маълумки, $k=1$ да

$$[f(ax+b)]' = a \cdot f'(ax+b).$$

Энди (11) муносабат $k(k > 1)$ да ўринли, яъни

$$[f(ax+b)]^{(k)} = a^k \cdot f^{(k)}(ax+b)$$

бўлсин деб, унинг $k+1$ да ўринли бўлишини кўрсатамиз.

Таърифга кўра:

$$[f(ax+b)]^{(k+1)} = \{[f(ax+b)]^{(k)}\}'.$$

Шуининг учун

$$\begin{aligned} [f(ax+b)]^{(k+1)} &= \{[f(ax+b)]^{(k)}\}' = \\ &= [a^k \cdot f^{(k)}(ax+b)]' = a^k [f^{(k)}(ax+b)]' = \\ &= a^k \cdot f^{(k+1)}(ax+b)(ax+b)' = a^{k+1} \cdot f^{(k+1)}(ax+b) \end{aligned}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса (11) формула ихтиёрий n учун ўринли бўлишини билдиради.

Демак,

$$d^n f(ax+b) = [f(ax+b)]^{(n)} dx^n = a^n \cdot f^{(n)}(ax+b) dx^n.$$

39-мисол. Агар u — узгарувчи x нинг икки марта дифференциалланувчи функцияси экани маълум бўлса, унда ушбу

$$y = e^u$$

функциянинг иккинчи тартибли дифференциалини топинг.

Бу функциянинг дифференциалларини, юқорида келтирилган қондалардан фойдаланиб, кетма-кет ҳисоблаймиз:

$$dy = d(e^u) = e^u du,$$

$$\begin{aligned} d^2 y &= d(dy) = d(e^u du) = d(e^u) du + e^u d(du) = \\ &= e^u du du + e^u d^2 u = e^u (du)^2 + e^u d^2 u = e^u (du^2 + d^2 u). \end{aligned}$$

Мисол ва масалалар

1. Қуйидаги функцияларнинг иккинчи тартибли ҳосилаларини топинг:

$$191. y = x \sqrt{1+x^2}.$$

$$194. y = e^{-x^2}.$$

$$192. y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$195. y = \operatorname{tg}^2 x.$$

$$193. y = x \ln x.$$

$$196. y = [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)].$$

$$197. y = (1 + x^2) \operatorname{arctg} x.$$

$$198. y = e^{\sqrt{x}}.$$

$$199. y = e^{\sin x} \cos(\sin x).$$

$$200. y = \cos^2 x.$$

$$201. y = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x.$$

$$202. y = x^x.$$

$$203. y = x(\cos \ln x + \sin \ln x).$$

2. Қуйидаги функцияларнинг n -тартибли ҳосилаларини топинг:

$$204. y = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n.$$

$$205. y = \sin^4 x + \cos^4 x.$$

$$206. y = \sin ax \cos bx.$$

$$207. y = \frac{1+x^2}{1-x^2}.$$

$$208. y = (x-1)^{2x-1}.$$

$$209. y = \ln(x-1)^{2x}.$$

$$210. y = x \ln \frac{3+x}{3-x}.$$

$$211. y = x \cos^2 x.$$

$$212. y = \frac{x}{\sqrt{1-5x}}.$$

$$213. y = \frac{x^2}{\sqrt{1-2x}}.$$

$$214. y = e^{ax} \cos(bx + c).$$

$$215. y = x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}.$$

$$216. y = x^{n-1} \ln x.$$

$$217. y = \operatorname{arctg} x.$$

$$218. y = x \sin x \cos 2x,$$

$$n = 100, x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$219. y = (x - \sin x)^2,$$

$$n = 16, x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$220. y = \operatorname{ch} ax \sin bx.$$

3. Қуйидаги функцияларнинг $x = 0$ нуқтада нечанчи тартибли ҳосилаларга эга эканлигини аниқланг ва бу ҳосилаларни топинг.

$$221. f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса,} \\ \ln(1+x) - x, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$222. f(x) = \begin{cases} 2x \cos x, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса,} \\ \sin 2x, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$223. f(x) = \begin{cases} x^{10}, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,} \\ -x^{10}, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса.} \end{cases}$$

$$224. f(x) = \begin{cases} x^{100} \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$225. f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^3}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

226. Қуйидаги формулани исботланг.

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left(\ln x - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} \right).$$

227. Қуйидаги формулани исботланг:

$$\left(x^{n-1} f \left(\frac{1}{x} \right) \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)} \left(\frac{1}{x} \right),$$

бу ерда $f^{(n)}(x)$ мавжуд деб ҳисобланади.

228. Агар $P_{n,m}(x) = \frac{d^n}{dx^n} (1-x^m)^n$ $m > 0$ бўлса, $P_{n,m}$ (1)

ни топинг.

Агар du , d^2u , dv , d^2v лар мавжуд бўлса, қуйидаги функциялар учун d^2y ни топинг:

229. $y = e^{uv}$

234. $y = u \ln v$.

230. $y = \frac{2u+v}{u}$.

235. $y = u^n$.

231. $y = \operatorname{arctg} \left(\frac{v}{u} \right)$.

236. $y = \frac{u}{v}$.

232. $y = \ln \sqrt{u^2+v^2}$.

237. $y = \sqrt{u^2+v^2}$.

233. $y = u(2+v)$.

238. $y = u^{100} \cdot v^{101}$.

VI боб

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБНИНГ АСОСИЙ ТЕОРЕМАЛАРИ

1-§. ТЕОРЕМАЛАР

1°. Ферма теоремаси. $y = f(x)$ функция бирор x ораликда аниқланган ва бу оралиқнинг нчки c нуқтасида ўзининг энг катта (энг кичик) қийматига эришсин. Агар бу нуқтада функция чекли $f'(c)$ ҳосиллага эга бўлса, у ҳолда

$$f'(c) = 0$$

бўлади.

2° Ролль теоремаси. $y = f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Агар бу функция (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳосиллага эга бўлиб, $f(a) = f(b)$ бўлса, у ҳолда шундай $c (a < c < b)$ нуқта топиладики,

$$f'(c) = 0$$

бўлади.

3°. Лагранж теоремаси. $y = f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Агар бу функция (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда шундай $c (a < c < b)$ нуқта топиладики, бу нуқтада

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

бўлади.

4°. Коши теоремаси. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Агар бу функциялар (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилаларга эга бўлиб, $\forall x \in (a, b)$ учун $g'(x) \neq 0$ бўлса, у ҳолда шундай $c (a < c < b)$ нуқта топиладики,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

бўлади.

1-мисол. Ушбу $f(x) = \sqrt{x^2} - 1$ функция $(-1, 1)$ интервалнинг ички $x = 0$ нуқтасида ўзининг энг кичик қийматига эришса ҳам, бу функция учун Ферма теоремасининг ҳулосаси ўринли эмас. Шунинг кўрсатинг.

Берилган функция $x = 0$ нуқтада ўзининг энг кичик қийматига эришади. Бироқ функция шу $x = 0$ нуқтада чекли ҳосилага эга эмас. Бу ушбу

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{\Delta x^2} - 1}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{\Delta x}}$$

нисбатнинг $\Delta x \rightarrow 0$ да чекли лимитга эга эмаслигидан келиб чиқади. Демак, Ферма теоремасининг шартини бажарилмайди. Бинобарин, теореманинг ҳулосаси ўринли эмас.

2-мисол. Ушбу $f(x) = \sin x$ функция учун $[0, 2\pi]$ сегментда Ролль теоремасининг шартлари бажариладими?

Равшанки, $f(x) = \sin x$ функция $[0, 2\pi]$ сегментда узлуксиз ҳамда $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$ ҳосилага эга. Бу функциянинг $[0, 2\pi]$ сегментнинг четки нуқталаридаги қийматлари $f(0) = 0$, $f(2\pi) = 0$ бўлиб, улар бир-бирига тенг. Демак, берилган функция $[0, 2\pi]$ сегментда Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. $[0, 2\pi]$ сегментнинг $c_1 = \frac{\pi}{2}$, $c_2 = \frac{3}{2}\pi$ нуқталарида функциянинг ҳосилалари нолга айланади:

$$f'(c_1) = \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad f'(c_2) = \cos \frac{3}{2}\pi = 0.$$

3-мисол. Ушбу $f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$, $f(0) = 0$ ($0 \leq x \leq 1$)

функция ҳосиласини нолга айлантирадиган нуқталардан тузилган $\{c_n\}$ кетма-кетликнинг лимити ноль бўлишини кўрсатинг.

Равшанки, берилган функция $[0, 1]$ сегментда узлуксиз, $(0, 1)$ интервалда ҳосилага эга ва $f(0) = f(1) = 0$. Демак, функция $[0, 1]$ сегментда Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. $[0, 1]$ сегментни қуйидаги

$$\left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right], \dots, \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], \dots$$

сегментчаларга ажратамиз. Ҳар бир $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ сегментчада ($n = 1, 2, \dots$) $f(x)$ функция Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Бинобарин, $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ сегментда ($n = 1, 2, \dots$) шундай c_n нуқта $\left(\frac{1}{n+1} < c_n < \frac{1}{n}\right)$ топиладики, $f'(c_n) = 0$ бўлади.

Агар

$$\frac{1}{n+1} < c_n < \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

на

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$$

эгани келиб чиқади.

4-мисол. Агар $f(x)$ функция: 1) $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз, 2) (a, b) интервалда n -тартибли ҳосилага эга, 3) ушбу $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ ($a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$) нуқталарда

$$f(a) = f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_{n-1}) = f(b) = 0$$

бўлса, у ҳолда (a, b) да камида битта c нуқта топиладики,

$$f^{(n)}(c) = 0$$

бўлади. Шунини исботланг.

$[a, b]$ сегментни юқорида айтилган $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ нуқталар ёрдамида n та

$$[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, b]$$

сегментларга ажратамиз. $f(x)$ функция ҳар бир сегментда Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Унда Ролль теоремасига кўра шундай $c_1, c_2, \dots, c_n$ нуқталар ($a < c_1 < x_1, x_1 < c_2 < x_2, \dots, x_{n-1} < c_n < b$) топиладики,

$$f'(c_1) = f'(c_2) = \dots = f'(c_n) = 0$$

бўлади. Энди

$$[c_1, c_2], [c_2, c_3], \dots, [c_{n-1}, c_n]$$

сегментларни қарайлик. Бу сегментларнинг ҳар бирида $f'(x)$ функция Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Ролль теоремасига мувофиқ шундай $c'_1, c'_2, \dots, c'_{n-1}$ нуқталар ($c_1 < c'_1 < c_2, c_2 < c'_2 < c_3, \dots, c_{n-1} < c'_{n-1} < c_n$) топиладики,

$$f''(c'_1) = f''(c'_2) = \dots = f''(c'_{n-1}) = 0$$

бўлади. Энди

$$[c'_1, c'_2], [c'_2, c'_3], \dots, [c'_{n-2}, c'_{n-1}]$$

сегментларни қарайлик. Бу сегментларнинг ҳар бирида $f''(x)$ функция Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Ролль теоремасига кўра шундай $c''_1, c''_2, \dots, c''_{n-2}$ нуқталар ($c'_1 < c''_1 < c'_2, c'_2 < c''_2 < c'_3, \dots, c'_{n-2} < c''_{n-2} < c'_{n-1}$) топиладики,

$$f'''(c''_1) = f'''(c''_2) = \dots = f'''(c''_{n-2}) = 0$$

бўлади.

Шу жараёни давом эттириб $(n-1)$ -қадамдан кейин $[c^{(n-1)}_1, c^{(n-1)}_2]$ сегментга келамизки, бу сегментда $f^{(n-1)}(x)$ функция Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Унда Ролль теоремасига кўра шундай c нуқта ($c^{(n-1)}_1 < c < c^{(n-1)}_2$) топиладики,

$$f^{(n)}(c) = 0 \quad !$$

бўлади.

5-мисол. Агар $f(x)$ функция (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлса, унинг шу интервалда текис узлуксиз бўлишини исботланг.

Модомики, $f'(x)$ чекли экан, унда шундай ўзгармас $M > 0$ сон топиладики, $\forall x \in (a, b)$ учун $|f'(x)| \leq M$ бўлади.

(a, b) интервалда ихтиёрый x_1 ва x_2 нуқталарни олайлик: $x_1, x_2 \in (a, b)$. Унда Лагранж теоремасига кўра

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(c)| \cdot |x_2 - x_1|$$

бўлади. Демак,

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq M \cdot |x_2 - x_1|.$$

Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам $\delta = \delta(\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{M}$ дейилса,

у ҳолда

$$|x_2 - x_1| < \delta < \frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

бўлади. Бу эса $f(x)$ функциянинг (a, b) да текис узлуксиз бўлишини билдиради.

6-мисол. Ушбу $f(x) = x^2 + 3$ функция $[-1, 2]$ сегментда Лагранж теоремасининг шартларини қаноатлантирадими?

Равшанки, берилган функция $[-1, 2]$ сегментда узлуксиз ва $(-1, 2)$ интервалда $f'(x) = 2x$ ҳосилга эга. Демак, $f(x) = x^2 + 3$ функция $[-1, 2]$ сегментда Лагранж теоремасининг шартларини қаноатлантиради. Лагранж теоремасига кўра шундай c нуқта $(-1 < c < 2)$ топиладики,

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = f'(c) = 2c$$

бўлади. Кейинги тенгликдан $c = \frac{1}{2}$ эканини топамиз.

7-мисол. Ушбу

$$\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b} \quad (0 < b < a)$$

тенгсизлиқни исботланг.

$[b, a]$ сегментда $f(x) = \ln x$ функцияни қарайлик. Бу функция шу сегментда узлуксиз ва (b, a) интервалда $f'(x) = \frac{1}{x}$ ҳосилга эга. Унда Лагранж теоремасига кўра шундай c нуқта $(b < c < a)$ топиладики,

$$\frac{\ln a - \ln b}{a - b} = \frac{1}{c}$$

бўлади. Равшанки,

$$b < c < a \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{c} < \frac{1}{b}.$$

Демак,

$$\frac{1}{a} < \frac{\ln a - \ln b}{a - b} < \frac{1}{b}.$$

Кейинги тенгсизликлардан эса

$$\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$$

булиши келиб чиқади.

8-мисол. Агар $x \geq 0$ бўлса, y ҳолда

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$$

тенгликни исботланг. Бунда

$$\frac{1}{4} \leq \theta(x) < \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \theta(x) = \frac{1}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \theta(x) = \frac{1}{2}$$

булишини ҳам кўрсатинг.

Ушбу

$$f(y) = \sqrt{y}$$

функцияни $[x, x+1]$ сегментда ($x \geq 0$) қарайлик. Бу функция шу сегментда узлуксиз, $(x, x+1)$ да $f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ ҳосилага эга. Унда чекли орттирмалар формуласи

$$F(t + \Delta t) - F(t) = F'(t + \theta(t) \cdot \Delta t) \Delta t$$

га кўра

$$f(x+1) - f(x) = f'(x + \theta(x)) \cdot 1,$$

яъни

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$$

бўлади. Бу тенгликдан топамиз:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} &= \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}} \Rightarrow 2\sqrt{x+\theta(x)} = \\ &= \sqrt{x+1} + \sqrt{x} \Rightarrow 4(x+\theta(x)) = x+1 + x + \\ &+ 2\sqrt{x(x+1)} \Rightarrow 4\theta(x) = 1 + 2\sqrt{x(x+1)} - 2x \Rightarrow \\ &\Rightarrow \theta(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\sqrt{x(x+1)} - x). \end{aligned}$$

Кейинги тенгликдан эса

$$\lim_{x \rightarrow +0} \theta(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\sqrt{x(x+1)} - x) \right] = \frac{1}{4},$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{x(x+1)} - x}{2} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{4} + \frac{x^2 + x - x^2}{2(\sqrt{x(x+1)} + x)} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 2} \right] = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

$\theta(x)$ функциянинг

$$\theta(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 2}$$

ифодасидан, унинг $(0, +\infty)$ оралиқда ўсувчи эканини топамиз. Демак,

$$\frac{1}{4} \leq \theta(x) < \frac{1}{2}$$

бўлади.

9-мисол. Ушбу

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$$

функциялар $[-3, 3]$ сегментда Коши теоремасининг шартларини қаноатлантирадими?

Берилган функциялар $[-3, 3]$ сегментда узлуксиз, $(-3, 3)$ да

$$f'(x) = e^x, \quad g'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

хосилаларга эга. Бироқ, $g'(0) = 0$. Демак, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар Коши теоремасининг шартларини қаноатлантирмайди.

10-мисол. Агар $f(x)$ функция $[x_1, x_2]$ сегментда $(x_1, x_2 > 0)$ дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда ушбу

$$\frac{1}{x_1 - x_2} \left| \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} \right| = f(c) - cf'(c)$$

$(x_1 < c < x_2)$ тенгликнинг ўринли бўлишини исботланг. Иккита

$$\alpha(x) = \frac{f(x)}{x}, \quad \beta(x) = \frac{1}{x}$$

функцияларни олайлик. Модомики, $x_1 \cdot x_2 > 0$ экан, $x = 0 \notin [x_1, x_2]$ бўлади. Бу функциялар $[x_1, x_2]$ сегментда узлуксиз, (x_1, x_2) да

$$\alpha'(x) = \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2}, \quad \beta'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

ҳосилаларга эга ва $\beta(x) \neq 0$ ($x \in [x_1, x_2]$). Демак, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ функциялар Коши теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Унда Коши теоремасига кўра шундай c нуқта ($x_1 < c < x_2$) топиладики,

$$\frac{\alpha(x_2) - \alpha(x_1)}{\beta(x_2) - \beta(x_1)} = \frac{\alpha'(c)}{\beta'(c)}$$

бўлади. Кейинги тенгликдан топамиз:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{f(x_2)}{x_2} - \frac{f(x_1)}{x_1}}{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}} &= \frac{cf'(c) - f(c)}{c^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2} &= -[cf'(c) - f(c)] \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{x_1 - x_2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} &= f(c) - cf'(c). \end{aligned}$$

Мисол ва масалалар

1. $f(x) = x(x^2 - 1)$ функция учун $[-1, 1]$ ва $[0, 1]$ оралиқларда Ролль теоремасининг шартларини текширинг.

2. $f(x) = (x^2 - 1)(x - 2)$ функция учун $(-1, 1)$ ва $(1, 2)$ интервалларда шундай нуқталар топингки, бу нуқталарда функция графигига ўтказилган уринма абсциссалар ўқиға параллел бўлсин

3. Ҳақиқий коэффициентли кўпхад фақат ҳақиқий илдиэларга эга бўлса, унинг ҳосилалари ҳам фақат ҳақиқий илдиэларга эга эканини исботланг.

4. Шундай $\xi \in (a, b)$ мавжуд бўлиб, $f'(\xi) = 0$ бўлиши учун, Ролль теоремасининг шартлари зарур ва етарлими?

$$5. f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция учун $[-1, 1]$ оралиқда Лагранж теоремаси ўринлими?

Лагранж теоремасидан фойдаланиб қуйидаги тенгсизликларни исботланг:

$$6. \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, \quad x > 0.$$

$$7. e^x > ex, \quad x > 1.$$

$$8. e^x > 1 + x, \quad x \in R.$$

$$9. |\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$$

$$10. |\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \leq |a - b|.$$

$$11. x^\alpha |\ln x| < \frac{1}{2^\alpha}, \quad 0 < x < 1, \quad \alpha > 0.$$

12. $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ функциялар учун $[-1, 1]$ оралликда Коши теоремаси ўринлими?

13. Агар $f(x)$ функция $x > 0$ нуқталарда дифференциалланувчи бўлиб, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ бўлса, у ҳолда $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ эканини исботланг.

14. Агар $f(x)$ функция $x > 0$ нуқталарда дифференциалланувчи бўлиб, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ бўлса, у ҳолда $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f'(x)| = 0$ эканини исботланг.

15. Агар $f(x)$ функция чекли (a, b) интервалда дифференциалланувчи ва чегараланмаган бўлса, у ҳолда унинг ҳосиласи ҳам чегараланмаганлигини исботланг.

16. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда дифференциалланувчи бўлиб, $f(a) = f(b)$ бўлса, у ҳолда $\exists \xi \in (a, b)$ бўлиб, $f(a) - f(\xi) = \frac{1}{2} \xi f'(\xi)$ муносабат ўринлилигини исботланг.

2-§. ТЕЙЛОР ФОРМУЛАСИ

1°. Функциянинг Тейлор формуласи (локаль формула).

$y = f(x)$ функция x_0 нуқтанинг ($x_0 \in R$) бирор атрофида берилган бўлсин. Агар функция x_0 нуқтанинг шу атрофида $f'(x)$, $f''(x)$, $\dots$, $f^{(n-1)}(x)$ ҳосилаларга эга бўлиб, x_0 нуқтада n -тартибли $f^{(n)}(x_0)$ ҳосиллага эга бўлса, у ҳолда

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \\ &+ o((x - x_0)^n) \quad (f^{(0)}(x) = f(x)) \end{aligned} \quad (1)$$

бўлади. Бу Тейлор формуласидир.

2°. Маклорен формуласи.

Агар (1) формулада $x_0 = 0$ деб олсак, унда ушбу

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n +$$

$$+ o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n) \quad (2)$$

формула ҳосил бўлади. Бу Маклорен формуласидир.

Ушбу $f(x) = e^x$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x)' = (1+x)^m$, $f(x) = \ln(1+x)$ функциялар учун (2) Маклорен формуласи қуйидагича бўлади:

$$1) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$2) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} +$$

$$+ o(x^{2n}),$$

$$3) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$4) (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots$$

$$+ \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

$$5) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} +$$

$$+ o(x^n).$$

3°. Тейлор формуласи (оралиқ учун).

$y = f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда берилган бўлсин. Агар функция шу сегментда $f'(x)$, $f''(x)$... $f^{(n)}(x)$ ҳосилаларга эга бўлиб, x_0 нуқтада ($a < x_0 < b$) $f^{(n+1)}(x)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

бўлади. Бу Тейлор формуласидир. $R_n(x)$ ни Тейлор формуласининг қолдиқ ҳади дейилади. У қуйидаги кўринишларга эга:

$$1) R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} (1-\theta)^n \quad (\text{Коши кўриниши}).$$

$$(c = x_0 + \theta(x-x_0), \theta < \theta < 1).$$

$$2) R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \quad (\text{Лагранж кўриниши}),$$

$$(c = x_0 + \theta(x-x_0), \quad 0 < \theta < 1).$$

11-мисол. Ушбу $f(x) = \sqrt{x}$ функцияни $x=1$ нинг манфий бўлмаган даражалари бўйича ёйилмасининг учта ҳадини топинг.

Бу ҳол учун (1) формула ушбу

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!} (x-1) + \frac{f''(1)}{2!} (x-1)^2 + 0((x-1)^3)$$

кўринишда бўлади. Берилган функциянинг ҳосилаларини топамиз:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}}.$$

Равшанки,

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = \frac{1}{2}, \quad f''(1) = -\frac{1}{4}.$$

Демак,

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + 0((x-1)^3).$$

12-мисол. Агар $x \rightarrow 0$ да

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + 0(x)$$

бўлса,

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = \sqrt[e]{e}$$

бўлишини исботланг.

Ушбу

$$y = [f(x)]^{\frac{1}{x}}$$

функцияни қарайлик. Уни қуйидагича

$$y = e^{\frac{\ln [f(x)]}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln f(x)}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Агар

$$\ln f(x) = \ln \left[1 + \frac{1}{2}x + 0(x) \right]$$

ҳамда

$$\ln \left[1 + \frac{1}{2} x + 0(x) \right] = \frac{1}{2} x + 0(x)$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$y = e^{\frac{1}{x} \left(\frac{1}{2} x + 0(x) \right)} = e^{\frac{1}{2} + \frac{0(x)}{x}}$$

бўлишини топамиз. Кейинги тенгликдан

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{\frac{1}{2} + \frac{0(x)}{x}} \right) = \sqrt{e}$$

эканлиги келиб чиқади.

13-мисол. Тейлор формуласидан фойдаланиб ушбу

$$\alpha = \sin 36^\circ, \quad \beta = (1,2)^{1,1}$$

миқдорларни тақрибий ҳисобланг.

(3) формулага асосланиб

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + 0(x^5)$$

муносабатга ва ундан ушбу

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

тақрибий формулага келамиз. Бу тақрибий формуладан фойдаланиб, топамиз:

$$\alpha = \sin 36^\circ = \sin \frac{\pi}{5} \approx \frac{\pi}{5} - \frac{1}{6} \cdot \frac{\pi^3}{125} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{\pi^5}{5^5} \approx 0,588.$$

Демак,

$$\alpha \approx 0,588.$$

(3) формулага асосланган ҳолда

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + 0(x^2)$$

бўлишига эга бўламиз. Бундан эса

$$(1+x)^m \approx 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2} x^2$$

тақрибий формулага келамиз.

Энди шу формуладан фойдаланиб β миқдorni тақрибий ҳисоблаймиз:

$$\beta = (1,2)^{1,1} = 1,2 \cdot (1,2)^{0,1} = 1,2 \cdot (1 + 0,2)^{0,1} \approx \\ \approx 1,2(1 + 0,1 \cdot 0,2 + \frac{0,1 \cdot (-0,9)}{2} \cdot 0,2^2) \approx 1,121.$$

Демак,

$$\beta \approx 1,121.$$

14-мисол. (3) формулалардан фойдаланиб ушбу

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3},$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$$

лимитларни топинг.

а) да кўрсатилган лимитни топишда (3) формуланинг қуйида

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + 0(x^3),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + 0(x^5)$$

қолидан фойдаланамиз.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + 0(x^3) \right] \left[x - \frac{x^3}{3!} + 0(x^5) \right] - x(1+x)}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^3 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) x^3 + 0(x^5) - x - x^2}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} x^3 + 0(x^5)}{x^3} = \frac{1}{3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0(x^5)}{x^3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Демак,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

б) да кўрсатилган лимитни топишда (3) формуланинг

$$\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{x} \right)^2 + 0 \left(\frac{1}{x^3} \right)$$

қолидан фойдаланамиз.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + 0 \left(\frac{1}{x^2} \right) \right) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x + \frac{1}{2} + 0 \left(\frac{1}{x^2} \right) \right] = \frac{1}{2}.$$

Демак,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] = \frac{1}{2}.$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларни Маклорен формуласи бўйича $O(x^2)$ ҳадгача ёйинг:

17. $f(x) = e^{\lg x}.$

18. $f(x) = e^{\sqrt{1+2x}}.$

19. $f(x) = \ln \cos x.$

Қуйидаги функцияларни Маклорен формуласи бўйича $O(x^4)$ ҳадгача ёйинг:

20. $f(x) = (1+x)^x.$

21. $f(x) = \sqrt[3]{1+3 \sin x}.$

22. $f(x) = \ln(1 + \arcsin x).$

23. $f(x) = \operatorname{arctg}(\sin x).$

Қуйидаги функцияларни Маклорен формуласи бўйича $O(x^n)$ ҳадгача ёйинг:

24. $f(x) = e^{5x-1}.$

25. $f(x) = \sin(2x+3).$

26. $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} + 2\right).$

27. $f(x) = \ln(e^x + 2).$

28. $f(x) = \frac{2}{(1-x)^2}.$

29. $f(x) = 3^{2-x}.$

30. $f(x) = (x^2 - x)e^{-x}.$

31. $f(x) = \ln \frac{1+2x}{1-x}.$

32. $f(x) = \ln(2+x-x^2).$

$$33. f(x) = \frac{x^2 + 3e^x}{e^{2x}}.$$

$$34. f(x) = \frac{x^3}{x-1}.$$

$$35. f(x) = \frac{x^3 + 1}{2x - 3}.$$

$$36. f(x) = \frac{1 - 2x^2}{2 + x - x^2}.$$

Қуйидаги функцияларни Тейлор формуласи бўйича x_0 нуқтанинг атрофида $0((x - x_0)^2)$ ҳадгача ёйинг:

$$37. f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = 2.$$

$$38. f(x) = \sin(2x - 3), \quad x_0 = 1.$$

$$39. f(x) = xe^{2x}, \quad x_0 = -1.$$

$$40. f(x) = x^2 e^{-2x}, \quad x_0 = -1.$$

$$41. f(x) = (x^2 - 1)e^{2x}, \quad x_0 = -1.$$

$$42. f(x) = \sin(x + 1) \sin(x + 2), \quad x_0 = -1.$$

$$43. f(x) = \ln(2x + 1), \quad x_0 = \frac{1}{2}.$$

$$44. f(x) = \ln \sqrt[3]{7x - 2}, \quad x_0 = 1.$$

$$45. f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1} \ln x, \quad x_0 = 1.$$

$$46. f(x) = \frac{2x}{1 - x^2}, \quad x_0 = 2.$$

Қуйидаги лимитларни ҳисобланг:

$$47. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}.$$

$$48. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

$$49. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}.$$

$$50. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}.$$

$$51. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \arcsin x}{x^3}.$$

$$52. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x}.$$

$$53. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(1+x)^x} - e}{x}.$$

$$54. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x^2}.$$

$$55. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}.$$

$$56. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(\operatorname{tg} x) - x}{x^3}.$$

$$57. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \sqrt{1+x^2} - x \cos x}{\ln^3(1-x)}.$$

$$58. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \left(\left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x \right)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$59. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^3 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - x^3 + \frac{x}{2} \right).$$

$$60. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} + 1 \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt[4]{x^{13} - x^9 + 2} \right).$$

$$61. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\sin \pi x)}{\ln(1 + \ln x)}.$$

$$62. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - e^{\pi x - 2x^2}}{\cos x}.$$

$$63. \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[(2e)^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}} - 2 \right].$$

$$64. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x \operatorname{tg} x} \right).$$

$$65. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 - \frac{x}{2} - (x^3 + x + 1) \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right).$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБНИНГ БАЪЗИ ТАТБИҚЛАРИ

1-§. ФУНКЦИЯНИНГ ЎСУВЧИЛИГИ ҲАМДА КАМАЮВЧИЛИГИ

Фараз қилайлик, $y = f(x)$ функция X оралиқда ($X \subset R$) берилган бўлсин. Маълумки,

$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

бўлса, $f(x)$ функция X да ўсувчи,

$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

бўлса, $f(x)$ функция X да камаювчи дейилар эди.

Функция ҳосиласи ёрдамида унинг ўсувчилигини ҳамда камаювчилигини аниқлаш мумкин.

1-теорема. $f(x)$ функция (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳосиллага эга бўлсин. Бу функция шу интервалда ўсувчи бўлиши учун (a, b) да

$$f'(x) > 0$$

бўлиши зарур ва етарли.

2-теорема. $f(x)$ функция (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳосиллага эга бўлсин. Бу функция шу интервалда камаювчи бўлиши учун (a, b) да

$$f'(x) < 0$$

бўлиши зарур ва етарли.

1-мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{x^2}{10} - \ln x$$

функцияни ўсувчи ва камаювчи бўлишга текширинг.

Бу функция $(0, +\infty)$ да аниқлангандир. Унинг ҳосиласи

$$f'(x) = \frac{x}{5} - \frac{1}{x}$$

бўлади. Энди

$$f'(x) > 0, \quad \text{яъни} \quad \frac{x}{5} - \frac{1}{x} > 0$$

ёки

$$f'(x) \leq 0, \quad \text{яъни} \quad \frac{x}{5} - \frac{1}{x} \leq 0$$

бўлишга текширамыз:

$$\frac{x}{5} - \frac{1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 5}{5x} \geq 0 \Leftrightarrow x(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) \geq 0.$$

Бундан эса, $(\sqrt{5}, +\infty)$ да $f'(x) > 0$, $(0, \sqrt{5})$ да $f'(x) < 0$ бўлишини топамиз. Демак, берилган функция $(0, \sqrt{5})$ да камаювчи, $(\sqrt{5}, +\infty)$ да ўсувчи бўлади.

2-мисол. Ушбу

$$f(x) = \ln |x|$$

функциянинг ўсувчи ва камаювчи бўладиган оралиқларини топинг.

Бу функция $R \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ да аниқланган. Унинг ҳосиласи

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

бўлади. Бундан эса, $x > 0$ бўлганда $f'(x) > 0$ бўлади, $x < 0$ бўлганда $f'(x) < 0$ бўлади. Демак, берилган функция $(-\infty, 0)$ да камаювчи, $(0, +\infty)$ да ўсувчи бўлади.

3-мисол. Ҳосиласи

$$f'(x) = \frac{5}{3-2x-x^2} - 1$$

бўлган $f(x)$ функциянинг ўсувчилиги ҳамда камаювчилиги тўғрисида нима дейиш мумкин.

Бу масалани ҳал қилиш учун

$$f'(x) > 0 \quad \text{ёки} \quad f'(x) \leq 0$$

тенгсизликларни ечиш лозим.

Энди

$$f'(x) = \frac{5}{3-2x-x^2} - 1 < 0$$

тенгсизликни ечамиз:

$$\begin{aligned} \frac{5}{3-2x-x^2} - 1 < 0 &\Leftrightarrow \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x-3} > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{x^2+2x+1+1}{(x+3)(x-1)} > 0 &\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2+1}{(x+3)(x-1)} > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x+3)(x-1) > 0. \end{aligned}$$

Демак, $(-\infty; -3) \cup (1, +\infty)$ да $f'(x) < 0$ бўлади. $(-3, 1)$ ораликда эса $f'(x) > 0$ бўлади. Шундай қилиб, берилган функция $(-\infty - 3) \cup (1, +\infty)$ да камаювчи, $(-3, 1)$ ораликда эса ўсувчи бўлади.

4-мисол. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар: 1) $[a, b]$ сегментда аниқланган ва шу сегментда чекли $f'(x)$, $g'(x)$ ҳосилаларга эга; 2) $f'(x) > g'(x)$ ($x \in [a, b]$); 3) $f(a) = g(a)$ бўлса, у ҳолда $(a, b]$ ярим интервалда $f(x) > g(x)$ бўлишини исботланг.

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар айирмасини $\varphi(x)$ билан белгилаймиз:

$$\varphi(x) = f(x) - g(x).$$

Унда $\varphi'(x) = f'(x) - g'(x)$ бўлиб, 2) шартга кўра $\varphi'(x) > 0$ бўлади. Демак, $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ да ўсувчи. Агар $\varphi(a) = f(a) - g(a) = 0$ бўлишини эътиборга олсак, унда $(a, b]$ ярим интервалда $\varphi(x) > 0$ эканлигини топамиз. Демак,

$$\varphi(x) > 0 \Rightarrow f(x) - g(x) > 0 \Rightarrow f(x) > g(x).$$

Шундай қилиб, (a, b) да

$$f(x) > g(x)$$

бўлади.

5-мисол. Ушбу

$$\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$$

тенгсизликни исботланг.

Бу тенгсизликни исботлашда 4-мисолда келтирилган шартлардан фойдаланамиз. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар сифатида

$$f(x) = \ln(1+x), \quad g(x) = x - \frac{x^2}{2}$$

функцияларни олайлик. Бу функциялар учун $(0, +\infty)$ ораликда 4-мисолдаги шартлар бажарилади:

$$1) f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad g'(x) = 1-x;$$

2) $(0, +\infty)$ ораликда

$$\frac{1}{1+x} > 1-x$$

бўлади (чунки $1-x^2 < 1 \Rightarrow (1-x)(1+x) < 1 \Rightarrow 1-x < \frac{1}{1+x}$);

3) $f(0) = \ln 1 = 0$, $g(0) = 0 \Rightarrow f(0) = g(0)$.
Унда $f(x) > g(x)$, яъни

$$\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$$

бўлади.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг ўсувчи ва камаювчи бўладиган оралиқларини топинг.

1. $f(x) = 3x - x^3$.

2. $f(x) = \frac{2x}{1+2x}$.

3. $f(x) = x + \sin x$.

4. $f(x) = 8x^3 - x^4$.

5. $f(x) = (x-1)^3(2x+3)^3$.

6. $f(x) = xe^{-3x}$.

7. $f(x) = x^2 e^{-x^2}$.

8. $f(x) = x + |\sin 2x|$

9. $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$.

10. $f(x) = x^2 \ln x$.

11. $f(x) = e^{\pi x} \cos \pi x$.

12. $f(x) = x^3 2^{-x}$.

13. $f(x) = x^3 - \ln x^2$.

14. $f(x) = x^n e^{-x}$, ($n > 0$, $x > 0$).

15. $f(x) = x \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x \right)$, $x > 0$, $f(0) = 0$.

16. $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$.

17. $f(x) = x \sqrt{(x+1)^3}$.

18. $f(x) = \arctg x - \ln x$.

19. $f(x) = 3^{\frac{1}{x-3}}$

20. $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 + |\cos x|}$.

21. Агар $f(x)$ функция (a, b) интервалда ўсувчи бўлиб, $f'(x)$ мавжуд бўлса, $f'(x)$ нинг (a, b) да ўсувчилиги ҳақида нима дейиш мумкин?

Қуйидаги тенгсизликларни исботланг:

22. $e^x \geq ex$; $x \in R$. 23. $e^x > 1 + x$; $x \neq 0$.

24. $\ln(1+x) > \frac{x}{x+1}$; $x > 0$.

25. $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$; $x > 0$.

26. $e^x > 1 + \ln(1+x)$.

27. $\frac{\ln x}{x-1} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$; $x > 0$; $x \neq 1$.

28. $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$; $x \in R$.

29. $\operatorname{ch} x > 1 + \frac{x^2}{2}$, $x \in R$.

30. $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

31. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x$, $0 < |x| \leq \frac{\pi}{2}$.

32. $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y} \leq \sqrt[n]{x-y}$, $x > y > 0$.

33. $\frac{x+y}{2} \leq \frac{x^n + y^n}{2}$, $x > 0$, $y > 0$, $n \in N$.

34. $(x^\alpha + y^\alpha)^\alpha > (x^\beta + y^\beta)^\beta$, $x > 0$, $y > 0$, $0 < \alpha < \beta$.

35. $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

36. $\frac{x-y}{x} < \ln \frac{x}{y} < \frac{x-y}{y}$, $x > y > 0$.

37. $x^\alpha - 1 \leq \alpha(x-1)$, $x > 0$, $0 < \alpha < 1$.

38. а) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$, $x > 0$;

б) $\frac{x \ln x + y \ln y}{x+y} > \ln \frac{x+y}{2}$.

39. $\operatorname{ch} x > 1 + \frac{x^4}{2}$, $x \in R$.

2-§. ФУНКЦИЯНИНГ ЭКСТРЕМУМЛАРИ

$y = f(x)$ функция (a, b) интервалда берилган бўлиб, $x_0 \in (a, b)$ бўлсин.

1-таъриф. Агар x_0 нуқтанинг шундай атрофи

$$U_\delta(x_0) = \{x \in R: x_0 - \delta < x < x_0 + \delta; \delta > 0\} \subset (a, b)$$

мавжуд бўлсаки, $\forall x \in U_\delta(x_0)$ учун

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0))$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга (минимумга) эришади дейилади. $f(x_0)$ қиймат $f(x)$ нинг максимум (минимум) қиймати дейилади ва

$$f(x_0) = \max_{x \in U_\delta(x_0)} \{f(x)\} \quad (f(x_0) = \min_{x \in U_\delta(x_0)} \{f(x)\})$$

каби белгиланади.

Функциянинг максимум ва минимуми умумий ном билан унинг экстремуми дейилади.

1°. Экстремумнинг зарурий шарти

Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада ($x_0 \in (a, b)$) чекли $f'(x_0)$ ҳосиллага эга бўлиб, бу нуқтада $f(x)$ функция экстремумга эришса, у ҳолда

$$f'(x_0) = 0$$

бўлади.

2° Экстремумнинг етарли шартлари

1) $x_0 \in (a, b)$ нуқтанинг

$$U_\delta^-(x_0) = \{x \in R: x_0 - \delta < x < x_0; \delta > 0\},$$

$$U_\delta^+(x_0) = \{x \in R: x_0 < x < x_0 + \delta; \delta > 0\}$$

чап ва ўнг атрофларини қараймиз.

Фараз қилайлик, $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлиб, $U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ да чекли $f'(x)$ ҳосиллага эга бўлсин.

а) Агар

$$\forall x \in U_\delta^-(x_0) \text{ учун } f'(x) > 0,$$

$$\forall x \in U_\delta^+(x_0) \text{ учун } f'(x) < 0$$

бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга эришади.

б) Агар

$$\forall x \in U_\delta^-(x_0) \text{ учун } f'(x) < 0,$$

$$\forall x \in U_\delta^+(x_0) \text{ учун } f'(x) > 0$$

булса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада минимумга эришади.

в) Агар

$$\forall x \in U_{\delta}^{-}(x_0) \text{ учун } f'(x) > 0,$$

$$\forall x \in U_{\delta}^{+}(x_0) \text{ учун } f'(x) > 0$$

ёки

$$\forall x \in U_{\delta}^{-}(x_0) \text{ учун } f'(x) < 0,$$

$$\forall x \in U_{\delta}^{+}(x_0) \text{ учун } f'(x) < 0$$

булса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эришмайди.

$f(x)$ функция x_0 нуқтада $f', f'', \dots, f^{(n)}$ ҳосилаларга эга бўлиб,

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

бўлсин.

г) Агар n жуфт сон бўлиб,

$$f^{(n)}(x_0) < 0$$

булса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга,

$$f^{(n)}(x_0) > 0$$

булса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада минимумга эришади.

д) Агар n тоқ сон булса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эришмайди.

6-мисол. Ушбу $f(x) = e^{-x^2}$ функция $x = 0$ нуқтада максимумга эришишини кўрсатинг ва максимум қийматини топинг.

$x = 0$ нуқтанинг $U_{\delta}(0) = \{x \in \mathbb{R} : -\delta < x < \delta; \delta > 0\}$ атрофидаги исталган x нуқта учун ($\forall x \in U_{\delta}(0)$)

$$f(x) = e^{-x^2} \leq e^0 = 1 = f(0)$$

булади. Демак, берилган функция $x = 0$ нуқтада максимумга эришади. Унинг максимум қиймати

$$\max \{f(x)\} = \max \{e^{-x^2}\} = f(0) = 1$$

булади.

7-мисол. Ушбу $f(x) = 3x^2 - 2x$ функцияни экстремумга текширинг.

Берилган функциянинг ҳосиласи

$$f'(x) = 6x - 2 = 2(3x - 1)$$

ни нолга тенглаймиз.

$$f'(x) = 2(3x - 1) = 0$$

га бундан $x = \frac{1}{3}$ стационар нуқта эканлигини топамиз. Шу нуқта атрофида ҳосила ишорасининг ўзгаришини аниқлаймиз. Раёшанки,

$$\forall x \in U_{\delta}^{-}\left(\frac{1}{3}\right) = \left\{x \in R : \frac{1}{3} - \delta < x < \frac{1}{3}; \delta > 0\right\}$$

учун

$$f'(x) = 2(3x - 1) = -6\left(\frac{1}{3} - x\right) < 0,$$

$$\forall x \in U_{\delta}^{+}\left(\frac{1}{3}\right) = \left\{x \in R : \frac{1}{3} < x < \frac{1}{3} + \delta; \delta > 0\right\}$$

учун

$$f'(x) = 2(3x - 1) = -6\left(\frac{1}{3} - x\right) > 0$$

бўлади. Демак, функциянинг ҳосиласи $x = \frac{1}{3}$ нуқтадан ўтишда ўз ишорасини манфий («—») дан мусбат («+») га ўзгартирар экан. Берилган функциянинг ўзи $x = \frac{1}{3}$ нуқтада ўзлуксиз. Демак, $f(x) = 3x^2 - 2x$ функция $x = \frac{1}{3}$ нуқтада минимумга эришади. Унинг минимум қиймати

$$\min f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

8-мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни экстремумга текширинг.

Бу функциянинг ҳосиласи $f'(x) = 2x$ бўлиб, $x = 0$ нуқтанинг атрофида:

$$\forall x \in U_{\delta}^{-}(0) = \{x \in R : -\delta < x < 0; \delta > 0\} \text{ учун}$$

$$f'(x) = 2x < 0,$$

$$\forall x \in U_{\delta}^{+}(0) = \{x \in R : 0 < x < \delta; \delta > 0\} \text{ учун}$$

$$f'(x) = 2x > 0$$

бўлади, яъни функция ҳосиласи $x = 0$ нуқтани ўтишда ўз ишорасини «—» дан «+» га ўзгартиради. Бироқ, берилган

функция шу нуқтада минимумга эришмайди. Бунга сабаб, функциянинг $x = 0$ нуқтада узлуксиз эмаслигидир.

9-мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$$

функцияни экстремумга текширинг.

Бу функциянинг

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - \frac{5}{2} \cdot 2x + 6 = x^2 - 5x + 6$$

ҳосиласини нолга тенглаймиз:

$$f'(x) = x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Бундан $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ ларнинг стационар нуқталар эканини топамиз.

Аввало $x_1 = 2$ нуқта атрофида функция ҳосиласининг ишорасини аниқлаймиз.

$$\forall x \in U_{\delta}^-(2) = \{x \in \mathbb{R} : 2 - \delta < x < 2; 0 < \delta < 1\} \text{ учун}$$

$$f'(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3) > 0,$$

$$\forall x \in U_{\delta}^+(2) = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 2 + \delta; 0 < \delta < 1\} \text{ учун}$$

$$f'(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3) < 0$$

бўлади. Берилган функция $x_1 = 2$ нуқтада узлуксиз. Демак, берилган функция $x_1 = 2$ нуқтада максимумга эришадими ва унинг максимум қиймати

$$\max f(x) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{5}{2} \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 = 4 \frac{2}{3}$$

бўлади.

Худди шу йўл билан $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$ функциянинг $x_2 = 3$ нуқтада минимумга эришишини ва унинг минимум қиймати

$$\min f(x) = 4 \frac{1}{2}$$

га тенглиги топилди.

10-мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{x^3}{e^{2x}}$$

функцияни экстремумга текширинг. Бу функция ҳосиласи

$$f'(x) = \frac{x^2}{e^{2x}} (3 - 2x)$$

ни нолга тенглаймиз:

$$f'(x) = \frac{x^2}{e^{2x}} (3 - 2x) = 0.$$

Бу тенгламадан $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{2}$ ларнинг стационар нуқталар эканини топамиз.

Энди функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$f''(x) = \frac{2x(2x^2 - 6x + 3)}{e^{2x}}.$$

$f(x)$ функциянинг берилишидан $x = 0$ нуқта экстремумга эга эмаслиги келиб чиқади.

$$f''\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{e^3} < 0,$$

демак, қаралаётган функция $x = \frac{3}{2}$ нуқтада максимумга эришади ва унинг максимум қиймати

$$\max f(x) = \frac{9}{4} e^{-3}$$

га тенг.

