51
О 46

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА АСОСЛАРИ

1

«ЎЗБЕКИСТОН»

Т. ЖЎРАЕВ, А. САЪДУЛЛАЕВ, Г. ХУДОЙБЕРГАНОВ,
Х. МАНСУРОВ, А. ВОРИСОВ

51
О-49

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА АСОСЛАРИ

1

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги олий ўқув юртлари талабалари учун дарслик сифатида тавсия этган

Бух. ТИП и ЛП
БИБЛИОТЕКА
№ у 2120

Тошкент
«Ўзбекистон»
1995

Математик анализ бўлими функция лимити, узлуксизлиги, функциянинг ҳосила ва дифференциаллари, ҳосилалар ёрдамида функцияларни текшириш мавзуларини ўз ичига олади.

Мазкур китобни ёзишда муаллифлар олий математиканинг асосий тушунчалар ва тасдиқларини мумкин қадар содда, айни пайтда математик қатъият ва изчиллик билан баён этилишига эътиборни қаратдилар. Бунда уларга кўп йиллар мобайнида олий математиканинг турли соҳалари бўйича ўқиган маърузалари катта ёрдам берди.

Муаллифлар дарслик қўлёзмасини ўқиб, унинг сифатини янада ошириш борасидаги фикр ва мулоҳазалари учун профессорлар Х. Р. Латипов ҳамда Р. Р. Ашуровга ўз миннатдорчиликларини изҳор қиладилар ва китобнинг камчиликларини бартараф этишга оид таклифлари учун китобхонларга аввалдан ташаккур билдирадилар.

ДАСТЛАБКИ МАЪЛУМОТЛАР

Олий математика ўрта мактаб математикасининг узвий давоми бўлиб, уни ўрганишда ўрта мактаб математикаси таянч вазифасини ўтайди. Айни вақтда математиканинг асосий тушунчалари (тенглама, функция ва ҳ. к.) ўрта мактаб доирасидан кенгайтирилиб, математик қатъият ва изчиллик билан баён этилади.

Шу вазиятни эътиборга олиб, мазкур бўлимда ҳақиқий сонлар, функция, тенглама ва тенгсизликлар, шунингдек геометрик шаклларнинг муҳим хоссалари келтирилади.

I-БОБ

ҲАҚИҚИЙ СОНЛАР

1-§. Тўплам. Тўпламлар устида амаллар

1. Тўплам тушунчаси. Тўплам тушунчаси математиканинг бошланғич, айни пайтда муҳим тушунчаларидан бири. Уни мисоллар ёрдамида тушунтириш қийин эмас. Масалан, аудиториядаги талабалар тўплами, шкафдаги китоблар тўплами, бир нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар тўплами, ушбу $x^2-5x+6=0$ квадрат тенгламанинг илдизлари тўплами. Демак, тўплам маълум бир белгиларга эга бўлган нарсаларнинг мажмуасидан ташкил топилар экан. Тўпламни ташкил этган нарсалар унинг элементлари дейилади.

Математикада тўплам бош ҳарфлар билан, унинг элементлари эса кичик ҳарфлар билан белгиланади. Масалан, A, B, C — тўпламлар, a, b, c — тўпламнинг элементлари. Баъзан тўпламлар уларнинг элементларини кўрсатиш билан ҳам ёзилади. Масалан, 2, 4, 6, 8, 10 сонлардан ташкил топган тўплам

$$A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$$

кўринишда ёзилади.

Агар a бирор A тўпламнинг элементи бўлса, $a\in A$ каби ёзилади ва «a элемент A тўпламга тегишли» деб ўқилади. Агар a шу тўпламга тегишли бўлмаса, унда $a\overline{\in A}$ каби ёзилади ва «a элемент A тўпламга тегишли эмас» деб ўқилади. Масалан, юқоридаги A тўпламда $10\in A$, $15\overline{\in A}$.

Агар A тўплам чекли сондаги элементлардан ташкил топган бўлса, *чекли тўплам*, акс ҳолда у *чексиз тўплам* дейилади. Масалан, $A=\{2, 4,$

6, 8, 10} — чекли тўплам, бир нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар тўплами эса чексиз тўплам бўлади. Битта ҳам элементга эга бўлмаган тўплам бўш тўплам дейилади ва у $\varnothing$ каби белгиланади. Масалан, $x^2+x+1=0$ квадрат тенгламанинг ҳақиқий илдизларидан иборат тўплам бўш тўплам бўлади (чунки бу тенглама битта ҳам ҳақиқий илдизга эга эмас).

Иккита E ва F тўпламларни қарайлик. Агар E тўпламнинг ҳар бир элементи F тўпламнинг ҳам элементи бўлса, E тўплам F тўпламнинг *қисми* дейилади ва $E\subset F$ каби белгиланади.

Агар $E\subset F$ ва ўз навбатида $F\subset E$ бўлса, у ҳолда E ва F тўпламлар бир-бирига *тенг тўпламлар* дейилади ва $E=F$ каби ёзилади.

2. Тўпламлар устида амаллар. Иккита E ва F тўпламлар берилган бўлсин.

1-таъриф. *E ва F тўпламларнинг барча элементларидан ташкил топган A тўплам E ва F тўпламлар йиғиндиси (бирлашмаси) дейилади ва*

$$A=E\cup F$$

каби белгиланади.

2-таъриф. *E ва F тўпламларнинг умумий элементларидан ташкил топган B тўплам E ва F тўпламлар кўпайтмаси (кесишмаси) дейилади ва*

$$B=E\cap F$$

каби белгиланади.

3-таъриф. *E тўпламнинг F тўпламга тегишли бўлмаган элементларидан ташкил топган C тўплам F тўпламнинг E тўпламдан айирмаси дейилади ва*

$$C=E\setminus F$$

каби белгиланади.

4-таъриф. *Биринчи элементи E тўпламдан ($a\in E$), иккинчи элементи F тўпламдан ($b\in F$) олиниб ҳосил қилинган барча (a, b) кўринишдаги жуфтликлардан тузилган тўплам E ва F тўпламларнинг тўғри (Декарт) кўпайтмаси дейилади ва*

$$E\times F$$

каби белгиланади. Демак,

$$E\times F=\{(a, b):\quad a\in E,\ b\in F\}.$$

Хусусан, $E=F$ бўлганда $E\times E=E^2$ бўлади.

1-мисол. Ушбу

$$A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\ B=\{2, 4, 6, 8\},\ C=\{1, 3\}$$

тўпламларни қарайлик. Бу тўпламлар учун

$$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\},$$
$$A\cap B=\{2, 4, 6\},$$
$$A\setminus B=\{1, 3, 5\},$$
$$B\setminus A=\{8\},$$
$$A\cup C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$A\cap C=\{1, 3\},$$
$$B\cap C=\varnothing,$$
$$B\times C=\{(2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 3), (6, 1), (6, 3), (8, 1), (8, 3)\}.$$

Юқорида келтирилган таърифлардан

$$E\cup E=E,\ E\cap E=E,\ E\setminus E=\varnothing,$$

шунингдек $E\subset F$ бўлганда

$$E\cup F=F,\ E\cap F=E$$

бўлиши келиб чиқади.

Барча 1, 2, 3, ..., n, ... — натурал сонлардан иборат тўплам *натурал сонлар тўплами* дейилади ва у N ҳарфи билан белгиланади:

$$N=\{1, 2, 3, ..., n, ...\}.$$

Барча ..., —2, —1, 0, 1, 2, ... — бутун сонлардан иборат тўплам *бутун сонлар тўплами* дейилади ва у Z ҳарфи билан белгиланади:

$$Z=\{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}.$$

Равшанки,

$$N\subset Z$$

бўлади.

3. Тўпламларни солиштириш. Ихтиёрий иккита E ва F тўпламлар берилган ҳолда, табиийки, уларнинг қайси бирининг элементи «кўп» деган савол туғилади. Натижада тўпламларни солиштириш (элементлари сони жиҳатидан солиштириш) масаласи юзага келади. Одатда бу масала икки усул билан ҳал қилинади:

1) тўпламларнинг элементларини бевосита санаш билан уларнинг элементлари сони солиштирилади,

2) бирор қоидага кўра бир тўпламнинг элементларига иккинчи тўпламнинг элементларини мос қўйиш йўли билан уларнинг элементлари солиштирилади.

Масалан, $E=\{1, 2, 3\}$, $F=\{1, 4, 9, 16\}$ тўпламларнинг элементлари сонини солиштириб, F тўпламнинг элементлари сони E тўплам элементлари сонидан кўп эканини аниқлаймиз. Ёки, E тўпламнинг ҳар бир элементига F тўпламнинг битта элементини

$$1\to 1,\ 2\to 4,\ 3\to 9$$

тарзда мос қўйиб, F тўпламда E тўплам элементига мос қўйилмай қолган элемент борлигини (у 16) ҳисобга олиб, яна F нинг элементлари сони E нинг элементлари сонидан кўп деган хулосага келамиз. Агар тўпламлар чексиз бўлса, равшанки, уларни 1- усул билан солиштириб бўлмайди. Бундай вазиятда фақат 2- усул билангина иш кўрилади. Масалан, $N=\{1, 2, ..., n, ...\}$ натурал сонлар тўпламининг ҳар бир n элементига $(n=1, 2, ...)$ жуфт сонлар тўплами $N_1=\{2, 4, ..., 2n, ...\}$ нинг $2n$ элементини $(n=1, 2, ...)$ мос қўйиш билан $(n\to 2n)$ солиштириб, уларнинг элементлари сони «тенг» деган хулосага келамиз.

5-таъриф. *Агар E тўпламнинг ҳар бир a элементига F тўпламнинг битта b элементи мос қўйилган бўлиб, бунда*

F тўпламнинг ҳар бир элементи учун E тўпламда унга мос келадиган биттагина элемент бор бўлса, у ҳолда E ва F тўпламлар элементлари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилган дейилади.

2-мисол. Радиуслари 1 ва 3 га тенг бўлган концентрик айланалар берилган бўлсин (1-чизма).

1-чизма

E тўплам радиуси 1 га тенг айлана нуқталаридан, F тўплам эса радиуси 3 га тенг айлана нуқталаридан иборат бўлсин. Бу E ва F тўпламларнинг элементлари орасида ўзаро бир қийматли мосликни қуйидагича ўрнатиш мумкин: айланалар марказидан чиққан ҳар бир нур радиуси 1 га тенг айланани a нуқтада, радиуси 3 га тенг айланани b нуқтада кесади. E тўпламнинг a нуқтасига F тўпламнинг b нуқтасини мос қўямиз ва аксинча. Натижада E ва F тўплам элементлари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилади.

6-таъриф. *Агар E ва F тўплам элементлари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш мумкин бўлса, улар бир-бирига эквивалент тўпламлар деб аталади ва*

$$E \sim F$$

каби белгиланади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$E=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\},\ F=\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5}\}$$

тўпламлар эквивалент тўпламлар бўлади. Бу тўплам элементлари орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд. Уни қуйидагича

$$1 \leftrightarrow 1,\ 2 \leftrightarrow \frac{1}{2},\ 3 \leftrightarrow \frac{1}{3},\ 4 \leftrightarrow \frac{1}{4},\ 5 \leftrightarrow \frac{1}{5}$$

ўрнатиш мумкин. Демак, $E \sim F$.

2. Ушбу

$$E=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\},\quad F=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$$

тўпламлар эквивалент тўпламлар бўлмайди. Чунки бу тўплам элементлари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиб бўлмайди.

3. Ушбу

$$E=N=\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,n,\ \ldots\},\ F=\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots\}$$

тўпламлар эквивалент тўпламлар бўлади. Бу тўплам элементлари орасидаги ўзаро бир қийматли мослик ҳар бир n га $(n \in N)$ $\frac{1}{n}$ ни $\left(\frac{1}{n} \in F\right)$ мос қўйиш билан ўрнатилади. Демак, $E \sim F$.

4. Ушбу

$$E=N=\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots\},\ N_1=\{2,\ 4,\ 6,\ \ldots,\ 2n,\ \ldots\}$$

тўпламлар ўзаро эквивалент бўлади. Бу тўплам элементлари орасида ўзаро бир қийматли мосликни қуйидагича ўрнатиш мумкин: ҳар бир натурал n $(n \in N)$ сонга $2n$ сон $(2n \in N_1)$ мос қўйилади $(n \leftrightarrow 2n)$. Демак, $E=N \sim N_1$.

Равшанки, $N_1 \subset N$. Бу эса тўпламнинг қисми ўзига эквивалент бўлиши мумкин эканлигини кўрсатади. Бундай вазият фақат чексиз тўпламларгагина хосдир.

Юқорида келтирилган таъриф ва мисоллардан икки чекли тўпламнинг ўзаро эквивалент бўлиши учун уларнинг элементлари сони бир-бирига тенг бўлиши зарур ва етарли эканлигини кўрамиз.

Эквивалентлик муносабати қуйидаги хоссаларга эга бўлади:

1°. $E \sim E$ (рефлексивлик хоссаси).

2°. $E \sim F$ бўлса, $F \sim E$ бўлади (симметриклик хоссаси).

3°. $E \sim F$, $F \sim G$ бўлса, $E \sim G$ бўлади (транзитивлик хоссаси).

Тўпламларнинг эквивалентлик тушунчаси тўпламларни синфларга ажратиш имконини беради.

7-таъриф. *Натурал сонлар тўплами N га эквивалент бўлган ҳар қандай тўплам саноқли тўплам дейилади.*

Масалан,

$$N_1 = \{2,\ 4,\ 6,\ \ldots,\ 2n,\ \ldots\},$$
$$N_2 = \{1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ 2n-1,\ \ldots\},$$
$$N_3 = \{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots\}$$

тўпламлар саноқли тўпламлардир, чунки

$$N_1 \sim N \quad (2n \leftrightarrow n,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ ),$$
$$N_2 \sim N \quad (2n-1 \leftrightarrow n,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ ),$$
$$N_3 \sim N \quad \left(\frac{1}{n} \leftrightarrow n,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ \right).$$

4. Математик белгилар. Математикада тез-тез учрайдиган сўз ва сўз бирикмалари ўрнига махсус белгилар ишлатилади. Улардан энг муҳимларини келтирамиз.

1°. «Агар ... бўлса, у ҳолда ... бўлади» ибораси «⇒» белгиси орқали ёзилади.

2°. Икки иборанинг эквивалентлиги ушбу «⇔» белги орқали ёзилади.

3°. «Ҳар қандай», «ихтиёрий», «барчаси учун» сўзлари ўрнига «∀» умумийлик белгиси ишлатилади.

4°. «Мавжудки», «топиладики» сўзлари ўрнига «∃» мавжудлик белгиси ишлатилади.

2-§. Ҳақиқий сонлар

Сон математиканинг асосий тушунчасидир. Бу тушунча ўқувчига мактаб математика курсидан таниш. Аввало натурал ва бутун сонлар, кейинчалик умумий ном билан, ҳақиқий сонлар деб аталувчи рационал ҳамда иррационал сонлар ўрганилган. Бироқ ҳақиқий сонларнинг олий математикада муҳимлигини эътиборга олиб, улар тўғрисидаги маълумотлар олий математика талаби даражасида қатъий баён этилиши лозим.

1. Рационал сонлар. Маълумки, $\frac{p}{q}$ кўринишдаги сон оддий каср дейилади, бунда p — бутун сон ($p \in Z$) касрнинг surати, q — натурал сон ($q \in N$) касрнинг махражи. Хусусан, ҳар қандай натурал ҳамда бутун сон $\frac{p}{q}$ кўринишида ифодаланади (масалан, p бутун сон учун $p = \frac{p}{1}$ бўлади).

Биз $\frac{p}{q}$ касрда p ва q сонларни ўзаро туб сонлар деб қараймиз.

Барча $r = \frac{p}{q}$ кўринишидаги сонлар тўпламини, яъни оддий касрлар тўпламини Q билан белгилаймиз:

$$Q = \left\{r : r = \frac{p}{q},\ p \in Z,\ q \in N\right\}.$$

Равшанки

$$N \subset Q,\ Z \subset Q.$$

Q тўплам қатор хоссаларга эгадир.

1°. Q тўпламдан олинган ихтиёрий икки $\frac{p_1}{q_1}$ ва $\frac{p_2}{q_2}$ элементлар учун

$$\text{а)}\ \frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2},\ \frac{p_1}{q_1} > \frac{p_2}{q_2},\ \frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}$$

муносабатлардан биттаси ва фақат биттаси ўринли,

$$\text{б)}\ \frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}\ \text{ва}\ \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_3}{q_3}$$

тенгсизликлардан

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_3}{q_3}$$

тенгсизликнинг ўринли бўлиши келиб чиқади. Бу ҳол Q тўпламнинг тартибланган тўплам эканини билдиради.

2°. Q тўпламда қўшиш, айириш, кўпайтириш ва бўлиш амаллари ушбу

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2},$$

$$\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 - p_2 q_1}{q_1 q_2},$$

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2},$$

$$\frac{p_1}{q_1} : \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot q_2}{q_1 \cdot p_2}$$

қоида бўйича киритилган бўлиб, бу амаллар қуйидаги хоссаларга эга:

1) $\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_2}{q_2}+\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_2}{q_2}\cdot\frac{p_1}{q_1}$ (коммутативлик хоссаси),

2) $\frac{p_1}{q}+\frac{p_2}{q_2}\Big)+\frac{p_3}{q_3}=\frac{p_1}{q_1}+\left(\frac{p_2}{q_2}+\frac{p_3}{q_3}\right).$

$\left(\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}\right)\cdot\frac{p_3}{q_3}=\frac{p_1}{q_1}\cdot\left(\frac{p_2}{q_2}\cdot\frac{p_3}{q}\right)$ (ассоциативлик хоссаси),

3) $\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right)\cdot\frac{p_3}{q_3}=\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_3}{q_3}+\frac{p_2}{q_2}\cdot\frac{p_3}{q_3}$ (дистрибутивлик хоссаси),

4) $\frac{p}{q}+0=\frac{p}{q}$, $\frac{p}{q}\cdot 0=0$ (нол сонининг хусусияти),

5) $\frac{b}{q}\cdot 1=\frac{p}{q}$ (бир сонининг хусусияти),

6) $\forall\frac{p}{q}\in Q$ учун шундай $-\frac{p}{q}\in Q$ сон мавжудки, $\frac{p}{q}+\left(-\frac{p}{q}\right)=0$ (карама-қарши элементнинг мавжудлиги).

7) $\forall\frac{p}{q}\in Q$ $(p\neq 0)$ учун шундай $\left(\frac{p}{q}\right)^{-1}\in Q$ сон мавжудки, $\frac{p}{q}\times\left(\frac{p}{q}\right)^{-1}=1$ (тескари элементнинг мавжудлиги).

8) $\forall\frac{p_1}{q_1}\in Q$, $\forall\frac{p_2}{q_2}\in Q$, $\forall\frac{p_3}{q_3}\in Q$ сонлар учун

$$\frac{p_1}{q_1}>\frac{p_2}{q_2}\Rightarrow\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_3}{q_3}>\frac{p_2}{q_2}+\frac{p_3}{q_3},$$

9) $\forall\frac{p_1}{q_1}\in Q$, $\forall\frac{p_2}{q_2}\in Q$, $\forall\frac{p_3}{q_3}\in Q$ $\left(\frac{p_3}{q_3}>0\right)$ сонлар учун

$$\frac{p_1}{q_1}>\frac{p_2}{q_2}\Rightarrow\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_3}{q_3}>\frac{p_2}{q_2}\cdot\frac{p_3}{q_3},$$

10) Ихтиёрий икки мусбат $\frac{p_1}{q_1}$ ва $\frac{p_2}{q_2}$ оддий касрлар учун шундай натурал n сон мавжудки,

$$n\cdot\frac{p_1}{q_1}>\frac{p_2}{q_2}$$

бўлади. Бу 10) хосса *Архимед аксиомаси* деб юритилади.

3°. Ихтиёрий иккита $\frac{p_1}{q_1}$ ҳамда $\frac{p_2}{q_2}$ оддий касрлар берилган бўлиб, $\frac{p_1}{q_1}<\frac{p_2}{q_2}$ бўлсин. У ҳолда

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right)$$

оддий каср учун

$$\frac{p_1}{q_1}<\frac{1}{2}\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right)<\frac{p_2}{q_2}$$

бўлади. Бундан $\frac{p_1}{q_1}$ ҳамда $\frac{p_2}{q_2}$ оддий касрлар орасида оддий каср борлиги ва демак, улар орасида исталганча кўп оддий касрлар борлиги келиб чиқади. Бу Q тўпламнинг зичлик хоссасидир.

8-таъриф. *Q тўпламнинг элементлари рационал сонлар, Q эса рационал сонлар тўплами дейилади.*

Демак, $\frac{p}{q}$ кўринишдаги сон ($p\in Z$, $q\in N$) рационал сон бўлади.

2. Ҳақиқий сонлар. Биз юқорида рационал сон $\frac{p}{q}$ кўринишида бўлишини кўрдик. Агар $\frac{p}{q}$ касрнинг махражи $q=10^k$ ($k\in N$) бўлса, уни *ўнли каср* дейилади. Ўнли каср махражсиз қуйидагича ёзилади: касрнинг суратидаги рақамлар ўнгдан чапга қараб каср махражидаги нолларнинг сонича саналади ва вергул қўйилади (агар суратида рақамлар етишмаса, улар ўрнига ноллар ёзилиб, сўнг вергул қўйилади). Масалан, $\frac{171}{10}=17,1$, $\frac{2173}{1000}=2,173$, $\frac{61}{100}=0,61$, $\frac{13}{10000}=0,0013$.

Ўнли касрларда вергулдан олдинги сон ўнли касрнинг бутун қисми, кейингиси эса каср қисми бўлади.

Фараз қилайлик, $\frac{p}{q}$ бирор мусбат рационал сон бўлсин. Арифметикада ўрганилган қоидага кўра p бутун сонни q га бўламиз. Бунда қолдиқ 0, 1, 2, ..., $q-1$ бўлиши мумкин. Агар p ни q га бўлиш жараёнида бирор қадамдан кейин қолдиқ 0 га тенг бўлса, у ҳолда бўлиш жараёни тўхтаб, $\frac{p}{q}$ каср ўнли касрга айланади. Одатда бундай ўнли касрни *чекли ўнли каср* дейилади. Масалан, $\frac{59}{40}$ касрда 59 ни 40 га бўлиб, 1,475 бўлишини топамиз: $\frac{59}{40}=1,475$. Агар p ни q га бўлиш жараёни чексиз давом этса, маълум қадамдан кейин юқорида айтилган қолдиқлардан бири яна бир марта учрайди, сўнг ундан олдинги рақамлар мос тартибда такрорланади. Одатда бундай каср *чексиз даврий ўнли каср* дейилади. Такрорланадиган рақамлар (рақамлар бирлашмаси) ўнли касрнинг даври бўлади. Масалан, $\frac{1}{3}$ касрда 1 ни 3 га бўлиб, 0,333... бўлишини топамиз:

$$\frac{1}{3}=0,333\ \ldots\ .$$

Ушбу 0,333... , 1,4777... , 2,131313... касрлар чексиз даврий ўнли касрлардир. Уларнинг даври мос равишда 3, 7, 13 бўлиб,

$$0,(3);\ 1,4(7);\ 2,\ (13)$$

каби ёзилади:

$$0,(3)=0,333...\ ,\ 1,4(7)=1,4777...\ ,\ 2,(13)=2,131313...\ .$$

Эслатма. Даври 9 га тенг бўлган чексиз даврий ўнли касрни чекли ўнли каср қилиб ёзилади. Масалан,

$$0,4999...=0,4(9)=0,5,\ 2,71999...=2,71(9)=2,72$$

Равшанки, ҳар қандай чекли ўнли касрни ноллар билан давом қилдириб чексиз даврий ўнли каср кўринишида ёзиш мумкин. Масалан, 1,4=1,4000...=1,4(0), 0,75=0,75000...=0,75(0).

Демак, ҳар қандай $\frac{p}{q}$ рационал сон чексиз даврий ўнли каср кўринишида ёзилади.

Аксинча, ҳар қандай чексиз даврий ўнли касрни $\frac{p}{q}$ каср кўринишида ёзиш мумкин.

Масалан, ушбу 0,(3)=0,333..., 7,31(06)=7,31060606... чексиз даврий ўнли касрларни қарайлик.

Аввало уларни

$$0,(3)=0+\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+...,$$

$$7,31(06)=7+\frac{3}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{6}{10^4}+\frac{6}{10^6}+...$$

кўринишда ёзиб, сўнг чексиз камаювчи геометрик прогрессия йиғиндисини топиш формуласидан фойдаланамиз:

$$0,(3)=0,333\ ...=\frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{1}{3},$$

$$7,31(06)=7,31060606\ ...=\frac{731}{100}+\frac{\frac{6}{10^4}}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{731}{100}+\frac{1}{100}\cdot\frac{6}{99}=$$

$$=\frac{1}{100}\left(731+\frac{2}{33}\right)=\frac{24152}{100\cdot33}=\frac{965}{132}.$$

Шундай қилиб ихтиёрий рационал сон чексиз даврий ўнли каср орқали ифодаланади ва аксинча, ихтиёрий чексиз даврий ўнли каср рационал сонни ифодалайди.

Бироқ, чексиз даврий бўлмаган ўнли касрлар ҳам мавжуд. Масалан, 0,1010010001 ... ; 0,12345 ... ; 1,4142135 ... .

Юқорида айтилганлардан, бундай чексиз даврий бўлмаган ўнли касрларни $\frac{p}{q}$ рационал сон кўринишида ифодалаб бўлмайди.

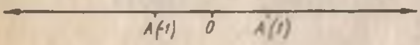
9- таъриф. *Чексиз даврий бўлмаган ўнли каср иррационал сон дейилади.*

Масалан, $\sqrt{2}=1,4142135 \ldots$, $\pi=3,141583 \ldots$ иррационал сонлардир.

Рационал ҳамда иррационал сонлар умумий ном билан *ҳақиқий сонлар* дейилади. Барча ҳақиқий сонлар тўплами R ҳарфи билан белгиланади.

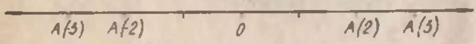
Ҳақиқий сонлар тўплами R ҳам рационал сонлар тўплами хоссалари каби хоссаларга эга.

3. Ҳақиқий сонларни геометрик тасвирлаш. Бирор тўғри чизиқ олиб, бу тўғри чизиқда ихтиёрий нуқтани O ҳарф билан белгилайлик. O нуқта тўғри чизиқни икки қисмга — иккита нурга ажратади. Бу нурлардан бирининг йўналишини, одатда O нуқтадан ўнг томонга йўналишини мусбат йўналиш, иккинчисини (O нуқтадан чап томонга йўналишини) манфий йўналиш деб оламиз. Сўнг маълум бир кесмани ўлчов бирлиги сифатида (бу кесманинг узунлиги 1 деб) қабул қиламиз. Йўналиши ва бирлик кесмаси (масштаби) аниқланган бундай тўғри чизиқ сонлар ўқи дейилади (2- чизма). Сонлар ўқидаги O нуқтани нол сонининг геометрик тасвири деб атаймиз. Ўлчов бирлиги сифатида қабул қилинган OE кесмани O нуқтадан бошлаб ўнг ва чап томонларга қўямиз. Бу бирлик кесманинг учлари A (1) ва A (—1) нуқталарни белгилайди. A (1) нуқта 1 сонининг геометрик тасвири, A (—1) нуқта эса —1 сонининг геометрик тасвири бўлади.



2- чизма

Шу усул билан бирлик кесмани кетма-кет O нуқтадан ўнг ва чап томонда жойлашган нурларга қўйиб A (2), A (3), ..., A (—2), A (—3), ... нуқталарни топамиз (3- чизма).



3- чизма

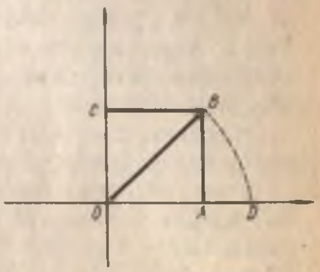
A (2), A (3), ... нуқталар 2, 3, ... сонларнинг геометрик тасвирлари, A (—2), A (—3), ... нуқталар эса —2, —3, ... сонларнинг геометрик тасвирлари бўлади.

Агар ўлчов бирлигини q та ($q \in N$) тенг бўлакка бўлиб, уларнинг p тасини ($p>0$) олиб, O нуқтадан ўнг ва чап томонларга юқоридагидек жойлаштирсак, ўнг томондаги нурда $\frac{p}{q}$ сонга мос $B\left(\frac{p}{q}\right)$ нуқта, чап томондаги нурда $-\frac{p}{q}$ сонга мос $B\left(-\frac{p}{q}\right)$ нуқта ҳосил бўлади. Шу усулда ҳар бир рационал $\frac{p}{q}$ сонга мос келадиган нуқта топилади. Бундай нуқталар рационал сонларнинг геометрик тасвирлари бўлади. Масалан, $\frac{5}{4}$ рационал сонни тасвирловчи нуқтани топиш учун аввало ўлчов бирлигини O нуқтадан ўнг томонга бир марта жойлаштириб, ҳосил бўлган нуқтадан бошлаб ўлчов бирлигининг тўртдан бир кисмини қўйиб, $\frac{5}{4}$ рационал сонни геометрик ифодаловчи $B\left(\frac{5}{4}\right)$ нуқтани топамиз.

Шундай қилиб, рационал сонлар тўпламидан олинган ҳар бир рационал сонга тўғри чизиқда битта нуқта мос келади. Одатда бундай нуқталар *рационал нуқталар* дейилади.

Бироқ, тўғри чизиқда шундай нуқталар борки, улар бирорта ҳам рационал соннинг геометрик тасвири бўлмайди.

Томони бир бирликка тенг $OABC$ квадратни қарайлик (4- чизма). Бу квадратнинг диагонали OB нинг узунлиги, Пифагор теоремасига кўра $\sqrt{2}$ га тенг бўлади. Циркулнинг учини O нуқтага қўйиб, радиуси OB га тенг бўлган айлана чизилса, бу айлана тўғри чизиқни D нуқтада кесади. $OB=OD$ бўлганлиги сабабли D нуқта мос келадиган сон $\sqrt{2}$ бўлади. (бошқача айтганда $\sqrt{2}$ нинг геометрик тасвири D нуқта бўлади). Маълумки, $\sqrt{2}$ сон рационал сон бўлмасдан иррационал сон эди. Тўғри чизиқда шунга ўхшаган нуқталар чексиз кўп бўлиб, улар иррационал сонларнинг геометрик тасвирлари бўлади.



4- чизма

Демак, рационал сонлар тўплами билан тўғри чизиқ нуқталари тўплами орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд эмас. Ҳақиқий сонлар тўплами тўғрисида вазият бошқача бўлади. Ҳақиқий сонлар тўплами R билан тўғри чизиқ нуқталари тўплами орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд, яъни ҳар бир ҳақиқий сонга тўғри чизиқда уни геометрик тасвирловчи битта нуқта мавжуд, ва аксинча, тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтасига R да унга мос келувчи ҳақиқий сон мавжуд.

Келгусида, тўғри чизиқнинг нуқтаси деганда ҳақиқий сонни, ҳақиқий сон деганда тўғри чизиқнинг нуқтасини тушунамиз ва зарурат туғилса, уларнинг бири ўрнига иккинчисини ишлатамиз.

Қуйидаги ҳақиқий сонлардан ташкил топган тўпламлар математика курсида жуда кўп ишлатилади.

1. Ушбу

$$\{x \in R:\ a \leqslant x \leqslant b\}$$

тўплам *сегмент* дейилади ва $[a,\ b]$ каби белгиланади:

$$[a,\ b]=\{x \in R:\ a \leqslant x \leqslant b\}.$$

2. Ушбу

$$\{x \in R:\ a < x < b\}$$

тўплам *интервал* дейилади ва $(a,\ b)$ каби ёзилади:

$$(a,\ b)=\{x \in R:\ a < x < b\}.$$

3. Ушбу

$$\{x\in R\colon a\leqslant x<b\},\ \{x\in R\colon a<x\leqslant b\}$$

тўпламлар *ярим интервал* дейилади ва улар мос равишда $[a,\ b)$, $(a,\ b]$ каби белгиланади:

$$[a,\ b)=\{x\in R\colon a\leqslant x<b\},\ (a,\ b]=\{x\in R\colon a<x\leqslant b\}.$$

4. Тўпламнинг чегаралари. Фараз қилайлик $E=\{x\}$ бирор ҳақиқий сонлар тўплами бўлсин.

10-таъриф. *Агар шундай ўзгармас M сон мавжуд бўлсаки, $\forall x\in E$ учун $x\leqslant M$ тенгсизлик бажарилса, E тўплам юқоридан чегараланган тўплам дейилади, M сон эса E тўпламнинг юқори чегараси дейилади.*

Масалан, $E=[0,\ 1]$ бўлсин. Бу тўпламнинг ҳар бир элементи 1 дан катта эмас. Демак, $E=[0,\ 1]$ тўплам юқоридан чегараланган.

Агар тўплам юқоридан чегараланган бўлса, унинг юқори чегаралари чексиз кўп бўлади. Масалан, $E=[0,\ 1]$ тўплам учун 1 ва ундан катта ҳар бир ҳақиқий сон шу тўпламнинг юқори чегараси бўлади.

11-таъриф. *Юқоридан чегараланган $E=\{x\}$ тўпламнинг юқори чегараларининг энг кичиги E нинг аниқ юқори чегараси дейилади ва* $\sup E$ *(супремум E) каби белгиланади.*

Масалан, $E=[0,\ 1]$ тўпламнинг аниқ юқори чегараси 1 га тенг бўлади: $\sup E=1$.

12-таъриф. *Агар шундай ўзгармас m сон мавжуд бўлсаки, $\forall x\in E$ учун $x\geqslant m$ тенгсизлик бажарилса, E тўплам қуйидан чегараланган дейилади, m сон эса E тўпламнинг қуйи чегараси дейилади.*

Масалан, $E=(0,2)$ бўлсин. Бу тўпламнинг ҳар бир элементи 0 дан катта. Демак, $E=(0,\ 2)$ тўплам қуйидан чегараланган.

Агар тўплам қуйидан чегараланган бўлса, унинг қуйи чегаралари чексиз кўп бўлади. Масалан, $E=(0,2)$ тўплам учун 0 ва ундан кичик ҳар қандай сон (яъни манфий сонлар) шу тўпламнинг қуйи чегараси бўлади.

13-таъриф. *Қуйидан чегараланган $E=\{x\}$ тўпламнинг қуйи чегараларининг энг каттаси E нинг аниқ қуйи чегараси дейилади ва* $\inf E$ *(инфимум E) каби белгиланади.*

Масалан, $E=(0,\ 2)$ тўпламнинг аниқ қуйи чегараси 0 га тенг бўлади: $\inf E=0$.

Тўпламнинг аниқ юқори ҳамда аниқ қуйи чегаралари ҳақида қуйидаги теорема ўринлидир.

Теорема. ***Ҳар қандай юқоридан (қуйидан) чегараланган тўплам учун уни юқоридан (қуйидан) чегараловчи сонлар орасида энг кичиги (энг каттаси) мавжуд.***

5. Ҳақиқий соннинг абсолют қиймати. Бирор x ҳақиқий сон берилган бўлсин. Агар бу сон мусбат бўлса, шу соннинг ўзига, манфий бўлса, унга қарама-қарши ишорали $-x$ сонига x соннинг абсолют қиймати дейилади ва $|x|$ каби белгиланади. Нол соннинг абсолют қиймати $|0|=0$.

Демак,

$$|x|=\begin{cases} x, \text{ агар } x\geqslant 0 \text{ бўлса,} \\ -x, \text{ агар } x<0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Масалан,

$$|-5|=5,\ |\pi|=\pi,\ |-\sqrt{2}|=\sqrt{2},\ |1{,}5|=1{,}5.$$

Ҳақиқий соннинг абсолют қиймати қатор хоссаларга эга.

1°. Ихтиёрий x ҳақиқий сон учун ушбу

$$|x|\geqslant 0,\ |x|=|-x|,\ x\leqslant|x|,\ -x\leqslant|x|$$

муносабатлар ўринли бўлади.

2°. Бирор мусбат a ҳақиқий сон берилган бўлсин. Агар x ҳақиқий сон

$$|x|<a$$

тенгсизликни қаноатлантирса, у

$$-a<x<a$$

тенгсизликларни ҳам қаноатлантиради ва аксинча. Демак,

$$|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a.$$

3°. Икки ҳақиқий x ва y сонлар учун

а) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$,
б) $|x-y|\geqslant|x|-|y|$,
в) $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$,
г) $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}\quad(y\neq 0)$.

4°. Ушбу

$$\sqrt{a^2}=|a|$$

муносабат ўринли.

Юқорида келтирилган хоссаларни исботлаш қийин эмас. Биз улардан бирини, масалан, 2°- хоссанинг исботини келтирамиз.

2°- хоссанинг исботи. Айтайлик,

$$|x|<a$$

бўлсин. Ундан 1°- хоссага кўра

$$x\leqslant|x|, \text{ демак } x<a,$$

$$-x\leqslant|x|, \text{ демак } -x<a, \text{ яъни } x>-a$$

бўлади. Бу муносабатлардан эса

$$-a<x<a$$

бўлиши келиб чиқади.

Энди

$$-a<x<a$$

Бух. ТИП в ЛП
БИБЛИОТЕКА
№ У2120

бўлсин. Бу ҳолда

$$x<a,$$
$$-a<x, \text{ яъни } -x<a$$

бўлади. Натижада

$$x>0 \text{ бўлганда } |x|=x<a,$$
$$x<0 \text{ бўлганда } |x|=-x<a$$

бўлади, улардан

$$|x|<a$$

бўлиши келиб чиқади.

Шундай қилиб

$$|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$$

бўлиши кўрсатилди.

Ҳақиқий соннинг абсолют қиймати ёрдамида тўғри чизиқда икки нуқта орасидаги масофа тушунчаси киритилади.

Айтайлик, x ва y ҳақиқий сонлар тўғри чизиқда $A(x)$ ва $B(y)$ нуқталарни тасвирласин.

Ушбу

$$|x-y|$$

миқдор $A(x)$, $B(y)$ нуқталар орасидаги масофа дейилади ва $\rho\ (x,\ y)$ каби белгиланади:

$$\rho(x,\ y)=|x-y|.$$

3- §. Текисликда Декарт ҳамда қутб координаталар системаси

Мазкур бобнинг 2- § ида ҳар бир x ҳақиқий сон ($x \in R$) сонлар ўқида битта нуқтани тасвирлашини айтдик. Одатда бу x сон шу нуқтанинг координатаси дейилади.

Ҳақиқий сонлар тўплами R нинг геометрик тасвири сонлар ўқидан иборат.

Энди $R \times R$ Декарт кўпайтмани қарайлик. Маълумки бу тўплам $(x,\ y)$ жуфтликлардан ($x \in R$, $y \in R$) ташкил топган:

$$R \times R=\{(x,\ y):\ x \in R,\ y \in R\}.$$

Бу тўпламнинг геометрик тасвири текислик бўлади.

Текисликда геометрик объектларни ўрганиш учун унда Декарт координаталари системаси тушунчаси киритилади.

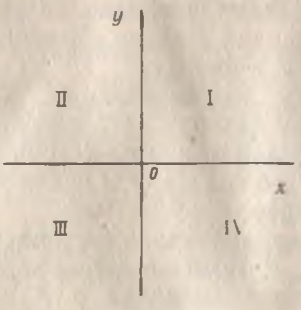
Текисликда ўзаро перпендикуляр бўлган икки тўғри чизиқни олайлик. Улардан бири горизонтал, иккинчиси вертикал жойлашсин (5- чизма).

Бу тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасини O ҳарфи билан белгилаб, уни координата боши деймиз. O нуқта горизонтал тўғри чизиқни икки қисмга ажратиб, улардан ўнг томондагисини мусбат йўналиш, чап томондагисини эса манфий йўналиш деб қараймиз.

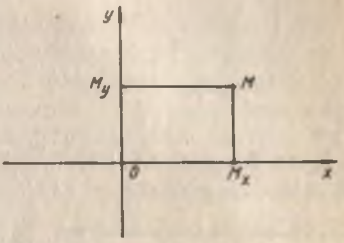
Шунга ўхшаш O нуқта вертикал тўғри чизиқни ҳам икки қисмга ажратади. Юқоридаги қисми мусбат йўналишда, пастдаги қисми манфий йўналишда деб қараймиз (5- чизмада мусбат йўналишлар стрелкалар ёрдамида кўрсатилган).

Одатда горизонтал чизиқ OX ўқи ёки *абсцисса ўқи*, вертикал чизиқ OY ўқи ёки *ордината ўқи* дейилади. Абсцисса ва ордината ўқлари *координата ўқлари* дейилади.

Қоордината ўқлари текисликни тўртта чоракка ажратади. Бу чораклар 5- чизмада кўрсатилган тартибда номерланади.



5- чизма



6- чизма

Масштаб бирлигини тайинлаб, текисликда бирор M нуқтани оламиз. Бу нуқтадан аввал абсцисса ўқига, сўнг ордината ўқига перпендикулярлар туширамиз. Уларнинг координата ўқлари билан кесишган нуқталарини мос равишда M_x ва M_y орқали белгилаймиз (6- чизма).

OX ўқидаги M_x нуқтани ифодалаган сонни x дейлик (x сон M_x нуқта O нуқтадан ўнгда бўлса, мусбат, чапда бўлса, манфий бўлади). Шунга ўхшаш OY ўқидаги M_y нуқтани ифодалаган сонни y деймиз (y сон M_y нуқта O нуқтадан юқорида бўлса, мусбат, пастда бўлса, манфий бўлади). M_x ва M_y нуқталар сонлар ўқида x ва y сонларни аниқлайди. Бу x ва y сонлардан тузилган (x, y) жуфтлик M нуқтанинг координаталари: x га M нуқтанинг биринчи координатаси ёки абсциссаси, y га M нуқтанинг иккинчи координатаси ёки ординатаси дейилади. M нуқта координаталари орқали

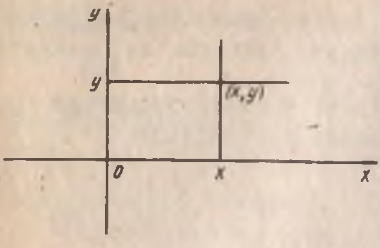
$$M = M(x, y)$$

каби ёзилади.

Эслатма. Абсцисса ўқидаги нуқталарнинг координаталари $(x, 0)$, ордината ўқидаги нуқталарнинг координаталари $(0, y)$, координата бошининг координаталари $(0, 0)$ бўлади.

Ихтиёрий иккита x ва y ҳақиқий сонлар берилган бўлиб, улардан тузилган (x, y) жуфтликни қарайлик. Бу жуфтлик текисликда битта нуқтани тасвирлайди. Буни кўрсатиш учун абсцисса ўқида x сонга мос келадиган нуқтани, ордината ўқида y сонга мос келадиган нуқтани топиб, бу нуқталардан мос равишда асбцисса ва ордината ўқларига перпендикуляр чиқарамиз. Перпендикулярларнинг кесишган нуқтаси координаталари (x, y) бўлган нуқтани ифодалайди (7- чизма).

Шундай қилиб текисликдан олинган ҳар бир нукта иккита x ва y ҳақиқий сонлардан тузилган (x, y) жуфтликни ҳосил қилади. Аксинча ихтиёрий иккита x ва y ҳақиқий сонлардан тузилган (x, y) жуфтлик текисликда битта нуктани ифодалайди.

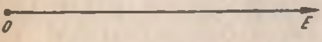


7- чизма

Юқорида келтирилган тадбирлар нуқтанинг текисликдаги вазиятини тўлиқ аниклаш имконини беради. Одатда бундай тадбирлар натижаси *тўғри бурчакли Декарт координаталари системаси*, қискача *Декарт координаталари системаси* дейилади.

Декар координаталари системаси билан бир қаторда қутб координаталари системаси ҳам муҳим ўрин тутади.

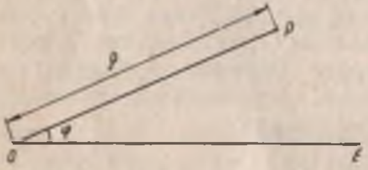
Қутб координаталари, кутб нукта деб аталувчи O нукта ва ундан чиқувчи OE нурдан — қутб ўқидан иборат (8- чизма).



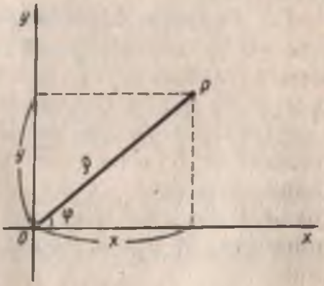
8- чизма

Қутб координаталари системаси берилган бўлиб, P текисликдаги бирор нуқта бўлсин. Фараз қилайлик ρ P нуқтадан O нуқтагача бўлган масофа, φ эса кутб ўқини OP нур билан ташкил этган бурчаги бўлсин.

Нуқтанинг қутб координаталари деб ρ ва φ сонларига айтилади. Бунда ρ биринчи координата бўлиб, у кутб радиуси, φ эса иккинчи координата бўлиб, қутб бурчаги дейилади. Қутб координаталарида P нукта $P(\rho, \varphi)$ каби белгиланади (9- чизма).



9- чизма



10- чизма

Равшанки, $0 \leqslant \rho < +\infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

Энди нуктанинг Декарт координаталари билан кутб координаталари орасидаги боғланишни кўрайлик. Бунинг учун координата бошини қутб нукта билан, абсцисса ўқининг мусбат йўналишини эса қутб ўқи билан устма-уст тушадиган қилиб оламиз. Декарт координаталар системасида P нукта (x, y) координаталарга эга бўлсин (10- чизма).

Равшанки, $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Бу формулалар нуқтанинг Декарт координаталари билан қутб координаталарини боғловчи формулалардир.

2-БОБ

ФУНКЦИЯ

1-§. Функция тушунчаси

1. Ўзгарувчи ва ўзгармас миқдорлар. Табиатда, фан ва техниканинг барча соҳаларида ҳар хил миқдорларни (узунлик, юза, вақт, масса ва ҳ. к.) учратамиз. Бундай миқдорлар вазиятга қараб турли қийматларни қабул қилиши мумкин. Масалан, ҳар қандай учбурчакнинг бурчаклари йиғиндиси ҳар доим 180° га тенг бўлса, учбурчаклар периметри эса (уларнинг томонлари узунлигига қараб) турлича бўлади. Бундан учбурчак бурчаклари йиғиндиси ўзгармас миқдор, учбурчак периметри эса ўзгарувчи миқдор экани кўринади. Натижада икки хил — ўзгарувчи ҳамда ўзгармас миқдорларга дуч келамиз.

Ўзгарувчи миқдорлар x, y, z ва ҳоказо ҳарфлар билан белгиланади.

Агар ўзгарувчи миқдорнинг қабул қиладиган қийматлари тўплами маълум бўлса, ўзгарувчи берилган дейилади (масалан, барча мусбат сонлар тўплами ўзгарувчи миқдор сифатида олинган айлана радиуси r нинг қабул қиладиган қийматлари тўплами бўлади).

Математикада бир нечта ўзгарувчи миқдорлар ва улар орасидаги боғланишлар ўрганилади. Мисол тариқасида радиуси r га тенг бўлган айлана узунлигини олайлик. Бундай айлана узунлиги

$$C = 2\pi r \qquad (1)$$

бўлади. Айлана радиуси r ҳамда айлана узунлиги C ўзгарувчи миқдорлардир. Улар (1) муносабат билан боғланган. Бу боғланишдан кўринадики, айлана радиуси эркли равишда мусбат қийматларни қабул қилса, айлана узунлиги эса унга боғлиқ (демак, эрксиз) равишда қийматларни қабул қилади.

Кейинчалик, ўзгарувчи миқдор, ўзгармас миқдор иборалари ўрнига (қисқа айтиш мақсадида) мос равишда ўзгарувчи, ўзгармас сўзларини ишлатамиз.

2. Функция таърифи. Функциянинг берилиш усуллари. Иккита x ва y ўзгарувчиларни қарайлик. x ўзгарувчининг қабул қиладиган қийматлари тўплами X, y ўзгарувчининг қабул қиладиган қийматлар тўплами Y ҳақиқий сонлар тўпламларидан иборат бўлсин.

1-таъриф. *Агар X тўпламдан олинган ҳар бир x сонга бирор f қоидага ёки қонунга кўра Y тўпламнинг битта y сони мос қўйилган бўлса, у ҳолда X тўпламда функция аниқланган (берилган) дейилади.*

Бунда X тўплам функциянинг аникланиш (берилиш) соҳаси, Y тўплам эса функциянинг ўзгариш соҳаси, x — функция ***аргументи***, y эса x нинг ***функцияси*** дейилади. f ҳар бир x га битта y ни мос кўювчи коидани билдиради.

Келтирилган таърифдаги x, y ва f бирлаштирилиб, y ўзгарувчи x нинг функцияси дейилиши —

$$y=f(x)$$

тарзида ёзилади ва «игрек тенг эф икс» деб ўкилади.

Агар ҳар бир x $(x\in X)$ га бошка коидага кўра битта y $(y\in Y)$ мос кўйилса, табиийки бошка функция ҳосил бўлади, ва уни, масалан, $y=\varphi(x)$ каби ёзиш мумкин.

Мисоллар. 1. $X=R$, $Y=R$ тўпламлар берилган бўлиб, f — ҳар бир x ҳакикий сонга $(x\in X)$ унинг квадратини $(x^2\in Y)$ мос кўювчи коида бўлсин. Бу ҳолда

$$y=x^2$$

функцияга эга бўламиз.

2. Мос кўйиш коидаси куйидагича бўлсин: ҳар бир мусбат x сонга 1, манфий x сонга -1 ва $x=0$ сонга $y=0$ мос кўйилади. Натижада $y=f(x)$ функция ҳосил бўлади. Уни куйидагича

$$y=f(x)=\begin{cases} 1, \text{ агар } x>0, \text{ бўлса,} \\ 0, \text{ агар } x=0 \text{ бўлса,} \\ -1, \text{ агар } x<0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

ёзиш мумкин. Одатда бу функция

$$y=\operatorname{sign} x$$

каби белгиланади. Бунда sign — лотинча signum сўзидан олинган бўлиб, «белги» деган маънони англатади.

$y=f(x)$ функция берилган бўлиб, унинг аникланиш соҳаси X бўлсин. X тўпламдан бирор x_0 нуктани оламиз. Равшанки, x_0 нуктага битта y_0 сон мос келади. Бу y_0 сон берилган $y=f(x)$ функциянинг x_0 нуктадаги киймати дейилади ва $y_0=f(x_0)$ каби белгиланади.

Энди x аргументнинг X тўпламдаги ҳар бир кийматига мос $y=$ $=f(x)$ функциянинг кийматини топиб, ушбу

$$\{f(x):\ x\in X\}$$

тўпламни ҳосил киламиз. Одатда бу тўплам ***функция кийматлари тўплами*** дейилади ва Y_f каби белгиланади. Равшанки, $Y_f\subset Y$ бўлади.

Текисликда Декарт координаталар системасини олайлик. Абсцисса ўкига $y=f(x)$ функциянинг аникланиш соҳасини жойлаштирамиз. Сўнг X тўпламнинг x нукталарида функция кийматлари $f(x)$ ни ҳисоблаб, уларни ордината ўкига жойлаштирамиз. Натижада $(x,\ f(x))$ жуфтликлар ҳосил бўлади. Текисликнинг $(x,\ f(x))$ кўринишдаги нукталари тўплами

$$\{(x,\ f(x))\}=\{(x,\ f(x)):x\in X,\ f(x)\in Y\}$$

га берилган функциянинг *графиги* дейилади. Функция графиги тўғрисида кейинроқ батафсил тўхталамиз.

Функция таърифидаги ҳар бир x га битта y ни мос қўювчи қоида турли усулда: аналитик, жадвал, график ва бошқа усулларда бўлиши мумкин.

1) *Аналитик усул.* Бу усулда, кўпинча x ва y ўзгарувчилар орасидаги боғланиш формулалар орқали бўлади. Бунда аргумент x нинг қийматига кўра y нинг қиймати қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш ва бошқа амаллар ёрдамида топилади. Масалан, ушбу

$$y=\frac{1}{1+x^2},\quad y=\sqrt{1-x^2}$$

функциялар аналитик усулда берилган функциялардир. Кўп ҳолда аналитик усулда берилган функциянинг аниқланиш соҳаси кўрсатилмайди. Бу усулда берилган функцияларни ўрганиш уларнинг аниқланиш соҳаларини топишдан бошланади.

Аналитик усулда берилган функциянинг аниқланиш соҳаси ўзгарувчининг шундай қийматларидан иборат тўплам бўладики, бу тўпламдан олинган ҳар бир x нинг қийматига мос келувчи y нинг қиймати маънога эга (яъни чекли, ҳақиқий) бўлсин.

Мисол. Ушбу

$$y=\frac{\sqrt{x+3}}{x-5}$$

функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Равшанки, бу функциянинг аниқланиш соҳасига $x=5$ нуқта кирмайди, чунки $x=5$ га мос келадиган y нинг қиймати чекли бўлмайди.

Иккинчи томондан, қаралаётган функциянинг аниқланиш соҳасига x нинг -3 дан кичик қийматлари ҳам кирмайди, чунки $x<-3$ бўлган x нинг қийматларига мос келувчи y нинг қийматлари ҳақиқий бўлмайди. Демак, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси

$$X=\{x:\ -3\leqslant x<+\infty,\ x\neq 5\}$$

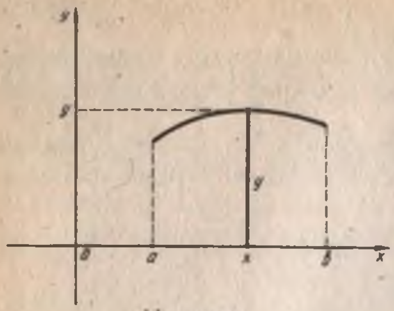
тўпламдан иборат.

2) *Жадвал усули.* Бу усулда x билан y ўзгарувчилар орасидаги боғланиш жадвал кўринишида бўлади. Масалан, кун давомида ҳаво ҳароратини кузатганимизда, t_1 вақтда ҳаво ҳарорати T_1, t_2 вақтда ҳаво ҳарорати T_2 ва ҳ. к. бўлсин. Натижада қуйидаги жадвал ҳосил бўлади:

t — вақт	t_1	t_2	t_3	t_4	. . .	t_n
T — ҳарорат	T_1	T_2	T_3	T_4		T_n

Бу жадвал t вақт билан ҳаво ҳарорати T орасидаги боғланишни ифодалайди, бунда t — аргумент, T эса t нинг функцияси бўлади.

3) *График усул.* Бу усулда x ва y ўзгарувчилар орасидаги боғланиш текисликдаги бирор эгри чизиқ орқали бўлади. Масалан, текисликда 11-чизмада тасвирланган эгри чизиқ берилган бўлсин.



11- чизма

x ўзгарувчи $X=[a, b]$ тўпламда ўзгарсин. Бу X тўпламдан ихтиёрий x нуқта оламиз. Шу нуқтадан перпендикуляр чиқариб унинг берилган чизиқ билан кесишиш нуқтасини топамиз ва x га кесишиш нуқтасининг ординатаси y ни мос қўямиз. Натижада ҳар бир x га $(x \in X)$ битта y мос қўйилиб функция ҳосил бўлади. Бунда x билан y нинг орасидаги боғланишни берилган эгри чизиқ бажаради.

Олий математикада, асосан аналитик усулда берилган функциялар қаралади.

2- §. Чегараланган функциялар

Бирор X тўпламда $f(x)$ функция берилган бўлсин.

2-таъриф. *Агар шундай ўзгармас M сон топилсаки, $\forall x \in X$ учун*

$$f(x) \leqslant M$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $f(x)$ функция X тўпламда юқоридан чегараланган функция дейилади.

Мисол. Ушбу

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

функцияни қарайлик. Бу функция $X=(-\infty, +\infty)$да аниқланган. Равшанки, $\forall x \in (-\infty, +\infty)$да

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$$

бўлади. Демак, берилган функция юқоридан чегараланган.

3-таъриф. *Агар шундай ўзгармас m сон топилсаки, $\forall x \in X$ учун*

$$f(x) \geqslant m$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция X тўпламда қуйидан чегараланган функция дейилади.

Мисол. Ушбу

$$f(x)=x^2+1$$

функцияни қарайлик. Бу функция $X=(-\infty, +\infty)$ да аниқланган. $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ учун

$$f(x)=x^2+1\geqslant 1$$

бўлади. Демак, берилган функция қуйидан чегараланган.

4-таъриф. *Агар $f(x)$ функция X тўпламда ҳам юқоридан, ҳам қуйидан чегараланган функция бўлса, яъни шундай ўзгармас m ва M сонлар топилсаки, $\forall x\in X$ учун*

$$m\leqslant f(x)\leqslant M$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $f(x)$ функция X тўпламда чегараланган функция дейилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}$$

функцияни қарайлик. Бу функция $X=(-\infty,\ +\infty)$ да аниқланган. Равшанки, $x\in(-\infty,\ +\infty)$ да

$$f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}>0$$

бўлади. Демак, берилган функция қуйидан чегараланган.

Берилган функцияни

$$f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}=\frac{1}{1+x^4}+\frac{x^2}{1+x^4}$$

тарзда ёзиб оламиз. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи қўшилувчи барча $x\in(-\infty,\ +\infty)$ да бирдан катта бўлмайди:

$$\frac{1}{1+x^4}\leqslant 1\,.$$

Энди иккинчи қўшилувчи

$$\frac{x^2}{1+x^4}$$

ни баҳолаймиз. Агар

$$0\leqslant(1-x^2)^2=1-2x^2+x^4$$

эканини эътиборга олсак, унда

$$1+x^4\geqslant 2x^2\Rightarrow\frac{x^2}{1+x^4}\leqslant\frac{1}{2}$$

га эга бўламиз. Натижада барча $x\in(-\infty,\ +\infty)$ учун

$$\frac{1+x^2}{1+x^4}=\frac{1}{1+x^4}+\frac{x^2}{1+x^4}\leqslant 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, берилган функция юқоридан чегараланган.

Шундай қилиб,

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$$

функциянинг ҳам қуйидан, ҳам юқоридан чегараланганлиги исботланди.

2. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, \text{ агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, \text{ агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарайлик. Бу функция $X = (-\infty, +\infty)$ да аниқланган.

Агар ихтиёрий мусбат A сон олинса ҳам, ундан катта бўлган натурал n сони топиладики, $\frac{1}{n} \in X$ бўлиб,

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = n^2 > A$$

бўлади. Бу берилган $f(x)$ функциянинг юқоридан чегараланмаганлигини билдиради. Айни пайтда қаралаётган функция қуйидан чегаралангандир: $f(x) \geqslant 0$.

Фараз қилайлик $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳар бири X тўпламда аниқланган бўлиб, улар шу тўпламда чегараланган бўлсин. У ҳолда

$$f(x) + g(x), \quad f(x) - g(x), \quad f(x) \cdot g(x)$$

функциялар ҳам X тўпламда чегараланган бўлади.

3- §. Жуфт ва тоқ функциялар

Бирор X ҳақиқий сонлар тўпламини қарайлик. Агар $\forall x \in X$ учун $-x \in X$ бўлса, у ҳолда X тўплам O нуқтага нисбатан *симметрик тўплам* дейилади. Масалан,

$$X = (-\infty, +\infty), [-2, 2], (-6, 6)$$

тўпламлар O нуқтага нисбатан симметрик тўпламлар бўлади. Ушбу

$$X = (0, +\infty), (-2, 2], [-6, 6), [1, 2]$$

тўпламлар O нуқтага нисбатан симметрик тўпламлар эмас.

Айтайлик, O нуқтага нисбатан симметрик бўлган X тўпламда $y = f(x)$ функция берилган бўлсин.

5-таъриф. *Агар ихтиёрий* $x \in X$ учун

$$f(-x) = f(x) \tag{2}$$

тенглик бажарилса, $f(x)$ *жуфт функция дейилади.*

Масалан, ушбу

$$y = x^2, \qquad y = \frac{x^2}{1+x^2}$$

функциялар жуфт функциялардир.

6-таъриф. *Агар ихтиёрий $x \in X$ учун*

$$f(-x) = -f(x) \qquad (3)$$

тенглик бажарилса, $f(x)$ тоқ функция дейилади.

Масалан, ушбу

$$y = x^3, \qquad y = \frac{x}{1+x^2}$$

функциялар ток функциялар бўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}$$

функцияни қарайлик. Бу функциянинг аниқланиш соҳаси $(-\infty, +\infty)$ бўлади. Берилган функцияни жуфт ёки тоқ бўлишига текширамиз:

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2+1} = \sqrt{x^2+1} = f(x)$$

Демак, $f(x)$ жуфт функция.

2. Ушбу

$$f(x) = x\sqrt{x^2-9}$$

функцияни қарайлик. Аввало берилган функциянинг аниқланиш соҳасини топамиз:

$$x^2-9 \geqslant 0 \Rightarrow x^2 \geqslant 9 \Rightarrow -\infty < x \leqslant -3 \text{ ва } 3 \leqslant x < +\infty .$$

Демак, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси

$$X = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$

тўпламдан иборат. Равшанки, бу тўплам O нуқтага нисбатан симметрик тўплам.

Энди $f(-x)$ ни топамиз:

$$f(-x) = (-x)\sqrt{(-x)^2-9} = -x\sqrt{x^2-9} = -f(x) .$$

Демак, $f(x)$ ток функция.

3. Ушбу

$$f(x) = x^2 - x$$

функцияни қарайлик. Равшанки, бу функциянинг аниқланиш соҳаси $(-\infty, +\infty)$ бўлади.

$$f(-x) = (-x)^2 - (-x) = x^2 + x.$$

Энди

$$f(x) = x^2 - x, \quad f(-x) = x^2 + x$$

ларни солиштириб, берилган функция учун (2) ва (3) шартларнинг бирортаси ҳам бажарилмаслигини кўрамиз. Демак, берилган функция жуфт функция ҳам, тоқ функция ҳам эмас.

Жуфт функциянинг графиги ордината ўқига нисбатан симметрик жойлашган бўлади.

Тоқ функциянинг графиги координата бошига нисбатан симметрик жойлашган бўлади.

Фараз қилайлик $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳар бири O нуқтага нисбатан симметрик бўлган X тўпламда аниқланган бўлсин.

1°. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар жуфт функциялар бўлса, у ҳолда

$$f(x)+g(x), \quad f(x)-g(x), \quad f(x)\cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x)\neq 0)$$

функциялар ҳам жуфт бўлади.

2°. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар тоқ функциялар бўлса, у ҳолда

$$f(x)+g(x), \quad f(x)-g(x)$$

функциялар тоқ бўлади,

$$f(x)\cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x)\neq 0)$$

функциялар эса жуфт бўлади.

4- §. Монотон функциялар

$y=f(x)$ функция X тўпламда аниқланган бўлсин.

7-таъриф. *Агар аргумент x нинг X тўпламдан олинган ихтиёрий x_1 ва x_2 қийматлари учун $x_1<x_2$ бўлишидан*

$$f(x_1)<f(x_2) \qquad (f(x_1)\leqslant f(x_2))$$

тенгсизлик ўринли бўлиши келиб чиқса, у ҳолда $f(x)$ функция X тўпламда ўсувчи (камаймайдиган) функция дейилади.

8-таъриф. *Агар аргумент x нинг X тўпламдан олинган ихтиёрий x_1 ва x_2 қийматлари учун $x_1<x_2$ бўлишидан*

$$f(x_1)>f(x_2) \qquad (f(x_1)\geqslant f(x_2))$$

тенгсизлик ўринли бўлиши келиб чиқса, у ҳолда $f(x)$ функция X тўпламда камаювчи (ўсмайдиган) функция дейилади.

Ўсувчи ҳамда камаювчи функциялар монотон функциялар дейилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x) = x^2$$

функция $[0, +\infty)$ тўпламда ўсувчи бўлади. Дарҳақиқат, $[0, +\infty)$ да ихтиёрий x_1 ва x_2 нуқталар олиб, $x_1<x_2$ бўлсин дейлик. Равшанки, $0\leqslant x_1<x_2<+\infty$. Унда

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)<0$$

бўлади, чунки $x_1+x_2>0$, $x_1-x_2<0$.

Натижада $f(x_1)-f(x_2)<0 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ тенгсизликка эга бўламиз.

