Ж. ҲОЖИЕВ, А. С. ФАЙНЛЕЙБ

АЛГЕБРА ВА СОНЛАР НАЗАРИЯСИ КУРСИ

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги университетларнинг математика ва механика-математика факультетлари талабалари учун дарслик сифатида рухсат этган

ТОШКЕНТ – "ЎЗБЕКИСТОН" – 2001

22.132я73
Ҳ-59

Дарслик университетларнинг математика ва механика-математика факультетларининг I—II курслари талабалари учун мўлжалланган бўлиб, "Алгебра ва сонлар назарияси" курси дастури асосида ёзилган.

Дарслик 12 бобдан иборат, унда алгебра курси гуруҳлар ва ҳалқалар асосида қурилган.

Тақризчилар:
физика-математика фанлари доктори **Ю.Б. Ҳакимжонов,**
физика математика фанлари доктори,
профессор **Р.Н. Ғанихўжаев**

Муҳаррир **Ю. Музаффархўжаев**

Х $\frac{1602040000-73}{\text{М 351 (04) 2001}}$ 2001

ISBN 5-640-02832-7

СЎЗ БОШИ

Алгебра — математиканинг алгебраик амалларни ўрганувчи бўлими. Энг содда алгебраик амаллар — натурал сонлар ва мусбат рационал сонлар устидаги амаллардир. Уларнинг барча асосий хоссалари қадим замонларда маълум бўлган. Алгебраик фикр ва белгиларнинг ривожланишига Диофант "Арифметика"сининг (эрамизнинг III асри) таъсири катта бўлган. Алгебранинг бундан кейинги ривожланишига Хивада тугилган ва IX асрда яшаган математик ва астроном Муҳаммад ибн Мусо ал-Хоразмийнинг "Ал-жабр ва ал-муқобала" асарининг таъсири жуда катта бўлган. "Алгебра" атамаси Хоразмийнинг ана шу асарининг номидан олинган. Бу асарда биринчи ва иккинчи даражали алгебраик тенгламаларни ечишга келтириладиган масалаларни ечишнинг умумий усуллари берилган.

XV асрнинг охирига келиб, шу давргача математик асарларда ишлатилган алгебраик амалларнинг узундан-узун сўзли ифодалари ўрнига ҳозир қабул қилинган + ва − ишоралари, даража, илдиз ва қавс белгилари пайдо бўлди. Ф. Виет (XVI асрнинг охири) биринчи бўлиб номаълумлар ва масалаларда берилган катталиклар учун ҳарфий белгиларни ишлата бошлади. XVII асрнинг ўрталарига келиб асосан ҳозирги замонда ишлатилаётган алгебраик белгилашлар қабул қилинди.

XVII—XVIII асрларда "Алгебра" деб алгебраик тенгламаларни ечиш ва ҳарфий формулаларни айний ўзгартириш ҳақидаги фан тушунилган. XVIII асрнинг ўрталарига келганда алгебра ҳозир "элементар алгебра" деб тушуниладиган ҳажмда юксалди.

XVIII—XIX асрлар алгебраси — бу асосан кўпҳадлар алгебрасидир. Бир номаълумли алгебраик тенгламалар назарияси билан бирга бир неча номаълумли алгебраик тенгламалар тизимларини ечиш назарияси ҳам ривожланди. Хусусан, чизиқли тенгламалар тизимлари назарияси яхши ривожланди, матрица ва детерминант тушунчалари пайдо бўлди.

XIX асрнинг ўрталаридан бошлаб, алгебрада ихтиёрий алгебраик амалларни ўрганиш масалалари пайдо бўлди. XX асрнинг бошларида Д. Гильберт, Э. Штейниц, Э. Артин ва Э. Нетер каби математиклар асарлари таъсирида ихтиёрий алгебраик амалларни ўрганиш алгебранинг асосий масаласига айланди ва ҳозир ҳам шундай бўлиб қолмоқда.

Алгебранинг ҳозирги замон математикасидаги аҳамияти ниҳоятда катта. Умуман, ҳозирги замон математикаси кўп бўлимларининг "алгебраиклашиши" кучайиб бормоқда. Математика бошқа бўлимлари масалаларининг алгебра тилига ўтказилиши, уларни ечиш учун ниҳоятда унумли бўлган формал алгебраик ҳисоблашларни татбиқ қилишга имкон беради. Кейинги вақтларда математикада бу йўл билан муҳим ихтиролар қилинган (масалан, топологияда). Алгебранинг физикада, кибернетикада ва математик иқтисодда муҳим татбиқлари бор.

Мазкур китоб университетлар ва пединститутлар математика бўлимлари талабаларига мўлжалланган бўлиб, уч қисмдан иборат. Бу қисмлар Тошкент давлат университетида ўқитиладиган алгебра курси ўқув дастурига мос келади.

Китобнинг 67- ва 68-параграфларини ёзишда доц. Б. Турсунов яқиндан ёрдам берди. Муаллифлар унга ўз миннатдорчиликларини билдирадилар.

Китоб ҳақидаги фикр-мулоҳазаларни муаллифлар мамнунлик билан қабул қиладилар ва олдиндан миннатдорлик билдирадилар.

Биринчи боб.

ТЎПЛАМЛАР ВА ФУНКЦИЯЛАР

1-§. ТЎПЛАМЛАР

Тўплам ҳозирги кунда математиканинг энг умумий ва шу билан бирга энг бошланғич тушунчаларидан биридир.

Математикада тўплам деганда нарсаларнинг, ҳодисаларнинг ихтиёрий мажмуи (синфи, бирлашмаси) тушунилади. Тўпламни ташкил этувчи нарсалар, ҳодисалар унинг **элементлари** деб аталади. Кўпинча тўпламнинг элементлари ўзларининг бир ёки бир нечта хосса ва белгилари билан тўпламга кирмаган нарсалардан, ҳодисалардан ажралиб туради.

Тўпламга кирувчи барча элементлар турли ҳисобланади, яъни унда айнан бир хил элементлар бўлмайди.

Одатда тўпламларни катта лотин ҳарфлари билан, уларнинг элементларини эса кичик лотин ҳарфлари билан белгиланади.

Тўпламларга мисоллар:

1) Ер юзидаги барча одамлар тўплами;

2) Ер юзидаги барча давлатлар тўплами;

3) Ушбу 1, 2, 3, 4 сонлардан иборат тўплам; элементлари бу усулда бирин-кетин таърифлаб берилган тўпламларни қуйидагича белгилаш қабул қилинган: $\{1, 2, 3, 4\}$;

4) $N_n = \{1, 2, ..., n\}$ — 1 дан n сонигача бўлган натурал сонлар тўплами;

5) $N = \{1, 2, 3, ...\}$ — барча натурал сонлар тўплами;

6) Z — барча бутун сонлар тўплами;

7) Q — барча рационал сонлар тўплами;

8) R — барча ҳақиқий сонлар тўплами.

Бундан кейин ҳам N_n, N, Z, Q, R белгиларни худди шу тўпламлар учун ишлатамиз.

Қулайлик учун бирорта ҳам элементга эга бўлмаган тўплам ҳам кўрилади. Уни **бўш** тўплам деб аталади ва $\varnothing$ билан белгиланади.

Ушбу $x \in A$ ёзув билан x элемент A тўпламнинг элементи эканлиги белгиланади; бу ҳолда x элемент A тўпламга *тегишли* (А тўпламда ётади) дейилади. Акс ҳол яъни x элементнинг A тўпламга *тегишли эмаслиги* $x \in A$ билан белгиланади.

Таъриф. *Агар A тўпламнинг ҳар бир элементи B тўпламга ҳам тегишли бўлса, A тўплам B тўпламнинг **қисм тўплами** (қисми) дейилади ва $A \subseteq B$ ёки $B \supseteq A$ билан белгиланади.*

Бу ҳолда B тўплам A тўпламдан катта ёки тенг, A тўплам эса B тўпламдан кичик ёки тенг ҳам дейилади. Ушбу "$\subseteq$" ва "$\supseteq$" белгилар эса тўпламлар орасидаги тенгсизлик муносабати дейилади.

Масалан, юқоридаги мисолимизда N тўплам Z тўпламнинг қисм тўплами, $N \subseteq Z$.

Бу таърифдан бевосита қуйидаги *хоссалар* келиб чиқади:

1) Бўш тўплам ҳар қандай A тўпламнинг қисм тўпламидир, яъни $\varnothing \subseteq A$;

2) Ҳар қандай A тўплам учун $A \subseteq A$ (тенгсизликнинг рефлексивлик хоссаси);

3) Агар $A \subseteq B$ ва $B \subseteq C$ бўлса, у ҳолда $A \subseteq C$ (тенгсизликнинг транзитивлик хоссаси).

Агар $A \subseteq B$ бўлса, кўпинча A нинг элементлари B нинг A га кирмаган элементларидан бир ёки бир нечта хоссалар билан ажралиб туради. Бундай қисм тўпламларни қуйидагича белгилаймиз:

$A = \{x \in B \mid x \in A$ ни белгилайдиган хоссалар $\}$.

Масалан,

$A = \{n \in N \mid n$ сони 3 га бўлинганда қолдиқ $1\}$, яъни A тўплам биринчи ҳади 1 ва айирмаси 3 бўлган арифметик прогрессия ҳадларидан иборат.

Таъриф. *Агар* $A \subseteq B$ ва $B \subseteq A$ бўлса, *A ва B тўпламлар **тенг** дейилади ва $A = B$ билан белгиланади. Акс ҳол, яъни A ва B тўпламларнинг тенгмаслиги $A \neq B$ билан белгиланади.*

Бу таърифдан тенглик муносабатининг қуйидаги хоссалари бевосита келиб чиқади:

1) Ҳар қандай A тўплам учун $A = A$ (тенгликнинг рефлексивлик хоссаси);

2)Агар $A = B$ бўлса, у ҳолда $B = A$ (тенгликнинг симметриклик хоссаси);

3) Агар $A = B$ ва $B = C$ бўлса, у ҳолда $A = C$ (тенгликнинг транзитивлик хоссаси).

Агар A ва B тўпламлар учун $A \subseteq B$ ва $A \neq B$ ўринли бўлса, буни қисқача $A \subset B$ билан белгилаймиз. Ушбу "$\subset$" ва "$\supset$" белгилар тўпламлар орасидаги *қатъий тенгсизлик муносабати* дейилади. Ушбу $A \subset B$ муносабатнинг маъноси шундан иборатки, A нинг ҳар бир элементи B га тегишли, аммо B нинг A га тегишли бўлмаган элементлари мавжуд. Масалан, юқорида келтирилган тўпламлар учун $N_n \subset N \subset Z \subset Q \subset R$.

Равшанки, агар $A \subset B$ ва $B \subset C$ бўлса, $A \subset C$ (қатъий тенгсизликнинг транзитивлик хоссаси).

Шуни айтиш керакки, $A \subset B$ ва $B \subset A$ шартлар бир вақтда ўринли эмас.

Бўш бўлмаган ҳар қандай A тўплам иккита турли қисм тўпламга эга: $\varnothing$, A; бу қисм тўпламлар **хосмас** қисм тўпламлар дейилади. Бошқа (яъни $\varnothing \subset B \subset A$ шартни қаноатлантирувчи) қисм тўпламлар **хос** қисм тўпламлар дейилади. Бўш тўплам ва битта элементдан иборат тўплам хос қисм тўпламларга эга эмас.

Элементларининг ўзи ҳам тўплам бўлган тўпламлар кўп учрайди. Улар **тўпламлар тизими** дейилади.

Масалан A тўплам текисликдаги барча тўғри чизиқлардан иборат тўплам бўлсин. Бу мисолда A тўпламнинг элементи — тўғри чизиқнинг ўзи — тўплам бўлиб, бу тўплам шу тўғри чизиқда ётувчи барча нуқталардан иборат. Бу ерда тўғри чизиқнинг ўзи A тўпламга кирадию, аммо ундаги нуқталарнинг бирортаси ҳам A тўпламнинг элементи эмас.

Тўпламлар тизими элементларини баъзан катта лотин ҳарфлари билан белгиланади.

2-§. ТЎПЛАМЛАР АЛГЕБРАСИ

Тўпламлар устида бир нечта амаллар бажариб, бу амалларнинг хоссаларини ўрганамиз.

A ва B — ихтиёрий тўпламлар бўлсин. Бу иккита тўпламдан иборат $\{A, B\}$ тўпламлар тизимини қараймиз.

Агар $c \in A$ ва $c \in B$ шартларнинг иккаласи ҳам ўринли бўлса, бундай c элемент A ва B тўпламларнинг ($\{A, B\}$ тизимнинг) ***умумий элементи*** дейилади.

Таъриф. *A ва B тўпламларнинг барча умумий элементларидан тузилган тўплам A ва B тўпламларнинг* ***кесишмаси*** (баъзан **кўпайтмаси, умумий қисми**) *дейилади ва $A \cap B$ билан белгиланади.*

Масалан, $A=\{0, 1, 2, 3\}$ ва $B=\{1, 3, 5, 7\}$ бўлса, у ҳолда $A \cap B=\{1, 3\}$.

Кесишма амали таърифидан қуйидаги хоссаларнинг ўринлилиги бевосита келиб чиқади:

a_1) Ҳар қандай A тўплам учун $A \cap A = A, A \cap \varnothing = \varnothing \cap A = \varnothing$.

a_2) Ҳар қандай A ва B тўпламлар учун $A \cap B = B \cap A$ (коммутативлик хоссаси).

a_3) Ҳар қандай A, B, C тўпламлар учун $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (ассоциативлик хоссаси).

a_4) Ҳар қандай A ва B тўпламлар учун $A \supseteq A \cap B$ ва $B \supseteq A \cap B$.

a_5) Агар A, B, C тўпламлар учун $A \supseteq C$ ва $B \supseteq C$ бўлса, у ҳолда $A \cap B \supseteq C$.

Агар A ва B тўпламларнинг кесишмаси бўш тўплам, яъни $A \cap B = \varnothing$ бўлса, улар **кесишмайдиган** тўпламлар дейилади.

Агар x элемент учун $x \in A$ ва $x \in B$ шартларнинг камида бири ўринли бўлса, бундай элемент $\{A, B\}$ тизимга **тегишли** дейилади.

Таъриф. *$\{A, B\}$ тизимга тегишли бўлган барча элементлардан тузилган тўплам A ва B тўпламларнинг* ***бирлашмаси (баъзан, йиғиндиси)*** *дейилади ва $A \cup B$ билан белгиланади.*

Масалан, агар $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ва $B = \{1, 3, 5, 7\}$ бўлса, у ҳолда $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 5, 7\}$.

Бирлашма амали таърифидан қуйидаги хоссаларнинг ўринлилиги бевосита келиб чиқади:

b_1) Ҳар қандай A тўплам учун $A \cup A = A$, $A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$.

b_2) Ҳар қандай A ва B тўпламлар учун $A \cup B = B \cup A$ (коммутативлик хоссаси).

b_3) Ҳар қандай A, B, C тўпламлар учун $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (ассоциативлик хоссаси).

b_4) Ҳар қандай A ва B тўпламлар учун $A \subseteq A \cup B$ ва $B \subseteq A \cup B$.

b_5) Агар A, B, C тўпламлар учун $A \subseteq C$ ва $B \subseteq C$ бўлса, у ҳолда $A \cup B \subseteq C$.

Ҳар қандай A, B, C тўпламлар учун кесишма ва бирлашма амалларини ўзаро боғлайдиган қуйидаги айниятлар (дистрибутивлик хоссалари) ўринли:

$$c_1)\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$
$$c_2)\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cup C).$$

Буларнинг биринчисини исботлаймиз. Бунинг учун $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ва $A \cup (B \cap C) \supseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ муносабатларнинг иккаласи ҳам ўринлилигини кўрсатиш кифоя. Юқоридаги (b_4) хоссага кўра $A \subseteq A \cup B$ ва $A \subseteq A \cup C$. Бундан a_5) хоссага асосан $A \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Юқоридаги a_4) ва b_4) хоссаларга асосан $B \cap C \subseteq B \subseteq A \cup B$ ва $B \cap C \subseteq C \subseteq A \cup C$. Бундан a_5) муносабатга кўра $B \cap C \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Натижада b_5) хоссага асосан $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Энди $A \cup (B \cap C) \supseteq (A \cup B) \cap (A \cap C)$ муносабатни исботлаймиз. Фараз қилайлик, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. У ҳолда $x \in A \cup B$ ва $x \in A \cup C$. Бу ерда икки ҳол бўлиши мумкин: 1) $x \in A$; 2) $x \in A$. Биринчи ҳолда $x \in A$ дан $x \in A \cup (B \cap C)$ муносабат келиб чиқади. Иккинчи ҳолда $x \in A$, $x \in A \cup B$, $x \in A \cup C$ муносабатлардан $x \in B$ ва $x \in C$ эканлиги, яъни $x \in B \cap C$ келиб чиқади. Бундан $x \in A \cup (B \cap C)$. Демак иккала ҳолда ҳам $x \in A \cup (B \cap C)$. Бу ерда x элементнинг ихтиёрийлигидан $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$ муносабатни оламиз. Шу билан c_1) хосса исботланди.

Иккинчи айниятнинг исботи биринчининг исботига ўхшаш; уни исботлашни ўқувчига ҳавола қиламиз.

Т а ъ р и ф. ***A тўпламнинг B тўпламга кирмаган элементларидан иборат тўплам A ва B тўпламларнинг айирмаси (баъзан B нинг A даги тўлдирувчиси) дейилади ва $A \setminus B$ билан белгиланади.***

Масалан, агар $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ва $B = \{1, 3, 5, 7\}$ бўлса, у ҳолда $A \setminus B = \{0, 2\}$ ва $B \setminus A = \{5, 7\}$.

Бу мисолдан кўринадики, тўпламларни айириш амали учун коммутативлик хоссаси ҳар қандай A ва B тўпламлар учун ўринли эмас. Бу амал учун ассоциативлик хоссаси ҳам ўринли эмас. Бунга мос мисол топишни ўқувчига ҳавола қиламиз.

3-§. АКС ЭТТИРИШЛАР

A ва B бўш бўлмаган тўпламлар бўлсин.

Т а ъ р и ф. *Агар бирор f қоидага мувофиқ A тўпламнинг ҳар бир x элементига B тўпламнинг бирор y элементи мос қўйилган бўлса, бу f қоидага* ***акс эттириш (аксланиш, акслантириш, функция)*** *дейилади ва $f: A \to B$ ёки $y = f(x)$ билан белгиланади.*

Ҳаётда, техникада ва бошқа фанларда одатда $f: A \to B$ акс эттиришлар A тўплам элементларининг маълум хоссасини белгиловчи катталик сифатида учрайди. Масалан, A бирор шаҳардаги одамлар тўплами бўлсин. У ҳолда $a \in A$ учун $f(a)$ деб a одамнинг бўйи узунлигини оламиз. Натижада $f: A \to R$ акс эттириш ҳосил бўлади.

Умуман, бирор $f: A \to B$ акс эттириш қаралса, уни A тўплам элементларининг бирор f хоссаси деб тушуниш мумкин.

A тўплам f акс эттиришнинг **аниқланиш соҳаси,** B тўплам эса **қийматлар соҳаси** дейилади. Бу f аксланишдаги y элемент x элементнинг **f — тасвири (образи)**, x элемент эса y элементнинг **f — асл образи** дейилади.

Агар $y \in B$ берилган бўлса, у ҳолда унинг барча f - асл образларидан иборат тўплам унинг f - асл образи дейилади ва $f^{-1}(y)$ орқали белгиланади.

Ушбу $f(A) = \{y \in B /$ бирор $x \in A$ учун $y = f(x)\}$ тўплам, яъни x элемент A тўпламда ўзгарганда $f(x)$ нинг қабул қилган барча қийматларидан иборат тўплам A тўпламнинг f — образи дейилади. Равшанки $f(A) \subseteq B$.

Масалан, $f: R \to R$ — функция $f(x) = x^2$ қоида бўйича ҳар бир ҳақиқий сонга унинг квадратини мос қўйган бўлса, у ҳолда $f(R)$ манфий бўлмаган ҳақиқий сонлар тўпламидан иборат.

Агар $f: A \to B$ акс эттириш учун шундай $b_0 \in B$ элемент мавжуд бўлсаки, барча $x \in A$ элементлар учун $f(x) = b_0$ бўлса, уни **ўзгармас** акс эттириш (функция) дейилади. Унинг учун $f^{-1}(b_0) = A$ ва бошқа ҳар қандай $b \in B$ учун $f^{-1}(b) = \varnothing$.

Таъриф. *Агар $f: A \to B$ ва $g: A \to B$ акс эттиришлар ҳар бир $x \in A$ учун $f(x) = g(x)$ тенгликни қаноатлантирса, улар* **тенг** *дейилади ва бу муносабат $f = g$ кўринишда ёзилади.*

Берилган A ва B тўпламлар учун барча $f; A \to B$ акс эттиришлардан иборат тўпламни B^A орқали белгилаймиз.

A_1 тўплам A нинг бирор қисм тўплами бўлсин. Ҳар бир $x \in A_1$ учун $f_1(x) = f(x)$ тенглик билан аниқланган $f_1: A_1 \to B$ акс эттириш f акс эттиришнинг **торайиши**, f акс эттириш эса f_1 акс эттиришнинг **кенгайиши (давоми)** дейилади.

Масалан, R тўпламда аниқланган $f(x) = \sqrt{|x|}$ функция $[0, +\infty)$ тўпламда аниқланган $f_1(x) = \sqrt{x}$ функциянинг давомидир.

Таъриф. *Агар $f: A \to B$ акс эттириш учун ҳар бир $y \in B$ элемент A тўпламда камида бир f — асл образга эга бўлса бундай акс эттириш* **сюръекция** *дейилади.*

Таъриф. *Агар $f: A \to B$ акс эттириш учун ҳар бир $y \in B$ элемент биттадан ортиқ f — асл образга эга бўлмаса (яъни A да ётувчи x_1, x_2 элементлар учун $f(x_1) = f(x_2)$ тенгликдан $x_1 = x_2$ тенглик келиб чиқса), бундай акс эттириш* **инъекция** *дейилади.*

Таъриф. *Бир вақтда ҳам сюръекция ва ҳам инъекция бўлган $f: A \to B$ акс эттириш* **биекция (ўзаро бир қийматли акслаиниш)** *дейилади.*

Бошқача айтганда, $f: A \to B$ аксинтириш биекция бўлиши учун қуйидаги шартни қаноатлантириши керак: x элемент A тўпламдаги ҳар бир қийматни бир мартадан қабул қилиб ўзгарганда бу вақтда $y = f(x)$ функция B тўпламдаги ҳар бир қийматни фақат бир марта қабул қилган ҳолда ўзгаради.

Юқорида келтирилган $f : R \to R, f(x) = x^2$ функция сюръекция ҳам эмас, инъекция ҳам эмас. Чунки манфий сонларнинг бирорта ҳам асл образи мавжуд эмас, мусбат сонларнинг ҳар бири эса иккитадан асл образга эга. Агар $R_0^+ = [0_1 + \infty)$ белгилаш киритиб, $f_1 : R \to R_0^+$, $f(x) = x^2$ функцияни қарасак, у сюръекция бўлади. Ушбу $f_2 : R_0^+ \to R$, $f(x) = x^2$ функция инъекция ва $f_3 : R_0^+ \to R_0^+$, $f_3(x) = x^2$ функция эса биекция бўлади.

Ихтиёрий иккита $f : A \to B$ ва $g : B \to C$ акс эттиришлар берилган бўлсин.

Таъриф. *Ҳар бир $x \in A$ учун ушбу $p(x) = g(f(x))$ муносабат билан аниқланган $p : A \to C$ акс эттиришга f ва g акс эттиришларнинг* ***композицияси (суперпозицияси,*** *баъзан* ***кўпайтмаси)*** *дейилади ва $p = gf$ билан белгиланади.*

Агар $A = B = C$ бўлса, у ҳолда $gf : A \to A$ композиция билан бирга $fg : A \to A$ композиция ҳам қаралиши мумкин. Бу ҳолда умуман айтганда, $fg \neq gf$. Масалан, агар $f : R \to R$, $f(x) = x^2$, $g : R \to R$, $g(x) = x + 1$ бўлса, у ҳолда $f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2$ ва $gf(x) = g(x^2) = x^2 + 1$. Демак $fg \neq gf$.

1-теорема. *Ҳар қандай учта $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ акс эттиришлар учун $h(gf) = (hg)f$.*

Исбот. Ҳақиқатан ҳам ҳар бир $x \in A$ учун $h(gf)(x) = h(gf(x)) = h(g(f(x)))$ ва $(hg)f(x) = hg(f(x)) = h(g(f(x)))$.

Бу теоремадаги айният акс эттиришлар композициясининг **ассоциативлик хоссаси** дейилади.

Ҳар қандай A тўпламнинг барча $x \in A$ элементлари учун $e(x) = e$ тенглик билан аниқланган $e = e_A : A \to A$ акс эттириш A тўпламнинг **айний аксланиши (бирлик аксланиши)** дейилади.

Равшанки, ҳар қандай A тўплам учун бирлик аксланиш $e_A : A \to A$ — биекциядир. Бирлик аксланишларнинг асосий хоссаси шуки, ҳар қандай $f : A \to B$ акс эттириш учун $fe_A = e_B f = f$.

Таъриф. *Агар $f : A \to B$ акс эттириш учун шундай $g : B \to A$ акс эттириш мавжуд бўлсаки, $gf = e_A$ ва $fg = e_B$*

ўринли бўлса, бундай f акс эттириш ***тескариланувчи****, g акс эттириш эса f га* ***тескари*** *дейилади.*

Таърифдан кўринадики, g акс эттириш ҳам тескариланувчи ва f акс эттириш унга тескари бўлади.

2-теорема. ***Агар f акс эттиришнинг тескариси мавжуд бўлса, у ягона.***

Исбот. Фараз қилайлик, $g: B \to A$ ва $h: B \to A$ акс эттиришлар f га тескари бўлсин, яъни $gf = e_A$, $hf = e_A$, $fg = e_B$, $fh = e_B$. У ҳолда $h(fg) = he_B = h$, $(hf)g = e_A g = g$. Булардан акс эттиришлар композициясининг ассоциативлик хоссасига асосан $h = g$.

Агар f акс эттиришнинг тескариси мавжуд бўлса, уни f^{-1} билан белгилаймиз.

3-теорема. ***Акс эттиришнинг тескариланувчи бўлиши учун унинг биекция бўлиши зарур ва кифоя.***

Исбот. *Зарурлиги.* Агар $f: A \to B$ акс эттириш тескариланувчи ва $g: B \to A$ — унга тескари акс эттириш бўлса, у ҳолда $gf = e_A$, $fg = e_B$ ва ҳар бир $y \in B$ учун $f(g(y)) = (fg)(y) = e_B(y) = y$. Бундан $g(y) \in A$ элемент y элементнинг f-асл образи эканлиги келиб чиқади. Бу ерда $y \in B$ ихтиёрий бўлганлиги учун f — сюръекция бўлади. Агар бирор $x_1 x_2 \in A$ элементлар учун $f(x_1) = f(x_2)$ бўлса, у ҳолда $x_1 = e_A(x_1) = gf(x_1) = gf(x_2) = e_A(x_2) = x_2$, яъни f — инъекция. Демак f — биекция.

Кифоялиги. Энди $f: A \to B$ — биекция бўлсин. У ҳолда ҳар бир $y \in B$ учун ягона f-асл образ мавжуд. Уни $g(y)$ билан белгилаб, $g: B \to A$ акс эттиришни ҳосил қиламиз. Бу акс эттириш f акс эттиришга тескари, чунки ҳар қандай $y \in B$ учун $fg(y) = f(g(y)) = y$ ва ҳар қандай $x \in A$ учун $gf(x) = g(f(x)) = x$. Демак, f нинг тескариси мавжуд.

Мисоллар: 1) Агар $a \in R$ ва $a \neq 0$ бўлса, у ҳолда $f: R \to R$, $f(x) = ax$ функция биекция. Унинг тескариси $g: R \to R$, $g(y) = \frac{y}{a}$.

2) Ихтиёрий $b \in R$ учун $f: R \to R$, $f(x) = x + b$ функция биекциядир. Унинг тескариси $g: R \to R$, $g(y) = y - b$.

3) Агар $a, b \in R$ ва $a \neq 0$ бўлса, у ҳолда $f: R \to R$, $f(x) = ax + b$ тескариланувчи, унинг тескариси $g: R \to R$, $g(y) = \frac{y-b}{a}$. Шунинг учун f ва g функциялар — биекциялар.

4-теорема. *Агар $f : A \to B$ ва $g : B \to C$ — биекциялар бўлса, у ҳолда уларнинг композицияси $gf : A \to C$ ҳам биекциядир ва $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$.*

Исбот. Берилган f ва g акс эттиришлар биекция бўлгани учун $f^{-1} : B \to A$ ва $g^{-1} : C \to B$ акс эттиришлар мавжуд. Демак $f^{-1}g^{-1} : C \to A$ композиция ҳам мавжуд. Композициянинг ассоциативлигига асосан $(gf)(f^{-1}g^{-1}) = g(ff^{-1})g^{-1} = (ge_B)g^{-1} = gg^{-1} = e_C$ ва $(f^{-1}g^{-1})(gf) = f^{-1}(gg^{-1})f = f^{-1}(e_C f) = f^{-1}f = e_A$. Бундан gf акс эттиришнинг тескариланувчилиги ва $(gf)^{-1} = f^{1}g^{1}$ келиб чиқади. 3-теоремага асосан gf — биекция.

Таъриф. *A тўпламнинг ўзини ўзига $f : A \to A$ биекцияси A тўпламнинг **ўзгартириши (алмаштириши)** дейилади.*

A тўпламнинг барча ўзгартиришлар тўпламини G_A орқали белгилаймиз.

Таъриф. *G_A тўпламнинг H қисм тўплами қуйидаги шартларни қаноатлантирса, у **ўзгартиришлар гуруҳи** дейилади:*

$д_1$) *H тўпламдаги ихтиёрий иккита f, g ўзгартиришларнинг fg ва gf композициялари ҳам H га тегишли;*

$д_2$) *A тўпламнинг бирлик e_A ўзгартириш ҳам H тўпламга тегишли;*

$д_3$) *ҳар бир $f \in H$ учун $f^{1} \in H$.*

4-теорема, *3-теореманинг натижаси ва бирлик e_A акс эттиришнинг биекция эканлиги, G_A тўпламнинг ўзи ҳам ўзгартиришлар гуруҳини ҳосил қилишини кўрсатади.*

Мисоллар: 1) K тўпламдаги $f_a(x) = ax (a \in R, a \neq 0)$ кўринишидаги барча функциялар H ўзгартиришлар гуруҳини ҳосил қилади. Ҳақиқатан:

а) Агар $f_a(x) = ax, f_b(x) = bx$ бўлса, у ҳолда $(f_a \cdot f_b)(x) = abx$, $(f_b \cdot f_a)(x) = abx$, яъни $f_a f_b \in H$, $f_b f_a \in H$;

б) $e_R(x) = f_1(x) = x$, $f_1 = e_R \in H$;

в) $f_a^{-1}(x) = a^{-1}x$; демак $f_a^{-1} \in H$.

2) R тўпламдаги $g_a(x) = x+a$ $(a \in R)$ кўринишидаги барча функциялардан иборат P тўплам ҳам ўзгартиришлар гуруҳини ҳосил қилади:

а) Агар $g_a(x) = x + a$, $g_b(x) = x + b$ бўлса, у ҳолда $g_a g_b = g_b g_a = g_{a+b} \in P$;

б) $e_R = g_0 \in P$;

в) агар $g_a(x) = x + a$ бўлса, у ҳолда $g_a^{-1}(x) = x - a$; демак $g_a^{-1} = g_{-a} \in P$.

4-§. ТЎПЛАМЛАРНИНГ ҚУВВАТИ

Таъриф. *Агар A ва B тўпламлар учун $f: A \to B$ биекция мавжуд бўлса, улар **тенг қувватли** тўпламлар дейилади.* Бу муносабатни $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ билан белгилаймиз.

Илгариги параграфда келтирилган биекцияларнинг хоссаларидан (яъни бирлик e_a акс эттиришнинг биекция эканлигидан, 3-теореманинг натижасидан ва 4-теоремадан) тўпламлар тенг қувватлилик муносабатининг қуйидаги хоссалари бевосита келиб чиқади:

а) Ҳар қандай A тўплам учун $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}}$ (рефлексивлик).

б) Агар $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ бўлса, у ҳолда $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}}$ (симметриклик).

в) Агар $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ ва $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{C}}$ бўлса, у ҳолда $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{C}}$ (транзитивлик).

Равшанки, агар $m \neq n$ бўлса, $N_m = \{1, 2, ..., m\}$ ва $N_n = \{1, 2, ..., n\}$ тўпламлар учун $\overline{\overline{N_m}} \neq \overline{\overline{N_n}}$.

Агар бўш бўлмаган A тўплам учун шундай n мавжуд бўлсаки, $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{N_n}}$ бўлса, A **чекли тўплам** дейилади. Бундай тўпламни $A = \{a_1, ..., a_n\}$ кўринишида ёзиш мумкин, яъни A тўпламнинг элементлари сони n га тенг. Аксинча, агар A ни шундай кўринишда ёзиш мумкин бўлса, $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{N_n}}$. Бу чекли тўпламларнинг тенг қувватлилиги улардаги элементлар сонининг тенглиги демакдир. Шунга кўра, одатда $\overline{\overline{N_n}} = n$ деб ёзилади.

Бундан буён элементларининг сони n та бўлган тўпламни ушбу $\{a_1,...,a_n\}$ ёки $\{a_i,\ i = \overline{1,n}\}$ кўринишларда ёзамиз.

Таъриф. $N = \{1, 2, 3, ...\}$ — *барча натурал сонлар тўплами билан тенг қувватли бўлган тўплам **саноқли** дейилади.* Бундай A тўпламни ушбу $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ чексиз кетма-кетлик кўринишида ёзиш мумкин. Аксинча, шундай кўринишда ёзиш мумкин бўлган ҳар қандай тўплам саноқлидир.

Масалан, $A = \{1, 3, 5, ..., 2n - 1, ...\}$ — барча тоқ натурал сонлардан иборат тўплам саноқлидир: $f: N \to A$, $f(n) = 2n - 1$.

Саноқли A тўплам элементларини бундан буён $A = \{a_1, ..., a_n, ...\}$ ёки $A = \{a_i, i \in N\}$ кўринишларда ёзамиз. Умуман, бирор T тўплам билан тенг қувватли A тўплам элементларини ушбу

$$A = \{a_t, t \in T\}$$

кўринишда ёзамиз.

Саноқсиз бўлган чексиз тўпламлар ҳам мавжуд.

1-теорема. ***R ҳақиқий сонлар тўплами саноқсиздир.***

Исбот. Маълумки, ҳар бир $r \in R$ ҳақиқий сон ягона усул билан чексиз ўнли каср кўринишида ёзилиши мумкин, яъни $r = a_0, a_1, a_2 ... a_n ...$, бу ерда $a_0 \in Z$, $a_i \in \{0, 1, ..., 9\}$, $i \geq 1$ ва ҳар бир n натурал сон учун шундай $j, j > n$, сон мавжудки, $a_j \neq 0$.

Фараз қилайлик, R тўплам саноқли бўлсин. У ҳолда уни

$$\{r_0, r_1, ..., r_n, ...\} \tag{1}$$

кетма-кетлик кўринишида ёзиш мумкин. Ҳар бир r_i ни чексиз ўнли каср кўринишида ёзиб оламиз:

$$r_0 = a_0^{(0)}, a_1^{(0)} a_2^{(0)} ... a_n^{(0)} ...$$
$$r_1 = a_0^{(1)}, a_1^{(1)} a_2^{(1)} ... a_n^{(1)} ...$$
$$r_2 = a_0^{(2)}, a_1^{(2)} a_2^{(2)} ... a_n^{(2)} ...$$
$$. . . . .$$
$$r_k = a_0^{(k)}, a_1^{(k)} a_2^{(k)} ... a_n^{(k)} ...$$

Энди ушбу $r = b_0, b_1, b_2 ... b_n ...$ чексиз ўнли каср кўринишидаги ифодаси билан берилган r ҳақиқий сонни қуйидагича тузамиз: $b_0 \neq a_0^{(0)}$, $b_0 \neq 0$, $b_1 \neq a_1^{(1)}$, $b_1 \neq 0, ..., b_n \neq a_n^{(n)}$, $b_n \neq 0$, ... Бу сон ҳақиқий сон бўлгани учун (1) кетма-кетликда учраши керак. Демак бирор $m \in N$ учун $r = r_m$. Бу ҳолда $b_m = a_m^{(m)}$ бўлади. Бу эса r нинг тузилишига зид.

Олинган қарама-қаршилик R нинг саноқсизлигини кўрсатади.

R ҳақиқий сонлар тўпламининг қувватини **континиум қуввати** деб аталади.

Агар тўпламлар қувватини чекли тўпламлардаги элементлар сонининг чексиз тўпламларга умумлашмаси деб қаралса, 1-теорема чексиз тўпламлар учун турли қувватлар мавжуд эканини кўрсатади.

5-§. ИХТИЁРИЙ ТЎПЛАМЛАР ТИЗИМИ УСТИДА АМАЛЛАР

Агар A тўпламлар тизими T тўплам билан тенг қувватли ва A нинг $t \in T$ га мос элементи B_y тўплам бўлса, A ни ушбу

$$A = \{B_t,\ t \in T\}$$

кўринишда ёзилади. Хусусан, $T = \{1, ..., k\}$ — чекли бўлса, $A = \{B_1, ..., B_k\}$ кўринишда ёзилади ва уни **чекли тизим** дейилади. Агар $T = \{1, 2, ..., n, ...\}$ — саноқли бўлса, A ни $A = \{B_1, B_2, ..., B_n, ...\}$ кўринишда ёзилади ва уни **саноқли тизим (тўпламлар кетма-кетлиги)** дейилади.

T тўпламнинг ихтиёрий T_0 қисм тўпламига мос келувчи $A_0 = \{B_t,\ t \in T_0\}$ тўпламлар тизими A нинг **қисм тизими** дейилади.

Энди 2-§ да иккита тўплам учун киритилган кесишма ва йиғинди амалларини ихтиёрий тўпламлар тизими учун таърифлаймиз.

$A = \{B_t,\ t \in T\}$ — ихтиёрий тўпламлар тизими бўлсин.

Агар $b \in B_t$ шарт барча $t \in T$ учун бажарилса, бундай b элемент A тизимнинг **умумий элементи** дейилади.

Таъриф. *$A = \{B_t,\ t \in T\}$ тизимнинг барча умумий элементларидан тузилган тўплам бу тизимнинг* ***кесишмаси*** *дейилади ва $\bigcap\limits_{t \in T} B$ билан белгиланади.*

Масалан, агар $A = \{N_n,\ n \in N\}$ бўлиб, бунда $N_n = \{1, 2, ..., n\}$ бўлса, у ҳолда

$$\bigcap_{k \in N} N_k = \{1\}.$$

Агар қандайдир $t \in T$ учун $c \in B_t$ шарт бажарилса, бундай c элемент $A = \{B_t,\ t \in T\}$ тизимга **тегишли** деймиз.

Таъриф. *$A = \{B_t,\ t \in T\}$ тизимга тегишли бўлган барча элементлардан иборат тўплам бу тизимнинг* ***йиғиндиси*** *дейилади ва $\bigcup_{t \in T} B_t$ билан белгиланади.*

Масалан, юқоридаги $A = \{N_n,\ n \in N\}$ тизим учун $\bigcup_{n \in N} N_n = N$.

S — ихтиёрий тўплам бўлсин.

Таъриф. *Агар шундай $A = \{B_t,\ t \in T\}$ тўпламлар тизими мавжуд бўлсаки, бу тизимга кирувчи ҳар қандай икки тўплам ўзаро кесишмаса ва бу тизимнинг йиғиндиси S бўлса, S тўплам* ***синфларга бўлинган*** *дейилади.* Бунда B_t тўпламлар S тўпламнинг синфлари, A тизим эса **бўлинма (фактор тўплам)** дейилади.

Масалан, жуфт бутун сонлар синфи ва тоқ бутун сонлар синфи Z бутун сонлар тўпламининг бўлинмасидир. Барча учбурчаклар тўпламини учта синфга бўлиш мумкин: ўтмас бурчакли, тўғри бурчакли ва ўткир бурчакли учбурчаклар синфлари. Ушбу $\{[n, n + 1),\ n \in Z\}$ ярим интерваллар тўплами R ҳақиқий сонлар тўпламининг бўлинмасини беради.

S тўпламнинг $A = \{B_t,\ t \in T\}$ синфларга бўлинмаси берилган бўлсин. У ҳолда ҳар қандай $x \in S$ элемент учун бу элементни ўз ичига олган ягона синф мавжуд. Уни $\overline{x}$ орқали белгилаймиз. Бу билан ушбу $f: S \to A,\ f(x) = \overline{x}$ акс эттириш аниқланади. Уни мазкур синфларга бўлишга мос **факторизация акс** эттириши дейилади.

6-§. ИХТИЁРИЙ ТЎПЛАМЛАР УСТИДА ВЕКТОРЛАР

Бирор $n \geq 1$ натурал сон учун $N_n = \{1, 2, ..., n\}$ тўпламни оламиз. A — бўш бўлмаган тўплам бўлсин.

Таъриф. *Ихтиёрий $f: N_n \to A$ акс эттиришга A устидаги **n-ўлчамли вектор** дейилади.*

Бу *$f: N_n \to A$ акс эттиришда $i \in N_n$* элементга A тўпламда мос келган $f(i)$ элементни a_i билан белгилаймиз ва f нинг қийматларини кичик қавс ичига олинган n та ҳадли кетма-кетлик кўринишида ёзамиз: $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Бунда i-ўринда $i \in N_n$ элементга мос келган $f(i) = a_i$ элементни ёзамиз. Аксинча, тартиб билан ёзилган ихтиёрий n та ҳадли $(a_1, ..., a_n)$ кетма-кетлик ушбу $f(i) = a_i$, $i \in N_n$ тенгликлар орқали ягона $f: N_n \to A$ акс эттиришни аниқлайди. Шундай қилиб, ҳадлари A тўплам устидаги n-ўлчамли вектор деб, маълум тартибда ёзилган n та ҳадли элементлари A дан олинган ихтиёрий кетма-кетликни айтишимиз мумкин. Уни бундан буён $a = (a_1, ..., a_n)$ кўринишда ёзамиз. Бу ердаги $a_1, ..., a_n$ элементлар a векторнинг **компоненталари (координаталари)** дейилади; a_i элемент векторнинг i**-компонентаси (координатаси)** дейилади.

Акс эттиришларнинг тенглиги таърифидан n-ўлчамли векторлар учун қуйидаги таъриф келиб чиқади.

Таъриф. *Агар $a = (a_1, ..., a_n)$ ва $b = (b_1, ..., b_n)$ n-ўлчамли векторлар барча $i \in N_n$ учун $a_i = b_i$ тенгликларни қаноатлантирса, бу векторлар **тенг** дейилади ва бу муносабат $a = b$ кўринишда ёзилади.*

Равшанки, векторларнинг тенглиги муносабати рефлексивлик, симметриклик ва транзитивлик хоссаларига эга.

Ҳадлари A тўпламдан олинган барча n-ўлчамли векторлар тўплами A тўпламнинг n**-ўлчамли декарт куби** дейилади ва A^n билан белгиланади. Хусусан, икки ўлчамли декарт куби **декарт квадрати** дейилади.

Мисол. Текисликда бирор декарт координат тизими киритилса, текислик нуқталари ва тартиб билан ёзилган ҳақиқий сонлар жуфтлари, яъни R^2 орасида биекция ўрнатилади. Бу ҳолда R устидаги икки ўлчамли векторларнинг координаталари текисликдаги нуқталарнинг декарт координаталаридан иборат.

Энди $A_1, ..., A_n$ — тўпламлар A тўпламнинг бўш бўлмаган ихтиёрий қисм тўпламлари бўлсин.

Барча $i \in N_n$ учун ушбу $a_i \in A_i$ шартларни қаноатлантирувчи барча n - ўлчамли $(a_1, ..., a_n)$ векторлар тўплами A_1, ..., A_n тўпламларнинг **декарт кўпайтмаси** дейилади ва $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ билан белгиланади. Равшанки, $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \subseteq A^n$.

Таъриф. *$f: A^n \to B$ функция A да аниқланган **n ўзгарувчили функция** (акс эттириш, аксланиш) дейилади.*

Бу функциянинг $x = (x_1, ..., x_n) \in A^n$ вектордаги қиймати унинг $x_1, ..., x_n$ компоненталарига боғлиқ. Ушбу $f(x) = f((x_1, ..., x_n))$ белги ўрнига $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ белги ишлатиш қабул қилинган.

Мисоллар: 1) $f: R^2 \to R, f(x, y) = x^2 + y^2$ функция икки ўзгарувчили функция; 2) $f: R^n \to R$, $f(x_1, ..., x_n) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$ эса n ўзгарувчили функция.

Таъриф. *$F: A^n \to B^m$ функция A ни B га асклантирувчи **m та n ўзгарувчили функциялар** (акс эттиришлар) **тизими** дейилади.*

Ҳар бир $x \in A^n$ учун $F(x)$ элемент B^m нинг элементи бўлгани учун у m - ўлчамли вектордир. Унинг координаталари мос равишда $f_1(x), ..., f_m(x)$ бўлсин. Агар ушбу

$$y = F(x) = F(x_1, ..., x_n),\ y = (y_1, ..., y_m)$$

функция берилган бўлса, у ҳолда қуйидаги m та функциялар ҳам берилган бўлади:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, ..., x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, ..., x_n) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ y_m &= f_m(x_1, ..., x_n) \end{aligned}$$

Аксинча, бу m та функциялар тизими берилган бўлса, $F(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$ белгилаш киритиб, ушбу $F: A^n \to B^m$ функцияни ҳосил қиламиз.

М и с о л. Ихтиёрий иккита $p, q \to N (1 \leq p < q < n)$ сонларни танлаб оламиз, ва $T : A^n \to A^n$ акс эттиришни қуйидагича аниқлаймиз: $a = (a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_q, \ldots, a_n)$ векторга $Ta = (a_1, \ldots, a_q, \ldots, a_p, \ldots, a_n)$ векторни мос қўямиз, яъни T акс эттириш ҳар қандай a векторнинг p - ва q- координаталаридан бошқа барча координаталарини ўзгартирмайди, p- ва q- координаталарнинг эса фақат ўрнини алмаштиради. Бу акс эттиришни T_{pq} орқали белгилаймиз. Равшанки, ҳар қандай $a \in A^n$ учун $T_{pq}(T_{pq})(a) = a$. Бундан 3.3-теоремага асосан T_{pq} акс эттиришнинг биекция эканлиги ва $T_{pq}^{-1} = T_{pq}$ муносабат келиб чиқади.

Иккинчи боб

БИНАР МУНОСАБАТЛАР ВА АЛГЕБРАИК АМАЛЛАР

7-§. БИНАР МУНОСАБАТЛАР. ЭКВИВАЛЕНТЛИК МУНОСАБАТИ

Ихтиёрий A тўплам берилган бўлсин.

A^2 тўпламнинг ихтиёрий P қисм тўплами A тўпламда **бинар муносабат** дейилади. Агар $(x, y) \in P$ бўлса, у ҳолда x элемент y элемент билан P **бинар муносабатда** дейилади ва xPy каби ёзилади.

Математикадаги муҳим бинар муносабатлар учун айрим белгилар киритилган.

Мисоллар. 1) R ҳақиқий сонлар тўпламида x ва y сонларнинг тенглик муносабати. Унинг белгиси $x = y$. Бу муносабат R^2 текисликдаги $y = x$ тўғри чизиқ нуқталари билан берилади.

2) R ҳақиқий сонлар тўпламида x ва y сонларнинг тенгмаслик муносабати. Унинг белгиси $x \neq y$. Бу муносабат R^2 текисликда $y = x$ тўғри чизиққа кирмаган барча нуқталардан иборат бўлган тўплам билан берилади.

3) R да y соннинг x сондан катта эканлиги муносабати: белгиси $y > x$ ёки $x < y$. Бу муносабат R^2 да $y = x$ тўғри чизиқдан юқорида ётувчи нуқталар тўплами билан берилади;

4) $A = B$ — тўпламларнинг тенглик муносабати;

5) $A \neq B$ — тўпламларнинг тенгмаслик муносабати;

6) $A \subseteq B$ — ёки $B \supseteq A$ — қисм тўплам муносабати;

7) $A \subset B$ ёки $B \supset A$ — хос қисм тўплам муносабати;

8) $\alpha \parallel \beta$ — тўғри чизиқларнинг параллеллик муносабати;

9) $\alpha \perp \beta$ — тўғри чизиқларнинг тиклик муносабати;

10) $\alpha \Rightarrow \beta$ — бир тенгламалар тизими иккинчисининг натижаси эканлиги;

11) $\alpha \Leftrightarrow \beta$ — иккита тенгламалар тизимининг тенг кучлилик муносабати.

Агар A тўпламда берилган бирор P муносабат шундай бўлсаки, ҳар қандай $a \in A$ учун aPa ўринли бўлса, у **рефлексив** муносабат дейилади. Агар aPb муносабатдан $a \neq b$ муносабат келиб чиқса, (яъни aPa муносабат ҳеч қандай $a \in A$ элемент учун бажарилмаса), бундай муносабат **антирефлексив** дейилади.

Агар aPb муносабатнинг бажарилишидан bPa муносабатнинг ҳам бажарилиши келиб чиқса, бундай муносабат A да **симметриклик муносабати** дейилади.

Агар aPb ва bPc муносабатларнинг бажарилишидан aPc бажарилиши келиб чиқса, бундай муносабат **транзитивлик** дейилади.

Таъриф. *Агар A тўпламдаги P муносабат рефлексив, симметрик ва транзитив бўлса, уни A да* ***эквивалентлик*** *муносабати дейилади ва унинг учун aPb белги ўрнига кўпинча* $a \overset{P}{\sim} b$ (ёки $a \sim b$) *белги ишлатилади.*

Эквивалентликка мисоллар: 1) ҳақиқий сонларнинг тенглик муносабати;

2) тўпламларнинг тенглик муносабати;

3) тенгламалар тизимларининг тенг кучлилик муносабати;

4) функцияларнинг тенглик муносабати.

5) Муҳим мисол. A тўпламда H ўзгартиришлар гуруҳи берилган бўлсин.

Бу H ўзгартиришлар гуруҳи ёрдамида A да эквивалентлик тушунчасини киритамиз.

Агар A тўпламнинг a ва b элементлари учун шундай $h \in H$ биекция мавжуд бўлсаки, $h(a) = b$ бўлса, бу элементлар H — эквивалент дейилади ва $a \overset{H}{\sim} b$ кўринишда ёзилади.

Агар ихтиёрий $a \in A$ ни олиб, $h \in H$ сифатида e_A ни олсак (e_A — бирлик акс эттириш ўзгартиришлар гуруҳининг таърифидаги д$_2$) шартга кўра H га тегишли, $e_A(a) = a$, яъни ҳар қандай $a \in A$ учун $a \overset{H}{\sim} a$ (рефлексивлик).

Энди $a \overset{H}{\sim} b$ бўлсин. У ҳолда шундай $h \in H$ мавжудки, $h(a) = b$. Ўзгартиришлар гуруҳининг таърифидаги д$_3$) шартга кўра. $h^{-1} \in H$. У ҳолда $h(a) = b$ тенгликка h^{-1} татбиқ қилсак, $h^{-1}(h(a)) = h^{-1}(b)$. Бундан $a = h^{-1}(b)$, яъни $b \overset{H}{\sim} a$ (симметриклик).

Агар $a \overset{H}{\sim} b$ ва $b \overset{H}{\sim} c$ бўлса, шундай $h_1 \in H$ ва $h_2 \in H$ биекциялар мавжудки, $h_1(a) = b$, $h_2(b) = c$. Булардан $h_2(b) = h_2(h_1(a) = c$, яъни $(h_2h_1)(a) = c$. Ўзгартиришлар гуруҳининг д$_1$) шартига кўра $h_2h_1 \in H$. Бундан ва $(h_2h_1)(a) = c$ тенгликдан $a \overset{H}{\sim} c$ муносабатни оламиз (транзитивлик).

Демак, $a \overset{H}{\sim} b$ (H — эквивалентлик) ҳақиқатан ҳам эквивалентлик муносабати экан.

Келажакда бу эквивалентликни H ўзгартиришлар гуруҳи ҳосил қилган эквивалентлик (H-эквивалентлик) деб атаймиз.

A тўплам бирор усул билан синфларга бўлинган бўлсин: $B = \{A_t, t \in T\}$, $A = \bigcup_{t \in T} A_t$, $t \in T$. Бу бўлинма ёрдамида A тўпламга эквивалентлик муносабатини киритамиз.

Агар $x, y \in A$ элементлар B бўлинмадаги бир синфга тегишли бўлса, уларни B бўлинмага нисбатан эквивалент деймиз ва $x \sim y$ шаклда ёзамиз.

Бу эквивалентлик рефлексивлик, симметриклик ва транзитивлик хоссаларига эга.

Ихтиёрий A тўпламда ҳар қандай эквивалентлик муносабати шундай ҳосил қилиниши мумкинлигини кўрсатамиз.

A тўпламда бирор "$\sim$" эквивалентлик муносабати берилган бўлсин. Ихтиёрий $x \in A$ учун $\bar{x}$ орқали x га эквивалент бўлган барча $y \in A$ элементлар тўпламини белгилаймиз ва $\{\bar{x}, x \in A\}$ тўпламлар тизими A ни синфларга бўлишини кўрсатамиз.

Рефлексивлик хоссасига асосан ҳар бир $x \in A$ учун $x \in \bar{x}$, яъни $\cup \bar{x} = A$. Энди ҳар бир $x \in A$ элемент ягона синфга тегишли эканлигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, $x \in \bar{x}$ ва $x \in \bar{z}$ бўлсин, яъни $z \sim x$. Бундан симметриклик хоссасига асосан $x \sim z$. Ихтиёрий $y \in \bar{z}$ элементни оламиз. У ҳолда $z \sim y$. Юқоридаги $x \sim z$ ва $z \sim y$ муносабатлардан транзитивлик хоссасига асосан $x \sim y$ ни оламиз, яъни $y \in \bar{x}$. Ушбу $y \in \bar{z}$ элемент ихтиёрий бўлгани учун $\bar{z} \subseteq \bar{x}$. Юқоридагига ўхшаш мулоҳазалар билан $\bar{x} \subseteq \bar{z}$ муносабат ҳам кўрсатилади, яъни $\bar{x} = \bar{z}$. Бу билан $\{\bar{x}$, $x \in A\}$ тўпламлар тизими A тўпламни синфларга бўлиши кўрсатилди.

Шундай қилиб, A тўпламдаги эквивалентлик муносабати билан A ни синфларга бўлиш орасида ўзаро бир қийматли боғланиш кўрсатилди.

A тўпламда бирор P эквивалентлик муносабати берилган ва C — бирор тўплам бўлсин.

Агар $f : A \to C$ акс эттириш, яъни A тўплам элементларининг бирор f хоссаси учун $a \overset{P}{\sim} b$, $a, b \in A$ муносабатдан $f(a) = f(b)$ тенглик келиб чиқса, бундай акс эттириш **P-инвариант** (P — эквивалентликда сақланувчи, ўзгармас) дейилади.

Хусусан, агар A тўпламдаги эквивалентлик муносабати A тўпламдаги бирор H ўзгаришлар гуруҳи ҳосил қилган H-эквивалентлик муносабати бўлсин. Бу ҳолда H — инвариант $f : A \to C$ акс эттириш таърифи қуйидагича берилиши мумкин.

Агар ҳар қандай $h \in H$ ва $x \in A$ учун $f(x) = f(hx)$ тенглик ўринли бўлса, бундай акс эттириш H — инвариант (H ўзгаришлар гуруҳи таъсирида сақланувчи) дейилади. H — инвариант акс эттиришлар математикада ва фаннинг турли соҳаларида кўп учрайди. Масалан, ёпиқ физик тизимнинг энергияси ёпиқ физик тизимнинг барча физик ўзгаришларига нисбатан сақланадиган катталикдир (энергиянинг сақланиш қонуни). Механик тизимнинг массаси механик ҳаракатларда сақланади.

P — инвариант акс эттиришлар қуйидаги хоссалари туфайли муҳим аҳамиятга эга: агар a_1, $a_2 \in A$ элементлар шундай бўлсаки, $f(a_1) \neq f(a_2)$ бўлса, бундай a_1, a_2 элементлар P — эквивалент бўлмайди. Шундай қилиб, P — инвариантлар P — эквивалент синфларни фарқ қилиш воситаси сифатида аҳамиятга эга.

Таъриф. *P — инвариантлар $F = \{f_\tau, \tau \in T\}$ тизими қуйидаги шартни қаноатлантирса, у* **тўла** *дейилади: ҳар қандай иккита P — эквивалент бўлмаган $a_1, a_2 \in A$ элементлар учун шундай P — инвариант $f \in F$ мавжудки, $f(a_1) \neq f(a_2)$.*

Кейинги бобларда P — инвариант функцияларни кўп учратамиз.

8-§. ТАРТИБ МУНОСАБАТИ. МАТЕМАТИК ИНДУКЦИЯ

Энди A тўпламда тартиб муносабати киритамиз.

A тўпламдаги антирефлексив ва транзитив бўлган P муносабатга A тўпламда **тартиб муносабати** дейилади ва aPb ўрнига $a < b$ ёки $a > b$ ёзилади.

Мисоллар: 1) R ҳақиқий сонлар тўпламида x ва y сонлар орасидаги $x < y$ тенгсизлик муносабати;

2) Бирор M тўпламнинг барча қисм тўпламлари тизимини 2^M орқали белгилаймиз. У ҳолда 2^M да қисм тўпламлар орасидаги "$\subset$" муносабат тенгсизлик муносабати бўлади.

3) N натурал сонлар тўпламида бўлиниш муносабати: агар y сон x га бўлинса ва $y \neq x$ бўлса, улар $x < y$ муносабатда деймиз.

Агар A тўпламда бирор тартиб муносабати берилган бўлса, A тўплам **қисман тартибланган** дейилади.

Агар қисман тартибланган A тўпламда ихтиёрий $x, y \in A$ элементлар учун $x < y$, $x = y$, $x > y$ муносабатларнинг бири ўринли бўлса, бундай тўплам **чизиқли тартибланган** дейилади.

Юқорида келтирилган мисолларга қайтамиз: 1) R — чизиқли тартибланган; 2) агар M тўпламда фақат битта элемент бўлсагина 2^M тўплам чизиқли тартибланган бўлади.

Агар қисман тартибланган A тўпламнинг ихтиёрий B қисм тўплами элементлари учун A даги тартиб муносабати қаралса, у муносабат B да ҳам тартиб муносабати бўлади. Агар A — чизиқли тартибланган бўлса, B ҳам чизиқли тартибланган бўлади (исботланг!).

A тўплам қисман тартибланган бўлсин. Агар $m \in A$ элемент учун $x < m$ $(x > m)$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $x \in A$ элемент мавжуд бўлмаса, бундай m элемент **минимал (максимал)** элемент дейилади.

Юқорида келтирилган мисолларга яна қайтамиз:

1) R да минимал элемент ҳам максимал элемент ҳам йўқ;

2) 2^M тўпламда бўш тўплам — минимал элемент, M тўплам — максимал элемент.

Энди N натурал сонлар тўпламида "<" сифатида натурал сонлар орасидаги оддий тенгсизликни оламиз. У ҳолда N да 1 — минимал элемент бўлади, аммо максимал элементлар мавжуд эмас. Агар H тўплам N нинг ихтиёрий қисм тўплами бўлса, унда минимал элемент мавжуд. Бундай элемент H нинг элементлари ичида энг кичиги. Қуйида N да худди шу тартиб кўрилади.

Натурал сонлар тўпламидаги қисм тўпламларнинг бу хоссасидан математик формулалар ва теоремаларни исботлашнинг қуйидаги усули келиб чиқади.

Теорема (математик индукция тамойили). ***Ҳар бир $n \in N$ учун $T(n)$ тасдиқ (формула) мулоҳаза берилган бўлсин. Агар шундай қоида (усул) мавжуд бўлсаки, бунга асосан:***

1) $T(1)$ тасдиқнинг чинлигини (тўғрилигини) исботлаш мумкин бўлса ва

2) $m < n$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча m лар учун $T(m)$ тасдиқни чин деб фараз қилиб, $T(n)$ нинг чинлигини кўрсатиш мумкин бўлса, у ҳолда $T(n)$ тасдиқ ҳар қандай $n \in N$ учун чин бўлади.

Исбот. Фараз қилайлик, бирор $n \in N$ учун $T(n)$ чин бўлмасин. $T(n)$ тасдиқ чин бўлмаган барча $n \in N$ лар тўпламни H орқали белгилаймиз. Фаразимизга мувофиқ H тўплам бўш эмас. H тўплам N нинг қисм тўплами бўлгани учун унинг минимал элементи мавжуд. Уни n_0 орқали белгилаймиз. У ҳолда $T(n_0)$ чин эмас, аммо ҳар қандай $m < n_0$ учун $T(m)$ — чин. Бу эса теореманинг 2) фаразига зид.

Мисол. Ихтиёрий $n \in N$ учун ушбу

$$1^2 + 2^2 \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

тенгликни исботлаймиз.

Агар $n = 1$ бўлса, бу тенглик равшан. Фараз қилайлик, бу тенглик n сондан кичик бўлган барча натурал сонлар учун ўринли бўлсин. Хусусан

$$1^2 + 2^2 ... + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

тенглик ўринли бўлсин. Бу тенгликнинг икки томонига n^2 сонни қўшамиз:

$$1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2 + n^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + n^2 =$$

$$= \frac{n}{6}(2n^2 - 3n + 1 + 6n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Бу билан математик индукция тамойилига асосан тенглик ҳар қандай $n \in N$ учун ўринли эканлиги исботланди.

9-§. АЛГЕБРАИК АМАЛЛАР. ЯРИМГУРУҲЛАР

Таъриф. $f : A^n \to A$ *акс эттиришга A даги n = ўринли (n — ар)* ***алгебраик амал*** *дейилади.* Бир ўринли амаллар — **унар**, икки ўринли амаллар — **бинар,** уч ўринли амаллар — **тернар** амаллар дейилади.

Мисоллар: 1) R ҳақиқий сонлар тўпламидаги қўшиш амали $f : R^2 \to R$, $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$; 2) R ҳақиқий сонлар тўпламидаги кўпайтириш амали $g : R^2 \to R$, $g(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$; 3) Тўпламларнинг кесишма амали: $A \cap B$; 4) Тўпламларнинг йиғиндиси амали $A \cup B$; 5) $f_1 : B \to B$ ва $f_2 : B \to B$ — акс эттиришларнинг композицияси амали: $(f_2 \cdot f_1)(x) = f_2(f_1(x))$, $x \in B$. 6) n та тўпламнинг кесишмаси амали $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$; 7) Берилган B тўпламнинг барча C қисм тўпламлари учун $C \to C^2$ амал, яъни ҳар бир қисм тўпламга унинг декарт квадрати мос қўйилади.

Бу ердаги 1), 2), 3), 4) ва 5) мисоллардаги амаллар — бинар, 6) даги n — ўринли, 7) даги — унар амаллар.

Алгебраик амаллар ичида энг кўп учрайдигани ва энг муҳими — бинар амаллардир.

Бирор $f_1 : A^2 \to A$ — бинар амал берилган бўлсин. Бу амалда $(a, b) \in A^2$ элементнинг образи a ва b элементларнинг **кўпайтмаси** дейилади ва $a \cdot b$ орқали белгиланади. Бошқа, масалан, $a + b$, $a * b$, $a \circ b$ ва ҳоказо белгилар ҳам ишлатилади. Бу ҳолларда "кўпайтма" сўзи ўрнига мос равишда бошқа сўзлар ишлатилади. Хусусан ab ўрнига $a + b$ ишлатилса, "кўпайтма" сўзи ўрнига "йиғинди" сўзи ишлатилади.

Таъриф. *Агар ҳар қандай учта a, b, $c \in A$ элементлар учун $(ab)c = a(b \cdot c)$ тенглик бажарилса, бундай ab амал* ***ассоциатив*** *дейилади.*

Таъриф. *Агар бўш бўлмаган A тўпламда ассоциатив бинар амал берилган бўлса, бундай тўплам* ***яримгуруҳ*** *дейилади.*

Мисоллар: 1) N натурал сонлар тўплами $n + m$ қўшиш амалига нисбатан яримгуруҳ ҳосил қилади;

2) N натурал сонлар тўплами $n \cdot m$ кўпайтириш амалига нисбатан яримгуруҳ ҳосил қилади;

3) Бирор B тўпламнинг ўзини ўзига барча акс эттиришлари тўплами акс эттиришларнинг композицияси амалига нисбатан 3-§ 1-теоремага асосан яримгуруҳ ҳосил қилади;

4) Бирор C тўпламнинг барча қисм тўпламлари тизими тўпламларнинг йиғиндиси амалига нисбатан яримгуруҳ ҳосил қилади.

A — бирор яримғуруҳ бўлсин. Унда $n = 1$ учун $a_1 \cdot a_2 ... a_n = a_1$ ва ихтиёрий $n > 1$ учун $a_1 \cdot a_2 ... a_n = (a_1 \cdot a_2 ... a_{n-1})a_n$ (1) белгилашларни киритамиз.

1-теорема. ***Ҳар қандай m, n натурал сонлар ва A яримгуруҳнинг ихтиёрий $a_1, a_2, \ldots a_{n+m}$ элементлари учун***

$$(a_1 \cdot a_2 ... a_n)(a_{n+1} ... a_{n+m}) = a_1 \cdot a_2 ... a_{n+m} \quad (2)$$

тенглик ўринли.

Исбот. Математик индукция (m бўйича) ёрдамида исботлаймиз. Агар $m = 1$ бўлса, бу ҳолда (2) тенглик ушбу

$$(a_1 \cdot a_2 ... a_n) a_{n+1} = a_1 \cdot a_2 ... a_n \cdot a_n \cdot a_{n+1}$$

тенгликка келади. Бу тенгликнинг ўринлилиги эса (1) белгилашдан келиб чиқади. Фараз қилайлик, (2) тенглик барча k ($k < m$) сонлар учун ўринли бўлсин:

$$(a_1 \cdot a_2 ... a_n)(a_{n+1} ... a_{n+k}) = a_1 \cdot a_2 ... a_{n+k}.$$

У ҳолда яримгуруҳдаги ассоциативлик хоссасига асосан

$$(a_1 \cdot a_2 ... a_n)(a_{n+1} ... a_{n+m}) = (a_1 \cdot a_2 ... a_n)((a_{n+1} ... a_{n+m-1}) a_{m+n}) =$$
$$= ((a_1 \cdot a_2 ... a_n)(a_{n+1} ... a_{n+m-1})) a_{n+m} = (a_1 \cdot a_2 ... a_{n+m-1}) a_{n+m} =$$
$$= a_1 \cdot a_2 ... a_{n+m-1} \cdot a_{n+m}.$$

Математик индукция қоидасига кўра (2) тенглик исботланди.

Исботланган тенглик **умумлашган ассоциативлик қонуни** деб аталади. Бу қонун шуни кўрсатадики, ушбу $a_1 \cdot a_2 ... a_n$ кўпайтманинг қиймати уни ҳисоблашдаги $n - 1$ та кўпайтириш амалининг қайси тартибда бажарилишига (яъни бу тартибни аниқловчи қавсларни қандай қўйилишига) боғлиқ эмас.

Баъзан $a_1 \cdot a_2 ... a_n$ кўпайтма $\prod_{i=1}^{n} a_i$ кўринишда ҳам ёзилади.

Агар $a_1 \cdot a_2 ... a_n$ кўпайтмада $a_1 = a_2 = ... = a_n = a$ бўлса, уни a^n кўринишда ёзилади. Бу белгилашлардан ва (2) тенгликдан ихтиёрий n ва m натурал сонлар ва A яримгуруҳнинг ихтиёрий a элементи учун ушбу

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \ (a^n)^m = a^{nm} \tag{3}$$

тенгликларнинг ўринлилиги бевосита келиб чиқади.

Агар A яримгуруҳда бинар амалининг белгиси сифатида $a + b$ қўшиш амали белгиси ишлатилса, юқоридаги (1) кўпайтма ўрнига $a_1 + a_2 + ... + a_n$ йиғинди пайдо бўлади. Бу йиғинди баъзан $\sum_{i=1}^{n} a_i$ кўринишда ёзилади. Бу ҳолда (2) тенглик ушбу

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{m} a_{n+j} = \sum_{k=1}^{n+m} a_k$$

кўринишга эга бўлади.

Агар $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$ бўлса, $\sum_{i=1}^{n} a_i$ ўрнига na ёзилади. Бу белгилашларга кўра (3) тенгликлар ушбу

$$na + ma = (n + m)a,\ m(na) = (m \cdot n)a \qquad (4)$$

кўринишларга эга бўлади (n, m — ихтиёрий натурал сонлар).

Таъриф. *A тўпламда $a \cdot b$ бинар амал берилган бўлсин. Агар $e \in A$ элемент ҳар қандай $a \in A$ элемент учун $ae = ea = a$ тенгликни қаноатлантирса, бу e элемент берилган амалга нисбатан бирлик элемент дейилади.*

Агар A даги бинар амал $a + b$ қўшиш амали кўринишида олинса, бирлик элемент сўзи ўрнига **ноль элемент** сўзи ишлатилади.

A тўпламда берилган ҳар қандай бинар амал учун бирлик элемент мавжуд бўлавермайди. Аммо

2-теорема. ***Агар A тўпламда берилган бинар амал учун бирлик элемент мавжуд бўлса, у ягонадир.***

Исбот. Фараз қилайлик e_1, e_2 элементлар ва ихтиёрий $a \in A$ элемент учун $e_1a = ae_1 = a$ ва $e_2a = ae_2 = a$ тенгликлар ўринли бўлсин. Бу тенгликларнинг биринчисида a сифатида e_2 ни олсак, $e_1e_2 = e_2e_1 = e_2$ тенгликларни ва иккинчисида a сифатида e_1 ни олсак, $e_2e_1 = e_1e_2 = e_1$ тенгликларни оламиз. Булардан $e_1 = e_2$ тенглик келиб чиқади. Теорема исботланди.

Агар A яримгуруҳ бирлик элементга эга бўлса, бундай яримгуруҳ **моноид** дейилади. 2-теоремага асосан моноидда бирлик элемент ягона.

A — моноид, e — ундаги бирлик элемент ва $a \in A$ — бирор элемент бўлсин. Агар $b \in A$ элемент $ab = ba = e$ тенгликларни қаноатлантирса, бу элемент a га тескари дейилади. Агар бу таърифда A даги бинар амал учун $a + b$ қўшиш амали белгиси ишлатилса, "тескари" сўзи ўрнига "қарама-қарши" сўзи ишлатилади.

Ҳар қандай моноидда ҳам унда берилган элементнинг тескариси мавжуд бўлавермайди. Аммо

3-теорема. ***Агар A моноиднинг берилган a элементи учун тескариси мавжуд бўлса, у ягонадир.***

Исбот. Фараз қилайлик, b_1 ва b_2 элементлар a га тескари бўлсин. У ҳолда

$$ab_1 = b_1a = e, \; ab_2 = b_2a = e.$$

Булардан $b_1 = b_1e = b_1(ab_2) = (b_1a)b_2 = eb_2 = b_2$.

A, B — яримгуруҳлар (моноидлар) бўлсин. Агар $f : A \to B$ акс эттириш шундай бўлсаки, ҳар қандай $x, y \in A$ учун

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

тенгликни қаноатлантирса, у A нинг ва B га *гомоморфизми* дейилади.

Мисол. R ҳақиқий сонлар тўплами кўпайтириш амалига нисбатан моноидни ҳосил қилади. Шунга ўхшаш манфий бўлмаган барча ҳақиқий сонлардан иборат B тўплам кўпайтириш амалига нисбатан моноид ҳосил қилади. Ҳар бир $a \in R$ учун $a \to |a|$ мослик R нинг B га гомоморфизмини беради, чунки $ab \to |ab| = |a| \cdot |b|$.

10-§. ГУРУҲЛАР

A яримгуруҳ қуйидаги иккита шартни қаноатлантирса, у **гуруҳ** дейилади:

1) шундай $e \in A$ элемент мавжудки, ҳар қандай $a \in A$ элемент учун $ae = a$ (ўнг бирлик элементнинг мавжудлиги);

2) ҳар қандай $a \in A$ элемент учун шундай b элемент мавжудки, $ab = e$ (ўнг тескари элементнинг мавжудлиги).

Агар A гуруҳда ҳар қандай a, b элементлар учун $ab = ba$ тенглик бажарилса, у **коммутатив (абель) гуруҳ** деб аталади. Коммутатив гуруҳлар учун кўпинча бинар амалнинг ab белгиси ўрнига $a + b$ қўшиш белгиси ишлатилади.

Мисоллар: 1) Z бутун сонлар тўплами қўшиш амалига нисбатан коммутатив гуруҳни ҳосил қилади. Бунда гуруҳ таърифининг 1-шартидаги e элементи ролини 0 сони ва 2-шартидаги b элементи ролини $(-a)$ сони ўйнайди.

2) Шунга ўхшаш Q рационал сонлар ва R ҳақиқий сонлар тўпламлари қўшиш амалига нисбатан коммутатив гуруҳларни ҳосил қилади.

3) $Q \setminus \{O\}$ ва $R \setminus \{O\}$ тўпламлари кўпайтириш амалига нисбатан коммутатив гуруҳларни ҳосил қилади. Бунда e вазифасини 1 сони ва 2-шартдаги b вазифасини 1/а сони ўйнайди.

4) A тўпламнинг ўз-ўзига барча биекцияларидан иборат $G(A)$ тўплам биекцияларнинг композицияси амалига нисбатан гуруҳ ҳосил қилади. Бу аслида 3-§ даги тасдиқларда исботланган.

Гуруҳларнинг умумий хоссаларини ўрганамиз.

1-теорема. ***A — гуруҳ бўлсин. У ҳолда:***

1) ундаги ҳар қандай $a \in A$ учун $ae = a$ шартни қаноатлантирувчи e элемент ҳар қандай $a \in A$ учун $ea = a$ тенгликни ҳам қаноатлантиради, яъни у бирлик элементдир:

2) берилган $a \in A$ учун $ab = e$ тенгликни қаноатлантирувчи b элемент $ba = e$ тенгликни ҳам қаноатлантиради, яъни b элемент a га тескаридир.

Исбот. Берилган $a \in A$ элемент учун гуруҳ таърифидаги 2-шартга кўра шундай $b \in A$ элемент мавжудки, $ab = e$. Бу b элемент учун яна 2-шартга кўра шундай $c \in A$ элемент мавжудки, $bc = e$. У ҳолда бир томондан $(ba)(bc) = (ba) \cdot e = ba$. Иккинчи томондан кўпайтириш амалининг ассоциативлигига асосан $(ba)(bc) = ((ba)b)c) = (b(ab)c) = (be)c = bc = e$. Демак, $ba = e$. Бу билан b элементнинг a га тескари эканлиги исботланди.

Бунга кўра $ea = (ab)a = a(ba) = a \cdot e = a$, яъни ихтиёрий $a \in A$ учун $ea = a$, яъни e — бирлик элемент.

Исботланган теоремага кўра гуруҳ таърифининг 1-шартидаги e элемент бирлик элемент экан. 8-§ 2-теоремага асосан бирлик элемент ягона. Бу ягона бирлик элемент **гуруҳнинг бирлик элементи** (қўшиш амали белгиси ишлатилганда — гуруҳнинг **ноль элементи**) дейилади. Исботланган теоремага кўра гуруҳ таърифи 2-шартидаги b элемент a га тескари экан. 8-§ 3-теоремага асосан a га тескари элемент ягона; уни a^{-1} (қўшиш амали белгиси ишлатилганда) $(-a)$ орқали белгиланади.

Тескари элементнинг ягоналигига асосан $(a^{-1})^{-1} = a$ (қўшиш белгиси ишлатилганда $(-(-a)) = a$).

Ихтиёрий $a, b \in A$ элементлар учун $(ab)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$. Ҳақиқатан, $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = (a(b \cdot b^{-1})a^{-1}) = (ae)a^{-1} = e$.

A коммутатив гуруҳда бинар амал қўшиш амали бўлсин. Бу ҳолда ихтиёрий $a,b \in A$ элементлар учун $a + (-b)$ элементни a ва b элементларнинг **айирмаси** деб аталади ва $a - b$ каби белгиланади. Хусусан, ҳар қандай $a \in A$ учун $a - a = 0$. Ихтиёрий $a, b \in A$ элементлар учун $(a - b) + b = a$ ва $(a + b) - b = a$ тенгликлар ўринли (исботланг!).

2-теорема. ***A — гуруҳ ва $a \in A$ бўлсин. У ҳолда $f_a(x) = ax$, $h(x) = x^{-1}$ ва $g_a(x) = xa$ ифодалар билан берилган $f_a : A \to A$, $h : A \to A$, $g_a : A \to A$ акс эттиришларнинг ҳар бири биекциядир.***

Исбот. Ихтиёрий $a, b, x \in A$ элементлар учун

$$f_{ab}(x) = (ab)x = a(bx) = f_a(f_b(x)) = (f_a f_b)(x).$$

яъни

$$f_{ab} = f_a f_b.$$

Хусусан

$$f_a f_{a^{-1}} = f_{a^{-1}} f_a = f_e = 1_A$$

бирлик акс эттиришдир. Бундан f_a нинг тескариланувчилиги ва 3-§ 3-теоремага асосан унинг биекция эканлиги келиб чиқади. Ушбу g_a акс эттиришнинг биекциялиги шунга ўхшаш исботланади.

Ихтиёрий $x \in A$ учун $h(h(x)) = (x^{-1})^{-1} = x$ муносабатдан h нинг тескариланувчилиги ва 3-§ 3-теоремага асосан биекциялиги келиб чиқади.

Натижа. *Агар x элемент A гуруҳда тўла ўзгарса (яъни A даги ҳар бир қийматни фақат бир мартадан қабул қилган ҳолда A даги барча қийматларни қабул қилса), у ҳолда $y = ax$, $z = xa$, $t = x^{-1}$ ўзгарувчилар ҳам A гуруҳда тўла ўзгаради.*

Исбот. Натижанинг исботи f_a, h ва g_a акс эттиришларнинг биекция эканлигидан келиб чиқади.

Яримгуруҳда a^n ифодани ҳар қандай натурал сон учун аниқлаган эдик, энди уни ихтиёрий n бутун сон учун аниқлаймиз. Кулайлик учун $a^0 = e$ деб олинади. Агар n — манфий бутун сон бўлса, $a^n = (a^{-1})^{|n|}$ деб олинади. Бу белгилашлардан ихтиёрий n ва m бутун сонлар учун ушбу

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \ (a^n)^m = a^{nm} \qquad (1)$$

тенгликларнинг ўринлилиги бевосита келиб чиқади.

A гуруҳ коммутатив бўлиб, ундаги амал сифатида қўшиш амали ишлатилган ҳолда na ифодани ихтиёрий n бутун сон учун аниқлаймиз. Қулайлик учун ҳар қандай $a \in A$ учун $0 \cdot a = \bar{0}$ деб олинади (бу ерда 0 — ноль бутун сон, $\bar{0}$ эса гуруҳнинг ноль элементи). Агар n — манфий бутун сон бўлса, $na = |n|(-a)$ деб олинади. Бу белгилашларга асосан ҳар қандай n ва m бутун сонлар учун (1) тенгликлар ушбу

$$na + ma = (n + m)a, \ m(na) = (m \cdot n)a$$

кўринишларга эга бўлади.

A гуруҳнинг B қисм тўплами шу гуруҳдаги амалга нисбатан гуруҳ ҳосил қилса, у A гуруҳнинг **қисм гуруҳи** дейилади.

Мисоллар: 1) Қўшиш амалига нисбатан гуруҳ бўлган Q рационал сонлар тўпламида Z бутун сонлар тўплами қисм гуруҳдир.

2) Кўпайтириш амалига нисбатан гуруҳ бўлган $R \setminus \{0\}$ тўпламда барча мусбат сонлардан иборат $R+$ тўплам қисм гуруҳдир.

3) 3-§ да киритилган A тўпламнинг H ўзгартиришлар гуруҳи G_A гуруҳнинг қисм гуруҳидир.

3-теорема. ***Агар A гуруҳда a элемент*** $a^2 = a$ **тенгликни қаноатлантирса, у ҳолда** $a = e$ **яъни** a **бирлик элемент бўлади.**

Исбот. Бу a элементнинг a^{-1} тескарисини оламиз. У ҳолда

$$a = a^{-1}(a^2) = a^{-1}a = e.$$

Бу теоремадан фойдаланиб, қуйидаги теоремани исботлаймиз:

4-теорема. ***A*** **— гуруҳ ва** ***B*** **унинг қисм гуруҳи бўлсин. У ҳолда:**

1) қисм гуруҳнинг бирлик элементи гуруҳнинг бирлик элементига тенг;

2) $a \in B$ элементнинг шу қисм гуруҳдаги тескариси бу элементнинг A гуруҳдаги тескарисига тенг.

Исбот. Ихтиёрий гуруҳда e бирлик элемент $e = e^2$ тенгликни қаноатлантиради. Хусусан, B қисм гуруҳнинг e_B бирлик элементи учун $e_B = e^2_B$. 3-теоремага асосан $e_B = e_A$.

Энди $a \in B$ ихтиёрий элемент бўлиб, b элемент a нинг B қисм гуруҳдаги тескариси, яъни $ab = e$ бўлса, у ҳолда бу тенглик кўрсатадики, b элемент a га A гуруҳда ҳам тескари. Демак, улар тенг.

Натижа. *B тўплам қисм гуруҳ бўлиши учун қуйидаги икки шарт бажарилиши зарур ва кифоя:*

1) *агар $b_1 \in B$, $b_2 \in B$ бўлса, у ҳолда $b_1 b_2 \in B$;*

2) *агар $b \in B$ бўлса, у ҳолда $b^{-1} \in B$.*

Исбот. Агар B қисм гуруҳ бўлса, унда 1) шарт бажарилади. 4-теоремага асосан 2) шарт ҳам бажарилади.

Энди, аксинча, (1) ва (2) шартлар бежарилган бўлсин. У ҳолда B да ассоциативлик хоссасининг бажарилиши бу хоссанинг A да бажарилишидан келиб чиқади. (1) ва (2) шартлардан $b \cdot b^{-1} = e \in B$ эканлиги келиб чиқади. Бундан 4-теоремага асосан B нинг бирлик элементга эга эканлиги келиб чиқади. (2) шартдан ва 4-теоремадан B даги ҳар бир элемент тескари элементга эга эканлиги келиб чиқади.

5-теорема. ***Қисм гуруҳларнинг кесишмаси қисм гуруҳдир.***

Исбот. A гуруҳда $\{B_\tau, \tau \in T\}$ қисм гуруҳлар тизими берилган бўлиб, $B = \bigcap_{\tau \in T} B_\tau$ — уларнинг кесишмаси бўлсин.

Агар $b_1 \in B$, $b_2 \in B$ бўлса, у ҳолда ҳар бир $\tau \in T$ учун $b_1 \in B_\tau$, $b_2 \in B_\tau$. Бундан B_τ қисм гуруҳ бўлгани учун $b_1 \cdot b_2 \in B_\tau$.

Охирги муносабат ҳар бир $\tau \in T$ учун ўринли бўлгани туфайли $b_1 b_2 \in B = \bigcap_{\tau\in T} B_\tau$.

Энди $b \in B$ бўлсин. У ҳолда ҳар бир $\tau \in T$ учун $b \in B_\tau$. B_τ қисм гуруҳ бўлгани туфайли $b^{-1} \in B_\tau$. Охирги муносабат ҳар бир $\tau \in T$ учун ўринли бўлганидан $b^{-1} \in B = \bigcap_{\tau\in T} B_\tau$. Бу билан 4-теореманинг натижасига асосан B нинг қисм гуруҳ эканлиги кўрсатилди.

A гуруҳда ётувчи C тўпламни ўз ичига олувчи барча қисм гуруҳлар тизимини $\{B_\tau, \tau \in T\}$ орқали белгилаймиз. Бу тизим бўш эмас, чунки A гуруҳнинг ўзи бу тизимга киради. Бу қисм гуруҳлар тизимининг кесишмаси $B = \bigcap_{\tau\in T} B_\tau$ ни C **тўплам ҳосил қилган қисм гуруҳ** деб аталади.

A_1 ва A_2 — гуруҳлар бўлсин. A_1 даги гуруҳ амалини $*$ орқали ва A_2 дагини $\circ$ орқали белгилаймиз.

Таъриф. *Агар A_1 ва A_2 гуруҳларнинг $f: A_1 \to A_2$ акс эттириши ҳар қандай $a, b \in A_1$ элементлар учун.*

$$f(a * b) = f(a) \circ f(b) \qquad (2)$$

тенгликни қаноатлантирса, бу f акс эттириш гомоморфизм дейилади. Бу тушунча 8-§ да яримгуруҳлар учун киритилган гомоморфизм тушунчасининг хусусий ҳоли.

6-теорема. ***$f: A_1 \to A_2$ — гуруҳларнинг гомоморфизми бўлсин. У ҳолда: 1) A_1 гуруҳнинг e бирлик элементи бу гомоморфизмда A_2 нинг бирлик элементига ўтади:***

2) ихтиёрий $a \in A_1$ элемент учун

$$f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}.$$

Исбот. A_1 гуруҳда e бирлик элемент бўлгани учун $e = e^2$. Бундан (2) хоссага кўра

$$f(e) = f(e^2) = (f(e))^2.$$

Бу тенгликдан 3-теоремага асосан $f(e)$ элемент A_2 гуруҳнинг бирлик элементи эканлиги келиб чиқади.

Бунга асосан ихтиёрий $a \in A_1$ учун

$$f(e) = f(aa^{-1}) = f(a) \cdot f(a^{-1})$$

тенглик ўринли, яъни

$$f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}.$$

Теорема исботланди.

Натижа. *Гомоморфизмда гуруҳнинг образи гуруҳдир.*

Исбот. G — гуруҳ, $\varphi : G \to G'$ — гомоморфизм бўлсин. $\varphi(G)$ тўпламнинг G' даги амалга нисбатан гуруҳ эканлигини кўрсатамиз. Ихтиёрий a', $b' \in \varphi(G)$ элементлар учун шундай $a, b \in G$ элементлар мавжудки, $a' = \varphi(a)$, $b' = \varphi(b)$. У ҳолда $a' \cdot b' = \varphi(a) \cdot \varphi(b) = \varphi(ab) \in \varphi(G)$.

Агар $e \in G$ бирлик элемент бўлса, у ҳолда 6-теоремага асосан $e' = \varphi(e)$ элемент G' гуруҳда бирлик элемент. Демак $e' \in \varphi(G)$. Агар $a' \in \varphi(G)$ бўлса, у ҳолда шундай $a \in G$ элемент мавжудки, $a' = \varphi(a)$. У ҳолда ушбу $b' = \varphi(a^{-1})$ элемент учун $a'b' = \varphi(a) \cdot \varphi(a^{-1}) = \varphi(aa^{-1}) = \varphi(e) = e'$.

Шунга ўхшаш $b'a' = e'$ муносабатни оламиз. Демак b' элемент a' элемент учун тескари элемент. 4-теореманинг натижасига кўра $\varphi(G)$ тўплам G' гуруҳнинг қисм гуруҳидир.

Таъриф. **Биекция бўлган** $f : A_1 \to A_2$ — ***гомоморфизм изоморфизм*** *дейилади.*

Изоморфизм $f : A_1 \to A_2$ —биекция бўлгани учун 3-§ 3-теоремага кўра унга тескари бўлган f^{-1}: $A_1 \to A_2$ биекция мавжуд.

7-теорема. ***$f : A_1 \to A_2$ изоморфизмга тескари бўлган f^{-1} биекция ҳам изоморфизмдир.***

Исбот. Ихтиёрий $a'b' \in A_2$ элементларни оламиз. У ҳолда f — биекция бўлгани учун шундай $a, b \in A_1$ элементлар мавжудки, $a' = f(a)$, $b' = f(b)$. Булардан $a = f^{-1}(a')$, $b = f^{-1}(b')$ ва $f^{-1}(a' \circ b') = f^{-1}(f(a) \circ f(b)) = f^{-1}(f(a * b)) = a * b = f^{-1}(a') * f^{-1}(b')$.