Изоҳ: а) Маълумки, $f(x) = |x|$ функциянинг $x = 0$ нуқтада ҳосиласи мавжуд эмас, лекин бу нуқтада минимумга эга бўлиши равшандир.

б) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ функция $x = 0$ нуқтада чексиз ҳосилага эга бўлиб, унинг бу нуқтада минимумга эга эканлигини кўриш қийин эмас. Демак, функция ҳосиласи мавжуд бўлмаган ёки чексизга айланадиган нуқталарда ҳам экстремум мавжуд бўлиши мумкин экан.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг экстремум қийматларини топинг:

40. $f(x) = 2x^3 - x^4$.

41. $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + 3$.

$$42. f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 2 & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$43. f(x) = xe^{-x}.$$

$$44. f(x) = \frac{\ln^3 x}{x}.$$

$$45. f(x) = \frac{1}{x^3 - x}.$$

$$46. f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

$$47. f(x) = e^x \sin x.$$

$$48. f(x) = |x|e^{-|x-1|}.$$

$$49. f(x) = |x^2 - 1|e^{|x|}.$$

$$50. f(x) = |x^2 - 4|e^{-|x|}.$$

$$51. f(x) = e^{-|x-1|} / (x+1).$$

$$52. f(x) = x + \sqrt{3-x}.$$

$$53. f(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

$$54. f(x) = \ln \cos x - \cos x.$$

$$55. f(x) = \lambda^x.$$

$$56. f(x) = x^{\frac{1}{x}}.$$

$$57. f(x) = |x-5|(x-3)^3.$$

$$58. f(x) = \sqrt[3]{x^2|2-x|}.$$

$$59. f(x) = \sin |x-3| + \cos x, \quad x \in (0, \pi)$$

$$60. f(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ x^{x^2 \ln x}, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

3-§. ФУНКЦИЯ ГРАФИГИНИНГ КАВАРИҚЛИГИ ВА БОТИҚЛИГИ. ФУНКЦИЯ АСИМПТОТАЛАРИ

$y = f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, $a < x_1 < x_2 < b$ бўлсин. $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ нуқталарни қараймиз. Маълумки, бу нуқталардан ўтувчи тўғри чизик тенгламаси

$$y = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

кўринишда бўлади. Бу тенгламанинг ўнг томонидаги ифода-
ни $l(x)$ билан белгиласак, у ҳолда тенглама қисқача $y =$
 $= l(x)$ кўринишга эга бўлиб,

$$l(x_1) = f(x_1), \quad l(x_2) = f(x_2)$$

бўлиши равшандир.

2-таъриф. Агар ҳар қандай, $x_1, x_2 (a < x_1 < x_2 < b)$ ларда $\forall x \in (x_1, x_2)$ лар учун $f(x) \geq l(x)$ ($f(x) \leq l(x)$) тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция графиги (a, b) интервалда қавариқ (ботиқ) дейилади.

3-теорема. $y = f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган ва бу интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилга эга бўлсин. $f(x)$ функциянинг (a, b) да қавариқ (ботиқ) бўлиши учун $f'(x)$ нинг (a, b) да камаювчи (ўсувчи) бўлиши зарур ва етарли.

4-теорема. $y = f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган ва бу интервалда иккинчи тартибли $f''(x)$ ҳосилга эга бўлиб, $\forall (\alpha, \beta) \subset (a, b)$ ($\alpha \neq \beta$) ларда $f''(x) \neq 0$ бўлсин. $f(x)$ функция (a, b) интервалда қавариқ (ботиқ) бўлиши учун шу интервалда $f''(x) \leq 0$ ($f''(x) \geq 0$) тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

11-мисол. Ушбу

$$f(x) = x^4 - 6x^3 - 6x + 1$$

функциянинг қавариқ ва ботиқлиги оралиқларини таънинг.

Функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x - 6.$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1),$$

$$|x| > 1 \text{ да } f''(x) > 0, \quad |x| < 1 \text{ да } f''(x) < 0.$$

Демак, $(-1, 1)$ интервалда функция графиги қавариқ, $(-\infty, -1), (1, +\infty)$ интервалларда эса функция графиги ботиқ бўлади.

$f(x)$ функция x_0 нуқтанинг $U_\delta(x_0)$ атрофида аниқланган бўлсин.

3-таъриф. Агар $f(x)$ функция $U_\delta^-(x_0)$ оралиқда қавариқ (ботиқ) бўлиб, $U_\delta^+(x_0)$ оралиқда эса ботиқ (қавариқ) бўлса, у ҳолда x_0 нуқта функциянинг (функция графигининг) эгилиш нуқтаси деб аталади.

5-теорема. $y = f(x)$ функция x_0 нуқтанинг $U_\delta(x_0)$ атрофида аниқланган ва иккинчи тартибли $f''(x)$ ҳосилга эга бўлсин. Агар $f'(x_0) = 0$ бўлиб, $U_\delta^-(x_0), U_\delta^+(x_0)$ ора-

лиқларда $f''(x)$ ҳосила турли ишорали бўлса, у ҳолда $(x_0, f(x_0))$ функция графиги учун эгилиш нуқтаси бўлади.
12-мисол. Ушбу

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

функциянинг эгилиш нуқтасини топинг.

Функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи

$$f''(x) = 2xe^{-x^2}(2x^2 - 3)$$

ни нолга тенглаб топамиз.

$$x = 0, x = \sqrt{\frac{3}{2}}, x = -\sqrt{\frac{3}{2}},$$

$(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}})$ ва $(0, \sqrt{\frac{3}{2}})$ интервалларда $f''(x) < 0$,

$(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$ ва $(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty)$ интервалларда $f''(x) > 0$

эканини кўриш қийин эмас. Демак,

$$A(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}}), B(0, 0), C(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}})$$

нуқталар функция графигининг эгилиш нуқталаридир.

$y = f(x)$ функция a нуқтанинг бирор атрофида аниқланган бўлсин.

4-таъриф. Агар ушбу

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x), \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

лимитлардан бири ёки иккаласи чексиз бўлса, у ҳолда $x = a$ тўғри чизиқ $f(x)$ функция графигининг вертикал асимптотаси деб аталади.

Масалан, $y = \frac{1}{x-1}$ функция графиги учун $x = 1$ тўғри чизиқ вертикал асимптота бўлади.

5-таъриф. Шундай k ва b сонлари мавжуд бўлиб, $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) да $f(x)$ функция қуйидаги

$$f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

кўринишда ифодаланса (бунда $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$), у ҳолда $y = kx + b$ тўғри чизиқ $y = f(x)$ функция графигининг оғма асимптотаси дейилади.

13-мисол, Ушбу

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 2}{x - 1}$$

функция графигининг оғма асимптотасини топинг.

Берилган функция кўринишини қуйидагича ўзгартирамиз:

$$f(x) = 2x + 3 + \frac{1}{x - 1}$$

$x \rightarrow \pm \infty$ да $\alpha(x) = \frac{1}{x-1} \rightarrow 0$ бўлгани учун, $f(x)$ функция-ни $f(x) = 2x + 3 + \alpha(x)$ кўринишда ифодалаш мумкин. Бундан эса $y = 2x + 3$ тўғри чизиқ функция графигининг оғма асимптотаси экани келиб чиқади.

6-теорема. $y = f(x)$ функция графиги $x \rightarrow +\infty$ да $y = kx + b$ оғма асимптотага эга бўлиши учун

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b$$

лимитларнинг ўринли бўлиши зарур ва етарли.

Бу теорема $x \rightarrow -\infty$ да ҳам ўринлидир.

14-мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{x^4}{(1-x)^3}$$

функция графигининг оғма асимптоталарини топинг.

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^4}{x(1+x)^3} = 1,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - kx] &= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left[\frac{x^4}{(1+x)^3} - x \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^4 - x(1+3x+3x^2+x^3)}{(1+x)^3} = -3. \end{aligned}$$

Демак, қаралаётган функция учун

$$y = x - 3$$

чизиқ оғма асимптота бўлади.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг қавариқлик ва ботиқлик ораликларини топинг:

61. $f(x) = x^\alpha, \quad \alpha > 1,$
 $x > 0.$

63. $f(x) = \ln x.$

64. $f(x) = x^5 - 10x^3 + 3x.$

62. $f(x) = e^x.$

65. $f(x) = \frac{1}{1-x^2}.$

$$66. f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}.$$

$$67. f(x) = e^{-x^2}.$$

$$68. f(x) = x + \sin x.$$

$$69. f(x) = x \sin \ln x, \\ x > 0.$$

$$70. f(x) = e^{\arctg x}.$$

Қуйидаги функциялар графикларининг эгилиш нуқталарини топинг:

$$71. f(x) = \cos x.$$

$$72. f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$73. f(x) = e^{\frac{1}{x}}.$$

$$74. f(x) = (x^2 - 1)^3.$$

$$75. f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}.$$

$$76. f(x) = \frac{|x-1|}{x^2}.$$

$$77. f(x) = e^{\cos x}.$$

$$78. f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

$$79. f(x) = 1 + x^3 - \frac{x^4}{2}.$$

$$80. f(x) = e^{2x-4x^2}.$$

$$81. f(x) = 2x^3 + \ln x.$$

$$82. f(x) = e^{-2x} \sin^{-2} x.$$

$$83. f(x) = \frac{ax}{x^2 + b^2}, \quad a \neq 0, \\ b \neq 0.$$

$$84. f(x) = \frac{x^3}{(1+x)^3}.$$

$$85. f(x) = \sqrt{1-x^3}.$$

4-5. ФУНКЦИЯЛАРНИ ТУЛИҚ ТЕКШИРИШ ВА ГРАФИКЛАРНИ ЧИЗИШ

Функцияларни текшириш ва уларнинг графикларини чизишни қуйидаги қоида бўйича амалга ошириш мақсадга мувофиқдир:

- 1°. Функциянинг аниқланиш тўламини топиш;
- 2°. Функцияни узлуксизликка текшириш ва узилиш нуқталарини топиш;
- 3°. Функциянинг жуфт, тоқ ҳамда даврийлигини аниқлаш;
- 4°. Функцияни монотонликка текшириш;
- 5°. Функцияни экстремумга текшириш;
- 6°. Функция графигининг қавариқ ва ботиқлик оралиқларини аниқлаш, эгилиш нуқталарини топиш;
- 7°. Функция графигининг асимптоталарини топиш;
- 8°. Агар имконияти бўлса, функциянинг Ox ва Oy ўқлар билан кесишадиган (агар улар мавжуд бўлса) нуқталарини топиш ва аргумент x нинг бир нечта характерли қийматларида функциянинг қийматларини ҳисоблаш.

15-мисол. Ушбу $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$ функцияни тўлиқ текширинг ва графигини чизинг.

Берилган функция $\{(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)\}$ тўпلامда аниқланган. Бу функция учун $f(-x) = f(x)$ бўлганидан у жуфтдир. Демак, функциянинг графиги Oy ўққа нисбатан симметрик бўлади ва уни $[0, +\infty)$ оралиқда текшириш кифоя.

Функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари:

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}, \quad f''(x) = \frac{4(1 + 3x^2)}{(x^2 - 1)^3}.$$

Биринчи тартибли ҳосила $[0, +\infty)$ оралиқнинг $x = 1$ нуқтасидан бошқа барча нуқталарида аниқланган ва $x = 0$ нуқтада нолга айланади. Иккинчи тартибли ҳосиланинг $x = 0$ нуқтадаги қиймати $f''(0) = -4 < 0$. Шунинг учун $f(x)$ функция $x = 0$ нуқтада максимумга эга ва бу максимум қиймат $f(0) = -1$ бўлади.

Энди $(0, 1)$ ва $(1, +\infty)$ да $f'(x) < 0$ бўлганидан бу тўпلامда $f(x)$ нинг камаювчилиги келиб чиқади. Сўнгра

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = +\infty$$

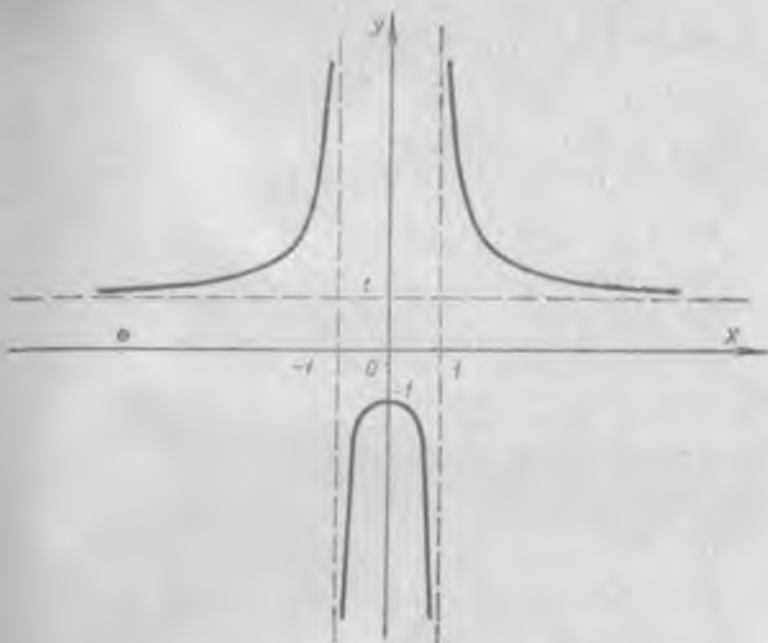
бўлгани учун $x = \pm 1$ (функциянинг иккинчи тур узилиш нуқталари) тўғри чизиклар вертикал асимптоталар эканлигини ва

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{1}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = 1$$

лимитларга кўра $y = 1$ горизонтал тўғри чизик $f(x)$ функция графигининг асимптотаси эканлигини ҳосил қиламиз.

Энди $1 + 3x^2 = 0$ тенглама ҳақиқий сонлар ўқида ечимга эга бўлмагани сабабли функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи нолга тенг бўлмаслиги, яъни эгилиш нуқтаси йўқлиги келиб чиқади. Иккинчи тартибли ҳосиланинг қийматлари: $[0, 1)$ да $f''(x) < 0$, $(1, +\infty)$ да $f''(x) > 0$. Демак, функция графиги $[0, 1)$ да қавариқ ва $(1, +\infty)$ да ботиқ бўлади (3-чизма).



3- чизма.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг графикларини чизинг:

86. $f(x) = 3x - x^3$.

87. $f(x) = -x^3 + 4x - 3$.

88. $f(x) = x(x-1)^3$.

89. $f(x) = (x+2)^2(x-1)^2$.

90. $f(x) = \frac{20x^2}{(x-1)^3}$.

91. $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$.

92. $f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$.

93. $f(x) = \frac{x^4}{(1+x)^2}$.

94. $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4$.

95. $f(x) = \frac{x^5 - 8}{x^4}$.

96. $f(x) = \frac{x}{(1-x^2)^2}$.

97. $f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x-2)^4}$.

98. $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$.

99. $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^3+1}}$.

100. $f(x) = x^2\sqrt{x+1}^{\frac{3}{2}}$.

101. $f(x) = x(x+1)^{\frac{3}{2}}$.

102. $f(x) = \frac{8x}{\sqrt{x^2-4}}$.

103. $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^3+1}} - \frac{x}{2}$.

104. $f(x) = (x^2 + 8x + 12)^{\frac{2}{3}}$.
105. $f(x) = |x| \sqrt{1 - x^2}$.
106. $f(x) = \frac{1 + x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$.
107. $f(x) = e^x - x$.
108. $f(x) = xe^{-2x}$.
109. $f(x) = x^2 e^{-x}$.
110. $f(x) = \frac{e^{-x}}{1 - x}$.
111. $f(x) = \ln x - x + 1$.
112. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
113. $f(x) = x^2 \ln x$.
114. $f(x) = x \ln^2 x$.
115. $f(x) = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + \frac{6}{x+1}$.
116. $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 2x}$.
117. $f(x) = x^2 - 2 \ln x$.
118. $f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \sin 2x$.
- [119. $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$.
120. $f(x) = \sin x - \sin^2 x$.
121. $f(x) = \frac{\cos 2x}{\cos x}$.
122. $f(x) = \frac{x}{2} - \operatorname{arctg} x$.
123. $f(x) = \frac{3}{2} x - \arccos \frac{1}{x}$.
124. $f(x) = \arccos \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$.
125. $f(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg} x}$.
126. $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1 + x^2}$.

$$127. f(x) = e^{\cos x}.$$

$$128. f(x) = e^{-\operatorname{arctg} x}.$$

$$129. f(x) = \sin x - \ln \sin x.$$

$$130. f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

5-§. АНИҚМАСЛИКЛАРНИ ОЧИШ

(Лопиталь қондалари)

1°. $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликлар.

7-теорема. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар учун қуйидаги шартлар ўринли бўлсин:

1) $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар a нуқтанинг бирор атрофида аниқланган ва чекли ҳосилага эга;

$$2) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0;$$

3) a нуқтанинг шу атрофида $g'(x) \neq 0$;

$$4) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ чекли ёки чексиз.}$$

У ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

тенглик ўринли бўлади.

Изоҳ. Агар бу теореманинг шартлари a нуқтанинг чап (ёки ўнг) ярим атрофида бажарилса, у ҳолда теорема $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ нинг a нуқтадаги чап (ёки ўнг) лимитига нисбатан ўринли бўлади.

16-мисол. Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - \cos \alpha x}{e^{\beta x} - \cos \beta x} \text{ лимитни ҳисобланг.}$$

Бу ҳолда $f(x) = e^{\alpha x} - \cos \alpha x$, $g(x) = e^{\beta x} - \cos \beta x$ бўлиб, улар учун теорема шартлари бажарилади:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} g(x),$$

$$б) f'(x) = \alpha (e^{\alpha x} + \sin \alpha x), \quad g'(x) = \beta (e^{\beta x} + \sin \beta x),$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} + \sin \alpha x}{e^{\beta x} + \sin \beta x} = \frac{\alpha}{\beta},$$

у ҳолда теоремага кўра:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

8-теорема. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар учун қуйидаги шартлар ўринли бўлсин:

1) $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $(a, +\infty)$ да аниқланган ва чекли ҳосилага эга;

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0;$$

$$3) g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, +\infty);$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ — чекли ёки чексиз.}$$

У ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

тенглик ўринли бўлади.

17-мисол. Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)} \text{ лимитни ҳисобланг.}$$

Бу ерда

$$f(x) = \pi - 2 \operatorname{arctg} x, \quad g(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

функциялар теореманинг 1) — 3) шартларини қаноатлантиришини текшириш қийин эмас.

Равшанки,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 \frac{1}{1+x^2}}{\frac{x}{1+x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{1+x^2}}{\frac{1}{(1+x)x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1+x^2} (1+x) \quad x = 2. \end{aligned}$$

Демак, 4) шарт ҳам бажарилади. Шунинг учун теоремага кўра:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = 2.$$

2° $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликлар.

9-теорема. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялари учун қуйидаги шартлар ўринли бўлсин:

1) бу функциялар a нуқтанинг бирор атрофида аниқланган ва чекли ҳосилага эга

2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$;

3) a нуқтанинг шу атрофида $g'(x) \neq 0$;

4) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ — чекли ёки чексиз.

У ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

тенглик ўринли бўлади.

18-мисол. Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \left(x - \frac{\pi}{2} \right)}{\operatorname{tg} x} \text{ лимит ҳисоблансин.}$$

Бу ерда

$$f(x) = \ln \left(x - \frac{\pi}{2} \right), \quad g(x) = \operatorname{tg} x$$

бўлиб, улар теореманинг 1) — 3) шартларини қаноатлантиради ва

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{x - \frac{\pi}{2}}.$$

Кейинги лимит $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмаслик бўлиб,

$$f_1(x) = \cos^2 x, \quad g_1(x) = x - \frac{\pi}{2}$$

функциялар 7-теореманинг барча шартларини қаноатлантиради. Шу теоремага асосан:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos x (-\sin x)}{1} = 0.$$

Демак, 9-теоремага кўра,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \left(x - \frac{\pi}{2} \right)}{\operatorname{tg} x} = 0.$$

3°. Бошқа кўринишдаги аниқмасликлар
Маълумки,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \text{ бўлса, } f(x) \cdot g(x)$$

кўпайтма $0 \cdot \infty$ кўринишдаги аниқмаслик бўлиб, уни

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

кўринишда ифодалаш орқали $\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликка келтириш мумкин.

Шунингдек, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ бўлса, $f(x) - g(x)$ айирма $\infty - \infty$ кўринишдаги аниқмаслик бўлиб, уни ҳам

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)}}$$

кўринишда ифодалаб, $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликка келтириш мумкин.

Шундай қилиб, функция ҳосиллари ёрдамида $0 \cdot \infty$ ва $\infty - \infty$ кўринишдаги аниқмасликларни очишда, уларни $\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликка келтириб, сўнггра юқоридаги теоремалар қўлланилади.

Маълумки, $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функция 1, 0 ва ∞ га, $g(x)$ функция эса мос равишда ∞ , 0 ва 0 га интилганда

$[f(x)]^{g(x)}$ даражали — кўрсаткичли ифодада 1^∞ , 0^∞ , ∞^0 кўринишдаги аниқмасликлар келиши мумкин. Бу кўринишдаги аниқмасликларни очиш учун аввало

$$y = [f(x)]^{g(x)}$$

ифода логарифмланади:

$$\ln y = g(x) \ln f(x).$$

$x \rightarrow a$ да $g(x) \ln f(x)$ ифода $0 \cdot \infty$ кўринишдаги аниқмасликни ифодалашни равшан.

Изоҳ. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциянинг $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилалари ҳам $f(x)$ ва $g(x)$ лардек юқорида келтирилган теоремаларнинг барча шартларини қаноатлантирсин, у ҳолда

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

тенгликлар ўринли бўлади, яъни бу ҳолда Лопиталь қондасини такрор қўллаш мумкин бўлади.

19-мисол. Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$$

лимитни ҳисобланг.

Бу лимит 1^∞ кўринишдаги аниқмаслик бўлиб, юқорида айтилганларга асосан:

$$y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$$

ифодани логарифмлаш натижасида

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \ln y = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{(\operatorname{tg} 2x)^{-1}}$$

$\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликка келади.

Энди Лопиталь қондасини қўлласак:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\ln \operatorname{tg} x)'}{[(\operatorname{tg} 2x)^{-1}]'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{-2}{\cos^2 2x}} = - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin 2x = -1.$$

Демак,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = \frac{1}{e}$$

скан.

Мисол ва масалалар

$$131. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^2}.$$

$$132. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{tg}^4 x - 12 \operatorname{tg} x}{3 \sin^4 x - 12 \sin x}.$$

$$133. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x - 1}}{2 \sin^4 x - 1}.$$

$$134. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(-x+1) - 2(e^x - 1)}{x^3}.$$

$$135. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}.$$

$$136. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}.$$

($a > 0$).

$$137. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3}.$$

$$138. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^e} \quad (e > 0).$$

$$139. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\beta - 1}{x^\beta - 1},$$

($\beta \neq 0$).

$$140. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}.$$

$$141. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2m+1)x}{\cos(2n+1)x},$$

$m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$

$$142. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x - x^x}.$$

$$143. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\ln \sin x}.$$

$$144. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^m \ln^\beta x}{e^{2x}}.$$

$$145. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^x \alpha \ln^\beta x}.$$

$$146. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x^2}.$$

$$147. \lim_{x \rightarrow +0} (x^x - 1) \ln x.$$

$$148. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right).$$

$$149. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\alpha}{1 - x^\alpha} - \frac{\beta}{1 - x^\beta} \right),$$

$$\alpha, \beta \neq 0.$$

$$150. \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}.$$

$$151. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)^x.$$

$$152. \lim_{x \rightarrow +0} (1 + x)^{\ln x}.$$

$$153. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\pi - 2x)^{\cos x}.$$

$$154. \lim_{x \rightarrow +0} |\ln x|^{2x}.$$

$$155. \lim_{x \rightarrow 0} x^{x^x - 1}.$$

$$156. \lim_{x \rightarrow 0} (x^{x^x} - 1).$$

$$157. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2}, \quad (a > 0).$$

$$158. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{th} x)^x.$$

$$159. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$160. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}.$$

$$161. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}.$$

$$162. \lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{\ln \sinh x}}.$$

$$163. \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x}.$$

$$164. \lim_{x \rightarrow +0} (a \operatorname{rcsin} x)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$165. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$166. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\arcsin x} \right).$$

$$167. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{\frac{7}{8}} - x^{\frac{6}{7}} \ln^2 x \right)$$

$$168. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{2}{\pi} \arctg x \right).$$

$$169. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\ln^2 (1+x)}.$$

$$170. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha a^x, \alpha > 0, \\ a \neq 1.$$

VIII боб

АНИҚМАС ИНТЕГРАЛЛАР

1-§. АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ ТУШУНЧАСИ

$f(x)$ функция бирор (a, b) (чекли ёки чексиз) интервалда аниқланган бўлсин.

1-таъриф. Агар (a, b) интервалда $f(x)$ функция $(f(x) dx$ ифода) шу интервалда дифференциалланувчи $F(x)$ функциянинг ҳосиласига (дифференциалига) тенг бўлса, яъни ушбу

$F'(x) = f(x)$ ($dF(x) = f(x) dx$), $x \in (a, b)$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $F(x)$ функция (a, b) интервалда $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси дейилади.

1-мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

функциянинг $(-\infty; +\infty)$ интервалда бошланғич функцияси

$$F(x) = \ln(1+x^2)$$

бўлади, чунки

$$F'(x) = [\ln(1+x^2)]' = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = f(x).$$

$F(x)$ ва $\Phi(x)$ функцияларнинг ҳар бири (a, b) интервалда битта $f(x)$ функция учун бошланғич функция бўлсин:

$$F'(x) = f(x), \Phi'(x) = f(x), x \in (a, b).$$

Демак,

$$F'(x) = \Phi'(x).$$

Бундан эса

$$F(x) = \Phi(x) + C \quad (C — \text{const})$$

тенглик келиб чиқади.

Демак, (a, b) интервалда берилган $f(x)$ функциянинг бошланғич функциялари бир-биридан узгармас сонга фарқ қилар экан, яъни бу функциянинг (a, b) интервалда бирор бошланғич функцияси $F(x)$ бўлса, унинг исталган бошланғич функцияси ушбу

$$F(x) + C \quad (C — \text{const})$$

кўринишда ифодаланади.

2-таъриф. (a, b) интервалда берилган функция бошланғич функцияларининг умумий ифодаси $F(x) + C$ ($C — \text{const}$), $f(x)$ функциянинг аниқмас интеграл деб аталади ва

$$\int f(x) dx$$

каби белгиланади.

Демак,

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (C — \text{const}).$$

2-мисол. Ушбу

$$\int 3x^2 dx$$

интегрални ҳисобланг.

Равшанки, $f(x) = 3x^2$ функциянинг бошланғич функцияси $F(x) = x^3$ бўлади.

Аниқмас интеграл таърифидан

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$

бўлишини топамиз.

1. Аниқмас интегралнинг содда хоссалари:

1°. $d[\int f(x) dx] = f(x) dx$.

2°. $\int dF(x) = F(x) + C$ ($C — \text{const}$).

3°. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар бошланғич функцияларга эга бўлса, у ҳолда $f(x) \pm g(x)$ функциялар ҳам бошланғич функцияга эга ва

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

муносабат ўринлидир.

4°. Агар $f(x)$ функция бошланғич функцияга эга бўлса, у ҳолда $k f(x)$ ($k = \text{const}$) функция ҳам бошланғич функцияга эга ва

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k \neq 0)$$

муносабат ўринлидир.

2. Элементар функцияларнинг аниқмас интеграллари.

Элементар функцияларнинг хосилалари жадвалидан ҳамда бошланғич функция таърифидан фойдаланиб, элементар функциялар учун аниқмас интеграллар жадвалини келтирамиз.

$$1. \int 0 dx = C, \quad C = \text{const.}$$

$$2. \int 1 dx = x + C.$$

$$3. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$$

$$4. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C \quad (x \neq 0).$$

$$5. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1).$$

$$6. \int e^x dx = e^x + C.$$

$$7. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$8. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$10. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \quad x \neq n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$11. \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arccotg} x + C. \end{cases}$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \operatorname{arcsin} x + C, & -1 < x < 1, \\ -\operatorname{arccos} x + C, \end{cases}$$

$$13. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$$

$$14. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$$

$$15. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$$

3-мисол. Ушбу

$$\int \frac{x^3 + x + 1}{\sqrt{x}} dx$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги функцияни

$$\frac{x^3 + x + 1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Натижада

$$\int \frac{x^3 + x + 1}{\sqrt{x}} dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$$

тенгликка келамиз.

Аниқмас интегралнинг содда хоссалари ва юқорида келтирилган жадвалдан фойдаланиб, топамиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + x + 1}{\sqrt{x}} dx &= \int x^{\frac{3}{2}} dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx + 2 \cdot \int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \\ &= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 2\sqrt{x} + C = \frac{2 \cdot x^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + \\ &+ 2\sqrt{x} + C = \frac{2x^{\frac{5}{2}}\sqrt{x}}{5} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + 2\sqrt{x} + C = \\ &= 2\sqrt{x} \left(\frac{x^2}{5} + \frac{x}{3} + 1 \right) + C. \end{aligned}$$

2-§. ИНТЕГРАЛЛАШ УСУЛЛАРИ

1°. Ўзгарувчини алмаштириш усули

Агар $\varphi(t)$ функция (c, d) интервалда бошланғич функция $\Phi(t)$ га эга бўлиб, $g(x)$ функция (a, b) интервалда дифференциалланувчи ҳамда $x \in (a, b)$ қийматларда $g(x) \in (c, d)$ бўлса, у ҳолда

$$\int \varphi(g(x)) g'(x) dx = \Phi(g(x)) + C$$

формула ўринлидир.

Демак, $\int \varphi(g(x)) g'(x) dx$ интегрални ҳисоблаш $t = g(x)$ алмаштириш ёрдамида $\int \varphi(t) dt$ интегрални ҳисоблашга келтирилган экан. Бундай усул ўзгарувчини алмаштириш усули деб аталади.

4- мисол. Ушбу

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$$

интегрални ҳисобланг.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \\ &= \int \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} dx = - \int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}. \end{aligned}$$

Охирги интегралдан кўринадики, ўзгарувчини $\frac{1}{x} = t$ деб алмаштириш мақсадга мувофиқдир. Янги ўзгарувчи t орқали интеграл қуйидаги кўринишга келади: $I = - \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

$\text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t = 1$ айниятни ҳособга олиб, $t = \text{sh } z$ алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда

$$dt = \text{ch } z \, dz, \quad \sqrt{1+t^2} = \sqrt{1+\text{sh}^2 z} = \text{ch } z$$

бўлиб,

$$I = - \int \frac{\text{ch } z}{\text{ch } z} dz = - \int dz = -z + C$$

натижани оламиз. Берилган интегралнинг x ўзгарувчи орқали ифодаси

$$I = -\ln \left| \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \right| + C$$

бўлиши равшандир.

5- мисол. Ушбу

$$\int e^{\text{arc tg } x} \frac{dx}{1+x^2}$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $\operatorname{arctg} x = t$ алмаштиришни бажарамиз.
Натижада $\frac{dx}{1+x^2} = dt$ бўлиб,

$$\int e^{\operatorname{arctg} x} \frac{dx}{1+x^2} = \int e^t dt = e^t + C = e^{\operatorname{arctg} x} + C$$

бўлади.

6- мисол. Ушбу

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$$

интеграл ҳисоблансин. Бу интегралда $x = \operatorname{tg} t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

алмаштиришни бажарамиз. Натижада

$$dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$$

бўлиб,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}} = \int \frac{\cos^2 t}{\cos^3 t} dt = \int \cos t dt = \sin t + C = \sin(\operatorname{arctg} x) + C$$

бўлади.

7- мисол. Ушбу

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $\ln(\ln x) = t$ алмаштиришни бажариш натижада $\frac{dx}{x \ln x} = dt$ бўлиб,

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{[\ln(\ln x)]^2}{2} + C$$

бўлади.

Мисол ва масалалар

Ўзгарувчини алмаштириш усулидан фойдаланиб қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

1. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

2. $\int x\sqrt{1-x^2} dx.$

3. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$

4. $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}.$

5. $\int \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}}.$

6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

7. $\int \frac{dx}{e^{x/2} + e^x}.$

8. $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx.$

$$9. \int \cos^3 x \sqrt{\sin x} dx.$$

$$10. \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}.$$

$$12. \int x e^{-x^2} dx.$$

$$13. \int \frac{\ln^{100} x}{x} dx.$$

$$14. \int \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{\sin x - \cos x}} dx.$$

$$15. \int \frac{dx}{\sin^3 x + 2\cos^3 x}.$$

$$16. \int \frac{dx}{\sin x}.$$

$$17. \int \frac{dx}{x^4 + 1}.$$

$$18. \int \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} dx.$$

$$19. \int \frac{2^x 3^x}{9^x - 4^x} dx.$$

$$20. \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2} \sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

$$21. \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}.$$

$$22. \int \sqrt{1-x^2} dx.$$

$$23. \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx.$$

$$24. \int \frac{\sin x \cdot \cos^3 x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

$$25. \int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x}.$$

2°. Бўлаклаб интеграллаш усули

Фараз қилайлик, $u(x)$ ва $v(x)$ функциялар (a, b) интервалда дифференциалланувчи бўлиб, $u(x) \cdot u'(x)$ функция бу интервалда бошланғич функцияга эга бўлсин. У ҳолда $u(x)v'(x)$ функция ҳам бошланғич функцияга эга ва

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

тенглик ўринлидир. Бу тенглик бўлаклаб интеграллаш формуласи дейилади. Бўлаклаб интеграллаш формуласини

$$\int u(x) dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x) du(x)$$

кўринишда ёзиш ҳам мумкин.

8- мисол. Ушбу

$$\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги ифодани $u = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$, $dv = dx$ лар кўпайтмаси деб оламиз. У ҳолда $du = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, $v = x$ бўлади. Бўлаклаб интеграллаш формуласига кўра:

$$I = \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx = x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \int \frac{x dx}{2\sqrt{x}(1+x)} =$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{x} dx}{1+x}.$$

$\int \frac{\sqrt{x} dx}{1+x}$ интегралда $\sqrt{x} = t$ деб оламиз. Натижада $x = t^2$, $dx = 2t dt$ бўлиб,

$$\int \frac{\sqrt{x} dx}{1+x} = \int \frac{t \cdot 2t}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{t^2 dt}{1+t^2} =$$

$$= 2 \left[\int dt - \int \frac{dt}{1+t^2} \right] = 2t - 2 \operatorname{arctg} t + C = 2\sqrt{x} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C.$$

Шундай қилиб, берилган интеграл қуйидагига тенг бўлади:

$$I = x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C =$$

$$= (x+1) \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + C.$$

9- мисол. Ушбу

$$I = \int \sin(\ln x) dx$$

интегрални ҳисобланг.

$u = \sin(\ln x)$, $dv = dx$ деб оламиз. У ҳолда $du = \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$, $v = x$ бўлади.

Булаклаб интеграллаш формуласидан топамиз:

$$I = x \cdot \sin(\ln x) - \int x \frac{\cos(\ln x)}{x} dx =$$

$$= x \cdot \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx.$$

$I_1 = \int \cos(\ln x) dx$ интегралда худди юқоридаги каби бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланамиз:

$$I_1 = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx.$$

Демак, қаралаётган интеграл қуйидагича кўринишга эга бўлади:

$$I = x \sin(\ln x) - x \cos \ln x - \int \sin(\ln x) dx =$$

$$= x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - I.$$

Шундай қилиб, I га нисбатан чизиқли тенглама ҳосил бўлди, бундан

$$I = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$$

эжанини топамиз.

10- мисол. Ушбу

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

интегрални хисобланг.

Аввало бу интегралда $n = 1$ бўлган ҳолни қарайлик.
Бу ҳолда

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

муносабатга эга бўламиз.

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$$

интегралда

$$u = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}, \quad dv = dx$$

деб олсак,

$$du = -\frac{2nx \, dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}}, \quad v = x$$

бўлиб, бўлаклаб интеграллаш формуласига кўра

$$I_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx$$

бўлади.

$\frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}}$ ифоданинг кўриниши

$$\frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} - a^2 \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n+1}}$$

каби ўзгартирилиши натижасида

$$I_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n I_n - 2na^2 I_{n+1}$$

тенгликка эга бўламиз. Бу тенгликдан эса

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{a^2} I_n$$

рекуррент формула келиб чиқади. Бу рекуррент формуладан ва $n = 1$ бўлган ҳолдаги интеграл ҳисобга олтиниб, $n > 2$ лар учун интеграллар топилади. Масалан:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^2} I_1 = \\ &= \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

Мисол ва масалалар

Бўлаклаб интеграллаш усулидан фойдаланиб қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

26. $\int x \cdot \sin x \, dx.$

36. $\int e^{ax} \cdot \cos bx \, dx.$

27. $\int x \cdot e^{-x} \, dx.$

37. $\int e^{ax} \cdot \sin bx \, dx.$

28. $\int x^n \ln x \, dx \, (n \neq -1).$

38. $\int \sqrt{x} \ln^2 x \, dx.$

29. $\int \arcsin x \, dx.$

39. $\int e^{2x} \sin^2 x \, dx.$

30. $\int x^3 e^{-x^2} \, dx.$

40. $\int x (\operatorname{arctg} x)^2 \, dx.$

31. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} \, dx.$

41. $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} \, dx.$

32. $\int \operatorname{arctg} x \, dx.$

42. $\int x^2 \operatorname{sh} x \, dx.$

33. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \, dx.$

43. $\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 \, dx.$

34. $\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x) \, dx.$

44. $\int \frac{x}{\cos^3 x} \, dx.$

35. $\int \cos(\ln x) \, dx.$

45. $\int \frac{\operatorname{arctg}(e^x)}{e^x} \, dx.$

3-§. РАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

$$\frac{A}{(x-a)^m}, \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}, \quad m=1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

кўринишдаги касрлар содда касрлар деб аталади, бунда A, B, C, a, p, q лар ўзгармас сонлар, $x^2 + px + q$ квадрат учхад эса ҳақиқий илдизга эга эмас.

Ушбу

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_lx^l} \quad (2)$$

кўринишдаги каср рационал функция дейилади, бунда $a_0, \dots, a_n$ ва $b_0, b_1, \dots, b_j$ ўзгармас сонлар, $n \in N, j \in N$. Агар $n < j$ бўлса, бу каср тўғри каср деб аталади.

Ҳар қандай тўғри каср содда касрлар орқали ифодаланади (қ. Т. Азларов, Х. Мансуров. «Математик» анализ», 1-жилд, 262-бет). Демак, (2) кўринишдаги рационал касрларни интеграллаш масаласи (1) кўринишдаги содда касрларни интеграллаш орқали ҳал қилинади.

1. $\frac{A}{x-a}$ содда касрнинг аниқмас интеграли:

$$\int \frac{A dx}{x-a} = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln |x-a| + C.$$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^m} dx$ ($m > 1$) интеграл ҳам осон ҳисобланади:

$$\begin{aligned} \int \frac{A}{(x-a)^m} dx &= A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^m} = A \int (x-a)^{-m} d(x-a) = \\ &= \frac{A}{1-m} \cdot \frac{1}{(x-a)^{m-1}} + C. \end{aligned}$$

3. $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ содда касрнинг интегралини ҳисоблаш учун x^2+px+q квадрат учҳадни

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

кўринишда ифодалаймиз (x^2+px+q квадрат учҳад ҳақиқий илдизга эга бўлмаганидан $q - \frac{p^2}{4} > 0$). У ҳолда

$$I = \int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx = \int \frac{Bx+C}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2} dx; \quad a^2 = q - \frac{p^2}{4}$$

бўлади. Бу интегралда $x + \frac{p}{2} = t$ алмаштиришни бажарамиз:

$$\begin{aligned} I &= B \int \frac{t dt}{t^2 + a^2} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \\ &= \frac{B}{2} \int \frac{d(t^2 + a^2)}{t^2 + a^2} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \cdot \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{B}{2} \ln(t^2 + a^2) + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C_1 =$$

$$= \frac{B}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2C - Bp}{2\left(q - \frac{p^2}{4}\right)} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C_1.$$

$$\text{Демак, } I = \int \frac{Bx + C}{x^2 + px + q} dx =$$

$$= \frac{B}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2(2C - Bp)}{4q - p^2} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + 2C_1.$$

4. $\frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m}$ ($m > 1$) содда касрни интеграллаш учун худди 3-холдаги каби ўзгарувчини алмаштиришдан фойдаланиб топамиз:

$$I_m = \int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m} dx = \frac{B}{2} \int \frac{d(t^2 + a^2)}{(t^2 + a^2)^m} +$$

$$+ \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m} = \frac{B}{2} \frac{1}{1-m} \cdot \frac{1}{(t^2 + a^2)^{m-1}} +$$

$$+ \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m}.$$

Бу муносабатдаги $\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m}$ интеграл 10-мисолда келтирилган бўлиб, у рекуррент формула орқали ҳисобланади.
11-мисол. Ушбу

$$I = \int \frac{x dx}{(x+1)(2x-1)(x^2+1)}$$

интегрални ҳисобланг.

$\frac{x}{(x+1)(2x-1)(x^2+1)}$ касрни содда касрларга ёйиш натижасида у қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\frac{x}{(x+1)(2x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги касрларни умумий махражга келтириб, суратдаги кўпхадларнинг тенглигидан фойдалансак, ушбу

$$\begin{cases} -A + B - D = 0, \\ 2A + B - C + D = 1, \\ -A + B + C + 2D = 0, \\ 2A + B + 2C = 0 \end{cases}$$

системага келамиз. Бу системани ечиб,

$$A = \frac{1}{6}, \quad B = \frac{4}{15}, \quad C = -\frac{3}{10}, \quad D = \frac{1}{10}$$

эқанини топамиз. Шундай қилиб,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{xdx}{(x+1)(2x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{4}{15} \int \frac{dx}{2x-1} + \\ &+ \int \frac{-\frac{3}{10}x + \frac{1}{10}}{x^2+1} dx = \frac{1}{6} \ln|x+1| + \frac{4}{30} \ln|2x-1| - \\ &- \frac{3}{20} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \frac{1}{10} \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{6} \ln|x+1| + \\ &+ \frac{4}{30} \ln|2x-1| - \frac{3}{20} \ln(x^2+1) + \frac{1}{10} \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

Бу мисолда рационал касрларни интеграллаш учун умумий бўлган, содда касрларга ёйиш усули етарлича мураккаб бўлган тенгламалар системасига олиб келишини кўрдик. Шунинг учун интеграл остидаги функция кўринишига қараб иложи борица соддароқ усуллар билан интеграллаш маъқулдир.

12-мисол. Ушбу

$$\int \frac{dx}{x^4+1}$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги ифода кўринишини ўзгартириш натижасида топамиз:

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{\frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}}; \quad d\left(\frac{1}{x} + x\right) - d\left(x - \frac{1}{x}\right) = -\frac{2dx}{x^2}.$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{x^4+1} = \int \frac{\frac{dx}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x - \frac{1}{x}\right) - d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2} - \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z^2 - 2}, \quad z = x + \frac{1}{x}.$$

$\frac{1}{z^2 - 2}$ функцияни содда касрларга ёямиз:

$$\frac{1}{z^2 - 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{z - \sqrt{2}} - \frac{1}{z + \sqrt{2}} \right).$$

Натижада

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{z^2 - 2} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dz}{z - \sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dz}{z + \sqrt{2}} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{z - \sqrt{2}}{z + \sqrt{2}} \right| + C \text{ бўлади.} \end{aligned}$$

Демак,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}}{x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}} \right| + C = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

46. $\int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

47. $\int \frac{x dx}{x^2 - 3x + 2}$

48. $\int \left(\frac{x}{x^2 - 3x + 2} \right)^2 dx$

49. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$

50. $\int \frac{dx}{x^3 + 1}$

51. $\int \frac{x}{x^3 - 1} dx$

52. $\int \frac{x dx}{(x+1)(x^2+1)}$

53. $\int \frac{dx}{x^4 - 1}$

54. $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$

55. $\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}$

56. $\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}} dx$

57. $\int \frac{1 - x^7}{x(1 + x^7)} dx$

58. $\int \frac{x^{11}}{x^3 + 3x^2 + 2} dx$

59. $\int \frac{dx}{x^6 + 1}$

60. $\int \frac{dx}{x^6 - 1}$

Қуйидаги формулаларни исботланг:

$$1. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0).$$

$$2. \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (a \neq 0).$$

$$3. \int \frac{x}{a^2 \pm x^2} dx = \pm \frac{1}{2} \ln |a^2 \pm x^2| + C.$$

$$4. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad (a > 0).$$

$$6. \int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C \quad (a > 0).$$

$$7. \int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$$

$$8. \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C \quad (a > 0).$$

4.5. БАЎЗИ ИРРАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

1°. $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ кўринишдаги интегрални қарайлик $\left(\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}\right)$, бунда $R(x, \varphi(x))$ x ва $\varphi(x)$ ларнинг раціонал функциясиدير.

Бу интегралда

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

алмаштиришни бажариб, рационал функцияни интеграллашга келамиз.

13-мисол. Ушбу

$$I_n = \int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги функция кўринишини қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}} = \frac{1}{(x-a)(x-b)\sqrt[n]{\frac{x-a}{x-b}}}$$

$$\sqrt[n]{\frac{x-a}{x-b}} = t \text{ алмаштиришни бажарсак, у ҳолда } x = \frac{a - bt^n}{1 - t^n}, \quad dx = \frac{nt^{n-1}(a-b)}{(1-t^n)^2} dt, \quad (x-a)(x-b) = \frac{(a-b)^2 t^n}{(1-t^n)^2}$$

бўлади.

Натижада берилган интеграл учун

$$I_n = \int \frac{nt^{n-1}(a-b)(1-t^n)^2}{(1-t^n)^2 t (a-b)^2 t^n} dt = \frac{n}{a-b} \int \frac{dt}{t^2} = \frac{n}{b-a} \cdot \frac{1}{t} + C = \frac{n}{b-a} \sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}} + C$$

эканини топамиз.

2°. Қуйидаги

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right) dx$$

интегрални қарайлик $\left(\frac{a}{c} \mp \frac{b}{d}\right)$; $r_1, r_2, \dots, r_n$ — рационал сонлар. Бу $r_1, r_2, \dots, r_n$ рационал сонларнинг умумий махражини топамиз, у m га тенг бўлсин. Агар қаралаётган интегралда $t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ алмаштириш бажарилса, интегрални ҳисоблаш рационал функцияни интеграллашга келади.