Демак, $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$. Бу эса 7-таърифга кўра берилган

функциянинг $[0, +\infty)$ да ўсувчи функция эканини билдиради.

2. Ушбу

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

функцияни қарайлик.

Бу функциянинг аниқланиш соҳаси $[-1, +\infty)$ бўлади. Шу $[-1, +\infty)$ тўпламда ихтиёрий x_1 ва x_2 нуқталарни олиб, $x_1 < x_2$ дейлик. Равшанки, $-1 \leqslant x_1 < x_2 < +\infty$. Унда

$$f(x_2) - f(x_1) = \sqrt{x_2+1} - \sqrt{x_1+1} = \frac{(\sqrt{x_2+1} - \sqrt{x_1+1})}{\sqrt{x_2+1} + \sqrt{x_1+1}} \times$$

$$\times (\sqrt{x_2+1} + \sqrt{x_1+1}) = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2+1} + \sqrt{x_1+1}} > 0$$

бўлади, чунки $x_2 - x_1 > 0$, $\sqrt{x_2+1} + \sqrt{x_1+1} \geqslant 0$. Демак,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Бу эса берилган функция $[-1, +\infty)$ да ўсувчи функция эканини билдиради.

3. Ушбу

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

функция $[1, +\infty)$ тўпламда камаювчи функция бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $[1, +\infty)$ тўпламда ихтиёрий x_1 ва x_2 нуқталарни олиб, $x_1 < x_2$ дейлик. Унда

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{1+x_1^2} - \frac{x_2}{1+x_2^2} = \frac{x_1 + x_1 x_2^2 - x_2 - x_2 x_1^2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} =$$

$$= \frac{x_1 - x_2 + x_1 x_2 (x_2 - x_1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} = \frac{(x_1 - x_2)(1 - x_1 x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$$

бўлади. Равшанки $x_1 - x_2 < 0$, $(1+x_1^2)(1+x_2^2) > 0$ ва $[1, +\infty)$ да $1 - x_1 x_2 < 0$. Демак, $f(x_1) - f(x_2) > 0$. Кейинги тенгсизликдан $f(x_1) > f(x_2)$ бўлиши келиб чиқади. Шундай қилиб $x_1 < x_2$ бўлишидан $f(x_1) > f(x_2)$ ни топдик. Бу эса берилган функциянинг $[1, +\infty)$ да камаювчи эканини билдиради.

Айтайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар X тўпламда ўсувчи (камаювчи) бўлиб, C ўзгармас сон бўлсин. У ҳолда:

1°. $f(x) + C$ функция ўсувчи (камаювчи) бўлади.

2°. $C > 0$ бўлганда $C \cdot f(x)$ функция ўсувчи бўлади,
$C < 0$ бўлганда $C \cdot f(x)$ функция камаювчи бўлади.

3°. $f(x) + g(x)$ функция ўсувчи (камаювчи) бўлади.

5- §. Даврий функциялар

$y = f(x)$ функция X тўпламда аниқланган бўлсин.

9-таъриф. *Агар шундай ўзгармас $T\,(T \neq 0)$ сон мавжуд бўлсаки, ихтиёрий $x \in X$ учун*

1) $x-T\in X, \quad x+T\in X,$
2) $f(x+T)=f(x)$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ даврий функция дейилади. Бундаги T сон $f(x)$ функциянинг даври дейилади.

Масалан,

$$y=\sin x,\ y=\cos x$$

функциялар даврий функциялар бўлиб, уларнинг даври 2π га тенг,

$$y=\operatorname{tg} x$$

функция ҳам даврий функция, унинг даври π га тенг.

Мисол. Ушбу

$$f(x)=\{x\}$$

функцияни қарайлик, бунда $\{x\}$ орқали x нинг каср қисми белгиланган (масалан, $\{1{,}5\}=0{,}5$, $\{0{,}75\}=0{,}75$, $\{2\}=0$). Бу функция $(-\infty, +\infty)$ да аниқланган. Айтайлик, T — ихтиёрий $(T\neq 0)$ бутун сон бўлсин: $T=m$ $(m=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$. Унда ихтиёрий $x\in(-\infty, +\infty)$ учун

$$x-T\in(-\infty, +\infty),\ x+T\in(-\infty, +\infty)$$

бўлиб,

$$f(x+T)=\{x+T\}=\{x\}=f(x)$$

бўлади. Демак, берилган функция даврий функция, унинг даври $T=m$ бўлади.

1°. Агар $f(x)$ даврий функция бўлиб, унинг даври T га $(T\neq 0)$ тенг бўлса,

$$T_n=nT \quad (n=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

сонлар ҳам шу функциянинг даври бўлади.

2°. Агар T_1 ва T_2 сонлар $f(x)$ функциянинг даври бўлса, у ҳолда $T_1+T_2(T_1+T_2\neq 0)$ ҳамда $T_1-T_2(T_1\neq T_2)$ сонлар ҳам $f(x)$ функциянинг даври бўлади.

3°. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ даврий функциялар бўлиб, уларнинг ҳар бирининг даври T бўлса $(T\neq 0)$, у ҳолда

$$f(x)+g(x),\ f(x)-g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}\ (g(x)\neq 0)$$

функциялар ҳам даврий функциялар бўлиб, T сон уларнинг ҳам даври бўлади.

6-§. Тескари функция. Мураккаб функция

$y=f(x)$ функция X да аниқланган бўлиб, Y_f эса бу функция қийматларидан иборат тўплам бўлсин:

$$Y_f=\{f(x):\ x\in X\}.$$

Айтайлик, Y_f тўпламдаги ҳар бир y сон X тўпламдаги биттагина x нинг қийматига мос келсин. Равшанки, бу ҳолда Y_f тўпламдан олинган ҳар бир y га X тўпламда битта x мос келиб, бу мослик натижасида функция ҳосил бўлади. Одатда бу функция $y=f(x)$ функцияга нисбатан тескари функция дейилади ва у $x=f^{-1}(y)$ каби белгиланади.

Мисол. Ушбу

$$y=f(x)=\frac{1}{2}x+1$$

функцияни $[0,\ 1]$ да қарайлик. Бу функция қийматлари тўплами

$$Y_f=\left[1,\ \frac{3}{2}\right]$$

бўлади. $Y_f=\left[1,\ \frac{3}{2}\right]$ да аниқланган ушбу

$$x=2y-1$$

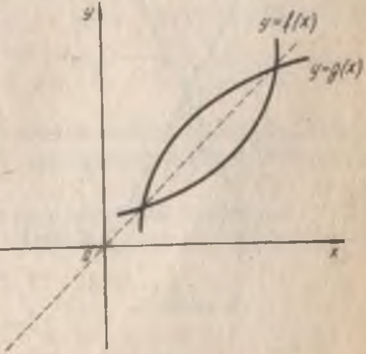
функция берилган $y=\frac{1}{2}x+1$ функцияга нисбатан тескари функция бўлади.

Юқорида айтилганлардан $y=f(x)$ да x — аргумент, y эса функцияси, тескари

$$x=f^{-1}(y)$$

функцияда эса y — аргумент, x эса унинг функцияси бўлиши кўринади. Демак, берилган функция ҳамда унга тескари функцияда аргумент билан функциянинг роллари алмашишар экан. Қулайлик учун кўп ҳолларда тескари функция аргументини ҳам x, унинг функциясини y каби белгиланади: $y=g(x)$.

$y=f(x)$ га нисбатан тескари бўлган $y=g(x)$ функция графиги, $y=f(x)$ функция графигини I ва III чораклар биссектрисаси атрофида 180° га айлантириш натижасида ҳосил бўлади (12- чизма).



12- чизма

$y=f(x)$ функция X да аниқланган бўлиб, Y_f эса шу функция қийматлари тўплами бўлсин:

$$Y_f=\{f(x):x\in X\}.$$

Бу Y_f тўпламда $z=F(y)$ функция аниқланган бўлсин. Натижада X тўпламдан олинган ҳар бир x га Y_f тўпламда битта y:

$$f:x\rightarrow y\quad (y=f(x)),$$

ва Y_f тўпламдаги бундай y сонга битта z:

$$F:y\rightarrow z\ \ (z=f(y))$$

сон мос қўйилади. Демак, X тўпламдан олинган ҳар бир x сонга битта z сон мос қўйилиб, янги функция ҳосил бўлади:

$$z=F(f(x)).$$

Одатда бундай функция *мураккаб функция* дейилади. Бу мураккаб функция $y=f(x)$ ҳамда $z=F(y)$ функциялар ёрдамида ҳосил бўлган.

Масалан,

$$z=(x+1)^2$$

функция $y=x+1$ ва $z=y^2$ функциялар ёрдамида ҳосил бўлган мураккаб функциядир.

7- §. Элементар функциялар

1°. Бутун рационал функциялар. Ушбу

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$$

кўринишдаги функция *бутун рационал функция* дейилади. Бунда a_0, a_1, ..., a_n — ўзгармас сонлар, n эса натурал сон. Бу функция $R=(-\infty, +\infty)$ да аниқланган.

Бутун рационал функциянинг баъзи бир хусусий ҳоллари:

а) Чизиқли функция. У

$$y=ax+b \qquad (a\neq 0)$$

кўринишга эга, бунда a, b — ўзгармас сонлар.

Чизиқли функция:

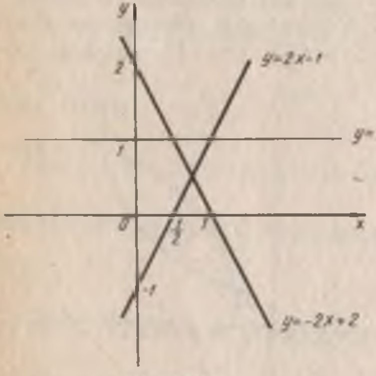
1) $(-\infty, +\infty)$ да аниқланган,

2) $a>0$ бўлганда ўсувчи, $a<0$ бўлганда камаювчи,

3) графиги текисликда тўғри чизиқдан иборатдир. Ушбу

$$y=2x-1,\ y=-2x+2,\ y=1$$

чизиқли функцияларнинг графиги 13- чизмада тасвирланган.



13- чизма

б) Квадратик функция. У

$$y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$$

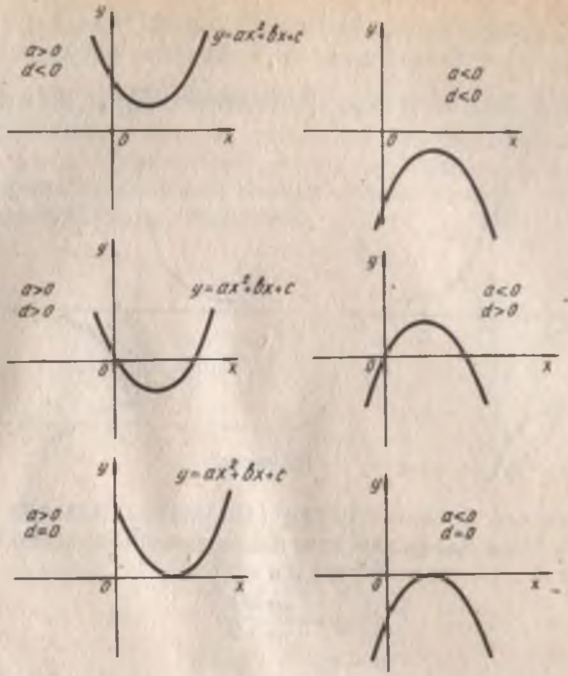
кўринишга эга. Бунда a, b, c — ўзгармас сонлар. Квадратик функция $R=(-\infty, +\infty)$ да аниқланган. Унинг графиги параболадан иборат. Параболанинг текисликдаги вазиятини аниқлаш учун квадратик функцияни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+$$

$$+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a^2}=$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

$y=ax^2+bx+c$ функция графигининг текисликда жойлашиши да $d=b^2-4ac$ миқдорларнинг ишорасига боғлиқ бўлади зма):



14- чизма

2°. Қаср рационал функциялар. Ушбу

$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}$$

кўринишдаги функция *каср рационал функция* дейилади. Бунда a_0, a_1, ..., a_n ва b_0, b_1, ..., b_m лар ўзгармас сонлар, n, m — натурал сонлар. Бу функция

$$X=(-\infty,\ +\infty)\setminus\{x: b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m=0\}$$

тўпламда, яъни касрнинг махражини нолга айлантирувчи нуқталардан фарқли бўлган барча ҳақиқий сонлардан иборат тўпламда аниқланган.

Қаср рационал функциянинг баъзи бир хусусий ҳоллари:

а) Тескари пропорционал боғланишни ифодаловчи ушбу

$$y=\frac{a}{x} \qquad (x\neq 0)$$

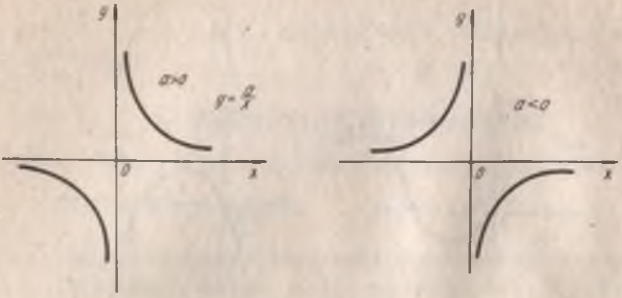
фунцияни қарайлик. Бунда a — ўзгармас сон. Бу функция:

1) $X=(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$ да аниқланган,

2) тоқ функция. Демак, унинг графиги координата бошига нисбатан симметрик,

3) a нинг мусбат ёки манфийлигига қараб функция $(-\infty, 0)$ ва $(0, +\infty)$ оралиқларнинг ҳар бирида камаювчи ёки ўсувчи бўлади.

Равшанки, $y=\frac{a}{x}$ функция графигининг текисликда жойлашиши



15- чизма

a нинг ишорасига боғлиқ бўлади (15- чизма). Одатда 15- чизмада тасвирланган эгри чизиқлар *тенг ёнли гипербола* дейилади.

б) Каср чизиқли функция. У

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

кўринишга эга. Бу функция $X=(-\infty, +\infty)\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ тўпламда аниқланган.

Каср чизиқли функцияни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\frac{a}{c}\cdot\frac{x+\frac{d}{c}+\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{x+\frac{d}{c}}=$$

$$=\frac{a}{c}\left(1+\frac{\frac{bc-ad}{ac}}{x+\frac{d}{c}}\right)=\frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{x+\frac{d}{c}}+\frac{a}{c}.$$

Демак, қаралаётган функция ушбу

$$y=\frac{\alpha}{x+\beta}+\gamma$$

кўринишда бўлар экан $\left(\alpha=\frac{bc-ad}{c^2},\quad \beta=\frac{\alpha}{c},\quad \gamma=\frac{a}{c}\right)$.

Каср чизиқли функциянинг графиги тенг ёнли гипербола каби бўлади. Масалан,

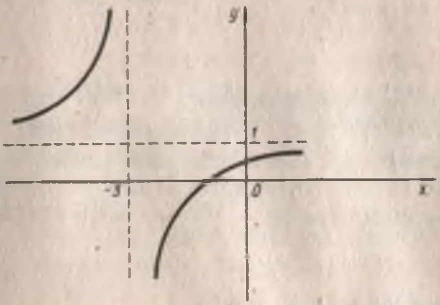
$$y=\frac{x+1}{x+3}=\frac{x+3-2}{x+3}=1-\frac{2}{x+3}$$

функциянинг графиги 16- чизмада тасвирланган.

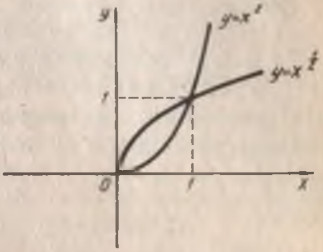
3°. **Даражали функция.** Ушбу

$$y=x^{\alpha} \qquad (x\geqslant 0)$$

кўринишдаги функция *даражали функция* дейилади. Даражали функциянинг аниқланиш соҳаси α га боғлик бўлади. Агар $\alpha>0$ бўлса, $y=x^{\alpha}$ функция $(0, +\infty)$ да ўсувчи, $\alpha<0$ да камаювчи бўлади. Даражали функция графиги текисликнинг (0, 0) ҳамда (1, 1) нуқталаридан ўтади. Масалан,



16- чизма



17- чизма

$$y=x^2, \qquad y=x^{\frac{1}{2}}$$

функция графиклари 17- чизмада тасвирланган.

4°. **Кўрсаткичли функция.** Ушбу

$$y=a^x$$

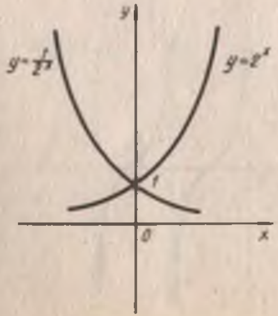
кўринишдаги функция *кўрсаткичли функция* дейилади, бунда a ҳақиқий сон, $a>0$ ва $a\neq 1$.

Кўрсаткичли функция:

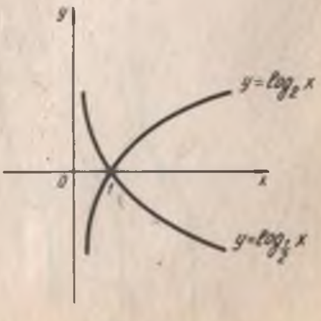
1) $(-\infty, +\infty)$ да аниқланган,

2) ихтиёрий x да $y=a^x>0$,

3) $a>1$ бўлганда $y=a^x$ ўсувчи, $0<a<1$ бўлганда $y=a^x$ камаювчи.



18- чизма



19- чизма

Кўрсаткичли функция графиги OX ўқидан юқорида жойлашган ва доим текисликнинг (0, 1) нуктасидан ўтади. Масалан, $y=2^x$ ва $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ функцияларнинг графиги 18- чизмада тасвирланган.

5°. Логарифмик функция. Ушбу

$$y=\log_a x$$

кўринишдаги функция *логарифмик функция* дейилади, бунда

$$a>0 \text{ ва } a\neq 1.$$

Логарифмик функция:
1) $(0, +\infty)$ да аниқланган,
2) $y=a^x$ функцияга нисбатан тескари функция,
3) $a>1$ бўлганда $y=\log_a x$ ўсувчи, $0<a<1$ бўлганда камаювчи.

Логарифмик функция графиги OY ўқининг ўнг томонида жойлашган ва доим текисликнинг (1, 0) нуктасидан ўтади. Масалан, $y=\log_2 x$ ва $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ функцияларнинг графиги 19- чизмада тасвирланган.

6°. Тригонометрик функциялар. Ушбу

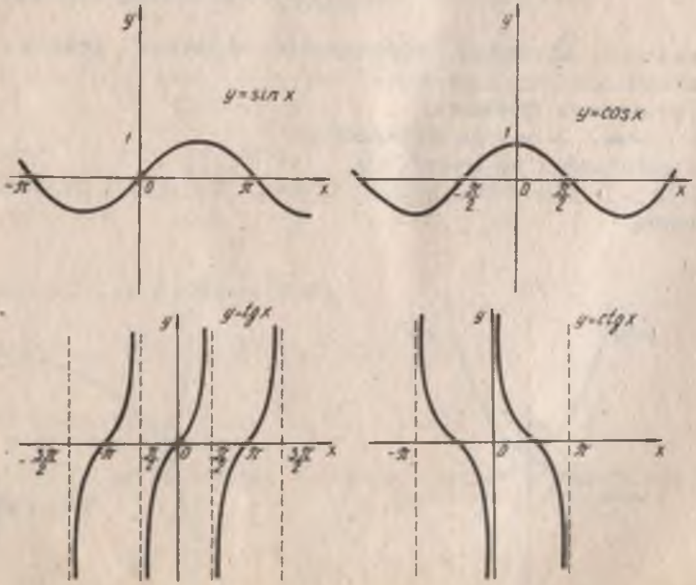
$$y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\operatorname{tg} x,\ y=\operatorname{ctg} x,\ y=\sec x,\ y=\operatorname{cosec} x.$$

функциялар *тригонометрик функциялар* дейилади.

$y=\sin x$ хамда $y=\cos x$ функциялар $R=(-\infty, +\infty)$ да аниқланган 2π даврли функциялар бўлиб, ихтиёрий x да

$$-1\leqslant \sin x\leqslant 1,\ -1\leqslant \cos x\leqslant 1$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.



20- чизма

$\mathrm{tg}x$, $\mathrm{ctg}x$, $\sec x$, $\mathrm{cosec}\,x$ функциялар $\sin x$, $\cos x$ функциялар орқали қуйидагича ифодаланади:

$$\mathrm{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x},\qquad \mathrm{ctg}x=\frac{\cos x}{\sin x},\qquad \sec x=\frac{1}{\cos x},\qquad \mathrm{cosec}\,x=\frac{1}{\sin x}.$$

$\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}x$ ҳамда $\mathrm{ctg}x$ функцияларнинг графиклари 20- чизмада тасвирланган.

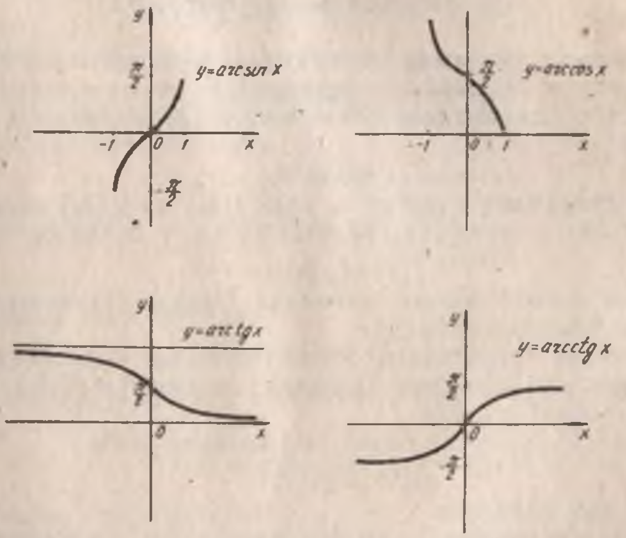
7°. Тескари тригонометрик функциялар. Ушбу

$$y=\arcsin x,\ y=\arccos x,\ y=\mathrm{arctg}x,\ y=\mathrm{arcctg}x$$

функциялар *тескари тригонометрик функциялар* дейилади.

Масалан, $y=\arcsin x$ функциянинг аниқланиш соҳаси $[-1,\ 1]$ оралиқдан иборат бўлиб, қийматлар тўплами эса $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$дан иборатдир.

Юқорида қайд этилган $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg}x$ ҳамда $\mathrm{arcctg}x$ функцияларнинг графиклари 21- чизмада тасвирланган.



21- чизма

3-БОБ

ТЕНГЛАМАЛАР

Олий математиканинг турли соҳаларидаги масалалар кўп ҳолларда маълум тенгламаларни ечиш билан ҳал қилинади. Шуни эътиборга олиб ушбу бобда тенгламалар ҳақидаги маълумотларни қисқача баён этамиз.

1-§. Умумий маълумотлар

$f(x)$ функция F тўпламда $(F\subset R)$, $g(x)$ функция эса G тўпламда $(G\subset R)$ берилган бўлсин. Бу функцияларнинг аниқланиш соҳаси бўлган F ва G тўпламларнинг кўпайтмасини (кесишмасини) M билан белгилайлик:

$$F\cap G=M.$$

Агар M тўпламдан олинган x_0 учун $f(x_0)$ ва $g(x_0)$ сонлар бир-бирига тенг бўлса, яъни $f(x_0)=g(x_0)$ бўлса, у ҳолда x_0

$$f(x)=g(x) \tag{1}$$

тенгламанинг *илдизи (ечими)* дейилади. Одатда (1) муносабат бир номаълумли тенглама дейилади.

Тенгламанинг барча илдизларини (илдизлар тўпламини) топиш билан тенглама ечилади. Агар илдизлар тўплами бўш бўлса, (1) тенглама ечимга эга бўлмайди.

Берилган (1) тенглама билан бир қаторда ушбу

$$f_1(x)=g_1(x) \tag{2}$$

тенгламани ҳам қарайлик.

Агар (1) тенгламанинг ҳар бир илдизи (2) тенгламанинг ҳам илдизи бўлса, у ҳолда (2) тенглама (1) тенгламанинг *натижаси* дейилади ва

$$f(x)=g(x)\Rightarrow f_1(x)=g_1(x)$$

каби белгиланади.

Агар (2) тенглама (1) тенгламанинг натижаси бўлса, ва аксинча, (1) тенглама ўз навбатида (2) тенгламанинг натижаси бўлса, у ҳолда (1) ва (2) тенгламалар *тенг кучли (эквивалент) тенгламалар* дейилади ва

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow f_1(x)=g_1(x)$$

каби белгиланади.

Демак, тенг кучли тенгламаларнинг илдизлари тўплами бир хил бўлар экан.

Тенг кучли тушунчаси тенгламаларни ечишда кенг қўлланилади. Одатда, берилган тенгламани ечишда уни тенг кучли, айни пайтда ундан соддароқ бўлган тенглама билан алмаштирилади. Бу жараён бир неча бор такрорланиши натижасида тенглама содда тенгламага келади ва уни ечиб берилган тенгламанинг илдизлари топилади.

Энди тенгламаларнинг ўзаро тенг кучлилиги ҳақида баъзи бир тасдиқларни келтирамиз:

1°. Ушбу

$$f(x)=g(x) \text{ ва } f(x)-g(x)=0$$

тенгламалар тенг кучлидир:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)=0.$$

2°. Ихтиёрий a сон учун

$$f(x)=g(x) \text{ ва } f(x)+a=g(x)+a$$

тенгламалар тенг кучлидир:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)+a=g(x)+a.$$

3°. Ихтиёрий a $(a\neq 0)$ сон учун

$$f(x)=g(x) \text{ ва } af(x)=ag(x)$$

тенгламалар тенг кучлидир:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow af(x)=ag(x).$$

4°. Ихтиёрий a $(a>0,\ a\neq 1)$ сон учун

$$f(x)=g(x) \text{ ва } a^{f(x)}=a^{g(x)}$$

тенгламалар тенг кучлидир:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow a^{f(x)}=a^{g(x)}$$

5°. Ихтиёрий натурал n сон учун, $f(x)\geqslant 0$, $g(x)\geqslant 0$ бўлганда ушбу

$$f(x)=g(x) \text{ ва } f^n(x)=g^n(x)$$

тенгламалар тенг кучлидир:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow f^n(x)=g^n(x).$$

6°. Агар $a>0$, $a\neq 1$ бўлиб, $f(x)>0$, $g(x)>0$ бўлса, у ҳолда

$$f(x)=g(x) \text{ ва } \log_a f(x)=\log_a g(x)$$

тенгламалар тенг кучли тенгламалар бўлади:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow\log_a f(x)=\log_a g(x).$$

7°. Агар $\varphi(x)$ функция M тўпламда аниқланган бўлиб, $\forall x\in M$ учун $\varphi(x)\neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$f(x)=g(x) \text{ ва } f(x)\varphi(x)=g(x)\varphi(x)$$

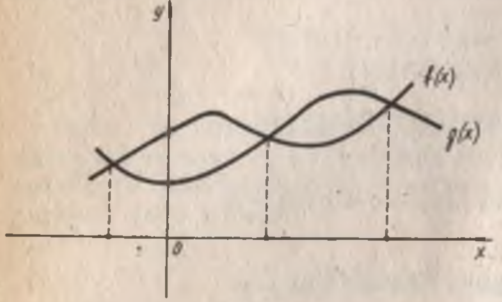
тенгламалар тенг кучли тенгламалар бўлади:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)\cdot\varphi(x)=g(x)\cdot\varphi(x).$$

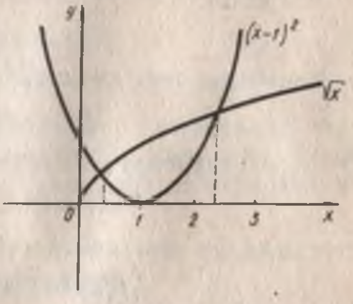
Бирор

$$f(x)=g(x)$$

тенглама берилган бўлсин. Текисликда Декарт координаталар системасини олиб, $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг графикларини чизамиз. Фараз қилайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг графиклари 22- чизмада тасвирланган эгри чизиқларни ифодаласин. Бу функция графиклари кесишган нуқталарининг абсциссалари берилган тенгламанинг илдизлари бўлади. Масалан, ушбу



22- чизма



23- чизма

$$\sqrt{x}=(x-1)^2 \tag{2'}$$

тенгламани қарайлик. $f(x)=\sqrt{x}$ ва $g(x)=(x-1)^2$ функцияларнинг графикларини чизамиз (23- чизма). Чизмадан кўринадики, $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=(x-1)^2$ функцияларнинг графиклари иккита нуқтада кесишади. Демак, берилган (2′) тенгламанинг иккита ечими бўлиб, улардан биттаси 0 билан 1 орасида, иккинчиси 2 билан 3 орасида бўлади.

2- §. Рационал тенгламалар

Бирор

$$f(x)=g(x)$$

тенглама берилган бўлсин. Юқорида айтиб ўтдикки, у

$$f(x)-g(x)=0 \tag{3}$$

тенгламага тенг кучли бўлади. Агар $f(x)-g(x)=F(x)$ десак, унда (3) тенглама ушбу

$$F(x)=0 \tag{4}$$

кўринишга келади. Агар $F(x)$ рационал функция бўлса, (4) тенглама *рационал тенглама* дейилади.

Рационал тенгламалар мазкур курснинг олий алгебра бўлимида батафсил ўрганилади. Бу ерда биз рационал тенгламаларнинг баъзи бир хусусий ҳолларинигина келтириш билан кифояланамиз.

1°. $F(x)$ **чизикли функция бўлсин.** $F(x)=ax+b$, бунда a ва b ўзгармас ҳақиқий сонлар. Бу ҳолда (4) тенглама

$$ax+b=0 \qquad (a\neq 0) \tag{5}$$

кўринишда бўлади. (5) тенглама чизиқли тенглама дейилади. Унинг ечими a, b сонларга боғлиқ.

Агар $a\neq 0$ бўлса, унда

$$ax+b=0 \Rightarrow ax=-b \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$$

бўлиб, (5) тенглама ягона $x=-\frac{b}{a}$ ечимга эга ва ечимлар тўплами $E=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$ бўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\frac{x-1}{5}+\frac{3x-9}{2}=\frac{x}{3}-2$$

тенгламани ечинг.

Бу тенглама қуйидагича ечилади:

$$\frac{x-1}{5}+\frac{3x-9}{2}=\frac{x}{3}-2 \Leftrightarrow 6x-6+45x-135=10x-60 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 41x=81 \Leftrightarrow x=\frac{81}{41}.$$

Демак, берилган тенгламанинг ечимлар тўплами $E=\left\{\frac{81}{41}\right\}$ бўлади.

2. Ушбу

$$(p-1)x+2=p+1$$

тенгламани ечинг. Равшанки, бу тенгламанинг ечими p нинг қийматига боғлиқ бўлади.

Агар $p\neq 1$ бўлса, унда

$$(p-1)x+2=p+1 \Leftrightarrow (p-1)x=p-1 \Leftrightarrow x=\frac{p-1}{p-1}=1$$

бўлади.

Агар $p=1$ бўлса, у ҳолда берилган тенглама

$$0\cdot x+2=2$$

кўринишга келиб, у номаълум x нинг ҳар қандай қийматида ўринли бўлади.

Демак, $p\neq 1$ бўлганда тенгламанинг ечимлар тўплами $E=\{1\}$ бўлиб, $p=1$ бўлганда эса $E=(-\infty, +\infty)$ бўлади.

2°. $F(x)$ **квадратик функция бўлсин:** $F(x)=ax^2+bx+c$, бунда a, b, c ўзгармас ҳақиқий сонлар. У ҳолда (4) тенглама қуйидагича

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0) \tag{6}$$

бўлади. (6) тенглама *квадрат тенглама* дейилади. Унинг ечими a, b, c сонларга боглик. Бу сонлардан тузилган ушбу

$$D=b^2-4ac$$

микдор квадрат тенгламанинг *дискриминанти* дейилади.

Агар $D>0$ бўлса, унда

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0)$$

квадрат тенглама иккита

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

ечимларга эга бўлиб, ечимлар тўплами

$$E=\left\{\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}; \qquad \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right\}$$

бўлади.

Агар $D=0$ бўлса, у ҳолда (6) квадрат тенгламанинг илдизлари бир-бирига тенг

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$$

ечимларга эга бўлиб, ечимлар тўплами $E=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$ бўлади.

Агар $D<0$ бўлса, (6) квадрат тенглама ечимга эга эмас. Бу ҳолда ечимлар тўплами бўш тўплам бўлади: $E=\varnothing$.

Квадрат тенгламанинг илдизлари ҳакида Виет теоремасини келтирамиз.

Виет теоремаси. Агар x_1 ва x_2 лар

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0)$$

квадрат тенгламанинг илдизлари бўлса, у ҳолда

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

бўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$(p+1)x^2+2(p+1)x+p-2=0 \quad (p\neq -1)$$

квадрат тенгламани ечинг.

Бу тенгламанинг дискриминантини топамиз:

$$D=[2(p+1)]^2-4(p+1)\,(p-2)=4(p+1)^2-4(p+1)\,(p-2)=$$
$$=4(p+1)\,(p+1-p+2)=12(p+1).$$

Демак, $D=12(p+1)$. Агар $p>-1$ бўлса, $D>0$ бўлиб, берилган тенглама

$$x_1=\frac{-2(p+1)+\sqrt{12(p+1)}}{2(p+1)}=-1+\sqrt{\frac{3}{p+1}},$$

$$x_2=\frac{-2(p+1)-\sqrt{12(p+1)}}{2(p+1)}=-1-\sqrt{\frac{3}{p+1}}$$

ечимларга эга бўлади. Бу ҳолда ечимлар тўплами:

$$E=\left\{-1+\sqrt{\frac{3}{p+1}},\quad -1-\sqrt{\frac{3}{p+1}}\right\}.$$

Агар $p<-1$ бўлса, $D<0$ бўлиб берилган тенгламанинг ечими мавжуд бўлмайди. Бу ҳолда ечимлар тўплами бўш тўплам бўлади: $E=\varnothing$.

2. Агар x_1, x_2 лар

$$2x^2-5x+1=0$$

квадрат тенгламанинг илдизлари бўлса, $x_1^2x_2+x_1x_2^2$ ни ҳисобланг.

Берилган тенгламанинг дискриминанти

$$D=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 1=25-8=17.$$

Демак, берилган тенглама x_1 ва x_2 иккита илдизга эга. Виет теоремасига кўра

$$x_1+x_2=\frac{5}{2},$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{1}{2}.$$

Бу тенгликларни эътиборга олиб топамиз:

$$x_1^2x_2+x_1x_2^2=x_1x_2(x_1+x_2)=\frac{5}{4}.$$

Демак,

$$x_1^2x_2+x_1x_2^2=\frac{5}{4}.$$

3°. $F(x)$ функция қуйидагича бўлсин: $F(x)=ax^4+bx^2+c$, бунда a, b, c ўзгармас сонлар. Бу ҳолда (4) тенглама ушбу

$$ax^4+bx^2+c=0 \qquad (7)$$

кўринишда бўлади. (7) тенглама *биквадрат тенглама* дейилади.

Биквадрат тенглама $y=x^2$ алмаштириш натижасида квадрат тенгламага келади. Уни ечиб берилган биквадрат тенгламанинг ечимлари топилади.

Мисол. Ушбу

$$9x^4-25x^2+16=0$$

тенгламани ечинг.

Бу тенгламада $y=x^2$ алмаштириш қиламиз. Унда

$$9y^2-25y+16=0$$

квадрат тенглама ҳосил бўлади:

$$y_{1,2}=\frac{25\pm\sqrt{625-4\cdot9\cdot16}}{18}=\frac{25\pm\sqrt{49}}{18}=\frac{25\pm7}{18}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{array}{l} y_1=\frac{25+7}{18}=\frac{16}{9}, \\ y_2=\frac{25-7}{18}=1. \end{array}$$

Демак,

$$x^2=\frac{16}{9}\Leftrightarrow\left(x-\frac{4}{3}\right)\left(x+\frac{4}{3}\right)=0\Leftrightarrow x_1=\frac{4}{3},\quad x_2=-\frac{4}{3},$$

$$x^2=1\Leftrightarrow(x-1)\ (x+1)=0\Leftrightarrow x_3=1,\quad x_4=-1.$$

Шундай қилиб, берилган тенгламанинг ечимлар тўплами

$$E=\left\{\frac{4}{3},\quad -\frac{4}{3},\quad 1,\quad -1\right\}$$

бўлишини топамиз.

4°. $F(x)$ функция қуйидагича бўлсин:

$$F(x)=ax^4+bx^3+cx^2+bx+a,$$

бунда a, b, c ўзгармас сонлар. Бу ҳолда (4) тенглама ушбу

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0 \tag{8}$$

кўринишда бўлади. (8) тенглама *симметрик тенглама* дейилади. Тенгламанинг ҳар икки томонини x^2 га $(x\neq0)$ бўлиб топамиз:

$$ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0.$$

Агар

$$ax^2+\frac{a}{x^2}=a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=a\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2a,$$

$$bx+\frac{b}{x}=b\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда (8) тенглама

$$a\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c-2a=0$$

кўринишга келади. Кейинги тенгликда $x+\frac{1}{x}=y$ дейилса,

$$ay^2+by+c-2a=0$$

квадрат тенглама ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, симметрик тенгламани ечиш квадрат тенгламани ечишга келади.

Умуман, $F(x)$ функцияни

$$F(x)=a[\varphi(x)]^2+b\varphi(x)+c$$

кўринишда ёзиш мумкин бўлса, $y=\varphi(x)$ алмаштириш ёрдамида

$$F(x)=0$$

тенглама квадрат тенгламага келади.

Мисол. Ушбу

$$x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=8$$

тенгламани қарайлик. Бу ҳолда

$$F(x)=x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-8$$

бўлиб, уни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$F(x)=x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-8=x^2+2x\cdot\frac{x}{x-1}+$$

$$+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-2x\cdot\frac{x}{x-1}-8=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\frac{x^2}{x-1}-8=$$

$$=\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2-2\frac{x^2}{x-1}-8.$$

Натижада

$$\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2-2\cdot\frac{x^2}{x-1}-8=0$$

тенгламага келамиз. Бунда $\frac{x^2}{x-1}=y$ белгилаш киритилса

$$y^2-2y-8=0$$

квадрат тенглама ҳосил бўлади. Бу тенгламанинг илдизлари

$$y_1=4,\quad y_2=-2$$

бўлади. Демак,

$$\frac{x^2}{x-1}=4\Rightarrow x^2-4x+4=0\Rightarrow(x-2)^2=0\Rightarrow x_1=x_2=2,$$

$$\frac{x^2}{x-1}=-2\Rightarrow x^2+2x-2=0\Rightarrow x_{3,4}=\frac{-2\pm\sqrt{4+8}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_3=-1+\sqrt{3},\quad x_4=-1-\sqrt{3}.$$

Шундай килиб берилган тенгламанинг ечимлар тўплами

$$E=\{2;-1+\sqrt{3};-1-\sqrt{3}\}$$

бўлади.

3- §. Иррационал, кўрсаткичли ва логарифмик тенгламалар

1°. **Иррационал тенгламалар.** Номаълум x радикал (илдиз) ишораси остида қатнашган тенгламалар *иррационал тенгламалар* дейилади. Масалан,

$$\sqrt{x-2}=5,\quad \sqrt{x+5}+\sqrt[4]{2x+8}=7,$$

$$\sqrt[3]{x-2}+x=\sqrt{x^2-4}$$

тенгламалар иррационал тенгламалардир.

Иррационал тенгламаларни ечишдан аввал тенгламада қатнашган ифодаларнинг маънога эга бўладиган тўпламини аниқлаш керак бўлади.

Иррационал тенгламалар турли усуллар ёрдамида ечилади. Кўпчилик ҳолларда тенгламанинг ҳар икки томони квадратга кўтарилади. Бунда чет илдизлар ҳосил бўлиши мумкин. Топилган қийматни берилган тенгламага қўйиб, унинг ечим ёки ечим эмаслиги аниқланади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$$

тенгламани ечинг.

Тенгламадаги ифодалар маънога эга бўлиши учун

$$x+5\geqslant 0,\ \text{яъни}\ x\geqslant -5,$$
$$2x+8\geqslant 0,\ \text{яъни}\ x\geqslant -4$$

бўлиши лозим. Демак, $x\geqslant -4$ бўладиган ечимларни топиш керак.

Берилган тенглама қуйидагича ечилади:

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7\Rightarrow\sqrt{2x+8}=7-\sqrt{x+5}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(\sqrt{2x+8})^2=(7-\sqrt{x+5})^2\Rightarrow 2x+8=$$
$$=49-14\sqrt{x+5}+x+5\Rightarrow 14\sqrt{x+5}=46-x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(14\sqrt{x+5})^2=(46-x)^2\Rightarrow 196(x+5)=$$
$$=2116-92x+x^2\Rightarrow x^2-288x+1136=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{288\pm\sqrt{288^2-4\cdot 1136}}{2}\Rightarrow x_1=284,\ x_2=4\ .$$

(Равшанки, $284>-4$, $4>-4$.)

Энди топилган $x_1=284$ ва $x_2=4$ нинг берилган тенгламани каноатлантиришини текширамиз:

а) $x_1=284$ бўлган ҳолда:

$$\sqrt{x_1+5}+\sqrt{2x_1+8}=\sqrt{289}+\sqrt{576}\neq 7\ ,$$

б) $x_2=4$ бўлган ҳолда

$$\sqrt{x_2+5}+\sqrt{2x_2+8}=\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7\ .$$

Демак, берилган тенгламанинг ечими $x=4$ бўлади: $E=\{4\}$.

2. Ушбу

$$\sqrt{2|x|-x^2}=p$$

тенгламани ечинг.

Равшанки, бу тенгламанинг ечими p га боғлиқ бўлади.

Агар $p<0$ бўлса, тенглама ечимга эга бўлмайди: $E=\varnothing$.

Энди $p\geqslant 0$ бўлган ҳолни караймиз. Бу ҳолда

$$\sqrt{2|x|-x^2}=p\Leftrightarrow 2|x|-x^2=p^2\Leftrightarrow |x|^2-2|x|+p^2=0$$

булади. Ҳосил булган квадрат тенгламанинг дискриминанти

$$D=(-2)^2-4p^2=4-4p^2=4(1-p^2).$$

Агар $p>1$ булса, у ҳолда $D<0$ булиб, $|x|^2-2|x|+p^2=0$ тенглама ечимга эга эмас. Бинобарин, берилган тенглама ҳам ечимга эга булмайди.

Агар $p=1$ булса,

$$|x|^2-2|x|+1=0 \Rightarrow (|x|-1)^2=0 \Rightarrow |x|=1 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=-1$$

булиб, берилган тенглама иккита ечимга эга булади:

$$E=\{1,\ -1\}.$$

Энди $0<p<1$ булган ҳолни қарайлик. Бу ҳолда $D>0$ булиб $|x|^2-2|x|+p^2=0$ тенгламанинг ечимлари

$$|x|=1+\sqrt{1-p^2},\quad |x|=1-\sqrt{1-p^2}$$

булади. Равшанки,

$$|x|=1+\sqrt{1-p^2} \Rightarrow x_1=1+\sqrt{1-p^2},\ x_2=-(1+\sqrt{1-p^2}),$$

$$|x|=1-\sqrt{1-p^2} \Rightarrow x_3=1-\sqrt{1-p^2},\ x_4=-(1-\sqrt{1-p^2}).$$

Бу ҳолда берилган тенглама 4 та ечимга эга булади:

$$E=\{1+\sqrt{1-p^2};\ -(1+\sqrt{1-p^2});\ 1-\sqrt{1-p^2};\ -(1-\sqrt{1-p^2})\}.$$

Агар $p=0$ булса, юқорида келтирилганлардан куринадики, берилган тенглама учта $x_1=2$, $x_2=-2$, $x_3=0$ ечимларга эга булади: $E=\{2;\ -2;\ 0\}$.

Шундай қилиб берилган иррационал тенглама учун

1) $p<0$ булганда $E=\varnothing$,
2) $p=0$ булганда $E=\{2;\ -2;\ 0\}$,
3) $p=1$ булганда $E=\{1;\ -1\}$,
4) $0<p<1$ булганда $E=\{\pm(1+\sqrt{1-p^2});\ \pm(1-\sqrt{1-p^2})\}$,
5) $p>1$ булганда $E=\varnothing$

булади.

2°. Курсаткичли тенгламалар. Номаълум x даража курсаткичида қатнашган тенгламалар *курсаткичли тенгламалар* дейилади. Масалан,

$$4^x-5\cdot 2^x+6=0,\quad 9^{x^2+4x-4,5}=3,$$

$$4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$$

тенгламалар курсаткичли тенгламалардир. Курсаткичли тенгламаларни ечишда қуйидаги қоидалардан фойдаланилади:

1) $a^0=1 \quad (a\neq 0)$,
2) $a^n=\frac{1}{a^{-n}} \quad \left(a^{-n}=\frac{1}{a^n}\right)$,
3) $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$,
4) $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$,
5) $(a^n)^m=a^{nm}$,
6) $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$
7) $\left(\frac{a}{c}\right)^n=\frac{a^n}{c^n}$

Шунингдек, ушбу бобнинг 1-§ да келтирилган

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad (a>0,\ a\neq 1)$$

тасдиқдан ҳам фойдаланилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$9^{x^2+4x-4,5} = 3$$

тенгламани ечинг. Бу тенглама қуйидагича ечилади:

$$9^{x^2+4x-4,5} = 3 \Leftrightarrow 9^{x^2+4x-4,5} = 9^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x-4,5 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2+4x-5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = -5.$$

Демак, берилган тенгламанинг ечимлар тўплами $E=\{1;\ -5\}$ бўлади.

2. Ушбу

$$4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$$

тенгламани ечинг.

Бу тенглама қуйидагича ечилади:

$$4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} \Rightarrow 4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 4^{x-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4^x + 4^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} \Rightarrow 4^x\left(1+\frac{1}{2}\right) = 3^x\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\,4^x = \frac{4}{\sqrt{3}}\,3^x \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{8}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Демак, берилган тенгламанинг ечими $x = \frac{3}{2}$ бўлади: $E = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

3°. **Логарифмик тенгламалар.** Номаълум x логарифм белгиси остида ёки логарифм асосида қатнашган тенгламалар *логарифмик тенгламалар* дейилади. Масалан,

$$\log_9 x + \log_{x^2} 3 = 1,$$

$$\lg\sqrt{1+x} + 3\lg\sqrt{1-x} = \lg\sqrt{1-x^2} + 2$$

тенгламалар логарифмик тенгламалардир.

Логарифмик тенгламаларни ечишда, аввало

1) логарифм белгиси остидаги ифоданинг ҳар доим мусбат бўлишига,

2) логарифм асоси эса мусбат ва 1 дан фарқли бўлишига эътибор берилиши керак.

Логарифм таърифидан бевосита қуйидагилар келиб чиқади:

1°. $\log_a a = 1$,

2°. $\log_a 1 = 0$,

3°. $\log_a N_1 N_2 = \log_a N_1 + \log_a N_2$,

4°. $\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2$,

5°. $\log_a N^n = n \log_a N$,

6°. $\log_{a^n} N = \frac{1}{n} \log_a N$, $\log_{a^n} N^n = \log_a N$,

7°. $\log_a N \cdot \log_N a = 1$,

8°. $\log_a N = \frac{\log_c N}{\log_c a}$.

Бу келтирилган қоидалар ҳамда 1-§ даги

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \log_a f(x) = \log_a g(x) \qquad (a>0,\ a\neq 1,\ f(x)>0,\ g(x)>0)$$

тасдиқдан логарифмик тенгламаларни ечишда кенг фойдаланилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\sqrt{\log_x \sqrt{3x}} \cdot \log_3 x = -1 \qquad (x>0)$$

тенгламани ечинг.

Бу тенглама қуйидагича ечилади:

$$\sqrt{\log_x \sqrt{3x}} \cdot \log_3 x = -1 \Rightarrow \sqrt{\log_x \sqrt{3x}} = -\frac{1}{\log_3 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\log_x \sqrt{3x}} = -\log_x 3$$

Кейинги тенгликнинг чап томонидаги ифода мусбат. Шунинг учун

$$\log_x 3 < 0, \qquad 0 < x < 1$$

бўлиши керак. Шуни эътиборга олиб топамиз:

$$\left(\sqrt{\log_x \sqrt{3x}}\right)^2 = (-\log_x 3)^2 \Rightarrow \log_x \sqrt{3x} = \log_x^2 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\log_x 3 + 1) = \log_x^2 3 \Rightarrow 2\log_x^2 3 - \log_x 3 - 1 = 0.$$

Агар $\log_x 3 = y$ дейилса, унда $2y^2 - y - 1 = 0$ квадрат тенгламага келамиз. Равшанки, $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{1}{2}$ бўлиб, бу ечимлардан y_2 $\log_x 3 = y < 0$ шартни қаноатлантиради.

Демак,

$$\log_x 3 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{9}; \quad E = \left\{\frac{1}{9}\right\}.$$

2. Ушбу

$$\lg \sqrt{1+x} + 3 \lg \sqrt{1-x} = \lg \sqrt{1-x^2} + 2$$

тенгламани ечинг.

Бу тенглама номаълум x нинг $-1<x<1$ тенгсизликларни каноатлантирадиган кийматларидагина маънога эга.

Равшанки,

$$\lg\sqrt{1+x}+3\lg\sqrt{1-x}=\lg\sqrt{1-x^2}+2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\lg\sqrt{1+x}+3\lg\sqrt{1-x}=\lg\sqrt{1+x}+\lg\sqrt{1-x}+2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\lg\sqrt{1-x}=1\Rightarrow x=-99.$$

Бирок $x=-99$ юкоридаги $-1<x<1$ шартни каноатлантирмайди. Демак, берилган тенглама ечимга эга эмас.

4- §. Тригонометрик тенгламалар

Номаълум x тригонометрик функциялар белгиси остида катнашган тенгламалар *тригонометрик тенгламалар* дейилади.

Масалан,

$$4\operatorname{tg}\frac{x}{2}=3\sin x,\ \sin 3x-\sin x=\frac{1}{2},\ \sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin x.$$

тенгламалар тригонометрик тенгламалардир.

Қуйидаги

$$\sin x=a\qquad(|a|\leqslant 1)\tag{9}$$
$$\cos x=a\qquad(|a|\leqslant 1)\tag{10}$$
$$\operatorname{tg}x=a\tag{11}$$
$$\operatorname{ctg}x=a\tag{12}$$

тенгламаларга *содда тригонометрик тенгламалар* дейилади.

(9) тенгламанинг ечими

$$x=(-1)^n\arcsin a+n\pi\qquad(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots),$$

(10) тенгламанинг ечими

$$x=\pm\arccos a+2n\pi\qquad(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots),$$

(11) тенгламанинг ечими

$$x=\operatorname{arctg}a+n\pi\qquad(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots),$$

(12) тенгламанинг ечими эса

$$x=\operatorname{arcctg}a+n\pi\qquad(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

Одатда берилган тригонометрик тенгламани тенг кучли тенглама билан алмаштириш натижасида содда тригонометрик тенгламага келтирилади. Бу тенгламани ечиб берилган тригонометрик тенгламанинг ечимлари топилади.

Тригонометрик тенгламаларни уларга тенг кучли тенгламалар билан алмаштиришда тригонометрик функциялар орасидаги богланишлардан фойдаланилади. Қуйида бундай боғланишлардан баъзиларини келтирамиз.

1°. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$

2°. $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,$

3°. $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta,$

4°. $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$

5°. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$,

6°. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$,

7°. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\cos x - \sqrt{2}\cdot\sin\frac{x}{2} = 1$$

тенгламани ечинг.

Бу тенглама қуйидагича ечилади:

$$\cos x - \sqrt{2}\cdot\sin\frac{x}{2} = 1 \Rightarrow 1 - \cos x + \sqrt{2}\cdot\sin\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\frac{x}{2} + \sqrt{2}\cdot\sin\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \sin\frac{x}{2}\left(2\sin\frac{x}{2} + \sqrt{2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sin\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = n\pi \Rightarrow x = 2n\pi, \\ \sin\frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + n\pi \Rightarrow x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{2} + 2n\pi. \end{array}\right.$$

Демак, берилган тенгламанинг ечимлар тўплами

$$E = \{2n\pi;\ (-1)^{n+1}\frac{\pi}{2} + 2n\pi;\ n = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots\}.$$

2. Ушбу $\cos 2x + \cos^2 x = 0$ тенгламани ечинг.

Аввало $\cos^2 x$ ни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Унда берилган тенглама $\cos 2x + \frac{1+\cos 2x}{2} = 0$ кўринишга келади. Қейинги тенгликдан $\cos 2x = -\frac{1}{3}$ бўлиши келиб чиқади.

Демак,

$$2x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2n\pi \qquad (n = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots),$$

яъни

$$x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + n\pi \qquad (n = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

4- БОБ

ТЕНГСИЗЛИКЛАР

Ушбу бобда тенгсизликлар ҳақидаги маълумотларни қисқача баён этамиз.

1- §. Умумий маълумотлар

Икки $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар мос равишда F ва G тўпламларда ($F \subset R$, $G \subset R$) берилган бўлиб,

$$M = F \cap G \neq \varnothing$$

бўлсин.

Агар M тўпламдан олинган x_0 учун $f(x_0)$ ва $g(x_0)$ сонлар орасида

$$f(x_0) > g(x_0)$$

муносабат бажарилса, у ҳолда x_0 сон

$$f(x) > g(x) \qquad (1)$$

тенгсизликнинг *ечими* дейилади. Одатда (1) муносабат *бир номаълумли тенгсизлик* дейилади. Тенгсизликнинг барча ечимларини топиш (ечимлар тўпламини топиш) билан тенгсизлик ечилади. Агар ечимлар тўмлами бўш бўлса, (1) тенгсизлик ечимга эга бўлмайди.

(1) тенгсизлик билан бирга ушбу

$$f_1(x) > g_1(x) \qquad (2)$$

тенгсизликни қараймиз.

Агар (1) тенгсизликнинг ҳар бир ечими (2) тенгсизликнинг ҳам ечими бўлса, ва аксинча (2) тенгсизликнинг ҳар бир ечими (1) тенгсизликнинг ҳам ечими бўлса, у ҳолда (1) ва (2) тенгсизликлар *тенг кучли тенгсизликлар* дейилади ва

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow f_1(x) > g_1(x)$$

каби белгиланади.

Одатда, берилган тенгсизликни ечишда уни тенг кучли, айни пайтда ундан соддароқ бўлган тенгсизлик билан алмаштирилади. Бу жараён бир неча бор такрорланиши натижасида тенгсизлик содда тенгсизликка келади ва уни ечиб берилган тенгсизликнинг ечимлари топилади.

Энди тенгсизликларнинг ўзаро тенг кучлилиги ҳақида баъзи бир тасдиқларни келтирамиз:

1°. Ушбу $f(x) > g(x)$ ва $f(x)-g(x)>0$ тенгсизликлар тенг кучлидир:

$$f(x)>g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)>0.$$

2°. Ихтиёрий a сон учун $f(x)>g(x)$ ва $f(x)+a>g(x)+a$ тенгсизликлар тенг кучлидир:

$$f(x)>g(x) \Leftrightarrow f(x)+a>g(x)+a.$$

3°. Ихтиёрий $a>0$ сон учун $f(x)>g(x)$ ва $a\cdot f(x)>a\cdot g(x)$ тенгсизликлар тенг кучлидир:

$$f(x)>g(x) \Leftrightarrow a\cdot f(x)>a\cdot g(x).$$

4°. Ихтиёрий $a<0$ сон учун $f(x)>g(x)$ ва $a\cdot f(x)<a\cdot g(x)$ тенгсизликлар тенг кучлидир:

$$f(x)>g(x) \Leftrightarrow a\cdot f(x)<a\cdot g(x).$$

5°. Ихтиёрий тайин a $(1<a<+\infty)$ сон учун $f(x)>g(x)$ ва $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ тенгсизликлар тенг кучлидир:

$$f(x)>g(x) \Leftrightarrow a^{f(x)}>a^{g(x)}.$$

6°. Ихтиёрий тайин $a(0<a<1)$ сон учун $f(x)>g(x)$ ва $a^{f(x)}<a^{g(x)}$

тенгсизликлар тенг кучлидир:

$$f(x)>g(x) \Leftrightarrow a^{f(x)}<a^{g(x)}.$$

7°. Ихтиёрий натурал n сон учун, $f(x)>0$, $g(x)\geqslant 0$ $(x\in M)$ бўлганда $f(x)>g(x)$ ва $(f(x))^n>(g(x))^n$ $(x\in M)$ тенгсизликлар тенг кучлидир:

$$f(x)>g(x) \Leftrightarrow (f(x))^n>(g(x))^n.$$

8°. Ихтиёрий тайин $a(1<a<+\infty)$ сон учун, $f(x)>0$, $g(x)>0$ $(x\in M)$ бўлганда $f(x)>g(x)$ ва $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ тенгсизликлар тенг кучлидир:

$$f(x)>g(x) \Leftrightarrow \log_a f(x)>\log_a g(x).$$

9°. Ихтиёрий тайин $a(0<a<1)$ сон учун $f(x)>0$, $g(x)>0$ $(x\in M)$ бўлганда $f(x)>g(x)$ ва $\log_a f(x)<\log_a g(x)$ тенгсизликлар тенг кучлидир:

$$f(x) > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \log_a f(x) < \log_a g(x) .$$

10°. M тўпламда аниқланган ихтиёрий $\varphi(x) > 0$ функция учун $f(x) > g(x)$ ва $f(x) \cdot \varphi(x) > g(x) \cdot \varphi(x)$ тенгсизликлар тенг кучлидир:

$$f(x) > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \cdot \varphi(x) > g(x) \cdot \varphi(x) .$$

2- §. Рационал тенгсизликлар

Бирор

$$f(x) > g(x) \tag{1}$$

тенгсизлик берилган бўлсин. У $f(x) - g(x) > 0$ тенгсизликка тенг кучли бўлади.

Агар $F(x) = f(x) - g(x)$ десак, (1) тенгсизликка тенг кучли бўлган

$$F(x) > 0 \tag{2}$$

тенгсизликка келамиз.

Агар $F(x)$ рационал функция бўлса, (2) *рационал тенгсизлик* деб аталади. Биз қуйида рационал тенгсизликларнинг баъзи бир хусусий ҳолларини келтирамиз.

1°. $F(x)$ чизиқли функция бўлсин: $F(x) = ax + b$, бунда a ва b ўзгармас ҳақиқий сонлар. Бу ҳолда (2) тенгсизлик

$$ax + b > 0 \tag{3}$$

бўлади ва у чизиқли тенгсизлик дейилади.

Агар $a > 0$ бўлса, унда

$$ax + b > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -\frac{b}{a}$$

бўлиб, (3) тенгсизликнинг ечимлар тўплами $E = \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$ бўлади.

Агар $a < 0$ бўлса, унда

$$ax + b > 0 \quad \Rightarrow \quad x < -\frac{b}{a}$$

бўлиб, (3) тенгсизликнинг ечимлар тўплами $E = \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$ бўлади.

Мисол. Ушбу

$$(p - 1)x > p^2 - 1$$

тенгсизликни ечинг.

Бу тенгсизликнинг ечими p нинг қийматига боғлиқ бўлади.

Агар $p > 1$ бўлса, унда

$$(p - 1)x > p^2 - 1 \Rightarrow x > \frac{p^2 - 1}{p - 1} \Rightarrow x > p + 1$$

бўлиб, берилган тенгсизликнинг ечимлар тўплами $E = (p + 1, +\infty)$ бўлади.

Агар $p<1$ бўлса, унда

$$(p-1)x>p^2=1 \Rightarrow x<\frac{p^2-1}{p-1} \Rightarrow x<p+1$$

бўлиб, тенгсизликнинг ечимлар тўплами $E=(-\infty, p+1)$ бўлади.

Агар $p=1$ бўлса, тенгсизлик $0\cdot x>0$ кўринишга келиб, у номаълум x нинг ҳеч қандай қийматида бажарилмайди. Демак, бу ҳолда $E=\varnothing$ бўлади.

2°. $F(x)$ квадратик функция бўлсин: $F(x)=ax^2+bx+c$, бунда a, b, c ўзгармас ҳақиқий сонлар. Бу ҳолда (2) тенгсизлик

$$ax^2+bx+c>0 \qquad (4)$$

бўлади ва у квадрат тенгсизлик дейилади.

Маълумки, ax^2+bx+c квадрат учҳадни

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Бу муносабатдан кўринадики, ax^2+bx+c квадрат учҳаднинг ишораси a ҳамда $D=b^2-4ac$ нинг ишораларига боғлиқ бўлади.

Агар $a>0$, $D<0$ бўлса, у ҳолда x нинг барча қийматларида

$$ax^2+bx+c>0$$

бўлади.

Бу ҳолда (4) тенгсизликнинг ечимлар тўплами $E=(-\infty, +\infty)$ бўлади.

Агар $a>0$, $D>0$ бўлса, у ҳолда ax^2+bx+c квадрат учҳад иккита x_1 ва x_2 илдизларга эга бўлиб, (4) тенгсизлик $a(x-x_1)(x-x_2)>0$ кўринишни олади. Бу тенгсизлик интерваллар усули билан ечилади.

Қаралаётган тенгсизликнинг ечимлар тўплами $E=(-\infty, x_1)\cup(x_2, +\infty)$ бўлади.

Агар $a<0$, $D<0$ бўлса, у ҳолда ax^2+bx+c квадрат учҳад x нинг барча қийматларида манфий бўлиб,

$$ax^2+bx+c>0$$

тенгсизлик ечимга эга бўлмайди, $E=\varnothing$.

Агар $a<0$, $D>0$ бўлса, у ҳолда (4) тенгсизликнинг ечимлар тўплами $E=(x_1, x_2)$ бўлади.

Мисол. Ушбу

$$x^2-4x+1>2x-x^2-3$$

тенгсизликни ечинг.

Равшанки,

$$x^2-4x+1>2x-x^2-3 \Leftrightarrow 2x^2-6x+4>0.$$

Ҳосил бўлган квадрат тенгсизликда

$$a=2>0,\ D=36-4\cdot4\cdot2=4>0$$

бўлиб, $2x^2-6x+4$ квадрат учҳаднинг илдизлари $x_1=1$, $x_2=2$ га тенг. Бу ҳолда берилган тенгсизлик ечимга эга ва унинг ечимлар тўплами $E=(-\infty, 1)\cup(2, +\infty)$ бўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$x^3+9x^2+23x+15>0$$

тенгсизликни ечинг.

Агар

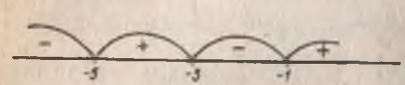
$$x^3+9x^2+23x+15=(x+1)(x+3)(x+5)=$$
$$=(x-(-1))(x-(-3))(x-(-5))$$

бўлишини эътиборга олсак, унда берилган тенгсизлик

$$(x-(-1))(x-(-3))(x-(-5))>0$$

кўринишга келади.

Энди сонлар ўқида —5, —3, —1 сонларга мос келувчи нуқталарни аниқлаймиз (24- чизма).



23- чизма

Сўнг берилган тенгсизликнинг ечимлар тўплами $E=(-5,\ -3)\cup(1,\ +\infty)$ бўлишини топамиз.

2. Ушбу $\frac{x^2+4x-4}{2x^2-x-1}>0$ тенгсизликни ечинг.

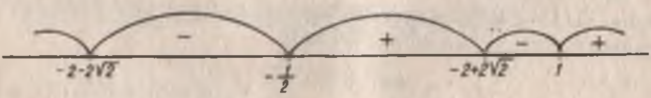
Бу тенгсизлик қуйидагича ечилади:

$$\frac{x^2+4x-4}{2x^2-x-1}>0 \Rightarrow (x^2+4x-4)(2x^2-x-1)>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-(-2+2\sqrt{2}))(x-(-2-2\sqrt{2}))\left(x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)(x-1)>0.$$

Энди

$$x_1=-2-2\sqrt{2},\ x_2=-\frac{1}{2},\ x_3=-2+2\sqrt{2},\ x_4=1$$



24- чизма

сонларнинг сонлар ўқидаги тасвирларини аниқлаймиз (25- чизма).