Теорема исботланди.

Мисол. R ҳақиқий сонлар тўплами қўшиш амалига нисбатан коммутатив гуруҳни ҳосил қилади. R_+ — барча мусбат ҳақиқий сонлар тўплами кўпайтириш амалига нисбатан коммутатив гуруҳни ҳосил қилади. Ушбу $f(x) = 2^x$ функция R ни R_+ га биекцияси бўлиб,

$$2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y$$

хоссага эга, яъни R ни R_+ га изоморфизмидир. Бунга тескари изоморфизм $g : R_+ \to R$ ушбу $g(y) = \log_2 y$ функциядир. Бунинг учун (2) хосса ушбу $\log_2(y_1 \cdot y_2) = \log_2 y_1 + \log_2 y_2$ кўринишга эга.

A_1 гуруҳни A_2 гуруҳга акс эттирувчи изоморфизм мавжуд бўлса, бу гуруҳлар **изоморф** дейилади.

Гуруҳларнинг изоморфлиги рефлексивлик, симметриклик ва транзитивлик хоссаларига эга (исботланг!), яъни эквивалентлик муносабатидир.

Изоморф гуруҳларни улардаги бинар амалнинг хоссалари нуқтаи назаридан бири-биридан фарқ қилиб бўлмайди.

11-§. ЎРИНЛАШТИРИШЛАР, ЎРИН АЛМАШТИРИШЛАР ВА БИРИКМАЛАР

A тўплам n элементли тўплам ва k — бирор натурал сон бўлсин.

Т а ъ р и ф . *Компоненталари турли бўлган A устидаги ихтиёрий k ўлчамли вектор A устидаги* ***k-ўлчамли ўринлаштириш (n та элементдан k тадан ўринлаштириш)*** *дейилади; n-ўлчамли ўринлаштириш* ***ўрин алмаштириш*** *дейилади.*

Равшанки, мумкин бўлган барча k-ўлчамли ўринлаштиришлар сони чекли бўлиб, бу сон фақат n ва k га боғлиқ. Уни A_n^k орқали белгилаймиз. A_n^n ни, яъни n элементдан мумкин бўлган барча ўрин алмаштиришлар сонини P_n билан белгилаймиз.

Битта ўринга n элементли тўплам элементларини n та усул билан жойлаштириш мумкин бўлгани учун ихтиёрий n натурал сон учун $A_n^1 = n$.

Таърифдан кўринадики, агар $k > n$ бўлса, k — ўлчамли ўринлаштиришлар мавжуд эмас, яъни $A_n^k = 0$.

1-теорема. ***Агар $k \leq n$ бўлса, у ҳолда $A_n^k = n(n-1)...(n-k+1)$. Хусусан, $P_n = 1 \cdot 2...n$.***

Исбот. Ўринлаштиришнинг биринчи компонентаси n усул билан берилиши мумкин. Агар k — ўлчамли ўринлаштиришнинг биринчи компонентаси танланган бўлса, у ҳолда унинг қолган $(k-1)$ — та компонентаси қолган $(n-1)$ та элементдан $(k-1)$ — ўлчамли ўринлаштиришни ҳосил қилади. Шунга асосан $A_n^k = n \cdot A_{n-1}^{k-1}$. Бу тенгликни кетма-кет татбиқ қиламиз:

$$A_n^k = n \cdot A_{n-1}^{k-1} = n(n-1)A_{n-2}^{k-2} = ... = n(n-1)...(n-k+2)A_{n-k+1}^{1} = n(n-1)...(n-k+2)(n-k+1),$$

чунки $A_{n-k+1}^1 = n-k+1$.

$P_n = 1 \cdot 2...n$ кўпайтмани қисқалик учун $n!$ ("эн-факториал" деб ўқилади) кўринишда ёзиш қабул қилинган.

Таъриф. *A тўпламнинг ихтиёрий k-элементли қисм тўплами унинг k-элементли (n та элементдан k тадан) бирикмаси (бирлашмаси, комбинацияси, гуруҳлаши) дейилади.*

A тўпламнинг мумкин бўлган барча k-элементли бирикмалари сони фақат n ва k сонларга боғлиқ. Уни C_n^k орқали белгилаймиз.

Равшанки, агар $k > n$ бўлса, $C_n^k = 0$. $k \leq n$ бўлсин.

2-теорема. ***Ушбу***

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

тенглик ўринли.

Исбот. Мумкин бўлган барча k-элементли бирикмаларни оламиз. Ихтиёрий бирикма олиб, унинг мумкин бўлган барча k-элементли ўрин алмаштиришларини бажарсак, бунинг натижасида P_k та k-элементли ўрин алмаштиришларни ҳосил қиламиз. Энди мумкин бўлган барча k-элементли ўрин алмаштиришларни ҳосил қилиш учун барча k-элементли бирикмаларни олиб, уларнинг ҳар биридан мумкин бўлган барча k-элементли ўрин алмаштиришларни ҳосил қилиш керак.

Бунга асосан ва турли бирикмалардан ҳосил қилинган k-элементли ўрин алмаштиришлар турли бўлгани учун барча k-элементли ўринлаштиришлар сони A_n^k комбинациялар сони C_n^k нинг ўриналмаштиришлар сони P_k га кўпайтмасига тенг, яъни $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$.

Бундан

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$$

тенгликни оламиз.

C_n^k ни $k = 0$ да бирга тенг деб ҳисоблаймиз, яъни $C_n^0 = 1$.

C_n^k сонлар икки ҳад йиғиндиси (биномни) ихтиёрий натурал кўрсаткичли даражага кўтариш масалаларида учрайди.

3-теорема. ***Фараз қилайлик, $x, y \in R$ ва n — ихтиёрий натурал сон бўлсин. У ҳолда***

$$(x+y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \ldots + C_n^k x^{n-k} y^k + \ldots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + y^n.$$

Бу айният **Ньютон биноми формуласи** дейилади.

Исбот. Фараз қилайлик $x, y_1, y_2, \ldots y_n \in R$. Ушбу $(x + y_1) \cdot (x + y_2) \ldots (x + y_n)$ кўпайтмани кўрамиз. Бу кўпайтмада қавс ичидаги ҳадларни кўпайтириб ва x нинг бир хил даражаларини ўз ичига олган ҳадларни йиғиб, қуйидаги ифодани оламиз:

$$(x + y_1)(x + y_2) \ldots (x + y_n) = x^n + \tau_1 x^{n-1} + \tau_2 x^{n-2} + \ldots + \tau_k x^{n-k} + \ldots + \tau_{n-1} x + \tau_n,$$

бу ерда

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= y_1 + y_2 + \ldots + y_n, \\
\tau_2 &= y_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot y_3 + \ldots y_{n-1} y_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\tau_{n-1} &= y_1 \cdot y_2 \ldots y_{n-1} + y_1 \cdot y_2 \ldots y_{n-2} y_n + \ldots y_2 y_3 \ldots y_n, \\
\tau_n &= y_1 \cdot y_2 \ldots y_n.
\end{aligned}$$

Шундай қилиб, τ_k — ушбу $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ тўпламнинг мумкин бўлган барча k-элементли бирикмалари элементлари кўпайтмасининг йиғиндисига тенг. Хусусан, агар $y_1 = y_2 = ... = y_n = y$ деб олсак, у ҳолда $\tau_k = C_n^k y^k$. Бунга асосан $(x + y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1}y + ... C_n^{n-1} xy^{n-1} + y^n$.

12-§. ТЕНГЛАМАЛАР

Агар $f : A \to B$ функция ва $a \in A$ элемент берилган бўлса, у ҳолда булар орқали

$$b = f(a) \tag{1}$$

элемент топилади. Шундай масалалар учрайдики, уларда (1) муносабатдаги f функция ва b элемент берилган, аммо a элемент берилмаган бўлади ва уни топиш талаб қилинади.

Бундан ҳам умумийроқ бўлган қуйидаги масала ҳам учрайди: $f : A \to B$ ва $g : A \to B$ функциялар берилган. Ушбу

$$f(x) = g(x) \tag{2}$$

тенгликни қаноатлантирувчи $x \in A$ элементлар топилсин. Бу ҳолда (2) тенглик A ва B тўпламлар устида **бир номаълумли тенглама** ва x элемент эса бу тенгламадаги **номаълум** дейилади.

Мисол: $f : R \to R$, $f(x) = x^4$ ва $g(x) = 1$ бўлса, $x^4 = 1$. Кўринишидаги биквадрат тенглама ҳосил бўлади.

Мазкур (2) тенгликни қаноатлантирувчи бирор $x = a \in A$ элемент бу тенгламанинг **ечими** дейилади. Тенгламанинг барча ечимларини топиш **тенгламани ечиш** дейилади.

C ва B — ихтиёрий тўпламлар бўлсин.

Таъриф. ***Агар $f : C^n \to B$ ва $g : C^n \to B$ функциялар берилган бўлиб, ушбу***

$$f(x_1,...,x_n) = g(x_1,...,x_n) \tag{3}$$

тенгликни қаноатлантирувчи $x = (x_1,...,x_n) \in C^n$ вектор берилмаган бўлса ва уни топиш керак бўлса, (3) тенглик С ва В тўпламлар устида п та номаълумли тенглама ва $x = (x_1,...,x_n)$ вектор эса бу тенгламадаги номаълумлар тизими дейилади.

Мисоллар: 1) $f: R^2 \to R$, $f(x, y) = x^2 + y$, $g(x, y) = 1$ бўлса, $x^2 + y = 1$ тенглама ҳосил бўлади.

2) $f: R^n \to R$, $f(x_1,...,x_n) = x_1 + x_2 + ... + x_n$ ва $g(x_1,...,x_n) = 1 - x_1^2$ бўлса, $x_1 + ... + x_n = 1 - x_1^2$ тенглама ҳосил бўлади.

Мазкур (3) тенгламани қаноатлантирувчи бирор $x = a = (a_1,...,a_n) \in C^n$ вектор бу тенгламанинг **ечими** дейилади.

Агар (3) тенгламада $C^n = A$ белгилаш киритсак, у ҳолда (3) тенглама (2) кўринишга эга бўлган A ва B устидаги бир номаълумли тенгламага келади.

Таъриф. **Агар $2m$ та $f_i: C^n \to Д$, $i = \overline{1,m}$, $g_i: C^n \to Д$, $i = \overline{1,m}$ *функциялар* берилган бўлиб, ушбу**

$$\begin{aligned} f_1(x_1,...,x_n) &= g_1(x_1,...,x_n) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ f_m(x_1,...,x_n) &= g_m(x_1,...,x_n) \end{aligned} \tag{4}$$

тенгликларнинг барчасини қаноатлантирувчи $x = (x_1,..., x_n) \in A$ элемент берилмаган бўлса ва уни топиш керак бўлса, (4) тенгликлар тўплами С ва Д устида п та номаълумли т та тенгламалар тизими ва $x(x_1,...,x_n)$ эса бу тенгламалар тизимидаги номаълум вектор (номаълумлар тизими) дейилади.

(4) тенгликлардан тузилган тенгламалар тизимини ушбу

$$\begin{cases} f_1(x_1,...,x_n) = g_1(x_1,...,x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m(x_1,...,x_n) = g_m(x_1,...,x_n) \end{cases} \tag{5}$$

кўринишда белгилаш қабул қилинган.

(4) тизимдаги ҳар бир тенгликни қаноатлантирувчи $x = c = (c_1,..., c_n) \in C^n$ вектор (яъни (4) даги барча тенгла-

маларнинг умумий ечими) (5) тенгламалар тизимининг **ечими** дейилади. (5) тизимнинг барча ечимларини топиш **бу тизимни ечиш** дейилади.

Масалан, $F: R^2 \to R^2$, $F(x, y) = (2x - y, x + 3y)$, $g: R^2 \to R^2$, $g(x, y) = (-1, x^2 + 3 - y)$ бўлса,

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + 3y = x^2 + 3 - y \end{cases}$$

тенгламалар тизими ҳосил бўлади.

Агар $F(x) = (f_1(x),...,f_m(x))$, $C^n = A$, $Д^m = B$ ва $G(x) = (g_1(x),...,g_m(x))$ белгилашлар киритсак, у ҳолда (4) тизимни

$$F(x) = G(x)$$

кўринишда ёзиш мумкин, яъни (4) тенгламалар тизимини $A = C^n$ ва $B = Д^m$ тўпламлар устида бир номаълумли битта тенглама деб қараш мумкин. Аксинча, агар $F : C^n \to Д^m$, $F(x) = (f_1(x),..., f_m(x))$ ва $G: C^n \to Д^m$, $G(x) = (g_1(x),..., g_m(x))$ функциялар берилган бўлса, у ҳолда C^n ва $Д^m$ тўпламлар устидаги $F(x) = G(x)$ тенгламани C ва $Д$ тўпламлар устидаги (5) тизим кўринишда ёзиш мумкин. Бундан буён баъзан (5) тизимнинг ушбу $F(x) = G(x)$ қисқа кўринишини ҳам ишлатамиз.

Таъриф. *Агар (5) тизимнинг камида бир ечими мавжуд бўлса, у* ***биргаликда*** *дейилади. Агар (5) тизим биргаликда бўлиб, ечими ягона бўлса, у* ***аниқ*** *дейилади.*

Иккита

$$F(x) = G(x) \qquad (\alpha)$$

ва

$$P(x) = Q(x) \qquad (\beta)$$

тенгламалар тизимлари берилган бўлсин. Бунда (α) тизим C ва $Д$ тўпламлар устидаги n та $x = (x_1,...,x_n)$ номаълумли m та тенгламалар тизими бўлсин:

$$F: C^n \to Д^m,\ G: C^n \to Д^m,$$

(β) тизим эса C ва S тўпламлар устидаги n та $x = (x_1,\dots,x_n)$ номаълумли k та тенгламалар тизими бўлсин:

$$P : C^n \to S^k,\ Q : C^n \to S^k$$

Таъриф. *Агар (α) тизимнинг ҳар бир ечими (β) нинг ҳам ечими булса, (β) тизим (α) нинг* ***натижаси*** *дейилади ва бу $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ кўринишда ёзилади.*

Бу таърифдан бевосита қуйидаги хоссалар келиб чиқади.

1) Ҳар қандай (α) тенгламалар тизими учун $(\alpha) \Rightarrow (\alpha)$ (рефлексивлик).

2) Агар бир хил номаълумли (α), (β) ва (γ) тенгламалар тизимлари берилган бўлиб, $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ ва $(\beta) \Rightarrow (\gamma)$ бўлса, у ҳолда $(\alpha) \Rightarrow (\gamma)$ (транзитивлик).

Таъриф. *Агар $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ ва $(\beta) \Rightarrow (\gamma)$ бўлса, ёки (α) ва (β) тизимларнинг иккаласи ҳам биргаликда бўлмаса, улар* ***тенг кучли тизимлар*** *дейилади ва бу $(\alpha) \Leftrightarrow (\beta)$ кўринишда ёзилади.*

Бу таърифдан бир хил номаълумли (α), (β) ва (γ) тенгламалар тизимлари учун қуйидаги хоссаларнинг ўринлилиги бевосита келиб чиқади:

1) Ҳар қандай (α) тизим учун $(\alpha) \Leftrightarrow (\alpha)$ (рефлексивлик);

2) Агар $(\alpha) \Leftrightarrow (\beta)$ бўлса, у ҳолда $(\beta) \Leftrightarrow (\alpha)$ (симметриклик).

3) Агар $(\alpha) \Leftrightarrow (\beta)$ ва $(\beta) \Leftrightarrow (\gamma)$ бўлса, у ҳолда $(\alpha) \Leftrightarrow (\gamma)$ (транзитивлик).

Масалан, агар $F : A \Rightarrow B$, $b \in B$ ва $H : B \Rightarrow B$ бўлса, у ҳолда

$$F(x) = b \tag{6}$$

тенгламада $x = a$ ечим бўлса, бу элемент

$$HF(x) = Hb \tag{7}$$

тенглама учун ҳам ечим бўлади, яъни (7) тенглама (6) нинг натижасидир. Агар H — биекция бўлса, у ҳолда бу тенгламалар **тенг кучли** бўлади.

Учинчи боб

ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР ТИЗИМЛАРИ

13-§. ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР ТИЗИМЛАРИ ВА УЛАРНИНГ МАТРИЦАЛАРИ

Ушбу

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b \qquad (1)$$

тенглик берилган бўлиб, бу тенгликдаги a_1, a_2, ..., a_n, b ҳақиқий сонлар маълум, x_1, x_2, ..., x_n ҳақиқий сонлар эса номаълум бўлса, бу тенглик n та номаълумли **чизиқли тенглама** дейилади; a_1, a_2, ..., a_n сонлар бу чизиқли тенгламанинг коэффициентлари, b сон **озод ҳади**, x_1, x_2, ..., x_n сонлар эса **номаълумлар** дейилади.

Агар $b = 0$ бўлса, (1) тенглама **бир жинсли** дейилади. Бир хил номаълумли чизиқли тенгламалардан иборат бир нечта тенгламаларни бирга ечиш, яъни чизиқли тенгламаларни ечиш масаласи кўп учрайди.

Бирга кўрилаётган бир хил номаълумли бир нечта чизиқли тенгламалар тўпламини **чизиқли тенгламалар** тизими дейилади.

Умумий кўринишда олинган чизиқли тенгламалар тизимида одатда коэффициентлар ва озод ҳадлар кўп бўлгани ва шунга кўра уларни турли ҳарфлар билан белгилаш учун алифбодаги ҳарфлар етишмагани сабабли коэффициентларни ва озод ҳадларни қуйидагича белгилаш усули ишлатилади. Дастлаб чизиқли тенгламалар тизимига кирувчи тенгламалар тартиб билан жойлаштирилади, яъни улар рақамланади. Бунга асосан чизиқли тенгламалар тизимига кирувчи коэффициентлар қуйидаги қоида бўйича иккита индексли бир хил ҳарфлар билан белгиланади: индексларнинг биринчиси тенгламанинг рақамини ва иккинчиси эса бу коэффициент турган жойдаги номаълумнинг рақамини кўрсатади. Масалан, i-тенгламадаги j-номаълум олдидаги коэффициент a_{ij} орқали белгиланади ва а-и-жи деб ўқилади (хусусан a_{23} ни a-икки-уч деб ўқилади). Чизиқли тенгламалар тизимига кирувчи озод ҳадлар бир индексли бошқа бир хил ҳарфлар билан белгиланади. Бунда индекс озод ҳад тегишли бўлган тенгламанинг рақамини кўрсатади. Масалан, i-тенгламанинг озод ҳади b_i орқали белгиланади.

Юқорида келтирилган келишувга асосан умумий ҳолда берилган n та $x_1, x_2, ..., x_n$ номаълумли s та чизиқли тенгламалар тизимини ушбу

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{S1}x_1 + a_{S2}x_2 + \ldots a_{Sn}x_n = b_S \end{cases} \qquad (2)$$

ёки қисқача $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i (i = \overline{1,S})$ кўринишларда ёзиш мумкин. Бу ердаги a_{ij} сонлар i = тенгламадаги j - номаълум олдидаги **коэффициент** ва b_i сон эса i - тенгламанинг **озод ҳади** дейилади. Агар барча $i=\overline{1,n}$ лар учун $b_i = 0$ бўлса, (2) тизим **бир жинсли** дейилади.

Чизиқли тенгламалар тизимини ечиш масаласи бу тизимнинг коэффициентларидан тузилган ушбу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \ldots a_{2n} \\ a_{s1}a_{s2} \ldots a_{sn} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

тўғри бурчакли тўртбурчак жадвалнинг хоссаларига боғлиқ. Бундай жадвал S та сатрли n та устунли матрица ($S \times n$ - матрица) дейилади, (a_{ij}) ёки $|| a_{ij} ||$ кўринишда ҳам ёзилади. Бу A матрицадаги a_{ij} сонлар матрицанинг **элементлари** дейилади. Барча $S \times n$ - матрицалар тўпламини $M_{s,n}$ орқали белгилаймиз.

A матрицанинг ҳар бир сатрига R устида n - ўлчамли вектор деб қараш мумкин. Унинг i - сатрини $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ кўринишда ёзамиз. Келажакда A матрицанинг сатрларини мос равишда $A_1, A_2, \ldots, A_S$ орқали белгилаймиз. A матрицанинг устунларига R устида S-ўлчамли вектор деб қараш мумкин. Унинг j -устунини ушбу

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{sj} \end{pmatrix}$$

белги ўрнига жойни тежаш мақсадида $[a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{sj}]$ кўринишида ёзамиз. Келажакда A матрицанинг устунларини мос равишда $A^1, A^2, \ldots, A^n$ каби белгилаймиз.

Агар $S \times n$-матрицада $n = S$ бўлса, у n тартибли **квадрат** матрица дейилади. Барча квадрат матрицалар тўпламини белгилашда $M_{n,n}$ ўрнига M_n белгини ишлатамиз. Квадрат матрицадаги $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ элементлар тўплами унинг бош **диагонали** дейилади. Агар квадрат матрицада бош диагоналдан ташқаридаги барча элементлар ноль бўлса, у **диагонал** матрица дейилади ва баъзан $\mathrm{diag}\,(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ кўринишида ёзилади. Барча элементлари нолга тенг бўлган матрица **ноль** матрица дейилади. Агар диагонал матрицада $a_{11}, a_{22} = \ldots = a_{nn} = 1$ бўлса, у **бирлик** матрица дейилади ва E_n (баъзан E) орқали белгиланади.

Юқорида (2) тизим бўйича киритилган (3) матрица **(2) тизим номаълумларининг коэффициентлари** матрицаси дейилади. Бу матрицанинг ўнг томонига тизимнинг озод ҳадларидан иборат $[b_1, b_2, \ldots, b_S]$ устунни ёзсак, S та сатрли $n + 1$ устунли

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} b_1 \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} b_2 \\ a_{S1} a_{S2} \ldots a_{Sn} b_2 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

матрица ҳосил бўлади. Уни (2) тизимнинг **кенгайтирилган матрицаси** дейилади ва (a_{ij}/b_i) кўринишида ҳам ёзилади. Одатда (2) тизимни ечиш масаласи (3) ва (4) матрицаларнинг хоссаларини ўрганишга келтирилади.

14-§. *n* ЎЛЧОВЛИ АРИФМЕТИК ФАЗО

Матрицаларнинг сатрлари ва устунлари орасидаги боғланишларни ўрганиш мақсадида R^n даги (R — ҳақиқий тўплами) векторлар устида амаллар киритиб, уларнинг хоссаларини ўрганамиз.

Агар $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ва $У = (y_1, y_2, ..., y_n)$ координаталари ҳақиқий сон бўлган n ўлчамли векторлар бўлса, ушбу $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$ вектор уларнинг **йиғиндиси** деб аталади ва $X + У$ орқали белгиланади. Барча координатали нольга тенг бўлган $(0, 0, ..., 0)$ вектор **ноль вектор** деб аталади ва $\bar{0}$ (кўпинча 0) орқали белгиланади.

Ҳақиқий сонларни қўшиш амалининг хоссаларидан векторларни қўшиш амалининг қуйидаги хоссалари бевосита келиб чиқади:

a_1) ҳар қандай учта $X, У, Z \in R^n$ векторлар учун

$$(X + У) + Z = X + (У + Z) \text{ (ассоциативлик)}$$

a_2) ҳар қандай $X \in R^n$ вектор учун

$$X + \bar{O} = \bar{O} + X = X$$

a_3) ҳар қандай $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ вектор учун

$$X + У = У + X = \bar{O}$$

тенгликларни қаноатлантирувчи $У$ вектор мавжуд; бу вектор $У = (-x_1, ..., -x_n)$ бўлиб, X га **қарама-қарши** вектор дейилади ва $-X$ орқали белгиланади.

a_4) ҳар қандай $X, У \in R^n$ векторлар учун $X + У = У + X$ (коммутативлик). Бу хоссалар R^n тўплам қўшиш амалига нисбатан коммутатив гуруҳ ҳосил қилишини кўрсатади.

Агар $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ ва $\lambda \in R$ бўлса, ушбу $(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$ вектор X векторнинг λ сонга **кўпайтмаси** дейилади ва λX орқали белгиланади.

Ҳақиқий сонларни кўпайтириш амалининг хоссаларидан векторни сонга кўпайтириш амалининг қуйидаги хоссалари бевосита келиб чиқади:

b_1) ҳар қандай $X \in R^n$ вектор учун

$$1 \cdot X = X;$$

b_2) ҳар қандай $\lambda, \mu \in R$ сонлар ва $X \in R^n$ вектор учун

$$\lambda(\mu X) = (\lambda\mu)X;$$

b_3) ҳар қандай $\lambda, \mu \in R$ ва $X \in R^n$ учун

$$(\lambda + \mu)X = \lambda X + \mu X;$$

b_4) ҳар қандай $\lambda \in R$ ва $X, Y \in R^n$ векторлар учун

$$\lambda(X + Y) = \lambda X + \lambda Y.$$

R^n тўплам векторларни қўшиш ва векторларни сонга кўпайтириш амаллари билан бирга **n - ўлчамли арифметик фазо** дейилади.

Берилган $X_1, X_2, ..., X_k \in R^n$ векторлар ва $c_1, c_2, ..., c_k \in R$ сонлар учун ушбу $c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_kX_k$ вектор $X_1, X_2, ..., X_k$ векторларнинг $c_1, c_2, ..., c_k$ коэффициентли **чизикли ифодаси** (комбинацияси) дейилади. Агар Y вектор $X_1, X_2, ..., X_k$ векторларнинг бирор чизиқли ифодасига тенг бўлса, у $X_1, X_2, ..., X_k$ векторлар орқали **чизиқли ифодаланувчи** дейилади.

Агар $X_1, X_2, ..., X_k$ векторлар тизими учун ушбу

$$c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_kX_k = \bar{0}$$

тенгликни қаноатлантирувчи камида бири нольдан фарқли бўлган $c_1, c_2, ..., c_k$ сонлар мавжуд бўлса, бу векторлар тизими **чизиқли боғланган** дейилади. Масалан, ноль векторни ёки иккита бир хил векторни ўз ичига олувчи R^n даги ихтиёрий чекли векторлар тизими чизиқли боғланган.

1-теорема. $X_1, X_2, ..., X_k$ векторлар тизими чизиқли боғланган бўлиши учун бу тизимдаги бирор векторни бош-

қалари орқали чизиқли ифодалаш мумкинлиги зарурий ва кифоявий шартдир.

Исбот. X_1, X_2, ..., X_k векторлар чизиқли боғланган бўлсин. У ҳолда камида бири нольдан фарқли бўлган c_1, c_2, ..., c_k сонлар мавжудки, $c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_kX_k = \bar{0}$. Бу сонлар ичида нольдан фарқлиси c_i бўлсин. У ҳолда юқоридаги тенгликдан ушбу

$$X_i = -\frac{c_1}{c_i}X_1 - \ldots - \frac{c_{i-1}}{c_i}X_{i-1} - \frac{c_{i+1}}{c_i}X_{i+1} - \ldots - \frac{c_k}{c_i}X_k$$

тенглик, яъни X_i векторнинг бошқалари орқали чизиқли ифодаланганлиги келиб чиқади.

Энди, аксинча, X_1, X_2, ..., X_k векторларнинг бирортаси, масалан X_i, бошқалари орқали ифодаланган бўлсин.

$$X_i = \lambda_1X_1 + \lambda_2X_2 + \ \ldots + \lambda_{i-1}X_{i-1} + \lambda_{i+1}X_{i+1} + \ldots + \lambda_kX_k.$$

У ҳолда

$$\lambda_1X_1 + \lambda_2X_2 + \ \ldots + \lambda_{i-1}X_{i-1} - X_i + \lambda_{i+1}X_{i+1} + \ldots + \lambda_kX_k = 0.$$

Бу ерда $c_1 = \lambda_1$, $c_2 = \lambda_2$, ..., $c_{i-1} = \lambda_{i-1}$, $c_i = -1$, $c_{i+1} = \lambda_{i+1}$, ..., $c_k = \lambda_k$ деб олсак, $c_i = -1 \neq 0$ бўлгани учун X_1, X_2, ..., X_k тизим чизиқли боғланган.

Бу теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади. Агар бирор векторлар тизими чизиқли боғланган қисм тизимига эга бўлса, бу тизимнинг ўзи ҳам чизиқли боғланган бўлади.

Чизиқли боғланмаган векторлар тизими **чизиқли эркли тизим** ҳам деб аталади. Шундай қилиб, агар X_1, X_2, ..., $X_k \in R^n$ тизим учун ҳар қандай ушбу

$$c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_kX_k = \bar{0}$$

кўринишдаги тенгликдан $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$ тенглик келиб чиқса, бу тизим чизиқли эркли бўлади. Равшанки, чизиқли эркли тизимнинг ҳар қандай қисм тизими ҳам чизиқли эркли.

R^n фазода чизиқли эркли тизимга муҳим мисол келтирамиз. E_i орқали i координатаси 1 га ва бошқа барча координаталари нольга тенг бўлган векторни белгилаймиз. Ушбу

$$E_1 = (1, 0, ..., 0)$$
$$E_2 = (0, 1, ..., 0)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$E_n = (0, 0, ..., 1)$$

векторлар тизими чизиқли эркли. Ҳақиқатан, $c_1E_1 + c_2E_2 + ... + c_nE_n = (c_1, c_2, ..., c_k)$ бўлгани учун $c_1E_1 + c_2E_2 + ... + c_nE_n = \bar{0}$ тенгликдан $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$ тенглик келиб чиқади. E_1, E_2, ..., E_n векторлар **ортлар** деб аталади.

R^n да A ва B тизимлар берилган бўлсин. Агар A нинг ҳар бир X вектори учун B нинг шундай чекли қисм тизими мавжуд бўлсаки, X вектор бу қисм тизим орқали чизиқли ифодаланса, A тизим B тизим орқали **чизиқли ифодаланувчи** дейилади.

2-теорема. ***Агар А тизим В орқали чизиқли ифодаланса ва В тизим С тизим орқали чизиқли ифодаланса, у ҳолда А тизим С орқали чизиқли ифодаланади.***

Исбот. A нинг ихтиёрий X вектори B нинг бирор $\{У_1, ..., У_k\}$ чекли қисм тизими орқали чизиқли ифодаланади: $X = a_1У_1 + ... + a_kУ_k$.

Ҳар бир $У_i$ вектор С даги бирор $\{Z_{i1}, ..., Z_{ip_i}\}$ чекли қисм тизим орқали чизиқли ифодаланади:

$$У_i = \sum_{j=1}^{p_i} b_{ij}Z_{ij},\ b_{ij} \in R.$$

Бу тенгликларни X нинг ифодасига қўйсак:

$$X = \sum_{j=1}^{K} a_i\left(\sum_{j=1}^{p_i} b_{ij}Z_{ij}\right)$$

тенгликни оламиз. ■

R^n фазода бирор A тизим олинган бўлсин. Агар A даги ҳар қандай $r+1$ та вектор чизиқли боғланган ва унда r та чизиқли эркли векторлар қисм тизими мавжуд бўлса, бундай r сони A тизимнинг **ранги** дейилади. Уни $r(A)$ орқали белгилаймиз. Ноль векторлардан иборат тизимнинг рангини нольга тенг деб ҳисоблаймиз.

Агар ҳар қандай m натурал сон учун A да m та чизиқли эркли вектор мавжуд бўлса, бундай A тўпламнинг ранги **чексиз** дейилади ва $r(A) = \infty$ кўринишида ёзамиз.

A тизимнинг ранги r га тенг бўлсин. A даги ихтиёрий r та чизиқли эркли вектор A нинг **базиси** дейилади.

3-теорема. ***А тизимнинг ранги r га тенг бўлсин. У ҳолда А даги ихтиёрий вектор ундаги ихтиёрий базис орқали ягона усул билан чизиқли ифодаланади.***

Исбот. A да ихтиёрий $\{B_1, B_2, ..., B_r\}$ базисни ва ихтиёрий X векторни оламиз. У ҳолда $\{B_1, ..., B_r, X\}$ тизим чизиқли боғланган, яъни камида бири нольдан фарқли бўлган шундай $c_1, c_2, ..., c_r, c$ сонлар мавжудки,

$$c_1B_1 + c_2B_2 + \ldots + c_rB_r + cX = \bar{0}.$$

Агар $c = 0$ бўлса, у ҳолда $c_1B_1 + \ldots + c_rB_r = \bar{0}$ бўлиб, $c_1, c_2, ..., c_r$ сонларнинг ичида камида бири нольдан фарқли бўларди, яъни $B_1, B_2, ..., B_2$ тизим чизиқли боғланган бўларди. Бу эса тизимнинг базис эканлигига зид. Демак $c \neq 0$. Бунга кўра юқоридаги тенгликдан $X = -\frac{C_1}{C}B_1 - \frac{C_2}{C}B_2 - \ldots - \frac{C_r}{C}B_r$ тенгликни оламиз. Бу билан ҳар қандай X векторнинг базис орқали чизиқли ифодаланиши кўрсатилди.

Энди X вектор икки хил усул билан базис орқали ифодаланган бўлсин: $X = a_1B_1 + a_2B_2 + ... + a_rB_r$, $X = b_1B_1 + b_2B_2 + ... + b_rB_r$. Бу тенгликларнинг биринчисидан иккинчисини айириб, ушбу

$$(a_1 - b_1)B_1 + (a_2 - b_2)B_2 + \ldots + (a_r - b_r)B_r = \bar{0}$$

тенгликка келамиз. Бундан базиснинг чизиқли эрклилигига асосан $a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \ldots = a_r - b_r = 0$ ни, яъни $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_r = b_r$ тенгликларни оламиз.

4-теорема. ***R^n да ётувчи A ва B тўпламлар берилган бўлиб, B нинг ранги S га тенг бўлсин. Агар A тизим B орқали чизиқли ифодаланса, у ҳолда A даги ҳар қандай $(S+1)$ — та вектор чизиқли боғланган, яъни $r(A) \leq S$.***

Исбот. Теоремани S бўйича математик индукция усули билан исботлаймиз. A тўпламда ихтиёрий $\{C_1, ..., C_r\}$ чизиқли эркли тизимни ва B тизимда бирор $\{D_1, ..., D_s\}$ базисни оламиз. У ҳолда 2-ва 3-теоремаларга асосан C_1, C_2, ..., C_r векторларни $\{D_1, ..., D_s\}$ базис орқали ифодалаш мумкин:

$$\begin{aligned} C_1 &= a_1 D_1 + ... + a_{1s} D_s, \\ C_2 &= a_2 D_1 + ... + a_{2s} D_s, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_r &= a_{r1} D_{r1} + ... + a_{rs} D_s, \end{aligned} \qquad (1)$$

Теоремани исботлаш учун $r \leq S$ тенгсизликни исботлаш кифоя.

Агар B тизимнинг ранги $S = 1$ бўлса, у ҳолда C_1, C_2, ..., C_r векторлар чизиқли эркли бўлгани учун (1) тенгликлардан $r \leq 1$ тенгсизликни оламиз, яъни теорема $S = 1$ учун ўринли. Энди теоремани ранги $S - 1$ бўлган ҳар қандай B тўплам учун ўринли бўлсин деб фараз қиламиз. Агар (1) тизимда $a_{1S} = a_{2S} = ... = a_{rs} = 0$ бўлса, у ҳолда ранги r га тенг бўлган $\{C_1, ..., C_r\}$ тизим ранги $S - 1$ га тенг бўлган $\{D_1, ..., D_{s-1}\}$ тизим орқали чизиқли ифодаланарди. Бу ҳолда индукция бўйича фаразимизга асосан $r \leq S - 1$. Бундан $r \leq S$. Энди $a_{1S} ..., a_{rS}$ коэффициентларнинг бирортаси, масалан a_{rS}, нольдан фарқли бўлган ҳолни кўрамиз. Бу ҳолда (1) нинг охирги тенглигидан D_s ни ифодалаб оламиз:

$$D_s = \frac{1}{a_{rs}} C_r - \frac{a_{r1}}{a_{rs}} D_1 - ... - \frac{a_{r,s-1}}{a_{rs}} D_{r-1}.$$

Бу ифодани (1) даги қолган $(r-1)$ та тенгликка қўйиб, ўхшаш ҳадларни йиғиб чиқамиз. Натижада қуйидаги тенгликлар тизимини оламиз.

$$
\begin{aligned}
C_1 - \frac{a_{1s}}{a_{rs}} C_r &= b_{11} D_1 + \ldots + b_{1,s-1} D_{s-1}, \\
C_2 - \frac{a_{2s}}{a_{rs}} C_r &= b_{21} D_1 + \ldots + b_{2,s-1} D_{s-1}, \qquad (2) \\
C_{r-1} - \frac{a_{r-1,s}}{a_{rs}} C_r &= b_{r-1,1} D_1 + \ldots + b_{r-1,s-1} D_{s-1}.
\end{aligned}
$$

Бу тенгликлар тизими ушбу

$$\left\{C_1^1 = C_r \frac{a_{1s}}{a_{rs}}, \ldots, C_{r-1}^1 = C_{r-1} - \frac{a_{r-1s}}{a_{rs}} C_r\right\}$$

векторлар тизимининг $\{D_1, ..., D_{s-1}\}$ векторлар тизими орқали чизиқли ифодаланишини кўрсатади.

$C_1^1, \ldots, C_{r-1}^1$ векторларнинг чизиқли эркли эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, бирор $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{r-1}$ сонлар учун $\lambda_1 C_1^1 + \lambda_2 C_2^1 + \ldots + \lambda_{r-1} C_{r-1}^1 = 0$ тенглик ўринли бўлсин, деб фараз қилайлик. Бу тенгликка C_i^1 векторларнинг ифодасини қўйсак $\lambda_1 (C_1 - \frac{a_{1r}}{a_{rs}} C_r) + \ldots + \lambda_{r-1}\left(C_{r-1} - \frac{a_{r-1s}}{a_{rs}} C_r\right) = 0$.

Бундан ўхшаш ҳадларни йиғиб

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \ldots + \lambda_{r-1} C_{r-1} - \left(\lambda_r \frac{a_{1s}}{a_{rs}} + \ldots + \lambda_{r-1} \frac{a_{r-1s}}{a_{rs}}\right) C_r = 0$$

тенгликни оламиз. C_1, ..., C_r векторлар чизиқли эркли бўлгани учун охирги тенгликдаги барча коэффициентлар нольга тенг. Хусусан $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{r-1} = 0$. Бу эса $C_1^1, \ldots, C_{r-1}^1$ векторларнинг чизиқли эркли эканлигини кўрсатади. Шундай қилиб, (2) тенгликка асосан ранги $r - 1$ га тенг бўлган $\{C_1^1, \ldots, C_{r-1}^1\}$ тизим ранги $S - 1$ га тенг бўлган $\{D_1, ..., D_{s-1}\}$ тизим орқали чизиқли ифодаланади. Бундан индукциянинг фаразига мувофиқ $r - 1 \le S - 1$, яъни $r \le S$ тенгсизлик келиб чиқади.

1-натижа. *R^n фазонинг ранги n га тенг.*

Исбот. Ҳақиқатан, $\{E_1, ..., E_n\}$ ортлар тизими чизиқли эркли бўлгани учун бу тизимнинг ранги n га тенг.

Иккинчи томондан ортлар тизими орқали R^n даги ихтиёрий $(C_1, C_2, ..., C_n)$ вектор чизиқли ифодаланганиучун $(C_1, C_2, ..., C_n) = C_1E_1 + C_2E_2 + ... + C_nE_n$. Исботланган теоремага асосан $r(R^n) \leq n$. Бу ортлар тизими R^n да ётгани учун $r(R^n) = n$.

2-натижа. *R^n даги ҳар қандай A қисм тўплам учун $r(A) \leq n$.*

Исбот. A қисм тўплам R^n да ётгани учун R^n орқали чизиқли ифодаланади.

1-натижага асосан $r(R^n) = n$. Бундан ва 4–теоремадан $r(A) \leq n$ тенгсизлик келиб чиқади.

3-натижа. *R^n да ётувчи A ва B тизимлар берилган бўлсин. Агар A тизим B орқали чизиқли ифодаланса ва B тизим A орқали чизиқли ифодаланса, $r(A) = r(B)$.*

Исбот. 2-натижага кўра, $r(A) \leq n$ ва $r(B) \leq n$. Бундан ва A тизим B орқали чизиқли ифодаланганиучун 4-теоремага асосан $r(A) \leq r(B)$. Шунга ўхшаш $r(A) \geq r(B)$. Демак $r(A) = r(B)$. ■

15-§. МАТРИЦАНИНГ ВА ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР ТИЗИМИНИНГ РАНГИ

$A \in M_{s,n}$ матрицанинг $A^1, A^2, ..., A^n$ устунларини S-ўлчамли векторлар деб қараймиз. A матрицанинг устунларидан иборат бўлган векторлар тизимининг рангига A **матрица устунларининг ранги** деб аталади. Уни қисқалик учун $r_y(A)$ орқали белгилаймиз. Равшанки, $r_y(A) \leq n$.

Ушбу

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i \left(i = \overline{1, s}\right) \qquad (a)$$

тенгламалар тизимининг ечими мавжудлиги масаласини текширишга ўтамиз.

$A \in M_{s,n}$ матрица берилган (a) чизиқли тенгламалар тизими номаълумларининг коэффициентлари матрицаси ва $\overline{A}^{\,1} \in M_{s,n+1}$ эса (a) тизимнинг кенгайтирилган матрицаси бўлсин. Бу матрицалар устунларининг ранглари учун $r_y(A) \leq r_y(\overline{A}^1) \leq n + 1$.

1-теорема (Кронекер-Капелли). ***Берилган (α) чизиқли тенгламалар тизимининг биргаликда бўлиши учун $r_y(A) = r_y(\overline{A}^1)$ тенгликнинг бажарилиши зарур ва кифоя.***

Исбот. Берилган (α) тизимнинг озод ҳадларидан иборат бўлган $[b_1, b_2, ..., b_s]$ устунни B орқали белгилаб, тизимни қуйидаги вектор кўринишда ёзиб оламиз:

$$x_1A^1 + x_2A^2 + ... + x_nA^n = B. \qquad (\beta)$$

Берилган (α) тизим биргаликда бўлсин деб фараз қилайлик. У ҳолда бундан ва (β) ифодадан B векторнинг A^1, A^2, ..., A^n векторлар орқали чизиқли ифодаланиши келиб чиқади. $\{A^1, ..., A^n\}$ тизимнинг ранги r га тенг бўлиб, $\{A^{K_1}, ..., A^{K_r}\}$ унинг ихтиёрий базиси бўлсин. У ҳолда 2-§ даги 3-теоремага кўра, ҳар қандай A^i вектор бу базис орқали ифодаланади. Демак, B вектор ҳам бу базис орқали ифодаланади. Бу $\{A^1, ..., A^n, B\}$ тизимда ҳар қандай $r + 1$ та векторнинг чизиқли боғлиқлигини кўрсатади, яъни $r_y(A) = r_y(\overline{A}^1)$ тенглик ўринли.

Энди $r_y(A) = r_y(\overline{A}^1)$ тенглик ўринли бўлсин деб фараз қилайлик. Бундан $\{A^1, ..., A^n\}$ тизимнинг ихтиёрий $\{A^{K_1}, ..., A^{K_r}\}$ базиси $\{A^1, ..., A^n, B\}$ тизим учун ҳам базислиги келиб чиқади. Бундан эса B векторнинг $\{A^1, A^2, ..., A^n\}$ тизим орқали чизиқли ифодаланиши келиб чиқади. Бу (β) тенгламани ва демак (α) ни ҳам қаноатлантирувчи номаълумларнинг қийматлари мавжудлигини кўрсатади.

Биргаликда бўлган (α) чизиқли тенгламалар тизими учун исботланган теоремага асосан $r_y(A) = r_y(\overline{A}^1)$. Бу сонга (α) чизиқли тенгламалар тизимининг **ранги** деймиз ва $r(\alpha)$ орқали белгилаймиз. Равшанки $0 \leq r(\alpha) \leq n$. Хусусан $r(\alpha) = 0$ бўлганда ва фақат шу ҳолдагина тенгламалар тизимининг барча коэффициентлари ва озод ҳадлари нольга тенг.

2-теорема. ***Биргаликда бўлган (α) чизиқли тенгламалар тизимининг аниқ бўлиши учун $r(\alpha) = n$ бўлиши зарур ва кифоя.***

Исбот. Биргаликда бўлган (α) тизимнинг аниқлигидан (β) муносабатга асосан B векторнинг $A^1, ..., A^n$ устунлар орқали ягона усулда ифодаланиши келиб чиқади. Бундан $A^1, ..., A^n$ векторлар тизимининг чизиқли эрклилиги келиб чиқишини кўрсатамиз. Ҳақиқатан бирор $c_1A^1 + ... + C_nA^n = 0$ кўринишидаги тенглик ўринли бўлсин деб фараз қилайлик. Бу тенгликни (β) тенгликка қўшиб, $(x_1 + C_1)A^1 + ... + (x_n + C_n)A^n = B$ тенгликни оламиз. Охирги тенглик кўрсатадики, агар $(x_1, ... x_n)$ вектор (α) тизимнинг ечими бўлса, $(x_1 + c_1, ..., x_n + c_n)$ вектор ҳам ечимдир. Ечимнинг ягоналигидан $x_1 + c_1 = x_1, ..., x_n + c_n = x_n$ тенгликни оламиз. Бу тенгликлардан $c_1 = 0, ..., c_n = 0$, яъни $A^1, ..., A^n$ векторлар тизими чизиқли эркли. Демак $r(\alpha) = r_v(A) = n$.

Аксинча, $r(a) = n$ бўлсин. У ҳолда $\{A^1, ..., A^n\}$ векторлар тизими чизиқли эркли бўлиб, $\{A^1, ..., A^n, B\}$ тизим эса чизиқли боғланган. Бундан B векторнинг $A^1, ..., A^n$ тизим орқали ягона усулда ифодаланиши, яъни (β) тизимнинг ягона ечими борлиги келиб чиқади.

Натижа. *Агар n та номаълумли S та бир жинсли чизиқли тенгламалар тизими учун $S < n$ бўлса, бу тизимнинг нольдан фарқли ечими мавжуд.*

Исбот. Берилган (α) бир жинсли тизимнинг вектор кўринишидаги (β) тенгламасида $B = \bar{0}$ бўлиб, у ушбу

$$x_1A^1+...+x_nA^n = \bar{0}$$

кўринишга келади. Бу тенглама $x_1 = 0, ..., x_n = 0$, яъни ноль ечимга эга. Демак, бир жинсли тизим доим биргаликда. Тизимда тенгламаларнинг сони S та бўлгани учун устунлар S - ўлчовли векторлардир. Бундан ва 14-§ 4-теореманинг 2-натижасидан (α) тизимнинг ранги учун $r(\alpha) \leq S$ тенгсизлик келиб чиқади. Бу ва $S < n$ тенгсизликдан $r(\alpha) < n$ тенгсизлик келиб чиқади. Охирги тенгсизлик 2-теоремага асосан (α) тизим ечимлари сонининг биттадан ортиқлигини кўрсатади. Демак (α) тизимнинг нольдан фарқли ечими мавжуд.

Бу параграфдаги теоремалар матрица устунларининг рангини ҳисоблаш масаласи муҳимлигини кўрсатади.

$A \in M_{s,n}$ матрицанинг сатрларини n-ўлчовли векторлар деб қараш мумкин. A матрицанинг сатрларидан иборат бўлган векторлар тизимининг рангига A **матрица сатрларининг ранги** деб аталади. Уни қисқалик учун $r_c(A)$ орқали белгилаймиз. Равшанки $r_c(A) \leq S$.

Кейинги параграфда ҳар қандай A матрица учун $r_y(A) = r_c(A)$ тенгликни кўрсатамиз ва матрицаларни элементар алмаштириш ёрдамида рангларини ҳисоблаш усули билан танишамиз.

16-§. МАТРИЦАЛАРНИНГ ЭЛЕМЕНТАР АЛМАШТИРИШЛАРИ

Иккита $A_1 B \in M_{s,n}$ матрицалар берилган бўлсин.

Агар A матрицада иккита сатрнинг ўрни алмаштирилиши натижасида B матрица ҳосил қилинса, B матрица A дан **сатрлар устида (I) тур элементар алмаштириш** натижасида ҳосил қилинган дейилади. Бу билан бирор $f: M_{s,n} \to M_{s,n}$ акс эттириш аниқланди.

Агар A матрицанинг бирор сатрини бирор сонга кўпайтириб, бошқа бирор сатрига қўшиш натижасида B матрица ҳосил қилинса, B матрица A дан **сатрлар устида (II)–тур элементар алмаштириш** натижасида ҳосил қилинган дейилади. Бу билан ҳам бирор $f: M_{s,n} \to M_{s,n}$ акс эттириш ҳосил қилинди.

Бу таърифларга ўхшаш матрица **устунларининг (I) ва (II)-тур элементар алмаштиришлари** таърифланади.

1-теорема. ***Сатрлар (устунлар) устидаги ҳар бир $f: M_{s,n} \to M_{s,n}$ элементар алмаштириш биекция бўлиб, унинг тескариси $f^{-1}: M_{s,n} \to M_{s,n}$ ҳам сатрлар (устунлар) устида элементар алмаштиришдир.***

Исбот. Фараз қилайлик, f — сатрлар устида (I) тур элементар алмаштириш бўлиб, ихтиёрий A матрицада, масалан p- ва q- сатрларнинг ўрнини алмаштиришдан иборат бўлсин: $f(A) = B$. Агар B матрицада яна p- ва q- сатрларнинг ўрнини алмаштирсак, у ҳолда A матрицага қайтамиз, яъни $A = f(B) = f(f(A))$. Бу $f \cdot f$ — бирлик акслантириш, яъни f нинг тескариси f нинг ўзи бўлиб, у элементар алмаштириш эканлигини кўрсатади. Бундан хусусан f нинг биекция эканлиги ҳам келиб чиқади.

Энди f — сатрлар устида (II) тур элементар алмаштириш бўлсин: $f(A) = B$. У ҳолда f акслантириш ихтиёрий $A = (a_{ij})$ матрицага қуйидагича таъсир қилади. Шундай p ва q ($1 \leq p$, $q \leq S$) ҳамда $h \in R$ сонлар мавжудки, A ва B ларнинг p—сатрдан бошқа барча сатрлари бир хил ва B нинг p -сатри эса A нинг p- ва q-сатрлари орқали

$$b_{pk} = a_{pk} + ha_{qk} \quad (k = \overline{1,n})$$

формула бўйича олинади (яъни A нинг q-сатри h сонига кўпайтирилиб, p-сатрига қўшилди.

Агар ҳосил бўлган B матрицада бу матрицанинг q-сатрини $(-h)$ сонига кўпайтириб, p-сатрига қўшсак, A матрицага қайтамиз: $g(B) = A$. Кўрамизки $g: M_{s,n} \to M_{s,n}$ акс эттириш f га тескари ва у ҳам сатрлар устида (II) тур алмаштиришдир. Бундан f нинг биекция эканлиги ҳам келиб чиқади.

Устунлар учун теореманинг исботи шунга ўхшаш.

$G_c(s \times n)$ орқали сатрлар устидаги элементар алмаштирилишларнинг мумкин бўлган барча чекли сондаги композицияларидан иборат тўпламни белгилаймиз. Ҳар бир $f: M_{s,n} \to M_{s,n}$ элементар алмаштириш биекция бўлгани ва биекцияларнинг композицияси биекция бўлгани учун $G_c(s \times n)$ тўпламнинг элементлари ҳам $M_{s,n}$ нинг ўзини ўзига биекцияларидан иборат.

2-теорема. ***$G_c(s \times n)$ тўплам биекцияларнинг композицияси (яъни элементар алмаштиришларнинг кетма-кет бажарилиши) амалига нисбатан гуруҳни ҳосил қилади.***

Исбот. Акс эттиришлар, хусусан, биекциялар учун ассоциативлик қонуни ўринли (3-§, 1-теорема). Демак, улар учун умумлашган ассоциативлик қонуни ҳам ўринли (9-§, 1-теорема). Бунга кўра элементар алмаштиришларнинг иккита $f_1 \cdot f_2 \ldots f_m \in G_c(s \times n)$ ва $g_1 \cdot g_2 \ldots g_r \in G_c(s \times n)$ чекли композицияларнинг $(f_1 \cdot f_2 \ldots f_m)(g_1 \cdot g_2 \ldots g_r)$ кўпайтмасини ҳам $f_1 \cdot f_2 \ldots f_m \cdot g_1 \cdot g_2 \ldots g_r$ кўринишда, яъни элементар алмаштирилишларнинг чекли сондаги композицияси кўринишида ёзиш мумкин. Демак

$$(f_1 \cdot f_2 \dots f_m)(g_1 \cdot g_2 \dots g_r) \in G_c(s \times n).$$

$G_c(s \times n)$ да ассоциативлик қонунининг бажарилиши унинг тўпламлар акс эттиришларининг композицияси учун бажарилишидан келиб чиқади.

Агар $M_{s,n}$ нинг (1) формула билан берилган (II)-тур алмаштиришида $h = 0$ деб олсак, тўпламнинг бирлик алмаштиришини оламиз. Бундан $M_{s,n}$ нинг бирлик алмаштириши $G_c(s \times n)$ га тегишли эканлиги келиб чиқади.

Энди ихтиёрий $f_1 \cdot f_2 \dots f_m \in G_c(s \times n)$ элементни оламиз. Бу ерда ҳар бир f_i элементар алмаштириш бўлгани ва ҳар бир элементар алмаштиришга тескари алмаштириш мавжуд бўлиб, у ҳам элементар алмаштириш бўлгани сабабли $f_m^{-1} \cdot f_{m-1}^{1} \dots f_1^{-1} \in G_c(S \times n)$. Бу элемент $f_1 \cdot f_2 \dots f_m$ га тескари. Ҳақиқатан ушбу

$$(f_m^{-1} \cdot f_{m-1}^{-1} \cdots f_1^{-1})(f_1 \cdot f_2 \cdots f_m) =$$
$$= \left(f_m^{-1}\left(f_{m-1}^{1}\left(\dots\left(f_1^{-1} \cdot f_1\right)\dots\right)f_{m-1}\right)f_m\right)$$

кўпайтма ассоциативлик хоссасига кўра бирлик элементга тенг.

Бу билан $G_c(s \times n)$ нинг гуруҳ эканлиги кўрсатилди.

$G_c(s \times n)$ гуруҳ бу аслида $G_c(M_{s,n})$ гуруҳда сатрларнинг барча элементар алмаштиришлари ҳосил қилган қисм гуруҳдир.

Шунга ўхшаш устунлар учун $G_y(s \times n)$ гуруҳ ҳам киритилади.

Н а т и ж а . *$A, B \in M_{s,n}$ матрицалар берилган бўлсин. Агар A матрицадан B матрицага сатрларнинг (устунларнинг) чекли сондаги элементар алмаштиришлари орқали ўтиш мумкин бўлса, у ҳолда B дан A га ҳам чекли сондаги элементар алмаштиришлар орқали ўтиш мумкин.*

И с б о т . Фараз қилайлик, A дан B га сатрларнинг f_m, f_{m-1}, f_1 элементар алмаштиришлари орқали ўтиш мумкин бўлсин. У ҳолда

$$f_1(f_2(\dots (f_m (A)) = B,$$

яъни

$$(f_1 \cdot f_2 \dots f_m)(A) = B.$$

1-теоремага асосан $f_m^{-1}, \dots, f_1^{-1}$ лар ҳам элементар алмаштиришлар бўлиб, 2−теоремага асосан

$$(f_m^{-1} \cdot f_{m-1}^{-1} \dots f_1^{-1})(B) = A,$$

яъни $f_1^{-1} \cdot f_2^{-1}, \dots, f_m^{-1}$ элементар алмаштиришлар орқали B дан A га ўтиш мумкин. Устунлар учун мулоҳаза шунга ўхшаш.

3-теорема. ***Матрица сатрларининг (устунларининг) ранги унинг сатрлари (устунлари) устида чекли сон марта элементар алмаштиришлар бажарилганда ўзгармайди, яъни $G_c(s \times n)$ гуруҳнинг ($G_y(s \times n)$ гуруҳнинг) таъсирига нисбатан инвариантдир.***

Исбот. $A \in M_{s,n}$ матрицанинг сатрлари устида ихтиёрий $f_1, f_2, \dots f_k$ элементар алмаштиришлар бажарилган бўлсин: $(f_k \dots f_1)(A)$.

Ушбу

$$r_c((f_k \dots f_1)(A)) = r_c(A)$$

тенгликни исботлашимиз керак. Дастлаб бу тенгликни $k = 1$ ҳолда исботлаймиз.

A нинг сатрлари устида ихтиёрий f элементар алмаштириш бажарилган бўлсин. Агар у (I) тур элементар алмаштириш бўлса, у ҳолда A матрица билан $f(A)$ матрица бир хил сатрларга эга бўлгани учун (улар фақатгина сатрларнинг ўринлари билан фарқ қилгани учун) уларнинг ранглари тенг $r_c(A) = r_c(f(A))$. Агар A га (II) тур f элементар алмаштириш таъсир қилган бўлса, у ҳолда A да шундай p ва q сатрлар мавжудки, A билан $f(A)$ ларнинг p-сатрларидан бошқа барча сатрлари бир хил ва $f(A)$ нинг p-сатри A нинг p- ва q-сатрларининг чизиқли комбинациясидир. Демак, бундан 14-§, 4-теоремага кўра $r_c(f(A)) \leq r_c(A)$. Иккинчи томондан 2-теоремага кўра f^{-1} мавжуд ва у ҳам (II) тур элементар алмаштиришдир. Унинг учун юқоридаги мулоҳазаларга асосан $r_c(f^{-1}(A)) \leq r_c(A)$. Агар бу тенгсизликда A сифатида $f(A)$ матрица олинса:

$$r_c(A) = r_c(f^{-1}(f(A))) \leq r_c(f(A)).$$

Бундан ва юқоридаги тенгсизликдан $r_c(A) = r_c(f(A))$ тенглик олинади. Бу билан теорема $\kappa = 1$ да исботланди.

Энди теоремани $\kappa - 1$ элементар алмаштириш учун ўринли деб фараз қилайлик. У ҳолда теореманинг $\kappa = 1$ ва $\kappa - 1$ учун ўринлилигига асосан

$$r_c((f_\kappa f_{\kappa-1} \dots f_1)(A)) = r_c(f_\kappa(f_{\kappa-1} \dots f_1(A))) = r_c(f_{\kappa-1} \dots f_1(A)) = r_c(A).$$

Устунлар учун теореманинг исботи шунга ўхшаш.

Қуйидаги иккита хоссага эга бўлган матрицага **сатрларига (устунларига) нисбатан зинапоя матрица** дейилади:

1) Агар i- сатр (устун)ноллардан иборат бўлса, у ҳолда $(i+1)$ - сатр (устун) ҳам ноллардан иборат.

2) Агар матрицанинг i - ва $(i+1)$- сатрларининг (устунларининг) ҳар бирида нольдан фарқли элементлар бўлиб, i - сатрдаги (устундаги) чапдан (юқоридан) биринчи фарқли элемент m_i - рақамли устунда (сатрда) ва $(i+1)$ - сатрдаги (устундаги) чапдан (юқоридан) биринчи нольдан фарқли элемент m_{i+1}- (сатрда) учраса, у ҳолда $m_i < m_{i+1}$ тенгсизлик ўринли.

Хусусан, ноль матрица сатрларига нисбатан ҳам устунларига нисбатан ҳам зинапоя матрицадир.

Келтирилган таъриф сатрларига (устунларига) нисбатан зинапоя матрицада нолдан фарқли сатрлардаги (устунлардаги) чапдан (юқоридан) биринчи нольдан фарқли элементдан чапдаги (юқоридаги) ва пастдаги (ўнгдаги) элементлар нольга тенг бўлишини кўрсатади.

Сатрларга нисбатан зинапоя матрицада нольдан фарқли сатрлар r та бўлсин. У ҳолда бу сатрларга мос бўлган $m_1, m_2, \dots, m_r$ рақамли устунларни сатрларга нисбатан зинапоя матрицанинг **бош устунлари** деймиз. Сатрларга нисбатан зинапоя матрицанинг таърифига кўра $1 \leq m_1 < m_2 < ... < m_r \leq n$

4-теорема. ***Ҳар қандай матрицани сатрларнинг (устунларнинг) чекли сондаги элементар алмаштиришлари ёрдамида сатрларга (устунларга) нисбатан зинапоя матрицага айлантириш мумкин.***

Исбот. Ихтиёрий $A \in M_{s,n}$ матрица берилган бўлсин. Теоремани S сатрларнинг сони бўйича математик индукция усули билан исботлаймиз. Агар матрица фақат битта сатрдан иборат бўлса, у сатрларга нисбатан зинапоя матрица бўлади. Демак $S = 1$ бўлса, теорема ўринли.

Энди $S \geq 2$ ҳолни кўрамиз ва теоремани $(S-1)$ та сатрли матрицалар учун ўринли деб фараз қиламиз. Агар A матрица ноль матрица бўлса, у зинапоя матрица.

A нольдан фарқли матрица бўлсин. У ҳолда унда нольдан фарқли элемент мавжуд. Демак матрицада нольдан фарқли устун мавжуд. Биринчи нольдан фарқли устун m_1-устун бўлиб, ундаги нольдан фарқли элемент р - сатрда ётсин. Биринчи ва p - сатрларнинг ўрнини алмаштириб ((I) тур элементар алмаштириш), биринчи сатрининг m_1-устунида ётувчи a'_{1m_1} элементи нольдан фарқли бўлган қуйидаги матрицага келамиз:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 \ldots a'_{1m1} \ldots a'_{1n} \\ 0 \ldots a'_{2m1} \ldots a'_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots a'_{sm1} \ldots a'_{sn} \end{pmatrix}$$

Агар ҳар бир $k = \overline{2, S}$ учун биринчи сатрни $\left(-\frac{a'_{km}}{a'_1 \; m_1}\right)$ сонга кўпайтириб, k-сатрга қўшсак ((II)-тур элементар алмаштиришлар), қуйидаги матрицага келамиз:

$$A'' = \begin{pmatrix} 0 \ldots 0 \; a'_{1m1} \ldots a'_{1n} \\ 0 \ldots 0 \; 0 \; \ldots \; a''_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots 0 \; 0 \; \ldots \; a''_{sn} \end{pmatrix}$$

Энди A'' матрицада биринчи сатрни ташлаб, қолган $S-1$ сатрлардан иборат матрицани C орқали белгилаймиз. Бу C матрицанинг биринчи m_1 та устуни нольга тенг.

C матрица $S-1$ та сатрга эга бўлгани учун унга математик индукциянинг фаразини қўллаб, чекли сондаги элементар алмаштиришлар ёрдамида сатрларга нисбатан зинапоя кўринишга эга бўлган D матрицага келтириш мумкин. C устидаги сатрларнинг элементар алмаштиришлари A'' матрицанинг ҳам элементар алмаштиришлари бўлиб, бунда биринчи сатр ўзгармайди. Ҳосил бўлган D матрицанинг ҳам биринчи m_1 та устуни ноллардан иборат бўлади.

D матрицанинг нольдан фарқли $r-1$ та сатри бўлиб, бу сатрлардаги нольдан фарқли биринчи элементлар мос равишда $m_2, \ldots, m_r$ устунларда ётган бўлсин. У ҳолда $m_2 < \ldots < m_r \cdot D$ матрицанинг биринчи m_1 та устуни ноллардан иборат бўлгани учун $m_1 < m_2 < \ldots < m_r$. Натижада биринчи сатрдан пастга D матрицанинг сатрлари ёзилса, ҳосил бўлган S та сатрли матрица сатрларга нисбатан зинапоя матрица бўлиб, у A матрицадан чекли сондаги элементар алмаштиришлар орқали ҳосил қилинган бўлади.

Устунлар учун теорема шунга ўхшаш исботланади.

5-теорема. ***Сатрларга (устунларига) нисбатан зинапоя матрица сатрларининг (устунларининг) ранги нольдан фарқли сатрларининг (устунларининг) сонига тенг.***

Исбот. $A \in M_{s,n}$ матрица сатрларига нисбатан зинапоя бўлиб, r та нольдан фарқли сатрга эга ва $m_1, m_2, \ldots, m_r$ — бош устунларининг рақамлари бўлсин:

$$A = \begin{pmatrix} 0 \ldots 0\, a_{1m_1} \ldots\ldots a_{1n} \\ 0 \ldots 0\, 0 \ldots 0\, a_{2m_2} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots 0\, 0 \ldots 0\, a_{rm_r} \ldots a_{rn} \\ 0 \ldots\ldots 0\, 0 \ldots\ldots 0\, 0 \ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots\ldots 0\, 0 \ldots\ldots 0\, 0 \ldots\ldots 0 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Бу ерда $a_{1m_1} \neq 0, a_{2m_2} \neq 0, \ldots, a_{rm_r} \neq 0$ — нольдан фарқли сатрлар бўлиб, бирор $c_1, c_2, \ldots, c_r$ сонлар учун

$c_1A_1 + c_2A_2+\ldots+c_rA_r = \bar{0}$ бўлсин деб фараз қиламиз. Бундан теоремани исботлаш учун қолган сатрлар ноль бўлгани туфайли $c_1 = c_2 = \ldots = c_r = 0$ келиб чиқишини кўрсатамиз. Агар $r = 1$ бўлса, ушбу $c_1A_1 = \bar{0}$ тенгликни, яъни $c_1a_{1m_1} = \ldots = c_1a_{1n} = 0$ тенгликларни оламиз. Бундан $a_{1m_1} \neq 0$ бўлгани учун $c_1 = 0$ тенгликни оламиз. Энди $r-1$ ҳолда $r-1$ та нольдан фарқли $B_1, \ldots, B_r$ сатрларга эга ва сатрларига нисбатан зинапоя бўлган ҳар қандай B матрица учун $c_1B_1+\ldots+c_{r-1}B_{r-1} = \bar{0}$ тенгликдан доим $c_1 = c_2 = \ldots = c_{r-1} = 0$ келиб чиқсин деб фараз қиламиз. Ушбу $c_1A_1 + \ldots + c_rA_r = 0$ тенгликдан

$$c_1a_{1m_1} = 0$$

$$c_1a_{1m_2} + c_2a_{2m_2} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_1a_{1m_r}+\ldots+c_ra_{rm_r} = 0$$

тенгликлар тизимини оламиз. Буларнинг биринчисидан $a_{1m_1} \neq 0$ бўлгани учун $c_1 = 0$ тенгликни оламиз ва $c_2A_2 + \ldots + c_rA_r = 0$ тенгликка келамиз. $A_2, \ldots, A_r$ сатрларнинг ўзи $r-1$ сатрли зинапоя матрица ҳосил қилгани учун, индукция фаразига кўра $c_2 = \ldots = c_r = 0$. Бу ва $c_1 = 0$ тенгликлар $A_1, A_2, \ldots, A_r$ сатрларнинг чизиқли эрклилигини кўрсатади, яъни $r_c(A) = r$.

4- ва 5-теоремалар бирор матрица сатрларининг (устунларининг) рангини ҳисоблаш учун уни элементар алмаштиришлар орқали зинапоя кўринишга келтириш кифоя эканлигини кўрсатади.

Агар $A \in M_n$ квадрат матрица бўлиб, диагонал кўринишга эга бўлса, 5-теоремага асосан унинг сатрларининг (устунларининг) ранги нолдан фарқли диагонал элементларининг сонига тенг.

6-теорема. ***Сатрларига (устунларига) нисбатан зинапоя матрица устунларининг (сатрларининг) ранги нольдан фарқли сатрларининг (устунларининг) сонига тенг.***

Исбот. Зинапоя A матрица (2) кўринишга эга бўлсин. Нольдан фарқли сатрлар r та бўлгани учун унинг устунларини r-ўлчамли векторлар деб қараш мумкин.

$A^{m_1}, A^{m_2}, \ldots, A^{m_r}$ бош устунларнинг чизиқли эркли эканлигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик бирор c_1, c_2, ..., c_r сонлар учун $c_1A^{m} + c_2A^{m_2}+\ldots+c_rA^{m_r} = \bar{0}$ бўлсин. У ҳолда

$$c_1a_{1m_1} + c_2a_{1m_2} + \ldots + c_ra_{1m_r} = 0$$

$$c_2a_{2m_2} + \ldots + c_ra_{rm_r} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_ra_{rm_r} = 0$$

Бу ерда $a_{1m_1} \neq 0, a_{2m_2} \neq 0, \ldots, a_{rm_r} \neq 0$ бўлгани учун 5-теоремага ўхшаш мулоҳазаларни ишлатиб $c_1 = c_2 = \ldots = c_r = 0$ тенгликларни оламиз, яъни $A_1^{m1}, \ldots, A^{m_r}$ бош устунлар чизиқли эркли. Бундан ва 14-§ даги 4-теореманинг 2-натижасига асосан $r_y(A) = r$ эканлиги келиб чиқади.

Сатрларнинг ранги учун теореманинг исботи шунга ўхшаш. ■

Натижа. *Сатрларига (устунларига) нисбатан зинапоя бўлган ҳар қандай матрица сатрларининг ранги устунларининг рангига тенг.*

Исбот. Агар сатрларига нисбатан зинапоя матрицанинг нольдан фарқли сатрлари сони r га тенг бўлса, у ҳолда 5- ва 6-теоремаларга асосан $r_c(A) = r = r_y(A)$.

Агар $B = (b_{ij}) \in M_{s,n}$ матрицанинг элементлари $A = (a_{pq}) \in$ $\in M_{s,n}$ матрицанинг элементлари билан ушбу $b_{ij} = q_{ji}$ $\left(i = \overline{1,s}, j = \overline{1,n}\right)$ тенгликлар билан боғланган бўлса, яъни B нинг B_1, B_2, ..., B_s сатрлари мос равишда A нинг A^1, A^2, ..., A^s устунларига тенг бўлса, B матрица A га нисбатан **транспонирланган** дейилади ва $A^т$ каби белгиланади. Равшанки, ҳар қандай A матрица учун $(A^т)^т = A$, $r_c(A) =$ $= r_y(A^т)$, $r_y(A) = r_c(A^т)$.

7-теорема. ***Матрица сатрларининг (устунларининг) ранги матрица транспонирланганда ўзгармайди, яъни ҳар қандай Р матрица учун*** $r_c(H) = r_c(H^т)$, $r_y(H) = r_y(H^т)$.

Исбот. Ихтиёрий $H \in M_{s,n}$ матрица берилган ва $H^т$ — унинг транспонирлангани бўлсин. 4-теоремага кўра сатрларнинг чекли сондаги $f_1, ..., f_к$ алмаштиришлари орқали H ни сатрларига нисбатан зинапояни A матрицага келтириш мумкин: $(f_к...f_1)(H) = A$. Агар H нинг сатрлари устида бажарилган $f_1, ..., f_к$ элементар алмаштиришларни $H^т$ матрицанинг устунлари устида бажарсак, устунларига нисбатан зинапоя $A^т$ матрицага келамиз. 3-теоремага асосан $r_c(H) = r_c(A)$ ва $r_c(A^т) = r_c(H^т)$, 6-теореманинг натижасига асосан $r_c(A^т) = r_y(A^т)$. Булардан

$$r_c(H) = r_c(A) = r_y(A^т) = r_y(A^т) = r_c(H^т).$$

Шунга ўхшаш $r_y(H) = r_y(H^т)$ тенглик исботланади. ■

Н а т и ж а. **Ҳар қандай матрица сатрларининг ранги устунларининг рангига тенг.**

И с б о т. Ихтиёрий H матрица учун 7-теоремага асосан $r_c(H) = r_c(H^т) = r_y(H)$. ■

Бу натижага асосан қуйидаги таърифни киритишимиз мумкин. Ушбу $r_c(H) = r_y(H)$ сон **матрицанинг ранги** дейилади.

17-§. ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР ТИЗИМЛАРИНИНГ АЛМАШТИРИШЛАРИ. ГАУСС УСУЛИ

Иккита

$$\sum_{к=1}^{n} a_{iк}\, x_к = b_i \; (i = \overline{1, s}) \qquad (\alpha)$$

$$\sum_{к=1}^{n} c_{iк}\, x_к = d_i \; (i = \overline{1, s}) \qquad (\beta)$$

бир хил $x_1, x_2, ..., x_n$ номаълумли S та тенгламалар тизимлари ва уларнинг кенгайтирилган матрицалари берилган бўлсин.

Агар (α) тизим иккита тенгламасининг ўринлари алмаштирилиши натижасида (β) система ҳосил қилинса, (β) тизим (α) дан **(I)-тур элементар алмаштириш** натижасида ҳосил қилинган дейилади.

Агар (α) тизимнинг бирор тенгламасини бирор сонга кўпайтириб, бошқа бирор тенгламасига қўшиш натижасида (β) тизим ҳосил қилинса, (β) тизим (α) дан **(II) тур элементар алмаштириш** натижасида ҳосил қилинган дейилади.

Ҳар бир чизиқли тенгламалар тизимига унинг кенгайтирилган матрицасини мос қўйсак, у ҳолда чизиқли тенгламалар тизими устидаги ҳар бир (I) тур ёки (II) тур элементар алмаштиришга унинг кенгайтирилган матрицаси устида мос элементар алмаштириш тўғри келади. Аксинча, кенгайтирилган матрица устидаги ҳар бир (I) тур ёки (II) тур элементар алмаштиришга тизим устидаги мос элементар алмаштириш тўғри келади. Тизимлар ва уларнинг кенгайтирилган матрицаларининг элементар алмаштиришлари орасидаги бу мослилик ва 16-§ да матрицалар элементар алмаштиришлари учун олинган хоссалардан бевосита тенгламалар тизимлари элементар алмаштиришларининг хоссалари олинади.

1-теорема. ***Агар битта чизиқли тизимдан иккинчисига чекли сондаги элементар алмаштиришлар орқали ўтиш мумкин бўлса, у ҳолда иккинчисидан биринчисига ҳам чекли сондаги элементар алмаштиришлар орқали ўтиш мумкин.***

Исбот. Теореманинг исботи тизимлар ва уларнинг кенгайтирилган матрицалар элементар алмаштиришлари орасидаги мосликдан ва 16-§ да 2-теореманинг натижасидан келиб чиқади.

Агар чизиқли тенгламалар тизимининг кенгайтирилган матрицаси зинапоя матрица бўлса, у **зинапоя** тизим дейилади.

2-теорема. ***Ҳар қандай чизиқли тенгламалар тизими чекли сондаги элементар алмаштиришлар орқали зинапоя тизимга келтирилиши мумкин.***

Исбот. Теореманинг исботи тизимлар ва уларнинг кенгайтирилган матрицалари элементар алмаштиришлари орасидаги мосликдан ва 16-§ 4-теоремадан келиб чиқади.

3-теорема. ***Агар бир чизиқли тенгламалар тизимидан иккинчи тизимга чекли сондаги элементар алмашти-***

ришлар орқали ўтиш мумкин бўлса, у ҳолда бу тизимлар тенг кучлидир.

Исбот. Дастлаб теоремани (α) тизимдан (β) га битта (I) тур элементар алмаштириш орқали ҳосил қилинган ҳол учун исботлаймиз. Фараз қилайлик, (α) тизим биргаликда бўлиб, $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ вектор (α) нинг бирор ечими бўлсин. У ҳолда бу вектор (β) нинг ҳам ечими бўлади, чунки (α) ва (β)лардаги тенгламалар бир хил бўлиб, фақат (β) да (α) га нисбатан иккита тенгламанинг ўрни алмашган. Иккинчи томондан (α) тизим ҳам (β) дан (I) тур элементар алмаштириш орқали ҳосил қилинади. Бундан юқоридаги мулоҳазага кўра (β) нинг ҳар бир ечими (α) нинг ҳам ечими бўлади.

Демак, (α) ва (β) тизимлар тенг кучли.

Энди (β) тизим (α) дан (II) тур элементар алмаштириш орқали ҳосил қилинган ҳолни кўрамиз. У ҳолда шундай p, q ($p \neq q$, $1 \leq p, q \leq s$) ва $h \in R$ сонлар мавжудки, (α) ва (β) тизимларда p - тенгламалардан бошқа барча тенгламалар бир хил, p - тенгламаларнинг коэффициентлари ва озод ҳадлари эса қуйидагича боғланган:

$$c_{pk} = a_{pk} + ha_{qk} \ (k = \overline{1,n}),\ d_p = b_p + hb_q$$

Фараз қилайлик, (α) тизим биргаликда бўлиб, $x_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ вектор (α) нинг бирор ечими бўлсин. У ҳолда бу тизимларнинг p-тенгламаларидан бошқа барча тенгламалари бир хил бўлгани учун x_0 вектор (β) тизимнинг p- тенгламадан бошқа барча тенгламаларини қаноатлантиради. Бу x_0 вектор (α) тизимни қаноатлантиргани учун унинг p- ва q- тенгламаларини қаноатлантиради:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{pk} x_k^0 = b_p,\ \sum_{k=1}^{n} a_{qk} x_k^0 = b_q.$$

Иккинчи тенгликнинг икки томонини h га кўпайтириб, биринчи тенгликка қўшсак,

$$\sum_{\kappa=1}^{n}\left(a_{p\kappa}+ha_{q\kappa}\right)x_{\kappa}^{0}=b_p+hb_q$$

тенгликни оламиз. Бу эса $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ векторнинг (β) даги p- тенгламани ҳам қаноатлантиришини кўрсатади. Демак (α) нинг ҳар бир ечими (β) нинг ҳам ечими экан. Аммо (α) ҳам (β) дан (II) тур элементар алмаштириш орқали ҳосил қилинади. Бундан юқоридаги мулоҳазаларни ишлатиб, (β) нинг ҳар бир ечими (α) нинг ҳам ечими эканлиги олинади.

Юқорида келтирилган мулоҳазалардан кўрамизки, агар тизимларнинг бирортаси иккинчисидан битта элементар алмаштириш орқали ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда бу тизимларнинг бирортаси биргаликда бўлса, иккинчиси ҳам биргаликда ва улар бир хил ечимларга эга. Бунга асосан, агар уларнинг бирортаси биргаликда бўлмаса, иккинчиси ҳам биргаликда бўлмайди. Бу билан теорема (β) тизим (α) дан битта элементар алмаштириш орқали ҳосил қилинган ҳолда исботланди.

Бундан фойдаланиб, умумий ҳол математик индукция усули ёрдамида исботланади.

Натижа. **Ҳар қандай тенгламалар тизими бирор зинапоя тизимга тенг кучли.**

Исбот. Натижанинг исботи 2- ва 3- теоремалардан келиб чиқади.

Бу натижадан фойдаланиб, ихтиёрий чизиқли тенгламалар тизимини унга тенг кучли бўлган зинапоя тизимга келтириб олиб, бевосита ечамиз.

Ихтиёрий n та номаълумли S та чизиқли тенгламали (α) тизим берилган бўлсин. A ва A' мос равишда бу тизимнинг коэффициентлари матрицаси ва кенгайтирилган матрицаси бўлсин. Бу тизимни чекли сондаги элементар алмаштиришлар ёрдамида бирор $(\bar{\alpha})$ зинапоя кўринишга келтирамиз. $\bar{A}$ ва $\bar{A}'$ мос равишда ($\bar{\alpha}$) тизимнинг коэффициентлари матрицаси ва кенгайтирилган матрицаси бўлсин. У ҳолда $\bar{A}'$ n та устунли ва $\bar{S}$ та сатрли зинапоя матрица бўлади. $\bar{A}'$ эса $\bar{A}$ матрица устунларини ўз ичига олган $(h + 1)$ та устунли ва S та сатрли зинапоя матрица бўлади. $\bar{A}$ нинг нольдан фарқли сатрлари сони r га тенг бўлсин. Унинг бош устунларининг номерлари мос равишда $m_1, m_2, ..., m_r$ бўлсин. У ҳолда $1 \leq m_1 \leq m_2 < ... < m_r \leq n + 1$

Қуйидаги икки ҳолни айрим кўрамиз:

1) $m_r = n + 1$, яъни r-сатрда нольдан фарқли ягона элемент бўлиб, у $(n + 1)$-устунда ётади;

2) $m_r < n + 1$.

Биринчи ҳол, яъни ушбу $m_r = n + 1$ тенглик ўринли бўлсин деб фараз қиламиз. У ҳолда r-тенглама қуйидаги кўринишда бўлади:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = b_r, \; b_r \neq 0,$$

яъни бу тенгламанинг чап томонидаги барча коэффициентлар нолга тенг, озод ҳад эса нольдан фарқли. Аммо бундай тенгламанинг ечими йўқ, чунки унинг чап томони ҳар қандай $x_1, x_2, ..., x_n$ лар учун нольга тенг, аммо ўнг томони нольдан фарқли. Бундан $(\bar{\alpha})$ тизимнинг ҳам ечими йўқлиги келиб чиқади. 3-теоремага кўра (α) тизим ҳам ечимга эга эмаслиги келиб чиқади. Шундай қилиб, $m_r = n + 1$ ҳолда (α) тизим биргаликда эмас экан.

Энди $m_r < n + 1$ ҳолни кўрамиз. Бу ҳолда $(\bar{\alpha})$ тизим қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\bar{a}_{1m_1} x_{m_1} + \ldots + \bar{a}_{1n} x_n = \bar{b}_1,$$

$$\bar{a}_{2m_2} x_{m_2} + \ldots + \bar{a}_{2n} x_n = \bar{b}_2,$$

$$\bar{a}_{rm_r} x_{m_r} + \ldots + \bar{a}_{rn} x_n = \bar{b}_r,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$0 \cdot x_1 + \ldots\ldots + 0x_n = 0,$$

$$0x_1 + \ldots\ldots + 0x_n = 0,$$

бу ерда $\bar{a}_{1m_1} \neq 0, \; \bar{a}_{2m_2} \neq 0, \ldots, \bar{a}_{rm_r} \neq 0.$

Бош устунларга мос келувчи $x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_r}$ номаълумларни **бош** номаълумлар ва қолганларини эса **озод** номаълумлар дейилади. Бош номаълумларнинг сони r та ва озод номаълумларнинг сони $(n - r)$ та. Агар $n = r$ бўлса, озод номаълумлар йўқ. Бу ҳолда у қуйидаги кўринишга эга:

$$\bar{a}_{11}x_1 + \bar{a}_{12}x_2 + \ldots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1$$

$$\bar{a}_{22}x_2 + \ldots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2$$

$$\bar{a}_{nn}x_n = \bar{b}_n \qquad (\bar{\alpha})$$

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots\ldots + 0x_n = 0$$

$$0x_1 + \ldots\ldots + 0x_n = 0.$$

бу ерда $\bar{a}_{11} \neq 0, \ldots, \bar{a}_{nn} \neq 0$. Агар $n = s$ бўлса, $(\bar{\alpha})$ тизим **учбурчак** тизим дейилади. Бу ҳолда тизимда $0x_1 + \ldots + 0x_n = 0$ айнан ноль кўринишидаги тенгламалар йўқ. Агар $s > n$ бўлса, $(\bar{\alpha})$ да $(s - n)$ та айнан ноль кўринишидаги тенгламалар бўлади. Айнан ноль кўринишидаги тенгламаларни ҳар қандай вектор қаноатлантиргани учун $(\bar{\alpha})$ тизимни ечишда айнан ноль бўлган тенгламаларни ташлаб юбориш мумкин. Демак $(\bar{\alpha})$ тизимни ечиш қуйидаги учбурчак тизимни ечишга келтирилади.

$$\bar{a}_{11}x_1 + \bar{a}_{12}x_2 + \ldots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1$$

$$\bar{a}_{22}x_2 + \ldots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\bar{a}_{nn}x_n = \bar{b}_n$$

Бу ерда охирги тенгламадан x_n ни топамиз:

$$x_n = \frac{\bar{b}_n}{\bar{a}_{nn}}.$$

Буни барча бошқа $(n - 1)$ та тенгламага қўйсак, натижада $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ номаълумли учбурчак тизим ҳосил бўлади. Бундан охирги x_{n-1} номаълумни топиб, бошқа тенгламаларга қўямиз. Шу йўсинда номаълумларни кетма-кет топиб, натижада барча номаълумларни бир қийматли топамиз.

Бу билан биз $(\bar{\alpha})$ тизимни $n = r$ бўлган ҳолда ечдик.

Энди $r < n$ бўлган ҳолни кўрамиз. Бу ҳолда юқоридагига ўхшаб, тизимдан айнан нольга тенг бўлган тенгламаларни ташлаб, қуйидаги тизимни ечишга келамиз:

$$
\begin{aligned}
\bar{a}_{1m_1} x_{m_1} + \bar{a}_{1m_2} x_{m_2} + \ldots + \bar{a}_{1n} x_n &= \bar{b}_1 \\
\bar{a}_{2m_2} x_{m_2} + \ldots + \bar{a}_{2n} x_n &= \bar{b}_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\bar{a}_{m_r} x_{m_r} + \ldots + \bar{a}_{rn} x_n &= \bar{b}_r
\end{aligned}
$$

Бу тизимда озод номаълумлар қатнашган барча ҳадларни тизимнинг ўнг томонига ўтказамиз ва озод номаълумларга ихтиёрий қийматларни берамиз. У ҳолда тизимнинг ўнг томони сонларга айланиб, тизим бош номаълумларга нисбатан учбурчак тизим бўлади. Бу тизимни ҳам юқоридагига ўхшаш ечиб, бош номаълумларнинг қийматини бир қийматли топамиз. Бу билан $(\bar{\alpha})$ тизимнинг ечими топилди. Бундай ечишда озод номаълумларнинг барчасига ихтиёрий қийматларни бериб, бош номаълумларнинг буларга мос қийматлари бир қийматли топилади. Шундай қилиб, бу усул билан $(\bar{\alpha})$ тизимнинг барча ечимлари топилади. Бу билан (α) тизимлар тенг кучли бўлгани учун (α) ва $(\bar{\alpha})$ тизимнинг ҳам барча ечимлари топилди.

Чизиқли тенгламалар тизимини элементар алмаштиришлар орқали зинапоя усулга келтириб, юқорида келтирилган усулда ечишни **Гаусс усули** (баъзан номаълумларни кетма-кет йўқотиш усули) дейилади.

Юқорида келтирилган мулоҳазалар жараёнида қуйидаги теоремалар ҳам олинди:

4-теорема. ***Чизиқли тенгламалар тизими биргаликда бўлиши учун у зинапоя кўринишга келтирилганда кен-***

ғайтирилган матрицасининг охирги бош устунининг m_r рақами $m_r < n+1$ тенгсизликни қаноатлантириши зарур ва кифоя.

5-теорема. *Агар (α) чизиқли тенгламалар тизимининг ранги $r(\alpha) < n$ тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда бундай тизимнинг ечимлари чексиз кўп бўлиб, ечимлар тўплами $(n - r(\alpha))$ та ихтиёрий ўзгарувчилар билан параметрланади.*

Шундай масалалар учрайдики, уларда чизиқли тенгламалар тизимларини текширишни ва ечишни зинапоя тизимга келтирмасдан туриб, бажариш керак бўлади. Кейинги параграфлар шундай усулларга бағишланган.

Тўртинчи боб

ДЕТЕРМИНАНТЛАР НАЗАРИЯСИ

18-§. ИККИНЧИ ВА УЧИНЧИ ТАРТИБЛИ ДЕТЕРМИНАНТЛАР

Энди бошқа усул билан иккита номаълумли иккита тенгламалар тизимини ечамиз.

1-теорема. *Икки номаълумли иккита чизиқли тенгламалар тизими*

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \qquad (1)$$

ушбу $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}\neq 0$ *шарт бажарилганда ягона*

$$\left(\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\ \frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\right)$$

ечимга эга.

Исбот. Ушбу $\Delta=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$, $\Delta_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$, $\Delta_2=$ $=a_{11}b_2-a_{21}b_1$ белгилашларни киритамиз. Тизимдаги биринчи тенгламани a_{22} га, иккинчисини эса $(-a_{12})$ га кўпайтириб, уларни қўшсак, $\Delta x_1=\Delta_1$ тенгликни оламиз. Шунга ўхшаш, биринчи тенгламани $(-a_{21})$ га, иккинчи тенгламани a_{11} га кўпайтириб, уларни қўшсак, $\Delta x_2=\Delta_2$ тенгликни оламиз. Натижада $\Delta\neq 0$ бўлгани учун

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_1=\Delta_1, \\ \Delta x_2=\Delta_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \\ x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}. \end{cases}$$

Иккинчи томондан бевосита ҳисоблашлар номаълумларнинг топилган қийматлари берилган тизимни қаноатлантиришни кўрсатади:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

Демак,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}. \end{cases}$$

Бу эса теореманинг исботидир. ■

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{pmatrix}$$

квадрат матрицага $a_{11}a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$ сонни мос қўямиз. Бу сон A матрицанинг **детерминанти** (2-тартибли детерминант) дейилади ва $\det A$ ёки

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}$$

тарзида белгиланади.