14-мисол. Ушбу

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $t = \sqrt[6]{x}$ алмаштиришни бажарамиз. Натижада

$$\begin{aligned} I &= 6 \int \frac{t^5}{t+1} dt = 6 \int \left(t^4 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = \\ &= 6 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1| \right) + C = \\ &= 6 \left(\frac{\sqrt[6]{x}}{5} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt{x} - \ln|\sqrt[6]{x} + 1| \right) + C = \\ &= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x} + 1| + C \end{aligned}$$

эканлигини топамиз.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$61. \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$$

$$62. \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{x+1}.$$

$$63. \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{1-x}.$$

$$64. \int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx.$$

$$65. \int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})^2 \sqrt{x}}.$$

$$66. \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} dx.$$

$$67. \int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}} dx.$$

$$68. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x+1)^3(x-1)^5}}.$$

$$69. \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{x^2(a-x)}} \quad (a>0).$$

$$70. \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}.$$

3°. Қуйидаги

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$$

интегрални қарайлик, бунда a, b, c — ўзгармас сонлар, $ax^2 + bx + c$ квадрат учҳад тенг илдизларга эга эмас ($a \neq 0$, $b^2 - 4ac \neq 0$).

а) Агар $ax^2 + bx + c$ квадрат учҳад ҳақиқий илдизларга эга бўлмаса, у ҳолда унинг ишораси билан a нинг ишораси бир хил бўлиши маълумдир. Шунинг учун $a > 0$ деб фараз қиламиз. Бу ҳолда қаралаётган интегралда

$$t = \sqrt{a} x + \sqrt{ax^2+bx+c} \quad (1)$$

$$(\text{ёки } t = -\sqrt{a} x + \sqrt{ax^2+bx+c})$$

алмаштириш натижасида интеграл рационал функцияларни интеграллашга келтирилади.

б) Агар $ax^2 + bx + c$ квадрат учҳад ҳар хил x_1 ва x_2 ҳақиқий илдизларга эга бўлса, у ҳолда

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} \quad \text{бўлиб,}$$

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1) \quad (2)$$

алмаштириш натижасида интеграл остидаги функция t ўзгарувчининг рационал функциясига келтирилади.

Одатда (1) ва (2) алмаштиришлар Эйлер алмаштиришлари деб аталади.

15-мисол. Ушбу

$$\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}} dx$$

интегрални ҳисобланг.

Эйлер алмаштиришларидан фойдаланиб,

$$\sqrt{1+x+x^2} = tx + 1$$

десак, натижада

$$x = \frac{2t-1}{1-t^2}, \quad dx = 2 \cdot \frac{1-t+t^2}{(1-t^2)^2} dt,$$

$$\sqrt{1+x+x^2} = \frac{1-t+t^2}{1-t^2}, \quad t = \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$$

бўлади.

Топилган муносабатлардан фойдалансак,

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - \sqrt{1+x+x^2}}{x \sqrt{1+x+x^2}} dx &= - \int \frac{2tdt}{1-t^2} = \\ &= \ln |1-t^2| + C = \ln \left| 1 - \left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} \right)^2 \right| + C \end{aligned}$$

ҳосил бўлади.

Қўп ҳолларда Эйлер алмаштиришлари мураккаб ҳисоблашларга олиб келади. Қуйида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ интегрални ҳисоблашнинг яна бир усулини келтирамиз.

$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ функцияни алгебраик алмаштиришлар ёрдамида ҳар доим қуйидаги кўринишда ифодалаш мумкин:

$$\frac{R_1(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + R_2(x),$$

бу ерда $R_1(x)$ ва $R_2(x)$ рационал касрлардир. Рационал касрларни интеграллаш масаласи юқорида кўрилганини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\int R_1(x) \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

интегрални ҳисоблашга келамиз. Маълумки, $R_1(x)$ рационал каср $P_n(x)$ кўпхад ва элементар (содда) касрлар йиғиндиси кўринишида ифодаланади. Шундай қилиб,

$$\int \frac{P_n(x) dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad (3)$$

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m \sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^m \sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad p^2 - 4q < 0 \quad (5)$$

интегралларга келтирамиз.

(3) интегрални ҳисоблаш учун

$$\int \frac{P_n(x) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = Q(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (6)$$

формуладан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Бу ерда λ бирор сон, $Q(x)$ тартиби $(n-1)$ дан катта бўлмаган кўпхад. Охирги формулада тенгликнинг ҳар иккала томонидан ҳосила олиш ёрдамида ҳосил бўлган тенгликдан λ ва $Q(x)$ кўпхаднинг коэффициенти топилади.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \text{ интеграл эса ўзгарувчини алмаштириш}$$

усули билан ҳисобланади.

(4) формула билан ифодаланган интегрални $t = \frac{1}{x - \alpha}$

алмаштириш ёрдамида (3) кўринишга келтириш мумкинлигини кўриш қийин эмас.

(5) кўринишдаги интегрални ҳисоблаш учун $ax^2 + bx + c$, $x^2 + px + q$ квадрат учхадларда $p = \frac{b}{a}$ бўлса, қаралаётган интегралларни

$$\int \frac{(2x + p) dx}{(x^2 + px + q)^{\frac{2m+1}{2}}} \quad \text{ва} \quad \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^{\frac{2m-1}{2}}}$$

интеграллар йиғиндиси орқали ифодалаб, биринчи интегралда $u = x^2 + px + q$, иккинчи интегралда эса

$$t = (\sqrt{x^2 + px + q})' = \frac{2x + p}{2 \sqrt{x^2 + px + q}}$$

алмаштириш бажарилади (Абель алмаштириши).

Агар $p \neq \frac{b}{a}$ бўлса,

$$x = \frac{\alpha t + \beta}{t + 1}$$

алмаштириш ёрдамида (5) интеграл

$$\int \frac{P(t) dt}{(t^2 + \lambda)^m \sqrt{st^2 + r}}$$

кўринишга келтирилади, бу ерда $P(t)$, $(2m - 1)$ — тартибли кўпхад ва λ мусбат сондир. Юқоридаги алмаштиришда α ва β лар шундай танланадики, $x^2 + px + q$ ва $ax^2 + bx + c$ квадрат учхадларда t нинг биринчи даражаси қатнашган ҳадлар йўқолади.

$\frac{P(t)}{(t^2 + \lambda)^m}$ тўғри касрни содда касрларга ёйиш натижасида юқоридаги интеграл қуйидаги интегралларга келтирилади:

$$\int \frac{tdt}{(t^2 + \lambda)^k \sqrt{st^2 + r}} + \int \frac{dt}{(t^2 + \lambda)^k \sqrt{st^2 + r}}$$

Бу интегралларнинг биринчиси $u^2 = st^2 + r$, иккинчиси эса

$$v = (\sqrt{st^2 + r})' = \frac{st}{\sqrt{st^2 + r}}$$

ҳисобланади.

16-мисол. Ушбу

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2) \sqrt{x^2 + 1}}$$

интегрални ҳисобланг.

Абель алмаштиришидан фойдаланамиз. Натижада

$$v = (\sqrt{x^2 + 1})' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

$$v^2 (x^2 + 1) = x^2, \quad x^2 + 2 = \frac{2 - v^2}{1 - v^2},$$

$$v \sqrt{x^2 + 1} = x, \quad dv \sqrt{x^2 + 1} + v^2 dx = dx,$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{dv}{1 - v^2} \text{ муносабатлар ҳосил бўлади.}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2) \sqrt{x^2 + 1}} = \int \frac{dv}{2 - v^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + v}{\sqrt{2} - v} + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{\sqrt{2} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}} + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2x^2 + 2} + x}{\sqrt{2x^2 + 2} - x} + C.$$

17-мисол. Ушбу

$$I = \int \frac{dx}{(2x+1)^3 \sqrt{4x^2+4x+5}}$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегрални ҳисоблаш учун $2x+1 = 2 \operatorname{sh} t$ алмашти-
ришни бажарамиз. Натижада

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{8} \int \frac{dt}{\operatorname{sh}^3 t} = -\frac{1}{8} \operatorname{cth} t + C = \\ &= -\frac{1}{8} \frac{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}}{\operatorname{sh} t} + C = -\frac{1}{8} \frac{\sqrt{4x^2+4x+5}}{(2x+1)} + C \end{aligned}$$

бўлади.

18-мисол. Ушбу

$$I = \int x \sqrt{x^2-2x+2} dx$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интеграл қуйидагича ҳисобланади:

$$\begin{aligned} I &= \int x \sqrt{x^2-2x+2} dx = \int x \sqrt{(x-1)^2+1} dx = \\ &= \int (x-1) \sqrt{(x-1)^2+1} dx + \int \sqrt{(x-1)^2+1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int [(x-1)^2+1]^{\frac{1}{2}} d[(x-1)^2+1] + \\ &+ \int \sqrt{(x-1)^2+1} d(x-1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{[(x-1)^2+1]^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \\ &+ \frac{x-1}{2} \sqrt{(x-1)^2+1} + \frac{1}{2} \ln |(x-1) + \sqrt{(x-1)^2+1}| + \\ &+ C = \frac{1}{3} (x^2-2x+2)^{3/2} + \frac{x-1}{2} \sqrt{x^2-2x+2} + \\ &+ \frac{1}{2} \ln |(x-1) + \sqrt{x^2-2x+2}| + C. \end{aligned}$$

4°. Биномиал дифференциалларни интеграл-
лаш

Ушбу

$$x^m (ax^n + b)^p dx$$

ифода биномиал дифференциал деб аталади.

Бу ерда a, b — ҳақиқий сонлар, m, n, p лар эса рационал сонлар бўлиб, $a \neq 0, b \neq 0, m \neq 0, n \neq 0, p \neq 0$. Ушбу

$$\int x^m (ax^n + b)^p dx$$

интеграллар қуйидаги уч ҳолда рационал функцияларни интеграллашга келтирилади:

1) Агар p — бутун сон бўлса, $x = t^N$ алмаштириш бажарилади, бу ерда N, m ва n касрларнинг умумий махражидир.

2) Агар $\frac{m+1}{n}$ бутун сон бўлса, $ax^n + b = t^s$ алмаштириш бажарилади, бу ерда s, p касрнинг махражидир.

3) Агар $\frac{m+1}{n} + p$ бутун сон бўлса, $a + bx^{-n} = t^s$ алмаштириш бажарилади, бу ерда ҳам s, p касрнинг махражидир.

19-мисол. Ушбу

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги ифода учун

$$a = b = 1, m = 0, n = 4, p = -\frac{1}{4} \text{ бўлиб,}$$

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \text{ бўлади.}$$

Демак, $1 + x^{-4} = t^4$ алмаштиришни бажариш лозим. Натижада:

$$x = (t^4 - 1)^{-\frac{1}{4}}, \quad \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \frac{(t^4 - 1)^{\frac{1}{4}}}{t},$$

$$dx = -t^3 (t^4 - 1)^{-\frac{5}{4}} dt.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = - \int \frac{t^3 dt}{t^4 - 1} = -\frac{1}{2} \left(\int \frac{dt}{t^4 - 1} + \int \frac{dt}{t^4 + 1} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4} + 4}{\sqrt[4]{1+x^4} - 4} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + C.$$

20-мисол. Ушбу

$$\int x^3 (x^4 - 27)^{\frac{1}{9}} dx$$

интегрални ҳисобланг.

$$\begin{aligned} \int x^3 (x^4 - 27)^{\frac{1}{9}} dx &= \frac{1}{4} \int (x^4 - 27)^{\frac{1}{9}} d(x^4 - 27) = \\ &= \frac{9 (x^4 - 27)^{\frac{10}{9}}}{40} + C. \end{aligned}$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

71. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}} dx.$

82. $\int \frac{dx}{(1+x^2) \sqrt{1-x^2}}.$

72. $\int \frac{dx}{(x+1) \sqrt{x^2+x+1}}.$

83. $\int \frac{dx}{(1-x^4) \sqrt{1+x^2}}.$

73. $\int \frac{dx}{(1-x)^2 \sqrt{1+x^2}}.$

84. $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1} dx.$

74. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} dx.$

85. $\int \frac{ux}{(x^2+x+1) \sqrt{x^2+x-1}}.$

75. $\int \frac{x dx}{(1+x) \sqrt{1-x-x^2}}.$

86. $\int \frac{(x+1) dx}{(x^2+x+1) \sqrt{x^2+x+1}}.$

76. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+1}}.$

87. $\int \frac{dx}{(x^2+2) \sqrt{2x^2-2x+5}}.$

77. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$

88. $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2+x+1}}.$

78. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}}.$

89. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1-2x-x^2}}.$

79. $\int \frac{x^2-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}} dx.$

90. $\int \frac{x - \sqrt{x^2+3x+2}}{x + \sqrt{x^2+3x+2}} dx.$

80. $\int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{x^2+2x}}.$

91. $\int x \sqrt{x^2-2x+2} dx.$

81. $\int \frac{x dx}{(x^2-1) \sqrt{x^2-x-1}}.$

92. $\int \frac{dx}{(1 + \sqrt{x(1+x)})^2}.$

$$\begin{aligned}
93. & \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx. \\
94. & \int \frac{dx}{x \sqrt{5x^2-2x+1}}, \quad x > 0. \\
95. & \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}. \\
96. & \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2-1}}. \\
97. & \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1+2x+2x^2}}. \\
98. & \int \frac{dx}{(x^3+4x+7)^{3/2}}. \\
99. & \int \frac{dx}{(x^3+x+1)^{5/2}}. \\
100. & \int \frac{(x+1)}{(x^3+x+1)^{3/2}} dx. \\
101. & \int \frac{xdx}{(2x^3+1) \sqrt{3x^2+5}}. \\
102. & \int \frac{(x+3) dx}{(x^3+1) \sqrt{x^3+x+1}}. \\
103. & \int \frac{dx}{(x^3-x+1) \sqrt{x^3+x+1}}. \\
104. & \int \frac{x^3+x+1}{x \sqrt{x^3-x+1}} dx, \\
& x > 0. \\
105. & \int \frac{x + \sqrt{1+x+x^3}}{1+x + \sqrt{1+x+x^3}} dx. \\
106. & \int \left(\frac{\sqrt{1+x+x^3}-1}{x} \right)^2 \times \\
& \times \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^3}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
107. & \int x^{-\frac{1}{3}} (1-x^{\frac{1}{6}})^{-1} dx. \\
108. & \int x^{\frac{1}{2}} (1+x^{\frac{1}{3}})^{-2} dx. \\
109. & \int x^{\frac{2}{3}} (1+x^{\frac{1}{3}})^{-3} dx. \\
110. & \int x^{\frac{1}{2}} (1+x^{\frac{1}{4}})^{-10} dx. \\
111. & \int x^2 \sqrt[3]{(x+1)^2} dx. \\
112. & \int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} dx. \\
113. & \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx. \\
114. & \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}} dx. \\
115. & \int \frac{dx}{x \sqrt[5]{x^6+1}}. \\
116. & \int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}. \\
117. & \int \frac{dx}{x^2 \sqrt[3]{(2+x^3)^3}}. \\
118. & \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{2-x^2}}. \\
119. & \int \sqrt[3]{x-x^2} dx. \\
120. & I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},
\end{aligned}$$

$a \neq 0, n \in \mathbb{N}, n > 1,$
 интеграл учун

$$I_n = \frac{1}{na} \left(x^{n-1} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \right. \\ \left. - \frac{b}{2} (2n-1) \cdot I_{n-1} - c(n-1) I_{n-2} \right)$$

рекурент формулани исботланг.

5-§. ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

$R(\sin x, \cos x)$ орқали $\sin x$ ва $\cos x$ ларнинг рационал функцияси белгиланган бўлсин.

$\int R(\sin x, \cos x) dx$ интегрални қарайлик. Бу интегралда

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad (-\pi < x < \pi)$$

алмаштириш бажарилса, у ҳолда интеграл остидаги ифода t ўзгарувчининг рационал функциясига айланади:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}.$$

$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ алмаштириш тригонометрик функцияларни интеграллашда умумий алмаштириш бўлиб, ундан фойдаланиш кўп ҳолларда мураккаб ҳисоблашларга олиб келади. Шунинг учун интеграл остидаги функция кўринишига қараб (масалан, $t = \sin x$, $t = \cos x$ ва ҳ. к.) алмаштириш танлангани маъқулдир.

21-мисол. Ушбу

$$I = \int \frac{dx}{1 + e \cos x},$$

а) $0 < e < 1$; б) $e > 1$ интеграл ҳисоблансин.

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ алмаштириш натижасида

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+e \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{1+e+(1-e)t^2}$$

ҳисил бўлади.

$1-e$ ифоданинг ишораси e га боғлиқ бўлиб, а) ҳол, яъни $0 < e < 1$ да мусбат б) ҳол, яъни $e > 1$ да эса манфий бўлади. Демак, $0 < e < 1$ да

$$I = \frac{2}{1-e} \int \frac{dt}{\frac{1+e}{1-e} + t^2} = \frac{2}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} t + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C$$

бўлади, $e > 1$ бўлганда эса

$$I = \frac{2}{1-e} \int \frac{dt}{t^2 - \frac{1+e}{e-1}} = \frac{1}{\sqrt{e^2-1}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{1+e}{e-1}} - t}{\sqrt{\frac{1+e}{e-1}} + t} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e^2-1}} \ln \left| \frac{1+e+t^2(e-1)-2t\sqrt{e^2-1}}{1+e-t^2(e-1)} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e^2-1}} \ln \left| \frac{e + \cos x - \sqrt{e^2-1} \sin x}{1 + e \cos x} \right| + C.$$

бўлади.

22-мисол. Ушбу

$$\int \cos^5 x dx$$

интегрални ҳисобланг.

Агар бу интеграл остидаги ифода учун $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ алмаштириш бажарсак натижада

$$\int \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^5 \frac{2dt}{1+t^2}$$

интеграл ҳосил бўлади. Интеграл остидаги функция t нинг рационал функцияси бўлса-да, уни интеграллаш мураккаб ҳисоблашлардан иборат эканини кўриш қийин эмас. Агар интеграл остидаги функция кўринишини қуйидагича ўзгартирсак:

$$\cos^5 x = \cos^4 x \cdot \cos x = (1 - \sin^2 x)^2 \cos x.$$

У ҳолда берилган интеграл осон ҳисобланади:

$$\int \cos^5 x dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) =$$

$$= \int (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) d(\sin x) =$$

$$= \sin x - 2 \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$121. \int \sin^9 x \cdot dx.$$

$$122. \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x \, dx.$$

$$123. \int \sin^5 x \cdot \cos^3 x \, dx.$$

$$124. \int \frac{\sin 3x}{\cos^4 x} \, dx.$$

$$125. \int \frac{dx}{\cos^3 x}.$$

$$126. \int \frac{dx}{\sin^3 x}.$$

$$127. \int \frac{dx}{\cos^4 x}.$$

$$128. \int \frac{dx}{\sin^4 x}.$$

$$129. \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}.$$

$$130. \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}.$$

$$131. \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^4 x}.$$

$$132. \int \frac{dx}{\sqrt{\sin^2 x \cdot \cos^3 x}}.$$

$$133. \int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}.$$

$$134. \int \cos x \cdot \cos 4x \, dx.$$

$$135. \int \sin 2x \cdot \cos 4x \, dx.$$

$$136. \int \sin^2 x \cdot \cos (3x+1) \, dx.$$

$$137. \int \cos^2 2x \cdot \cos^2 3x \, dx.$$

$$138. \int \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} 7x \, dx.$$

$$139. \int \frac{\cos 3x}{\sin^4 x} \, dx.$$

$$140. \int \frac{\cos^3 x}{\sin 4x} \, dx.$$

$$141. \int \cos^3 x \, dx.$$

$$142. \int \cos^3 x \cdot \cos 2x \, dx.$$

$$143. \int \cos^5 2x \cdot \sin^2 2x \, dx.$$

$$144. \int \operatorname{sh}^3 x \cdot \operatorname{ch} 2x \, dx.$$

$$145. \int \frac{\sin x}{(3 \cos x - 1)^3} \, dx.$$

$$146. \int \frac{\sin x + \sin^2 x}{\cos 2x} \, dx.$$

$$147. \int \frac{dx}{\sin x (1 + \cos x)}.$$

$$148. \int \frac{\sin 2x}{3 + 4 \sin^2 x} \, dx.$$

$$149. \int \frac{\cos x - \cos 3x}{1 - \sin^4 x} \, dx.$$

$$150. \int \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - 3} \, dx.$$

$$151. \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \, dx.$$

$$152. \int \frac{dx}{\cos 2x - \sin 2x}.$$

$$153. \int \frac{dx}{5 + \cos^2 x}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}.$$

$$154. \int \frac{dx}{2 + 3 \sin 2x - 4 \cos^2 x}.$$

$$155. \int \frac{dx}{4 + 3 \operatorname{sh}^2 x}.$$

$$156. \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg} x}.$$

$$157. \int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$$

$$158. \int \frac{dx}{a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x}, \quad b > 0.$$

$$159. \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$$

$$160. \int \frac{\sin^3 x}{\sin x + 2\cos x} dx.$$

$$161. \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$$

$$162. \int \frac{dx}{(a \sin x + a \cos x)^2}$$

$$163. \int \frac{dx}{7\cos x - 4\sin x + 8}$$

$$164. \int \frac{\cos x + 2\sin x}{4\cos x + 3\sin x - 2} dx.$$

$$165. \int \frac{1 - \cos(x-a)}{1 - \cos(x+a)} dx.$$

$$166. \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x + \sqrt{2}} dx.$$

$$167. \int \frac{2\cos x + \sin x - 3}{2\cos x - \sin x - 3} dx.$$

$$168. \int \frac{1 + \sin x}{\sin 2x + 2\sin x} dx.$$

$$169. \int \frac{dx}{\sin 2x + 4\sin x - 4\sin^3 x}$$

$$170. \int \frac{dx}{(1 - \cos x + \sin x)^2}$$

$$171. \int \sin^5 x \cdot \sqrt[3]{\cos x} dx.$$

$$172. \int \frac{dx}{(\sin x + 2\cos x)^2}$$

$$173. \int \frac{\sin x}{\cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}} dx.$$

$$174. \int \frac{dx}{(1 + e^{\cos x})^2},$$

$$0 < e < 1.$$

$$175. \int \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx.$$

$$176. \int \sin^n x dx.$$

$$177. \int \cos^n x dx.$$

$$178. \int \frac{dx}{\sin^n x}.$$

$$179. \int \frac{dx}{\cos^n x}.$$

$$180. \int \sin^n x \cdot \cos^m x dx,$$

$$m, n \in \mathbb{N}.$$

6-§. ТУРЛИ ХИЛДАГИ ИНТЕГРАЛЛАРНИ ҲИСОБЛАШ

27-мисол. Ушбу

$$I = \int e^{x+e^x} dx$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги функцияни $e^{x+e^x} = e^x \cdot e^{e^x}$ кўриниш-
да ифодалаб $e^x = t$ алмаштиришни бажарамиз. Натижада

$$I = \int e^{e^x} \cdot e^x dx = \int e^t \cdot dt = e^t + c = e^{e^x} + C$$

бўлади.

28-мисол. Ушбу

$$I_1 = \int e^{ax} \cdot \cos bx dx,$$

$$I_2 = \int e^{ax} \cdot \sin bx dx$$

интегралларни ҳисобланг.

23-мисол. Ушбу

$$I = \int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5}$$

интегрални ҳисобланг.

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ алмаштириш натижасида:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \quad \text{Бу муносабат-}$$

лардан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} I &= 2 \int \frac{dt}{6t + 4(1-t^2) + 5(1+t^2)} = 2 \int \frac{dt}{t^2 + 6t + 9} = \\ &= 2 \cdot \int (t+3)^{-2} dt = -\frac{2}{t+3} + C = -\frac{2}{3 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + C. \end{aligned}$$

24-мисол. Ушбу

$$\int \sin x \cdot \sin 3x \, dx.$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги функция кўринишини қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\sin x \sin 3x = \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 4x).$$

Натижада

$$\begin{aligned} \int \sin x \cdot \sin 3x \, dx &= \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx - \frac{1}{2} \int \cos 4x \, dx = \\ &= \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 4x}{8} + C \end{aligned}$$

бўлади.

25-мисол. Ушбу

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги функциянинг кўринишини ўзгартирамиз:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a \sin x + b \cos x} &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{1}{\sin(x + \gamma)}. \end{aligned}$$

Бунда $\gamma = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $a^2 + b^2 \neq 0$.

Демак, қаралаётган интеграл қуйидаги кўринишга келади:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \int \frac{dx}{\sin(x + \gamma)} = (t = x + \gamma) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left[\int \frac{\sin \frac{t}{2}}{2 \cos \frac{t}{2}} dt + \int \frac{\cos \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(\ln \left| \sin \frac{t}{2} \right| - \ln \left| \cos \frac{t}{2} \right| \right) + C = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x + \gamma}{2} \right| + C, \\ \gamma &= \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

26-мисол. Ушбу

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cdot \cos x}} \text{ интегрални ҳисобланг.}$$

$t = \sin x$ алмаштириш натижасида интеграл қуйидаги кўринишга олади:

$$I = \int t^{-\frac{5}{3}} (1 - t^2)^{-\frac{2}{3}} dt.$$

Интеграл остидаги ифода биномиал дифференциал бўлиб,

$$\text{унда } \frac{m+1}{n} + p = \frac{-\frac{5}{3} + 1}{2} - \frac{2}{3} = -1. \text{ Бу ҳолда } -1 + t^{-2} =$$

$$= u^3 \text{ алмаштиришни бажариш лозимдир. Лекин қаралаётган интегрални } I = \int \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{\sin^5 x}{\cos^3 x}}} \cdot \frac{dx}{\cos^3 x} \text{ кўринишда ифодалаб,}$$

соддароқ $\operatorname{tg} x = t$ алмаштиришни бажарсак, у ҳолда

$$I = \int (\operatorname{tg} x)^{-\frac{2}{3}} d(\operatorname{tg} x) = -\frac{3}{2} (\operatorname{tg} x)^{-\frac{2}{3}} + C$$

бўлади.

Бу интегралларни ҳисоблаш учун I_2 ни $i = \sqrt{-1}$ га кўпайтириб I_1 га қўшамиз. Натижада $I_1 + iI_2 = \int e^{ax} \cdot e^{ibx} dx$ бўлади. Энди $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} I_1 + iI_2 &= \int e^{(a+ib)x} dx = \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib} + C = \\ &= \frac{e^{ax} \cdot e^{ibx}}{a+ib} + C = \frac{e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)}{a^2 + b^2}(a - ib) + C = \\ &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \cos bx + b \sin bx + i(a \sin bx - b \cos bx)) + C. \end{aligned}$$

Комплекс сонларнинг тенглиги ҳақидаги тасдиққа кўра топамиз:

$$\begin{aligned} I_1 &= e^{ax} \cdot \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} + C, \\ I_2 &= e^{ax} \cdot \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} + C. \end{aligned}$$

29-мисол. Ушбу

$$I = \int x^x(1 + \ln x) dx$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги функция учун $F(x) = x^x$ бошланғич функция эканини кўриш қийин эмас. $x^x = t$ алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда $x^x(1 + \ln x)dx = dt$ бўлиб,

$$I = \int dt = t + C$$

бўлади.

Демак.

$$I = \int x^x(1 + \ln x)dx = x^x + C.$$

30-мисол. Ушбу

$$I = \int x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} e^{\arctg x} dx$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги ифодани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} e^{\arctg x} dx = x e^{\arctg x} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

$\arctg x = t$ алмаштириш натижасида

$$x = \operatorname{tg} t, \quad \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos t}, \quad \frac{dx}{1+x^2} = dt$$

бу.либ,

$$I = \int \operatorname{tg} t \cdot e^t \frac{dt}{(\cos t)^{-1}} = \int e^t \sin t dt \text{ бўлади.}$$

Бу $\int e^t \sin t dt$ интеграл 28-мисолда ҳисобланган. Демак,

$$\begin{aligned} I &= \int e^t \sin t dt = e^t \cdot \frac{\sin t - \cos t}{2} + C = \\ &= e^{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{x-1}{2\sqrt{x^2+1}} + C. \end{aligned}$$

31-мисол. Ушбу

$$I = \int x^3 \arcsin x dx$$

интегрални ҳисобланг.

Бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланамиз:

$$u = \arcsin x, \quad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$x^3 dx = dv, \quad v = \frac{1}{4} x^4.$$

$$\begin{aligned} I &= \int x^3 \arcsin x dx = \frac{x^4}{4} \cdot \arcsin x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \frac{x^4}{4} \arcsin x - \frac{1}{4} \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}}, \end{aligned}$$

$I_1 = \int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} dx$ интегралда $x = \sin t$ алмаштиришни ба-
жариб ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \sin^4 t dt = \int (\sin^2 t)^2 dt = \int \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right)^2 dt = \\ &= \frac{1}{4} \int \left(1 - 2\cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2} \right) dt = \frac{1}{4} \left(t - \sin 2t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} t + \frac{\sin 4t}{8} \right) + C. \end{aligned}$$

$t = \arcsin x$ эканини ҳисобга олган ҳолда

$$I = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3}{32} \right) \arcsin x + \frac{1}{32} (2x^3 + 3x) \sqrt{1-x^2} + C$$

эканини топамиз.

32-мисол. Ушбу

$$I = \int \frac{dx}{(x-1)^3 \sqrt{x^2+3x+1}}$$

интегрални ҳисобланг.

Аввало бу интегралда $t = \frac{1}{x-1}$ алмаштиришни бажарамиз. Натижада $dx = -\frac{1}{t^2} dt$ бўлиб, интеграл қуйидаги қўринишга эга бўлади:

$$I = - \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}.$$

Бу интегрални ҳисоблаш учун (6) формуладан фойдаланамиз:

$$\int \frac{t^2 dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}} = (At + B) \cdot \sqrt{5t^2+5t+1} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}.$$

Бу тенгликни дифференциаллаб, ҳосил бўлган касрларни умумий махражга келтириш натижасида t нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаб топамиз:

$$A = \frac{1}{10}, \quad B = -\frac{3}{20}, \quad \lambda = \frac{11}{40}.$$

У ҳолда

$$\begin{aligned} I &= - \left(\frac{1}{10}t - \frac{3}{20} \right) \sqrt{5t^2+5t+1} - \frac{11}{40} \int \frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}} = \\ &= - \left(\frac{1}{10}t - \frac{3}{20} \right) \cdot \sqrt{5t^2+5t+1} - \frac{11}{40\sqrt{5}} \int \frac{d\left(t + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{20}}} = \\ &= - \left(\frac{1}{10}t - \frac{3}{20} \right) \sqrt{5t^2+5t+1} - \frac{11}{40\sqrt{5}} \cdot \ln \left| t + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2+t+\frac{1}{5}} \right| + C = \\ &= \frac{3x-5}{20(x-1)^3} \sqrt{x^2+3x+1} - \frac{11}{40\sqrt{5}} \cdot \ln \left| \frac{(x+1)\sqrt{5}+2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1} \right| + C. \end{aligned}$$

33-мисол. Ушбу

$$I = \int \frac{dx}{(x-2)^3(x+3)^3}$$

интегрални ҳисобланг.

Аввал қуйидаги умумийроқ интегралларни қараймиз:

$$I_{m,n} = \int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Бу интегралда $t = \frac{x+a}{x+b}$ алмаштиришни бажарсак, у ҳолда

$$dx = \frac{b-a}{(1-t)^2} dt, \quad x+a = \frac{t(b-a)}{1-t}, \quad x+b = \frac{b-a}{1-t}$$

булади.

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \int \frac{(1-t)^m (1-t)^n (b-a)}{(b-a)^{m+n} t^m (1-t)^2} dt = \\ &= \frac{1}{(b-a)^{m+n-1}} \int \frac{(1-t)^{m+n-2}}{t^m} dt. \end{aligned}$$

Юқорида қаралаётган интеграл учун

$$m=2, n=3, a=-2, b=3.$$

Демак,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{5^4} \int \frac{(1-t)^3}{t^2} dt = \frac{1}{625} \left(-\frac{1}{t} + 3t - \frac{t^3}{2} - 3 \ln |t| \right) + \\ &+ C = \frac{1}{625} \left(-\frac{x+3}{x-2} + 3 \cdot \frac{x-2}{x+3} - \frac{1}{2} \left(\frac{x-2}{x+3} \right)^3 - \right. \\ &\quad \left. - 3 \ln \left| \frac{x-2}{x+3} \right| \right) + C. \end{aligned}$$

34-мисол. Ушбу

$$I = \int \frac{dx}{1+x^4+x^8}$$

интегрални ҳисобланг.

$1+x^4+x^8 = (x^4+1)^2 - x^4$ тенгликдан фойдаланиб, интеграл остидаги функция кўринишини қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^4+x^8} &= \frac{1}{(x^4+1)^2 - x^4} = \frac{1}{(x^4+1+x^2)(x^4+1-x^2)} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} + \frac{1-x^2}{x^4-x^2+1} \right). \end{aligned}$$

У ҳолда

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1-x^2}{x^4-x^2+1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 3} - \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} + \frac{\pi}{4\sqrt{3}} \cdot \operatorname{sgn} x + \frac{1}{2^3\sqrt{3}} \cdot \\ &\cdot \ln \left| \frac{x^3+x\sqrt{3}+1}{x^3-x\sqrt{3}+1} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2 + x\sqrt{3} + 1}{x^2 - x\sqrt{3} + 1} \right| + \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x \Big) + C.$$

35-мисол. Ушбу

$$I = \int |x| dx$$

интегрални ҳисобланг.

а) $x > 0$ бўлсин. У ҳолда

$$I = \int |x| dx = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C_1;$$

б) $x < 0$ да $\int |x| dx = - \int x dx = - \frac{x^2}{2} + C_2;$

$x = 0$ да $C_2 = C_1 = C$ бўлгани учун

$$I = \int |x| dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{sgn} x + C \text{ бўлади.}$$

36-мисол. Ушбу

$$I = \int e^{-|x|} dx$$

интегрални ҳисобланг.

$$x \geq 0, x < 0$$

ҳолларни худди 35-мисолга ўхшаш қараймиз:

$$x \geq 0 \text{ да } \int e^{-|x|} dx = \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C_1.$$

$x < 0$ да

$$\int e^{-|x|} dx = \int e^x dx = e^x + C_2.$$

$$x = 0 \text{ да } -e^0 + C_1 = e^0 + C_2$$

бўлгани учун $C_1 = 2 + C_2$ бўлади.

Демак,

$$\int e^{-|x|} dx = \begin{cases} 2 - e^{-x} + C, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса,} \\ e^x + C, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг.

181. $\int e^{ax} \sin^3 bx dx.$

184. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x} - 2}.$

182. $\int x^2 e^x \cos^2 x dx.$

185. $\int \ln^n x dx.$

183. $\int \frac{dx}{1 + e^{x/2} + e^{x/3} + e^{x/6}}.$

186. $\int \frac{\arccos x}{(1-x^2)^{3/2}} dx.$

$$187. \int x \operatorname{arctg} x \cdot \ln(1+x^2) dx.$$

$$188. \int x \arccos \frac{1}{x} dx.$$

$$189. \int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{3/2}} dx.$$

$$190. \int x \ln(4+x^4) dx.$$

$$191. \int \frac{\arcsin x}{x^2} \cdot \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$192. \int x \sqrt{x^2+1} \ln \sqrt{x^2-1} dx.$$

$$193. \int \frac{ax^2+b}{x^2-1} \cdot \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| dx.$$

$$194. \int \frac{x^2 \cdot \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$195. \int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$$

$$196. \int \sqrt{th^2 x + 1} dx.$$

$$197. \int x |x| dx.$$

$$198. \int (x+|x|)^2 dx.$$

$$199. \int \max(1, x^2) dx.$$

$$200. \int \{ |1+x| - |1-x| \} dx.$$

$$201. \int \frac{dx}{(x+1)^5 \sqrt{x^2+2x}}$$

$$202. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4} \sqrt{x}}$$

$$203. \int \frac{dx}{(1-x^4) \sqrt{1+x^2}}$$

$$204. \int \frac{dx}{(1-\sqrt{1-x^2})^2}$$

$$205. \int \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^4-1} dx.$$

$$206. \int \frac{dx}{(1+x^4) \sqrt[4]{1+2x}}$$

$$207. \int \left(\frac{\sin x}{e^x} \right)^2 dx.$$

$$208. \int \frac{x \ln |x|}{(1-x^2) \sqrt{x^2-1}} dx.$$

$$209. \int \frac{dx}{x^{2n}-a^{2n}}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ a > 0.$$

$$210. \int \frac{dx}{(x^2-a^2) \sqrt{b^2-x^2}}, \\ a, b \neq 0.$$

$$211. \int \frac{dx}{1+2a \cos x + a^2}$$

$$212. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^n+a}}, \\ a \neq 0, n \in \mathbb{N}.$$

$$213. \int \frac{dx}{ae^x + be^{-x}}, \\ a \cdot b \neq 0.$$

$$214. \int \frac{dx}{\sqrt{a+be^x}}, \quad a \cdot b \neq 0.$$

$$215. \int |\ln |x^2+a|| dx.$$

$$216. \int \frac{\ln x}{\sqrt{x+a}} dx.$$

$$217. \int \frac{\ln |x+\sqrt{x^2+a}|}{x^2} dx.$$

$$218. \int x^{a-1} \ln^{b-1} x (a \ln x + b) dx.$$

$$219. \int \frac{\ln x \cdot \cos \ln x}{x} dx.$$

$$220. \int \cos \operatorname{arctg} \sin x dx.$$

АНИҚ ИНТЕГРАЛ

1-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛ ТАЪРИФЛАРИ

1. $[a, b]$ сегментнинг бўлиниш

Бирор $[a, b] \subset R$ сегмент берилган бўлсин. $[a, b]$ сегментнинг

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

муносабатда бўлган ихтиёрий чекли сондаги $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ нуқталар системаси $[a, b]$ сегментнинг бўлиниши деб аталади ва у $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ каби белгиланади.

Ҳар бир $x_k (k = 1, 2, 3, \dots, n)$ нуқта P бўлинишнинг бўлувчи нуқтаси, $[x_k, x_{k+1}]$ сегмент эса бўлиниш оралиғи дейилади.

P бўлиниш оралиқларининг узунлиги $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) нинг энг каттаси, яъни

$$\lambda_P = \max_{1 \leq k \leq n} \{ \Delta x_k \} = \max \{ \Delta x_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_{n-1} \}$$

миқдор P бўлинишининг диаметри деб аталади. Масалан, $[a, b] = [0, 1]$ бўлсин. Нуқталарнинг

$$0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \dots, \frac{9}{10}, 1,$$

$$0, \frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \frac{6}{10}, \frac{8}{10}, 1$$

системалари $[0, 1]$ сегментнинг

$$P_1 = \left\{ 0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, \frac{9}{10}, 1 \right\},$$

$$P_2 = \left\{ 0, \frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \frac{6}{10}, \frac{8}{10}, 1 \right\}$$

бўлинишлари бўлиб, уларнинг диаметрлари мос равишда

$\lambda_{P_1} = \frac{1}{10}, \lambda_{P_2} = \frac{1}{5}$ бўлади. $[a, b]$ сегмент берилган ҳолда

унинг турли усуллар билан исталган сондаги бўлинишларини тузиш мумкин. Бу бўлинишлардан иборат тўпلام $\mathcal{P}$ бўлсин: $\mathcal{P} = \{P\}$

2. Интеграл йнғинди

$f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва чегараланган бўлсин. $[a, b]$ сегментнинг P бўлинишини қарайлик ($a < b$), бу бўлинишга мос келувчи ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = \overline{0, n-1}$) оралиқда ихтиёрий ξ_k ($\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$) нуқта олиб, қуйидаги йиғиндини тузамиз:

$$\sigma(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k, \quad (x_{k+1} - x_k = \Delta x_k).$$

Одатда бу йиғинди $f(x)$ функциянинг интеграл йиғиндиси ёки Риман йиғиндиси деб аталади.

3. Аниқ интегралнинг таърифи

1-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ берилганда ҳам шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ мавжуд бўлсаки, диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган $[a, b]$ оралиғининг ҳар қандай P бўлинишида ($P \in \mathcal{P}$) ҳамда $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқдан олинган ихтиёрий ξ_k ($\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$) нуқталарда

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k - I \right| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда I сонини $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқдаги аниқ интеграли деб аталади ва уни

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

каби белгиланади.

1-мисол. Ушбу

$$f(x) = x$$

функциянинг $[a, b]$ сегментдаги интегралини ҳисобланг.

Маълумки, $f(x)$ функция учун $[a, b]$ сегментда интеграл йиғинди

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \Delta x_k$$

кўринишда бўлиб, бунда

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k,$$

$$x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1}.$$

Бу тенгсизликдан, $\Delta x_k > 0$ бўлгани учун топамиз:

$$x_k \Delta x_k \leq \xi_k \Delta x_k \leq x_{k+1} \Delta x_k.$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k \Delta x_k \leq \sigma \leq \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \Delta x_k.$$

Энди $\sum_{k=0}^{n-1} x_k \Delta x_k$ ва $\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \Delta x_k$ йиғиндиларни қуйидагича ўзгартириб ёзиб оламиз:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} x_k \Delta x_k &= \sum_{k=0}^{n-1} x_k (x_{k+1} - x_k) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}^2 - x_k^2) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)^2 = \\ &= \frac{1}{2} (x_n^2 - x_0^2) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2 = \frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2. \end{aligned}$$

Агар $x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \Delta x_k = \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2$$

бўлади.

Демак,

$$\frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2 \leq \sigma \leq \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2.$$

Бу муносабатдан

$$\left| \sigma - \frac{b^2 - a^2}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2$$

тенгсизлик келиб чиқади. Сўнгра $\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2$ учун

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2 \leq \lambda_p \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \lambda_p \cdot \frac{b-a}{2}$$

($\lambda_p = \max \{ \Delta x_k \}$) бўлишидан $\lambda_p \rightarrow 0$ да

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2 \rightarrow 0 \text{ бўлади.}$$

Демак,

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma = \frac{b^2 - a^2}{2}, \text{ яъни } \int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

2-мисол. Ушбу

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса.} \end{cases}$$

Дирихле функцияси учун $[0,1]$ сегментда интеграл мавжудликка текширинг.

Бу функция учун қаралаётган ораликда интеграл йиғинди қуйидагича бўлади:

$$\sigma = \begin{cases} 1, & \text{агар барча } \xi_k \text{ рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар барча } \xi_k \text{ иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

Равшанки, $\lambda_p \rightarrow 0$ да σ йиғинди лимитга эга эмас.

Демак, Дирихле функцияси $[0, 1]$ сегментда интегралланувчи эмас.

4. Дарбу йиғиндилари. Аниқ интегралнинг бошқача таърифи.

$f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда аниқланган бўлиб, чегараланган бўлсин. $[a, b]$ оралиқнинг бирор

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}$$

бўлинишини олайлиқ. Тўпламнинг аниқ чегаралари ҳақидаги теоремага кўра

$$m_k = \inf \{f(x)\}, x \in [x_k, x_{k+1}],$$

$$M_k = \sup \{f(x)\}, x \in [x_k, x_{k+1}] \quad (k = 0, n-1)$$

лар мавжуд ва ихтиёрий $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ учун

$$m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k$$

тенгсизликлар ўринлидир.

2-таъриф. Ушбу

$$s_p(f) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k, \quad S_p(f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

йиғиндилар мос равишда Дарбунинг қуйи ҳамда юқори йиғиндилари деб аталади.

Дарбу йиғиндилари учун қуйидаги муносабатлар ўринлидир: (қ. [1], 279-бет).

$$1) \quad s_p(f) \leq \sigma_p(f) \leq S_p(f).$$

$$2) \quad m(b-a) \leq s_p(f) \leq S_p(f) \leq M(b-a).$$

$$M = \sup\{f(x)\}, \quad m = \inf\{f(x)\}, \quad x \in [a, b].$$

Демак, 2) муносабат Дарбу йиғиндилари тўпламларининг чегараланганлигини билдиради.

3-таъриф. $\{s_p(f)\}$ тўпламнинг аниқ юқори чегараси $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқдаги қуйи интеграли деб аталади ва

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

каби белгиланади.

$\{S_p(f)\}$ тўпламнинг аниқ қуйи чегараси $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқдаги юқори интеграли деб аталади ва

$$\bar{I} = \int_a^b f(x)dx$$

каби белгиланади.

4-таъриф. Агар $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқдаги қуйи ва юқори интеграллари бир-бирига тенг бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи дейилади ва уларнинг умумий қиймати

$$I = \bar{I} = I$$

$f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқдаги аниқ интеграли (Риман интеграли) дейилади ва у

$$\int_a^b f(x)dx$$

каби белгиланади.

Демак,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Агар

$$\int_a^b f(x)dx \neq \int_a^b f(x')dx$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи эмас дейилади.

3-мисол. Ушбу

$$f(x) = x$$

функция 4-таъриф ёрдамида $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи эканини кўрсатинг.

$[a, b]$ ораликнинг ихтиёрий P бўлинишини оламиз ва $f(x) = x$ учун Дарбу йигиндиларини тузамиз. Ҳар бир

$$[x_k, x_{k+1}] \quad (k = 0, n-1)$$

ораликда $m_k = x_k$, $M_k = x_{k+1}$ эканини ҳисобга олсак,

$$s_p(f) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \Delta x_k = \frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2,$$

$$S_p(f) = \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \cdot \Delta x_k = \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2$$

ифодаларни топамиз.

Бу муносабатлардан

$$\sup \{s_p(f)\} = \frac{b^2 - a^2}{2},$$

$$\inf \{S_p(f)\} = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

эканини кўриш қийин эмас.

Демак,

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}, \quad \int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

бўлиб, $f(x) = x$ функция $[a, b]$ ораликда интегралланувчи ва

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

4-мисол. Ушбу

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса.} \end{cases}$$

Дирихле функциясини $[0, 1]$ ораликда 4-таъриф ёрдамида интегралланувчиликка текширинг.

$[0, 1]$ ораликнинг ихтиёрий P бўлинишини қараймиз ва унга нисбатан Дарбу йигиндиларини тузамиз:

$$s_p(f) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = 0,$$

$$S_p(f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = 1.$$

Бундан

$$\sup \{s_p(f)\} = 0,$$

$$\inf \{S_p(f)\} = 1$$

экани келиб чиқади. Демак, Дирихле функциясининг $[0, 1]$ оралиқда қуйи ва юқори интеграллари мавжуд. Лекин

$$\int_0^1 \chi(x) dx \neq \int_0^1 \chi(x) dx$$

бўлгани сабабли у $[0, 1]$ оралиқда интегралланувчи эмас.