Демак, (5) тенгсизликнинг ечимлар тўплами

$$E=(-\infty,\ -2-2\sqrt{2})\cup\left(-\frac{1}{2},\ -2+2\sqrt{2}\right)\cup(1,\ +\infty).$$

3- §. Иррационал, кўрсаткичли ва логарифмик тенгсизликлар

1°. Иррационал тенгсизликлар. Номаълум x радикал (илдиз) ишораси остида катнашган тенгсизликлар *иррационал тенгсизликлар* дейилади. Масалан,

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}>1,$$

$$\frac{\sqrt[3]{x+5}}{1-2x} < 1, \quad \sqrt{x}+9\sqrt[4]{x}+18 \geqslant 0$$

тенгсизликлар иррационал тенгсизликлардир.

Иррационал тенгсизликларни ечишдан аввал тенгсизликда катнашган ифодаларнинг маънога эга бўладиган тўпламни аниқлаш керак бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} > \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$$

тенгсизликни ечинг.

Бу тенгсизлик $x \geqslant 1$ бўлгандагина маънога эга.

Равшанки, $\sqrt{x+\sqrt{x}} > 0$. Шуни эътиборга олиб топамиз:

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}\,\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}}\right) > \frac{3}{2}\sqrt{x+\sqrt{x}}\,\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+\sqrt{x} - \sqrt{x^2-x} > \frac{3}{2}\sqrt{x} \Rightarrow x-\frac{1}{2}\sqrt{x} > \sqrt{x(x-1)}\,.$$

Энди $x \geqslant 1$ бўлганда $\sqrt{x} > 0$ ва $\sqrt{x}-\frac{1}{2} > 0$ бўлишини ҳисобга олиб кейинги тенгсизликни, унга тенг кучли ва айни пайтда ундан содда бўлган тенгсизликка келтирамиз:

$$x-\frac{1}{2}\sqrt{x} > \sqrt{x(x-1)} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}\left(x-\frac{1}{2}\sqrt{x}\right) >$$

$$> \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{x(x-1)} \Rightarrow \sqrt{x}-\frac{1}{2} > \sqrt{x-1} \Rightarrow \left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2 >$$

$$> \left(\sqrt{x-1}\right)^2 \Rightarrow x-\sqrt{x}+\frac{1}{4} > x-1 \Rightarrow \sqrt{x} < \frac{5}{4} \Rightarrow x < \frac{25}{16}\,.$$

Демак, берилган тенгсизликнинг ечимлар тўплами $E = [1, \frac{25}{16})$ бўлади.

2°. Кўрсаткичли тенгсизликлар. Номаълум x даража кўрсаткичида катнашган тенгсизликлар *кўрсаткичли тенгсизликлар* дейилади. Масалан,

$$\frac{1}{2^x-1} \geqslant \frac{1}{1-2^{x-1}}, \quad \frac{4^x-2^{x+1}+8}{2^{1-x}} < 8^x,$$

$$4^x < 3\cdot 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{1+\sqrt{x}}$$

тенгсизликлар кўрсаткичли тенгсизликлардир.

Кўрсаткичли тенгсизликларни ечишда мазкур бобнинг 1-§ ида келтирилган тасдиқлардан фойдаланилади.

Мисол. Ушбу

$$3\cdot 4^{\sqrt{2-x}} + 3 < 10\cdot 2^{\sqrt{2-x}}$$

тенгсизликни ечинг.

Равшанки, мазкур тенгсизлик $x \leqslant 2$ бўлганда маънога эга.

Агар берилган тенгсизликда $2^{\sqrt{2-x}} = y$ дейилса, у ҳолда

$$3y^2 - 10y + 3 < 0$$

нгсизлик ҳосил бўлади.

Равшанки,

$$3y^2 - 10y + 3 < 0 \Rightarrow 3(y-3)\left(y-\frac{1}{3}\right) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(y-\frac{1}{3}\right)(y-3) < 0 \Rightarrow \frac{1}{3} < y < 3 .$$

Демак,

$$\frac{1}{3} < y < 3 \Rightarrow \frac{1}{3} < 2^{\sqrt{2-x}} < 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\log_2 3 < \sqrt{2-x} < \log_2 3 .$$

Агар $\sqrt{2-x} \geqslant 0$ бўлишини эътиборга олсак, унда

$$0 \leqslant \sqrt{2-x} < \log_2 3$$

нгсизликка эга бўламиз.

Кейинги тенгсизликлардан

$$0 \leqslant 2 - x < \log_2^2 3 ,$$

ни

$$2 - \log_2^2 3 < x$$

лиши келиб чиқади.

Демак, берилган тенгсизликнинг ечимлар тўплами

$= (2 - \log_2^2 3,\ 2]$ бўлади.

3°. Логарифмик тенгсизликлар. Номаълум x логарифм лгиси остида ёки логарифм асосида қатнашган тенгсизликлар *гарифмик тенгсизликлар* дейилади.

Масалан,

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x+3) > 0,\ 2\log_x 5 + \log_{5x} 5 + 3\log_{25x} 5 > 0,$$

$$\log_{2x+4}(x^2+1) \leqslant 1$$

нгсизликлар логарифмик тенгсизликлардир.

Логарифмик тенгсизликларни ечишда логарифмнинг хоссалари-н ҳамда 1-§ да келтирилган тасдиқлардан фойдаланилади.

Мисол. Ушбу

$$\log_2 \frac{x-3}{x+2} < 0$$

нгсизликни ечинг.

Бу тенгсизликнинг чап томонидаги ифода $\frac{x-3}{x+2}>0$ бўлгандагина маънога эга.

Равшанки,

$$\frac{x-3}{x+2}>0 \Rightarrow (x+2)(x-3)>0 .$$

Қейинги тенгсизликни қаноатлантирувчи x нинг қийматлари

$$x>3,\ x<-2$$

бўлишини топамиз.

Демак, $x \in (-\infty,\ -2) \cup (3,\ +\infty)$ учун берилган тенгсизлик маънога эга.

Шуни эътиборга олиб топамиз:

$$\log_2 \frac{x-3}{x+2} < 0 \Rightarrow \frac{x-3}{x+2} < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5}{x+2} > 0 \Rightarrow x > -2 .$$

Демак, берилган тенгсизликнинг ечимлар тўплами $E=(3,\ +\infty)$ бўлади.

АЛГЕБРА

5- БОБ.

ДЕТЕРМИНАНТЛАР ВА УЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

Маълумки, олий математиканинг алгебра бўлимида асосан тенгламаларни, тенгламалар системаларини ечиш билан шуғулланилади. Чизиқли тенгламалар системасини ўрганишда детерминант тушунчаси муҳим рол ўйнайди. Шуни эътиборга олиб мазкур бобда детерминантлар ва уларнинг хоссаларини қисқача баён этамиз.

1- §. Детерминантлар

Айтайлик, бирор a, b, c, d сонлар берилган бўлсин. Ушбу

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

ифода *2- тартибли детерминант*, $ad-bc$ айирма эса унинг *қиймати* дейилади. Демак

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc\,. \tag{1}$$

Бунда a, b, c, d — детерминантнинг элементлари. a, b ва c, d сонлар (1) детерминантнинг мос равишда биринчи ва иккинчи йўлларини (сатрларини), a, c ва b, d сонлар эса (1) детерминантнинг мос равишда биринчи ва иккинчи устунларини ташкил этади.

Одатда детерминантнинг элементларини иккита индекс қўйилган ҳарфлар билан белгиланади. Бунда биринчи индекс йўлни, иккинчиси эса устунни билдиради. Масалан, $a_{21}=c$ сон (1) детерминантнинг иккинчи йўл биринчи устунида турган элемент бўлади. Шундай қилиб (1) детерминант қуйидагича ёзилади

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{cc} \text{1 устун} & \text{2- устун} \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{1- йўл} \rightarrow \\ \text{2- йўл} \rightarrow \end{array} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{array}$$

Худди шунга ўхшаш учинчи, тўртинчи ва ҳ. к. n- тартибли детерминант тушунчалари киритилади.

Соддалик учун биз бу ерда учинчи тартибли детерминантлар ва уларнинг хоссалари билан танишамиз. Юқори тартибли детерминантларга келсак, улар ҳам учинчи тартибли детерминант каби детерминант ҳосил бўлади. Учинчи тартибли детерминантнинг киритилишига кўра:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22}a_{33} + ka_{12}a_{23}a_{31} + ka_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- ka_{13}a_{22}a_{31} - ka_{11}a_{23}a_{32} - ka_{12}a_{21}a_{33} = k(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$
$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33})$$

Бу тенгликни (2) тенглик билан солиштириб

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

бўлишини топамиз.

4°. Детерминантнинг бирор йўли (устуни)даги барча элементлар нол бўлса, детерминантнинг қиймати нолга тенг бўлади.

Бу хоссанинг исботи юқорида келтирилган 3°- хоссадан бевосита келиб чиқади.

5°. Детерминантнинг ихтиёрий икки йўли (устуни) ўзаро пропорционал бўлса, детерминантнинг қиймати нолга тенг бўлади.

Исбот. Фараз қилайлик,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

детерминантнинг биринчи ва учинчи йўллари ўзаро пропорционал бўлсин. Унда

$$\frac{a_{11}}{a_{31}} = \frac{a_{12}}{a_{32}} = \frac{a_{13}}{a_{33}}$$

бўлади. Агар бу нисбатни k билан белгиласак,

$$a_{11} = ka_{31},\ a_{12} = ka_{32},\ a_{13} = ka_{33}$$

бўлиб,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

бўлади. Келтирилган 1- натижага кўра кейинги детерминант нолга тенг. Демак,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

6°. Агар (3) детерминантнинг бирор йўли (устуни)даги элементлар икки қўшилувчилар йиғиндисидан иборат бўлса, масалан,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\alpha_1 & a_{22}+\alpha_2 & a_{23}+\alpha_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

бўлса, у ҳолда

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\alpha_1 & a_{22}+\alpha_2 & a_{23}+\alpha_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

бўлади. Бу хосса (2) муносабатдан, яъни учинчи тартибли детерминантнинг киритилишидан келиб чиқади.

Юқоридаги 3°- ва 6°- хоссалардан қуйидаги натижага келамиз.

2- натижа. *Агар*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

нинг бирор йўли (устуни)ни ўзгармас k сонга кўпайтириб, уни бошқа йўли (устуни)га қўшилса, детерминант қиймати ўзгармайди:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & a_{23}+ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Энди детерминантнинг минорлари ҳамда алгебраик тўлдирувчилари тушунчаларини келтирамиз. Яна соддалик учун учинчи тартибли детерминантларни қараймиз.

Айтайлик,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (3)$$

учинчи тартибли детерминант берилган бўлсин. Бу детерминантнинг бирор a_{ik} $(i, k=1, 2, 3)$ элементини олиб, шу элемент турган йўлни ҳамда устунни ўчирамиз. Берилган детерминантнинг қолган элементларидан иккинчи тартибли детерминант ҳосил бўлади. Унга a_{ik} элементнинг *минори* деб аталади ва M_{ik} каби белгиланади. Масалан, (3) детерминантнинг a_{13} элементи турган йўлни ҳамда устунни ўчириш

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \enclose{circle}{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix}$$

натижасида иккинчи тартибли ушбу

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

детерминант ҳосил бўлади. Бу берилган детерминантнинг a_{13} элементининг миноридир.

Равшанки, (3) детерминантнинг 9 та элементи бор. Бинобарин минорлар ҳам тўққизта бўлади.

Ушбу

$$(-1)^{i+k}M_{ik}$$

миқдор (3) детерминант a_{ik} элементининг *алгебраик тўлдирувчиси* дейилади ва A_{ik} орқали белгиланади:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k}M_{ik}. \tag{4}$$

Масалан,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

детерминантнинг $a_{33}=3$ элементининг алгебраик тўлдирувчиси

$$a_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cancel{0} \\ 4 & 3 & \cancel{1} \\ \cancel{2} & \cancel{7} & \cancel{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

бўлади.

7°. Детерминантнинг бирор йўли (устуни)да турган барча элементларнинг уларга мос алгебраик тўлдирувчилари билан кўпайтмасидан ташкил топган йиғинди шу детерминантнинг қийматига тенг.

Исбот. Бу хоссани биринчи йўл учун исботини келтирамиз. (3) детерминант

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

нинг биринчи йўлида турган a_{11}, a_{12}, a_{13} элементларининг алгебраик тўлдирувчиларини топамиз:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23},$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}),$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}.$$

Унда

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})+a_{12}[-(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23})]+$$
$$+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{31}a_{23}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{32}a_{23}-$$
$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{31}a_{22}$$

бўлади. (2) муносабатдан фойдаланиб

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} \tag{4'}$$

бўлишини топамиз.

Бошқа ҳоллар ҳам шунга ўхшаш исботланади.

Одатда (4′) формула детерминантнинг биринчи йўл элементлари бўйича *ёйилмаси* дейилади.

8°. Детерминантнинг бирор йўли (устуни)да турган барча элементлари билан бошқа йўл (устун)да турган мос элементларнинг алгебраик тўлдирувчилари кўпайтмаларидан ташкил топган йиғинди нолга тенг бўлади.

Исбот. Бу хоссанинг тўғрилигини бирор ҳол учун, масалан, (3) детерминантнинг биринчи йўл элементлари a_{11}, a_{12}, a_{13} лар билан учинчи йўл мос элементлари a_{31}, a_{32}, a_{33} ларнинг алгебраик тўлдирувчилари кўпайтмасидан тузилган $a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}$ йиғиндининг нолга тенг бўлишини кўрсатамиз.

Равшанки,

$$A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}=a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13},$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}=a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13},$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Унда

$$a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}=a_{11}(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})-a_{12}(a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13})+$$
$$+a_{13}(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=a_{11}a_{12}a_{23}-a_{11}a_{13}a_{22}-a_{11}a_{12}a_{23}+a_{12}a_{13}a_{21}+$$
$$+a_{11}a_{13}a_{22}-a_{12}a_{13}a_{21}=0$$

бўлади. Демак,

$$a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}=0.$$

3- §. Детерминантларни ҳисоблаш

Иккинчи ва учинчи тартибли детерминантлар бевосита таърифга кўра ҳисобланади. Масалан,

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7\cdot 3 - 2\cdot 5 = 21 - 10 = 11,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 7\cdot 1 + 3\cdot 3\cdot 4 + 5\cdot 2\cdot 0 - 5\cdot 7\cdot 4 - 1\cdot 3\cdot 0 - 3\cdot 2\cdot 1 = -103.$$

Юқори тартибли детерминантларни ҳисоблаш бирмунча мураккаб бўлади. Бу ҳолда детерминантларни асосан 2- § да келтирилган хоссалардан фойдаланиб ҳисобланади.

Мисоллар 1. Ушбу

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix}$$

детерминантни ҳисобланг.

Бу детерминантнинг қийматини топиш учун 2- натижадан фойдаланиш мақсадга мувофиқ. Бунинг учун унинг биринчи йўлини 2 га кўпайтириб 4- йўлига қўшамиз. Натижада қаралаётган детерминант ушбу

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

кўринишга келади.

Энди охирги детерминантни 7°- хоссадан фойдаланиб, 1- устун элементлари бўйича алгебраик тўлдирувчилар орқали ёямиз:

$$\Delta = 1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

Бу детерминантнинг қиймати $\Delta = 2\cdot 3\cdot 9 + 5\cdot 7\cdot 0 + 0\cdot 0\cdot 4 - 4\cdot 3\cdot 0 -$
$- 7\cdot 0\cdot 2 - 9\cdot 0\cdot 5 = 54$ га тенг.

2. Ушбу

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 9 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

детерминантни ҳисобланг.

Аввало 2- натижага кўра 2- ва 4- устунларнинг хар бирига 5- устунни қўшамиз:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3- & 2 & 3 & 2 \\ 9 & 3 & 1 & 7 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Энди 5- устунни 3 га кўпайтириб 1- устундан айирамиз:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3- & 2 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & 1 & 7 & 4 \\ -6 & 3 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Сўнг 5- устунни 2 га кўпайтириб 3- устундан айириш натижасида кейинги детерминант

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -6 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & -7 & 7 & 4 \\ -6 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

кўринишга келади. 7°- хоссадан фойдаланиб топамиз:

$$\Delta=1\cdot(-1)^{1+5}\begin{vmatrix} -1 & 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & -7 & 7 \\ -6 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

3°- хоссага кўра

$$\Delta=3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 & 3 \\ -3 & 1 & -7 & 7 \\ -6 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

бўлади. Ниҳоят, 1- йўлни қолган барча йўллардан айирамиз. У холда

$$\Delta=3\cdot\begin{vmatrix} - & 1 & 1- & 6 & 3 \\ - & 2 & 0- & 1 & 4 \\ - & 5 & 0 & 6- & 1 \\ & 3 & 0 & 7- & 4 \end{vmatrix}$$

7°- хоссага асосан

$$\Delta=3\cdot1\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -5 & 6 & -1 \\ 3 & 7 & -4 \end{vmatrix}=-3\cdot(-155)=465$$

бўлади. Демак, $\Delta=465$.

6-БОБ.

МАТРИЦАЛАР

1-§. Матрица тушунчаси

Бирор $m\cdot n$ та $(m\in N,\ n\in N)$

$$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn} \qquad (1)$$

сонлар берилган бўлсин. Бу сонлардан ташкил топган ушбу

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix}$$

жадвал $[m\times n]$-*тартибли матрица* дейилади ва

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix} \quad \text{ёки} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

каби белгиланади. Бунда (1) сонлар матрицанинг *элементлари* дейилади. Матрицанинг элементлари икки индекс билан ёзилиб, биринчи индекс шу элемент турган йўл рақамини, иккинчи индекс эса устун рақамини билдиради. Баъзан (2) матрицани бирор ҳарф билан $\|a_{ik}\|_{\substack{i=1,m\\ k=1,n}}$ каби ҳам белгиланади:

$$A=\|a_{ik}\|_{\substack{i=1,m\\ k=1,n}}$$

Равшанки, (2) матрица m та йўл n та устунга эга. Агар (2) матрицанинг барча элементлари нолга тенг бўлса

$$0=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}$$

у *нол матрица* дейилади.

Хусусан матрицанинг йўллари сони устунлар сонига тенг $(m=n)$ бўлса, яъни қаралаётган матрица қуйидаги

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix} \qquad (3)$$

кўринишда бўлса, у *n-тартибли квадрат матрица* дейилади. (3) матрицанинг $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ элементлари *бош диагонал элементлари* дейилади.

Агар (3) квадрат матрицанинг бош диагоналида турган элементлардан бошқа барча элементлари нол бўлса,

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix} \tag{4}$$

уни *диагонал матрица дейилади.* Хусусан, (4) матрицада

$$a_{11}=a_{22}= \ldots =a_{nn}=1$$

бўлса,

$$E=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix}$$

ҳосил бўлиб, уни *бирлик матрица* деб аталади.

Квадрат матрица

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11}, & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

нинг элементларидан ташкил топган ушбу

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

детерминант *A матрицанинг детерминанти* дейилади ва $\det A$ ёки $|A|$ каби белгиланади.

Агар A матрицанинг детерминанти $|A|=0$ бўлса, у ҳолда A хос матрица дейилади, акс ҳолда, яъни A матрицанинг детерминанти $|A|\neq 0$ бўлса, у ҳолда A хосмас матрица дейилади.

Квадрат матрица A нинг йўлларини мос устунлари билан алмаштиришдан ҳосил бўлган ушбу

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

матрица транспонирланган матрица дейилади ва A' каби белгиланади.

Квадрат A матрица билан унинг транспонирланган матрицалари детерминантлари бир-бирига тенг бўлади:

$$|A| = |A'|.$$

Иккита

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\|, \quad B = \left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{matrix} \right\|$$

матрицалар берилган бўлсин.

Агар A матрицанинг ҳар бир элементи B матрицанинг мос элементига тенг, яъни барча i ва k ($i=1,2, \dots, m$; $k=1,2, \dots, n$) лар учун

$$a_{ik} = b_{ik}$$

бўлса, у ҳолда A ва B *ўзаро тенг матрицалар* дейилади ва $A = B$ каби ёзилади.

Агар

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \right\|$$

квадрат матрица транспонирланган A' матрицага тенг бўлса, у ҳолда A *симметрик матрица* дейилади.

2- §. Матрицалар устида амаллар ва уларнинг хоссалари

Иккита $[m \times n]$- тартибли

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\|, \quad B = \left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{matrix} \right\| \tag{5}$$

матрицалар берилган бўлсин. Бу матрицаларнинг мос элементлари йиғиндиларидан ташкил топган ушбу $[m \times n]$- тартибли

$$\left\| \begin{matrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{matrix} \right\|$$

матрица A ва B матрицалар *йиғиндиси* деб аталади ва $A+B$ каби белгиланади.

A ва B матрицаларнинг мос элементлари айирмаларидан ташкил топган ушбу $[m\times n]$- тартибли

$$\begin{Vmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2n}-b_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \dots & a_{mn}-b_{mn} \end{Vmatrix}$$

матрица A матрицадан B матрицанинг *айирмаси* дейилади ва $A-B$ каби белгиланади.

Юқорида айтилганлардан

1°. $A+\mathbf{0}=\mathbf{0}+A=A$,
2°. $A+B=B+A$

бўлишини кўриш қийин эмас, бунда $\mathbf{0}$ — нол матрица.

Бирор λ сон ва

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

матрицани қарайлик. Бу A матрицанинг ҳар бир элементини λ сонга кўпайтирганда ҳосил бўлган матрицага λ сон билан A матрица *кўпайтмаси* дейилади ва λA каби белгиланади. Демак,

$$\lambda A=\begin{Vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ . & . & . & . \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Равшанки, A ва B матрицалар ҳамда ихтиёрий λ ва μ сонлар учун:

3°. $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$,
4°. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$,
5°. $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$.

1- мисол. Агар

$$A=\begin{Vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{Vmatrix}, \qquad B=\begin{Vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$$

бўлса, $A+B$, $A-B$, $2A-3B$ матрицаларни топинг.

Икки матрица йиғиндиси, айирмаси ҳамда матрицани сонга кўпайтириш қоидаларидан фойдаланиб, изланаётган матрицаларни топамиз:

$$A+B=\begin{Vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 2+0 & 4+2 & 1-1 \\ -1+1 & 0+1 & 2+2 \end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{Vmatrix},$$

$$A-B=\begin{Vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{Vmatrix}-\begin{Vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 2-0 & 4-2 & 1-1 \\ -1-1 & 0-1 & 2-2 \end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$2A-3B=2\cdot\begin{Vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{Vmatrix}-3\cdot\begin{Vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 4 & 8 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{Vmatrix}-$$

$$-\begin{Vmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 4-0 & 8-6 & 2-3 \\ -2-3 & 0-3 & 4-6 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -5 & -3 & -2 \end{Vmatrix}$$

Энди икки матрица кўпайтмаси тушунчасини келтирамиз. Бу амални киритишда кўпайтириладиган матрицаларнинг биринчисининг устунлари сони иккинчисининг йўллари сонига тенг бўлиши талаб қилинади.

Фараз қилайлик, $[m\times n]$- тартибли

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

матрица ҳамда $[n\times k]$- тартибли

$$B=\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{Vmatrix}$$

матрица берилган бўлсин. А матрицанинг i- йўл элементлари a_{i1}, a_{i2}, ... a_{in} ни $(i=1,2, ..., m)$ мос равишда B матрицанинг j- устун элементлари b_{1j}, b_{2j}, ..., b_{nj} га $(j=1,2, ..., k)$ кўпайтириб ушбу

$$d_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ \dots\ +a_{in}b_{nj} \tag{6}$$

$(i=1,2,\ \dots,\ m;\ j=1,2,\ \dots,\ k)$ йиғиндиларни ҳосил қиламиз. Бу сонлардан тузилган $[m\times k]$- тартибли ушбу

$$\begin{Vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1k} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2k} \\ . & . & . & . \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mk} \end{Vmatrix}$$

матрица берилган A ва B матрицалар кўпайтмаси дейилади ва $A\cdot B$ каби ёзилади.

Демак, $A\cdot B$ матрицанинг ҳар бир элементи (6) кўринишдаги йиғиндилардан иборат.

2- мисол. Ушбу

$$A=\begin{Vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}, \qquad B=\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

матрицаларнинг кўпайтмасини топинг. Бу матрицалар кўпайтмаси $[3\times 2]$- тартибли ушбу

$$A\cdot B=\begin{Vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{Vmatrix}$$

матрица бўлиб, бунда

$$\begin{aligned} &d_{11}=2\cdot 1+1\cdot 0+(-1)\cdot 1=1, \\ &d_{12}=2\cdot(-1)+1\cdot 1+(-1)\cdot 0=-1, \\ &d_{21}=0\cdot 1+1\cdot 0+0\cdot 1=0, \\ &d_{22}=0\cdot(-1)+1\cdot 1+0\cdot 0=1, \\ &d_{31}=0\cdot 1+0\cdot 0+(-1)\cdot 1=-1, \\ &d_{32}=0\cdot(-1)+0\cdot 1+(-1)\cdot 0=0 \end{aligned}$$

бўлади. Демак,

$$A\cdot B=\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

3- мисол. Агар

$$A=\begin{Vmatrix} 7 & 12 \\ -4 & 7 \end{Vmatrix}, \qquad B=\begin{Vmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{Vmatrix}$$

бўлса, AB ва BA матрицаларни топинг.

Равшанки,

$$A\cdot B=\begin{Vmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix} 7\cdot 26+(-12)\cdot 15 & 7\cdot 45+(-12)\cdot 26 \\ -4\cdot 26+7\cdot 15 & -4\cdot 45+7\cdot 26 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}.$$

$$BA=\begin{Vmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix} 26\cdot 7+45\cdot(-4) & 26\cdot(-12)+45\cdot 7 \\ 15\cdot 7+26\cdot(-4) & 15\cdot(-12)+26\cdot 7 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}$$

Шундай килиб, берилган матрицалар учун

$$AB=\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}.$$

$$BA=\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}$$

бўлиб,

$$AB=BA.$$

4- мисол. Агар

$$A=\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{Vmatrix}$$

бўлса, AB ва BA матрицаларни топинг.

Берилган матрицаларнинг кўпайтмасини топамиз:

$$AB=\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix} 2\cdot(-3)+0\cdot 0+1\cdot 0 & 2\cdot 1+0\cdot 2+1\cdot(-1) & 2\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot 3 \\ -2\cdot(-3)+3\cdot 0+2\cdot 0 & -2\cdot 1+3\cdot 2+2\cdot(-1) & -2\cdot 0+3\cdot 1+2\cdot 3 \\ 4\cdot(-3)-1\cdot 0+5\cdot 0 & 4\cdot 1+(-1)\cdot 2+5\cdot(-1) & 4\cdot 0+(-1)\cdot 1+5\cdot 3 \end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 9 \\ -12 & -3 & 14 \end{Vmatrix}.$$

$$BA=\begin{Vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{Vmatrix}=$$

$$\begin{Vmatrix} -3\cdot2+1\cdot(-2)+0\cdot4 & -3\cdot0+1\cdot3+0\cdot(-1) & -3\cdot1+1\cdot2+0\cdot5 \\ 0\cdot2+2\cdot(-2)+1\cdot4 & 0\cdot0+2\cdot3+1\cdot(-1) & 0\cdot1+2\cdot2+1\cdot5 \\ 0\cdot2+(-1)(-2)+3\cdot4 & 0\cdot0+(-1)\cdot3+3(-1) & 0\cdot1+(-1)\cdot2+3\cdot5 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} -8 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 9 \\ 14 & -6 & 13 \end{Vmatrix}.$$

Демак,

$$AB = \begin{Vmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 9 \\ -12 & -3 & 14 \end{Vmatrix}, \quad BA = \begin{Vmatrix} -8 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 9 \\ 14 & -6 & 13 \end{Vmatrix}$$

Бу ҳолда

$$AB \neq BA.$$

Келтирилган мисоллардан кўринадики, икки матрица кўпайтмаси учун ўрин алмаштириш коидаси, умуман айтганда, ўринли бўлмас экан.

Бирок, $[n\times n]$-тартибли A матрица билан $[n\times n]$-тартибли бирлик

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}$$

матрица учун ҳар доим

$$AE = EA = A$$

тенглик ўринли бўлади.

A, B ва C матрицалар берилган бўлсин. У ҳолда

6°. $(A+B)\cdot C = AC + BC$

7°. $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$

бўлади. Бу тенгликларнинг ўринли бўлиши матрицалар йиғиндиси, кўпайтмаси ҳамда тенглиги тушунчаларидан келиб чиқади. Мисол тарикасида

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{Vmatrix}$$

матрицалар учун 6°-хоссанинг ўринли бўлишини кўрсатамиз.

Равшанки,

$$A + B = \begin{Vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{Vmatrix}$$

Энди $(A+B)\cdot C$ ни топамиз.

$$(A+B)\cdot C=\begin{Vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix} a_{11}c_{11}+a_{12}c_{21}+a_{13}c_{31} & \cdot & a_{11}c_{13}+a_{12}c_{23}+a_{13}c_{33} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{31}c_{11}+a_{32}c_{21}+a_{33}c_{31} & \cdot & a_{31}c_{13}+a_{32}c_{23}+a_{33}c_{33} \end{Vmatrix}+$$

$$+\begin{Vmatrix} b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21}+b_{13}c_{31} & \cdot & a_{11}c_{13}+b_{12}c_{23}+b_{13}c_{33} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{31}c_{11}+b_{32}c_{21}+b_{33}c_{31} & \cdot & b_{31}c_{13}+b_{32}c_{23}+b_{33}c_{33} \end{Vmatrix}$$

Агар

$$A\cdot C=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix} a_{11}c_{11}+a_{12}c_{21}+a_{13}c_{31} & \cdot & a_{11}c_{13}+a_{12}c_{23}+a_{13}c_{33} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{31}c_{11}+a_{32}c_{21}+a_{33}c_{31} & \cdot & a_{31}c_{13}+a_{32}c_{23}+a_{33}c_{33} \end{Vmatrix}$$

$$B\cdot C=\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix} b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21}+b_{13}c_{31} & \cdot & b_{11}c_{13}+b_{12}c_{23}+b_{13}c_{33} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{31}c_{11}+b_{32}c_{21}+b_{33}c_{31} & \cdot & b_{31}c_{13}+b_{32}c_{23}+b_{33}c_{33} \end{Vmatrix}$$

бўлишини эътиборга олсак, юқоридаги тенглик

$$(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$$

кўринишга келишини топамиз. Бу эса қаралаётган матрицалар учун 6°- хоссанинг ўринли бўлишини кўрсатади.

Биз юқорида икки матрица кўпайтмаси учун ўрин алмаштириш қонуни, умуман айтганда, ўринли эмаслигини кўрдик. Аммо уларнинг детерминантлари учун қуйидаги тасдиқ ўринли бўлади.

$[n\times n]$- тартибли A ва B матрицалар кўпайтмасининг детерминанти шу матрица детерминантлари кўпайтмасига тенг:

$$|AB|=|B\cdot A|=|A|\cdot|B|.$$

3- §. Матрицанинг ранги

Бирор $[m\times n]$- тартибли

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

матрица берилган бўлсин. A матрицанинг ихтиёрий k та йўлини ва ихтиёрий k та устунини олиб, $(k\leqslant\min(m,\ n))$ $[k\times k]$- тартибли квадрат матрица тузамиз. Бу квадрат матрицанинг детерминанти A матрицанинг k- тартибли *минори* дейилади.

1- мисол. Қуйидаги $[4\times5]$ - тартибли

$$\begin{Vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{Vmatrix}$$

матрицани қарайлик. Ушбу

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-3,\quad \begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -7 & 4 & 5 \end{vmatrix}=-40,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 \end{vmatrix}=-1,\quad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & -4 & 5 \end{vmatrix}=0$$

детерминантлар қаралаётган матрицанинг мос равишда иккинчи, учинчи ҳамда тўртинчи тартибли минорларидир.

Юқорида айтилганлардан ва келтирилган мисолдан кўринадики, берилган матрицанинг бир нечтадан k- тартибли $(k=2,3,\ \ldots,\ \min\ (m,\ n))$ минорлари бўлиб, уларнинг баъзилари нолга тенг, баъзилари эса нолдан фарқли бўлар экан.

A матрица ёрдамида ҳосил қилиш мумкин бўлган барча минорлар орасида нолдан фарқли бўлган юқори тартибли минорни топиш муҳимдир.

Шуни айтиш керакки, агар A матрицанинг барча k- тартибли $(k\leqslant\min(m,\ n))$ минорлари нолга тенг бўлса, ундан юқори тартибли бўлган барча минорлари ҳам нолга тенг бўлади.

A матрицанинг нолдан фарқли минорларининг энг юқори (катта) тартиби унинг *ранги* дейилади ва rank A каби белгиланади.

2- мисол. Ушбу

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$$

матрицанинг рангини топинг.

Берилган матрицанинг иккинчи тартибли минорлари бир нечта бўлиб, улардан бири $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$ бўлади. Шу матрицанинг учинчи тартибли минори эса

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

га тенг. Шундай қилиб A матрицанинг нолдан фарқли минорларининг энг катта тартиби 2 га тенг экан. Демак, берилган матрицанинг ранги 2: $\operatorname{rank} A = 2$.

3- мисол. $[3 \times 4]$ - тартибли ушбу $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{Vmatrix}$ матрицанинг рангини топинг.

Бу матрицанинг иккинчи тартибли минорлари бир нечта бўлиб, улардан бири $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$.

Берилган матрицанинг учинчи тартибли минорлари ҳам бир нечта бўлиб, улардан бири

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

яна бири

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Демак, A матрицанинг нолдан фарқли минорларининг энг юқори тартиби учга тенг, бинобарин

$$\operatorname{rank} A = 3.$$

1- эслатма. Агар қаралаётган матрица нол матрица бўлса,

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ . & . & . \quad . & . \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \end{Vmatrix}$$

унинг ранги нол деб олинади.

2- эслатма. Агар $[2 \times 2]$ - тартибли нол бўлмаган

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$$

матрицанинг детерминанти нолга тенг бўлса, унинг ранги 1 деб олинади.

Матрицаларнинг рангини топиш кўп холларда мураккаб бўлади, чунки унда бир канча турли тартибдаги детерминантларни хисоблашга тўғри келади.

Қуйида матрица рангини топишнинг усулларидан бирини келтирамиз.

Бирор

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

матрица берилган бўлсин. Бу матрицада:

1) икки йўлини (устунини) ўзаро алмаштириш,

2) бирор йўлини (устунини) ўзгармас сонга кўпайтириш,

3) бирор йўлига (устунига) бошқа йўлни (устунни) ўзгармас сонга кўпайтириб қўшиш

A матрицанинг *элементар алмаштиришлари* дейилади.

Элементар алмаштиришлар натижасида матрицанинг ранги ўзгармайди. Бу тасдиқдан биз қуйида матрицаларнинг рангини ҳисоблашда фойдаланамиз. Аввало диагонал кўринишли матрица тушунчасини келтирамиз.

Агар $[m\times n]$- тартибли A матрицанинг a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{ss} $(0\leqslant \leqslant s\leqslant \min(m, n))$ элементларининг ҳар бири нолдан фарқли бўлиб, қолган барча элементлари нолга тенг бўлса, у ҳолда A *диагонал кўринишли матрица* дейилади. Равшанки, бундай диагонал кўринишли матрицанинг ранги s га тенг бўлади.

Айтайлик, бирор $[m\times n]$- тартибли

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

матрица берилган бўлиб, унинг рангини топиш талаб қилинсин.

Берилган матрицанинг рангини уни юқорида айтилган элементар алмаштиришлар ёрдамида диагонал кўринишли матрицага келтириб топамиз.

A матрицанинг ҳеч бўлмаганда битта элементи нолдан фарқли бўлсин. Бу элементни матрицанинг йўллари ҳамда устунларини ўзаро алмаштириш ёрдамида биринчи йўл ҳамда биринчи устунга келтирамиз. Сўнг кейинги матрицанинг биринчи устунини ўша сонга бўлиб, ушбу

$$\begin{Vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \qquad (7)$$

матрицани ҳосил қиламиз.

(7) матрицанинг биринчи устунини $-a_{12}$ га кўпайтириб уни иккинчи устунига қўшсак, сўнг $-a_{13}$ га кўпайтириб учинчи устунига қўшсак ва ҳ. к. биринчи устунини $-a'_{1n}$ га кўпайтириб устунига қўшсак, натижада (7) матрицанинг биринчи йўлидаги $a'_{11}=1$, қолган элементлари ноллар бўлиб қолади.

Худди шунга ўхшаш усул билан (7) матрицанинг биринчи устунидаги элементлари нолга айлантирилади. Бундай элементар алмаштиришлар натижасида

$$A_1=\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a^*_{22} & a^*_{23} & \dots & a^*_{2n} \\ 0 & a^*_{32} & a^*_{33} & \dots & a^*_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a^*_{m1} & a^*_{m2} & \dots & a^*_{mn} \end{matrix}\right\|$$

матрицага келамиз. Бунда

$$\operatorname{rank} A=\operatorname{rank} A_1$$

бўлади.

A_1 матрица юқоридаги элементар алмаштиришни бир неча бор қўллаш билан диагонал кўринишли матрицага келади. Бу диагонал кўринишли матрицанинг ранги берилган A матрицанинг ранги бўлади.

4-мисол. Ушбу

$$A=\left\|\begin{matrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{matrix}\right\|$$

матрицанинг рангини ҳисобланг.

Элементар алмаштиришлар ёрдамида берилган матрицани диагонал матрицага келтирамиз. A матрицанинг бириччи ва иккинчи устунларини ўзаро алмаштирамиз:

$$A=\left\|\begin{matrix} 2 & 0 & -4 \\ -4 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & -10 \\ 3 & 2 & 0 \end{matrix}\right\|$$

Сўнг биринчи йўлни $\frac{1}{2}$ га кўпайтирамиз:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & -10 \\ 3 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$$

Кейинги матрицада биринчи устунни 2 га кўпайтириб, уни учинчи устунига қўшамиз:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 9 \\ 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{Vmatrix}$$

Энди бу матрицанинг биринчи йўлини 4 га кўпайтириб иккинчи йўлига қўшамиз, —1 га кўпайтириб учинчи йўлига, —5 га кўпайтириб тўртинчи йўлига ва —3 га кўпайтириб бешинчи йўлига қўшамиз. Натижада

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{Vmatrix}$$

матрицага келамиз.

Кейинги матрицада иккинчи йўлни 3 га кўпайтириб учинчи йўлга қўшсак, биринчи устунни аввал —2 га кўпайтириб иккинчи устунга, сўнг —6 га кўпайтириб учинчи устунга қўшсак, унда

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

матрица ҳосил бўлади.

Ниҳоят, бу матрицанинг иккинчи устунини —3 га кўпайтириб, учинчи устунига қўшсак ва ҳосил бўлган матрицанинг иккинчи йўлини —1 га кўпайтирсак, диагонал кўринишдаги

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

матрицага келамиз. Унинг ранги 2 га тенг. Демак, rank $A=2$.

4- §. Тескари матрица

Бирор $[n\times n]$- тартибли

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

квадрат матрица берилган бўлсин.

Агар A билан $[n\times n]$-— тартибли B матрица кўпайтмаси бирлик матрицага тенг бўлса

$$AB=BA=E,$$

у холда B матрица A га *тескари матрица* дейилади ва A^{-1} каби белгиланади. Масалан, ушбу

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

матрицага тескари бўлган матрица

$$A^{-1}=\begin{Vmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \end{Vmatrix}$$

бўлади, чунки

$$A\cdot A^{-1}=\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix} 1\cdot\frac{1}{3}+(-2)\cdot 0+1\cdot\frac{2}{3} & 1\cdot 1+1\cdot(-2)+1\cdot 1 & 1\cdot\frac{2}{3}-2\cdot 1+\frac{4}{3}\cdot 1 \\ 2\cdot\frac{1}{3}+0\cdot 0+1\cdot\frac{2}{3} & 2\cdot 1+0\cdot 1+(-1)\cdot 1 & 2\cdot\frac{2}{3}+1\cdot 0+(-1)\cdot\frac{4}{3} \\ -2\cdot\frac{1}{3}+1\cdot 0+1\cdot\frac{2}{3} & -2\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1 & -2\cdot\frac{2}{3}+1\cdot 1+1\cdot\frac{4}{3} \end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Энди берилган матрицага тескари матрицанинг мавжуд бўлиши ҳақидаги теоремани келтирамиз.

Теорема. — ***Ҳар қандай хосмас матрица A нинг тескари матрицаси мавжуд ва у ягона бўлади.***

Исбот. Шартга кўра A хосмас матрица. Бинобарин, унинг детерминанти нолдан фаркли булади:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$$

Бу детерминант элементларининг алгебраик тўлдирувчилари A_{ik} ($i=1,2,\dots,n$; $k=1,2,\dots,n$) ни топиб, улардан

$$\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{Vmatrix}$$

матрицани тузамиз. Кейинги матрицанинг ҳар бир элементини A матрицанинг детерминанти $|A|$ га бўлиб, ушбу

$$B=\begin{Vmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{Vmatrix} \qquad (8)$$

матрицани ҳосил киламиз. Энди A матрицани B матрицага кўпайтириб, топамиз:

$$A\cdot B=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix} \frac{1}{|A|}(a_{11}A_{11}+\dots+a_{1n}A_{1n}) & \frac{1}{|A|}(a_{11}A_{21}+\dots+a_{1n}A_{2n})\dots & \frac{1}{|A|}(a_{11}A_{n1}+\dots+a_{1n}A_{nn}) \\ \frac{1}{|A|}(a_{21}A_{11}+\dots+a_{2n}A_{1n}) & \frac{1}{|A|}(a_{21}A_{21}+\dots+a_{2n}A_{2n})\dots & \frac{1}{|A|}(a_{21}A_{n1}+\dots+a_{2n}A_{nn}) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{|A|}(a_{n1}A^{a}{}_{11}+\dots+a_{nn}A_{1n}) & \frac{1}{|A|}(a_{n1}A_{21}+\dots+a_{nn}A_{2n})\dots & \frac{1}{|A|}(a_{n1}A_{n1}+\dots+a_{nn}A_{nn}) \end{Vmatrix}=$$

Агар $a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\dots+a_{in}A_{in}=|A| \quad (i=1,2,\ \dots,\ n)$, хамда

$$a_{1k}A_{1j}+a_{2k}A_{2j}+\dots+a_{nk}A_{nj}=0 \quad \begin{pmatrix} k=1,2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,n \\ j\neq k \end{pmatrix}$$ (Қаралсин, 5- боб, 2- §)

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\begin{Vmatrix} \frac{1}{|A|}\cdot|A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{|A|}\cdot|A| & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{|A|}\cdot|A| \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}$$

келиб чиқади. Худди шундек

$$B\cdot A=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}$$

бўлишини ҳам кўриш қийин эмас. Демак,

$$BA=AB=E.$$

Бу эса (8) матрицанинг берилган A га тескари матрица эканини билдиради:

$$A^{-1}=\begin{Vmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{Vmatrix}$$

Шундай қилиб берилган A матрицанинг тескари матрицаси мавжудлиги кўрсатилди. Энди тескари матрицанинг ягоналигини кўрсатамиз.

Фараз қилайлик, A^{-1} дан фарқли C матрица ҳам A нинг тескари матрицаси бўлсин. Унда $AC=CA=E$ бўлади. Ушбу

$$CAA^{-1}=C(AA^{-1})=CE=C,$$
$$CAA^{-1}=(CA)A^{-1}=EA^{-1}=A^{-1}$$

тенгликлардан $C=A^{-1}$ экани келиб чиқади. Бу эса A матрицанинг тескари матрицаси A^{-1} ягона эканлигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Бу теорема берилган матрицанинг тескари матрицасининг мавжуд бўлишинигина исботлаб қолмасдан, уни топиш усулини ҳам кўрсатади.

Мисол. Ушбу

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{Vmatrix}$$

матрицанинг тескари A^{-1} матрицасини топинг.

Аввало берилган матрица детерминантини ҳисоблаймиз:

$$|A|=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{Vmatrix}=-10.$$

Демак, юқорида келтирилган теоремага кўра берилган матрицанинг тескари матрицаси A^{-1} мавжуд. A^{-1} матрицани топиш учун $|A|$ детерминантнинг алгебраик тўлдирувчиларини ҳисоблаймиз:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=4, \quad A_{12}=\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=12, \quad A_{13}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=7,$$

$$A_{21}=\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=4, \quad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=6, \quad A_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=2,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=2, \quad A_{32}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=6, \quad A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=1.$$

Унда

$$A^{-1}=\left\| \begin{matrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} \\ \frac{A_{13}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -\frac{4}{10} & -\frac{4}{10} & -\frac{2}{10} \\ -\frac{12}{10} & -\frac{6}{10} & -\frac{6}{10} \\ -\frac{7}{10} & -\frac{2}{10} & -\frac{1}{10} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{6}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{7}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \end{matrix} \right\|$$

Эслатма. Хос матрицанинг тескари матрицаси мавжуд бўлмайди.

7-БОБ

ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ

Биз ўтган бобларда детерминантлар, матрицалар ва уларнинг хоссаларини қарадик. Энди бу маълумотлардан фойдаланиб тенгламалар системасини батафсил ўрганамиз.

1-§. Икки ва уч номаълумли чизиқли тенгламалар системаси

Иккита x_1 ва x_2 номаълумли чизиқли тенгламалардан иборат ушбу

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1}$$

система *икки номаълумли чизиқли тенгламалар системаси* дейилади, бунда a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} — (1) система коэффициентлари, b_1, b_2 — берилган сонлардир.

Агар (1) системадаги x_1 нинг ўрнига x_1^0 сонни, x_2 нинг ўрнига x_2^0 сонни қўйганда тенгламаларнинг ҳар бири айниятга айланса, унда (x_1^0, x_2^0) жуфтлик (1) тенгламалар системасининг ***ечими*** дейилади.

(1) системани ўрганишда бу системанинг коэффициентларидан тузилган.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{2}$$

детерминант (уни (1) системанинг детерминанти дейилади) ҳамда бу детерминантнинг биринчи ва иккинчи устунларини мос равишда озод ҳадлар билан алмаштирилган ушбу

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2, \tag{3}$$

$$\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21} \tag{4}$$

детерминантлар муҳим аҳамиятга эга.

(1) тенгламалар системасини ечиш учун аввало бу системанинг биринчи тенгламасини a_{22} га, иккинчи тенгламасини эса $-a_{12}$ га кўпайтириб, кейин ҳадлаб қўшиб

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} a_{11}a_{22}x_1+a_{12}a_{22}x_2=a_{22}b_1, \\ -a_{21}a_{12}x_1-a_{22}a_{12}x_2=-a_{12}b_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=a_{22}b_1-a_{12}b_2$$

бўлишини топамиз. Сўнгра (1) системанинг биринчи тенгламасини $-a_{21}$ га, иккинчи тенгламасини эса a_{11} га кўпайтириб кейин ҳадлаб қўшиб

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} -a_{11}a_{21}x_1-a_{12}a_{21}x_2=-b_1a_{21}, \\ a_{11}a_{21}x_1+a_{11}a_{22}x_2=b_2a_{11} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1$$

бўлишини топамиз. Натижада (1) системага тенг кучли бўлган ушбу

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$
$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-a_{21}b_1.$$

системага келамиз. Бу система юқоридаги (2), (3) ва (4) муносабатларда ҳисобга олганда қуйидагича ёзилади:

$$\begin{cases} \triangle \cdot x_1=\triangle_{x_1} \\ \triangle \cdot x_2=\triangle_{x_2} \end{cases} \qquad (1')$$

(1′) системасининг ечими $\triangle, \triangle_{x_1}$ ҳамда $\triangle_{x_2}$ ларга боғлиқ.

1°. $\triangle \neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда (1) системадан

$$x_1=\frac{\triangle_{x_1}}{\triangle}, \qquad x_2=\frac{\triangle_{x_2}}{\triangle} \qquad (5)$$

бўлишини топамиз. Бу топилган x_1 ва x_2 лар (1′) тенгламанинг ечими бўлади. (1) системанинг ечимини топишнинг бу усули *Крамер усули* дейилади. (5) формулага эса Крамер формуласи дейилади.

1-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x_1+3x_2=-1 \\ 2x_1-x_2=5 \end{cases}$$

системани ечинг.

Аввало бу системанинг детерминантини ҳисоблаймиз:

$$\triangle=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-7.$$

Демак, берилган система ягона ечимга эга. Уни Крамер формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}=\frac{1}{-7}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 5 & -1\end{vmatrix}=-\frac{1}{7}\cdot(-14)=2,$$

$$x_2=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}=-\frac{1}{7}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 5\end{vmatrix}=-\frac{1}{7}\cdot 7=-1.$$

Демак, берилган системанинг ечими $(+2;\ -1)$ бўлади.

2°. $\Delta=0$ бўлиб, Δ_{x_1} ва Δ_{x_2} лардан ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли бўлсин. Бунда (1) система ечимга эга бўлмайди. Бу холда (1) биргаликда бўлмаган система дейилади.

2- мисол. Ушбу

$$\begin{cases}x_1+2x_2=3\\ 3x_1+6x_2=1\end{cases}$$

системани ечинг. Бу система учун

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{vmatrix}=0,\qquad \Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 6\end{vmatrix}=16,\qquad \Delta_{x_2}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-8$$

бўлади. Демак, берилган система биргаликда бўлмаган система бўлиб, унинг ечими мавжуд эмас.

3° $\Delta=0$, $\Delta_{x_1}=0$, $\Delta_{x_2}=0$ бўлсин. Бу холда (1) система ёки чексиз кўп ечимга эга бўлади ёки ечимга эга бўлмайди. Шунинг учун система бу холда ноаниқ, дейилади.

3- мисол. Ушбу

$$\begin{cases}2x_1+3x_2=1\\ 4x_1+6x_2=2\end{cases}$$

системани ечинг. Бу система учун

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}=0\qquad \Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{vmatrix}=0\qquad \Delta_{x_2}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=0$$

бўлади. Ихтиёрий $\left(t,\ \frac{1-2t}{3}\right)$ кўринишдаги жуфтлик

$(t\in R)$ системанинг ечими экани равшан. Демак берилган система ноаниқ система бўлиб, у чексиз кўп ечимга эга.

Энди уч номаълумли чизиқли тенгламалар системасини қараймиз.

Учта x_1, x_2 ва x_3 номаълумли чизиқли тенгламалардан иборат ушбу

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\qquad(6)$$

система *уч номаълумли чизиқли тенгламалар системаси* дейилади, бунда a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33} — бу системанинг коэффициентлари. b_1, b_2, b_3 — берилган сонлардир.

Агар (6) системадаги x_1 нинг ўрнига x_1^0 сонни, x_2 нинг ўрнига x_2^0 сонни ва x_3 нинг ўрнига x_3^0 сонни қўйганда тенгламаларнинг ҳар бири айниятга айланса, унда (x_1^0, x_2^0, x_3^0) учлик (6) системанинг *ечими* дейилади.

Ушбу

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{7}$$

детерминант берилган (6) системанинг *детерминанти* дейилади. Бу детерминантнинг биринчи, иккинчи ва учинчи устунларини мос равишда озод ҳадлар билан алмаштириб

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{22} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_3}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

детерминантларни ҳосил қиламиз. Икки номаълумли система сингари бу детерминантлар ҳам (6) системани ечишда муҳим аҳамиятга эга.

Алгебраик тўлдирувчилар хоссаларидан фойдаланиб (6) системани унга эквивалент, соддароқ система билан алмаштирамиз. Бунинг учун аввало, берилган система детерминанти элементларининг алгебраик тўлдирувчиларини топамиз:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{22}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{23}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad A_{32}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad A_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Бу алгебраик тўлдирувчилар ёрдамида юқоридаги Δ ва Δ_{x_1} детерминантлар қуйидагича ёзилади:

$$\begin{gathered} \Delta=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}, \\ \Delta_{x_1}=b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31}. \end{gathered} \tag{8}$$

Энди (6) системанинг биринчи тенгламасини A_{11} га, иккинчи тенгламасини A_{21} га ва учинчи тенгламасини A_{31} га кўпайтириб, кейин ҳадлаб қўшсак, унда

$$\begin{gathered} (a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31})x_1+(a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+ \\ +a_{32}A_{31})x_2+(a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31})x_3= \\ =b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31} \end{gathered} \tag{9}$$

бўлади. Юкоридаги (8) муносабатлардан ҳамда детерминантнинг хоссаларидан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}&=\Delta, \\ a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31}&=0, \\ a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31}&=0, \\ b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31}&=\Delta_{x_1}. \end{aligned}$$

Натижада (9) тенглама ушбу

$$\Delta\cdot x_1=\Delta_{x_1}$$

кўринишга келади.

Худди юкоридагидек, (6) системанинг биринчи тенгламасини A_{12} га, иккинчи тенгламасини A_{22} га ва учинчи тенгламасини A_{32} га кўпайтириб, кейин ҳадлаб қўшиб

$$\Delta\cdot x_2=\Delta_{x_2}$$

тенглама, (6) тенгламанинг биринчи тенгламасини A_{13} га, иккинчи тенгламасини A_{23} га ва учинчи тенгламасини A_{33} га кўпайтириб, сўнг уларни хадлаб кўшиш натижасида

$$\Delta\cdot x_3=\Delta_{x_3}$$

тенглама ҳосил бўлади.

Шундай килиб (6) системага тенг кучли бўлган ушбу

$$\begin{cases} \Delta\cdot x_1=\Delta_{x_1} \\ \Delta\cdot x_2=\Delta_{x_2} \\ \Delta\cdot x_3=\Delta_{x_3} \end{cases} \qquad (6)$$

системага келамиз.

Равшанки (6′) системанинг ечими Δ, Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, Δ_{x_3} ларга боғлик.

1°. $\Delta\neq 0$ бўлсин. Бу холда (6′) системадан

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} \qquad (10)$$

бўлишини топамиз. (x_1, x_2, x_3) (6) системанинг ягона ечими бўлади. Бу холда (6) система биргаликда дейилади ва (10) муносабатлар ҳам Крамер формулалари дейилади.

2°. $\Delta=0$ бўлиб, Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, Δ_{x_3} лардан хеч бўлмаганда биттаси нолдан фаркли бўлсин. Бунда (6) система ечимга эга бўлмайди.

3°. $\Delta=0$ бўлиб, $\Delta_{x_1}=\Delta_{x_2}=\Delta_{x_3}=0$ бўлсин. Бу ҳолда (6) система ёки чексиз кўп ечимга эга бўлади ёки битта ҳам ечимга эга бўлмайди.

4-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=4, \\ 3x_1+2x_2-x_3=1, \\ x_1+x_2-2x_3=-3 \end{cases}$$

системани ечинг.

Бу системанинг детерминанти:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=-10.$$

Демак, берилган система ягона ечимга эга. Берилган система учун

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}4 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ -3 & 1 & -2\end{vmatrix}=-10,$$

$$\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 3 & 1 & 1\\ 1 & -3 & -2\end{vmatrix}=0,$$

$$\Delta_{x_3}=\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -3\end{vmatrix}=-20,$$

Крамер формуласидан фойдаланиб

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}=1,\quad x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}=0,\quad x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}=2$$

бўлишини топамиз.

5- мисол. Ушбу

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=2\\ 3x_1+2x_2+2x_3=1\\ 4x_1+3x_2+3x_3=4\end{cases}$$

системани ечинг. Бу система учун

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 2\\ 4 & 3 & 3\end{vmatrix}=0,\ \Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 4 & 3 & 3\end{vmatrix}=0,\ \Delta_{x_2}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 4 & 4 & 3\end{vmatrix}=1,$$

$$\Delta_{x_3}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 4 & 3 & 4\end{vmatrix}=-1$$

бўлгани сабабли берилган система ечимга эга эмас.

Энди учинчи тартибли чизиқли тенгламалар системасини матрица кўринишида ёзилишини ва матрица оркали ечишни кўрайлик.

Аввалгидек

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{6}$$

система берилган бўлсин. Берилган системанинг коэффициентларидан, x_1, x_2, x_3 лардан ҳамда системанинг озод ҳадларидан ушбу

$$A=\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right\| \quad X=\left\|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\| \quad B=\left\|\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}\right\|$$

матрицаларни тузамиз.

Равшанки,

$$A\cdot X=\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 \end{matrix}\right\|$$

$$A\cdot X=B \tag{6''}$$

кўринишида ёзиш имконини беради.

(6″) тенглама (6) тенгламалар системасининг матрица кўринишида ёзилиши бўлади.

Айтайлик, (6) системанинг детерминанти

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$

бўлсин. Унда юқорида киритилган A матрицанинг тескари матрицаси мавжуд бўлиб,

$$A^{-1}=\left\|\begin{matrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{matrix}\right\|$$

бўлади (қаралсин: 6- боб, 4- §).

(6″) тенгликнинг ҳар икки томонини A^{-1} матрицага кўпайтириб топамиз: $A^{-1}AX=A^{-1}B$. Агар $A^{-1}AX=(A^{-1}A)X=EX=X$ бўлишини эътиборга олсак, унда матрица кўринишида ёзилган (6″) тенгламанинг ечими

$$X=A^{-1}\cdot B \tag{11}$$

бўлишини топамиз. Равшанки,

$$A^{-1}\cdot B=\begin{Vmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix} \frac{1}{\Delta}\,(b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31}) \\ \frac{1}{\Delta}\,(b_1A_{12}+b_2A_{22}+b_3A_{32}) \\ \frac{1}{\Delta}\,(b_1A_{13}+b_2A_{23}+b_3A_{33}) \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} \\ \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} \\ \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} \end{Vmatrix}$$

Агар $X=\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}$ бўлишини эътиборга олсак, (11) тенгликни қуйидаги кўринишда ҳам ёзиш мумкин:

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} \frac{1}{\Delta}\cdot\Delta_{x_1} \\ \frac{1}{\Delta}\cdot\Delta_{x_2} \\ \frac{1}{\Delta}\cdot\Delta_{x_3} \end{Vmatrix}$$

Кейинги тенгликдан

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},\quad x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса Крамер формуласидир.

2- §. *n* та номаълумли чизиқли тенгламалар системаси

Олий математика ва унинг татбиқларида учтадан ортиқ номаълумли чизиқли тенгламалар системасидан ҳам фойдаланилади. Шуни эътиборга олиб, n та номаълумли чизиқли тенгламалар системасини қисқача баён этамиз.

n та $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумли чизиқли тенгламалардан иборат ушбу

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}b_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}\qquad(12)$$

система *n та номаълумли чизиқли тенгламалар системаси* дейилади, бунда $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn}$ — шу система коэффициентлари, $b_1, b_2, \dots, b_n$ — озод ҳадлар берилган сонлардир.

Агар (12) системадаги x_1 нинг ўрнига x_1^0 сонни, x_2 нинг ўрнига x_2^0 ни, ва ҳ. к. x_n нинг ўрнига x_n^0 сонни қўйганда системадаги тенгламаларнинг ҳар бири айниятга айланса, унда $(x_1^0\ x_2^0, \dots x_n^0)$ (12) системанинг *ечими* дейилади.

Берилган тенгламаларни ечишда унинг коэффициентларидан тузилган

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1}a_{n2} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

детерминант ҳамда бу детерминантнинг j-устунини $(j=1, 2, \dots, n)$ мос равишда озод ҳадлар билан алмаштирилган

$$\Delta_{x_j}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$(j=1, 2, \dots, n)$ детерминантлар муҳим аҳамиятга эга. Агар A, X ва B матрицалар учун

$$A=\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{nn} \end{matrix}\right\|, \quad X=\left\|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{matrix}\right\|, \quad B=\left\|\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{matrix}\right\|$$

матрицалар олинса, унда (12) тенгламалар системаси

$$A\cdot X=B \tag{13}$$

матрица кўринишидаги тенгламага келади.

Фараз қилайлик (12) системанинг детерминанти $\Delta\neq0$ бўлсин. У ҳолда A матрицанинг тескари матрицаси мавжуд ва

$$A^{-1}=\left\|\begin{matrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{matrix}\right\|$$

бўлади.

(13) тенгламанинг ҳар икки томонини A^{-1} га кўпайтирамиз: $A^{-1}AX=A^{-1}B$.

Равшанки, $A^{-1}AX=(A^{-1}A)X=EX=X$.

Демак, матрица кўринишидаги (13) тенгламанинг ечими

$$X=A^{-1}B \tag{14}$$

бўлади.

A^{-1} ва B матрицаларни кўпайтириб топамиз:

$$A^{-1}B=\left\| \begin{matrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \ldots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \ldots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \ldots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \right\| =$$

$$=\left\| \begin{matrix} \frac{1}{\Delta}(b_1A_{11}+b_2A_{21}+\ \ldots\ +b_nA_{n1} \\ \frac{1}{\Delta}(b_1A_{12}+b_2A_{22}+\ \ldots\ +b_nA_{n2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{1}{\Delta}(b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\ \ldots+b_nA_{nn}) \end{matrix} \right\|.$$

Агар детерминантнинг ушбу

$$\Delta=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ \ldots\ +a_{nj}A_{nj}\ \ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$
$$\Delta_{xj}=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\ \ldots\ +b_nA_{nj}\ \ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$
$$a_{1k}A_{1j}+a_{2k}A_{2j}+\ \ldots\ +a_{nk}A_{nj}=0$$

хоссасидан фойдалансак,

$$A^{-1}B=\left\| \begin{matrix} \frac{1}{\Delta}\Delta_{x_1} \\ \frac{1}{\Delta}\Delta_{x_2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{1}{\Delta}\Delta_{x_n} \end{matrix} \right\|$$

бўлади. Бу тенгликни ҳамда $X=\left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \right\|$

ни эътиборга олсак, унда (14) муносабат ушбу $\left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{\Delta}\Delta_{x_1} \\ \frac{1}{\Delta}\Delta_{x_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{\Delta}\Delta_{x_n} \end{matrix} \right\|$

кўринишга келади. Кейинги тенгликдан эса

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad \ldots x_n=\frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$$

келиб чиқади (Крамер формуласи). Бу ҳолда (12) система *биргаликда* дейилади.

Агар системанинг детерминанти $\Delta=0$ бўлиб, Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, Δ_{x_n} лардан ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли бўлса, (12) система ечимга эга бўлмайди. Бу холда (12) *биргаликда бўлмаган система* дейилади.

Агар $\Delta=0$ бўлиб, $\Delta_{x_1}=\Delta_{x_2}=\ldots=\Delta_{x_n}=0$ бўлса, унда (12) система битта ҳам ечимга эга бўлмайди ёки чексиз кўп ечимга эга бўлади.

6-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8 \\ x_1-3x_2-6x_4=9 \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{cases}$$

чизиқли тенгламалар системасини ечинг. Бу системанинг детерминантини ҳисоблаймиз:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -3 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} +$$

$$+0\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ -3 & 0 & -6 \\ 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ -3 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 27.$$

Демак, берилган тенгламалар системаси ягона ечимга эга.

Энди Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, Δ_{x_3} ва Δ_{x_4} ни топамиз.

$$\Delta_{x_1}=8\cdot A_{11}+9\cdot A_{21}-5A_{31}+0\cdot A_{41}=$$

$$=8\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} -9\cdot\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} -5\cdot\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ -3 & 0 & -6 \\ 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81,$$

$\Delta_{x_2}=-108$, $\Delta_{x_3}=-27$, $\Delta_{x_4}=27$.

Демак,

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}=3, \quad x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}=-4, \quad x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}=-1, \quad x_4=\frac{\Delta_{x_4}}{\Delta}=1.$$

3-§. Бир жинсли чизиқли тенгламалар системаси

Ушбу

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0 \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=0 \end{cases} \qquad (15)$$

система *бир жинсли чизиқли тенгламалар системаси* дейилади. Бу система 2- § да ўрганилган системанинг $b_1=b_2=\ldots=b_n=0$ бўлган хусусий ҳолидир.

Равшанки, $x_1=0, x_2=0, \ldots, x_n=0$ сонлар (15) системанинг ҳар бир тенгламасини қаноатлантиради. Бинобарин улар (18) системанинг ечими бўлади. Одатда бу ечим (15) системанинг *тривиал ечими* дейилади.

Табиий равишда (15) системанинг тривиал бўлмаган (хеч бўлмаганда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ларнинг бири нолдан фаркли бўлган) ечими бўладими деган савол туғилади.

Агар (15) бир жинсли чизиқли тенгламалар системасининг детерминанти

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ . & . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

нолдан фарқли бўлса ($\Delta\neq0$), у ҳолда бу система фақат тривиал ечимга эга бўлади.