Бу белгилаш тилида 1-теорема қуйидагича айтилади: ***агар***

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

бўлса, у ҳолда (1) тизим ягона

$$\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}\right)$$

ечимга эга, бу ерда Δ_1 ва Δ_2 ларни ҳам юқорида киритилган белгилашга кўра

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 a_{12} \\ b_2 a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} b_1 \\ a_{21} b_2 \end{vmatrix}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Уч номаълумли учта тенгламалар тизимини ечиш масаласи **учун тартибли детерминант** тушунчасига олиб келади. Агар

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{pmatrix}$$

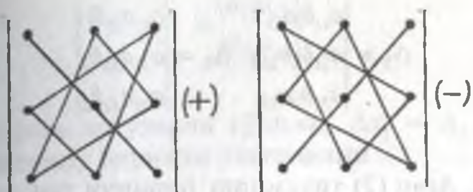
учинчи тартибли квадрат матрица бўлса, ушбу

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - \\ -a_{12}a_{21}a_{33}$$

сон A матрицанинг **детерминанти** дейилади ва det A ёки

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix}$$

тарзида белгиланади. Юқорида келтирилган детерминант қийматини ҳисоблаш қоидаси эсда қолиши учун қуйидаги Саррюс жадваллари ишлатилади:



Бу ердаги (+) жадвалда детерминантнинг мусбат ишорали бирҳадлари кўпайтувчиларининг олиниши қоидаси: бирҳадга кўпайтувчи сифатида кирувчи матрицаларнинг элементлари кесмалар билан бирлаштирилган. Детерминантнинг манфий ишорали ҳадлари учун бундай қоида жадвалда берилган.

2-теорема. *Агар*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

бўлса, у ҳолда

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (2)$$

чизиқли тенгламалар тизими ягона

$$\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \frac{\Delta_3}{\Delta}\right)$$

ечимга эга, бу ерда

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} b_1 a_{13} \\ a_{21} b_2 a_{23} \\ a_{31} b_3 a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} b_1 \\ a_{21} a_{22} b_2 \\ a_{31} a_{32} b_3 \end{vmatrix}$$

И с б о т. Агар (2) тизимнинг биринчи тенгламасининг ҳар иккала томонини

$$\begin{vmatrix} a_{22} a_{23} \\ a_{32} a_{33} \end{vmatrix}$$

га, иккинчисини

$$-\begin{vmatrix} a_{12} a_{13} \\ a_{32} a_{33} \end{vmatrix}$$

га, учинчисини

$$\begin{vmatrix} a_{12} a_{13} \\ a_{22} a_{23} \end{vmatrix}$$

га кўпайтирсак ва уларни қўшсак, $\Delta x_1 = \Delta_1$ тенгликни оламиз. Агар биринчи тенгламани

$$-\begin{vmatrix} a_{21} a_{23} \\ a_{31} a_{32} \end{vmatrix}$$

га, иккинчисини

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{13} \\ a_{31} a_{33} \end{vmatrix}$$

га, учинчисини

$$-\begin{vmatrix} a_{11} a_{13} \\ a_{21} a_{23} \end{vmatrix}$$

га кўпайтирсак ва уларни қўшсак, $\Delta x_2 = \Delta_2$ тенгликни оламиз. Ниҳоят, биринчи тенгламани

$$\begin{vmatrix} a_{21} a_{22} \\ a_{31} a_{32} \end{vmatrix}$$

га, иккинчисини

$$-\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{31} a_{32} \end{vmatrix}$$

га, учинчисини

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}$$

га кўпайтирсак ва уларни қўшсак, $\Delta x_3 = \Delta_3$ тенгликни оламиз. Олинган тенгликларга асосан

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} \\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} \end{cases} \qquad (3)$$

тенгламалар тизими (2) тизимнинг натижасидир. Иккинчи томондан (3) тизимдаги қийматларни (2) тизимга олиб бориб қўйилса, унинг қаноатланиши бевосита текширилади. Бу (2) ва (3) тизимларнинг эквивалентлигини кўрсатади.

Исботланган 1-ва 2-теоремалар n номаълумли n та тенгламанинг ягона ечимга эга бўлиши ҳақидаги Крамер теоремасининг хусусий ҳолларидир.

19-§. ЎРНИГА ҚЎЙИШЛАР ГУРУҲИ

3-§ ва 10-§ (4-мисол)да A тўпламнинг ўз-ўзига барча биекцияларидан иборат $G(A)$ тўплам киритилиб, унинг биекциялар композицияси амалига нисбатан гуруҳ ҳосил қилиши кўрсатилган эди.

Биз шу гуруҳни биринчи n та натурал сонлардан иборат $A = \{1, 2, \dots, n\}$ тўплам учун кўрамиз. Бу ҳолда $G(A)$ тўплам S_n орқали белгиланади ва **n-даражали симметрик гуруҳ** деб аталади. S_nнинг элементи, яъни $A = \{1, 2, \dots, n\}$ тўрламнинг ўз-ўзига биекцияси **n-даражали ўрнига қўйиш** деб аталади. Агар $\varphi_1 \in S_n$ ва $\varphi_2 \in S_n$ бўлса, уларнинг $\varphi(\varphi_1)$ композицияси φ_1 ва φ_2ўрнига қўйишларнинг **кўпайтмаси** дейилади ва $\varphi_2 \cdot \varphi_1$ кўринишида белгиланади. Ҳар бир ўрнига қўйишни иккита сатрли жадвал кўринишида қуйидагича ёзиш мумкин: унинг биринчи сатрида берилган тўпламнинг элементлари бирин-кетин ёзилади ва уларнинг остига иккинчи сатрда мос равишда образлари ёзилади. Масалан, ушбу

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

ёзув $A = \{1, 2, 3, 4\}$ тўпламнинг қуйидаги $\varphi : A \to A$ биекциясидир:

$$\varphi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

яъни $\varphi(1) = 4$, $\varphi(2) = 3$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 1$. Умуман

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots & n \\ m_1 & m_2 & m_n \end{pmatrix} \qquad (2)$$

ёзув $A = \{1, 2, ..., n\}$ тўпламнинг қуйидаги биекциясидир:

$$\psi : \begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ m_1 & m_2 & m_n \end{pmatrix}$$

яъни $\varphi(i) = m_i$, $i = \overline{1,n}$.

Агар A тўпламнинг элементлари 1, 2, ... n ўсиш тартибида эмас, балки бошқа бирор a_1, a_2, ..., a_n тартибда ёзилган бўлса, ψ ўрнига қўйишни ушбу

$$\psi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 \ldots & b_n \end{pmatrix} \qquad (3)$$

ёзуви ҳам ишлатилади. Бу ерда

$$\psi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \ldots & a_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ b_1 & b_2 \ldots & b_n \end{pmatrix}$$

яъни $\varphi(a_i) = b_i$, $i = \overline{1,n}$. Масалан, (1) ўрнига қўйиш ушбу

$$\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

кўринишда ҳам ёзилиши мумкин. (4) ёзув (1) ёзувдан устунларнинг ўрни билан фарқ қилади. Умуман, берилган ψ ўрнига қўйишнинг бирор ёзувида устунларнинг ўрни алмаштирилса, яна ψ ўрнига қўйишга мос ёзувни оламиз. Ўрнига қўйишнинг турли ёзувлари бир-биридан фақат устунларнинг ўрни билан фарқ қилади. Ҳар бир ψ ўрнига қуйиш (2) кўринишдаги ягона ёзувга эга. Бу унинг **каноник** ёзуви дейилади.

Киритилган ёзувлардан фойдаланиб, масалан, ушбу

$$\psi_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix},\quad \psi_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}$$

ўрнига қўйишлар биекцияларнинг композицияси қоидаси бўйича қуйидагича кўпайтирилади:

$$\psi_2\psi_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}=\begin{array}{r}\\ \psi_1:\\ \\ \\ \psi_2:\\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 4&3&1&2\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 3&1&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$$

$\psi_1\psi_2$ кўпайтма ҳам шунга ўхшаш топилади:

$$\psi_1\psi_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}.$$

Топилган $\psi_2\psi_1$ ва $\psi_1\psi_2$ ўрнига қўйишларнинг турли эканлиги S_4 гуруҳ коммутатив эмаслигини кўрсатади.

A тўпламнинг бирлик акс эттириши S_4 гуруҳнинг бирлик элементидир. Уни E орқали белгилаймиз. У ушбу

$$E=\begin{pmatrix}1&2&3\ldots n\\1&2&3\ldots n\end{pmatrix}$$

ёки

$$E=\begin{pmatrix}a_1&a_2\ldots a_n\\a_1&a_2\ldots a_n\end{pmatrix}$$

кўринишларда ёзилиши мумкин. (2) кўринишда берилган ψ ўрнига қўйишнинг ψ^{-1} тескариси ушбу

$$\psi^{-1} = \begin{pmatrix} m_1\ m_2 \dots m_n \\ 1\quad 2 \dots n \end{pmatrix}$$

кўринишга эга, яъни $\psi^{-1}(m_i) = i,\ i = \overline{1,n}$. Агар ψ ўрнига қўйиш (3) кўринишда берилган бўлса, у ҳолда унинг ψ^{-1} тескариси ушбу

$$\psi^{-1} = \begin{pmatrix} b_1\ b_2 \dots b_n \\ a_1\ a_2 \dots a_n \end{pmatrix}$$

кўринишга эга, яъни $\psi^{-1}(b_i) = a_i,\ i = \overline{1,n}$.

1-теорема. ***S_n гуруҳ элементларининг сони n ! га тенг.***

Исбот. Ҳар бир $\psi \in S_n$ ўрнига қўйиш ягона (2) каноник кўринишга эга. Бу кўринишдаги иккинчи сатр элементлари ψ биекция бўлгани учун $A = \{1, 2, ..., n\}$ тўпламнинг бирор ўрин алмаштиришидир. Аксинча, агар A тўпламнинг бирор ўрин алмаштиришини (2) кўринишда иккинчи сатр қилиб олсак, ҳосил бўлган $\psi : A \to A$ акс эттириш биекция бўлади. Шундай қилиб, барча n-даражали ўрнига қўйишлар билан A тўпламнинг барча ўрин алмаштиришлари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилди. Демак S_n даги элементлар сони A тўпламнинг барча ўрин алмаштиришлар сонига, яъни n ! га тенг (11-§).

A = $\{1, 2, ..., n\}$ тўпламнинг ихтиёрий $a = (a_1, a_2,...,a_n)$ ўрин алмаштириши берилган бўлсин. Агар (a_i, a_j) жуфт учун $a_i < a_j$ бўлса, бу жуфтнинг инверсияси нолга тенг дейилади. Агар (a_i, a_j) жуфт учун $a_i > a_j$ бўлса, (a_i, a_j) жуфтнинг инверсияси бирга тенг дейилади. Берилган $(a_1, a_2,...,a_n)$ ўрин алмаштиришнинг $1 \leq i < j \leq n$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча (a_i, a_j) жуфтлари бўйича инверсияларни қўшиб чиқишдан ҳосил бўлган сон бу ўрин алмаштиришнинг **инверсиялар сони** дейилади ва $i(a)$ орқали белгиланади. Масалан, (4 3 1 2) ўрин алмаштиришда (4, 3), (4, 1), (4, 2), (3, 1), (3, 2) жуфтлар инверсиялар ҳосил қилади, (1, 2) жуфт эса ҳосил қилмайди. Демак, бу ўрин алмаштиришнинг инверсиялар сони 5 га тенг. Агар ўрин алмаштиришнинг инверсиялар сони жуфт (тоқ) бўлса, у жуфт (тоқ) ўрин алмаштириш дейилади. Масалан, (1, 2, 3, 4) — жуфт ўрин алмаштириш, (4, 3, 1,2) — тоқ ўрин алмаштириш.

Агар каноник кўринишда берилган ўрнига қўйишнинг иккинчи сатри жуфт (тоқ) ўрин алмаштириш бўлса, бу ўрнига қўйиш жуфт (тоқ) дейилади. Масалан, (1) ўрнига қўйиш жуфт.

Агар ψ ўрнига қўйишда фақат иккита элементларнинг ўрни алмашиб, қолганлар ўз ўрнида қолса, бундай ўрнига қўйиш **транспозиция** дейилади. Масалан, ушбу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

ўрнига қўйиш транспозициядир.

2-теорема. ***Ҳар қандай φ транспозиция учун $\varphi^2 = E$, яъни $\varphi = \varphi^{-1}$ ва у тоқ ўрнига қуйишдир.***

Исбот. Берилган φ транспозиция i ва k ($i < k$) сонларнинг ўринларини алмаштириб (яъни $\varphi(i) = k$, $\varphi(k) = i$), қолган барча (яъни $m \neq i$, $m \neq k$) сонларни ўз ўрнида қолдирсин: $\varphi(m) = m$. Бу муносабатларга кўра $\varphi(\varphi(i)) = \varphi(k) = i$, $\varphi(\varphi(k)) = \varphi(i) = k$ ва $m \neq k, i$ учун $\varphi(\varphi(m)) = \varphi(m) = m$, яъни $\varphi^2 = E$. Бундан $\varphi^{-1} = \varphi$ эканлиги келиб чиқади.

Бу φ транспозицияга каноник ёзувда ушбу

$$(1, 2, ..., i-1, k, i+1, ..., k-1, i, k+1, ... n)$$

ўрин алмаштириш мос келади. Бу ерда $1, 2, ..., i-1$ ларнинг ҳар бири ўзидан кейингиларнинг ҳеч қайсиси билан инверсия бермайди. Аммо k сони $i+1, ..., k-1, i$ сонларнинг ҳар бири билан инверсия беради. Ушбу $i+1, ..., k-1$ ларнинг ҳар бири i билан инверсия беради, аммо $k+1, ..., n$ лар билан эса инверсия бермайди. Ушбу i,

$k+1, \ldots, n$ ларнинг ҳар бири ўзидан кейингиларнинг ҳеч қайсиси билан инверсия бермайди. Ҳосил бўлган барча инверсияларни йиғсак: $(k-i)+(k-i-1)=2(k-i)-1$, яъни инверсиялар сони тоқ.

Агар λ ўрнига қўйиш (ёки ўрин алмаштириш) жуфт (тоқ) бўлса, унинг ишораси 1 га (-1)га тенг дейилади. Унинг ишораси $\operatorname{sgn}\lambda$ орқали белгиланади. Бошқача айтганда $\operatorname{sgn}\lambda=(-1)^{i(\lambda)}$, бу ерда $i(\lambda)$ — инверсиялар сони.

3-теорема. ***Ўрнига қўйишлар кўпайтмасининг ишораси ўрнига қўйишлар ишораларининг кўпайтмасига тенг, яъни ҳар қандай*** $\varphi, \psi \in S_n$ **лар учун**

$$\operatorname{sgn}(\varphi\cdot\psi)=\operatorname{sgn}\varphi\cdot\operatorname{sgn}\psi.$$

Исбот. Ҳар бир $\varphi\in S_n$ ўрнига қўйишга R^n фазонинг қуйидаги F_φ ўз-ўзига акс эттиришни мос қўямиз: агар $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in R^n$ бўлса,

$$F_\varphi x=F_\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)=(x_{\varphi(1)}, x_{\varphi(2)}, \ldots, x_{\varphi(n)})$$

Агар $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)=(x_{\varphi(1)}, x_{\varphi(2)}, \ldots, x_{\varphi(n)})$, яъни $y_i=x_{\varphi(i)}$, $i=\overline{1,n}$ деб олсак, у ҳолда $F_\psi y=(y_{\psi(1)}, y_{\psi(2)}, \ldots, y_{\psi(n)})$. Бундан $y_{\psi(i)}=x_{\varphi(\psi(i))}=x_{\varphi\psi(i)}$, яъни $F_\psi y=F_\psi(F_\varphi x)=F_{\varphi\psi}x$. Демак,

$$F_\psi\cdot F_\varphi=F_{\varphi\psi} \tag{5}$$

муносабат ўринли.

Ҳар бир $x\in R^n$ да аниқланган ушбу

$$W(x)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j) \tag{6}$$

функцияни қараймиз (барча $i<j$ лар учун олинган (x_i-x_j) айирмаларнинг кўпайтмаси). Бу функция **Вандермонд кўпайтмаси** дейилади. Ушбу

$$W(F_\varphi x)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_{\varphi(i)}-x_{\varphi(j)})$$

кўпайтма (6) кўпайтмадан фақат $\varphi(i) > \varphi(j)$ тенгсизлик ўринли бўлган $(x_{\varphi(i)} - x_{\varphi(j)})$ айирмаларнинг ишоралари билангина фарқ қилади. Бунга асосан

$$W(F\varphi x) = (-1)^{i(\varphi)} W(x) = \mathrm{sgn}\varphi\ W(x).$$

Бундан ва (5) муносабатдан

$$\mathrm{sgn}(\varphi\psi) W(x) = W(F_{\varphi\psi} x) = W(F_{\psi}(F_{\varphi} x)) = \mathrm{sgn}\psi\ W(F_{\varphi} x) = \\ = \mathrm{sgn}\psi \cdot \mathrm{sgn}\varphi\ w(x)$$

тенгликларни оламиз. Булардан

$$\mathrm{sgn}(\varphi \cdot \psi) = \mathrm{sgn}\varphi \cdot \mathrm{sgn}\psi.$$

Иккита элементли $\{1, -1\}$ тўпламда кўпайтириш амалини қарасак, бу тўплам шу амалга нисбатан коммутатив гуруҳни ҳосил қилади. Бу гуруҳни Z_2 орқали белгилаймиз.

S_n гуруҳнинг Z_2 га ушбу $\varphi \to \mathrm{sgn}\varphi$ акс эттиришини қараймиз. Исботланган теорема бу акс эттиришнинг шу гуруҳларнинг гомоморфизми эканини кўрсатади.

1-натижа. *1) Жуфт ўрнига қўйишларнинг кўпайтмаси жуфт ўрнига қўйишдир ва тоқ ўрнига қўйишларнинг кўпайтмаси ҳам жуфт ўрнига қўйишдир.*

2) жуфт (тоқ) ва тоқ (жуфт) ўрнига қўйишларнинг кўпайтмаси тоқ ўрнига қўйишдир.

Исбот. Ҳақиқатан

$$\mathrm{sgn}\ (\varphi\psi) = \mathrm{sgn}\varphi \cdot \mathrm{sgn}\psi = \begin{cases} 1, \text{ агар } \mathrm{sgn}\,\varphi = \mathrm{sgn}\,\psi \\ -1, \text{ агар } \mathrm{sgn}\,\varphi \neq \mathrm{sgn}\,\psi \end{cases}$$

2-натижа. *Ҳар қандай φ ўрнига қўйиш учун*

$$\mathrm{sgn}\varphi = \mathrm{sgn}\ \varphi^{-1}.$$

Исбот. Ҳақиқатан, E бирлик ўрнига қўйиш жуфт бўлгани учун $1 = \mathrm{sgn}\ E = \mathrm{sgn}(\varphi \cdot \varphi^{-1}) = \mathrm{sgn}\varphi \cdot \mathrm{sgn}\varphi^{-1}$. Демак, $\mathrm{sgn}\varphi = \mathrm{sgn}\varphi^{-1}$.

4-теорема. ***Агар $n > 1$ бўлса, у ҳолда барча жуфт ўрнига қўйишлар сони барча тоқ ўрнига қўйишлар сонига тенг ва демак $\frac{n!}{2}$ га тенг.***

Исбот. P_n орқали барча n-даражали жуфт ўрнига қўйишлар тўпламини ва Q_n орқали тоқ ўрнига қўйишлар тўпламини белгилаймиз. S_n да бирор τ транспозицияни оламиз. 2-теоремага ва 3-теореманинг 1-натижасига кўра ҳар қандай $\alpha \in P_n$ учун $\tau\alpha \in Q_n$ бўлгани учун $f(\alpha) = \tau\alpha$, $\alpha \in P_n$ ифода бирор $f: P_n \to Q_n$ акс эттиришни аниқлайди. Ҳар бир $\beta \in Q_n$ учун $g(\beta) = \tau\beta$ ифода билан аниқланган $g: Q_n \to P_n$ акс эттириш f га тескари акс эттиришдир. Ҳақиқатан, 2-теоремага кўра $\tau^2 = E$. Ҳар қандай $\alpha \in P_n$ учун

$$g(f(\alpha)) = g(\tau\alpha) = \tau(\tau\alpha) = \tau^2\alpha = E\alpha = \alpha$$

ва ҳар қандай $\beta \in Q_n$ учун

$$f(g(\beta)) = f(\tau\beta) = \tau(\tau\beta) = \tau^2\beta = E\beta = \beta.$$

Демак $f: P_n \to Q_n$ — биекциядир. Бундан P_n ва Q_n даги элементларнинг сони тенглиги келиб чиқади. S_n нинг элементлари сони $n\,!$ бўлгани учун P_n ва Q_n лар ҳар бирининг элементлари сони $\frac{n!}{2}$ га тенг.■

5-теорема. ***P_n тўплам S_n гуруҳнинг қисм гуруҳидир.***

Исбот. 1-натижанинг (1) тасдиғига кўра, агар $\varphi, \psi \in P_n$ бўлса, у ҳолда $\varphi \cdot \psi \in P_n$. 2-натижага кўра, агар $\varphi \in P_n$ бўлса, у ҳолда $\varphi^{-1} \in P_n$. Булардан ва 10-§ даги 4-теореманинг натижасидан P_n нинг қисм гуруҳ эканлиги келиб чиқади.■

20-§. ДЕТЕРМИНАНТЛАР НАЗАРИЯСИ

n — натурал сон, $A = (a_{ik})$ — n-тартибли квадрат матрица ва

$$\lambda = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \\ \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

n-тартибли ўрнига қўйиш бўлсин. Ушбу

$$P(A,\lambda) = a_{\alpha_1\beta_1} \cdot a_{\alpha_2\beta_2} \cdots a_{\alpha_n\beta_n}$$

белгилаш киритамиз. Бу кўпайтма λ ўрнига қўйишнинг ёзиш усулига боғлиқ эмас, чунки λ нинг бошқа ёзувига унинг устунларини алмаштириш орқали ўтилгани учун бу алмаштириш кўпайтмадаги кўпайтувчиларнинг ўрнини алмашишигагина олиб келади.

Ушбу $\sum\limits_{\lambda \in S_n} \operatorname{sgn} \lambda\, P(A,\lambda)$ йиғинди A матрицанинг **детерминанти** дейилади ва $\det A$ орқали белгиланади. S_n гуруҳ элементлари сони n ! га тенг бўлгани учун $\det A$ нинг ифодаси n ! та ҳаднинг йиғиндисидир.

Хусусан, агар λ учун

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots & n \\ \lambda_1 & \lambda_2 \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

каноник ёзув ишлатилса, детерминант ушбу

$$\det A = \sum_{\lambda \in S_n} \operatorname{sgn} \lambda\, a_{1\lambda_1} \cdot a_{2\lambda_2} \ldots a_{n\lambda_n} \tag{2}$$

кўринишда ёзилади. Агар A матрица ушбу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

жадвал кўринишда берилса, унинг детерминанти учун қуйидаги белги ҳам ишлатилади:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Агар (2) ифодада $n = 1, 2, 3$ деб олсак, мос равишда қуйидаги ифодаларни оламиз.

$$\det(a_{11}) = a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} +$$

$$+ a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Бу ифодалар n -тартибли детерминант 2- ва 3- тартибли детерминантларнинг умумлашмаси эканлигини кўрсатади.

Детерминантларнинг асосий хоссаларини кўрамиз.

1-теорема. ***Матрица транспонирланганда унинг детерминанти ўзгармайди, яъни*** $\det A = \det A^T$

Исбот. Агар $A = (a_{ik})$, $A^T = (b_{ik})$ бўлса, у ҳолда $b_{ik} = a_{ik}$

ва $P(A^T, \lambda) = b_{\alpha_1\beta_1} \cdot b_{\alpha_2\beta_2} \cdots b_{\alpha_n\beta_n} = a_{\beta_1\alpha_1}, a_{\beta_2\alpha_2} \cdots a_{\beta_n\alpha_n} =$

$= P(A, \lambda^{-1})$, чунки, агар λ нинг ифодаси (1) кўринишда бўлса, у ҳолда

$$\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n \\ \lambda_1\ \lambda_2\ \ldots\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Олинган тенгликка ва $\operatorname{sgn} \lambda = \operatorname{sgn} \lambda^{-1}$ тенгликка (19-§ даги 3-теореманинг 2-натижаси) асосан $\det A^T = \sum_{\lambda \in S_n} \operatorname{sgn} \lambda P(A^T, \lambda) = \sum_{\lambda \in S_n} \operatorname{sgn} \lambda^{-1} P(A, \lambda^{-1})$. Бундан ва $\lambda = \mu^{-1}$ элемент S_n группада тўла ўзгарганда $\lambda^{-1} = \mu$ ҳам S_n да тўла ўзгаришидан (10-§ даги 2- теореманинг натижаси) ушбу

$$\det A^T = \sum_{\mu \in S_n} \operatorname{sgn} \mu P(A^T, \mu) = \sum_{\mu \in S_n} \operatorname{sgn} \mu P(A, \mu) = \det A$$

тенгликни оламиз.

1-теореманинг аҳамияти шундан иборатки, у детерминантнинг сатрларига (устунларига) доир хоссаларни устунларига (сатрларига) алоҳида исботсиз ўтказишга имкон беради.

Агар A матрица бош диагоналининг остидаги (устидаги) барча элементлар нольга тенг бўлса, у **устки учбурчак (остки учбурчак)** матрица дейилади. Устки ва остки учбурчак матрицалар **учбурчак** матрицалар дейилади.

2-теорема. ***Учбурчак матрицанинг детерминанти диагоналдаги элементларнинг кўпайтмасига тенг.***

Исбот. Теоремани остки учбурчак матрицалар учун исботлаш кифоя, чунки устки учбурчак матрицалар остки учбурчак матрицаларни транспонирлаш натижасида ҳосил қилинади.

Агар $A = (a_{ik})$ — остки учбурчак матрица бўлса, у ҳолда $i < k$ тенгсизликни қаноатлантирувчи i, k лар учун $a_{ik} = 0$. Шунга асосан, агар бирор $i = \overline{1,n}$ учун $i < \lambda_i$ бўлса, у ҳолда $P(A,\lambda) = a_{1\lambda_1} \cdot a_{2\lambda_2} \ldots a_{n\lambda_n} = 0$.

Натижада (2) йиғиндида бундай ҳадлар ноль бўлиб, унда барча $i = \overline{1,n}$ учун $\lambda_i \leq i$ шартни қаноатлантирувчи ҳадлар қолади. Аммо бу шартни фақат $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2, \ldots, \lambda_n = n$, яъни

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix} = E$$

га мос ҳадгина қаноатлантиради. Бунга асосан

$$\det A = \sum_{\lambda \in S_n} \operatorname{sgn} \lambda P(A, \lambda) = \operatorname{sgn} E \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{nn} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{nn} \blacksquare$$

Натижа. *Диагонал матрицанинг детерминанти диагоналдаги элементларнинг кўпайтмасига тенг.*

Исбот. Ҳақиқатан, диагонал матрица учбурчак матрицадир. ■

Агар $f: R^n \to R$ функция қуйидаги икки шартни қаноатлантирса, у **чизиқли** функция дейилади:

1) Ҳар қандай $x, y \in R^n$ векторлар учун

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

2) Ҳар қандай $x \in R^n$ вектор ва $c \in R$ сон учун

$$f(cx) = cf(x).$$

Агар бир неча аргументли сонли функция ҳар бир аргументига нисбатан чизиқли бўлса, у **кўп чизиқли** функция дейилади.

n-тартибли A квадрат матрицанинг детерминантини бу матрицанинг n та сатрларининг (устунларининг) сонли функцияси сифатида қараш мумкин:

$$\det A = f(A^1, \ldots, A^n) = f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$$

бу ерда $A^1, \ldots, A^n$ векторлар A матрицанинг устунлари, $A_1, \ldots, A_n$ векторлар эса сатрлари бўлиб, ҳам сатрлар, ҳам устунлар учун 1-теоремага асосан f функция бир хил.

3-теорема. ***A матрицанинг детерминанти сатрларининг (устунларининг) кўп чизиқли функциясидир.***

Исбот. 1-теоремага асосан теоремани сатрлар учун исботлаш кифоя.

A матрицанинг i-сатрини $x \in R^n$ вектор билан алмаштириш натижасида ҳосил бўлган детерминантни $\Delta_i(x)$ орқали белгилаймиз. Хусусан $\Delta_i(A_i) = \det A$. $\Delta_i(x)$ нинг x га нисбатан чизиқли эканлигини кўрсатамиз.

Ихтиёрий $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ векторларни ва $c \in R$ сонларни оламиз. У ҳолда ихтиёрий $i = \overline{1,n}$ учун

$$\Delta_i(x + y) = \sum_{\lambda \in S_n} \operatorname{sgn} \lambda a_{1\lambda_1} \ldots (x_{\lambda_i} + y_{\lambda_i}) \ldots a_{n\lambda_n} =$$
$$= \sum_{\lambda \in S_n} \operatorname{sgn} \lambda a_{1\lambda_1} \ldots x_{\lambda_i} \ldots a_{n\lambda_n} +$$
$$+ \sum_{\lambda \in S_n} \operatorname{sgn} \lambda a_{1\lambda_1} \ldots y_{\lambda_i} \ldots a_{n\lambda_n} = \Delta_i(x) + \Delta_i(y),$$

$$\Delta_i(cx) = \sum_{\lambda\in S_n} \operatorname{sgn}\lambda a_{1\lambda_1}\ldots(cx_{\lambda_i})\ldots a_{n\lambda_n} =$$

$$= c\sum_{\lambda\in S_n} \operatorname{sgn}\lambda a_{1\lambda_1}\ldots x_{\lambda_i}\ldots a_{n\lambda_n} = c\cdot\Delta_i(x).$$

Теорема исботланди. ■

1-натижа. *Ҳар қандай* $i=\overline{1,n}$ *учун* $\Delta_i(\bar{o})=0$.

Исбот. Ҳақиқатан $\Delta_i(\bar{o}) = \Delta_i(\bar{o}+\bar{o}) = 2\Delta_i(\bar{o})$. Бундан $\Delta_i(\bar{o})=0$. ■

2-натижа. *Агар A матрица ноль сатрга (устунга) эга бўлса, у ҳолда* $\det A = 0$.

Исбот. Бу ҳолда бирор $i=\overline{1,n}$ учун $A_i=0$. Ушбу $\det A = \Delta_i(A_i)$ тенгликка ва 1-натижага асосан $\det A = 0$. ■

4-теорема. ***Агар A матрица сатрларига (устунларига) γ ўрнига қўйиш татбиқ қилиш (яъни сатрлари ёки устунларини ўрин алмаштириш) натижасида B матрица ҳосил бўлса, у ҳолда*** $\det B = \operatorname{sgn}\gamma \det A$.

Исбот. 1-теоремага асосан тасдиқни сатрлар учун исботлаш кифоя. Ушбу $B_i = A_{\gamma_i}, i=\overline{1,n}$ муносабатга кўра, $b_{ik} = a_{\gamma_i k}$, $(i,k=\overline{1,n})$ ва

$$P(B,\lambda) = b_{1\lambda_1}\ldots b_{n\lambda_n} = a_{\gamma_1\lambda_1}\ldots a_{\gamma_n\lambda_n} = P(A,\mu),$$

бу ерда

$$\mu = \begin{pmatrix}\gamma_1\ldots\gamma_n\\ \lambda_1\ldots\lambda_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma_1\ldots\gamma_n\\ 1\ \ldots\ n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\ \ldots n\\ \lambda_1\ldots\lambda_n\end{pmatrix} = \gamma^{-1}\lambda.$$

Бундан ва λ ўрнига қўйиш S_n да тўла ўзгарганда берилган γ учун $\gamma^{-1}\lambda$ ҳам S_n да тўла ўзгаргани учун (10-§ даги 2-теореманинг натижаси)

$$\det B = \sum_{\lambda\in S_n}\operatorname{sgn}\lambda P(B,\lambda) = \sum_{\lambda\in S_n}\operatorname{sgn}\lambda\cdot P(A,\gamma^{-1}\lambda) =$$

$$= \sum_{\gamma\mu\in S_n}\operatorname{sgn}(\gamma\mu)P(A,\mu) = \sum_{\mu\in S_n}\operatorname{sgn}\gamma\cdot\operatorname{sgn}\mu P(A,\mu) =$$

$$= \operatorname{sgn}\gamma\sum_{\mu\in S_n}\operatorname{sgn}\mu P(A,\mu) = \operatorname{sgn}\gamma\cdot\det A. \blacksquare$$

1 - натижа. *Агар A матрицанинг қандайдир иккита сатрини (устунини) транспозиция қилиш натижасида B матрица ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда* $\det B = -\det A$.

Исбот. 19-§ даги 2-теоремадан ва 4-теоремадан бевосита келиб чиқади. ■

2 - натижа. *Агар A матрица иккита бир хил сатрга (устунга) эга бўлса, у ҳолда* $\det A = 0$.

Исбот. Ҳақиқатан, A матрицада шу сатрларнинг ўрнини алмаштирсак, 1-натижага асосан $\det A = -\det A$. Бундан $\det A = 0$. ■

Бу натижани 4-теоремани ишлатмасдан бошқача усул билан ҳам исботлаш мумкин.

A даги i-сатр ва j-сатрларнинг ўринларини алмаштириш натижасида ҳосил бўлган матрицани B ва бунга мос (i j) транспозицияни j орқали белгилаймиз. У ҳолда 4-теорема исботидаги мулоҳазага кўра ҳар қандай $\lambda \in S_n$ учун $P(B, \lambda) = P(A, \lambda\gamma^{-1})$ A матрицанинг i-сатри ва j-сатри бир хил бўлгани учун $A = B$. Демак, $P(A, \lambda) = P(A, \lambda\gamma^{-1})$. Бундан

$$\sum_{\lambda \in P_n} P(A, \lambda) = \sum_{\lambda \in P_n} P(A, \lambda\gamma^{-1}) = \sum_{\mu \in S_n P_n} P(A, \mu),$$

чунки λ ўрнига қўйиш P_n жуфт ўрнига қўйишлар тўпламида тўла ўзгарганда $\lambda\gamma^{-1}$ ўрнига қўйиш тоқ ўрнига қўйишлар тўпламида тўла ўзгаради. Бу тенгликка асосан

$$\det A = \sum_{\lambda \in S_n} \operatorname{sgn} \lambda P(A, \lambda) = \sum_{\lambda \in A_n} P(A, \lambda) - \sum_{\lambda \in S_n P_n} P(A, \lambda) = 0$$

Олинган натижани қуйидагича ҳам айтиш мумкин.

3 - натижа. *Ҳар қандай i, j ($i \neq j$) учун $\Delta_i(A_j) = 0$.*

Исбот. Ҳақиқатан, $\Delta_i(A_j)$ детерминантнинг i — сатри ва j - сатри ҳам A_j векторга тенг, яъни бир хил. 2-натижага кўра бундай детерминант нольга тенг. ■

5 - теорема. ***Агар A матрицанинг бирор сатрини (устунини) бирор сонга кўпайтириб, бошқа сатрга (устунга) қўшиш натижасида B матрица ҳосил бўлса, у ҳолда***

$$\mathbf{\det B = \det A.}$$

Исбот. Бу ҳолда бирор i, j $(i \neq j$ $1 \leq i, j \leq n)$ ва $c \in R$ сонлар мавжудки, B матрицанинг сатрлари ушбу

$$B_k = \begin{cases} A_k, \text{агар } k \neq i \text{ бўлса,} \\ A_i + cA_j \text{ агар } k = i \text{ бўлса} \end{cases}$$

кўринишга эга.

Илгари киритилган $\Delta_i(x)$ белгилашга кўра

$$\det B = \Delta_i(A_i + cA_j).$$

Бундан, 3-теоремадан ва 4-теореманинг 3-натижасидан фойдаланиб, ушбу

$$\det B = \Delta_i(A_i) + c\Delta_i(A_j) = \det A + c \cdot 0 = \det A$$

тенгликни оламиз. ■

1-натижа. *Ҳар қандай* $c_k = (k = \overline{1,n},\ k \neq i)$ *сонлар учун* $\Delta_i(A_i + \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq 1}} c_k A_k) = \det A$.

Исбот. 3-теоремага ва 4-теореманинг 3-натижасига кўра

$$\Delta_i(A_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} c_k A_k) = \Delta_i(A_i) + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} c_k \Delta_i(A_k) =$$

$$= \det A + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} c_k \cdot 0 = \det A.\ ■$$

2-натижа. *Агар A матрицанинг сатрлари (устунлари) чизиқли боғланган бўлса, у ҳолда* $\det A = 0$.

Исбот. Натижани сатрлар учун исботлаш кифоя. Бу ҳолда A матрицанинг бирор сатри (масалан i-сатр) бошқа сатрларнинг чизиқли комбинацияси кўринишида ифодаланиши мумкин:

$$A_i = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} c_k A_k.$$

У ҳолда $A_i - \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} c_k A_k = \bar{0}$ ва

$$\Delta_i(\bar{0}) = \Delta_i(A_i - \sum_{k=1}^{n} c_k A_k) = \Delta_i(A_i) -$$

$$- \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} c_k \Delta_i(A_k) = \Delta_i(A_i) - \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} c_k \cdot 0 = \Delta_i(A_i).$$

Бундан 3-теореманинг 1-натижасига асосан $\det A = \Delta_i(A_i) = 0$ тенглик келиб чиқади. ■

1—5-теоремалар ва уларнинг натижалари n-тартибли детерминантларни ҳисоблашда ишлатилади. Мисол тариқасида қуйидаги детерминантни ҳисоблаймиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} \dots a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 \dots a_{3n} \\ . & . & . \dots . \\ x_1 & x_2 & x_3 \dots x_n \end{vmatrix}$$

Бу ерда n-сатрдан $(n-1)$-сатрни айириб, $(n-1)$-сатрдан $(n-2)$-сатрни ва ҳоказо иккинчидан биринчи сатрни айириб, 5-теоремага асосан қуйидаги ифодани оламиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & x_2 - a_{12} & a_{23} - a_{13} & \dots & a_{2n} - a_{1n} \\ 0 & 0 & x_3 - a_{23} & \dots & a_{3n} - a_{2n} \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n - a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

Бундан 2-теоремага асосан

$$\Delta = x_1(x_2 - a_{12})(x_3 - a_{23}) \dots (x_n - a_{n-1,n}).$$

21-§. МИНОРЛАР ВА АЛГЕБРАИК ТЎЛДИРУВЧИЛАР

Детерминантларни ҳисоблашнинг асосий воситаси — тартибни пасайтириш ҳақидаги теоремалар. Уларда n-тартибли детерминатни ҳисоблаш бир неча пастки тартибли детерминантларни ҳисоблашга келтирилади. Бунда бош ролни минор ва алгебраик тўлдирувчи тушунчалари ўйнайди.

A — ихтиёрий $s \times n$-матрица бўлсин. A матрицада қандайдир k та сатр ва k та устунларнинг кесишган жойидаги элементлардан ташкил топган k-тартибли матрицанинг детерминанти **k-тартибли минор** дейилади.

$i_1, i_2, \dots, i_k$ $(1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n)$ рақамли сатрлар ва $j_1, j_2, \dots, j_k$ $(1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_k \le n)$ рақамли устунлар кесишишидан ҳосил бўлган k-тартибли минорни $M_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k}$ орқали белгилаймиз. $\{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ тўпламнинг барча ўрнига қўйишлар тўпламини $S\{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ орқали белгилаймиз. Бунга кўра

$$M_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} a_{i_1 j_2} \dots a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_2 j_k} \\ a_{i_k j_1} a_{i_k j_2} \dots a_{i_k j_k} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{P \in S(j_1 j_2 \dots j_k)} \operatorname{sgn} P \cdot a_{i_1 p_1} \cdot a_{i_2 p_2} \dots a_{i_k p_k},$$

бу ерда

$$P = \begin{pmatrix} j_1 \; j_2 \dots j_k \\ P_1 \; P_2 \dots P_k \end{pmatrix}$$

ўрнига қўйиш $S\,(j_1, j_2, \dots, j_k)$ гуруҳда тўла ўзгаради, sgn P эса P ўрнига қўйишнинг ишораси.

A — квадрат матрица бўлсин ($n = s$). Бу ҳолда $M = M_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k}$ минорнинг элементларидан ўтмайдиган сатрлар ва устунларнинг кесишишидан ҳосил бўлган M' минор M га тўлдирувчи минор деб аталади. Ушбу

$$A_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k} = (-1)^{i_1 + i_2 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k} M'^{\,j_1 \dots j_k}_{\,i_1 \dots i_k}$$

сон эса M минорнинг **алгебраик тўлдирувчиси** дейилади.

A — квадрат матрицанинг $A_{i_1}, \dots A_{i_k}$ сатрларини мос равишда $X_1, \dots, X_k \in R^n$ векторлар билан алмаштиришдан ҳосил бўлган матрица детерминантини $\Delta_{i_1, \dots, i_k}(X_1, \dots, X_k)$ орқали белгилаймиз.

1-теорема. Ушбу

$$A_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} = \Delta_{i_1 \dots i_k}(E_{j_1}, \dots, E_{j_k})$$

тенглик ўринли, бу ерда $E_{j_1}, \dots, E_{j_k}$ — ортлар.

Исбот. Дастлаб $M = M_{1\,2 \dots k}^{1\,2 \dots k}$ бўлган хусусий ҳолни кўрамиз (бундай минор **бурчак** минор дейилади). У ҳолда

$$\Delta_{1\,2 \dots k}(E_1, E_2 \dots, E_k) = \sum_{\substack{P \in S(1,2,\dots,n) \\ P_1 = 1, \dots, P_k = k}} \operatorname{sgn} P \cdot a_{k+1\,P_{k+1}} \cdot a_{k+2\,P_{k+2}} \dots a_{nP_n},$$

чунки $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{kk} = 1$ ҳамда $i \neq j$ ва $1 \leq i \leq k$, $1 \leq \leq j \leq k$ бўлса, $a_{ij} = 0$. Бундан $\Delta_{1\,2 \dots k}(E_1, E_2 \dots, E_k) =$

$$= \sum_{P^1 \in S(k+1, \dots, n)} \operatorname{sgn} P^1 \cdot a_{k+1 P_{k+1}} \dots a_{nP_n} = \begin{vmatrix} a_{k+1\,k+1} \dots a_{k+1\,n} \\ a_{n\,k+1} \ \dots a_{nn} \end{vmatrix} = M^1,$$

чунки

$$P = \begin{pmatrix} 1\,2 \dots k & k+1 \dots n \\ 1\,2 \dots k & P_{k+1} \dots P_n \end{pmatrix}$$

ўрнига қўйишдаги инверсиялар сони

$$P' = \begin{pmatrix} k+1 \dots n \\ P_{k+1} \dots P_n \end{pmatrix}$$

ўрнига қўйишдаги инверсиялар сонига тенг. Қўрилаётган хусусий ҳолда $i_1 + i_2 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k = 2(1 + 2 + \dots + k)$ жуфт сон бўлгани учун

$$A_{12\dots k}^{12\dots k} = M^1 = \Delta_{12\dots k}(E_1, E_2, \dots, E_k)$$

Умумий $M = M_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}$ ҳол қўрилган хусусий ҳолга қуйидагича келтирилади. Ушбу

$$\Delta_{i_1 \dots i_k}(E_{j_1}, \dots, E_{j_k})$$

детерминант сатрлари устида кетма-кет транспозициялар бажариб, i_1 рақамли сатрни биринчи ўринга, i_2 рақамли сатрни иккинчи ўринга ва ҳоказо i_k рақамли сатрни k-ўринга ўтказамиз. Буни бажариш учун $(i_1 - 1) + (i_2 - 2) + \dots + (i_k - k)$ та транспозиция ишлатилади. Шуни айтиш керакки, бу транспозициялар натижасида қолган $(n - k)$ та сатрларнинг бир-бирига нисбатан жойлашиши ўзгармайди.

Ҳосил бўлган детерминантда устунлари устида кетма-кет транспозициялар бажариб, j_1 рақамли устунни биринчи ўринга, j_2 рақамли устунни иккинчи ўринга ва ҳоказо j_k рақамли устунни k-ўринга ўтказамиз. Бунда $(j_1 - 1) + (j_2 - 2) + \dots + (j_k - k)$ та транспозиция бажарилади. Устунлар устидаги бу транспозициялар натижасида қолган $(n - k)$ та устунларнинг бир-бирига нисбатан жойлашиши ўзгармайди. Сатрлар ва устунлар устидаги юқорида бажарилган транспозициялар натижасида шундай Δ детерминантга келамизки, k = тартибли бурчак минори ушбу

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots 1 \end{vmatrix}$$

минор бўлиб, унга тўлдирувчи минор эса M' га тенг, чунки қолган сатр ва устунларнинг бир-бирига нисбатан жойлашиши ўзгармади. Хусусий ҳолда исботланганга кўра $\Delta = M'$. Иккинчи томондан 19-§ даги 2-теорема ва 20-§ даги 4-теоремаларга асосан

$$\Delta_{i_1 \dots i_k}(E_{j_1}, \dots, E_{j_k}) = (-1)^{(i_1-1)+(i_2-2)+\dots+(i_k-k)}.$$

$$\Delta = (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k-2(1+2+\dots+k)}.$$

$$\Delta = (-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k} \cdot M' = A^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_k}.$$

2-теорема ***(Лаплас теоремаси). А квадрат матрицада i_1, i_2, ...i_k ($1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$) сатрлар (устунлар) танланган бўлсин. Агар сатрлари (устунлари) шу танланган сатрларда (устунларда) жойлашган мумкин бўлган k-тартибли минорларни уларнинг алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтириб, бу кўпайтмалар барчасининг йиғиндиси олинса, А матрицанинг детерминанти ҳосил бўлади.***

Исбот. Теоремани исботлаш учун ушбу

$$\det = \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_k \le n} M^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_k} \cdot A^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_k}$$

тенгликни исботлашимиз керак.

Ҳар қандай $i = \overline{1,n}$ учун $A_i = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} E_p$,

бу ерда E_1, ..., E_n — ортлар. Бунга асосан

$$\det A = \Delta_{i_1 \dots i_k}(A_{i_1}, \dots, A_{i_k}) =$$

$$= \Delta_{i_1 \dots i_k}\Big(\sum_{p_1=1}^{n} a_{i_1 p_1} E_{p_1}, \dots, \sum_{p_k=1}^{n} a_{i_k p_k} E_{p_k}\Big).$$

Бундан детерминантнинг кўпчизиқлилик хоссасига асосан

$$\det A = \sum_{p_1, \dots, p_k}^{n} a_{i_1 p_1} \dots a_{i_k p_k} \cdot \Delta_{i_1 \dots i_k}(E_{p_1}, \dots, E_{p_k}), \qquad (1)$$

бу ерда йиғинди координаталари $1 \leq P_1 \leq n, ..., 1 \leq P_k \leq n$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи барча $P = (P_1, ... P_k)$ векторлар бўйича олинади. Агар $(P_1, ... P_k)$ векторнинг қандайдир иккита координатаси тенг бўлса, у ҳолда $\Delta_{i_1 ... i_k}(E_{P_1}, ..., E_{P_k})$ детерминантда иккита бир хил сатр мавжуд бўлади, ва демак, у нольга тенг бўлади. Бунга кўра $P = (P_1, ... P_k)$ векторнинг барча координаталарини турли деб ҳисоблаш мумкин. Демак (1) йиғинди $\{1, 2, ..., n\}$ тўпламнинг барча k-ўлчамли $P = (P_1, ... P_k)$ ўринлаштиришлари бўйича олинган дейиш мумкин. Бунга асосан (1) йиғиндини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\det A = \sum_{1 \leq j_1 < ... < j_k \leq n} \sum_{P \in S(j_1, ... j_k)} a_{i_1 P_1} \ldots a_{i_k P_k} \cdot \Delta_{i_1 ... i_k}(E_{P_1}, \ldots, E_{P_k})$$

20-§ даги 4-теоремага кўра $P \in S\ (j_1, j_2, ... j_k)$ учун

$$\Delta_{i_1 ... i_k}\ (E_{P_1}, E_{P_2}, \ldots, E_{P_k}) = \operatorname{sgn} P\, \Delta_{i_1 ... i_k}\ (E_{j_1}, \ldots, E_{j_k}).$$

Бунга ва 1-теоремага асосан

$$\det A = \sum_{1 \leq j_1 < ... < j_k \leq n} A_{i_1 ... i_k}^{j_1 ... j_k} \Big(\sum_{P \in S(j_1, ..., j_k)} \operatorname{sgn} P \cdot a_{i_1 P_k} \ldots a_{i_k P_k} \Big) =$$

$$= \sum_{1 \leq j_1 < ... < j_k \leq n} M_{i_1 ... i_k}^{j_1 ... j_k} \cdot A_{i_1 ... i_k}^{j_1 ... j_k}.$$

Теорема исботланди. ■

Лаплас теоремасининг $k = 1$ бўлган хусусий ҳолини кўрамиз. Ушбу $i_1 = i$, $j_1 = j$ белгилаш киритамиз. Бу ҳолда M_j^i минор A матрицанинг a_{ij} элементига тенг бўлиб, бу минорнинг алгебраик тўлдирувчиси **a_{ij} элементнинг алгебраик тўлдирувчиси** дейилади ва A_{ij} орқали белгиланади. Агар A матрицада i-сатр ва j-сатр устунларни ўчиришдан ҳосил бўлган детерминантни M_{ij}^1 орқали белгиласак (у M_j^i минорнинг тўлдирувчи минори), у ҳолда $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}^1$.

Бу белгилашларга асосан Лаплас теоремасидан қуйидаги теорема хусусий ҳолда ($k = 1$ да) келиб чиқади.

3-теорема. (детерминантнинг сатрлар (устунлар) бўйича ёйиш ҳақидаги теорема). ***А квадрат матрицанинг бирор сатр (устун) элементларини уларнинг алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтириб, йиғсак, бу матрицанинг детерминанти ҳосил бўлади, яъни ҳар қандай $i=\overline{1,n}$ учун***

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \det A$$

ва ҳар қандай $j=\overline{1,n}$ учун

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \det A$$

тенгликлар ўринли.

Натижа. *Агар А матрица бирор сатр (устун) элементларини бошқа сатр (устун) элементларининг мос алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтириб, йиғсак ноль ҳосил бўлади, яъни агар $i \neq S$ бўлса, у ҳолда*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{sj} = 0$$

ва агар $j \neq q$ бўлса, у ҳолда

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{iq} = 0.$$

Исбот. Агар $i \neq S$ бўлса, у ҳолда $\Delta_S(A_i) = 0$, чунки унда иккита бир хил сатрлар бор (i-сатр ва S-сатр). Бу детерминантнинг S-сатрига 3-теоремани татбиқ қилсак

$$\Delta_S(A_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{sj} = 0.$$

Устунлар учун исбот шунга ўхшаш. ■

3-теоремани қуйидаги Вандермонд детерминантини ҳисоблашга татбиқ қиламиз:

$$\Delta(x_1,\ldots,x_n)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 \ldots & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 \ldots & x_n\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} \ldots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

Бу ерда кетма-кет қуйидаги амалларни бажарамиз:

$(n-1)$-сатрни x_1 га кўпайтириб, n-сатрдан айирамиз, $(n-2)$-сатрни x_2 га кўпайтириб, $(n-1)$-сатрдан айирамиз ва ҳоказо. Охирида биринчи сатрни x_1 га кўпайтириб, иккинчи сатрдан айирамиз. Натижада қуйидаги детерминантга келамиз:

$$\Delta(x_1,\ldots,x_n)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \ldots & x_n-x_1\\ 0 & x_2^2-x_2x_1 & x_3^2-x_3x_1 & \ldots & x_n^2-x_nx_1\\ . & . & . & . & .\\ 0 & x_2^{n-1}-x_2^{n-2}x_1 & x_3^{n-1}-x_3^{n-2}x_1 & \ldots & x_n^{n-1}-x_n^{n-2}x_1\end{vmatrix}$$

Буни 3-теоремага асосан биринчи устун бўйича ёйиб, қуйидаги ифодани оламиз:

$$\Delta(x_1,\ldots,x_n)=\begin{vmatrix}x_2-x_1 & x_3-x_1 & \ldots & x_n-x_1\\ x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1 & \ldots & x_n(x_n-x_1)\\ . & . & . & .\\ x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \ldots & x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}$$

Бундан детерминантнинг устунларига нисбатан чизиқли эканлигидан фойдаланиб

$$\Delta(x_1,\dots,x_n) = (x_2-x_1)(x_3-x_1)\dots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ . & . & . & . \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\dots(x_n-x_1)\cdot\Delta(x_2,x_3,\dots,x_n)$$

тенгликни оламиз. Юқоридаги мулоҳазани $\Delta(x_2,\dots x_n)$ детерминантга ва ҳоказо кетма-кет татбиқ қилиб, қуйидаги ифодага келамиз:

$$\Delta(x_1,\dots x_n) = (x_2-x_1)(x_3-x_1)\dots(x_n-x_1)\cdot$$
$$\cdot(x_3-x_2)\dots(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-2})\Delta(x_{n-1},x_n) =$$
$$= \prod_{1\le i<k\le n}(x_k-x_i) = W(x_1,\dots,x_n),$$

чунки

$$\Delta(x_{n-1},x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_{n-1} & x_n \end{vmatrix} = x_n - x_{n-1}$$

бу ерда $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция 19-§ да киритилган Вандермонд кўпайтмасидир. Шундай қилиб, $x_1,\dots, x_n$ ўзгарувчиларнинг Вандермонд детерминанти бу ўзгарувчиларнинг Вандермонд кўпайтмасига тенг. Бундан, хусусан, қуйидаги натижа келиб чиқади: *$x_1,\dots, x_n$ ўзгарувчиларнинг Вандермонд детерминанти нольдан фарқли бўлиши учун x_1, x_2, ..., x_n сонларнинг турли бўлиши зарурий ва кифоявий шартдир.*

22-§. МАТРИЦАЛАР АЛГЕБРАСИ

Чизиқли тенгламалар тизимини ечиш ва алгебранинг бошқа масалалари матрицалар устида бир неча амалларга олиб келади.

$A, B \in M_{s,n}$ матрицалар берилган бўлсин: $A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik})$. Элементлари $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$ сонлардан иборат $C = (c_{ik})$

матрица A ва B матрицаларнинг **йиғиндиси** дейилади ва $C = A + B$ орқали белгиланади. Бу амалга нисбатан $M_{s,n}$ абель гуруҳини ҳосил қилади. Бу гуруҳнинг ноль элементи ноль матрицадир (яъни барча элементлари нольлардан иборат матрица). Бу гуруҳда $B = -A$ бўлса, у ҳолда $b_{ik} = -a_{ik}$, $i = \overline{1,s}$, $k = \overline{1,n}$. $A = (a_{ik}) \in M_{s,n}$ матрицанинг $\lambda \in \mathbf{R}$ **сонга кўпайтмаси** деб, элементлари $b_{ik} = \lambda a_{ik}$ сонлардан иборат $B \in M_{s,n}$ матрицага айтилади ва $B = \lambda A$ орқали белгиланади.

Матрицаларнинг кўпайтмаси амали ҳам киритилади. Уни таърифлашдан олдин иккита векторнинг скаляр кўпайтмасини киритамиз. Иккита n — ўлчамли $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ва $У = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ векторларнинг **скаляр кўпайтмаси** деб, $x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ сонга айтилади ва $(X, У)$ орқали белгиланади. Агар $A \in M_{s,n}$ ва $B \in M_{m,t}$ бўлса, у ҳолда A матрицанинг B матрицага кўпайтмаси фақат A матрицанинг устунлари сони B матрицанинг сатрлари сонига тенг бўлганда, яъни $n = m$ бўлгандагина таърифланади. Шунга кўра $A \in M_{s,n}$ ва $B \in M_{n,t}$ матрицаларни оламиз. Уларнинг **кўпайтмаси** деб, элементлари $c_{ik} = (A_i, B^k) = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pk}$ сонлар (A матрица i-сатрининг B матрица k — устунига скаляр кўпайтмаси) дан иборат C матрицага айтилади ва $C = A \cdot B$ орқали белгиланади. Бу таърифдан кўринадики, $C \in M_{s,t}$.

Шуни айтиш керакки, AB мавжуд бўлиши, аммо BA мавжуд бўлмаслиги мумкин. BA кўпайтма фақат $t = S$ бўлгандагина мавжуд. Бу ҳолда $A \cdot B \in M_{s,s}$ ва $B \cdot A \in M_{n,n}$. Агар $S \neq n$ бўлса, бу матрицалар турли, чунки улар турли тартибли квадрат матрицалар. Агар $S = n$ бўлса, у ҳолда AB ва BA бир хил тартибли квадрат матрицалар. Бу ҳолда, умуман айтганда, $AB \neq BA$. Масалан: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

бўлса, у ҳолда $AB = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$.

Демак $AB \neq BA$.

1-теорема. ***Матрицалар кўпайтмаси ассоциативлик хоссасига эга, яъни агар A, B, C матрицалар шундай бўлсаки, (AB) C, A (BC) кўпайтмаларнинг бири мавжуд бўлса, у ҳолда иккинчиси ҳам мавжуд ва (AB)C = A(BC) тенглик ўринли.***

Исбот. Масалан, $(AB)C$ кўпайтма мавжуд бўлсин.

У ҳолда $A \in M_{s,n} \cdot B \in M_{n,t}$, $AB \in M_{s,t}$, $C \in M_{t,u}$, $(AB)C \in M_{s,u}$. Бунга кўра $B \cdot C$ мавжуд, $BC \in M_{n,u}$ ва $A(BC)$ ҳам мавжуд, $A(BC) \in M_{s,u}$.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik})$, $C = (c_{ik})$, $A \cdot B = D = (d_{ik})$, $(AB)C = DC = F = (f_{ik})$, $BC = G = (g_{ik})$, $A(BC) = AG = H = (h_{ik})$.

Булардан:

$$d_{ik} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pk} \quad (i = \overline{1,s}, k = \overline{1,t}),$$

$$f_{ik} = \sum_{q=1}^{t} d_{iq} c_{qk} = \sum_{q=1}^{t} \sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pq} c_{qk} \quad (i = \overline{1,s}, k = \overline{1,u}),$$

$$g_{ik} = \sum_{q=1}^{t} b_{ik} c_{qk} \quad (i = \overline{1,n}, \ k = \overline{1,u})$$

$$h_{ik} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} q_{pk} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{t} a_{ip} b_{pq} c_{qk} (i = \overline{1,s}, k = \overline{1,u}).$$

Бу ердан барча $i = \overline{1,s}$ ва $k = \overline{1,u}$ учун $f_{ik} = h_{ik}$ эканлиги келиб чиқади. Демак $F = H$, яъни $(AB)C = A(BC)$.

Агар $A(BC)$ мавжуд бўлса, теореманинг исботи шунга ўхшаш. ■

Сатрлари E_1, E_2, ..., E_n ортлардан иборат n-тартибли ушбу

$$U_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

матрица **n-тартибли бирлик матрица** дейилади. Баъзан U_n ўрнига U ёки E ёзамиз. Бу матрицанинг асосий хоссаси қуйидагидан иборат: ҳар қандай $A \in M_{s,n}$ матрица учун $AU_n = A$ ва $U_sA = A$. Хусусан, ҳар қандай n-тартибли A квадрат матрица учун $U_nA = AU_n = A$. Бундан ва 1-теоремадан бевосита қуйидаги натижа келиб чиқади.

Натижа. *n-тартибли барча квадрат матрицалар тўплами матрицаларнинг кўпайтириш амалига нисбатан моноид ҳосил қилади.* Бу моноидни $(M_n, \cdot)$ орқали белгилаймиз. Хусусан, $n = 1$ да $(M_n, \cdot) = (R, \cdot)$, яъни ҳақиқий сонлар тўпламида кўпайтириш амали қаралиши натижасида ҳосил бўлган моноид бўлади.

2-теорема. ***Матрицаларни қўшиш ва кўпайтириш амаллари ўзаро дистрибутивлик қонуни билан боғланган, яъни агар A, B, C матрицалар шундай бўлсаки, A(B + C) ёки AB + AC ифодалар мавжуд бўлса, у ҳолда иккинчиси ҳам мавжуд ва A(B + C) = AB + AC тенглик ўринли.***

Бу теореманинг исботи 1-теореманинг исботига ўхшаш бўлгани учун уни бажаришни ўқувчига қолдирамиз.

3-теорема (детерминантларнинг кўпайтмаси ҳақида). *Агар A ва B бир хил тартибли квадрат матрицалар бўлса, у ҳолда* $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Исбот. $A, B \in M_n$ ва $A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik})$ бўлсин. У ҳолда

$$C = A \cdot B \in M_n.\ C = (c_{ik}),\ c_{ik} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pk}\ (i, k = \overline{1,n}) \text{ ва}$$

$$\det C = \sum_{\lambda \in S_n} \operatorname{sgn} \lambda c_{1\lambda_1} \ldots c_{n\lambda_n} = \sum_{\lambda \in S_n} \operatorname{sgn} \lambda \Big(\sum_{p_1=1}^{n} a_{1p_1} b_{p_1\lambda_1} \Big) \ldots$$

$$\Big(\sum_{p_n=1}^{n} a_{np_n} b_{p_n\lambda_n} \Big) = \sum_{\lambda \in S_n} \sum_{p_1=1}^{n} \ldots \sum_{p_n=1}^{n} a_{1p_1} b_{p_1\lambda_1} \ldots a_{np_n} b_{p_n\lambda_n} =$$

$$\sum_{p_1=1}^{n} \ldots \sum_{p_n=1}^{n} a_{1p_1} \ldots a_{np_n} \Big(\sum_{\lambda \in S_n} \operatorname{sgn} \lambda b_{p_1\lambda_1} \ldots b_{p_n\lambda_n} \Big) =$$

$$= \sum_{p_1, \ldots, p_n=1}^{n} a_{1p_1} \ldots a_{np_n} \Delta_{12 \ldots n}(B_{p_1}, \ldots, B_{p_2}),$$

бу ерда $\Delta_{12\ldots n}(B_{p1},\ldots,B_{pn})$ орқали сатрлари мос равишда $B_{p1},\ldots,B_{pn}$ векторлардан иборат детерминант белгиланади ($B_1,\ldots,B_n$ векторлар В матрицанинг сатрлари). Агар $P_1,\ldots,P_n$ сонлар ичида қандайдир иккитаси тенг бўлса, у ҳолда $\Delta_{12\ldots n}(B_{p1},\ldots,B_{pn})$ детерминантда иккита бир хил сатр мавжуд бўлади. Демак бу ҳолда бу детерминант нолга тенг. Агар $P_1,\ldots,P_n$ сонлар турли бўлса, у ҳолда $P = P_1,\ldots,P_n$ вектор $(1, 2, \ldots, n)$ тўпламнинг бирор ўрин алмаштириши бўлади. Бу ҳолда 20-§ даги 4-теоремага асосан

$$\Delta_{12\ldots n}(B_{p1},\ldots,B_{pn}) = \operatorname{sgn} p\Delta_{12\ldots n}(B_1,\ldots,B_n) = \operatorname{sgn} p \det B.$$

Бунга асосан (1) формуладан

$$\det C = \det B \sum_{p\in S(1,2\ldots,n)} \operatorname{sgn} pa_{1p_1}\ldots a_{np_n} = \det A \cdot \det B$$

Теорема исботланди.

Бу теоремани яна қуйидагича ҳам айтиш мумкин: M_n да аниқланган ва қийматлари R да бўлган $A \to \det A$ акс эттириш $(M_n\ \cdot)$ моноиднинг $(R,\ \cdot)$ моноидга гомоморфизмидир.

Агар $A \in M_n$ учун шундай $B \in M_n$ мавжуд бўлсаки, $AB = BA = U_n$ бўлса (U_n — бирлик матрица), A **тескариланувчи** дейилади. Бу ҳолда B матрица A га **тескари** дейилади.

Агар A матрицанинг тескариси мавжуд бўлса, у ҳолда 9-§ даги 3-теоремага асосан у ягона. A га тескари бўлган матрицани A^{-1} орқали белгилаймиз. Тескари матрицанинг таърифидан кўринадики, A^{-1} га тескари матрица A нинг ўзи, яъни $(A^{-1})^{-1} = A$.

Агар A матрица учун $\det A \neq 0$ бўлса, у **махсусмас** матрица дейилади.

4-теорема. ***А квадрат матрицанинг тескариланувчи бўлиши учун унинг махсусмас бўлиши зарур ва кифоя.*** Бу шарт бажарилганда

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

бу ерда A_{ij} сон a_{ij} элементнинг алгебраик тўлдирувчиси.

Исбот. A тескариланувчи бўлсин. У ҳолда шундай B матрица мавжудки, $AB = U_n$. У ҳолда 3-теоремага асосан $\det A \cdot \det B = \det U_n = 1$. Бундан $\det A \neq 0$.

Аксинча, $\det A \neq 0$ бўлсин. Ушбу $\Delta = \det A$ белгилаш киритиб, элементлари

$$b_{ik} = \frac{A_{ki}}{\Delta}$$

ифода билан аниқланувчи $B = (b_{ik})$ матрицани ва $C = AB$ кўпайтмани қараймиз. $C = (c_{ik})$ матрицанинг элементлари 21-§ даги 3-теоремага кўра ҳисобланади.

$$c_{ik} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pk} = \frac{1}{\Delta}\sum_{p=1}^{n} a_{ip} A_{kp} = \begin{cases} \text{агар } i = k \text{ бўлса}, 1, \\ \text{агар } i \neq k \text{ бўлса}, 0. \end{cases}$$

Шунга ўхшаш $BA = D = (d_{ik})$ матрицанинг ҳам элементлари ҳисобланади:

$$d_{ik} = \sum_{p=1}^{n} b_{ip} a_{pk} = \frac{1}{\Delta}\sum_{p=1}^{n} a_{pk} A_{pi} = \begin{cases} \text{агар } i = k \text{ бўлса}, 1, \\ \text{агар } i \neq k \text{ бўлса}, 0. \end{cases}$$

Демак, $AB = BA = U_n$ ва $A^{-1} = B$.

5-теорема. ***Агар квадрат матрицанинг сатрлари (устунлари) чизиқли эркли бўлса, у ҳолда у махсусмас.***

Исбот. n-тартибли A матрицанинг $A_1, \dots, A_n$ сатрлари чизиқли эркли бўлсин. 14-§ даги 4-теореманинг 2-натижасига кўра улар R^n да базис ҳосил қилади. У ҳолда 14-§ даги 3-теоремага асосан R^n даги ихтиёрий вектор бу базис орқали ягона усул билан ифодаланади. Хусусан, E_1, E_2, ... E_n ортлар бу базис орқали ифодаланади:

$$E_k = \sum_{p=1}^{n} b_{pk} A_p \; (k = \overline{1,n}).$$

Иккинчи томондан

$$A_p = \sum_{i=1}^{n} a_{ip} E_i \; (p = \overline{1,n}).$$

Булардан

$$E_k = \sum_{p=1}^{n} b_{pk} (\sum_{i=1}^{n} a_{ip} E_i) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pk}) E_i.$$

R^n да $E_1, \ldots, E_2, E_n$ ортлар базис ҳосил қилгани учун охирги тенгликдан

$$\sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pk} = \begin{cases} \text{агар}\, i = k \text{ бўлса}, 1, \\ \text{агар}\, i \neq k \text{ бўлса}, 0. \end{cases}$$

тенгликларни оламиз. Демак, $B = (b_{ik})$ шундай матрица эканки, $AB = U_n$. У ҳолда $\det A \cdot \det B = \det U_n = 1$. Бундан $\det A \neq 0$.

Устунлар учун исбот шунга ўхшаш.

Натижа. *Квадрат матрица детерминантининг ноль бўлиши учун унинг сатрлари (устунлари) чизиқли боғланган бўлиши зарур ва кифоя.*

Исбот. A матрицанинг детерминанти ноль бўлсин. У ҳолда унинг сатрлари (устунлари) чизиқли боғланган, чунки акс ҳолда 5-теоремага асосан $\det A \neq 0$ бўлар эди — бу эса берилганга зид.

Аксинча, A матрицанинг сатрлари (устунлари) чизиқли боғланган бўлсин. У ҳолда 20-§ даги 5-теореманинг 2-натижасига кўра $\det A = 0$. Натижа тўла исботланди.

6-теорема. ***Матрицалар кўпайтмасининг ранги кўпайтувчиларнинг рангларидан катта эмас.***

Исбот. $A \in M_{s,n}$, $B \in M_{n,t}$ ва $A \cdot B = C_n = (c_{ik})$ бўлсин. У ҳолда ушбу $c_{ik} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pk} \, (i = \overline{1,s}, k = \overline{1,t})$ тенгликлардан

$$C_i = \sum_{k=1}^{t} c_{ik} E_k = \sum_{k=1}^{t} (\sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pk}) E_k = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} (\sum_{k=1}^{t} b_{pk} E_k) =$$

$$= \sum_{p=1}^{n} a_{ip} B_p (i = \overline{1,s})$$

тенгликлар келиб чиқади.

Бу тенгликлар $C = AB$ матрицанинг сатрлари B матрицанинг сатрлари орқали ифодаланишини кўрсатади. Бундан 14-§ даги 4-теоремага кўра $r(A \cdot B) \leq r(B)$.

Юқоридаги тенгликларга ўхшаш ушбу

$$C^k = \sum_{i=1}^{s} c_{ik} E^i = \sum_{p=1}^{n} b_{pk} (\sum_{i=1}^{s} a_{ip} E^i) = \sum_{p=1}^{n} b_{pk} A^p (k = \overline{1,t}).$$

Бу тенглик $C = AB$ матрица устунлари A матрицанинг устунлари орқали ифодаланишини кўрсатади. Бундан 14-§ даги 4-теоремага кўра $r(AB) = r(A)$. Теорема исботланди.

Натижа. *Агар матрицани чапдан ёки ўнгдан махсусмас матрицага кўпайтирилса, унинг ранги ўзгармайди.*

Исбот. A — тўғрибурчакли матрица ва B — махсусмас матрица бўлсин. У ҳолда 6-теоремага асосан $r(AB) \leq r(A)$. Иккинчи томондан $A = AB \cdot B^{-1}$. Бундан яна 6-теоремага асосан $r(A) \leq r(A \cdot B)$. Демак $r(A) = r(A \cdot B)$.

Чапдан махсусмас матрицага кўпайтирилган ҳол шунга ўхшаш исботланади.

23-§. БИРГАЛИКДА БЎЛГАН ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР ТИЗИМИ ЕЧИМЛАРИ ТЎПЛАМИНИНГ ТУЗИЛИШИ

Дастлаб тизимнинг коэффициентлари матрицаси махсусмас квадрат матрица бўлган хусусий ҳолни кўрамиз.

1-теорема (Крамер қоидаси). *Агар $A = (a_{ik}) \in M_n$ махсусмас бўлса, у ҳолда*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_{12} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

чизиқли тенгламалар тизими ушбу

$$\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, \frac{\Delta_k}{\Delta}\right)$$

ягона ечимга эга, бу ерда $\Delta = det\ A$ ва Δ_k эса Δ нинг k-устунини озод ҳадлар устуни билан алмаштиришдан ҳосил бўлган детерминант $(k = \overline{1, n})$.

Исбот. Ушбу

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (2)$$

белгилар киритиб ва матрицаларни кўпайтириш амалидан фойдаланиб, (1) тизимни матрица кўринишида қуйидагича ёзиб оламиз:

$$AX = B. \qquad (3)$$

Шундай қилиб, (1) тизимни ечиш (3) кўринишдаги матрицали битта тенгламани ечишга тенг кучли.

A — махсусмас бўлгани учун (3) тенглама

$$X = A^{-1}B \qquad (4)$$

тенгламага тенг кучли, яъни (3) тенглама (4) кўринишдаги ягона ечимга эга. Бундан тескари матрицанинг кўринишидан (22-§, 4-теорема) фойдаланиб, номаълумларни топамиз:

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_{ik}}{\Delta} b_i = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{n} b_i A_{ik} = \frac{\Delta k}{\Delta}, \ (k = \overline{1, n}).$$

2-теорема. ***Матрицанинг ранги нолдан фарқли минорларининг энг юқори тартибига тенг.***

Исбот. $A \in M_{s,n}$ матрицанинг ранги r бўлсин. У ҳолда 16-§ даги 7-теореманинг натижасига кўра A да r та чизиқли эркли сатрлар мавжуд. Бу сатрлар ҳосил қилган матрицани B орқали белгилаймиз. У ҳолда $B \in M_{r,n}$ ва унинг ранги r га тенг. B нинг ранги r бўлгани учун 16-§ даги 7-теореманинг натижасига асосан B да r та чизиқли эркли устун мавжуд. Бу устунлар A матрицанинг r-тартибли минорни ҳосил қилади. Бу минор 22-§ даги 5-теореманинг натижасига кўра нолдан фарқли. Иккинчи томондан, агар $к > r$ бўлса, у ҳолда A нинг ранги r бўлгани учун A даги ихтиёрий k та сатр чизиқли боғланган. Бундан 22-§ даги 5-теореманинг натижасига асосан A нинг k-тартибли ихтиёрий минори нольга тенг эканлиги келиб чиқади.

A матрицанинг ранги r бўлсин. A нинг нольдан фарқли r-тартибли ихтиёрий минори **базис минори** деб аталади.

Қуйидаги теорема матрицанинг рангини ҳисоблашда ва унинг базис минорини топишда фойдали.

3-теорема. ***Агар А матрицанинг бирор r тартибли минори нольдан фарқли бўлиб, бу минорни ўз ичига олувчи ҳар қандай (r + 1)- тартибли минор нольга тенг бўлса, у ҳолда у базис миноридир*** (ва демак, A нинг ранги r га тенг).

Исбот. M - нольдан фарқли r - тартибли минор бўлсин. 22-§ даги 5-теореманинг натижасига кўра, M дан ўтувчи A нинг сатрлари чизиқли эркли. Уларни $A_1, \ldots, A_r$ орқали белгилаймиз. Теоремани исботлаш учун A нинг бошқа сатрлари бу сатрлар орқали чизиқли ифодаланишини кўрсатиш кифоя.

$A_1, ..., A_r, A_k$ сатрларни ўз ичига олувчи A нинг $(r + 1)$ та сатридан иборат матрицани B орқали белгилаймиз. M минорни ўз ичига олувчи A нинг ҳар қандай $(r + 1)$ - тартибли минори нольга тенг бўлгани сабабли, B нинг ҳар қандай устуни M минордан ўтувчи r та чизиқли эркли устунлар орқали чизиқли ифодаланади. Бунга кўра B нинг ранги r га тенг. Бундан A_k сатрнинг $A_1, ..., A_r$ сатрлар орқали чизиқли ифодаланиши келиб чиқади.

Энди биргаликда бўлган ихтиёрий чизиқли тенгламалар тизимини кўрамиз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases} \tag{4}$$

Ушбу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}\, a_{s2} \ldots a_{sn} \end{pmatrix}$$

белгилаш ва (2) белгилашлар киритиб, (4) тизимни

$$AX = B \tag{5}$$

матрица кўринишида ёзиб оламиз. Шундай қилиб, (4) тизимни ечиш (5) матрицали тенгламани ечишга тенг кучли. (5) матрицали тенглама билан (3) матрицали тенгламанинг кўриниши бир хил, аммо (5) да A квадрат матрица бўлмаслиги мумкин ёки мабодо квадрат матрица бўлса ҳам, унинг детерминанти ноль бўлиши мумкин.

n = ўлчамли $\bar{0}$ вектор ва

$$У = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

вектор олиб, (5) тенглама билан бирга ушбу

$$AУ = \bar{0} \qquad (6)$$

тенгламани ҳам қараймиз. Бу тенглама (5) тенгламага (ёки (4) тизимга) **мос бир жинсли** тенглама дейилади.

4-теорема. (а) ***Агар X_1, $X_2 \in R^n$ векторлар (5) нинг ечимлари бўлса, у ҳолда уларнинг $X_1 - X_2$ айирмаси (6) нинг ечимидир.***

в) ***Агар $X_0 \in R^n$ вектор (5) нинг ечими ва $У \in R^n$ вектор (6) нинг ечими бўлса, у ҳолда уларнинг $X_0 + У$ йиғиндиси (5) нинг ечимидир.***

с) ***Агар $X_0 \in R^n$ вектор (5) нинг бирор ечими ва X вектор (5) нинг ихтиёрий ечими бўлса, у ҳолда (6) нинг шундай $У \in R^n$ ечими мавжудки, $X = X_0 + У$.***

d) ***Бир жинсли тенгламанинг ихтиёрий ечимларининг чизиқли комбинацияси яна шу тенгламанинг ечимидир.***

Исбот. а) Бу ҳолда: $AX_1 = B$, $AX_2 = B$. Бу тенгламаларнинг биринчисидан иккинчисини айирсак: $A(X_1 - X_2) = \bar{0}$, яъни $X_1 - X_2$ вектор (6) нинг ечимидир.

в) Бу ҳолда: $AX_0 = B$, $AУ = \bar{0}$. Буларни қўшсак: $A(X_0 + У) = B$, яъни $X_0 + У$ вектор (6) нинг ечими.

с) Бу ҳолда $AX_0 = B$, $AX_1 = B$. Иккинчидан биринчини айирсак, $A(X_1 - X_2) = \bar{0}$, яъни $X_1 - X_0$ вектор (6) нинг ечими. Бу векторни $У$ орқали белгиласак, $X_1 = X_0 + У$.

d) Агар $У_1$, $У_2 \in R^n$ векторлар (6) нинг ечимлари бўлса, у ҳолда $AУ_1 = \bar{0}$, $AУ_2 = \bar{0}$. Бундан ихтиёрий $\lambda, \mu \in R$ сонлар учун $A(\lambda У_1 + \mu У_2) = \bar{0}$.

Энди ихтиёрий (4) тизимни ечишга ўтамиз. A матрицанинг ранги r бўлсин. (4) тизим биргаликда бўлгани учун бу тизимнинг кенгайтирилган A^1 матрицасининг ранги ҳам r га тенг. Бундан A^1 матрицанинг шундай r та чизиқли эркли сатри мавжудлиги келиб чиқадики, қолган ҳар қандай сатр бу сатрларнинг чизиқли комбинациясидан иборат. Бу эса (4) тизимнинг r та тенгламадан иборат шундай қисм тизими борлигини кўрсатадики, тизимнинг бошқа ҳар қандай тенгламаси бу r та тенгламанинг чизиқли комбинациясидир (натижасидир). Шундай қилиб, (4) тизимни ечиш бу r та тенгламадан иборат қисм тизимни ечишга келади.

Бу r та тенгламадан иборат қисм тизимни (керак бўлса, тенгламаларни рақамини ўзгартириб) биринчи r та тенгламалардан иборат деб ҳисоблашимиз мумкин.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases} \quad (7)$$

Шундай қилиб, (4) ва (7) тизимлар тенг кучли.

Керак бўлса, номаълумларнинг номерини ўзгартириб, ушбу

$$\begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1r} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}\, a_{r2} \ldots a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (8)$$

деб ҳисоблаш мумкин. Бу ҳолда $x_1, \ldots, x_r$ ларни **бош** номаълумлар ва $x_{r+1}, \ldots, x_n$ ларни эса **озод** номаълумлар деб атаймиз ва қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$X^б = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_r \end{pmatrix}, \; X^0 = \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \; B^1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_r \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} a_{11}\,a_{12}\dots a_{1r} \\ a_{21}\,a_{22}\dots a_{2r} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}\,a_{r2}\dots a_{rr} \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} a_{1r+1}\dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{rr+1}\dots a_{rn} \end{pmatrix}.$$

Бу ҳолда (7) тизимни

$$DX^б + CX^о = B^1 \tag{9}$$

матрица кўринишида ёзиш мумкин. Бунга мос бир жинсли тизимни ушбу

$$DX^б + CX^0 = \bar{0} \tag{10}$$

кўринишда ёзиш мумкин. (8) шартга кўра, $detD \neq 0$, демак D^{-1} — мавжуд.

X^0 вектор сифатида R^{n-r} фазонинг ихтиёрий T векторини оламиз. У ҳолда

$$DX^б = B^1 - CT,$$
$$X^б = D^{-1}(B^1 - CT).$$

Натижада

$$X = (D^{-1}(B^1 - CT), T) \in R^n \tag{11}$$

вектор (7) нинг ечимидир. Аксинча, (7) нинг ҳар қандай ечимини шундай кўринишда олиш мумкин. Ҳақиқатан, агар берилган *X ечимнинг охирги $n-r$* та координаталаридан ташкил топган векторни $X^0 = T$ билан белгилаб (9) тенгламага қўйсак, (11) ифодани оламиз.

Хусусан, X^0 сифатида ноль вектор олсак, (11) ифода $X = (D^{-1}B^1, \text{O})$ кўринишга эга бўлади. Бу вектор (9) нинг хусусий ечимидир. Юқоридаги мулоҳазалардан (10) бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$У = (-D^{-1}CT,\ T,) \tag{12}$$

кўринишга эга эканлиги ҳам келиб чиқади.

5-теорема. (10) бир жинсли тенгламалар тизимининг ечимлари тўпламининг ранги r га тенг.

Исбот. (10) тенгламанинг $T = E^i$ $\left(i = \overline{1, n-r}\right)$ га мос ечимини F^i орқали белгилаймиз (бу ерда E^i, ..., E^{n-r} лар R^{n-r} фазонинг устун шаклида олинган ортлари) ва $F_1^1, ..., F_-^{n-1} \in R^n$ векторлар тизими чизиқли эркли эканлигини кўрсатамиз. Бу векторларни сатр деб олиб, $(n-r)$ та сатрли ва n та устунли матрица тузсак, бу матрицанинг охирги $(n-r)$ та устунидан тузилган матрица $(n-r)$-тартибли бирлик матрицадир. Шунинг учун бунга мос $(n-r)$-тартибли минор нольдан фарқли. Демак $F_1^1, ..., F_-^{n-r}$ векторлар тизими чизиқли эркли.

Энди T сифатида ихтиёрий $T = (t_1, ..., t_{n-r})$ векторни оламиз. У ҳолда $T = t_1 E^1 + t_2 E^2 + ... + t_{n-r} E^{n-r}$ тенгликдан ва (12) ифодадан

$$У = t_1 F^1 + ... + t_{n-r} F^{n-r}$$

тенглик келиб чиқади. Бундан ва 4-теоремадан теореманинг исботи келиб чиқади.

Натижа. (4) *тизимнинг ихтиёрий ечими* $X_0 + t_1 F^1 + + ... + t_{n-r} F^{n-r}$ *кўринишида ифодаланиши мумкин, бу ерда* $X_0 \in R^n$ *вектор (4) нинг хусусий ечими,* $F^1, ..., F^{n-r} \in R^n$ *векторлар эса (4) га мос бир жинсли тизимнинг чизиқли эркли ечимлари тизимидир.* $t_1, t_2, ..., t_{n-r} \in R$.

Исбот. Натижанинг исботи 5–теореманинг исботидан ва 4–теоремадан келиб чиқади.

(10) тизимнинг ечимлари тўпламининг ихтиёрий базиси (10) тизимнинг **фундаментал ечимлар тизими** дейилади.

Бешинчи боб

ҲАЛҚАЛАР ВА МАЙДОНЛАР. КОМПЛЕКС СОНЛАР МАЙДОНИ

24-§. ҲАЛҚАЛАР ВА МАЙДОНЛАР. БОШЛАНҒИЧ МАЪЛУМОТЛАР

K тўпламда иккита бинар амал аниқланган бўлсин. Уларнинг биттасини қўшиш амали деб атаймиз ва $a, b \in K$ элементларнинг йиғиндисини $a + b$ орқали белгилаймиз. Иккинчисини кўпайтириш амали деб атаймиз ва $a, b \in K$ элементларнинг кўпайтмасини $a \cdot b$ орқали белгилаймиз.

K тўпламда аниқланган қўшиш ва кўпайтириш амаллари қуйидаги шартларни қаноатлантирса, у **ҳалқа** дейилади:

I. K тўплам қўшиш амалига нисбатан коммутатив гуруҳ ҳосил қилади.

II. K тўплам кўпайтириш амалига нисбатан яримгуруҳ ҳосил қилади.

III. Қўшиш ва кўпайтириш амаллари дистрибутивлик қонунлари билан боғланган:

$$a(b + c) = ab + ac,$$
$$(a + b)c = ac + bc.$$

Мисоллар: 1) Z, Q, R тўпламлар сонларни қўшиш ва кўпайтириш амалига нисбатан ҳалқа ҳосил қилади.

2) $[a, b]$ оралиқдаги барча узлуксиз функциялардан иборат $C\,[a, b]$ тўплам функцияларнинг қўшиш ва кўпайтириш амалига нисбатан ҳалқа ҳосил қилади.

3) Берилган $m(m > 1)$ натурал сонга бўлинувчи барча бутун сонлардан иборат mZ тўплам сонларни қўшиш ва кўпайтириш амалига нисбатан ҳалқа ҳосил қилади.

4) Элементлари мос равишда Z, Q, R ҳалқаларда ётувчи барча n-тартибли квадрат матрицалардан иборат $M_n(Z)$,

$M_n(Q)$, $M_n(R)$ тўпламлар матрицаларни қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан ҳалқа ҳосил қилади.

Агар K ҳалқада кўпайтириш амали коммутатив бўлса, у **коммутатив ҳалқа** дейилади. Юқорида келтирилган Z, Q, R, $C\,[a, b]$, mZ ҳалқалар коммутатив, аммо $M_n(Z)$, $M_n(Q)$, $M_n(R)$ $(n > 1)$ҳалқалар эса коммутатив эмас.

Агар K ҳалқада кўпайтириш амали учун $I \in \mathrm{K}$ бирлик элемент мавжуд (яъни ҳар қандай $a \in K$ учун $aI = Ia = a$) бўлса, I элемент K ҳалқанинг **бирлик элементи** ва K эса **бирлик элементли ҳалқа** дейилади. Баъзан K ҳалқанинг бирлик элементи 1 орқали ҳам белгиланади.

Юқорида келтирилган Z, Q, R, $C\,[a, b]$, $M_n(Z)$, $M_n(Q)$, $M_n(R)$ ҳалқалар бирлик элементга эга, mZ ҳалқа эса эга эмас. Z, Q, R да бирлик элементи ролини 1 сони ўйнайди. $C\,[a, b]$ да бирлик элемент ролини $[a, b]$ да айнан 1 га тенг бўлган функция ўйнайди. $M_n(Z)$, $M_n(Q)$, $M_n(R)$ ҳалқаларда бирлик элемент ролини бирлик матрица ўйнайди.

Ҳалқа қўшиш амалига нисбатан гуруҳ бўлгани сабабли унда қўшиш амалига нисбатан умумлашган ассоциатив қонун ўринли. Ҳалқа кўпайтириш амалига нисбатан ярим гуруҳ бўлгани сабабли унда кўпайтириш амалига нисбатан ҳам умумлашган ассоциатив қонун ўринли.

Қўшиш ва кўпайтириш амалларининг дистрибутивлик қонунларидан n бўйича математик индукция ёрдамида ҳар қандай a_1, b_1, ..., $b_n \in K$ элементлар учун бевосита қуйидаги тенгликлар олинади:

$$a(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = ab_1 + ab_2 + \ldots + ab_n,$$

$$(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)a = b_1a + b_2a + \ldots + b_na.$$

Булардан эса ҳар қандай a_1, a_2, ..., a_n, b_1, ..., $b_m \in K$ элементлар учун бевосита қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{k=1}^{m} b_k\right) = \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{k=1}^{m} a_ib_k$$

Бу йиғиндида қўшилувчиларнинг қандай тартибда ёзилишининг аҳамияти йўқ (яъни йиғинди ўзгармайди), аммо коммутатив бўлмаган ҳалқада кўпайтувчиларнинг қандай тартибда ёзилиши муҳим.