Аниқ интегралнинг 1- ва 4-таърифлари ўзаро эквивалентдир.

2-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ МАВЖУДЛИГИ. ИНТЕГРАЛЛАНУВЧИ ФУНКЦИЯЛАР СИНФИ

1-теорема. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган ва чегараланган бўлсин. Бу функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлиши учун $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ сон топилиб, $[a, b]$ оралиқнинг диаметри $\lambda_p < \delta$ бўлган ҳар қандай p бўлинишга нисбатан

$$S_p(f) - s_p(f) < \varepsilon \quad (1)$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Агар аввалгидек $f(x)$ функциянинг $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, n-1$) оралиқдаги тебранишини ω_k орқали белгиласак, у ҳолда (1) тенгсизлик

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon \quad (2)$$

кўринишга эга бўлади.

2-теорема. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлса, у шу оралиқда интегралланувчи бўлади.

3-теорема. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда чегараланган ва монотон бўлса, функция шу оралиқда интегралланувчи бўлади.

4-теорема. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда чегараланган ва бу оралиқнинг чекли сондаги нуқталарида узилишга эга бўлиб, қолган барча нуқталарида узлуксиз бўлса, функция шу оралиқда интегралланувчи бўлади.

5-мисол. Ушбу

$$I = \int_a^b x^2 dx$$

интегрални ҳисобланг.

$f(x) = x^2$ функция $[a, b]$ ораликда узлуксиз бўлгани учун 2-теоремага кўра у қаралаётган ораликда интегралланувчи бўлади.

Демак, бу функциянинг $[a, b]$ оралиқ бўйича интегрални таърифга кўра ҳисоблашда $[a, b]$ оралиқнинг бўлинишини ҳамда ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ бўлакда ξ_k нуқталарини интеграл йигинди ва унинг лимитини ҳисоблашга қулай қилиб олиш имкониятига эга бўламиз.

Шуни эътиборга олган ҳолда $[a, b]$ оралиқни n та тенг бўлакка бўлиб, ξ_k ($k = 0, n-1$) нуқталар сифатида $[x_k, x_{k+1}]$ сегментларнинг чап четки нуқталарини оламиз.

Натижада

$$\begin{aligned} \sigma_p(f) &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(a + k \cdot \frac{b-a}{n} \right)^2 = \\ &= \frac{b-a}{n} \left[na^2 + \frac{2a(b-a)}{n} (1 + 2 + \dots + (n-1)) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 (1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2) \right] = \\ &= \frac{b-a}{n} \left[na^2 + \frac{2a(b-a)}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(b-a)^2}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right]. \end{aligned}$$

$\lambda_p \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) да лимитга ўтиб, топамиз:

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma_p(f) = \frac{1}{3} (b^3 - a^3).$$

Демак,

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3} (b^3 - a^3).$$

6-мисол. Ушбу

$$\int_0^1 a^x dx \quad (a > 0)$$

интегрални ҳисобланг.

Худди юқоридаги 5-мисолга ўхшаш $[0, 1]$ сегментни тенг n та бўлакка бўламиз ва ξ_k нуқталар сифатида $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = \overline{0, n-1}$) сегментларнинг чап четки нуқталарини оламиз. Натижада

$$\sigma_p(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{a-1}{a^{1/n}-1}$$

бўлади.

$a > 0$ эканини ҳисобга олган ҳолда $n \rightarrow \infty$ да лимитга ўтиб, топамиз:

$$\int_0^1 a^x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a-1}{\frac{a^{1/n}-1}{1/n}} = \frac{a-1}{\ln a}.$$

Хусусан $a = e$ бўлса, $\int_0^1 e^x dx$ интеграл $e - 1$ га тенг бўлади.

7-мисол. Ушбу

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2} \quad (0 < a < b)$$

интегрални ҳисобланг.

Фараз қилайлик, $P[a, b]$ сегментнинг ихтиёрий бўлиниши бўлсин. ξ_k нуқталар сифатида қуйидагиларни оламиз:

$$\xi_k = \sqrt{x_k x_{k+1}} \quad (k = \overline{0, n-1}).$$

Натижада

$$\begin{aligned} \sigma_p(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta x_k}{x_k x_{k+1}} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}} \right) = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \end{aligned}$$

ҳосил бўлади.

Демак,

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

8-мисол. Ушбу

$$\int_a^b x dx$$

интегрални $[a, b]$ сегментнинг иккита турлича бўлинишларида ва ξ_k нуқталарнинг ҳар хил танланишларида ҳисобланг.

а) $[a, b]$ сегментни $n+1$ та тенг бўлакка бўлиб, ξ_k нуқталар сифатида $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = \overline{0, n}$) оралиқларнинг чап четки нуқталарини оламиз. Натижада

$$\begin{aligned}\sigma_p(f) &= \frac{b-a}{n+1} \sum_{k=0}^n \left(a + k \cdot \frac{b-a}{n+1} \right) = \\ &= \frac{b-a}{n+1} \left[(n+1)a + \frac{b-a}{n+1} (1+2+\dots+n) \right] = \\ &= \frac{b-a}{n+1} \left[(n+1)a + \frac{b-a}{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right]\end{aligned}$$

ҳосил бўлади.

$n \rightarrow \infty$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

б) $[a, b]$ сегментни n та тенг бўлакка бўлиб, ξ_k нуқталар сифатида ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = \overline{0, n-1}$) оралиқларнинг уртасида ётувчи $\frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ нуқталарни оламиз. Натижада

$$\begin{aligned}\sigma_p(f) &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k + x_{k+1}}{2} = \frac{b-a}{n} \left(\frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{x_1 + x_2}{2} + \right. \\ &+ \dots + \left. \frac{x_{n-2} + x_{n-1}}{2} \right) = \frac{b-a}{n} \left(\frac{x_0 + x_n}{2} + x_1 + \dots + \right. \\ &+ \left. x_{n-1} \right) = \frac{b-a}{n} \left(\frac{a+b}{2} + (n-1)a + \frac{b-a}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \right)\end{aligned}$$

бўлади.

$n \rightarrow \infty$ да лимитга ўтиб, топамиз:

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Мисол ва масалалар

1. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлса, унинг шу сегментда чегараланган эканлигини исботланг.

2. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлиши учун $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топилиб, диаметрлари δ дан кичик бўлган $[a, b]$ сегментнинг ихтиёрий P_1 ва P_2 бўлинишларида

$$|\sigma_{P_1}(f) - \sigma_{P_2}(f)| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли эканини исботланг.

3. Интеграл йиғиндининг лимити таърифини Гейне бўйича келтиринг.

4. Ушбу

$$\text{а) } \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx, \quad \text{б) } \int_a^b x^2 \, dx, \quad \text{в) } \int_a^b \sqrt{x} \, dx,$$

$$\text{г) } \int_a^b \frac{dx}{x} \quad (0 < a < b), \quad \text{д) } \int_a^b x^n \, dx, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq -1$$

интегралларни таъриф ёрдамида ҳисобланг.

3-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ ХОССАЛАРИ

1°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у исталган $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ оралиқда ҳам интегралланувчи бўлади.

2°. Агар $f(x)$ функция $[a, c]$ ва $[c, b]$ оралиқларда интегралланувчи бўлса, у ҳолда функция $[a, b]$ оралиқда ҳам интегралланувчи бўлади ва ушбу

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

формула ўринли бўлади.

3°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у ҳолда $C \cdot f(x)$ ($C = \text{const}$) ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлади ва ушбу

$$\int_a^b C f(x) \, dx = C \int_a^b f(x) \, dx$$

формула ўринли бўлади.

4°. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у ҳолда $f(x) \pm g(x)$ функция ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлади ва ушбу

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

формула ўринли бўлади.

1-натижа. Агар $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у ҳолда ушбу

$$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \dots + C_n f_n(x) \quad (C_i = \text{const}, i = \overline{1, n})$$

функция ҳам шу оралиқда интегралланувчи ва

$$\begin{aligned} \int_a^b [C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \dots + C_n f_n(x)] dx = \\ = C_1 \int_a^b f_1(x) dx + \dots + C_n \int_a^b f_n(x) dx \end{aligned}$$

формула ўринли бўлади.

5°. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у ҳолда $f(x) \cdot g(x)$ функция ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлади.

2-натижа. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, $\forall n \in \mathbb{N}$ учун $[f(x)]^n$ функция ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлади.

6°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлиб, $\forall x \in [a, b]$ лар учун $f(x) \geq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad (a > b).$$

бўлади.

3-натижа. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлиб, $\forall x \in [a, b]$ лар учун $f(x) \leq g(x)$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда ушбу

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

тенгсизлик ҳам ўринли бўлади.

7°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда интегралланувчи бўлса, у ҳолда $|f(x)|$ функция ҳам шу ораликда интегралланувчи бўлади ва

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

$f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда аниқланган ва чегараланган бўлсин. У ҳолда $[a, b]$ ораликда $m = \inf \{f(x)\}$, $M = \sup \{f(x)\}$ мавжуд ва $\forall x \in [a, b]$ лар учун

$$m \leq f(x) \leq M$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

8°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда интегралланувчи бўлса, у ҳолда шундай ўзгармас μ ($m \leq \mu \leq M$) сон мавжудки, ушбу $\int_a^b f(x) dx = \mu(b - a)$ тенглик ўринли бўлади.

(Бу ўрта қиймат ҳақидаги теорема.)

4-натижа. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда узлуксиз бўлса, у ҳолда бу ораликда шундай c ($c \in [a, b]$) нуқта топиладики,

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$

тенглик ўринли бўлади.

9°. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ ораликда интегралланувчи бўлиб, $g(x)$ функция шу ораликда ўз ишорасини ўзгартирмаса, у ҳолда шундай ўзгармас μ ($m \leq \mu \leq M$) сон мавжудки

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx$$

тенглик ўринли бўлади.

5-натижа. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда узлуксиз бўлса, у ҳолда $[a, b]$ ораликда шундай c ($c \in [a, b]$) нуқта топиладики,

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$$

тенглик ўринли бўлади.

$f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда интегралланувчи бўлсин. У ҳолда аниқ интегралланг 1°-хоссасига кўра $f(x)$ функция исталган $[a, x] \subset [a, b]$ ($a \leq x \leq b$) ораликда ҳам интегралланувчи бўлади. Равшанки,

$$\int_a^x f(t) dt$$

интеграл x га боғлиқ бўлади. Уни $F(x)$ деб белгилаймиз:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

10°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда интегралланувчи бўлса, $F(x)$ функция шу ораликда узлуксиз бўлади.

11°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда интегралланувчи бўлиб, $x_0 \in (a, b)$ нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда $F(x)$ функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлади ва

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

тенглик уринлидир.

6- натижа. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда узлуксиз бўлса, у ҳолда $\forall x \in [a, b]$ лар учун

$$F'(x) = f(x)$$

бўлади.

Энди юқорида келтирилган аниқ интегралнинг хоссаларидан баъзиларини таҳлил қиламиз.

4°-хоссага кўра $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлса, у ҳолда $f(x) \pm g(x)$ функция ҳам шу ораликда интегралланувчи бўлади.

Фараз қилайлик, $f(x) \pm g(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлсин, у ҳолда $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳар доим $[a, b]$ сегментда интегралланувчи экани келиб чиқадими?

Мисол сифатида ушбу

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса,} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -1, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

функцияларни қарайлик. Маълумки, бу функциялар $[a, b]$ сегментда интегралланувчи эмас, лекин $f(x) + g(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчидир. Агар $f(x)$ функция кўринишини ўзгартирмасдан $g(x)$ функция сифатида ушбу

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,} \\ -1, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарасак $f(x) + g(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлмайди.

5°- хоссага кўра $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлса, у ҳолда $f(x) \cdot g(x)$ функция ҳам $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлади.

$f(x) \cdot g(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлишидан $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг $[a, b]$ сегментда ҳар доим интегралланувчи бўлиши келиб чиқадими, деган савол туғилади.

Мисол сифатида ушбу

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,} \\ -1, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

функцияларни қарасак, $f(x) \cdot g(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментда интегралланувчи эканини кўриш қийин эмас, лекин $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлмайди.

Худди шу $f(x)$ функция ёрдамида 7°- хоссани ҳам таҳлил қилиш мумкин. Равшанки, $|f(x)| = 1$ функция ҳар доим $[a, b]$ сегментда интегралланувчи, лекин $f(x)$ функция бу ораликда интегралланувчи эмас.

4-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛЛАРНИ ҲИСОБЛАШ

1. Ньютон — Лейбниц формуласи.

5-теорема. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг ихтиёрий бошланғич функцияси $F(x)$ учун

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

формула ўринлидир.

Одатда бу формула *Ньютон-Лейбниц формуласи* дейилади.

9-мисол. Ушбу

$$\int_{\operatorname{sh} 1}^{\operatorname{sh} 2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

интегрални ҳисобланг.

$$\int_{\text{sh} 1}^{\text{sh} 2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Big|_{\text{sh} 1}^{\text{sh} 2} = \ln \frac{\text{sh} 2 + \sqrt{1+\text{sh}^2 2}}{\text{sh} 1 + \sqrt{1+\text{sh}^2 1}} =$$

$$= \ln \frac{\text{sh} 2 + \text{ch} 2}{\text{sh} 1 + \text{ch} 1} = \ln \frac{e^2 + e^{-2} + e^2 - e^{-2}}{e + e^{-1} + e - e^{-1}} = \ln e = 1.$$

2. Аниқ интегралларни ҳисоблаш усуллари
1°. Ўзгарувчини алмаштириш усули

Фараз қилайлик $\int_a^b f(x) dx$ интегралда ўзгарувчи x ушбу

$x = \varphi(t)$ формула билан алмаштирилган бўлиб, қуйидаги шартлар бажарилсин:

а) $\varphi(t)$ функция $[\alpha, \beta]$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз, t ўзгарувчи $[\alpha, \beta]$ сегментда ўзгарганда функция қийматлари $[a, b]$ оралиқдан чиқмайди;

б) $\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b,$

в) $\varphi(t)$ функция $[\alpha, \beta]$ оралиқда узлуксиз ҳосиллага эга.
У ҳолда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

тенглик ўринли бўлади.

Одатда бу формула ўзгарувчини алмаштириб интеграллаш формуласи дейилади.

10-мисол. Ушбу

$$\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

интегрални ҳисобланг.

$x = a \sin t$ алмаштириш натижасида

$$\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cdot \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt =$$

$$= \frac{a^4}{8} \left(t - \frac{\sin 4t}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^4}{16}$$

бўлади.

2°. Бўлаклаб интеграллаш усули

$u(x)$ ва $v(x)$ функцияларнинг ҳар бири $[a, b]$ оралиқда узлуксиз $u'(x)$, $v'(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда

$$\int_a^b u(x) dv(x) = (u(x)v(x)) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) du(x)$$

формула уринлидир.

Одатда бу формула аниқ интегрални *бўлаклаб интеграллаш формуласи* деб аталади.

11-мисол. Ушбу

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интеграл $n = 0$, $n = 1$ да хусусий ҳолларда содда ҳисобланади:

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1.$$

$n \geq 2$ бўлганда берилган интегрални

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x d(-\cos x)$$

қурилишда ёзиб, бўлаклаб интеграллаш формуласини қўлаймиз. Натижада

$$\begin{aligned} I_n &= (-\sin^{n-1} x \cos x) \Big|_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x dx = \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx - \\ &\quad - (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx \end{aligned}$$

бўлиб, ундан

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

рекуррент формула келиб чиқади.

Бу формула ёрдамида $n = 2, 3, \dots$ да берилган интегралнинг қийматларини кетма-кет ҳисоблаш мумкин.

$n = 2m$ жуфт сон бўлсин, у ҳолда

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-1} \cdot \dots \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0 = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

бўлади.

$n = 2m+1$ тоқ сон бўлсин, у ҳолда

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \dots \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1 = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$$

бўлади.

12-мисол. Агар $f(x)$ функция $[0,1]$ сегментда узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$$

муносабатни исботланг.

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ лар учун } \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

эканини ҳисобга олиб топамиз:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx &= \int_0^{\pi/2} f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] dx = - \int_0^{\pi/2} f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \right. \right. \\ &\left. \left. - x\right)\right] d\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \int_0^{\pi/2} f(\sin t) dt \quad \left(t = \frac{\pi}{2} - x\right). \end{aligned}$$

Демак,

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx.$$

$$\text{Хусусан } \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx \text{ эканлигини топамиз.}$$

13-мисол. $[-1, 1]$ сегментда узлуксиз $f(x)$ функция учун

а) агар $f(x)$ жуфт функция бўлса,

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \cdot \int_0^1 f(x) dx,$$

б) агар $f(x)$ тоқ функция бўлса,

$$\int_{-l}^l f(x) dx = 0$$

муносабатларни исботланг.

$\int_{-l}^l f(x) dx$ интегрални аниқ интегралнинг 1°, 2°-хоссаларидан фойдаланиб қуйидагича ёзамиз:

$$\int_{-l}^l f(x) dx = \int_{-l}^0 f(x) dx + \int_0^l f(x) dx.$$

$\int_{-l}^0 f(x) dx$ интегралда $x = -t$ алмаштириш натижасида топамиз:

$$\int_{-l}^0 f(x) dx = \int_l^0 f(-t) dt = \int_0^l f(-x) dx.$$

Шундай қилиб,

$$\int_{-l}^l f(x) dx = \int_{-l}^0 f(x) dx + \int_0^l f(-x) dx = \int_0^l [f(x) + f(-x)] dx.$$

Агар $f(x)$ жуфт бўлса, у ҳолда $f(x) = f(-x)$ бўлиб,

$$\int_{-l}^l f(x) dx = 2 \cdot \int_0^l f(x) dx \text{ муносабатга эга бўламиз.}$$

Агар $f(x)$ тоқ бўлса, у ҳолда $f(-x) = -f(x)$ бўлиб,

$$\int_{-l}^l f(x) dx = 0 \text{ муносабатга эга бўламиз.}$$

14-мисол. Агар $f(x)$ функция $(-\infty, \infty)$ оралиқда аниқланган, узлуксиз, даврий бўлиб, унинг даври T га тенг бўлса,

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx, \quad \forall a \in R,$$

муносабатни исботланг.

Аниқ интегралнинг 1°, 2°-хоссаларидан фойдаланиб, $\int_a^{a+T} f(x) dx$ интегрални қуйидагича ёзамиз:

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^T f(x) dx + \int_T^{T+a} f(x) dx.$$

$f(x)$ функция учун $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$ эканлигини хисобга олиб, топамиз:

$$\int_T^{a+T} f(x) dx = \int_T^{a+T} f(x-T) dx = \int_T^{a+T} f(x-T) d(x-T).$$

Энди

$$\int_T^{a+T} f(x-T) d(x-T)$$

интегралда $x-T = z$ алмаштиришни бажарамиз. Натижада

$$\int_T^{a+T} f(x) dx = \int_0^a f(z) dz \text{ бўлади.}$$

Демак,

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(x) dx &= \int_a^T f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \\ &+ \int_a^T f(x) dx = \int_0^T f(x) dx. \end{aligned}$$

15-мисол. Ушбу

$$I = \int_{-2\pi n}^1 \left| \left(\cos \ln \frac{1}{x} \right)' \right| dx, \quad n \in N,$$

интегрални хисобланг.

Интеграл остидаги ифода кўринишини қуйидагича ўзгартирамиз;

$$\left| \left(\cos \ln \frac{1}{x} \right)' \right| dx = |(\cos(\ln x))'| dx = \left| -\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \right| dx.$$

— $\ln x = t$ алмаштириш натижасида

$$I = \int_0^{2\pi n} |\sin t| dt = 2n \int_0^{\pi} \sin t dt = 4n$$

бўлади.

16-мисол. Ушбу

$$I = \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}$$

интегрални ҳисобланг.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}} = \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \\ &= - \int_{-2}^{-1} \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}} = - \arcsin \frac{1}{x} \Big|_{-2}^{-1} = \\ &= -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

17-мисол. Ушбу

$$I = \int_1^e (x \ln x)^2 dx$$

интегрални ҳисобланг.

Аниқ интегралда бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланиб, топамиз:

$$u = \ln^2 x, \quad du = 2 \ln x \cdot \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{x^2}{3}.$$

$$I = \frac{x^3}{3} \ln^2 x \Big|_1^e - \frac{2}{3} \int_1^e x^2 \ln x dx = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3} \int_1^e x^2 \ln x dx$$

$I_1 = \int_1^e x^2 \ln x dx$ интегралга яна бўлаклаб интеграллаш формуласини қўллаш натижасида

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{x^3}{3} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx = \frac{e^3}{3} - \frac{x^3}{9} \Big|_1^e = \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9} \end{aligned}$$

бўлади.

Демак,

$$I = \frac{e^3}{3} - \frac{4e^3}{27} - \frac{2}{27} = \frac{5e^3 - 2}{27}.$$

18-мисол. Ушбу

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

интегрални ҳисобланг.

$x = \sin t$ алмаштириш натижасида

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n t \cdot \cos t}{\cos t} dt = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$$

бўлади. 11-мисолга кўра:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt = \begin{cases} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{агар } n = 2k \text{ бўлса,} \\ \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & \text{агар } n = 2k+1 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

19-мисол. Ушбу

$$I = \int_0^{1000} [x] dx$$

интегрални ҳисобланг.

Интегралланувчи функциялар синфига оид теоремага кўра $[x]$ функция $[0, 1000]$ сегментда интегралланувчидир, чунки у $[0, 1000]$ сегментда чекли сондаги (999 та) нуқталардан бошқа барча нуқталарда узлуксиз. Аниқ интеграл хоссаларидан фойдаланиб, топамиз:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{1000} [x] dx = \int_0^1 [x] dx + \int_1^2 [x] dx + \dots + \int_{999}^{1000} [x] dx = \\ &= 1 + 2 + \dots + 999 = \frac{999 \cdot 1000}{2} = 499500. \end{aligned}$$

20-мисол. Ушбу

$$I = \int_0^6 [x] \sin\left(\frac{\pi}{6} x\right) dx$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги функция $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ нуқта-ларда узилишга эга. Демак, қаралаётган интеграл мавжуд.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 [x] \sin \frac{\pi x}{6} dx + \int_1^2 [x] \sin \frac{\pi x}{6} dx + \int_2^3 [x] \sin \frac{\pi x}{6} dx + \\ &+ \int_3^4 [x] \sin \frac{\pi x}{6} dx + \int_4^5 [x] \sin \frac{\pi x}{6} dx + \int_5^6 [x] \sin \frac{\pi x}{6} dx = \\ &= \frac{6}{\pi} \left[\left(\cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{3} \right) + 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{2} \right) + 3 \left(\cos \frac{\pi}{2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \cos \frac{2\pi}{3} \right) + 4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{5\pi}{6} \right) + 5 \left(\cos \frac{5\pi}{6} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \cos \pi \right) \right] = \frac{6}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{3} + 2 \cos \frac{\pi}{3} + 3 \cos \frac{\pi}{3} - \right. \\ &\quad \left. - 4 \cos \frac{\pi}{3} + 4 \cos \frac{\pi}{6} - 5 \cos \frac{\pi}{6} + 5 \right) = \frac{30}{\pi}. \end{aligned}$$

21-мисол. Ушбу

$$I = \int_0^{\pi} x \operatorname{sgn}(\cos x) dx$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги функция $[0, \pi]$ оралиқда $\cos x = 0$ бў-ладиган $\left(x = \frac{\pi}{2}\right)$ нуқтадан бошқа барча нуқталарда узлук-сиз. Демак қаралаётган интеграл мавжуд.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} x \operatorname{sgn}(\cos x) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} x \operatorname{sgn}(\cos x) dx = \int_0^{\pi/2} x dx - \\ &- \int_{\pi/2}^{\pi} x dx = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{2} = -\frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

22-мисол. $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^{10} x dx$, $I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$ интеграл-

лардан қайси бири катта эканини аниқланг.!

Маълумки,

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ лар учун } \sin^2 x > \sin^{10} x$$

тенгсизлик ўринли.

$$x = 0, x = \frac{\pi}{2} \text{ нуқталарда } \sin^2 x = \sin^{10} x$$

тенглик бажарилиб, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ларда $f(x) = \sin^2 x - \sin^{10} x >$

> 0 бўлади. Аниқ интегралнинг 6° хоссасига кўра $\int_0^{\pi/2} f(x) dx >$

> 0 , яъни $I_2 > I_1$ тенгсизлик ўринлидир.

23-мисол. Ўрта қиймат ҳақидаги теоремадан фойдаланиб

$$\int_a^b \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx, \quad (0 < a < b)$$

интегрални баҳоланг.

Аниқ интегралнинг 9° хоссасига кўра

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}} \sin x dx = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \int_a^b \sin x dx = \frac{1}{\sqrt{\xi}} (\cos a - \cos b)$$

бўлади. $0 < a < b$ да $\frac{1}{\sqrt{\xi}} < \frac{1}{\sqrt{a}}$ ва $|\cos a - \cos b| \leq 2$

бўлишини ҳисобга олсак, у ҳолда берилган интеграл учун

$$\left| \int_a^b \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \right| \leq \frac{2}{\sqrt{a}}$$

баҳога эга бўламиз.

24-мисол. Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t} dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t} dt}$$

лимитни ҳисобланг.

$\sqrt{\operatorname{tg} x}$ ва $\sqrt{\sin x}$ функциялар қаралаётган оралиқларда узлуксиз бўлгани учун аниқ интегралнинг 11° хоссасига

кўра $\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t} dt$ ва $\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t} dt$ интегралларни юқори чегаранинг функцияси сифатида дифференциаллаш мумкин. Қаралаётган ифода $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмаслик бўлиб, унга

Лопиталь қондасини қўллаш мумкинлигини кўриш қийин эмас.

Демак,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t} dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t} dt} &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\cos x \cdot \sqrt{\operatorname{tg}(\sin x)}}{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \sqrt{\sin(\operatorname{tg} x)}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \cos^3 x \sqrt{\frac{\operatorname{tg}(\sin x)}{\sin(\operatorname{tg} x)}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \cos^3 x \sqrt{\frac{\operatorname{tg}(\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{\operatorname{tg} x}{\sin(\operatorname{tg} x)}} = 1.\end{aligned}$$

25-мисол. Ушбу

$$S_n = \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} \quad (p > 0)$$

йиғинди лимитини аниқ интеграл ёрдамида ҳисобланг.

S_n йиғиндининг кўринишини қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^p + \left(\frac{2}{n}\right)^p + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^p \right] = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p.\end{aligned}$$

Бу йиғинди $f(x) = x^p$ функция учун $[0, 1]$ сегментда (бу сегментни тенг n та бўлакка бўлиш натижасида ҳосил бўлган) интеграл (Риман) йиғинди эканини кўриш осон.

Демак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}.$$

26-мисол. Ушбу

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos \frac{k\pi}{n}}$$

лимитни аниқ интеграл ёрдамида ҳисобланг.

Етарлича катта n лар учун $\sin \frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi}{n}$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos \frac{k\pi}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos \frac{k\pi}{n}}$$

бўлади.

Энди лимит остида турган ифода $f(x) = \frac{1}{2 + \cos x}$ функция учун $[0, \pi]$ оралиқда (бу оралиқ тенг n та бўлакка бўлинган ҳолда тузилган) интеграл йиғинди экани равшанлир. Демак,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \frac{dx}{2 + \cos x} = \int_0^{\pi} \frac{\frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{3 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 2 \int_0^{\pi} \frac{d\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)}{3 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Мисол ва масалалар

5. Нуқтада узлуксиз ва бу нуқтани ўз ичига олувчи ҳар қандай сегментда интегралланувчи бўлмаган функцияга мисол келтиринг.

6. Бирор $[a, b]$ сегментда чегараланган $f(x)$ функция бу сегментда интегралланувчи бўлиши учун ихтиёрий $\varepsilon > 0$ олинганда ҳам функциянинг барча узилиш нуқталарини ўз ичига олувчи чекли ёки sanoqli сондаги интерваллар системаси мавжуд бўлиб, уларнинг узунликлари йиғиндиси ε дан кичик бўлиши зарур ва етарли эканини исботланг.

7. Ушбу

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \text{ — иррационал сон бўлса,} \\ \frac{1}{n}, & \text{агар } x = \frac{m}{n} \text{ бўлса} \end{cases}$$

($m, n \in \mathbb{N}$, $\frac{m}{n} \neq 0$ — қисқармайдиган каср).

Риман функцияси ихтиёрий $[a, b]$ сегментда интегралланувчи эканини исботланг.

8. $f(x) = \operatorname{sgn} \left(\sin \frac{\pi}{x} \right)$ функциянинг $[0, 1]$ сегментда интегралланувчи эканини исботланг.

9. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right], & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг $[0, 1]$ сегментда интегралланувчи эканини исботланг.

10. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи, $\forall x \in [a, b]$ лар учун $c \leq f(x) \leq d$ бўлиб, $g(x)$ функция $[c, d]$ сегментда узлуксиз бўлса, у ҳолда $g[f(x)]$ функциянинг $[a, b]$ сегментда интегралланувчи эканини исботланг.

11. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар интегралланувчи бўлса, $f(g(x))$ функция ҳам интегралланувчи бўлиши шартми? Мисоллар келтиринг.

12. Агар $f(x)$ функция $[A, B]$ сегментда интегралланувчи бўлса, у ҳолда

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0, [a, b] \subset [A, B]$$

муносабатни исботланг.

13. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f^2(x) dx = 0$$

тенглик бажарилиши учун $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментдаги барча узлуксиз бўлган нуқталарида нолга тенг бўлиши зарур ва етарли эканини исботланг.

14. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлсин. $\frac{1}{f(x)}$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлиши учун бирорта етарли шарт келтиринг ва исботланг.

15. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b |f(x) g(x)| dx \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}$$

Коши-Буняковский тенгсизлигини исботланг.

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$16. \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$17. \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$18. \int_0^2 |1-x| dx.$$

$$19. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + 2x \cos \alpha + 1}$$

$$(0 < \alpha < \pi).$$

$$20. \int_{-\pi/4}^0 \frac{dx}{\cos^3 x}.$$

$$21. \int_{\frac{1}{2}}^9 \sqrt[3]{x-1} dx.$$

$$22. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + e \cos x}$$

$$(0 \leq e < 1).$$

$$23. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$$

$$(a \cdot b \neq 0).$$

$$24. \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6} dx.$$

$$25. \int_{\frac{1}{e^2}}^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}.$$

$$26. \int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 x dx.$$

$$27. \int_0^2 \operatorname{sh}^3 x dx.$$

$$28. \int_{\frac{1}{2}}^3 \frac{dx}{x^3 - 2x - 8}.$$

$$29. \int_{\frac{3}{4}}^2 \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}.$$

$$30. \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx.$$

$$31. \int_1^e \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}.$$

$$32. \int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

$$33. \int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg}^4 x dx.$$

$$34. \int_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^2(x-1)} dx.$$

$$35. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

$$36. \int_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}.$$

$$37. \int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx.$$

$$38. \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx.$$

$$39. \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1 + 2\sin^2 x}.$$

$$40. \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x}{\sin^3 x} dx.$$

$$41. \int_1^2 x \ln x dx.$$

$$42. \int_0^e \sin(\ln x) dx.$$

$$43. \int_0^{1/2} \arcsin x dx$$

$$44. \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx.$$

$$45. \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt[3]{\sin x} dx.$$

$$46. \int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2} \sin x dx.$$

$$47. \int_{-1}^1 \cos x \operatorname{th} x dx.$$

$$48. \int_{-1}^1 (e^x + e^{-x}) \operatorname{tg} x dx.$$

$$49. \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx.$$

$$50. \int_0^2 e^{x^2} \cdot x dx.$$

$$51. \int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx.$$

$$52. \int_1^{\sqrt[3]{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$$

$$53. \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{1 + \ln x}}.$$

$$54. \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{3 + \cos x}.$$

$$65. a) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \frac{dx}{a \cos^3 x + 2b \cos x \sin x + c \sin^3 x}, \quad ac - b^2 > 0.$$

$$55. \int_1^9 x \sqrt[3]{1-x} dx.$$

$$56. \int_0^1 x^{1/2} \sqrt{1+3x^2} dx.$$

$$57. \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x dx.$$

$$58. \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx.$$

$$59. \int_1^{\pi} x^n \ln x dx.$$

$$60. \int_0^1 x (2-x^2)^{1/2} dx.$$

$$61. \int_{1/e}^e |\ln x| dx.$$

$$62. \int_0^{\pi} \frac{dx}{a + b \cos x}, \quad |b| < a.$$

$$63. \int_{1/2}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x + \frac{1}{x}} dx.$$

$$64. \int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx.$$

$$\text{б) } I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx. \quad \text{в) } I_n = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n} x dx.$$

$$\text{г) } I_{m,n} = \int_0^1 x^m (\ln x)^n dx, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{д) } I_n = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \right)^{2n+1} dx.$$

$$66. I_n = \int_{-\ln n}^{\ln n} \operatorname{ch}^n x dx.$$

Қуйидаги муносабатларни исботланг:

$$67. \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx =$$

$$= \begin{cases} \frac{(m-1)!! (n-1)!!}{(m+n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{агар } m, n \text{ жуфт бўлса,} \\ \frac{(m-1)!! (n-1)!!}{(m+n)!!}, & m \text{ ва } n \text{ тоқ бўлса.} \end{cases}$$

$$68. \int_0^a (a^2 - x^2)^n dx = a^{2n+1} \frac{2n!!}{(2n+1)!!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$69. \int_0^a (a^2 - x^2)^{(2n-1)/2} dx = a^{2n} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$70. \int_0^{\pi/2} \cos^n x \sin nx dx = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$71. \int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos nx dx = \frac{\pi}{2^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$72. \int_0^{\pi/2} \cos^m x \cos (m+2)x dx = 0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

$$73. \int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin (m+2)x dx = \frac{1}{m+1}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

$$74. \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cdot \cos(m+2)x dx = -\frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m+1}, m \in N.$$

$$75. \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cdot \sin(m+2)x dx = \frac{1}{m+1} \cos \frac{m\pi}{2}, m \in N.$$

$$76. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-ax} \cos^{2n+1} x dx = \\ = 2 \operatorname{ch} \frac{a\pi}{2} \cdot \frac{(n+1)!}{(a^2+1)(a^2+3^2) \dots (a^2+(2n+1)^2)}.$$

$$77. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin nx}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2} - 2 \cos \frac{\pi n}{2} \cdot \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx (n=0,1,\dots).$$

$$78. \int_0^{\pi/2} f(\sin 2x) \cos x dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos^2 x) \cos x dx, f(x) \in C[0,1].$$

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$79. \int_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3) dx.$$

$$80. \int_0^2 [e^x] dx.$$

$$81. \int_0^1 \operatorname{sgn}(\sin(\ln x)) dx.$$

$$82. \int_1^{n+1} \ln [x] dx.$$

83. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлсин. Агар $\forall x \in [a, b]$ лар учун $f(x) > 0$ бўлса, у ҳолда шундай $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ топилиб, $\inf_{[\alpha, \beta]} f(x) > 0$ бўлишини исботланг.

84. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлиб, $\forall x \in [a, b]$ лар учун $f(x) \geq 0$ бўлсин.

$$\int_a^b f(x) dx > 0$$

булиши учун шундай $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ сегмент топилиб, $\forall x \in [\alpha, \beta]$ ларда $f(x) \neq 0$ муносабатнинг бажарилиши зарур ва етарлилигини исботланг.

85. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлиб, $\int_a^b |f(x)| dx = 0$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ учун

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$$

булишини исботланг.

Аниқ интеграл ёрдамида қуйидаги лимитларни топинг:

$$86. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n+1}{n^2} \right).$$

$$87. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^3}{n^4} + \frac{2^3}{n^4} + \dots + \frac{(4n-1)^3}{n^4} \right).$$

$$88. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right).$$

$$89. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right).$$

$$90. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right),$$

$$91. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}} \right).$$

$$92. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right).$$

$$93. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

$$94. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f \left(a + k \cdot \frac{b-a}{n} \right) \right]$$

($f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи).

$$95. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right) \sin \frac{k\pi}{n^2}.$$

$$96. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}, \quad x > 0.$$

$$97. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2^{k/n}}{n + \frac{1}{k}}$$

$$98. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos x^2 dx}{x}$$

$$99. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctg t)^2 dt}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$100. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$$

Қуйидаги интегралларнинг қайси бири катта эканини аниқланг:

$$101. \int_0^1 e^{-x} dx \quad \text{ёки} \quad \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

$$102. \int_0^{\pi} e^{x^2} \cos^2 x dx \quad \text{ёки} \quad \int_{-\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx.$$

$$103. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{ёки} \quad \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

$$104. \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad \text{ёки} \quad \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$105. \int_0^1 e^{-x} \sin x dx \quad \text{ёки} \quad \int_0^1 e^{-x^2} \sin x dx.$$

$$106. \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{ёки} \quad \int_1^2 \frac{dx}{x}.$$

Қуйидаги функцияларнинг берилган оралиқдаги ўрта қий-матларини топинг.

$$107. f(x) = x^2, \quad x \in [0, 1].$$

$$108. f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0, 100].$$

$$109. f(x) = 10 + 2 \sin x + 3 \cos x, x \in [0, 2\pi].$$

$$110. f(x) = \sin x \cdot \sin(x + \varphi), x \in [0, 2\pi].$$

Ўрта қиймат ҳақидаги теоремалардан фойдаланиб, қуйидаги интегралларни баҳоланг:

$$111. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + 0,5 \cos x}.$$

$$112. \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x}} dx.$$

$$113. \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx.$$

$$114. \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

$$115. \int_a^b \frac{e^{-\alpha x}}{x} \sin x dx \quad (0 < a < b, \alpha > 0).$$

$$116. \int_a^b \sin x^2 dx \quad (0 < a < b).$$

$$117. \int_1^x \frac{dx}{\ln x + 2}.$$

$$118. \int_1^x 2^{x^2} dx.$$

$$119. \int_{1.2}^2 \frac{4^x}{x} dx.$$

$$120. \int_0^{\pi} x^2 \sqrt{\sin x} dx.$$

АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ БАЪЗИ ТАТБИҚЛАРИ

1-§. ЕЯ УЗУНЛИГИНИ ҲИСОБЛАШ

Маълумки, эгри чизиқ ёйининг узунлиги шу эгри чизиққа чизилган синиқ чизиқ периметрининг лимити сифатида таърифланади. Синиқ чизиқ периметри йиғиндига (интеграл йиғиндига) келади ва унинг лимити аниқ интегрални ифода-лайди.

1°. Фараз қилайлик, $\overline{AB}$ ёй

$$y = f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

тенглама билан аниқлансин. Бунда $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган узлуксиз ва узлуксиз $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин.

$\overline{AB}$ ёйининг узунлиги

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \, dx \quad (1)$$

бўлади.

1-мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) \quad (a > 0)$$

тенглама билан аниқланган чизиқнинг (занжир чизиқнинг) $[-a, a]$ оралиқдаги узунлигини топинг.

Бу эгри чизиқнинг узунлигини (1) формуладан фойдала-ниб топамиз. Равшанки,

$$f'(x) = \left(\frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) \right)' = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right).$$

Унда

$$1 + f'^2(x) = 1 + \frac{1}{4} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)^2$$

бўлиб,

$$\sqrt{1 + f'^2(x)} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

бўлади. (1) формулага кўра:

$$l = \int_{-a}^a \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) dx = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) \Big|_{-a}^a = a \left(e - \frac{1}{e} \right).$$

Демак, берилган эгри чизиқнинг узунлиги

$$l = a \left(e - \frac{1}{e} \right)$$

га тенг.

2-мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{x^2}{2p}$$

параболанинг $[0, a]$ оралиқдаги қисмининг узунлигини топинг ($a > 0$).

Аввал $f(x)$ функциянинг ҳосиласини ҳисоблаб

$$\sqrt{1 + f'^2(x)}$$

ни топамиз:

$$f'(x) = \frac{2x}{2p} = \frac{x}{p},$$

$$1 + f'^2(x) = 1 + \frac{x^2}{p^2} = \frac{p^2 + x^2}{p^2},$$

$$\sqrt{1 + f'^2(x)} = \sqrt{\frac{p^2 + x^2}{p^2}} = \frac{1}{p} \sqrt{x^2 + p^2}.$$

(1) формулага кўра қаралаётган эгри чизиқнинг узунлиги

$$l = \frac{1}{p} \int_0^a \sqrt{x^2 + p^2} dx$$

бўлади.

Энди ушбу

$$\int \sqrt{x^2 + p^2} dx$$

аниқмас интегрални ҳисоблаймиз. Агар

$$u = \sqrt{x^2 + p^2}, \quad dv = dx$$

дейилса, унда

$$du = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + p^2}}, \quad v = x$$

булиб,

$$\int \sqrt{x^2 + p^2} dx = x \sqrt{x^2 + p^2} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + p^2}}$$

булади. Бу тенгламанинг ўнг томонидаги интеграл қуйидагича ҳисобланади:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + p^2}} &= \int \frac{x^2 + p^2 - p^2}{\sqrt{x^2 + p^2}} dx = \int \frac{x^2 + p^2}{\sqrt{x^2 + p^2}} dx - \\ &- p^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + p^2}} = \int \sqrt{x^2 + p^2} dx - p^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + p^2}} = \\ &= \int \sqrt{x^2 + p^2} dx - p^2 \ln |x + \sqrt{x^2 + p^2}|. \end{aligned}$$

Демак,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + p^2} dx &= x \sqrt{x^2 + p^2} - \int \sqrt{x^2 + p^2} dx + \\ &+ p^2 \ln |x + \sqrt{x^2 + p^2}|. \end{aligned}$$

Бу тенгликдан:

$$2 \int \sqrt{x^2 + p^2} dx = x \sqrt{x^2 + p^2} + p^2 \ln |x + \sqrt{x^2 + p^2}|,$$

булиб,

$$\int \sqrt{x^2 + p^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + p^2} + \frac{1}{2} p^2 \ln |x + \sqrt{x^2 + p^2}|$$

булиши келиб чиқади.

Натнжада

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{p} \int_0^a \sqrt{x^2 + p^2} dx = \\ &= \frac{1}{p} \left[\frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + p^2} + \frac{1}{2} p^2 \ln |x + \sqrt{x^2 + p^2}| \right] \Big|_0^a = \\ &= \frac{1}{2p} a \sqrt{a^2 + p^2} + \frac{p}{2} \ln |a + \sqrt{a^2 + p^2}| - \frac{p}{2} \ln p \end{aligned}$$

ни топамиз.

2°. Фараз қилайлик, $\widetilde{AB}$ ёй

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

тенгламалар системаси билан аниқлансин. (Бу ҳолда эгри чизиқ параметрик ҳолда берилган дейилади.) Бунда $x = x(t)$,

$y = y(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да аниқланган, узлуксиз ва узлуксиз $x'(t)$, $y'(t)$ ҳосилаларга эга.

AB ёйнинг узунлиги

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt \quad (2)$$

булади.

3-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

тенгламалар системаси билан аниқланган эгри чизиқнинг (циклонданинг) узунлигини топинг.

Аввал $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ функцияларнинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$x'(t) = a(1 - \cos t), \quad y'(t) = a \sin t.$$

Унда

$$x'^2(t) + y'^2(t) = a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t = a^2 \cdot 2(1 - \cos t)$$

булиб,

$$\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = a \sqrt{2(1 - \cos t)}$$

булади.

(2) формулага кўра изланаётган эгри чизиқнинг узунлиги

$$l = \int_0^{2\pi} a \sqrt{2(1 - \cos t)} dt$$

булади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегрални ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} a \sqrt{2(1 - \cos t)} dt &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cdot \sin^2 \frac{t}{2}} dt = \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 4a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) = \\ &= -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a. \end{aligned}$$

Демак,

$$l = 8a.$$

3°. Фараз қилайлик, $\widehat{AB}$ эгри чизиқ қутб координата системасида

$$\rho = \rho(\theta) \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta)$$

функция билан берилган бўлсин. Бунда $\rho = \rho(\theta)$ функция $[\alpha, \beta]$ сегментда узлуксиз ва узлуксиз $\rho'(\theta)$ ҳосилага эга. Бу ҳолда $\widehat{AB}$ эгри чизиқнинг узунлиги

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)} d\theta \quad (3)$$

бўлади.

5-мисол. Ушбу

$$\rho = a \cdot \theta \quad (a = \text{const}, 0 \leq \theta \leq \alpha)$$

эгри чизиқ ёйининг узунлигини топинг.

Равшанки,

$$\sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)} = \sqrt{(a \cdot \theta)'^2 + (a \cdot \theta)^2} = a \sqrt{1 + \theta^2}.$$

(3) формулага кўра изланаётган эгри чизиқнинг узунлиги

$$l = \int_0^{\alpha} a \sqrt{1 + \theta^2} d\theta = a \int_0^{\alpha} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta = a \left[\frac{\theta}{2} \sqrt{1 + \theta^2} + \frac{1}{2} \ln \left(\theta + \sqrt{1 + \theta^2} \right) \right] \Big|_0^{\alpha} = \frac{a}{2} \left[\alpha \sqrt{1 + \alpha^2} + \ln(\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2}) \right]$$

бўлади. Демак,

$$l = \frac{a}{2} [\alpha \sqrt{1 + \alpha^2} + \ln(\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2})].$$

6-мисол. Ушбу

$$\rho = a \cdot \sin^3 \frac{\varphi}{3} \quad (a > 0)$$

тенглама билан берилган ёпиқ эгри чизиқнинг узунлигини топинг.

Модомики, $\rho > 0$ бўлиши керак экан, унда $\sin \frac{\varphi}{3} > 0$

бўлади. Бундан эса $0 \leq \frac{\varphi}{3} \leq \pi$, яъни $0 \leq \varphi \leq 3\pi$ бўлишини топамиз.

φ ўзгарувчи 0 дан $3 \cdot \frac{\pi}{2}$ гача ўзгарганда ρ ўса бориб 0 дан a гача ўзгаради, φ ўзгарувчи $3 \cdot \frac{\pi}{2}$ дан 3π гача ўзгарганда ρ камая бориб a дан 0 гача ўзгаради (4-чизма).