Ҳакиқатан ҳам, (15) система учун

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \ldots a_{1n} \\ 0 & a_{22} \ldots a_{2n} \\ . & . \quad . \quad . \quad . \\ 0 & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}=0, \quad \Delta_{x_2}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \ldots a_{1n} \\ a_{21} & 0 \ldots a_{2n} \\ . & . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1} & 0 \ldots a_{nn} \end{vmatrix}=0, \ldots,$$

$$\Delta_{x_n}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots 0 \\ a_{21} & a_{22} \ldots 0 \\ . & . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots 0 \end{vmatrix}=0$$

бўлиб, Крамер формуласига кўра $x_1=0, x_2=0, \ldots, x_n=0$ бўлади.

Юқорида айтилганлардан қуйидаги хулоса келиб чиқади.

Агар (15) система тривиал бўлмаган ечимга эга бўлса, у ҳолда (15) системанинг детерминанти нол бўлиши зарурдир.

Демак, (15) системанинг тривиал бўлмаган ечими шу система детерминанти нолга тенг бўлган ҳолдагина бўлиши мумкин экан.

7-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} -x_1+x_2=0 \\ x_1-x_2=0 \end{cases} \qquad (16)$$

бир жинсли чизиқли тенгламалар системасини қарайлик.

$x_1=0$, $x_2=0$ берилган системанинг тривиал ечимларидир. (16) системанинг детерминанти

$$\Delta=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=0.$$

Демак, (16) системанинг тривиал бўлмаган ечимлари бўлиши мумкин. Ҳақиқатан ҳам, берилган системанинг чексиз кўп тривиал бўлмаган ечимлари мавжуд:

$x_1=t$, $x_2=t$ (бунда t — ихтиёрий ҳақиқий сон).

4- §. Чизиқли тенгламалар системасининг умумий кўриниши

n та $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумли m та чизиқли тенгламалардан иборат ушбу

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}b_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{17}$$

системани қарайлик. Хусусан, $n=m$ бўлган ҳолда, яъни номаълумлар сони системадаги тенгламалар сонига тенг бўлганда (17) система 3- § да ўрганилган (12) системага келади.

(17) системани ўрганишдаги асосий масалалардан бири унинг биргаликда бўлиши, яъни ечимининг мавжуд бўлиши масаласидир. Бу эса (17) система коэффициентларидан тузилган $[m\times n]$-тартибли

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdot a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdot a_{2n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1} & a_{m2}\cdot a_{mn} \end{Vmatrix}$$

матрица ҳамда кенгайтирилган матрица деб номланувчи $[m\times(n+1)]$- тартибли

$$\bar{A}=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdot a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}\cdot a_{2n} & b_2 \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ A_{m1} & a_{m2}\cdot a_{mn} & b_m \end{Vmatrix}$$

матрицаларнинг рангига боғлиқдир. Қуйида бу ҳақидаги теоремани исботсиз келтирамиз.

Теорема (Кронекер — Копелли теоремаси). *(17) тенгламалар системаси биргаликда бўлиши учун A ва A матрицаларнинг ранглари бир-бирига тенг бўлиши, яъни*

$$\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}\bar{A},$$

зарур ва етарлидир.

Келтирилган теоремадан қуйидаги хулосалар келиб чиқади:

1°. Агар $\bar{A}$ матрицанинг ранги A матрицанинг рангидан катта бўлса, яъни

$$\mathrm{rank}\bar{A} > \mathrm{rank}A,$$

унда (17) система ечимга эга бўлмайди.

2°. Агар $\bar{A}$ матрицанинг ранги A матрицанинг рангига тенг бўлиб,

$$\mathrm{rank}\bar{A} = \mathrm{rank}A = k$$

бўлса, унда (17) система ечимга эга бўлиб, қуйидаги ҳоллар юз беради:

а) $k < n$ да (17) система ечимга эга бўлади ва у қуйидагича топилади: $\mathrm{rank}A = k$ эканлигидан шундай нолдан фарқли камида битта k- тартибли минор мавжуд. Фараз қилайлик улардан бири

$$\bar{\Delta} = \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \dots & \bar{a}_{1k} \\ . & . & . \\ \bar{a}_{k1} & \dots & \bar{a}_{kk} \end{vmatrix}$$

бўлсин.

Энди (17) системани бу минорга мос ҳолда ушбу

$$\begin{cases} \bar{a}_{11}x_1 + \dots + \bar{a}_{1k}x_k + a_{1k+1}x_{k+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \bar{a}_{k1}x_1 + \dots + \bar{a}_{kk}x_k + a_{kk+1}x_{k+1} + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases} \qquad (18)$$

кўринишда ёзиб оламиз ва $x_{k+1}, \dots, x_n$ номаълумлар қатнашган ҳадларни ўнг томонга ўтказамиз:

$$\begin{cases} \bar{a}_{11}x_1 + \dots + \bar{a}_{1k}x_k = b_1 - a_{1k+1}x_{k+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \bar{a}_{k1}x_1 + \dots + \bar{a}_{kk}x_k = b_k - a_{kk-1}x_{k+1} - \dots - a_{kn}x_n. \end{cases} \qquad (19)$$

$x_{k+1}, \dots, x_n$ ларни ихтиёрий тайинланган $x_{k+1}^0, \dots, x_n^0$ сонлар деб қараб, бу системани ечамиз. (19) системанинг детерминанти нолдан фарқли бўлгани учун унинг ечимлари

$$x_1 = \frac{\bar{\Delta}_{x_1}}{\bar{\Delta}}, \dots, x_k = \frac{\bar{\Delta}_{x_k}}{\bar{\Delta}}$$

бўлади. Демак, ҳар бир тайинланган $x_{k+1}^0, \dots, x^0_n$ лар учун (19) система ягона $x_1^0, \dots, x_k^0$ ечимга эга бўлиб, $x_1^0, \dots, x_k^0, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0$ сонлар (18) системанинг ечими бўлади. $x_{k+1}, \dots, x_n$ лар ихтиёрий қийматларни қабул қилиши мумкинлиги сабабли (19) система чексиз кўп ечимга эга бўлади. Топилган $x_1^0, \dots, x_k^0, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0$ сонлар (17) системанинг қолган тенгламаларини ҳам қаноатлантирганлиги учун улар (17) системанинг ҳам ечими бўлади.

б) $k = n$ бўлганда (17) система а) ҳолда айтилганларга асосан ягона ечимга эга бўлади.

Демак, $\mathrm{rank}\tilde{A}=\mathrm{rank}A=n$ бўлгандагина (17) система ягона ечимга эга бўлар экан.

8-мисол. Ушбу

$$\begin{cases}7x_1+3x_2=2\\ x_1-2x_2=-3\\ 4x_1+9x_2=11\end{cases}$$

системани ечинг. Бу система учун

$$A=\begin{Vmatrix}7&3\\1&-2\\4&9\end{Vmatrix},\ \bar{A}=\begin{Vmatrix}7&3&2\\1&-2&-3\\4&9&11\end{Vmatrix}$$

бўлади. Қуйидаги иккинчи тартибли детерминант

$$\begin{vmatrix}7&3\\1&-2\end{vmatrix}=-17\neq0$$

нолдан фарқли бўлганлигидан

$$\mathrm{rank}A=2$$

бўлишини топамиз. Агар

$$\begin{vmatrix}7&3&2\\1&-2&-3\\4&9&11\end{vmatrix}=-172+172=0$$

бўлишини эътиборга олсак, унда $\bar{A}$ матрицанинг ранги ҳам 2 га тенг бўлишини аниқлаймиз: $\mathrm{rank}\ \bar{A}=2$, $\mathrm{rank}\ \bar{A}=rank\ A=2$. Номаълумлар сони ҳам 2 та бўлгани учун берилган система ягона ечимга эга. Берилган системанинг биринчи иккита тенгламасини олиб

$$\begin{cases}7x_1+3x_2=2,\\ x_1-2x_2=-3\end{cases}$$

системани ечамиз:

$$x_1=\left|\frac{\begin{matrix}2&3\\-3&-2\end{matrix}}{\begin{matrix}7&3\\1&-2\end{matrix}}\right|=-\frac{5}{17},\quad x_2=\left|\frac{\begin{matrix}7&2\\1&-3\end{matrix}}{\begin{matrix}7&3\\1&-2\end{matrix}}\right|=\frac{23}{17}.$$

Бу топилган x_1 ва x_2 берилган системанинг учинчи тенгламасини ҳам қаноатлантиради: $4x_1+9x_2=4\cdot\left(-\frac{5}{17}\right)+9\cdot\frac{23}{17}=11$. Шундай қилиб, $x_1=-\frac{5}{17}$, $x_2=\frac{23}{17}$ берилган системанинг ягона ечими бўлади.

9-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+x_2+2x_3=1, \\ x_1+x_2+3x_3=2 \end{cases}$$

системани ечинг. Бу система учун

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0$$

бўлгани сабабли Крамер усулини қўллаш мумкин эмас. Шунинг учун берилган системанинг ечимга эга ёки эга эмаслигини Кронекер — Копелли теоремасидан фойдаланиб текширамиз. Системанинг асосий A ва кенгайтирилган $\bar{A}$ матрицаларининг рангини ҳисоблаймиз. Система учун

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{Vmatrix}, \quad \bar{A}=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{Vmatrix}$$

эканлигидан $|A|=\Delta=0$ ва

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1\neq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=1\neq 0$$

бўлишидан $\operatorname{rank}A=2$, $\operatorname{rank}\bar{A}=3$ эканлиги келиб чиқади. Демак, $\operatorname{rank}\bar{A}\neq\operatorname{rank}A$ бўлгани учун система ечимга эга эмас.

10-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+2x_3=1 \\ 2x_1+2x_2+4x_3=2 \end{cases}$$

системани ечинг.

Бу система учун

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}=0.$$

Асосий

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{Vmatrix}$$

ва кенгайтирилган

$$\bar{A}=\left\|\begin{matrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 4 & 2\end{matrix}\right\|$$

матрицаларнинг рангларини ҳисоблаймиз.

Агар $|A|=\Delta=0$; $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\neq 0$

бўлишини эътиборга олсак, унда $\mathrm{rank}A=2$ ни топамиз.

Кенгайтирилган матрицадан ҳосил қилинган барча (4та) учинчи тартибли матрицалар детерминантлари нолга тенг:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}=0.$$

Бирок $\bar{A}$ нинг иккинчи тартибли матрицасидан тузилган детерминант: $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\neq 0$. Бинобарин, $\mathrm{rank}\bar{A}=2$. Демак, $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}\bar{A}=$ $=2$ экан.

Энди системанинг ечимини топиш учун бу системадан нолдан фаркли 2- тартибли детерминант элементлари қатнашган биринчи ва иккинчи тенгламаларни олиб,

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1,\\ x_1+x_2+2x_3=1\end{cases}$$

системани қурамиз. Бу системадаги тенгламаларнинг ўнг томонига битта номаълумни шундай ўтказиш керакки, ҳосил бўлган икки номаълумли системанинг детерминанти 0 дан фаркли бўлсин. Масалан, бизнинг холимизда ўнг томонга ёки x_1 ни ёки x_2 ни ўтказиш мумкин. Биз x_2 ни олиб ўтамиз:

$$\begin{cases}x_1+x_3=1-x_2\\ x_1+2x_3=1-x_2,\end{cases}\tag{20}$$

бу системанинг детерминанти

$$\Delta'=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\neq 0$$

бўлгани учун (20) система ҳар бир тайинланган $x_2=x_2^0$ да ягона ечимга эга бўлади:

$$x_1=\frac{\Delta'_{x_1}}{\Delta'}=\begin{vmatrix}1-x_2^0 & 1\\ 1-x_2^0 & 2\end{vmatrix}=1-x_2^0,$$

$$x_3=\frac{\Delta'_{x_3}}{\Delta'}=\begin{vmatrix}1 & 1-x_2^0\\ 1 & 1-x_2^0\end{vmatrix}=0,$$

Шундай қилиб $(1-x_2,\ x_2,\ 0)$ учлик x_2 нинг ихтиёрий қийматида берилган системанинг барча енимларини беради.

Пировардида (17) системада $b_1=b_2=\ldots=b_m=0$ бўлган ҳолни, яъни ушбу

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \qquad (21)$$

бир жинсли тенгламалар системасини қараймиз. Равшанки, бу ҳолда

$$\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}\bar{A}=k$$

бўлади. Бинобарин, Кропекер — Копелли теоремасига кўра (21) система биргаликда бўлади.

Агар $k=n$ бўлса, у ҳолда (21) система фақат $x_1=0,\ x_2=0,\ \ldots,\ x_n=0$ бўлган ечимларга, яъни тривиал ечимларга эга бўлади.

Агар $k<n$ бўлса, у ҳолда (21) система тривиал бўлмаган ечимларга ҳам эга бўлади ва бу ечимлар юқорида келтирилган усул билан топилади.

8-БОБ

КОМПЛЕКС СОНЛАР

Ушбу бобда комплекс сонлар ҳақидаги дастлабки маълумотларни келтирамиз. Комплекс сонлар ва уларга боғлиқ комплекс ўзгарувчили функцияларни кейинчалик батафсил ўрганамиз. Математикада кўпчилик масалаларни ҳал қилиш ҳақиқий сонлар тўпламини кенгайтиришни тақозо қилади. Мисол учун квадрат тенгламалар ва уларнинг ечимларини ўрганишда биз комплекс сонлар тўпламига ўтиш зарурлигини кўп кўрганмиз.

1- §. Комплекс сон тушунчаси

Иккита a ва b ҳақиқий сонлар берилган бўлсин. Ушбу

$$a+ib$$

кўринишдаги сон *комплекс сон*, $i=\sqrt{-1}$ эса *мавҳум бирлик* дейилади.

Одатда комплекс сонлар битта ҳарф, кўпинча z ҳарфи билан белгиланади:

$$z=a+ib.$$

a сон z комплекс соннинг *ҳақиқий қисми* дейилиб, $\mathrm{Re}z$ каби белгиланади, b сон z комплекси соннинг *мавҳум қисми* дейилиб, $\mathrm{Im}z$ каби белгиланади.

Демак, $$a=\mathrm{Re}z,\ b=\mathrm{Im}z.$$

Масалан, $z=2+5i$ комплекс соннинг ҳақиқий қисми $\mathrm{Re}z=2$, мавҳум қисми $\mathrm{Im}z=5$ бўлади.

Бирор $z=a+ib$ комплекс сон берилган бўлсин. Бу соннинг мавҳум қисмидан ишораси билан фарқ қилувчи $a-ib$ комплккс сон z га *қўшма комплекс сон* дейилади ва z каби белгиланади:

$$z=a-ib$$

Иккита $z_1=a_1+ib_1$, ҳамда $z_2=a_2+ib_2$ комплекс сонлар берилган бўлсин. Агар $a_1=a_2$, $b_1=b_2$ бўлса, у ҳолда z_1 ва z_2 комплекс сонлар ўзаро тенг дейилади ва $z_1=z_2$ каби белгиланади.

2- §. Комплекс сонлар устида арифметик амаллар

Иккита $z_1=a_1+ib_1$ ва $z_2=a_2+ib_2$ комплекс сонлар берилган бўлсин. Ушбу

$$(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)$$

комплекс сон z_1 ва z_2комплекс сонлар *йиғиндиси* дейилади ва z_1+z_2 каби белгиланади:

$$z_1+z_2=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2).$$

Келтирилган қоидага кўра

$$z+\bar{z}=2a$$

бўлишини кўриш қийин эмас.

Ушбу

$$(a_1-a_2)+i(b_1-b_2)$$

комплекс сон z_1 комплекс сондан z_2 комплекс соннинг *айирмаси* дейилади ва z_1-z_2 каби белгиланади:

$$z_1-z_2=(a_1-a_2)+i(b_1-b_2)$$

Равшанки,

$$z-\bar{z}=2ib.$$

Ушбу

$$(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1)$$

комплекс сон z_1 ва z_2 комплекс сонлар *кўпайтмаси* дейилади ва z_1z_2 каби белгиланади:

$$z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1)$$

Бу кўпайтириш қоидаси a_1+ib_1, a_2+ib_2 икки ҳадларни ўзаро кўпайтиришдан ва $i^2=-1$ эканлигини эътиборга олиб ҳосил қилинган. Ҳақиқатан ҳам,

$$(a_1+ib_1)\ (a_2+ib_2)=a_1\cdot a_2+ib_1a_2+a_1\cdot ib_2+ib_1\cdot ib_2=$$

$$=a_{1\,2}+i(a_1b_1+a_2b_2)+i^2b_1\cdot b_2=(a_2a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1).$$

Келтирилган кўпайтириш қоидасидан фойдаланиб

$$z\cdot\bar{z}=a^2+b^2$$

бўлишини топамиз.

Ушбу

$$\frac{a_1\cdot a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\frac{a_2b_1-a_2b_2}{a_2^2+b_2^2}$$

комплекс сон z_1 ва z_2 $(z_2\neq0)$ комплекс сонлар *нисбати* ёки *бўлинмаси* дейилади ва $\frac{z_1}{z_2}$ каби белгиланади:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1\cdot a_2+b_1\cdot b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}. \tag{1}$$

Бу бўлиш қоидаси a_1+ib_1 иккиҳадни a_2+ib_2 иккиҳадга бўлишдан келиб чиққан. Ҳақиқатан ҳам

$$\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=\frac{(a_1+ib_1)\ (a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)\ (a_2-ib_2)}=\frac{a_1a_2+b_1b_2+i(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}=$$

$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\ \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}.$$

Мисол. Ушбу

$$z_1 = 1 - i,\ z_2 = 1 + i$$

комплекс сонларнинг нисбати $\frac{z_1}{z_2}$ ни топинг.

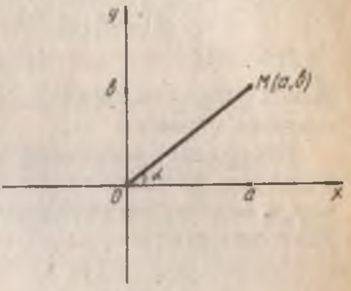
Юқорида келтирилган (1) қоидага кўра:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-i}{1+i} = \frac{1-1}{1+1} + i\frac{-1-1}{1+1} = o - i = -i.$$

3- §. Комплекс сонни геометрик тасвирлаш

Ҳақиқий сонлар тўплами O_x ўқида тасвирланиши бизга маълум. Комплекс сонларни геометрик тасвирлаш учун биз текисликда Oxy Декарт координаталари системасидан фойдаланамиз.

$z = a + ib$ комплекс сон учун a бирликни O_x ўқига, b бирликни эса O_y ўқига қўйиб мос $M(a, b)$ нуқта оламиз (27- чизма). M нуқта z комплекс соннинг текисликда геометрик тасвири дейилади. Равшанки, ҳар бир комплекс сонга текисликда битта M нуқта ва аксинча текисликдаги ҳар бир M нуқтага битта комплекс сон мос келади. Демак, комплекс сонлар тўплами билан текислик нуқталари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилган бўлиб, O_{xy} текислик (шу мосликни назарда тутиб) *комплекс сонлар текислиги* дейилади.



27- чизма.

Координаталар боши 0 нуқта билан M ни бирлаштирувчи OM кесма узунлиги r га z комплекс соннинг *модули* дейилади ва $|z|$ каби белгиланади.

Пифагор теоремасига кўра

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

эканлигини кўриш қийин эмас.

OM вектор билан O_x ўқи орасидаги α бурчакка z комплекс соннинг *аргументи* дейилади ва $\arg z$ каби белгиланади. Демак, $0 \leqslant \arg z < 2\pi$ 27- чизмадан кўринадики.

$$\cos\alpha = \frac{a}{r},\ \sin\alpha = \frac{b}{r} \text{ ёки } \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} \qquad (2)$$

бўлиб, бу формулалар ёрдамида комплекс соннинг аргументини топиш мумкин.

Мисол. Ушбу $z = 1 - i$ комплекс соннинг модули ва аргументи топилсин.

$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ бўлиб, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ эканини кўриш қийин эмас. Бу тенгламалар $[0, 2\pi)$ оралиғида ягона

$\alpha=\frac{3\pi}{4}$ ечимга эга. Демак, (2) тенгликлардан $a=r\cos\alpha$, $b=r\sin\alpha$ ифодаларга эга бўлиб, бундан эса $z=a+ib$ комплекс сонни

$$z=r\cos\alpha+ir\sin\alpha=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$

кўринишда ёзиш мумкинлигини кўрамиз. Комплекс соннинг бу кўриниши унинг *тригонометрик шакли* дейилади. Комплекс соннинг бундай кўриниши катор кулайликларга олиб келади.

Фараз қилайлик, z_1 ва z_2 комплекс сонлар

$$z_1=r_1(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1),\quad z_2=r_2(\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2)$$

тригонометрик шаклда берилган бўлсин. Бу ерда

$$r_1=|z_1|,\ r_2=|z_2|,\ \alpha_1=\arg z_1,\ \alpha_2=\arg z_2$$

$z_1\cdot z_2$ кўпайтма ва $\frac{z_1}{z_2}$ нисбатни қарайлик.

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=r_1\cdot r_2(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2)=\\&=r_2r_2[(\cos\alpha,\ \cos\alpha_2-\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2)+i(\cos\alpha_1\sin\alpha_2+\\&+\sin\alpha_1\cos\alpha_2)]=r_1r_2[\cos(\alpha_1+\alpha_2)+i\sin(\alpha_1+\alpha_2)]\end{aligned}$$

бўлиб, бу тенгликдан $|z_1\cdot z_2|=r_1\cdot r_2$, $\arg(z_1\cdot z_2)=\arg z_1+arg z_2$ эканини кўрамиз.

Юқоридаги коидадан кўринадики, иккита комплекс сон кўпайтирилганда, кўпайтманинг модули модулларнинг кўпайтмасига, аргументи эса аргументларнинг йиғиндисига тенг бўлар экан.

Мисол. $z_1=1-i$, $z_2=-1+i$ комплекс сонлар учун $z_1\cdot z_2$ топилсин.

$|z_1|=\sqrt{2}$, $|z_2|=\sqrt{2}$, $|z_1z_2|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$ эканлиги равшан.

$\arg z_1=\frac{7\pi}{4}$, $\arg z_1=\frac{3\pi}{4}$ бўлиб, $\arg z_1\cdot z_2=\arg z_1+\arg z_2=$

$=\frac{7\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}=\frac{10\pi}{4}$ Демак, $z^1\cdot z^2=2(\cos\frac{\pi}{2}+i\ \sin\ \frac{\pi}{2})=2i$.

Худди шунингдек биз $\frac{z_1}{z_2}$ нисбат учун $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$,

$\arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2$ эканини кўришимиз мумкин.

Энди комплекс соннинг даражаси z^n ва илдизи $\sqrt[n]{z}$ ифодалари билан танишайлик.

Таърифга кўра $z^n=\underbrace{z\cdot z\cdot\ldots\cdot z}_{n\quad ma}$ бўлиб, $z^n=r^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$ эканлиги равшан.

Демак, $|z|^n=|z|^n$, $\arg z^n=n\ \arg z$ бўлади. $\sqrt[n]{z}$ миқдор даражага тескари амал бўлиб, у куйидагича аниқланади: берилган z комплекс сон учун ушбу

$$W^n=z \tag{3}$$

тенгламанинг ечимлари z комплекс сондан олинган *n-даражали илдиз* дейилади ва $\sqrt[n]{z}$ каби белгиланади. (3) тенгламани ечиш учун z ни $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, W ни эса $W=R(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ шаклда ифодалаймиз. У ҳолда (3) тенглама

$$R^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r(\cos\alpha+i\sin\alpha) \tag{4}$$

кўринишини олади. Аввало (4) тенгликнинг ҳар иккала томонидаги комплекс сонларнинг модулларини ҳисоблаймиз:

$$|R^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi|=R^n, \quad |r(\cos\alpha+i\sin\alpha)|=r.$$

Демак, $R^n=r$.

Энди комплекс сонларнинг тенглиги тушунчасидан фойдаланиб (4) тенгликдан топамиз:

$$\cos n\varphi=\cos\alpha, \quad \sin n\varphi=\sin\alpha.$$

Шундай қилиб, куйидаги тенгликларга келдик:

$$R^n=r, \quad \cos n\varphi=\cos\alpha, \quad \sin n\varphi=\sin\alpha.$$

Бу ерда $R^n=r$ тенглама ягона $R=\sqrt[n]{r}$ ечимга эга бўлади.

$\cos n\varphi=\cos\alpha$, $\sin n\varphi=\sin\alpha$ тенгликлардан $n\varphi=\alpha+2k\pi$, $k\in Z$ бўлиб, $0\leqslant\varphi<2\pi$ шартни каноатлантирувчи барча ечимлар $\frac{\alpha}{n}$, $\frac{\alpha+2\pi}{n}, \ldots, \frac{\alpha+2(n-1)\pi}{n}$ лардан иборат Демак, (3) тенглама n та ечимга эга бўлиб, улар куйидаги формулалар ёрдамида топилади:

$$W_1=\sqrt[n]{r}\,(\cos\frac{\alpha}{n}+i\sin\frac{\alpha}{n}),$$

$$W_2=\sqrt[n]{r}\,(\cos\frac{\alpha+2\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2\pi}{n}), \tag{5}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$W_n=\sqrt[n]{r}\,(\cos\frac{\alpha+2(n-1)\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\alpha+2(n-1)\pi}{n}).$$

1-мисол. $\sqrt[3]{1+i}$ ни хисобланг.

Аввало $1+i$ комплекс сонни тригонометрик шаклда ифодалаймиз.

Маълумки, бу сон учун $z=\sqrt{2}$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$, демак,

$$1+i=\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}).$$

Энди $\sqrt[3]{1+i}$ ни хисоблаймиз.

$$\sqrt[3]{1+i}=\sqrt[6]{2}\,(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3})=$$

$$=\sqrt[6]{2}\,(\cos\frac{\pi+8k\pi}{12}+i\sin\frac{\pi+8k\pi}{12})$$

бўлиб, бу ерда $k=0,1,2$.

2-мисол. $\sqrt[5]{1}$ ни ҳисобланг.

Худди аввалги мисолга ўхшаш бу ерда ҳам 1 сонини тригонометрик шаклда ифодалаймиз:

$$1=1(\cos 0+i\sin 0).$$

Бу илдизлардан биттаси ҳақиқий сон бўлиб, у $k=0$ да 1 га тенг, қолган илдизлар эса комплекс сонлардир.

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

кўпҳад берилган бўлсин. Бу кўпҳад юқоридаги теоремага кўра камида битта α_1 илдизга эга. Шунинг учун.

$$f(x)=(x-\alpha_1)\cdot\varphi_1(x)$$

тенглик ўринли бўлади, бунда $\varphi_1(x)$ кўпҳад бўлиб, унинг даражаси $n-1$ га тенг.

Агар $\varphi_1(x)$ нинг даражаси n бўлиб; $n>1$ бўлса, бу кўпҳад ҳам теоремага кўра камида битта α_2 илдизга эга бўлади:

$$\varphi_1(x)=(x-\alpha_2)\varphi_2(x).$$

Бу ерда $\varphi_2(x)$ — кўпҳад. Натижада берилган кўпҳад

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\varphi_2(x)$$

кўринишни олади. Бу жараённи давом эттириш билан

$$f(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$$

тенгликка келамиз. Кейинги тенгликда $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ орасида ўзаро бир-бирига тенглари бўлиши мумкин. Шуни эътиборга олсак,

$$f(x)=a_n(x-\alpha_1)^{k_1}(x)-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x-\alpha_s)^{k_s} \qquad (3)$$

бўлади, бунда $k_1+k_2+\ldots+k_s=n$, $i\neq j$ ларда $\alpha_i\neq\alpha_j(i,j=1,2,\ldots.s)$.

(3) тенглик ўринли бўлганда α_m сон $(m=1,2,\ \ldots,\ s)$ $f(x)$ кўпҳаднинг k_m *каррали илдизи* дейилади. Натижада қуйидаги теоремага келамиз.

Теорема. (Алгебранинг асосий теоремаси.) ***Ихтиёрий*** *n-даражали ($n\geqslant 1$) кўпҳад n та илдизга эга (бунда ҳар бир илдиз неча каррали бўлса, шунча марта ҳисобланади).*

9-БОБ

ЮҚОРИ ДАРАЖАЛИ ТЕНГЛАМАЛАР

Ушбу

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (1)$$

кўринишдаги тенглама *n-даражали тенглама* дейилади, бунда a_0, a_1, ..., a_n ихтиёрий ҳақиқий ёки комплекс сонлар ва $a_n \neq 0$.

Агар x_0 сонни (бу сон ҳақиқий ё комплекс бўлиши мумкин) (1) тенгламанинг чап томонидаги x нинг ўрнига қўйганда ифода айнан нолга айланса:

$$a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0 = 0,$$

у ҳолда x_0 сон (1) тенгламанинг ***ечими*** дейилади. Берилган тенгламанинг барча ечимларини топиш уни *ечиш* дейилади.

(1) тенгламани ечишда кўпҳад ва улар ҳақидаги маълумотлар муҳимдир.

1-§. Кўпҳадлар

Бутун даражали

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

функция *n-даражали кўпҳад* дейилади, бунда a_0, a_1, ..., a_n — кўпҳаднинг коэффициентлари, n эса кўпҳаднинг даражасидир. Умумиятга зиён келтирмасдан $a_n \neq 0$ деб фараз қилинади.

Иккита

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

$$\varphi(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

кўпҳадлар берилган бўлсин. Бу кўпҳадларнинг бир хил даражали ўзгарувчилари олдидаги турган коэффициентлар бир-бирига тенг бўлса,

$$a_k = b_k k = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

у ҳолда бу кўпҳадлар бир-бирига тенг дейилади ва $f(x) = \varphi(x)$ каби ёзилади.

Кўпҳадлар устида қўшиш, айириш ва кўпайтириш амалларини бажариш мумкин.

Икки кўпҳад йиғиндиси, айирмаси ва кўпайтмаси яна кўпҳад бўлади.

$f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳадлар учун шундай (ягона) $q(x)$ ва $r(x)$ кўпҳадлар топиладики, $r(x)$ нинг даражаси $g(x)$ нинг даражасидан қатъий кичик бўлиб,

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x) \tag{2}$$

тенглик бажарилади. $q(x)$ кўпҳад $f(x)$ ни $g(x)$ га бўлишдан ҳосил бўлган *бўлинма*, $r(x)$ га эса *қолдиқ* дейилади.

Агар (2) тенгликда $r(x)=0$ бўлса, у холда $f(x)$ кўпҳад $g(x)$ га *бўлинади* дейилади. Бу ҳолда $g(x)$ кўпҳад $f(x)$ кўпҳаднинг *бўлувчиси* дейилади.

Бирор $f(x)$ кўпҳад ва бирор c сон берилган бўлсин. Агар $f(c)=$ $=0$ бўлса, c сон $f(x)$ кўпҳаднинг илдизи дейилади.

Теорема. ***$f(x)$ кўпҳадни $x-a$ кўпҳадга бўлишдан ҳосил бўлган қолдиқ берилган кўпҳаднинг $x=a$ даги қиймати $f(a)$ га тенг бўлади.***

Исбот. $f(x)$ кўпҳадни $x-a$ га бўлганда бўлинма $q(x)$, қолдиқ эса $r(x)$ бўлсин. Равшанки, бу ҳолда $r(x)$ ўзгармас бўлади. Уни $r(x)=c$ деб олайлик.

Унда

$$f(x)=(x-a)q(x)+c$$

бўлади. Бу тенгликда $x=a$ дейилса,

$$c=f(a)$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса теоремани исботлайди.

Бу теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади:

a сон $f(x)$ кўпҳаднинг илдизи бўлиши учун $f(x)$ нинг $x-a$ га бўлиниши зарур ва етарлидир (Безу теоремаси).

Агар $f(x)$ кўпҳад $x-a$ га бўлиниши билан бирга $(x-a)^k$ га ҳам бўлинса ($k>1$ бўлган натурал сон), a сон $f(x)$ кўпҳаднинг *каррали илдизи* дейилади.

Шуни таъкидлаш лозимки, $f(x)$ кўпҳад $(x-a)^k$ га бўлиниб, $(x-a)^{k+1}$ га бўлинмаса, a сон $f(x)$ нинг ***k каррали илдизи*** дейилади. Бу ҳолда $f(x)$ кўпҳад

$$f(x)=(x-a)^k\varphi(x)$$

кўринишида ёзилиб, $\varphi(x)$ кўпҳад $x-a$ га бўлинмайди.

2-§. Алгебранинг асосий теоремаси

Қуйидаги теоремани исботсиз келтирамиз.

Теорема. ***Даражаси бирдан кичик бўлмаган ихтиёрий кўпҳад камида битта, умуман айтганда комплекс илдизга эга.***

Фараз қилайлик, бирор n- даражали

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

кўпҳад берилган бўлсин. Бу кўпҳад юқоридаги теоремага кўра камида битта α_1 илдизга эга. Шунинг учун.

$$f(x) = (x - \alpha_1) \cdot \varphi_1(x)$$

тенглик ўринли бўлади, бунда $\varphi_1(x)$ кўпҳад бўлиб, унинг даражаси $n-1$ га тенг.

Агар $n > 1$ бўлса, бу $\varphi_1(x)$ кўпҳад ҳам теоремага кўра камида битта α_2 илдизга эга бўлади:

$$\varphi_1(x) = (x - \alpha_2)\varphi_2(x).$$

Бу ерда $\varphi_2(x)$ — кўпҳад. Натижада берилган кўпҳад

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \varphi_2(x)$$

кўринишни олади. Бу жараённи давом эттириш билан

$$f(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_n)$$

тенгликка келамиз. Кейинги тенгликда $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ сонлар орасида ўзаро бир-бирига тенглари бўлиши мумкин. Шуни эътиборга олсак,

$$f(x) = a_n(x - \alpha_1)^{k_1}(x) - \alpha_2)^{k_2}\dots(x - \alpha_s)^{k_s} \tag{3}$$

бўлади, бунда $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$, $i \neq j$ ларда $\alpha_i \neq \alpha_j$ $(i,j = 1,2,\dots,s)$. (3) тенглик ўринли бўлганда α_m сон $(m = 1,2,\dots,s)$ $f(x)$ кўпҳаднинг k_m *каррали илдизи* дейилади. Натижада куйидаги теоремага келамиз.

Теорема (алгебранинг асосий теоремаси). ***Ихтиёрий n-даражали ($n \geqslant 1$) кўпҳад n та илдизга эга (ҳар бир илдиз неча каррали бўлса, шунча марта ҳисобланади).***

3- §. Юқори даражали тенгламаларни ечиш

Алгебранинг асосий теоремаси муҳим назарий аҳамиятга эга. Гарчи у

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \tag{4}$$
$$(a_0, a_1, \dots a_n \in R)$$

тенгламанинг n та ечими мавжудлигини ифодаласа ҳам, умумий ҳолда тенгламанинг бу ечимларини топиш алгоритмини аниқлаб бермайди. (4) тенгламани ечиш масаласи ҳозирга қадар катта муаммо бўлиб, у айрим хусусий ҳоллардагина ҳал этилган.

Одатда, (4) тенгламанинг ечими $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ коэффициентлар устида қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш ва илдиз чиқариш амалларини бажаришдан ҳосил бўлган ифода билан аниқланса, у ҳолда (4) тенглама радикалларда ечилади дейилади.

Шуни таъкидлаш лозимки, агар $\alpha = a + ib$ комплекс сон

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

тенгламанинг ечими бўлса, $P(\alpha) = 0$, у ҳолда α соннинг қўшмаси $\alpha = a - ib$ комплекс сон ҳам шу тенгламанинг ечими бўлади. Ҳақиқатан ҳам

$P(\bar{z})=\overline{P(z)}$ бўлганлиги сабабли

$$P(\bar{\alpha})=P(a-ib)=P(\overline{a+ib})=\overline{P(a+ib)}=\bar{0}=0$$

бўлади. Бу эса $\bar{\alpha}$ комплекс сон (4) тенгламанинг ечими бўлишини билдиради.

Натижа. *Агар*

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$$

тенгламанинг даражаси n тоқ сон бўлса, у ҳолда тенглама камида битта ҳақиқий ечимга эга бўлади.

Энди (4) тенглама радикалларда ечиладиган ҳолларни келтирамиз.

1°. $n=1$ бўлсин. Бу холда (4) тенглама

$$a_0x+a_1=0 \quad (a_0\neq 0)$$

кўринишга келади ва унинг ечими $x=-\frac{a_1}{a_0}$ бўлади.

2°. $n=2$ бўлсин. Бу ҳолда (4) тенглама

$$a_0x^2+a_1x+a_2=0 \quad (a_0\neq 0)$$

кўринишга келади ва унинг ечимлари

$$x_1=\frac{-a_1+\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{2a_0}, \quad x_2=\frac{-a_1-\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{2a_0}$$

бўлади.

3°. $n=3$ бўлсин. Бу ҳолда (4) тенглама

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0 \quad (a_0\neq 0) \tag{5}$$

кўринишга келади. Бу тенглама қуйидагича ечилади:

1) (5) тенгламанинг ҳар икки томонини a_0 га бўламиз. Натижада (5) га эквивалент

$$x^3+b_1x^2+b_2x+b_3=0 \tag{6}$$

тенгламага келамиз, бунда $b_k=\frac{a_k}{a_0}$ $(k=1, 2, 3)$

2) (6) тенгламада $x=y-\frac{b_1}{3}$ алмаштириш бажарамиз. Унда (6) тенгламанинг чап томонидаги кўпҳад

$$(y-\frac{b_1}{3})^3+b_1(y-\frac{b_1}{3})^2+b_2(y-\frac{b_1}{3})+b_3=$$

$$=y^3+(b_2-\frac{b_1^2}{3})y+(b_3-\frac{b_1b_2}{3}+\frac{2}{27}b_1^3)$$

кўринишга келади. Агар

$$b_2-\frac{b_1^2}{3}=p, \quad b_3-\frac{b_1b_2}{3}+\frac{2}{27}b_1^3=q$$

деб олинса, унда (6) тенглама

$$y^3+py+q=0 \tag{7}$$

кўринишни олади.

Шундай қилиб берилган тенгламани ечиш (7) тенгламани ечишга келади.

3) (7) тенгламанинг ечимини

$$y=u+v \tag{8}$$

кўринишда излаймиз. Бунда u ва v

$$u\cdot v=-\frac{p}{3} \tag{9}$$

шартни қаноатлантирсин. Юқоридаги (8) ва (9) муносабатларни бажарувчи u ва v ларнинг мавжудлиги уларнинг

$$t^2-yt-\frac{p}{3}=0$$

квадрат тенгламанинг илдизлари эканлигидан келиб чиқади (Виет теоремасига кўра).

4) Олинган $y=u+v$ ни (7) тенгламадаги y нинг ўрнига қўямиз:

$$(u+v)^3+p(u+v)+q=0.$$

Бу тенгламанинг чап томонидаги қавсларни очиб, сўнг уларни группалаб

$$u^3+3u^2v+3uv^2+v^3+pu+pv+q=0$$

ёки

$$(u^3+v^3+q)+(3uv+p)(u+v)=0 \tag{10}$$

бўлишини топамиз.

Юқорида келтирилган $uv=-\frac{p}{3}$ муносабатдан $3uv+p=0$ бўлиб, (10) тенглама $u^3+v^3+q=0$, яъни $u^3+v^3=-q$ кўринишни олади. Натижада $y^3+py+q=0$ тенгламани ечиш

$$\begin{cases} u^3+v^3=-q, \\ u^3v^3=-\frac{p^3}{27} \end{cases}$$

системани ечишга келади.

5) Кейинги $u^3+v^3=-q$,

$$u^3v^3=-\frac{p^3}{27}$$

тengликлардан кўринадики, изланаётган u ва v нинг кублари u^3 ва v^3 ушбу

$$z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0$$

квадрат тенгламанинг ечимлари бўлади. Бу квадрат тенгламани ечиб топамиз:

$$z_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \quad z_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Демак,

$$u^3 = z_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \tag{11}$$

$$v^3 = z_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}. \tag{12}$$

6) (11) ва (12) дан

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{13}$$

бўлишини топамиз. Демак, (7) тенгламанинг ечими

$$y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{14}$$

бўлади. Одатда (14) тенглик *Кардано формуласи* дейилади. Кардано формуласи икки ҳад йиғиндисидан, яъни $u+v$ дан иборат бўлиб, ҳар бир u ва v лар учтадан қийматга эга. Бунда u ва v ларнинг ихтиёрий қийматларидан тузилган $u+v$ йиғиндининг қийматлари 9 та бўлади. Бу қийматлар ичида учтасигина (7) тенгламанинг ечими бўлиб, бундаги u ва v нинг қийматлари

$$uv = -\frac{p}{3}$$

муносабатда бўлади.

7) Айтайлик, u ва v нинг (13) муносабатни қаноатлантирувчи қийматларидан бири u_1 ва v_1 бўлсин. Унда:

$$u_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} u_1, \; u_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} u_1, \; v_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} v_1, \quad v_3 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} v_1.$$

бўлади.

8) (7) тенгламанинг ечимлари

$$y_1 = u_1 + v_1$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1), \tag{15}$$

$$y_3 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - \frac{i\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1)$$

бўлиб, берилган тенгламанинг ечимлари эса $x_1 = y_1 - \frac{b_1}{3}$, $x_2 = y_2 - \frac{b_1}{3}$; $x_3 = y_3 - \frac{b_1}{3}$ бўлади.

Мисол. Ушбу

$$x^3 - 9x^2 + 21x - 5 = 0$$

тенгламани ечинг.

Берилган тенгламада $x=y-3$ алмаштиришни бажарамиз:

$$(y+3)^3-9(y+3)^2+21(y+3)-5=0,$$

яъни

$$y^3-6y+4=0.$$

(14) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$u=\sqrt[3]{-2+\sqrt{4-8}}=\sqrt[3]{-2+2i}.$$

Бу куб илдизнинг қийматларидан бири $u_1=1+i$ бўлади. Унда

$$v_1=-\frac{6}{3(1+i)}=1-i$$

бўлиб, (15) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$y_1=2, y_2=-1-\sqrt{3}, y_3=-1+\sqrt{3}.$$

Берилган тенгламанинг ечимлари:

$$x_1=5, x_2=2-\sqrt{3}, x_3=2+\sqrt{3}.$$

4°. $n=4$ бўлсин. Бу ҳолда (4) тенглама

$$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0 \quad (a_0\neq 0) \qquad (16)$$

кўринишга келади.

Аввало қуйидаги содда леммани келтирамиз.

Лемма. *Ҳар қандай*

$$ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$$

квадрат учҳад чизиқли $kx+l$ иккиҳаднинг квадратига тенг бўлиши учун унинг b^2-4ac дискриминанти нол бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. Айтайлик,

$$ax^2+bx+c=(kx+l)^2$$

бўлсин. Унда

$$ax^2+bx+c=k^2x^2+2klx+l^2$$

бўлиб,

$$a=k^2, b=2kl, c=l^2$$

бўлади. Натижада

$$b^2-4ac=4k^2l^2-4\cdot k^2\cdot l^2=0$$

бўлиши келиб чиқади.

Етарлилиги. Берилган ax^2+bx+c квадрат учҳаднинг дискриминанти нол бўлсин:

$$b^2-4ac=0.$$

У ҳолда

$$ax^2+bx+c=(\sqrt{a}\,x+\frac{b}{2\sqrt{a}})^2+c-\frac{b^2}{4a}=$$

$$=(\sqrt{a}\,x+\frac{b}{2\sqrt{a}})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=(\sqrt{a}\,x+\frac{b}{2\sqrt{a}})^2$$

бўлади. Лемма исбот бўлди.

Берилган (16) тенглама қуйидагича ечилади:

1) (16) тенгламанинг ҳар икки томонини a_0 га бўламиз. Натижада

$$x^4+b_1x^3+b_2x^2+b_3x+b_4=0 \tag{17}$$

тенгламага келамиз, бунда $b_k=\frac{a_k}{a_0}(k=1,2,3,4)$.

2) (17) тенгламанинг чап томонидаги кўпҳадни, ҳозирча номаълум ҳисобланган y ни киритиб, қуйидагича ёзамиз:

$$x^4+b_1x^3+b_2x^2+b_3x+b_4=$$

$$=(x^2+\frac{b_1}{2}x+\frac{y}{2})^2-\frac{b_1^2}{4}x^2-\frac{b_1yx}{2}-\frac{y^2}{4}-y^2x^2+$$

$$+b_2x^2+b_3x+b_4=(x^2+\frac{b_1}{2}x+\frac{y}{2})^2-$$

$$-\left[(\frac{b_1^2}{4}+y-b_2)x^2+(\frac{b_1y}{2}-b_3)x+(\frac{y^2}{4}-b_4)\right].$$

У ҳолда (17) тенглама ушбу

$$\left(x^2+\frac{b_1}{2}x+\frac{y}{2}\right)^2-\left[\left(\frac{b_1^2}{4}+y-b_2\right)x^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{b_1y}{2}-b_3\right)x+\left(\frac{y^2}{4}-b_4\right)\right]=0 \tag{18}$$

кўринишга келади.

3) Юқоридаги (18) тенгламада қатнашган y ни шундай танлаймизки, натижада

$$\left(\frac{b_1^2}{4}+y-b_2\right)x^2+\left(\frac{b_1y}{2}-b_3\right)x+\left(\frac{y^2}{4}-b_4\right)$$

квадрат учҳад чизиқли иккиҳаднинг квадратига тенг бўлсин. Бунинг учун, леммага кўра, квадрат учҳаднинг дискриминанти нолга тенг бўлиши зарур ва етарли:

$$\left(\frac{b_1y}{2}-b_3\right)^2-4\left(\frac{b_1^2}{4}-y-b_2\right)\left(\frac{y^2}{4}-b_4\right)=0$$

Равшанки,

$$\left(\frac{b_1y}{2}-b_3\right)^2-4\left(\frac{b_1^2}{4}-y-b_2\right)\left(\frac{y^2}{4}-b_4\right)=$$

$$=\frac{b_3^2y^2}{4}-b_1b_3y+b_3^2-y^2\cdot\frac{b_1^2}{4}+y^3+b_2y^2+b_1^2b_4+4yb_4-4b_2b_4=$$

$$=y^3+b_2y^2-(b_1b_3+4b_4)y+(b_3^2+b_1^2b_4-4b_2b_4).$$

Натижада (17) тенглама

$$y^3+b_2y^2-(b_1b_3+4b_4)y+(b_3^2+b_1^2b_4-4b_2b_4)=0 \qquad (17')$$

кўринишга келади. Бу y га нисбатан учинчи даражали тенгламадир.

4) Айтайлик, y_1 юқоридаги (17′) учинчи даражали тенгламанинг бирор ечими бўлсин. У ҳолда $y=y_1$ бўлганда

$$\left(\frac{b_1^2}{4}+y_1-b_2\right)x^2+\left(\frac{b_1y_1}{2}-b_3\right)x+\left(\frac{y_1^2}{4}-b_4\right)=(kx+l)^2$$

бўлиб, берилган (17) тенглама ушбу

$$\left(x^2+\frac{b_1}{2}x+\frac{y_1}{2}\right)^2-(kx+l)^2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(x^2+\frac{b_1}{2}x+\frac{y_1}{2}+kx+l\right)\left(x^2+\frac{b_1}{2}x+\frac{y_1}{2}-kx-l\right)=0$$

кўринишни олади. Ҳар бир кўпайтувчини нолга тенглаб

$$x^2+\frac{b_1}{2}x+\frac{y_1}{2}+kx+l=0,$$

$$x^2+\frac{b_1}{2}x+\frac{y_1}{2}-kx-l=0$$

иккита квадрат тенгламага келамиз. Бу тенгламаларнинг 4 та ечими бўлиб, улар берилган (16) тенгламанинг ечимлари бўлади.

Мисол. Ушбу

$$x^4+2x^3-6x^2-5x+2=0$$

тенгламани ечинг.

Бу тенгламанинг чап томонидаги кўпҳадни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$x^4+2x^3-6x^2-5x+2=\left(x^2+x+\frac{y}{2}\right)^2-yx^2-x^2-$$

$$-xy-\frac{y^2}{4}-6x^2-5x+2=\left(x^2+x+\frac{y}{2}\right)^2-$$

$$-\left[(y+7)x^2+(y+5)x+\left(\frac{y^2}{4}-2\right)\right]$$

Унда берилган тенглама қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\left(x^2+x+\frac{y}{2}\right)^2-\left[(y+7)x^2+(y+5)x+\left(\frac{y^2}{4}-2\right)\right]=0. \qquad (19)$$

Сўнг $(y+7)x^2+(y+5)x+\left(\frac{y^2}{4}-2\right)$ квадрат учҳаднинг дискриминантини нолга тенглаймиз:

$$(y+5)^2-4(y+7)\left(\frac{y^2}{4}-2\right)=0. \qquad (20)$$

Равшанки

$$(y+5)^2-4(y+7)\left(\frac{y^2}{4}-2\right)=y^2+10y+25-y^3-$$

$$-7y^2+8y+56=-y^3-6y^2+18y+81\ .$$

Унда (20) тенглама $y^3+6y^2-18y-81=0$ кўринишга келади. Бу тенгламанинг битта ечимини топамиз:

$$y^3+6y^2-18y-81=0 \Rightarrow y^3+3y^2+3y^2+9y-27y-81=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2(y+3)+3y(y+3)-27(y+3)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y+3)(y^2+3y-27)=0 \Rightarrow y_1=-3.$$

Бу $y_1=-3$ ни (19) тенгламадаги y нинг ўрнига қўямиз:

$$\left(x^2+x-\frac{3}{2}\right)^2-\left[4x^2+2x+\left(\frac{9}{4}-2\right)\right]=0.$$

яъни

$$\left(x^2+x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2=0.$$

Кейинги тенгламанинг чап томонини кўпайтувчиларга ажратиб,

$$(x^2+3x-1)(x^2-x-2)=0.$$

тенгламага келамиз. Равшанки,

$$x^2+3x-1=0,$$
$$x^2-x-2=0$$

бўлиб, бу квадрат тенгламаларнинг ечимлари:

$$x'_1=\frac{-3+\sqrt{13}}{2},\ x'_2=\frac{-3-\sqrt{13}}{2} \text{ ва } x''_1=2,\ x''_2=-1.$$

Шундай қилиб, берилган $x^4+2x^3-6x^2-5x+2=0$ тенгламанинг ечимлари:

$$x_1=\frac{-3+\sqrt{13}}{2},\ x_2=\frac{-3-\sqrt{13}}{2},\ x_3=2,\ x_4=-1.$$

$n\geqslant 5$ бўлганда (4) тенгламанинг радикалларда ечилиши масаласи ҳақида кўп изланишлар олиб борилган. Натижада қуйидаги хулосага келинган.

Агар (4) тенгламанинг даражаси беш ва ундан катта бўлса, у ҳолда (4) тенглама умумий ҳолда радикалларда ечилмайди.

Энди юқори даражали тенгламаларнинг радикалларда ечиладиган айрим хусусий ҳолларини келтирамиз.

а) Икки ҳадли тенглама. Ушбу

$$ax^n+b=0 \quad (a\neq 0) \qquad (21)$$

кўринишдаги тенглама *икки ҳадли тенглама* дейилади. Бу тенгламанинг ечими:

$$x=\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}.$$

Мисол. $x^5+32=0$ тенгламани ечинг.

Аввало берилган тенгламани $x^5=-32$ кўринишда ёзиб оламиз. Ундан: $x=\sqrt[5]{-32}$.

Сўнг -32 сонни комплекс сон сифатида қараб, 8-бобдаги (5) формуладан фойдаланиб, $-32=32(\cos\pi+i\sin\pi)$ тенгликка келамиз.

Комплекс сондан илдиз чиқариш қоидасига кўра

$$\sqrt[5]{-32}=\sqrt[5]{32(\cos\pi+i\sin\pi)}=$$
$$=2\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{5}\right)\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

бўлади. Демак,

$$x_k=2\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{5}\right)\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

берилган тенгламанинг илдизлари:

$$x_0=2\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right),\quad x_1=\left(\cos\frac{3\pi}{5}+i\sin\frac{3\pi}{5}\right),\quad x_2=-2,$$
$$x_3=2\left(\cos\frac{7\pi}{5}+i\sin\frac{7\pi}{5}\right),\quad x_4=\left(\cos\frac{9\pi}{5}+i\sin\frac{9\pi}{5}\right).$$

б) Уч ҳадли тенгламалар. Ушбу

$$ax^{2n}+bx^n+c=0\quad(a\neq0)\tag{22}$$

кўринишдаги тенглама *уч ҳадли тенглама* дейилади. Бундай тенгламани ечиш учун $x^n=t$ алмаштириш бажарамиз. Натижада берилган тенглама $at^2+bt+c=0$ квадрат тенгламага келади ва унинг ечими $t=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ бўлади. Демак, $x^n=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Кейинги тенгликдан

$$x=\sqrt[n]{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}\tag{23}$$

бўлишини топамиз.

Мисол. $x^6-3x^3-2=0$ тенгламани ечинг.

(23) муносабатдан фойдаланиб топамиз:

$$x=\sqrt[3]{\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}}=\sqrt[3]{\frac{3\pm1}{2}}.$$

Демак, $x^3=\frac{3\pm1}{2}$.

Равшанки,

$$x^{(1)}=\sqrt[3]{1}=1\cdot\left(\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}\right)\qquad(k=0,\ 1,\ 2).$$

Бундан эса

$$x_0^{(1)}=1,\ x_1^{(1)}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3},\ x_2^{(1)}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$$

бўлишини топамиз. Шунингдек,

$$x^{(2)}=\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}\right)\quad(k=0,\ 1,\ 2)$$

Ундан

$$x_0^{(2)}=\sqrt[3]{2},$$
$$x_1^{(2)}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$
$$x_2^{(2)}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

бўлишини топамиз.

Шундай килиб берилган тенгламанинг ечимлари

$$x_0=1,\ x_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3},\ x_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3},$$

$$x_3=\sqrt[3]{2},\ x_4=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right),\ x_5=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

Баъзан

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0\qquad(4)$$

тенгламанинг чап томонидаги

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

кўпҳадни $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_k(x)$ кўпҳадлар кўпайтмаси сифатида

$$P(x)=P_1(x)\cdot P_2(x)\ldots P_k(x)$$

ёзиш мумкин бўлади. Бундай ҳолда (4) тенгламани ечиш даражаси (4) тенгламанинг даражасидан паст бўлган

$$P_1(x)=0,\quad P_2(x)=0,\quad P_k(x)=0$$

тенгламаларни ечишга келади.

Мисол. $x^6+x^5+x^4-x^2-x-1=0$ тенгламани ечинг.

Бу тенгламанинг чап томонидаги кўпҳадни куйидагича ёзиб оламиз:

$$x^6+x^5+x^4-x^2-x-1=x^4(x^2+x+1)-(x^2+x+1)=$$
$$=(x^2+x+1)(x^4-1)=(x^2+x+1)(x-1)(x+1)(x^2+1).$$

Натижада берилган тенглама $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)=0$ кўринишни олади. Уни ечиш $x-1=0$, $x+1=0$, $x^2+1=0$, $x^2+x+1=0$ тенгламаларни ечишга келади.

Равшанки,

$$x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=i,\ x_4=-i,\ x^5=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ x_6=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Булар берилган тенгламанинг ечимларидир.

АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ

Аналитик геометрия олий математиканинг бўлимларидан бири бўлиб, унда геометрик шаклларнинг (чизиқлар, сиртлар ва ҳ. к.) хоссалари уларнинг аналитик ифодалари орқали ўрганилади.

Маълумки, текисликдаги ҳар бир нуқта икки ҳақиқий x ва y сонлардан ташкил топган (x, y) жуфтлик (нуқтанинг координаталари) билан аниқланади. Бу жуфтлик нуқтанинг аналитик тасвиридир.

Геометрик шакллар эса нуқталар тўплами сифатида қаралади. Бунда нуқталарнинг координаталари маълум муносабат билан — тенгламалар билан боғланган бўлади. Нуқта координаталарини боғловчи бундай тенгламаларни геометрик шаклларнинг аналитик ифодалари деб қараш мумкин.

Аналитик геометрияда қараладиган масалалар асосан икки хил бўлади.

1. Шаклларнинг геометрик хоссаларига кўра, уларнинг тенгламаларини тузиш.

2. Шаклларнинг тенгламаларига кўра, уларнинг геометрик хоссаларини аниқлаш.

10-БОБ

АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯНИНГ СОДДА МАСАЛАЛАРИ

Ушбу бобда аналитик геометриянинг содда масалаларини: икки нуқта орасидаги масофа, кесмани берилган нисбатда бўлиш ҳамда учбурчакларнинг юзини топиш масалаларини келтирамиз.

1-§. Текисликда икки нуқта орасидаги масофа

Текисликда Декарт координаталар системаси берилган бўлсин. Бу текисликда A ва B нуқталарни олайлик. Уларнинг координаталари мос равишда (x_1, y_1), (x_2, y_2) бўлсин:

$$A=A(x_1, y_1), \quad B=B(x_2, y_2).$$

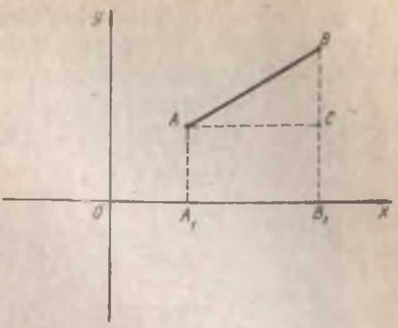
Масала, A ва B нуқталарнинг координаталарига кўра шу нуқталар орасидаги масофани, яъни AB кесманинг узунлигини топишдан иборат (28-чизма).

A ва B нуқталардан Ox ўқига перпендикуляр туширамиз. Уларнинг асосларини A_1 ва B_1 билан белгилаймиз. Равшанки,

$$OA_1=x_1,\ OB_1=x_2,\ AA_1=y_1,\ BB_1=y_2. \tag{1}$$

A нуқтадан Ox ўқига параллел чизиқ ўтказиб, унинг BB_1 билан кесишган нуқтасини C билан белгилаймиз. Унда

$$AC=A_1B_1,\ CB_1=AA_1 \tag{2}$$



28- чизма

бўлади. Агар $A_1B_1=OB_1-OA_1$, $BC=BB_1-CB_1$ эканини эътиборга олсак, (1) ва (2) муносабатлардан

$$AC=x_2-x_1,\quad BC=y_2-y_1 \tag{3}$$

келиб чиқади.

$\triangle ACB$—тўғри бурчакли ($\angle ACB=90^\circ$). Пифагор теоремасига биноан $AB^2=AC^2+BC^2$ бўлади. (3) муносабатдан фойдаланиб $AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$ тенгликни ва ундан эса

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \tag{4}$$

бўлишини топамиз. Бу икки нуқта орасидаги масофани ифодаловчи формуладир.

Хусусан, A ва B нуқталар абсцисса ўқида бўлса, унда $A=A(x_1,0)$, $B=B(x_2,0)$ бўлиб, улар орасидаги масофа $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2}=|x_2-x_1|$ бўлади.

A ва B нуқталар ордината ўқида бўлса, унда $A=A(0,y_1)$, $B=B(0,y_2)$ бўлиб, улар орасидаги масофа $AB=\sqrt{(y_2-y_1)^2}=|y_2-y_1|$ бўлади.

Агар A ва B нуқталардан бири координата бошида жойлашса, масалан $A=O(0,0)$ бўлса, у ҳолда координата бошидан B (x_2, y_2) нуқтагача масофа $OB=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$ бўлади.

Мисол. Ушбу A (5, 3), B (2, —1) нуқталар орасидаги масофани топинг.

(4) формулага кўра, бу нуқталар орасидаги масофа:

$$AB=\sqrt{(2-5)^2+((-1)-3)^2}=\sqrt{9+16}=5.$$

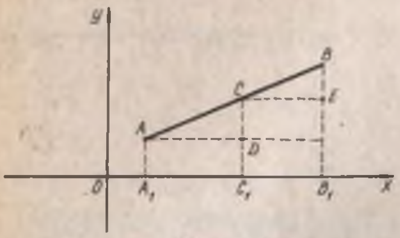
2- §. Кесмани берилган нисбатда бўлиш.

Текисликда A (x_1, y_1) ва B (x_2, y_2) нуқталарни туташтирувчи AB тўғри чизиқ кесмасини қарайлик. Бу кесмада шундай C нуқта топиш керакки, AC кесманинг CB кесмага нисбати берилган λ сонга тенг бўлсин:

$$\frac{AC}{CB}=\lambda. \tag{5}$$

Изланаётган нуктанинг координаталарини x ва y дейлик: $C\ (x,y)$. Демак, масала A ва B нукталарнинг координаталари ҳамда λ сонга кўра C нуктанинг координаталари x ва y ни топишдан иборат.

A, B, C нукталардан Ox ўкига перпендикуляр туширамиз (29- чизма). Унда $OA_1=x_1$, $OC_1=x$, $OB_1=x_2$, $AA_1=y_1$, $CC_1=y$, $BB_1=y_2$ бўлади.



29- чизма

Сўнг A ва C нуктадан Ox ўкига параллел чизиқлар ўтказамиз. Уларнинг CC_1 ҳамда BB_1 билан кесишган нукталарини D ва E дейлик. Равшанки,

$$AD=A_1C_1=OC_1-OA_1=x-x_1,$$
$$CC_1=EB_1=y,$$
$$CE=C_1B_1=OB_1-OC_1=x_2-x, \quad (6)$$
$$AA_1=DC_1=y_1,$$
$$CD=CC_1-DC_1=y-y_1, \ BE=BB_1-EB_1=y_2-y.$$

ADC ҳамда CEB тўғри бурчакли учбурчакларнинг ўхшашлигидан $\frac{AD}{CE}=\frac{AC}{CB}$, $\frac{CD}{BE}=\frac{AC}{CB}$ бўлишини топамиз. Агар (5) ва (6) тенгликлардан фойдалансак, $\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda$, $\frac{y-y_1}{y_2-y}=\lambda$ келиб чикади. Демак.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda \Rightarrow x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad \frac{y-y_1}{y_2-y}=\lambda \Rightarrow y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Шундай қилиб, AB кесмани λ нисбатда бўлувчи C нуктанинг координаталари:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Хусусан, C нукта AB кесманинг ўртаси бўлса, унда $AC=CB$ ва $\lambda=1$ бўлиб, C нуктанинг координаталари $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$ бўлади.

3- §. Учбурчакнинг юзини топиш

Текисликда учта $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ ва $C(x_3,\ y_3)$ нукталар берилган бўлиб, ABC учбурчакларни қарайлик (30- чизма). Масала берилган нукталарнинг координаталарига кўра шу ABC учбурчакнинг юзини топишдан иборат.

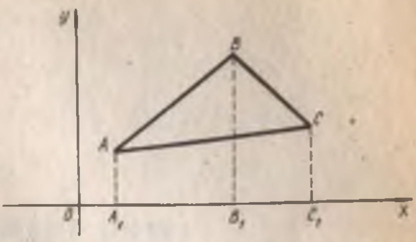
A, B, C нукталардан Ox ўкига перпендикуляр тушириб уларнинг асосларини мос равишда A_1, B_1, C_1 билан белгилаймиз. Бунда

$$OA_1=x_1,\quad OB_1=x_2,\quad OC_1=x_3,$$
$$AA_1=y_1,\quad BB_1=y_2,\quad CC_1=y_3$$

бўлиб,

$$A_1B_1=OB_1-OA_1=x_2-x_1$$
$$B_1C_1=OC_1-OB_1=x_3-x_2$$
$$A_1C_1=OC_1-OA_1=x_3-x_1$$

бўлади.



30- чизма

AA_1B_1B, BB_1C_1C ҳамда AA_1C_1C трапецияларнинг юзалари $S_{AA_1B_1B}$, $S_{BB_1C_1C}$, $S_{AA_1C_1C}$ учун ушбу

$$S_{AA_1B_1B}=\frac{AA_1+BB_1}{2}\cdot A_1B_1=\frac{y_1+y_2}{2}\ (x_2-x_1)$$
$$S_{BB_1C_1C}=\frac{BB_1+CC_1}{2}\cdot B_1C_1=\frac{y_2+y_3}{2}\ (x_3-x_2) \qquad (7)$$
$$S_{AA_1C_1C}=\frac{AA_1+CC_1}{2}\cdot A_1C_1=\frac{y_3+y_1}{2}\ (x_3-x_1)$$

тенгликларга келамиз. Равшанки, ABC учбурчакнинг юзи

$$S_{\triangle ABC}=S_{AA_1B_1B}+S_{BB_1C_1C}-S_{AA_1C_1C}$$

бўлади. Юқоридаги (7) тенгликлардан фойдаланиб

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}[(y_1+y_2)\,(x_2-x_1)+(y_3+y_2)\,(x_3-x_2)-(y_3+y_1)\,(x_3-x_1)]$$

бўлишини топамиз. Бу берилган учбурчак юзини топиш формуласидир.