Ҳар қандай ҳалқада айириш ва кўпайтириш амаллари дистрибутивлик қонуни билан боғланган, яъни ҳар қандай $a, b, c \in K$ элементлар учун

$$(a-b)c = ac - bc, \quad a(b-c) = ab - ac.$$

Буларнинг, масалан, биринчисини исботлаймиз. Ушбу

$$(a-b)c + bc = ((a-b)+b)c = ac$$

тенгликдан

$$((a-b)c + bc) - bc = ac - bc,$$

яъни

$$(a-b)c = ac - bc$$

келиб чиқади.

Бу дистрибутивлик қонунидан ҳар қандай $a \in K$ элемент учун қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0,$$

бу ерда 0 — ҳалқадаги қўшиш амалининг ноль элементи.

Ҳақиқатан, $a \cdot 0 = a(b-b) = ab - ab = 0$. Шунга ўхшаш $0 \cdot a = (b-b)a = ba - ba = 0$.

K бирлик элементли ҳалқа бўлсин. Агар $a \in K$ учун $a \cdot b = b \cdot a = I$ тенгликларни қаноатлантирувчи $b \in K$ элемент мавжуд бўлса, a элемент **тескариланувчи** ва b элемент эса a га **тескари** дейилади.

9-§ даги 3-теоремага асосан, агар a га тескари элемент мавжуд бўлса, у ягона. Бу ҳолда уни a^{-1} орқали белгилаймиз. Бу a^{-1} элементнинг ўзи ҳам тескариланувчи бўлиб, a унга тескари, яъни $(a^{-1})^{-1} = a$.

Z ҳалқада фақат 1 ва -1 сонлар тескариланувчи.

Q ва R ҳалқаларда нольдан бошқа барча элементлар тескариланувчи. $C[a,b]$ ҳалқада тескариланувчи элементлар $[a,b]$ да нольдан фарқли бўлган функциялардан иборат. $M_n(Z)$ ҳалқада тескариланувчи элементлар детерминанти 1 ва -1 бўлган матрицалардан иборат. $M_n(Q)$ ва $M_n(R)$ ҳалқаларда тескариланувчи элементлар махсусмас матрицалардан иборат.

Агар K ҳалқа ягона элементдан иборат бўлса, у фақат нольдан иборат бўлади. Бу ҳалқа **ноль ҳалқа** дейилади. Ноль ҳалқада $1 = 0$.

Бирлик элементли K ҳалқада биттадан ортиқ элемент бўлсин. У ҳолда унда нольдан фарқли элемент мавжуд. Бу ҳалқада $1 \neq 0$, чунки акс ҳолда $1 = 0$ бўлиб, $a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0$ тенглик олинарди. Бу қарама-қаршилик $1 \neq 0$ эканини кўрсатади. Бундай ҳалқада 0 элемент тескариланувчи эмас, чунки ҳар қандай $b \in K$ элемент учун $0 \cdot b = 0 \neq 1$.

Агар K ҳалқада нольдан фарқли a ва b элементлар учун $a \cdot b = 0$ бўлса, a ва b элементлар **нольнинг бўлувчилари** дейилади. Бундай элементларга эга бўлган ҳалқа **нольнинг бўлувчисига эга** ҳалқа дейилади. Z, mZ, Q, R ҳалқалар нольнинг бўлувчиларига эга эмас. $C(-\infty, +\infty)$ ҳалқада $f(t) = |t| + t$ ва $g(t) = |t| - t$ функциялар нольнинг бўлувчиларидир. $M_n(Z)$, $M_n(Q)$ ва $M_n(R)$ ҳалқалар ҳам нольнинг бўлувчиларига эга. Масалан

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Агар камида иккита элементга эга бўлган бирлик элементли коммутатив ҳалқада ҳар қандай нольдан фарқли элемент тескариланувчи бўлса, бундай ҳалқа **майдон** дейилади.

Юқорида келтирилган мисоллар ичида фақат Q ва R ҳалқалар майдондир.

Майдонга яна бир мисол келтирамиз. $Q(\sqrt{2})$ орқали $a + b\sqrt{2}$ $(a, b \in Q)$ кўринишдаги ҳақиқий сонлар тўпламини белгилаймиз. Ҳақиқий сонларни қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан бу тўплам нолдан фарқли бирлик элементли ҳалқадир:

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)+\left(c+d\sqrt{2}\right)=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}\in Q\left(\sqrt{2}\right),$$

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)\cdot\left(c+d\sqrt{2}\right)=(ac+2bd)+(ad+2bc)\sqrt{2}\in Q\left(\sqrt{2}\right),$$

$$1=1+0\sqrt{2}\in Q\left(\sqrt{2}\right).$$

Агар $a+b\sqrt{2}\neq 0$ бўлса, у ҳолда $\sqrt{2}$ иррационал бўлгани учун $a^2-2b^2\neq 0$. Бундан

$$\frac{1}{a+b\sqrt{2}}=\frac{a}{a^2-2b^2}-\frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}\in Q\left(\sqrt{2}\right),$$

чунки

$$\frac{a}{a^2-2b^2},\ -\frac{b}{a^2-2b^2}\in Q.$$

Демак, $Q\left(\sqrt{2}\right)$ — майдон.

Майдонда нольнинг бўлувчилари йўқ. Ҳақиқатан, агар $a\cdot b=0$ ва масалан, $a\neq 0$ бўлса, бу ҳолда a^{-1} мавжуд бўлгани учун $a^{-1}(ab)=0$, яъни $(a^{-1}a)b=b=0$.

F — майдон бўлсин. Агар $a,b\in F$ ва $b\neq 0$ бўлса, у ҳолда $a\cdot b^{-1}$ элемент **сурати a ва махражи b бўлган каср** дейилади ва баъзан $\frac{a}{b}$ кўринишида ҳам белгиланади. Ихтиёрий майдондаги касрлар учун сонли касрларга хос бўлган асосий қонунлар ўринли

1) ҳар қандай $c\in F$ $(c\neq 0)$ элемент учун

$$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}.$$

2) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$.

3) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.

4) $a\neq 0$ бўлганда

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}.$$

Буларни исботлашни ўқувчига қолдирамиз.

Бу хоссалар ихтиёрий майдонда қўшиш, айириш, кўпайтириш ва нольдан фарқли элементларга бўлиш амаллари мавжуд бўлиб, улар одатдаги "арифметик" хусусиятларга эга бўлишини кўрсатади. Бу жиҳат ихтиёрий майдон устида чизиқли тенгламаларни кўришга ва ечишга имкон беради. Илгариги бобларда кўрилган R устидаги векторларга, матрицаларга, детерминантларга ва чизиқли тенгламалар тизимларига оид барча теоремалар R майдонни ихтиёрий майдон билан алмаштирилса ҳам ўринлилигича қолади.

Бевосита текшириш бунда 20-§ даги 4-теорема 2-натижасининг биринчи исботидан бошқа барча теоремаларнинг исботида ишлатилган мулоҳазалар ихтиёрий майдонлар учун ҳам яроқли эканини кўрсатади.

20-§ даги 4-теорема 2-натижасининг биринчи исботидаги мулоҳазалар баъзи бир майдонлар (характеристикаси 2 га тенг майдонлар; майдоннинг характеристикаси тушунчаси кейинроқ киритилади) учун ўринли эмас. Аммо бу натижанинг келтирилган иккинчи исботидаги мулоҳазалар ихтиёрий майдонлар учун ҳам ярайди.

K ва K' — ҳалқалар бўлсин. Агар $\varphi : K \to K'$ акс эттириш ҳар қандай $x, y \in K$ элементлар учун

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y),$$
$$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x)\,\varphi(y)$$

тенгликларни қаноатлантирса, у K ҳалқанинг K' ҳалқага **гомоморф акс эттириши (гомоморфизми)** дейилади. Агар φ гомоморфизм шу билан бирга биекция ҳам бўлса, у **изоморф акс эттириш (изоморфизм)** дейилади.

Агар φ — изоморфизм бўлса, у ҳолда φ^{-1} акс эттириш ҳам изоморфизм. Бу тасдиқнинг исботи гуруҳлар учун илгари келтирилган мос тасдиқнинг исботига ўхшаш.

Худди гуруҳлар каби изоморф ҳалқалар алгебраик хусусиятлари билан бир-биридан фарқ қилмайди. Масалан, коммутативлик, бирлик элементнинг мавжудлиги ёки нольнинг бўлувчилари мавжудлиги иккита изоморф ҳалқаларда ё бир вақтда бажарилади, ё бир вақтда бажарилмайди. Агар K — майдон бўлса, у ҳолда унга изоморф ҳалқа ҳам майдон.

Изоморф ҳалқалар ва майдонларнинг алгебраик хоссалари бир хил бўлгани учун келажакда бундай ҳалқа ва майдонларни бир-биридан фарқ қилмаймиз.

Мисол кўрамиз. K — бирор ҳалқа ва 0 — унинг ноль элементи бўлсин. K^2 нинг ушбу қисмини K' орқали $\{(x, 0), x \in K\}$ белгилаймиз. K' да қўшиш ва кўпайтириш амалларини қуйидагича киритамиз:

$$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0),$$
$$(x, 0) \cdot (y, 0) = (x \cdot y, 0).$$

Бу амалларга нисбатан K' ҳалқа бўлиб, $\varphi(x) = (x, 0)$ ифода билан берилган акс эттириш K ва K' ҳалқаларнинг изоморфизми эканлиги бевосита текширилади.

1-теорема. ***Агар K — бирлик элементли ҳалқа бўлса, у ҳолда K даги барча тескариланувчи элементлардан иборат G тўплам K даги кўпайтириш амалига нисбатан гуруҳ ҳосил қилади.***

Исбот. Агар $x, y \in G$ бўлса, у ҳолда $xy \in G$, чунки $y^{-1}x^{-1}xy = xyy^{-1}x^{-1} = 1$, яъни $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$). G даги элементлар кўпайтмасининг ассоциативлиги бу кўпайтманинг K да ассоциативлигидан келиб чиқади. Ушбу $1\ 1 = 1$ тенгликдан $1 \in G$ муносабат, ҳар қандай $x \in G$ учун $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ ва $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ муносабатлар келиб чиқади, яъни G — гуруҳ.

Натижа. *Майдоннинг нольдан фарқли элементлари майдондаги кўпайтириш амалига нисбатан гуруҳ ҳосил қилади.*

Бу гуруҳ майдоннинг **мультипликатив гуруҳи** дейилади.

Агар P, F — майдонлар бўлиб, $F \subseteq P$ ва P даги амаллар F нинг элементлари учун кўрилганда F даги амаллар билан бир хил бўлса, P майдон F майдоннинг **кенгайтмаси** дейилади. Масалан $Q(\sqrt{2})$ ва R майдонлар Q нинг кенгайтмаси, R майдон эса $Q(\sqrt{2})$ нинг кенгайтмаси.

25-§. КОМПЛЕКС СОНЛАР

Агар C майдон R ҳақиқий сонлар майдонининг кенгайтмаси бўлиб, қуйидаги иккита шартни қаноатлантирса, у **комплекс сонлар майдони** дейилади:

1. Ушбу $i^2 = -1$ тенгликни қаноатлантирувчи $i \in C$ элемент мавжуд; бундай элемент **мавҳум бирлик** дейилади.

2. Ҳар қандай $z \in C$ элемент учун шундай $a, b \in R$ ҳақиқий сонлар мавжудки, $Z = a + bi$ ўринли.

C майдоннинг элементлари **комплекс сонлар** деб аталади.

Бундай кенгайтманинг мавжудлигини кўрсатамиз.

Бунинг учун R^2 да қўшиш ва кўпайтириш амалларини киритамиз. Қўшиш амали сифатида векторларни қўшиш амалини оламиз:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d). \tag{1}$$

Кўпайтириш амалини ушбу

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad) \tag{2}$$

ифода (формула) билан аниқлаймиз.

Қўшиш амалига нисбатан R^2 нинг коммутатив гуруҳ эканлиги илгари кўрсатилган эди. Бунда $(0, 0)$ элемент бу гуруҳнинг ноль элементидир.

Кўпайтиришнинг коммутативлиги (2) ва ушбу

$$(c, d) \cdot (a, b) = (ca - db, da + cb)$$

ифодаларнинг ўнг томонидаги векторларнинг тенглигидан келиб чиқади. Ассоциативлиги эса қуйидаги тенгликлардан келиб чиқади:

$$[(a, b) \cdot (c, d)](p,q) = (ac - bd, bc + ad)(p, q) =$$
$$= (acp - bdp - bcq - adp, bcp + adp + acq - bdq),$$
$$(a, b)[(c, d)(p, q)] = (a, b)(cp - dq, cq + dp) =$$
$$= (acp - adq - bcq - bdp, acq + adp + bcp - bdq)$$

Дистрибутивлик хоссалари эса қуйидаги тенгликлардан келиб чиқади:

$$[(a,\ b) + (c,\ d)](p,q) = (a + c,\ b + d)(p,\ q) = (ap + cp - bq - \\ - dq,\ aq + cq + bp + dp),\ (a,\ b)(p,\ q) + (c,\ d)(p,\ q) = \\ = (ap - -bq,\ bp + aq) + (cp - dq,\ cq + dp) = \\ = (ap - bq + cp - dq,\ bp + aq + cq + dp).$$

Демак R^2 тўплам бу амалларга нисбатан ҳалқа экан. Ушбу (1, 0) элемент шундай хусусиятга эгаки, ҳар қандай $(a,\ b) \in R^2$ элемент учун

$$(1,0)(a,\ b) = (a,\ b),$$

яъни (1,0) элемент R^2 нинг бирлик элементи. Нольдан фарқли ихтиёрий $(a,\ b) \in R^2$ элементни оламиз: $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$. У ҳолда a, b сонларнинг камида бири нольдан фарқли, яъни $a^2 + b^2 \neq 0$.

Ушбу

$$(a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2},\ -\frac{b}{a^2+b^2}\right) = (1,0)$$

тенглик кўрсатадики, R^2 да нольдан фарқли ҳар қандай $(a,\ b)$ элемент тескариланувчи ва $(a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2},\ -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$.

Демак, R^2 тўплам киритилган қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан майдондир. Бу майдонни C орқали белгилаймиз ва уни комплекс сонлар майдони деб атаймиз. Бу майдон R майдоннинг кенгайтмаси эканлигини ва юқорида келтирилган иккита хоссани қаноатлантиришини кўрсатамиз.

$C = R^2$ да $(x,\ 0)$ кўринишидаги барча векторлар тўпламини R' орқали белгилаймиз. Юқорида киритилган (1) қўшиш ва (2) кўпайтириш амалларини R' элементларида қараймиз:

$$(a,\ 0) + (c,\ 0) = (a + c,\ 0),$$
$$(a,\ 0) \cdot (c,\ 0) = (a \cdot c,\ 0).$$

Бу формулалардан R' нинг майдон эканлиги бевосита келиб чиқади. Демак, C майдон R' майдоннинг кенгайтмаси. 24-§ да $K = R$ нинг $K' = R'$ га изоморф эканлиги кўрсатилган эди. Изоморф майдонларни алгебраик нуқтаи назардан бир хил деб ҳисоблаганимиз учун C майдондаги R^1 майдонни R майдон билан айнийлаштирамиз. Келажакда $(a, 0)$ ўрнига a ёзамиз.

Ушбу

$$(0,1)(0,1) = (-1,\ 0) = -1$$

тенглик кўрсатадики, агар $(0,1)$ ни i орқали белгиласак, у ҳолда $i^2 = -1$. Демак, C майдонда юқорида айтилган биринчи шарт ўринли.

Ихтиёрий $(a,\ b) \in C$ учун $(a,\ b) = (a,\ 0) + (0,\ b) = (a,\ 0) + (b,\ 0) \cdot (0,1) = a + bi$

тенгликни ёзишимиз мумкин. Демак, C майдон учун юқоридаги иккинчи шарт ҳам ўринли, яъни ҳар қандай $z = (a, b) \in C$ элемент

$$z = a + bi \tag{3}$$

кўринишда ёзилиши мумкин. Берилган $(a,\ b)$ вектор ўз координаталари билан тўла аниқлангани учун уни (3) кўринишда ягона усул билан ёзиш мумкин (3) ифодадаги a сони z комплекс соннинг **ҳақиқий қисми** дейилади ва Rez орқали белгиланади. Ундаги b сони эса z комплекс соннинг **мавҳум қисми** дейилади ва Imz орқали белгиланади. Шундай қилиб, ҳақиқий сонлар мавҳум қисми ноль бўлган комплекс сонлардир. Ҳақиқий қисми ноль бўлган комплекс сонлар, яъни $bi(b \in R)$ кўринишидаги сонлар **соф мавҳум** комплекс сонлар дейилади.

Агар R ҳақиқий сонлар тўпламини тўғри чизиқ сифатида геометрик талқинини қарасак, у ҳолда R^2 ни текислик деб қарашимиз мумкин.

(3) формула R^2 текислик нуқталари билан комплекс сонлар майдони орасида биекция ўрнатади. Бу биекция C

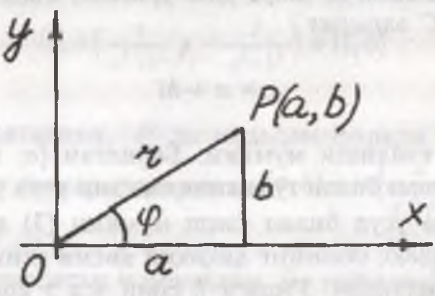
9—*Ж.Ҳожиев*

комплекс сонлар майдонининг **геометрик талқини,** текислик эса — **комплекс текислик** дейилади.

Комплекс сонларни комплекс текисликнинг нуқталари деб ҳам гапирилади. Бунда ҳақиқий сонларга абсцисса ўқининг нуқталари, соф мавҳум сонларга эса ордината ўқининг нуқталари мос келади. Шунинг учун баъзан абсцисса ўқи – **ҳақиқий ўқ,** ордината ўқи эса **мавҳум ўқ** дейилади.

Комплекс текисликда қутб координат тизимини киритамиз. Қутб сифатида O нуқта ва қутб ўқи сифатида ҳақиқий мусбат ярим ўқни (абсциссалар ўқининг мусбат ярим ўқини) оламиз (1-шакл).

Текисликдаги $P(a, b)$ нуқтанинг (z, φ) қутб координаталари қуйидагича аниқланади: P нуқтадан координаталар бошигача бўлган масофа ва Ox қутб ярим ўқи билан OP кесма орасидаги φ бурчак билан P нуқтанинг текисликдаги ўрни тўла аниқланади. r — қутб радиуси ва φ — қутб бурчаги дейилади.



1-шакл.

r масофа бўлгани учун у доим манфий бўлмаган ҳақиқий сонга ва фақат $P = 0$ бўлгандагина нольга тенгдир. φ бурчак бўлгани учун унинг қийматлари $0 \leq \varphi < 2\pi$ тенгсизликни қаноатлантириши керак.

Аммо шундай масалалар учрайдики, уларда ихтиёрий ҳақиқий қийматли (яъни қийматлари $[0,2\pi)$ ораликдан ташқарида ётган) бурчаклар билан иш кўришга тўғри келади. Келишувга мувофиқ мусбат бурчаклар соат мили юришига қарши йўналишда ва манфий бурчаклар соат стрелкаси юриши йўналиши бўйича ҳисобланади. Қутб координаталари (r, φ) ва $(r, \varphi + 2k\pi)$ бўлган жуфтлар ҳар қандай k бутун сон учун текисликда битта нуқтага мос келади.

1-шаклдаги тўғри бўрчакли OPQ учбурчакдан P нуқтанинг (a, b) декарт координаталари билан (r, φ), қутб координаталари $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$ тенгликлар билан боғланганлиги олинади. Агар $P(a, b)$ нуқта берилган бўлса, у ҳолда унинг қутб радиуси $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ тенглик орқали топилади. $r \neq 0$ ҳолда унинг қутб бурчаги π га ёки 2π га каррали бўлган сон аниқлигида $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$ тенгликлардан топилади. $r = 0$ ҳолда унинг қутб бурчаги ихтиёрий ҳақиқий сон. $z = a + bi$ комплекс соннинг қутб радиуси унинг **модули** дейилади ва $|z|$ орқали белгиланади.

Ушбу $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ифодадан ва $a = Rez$, $b = ImZ$ белгилардан бевосита $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$ тенгсизликлар келиб чиқади.

$|z|$ функция z нинг бир қийматли функциясидир. $z = a + bi$ комплекс соннинг қутб бурчаги унинг **аргументи** дейилади ва $Argz$ орқали белгиланади. Агар φ сон z комплекс соннинг қутб бурчаги бўлса, ҳар қандай k бутун сон учун $\varphi + 2\pi k$ ҳам z нинг қутб бурчаги бўлгани сабабли $Argz$ функция z нинг кўп қийматли функциясидир. Демак, берилган $z (z \neq 0)$ учун $Argz$ битта сон эмас, балки $\{\varphi + 2\pi k\}$ кўринишдаги барча сонлар тизими (бу ерда k ихтиёрий бутун сон).

Ушбу $z = a + bi$ ифода одатда z комплекс соннинг **алгебраик ифодаси** дейилади. Бу ифодадан ва $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$ тенгликлардан фойдаланиб, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ифодани оламиз. Бу z комплекс соннинг **тригонометрик ифодаси** дейилади. Комплекс соннинг тригонометрик ифодаси қуйидаги маънода ягона:

1-теорема. ***Агар $z (z \neq 0)$ комплекс соннинг иккита $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ва $z = r^1(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$ тригонометрик ифодалари берилган бўлса, у ҳолда $r = r'$ ва шундай k бутун сон мавжудки, $\varphi = \varphi' + 2\pi k$.***

Исбот. Ҳақиқатан, бу ҳолда $r\cos\varphi = r'\cos\varphi'$, $r\sin\varphi = r'\sin\varphi'$. Булардан

$$r = \sqrt{(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2} = \sqrt{(r'\cos\varphi')^2 + (r'\sin\varphi')^2} = r'.$$

У ҳолда $z \neq 0$ бўлгани учун $\cos\varphi = \cos\varphi'$, $\sin\varphi = \sin\varphi^1$. Бу тенгликлардан φ ва φ^1 бурчакларнинг бир-биридан $2\pi k$ (k — бутун сон) га фарқ қилиши келиб чиқади.

Комплекс сонлар устида қўшиш ва айириш амалларини бажаришда уларнинг алгебраик ифодаси билан иш кўриш қулай. Комплекс сонларнинг тригонометрик ифодаси эса комплекс сонларни кўпайтиришда, бўлишда ва даражага кўтаришда қўл келади.

Агар $Z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $Z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ бўлса, у ҳолда $Z_1 \cdot Z_2 = r_1 r_2[(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_1 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_2 \cos\varphi_1)] = r_1 \cdot r_2[(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))]$.

Бундан 1-теоремага асосан $r_1 \cdot r_2 = |Z_1 \cdot Z_2|$, яъни

$$|Z_1 \cdot Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2| \tag{4}$$

Юқорида олинган тенгликдан

$$Arg(Z_1 \cdot Z_2) = ArgZ_1 + ArgZ_2 \quad (5)$$

тенглик ҳам келиб чиқади. Бу тенглик қуйидагича тушунилади $Arg(Z_1 \cdot Z_2)$ сонлар тизими $\varphi + \psi$, $\varphi \in ArgZ_1$ $\varphi \in ArgZ_2$ кўринишидаги сонлар тизимидан иборат.

(4) тенглик гомоморфизмлар ёрдамида қуйидагича талқин қилинади:

C майдонни кўпайтиришга нисбатан яримгуруҳ ва R_0 — манфий бўлмаган ҳақиқий сонлар тўпламини кўпайтиришга нисбатан яримгуруҳ деб қарасак, у ҳолда (4) тенглик $Z \to |Z|$ мосликнинг C ва R_0 яримгуруҳлар гомоморфизми эканлигини кўрсатади.

(5) тенглик ҳам гомоморфизм сифатида талқин қилиниши мумкин. Бу гомоморфизм устида кейинроқ тўхталамиз. Математик индукция ёрдамида ҳар қандай

$Z_k = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k)$, $k = \overline{1,n}$ комплекс сонлар учун қуйидаги тенгликлар олинади:

$$Z_1 \cdot Z_2 \dots\dots Z_n = |Z_1| \cdot |Z_2| \dots\dots |Z_n| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n), \qquad (6)$$

яъни $|Z_1 \cdot Z_2 \dots\dots Z_n| = |Z_1| \cdot |Z_2| \dots\dots |Z_n|$ ва

$$Arg(Z_1 \cdot Z_2 \dots\dots Z_n) = ArgZ_1 + ArgZ_2 + \dots + ArgZ_n.$$

2-теорема (Муавр формуласи). ***Ҳар қандай n бутун сон ва ҳар қандай $\varphi \in R$ бурчак учун***

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin\varphi$$

тенглик ўринли.

Исбот. (6) формулада $r_1 = r_2 = \dots = r_n = 1$ ва $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_n = \varphi$ деб олсак, (7) формуланинг n натурал сонлар учун ўринли эканлиги келиб чиқади.

Ушбу

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-1} = \frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} =$$
$$= \cos\varphi - i\sin\varphi = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) \qquad (8)$$

тенглик (7) нинг $n = -1$ да ўринли эканлигини кўрсатади. Энди ихтиёрий n манфий бутун сонни оламиз. Уни, $n = -m$, $m \in N$, деб олиб, (7) тенгликнинг ҳар қандай натурал сон учун ва $n = -1$ учун ўринлилигидан фойдаланиб, қуйидаги тенгликни оламиз:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-m} =$$
$$= \left((\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-1}\right)^m = (\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))^m =$$
$$= \cos(-m\varphi) + i\sin(-m\varphi) = \cos n\varphi + i\sin n\varphi,$$

яъни (7) тенглик n манфий бутун сон учун ҳам ўринли.

Агар $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ бўлса, у ҳолда (6) ва (8) тенгликлардан

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Демак,

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|,\ Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Argz_1 - Argz_2.$$

Комплекс соннинг модули ҳақиқий сон абсолют қиймати (модули) тушунчасининг умумлашмасидир: агар $z = x + yi$ ҳақиқий сон бўлса, у ҳолда $y = 0$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2} = |x|$. Ҳар қандай $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ учун $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$, $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Демак $|z_1 - z_2|$ сон комплекс текисликдаги z_1 ва z_2 нуқталар орасидаги масофадир. ($|x_1 - x_2|$ сон тўғри чизиқдаги x_1 ва x_2 нуқталар орасидаги масофа бўлгани каби). Бунга кўра, агар $z_0 \in C$, $r \in R$, $r > 0$ бўлса, у ҳолда $\{Z \in C: |Z - Z_0| = r\}$, $\{z \in C: |z - z_0| < r\}$, $\{z \in C: |z - z_0| \le r\}$ тўпламлар мос равишда маркази z_0 нуқтада радиуси r бўлган айланани, очиқ ва ёпиқ доираларни ифодалайди.

Берилган $z = a + bi$ учун $a - bi$ сон z га **комплекс қўшма** дейилади ва $\bar{z}$ орқали белгиланади. $\bar{z}$ нуқта комплекс текисликда ҳақиқий ўққа нисбатан z га симметрик жойлашган. Равшанки, $\bar{\bar{z}} = z$.

$|\bar{z}| = |z|$, $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}z$, $z - \bar{z} = 2iJmz$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. Ушбу $z = \bar{z}$ тенглик ўринли бўлиши учун $z \in R$ шартнинг бажарилиши зарур ва кифоя.

3-теорема. $z \to \bar{z}$ **формула билан берилган** $f: C \to C$ **акс эттириш** C **майдоннинг автоморфизмидир.**

Исбот. $\bar{\bar{z}} = z$ айниятдан f^{-1} нинг мавжудлиги ва $f^{-1} = f$ тенглик келиб чиқади. Хусусан, f — биекция. Агар $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ бўлса, у ҳолда

$$f(z_1 + z_2) = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i = (a_1 - b_1 i) +$$
$$+ (a_2 - b_2 i) = \overline{z_1} + \overline{z_2} = f(z_1) + f(z_2),$$
$$f(z_1 z_2) = f((a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i) =$$
$$(a_1a_2 - b_1b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1)i =$$
$$= (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = f(z_1) \cdot f(z_2).$$

4-теорема. Ҳар қандай $z_1, z_2 \in C$ учун $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$, $|z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2|$.

Исбот. Ҳақиқатан

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 +$$
$$+ (z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})$$

Бундан

$$|z_1 + z_2|^2 \le |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \le |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 \overline{z_2}| =$$
$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2$$

Бу тенгсизликдан эса $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ келиб чиқади. Бунга кўра $|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \le |z_1 - z_2| + |z_2|$. Бундан

$$|z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|.$$

26-§. КОМПЛЕКС СОНЛАРНИНГ ИЛДИЗЛАРИ

$z \in C$ ва n — натурал сон бўлсин ($n > 1$). Ушбу $W^n = z$ тенгликни қаноатлантирувчи W комплекс сон z нинг n-даражали илдизи дейилади.

Агар $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ бўлса, у ҳолда (6) ва (8) тенгликлардан

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Демак,

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|, \ Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Argz_1 - Argz_2.$$

Комплекс соннинг модули ҳақиқий сон абсолют қиймати (модули) тушунчасининг умумлашмасидир: агар $z = x + yi$ ҳақиқий сон бўлса, у ҳолда $y = 0$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2} = |x|$. Ҳар қандай $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ учун $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$, $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Демак $|z_1 - z_2|$ сон комплекс текисликдаги z_1 ва z_2 нуқталар орасидаги масофадир. ($|x_1 - x_2|$ сон тўғри чизиқдаги x_1 ва x_2 нуқталар орасидаги масофа бўлгани каби). Бунга кўра, агар $z_0 \in C$, $r \in R$, $r > 0$ бўлса, у ҳолда $\{Z \in C: |Z - Z_0| = r\}$, $\{z \in C: |z - z_0| < r\}$, $\{z \in C: |z - z_0| \leq r\}$ тўпламлар мос равишда маркази z_0 нуқтада радиуси r бўлган айланани, очиқ ва ёпиқ доираларни ифодалайди.

Берилган $z = a + bi$ учун $a - bi$ сон z га **комплекс қўшма** дейилади ва $\bar{z}$ орқали белгиланади. $\bar{z}$ нуқта комплекс текисликда ҳақиқий ўққа нисбатан z га симметрик жойлашган. Равшанки, $\bar{\bar{z}} = z$.

$|\bar{z}| = |z|$, $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}z$, $z - \bar{z} = 2iJmz$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. Ушбу $z = \bar{z}$ тенглик ўринли бўлиши учун $z \in R$ шартнинг бажарилиши зарур ва кифоя.

3-теорема. $z \to \bar{z}$ **формула билан берилган** $f: C \to C$ **акс эттириш** C **майдоннинг автоморфизмидир.**

Исбот. $\bar{\bar{z}} = z$ айниятдан f^{-1} нинг мавжудлиги ва $f^{-1} = f$ тенглик келиб чиқади. Хусусан, f — биекция. Агар $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ бўлса, у ҳолда

$$f(z_1 + z_2) = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i = (a_1 - b_1 i) +$$
$$+ (a_2 - b_2 i) = \overline{z_1} + \overline{z_2} = f(z_1) + f(z_2),$$
$$f(z_1 z_2) = f((a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i) =$$
$$(a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1)i =$$
$$= (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = f(z_1) \cdot f(z_2).$$

4-теорема. Ҳар қандай $z_1, z_2 \in C$ учун $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$.

Исбот. Ҳақиқатан

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 +$$
$$+ (z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \overline{z_2}).$$

Бундан

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \overline{z_2}) \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 \overline{z_2}| =$$
$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2$$

Бу тенгсизликдан эса $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ келиб чиқади. Бунга кўра $|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$. Бундан

$$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|.$$

26-§. КОМПЛЕКС СОНЛАРНИНГ ИЛДИЗЛАРИ

$z \in C$ ва n — натурал сон бўлсин ($n > 1$). Ушбу $W^n = z$ тенгликни қаноатлантирувчи W комплекс сон z нинг n-**даражали илдизи** дейилади.

1-теорема. **Ҳар қандай $Z \neq 0$ комплекс сон нақ n та турли n-даражали илдизга эга. Агар $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ бўлса, у ҳолда улар қуйидаги кўринишда ифодаланади:**

$$W_k = \sqrt[k]{r}\left(cos\,\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad \left(\kappa = \overline{0, n-1}\right).$$

Исбот. $W^n = z$ бўлиб, $W = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ — унинг тригонометрик ифодаси бўлсин. Муавр формуласига асосан

$$W^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Бундан 25-§ даги 1-теоремага асосан $\rho^n = r$, $n\theta = \varphi + 2m\pi$, $m \in Z$. Бу тенгликлардан эса $\rho = \sqrt[n]{r}$, $\theta = \dfrac{\varphi + 2m\pi}{n}$, $m \in Z$ ни оламиз. Демак, z нинг ҳар бир n-даражали илдизи ушбу

$$W = W_m = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2m\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2m\pi}{n}\right), \; m \in Z$$

кўринишда ёзилиши мумкин. Аксинча, бундай кўринишга эга бўлган ҳар қандай комплекс сон z нинг n-даражали илдизидир.

Энди W_m ва W_e лар қачон ўзаро тенглигини аниқлаймиз. $W_m = W_e$ дан $\frac{\varphi+2m\pi}{n} - \frac{\varphi+2l\pi}{n}$ айирманинг 2πк, $\kappa \in Z$ кўринишга эга эканлиги келиб чиқади. Бундан $\frac{m-l}{n} = k$, яъни m ва l сонлари n га бўлинганда бир хил қолдиққа эга эканлиги келиб чиқади. Бундан, биринчидан, n нинг қолдиқлари фақат $0, 1, \ldots, n-1$ бўлиши мумкинлигидан ушбу $W_0, W_1, \ldots, W_{n-1}$ сонларнинг турли эканлиги келиб чиқади. Иккинчидан, ҳар қандай $m \in Z$ учун m ни n га бўлганда қолдиқ p га тенг бўлса $(0 \leq p \leq n-1)$, у ҳолда $W_m = W_p$, яъни ҳар қандай W_m сон $W_0, W_1, \ldots, W_{n-1}$ сонларнинг бирортасига тенглиги келиб чиқади.

Мисол кўрамиз. $z^4 + 1 = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизлари мавжуд эмас, аммо 4 та комплекс илдизга эга — улар (-1) соннинг 4-даражали илдизлари. Ушбу $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$ ифодага кўра W_0, W_1, W_2, W_3 илдизлар қуйидаги кўринишга эга:

$$W_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

$$W_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}},$$

$$W_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}},$$

$$W_3 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Бошқа мисол. Бир сонининг n-даражали илдизлари устида тўхталамиз. $1 = \cos 0 + i\sin 0$ ифодага кўра 1 нинг n-даражали илдизлари қуйидаги формулалар бўйича топилади:

$$W_\kappa = \cos\frac{2\kappa\pi}{n} + i\sin\frac{2\kappa\pi}{n} \quad (\kappa = \overline{0, n-1})$$

Бир сонининг барча илдизлари кўпайтириш амалига нисбатан гуруҳ ҳосил қилади. Ҳақиқатан, агар $\alpha^n = 1, \beta^n = 1$ бўлса, у ҳолда $(\alpha \cdot \beta)^n = \alpha^n \cdot \beta^n = 1$. Бир сонининг ўзи бирнинг n-даражали илдизи: $1^n = 1$. Агар $\alpha^n = 1$ бўлса, у ҳолда $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n = \frac{1}{\alpha^n} = 1$, яъни ҳар бир бирнинг n-даражали илдизининг тескариси ҳам бирнинг n-даражали илдизидир.

Муавр формуласига асосан $W_k = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^k =$ $= W_1^k$, яъни бирнинг барча n-даражали илдизлари W_1^k нинг даражалари орқали ҳосил қилинади.

Бирорта элементининг даражаларидан иборат гуруҳ **циклик гуруҳ** дейилади. Юқоридаги мулоҳазалар билан қуйидаги теорема исботланди:

2-теорема. ***Ҳар бир $n \in N$ учун бирнинг n-даражали комплекс илдизлари кўпайтириш амалига нисбатан циклик группни ҳосил қилади.***

27-§. КОМПЛЕКС ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯЛАР

Комплекс сонлардан иборат бирор тўпламда аниқланган ва қийматлари ҳам комплекс сон бўлган функция **комплекс ўзгарувчили функция** деб аталади. Комплекс сонларнинг илгариги параграфларда келтирилган хоссалари комплекс сонлар кетма-кетлиги лимити ва комплекс ўзгарувчили функция лимити тушунчаларини худди ҳақиқий ўзгарувчили функцияларнинг лимити каби киритишга имкон беради.

Маркази z_0 нуқтада бўлган D очиқ доирада аниқланган (z_0 нуқтада аниқланмаган ҳам бўлиши мумкин) комплекс ўзгарувчили бирор $f(z)$ функция берилган бўлсин. Агар ихтиёрий ҳақиқий $\varepsilon > 0$ сон учун шундай ҳақиқий $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ мавжуд бўлсаки, ушбу $0 < |z - z_0| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча z нуқталар учун $|f(z) - W| < \varepsilon$ ўринли бўлса, W комплекс сон $f(z)$ функциянинг z ўзгарувчи z_0 га интилгандаги **лимити** дейилади ва $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = W$ кўринишда ёзилади.

Комплекс текисликда бирор доирадан ташқарида аниқланган $f(z)$ функция берилган бўлсин. Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай $r = r(\varepsilon) > 0$ сон мавжуд бўлсаки, $|z| > r$ тенгсизликдан $|f(z) - w| < \varepsilon$ келиб чиқса, W комплекс сон $f(z)$ функциянинг z ўзгарувчи ∞ га интилгандаги лимити дейилади ва $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = W$ каби ёзилади. Шунга ўхшаш ушбу $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty$ белгилар ва буларга мос тушунчалар киритилади.

Йиғиндининг, кўпайтманинг, бўлинманинг лимитлари ҳақидаги теоремалар ва лимитлар назариясининг бошқа теоремалари ҳеч ўзгаришсиз комплекс ўзгарувчили функцияларга ўтказилади.

Маркази z_0 нуқтада бўлган бирор очиқ доирада аниқланган $f(z)$ функция учун $\lim\limits_{z\to Z_0} f(z)=f(z_0)$ ўринли бўлса, бу функция z_0 нуқтада **узлуксиз** дейилади. Бирор тўпламнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлган функция бу тўпламда узлуксиз дейилади.

Узлуксиз функциялар йиғиндиси, кўпайтмаси, нисбати ва узлуксиз функциялар тўғрисидаги бошқа теоремалар комплекс ўзгарувчили функциялар учун ҳам ўринлилигича қолади. Бу теоремалар ичида Вейерштрасснинг иккита теоремасини келтирамиз. Бу теоремалар кейинроқ ишлатилади.

1-теорема. ***Агар f(z) функция*** $|z|\le r$ ёпиқ доирада узлуксиз бўлса, у бу тўпламда чегараланган (яъни шундай ҳақиқий $M>0$ сони мавжудки, бу ёпиқ доирадаги барча z нуқталар учун $|f(z)|\le M$).

2-теорема. ***Агар f(x) функция $|z|\le r$ ёпиқ доирада узлуксиз бўлса ва унда фақат ҳақиқий қийматларни қабул қилса, у ҳолда у бу ёпиқ доира ўзининг энг катта ва энг кичик қийматларига эришади (яъни шундай z_0 ва z_1 нуқталар мавжудки,*** $f(z_0)=\inf\limits_{|z|\le r} f(z)$, $f(z_1)=\sup\limits_{|z|\le r} f(z)$, $|z_0|\le r$, $|z_1|\le r$).

Бу теоремаларнинг исботи ҳақиқий ўзгарувчили функциялар учун мос теоремаларнинг исботига ўхшаш. Буларни тўла исботлашни китобхонга қолдирамиз.

Маркази Z_0 нуқтада бўлган бирор очиқ доирада аниқланган $f(x)$ функция учун

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

лимит мавжуд бўлса, у Z_0 нуқтада **дифференциалланувчи** дейилади. Агар $f(z)$ функция M тўпламнинг ҳар бир нуқтасида дифференциалланувчи бўлса, у M тўпламда дифференциалланувчи дейилади. $f'(z)$ функция $f(z)$ функциянинг **ҳосиласи** дейилади.

Дифференциаллашнинг одатдаги хоссалари, хусусан, функциялар йиғиндисининг, кўпайтмасининг, нисбатининг ҳосилалари ҳақидаги теоремалар осон исботланади.

28-§. КОМПЛЕКС КОЭФФИЦИЕНТЛИ КЎПҲАДЛАР

Ушбу

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n$$

кўринишдаги функцияга **кўпҳад** ва $a_0, a_1, \ldots, a_n$ сонларга эса **кўпҳаднинг коэффициентлари** дейилади. Барча ўзгармас сонлар кўпҳадлардир. Кўпҳадларнинг йиғиндиси ва кўпайтмаси яна кўпҳаддир. z ўзгарувчининг барча кўпҳадларидан иборат тўпламни $C[z]$ орқали белгилаймиз. Кўпҳадларнинг қўшиш ва кўпайтириш амалига нисбатан $C[z]$ тўплам бирлик элементли коммутатив ҳалқа ҳосил қилиши бевосита кўрсатилади. Бунда 0 сонидан иборат ўзгармас функция (ноль кўпҳад) $C[z]$ ҳалқанинг нолидир, 1 сонидан иборат ўзгармас функция бу ҳалқанинг бирлик элементидир.

Ўзгармас функцияларнинг ва $f(z) = z$ функциянинг узлуксизлигидан узлуксиз функцияларнинг йиғиндиси ва кўпайтмаси узлуксизлиги ҳақидаги теоремаларга асосан ихтиёрий кўпҳаднинг узлуксизлиги келиб чиқади.

1-теорема. ***Ҳар қандай кўпҳаднинг коэффициентлари бир қийматли аниқланган (яъни агар $f(z)$ ва $g(z)$ кўпҳадлар барча нуқталарда $f(z) = g(z)$ тенгликни қаноатлантирса, у ҳолда уларнинг мос коэффициентлари тенг).***

Исбот. Дастлаб, агар барча z нуқталарда $a_0 + a_1z + \ldots + a_nz^n = 0$ бўлса, у ҳолда $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$ эканлигини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан, $a_0 + a_1z + \ldots + a_nz^n = 0$ да $z = 0$ деб олсак, $a_0 = 0$ тенглик ҳосил бўлади, яъни барча z нуқталарда $a_1z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n = 0$. Бундан барча $z \neq 0$ нуқталарда $a_1 + a_2z + \ldots + a_nz^{n-1} = 0$ тенглик олинади. Бу тенглик барча $z \neq 0$ лардагина ўринлилиги кўрсатилгани учун уни $z = 0$ да ҳам ўринли дея олмаймиз. Аммо кўпҳаднинг барча z ларда узлуксизлигидан фойдаланиб, $a_1 + a_2z + \ldots + a_nz^{n-1} = 0$ тенгликда z ни нольга интилтирсак, $a_1 = 0$ тенгликни оламиз. Бундан $a_2z + \ldots + a_nz^{n-1} = 0$. Яна $z \neq 0$ да $a_2 + \ldots + a_nz^{n-2} = 0$ тенгликни оламиз. Бунда яна z ни нольга интилтириб $a_2 = 0$ тенгликни оламиз ва ҳоказо. Натижада $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$ тенгликларни оламиз.

Энди барча z ларда $a_0 + a_1z + \ldots + a_nz^n = b_0 + b_1z + \ldots + b_mz^m$ ўринли бўлсин деб фараз қиламиз. Бунда $m = n$ деб фараз қилишимиз мумкин (акс ҳолда тенгликнинг бирор томонга бир қанча ноль коэффициентли ҳадларни қўшамиз). У ҳолда

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)z + \ldots + (a_n - b_n)z^n = 0.$$

Бундан юқоридаги мулоҳазаларимизга асосан $a_0 - b_0 = \ldots = a_n - b_n = 0$ эканлиги, яъни $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ..., $a_n = b_n$ келиб чиқади.

Исботланган теорема кўпҳадларнинг икки хил тенглик муносабатлари орасида боғланиш ўрнатади: $f(z)$ ва $g(z)$ кўпҳадлар барча z нуқталарда тенг бўлиши учун уларнинг мос коэффициентлари тенг бўлиши зарур ва кифоя.

Нольдан фарқли кўпҳад берилган бўлсин. Кўпҳадга нольдан фарқли коэффициент билан кирган z нинг энг юқори даражасига кўпҳаднинг **даражаси** дейилади. Бу коэффициент **бош коэффициент** ва кўпҳаднинг бунга мос ҳади **бош ҳад** дейилади. $f(z)$ кўпҳаднинг z қатнашмайдиган ҳади (яъни нолинчи даражали ҳади) **озод ҳад** дейилади. Равшанки, у $f(0)$ га тенг. Кўпҳадлар кўпайтирилганда уларнинг даражалари қўшилади, бош коэффициентлари эса кўпайтирилади. Хусусан, нолдан фарқли кўпҳадларнинг кўпайтмаси яна нолдан фарқли кўпҳад. Демак, $C[z]$ ҳалқада нолнинг бўлувчилари мавжуд эмас. Нолинчи даражали кўпҳадлар нолдан фарқли ўзгармас сонлардан иборат. Биринчи даражали кўпҳадлар **чизиқли**, иккинчи даражали кўпҳадлар **квадрат**, учинчи даражалилар — **куб** кўпҳадлар дейилади. Агар f, g кўпҳадлар шундай бўлсаки, $f \cdot g = 1$ бўлса, у ҳолда 1 сон нолинчи даражали кўпҳад бўлгани учун f ва g нинг даражалари ҳам нолга тенг. Демак $C[z]$ ҳалқанинг тескариланувчи элементлари нолинчи даражали кўпҳадлардан иборат.

Кўпҳадлар комплекс текисликнинг ҳар қандай нуқтасида дифференциалланувчи. Ўзгармас соннинг ҳосиласи ноль кўпҳаддир. Агар $n > 0$ бўлса, у ҳолда n-даражали кўпҳаднинг ҳосиласи $(n-1)$-даражали кўпҳаддир.

Агар C майдоннинг F қисм тўплами C даги қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан майдон ҳосил қилса, у **сонли майдон** дейилади. Масалан, $Q, Q(\sqrt{2}), R$ – сонли майдонлардир. Сонли майдонга яна бир мисол келтирамиз.

a, $b \in Q$ шартни қаноатлантирувчи барча $a + bi$ комплекс сонларни $Q(i)$ орқали белгилаймиз. $Q(i)$ нинг майдон эканлиги бевосита текширилади.

F — сонли майдон бўлсин. Коэффициентлари F га тегишли кўпҳад **F майдон устидаги кўпҳад** дейилади. F майдон устидаги барча кўпҳадлар тўпламини $F[z]$ орқали белгилаймиз. Кўпҳадларни қўшиш ва кўпайтириш амалига нисбатан $F[z]$ тўплам бирлик элементли коммутатив ҳалқа ҳосил қилиши бевосита текширилади. Ундан ташқари, $F[z]$ ҳалқада нолнинг бўлувчилари мавжуд эмас.

2-теорема ***(Қолдиқли бўлиш ҳақидаги теорема). F — майдон устида f ва g кўпҳадлар берилган бўлиб, g — нольдан фарқли бўлсин. У ҳолда қуйидаги икки ҳолнинг бири ўринли:***

1) F майдон устида шундай ягона q кўпҳад мавжудки, f = qg;

2) F майдон устида шундай ягона q кўпҳад ва нолдан фарқли r кўпҳадлар мавжудки, f = qg + r, бу ерда r нинг даражаси g нинг даражасидан кичик.

Исбот. Ушбу

$$M = \{f - ug \mid u \in F[z]\}$$

кўпҳадлар тўпламини қараймиз. Агар ноль кўпҳад M тўпламга кирса, у ҳолда бирор $u_1 \in F[z]$ учун $f - u_1 g = 0$. Бу ҳолда $q = u_1$ деб олсак: $f = qg$.

Агар ноль кўпҳад M тўпламга кирмаса, у ҳолда тўпламга кирувчи кўпҳадлар ичида даражаси энг кичик бўлганини r орқали белгилаймиз. r нинг даражаси g нинг даражасидан кичиклигини кўрсатамиз. Тескарисини фараз қиламиз. У ҳолда r нинг даражаси n, g нинг даражаси m ва

$n > m$ бўлиб, улар $r = az^n + ...$, $g = bz^m + ...$ кўринишда бўлсин, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Ушбу $r_0 = r - a \cdot b^{-1}z^{n-m}g$ кўпҳад ҳам M га тегишли бўлиб, унинг даражаси r нинг даражасидан кичик. Бу эса r нинг танланишига зид. Бу қарама-қаршилик r нинг даражаси g нинг даражасидан кичиклигини кўрсатади. Шундай қилиб, $r = f - qg$, $q \in F[z]$, чунки $r \in M$. Бундан $f = qg + r$ ва бу ерда r нинг даражаси g нинг даражасидан кичик.

Энди q ва r кўпҳадларнинг бир қийматли аниқланишини кўрсатамиз.

Ушбу

$$f = q_1g + r_1 = q_2g + r_2$$

тенгликлар ўринли бўлсин. У ҳолда

$$(q_1 - q_2)g = r_2 - r_1.$$

Агар $r_2 - r_1 \neq 0$ бўлса, у ҳолда $r_2 - r_1 = (q_1 - q_2)g$ кўпҳаднинг даражаси g никидан кичик бўлмайди. Бу эса r_1 ва r_2 кўпҳадларнинг хоссасига зид. Бу қарама-қаршилик $r_2 - r_1 = 0$ эканини кўрсатади. Бу ҳолда $r_1 = r_2$. Бундан ва $(q_1 - q_2)g = r_2 - r_1$ дан $(q_1 - q_2)g = 0$ тенгликни оламиз. Бу эса $F[z]$ ҳалқада нольнинг бўлувчилари бўлмагани ва $g \neq 0$ бўлгани учун $q_2 - q_1 = 0$, яъни $q_1 = q_2$ эканини кўрсатади.

2-теоремадаги q ва r кўпҳадлар мос равишда f ни g га бўлишдаги **тўлиқсиз бўлинмаси** ва **қолдиғи** дейилади. Агар қолдиқ ноль яъни $f = qg$ бўлса, у ҳолда f кўпҳад g га **бўлинувчи** ёки g кўпҳад f ни бўлувчи дейилади. Бу ҳолда q кўпҳад f ни g га бўлишдаги **бўлинма** дейилади.

2-теореманинг муҳим бир татбиғини кўрамиз. Агар $f(z)$ кўпҳад ва $\alpha \in C$ сон ушбу $f(\alpha) = 0$ шартни қаноатлантирса, α сон $f(z)$ кўпҳаднинг **илдизи** дейилади.

3-теорема (Безу теоремаси). ***Агар $\alpha \in F$ сон F майдон устидаги $f(z)$ кўпҳаднинг илдизи бўлса, у ҳолда $f(z)$ кўпҳад $z - \alpha$ кўпҳадга бўлинади*** (яъни F майдон устида шундай $q(z)$ кўпҳад мавжудки, $f(z) = (z - \alpha)q(z)$.

Исбот. Ҳақиқатан, $z - \alpha$ биринчи даражали кўпҳад бўлгани учун 2-теоремага асосан F майдон устида шундай $q(z)$ ва $r(z)$ кўпҳадлар мавжудки, $f(z) = (z - \alpha)q(z) + r(z)$, бу ерда $r(z)$ нольдан фарқли бўлган ҳолда нольдан фарқли ўзгармас сон бўлади: $r(z) = r$, $r \neq 0$. Бу тенгликда $z = \alpha$ десак ва $f(\alpha) = 0$ эканини инобатга олсак, у ҳолда $r = 0$. Бу қарама-қаршилик $r(z)$ — ноль кўпҳад эканини кўрсатади.

Агар $f(z)$ кўпҳад n-даражали бўлса, у ҳолда $(n + 1)$-даражали ҳеч қайси кўпҳадга бўлинмайди. Хусусан, у $(z - \alpha)^{n+1}$ кўпҳадга бўлинмайди. $f(z)$ кўпҳаднинг $z - \alpha$ га бўлинадиган энг юқори даражаси α илдизининг **карраси** дейилади. Шундай қилиб, агар $f(z)$ кўпҳад $(z - \alpha)^{\kappa}$ кўпҳадга бўлиниб, $(z - \alpha)^{\kappa+1}$ га бўлинмаса, κ сон α илдизнинг карраси бўлади. Карраси бирга тенг илдизлар **содда** ва карраси бирдан ортиқ илдизлар **каррали** дейилади.

4-теорема. ***Агар α сон $f(z)$ кўпҳаднинг κ каррали ($\kappa > 1$) илдизи бўлса, у ҳолда α сон $f^{1}(z)$ кўпҳаднинг $\kappa - 1$ каррали илдизи бўлади.***

Исбот. Агар α сон $f(z)$ кўпҳаднинг κ каррали илдизи бўлса, Безу теоремасига асосан $f(z) = (z - \alpha)^{\kappa}g(z)$, бу ерда $g(\alpha) \neq 0$. Бу муносабатни дифференциаллаймиз:

$$f'(z) = \kappa(z - \alpha)^{\kappa-1}q'(z) + (z - \alpha)^{\kappa}q'(z) = (z - \alpha)^{\kappa-1}h(z),$$

бу ерда $h(z) = \kappa g(z) + (z - \alpha)g'(z)$. Ушбу $h(\alpha) = \kappa g(\alpha) \neq 0$ тенгсизлик α сон $f^{1}(z)$ кўпҳаднинг $\kappa - 1$ каррали илдизи эканини кўрсатади.

29-§. КЎПҲАДЛАРНИНГ БЎЛИНИШ НАЗАРИЯСИ

F — сонлар майдони, f, g эса F майдон устидаги кўпҳадлар бўлсин. f кўпҳаднинг g га бўлинишини (ёки g кўпҳад f нинг бўлувчиси эканлигини) g/f кўринишда белгилаймиз. Кўпҳадларнинг бўлиниши таърифидан бевосита қуйидаги хоссалар келиб чиқади:

а) f/f; б) агар g/f ва h/g бўлса, у ҳолда h/f; в) агар g/f_1 ва g/f_2 бўлса, у ҳолда $g/f_1 + f_2$.

1-теорема. ***Агар g/f ва f/g бўлса, у ҳолда шундай $c \in F$, $c \neq 0$, мавжудки, $f = c \cdot g$.***

Исбот. Ҳақиқатан, F устида шундай c ва c_1 кўпҳадлар мавжудки, $f=cg$, $g=c_1f$. Булардан $f=cc_1f$. Агар $f\neq 0$ бўлса, у ҳолда $c\cdot c_1=1$. Бундан c ва c_1 нинг нолинчи даражали кўпҳад эканлиги келиб чиқади. Агар $f=0$ бўлса, у ҳолда $g=0$. Бу ҳолда

$$f=g=1\cdot g.$$

F майдон устидаги ихтиёрий иккита кўпҳаднинг умумий бўлувчиси мавжуд. Масалан, нольдан фарқли $c\in F$ сонлар. Агар f ва g кўпҳадларнинг бирор d умумий бўлувчиси бу кўпҳадларнинг бошқа ҳар қандай умумий бўлувчисига бўлинса, d кўпҳад f ва g кўпҳадларнинг **энг катта умумий бўлувчиси** (э.к.у.б.) дейилади.

Равшанки, f ва g кўпҳадларнинг иккаласи ҳам ноль кўпҳад бўлгандагина уларнинг э.к.у.б. си нольдир.

2-теорема. ***F майдон устидаги ихтиёрий иккита f ва g кўпҳадлар энг катта умумий бўлувчига эга.*** Уни $uf+vg$ кўринишда ифодалаш мумкин, бу ерда $u, v\in F[z]$.

Исбот. Агар f ва g ноль кўпҳадлар бўлса, уларнинг э.к.у.б. — ноль кўпҳад ва равшанки, у $uf+vg$ кўринишда ифодаланади.

Энди $g\neq 0$ бўлган ҳолни кўрамиз.

Бу ҳолда қолдиқли бўлиш ҳақидаги теоремани навбатдаги бўлувчи нольга айлангунча давом эттириб, қуйидаги кетма-кетликни оламиз:

$$f=qg+r,\ g=q_1r+r_1,\ r=q_2r_1+r_2,\ \dots .$$

Бу ердаги $g, r, r_1, \dots$ бўлувчиларнинг (қолдиқларнинг) даражалари қолдиқли бўлиш ҳақидаги теоремага асосан манфий бўлмаган бутун сонларнинг камаювчи кетма-кетлигини ҳосил қилади. Демак, бундай кетма-кетлик чекли. Бунга кўра, шундай n сон мавжудки, $q, r, r_1, \dots r_n$ кўпҳадлар нольдан фарқли, аммо $r_{n+1}=0$. r_n кўпҳад f ва g кўпҳадларнинг энг катта умумий бўлувчиси эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, ушбу $r_{n-1}=q_{n+1}r_n$, $r_{n-2}=q_n r_{n-1}+r_n$, $r_{n-3}=q_{n-1}r_{n-2}+r_{n-1}$, ..., $f=qg+r$ муносабатлар туфайли, r_n

дай $q(z)$ ва $r(z)$ кўпҳадлар мавжудки, $f(z) = (z - \alpha)q(z) + r(z)$, бу ерда $r(z)$ нольдан фарқли бўлган ҳолда нольдан фарқли ўзгармас сон бўлади: $r(z) = r$, $r \neq 0$. Бу тенгликда $z = \alpha$ десак ва $f(\alpha) = 0$ эканини инобатга олсак, у ҳолда $r = 0$. Бу қарама-қаршилик $r(z)$ — ноль кўпҳад эканини кўрсатади.

Агар $f(z)$ кўпҳад n-даражали бўлса, у ҳолда $(n+1)$–даражали ҳеч қайси кўпҳадга бўлинмайди. Хусусан, у $(z - \alpha)^{n+1}$ кўпҳадга бўлинмайди. $f(z)$ кўпҳаднинг $z - \alpha$ га бўлинадиган энг юқори даражаси α илдизининг **карраси** дейилади. Шундай қилиб, агар $f(z)$ кўпҳад $(z - \alpha)^{\kappa}$ кўпҳадга бўлиниб, $(z - \alpha)^{\kappa+1}$ га бўлинмаса, κ сон α илдизнинг карраси бўлади. Карраси бирга тенг илдизлар **содда** ва карраси бирдан ортиқ илдизлар **каррали** дейилади.

4-теорема. ***Агар α сон $f(z)$ кўпҳаднинг κ каррали ($\kappa > 1$) илдизи бўлса, у ҳолда α сон $f^{1}(z)$ кўпҳаднинг $\kappa - 1$ каррали илдизи бўлади.***

Исбот. Агар α сон $f(z)$ кўпҳаднинг κ каррали илдизи бўлса, Безу теоремасига асосан $f(z) = (z - \alpha)^{\kappa} g(z)$, бу ерда $g(\alpha) \neq 0$. Бу муносабатни дифференциаллаймиз:

$$f'(z) = \kappa(z-\alpha)^{\kappa-1}q'(z) + (z-\alpha)^{\kappa}q'(z) = (z-\alpha)^{\kappa-1}h(z),$$

бу ерда $h(z) = \kappa g(z) + (z - \alpha)g'(z)$. Ушбу $h(\alpha) = \kappa g(\alpha) \neq 0$ тенгсизлик α сон $f^{1}(z)$ кўпҳаднинг $\kappa - 1$ каррали илдизи эканини кўрсатади.

29-§. КЎПҲАДЛАРНИНГ БЎЛИНИШ НАЗАРИЯСИ

F — сонлар майдони, f, g эса F майдон устидаги кўпҳадлар бўлсин. f кўпҳаднинг g га бўлинишини (ёки g кўпҳад f нинг бўлувчиси эканлигини) g/f кўринишда белгилаймиз. Кўпҳадларнинг бўлиниши таърифидан бевосита қуйидаги хоссалар келиб чиқади:

а) f/f; б) агар g/f ва h/g бўлса, у ҳолда h/f; в) агар g/f_1 ва g/f_2 бўлса, у ҳолда $g/f_1 + f_2$.

1-теорема. ***Агар g/f ва f/g бўлса, у ҳолда шундай $c \in F$, $c \neq 0$, мавжудки, $f = c \cdot g$.***

Исбот. Ҳақиқатан, F устида шундай c ва c_1 кўпҳадлар мавжудки, $f = cg$, $g = c_1 f$. Булардан $f = cc_1 f$. Агар $f \neq 0$ бўлса, у ҳолда $c \cdot c_1 = 1$. Бундан c ва c_1 нинг нолинчи даражали кўпҳад эканлиги келиб чиқади. Агар $f = 0$ бўлса, у ҳолда $g = 0$. Бу ҳолда

$$f = g = 1 \cdot g.$$

F майдон устидаги ихтиёрий иккита кўпҳаднинг умумий бўлувчиси мавжуд. Масалан, нольдан фарқли $c \in F$ сонлар. Агар f ва g кўпҳадларнинг бирор d умумий бўлувчиси бу кўпҳадларнинг бошқа ҳар қандай умумий бўлувчисига бўлинса, d кўпҳад f ва g кўпҳадларнинг **энг катта умумий бўлувчиси** (э.к.у.б.) дейилади.

Равшанки, f ва g кўпҳадларнинг иккаласи ҳам ноль кўпҳад бўлгандагина уларнинг э.к.у.б. си нольдир.

2-теорема. ***F майдон устидаги ихтиёрий иккита f ва g кўпҳадлар энг катта умумий бўлувчига эга.*** Уни $uf + vg$ кўринишда ифодалаш мумкин, бу ерда $u, v \in F[z]$.

Исбот. Агар f ва g ноль кўпҳадлар бўлса, уларнинг э.к.у.б. — ноль кўпҳад ва равшанки, у $uf + vg$ кўринишда ифодаланади.

Энди $g \neq 0$ бўлган ҳолни кўрамиз.

Бу ҳолда қолдиқли бўлиш ҳақидаги теоремани навбатдаги бўлувчи нольга айлангунча давом эттириб, қуйидаги кетма-кетликни оламиз:

$$f = qg + r,\ g = q_1 r + r_1,\ r = q_2 r_1 + r_2,\ \dots .$$

Бу ердаги g, r, r_1, ... бўлувчиларнинг (қолдиқларнинг) даражалари қолдиқли бўлиш ҳақидаги теоремага асосан манфий бўлмаган бутун сонларнинг камаювчи кетма-кетлигини ҳосил қилади. Демак, бундай кетма-кетлик чекли. Бунга кўра, шундай n сон мавжудки, q, r, r_1, ... r_n кўпҳадлар нольдан фарқли, аммо $r_{n+1} = 0$. r_n кўпҳад f ва g кўпҳадларнинг энг катта умумий бўлувчиси эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, ушбу $r_{n-1} = q_{n+1} r_n$, $r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n$, $r_{n-3} = q_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1}$, ..., $f = qg + r$ муносабатлар туфайли, r_n

кўпҳад $r_{n-1}, r_{n-2}, r_{n-3}, \ldots, r_1, r, g, f$ кўпҳадларнинг бўлувчисидир. Иккинчи томондан, агар h кўпҳад f ва g кўпҳадларнинг умумий бўлувчиси бўлса, у ҳолда $r = f - qg$, $r_1 = g - q_1 r$, $r_2 = r - q_2 r_1, \ldots, r_{n-1} r_{n-3} - q_{n-1} r_{n-2}$, $r_n = r_{n-2} - q_n r_{n-1}$ муносабатларга асосан h кўпҳад $r, r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}, r_n$ кўпҳадларнинг бўлувчисидир. Бу билан r_n нинг э.к.у.б. эканлиги исботланди.

Энди

$$
\begin{aligned}
r_n &= r_{n-2} - q_n r_{n-1},\\
r_{n-1} &= r_{n-3} - q_{n-1} r_{n-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
r_2 &= r - q_2 r_1,\\
r_1 &= g - q_1 r,\\
r &= f - qg
\end{aligned}
$$

муносабатларни оламиз. Иккинчи тенгликдаги r_{n-1} ни биринчи тенгликка қўйиб, ушбу $r_n = u_1 r_{n-3} + v_1 \cdot r_{n-2}$ тенгликни оламиз, бу ерда u_1, v_1 — F устидаги кўпҳадлар. Охирги тенгликка r_{n-2} нинг r_{n-3} ва r_{n-4} орқали ифодасини қўямиз ва ҳоказо. Бунинг натижасида қуйидаги ифодаларни оламиз:

$$r_n = u_2 r_{n-4} + v_2 r_{n-3} = u_3 r_{n-5} + v_3 r_{n-4} = \ldots = uf + vg,$$

бу ерда u, v — F устидаги кўпҳадлар.

f ва g кўпҳадларнинг энг катта умумий бўлувчисини кетма-кет қолдиқли бўлиш ёрдамида топиш жараёнини **Евклид алгоритми** дейилади.

Энг катта умумий бўлувчи ягона эмас. Ҳақиқатан, агар h кўпҳад f ва g кўпҳадларнинг энг катта умумий бўлувчиси бўлса, у ҳолда ихтиёрий $c \in F$, $c \neq 0$ сон учун ch кўпҳад ҳам f ва g ларнинг энг катта умумий бўлувчисидир.

f ва g кўпҳадларнинг камида бири нольдан фарқли бўлиб, h_1, h_2 — уларнинг энг катта умумий бўлувчилари бўлсин. У ҳолда h_1/h_2 ва h_2/h_1. Бундан бирор $c \in F$, $c \neq 0$ сон учун $h_2 = ch_1$ тенглик ўринли эканлиги келиб чиқади.

Бош коэффициенти 1 га тенг кўпҳад **унитар** дейилади. Ҳар қандай нольдан фарқли f кўпҳад учун ягона шундай унитар f_1 кўпҳад мавжудки, бирор $c \in F$, $c \neq 0$ сон учун

$f = cf_1$. Бу унитар кўпҳад f ни унинг бош коэффициентига бўлишдан ҳосил бўлади. Юқоридаги мулоҳазалардан камида бири нольдан фарқли f ва g кўпҳадлар ягона унитар э.к.у.б. га эгалиги келиб чиқади.

Э.к.у.б. ни топишга мисол кўрамиз: Q майдон устида $f(z) = 2z^2 - 3z + 1$ ва $g(z) = z^2 + z - 2$ кўпҳадлар берилган бўлсин. Қолдиқли бўлишни бажарсак,

$$2z^2 - 3z + 1 = 2(z^2 + z - 2) - 5z + 5,$$
$$z^2 + z - 2 = \left(\tfrac{1}{5}z + \tfrac{2}{5}\right)(-5z + 5).$$

Бунга кўра $-5z + 5 = -5(z - 1)$ кўпҳад f ва g кўпҳадларнинг э.к.у.б. сидир. f ва g ларнинг ягона унитар э.к.у.б. си $z - 1$ кўпҳаддир.

Агар $f(z)$ ва $g(z)$ кўпҳадларнинг э.к.у.б.си 1 бўлса, улар **ўзаро туб** дейилади. Агар f ва g кўпҳадлар ўзаро туб бўлса, у ҳолда 2-теоремага асосан бирор $u, v \in F[z]$ кўпҳадлар учун $uf + vg = 1$. Аксинча, f ва g кўпҳадлар учун шундай u, $v, \in F[z]$ кўпҳадлар мавжуд бўлсинки, $uf + vg = 1$. У ҳолда агар h/f ва h/g бўлса, $h/1$ бўлади. Демак, 1 сони f ва g кўпҳадларнинг э.к.у.б.си. Бу билан қуйидаги теорема исботланди.

3-теорема. ***F майдон устидаги f ва g кўпҳадлар ўзаро туб бўлиши учун ушбу $uf + vg = 1$ шартни қаноатлантирувчи u, $v \in F[z]$ кўпҳадларнинг мавжуд бўлиши зарур ва кифоя.***

Натижа. *Агар f кўпҳад $g_1, g_2, \ldots, g_m$ кўпҳадларнинг ҳар бири билан ўзаро туб бўлса, у ҳолда у уларнинг кўпайтмаси билан ҳам ўзаро туб бўлади.*

Исбот. 3–теоремага асосан

$$u_1 f + v_1 g_1 = u_2 f + u_2 g_2 = \ldots = u_m f + v_m g_m = 1.$$

Булардан $(u_1 f + v_1 g_1)(u_2 f + v_2 g_2)\ldots(u_m f + v_m g_m) = 1$.

Бу тенгликнинг чап томонидаги ифодаларни кўпайтириб ва f қатнашган ҳадлардан f ни қавсдан ташқарига чиқарсак, $uf + v_1 \cdot v_2 \ldots v_m g_1, g_2, \ldots, g_m = 1$ тенгликни оламиз, бу ерда u — кўпҳад. Бу тенгликдан 3-теоремага асосан f ва $g_1, g_2, ..., g_m$ кўпайтманинг ўзаро тублиги келиб чиқади.

Агар F майдон устидаги мусбат даражали f кўпҳадни f майдон устидаги мусбат даражали иккита кўпҳаднинг кўпайтмаси шаклида ифодалаш мумкин бўлмаса, f кўпҳад F майдон устида **келтирилмайдиган** кўпҳад дейилади. Акс ҳолда f келтириладиган кўпҳад дейилади. Масалан, чизиқли кўпҳадлар ҳар қандай сонли майдон устида келтирилмайдиган кўпҳадлардир. Агар $az^2 + bz + c$ квадрат кўпҳаднинг $b^2 - 4ac$ дискриминанти манфий бўлса, у R майдон устида келтирилмайдиган кўпҳад бўлади. Кўпҳаднинг келтирилмайдиган бўлиши F майдонга боғлиқ. Масалан, $x^2 - 2$ кўпҳад Q майдон устида келтирилмайдиган, аммо R майдон устида келтириладиган:

$$x^2 - 2 = \left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right).$$

Келтирилмайдиган f кўпҳаднинг бўлувчилари фақат $c \in F$, $c \neq 0$, сонлардан ва cf, $c \in F$, $c \neq 0$, кўринишдаги кўпҳадлардан иборат. Хусусан, унитар келтирилмайдиган f кўпҳад фақат иккита унитар бўлувчиларга эга: 1 ва f. Бундан ҳар бир кўпҳад ё берилган келтирилмайдиган кўпҳадга бўлиниши ёки у билан ўзаро туб бўлиши келиб чиқади.

4-теорема. ***F майдон устидаги $f_1, f_2, ..., f_m$ кўпҳадлар ва келтирилмайдиган p кўпҳад берилган бўлсин. Агар $f_1 \cdot f_2 \dots f_m$ кўпайтма p га бўлинса, у ҳолда $f_1, f_2, \dots f_m$ кўпҳадларнинг бирортаси p га бўлинади.***

Исбот. Тескарисини кўрайлик, яъни $f_1, f_2, \dots f_m$ кўпҳадларнинг ҳеч бири p га бўлинмасин. У ҳолда p уларнинг ҳар бири билан ўзаро туб бўлади. Бундан 3-теоремага асосан p нинг $f_1 \cdot f_2 \dots f_m$ кўпайтма билан ҳам ўзаро тублиги келиб чиқади. Бу эса теореманинг шартига зид.

5-теорема. ***F майдон устидаги мусбат даражали ҳар бир унитар $f(z)$ кўпҳад F майдон устида келтирилмайдиган унитар кўпҳадларнинг кўпайтмаси шаклида ёзилиши мумкин. Бу кўпайтувчилар уларнинг кўпайтмада ёзилиш тартиби аниқлигида f кўпҳад бўйича бир қийматли топилади.***

Исбот. Исботни f кўпҳаднинг n даражаси бўйича индукция ёрдамида исботланади. Агар $n = 1$ бўлса, теорема тасдиғининг ўринлилиги равшан, чунки чизиқли кўпҳадлар келтирилмайдиган кўпҳадлардир. Энди $n > 1$ деб ва теореманинг тасдиғи даражаси n дан кичик бўлган барча кўпҳадлар учун ўринли деб фараз қиламиз.

Агар f — келтирилмайдиган бўлса, унинг учун теореманинг ўринлилиги равшан. Шунинг учун f — келтириладиган кўпҳад бўлган ҳолни кўрамиз. f нинг унитар бўлувчилари ичида энг кичик мусбат даражага эга бўлганини p_1 билан белгилаймиз. У ҳолда $f = p_1 f_1$ бўлиб, p_1 кўпҳад келтирилмайдиган. Чунки агар унитар p' кўпҳад p_1 нинг бўлувчиси бўлса, p' кўпҳад f нинг ҳам унитар бўлувчиси. p' нинг даражаси p нинг даражасидан катта бўлмагани учун ё унинг даражаси нольга тенг (яъни $p' = 1$) ёки унинг даражаси p нинг даражасига тенг (у ҳолда $p' = p_1$).

$f = p_1 f_1$ кўпайтмадаги f_1 кўпҳаднинг даражаси n дан кичик. Шунинг учун индукциянинг фаразига мувофиқ унитар келтирилмайдиган кўпҳадларнинг кўпайтмасига тенг. Бундан $f = p_1 f_1$ кўпҳаднинг ҳам худди шу хоссага эга эканлиги келиб чиқади.

Энди f кўпҳад икки хил унитар келтирилмайдиган кўпайтувчиларнинг ёйилмасига эга бўлсин. Бу ёйилмаларнинг биринчиси q_1 кўпайтувчига эга бўлсин. У ҳолда 4-теоремага кўра, иккинчи ёйилмадаги бирор h_1 кўпайтувчи q_1 га бўлинади. h_1 — унитар келтирилмайдиган бўлгани учун $h_1 = q_1$. Иккала ёйилмани бу q_1 кўпайтувчига қисқартирсак ($F[z]$ ҳалқада нольнинг бўлувчилари бўлмагани учун қисқартириш мумкин), у ҳолда ушбу $g = \frac{f}{q_1}$ кўпҳаднинг икки хил унитар келтирилмайдиган ёйилмаси ҳосил бўлади. Бу кўпҳаднинг даражаси n дан кичик бўлгани учун индукция бўйича унинг турли ёйилмаларида унитар келтирилмайдиган кўпайтувчилар фақат кўпайтувчиларнинг ёзилиш тартиби билан фарқ қилади. У ҳолда бу хосса f кўпҳад учун ҳам ўринли.

Натижа. *F майдон устидаги ҳар қандай $f(z)$ кўпҳад ушбу $f = ap_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$ кўринишида кўпайтувчиларнинг ёзилиш тартиби аниқлигида ягона усул билан ифодаланади*, бу ерда a сони f кўпҳаднинг бош коэффициенти, $p_1, \dots, p_s$ кўпҳадлар эса F майдон устидаги келтирилмайдиган турли унитар кўпҳадлар, $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_s \in N$.

30-§. АЛГЕБРАНИНГ АСОСИЙ ТЕОРЕМАСИ ВА УНИНГ НАТИЖАЛАРИ

Қуйидаги тасдиқ анъана бўйича **алгебранинг асосий теоремаси** деб юритилади.

1-теорема. ***Комплекс коэффициентли мусбат даражали ҳар қандай кўпҳад комплекс илдизга эга.***

Исбот иккита леммага асосланган.

1-лемма. *C даги ҳар қандай f (z) кўпҳад учун $|f(z)|$ функция комплекс текисликда ўзининг энг кичик қийматига эришади.*

Исбот. Агар *f(z)* ўзгармас бўлса, унинг учун тасдиқнинг ўринлилиги равшан. Шунинг учун уни мусбат даражали деб ҳисоблаймиз, яъни

$$f(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1}+...+a_n, n\in N,$$
$$a_k \in C(k = \overline{0,n}).$$

Ушбу

$$|f(z)| = |z^n|\left|a_0 + \frac{a_1}{z}+...+\frac{a_n}{z^n}\right|$$

тенглик равшан. Бунинг биринчи кўпайтувчиси $z \to \infty$ да ∞ га интилгани ва иккинчи кўпайтувчи $|a_0|$ га интилгани сабабли $z \to \infty$ да $|f(z)| \to \infty$. Шунга кўра, шундай $r > 0$ ҳақиқий сон мавжудки, $|z| > r$ бўлганда $|f(z)| > |f(0)|$. Иккинчи томондан $|f(z)|$ функция $|z| \leq r$ ёпиқ доирада узлуксиз бўлгани сабабли Вейерштрасс теоремасига асосан доирада шундай z_0 нуқта мавжудки, доирадаги барча z нуқталар учун $|f(z)| \geq |f(z_0)|$. Хусусан, $|f(0)| \geq |f(z_0)|$ ўринли. Шундай қилиб, $|z| \leq r$ доиранинг нуқталари учун $|f(z)| \geq |f(z_0)|$, доирадан ташқаридаги нуқталар учун $|f(z)| \geq |f(0)| \geq |f(z_0)|$ муносабатлар ўринли. Бу муносабатлар $|f(z_0)|$ сон $|f(z)|$ функциянинг C даги энг кичик қиймати эканлигини кўрсатади.■

2-лемма (Даламбер леммаси). *Агар $f(z)$ мусбат даражали кўпҳад ва $f(z_o) \neq 0$ бўлса, у ҳолда шундай $h \in C$ мавжудки,* $|f(z_0+h)| < |f(z_0)|$.

Исбот. $f(z)$ кўпҳаднинг даражаси n бўлсин. У ҳолда $g(h)=\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)}$ функция ҳам h га нисбатан n даражали кўпҳад бўлади:

$$\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)}=1+C_1h+...+C_nh^n, \qquad (1)$$

бу ерда $C_o=1$, чунки $g(o)=1$. Шундай $k=(1\le k\le n)$ мавжудки, (1) ифодада $i<k$ учун $C_i=0$ ва $C_k\neq 0$. У ҳолда

$$\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)}=1+C_kh^k+C_{k+1}h^{k+1}...+C_nh^n=$$

$$=(1+C_kh^k)+C_kh^k\left(\frac{c_{k+1}}{c_k}h+...+\frac{c_n}{c_k}h^{n-k}\right)$$

ифодага келамиз. Комплекс сон модулларининг хоссаларидан фойдаланиб, ушбу

$$\left|\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)}\right|\le\left|1+C_kh^k\right|+\left|C_kh^k\right|\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}h+...+\frac{c_n}{c_k}h^{n-k}\right| \qquad (2)$$

тенгсизликни оламиз. Энди h ни танлашга ўтамиз. Унинг модули ва аргументи қийматларини айрим танлаймиз. Ушбу

$$P(h)=\frac{c_{k+1}}{c_k}h+...+\frac{c_n}{c_k}h^{n-k}$$

кўпҳаднинг қиймати $h=0$ да ноль бўлгани ва унинг барча $h\in C$ да узлуксиз бўлгани сабабли $h\to 0$ да $P(h)\to 0$, яъни шундай ҳақиқий $\delta_1>0$ сон мавжудки, $|h|<\delta_1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи h лар учун

$$|P(h)| = \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}h + \ldots + \frac{c_n}{c_k}h^{n-k}\right| < \frac{1}{2} \tag{3}$$

тенгсизлик ўринли.

Бундан фойдаланиб (2) тенгсизликдан

$$\left|\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)}\right| \leq \left|1 + C_k h^k\right| + \frac{1}{2}\left|C_k h^k\right| \tag{4}$$

тенгсизликни оламиз.

Энди h ни шундай танлаймизки,

$$\left|C_k h^k\right| < 1 \tag{5}$$

тенгсизлик ҳам бажарилсин. Бунинг учун h нинг қиймати

$$|h| < \delta_2 = \sqrt[k]{\left|C_k\right|^{-1}}$$

тенгсизликни қаноатлантириши кифоя. Агар δ орқали δ_1, δ_2 сонларнинг кичигини белгиласак, у ҳолда $|h| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча h лар учун (3) ва (5) тенгсизликлар ўринли. Энди h нинг аргументини шундай танлаймизки, ушбу

$$\arg(C_k h^k) = \pi \tag{6}$$

тенглик бажарилсин. Бунинг учун

$$\arg(C_k h^k) = \arg C_k + k \arg h = \pi$$

тенглик, яъни

$$\arg h = \frac{\pi - \arg C_k}{k} \tag{7}$$

тенглик ўринли бўлиши керак. Демак, h нинг аргументини шундай танланса, у ҳолда (6) тенглик ўринли. (6) тенгликдан

$$C_k h^k = -\left|C_k h^k\right|$$

келиб чиқади. Бунга ва (5) га асосан

$$\left|1 + C_k h^k\right| = \left|1 - \left|C_k h^k\right|\right| = 1 - \left|C_k h^k\right|$$

ўринли. Бундан фойдаланиб, (4) тенгсизликни қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\left|\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)}\right| \le 1 - \left|C_k h^k\right| + \frac{1}{2}\left|C_k h^k\right| = 1 - \frac{1}{2}\left|C_k h^k\right|.$$

Бунга ва (5) га асосан

$$\left|\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)}\right| < 1,$$

яъни $\left|f(z_0+h)\right| < \left|f(z_0)\right|$. Бу билан 2-лемма исботланди.

Энди 1-теореманинг исботини охирига етказишимиз мумкин.

1-леммага асосан шундай $z_0 \in C$ мавжудки, ҳар қандай $z \in C$ учун

$$\left|f(z_0)\right| \le \left|f(z)\right|. \tag{8}$$

Агар $f(z_0) \neq 0$ бўлса, у ҳолда 2-леммага асосан шундай $h \in C$ мавжудки, $\left|f(z_0+h)\right| < \left|f(z_0)\right|$. Бу эса (8) тенгсизликка зид. Демак, $f(z_0) = 0$, яъни z_0 сон $f(z)$ кўпҳаднинг илдизидир.■

2-теорема. *Ҳар қандай $n > 0$ даражали $f(z)$ кўпҳад*

$$f(z) = a(z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n) \quad (9)$$

кўринишда ифодаланиши мумкин, бу ерда a сон $f(z)$ кўпҳаднинг бош коэффициенти, $z_1, z_2, ..., z_n$ сонлар эса унинг илдизлари (бу ерда ҳар бир илдиз қанча каррали бўлса, шунча марта ҳисобланган). Бу ифода кўпайтувчиларнинг ёзилиш тартиби аниқлигида ягонадир.

Исбот. 1-теоремага асосан $f(z)$ бирор комплекс илдизга эга. Безу теоремасига асосан шундай $f_1(z)$ кўпҳад мавжудки, $f(z) = (z - z_1)f_1(z)$. Равшанки, $f_1(z)$ нинг даражаси $n - 1$ га тенг. Агар $n - 1 > 0$ бўлса, у ҳолда $f_1(z)$ ни ҳам шунга ўхшаш кўринишда ёзиш мумкин: $f_1(z) = (z - z_2)f_2(z)$, бу ерда $f_2(z)$ нинг даражаси $n - 2$ га тенг. У ҳолда $f(z) = (z - z_1)(z - z_2)f_2(z)$. Бу мулоҳазани n марта ишлатиб, $f(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdot (z - z_n)f_n(z)$ ифодани оламиз. Бу ердаги $f_n(z)$ кўпҳаднинг даражаси нольга тенг бўлиб, у $f(z)$ кўпҳаднинг бош коэффициентига тенг. Натижада (9) ифодани оламиз. Бу ифода $f(z)$ кўпҳаднинг $z_1,...,z_n$ сонлардан фарқли бўлган илдизлари мавжуд эмаслигини кўрсатади. $f(z)$ кўпҳаднинг (9) кўринишда ифодаланиши кўпайтувчиларнинг ёзилиши тартиби аниқлигида ягоналиги 29-§ даги 5-теоремадан келиб чиқади.

(9) ифода $f(z)$ комплекс кўпҳаднинг C майдон устида келтирилмайдиган кўпайтувчиларга ёйилмасини беради. Агар $f(z)$ кўпҳаднинг $z_1,...,z_n$ илдизлари ичида α сон k марта учраса, у ҳолда (9) ифодани $f(z) = (z - \alpha)^k g(z)$ кўринишда ёзиш мумкин. Бу ерда $g(\alpha) \neq 0$. Бу мулоҳазадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

Натижа. *Агар $\alpha_1, \alpha_2,...,\alpha_s$ сонлар $f(z)$ кўпҳаднинг барча турли илдизлари ва $k_1, k_2,...,k_s$ уларнинг карралиги бўлса, у ҳолда $k_1 + ... + k_s = n$ ва $f(z) = a(z - \alpha_1)^{k_1}(z - \alpha_2)^{k_2} ... (z - \alpha_s)^{k_s}$.*

3-теорема. (Виет теоремаси). **Агар** $z_1,...,z_n$ ***сонлар*** $f(z) = az^n + a_1z^{n-1} + ... + a_n$ ***, кўпҳаднинг илдизлари бўлса (бу ерда ҳар бир илдиз қанча каррали бўлса, шунча марта ҳисобланган), у ҳолда***

$$z_1 + z_2 + ... + z_n = -\frac{a_1}{a},$$

$$z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 + ... + z_{n-1}z_n = \frac{a_2}{a},$$

....

$$z_1 \cdot z_2 ... z_n = (-1)^n \frac{a_n}{a}.$$

Бу ерда чап томондаги k — формуланинг ҳар бир ҳади $z_1, z_2,...,z_n$ илдизлар ичидаги k тасининг кўпайтмасидир. Чап томондаги k формула эса барча бундай кўпайтмаларнинг йиғиндисидан иборат.

Исбот. (9) ифодадан

$$\frac{1}{a} f(z) = (z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n) = $$
$$= z^n - \sigma_1 z^{n-1} + \sigma_2 z^{n-2} - ... + (-1)^n \sigma_n$$

тенгликни оламиз, бу ерда

$$\sigma_1 = z_1 + z_2 + ... + z_n,$$
$$\sigma_2 = z_1z_2 + z_2 \cdot z_3 + ... + z_{n-1}z_n,$$
....
$$\sigma_n = z_1z_2 \cdots z_n.$$

Ушбу

$$z^n + \frac{a_1}{a} z^{n-1} + \frac{a_2}{a} z^{n-2} + ... + \frac{a_n}{a} = z^n - \sigma_1 z^{n-1} + \sigma_2 z^{n-1} + ... + (-1)^n \sigma_n$$

тенгликдан z нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларнинг тенглиги келиб чиқади. Бу эса теореманинг исботини беради. ■

4-теорема. ***Агар $f(z)$ — ҳақиқий коэффициентли кўпҳад бўлса, у ҳолда уни***

$$f(z) = a(z - x_1) ... (z - x_k)(z^2 + p_1z + q_1) ... (z^2 + p_lz + q_l) \quad (10)$$

кўринишда ифодалаш мумкин, бу ерда a сон $f(z)$ кўпҳаднинг бош коэффициенти, $x_1, \ldots, x_k$ эса унинг ҳақиқий илдизлари (ҳар бирининг карраси қанча бўлса, шунча марта ёзилган), $p_1, q_1, \ldots p_l, q_l$ шундай ҳақиқий сонларки, $p_m^2 - 4q_m < 0, m = \overline{1,l}$. Бу ифода кўпайтувчиларнинг ёзилиш тартиби аниқлигида ягонадир.

Исбот. Дастлаб, агар α сон $f(z)$ кўпҳаднинг илдизи бўлса, $\bar{\alpha}$ сон ҳам илдизи эканлигини ва уларнинг карралари тенглигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, агар $f(z) = az^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n$ ва $a, a_1, a_2, \ldots a_n \in R$ бўлса, у ҳолда $\overline{f(z)} = a\bar{z}^n + a_1\bar{z}^{n-1} + \ldots + a_n = f(\bar{z})$. Шунга кўра $f(z) = (z - \alpha)^k g(z)$ тенгликдан ва $g(\alpha) \neq 0$ муносабатдан $f(\bar{z}) = \overline{f(z)} = \overline{(z-\alpha)^k g(z)} = (\bar{z} - \bar{\alpha})g_1(\bar{z})$ келиб чиқади, бу ерда $g_1(z) = \overline{g(\bar{z})}$. Бундан $g_1(\bar{\alpha}) = \overline{g(\alpha)} \neq 0$ муносабат келиб чиқади. Бу агар a сон $f(z)$ кўпҳаднинг илдизи бўлса, у ҳолда $\bar{\alpha}$ сон ҳам шу кўпҳаднинг илдизи бўлишини ва уларнинг карралари ўзаро тенг эканини кўрсатади. Энди α ва $\bar{\alpha}$ $(\alpha \neq \bar{\alpha})$ илдизларга мос кўпайтувчиларнинг кўпайтмасини қараймиз:

$$(z - \alpha)(z - \bar{\alpha}) = z^2 - (\alpha + \bar{\alpha})z + \alpha\bar{\alpha} = z^2 + pz + q.$$

Бу ерда $p = -(\alpha + \bar{\alpha})$, $q = \alpha \cdot \bar{\alpha} = |\alpha|^2$ бўлгани учун $p^2 - 4q = (\alpha - \bar{\alpha})^2 < 0$, чунки $\alpha - \bar{\alpha} \neq 0$ — соф мавҳум сон.