Берилган функциянинг ҳосиласи

$$\rho' = a \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cos \frac{\varphi}{3}$$

бўлиб,

$$\sqrt{\rho'^2 + \rho^2} = \sqrt{a^2 \sin^4 \frac{\varphi}{3} \cos^2 \frac{\varphi}{3} + a^2 \sin^6 \frac{\varphi}{3}} = a \sin^2 \frac{\varphi}{3}$$

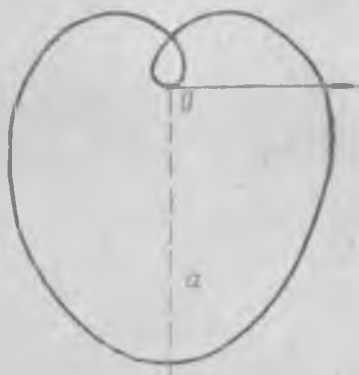
бўлади. (3) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{3\pi} a \sin^2 \frac{\varphi}{3} d\varphi = a \int_0^{3\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2 \frac{\varphi}{3}) d\varphi = \\ &= \frac{a}{2} \left[\int_0^{3\pi} (1 - \cos 2 \frac{\varphi}{3}) d\varphi \right] = \frac{a}{2} \left(\varphi - \frac{3}{2} \sin 2 \frac{\varphi}{3} \right) \Big|_0^{3\pi} = \\ &= \frac{a}{2} \left(3\pi - \frac{3}{2} \sin \frac{2}{3} \cdot 3\pi \right) = \frac{3a\pi}{2}. \end{aligned}$$

Демак, қаралаётган эгри чизиқнинг узунлиги

$$l = \frac{3a\pi}{2}$$

га тенг бўлади.

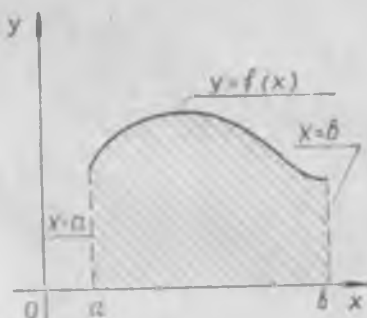


4-чизма.

2-§. ТЕКИС ШАКЛНИНГ ЮЗИ

1. Фараз қилайлик, $y = f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва ўзлуксиз бўлиб, $\forall x \in [a, b]$ да $f(x) \geq 0$ бўлсин.

Юқоридан $f(x)$ функция графиги, ён томонлардан $x = a$, $x = b$ вертикал чизиқлар, пастдан Ox абсциссалар ўқи билан чегараланган шаклнинг (одатда бундай шаклни эгри чизиқли



5-чизма.



6-чизма.

трапеция дейилади) юзи

$$S = \int_a^b f(x) dx \quad (4)$$

бўлади (5-чизма).

7-мисол. Ушбу

$$4y = 8x - x^2 \text{ ва } 4y = x + 6$$

чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзини топинг.

Бу чизиқлардан бири парабола, иккинчиси тўғри чизиқ бўлиб, улар бир-бири билан $A(1; \frac{7}{4})$ ва $B(6; 3)$ нуқталарда кесишади (6-чизма).

Изланаётган шаклнинг юзи S , $A'ABB'$ эгри чизиқли трапеция юзи S_1 дан $A'ABB'$ трапециянинг юзи S_2 нинг айирмасига тенг:

$$S = S_1 - S_2.$$

$A'ABB'$ эгри чизиқли трапециянинг юзи (4) формулага кўра

$$S_1 = \frac{1}{4} \int_1^6 (8x - x^2) dx = \frac{1}{4} \left(4x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^6 = \frac{205}{12}$$

бўлади.

$A'ABB'$ трапециянинг юзи эса

$$S_2 = \frac{A'A + B'B}{2} \cdot A'B' = \frac{\frac{7}{4} + 3}{2} \cdot 5 = \frac{95}{8}$$

бўлади. Демак, қаралаётган шаклнинг юзи:

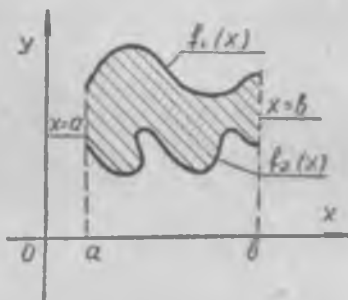
$$S = \frac{205}{12} - \frac{95}{8} = 5 \frac{5}{24} \text{ кв. бир.}$$

Энди текисликда

$$y = f_1(x), y_2 = f_2(x),$$

$$x_1 = a, x = b$$

чизиклар билан чегараланган шаклни қарайлик. Бунда $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар $[a, b]$ да аниқланган узлуксиз ва $\forall x \in [a, b]$ учун $f_1(x) \geq f_2(x) > 0$ (7-чизма). Бундай шаклнинг юзи



7-чизма.

$$S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx \quad (5)$$

бўлади.

8-мисол. Ушбу

$$(y - x)^2 = x^3, x = 1$$

чизиклар билан чегараланган шаклнинг юзини топинг.

Берилган чизик тенгламаси $(y - x)^2 = x^3$ ни

$$y - x = \pm \sqrt{x^3} = \pm x \sqrt{x}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бундан

$$y_1(x) = x + x \sqrt{x}, y_2(x) = x - x \sqrt{x}$$

бўлиши келиб чиқади.

Равшанки, $x > 0$ да

$$y_1(x) > y_2(x)$$

бўлади.

Юқорида келтирилган (5) формулага кўра қаралаётган шаклнинг юзи

$$S = \int_0^1 [y_1(x) - y_2(x)] dx$$

бўлади. Бу интегрални ҳисоблаб, топамиз:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 [x + x \sqrt{x} - (x - x \sqrt{x})] dx = \int_0^1 2x \sqrt{x} dx = \\ &= 2 \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Демак, $S = \frac{4}{5}$ кв. бирлик.

Эслатма. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз бўлиб, унда ишора сақламаса, Ox ўқининг юқорисидаги шаклнинг юзи мусбат ишора билан, Ox ўқининг пастисидаги шаклнинг юзи манфий ишора билан олинади.

2. Айтилик, текисликдаги шаклни ўраб турувчи эгри чизиқ

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

параметрик тенгламалар билан берилган бўлсин.

а) $x = x(t)$, $y = y(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз, $\forall t \in [\alpha, \beta]$ да $x(t) > 0$, $y(t) > 0$ ва $x(t)$ функция узлуксиз, манфий бўлмаган $x'(t)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда шаклнинг юзи

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t) dt \quad (6)$$

бўлади.

б) $x = x(t)$, $y = y(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз, $\forall t \in [\alpha, \beta]$ да $x(t) > 0$, $y(t) > 0$ ва $y(t)$ функция узлуксиз, манфий бўлмаган $y'(t)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда шаклнинг юзи

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} x(t) \cdot y'(t) dt \quad (7)$$

бўлади.

9-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x = a \sin^3 t, \\ y = b \cos^3 t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$



8-чизма.

чизиқ билан чегараланган шаклнинг юзини топинг.

Бу чизиқ билан чегараланган шакл 8-чизмада тасвирланган. Қаралаётган ёпиқ чизиқ Ox ва Oy координата ўқларига нисбатан симметрик. У чегаралаб турган шаклнинг юзи S тўртта AOB эгри чизиқли учбурчак юзи S_{AOB} га тенг бўлади:

$$S = 4S_{AOB}$$

Энди эгри чизикли учбурчак юзи S_{AOB} ни (6) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} S_{AOB} &= \int_0^{\pi/2} y(t) \cdot x'(t) dt = \int_0^{\pi/2} y(t) \cdot dx(t) = y(t) \cdot x(t) \Big|_0^{\pi/2} - \\ &- \int_0^{\pi/2} x(t) \cdot y'(t) dt = b \cos^3 t \cdot a \sin^3 t \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} x(t) \cdot y'(t) dt = \\ &= - \int_0^{\pi/2} x(t) \cdot y'(t) dt. \end{aligned}$$

Шундай қилиб,

$$\begin{aligned} S_{AOB} &= \int_0^{\pi/2} y(t) \cdot x'(t) dt, \\ S_{AOB} &= - \int_0^{\pi/2} x(t) \cdot y'(t) dt \end{aligned}$$

бўлишини топамиз. Бу тенгликларни ҳадлаб қўшиб,

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [y(t) \cdot x'(t) - x(t) \cdot y'(t)] dt$$

тенгликка келамиз.

Энди интегрални ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} S_{AOB} &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [b \cos^3 t \cdot a \cdot 3 \sin^2 t \cdot \cos t - a \sin^3 t \cdot b \cdot 3 \cos^2 t \cdot (-\sin t)] dt = \\ &= \frac{3ab}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cdot \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \\ &= \frac{3ab}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cdot \cos^2 t dt = \frac{3ab}{2 \cdot 4} \int_0^{\pi/2} 4 \sin^2 t \cos^2 t dt = \\ &= \frac{3ab}{8} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = \frac{3ab}{8} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \\ &= \frac{3ab}{16} \left[t - \frac{\sin 4t}{4} \right] \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3ab \pi}{32}. \end{aligned}$$

13. $y = \ln \operatorname{th} \left(\frac{x}{2} \right), \quad (0 < a \leq x \leq b).$
14. $x = \frac{2}{3} \sqrt{(y-1)^3}, \quad (0 \leq x \leq 2\sqrt{3}).$
15. $x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t), \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$
16. $x = a(\operatorname{sh} t - t), \quad y = a(\operatorname{ch} t - 1), \quad (0 \leq t \leq T).$
17. $x = \operatorname{ch}^3 t, \quad y = \operatorname{sh}^3 t, \quad (0 \leq t \leq T).$
18. $x = \frac{t}{\sqrt{a^2+1}} \cos(a \ln t), \quad y = \frac{t}{\sqrt{a^2+1}} \sin(a \ln t), \quad (t_1 \leq t \leq t_2).$
19. $x = t - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2t, \quad y = 2 \operatorname{ch} t, \quad (0 \leq t \leq t_0).$
20. $x = a \left(\cos t + \operatorname{Intg} \left(\frac{t}{2} \right) \right), \quad y = a \sin t, \quad \left(0 < t_0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right).$
21. $x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \quad y = (t^2 - 2) \cos t - 2t \sin t, \quad (0 \leq t \leq \pi).$
22. $x = \cos^4 t, \quad y = \sin^4 t, \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right).$
23. $x = \sin^4 t, \quad y = \cos^2 t, \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right).$
24. $x = a \cos^5 t, \quad y = a \sin^5 t, \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$
25. $x = \int_0^t \cos \varphi^2 d\varphi, \quad y = \int_0^t \sin \varphi^2 d\varphi.$
 $(0 \leq t \leq t_0) \text{ (клотонда).}$
26. $x = \int_1^t \frac{\sin \varphi}{\varphi} d\varphi, \quad y = \int_1^t \frac{\cos \varphi}{\varphi} d\varphi, \quad (1 \leq t \leq t_0).$
27. $r = a \cdot e^{m\varphi}, \quad (m > 0), \quad (a > r > 0).$
28. $r = \frac{\rho}{1 + \cos \varphi}, \quad \left(|\varphi| \leq \frac{\pi}{2} \right).$
29. $r = a \operatorname{th} \frac{\varphi}{2}, \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi).$
30. $\varphi = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right), \quad (1 \leq r \leq 3).$
31. $\varphi = \sqrt{r}, \quad (0 \leq r \leq 5).$
32. $\varphi = \int_0^r \frac{\operatorname{sh} \rho}{\rho} d\rho, \quad (0 \leq r \leq R).$
33. $r = 1 + \cos t, \quad \varphi = t - \operatorname{tg} \frac{t}{2}, \quad (0 \leq t \leq T < \pi).$

$$34. r = 2(1 + \cos \varphi), (r \leq 1).$$

$$35. r = a(1 - \sin \varphi) \left(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{6} \right).$$

$$36. r = a\varphi^2, (0 \leq \varphi \leq 4).$$

$$37. r = a\varphi^4, (0 \leq \varphi \leq 3).$$

$$38. \varphi = \arccos \frac{r^2 + a \cdot b}{(a+b)r}, (a \leq r \leq b).$$

Қуйидаги чизикларнинг ёй узунликларини ҳисобланг:

$$39. x^2 = 5y^2, x^2 + y^2 = 6.$$

$$40. y^2 = \frac{16}{27} \left(x - \frac{1}{2} \right)^3, y^2 = x.$$

$$41. (y - \arcsin x)^2 = 1 - x^2.$$

$$42. \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}.$$

$$43. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$44. x = t^2, y = t \left(\frac{1}{3} - t^2 \right).$$

$$45. x = 2t^3(1-t^2), y = \sqrt{15}t^4.$$

$$46. x = a(t^2 - 1), y = \frac{2a}{\sqrt{3}} \left(t^3 - \frac{t}{4} \right).$$

$$47. x = \cos^4 t, y = \sin^4 t.$$

$$48. y = a \cos^3 \left(\frac{\varphi}{3} \right).$$

$$49. r = a \sin^4 \left(\frac{\varphi}{4} \right).$$

$$50. r = a \cos^5 \left(\frac{\varphi}{5} \right).$$

$$51. r = a \sin^n \left(\frac{\varphi}{n} \right), n \in \mathbb{N}.$$

$$1^\circ. n=2k. \quad 2^\circ. n=2k+1.$$

Қуйидаги чизиклар билан чегараланган шаклларнинг юзларини ҳисобланг.

$$52. ax = y^2, ay = x^2.$$

$$53. y = 2x - x^2, x + y = 0.$$

$$54. y = 2^x, y = 2, x = 0.$$

$$55. y = (x+1)^2, x = \sin^2 \pi y, y = 0 (0 \leq y \leq 1).$$

$$56. y = x, y = x + \sin^2 x, (0 \leq x \leq \pi).$$

$$57. y = e^{-x} \cdot |\sin x|, y = 0, (x \geq 0).$$

58. $y = x - \frac{\pi}{2}, y = \cos x, x = 0.$
59. $y = \sin x, y = \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}.$
60. $y = \ln(1+x), y = -xe^{-x}, x = 1.$
61. $y = x, y = \frac{\pi}{2} \sin x, x \geq 0.$
62. $y = \frac{6}{x+5}, y = |x|, x \geq -2.$
63. $y = |x|^3 e^{-x^2}, |x| = a, a > 0.$
64. $x^2 + y^2 = 2, y^2 = 2x - 1, x \geq \frac{1}{2}.$
65. $y = 2^{x-3} + 1, y = 2^{3-x} + 1, y = 1,5.$
66. $y = x, y = \frac{1}{x}, y = \frac{10}{3} - x, x \geq 1.$
67. $y = 4^{-x}, y = -\log_4 x, y = 0, x = 0.$
68. $2y = x^2, x^2 + y^2 = 4y, 2y \geq x^2.$
69. $y = x^\alpha, y = x^{-\alpha}, x \geq 0, \alpha > 1.$
70. $y = x^\alpha, y = x^{-\alpha}, y = 0, x = b. \alpha > 0, \alpha \neq 1, b > 1.$
71. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), (0 \leq t \leq 2\pi), y = 0.$
72. $x = 2t - t^2, y = 2t^2 - t^3.$
73. $x = a \cos t, y = \frac{a \sin^3 t}{2 + \sin t}.$
74. $x = a \cos t, y = b \sin t.$
75. $x = a(1 - \cos t) \cos t, y = a(1 - \cos t) \sin t.$
76. $x = a\left(\frac{2}{\pi}t - \sin t\right), y = a(1 - \cos t), a > 0.$
77. $x = a \sin 2t, y = a \sin t, a > 0.$
78. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (лемниската).
79. $r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}$ (парабола), $\varphi = \frac{\pi}{4}, \varphi = \frac{\pi}{2}.$
80. $r = 3 + 2 \cos \varphi.$
81. $r = \frac{1}{\varphi}, r = \frac{1}{\sin \varphi}, \left(0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right).$
82. $r^2 + \varphi^2 = 1.$
83. $\varphi = \sin(\pi r), (0 \leq r \leq 1).$
84. $\varphi = r - \sin r \varphi = \pi.$
85. $r = 2 - \cos \varphi, r = \cos \varphi.$

$$86. r = a |\operatorname{tg} \varphi|, r = b |\cos \varphi|, 0 < b < a.$$

$$87. r = b + a \cos \varphi, a \geq b > 0.$$

$$88. r = 2a \cos \varphi, r = a \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}, \varphi = 0.$$

$$89. r = 2a \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi}, r = \frac{2b}{\sin \varphi}, 0 < b < a.$$

$$90. r^2 = a^2 \cos 4 \varphi.$$

3-§. АЙЛАНМА СИРТНИНГ ЮЗИ

$y = f(x)$ функция $[a, b]$ да аниқланган ва узлуксиз ҳамда узлуксиз $f'(x)$ хосилага эга бўлиб, $\forall x \in [a, b]$ учун $f(x) \geq 0$ бўлсин. Бу функция графигининг $(a, f(a))$ ва $(b, f(b))$ нуқталар орасидаги $\widehat{AB}$ ёни Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сиртнинг юзи

$$S = 2\pi \int_0^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \quad (9)$$

бўлади.

11-мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right), 0 \leq x \leq a, (a > 0)$$

занжир чизиқни Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланиш сиртининг юзини топинг.

Равшанки, берилган $f(x)$ функциянинг ҳосиласи

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

бўлади. (9) формуладан фойдаланиб, изланаётган айланиш сиртининг юзини топамиз:

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^a \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)^2} dx = \\ &= \frac{\pi a}{2} \int_0^a \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)^2 dx = \frac{\pi a}{2} \int_0^a \left[e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}} \right] dx = \\ &= \frac{\pi a}{2} \left[\frac{a}{2} e^{\frac{2x}{a}} + 2x - \frac{a}{2} e^{-\frac{2x}{a}} \right]_0^a = \frac{\pi a^2}{4} [e^2 - e^{-2} + 4]. \end{aligned}$$

Демак,

$$S = \frac{\pi a^2}{4} (e^2 - e^{-2} + 4).$$

AB эгри чизик юдори яримтекисликда ($y \geq 0$) жойлашган бўлиб, y

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

параметрик тенгламалар билан берилган бўлсин. Бунда $x = x(t)$ ва $y = y(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз ва узлуксиз $x'(t)$, $y'(t)$ ҳосилаларга эга бўлсин. Бу эгри чизиқни Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланиш сиртининг юзи

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt \quad (10)$$

бўлади.

11-мисол. Ушбу

$$x^2 + (y - 2)^2 = 1$$

айланани Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланиш сиртининг (тор) юзини топинг.

Берилган айлананинг тенгламасини

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 2 + \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

параметрик формада ёзиб оламиз. Изланаётган айланиш сиртининг юзини (10) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^{2\pi} (2 + \sin t) \cdot \sqrt{(\cos t)' ^2 + (2 + \sin t)' ^2} dt = \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} \cdot (2 + \sin t) dt = \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} (2 + \sin t) dt = 2\pi(2t - \cos t) \Big|_0^{2\pi} = 8\pi^2. \end{aligned}$$

Демак,

$$S = 8\pi^2.$$

4-§. АЙЛАНМА ЖИСМНИНГ ҲАЖМИ

1. Фараз қилайлик, $y = f(x)$ функция $[a, b]$ да аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $\forall x \in [a, b]$ да $f(x) \geq 0$ бўлсин.

Юқоридан $f(x)$ функция графиги, ён томонлардан $x = a$, $x = b$ вертикал чизиқлар, пастдан Ox ўқдаги $[a, b]$ сегмент билан чегараланган шаклни Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad (11)$$

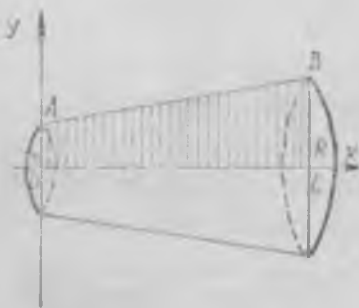
бўлади.

12-мисол. Асосларининг радиуси r ва R , баландлиги h бўлган кесик конуснинг ҳажмини топинг.

Масалада айтилган кесик конус юқоридан

$$f(x) = r + \frac{R-r}{h}x, \\ (0 \leq x \leq h)$$

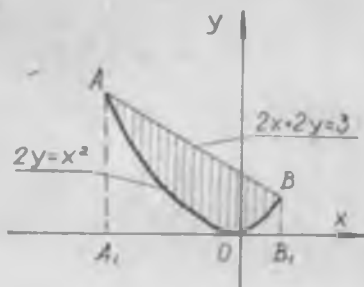
функция графиги, ён томонлардан $x = 0$, $x = h$ вертикал тўғри чизиқлар, пастдан $[0, h]$ сегмент билан чегараланган $OABC$ трапециянинг Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм бўлади (11-чизма).



11-чизма.

(11) формуладан фойдаланиб кесик конуснинг ҳажмини топамиз:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^h f^2(x) dx = \pi \int_0^h \left(r + \frac{R-r}{h}x \right)^2 dx = \\ &= \pi \int_0^h \left[r^2 + 2r \cdot \frac{R-r}{h}x + \left(\frac{R-r}{h} \right)^2 x^2 \right] dx = \\ &= \pi \left[r^2 x + 2r \cdot \frac{R-r}{h} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{(R-r)^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^h = \\ &= \pi \left[r^2 h + r \cdot \frac{R-r}{h} \cdot h^2 + \left(\frac{R-r}{h} \right)^2 \cdot \frac{h^3}{3} \right] = \\ &= \pi h \left(r^2 + Rr - r^2 + \frac{1}{3} (R^2 - 2Rr + r^2) \right) = \\ &= \frac{\pi h}{3} (R^2 + Rr + r^2). \end{aligned}$$



12- чизма.

Демак,

$$V = \frac{\pi^4}{3} (R^2 + Rr + r^2).$$

13- мисол. Ушбу

$$2y = x^2, \quad 2x + 2y = 3$$

чизиқлар билан чегараланган шаклни Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланиш жисмининг ҳажмини топинг.

Аввало $2y = x^2$ парабола билан $2x + 2y - 3 = 0$ тўғри чизиқнинг кесишиш нуқталарини топамиз:

$$x^2 = 3 - 2x.$$

Бундан $x_1 = 1$, $x_2 = -3$ бўлиши келиб чиқади. Демак, чизиқларнинг кесишиш нуқталари $A(-3; \frac{9}{2})$, $B(1; \frac{1}{2})$ бўлиб, улар ҳосил қилган шакл 12-чизмада тасвирланган.

Изланаётган айланиш жисмининг ҳажми

$$V = V_1 - V_2$$

бўлади, бунда $V_1 - A_1ABB_1$ трапециянинг Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми, V_2 эса A_1AOBB_1 эгри чизиқли трапециянинг Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми. Бу жисмларнинг ҳажмини (11) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_{-3}^1 \left[\frac{1}{2} (3 - 2x) \right]^2 dx = \pi \int_{-3}^1 \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 d \left(x - \frac{3}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \pi \left(x - \frac{3}{2} \right)^3 \Big|_{-3}^1 = \frac{91}{3} \pi. \end{aligned}$$

$$V_2 = \pi \int_{-3}^1 \left(\frac{1}{2} x^2 \right)^2 dx = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_{-3}^1 = \frac{\pi}{20} (1 + 243) = \frac{61}{5} \pi.$$

Демак,

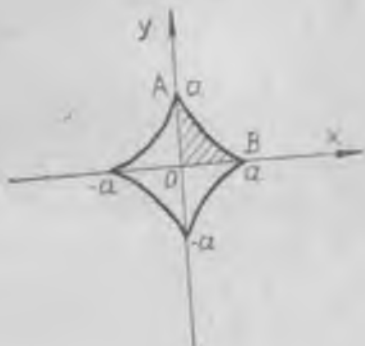
$$V = V_1 - V_2 = \frac{91\pi}{3} - \frac{61\pi}{5} = 18 \frac{2}{15} \pi.$$

Фараз қилайлик, эгри чизиқ

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

параметрик тенгламалар билан берилган бўлсин. Бунда $x = x(t)$ функция узлуксиз ҳамда узлуксиз манфий бўлмаган $x'(t)$ ҳосилга эга, $y(t)$ функция $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз ҳамда $\forall t \in [\alpha, \beta]$ да $y(t) > 0$.

Бундай чизик билан чегараланган шаклни Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмининг ҳажми



13- чизма.

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t) x'(t) dt \quad (12)$$

бўлади

15- мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

параметрик тенгламалар билан аниқланган чизик (астроида) ҳосил қилган шаклнинг Ox ўқ атрофида айлантиришдан юзага келган жисмининг ҳажмини топинг (13- чизма).

13-чизмада кўрсатилган OAB шаклни Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмининг ҳажми (12) формулага кўра топилади:

$$\begin{aligned} V_0 &= \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 y^2(t) \cdot x'(t) dt = -\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^6 t \cdot a \cdot 3 \cos^2 t \cdot \\ &\quad \cdot (-\sin t) dt = -3\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t)^3 \cos^2 t d(\cos t) = \\ &= -3\pi a^3 \left[\frac{1}{3} \cos^3 t - \frac{3}{5} \cos^5 t + \frac{3}{7} \cos^7 t - \frac{1}{9} \cos^9 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16\pi a^3}{105}. \end{aligned}$$

Демак, изланаётган жисмининг ҳажми:

$$V = 2V_0 = \frac{32\pi a^3}{105}.$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги чизиқларни айлантиришдан ҳосил бўлган айланиш сиртларининг юзаларини ҳисобланг:

91. $y = a \cos \frac{\pi x}{2b}$, ($|x| \leq b$), Ox ўқ атрофида.

92. $y = \operatorname{tg} x$, ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$), Ox ўқ атрофида.

93. $y = e^{-x}$, ($0 \leq x \leq a$), Ox ўқ атрофида.

94. $2ay = a^2 + x^2$, ($0 \leq x \leq a$), Ox ўқ атрофида.

95. $x = \ln(y - \sqrt{y^2 - 1})$, ($\frac{5}{4} \leq y \leq \frac{5}{3}$), Oy ўқ атрофида.

96. $x = a \cdot \arcsin \sqrt{\frac{y}{a} + \sqrt{y(a-y)}}$, ($\frac{a}{4} \leq y \leq \frac{3a}{4}$), Oy ўқ атрофида.

97. $4x + 2\ln y = y^2$, ($e^{-1} \leq y \leq e$), Oy ўқ атрофида.

98. $y^2 = 2(x-1)$, ($0 \leq y \leq 1$), Oy ўқ атрофида.

99. $y = (\arcsin x - x \sqrt{1-x^2})/2$, ($0 \leq x \leq 1$). Oy ўқ атрофида.

100. $y = a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$, ($a \leq x \leq b$), Oy ўқ атрофида.

101. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, ($0 \leq t \leq 2\pi$),
1) Ox ўқ, 2) Oy ўқ, 3) $y = 2a$ чизиқ атрофида.

102. $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$,
 Ox ўқ атрофида.

103. $x = 2\sqrt{3} \cos t$, $y = \sin 2t$, Ox ўқ атрофида.

104. $x = \frac{t^2}{3}$, $y = 4 - \frac{t^2}{2}$, ($|t| \leq 2\sqrt{2}$), Ox ўқ атрофида.

Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган шаклларни Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланиш жисмларининг ҳажмларини топинг:

$$105. y^2 = 2px, y = 0, x = a.$$

$$106. xy = a^2, y = 0, x = a, x = 2a.$$

$$107. \frac{y}{b} = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}, y = 0, x = a, (x \geq 0).$$

$$108. y = \sin 2x, \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right), y = 0.$$

$$109. y = \sqrt{x} e^{-x}, y = 0, x = a.$$

$$110. y = (\ln x)/x, (1 \leq x \leq e), y = 0, x = e.$$

$$111. y = \sin \sqrt{x}, (0 \leq x \leq \pi^2), y = 0.$$

$$112. y = e^{ax} \sin \pi x, (n-1 \leq x \leq n), y = 0, n \in \mathbb{N}.$$

$$113. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$114. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, |x| = h.$$

$$115. y^2 = 2x, y = 2, x = 0.$$

$$116. y = \sin^2 x, y = x \sin x, (0 \leq x \leq \pi).$$

$$117. 2py = x^2, 2qx = y^2, p > 0, q > 0.$$

$$118. y = e^{-x} \sqrt{\sin x}, (0 \leq x < +\infty).$$

$$119. y = e^x + 6, y = e^{2x}, x = 0.$$

$$120. y = x, y = x + \sin^2 x, (0 \leq x \leq \pi).$$

$$121. x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), y = 0, (0 \leq t \leq 2\pi).$$

$$122. x = 2t - t^2, y = 4t - t^3.$$

$$123. x = \frac{a}{t^2 + 1}, y = a \frac{t^3 - t}{t^2 + 1}.$$

$$124. x = a \operatorname{ch}^3 t, y = a \operatorname{sh}^3 t, x = 2\sqrt{2} a.$$

$$125. x = \frac{2at^2}{1+t^2}, y = \frac{2at^3}{1+t^2}, x = a.$$

$$126. x = a(1 + \cos t), y = a(\operatorname{tg} t + \sin t), x = \frac{3a}{2}.$$

5-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ МЕХАНИК МАСАЛАЛАРГА ТАТБИҚИ

1. Статик момент. Оғирлик маркази.

Маълумки, эгри чизиқнинг Ox ва Oy ўқларига нисбатан статик моментлари қуйидаги формулалар билан ифодаланади:

$$K_x = \int_0^s y d s, \quad K_y = \int_0^s x d s,$$

бу ерда $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ эгри чизик ёйининг дифференциали бўлиб, s эса берилган эгри чизик узунлиги.

Берилган эгри чизикнинг оғирлик марказлари эса қуйидаги формулалар билан ҳисобланади:

$$\bar{x} = \frac{K_y}{s}, \quad \bar{y} = \frac{K_x}{s}.$$

Амалий жиҳатдан бу формулаларда s ни эгри чизикнинг аналитик тасвирида эркин ўзгарувчи ролини ўйнаган t , x ёки θ ўзгарувчилар орқали ифодаланади.

16-мисол. Тенгламаси $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ бўлган тўғри чизикнинг координата ўқлари орасига жойлашган қисми учун, унинг Ox ва Oy ўқларига нисбатан статик моментларини топинг.

$$K_x = \int_0^a b \left(1 - \frac{x}{a}\right) ds.$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} dx = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} dx.$$

$$\begin{aligned} K_x &= \frac{b \sqrt{a^2 + b^2}}{a} \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx = \frac{b \sqrt{a^2 + b^2}}{a} \cdot a - \\ &= \frac{b \sqrt{a^2 + b^2}}{a^2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^a = b \sqrt{a^2 + b^2} - \frac{b \sqrt{a^2 + b^2}}{2} = \\ &= \frac{b \sqrt{a^2 + b^2}}{2}; \end{aligned}$$

$$K_y = \int_0^a x \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} dx = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \int_0^a x dx = \frac{a \sqrt{a^2 + b^2}}{2};$$

17-мисол. Тенгламаси $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ билан берилган астроиданинг биринчи чоракда ётган қисмининг Ox ва Oy ўқларига нисбатан статик моментларини ҳамда унинг оғирлик марказини топинг.

Равшанки, бу астроиданинг параметрик тенгламаси $x = a \cos^3 \varphi$, $y = a \sin^3 \varphi$ бўлади. У ҳолда

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \\ &= \sqrt{(-3a \cos^2 \varphi \sin \varphi)^2 + (3a \sin^2 \varphi \cos \varphi)^2} d\varphi = \\ &= 3a \cos \varphi \cdot \sin \varphi d\varphi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 \varphi \cdot 3a \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi d\varphi = \\ &= 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi d(\sin \varphi) = 3a^2 \cdot \frac{1}{5} \sin^5 \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^2}{5}. \end{aligned}$$

Худди шунга ўхшаш

$$K_y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x ds = \frac{3a^2}{5}.$$

Оғирлик маркази $\bar{x} = \frac{K_y}{S}$, $\bar{y} = \frac{K_x}{S}$ бўлиб, бу ерда

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \cos \varphi \cdot \sin \varphi d\varphi = \\ &= -3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d(\cos \varphi) = -3a \frac{\cos^2 \varphi}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2}; \\ \bar{x} &= \frac{3a^2}{5} : \frac{3a}{2} = \frac{2a}{5}; \quad \bar{y} = \frac{3a^2}{5} : \frac{3a}{2} = \frac{2a}{5}. \end{aligned}$$

$$\text{Демак, } (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{2a}{5}; \frac{2a}{5} \right).$$

2. Геометрик фигураларнинг статик моментлари. Оғирлик маркази.

Агар геометрик фигура юқоридан $y = y(x)$, пастдан Ox ўқи, ён томонидан $x = a$ ва $x = b$ вертикал чизиқлар билан чегараланган бўлса, бундай фигуранинг Ox ва Oy ўқларига нисбатан статик моментлари ва оғирлик маркази қуйидаги формулалар билан ҳисобланади:

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx, \quad M_y = \int_a^b xy dx, \quad (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{S}, \frac{M_x}{S} \right).$$

Бу ерда $S = \int_a^b y(x) dx$ геометрик фигурининг юзи.

18-мисол. $y = a - x$, $y = 0$, $x = 0$ чизиқлар билан чегараланган фигурининг Ox , Oy ўқларига нисбатан статик моментлари ва оғирлик марказининг координаталарини топинг.

Юқорида келтирилган формулаларга асосан:

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^a y^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^a (a-x)^2 dx = -\frac{1}{2 \cdot 3} (a-x)^3 \Big|_0^a = \frac{a^3}{6};$$

$$\begin{aligned} M_y &= \int_0^a (a-x) x dx = \int_0^a ax dx - \int_0^a x^2 dx = \\ &= a \cdot \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3} = \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} = \frac{a^3}{6}; \end{aligned}$$

$$S = \int_0^a (a-x) dx = \int_0^a a dx - \int_0^a x dx = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2};$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{S}, \frac{M_x}{S} \right) = \left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3} \right).$$

19-мисол. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ циклоиданинг бир тармоғи ва Ox ўқ билан чегараланган фигурининг оғирлик марказини топинг.

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} y^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dx = \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - 3\cos^3 t) dt = \\ &= \frac{a^2}{2} \cdot 2\pi + \frac{3a^2}{4} \cdot 2\pi = \pi a^2 + 3 \cdot \frac{1}{2} \pi a^2 = \frac{5\pi a^2}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \int_0^{2\pi} xy dx = \int_0^{2\pi} a(t - \sin t) a^2 (1 - \cos t)^2 dt = \\ &= a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t) (1 - \cos t)^2 dt = 3\pi^2 a^3. \end{aligned}$$

$$S = \int_0^{2\pi} y dx = \int_0^{2\pi} y(t) x'_t dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = 3\pi a^2,$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{S}, \frac{M_x}{S} \right) = \left(\pi a, \frac{5a}{6} \right).$$

3. Кучнинг бажарган иши.

Агар ўзгарувчи $F(x)$ куч Ox ўқ бўйлаб таъсир этаётган бўлса, у ҳолда бу кучнинг $[a, b]$ сегментда бажарган иши

$A = \int_a^b F(x) dx$ формула орқали ифодаланади.

20-мисол. Агар 5 кГ куч пружинани 25 см га чўзса, у ҳолда пружинани 60 см га чўзиш учун қандай иш бажариш керак?

Гук қонунига биноан:

$$F(x) = k \cdot x, \quad 5 \text{ кГ} = k \cdot 0,25 \text{ м} \Rightarrow k = 20 \Rightarrow F = 20 \cdot x.$$

$$A = \int_0^{0,6} 20x dx = \frac{20 \cdot x^2}{2} \Big|_0^{0,6} = 10 \cdot 0,36 = 3,6 \text{ кг} \cdot \text{м}.$$

21-мисол. Цилиндрда диаметри 20 см ва узунлиги 80 см бўлган поршень ҳаракат қилади. Бу цилиндр $P_0 = 10 \text{ кг/см}^2$ Сосим остида буғ билан тўлдирилган бўлса, температурани ўзгартмай қандай иш бажарилганда, буғнинг ҳажми икки баробар камаяди?

Жараён изотермиклиги сабабли, Бойль-Марриот қонунига биноан: $P \cdot V = P_0 \cdot V_0$ бўлиб,

$$A = \int_{V_0}^{2V_0} P dv = \int_{V_0}^{2V_0} \frac{P_0 \cdot V_0}{v} dv = P_0 V_0 \ln 2.$$

Бундан: $V_0 = 10^2 \pi \cdot 80 = 8000 \pi \text{ см}^2$ ва $P_0 = 10 \text{ кг/см}^2$ сабабли,

$$A = 80000 \pi \cdot \ln 2 \text{ кг} \cdot \text{см} = 800 \pi \ln 2 \text{ кг} \cdot \text{м}$$

бўлади.

XI боб

СОНЛИ ҚАТОРЛАР

1-§. АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАР. СОДДА ТЕОРЕМАЛАР

Бирор

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

ҳақиқий сонлар кетма-кетлиги берилган бўлсин.

1-таъриф. Қуйидаги

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

ифода қатор (сонли қатор) деб аталади. Уни қисқача

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ каби белгиланади:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

$a_1, a_2, a_3, \dots$ лар (1) қаторнинг ҳадлари, a_n эса қаторнинг умумий ҳади дейилади.

Ушбу

$$A_1 = a_1,$$

$$A_2 = a_1 + a_2,$$

$$A_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

$$\dots$$

$$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$\dots$$

йиғиндилар (1) қаторнинг қисмий йиғиндилари дейилади. Бу қисмий йиғиндилардан иборат

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$$

кетма-кетликни қараймиз.

2-таъриф. Агар $n \rightarrow \infty$ да $\{A_n\}$ кетма-кетлик чекли лимитга эга, яъни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$$

бўлса, у ҳолда (1) қатор яқинлашувчи дейилади, A сон шу қаторнинг йиғиндисини дейилади.

Бу ҳолда

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

каби ёзилади.

Агар $n \rightarrow \infty$ да $\{A_n\}$ кетма-кетликнинг лимити чексиз бўлса, ёки бу лимит мавжуд бўлмаса, у ҳолда (1) қатор узоқлашувчи дейилади.

Шундай қилиб, таърифга кўра $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг яқинла-

шувчи ёки узоқлашувчи бўлишини аниқлаш учун унинг қисмий йиғиндилар кетма-кетлигини $\{A_n\}$ нинг лимитини қараш керак экан. Қисмий йиғинди A_n нинг лимитини топишда унинг ифодасини қулайроқ шаклда ёзиб олиш лозим. Кўпгина ҳолларда қуйида келтириладиган формулалардан фойдаланиш мақсадга мувофиқ бўлади:

$$B_n(x) = x + \dots + x^n = \begin{cases} \frac{x}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}, & \text{агар } x \neq 1 \text{ бўлса,} \\ n, & \text{агар } x = 1 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

$$C_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{(n-1)x^n - nx^{n+1}}{(1-x)^3}, & \text{агар } x \neq 1 \text{ бўлса,} \\ \frac{n(n+1)}{2}, & \text{агар } x = 1 \text{ бўлса.} \end{cases} \quad (2)$$

$$D_n(x) = x + x^3 + x^5 + \dots + x^{2n-1} = \begin{cases} \frac{x}{1-x^2} - \frac{x^{2n+1}}{1-x^2}, & \text{агар } x \neq \pm 1 \text{ бўлса,} \\ \pm n, & \text{агар } x = \pm 1 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$E_n(x) = 1 + 3x^2 + 5x^4 + \dots + (2n-1)x^{2n-2} = \begin{cases} \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{(2n+1)x^{2n+2} - (2n-1)x^{2n}}{(1-x^2)^3}, & \text{агар } x \neq \pm 1, \\ \pm n^2, & \text{агар } x = \pm 1. \end{cases}$$

Бу формулаларни келтириб чиқариш қийин эмас. Биз улардан бирини, масалан, учинчисининг тўғрилигини кўрсатамиз.

Равшанки, $x = \pm 1$ бўлганда

$$D_n(1) = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n, \quad D_n(-1) = -1 - 1 - 1 - \dots - 1 = -n$$

бўлади.

Энди $x \neq \pm 1$ бўлсин. Бу ҳолда тенгликнинг ҳар икки томонини x га кўпайтириб, топамиз:

$$\begin{aligned} x \cdot D_n(x) &= x(x + x^3 + x^5 + \dots + x^{2n-1}) = \\ &= x^2 + x^4 + \dots + x^{2n}. \end{aligned}$$

Агар

$$x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{2n} = x^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^2)^n = \\ = x^2 \frac{1 - (x^2)^n}{1 - x^2} = x^2 \frac{1 - x^{2n}}{1 - x^2}$$

бўлишини эътиборга олсак, унда ушбу

$$x \cdot D_n(x) = x^2 \frac{1 - x^{2n}}{1 - x^2}$$

тенгликка эга бўламиз. Бундан эса

$$D_n(x) = \frac{x - x^{2n+1}}{1 - x^2} = \frac{x}{1 - x^2} - \frac{x^{2n+1}}{1 - x^2}$$

бўлиши келиб чиқади.

1-мисол. Ушбу

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг.

Берилган қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$A_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$$

бўлади. Бу A_n ни юқорида келтирилган (2) формуладан фойдаланиб бундай ёзиб оламиз:

$$A_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \\ = \frac{1}{\frac{2}{3}} + \left[\frac{-\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \right] = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} - \\ - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

$n \rightarrow \infty$ да лимитга ўтиб, топамиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right] = \frac{2}{3}.$$

Демак, берилган қатор яқинлашувчи, унинг йиғиндиси

$$A = \frac{2}{3}.$$

2-мисол. Ушбу

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} + \dots$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг. Бу қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$A_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} = \frac{1}{2} \left(1 + 3 \cdot \frac{1}{2} + \dots + 5 \cdot \frac{1}{2^2} + \dots + (2n-1) \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \right)$$

булади Уни (2) формуладан фойдаланиб, бундай ёзиб оламиз:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2} \left[1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^4 + \dots + \right. \\ &\quad \left. + (2n-1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{2n-2} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1 + \frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2} \right)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(2n+1) \frac{1}{2^{n+2}} - (2n+1) \cdot \frac{1}{2^n}}{\left(1 - \frac{1}{2} \right)^3} \right] = \frac{1}{2} \left(6 - \frac{2n+3}{2^{n-1}} \right). \end{aligned}$$

Натижада

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(6 - \frac{2n+3}{2^{n-1}} \right) = 3$$

булишини топамиз. Демак, қатор яқинлашувчи, унинг йиғиндиси

$$A = 3.$$

3-мисол. Ушбу

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots$$

қаторни яқинлашишга текширинг. Бу қаторнинг қисмий йиғиндисини ҳисоблаб, унинг лимитини топамиз:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - + \dots + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right), \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right) = \frac{1}{3}.$$

Демак, берилган қатор яқинлашувчи ва унинг йигиндиси

$$A = \frac{1}{3}$$

4-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг. Бу қаторнинг қисмий йигиндиси

$$A_n = (\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + \sqrt{1}) + (\sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}) +$$

$$+ \dots + (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$$

бўлади. Уни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$A_n = [(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{1} - \sqrt{2})] + [(\sqrt{4} - \sqrt{3}) +$$

$$+ (\sqrt{2} - \sqrt{3})] + [(\sqrt{5} - \sqrt{4}) + (\sqrt{3} - \sqrt{4})] +$$

$$+ \dots + [(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) + (\sqrt{n} - \sqrt{n+1})] =$$

$$= [(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2})] + [(\sqrt{4} - \sqrt{3}) -$$

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})] + [(\sqrt{5} - \sqrt{4}) - (\sqrt{4} - \sqrt{3})] + \dots +$$

$$+ [(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})] = 1 - \sqrt{2} +$$

$$+ (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}.$$

Натижада

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \right) = 1 - \sqrt{2}.$$

Бўлишини топамиз. Демак, қатор яқинлашувчи, унинг йигиндиси $A = 1 - \sqrt{2}$.

5-мисол. Ушбу

$$1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot n + \dots$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг. Бу қаторнинг қисмий йигиндиси

$$A_n = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot n$$

бўлади. Юқорида келтирилган (2) формуладан фойдаланиб (бу формулада $x = -1$ деб) A_n ни ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{[1-(-1)]^2} + \frac{(n-1)(-1)^n - n(-1)^{n-1}}{[1-(-1)]^2} = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{(n-1)(-1)^n - n(-1)^{n-1}}{4} = \frac{1}{4} [1 + \\ &\quad + 2n(-1)^n + (-1)^{n+1}]. \end{aligned}$$

Агар $n = 2k$ бўлса,

$$A_{2k} = \frac{1}{4} (1 + 4k - 1) = k,$$

агар $n = 2k - 1$ бўлса,

$$A_{2k-1} = \frac{1}{4} (1 - 2(2k - 1) + 1) = \frac{1}{4} (4 - 4k) = 1 - k$$

бўлади.

Бундан эса

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_{2k} = +\infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} A_{2k-1} = -\infty$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, қатор узоқлашувчи.

Содда теоремалар

Бирор

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

қатор берилган бўлсин. Бу қаторнинг дастлабки m та ҳадини ташлаш натижасида юзага келган

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots \quad (6)$$

қатор (1) қаторнинг қолдиғи дейилади.

1-теорема. Агар (1) қатор яқинлашувчи бўлса, унинг исталган (6) қолдиғи ҳам яқинлашувчи бўлади ва, аксинча, (6) қолдиқнинг яқинлашувчи бўлишидан берилган (1) қаторнинг яқинлашувчи бўлиши келиб чиқади.

2-теорема. Агар (1) қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси A га тенг бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \dots + ca_n + \dots$$

қатор ҳам яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $c \cdot A$ га тенг бўлади ($c \neq 0$ ўзгармас сон).

3-теорема. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots$$

қаторлар яқинлашувчи бўлиб, уларнинг йиғиндиси мос равишда A ва B га тенг бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) + \dots$$

қатор ҳам яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $A + B$ га тенг бўлади.

4-теорема. Агар (1) қатор яқинлашувчи бўлса, $n \rightarrow \infty$ да қаторнинг умумий ҳади a_n нолга интилади. (Бу теорема қатор яқинлашувчи бўлишининг зарурий шартини ифодалайди.)

6-мисол. Ушбу

$$0,001 + \sqrt[3]{0,001} + \sqrt[3]{0,001} + \dots + \sqrt[n]{0,001} + \dots$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг.

Берилган қаторнинг умумий ҳади $a_n = \sqrt[n]{0,001}$ бўлади. Агар

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{0,001} = 1 \neq 0$$

бўлишни эътиборга олсак, унда берилган қатор учун қатор яқинлашишининг зарурий шартининг бажарилмаслигини кура-миз. Демак, берилган қатор узоқлашувчи.

7-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$$

қатор яқинлашувчи бўладими?

Бу қаторнинг умумий ҳади учун

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{(\ln n)^{1/n}} = \frac{1}{e^{\frac{\ln \ln n}{n}}} = \frac{1}{e^{\frac{\ln \ln n}{n}}} \rightarrow 1$$

бўлганлиги сабабли қатор узоқлашувчи бўлади.

2-§. МУСБАТ ҲАДЛИ ҚАТОРЛАР. СОЛИШТИРИШ ТЕОРЕМАЛАРИ

Бирор

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

қатор берилган бўлсин.