II-БОБ

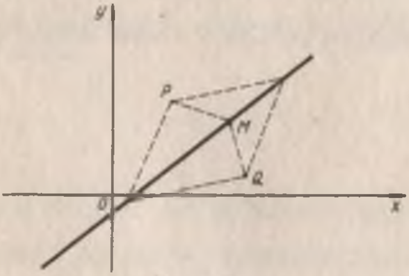
ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ТЕНГЛАМАЛАРИ

Тўғри чизиқ аналитик геометриянинг муҳим тушунчаларидан бири. Унга доир масалаларни ўрганиш учун аввало унинг тенгламасини ёзиш лозим бўлади.

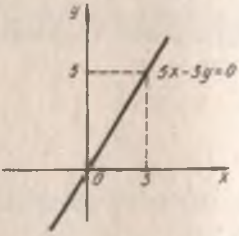
Текисликда Декарт координаталар системаси ва бирор тўғри чизиқ берилган бўлсин. Бу тўғри чизиқда ўзгарувчи $M=M(x,y)$ нуқтани олайлик. Агар ўзгарувчи нуқтанинг x ва y координаталари орасида шундай муносабат (тенглама) топилсаки, уни фақат шу тўғри чизиқ нуқталаригина (нуқтанинг координаталаригина) қаноатлантирса, бу муносабат тўғри чизиқ тенгламасини ҳосил қилади.

1-§. Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси

Фараз қилайлик текисликда $P\ (a_1,\ b_1)$ ҳамда $Q\ (a_2,\ b_2)$ нуқталар берилган бўлсин. Бу нуқталардан баравар узоқликда жойлашган $\{M(x,\ y)\}$ нуқталар тўпламини қарайлик (31-чизма). Унда



31-чизма



32-чизма

$$PM=QM$$

бўлади. Икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласига кўра

$$PM=\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}\ ,$$

$$QM=\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}$$

бўлади. Натижада:

$$\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2} = \sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-a_1)^2+(y-b_1)^2 = (x-a_2)^2+(y-b_2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(a_2-a_1)x+2(b_2-b_1)y+a_1^2+b_1^2-a_2^2-b_2^2=0$$

Агар $2(a_2-a_1)=A$, $2(b_2-b_1)=B$, $a_1^2+b_1^2-a_2^2-b_2^2=C$ деб белгиласак, унда

$$Ax+By+C=0$$

тенгламага келамиз. Бу тўғри чизиқнинг *умумий тенгламаси* дейилади.

A, B, C сонлар тенгламанинг коэффициентлари бўлиб, улар турли қийматларга тенг бўлганда турли тўғри чизиқлар ҳосил бўлади. Демак, тўғри чизиқнинг текисликдаги вазияти шу A, B, C сонлар билан тўлиқ аниқланади.

Энди

$$Ax+By+C=0 \qquad (1)$$

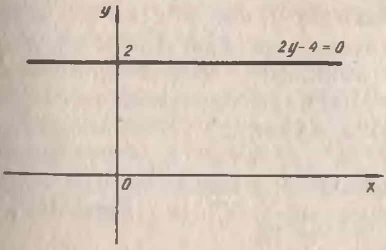
тенгламанинг баъзи хусусий ҳолларини қараймиз.

1°. (1) да $C=0$, $A\neq0$, $B\neq0$ бўлсин. Бу ҳолда (1) тенглама

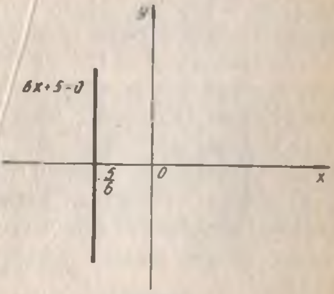
$$Ax+By=0 \qquad (2)$$

кўринишни олади. Равшанки, $O(0, 0)$ нукта (координата боши)нинг координаталари бу тенгламани қаноатлантиради. Бундай тўғри чизиқлар координата бошидан ўтади. Масалан, $5x-3y=0$ тенглама ифодалаган тўғри чизиқ 32- чизмада тасвирланган.

2°. (1) да $A=0$, $B\neq0$, $C\neq0$ бўлсин. У ҳолда (1) тенглама



33- чизма



34- чизма

$$By+C=0 \qquad (3)$$

кўринишни олади.

Уни $y=-\frac{C}{B}$ кўринишда ёзиб, $-\frac{C}{B}=a$ белгилаш қилинса, (1) тенглама $y=a$ кўринишни олади.

Демак, бундай тўғри чизиқдаги ҳар бир нуқтанинг ординатаси бир хил бўлиб, у a сонига тенг. Бу эса (3) тўғри чизиқнинг Ox (абсцисса) ўқига параллел бўлишини билдиради. Масалан, $2y-4=0$ тенглама ифодалаган тўғри чизиқ 33- чизмада тасвирланган.

3°. (1) да $B=0$, $A\neq 0$, $C\neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда (1) тенглама ушбу

$$Ax+C=0 \qquad (4)$$

кўринишда бўлади. Кейинги тенгликдан:

$$x=-\frac{C}{A}.$$

Агар $-\frac{C}{A}=b$ деб белгиласак, натижада (4) тенглама $x=b$ кўринишга келади. $Ax+C=0$ тўғри чизиқдаги ҳар бир нуқтанинг абсциссаси бир хил бўлиб, у b сонига тенг. Бу эса (4) тўғри чизиқнинг Oy (ордината) ўқига параллел бўлишини билдиради. Масалан, $6x+5=0$ тенглама ифодалаган тўғри чизиқ 34- чизмада тасвирланган.

4°. (1) да $B=C=0$, $A\neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда (1) тенглама

$$Ax=0,\ \text{яъни}\ x=0 \qquad (5)$$

кўринишга келади. Демак, (5) тўғри чизиқдаги ҳар бир нуқтанинг абсциссаси нолга тенг. Бу ордината ўқини ифодалайди.

5°. (1) да $A=C=0$, $B\neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда (1) тенглама

$$By=0,\ \text{яъни}\ y=0 \qquad (6)$$

кўринишга келади. Демак, (6) тўғри чизиқдаги ҳар бир нуқтанинг ординатаси нолга тенг. Бу абсцисса ўқини ифодалайди.

Юқорида айтилганлардан кўринадики, (1) тенгламада $A\neq 0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$ бўлса, (1) тенглама ифодалаган тўғри чизиқ координата бошидан ҳам ўтмайди, координата ўқларига параллел ҳам бўлмайди.

Кўп ҳолларда тўғри чизиқнинг умумий $Ax+By+C=0$ тенгламасига кўра унинг текисликдаги вазиятини аниқлаш лозим бўлади. Бунда тўғри чизиқнинг икки нуқтасини аниқлаш етарли. Изланаётган нуқталардан ҳар бирининг координаталаридан биттасига ихтиёрий қиймат бериб, бу қийматни тенгламага қўйилади. Натижада бир номаълумли тенглама ҳосил бўлади ва уни ечиб мос нуқтанинг иккинчи координатаси топилади. Топилган нуқталар орқали ўтказилган тўғри чизиқ берилган тенглама ифодалаган тўғри чизиқ бўлади.

Мисол. Ушбу

$$2x-5y+6=0 \qquad (7)$$

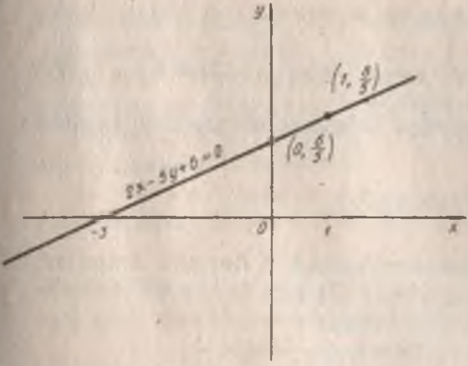
тенглама билан берилган тўғри чизиқни ясанг.

Аввало тўғри чизиқнинг икки нуқтасини топамиз. Бу нуқталар координаталаридан, масалан, абсциссаларини $x_1=0$, $x_2=1$ деб оламиз. Уларни (7) тенгламага қўямиз. Натижада

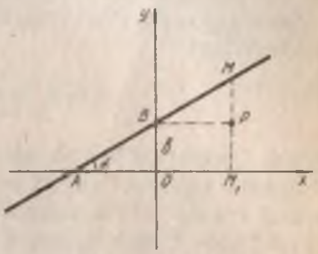
$$2x-5y+6=0,\ x_1=0 \Rightarrow -5y_1+6=0 \Rightarrow y_1=\frac{6}{5},$$

$$2x-5y+6=0,\ x_2=1 \Rightarrow 2-5y_2+6=0 \Rightarrow y_2=\frac{8}{5}$$

бўлади. Топилган $\left(0,\ \frac{6}{5}\right)$ ва $\left(1,\ \frac{8}{5}\right)$ нуқталар орқали тўғри чизиқ ўтказамиз (35- чизма)



35- чизма



36- чизма

2- §. Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси

Текисликда Декарт координаталар системасини олиб бирор тўғри чизиқни қарайлик. Бу тўғри чизиқ Oy ўқидан b га тенг кесма ажратиб, Ox ўқининг мусбат йўналиши билан α бурчак ташкил этсин (36- чизма).

Унинг ордината ўқи билан кесишган нуқтасини B, абсцисса ўқи билан кесишган нуқтасини A билан белгилайлик. Унда $OB=b$, $\angle OAB=\alpha$ бўлади.

Тўғри чизиқда ўзгарувчи $M=M(x,\ y)$ нуқтани олиб, ундан Ox ўқига перпендикуляр туширамиз. Бу перпендикулярнинг Ox ўқи билан кесишган нуқтаси M_1 бўлсин. Сўнг B нуқтадан Ox ўқига параллел тўғри чизиқ ўтказамиз. Унинг MM_1 билан кесишган нуқтасини P дейлик. Натижада тўғри бурчакли BPM учбурчак ҳосил бўлади. Равшанки,

$$BP=OM_1=x,\ \angle PMB=\alpha,$$
$$MP=MM_1-PM_1=y-OB=y-b.$$

$\triangle BPM$ дан $\frac{PM}{BP}=\operatorname{tg}\alpha$, яъни $\frac{y-b}{x}=\operatorname{tg}\alpha$ бўлишини топамиз. Кейинги тенгликдан эса

$$y=\operatorname{tg}\alpha\cdot x+b \qquad (8)$$

бўлиши келиб чиқади.

Одатда, тўғри чизиқнинг Ox ўқининг мусбат йўналиши билан ташкил этган бурчагининг тангенсини *тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти* дейилади ва k ҳарфи билан белгиланади:

$$\operatorname{tg}\alpha=k.$$

Натижада юқоридаги (8) тенглама

$$y=kx+b \tag{9}$$

кўринишни олади. (9) тенгламани *тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси* дейилади. У иккита параметр k ва b га боғлиқ. Тўғри чизиқнинг текисликдаги вазияти шу параметрлар билан тўлиқ аниқланади.

Мисол. Ушбу $y=x+2$ тенглама билан берилган тўғри чизиқнинг текисликдаги вазиятини аниқланг.

Равшанки, бу тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси бўлиб, бунда:

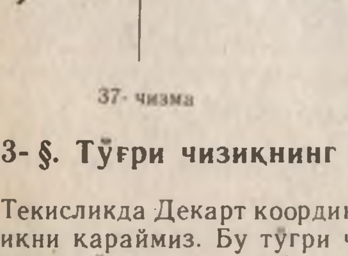
$$b=2,\ k=\operatorname{tg}\alpha=1 \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}.$$

Демак, берилган тўғри чизиқ ордината ўқидан 2 бирлик ажратиб (ордината ўқининг (0, 2) нуқтасидан ўтиб) Ox ўқи билан 45° бурчак ташкил этади (37- чизма). Агар (9) тенгламада $b=0$ бўлса, унда $y=kx$ бўлиб, тўғри чизиқ координата бошидан ўтади.

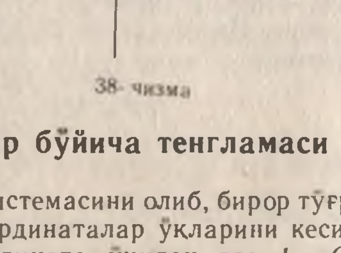
Эслатма. Тўғри чизиқнинг умумий $Ax+By+C=0$ $(B\neq0)$ тенгламасидан унинг бурчак коэффициентли тенгламасига келиш мумкин:

$$Ax+By+C=0 \Rightarrow By=-Ax-C \Rightarrow y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=kx+b\ \left(k=-\frac{A}{B},\ b=-\frac{C}{B}\right).$$



37- чизма



38- чизма

3- §. Тўғри чизиқнинг кесмалар бўйича тенгламаси

Текисликда Декарт координаталар системасини олиб, бирор тўғри чизиқни қараймиз. Бу тўғри чизиқ координаталар ўқларини кесиб, абсцисса ўқидан $a=OA$ кесмани, ордината ўқидан эса $b=OB$ кесмани ажратсин (38- чизма).

Қаралаётган тўғри чизиқда ўзгарувчи $M=M(x, y)$ нуктани олайлик. Равшанки, $OM_1=x$, $MM_1=y$, $M_1A=a-x$. OAB ҳамда M_1AM учбурчакларнинг ўхшашлигидан $\frac{M_1M}{OB}=\frac{M_1A}{OA}$ келиб чикади.

Демак, $\frac{y}{b}=\frac{a-x}{a}$. Кейинги тенгликдан

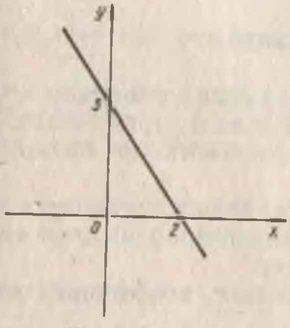
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \tag{10}$$

бўлишини топамиз. (10) тенглама *тўғри чизиқнинг кесмалар бўйича тенгламаси* дейилади. У иккита параметр a ва b ларга боғлик. Тўғри чизикнинг текисликдаги вазияти шу параметрлар билан тўлик аникланади. Масалан, координата ўқларидан мос равишда 2 ва 3 бирлик кесма ажратадиган тўғри чизик (10) тенглама билан ифодаланади (39- чизма).

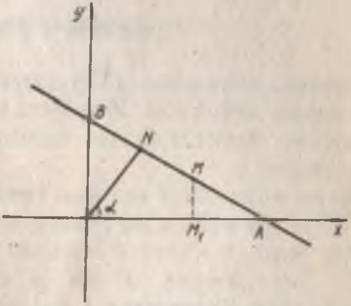
Эслатма. Тўғри чизиқнинг умумий $Ax+By+C=0$ $(C\neq0)$ тенгламасидан унинг кесмалар бўйича тенгламасига келиш мумкин:

$$Ax+By+C=0 \quad \frac{A}{-C}x+\frac{B}{-C}y=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1 \Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad \left(a=-\frac{C}{A},\ b=-\frac{C}{B}\right).$$



39- чизма



40- чизма

4- §. Тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси

Текисликда Декарт координаталар системасини олиб, бирор тўғри чизикни карайлик. Координата бошидан бу тўғри чизикка туширилган перпендикулярнинг узунлиги p, шу перпендикуляр билан Ox ўқининг мусбат йўналиши орасидаги бурчак α $(\alpha\neq0,\ \alpha\neq\frac{\pi}{2})$ бўлсин (40- чизма).

Демак, $ON=p$, $\angle AON=\alpha$. Тўгри чизиқда ўзгарувчи $M=M(x,y)$ нуқтани олиб, бу нуқтадан Ox ўқига перпендикуляр туширамиз. Перпендикулярнинг асоси M_1 бўлсин. Унда

$$OM_1=x, \quad MM_1=y, \tag{11}$$

бўлади. AON ҳамда BON тўғри бурчакли учбурчакларда $\angle AON=\alpha$, $\angle NOB=90^\circ-\alpha$.

$\triangle AON$ дан:

$$\frac{ON}{OA}=\cos\alpha \Rightarrow OA=\frac{ON}{\cos\alpha} \Rightarrow OA=\frac{p}{\cos\alpha}, \tag{12}$$

$\triangle BON$ дан:

$$\frac{ON}{OB}=\cos(90^\circ-\alpha) \Rightarrow \frac{ON}{OB}=\sin\alpha \Rightarrow OB=\frac{p}{\sin\alpha}. \tag{13}$$

Равшанки,

$$M_1A=OA-OM_1=\frac{p}{\cos\alpha}-x. \tag{14}$$

AOB ҳамда AM_1M учбурчакларнинг ўхшашлигидан $\frac{M_1M}{OB}=\frac{M_1A}{OA}$ келиб чиқади. (11), (12), (13) ва (14) муносабатларни эътиборга олсак, кейинги тенглик $\frac{y}{\frac{p}{\sin\alpha}}=\frac{\frac{p}{\cos\alpha}-x}{\frac{p}{\cos\alpha}}$ кўринишга келади.

Бу тенгликдан

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0 \tag{15}$$

бўлишини топамиз. (15) тенгламани *тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси* дейилади. У иккита параметр, p ва α ларга боғлиқ. Тўғри чизиқнинг текисликдаги вазияти шу параметрлар билан тўлиқ аниқланади.

Тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси қуйидаги хоссаларга эга:

1°. Тенгламада x ва y олдидаги коэффициентлар абсолют қиймати бўйича бирдан катта бўлмаган сонлардир.

2°. Тенгламада x ва y лар олдидаги коэффициентларнинг квадратлари йиғиндиси 1 га тенг.

3°. Тенгламадаги озод ҳад манфий сон. Тўғри чизиқнинг умумий $Ax+By+C=0$ тенгламасини нормал кўринишдаги тенгламасига келтириш мумкин. Умумий тенгламани ҳозирча номаълум μ ($\mu\neq\neq0$) сонга кўпайтирамиз:

$$\mu Ax+\mu By+\mu C=0 \tag{16}$$

Агар (16) тенгламани тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси деб айтадиган бўлсак, унда, равшанки $\mu A=\cos\alpha$, $\mu B=\sin\alpha$, $\mu C=-p$ бўлади. Бу тенгламалардан топамиз:

$$(\mu A)^2+(\mu B)^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mu=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{16'}$$

Демак,

$$\mu=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \sin\alpha=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

$$-p=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Натижада берилган $Ax+By+C=0$ тенглама

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

нормал тенгламага келади. Одатда μ нормалловчи кўпайтувчи дейилади. Унинг ишораси (1) тенгламадаги C нинг ишорасига қарама-қарши бўлади.

Мисол. Тўғри чизиқнинг ушбу $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y-1=0$ умумий тенгламасини нормал кўринишга келтиринг.

Аввало нормалловчи кўпайтувчи μ ни (16′) формуладан фойдаланиб топамиз: $\mu=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}}=\frac{6}{5}$.

Сўнг қаралаётган тенгламани μ га кўпайтирамиз: $\frac{6}{5}\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y-1\right)=0$. Натижада берилган тўғри чизиқнинг $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{6}{5}=0$ нормал тенгламасига келамиз.

12- БОБ

ТЎҒРИ ЧИЗИҚҚА ОИД МАСАЛАЛАР

Биз 11- бобда тўғри чизиқнинг аналитик ифодаси x ва y ларга нисбатан биринчи даражали тенглама эканлигини кўрдик ва унинг турли кўринишдаги тенгламаларини ёздик.

Ушбу бобда тўғри чизиққа оид масалаларни келтирамиз. Бунда масаланинг қўйилишига қараб тўғри чизиқнинг у ёки бу кўринишдаги тенгламасидан фойдаланамиз.

1- §. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак

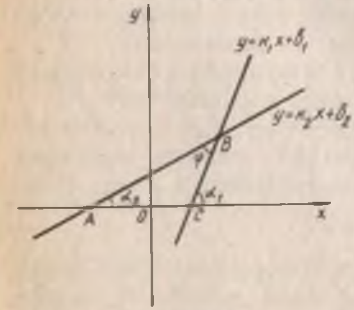
Текисликда икки тўғри чизиқ берилган бўлиб, уларнинг бурчак коэффициентли тенгламалари

$$y=k_1x+b_1, \quad y=k_2x+b_2$$

бўлсин. Бунда (41- чизма)

$$k_1=\operatorname{tg}\alpha_1, \quad k_2=\operatorname{tg}\alpha_2.$$

Масала, шу икки тўғри чизиқ орасидаги $\angle ABC=\varphi$ бурчакни топишдан иборат.



41- чизма

$\triangle ABC$ да α_2 ва φ лар ички бурчаклар бўлиб, α_1 эса уларга нисбатан ташки бурчак. Шу сабабли $\alpha_1=\alpha_2+\varphi$ бўлади. Бу тенгликдан $\varphi=\alpha_1-\alpha_2$ бўлиши келиб чиқади.

Агар $\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\alpha_1-\alpha_2)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha_1-\operatorname{tg}\alpha_2}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\cdot\operatorname{tg}\alpha_2}$ ва $\operatorname{tg}\alpha_1=k_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2=k_2$ бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_1-k_2}{1+k_1\cdot k_2} \qquad (1)$$

эканини топамиз. Бу тенгликдан эса изланаётган φ бурчак аниқланади.

Мисол. Ушбу $5x-y+7=0$, $2x-3y+1=0$ тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

Аввало тўғри чизиқ тенгламаларини бурчак коэффициентли тенгламалар кўринишига келтирамиз ва k_1, k_2 ларни аниқлаймиз:

$$5x-y+7=0 \Rightarrow y=5x+7,\ k_1=5,$$

$$2x-3y+1=0 \Rightarrow y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3},\ k_2=\frac{2}{3}.$$

(1) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{5-\frac{2}{3}}{1+5\cdot\frac{2}{3}}=1 \Rightarrow \varphi=45^\circ.$$

Демак, берилган икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак 45° га тенг экан.

2- §. Икки тўғри чизиқнинг параллеллик ҳамда перпендикулярлик шарти

Текисликда икки тўғри чизиқ берилган бўлиб, уларнинг бурчак коэффициентли тенгламалари

$$y=k_1x+b_1, \quad y=k_2x+b_2$$

бўлсин. Бу тўғри чизиқлар орасидаги бурчакнинг тангенси $\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_1-k_2}{1+k_1\cdot k_2}$ бўлади.

Агар икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак $\varphi=0$ бўлса, равшанки, бу тўғри чизиқлар ўзаро параллел бўлади ёки устма-уст тушади. Бу ҳолда $\frac{k_1-k_2}{1+k_1\cdot k_2}=\operatorname{tg}0=0$ бўлиб, ундан $k_1=k_2$ бўлиши келиб чиқади.

Демак, икки тўғри чизиқнинг параллел бўлиши шарти уларнинг бурчак коэффициентларининг ўзаро тенг бўлишидан иборат экан:

$$k_1=k_2. \tag{2}$$

Агар икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак $\varphi=\frac{\pi}{2}$ бўлса, унда тўғри чизиқлар ўзаро перпендикуляр бўлади. Бу ҳолда $\frac{k_1-k_2}{1+k_1\cdot k_2}=$ $=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}=\infty$ бўлиб, ундан $1+k_1\cdot k_2=0$, яъни $k_1=-\frac{1}{k_2}$ $\left(k_2=-\frac{1}{k_1}\right)$ бўлиши келиб чиқади. Демак, икки тўғри чизиқнинг перпендикуляр бўлиши шарти уларнинг бурчак коэффициентлари учун

$$k_1=-\frac{1}{k_2} \quad \left(k_2=-\frac{1}{k_1}\right) \tag{3}$$

тенгликнинг ўринли бўлишидан иборат экан.

Масалан, ушбу $y=2x+1$, $y=2x+7$ тўғри чизиқлар ўзаро параллел бўлади, чунки уларнинг бурчак коэффициентлари (2) шартни қаноатлантиради, ушбу $y=3x+2$, $y=-\frac{1}{3}x+8$ тўғри чизиқлар эса ўзаро перпендикуляр бўлади, чунки уларнинг бурчак коэффициентлари (3) шартни қаноатлантиради.

Эслатма. Умумий тенгламалари

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0$$

бўлган тўғри чизиқларнинг ўзаро параллеллик шарти $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$, перпендиуулярлик шарги эса $A_1A_2+B_1B_2=0$ бўлади.

3- §. Берилган нуқтадан берилган тўғри чизиққача масофа

Текисликда бирор $Ax+By+C=0$ тўғри чизиқ ва бу тўғри чизиққа тегишли бўлмаган бирор $M=M(x_0,\ y_0)$ нуқта берилган бўлсин.

Маълумки, M нуқтадан тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг узунлиги M нуқтадан $Ax+By+C=0$ тўғри чизиққача бўлган масофа бўлади. Уни ρ билан белгилайлик: $MN=\rho$ (42- чизма).

Аввало берилган $Ax+By+C=0$ тўғри чизиқни нормал кўринишдаги тенгламага келтирамиз. У қуйидагича

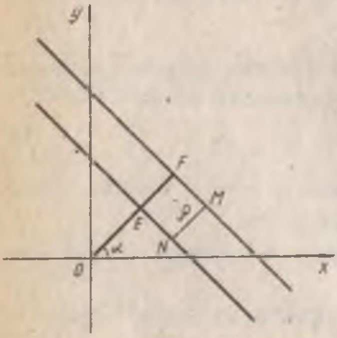
$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0 \qquad (4)$$

бўлади. Бу ерда

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad (5)$$

$$\sin\alpha=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad (6)$$

$$-p=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (7)$$



42- чизма

бўлиб, p—координата бошидан шу тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг узунлиги: $p=OE$. Сўнг M нуқта орқали берилган тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ ўтказамиз. Унинг нормал тенгламаси ушбу

$$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\sin\alpha-q=0 \qquad (8)$$

кўринишда бўлиб, бунда q — координата бошидан (8) тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг узунлиги: $q=OF$. Модомики, бу тўғри чизиқ M $(x_0,\ y_0)$ нуқта орқали ўтар экан, M нуқтанинг координаталари шу тенгламани қаноатлантиради

$$x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-q=0. \tag{9}$$

Равшанки,

$$\rho=NM=EF,\ OF=OE+EF\ \ (OE=p,\ OF=q).$$

Демак, $\rho=q-p$. (9) тенгликдан $q=x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha$ ни топамиз. Натижада:

$$\rho=x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p. \tag{10}$$

Шундай қилиб, биринчидан, берилган тўғри чизиқнинг тенгламасини нормал кўринишдаги тенгламага келтириш, иккинчидан, бу тенгламадаги x ва y нинг ўрнига M нуқтанинг координаталари x_0 ва y_0 ни қўйиш натижасида берилган нуқтадан берилган тўғри чизиққача бўлган масофа топилади.

Мисол. Текисликда $M(5,\ 2)$ нуқтадан

$$3x+4y-12=0$$

тўғри чизиққача бўлган масофани топинг.

Изланаётган масофани (11) формулага кўра топамиз:

$$\rho=\frac{3\cdot5+4\cdot2-12}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{11}{5}.$$

4- §. Берилган нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасининг тенгламаси

Текисликда $M_0\ (x_0,\ y_0)$ нуқта берилган бўлсин. Шу нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар тенгламасини топамиз. Маълумки, тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси

$$y=kx+b \tag{12}$$

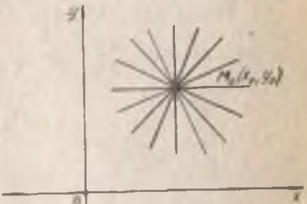
кўринишда бўлар эди. Айтайлик, бу тўғри чизиқ берилган $M_0(x_0,\ y_0)$ нуқтадан ўтсин. Унда нуқтанинг координаталари тўғри чизиқ тенгламасини қаноатлантиради:

$$y_0=kx_0+b. \tag{13}$$

(12) ва (13) тенгликлардан

$$y-y_0=k(x-x_0) \tag{14}$$

бўлиши келиб чиқади. Кейинги тенглик берилган M_0 нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси бўлади.



43- чизма

Равшанки, k нинг турли қийматларида $M_0(x_0,\ y_0)$ нуқтадан ўтувчи турли тўғри чизиқларга эга бўламиз. Бинобарин бундай тўғри чизиқлар чексиз кўп (43- чизма). Шунинг учун (14) тенгламани берилган нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасининг тенгламаси дейилади.

Масалан, M_0 (1, 1) нуктадан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасининг тенгламаси $y-1=k(x-1)$, яъни $kx-y-k+1=0$ бўлади.

Тўғри чизиқлар дастасидан маълум йўналишга эга бўлган тўғри чизиқни ажратиш мумкин. Дастадаги бурчак коэффициенти k_0 бўлган (Ox ўқи билан α_0 бурчак ташкил этган, $k_0=\text{tg}\,\alpha_0$) тўғри чизиқ тенгламаси

$$y-y_0=k_0(x-x_0) \tag{15}$$

бўлади. Демак, (15) тенглама берилган нуктадан ўтувчи ва берилган йўналиш бўйича тўғри чизиқ тенгламасидир. Масалан, M (1, 2) нуктадан ўтувчи ҳамда Ox ўқининг мусбат йўналиши билан 45° бурчак ташкил этадиган тўғри чизиқ тенгламаси $y-2=\text{tg}\,45°\cdot(x-1)$, яъни $y=x+1$ бўлади.

Энди тўғри чизиқлар дастаси

$$y-y_0=k(x-x_0) \tag{14}$$

дан шундайини ажратиш керакки, у бошқа бир берилган M_1 (x_1, y_1) нуқтадан ўтсин. Равшанки, бу ҳолда M_1 (x_1, y_1) нуқтанинг координаталари (14) тенгламани қаноатлантириши лозим:

$$y_1-y_0=k(x_1-x_0)$$

Бу тенгликдан $k=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ ни топамиз. Агар k нинг бу қийматини (14) тенгламага қўйсак, унда $y-y_0=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$, яъни

$$\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0} \tag{15}$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу (15) тенглама берилган $M_0(x_0, y_0)$ ҳамда $M_1(x_1, y_1)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасидир.

Масалан, M_0 (1, 1) ва M_1 (7, 3) нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси $\frac{y-1}{3-1}=\frac{x-1}{7-1}$, яъни $x-3y+2=0$ бўлади.

13- БОБ

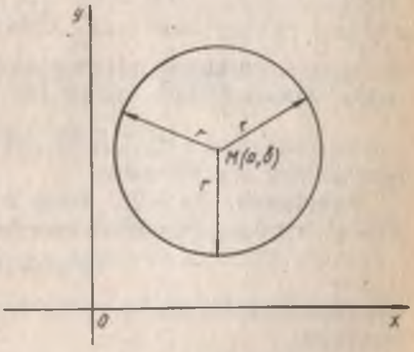
ИҚКИНЧИ ТАРТИБЛИ ЭГРИ ЧИЗИҚЛАР

Мазкур бобда иккинчи тартибли эгри чизиқлардан — айлана, эллипс, гипербола ва параболаларни келтирамиз ва уларнинг хоссаларини ўрганамиз.

1- §. Айлана

Текисликда Декарт координаталар системасини олайлик. Шу текисликда бирор M (a, b) нуқта берилган бўлсин. Маълумки, берилган M (a, b) нуқтадан бир хил r масофада жойлашган нуқталарнинг геометрик ўрни *айлана* дейилади (44- чизма). Бунда M нуқта айлана маркази, r эса айлана радиусидир. Демак, айланадаги ихтиёрий P (x, y) нуқтадан унинг маркази M (a, b) гача бўлган масофа ҳар доим r га тенг. Икки нуқта орасидаги масофа формуласига кўра $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$ бўлади. Кейинги тенгликнинг ҳар икки томонини квадратга кўтариб топамиз:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \qquad (1)$$



44- чизма

Шундай қилиб айланадаги ихтиёрий P нуқтанинг x ва y координаталарини боғловчи тенгламага келдик. Бу маркази (a, b) нуқтада, радиуси r га тенг бўлган айлана тенгламасидир.

Хусусан маркази координата бошида бўлган айлана тенгламаси

$$x^2+y^2=r^2 \qquad (2)$$

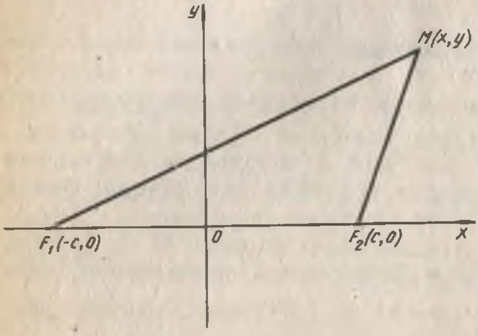
кўринишга эга бўлади.

Мисол. Маркази (3. 4) нуқтада, радиуси 5 га тенг бўлган айлана тенгламасини ёзинг.

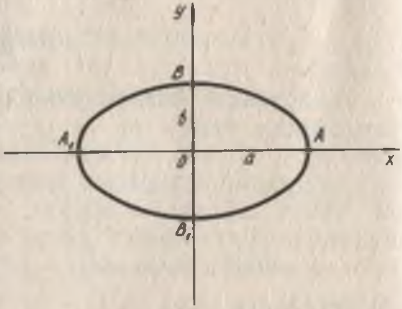
Равшанки, бу ҳолда $a=3$, $b=4$, $r=5$ бўлади. (1) формуладан фойдаланиб изланаётган айлана тенгламаси $(x-3)^2+(y-4)^2=$ $=25$ бўлишини топамиз.

2- §. Эллипс

Текисликда $F_1(a_1, b_1)$, $F_2(a_2, b_2)$ нуқталар берилган бўлсин. F_1 ва F_2 нуқталаргача бўлган масофаларнинг йиғиндиси ўзгармас бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни *эллипс* дейилади. Бунда F_1 ва F_2 лар эллипс фокусларидир. Демак, эллипсдаги ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтадан унинг фокуслари F_1 ва F_2 гача бўлган масофаларнинг йиғиндиси ўзгармас сонга тенг. Бу ўзгармас сонни $2a$ билан, F_1F_2 кесманинг узунлигини эса $2c$ билан белгилайлик. Эллипс тенгламасини келтириб чиқариш учун текисликда Декарт координаталар системасини қуйидагича танлаймиз. F_1 ва F_2 нуқталар абсцисса ўқида жойлашган бўлиб, координата боши F_1F_2 кесмани тенг иккига бўлсин. У ҳолда эллипс фокуслари мос равишда $(-c, 0)$, $(c, 0)$ координаталарга эга бўлади (45- чизма).



45- чизма



46- чизма

Икки нуқта орасидаги масофа формуласига кўра $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$ бўлади. Бу тенгликдан: $a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$. Кейинги тенгликнинг ҳар икки томонини квадратга ошириш натижасида $a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)=a^4+2a^2cx+$ $+c^2x^2$ ҳосил бўлиб, ундан эса

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \qquad (3)$$

тенгламага эга бўламиз.

Равшанки, $2a>2c$, яъни $a>c$ тенгсизлик ўринли. Бинобарин, a^2-c^2 мусбат. Уни b^2 билан белгиласак, у ҳолда (3) тенглама

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \qquad (4)$$

кўринишга келади. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини b^2a^2 га бўлиб топамиз:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,. \qquad (5)$$

Одатда (5) тенглама *эллипснинг каноник тенгламаси* дейилади.

Равшанки, (5) тенгламада $x=0$ бўлса, $y=\pm b$, $y=0$ бўлса, $x=\pm a$ бўлади. Демак эллипс абсциссалар ўқини $A(a,\ 0)$, $A_1(-a,0)$ нуқталарда, ординаталар ўқини эса $B(0,\ b)$, $B_1(0,\ -b)$ нуқталарда кесар экан (46-чизма). AA_1 ва BB_1 кесмалар мос равишда эллипснинг катта ва кичик ўқлари дейилади. Шундай қилиб, a — эллипснинг катта ярим ўқи узунлиги, b эса кичик ярим ўқи узунлигидир.

Энди $e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}$ миқдорни қарайлик. Уни эллипснинг *эксцентриситети* дейилади. Эллипснинг эксцентриситети унинг шаклини ифодаловчи миқдордир.

Мисол. Ушбу $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ тенглама билан берилган эллипснинг эксцентриситетини топинг.

Қаралаётган эллипснинг ярим ўқлари узунлиги $a=10$, $b=6$ экани равшан. $a^2-c^2=b^2$, $e=\frac{c}{a}$ муносабатларни эътиборга олиб топамиз:

$c=\sqrt{100-36}=8$, $e=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$. Демак, $e=\frac{4}{5}$.

Эллипснинг хоссалари

1°. Эллипс координаталар ўқига нисбатан симметрик эгри чизиқдир.

Бу хоссанинг тўғрилиги (5) тенгламани x ва y га нисбатан ечишдан ҳосил бўлган

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,,\quad x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2} \tag{6}$$

муносабатлардан келиб чиқади.

2°. Эллипс ABA_1B_1 тўғри тўртбурчак ичида жойлашган шаклдир.

Юқоридаги (6) формулалардан: $|x|\leqslant a$, $|y|\leqslant b$. Бу эса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипс ABA_1B_1 тўғри тўртбурчакда жойлашганини билдиради.

3°. Агар эллипснинг экспентриситети $e=0$ бўлса, у ҳолда (5) тенглама маркази координата бошида, радиуси a га тенг бўлган айланани ифодалайди.

Ҳақиқатан ҳам $e=0$ бўлганидан $a=b$ бўлиб, (5) тенглама $x^2+y^2=a^2$ кўринишга келади.

4°. Маркази координаталар бошида, радиуси a га тенг айланани Oy ўқи бўйлаб $\frac{a}{b}$ марта қисиш натижасида ярим ўқлари a ва b га тенг бўлган эллипс ҳосил бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $x=x'$, $y=\frac{a}{b}\,y'$

алмаштириш (қисиш натижасида (2) айлана тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

эллипс тенгламасига келади.

3- §. Гипербола

Текисликда $F_1(a_1, b_1)$, $F_2(a_2, b_2)$ нуқталар берилган бўлсин. Бу текисликда F_1 ва F_2 нуқталаргача бўлган масофалар айирмасининг абсолют қиймати ўзгармас бўлган нуқталарни қарайлик. Бундай нуқталарнинг геометрик ўрни *гипербола* дейилади. Бунда F_1 ва F_2 гипербола фокусларидир.

Демак, гиперболадаги ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтадан унинг фокуслари F_1 ва F_2 гача бўлган масофалар айирмасининг абсолют қиймати ўзгармас сонга тенг. Бу ўзгармас сонни $2a$ билан белгилаймиз.

Гипербола тенгламасини ҳосил қилиш учун Декарт координаталари системасида F_1 ва F_2 нуқталарни Ox ўқи бўйлаб координата бошига нисбатан симметрик бўлган c масофада жойлаштирайлик. Икки нуқта орасидаги масофа формуласига кўра:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

бўлади. Бу тенгликдан топамиз:

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=cx^2-a^2 .$$

Кейинги тенгликнинг ҳар икки томонини яна квадратга кўтариш натижасида

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2) \qquad (7)$$

тенгликка келамиз. $c>a$ бўлгани сабабли c^2-a^2 айирма мусбат бўлади. Уни b^2 орқали белгиласак, у ҳолда (7) тенглама

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2 \qquad (8)$$

кўринишга келади. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини a^2b^2 га бўлиб топамиз:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 . \qquad (9)$$

Одатда (9) гиперболанинг *каноник тенгламаси* дейилади. Гипербола тенгламасида $y=0$ дейилса, $x=\pm a$ бўлиши келиб чиқади. Бу эса гипербола Ox ўқини $A(a, 0)$, $A_1(-a, 0)$ нуқталарда кесишини билдиради. (9) тенгламада $x=0$ дейилса $y^2=-b^2$ бўлади. Бу эса гипербола Oy ўқи билан кесишмаслигини билдиради.

$A\ (a, 0)$ ва $A_1\ (-a, 0)$ нуқталар гиперболанинг учлари, AA_1 кесма эса унинг *ҳақиқий ўқи* дейилади.

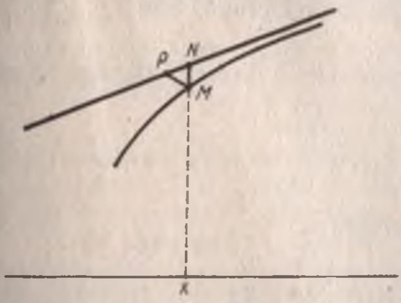
Ушбу $e=\frac{c}{a}$ нисбат билан аниқланган миқдор гиперболанинг *эксцентриситети* дейилади. Худди эллипсдагига ўхшаш бу ерда ҳам гипербола эксцентриситети унинг шаклини ифодалайди. $c>a$ бўлгани учун $e=\frac{c}{a}>1$ тенгсизлик ўринлидир.

Гиперболанинг хоссалари

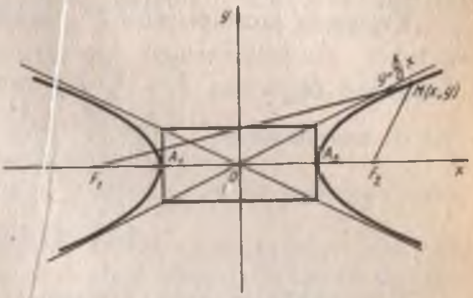
1°. Гипербола координата ўқларига нисбатан симметрик бўлган эгри чизиқдир.

2°. $y=\pm\frac{b}{a}x$ тўғри чизиқлар гиперболанинг асимптоталари бўлади, яъни бу тўғри чизиқ x нинг чексиз катталишиб бориши билан гиперболага борган сари яқинлашиб боради.

Бу хоссанинг ўринлилигини кўрсатайлик. Тўғри чизиқ $y=\frac{b}{a}x$ бўлган ҳолни қараймиз.



47- чизма



48- чизма

Абсциссалари $x\geqslant a$ бўлган гиперболада M (x, y), тўғри чизиқда эса N (x, y_1) нукталарни оламиз (47-чизма). Унда $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$. $y_1=\frac{b}{a}x$ чизиқлардаги мос M ва N нуқталар бир хил абсциссага эга бўлгани учун MN тўғри чизиқ Ox ўқига перпендикуляр бўлади. Демак, MN кесманинг узунлиги $|y_1-y|$ га тенг.

$x\geqslant a$ лар учун

$$y_1=\frac{b}{a}x=\frac{b}{a}\sqrt{x^2}>\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=y$$

эканлигини эътиборга олсак, унда MN кесманинг узунлиги:

$$|MN|=y_1-y=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=$$

$$=\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2})=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Бу муносабатдан x чексиз ошиб борганда MN кесманинг узунлиги нолга интилишини кўрамиз. M нуқтадан $y_1=\frac{b}{a}x$ чизиққа туширилган перпендикуляр асосини P нукта билан белгилайлик. У ҳолда $|MP|<|MN|$ бўлиб, MP кесманинг узунлиги ҳам нолга интила боради. Бу эса $y_1=\frac{b}{a}x$ тўғри чизиқ гиперболанинг асимптотаси эканлигини билдиради.

$y=-\frac{b}{a}x$ тўғри чизиқ ҳам гипербола учун асимптота бўлиши худди юқоридагидек кўрсатилади (48- чизма).

Мисол. Ушбу $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ гиперболанинг эксцентриситети ва асимптоталарини топинг.

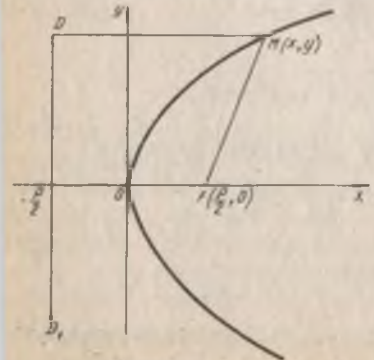
Берилган тенгламада: $a=4$, $b=3$. Бундан $c=\sqrt{a^2+b^2}=$ $=\sqrt{16+9}=5$, $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$ эканини топамиз.

Юқорида келтирилган 2°- хоссадан фойдаланиб, $y=\pm\frac{3}{4}x$ тўғри чизиқлар берилган $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ гиперболанинг асимптоталари бўлишини аниқлаймиз.

4- §. Парабола

Текисликда Декарт координаталари системасини олайлик. Бу текисликда Oy ўқига параллел тўғри чизиқ ва бу тўғри чизиққа тегишли бўлмаган $F(a, b)$ нукта берилган бўлсин. Бу тўғри чизиқ ва F нуқтадан бир хил масофада жойлашган нукталарнинг геометрик ўрни *парабола* дейилади. F нукта параболанинг *фокуси*, қаралаётган тўғри чизиқ эса унинг *директрисаси* деб аталади (49- чизма).

Парабола тенгламасини ҳосил қилиш учун F нуктани Ox ўқи бўйлаб координата бошидан $\frac{p}{2}$ масофада $(p>0)$ жойлаштирайлик. Унинг директрисаси эса $x=-\frac{p}{2}$ тўғри чизиқ бўлсин. Параболанинг ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтасини қарайлик. Икки нуқта орасидаги масофа формуласига кўра



49- чизма

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}$$

бўлади.

Бу тенгликнинг ҳар икки томонини квадратга ошириб топамиз:

$$y^2 = 2px. \qquad (10)$$

Бу тенглама *параболанинг каноник тенгламаси* дейилади.

Параболанинг хоссалари

1°. Парабола Ox ўқига нисбатан симметрик бўлган эгри чизиқдир.

2°. Парабола координата бошидан ўтади.

3°. x ўзгарувчининг қийматлари чексиз ошиб борган сари y ўзгарувчининг қийматлари ҳам чексиз ошиб боради.

5- §. Иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг умумий тенгламаси

Биз юқорида иккинчи тартибли эгри чизиқлардан айлана, эллипс, гипербола, параболаларни келтирдик ва уларнинг содда хоссаларини ўргандик.

Агар бу эгри чизиқларнинг каноник тенгламаларига эътибор берсак, уларни

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (11)$$

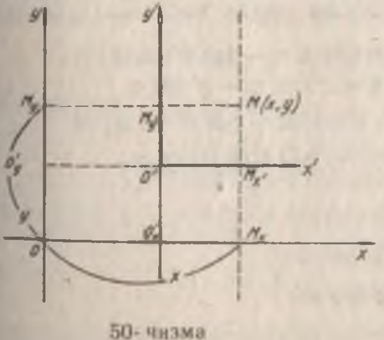
тенгламанинг хусусий ҳоллари эканлигини кўрамиз.

Одатда (11) тенглама *иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг умумий тенгламаси* дейилади.

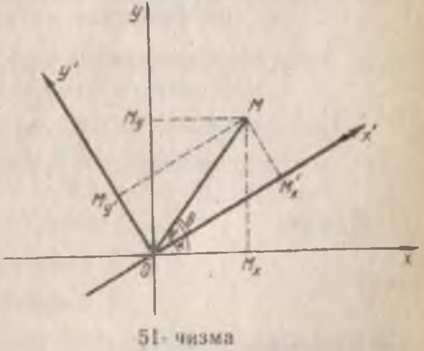
Ушбу параграфда иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг умумий тенгламасини каноник кўринишга келтириш масаласи билан шуғулланамиз. Бу масала координата ўқларини алмаштириш:

1) Координата ўқларини параллел кўчириш;

2) Координата ўқларини маълум α бурчакка буриш натижасида ҳал қилинади.



50- чизма



51- чизма

1. Координата ўқларини параллел кўчириш.

Фараз қилайлик, Декарт координаталари системасида $M(x,y)$ нуқта берилган бўлсин. Координаталар бошини $O'(x_0, y_0)$ нуқтага кўчирамиз. Координаталар ўқлари Ox, Oy лар эса параллел кўчириш натижасида $O'x'$, $O'y'$ координаталар ўқларига келсин.

Натижада янги Декарт координаталар системаси $X'O'Y'$ ҳосил бўлади. M нуктанинг координаталари (x, y) ни янги координаталар (x', y') орқали ифодаловчи формулани келтириб чиқарамиз. Бунинг учун Ox ўқига MM_x, $O'O'_x$, Oy ўқига эса MM_y, $O'O'_y$ перпендикулярлар туширамиз (50- чизма). MM_x ва MM_y чизиқларнинг мос равишда $O'x'$, $O'y'$ ўқлар билан кесишиш нуқталарини $M_{x'}$ ва M орқали белгилайлик. У ҳолда

$$x=OM_x=OO'_x+O'_xM_x=OO'_x+O'M_{x'}=x_0+x',$$

$$y=OM_y=OO'_y+O'_yM_y=OO'_y+O'M_{y'}=y_0+y'$$

бўлади.

Шундай қилиб, (x, y) ва (x', y') нукта координаталари орасида қуйидаги муносабат ҳосил бўлди: $x=x_0+x'$, $y=y_0+y'$ ёки $x'=x-x_0$, $y'=y-y_0$. Одатда бу формулалар *координата ўқларини параллел кўчириш формулалари* дейилади.

2. Координата ўқларини буриш.

Oxy Декарт координаталар системасини қарайлик. Координата ўқларини соат стрелкасига қарши йўналишда α бурчакка бурамиз (51- чизма). Натижада янги $Ox'y'$ Декарт системаси ҳосил бўлади.

Oxy системада M нуқтанинг координаталари (x, y), буриш натижасида ҳосил бўлган $Ox'y'$ системада эса (x', y') бўлсин. M нуқтанинг кутб координаталарини (ρ, θ) орқали белгилайлик. Бунда кутб ўқи сифатида Ox ўқининг мусбат ярим ўқи олинган. (ρ, θ') сифатида эса яна M нуктанинг қутб координаталари белгиланган бўлиб, бу ҳолда кутб ўқи сифатида Ox' нинг мусбат ярим ўқи олинган. Равшанки ҳар иккала ҳолда ҳам $\rho=|OM|$ бўлиб, θ эса $\theta'+\alpha$ га тенг, яъни $\theta=\theta'+\alpha$.

Равшанки, (51- чизмага қаранг),

$$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,\ x'=\rho\cos\theta',\ y'=\rho\sin\theta',\ \theta=\theta'+\alpha.$$

Бу тенгликларни эътиборга олган ҳолда топамиз:

$$x=\rho\cos\theta=\rho\cos(\theta'+\alpha)=\rho(\cos\theta'\cos\alpha-\sin\theta'\sin\alpha)=$$
$$=\rho\cos\theta'\cos\alpha-\rho\sin\theta'\sin\alpha=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,$$
$$y=\rho\sin\theta=\rho\sin(\theta'+\alpha)=\rho(\sin\theta'\cos\alpha+\cos\theta'\sin\alpha)=$$
$$=\rho\sin\theta'\cos\alpha+\rho\cos\theta'\sin\alpha=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha.$$

Демак,

$$\begin{cases} x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha, \\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha. \end{cases}$$

Бу системадан топамиз:

$$\begin{cases} x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha, \\ y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha. \end{cases} \qquad (*)$$

Одатда (*) формула *координата ўқларини буриш формуласи* дейилади.

Эслатма. Умумий ҳолда, координата ўқларини параллел кўчириш ва α бурчакка буриш формулалари

$$\begin{cases} x=x_0+x'\cos\alpha-y'\sin\alpha \\ y=y_0+x'\sin\alpha+y'\cos\alpha, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'=(x-x_0)\cos\alpha+(y-y_0)\sin\alpha \\ y'=(y-y_0)\cos\alpha-(x-x_0)\sin\alpha \end{cases}$$

системалар билан ифодаланади.

Координата ўқларини параллел кўчириш ва буриш формулалари қаралаётган тўғри бурчакли координаталар системаси билан бир қаторда янги координаталар системасини олиш имкониятини беради. Янги координаталар системасига ўтиш (янги координаталар системасини қуриш) қатор масалаларни ҳал этишда анча қулайликларга олиб келади. Жумладан, 2- тартибли эгри чизиқларни синфларга ажратишда бу алмаштиришлардан фойдаланилади.

Лемма. Декарт координаталари системасида (11) тенглама берилган бўлиб, $AC-B^2\neq0$ бўлсин. У ҳолда шундай тўғри бурчақли координаталар системасини танлаш мумкинки, бу системада (11) тенглама

$$A'x''^2+C'y''^2+F'=0 \qquad (12)$$

кўринишга эга бўлади. Бунда A', C', F' — сонлар, (x'', y'') эса янги системадаги нуқтанинг координаталаридир.

Исбот. Фараз қилайлик, параллел кўчириш натижасида координата боши $O'(x_0, y_0)$ нуқтага ўтсин. Ҳосил бўлган янги координаталар системасини $O'x'y'$ орқали белгилайлик. У ҳолда нуқтанинг (x, y) координаталари янги (x', y') координаталар билан

$$x=x'+x_0,$$
$$y=y'+y_0$$

формулалар орқали (боғланади) ифодаланади. Бу алмаштириш натижасида (11) тенглама қуйидаги

$$Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+2D'x'+2E'y'+F'=0 \qquad (13)$$

кўринишга келади. Бунда

$$D'=Ax_0+By_0+D;\quad E'=Bx_0+Cy_0+E;$$
$$F'=Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2+2Dx_0+2Ey_0+F.$$

Энди (x_0, y_0) нуқтани шундай танлаймизки, у

$$\begin{cases} Ax_0+By_0+D=0, \\ Bx_0+Cy_0+E=0 \end{cases} \qquad (14)$$

тенгламалар системасини қаноатлантирсин. Лемма шартига кўра $AC-B^2\neq0$ бўлгани учун (14) система ягона ечимга эга бўлади.

Шундай қилиб, агар (x_0, y_0) (14) системанинг ечими бўлса, у ҳолда (13) тенгламада $E'=D'=0$ бўлиб, у соддароқ

$$Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+F'=0 \qquad (15)$$

кўринишга эга бўлади.

$O'x''y''$ координаталар системаси $O'x'y'$ координаталар системасини α бурчакка буриш натижасида ҳосил қилинган бўлсин. Равшанки, у ҳолда x', y' координаталар x'', y'' координаталар орқали қуйидаги формулалар билан ифодаланади:

$$x' = x''\cos\alpha - y''\sin\alpha,$$
$$y' = x''\sin\alpha + y''\sin\alpha.$$

$O'x''y''$ координаталар системасида (15) тенглама

$$A'x''^2 + 2B'x''y'' + C'y''^2 + F' = 0 \qquad (16)$$

кўринишга эга бўлади. Бунда

$$A' = A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\cdot\sin\alpha + C\sin^2\alpha;$$
$$B' = -A\sin\alpha\cdot\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + C\sin\alpha\cdot\cos\alpha,$$
$$C' = A\sin^2\alpha - 2B\cos\alpha\cdot\sin\alpha + C\cos^2\alpha. \qquad (17)$$

Энди α бурчакни шундай танлаймизки, натижада (16) тенгламада

$$B' = -A\sin\alpha\cos\alpha + B\cos 2\alpha + C\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

ифода нолга айлансин. Бунинг учун α ушбу

$$2B\cos 2\alpha = (A - C)\sin 2\alpha$$

тенгламанинг ечими бўлиши етарли. Кейинги тенгламанинг ечими $A = C$ ёки $A \neq C$ бўлишига боғлиқ.

1- ҳол. $A = C$ бўлсин. У ҳолда $\cos 2\alpha = 0$ бўлиб, α сифатида $\alpha = \frac{\pi}{4}$ олинади.

2- ҳол. $A \neq C$ бўлсин. Бу ҳолда $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A-C}$ бўлиб,

$\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2B}{A-C}$ бўлади.

Шундай қилиб, координаталар ўқини параллел кўчириш ва буриш ёрдамида иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг умумий тенгламаси

$$A'x''^2 + C'y''^2 + F' = 0$$

кўринишга эга бўлди. Лемма исботланди.

Маълумки (14) тенгламалар системаси ягона ечимга эга бўлиши учун $AC - B^2 \neq 0$ шартнинг бажарилиши зарур ва етарлидир. Биз леммани исботлаш жараёнида $AC - B^2$ ифоданинг координаталар ўқини параллел кўчириш натижасида ўзгармаслигини (инвариантлигини) кўрдик. Энди бу ифоданинг координата ўқларини буриш натижасида ҳам инвариантлигини кўрсатамиз.

(17) формуладан фойдаланиб $A'C' - B'^2$ ифодани соддалаштирамиз:

$$A'C' - B'^2 = (A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cdot\cos\alpha + C\sin^2\alpha)\times$$
$$\times(A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cdot\cos\alpha + C\cos^2\alpha) -$$
$$-[(C - A)\sin\alpha\cdot\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)]^2.$$

Қавсларни очиб ўхшаш ҳадларни ихчамлаш натижасида $A'C' - B'^2 = AC(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - B^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = AC - B^2$ бўлади. Демак, $A'C' - B'^2 = AC - B^2$.

Одатда $AC - B^2$ га *иккинчи тартибли эгри чизиқлар умумий тенгламасининг инварианти* дейилади.

Бу ифоданинг ишорасига қараб иккинчи тартибли эгри чизиқлар қуйидаги уч турга бўлинади.

1) Агар $AC - B^2 > 0$ бўлса, эллиптик тип;

2) Агар $AC - B^2 < 0$ бўлса, гиперболик тип;

3) Агар $AC - B^2 = 0$ бўлса, параболик тип.

Энди бу уч ҳолни алоҳида-алоҳида баён этамиз.

1-ҳол. Эллиптик тип.

$AC - B^2 > 0$ бўлгани учун исбот қилинган леммага кўра иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг умумий тенгламаси

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0 \qquad (18)$$

кўринишга эга бўлади. $AC - B^2 = AC > 0$ бўлганлигидан A ва C лар бир хил ишоралидир. Демак қуйидагича уч ҳолдан фақат биттаси юз бериши мумкин:

а) $F \neq 0$ ва унинг ишораси A ҳамда C нинг ишорасига тескари. Бу ҳолда F ни (18) тенгламанинг ўнг томонига ўтказиб, тенгламанинг ҳар икки томонини унга бўламиз:

$$\frac{x^2}{-\frac{F}{A}} + \frac{y^2}{-\frac{F}{C}} = 1\,.$$

$-\frac{F}{A} > 0$, $-\frac{F}{C} > 0$ эканлигини эътиборга олиб, $-\frac{F}{A} = a^2$, $-\frac{F}{C} = b^2$ белгилашлар натижасида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ тенгламага келамиз. Бу эса эллипснинг каноник тенгламаси эканлиги маълум.

б) $F \neq 0$ ва унинг ишораси A ҳамда C нинг ишораси билан бир хил. Бу ҳолда (18) тенглама худди а) ҳолда қаралган усул билан ушбу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ кўринишга келтирилади. Одатда бу тенглама мавхум эллипснинг тенгламаси дейилади.

в) $F = 0$. Бу ҳолда $|A| = a^2$, $|C| = c^2$ белгилаш натижасида $a^2x^2 + c^2y^2 = 0$ тенгламага келамиз. Бу тенгламани фақат $(0, 0)$ нуқта қаноатлантириши равшандир. $a^2x^2 + c^2y^2 = 0$ — *ўзаро кесишувчи икки мавхум чизиқ тенгламаси* дейилади.

2-ҳол. Гиперболик тип.

Бу ҳолда $AC - B^2 < 0$ бўлгани учун исботланган леммадан фойдаланиб, иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг умумий тенгламасини яна

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0$$

кўринишга келтирамиз.

Қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

а) $F \neq 0$, у холда F ни (18) тенгламанинг ўнг томонига ўтказиб, тенгламанинг ҳар икки томонини унга бўлиб топамиз:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1.$$

Бу эса гиперболанинг каноник тенгламасидир.

б) $F = 0$. Бу ҳолда (18) тенглама

$a^2x^2 - c^2y^2 = 0$ ёки $(ax - cy)(ax + cy) = 0$

кўринишга эга бўлади. Бу эса координаталар бошидан ўтувчи икки тўғри чизиқни ифодалаши равшандир.

3- хол. Параболик тип.

$AC - B^2 = 0$ бўлгани учун юқоридаги леммани исботлаш жараёнидаги мулоҳазалардан фойдаланиб координаталар ўқини α бурчакка буриш натижасида иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг умумий тенгламаси

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Ey + 2Dx + F = 0 \qquad (19)$$

кўринишга келтирилади. Бу тенглама учун $B = 0$, демак $AC = 0$ бўлади.

Фараз қилайлик, $A = 0$, $C \neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда (19) тенгламани қуйидагича ўзгартирамиз:

$$C\left[y^2 + \frac{2E}{C}y + \left(\frac{E}{C}\right)^2\right] + 2Dx + F - \frac{E^2}{C} = 0$$

ёки

$$C\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 + 2Dx + \widetilde{F} = 0, \text{ бунда } \widetilde{F} = F - \frac{E^2}{C}.$$

Энди координаталар бошини $\left(0, -\frac{E}{C}\right)$ нуқтага кўчирамиз, яъни $x' = x$, $y' = y + \frac{E}{C}$ алмаштириш бажарамиз. Натижада (19) тенглама

$$Cy'^{\,2} + 2Dx' + \widetilde{F} = 0 \qquad (20)$$

кўринишга келади.

Қуйидаги ҳоллар юз бериши мумкин.

а) $D \neq 0$, у ҳолда (20) тенгламани $Cy'^{\,2} + 2D\left(x' + \frac{\widetilde{F}}{2\,D}\right) = 0$ кўринишда ёзиб,

$$x'' = x' + \frac{\widetilde{F}}{2D},$$
$$y'' = y'$$

алмаштириш натижасида

$$Cy''^2 + 2Dx'' = 0 \quad \text{ёки} \quad y''^2 = 2px$$

тенгламага келамиз $\left(p=-\frac{D}{C}\right)$. Бу эса параболанинг каноник тенгламасидир.

б) $D=0$ бўлсин. У ҳолда (20) тенглама $Cy'^2+\tilde{F}=0$ кўринишга келади. Агар $C>0$, $\tilde{F}<0$ $(C<0,\ \tilde{F}>0)$ бўлса, $Cy'^2+\tilde{F}=0$ тенглама

$$(y'-a)(y'+a)=0$$

кўринишда бўлади $\left(a^2=\frac{\tilde{F}}{C}\right)$. Бу эса икки параллел тўғри чизиқни ифодалайди.

Агар C ва F бир хил ишорали бўлса, у ҳолда

$$y'^2+a^2=0$$

тенгламага келамиз. Бу тенглама *икки параллел мавҳум тўғри чизиқ тенгламаси* дейилади.

в) $\tilde{F}=0$ бўлсин. У ҳолда

$$y'^2=0$$

тенглама ўзаро устма-уст тушган икки тўғри чизиқни ифодалайди.

Шундай қилиб, иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг умумий тенгламасига оид қуйидаги теорема исбот қилинди:

Теорема. Декарт координаталари системасини иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг умумий тенгламаси

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

берилган бўлсин. У ҳолда тўғри бурчакли координаталар системасини шундай танлаш мумкинки, бу системада қаралаётган тенглама қуйидаги каноник кўринишлардан биттасига келтирилади:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (эллипс),
2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ (мавҳум эллипс),
3) $a^2x^2+c^2y^2=0$ (икки мавҳум кесишувчи чизиқлар),
4) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (гипербола),
5) $a^2x^2-c^2y^2=0$ (икки кесишувчи чизиқлар),
6) $y^2=2px$ (парабола),
7) $y^2-a^2=0$ (икки параллел чизиқлар),
8) $y^2+a^2=0$ (икки параллел мавҳум чизиқлар),
9) $y^2=0$ (икки ўзаро устма-уст тушувчи чизиқлар).

Мисол. Ушбу $x^2+y^2+2y-10x+1=0$ тенгламани каноник кўринишга келтиринг.

Қаралаётган тенглама учун $A=1$, $C=1$, $B=0$ бўлиб, $AC-B^2>0$ экани равшан. Демак, бу эллиптик типдаги тенгламадир.

Берилган тенгламани қуйидагича ўзгартирамиз:

$$x^2+y^2+2y-10x+1+25-25=0,$$
$$x^2-10x+25+y^2+2y+1=25,$$
$$(x-5)^2+(y+1)^2=5^2.$$

Бу эса маркази (5, —1) нуктада, радиуси 5 га тенг бўлган айлана тенгламасидир.

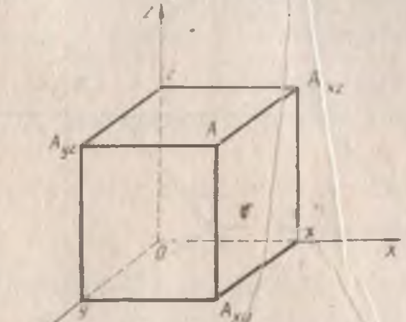
Мисол. Ушбу $x^2+y^2=a^2$ айлана тенгламасини қутб координаталари системасида ёзинг.