Энди (9) ифодада ҳар бир комплекс α илдизга мос $z - \alpha$ кўпайтувчини $\bar{\alpha}$ илдизга мос $z - \bar{\alpha}$ кўпайтувчига кўпайтириб ёзсак, α ва $\bar{\alpha}$ ларнинг карраси бир хиллигига кўра $f(z)$ кўпҳад (10) кўринишда ёзилади. ■

Агар (10) ифодада бир хил кўпайтувчиларни тўплаб ёзсак, қуйидаги натижани оламиз:

Натижа. *Ҳар қандай ҳақиқий коэффициентли $f(z)$ кўпҳад*

$$f(z) = a(z - \alpha_1)^{k_1} \ldots (z - \alpha_s)^{k_s} (z^2 + \beta_1 z + \gamma_1)^{l_1} \ldots \cdot (z^2 + \beta_t z + \gamma_t)^{l_t}$$

кўринишда ёзилиши мумкин, бу ерда α сон $f(z)$ кўпҳаднинг бош коэффициенти, $\alpha_1, ..., \alpha_s$ — унинг турли ҳақиқий илдизлари, $k_1, ..., k_s$ мос равишда бу илдизларнинг карралари, $z^2 + \beta_m z + \gamma_m$, $(m = \overline{1,t})$ — кўпҳадлар эса дискриминанти манфий бўлган ҳақиқий коэффициентли турли квадрат кўпҳадлар, $l_1, ..., l_t$ — натурал сонлар (ҳақиқий бўлмаган илдизларнинг карраси).

(10) ифода ҳақиқий коэффициентли $f(z)$ кўпҳаднинг R майдон устида келтирилмайдиган кўпайтувчиларга ёйилмасини беради.

31-§. РАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯЛАР

Иккита $f(z)$ ва $g(z)$ кўпҳадларнинг $\frac{f(z)}{g(z)}$ бўлинмасига **рационал функция (рационал каср)** дейилади. Рационал функция комплекс текисликнинг махраж илдизларидан бошқа барча нуқталарида аниқланган. Агар рационал касрнинг сурати нольга тенг бўлса ёки суратининг даражаси махражининг даражасидан кичик бўлса, у **тўғри каср** дейилади. Рационал касрнинг тўғри ёки нотўғри касрлиги унинг кўпҳадларнинг бўлинмаси кўринишида ифодаланишига боғлиқ эмас (текширинг!). Бундан буён, агар иккита рационал функциялар уларнинг иккаласи ҳам аниқланган барча нуқталарда тенг бўлса, уларни **тенг** деб юритамиз. Масалан, $\frac{(z-1)^2}{z-1} = z - 1$ деб ёзамиз, ваҳоланки буларнинг чапдагиси $z \neq 1$ нуқталарда, ўнгдагиси эса барча $z \in C$ нуқталарда аниқланган.

1-теорема. ***Ҳар қандай рационал каср кўпҳад ва тўғри касрнинг йиғиндиси кўринишида ифодаланиши мумкин.***

Исбот. $f(z)$ ва $g(z)$ кўпҳадларга қолдиқли бўлишни татбиқ қиламиз: $f(z) = q(z)g(z) + r(z)$.

Бундан

$$\frac{f(z)}{g(z)} = q(z) + \frac{r(z)}{g(z)},$$

бу ерда $r(z)$ — ноль кўпҳад ёки унинг даражаси $g(z)$ нинг даражасидан кичик. ■

2-теорема. *Агар $\frac{f}{g}$ — тўғри каср, $g_1, g_2, \ldots, g_n$ — ўзаро туб кўпҳадлар ва $g = g_1 \cdot g_2 \ldots g_n$ бўлса, у ҳолда шундай f_1, f_2, ..., f_n кўпҳадлар мавжудки, $\frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2} + \ldots + \frac{f_n}{g_n}$ ва ҳар бир $\frac{f_k}{g_k}$ $(k = \overline{1,n})$ тўғри касрдир.*

Исбот. Теоремани $n = 2$ ҳолда исботлаймиз. Умумий ҳол n бўйича математик индукция ёрдамида исботланади (уни исботлашни китобхонга машқ сифатида қолдирамиз). g_1 ва g_2 кўпҳадлар ўзаро туб бўлгани учун, шундай u_1 ва u_2 кўпҳадлар мавжудки, $u_1g_1 + u_2g_2 = 1$. Бунга кўра

$$\frac{f}{g} = \frac{f(u_1g_1 + u_2g_2)}{g_1g_2} = \frac{fu_2}{g_1} + \frac{fu_1}{g_2}.$$

1-теоремага асосан $\frac{fu_2}{g_1} = q_1 + \frac{f_1}{g_1}$, $\frac{fu_1}{g_2} = q_2 + \frac{f_2}{g_2}$ ифодаларни ёзиш мумкин, бу ерда q_1, q_2 — кўпҳадлар, $\frac{f_1}{g_1}$ ва $\frac{f_2}{g_2}$ эса тўғри касрлар. Натижада

$$\frac{f}{g} = q_1 + q_2 + \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2}$$

ифодани оламиз. Бунинг иккала томонини $g = g_1 \cdot g_2$ га кўпайтириб, $f = (q_1 + q_2)g + f_1g_2 + f_2g_1$ тенгликни оламиз. f_1 нинг даражаси g_1 нинг даражасидан кичик, f_2 нинг даражаси g_2 нинг даражасидан кичик, f нинг даражаси g нинг даражасидан кичик бўлгани учун $q_1 + q_2 = 0$ (чунки акс ҳолда f нинг даражаси g нинг даражасидан кичик бўлмасди — қарама-қаршилик). Демак

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2}.$$

Теорема исботланди.

Агар f ва g кўпҳадлар F майдон устидаги кўпҳадлар бўлса, $\frac{f}{g}$ функция F майдон устидаги **рационал функция** дейилади. Агар F майдон устидаги $\frac{f}{p^m}$, $m \in N$, кўринишдаги тўғри касрнинг махражидаги p кўпҳад F майдон устида келтирилмайдиган ва f нинг даражаси p нинг даражасидан кичик бўлса, $\frac{f}{p^m}$ тўғри каср **содда** дейилади.

3-теорема. ***F майдон устидаги ҳар қандай тўғри каср содда касрларнинг йиғиндисига тенг.***

Исбот. F майдон устидаги $\frac{f}{g}$ тўғри каср берилган бўлсин. Умумийликни чегараламасдан g ни унитар кўпҳад деб ҳисоблаш мумкин, чунки акс ҳолда касрнинг сурат ва махражини g нинг бош коэффициентига бўлиб юбориш мумкин. Фараз қилайлик, $g = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n}$ — ифода g нинг F майдон устида келтирилмайдиган унитар кўпҳадларнинг кўпайтмасига ёйилмаси бўлсин, бу ерда $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — кўпҳадлар F майдон устида келтирилмайдиган турли унитар кўпҳадлардир. Ушбу $p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n}$ кўпҳадлар ўзаро туб бўлгани учун 2-теоремага асосан

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1}{p_1^{k_1}} + \ldots + \frac{f_n}{p_n^{k_n}},$$

бу ерда $\frac{f_m}{p_m^{k_m}}$ $(m = \overline{1, n})$ — тўғри касрлар. Бундан кўринадики, теоремани исботлаш учун уни $\frac{r}{p^k}$ кўринишдаги тўғри касрлар учун исботлаш кифоя, бу ерда p — келтирилмайдиган унитар кўпҳад. Қолдиқли бўлишни кетма-кет татбиқ қилиб, қуйидаги ифодаларни оламиз:

$$r = q_1p + r_1,\ q_1 = q_2p + r_2,\ q_2 = q_3p + r_3, \ldots .$$

Булардан: $r = q_2p^2 + r_2p + r_1 = q_3p^3 + r_3p^2 + r_2p + r_1 = \ldots$ $q_{k-1}p^{k-1} + r_{k-1}p^{k-2} + \ldots + r_1$. Бу ердаги $r_1, r_2 \ldots, r_{k-1}$ кўпҳадларнинг ҳар бири ноль кўпҳад ёки даражаси p нинг даражасидан кичик. Ундан ташқари r нинг даражаси p^{k-} нинг даражасидан кичик бўлгани учун $q_{k-1} = r_k$ кўпҳад ноль ёки унинг даражаси p нинг даражасидан кичик. Бунга кўра

$$\frac{r}{p^k} = \frac{r_k}{p} + \frac{r_{k-1}}{p^2} + \ldots + \frac{r_1}{p^k}$$

— содда касрларнинг йиғиндисидир. ■

1-Натижа. *Махражи $g(z) = a(z-\alpha_1)^{k_1} \ldots (z-\alpha_s)^{k_s}$ кўринишда* (бу ерда $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — турли комплекс сонлар; $k_1, \ldots, k_s \in N$) *бўлган C майдон устидаги ҳар қандай тўғри каср ушбу*

$$\sum_{n=1}^{s} \sum_{m=1}^{k_n} \frac{d_{nm}}{(z-\alpha_n)^m}$$

кўринишида ифодаланиши мумкин, бу ерда $d_{nm} \in C$.

2-теорема. ***Махражи** $g(z) = a(z-\alpha_1)^{k_1} \ldots (z-\alpha_s)^{k_s}(z^2 + \beta_1 z + \gamma_1)^{l_1} \ldots (z^2 + \beta_t z + \gamma_t)^{l_t}$* **кўринишда** (бу ерда $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — турли ҳақиқий сонлар, $z^2 + \beta_m z + \gamma_m$, $m = \overline{1,t}$, кўпҳадлар дискриминанти манфий бўлган R ҳақиқий сонлар майдони устидаги турли кўпҳадлар; $k_1, \ldots, k_s, l_1, \ldots, l_t \in N$) ***бўлган R майдон устидаги ҳар қандай тўғри каср ушбу***

$$\sum_{n=1}^{s} \sum_{m=1}^{k_n} \frac{d_{nm}}{(z-\alpha_n)^m} + \sum_{p=1}^{t} \sum_{q=1}^{l_p} \frac{a_{pq}z + b_{pq}}{(z^2+\beta_p z+\gamma_p)^q}$$

кўринишида ифодаланиши мумкин, бу ерда $d_{nm}, a_{pq}, b_{pq} \in R$.

Аниқ ҳолларда a_{pq}, b_{pq}, d_{nm} сонлар **аниқмас коэффициентлар услуби** ёрдамида топилади. Бунда берилган тўғри каср содда касрлар йиғиндиси шаклида ёзилиб, z га турли сон қийматлари берилади (ёки ёйилма умумий махражга келтирилгандан сўнг ҳосил бўлган кўпҳадларнинг мос коэффициентлари тенглаштирилади).

Масалан, $\frac{z+1}{(z^2+1)^2}$ каср R майдон устида содда, аммо C майдон устида содда эмас. Унинг C майдон устида содда касрлар йиғиндисига ёйилмаси 1-натижага кўра қуйидаги кўринишга эга:

$$\frac{z+1}{(z^2+1)^2} = \frac{d_1}{z+i} + \frac{d_2}{(z+i)^2} + \frac{d_3}{z-i} + \frac{d_4}{(z-i)^2}.$$

Бундан $z + 1 = d_1(z^2 + 1)(z-i) + d_2(z-i)^2 + d_3(z^2 + 1)(z + i) + d_4(z + i)^2$.

Энди z га кетма-кет i, $-i$, 0, 1 қийматларни бериб, қуйидаги тенгликларни оламиз:

$$-4d_4 = 1 + i,\ -4d_2 = 1 - i,\quad - id_1 - d_2 + id_3 - d_4 = 1,$$
$$2(1 + i)d_1 + 2id_2 + 2(i + 1)d_3 + 2id_4 = 2.$$

Бундан $d_1 = \frac{1}{4}i,\ d_2 = -\frac{1-i}{4},\ d_3 = -\frac{1}{4}i,\ d_4 = -\frac{1+i}{4}$

ва $\frac{z+1}{(z^2+1)^2} = \frac{i}{4(z+i)} - \frac{1-i}{4(z+i)^2} - \frac{i}{4(z-i)} - \frac{1+i}{4(z-i)^2}$.

32-§. БИР НЕЧА ЎЗГАРУВЧИЛИ КЎПҲАДЛАР

F — сонли майдон ва n — натурал сон бўлсин. n та x_1, x_2, ..., x_n номаълумнинг F майдон устидаги кўпҳади деб $a_{k_1 \cdots k_n}$ коэффициентлари F майдондан олинган ушбу

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum a_{k_1 \ldots k_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$$

чекли йиғинди кўринишидаги $f\colon F^n \to F$ функцияга айтилади. Хусусан, $n = 1$ ҳолда илгари кўрилган бир ўзгарувчили кўпҳадларни оламиз. Ҳар бир $a_{k_1 \cdots k_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ ҳадга мос келган $(k_1, ..., k_n)$ векторни бу ҳаднинг **кўрсаткич вектори** дейилади, ушбу $k_1 + k_2 + ... + k_n$ сон эса бу ҳаднинг **даражаси** дейилади. f кўпҳадга нольдан фарқли коэффициент билан кирувчи ҳадлар даражаларининг энг каттаси бу **кўпҳаднинг даражаси** дейилади.

1-теорема. ***n ўзгарувчили f кўпҳаднинг коэффициентлари бу кўпҳад билан бир қийматли аниқланади.***

Исбот. Исботлашда n бўйича математик индукцияни ишлатамиз. $n = 1$ ҳолда бу теорема илгари исботланган эди. Энди $n > 1$ деб олиб, бу ҳолда теоремани $n - 1$ ўзгарувчили кўпҳадлар учун ўринли деб фараз қиламиз. f кўпҳадда $a_{k_1 \ldots k_{n-1} k_n} x_1^{k_1} \ldots x_{n-1}^{k_{n-1}} x_n^{k_n}$ ҳадлари учун $(k_1..., k_{n-1})$ вектор бир хил бўлган ҳадларини йиғиб ёзамиз:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{(k_1,\ldots,k_{n-1})}\left(\sum_{k_n} a_{k_1\ldots k_{n-1}k_n}x_n^{k_n}\right)\cdot x_1^{k_1}\ldots x_{n-1}^{k_{n-1}}.$$

Энди $x_n = z \in C$ деб олиб, қуйидаги $(n-1)$ ўзгарувчили кўпҳадга келамиз:

$$f_z(x_1,\ldots,x_{n-1}) = \sum_{(k_1,\ldots,k_{n-1})} a_{k_1\ldots k_{n-1}}(z)\cdot x_1^{k_1}x_{n-1}^{k_{n-1}},$$

бу ерда

$$a_{k_1\ldots k_{n-1}}(z) = \sum_{k_n} a_{k_1\ldots k_n}z^{k_n}.$$

Математик индукциянинг фаразига мувофиқ $a_{k_1\ldots k_{n-1}}(z)$ коэффициентлар $f_z(x_1,\ldots,x_{n-1})$ кўпҳад билан бир қийматли аниқланган. Бу барча $z \in C$ учун ўринли бўлгандан f орқали бир ўзгарувчили $a_{k_1\ldots k_{n-1}}(z)$ кўпҳадлар бир қийматли аниқланган. Бундан бу кўпҳадларнинг $a_{k_1\ldots k_n}$ коэффициентлари ҳам бир қийматли аниқланганлиги келиб чиқади.

Бир ўзгарувчили кўпҳадлар алгебрасида кўпҳад ҳадларини даражаси бўйича тартиблаш мумкинлиги муҳим аҳамиятга эга. Аммо бир неча ўзгарувчили кўпҳадларнинг турли ҳадлари бир хил даражага эга бўлиши мумкин. Масалан,

$$f(x_1x_2x_3) = 3x_1x_2^2 - 5x_1^3 + x_2x_3 + x_1^2$$

кўпҳадда иккитадан иккинчи ва учинчи даражали ҳадлар бор. Кўп ўзгарувчили кўпҳадларда кўпҳад ҳадларини тартиблаш учун ҳаднинг даражаси ўрнига ҳаднинг кўрсаткич вектори ишлатилади. Унинг қулайлиги шундаки, турли ҳадларнинг кўрсаткич вектори турлидир.

Кўпҳад ҳадларини кўрсаткич вектор ёрдамида тартиблаш мақсадида R^n да қуйидагича чизиқли тартиб киритамиз: агар $X, У \in R^n$ векторлар учун $X - У$ айирманинг нольдан фарқли бўлган координаталари ичида энг олдинда тургани мусбат бўлса, X вектор $У$ дан **катта** дейилади ва $X > У$ ёки $У < X$ каби белгиланади. Бу ҳолда $У$ вектор X дан кичик деб ҳам юритилади.

Бу бинар муносабат қуйидаги хоссаларга эга:

1) агар $X > У$ бўлса, у ҳолда $X \neq У$

Ҳақиқатан, $X > У$ бўлса, у ҳолда $X - У \neq 0$;

2) агар $X > У$ ва агар $У > Z$ бўлса, у ҳолда $X > Z$.

Ҳақиқатан, агар $X - У$ ва $У - Z$ векторларнинг нольдан фарқли координаталарининг энг олдингиси мусбат бўлса, бу хосса

$$(X - У) + (У - Z) = X - Z$$

вектор учун ҳам ўринли.

3) агар $X \neq У$ бўлса, у ҳолда $X > У$ ёки $У > X$.

Ҳақиқатан, агар $X \neq У$ бўлса, у ҳолда $X - У$ вектор нольдан фарқли координаталарга эга. Агар бундай координаталарнинг энг олдингиси мусбат бўлса, у ҳолда $X > У$, манфий бўлса, $У > X$ (чунки $У - X = -(X - У)$).

Шундай қилиб, R^n да киритилган бу бинар муносабат чизиқли тартиб муносабатидир. R^n даги бу чизиқли тартиб "лексикографик" ёки "луғат" тартиб дейилади. Бу чизиқли тартиб луғатларда сўзларнинг алфавит тартибида келишига мос қоидага асослангани учун шундай аталади.

Луғат тартиб R^n даги қўшиш амали билан қуйидагича боғланган: агар $X > У$ ва $Z \geq T$ бўлса, у ҳолда $X + Z > У + T$. Ҳақиқатан, агар $Z = T$ бўлса, $X > У$ дан $X + Z > У + T = У + Z$ келиб чиқади, чунки $X - У = (X + Z) - (У + Z)$. Агар $X > У$, $Z > T$ бўлса, у ҳолда $X + Z > У + Z > У + T$.

Агар кўпҳаднинг нольдан фарқли ҳадларининг кўрсаткич векторлари камайиш тартибида жойлашган бўлса, кўпҳаднинг нольдан фарқли ҳадлари луғат тартибида жойлашган дейилади.

Масалан, юқорида келтирилган $f(x_1, x_2, x_3)$ кўпҳад ҳадларининг кўрсаткич векторлари қуйидагича: (1, 2, 0), (3, 0, 0), (0, 1, 1), (2, 0, 0). Бу векторлар луғат тартиб бўйича қуйидагича жойлашган: (3, 0, 0) > (2, 0, 0) > (1, 2, 0) > (0, 1, 1).

Кўпҳад ҳадларининг бу тартибга мос ёзилиши эса қуйидагича:

$$f(x_1x_2x_3) = -5x_1^3 + x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2x_3.$$

Бир неча ўзгарувчили кўпҳад ҳадлари ичида энг катта кўрсаткич векторга эга бўлган ҳади бу кўпҳаднинг юқори ҳади дейилади. Қурилган $f(x_1, x_2, x_3)$ кўпҳаднинг юқори ҳади $-5x_1^3$.

2-теорема. ***Бир хил ўзгарувчиларнинг иккита кўпҳади кўпайтмасининг юқори ҳади кўпайтувчилар юқори ҳадларининг кўпайтмасига тенг.***

Исбот. Луғат тартибида ёзилган иккита

$$f(x_1,\ldots,x_n) = ax_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}+\ldots,$$

$$g(x_1,\ldots,x_n) = bx_1^{l_1}\ldots x_n^{l_n}+\ldots$$

кўпҳадлар берилган бўлсин. У ҳолда $ax_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}$ ва $bx_1^{l_1}\ldots x_n^{l_n}$ мос равишда уларнинг юқори ҳадларидир. Ушбу $a\cdot b\ x_1^{k_1+l_1}\ldots x_n^{k_n+l_n}$ ҳад $f\cdot g$ кўпҳаднинг юқори ҳади эканлигини кўрсатамиз. Дастлаб $K = (k_1, ..., k_n)$, $L = (l_1, ..., l_n)$ белгиларни киритамиз. Энди $I = (i_1, ..., i_n)$ орқали f кўпҳаддаги нольдан фарқли бирор ҳаднинг кўрсаткич векторини, $J = (j_1, ..., j_n)$ орқали g кўпҳаддаги нольдан фарқли бирор ҳаднинг кўрсаткич векторини белгилаймиз. У ҳолда $K \geq I$, $L \geq J$. Ҳадлар кўпайтирилганда уларнинг кўрсаткич векторлари қўшилади: $K + L \geq I + J$. Агар $K \geq I$, $L \geq J$ тенгсизликларнинг камида бирида қатъий тенгсизлик бўлса (яъни тенглик бўлмаса), у ҳолда $K + L \geq I + J$. Шундай қилиб, $K + L$ вектор фақат f ва g кўпҳадларнинг юқори ҳадлари кўпайтирилгандагина ҳосил бўлади. ■

Агар ҳар қандай $\varphi \in S_n$ ўрин алмаштириш ва $f(x_1, ..., x_n)$ кўпҳад учун

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_{\varphi(1)}, x_{\varphi(2)}, ..., x_{\varphi(n)})$$

тенглик ўринли бўлса, яъни $f(x_1, ..., x_n)$ кўпҳад ўзгарувчиларнинг ўрнини ҳар қандай алмаштирилганда ҳам ўзгармаса, у **симметрик** кўпҳад дейилади.

Масалан, қуйидаги кўпҳадлар симметрик кўпҳадлардир:

$$\sigma_1 = \sigma_1(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 + x_2 + ... + x_n,$$
$$\sigma_2 = \sigma_2(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_1x_n + x_2x_3 + x_{n-1}x_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sigma_n = \sigma_n(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1x_2 \, ... \, x_n.$$

Бу кўпҳадлар бизга илгари учраганди; улар **элементар симметрик кўпҳадлар** дейилади. Симметрик кўпҳадларга бошқа мисоллар — даражали йиғиндилар:

$$S_k = S_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k \quad (k = 1, 2, 3, ...).$$

3-теорема. ***Агар $ax_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ ҳад $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ симметрик кўпҳаднинг юқори ҳади бўлса, у ҳолда $k_1 \geq k_2 \geq ... \geq k_n$.***

Исбот. Ушбу $1 \leq i < j \leq n$ тенгсизлик ўринли бўлсин. f кўпҳад симметрик бўлгани учун бу кўпҳаднинг кўрсаткич векторлари ичида юқори ҳаднинг $K = (k_1, ..., k_i, ..., k_j, ..., k_n)$ кўрсаткич вектори билан бирга ундан $k_i \leftrightarrow k_j$ транспозиция орқали ҳосил қилинган $L = (k_1, ..., k_j, ..., k_i, ..., k_n)$ вектор ҳам учрайди. Ушбу $(k_1, ..., k_i, ..., k_j, ..., k_n) \geq (k_1, ..., k_j, ..., k_i, ..., k_n)$ тенгсизлик ўринли бўлгани учун $k_i \geq k_j$, чунки акс ҳолда $K < L$ ўринли бўлади. Бу ерда $i, j, i < j$ ихтиёрий бўлгани учун бундан теореманинг исботи келиб чиқади.

F — сонли майдон ва коэффициентлари F майдондан олинган $f(x_1, ..., x_n)$, $f_1(x_1, ..., x_n)$, ..., $f_m(x_1, ..., x_n)$ кўпҳадлар берилган бўлсин. Агар F майдон устида шундай $g(y_1, ..., y_m)$ кўпҳад мавжуд бўлсаки, $f = g(f_1, ..., f_m)$ ўринли бўлса, f кўпҳад $f_1, f_2, ..., f_m$ кўпҳадларнинг F майдон устидаги алгебраик комбинацияси дейилади.

4-теорема (симметрик кўпҳадлар тўғрисидаги асосий теорема). ***F майдон устидаги ҳар қандай $f(x_1, ..., x_n)$***

симметрик кўпҳад элементар симметрик $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$) функцияларнинг F майдон устидаги алгебраик комбинациясидир.

Исбот. Ноль кўпҳад учун бу равшан. Энди f — нольдан фарқли кўпҳад бўлиб, $ax_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ — унинг юқори ҳади бўлсин. 3-теоремага кўра $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n$. Ушбу

$$f - a\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3}\ldots\sigma_{n-1}^{k_{n-1}-k_n}\sigma_n^{k_n}$$

айирмани f_1 орқали белгилаймиз. Элементар симметрик $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ функцияларнинг юқори ҳадлари мос равишда $x_1, x_1 \cdot x_2, \ldots, x_1 \cdot x_2, \ldots x_n$ бўлгани учун 2-теоремага кўра $a\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3}\ldots\sigma_n^{k_n}$ кўпҳаднинг юқори ҳади $ax_1^{k_1-k_2}(x_1x_2)^{k_2-k_3}\ldots(x_1x_2\ldots x_n)^{k_n} = ax_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}$ бўлиб, у f нинг юқори ҳадига тенгдир. Шунга кўра f_1 ё ноль кўпҳад, ёки f_1 нинг юқори ҳади f нинг юқори ҳадидан (луғат тартиб маъносида) кичик. Биринчи ҳолда исбот шу билан тугайди, чунки бу ҳолда $f = a\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3}\ldots\sigma_n^{k_n}$. Иккинчи ҳолда f_1 нинг юқори ҳадини олиб, бу юқори ҳадга мос элементар симметрик кўпҳадларнинг алгебраик комбинациясини f_1 дан айириб, бирор f_2 кўпҳадни ҳосил қиламиз. Бу f_2 кўпҳад ё ноль кўпҳад ёки унинг юқори ҳади f_1 нинг юқори ҳадидан кичик. Биринчи ҳолда теореманинг исботи тугайди. Иккинчи ҳолда мулоҳаза юқоридаги каби давом этади. Пайдо бўлган $f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$ кўпҳадларнинг ҳар бири f билан $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ функциялар ҳосил қилган бирор алгебраик комбинациясининг айирмасидир. Бу $f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$ кўпҳадларнинг ичида нольдан фарқли бўлганлари турли юқори ҳадларга эга бўлиб, уларнинг ҳар бири f нинг юқори ҳадидан кичик. Агар $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ — бу кўпҳадлардан ихтиёрийсининг юқори ҳади бўлса, у ҳолда $(l_1, l_2, \ldots, l_n) \leq (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ ва $l_1 \geq l_2 \geq \ldots \geq l_n \geq 0$ тенгсизликлардан $0 \leq l_n \leq \ldots \leq l_1 \leq k_1$ тенгсизликлар келиб чиқади.

Охирги тенгсизликлар кўрсатадики, $l_1, l_2, \ldots, l_n$ сонларнинг ҳар бири $(k_1 + 1)$ та ушбу $0, 1, 2, \ldots, k_1$ қийматдан фақат биттасини қабул қилиши мумкин. Бундан келиб чиқадики, $f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$ кетма-кетликда нольдан фарқли кўпҳадлар сони $(k_1 + 1)^n$ дан ошмайди. Шунинг учун бирор $m \in N$ да $f_m = 0$. Бу эса f кўпҳад $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ ларнинг алгебраик комбинацияси эканлигини кўрсатади. ■

Бу теоремадан ва Виета теоремасидан қуйидаги натижани оламиз.

Натижа. ***Агар $g(z)$ — бир ўзгарувчили n даражали F майдон устидаги кўпҳад, $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — унинг комплекс илдизлари*** (карраси билан ҳисобланган), ***$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ эса F майдон устида симметрик кўпҳад бўлса, у ҳолда $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ сон F майдонга тегишлидир.***

Исбот. Ҳақиқатан 4-теоремага асосан n ўзгарувчили шундай $h(y_1, \ldots, y_n)$ кўпҳад мавжудки, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = h(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$.

Агар $g(z) = az^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, $a, a_1, \ldots, a_n \in F$ бўлса, у ҳолда Виета теоремасига асосан

$$\sigma_1(z_1, \ldots, z_n) = -\frac{a_1}{a},$$

$$\sigma_2(z_1, \ldots, z_n) = \frac{a_2}{a},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sigma_n(z_1, \ldots, z_n) = (-1)^n \frac{a_n}{a}$$

Бунга кўра $f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = h\left(-\frac{a_1}{a}, -\frac{a_2}{a}, \ldots, (-1)^n \frac{a_n}{a}\right) \in F.$

Мисол кўрамиз. Берилган $z^3 + az^2 + bz + c$ кўпҳад z_1, z_2, z_3 илдизларини ҳисобламасдан туриб, уларнинг кублари йиғиндисини ҳисоблаймиз. Ушбу $z_k^3 = -(az_k^2 + bz_k + c)$ (к = 1, 2, 3) тенгликларга асосан $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = -a(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) - b(z_1 + z_2 + z_3) - 3c$. Виета теоремасига асосан $\sigma_1 = z_1 + z_2 + z_3 = -a$, $\sigma_2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = b$. Энди $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ ни σ_1 ва σ_2 орқали ифодалаймиз: $\sigma_1^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2\sigma_2$ тенгликдан $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$. Демак, $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = -a(a^2 - 2b) + ab - 3c = -a^3 + 3ab - 3c$.

33-§. БУТУН СОНЛАРНИНГ БЎЛИНИШ НАЗАРИЯСИ

Бутун сонларнинг бўлиниш назарияси кўп жиҳатдан кўпҳадларнинг бўлиниш назариясига ўхшаш. Кўпҳадлардаги каби бу ҳолда ҳам назариянинг асосида қолдиқли бўлиш мумкинлиги ётади.

1-теорема *(Z ҳалқада қолдиқли бўлиш ҳақидаги теорема).* ***Агар a, b — бутун сонлар ва $b \neq 0$ бўлса, у ҳолда шундай q ва r бутун сонлар мавжудки, $a = bq + r$ ва $0 \leq r < |b|$. Бу шартларни қаноатлантирувчи q ва r сонлар ягона.***

Исбот. Исботлашда ҳақиқий ўзгарувчининг $[x]$ (x нинг бутун қисми) ва $\{x\}$ (x нинг каср қисми) функцияларининг хоссаларидан фойдаланамиз. Ушбу $\frac{a}{|b|} = \left[\frac{a}{|b|}\right] + \left\{\frac{a}{|b|}\right\}$ тенгликдан $a = \left[\frac{a}{|b|}\right]|b| + \left\{\frac{a}{|b|}\right\}|b| = bq + r$, бу ерда $q = \left[\frac{a}{|b|}\right]\operatorname{sgn} b$, $r = a - bq = \left\{\frac{a}{|b|}\right\}|b|$ — бутун сонлар. Ҳар қандай x сон учун $0 \leq \{x\} < 1$ бўлгани учун $0 \leq r < |b|$.

Агар q_1 ва r_1 сонлар учун ҳам $a = bq_1 + r_1$, $q_1, r \in Z$, $0 \leq r_1 < |b|$ ўринли бўлса, у ҳолда $b(q - q_1) = r_1 - r$. Ушбу $0 \leq r < |b|$, $0 \leq r_1 < |b|$ тенгсизликлардан $|b||q - q_1| = |r_1 - r| < |b|$ тенгсизлик келиб чиқади. Бундан эса $|q - q_1| < 1$ тенгсизлик келиб чиқади. Бу q, q_1 сонларнинг бутун сон эканлигидан $q - q_1 = 0$, яъни $q = q_1$ келиб чиқади. Бундан ва $b(q - q_1) = (r_1 - r)$ тенгликдан $r = r_1$ келиб чиқади.

Бу теоремадаги q сон чала бўлинма, r эса a ни b га бўлишдан ҳосил бўлган қолдиқ дейилади. Агар $r = 0$, яъни $a = bq$ бўлса, a сон b га бўлинувчи ёки b сон a нинг бўлувчиси дейилади.

Камида бири нольдан фарқли бўлган иккита бутун сонларнинг умумий бўлувчилари ичида энг каттаси уларнинг энг катта умумий бўлувчиси (Э.К.У.Б.) дейилади.

a ва b сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси (a, b) орқали белгиланади.

2-теорема. ***1) Ҳар қандай a, $b \in Z$ учун шундай x_0, $y_0 \in Z$ мавжудки, $(a, b) = ax_0 + by_0$.***

2) Иккита сонннинг э.к.у.б. уларнинг ихтиёрий умумий бўлувчисига бўлинади.

Исбот. Қуйидаги $f: Z^2 \to Z$, $f(x, y) = ax + by$ функцияни кўрамиз. Агар a ва b сонлар бир вақтда нольга тенг бўлмаса, бу функция мусбат қийматларни ҳам, манфий қийматларни ҳам қабул қилади. Унинг мусбат қийматларининг энг кичигини d орқали белгилаймиз ва $d = (a,b)$ эканлигини кўрсатамиз.

Ушбу $d = ax_0 + by_0 > 0$ ўринли бўлгани учун a ва d га 1-теоремани татбиқ қилиб, $a = dq + z$, $0 \le r < d$ ни оламиз. Энди $r = a - dq = a(1 - qx_0) + b(-qy_0) = ax_1 + by_1$, $x_1 y_1 \in Z$, тенглик ва $0 < r < d$ тенгсизлик d нинг таърифланишига зид. Демак $r = 0$, яъни a сон d га бўлинади. Шунга ўхшаш b нинг ҳам d га бўлиниши кўрсатилади. Иккинчи томондан a ва b сонларнинг ҳар қандай бўлувчиси $d = ax_0 + by_0$ сонни ҳам бўлади ва шунга кўра d дан катта бўлмайди. Бу билан $d = (a, b)$ эканлиги кўрсатилди. Иккинчи тасдиқ $d = ax_0 + by_0$ тенгликдан келиб чиқади.

1-натижа. *Агар $(a, b) = d$ бўлса, у ҳолда* $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

Исбот. Ҳақиқатан $ax_0 + by_0 = d$ тенгликдан $\frac{a}{d} x_0 + \frac{b}{d} y_0 = 1$ тенглик келиб чиқади. Бу $\frac{a}{d} x + \frac{b}{d} y$ функциянинг мусбат қийматлари ичида энг кичиги 1 га тенг эканини кўрсатади. Исботланган теоремага асосан:

$$\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1.$$

2-натижа. *Агар a, b, $c \in Z$, $(a,c) = 1$ ва ab сон c га бўлинса, у ҳолда b сон c га бўлинади.*

Исбот. $(a,c) = 1$ бўлгани учун шундай x_0, $y_0 \in z$ мавжудки, $ax_0 + cy_0 = 1$. Бундан $abx_0 + bcy_0 = b$ келиб чиқади. Бу тенгликнинг чап томонидаги ab ва bc сонлар c га бўлинади. Бундан b нинг ҳам c га бўлиниши келиб чиқади. ■

Бутун сонларнинг э.к.у.б. ни ҳисоблаш учун кўпҳадлардаги каби Евклид алгоритми (кетма-кет қолдиқли бўлиш ёрдамида э.к.у.б. ни топиш усули) ишлатилади. Бунинг тафсилотларини китобхонга қолдирамиз.

Агар $a, b \in z$ сонлар учун $(a,b) = 1$ бўлса, улар ўзаро туб дейилади. 2–теоремадан қуйидаги тасдиқ келиб чиқади: a ва b сонлар ўзаро туб бўлиши учун бирор x_0, $y_0 \in z$, учун $ax_0 + by_0 = 1$ тенглик бажарилиши зарур ва кифоя.

Бундан худди кўпҳадлардаги каби қуйидаги тасдиқ келиб чиқади: агар $a \in Z$ сон $b_1, b_2, ..., b_m \in Z$ сонлар билан ўзаро туб бўлса, у ҳолда у $b_1, b_2, ..., b_m$ кўпайтма билан ҳам ўзаро туб бўлади (исботланг!).

Ушбу $a, b \in Z$ сонларнинг иккаласига ҳам бўлинадиган энг кичик мусбат сон уларнинг энг кичик умумий бўлинувчиси дейилади ва $[a, b]$ орқали белгиланади.

3-теорема. ***$[a, b]$ сон a ва b сонларнинг ҳар қандай бошқа умумий бўлинувчисини бўлади. Нольдан фарқли ҳар қандай $a, b \in Z$ сонлар учун***

$$[a,b] = \frac{|ab|}{(a,b)}.$$

Исбот. Тасдиқни мусбат $a, b \in Z$ сонлар учун исботлаш кифоя, чунки $[a,b] = [|a|,|b|]$. Ушбу $a_1 = \frac{a}{(a,b)}$, $b_1 = \frac{b}{(a,b)}$ белгиларни киритсак, у ҳолда $\frac{ab}{(a,b)} = ab_1 = a_1b$ сон a ва b сонларнинг умумий бўлинувчисидир. Агар $c \in Z$ сон a ва b сонларнинг бошқа умумий бўлинувчиси бўлса, у ҳолда $c = au = bv$, $u, v \in Z$. Бундан $v = \frac{au}{b} = \frac{a_1u}{b_1}$. Ушбу $(a_1, b_1) = 1$ муносабат ўринли бўлгани учун $u = b_1u_1$, $u_1 \in Z$. Бунга кўра $c = ab_1 \cdot u_1 = \frac{ab}{(a,b)}u_1$. Демак $\frac{ab}{(a,b)} = [a,b]$.

Ўзидан ва бир сондан бошқа бўлувчилари бўлмаган бир сонидан катта бўлган бутун сон **туб сон** дейилади. Масалан, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 сонлар туб сонлардир.

4-теорема. *Туб сонлар тўплами чексиздир.*

Исбот. Агар a бутун сон, $a > 1$ ва a нинг бир сонидан катта бўлган бўлувчилари ичида энг кичиги p бўлса, у ҳолда p — туб сон. Ҳақиқатан, $d \in Z$, $d > 0$, d/p ва $d \leq p$ бўлсин. Агар $1 < d < p$ бўлса, у ҳолда бундай d нинг мавжудлиги p

нинг таърифланишига зид. Демак, ё $d = 1$ ёки $d = p$, яъни p — туб сон.

Энди туб сонлар тўплами чекли бўлсин деб фараз қилайлик ва $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — барча туб сонлар бўлсин. Ушбу $a = p_1 \cdot p_2 \ldots p_n + 1$ сонни оламиз ва бу сон учун юқорида таърифланган p сонни кўрамиз. p — туб бўлгани учун у $p_1, p_2, \ldots, p_n$ сонларнинг бирига тенг бўлади. Ундан ташқари p/a. Демак, $a - p_1 \cdot p_2 \ldots p_n = 1$ сон p га бўлинади. Бу қарама-қаршилик теоремани исботлайди.

Туб соннинг таърифидан, агар p туб сон бўлса, у ҳолда ҳар бир бутун сон ё p га бўлинади ёки p билан ўзаро туб эканлиги келиб чиқади. Шунга кўра, агар бир нечта бутун соннинг кўпайтмаси p туб сонга бўлинса, у ҳолда бу сонларнинг камида бири p га бўлинади (чунки акс ҳолда барча кўпайтувчилар p билан ўзаро туб бўлади; бундан улар кўпайтмасининг ҳам p билан ўзаро тублиги келиб чиқади).

5-теорема (арифметиканинг асосий теоремаси). ***Ҳар қандай $a > 1$ бутун сон туб сонларнинг кўпайтмаси шаклида ифодаланиши мумкин. Бундай ифода кўпайтувчиларнинг ёзилиш тартиби аниқлигида ягона.***

Исбот. Исботни $a \geq 2$ бўйича математик индукция ёрдамида исботлаймиз. 2 сон туб сон. Энда $a > 2$ бўлсин. 4-теореманинг исботида кўрдикки, шундай p_1 туб сон мавжудки, p_1/a. Демак, $a = p_1 a_1$, $a_1 \in z$, $1 \leq a_1 < a$. Агар $a_1 = 1$ бўлса, у ҳолда $a = p$. Агар $a_1 > 1$ бўлса, у ҳолда математик индукциянинг фаразига мувофиқ a_1 сон туб сонларнинг кўпайтмаси шаклида ифодаланади. Бунга кўра $a = p_1 a_1$ ҳам туб сонларнинг кўпайтмаси шаклида ифодаланади. Бутун соннинг туб сонларнинг кўпайтмаси шаклида ягона ифодаланиши унитар кўпҳадлар учун исботланган мос теореманинг (унитар кўпҳаднинг келтирилмайдиган кўпҳадларнинг кўпайтмасига ёйилиши ҳақидаги теореманинг) исботига ўхшаш (тафсилотини китобхонга қолдирамиз).

Натижа. *Ҳар қандай $a > 1$ бутун сон $p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s}$ кўринишида ифодаланиши мумкин, бу ерда $p_1, \ldots, p_s$ — турли туб сонлар, $k_1, \ldots, k_s$ — натурал сонлар. Бундай ифода кўпайтувчиларнинг ёзилиш тартиби аниқлигида ягона.*

34-§. Z ҲАЛҚАДА ТАҚҚОСЛАМАЛАР ВА ЧЕГИРМАЛАР СИНФЛАРИ

m — натурал сон, a ва b — бутун сонлар бўлсин. Агар $a-b$ айирма m га бўлинса, a сон b билан m модуль бўйича таққосланувчи дейилади ва $a \equiv b \pmod{m}$ кўринишида ёзилади.

Берилган m учун Z тўпламдаги $a \equiv b \pmod{m}$ бинар муносабат қуйидаги хоссаларга эга:

1. $a \equiv a \pmod{m}$ (рефлексивлик хоссаси), чунки $a - a$ сон m га бўлинади.

2. Агар $a \equiv b \pmod{m}$ бўлса, у ҳолда $b \equiv a \pmod{m}$ (симметриклик хоссаси), чунки $a - b$ сон m га бўлинса, $b - a = -(a - b)$ ҳам m га бўлинади.

3. Агар $a \equiv b \pmod{m}$ ва $b \equiv c \pmod{m}$ бўлса, у ҳолда $a \equiv c \pmod{m}$, чунки $a - b$ сон m га бўлинса ва $b - c$ сон ҳам m га бўлинса, у ҳолда $a - c = (a - b) + (b - c)$ сон ҳам m га бўлинади.

Бу учта хоссанинг ўринлилиги $a \equiv b \pmod{m}$ бинар муносабат эквивалентлик муносабати эканлигини кўрсатади. Z тўпламда бу эквивалентлик муносабати ҳосил қилган синфларни m модуль бўйича **чегирмалар синфлари** дейилади, $a \equiv b \pmod{m}$ муносабат эса **таққослама** дейилади.

$a \equiv b \pmod{m}$ муносабат a ва b сонлар m га бўлинганда бир хил қолдиққа эга бўлишига тенг кучли бўлгани учун (текширинг!), m модуль бўйича ҳар бир чегирмалар синфи m га бўлинганда бир хил қолдиқ берадиган барча бутун сонлардан иборат. Бутун сон m га бўлинганда фақат $0, 1, \ldots, m-1$ сонларгина қолдиқ сифатида пайдо бўлади, яъни m модуль бўйича роппа-роса m та чегирмалар синфи бор.

m сони берилган бўлсин. Бу ҳолда a сонни ўз ичига олувчи ягона m модуль бўйича чегирмалар синфини $\overline{a}$ орқали белгилаймиз. Z_m орқали m модуль бўйича барча чегирмалар синфлари системасини белгилаймиз, яъни $Z_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}\}$. m модуль бўйича чегирмалар синфларининг таърифидан $a \equiv b \pmod{m}$ муносабат $\overline{a} = \overline{b}$ муносабатга тенг кучли.

1-теорема. ***Агар $a \equiv b \pmod{m}$ ва $c \equiv d \pmod{m}$ бўлса, у ҳолда $a + c \equiv b + d \pmod{m}$, $a \cdot c \equiv bd \pmod{m}$, яъни таққосламаларни ҳадлаб қўшиш ва кўпайтириш мумкин.***

Исбот. Агар $a - b$ ва $c - d$ сонлар m га бўлинса, у ҳолда $(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d)$ ва $ac - bd = (a - b)c + b(c - d)$ сонлар m га бўлинади.■

Бу 1-теорема Z_m тўпламда қуйидаги усул билан қўшиш ва кўпайтириш амалларини киритишга имкон беради: 1) $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ синфларнинг йиғиндиси деб, $\overline{a+b}$ синфга айтилади ва $\bar{a}+\bar{b}$ орқали белгиланади. 2) $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ синфларнинг кўпайтмаси деб $\overline{ab}$ синфга айтилади ва $\bar{a} \cdot \bar{b}$ орқали белгиланади.

Ҳар бир синф ўзидаги ихтиёрий элемент билан аниқлангани учун $\bar{a}+\bar{b}$ йиғиндининг ва $\bar{a} \cdot \bar{b}$ кўпайтманинг a ва b элементларнинг $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ синфларда танланишига боғлиқ эмаслигини кўрсатишимиз керак. Бунинг учун $\bar{a_1} = \bar{a}$ ва $\bar{b_1} = \bar{b}$ тенгликлардан $\bar{a_1} + \bar{b_1} = \bar{a} + \bar{b}$ ва $\bar{a_1} \cdot \bar{b_1} = \bar{a} \cdot \bar{b}$ тенгликлар келиб чиқишини кўрсатишимиз керак. Таққосламалар тилида бунинг маъноси қуйидагича: $a_1 \equiv a \pmod{m}$ ва $b_1 \equiv b \pmod{m}$ дан $a_1 + b_1 \equiv a + b \pmod{m}$ ва $a_1 \cdot b_1 = a \cdot b \pmod{m}$ келиб чиқишини исботлаш керак. Аммо бу 1-теоремада кўрсатилган эди.

Шундай қилиб, Z_m тўпламда киритилган $\bar{a}+\bar{b}$ қўшиш ва $\bar{a} \cdot \bar{b}$ кўпайтириш амаллари $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ синфлар билан бир қийматли аниқланган амаллардир.

Бу амаллар коммутатив ва ассоциатив бўлиб, ўзаро дистрибутив қонун билан боғланган. Ҳақиқатан,

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{(a + b)} = \overline{(b + a)} = \bar{b} + \bar{a},$$

$$\bar{a}(\bar{b} \cdot \bar{c}) = \bar{a}(\overline{bc}) = \overline{a(bc)} = \overline{(ab)c} = \overline{(ab)}\bar{c} =$$

$$= (\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{c}; \bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}(\overline{b + c}) = \overline{a(b + c)} =$$

$$= \overline{ab + ac} = \overline{ab} + \overline{ac} = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}.$$

Қолган хоссалар шунга ўхшаш исботланади.

Ушбу $\bar{0}$ **ноль синф** синфларни қўшишда ноль ролини ўйнайди: ҳар қандай $\bar{a} \in Z_m$ учун $\bar{a} + \bar{0} = \overline{a + 0} = \bar{a}$.

Шунга ўхшаш $\bar{1}$ **бирлик синф** синфларни кўпайтиришда бирлик ролини ўйнайди: ҳар қандай $\bar{a} \in Z_m$ учун $\bar{a} \cdot \bar{1} = \overline{a \cdot 1} = \bar{a}$.

Ушбу $\overline{(-a)}$ синф $\bar{a}$ синфга **қарама-қарши**: $\bar{a} + \overline{(-a)} = \overline{a + (-a)} = \bar{0}$. Z_m да қўшиш ва кўпайтириш амалларининг келтирилган хоссалари Z_m нинг бирлик элементли коммутатив ҳалқа эканлигини кўрсатади.

Агар $a \equiv b(\mathrm{mod}\ m)$ бўлса, у ҳолда $(a, m) = (b, m)$. Ҳақиқатан, бу ҳолда $a \equiv b + mt$, $t \in Z$. Бундан $(b, m)/a$. Бу муносабатдан ва $ax_0 + my_0 = (a, m)$ тенгликдан $(b,m)/(a, m)$ келиб чиқади. Шунга ўхшаш $(a,m)/(b, m)$ муносабат ҳам исботланади. Демак, $(a,m) = (b, m)$. Хусусан, охирги тенгликдан қуйидаги хосса келиб чиқади: агар бирор синфдаги бирор элемент m билан ўзаро туб бўлса, у ҳолда бу синфдаги барча элементлар ҳам m билан ўзаро туб бўлади. Бундай синфлар **содда синфлар** дейилади. Ушбу $\bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{(m-1)}, \bar{m} = \bar{0}$ барча турли синфлар ичида $(k, m) = 1$ шартни қаноатлантирувчи $\bar{k}$ синфларгина содда синфлардир. Шунинг учун m модуль бўйича синфлар ичида соддаларининг умумий сони m дан катта бўлмаган ва m билан ўзаро туб бўлган натурал сонларнинг сонига тенг. Бу сон $\varphi(m)$ орқали белгиланади ва **Эйлер функцияси** деб аталади. Масалан, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 сонлари орасида 10 билан ўзаро туб бўлган сонлар 1, 3, 7, 9. Демак $\varphi(10) = 4$. Агар $m = p$ — туб бўлса, у ҳолда 1, 2, ..., p-1, p сонлар орасида p дан бошқа ҳар бири p билан ўзаро туб. Демак $\varphi(p) = p - 1$.

2-теорема. ***m модуль бўйича содда чегирмалар синфлари Z_m да кўпайтириш амалига нисбатан тескариланувчи ва унда мультипликатив (яъни кўпайтириш амалига нисбатан) группа ҳосил қилади. Содда бўлмаган нольдан фарқли синфлар эса Z_m да нольнинг бўлувчилари бўлади.***

Исбот. m билан ўзаро туб бўлган сонларнинг кўпайтмаси яна m билан ўзаро туб бўлгани учун иккита m модуль бўйича содда синфнинг кўпайтмаси яна содда синф бўлади. $\bar{1}$ синф m модуль бўйича содда синфдир. Агар $\bar{c}$ — содда синф бўлса (m модуль бўйича), у ҳолда $(c, m) = 1$.

Шунга кўра шундай a ва b бутун сонлар мавжудки, $ac + bm = 1$. Бундан $\overline{ac} = \overline{1}$, яъни $\overline{a}$ синф $\overline{c}$ синфга тескари. Демак, $\overline{c}$ синф тескариланувчи ва $\overline{c}^{-1} = \overline{a}$, $\overline{a}^{-1} = \overline{c}$. $\overline{a}$ синф ҳам m модуль бўйича содда синф, чунки акс ҳолда $ac + bm = 1$ тенгликнинг иккала томони ҳам $(a, m) = d > 1$ га бўлинарди. Бу билан теореманинг биринчи тасдиғи исботланди.

Агар $\overline{c}$ — нольдан фарқли m модуль бўйича содда бўлмаган синф бўлса, у ҳолда $(c, m) = d$, $1 < d < m$, $c = c_1 d_1$, $m = dd_1$, $1 < d_1 < m$. Бунга кўра $\overline{d} \neq 0$, $\overline{d_1} \neq 0$, $\overline{c} \cdot \overline{d_1} = \overline{c_1 d} \cdot \overline{d_1} = \overline{c_1} \cdot \overline{d} \cdot \overline{d_1} = \overline{c_1} \cdot \overline{dd_1} = \overline{c_1} \cdot \overline{m} = \overline{0}$. Демак $\overline{c}$ синф Z_m да нольнинг бўлувчисидир.■

3-теорема (Эйлер теоремаси). ***Агар $(c, m) = 1$ бўлса, у ҳолда $c^{\varphi(m)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ m)$.***

Исбот. Ушбу $n = \varphi(m)$ белги киритамиз.

$Z_m^* = \{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}\}$ орқали m модуль бўйича барча содда синфлардан иборат мультипликатив гуруҳни белгилаймиз. Ушбу $(c, m) = 1$ шартдан $\overline{c} \in Z_m^*$ келиб чиқади. Гуруҳнинг илгари келтирилган хоссаларига асосан $\{\overline{c} \cdot \overline{x_1}, \overline{cx_2}, \ldots, \overline{cx_n}\} = Z_m^*$. Бундан

$$(\overline{cx_1})(\overline{cx_2})\ldots(\overline{cx_n}) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \ldots \overline{x_n},$$

$$\overline{c}^n\, \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \ldots \overline{x_n} = \overline{x_1} \ldots \overline{x_n}.$$

Бу тенгликнинг иккала томонини $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \ldots \overline{x_n}$ га қисқартириб (чунки Z_m^* — гуруҳ), $\overline{C}^n = \overline{1}$ тенгликни оламиз. Охирги тенглик $C^n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ m)$ тенгликка тенг кучли.■

Натижа (Ферманинг кичик теоремаси). *Агар a — бутун сон ва p — туб сон бўлса, у ҳолда $a^p - a$ сон p га бўлинади.*

Исбот. Агар a сон p га бўлинса, тасдиқнинг ўринлилиги равшан. Энди a сон p га бўлинмаган ҳолни кўрамиз. Бу ҳолда $(a, p) = 1$. Эйлер теоремасига кўра $a^{p-1} - 1 = a^{\varphi(p)} - 1$ сон p га бўлинади. Бу ҳолда $a^p - a = a(a^{p-1} - 1)$ сонининг ҳам p га бўлиниши келиб чиқади. ■

Агар p — туб бўлса, у ҳолда ноль синфдан бошқа p модуль бўйича барча синфлар содда бўлиб, 2-теоремага кўра бу ҳолда Z_p майдон бўлади.

Z_p майдон қуйидаги муҳим хоссага эга: Z_p майдоннинг $\bar{1}$ бирлик элементини ўзини ўзига p марта қўшилса, нольни беради:

$$\underbrace{\bar{1}+\bar{1}+\ldots+\bar{1}}_{p}=\bar{0},$$

чунки $\bar{p}=\bar{0}$. Бундай хосса ҳеч қайси сонли майдонда ўринли эмас.

Агар F майдонда ҳар қандай m натурал сон учун 1 бирлик элементни ўзини ўзига m марта қўшилганда нольдан фарқли элемент бўлса

$$\underbrace{1+1+\ldots+1}_{m}\neq 0,$$

F майдон **ноль характеристикали** дейилади. Акс ҳолда, яъни агар бирор m учун 1 ни ўзини ўзига m марта қўшилганда ноль ҳосил бўлса

$$\underbrace{1+1+\ldots+1}_{m}=0,$$

бу шартни қаноатлантирувчи энг кичик m сони F майдоннинг характеристикаси дейилади. Масалан, барча сонли майдонлар ноль характеристикали.

Агар p туб сон бўлса, Z_p майдоннинг характеристикаси p га тенг, чунки агар $m\in N$ бўлса, у ҳолда $m<p$:

$$\underbrace{\bar{1}+\bar{1}+\ldots+\bar{1}}_{m}=\bar{m}\neq\bar{0}.$$

4-теорема. ***Агар F майдоннинг характеристикаси нолдан фарқли бўлса, у ҳолда у туб сон бўлади.***

И с б о т . F майдоннинг характеристикаси $p > 0$ бўлсин, $p = a \cdot b$, $a, b \in N$. У ҳолда

$$\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{a} \cdot \underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{b} = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{p} = 0.$$

Бундан F майдон бўлгани учун ё $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{a} = 0$ ёки $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{b} = 0$ эканлиги келиб чиқади. Биринчи ҳолда майдоннинг характеристикаси таърифига кўра $a \geq p$. Демак, $a = p$, $b = 1$. Иккинчи ҳолда шунга ўхшаш $b = p$, $a = 1$. Бу p сон ўзидан ва бирдан бошқа бўлувчиларга эга эмаслигини кўрсатади. $p > 1$ бўлгани учун p туб сон. ■

Агар F майдон $p > 0$ характеристикали, $a \in F$ ва m сон p га бўлинса, $m = m_1 \cdot p$, у ҳолда $ma = (m_1 p)a = m_1 a\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{p} = \overline{0}$.

5-т е о р е м а . ***Агар F майдон p > 0 характеристикали бўлса, у ҳолда ҳар қандай a, b ∈ F учун $(a + b)^p = a^p + b^p$.***

И с б о т . Ҳақиқатан Ньютон биноми формуласига кўра (бу формуланинг ҳар қандай коммутатив ҳалқада ўринлилиги равшан),

$$(a+b)^p = a^p + c_p^1 a^{p-1} b + \ldots + c_p^{p-1} a b^{p-1} + b^p.$$

Теоремадан олдинги изоҳга кўра, теоремани исботлаш учун ҳар бир $c_p^k \ (k = \overline{1, p-1})$ биномиал коэффициентининг p га бўлинишини кўрсатиш кифоя.

$$c_p^k = \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!}$$

каср бутун сон бўлгани учун унинг сурати махражига бўлинади. p туб бўлгани ва $1 \leq k \leq p-1$ шартда $(p, k!) = 1$ бўлгани туфайли $(p-1)(p-2)\ldots(p-k+1)$ сон $k!$ га бўлинади. Демак

$$\frac{c_p^k}{p} = \frac{(p-1)...(p-k+1)}{k!}$$

бутун сон, яъни c_p^k сон p га бўлинади.■

Энди $f(x)$ ва $g(x)$ — қийматлари бутун сон бўлган ва A тўпламда аниқланган функциялар, m — бирор натурал сон бўлсин.

A тўпламдаги $f(x) \equiv g(x)(\mathrm{mod}\ m)$ муносабат x **номаълумли таққослама** дейилади. Равшанки, бу муносабат $\overline{f(x)} = \overline{g(x)}$ тенгликка тенг кучли, бу ерда юқоридаги каби $\overline{f(x)}$ ва $\overline{g(x)}$ белгилар m модуль бўйича синфларга ўтишни белгилайди. Шунга ўхшаш бир неча номаълумли таққосламалар ва таққосламалар тизимлари таърифланади.

Ушбу $f(x) \equiv g(x)(\mathrm{mod}\ m)$ таққосламанинг ечими деб, шундай $x_o \in A$ элементга айтамизки, $f(x_o) \equiv g(x_o)(\mathrm{mod}\ m)$ таққослама ўринли бўлсин. Биз бу ерда биринчи даражали бир номаълумли таққосламани текшириш билан чегараланамиз: $ax \equiv b(\mathrm{mod}\ m)$, a, b — берилган бутун сонлар, x — номаълум бутун сон.

m модуль бўйича чегирмалар синфларига ўтиб, бу тенгламани $\overline{a}\overline{x} = \overline{b}$ кўринишда ёзишимиз мумкин, бу ерда $\overline{a}, \overline{b} \in Z_m$ ва $\overline{x}$ номаълум ҳам Z_m нинг элементи.

Агар $(a, m) = 1$ бўлса, $\overline{a}$ — содда синф бўлади. У ҳолда 2-теоремага кўра $\overline{a}\overline{x} = \overline{b}$ тенглама $\overline{x} = \overline{a}^{-1}\overline{b} = \overline{x_0}$ тенгламага тенг кучли. Демак, бу ҳолда $\overline{a}\overline{x} = \overline{b}$ тенглама ягона $\overline{x_0}$ ечимга эга ва берилган таққосламанинг ечимлари тўплами қуйидаги чегирмалар синфидан иборат:

$$\overline{x_0} = \{x_0 + mt / t \in Z\}$$

Агар $(a, m) = \mathrm{d} > 1$ бўлса, у ҳолда $a = a_1 d$, $m = m_1 d$, $(a_1, m_1) = 1$ белгиларни киритиб берилган таққосламани ушбу $a_1 dx \equiv b(\mathrm{mod}\ m_1 d)$ кўринишда ёзишимиз мумкин. Бундан кўринадики, бу таққослама ечимга эга бўлиши учун b соннинг d га бўлиниши зарур: $b = b_1 d$. Бу ҳолда $ax \equiv b(\mathrm{mod}\ m)$ таққослама ушбу

$$a_1 x \equiv b_1(\mathrm{mod}\ m_1)$$

таққосламага тенг кучли. Бу ерда $(a_1, m_1) = 1$ бўлгани учун $ax \equiv b(\mathrm{mod}\ m)$ таққосламани кўрилаётган ҳолда ечиш масаласи илгариги кўрилган ҳолда ечишга келтирилди. Бу билан қуйидаги теорема исботланди.

7-теорема. ***a, b* — бутун сонлар, *m натурал сон бўлсин. Ушбу* $ax \equiv b(\mathrm{mod}\ m)$ *таққослама ечимга эга бўлиши учун b нинг* $d = (a, m)$ *га бўлиниши зарур ва кифоя.* Бу шарт бажарилганда таққосламанинг умумий ечими ушбу**

$$x = x_0 + m_1 t$$

формула билан берилади, бу ерда x_0 ***— таққосламанинг бирор хусусий ечими,*** $m_1 = \frac{m}{d}$.

Мисол кўрамиз. Ушбу $6x \equiv 10(\mathrm{mod}\ 14)$ таққослама ечимга эга, чунки $(6, 14) = 2$ ва 10 сон 2 га бўлинади. Бу таққосламанинг иккала томонини ва модулини 2 га бўлиб, унга тенг кучли бўлган ушбу $3x \equiv 5(\mathrm{mod}\ 7)$ кўринишда ёки Z_7 даги ушбу $\overline{3}\overline{x} = \overline{5}$ тенглама кўринишда ёзилади. Бу тенглама ягона ечимга эга. Шунинг учун берилган таққосламанинг ечимлари тўплами 7 модуль бўйича бирор чегирмалар синфидан иборат. Агар 0, 1, 2, ... 6 чегирмалар синфларини кетма-кет тенгламага қўйиб текширсак, ечим $\overline{4} = \{4 + 7t \ / \ t \in Z\}$ синф эканлигини топамиз. Шунга кўра $6x \equiv 10(\mathrm{mod}\ 14)$ таққосламанинг ечимлари тўплами $\{4 + 7t/t \in Z\}$ тўпламдир.

Олтинчи боб

ЧИЗИҚЛИ ФАЗОЛАР ВА ЧИЗИҚЛИ АКСЛАНТИРИШЛАР

35-§. ЧИЗИҚЛИ (ВЕКТОР) ФАЗОЛАР

F — майдон ва V — аддитив абель гуруҳи бўлсин.

Таъриф. *Ҳар бир $\lambda \in F$ ва ҳар бир $x \in V$ элементларга бирор қоида бўйича λ ва x элементларнинг кўпайтмаси деб аталувчи ва λx кўринишида белгиланувчи $y \in V$ элемент мос қўйилган бўлиб, қуйидаги шартлар (аксиомалар) бажарилган бўлсин:*

1) *агар $\lambda, \mu \in F$, $x \in V$ бўлса, у ҳолда*

$$\lambda (\mu x) = \mu (\lambda x) = (\lambda\mu)x;$$

2) *ҳар қандай $x \in V$ учун* $1 \cdot x = x$ (бу ерда 1 орқали майдоннинг бирлик элементи белгиланган);

3) *агар $\lambda, \mu \in F$, $x \in V$ бўлса, у ҳолда*

$$(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x;$$

4) *агар $\lambda \in F$ ва $x, y \in V$ бўлса, у ҳолда*

$$\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y.$$

Бу шартларни қаноатлантирувчи V аддитив абель гуруҳга F майдон устида *чизиқли* (ёки *вектор*) *фазо* дейилади.

Келажакда F майдон устида V чизиқли фазо кўрилганда F майдон элементлари *скалярлар* деб аталиб, кичик грек ҳарфлари билан белгиланади, V чизиқли фазо элементлари эса *векторлар* деб аталиб, кичик лотин ҳарфлари билан белгиланади. F майдоннинг ноль элементини, яъни ноль скалярни 0 рақам орқали, ноль векторни эса $\bar{0}$ орқали белгилаймиз.

Бу боб давомида қисқалик учун "чизиқли фазо" сўзлари ўрнига "фазо" сўзини ҳам ишлатамиз.

Мисоллар. **1.** Берилган a тўғри чизиқда ётувчи ва умумий бошланғич O нуқтага эга бўлган барча йўналган кесмаларнинг $Д_1(a)$ тўпламида қўшиш амали қуйидагича аниқланади:

Йўналган $\vec{OA}$ ва $\vec{OB}$ кесмалар берилган бўлсин. $\vec{OB}$ кесманинг йўналишини ва узунлигини ўзгартирмасдан бошланғич нуқтасини A нуқтага кўчирамиз. Бунда B нуқта бирор C нуқтага кўчади. $\vec{OA}$ ва $\vec{OB}$ йўналган кесмаларнинг йиғиндиси деб $\vec{OC}$ йўналган кесмага айтамиз.

Йўналган $\vec{OA}$ кесманинг $\lambda \in R$ сонга кўпайтириш амали эса қуйидагича аниқланади:

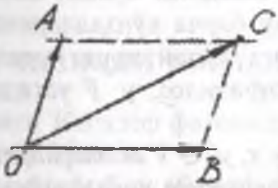
1) агар $\lambda = 0$ бўлса, $\lambda \cdot \vec{OA} = \vec{OO}$, яъни узунлиги 0 га тенг йўналган кесма $\lambda \cdot \vec{OA}$ деб олинади;

2) агар $\lambda > 0$ бўлса, $\lambda \cdot \vec{OA}$ йўналган кесманинг йўналиши $\vec{OA}$ нинг йўналиши билан бир хил, узунлиги $|\lambda \vec{OA}|$ эса $\lambda|\vec{OA}|$ га, яъни $\vec{OA}$ йўналган кесма узунлигини λ га кўпайтирилганига тенг;

3) агар $\lambda < 0$ бўлса, йўналган кесманинг йўналишининг йўналишига тескари, узунлиги эса $\lambda|\vec{OA}|$ га тенг.

Бу амалларга нисбатан $Д_1(a)$ тўплам R ҳақиқий сонлар майдони устида чизиқли фазо ҳосил қилади.

2. Берилган α текисликда ётувчи ва умумий бошланғич нуқтага эга бўлган барча йўналган кесмаларнинг $Д_2(\alpha)$ тўпламида қўшиш амали параллелограмм қоидаси билан аниқланади: $\vec{OA}$ ва $\vec{OB}$ кесмаларнинг йиғиндиси деб, $\vec{OA}$ ва $\vec{OB}$ кесмаларига қурилган $OACB$ параллелограммнинг (2-шакл) диагоналига айтилади.



2-шакл.

Йўналган кесмани $\lambda \in R$ сонга кўпайтириш амали илгариги мисолдаги каби аниқланади.

Бу амалларга нисбатан $Д_2(a)$ тўплам R майдон устида чизиқли фазо ҳосил қилади.

3. Фазода умумий бошланғич нуқтага эга бўлган барча йўналган кесмаларнинг $Д_3$ тўпламида қўшиш ва ҳақиқий сонга кўпайтириш амалларини илгариги мисолдаги каби киритилса, у R майдон устида вектор фазо ҳосил қилади.

4. F — ихтиёрий майдон, n — натурал сон бўлсин. F^n тўпламда қўшиш амалини ушбу

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) =$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$$

қоида орқали, $\gamma \in F$ скалярга кўпайтириш амалини эса

$$\gamma\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\gamma\alpha_1, \gamma\alpha_2, \ldots, \gamma\alpha_n)$$

қоида орқали киритсак, у F майдон устида вектор фазога айланади.

5. Илгариги мисолдаги F^n тўпламда қўшишни ўша мисолдаги каби, γ скалярга кўпайтириш амалини эса ҳар қандай $\gamma \in F$ ва $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in F^n$ учун $\gamma\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \bar{0}$ қоида орқали киритамиз. Бу амалларга нисбатан F^n чизиқли фазо бўлмайди, чунки унинг учун иккинчи аксиома бажарилмайди.

6. $[a, b]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз барча функциялардан иборат $C[a, b]$ тўпламда функцияларнинг йиғиндисини ва $\lambda \in R$ скалярга кўпайтмасини одатдагича киритилса, у R майдон устида чизиқли фазо ҳосил қилади.

7. F — сонлар майдони бўлиб, коэффициентлари бу майдондан олинган барча кўпҳадларнинг $F[t]$ тўпламида қўшиш ва скалярга кўпайтириш амалларини илгариги мисолдаги каби киритилса, у F устида чизиқли фазога айланади.

Таъриф. *Ушбу $x, y, \in V$ векторларнинг айирмаси деб V ни аддитив гуруҳ сифатида қаралгандаги айирмасига, яъни $x - y = x + (-y)$ га айтилади.*

чизиқли фазо аксиомаларидан келиб чиқадиган натижаларга ўтамиз.

1 - ж у м л а. а) *Ҳар қандай $\lambda \in F$, $x, y \in V$ элементлар учун*

$$\lambda\,(x - y) = \lambda\, x - \lambda\, y.$$

б) *Ҳар қандай $\lambda, \mu \in F$ ва $x \in V$ элементлар учун*

$$(\lambda - \mu)\, x = \lambda x - \mu x.$$

Ҳақиқатан, $\lambda(x - y) + \lambda y = \lambda((x - y) + y) = \lambda(x+(-y) + y) = \lambda x$.

Бундан $\lambda(x - y) = \lambda x + (-\lambda y) = \lambda x - \lambda y$.

Шунга ўхшаш $(\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x$ муносабат исботланади.

2-Ж у м л а. а) *Ҳар қандай $\lambda \in F$ учун $\lambda \cdot \bar{0} = \bar{0}$.*

б) *Ҳар қандай $x \in V$ учун $0 \cdot x = \bar{0}$.*

Ҳақиқатан, $\lambda\bar{0} = \lambda(x - x) = \lambda x - \lambda x = \bar{0}$ ва $0 \cdot x = (\lambda - \lambda)x = \lambda x - \lambda x = \bar{0}$. Бу жумланинг аксинчаси ҳам ўринли.

3-ж у м л а. *Агар бирор $\lambda \in F$ ва $x \in V$ элементлар учун $\lambda x = \bar{0}$ бўлса, у ҳолда ё $\lambda = 0$ ёки $x = \bar{0}$.*

Ҳақиқатан, агар $\lambda x = \bar{0}$ ва $\lambda \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\lambda^{-1} \in F$ элемент мавжуд ва $\lambda^{-1}\bar{0} = \lambda^{-1}(\lambda x) = (\lambda^{-1}\lambda)x = 1x = x$. Бундан $x = \bar{0}$.

Натурал n сони бўйича математик индукция ёрдамида ҳар қандай $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in F$ ва $x, x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ элементлар учун $(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)x = \lambda_1 x+\ldots+\lambda_n x$ ва $\lambda(x_1 + x_2+\ldots+x_n) = \lambda x_1+\ldots+\lambda x_n$ муносабатларнинг ўринли эканлиги кўрсатилади (мустақил текширинг). Булардан

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \sum_{k=1}^{m} x_k = \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{k=1}^{m} \lambda_i x_k \quad (n, m \in N)$$

36-§. ЧИЗИҚЛИ БОҒЛАНИШ

F майдон устидаги V вектор фазода $x_1, x_2, \ldots, x_n$ векторлар тизими берилган бўлсин.

Т а ъ р и ф. *Агар камида бири нольдан фарқли бўлган шундай $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ скалярлар мавжуд бўлиб, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 +\ldots+$*

$+ \lambda_n \cdot x_n = \bar{0}$ *тенглик бажарилса.* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *векторлар тизими чизиқли боғлик (эрксиз) дейилади. Акс ҳолда бу векторлар тизими чизиқли боғланмаган (эркли) дейилади.*

Шундай қилиб, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ векторлар тизимининг чизиқли боғланмаганлигининг маъноси шуки, $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = \bar{0}$ $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F)$ тенгликдан доимо $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ эканлиги келиб чиқади.

Мисоллар. 1) F^2 фазода ушбу $x_1 = (1,0)$, $x_2 = (0,1)$, $x_3 = (2,2)$ векторлар чизиқли боғланган, чунки

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 = \bar{0}$$

2) F^2 фазода ушбу $x_1 = (1,0)$ ва $x_2 = (0,1)$ векторлар чизиқли боғланмаган, чунки $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) = (\lambda_1, \lambda_2) = \bar{0} = (0,0)$ муносабатдан $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ келиб чиқади.

Таъриф. *F майдон устидаги V чизиқли фазода* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ векторлар тизими берилган бўлсин. Агар шундай $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$ *скалярлар мавжуд бўлсаки,* $x_n = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_{n-1} x_{n-1}$ *бажарилса,* x_n *вектор* $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ *векторлар орқали чизиқли ифодаланган дейилади.*

Жумла. *Ушбу* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *векторлар чизиқли боғланган бўлиши учун уларнинг бирортаси бошқалари орқали чизиқли ифодаланган бўлиши зарур ва кифоя.*

Ушбу $x_1, x_2, \ldots, x_n$ векторлар чизиқли боғланган бўлсин. У ҳолда камида бири (масалан, λ_k) нольдан фарқли бўлган $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ скалярлар мавжудки, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$. Бундан

$$x_k = -\lambda_k^{-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i x_i .$$

Аксинча, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ векторларнинг бирортаси (масалан x_k) бошқалари орқали чизиқли ифодаланган бўлсин:

$$x_k = \sum_{i=1, i \neq k}^{n} \mu_i x_i .$$

Бундан

$$x_k - \sum_{i=1, i \neq k}^{n} \mu_i x_i = \bar{0}.$$

яъни $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$, бу ерда $\lambda_k = 1$, $\lambda_i = -\mu_i (i \neq k)$.

Бу жумладан қуйидаги натижалар келиб чиқади.

1. Ноль векторни ўз ичига олувчи ҳар қандай векторлар тизими чизиқли боғланган, чунки ноль вектор бошқа векторлар орқали чизиқли ифодаланади (чизиқли ифоданинг барча коэффициентлари нольга тенг).

2. Агар векторлар тизими чизиқли боғланган бўлса, у ҳолда бу тизимни ўз ичига олган ҳар қандай векторлар тизими ҳам чизиқли боғланган бўлади.

Бу натижадан қуйидаги хулоса келиб чиқади.

3. Агар векторлар тизими чизиқли эркли бўлса, у ҳолда унинг ҳар қандай қисм тизими ҳам чизиқли эркли бўлади.

37-§. ЎЛЧАМ ВА БАЗИС

F майдон устидаги V вектор фазода векторларнинг чекли ёки чексиз A тизими берилган бўлсин.

Таъриф. *Агар A тизимнинг n та элементдан иборат чизиқли эркли қисм тизими мавжуд ва $(n + 1)$ вектордан иборат ҳар қандай қисм тизими чизиқли боғланган бўлса, n сони A тизимнинг ранги дейилади (бу ерда ранг сўзи инглиз range сўзидан олинган бўлиб, бу ерда даража сўзига яқин маънони билдиради).*

Агар ҳар қандай n натурал сон учун A тизимда n та элементдан иборат чизиқли эркли қисм тизим мавжуд бўлса, A тизим чексиз рангга эга дейилади.

Агар A тизимнинг ранги n бўлса, унинг n та вектордан иборат чизиқли эркли қисм тизими A тизимнинг базиси дейилади.

1-теорема. ***A тизимнинг ранги n бўлсин. A тизимдан олинган ҳар қандай вектор унинг базиси орқали ягона усулда чизиқли ифодаланади.***

Исбот. Ушбу $b_1, b_2, ..., b_n$ — қисм тизим A тизимнинг базиси ва $x \in A$ бўлсин. У ҳолда $(n + 1)$да вектордан иборат $b_1, b_2, ..., b_n, x$ қисм тизим чизиқли боғланган бўлади, яъни камида бири нольдан фарқли $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, \lambda_{n+1}$ скалярлар мавжудки, $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + ... + \lambda_n b_n + \lambda_{n+1} x = 0$. Агар $\lambda_{n+1} = 0$ бўлса эди, $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + ... + \lambda_n b_n = 0$ бажарилади. Бундан $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, чунки $b_1, b_2, ..., b_n$ — чизиқли эркли. Бу эса $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, \lambda_{n+1}$ скалярларнинг камида бири нольдан фарқли деган шартга зид. Демак $\lambda_{n+1} \neq 0$. Бундан $x = -\lambda^{-1}_{n+1} (\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n)$ яъни x вектор $b_1, b_2, ..., b_n$ базис орқали чизиқли ифодаланади.

Агар x вектор бу базис орқали икки хил $x = \alpha_1 b_1 + ... + \alpha_n b_n = \beta_1 b_1 + ... + \beta_n b_n$ чизиқли ифодаланган бўлса, $(\alpha_1 - \beta_1) b_1 + ... + (\alpha_n - \beta_n) b_n = 0$ тенглик ўринли бўлади. Бундан эса $b_1, b_2, ..., b_n$ векторлар чизиқли эркли бўлгани учун $\alpha_1 - \beta_1 = 0, ..., \alpha_n - \beta_n = 0$ тенглик, яъни $\alpha_1 = \beta_1, ..., \alpha_n = \beta_n$ келиб чиқади. ■

V чизиқли фазонинг ранги унинг ўлчами деб аталади ва $dim\ V$ кўринишда белгиланади. Агар $dim\ V < \infty$ бўлса, V чекли ўлчамли, акс ҳолда эса чексиз ўлчамли дейилади.

V чекли ўлчамли бўлиб, унинг бирор $b_1, ..., b_n$ базиси берилган бўлсин. У холда 1-теоремага асосан ҳар қандай $x \in V$ вектор бу базис орқали бир қийматли чизиқли ифодаланади: $x = \alpha_1 \beta_1 + ... + \alpha_n \beta_n$.

Бу ифодадаги $\alpha_1, ..., \alpha_n$ коэффициентлар x векторнинг $b_1, ..., b_n$ базисидаги координаталари деб аталади.

2-теорема. ***A — векторлар тизими ва B — унинг чекли чизиқли эркли қисм тизими бўлсин. Агар A тизимининг ҳар бир вектори. B орқали чизиқли ифодаланса, у ҳолда B тизим A тизимнинг базиси бўлади.***

Исбот. Китобнинг биринчи қисмидаги. 14-§ 4-теоремага асосан, агар A тизим R^n фазонинг қисми ва B эса A нинг қисм тизими бўлиб, A нинг ҳар бир вектори B орқали чизиқли ифодаланса, у ҳолда A нинг ранги B нинг рангидан катта эмас.

Агар A ихтиёрий V чизиқли фазодаги тизим ва B ундаги чекли рангга эга бўлган қисм тизим бўлса, бу теорема ўринлилигича қолади (мустақил исботланг). Шундай қилиб, охирги тасдиққа ва теоремамизнинг шартига асосан, агар A нинг ранги n бўлса, у ҳолда B нинг ҳам ранги n бўлади, яъни B қисм тизим A нинг базисидир. ■

Бу теорема муайян чизиқли фазоларнинг ўлчамини ҳисоблашда қулай воситадир. Бир нечта мисол кўрамиз.

1. Агар $D_1(a)$ чизиқли фазода (35-§ даги 1 мисол) e_1- ихтиёрий нольга тенг бўлмаган вектор бўлса, у ҳолда $D_1(a)$даги ҳар қандай x векторни ae_1, $a \in R$ кўринишда ифодалаш мумкин.

Демак, $\{e_1\}$ тизим $D_1(a)$ нинг базиси ва $dim\ D_1(a) = 1$.

2. Агар $D_2(a)$ фазода (35-§ даги 2-мисол) коллинеар бўлмаган (яъни бир тўғри чизиқда ётмаган e_1 ва e_2 векторлар берилган бўлса, у ҳолда улар чизиқли эркли ва ҳар қандай $x \in D_2(a)$ вектор $\lambda_1 e_1 + \lambda_1 e_2$, кўринишида ифодаланиши мумкин. бу ерда $\lambda_1, \lambda_2 \in R$. Бунга асосан $\{e_1, e_2\}$ тизим $D_2(a)$ нинг базиси ва $dimD_2(a) = 2$.

3. Агар D_3 фазода (35-§ даги 3-мисол) компланар бўлмаган (яъни бир текисликда ётмаган) e_1, e_2, e_3 векторлар берилган бўлса, у ҳолда улар чизиқли эркли ва ҳар қандай $x \in D_3$ вектор $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$ кўринишда ифодаланиши мумкин, бу ерда λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in R$. Бунга асосан $\{e_1, e_2, e_3\}$ тизим D_3 нинг базиси ва $dimD_3 = 3$.

4. Ихтиёрий F майдон устидаги F^n фазодаги $e_1 = (1, 0, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ..., $e_n = (0, 0, ..., 1)$ векторлар *ортлар* деб аталади. Ҳар қандай $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in F$ элементлар учун ўринли бўлган $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 +...+ \lambda_n e_n = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ тенгликдан ортларнинг чизиқли эркли эканлиги ва ҳар қандай $x \in F^n$ векторнинг улар орқали чизиқли ифодаланиши келиб чиқади. Демак, ортлар F^n фазонинг базиси ва $dimF^n = n$.

5. $C_n[t]$ орқали даражаси $\leq n$ бўлган ва коэффициентлари C комплекс сонлар майдонидан олинган кўпҳадлар тўпламини белгилаймиз. Кўпҳадларни қўшиш ва сонга кўпайтириш амалларини қуйидагича киритамиз:

$$f(t) + g(t) = (a_0 + a_1 t +...+ a_n t^n) + (b_0 + b_1 +...+ b_n t^n) =$$

$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)+...+(a_n + b_n)t^n,$$

$$\lambda f(t) = \lambda\ (a_0 + a_1 t +...+ a_n t^n) = \lambda a_0 + \lambda a_1 t +...+ \lambda a_n t^n.$$

Ушбу 1, t, t^2, ..., t^n — кўпҳадлар чизиқли эркли, ҳақиқатан, акс ҳолда камида бири нольдан фарқли бўлган шундай $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n$ сонлар мавжудки, ҳар қандай $t \in C$

учун $\lambda_0 + \lambda_1 t + ... + \lambda_1 t^n = 0$. Ваҳоланки, алгебранинг асосий теоремасининг натижасига асосан бу кўпҳаднинг кўпи билан n та илдизи мавжуд.

Демак, $\{1, t, ..., t^n\}$ тизим $C_n[t]$ нинг базиси ва $dim C_n[t) = n + 1$.

6. $C[t]$ фазо (35-§ даги 7-мисол) чексиз ўлчамли, чунки ҳар қандай n учун $(n + 1)$ та вектордан иборат $1, t, ..., t^n$ тизим чизиқли эркли.

3-теорема. ***Чекли ўлчамли V вектор фазодаги ҳар қандай чизиқли эркли тизим бу фазонинг базиси бўлгунча тўлдирилиши мумкин.***

Исбот. V нинг ўлчами n ва $\{e_1, ..., e_k\}$ ундаги чизиқли эркли тизим бўлсин. У ҳолда $k \le n$. Агар $k = n$ бўлса, у ҳолда бу тизим базис бўлади. Агар $k < n$ бўлса, у ҳолда чизиқли фазо ўлчамининг ва ундаги базиснинг таърифларига кўра бу тизим базис бўлмайди. Демак, 2-теоремага асосан шундай $e_n +_1$ вектор мавжудки, у $e_1, e_2, ..., e_k$ векторлар орқали чизиқли ифодаланмайди. Ушбу $\{e_1, ..., e_k, e_{k+1}\}$ тизим чизиқли эркли. Ҳақиқатан, агар $\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_k e_k + \lambda_{k+1} e_{k+1} = 0$ бўлса, у ҳолда $\lambda_{k+1} = 0$ (чунки акс ҳолда e_{k+1} вектор $e_1, e_2, ..., e_k$ векторлар орқали чизиқли ифодаланарди). Бундан $\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_k e_k = 0$ тенглик келиб чиқади. Бу тенгликдан эса $e_1, ..., e_k$ векторлар чизиқли эркли бўлгани учун $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$. Агар $k + 1 = n$ бўлса, $\{e_1, ..., e_k, e_{k+1}\}$ тизим базис бўлади. Акс ҳолда, яъни $k + 1 < n$ бўлса, $e_1, ..., e_k, e_{k+1}$ векторлар орқали чизиқли ифодаланмайдиган $e_{k+2} \in V$ вектор мавжуд бўлади.

Юқоридаги мулоҳазаларни яна ишлатиб $\{e_1, ..., e_k, e_{k+1}, e_{k+2}\}$ тизимнинг чизиқли эркли эканлигини оламиз ва ҳоказо. Бу мулоҳазаларни $(n - k)$ марта ишлатиб, $\{e_1, ..., e_k\}$ тизимни ўз ичига олувчи V фазонинг $\{e_1, ..., e_{k+1}, ..., e_n\}$ базисини оламиз. ■

38-§. БАЗИС ЎЗГАРГАНДА КООРДИНАТАЛАРНИНГ АЛМАШИНИШИ

F майдон устидаги чизиқли фазода иккита $\{e_1, ..., e_n\}$ ва $\{f_1, ..., f_n\}$ базислар берилган бўлсин. Иккинчи базис векторларни биринчи базис векторлар орқали ифодалаймиз:

$$f_k = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ik} e_i \tag{1}$$

Бу ифодадаги $C = (\gamma_{ik}) \in F^{n\times n}$ матрица $\{e_1, ..., e_n\}$ базисдан $\{f_1, ..., f_n\}$ базисга ўтиш матрицаси дейилади. Ўтиш матрицаси доим махсусмас ва C^{-1} тескари матрица $\{f_1, ..., f_n\}$ базисдан $\{e_1, ..., e_n\}$ базисга ўтиш матрицасидир (буларни мустақил исботланг).

V да ихтиёрий x вектор олинган бўлиб, $\xi_1, ..., \xi_n$ — унинг биринчи базисдаги координаталари, $\eta_1, ..., \eta_n$ — иккинчидаги, яъни $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i e_i = \sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k f_k$ бўлсин. У ҳолда

$$x = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ik} e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} \eta_k \right) e_i$$

Бундан

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} \eta_k, \ \ (i = \overline{1, n}). \tag{2}$$

(1) ва (2) формулаларни солиштириш кўрсатадики, иккинчи базисдаги координаталарни биринчи базисдаги координаталарга алмаштиришдаги коэффициентлар матрицаси транспонирлаш билангина биринчи базисдан иккинчи базисга ўтиш матрицасидан фарқ қилади.

39-§. ҚИСМФАЗОЛАР ВА ГИПЕРТЕКИСЛИКЛАР

F майдон устидаги V чизиқли фазода V' қисм тўплам берилган бўлсин.

Таъриф. *Агар V даги қўшиш амалига ва векторларни F даги скалярларга кўпайтириш амалига нисбатан V' тўплам ёпиқ бўлса, яъни ҳар қандай $x, y \in V'$ учун $x + y \in V'$ ва ҳар қандай $x \in V'$, $\lambda \in F$ учун $\lambda x \in V'$ бўлса, у V чизиқли фазонинг қисмфазоси дейилади.*

Таърифдаги шарт ушбу ҳар қандай $x, y \in V'$ *ва* $\lambda, \mu \in F$ учун $\lambda x + \mu y \in V'$ шартга тенг кучли. Бундан келиб чиқадики, V' қисмфазонинг ўзи ҳам F майдон устида чизиқли фазо ҳамда $dim\ V' \leq dim\ V$ (мустақил текширинг).

Мисоллар. 1) Ҳар қандай чизиқли фазо ноль вектордан иборат қисм фазога эга. Бу қисм фазонинг ўлчами ноль деб олинади ва ноль қисм фазо деб аталади.

2. R^2 текисликда $2x + y = 0$ шартни қаноатлантирувчи барча (x_1, y) нуқталар қисмфазо ҳосил қилади. Бу нуқталарнинг геометрик ўрни — координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқ. Умуман, координаталар бошидан ўтмайдиган тўғри чизиқдаги нуқталар тўплами R^2 да қисмфазо ҳосил қилмайди, чунки унга ноль вектор, яъни (0, 0) нуқта кирмайди.

3. 0 — уч ўлчовли физик фазонинг тайин нуқтаси бўлиб, a — бу нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ, α эса бу нуқтадан ўтувчи текислик бўлсин. Бу нуқтани йўналган кесмаларнинг умумий бошлангич нуқтаси деб олсак, $D_1(a)$ ва $D_2(\alpha)$ лар D_3 чизиқли фазонинг (35-§ даги 1—3-мисоллар) қисм фазолари бўлади. Ундан ташқари, агар a тўғри чизиқ α текисликда ётса, у ҳолда $D_1(a)$ тўплам $D_2(\alpha)$ чизиқли фазонинг қисм фазоси бўлади.

4. Коэффициентлари F майдондан олинган ушбу

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\xi_k = 0 \quad (i = \overline{1, S})$$

n та $\xi_1, ..., \xi_n$ номаълум S та чизиқли тенгламалардан иборат бир жинсли тизимни оламиз. Агар r сони $A = (a_{ik})$ матрицанинг ранги бўлса, маълумки, бу тизим $(m - r)$ та чизиқли эркли (фундаментал) ечимлар тизимига эга ва барча ечимлардан иборат L тўплам фундаментал ечимларнинг чизиқли комбинацияларидан иборат тўплам билан устма-уст тушади. Шундай қилиб, L тўплам F^n чизиқли фазонинг $(n - r)$ ўлчамли қисмфазоси бўлади.