Агар (1) қаторда $a_n \geq 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) бўлса, у ҳолда (1) қатор *мусбат ҳадли қатор* ёки қисқача *мусбат қатор* деб аталади.

5-теорема. Мусбат қатор $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ нинг яқинлашувчи бўлиши учун унинг қисмий йиғиндилари кетма-кетлиги $\{A_n\}$ нинг юқоридан чегараланган бўлиши зарур ва етарли.

8-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots \quad (\alpha > 1)$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг.

Бу қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$A_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}$$

бўлади. Равшанки, $\{A_n\}$ — ўсувчи кетма-кетликдир.

Иккинчи томондан,

$$\begin{aligned} A_{2n+1} &= 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^\alpha} = \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} \right) + \dots + \left(\frac{1}{(2n)^\alpha} + \frac{1}{(2n+1)^\alpha} \right) < \\ &< 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{2}{4^\alpha} + \dots + \frac{2}{(2n)^\alpha} = \end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} \left(1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{n^{\alpha}} \right) = 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} A_n$$

булиб, ундан

$$A_n < 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} A_n$$

булиши келиб чиқади. Кейинги теигисизликдан топамиз:

$$A_n < \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1} - 1} (n = 1, 2, 3, \dots, \alpha > 1).$$

Демак, $\{A_n\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланган. Юқоридан келтирилган теоремага кўра берилган қатор яқинлашувчи бўлади.

Одатда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ қаторни *умумлашган гармоник қатор* деб юртилади.

Шундай қилиб умумлашган гармоник қатор $\alpha > 1$ бўлганда яқинлашувчи бўлади. Бу қатор $\alpha \leq 1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади.

9-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг.

Бу қаторнинг умумий ҳади

$$a_n = a^{\ln n}$$

ни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\begin{aligned} a^{\ln n} &= e^{\ln a \cdot \ln n} = e^{\ln a \cdot \ln a} = (e^{\ln a})^{\ln a} = \\ &= n^{\ln a} = \frac{1}{n^{-\ln a}} \end{aligned}$$

Натижада берилган қатор ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-\ln a}}$$

кўринишга келади.

Агар $-\ln a > 1$ бўлса, қатор яқинлашувчи бўлади.

$$-\ln a > 1 \Rightarrow \ln \frac{1}{a} > \ln e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} > e \Rightarrow a < \frac{1}{e}.$$

Демак, берилган қатор $a < \frac{1}{e}$ бўлганда яқинлашувчи бўлади.

($a > \frac{1}{e}$ бўлганда қатор узоқлашувчи бўлади.)

Энди мусбат қаторларни солиштириш теоремаларини қараймиз.

Иккита

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots$$

мусбат қаторлар берилган бўлсин.

6-теорема. Агар n нинг бирор $n_0 (n_0 > 1)$ қийматидан бошлаб барча $n > n_0$ лар учун

$$a_n \leq b_n$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторнинг яқинлашувчи бўлишидан $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг ҳам яқинлашувчи бўлиши ёки $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг узоқлашувчи бўлишидан $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторнинг ҳам узоқлашувчи бўлиши келиб чиқади.

7-теорема. Агар $n \rightarrow \infty$ да $\frac{a_n}{b_n}$ нисбат ушбу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \quad (0 \leq k < +\infty)$$

лимитга эга бўлса,

а) $k < \infty$ бўлганда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторнинг яқинлашувчи бўлишидан $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг яқинлашувчи бўлиши;

б) $k > 0$ бўлганда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторнинг узоқлашувчи бўли-

шидан $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг ҳам узоқлашувчи бўлиши келиб чиқади.

Натижа. Агар

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$$

лимит ўринли бўлиб, $0 < k < \infty$ бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ва

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторлар бир вақтда ёки яқинлашувчи, ёки узоқлашувчи бўлади.

8-теорема. Агар n нинг бирор n_0 қийматидан бошлаб барча $n > n_0$ лар учун

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторнинг яқин-

лашувчи бўлишидан $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг ҳам яқинлашувчи

бўлиши ёки $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг узоқлашувчи бўлишидан

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторнинг ҳам узоқлашувчи бўлиши келиб чиқади.

10-мисол. Ушбу

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

қаторнинг яқинлашувчилигини кўрсатинг.

Математик индукция усули билан кўрсатиш мумкинки,

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \quad (n > 1)$$

бўлади. Маълумки,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

геометрик қатор $\left(q = \frac{1}{2} < 1\right)$ яқинлашувчи. Демак, 6-теоремага кўра берилган қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.

11-мисол. Ушбу

$$\frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \dots + \frac{1}{1000 \cdot n + 1} + \dots$$

қаторнинг узоқлашувчи эканлигини кўрсатинг.

Равшанки,

$$1000 \cdot n + 1 < 1000n + 1000 = 1000(n+1).$$

Бундан эса

$$\frac{1}{1000(n+1)} < \frac{1}{1000n+1} \left(\frac{1}{n+1} < \frac{1000}{1000n+1} \right)$$

булиши келиб чиқади.

Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

қаторнинг узоқлашувчи эканини эътиборга олсак, унда 6-теоремага кўра берилган қаторнинг узоқлашувчи бўлишини аниқлаймиз.

12-мисол. Ушбу

$$\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} + \dots$$

қаторнинг узоқлашувчи бўлишини кўрсатинг.

Энг олдин қуйидаги тенгсизликни ҳосил қиламиз:

$$(2n-1)(2n+1) < (2n+1)(2n+1) < (2n+2)(2n+2) = 4(n+1)^2,$$

$$\frac{1}{2(n+1)} > \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$$

Маълумки,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

қатор узоқлашувчи. Демак, 6-теоремага кўра, берилган қатор узоқлашувчи бўлади.

13-мисол. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n > 0; n = 1, 2, 3, \dots)$$

қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

қаторнинг яқинлашувчи бўлишини кўрсатинг.

Қатор яқинлашувчининг зарурий шартидан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

бўлади. Демак, шундай $n_0 \in N$ сонни топиш мумкинки, барча $n > n_0$ лар учун

$$0 \leq a_n < 1$$

бўлади. Унда $n > n_0$ учун

$$a_n^2 \leq a_n$$

бўлади. 6-теоремадан фойдаланиб берилган қаторнинг яқинлашувчи бўлишини топамиз.

14-мисол. Агар $a_n > 0$, $b_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) бўлиб

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$$

бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$$

қаторлар ҳақида нима дейиш мумкин?

Равшанки,

$$\max(a_n, b_n) \geq a_n,$$

$$\max(a_n, b_n) \geq b_n.$$

Шу сабабли $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$ қатор ҳаммавақт узоқлашувчи

бўлади.

Аммо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$$

қатор яқинлашувчи бўлиши мумкин.

Масалан,

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & \text{агар } n \text{ жуфт сон бўлса,} \\ \frac{1}{n}, & \text{агар } n \text{ тоқ сон бўлса,} \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{агар } n \text{ жуфт сон бўлса,} \\ \frac{1}{n^2}, & \text{агар } n \text{ тоқ сон бўлса} \end{cases}$$

бўлганда

$$\min(a_n, b_n) = \frac{1}{n^2}$$

бўлади.

Равшанки,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

қатор яқинлашувчи.

15-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

Бу қаторни гармоник қатор $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ билан солиштирамиз.

Равшанки, бу икки қатор умумий ҳадлари нисбатининг лимити

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = 1$$

бўлади. Юқорида келтирилган натижага кўра берилган қатор узоқлашувчи бўлади.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги қаторларнинг яқинлашувчилигини кўрсатинг ва йиғиндиларини топинг:

$$1. \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) + \dots$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)(n+3)}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-n}{n(n+1)(n+3)}.$$

$$8. \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{2}{n(n+1)} \right).$$

$$9. \sum_{n=2}^{\infty} \ln \frac{n^2-1}{n^2+1}.$$

$$10. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\alpha}{2^{n+1}} \cdot \sin \frac{3\alpha}{2^{n+1}}.$$

$$12. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)}.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2^n} \cdot \cos \frac{3}{2^n}.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{1}{2n^3}$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$$

Қуйидаги қаторлар учун қатор яқинлашувчилигининг зарурий шarti бажарилмаслигини кўрсатинг:

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0,02}$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^m$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^3-2}{3n^3+4} \right)^{n^2}$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln^2(n+1)}$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} (n^2+2) \ln \frac{n^2+1}{n^2}$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \arctg \frac{1}{n+2}$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}}$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{n+1}{n^2}}{\left(n + \frac{1}{n} \right)^n}$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} (n^2+9) \arcsin \frac{1}{n^2+5}$$

Солиштириш (таққослаш) аломатларидан фойдаланиб қуйидаги қаторларни яқинлашишга текширинг: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$$25. a_n = \frac{\sin^3 3n}{n\sqrt{n}}.$$

$$26. a_n = \frac{\operatorname{arctg} n}{n^3 + 1}.$$

$$27. a_n = \frac{\cos \frac{\pi}{4n}}{\sqrt[5]{2n^3 - 1}}.$$

$$28. a_n = \frac{\ln n + \sin n}{n^3 + 2 \ln n}.$$

$$29. a_n = \frac{\arcsin \frac{n-1}{n+1}}{n\sqrt{\ln(n+1)}}.$$

$$30. a_n = \frac{\operatorname{arctg}(n^3 + 2n)}{3^n + n^3}.$$

$$31. a_n = \frac{\pi^2}{e^n}.$$

$$32. a_n = (3n + n^3)e^{-\sqrt{n}} \cdot \ln n.$$

$$33. a_n = \frac{\left(3 - 2\cos^2 \frac{\pi n}{3}\right) \cdot e^n}{n^2 \cdot 2^n}.$$

$$34. a_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n^3\sqrt{n}}\right).$$

$$35. a_n = \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

36. $a_n \geq 0$ бўлиб, $\{n a_n\}$ кетма-кетлик чегараланган бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ қатор яқинлашувчилигини исботланг.

3-§. МУСБАТ ҚАТОРЛАР УЧУН ЯҚИНЛАШУВЧИЛИК АЛОМАТЛАРИ

Бирор

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

мусбат қатор берилган бўлсин.

1°. Коши аломати. Агар (1) қаторда $n \in N$ нинг бирор $n_0 (n_0 > 1)$ қийматидан бошлаб барча $n > n_0$ қийматлари учун

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \quad \left(\sqrt[n]{a_n} > 1 \right)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, (1) қатор яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлади.

Агар (1) қатор учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = k$$

лимит мавжуд бўлиб, $k < 1$ бўлса, у ҳолда (1) қатор яқинлашувчи, $k > 1$ бўлса, (1) қатор узоқлашувчи бўлади.

2°. Даламбер аломати. Агар (1) қаторда $n \in N$ нинг бирор $n_0 (n_0 > 1)$ қийматларидан бошлаб барча $n > n_0$ қийматлари учун

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1 \quad \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \right)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, (1) қатор яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлади.

Агар (1) қатор учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$$

лимит мавжуд бўлиб, $d < 1$ бўлса, у ҳолда (1) қатор яқинлашувчи, $d > 1$ бўлса, (1) қатор узоқлашувчи бўлади.

3°. Раабе аломати. Агар (1) қаторда $n \in N$ нинг бирор $n_0 (n_0 > 1)$ қийматларидан бошлаб барча $n > n_0$ қийматлари учун

$$n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) > r > 1 \quad \left(n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) < 1 \right)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, (1) қатор яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлади.

Агар (1) қатор учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \rho \quad (\rho = \text{const})$$

лимит мавжуд бўлиб, $\rho > 1$ бўлса, у ҳолда (1) қатор яқинлашувчи, $\rho < 1$ бўлса, (1) қатор узоқлашувчи бўлади.

4°. Кошининг интеграл аломати. Агар $f(x)$ функция $[1, +\infty]$ да аниқланган, узлуксиз ва ўсмайдиган

бўлиб, $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ шу функция учун бошланғич функция ва

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x f(t)dt$$

лимит мавжуд ва чекли бўлганда (1) қатор яқинлашувчи, бу лимит мавжуд бўлмаганда ёки чексиз бўлганда (1) қатор узоқлашувчи бўлади.

5°. Гаусс аломати. Агар (1) қатор учун

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}} \quad (|\theta_n| < c, \varepsilon > 0)$$

бўлса у ҳолда:

- а) $\lambda > 1$ бўлганда (1) қатор яқинлашувчи,
- б) $\lambda < 1$ бўлганда (1) қатор узоқлашувчи,
- в) $\lambda = 1$ бўлиб, $\mu > 1$ бўлганда (1) қатор яқинлашувчи,
- г) $\lambda = 1$ бўлиб, $\mu \leq 1$ бўлганда (1) қатор узоқлашувчи

бўлади.

16-мисол. Ушбу

$$\frac{4}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \dots + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \dots (3n+1)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \dots (4n-2)} + \dots$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг.

Бу қаторни текширишда Даламбер аломатидан фойдаланамиз.

Равшанки,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3n+1)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (4n-2)}, \\ a_{n+1} &= \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3n+1)(3n+4)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (4n-2)(4n+2)}, \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{3n+4}{4n+2}. \end{aligned}$$

Кейинги тенгликда $n \rightarrow \infty$ да лимитга ўтиб, топамиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{4n+2} = \frac{3}{4} < 1.$$

Демак, берилган қатор яқинлашувчи.

17-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n}$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг.

Берилган қатор учун:

$$a_n = \frac{n^5}{2^n + 3^n}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^5}{2^{n+1} + 3^{n+1}}$$

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^5}{2^{n+1} + 3^{n+1}} \cdot \frac{2^n + 3^n}{n^5} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 \cdot \frac{3^n \left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{3^{n+1} \left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]} = \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 \cdot \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}, \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 \cdot \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} = \frac{1}{3} < 1$$

бўлганлиги сабабли, Даламбер аломатига кўра, берилган қатор яқинлашувчи

18-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{2})^n}$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг.

Агар

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n(\sqrt{2})^n}, \\ \sqrt[n]{a_n} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}}, \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

бўлишини эътиборга олсак, унда Коши аломатига кўра, берилган қаторнинг яқинлашувчи бўлишини топамиз.

19-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг.

Равшанки,

$$a_n = \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}, \quad a_{n+1} = \frac{3+(-1)^{n+1}}{2^{n+2}},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3+(-1)^{n+1}}{2^{n+2}} \cdot \frac{2^{n+1}}{3+(-1)^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3+(-1)^{n+1}}{3+(-1)^n}.$$

Агар $n = 2k$ бўлса,

$$\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{4},$$

агар $n = 2k-1$ бўлса,

$$\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3+1}{3-1} = 1$$

бўлади. Демак, $n \rightarrow \infty$ да $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ нинг лимити мавжуд эмас.

Биномбарин, Даламбер аломатига кўра берилган қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлиши тўғрисида бирор қарорга келиб бўлмайди.

Аммо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3+(-1)^n}{2}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Демак, Коши аломатига кўра берилган қатор яқинлашувчи бўлади.

20-мисол. Ушбу $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$$a_n = (2 - \sqrt[n]{a}) (2 - \sqrt[n-1]{a}) \dots (2 - \sqrt[2]{a}), \quad a > 0$$

қаторни яқинлашишга текширинг.

$\frac{a_n}{a_{n+1}}$ нисбатни қарайлик. Бунда $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{2 - \sqrt[n]{a}}$ эканини кўриш қийин эмас.

$$\sqrt[n+1]{a} = e^{\ln a / (n+1)} = 1 + \frac{\ln a}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{\ln^2 a}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= 1 + \frac{\ln a}{n} + \frac{\gamma_n}{n^2}, \quad |\gamma_n| < C$$

муносабатдан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{1 - \frac{\ln a}{n} - \frac{\gamma_n}{n^2}} = 1 + \frac{\ln a}{n} + \frac{\gamma_n^*}{n^2},$$

бу ерда $|\gamma_n^*| < M$.

Гаусс аломатига кўра $\ln a > 1$, яъни $a > e$ бўлганда қатор яқинлашувчи, $\ln a \leq 1$, яъни $a \leq e$ бўлганда эса узоқлашувчи бўлади.

Агар қаралаётган мисолда Даламбер аломатидан фойдаланадиган бўлсак, у ҳолда қатор яқинлашувчилиги ёки узоқлашувчилиги ҳақида бирор қарорга келиб бўлмайди, чунки:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Бундан ташқари яқинлашувчи $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ва узоқлашувчи

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ қаторларга нисбатан $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ эканини кўриш қийин эмас.

Мисол ва масалалар

Коши ва Даламбер аломатларидан фойдаланиб қуйидаги қаторларни яқинлаштишга текширинг:

$$37. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}.$$

$$38. \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}.$$

$$39. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}.$$

$$40. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an}{n+2}\right)^n, \quad a > 0.$$

$$41. \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+1} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}.$$

$$42. \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n^2+4n+5}.$$

$$43. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(3n^2+2n+1)^{(n+3)/2}}.$$

$$44. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3} \right)^{n^{3/2}}.$$

$$45. \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}.$$

$$46. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{a}{n} \right)^{n^2}, \quad a > 0.$$

$$47. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! a^n}{n^n}, \quad a \neq e, \quad a > 0$$

$$48. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

$$49. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(3n+4) 3^n}.$$

$$50. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{3^n n!}.$$

$$51. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 6 \cdots (3n)}{(n+1)!_3} \arcsin \frac{1}{2^n}.$$

$$52. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n!} \operatorname{arctg} \frac{1}{3^n}.$$

Раабе ва Гаусс аломатларидан фойдаланиб қуйидаги қаторларни яқинлашишга текширинг:

$$53. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p \frac{1}{n^q}.$$

$$54. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+p}}.$$

$$55. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

$$56. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdots \ln (n+1)}{\ln (2+a) \ln (3+a) \cdots \ln (n+1+a)}, \quad a > 0.$$

$$57. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{(a + \sqrt{2})(a + \sqrt{3}) \cdots (a + \sqrt{n+1})}, \quad a > 0.$$

$$58. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1) \cdots (p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q}.$$

$$59. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{p(p+1) \cdots (p+n-1)}{q(q+1) \cdots (q+n-1)} \right]^{\alpha} \quad (p > 0, q > 0).$$

Қуйидаги қаторларни яқинлашишга текширинг $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)$:

$$60. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}.$$

$$61. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^p (\ln \ln n)^q}.$$

$$62. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}.$$

$$63. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)},$$

$$64. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}.$$

$$65. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{[(\ln n)^n]}$$

$$66. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot e^{-\sqrt[3]{n}}$$

$$67. \sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1).$$

$$68. \sum_{n=1}^{\infty} (n^{n^\alpha} - 1).$$

$$69. a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sin \frac{\pi}{n}.$$

$$70. a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right).$$

$$71. a_n = e^{\sqrt{n}/(n^2+1)} - 1.$$

$$72. a_n = \operatorname{tg} \frac{1}{n} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n}.$$

$$73. a_n = \frac{n^n}{(n!)^2}.$$

$$74. a_n = \frac{(2n+2)!}{\pi^n (n!)^2}.$$

$$75. a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}}.$$

$$76. a_n = \frac{\ln(n!)}{n^n}.$$

$$77. a_n = \int_{\frac{n}{n}}^{\frac{(n+1)n}{n}} \frac{\sin^2 x}{x} dx.$$

$$78. a_n = \int_0^{1/n} \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^4} dx.$$

$$79. a_n = \frac{1}{\int_0^n \sqrt{1+x^4} dx}$$

$$80. a_n = \int_n^{n+2} e^{-\sqrt[4]{x}} dx.$$

$$81. a_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{x \sin^3 x}{1+x^3} dx.$$

$$82. a_n = \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(2n)!}.$$

83. Агар $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = a$ бўлиб, $a \neq 0$ бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор узоқлашувчи бўлишини исботланг.

84. Агар $a_n > 0$, $\forall n \in N$ ларда $a_{n+1} \leq a_n$ бўлиб, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлса, $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$ эканини исботланг.

85. Агар $a_n > 0$ бўлиб, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор хусусий йиғиндилари кетма-кетлигининг бирорта қисмий кетма-кетлиги юқоридан чекланган бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг яқинлашувчилигини исботланг.

86. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ қаторлар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|, \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$$

қаторлар ҳам яқинлашувчи бўлишини исботланг.

87. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор ($a_n > 0$) берилган бўлиб, $n > n_0$ ларда $(1 - \sqrt[n]{a_n}) \frac{n}{\ln n} > p > 1$ бўлса, берилган қатор яқинлашувчи,

$n > n_0$ ларда $\left(1 - \sqrt[n]{a_n}\right) \frac{n}{\ln n} \leq 1$ бўлса узоқлашувчи эканини исботланг.

88. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор ($a_n > 0$) берилган бўлсин. Шундай $\alpha > 0$

мавжуд бўлиб, $n > n_0$ ларда $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} > 1 + \alpha$ бўлса, қатор

яқинлашувчи, $n > n_0$ ларда $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leq 1$ бўлса, қатор узоқлашувчи эканини исботланг. (Логарифмик аломат.)

4-§. ИХТИЁРИЙ ҲАДЛИ ҚАТОРЛАР, КОШИ ТЕОРЕМАСИ.

АБСОЛЮТ ВА ШАРТЛИ ЯҚИНЛАШУВЧИ ҚАТОРЛАР

Бирор $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ қатор берилган бўлсин.

8-теорема (Коши теоремаси). Иштиёрий $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг яқинлашувчи бўлиши учун $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in \mathbb{N}$ сон мавжуд бўлиб, барча $n > n_0$ ва $m = 1, 2, 3, \dots$ лар учун

$$|A_{n+m} - A_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon$$

тенгсизлиكنинг бажарилиши зарур ва етарли.

Иштиёрий $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор билан бирга бу қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қаторни қарайлик.

9-теорема. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.

3-таъриф. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қатор яқинлашувчи бўлса, у

ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор абсолют яқинлашувчи қатор деб ата-
лади.

4-таъриф. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлиб, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$
қатор узоқлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор шартли
яқинлашувчи қатор дейилади.

21-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$$

қаторнинг яқинлашувчилигини Коши критерийси ёрдамида
курсатинг.

$|A_{n+m} - A_n|$ ифодани қарайлик.

$$|A_{n+m} - A_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{\sin kx}{k(k+1)} \right| <$$

$$< \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+m} < \frac{1}{n+1}$$

Демак, $\forall n \in \mathbb{N}$ ва $\forall m \in \mathbb{N}$ ларда

$$|a_{n+1} + \dots + a_{n+m}| < \frac{1}{n+1}$$

тенгсизлик ўринли.

Энди $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ эканини ҳисобга олган ҳолда, $\forall \varepsilon > 0$
га кўра, шундай $n_0 \in \mathbb{N}$ мавжуд бўлиб, барча $n > n_0$ ва
 $\forall m \in \mathbb{N}$ лар учун $|A_{n+m} - A_n| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли эка-

нини кўрамиз. Бундан эса $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$ қаторнинг яқинла-
шувчи эканлиги келиб чиқади.

22-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

гармоник қатор узоқлашувчилигини Коши теоремаси ёрдамида кўрсатинг.

$|A_{n+m} - A_n|$ муносабатда $\forall k \in N$ учун $n = k$, $m = k$ деб олсак,

$$|A_{n+m} - A_n| = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{k+k} > \\ > k \cdot \frac{1}{2 \cdot k} = \frac{1}{2}.$$

Бундан кўринадики, $|A_{n+m} - A_n| < \varepsilon$ тенгсизлик $\varepsilon < \frac{1}{2}$ учун бажарилмайди. Демак, қаралаётган қатор узоқлашувчи.
23-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \operatorname{arctg} \frac{\cos^3 n}{\sqrt[3]{n}}$$

қаторнинг абсолют яқинлашувчилиги кўрсатилсин.

Маълумки, $x > 0$ ларда $0 \leq \ln(1+x) \leq x$ тенгсизлик, $x \in R$ ларда $|\operatorname{arctg} x| \leq |x|$ тенгсизлик ўринли. У ҳолда

$$|a_n| \leq \frac{1}{n} \left| \frac{\cos^3 n}{\sqrt[3]{n}} \right| \leq \frac{1}{n^{4/3}},$$

булиб, бу $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг абсолют яқинлашувчилигини билдиради.

Қуйидаги

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots, \\ (a_n > 0 \text{ ёки } a_n \leq 0)$$

қатор ҳадларининг ишоралари навбат билан ўзгариб келадиган қатор деб аталади.

Лейбниц аломати. Агар

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

булиб, $\forall n \in N$ ларда $0 < a_{n+1} \leq a_n$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлади.

Ушбу $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ қатор Лейбниц аломатларининг барча шартларини қаноатлантиради, яъни $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ монотон камайиб нолга интилади. Демак, қатор яқинлашувчидир.

Айни вақтда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қатор узоқлашувчи, чунки

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ қатор узоқлашувчи.

Шундай қилиб, қаралаётган қатор шартли яқинлашувчидир.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги қаторларнинг яқинлашувчилигини Коши теоремаси ёрдамида исботланг:

$$89. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$$

$$90. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos x^n}{n^2}$$

$$91. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx - \cos (n+1)x}{n}$$

$$92. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{10^n} \quad (|C_n| < 10)$$

$$93. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{(n+1)(n+3)}$$

Қуйидаги қаторларнинг узоқлашувчилигини Коши теоремаси ёрдамида исботланг:

$$95. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$$

$$96. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$97. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+4}$$

$$98. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

$$99. 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

Қуйидаги қаторларнинг абсолют яқинлашувчилигини исботланг:

$$100. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \left(2n + \frac{\pi}{4} \right)}{n \sqrt[n]{n+2}}$$

$$101. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} (-n)^n}{\sqrt[n]{2n^3+3n+1}}$$

$$102. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln^2 n}{2^n}$$

$$103. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} \arcsin \frac{n}{4n}$$

$$104. \sum_{n=1}^{\infty} \cos^3 n \cdot \operatorname{arctg} \frac{n+1}{n^2+2}$$

$$105. \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \sin n e^{-\sqrt[n]{n}}$$

$$106. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(2n)!}$$

$$107. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 (n+1)}{n \sqrt{n+1}}.$$

$$108. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(n+1)^n}.$$

$$109. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n+1)/2} \frac{2^n + n^2}{3^n + n^2}.$$

$$110. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n \sin \frac{1}{n}} - \cos \frac{1}{n} \right) \cos \pi n.$$

【Куйидаги қаторларни яқинлашишга текширинг:

$$111. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n+1}}.$$

$$112. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{\sqrt{n}}.$$

$$113. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{n}} \right).$$

$$114. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2 + 1}}.$$

$$115. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{\sqrt{n^2+4}} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\sqrt{n}}.$$

$$116. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \left(n + \frac{\pi}{4} \right)}{\ln^2 (n+1)}.$$

$$117. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos^2 2n}{\sqrt{n}}.$$

$$118. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^3 \left(\frac{n}{2} \right)}{\sqrt[n]{n+1}}.$$

$$119. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}}{\sqrt[n]{n}} \cdot \sin 2n.$$

$$120. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{\sqrt[n+1]{n}} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n.$$

$$121. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt[n]{n + \sin n}}.$$

$$122. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{\sin n}{\sqrt[n]{n}} \right).$$

$$123. \sum_{n=1}^{\infty} \sin (\pi \sqrt{n^2 + 1}).$$

$$124. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \left(n + \frac{1}{n} \right)}{\ln \ln (n+1)}.$$

$$125. \sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2.$$

$$126. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}.$$

$$127. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^3}{n}.$$

Қуйидаги қаторларни абсолют [ва шартли яқинлашишга текширинг:

$$128. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}.$$

$$129. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p + \frac{1}{n}}}.$$

$$130. \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right].$$

$$131. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2n} x}{n}.$$

$$132. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}}.$$

$$133. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[100]{n}}.$$

$$134. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{n^{100}}{2^n}.$$

$$135. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}.$$

$$136. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p.$$

$$137. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n}.$$

ЖАВОБЛАР ВА КЎРСАТМАЛАР

I боб

1, 2, 3, 4-мисолларда тенгликнинг чап томонидаги тўпламнинг яхтиёрий элементи ўнг томондаги тўпламга тегишли ва аксинчасини кўрсатиш керак. 5. $A \setminus (B \cap C) = A \cap (\overline{B \cap C})$ ва $(\overline{A \cap C}) = (\overline{B \cup C})$ муносабатлардан фойдаланинг. 6. $A \setminus (B \cup C) = A \cap (\overline{B \cup C})$ ва $(\overline{B \cup C}) = (\overline{B \cap C})$ муносабатлардан фойдаланинг. 7. 4-мисолдан ва $A \cup \overline{A} = U$ ва $U \cap X = X$ муносабатлардан фойдаланинг. 8. $A \setminus (B \setminus C) = A \cap (\overline{B \setminus C}) = A \cap (\overline{B \cap \overline{C}}) = A \cap (\overline{B \cap \overline{C}}) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$. 27. $\sup \{x + y\} = \sup \{x\} + \sup \{y\}$ эканини кўрсатаялик. Фараз қилайлик, $\sup \{x\} = a$ $\sup \{y\} = b$ бўлсин. У ҳолда $\forall x \in \{x\}, \forall y \in \{y\}$ учун $x \leq a$ ва $y \leq b$ бўлади. Бундан $x + y \leq a + b$ га эга бўламиз. Иккинчидан, $\forall \varepsilon > 0, \exists x'_\varepsilon \in \{x\}, \exists y'_\varepsilon \in \{y\}$ топилиб, $x'_\varepsilon > a - \frac{\varepsilon}{2}$ $y'_\varepsilon > b - \frac{\varepsilon}{2}$ бўлади. Бундан $x'_\varepsilon + y'_\varepsilon > a + b - \varepsilon$ га эга бўламиз. Аммо $x'_\varepsilon + y'_\varepsilon \in \{x + y\}$ Демак, $\sup \{x + y\} = a + b = \sup \{x\} + \sup \{y\}$ экан. 28, 29-машқлар ҳам юқоридагига ўхшаш исботланади. 30. $m < n$ ва $m, n \in \mathbb{N}$ бўлгани сабабли $0 < \frac{m}{n} < 1$. Энди $\sup \left\{ \frac{m}{n} \right\} = 1, \inf \left\{ \frac{m}{n} \right\} = 0$ эканини кўрсатиш қийин эмас.

II боб

1-§. 19. $x_n = n, y_n = -n$ $x_n + y_n$ чегараланган. $x_n = \sqrt{n+1}, y_n = \sqrt{n}$ $x_n - y_n$ чегараланган. Аммо $\{x_n \cdot y_n\}$ чегараланмаган бўлади. Ҳақиқатан, $\forall E > 0, \exists n'_E \in \mathbb{N} |x_{n'_E}| > \sqrt{E}$ ва $n''_E \in \mathbb{N} |y_{n''_E}| > \sqrt{E}$. Агар $n_E = \max \{n'_E, n''_E\}$ деб олсак, у ҳолда $(\forall E > 0) \exists n_E \in \mathbb{N}$ топилиб $|x_{n_E} \cdot y_{n_E}| > E$ бўлади. 21. Шарт эмас. $x_n = (-1)^n \sqrt{n}$. 22. Фа-

раз қилайлик, барча $n \in N$ лар учун $|x_n| \leq M$ бўлсин. У ҳолда $|y_n| =$

$$= \left| \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right| \leq \frac{|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|}{n} \leq \frac{M + M + \dots + M}{n} =$$

$$= \frac{n \cdot M}{n} = M. \text{ Тескариси ҳар доим ўринли эмас. Масалан, } x_n =$$

$$= \begin{cases} \sqrt[n]{n}, & n = k^3 \\ 0, & n \neq k^3 \end{cases}$$
 бўлса, у ҳолда $(\forall k) \in N \ k^3 \leq n \leq (k+1)^3$ лар учун

$$y_n = \frac{1 + 2 + \dots + k}{n}; \ n \geq k^3 \text{ бўлгани сабабли } \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k^3}. \text{ У ҳолда}$$

$$y_n \leq \frac{1 + 2 + \dots + k}{k^3} = \frac{k(k+1)}{2k^3} \leq 1. \text{ Аммо биз биламизки, } x_n \text{ чега-}$$

раланган эмас. 40. 2. 41. $\frac{1}{2}$; 42. $\frac{1}{2}$; 43. 1; 44. 1; 45. $0 \leq a \leq 1$

бўлса, 0; $a > 1$ бўлса, 1; $a = 1$ бўлса, $\frac{1}{2}$ 46. Агар $a = b$ бўлса, $\frac{1}{3}$;

$a > b$ бўлса, $\frac{1}{6}$; $a < b$ бўлса, $\frac{3}{7}$. 47. 1. 48. $\frac{1}{2}$. Кўрсатма.

$$\frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1} \right)$$
 49. $\frac{1}{3}$. Кўрсатма. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 +$

$$+ \dots + n(n+1) = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (1 + 2 + 3 + \dots + n) =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}. \text{ 50. } \frac{\sin x}{x}. \text{ Кўрсатма. } 2^n.$$

$$\sin \frac{x}{2^n} \ S_n = \sin x, \ S_n = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \dots \cos \frac{x}{2^n}. \text{ 51. } \frac{1}{a(a-1)};$$

52. 1. Кўрсатма. $1 < \sqrt[n]{n^3 + n + 1} < \sqrt[n]{3n^3} = \sqrt[n]{3} \cdot \sqrt[n]{n^3}.$

53. 5. Кўрсатма. $5 < \sqrt[n]{2^n + 5^n} < 5 \sqrt[n]{2}.$ 54. 3. Кўрсатма. $3 <$

$$< \sqrt[n]{2^n 3^0 + \dots + 2^0 3^n} < 3 \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \dots + \left(\frac{2}{3}\right) + 1} <$$

$$< 3 \sqrt[n]{n}. \text{ 55. 1. Кўрсатма. } 1 < \sqrt[n]{1^n + \dots + n^n} < \sqrt[n]{n^n + n^n +}$$

$$\sqrt[n]{+\dots + n^n} = (\sqrt[n]{n})^{n+1}. \text{ 56. 1. 57. 1. 59. } |x_{n+m} - x_n| < \frac{1}{n(n+1)} +$$

$$+ \dots + \frac{1}{(n+m)(n+m-1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+m} < \frac{1}{n}; \ N(e) = \left\{ \left\lceil \frac{1}{e} \right\rceil + 1, 0 < e < 1 \right.$$

деб олсак, у ҳолда $\forall e > 0 \exists N = N(e) (\forall n) (n > N(e))$ ва $(\forall m) \in N,$
 $|x_{n+m} - x_n| < e.$ 61. Агар $\alpha > 1$ бўлса, барча натурал $n > 1$ учун

$$\frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{n^3} < \frac{1}{n(n-1)}$$
 бўлади. Фараз қилайлик, $\alpha \leq 1$ бўлсин. У ҳолда

$\exists s_0 = \frac{1}{2} > 0$, ихтиёрий натурал N учун $\exists n_N = N + 1 > N$ ва $\exists m_N = N + 1$ топиладики, улар учун $|x_{n_N + m_N} - x_{n_N}| > \frac{1}{2}$ бўлади. Ҳақиқатан,
 $|x_{n+m} - x_n| = \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \dots + \frac{1}{(n+m)^\alpha} > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+m} > \frac{m}{n+m}$. Хусусан, $|x_{n_N + m_N} - x_{n_N}| > \frac{N+1}{(n_N+1) + (N+1)} = \frac{1}{2}$. 62. $|x_{n+m}^2 - x_n^2| = |x_{n+m} - x_n| |x_{n+m} + x_n| \leq |x_{n+m} - x_n| (|x_{n+m}| + |x_n|) \leq 2c |x_{n+m} - x_n|$, чунки $\forall n \in \mathbb{N}$ учун $|x_n| \leq c \sqrt{|x_{n+m}| - |x_n|} = \frac{|x_{n+m}| - |x_n|}{\sqrt{|x_{n+m}| + |x_n|}} > \frac{|x_{n+m} - x_n|}{\sqrt{|x_{n+m}| + |x_n|}}$.
 65. 1; 0. 66. $+\infty$; 0. 67. 1; 0. 70. 1; $-\frac{1}{2}$. 71. $-\infty$. 72. $e+1$; $-\left(e + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. 73. 2; 1. 74. 1; 0.

III боб

1. $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$. 2. $(-1, 1)$. 3. R . 4. $(0, 1)$. 5. R . 6. $\{x \in [-4, 4], x \neq \pm \sqrt{16 - \frac{\pi^2}{4}}\}$. 7. $n \in \{-1, 0, 1\}$ бўлганда $x = \emptyset$; $n > 1$ бўлганда $X = \left(\frac{1}{n}, 1\right]$; $n < -1$ бўлса, $X = \left[-1, \frac{1}{n}\right)$. 8. R . 9. $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$.
10. $\left\{x \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ 11. $\left\{x \in \left[2\pi n - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right] \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$
12. $\left\{x \in \left(2\pi n - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$. 13. $[2, 4]$. 14. $R \setminus \{-1; 1\}$. 15. $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. 16. $(-1; 0) \cup (0; 1) \cup (2; +\infty)$. 17. $f(x) = \sqrt{-x^2}$, $x = \{0\}$ ёки $g(x) = e^{\sqrt{x-4}}$. $\sqrt{4-x}$, $x = \{4\}$. 20. $x = \{2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$, $J = \{4\}$. 21. $X = (-\infty, 0) \cup (0; +\infty)$; $Y = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. 22. $X = (0, +\infty)$, $Y = (0, +\infty)$. 23. $X = |R$, $Y = [-1, +\infty)$. 24. $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $Y = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. 25. $X = |R$, $Y = [0; 1)$. 26. $X = [-100, +\infty)$, $Y = [-1; 1]$. 27. $x = |R \setminus \left\{\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{\pi k, k \in \mathbb{Z}\}\right\}$, $Y = \{1\}$ 28. $X = |R$, $y = [-1; 2]$. 49. $|R$ да ўсувчи. 50. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ тўпلامда камаювчи, $[-1; 0) \cup [1; +\infty)$ тўпلامда ўсувчи. 51. $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$

- да камаювчи. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ да ўсувчи. 55. R да камаювчи. 57. $(-\infty; -1]$ да ўсувчи; $[1, +\infty)$ да камаювчи. 58. $\left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ да камаювчи; $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ да ўсувчи. 59. $(-\infty; -1]$ да ўсувчи; $[-1; +\infty)$ да камаювчи. 60. K да ўсувчи. 79. Тоқ. 80. Тоқ. 81. Тоқ. 82. Жуфт. 83. Жуфт. 84. Жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас. 85. Жуфт. 86. Жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас. 87. Жуфт. 88. Жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас. 89. Жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас. 90. Жуфт. 100. $y = \sqrt{1 - 2 \ln(-x)}$, $x \in [-\sqrt{e}; 0)$. 101. $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $x \in (0; +\infty)$. 102. $y = \sin x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. 103. $y = 1 - \sqrt{\log_2 2x}$, $x \geq 1/2$. 104. $a = 1$, $b = 0$ ва $a = -1$, $b = 0$. 105. $\alpha = \pm 1$. 106. $f(x) \circ g(x) = x$, $x \geq 0$ $g \circ f(x) = |x|$, $x \in R$. 107. $f \circ g(x) = g \circ f(x) = |x|$, $x \in [-1; 1]$. 108. $f \circ g(x) = (x + 5)^5$, $x \in R$ $g \circ f(x) = x^5 + 5$, $x \in R$. 109. $f \circ g(x) = x$, $g \circ f(x) = x$. 110. $f \circ g(x) = 1$, $g \circ f(x) = 1 + (\operatorname{sgn} x)^2$. 111. $f \circ g(x) = 1$, $g \circ f(x) = 1$. 112. $f \circ g(x) = \ln \sin^2 x$, $x \neq n\pi$, $n \in Z$, $g \circ f(x) = \sin \ln x^2$, $x \neq 0$. 113. $f \circ g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, +\infty), \\ x^2, & x \in (-\infty, 0), \end{cases}$ $g \circ f(x) = 0$ $x \in R$. 114. Агар $a^2 \neq 1$ бўлса, $f(f(\dots f(x)) \dots) = \frac{x}{\sqrt{a^{2n} + \frac{a^{2n}-1}{a^2-1}x^2}}$, агар $a^2 = 1$ бўлса, $f(f(\dots f(x)) \dots) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$. 149. Мавжуд эмас. 150. 1; -1. 151. 1; 1. 152. 0; 0. 153. -1; 1. 154. $\frac{1}{3}$; 0. 155. $+\infty$; 1. 156. 110; 109. 159. $2\sqrt{a}$. 160. 0. 161. 3. 162. $\frac{n}{m}$. 163. $\frac{n}{m}$. 164. $\frac{n-m}{2}$. 165. 3. 166. $\frac{7}{12}$. 167. $\frac{mn}{am+bn}$. 168. $2n$. 169. 1. 170. $\frac{n(n+1)}{2}$. 171. $\frac{m}{n}$. 172. 1. 173. -1. 174. $-\frac{9}{128}$. 175. $\cos a$. 176. $\frac{1}{2}$. 177. $\frac{1}{2\pi}$. 179. 5. 180. $-\frac{7}{2}$. 181. 4. 182. 1. 183. 18. 184. $\frac{1}{2}$. 185. $e^{2\alpha i g \alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$. 186. $\frac{1}{\sqrt{x}}$. 187. 1. 188. $\sqrt{e}$. 189. $\ln 3$. 190. 5. 191. $e^{3/2}$. 192. $\sqrt{ab}$. 193. 0. 194. $\sqrt{2}$. 203. $\frac{\sin x}{x}$. 205. $\alpha =$

$= 1, \beta = -3$. 206. $\alpha = -1, \beta = \frac{1}{3}$. 207. $\alpha = 1, \beta = 0$. 208. $\alpha > 0, \beta$ — нхтиёрий; $\alpha \leq 0, \beta < 0, \alpha > \beta$. 209. $\alpha + \beta > 0$. 210. $\alpha > \beta$.

IV боб

12. $x = -2$. 13. $x = 0$. 14. $x \in \mathbb{Z}$. 15. $x \in \mathbb{Z}$. 16. $x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}$.
 17. $x = 0, x = 1$. 18. $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$. 19. $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$. 20. $x = \frac{\pi}{2} +$
 $+ n\pi, n \in \mathbb{Z}$. 21. $x = 0$. 22. $x = 0$. 42. $a = n$. 43. $a = 1$. 44. $a = \ln c$.
 45. $a = 1$. 46. $a = e$. 47. $a = 0$. 48. $a = 1$. 67. Текис узлуксиз. 68. Те-
 кис узлуксиз эмас. 69. Текис узлуксиз. 70. Текис узлуксиз эмас.
 71. Текис узлуксиз. 72. Текис узлуксиз. 73. Текис узлуксиз. 74. Те-
 кис узлуксиз. 75. Текис узлуксиз. 77. Агар $\delta \geq e$ бўлса, $w(\delta) = e^2$;
 агар $0 < \delta < e$ бўлса, $w(\delta) = \delta(2\delta - \delta)$. 78. $w(\delta) = \frac{\delta}{a(a + \delta)}$.
 80. $\forall \delta > 0$ учун $w(\sigma, f) = +\infty$. 81. $\forall \delta > 0$ учун $w(\delta, f) = +\infty$.

V боб

1. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, (x > 0)$. 2. $f'(x) = 2^x(\ln 2 \sin x + \cos x)$. 3. $f'(x) =$
 $= \left(\frac{4}{3}\right) \sqrt[3]{x}$. 4. $f'(x) = 2^{x+1} \ln 2$. 5. $f'(x) = \frac{1}{x}, (x > 0)$. 6. $f'(x) =$
 $= 5 \cos 5x$. 7. $f'(x) = \frac{3}{(1 + 9x^2)}$. 8. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$. 9. $f'(1) = 1$.
 10. $f'(\pi/4) = 3$. 11. $f'(-2) = -5$. 12. $f'(0,1) = 0,03$ (ўнг ҳосил).
 13. $f'(0) = +\infty$. 14. $f'(0) = 0$. 15. $f'(x) = \left\{ (5/2) |x|^{3/2} \cos \frac{1}{x} \operatorname{sgn} x + \right.$
 $\left. + |x|^{1/2} \sin \frac{1}{x}, \text{ агар } x \neq 0 \text{ бўлса. } 0, \text{ агар } x = 0 \text{ бўлса.} \right.$ 16. Мавжуд, эмас.
 17. Мавжуд эмас. 18. Мавжуд эмас. 19. $f'(0) = 0$. 20. $f'(0) = 0$. 21. Мав-
 жуд эмас. 22. Мавжуд эмас. 23. $f'(0) = 0$. 24. $f'(0) = 0$. 25. Мавжуд
 эмас. 26. Мавжуд эмас. 27. $f'(0) = 0$. 28. $f'(0) = 0$. 29. Мавжуд эмас.
 30. $f'_+(1) = \ln 4, f'_-(1) = -\ln 4$. 31. $f'_+(0) = 1; f'_-(0) = -1; f'_-(\sqrt{\pi}) =$
 $= -\infty, f'_+(\sqrt{\pi})$ — мавжуд эмас. 32. $f'_-(-1) = f'_+(1) = +\infty,$
 $f'_+(-1)$ ва $f'_-(1)$ мавжуд эмас. 33. $f'(0) = 0$. 34. $f'_-(0) = 1;$
 $f'_+(0) = 0$. 35. $f'(0) = -\infty, f'_+(0) = 0$. 36. Мавжуд эмас. 37. Мав-

жуд эмас. 38. $f'_-(1) = -e$ $f'_+(1) = e$. 39. $f'_-(0) = -0$; $f'_+(0) = 4 + \infty$. 40. $f'(0) = \frac{1}{2}$; $f'(1) = \sin 1 + \cos 1 - 1$. 41. $x'(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

42. $x'(0) = -\frac{\sqrt{2}}{8}$. 43. $x'(1) = 5$. 44. $y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. 45. $y_k = (2k+1)\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. 46. $y' = -\frac{\ln 3}{x^3}$. 47. $y' = 175(x^{24} - x^{-5})$. 48. $y' = \sqrt{x}(x^{\sqrt{2}-1} + x^{-\sqrt{2}-1})$. 49. $y' = \frac{ad-cb}{(cx+d)^2}$. 50. $y' = 5(\sin x + x \cos x)$. 51. $y' = \operatorname{tg} x + \frac{x+1}{\cos^3 x}$. 52. $y' = \begin{cases} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}, & \text{арав} \\ 0, & \text{арав} \end{cases}$

$\begin{cases} x \neq 0 \text{ б\ddot{y}лса,} \\ x = 0 \text{ б\ddot{y}лса.} \end{cases}$ 53. $y' = (x^2 - 5x + 1)e^x$. 54. $y' = (a^3 + b^3)e^{ax} \sin bx$. 55. $y' = \left(\ln 2 \cdot \ln |x| + \frac{1}{x}\right)2^x$, $x \neq 0$. 56. $y' = -\frac{1}{x \ln x \log_2 x}$, $x > 0$; $x \neq 1$. 57. $y' = \frac{\ln x - 1}{\ln x \log_2 x}$, $x > 0$; $x \neq 1$. 58. $y' = 0$.