Маълумки, нуқтанинг қутб координаталари ва Декарт координаталарини $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ формулалар боғлайди. Бундан $\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=a^2$ ёки $\rho=a$ эканлигини топамиз. Демак, $x^2+y^2=$ $=a^2$ айлананинг қутб координаталаридаги тенғламаси $\rho=a$ кўринишда, бўлиб, $0\leqslant\varphi<2\pi$ бўлади.

14- БОБ

ФАЗОДА АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯНИНГ АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАРИ ВА МАСАЛАЛАРИ

Биз 10—12- бобларда текисликда аналитик геометриянинг асосий тушунчалари ва содда масалалари билан шуғулландик. Маълумки, бизни ўраб турган борлиқ фазо (уч ўлчовли фазо) бўлиб, бизга кўриниб турган реал жисмлар шу фазода маълум бир ўринни эгаллайди. Фазода уларнинг ҳолатини аниқлаш учун худди текисликдаги каби Декарт координаталари системаси киритилади. Бизга масштаб бирлиги билан таъминланган ўзаро перпендикуляр ҳамда битта O нуқтада кесишувчи O_x, O_y, O_z тўғри чизиқлар системаси берилган бўлсин. Одатда бу система фазода *Декарт координаталари системаси* дейилади ва O_{xyz} каби белгиланади. O нукта координаталар боши, O_x — *абсциссалар ўқи*, O_y — *ординаталар ўқи*, O_z эса *аппликаталар ўқи* дейилади.



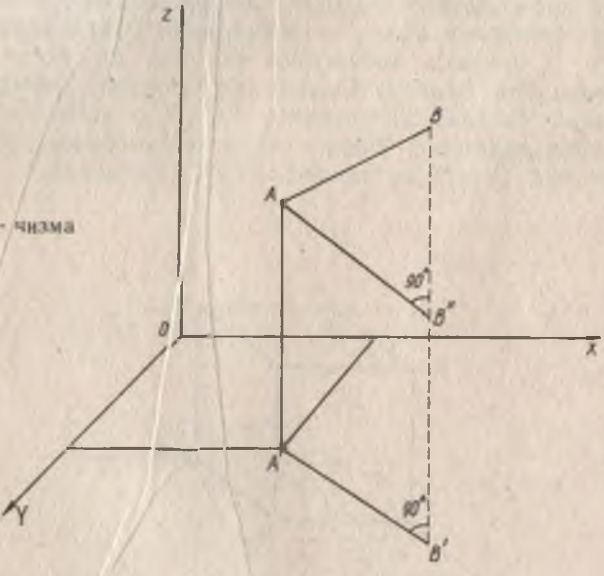
52- чизма

Фазода бирор A нуктанинг ҳолати унинг O_x, O_y, O_z ўқларга проекциялари — (x, y, z) учлик билан тўла аниқланади (52- чизмада A нуктанинг O_x, O_y, O_z ўқларга проекциялари x, y, z ва O_{xy}, O_{yz}, O_{xz} текисликларга проекциялари эса A_{xy}, A_{yz}, A_{xz} билан тасвирланган). Одатда (x, y, z) учлик A нуктанинг *координаталари* дейилиб, уни A (x, y, z) кўринишда белгиланади. Бу ерда x — A нуктанинг абсциссаси, y — ординатаси, z — эса аппликатасидир.

1-§. Икки нуқта орасидаги масофа. Қесмани берилган нисбатда бўлиш

Фазода Декарт координаталари системаси ва $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ нуқталар берилган. Бу нуқталар орасидаги масофани топиш масаласи билан шуғулланамиз. A' ва B' нуқталар мос равишда A ва B нинг O_{xy} текисликдаги проекциялари бўлсин (53- чизма).

Текисликда икки нуқта орасидаги масофа формуласига кўра $A'B'$ кесма узунлиги $A'B'=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ бўлади. A нуқтадан $A'B'$ кесмага параллел чизиқ ўтказиб, уни BB' чизиқ билан кесишган нуқтасини B орқали белгилайлик (53- чизма). У ҳолда BB'' кесманинг узунлиги $|z_2-z_1|$ га тенг бўлади. Равшанки, $\triangle ABB''$ — тўғри бурчакли учбурчак. Пифагор теоремасидан фойдаланиб $AB=\sqrt{AB''^2+BB''^2}$ ни топамиз. Энди $AB''=A'B'$ эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда



53- чизма

$$AB=\sqrt{A'B'^2+BB''^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

бўлади. Демак,

$$AB==\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Бу *икки нуқта орасидаги масофани ҳисоблаш формуласи* дейилади.

Фазода $A(x_1, y_1, z_1)$ ва $B(x_2, y_2, z_2)$ нуқталарни туташтирувчи AB кесмани қарайлик. Бу кесмада шундай C нуқта топиш керакки, AC кесманинг CB кесмага нисбати берилган λ сонга тенг бўлсин:

$\frac{AC}{CB}=\lambda$. Изланаётган C нуқтанинг координаталарини x, y, z дейлик. Берилган A ва B нуқталарнинг координаталари ҳамда λ сон орқали C нуқтанинг x, y, z координаталари

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

формулалар билан топилади. Хусусан, C нуқта AB кесманинг ўртаси бўлса, унда $AC=CB$ ва $\lambda=1$ бўлиб, C нуқтанинг координаталари $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$, $z=\frac{z_1+z_2}{2}$ бўлади.

2- §. Фазода текислик ва унинг хоссалари

Фараз қилайлик, фазода Декарт координаталар системаси, $P(a_1, b_1, c_1)$ ҳамда $Q(a_2, b_2, c_2)$ нуқталар берилган бўлсин. Бу икки нуқтадан бир хил масофада жойлашган нуқталарнинг геометрик ўрни текисликни ифодалайди. Бу текисликда ихтиёрий $M(x, y, z)$ нуқтани олайлик. Икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласига кўра

$$MP=\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2},$$
$$MQ=\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-c_2)^2}$$

бўлади. Агар $MP=MQ$ бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2}=$$
$$\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-c_2)^2}$$

тенгликка келамиз. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини квадратга ошириб топамиз:

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2-2a_1x-2b_1y-2c_1z=a_2^2+b_2^2+c_2^2-2a_2x-2b_2y-2c_2z.$$

Уни қуйидагича

$$2(a_2-a_1)x+2(b_2-b_1)y+2(c_2-c_1)z+$$
$$+a_1^2+b_1^2+c_1^2-a_2^2-b_2^2-c_2^2=0$$

ҳам ёзиш мумкин. Энди $A=2(a_2-a_1)$, $B=2(b_2-b_1)$, $C=2(c_2-c_1)$, $D=a_1^2+b_1^2+c_1^2-a_2^2-b_2^2-c_2^2$ белгилашлар киритсак, унда кейинги тенглик ушбу

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (1)$$

кўринишни олади. Шундай қилиб, ўзгарувчи M (x, y, z) нуқтанинг координаталарини боғловчи тенгламага келдик. (1) тенглама фазода *текисликнинг умумий тенгламаси* дейилади. Бу ерда A, B, C, D ўзгармас сонлар бўлиб, улар текисликнинг фазодаги вазиятини тўла аниқлайди.

Энди (1) тенгламанинг хусусий ҳолларини қарайлик.

1°. $A\neq0$, $B\neq0$, $C\neq0$, $D=0$ бўлсин. У ҳолда $Ax+By+Cz=$

$=0$ тенглама ҳосил бўлиб, бу тенглама билан аниқланган текислик координаталар боши — O $(0, 0, 0)$ нуқтадан ўтади.

2°. $A \neq 0$, $B \neq 0$, $D \neq 0$, $C=0$. Бу ҳолда биз $Ax+By+D=0$ тенгламага эга бўламиз. Бу тенглама билан аниқланган текислик Oxy координаталар текислигида $Ax+By+D=0$ тўғри чизиқдан ўтувчи ва Oz ўқига параллел текисликдир.

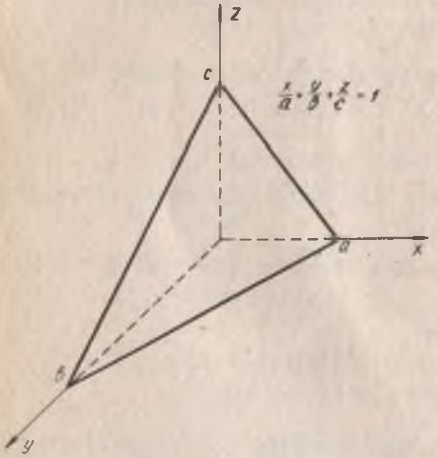
3°. $B=0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$ бўлган ҳолда $Ax+Cz+D=0$ текислик Oxz координата текислигида $Ax+Cz+D=0$ тўғри чизиқдан ўтиб, у Oy ўқига параллел бўлади.

4°. $A=0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$. Бу ҳолда (1) тенглама $By+Cz+D=0$ кўринишга келиб, у Oyz координаталар текислигида $By+Cz+D=0$ тўғри чизиқдан ўтувчи ҳамда Ox ўқига параллел текисликдир.

5°. $A=0$, $B=0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$ бўлсин. У ҳолда (1) тенглама $Cz+D=0$ кўринишга эга бўлиб, у Oxy координаталар текислигига параллел.

6°. $A=C=0$, $B \neq 0$, $D \neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда (1) тенглама $By+D=0$ кўринишга эга бўлиб, у Oxz текислигига параллел бўлади.

7°. $B=C=0$, $A \neq 0$, $D \neq 0$ бўлган ҳолда (1) тенглама $Ax+D=0$ кўринишга эга бўлиб, у Oyz текислигига параллел бўлади.



54- чизма

8°. $A=B=D=0$, $C \neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда (1) тенглама $Cz=0 \Rightarrow z=0$ кўринишга эга бўлиб, у Oxy текисликни ифодалайди.

9°. $A=C=D=0$, $B \neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда (1) тенглама $By=0 \Rightarrow y=0$ кўринишга эга бўлиб, у Oxz координата текислигини ифодалайди.

10°. $B=C=D=0$, $A \neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда (1) тенглама $Ax=0 \Rightarrow x=0$ кўринишга эга бўлиб, у Oyx координата текислигини ифодалайди.

11°. $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда (1) тенглама

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (2)$$

кўринишга келади. Бу ерда $a=-\frac{A}{D}$, $b=-\frac{B}{D}$, $c=-\frac{C}{D}$. (2) тенгламада $y=0$, $z=0$ десак $x=a$ эканлигини кўрамиз. Бу эса (2) текисликнинг Ox ўқини $x=a$ нуқтада кесиб ўтишини билдиради. Худди шунга ўхшаш $x=0$, $y=0$ ёки $x=0$, $z=0$ дейилса, қаралаётган текисликнинг мос равишда Oz ўқини $z=c$ нуқтада, Oy ўқини эса $y=b$ нуқтада кесишини аниқлайди (54- чизма).

тенглама *текисликнинг кесмалардаги тенгламаси* дейилади.

Фазода

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \qquad (3)$$

тенгламалар билан аниқланган T_1 ва T_2 текисликлар берилган бўлсин. Бу икки текислик параллел бўлиши учун

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \qquad (*)$$

шарт бажарилиши зарур ва етарли.

T_1 ва T_2 текисликлар ўзаро перпендикуляр бўлиши учун эса

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \qquad (**)$$

шарт бажарилиши зарур ва етарлидир.

Мисол. Ушбу $2x+y+Cz=0$ текислик C параметрнинг қандай қийматларида $4x+2y+z=0$ текисликка параллел ва перпендикуляр бўлишини аниқланг.

Берилган текисликлар учун $A_1=2$, $A_2=4$, $B_1=1$, $B_2=2$, $C_1=C$, $C_2=1$ эканлигини эътиборга олган ҳолда (*) формуладан фойдаланиб топамиз: $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=\frac{C}{1}\Rightarrow C=\frac{1}{2}$. Шундай килиб, $C=\frac{1}{2}$ бўлганда текисликлар параллел бўлади.

Энди бу текисликларнинг перпендикулярлик шартининг бажарилишини текширамиз. (* *) формулага кўра $2\cdot4+1\cdot2+C\cdot1=$ $=0$ бўлиб, бундан $C=-10$ келиб чикади. Демак, $C=-10$ бўлганда қаралаётган текисликлар перпендикуляр бўлар экан.

3- §. Фазода тўғри чизиқ ва унинг тенгламаси

Декарт координаталари системасида

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

тенгламалар билан аниқланган T_1 ва T_2 текисликлар берилган бўлсин. Қаралаётган бу текисликлар ўзаро параллел бўлмасин. Равшанки, бу ҳолда улар бирор тўғри чизиқ бўйича кесишади. Бу тўғри чизиқни ушбу

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad (3)$$

системанинг ечимлари тўпламидан иборат деб қараш мумкин. T_1 ва T_2 текисликлар ўзаро параллел бўлмагани учун $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ тенгликлар бир вақтда бажарилмайди. Фараз қилайлик $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$ бўлсин. Биз 6- бобдаги 4- § да (3) кўринишдаги тенгламалар системасини ечиш масаласи билан шуғулланган эдик. Маълумки, бу система чексиз кўп ечимга эга. Бу ечимларни топиш учун номаълумлардан бирини, масалан z нинг тайинланган z_0 кийматини оламиз. z_0 қатнашган ва озод ҳадларни тенгламанинг ўнг томонига ўтказиб (3) системани

$$\begin{cases} A_1x+B_1y=-D_1-C_1z_0, \\ A_2x+B_2y=-D_2-C_2z_0 \end{cases} \qquad (4)$$

кўринишда ифодалаймиз. $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}\left(\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\neq 0\right)$ муносабатни эътиборга олиб (4) системани x ва y га нисбатан ечамиз:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -D_1-C_1z_0 & B_1 \\ -D_2-C_2z_0 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} A_1 & -D_1-C_1z_0 \\ A_2 & -D_2-C_2z_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

z_0 га мос ечимларни x_0 ва y_0 орқали белгилайлик. Шундай килиб, (3) системанинг $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ ечимини топдик. Энди z_0 га турли қийматлар бериш орқали системанинг қолган чексиз кўп ечимларининг топилиши равшан. Демак, (3) система ечимлари орқали ифодаланадиган тўғри чизиқ нукталарини аниқлаш мумкин экан. Масала шу тўғри чизиқ тенгламасини топишдан иборат. Қаралаётган тўғри чизикда M (x_0, y_0, z_0) нукта билан бир қаторда ихтиёрий P (x, y, z) нуқта олайлик. У ҳолда бу нуқталарнинг координаталари T_1 ва T_2 текислик тенгламаларини қаноатлантиради:

$$\begin{cases} A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1=0, \\ A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

Бу системалардан қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0)+C_1(z-z_0)=0, \\ A_2(x-x_0)+B_2(y-y_0)+C_2(z-z_0)=0. \end{cases}$$

$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\neq 0$ бўлгани учун бу системани $(x-x_0)$ ва $(y-y_0)$ га нисбатан ечиб топамиз:

$$x-x_0=\frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}(z-z_0), \quad y-y_0=\frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}(z-z_0)$$

Бу тенгликлардан M (x_0, y_0, z_0) ва P (x, y, z) нуқталардан ўтувчи қуйидаги тўғри чизиқ тенгламасига эга бўламиз

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Бу ерда

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -D_1-C_1z_0 & B_1 \\ -D_2-C_2z_0 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -D_1-C_1z_0 \\ A_2 & -D_2-C_2z_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Ушбу

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = l, \quad \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = m, \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = n$$

белгилашлар ёрдамида охирги тенгликлар

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \tag{5}$$

кўринишига келади. Одатда (5) тенглама *тўғри чизиқнинг каноник тенгламаси* дейилади.

Агар (5) тенгламада

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} = t \quad (t \in R)$$

деб олсак

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Уни *тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаси* дейилади, бунда t — параметр.

Мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z - 11 = 0, \\ 2x + y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системаси билан аниқланган тўғри чизиқнинг каноник тенгламасини топинг.

Аввало тўғри чизиқнинг бирор A (x_0, y_0, z_0) нуқтасини топиб оламиз. Бунинг учун $z_0 = 1$ деб тайинлаб, берилган системадан $y_0 = 2$, $x_0 = 1$ эканлигини аниқлаймиз. Демак, тўғри чизиқдаги A нуқта $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 1$ координаталарга эга.

Энди

$$A_1 = 3, \quad B_1 = 2, \quad C_1 = 4;$$
$$A_2 = 2, \quad B_2 = 1, \quad C_2 = -3$$

сини ечиш масаласи билан шуғулланган эдик. Маълумки, бу система чексиз кўп ечимга эга. Бу ечимларни топиш учун номаълумлардан бирини, масалан z нинг тайинланган z_0 қийматини оламиз. z_0 қатнашган ва озод ҳадларни тенгламанинг ўнг томонига ўтказиб (3) системани

$$\begin{cases} A_1x+B_1y=-D_1-C_1z_0, \\ A_2x+B_2y=-D_2-C_2z_0 \end{cases} \tag{4}$$

кўринишда ифодалаймиз. $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}\left(\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\neq 0\right)$ муносабатни эътиборга олиб (4) системани x ва y га нисбатан ечамиз:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -D_1-C_1z_0 & B_1 \\ -D_2-C_2z_0 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} A_1 & -D_1-C_1z_0 \\ A_2 & -D_2-C_2z_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

z_0 га мос ечимларни x_0 ва y_0 орқали белгилайлик. Шундай қилиб, (3) системанинг (x_0, y_0, z_0) ечимини топдик. Энди z_0 га турли қийматлар бериш орқали системанинг қолган чексиз кўп ечимларининг топилиши равшан. Демак, (3) система ечимлари орқали ифодаланадиган тўғри чизиқ нуқталарини аниқлаш мумкин экан. Масала шу тўғри чизиқ тенгламасини топишдан иборат. Қаралаётган тўғри чизиқда M (x_0, y_0, z_0) нуқта билан бир қаторда ихтиёрий P (x, y, z) нуқта олайлик. У ҳолда бу нуқталарнинг координаталари T_1 ва T_2 текислик тенгламаларини қаноатлантиради:

$$\begin{cases} A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1=0, \\ A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

Бу системалардан қуйидаги системани ҳосил қиламиз

$$\begin{cases} A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0)+C_1(z-z_0)=0, \\ A_2(x-x_0)+B_2(y-y_0)+C_2(z-z_0)=0. \end{cases}$$

$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\neq 0$ бўлгани учун бу системани $(x-x_0)$ ва $(y-y_0)$ га нисбатан ечиб топамиз:

$$x-x_0=\frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}(z-z_0), \quad y-y_0=\frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}(z-z_0)$$

Бу тенгликлардан M (x_0, y_0, z_0) ва P (x, y, z) нуқталардан ўтувчи қуйидаги тўғри чизиқ тенгламасига эга бўламиз

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Бу ерда

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -D_1-C_1z_0 & B_1 \\ -D_2-C_2z_0 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -D_1-C_1z_0 \\ A_2 & -D_2-C_2z_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Ушбу

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = l, \quad \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = m, \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = n$$

белгилашлар ёрдамида охирги тенгликлар

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \qquad (5)$$

кўринишига келади. Одатда (5) тенглама *тўғри чизиқнинг каноник тенгламаси* дейилади.

Агар (5) тенгламада

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} = t \quad (t \in R)$$

деб олсак

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Уни *тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаси* дейилади, бунда t — параметр.

Мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 3x+2y+4z-11=0, \\ 2x+y-3z-1=0 \end{cases}$$

тенгламалар системаси билан аниқланган тўғри чизиқнинг каноник тенгламасини топинг.

Аввало тўғри чизиқнинг бирор A (x_0, y_0, z_0) нуқтасини топиб оламиз. Бунинг учун $z_0=1$ деб тайинлаб, берилган системадан $y_0=2$, $x_0=1$ эканлигини аниқлаймиз. Демак, тўғри чизиқдаги A нуқта $x_0=1$, $y_0=2$, $z_0=1$ координаталарга эга.

Энди

$$A_1=3, \quad B_1=2, \quad C_1=4;$$
$$A_2=2, \quad B_2=1, \quad C_2=-3$$

эканлигини эътиборга олиб

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

тенгликлардан изланаётган тўғри чизикнинг тенгламаси $\frac{x-1}{-10} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{-1}$ кўринишда бўлишини топамиз.

4- §. Фазода текислик ва тўғри чизиқларга оид масалалар

Биз бу параграфда фазодаги тўғри чизиқ ва текисликка оид баъзи бир масалаларни қараймиз. Бунда келтирилган тасдиқлардан айримларинигина исботлаймиз.

1°. Нуқтадан текисликкача масофани топиш. Фазода

$$Ax+By+Cz+D=0$$

тенглама билан берилган T текислик ва бу текисликда ётмаган P (x_0, y_0, z_0) нуқтани қарайлик. P нуқтадан T текисликка туширилган перпендикуляр узунлиги бу нуқтадан T текисликкача масофани билдиради. Бу масофа қуйидаги

$$\rho = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (6)$$

формула билан топилади ((6) формулани келтириб чиқариш мазкур китобнинг 12- бобида нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа формуласининг исботидаги каби мулоҳазалар ёрдамида амалга оширилади).

Мисол. Ушбу P (0, 0, 0) нуқтадан $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ текисликкача бўлган масофани ҳисобланг.

Берилган текислик тенгламасини $6x+4y+3z-12=0$ кўринишда ёзиб олиб, (6) формула ёрдамида топамиз:

$$\rho = \frac{|6\cdot0+4\cdot0+3\cdot0-12|}{\sqrt{36+16+9}} = \frac{12}{\sqrt{61}}.$$

Демак, берилган нуқтадан текисликкача бўлган масофа $\rho = \frac{12}{\sqrt{61}}$ бўлади.

2°. Уч нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси.

Биз 12- бобда икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини келтириб чиқардик ва ўргандик. Худди шунга ўхшаш фазода бир тўғри чизиққа тегишли бўлмаган

$$P_1\ (x_1,\ y_1,\ z_1),\ P_2\ (x_2,\ y_2,\ z_2),\ P_3\ (x_3,\ y_3,\ z_3)$$

нуқталардан ўтувчи текислик тенгламасини келтириб чиқариш мумкин. Бу тенглама

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \qquad (7)$$

кўринишда бўлади.

Мисол. Ушбу P_1 (0, 0, 1), P_2 (0, 2, 0), P_3 (3, 0, 0) нуқталардан ўтувчи текислик тенгламасини тузинг.

(7) формулага кўра изланаётган текислик

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 0-0 & 2-0 & 0-1 \\ 3-0 & 0-0 & 0-1 \end{vmatrix}=0$$

тенглама билан ифодаланади. Бу детерминантни ҳисоблаб топамиз:

$$2x+3y+6z=6.$$

3°. Фазода икки нуктадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси.

Фазода A (x_1, y_1, z_1) ва B (x_2, y_2, z_2) нуқталардан ўтувчи бирор тўғри чизиқ берилган бўлсин. Бу чизиқда ихтиёрий C (x, y, z) нуқта оламиз (55- чизма). A, B, C нуқталар бир тўғри чизиқда ётганлиги сабабли уларнинг Oxy текисликдаги проекциялари бўлган A', B', C' нуқталар ҳам бир тўғри чизиқда ётади. Бундан эса

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}=0 \text{ ёки } \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

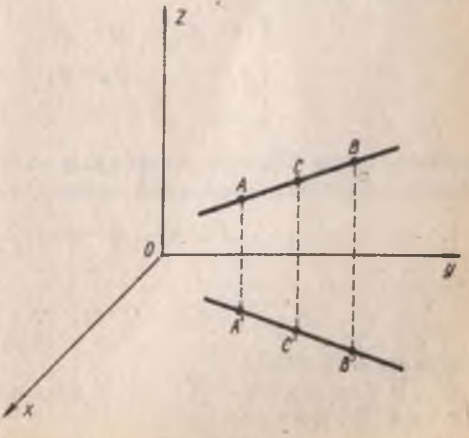
муносабатларга эга бўламиз. A, B, C нуқталарнинг Oyz, Oxz координата текисликларидаги проекциялари учун ҳам мос равишда

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}, \quad \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

тенгликлар ўринлидир. Ҳосил бўлган тенгликларнинг бир вақтда бажарилишини эътиборга олиб топамиз:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Бу фазода берилган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасидир.



55- чизма

4°. Тўғри чизиқ ва текисликнинг параллеллик ва перпендикулярлик аломатлари.

Бизга $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ тенгламалар билан аниқ-

15-БОБ

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ СИРТЛАР

Мазкур бобда иккинчи тартибли сиртлардан — сфера, эллипсоид, гиперболоид, конус, параболоид ва цилиндрни келтирамиз ва уларнинг хоссаларини ўрганамиз.

1- §. Сфера

Фазода Декарт координаталар системасини олайлик. Шу фазода бирор M (a, b, c) нуқта берилган бўлсин. M (a, b, c) нуқтадан бир хил r масофада жойлашган нуқталарнинг геометрик ўрни *сфера* дейилади. Бунда M нуқта сфера маркази, r эса сфера радиусидир.

Демак, сферадаги ихтиёрий P (x, y, z) нуқтадан унинг маркази M (a, b, c) гача бўлган масофа ҳамма вақт r га тенг. Фазода икки нуқта орасидаги масофа формуласига кўра

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r$$

бўлади. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини квадратга кўтариб топамиз:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2. \qquad (1)$$

Шундай қилиб, сферадаги ихтиёрий нуқтанинг x, y, z координаталарини боғловчи тенгламага келдик. Бу тенглама маркази (a, b, c) нуқта, радиуси r га тенг бўлган сфера тенгламасидир. Агар сфера маркази координата бошида, яъни $a=b=c=0$ бўлса, у холда унинг тенгламаси

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \qquad (2)$$

кўринишга эга бўлади.

2- §. Эллипсоид

Биз мазкур китобнинг 13-бобида иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг каноник тенгламалари ва уларнинг содда хоссаларини ўргандик. Жумладан маркази координата бошида, радиуси r га тенг бўлган айланани O_y ўқи бўйлаб сиқиш натижасида эллипс ва унинг тенгламасини ҳосил қилиш мумкинлигини кўрдик. Ушбу параграфда биз шу усул билан эллипсоид тушунчасини киритиш ва унинг тенгламасини келтириб чиқариш билан шуғулланамиз.

Сферани ўзаро перпендикуляр учта йўналиш бўйича текис деформациялаш (чўзиш ёки сиқиш) натижасида ҳосил бўлган сирт *эллипсоид* дейилади.

Бизга ушбу

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \tag{3}$$

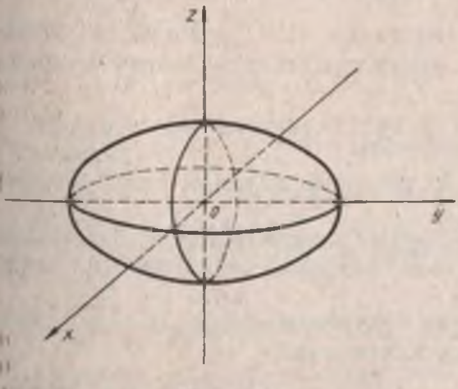
тенглама билан аниқланган сфера берилган бўлсин. Фараз қилайлик юқорида қайд этилган деформация Ox, Oy, Oz ўқлари бўйлаб мос равишда k_1, k_2, k_3 ($k_i>0$, $i=1, 2, 3$) коэффициентларга эга бўлсин (Ox, Oy, Oz ўқлари бўйлаб мос равишда k_1, k_2, k_3 марта чўзиш ёки сиқиш амалга оширилсин). Бу деформация натижасида эллипсоид ҳосил бўлиб, сферанинг M (x, y,z) нуқтаси эллипсоиддаги M' (x, y, z) нуқтага ўтади. Агар нуқтанинг деформациялашдан кейинги янги координаталарини (X,Y,Z) билан белгиласак, $X=k_1x$, $Y=k_2y$, $Z=k_3z$ ифодаларга эга бўламиз. Бу тенгликлардан $x=\frac{X}{k_1}$, $y=\frac{Y}{k_2}$, $z=\frac{Z}{k_3}$ бўлиб, уларни (3) тенгламага қўйсак,

$$\frac{X^2}{k_1^2}+\frac{Y^2}{k_2^2}+\frac{Z^2}{k_3^2}=r^2$$

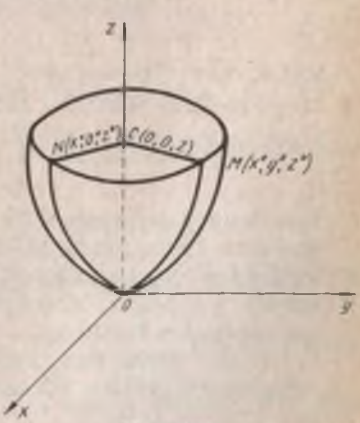
тенгламага эга бўламиз. Агар $a=k_1r$, $b=k_2r$, $c=k_3r$ белгилашлар киритсак, ушбу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{4}$$

тенглама ҳосил бўлади. (4) тенглама *эллипсоиднинг каноник тенгламаси* дейилади. a, b, c сонлар эллипсоиднинг *ярим ўқлари* деб аталади (56- чизма).



56- чизма



57- чизма

Эллипсоиднинг хоссалари

Фараз қилайлик Декарт координаталари системасида $\frac{x^2}{a^2}+$

$+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ тенглама билан аниқланган эллипсоид берилган бўлсин.

1°. Эллипсоид координата ўқларига нисбатан симметрикдир.

2°. Эллипсоид координата ўқларини: O_x ўқини $(a, 0, 0)$, $(-a, 0, 0)$ нукталарда, O_y ўқини $(0, b, 0)$, $(0, -b, 0)$ нукталарда, O_z ўқини эса $(0, 0, c)$, $(0, 0, -c)$ нукталарни кесади.

3°. Эллипсоиднинг $\{z=h\}$ текислик билан кесишмаси эллипс бўлиб, унинг тенгламаси $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}$ кўринишга эга бўлади.

3- §. Параболоид

O_{xz} текисликда ушбу

$$x^2=2pz, \quad y=0 \tag{5}$$

тенглама билан берилган параболани қарайлик. Бу параболани O_z ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт *параболоид* (айланма параболоид) дейилади.

Энди параболоид тенгламасини келтириб чиқариш билан шуғулланамиз Параболоидда ихтиёрий $M(x_0, y_0, z_0)$ нукта олиб, бу нуктадан O_z ўққа перпендикуляр $z=z_0$ текислик ўтказамиз. Бу текислик (5) тенглама билан берилган параболоидни $N(x^0, 0^0, z^0)$ нуктада кесади (57- чизма).

M ва N нукталарнинг бир горизонтал текисликда ётганини эътиборга олсак $CN=CM$ эканлигини, яъни уларнинг битта айлана радиуси бўлишини топамиз. Демак,

$$\bar{x}_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2} \tag{6}$$

муносабат ўринлидир. Бу тенгликни (5) тенгламага қўйсак, $x_0^2+y_0^2=2pz_0$ бўлади. Демак, параболоиддаги ихтиёрий нуктанинг координаталарини боғловчи

$$x^2+y^2=2pz \tag{7}$$

тенгламага келамиз. Одатда (7) тенглама *айланма параболоиднинг каноник тенгламаси* дейилади.

Биз юқорида баъзи бир геометрик шаклларнинг хусусиятларига қараб уларнинг тенгламаларини келтириб чиқардик ва асосий хоссаларини ўргандик.

Энди геометрик шаклларни уларнинг тенгламалари орқали таърифлаб, айрим хоссаларини келтирамиз.

Ушбу $2z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ тенглама билан аниқланган сирт *эллиптик параболоид* дейилади.

Гиперболик параболоид деб, $2z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ тенглама билан аниқланган сиртга айтилади.

Параболоиднинг хоссалари

1°. Ушбу $x^2+y^2=2pz$ тенглама билан берилган айланма параболоид O_z ўқига нисбатан симметрикдир.

2°. $2z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ тенглама билан берилган эллиптик параболоидни $\{z=h>0\}$ текислик билан кесиш натижасида ушбу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2h$$

эллипс ҳосил бўлади.

3°. $2z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ тенглама билан берилган гиперболик параболоидни $\{z=h\}$ текислик ёрдамида кесилса, кесимда $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2\,h$ гипербола ҳосил бўлади.

4- §. Гиперболоидлар

Ушбу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

тенглама билан аниқланган сирт *бир паллали гиперболоид* дейилади. Бу ерда a, b, c гиперболоиднинг ярим ўқларидир.

Ушбу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

тенглама билан аниқланган сирт *икки паллали гиперболоид* деб аталади.

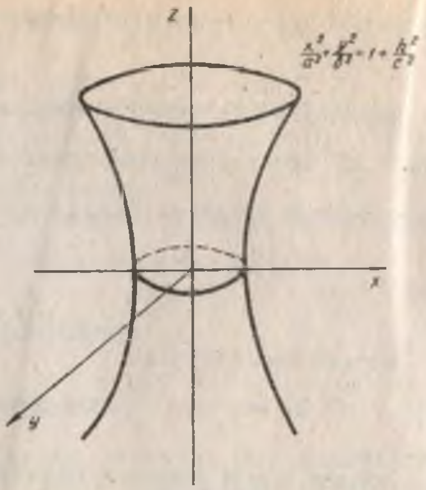
Гиперболоиднинг хоссалари

1°. Ушбу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ тенглама билан берилган бир паллали гиперболоидни $z=h$ текислиги $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}+1$ эллипс бўйлаб кесади. Жумладан, $h=0$ га энг кичик эллипс мос келиб, $|h|$ ўсиши билан унга мос эллипс ҳам катталашиб боради (58- чизма).

2°. Ушбу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ гиперболани O_{xz} текисликда O_z ўқи атрофида айлантиришдан $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ гиперболоид ҳосил бўлади.

3°. Ушбу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} = 1$ тенглама билан берилган бир паллали гиперболоидни $y=|h| \neq \neq b$ текислик билан кесиш натижасида гипербола ҳосил бўлади.

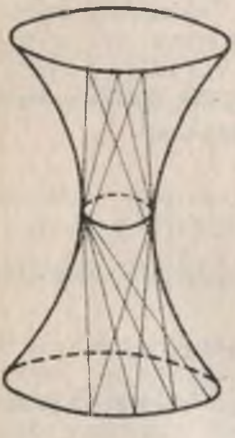
$y=|h|=b$ бўлган ҳолда кесимда $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0$ ва $\frac{x}{a}-\frac{z}{c} = 0$ тўғри чизиқлар ҳосил бўлади. Худди шунга ўхшаш $|h|=a$ бўлса, кесимда $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$, $\frac{y}{b}-\frac{z}{c} = 0$ тўғри чизиқлар ҳосил бўлади.



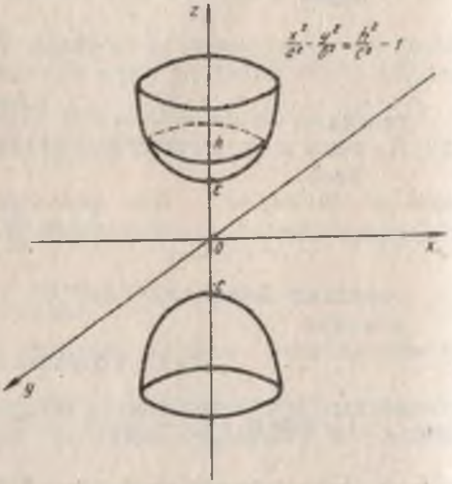
58- чизма

4°. Бир паллали гиперболоиднинг ҳар бир нуқтасидан иккита тўғри чизиқ ўтади.

Одатда бу тўғри чизиқлар гиперболоиднинг *ясовчилари* дейилади (59- чизма).



59- чизма



60- чизма

5°. Икки паллали гиперболоидни $z=h$ текислик билан кесиш натижасида кесимда

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1$$

эллипс ҳосил бўлади (60- чизма). Агар $|h|<c$ бўлса, каралаётган сирт $\{z=h\}$ текислик билан кесишмайди.

5- §. Конус

Ушбу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

тенглама билан аниқланган сирт *конус* деб аталади.

Хоссалари

1°. Агар $P\ (x_0,\ y_0,\ z_0)$ нуқта конусга тегишли бўлса, у ҳолда шу нуқтадан ўтувчи

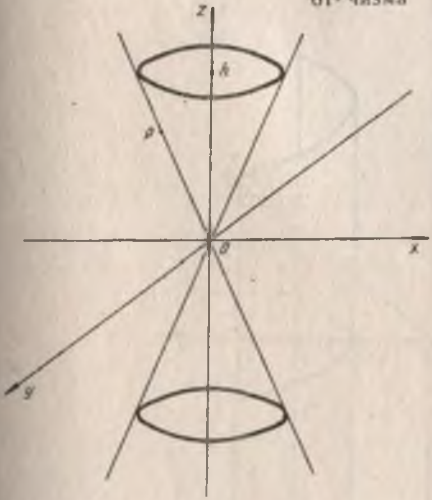
$$x=x_0t,\ y=y_0t,\ z=z_0t,\ (t\in R)$$

тўғри чизиқ ҳам конусга тегишли бўлади (61- чизма).

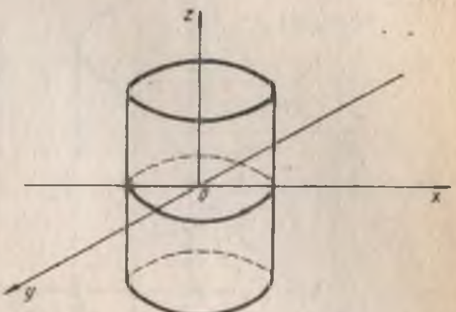
Одатда бу чизиқлар конус *ясовчилари* дейилади.

2°. Агар конусни $z=h$ текислик билан кессак, кесимда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}$ эллипс ҳосил бўлади.

61- чизма



62- чизма



3°. Конусни $\{x=h\}$ ёки $\{y=h\}$ текисликлар билан кесиш ёрдамида кесимда гиперболалар ҳосил бўлади.

6- §. Иккинчи тартибли сиртларнинг умумий тенгламаси

Биз аввалги параграфларда иккинчи тартибли сиртларнинг каноник тенгламалари ва хоссаларини ўргандик. Агар бу тенгламаларга эътибор берсак, уларнинг

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxz+2Eyz+2Fxy+px+qy+rz+\varepsilon=0 \qquad (8)$$

кўринишдаги тенгламанинг хусусий ҳоллари эканлигини кўрамиз. (8) тенглама *иккинчи тартибли сиртларнинг умумий тенгламаси* дейилади.

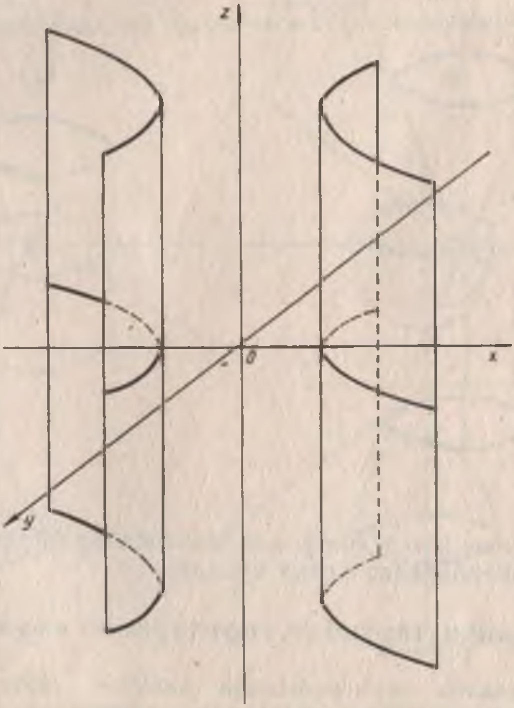
Агар (8) тенгламанинг чап томони $F(x, y, z)$ оркали белгиланса, у ҳолда уни

$$F(x, y, z)=0 \qquad (9)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Демак, умуман айтганда иккинчи тартибли сиртлар $F(x, y, z)=0$ иккинчи даражали алгебраик тенглама билан аникланади. Худди текисликдаги каби, бу ерда ҳам (8) тенгламани каноник кўринишга келтириш масаласини ҳал этиш мумкин.

Агар 2-тартибли сирт тенгламаси $F(x, y, z)=0$ да ўзгарувчилардан бирортаси иштирок этмаса, бундай сирт цилиндрик сиртни ифодалайди. Масалан, цилиндрик сирт $F(x, y)=0$ тенглама билан берилган бўлсин. Уни геометрик тасвирлаш учун $F(x, y)=0$ чизик графиги чизилиб, унинг ҳар бир нуктасида O_z ўкига перпендикуляр чизик ўтказилади. $F(x, y)=0$ тенглама кўринишига караб иккинчи тартибли цилиндрлар куйидаги турларга бўлинади:



63- чизма

1°. Ушбу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

тенглама билан аниқланган сирт *эллиптик цилиндр* дейилади (62- чизма).

2°. Ушбу

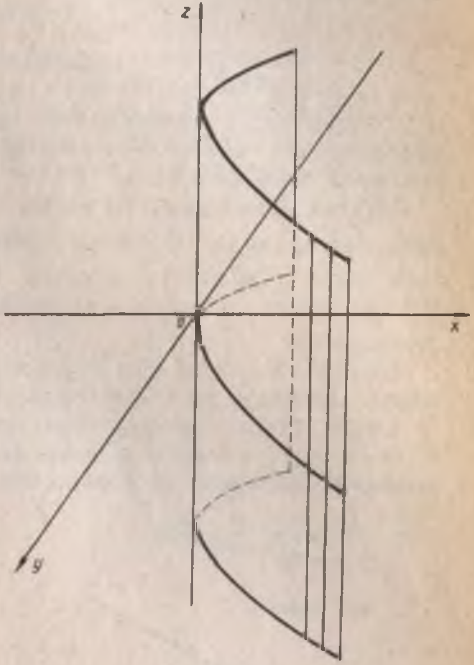
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

тенглама билан аниқланган сирт *гиперболик цилиндр* дейилади (63- чизма).

3°. Ушбу

$$y^2 = 2px$$

тенглама билан ифодаланган сирт эса *параболик цилиндр* дейилади (64- чизма).



64- чизма

16- БОБ

ВЕКТОРЛАР

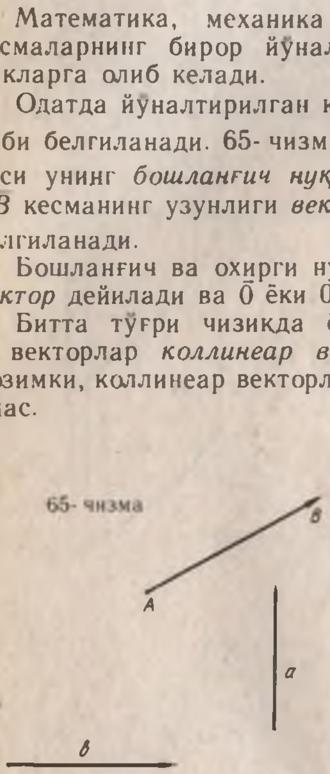
Математика, механика ва физиканинг катор бўлимларида кесмаларнинг бирор йўналишини тайинлаб қараш анча қулайликларга олиб келади.

Одатда йўналтирилган кесма *вектор* дейилади ва $\overline{AB}$ ёки $\bar{a}$, $\bar{b}$ каби белгиланади. 65- чизма йўналтирилган $\overline{AB}$ кесманинг A нуктаси унинг *бошланғич нуқтаси*, B эса *охирги нуқтаси* дейилади. $\overline{AB}$ кесманинг узунлиги ***векторнинг узунлиги*** дейилиб, $|\overline{AB}|$ каби белгиланади.

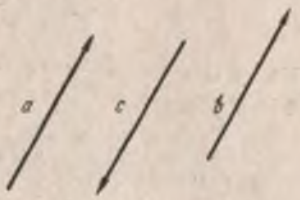
Бошланғич ва охирги нукталари устма-уст тушган вектор ***ноль вектор*** дейилади ва $\bar{0}$ ёки 0 каби белгиланади.

Битта тўғри чизикда ёки параллел чизикларда ётган $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторлар ***коллинеар векторлар*** дейилади. Шуни таъкидлаш лозимки, коллинеар векторлар бир хил йўналишга эга бўлиши шарт эмас.

65- чизма



66- чизма



Бир хил йўналишга эга бўлиб, узунликлари тенг бўлган иккита коллинеар $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторлар *тенг векторлар* дейилади ва $\bar{a}=\bar{b}$ каби белгиланади.

66- чизмада $a=b$, $a\neq c$, $c\neq b$ эканини кўриш кийин эмас.

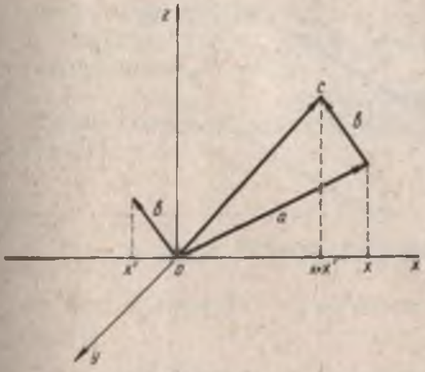
Ушбу бобда фазода векторлар ва уларнинг хоссалари ўрганилади. Аслида текисликда ҳам вектор тушунчаси киритилиб, уларнинг хоссаларини ўрганиш мумкин. Қуйида келтириладиган барча тасдиқлар текисликда ҳам ўринлидир.

1- §. Векторлар фазоси.
Векторлар устида арифметик амаллар

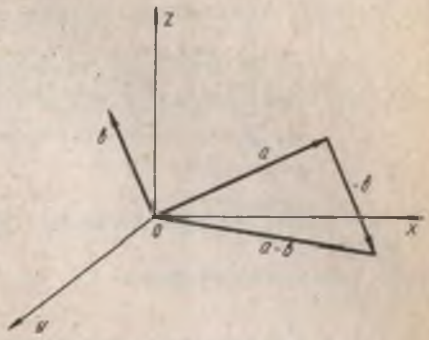
Агар a векторнинг бошланғич нуқтаси координаталар боши билан устма-уст тушган бўлса, унинг охирги нуқтаси фазода бирор M нуқтани аниқлайди. Ва аксинча, фазодаги ҳар қандай M нуқтага $\overline{OM}$ вектор мос келади. Демак, бундай векторлар тўплами билан уч ўлчовли фазодаги $M\ (x,\ y,\ z)$ нуқталар ўртасида ўзаро бир қийматли мослик ўринли бўлиб, бу уч ўлчовли R^3 фазога *векторлар фазоси* ҳам дейилади. Шундай қилиб, $\boldsymbol{a}$ вектор ўзининг координаталари $(x,\ y,\ z)$ билан аниқланади ва $\boldsymbol{a}=(x,\ y,\ z)$ каби белгиланади.

Векторлар фазосида $\boldsymbol{a}=(x,\ y,\ z)$, $\boldsymbol{b}=(x',\ y',\ z')$ векторлар ва α скаляр сон берилган бўлсин. Қуйидаги $(x+x',\ y+y',\ z+z')$ вектор $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторларнинг *йиғиндиси* дейилади ва $a+b$ каби белгиланади. Демак,

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x+x',\ y+y',\ z+z').$$



67- чизма



68- чизма

$\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторларнинг *айирмаси* деб, $(x-x',\ y-y',\ z-z')$ векторга айтилади ва $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ каби белгиланади. Демак

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x-x',\ y-y',\ z-z').$$

a векторнинг α сонга кўпайтмаси ушбу $(\alpha x,\ \alpha y,\ \alpha z)$ вектор билан аниқланади, яъни

$$\alpha\cdot a=(\alpha x,\ \alpha y,\ \alpha z).$$

Векторлар устида киритилган амалларга нисбатан қуйидаги хоссалар ўринли:

1°. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=b+a$ (коммутативлик хоссаси).

2°. $\boldsymbol{a}+(b+c)=(a+b)+c$ (ассоциативлик хоссаси).

3°. $\boldsymbol{a}+0=\boldsymbol{a}$.

4°. Ҳар қандай $\boldsymbol{a}$ вектор учун шундай $\boldsymbol{b}$ вектор мавжуд бўлиб, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=0$ бўлади.

b вектор a га *тескари вектор* дейилади ва $-a$ каби белгиланади.

5°. $\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b$,

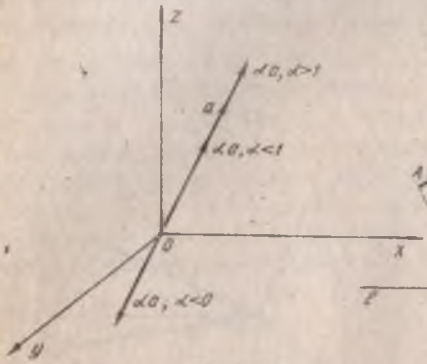
$(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$ (дистрибутивлик хоссаси).

6°. $\alpha(\beta\cdot a)=\alpha\beta a$.

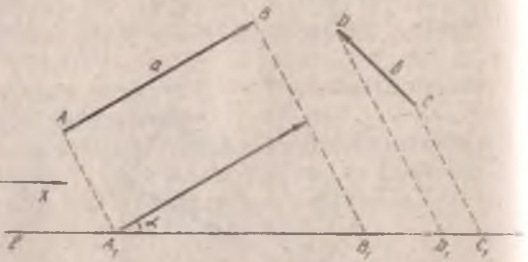
Бу хоссаларнинг исботи бевосита таърифдан келиб чиқади. Энди векторлар йиғиндиси, айирмаси ва α сонга кўпайтмасининг геометрик маъносини қарайлик. Бизга $\mathbf{a}=(x, y, z)$ ва $\mathbf{b}=(x', y', z')$ векторлар берилган бўлсин.

$\mathbf{a}$ векторнинг охирги нуқтасига $\mathbf{b}$ векторнинг бошланғич нуқтасини параллел кўчириб қўйайлик. Унда $\mathbf{b}$ векторнинг охирги нуқтаси бирор C нуқтани аниқлайди. (67- чизма). Ҳосил бўлган $\overline{OC}$ вектор a ва b нинг йиғиндисини ифодалайди, яъни $OC=(x+x', y+y', z+z')$.

$a-b$ векторни геометрик тасвирлаш учун $a-b=a+(-b)$ тенгликдан фойдаланамиз (68- чизма).



69- чизма



70- чизма

$\alpha\cdot a$ векторни тасвирлаш учун $\alpha>0$ ва $\alpha<0$ бўлган ҳолларни алоҳида қараймиз.

$\alpha>0$ бўлганда $\alpha\cdot a$ векторнинг йўналиши a вектор йўналиши билан бир хил бўлиб, унинг узунлиги $|\alpha a|=\alpha|a|$ га тенгдир.

Агар $\alpha>1$ бўлса, a вектор α марта чўзилади, $\alpha<1$ бўлса, α марта қисқаради. Агар $\alpha<0$ бўлса, αa нинг узунлиги $|\alpha a|=|\alpha|\cdot|a|$ бўлиб, унинг йўналиши a га тескари бўлади (69- чизма).

2- §. Векторнинг проекцияси, йўналтирувчи косинуслар

Фазода $a=\overline{AB}$ вектор ва йўналтирилган l тўғри чизиқ берилган бўлсин (70- чизма).

a векторнинг бошланғич нуқтаси ва охирги нуқтасидан l га перпендикуляр туширамиз. Бу перпердикулярнинг l чизиқдан ажратган кесмасини A_1B_1 орқали белгилайлик. A_1B_1 кесманинг узунлиги a векторнинг l чизиқдаги проекцияси дейилади ва

$$\text{пр}_l\, a = \text{пр}_l\, \overline{AB}$$

каби белгиланади. Агар A_1B_1 векторнинг йўналиши l нинг йўналиши билан бир хил бўлса, $\text{пр}_l\overline{AB}$ A_1B_1 нинг узунлигига тенг: $\text{пр}_l\overline{AB}=|A_1B_1|$ акс ҳолда эса $\text{пр}_l\overline{AB}=-|A_1B_1|$ бўлади. Масалан, 70- чизмада пр a мусбат ишорали, пр b эса манфий ишорали бўлади. Равшанки, a векторнинг l ўққа проекцияси скаляр миқдор бўлиб, бу миқдор a нинг R^3 фазодаги ҳолатига боғлиқ эмас. Агар a векторнинг бошланғич нуқтаси l тўғри чизиқ устига кўчирилса, a вектор билан l тўғри чизиқ орасида α бурчак ҳосил бўлиб, бу α бурчак a векторнинг l тўғри чизиққа нисбатан *оғиш бурчаги* дейилади.

a векторнинг оғиш бурчаги ва l ўққа проекцияси орасидаги қуйидаги муносабатнинг ўринлилигини кўриш қийин эмас:

$$\text{пр}_l a=|a|\cos\alpha . \qquad (1)$$

Агар α, β, γ лар мос равишда $a=(x, y, z)$ векторнинг O_x, O_y, O_z ўқларга нисбатан оғиш бурчаклари бўлса, у ҳолда

$$x=|a|\cos\alpha,\ y=|a|\cos\beta,\ z=|a|\cos\gamma$$

тенгликлар ўринлидир.

Одатда, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ лар a векторнинг *йўналтирувчи косинуслари* дейилади.

$l=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ векторнинг узунлиги бирга тенг бўлиб (бирлик вектор), унинг йўналиши a нинг йўналиши билан устма-уст тушади.

3- §. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси

Бизга $\boldsymbol{a}=(x, y, z)$ ва $\boldsymbol{b}=(x', y', z')$ векторлар берилган бўлсин. Ушбу

$$xx'+yy'+zz'$$

сон a ва b векторларнинг *скаляр кўпайтмаси* дейилади ва ab ёки (a, b) каби белгиланади. Демак,

$$ab=xx'+yy'+zz'.$$

Мисол. Ушбу $a=(0, 1, 2)$, $b=(3, 0, 5)$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг.

Юқоридаги $xx'+yy'+zz'=ab$ формулага биноан $ab=0\cdot3+1\times\times0+2\cdot5=10$ бўлади. Демак, $ab=10$.

Скаляр кўпайтманинг хоссалари

1°. $ab=ba$.
2°. $\alpha(ab)=(\alpha a)b$.
3°. $a(b+c)=ab+ac$.
4°. $ab=|a|\text{пр}_a b$.

1° — 3°- хоссаларнинг исботи бевосита таърифдан келиб чиқади.

4°- хоссани исботлаш учун b векторни учта вектор йиғиндиси кўринишида ифодалаймиз: $b=(x', y', z')=(x', 0, 0)+(0, y', 0)+(0, 0, z')=b_1+b_2+b_3$. Унда $\text{пр}_a b=\text{пр}_a b_1+\text{пр}_a b_2+\text{пр}_a b_3$ $(|a|\text{пр}_a b=|a|\text{пр}_a b_1+|a|\text{пр}_a b_2+|a|\text{пр}_a b_3)$ бўлиб,

$$\text{пр}_a b_1=x'\cos\alpha\ ,$$
$$\text{пр}_a b_2=y'\cos\beta\ ,$$
$$\text{пр}_a b_3=z'\cos\gamma$$

тенгликларга эга бўламиз. Бу ерда $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ лар a векторнинг йўналтирувчи косинусларидир. Энди

$$x=|a|\cos\alpha,\ y=|a|\cos\beta,\ z=|a|\cos\gamma$$

тенгликларни эътиборга олиб топамиз:

$$|a|\text{пр}_a b=xx'+yy'+zz'=ab.$$

5°. $ab=|a|\cdot|b|=\cos a^{\wedge}b$.

Бу тенгликни исботлаш учун 4° — хоссадан фойдаланамиз: ab $b=|a|\text{пр}_a b$. (1) формулага кўра $\text{пр}_a b=|b|\cos\alpha$ бўлиб, бундан эса $ab=|a|\cdot|b|\cos ab$ эканлиги келиб чиқади.

6°. $a\cdot a=|a|^2$.

7°. a вектор b векторга перпендикуляр бўлиши учун $ab=0$ тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

4- §. Векторларнинг вектор ва аралаш кўпайтмалари

Бизга $a=(x, y, z)$ ва $b=(x', y', z')$ векторлар берилган бўлсин. Ушбу

$$\left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}\right)$$

вектор a ва b нинг *вектор кўпайтмаси* дейилади ва $[ab]$ каби белгиланади. Демак,

$$[ab]=\left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}\right)=$$
$$=(yz'-zy',\ zx'-xz',\ xy'-yx').$$

Вектор кўпайтманинг хоссалари.

1°. $[ab]=-[ba]$

2°. $[(\lambda a)b]=\lambda[ab]$, $[a(\lambda b)]=\lambda[ab]$, $\lambda\in R$

3°. $[a(b+c)]=[ab]+[ac]$,

$[(a+b)c]=[ac]+[bc]$.

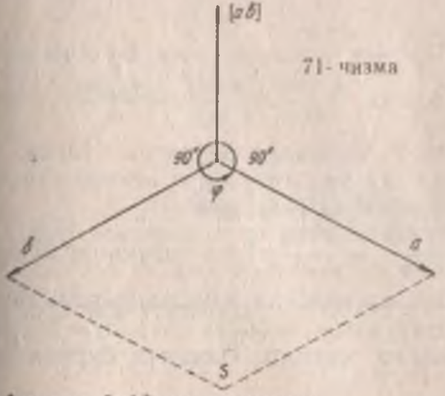
Бу хоссаларнинг исботи вектор кўпайтма таърифидан бевосита келиб чиқади.

$[ab]=0$ бўлиши учун a ва b нинг коллинеар бўлиши зарур ва етарлидир.

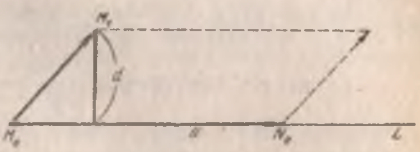
a ва b векторлар берилган бўлсин. a ва b нинг вектор кўпайтмаси $[ab]$ нинг қиймати 71- чизмада тасвирланган параллелограмм юзи $S=|a||b|\sin\varphi$ га тенг.

Бизга учта a, b ва c векторлар берилган бўлсин. Ушбу $[ab]c$ ифода a, b, c векторларнинг *аралаш кўпайтмаси* дейилади ва abc каби белгиланади.

Мисол. Ушбу $a=(1, 3, 0)$, $b=(2, 0, 1)$, $c=(0, 1, 2)$ векторларнинг аралаш кўпайтмаларини топинг.



71- чизма



72- чизма

Аввало $[ab]$ ни топамиз:

$$[ab]=(3\cdot1-0\cdot0,\ 0\cdot2-1\cdot1,\ 1\cdot0-3\cdot2)=(3,\ -1,\ -6).$$

$$abc=(3,\ -1,\ -6)\,(0,\ 1,\ 2)=3\cdot0-1\cdot1-6\cdot2=-13.$$

5- §. Векторлар назариясининг баъзи татбиқлари

Биз мазкур бобнинг бошланишида векторларнинг қатор масалаларни ҳал этишда анча қулайликларга олиб келишини таъкидлаган эдик. Мазкур параграфда ана шу масалалардан баъзи бирларини келтирамиз.

1. Фазода нуқтадан тўғри чизиққача масофани топиш.

Бизга ушбу $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ тенгликлар билан берилган L тўғри чизиқ ва $M(x_1,\ y_1,\ z_1)$ нуқта берилган бўлсин. M нуқтадан L тўғри чизиққача бўлган масофа $\rho(M,\ L)$ ни топиш масаласини қарайлик.

Агар $\bar{a}=(l,\ m,\ n)$ векторнинг бошланғич нуқтасини L да ётувчи бирор M_0 нуқтага қўйсак, унинг N_0 учи L да ётади. Бундан кўринадики, изланаётган $\rho(M,\ L)$ масофа $\bar{a}=(l,\ m,\ n)$ ва $\overline{M_0M}=(x_1-x_0,\ y_1-y_0,\ z_1-z_0)$ векторлар орқали қурилган параллелограмм баландлигидан (72- чизма) иборатдир.

a ва MM_0 векторларнинг вектор кўпайтмасини карайлик.

Маълумки, $\left|\overline{[a\,MM_0]}\right|$ микдор чизмада тасвирланган параллелограмм юзига тенг. Иккинчи томондан параллелограммнинг юзи асос узунлиги $|a|$ ва баландлиги ρ нинг кўпайтмасига тенглигини эътиборга олсак, $|\bar{a}|\cdot\rho=\left|\left[(\bar{a}\cdot\overline{MM_0}\right]\right|$ муносабат ўринли бўлади. Бундан эса

$$\rho=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1-z_0 & x_1-x_0 \\ n & l \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ l & m \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

формула келиб чикади.

2. Фазода икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак.

Бизга $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ ҳамда $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ тенгликлар билан ифодаланган L_1 ва L_2 чизиқлар берилган бўлсин.

Берилган L чизиққа параллел ёки унда ётувчи a вектор ($|a|\neq\neq 0$) L чизиқнинг *йўналтирувчи вектори* дейилади.

(l, m, n) вектор L: $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ тўғри чизиқнинг йўналтирувчи векторидир. L_1 ва L_2 чизиқлар орасидаги бурчаклардан бири бўлган φ бу чизиқларнинг йўналтирувчи $a_1=(l_1, m_1, n_1)$, $a_2=(l_2, m_2, n_2)$ векторлари орасидаги бурчакка тенгдир. Иккинчи бурчак эса $180°-\varphi$ га тенглиги равшан.

Скаляр кўпайтманинг 5°- хоссасидан фойдаланиб топамиз:

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\,\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

Бу формула фазода икки тўғри чизиқ орасидаги бурчакни топиш формуласидир.

3. Фазода нуқтадан текисликкача бўлган масофа.

Фараз қилайлик, фазода $M\ (x_1, y_1, z_1)$ нуқта ва T: $Ax+By+Cz+D=0$ текислик берилган бўлсин (73- чизма).

Аввало координаталар боши O нуқтадан текисликкача бўлган масофани топайлик. Бунинг учун O нуқтадан T текисликка перпендикуляр p векторни қараймиз. p векторнинг T текислик билан кесишган нуқтаси координаталарини (x_2, y_2, z_2) орқали белгилаймиз.

Равшанки, $\bar{p}=p\cdot\bar{n}_0$, бунда n_0 бирлик вектор. $(x_2, y_2, z_2)\in T$ эканлигини эътиборга олиб топамиз:

$$Ax_2+By_2+Cz_2+D=0. \Rightarrow$$
$$Ax+By+Cz+D=0.$$
$$A(x-x_2)+B(y-y_2)+C(z-z_2)=0. \qquad (1)$$

(1) тенглама $\bar{a}=(A, B, C)$, $\bar{b}=(x-x_2, y-y_2, z-z_2)$ векторлар орқали

$$\bar{a}\bar{b}=0 \qquad (2)$$

скаляр кўпайтма шаклида ёзилиши равшандир.

Ихтиёрий $L\ (x,\ y,\ z) \in T$ учун $\bar{b}$ векторнинг бошланғич нуқтаси N да, охирги нуқтаси L да бўлишини эътиборга олсак, (2) ифодадан $a \perp T$ эканлиги келиб чиқади.

Демак, $\bar{a}$ ва $\bar{n}$ векторлар коллинеар бўлиб, $\bar{n} = \lambda\bar{a}$ тенглик ўринлидир. $\overline{ON}$ вектор ҳам $\bar{n}$ га коллинеар бўлганлигидан $\overline{O\ N} = \mu\bar{a}$ тенглик ўринли бўлади.

Энди N нуқта T текисликда ётишини эътиборга олиб топамиз

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0,$$
$$A \cdot \mu A + B \cdot \mu\ B + C \cdot \mu\ C + D = 0.$$

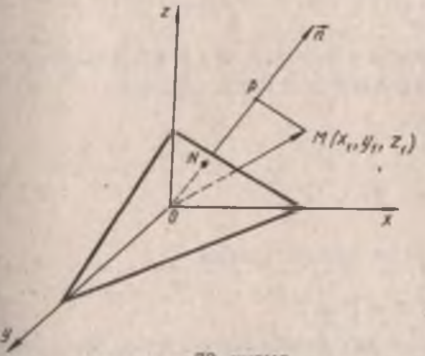
Охирги тенгламадан:

$$\mu = -\frac{D}{A^2+B^2+C^2} = \frac{D}{|a|^2}.$$

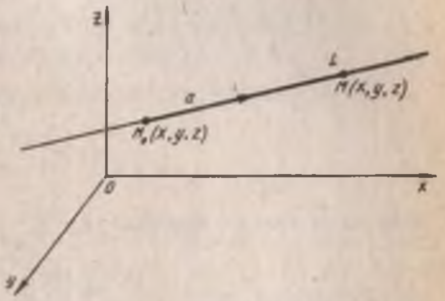
Демак,

$$|\overline{ON} = |\mu||\bar{a}| = \frac{|D|}{|a|}.$$

μ нуқтадан T текисликкача бўлган ρ масофани топиш учун $\overline{OM}$ векторни $\bar{n}$ га проекциясини қараймиз. Равшанки, $\overline{NP} = \overline{OP} - \overline{ON}$ бўлиб, $\text{пр}_{\bar{n}}\overline{NP} = \text{пр}_{\bar{n}}\overline{OM} - \text{пр}_{\bar{n}}\overline{ON}$ тенглик ўринлидир.