5. Агар $n \leq m$ бўлса, у ҳолда $R_n[t]$ фазо $R_m[t]$ нинг қисм фазоси. $R_n[t]$ фазоларнинг ҳар бири $(n = 1, 2, ...)$ эса $R[t]$ фазонинг қисм фазоси.

V фазонинг ихтиёрий M қисм тўпламини оламиз. L_M орқали M дан олинган векторлар орқали чизиқли ифодаланган барча векторлар тўпламини белгилаймиз. Бу тўплам M тўпламнинг чизиқли қобиғи дейилади. L_M тўплам V нинг қисмфазоси бўлиб, унинг ўлчами M тўпламнинг рангига тенг (текширинг!). Бундан келиб чиқадики, агар $dim V = n$ бўлса, у ҳолда ҳар қандай $m \leq n$ натурал сон учун V фазо m ўлчамли қисм фазоларга эга. Агар V чексиз ўлчамли бўлса, у ҳолда ҳар қандай m натурал сон учун V фазо m — ўлчамли қисмфазоларига эга. Ҳақиқатан, агар $e_1, ..., e_m \in V$ векторлар чизиқли эркли бўлса, у ҳолда $\{e_1, ..., e_m\}$ тўплам чизиқли қобиғининг ўлчами m га тенг.

Агар V фазода V' — қисмфазо ва $dim\ V' = dim\ V$ бўлса, у ҳолда $V' = V$. Ҳақиқатан, агар $\{e_1, ..., e_n\}$ тўплам V' нинг базиси бўлса, у ҳолда $dim\ V = dim\ V' = n$ га асосан бу тўплам V нинг ҳам базиси бўлади. Шунинг учун V' ҳамда V фазо $\{e_1, ..., e_n\}$ тўпламнинг чизиқли қобиғи бўлади. V фазонинг V^1 қисмфазоси ва $a \in V$ вектор берилган бўлсин.

Таъриф. *V фазода ётувчи ушбу $a + V' = \{a + x / x \in V'\}$ тўплам V' қисмфазони a векторга силжитишдан ҳосил бўлган гипертекислик деб аталади.*

Мисоллар. 1) Агар V чизиқли фазода V^1 қисмфазо сифатида ноль қисмфазо олинса, у ҳолда бу қисмфазони a векторга силжитишдан ҳосил бўлган гипертекислик фақат a векторнинг ўзидангина иборат.

2. R^2 да ушбу $2x + y = 0$ тўғри чизиқ билан аниқланган қисмфазони олиб, уни $a = (3, -4)$ векторга силжитсак, $a + V^1$ гипертекислик V^1 тўғри чизиққа параллель бўлган ва a нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқни беради; унинг тенгламаси $2(x - 3) + y + 4 = 0$, яъни $2x + y - 2 = 0$.

3. $D_2(a)$ фазода охирги нуқтаси a текисликдаги берилган тўғри чизиқда ётувчи барча векторлар бу фазода гипертекислик ҳосил қилади.

4. D_3 фазода охирги нуқтаси берилган тўғри чизиқда (текисликда) ётувчи барча векторлар бу фазода гипертекислик ҳосил қилади.

5. Коэффициентлари F майдондан олинган ва биргаликда бўлган n номаълумли ихтиёрий чизиқли тенгламалар тизимининг ечимлари тўплами F^n фазода гипертекислик ҳосил қилади.

Бу гипертекислик берилган чизиқли тенгламалар тизимига мос бир жинсли чизиқли тенгламалар тизимининг ечимларидан иборат V' қисм фазони берилган тизимнинг бирор хусусий ечимига силжитишдан ҳосил бўлади.

1-теорема. ***V чизиқли фазонинг бирор V' қисмфазоси берилган бўлсин. V' қисмфазони силжитишдан ҳосил бўлган барча гипертекисликлар V фазонинг ёйилмасини беради.***

Исбот. Ҳақиқатан, ҳар қандай $a \in V$ учун $a \in a + V'$, чунки $\bar{0} \in V'$. Ундан ташқари, агар $a \in b + V$ бўлса, у ҳолда $a - b \in V'$ ва демак $a + V' = b + (a - b) + V' = b + V'$. ■

2-теорема. ***Ҳар қандай берилган гипертекислик фақатгина ягона қисмфазони силжитиш билан ҳосил қилинади.***

Исбот. Ҳақиқатан, V — чизиқли фазо, V' ва V'' — ундаги қисмфазолар, $a, b \in V$ — шундай векторлар бўлсинки, $a + V' = b + V''$. Бундан ҳар бир қисм фазо ноль векторга эга бўлгани учун $a - b \in V'$ ва $a - b \in V''$. Иккинчи томондан ҳар қандай $x \in V'$ учун $a + x \in a + V' = b + V''$. Демак, $a - b + x \in V''$. Бундан эса $x \in V''$, яъни $V' \subseteq V''$ муносабат келиб чиқади. Шунга ўхшаш $V'' \subseteq V'$ муносабат олинади. Демак, $V' = V''$. ■

Исботланган теорема қуйидаги таърифни айтишга имкон беради.

Таъриф. *Гипертекисликнинг ўлчами деб силжитиш натижасида бу гипертекисликни ҳосил қилган ягони қисмфазонинг ўлчамига айтилади.*

V фазода гипертекисликларнинг ўлчами 0 бўлганлари нуқталар, ўлчами 1 бўлганлари — тўғри чизиқлар, ўлчами 2 бўлганлари — текисликлар деб аталади. Хусусан, агар $V = R^3$ бўлганда биз фазо аналитик геометриясининг мос тушунчаларига келамиз.

40-§. ҚИСМФАЗОЛАРНИНГ ЙИҒИНДИСИ ВА КЕСИШМАСИ

V чизиқли фазонинг V_1 ва V_2 қисмфазолари берилган бўлсин. Қисмфазоларнинг кесишмаси доим қисмфазо. Ҳақиқатан, агар $\lambda, \mu \in F$ ва $x, y \in V_1 \cap V_2$ бўлса, у ҳолда $\lambda x + \mu y \in V_1$ ва $\lambda x + \mu y \in V_2$, демак $\lambda x + \mu y \in V_1 \cap V_2$.

Қисмфазоларнинг тўплам сифатида йиғиндиси $V_2 \cup V_2$, умуман айтганда, қисмфазо эмас (мисол келтиринг). Шунинг учун қуйидаги таърифни берамиз.

Таъриф. *Барча ушбу $x_1 + x_2$, $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$ кўринишдаги йиғиндилардан тузилган тўплам V_1 ва V_2 қисмфазоларнинг йиғиндиси деб аталади ва $V_1 + V_2$ кўринишда белгиланади.*

$V_1 + V_2$ — қисмфазо. Ҳақиқатан, агар $\lambda, \mu \in F$ ва $x, y \in V_1 + V_2$ бўлса, у ҳолда $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$; $x_1, y_1 \in V_1$, $x_2, y_2 \in V_2$. Бундан

$$\lambda x + \mu y = \lambda(x_1 + x_2) + \mu(y_1 + y_2) =$$
$$= (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) \in V_1 + V_2.$$

1-теорема. ***Агар V чизиқли фазо V_1, V_2 — чекли ўлчамли қисмфазолар бўлса, у ҳолда $V_1 + V_2$ ҳам чекли ўлчамли ва $\dim (V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim (V_1 \cap V_2)$.***

Исбот. $V_1 \cap V$ қисм фазонинг ўлчами k ва $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ — ундаги базис бўлсин. Бу базис 37-§ даги 3-жумлага асосан V_1 даги базисгача ҳамда V_2 даги базисгача тўлдирилиши мумкин. Бунга асосан шундай $f_1, f_2, ..., f_n \in V_1$ векторлар мавжудки, $\{e_1, e_2, ..., e_k, f_1, ..., f_n\}$ тизим — V_1 нинг базиси ва шундай $g_1, ..., g_m \in V_2$ векторлар мавжудки $\{e_1, ..., e_k, g_1, ..., g_m\}$ тизим — V_2 нинг базиси бўлади. Ушбу $\{e_1, e_2, ..., e_k, f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_m\}$ тизимнинг $V_1 + V_2$ фазода базис эканлигини кўрсатамиз. Бу векторлар чизиқли эркли. Ҳақиқатан, агар $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k, \mu_1, ..., \mu_n, \nu_1, ..., \nu_m \in F$ учун $\lambda_1 e_1 +...+ \lambda_k e_k + \mu_1 f_1 +...+ \mu_n f_n + \nu_1 g_1 +...+ \nu_m g_m = 0$ бўлса, у ҳолда $\lambda_1 e_1 +...+ \lambda_k e_k + \mu_1 f_1 +...+ \mu_n f_n = -\nu_1 g_1 -...- \nu_m g_m$. Бу тенгликнинг чап томони V_1 нинг вектори, ўнг томони эса V_2 нинг вектори бўлгани учун бу векторларнинг иккаласи ҳам $V_1 \cap V_2$ га тегишли ва демак $e_1, ..., e_K$ лар орқали ифодаланади. Шундай қилиб, $-\nu_1 g_1 -...- \nu_m g_m = \alpha_1 e_1 +...+ \alpha_k e_k$, $\alpha_1 e_1 +...+ \alpha_k e_k + \nu_1 g_1 +...+ \nu_m g_m = 0$. Бундан $\{e_1, ..., e_k, g_1, ..., g_m\}$ тизимнинг чизиқли эрклилигига асосан $\alpha_1 = \alpha_2 =... = \alpha_k = \nu_1 =...= \nu_m = 0$. Охирги муносабатлардан $\lambda_1 e_1 +... + \lambda_k e_k + \mu_1 f_1 +...+ \mu_n f_n = -\nu_1 g_1 -...- \nu_m g_m = \bar{0}$ тенгликни оламиз. Бундан эса $\{e_1, ..., e_k, f_1, ..., f_n\}$ тизимнинг чизиқли эрклилигига асосан $\lambda_1 = \lambda_2 =...= \lambda_k = \mu_1 =...= \mu_n = 0$. Демак $\{e_1, ..., e_k, f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_m\}$ тизим чизиқли эркли.

Энди ихтиёрий $x \in V_1 + V_2$ вектор бу тизим орқали чизиқли ифодаланишини кўрсатамиз. Ҳар бир $x \in V_1 + V_2$ вектор $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$ кўринишга эга. Энди $x_1 \in V_1$ вектор $\{e_1, ..., e_k, f_1, ..., f_n\}$ тизим орқали ва $x_2 \in V_2$ вектор $\{e_1, ..., e_k, g_1, ..., g_m\}$ тизим орқали ифодаланади. Демак $x = x_1 + x_2$ вектор $\{e_1, ..., e_k, f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_m\}$ тизим орқали чизиқли ифодаланади. Шундай қилиб, $\{e_1, ..., e_k, f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_m\}$ тизим $V_1 + V_2$ фазонинг базиси эканлиги кўрсатилди. Бундан

$$dim\,(V_1 + V_2) = k + n + m = (k + n) + (k + m) - k = \\ = dim\, V_1 + dim\, V_2 - dim\, V_1 \cap V_2. \blacksquare$$

Таъриф. *Агар ҳар қандай $x \in V_1 + V_2$ вектор $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$ кўринишда ягона усул билан ифодаланса, $V_1 + V_2$ йиғинди тўғри йиғинди деб аталади.*

2-теорема. ***$V_1 + V_2$ йиғинди тўғри йиғинди бўлиши учун $V_1 \cap V_2$ қисмфазонинг ноль фазо бўлиши зарур ва кифоя.***

Исбот. $V_1 + V_2$ — тўғри йиғинди ва $x \in V_1 \cap V_2$, $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$ бўлсин. У ҳолда $x_1 + x \in V_1$, $x_2 - x \in V_2$ ва ушбу $x_1 + x_2 = (x_1 + x) + (x_2 - x)$ тенгликдан $V_1 + V_2$ тўғри йиғиндилигига асосан $x_1 = x_1 + x$. Бундан $x = \bar{0}$, яъни $V_1 \cap V_2$ — ноль фазо.

Энди $V_1 \cap V_2 = \{\bar{0}\}$ бўлсин. У ҳолда $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, $x_1, y_1 \in V_1$, $x_2, y_2 \in V_2$ тенгликдан $x_1 - y_1 = y_2 - x_2$ тенгликни оламиз. Бу ердан $x_1 - y_1 \in V_1$, $y_2 - x_2 \in V_2$ эканлигини назарга олсак $x_1 - y_1 = y_2 - x_2 = \bar{0}$. Шунинг учун $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$. Бу ерда $x_1, y_1 \in V_1$ ва $x_2, y_2 \in V_2$ векторлар ихтиёрий бўлгани учун $V_1 + V_2$ тўғри йиғинди бўлади. $\blacksquare$

41-§. ЧИЗИҚЛИ АКСЛАНТИРИШЛАР ВА ИЗОМОРФИЗМ

F майдон устида V ва W чизиқли фазолар берилган бўлсин.

Таъриф. *Агар $f: V \to W$ акслантириш ушбу:*

1) ҳар қандай $x, y, \in V$ учун $f(x + y) = f(x) + f(y)$, *2) ҳар қандай $\lambda \in F$ ва $x \in V$ учун $f(\lambda x) = \in f(x)$ шартлар-ни қаноатлантирса, у чизиқли дейилади.*

Бу ердаги 1) ва 2) шартларни ушбу:

ҳар қандай $x, y \in V$ ва $\lambda, \mu \in F$ учун $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ шарт билан алмаштириш мумкин (текширинг!).

Математик индукция ёрдамида 1) ва 2) шартлардан ҳар қандай $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ ва $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in F$ учун

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

муносабатнинг ўринли эканлиги кўрсатилади.

Мисоллар. 1) V — ихтиёрий чизиқли фазо ва $\lambda \in F$ берилган скаляр бўлсин. У ҳолда $f(x) = \lambda x$ — чизиқли акслантириш. Хусусан, $f(x) = x$, яъни айний акслантириш-чизиқлидир.

2) R^2 текисликдаги ҳар бир векторни берилган α бурчакка буриш бу фазода чизиқли акслантиришни беради.

3) Ушбу $f(x) = 2x_1 + 3x_2$, $x = (x_1, x_2) \in R^2$, формула билан берилган $f: R^2 \to R$ акслантириш — чизиқли.

4) Ушбу $f(x) = (2x_1 - 5x_2)$, $x = (x_1, x_2) \in R^2$ формула билан берилган $f: R^2 \to R^2$ — акслантириш ҳам чизиқли.

5) $R[t]$ фазода ҳосила олиш — бу фазони ўзини ўзига чизиқли акслантиришдир.

Агар $f: V \to W$ ва $g: W \to U$ — чизиқли акслантиришлар бўлса, у ҳолда уларнинг кўпайтмаси (суперпозицияси), яъни $gf: V \to U$ акслантириш ҳам чизиқлидир. Ҳақиқатан, ҳар қандай $x, y \in V$, $\lambda, \mu \in F$ учун

$$gf(\lambda x + \mu y) = g(f(\lambda x + \mu y)) = g(\lambda f(x) + \mu f(y)) =$$
$$= \lambda gf(x) + \mu gf(y).$$

Чизиқли $f: V \to W$ акслантиришнинг $\lambda \in F$ сонга кўпайтмаси деб ушбу $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ тенглик билан аниқланган акслантиришга айтилади. Унинг чизиқлилиги бевосита текширилади.

Чизиқли $f_1: V \to W$ ва $f_2: V \to W$ акслантиришларнинг йиғиндиси деб, ушбу $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$ тенглик билан аниқланган акслантиришга айтилади. Бу акслантириш чизиқлидир:

$$(f_1 + f_2)(\lambda x + \mu y) = f_1(\lambda x + \mu y) + f_2(\lambda x + \mu y) =$$
$$= \lambda f_1(x) + \mu f_1(y) + \lambda f_2(x) + \mu f_2(y) = \lambda(f_1(x) + f_2(x)) +$$
$$+ \mu(f_1(y) + f_2(y)) = \lambda(f_1 + f_2)(x) + \mu(f_1 + f_2)(y).$$

Агар $f: V \to W$ — чизиқли акслантириш ўзаро бир қийматли бўлса, у ҳолда $f^{-1}: W \to V$ акслантириш ҳам чизиқли. Ҳақиқатан, агар $y_1, y_2 \in W$, $\lambda, \mu \in F$ бўлса, у ҳолда $y_1 = f_1(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $x_1, x_2 \in V$ ва $f^{-1}(\lambda y_1 + \mu y_2) = f^{-1}(\lambda f(x_1) + \mu f(x_2)) = f^{-1}f(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda x_1 + \mu x_2 = \lambda f^{-1}(y_1) + \mu f^{-1}(y_2)$.

Таъриф. *Ўзаро бир қийматли чизиқли акслантириш изоморфизм деб аталади. Агар V чизиқли фазонинг W чизиқли фазога бирор изоморфизми мавжуд бўлса, V фазо W фазога изоморф деб аталади ва $V \approx W$ кўринишда белгиланади.*

Чизиқли акслантиришларнинг юқорида исботланган хоссаларидан ҳар қандай чизиқли фазо ўзига изоморф эканлиги келиб чиқади (яъни айний акслантириш — изоморфизмдир). Ундан ташқари, агар $V \approx W$ бўлса, у ҳолда $W \approx V$; (симметриклик хоссаси); агар $V \approx W$, $W \approx U$ бўлса, у ҳолда $V \approx U$ (транзитивлик хоссаси).

Изоморфизм векторлар устидаги амаллар билан ўрин-алмашиш хусусиятига эга бўлган ўзаро бир қийматли чизиқли акслантириш бўлгани учун V фазонинг векторлар устидаги амалларга боғлиқ бўлган барча хусусиятлари ихтиёрий унга изоморф бўлган фазога ўтилганда сақланади. Хусусан, изоморф чизиқли фазолар бир хил ўлчамга эга. Чекли ўлчамли фазолар учун бу тасдиқнинг тескариси ҳам ўринли.

1-теорема. ***Агар F майдон устидаги вектор фазолар бир хил чекли ўлчамга эга бўлса, улар изоморф.***

Теоремани исботлаш учун изоморфизмнинг симметриклик ва транзитивлик хоссаларига асосан F майдон устидаги ҳар қандай n ўлчамли V чизиқли фазонинг F^n га изоморф эканлигини кўрсатиш кифоя.

Исбот. Ушбу $\{e_1, ..., e_n\}$ тизим V нинг базиси бўлсин. Барча $\alpha_1, ..., \alpha_n \in F$ учун $f(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n$

тенглик билан аниқланган $f: F^n \to V$ акслантиришнинг изоморфизм эканлигини кўрсатамиз.

Агар $x \in V$ векторнинг $\{e_1, ..., e_n\}$ базисдаги координаталари $\xi_1, ..., \xi_n$ бўлса, у ҳолда $f(\xi_1, ..., \xi_n) = x$. Координаталарнинг ягоналик хоссасига асосан $f(\alpha_1, ..., \alpha_n) = f(\beta_1, ..., \beta_n)$ тенгликдан $(\alpha_1, ..., \alpha_n) = (\beta_1, ..., \beta_n)$ тенглик келиб чиқади. Бу f акслантиришнинг ўзаро бир қийматли эканлигини кўрсатади. Ундан ташқари f — чизиқли: агар $u = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $v = (\beta_1, ..., \beta_n)$, $\lambda, \mu \in F$ бўлса, у ҳолда

$$f(\lambda u + \mu v) = f(\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1, ..., \lambda\alpha_n + \mu\beta_n) =$$
$$= (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1)e_1 +...+ (\lambda d_1 + \mu\beta_n)e_n = \lambda(\alpha_1 e_1 +...+ \alpha_n e_n) +$$
$$+ \mu(\beta_1 e_1 +...+ \beta_n e_n) = \lambda f(u) + \mu f(v). \blacksquare$$

Чизиқли $f: V \to W$ акслантириш берилган бўлсин.

Таъриф. *Ушбу $f(x) = 0$ тенгликни қаноатлантирувчи барча $x \in V$ векторлар тўплами чизиқли f акслантиришнинг негизи (ядроси) деб аталади ва $k(f)$ кўринишда белгиланади. $f(V) = \{f(x)/x \in V\} \subseteq W$ тўплам f акслантиришнинг акси (образи) деб аталади.*

2-теорема. ***Чизиқли $f: V \to W$ акслантиришнинг негизи V фазонинг қисмфазосидир, образи эса W фазонинг қисмфазосидир. Агар V чекли ўлчамли бўлса, у ҳолда***

$$dim\ k(f) + dim\ f(V) = dim\ V.$$

Исбот. Агар $x_1, x_2 \in k(f)$, $\lambda, \mu \in F$ бўлса, у ҳолда $f(x_1) = \bar{0}$, $f(x_2) = \bar{0}$. Бундан $f(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) = \bar{0}$ яъни $\lambda x_1 + \mu x_2 \in k(f)$. Шунга ўхшаш, агар $y_1, y_2 \in f(V), \lambda, \mu \in F$ бўлса у ҳолда шундай $x_1, x_2 \in V$ векторлар мавжудки, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ ва $\lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) = f(\lambda x_1 + \mu x_2) \in f(V)$.

Энди $dim\ V = n$, $\{e_1, ..., e_k\}$ тизим $k(f)$ негизнинг базиси ва V фазонинг $k(f)$ негиздаги бу базиснинг тўлдирилишидан ҳосил бўлган базиси $\{e_1, ..., e_k, e_{k+1}, ..., e_n\}$ бўлсин. У ҳолда $f(e_{k+1}), ..., f(e_n)$ векторлар тизими $f(V)$ нинг базиси бўлади. Ҳақиқатан, агар $y \in f(V)$ бўлса, шундай $x \in V$ мавжудки, $y = f(x)$. Бунга асосан, агар $x = \alpha_1 e_1 +...+ \alpha_k e_k + \alpha_{k+1}e_{k+1} +...+ \alpha_n e_n$, $\alpha_i \in F$ $(i = \overline{1,n})$ бўлса, $y = f(x) =$

$= \alpha_{k+1} f(e_{k+1}) + ... + \alpha_n f(e_n)$ чунки $f(e_1) = ... = f(e_k) = \bar{0}$. Ундан ташқари $f(e_{k+1}), ..., f(e_n)$ векторлар чизиқли эркли. Ҳақиқатан, агар $\lambda_{k+1} f(e_{k+1}) + ... + \lambda_n f(e_n) = \bar{0}$ бўлса, у ҳолда $f(\lambda_{k+1} e_{k+1} + ... + \lambda_n e_n) = \lambda_{k+1} f(e_{k+1}) + ... + \lambda_n f(e_n) = \bar{0}$, яъни $\lambda_{k+1} e_{k+1} + ... + \lambda_n e_n \in k(f)$.

Демак, бирор $\mu_1, ..., \mu_k \in F$ учун

$$\lambda_{k+1} e_{k+1} + ... + \lambda_n e_n = \mu_1 e_1 + ... + \mu_k e_k,$$
$$\mu_1 e_1 + ... + \mu_k e_k - \lambda_{k+1} - ... - \lambda_n e_n = \bar{0}.$$

Бундан ва $\{e_1, ..., e_k, e_{k+1}, ..., e_n\}$ тизимнинг чизиқли эрклилигидан $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k = \lambda_{k+1} = ... = \lambda_n = 0$.

Шундай қилиб,

$$dim\ V = n = k + (n - k) = dim\ k(f) + dim\ f(V).$$

Н а т и ж а. *Чекли ўлчамли чизиқли фазонинг ўзини ўзига чизиқли акслантиришининг ўзаро бир қийматли бўлиши учун унинг негизи ноль фазо бўлиши зарурий ва кифоявий шартдир.*

И с б о т. Бу шартнинг зарурлиги аён. Агар бу шарт бажарилган ва $dim\ V = n$ бўлса, 2-теоремага асосан $dim\ f(V) = n$. Демак, $f(V) = V$. Ундан ташқари $f(x) = f(y)$ тенгликдан $f(x - y) = \bar{0}$ тенглик, бундан эса $x - y = \bar{0}$ ва $x = y$ тенгликлар келиб чиқади. ■

Бу натижада фазонинг чекли ўлчамлилиги муҳим. Масалан, ҳар бир $x = x(t) \in R[t]$ учун $f(x) = tx$ тенглик билан аниқланган $f: R[t] \to R[t]$ чизиқли акслантиришнинг негизи ноль фазо бўлгани билан у ўзаро бир қийматли эмас, чунки унинг акси озод ҳади нольга тенг бўлган кўп ҳадлардангина иборат.

Еттинчи боб

ЧИЗИҚЛИ, БИЧИЗИҚЛИ ВА КВАДРАТИК ФОРМАЛАР

42-§. ЧИЗИҚЛИ ФОРМАЛАР

F майдон устида V чизиқли фазо берилган бўлсин.

Таъриф. *Агар φ $V \to F$ функция ушбу:*

1) ҳар қандай $x, y, \in V$ учун $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$;

2) ҳар қандай $x \in V, \lambda \in F$ учун $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ шартларни қаноатлантирса, у чизиқли форма (чизиқли функция, чизиқли функционал) деб аталади. Бошқача сўзлар билан айтилганда, агар F майдонни ўзи устида чизиқли фазо деб қаралса, чизиқли форма — бу V чизиқли фазони F майдонга чизиқли акслантиришидир.

Мисоллар. 1) Агар V — ўлчами n бўлган чизиқли фазо, $x \in V$ векторнинг бирор базисдаги координаталари $\xi_1, ..., \xi_n$ ва $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in F$ — берилган скалярлар бўлса, у ҳолда $\varphi(x) = \alpha_1\xi_1, ..., + \alpha_n\xi_n$ функция V даги чизиқли формадир. Кейинроқ V даги ҳар қандай чизиқли форманинг шу кўринишда ифодаланиши мумкинлиги кўрсатилади.

2) Чексиз ўлчамли $C[a, b]$ чизиқли фазонинг $x(t)$ элементида $\varphi(x) = \int_a^b x(t)dt$ тенглик билан $\varphi : C[a, b] \to R$ берилган функция чизиқли формадир.

Энди $dim\ V = n$, $\{e_1, ..., e_n\}$ тизим V даги базис, $x \in V$ векторнинг бу базисдаги координаталари $\xi_1, ..., \xi_n$ яъни $x = \xi_1 e_1 + ... + \xi_n e_n$ бўлсин. Агар $\varphi : V \to F$ — чизиқли форма бўлса, у ҳолда $\varphi(x) = \alpha_1\xi_1 + ... + \alpha_n\xi_n$, бу ерда $\alpha_i = \varphi(e_i)$, $(i = \overline{1,n})$. Шундай қилиб, ҳар қандай чизиқли форма базисга кирувчи вектордаги қийматлари билан тўла аниқланади. Бу қийматлар чизиқли форманинг берилган базисдаги коэффициентлари деб аталади.

Агар $\{f_1, ..., f_n\}$ тизим Vдаги бошқа базис ва $C = (\gamma_{ik})$ — биринчи базисдан иккинчи базисга ўтиш матрицаси бўлса, у ҳолда $f_k = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ik} e_i$, $\beta_k = \varphi(f_k) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ik} \varphi(e_i)$, $(k = \overline{1, n})$,

яъни $\beta_k = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ik} \alpha_i$, $(k = \overline{1, n})$.

Бу формулалар базис ўзгарганда чизиқли форманинг коэффициентлари қандай ўзгаришини кўрсатади.

Қиймати F майдонда ётувчи V чизиқли фазода аниқланган иккита чизиқли форманинг йиғиндиси ва V да аниқланган чизиқли форманинг скалярга кўпайтмаси яна V да аниқланган чизиқли формадир.

Бу амалларга нисбатан V да аниқланган қиймати F майдонда бўлган барча чизиқли формалар тўплами F майдон устида чизиқли фазо ҳосил қилади (текширинг!). Бу чизиқли фазо V га қўшма деб аталади.

Теорема. ***F майдон устида n-ўлчамли V чизиқли фазо ва $\varphi : V \to F$ — чизиқли форма берилган бўлсин. У ҳолда φ чизиқли форманинг ядроси $R(\varphi)$ $(n - 1)$ ўлчамли қисмфазодир.***

Исбот. 41-§. даги 2-теоремага кўра

$$dim\ k(\varphi) + dim\ \varphi(V) = dim\ V = n.$$

Бу ерда $\varphi(V) = F$ ва F майдон ўзи устида бир ўлчамли чизиқли фазо бўлгани учун $dim\ k(\varphi) = n - 1$. ■

43-§. БИЧИЗИҚЛИ ВА КВАДРАТИК ФОРМАЛАР

Таъриф. *Агар икки вектор аргументли скаляр $\varphi(x, y)$ функция $\varphi : V^2 \to F$ ҳар бир аргументи бўйича чизиқли бўлса, яъни*

1) *ҳар қандай $x_1, x_2 \in V$ ва $\lambda, \mu \in F$ учун*

$$\varphi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda\varphi(x_1, y) + \mu\varphi(x_2, y);$$

2) ҳар қандай $y_1, y_2 \in V$ ва $\lambda, \mu \in F$ *учун*

$$\varphi(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda\varphi(x, y_1) + \mu\varphi(x, y_2)$$

шартлар бажарилса, у бичизиқли форма (функция, функционал) деб аталади.

Мисоллар. 1) $D_1(a)$, $D_2(\alpha)$ ва D_3 фазоларда йўналтирилган кесмаларнинг скаляр кўпайтмаси бичизиқли форма.

2) F^n фазода $x = (\xi_1, ..., \xi_n)$ ва $y = (\eta_1, ..., \eta_n)$ векторлар учун $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$ тенглик билан аниқланган функция бичизиқли.

3) Элементлари F майдондан олинган n тартибли (α_{ik}) квадрат матрица берилган бўлсин. F^n фазода $x = (\xi_1, ..., \xi_n)$ ва $y = (\eta_1, ..., \eta_n)$ векторлар учун $\varphi(x, y) = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik} \xi_i \eta_k$ тенглик билан аниқланган функция бичизиқлидир.

4) $C[a, b]$ фазонинг $x(t)$ ва $y(t)$ элементлари учун

$$\varphi(x, y) = \int_a^b x(t) y(t) dt$$

тенглик билан аниқланган функция бичизиқли.

Энди $\dim V = n$, $\{e_1, ..., e_n\}$ тизим Vдаги базис, бу базисда x ва y векторларнинг координаталари мос равишда $\xi_1, ..., \xi_n$ ва $\eta_1, ..., \eta_n$ бўлсин. У ҳолда

$$\varphi(x, y) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \ \sum_{k=1}^{n} \eta_k e_k\right) = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik} \xi_i \eta_k,$$

бу ерда $\alpha_{ik} = \varphi(e_i, e_k)$.

Бу α_{ik} скалярлар $\varphi(x, y)$ бичизиқли форманинг $\{e_1, ..., e_n\}$ базисдаги коэффициентлари, $A = (\lambda_{ik}) = (\varphi(e_i, e_k)) \in F^{n \times n}$ эса — матрицаси деб аталади. Шундай қилиб, тайинланган базисда $\varphi : V^2 \to F$ бичизиқли формалар билан элементлари F дан олинган n тартибли квадрат матрицалар орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд.

Энди базис ўзгарганда бичизиқли форманинг матрицаси қандай ўзгаришини текширамиз. Агар V да бошқа $f_k = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ik} e_i$, $(K = \overline{1, n})$ базис олинган бўлса, у ҳолда φ (x, y)

бичизиқли форманинг янги базисдаги матрицасини $B = (\beta_{ik})$ орқали белгилаб, унинг элементлари учун қуйидаги ифодани топамиз:

$$\beta_{ik} = \varphi(f_i, f_k) = \varphi\left(\sum_{p=1}^{n} \gamma_{pi} e_p, \sum_{q=1}^{n} \gamma_{qk} e_q\right) =$$

$$= \sum_{p,q=1}^{n} \gamma_{pi}\gamma_{qk}\varphi(e_p, e_q) = \sum_{p,q=1}^{n} \gamma_{ip}^{T}\alpha_{pq}\gamma_{qk}.$$

Бу тенглик $B = C^T AC$ эканлигини кўрсатади, бу ерда $C = (\gamma_{ik})$ — биринчи базисдан иккинчи базисга ўтиш матрицаси. C матрица доим махсусмас бўлгани учун ва матрицанинг ранги махсусмас матрицага кўпайтирилганда ўзгармаганлиги учун A ва B матрицаларнинг ранги бир хил эканлигини топамиз, яъни бичизиқли форманинг ҳар хил базислардаги матрицасининг ранги бир хил. Бу сон бичизиқли форманинг ранги деб аталади.

Агар $\varphi(x, y)$ — бичизиқли форма бўлса, у ҳолда $q(x) = \varphi(x, x)$ квадратик форма деб аталади. Шундай қилиб, юқорида келтирилган ҳар бир мисол квадратик формага мисолни беради.

Таъриф. *Агар ҳар қандай* $x, y \in V$ *векторлар учун* $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ *тенглик ўринли бўлса, бу бичизиқли форма симметрик деб аталади.*

Симметрик бичизиқли форманинг матрицаси ҳар қандай базисда симметрик: $\alpha_{ik} = \varphi(e_i, e_k) = \varphi(e_k, e_i) = \alpha_{ki}$.

Аксинча, агар бичизиқли форманинг матрицаси бирор базисда симметрик бўлса, бичизиқли форма ҳам симметрик. Ҳақиқатан, $A = (\alpha_{ik})$ — бирор базисда $\varphi(x, y)$ бичизиқли форманинг матрицаси, бу базисда x ва y векторларнинг координаталари мос равишда $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ва $\eta_1, \ldots, \eta_n$ бўлсин. Агар A — симметрик бўлса, у ҳолда $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ $(i, k = \overline{1,n})$. Бунга асосан

$$\varphi(y, x) = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik}\eta_i\xi_k = \sum_{i,K=1}^{n} \alpha_{ki}\eta_i\xi_k =$$

$$= \sum_{k,i=1}^{n} \alpha_{ki}\xi_k\eta_i = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik}\xi_i\eta_k = \varphi(x, y).$$

Агар F майдоннинг характеристикаси (белгиси) 2 дан фарқли бўлса, у ҳолда $q(x) = \varphi(x, x)$ квадратик форма ушбу $\psi(x, y) = \frac{1}{2}(\varphi(x, y) + \varphi(y, x))$ симметрик бичизиқли форма билан ҳам ҳосил қилинади. Бу $\psi(x, y)$ симметрик бичизиқли форма $q(x)$ квадратик форма орқали бир қийматли аниқланади. Ҳақиқатан, $q(x + y) = \psi(x + y, x + y) = q(x) + q(y) + 2\psi(x, y)$. Бу ердан

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y)).$$

берилган квадратик формани ҳосил қилувчи ягона симметрик бичизиқли форма мавжудлигини кўрамиз.

Таъриф. *Квадратик формани ҳосил қилувчи ягона симметрик бичизиқли форманинг матрицасига квадратик форманинг матрицаси деб аталади.*

Шундай қилиб, квадратик форманинг матрицаси майдон характеристикаси 2 дан фарқли бўлганда аниқланиб, у доим симметрик.

44-§. КАНОНИК БАЗИСЛАР

F майдон устида V чизиқли фазо ва $\in : V^2 \to F$ — бичизиқли форма берилган бўлсин.

Таъриф. *Агар V даги $\{e_1, ..., e_n\}$ базисда $\varphi(x, y)$ бичизиқли форманинг матрицаси диагонал (яъни $i \neq k$ бўлганда $\varphi(e_i, e_k) = 0$) бўлса, бу базис $\varphi(x, y)$ бичизиқли форма учун каноник деб аталади.*

Диагональ матрица симметрик бўлгани сабабли, бичизиқли форманинг каноник базиси мавжуд бўлиши учун унинг симметрик бўлиши зарур. Агар F майдоннинг характеристикаси 2 дан фарқли бўлса, бу шарт кифоя ҳамдир.

1-теорема. ***Характеристикаси 2 дан фарқли майдон устидаги чекли ўлчамли чизиқли фазода аниқланган ҳар қандай симметрик бичизиқли форма каноник базисга эга.***

Исбот. Исботни чизиқли фазонинг ўлчами бўйича математик индукция усули ёрдамида исботлаймиз.

Характеристикаси 2 дан фарқли F майдон устида n ўлчамли V чизиқли фазо ва $\varphi : V^2 \to F$ — бичизиқли форма берилган бўлсин.

Агар $n = 1$ бўлса, тасдиқнинг ўринлилиги аён, чунки биринчи тартибли ҳар қандай матрица диагонал кўринишга эга. Энди $n > 1$ бўлсин ва ўлчами $< n$ бўлган чизиқли фазолар учун теорема исботланган деб фараз қиламиз.

Агар $\varphi(x, y) \equiv 0$, яъни айнан нольга тенг бўлса, у ҳолда унинг матрицаси ҳам ноль матрица бўлиб, унинг учун ҳар қандай базис каноник бўлади. Агар $\varphi(x, y)$ нольдан фарқли бичизиқли форма бўлса, у ҳолда шундай $e_1 \in V$ вектор мавжудки, $\varphi(e_1, e_1) \neq 0$, чунки акс ҳолда ҳар қандай $x, y \in V$ векторлар учун

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(\varphi(x + y, x + y) - \varphi(x, x) - \varphi(y, y)) = 0$$

ўринли бўларди.

Ушбу $V_1 = \{x \in V / \varphi(x, e_1) = 0\}$ тўпламни кўрамиз. Бу тўплам V да ўлчами $(n - 1)$ га тенг қисм фазо ҳосил қилишини кўрсатамиз. Агар $x, y \in V_1$, $\lambda, \mu \in F$ бўлса, $\varphi(x, e_1) = \varphi(y, e_1) = 0$. Бундан $\varphi(\lambda x + \mu y, e_1) = \lambda\varphi(x, e_1) + \mu\varphi(y, e_1) = 0$. Демак, $\lambda x + \mu y \in V_1$. Ҳар бир $x \in V$ вектор ушбу $x = \lambda e_1 + y$, $\lambda \in F$, $y \in V_1$, кўринишда ягона усул билан ифодаланиши мумкин. Ҳақиқатан, охирги тенглик $\varphi(x - \lambda e_1, e_1) = 0$ тенгликка тенг кучли, яъни $\varphi(x, e_1) - \lambda\varphi(e_1, e_1) = 0$. Бу эса $\varphi(e_1, e_1) \neq 0$ бўлгани учун $\lambda = \frac{\varphi(x, e_1)}{\varphi(e_1 e_1)}$ тенгликка тенг кучли. Шундай қилиб, λ охирги тенглик орқали ягона усулда танланади, $y = x - e_1 \in V_1$ ва $x = \lambda e_1 + y_1$ кўринишда ягона усулда ифодаланади. Демак, V фазо V_1 қисмфазо билан бир ўлчамли $\{\lambda e_1 / \lambda \in F\}$ фазоларнинг тўғри йиғиндисидир. Бундан $dim\ V_1 = n - 1$.

Индукциянинг фаразига асосан V_1 фазода $\varphi(x, y)$ бичизиқли форманинг каноник базиси мавжуд. Ушбу $\{e_2, ..., e_n\}$ тизим V_1 даги каноник базисларнинг бирортаси бўлсин. Ушбу $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ тизимнинг V да каноник базис эканлигини исботлаймиз.

Ҳақиқатан, $1 < k$ учун $\varphi(e_1, e_k) = 0$, чунки $e_k \in V_1$. Агар $2 \leq i < k$ бўлса, у ҳолда $\{e_2, ..., e_n\}$ тизим V_1 да каноник бўлгани учун $\varphi(e_i, e_k) = 0$. Булардан $\varphi(x, y)$ нинг симметриклиги туфайли ҳар қандай $i \neq k$, $i, k = \overline{1,n}$ лар учун

$$\varphi(e_i, e_k) = 0. \blacksquare$$

Исботланган теорема бичизиқли форма учун каноник базиснинг мавжудлигинигина кўрсатиб, муайян бичизиқли форма учун уни қандай усул билан топиш кераклиги тўғрисида кўрсатма (алгоритм) бермайди.

Қуйида келтириладиган теорема баъзи бир симметрик бичизиқли формалар учун шундай кўрсатмани (алгоритмни) беради.

2-теорема. ***Бирор $\{e_1, ..., e_n\}$ базисда $A = (\alpha_{ik})$ матрицасининг барча бурчак минорлари нольдан фарқли бўлган $\varphi(x, y)$ симметрик бичизиқли форма берилган бўлсин. У ҳолда бичизиқли форманинг бу базис билан учбурчакли ўтиш матрицаси орқали боғланган шундай $\{f_1, ..., f_n\}$ каноник базиси мавжудки, $\varphi(f_k, f_k) = \dfrac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}$, $(k = \overline{1,n})$, бу ерда $\Delta_0 = 1$, Δ_k эса A матрицанинг k — бурчак минори ($k = \overline{1,n}$).***

Берилган $\{e_1, ..., e_n\}$ базис билан учбурчакли ўтиш матрицаси билан боғланган ва $1 \leq j < k \leq n$ тенгсизликни қаноатлантирувчи j, k лар учун ушбу

$$\varphi(f_k, e_j) = 0, \ \varphi(f_k, e_k) = 1 \tag{1}$$

муносабатларни қаноатлантирувчи ягона $\{f_1, ..., f_n\}$ базис мавжудлигини ва бу базиснинг теореманинг барча шартларини қаноатлантиришини кўрсатамиз.

Янги $\{f_1, ..., f_n\}$ базисни ушбу

$$f_k = \sum_{i=1}^{k} \gamma_{ik} e_i, \ \ (k = \overline{1,n}), \ \ \gamma_{ik} \in F,$$

кўринишда қидирамиз. Ҳар бир тайинланган k учун (1) муносабатлардан ушбу

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi(e_i,e_j)\gamma_{ik}=0\ \ (j=\overline{1,k-1}),\ \ \sum_{i=1}^{n}\varphi(e_i,e_k)\gamma_{ik}=1,$$

яъни

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_{ik}=0\ \ (j=\overline{1,k-1}),\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_{ik}\gamma_{ik}=1$$

муносабатлар келиб чиқади.

Тайинланган k учун бу муносабатлар $\gamma_{1k}, \gamma_{2k}, ..., \gamma_{kk}$ ларга нисбатан детерминанти $\Delta_k \neq 0$ бўлган k та чизиқли тенгламалар тизимидир. Бу тизим ягона ечимга эга бўлиб, у Крамер қоидаси бўйича топилади. Хусусан,

$$\gamma_{kk}=\frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}\neq 0\ \ (k=\overline{1,n}).$$

Шунинг учун $\{e_1, ..., e_n\}$ базисдан $\{f_1, ..., f_n\}$ тизимга ўтиш учбурчакли матрицаси махсусмас, чунки унинг детерминанти $\gamma_{11}\cdot\gamma_{22}\cdots\gamma_{nn}=\frac{1}{\Delta_n}\neq 0$. Бунга асосан $\{f_1, ..., f_n\}$ тизим ҳам базисдир. Энди (1) дан $i<k$ тенгсизликни қаноатлантирувчи i, k лар учун ушбу

$$\varphi(f_k,f_i)=\varphi(f_k,\sum_{j=1}^{i}\gamma_{ji}e_j)=\sum_{j=1}^{i}\gamma_{ji}\varphi(f_k,e_j)=0$$

муносабатни оламиз. Бундан $\varphi(x, y)$ нинг симметриклигига асосан $i>k$ тенгсизликни қаноатлантирувчи i, k лар учун $\varphi(f_k, f_i)=0$ муносабатларни ҳам оламиз. Демак $\{f_1, ..., f_n\}$ тизим $\varphi(x, y)$ учун каноник базис. Ниҳоят, (1) га асосан

$$\varphi(f_k,f_k)=\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ik}\varphi(f_k,e_i)=\gamma_{kk}\,\varphi(f_k,e_k)=\frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}\ \ (k=\overline{1,n}).\blacksquare$$

Каноник базисни бу теоремада келтирилган топиш усули Якоби усули деб аталади.

45-§. ЛАГРАНЖ УСУЛИ

Агар $\varphi(x, y)$ — симметрик бичизиқли форма, $q(x) = \varphi(x, x)$ унга мос квадратик форма ва $\{e_1, ..., e_n\}$ базис $\varphi(x, y)$ учун каноник бўлса, у ҳолда $q(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ii}\xi_i^2$, бу ерда $\alpha_{ii} = q(e_i)$, ξ_i эса x векторнинг бу базисдаги i — координатаси. Шунинг учун баъзан каноник базис қуришни "квадратик формани квадратларнинг йиғиндисига келтириш" деб ҳам гапирилади (аслини олганда бу ерда квадратларнинг йиғиндиси тўғрисида эмас, уларнинг чизиқли комбинацияси тўғрисида гап кетаяпти).

Квадратик формани квадратларнинг йиғиндисига келтирувчи ва Лагранж усули деб аталувчи универсал усул мавжуд. Унинг асосий ажралиб турадиган хусусияти шуки, унда масала базисни эмас, балки координаталарни кетма-кет алмаштириш йўли билан ҳал қилинади.

Квадратик $q(x)$ форма бирор базисдаги матрицаси $A = (\alpha_{ij})$ бўлсин. Бу матрица симметрик. Бунга асосан

$$q(x) = q(\xi_1, ..., \xi_n) = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik}\xi_i\xi_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}\xi_i^2 + 2\sum_{1\le i<k\le n} \alpha_{ik}\xi_i\xi_k.$$

Бизга $q(x) = q(\xi_1, ..., \xi_n)$ квадратик формага x векторнинг $\xi_1, ..., \xi_n$ координаталарининг функцияси сифатида қараш қулайроқ.

A матрицани нольдан фарқли деб фараз қиламиз (агар A бирор базисда нольга тенг бўлса, у ҳар қандай базисда ҳам нольга тенг бўлиб, унга мос квадратик форма ҳам айнан нольга тенг бўлади). У ҳолда унинг камида бирорта элементи нольдан фарқли.

Агар $\alpha_{11} \ne 0$ бўлса, у ҳолда ξ_1 ни ўз ичига олувчи барча ҳадларни йиғиб ва бу йиғиндини квадратгача тўлдириб, қуйидаги ифодани оламиз:

$$q(\xi_1, \dots, \xi_1) = \alpha_{11}(\xi_1 + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}\xi_2 + \dots + \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{11}}\xi_{11})^2 + q_1(\xi_2, \dots, \xi_n),$$

бу ерда $q(\xi_2, ..., \xi_n)$ ифода $n - 1$ ўзгарувчининг квадратик формаси. Агар A матрицанинг α_{11} эмас, балки бошқа бирор диагонал элементи нольдан фарқли бўлса, юқоридагига ўхшаш мулоҳаза юритамиз (масалан $\alpha_{ii} \neq 0$ бўлса, ξ_1 ўрнига ξ_i билан мулоҳаза юритамиз).

Энди A матрицанинг барча диагонал элементлари нольга тенг бўлган ҳолни кўрамиз. У ҳолда бирор α_{ij}, $i \neq j$ элементи нольдан фарқли. Соддалик учун $\alpha_{12} \neq 0$ бўлсин дейлик. Ўзгарувчиларнинг қуйидаги чизиқли алмаштиришини бажарамиз:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1' + \xi_2', \\ \xi_1 &= \xi_1' - \xi_2', \\ \xi_3 &= \ldots \xi_3', \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \xi_n &= \ldots \xi_n'. \end{aligned}$$

Бу чизиқли алмаштиришнинг матрицаси махсусмас бўлиб, ҳосил бўлган ξ_1', ξ_2', ..., ξ_n' ўзгарувчиларга боғлиқ бўлган янги квадратик форма учун $\alpha_{11}' \neq 0$. Унга яна юқоридаги мулоҳазаларни татбиқ қилиш мумкин. Бошқа $\alpha_{ij} \neq 0$, $i \neq j$ бўлган ҳол шунга ўхшаш кўрилади.

Бу мулоҳазалардан кўринадики, доим квадратик формадан чизиқли ифоданинг квадратини ажратиб олиш мумкин, қолган ифодалар эса ўзгарувчиларининг сони биттага кам квадратик формани ҳосил қилади. Бу квадратик формага ҳам юқоридаги мулоҳазаларни татбиқ қилиб ва математик индукция усулини қўлланиб, пировардида берилган квадратик формани чизиқли ифодалар квадратларининг йиғиндиси кўринишида ифодалаш мумкин. ■

Мисол кўрамиз. $V = R^3$ бўлиб, унда $q(x) = q(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1^2 - 3\xi_2^2 - 2\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3 - 6\xi_2\xi_3$ квадратик форма берилган бўлсин. У ҳолда

$$\begin{aligned} q(x) &= (\xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3) - 3\xi_3^2 - 6\xi_2\xi_3 = \\ &= (\xi_1 - \xi_2 + \xi_3)^2 - \xi_2^2 - 4\xi_3^2 - 4\xi_2\xi_3 = \\ &= (\xi_1 - \xi_2 + \xi_3)^2 - (\xi_2^2 + 4\xi_2\xi_3) - 4\xi_3^2 = \\ &= (\xi_1 - \xi_2 + \xi_3)^2 - (\xi_2 + 2\xi_3)^2 = \eta_1^2 - \eta_2^2, \end{aligned}$$

бу ерда $\eta_1 = \xi_1 - \xi_2 + \xi_3$, $\eta_2 = \xi_2 + 2\xi_3$ ўзгарувчилар x векторнинг янги координаталари, яъни

$$\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix} = C\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Бундан

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix} = C^{-1}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Демак, 38-§ га асосан $\{f_1, f_2, f_3\}$ каноник базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ базис билан қуйидагича боғланган:

$$f_1 = e_1, f_2 = e_1 + e_2, \quad f_3 = -3e_1 - 2e_2 + e_3.$$

46-§. ҲАҚИҚИЙ КВАДРАТИК ФОРМАЛАР

Коэффициентлари R ҳақиқий сонлар майдонидан олинган чизиқли, бичизиқли ва квадратик формалар ҳақиқий деб аталади. R майдоннинг характеристикаси ноль бўлгани учун юқорида исботланган барча теоремалар ҳақиқий формалар учун ўринли.

Таъриф. *Агар ҳар қандай нольдан фарқли x вектор учун $q(x) > 0$ ($q(x)<0$) тенгсизлик бажарилса, $q(x)$ ҳақиқий квадратик форма мусбат (манфий) деб аталади.*

Мисоллар. 1) R^n фазода $q(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ квадратик форма мусбат.

2) $C[a, b]$ фазода $q(x) = \int\limits_a^b x^2(t)dt$ квадратик форма мусбат (исботланг).

Агар $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ базис $q(x)$ квадратик форма учун каноник бўлса, у ҳолда унинг мусбатлиги $q(e_1), \ldots, q(e_n)$

сонлардан ҳар бирининг мусбатлигига тенг кучли. Бу шартнинг зарурлиги аён. Етарлилиги эса x вектор $\xi_1, \ldots, \xi_n$ координаталарининг камида бири нольдан фарқли бўлганда $q(x) = \sum_{k=1}^{n} q(e_k)\xi_k^2 > 0$ тенгсизликнинг ўринлилигидан келиб чиқади.

Сильвестр белгиси деб аталувчи қуйидаги теоремада квадратик форманинг мусбатлилик белгиси унинг матрицаси тилида берилади.

1-теорема. ***A — квадратик $q(x)$ форманинг бирор базисдаги матрицаси бўлсин. У ҳолда $q(x)$ форманинг мусбат бўлиши учун A матрицанинг барча бурчак минорлари мусбат бўлиши зарур ва кифоявий шартдир.***

Исбот. $q(x)$ мусбат бўлсин. A матрицанинг k-бурчак минорини оламиз:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \varphi(e_1, e_1) \ldots \varphi(e_1, e_k) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(e_k, e_1) \ldots \varphi(e_k, e_k) \end{vmatrix},$$

бу ерда $\varphi(x, y)$ — шундай симметрик бичизиқли формаки, $q(x) = \varphi(x, x)$. Бу минорнинг сатрлари чизиқли эркли эканини кўрсатамиз, бундан минорнинг нольдан фарқли эканлиги келиб чиқади. Ҳақиқатан, бу минор сатрларини $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in R$ сонларга кўпайтириб, R^k фазонинг ноль векторига тенглаймиз:

$$\lambda_1\varphi(e_1, e_i) + \ldots + \lambda_k\varphi(e_k, e_i) = 0, \ (i = \overline{1,k})$$

Бундан $\varphi(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k, e_i) = 0, \ (i = \overline{1,k})$.

Бу муносабатлардан эса

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\varphi(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k, e_i) = q(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i) = 0$$

тенгликни оламиз. Бу ердан $q(x)$ нинг мусбатлигига асосан

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = \bar{0}$$

тенгликни оламиз. Бу муносабатдан эса $\{e_1, ..., e_k\}$ тизимнинг чизиқли эрклилигига асосан $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$ тенгликни оламиз. Бу эса Δ_k минор сатрларининг чизиқли эрклилигини кўрсатади. Бундан $\Delta_k \neq 0$ эканлиги келиб чиқади. Якоби усулини қўллаб, шундай $\{f_1, ..., f_n\}$ каноник базисни топамизки,

$$q(f_1) = \frac{1}{\Delta_1}, \; q(f_2) = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \; \ldots, \; q(f_n) = \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}.$$

Бундан q форманинг мусбатлилигига асосан $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, ..., $\Delta_n > 0$.

Аксинча, агар $\Delta_k > 0$ $(k = \overline{1,n})$ бўлса, Якоби усулини қўллаб, шундай $\{f_1, ..., f_n\}$ каноник базисни топамизки,

$$q(f_k) = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k} > 0 \quad (k = \overline{1,n}).$$

Бундан юқорида исботланганга асосан $q(x)$ форманинг мусбатлиги келиб чиқади. ■

Шунга ўхшаш мулоҳазалар билан квадратик форманинг қуйидаги манфийлик белгиси исботланади: квадратик форма манфий бўлиши учун унинг матрицаси жуфт тартибли бурчак минорлари мусбат ва тоқ тартибли бурчак минорлари эса манфий бўлиши зарурий ва кифоявий шартдир (исботланг).

Қуйидаги теорема квадратик формаларнинг инерция қонуни деб аталади.

2-теорема. ***Ҳақиқий квадратик форманинг ихтиёрий каноник базиси векторларидаги мусбат қийматлари сони ва манфий қийматлари сони базиснинг танланишига боғлиқ эмас.***

Исбот. Ҳақиқий квадратик $q(x)$ форманинг иккита $\{e_1, ..., e_n\}$ ва $\{f_1, ..., f_n\}$ каноник базиси берилган бўлиб,

$q(e_1)$, ..., $q(e_n)$ сонларнинг p таси мусбат, $q(f_1)$, ..., $q(f_n)$ сонларнинг r таси мусбат бўлсин. Керак бўлса, базислардаги векторларнинг индекслари ўрнини ўзгартириб

$$q(e_k) = \begin{cases} > 0, \text{ агар } k = \overline{1,p}, \\ \le 0, \text{ агар } k = \overline{p+1,n}. \end{cases}$$

ва

$$q(f_k) = \begin{cases} > 0, \text{ агар } k = \overline{1,r}, \\ \le 0, \text{ агар } k = \overline{r+1,n} \end{cases}$$

шартлар бажарилган деб фараз қилиш мумкин.

Фараз қилайлик, $p > r$ бўлсин. V_1 орқали $\{e_1, ..., e_p\}$ тизимнинг чизиқли қобиғини ва V_2 орқали $\{f_{r+1}, ..., f_n\}$ тизимнинг чизиқли қобиғини белгилаймиз. Бу тизимлар чизиқли эркли бўлгани учун $dim V_1 = p$, $dim V_2 = n - r$.

Бундан

$$dim\ (V_1 \cap V_2) = dim\ V_1 + dim\ V_2 - dim\ (V_1 + V_2) \ge$$
$$\ge p + (n - r) - n = p - r > 0.$$

Бунга кўра нольдан фарқли $x \in V_1 \cap V_2$ вектор мавжуд, яъни $x = \sum_{i=1}^{p} \xi_i e_i = \sum_{j=r+1}^{n} \eta_j f_j$. Демак, $q(x) = \sum_{i=1}^{p} q(e_i)\xi_i^2 > 0$, чунки ҳар бир $i = \overline{1,p}$ учун $q(e_i) > 0$ ва ξ_i ларнинг камида бири нольдан фарқли. Иккинчи томондан $q(x) = \sum_{j=r+1}^{n} q(f_j)\eta_j^2 \le 0$, чунки ҳар бир $j = \overline{r+1,n}$ учун $q(f_j) \le 0$.

Олинган бу қарама-қаршилик $p \le r$ тенгсизлик ўринли эканлигини кўрсатади. Худди шунга ўхшаш мулоҳазалардан $r \le p$ тенгсизликни оламиз. Демак $p = r$.

Энди юқорида келтирилган мулоҳазаларни $(-q)$ квадратик формага татбиқ қилиб, q квадратик форманинг каноник базисдаги манфий қийматлари сони базиснинг танланишига боғлиқ эмаслиги кўрсатилади. ■

47-§. ЭРМИТ ФОРМАЛАРИ

Коэффициентлари C комплекс сонлар майдонидан олинган чизиқли, бичизиқли ва квадратик формалар 1-тур комплекс формалар деб аталади. Қуйидагича таъриф-ланадиган комплекс коэффициентли 2-тур чизиқли, би-чизиқли ва квадратик формалар ҳам қурилади.

Таъриф. *Агар $\varphi : V \to C$ функция:*

1) *ҳар қандай $x, y \in V$ векторлар учун $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$,*

2) *ҳар қандай $x \in V$ ва $\lambda \in C$ учун $\varphi(\lambda x) = \bar{\lambda}\varphi(x)$ шарт-ларни қаноатлантирса, у 2-тур чизиқли форма деб ата-лади.*

Бу иккала шарт ушбу:

ҳар қандай $x, y \in V$ ва $\lambda, \mu \in C$ лар учун $\varphi(\lambda x + \mu y) = \bar{\lambda}\varphi(x) + \bar{\mu}\varphi(y)$ шартга тенг кучли.

Таъриф. *Агар икки вектор аргументли комплекс $\varphi(x, y)$ функция биринчи аргументи бўйича 1-тур чизиқли форма ва 2-аргументи бўйича 2-тур чизиқли форма бўлса, у 2-тур бичизиқли форма деб аталади.*

Масалан, ушбу $\varphi(x, y) = \sum\limits_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik}\xi_i\overline{\eta_k}$ функция, бу ерда $x = (\xi_1, ..., \xi_n)$, $y = (\eta_1, ..., \eta_n)$ $\alpha_{ik} \in C$, $(i, k = \overline{1,n})$, C^n да аниқланган 2-тур бичизиқли формадир.

Агар $\varphi(x, y)$ функция 2-тур комплекс бичизиқли форма бўлса, у ҳолда $q(x) = \varphi(x, x)$ функция 2-тур квадратик форма деб аталади. 2-тур бичизиқли форманинг 1-тур би-чизиқли формалардан фарқи шуки, улар мос квадратик формалари бўйича бир қийматли тикланадилар: агар $q(x) = \varphi(x, x)$ бўлса, у ҳолда бевосита ҳисоблаш кўрсата-дики

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4}\,(q(x + y) + iq(x + iy) - q(x - y) - iq(x - iy)) \quad (1)$$

(текширинг).

Агар комплекс V фазода 2-тур $\varphi(x, y)$ бичизиқли фор-ма, бу фазонинг $\{e_1, ..., e_n\}$ базиси, $x, y \in V$ векторларнинг бу базисдаги мос равишда $\xi_1, ..., \xi_n$ ва $\eta_1, ..., \eta_n$ координаталари берилган бўлса, у ҳолда

$$\varphi(x, y) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i,\ \sum_{k=1}^{n}\eta_k e_k\right) = \sum_{i,k=1}^{n}\alpha_{ik}\xi_i\overline{\eta_k},$$

бу ерда $\alpha_{ik} = \varphi(e_i, e_k)$, $A = (\alpha_{ik}) \in C^{n\times n}$ матрица φ форманинг $\{e_1, ..., e_n\}$ базисдаги матрицаси дейилади. Агар базис ўзгарса, у ҳолда φ форманинг матрицаси 1-тур формаларнинг матрицаларига ўхшаш қоида бўйича ўзгаради.

Агар V фазода бошқа $f_k = \sum_{i=1}^{n}\gamma_{ik}e_i,\ (k = \overline{1,n})$ — базис, $C = (\gamma_{ik})$ — биринчи базисдан иккинчи базисга ўтиш матрицаси ва $\varphi(x; y)$ форманинг иккинчи базисдаги $B = (\beta_{ik})$ матрицаси берилган бўлса, у ҳолда

$$\beta_{ik} = \varphi(f_i, f_k) = \varphi\left(\sum_{p=1}^{n}\gamma_{pi}e_p,\ \sum_{q=1}^{n}\gamma_{qk}e_q\right) =$$

$$= \sum_{p,q=1}^{n}\gamma_{pi}\overline{\gamma_{qk}}\,\varphi(e_p, e_q) = \sum_{p,q=1}^{n}\gamma_{ip}^{T}\alpha_{pq}\overline{\gamma}_{qk}.$$

Бу тенглик $B = C^T A\overline{C}$ эканлигини кўрсатади, бу ердаги $\overline{C} = (\overline{\gamma}_{ik})$ матрица C матрица элементларини мос равишда комплекс қўшмасига алмаштиришдан ҳосил бўлган.

Т а ъ р и ф. *Агар ҳар қандай $x, y \in V$ учун $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$ тенглик ўринли бўлса, 2-тур $\varphi(x, y)$ бичизиқли форма (ва унга мос $q(x) = \varphi(x, x)$ квадратик форма) эрмит формаси деб аталади. 1-тур бичизиқли формалар орасида симметрик формалар қандай ўрин тутса, 2-тур бичизиқли формалар орасида эрмит формалар шундай ўрин тутади.*

Т а ъ р и ф. *Агар элементлари C майдондан олинган $A = (\alpha_{ik})$ матрица учун $A^T = \overline{A}$ (яъни $\overline{\alpha}_{ik} = \alpha_{ki}$) тенглик бажарилса, у эрмит матрицаси деб аталади.*

Ҳар қандай базисда эрмит формасининг матрицаси доим эрмит матрица, чунки $\overline{\alpha}_{ik} = \overline{\varphi(e_i, e_k)} = \varphi(e_k, e_i) = \alpha_{ki}$. Аксинча, агар 2-тур бичизиқли форманинг матрицаси бирор базисда эрмит бўлса, у ҳолда унинг ўзи ҳам эрмит. Ҳақиқатан, агар $A = (\alpha_{ik})$ — **эрмит матрица** бўлса, у ҳолда

$$\overline{\varphi(x, y)} = \overline{\sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik}\xi_i\bar{\eta}_k} = \sum_{i,k=1}^{n} \bar{\alpha}_{ik}\bar{\xi}_i\eta_k =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ki}\eta_k\bar{\xi}_i = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik}\eta_i\bar{\xi}_k = \varphi(y, x).$$

1-теорема. ***2-тур $\varphi(x, y)$ бичизиқли форма эрмит бўлиши учун унга мос $q(x) = \varphi(x, x)$ квадратик форманинг қиймати ҳар қандай $x \in V$ учун ҳақиқий бўлиши зарур ва кифоя.***

Исбот. Ҳақиқатан $x = y$ бўлганда $\varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}$ тенгликдан $q(x) = \overline{q(x)}$ тенгликни оламиз. Аксинча, агар $q(x)$ ҳар қандай $x \in V$ учун ҳақиқий бўлса, (1) формулага асосан

$$\overline{\varphi(x, y)} = \frac{1}{4}(q(x + y) - iq(x + iy) - q(x - y) + iq(x - iy) =$$

$$= \frac{1}{4}(q(y + x) + iq(y + ix) - q(y - x) - iq(y - ix)) = \varphi(y, x). \blacksquare$$

Эрмит бичизиқли формалари учун юқорида симметрик бичизиқли формалар учун олинган теоремаларга ўхшаш теоремаларни олиш учун 2-тур бичизиқли формаларга мослаштирилган каноник базис таърифини берамиз.

Таъриф. *Агар 2-тур бичизиқли форманинг матрицаси $\{e_1, \ldots, e_n\}$ базисда диагонал ва ҳақиқий бўлса, у берилган 2-тур бичизиқли форма учун каноник деб аталади.*

Бундай матрица эрмит бўлгани учун ҳозир киритилган маънодаги базисларга фақат эрмит формаларигина эга бўлиши мумкин. Агар $q(x)$ — эрмит квадратик формаси бўлса, унинг каноник базисдаги кўриниши қуйидагича:

$$q(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kk}\xi_k\bar{\xi}_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kk}|\xi_k|^2,$$

бу ерда $\alpha_{kk} = q(e_k) \in R$.

Қуйида келтириладиган эрмит формалари ҳақидаги теоремаларнинг исботлари симметрик формалар ҳақидаги мос теоремаларининг исботларига ўхшаш бўлгани учун уларни келтирмаймиз ва ўқувчига мустақил исботлашга қолдирамиз.

2-теорема. ***Чекли ўлчамли комплекс фазода аниқланган ҳар қандай эрмит формасининг каноник базиси мавжуд.***

3-теорема (Сильвестр белгиси). ***Эрмит формасининг мусбат бўлиши учун унинг бирор базисдаги матрицаси барча бурчак минорларининг мусбат бўлиши зарур ва кифоя.***

4-теорема (инерция қонуни). ***Эрмит форманинг ихтиёрий каноник базиси векторларидаги мусбат қийматлари сони ва манфий қийматлари сони базисни танлашга боғлиқ эмас.***

Саккизинчи боб

ЕВКЛИД ВА УНИТАР ФАЗОЛАР

48-§. ЕВКЛИД ФАЗОЛАРИ

Таъриф. *Агар V ҳақиқий чизиқли фазода икки вектор аргументли (x, y) скаляр функция учун ушбу*

1) *ҳар қандай $x, y \in V$ учун $(x, y) = (y, x)$;*

2) *ҳар қандай $x_1, x_2, y \in V$ учун $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2 y)$;*

3) *ҳар қандай $x, y \in V, \lambda \in R$ учун $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;*

4) *ҳар қандай нольдан фарқли $x \in V$ вектор учун $(x, x) > 0$*

шартлар бажарилса, у скаляр кўпайтма деб аталади. Скаляр кўпайтмали V фазо эса евклид фазоси деб аталади.

Равшанки, евклид фазонинг ҳар қандай қисмфазоси ҳам евклид фазо.

Юқоридаги 2) ва 3) шартлар скаляр кўпайтма биринчи аргументи бўйича чизиқли эканлигини, булар ва 1) симметриклик шарти эса унинг симметрик бичизиқли форма эканлигини кўрсатади. Охирги 4) шарт бу бичизиқли формага мос квадратик форманинг мусбатлигини кўрсатади.

Мисоллар. 1) $D_1(a)$, $D_2(\alpha)$ ва D_3 фазоларда йўналтирилан кесмаларнинг скаляр кўпайтмаси деб уларнинг узунликларини улар орасидаги бурчакнинг косинусига кўпайтмасини оламиз.

2) R^n да $x = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ ва $y = (\beta_1, ..., \beta_n)$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси деб

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$$

функцияга айтамиз.

3) $C[a, b]$ фазода $x(t)$ ва $y(t)$ узлуксиз функцияларнинг скаляр кўпайтмаси деб

$$(x,y)=\int_a^b x(t)y(t)dt$$

функцияга айтамиз. (Бу мисолларда скаляр кўпайтманинг барча хоссалари бажарилишини текширинг.)

V евклид фазосида $\{x_1, ..., x_k\}$ векторлар тизимининг Грам детерминанти деб ушбу

$$\gamma(x_1,\dots,x_k)=\begin{vmatrix}(x_1,x_1)\ \dots\ (x_1,x_k)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ (x_k,x_1)\ \dots\ (x_k,x_k)\end{vmatrix}$$

детерминантга, Грам матрицаси деб эса ушбу $\big((x_i,x_j)\big)$, $(i,j=\overline{1,k})$ матрицага айтамиз.

1-теорема. ***Агар $\{x_1, ..., x_k\}$ тизим чизиқли эркли бўлса, унинг Грам детерминанти мусбат, ва акс ҳолда — нольга тенг.***

Исбот. Дастлаб $\{x_1, ..., x_k\}$ тизим чизиқли эркли бўлган ҳолни кўрамиз. У ҳолда бу тизим ўз чизиқли қобиғи V_1 нинг базиси, бу тизимнинг Грам матрицаси эса (x, y) симметрик бичизиқли форманинг V_1 даги матрицаси бўлади. Квадратик (x, x) форма мусбат бўлгани учун Сильвестр белгисидан Грам детерминантининг мусбатлиги келиб чиқади.

Энди $\{x_1, ..., x_k\}$ тизим чизиқли боғланган бўлсин. У ҳолда Грам детерминантининг сатрлари чизиқли боғланган: $\lambda_1 x_1 +\ldots+ \lambda_k x_k = \overline{0}$ тенгликдан барча $i=\overline{1,k}$ лар учун

$$\lambda_1(x_1, x_i) +\ldots+ \lambda_k(x_k, x_i) = (\lambda_1 x_1 +\ldots+ \lambda_k x_k, x_i) = (\overline{0}, x_i) = 0$$

тенглик келиб чиқади. Бундан эса Грам детерминантининг нольга тенг эканлиги келиб чиқади. ■

Бу теореманинг мухим натижаларидан бири — Коши-Буняковский тенгсизлиги (баъзан Шварц тенгсизлиги ҳам дейилади):

2-теорема. ***Агар x ва y евклид фазосининг векторлари бўлса, y ҳолда***

$$(x, y)^2 \leq (x, x)\,(y, y).$$

Бу тенгсизликда тенглик бўлиши учун x ва y векторларнинг чизиқли боғланган бўлиши зарур ва кифоя.

Исбот. Бу тасдиқнинг исботи Грам теоремасини $\{x, y\}$ тизимга татбиқ қилинганда бу тизимнинг Грам детерминанти $(x, x)\,(y, y) - (x, y)^2$ эканлигидан келиб чиқади. ■

Коши-Буняковский тенгсизлигида x ва y векторлар сифатида R^n евклид фазонинг $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ ва $(\beta_1, ..., \beta_n)$ векторлари олинса, ҳар қандай ҳақиқий $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_n$ сонлар учун

$$(\alpha_1\beta_1+...+\alpha_n\beta_n)^2 \leq (\alpha_1^2+...+\alpha_n^2)(\beta_1^2+...+\beta_n^2)$$

тенгсизлик ўринли эканлигини оламиз.

Коши-Буняковский тенгсизлигида x ва y векторлар сифатида $C[a, b]$ евклид фазосининг $x(t)$ ва $y(t)$ элементларини олсак, $[a, b]$ да аниқланган ва узлуксиз ҳар қандай $x(t)$ ва $y(t)$ функциялар учун

$$\left(\int_a^b x(t)y(t)dt\right)^2 \leq \int_a^b x(t)^2 dt \cdot \int_a^b y(y)^2 dt$$

тенгсизлик ўринли эканлигини оламиз.

Евклид фазодаги x векторнинг узунлиги деб $\sqrt{(x,x)}$ сонга айтилади ва уни $|x|$ (баъзан $\|x\|$) кўринишда белгиланади. Бундан келиб чиқадики, ноль векторнинг узунлиги нольга тенг ва бошқа ҳар қандай векторнинг узунлиги мусбат. Ундан ташқари ҳар қандай $x \in V$ ва $\lambda \in R$ учун

$$|\lambda x| = |\lambda|\,|x|.$$

Ҳақиқатан

$$|\lambda x| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x,x)} = |\lambda| \cdot |x|.$$

3-теорема. ***Ҳар қандай иккита вектор йиғиндисининг узунлиги улар узунликларининг йиғиндисидан катта эмас, яъни***

$$|x + y| \le |x| + |y|.$$

Исбот. Ҳақиқатан, Коши-Буняковский тенгсизлигига асосан

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) = |x|^2 + |y|^2 + 2(x, y) \le$$

$$\le |x|^2 + |y|^2 + 2|x|\cdot|y| = (|x| + |y|)^2.$$

Бундан $|x + y| \le |x| + |y|$. ■

Вектор узунлигининг бу хоссаси x ва y векторлар айирмаси узунлигини уларнинг орасидаги масофа (метрика) деб олишга имкон беради.

Таъриф. *Евклид фазосида x ва y векторларнинг орасидаги масофа* (кўпинча метрика ҳам дейилади) *деб* $\rho(x, y) = |x - y|$ *ҳақиқий функцияга айтилади.*

Киритилган $|x - y|$ масофа метриканинг барча хусусиятларига эга:

1) ҳар қандай x ва y учун $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

2) ҳар қандай $x \ne y$ учун $\rho(x, y) > 0$; $x = y$ учун $\rho(x, y) = 0$ ва аксинча $\rho(x, y) = 0$ бўлса, $x = y$;

3) ҳар қандай x, y, z учун $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Биринчи ва иккинчи хоссаларнинг бажарилиши аён. Учинчи хосса қуйидагича исботланади:

$$|x - y| = |(x - z) + (z - y)| \le |x - z| + |z - y|.$$

Ушбу $\rho(x, y) = |x - y|$ метрика евклид метрикаси деб аталади.

49-§. ОРТОГОНАЛ ВА ОРТОНОРМАЛ ТИЗИМЛАР

Коши-Буняковский тенгсизлиги ихтиёрий иккита нолъдан фарқли x ва y векторлар орасидаги бурчак таърифини киритишга имкон беради:

$$\varphi = arc \quad cos \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$$

чунки Коши-Буняковский тенгсизлигига асосан

$$\left| \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} \right| \leq 1 .$$

Йуналтирилган кесмалар фазосида бурчакнинг бу таърифи бурчакнинг оддий таърифига айланади.

Т а ъ р и ф. *Агар x ва y векторлар орасидаги бурчак* $\frac{\pi}{2}$ *га тенг бўлса, бу векторлар ортогонал дейилади.*

Агар x ва y векторлар ортогонал бўлса, у ҳолда $(x, y) = 0$. Аксинча, нольдан фарқли x ва y векторлар учун $(x, y) = 0$ бўлса, улар ортогонал.

Демак, юқоридаги таърифни қуйидагича айтса ҳам бўлади. Агар нольдан фарқли x ва y векторлар учун $(x, y) = 0$ бўлса, улар ортогонал дейилади.

Евклид фазосидаги векторлар тизимига кирувчи ҳар қандай иккита вектор ортогонал бўлса, бу тизим ортогонал дейилади. Агар ортогонал тизимга кирувчи ҳар бир векторнинг узунлиги бирга тенг бўлса, бу тизим ортонормал дейилади. Ҳар қандай ортогонал тизимни, ундаги ҳар бир векторни узунлигига бўлаб, ортонормал тизимга айлантириш мумкин.

Мисол кўрамиз. $C[a, b]$ евклид фазосида $2n + 1$ вектордан иборат ушбу

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots, \cos nt, \sin nt$$

векторлар тизими ортогонал, чунки ҳар қандай бутун k ва m лар учун

$$\int_0^{2\pi} \cos kt \sin mt \, dt = 0 ,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos kt \cos mt dt = \begin{cases} 0, \text{ агар } k \neq m \\ \pi, \text{ агар } k = m \neq 0 \\ 2\pi, \text{ агар } k = m = 0, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kt \cdot \sin tdt = \begin{cases} 0, \text{ агар } k \neq m \\ \pi, \text{ агар } k = m. \end{cases}$$

Ҳар бир векторни унинг узунлигига бўлиб, ушбу

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}$$

ортонормал тизимни оламиз.

Теорема. ***Чекли ўлчамли евклид фазосида ортонормал тизимлар мавжуд.***

Исбот. Ҳақиқатан (x, y) симметрик бичизиқли форманинг $\{e_1, \ldots, e_n\}$ каноник базиси мавжуд. Бу базис векторлари ортогонал, чунки $i \neq k$ бўлганда $(e_i, e_k) = 0$. Бу базис векторларининг ҳар бирини унинг узунлигига бўлиб, ортонормал базисга келамиз.

V евклид фазосида $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ортонормал базис ва $\xi_1, \ldots, \xi_n$ сонлар x векторнинг бу базисдаги координаталари бўлсин. У ҳолда

$$(x, e_k) = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i e_k \right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (e_i, e_k) = \xi_k .$$

Демак

$$x = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k .$$

Агар $\eta_1, \ldots, \eta_n$ сонлар y векторнинг ўша базисдаги координаталари бўлса, у ҳолда

$$(x, y) = \sum_{i,k=1}^{n} (e_i, e_k)\xi_i \eta_k = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k .$$

Хусусан, $y = x$ учун

$$(x, x) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 \quad \text{ва} \quad |x| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2} .$$

V фазо сифатида текисликдаги йўналтирилган кесмалар фазосини олсак, охирги тенглик Пифагорнинг классик теоремасини беради. Шунинг учун охирги тасдиққа Пифагор теоремасининг жуда кенг умумлашмаси деб қараш мумкин.

50-§. ОРТОГОНАЛ ПРОЕКЦИЯЛАР

V евклид фазосида V_1 қисмфазо ва $x \in V$ вектор берилган бўлсин. Агар x вектор V_1 қисмфазонинг ҳар бир векторига ортогонал бўлса, x вектор V_1 қисмфазога ортогонал дейилади.

Таъриф. *V_1 қисмфазога тегишли бўлмаган $x \in V$ вектор учун шундай $x_1 \in V_1$ вектор топилсаки, $x - x_1$ вектор V_1 қисмфазога ортогонал бўлса, бундай x_1 вектор x векторнинг V_1 қисмфазога ортогонал проекцияси (сояси) деб аталади.*

Хусусан, агар x вектор V_1 қисмфазога ортогонал бўлса, у ҳолда ноль вектор x векторнинг V_1 га ортогонал проекцияси бўлади.

1-теорема. ***Агар $x_1 \in V_1$ вектор $x \in V$ векторнинг ортогонал проекцияси бўлса, у ҳолда x_1 векторга тенг бўлмаган ҳар қандай $z \in V_1$ вектор учун $|x - z| > |x - x_1|$ тенгсизлик ўринли*** (яъни евклид метрикасида x_1 вектор V_1 фазода x векторга энг яқин вектор).

Исбот. Ҳақиқатан, $z - x_1$ вектор V_1 нинг нольдан фарқли вектори ва $(x - x_1, z - x_1) = 0$. Шунинг учун

$$|x - z|^2 = (x - z, x - z) = ((x - x_1) - (z - x_1), (x - x_1) - (z - x_1)) =$$
$$= |x - x_1|^2 + |z - x_1|^2 > |x - x_1|^2$$

Бундан $|x - z| > |x - x_1|$. ■

2-теорема. ***Агар V_1 — евклид V фазосининг чекли ўлчамли қисмфазоси бўлса, у ҳолда V_1 га тегишли бўлмаган ҳар қандай x вектор ягона $x_1 \in V_1$ ортогонал проекцияга эга.***

Исбот. V_1 нинг бирор $\{e_1, ..., e_k\}$ ортонормал базисини оламиз. У ҳолда

$$x_1 = \sum_{i=1}^{k} (x, e_i) e_i \in V_1$$

вектор x векторнинг V_1 га ортогонал проекциясидир. Ҳақиқатан, ҳар бир $m = 1, 2, ..., k$ учун

$$(x_q e_m) = \sum_{i=1}^{k} (x, e_i)(e_i, e_m) = (x, e_m).$$

Демак, $(x - x_1, e_m) = 0$. Шунинг учун ҳар қандай $y = \sum_{m=1}^{k} \eta_m e_m \in V_1$ вектор учун $(x - x_1, y) = \sum_{m=1}^{k} \eta_m (x - -x_1, e_m) = 0$.

Ортогонал проекциянинг ягоналиги 1-теоремадан келиб чиқади. ■

Векторнинг чексиз ўлчамли қисмфазога ортогонал проекцияси мавжуд бўлмаслиги ҳам мумкин. Масалан, маълумки, $C [a, b]$ фазода евклид метрикасида e^t узлуксиз функциясига энг яқин бўлган кўпҳад мавжуд эмас. Бундан e^t функциясининг кўпҳадлар қисмфазосига ортогонал проекцияси мавжуд эмаслиги келиб чиқади.

Мисол кўрамиз. Ушбу

$$\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt)$$

кўринишдаги ҳар қандай функция n даражали тригонометрик кўпҳад деб аталади. Даражаси $\leq n$ барча тригонометрик кўпҳадлар $C\ [a,\ b]$ фазонинг $2n + 1$ ўлчамли T қисмфазосини ҳосил қилади. Юқорида кўрилган ушбу

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}$$

тизим бу қисмфазонинг ортонормал базисини ҳосил қилади.

Агар $f(t)$ функция $[0,2\pi]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда 2-теореманинг исботида кўрсатилганига кўра, унинг T_n қисмфазога ортогонал проекцияси (яъни евклид метрикасида бу функцияга энг яқин бўлган тригонометрик кўпҳад)

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt)$$

кўпҳаддир, бу ерда

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos ktdt,\ \beta_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin ktdt$$

Бу тенгликлар билан аниқланган α_k ва β_k коэффициентлар $f(t)$ функциянинг Фурье коэффициентлари дейилади.

51-§. УНИТАР ФАЗОЛАР

Унитар фазо — евклид фазосининг комплекс кўриниши.

Таъриф. *Агар V комплекс чизиқли фазода икки вектор аргументли $(x,\ y)$ комплекс қийматли функция учун ушбу:*

1) *ҳар қандай $x,\ y \in V$ учун* $\overline{(x,y)} = (y,x)$;

2) *ҳар қандай* $x_1, x_2, y \in V$ *учун* $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;

3) *ҳар қандай* $x, y \in V$, $\lambda \in C$ *учун* $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;

4) *ҳар қандай нольдан фарқли* $x \in V$ *вектор учун* $(x, x) > 0$ *шартлар бажарилса, у* V *комплекс чизиқли фазодаги скаляр кўпайтма деб аталади. Скаляр кўпайтма аниқланган* V *комплекс чизиқли фазо эса унитар деб аталади.*

Равшанки, унитар фазонинг ҳар қандай қисмфазоси ҳам унитар фазо.

Иккинчи ва учинчи шартлар скаляр кўпайтма биринчи аргументи бўйича чизиқли эканлигини кўрсатади. Бундан ва биринчи шартдан иккинчи аргументи бўйича 2-тур чизиқли эканлиги, яъни

$$(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2),$$
$$(x, \lambda y) = \bar{\lambda}\,(x, y)$$

шартларнинг ҳар қандай $x, y, y_1, y_2 \in V, \lambda \in C$ учун бажарилиши келиб чиқади (исботланг). Буларга кўра, унитар фазодаги скаляр кўпайтма эрмит формаси бўлиб, унга мос квадратик форма мусбат.

Мисол кўрамиз. Агар C^n фазода $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ва $y = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ скаляр кўпайтмани

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{\beta_k}$$

тенглик билан киритсак, C^n унитар фазога айланади (текширинг).

Евклид фазосидаги каби унитар фазода ҳам, Грам детерминанти тушунчаси киритилади ва векторлар тизими чизиқли эркли бўлса, уларнинг Грам детерминанти мусбат эканлиги ва акс ҳолда — нольга тенг эканлиги исботланади. Бу теоремани иккита вектордан иборат тизимга татбиқ қилиб, унитар фазо учун Коши-Буняковский тенгсизлигини оламиз. Унитар фазода бу тенгсизликнинг кўриниши қуйидагича:

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)\,(y, y).$$

Унитар фазода векторнинг узунлиги худди евклид фазодагидек таърифланади: $|x| = \sqrt{(x,x)}$. Ҳар қандай $\lambda \in C$ учун

$$|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$$

Коши-Буняковский тенгсизлигидан V унитар фазонинг ҳар қандай x, y векторлари учун $|x + y| \leq |x| + |y|$ тенгсизликнинг ўринли эканлиги келиб чиқади. Бу евклид фазодаги каби унитар фазода ушбу $\rho(x, y) = |x - y|$ тенглик орқали метрика киритишга имкон беради.

Унитар фазода иккита вектор орасидаги бурчак тушунчаси киритилмайди, аммо ортогоналлик тушунчаси киритилади: агар унитар фазодаги нольдан фарқли иккита векторнинг скаляр кўпайтмаси нольга тенг бўлса, улар ортогонал деб аталади. Ортогонал ва ортонормал тизим тушунчалари худди евклид фазосидагидек киритилади.

Унитар фазода ортонормал базисларнинг мавжудлиги эрмит формалар ҳақидаги теоремалардан бевосита келиб чиқади. Агар V унитар фазода $\{e_1, ..., e_n\}$ ортонормал тизим берилган ва $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$, $y = \sum_{k=1}^{n} \eta_k e_k$ бу фазодаги векторлар бўлса, евклид фазодаги каби, ушбу

$$\xi_k = (x, e_k),\ (k = \overline{1,n}),\ (x, y) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\eta}_k,$$

$$|x|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2$$

тенгликларни оламиз.

Бу параграфдаги келтирилган теоремаларнинг исботларини мустақил бажариш тавсия қилинади.

Тўққизинчи боб

ЧИЗИҚЛИ ОПЕРАТОРЛАР

52-§. ЧИЗИҚЛИ ОПЕРАТОРЛАР ВА УЛАРНИНГ МАТРИЦАЛАРИ

Чизиқли фазонинг ўзини ўзига чизиқли акслантириши *чизиқли оператор деб аталади.*

Мисоллар. 1) F майдоннинг тайин бир λ элементи берилган бўлсин. Бу майдон устидаги V чизиқли фазонинг $x \to \lambda x$ акслантириши чизиқли оператордир.

2) $D_2(\alpha)$ ва D_3 фазоларда бирор тўғри чизиқ берилган бўлсин. Йўналтирилган кесмани бу тўғри чизиққа ортогонал проекцияланиши чизиқли оператордир.

3) $A \in F^{n\times n}$ матрица берилган бўлсин. F^n чизиқли фазо элементларини n та элементли бир устун кўринишида ифодалаб, унинг ўзини ўзига ушбу $x \to Ax$ (A матрицани чапдан x устунга кўпайтириш) акслантириши чизиқли оператордир.

4) $R\,[t]$ ва $R_n[t]$ чизиқли фазоларда ҳосила олиш амали — чизиқли оператор.

5) $C\,[a,\ b]$ фазода ҳар бир $x(t)$ узлукиз функция учун $f(t) = \int\limits_a^t x(u)du,\ (a \le t \le b)$, тенглик билан аниқланувчи акслантириш чизиқли оператор.

41-§ да чизиқли акслантиришларнинг йиғиндиси, кўпайтмаси ва сонга кўпайтмаси таърифланган эди. Бу таърифларни V чизиқли фазодаги чизиқли операторлар тўпламига татбиқ қилсак, у бу амалларга нисбатан ҳалқага айланади. Бунда чизиқли операторлар йиғиндиси ва кўпайтмасининг ҳалқа аксиомаларини қаноатлантириши бевосита текширилади. V чизиқли фазонинг ҳар бир элементини $\bar{0}$ элементига ўтказувчи оператор (у ноль оператор деб аталади) бу ҳалқада ноль ролини ўйнайди. V

чизиқли фазонинг ҳар бир элементини ўзини ўзига ўтказувчи айний оператор (у бирлик оператор ҳам деб аталади) ҳалқада бирлик ролини ўйнайди.

V чизиқли фазода f чизиқли оператор ва V_1 қисмфазо шундай бўлишсаки, ҳар бир $x \in V_1$ учун $f(x) \in V_1$ шарт бажарилса, V_1 қисмфазо f чизиқли операторга нисбатан инвариант деб аталади. Масалан, ҳар бир f чизиқли оператор учун $\ker f$ ва $f(V)$ қисмфазолар инвариантдир. Ҳақиқатан, агар $x \in \ker f$ бўлса, у ҳолда $f(x) = \bar{0} \in \ker f$. Агар $x \in f(V)$ бўлса, у ҳолда $f(x) \in f(V)$, чунки $x \in V$.

F майдон устидаги чекли ўлчамли V чизиқли фазода $\{e_1, ..., e_n\}$ базис ва $f : V \to V$ чизиқли оператор берилган бўлсин. У ҳолда ҳар бир $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e_k \in V$ учун $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k f(e_k)$.