59. $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$. 60. $y' = \sqrt[3]{x^2 + 1} + \frac{2x^2}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}$

61. $y' = \frac{1 + 2\sqrt{x} + 4\sqrt{x}\sqrt{x+1}\sqrt{x}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+1}\sqrt{x} + \sqrt{x}\sqrt{x+1}\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\sqrt{x}} \cdot$

62. $y' = -2(\sin(\cos x) \cdot \cos(\cos x) \sin x + \cos(\sin x) \sin(\sin x) \cos x)$. 63. $y' = \cos x \cos(\sin x) \cos(\sin(\sin x))$.

64. $y' = \ln 2 \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \sin x \right) 2^{\cos x + \sin x}$. 65. $y' = e^x (\sin x + \cos x)$. 66. $y' = 2e^{x^2} (x \cos 2x - \sin 2x)$. 67. $y' = e^x (e^{e^x} + x e^x (\frac{1}{x} + \ln x))$.

68. $y' = x^x (1 + \ln x)$. 69. $y' = \frac{1}{x(\ln x) \ln(\ln x)}$; $(x > e)$. 70. $y' = \frac{1}{x^2 - a^2}$. 71. $y' = \frac{1}{x}$; $(x \neq 0)$. 72. $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$. 73. $y' = \operatorname{ctg} x$ $(2k\pi < x < (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z})$. 74. $y' = \frac{\cos \ln x}{x}$. 75. $y' = \frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$; $(|x| < a)$. 76. $y' = \frac{1}{1 + (1-x)^2}$. 77. $y' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$, $(|x| > 1)$.

78. $y' = \operatorname{sgn}(\cos x)$, $\left(x \neq \frac{2k-1}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$. 79. $y' = 1$. 80. $y' = 1$, $(|x| < 1)$. 81. $y' = \frac{a^2 + b^2}{(x+a)(x^2 + b^2)}$. 82. $y' = \sqrt{a^2 - x^2}$. 83. $y' = -$

$$-\frac{\arccos x}{x^2}, (0 < |x| < 1). \quad 84. y' = \frac{x \ln x}{(x^2 - 1)^{3/2}} \quad (x > 1). \quad 85. y' = \frac{x \arcsin x}{(1 - x^2)^{3/2}}, (|x| < 1). \quad 86. y' = \frac{e^x}{\sqrt{1 + e^{2x}}}. \quad 87. y' = \frac{1}{2(1 + x^2)}.$$

$$88. y' = (\sin x)^{1 + \cos x} (\operatorname{ctg}^2 x - \ln(\sin x)). \quad (2k\pi < x < (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$89. y' = \frac{\operatorname{ch}(\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x}. \quad 90. y' = -\frac{\sin x}{\operatorname{ch}^2(\cos x)}. \quad 91. y' = \operatorname{cth} x. \quad 92. y' = \frac{\operatorname{th} x}{\ln 10}.$$

$$93. y' = \frac{1}{\operatorname{ch} 2x}. \quad 94. f'(0) = 1000! \quad 109. \text{Хар доним ўринли эмас.}$$

$$110. \text{a) } \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2};$$

$$\text{б) } \frac{1+x - (n+1)^2 x^n + (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} - n^2 x^{n+2}}{(1-x)^3};$$

$$\text{в) } \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}; \quad \text{г) } \frac{\sin \frac{nx \cos \frac{n+1}{2} x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

$$111. \quad 1) y' = 2/3 \sin 2x |\sin x|; \quad 2) y' = \pi [x] \sin 2\pi x. \quad 112. \delta = \text{в/м.}$$

$$114. A = (0, -1); B(4, 3). \quad 115. x = 2k\pi \text{ да } \varphi = 45^\circ, k \in \mathbb{Z}; x = (2k+1)\pi \text{ да } \varphi = 135^\circ. k \in \mathbb{Z}. \quad 116. (1, 2e); (-3, -6e^{-3}). \quad 117. (-1, 14); (2, -13). \quad 118. (3, 0); (9/2, 27/16). \quad 119. (1 + \sqrt{2}, -\sqrt{2}); (1 - \sqrt{2}, \sqrt{2}). \quad 120. (1, -3). \quad 121. (5/4, \ln 4). \quad 122. (1/3(\pi/3 - 2k\pi), 1/\sqrt{3}), (1/3(-2\pi/3 - 2m\pi), -1/\sqrt{3}), k, m \in \mathbb{Z}. \quad 123. \mathbb{Q}. \quad 124. (\pi/2 + k\pi, 1), (k \in \mathbb{Z}). \quad 125. (1/2, -\ln 2). \quad 126. (k\pi, 0), (k \in \mathbb{Z}). \quad 127. (1/8, -1/16). \quad 128. x + 2y - 5 = 0. \quad 129. 2x - y = 0. \quad 130. y + 3x = 0. \quad 131. 3x + y - \frac{3\pi}{2} = 0. \quad 132. 29x - 12y - 54 = 0. \quad 133. ex - y = 0. \quad 134. (\pi/4 + k\pi, (-1)^k), (k \in \mathbb{Z}), \varphi = \frac{\pi}{2}. \quad 135. (1, 1);$$

$$\varphi = \arctg 3. \quad 136. (\sqrt{e}, 1/2), \varphi = 0. \quad 137. (1, 1); \varphi = \frac{5\pi}{4}. \quad 138. (0, 0); \varphi = \pi/2. \quad (1, 1); \varphi = \arctg 3/4. \quad 139. \varphi = \pi/2. \quad 140. \varphi = 2\pi/3. \quad 141. \varphi = \arctg 3/4. \quad 142. \varphi = \frac{3\pi}{4}. \quad 144. \varphi = 2 \arctg (1/|a|). \quad 145. n > 57,3.$$

147. Дифференциалланувчи. 148. Дифференциалланувчи. 149. Дифференциалланувчи эмас. 150. Дифференциалланувчи. 151. Дифференциалланувчи. 152. Дифференциалланувчи. 153. Дифференциалланувчи. 154. $x_0 = 1, x_1 = -1$ да дифференциалланувчи; $x_0 = 0$ да дифференциалланувчи эмас. 155. Дифференциалланувчи. 156. Дифференциалланувчи. 157. Дифференциалланувчи. 158. Дифференциалланувчи эмас. 159. Дифференциалланувчи. 160. Дифференциалланувчи. 161. Дифференциалланувчи. 162. Дифференциалланувчи. 163. Дифференциалланувчи. 164. $\frac{dx}{x \ln(x/2)}, x > 2.$

165. $\frac{\sin(1/\log_2 x)}{(x \log_2^2 x) \ln 2} dx$. 166. $\frac{(\ln x - 1) \ln 10}{\ln x \log_3 x} \cdot 10^{\log_3 x} dx$. 167. $-\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$
 $e^{1/(1-x)\sqrt{1+x}} dx$. 168. $2\sqrt[6]{\frac{\sin x}{(3-2\cos^2 x)}} dx$. 169. $\frac{1}{2} \frac{e^{x/2} - 1}{e^x + 1} dx$.
 170. $x^{1+x^2} (1 + 2 \ln x) dx$. 171. $e^x x^{e^x} (1/x + \ln x) dx$. 172. $(\ln 5)$
 $5^{x^2} x^2 (1 + \ln x) dx$. 173. $|\sin x|^{\cos x} (\cos x \operatorname{ctg} x - \sin x \ln |\sin x|) dx$. 174.
 $x^{1/(x-2)} (1 - \ln x) dx$. 175. $[x^{a-1} x^{x^a} (1 + a \ln x) + a^x x^{x^a} (1/x + \ln a$
 $\ln x) + x^x a^{x^x} \ln a (1 + \ln x)] dx$. 176. $-\frac{1}{e^x} (\log_x e)^2 dx$.
 177. $\frac{2^{1+\sqrt[3]{x}} \ln 2 \sin(2^{\sqrt[3]{x}}) \ln(\sec 2^{\sqrt[3]{x}})}{3 \sqrt[3]{x^2} \cos^2 2 \sqrt[3]{x}} dx$.
 178. $-\frac{\sin 2x}{\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^2 x}} \left(1 - \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}\right) dx$.
 179. $\frac{2 dx}{\sqrt{\sin x \cos x}}$. 180. $\frac{2e^2 dx}{e^2 + 1}$; 0. 181. $-(1/2) dx$.
 182. $(2 + \ln 4) dx$; 0. 183. Мавжуд эмас. 184. 4,0208; 5,00177.
 185. 0,485; -0,017. 186. 0,9342. 187. 0,079; 188. 0,925; 189. -0,8747;
 190. 1,043. 191. $\frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}$. 192. $\frac{3x}{(1-x^2)^2} + \frac{(1+2x^2) \arcsin x}{(1-x^2)^{5/2}}$,
 $(|x| < 1)$. 193. $1/x$ ($x > 0$). 194. $2e^{-x^2} (2x^2 - 1)$. 195. $\frac{2 \sin x}{\cos^2 x} \left(x \neq \frac{2k+1}{2} \pi, k \in \mathbb{Z}\right)$. 196. $-\frac{2}{x^2} \cos(\ln x)$, ($x > 0$). 197. $\frac{2x}{1+x^2} +$
 $+ 2 \arctg x$. 200. $-2 \cos 2x$. 201. $4 \operatorname{ch} 2x$. 202. $(x(1 + \ln x)^2 +$
 $+ 1) x^{x-1}$. 203. $-(2 \sin(\ln x))/x$. 204. $a^n n!$. 205. $4^{n-1} \cos\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right)$.
 206. $\frac{(a-b)^n}{2} \sin\left[(a-b)x + \frac{n\pi}{2}\right] + \frac{(a+b)^n}{2} \sin\left[(a+b)x + \frac{n\pi}{2}\right]$. 207. $n! ((1-x)^{-n-1} + (-1)^n (1+x)^{-n-1})$. 208.
 $(\ln^{n-1} 2) 2^{x-1} (\ln 2) (x-1) + n$. 209. $(-1)^n 2(n-2)! (x-n)(x-1)^{-n}$,
 $(n > 1)$. 210. $(n-2)! ((3n-x)(3-x)^{-n} + (-1)^n (3n+x)(3+x)^{-n})$,
 $n > 1$. 211. $f'(x) = \cos^2 x - x \sin 2x$. 1) $n = 4k-3$, $k = 2, 3, 4, \dots$
 $f^{(n)}(x) = -2^{n-1} x \sin 2x + 2^{n-2} n \cos 2x$; 2) $n = 4k-2$, $k = 1, 2, 3,$
 $\dots$ $f^{(n)}(x) = -2^{n-1} x \cos 2x - 2^{n-2} n \sin 2x$; 3) $n = 4k-1$, $k = 1,$
 $2, 3, \dots$, $f^{(n)}(x) = 2^{n-1} x \sin 2x - 2^{n-2} n \cos 2x$; 4) $n = 4k$, $k = 1,$
 $2, 3, \dots$ $f^{(n)}(x) = 2^{n-1} x \cos 2x + 2^{n-2} n \sin 2x$. 212. $\frac{5^{n-1} (2n-3)!}{2^n}$
 $(2n-5)x(1-5x)^{-(2n+1)/2}$, ($n > 1$). 213. $(2n-5)!! (3x^2 - 2nx +$

$+n^2-n)(1-2x)^{-(2n+1)/2}$ ($n>2$). 214. $e^{ax}(a^2+b^2)^{n/2} \cos(bx+c+n\varphi)$. $\cos \varphi = a/\sqrt{a^2+b^2}$; $\sin \varphi = b/\sqrt{a^2+b^2}$. 215. $(-1)^n x^{-n-1} e^{1/x}$. 216. $(n-1)!/x$. 217. $(-1)^{n-1}(n-1)!(1+x^2)^{-n/2} \sin(n \arctg x)$. 218. $-\frac{\pi}{2}(1+3^{100})$. 219. $(16-\frac{\pi}{4})\sqrt{2}$. 220. $(a^2+b^2)^{n/2} (\operatorname{ch} ax \cos(n\varphi - \frac{\pi n}{2}) \sin(bx + \frac{\pi n}{2}) + \operatorname{sh} ax \sin(n\varphi - \frac{\pi n}{2}) \cos bx + \frac{\pi n}{2})$ $\cos \varphi = a/\sqrt{a^2+b^2}$; $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 221. $f'(0)=0$; $f''(0)-$ мавжуд эмас. 222. $f'(0)=2$; $f''(0)=0$; $f'''(0)-$ мавжуд эмас. 223. $f'(0)=0$; $f''(0)-$ мавжуд эмас. 224. $f^{(n)}(0)=0$, $n \leq 50$, $f_{(0)}^{(51)}$ мавжуд эмас. 225. $f^{(n)}(0)=0$, $n \in N$. 228. $(-1)^n m! n!$ 229. $e^{uv} u^v \left(\frac{v}{u} du^3 + \ln u dv^3 + \left\{ 2 \cdot \left(u^{v-1} + \frac{1}{u} \right) v \ln u + \frac{2}{4} \right\} dudv + (u^v v + v - 1) \frac{v}{u^2} du^2 + (u^v + 1) \ln^2 u dv^2 \right)$. 230. $\frac{1}{u^3} (u^3 d^2 v - u v d^2 u - 2 u du dv + 2 v du^2)$. 231. $\frac{(u^3+v^3)(u d^2 v - v d^2 u) + 2 uv du^2}{(u^3+v^3)^2} + \frac{2(v^3-u^3) du dv - 2 uv dv^2}{(u^3+v^3)^2}$. 232. $\frac{1}{(u^3+v^3)^3} ((u^3+v^3)(u d^3 u + v d^3 v) + (v^3-u^3) du^3 - 4 uv du dv + (u^3-v^3) dv^2)$. 233. $(v+2) d^3 u + 2 du dv + u d^3 v$. 234. $\ln v d^3 u + \frac{2}{v} du dv + \frac{u}{v} d^3 v - \frac{u}{v^2} dv^2$. 235. $u^v \left(\frac{v}{u} d^3 u + \ln u d^3 v + \frac{v(v-1)}{u^2} du + \frac{2(v \ln u + 1)}{u} du dv + \ln^2 u dv^2 \right)$. 236. $\frac{v d^3 u - u d^3 v}{v^2} - \frac{2 dv (v du - u dv)}{v^3}$. 237. $\frac{1}{(u^3+v^3)^{3/2}} ((u^3-v^3)(u d^3 u + v dv) + (v du - u dv)^2)$. 238. $u^{99} v^{99} \{ 9900 v^2 du^3 + 20200 uv dudv + 10100 u^2 dv^3 \} + uv (100 v d^2 u + 101 u d^2 v)$

VI боб

2. $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$ 4. Роль теоремасининг шартлари етарли, лекин зарур эмас. Масалан, $(a, b) = (0, 2)$, $f(x) = x^3 - 3x$ функция учун $f'(1)=0$, лекин Роль теоремасининг шартлари бажарилмайди. 5. Йўқ, чунки $f'(0)$ мавжуд эмас. 12. Йўқ, чунки $g'(0)=0$. 13. Функция лимитининг Гейне таърифи ва Лагранж теоремасидан фойдаланинг. 14. $\frac{f(x)}{x}$ ва $\frac{1}{x}$ функцияларга Коши теоремасини қўлланг. 15. Лагранж теоремасидан

фойдаланинг. Тескари тасдиқ тўғри эмас, яъни функция ҳосиласининг чегараланмаганлигидан ҳар доим ҳам функциянинг чегараланмаганлиги келиб чиқавермайди. Масалан, $f(x) = \sqrt{x}$, $0 < x < a$. 17. $1 + x +$

$$+ \frac{1}{2} x^2 + 0 (x^2). \quad 18. e + ex + 0 (x^2). \quad 19. -\frac{x^2}{2} + 0 (x^2). \quad 20. e - \frac{x}{2} x +$$

$$+ \frac{11}{24} ex^2 - \frac{7e}{16} x^2 + 0 (x^2). \quad 21. 1 + x - x^2 + \frac{3}{2} x^2 + 0 (x^2). \quad 22. x -$$

$$- \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + 0 (x^2). \quad 23. x - \frac{1}{2} x^2 + 0 (x^2). \quad 24. \sum_{k=0}^n \frac{5^k}{e \cdot k!} x^k + 0 (x^n).$$

$$25. \sum_{k=0}^n \frac{2^k \sin \left(3 + k \frac{\pi}{2} \right)}{k!} + 0 (x^n). \quad 26. \sum_{k=0}^n \frac{\cos \left(2 + k \frac{\pi}{2} \right)}{2^k \cdot k!} x^k + 0 (x^n).$$

$$27. \ln 2 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{e}{2} \right)^k x^k + 0 (x^n). \quad 28. \sum_{k=0}^n (k+1) x^k + 0 (x^n).$$

$$29. \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2 (\ln 3)^k}{k!} x^k + 0 (x^n). \quad 30. -x + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k k}{(k-1)!} x^k +$$

$$+ 0 (x^n). \quad 31. \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} 2^k + 1}{k} x^k + 0 (x^n). \quad 32. \ln 2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} - 2^{-k}}{k} x^k + 0 (x^n). \quad 33. 3 + \sum_{k=1}^n [3 + k(k-1) 2^{k-2}]$$

$$\frac{(-1)^k}{k!} x^k + 0 (x^n). \quad 34. - \sum_{k=3}^n x^k + 0 (x^n). \quad 35. -\frac{1}{3} - \frac{2}{9} x -$$

$$- \frac{13}{12} \sum_{k=2}^n \left(\frac{2}{3} \right)^k \cdot x^k + 0 (x^n). \quad 36. \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} - 7 \cdot 2^{-(k+1)}}{3} x^k +$$

$$+ 0 (x^n). \quad 37. \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} (x-2)^k + 0 ((x-2)^n).$$

$$38. \sum_{k=0}^n \frac{2^k \sin \left(\frac{k\pi}{2} - 1 \right)}{k!} (x-1)^k + 0 ((x-1)^n). \quad 39. -e^{-2} +$$

$$+ \sum_{k=1}^n \frac{e^{-2} 2^{k-1} (k-2)}{k!} (x+1)^k + 0 ((x+1)^n).$$

$$40. \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k e^2 2^{k-2}}{k!} (k^3 + 3k + 4)(x+1)^k + 0((x+1)^n).$$

$$41. \sum_{k=0}^n \frac{e^{-1} 2^{k-2} (k-5)}{(k-1)!} (x+1)^k + 0((x+1)^n). \quad 42.$$

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^{k-1} \cos 1 \cdot 2^{2k-1}}{(2k)!} (x+1)^{2k} + \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{\sin 1 (-1)^k 2^{2k}}{(2k+1)!} (x+1)^{2k+1} + 0((x+1)^n). \quad 43. \ln 2 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (-1)^{k-1} \left(x - \frac{1}{2}\right)^k +$$

$$+ 0\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^n\right). \quad 44. \frac{\ln 5}{3} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \left(\frac{7}{5}\right)^k - \frac{(x-1)^k}{3k} + 0((x-$$

$$-1)^n. \quad 45. 3 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (k-2)}{k(k+1)} (x-1)^k + 0((x-1)^n). \quad 46. \sum_{k=0}^n (-$$

$$-1)^{k+1} (1 + 1/3^{k+1}) (x-2)^k + 0((x-2)^n). \quad 47. -1/2. \quad 48. 1/2. \\ 49. 1/24. \quad 50. 1/2. \quad 51. 0. \quad 52. -2. \quad 53. -e/2. \quad 54. 1. \quad 55. 1/2. \quad 56. \\ 1/2. \quad 57. -1/2. \quad 58. 1. \quad 59. 1/3. \quad 60. 17/21. \quad 61. -\pi. \quad 62. -\pi. \quad 63. \\ 2 + \ln 2. \quad 64. 1/3. \quad 65. -4/3.$$

VII боб

1. Функция $-\infty < x < -1$ да камаювчи, $-1 < x < 1$ да ўсувчи, $1 < x < \infty$ да камаювчи. 2. Функция $-\infty < x < -1$ да камаювчи, $-1 < x < 1$ да ўсувчи; $1 < x < \infty$ да камаювчи. 3. Функция ўсувчи. 4. $(-\infty, 6)$ да ↗, $(6, +\infty)$ да ↘. 5. $(-\infty, -3/2) \cup (-1/2, +\infty)$ да ↗, $(-3/2, -1/2)$ да ↘. 6. $(-\infty, 1/3)$ да ↗, $(1/3, +\infty)$ да ↘. 7. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ да ↗, $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ да ↘. 8. $\left(\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$ да ↗, $\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$ да ↘ ($k=0; \pm 1, \pm 2, \dots$). 9. $\left(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right) \cup \left(-\frac{1}{2k+1}, -\frac{1}{2k+2}\right)$ да ↗, $\left(\frac{1}{2k+2}, \frac{1}{2k+1}\right) \cup \left(-\frac{1}{2k}, -\frac{1}{2k+1}\right)$ да ↘ ($k=0, 1, 2, \dots$). 10. $(0, 1/\sqrt{e})$ да ↘, $(1/\sqrt{e}, +\infty)$ да ↗. 11. $(2k - 3/4, 2k + 1/4)$ да ↗, $(2k + 1/4, 2k + 5/4)$ да ↘ ($k \in \mathbb{Z}$). 12. $(-\infty, 0) \cup (2/\ln 2, +\infty)$ да ↘, $(0, 2/\ln 2)$ да ↗. 13. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

да $\searrow$. 14. $(0, n)$ да $\nearrow$, $(n, +\infty)$ да $\searrow$.
 15. $(e^{-\frac{7\pi}{12}} + 2k\pi, e^{\frac{13\pi}{12}} + 2k\pi)$ да $\nearrow$, $(e^{\frac{17\pi}{12}} + 2k\pi, e^{\frac{13\pi}{12}} + 2k\pi)$ да $\searrow$, $(k \in \mathbb{Z})$.
 16. $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ да $\nearrow$. 17. $(-1, -\frac{2}{3})$ да $\searrow$,
 $(-2.5, +\infty)$ да $\nearrow$. 18. $(0, +\infty)$ да $\searrow$. 19. $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$
 да $\searrow$. 20. $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ да $\nearrow$, $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$
 да $\searrow$, $(k \in \mathbb{Z})$. 21. $f'(x)$ функция (a, b) да $\nearrow$ сувчи бўлиши шарт эмас.
 Масалан, $f(x) = x + \sin x$ функция $x \in \mathbb{R}$ да $\nearrow$ сувчи, лекин $f'(x) = \cos x$
 $\nearrow$ сувчи эмас. 40. $x = 0$ да $\min y = 0$; $x = \pm 1$ да $\max y = 1$. 41. $x = 2$
 да $\max y = 1$; $x = 1$ ва $x = 3$ а $\min y = 3/4$. 42. $x = 0$ да $\max y = 2$.
 43. $x = 1$ да $\max y = e^{-1} \approx 0,368$. 44. $x = 1$ да $\min y = 0$; $x = e^2 \approx$
 $\approx 7,389$ да $\max y = \frac{4}{e^2} \approx 0,541$. 45. $x = 1/2$ да $\max y = -4$. 46. $x =$
 $= -1$ да $\max y = -2$; $x = 1$ да $\min y = 2$. 47. $x = +\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ да
 $\min y = \frac{-\sqrt{2}}{2} e^{-\pi/4 + 2k\pi}$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ да $\max y =$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}$ $k \in \mathbb{Z}$. 48. $x = -1$ да $\max y = e^{-1} \approx 0,135$,
 $x = 0$ да $\min y = 0$; $x = 1$ да $\max y = 1$. 49. $x = \pm (1 - \sqrt{2})$ да $\max y =$
 $= 2(1 - \sqrt{2}) e^{\sqrt{2}-1}$, $x = \pm 1$ да $\min y = 0$. 50. $x = \pm (1 + \sqrt{5})$ да
 $\max y = 2(\sqrt{5} + 1) e^{-1 - \sqrt{5}}$, $x = 0$ да $\max y = 4$, $x = \pm 2$ да $\min y = 0$.
 51. $x = 1$ да $\max y = 1/2$; $x = 0$ да $\min y = 1/e$. 52. $x = \frac{11}{4}$ да $\max y =$
 $= \frac{13}{4}$, $x = 3$ да бир томонли $\min y = 3$. 53. $x = 1$ да $\max y = \frac{\pi}{4} -$
 $- 1/2 \ln 2 \approx 0,439$. 54. $x = 2k\pi$ да $\max y = -1$ ($k \in \mathbb{Z}$). 55. $x = e$ да
 $\min y = e^{\frac{1}{e}}$. 56. $x = e$ да $\max y = e^{\frac{1}{e}}$. 57. $x = 9/2$ да $\max y = \frac{27}{16}$;
 $x = 5$ да $\min y = 0$. 58. $x = 4/3$ да $\max y = \frac{2\sqrt{4}}{3}$; $x = 0$ ва $x = 2$ да
 $\min y = 0$. 59. $x = \frac{6 - \pi}{4}$ да $\max y = 2 \sin \frac{\pi + 6}{4}$; $x = 3$ да $\min y =$
 $= \cos 3$. 60. $x = \frac{1}{e}$ да $y = e^{\frac{1}{e^2}}$; $x = 1$ да $\min y = 1$. 61. Ботиқ. 62. Бо-
 тиқ. 63. Ботиқ. 64. $(-\infty, 1)$ да қавариқ; $(1, +\infty)$ да ботиқ. 65. $(-\infty,$

— 1) ва $(1, +\infty)$ да қавариқ; $(-1, 1)$ да ботиқ. 66. $\left(0, \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$

да қавариқ; $\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$ да ботиқ. 67. $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ва

$(1/\sqrt{2}, +\infty)$ да ботиқ; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ да қавариқ. 68. $(2k\pi,$

$(2k+1)\pi)$ да қавариқ; $((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$ да ботиқ, $k \in \mathbb{Z}$.

69. $\left(e^{\frac{\pi(8k-3)}{4}}, e^{\frac{\pi(8k+1)}{4}}\right)$ да ботиқ, $\left(e^{\frac{\pi(8k+1)}{4}}, e^{\frac{\pi(8k+5)}{4}}\right)$ да қавариқ

70. $(-\infty, 1/2)$ да ботиқ; $(1/2, +\infty)$ да қавариқ. 71. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$(k \in \mathbb{Z})$. 72. $x = 0$, $x = \pm 3$. 73. $x = -1/2$. 74. $x = \pm 1$, $x =$

$= \pm 1/\sqrt{5}$. 75. $x = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$ 76. $x = 3$. 77. $x = 2k\pi \pm \arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2}$,

$k \in \mathbb{Z}$. 78. $x = e^{8/3}$. 79. $x = 1/\sqrt{3}$; $x = -1/\sqrt{3}$. 80. $x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$.

81. $x = 1/2$. 82. $x = \frac{(6k + (-1)^k)\pi}{12}$ $k \in \mathbb{Z}$. 83. $x = 0$, $x = \pm b\sqrt{3}$

84. Эгилиш нуқталари йўқ. 85. $x = 0$; $x = 1$. 86. Координата бошига нисбатан симметрик. Функциянинг ноллари: $x = 0$ ва $x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1,73$, $x = -1$ да $\min y = -2$, $x = 1$ да $\max y = 2$ $x = 0$, $y = 0$ эгилиш нуқтаси. 87. Координата ўқлари билан кесишиш нуқталари:

$(1, 0)$, $\left(\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}, 0\right)$, $(0, -3)$, $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ да $\min y = -$

$-\frac{16\sqrt{3}}{9} - 3$; $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ да $\max y = \frac{16\sqrt{3}}{9} - 3$; $(0, -3)$ эгилиш

нуқтаси. 88. Координата ўқлари билан кесишиш нуқталари: $(0, 0)$, $(1, 0)$;

$x = \frac{1}{4}$ да $\min y = -\frac{27}{256}$. Эгилиш нуқталари: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{16}\right)$, $(1, 0)$.

89. Координата ўқлари билан кесишиш нуқталари. $(-2, 0)$, $(1, 0)$,

$(0, 4)$; $x = -2$ ва $x = 1$ да $\min y = 0$; $x = -\frac{1}{2}$ да $\max y = \frac{81}{16}$.

Эгилиш нуқталари: $(0, 4)$, $(-1, 4)$. 90. Аниқланиш соҳаси: $x \neq 1$. Ко-

ордината ўқлари билан кесишиш нуқталари: $(0, 0)$. Асимптоталари: $y = 0$

ва $x = 1$. $x = 0$ да $\max y = 0$; $x = -2$ да $\min y = -\frac{80}{27}$. Эгилиш нуқ-

талари: $x = -2 \pm \sqrt{3}$. 91. Аниқланиш соҳаси: $x \neq 1$. Координата ўқлари билан кесишиш нуқталари: $(0, 0)$. Асимптота: $x = 1$; $x = 3/2$

да таху = $\frac{27}{4}$. Эгилиш нуқталари: (0, 0). 92. Аниқланиш соҳаси:

$x \neq -1$. Координата ўқлари билан кесишиш нуқталари: (1; 0), (0; 1). Асимптоталари: $y = 0$ ва $x = -1$. $x = 1$ да $\min y = 0$; $x = 5$ да

$\max y = \frac{2}{27}$. Эгилиш нуқталари: $x = 5 \pm 2\sqrt{3}$. 93. Аниқланиш соҳаси

$x \neq -1$. Координата ўқлари билан кесишиш нуқтаси (0; 0). Асимптоталари: $y = x - 3$ ва $x = -1$. $x = 0$ да $\min y = 0$; $x = -4$ да $\max y =$

$-\frac{256}{27}$. 94. Аниқланиш соҳаси: $x \neq 1$. Координата ўқлари билан кесишиш нуқталари: (-1; 0), (0; 1). Асимптоталари: $y = 1$ ва $x = 1$.

$x = -1$ да $\min y = 0$. Эгилиш нуқтаси: $(-4; \frac{81}{625})$. 95. Аниқланиш соҳаси: $x \neq 0$. Координата ўқлари билан кесишиш нуқталари: $(\sqrt{5}; 0) \approx (1,52; 0)$. Асимптотаси $y = x$. $x = -2$ да $\min y = -2,5$. 96. Координата бошига нисбатан симметрик. Экстремум йўқ. Эгилиш нуқтаси: (0, 0). Асимптоталари: $x = -1$, $x = 1$ ва $y = 0$. 97. Аниқланиш соҳаси: $x \neq 2$. Координата ўқлари билан кесишиш нуқталари: (1; 0);

$(0; -\frac{1}{16})$. Асимптоталари: $y = x + 3$, $x = 2$. $x = 6$ да $\min y = \frac{55}{44}$.

Эгилиш нуқтаси (1; 0). 98. Аниқланиш соҳаси: $x \geq 0$. Ноллари: $x = 0$ ва $x = 3$. $x = 1$ да $\max y = -2$; $x = 0$ да чегаравий $\max y = 0$. Қавариқ. 99. Функциянинг ноли $x = 2$. $x = -0,5$ да $\min y = -\sqrt{5} \approx -$

$-2,24$. Эгилиш нуқталари: $x = -\frac{3 \pm \sqrt{41}}{8}$. Асимптоталари: $x \rightarrow -\infty$

да $y = -1$ ва $x \rightarrow +\infty$ да $y = 1$. 100. Аниқланиш соҳаси: $x \geq -1$. Координата ўқлари билан кесишиш нуқталари: (-1; 0) ва (0; 0), $x =$

-1 ; $x = 0$ да $\min y = 0$. $x = -\frac{4}{5}$ да $\max y = \frac{16}{25\sqrt{5}} \approx 0,29$. Эгил

лиш нуқтаси: $x = \frac{\sqrt{5}-5}{5} \approx -0,55$, $y = \frac{6-2\sqrt{5}}{5\sqrt{5}} \approx 0,21$ 101.

Аниқланиш соҳаси: $x \geq -1$. $x = 2/5$ да $\min y \approx \frac{-6\sqrt{15}}{125} \approx -0,19$.

Эгилиш нуқтаси: $(-4/5; -4/25\sqrt{5})$. 102. Аниқланиш соҳаси: $|x| > 2$. Координата бошига нисбатан симметрик. Асимптоталари: $y = 8$, $x = \pm 2$, $(-\infty, -2)$ ва $(2, +\infty)$ оралиқларда функция қатъий камаловчи.

103. Аниқланиш соҳаси: $R(0; 0)$ — симметрия маркази. Асимптоталари: $x \rightarrow -\infty$ да $y = -\frac{x+8}{2}$ ва $x \rightarrow +\infty$ да $y = -\frac{x-8}{2}$. Координата ўқлари билан кесишиш нуқталари: (0, 0); (0, $\pm 3\sqrt{7}$). $x = -\sqrt{3}$

да $\min y = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$; $x = \sqrt{3}$ да $\max y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Эгилиш нуктаси:

(0, 0). 104. Аниқланиш соҳаси R . $x = -4$ тўғри чизик симметрия ўқи. Координата ўқлари билан кесишиш нукталари: $(-6; 0)$; $(-2; 0)$; $(0; 2\sqrt{18})$. $x = -6$ ва $x = -2$ да $\min y = 0$; $x = -4$ да $\max y = 2\sqrt{2} \approx 2,5$. Эгилиш нукталари: $x_{1,2} = -4 \pm 2\sqrt{3}$, $y(x_1) = y(x_2) = 4$. Функция $(x_1; -6)$; $(-6; -2)$; $(-2; x_2)$ оралиқда қавариқ.

105. Аниқланиш соҳаси: $|x| \leq 1$. Ординаталар ўқиға нисбатан симметрик. Координата ўқлари билан кесишиш нукталари: $(-1; 0)$, $(0, 0)$, $(1; 0)$; $x = 0$ да $\min y = 0$; $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ да $\max y = 1/2$. 106. Аниқ-

ланиш соҳаси: $x > 0$, $x = 1/2$ да $\min y = \frac{3}{2}\sqrt{3} \approx 2,60$. Қавариқ

Асимптоталари: $y = x + \frac{3}{2}$ ва $x = 0$. 107. Асимптотаси: $x \rightarrow -\infty$ да

$y = -x$; $x = 0$ $\min y = 1$. Ботиқ. 108. Координата ўқлари билан кесишиш нуктаси: $(0; 0)$. Асимптотаси: $x \rightarrow +\infty$ да $y = 0$; $x = 0,5$ да

$\max y = \frac{1}{2e} \approx 0,2$. Эгилиш нуктаси: $(1, e^{-2})$. 109. Аниқланиш соҳаси:

R . Асимптотаси: $x \rightarrow +\infty$ да $y = 0$. Координата ўқлари билан кесишиш нуктаси: $(0; 0)$. $x = 0$ да $\min y = 0$; $x = 2$ да $\max y = 4 \cdot e^{-2} \approx 0,54$.

Эгилиш нукталари: $x_1 = \sqrt{3} - 1$, $y(x_1) = 0,3$; $x_2 = \sqrt{3} + 1$, $y(x_2) \approx 0,47$. (x_1, x_2) оралиқда қавариқ. 110. Аниқланиш соҳаси: $x \neq 1$.

Асимптоталари: $x = 1$ ва $x \rightarrow +\infty$ да $y = 0$. $x = 0$ да $\max y = 1$, $x > 1$

да қавариқ; $x < 1$ да ботиқ. 111. Аниқланиш соҳаси: $x > 0$. Асимпто-

таси: $x \rightarrow +0$ да $x = 0$. $x = 1$ да $\max y = 0$. Қавариқ. 112. Аниқланиш

соҳаси: $x > 0$. Координата ўқлари билан кесишиш нуктаси $(1; 0)$.

Асимптоталари: $x \rightarrow +\infty$ да $y = 0$ ва $x \rightarrow +0$ да $x = 0$; $x = e$ да

$\max y = \frac{1}{e}$. Эгилиш нуктаси: $(e^{3/2}; 1,5 e^{-3/2})$. 113. Аниқланиш со-

ҳаси: $x > 0$; $y(+0) = 0$, $y'(+0) = 0$, координата ўқлари билан кеси-

шишиш нуктаси $(1, 0)$ $x = \sqrt{e}$ да $\min y = -e \ln 2$. Эгилиш нуктаси

$(e^{-3/2}, -\frac{3}{2e^2})$. 114. Аниқланиш соҳаси: $x > 0$. $y(+0) = 0$. $y'(+0) =$

$+\infty$. $x = \frac{1}{e^2}$ да $\max y = \frac{4}{e^2}$, ва $x = 1$ да $\min y = 0$. Эгилиш нук-

таси: $(\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$. 115. Аниқланиш соҳаси: $x \neq \pm 1$. Асимптоталари:

$x = -1$, $x = 1$. $y = 0$. Координата ўқлари билан кесишиш нукталари:

$(\approx 0,9; 0)$; $(\approx 1,2; 0)$; $(0; 6)$, $x = 2$ да $\max y = 2 - \ln 3$. Эгилиш нук-

талари: $(0,5; 4 - \ln 3)$. $(3; 1,5 - \ln 2)$. 116. Аниқланиш соҳаси: $x \leq 0$

ва $x > 2$ Координата ўқлари билан кесилиш нуқтаси: $(0, 0)$. Асимптоталари: $x \rightarrow +\infty$ да $y = 1$ ва $x \rightarrow -\infty$ да $y = 2x - 1$, $x \leq 0$ да функция $\nearrow$ ва $x > 2$ да $\searrow$. Ботиқ. 117. Аниқланиш соҳаси: $x > 0$. Асимптотаси: $x = 0$, $(y \rightarrow +\infty)$ $x = 1$ да $\min y = 1$. Ботиқ. 118. Функциянинг даври 2π га тенг ва координата ўқлари билан кесилиш нуқталари:

$(0; 1)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\frac{3\pi}{2}, 0)$. $x = \frac{\pi}{6}$ да $\max y = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ва $x = -\frac{5\pi}{6}$ да $\min y = \frac{-3\sqrt{3}}{4}$. Эгилиш нуқталари: $(\frac{\pi}{2}, 0)$; $(\pi +$

$+\arcsin 1/4, \frac{-3\sqrt{15}}{16})$; $(\frac{3}{2}\pi, 0)$ $(2\pi - \arcsin 1/4, \frac{3\sqrt{15}}{16})$.

119. Функциянинг даври 2π га тенг, графиги координата бошига нисбатан симметрик. $x = \frac{\pi}{3}$ да $\max y = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ва $x = -\frac{\pi}{3}$ да $\min y =$

$\frac{-3\sqrt{3}}{4}$. Эгилиш нуқталари: $(-\pi; 0)$, $(-\pi + \arccos \frac{1}{4}, \frac{-3\sqrt{15}}{16})$, $(0, 0)$, $(\pi - \arccos 1/4, \frac{3\sqrt{15}}{16})$, $(\pi, 0)$. 120. Функциянинг даври

2π га тенг; $y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = y(\pi) = 0$ $x = \frac{\pi}{6}$ ва $x = \frac{5}{6}\pi$ да $\max y = \frac{1}{4}$; $x = \frac{\pi}{2}$ да $\min y = 0$. $x = \frac{3}{2}\pi$ да $y = -2$. Эгилиш нуқталари:

$x = \arcsin \frac{1+\sqrt{33}}{8}$, $x = \pi + \arcsin \frac{\sqrt{33}-1}{8}$, $x = \pi - \arcsin \frac{1+\sqrt{33}}{8}$,

$x = 2\pi - \arcsin \frac{\sqrt{33}-1}{8}$. 121. Аниқланиш соҳаси: $x \neq -\frac{\pi}{2} +$

$+k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ Даври 2π га тенг. Асимптоталари: $y = \frac{\pi}{2} + \pi k$,

$k \in \mathbb{Z}$, $(-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi)$ оралиқда $x = 0$ нуқтада $\max y = 1$, $x = \pi$

да $\min y = -1$. $(0, \frac{\pi}{2})$ ва $(\frac{\pi}{2}; \pi)$ да $\searrow$; $(-\frac{\pi}{2}; 0)$ ва $(\pi; \frac{3}{2}\pi)$

да $\nearrow$. 122. Координата бошига нисбатан симметрик. Асимптоталари:

$y = \frac{x-\pi}{2}$, агар $x \rightarrow +\infty$ бўлса ва $y = \frac{x+\pi}{2}$ агар $x \rightarrow -\infty$ бўл-

са, $x = \frac{2-\pi}{4}$ да $\max y = 1$ ва $x = \frac{\pi-2}{4}$ да $\min y = -1$, Эгилиш

нуқтаси: $(0; 0)$. 123. Аниқланиш соҳаси: $|x| \geq 1$; $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$ — симметрия маркази. Асимптотаси: $x \rightarrow \infty$ да $y = \frac{3x - \pi}{2}$ $x = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$ да $\max y = \frac{-6\sqrt{3} - 5\pi}{6} \approx -4,4$ $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ да $\min y = \frac{6\sqrt{3} - \pi}{6} \approx 1,2$; $(-\infty, -1)$ оралиқда қавзриқ. 124. Аниқланиш соҳаси R ; графиги ординаталар ўқиғига нисбатан симметрик. Асимптотаси: $y = \pi$. $x > 0$ да $y' (+0) = 2$. 125. Аниқланиш соҳаси: R . Асимптоталари: $x \rightarrow -\infty$ да $y = \frac{1}{\pi}$ ва $x \rightarrow +\infty$ да $y = x$. Координата ўқлари билан кесишиш нуқтаси $\left(0; \frac{2}{\pi}\right)$. Ботиқ. 126. Аниқланиш соҳаси $|R|$; координаталар бошига нисбатан симметрик. Асимптотаси: $y = 0$, $x = 1$ да $\max y = \frac{\pi}{2}$; $x = -1$ да $\min y = -\frac{\pi}{2}$; $y' (1-0) = 1$ $y' (1+0) = -1$. Эгилиш нуқтаси: $(0; 0)$. 127. Даври 2π ; ординаталар ўқиғига нисбатан симметрик. $x = 0$ да $\max y = e$ ва $x = \pi$ да $\min y = -\frac{1}{e}$. Эгилиш нуқталари: $x = \arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ва $x = 2\pi - \arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 128. Асимптоталари: $x \rightarrow -\infty$ да $y = e^{\pi/2}$ x ва $x \rightarrow +\infty$ да $y = e^{-\pi/2}$. Функция $\searrow$. Эгилиш нуқтаси: $\left(-\frac{1}{2}, e^{\arctg 1/2}\right)$. 129. Аниқланиш соҳаси: $2k\pi < x < (2k+1)\pi$, $k \in Z$. Даври 2π . Асимптоталари: $x = k\pi$. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ да $\min y = 1$, $k \in Z$. 130. Аниқланиш соҳаси: $x > -1$; $x \neq 0$; $y (-0) = y (+0) = e$. Асимптоталари: $x = -1$, $y = 1$ Ботиқ. 131. $-\frac{1}{3}$. 132. -2 . 133. $1/3$. 134. $1/6$. 135. $1/2$. 136. $1/6 \cdot \ln a$. 137. 1 . 138. 0 . 139. α/β . 140. 1 . 141. $\frac{(-1)^{m-n}(2m+1)}{2n+1}$. 142. $1/2$. 143. 1 . 144. $\alpha, \beta, \gamma > 0$ бўлса, 0 ; ($\alpha < 0$, $\beta, \gamma, \alpha = 0$, $\beta < 0$) бўлиб, $\gamma = 0$ бўлса, 0 ; $+\infty$, агар $\gamma < 0$ ($\alpha, \beta = \gamma$) ёки $\gamma = 0$ ($\alpha > 0$, $\beta = \gamma$; $\alpha = 0$, $\beta > 0$) бўлса, $+\infty$; агар $\alpha = \beta = \gamma = 0$ бўлса. 1. 145. Агар $a > 1$ ёки $\alpha = 1$, $\beta > -1$ бўлса, 0 ; агар $\alpha = 1$, $\beta = -1$ бўлса, 1 ; агар $\alpha < 1$ ёки $\alpha = 1$, $\beta < -1$ бўлса, $+\infty$. 146. 0 . 147. 0 . 148. 0 . 149. $\frac{\alpha - \beta}{2}$. 150. e .

151. $e^{-2/\pi}$. 152. 1. 153. 1. 154. 1. 155. 1. 156. -1. 157. $1/a$. 158. 1.
 159. $e^{1/3}$. 160. 0. 161. $-\frac{e}{2}$. 162. e . 163. 1. 164. 1. 165. $e^{-2/\pi}$. 166. 0.
 167. $+\infty$. 168. $-\frac{2}{\pi}$. 169. $1/3$. 170. 0. Агар $0 < a < 1$ ($\alpha - \forall$) бўл-
 са, 0; агар $a > 1$ ($\alpha - \forall$) бўлса, $+\infty$.