73- чизма



74- чизма

$$\text{пр}_{\bar{n}}\overline{OM} = \frac{\bar{n}\ \overline{OM}}{|n|} = \frac{\lambda(\bar{a},\ OM)}{|\lambda||\bar{a}|} = \text{sign}\ \lambda\frac{Ax_1+By_1+Cz_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

$$\text{пр}_{\bar{n}}\overline{ON} = \frac{\bar{n}\cdot\overline{ON}}{|\bar{n}|} = \text{sign}\ \lambda\cdot\frac{\frac{D}{|\bar{a}|^2}\cdot(\bar{a}, \bar{a})}{|a|} =$$
$$= -\ \text{sign}\ \lambda\frac{D}{|a|} = -\ \text{sign}\ \lambda\cdot\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Шундай қилиб,

$$\rho = \text{пр}_n\overline{NP} = \frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{3}$$

формула ҳосил бўлди.

4. Икки текисликнинг параллеллик ва перпендикулярлик аломатлари.

Фазода иккита

$$T_1\colon A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$T_2\colon A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

текисликлар берилган бўлсин. Биз юқорида $\bar{a}_1=(A_1, B_1, C_1)$ ва $\bar{a}_2=(A_2, B_2, C_2)$ векторларнинг T_1 ва T_2 текисликларга перпендикуляр эканлигини кўрдик. Бундан $\bar{a}_1$ ва $\bar{a}_2$ векторларнинг перпендикулярлик ва параллеллик аломатлари T_1 ва T_2 текисликларнинг ҳам мос равишда параллеллик ва перпендикулярлик аломатлари бўлишини кўрамиз. Демак, T_1 ва T_2 текисликлар параллел бўлиши учун $[\bar{a}_1, \bar{a}_2]=0$ шартнинг, перпендикуляр бўлиши учун эса $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)=0$ шартнинг бажарилиши зарур ва етарлидир. Бу шартлар $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=0$ ҳамда $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ кўринишда ифодаланиши равшандир.

5. Тўғри чизиқ ва текисликнинг параллеллик ва перпендикулярлик аломатлари.

Фараз қилайлик, фазода ушбу

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \tag{4}$$

тенглама билан аниқланган L тўғри чизиқ ҳамда

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{5}$$

тенглама билан ифодаланган T текислик берилган бўлсин. Маълумки, (5) тенглик $\bar{a}=(l, m, n)$ вектор билан $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ векторнинг коллинеарлик шартини ифодалайди. Демак, $\bar{a}=(l, m, n)$ вектор L учун йўналтирувчи вектор бўлиб, $\bar{a}$ нинг бошланғич нуқтасида ётса, бу вектор тўлиқ L да ётади (74- чизма).

L тўғри чизиқнинг T текисликка параллеллик ва перпендикулярлик шартлари $\bar{a}=(l, m, n)$ ва $\bar{b}=(A, B, C)$ векторларнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартларига эквивалентдир.

Демак, $Al+Bm+Cn=0$ тенглама L тўғри чизиқнинг T текисликка параллеллик шартини, $\frac{A}{L}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$ эса перпендикулярлик шартини ифодалайди.

6. Фазода икки тўғри чизиқнинг параллеллик ва перпендикулярлик аломатлари.

Бизга ушбу $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ ва $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n}$. тенгламалар билан аниқланган L_1 ва L_2 тўғри чизиқлар берилган бўлсин. Бу тўғри чизиқларнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари уларнинг $\bar{a}_1=(l_1, m_1, n_1)$ ва $\bar{a}_2=(l_2, m_2, n_2)$ йўналтирувчи векторлари орқали ифодаланади. Шундай қилиб, бу икки тўғри чизиқнинг ўзаро параллеллик ва перпендикулярлик шартлари мос равишда:

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2} \text{ ва } l_1 l_2+m_1 m_2+n_1 n_2=0 .$$

МАТЕМАТИК АНАЛИЗ

17-БОБ

НАТУРАЛ АРГУМЕНТЛИ ФУНКЦИЯ ЛИМИТИ

Функция лимити математик анализнинг муҳим тушунчаларидан бири. Даставвал содда ҳолни, натурал аргументли функциялар (сонлар кетма-кетлиги)нинг лимитини қараймиз.

1-§. Сонлар кетма-кетлиги тушунчаси

Биз мазкур китобнинг 2-бобида функция тушунчаси билан танишган эдик. Энди, хусусий ҳолда, аниқланиш сохаси натурал сонлар тўплами $N=\{1, 2, 3, \ldots\}$ дан иборат бўлган функцияларни (натурал аргументли функцияларни) қараймиз.

Айтайлик, N тўпламда бирор $f(n)$ функция берилган бўлсин. Бу функция қийматларини x_n билан белгилаймиз:

$$f(n)=x_n \tag{1}$$

$$(f(1)=x_1,\ f(2)=x_2,\ f(3)=x_3,\ \ldots,\ f(n)=x_n,\ \ldots).$$

Қаралаётган функция қийматларидан ташкил топган ушбу

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

тўплам *сонлар кетма-кетлиги* дейилади.

Масалан,

$$2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \ldots,\ \frac{n+1}{n},\ \ldots$$

сонлар кетма-кетлиги

$$f(n)=\frac{n+1}{n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

функциянинг қийматларидан ташкил топгандир.

(1) кетма-кетликни ташкил этган x_n $(n=1, 2, 3 \ldots)$ сонлар унинг *ҳадлари* дейилади: x_1 — кетма-кетликнинг биринчи ҳади, x_2 — кетма-кетликнинг иккинчи ҳади ва ҳоказо, x_n — кетма-кетликнинг n-ҳади (ёки умумий ҳади). (1) кетма-кетлик қисқача x_n ёки $\{x_n\}$ каби белгиланади.

Кўп ҳолда кетма-кетликларнинг умумий ҳади формула билан ифодаланади. Унинг барча ҳадларн шу формула орқали топилади.

Мисоллар.

1. $x_n=\frac{1}{n}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$.

2. $x_n=n$: $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$.

3. $x_n=\frac{(-1)^n}{n_2}$: $-1, \frac{1}{2^2}, -\frac{1}{3^2}, \ldots, \frac{(-1)^n}{n^2}, \ldots$.

4. $x_n=1$: $1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$

5. $x_n=aq^{n-1}$: $a, aq, aq^2, \ldots, aq^{n-1}, \ldots$

Бирор $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

кетма-кетлик берилган бўлсин.

1-таъриф. *Агар шундай ўзгармас M сон мавжуд бўлсаки,* $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади шу сондан катта бўлмаса, яъни $\forall n\in N$ *учун*

$$x_n\leqslant M$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $\{x_n\}$ юқоридан *чегараланган кетма-кетлик дейилади.*

2-таъриф. *Агар шундай ўзгармас m сон мавжуд бўлсаки,* $\{x_n\}$ *кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади шу сондан кичик бўлмаса, яъни* $\forall n\in N$ *учун*

$$x_n\geqslant m$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $\{x_n\}$ *қуйидан чегараланган кетма-кетлик дейилади.*

3-таъриф. *Агар кетма-кетлик ҳам қуйидан, ҳам юқоридан чегараланган бўлса, яъни шундай ўзгармас m ва M сонлар топилсаки,* $\forall n\in N$ *учун*

$$m\leqslant x_n\leqslant M$$

тенгсизликлар ўринли бўлса, $\{x_n\}$ *чегараланган кетма-кетлик дейилади.*

Мисоллар. 1. Ушбу $x_n=1+\frac{1}{n^2}$:

$$1+1, 1+\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{9}, \ldots, 1+\frac{1}{n^2}, \ldots$$

кетма-кетлик юқоридан чегараланган, чунки ихтиёрий $n\in N$ учун

$$x_n\leqslant 2 \qquad (M=2)$$

тенгсизлик ўринли.

2. Ушбу $x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$:

$$1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \ldots$$

кетма-кетлик қуйидан чегараланган, чунки $\forall n \in N$ учун

$$x_n \geqslant -\frac{1}{4} \qquad \left(m = -\frac{1}{4}\right)$$

тенгсизлик ўринли.

3. Ушбу $x_n = \frac{n^2-1}{n^2}$:

$$0, \frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \ldots, \frac{n^2-1}{n^2}, \ldots$$

кетма-кетлик чегараланган, чунки $\forall n \in N$ учун

$$0 \leqslant x_n < 1$$

тенгсизликлар ўринли.

4-таъриф. *Агар $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ҳадлари қуйидаги*

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots$$
$$(x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < \ldots)$$

тенгсизликларни қаноатлантирса, яъни $\forall n \in N$ учун

$$x_n \leqslant x_{n+1} \qquad (x_n < x_{n+1})$$

бўлса, $\{x_n\}$ ўсувчи (қатъий ўсувчи) кетма-кетлик дейилади.

5-таъриф. *Агар $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ҳадлари қуйидаги*

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant \ldots$$
$$(x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n > \ldots)$$

тенгсизликларни қаноатлантирса, яъни $\forall n \in N$ учун

$$x_n \geqslant x_{n+1} \qquad (x_n > x_{n+1})$$

бўлса, $\{x_n\}$ камаювчи (қатъий камаювчи) кетма-кетлик дейилади.

Ўсувчи (қатъий ўсувчи), камаювчи (қатъий камаювчи) кетма-кетликлар монотон кетма-кетликлар дейилади.

1-мисол. Ушбу $x_n = \frac{n}{n+1}$: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$

кетма-кетликнинг ўсувчи эканини кўрсатинг.

Бу кетма-кетликнинг

$$x_n = \frac{n}{n+1}, \quad x_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

ҳадларини олиб, $x_{n+1} - x_n$ айирмани қараймиз:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Равшанки, $\forall n \in N$ учун $\frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0.$

Демак, $\forall n\in N$ да $x_{n+1}-x_n>0$, яъни $x_n<x_{n+1}$ бўлади. Бу эса берилган кетма-кетликнинг ўсувчи (хатто катъий ўсувчи) эканини билдиради.

2- мисол. Ушбу $x_n=\frac{n!}{n^n}$: $\frac{1!}{1}, \frac{2!}{2^2}, \frac{3!}{3^3}, \dots \frac{n!}{n^n}, \dots$

кетма-кетликнинг камаювчи эканини кўрсатинг.

Бу кетма-кетликнинг $x_n=\frac{n!}{n^n}$, $x_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$ ҳадларини олиб, уларнинг нисбатини қараймиз:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{n!}{n^n}}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Равшанки, ихтиёрий $n\in N$ да $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n<1$ бўлади. Демак, $\frac{x_{n+1}}{x_n}<1$. Бу тенгсизликдан эса $x_n>x_{n+1}$ $(\forall n\in N)$ келиб чиқади.

Демак, кетма-кетлик камаювчи экан.

Фараз қилайлик, $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ сонлар кетма-кетлиги берилган бўлсин:

$$x_n:\quad x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots,$$
$$y_n:\quad y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots,$$

Қуйидаги

$$x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n, \dots,$$
$$x_1-y_1, x_2-y_2, \dots, x_n-y_n, \dots$$

кетма-кетликлар мос равишда $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар *йиғиндиси* ҳамда *айирмаси* дейилади ва $\{x_n+y_n\}$, $\{x_n-y_n\}$ каби белгиланади.

Ушбу

$$x_1\cdot y_1,\ x_2\cdot y_2,\ \dots,\ x_n\cdot y_n,\ \dots$$

кетма-кетлик $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар кўпайтмаси дейилади ва $\{x_n\cdot y_n\}$ каби белгиланади.

Қуйидаги

$$\frac{x_1}{y_1},\quad \frac{x_2}{y_2},\quad \dots,\quad \frac{x_n}{y_n},\ \dots\ (y_k\neq 0,\ k=1,\ 2,\ \dots)$$

кетма-кетлик $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар *нисбати* дейилади ва $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ каби белгиланади.

2- §. Сонлар кетма-кетлигининг лимити

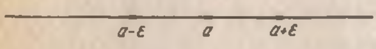
Аввало нуктанинг атрофи тушунчасини келтирамиз. Бирор a нукта (сон) ҳамда ихтиёрий мусбат ε сони $(\forall\varepsilon>0)$ берилган булсин. Ушбу $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ интервал a нуқтанинг *атрофи* (ε атрофи) дейилади (75- чизма). Равшанки, ε турли қийматларга тенг бўлганда a нуқтанинг турли атрофлари ҳосил бўлади. Масалан, $a=$ $=1$ нуқтанинг $\varepsilon=\frac{1}{3}$ атрофи $\left(1-\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{3}\right)$ интервалдан, яъни $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ интервалдан; $a=0$ нуқтанинг $\varepsilon=\frac{1}{10}$ атрофи $\left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$ интервалдан иборат.

Бирор $\{x_n\}$: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ кетма-кетлик ҳамда бирор a нуқта (сон) берилган бўлсин. Бу кетмакетликнинг ҳадлари a нуқтанинг бирор атрофига тегишли бўладими, тегишли бўлса, нечта ҳади тегишли бўлади — шуларни аниқлаш кетма-кетликнинг лимити тушунчасини киритишда муҳим роль ўйнайди. Мисоллар келтирайлик:

1. Ушбу $x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$: $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \ldots$ кетма-кетлик ва $a=0$ нуқтанинг $\left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$ атрофини қарайлик. Бу кетма-кетликнинг

$$x_1=1,\ x_2=-\frac{1}{2},\ x_3=\frac{1}{3},\ x_4=-\frac{1}{4},\ x_5=\frac{1}{5}$$

ҳадлари a нуқтанинг $\left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$ атрофига тегишли бўлмайди. Берилган кетма-кетликнинг x_6 ҳадидан, яъни 6- ҳадидан бошлаб кейинги барча ҳадлари шу атрофга тегишли бўлади.



75- чизма

Агар $a=0$ нуқтанинг $\left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$ атрофи олинса, унда $x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ кетма-кетликнинг 11- ҳадидан бошлаб кейинги барча ҳадлари шу $\left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$ атрофга тегишли бўлади.

Агар $a=0$ нуқтанинг $(-2, 2)$ атрофи олинса, унда берилган кетма-кетликнинг барча ҳадлари шу $(-2, 2)$ атрофга тегишли бўлади.

2. Ушбу $x_n=(-1)^n$: $-1, 1, -1, 1, \ldots$ кетма-кетликни ҳамда $a=1$ нуқтанинг $\left(1-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}\right)$, яъни $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ атрофини қараймиз. Бу кетма-кетликнинг

$$x_2=1,\ x_4=1,\ x_6=1,\ \ldots,\ x_{2k}=1,\ \ldots$$

ҳадлари, яъни жуфт номерли барча ҳадлари $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ атрофга тегишли бўлади. Берилган кетма-кетликнинг

$$x_l=-1,\ x_3=-1,\ x_5=-1,\ \ldots,\ x_{2k+1}=-1,\ \ldots$$

ҳадлари, яъни тоқ номерли барча ҳадлари $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ атрофга тегишли бўлмайди.

Равшанки, $x_n=(-1)^n$ кетма-кетликнинг бирор ҳадидан бошлаб кейинги барча ҳадлари $a=1$ нуктанинг $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ атрофига тегишли бўлавермайди.

3. Ушбу $x_n=n$: 1, 2, 3, ..., n, ... кетма-кетликни ҳамда $a=2$ нуктанинг (2−4, 2+4) яъни (−2, 6) атрофини қарайлик. Бу кетма-кетликнинг

$$x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3,\ x_4=4,\ x_5=5$$

ҳадлари (−2, 6) атрофга тегишли бўлиб, 6- ҳадидан бошлаб қолган барча ҳадлари шу атрофга тегишли эмас. Агар $a=0$ нукта олинса ва унинг $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ атрофи қаралса, унда берилган $x_n=n$ кетма-кетликнинг битта ҳам ҳади шу атрофга тегишли бўлмаслигини кўрамиз.

Юқорида келтирилган мисоллардан кўринадики, бирор нукта атрофга кетма-кетликнинг чекли сондаги ҳадлари тегишли бўлиши, бирор ҳадидан бошлаб кейинги барча ҳадлари, жумладан кетма-кетликнинг барча ҳадлари (чексиз сондаги ҳадлари) тегишли бўлиши, битта ҳам ҳади тегишли бўлмаслиги мумкин экан.

Бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик ҳамда бирор a сон берилган бўлсин.

6- таъриф. *Агар a нуқтанинг ихтиёрий $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ атрофи $(\forall\varepsilon>0)$ олинганда ҳам $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг бирор ҳадидан бошлаб, кейинги барча ҳадлари шу атрофга тегишли бўлса, а сон $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити дейилади ва*

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a \quad (\text{ёки } \lim x_n=a \text{ ёки } x_n\to a)$$

каби белгиланади.

$\{x_n\}$ кетма-кетликнинг бирор ҳадидан бошлаб кейинги барча ҳадлари a нуктанинг ихтиёрий $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ атрофига тегишлилиги, $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам шундай натурал n_0 сон топилиб, барча $n>n_0$ учун

$$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$$

тенгсизликларнинг ўринли бўлишидан иборатдир.

Равшанкки,

$$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon<x_n-a<\varepsilon \Leftrightarrow |x_n-a|<\varepsilon.$$

Кетма-кетликнинг лимитини қуйидагича таърифлаш ҳам мумкин.

7- таъриф. *Агар $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам шундай натурал n_0 сон $(n_0\in N)$ топилсаки, барча $n>n_0$ учун*

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, а сон $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити дейилади.

1- мисол. Ушбу $x_n=\frac{1}{n^2}$: 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, ..., $\frac{1}{n^2}$, ... кетма-кетликнинг лимити $a=0$ эканини кўрсатинг.

Бунинг учун аввало ихтиёрий мусбат ε сон олинади. Сўнг бу сонга кўра шундай натурал n_0 сони топилишини кўрсатиш керакки, берилган кетма-кетликнинг n_0 — ҳадидан кейинги барча ҳадлари қуйидаги

$$\left|\frac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon \tag{2}$$

тенгсизликни қаноатлантирсин. Одатда бундай n_0 натурал сонни (2) тенгсизлик бажарилсин деб, ундан фойдаланиб топилади:

$$\left|\frac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon\Rightarrow\frac{1}{n^2}<\varepsilon\Rightarrow n_2>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Агар натурал n_0 сонни $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ дан катта қилиб олинса, унда барча $n>n_0$ учун

$$n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},$$

бинобарин,

$$\left|\frac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади.

Шундай қилиб, ихтиёрий $\varepsilon>0$ сонга кўра n_0 натурал сон топилдики, барча $n>n_0$ учун

$$\left|\frac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилди. Бу эса, таърифга биноан 0 сони $x_n=\frac{1}{n^2}$ кетма-кетликнинг лимити эканини билдиради:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0.$$

2- мисол. Ушбу $x_n=(-1)^n$: $-1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots$ кетма-кетликни қарайлик. Ҳар қандай a нинг ихтиёрий атрофи, жумладан $\left(a-\frac{1}{3}, a+\frac{1}{3}\right)$ атрофи олинса, кетма-кетликнинг бирор ҳадидан бошлаб кейинги барча ҳадлари шу атрофга тегишли бўлмайди. Бинобарин, a берилган кетма-кетликнинг лимити эмас. Берилган кетма-кетлик лимитга эга эмас.

Агар $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити 0 га тенг бўлса,

$$\lim_{n\to\infty} x_n=0,$$

у ҳолда $\{x_n\}$ *чексиз кичик миқдор* дейилади.

Масалан, $x_n=\frac{1}{n}$ кетма-кетлик чексиз кичик миқдор бўлади, чункки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин. Агар ҳар қандай мусбат M сон берилганда ҳам шундай $n_0\in N$ сон топилсаки, барча $n>n_0$ учун

$$|x_n|>M$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимитини ∞ деб қаралади ва

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\infty \qquad \text{ёки} \qquad x_n\to\infty$$

каби белгиланади.

Агар ҳар қандай мусбат M сон берилганда ҳам шундай $n_0\in N$ сон топилсаки, барча $n>n_0$ учун

$$x_n>M \qquad (x_n<-M)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити $+\infty$ $(-\infty)$ деб қаралади.

Масалан, $x_n=(-1)^n\cdot n$: $-1, 2, -3, 4, \ldots, (-1)^n n, \ldots$ кетма-кетликнинг лимити ∞ бўлади, чунки

$$|x_n|=|(-1)^n\cdot n|=n$$

бўлиб, ҳар қандай мусбат M сон олинганда ҳам шундай натурал n сон топиладики, $n>M$ бўлади.

Агар $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити чексиз

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\infty,$$

бўлса, у ҳолда $\{x_n\}$ чексиз катта миқдор дейилади.

Масалан, $x_n=n$ кетма-кетлик чексиз катта миқдор бўлади, чунки

$$\lim_{n\to\infty} n=\infty.$$

8-таъриф. *Агар $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити чекли сон бўлса, уни яқинлашувчи кетма-кетлик дейилади.*

Агар кетма-кетликнинг лимити чексиз ёки кетма-кетлик лимитга эга бўлмаса, уни узоқлашувчи кетма-кетлик дейилади.

Энди кетма-кетликнинг яқинлашувчилигини ифодалайдиган теоремаларни келтирамиз.

1-теорема. *Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи бўлиб, юқоридан чегараланган бўлса, у яқинлашувчи бўлади.*

Исбот. $\{x_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи бўлиб, юқоридан чегараланган бўлсин. Кетма-кетлик юқоридан чегараланган бўлгани учун барча ҳадларидан тузилган $\{x_n\}$ тўплам ҳам юқоридан чегараланган бўлади. Унда I- боб, 2- § да келтирилган теоремага кўра бу тўпламнинг аниқ юқори чегараси $\sup\{x_n\}$ мавжуд бўлади:

$$\sup\{x_n\}=a.$$

Демак, $\forall n\in N$ учун

$$x_n\leqslant a \tag{3}$$

ва $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам кетма-кетликнинг шундай x_{n_0} ҳади топиладики,

$$x_{n_0}>a-\varepsilon \tag{4}$$

тенгсизлик бажарилади.

Шартга кўра $\{x_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи. Шунинг учун $n>n_0$ бўлганда

$$x_n\geqslant x_{n_0} \tag{5}$$

бўлади. Натижада (3), (4) ва (5) муносабатлардан $0\leqslant a-x_n<\varepsilon$, яъни $|x_n-a|<\varepsilon$ тенгсизлик келиб чиқади. Бу эса

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a$$

эканини билдиради. Демак, $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи. Теорема исбот бўлди.

2-теорема. *Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик камаювчи бўлиб, қуйидан чегараланган бўлса, у яқинлашувчи бўлади.*

Бу теорема юқоридаги 1- теоремага ўхшаш исботланади.

Бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин.

9-таъриф. *Агар $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0\in N$ топилсаки, барча $n>n_0$, барча $m>n_0$ лар учун*

$$|x_n-x_m|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $\{x_n\}$ фундаментал кетма-кетлик дейилади.

Ҳар қандай яқинлашувчи кетма-кетлик фундаментал кетма-кетлик бўлади. Шуни исботлайлик.

$\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб, унинг лимити a бўлсин:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

Лимит таърифига кўра $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{2}$ га кўра шундай $n_0\in N$ топиладики, барча $n>n_0$ учун $|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$, жумладан,

$m > n_0$ учун ҳам $|x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ тенгсизлик ўринли бўлади. Равшанки,

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leqslant |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Демак, $\{x_n\}$ фундаментал кетма-кетлик.

Энди фундаментал кетма-кетликларнинг яқинлашувчилиги ҳақидаги қуйидаги теоремани исботсиз келтирамиз:

3-теорема *(Коши теоремаси). Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик фундаментал кетма-кетлик бўлса, у яқинлашувчи бўлади.*

Мисол. Ушбу $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$:

$$1 + \frac{1}{1},\ (1 + \frac{1}{2})^2,\ (1 + \frac{1}{3})^3,\ \ldots,\ (1 + \frac{1}{n})^n,\ \ldots$$

кетма-кетлик яқинлашувчи эканини кўрсатинг.

Ньютон биноми формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$x_n = (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} =$$

$$= 2 + \frac{1}{1 \cdot 2}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \ldots (1 - \frac{n-1}{n}).$$

Шунга ўхшаш $x_{n+1} = (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}$ ёйилса, унда:

1) x_{n+1} нинг ифодасида x_n нинг ифодасидагига қараганда битта ортиқча мусбат ҳад борлигини;

2) x_{n+1} нинг ифодасидаги ҳар бир ҳад (иккинчи ҳаддан бошлаб) x_n нинг ифодасидаги мос ҳаддан катта бўлишини топамиз. Демак, $\forall n \in N$ да $x_n < x_{n+1}$ бўлади. Бу эса $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ кетма-кетликнинг ўсувчи эканини билдиради.

Равшанки,

$$x_n = 2 + \frac{1}{1 \cdot 2}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \ldots (1 - \frac{n-1}{n}) <$$

$$< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Демак, қаралаётган кетма-кетлик юқоридан чегараланган. Унда 1-теоремага мувофиқ $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ кетма-кетлик яқинлашувчи, яъни чекли лимитга эга бўлади.

Бу $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$ кетма-кетликнинг лимити *e сони* дейилади:

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e.$ e — иррационал сон: $e=2{,}718281828459045...$

Асоси e бўлган логарифм натурал логарифм дейилади. M соннинг ($M>0$) натурал логарифми LnM каби ёзилади.

3- §. Яқинлашувчи кетма-кетликларнинг хоссалари

Якинлашувчи кетма-кетликлар қатор хоссаларга эга. Қуйида бу хоссаларни санаб ўтамиз, айирмаларининг исботини ҳам келтирамиз.

1°. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, унинг лимити ягона бўлади.

2°. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, у чегараланган бўлади.

3°. Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\{x_n\pm y_n\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи ва

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\pm\lim_{n\to\infty}y_n$$

бўлади.

3°- хоссанинг исботи. $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб,

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,$ $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$ бўлсин. Лимит таърифига биноан, $\forall\varepsilon>0$ сон

олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{2}$ сонга кўра шундай $n_0'\in N$ топиладики, барча

$n>n_0'$ учун

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (6)$$

бўлади. Шунингдек, $\frac{\varepsilon}{2}$ га кўра шундай $n_0''\in N$ топиладики, барча

$n>n_0''$ учун

$$|y_n-b|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (7)$$

бўлади. Агар n_0' ва n_0'' натурал сонларнинг каттасини n_0 десак, унда барча $n>n_0$ учун бир йўла (6) ва (7) тенгсизликлар бажарилади. Шуларни эътиборга олиб топамиз:

$$|(x_n+y_n)-(a+b)|=|(x_n-a)+(y_n-b)|\leqslant$$
$$\leqslant|x_n-a|+|y_n+b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Бу эса $a+b$ сон $\{x_n+y_n\}$ кетма-кетликнинг лимити бўлишини билдиради. Демак,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=a+b=\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}y_n.$$

Худди шунга ўхшаш

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n-\lim_{n\to\infty}y_n$$

экани исботланади. 3°- хосса исбот бўлди.

4°. Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\{x_n\cdot y_n\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи ва

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}y_n$$

бўлади.

Натижа. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, $\{c\cdot x_n\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи ва

$$\lim_{n\to\infty}c\cdot x_n=c\cdot\lim_{n\to\infty}x_n$$

бўлади, бу ерда c — ўзгармас сон.

5°. Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб, $y_n\neq 0$ $(n=1,2,3,\ ...)$ ва $\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq 0$ бўлса, у ҳолда $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи ва

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$$

бўлади.

6°. Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб, $\forall n\in N$ да $x_n\leqslant y_n$ $(x_n\geqslant y_n)$ бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ $(\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}y_n)$ бўлади.

7°. Агар $\{x_n\}$, $\{z_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи ва $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$ бўлиб, $\forall n\in N$ да

$$x_n\leqslant y_n\leqslant z_n \tag{8}$$

бўлса, у ҳолда $\{y_n\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи ва $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$ бўлади.

7°.- хоссанинг исботи. $\{x_n\}$ ва $\{z_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$ бўлсин. Лимит таърифига биноан $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0\in N$ сон топиладики, барча $n>n_0$ учун $|x_n-a|<\varepsilon$, $|z_n-a|<\varepsilon$ тенгсизликлар бажарилади.

Равшанки,

$$|x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon, \tag{9}$$

$$|z_n - a| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < z_n - a < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon. \tag{10}$$

(8) ва (10) муносабатлардан $y_n < a + \varepsilon$, (8) ва (9) муносабатлардан эса $a - \varepsilon < y_n$ бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \Rightarrow |y_n - a| < \varepsilon.$$

Бу эса $\{y_n\}$ кетма-кетликнинг яқинлашувчилигини ва $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ бўлишини билдиради. 7°- хосса исбот бўлди.

8°. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ бўлса, у ҳолда $x_n = a + \alpha_n$ бўлади ва аксинча, бунда α_n чексиз кичик миқдор.

4- §. Сонлар кетма-кетликлари лимитини ҳисоблаш

Сонлар кетма-кетлиги мавзусининг асосий масалаларидан бири унинг лимитини топишдан иборат. Кетма-кетликларнинг лимитларини топишда таърифдан, 2- § да келтирилган хоссалардан фойдаланилади.

1- мисол. Ушбу $x_n = c$:

$$c,\ c,\ c,\ \dots,\ c,\ \dots\ (c = \text{const})$$

кетма-кетликни қарайлик. c нуқтанинг ихтиёрий атрофи $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ ни $(\forall \varepsilon > 0)$ олайлик. Равшанки, берилган кетма-кетликнинг барча ҳадлари шу $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ атрофга тегишли бўлади. Унда кетма-кетликнинг лимити таърифига биноан

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} c = c$$

бўлиши келиб чиқади.

2- мисол. Ушбу $x_n = \sqrt[n]{a}$ $(a > 0)$ кетма-кетликни қарайлик.

1) $a > 1$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\alpha_n = \sqrt[n]{a} - 1 \tag{11}$$

дейилса, унда $\alpha_n > 0$ бўлиб,

$$\alpha_n = \sqrt[n]{a} - 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n \Rightarrow a = (1 + \alpha_n)^n$$

бўлади. Ньютон биноми формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$(1 + \alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\alpha_n^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha_n^3 + \dots + \alpha_n^n$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги ҳар бир қўшилувчи мусбатдир. Шунинг учун $(1+\alpha_n)^n \geqslant 1+n\cdot\alpha_n$ тенгсизлик ўринли бўлади. Демак, $a\geqslant 1+n\cdot\alpha_n$. Кейинги тенгсизликдан эса $\alpha_n\leqslant\frac{a-1}{n}$ бўлиши келиб чиқади. Шундай қилиб $0<\alpha_n\leqslant\frac{a-1}{n}$ бўлади. Равшанки, $\lim\limits_{n\to\infty}0=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a-1}{n}=0$. Унда 7°- хоссага кўра $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$ бўлади. Демак, α_n — чексиз кичик миқдор. (11) муносабатдан топамиз: $\sqrt[n]{a}=1+\alpha_n$

3°- хоссага мувофиқ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ бўлади.

2) $a=1$ бўлганда $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{1}=1$ бўлиб, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ бўлади.

3) $0<a<1$ бўлсин. Бу ҳолда $\frac{1}{a}>1$ бўлади. 5° – хоссадан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=\frac{1}{1}=1.$$

Демак, $a>0$ бўлганда $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

Иккита $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар берилган бўлиб, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n - 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$ бўлсин. $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ кетма-кетликнинг лимитини топишда 3-§ даги 5°- хоссадан фойдаланиб бўлмайди, чунки мазкур хоссада келтирилган шарт $\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq0)$ бажарилмайди. $n\to\infty$ да $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ кетма-кетликнинг лимити $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлардан ҳар бирининг нолга қандай интилишига қараб турлича бўлади. Шунинг учун уни $\left(\frac{0}{0}\right)$ кўринишидаги аниқмаслик деб юритилади.

3- мисол. Ушбу $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3+1}}{\frac{1}{3n^3+n+1}}$ ни ҳисобланг.

Берилган кетма-кетликнинг лимити куйидагича топилади:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n^3+1}}{\dfrac{1}{3n^3+n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+n+1}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(3+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}{1+\dfrac{1}{n^3}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)}=\frac{3}{1}=3$$

18-БОБ

ФУНКЦИЯ ЛИМИТИ

1-§. Функция лимити таърифлари

Биз 17-бобда сонлар кетма-кетлиги ва унинг лимитини ўргандик. Энди ҳақиқий аргументли функция лимити ва уларнинг хоссалари билан танишамиз. Аввало тўпламнинг лимит нуқтаси тушунчасини келтирамиз.

Бирор ҳақиқий сонлар тўплами X берилган бўлсин.

1-таъриф. Агар $a\in R$ нуқтанинг ихтиёрий ε атрофида $(\varepsilon>0)$ *X тўпламнинг чексиз кўп элементлари ётса, a нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси дейилади.*

Масалан, $X=\{\frac{1}{n}\}$ $(n\in N)$ тўплам учун 0 лимит нуқтадир.

$X=\{(-1)^n\}$, $n\in N$ тўплам учун эса -1 ва 1 нуқталар лимит нуқталар бўлади.

Агар a нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлса, у ҳолда X дан a га яқинлашувчи кетма-кетлик ажратиш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, a нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин. У ҳолда a нуқтанинг ихтиёрий ε атрофида X нинг чексиз кўп элементлари ётади. ε нинг $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ қийматлари учун a нуқтанинг ε атрофларини қарайлик. $\varepsilon=1$ учун $(a-1, a+1)$ оралиқда X тўпламнинг чексиз кўп элементлари ётади. Бу атрофдан X тўпламнинг x_{k_1} элементини оламиз. $\varepsilon=\frac{1}{2}$ учун a нуқтанинг $\frac{1}{2}$ атрофидан, яъни $\left(a-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2}\right)$ оралиқдан X тўпламнинг x_{k_2} элементини оламиз $(k_2>k_1)$.

$\varepsilon=\frac{1}{3}$ учун a нуқтанинг $\frac{1}{3}$ атрофидан X тўпламнинг $x_{k_3}(k_3>k_2)$ элементини оламиз ва ҳ. к. Шу мулоҳазани давом эттириб a нуқтанинг $\frac{1}{n}$ атрофидан x_{k_n} элемент оламиз. Натижада, ушбу $x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_n}, \ldots$ кетма-кетлик ҳосил бўлади. Бу кетма-кетлик учун $|x_{k_n}-a|<\frac{1}{n}$ бўлади. Бу тенгсизликдан $\{x_{k_n}\}$ кетма-кетликнинг a нуқтага яқинлашиши келиб чиқади.

Энди X тўпламдан a га яқинлашувчи $\{x_n\}$ кетма-кетлик ажратиш мумкин бўлсин. У ҳолда яқинлашувчи кетма-кетлик таърифига биноан a нуктанинг ихтиёрий ε атрофида $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг, жумладан X тўпламнинг чексиз кўп элементлари ётади. Демак, таърифга кўра a нукта X тўплам учун лимит нукта бўлади. Шундай қилиб, X тўпламнинг лимит нуқтаси тушунчасини қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

2-таъриф. *Агар X тўпламдан a га яқинлашувчи кетма-кетлик ажратиш мумкин бўлса, a нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси дейилади.*

Биз аввалги бобда чексиз катта кетма-кетлик тушунчасини киритиб, унинг баъзи бир хоссаларини ўрганган эдик. Бу тушунчадан фойдаланиб қуйидаги таърифни киритамиз:

3-таъриф. *Агар X тўпламдан мусбат элементлардан иборат (манфий элементлардан иборат) чексиз катта кетма-кетлик ажратиш мумкин бўлса, $+\infty$ $(-\infty)$ «нуқта» X тўпламнинг лимит нуқтаси дейилади.*

$f(x)$ функция X тўпламида берилган бўлиб, a нукта X тўпламнинг лимит нуктаси бўлсин (умуман айтганда a нукта X тўпламга тегишли булиши шарт эмас).

4-таъриф. *Агар X тўпламнинг нуқталаридан тузилган, a га яқинлашувчи ҳар қандай $\{x_n\}$ кетма-кетлик олинганда ҳам, функция қийматларидан иборат $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ягона (чекли ёки чексиз) b лимитга интилса, шу b га $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги (x нинг a га интилгандаги) лимити дейилади ва*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

каби белгиланади.

Функция лимитига берилган бу таъриф *Гейне таърифи* дейилади.

Эслатма. Агар a га интилувчи иккита $\{x'_n\}$ ва $\{x''_n\}$ кетма-кетликлар олинганда мос $\{f(x'_n)\}$ ва $\{f(x''_n)\}$ кетма-кетликларнинг лимити турлича бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $x\to a$ да лимитга эга бўлмайди.

Мисоллар. 1. Ушбу $f(x)=x^3$ функциянинг $x=2$ нуктадаги лимити 8 га тенг эканлигини кўрсатинг.

Ҳар бир ҳади 2 дан фаркли бўлган 2 га интилувчи ихтиёрий $\{x_n\}$ кетма-кетлик олайлик:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=2 \quad (x_n\neq 2,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

У ҳолда

$$f(x_n) = x_n^3$$

кетма-кетликни ҳосил қиламиз. Якинлашувчи кетма-кетликлар устидаги арифметик амалларга кўра

$$\lim_{x_n\to 2} f(x_n) = \lim_{x_n\to 2} x_n^3 = \lim_{x_n\to 2} x_n \cdot \lim_{x_n\to 2} x_n \cdot \lim_{x_n\to 2} x_n = 2\cdot 2\cdot 2 = 8.$$

Бу эса 4-таърифга кўра $f(x)=x^3$ функциянинг $x\to 2$ даги лимити 8 га тенглигини билдиради.

2. Ушбу $f(x)=\cos^2\frac{1}{x}$, $x\neq 0$, функциянинг $x\to 0$ даги лимити мавжуд эмаслигини кўрсатинг.

Нолга интилувчи иккита $\{x'_n\}=\{\frac{1}{n\pi}\}$ ва $\{x''_n\}=\{\frac{2}{(4n+1)\pi}\}$ кетма-кетлик олайлик. Бунда $f(x'_n)=\cos^2 n\pi=1$, $f(x''_n)=\cos^2\frac{(4n+1)\pi}{2}=0$ бўлиб, $\lim\limits_{x'_n\to 0} f(x'_n)=1$, $\lim\limits_{x''_n\to 0} f(x''_n)=0$ эканлиги равшандир. Бу эса $\cos^2\frac{1}{x}$ функциянинг $x\to 0$ даги лимити мавжуд эмаслигини кўрсатади.

Энди функция лимитининг яна бир таърифини келтирамиз.

5-таъриф. *Агар* $\forall\varepsilon>0$ *сон учун шундай* $\delta>0$ *сон топилсаки, аргумент* x *нинг* $0<|x-a|<\delta$ *тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида* $|f(x)-b|<\varepsilon$ *тенгсизлик бажарилса,* b *сон* $f(x)$ *функциянинг* a *нуқтада* ($x\to a$ *даги*) *лимити дейилади ва*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

каби белгиланади. Функция лимитига берилган бу таъриф *Коши таърифи* дейилади.

Мисоллар. 1. Ушбу $f(x)=\sin x$ функциянинг $x=\frac{\pi}{6}$ нуқтадаги лимити $\frac{1}{2}$ га тенг эканлигини кўрсатинг.

$\forall\varepsilon>0$ сонни олайлик. Бу ε га кўра δ ни $\delta=\varepsilon$ деб олсак, у ҳолда $0<|x-\frac{\pi}{6}|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x ларда қуйидаги

$$|f(x)-\frac{1}{2}|=|\sin x-\frac{1}{2}|=|\sin x-\sin\frac{\pi}{6}|=$$

$$=|2\sin\frac{x-\frac{\pi}{6}}{2}\cdot\cos\frac{x+\frac{\pi}{6}}{2}|\leqslant 2\cdot\frac{|x-\frac{\pi}{6}|}{2}=|x-\frac{\pi}{6}|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Бундан 5-таърифга кўра $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin x=\frac{1}{2}$ эканлиги келиб чиқади.

2. Ушбу

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & \text{агар } x \text{ — рационал сон бўлса,}\\ 0, & \text{агар } x \text{ — иррационал сон бўлса}\end{cases}$$

Дирихле функциясининг ихтиёрий $a\in R$ нуктада лимитга эга эмаслигини кўрсатинг.

Тескарисини фараз қилайлик, яъни Дирихле функцияси a нуктада чекли b лимитга эга бўлсин. У ҳолда таърифга кўра ихтиёрий $\varepsilon>0$, жумладан $\forall\ \varepsilon=\frac{1}{4}$ учун $0<|x-a|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча рационал x ларда

$$|\varkappa(x)-b|=|1-b|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади.

Худди шундай, $0<|x-a|<\delta$ тенгсиликни қаноатлантирувчи барча иррационал x ларда

$$|\varkappa(x)-b|=|0-b|=|b|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади.

$1=(1-b)+b$ айниятни эътиборга олиб топамиз:

$$1=|(1-b)+b|\leqslant|1-b|+|b|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon=\frac{1}{2}.$$

Бу зиддият фаразимизнинг нотўғрилигини, яъни Дирихле функциясининг $\forall\ a$ нуқтада лимитга эга эмаслигини кўрсатади.

1-теорема. ***Функция лимити учун берилган Гейне ва Қоши (4- ва 5-таърифлар) таърифлари ўзаро эквивалентдир.***

Исбот. 1) $f(x)$ функция a нуқтада 4-таърифга (Гейне таърифига) кўра лимитга эга бўлсин, яъни X тўпламнинг нуқталаридан тузилган, a га интилувчи ҳар қандай $\{x_n\}$ ($x_n\neq a$, $n=1, 2, 3, \ldots$) кетма-кетлик олинганда ҳам мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ягона b лимитга интилсин. Биз шу b сон $f(x)$ функциянинг $x=a$ нуқтада 5-таърифга (Қоши таърифига) кўра ҳам лимити бўлишини кўрсатамиз.

Тескарисини фараз қилайлик, яъни $f(x)$ функция $x=a$ нуқтада 4-таърифга кўра b лимитга эга бўлса ҳам, функция шу нуқтада 5-таърифга кўра b лимитга эга бўлмасин. Унда бирор $\varepsilon=\varepsilon_0>0$ сон учун ихтиёрий кичик мусбат δ сон олинганда ҳам аргумент x нинг $0<|x-a|<\delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи бирор x_1' қийматида

$$|f(x_1')-b|\geqslant\varepsilon_0$$

бўлади.

Нолга интилувчи мусбат сонлар кетма-кетлиги $\{\delta_n\}$ ни олайлик. У ҳолда юқоридагига кўра ҳар бир $\delta_n>0$ ($n=1, 2, 3, \ldots$) учун x аргументнинг $0<|x-a|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи шундай $x=x_n$ ($n=1, 2, 3, \ldots$) қиймати топиладики, $0<|x_n-a|<\delta_n$ ва $|f(x_n)-b|\geqslant\varepsilon_0$ бўлади. Аммо $\delta_n\to0$ дан $x_n\to a$ бўлиши, бундан эса 4-таърифга кўра $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик b га интилиши лозим. $|f(x_n)-b|\geqslant\varepsilon_0$; муносабат эса бунга зиддир. Демак, $f(x)$ функция $x=a$ нуқтада 4-таърифга кўра b лимитга эга бўлишидан унинг шу нуқтада 5-таърифга кўра ҳам b лимитга эга бўлиши келиб чиқади.

2) $f(x)$ функция a нуқтада 5-таърифга (Қоши таърифига) кўра лимитга эга бўлсин, яъни $\forall\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta>0$ сон топиладики, $0<|x-a|<\delta$ тенгсизликлар бажарилганда $|f(x)-b|<\varepsilon$ тенгсизлик ҳам ўринли бўлади.

X тўпламнинг нуқталаридан тузилган ҳар бир ҳади a дан фарқли ва a га интилувчи ихтиёрий $\{x_n\}$ кетма-кетлик олайлик.

Сонлар кетма-кетлиги лимитининг таърифига кўра, юқоридаги $\delta>0$ учун шундай $n_0\in N$ сон топиладики, барча $n>n_0$ лан учун $|x_n-a|<\delta$ тенгсизлик ўринли бўлади. Натижада $x_n\neq a$ ($n=1, 2, \ldots$) муносабатга кўра $0<|x_n-a|<\delta$ тенгсизликлар келиб чиқади.

Бу тенгсизликлардан эса 5-таърифга кўра $|f(x_n)-b|<\varepsilon$ тенгсизлик келиб чиқади. Демак, $x_n\to a$ ва $f(x_n)\to b$ бўлади.

Биз юқорида $f(x)$ функция $x \to a$ даги чекли b лимитга эга бўлишининг Коши таърифини (5-таърифни) келтирдик. $b=\infty$ ($b=+\infty$, $b=-\infty$) бўлган ҳолда функция лимитининг Коши таърифи қуйидагича ифодаланади.

6-таъриф. *Агар $\forall E>0$ сон учун шундай $\delta>0$ сон топилсаки, x аргументнинг $0<|x-a|<\delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи барча қийматларида*

$$|f(x)|>E \quad (f(x)>E; \ -f(x)>E)$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги лимити ∞ $(+\infty, -\infty)$ дейилади ва

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \quad (\lim_{x\to a} f(x)=+\infty; \ \lim_{x\to a} f(x)=-\infty)$$

каби белгиланади.

Мисол. Ушбу $f(x)=\frac{1}{(x-1)^3}$ функция учун $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\infty$ бўлишини кўрсатинг.

Агар $\forall E>0$ сон учун $\delta=\frac{1}{\sqrt[3]{E}}$ деб олинса, у ҳолда $0<|x-1|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x ларда

$$|f(x)|=\left|\frac{1}{(x-1)^3}\right|>E$$

тенгсизлик бажарилади. Демак, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^3}=\infty$.

Энди $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги ўнг ва чап лимитлари тушунчаларини келтирамиз.

7-таъриф (Гейне таърифи). *Агар X тўпламнинг нуқталаридан тузилган, ҳар бир ҳади a дан катта (кичик) бўлиб, a га интилувчи ҳар қандай $\{x_n\}$ кетма-кетлик олинганда ҳам мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ягона b сонига интилса, шу b сон $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги ўнг (чап) лимити дейилади ва қуйидагича белгиланади:*

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=b \text{ ёки } f(a+0)=b$$

$$\left(\lim_{x\to a-0} f(x)=b \text{ ёки } f(a-0)=b\right).$$

Мисол. Ушбу $f(x)=\frac{|x|}{x}$ $(x\neq 0)$ функциянинг ноль нуқтадаги ўнг ва чап лимитларини топинг.

Нолга интилувчи турли $\{x_n'\}$ ва $\{x_n''\}$ кетма-кетликларни олайлик. Фараз қилайлик, $\{x_n'\}$ кетма-кетлик 0 нуқтага ўнгдан, $\{x_n''\}$ эса 0 нуқтага чапдан интилсин. У ҳолда бу кетма-кетликлар учун

$$f(x_n')=\frac{|x_n'|}{x_n'}, \quad f(x_n'')=\frac{|x_n''|}{x_n''}$$

бўлиб, соннинг абсолют қиймати таърифига кўра

$$f(x_n')=\frac{x_n'}{x_n'}=1, \quad f(x_n'')=-\frac{x_n''}{x_n''}=-1$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \frac{|x|}{x} = 1 ,$$

$$\lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{x\to-0} \frac{|x|}{x} = -1 .$$

8-таъриф (Коши таърифи). *Агар* $\forall\varepsilon>0$ *сон учун шундай* $\delta>0$ *сон топилсаки, аргумент x нинг тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида* $|f(x)-b|<\varepsilon$ *тенгсизлик бажарилса, b сон* $f(x)$ *функциянинг a нуқтадаги ўнг (чап) лимити дейилади ва қуйидагича белгиланади:*

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=b \text{ ёки } f(a+0)=b$$

$$\left(\lim_{x\to a-0} f(x)=b \text{ ёки } f(a-0)=b\right)$$

Мисол. Ушбу $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ функциянинг o нуқтадаги ўнг лимитини топинг.

Ихтиёрий $E>0$ сон учун $\delta=\frac{1}{E^2}$ деб олинса, у ҳолда $0<x<\delta$ тенгсизлик бажарилишидан $\frac{1}{\sqrt{x}}>E$ тенгсизлик келиб чиқади.

Демак,

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty .$$

$$a<x<a+b \quad (a-b<x<a)$$

Функция лимити, функциянинг ўнг ва чап лимитлари таърифларидан бевосита қуйидаги теоремага келамиз:

2-теорема. ***Агар*** $f(x)$ ***функция бирор a нуқтада b лимитга эга бўлса, бу функция шу нуқтада ўнг ва чап лимитларга эга бўлиб,***

$$f(a+0)=f(a-0)=b$$

муносабат ўринли, ва аксинча, агар $f(x)$ ***функция a нуқтада ўнг ва чап лимитларга эга бўлиб, бу лимитлар ўзаро тенг (b га тенг) бўлса, у ҳолда бу нуқтада функция лимитга эга ва бу лимит ҳам b га тенг бўлади.***

Энди $x\to\infty$ ($x\to+\infty$; $x\to-\infty$) да функция лимити тушунчасини келтирамиз.

9-таъриф (Гейне таърифи). *Агар X тўпламнинг нуқталаридан тузилган ҳар қандай чексиз катта (мусбат чексиз катта; манфий чексиз катта)* $\{x_n\}$ *кетма-кетлик олинганда ҳам мос* $\{f(x_n)\}$ *кетма-кетлик ягона b га интилса, b сон* $f(x)$ *функциянинг* $x\to\infty$ *даги* ($x\to+\infty$; $x\to-\infty$) *лимити дейилади ва*

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=b \ \left(\lim_{x\to+\infty} f(x)=b;\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=b\right)$$

каби белгиланади.

Мисол. Ушбу $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-7}{3x^2+11}=\frac{1}{3}$ тенгликнинг ўринли эканлигини кўрсатинг.

$\{x_n\}$ ихтиёрий чексиз катта кетма-кетлик бўлсин. У ҳолда функция қийматларидан иборат кетма-кетлик

$f(x_n)=\frac{x_n^2+2x_n-7}{3x_n^2+11}$ бўлади. Чекли лимитга эга бўлган кетма-кетликлар устидаги арифметик амаллардан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2+2x_n-7}{3x_n^2+11}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x_n}-\frac{7}{x_n^2}}{3+\frac{11}{x_n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{x_n}-\frac{7}{x_n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{11}{x_n^2}\right)}=\frac{1}{3}.$$

Демак,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-7}{3x^2+11}=\frac{1}{3}.$$

10-таъриф (Қоши таърифи). *Агар* $\forall\varepsilon>0$ *сон учун шундай* Δ *сон топилсаки,* x *аргументнинг* $|x|>\Delta$ $(x>\Delta; -x>\Delta)$ *тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида* $|f(x)-b|<\varepsilon$ *тенгсизлик бажарилса,* b *сон* $f(x)$ *функциянинг* $x\to\infty$ $(x\to+\infty;\ x\to-\infty)$ *даги лимити дейилади ва*

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=b\quad(\lim_{x\to+\infty}f(x)=b;\quad\lim_{x\to-\infty}f(x)=b)$$

каби белгиланади.

Мисол. Ушбу $f(x)=\frac{x^2+1}{2x^2-1}$ функциянинг $x\to\infty$ даги лимити $\frac{1}{2}$ га тенг эканлигини кўрсатинг.

Агар ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун $\Delta=\sqrt{\frac{3}{4\varepsilon}+\frac{1}{2}}$ деб олинса, у ҳолда $|x|>\Delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x ларда

$$\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{x^2+1}{2x^2-1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$$

бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $\left|\frac{x^2+1}{2x^2-1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{2x^2+2-2x^2+1}{2(2x^2-1)}\right|=\frac{3}{2(2x^2-1)}$

бўлиб, $\frac{3}{2(2x^2-1)} < \varepsilon$ тенгсизликдан $x^2 > \frac{3}{4\varepsilon} + \frac{1}{2}$, $|x| > \sqrt{\frac{3}{4\varepsilon} + \frac{1}{2}}$ бўлишини топамиз. Демак, $\Delta = \sqrt{\frac{3}{4\varepsilon} + \frac{1}{2}}$.

2-§. Чекли лимитга эга бўлган функцияларнинг хоссалари

Чекли лимитга эга бўлган функциялар қатор хоссаларга эга бўлиб, бу хоссаларни ўрганишда асосан функция лимити таърифларидан фойдаланилади. Биз функция лимити учун Гейне таърифининг келтирилганини эътиборга олиб (функция лимитининг сонлар кетма-кетлигининг лимити сифати таърифланиши), ушбу параграфда келтириладиган хоссаларнинг баъзиларинигина исботлаймиз.

$f(x)$ функция x тўпламда берилган, a эса X нинг лимит нуқтаси бўлсин.

1°. Агар $f(x)$ функциянинг a нуқтада лимити мавжуд бўлса, бу лимит ягонадир.

2°. Агар $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ бўлиб, $b > p\,(b < q)$ бўлса, у ҳолда a нинг етарли кичик атрофидан олинган $x\,(x \neq a)$ нинг қийматларида $f(x) > p$ $(f(x) < q)$ бўлади.

3°. Агар $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \neq \infty$ бўлса, у ҳолда a нинг етарлича кичик атрофидан олинган x $(x \neq a)$ нинг қийматларида $f(x)$ функция чегараланган бўлади.

3°-хоссанинг исботи. Шартга кўра $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \neq \infty$. Функция лимитининг Коши таърифига кўра $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топиладики, аргумент x нинг $0 < |x-a| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида $|f(x) - b| < \varepsilon$, яъни $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Демак, x аргументнинг $0 < |x-a| < \delta$ $(a-\delta,\ a+\delta$ оралиқда) тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида $f(x)$ функциянинг қийматлари $(b-\varepsilon,\ b+\varepsilon)$ оралиқда бўлади. Бу эса функциянинг $(a-\delta,\ a+\delta)$ оралиқда чегараланганлигини кўрсатади.

$f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар X тўпламда берилган бўлиб, a нуқта X нинг лимит нуқтаси бўлсин.

4°. Агар

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = b_1, \quad \lim_{x\to a} f_2(x) = b_2$$

бўлиб, x аргументнинг $0 < |x-a| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $b_1 \leqslant b_2$ тенгсизлик ўринли бўлади.

5°. Агар x аргументнинг $0 < |x-a| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида

$$f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x)$$

тенгсизлик ўринли бўлиб, $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=b$ бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ — мавжуд ва у ҳам b га тенг.

6°. Агар $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=b_1$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=b_2$ бўлса, у ҳолда $f_1(x)\pm f_2(x)$, $f_1(x)\cdot f_2(x)$, $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ $(f_2(x)\neq 0.)$ функциялар ҳам лимитга эга ва

$$\lim_{x\to a}(f_1(x)\pm f_2(x))=b_1\pm b_2,$$

$$\lim_{x\to a}(f_1(x)f_2(x))=b_1\cdot b_2,$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{b_1}{b_2}(b_2\neq 0)$$

муносабатлар ўринли.

7°. Агар $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ мавжуд бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{x\to a}(k\cdot f(x))$ ҳам мавжуд ва у $k\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)$ га тенг (k — const), яъни

$$\lim_{x\to a}(k\cdot f(x))=k\cdot\lim_{x\to a} f(x).$$

8°. Агар $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ мавжуд ва чекли бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^m$ ҳам мавжуд $(m\in N)$ ва

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^m=[\lim_{x\to a} f(x)]^m$$

муносабат ўринли бўлади.

Фараз қилайлик $\{x\}$ тўпламда $t=\varphi(x)$ функция аниқланган ва бу функция қийматларидан иборат $\{t\}$ тўпламда $y=f(t)$ функция аникланган бўлиб, улар ёрдамида мураккаб $y=f(\varphi(x))$ функция ҳосил қилинган бўлсин.

9°. Агар 1) $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=c$ бўлиб, a нуқтанинг шундай $(a-\delta, a+\delta)$ атрофи мавжуд бўлсаки, бу атрофдан олинган барча x лар учун $\varphi(x)\neq c$ бўлса, 2) c нукта T тўпламнинг лимит нуқтаси бўлиб, $\lim\limits_{t\to c} f(t)=b$ бўлса, у ҳолда $x\to a$ да мураккаб функция $f(\varphi(x))$ лимитга эга ва

$$\lim_{x\to a} f(\varphi(x))=b$$

бўлади.

3- §. Чексиз кичик ва чексиз катта функциялар

X тўпламда $\alpha(x)$ функция берилган бўлиб, a нуқта X нинг лимит нуқтаси бўлсин.

11-таъриф. *Агар $x\to a$ да $\alpha(x)$ функциянинг лимити нолга тенг, яъни*

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0$$

бўлса, $\alpha(x)$ функция а нуқтада (ёки $x \to a$ да) чексиз кичик функция дейилади.

Масалан, $f(x)=\cos x$ $x \to \frac{\pi}{2}$ да, $\varphi(x)=x^2$ эса $x \to 0$ да чексиз кичик функция бўлади.

Агар X тўпламда берилган $f(x)$ функция $x \to a$ да чекли b лимитга эга бўлса, у ҳолда $\alpha(x)=f(x)-b$ функция $x \to a$ да чексиз кичик функция бўлади ва аксинча.

Ҳақиқатан ҳам

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = \lim_{x \to a} [f(x)-b]$$

бўлиб, чекли лимитга эга бўлган функциялар устидаги арифметик амалларга кўра (5°- хосса)

$$\lim_{x \to a} [f(x)-b] = \lim_{x \to a} f(x) - b = 0$$

бўлади.

Худди шунингдек $x=a$ нуқтада $f(x)-b$ чексиз кичик функция бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

экани кўрсатилади.

Юқорида айтилганлардан кўринадики, агар $f(x)$ функция $x \to a$ да чекли b лимитга эга бўлса, уни $f(x)=b+\alpha(x)$ кўринишда ифодалаш мумкин. Бунда $\alpha(x)$ чексиз кичик функция.

Энди X тўпламда берилган бирор $\beta(x)$ функцияни қарайлик.

12- таъриф. *Агар $x \to a$ да $\beta(x)$ функциянинг лимити ∞, яъни*

$$\lim_{x \to a} \beta(x) = \infty$$

бўлса, $\beta(x)$ функция $x \to a$ да чексиз катта функция деб аталади.

Масалан, $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ функция $x \to 1$ да, $\varphi(x)=e^{\frac{1}{x^2}}$ функция эса $x \to 0$ да чексиз катта функция бўлади.

Чексиз кичик ва катта функциялар куйидаги хоссаларга эга.

1°. Чекли сондаги чексиз кичик функцияларнинг йиғиндиси ва кўпайтмаси чексиз кичик функция бўлади.

2°. Чегараланган функция билан чексиз кичик функциянинг кўпайтмаси чексиз кичик функция бўлади.

3°. Агар $\alpha(x)$ $(\alpha(x) \neq 0)$ чексиз кичик функция бўлса, $\frac{1}{\alpha(x)}$ чексиз катта функция бўлади.

4°. Агар $\beta(x)$ чексиз катта функция бўлса, $\frac{1}{\beta(x)}$ чексиз кичик функция бўлади.

4- §. Функцияларни таққослаш

Фараз қилайлик, X тўпламда $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ функциялар берилган бўлиб,

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0,$$

$$\lim_{x\to a}\beta(x)=0$$

бўлсин (a нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси).

Ушбу

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \tag{1}$$

лимитни қараймиз.

1°. Агар (1) лимит 0 га тенг бўлса, у ҳолда $x\to a$ да $\alpha(x)$ функция $\beta(x)$ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик функция дейилади ва $\alpha(x)=o(\beta(x))$ каби белгиланади.

2°. Агар (1) лимит 0 дан фарқли чекли сонга тенг бўлса, у ҳолда $x\to a$ да $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ бир хил тартибли чексиз кичик функциялар дейилади.

3°. Агар (1) лимит 1 га тенг бўлса, у ҳолда $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ функциялар $x\to a$ да эквивалент дейилади ва $\alpha(x)\sim\beta(x)$ каби белгиланади.

Қуйидаги хоссалар бевосита таърифдан келиб чиқади.

а) $o(\beta)\pm o(\beta)=o(\beta)$;

б) Агар $\gamma=o(\beta)$ бўлса, $o(\beta)\pm o(\gamma)=o(\beta)$;

в) Агар $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ функциялар $x\to a$ да ихтиёрий чексиз кичик функциялар бўлса, у ҳолда $\alpha\cdot\beta=o(\alpha)$ ва $\alpha\cdot\beta=o(\beta)$ бўлади.

5- §. Функция лимити мавжудлигига оид теоремалар

Биз юқорида чекли лимитга эга бўлган функциянинг хоссаларини ўргандик. Ушбу параграфда эса функция лимити мавжудлиги масаласи билан шуғулланамиз. Аввало бу масалани монотон функциялар учун ҳал этамиз.

$f(x)$ функция X тўпламда берилган бўлиб, a нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси ҳамда $\forall\ x\in X$ учун $x\leqslant a$ бўлсин.

3-теорема. ***Агар $f(x)$ функция X тўпламда ўсувчи (камаювчи) бўлиб, юқоридан (қуйидан) чегараланган бўлса, а нуқтада чекли лимитга эга бўлади.***

Исбот. $f(x)$ функция X тўпламда ўсувчи бўлиб, юқоридан чегараланган бўлсин. У ҳолда $\{f(x)\}=\{f(x):x\in X\}$ тўпламнинг аниқ юқори чегараси мавжуд бўлади. Фараз қилайлик, $\sup\{f(x)\}=b$ бўлсин. У ҳолда аниқ юқори чегара хоссасига кўра

1°. $\forall x\in X$ учун $f(x)\leqslant b$.

2°. $\forall\varepsilon>0,\ \exists x'\in X,\ f(x')>b-\varepsilon$

муносабатлар ўринли бўлади.

Қаралаётган функция ўсувчи бўлгани учун $x' < x$ ларда $f(x') < < f(x)$ тенгсизлик ўринлидир. Энди $b - \varepsilon < f(x')$ ва $f(x) < b$ эканлигини эътиборга олсак

$$b - \varepsilon < f(x') < f(x) < b + \varepsilon$$

тенгсизликлар ҳосил бўлади. Бу эса b сон $f(x)$ функциянинг лимити эканини ифодалайди.

$f(x)$ функция X тўпламда берилган ва a нукта X нинг лимит нуқтаси бўлсин.

13-таъриф. *Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, аргумент x нинг $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий x'* ва *x'' $(x' \in X,\ x'' \in X)$ қийматларида $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция учун a нуқтада Коши шарти бажарилади дейилади.*

4-теорема (Коши теоремаси). ***$f(x)$ функция a нуқтада чекли лимитга эга бўлиши учун, бу функция a нуқтада Коши шартини қаноатлантириши зарур ва етарли.***

Мисоллар. 1. $f(x) = x\cos^2\frac{1}{x}$ функция учун $x = 0$ нуктада Коши шарти бажарилишини кўрсатинг. $\forall \varepsilon > 0$ сон берилган бўлсин. Бу $\varepsilon > 0$ га кўра δ ни $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ деб олинса, у ҳолда x нинг

$$0 < |x' - 0| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 < |x'' - 0| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий x', x'' қийматлари учун қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлади:

$$|f(x'') - f(x')| = |x''\cos^2\frac{1}{x''} - x'\cos^2\frac{1}{x'}| \leqslant |x''\cos^2\frac{1}{x''}| + |x'\cos^2\frac{1}{x'}| \leqslant$$

$$\leqslant |x''| + |x'| < \varepsilon.$$

Бу эса қаралаётган функция учун $x = 0$ нуктада Коши шарти бажарилишини кўрсатади.

2. $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ функция учун $x = 0$ нуктада Коши шарти бажарилмаслигини кўрсатинг.