Бундан кўринадики, чизиқли оператор базис векторлардаги қиймати билан тўла аниқланар экан. Чизиқли операторнинг базислардаги қийматларини базис бўйича ёйиб, қуйидаги ифодаларни оламиз:

$$f(e_k) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} e_i, \quad \alpha_{ik} \in F, \ (k = \overline{1,n})$$

$A = (\alpha_{ik}) \in F^{n \times n}$ матрица чизиқли операторнинг $\{e_1, ..., e_n\}$ базисдаги матрицаси деб аталади. Шундай қилиб, агар чекли ўлчамли V фазода базис берилса, у ҳолда ҳар қандай $f : V \to V$ чизиқли оператор бу базисдаги матрицаси билан бир қийматли аниқланади. n — ўлчамли V чизиқли фазода базиснинг берилиши, бу фазодаги чизиқли операторлар билан F майдон устидаги n тартибли квадрат матрицалар орасида ўзаро бир қийматли муносабат ўрнатади.

Мисоллар. 1) D_3 фазода базис сифатида $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ ортларни олиб, абсцисса ўқига f ортогонал проекциялашни қараймиз. Бунда $f(\bar{i}) = \bar{i}, f(\bar{j}) = f(\bar{k}) = \bar{0}$ бўлгани учун унинг матрицаси

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) F^n фазода базислар сифатида $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, ..., 0)$, ..., $e_n = (0, 0, ..., 1)$ ортларни олиб, $A = (\alpha_{ik}) \in F^{n\times n}$ матрица орқали $f(x) = Ax$ чизиқли операторни

$$f(e_1) = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + ... + \alpha_{n1}e_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(e_n) = \alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + ... + \alpha_{nn}e_n$$

муносабатлар орқали аниқлаймиз. Демак, f операторнинг олинган базисдаги матрицаси A.

3) $R_n[t]$ фазода $\{1, t, ..., t^n\}$ базис олинса, унда дифференциаллаш операторининг матрицаси

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

кўринишга эга.

4) Ноль операторнинг матрицаси ҳар қандай базисда ҳам ноль матрица.

5) Бирлик операторнинг (айний акслантиришнинг) матрицаси ҳар қандай базисда бирлик матрицадир.

Чекли ўлчамли V фазода базис берилган бўлса, у ҳолда бу фазодаги f чизиқли операторлар билан уларнинг A_f матрицалари орасидаги ўзаро бир қийматли муносабат қуйидаги хоссаларга эга:

$$A_{f+g} = A_f + A_g; \quad A_{\lambda f} = \lambda A_f, \quad \lambda \in F;$$
$$A_{fg} = A_f \cdot A_g.$$

Охирги хоссани исботлаймиз (қолган хоссаларнинг исботи шунга ўхшаш). Базис $\{e_1, ..., e_n\}$ берилган бўлиб, бу базисда f, g ва fg чизиқли операторларнинг матрицалари $A_f = (\alpha_{ik})$, $A_g = (\beta_{ik})$ ва $A_{fg} = (\gamma_{ik})$ бўлсин. У ҳолда

$$f(e_k) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} e_i,\ g(e_k) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ik} e_i,$$

$$(fg)(e_k) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ik} e_i,\ (k = \overline{1, n}).$$

Иккинчи томондан

$$fg(e_k) = f(g(e_k)) = f\left(\sum_{p=1}^{n} \beta_{pk} e_p\right) = \sum_{p=1}^{n} \beta_{pk} f(e_p) =$$

$$= \sum_{p=1}^{n} \beta_{pk} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ip} e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{p=1}^{n} \alpha_{ip} \beta_{pk}\right) e_i$$

Демак $\gamma_{ik} = \sum_{p=1}^{n} \alpha_{ip} \beta_{pk}$, яъни $A_{fg} = A_f \cdot A_g$.

Таъриф. *Агар $f : V \to V$ акслантриш (чизиқли бўлиши шарт эмас) учун шундай $g : V \to V$ акслантириш мавжуд бўлсаки, $fg = gf = e$ — бирлик (айний) акслантириш бўлса, g акслантириш f га тескари деб аталади.*

Агар f акслантириш учун тескариси мавжуд бўлса, у ягона. Ҳақиқатан, иккита g_1, g_2 тескари акслантириш мавжуд бўлсин:

$$fg_1 = g_1 f = e,\ \ fg_2 = g_2 f = e.$$

у ҳолда $g_2 f g_1 = (g_2 f) g_1 = e g_1 = g_1$.

Иккинчи томондан $g_2 f g_1 = g_2 (f g_1) = g_2 e = g_2$. Демак, $g_1 = g_2$.

Берилган f акслантиришга тескари g акслантириш $g = f^{-1}$ кўринишда белгиланади. Агар f — чизиқли оператор бўлса, у ҳолда f^{-1} ҳам чизиқли. Ҳақиқатан, агар $x, y \in V$ ихтиёрий векторлар бўлса, f нинг тескариси мавжуд бўлгани учун шундай ягона $a, b \in V$ векторлар мавжудки, $f(a) = x$, $f(b) = y$. Бундан f чизиқли бўлгани учун $f(a + b) = x + y$. Натижада

$$f^{-1}(x + y) = f^{-1}f(a + b) = a + b = f^{-1}(x) + f^{-1}(y).$$

Шунга ўхшаш $f^{-1}(\lambda x) = \lambda f^{-1}(x)$ хосса исботланади.

1-теорема. ***Чекли ўлчамли чизиқли фазодаги чизиқли операторнинг тескариси мавжуд бўлиши учун унинг матрицаси махсусмас бўлиши зарур ва кифоя. Бу шарт бажарилганда унинг матрицаси ҳар қандай базисда махсусмас ва*** $A_{f^{-1}} = A_f^{-1}$.

Исбот. Чизиқли f операторнинг тескариси бўлган g чизиқли оператор мавжуд бўлсин: $fg = gf = e$. У ҳолда ихтиёрий берилган базисда f ва g ларнинг матрицалари қуйидаги тенгликни қаноатлантиради:

$A_f \cdot A_g = A_g \cdot A_f = A_{fg} = A_e = E$, бу ерда E — бирлик матрица. Бундан A_f матрицанинг махсусмаслиги ва $A_g = A_{f^{-1}} = A_f^{-1}$ тенглик бажарилиши келиб чиқади.

Аксинча, бирор базисда A_f махсусмас бўлсин. У ҳолда бу базисда матрицаси $A_g = A_f^{-1}$ шартни қаноатлантирувчи чизиқли g операторни олсак, унинг учун $A_{fg} = A_f \cdot A_g = A_{gf} = A_g \cdot A_f = E$ тенгликлардан $fg = gf = e$ тенгликларни оламиз (чунки берилган базисда $f \to A_f$, $A_f \to f$ — ўзаро бир қийматли муносабатлар), яъни f нинг тескариси мавжуд ва $g = f^{-1}$. ■

Энди базис ўзгарганда чизиқли операторнинг матрицаси қандай ўзгаришини кузатамиз. F майдон устидаги V чизиқли фазода иккита $\{e_1, ..., e_n\}$, $\{f_1, ..., f_n\}$ базислар ва $u: V \to V$ — чизиқли оператор берилган бўлсин. A ва B матрицалар u чизиқли операторнинг мос равишда биринчи ва иккинчи базисдаги матрицалари бўлиб, С-биринчи базисдан иккинчи базисга ўтиш матрицаси бўлсин. Агар $A = (\alpha_{ik})$, $B = (\beta_{ik})$, $C = (\gamma_{ik})$ деб олсак, у ҳолда

$$u(e_k) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} e_i, \quad u(f_k) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ik} f_i,$$

$$f_k = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ik} e_i \quad (k = \overline{1, n}).$$

Ушбу $v(e_k) = f_k \quad (k = \overline{1, n})$ тенглик билан янги $v : V \to V$ чизиқли операторни аниқлаймиз. Бу операторнинг $\{e_1, ..., e_n\}$ базисдаги матрицаси C матрицадир. C матрица бир базисдан иккинчи базисга ўтиш матрицаси бўлгани учун у махсусмас. Бундан келиб чиқадики, v чизиқли операторнинг тескариси мавжуд.

Энди ушбу

$$uv(e_k) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ik} v(e_i) = v\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_{ik} e_i\right)$$

тенгликдан v нинг тескариси мавжудлигидан фойдаланиб.

$$v^{-1}uv(e_k) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ik} e_i$$

тенгликни оламиз. Бунинг маъноси шуки, $v^{-1}uv$ операторнинг $\{e_1, ..., e_n\}$ базисдаги матрицаси $B = (\beta_{ik})$ га тенг. Иккинчи томондан чизиқли операторлар билан уларнинг матрицалари орасидаги ўзаро бир қийматли муносабатнинг хоссаларига асосан $v^{-1}uv$ чизиқли операторнинг $\{e_1, ..., e_n\}$ базисдаги матрицаси $C^{-1}AC$ га тенг. Натижада $B = C^{-1}AC$. Бу билан қуйидаги тасдиқ исботланди:

2-теорема. ***Агар чекли ўлчамли V фазода чизиқли оператор иккита базисдаги матрицалари мос равишда A ва B бўлиб, C-биринчи базисдан иккинчи базисга ўтиш матрицаси бўлса, у ҳолда $B = C^{-1}AC$.***

Таъриф. *n-ни тартибли A ва B квадрат матрицалар учун шундай махсусмас n-тартибли C матрица топилсаки, $B = C^{-1}AC$ бўлса, A ва B матрицалар ўхшаш деб аталади.*

Барча n-тартибли F майдон устидаги квадрат матрицалар тўпламидаги бу ўхшашлик муносабати рефлексивлик, симметриклик ва транзитивлик хусусиятларига эга, яъни бу тўпламда эквивалентлик муносабатидир (текширинг).

2-теореманинг маъноси шуки, чизиқли операторнинг турли базисдаги матрицалари ўхшашдир.

53-§. ХОС ВЕКТОРЛАР ВА ХОС СОНЛАР

Агар чекли ўлчамли чизиқли фазода чизиқли оператор учун матрицасини диагонал кўринишга келтирадиган базис мавжуд бўлса, бундай чизиқли оператор диагоналлашувчи деб аталади. Операторнинг диагоналлашувчилиги масаласи табиий равишда хос векторлар ва хос сонлар тушунчаларига олиб келади.

Таъриф. Агар нольдан фарқли x вектор учун шундай $\lambda \in F$ мавжуд бўлсаки, $f(x) = \lambda x$ тенглик бажарилса, x вектор f чизиқли операторнинг хос вектори ва λ эса бу хос векторга мос хос сон деб аталади.

Мисоллар. 1) D_3 фазода берилган тўғри чизиққа ортогонал проекциялашдан иборат бўлган чизиқли оператор учун бу тўғри чизиқда ётувчи ҳар бир нольдан фарқли вектор хос вектор бўлади. Бу векторлар ҳар бирининг хос сони 1.

2) $R[t]$ фазода ҳосила олиш операторининг хос векторлари фақат ўзгармас сонлардан иборат. Улар ҳар бирининг хос сони 0. Умуман, агар чизиқли оператор нольдан фарқли негизга эга бўлса, негизга тегишли ҳар бир вектор — хос вектор; унинг хос сони 0.

3) $D_2(\alpha)$ фазода берилган φ бурчакка $\varphi \neq n\pi$, $n \in Z$, буришдан иборат чизиқли операторнинг хос вектори йўқ.

1-теорема. ***Чекли ўлчамли чизиқли фазодаги чизиқли операторнинг диагоналлашувчи бўлиши учун унинг хос векторлардан ташкил топган базисининг мавжуд бўлиши зарур ва кифоя.*** Бу шарт бажарилганда оператор матрицаси диагонал элементлари мос базис векторларининг хос сонлари бўлади.

Исбот. Чизиқли f оператор диагоналлашувчи, яъни бирор $\{e_1, ..., e_n\}$ базисда унинг матрицаси диагонал кўринишда бўлсин:

$$A_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

У ҳолда $f(e_k) = \lambda_k e_k$, $(k = \overline{1,n})$. Демак e_n, ..., e_n хос векторлар, λ_1, ..., λ_n эса мос хос сонлар.

Аксинча, $f(e_k) = \lambda_k e_k$, $(k = \overline{1,n})$ тенгликлардан f операторнинг $\{e_1, ..., e_n\}$ базисдаги матрицаси диагоналлиги ва A_f га тенглиги келиб чиқади. ■

2-теорема. ***Чекли ўлчамли комплекс фазода ҳар қандай чизиқли оператор хос векторга эга.***

Исбот. Хос x вектор ва хос λ сон учун $f(x) = \lambda x$ тенглик ушбу $(f - \lambda e)(x) = \bar{0}$ тенгликка тенг кучли, бу ерда e- бирлик оператор. Охирги $(f - \lambda e)(x) = \bar{0}$ тенглик эса x вектор $f - \lambda e$ операторнинг негизига тегишли эканлигини кўрсатади. Шундай қилиб, хос векторнинг мавжуд бўлиши бирор $\lambda \in C$ учун $f - \lambda e$ оператор нольдан фарқли негизга эга эканлигини кўрсатади. Чекли ўлчамли фазода охирги шарт эса $f - \lambda e$ операторнинг тескариси мавжуд эмаслигига тенг кучли, яъни бу оператор матрицаси ҳар қандай базисда махсус. Шундай қилиб, агар f операторнинг матрицаси A бўлса, у ҳолда бу оператор хос сонлари тўплами $det(A - \lambda E) = 0$ тенгламанинг илдизлари тўплами билан устма-уст тушади, бу ерда $det(A - \lambda E)$ ифода $A - \lambda E$ матрицанинг детерминанти. Ушбу $det\ (A - \lambda E) = 0$ тенглама λ га нисбатан $n = dim V$ даражали тенглама бўлиб, λ^n олдидаги коэффициент $(-1)^n$ га тенг. Алгебранинг асосий теоремасига асосан бундай тенглама C майдонда камида битта илдизга эга. Шундай қилиб f оператор камида битта хос сонга ва демак, хос векторга эга. ■

Бу теоремада чекли ўлчамлилик шарти муҳим. $C[t]$ чексиз ўлчамли фазода $f(x) = tx$ оператор ҳеч қандай хос векторга эга эмас.

Чизиқли оператор учун чизиқли V фазода хос векторнинг мавжуд бўлиши бу фазода бир ўлчамли инвариант қисмфазонинг мавжуд бўлишига тенг кучли. Бунга кўра 2-теорема айтадики, чекли ўлчамли комплекс фазода ҳар қандай чизиқли оператор бир ўлчамли инвариант қисм фазога эга.

3-теорема. ***Агар чекли ўлчамли комплекс фазода икки чизиқли f ва g операторлар ўрин алмашувчи (яъни $fg = gf$) бўлишса, у ҳолда улар умумий хос векторга эга.***

Исбот. Чизиқли f оператор учун a-хос вектор ва λ_1-мос хос сон бўлсин: $f(a) = \lambda_1 a$. V_1 фазо чизиқли $f - \lambda_1 e$ операторнинг (e-бирлик оператор) негизи бўлсин. У нольдан фарқли, чунки $a \in V_1$. Агар $x \in V_1$ бўлса, у ҳолда $f(x) = \lambda_1 x$ ва $fg(x) = gf(x) = g(\lambda_1 x) = \lambda_1 g(x)$.

Бу $g(x) \in V_1$ эканини кўрсатади. Демак, V_1 чизиқли f ва g операторлар учун инвариант. Чизиқли g операторнинг аниқланиш соҳасини V_1 гача торайтириш натижасида ҳосил бўлган операторни g_1 билан белгилаймиз. 2-теоремага асосан g_1 оператор V_1 да камида битта хос векторга эга. Масалан, $b \in V_1$ шундай хос вектор бўлсин: $g(b) = \lambda_2 b$. Бу вектор f учун ҳам хос вектор $f(b) = \lambda_1 b$, чунки $b \in V_1$. ■

Коэффициентлари F майдондан олинган квадрат A матрица учун тузилган $\alpha(\lambda) = \alpha_A(\lambda) = det(A - \lambda E)$ кўпҳад A матрицанинг характеристик кўпҳади деб аталади.

Ўхшаш матрицаларнинг характеристик кўпҳадлари ўзаро тенг. Ҳақиқатан, $B = C^{-1}AC$ бўлсин, бу ерда C коэффициентлари F майдондан олинган махсусмас матрица. У ҳолда матрицалар кўпайтмасининг детерминанти хақидаги теоремага асосан

$$\alpha_B(\lambda) = det(B - \lambda E) = det(C^{-1}AC - C^{-1}\lambda EC) =$$
$$= det\, C^{-1}(A - \lambda E)C = det C^{-1} det(A - \lambda E)\, det C = \alpha_A(\lambda).$$

Бундан аёнки, берилган чизиқли операторнинг турли базисдаги матрицалари бир хил характеристик кўпҳадга эга. Бу характеристик кўпҳад берилган чизиқли операторнинг характеристик кўпҳади деб аталади.

4-теорема. ***Агар сонли F майдон устидаги n ўлчовли чизиқли фазода аниқланган чизиқли операторнинг характеристик кўпҳади n та турли илдизга эга бўлса, бу оператор диагоналлашувчидир.***

И с б о т. Дастлаб ихтиёрий чизиқли фазода чизиқли операторнинг турли хос сонларига мос келувчи хос векторларнинг чизиқли эркли эканлигини кўрсатамиз.

Ушбу $\{x_1, ..., x_k\}$ — турли хос сонларга мос келувчи хос векторлар бўлсин: $f(x_i) = \lambda_i x_i$, $(i = \overline{1,k})$, бу ерда $i \neq j$ учун $\lambda_i \neq \lambda_j$.

Бу тизимнинг чизиқли эрклилигини k бўйича математик индукция ёрдамида исботлаймиз. Тасдиқ $k = 1$ да $x_1 \neq 0$ (ҳар қандай хос вектор учун) бўлгани учун аён. Тасдиқ $(k-1)$ та хос векторлар учун ўринли бўлсин деб фараз қиламиз.

Энди $x_1, ..., x_k$ векторлар учун $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = \bar{0}$ тенглик ўринли бўлсин. Бу тенгликдан

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i x_i = \bar{0}$$

тенгликни оламиз. Ушбу $\lambda_k \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_k x_i = \bar{0}$ тенгликдан охирги тенгликни айириб, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_k) x_i = 0$ тенгликни ҳосил қиламиз. Индукциянинг фаразига кўра x_1, ..., x_{k-1} чизиқли эркли. Бунга кўра охирги тенгликдан $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0$, $(i = \overline{1,k-1})$ тенгликларни оламиз. Хос сонлар турли бўлгани учун $\lambda_i - \lambda_k \neq 0$ $(i = \overline{1,k-1})$. Бундан ва охирги тенгликлардан $\alpha_i = 0$, $(i = \overline{1,k-1})$ тенгликларни оламиз. Булардан ва $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = \bar{0}$ тенгликдан $\alpha_k x_k = \bar{0}$ тенгликни оламиз. Хос вектор $x_k \neq \bar{0}$ бўлгани учун $\alpha_k = 0$. Демак $\alpha_i = 0$ $(i = \overline{1,k})$. Бу x_1, ..., x_k векторларнинг чизиқли эркли эканлигини кўрсатади.

Энди λ_1, ..., λ_n сонлар берилган чизиқли операторнинг хос сонлари, e_1, ..., e_n эса бу хос сонларга мос хос векторлар бўлсин. У ҳолда исботланганга кўра, e_1, ..., e_n векторлар тизими чизиқли эркли бўлиб, V фазонинг базиси бўлади. 1-теоремага асосан f чизиқли операторнинг бу базисдаги матрицаси диагонал кўринишга эга. ■

D_2 фазода берилган φ бурчакка ($\varphi \neq \pi n$, $n \in Z$) буриш чизиқли оператори мисоли кўрсатадики, 2-теорема чекли ўлчамли ҳақиқий фазоларда ўринли эмас. Бошқача сўз билан айтганда чекли ўлчамли чизиқли фазоларда чизиқли операторнинг бир ўлчамли инвариант қисмфазоси бўлмаслиги мумкин.

Қуйидаги теорема кўрсатадики, чекли ўлчами ҳақиқий фазоларда чизиқли операторнинг бир ўлчамли инвариант қисм фазоси доим бўлмасаям, лекин икки ўлчамли инвариант қисмфазоси доим мавжуд.

5-теорема. ***Чекли ўлчамли ҳақиқий чизиқли V фазода чизиқли f оператор берилган бўлсин. У ҳолда шундай λ, $\mu \in R$ сонлар ва бир вақтда нольга тенг бўлмаган шундай x, y $\in V$ векторлар мавжудки, $f(x) = \lambda x - \mu y$, $f(y) = \mu x + \lambda y$ (агар $\mu = 0$ бўлса, x ва y векторларнинг нольдан фарқлиси f операторнинг хос вектори бўлади).***

Исбот. Ҳар қандай чекли ўлчамли ҳақиқий чизиқли фазо бирор n учун R^n га изоморф бўлгани учун $V = R^n$ деб олишимиз мумкин. Бу фазода базис сифатида ушбу $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ..., $e_n = (0, 0, ..., 0, 1)$ ортлар тизимини оламиз. Бу базисда чизиқли f операторнинг матрицаси $A = (\alpha_{ik})$ бўлсин. У ҳолда ҳар қандай $x \in R^n$ учун $f(x) = Ax$, бу ерда x вектор устун кўринишида ёзилган. Энди C^n фазода ҳар бир $Z \in C^n$ учун чизиқли g операторни $g(z) = Az$ тенглик билан аниқлаймиз, бу ерда ҳам z вектор устун кўринишда ёзилган. 2-теоремага асосан g операторнинг хос вектори мавжуд, уни z_0 билан ва мос хос сонни ξ орқали белгилаймиз. У ҳолда $z_0 = x_0 + iy_0$ кўринишда ёзишимиз мумкин, бу ерда x_0, y_0 — баравар нольга тенг бўлмаган R даги векторлар (чунки $Z_0 \neq 0$). Хос ξ сонни $\xi = \lambda + i\mu$, $\lambda, \mu \in R$ кўринишда ёзиб оламиз. Ушбу $AZ_0 = \xi Z_0$ тенгликдан $A(x_0 + iy_0) = (\lambda + i\mu)(x_0 + iy_0) = (\lambda x_0 - \mu y_0) + i(\mu x_0 + \lambda y_0)$. Бу ердан

$$f(x_0) = Ax_0 = \lambda x_0 - \mu y_0,$$
$$f(y_0) = Ay_0 = \mu x_0 + \lambda y_0.$$

Шуни айтиш керакки, ўлчами бирдан ортиқ бўлган комплекс чизиқли фазоларда диагоналлашувчи бўлмаган чизиқли операторлар мавжуд.

Масалан, C^2 фазода бирор базисда

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

матрицага эга бўлган чизиқли f оператор диагоналлашувчи эмас. Ҳақиқатан, акс ҳолда шундай махсусмас

$$C = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$$

матрица мавжудки, $B = C^{-1}AC$ диагонал кўринишга эга:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Бундан ва $AC = CB$ тенгликдан

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

муносабатни оламиз. Бу муносабатдан эса $\lambda\gamma_{11} = \mu\gamma_{12} = 0$, $\lambda\gamma_{21} = \gamma_{11}$, $\mu\gamma_{22} = \gamma_{12}$, $\gamma_{11} = \gamma_{12} = 0$ тенгликларни оламиз. Охирги тенгликлар эса C матрицанинг махсусмас эканлигига зид.

Ўнинчи боб

МАТРИЦАЛАРНИНГ ЖОРДАН НОРМАЛ ФОРМАСИ

54-§. МАТРИЦАЛИ КЎПҲАДЛАР

Матрицали кўпҳад деб, λ комплекс ўзгарувчили шундай $A(\lambda)$ функцияга айтиладики, унинг қийматлари C майдон устидаги n — тартибли квадрат матрицалар бўлиб, у

$$A(\lambda) = A_0 + A_1\lambda + \ldots + A_m\lambda^m \tag{1}$$

кўринишга эга, бу ерда $A_0, A_1, \ldots, A_m$ — тартиби n бўлган квадрат матрицалар. Таърифдаги n сони матрицали кўпҳаднинг *тартиби* дейилади. Агар A_m нольдан фарқли бўлса, m сони матрицали кўпҳаднинг *даражаси*, A_m эса *юқори коэффициенти* дейилади.

Матрицалар устидаги амалларнинг хоссаларидан фойдаланиб, ҳар қандай матрицали кўпҳадни n — тартибли шундай квадрат матрица кўринишида ёзиш мумкинки, унинг элементлари λ ўзгарувчининг комплекс коэффициентли кўпҳадларидан иборат:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) \ldots a_{1n}(\lambda) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}(\lambda) \ldots a_{nn}(\lambda) \end{pmatrix} \tag{2}$$

Бундай матрицалар λ — матрицалар деб аталади.

Матрицали кўпҳадларни λ — матрицалар кўринишида ёзиб олиб ва сонли коэффициентли кўпҳадларнинг хоссаларидан фойдаланиб, $A(\lambda)$ — матрицали кўпҳад (1) ифодасидаги $A_0, A_1, \ldots, A_m$ матрицаларнинг бир қийматли аниқланганини топамиз; улар $A(\lambda)$ матрицали кўпҳаднинг коэффициентлари деб аталади.

Хусусан, ҳар қандай $\lambda \in C$ учун $A(\lambda)$ ноль матрица бўлиши учун барча A_0, A_1, ..., A_m коэффициентларнинг ноль матрица бўлиши зарур ва кифоя. Агар $A(\lambda)$ — нольдан фарқли матрицали кўпҳад бўлса, у ҳолда $A(\lambda)$ га нольдан фарқли коэффициент билан кирувчи λ нинг энг юқори даражаси $A(\lambda)$ матрицали кўпҳаднинг даражаси бўлади. Равшанки, $A(\lambda)$ нинг даражаси унинг (2) ифодасидаги $a_{ik}(\lambda)$, $(i, k = \overline{1, n})$ кўпҳадлар даражаларининг энг каттасига тенг. Барча n — тартибли λ матрицаларнинг тўпламини $C^{n \times n}[\lambda]$ орқали белгилаймиз.

Матрицали кўпҳадларнинг (2) ифодасидан фойдаланиб, уларнинг йиғиндиси ва кўпайтмасини матрицаларнинг йиғиндиси ва кўпайтмаси орқали киритамиз. Бу амаллар $C^{n \times N}[\lambda]$ тўпламни ҳалқага айлантиради (ҳалқа аксиомалар бажарилишини текширинг). Бу ҳалқада бирлик элемент ролини n — тартибли бирлик матрица ўйнайди. Агар $n \geq 2$ бўлса, ҳалқа коммутатив эмас ва нольнинг бўлувчиларига эга (мос мисоллар келтиринг). Қуйидаги теоремага $C^{n \times n}[\lambda]$ ҳалқада қолдиқли бўлиш ҳақидаги теорема деб қараш мумкин.

1-теорема. ***$A(\lambda)$, $B(\lambda)$ — тартиби n га тенг матрицали кўпҳадлар, $B(\lambda)$ — нольдан фарқли ва унинг юқори коэффициенти махсусмас бўлсин. У ҳолда тартиби n бўлган шундай $Q_1(\lambda)$, $R_1(\lambda)$, $Q_2(\lambda)$, $R_2(\lambda)$ матрицали кўпҳадлар мавжудки,***

$$A(\lambda) = Q_1(\lambda)\, B(\lambda) + R_1(\lambda) = B(\lambda) Q_2(\lambda) + R_2(\lambda).$$

Бунда, агар $R_1(\lambda)$ ёки $R_2(\lambda)$ матрицали кўпҳадлар нольдан фарқли бўлса, у ҳолда уларнинг даражаси $B(\lambda)$ нинг даражасидан кичик.

Исбот. Агар $A(\lambda)$ — ноль ёки даражаси $B(\lambda)$ никидан кичик матрицали кўпҳад бўлса, $Q_1(\lambda) = Q_2(\lambda) = 0$, $R_1(\lambda) = R_2(\lambda) = A(\lambda)$ деб олинса, теорема исботланади.

Энди $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ ларнинг даражалари мос равишда m, k бўлиб, $m \geq k$ бажарилсин.

Энди теоремани ноль кўпҳадлар ёки даражаси $< m$ кўпҳадлар учун исботланган деб фараз қиламиз. $A(\lambda)$ ва

$B(\lambda)$ кўпҳадларни (λ) нинг даражалари камайиб бориш тартибида ёзамиз:

$$A(\lambda) = A\lambda^m + ..., \; B(\lambda) = B\lambda^k + ...$$

Бунга кўра

$$A_1(\lambda) = A(\lambda) - AB^{-1} B(\lambda)\lambda^{m-k}$$

кўпҳад ё ноль ёки даражаси $< m$ бўлган кўпҳад.

Индукциянинг фаразига мувофиқ

$$A_1(\lambda) = Q_0(\lambda)B(\lambda) + R_1(\lambda)$$

муносабат ўринли, бу ерда $R_1(\lambda)$ ё ноль ёки даражаси $< k$ бўлган кўпҳад. Бундан

$$A(\lambda) = AB^{-1} B(\lambda)\lambda^{m-k} + A_1(\lambda) = Q_1(\lambda)B(\lambda) + R_1(\lambda),$$

бу ерда $Q_1(\lambda) = AB^{-1} \lambda^{m-k} + Q_0(\lambda)$.

$Q_2(\lambda)$ ва $R_2(\lambda)$ кўпҳадларнинг мавжудлиги шунга ўхшаш исботланади (мустақил кўрсатинг). ■

Энди $A(\lambda) = A_0 + A_1\lambda + ... + A_m\lambda^m$ — тартиби n бўлган матрицали кўпҳад, X — тартиби n бўлган комплекс матрица бўлсин. $A(\lambda)$ га λ нинг ўрнига X ни қўйиб, барча амалларни бажариш натижасида ҳосил бўлган $A(X) = A_0 + + A_1X + ... + A_mX^m$ матрица $A(\lambda)$ кўпҳаднинг X матрицадаги қиймати деб аталади. Равшанки, агар $A(\lambda) = B(\lambda) + C(\lambda)$ бўлса, у ҳолда ҳар қандай $X \in C^{n\times n}$ матрица учун $A(X) = B(X) + C(X)$. Аммо $A(\lambda) = B(\lambda) \cdot C(\lambda)$ тенгликдан доим $A(X) = B(X)\ C(X)$ тенглик келиб чиқавермайди. Бунинг сабаби шуки, $B(\lambda)$ ва $C(\lambda)$ матрицали кўпҳадлар кўпайтирилганда комплекс λ ўзгарувчи бу кўпҳадларнинг матрицалардан иборат коэффициентлари билан ўрин алмашинувчи, аммо X матрица эса бу хоссага эга бўлмаслиги мумкин. Агар X матрица $C(\lambda)$ кўпҳаднинг матрицалардан иборат барча коэффициентлари билан ўрин алмашинувчи бўлса, у ҳолда $A(\lambda) = B(\lambda)\ C(\lambda)$ дан $A(X) = B(X) \cdot C(X)$ тенглик келиб чиқади. Шу изоҳдан фойдаланиб, қуйидаги теорема исботланади.

2-теорема (Гамильтон-Кэли). ***Агар A матрицанинг характеристик кўпҳади $\varphi(\lambda)$ бўлса, у ҳолда $\varphi(A) = 0$ (бу ерда $\varphi(A)$ деб $\varphi(\lambda)E$ матрицали кўпҳаднинг A матрицадаги қиймати тушунилади).***

Исбот. $B(\lambda)$ орқали $(A_{ik}(\lambda))^T$ матрицани белгилаймиз, бунда $A_{ik}(\lambda)$ орқали $A - \lambda E$ матрицадаги мос элементнинг алгебраик тўлдирувчиси белгиланган. Детерминантлар назариясидан (21-§, 3-теорема) маълумки

$$\varphi(\lambda)E = B(\lambda)\,(A - \lambda E)$$

A матрица $A - \lambda E$ матрицали кўпҳаднинг иккала коэффициенти билан ўрин алмашинувчи бўлгани учун юқоридаги тенгликдан $\varphi(A)E = B(A)\,(A - AE) = 0$ тенгликни оламиз. ■

$C^{n\times n}[\lambda]$ ҳалқада тескариси мавжуд бўлган элементлар унимодуляр λ-матрицалар деб аталади.

3-теорема. ***λ-матрица унимодуляр бўлиши учун унинг детерминанти ўзгармас*** (яъни λ га боғлиқ эмас) ***бўлиши зарур ва кифоя.***

Исбот. Таърифга асосан, агар λ-матрица $A(\lambda)$ унимодуляр бўлса, унинг учун шундай λ-матрица $B(\lambda)$ мавжудки, $A(\lambda)\cdot B(\lambda) = B(\lambda)\cdot A(\lambda) = E$. Ушбу $detA(\lambda)$ ва $detB(\lambda)$ лар λ га нисбатан кўпҳадлар ва $detA(\lambda)\cdot detB(\lambda) = 1$ бўлгани учун $detA(\lambda)$ — нольдан фарқли сондир. Аксинча, агар $detA(\lambda) = \Delta$ — нольдан фарқли сон ва $A(\lambda) = (a_{ik}(\lambda))$ бўлса, у ҳолда $B(\lambda) = (\beta_{ik}(\lambda))$, $\beta_{ik}(\lambda) = \frac{1}{\Delta}A_{ki}(\lambda)$ деб оламиз, бу ерда $A_{ki}(\lambda)$ орқали $A(\lambda)$ матрицадаги a_{ki} элементнинг алгебраик тўлдирувчиси белгиланган. У ҳолда $A(\lambda)B(\lambda) = B(\lambda)A(\lambda) = E$. ■

55-§. КАНОНИК λ-МАТРИЦАЛАР

Таъриф. *Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи λ-матрица каноник деб аталади:*

1) *у диагонал матрица;*

2) *диагонал бўйича дастлаб нольдан фарқли кўпҳадлар, кейин ноллар жойлашган;*

3) *нольдан фарқли ҳар қандай кўпҳаднинг юқори коэффициенти бирга тенг;*

4) *нольдан фарқли ҳар бир кейинги кўпҳад олдингисига бўлинади.*

F — сонли майдон бўлсин. Бундан кейин, агар бошқа гап алоҳида қайд қилинган бўлмаса, F майдонда аниқланган λ-матрицалар кўрилади, яъни шундай матрицали кўпҳадларки, уларнинг барча коэффициентлари F майдон устидаги n-тартибли матрицалардир.

λ-матрицаларнинг элементар алмаштиришлари деб, қуйидаги алмаштиришларга айтилади:

1) λ-матрицанинг бирор сатрини (устунини) нольдан фарқли сонга кўпайтириш (бундай алмаштиришлар 1-тур элементар алмаштиришлар деб аталади);

2) λ-матрицанинг бирор сатрини (устунини) $F[\lambda]$ ҳалқадан олинган кўпҳадга кўпайтириб, бошқа сатрига (устунига) қўшиш.

Таъриф. Иккита λ-матрицадан бирини иккинчисидан чекли марта элементар алмаштиришларни қўллаб ҳосил қилиш мумкин бўлса, улар эквивалент деб аталади.

Бу эквивалентлик тушунчаси рефлексивлик, симметриклик ва транзитивлик хоссаларига эга (текширинг).

Мисол кўрамиз. Иккита λ-матрица берилиб, уларнинг бири иккинчисидан фақат сатрларнинг (устунларнинг) транспозицияси билан фарқ қилсин. Уларнинг эквивалентлигини кўрсатамиз. $A(\lambda)$ матрицанинг k-устунини $a_k = a_k(\lambda)$ орқали белгилаймиз. $A(\lambda)$ матрицада элементар алмаштиришда қатнашмаган устунларни ташлаб юбориб, қуйидаги элементар алмаштиришларни бажарамиз:

$$A(\lambda) = (a_i, a_j) \sim (a_i + a_j, a_j) \sim (a_i + a_j, -a_i) \sim (a_j, -a_i) \sim$$
$$\sim (a_j, a_i),$$

бу ерда $i \neq j$. Сатрларнинг ҳам ўрнини алмаштириш шунга ўхшаш бажарилади.

Теорема. ***Ҳар қандай λ-матрица бирор каноник λ-матрицага эквивалент.***

Исбот. Ноль матрица учун теорема равшан, чунки унинг ўзи каноник. Энди $A(\lambda)$ нольдан фарқли бўлсин.

Теоремани λ -матрицанинг тартиби бўйича индукция ёрдамида исботлаймиз.

Агар $n = 1$ бўлса, у ҳолда $A(\lambda)$ матрица битта элементдан иборат матрица $A(\lambda) = (a(\lambda))$, $a(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + ... + a_m\lambda^m$, $a_1, a_1, ..., a_m \in F$, $a_m \neq 0$. $A(\lambda)$ ни a_m^{-1} сонга кўпайтириб, юқори коэффициенти бирга тенг бўлган кўпҳадга келамиз. Бу билан $A(\lambda)$ каноник кўринишни олади.

Энди $n > 1$ ҳолни кўрамиз. Теорема тартиби $(n - 1)$ бўлган λ-матрицалар учун исботланган деб фараз қиламиз.

Тартиби n бўлган $A(\lambda)$-матрицани ва унга эквивалент бўлган барча λ-матрицаларни оламиз. Бундай λ-матрицаларнинг элементлари ичида даражаси энг кичик ва юқори коэффициенти бир бўлганини $\varepsilon_1(\lambda)$ орқали белгилаймиз. Бу $\varepsilon_1(\lambda)$ элемент кирган λ-матрицада бу элементни сатрларнинг ва устунларнинг транспозицияси орқали бу матрицанинг чап бурчагига ўтказамиз:

$$A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} \varepsilon_1(\lambda) & \alpha_{12}(\lambda) & \dots & \alpha_{1n}(\lambda) \\ \alpha_{21}(\lambda) & \alpha_{22}(\lambda) & \dots & \alpha_{21}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1}(\lambda) & \alpha_{n2}(\lambda) & \dots & \alpha_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Охирги матрицанинг биринчи сатри ва биринчи устунидаги барча элементларнинг $\varepsilon_1(\lambda)$ га бўлинишини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан, $\alpha_{ik}(\lambda) = q(\lambda)\varepsilon_1(\lambda) + r(\lambda)$ бўлсин. Бу ерда $r(\lambda)$ нинг даражаси $\varepsilon_1(\lambda)$ нинг даражасидан кичик. У ҳолда биринчи устунни $-$ $q(\lambda)$ га кўпайтириб k-устунга қўшсак, $A(\lambda)$ га эквивалент бўлган шундай λ-матрицани оламизки, унинг биринчи сатрининг k-устунида $r(\lambda)$ ни оламиз. Бу λ-матрицанинг биринчи сатрини $r(\lambda)$ нинг юқори коэффициентига бўламиз. Натижада $A(\lambda)$ га эквивалент бўлган шундай λ-матрицага келдикки, унда биринчи сатрининг k-устунидаги элементнинг даражаси $\varepsilon_1(\lambda)$ нинг даражасидан кичик ва юқори коэффициенти бирга тенг. Бу эса $\varepsilon_1(\lambda)$ нинг танланишига зид. Демак, $r(\lambda)$ — ноль кўпҳад.

Шунга ўхшаш мулоҳазаларни биринчи сатр ва биринчи устун элементларининг барчаси устида бажариб, қуйидаги λ-матрицага келамиз:

$$A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} \varepsilon_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_{22}(\lambda) & \dots & \beta_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \beta_{n2}(\lambda) & \dots & \beta_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

Индукцияга мувофиқ ушбу:

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} \beta_{22}(\lambda) & \dots & \beta_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n2}(\lambda) & \dots & \beta_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

$(n - 1)$-тартибли λ-матрица қуйидаги каноник λ-матрицага эквивалент:

$$B(\lambda) \sim \begin{pmatrix} \varepsilon_2(\lambda) & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \varepsilon_n(\lambda) \end{pmatrix}$$

$A(\lambda)$ матрица устида фақат $B(\lambda)$ матрицанинг сатрлари ва устунларинигина ўзгартирадиган шундай элементлар алмаштиришларни бажарамизки, бунда $B(\lambda)$ каноник кўринишга ўтсин:

$$A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} \varepsilon_1(\lambda) & & & 0 \\ & \varepsilon_2(\lambda) & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & \varepsilon_n(\lambda) \end{pmatrix}$$

Охирги λ-матрицанинг каноник эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун $\varepsilon_2(\lambda)$ нинг $\varepsilon_1(\lambda)$ га бўлинишини кўрсатиш кифоя. Охирги матрицанинг биринчи сатрига иккинчи сатрини қўшиб, қуйидаги λ-матрицани оламиз:

$$A(\lambda)\sim\begin{pmatrix}\varepsilon_1(\lambda) & \varepsilon_2(\lambda) & & 0\\ & \varepsilon_2(\lambda) & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & \varepsilon_n(\lambda)\end{pmatrix}$$

Юқорида α_{1k} нинг $\varepsilon_1(\lambda)$ га бўлинишини қандай қилиб исботлаган бўлсак, худди шу мулоҳазаларни охирги матрицаниг биринчи сатри ва иккинчи устунида турувчи $\varepsilon_2(\lambda)$ га қўллаб, унинг $\varepsilon_1(\lambda)$ га бўлинишини исботлаймиз. ■

56-§. ДЕТЕРМИНАНТ БЎЛУВЧИЛАР ВА ИНВАРИАНТ КЎПАЙТУВЧИЛАР

$A(\lambda)$-тартиби n бўлган λ-матрица ва k-натурал сон, $1 \leq k \leq n$ бўлсин.

Таъриф. *$A(\lambda)$ матрицанинг k-тартибли детерминант бўлувчиси деб, қуйидагича топиладиган $\delta_k(\lambda)$ кўпҳадга айтилади: агар $A(\lambda)$ нинг барча k-тартибли минорлари нольга тенг бўлса, $\delta_k(\lambda)$ — ноль кўпҳад; агар $A(\lambda)$ нинг k-тартибли минорлари ичида нольдан фарқлилари бўлса, $\delta_k(\lambda)$-нольдан фарқли k-тартибли минорларнинг энг катта умумий унитар бўлувчиси.*

1-теорема. ***λ-матрицаларнинг детерминант бўлувчилари элементар алмаштиришларда ўзгармайди.***

Исбот. Элементар алмаштиришларда k-тартибли минорларнинг қандай ўзгаришини кузатамиз. Сатрларни элементар алмаштириш билан чекланамиз (устунларники — шунга ўхшаш).

$A(\lambda)$ матрицанинг бирор сатри нольдан фарқли сонга кўпайтирилган бўлсин. У ҳолда бу сатр қатнашган минорлар шу сонга кўпайтирилади, қолган минорлар эса ўзгармайди. Бундан кўринадики, бу хил элементар алмаштиришда $\delta_k(\lambda)$ ўзгармайди.

Энди $A(\lambda)$ матрицанинг j-сатри $\varphi(\lambda)$ кўпҳадга кўпайтирилиб i сатрига қўшилган бўлсин.

Бунинг натижасида ҳосил бўлган янги λ-матрицани $\tilde{A}(\lambda)$ ва унинг k тартибли детерминант бўлувчисини эса $\tilde{\delta}_k(\lambda)$ орқали белгилаймиз.

Бажарилган элементар алмаштириш натижасида $A(\lambda)$ нинг i минор қатнашмайдиган ҳамда i ва j сатрларнинг иккаласи ҳам қатнашадиган минорлари ўзгармайди. Агар $A(\lambda)$ нинг берилган $\mu(\lambda)$ минорида i сатр қатнашиб, j сатр қатнашмаса, у ҳолда бажарилган элементар алмаштириш натижасида унинг қиймати ўзгариб, $\mu(\lambda) \pm \varphi(\lambda)\,\mu_1(\lambda)$ га тенг бўлади, бу ерда $\mu_1(\lambda)$ кўпҳад $A(\lambda)$ нинг шундай k тартибли минорики, $\mu(\lambda)$ минордан $A(\lambda)$ нинг i сатри жойлашган қисмини j сатрнинг мос қисми билан алмаштиришдан ҳосил бўлган. Булардан кўринадики, $\tilde{A}(\lambda)$ матрицанинг барча k тартибли минорлари $\delta_k(\lambda)$ га бўлинади. Демак $\tilde{\delta}_k(\lambda)$ ҳам $\delta_k(\lambda)$ га бўлинади. Иккинчи томондан, $A(\lambda)$ матрица ҳам $\tilde{A}(\lambda)$ дан элементар алмаштириш орқали олингани учун юқоридаги мулоҳазаларга кўра $\delta_k(\lambda)$ ҳам $\tilde{\delta}_k(\lambda)$ га бўлинади. Натижада $\delta_k(\lambda) = \tilde{\delta}_k(\lambda)$, $(k = \overline{1,n})$ тенгликни оламиз. ■

1-теорема ёрдамида қуйидаги теоремани исботлаймиз.

55-§ да ҳар қандай λ-матрицанинг бирор каноник λ — матрицага эквивалент эканлиги кўрсатилган эди. Энди бундай каноник λ-матрицанинг ягоналигини исботлаймиз.

2-теорема. ***Ҳар қандай λ-матрица ягона каноник λ-матрицага эквивалент.***

Исбот. Берилган $A(\lambda)$ матрица ушбу

$$\tilde{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(\lambda) & & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & & \varepsilon_n(\lambda) \end{pmatrix}$$

каноник λ-матрицага эквивалент бўлсин. У ҳолда 1-теоремага асосан ҳар қандай $k = \overline{1,n}$ учун $\delta_k(\lambda) = \tilde{\delta}_k(\lambda)$. $\tilde{A}(\lambda)$

каноник матрицанинг $\varepsilon_1(\lambda), \ldots, \varepsilon_r(\lambda)$ элементлари нольдан фаркли ва $\varepsilon_k(\lambda) = 0$, $k = \overline{r+1, n}$ бўлсин. У ҳолда $\widetilde{A}(\lambda)$ матрицанинг ҳар қандай $(r + 1)$ ва ундан юқори тартибли минорлари нольга тенг. Демак,

$$\delta_k(\lambda) = \widetilde{\delta}_k(\lambda) = 0, \ (k = \overline{r+1, n}).$$

Каноник λ-матрицанинг таърифига мувофиқ бу матрицанинг ҳар қандай k — $(1 \le k \le r)$ тартибли минори ушбу $\varepsilon_1(\lambda) \cdot \varepsilon_2(\lambda) \ldots \varepsilon_k(\lambda)$ бурчак минорига бўлинади. Бунга асосан $\delta_k(\lambda) = \widetilde{\delta}_k(\lambda) = \varepsilon_1(\lambda) \ldots \varepsilon_k(\lambda)$, $(k = \overline{1, r})$ ва $\delta_k(\lambda) \ne 0$, $(k = \overline{1, r})$.

Энди $\delta_0(\lambda) = 1$ деб олиб, ушбу

$$\varepsilon_k(\lambda) = \frac{\delta_k(\lambda)}{\delta_{k-1}(\lambda)}, \ (k = \overline{1, r})$$

$$\varepsilon_k(\lambda) = 0, \ (k = \overline{r+1, n})$$

муносабатларга эга бўламиз. Бу билан $A(\lambda)$ га эквивалент бўлган $\widetilde{A}(\lambda)$ каноник λ-матрица $A(\lambda)$ матрица билан бир қийматли аниқланади. ■

$A(\lambda)$ га эквивалент бўлган ягона каноник λ-матрицанинг диагоналидаги $\varepsilon_1(\lambda), \ldots, \varepsilon_n(\lambda)$ элементлари $A(\lambda)$ матрицанинг инвариант кўпайтувчилари деб аталади.

Инвариант кўпайтувчиларнинг (1) ҳисоблаш формулалари кўпинча λ — матрицаларнинг эквивалентлик масаласини осон ечишга имкон беради.

Мисол. Ушбу

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & -3 \\ 1 & \lambda - 4 \end{pmatrix}$$

матрицани кўрамиз. Равшанки, унинг биринчи тартибли минорлари ўзаро туб. Ягона иккинчи тартибли минори бор, у $\lambda^2 - 4\lambda + 3$ га тенг. Шунинг учун $\delta_1(\lambda) = 1$, $\delta_2(\lambda) = \lambda^2 -$

$-4\lambda + 3$. $A(\lambda)$ нинг инвариант кўпайтувчилари қуйидагича:

$$\varepsilon_1(\lambda) = \delta_1(\lambda) = 1,\ \varepsilon_2(\lambda) = \frac{\delta_2(\lambda)}{\delta_1(\lambda)} = \lambda^2 - 4\lambda + 3.$$

Демак, $A(\lambda)$ ушбу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - 4\lambda + 3 \end{pmatrix}$$

каноник матрицага эквивалент.

$U(\lambda)$-тартиби n га тенг унимодуляр матрица бўлсин. Унинг детерминанти нольдан фарқли сон бўлгани учун $\varepsilon_1(\lambda) \ldots \varepsilon_n(\lambda) = \delta_n(\lambda) = 1$. Бундан $\varepsilon_1(\lambda) = \ldots = \varepsilon_n(\lambda) = 1$. Шундай қилиб, ҳар қандай унимодуляр $U(\lambda)$ матрица бирлик матрицадан иборат каноник матрицага эквивалент экан.

Таъриф. *1-тур элементар матрица деб, шундай диагонал* λ-матрицага айтамизки, унинг битта диагонал элементи нольдан фарқли сон, қолган диагонал элементлари эса бирга тенг:

$$E_i(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ldots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \gamma & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ldots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

2-тур элементар матрица деб шундай λ-матрицага айтамизки, унинг барча диагонал элементлари бирга тенг, бош диагоналдан ташқари ётувчи элементларнинг бири — кўпҳад, қолганлари — нольга тенг:

$$E_{ij}(\varphi(\lambda)) = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & & \cdot & & \\ & 1 & \cdot & & \\ & & \cdot & \varphi(\lambda) & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & 1 \end{pmatrix} \\ \qquad\quad j \end{array}$$

Равшанки, барча элементар λ-матрицалар унимодулярдир... $A(\lambda)$ матрицанинг i сатрини (устунини) нольдан фарқли γ сонга кўпайтириш $A(\lambda)$ ни чапдан (ўнгдан) $E_i(\gamma)$ элементлар матрицага кўпайтиришга тенг кучли. $A(\lambda)$ матрицанинг j сатрини (устунини) $\varphi(\lambda)$ га кўпайтириб i сатрига қўшиш $A(\lambda)$ ни чапдан (ўнгдан) $E_{ij}(\varphi(\lambda))$га кўпайтиришга тенг кучли. Унимодуляр матрицаларнинг кўпайтмаси яна унимодуляр бўлгани сабабли эквивалент бўлган $A(\lambda)$ ва $B(\lambda)$ λ — матрицалар учун унимодуляр шундай $U(\lambda)$ ва $V(\lambda)$ λ — матрицалар мавжудки, $B(\lambda) = U(\lambda)A(\lambda)V(\lambda)$. Бунга асосан, ҳар қандай унимодуляр матрица бирлик матрицага эквивалент бўлгани сабабли у элементар матрицаларнинг кўпайтмаси шаклида ёзилиши мумкин. Бу мулоҳазалардан қуйидаги теорема келиб чиқади.

3-теорема. ***Иккита $A(\lambda)$ ва $B(\lambda)$-матрицаларнинг эквивалент бўлиши учун $B(\lambda) = U(\lambda)A(\lambda)V(\lambda)$ тенгликни қаноатлантирувчи унимодуляр $U(\lambda)$ ва $V(\lambda)$ матрицаларнинг мавжуд бўлиши зарур ва кифоя.***

57-§. ЎХШАШЛИК ВА ЭКВИВАЛЕНТЛИК

F майдон устида A квадрат матрица берилган бўлсин.

Таъриф. *$A - \lambda E$ матрицага A матрицанинг характеристик λ-матрицаси деб аталади.*

Теорема. ***F майдон устидаги иккита A ва B матрицаларнинг ўхшаш бўлиши учун уларнинг мос $A - \lambda E$ ва $B -$***

$-\lambda E$ характеристик λ – матрицаларининг эквивалент бўлиши зарур ва кифоя.

Исбот. A ва B лар ўхшаш, яъни $B = C^{-1}AC$ тенгликни қаноатлантирадиган F майдон устидаги махсусмас C матрица мавжуд бўлсин. У ҳолда $B - \lambda E = C^{-1}(A - \lambda E)C$. C ва C^{-1} матрицаларнинг иккаласи ҳам F майдон устида унимодуляр λ — матрицалар бўлгани учун $B - \lambda E \sim A - \lambda E$.

Аксинча $A - \lambda E$ ва $B - \lambda E$ — матрицалар эквивалент бўлсин. У ҳолда шундай $U = U(\lambda)$ ва $V = V(\lambda)$ унимодуляр λ-матрицалар мавжудки, $B - \lambda E = U(A - \lambda E)V$. U ва V ларга матрицали кўпҳад деб қараб ва уларга қолдиқли бўлиш ҳақидаги теоремани татбиқ қилиб, ушбу

$$U = (B - \lambda E)Q_1 + R_1,\ V = Q_2(B - \lambda E) + R_2$$

тенгликларни оламиз, бу ерда $Q_1 = Q_1(\lambda)$, $Q_2 = Q_2(\lambda)$ λ-матрицалардир, R_1 ва R_2 лар эса F майдон устидаги матрицалар. Бу тенгликлардан фойдаланиб, ушбу

$$R_1(A - \lambda E)R_2 = U(A - \lambda E)V - (B - \lambda E)\ Q_1(A - \lambda E)V -$$
$$- U(A - \lambda E)\ Q_2(B - \lambda E) + (B - \lambda E)Q_1(A - \lambda E)Q_2(B - \lambda E)$$

тенгликни оламиз. U ва V тескариси мавжуд бўлган λ — матрицалар бўлгани учун U^{-1} ва V^{-1} лар ҳам λ-матрицалардир. Энди ушбу $(A - \lambda E)V = U^{-1}(B - \lambda E)$ ва $U(A - \lambda E) = (B - \lambda E)\ V^{-1}$ тенгликлардан фойдаланиб,

$$R_1(A - \lambda E)R_2 = (B - \lambda E) - (B - \lambda E)Q_1U^{-1}(B - \lambda E) -$$
$$- (B - \lambda E)V^{-1}Q_2(B - \lambda E) + (B - \lambda E)Q_1(A - \lambda E)Q_2(B -$$
$$- \lambda E) = B - \lambda E - (B - \lambda E)(Q_1U^{-1} + V^{-1}Q_2 -$$
$$- Q_1(A - \lambda E)Q_2)(B - \lambda E)$$

тенгликни оламиз. Агар $Q_1U^{-1} + V^{-1}Q_2 - Q_1(A - \lambda E)Q_2$ матрица нольдан фарқли бўлса, охирги ифода λ га нисбатан даражаси ≥ 2 бўлган матрицали кўпҳад бўларди, ваҳоланки $R_1(A - \lambda E)R_2$ ифоданинг даражаси эса бирдан катта бўлиши мумкин эмас. Бу зиддият кўрсатадики, $R_1(A - \lambda E)R_2 = B - \lambda E$. Бу ердан $B = R_1AR_2$, $R_1 \cdot R_2 = E$ яъни $B = C^{-1}AC$, $C = R_2$. ■

Исботланган теоремадан ва 56-§ даги 2-теоремадан қуйидаги натижани оламиз.

Натижа. *Иккита A ва B матрицалар ўхшаш бўлиши учун $A-\lambda E$ ва $B-\lambda E$ матрицаларнинг мос инвариант кўпайтувчилари (детерминант бўлувчилари) тенг бўлиши зарур ва кифоя.*

58-§. ЭЛЕМЕНТАР БЎЛУВЧИЛАР

C комплекс сонлар майдони устида n – даражали ($n \geq 1$) бирор $f(\lambda)$ кўпҳад берилган ва $\alpha_1, ..., \alpha_s$ — унинг турли илдизлари бўлсин. У ҳолда 30-§ даги 2-теореманинг натижасига кўра уни

$$f(\lambda)=a_0(\lambda-\alpha_1)^{k_1}\dots(\lambda-\alpha_s)^{k_s}$$

кўринишда ифодалаш мумкин, бу ерда $k_1, ..., k_s$ — натурал сонлар. Ушбу $(\lambda-\alpha_1)^{k_1},\dots,(\lambda-\alpha_s)^{k_s}$ кўпҳадлар $f(\lambda)$ кўпҳаднинг *элементар бўлувчилари* дейилади. Бу f кўпҳаднинг элементар бўлувчилари тўпламини $D(f)$ орқали белгилаймиз.

Бирор $A(\lambda)$ матрица берилган ва $\varepsilon_1(\lambda), ..., \varepsilon_n(\lambda)$ — унинг инвариант бўлувчилари бўлсин. $A(\lambda)$ матрицанинг ранги r бўлса, $\varepsilon_i(\lambda) \neq 0$, $(i=\overline{1,r})$, ва $\varepsilon_j(\lambda) = 0$, $j=\overline{r+1,n}$. Нольдан фарқли бўлган $\varepsilon_i(\lambda)$, $(i=\overline{1,r})$ инвариант кўпайтувчилар ичида бирдан фарқли бўлганларининг сони q та бўлсин. У ҳолда $\lambda_i(\lambda) = 1$, $i=\overline{1,r-q}$ ва $\varepsilon_{r-p}+_1(\lambda) \neq 1$, $(p=\overline{1,q})$.

Ушбу $\varepsilon_r(\lambda)$ инвариант кўпайтувчининг турли илдизларини $\lambda_1, ..., \lambda_t$ орқали белгилаймиз. Бу $\varepsilon_r(\lambda)$ инвариант кўпайтувчи бирдан фарқли ҳар бир $\varepsilon_{r-p}+_1(\lambda)$ га бўлингани учун бу $\varepsilon_{r-p}+_1(\lambda)$ кўпҳадларнинг илдизлари $\lambda_1, ..., \lambda_t$ сонларнинг ичида ётади. Бунга кўра ҳар бир бирдан фарқли $\varepsilon_{r-p}+_1(\lambda)$ кўпҳаднинг (1) кўринишдаги ёйилмаси қуйидагича: $\varepsilon_{r-p+1}(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_{1p}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{2p}}\dots(\lambda-\lambda_t)^{k_{tp}}$.

Ушбу

$$\left.\begin{array}{c}(\lambda-\lambda_1)^{k_{11}}\ (\lambda-\lambda_1)^{k_{12}}\ \ldots\ (\lambda-\lambda_1)^{k_{1q}}\\ (\lambda-\lambda_2)^{k_{21}}\ (\lambda-\lambda_2)^{k_{22}}\ \ldots\ (\lambda-\lambda_2)^{k_{2q}}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (\lambda-\lambda_t)^{k_{t1}}\ (\lambda-\lambda_t)^{k_{t2}}\ \ldots\ (\lambda-\lambda_t)^{k_{tq}}\end{array}\right\} \qquad (1)$$

жадвалга $A(\lambda)$ матрицанинг элементар бўлувчилари жадвали деб атаймиз. Бу жадвалнинг p — устуни элементларининг кўпайтмаси $\varepsilon_{r-p+1}(\lambda)$ га тенг. Жадвалдаги баъзи бир $(\lambda-\lambda_s)^{k_{sm}}$ кўпҳадлар бирга тенг, яъни $k_{sm}=0$ бўлиши мумкин. Ҳар бир $\varepsilon_{i+1}(\lambda)$ кўпҳад $\varepsilon_i(\lambda)$ кўпҳадга бўлингани учун

$$\left.\begin{array}{l}k_{11}\ge k_{12}\ge\ldots\ge k_{1q},\\ k_{21}\ge k_{22}\ge\ldots\ge k_{2q},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ k_{t1}\ge k_{t2}\ge\ldots\ge k_{tq}.\end{array}\right\} \qquad (2)$$

$A(\lambda)$ матрицанинг эквивалентлиги масаласини текширишда $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ илдизларнинг қандай тартибда олиниши аҳамиятга эга бўлмаганлиги сабабли сатрларининг ўрни билан фарқ қилувчи турли (1) жадвалларни тенг (бир хил) деб ҳисоблаймиз.

(1) жадвалдаги бирдан фарқли бўлган барча $(\lambda-\lambda_s)^{k_{sm}}$ кўпҳадлар тўпламини $D(A)$ орқали белгилаймиз. Бунда бирор $(\lambda-\lambda_s)^{k_{sm}}$ кўпҳад (1) жадвалда неча марта учраса, бу кўпҳад $D(A)$ тўпламда шунча марта ҳисобланади.

$D(A)$ тўплам $A(\lambda)$ матрицанинг элементар бўлувчилари тўплами деб аталади.

1-теорема. ***$A(\lambda)$ матрицанинг тартиби, ранги ва $D(A)$ элементар бўлувчилари тўплами бу матрицанинг инвариант кўпайтувчиларини тўла аниқлайди.***

Исбот. $A(\lambda)$ матрицанинг тартиби n, ранги r ва $D(A)$ тўплам берилган бўлсин. У ҳолда $A(\lambda)$ матрица $n-r$ таси нольга тенг бўлган инвариант кўпайтувчиларга эга.

Дастлаб $D(A)$ тўплам $A(\lambda)$ матрицанинг (1) элементар бўлувчилари жадвалини тўла аниқлашини кўрсатамиз.

$D(A)$ тўпламда турли $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ илдизларга мос келувчи $(\lambda-\lambda_1)^{k_1}, \ldots, (\lambda-\lambda_t)^{k_t}$ кўринишдаги кўпҳадлар ичида энг юқори даражалиларини биттадан оламиз: $(\lambda-\lambda_1)^{k_{11}}, \ldots, (\lambda-\lambda_t)^{k_{t1}}$. Улар (2) хоссага кўра (1) жадвалнинг биринчи устунини беради. Бу кўпҳадларни $D(A)$ тўпламдан чиқариб юбориб, қолган кўпҳадлар ичидан энг юқори даражалиларини танлаб оламиз. Улар (2) хоссага кўра (1) жадвал иккинчи устунининг бирдан фарқли элементларини беради. Бу мулоҳазани $D(A)$ тўплам элементлари барчасини (1) жадвалга жойлаштиргунча давом эттирамиз. Бу мулоҳаза кўрсатадики, (1) жадвал $D(A)$ тўплам билан тўла аниқланар экан. Хусусан, $D(A)$ тўплам (1) жадвалнинг q устунлари сонини ҳам тўла аниқлайди. Демак, $A(\lambda)$ матрицанинг бирга тенг бўлган инвариант кўпайтувчилари сони $r-q$. ■

Бу теоремадан ва 56-§ даги 2-теоремадан қуйидаги натижани оламиз.

Натижа. *Агар бир хил тартибли, бир хил рангли иккита $A_1(\lambda)$ ва $A_2(\lambda)$ матрицалар учун $D(A_1) = D(A_2)$ бўлса, бу λ-матрицалар эквивалент.*

59-§. ЖОРДАН НОРМАЛ ФОРМАСИ

Таъриф. *Агар F майдон устидаги квадрат матрицанинг диагоналидаги барча элементлар ўзаро тенг, ҳар бир сатрда диагоналдаги элементнинг ўнг томонида турган элемент бирга тенг ва қолган барча элементлар нольга тенг бўлса, бундай матрица жордан катаги деб аталади:*

$$J_k(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Бу ердаги α сон жордан катагининг *хос сони* деб аталади. Хусусан:

$$J_1(\alpha) = (\alpha),\ J_2(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Таъриф. *Агар F майдон устидаги квадрат матрицанинг бош диагонали бирин-кетин жойлашган жордан катаклардан иборат ва бу катаклардан ташқаридаги барча элементлар ноль бўлса, бундай матрица жордан матрицаси деб аталади.*

Шундай қилиб, жордан матрицаси мос $J_{k_1}(\alpha_1)$, $J_{k_2}(\alpha_2)$, ..., $J_{k_s}(\alpha_s)$ жордан катакларнинг кетма-кетлиги билан тўла аниқланади, бу ерда k_1, k_2, ..., k_s ҳамда α_1, α_2, ..., α_s сонлар турли бўлиши шарт эмас. Хусусан, диагонал матрица — биринчи тартибли жордан катакларидан ҳосил қилинган жордан матрицасидир. Умумий ҳолда жордан матрицаси қуйидаги кўринишга эга:

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\alpha_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\alpha_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_{k_s}(\alpha_s) \end{pmatrix} \qquad (1)$$

1-теорема. ***$J_k(\alpha) - \lambda E$ матрица учун $\varepsilon_i(\lambda) = 1$, $(i = \overline{1, k-1})$, $\varepsilon_k(\lambda) = (\lambda - \alpha)^k$, яъни у қуйидаги каноник λ — матрицага эквивалент***

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ 0 & & & 1 & (\lambda - \alpha)^k \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Исбот. Ушбу

$$J_k(\alpha)-\lambda E=\begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha-\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \alpha-\lambda \end{pmatrix} \quad (3)$$

матрицанинг детерминанти $(\alpha-\lambda)^k$ га тенг. Детерминант бўлувчи $\delta_k(\lambda)$ унитар бўлгани учун $\delta_k(\lambda)=(\lambda-\alpha)^k$. Агар (3) нинг биринчи устуни ва охирги сатрини ўчирсак, диагоналида 1 сони, диагоналнинг юқорисида 0 сони бўлган $A_1(\lambda)$ матрицани оламиз. Бунга кўра $\delta_{k-1}(\lambda)=1$. Бу $A_1(\lambda)$ матрицада бир хил номерли сатр ва устунларни кетма-кет ўчириб, ушбу $\delta_{k-2}(\lambda)=\ldots=\delta_1(\lambda)=1$ тенгликларни оламиз. Булардан 56-§ даги (1) формулага кўра $\varepsilon_i(\lambda)=1$ $(i=\overline{1,k-1})$, $\varepsilon_k(\lambda)=(\lambda-\alpha)^k$. Бунга ва 56-§ даги 2-теоремага асосан $J_k(\alpha)-\lambda E$ матрицанинг каноник кўриниши (2) матрица билан берилади. ■

(2) ифодадан ва 58-§ даги таърифдан бевосита қуйидаги натижани оламиз.

Натижа. *$J_k(\alpha)-\lambda E$ матрицанинг ранги унинг тартибига тенг бўлиб, $D(J_k(\alpha)-\lambda E)=\{(\lambda-\alpha)^k\}$, яъни ягона $(\lambda-\alpha)^k$ кўпҳаддан иборат.*

2-теорема. ***Ихтиёрий J жордан матрицаси берилган бўлиб, у (1) кўринишга эга бўлсин. У ҳолда $J-\lambda E$ матрицанинг ранги унинг тартибига тенг бўлиб, $D(J-\lambda E)$ тўплам $D(J_{k_i}(\alpha)-\lambda E_i)$ тўпламларнинг йиғиндисига тенг*** (бунда бирор $(\lambda-\alpha)^k$ кўпҳад $D(J_{k_i}(\alpha_i)-\lambda E_i)$ тўпламларга неча марта кирса, у $D(J-\lambda E)$ тўпламда шунча марта ҳисобланади).

Исбот. $J-\lambda E$ матрица ушбу

$$J-\lambda E=\begin{pmatrix} J_{k_1}(\alpha_1)-\alpha E_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\alpha_2)-\lambda E_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & \dots & \dots & J_{k_s}(\alpha_s)-\lambda E_s \end{pmatrix} \quad (4)$$

кўринишга эга, бу ерда E_i орқали тартиби k_i га тенг бирлик матрица белгиланди.

1-теоремага кўра ҳар бир $J_{k_i}(\alpha_i) - \lambda E_i$ матрицанинг детерминанти $(\alpha_i - \lambda)^{k_i}$ га тенг. Демак, $J - \lambda E$ матрицанинг детерминанти

$$\prod_{i=1}^{s} (\alpha_i - \lambda)^{k_i}$$

кўпайтмага тенг. Бундан $J - \lambda E$ матрицанинг ранги унинг тартибига тенглиги келиб чиқади.

$D(J - \lambda E)$ тўпламга доир тасдиқни исботлаш учун дастлаб қуйидаги икки леммани исботлаймиз.

1-л е м м а. *Фақат диагоналидаги элементларнинг ўрни билан фарқ қиладиган иккита диагонал λ-матрицалар эквивалентидир.*

И с б о т. Диагонал матрицадаги i- ва j- элементларнинг ўрнини алмаштириш учун дастлаб i- ва j- сатрларнинг ўрнини, кейин i- ва j- устунларнинг ўрнини алмаштириш кифоя. $A(\lambda)$ ва $B(\lambda)$ диагонал λ-матрицаларнинг диагонал элементларнинг ихтиёрий ўрин алмаштириши чекли марта сатрлар ва устунларни алмаштириш орқали бажарилиши мумкинлиги сабабли улар эквивалент. Лемма исботланди.

2-л е м м а. *Агар $F[\lambda]$ ҳалқада $\varphi_1(\lambda)$, ..., $\varphi_m(\lambda)$ кўпҳадларнинг ихтиёрий иккитаси ўзаро туб бўлса, у ҳолда қуйидаги диагонал λ-матрицалар эквивалент:*

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi_2(\lambda) & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & & & \varphi_m(\lambda) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & 0 \\ 0 & & \dots & \prod_{i=1}^{m} \varphi_i(\lambda) \end{pmatrix}$$

И с б о т. Агар $m = 2$ бўлса, $\delta_2(\lambda) = \gamma\, \varphi_1(\lambda)\, \varphi_2(\lambda)$, бу ерда $\gamma \neq 0$ ўзгармас сон. $\varphi_1(\lambda)$ ва $\varphi_2(\lambda)$ ўзаро туб бўлгани сабабли $\delta_1(\lambda) = 1$. Булардан $\varepsilon_1(\lambda) = 1$, $\varepsilon_2(\lambda) = \gamma\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)$. Демак

$$\begin{pmatrix}\varphi_1(\lambda) & 0\\ 0 & \varphi_2(\lambda)\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)\end{pmatrix}.$$

Бундан фойдаланиб, умумий $m > 2$ ҳол индукция ёрдамида исботланади. Лемма исботланди.

J матрицанинг $\alpha_1, ..., \alpha_S$ хос сонлари ичида турлиларини танлаб олиб, уларни $\lambda_1, ..., \lambda_t$ орқали белгилаймиз. Равшанки, $t \le S$.

J матрицада $\lambda_i, (i = \overline{1,t})$ хос сонга эга бўлган жордан катаклар q_i та бўлсин. Бу катакларнинг тартибларини ўсмайдиган кўринишда жойлаштирамиз:

$$k_{i1} \ge k_{i2} \ge ... \ge k_{iq} \ge 1 \qquad (5)$$

Агар (4) матрицанинг ихтиёрий $J_{k_i}(\alpha_i) - \lambda E_i$ катаги ётган сатр ва устунлари устида элементар алмаштиришлар бажарилиб, унинг каноник кўринишига ўтилса, бошқа катаклар ўзгаришсиз қолади. Бундан фойдаланиб, (4) матрицадаги ҳар бир $J_{k_i}(\alpha_i) - \lambda E_i$ катакни унга эквивалент бўлган (2) кўринишдаги катак билан алмаштирсак, (4) матрицага эквивалент бўлган қуйидаги $A(\lambda)$ диагонал λ — матрицани оламиз: $A(\lambda)$ матрицанинг диагоналида бирлар ва (4) матрицанинг жордан катакларининг бирдан фарқли инвариант кўпайтувчиларидан иборат ушбу

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda-\lambda_1)^{k_{11}}(\lambda-\lambda_1)^{k_{12}}\dots(\lambda-\lambda_1)^{kq_1}\\ (\lambda-\lambda_2)^{k_{21}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{22}}\dots(\lambda-\lambda_2)^{kq_2}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ (\lambda-\lambda_t)^{k_{t1}}(\lambda-\lambda_t)^{k_{t2}}\dots(\lambda-\lambda_t)^{tq_t}\end{array}\right\} \qquad (6)$$

кўпҳадлар жойлашган. Бу ерда (5) га кўра

$$\left.\begin{array}{l} k_{11} \geq k_{12} \geq \ldots \geq k_{1q_1} \geq 1 \\ k_{21} \geq k_{22} \geq \ldots \geq k_{2q_2} \geq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_{t1} \geq k_{t2} \geq \ldots \geq k_{tq_t} \geq 1 \end{array}\right\} \tag{7}$$

Бирларнинг ва бу кўпҳадларнинг $A(\lambda)$ диагоналида қандай жойлашганлиги 1-леммага кўра катта аҳамиятта эга эмас.

Энди q_1, ..., q_t сонларнинг энг каттасини q билан белгилаймиз. Ҳар бир $p, (p = \overline{1,q})$ учун (6) жадвалнинг p — устунида турган $(\lambda - \lambda_i)^{k_{ip}}$ кўпҳадларнинг кўпайтмасини $\varepsilon_{n-p}+_1+$ (λ) орқали белгилаймиз. Агар бирор q_i учун $q_i > p$ (яъни p — устуннинг i — сатри бўш бўлса), бу сатрга мос кўпайтувчини бирга тенг деб оламиз. (6) жадвалдаги λ_1, ..., λ_t сонлар турли бўлгани учун бу жадвалнинг ҳар бир устунидаги ихтиёрий иккита кўпҳад ўзаро тубдир. Бунга асосан $A(\lambda)$ диагонал матрицага 2-леммани татбиқ қилиб, ундан элементар алмаштиришлар ёрдамида диагоналида бирлар ва $\varepsilon_{n-p+1}(\lambda)$, $(p = \overline{1,q})$ кўпҳадлар ётган $B(\lambda)$ диагонал λ-матрицага ўтиши мумкин:

$$(J - \lambda E) \sim B(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ldots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \varepsilon_{n-q+1}(\lambda) & & & \\ & & & & \ldots & & \\ & & & & & \varepsilon_{n-1}(\lambda) & \\ 0 & & & & & & \varepsilon_n(\lambda) \end{pmatrix} \tag{8}$$

(5) шартга кўра ҳар бир $\varepsilon_{n-p+1}(\lambda)$ кўпҳад $\varepsilon_{n-(p+1)+1}(\lambda)$ кўпҳадга бўлингани учун $B(\lambda)$ матрица каноник кўринишдаги λ — матрица. Демак, $B(\lambda)$ матрица $J - \lambda E$ матрицанинг кано-

ник кўринишидир. Бундан (6) жадвалдаги кўпҳадлар $D(J-\lambda E)$ тўпламни ҳосил қилишини оламиз. Аммо (6) жадвалдаги кўпҳадлар тузилишига кўра $D(J_{k_{ij}}(\alpha_i)-\lambda E_i)$ тўпламларнинг йиғиндисидир. Теорема тўла исботланди.

Исботланган теорема кўрсатадики, ҳар бир $J-\lambda E$ матрица учун шундай $\lambda_1, ..., \lambda_t$ турли сонлар ва (7) шартни қаноатлантирувчи k_{ij} натурал сонлар мавжудки, $D(J-\lambda E)$ тўплам (6) жадвал билан берилган кўпҳадлардан иборат. Аксинча ҳам ўринли.

Натижа. *Агар ихтиёрий $\lambda_1, ..., \lambda_t$ турли сонлар ва (7) шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий k_{ij} натурал сонлар берилса, у ҳолда шундай J жордан матрицаси мавжудки, унинг учун $D(J-\lambda E)$ тўплам (6) жадвал билан берилади.*

Исбот. Бундай J жордан матрицаси қуйидагича топилади. Ҳар бир λ_i ва (7) шартни қаноатлантирувчи k_{ij} сони учун $J_{k_{ij}}(\lambda_i)$ жордан катагини олсак, 1-теореманинг натижасига кўра

$$D(J_{k_{ij}}(\lambda_i)-\lambda E_{k_{ij}})=\left\{(\lambda-\lambda_i)^{k_{ij}}\right\}.$$

Энди J сифатида барча $J_{k_{ij}}(\lambda_i)$ жордан катакларидан иборат жордан матрицаси олинса, 2-теоремага кўра $D(J-\lambda E)$ тўплам (6) жадвалдан иборат бўлади. ■

3-теорема. ***С майдон устидаги ҳар қандай А матрица бирор жордан матрицасига ўхшаш. Бу жордан матрицаси А орқали жордан катакларининг ўрни алмашишигача аниқлик билан топилади*** (бу жордан матрицаларининг ҳар бири A матрицанинг жордан нормал формаси деб аталади).

Исбот. $A \in C^{n\times n}$ берилган бўлсин. Унга ўхшаш бўлган $J \in C^{n\times n}$ жордан матрицасини топамиз. 57-§ га асосан A ва J матрицаларнинг ўхшашлиги уларнинг характеристик $A-\lambda E$ ва $J-\lambda E$ λ — матрицаларнинг эквивалентлигига тенг кучли.

A матрицанинг характеристик $\varphi(\lambda)=det(A-\lambda E)$ кўпҳадини кўрамиз. У n та комплекс илдизга эга (илдизлар карраси билан ҳисобланганда). Ушбу $\lambda_1, ..., \lambda_t$ сонлар $\varphi(\lambda)$ нинг турли илдизлари, $k_1, ..., k_t$ натурал сонлар — бу илдизларнинг карраси бўлсин. У ҳолда $k_1 + \ldots + k_t = n$ ва $\varphi(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \ldots (\lambda - \lambda_t)^{k_t}$. Бундан $A - \lambda E$ матрицанинг ранги унинг тартибига тенглиги келиб чиқади.

Ушбу $\varepsilon_1(\lambda), \ldots, \varepsilon_n(\lambda)$ кўпҳадлар $A - \lambda E$ матрицанинг инвариант кўпайтувчилари бўлсин. У ҳолда

$$\varepsilon_1(\lambda) \ldots \varepsilon_n(\lambda) = \delta_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \ldots (\lambda - \lambda_t)^{k_t}.$$

Бунга кўра $\varepsilon_{n-p+1}(\lambda)$, $(p = \overline{1,q})$ инвариант кўпайтувчилар қуйидаги кўринишга эга:

$$\varepsilon_{n-p+1}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_{1p}} (\lambda - \lambda_2)^{k_{2p}} \ldots (\lambda - \lambda_t)^{k_{tp}}.$$

Агар бу ифодада бирор λ_i илдиз қатнашмаса, мос $(\lambda - \lambda_i)^{k_{ip}}$ кўпайтувчини бирга тенг деб ҳисоблаймиз. Бундай кўпайтувчи учун $k_{ip} = 0$.

Бунга асосан $A - \lambda E$ матрицанинг элементар бўлувчилари (6) кўринишга эга.

2-теореманинг натижасига кўра элементар бўлувчилари (6) жадвал кўринишига эга бўлган J жордан матрицаси мавжуд. Бундан, 58-§ даги 1-теоремадан ва 57-§ даги теоремадан A ва J матрицаларнинг ўхшашлиги келиб чиқади. Теорема исботланди.

Исботланган теоремадан қуйидаги натижа ҳам келиб чиқади. Чекли ўлчамли чизиқли фазода ҳар қандай чизиқли оператор учун шундай базис мавжудки, бу базисда унинг матрицаси жордан матрицасидир (баъзан бу базис берилган чизиқли операторнинг жордан базиси деб аталади).

Исботланган теоремадан чизиқли операторнинг диагоналлашувчилигининг зарурий ва кифоявий шарти осон чиқарилади.

Жордан катаклари билан элементар бўлувчилар орасидаги мосликка мувофиқ чизиқли операторнинг диагоналлашувчилиги унинг барча элементар бўлувчиларининг биринчи тартибли эканлигига тенг кучли. Охирги шарт эса ўз навбатида энг кейинги $\varepsilon_n(\lambda)$ инвариант кўпайтувчининг каррали илдизлари йўқлигига тенг кучли. Шундай қилиб, чизиқли операторнинг диагоналлашувчи бўлиши учун унинг энг кейинги инвариант кўпайтувчисининг каррали илдизлари бўлмаслиги зарур ва кифоя.

F сонли майдон шундай бўлсаки, унда $det(A - \lambda E)$ характеристик кўпҳад чизиқли кўпайтувчиларга ажралса, теореманинг бундай F майдон ва чизиқли A операторлар учун ўринли бўлиши исботдан бевосита кўринади. Аксинча, F майдон устидаги A матрица F майдон устидаги бирор J жордан матрицасига ўхшаш бўлсин. У ҳолда $A - \lambda E$ билан $J - \lambda E$ инвариант кўпайтувчилари бир хил, демак $det(A - \lambda E) = (-1)^n \varepsilon_1(\lambda) \dots \varepsilon_n(\lambda)$ кўпҳад ҳам чизиқли кўпайтувчиларга ажралади. Шундай қилиб, қуйидаги теорема ўринли.

4-теорема. ***F майдон устидаги чекли ўлчамли чизиқли фазода чизиқли операторнинг жордан базиси мавжуд бўлиши учун унинг характеристик кўпҳади F майдон устида чизиқли кўпайтувчиларга ажралиши зарур ва кифоя.***

Мисол кўрамиз. Ушбу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -1 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

матрицага ўхшаш жордан матрицани топамиз. Характеристик

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{pmatrix}$$

кўпҳаднинг инвариант кўпайтувчилари $\delta_1(\lambda) = 1$, $\delta_2(\lambda) = 1$ (ушбу $\begin{vmatrix} 4 & -7-\lambda \\ 6 & -7 \end{vmatrix} = 6\left(\lambda + \frac{7}{3}\right)$, $\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 7-\lambda \end{vmatrix} = -4(\lambda + 12)$ минорлар ўзаро туб),

$$\delta_3(\lambda) = \lambda^3 - \lambda - 5\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)^2.$$

Бундан $\varepsilon_1(\lambda) = \varepsilon_2(\lambda) = 1$, $\varepsilon_3(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 1)^2$.

Элементар бўлувчилар $\lambda - 3$ ва $(\lambda + 1)^2$. Уларга 3 сонидан иборат (3) катаги ва

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

жордан катаклари мос келади.

Демак, A матрица ушбу

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

жордан матрицасига ўхшаш.

Ўн биринчи боб

УНИТАР ВА ЕВКЛИД ФАЗОЛАРИДА ЧИЗИҚЛИ ОПЕРАТОРЛАР

60-§. УНИТАР ФАЗОЛАРДА ЧИЗИҚЛИ ОПЕРАТОРЛАР

L — унитар фазо ва φ, $g : L \to L$ чизиқли операторлар бўлсин.

Таъриф. *Агар ҳар қандай x, $e \in L$ учун*

$$(\varphi(x), y) = (x, g(y)) \qquad (1)$$

тенглик бажарилса, g оператор φ га қўшма деб аталади.

Агар φ оператор учун қўшма оператор мавжуд бўлса, у ягона. Ҳақиқатан, агар g ва h операторлар φ га қўшма бўлса, у ҳолда (1) билан бирга ҳар қандай x, $y \in L$ учун

$$(\varphi(x), y) = (x, h(y))$$

тенглик ҳам ўринли. Бу тенгликлардан ҳар қандай $x, y \in L$ учун $(x, g(y) - h(y)) = 0$ тенгликни оламиз. Хусусан, $x = g(y) - h(y)$ учун $(g(y) - h(y), g(y) - h(y)) = 0$. Бундан ҳар қандай $y \in L$ учун $g(y) - h(y) = 0$ тенгликни, яъни $g = h$ эканлигини оламиз.

Келажакда φ операторга қўшма бўлган оператор мавжуд бўлса, у φ^* кўринишида белгиланади.

Қўшма операторнинг асосий хоссаларини келтирамиз:

1. $(\varphi^*)^* = \varphi$. Дарҳақиқат $(\varphi^*(x), y = \overline{(y, \varphi^*(x))} = \overline{(\varphi(y), x)} = (x, \varphi(y))$.

2. $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$. Дарҳақиқат, $(\varphi(x) + \psi(x), y) = (\varphi(x), y) + (\psi(x), y) = (x, \varphi^*(y)) + (x, \psi^*(y)) = (x, \varphi^*(y) + \psi^*(y))$.

3. Ҳар қандай $\lambda \in C$ учун $(\lambda\varphi)^* = \bar{\lambda}\varphi^*$. Дарҳақиқат

$$(\lambda\,\varphi(x),\ y) = \lambda(\varphi(x),\ y) = \lambda(x,\ \varphi^*(y)) = (x,\ \bar{\lambda}\,\varphi^*(y)).$$

4. $(\varphi\cdot\psi)^* = \psi^*\,\varphi^*$. Дарҳақиқат

$$(\varphi\,\psi(x),\ y) = (\psi(x),\ \varphi^*(y) = (x,\ \psi^*\varphi^*(y)).$$

5. Агар φ чизиқли операторнинг тескариси мавжуд бўлса, у ҳолда φ^* операторнинг ҳам тескариси мавжуд ва $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$. Дарҳақиқат $(\varphi^{-1})^*\cdot\varphi^* = (\varphi\cdot\varphi^{-1})^* = e^* = e$, чунки $(e(x),\ (y) = (x,\ e^*(y)) = (x,\ y)$. Шунга ўхшаш

$$\varphi^*(\varphi^{-1})^* = (\varphi^{-1}\varphi)^* = e^* = e.$$

Теорема. ***Чекли ўлчамли унитар фазода ҳар қандай чизиқли f оператор учун f^* қўшмаси мавжуд.***

Агар $A = (\alpha_{ik})$ ва $B = (\beta_{ik})$ лар f ва f^* операторларнинг ортонормал базисдаги матрицалари бўлса, у ҳолда $\beta_{ik} = \overline{\alpha_{ki}}$ (келажакда бундай хоссага эга бўлган B матрицани A^* билан белгиланади).

Исбот. A-чизиқли f операторнинг $e_1, \ldots, e_n$ ортонормал базисдаги матрицаси бўлсин:

$$f(e_k) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ik} e_i\,.$$

Бу базисда $B = A^*$ матрицага эга бўлган чизиқли операторни g орқали белгилаймиз:

$$g(e_k) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ik} e_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha}_{ki} e_i\,.$$

Бичизиқли $\varphi(x,\ y) = (f(x),\ y)$ ва $\psi(x,\ y) = (x,\ g(y))$ формаларни оламиз. Ҳар бир $k = \overline{1, n}$ ва $l = \overline{1, n}$ учун

$$\varphi(e_k, e_l) = (f(e_k), e_l) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik}(e_i, e_l) = \alpha_{lk}\,,$$

$$\psi(e_k, e_l) = (e_k, g(e_l)) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\beta}_{il}(e_k, e_i) = \overline{\beta}_{kl} = \alpha_{lk}$$

тенгликлардан $\varphi(x, y) = \psi(x, y)$, яъни барча $x, y \in L$ учун $(f(x), y) = (x, g(y))$ тенгликни оламиз. Демак, $g = f^*$. ■

61-§. НОРМАЛ ОПЕРАТОРЛАР

Чизиқли $\varphi : L \to L$ оператор учун $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$ бўлса, у нормал деб аталади. Бу ҳолда φ ва φ^* операторлар L да умумий хос e векторга эга. Мос хос сонлар ўзаро комплекс қўшма сонлар. Ҳақиқатан, $\varphi(e) = \lambda e$, $\varphi^*(e) = \mu e$ бўлса, у ҳолда $\mu(e, e) = (\mu e, e) = (\varphi^*(e), e) = (e, \varphi(e)) = (e, \lambda e) = \overline{\lambda}(e, e)$, бундан $\mu = \overline{\lambda}$.

Теорема. ***Чекли ўлчамли унитар L фазода чизиқли f оператор учун хос векторлардан иборат ортонормал базис мавжуд бўлиши учун унинг нормал бўлиши зарур ва кифоя.***

Исбот. Чизиқли f оператор учун $e_1, \ldots, e_n$ — унинг хос векторларидан иборат ортонормал базис ва $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — уларга мос хос сонлар бўлсин. Бу базисда f ушбу

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ldots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

матрицага, f^* эса ушбу

$$A^* = \begin{pmatrix} \overline{\lambda}_1 & & & 0 \\ & \overline{\lambda}_2 & & \\ & & \ldots & \\ 0 & & & \overline{\lambda}_n \end{pmatrix}$$

матрицага эга. Диагонал A ва A^* матрицалар ўрин алмашиш хоссасига эга бўлгани сабабли $f \cdot f^* = f^*f$, яъни f нормал.

Тескари тасдиқни $n = \dim L$ бўйича индукция ишлатиб исботлаймиз. Агар $n = 1$ бўлса, тасдиқнинг тўғрилиги равшан. Энди $n > 1$, e_n — чизиқли f ва f^* операторларнинг L даги умумий хос вектори, $|e_n| = 1$ ва $L^1 = \{x \in L \,/\, (x, e_n) = 0\}$ бўлсин. У ҳолда $\dim L^1 = n - 1$ бўлиб, L^1 фазо f ва f^* га нисбатан инвариант (бу $\varphi(x) = (x, e_n)$ ни чизиқли форма деб қараб, 42-§ даги теорема каби исботланади).