VIII боб

1. $-\sqrt{1-x^2}$. 2. $-\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3}$. 3. $\frac{1}{2} (\arctg x)^2$. 4. $\ln |\ln (\ln x)|$.
5. $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. 6. $-\arcsin \frac{1}{|x|}$. 7. $-x - 2e^{-x/2} + 2\ln(1 + e^{x/2})$.
8. Агар $x > 1$ бўлса, $\sqrt{x^2-1} - 2\ln(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1})$ агар $x < -1$ бўлса, $-\sqrt{x^2-1} + 2\ln(\sqrt{-x+1} + \sqrt{-x-1})$. 9. $\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{7} \sin^2 x + \frac{2}{11} \sin^4 x\right) \sqrt{\sin^2 x}$.
10. $2 \arctg \sqrt{x}$. 11. $2 \operatorname{sgn} x \times \ln(\sqrt{|x|} + \sqrt{|1+x|})$, ($x(x+1) > 0$). 12. $-\frac{1}{2} e^{-x^2}$. 13. $\frac{\ln^{101} x}{101}$.
14. $\frac{3}{2} \sqrt{1-\sin 2x}$. 15. $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \left(\operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{2}}\right)$. 16. $\ln \left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right|$.
17. $\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2+1}}{x^2 - x\sqrt{2+1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctg \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$. 18. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 - x\sqrt{2+1}}{x^2 + x\sqrt{2+1}}$.
19. $\frac{1}{2(\ln 3 - \ln 2)} \ln \left|\frac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x}\right|$.
20. $2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$. 21. $2\arctg e^x$. 22. $\frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x$.
23. $-\sqrt{1+x^2} + \arcsin x$. 24. $-\frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{1}{2} \ln(1 + \cos^2 x)$.
25. $(\arctg \sqrt{x})^2$. 26. $-x \cos x + \sin x$. 27. $-(x+1)e^{-x}$.
28. $\frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) (n \neq -1)$. 29. $x \arcsin x + \sqrt{1+x^2}$. 30. $-\frac{x^2+1}{2} e^{-x^2}$.
31. $-\frac{\arcsin x}{x} - \ln \left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|$. 32. $x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$.
33. $x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$. 34. $\ln \left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| - \cos x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)$.
35. $\frac{\pi}{2} [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$. 36. $\frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} \times$

$$\begin{aligned}
& \times e^{ax}. \quad 37. \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^3 + b^3} e^{ax}. \quad 38. \frac{2}{3} x^{3/2} \left(\ln^2 x - \frac{4}{3} \ln x + \right. \\
& \left. + \frac{8}{9} \right). \quad 39. \frac{e^{2x}}{8} (2 - \sin 2x - \cos 2x). \quad 40. \frac{1+x^2}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 - \\
& - x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2). \quad 41. x - \frac{1-x^2}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x}. \\
& 42. (x^2+2) \operatorname{ch} x - 2x \operatorname{sh} x. \quad 43. -\frac{1}{2x^2} (\ln^2 x + 3/2 \ln^2 x + 3/2 \ln x + 3/4). \\
& 44. x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x|. \quad 45. -x + \frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) - e^{-x} \operatorname{arctg} e^x. \quad 46. \\
& \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x+2)^2}{(x+1)(x+3)^2} \right|. \quad 47. -\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{9} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right|. \quad 48. -\frac{5x+6}{x^2-3x+2} + \\
& + 4 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right|. \quad 49. \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{4} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2+1}. \quad 50. \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \\
& + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}. \quad 51. \frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}. \quad 52. \\
& \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - 1/4 \ln \frac{(x+1)^2}{x^2+1}. \quad 53. 1/4 \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x. \quad 54. \\
& \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}. \quad 55. -\frac{1}{6(1+x)} + \frac{1}{6} \ln \frac{(1+x)^2}{1-x+x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \\
& - \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}. \quad 56. -\frac{1}{96(x-1)^{96}} - \frac{3}{97(x-1)^{97}} - \frac{3}{98(x-1)^{98}} - \\
& - \frac{1}{99(x-1)^{99}}. \quad 57. \frac{1}{7} \ln \frac{|x^7|}{(1+x^2)^2}. \quad 58. \frac{x^4}{4} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^4+1}{(x^4+2)^4}. \quad 59. \\
& \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{6} \operatorname{arctg} x^2. \quad 60. \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+ \right. \\
& \left. + x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right]. \\
& 61. 2\sqrt{x} - 2 \ln(1+\sqrt{x}). \quad 64. 6t - 3t^2 - 2t^3 + \frac{3}{2}t^4 + \frac{6}{5}t^5 - \frac{6}{7}t^7 + \\
& + 3 \ln(1+t^2) - 6 \operatorname{arctg} t, \quad \text{бунда} \quad t = \sqrt[5]{x+1}. \quad 65. \frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2} - \\
& - \frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}. \quad 66. \frac{x^2}{2} - \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} + \frac{1}{2} \ln |x+\sqrt{x^2-1}|. \quad 67. \frac{3}{4}t^4 - \\
& - \frac{3}{2}t^2 - 3/4 \ln |t-1| + \frac{15}{8} \ln(t^2+t+2) - \frac{27}{8\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{7}}, \\
& \text{бунда} \quad t = \sqrt[3]{2+x}. \quad 68. \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}. \quad 69. -\frac{at^2}{1+t^4} + \frac{a}{4\sqrt{2}} \ln \frac{1+t\sqrt{2}+t^2}{1-t\sqrt{2}+t^2} + \\
& + \frac{a}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{1-t^2}{t\sqrt{2}}, \quad \text{бунда} \quad t = \sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}. \quad 70. \frac{x}{2} + \sqrt{x} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\sqrt{x(1+x)} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}). \quad 71. -\frac{3-2x}{4}\sqrt{1+x+x^2} - \\
& -\frac{1}{8}\ln\left(\frac{1}{2} + x + \sqrt{1+x+x^2}\right). \quad 72. -\ln\left|\frac{2-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|, \quad 73. \\
& \frac{2-x}{3(1-x)^2}\sqrt{1-x^2}. \quad 74. R + \ln(x+1+R) - \sqrt{2}\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{2}R}{x}\right|, \text{ бунд } \\
& \text{да } R = \sqrt{x^2+2x+2}. \quad 75. \arcsin\frac{1+2x}{\sqrt{5}} + \ln\left|\frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right| \\
& 76. -\frac{1}{2x^2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|}\right). \quad 77. -\frac{19+5x+2x^2}{6} \times \\
& \times \sqrt{1+2x-x^2} - 4\arcsin\frac{1-x}{\sqrt{2}}. \quad 78. \frac{2x^2+1}{3x^2} \cdot \sqrt{x^2-1}. \quad 79. \left(\frac{x^2}{3} - \frac{14x}{3} + \right. \\
& \left. + 37\right) \cdot \sqrt{x^2+4x+3} - 66\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}|. \quad 80. \frac{3x+5}{8(x+1)^2} \cdot \\
& \cdot \sqrt{x^2+2x} - \frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{|x+1|}, \text{ бунда } x < -2 \text{ ёки } x > 0. \quad 81. \frac{1}{2}\arcsin \\
& \frac{x-3}{|x-1|\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{3x+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1}\right|. \quad 82. \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}. \\
& 83. \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|. \quad 84. \ln(x+\sqrt{x^2+2}) - \\
& -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}. \quad 85. \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{(2x+1)\sqrt{2}+\sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2}-\sqrt{3(x^2+x-1)}}\right|. \quad 86. \frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}}. \\
& 87. \frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-(x+1)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+(x+1)} - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1}. \\
& 88. \frac{3}{2(2z+1)} + \frac{1}{2}\ln\frac{z^4}{|2z+1|^2}, \text{ бунда } z=x+\sqrt{x^2+x+1}. \quad 89. \ln\left|\frac{z-1}{z}\right| - \\
& -2\operatorname{arctg} z, \text{ бунда } z = \frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}. \quad 90. -\frac{5}{18(z+1)} - \frac{1}{6(z+1)^2} + \\
& + \frac{3}{4}\ln|z-1| - \frac{16}{27}\ln|z-2| - \frac{17}{108}\ln|z+1|, \text{ бунда } z = \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}. \\
& 91. \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{3}[(z-1)^3+(z-1)^{-3}]+[(z-1)^3-(z-1)^{-3}]+[(z-1)+(z-1)^{-1}]\right\} + \\
& + \frac{1}{2}\ln|z-1|, \text{ бунда } z = x + \sqrt{x^2-2x+2}. \quad 92. \\
& \frac{2(3-4z)}{5(1-z-z^2)} + \frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+1+2z}{\sqrt{5}-1-2z}\right|, \text{ бунда } z = -x+\sqrt{x(1+x)}. \quad 93. \\
& \left(\frac{x^3}{6} - \frac{5x^2}{24} + \frac{5x}{16}\right)\sqrt{x^2+1} - \frac{5}{16}\ln(x+\sqrt{x^2+1}). \quad 94. \ln\frac{x}{1-x+\sqrt{5x^2-2x+1}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 95. \left(\frac{x^2}{4} - \frac{7x^2}{6} + \frac{95x}{24} - \frac{145}{12} \right) \sqrt{x^2+4x+5} - \frac{5}{16} \ln(x+1+\sqrt{x^2+1}). \quad 96. \\
& \frac{1}{8} \left(x^2 + \frac{7x^2}{6} + \frac{35x^2}{24} + \frac{35}{16}x \right) \sqrt{x^2-1} + \frac{35}{128} \ln|x+1+\sqrt{x^2-1}|. \quad 97. \\
& \frac{3x-1}{2x^2} \sqrt{2x^2+2x+1} - \frac{1}{2} \ln \frac{x+1+\sqrt{2x^2+2x+1}}{x}. \quad 98. \quad \frac{x+2}{3\sqrt{x^2+4x+7}} \\
& 99. \frac{8(2x+1)}{9\sqrt{x^2+x+1}} - \frac{2}{27} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} \right)^3. \quad 100. \frac{1}{\sqrt{14}} \ln \frac{\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{6x^2+10}+\sqrt{7}} \\
& 101. \frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}}. \quad 102. 2\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2(x^2+x+1)}}{1-x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right. \\
& \left. + \sqrt{2(x^2+x+1)} \right|. \quad 103. \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3(x^2+x+1)} - \sqrt{2}(x+1)}{\sqrt{x^2-x+1}} \right| + \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{2}(1-x)}. \quad 104. \sqrt{x^2-x+1} + \frac{3}{2} \ln \left(x - \frac{1}{2} + \right. \\
& \left. + \sqrt{x^2-x+1} \right) - \ln \frac{2-x+2\sqrt{x^2-x+1}}{x}. \quad 105. \sqrt{1+x+x^2} + \\
& + \frac{1}{2} \ln \frac{1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^2})^2}. \quad 106. 2. \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x} + \\
& + \ln |2\sqrt{1+x+x^2}+1+2x|. \quad 107. 6x^{1/6}+3x^{1/3}+2x^{1/2}+6 \ln |x^{1/6}-1|. \\
& 108. 6/5 x^{5/6} - 4x^{1/2} + 18x^{1/6} + 3x^{1/6}(1+x^{1/3})^{-1} - 2 \operatorname{arctg}(x^{1/6}). \\
& 109. -\frac{3}{2}(1+x^{1/3})^{-2}. \quad 110. \frac{4}{9}(1+x^{1/4})^{-9}. \quad 111. \frac{3}{11}(x+1)^{1/3} - \\
& - 3/4 \cdot (x+1)^{1/3} + \frac{3}{5}(x+1)^{5/3}. \quad 112. \frac{12}{13}(1+x^{1/4})^{13/3} - \\
& - \frac{18}{5}(1+x^{1/4})^{10/3} + \frac{36}{7}(1+x^{1/4})^{7/3} - 3(1+x^{1/4})^{4/3}. \quad 113. \frac{12}{7}(1+ \\
& + x^{1/4})^{7/3} - 3(1+x^{1/4})^{4/3}. \quad 114. \frac{6}{7}(1+x^{1/3})^{7/2} - \frac{18}{5}(1+x^{1/3})^{5/2} + \\
& + 6x^{1/3}(1+x^{1/3})^{1/2}. \quad 115. \frac{1}{6} \ln \frac{t-1}{t+1} + \frac{1}{2} \ln \frac{t^2-t+1}{t^2+t+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + \\
& + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}}, \text{ бунда } t = \sqrt[3]{x^2+1}. \quad 116. \frac{3}{5}(1+x^{2/3})^{5/2} + (1-2x^{2/3})(1+ \\
& + x^{2/3})^{1/2}. \quad 117. -\frac{3x^2+4}{8x\sqrt{(2+x^2)^2}}. \quad 118. -\frac{\sqrt{(2-x^2)^2}}{4x^2}. \quad 119. \frac{t}{2(t^2+1)} - \\
& - \frac{1}{12} \ln \frac{t^3+2t+1}{t^3-t+1} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}}, \text{ бунда } t = \sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 121. \frac{5}{16}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x. \quad 122. \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48}. \\
& 123. -\frac{\cos 2x}{64} + \frac{\cos^3 2x}{96} - \frac{\cos^5 2x}{320}. \quad 124. \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}. \quad 125. \frac{\sin x}{2\cos^3 x} + \\
& + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|. \quad 126. -\frac{\cos x}{2\sin^3 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|. \quad 127. \\
& \operatorname{tg} x - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}. \quad 128. -\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} - \operatorname{ctg} x. \quad 129. -8 \operatorname{ctg} 2x - \frac{8}{3} \operatorname{ctg}^3 2x. \quad 130. \\
& \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \frac{3\operatorname{tg}^2 x}{2} - \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} + 3 \ln |\operatorname{tg} x|. \quad 131. \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|. \\
& 132. -2\sqrt{\operatorname{ctg} x} + \frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}. \quad 133. \frac{1}{4} \ln \frac{(z^2+1)^2}{z^4-z^2+1} + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{2z^2-1}{\sqrt{3}}. \\
& \text{бунда } z = \sqrt[3]{\operatorname{tg} x}. \quad 134. \frac{\sin 5x}{10} + \frac{\sin 3x}{6}. \quad 135. \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 6x}{12}. \quad 136. - \\
& - \frac{\sin(x+1)}{4} + \frac{\sin(3x+1)}{6} - \frac{\sin(5x+1)}{20}. \quad 137. \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{16} + \\
& + \frac{\sin 4x}{16} + \frac{\sin 6x}{24} + \frac{\sin 10x}{80}. \quad 138. \frac{\operatorname{sh} 8x}{16} - \frac{\operatorname{sh} 6x}{12}. \quad 139. \frac{2}{\sin^3 x} - \frac{1}{4\sin^4 x}. \\
& 140. \frac{1}{8} \ln (\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x). \quad 141. \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}. \quad 142. \sin x \cdot \cos^3 x + \frac{2\sin^5 x}{5}. \quad 143. \\
& \frac{\sin^3 2x}{16} - \frac{\sin^{10} 2x}{10} - \frac{\sin^{13} 2x}{24}. \quad 144. \frac{2}{5} \operatorname{ch}^3 x - \operatorname{ch}^5 x + \operatorname{ch} x. \quad 145. \frac{1}{6(3\cos x - 1)^2}. \\
& 146. \frac{\cos x}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{1-\sqrt{2}\cos x}{1+\sqrt{2}\cos x} \right|. \quad 147. \frac{1}{4} \ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x} + \frac{1}{2(1+\cos x)}. \\
& 148. \frac{1}{4} \ln (3+4\sin^2 x). \quad 149. \ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x} - 2 \operatorname{arctg}(\sin x). \quad 150. \\
& \frac{x+3 \ln |\sin x - 3\cos x|}{10}. \quad 151. \ln |\sin x + \cos x|. \quad 152. \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x + 1 + \sqrt{2}}{\operatorname{tg} x + 1 - \sqrt{2}} \right|. \\
& 153. \frac{1}{\sqrt{30}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{5}{6}} \operatorname{tg}^2 x \right). \quad 154. \frac{1}{2\sqrt{13}} \ln \left| \frac{2\operatorname{tg} x + 3 - \sqrt{13}}{2\operatorname{tg} x + 3 + \sqrt{13}} \right|. \\
& 155. \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\operatorname{th} x - 2}{\operatorname{th} x + 2} \right|. \quad 156. \frac{1}{68} (17 \ln |\sin x| - \ln |\sin x + 4 \cos x| - 4x). \\
& 157. \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}} \right). \quad 159. \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left(\frac{3\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} \right). \quad 160. -\frac{1}{5} (2 \sin x + \\
& + \cos x) + \frac{4}{5\sqrt{5}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg}^2}{2} \right) \right|. \quad 161. \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \left(\frac{a \operatorname{tg} x}{b} \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
162. & -\frac{\cos x}{a(a \sin x + b \cos x)} \quad 163. \ln \left| \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - 5}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - 3} \right| \quad 164. \frac{2}{5}x - \frac{1}{5} \ln |4 \cos x + \\
& + 3 \sin x - 2| + \frac{4}{5\sqrt{21}} \ln \left| \frac{2\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{3} + \sqrt{7}}{2\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{3} - \sqrt{7}} \right| \quad 165. (\cos 2a) \cdot \\
& \cdot x - 2(\sin 2a) \cdot \ln \left| \sin\left(\frac{x+a}{2}\right) \right| - 2(\sin^2 a) \operatorname{ctg}\left(\frac{x+a}{2}\right) \quad 166. \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln(\cos x + \\
& + \sin x + \sqrt{2}) - \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) \quad 167. \frac{3}{5}x - \frac{4}{5} \ln |2 \cos x - \sin x - \\
& - 3| + \frac{6}{5} \operatorname{arctg}\left(\frac{5 \operatorname{tg}(x/2) + 1}{2}\right) \quad 168. \frac{1}{8} \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + \\
& + \frac{1}{4} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \right| \quad 169. \frac{1}{6} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{5}{6} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - 3 \right| - \\
& - \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \right| \quad 170. \frac{1}{1 + \operatorname{tg}(x/2)} + \ln \left| \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}(x/2)} \right| \quad 171. \\
& - \frac{3}{80} (\cos x)^{4/3} \cdot (20 - 16 \cos^2 x + 5 \cos^4 x) \quad 172. \frac{2 \sin x - \cos x}{10 (\sin x + 2 \cos x)^2} + \\
& + \frac{1}{10\sqrt{5}} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} 2}{2}\right) \right| \quad 173. \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \sin^2 x}}{|\cos x|} \right) \cdot \\
174. & -\frac{e \sin x}{(1 - e^2)(1 + e \cos x)} + \frac{2}{(1 - e^2)^{3/2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) \quad 175. \\
& - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{4} \ln \left(\frac{2 + \sin x}{2 - \sin x}\right) \quad 176. J_n = \frac{\cos x (\sin x)^{n-1}}{n} + \\
& + \frac{n-1}{n} J_{n-2} \quad 177. K_n = \frac{\sin x (\cos x)^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n} K_{n-2} \quad 178. J_n = \\
& = -\frac{\cos x}{(n-1)(\sin x)^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1} J_{n-2} \quad 179. K_n = \frac{\sin x}{(n-1)(\cos x)^{n-1}} + \\
& + \frac{n-2}{n-1} K_{n-2} \quad 180. J_{n,m} = \frac{(\sin x)^{n+1} (\cos x)^{m-1}}{n+m} + \frac{m-1}{n+m} J_{n,m-2} \quad 181. \\
& \frac{e^{ax}}{4} \left[\frac{3(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} - \frac{a \sin 3bx - 3b \cos 3bx}{a^2 + 9b^2} \right] \quad 182. \frac{e^x}{2} [x^2 \cdot (\sin x + \\
& + \cos x) - 2x \sin x + (\sin x - \cos x)] \quad 183. x - 3 \ln \{(1 + e^{x/6}) \sqrt{1 + e^{x/3}}\} - \\
& - 3 \operatorname{arctg} e^{x/6} \quad 184. \ln(e^x - 1) \quad 185. x [\ln^n x - n \ln^{n-1} x + (n-1) n \ln^{n-2} x + \\
& + \dots + (-1)^{n-1} n(n-1) \dots 2 \ln x + (-1)^n n!] \quad 186. \frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} -
\end{aligned}$$

$$-\ln \sqrt{1-x^2}. \quad 187. \quad x - \operatorname{arctg} x + \left(\frac{1+x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} \right) \cdot [\ln(1+x^2) - 1].$$

$$188. \quad -\frac{\operatorname{sgn} x}{2} \sqrt{x^2-1} + \frac{x^2}{2} \arccos \frac{1}{x}. \quad 189. \quad -\ln \sqrt{1+x^2} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2}). \quad 190. \quad -x^2 + \frac{x^2}{2} \ln(4+x^4) + 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{x^2}{2} \right). \quad 191. \quad -$$

$$-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \arcsin x + \frac{1}{2} (\arcsin x^2 + \ln |x|) \quad (0 < |x| < 1). \quad 192.$$

$$-\frac{x^2+7}{9} \sqrt{x^2+1} + \frac{(x^2+1)^{3/2}}{3} \cdot \ln \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}; \quad (|x| >$$

$$> 1). \quad 193. \quad \alpha(x \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \ln |x^2-1|) + \frac{a+b}{4} \cdot \ln^2 \left| \frac{x-1}{x+2} \right|. \quad 194.$$

$$-\frac{6x+x^3}{9} - \frac{2+x^2}{9} \cdot \sqrt{1-x^2} \arccos x, \quad (|x| < 1). \quad 195. \quad -\frac{x^2}{6} -$$

$$-\left(x - \frac{x^3}{3}\right) \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 + \frac{2}{3} \ln(1+x^2). \quad 196. \quad -2 \ln(\operatorname{th} x +$$

$$+ \sqrt{1+\operatorname{th}^2 x}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \ln \frac{\sqrt{1+\operatorname{th}^2 x} + \sqrt{2} \operatorname{th} x}{\sqrt{1+\operatorname{th}^2 x} - \sqrt{2} \operatorname{th} x}. \quad 197. \quad \frac{x^2 |x|}{3}. \quad 198.$$

$$\frac{2x^2}{3} (x + |x|). \quad 199. \quad \text{Арап } |x| \leq 1 \text{ бұлса, } x, \text{ арап } |x| > 1$$

$$\text{бұлса, } \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} \operatorname{sgn} x. \quad 200. \quad \frac{(1+x)|1+x|}{2} + \frac{(1-x)|1-x|}{2}. \quad 201.$$

$$\frac{3x+5}{8(x+1)^2} \sqrt{x^2+2x} - \frac{3}{8} \arcsin \frac{1}{|x+1|}, \text{ бунда } x < -2 \text{ ёки } x > 0. \quad 202.$$

$$6\sqrt{x} - 12 \operatorname{arctg} (\sqrt[3]{x/2}). \quad 203. \quad \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2} +$$

$$+x\sqrt{2}}{-x\sqrt{2}} \right|. \quad 204. \quad (3t^2-1)/(6t^3), \text{ бунда } t = (1-\sqrt{1-x^2})/x. \quad 205.$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt[4]{x^4+1} - \sqrt{2} x}{\sqrt[4]{x^4+1} + \sqrt{2} x} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x^4+1}{2x^3}}. \quad 206.$$

$$\frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1+2x^3} + x}{\sqrt[4]{1+2x^3} - x} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[4]{1+2x^3}}{x}. \quad 207. \quad \frac{1}{8} (\cos 2x - \sin 2x - 2)e^{-2x}.$$

$$208. \quad \ln |x| / \sqrt{x^2-1} + \arcsin(1/x). \quad 209. \quad \frac{1}{2na^{2n-1}} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| +$$

$$\sum_{k=1}^{n-2} \left(\cos \frac{2k\pi}{n} \ln(x^2 - 2ax \cos \frac{k\pi}{n} + a^2) - 2 \sin \frac{k\pi}{n} \operatorname{arctg} \frac{x - a \cos(\frac{k\pi}{n})}{a \sin(\frac{k\pi}{n})} \right).$$

210. Агар $a^2 < b^2$ бўлса, $\frac{1}{|a|\sqrt{b^2-a^2}} \cdot \ln \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{|\sqrt{b^2-a^2} \cdot x + |a|\sqrt{b^2-x^2}|}$,
агар $a^2 = b^2$ бўлса, $-\frac{x}{b^2\sqrt{b^2-x^2}}$, агар $a^2 > b^2$ бўлса, $\frac{1}{|a|\sqrt{a^2-b^2}}$
 $\arccos \frac{\sqrt{a^2-b^2} x}{|b|\sqrt{a^2-x^2}}$. 211. Агар $a \neq \pm 1$ бўлса, $\frac{2}{a^2-1} \operatorname{arctg} \left(\frac{a-1}{a+1} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)$
 $a = 1, \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. агар $a = -1; |x| < \pi$ бўлса, $-\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$. 213.
Агар $ab > 0$ бўлса, $\frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} e^x \right)$; агар $ab < 0$ бўлса, $\frac{1}{2\sqrt{-ab}}$
 $\ln \left| \frac{b+\sqrt{-abe^x}}{b-\sqrt{-abe^x}} \right|$. 214. Агар $a > 0$ бўлса, $\frac{1}{\sqrt{a}} \ln \frac{\sqrt{a+be^x}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+be^x}+\sqrt{a}}$
агар $a < 0$ бўлса, $\frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a+be^x}}{\sqrt{-a}}$. 215. Агар $a > 0$ бўлса,
 $x \ln |x^2+a| - 2x + 2\sqrt{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{a}}$, агар $a \leq 0$ бўлса, $x \ln |x^2+a| -$
 $-2x + \sqrt{-a} \ln \left| \frac{x+\sqrt{-a}}{x-\sqrt{-a}} \right|$. 216. $2(\ln x - 2)\sqrt{x+a} + 2\sqrt{a} \ln \frac{\sqrt{x+a} +$
 $+\sqrt{a}}{-\sqrt{a}}$, $a > 0$. $2(\ln x - 2)\sqrt{x+a} + 4\sqrt{-a} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{-a}}$, $a < 0$. 217.
 $-\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+a})}{x} + \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \frac{\sqrt{x^2+a}+\sqrt{a}}{|x|}$, $a > 0$. $-\frac{\ln|x+\sqrt{x^2+a}|}{x} +$
 $+\frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{-a}}$ $a < 0$; $-\frac{1+\ln(2x)}{x}$; $a=0$. 218. $x^a \ln^b x$. 219.
 $(\ln x) \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$. 220. $(\sin x) \operatorname{arctg}^2(\sin x) - \frac{1}{2} \ln(1 + \sin^2 x)$.

IX боб

4. а) 1; б) $\frac{b^4-a^4}{4}$; в) $\frac{2}{3}(b^{3/2} - a^{3/2})$; г) $\ln \frac{b}{a}$; д) $\frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$.
11. $g(x)$ — функция сифатида 7-мисолдаги Риман функцияси, $f(x)$ функ-
ция сифатида эса $f(x) = \begin{cases} \text{агар } x=0, \text{ бўлса, } 0, \\ \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса, } 1 \end{cases}$ функция қаралсин.
16. $\frac{\pi}{3}$. 17. $\frac{\pi}{6}$. 18. 1. 19. $\frac{\pi}{2 \sin \alpha}$. 20. 1. 21. $45/4$. 22. $\frac{2\pi}{\sqrt{1-e^2}}$
23. $\frac{\pi}{2|ab|}$. 24. $\frac{\pi}{12}$. 25. $\ln \frac{3}{2}$. 26. π . 27. $\frac{1}{3}(2 - 3 \operatorname{ch} 2 + \operatorname{ch}^3 2)$.

28. $\frac{1}{6} \ln \left(\frac{2}{5} \right)$. 29. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. 30. $\frac{1}{2} (e - e^{1/4})$. 31. $\frac{\pi}{4}$. 32. $\operatorname{arctg} - \frac{\pi}{4}$.
 33. $\frac{\pi}{6} + \frac{8\sqrt{3}}{27}$. 34. $2 \ln \frac{4}{3} - \frac{1}{2}$. 35. $\ln \frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$. 36. $4 - 2 \ln 3$. 37.
 $\sin 1$. 38. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. 39. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. 40. $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}$. 41. $2 \ln 2 - \frac{3}{4}$. 42.
 $\frac{e(\sin 1 - \cos 1)}{2}$. 43. $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$. 44. $\frac{(e^{\pi} - 2)}{5}$. 45. 0. 46. 0.
 47. 0. 48. 0. 49. $\frac{\pi}{16}$. 50. $\frac{e^4 - 1}{2}$. 51. 4π . 52. $\frac{\pi}{6} - \sqrt{3} + 1$. 53.
 $2(\sqrt{2} - 1)$. 54. $\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{6}} \right) / \sqrt{2}$. 55. $-\frac{468}{7}$. 56. $\frac{29}{270}$.
 57. $1/6$. 58. $\frac{3}{5} (e^{\pi} - 1)$. 59. $\frac{n^{n+1}}{n+1} \ln n - \frac{n^{n+1} - 1}{(n+1)^2}$. 60. $\frac{8191}{26}$.
 61. $2(1 - e^{-1})$. 62. $\frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$. 63. $\frac{3}{2} e^{5/2}$. 64. $200\sqrt{2}$. 65. $(-1)^n \left[\frac{\pi}{4} - \right.$
 $\left. - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right) \right]$. 66. $I_n = \frac{1}{2^{n-1}} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \left(n + \right.$
 $\left. + \frac{1}{n} \right)^{n-1} + \dots + \left(1 - \frac{1}{n} \right) I_{n-2}$, $n > 2$. 79. -1 . 80. $14 - \ln(7!)$.
 81. $-\ln \frac{\pi}{2}$. 82. $\ln(n!)$. 86. $1/2$. 87. 16. 83. $\ln 2$. 89. $\pi/4$. 50. $\frac{2}{\pi}$.
 91. $\frac{\pi}{6}$. 92. $\frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1)$. 93. $1/e$. 94. $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$. 95. $\frac{5}{6} \pi$.
 96. $x + \frac{1}{2}$. 97. $\frac{1}{\ln 2}$. 98. 1. 99. $\frac{\pi^2}{4}$. 100. 0. 101. Иккинчиси. 102.
 Биринчиси. 103. Иккинчиси. 104. Биринчиси. 105. Биринчиси. 106. Ик-
 кинчиси. 107. $1/3$. 108. $6 \frac{2}{3}$. 109. 10. 110. $\frac{1}{2} \cos \varphi$.

Х б о б

1. $a \ln \frac{a+b}{a-b} - b$. 2. $\operatorname{Intg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} \right)$. 3. $\frac{e^2 + 1}{4}$. 4. $a \ln \frac{a}{b}$. 5.
 $2(1 + \ln 1.5)$. 6. $\ln 3$. 7. $\ln(2 + \sqrt{3})$. 8. $a \ln(a/x_0)$. 9. $1/\sqrt{2}$. 10. $\sqrt{3}(2 -$
 $- \sqrt{x_0} - \sqrt{x_0^3})$. 11. 10,8. 12. $\operatorname{sh} 2a$. 13. $\ln \left(\frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} a} \right)$. 14. $14/3$. 15. $2\pi^2 a$.
 16. $2 \left(\operatorname{ch} \frac{T}{2} \sqrt{\operatorname{ch} T} - 1 \right) - \sqrt{2} \ln \frac{\sqrt{2 \operatorname{ch} \frac{T}{2} + \sqrt{\operatorname{ch} T}}}{1 + \sqrt{2}}$. 17. $\frac{1}{2} (\operatorname{ch}^{3/2} 2T - 1)$.

18. $t_2 - t_1$. 19. $\text{sh}^2 t_0$. 20. $-a \ln \sin t_0$. 21. $\frac{\pi^2}{3}$. 22. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(1 + \sqrt{2})$.
 23. $(2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5}))/4$. 24. $2a \left(5 + \frac{5}{2\sqrt{3}} \ln(2 + \sqrt{3}) \right)$. 25. t_0 . 26. $\ln t_0$.
 27. $a\sqrt{1+m^2}/m$. 28. $\rho[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$. 29. $a(2\pi - \text{th } \pi)$. 30. $2 + \frac{1}{2} \ln 3$. 31. $6 \frac{1}{3}$. 32. $\text{sh } R$. 33. T . 34. $8(2 - \sqrt{3})$. 35. $2a$. 36. $8a(5\sqrt{5} - 1)/3$. 37. $1423a/15$. 38. $\pi(b-a)/2$. 39. $134/27$. 40. $(3\sqrt{3} - 1)$. 41. 8. 42. $\frac{a}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2} + 1) + a$. 43. $4aE\left(\frac{\pi}{2}, e\right) = 4aE(e)$, $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, где E эллиптический интеграл. 44. $4/3\sqrt{3}$. 45. 8. 46. $a/\sqrt{3}$.
 47. $1 + \frac{\ln(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{2}}$. 48. $3\pi a/2$. 49. $16a/3$. 50. $15\pi a/8$. 51. 1) $2a$,
 $\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}$, $n = 2k$. 2) $\pi a \cdot \frac{(2k+1)!!}{(2k)!!}$, $n = 2k + 1$. 52. $a^2/3$. 53. 4, 5.
 54. $2 - \frac{1}{\ln 2} \approx 0,56$. 55. $\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \approx 0,97$. 56. $\pi/2$. 57. $\frac{1}{2} \text{cth } \frac{\pi}{2} \approx 0,546$. 58. $1 + \frac{\pi^2}{8}$. 59. $\sqrt{2} - 1$. 60. $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{8}$. 61. $\ln 4 - 2e^{-1}$.
 62. $6 \ln 2 - 2,5$. 63. $1 - e^{-a^2}(1 + a^2)$. 64. $\pi/2 - \frac{1}{3}$. 65. $(1 - \ln 2)/\ln 2$. 66. $\frac{20}{9} - \ln 3$. 67. $\log_4 e - 1/4$. 68. $\frac{16}{3} + 2\pi$. 69. $(\alpha - 1)/(\alpha + 1)$.
 70. $\frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1} + \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. 71. $\frac{a^2}{3}(4\pi^2 + 3\pi)$. 72. $8/15$. 73. $\pi a^2 \left(\frac{16}{\sqrt{3}} - 9 \right)$.
 74. πab . 75. $3\pi a^2/2$. 76. $a^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \right)$. 77. $4a^2/3$. 78. a^2 . 79. $\frac{\rho^2}{6} (3 + 4\sqrt{2})$. 80. 11π . 81. $1/\pi$. 82. $2/3$. 83. $1/\pi$. 84. $\pi \left(1 + \frac{\pi^2}{6} \right)$. 85. $17\pi/4$. 86. $a^2 \arcsin \frac{b}{a} - b\sqrt{a^2 - b^2}$. 87. $\pi(a^2 + 2b^2)/2$. 88. $a^2(3\pi + 4)/12$. 89. $6a^2 \arctg \sqrt{\frac{b}{a-b} - 2(2b+3a)\sqrt{b(a-b)}}$. 90. a^2 . 91. $2a\sqrt{\pi^2 a^2 + \sqrt{4b^2 + \frac{8b^2}{\pi} \ln \frac{\pi a + \sqrt{\pi^2 a^2 + 4b^2}}{2b}}}$. 92. $\pi \left[(\sqrt{5} - \sqrt{2}) + \ln \frac{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{5} - 1)}{2} \right]$.
 93. $\pi \left(\sqrt{2} - e^{-a} \sqrt{1 + e^{-2a}} - \ln \frac{e^{-a} + \sqrt{1 + e^{-2a}}}{1 + \sqrt{2}} \right)$. 94. $\left(\frac{\pi a^2}{8} \right) \cdot \left(3 \ln(\sqrt{2} + 1) + 7\sqrt{2} \right)$. 95. $\pi(-5 - 9 \ln 2 + 16 \ln 3)/6$. 96. $\frac{\pi a^2}{6} (11 - a\sqrt{3} +$

$$\begin{aligned}
& +2\pi(2\sqrt{3}-1)). \quad 97. \pi(\operatorname{sh} 4-4e^{-2})/8. \quad 98. \pi(11\sqrt{2}+7\ln(\sqrt{2}+1))/8. \\
& 99. 2\pi(2\sqrt{2}-1)/3. \quad 100. 2\pi a\left(a+b\operatorname{sh}\frac{b}{a}-a\operatorname{ch}\frac{b}{a}\right). \quad 101. 1) \frac{64}{3}\pi a^3; \\
& 2) 16\pi^2 a^2; \quad 3) \frac{32}{3}\pi a^2. \quad 102. 128\pi a^2/5. \quad 103. \frac{15\pi}{8}(4+\ln 5). \quad 104. 59,2\pi. \\
& 105. \pi pa^2. \quad 106. \pi a^3/2. \quad 107. 3\pi ab^2/7. \quad 108. \pi^2/4. \quad 109. \frac{\pi}{4}(1-e^{-2a}(1+ \\
& +2a)). \quad 110. \pi(2-5/e). \quad 111. \frac{\pi^2}{2}. \quad 112. \frac{\pi^2 \operatorname{sh} a}{2a(\pi^2+a^2)}e^{(2\pi-1)a}. \quad 113. 4/3\pi ab^2. \\
& 114. (2\pi b^2/3a^2)\pi(\pi^2+3a^2). \quad 115. 4\pi. \quad 116. \pi^2(4\pi^2-15)/24. \quad 117. \frac{12\pi pq}{5}\sqrt{pq^3}. \\
& 118. \pi'(5(1-e^{-2\pi})). \quad 119. 4\pi(2+9\ln 3). \quad 120. \frac{\pi^2}{2}+\frac{3\pi^2}{8}. \quad 121. 5\pi^2 a^3. \\
& 122. \frac{32}{105}\pi ab^2. \quad 123. \pi a^2(6\ln 2-4)/3. \quad 124. (26\sqrt{2}+16)\pi a^3. \quad 105. \quad 125. \\
& 8\pi a^3(3\ln 2-2)/3. \quad 126. (\pi a^2/24)(24\ln 4-1).
\end{aligned}$$

ХІ БОБ

1. $3/2$. 2. 1. 3. $1/4$. 4. $1/18$. 5. $1/60$. 6. $5/36$. 7. $-1/36$. 8. $-\ln 3$.
9. $\ln 2/3$. 10. $3/4$. 11. $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$. 12. 1. 13. $1/2 \sin 2$. 14. $\pi/4$. 15. $1/8$.
25. Яқинлашувчи. 26. Яқинлашувчи. 27. Узоқлашувчи. 28. Яқинлашувчи.
29. Узоқлашувчи. 30. Яқинлашувчи. 31. Яқинлашувчи. 32. Яқинлашувчи.
33. Узоқлашувчи. 34. Яқинлашувчи. 35. Яқинлашувчи. 37. Яқинлашувчи.
38. Яқинлашувчи. 39. Яқинлашувчи. 40. $0 < a < 1$ да яқинлашувчи, $a > 1$ да узоқлашувчи.
41. Узоқлашувчи. 42. Яқинлашувчи. 43. Яқинлашувчи. 44. Яқинлашувчи.
45. Яқинлашувчи. 46. Яқинлашувчи. 47. $a < e$ да яқинлашувчи, $a > e$ да узоқлашувчи.
48. Узоқлашувчи. 49. Узоқлашувчи.
50. Яқинлашувчи. 51. Узоқлашувчи. 52. Яқинлашувчи. 53. $\frac{p}{2}+q > 1$ да яқинлашувчи.
54. $p > 3/2$ да яқинлашувчи. 55. Узоқлашувчи. 56. Узоқлашувчи. 57. Яқинлашувчи.
58. $q > p$ да яқинлашувчи. 59. $\alpha(q-p) > 1$ да яқинлашувчи. 60. $p > 1$ да яқинлашувчи.
61. $\forall q, p > 1$ да яқинлашувчи, $p=1, q > 1$ да яқинлашувчи. 62. $\alpha > \frac{1}{2}$ да яқинлашувчи.
63. Узоқлашувчи. 64. Узоқлашувчи. 65. Яқинлашувчи. 66. Яқинлашувчи.
67. Яқинлашувчи. 68. $\alpha < -1$ да яқинлашувчи. 69. Яқинлашувчи.
70. Узоқлашувчи. 71. Яқинлашувчи. 72. Яқинлашувчи. 73. Яқинлашувчи.
74. Яқинлашувчи. 75. Узоқлашувчи. 76. $\alpha > 2$ да яқинлашувчи. $\alpha \leq 2$ да узоқлашувчи.
77. Узоқлашувчи. 78. Яқинлашувчи. 79. Яқинлашувчи. 80. Яқинлашувчи.
81. Яқинлашувчи. 82. Яқинлашувчи. 111. Яқин-

лашувчи. 112. Яқинлашувчи. 113. Яқинлашувчи. 114. Узоқлашувчи. 115. Яқинлашувчи. 116. Яқинлашувчи. 117. Яқинлашувчи. 118. Яқинлашувчи. 119. Яқинлашувчи. 120. Яқинлашувчи. 121. Узоқлашувчи. 122. Яқинлашувчи. 123. Яқинлашувчи. 124. Яқинлашувчи. 125. Узоқлашувчи. 126. Узоқлашувчи. 127. Яқинлашувчи. 128. $p > 1$ да абсолют яқинлашувчи, $0 < p \leq 1$ да шартли яқинлашувчи. 129. $p > 1$ да абсолют яқинлашувчи, $0 < p \leq 1$ да шартли яқинлашувчи. 130. $p > 1$ да абсолют яқинлашувчи, $\frac{1}{2} < p \leq 1$ да шартли яқинлашувчи. 131.

$|x - k\pi| < \frac{\pi}{4}$ да абсолют яқинлашувчи. $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ да шартли яқинлашувчи. 132. $p > 1$ да абсолют яқинлашувчи, $\frac{1}{2} < p \leq 1$ да шартли яқинлашувчи. 133. Шартли яқинлашувчи. 134. Абсолют яқинлашувчи. 135. Узоқлашувчи. 136. $p > 2$ да абсолют яқинлашувчи, $0 < p \leq 2$ да шартли яқинлашувчи. 137. Шартли яқинлашувчи.

АДАБИЁТЛАР

1. Азларов Т. А., Мансуров Х. Математик анализ, 1-қисм, — Т., «Ўқитувчи», 1986.

2. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу — М.: Наука, 1977 ва бошқа йиллардаги нашрлари.

3. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. Л. Д. Кудрявцев таҳрири остида. — М.: Наука, 1984.

4. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Интегралы. Ряды. Л. Д. Кудрявцев таҳрири остида — М., Наука, 1986.

5. Ю. С. Богданов, О. А. Кастрница. Начала анализа в задачах и упражнениях. Минск. Высшая школа. 1988.

6. Вавилов В. В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Пасиченко П. И. Задачи по математике. Начала анализа. — М.: Наука, 1990.

М У Н Д А Р И Ж А

Сўз боши	3
I боб. Дастлабки тушунчалар	
1- §. Тўплам. Тўпламлар устида амаллар	5
2- §. Ҳақиқий сонлар	7
3- §. Ҳақиқий соннинг абсолют қиймати	9
4- §. Сонли тўпламларнинг чегаралари	9
II боб. Сонлар кетма-кетлиги ва унинг limiti	
1- §. Сонлар кетма-кетлиги тушунчаси	12
2- §. Сонлар кетма-кетлигининг limiti	20
3- §. Limitга эга бўлган кетма-кетликлар ҳақида теоремалар	23
4- §. Кетма-кетлиқнинг қуйи ва юқори limitлари	30
III боб. Функция ва унинг limiti	
1- §. Функция тушунчаси	35
2- §. Функция limiti	48
IV боб. Функциянинг узлуксизлиги ва текис узлуксизлиги	
1- §. Функциянинг узлуксизлиги	60
2- §. Функциянинг текис узлуксизлиги	71
V боб. Функциянинг ҳосила ва дифференциаллари	
1- §. Функциянинг ҳосиласи	78
2- §. Функциянинг дифференциали	98
3- §. Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар	105
VI боб. Дифференциал ҳисобнинг асосий теоремалари	
1- §. Теоремалар	115
2- §. Тейлор формуласи	123
VII боб. Дифференциал ҳисобнинг баъзи татбиқлари	
1- §. Функциянинг ўсувчилиги ҳамда камаювчилиги	131
2- §. Функциянинг экстремумлари	136
3- §. Функция графигининг қавариқлиги ва ботиқлиги. Функция асимптоталари	141
4- §. Функцияларни тўлиқ текшириш ва графикларини чизиш	145
5- §. Аниқмасликларни очиш. (Лопиталь қоидалари)	149

VIII боб. Аниқмас интеграллар

1-§. Аниқмас интеграл тушунчаси	156
2-§. Интеграллаш усуллари	159
3-§. Рационал функцияларни интеграллаш	165
4-§. Баъзи иррационал функцияларни интеграллаш	170
5-§. Тригонометрик функцияларни интеграллаш	180
6-§. Турли хилдаги интегралларни ҳисоблаш	185

IX боб. Аниқ интеграл

1-§. Аниқ интеграл таърифлари	192
2-§. Аниқ интегралнинг мавжудлиги. Интегралланувчи функциялар синфи	198
3-§. Аниқ интегралнинг хоссалари	202
4-§. Аниқ интегрални ҳисоблаш	206

X боб. Аниқ интегралнинг баъзи бир татбиқлари

1-§. Ёй узунлигини ҳисоблаш	226
2-§. Текис шаклнинг юзи	231
3-§. Айланма сиртнинг юзи	241
4-§. Айланма жисмнинг ҳажми	242
5-§. Аниқ интегралнинг механик масалаларга татбиқи	247

XI боб. Сонли қаторлар

1-§. Асосий тушунчалар. Содда теоремалар	251
2-§. Мусбат ҳадли қаторлар. Солиштириш теоремалари	259
3-§. Мусбат қаторлар учун яқинлашувчилик аломатлари	268
4-§. Ихтиёрий ҳадли қаторлар. Коши теоремаси. Абсолют ва шартли яқинлашувчи қаторлар	278

Жавоблар ва курсатмалар

I боб.	286
II боб.	286
III боб.	288
IV боб.	290
V боб.	290
VI боб.	294
VII боб.	296
VIII боб.	303
IX боб.	310
X боб.	311
XI боб.	313

Адабиётлар

На узбекском языке

*Азимбой Саъдуллаев, Ҳожиакбар Мансуров,
Гулмирза Худойберганов, Азизжон Ворисов, Рустам Ғуломов*

**СБОРНИК ПРИМЕРОВ И ЗАДАЧ ПО КУРСУ
«МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА»**

I

Учебное пособие для студентов университетов

Издательство «Ўзбекистон» — 1993, 700129, Ташкент, Навоий, 30

Муҳаррир И. Аҳмаджонев
Муқова расмони Д. Собирова
Бадий муҳаррир И. Қўчкорова
Техн. муҳаррир А. Бахтияров
Мусаддиҳ М. Раҳимбеков

Термига берилди 17.11.92. Босишга рухсат этилди 16.09.93. Формати 84×108/88.
Босма қозоғига «Литературная» гарнитурда юқори босма усулида босилди.
Шартли б. т. 16.8. Нашр т. 17.06. Нусхаси 16000. Буюртма № 438. Баҳоси
шартнома асосида

«Ўзбекистон» нашриёти. 700129. Тошкент, Навоий, 30. Шартнома № 126—92.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитаси ижарадаги Тошкент матбаа
компаниясида босилди. 700129, Тошкент, Навоий кўчаси, 30.

Математик анализ курсидан мисол ва масала-
М 31 лар тўплами: Ун-тлар талабалари учун ўқув қўлланма
/А. Саъдуллаев, Х. Мансуров, Т. Худойберганди
ва бошқ./ I К.— Т.: Ўзбекистон, 1993—317 б.

ISBN 5-640-01328-1

Қўлланма университетлар ҳамда педагогика институтлари, шунингдек
олий техника қўв юртларининг олий математика чуқур дастур лососи
ўқитиладиган факультетлари талабалари учун шўлжалланган.

Қўлланма математик анализга кириш, дифференциал ва интеграл
ҳисоб мавзуларини ўз ичига олади. Қўлланмада 1500 дан зиёд мисол ва
масалалар келтирилган бўлиб, уларнинг аксарияти батафсил ечим билан
таъминланган.

И. Саъдуллаев А. ва бошқ.

Сборник примеров и задач по курсу «Матема-
тического анализа». Учебное пособие для студ
ун-тов.

ББК 22.161я73

№ 500—93

Навой номли

Ўзбекистон Республикаси

давлат кутубхонаси.

С 1602070000—76 93

М 351 (04) 93