Ҳақиқатан, агар $(x, e_n) = 0$ бўлса, у ҳолда

$$(f(x), e_n) = (x, f^*(e_n)) = (x, \overline{\lambda}_n e_n) = \lambda_n (x, e_n) = 0$$

ва

$$(f^*(x), e_n) = (x_1, f(e_n)) = (x, \lambda_n e_n) = \overline{\lambda}_n (x, e_n) = 0.$$

Индукция фаразига мувофиқ L^1 да f операторнинг хос векторларидан тузилган $e_1, \ldots, e_{n-1}$ ортонормал базис мавжуд. У ҳолда $e_1, \ldots, e_n$ тизим L да f операторнинг хос векторларидан тузилган ортонормал базисдир. ■

62-§. ЎЗ-ЎЗИГА ҚЎШМА ОПЕРАТОРЛАР

Чизиқли $f: L \to L$ оператор учун $f^* = f$ бўлса, у ўз-ўзига қўшма деб аталади.

1-теорема. ***Чекли ўлчамли унитар L фазода чизиқли f операторнинг ўз-ўзига қўшма бўлиши учун унинг нормал ва барча хос сонлари ҳақиқий бўлиши зарур ва кифоя.***

Исбот. Чизиқли f оператор ўз-ўзига қўшма бўлсин. У ҳолда $ff^* = f^*f = f^2$, яъни у нормал. Нормаллиги сабабли L да унинг хос векторларидан иборат ортонормал базис бор. Бу базисда f ва f^* операторларнинг матрицалари

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ldots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} \overline{\lambda}_1 & & & 0 \\ & \overline{\lambda}_2 & & \\ & & \ldots & \\ 0 & & & \overline{\lambda}_n \end{pmatrix}$$

кўринишга эга. Ушбу $f = f^*$ муносабатдан $A = A^*$, яъни $\lambda_k = \bar{\lambda}_k$, $(k = \overline{1,n})$ тенглик келиб чиқади. Демак λ_k лар ҳақиқий. Аксинча, f нинг нормаллиги ва барча λ_k ларнинг ҳақиқийлигидан $A = A^*$ ва демак $f = f^*$ келиб чиқади. ■

2-теорема. *Унитар L фазода ҳар қандай чизиқли f оператор $g + ih$ кўринишда ифодаланиши мумкин, бу ерда g, h ўз-ўзига қўшма операторлар.*

Исбот. Ушбу $g = \frac{1}{2}(f + f^*)$, $h = \frac{1}{2i}(f - f^*)$ белгилашлар киритиб, $f = g + ih$, $g^* = g$, $h^* = h$ муносабатларни оламиз. ■

Чизиқли f операторнинг ўз-ўзига қўшмалиги бичизиқли $\varphi(x, y) = (f(x), y)$ форманинг эрмитлигига тенг кучли: агар $f = f^*$ бўлса, у ҳолда $\varphi(y, x) = (f(y), x) = (y, f(x)) = \overline{(f(x), y)} = \overline{(\varphi(x, y))}$, аксинча, $\overline{(\varphi(x, y))} = \varphi(y, x)$ дан $(f(x), y) = \overline{(f(y), x)} = (x, f(y))$ яъни $f^* = f$ келиб чиқади.

Агар чизиқли f оператор учун $e_1, \ldots, e_n$ — унинг хос векторларидан иборат базис бўлса, у ҳолда

$$\varphi(e_i, e_k) = (f(e_i), e_k) = (\lambda_i e_i, e_k) = \lambda_i \delta_{ik} =$$

$$= \begin{cases} \lambda_k, \text{агар } i = k, \\ 0, \ \text{агар } i \neq k. \end{cases}$$

Шундай қилиб, бу базис $\varphi(x, y)$ учун каноник. Иккинчи томондан чекли ўлчамли унитар L фазодаги ҳар қандай бичизиқли $\varphi(x, y)$ форма $(f(x), y)$ кўринишда ифодаланиши мумкин, бу ерда чизиқли f операторнинг матрицаси $\varphi(x, y)$ форманинг матрицасига транспортирланган. Бу мулоҳазалар билан қуйидаги тасдиқ исботланди.

3-теорема. *Чекли ўлчамли унитар L фазода ҳар қандай эрмит бичизиқли форма учун ортонормал каноник базис мавжуд.*

Натижа. *Агар чекли ўлчамли комплекс L фазода иккита эрмит $\varphi(x, y)$ ва $\psi(x, y)$ формалар берилган ва уларнинг бири мусбат бўлса, у ҳолда улар L да умумий каноник базисга эга.*

Исбот. Аниқлик учун $\psi(x, y)$ мусбат бўлсин. Бу ҳолда L да $(x, y) = \psi(x, y)$ тенглик ёрдамида скаляр кўпайтма киритамиз. 3-теоремага асосан L да $\varphi(x, y)$ учун ортонормал каноник базис мавжуд. Бу базис $\psi(x, y)$ учун ҳам каноник, чунки

$$\psi(e_i, e_j) = (e_i, e_j) = \begin{cases} 1, \text{ агар } i = j \text{ бўлса}, \\ 0, \text{ агар } i \neq j \text{ бўлса}. \end{cases}$$

63-§. МУСБАТ ОПЕРАТОРЛАР

Агар чекли ўлчамли унитар L фазодаги чизиқли f оператор учун $f = g \cdot g^*$ тенгликни қаноатлантирувчи махсусмас чизиқли g оператор мавжуд бўлса, f мусбат деб аталади. Равшанки, f ҳам махсусмас ва ҳар қандай $x \neq \bar{0}$ учун $(f(x), x) = (gg^*(x), x) = (g^*(x), g^*(x)) > 0$.

Теорема. ***Чекли ўлчамли унитар L фазода берилган чизиқли f операторнинг мусбат бўлиши учун унинг нормал ва барча хос сонларининг мусбат бўлиши зарур ва кифоя.***

Исбот. Чизиқли f оператор мусбат бўлсин: $f = gg^*$. У ҳолда $f^* = (gg^*) = g^{**} \cdot g^* = gg^* = f$, яъни f ўз-ўзига қўшма, ва демак, нормал. Агар $f(e) = \lambda e$ бўлса, у ҳолда $(f(e), e) = (\lambda e, e) = \lambda(e, e)$. Бундан

$$\lambda = \frac{(f(e), e)}{(e, e)} > 0 .$$

Аксинча f нормал ва барча хос сонлари мусбат бўлсин. У ҳолда бирор ортонормал базисда унинг матрицаси қуйидаги кўринишга эга:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & \dots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = B \cdot B^* = B^2 ,$$

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Шундай қилиб $f = g \cdot g^* = g^2$, бу ерда g-матрицаси B бўлган чизиқли оператор. ■

Исботлаш давомида ҳар қандай мусбат оператор бирор мусбат операторнинг квадратига тнг эканлигини ҳам кўрсатдик.

64-§. УНИТАР ОПЕРАТОРЛАР

Унитар чизиқли фазодаги f чизиқли операторнинг тескариси мавжуд ва $f^1 = f^*$ тенглик ўринли бўлса, у унитар деб аталади.

1-теорема. ***Чекли ўлчамли унитар чизиқли L фазода аниқланган чизиқли f оператор унитар бўлиши учун унинг скаляр кўпайтмани сақлаши, яъни ҳар қандай $x, y \in L$ учун***

$$(f(x), f(y)) = (x, y) \qquad (1)$$

бўлиши зарур ва кифоя.

Исбот. Агар f^{-1} мавжуд ва $f^{-1} = f^*$ бўлса, у ҳолда $(f(x), f(y)) = (x, f^* f(y)) = (x, e(y)) = (x, y)$. Аксинча, f учун (1) муносабат ўринли бўлсин, 60-§ даги теоремага асосан f учун f^* қўшма оператор мавжуд. У ҳолда (1) га кўра ҳар қандай $x, y \in L$ учун

$$(f(x), f(y)) = (x, f^* f(y)) = (x, y).$$

Бундан ҳар қандай $x, y \in L$ учун $(x, f^* f^*(y) - y) = 0$. Бу тенгликдан $f^* f = e$ бирлик оператор эканлигини оламиз. Бу тенгликдан бу операторларнинг матрицаларига ўтсак, $A_{f^*} \cdot A_f = A_e$. Бу тенгликда матрицаларнинг детерминантларига ўтсак, $detA_{f^*} \cdot detA_f = 1$. Бундан $detA_f \neq 0$ эканлигини оламиз, яъни f учун тескари f^{-1} оператор мавжуд. Бунга кўра (1) дан: $(f^{-1}(x), y) = (x, f(y)) = (f^{*}(x), y)$, яъни $f^{-1} = f^{*}$. ■

2-теорема. ***Чекли ўлчамли унитар фазода аниқланган чизиқли f оператор унитар бўлиши учун унинг нормал ва барча хос сонларининг модули бирга тенг бўлиши зарур ва кифоя.***

Исбот. Чизиқли f операторнинг унитар эканлиги $ff^{*} = f^{*}f = e$ тенгликка тенг кучли. Демак у нормал. Шунинг учун бирор ортонормал базисда f ва f^{*} ларнинг матрицалари мос равишда

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad A^{*} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot A^{*} = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix} = E$$

тенгликдан $|\lambda_k| = 1, \ (k = \overline{1,n})$ эканлиги келиб чиқади.

Аксинча, агар $f \cdot f^{*} = f^{*} \cdot f$ ва f нинг барча λ_k хос сонларининг модули бирга тенг бўлса, у ҳолда бирор ортонормал базис учун $AA^{*} = A^{*}A = E$ тенгликни оламиз. Бундан $f \cdot f^{*} = f^{*} \cdot f = e$ яъни $f^{-1} = f^{*}$. ■

Ҳар қандай унитар оператор ҳар қандай ортонормал базисни ортонормал базисга акс эттиради:

$$(f(e_i), f(e_j)) = (e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & \text{агар } i = j \text{ бўлса}, \\ 0, & \text{агар } i \neq j \text{ бўлса}. \end{cases}$$

Агар чекли ўлчамли унитар фазода аниқланган чизиқли f оператор бирор ортонормал базисни ортонормал базисга акс эттирса, у ҳолда f унитар. Ҳақиқатан, агар e_1, e_2,

..., e_n — берилган ортонормал базис ва $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$, $y = \sum_{k=1}^{n} \eta_k e_k$ бўлса, у ҳолда

$$(f(x), f(y)) = \sum_{i,k=1}^{n} \xi_i \bar{\eta}_k (f(e_i), f(e_k)) =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n} \xi_i \bar{\eta}_k (e_i, e_k) = (x, y).$$

Ҳар қандай унитар операторнинг ортонормал базисдаги A матрицаси $A\,A^* = A\,A = E$ тенгликни қаноатлантиради. Охирги тенгликни қаноатлантирувчи матрица *унитар матрица* деб аталади. Бу тенглик унитар A матрицанинг сатр ва устунлари тизимига унитар C^n даги векторлар деб қарасак, улар бу фазода ортонормал тизимни ҳосил қилишини кўрсатади.

65-§. МАХСУСМАС ОПЕРАТОРНИНГ ТРИГОНОМЕТРИК ИФОДАСИ

Теорема. ***Чекли ўлчамли унитар фазодаги ҳар қандай махсусмас f чизиқли оператор учун шундай мусбат g_1, g_2 операторлар ва унитар h_1, h_2 операторлар мавжудки $f = g_1 h_1 = h_2 g_2$.***

Исбот. Махсусмас f оператор учун $t_1 = f \cdot f^*$ мусбат оператор. У ҳолда 63-§ га асосан шундай мусбат g_1 оператор мавжудки $f \cdot f^* = g_1^2$. Ушбу $h_1 = g_1^{-1} f$ операторнинг унитар эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, $h_1^* = f^*(g_1^{-1})^* = f^* g_1^{-1}$. Бунга асосан $h_1 h_1^* = g_1^{-1} \cdot f \cdot f^* g_1^{-1} = g_1^{-1} g_1^2 g_1^{-1} = e$, $h_1^* h_1 = f^* g_1^{-1} g_1^{-1} f = f^* t_1^{-1} f = f^* (f^*)^{-1} f^{-1} f = e$.

Шундай қилиб, $f = g_1 h_1$. Шунга ўхшаш $t_2 = f^* f = g_2^2$ деб олиб, $f = h_2 g_2$ ифода исботланади. ■

Махсусмас оператор учун олинган ифода нольдан фарқли комплекс сонни триганометрик ифодасига яъни мусбат соннинг ва модули бирга тенг бўлган сонларнинг кўпайтмаси шаклида ифодалашга ўхшаш.

66-§. ЕВКЛИД ФАЗОСИДАГИ ЧИЗИҚЛИ ОПЕРАТОРЛАР

Евклид фазосида чизиқли операторлар назарияси унитар фазодаги каби қурилади. Бу назариялар орасидаги асосий фарқ шуки, евклид фазосида баъзи бир чизиқли операторлар хос векторга эга бўлмаслиги мумкин.

Евклид V фазосида чизиқли f ва g операторлар берилган бўлсин. Ҳар қандай $x, y \in V$ учун $(f(x), y) = (x, g(y))$ тенгликни қаноатлантирувчи g оператор f га қўшма деб аталади. Худди унитар фазолардаги каби, агар қўшма оператор мавжуд бўлса, унинг ягоналиги исботланади. Чизиқли f операторга қўшма бўлган операторни f^* орқали белгилаймиз. Қўшма операторнинг евклид фазолардаги қуйида келтириладиган хоссалари худди унитар фазолардаги каби исботланади:

1. $f^{**} = f$.
2. $(f + g)^* = f^* + g^*$.
3. $(\lambda f)^* = \lambda f^*$ $(\lambda \in R)$.
4. $(f \cdot g)^* = g^* f^*$.
5. Агар f нинг тескариси мавжуд бўлса, f^* нинг ҳам тескариси мавжуд ва $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

1-теорема. ***Чекли ўлчамли евклид V фазосида ҳар қандай чизиқли f оператор учун қўшма f^* оператор мавжуд. Агар f операторнинг бирор ортонормал базисдаги матрицаси A бўлса, у ҳолда f^* операторнинг шу базисдаги матрицаси A^T.***

Исбот. Чизиқли f операторнинг $e_1, \ldots, e_n$ ортонормал базисдаги матрицаси $A = (\alpha_{ik})$ бўлсин. Бу базисда матрицаси A^T бўлган операторни g орқали белгилаймиз. У ҳолда

$$f(e_k) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} e_i, \; g(e_k) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} e_i ,$$

$$(k = \overline{1, n}, \; n = \dim V).$$

Бичизиқли $\varphi(x, y) = (f(x), y)$ ва $\psi(x, y) = (x, g(y))$ формаларни олиб, уларнинг берилган базисдаги матрицаларини ҳисоблаймиз:

$$\varphi(e_k, e_l) = (f(e_k), e_l) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik}(e_i, e_l) = \alpha_{lk},$$

$$\psi(e_k, e_l) = (e_k, g(e_l)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{lk}(e_k, e_l) = \alpha_{lk}.$$

Демак, бу формалар берилган базисда бир хил A^T матрицага эга. Бундан ҳар қандай $x, y \in V$ учун $(f(x), y) = (x, g(y))$, яъни $g = f^*$ тенгликни оламиз. ■

Агар евклид V фазосидаги чизиқли f оператор учун $f^* = f$, яъни ҳар қандай $x, y \in V$ учун

$$(f(x), y) = (x, f(y))$$

бўлса, у ўз-ўзига қўшма ёки симметрик деб аталади.

Чекли ўлчамли евклид фазосида f операторнинг симметриклиги ихтиёрий ортонормал базисда бу оператор матрицасининг симметриклигига тенг кучли. Ҳақиқатан, агар f операторнинг $e_1, ..., e_n$ ортонормал базисдаги матрицаси $A = (\alpha_{ik})$ бўлса, у ҳолда бичизиқли $(f(x), y)$ форманинг матрицаси A^T, бичизиқли $(x, f(y))$ форманинг матрицаси эса A (текширинг!). Бу бичизиқли формалар ўзаро тенг бўлгани сабабли $A^T = A$, яъни A — симметрик.

Аксинча, агар бирор ортонормал базисда чизиқли f операторнинг матрицаси симметрик бўлса, у ҳолда f ҳам симметрик, чунки берилган базисда бичизиқли $(f(x), y)$ ва $(x, f(y))$ формалар бир хил матрицага эга.

2-теорема. ***Чекли ўлчамли евклид фазосида чизиқли f операторнинг хос векторлардан иборат ортонормал базисининг мавжуд бўлиши учун унинг симметрик бўлиши зарур ва кифоя.***

Исбот. Агар чизиқли f операторнинг хос векторларидан иборат ортонормал базис мавжуд бўлса, у ҳолда бу базисда f нинг матрицаси диагонал, демак, симметрик. Юқоридаги изоҳга асосан f ҳам симметрик.

Тескари тасдиқни евклид V фазонинг ўлчами бўйича индукция ёрдамида исботлаймиз. Агар $n = 1$ бўлса, тасдиқнинг тўғрилиги равшан. Энди $n > 1$ ва тасдиқ ўлчами $< n$ тенгсизликни қаноатлантирувчи фазолар учун тўғри деб фараз қиламиз. V — ҳақиқий фазо бўлгани учун 53-§ даги 5-теоремага асосан шундай баравар нольга тенг бўлмаган $x, y \in V$ векторлар ва $\lambda, \mu \in R$ сонлар мавжудки, $f(x) = \lambda x - \mu y, f(y) = \mu x + \lambda y$. Бундан $(\lambda x - \mu y, y) = (x, \mu x + \lambda y)$. Бундан $\mu((x, x) + (y, y)) = 0$. Бу ерда $(x, x) + (y, y) > 0$ бўлгани учун $\mu = 0$. Демак $f(x) = \lambda x, f(y) = \lambda y$. Бу x, y векторларнинг нольдан фарқлисини олиб, уни ўз узунлигига бўламиз. Ҳосил бўлган векторни e_1 орқали белгилаймиз.

Чизиқли V фазода e_1 га ортогонал бўлган векторлардан иборат қисмфазони V_1 орқали белгилаймиз, $\dim V_1 = n - 1$ (текширинг!). V_1 фазо f га нисбатан инвариант. Ҳақиқатан, агар $x \in V_1$ бўлса, у ҳолда $(x, e_1) = 0$. Бундан $(f(x), e_1) = (x, f(e_1)) = (x, \lambda e_1)) = \lambda(x, e_1) = 0$ яъни $f(x) \in V_1$.

Индукциянинг фаразига мувофиқ V_1 да f нинг хос векторларидан тузилган $e_2, ..., e_n$ ортонормал базис мавжуд. Бу тизимга e_1 ни ҳам қўшсак, V да f нинг хос векторларидан иборат $e_1, e_2, ..., e_n$ ортонормал базисни ҳосил қиламиз. ■

1-натижа. *Симметрик операторнинг характеристик кўпҳади фақат ҳақиқий илдизларга эга.*

Исбот. Симметрик f операторнинг A матрицаси унинг хос векторларидан иборат ортонормал базисда

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_i \in R, (i = \overline{1, n})$$

базисга эга. Демак,

$$\det (A - \lambda E) = (\lambda_1 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda). \blacksquare$$

2-натижа. *Чекли ўлчамли евклид фазосида ҳар қандай симметрик бичизиқли форма учун ортонормал каноник базис мавжуд.*

Исбот. Чекли ўлчамли евклид V фазосида симметрик бичизиқли $\varphi(x, y)$ форма берилган ва A унинг бирор ортонормал базисдаги матрицаси бўлсин. У ҳолда A-симметрик ва бу матрица аниқлаган f оператор ҳам симметрик бўлиб, $(f(x), y) = (x, f(y)) = \varphi(x, y)$ 2-теоремага асосан f оператор учун унинг хос векторларидан тузилган ортонормал базис мавжуд бўлиб, бу базис $\varphi(x, y)$ учун каноник, чунки ҳар бир $i \neq k$ учун

$$\varphi(e_i, e_k) = (f(e_i), (e_k) = (\lambda_i e_i, e_k) = \lambda_i(e_i, e_k) = 0. \blacksquare$$

Бу натижа ёрдамида қуйидаги тасдиқни исботлаймиз.

3-теорема. ***Чекли ўлчамли ҳақиқий фазода иккита симметрик бичизиқли формалар берилган бўлиб, уларнинг мос квадратик формаларининг бирортаси мусбат бўлса, у ҳолда улар умумий каноник базисга эга.***

Исбот. Чекли ўлчамли ҳақиқий V фазода симметрик бичизиқли $\varphi(x, y)$ ва $\psi(x, y)$ формалар берилган ва $\psi(x, x)$ квадратик форма мусбат бўлсин. У ҳолда Vда $(x, y) = \psi(x, y)$ тенглик билан скаляр кўпайтма киритиб, Vни евклид фазосига айлантирамиз. 2-натижа бўйича $\varphi(x, y)$ форма учун олинган ортонормал каноник базис $\psi(x, y) = (x, y)$ форма учун ҳам каноник, чунки бу базис ортонормал. $\blacksquare$

Агар евклид V фазосидаги чизиқли f операторнинг тескариси мавжуд ва $f^{-1} = f^*$ бўлса, у *ортогонал* деб аталади.

Бу таърифдан ортогонал операторнинг скаляр кўпайтмани ўзгартирмаслиги ва демак, векторларнинг узунлиги ҳамда улар орасидаги бурчакни сақлаши келиб чиқади:

$$(f(x), f(y)) = (x, f^*f(y)) = (x, y).$$

Хусусан, ортогонал оператор ортонормал тизимни ортонормал тизимга акслантиради. Чекли ўлчамли фазоларда тескари тасдиқ ҳам ўринли: агар бирор чизиқли f оператор бирор ортонормал базисни ортонормал базисга акслантирса, у ортогоналдир.

Ҳақиқатан, V евклид фазосида $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормал базис ва

$$\left(f(e_i), f(e_k)\right) = (e_i, e_k) = \begin{cases} 1, \text{ агар } i = k, \\ 0, \text{ агар } i \neq k. \end{cases}$$

бўлсин. У ҳолда Vдаги ҳар қандай $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i e_i$, $y = \sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k e_k$ векторлар учун

$$\left(f(x), f(y)\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i f(e_i), \sum_{k=1}^{n} \eta_k f(e_k)\right) =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n} \xi_i \eta_k \left(f(e_i), f(e_k)\right) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k = (x, y).$$

Бундан $(x, f^*f(y)) = (x, y)$. Бу ерда $x = f^*f(y) - y$ деб олсак, $(x, x) = 0$. Демак $x = 0$, яъни $f^*f(y) = y$ ҳар қандай $y \in V$ учун, яъни $f^* = f^{-1}$.

Агар квадрат А матрица махсусмас ва $A^{-1} = A^T$ бўлса, у ортогонал деб аталади.

Масалан, агар $A = (\alpha_{11})$ биринчи тартибли ортогонал матрица бўлса, у ҳолда $\alpha_{11}^{-1} = \alpha_{11}$, яъни $\alpha_{11} = \pm 1$. Иккинчи тартибли

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

ортогонал матрица учун $\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 = \alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 = \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 = \alpha_{12} + \alpha_{22}^2 = 1, \alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} = \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} = 0$ тенгликлар келиб чиқади. $A A^T = A^T A = E$ тенгликдан $\det A = \pm 1$ эканлиги келиб чиқади. Ушбу $\det A = 1$ тенгликни қаноатлантирувчи ҳар қандай A матрица учун шундай $\varphi \in R$ мавжудки, $\alpha_{11} = \cos\varphi, \alpha_{12} = -\sin\varphi, \alpha_{21} = \sin\varphi, \alpha_{22} = \cos\varphi$, яъни

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

кўринишга эга. Агар $\det A = -1$ бўлса, у ушбу

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

кўринишга эга (буларни исботланг).

Агар ортогонал f операторнинг ортонормал базисдаги матрицаси A бўлса, у ҳолда $f^{-1} = f^*$ тенгликдан $A^{-1} = A^T$ тенглик, яъни A нинг ортогоналлиги келиб чиқади. Аксинча, чизиқли f операторнинг A матрицаси бирор ортонормал базисда ортогонал, яъни $A^{-1} = A^T$ бўлса, у ҳолда $f^{-1} = f^*$. Демак, f ҳам ортогонал.

Евклид фазосидаги чизиқли f оператор учун $f = gg^*$ тенгликни қаноатлантирувчи тескариси мавжуд бўлган g оператор мавжуд бўлса, f оператор мусбат деб аталади. Чекли ўлчамли фазода чизиқли f операторнинг мусбатлиги унинг симметриклигига ва барча хос сонларининг мусбатлигига тенг кучли (исботланг). Худди унитар фазодаги каби чекли ўлчамли евклид фазосидаги ҳар қандай махсусмас чизиқли оператор мусбат ва ортогонал операторларнинг кўпайтмаси шаклида ифодаланиши кўрсатилади.

Ўн иккинчи боб

ҚЎШИМЧАЛАР

67-§. ТЕНЗОРЛАР

Чизиқли фазолар ўрганилганда турли хил объектлар-векторлар, чизиқли ва бичизиқли формалар, чизиқли операторлар билан учращдик. Буларнинг турли бўлишига қарамай, уларнинг бир умумий хислати бор. Уларнинг ҳар бири чизиқли фазодаги берилган базисда маълум бир сонлар (скалярлар) тизими билан аниқланиб, базис ўзгарса, бу сонлар (скалярлар) тизими маълум бир қонуният бўйича иккинчи базис билан аниқланган сонлар (скалярлар) тизимига ўтади. Бу ерда биз бундай хислатга эга бўлган сонлар тизимини умумийроқ кўринишда киритиб ўрганамиз. Биз киритмоқчи бўлган сонлар тизими *тензорлар* деб аталади.

Дастлаб бу тушунчаларни киритиш учун зарур бўлган белгилашларни киритамиз, улар *тензор белгилар* деб аталади.

Бизга келажакда шундай кетма-кетликлар, катталиклар учрайдики, уларга кирувчи ҳадлар бир нечта индексга боғлиқ бўлиб, бу индексларнинг ҳар бири одатда 1 дан n гача ўзгаради. Қулайлик учун бу ҳаднинг баъзи индекслари пастда, баъзилари эса юқорида ёзилади.

Қайси индекснинг қаерда ёзилиши бир базисдан иккинчи базисга ўтилганда ҳадларнинг қандай ўзгаришига боглиқ. Бу қулайликнинг моҳияти кейинроқ билинади.

Масалан, n тартибли квадрат $A = (\alpha_{ik})$ матрицанинг элементларини α_k^i кўринишда ёзиш қулай, бунда сатр номери юқорида, устун номери эса пастда ёзилади.

Иккинчи муҳим белгилаш, келишиш шундан iборатки, агар пастда ҳам, юқорида ҳам учрайдиган бирор индекс бўйича йиғинди олинган бўлса, йиғинди белгиси ташлаб қолдирилади. Одатда бу англашилмовчиликка олиб келмайди.

Масалан, агар чизиқли V фазода $\{e_1, ..., e_n\}$ базис ва ξ_1, ..., ξ_n сонлар x векторнинг бу базисдаги координаталари бўлса, $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ ўрнига $x = \xi^i e_i$ ёзамиз.

Яна бир нечта мисол кўрамиз.

1. V фазода иккита $\{e_1, ..., e_n\}$ ва $\{e'_1, ..., e'_n\}$ базис берилган, (γ^i_k) — биринчи базисдан иккинча базисга ўтиш матрицаси (β^i_k) — унга тескари матрица бўлсин. У ҳолда $e'_i = \gamma_i^k e_k$, $e_i = \beta_i^k e'_k$. Агар $x = \xi^i e_i = \xi'^i e'_i$ бўлса, у ҳолда $\xi^i e_i = \xi'^i \gamma_i^k e_k = \xi'^k \gamma^i_k e_i$. Бундан $\xi^k = \gamma_i^k \xi'^i$ ва $\xi'^k = \beta_i^k \xi^i$. Охирги ифода x векторнинг янги координаталарининг эски координаталари орқали ифодаси.

2. F майдон устидаги чизиқли V фазо, φ — ундаги чизиқли форма, $\{e_1, ..., e_n\}$ ва $\{e'_1, ..., e'_n\}$ базислар, $\varphi(e_i) = \alpha_i$ ва $\varphi(e'_i) = \alpha'_i$ бўлсин. У ҳолда $\alpha'_i = \varphi(\gamma_i^k e_k) = \gamma_i^k \varphi(e_k) = \gamma_i^k \alpha_k$. Бу чизиқли φ форма янги коэффициентларининг эскилари орқали ифодаси.

3. F майдон устидаги чизиқли V фазо, φ — ундаги бичизиқли форма, $\{e_1, ..., e_n\}$ ва $\{e'_1, ..., e'_n\}$ базислар, $\varphi(e_i, e_k) = \alpha_{ik}$, $\varphi(e'_i, e'_k) = \alpha'_{ik}$. У ҳолда $\alpha'_{ik} = \varphi(\gamma_i^r e_r, \gamma_k^s e_s) = \gamma_i^r \gamma_k^s \varphi(e_r, e_s) = \gamma_i^r \gamma_k^s \alpha_{rs}$. Шундай қилиб,

$$\alpha'_{ik} = \gamma_i^r \gamma_k^s \alpha_{rs}$$

тенглик — бичизиқли форма янги матрицасининг эски матрицаси орқали ифодаси.

4. L фазода f — чизиқли оператор, $\{e_1, ..., e_n\}$ ва $\{e'_1, ..., e'_n\}$ базислар, $\varphi(e_i) = \alpha_i^k e_k$, $\varphi(e'_i) = \alpha'^k_i e'_k$ бўлсин. У ҳолда $\alpha'^k_i e'_k = \varphi(e'_i) = \varphi(\gamma_i^k e_k) = \gamma_i^k \varphi(e_k) = \gamma_i^k \alpha_k^r e_r = \gamma_i^k \alpha_k^r \beta_r^s e'_s = \gamma_i^s \beta_r^k \alpha_s^r e'_k$. Бундан

$$\alpha'^k_i = \gamma_i^s \beta_r^k \alpha_s^r.$$

Бу чизиқли оператор янги матрицасининг эски матрицаси орқали ифодаси.

Кетма-кетлик кўринишида ёзилган $p+q$ индексли, улардан p таси пастда ва q таси юқорида бўлган, F майдондан олинган n^{p+q} та

$$\alpha_{i_1 - i_p}^{j_1 - j_q}$$

скалярлардан иборат тизим F майдон устидаги n — ўлчамли чизиқли V фазода (p, q) типдаги координат жадвали деб аталади.

Таъриф. *F майдон устидаги n-ўлчамли чизиқли V фазода (p, q) типдаги тензор деб, V фазодаги барча базислар тўпламини бу фазодаги (p, q) типдаги координат жадваллари тўпламига шундай t акс эттиришига айтамизки, агар $e = \{e_1, ..., e_n\}$ ва $e' = \{e'_1, ..., e'_n\}$ базислар, $e'_i = \gamma_i^k e_k$, $e_i = \beta_i^k e'_k$* (яъни (γ_i^k) биринчи базисдан иккинчи базисга ўтиш матрицаси, (β_i^k) унга тескари матрица) *ва*

$$t(e) = \left(\alpha_{i_1 - i_p}^{j_1 - j_q}\right), \; t(e') = \left(\alpha'^{j_1 - j_q}_{i_1 - i_p}\right)$$

бўлганда ушбу

$$\alpha'^{j_1 - j_q}_{i_1 - i_p} = \gamma_{i_1}^{r_1} \dots \gamma_{i_p}^{r_p} \; \beta_{s_1}^{j_1} \dots \beta_{s_q}^{j_q} \alpha_{r_1 - r_p}^{s_1 - s_q}$$

тенглик ўринли. Типи (p, q) бўлган тензор p марта ковариант ва q марта контравариант деб ҳам гапирилади (ковариант — худди шундай ўзгарувчи, контравариант — тескари ўзгарувчи деган маънони билдиради; бу ерда бу сўзлар шу маънода ишлатилганки, пастки индекслар бўйича ўзгаришни эски базисдан янги базисга ўтиш матрицаси бажаради, юқори индекслар бўйича ўзгаришни эса унга тескари матрица бажаради). Юқоридаги мисоллар кўрсатадики, вектор (0,1) типидаги (контравариант) тензор, чизиқли форма (1,0) типидаги (ковариант) тензор, бичизиқли форма (2,0) типидаги (икки марта ковариант) тензор, чизиқли оператор (1,1) типидаги (бир марта ковариант ва бир марта контравариант) тензор. Кейинроқ ихтиёрий (p, q) типдаги тензорга мисол келтирамиз.

F майдон устидаги чизиқли V фазода аниқланган барча чизиқли $y: V \to F$ формалардан иборат чизиқли фазо V га қўшма фазо деб аталади ва V' орқали белгиланади. Агар $\{e_1, ..., e_n\}$ тизим V даги базис бўлса, у ҳолда

$$f^i(e_k) = \delta^i_k = \begin{cases} 1, \text{ агар } i = k \text{ бўлса,} \\ 0, \text{ агар } i \neq k \text{ бўлса.} \end{cases}$$

(Кронекер белгиси) тенгликлар билан аниқланган чизиқли $f^1, ..., f^n \in V^1$ формалар қўшма V^1 фазодаги базис бўлади. Ҳақиқатан, агар $\lambda_i f^i = \overline{0}'$ бўлса, у ҳолда $\lambda_i f^i(e_k) = 0$. Бундан барча $k = \overline{1,n}$ учун $\lambda_i \delta^i_k = \lambda_k = 0$.

Ҳар қандай $x \in V$ ва $y \in V'$ учун $(x, y) = y(x)$ деб белгилаймиз. Ушбу (x, y) функция $V \times V'$ тўпламда ҳар бир аргументи бўйича чизиқли. Агар барча $x \in V$ лар учун $(x, y) = 0$ бўлса, у ҳолда $y = \overline{0}'$. Шунга ўхшаш, агар барча $y \in V'$ лар учун $(x, y) = 0$ бўлса, у ҳолда $x = 0$ (Акс ҳолда V да $\{e_1, ..., e_n\}$ базисни шундай танлаймизки, $e_1 = x$. У ҳолда $f^1(e_1) = f^1(x) = (x, f^1) = 1$ тенглик бажарилади — зиддият).

Юқорида V' даги $\{e_1, ..., e_n\}$ базис бўйича $(e_i, f^k) = \delta_i^k$ тенгликларни қаноатлантирувчи V' нинг $\{f^1, ..., f^n\}$ базисни қурдик. V' даги бу базис $\{e_1, ..., e_n\}$ базисга *биортогонал* (баъзан, қўшма) деб аталади. Ҳар қандай базис учун унга биортогонал бўлган базис бир қийматли аниқланган. Ҳақиқатан, агар $\{e_1, ..., e_n\}$ базисга биортогонал бўлган яна бир $\{g^1, ..., g^n\}$ базис мавжуд бўлсин: $(e_i, g^k) = \delta_i^k = (e_i, f^k)$. У ҳолда ҳар қандай $x = \xi^i e_i \in V$ вектор учун $(x, g^k - f^k) = \xi^i(e_i, g^k - f^k) = \xi^i((e_i, g^k) - (e_i, f^k)) = 0$. Бундан барча $k = \overline{1,n}$ учун $g^k - f^k = \overline{0}$, яъни $g^k = f^k$.

Теорема. ***Иккита биортогонал e, f ва e', f' базислар берилган бўлсин. У ҳолда f дан f' га ўтиш матрицаси e дан e' га ўтиш матрицасидан транспонирлаш ва тескари матрицага ўтиш орқали ҳосил қилинади.***

Исбот. Агар $f'^k = \lambda^k_s f^s$ бўлса, у ҳолда $\delta_i^k = (e'_i, f'^k) = (\gamma_i^r e_r, \lambda_s^k f^s) = \gamma_i^r \lambda_s^k (e_r, f^s) = \gamma_i^r \lambda_s^k \delta_r^s = \gamma_i^r \lambda_r^k$. Бундан (γ_i^k) ва (λ_i^k) матрицаларнинг бир-бирига тескари эканлиги келиб чиқади. Ушбу (λ_i^k) матрица эса f дан f' га ўтиш матрицасидан транспонирлаш орқали олинган (бу матрицада сатр рақамини юқорида, устун рақамини пастда ёзишга келишилганидан келиб чиқади). ■

68-§. КЎПЧИЗИҚЛИ ФОРМАЛАР

Таъриф. *Агар скаляр функция учун қуйидаги шартлар:*

1) бу скаляр функция $p + q$ та вектор аргументнинг функцияси;

2) буларнинг p таси V да аниқланган, q таси эса V' да аниқланган;

3) бу функция ҳар бир аргументи бўйича чизиқли бўлса, у (p, q) типидаги кўпчизиқли (поличизиқли) функция деб аталади.

Ушбу $\varphi(x_i, y^k) = \varphi(x_1, ..., x_p, y^1, ..., y^q)$ $(x_i \in V, y^k \in V')$ ифода (p, q) типидаги кўпчизиқли функция, $\{e_1, ..., e_n\}$ тизим V даги базис, унга биортогонал бўлган V' даги базис $\{f^1, ..., f^n\}$ бўлсин. Агар $x_i = \xi_i^r e_r$, $y^k = \eta_s^k f^s$ деб олсак, $\varphi(x_1, ..., x_p, y^1, ..., y^q) = \varphi(\xi_1^{r_1} e_{r_1}, ..., \xi_p^{r_p} e_{r_p}, \eta_{s_1}^1 f^{s_1}, ..., \eta_{s_q}^q f^{s_q}) =$
$= \xi_1^{r_1} ... \xi_p^{r_p} \cdot \eta_{s_1}^1 ... \eta_{s_q}^q \cdot \alpha_{r_1 ... r_p}^{s_1 ... s_q}$, бу ерда

$$\alpha_{r_1 ... r_p}^{s_1 ... s_q} = \varphi(e_{r_1}, ... e_{r_p}, f^{s_1}, ... f^{s_q}) \text{ —}$$

скалярлар, улар кўпчизиқли φ форманинг $\{e_1, ..., e_n\}$ базисдаги координаталари деб аталади. Шундай қилиб ҳар бир базисда (p, q) типидаги кўпчизиқли формага худди шу типдаги координат жадвал мос келади. Базис ўзгарганда бу жадвалнинг қандай ўзгаришини кузатамиз. V да бошқа $\{e'_1, ..., e'_n\}$ базисни, V' да эса бунга биортогонал бўлган $\{f'^1, ..., f'^n\}$ базисни оламиз. У ҳолда юқорида кўрсатилганга асосан

$$e'_i = \gamma_i^k e_k, \; f'^k = \beta_l^k f^l.$$

Кўпчизиқли φ форманинг $\{e'_1, ..., e'_n\}$ базисдаги координат жадвали қуйидагича:

$$\alpha'^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} = \varphi(e'_{i_1}, \dots, e'_{i_p}, f'^{j_1}, \dots, f'^{j_q}) =$$

$$\varphi(\gamma^{r_p}_{i_p} e_{r_1}, \dots, \gamma^{r_p}_{i_p} e_{r_p}, \beta^{j_1}_{s_1} f^{s_1}, \dots, \beta^{j_q}_{s_q} f^{s_q}) =$$

$$\gamma^{r_1}_{e_1} \dots \gamma^{r_p}_{i_p} \cdot \beta^{j_q}_{s_1} \cdot \alpha^{s_1 \dots s_q}_{r_1 \dots r_p}$$

Бундан кўринадики, (p, q) типидаги ҳар қандай кўпчизиқли форма p марта новариант ва q марта контравариант бўлган тензорни аниқлайди. Иккинчи томондан ҳар бир тензор ягона кўпчизиқли форма билан аниқланади (бу форманинг ҳар бир базисдаги координаталари тензорнинг бу базисдаги координат жадвали билан аниқланади). Бу билан тензорлар ва кўпчизиқли формалар орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилди.

69-§. ҚИСМГУРУҲЛАР

G груҳнинг H қисм тўплами груҳдаги амалга нисбатан груҳ ҳосил қилса, у G груҳнинг **қисмгуруҳи** деб аталади. Мультипликатив белгиларда бунинг маъноси бундай 1) агар a, $b \in H$ бўлса, у ҳолда $a \cdot b \in H$; 2) шундай $e_1 \in H$ элемент мавжудки, ҳар қандай $a \in H$ элемент учун $ae_1 = a$; 3) ҳар қандай $a \in H$ элемент учун шундай $b \in H$ элемент мавжудки, $a \cdot b = e_1$.

Бундан $e_1 \in H$ элементнинг G груҳнинг бирлик e элементига тенг бўлиши келиб чиқади. Ҳақиқатан, $ae_1 = a$ тенгликдан $a^{-1}ae_1 = a^{-1}a$, яъни $e_1 = e$ келиб чиқади. Шунинг учун $a \cdot b = e_1 = e$ тенгликни қаноатлантирувчи $b \in H$ элемент a^{-1} га тенг, чунки $a^{-1}ab = a^{-1}e = a^{-1}$.

Демак, G груҳнинг H қисмгуруҳи шундай қисмтўпламки, унга G груҳнинг бирлик элементи тегишли, ҳар қандай иккита элементининг кўпайтмаси ўзига тегишли ва ҳар қандай элементнинг тескариси ўзига тегишли.

1-теорема. ***G* груҳда *H* шундай қисмтўпламки, агар *a*, *b* ∈ *H* бўлса, *a* · *b*⁻¹ ∈ *H*, у ҳолда *G* груҳда *H* — қисмгуруҳдир.**

Исбот. Бирор $a \in H$ элемент оламиз. Унинг учун $e = a \cdot a^{-1} \in H$ ва $a^{-1} = e \cdot a^{-1} \in H$. Агар a, $b \in H$ бўлса, исботланганга асосан $b^{-1} \in H$. Демак, $a \cdot b = a(b^{-1})^{-1} \in H$. ■

Шунга ўхшаган мулоҳаза билан, агар G гуруҳда H қисм тўплам учун $a, b \in H$ дан доим $a^{-1}b \in H$ келиб чиқса, H нинг қисм гуруҳ эканлиги исботланади (текширинг!).

Исботланган теорема гуруҳнинг берилган қисмтўплами қисм гуруҳ эканлигини текширишнинг содда усулини беради.

Мисоллар. 1) Симметрик S_n гуруҳда жуфт ўрнига қўйишлардан иборат A_n тўплам қисм гуруҳдир.

2) Барча ҳақиқий элементли махсусмас n — тартибли квадрат матрицалар гуруҳида детерминанти бирга тенг бўлган матрицалардан иборат қисм тўплам қисм гуруҳдир.

3) Аддитив Z гуруҳда берилган бутун манфий бўлмаган m сон учун m га бўлинувчи барча бутун сонлардан иборат mZ тўплам қисм гуруҳдир.

2-теорема. ***Аддитив Z гуруҳнинг ҳар қанай қисм гуруҳи mZ кўринишга эга, бу ерда m — манфий бўлмаган бутун сон.***

Исбот. Z гуруҳнинг бирор H қисм гуруҳи берилган бўлсин. Агар H фақат ноль элементидан иборат бўлса, у ҳолда $H = 0Z$.

Энди $H \neq 0Z$ ҳолни кўрамиз. Бу ҳолда H да ҳам мусбат, ҳам манфий сонлар бор, чунки $a \in H$ билан H қисм гуруҳ бўлгани учун $(-a) \in H$. H даги энг кичик мусбат сонни m орқали белгилаймиз. У ҳолда m га бўлинувчи ҳар қандай сон ҳам H га тегишли бўлгани учун $mZ \subseteq H$. Иккинчи томондан, агар $x \in H$ ва x ни m га бўлишдан чиққан қолдиқ r га тенг бўлса, у ҳолда $r = x - qm \in H$, q — бутун сон, $0 \leq r < m$. Агар $r > 0$ бўлса, у ҳолда H да m дан кичик бўлган мусбат сон бўларди — бу эса m нинг танланишига зид. Шунинг учун $r = 0$ ва демак, $x = qm \in mZ$. Бу ерда x ихтиёрий бўлгани учун $H \subseteq mZ$. Натижада $H = mZ$. ■

G гуруҳнинг ихтиёрий қисм гуруҳлари тўпламининг кесишмаси яна қисм гуруҳ (текширинг!). G гуруҳда ихтиёрий M қисм тўплам берилган бўлсин. У ҳолда M тўпламни ўз ичига олувчи барча қисм гуруҳларнинг кесишмаси H_M қисм гуруҳ бўлиб, у G гуруҳда M тўпламни ўз ичига олувчи қисм гуруҳларнинг "энг кичкинаси". H_M қисм гуруҳ M тўплам ҳосил қилган деб аталади, M тўплам эса H_M қисм гуруҳнинг ҳосил қилувчи **тизими** деб аталади.

3-теорема. ***H_M қисм гуруҳ барча мумкин бўлган ушбу $a_1^{k_1}a_2^{k_2} \ldots a_s^{k_s}$ чекли кўпйтмалардан иборат, бу ерда $a_1, \ldots, a_s \in M$, $k_1, \ldots, k_s \in Z$.***

Исбот. P орқали шундай чекли кўпайтмалар тўпламини белгилаймиз. Агар $a, b \in P$ бўлса, у ҳолда $a = a_1^{k_1} \ldots a_s^{k_s}$, $b = b_1^{l_1} \ldots b_t^{l_t}$, $a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_t \in M$, ва $a \cdot b^{-1} = a_1^{k_1} \ldots a_s^{k_s} \cdot b_t^{-l_t} \ldots b_1^{-l_1} \in P$.

Демак, P тўплам M тўпламни ўз ичига олган қисм гуруҳ. Шунинг учун $H_M \subseteq P$. Иккинчи томондан M ни ўз ичига олган ҳар қандай қисм гуруҳ P га кирувчи барча чекли кўпайтмаларни ҳам ўз ичига олади, яъни $P \subseteq H_M$. Натижида $P = H_m$. ■

70-§. ЦИКЛИК ГУРУҲЛАР

Агар гуруҳ ўзидаги бирор a элементнинг даражаларидан иборат бўлса, бундай гуруҳ **циклик** гуруҳ деб аталади ва (a) орқали белгиланади: $(a) = \{a^n \mid n \in Z\}$. Бу a элемент (a) гуруҳнинг **ҳосил қилувчи** *элементи* деб аталади.

Агар a элемент учун $a^n = e$ (бу ерда e — гуруҳнинг бирлик элементи) тенгликни қаноатлантирувчи натурал n сони мавжуд бўлса, бундай элемент **чекли тартибли** деб аталади. Бу шартни қаноатлантирувчи сонларнинг энг кичиги a элементнинг *тартиби* деб аталади. Агар $a^n = e$ тенгламани қаноатлантирувчи n сони мавжуд бўлмаса, a **чексиз тартибли** деб аталади.

Масалан, нольдан фарқли комплекс сонларнинг мультипликатив гуруҳида бирнинг ихтиёрий даражали илдизлари ва фақат улар чекли тартибли элементлардир.

1-теорема. ***Циклик гуруҳнинг элементлари сони уни ҳосил қилувчи элементнинг тартибига тенг.***

Исбот. Циклик (a) гуруҳ берилган бўлсин. Дастлаб бундаги a элементнинг тартиби чекли, масалан, h бўлган ҳолни кўрамиз. Бу ҳолда $e, a, \ldots, a^{h-1} \in (a)$ элементлар турли ва $(a) = \{e, a, \ldots, a^{h-1}\}$. Ҳақиқатан, агар $a^n = a^m$, $0 \le n < m \le h-1$ бўлса, у ҳолда $a^{m-n} = e$ ва $0 < m - n \le h - 1$. Бу эса a элементи тартибининг таърифига зид. Демак, $e, a, \ldots, a^{h-1}$ элементлар турли.

Ҳар бир $x \in (a)$ элемент $x = a^k$, $k \in Z$ кўринишга эга. Агар k ни h га бўлишдан чиққан қолдиқ r га тенг (яъни $k = qh + r$, q — бутун, $0 \leq r \leq h - 1$) бўлса, у ҳолда $x = a^k = (a^h)^q a^r = a^r$, яъни $x \subseteq \{e, a, ..., a^{h-1}\}$.

Энди a нинг тартиби чексиз бўлган ҳолни кўрамиз. Бу ҳолда ..., a^{-1}, a^{-1}, e, a, a^2, ... элементлар турли, чунки агар $a^n = a^m$ бўлса, у ҳолда $a^{|n-m|} = e$. Бундан $n = m$. Демак (a) — чексиз гуруҳ. ■

Циклик гуруҳ элементлари сонига унинг тартиби деб ҳам юритилади.

Чексиз циклик гуруҳга Z аддитив группаси мисол бўлади. Унда амал аддитив бўлгани учун элементнинг даражалари сўзлари ўрнига элементнинг бир неча марта олиниши сўзлари ишлатилиши керак. Бу гуруҳда 1 (ёки -1) ҳосил қилувчи элемент.

Бирнинг $n =$ даражали илдизлари гуруҳи $n =$ тартибли циклик гуруҳдир. Ундаги бирнинг ҳар қандай ҳосил қилувчи (дастлабки) илдизи бу гуруҳнинг ҳосил қилувчи элементи бўлади.

Энди циклик (a) гуруҳда a элементнинг даражалари қачон тенг бўлишида тўхтаймиз. Агар a элементнинг тартиби чексиз бўлса, у ҳолда $a^n = a^m$ дан $n = m$ тенглик келиб чиқиши равшан. Агар a элементнинг тартиби чекли, масалан, h бўлса, у ҳолда $a^n = a^m$ тенглик ўринли бўлиши учун $n - m$ соннинг h га бўлиниши зарур ва етарли. Бу шартнинг етарлилиги равшан. Зарурлиги: $n - m$ ни h га бўлишдан чиққан қолдиқ r бўлса, у ҳолда $r = n - m - qh$, q — бутун, $0 \leq r < h$, ва $e = a^{n-m} = (a^h)^q \cdot a^r = a^r$, бундан $r = 0$.

2-теорема. ***Бир хил (чекли ёки чексиз) тартибли циклик гуруҳлар изоморф.***

Исбот. Циклик (a) ва (b) гуруҳлар бир хил тартибли бўлсин. Ҳар қандай $n \in Z$ учун $\varphi(a^n) = b^n$ тенглик билан аниқланган $\varphi: (a) \to (b)$ акслантиришнинг изоморфизм эканлигини кўрсатамиз. Агар $x, y \in (a)$ бўлса, у ҳолда $x = a^n$, $y = a^m$ ва $\varphi(xy) = \varphi(a^{n+m}) = b^{n+m} = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$, яъни φ — гомоморфизм. Ушбу $x = a^n$ тенгликда n бир қийматли аниқланмагани учун φ акслантиришнинг бир қийматли акслантириш эканлигини текшириш керак. Юқоридаги изоҳга асосан, агар (a) ва (b) чексиз циклик гуруҳлар бўлса, у ҳолда $a^n = a^m$ дан $n = m$ келиб чиқади, демак $b^n = b^m$. Агар (a) ва (b) лар тартиби h бўлган чекли тартибли циклик гуруҳлар бўлса, у ҳолда $a^n = a^m$ дан $n - m$ нинг h га бўлиниши келиб чиқади, демак, $b^n = b^m$.

Худди шундай мулоҳазаларга кўра, $\psi(b^n) = a^n$ тенглик билан аниқланган (b) гуруҳнинг (a) гуруҳга $\psi : (b) \to (a)$ акслантиришнинг бир қийматли гомоморфизм эканлиги кўрсатилади. ψ акслантириш φ га тескари эканлиги равшан. Бунга асосан φ — изоморфизм. ■

Натижа. *1) Ҳар қандай чексиз циклик гуруҳ бутун сонларнинг Z аддитив гуруҳига изоморф.*

2) Ҳар қандай тартиби n бўлган циклик гуруҳ бирнинг n = даражали комплекс илдизларидан иборат гуруҳга изоморф.

71-§. ИЗОМОРФИЗМ ҲАҚИДА КЭЛИ ТЕОРЕМАСИ

Қуйида келтириладиган теорема ҳар қандай гуруҳни элементар алмаштиришлардан иборат гуруҳ деб тасаввур қилиш мумкинлигини кўрсатади.

Теорема. ***Ҳар қандай G гуруҳ G тўплам алмаштиришлари гуруҳининг бирор қисм гуруҳига изоморфдир.***

Исбот. Ихтиёрий $a \in G$ элементни олиб, барча $x \in G$ учун $f_a(x) = ax$ ифода билан аниқланган $f_a : G \to G$ акслантиришни қараймиз. Ҳар қандай $a, b \in G$ учун $f_{ab} = f_a f_b$, чунки $x \in G$ учун

$$f_{ab}(x) = abx = f_a(bx) = f_a f_b(x).$$

Бунга кўра $f_{aa^{-1}} = f_a \cdot f_{a^{-1}} = f_{a^{-1}a} = f_e$. Бундан барча $x \in G$ учун $f_e(x) = x$, яъни у G тўпламнинг айний акслантириши бўлгани учун $f_{a^{-1}} = f_a^{-1}$. Шундай қилиб, барча f_a акслантиришлар G тўпламнинг алмаштиришлари бўлиб улар F гуруҳни — G тўпламнинг алмаштиришлари гуруҳининг қисм гуруҳини ҳосил қилади. Ҳар бир $a \in G$ учун $\varphi(a) = f_a$ ифода билан аниқланган $\varphi : G \to F$ акслантиришни қараб, унинг изоморфизм эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, $\varphi(G) = F$ ва $\varphi(a) = \varphi(b)$ тенгликдан $f_a = f_b$, $f_a(e) = f_b(e)$, яъни $a = b$ тенглик келиб чиқади. Ундан ташқари

$$\varphi(a\,b) = f_{ab} = f_a \cdot f_b = \varphi(a)\,\varphi(b). \blacksquare$$

Натижа. *Тартиби n бўлган ҳар қандай чекли гуруҳ S_n симметрик гуруҳнинг бирор қисм гуруҳига изоморфдир.*

Изоҳ. Кэли теоремасини исботлашда f_a акслантиришлар ўрнига юқоридагига ўхшаш мулоҳазалар ёрдамида $h_a : G \to G$, $h_a(x) = xa$, $x \in G$, акслантиришларни ишлатиш мумкин эди.

72-§. ЁНДОШ СИНФЛАР

G гуруҳнинг бирор H қисм гуруҳи ва $a \in G$ берилган бўлсин.

Ушбу $aH = \{ax \mid x \in H\}$ тўплам G гуруҳнинг H қисм гуруҳ бўйича a элемент ҳосил қилган *чап ёндош синфи* деб аталади. Шунга ўхшаш, $Ha = \{xa \mid x \in H\}$ тўплам G гуруҳнинг H қисм гуруҳ бўйича a элемент ҳосил қилган *ўнг ёндош синфи* деб аталади. Аддитив гуруҳларда ёндош синфлар **чегирма синфлар** деб аталади. Масалан, сонлар назариясидаги m модуль бўйича чегирма синфлари — бу Z аддитив гуруҳнинг mZ қисм гуруҳ бўйича чегирма синфларидир. Чизиқли алгебрада V вектор фазодаги V_1 қисм фазони силжитишдан ҳосил бўлган гипертекисликлар V аддитив гуруҳнинг V_1 қисм гуруҳ бўйича чегирма синфларидир.

1-теорема. ***G гуруҳнинг H қисм гуруҳ бўйича ҳар бир чап (ўнг) ёндош синфининг қуввати H нинг қуввати билан бир хил. Ундан ташқари барча чап (ўнг) ёндош синфлар G гуруҳнинг бўлинишини ҳосил қилади.***

Исбот. Чап ёндош aH синф H қисм гуруҳнинг ўзаро бир қийматли $f_a : G \to G$, $f_a(x) = ax$, акслантиришдаги аксидир (образидир). Шунга ўхшаш, Ha ўнг ёндош синф H қисм гуруҳнинг ўзаро бир қийматли $h_a : G \to G$, $h_a(x) = xa$ акслантиришдаги образидир. Бу билан теореманинг биринчи тасдиғи исботланди.

Ушбу $a = ae = ea$, $e \in H$ — бирлик элемент, тенгликлардан $a \in aH$ ва $a \in Ha$ муносабат келиб чиқади, яъни G гуруҳнинг ҳар қандай элементи ўзи ҳосил қилган ёндош синфда ётади.

G гуруҳнинг ҳар бир a элементи ягона чап ёндош синфда ётади. Ҳақиқатан, бирор $b \in G$ учун $a \in bH$ бўлсин. У ҳолда шундай $h \in H$ мавжудки, $a = bh$. Бундан ҳар қандай $h_1 \in H$ учун $ah_1 = bhh_1 \in bH$, яъни $aH \subseteq bH$. Иккинчи томондан $a = bh$ тенгликдан $ah^{-1} = b$ тенгликни оламиз, яъни $b \in aH$. Бундан ҳар қандай $h_1 \in H$ учун $bh_1 = ah^{-1} h_1 \in aH$, яъни $bH \subseteq aH$. Шундай қилиб, $bH = aH$, яъни ҳар қандай $a \in G$ элемент ягона ёндош синфга киради. Бундан иккита турли ёндош синфларнинг ўзаро кесишмаслиги келиб чиқади. Бу билан иккинчи тасдиқ ҳам исботланди.

Чекли гуруҳ элементлари сонига унинг *тартиби* деб аталади.

Исботланган теоремадан қуйидаги теорема келиб чиқади.

2-теорема (Лангранжнинг чекли гуруҳлар ҳақидаги теоремаси). ***Чекли гуруҳнинг тартиби унинг ихтиёрий қисм гуруҳининг тартибига бўлинади.***

Исбот. G гуруҳнинг тартиби n, унинг H қисм гуруҳининг тартиби эса d бўлсин. У ҳолда 1-теоремага асосан G гуруҳнинг H қисм гуруҳ бўйича ёндош синфлари G гуруҳнинг бўлинишини ҳосил қилиб, уларнинг ҳар бири d та элементдан иборат. G нинг H бўйича ёндош синфлари сонини m орқали белгиласак, $n = d \cdot m$ бўлади, яъни n сони d га бўлинади.

Натижа. *Чекли гуруҳнинг тартиби ўзидаги ҳар бир элементнинг тартибига бўлинади.*

Исбот. Тартиби d бўлган элемент тартиби d бўлган циклик гуруҳни ҳосил қилгани учун натижанинг исботи 2-теоремадан келиб чиқади.

73-§. НОРМАЛ ҚИСМГУРУҲЛАР, ФАКТОР-ГУРУҲЛАР ВА ГОМОМОРФИЗМЛАР

Агар G гуруҳнинг H қисмгуруҳи ва ҳар қандай $a \in G$ элементи учун $aH = Ha$ бўлса, *H нормал қисм гуруҳ* деб аталади. Нормал қисмгуруҳ учун ҳар бир чап ёндош синф мос ўнг ёндош синф билан устма-уст тушгани учун улар қисқагина *ёндош синфлар* деб аталади.

Равшанки, абель гуруҳининг ҳар қандай қисмгуруҳи нормал. Ихтиёрий гуруҳнинг бирлик гуруҳи ва ўзи (ўзининг қисмгуруҳи деб қаралса) нормал қисмгуруҳлардир, улар гуруҳнинг хосмас нормал қисмгуруҳларидир. Ноабель гуруҳида хос нормал гуруҳга мисол сифатида $n > 2$ да S_n симметрик гуруҳидаги жуфт ўрнига қўйишлардан иборат бўлган A_n қисмгуруҳи олиниши мумкин. Ҳақиқатан, ҳар қандай $a \in S_n$ учун

$$aA_n = A_n a = \begin{cases} A_n, \text{ агар } a \in A_n, \\ S_n \setminus A_n, \text{ агар } a \notin A_n. \end{cases}$$

Кўпинча, H қисмгуруҳ нормаллигининг қуйидаги содда белгиси ишлатилади: H қисм гуруҳнинг нормал бўлиши учун ҳар қандай $a \in G$ учун $aHa^{-1} \subseteq H$ муносабатнинг бажарилиши зарур ва кифоя. Бу шартнинг зарурлиги аён. Кифоялиги эса қуйидагича кўрсатилади: агар ҳар қандай $a \in G$ учун $aHa^{-1} \subseteq H$ бўлса, у ҳолда ҳар қандай $a \in G$ учун $a^{-1}Ha \subseteq H$ муносабат ҳам ўринли; буларга кўра $aH \subseteq Ha$, $Ha \subseteq aH$, яъни ҳар қандай $a \in G$ учун $aH = Ha$.

G гуруҳ ва ундаги H нормал қисмгуруҳ тайин бўлган ҳолда ҳар қандай $a \in G$ учун $\bar{a}$ орқали a ни ўз ичига олувчи G нинг H бўйича ягона ёндош синфини белгилаймиз: $\bar{a} = aH = Ha$. G нинг H бўйича барча ёндош синфларидан иборат тўпламни G/H орқали белгилаймиз. G ва H лар тайин бўлган ҳолда G/H ўрнига $\overline{G}$ белгини ҳам ишлатамиз.

Ҳар қандай $a, b \in G$ элементлар учун $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$ деб ҳисоблаб, $\overline{G}$ тўпламда синфларни кўпайтириш амалини киритамиз. Ҳар бир ёндош синф ўзидаги ихтиёрий элементи орқали ҳосил қилинганлиги туфайли $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ синфларнинг кўпайтмаси бу синфларни ҳосил қилувчи элементларни танлашга боғлиқ эмаслигини кўрсатиш керак. Ҳақиқатан, агар $a_1 \in \bar{a}$, $b_1 \in \bar{b}$ (яъни $\overline{a_1} = \bar{a}$, $\overline{b_1} = \bar{b}$) бўлса, у ҳолда $\overline{a_1 b_1} = \overline{a_1} \cdot \overline{b_1} = \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$.

1-теорема. ***Агар G гуруҳ ва H унинг нормал қисмгуруҳи бўлса, у ҳолда киритилган синфларни кўпайтириш амалига нисбатан G/H тўплам гуруҳни ҳосил қилади.***

Исбот. Ёндош синфларни кўпайтириш ассоциативдир: агар $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in G/H$ бўлса, у ҳолда

$\bar{a}(\bar{b}\,\bar{c}) = \bar{a} \cdot \overline{bc} = \overline{a(bc)} = \overline{(ab)c} = \overline{ab} \cdot \bar{c} = (\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{c}$ Ушбу $\bar{e} = H$ синф синфларнинг кўпайтириш амали учун бирлик вазифасини бажаради, чунки ҳар қандай $\bar{a} \in G/H$ элемент учун $\bar{a}\,\bar{e} = \overline{ae} = \bar{a}$. Ушбу $\overline{a^{-1}}$ синф $\bar{a}$ синфга тескари, чунки $\bar{a} \cdot \overline{a^{-1}} = \overline{aa^{-1}} = \bar{e}$. ■

G/H гуруҳ G нинг H нормал қисмгуруҳ бўйича *фактор гуруҳи* деб аталади.

Масалан, m модуль бўйича чегирма синфлардан ҳосил бўлган Z_m аддитив гуруҳ Z аддитив гуруҳнинг mZ қисм гуруҳ бўйича фактор гуруҳидир: $Z_m = Z/mZ$.

Энди нормал қисм гуруҳлар ва гуруҳларнинг гомоморфизмлари орасидаги боғланишни текширишга ўтамиз.

Агар G — гуруҳ ва H — унинг нормал қисмгуруҳи бўлса, у ҳолда $\varphi : G \to G/H$, $\varphi(a) = \bar{a}$, $a \in G$, акслантириш гомоморфизмидир, чунки $\varphi(a \cdot b) = \overline{ab} = \bar{a} \cdot \bar{b} = \varphi(a)\varphi(b)$. G гуруҳнинг бу кўринишдаги гомоморфизмлари *табиий* деб аталади.

G гуруҳнинг G_1 гуруҳга бирор $\varphi : G \to G_1$ гомоморфизмини кўрамиз. G ва G_1 гуруҳларнинг бирлик элементларини мос равишда e, e_1 орқали белгилаймиз. φ акслантиришдаги e_1 нинг асл образи, яъни $\varphi(x) = \varphi(e) = e_1$ шартни қаноатлантирувчи барча $x \in G$ элементлар тўплами φ гомоморфизмнинг *ядроси* деб аталади. Уни $k(\varphi)$ орқали белгилаймиз. G гуруҳнинг φ гомоморфизмдаги $\varphi(G)$ тасвири 10-§ га кўра G_1 нинг қисмгуруҳидир.

2-теорема. ***G гуруҳнинг φ гомоморфизмдаги $k(\varphi)$ ядроси G гуруҳнинг нормал қисмгуруҳидир. $\varphi(G)$ қисмгуруҳдаги ҳар бир элементнинг асл образи G нинг бу нормал қисмгуруҳ бўйича ёндош синфидир.***

Исбот. Агар $a, b \in k(\varphi)$ бўлса, у ҳолда $\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi(e)$. Бундан $\varphi(a\ b^{-1}) = \varphi(a)\ (\varphi(b))^{-1} = \varphi(e)$. Демак $a \cdot b^{-1} \in k(\varphi)$, яъни $k(\varphi)$ тўплам G нинг қисмгуруҳидир. Агар $a \in G$, $x \in k(\varphi)$ бўлса, у ҳолда $\varphi(x) = \varphi(e)$ ва $\varphi(a\,x\,a^{-1}) = = \varphi(a)\,\varphi(x)\,\varphi(a)^{-1} = \varphi(a)\,\varphi(e)\,\varphi(a)^{-1} = \varphi(e)$. Бундан $a\,x\,a^{-1} \in k(\varphi)$, яъни $k(\varphi)$ — нормал қисмгуруҳ. Ихтиёрий $a^1 \in \varphi(G)$ ни олиб, унинг аслини A орқали белгилаймиз. Бирор $a \in A$ ни оламиз. У ҳолда $A = \{x \in G/ \varphi(x) = \varphi(a)\}$, $A = \bar{a} = ak(\varphi)$ эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан:

$$x \in A \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(a) \Leftrightarrow \varphi(xa^{-1}) = \varphi(e) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^{-1} \in k(\varphi) \Leftrightarrow x \in ak(\varphi) = k(\varphi)a. \blacksquare$$

3-теорема. ***Агар $\varphi : G \to G_1$ — гомоморфизм бўлса, у ҳолда $\varphi(G)$ қисмгуруҳ $G/k(\varphi)$ фактор гуруҳга изоморфдир.***

Исбот. Ҳар бир $a^1 \in \varphi(G)$ элементга унинг G гуруҳдаги асл образини мос қўювчи $\psi : \varphi(G) \to G/k(\varphi)$ акслантиришни қараймиз ва унинг изоморфизм эканлигини кўрсатамиз. Илгариги теореманинг исботида кўрдикки, $x \in a \cdot k(\varphi) = \bar{a}$ муносабат $\varphi(x) = \varphi(a)$ га тенг кучлидир, яъни ҳар бир $\bar{a} \in G/k(\varphi)$ ёндош синф φ гомоморфизмда $a^1 = \varphi(a) \in \varphi(G)$ элементнинг асл образидир. Шунга кўра ψ — сюръекция. Агар a^1, $b^1 \in \varphi(G)$ учун $\psi(a^1) = \psi(b^1)$ бўлса, у ҳолда шундай a, $b \in G$ элементлар мавжудки, $a^1 = \varphi(a)$, $b^1 = \varphi(b)$ ва $ak(\varphi) = bk(\varphi)$, яъни a ва b элементлар $k(\varphi)$ ядронинг битта ёндош синфида ётади. 2-теоремага кўра $\varphi(a) = \varphi(b)$, яъни $a^1 = b^1$. Демак, ψ — инъекция. Энди ихтиёрий a^1, $b^1 \in \varphi(G)$ лар учун шундай a, $b \in G$ мавжудки, $a^1 = \varphi(a)$, $b^1 = \varphi(b)$ ва $a^1 \cdot b^1 = \varphi(a\,b)$, $\psi(a^1 b^1) = \overline{a \cdot b} = \bar{a} \cdot \bar{b} = \psi(a^1)\,\psi(b^1)$. $\blacksquare$

3-теорема гуруҳларнинг гомоморфизмлари ҳақидаги теорема дейилади. Унинг маъноси шундаки, гуруҳнинг сюръектив гомоморфизмлари билан нормал қисмгуруҳлари пайдо қилган табиий гомоморфизмлари орасида ўзаро бир қийматли муносабат бор.

74-§. ҚИСМҲАЛҚАЛАР ВА ҚИСММАЙДОНЛАР

Агар K ҳалқанинг L қисмтўплами K даги қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан ҳалқа ҳосил қилса, у K ҳалқанинг *қисмҳалқаси* дейилади. Агар L қисмҳалқа майдон бўлса, у K ҳалқанинг *қисммайдони* дейилади. Агар ҳалқа аддитив гуруҳининг қисмгуруҳи кўпайтириш амалига нисбатан ёпиқ бўлса, у қисмҳалқадир. Бундан ва қисмгуруҳнинг илгари кўрилган хоссаларидан қуйидаги теорема келиб чиқади.

1-теорема. ***K ҳалқанинг бўш бўлмаган қисмтўплами қисмҳалқа бўлиши учун у K даги айириш ва кўпайтириш амалларига нисбатан ёпиқ бўлиши зарур ва кифоя.***

F майдоннинг нольдан фарқли элементлари мультипликатив гуруҳни ҳосил қилгани учун илгари кўрилган мулоҳазалардан қуйидаги теорема келиб чиқади.

2-теорема. ***F майдоннинг биттадан ортиқ элементга эга бўлган қисмтўплами қисммайдон бўлиши учун у F даги айириш ва бўлиш (нольдан фарқли элементларга) амалларига нисбатан ёпиқ бўлиши зарур ва кифоя.***

Мисоллар. F сонли майдон $F[t]$ ҳалқанинг қисммайдони, $F[t_1]$ ҳалқа эса $F[t_1, t_2]$ ҳалқанинг қисмҳалқасидир; Q майдон R майдоннинг қисммайдонидир.

Агар ҳалқа коммутатив (нольнинг бўлувчиларига эга бўлмаса), у ҳолда унинг ҳар қандай қисмҳалқаси ҳам коммутативдир (нольнинг бўлувчиларига эга эмас). Қисмҳалқанинг ноль элементи доим ҳалқанинг ноль элементи билан устма-уст тушади, чунки қисмҳалқа ҳалқа аддитив гуруҳининг қисмгуруҳидир. Бирлик элементга эга бўлган ҳалқанинг қисмҳалқаси бирлик элементга эга бўлмаслиги мумкин. Масалан, Z ҳалқа ва ундаги $2Z$ қисмҳалқа. Агар K ҳалқанинг қисмҳалқаси бирлик элементга эга бўлса, у элемент ҳалқанинг бирлик элементидан фарқли бўлиши мумкин. Масалан, мос компонентлари бўйича: ($(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$) қўшиш ва кўпайтириш амаллари киритилган C^2 ҳалқада $(1, 1)$ элемент бирлик элементдир, аммо унинг $(a, 0)$, $a \in C$ кўринишдаги элементларидан иборат қисмҳалқасида $(1, 0)$ элемент бирлик элементдир. Иккинчи томондан, агар P майдон ва унинг ихтиёрий қисммайдонининг бирлик элементлари доим устма-уст тушади, чунки F қисммайдоннинг мультипликатив гуруҳи P майдон мультипликатив гуруҳининг қисмгуруҳидир.

Агар майдоннинг хос қисммайдони мавжуд бўлмаса, у *содда* дейилади. Ҳар қандай содда майдон $m \cdot 1$, $m \in Z$, кўринишдаги элементлардан ва бундай элементларнинг нисбатларидан иборат, чунки бундай нисбатлар майдон ҳосил қилади.

F — ноль характеристикали содда майдон бўлсин. У ҳолда $m \cdot 1$, $m \in Z$, элементлар турли $m \in Z$ ларда турли бўлиб, $m = 0$ дагина нольга тенг. Агар a, b, c, d — бутун сонлар бўлса, у ҳолда $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ тенглик $\frac{a \cdot 1}{b \cdot 1} = \frac{c \cdot 1}{d \cdot 1}$ тенгликка тенг кучли. Ушбу $\varphi\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a \cdot 1}{b \cdot 1}$, a, $b \in Z$, $b \neq 0$, муносабат билан аниқлаган $\varphi : Q \to F$ акслантириш бу майдонларнинг изоморфизмидир (текширинг!). Агар F — характеристикаси $p > 0$ бўлган содда майдон бўлса, у ҳолда p — туб сон ва ихтиёрий a, b бутун сонлар учун p модуль бўйича чегирмалар синфларининг ушбу $\bar{a} = \bar{b}$ тенглиги $a \cdot 1 = b \cdot 1$ тенгликка тенг кучли. Ушбу $\psi(\bar{a}) = a \cdot 1$, $a \in Z$, муносабат билан берилган $\psi : Z_p \to F$ акслантириш изоморфизмдир, чунки

$$(\bar{a} + \bar{b}) = \psi(\overline{a + b}) = (a + b)1 = a1 + b1 = \psi(\bar{a}) + \psi(\bar{b}),$$

$$\varphi(\bar{a} \cdot \bar{b}) = \psi(\overline{a \cdot b}) = ab \cdot 1 = a1 \cdot b \cdot 1 = \psi(\bar{a}) \cdot \psi(\bar{b}).$$

Бунда агар $b \in Z$ сон p га бўлинмаса, у ҳолда $b1 \neq 0$, $\frac{a1}{b1} = c1$, бу ерда C шундай бутун сонки $bc = a(\mathrm{mod}\, p)$. Шуларга кўра қуйидаги теорема ўринли.

3-теорема. ***Агар F содда майдоннинг характеристикаси нольга тенг бўлса, у Q майдонга изоморф. Агар характеристикаси p > 0 бўлса, у Z_p майдонга изоморф.***

Ҳар қандай майдон бирор содда майдонни ўз ичига олгани учун (равшанки, берилган майдоннинг барча қисммайдонларининг кесишмаси содда майдондир), 3-теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

Натижа. *Агар майдоннинг характеристикаси нольга тенг бўлса, у Q майдонга изоморф бўлган қисммайдонга эга. Агар характеристикаси $p > 0$ бўлса, у ҳолда у Z_p майдонга изоморф бўлган қисммайдонга эга.*

75-§. ИДЕАЛЛАР ВА ФАКТОР ҲАЛҚАЛАР

K — ҳалқа бўлсин. Агар K ҳалқанинг бўш бўлмаган I қисмтўплами қуйидаги шартларни қаноатлантирса, у K ҳалқанинг *идеали* дейилади: 1) a, $b \in I$ бўлса, у ҳолда $a - b \in I$; 2) $a \in I$ ва $c \in K$ бўлса, у ҳолда $ac \in I$ ва $ca \in I$.

Шундай қилиб, K ҳалқанинг I идеали K ҳалқанинг шундай аддитив гуруҳики, ҳар қандай $c \in K$ учун $c\,I \subseteq I$ ва $I\,c \subseteq I$ муносабатлар бажарилади. Ҳар қандай ҳалқада ноль элементдан иборат бўлган тўплам идеалдир. У *ноль идеал* деб аталади. Ундан ташқари ҳар қандай ҳалқада ҳалқанинг барча элементлари ҳам идеал ҳосил қилади. У *бирлик идеал* дейилади. Ноль идеал ва бирлик идеаллар ҳалқанинг *хосмас идеаллари* дейилади. Бошқа идеаллар — хос идеаллар.

Агар K — коммутатив ҳалқа ва $a \in K$ бўлса, у ҳолда $aK = \{ax/x \in K\}$ тўпламнинг идеал эканлиги бевосита текширилади. Бу идеал a элемент ҳосил қилган *бош идеал* дейилади. Идеалнинг таърифидан a элементни ўз ичига олувчи ҳар қандай I идеал aK бош идеални ҳам ўз ичига олиши келиб чиқади. Ноль элементи ҳосил қилган бош идеал — ноль идеал. Бирлик элементли ҳалқада бирлик элемент ҳосил қилган бош идеал — бирлик идеалдир.

1-теорема. ***Майдонда хос идеаллар мавжуд эмас. Аксинча, хос идеалларга эга бўлмаган ҳар қандай нольдан фарқли бирлик элементли коммутатив ҳалқа майдондир.***

Исбот. K — майдон ва I ундаги ноль идеалдан фарқли идеал бўлсин. У ҳолда $a \in I$, $a \neq 0$ элемент мавжуд. Ҳар қандай $x \in K$ элемент учун $x = a\,a^{-1}x \in I$. Демак, $I = K$. Аксинча, K — хос идеалларга эга бўлмаган нольдан фарқли бирлик элементли коммутатив ҳалқа бўлсин. У ҳолда $a \in K$, $a \neq 0$ элемент мавжуд ва a элементни ўз ичига олувчи aK бош идеал ноль идеалдан фарқли. Демак, $aK = K$. Хусусан $1 \in aK$, яъни шундай $b \in K$ элемент мавжудки, $ab = 1$. Демак, a — тескариланувчи. Олинган $a \neq 0$ элемент ихтиёрий бўлгани учун K — майдон. ■

Идеалларнинг ҳалқадаги вазифаси нормал қисм гуруҳларнинг гуруҳлардаги вазифасига ўхшаш. Ҳар қандай идеал ҳалқа аддитив гуруҳининг нормал қисм гуруҳидир, чунки бу гуруҳ коммутатив. Идеал бўйича чегирмалар синфлари аддитив гуруҳнинг бу нормал қисм гуруҳ бўйича фактор гуруҳини ҳосил қилади. Муҳими шуки, чегирмалар синфлари тўпламида қўшиш амалини киритган усул бўйича **кўпайтма** амалини ҳам киритиш мумкин. Илгари синфларни қўшиш амалини $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$ кўринишда аниқлаган эдик. Энди синфларни кўпайтириш амалини $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab}$ кўринишда киритамиз. Бу ерда $\bar{a}$ илгаригидек a элементни ўз ичига олувчи чегирмалар синфини белгилайди.

Идеал бўйича ҳосил қилинган чегирмалар синфларининг кўпайтириш амали $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ синфлардан танлаб олинган a ва b элементлар орқали таърифланди. Кўпайтма бу элементларнинг мос синфлардан қандай танланишига боғлиқ эмаслигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, $\overline{a_1} = \bar{a}$ ва $\overline{b_1} = \bar{b}$ бўлсин. У ҳолда $a_1 - a \in I$, $b_1 - b \in I$, $a_1 b_1 - ab = (a_1 - - a)b_1 + a(b_1 - b) \in I$. Демак, $\overline{a_1 b_1} = \overline{ab}$.

Кўпайтириш амалининг ассоциативлиги нормал қисм гуруҳ бўйича ёндош синфларнинг кўпайтмасининг ассоциативлигининг исботи каби исботланади.

Ундан ташқари $\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}(\overline{b + c}) = \overline{a(b + c)} = \overline{ab + ac} = \overline{ab} + \overline{ac} = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$ Шунга ўхшаш $(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$.

Юқоридаги мулоҳазалар билан қуйидаги теорема исботланди.

2-теорема. ***Агар I тўплам K ҳалқанинг идеали бўлса, у ҳолда K ҳалқанинг I идеал бўйича K/I чегирмалар синфлари тўплами чегирма синфларини қўшиш ва кўпайтириш амалига нисбатан ҳалқа ҳосил қилади.***

K/I ҳалқа K ҳалқанинг I идеал бўйича *фактор ҳалқаси* дейилади. Муҳим мисол: m модуль бўйича чегирмалар синфларидан иборат Z_m ҳалқа Z ҳалқанинг mZ бош идеал бўйича фактор ҳалқасидир.

76-§. ҲАЛҚАЛАРНИНГ ГОМОМОРФИЗМИ

K — ҳалқа бўлсин. K^1 эса шундай тўплам бўлсинки, унда иккита бинар амал аниқланган бўлсин. K^1 даги амалларни ҳам K даги амаллар каби қўшиш ва кўпайтириш деб атаймиз. Агар $\varphi : K \to K^1$ акслантириш ҳар қандай a, $b \in K$ элементлар учун $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ ва $\varphi(a\,b) = \varphi(a)\,\varphi(b)$ шартларни қаноатлантирса, у *гомоморфизм* дейилади.

Масалан, агар K ҳалқанинг I идеали олинса, у ҳолда φ : $K \to K/I$, $\in (a) = \bar{a}$ акслантириш K ҳалқанинг гомоморфизмидир, чунки ҳар қандай $a, b \in K$ учун $\varphi(a+b) = \overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b} = \varphi(a) + \varphi(b)$, $\varphi(ab) = \overline{ab} = \overline{a}\,\overline{b} = \varphi(a)\varphi(b)$. Бу кўринишдаги гомоморфизмлар табиий дейилади.

Биз гуруҳларнинг гомоморфизмларини қандай ўрганган бўлсак, ҳалқаларнинг гомоморфизмларини шу усулда ўрганамиз. K ҳалқанинг гомоморфизми шу билан бирга унинг аддитив гуруҳининг ҳам гомоморфизми бўлгани учун биз илгари исботланган гуруҳларнинг гомоморфизмлари ҳақидаги теоремалардан фойдаланамиз.

1-теорема. ***Ҳалқанинг гомоморфизмдаги акси ҳалқадир.***

Исбот. K — ҳалқа ва $\varphi : K \to K^1$ — унинг бирор гомоморфизми бўлсин. Илгари исботланганга кўра, $\varphi(K)$ тўплам K^1 даги қўшиш амалига нисбатан гуруҳ ҳосил қилади. Кўпайтма амалининг $\varphi(K)$ да ассоциативлиги гуруҳлар учун қандай исботланса, худди шундай исботланади. Худди шундай $\varphi(K)$ нинг кўпайтма амалига нисбатан ёпиқлиги кўрсатилади. Агар $a^1, b^1, c^1 \in \varphi(K)$, $a^1 = \varphi(a)$, $b^1 = \varphi(b)$, $c^1 = \varphi(c)$, $a, b, c \in K$ бўлса, у ҳолда $a^1(b^1 + c^1) = \varphi(a)(\varphi(b) + \varphi(c)) = \varphi(a)\varphi(b+c) = \varphi(a(b+c)) = \varphi(ab+ac) = \varphi(ab) + \varphi(ac) = \varphi(a)\varphi(b) + \varphi(a)\varphi(c) = a^1b^1 + a^1c^1$. Шунга ўхшаш $(a^1 + b^1)c^1 = a^1c^1 + b^1c^1$. ■

Агар K ҳалқа коммутатив ва φ бу ҳалқанинг гомоморфизми бўлса, у ҳолда $\varphi(K)$ ҳалқанинг ҳам коммутативлиги осон кўрсатилади. Агар K ҳалқа 1 бирлик элементга эга бўлса, у ҳолда $\varphi(1)$ элемент $\varphi(K)$ ҳалқанинг бирлик элементи бўлади. Агар $a \in K$ элемент тескариланувчи бўлса, у ҳолда $\varphi(a)$ элемент $\varphi(K)$ ҳалқада тескариланувчи ва $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$ (текширинг!).

Гуруҳлар гомоморфизмларининг хоссаларидан $\varphi(o)$ элемент $\varphi(K)$ ҳалқанинг ноль элементи ва барча $a \in K$ элементлар учун $\varphi(-a) = -\varphi(a)$ эканлиги келиб чиқади

$\varphi(K)$ ҳалқа ноль элементининг φ гомоморфизмдаги тўла асли (яъни $\varphi(x) = \varphi(o)$ тенгликни қаноатлантирувчи барча $x \in K$ элементлар тўплами) φ гомоморфизмнинг *ядроси* дейилади.

I тўплам K ҳалқанинг φ гомоморфизмдаги ядроси бўлсин. I тўплам шу билан бирга K ҳалқа аддитив гуруҳи гомоморфизмидаги ядроси бўлгани учун I тўплам бу аддитив гуруҳнинг қисм гуруҳидир. Ундан ташқари, агар $a \in I$, $c \in K$ бўлса, у ҳолда $\varphi(ac) = \varphi(a)\varphi(c) = \varphi(o)\varphi(c) = \varphi(o)$, яъни $ac \in I$. Шунга ўхшаш $ca \in I$. Демак, I тўплам K ҳалқада идеалдир. Бу билан қуйидаги теорема исботланди.

2-теорема. ***φ гомоморфизмнинг I ядроси K ҳалқанинг идеалидир. $\varphi(K)$ ҳалқа ҳар бир элементининг тўла асли эса К ҳалқанинг I идеал бўйича чегирмалар синфидан иборат.***

Группаларнинг гомоморфизмлари ҳақида теоремадан ҳалқаларнинг гомоморфизмлари ҳақидаги қуйидаги теорема келиб чиқади.

3-теорема. ***K ҳалқанинг φ гомоморфизми берилган ва I бу гомоморфизмнинг ядроси бўлса, у ҳолда $\varphi(K)$ ҳалқа K/I фактор ҳалқага изоморфдир.***

Исбот. φ шу билан бирга K ҳалқа аддитив гуруҳининг ҳам гомоморфизми бўлгани учун гуруҳларнинг гомоморфизмлари ҳақидаги теоремага асосан $\psi : \varphi(K) \to K/I$ акслантириш $\varphi(K)$ аддитив гуруҳнинг K/I фактор гуруҳга изоморфизмидир. Бунда $\varphi(a) \in \varphi(K)$ элементнинг акси a элементни ўз ичига олувчи I идеал бўйича чегирмалар синфидир. Ундан ташқари, ҳар қандай a^1, $b^1 \in \varphi(K)$ элементлар учун $a^1 = \varphi(a)$, $b^1 = \varphi(b)$, $a, b \in K$ $a^1b^1 = \varphi(a) \cdot \varphi(b) = \varphi(ab)$. Бундан $\varphi(a^1b^1) = \overline{ab} = \overline{a} \cdot \overline{b} = \varphi(a^1) \times \varphi(b^1)$. Демак ψ акслантириш $\varphi(K)$ ҳалқанинг K/I фактор ҳалқага изоморфизмидир. ■

3-теорема K ҳалқанинг гомоморф акслари тўплами бу ҳалқанинг идеаллари бўйича фактор ҳалқаларидан иборат эканини кўрсатади.

Мисол кўрамиз. K ҳалқа сифатида Z бутун сонлар ҳалқасини оламиз. Ҳалқанинг ҳар бир идеали аддитив гуруҳнинг қисм гуруҳи бўлгани учун Z ҳалқанинг барча идеаллари mZ кўринишга эга, бу ерда m — манфий бўлмаган бутун сон. Иккинчи томондан ҳар бир mZ қисм гуруҳ Z ҳалқада m сони ҳосил қилган бош идеал билан устма-уст тушади. Бундан қуйидаги хулосани оламиз. Агар φ акслантириш Z ҳалқанинг гомоморфизми бўлса, у ҳолда $\varphi(Z)$ ё ноль ҳалқа, ё Z га изоморф ёки бирор $m \geq 2$ учун Z_m чекли ҳалқага изоморфдир.

МУНДАРИЖА

Тўққизинчи боб. ЧИЗИҚЛИ ОПЕРАТОРЛАР

Ўнинчи боб. МАТРИЦАЛАРНИНГ ЖОРДАН НОРМАЛ ФОРМАСИ

Ўн биринчи боб. УНИТАР ВА ЕВКЛИД ФАЗОЛАРИДА ЧИЗИҚЛИ ОПЕРАТОРЛАР

Ўн иккинчи боб. ҚЎШИМЧАЛАР

Ҳожиев Ж., Файнлейб А.С.

Ҳ-59 Алгебра ва сонлар назарияси курси: Математика ва механика-математика факультетлари талаблари учун дарслик. — Т.: "Ўзбекистон", 2001. — 304 б.

1. Муаллифдош.

ISBN 5-640-02832-7

$Ҳ\frac{1602040000-73}{M351(04)2001}2001$ ББК 22.132я73

Ҳожиев Жовват, Файнлейб Александр Семёнович

АЛГЕБРА ВА СОНЛАР НАЗАРИЯСИ КУРСИ

Ўзбек тилида

Бадиий муҳаррир *Ҳ. Меҳмонов*
Техник муҳаррир *У. Ким, Т. Харитонова*
Мусаҳҳиҳ *Ш. Орипова*
Компьютерда тайёрловчи *Е. Гильмутдинова*

Теришга берилди 06.04.2001. Босишга рухсат этилди 03.10.2001. Бичими 84×108$^1/_{32}$. "Таймс" гарнитурада офсет босма усулида босилди. Шартли бос.т. 15,96. Нашр т. 15,54. Адади 2000 нусха. Буюртма № 71. Баҳоси шартнома асосида.

"Ўзбекистон" нашриёти, 700129, Тошкент, Навоий кўчаси, 30.
Нашр № 120-2000.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитаси 1-босмахонасида босилди. 700002, Тошкент, Сағбон кўчаси, 1-берк кўча, 2-уй.