$\forall \varepsilon > 0$ сон учун $x = 0$ нукта атрофида $x' = \frac{1}{n\pi}$, $x'' = \frac{2}{(4n+1)\pi}$ нуқталар оламиз. Бу нуқталар учун $|x' - x''| < \delta$, $|f(x'') - f(x')| = = |\sin\frac{(4n+1)\pi}{2} - \sin n\pi| = 1$ экани равшан. Энди $0 < \varepsilon < 1$ лар учун Коши шартининг бажарилмаслигини кўриш қийин эмас.

Ушбу параграф якунида келажакда кўп фойдаланиладиган айни пайтда муҳим бўлган иккита функция лимитини келтирамиз.

1. Ушбу $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ тенгликни исботланг.

Равшанки, $0<x<\frac{\pi}{2}$ $(-\frac{\pi}{2}<x<0)$ оралиқдан олинган ихтиёрий x ларда $0<\sin x<x<\operatorname{tg} x$ тенгсизликлар ўринлидир.

Энди $\sin x<x<\operatorname{tg} x$ тенгсизликларни $\sin x$ га бўлиб, $1<\frac{x}{\sin x}<$ $<\frac{1}{\cos x}$ ва ундан $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$ бўлишини топамиз. Натижада

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x$$

тенгсизликларга эга бўламиз.

Энди $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$ ва $0<x<\frac{\pi}{2}$ да $\sin^2\frac{x}{2}<\sin\frac{x}{2}$ эканини эътиборга олсак,

$$1-\cos x<2\sin\frac{x}{2}<2\cdot\frac{x}{2}=x$$

муносабат ўринли бўлишини топамиз. Демак, ихтиёрий $0<x<\frac{\pi}{2}$ да $0<1-\frac{\sin x}{x}<x$ тенгсизликлар ўринли.

Энди $\forall\ \varepsilon>0$ учун δ сифатида ε ва $\frac{\pi}{2}$ сонларининг кичиги олинса, аргумент x нинг $0<x<\frac{\pi}{2}$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида $|\frac{\sin x}{x}-1|<x<\varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади. Бу эса таърифга кўра

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1$$

эканини билдиради.

$f(x)=\frac{\sin x}{x}$ функция учун $f(-x)=f(x)$ тенгликнинг бажарилишини, яъни $\frac{\sin x}{x}$ функциянинг жуфт эканлигини кўриш қийин эмас. Демак,

$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=1$$

тенглик ҳам ўринли бўлади. 2-теоремага асосан $x=0$ нуқтада $\frac{\sin x}{x}$ функциянинг лимити мавжуд ва у 1 га тенг.

2. Ушбу

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e,$$

тенглик ўринли бўлишини кўрсатинг.

Биз $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$ эканлигини кўрган эдик (қаралсин, 17-боб, 2-§).

Фараз қилайлик, $x>1$ бўлсин. x нинг бутун қисмини n орқали белгиласак, у ҳолда $n\leqslant x<n+1$ бўлиб, бундан эса $\frac{1}{n+1}<x\leqslant\frac{1}{n}$ тенгсизликларга эга бўламиз. Бу тенгсизликлардан

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (2)$$

тенгсизликлар келиб чиқади.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=e,\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$$

ҳамда (2) тенгсизликлардан фойдаланиб чекли лимитга эга бўлган функция хоссаларига кўра (5°- хосса) $x\to+\infty$ $(n\to\infty)$ да

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

тенгликка эга бўламиз.

Энди $x<-1$ бўлсин. $x=-y$ белгилаш киритсак, у ҳолда:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=e\cdot 1=e$$

бўлади.

Демак,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

бўлади.

Натижа. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ тенглик ўринлидир.

Ҳақиқатан ҳам $\frac{1}{x}=y$ белгилаш натижасида

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y$$

бўлиб, $\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=e$ муносабатдан $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ келиб чиқади.

6- §. Функция лимитини ҳисоблашга оид мисоллар

Ушбу лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{x\to0}\left(10\sin^2x+\cos^2x+\frac{x-1}{3x+2}\right).$$

Аввало

$$f_1(x)=10\sin^2x,\quad f_2(x)=\cos^2x,\quad f_3=\frac{x-1}{3x+2}$$

функцияларнинг $x\to0$ да лимитларини топамиз.

$$\lim_{x\to0} f_1(x)=\lim_{x\to0}(10\sin^2x)=10\left[\lim_{x\to0}\sin x\right]^2=0,$$

$$\lim_{x\to0} f_2(x)=\lim_{x\to0}\cos^2x=\left[\lim_{x\to0}\cos x\right]^2=1,$$

$$\lim_{x\to0} f_3(x)=\lim_{x\to0}\frac{x-1}{3x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to0}(x-1)}{\lim\limits_{x\to0}(3x+2)}=-\frac{1}{2}.$$

Энди, чекли лимитга эга бўлган функцияларнинг хоссаларидан фойдаланамиз.

Натижада:

$$\lim_{x\to0}\left(10\sin^2x+\cos^2x+\frac{x-1}{3x+2}\right)=\lim_{x\to0}10\sin^2x+\lim_{x\to0}\cos^2x+$$
$$\lim_{x\to0}\frac{x-1}{3x+2}=0+1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

2. Ушбу $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$ лимитни топинг.

Аввало $\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$ функцияни куйидагича ўзгартирамиз:

$$\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)}=$$
$$=\frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3}=\frac{(1+2x-9)(\sqrt{1+2x}+3)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=$$
$$=\frac{2(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\frac{2(\sqrt{1+2x}+3)}{\sqrt{x}+2}.$$

Энди $\lim\limits_{x\to4}\frac{2(\sqrt{1+2x}+3}{\sqrt{x}+2}$ ни ҳисоблаймиз:

$$\lim_{x\to4}\frac{2(\sqrt{1+2x}+3)}{\sqrt{x}+2}=\frac{2(3+3)}{2+2}=3.$$

Демак, $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=3.$

3. Ушбу $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^n-1}{x}$, $n\in N$, лимитни топинг.

Аввало $(1+x)^n$ ни Ньютон биноми формуласи бўйича ёямиз:

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+$$
$$+\ldots+x^n.$$

У ҳолда

$$\frac{(1+x)^n-1}{x}=\frac{1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots+x^n-1}{x}=n+\frac{n(n-1)}{2!}x+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^2+\ldots+x^{n-1}.$$

Энди берилган лимитни ҳисоблаймиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left[n+\frac{n(n-1)}{2!}x+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^2+\ldots+x^{n-1}\right]=n.$$

Ушбу $[f(x)]^{g(x)}$ кўринишдаги функция *даражали-кўрсаткичли функция* дейилади.

Лимит ҳисоблашга оид қатор мисолларда даражали-кўрсаткичли функцияларнинг лимитини топишга оид қуйидаги қоидадан фойдаланилади:

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар X тўпламда берилган бўлиб, a нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

Агар $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b,\quad \lim\limits_{x\to a} g(x)=c$

бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=b^c$$

бўлади.

4. Ушбу $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x^2-a^2}}$ лимитни топинг.

$\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x^2-a^2}}$ ифоданинг кўринишини ўзгартирамиз:

$$\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x^2-a^2}}=\left(1+\frac{\sin x}{\sin a}-1\right)^{\frac{1}{x^2-a^2}}=\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x^2-a^2}}=$$

$$=\left(1+\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cdot\cos\frac{x+a}{2}}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x^2-a^2}}=$$

$$=\left(1+\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cdot\cos\frac{x+a}{2}}{\sin a}\right)^{\frac{1}{(x-a)(x+a)}\cdot\frac{\sin a}{2\sin\frac{x-a}{2}\cdot\cos\frac{x+a}{2}}\cdot\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cdot\cos\frac{x+a}{2}}{\sin a}}$$

Энди даражали-кўрсаткичли функция лимити ҳамда

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

тенгликлардан фойдаланамиз. Натижада

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x^2-a^2}}=e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}\cdot\cos\frac{x+a}{2}}{\frac{x-a}{2}(x+a)\sin a}}=e^{\frac{1}{2a}\operatorname{ctg} a}$$

ҳосил бўлади.

Агар $f(x)=x$ бўлса, $f'(x)=1$ бўлади. Унда бир томондан (7) формулага кўра $df(x)=f'(x)\Delta x=\Delta x$, иккинчи томондан эса $df(x)=dx$ бўлиб, $\Delta x=dx$ бўлади. Натижада функция дифференциали учун $df(x)=f'(x)dx$ ифодани топамиз. Бу муносабатдан ҳамда ҳосилалар жадвалидан фойдаланиб функцияларнинг дифференциаллари учун ушбу формулаларга келамиз:

1°. $y=x^{\mu}\,(x>0)$ бўлса, $dy=\mu x^{\mu-1}dx$ бўлади;

2°. $y=a^{x}\,(a>0,\ a\neq 1)$ бўлса, $dy=a^{x}\ln a\,dx$ бўлади;

3°. $y=\log_a x\,(x>0,\ a>0,\ a\neq 1)$ бўлса, $dy=\frac{1}{x}\log_a e\,dx$ бўлади;

4°. $y=\sin x$ бўлса, $dy=\cos x\,dx$ бўлади;

5°. $y=\cos x$ бўлса, $dy=-\sin x\,dx$ бўлади;

6°. $y=\operatorname{tg} x$ бўлса, $dy=\frac{1}{\cos^2 x}dx$ бўлади;

7°. $y=\operatorname{ctg} x$ бўлса, $dy=-\frac{1}{\sin^2 x}dx$ бўлади;

8°. $y=\arcsin x$ бўлса, $dy=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ бўлади;

9°. $y=\arccos x$ бўлса, $dy=-\frac{1}{1-x^2}dx$ бўлади;

10°. $y=\operatorname{arctg} x$ бўлса, $dy=\frac{1}{1+x^2}dx$ бўлади;

11°. $y=\operatorname{arcctg} x$ бўлса, $dy=-\frac{1}{1+x^2}dx$ бўлади;

12°. $y=\operatorname{sh} x$ бўлса, $dy=\operatorname{ch} x\,dx$ бўлади;

13°. $y=\operatorname{ch} x$ бўлса, $dy=\operatorname{sh} x\,dx$ бўлади.

Фараз қилайлик, $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар $(a,\ b)$ интервалда берилган бўлиб, $x\in(a,\ b)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда $f(x)\pm\varphi(x)$, $f(x)\cdot\varphi(x)$, ҳамда $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ $(\varphi(x)\neq 0)$ функциялар ҳам шу x нуқтада дифференциалланувчи ва

$$d[(f(x)\pm\varphi(x)]=df(x)\pm d\varphi(x),$$

$$d[f(x)\cdot\varphi(x)]=\varphi(x)df(x)+f(x)d\varphi(x),$$

$$d\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]=\frac{\varphi(x)df(x)-f(x)d\varphi(x)}{\varphi^2(x)}\quad(\varphi(x)\neq 0)$$

бўлади.

Бу тасдиқларнинг исботи ҳосилани ҳисоблашдаги содда қоидалар ҳамда юқоридаги (7) формуладан бевосита келиб чиқади.

Мисоллар. 1. Ушбу $y=x^3-3^x$ функциянинг дифференциалини топинг.

Бу функциянинг дифференциали қуйидагича топилади:

$$dy=d(x^3-3^x)=dx^3-d3^x=(x^3)'dx-(3^x)'dx=$$
$$=3x^2dx-3^x\ln 3dx=(3x^2-3^x\ln 3)\,dx.$$

2. Ушбу

$$y = \cos\frac{x}{3} + \sin\frac{3}{x}$$

функциянинг дифференциалини топинг:

$$dy = d\left(\cos\frac{x}{3} + \sin\frac{3}{x}\right) = \left(\cos\frac{x}{3} + \sin\frac{3}{x}\right)' dx =$$

$$= \left[-\sin\frac{x}{3}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)' + \cos\frac{3}{x}\cdot\left(\frac{3}{x}\right)'\right]dx = -\left(\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3} + \frac{3}{x^2}\cos\frac{3}{x}\right)dx\,.$$

Функциянинг дифференциалидан унинг кийматларини такрибий ҳисоблашда фойдаланилади. Такрибий ҳисоблаш формуласи куйидаги содда теоремадан келиб чиқади.

7-теорема. *Агар $y=f(x)$ функция (a, b) да берилган бўлиб, $x\in(a, b)$ нуқтада чекли $f'(x)\neq 0$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dy} = 1$$

бўлади.

Исбот. $y=f(x)$ функция $x\in(a, b)$ нуқтада чекли $f'(x)\neq 0$ ҳосилага эга бўлсин. У ҳолда

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$
$$dy = f'(x)\,dx = f'(x)\Delta x,$$

бунда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x) = 0$. Бу тенгликларни эътиборга олиб топамиз:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta y}{f'(x)\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(1 + \frac{1}{f'(x)}\cdot\alpha(\Delta x)\right) = 1 + \frac{2}{f'(x)}\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x) = 1\,.$$

Теорема исбот бўлди.

Бу теоремада аргумент орттирмаси Δx етарлича кичик бўлганда $\frac{\Delta y}{dy}\approx 1$ бўлиши келиб чиқади. Кейинги такрибий формулани

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \qquad (8)$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин. Бу формуладан функцияларнинг кийматларини такрибий ҳисоблашда фойдаланилади.

Мисол. Ушбу $\sqrt[4]{17}$ микдорни такрибий ҳисобланг.

Бу микдорни $f(x) = \sqrt[4]{x}$ функциянинг $x_1 = 17$ нуктадаги киймати деб караш мумкин. Агар $x_0 = 16$ деб олсак, унда $\Delta x = x_1 - x_0 = 1$ бўлиб, (8) формулага кўра $\sqrt[4]{17} \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x$ бўлади.

Равшанки,

$$f(x_0) = \sqrt[4]{16} = 2\,,$$

$$f'(x) = \left(\sqrt[4]{x}\right)' = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}, \quad f'(x_0) = \frac{1}{4}(16)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{32}$$

Демак, $\sqrt[4]{17} \approx 2 + \frac{1}{32}\cdot 1 = \frac{65}{32} \approx 2{,}031$.

Параметрик кўринишда берилган функцияларни дифференциаллаш. $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ функциялар бирор (α, β) интервалда берилган бўлиб, бу ораликда $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ ҳосилаларга эга ҳамда $x=\varphi(t)$ функцияга тескари $t=\varphi^{-1}(x)$ функция мавжуд бўлсин. У ҳолда $y=\psi(t)$ функция ўзгарувчи (параметр) $t=\varphi^{-1}(x)$ ёрдамида $y=\psi(\varphi^{-1}(x))$ кўринишга келади. Одатда функциянинг бу кўриниши унинг параметрик кўриниши дейилади ва $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ каби ифодаланади. Энди параметрик кўринишда берилган функциянинг ҳосиласини топамиз:

Маълумки, $y'(x)=\frac{dy}{dx}$. Энди $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ бўлгани учун

$dy=\psi'(t)dt$, $dx=\varphi'(t)dt$ бўлиб, $y'(x)=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ бўлади.

6- §. Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар

$y=f(x)$ функция (a, b) интервалда берилган ихтиёрий $x\in(a,b)$ нуқтада $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Бу $f'(x)$ ҳам, умуман айтганда, x ўзгарувчининг функцияси бўлиб, унинг ҳосиласини қараш мумкин.

$y=f(x)$ функция *ҳосиласи* $f'(x)$ *нинг ҳосиласи* берилган $f(x)$ *функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи* дейилади ва

$$y'', \text{ ёки } f''(x), \text{ ёки } \frac{d^2f}{dx^2}$$

каби белгиланади. Демак,

$$f''(x)=(f'(x))'.$$

$y=f(x)$ функциянинг учинчи, тўртинчи ва ҳоказо тартибдаги ҳосилалари худди юқоридагидек киритилади.

Умуман, $y=f(x)$ функция $(n-1)$- тартибли ҳосиласи $f^{(n-1)}(x)$ нинг ҳосиласи берилган $f(x)$ *функциянинг* n*- тартибли ҳосиласи* дейилади. Демак,

$$f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))', \quad \left(\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)\right).$$

$y=f(x)$ функциянинг $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{(IV)}(x)$, ... ҳосилалари унинг *юқори тартибли ҳосилалари* дейилади.

Функциянинг юқори тартибли ҳосилаларидан фаннинг, техниканинг турли соҳаларида фойдаланилади. Масалан, ҳаракатдаги жисмнинг оний тезланишини топиш ҳаракат қонунини ифодаловчи функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топиш билан ҳал этилади.

Мисол. Ушбу $y=x\cdot e^x$ функциянинг учинчи тартибли ҳосиласини топинг.

Берилган функциянинг учинчи тартибли ҳосиласи қуйидагича топилади:

$$y'=(x\cdot e^x)'=1\cdot e^x+xe^x=(1+x)e^x,$$
$$y''=(y')'=[(1+x)e^x)'=1\cdot e^x+(1+x)\cdot e^x=(2+x)e^x$$
$$y'''=(y'')'=[(2+x)e^x)'=1\cdot e^x+(2+x)e^x=(3+x)e^x$$

Функциянинг юқори тартибли ҳосилаларини топиш учун унинг ҳамма олдинги тартибли ҳосилаларини ҳисоблаш керак бўлади. Бироқ, айрим функцияларнинг n-тартибли ҳосилаларини бир йўла топиш имконини берадиган формулалар мавжуд. Биз қуйида бундай формулаларни келтириб чиқарамиз.

1°. $y=x^\mu (x>0)$ бўлсин. Равшанки,

$$y'=\mu x^{\mu-1},$$
$$y''=(y')'=(\mu x^{\mu-1})'=\mu(\mu-1)x^{\mu-2},$$
$$y'''=(y'')'=(\mu(\mu-1)x^{\mu-2})'=\mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3}$$

Бу муносабатлардан ихтиёрий $n\in N$ учун

$$y^{(n)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)x^{\mu-n}$$

бўлишини кўриш қийин эмас (Бу формуланинг тўғрилиги математик индукция усули ёрдамида исботланади).

Хусусан, $\mu=-1$ бўлганда $y=\frac{1}{x}$ бўлиб, унинг n-тартибли ҳосиласи $y^{(n)}=\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)(-2)\ldots(-n)x^{-1-n}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ бўлади.

2°. $y=a^x (a>0,\ a\neq 1)$ бўлсин. Бу функциянинг юқори тартибли ҳосилаларини бирин-кетин ҳисоблаймиз:

$$y'=a^x\ln a,$$
$$y''=(a^x\ln a)'=a^x\ln^2 x,$$
$$y'''=(a^x\ln^2 a)=a^x\ln^3 a.$$

. . . .

$$y^{(n)}=a^x\ln^n a$$

Кейинги тенгликнинг ўринлилиги математик индукция усули ёрдамида кўрсатилади.

Хусусан, $y=e^x$ бўлса, унинг n-тартибли ҳосиласи $y^{(n)}=e^x$ бўлади.

3°. $y=\sin x$ бўлсин. Бу функциянинг юқори тартибли ҳосилаларини бирин-кетин ҳисоблаймиз:

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''=(\cos x)'=-\sin x=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''' = (-\sin x) = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y^{IV} = (-\cos x)' = \sin x = \sin\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

. . . .

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \pi \frac{\pi}{2}\right).$$

Кейинги тенгликнинг ўринлилиги математик индукция усули ёрдамида кўрсатилади.

Энди икки функция йиғиндиси, айирмаси хамда кўпайтмасининг юкори тартибли хосилаларини топиш коидаларини келтирамиз.

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар (a, b) интервалда берилган бўлиб, $x \in (a,b)$ нуктада n- тартибли $f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$ хосилаларга эга бўлсин. У холда ушбу муносабатлар ўринли:

а) $[c \cdot f(x)]^{(n)} = c \cdot f^{(n)}(x)$, c — const;

б) $[f(x) + g(x)]^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$; (9)

в) $[f(x) \cdot g(x)]^{(n)} = f^{(n)}(x) g(x) + C_n^1 f^{(n-1)}(x)\, g'(x) + \ldots +$
$+ C_n^k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) + \ldots + f(x) \cdot g^{(n)}(x)$,

бунда

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Бу тенгликларнинг бирини, масалан в) сини математик индукция усулидан фойдаланиб исботлаймиз.

Маълумки, $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) g'(x)$ тенглик ўринли. Демак, в) тенглик $n = 1$ да тўғри.

Фараз килайлик, в) формула $n = k$ бўлганда тўғри бўлсин:

$$[f(x) \cdot g(x)]^{(k)} = f^{(k)}(x) g(x) + C_k^1 f^{(k-1)}(x) g'(x) + \ldots + f(x) g^{(k)}(x). \quad (10)$$

Энди в) тенгликнинг $n = k + 1$ учун тўғрилигини кўрсатамиз.

Таърифга кўра

$$[f(x) g(x)]^{(k+1)} = ([f(x) g(x)]^{(k)})'$$

бўлади.

Юкоридаги (10) муносабатдан фойдаланиб топамиз:

$$[f(x) \cdot g(x)]^{(k+1)} = [f^{(k)}(x) g(x) + C_k^1 f^{(k-1)}(x) g'(x) +$$
$$+ \ldots + C_k^i f^{(k-i)}(x) g^{(i)}(x) + \ldots + f(x) g^{(k)}(x)]' =$$
$$= f^{(k+1)}(x) g(x) + f^{(k)}(x) g'(x) + C_k^1 f^{(k)}(x) g'(x) +$$
$$+ C_k^1 f^{(k-1)}(x) g''(x) + \ldots + C_k^i f^{(k-i+1)}(x) g^{(i)}(x) +$$
$$+ C_k^i f^{(k-1)}(x) \cdot g^{(i+1)}(x) + \ldots + f'(x) g^{(k)}(x) + f(x) \cdot g^{(k+1)}(x) =$$
$$= f^{(k+1)}(x) g(x) + (C_k^0 + C_k^1) f^{(k)}(x) g'(x) + \ldots +$$
$$+ (C_k^i + C_k^{i-1}) f^{(k-i+1)}(x) \cdot g^{(i)}(x) + \ldots + f(x) g^{(k+1)}(x).$$

Агар $C_k^i + C_k^{i-1} = C_{k+1}^i$ тенгликни эътиборга олсак, у ҳолда ушбу

$$[f(x)\cdot g(x)]^{(k+1)} = f^{(k+1)}(x)g(x) + C_{k+1}^1 f^{(k)}(x)g'(x) +$$
$$+ \dots + f(x)\cdot g^{(k+1)}(x)$$

формулага эга бўламиз. Бу эса в) формуланинг $n = k+1$ да тўғрилигини билдиради. Демак, в) формула барча n лар учун тўғридир.

Одатда бу формула *Лейбниц формуласи* дейилади.

Мисол. Ушбу $y = x^2e^x$ функциянинг 100- тартибли ҳосиласини ҳисобланг.

$f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$ деб, сўнг Лейбниц формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$y^{(100)} = (e^x)^{(100)}x^2 + C_{100}^1(e^x)^{(99)}(x^2)' + C_{100}^2(e^x)^{98}(x^2)'' =$$
$$= x^2e^x + 200xe^x + 100\cdot 99e^x.$$

$f(x)$ функция $x \in (a, b)$ нуктада иккинчи тартибли $f''(x)$ ҳосилага эга бўлсин.

5-таъриф. *$f(x)$ функция дифференциали dy нинг $x \in (a,b)$ нуқтадаги дифференциали функциянинг иккинчи тартибли дифференциали деб аталади ва $d^2f(x)$ ёки d^2y каби белгиланади.*

Демак, $d^2y = d(dy)$ ёки $d^2f(x) = d(df(x))$.

Дифференциаллаш қоидасига кўра:

$$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = dxd(y') = dx(y')'dx = y''(dx)^2.$$

Шундай қилиб, функциянинг иккинчи тартибли дифференциали унинг иккинчи тартибли ҳосиласи орқали қуйидагича ёзилади:

$$d^2y = y''dx^2 \quad (dx^2 = dxdx = (dx)^2).$$

Функциянинг учинчи, тўртинчи ва ҳоказо тартибдаги дифференциаллари худди шунга ўхшаш таърифланади.

Умуман $f(x)$ функция $x \in (a, b)$ нуктада n- тартибли $f^{(n)}(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Функциянинг $(n-1)$- тартибли дифференциали $d^{(n-1)}y$ дан олинган дифференциал $f(x)$ функциянинг x нуктадаги n- тартибли дифференциали деб аталади ва d^ny ёки $d^nf(x)$ каби белгиланади.

Демак,

$$d^ny = d(d^{n-1}y).$$

Юқоридагидек бу ҳолда ҳам функциянинг n- тартибли дифференциалини унинг n- тартибли ҳосиласи оркали

$$d^ny = y^{(n)}dx^n$$

кўринишда ёзилишини математик индукция усули ёрдамида кўрсатиш мумкин.

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар (a, b) интервалда берилган бўлиб, улар $x \in (a, b)$ нуктада n- тартибли $d^nf(x)$, $d^ng(x)$ дифференциалларга эга бўлсин. У ҳолда ушбу формулалар ўринли бўлади:

а) $[c \cdot f(x)] = cd^n f(x)$; c — const;

b) $d^n[f(x) \pm g(x)] = d^n f(x) \pm d^n g(x)$;

в) $d^n[f(x) \cdot g(x)] = d^n f(x) \cdot g(x) + C_n^1 d^{n-1} f(x) \cdot dg(x) + \ldots +$
$+ f(x) d^n g(x)$.

7- §. Дифференциал ҳисобнинг асосий теоремалар

Қуйида дифференциал ҳисобнинг асосий теоремалари аталувчи теоремаларни келтирамиз.

8-теорема (Ферма теоремаси). ***$f(x)$ функция (интервалда берилган бўлиб, у шу интервалнинг бирор c нуқта ўзининг энг катта (энг кичик) қийматига эришсин. Агар фун c нуқтада чекли ҳосилага эга бўлса, у ҳолда***

$$f'(c) = 0$$

бўлади.

Исбот. Айтайлик, $f(x)$ функция c нуктада ($c \in (a, b)$) ўзинин катта кийматига эришсин. Унда $\forall x \in (a, b)$ учун

$$f(x) \leqslant f(c),$$

яъни

$$f(x) - f(c) \leqslant 0$$

бўлади.

Қаралаётган функция c нуктада ҳосилага эга. Бинобарин нуктада функциянинг ўнг ҳосиласи мавжуд ва

$$f'(c+0) = \lim_{x \to c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0 \quad (x > c),$$

шунингдек чап ҳосиласи мавжуд ва

$$f'(c-0) = \lim_{x \to c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0 \quad (x < c)$$

бўлиб,

$$f'(c) = f'(c+0) = f'(c-0).$$

(11), (12) ва (13) муносабатлардан

$$f'(c) = 0$$

бўлиши келиб чикади. Функциянинг c нуктада энг кичик киймат бўлиб, унинг шу нуктада ҳосиласи мавжуд бўлганда $f'(c) = 0$ бў шунга ўхшаш кўрсатилади. Теорема исбот бўлди.

9-теорема (Ролль теоремаси). ***$f(x)$ функция $[a, b$ ментда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $f(a) = f(b)$ бўлсин.***

функция (a, b) интервалда чекли ҳосилага эга бўлса, у ҳолда шундай c нуқта $(c \in (a, b))$ топиладики,

$$f'(c) = 0$$

бўлади.

Исбот. Шартга кўра $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз. Бинобарин, функция шу сегментда ўзининг энг катта киймати M ва энг кичик киймати m га эришади $(M = \sup\{f(x)\}, m = \inf\{f(x)\}; x \in [a, b]$

1) $m = M$ бўлсин. Равшанки, бу ҳолда $f(x) = \text{const}$ бўлиб. $\forall c \in (a, b)$ нуктада $f'(c) = 0$ бўлади.

2) $m < M$ бўлсин. Бу ҳолда $f(a) = f(b)$ бўлгани сабабли $f(x)$ функция ўзининг энг катта қиймати M, энг кичик қиймати m ларнинг камида биттасига (a, b) нинг бирор c нуқтасида эришади. Ферма теоремасига асосан

$$f'(c) = 0$$

бўлади. Теорема исбот бўлди.

10-теорема (Лагранж теоремаси). ***$f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Агар функция (a, b) да чекли ҳосилага эга бўлса, у ҳолда шундай c нуқта $(c \in (a, b))$ топиладики,***

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

бўлади.

Исбот. Теоремани исботлаш учун қуйидаги ёрдамчи

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

функцияни тузамиз. Шартга кўра $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, (a, b) да $f'(x)$ хосилага эга бўлгани учун бу $\varphi(x)$ функция ҳам $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, (a, b) да

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad (14)$$

га эга бўлади.

Бевосита ҳисоблаб топамиз:

$$\varphi(a) = \varphi(b).$$

Демак, $\varphi(x)$ функция Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. У ҳолда шундай c нукта $(c \in (a, b))$ топиладики,

$$\varphi'(c) = 0 \qquad (15)$$

бўлади. (14) ва (15) тенгликлардан

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

11-теорема (Коши теоремаси). ***$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Агар бу функциялар (a, b) интервалда чекли ҳосилаларга эга бўлиб, $\forall x\in(a, b)$ учун $g'(x)\neq 0$ бўлса, у ҳолда шундай с нуқта $(c\in(a, b))$ топиладики***

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{16}$$

бўлади.

Исбот. (16) тенглик маъного эга бўлиши учун $g(b)\neq g(a)$ бўлиши керак. Бу эса теоремадаги $g'(x)\neq 0$, $(x\in(a, b))$ шартдан келиб чиқади.

Энди $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар ёрдамида

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]$$

функцияни тузайлик. Бу функция $[a, b]$ сегментда аникланган узлуксиз бўлиб, (a, b) да

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(x)$$

ҳосилага эга.

Сўнгра $F(x)$ функциянинг $x=a$, $x=b$ нукталардаги кийматларини хисоблаймиз:

$$F(a)=F(b)=0.$$

Демак, $F(x)$ функция $[a, b]$ сегментда Ролль теоремасининг барча шартларини каноатлантиради. Шунинг учун шундай c нукта $(a<c<b)$ топиладики, $F'(c)=0$ бўлади. Шундай килиб,

$$0=F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c).$$

Бундан эса (16) тенгликнинг ўринли экани келиб чикади. Теорема исбот бўлди.

8-§. Тейлор формуласи

$f(x)$ функция $x_0\in R$ нуктанинг бирор атрофи $U_\delta(x_0)=(x_0-\delta, x_0+\delta)$ да аникланган бўлиб, бу атрофда $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n+1)}(x)$ ҳосилаларга эга ва $f^{(n+1)}(x)$ ҳосила x_0 нуктада узлуксиз бўлсин. У ҳолда ушбу

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{17}$$

формула ўринли бўлади, бунда $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$. Бу формулани исботлаш учун, аввало куйидаги белгилашлар киритамиз:

$$\varphi(x, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

$$R_{n+1}(x) = f(x) - \varphi(x, x_0).$$

Агар

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

эканлигини кўрсатсак (17) формула исбот бўлади. $U_\delta(x_0)$ ораликда ихтиёрий x нуктани тайинлаймиз. Фараз килайлик $x > x_0$ бўлсин. $[x_0, x]$ ораликда ёрдамчи

$$F(t) = f(x) - \varphi(x, t) - \frac{(x-t)^{n+1} R_{n+1}(x)}{(x - x_0)^{n+1}}, \quad t \in [x_0, x]$$

функцияни карайлик.

$F(t)$ функция $[x_0, x]$ ораликда Ролль теоремасининг барча шартларини каноатлантиради:

1°. $F(t)$ функция $[x_0, x]$ ораликда узлуксиз ва дифференциалланувчи бўлиб,

$$F'(t) = -f'(t) + \frac{f'(t)}{1!} - \frac{f''(t)}{1!}(x - t) + \frac{f''(t)}{2!} 2(x - t) -$$

$$- \frac{f'''(t)}{3!}(x - t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!} n (x - t)^{n-1} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n +$$

$$+ \frac{(n+1)(x-t)^n R_{n+1}(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n + \frac{(n+1)(x-t)^n R_{n+1}(x)}{(x - x_0)^{n+1}} \tag{18}$$

2°. $t = x_0$ да

$$F(x_0) = f(x) - \varphi(x, x_0) - R_{n+1}(x) = R_{n+1}(x) - R_{n+1}(x) = 0,$$

$t = x$ да

$$F(x) = f(x) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(x - x) - \frac{f''(x)}{2!}(x - x)^2 -$$

$$- \ldots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x - x)^n - \frac{(x - x)^{n+1} R_{n+1}(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = 0$$

бўлади.

У холда Ролль теоремасига кўра шундай ξ нукта мавжудки, $x_0 < \xi < x$,

$$F'(\xi) = 0$$

бўлади.

(18) тенгликдан фойдалансак,

$$- \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n + \frac{(n+1)(x - \xi)^n R_{n+1}(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = 0$$

бўлиб, бундан эса

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^{n+1}$$

эканлиги келиб чиқади.

Одатда (17) формула *Тейлор формуласи*, $R_{n+1}(x)$ эса *қолдиқ ҳа* *(Лагранж кўриниши)* дейилади.

Энди $f^{(n+1)}(x)$ нинг x_0 нуктада узлуксизлигидан фойдаланамиз:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!(x-x_0)^n}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)=0.$$

Бу эса $x\to x_0$ да $R_{n+1}(x)=0((x-x_0))^n$ эканлигини билдиради.

$R_{n+1}(x)=0((x-x_0)^n)$ қолдиқ ҳаднинг *Пеано кўриниши* дейилади.

Тейлор формуласида $x_0=0$ бўлган ҳол алоҳида аҳамиятга эга:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_{n+1}(x). \qquad (19)$$

Одатда (19) *Маклорен формуласи* дейилади. Бу формуладан функция лимитини топиш, такрибий ҳисоблаш масалаларида фойдаланилади.

9-§. Баъзи бир элементар функциялар учун Маклорен формуласи

1°. $f(x)=e^x$ бўлсин. Бу функция учун

$$f^{(n)}(x)=e^x,\ f(0)=1,\ f^{(n)}(0)=1\quad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

У ҳолда

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_{n+1}(x)$$

бўлиб, унинг қолдиқ ҳади Лагранж кўринишида қуйидагича

$$R_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}\quad (0<\theta<1)$$

ёзилади. Ҳар бир $x\in[-a,\ a]$ да

$$|e^{\theta x}|<e^a$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$|R_{n+1}(x)|<\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}e^a$$

бўлиб, $n\to\infty$ да $R_{n+1}(x)$ нолга интилади.

Натижада $f(x)=e^x$ функция учун

$$e^x \approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$$

тақрибий формулага эга бўламиз. Бу формуладан, хусусан, $x=1$ бўлганда, e сонини тақрибий ҳисоблаш имконини берадиган ушбу

$$e \approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$$

формула ҳосил бўлади.

2°. $f(x)=\sin x$ бўлсин. Маълумки бу функциянинг n-тартибли ҳосиласи учун

$$f^{(n)}(x)=(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

формула ўринли.

Равшанки, $f(0)=0$ ва

$$f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases} 0, & \text{агар } n \text{ жуфт бўлса,} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & \text{агар } n \text{ тоқ бўлса.} \end{cases}$$

Демак, $f(x)=\sin x$ функциясининг Маклорен формуласи

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+0(x^{2n})$$

кўринишда ёзилади.

3°. $f(x)=\cos x$ бўлсин. Бу функциянинг n-тартибли ҳосиласи учун

$$f^{(n)}(x)=(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

формула ўринлилиги маълум. Равшанки, $f(0)=1$ ва

$$f^{(n)}(0)=\cos\frac{n\pi}{2}=\begin{cases} 0, & \text{агар } n\text{- тоқ сон бўлса,} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & \text{агар } n \text{ — жуфт сон бўлса.} \end{cases}$$

Демак, $f(x)=\cos x$ функциянинг Маклорен формуласи

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+0(x^{2n+1})$$

кўринишда ёзилади.

4°. $f(x)=\ln(1+x)$ бўлсин.

Бу функциянинг n-тартибли ҳосиласини топамиз:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1},\ f''(x)=(-1)(1+x)^{-2},$$

$$f'''(x)=(-1)(-2)(1+x)^{-3},\ f^{IV}(x)=(-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4}.$$

Бундан

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{(1+x)^{n}}$$

эканини кўриш қийин эмас. Равшанки,

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!.$$

Демак, $f(x)=\ln(1+x)$ функция учун Маклорен формуласи

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+0(x^{n+1})$$

кўринишда бўлади.

Маклорен формуласи ёрдамида баъзи бир функция лимитлари осон топилади. Масалан, ушбу

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$$

лимитни қарайлик.

e^x ва $\sin x$ функцияларнинг Маклорен формуласи бўйича ёйилмасидан фойдаланамиз:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+0(x^3),\ \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+0(x^5).$$

У холда:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+0(x^2)\right]\left[x-\frac{x^3}{3!}+0(x^5)\right]-x-x^2}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)x^3+0(x^3)-x-x^2}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+0(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

Демак,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

21-БОБ

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБНИНГ БАЪЗИ БИР ТАТБИҚЛАРИ

Ушбу бобда функциянинг ҳосилалари ёрдамида унинг лимитини топиш,ўзгариш хусусиятлари, ўсувчи ёки камаювчилиги, максимум ва минимум қийматлари, шунингдек функция графигини текшириш каби масалалар ўрганилади.

1-§. Функция лимитини топишда ҳосиланинг татбиқи

Маълумки, функцияларнинг лимитини топиш муҳим масалалардан бири бўлиб, айни пайтда уларни ҳисоблашда анча қийинчиликлар юзага келади. Функцияларнинг ҳосилаларидан фойдаланиб уларнинг лимитларини топишни осонлаштирадиган қоидалар мавжуд бўлиб, улар *Лопитал қоидалари* дейилади. Биз қуйида шу қоидалар баёнини келтирамиз.

1-теорема. *$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар (a, b) интервалда узлуксиз бўлиб, қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:*

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0, \quad \lim\limits_{x\to a} g(x)=0$

2) $x\in(a, b)$ *да чекли $f'(x)$, $g'(x)$ лар мавжуд;*

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=k$ *(k — чекли ёки чексиз).*

У ҳолда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. $f(x)$ ҳамда $g(x)$ функцияларнинг $x=a$ нуқтадаги қийматларини нолга тенг деб оламиз

$$f(a)=0, \quad g(a)=0.$$

Натижада

$$\lim_{x\to a} f(x)=0=f(a), \quad \lim_{x\to a} g(x)=0=g(a).$$

бўлиб, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $x=a$ нуқтада узлуксиз бўлиб қолади. Энди ихтиёрий $x\in(a, b)$ нуқта олиб, $[a, x]$ сегментда $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларни қараймиз. Бу сегментда $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар Коши теоремасининг шартларини қаноатлантиради. Демак, a ва x

орасида шундай c $(a<c<x)$ нукта топиладики

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

тенглик ўринли бўлади. Агар $f(a)=0$, $g(a)=0$ бўлишини эътиборга олсак, унда кейинги тенглик

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

кўринишга келади.

Равшанки, $x\to a$ да $c\to a$. Демак,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=k.$$

Бу эса теоремани исботлайди.

Мисол. Ушбу $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{\beta x}-\cos\beta x}$ лимитни ҳисобланг.

Бу ҳолда $f(x)=e^{\alpha x}-\cos\alpha x$, $g(x)=e^{\beta x}-\cos\beta x$ дейилса, улар учун 1-теорема шартлари бажарилади:

1) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(e^{\alpha x}-\cos\alpha x)=0$,

$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}(e^{\beta x}-\cos\beta x)=0$,

2) $f'(x)=\alpha\ [e^{\alpha x}+\sin\alpha x]$,

$g'(x)=\beta\ [e^{\beta x}+\sin\beta x]$,

Демак,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

Эслатма. Юқорида келтирилган теорема $x\to\infty$, $x\to+\infty$ ва $x\to-\infty$ да ҳам ўринли.

Айтайлик

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=0 \text{ ва } \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k \text{ (чекли ёки чексиз)}$$

бўлсин. $x=\frac{1}{t}$ алмаштиришни бажарсак, $x\to\infty$ да $t\to 0$ бўлиб, $t\to 0$ да

$$f(x)=f(\tfrac{1}{t})\to 0,\quad g(x)=g(\tfrac{1}{t})\to 0$$

бўлади.

1-теоремадан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})}=\lim_{t\to 0}\frac{f'(\frac{1}{t})\cdot(-\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{1}{t})\cdot(-\frac{1}{t^2})}=\lim_{t\to 0}\frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2-теорема. ***$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар (a, b) оралиқда берилган бўлиб, қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:***

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$;

2) *$x\in(a, b)$ да чекли $f'(x)$, $g'(x)$ ҳосилалар мавжуд ва $g'(x)\neq 0$;*

3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=k$ *(чекли ёки чексиз).*

У ҳолда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

тенглик ўринли бўлади.

Юкорида келтирилган 1-теорема $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аникмасликларни, 2-теорема эса $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аникмасликларни (қаралсин, 17-боб, 4-§) очиш имконини беради.

Мисол. Ушбу $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(x-\frac{\pi}{2})}{\operatorname{tg}x}$ лимитни ҳисобланг.

Агар $f(x)=\ln(x-\frac{\pi}{2})$, $g(x)=\operatorname{tg}x$ дейилса, улар 2-теореманинг (1)—(3) шартларини каноатлантириб,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}{\frac{1}{\cos^2x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2x}{x-\frac{\pi}{2}}.$$

бўлади. Энди $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2x}{x-\frac{\pi}{2}}$ ифодада $f_1(x)=\cos^2x$, $g_1(x)=x-\frac{\pi}{2}$ функциялар 1-теореманинг барча шартларини каноатлантиради. Демак,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x(-\sin x)}{1}=0.$$

Бундан эса

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\lim(x-\frac{\pi}{2})}{\operatorname{tg}x}=0$$

эканлиги келиб чикади.

Маълумки, $x\to a$ да $f(x)$ функция 1, 0 ва ∞ га, $g(x)$ функция эса мос равишда ∞, 0 ва 0 га интилганда

$$[f(x)]^{g(x)}(f(x)\not\equiv 1,\ f(x)>0)$$

даража кўрсаткичли ифода 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0} кўринишдаги аниқмасликларни ифодалайди. Масалан $x\to a$ да $f(x)\to 1$, $g(x)\to\infty$ бўлсин. Бу ҳолда $[f(x)]^{g(x)}$ 1^{∞} кўринишдаги аниқмаслик бўлади. Уни очиш учун аввало $y=[f(x)]^{g(x)}$ ифода логарифланади:

$$\ln y = g(x)\ \ln[f(x)].$$

Натижада $x\to a$ да $g(x)\ln[f(x)]^{\infty\cdot 0}$ кўринишдаги аниқмасликка келамиз. Агар

$$\lim_{x\to a} f(x)=0,\ \lim_{x\to a} g(x)=\infty$$

бўлса, $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]$ ни

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

кўринишда ифодалаш орқали $\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликка келтириш мумкин.

Шунингдек,

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to a} g(x)=+\infty$$

бўлса, $f(x)-g(x)$ айирмани

$$f(x)-g(x)=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}$$

тарзда ифодалаб, $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))$ ни $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликка келтириш мумкин.

2-§. Функциянинг монотонлигини аниқлашда ҳосиланинг татбиқи

Биз қуйида функция ҳосилаларидан фойдаланиб унинг ўсувчилиги ҳамда камаювчилигини ифодалайдиган теоремани келтирамиз.

3-теорема. ***$f(x)$ функция $(a,\ b)$ интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Бу функция шу интервалда ўсувчи (камаювчи) бўлиши учун $(a,\ b)$ да***

$$f'(x)\geqslant 0 \quad (f'(x)\leqslant 0)$$

тенгсизлик ўринли бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. Шартга кўра $f(x)$ функция $(a,\ b)$ да чекли ҳосилага эга бўлиб, у $(a,\ b)$ интервалда ўсувчи (камаювчи). Ихтиёрий $x\in(a,\ b)$ нуқта олиб, у билан бирга $x+\Delta x\in(a,\ b)$ нуқтани қараймиз. У ҳолда $\Delta x>0$ да $f(x)\leqslant f(x+\Delta x)$ $(f(x)\geqslant f(x+\Delta x))$,

$\Delta x < 0$ да $f(x) \geqslant f(x+\Delta x)$ $(f(x) \leqslant f(x+\Delta x))$ муносабатлар ўринли бўлиб, бу муносабатлардан

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geqslant 0 \quad \left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \leqslant 0\right) \tag{1}$$

тенгсизликлар келиб чиқади. $f(x)$ функция (a, b) да чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлгани учун

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

мавжуд ва чекли.

Демак,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

(1) муносабатдан ҳамда чекли лимитга эга бўлган функция ҳоссаларидан фойдаланиб (қаранг 18- боб, 2- §) (a, b) да

$$f'(x) \geqslant 0 \quad (f'(x) \leqslant 0)$$

эканини топамиз.

Етарлилиги. Шартга кўра $f(x)$ функция (a, b) интервалда чекли ҳосилага эга бўлиб, (a, b) да

$$f'(x) \geqslant 0 \quad (f'(x) \leqslant 0)$$

тенгсизлик ўринли. (a, b) да ихтиёрий x_1, x_2 нуқталарни олайлик $(x_1 < x_2)$. У ҳолда $[x_1, x_2] \subset (a, b)$ бўлиб, $f(x)$ функция $[x_1, x_2]$ сегментда Лагранж теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради.

Лагранж теоремасига кўра шундай $c \in (x_1, x_2)$ нуқта мавжуд бўлиб,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\ (x_2 - x_1)$$

тенглик ўринли бўлади. Шартга кўра

$$f'(c) \geqslant 0 \quad (f'(c) \leqslant 0), \quad x_2 - x_1 > 0.$$

Демак,

$$f(x_2) \geqslant f(x_1) \qquad (f(x_2) \leqslant f(x_1)).$$

Бу эса $f(x)$ функциянинг (a, b) интервалда ўсувчи (камаювчи) эканини билдиради.

3- §. Функциянинг экстремум қийматларини топишда ҳосиланинг татбиқи

$f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, $x_0 \in (a, b)$ бўлсин.

1-таъриф. *Агар* $x_0 \in (a, b)$ *нуқтанинг шундай* $U_\delta(x_0) = \{x : x \in R, x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \delta > 0\} \subset (a, b)$ *атрофи мавжуд бўлсаки,*

$\forall x \in U_\delta(x_5)$ учун

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad (f(x) \geqslant f(x_0))$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга (минимумга) эга дейилади, $f(x_0)$ қиймат $f(x)$ функциянинг $U_\delta(x_0)$ даги максимум (минимум) қиймати ёки максимуми (минимуми) дейилади.

2-таъриф. *Агар $x_5 \in (a, b)$ нуқтанинг шундай атрофи $U_\delta(x_0) \subset \subset (a, b)$ мавжуд бўлсаки, $\forall x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ учун*

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0))$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада қатъий максимумга (қатъий минимумга) эга дейилади. $f(x_0)$ қиймат $f(x)$ функциянинг $U_\delta(x_0)$ даги қатъий максимум (қатъий минимум) қиймати ёки қатъий максимуми (қатъий минимуми) дейилади.

1. Экстремумнинг зарурий шарти.

4-теорема. ***Агар $f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нуқтада чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, бу нуқтада экстремумга эришса, у ҳолда***

$$f'(x_0) = 0$$

бўлади.

Исбот. Фараз килайлик $f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нуктада максимумга эришсин. Демак, таърифга кўра x_0 нуктанинг шундай $U_\delta(x_0) \subset (a, b)$ атрофи мавжудки, ихтиёрий $x \in U_\delta(x_0)$ да $f(x) \leqslant \leqslant f(x_0)$ бўлади. У ҳолда Ферма теоремасига кўра $f'(x_0) = 0$.

Бу теорема функция экстремумга эга бўлишининг зарурий шартини ифодалайди.

2. Экстремумнинг етарли шартлари.

$f(x)$ функция (a, b) интервалда берилган бўлиб, $x_0 \in (a, b)$ нуктада узлуксиз, унинг $U_\delta(x_0) = U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ атрофида чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Ушбу

$$U_\delta^-(x_0) = \{x : x \in R, \quad x_0 - \delta < x < x_0\}, \quad (\delta > 0)$$
$$U_\delta^+(x_0) = \{x : x \in R, \quad x_0 < x < x_0 + \delta\}, \quad (\delta > 0)$$

белгилашларни киритайлик.

а) Агар

$$\forall x \in U_\delta^-(x_0) \text{ учун } f'(x) > 0,$$
$$\forall x \in U_\delta^+(x_0) \text{ учун } f'(x) < 0$$

тенгсизликлар ўринли бўлса, яъни $f'(x)$ функция x_0 нуқтадан ўтишда ишорасини «+» дан «—» га ўзгартирса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга эга бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $\forall x \in U_\delta^-(x_0)$ учун $f'(x) > 0$ бўлишидан $f(x)$ функциянинг $U_\delta^-(x_0)$ да қатъий ўсувчилиги келиб чиқади. Сўнгра $f(x)$ функциянинг x_0 да узлуксиз бўлишидан

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0) \quad (x_0 \in U_\delta^-(x_0))$$

тенглик келиб чиқади.

Демак, $\forall x \in U_\delta^-(x_0)$ учун $f(x) < f(x_0)$ тенгсизлик ўринлидир.

Энди $\forall x \in U_\delta^+(x_0)$ учун $f'(x) < 0$ бўлишидан $U_\delta^+(x_0)$ да $f(x)$ функциянинг қатъий камаювчилиги келиб чиқади. $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада узлуксизлигидан эса $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$ тенглик ҳосил бўлади.

Демак, $\forall x \in U_\delta^+(x_0)$ учун яна $f(x) < f(x_0)$ тенгсизлик бажарилади.

Бундан $\forall x \in U_\delta(x_0)$ учун $f(x) < f(x_0)$ бўлиб, бу эса $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга эга бўлишини билдиради.

б) $\forall x \in U_\delta^-(x_0)$ учун $f'(x) < 0$,

$\forall x \in U_\delta^+(x_0)$ учун $f'(x) > 0$

тенгсизликлар ўринли бўлса, яъни $f'(x)$ ҳосила x_0 нуқтани ўтишда ўз ишорасини «—» дан «+» га ўзгартирса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада минимумга эга бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $\forall x \in U_\delta^+(x_0)$ учун $f'(x) > 0$ бўлишидан $f(x)$ функциянинг $U_\delta^+(x_0)$ да қатъий камаювчилиги, $\forall x \in U_\delta^+(x_0)$ да қатъий ўсувчилиги келиб чиқади. $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада узлуксизлигини эътиборга олсак, $\forall x \in U_\delta(x_0)$ учун $f(x) > f(x_0)$ тенгсизликка эга бўламиз. Бу эса $f(x)$ функция x_0 нуқтада минимумга эга бўлишини билдиради.

в) Агар $\forall x \in U_\delta^-(x_0)$ учун $f(x) > 0$,

$\forall x \in U_\delta^+(x_0)$ учун $f(x) > 0$

ёки

$$\forall x \in U_\delta^-(x_0) \text{ учун } f(x) < 0,$$
$$\forall x \in U_\delta^+(x_0) \text{ учун } f(x) < 0$$

тенгсизликлар ўринли бўлса, яъни $f'(x)$ ҳосила x_0 нуқтани ўтишда ўз ишорасини ўзгартирмаса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эга бўлмайди. $f(x)$ функция x_0 нуқтанинг $U_\delta(x_0)$ атрофида қатъий ўсувчи ёки қатъий камаювчи бўлади.

Мисол. Ушбу $f(x) = 3x^2 - 2x$ функцияни экстремумга текширинг.

Берилган функциянинг $f'(x)=6x-2=2(3x-1)$ ҳосиласини нолга тенглаб

$$f'(x)=2(3x-1)=0,$$

$x=\frac{1}{3}$ қаралаётган функция учун стационар (критик) нуқта эканини топамиз. Энди шу нуқта атрофида функция ҳосиласи ишорасини ўзгартиришини текширамиз.

Равшанки,

$$\forall x\in U_\delta^-\left(\frac{1}{3}\right)=\{x\in R:\ \frac{1}{3}-\delta<x<\frac{1}{3}\},\ \delta>0$$

учун

$$f'(x)=2(3x-1)=-6\left(\frac{1}{3}-x\right)<0,$$

$$\forall x\in U_\delta^+\left(\frac{1}{3}\right)=\left\{x\in R:\ \frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}+\delta\right\}\ \Delta>0$$

учун

$$f'(x)=2(3x-1)=-6\left(\frac{1}{3}-x\right)>0.$$

Демак, функциянинг ҳосиласи $x=\frac{1}{3}$ нуқтадан ўтишда ўз ишорасини «—» дан «+» га ўзгартирар экан. Берилган функция $x=\frac{1}{3}$ нуқтада узлуксиз. Шундай қилиб, $f(x)=3x^2-2x$ функция $x=\frac{1}{3}$ нуқтада минимумга эришади ва

$$\min f(x)=3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2-2\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\ x\in U_\delta\left(\frac{1}{3}\right)$$

бўлади.

Эслатма. Юкорида келтирилган экстремумнинг етарлилик шарти қаралаётган функция ҳосиласининг стационар нукта атрофида ишорасини аниқлаш билан ифодаланади. Қўпинча x_0 нуқтанинг атрофида $f'(x)$ нинг ишорасини аниқлаш қийин бўлади. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада юқори тартибли ҳосилаларга эга бўлса, ҳосилаларнинг x_0 нуқтадаги қийматлари ишорасига қараб ҳам функция экстремумини текшириш мумкин.

$f(x)$ функция $x_0\in(a,b)$ нуқтада $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ ҳосилаларга эга бўлиб,

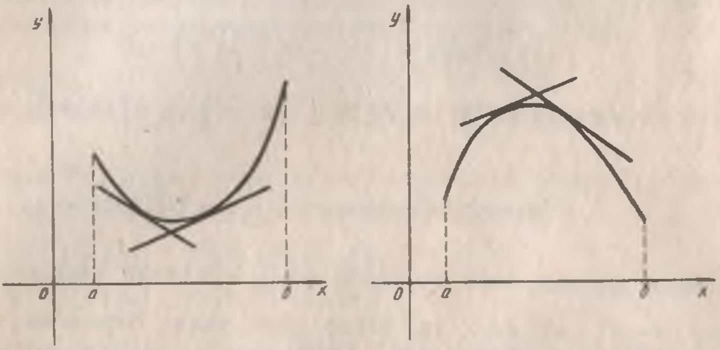
$$f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\quad f^{(n)}(x_0)\neq 0$$

бўлсин. Агар n — жуфт сон, яъни $n=2m$ $(m\in N)$ бўлиб, $f^{(n)}(x_0) = = f^{(2m)}(x_0)<0$ $(f^{(2m)}(x_0)>0)$ тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга (минимумга) эга бўлади, агар n — тоқ сон, яъни $n=2m+1$ $(m\in N)$, бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эга бўлмайди.

4- §. Функция графигининг қавариқлиги ва ботиқлиги ҳамда эгилиш нуқталарини аниқлашда ҳосиланинг татбиқи

$f(x)$ функция (a, b) интервалда берилган бўлиб, у шу интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. У ҳолда $y=f(x)$ функция графигига ихтиёрий $M(x, f(x))$ $(a<x<b)$ нуктада уринма мавжуд. Бу уринма $y=l(x)$ бўлсин.

3-таъриф. *Агар ихтиёрий x_1, x_2 нуқталар, $a<x_1<x_2<b$ ҳамда $\forall x \in (x_1, x_2)$ учун $l(x) \leqslant f(x)$ $(l(x) \geqslant f(x))$ бўлса, $f(x)$ функ*ция графиги *(a, b) да ботиқ (қавариқ) дейилади* (82- чизма).



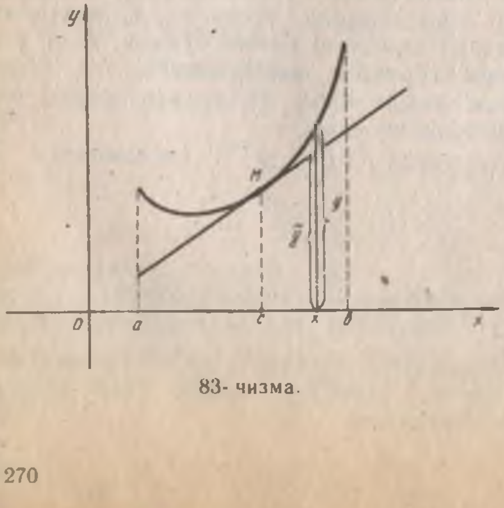
82- чизма

5-теорема. ***Агар $f(x)$ функция (a, b) интервалда иккинчи тартибли $f''(x)$ ҳосилага эга бўлиб,***

$$f''(x) \geqslant 0 \quad (f''(x) \leqslant 0) \cdot$$

бўлса, функция графиги (a, b) да ботиқ (қавариқ) бўлади.

Исбот. Фараз қилайлик. (a, b) да $f''(x) \geqslant 0$ бўлсин. (x_1, x_2) (a, b) ораликда ихтиёрий c нукта оламиз. Теоремани исботлаш учун $f(x)$ функция графиги $M(c, f(c))$ нуктадан ўтувчи уринмадан юқорида ётишини кўрсатиш лозим (83- чизма).



83- чизма.

· Уринмадаги ўзгарувчи нуктанинг координаталари (x, y) бўлсин. У ҳолда M нуктадан ўтувчи уринма тенгламаси:

$$\bar{y}-f(c)=f'(c)(x-c) \text{ ёки}$$
$$y=f(c)+f'(c)(x-c). \qquad (2)$$

Энди $f(x)$ функциянинг $x=c$ нукта атрофида Тейлор формуласи бўйича ёзамиз:

$$y=f(x)=f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2, \ (c<\xi<x). \qquad (3)$$

Юқоридаги (2) ва (3) тенгликлардан

$$y-\bar{y}=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$$

эканлигини топамиз.

$f''(x)$ нинг (a, b) да манфий бўлмаслигини эътиборга олсак, $\forall x\in(a, b)$ учун $y-y\geqslant 0$, яъни $y\geqslant y$ тенгсизлик ҳосил бўлади. Бу эса $y=f(x)$ функция графиги (a, b) оралиқда (2) уринмадан юқорида ётишини, яъни ботиқ эканлигини билдиради.

4-таъриф. *Агар $f(x)$ функция $U_\delta^-(x_0)$ оралиқда қавариқ (ботиқ) бўлиб, $U_\delta^+(x_0)$ оралиқда эса ботиқ (қавариқ) бўлса, у ҳолда $(x_0, f(x_0))$ нуқта функция графигининг (функциянинг) эгилиш нуқтаси дейилади.*

$f(x)$ функция $U_\delta(x_0)$ да иккинчи тартибли $f''(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Агар

$$\forall x\in U_\delta^-(x_0) \text{ учун } f''(x)\geqslant 0 \ (f''(x)\leqslant 0)),$$

$$\forall x\in U_\delta^+(x_0) \text{ учун } f''(x)\leqslant 0 (f''(x)\geqslant 0)$$

тенгсизликлар ўринли бўлса, у ҳолда $U_\delta^-(x_0)$ да $f'(x)$ ўсувчи (камаювчи), $U_\delta^+(x_0)$ да камаювчи (ўсувчи) бўлиб, $f'(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эришади. У ҳолда $f''(x_0)=0$ бўлади. Демак, (x) функциянинг эгилиш нуқтасида иккинчи тартибли ҳосила $f''(x)$ нолга тенг.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x)=x^4-6x^2-6x+1$$

функциянинг қавариқ ва ботиқлик оралиқларини топинг.

Функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$f'(x)=4x^3-12x-6,$$
$$f''(x)=12x^2-12=12(x^2-1).$$

Равшанки,

$$|x|>1 \text{ да } f''(x)>0,$$
$$|x|<1 \text{ да } f''(x)<0.$$

Демак, $(-1, 1)$ интервалда берилган функция графиги қавариқ, $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ интервалларда эса функция графиги ботиқ бўлади.

2. Ушбу $f(x)=xe^{-x^2}$ функциянинг эгилиш нуқтаси бор ёки йўқлигини аниқланг.

Функциянинг иккинчи тартибли $f''(x)=2xe^{-x^2}(2x^2-3)$ ҳосиласини нолга тенглаб топамиз:

$$x=0, \qquad x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Равшанки, $\left(-\infty,\ -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ ва $\left(0,\ \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ интервалларда $f''(x)<0$, $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},\ 0\right)$ ва $\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\ \infty\right)$ интервалларда $f''(x)>0$.

Демак, $A\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},\ -\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}}\right)$, $B(0,\ 0)$, $C\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\ \sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}}\right)$ нукталар функция графигининг эгилиш нукталаридир.

5- §. Функция графигининг асимптоталари

$f(x)$ функция $a\in R$ нуктанинг бирор атрофида аникланган бўлсин.

5-таъриф. *Агар ушбу*

$$\lim_{x\to a+0} f(x), \qquad \lim_{x\to a-0} f(x)$$

лимитлардан бири ёки иккаласи чексиз бўлса, у ҳолда $x=a$ тўғри чизиқ $f(x)$ функция графигининг вертикал асимптотаси дейилади.

Масалан, $y=\frac{1}{x-3}$ функция учун $x=3$ тўғри чизик вертикал асимптота бўлади.

6-таъриф. Шундай k ва b сонлари мавжуд бўлиб, $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ да $f(x)$ функция

$$f(x)=kx+b+\alpha(x)$$

кўринишда ифодаланса $(\lim\limits_{x\to\pm\infty}\alpha(x)=0)$, *у ҳолда $y=kx+b$ тўғри чизиқ $y=f(x)$ функция графигининг оғма асимптотаси дейилади ($k=0$ бўлса, горизонтал асимптота дейилади).*

6-теорема. ***$f(x)$ функция графиги***

$$y=kx+b$$

оғма асимптотага эга бўлиши учун

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k, \qquad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b$$

муносабатларнинг ўринли бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. $f(x)$ функция графиги $y=kx+b$ огма асимптотага эга бўлсин. У ҳолда 6-таърифга кўра $f(x)=kx+b+\alpha(x)$. бўлиб, $(x\to+\infty,\ \alpha(x)\to0)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(k+\frac{b}{x}+\frac{\alpha(x)}{x}\right)=k$$

ҳамда

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to+\infty}[b+\alpha(x)]=b$$

бўлади.

Етарлилиги. Ушбу

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\quad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b.$$

лимитлар ўринли бўлсин. У ҳолда $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b$ дан $f(x)-kx=b+\alpha(x)$ $(x\to+\infty,\ \alpha(x)\to0)$ келиб чиқади. Демак, $x\to+\infty$ да

$$f(x)=kx+b+\alpha(x).$$

Бу эса $y=kx+b$ тўғри чизиқ $f(x)$ функция графигининг асимптотаси эканини билдиради.

Мисол. Ушбу $f(x)=\frac{2x^2+x-2}{x-1}$ функция графигининг оғма асимптоталарини топинг.

Равшанки,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x-2}{x-1}=2,$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+x-2}{x-1}-2x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2+2x}{x-1}=3.$$

Демак, $k=2$, $b=3$ бўлиб, бу эса $y=2x+3$ тўғри чизиқ функция графигининг оғма асимптотаси эканини билдиради.

6- §. Функцияларни текшириш ва графикларини чизиш

Функцияларни текшириш ва улар графикларини чизишни қуйидаги қоидалар бўйича амалга ошириш мақсадга мувофиқдир:

1°. Функциянинг аниқланиш ҳамда қийматлар тўпламини топиш;

2°. Функцияни узлуксизликка текшириш ва узилиш нуқталарини топиш;

3°. Функциянинг жуфт, тоқ ҳамда даврийлигини аниқлаш;

4°. Функцияни монотонликка текшириш;

5°. Функцияни экстремумга текшириш;

6°. Функция графигининг қавариқ ҳамда ботиқлик оралиқларини аниқлаш, эгилиш нуқталарини топиш;

7°. Функция графигининг асимптоталарини топиш;

8°. Агар имконият бўлса, функциянинг абсцисса ҳамда ордината ўқлари билан кесишадиган (агар улар мавжуд бўлса) нуқталарини топиш ва аргумент x нинг характерли нуқталарида функция қийматларини ҳисоблаш.

Мисол. Ушбу $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ функцияни текширинг ва графигини чизинг.

Берилган функция $X=\{(-\infty, -1)\cup(-1,1)\cup(1, +\infty)\}$ тўпламда аниқланган. Бу функция учун $f(-x)=f(x)$ тенглик бажарилганлигидан у жуфтдир. Демак, функция графиги Oy ўқига нисбатан симметрик бўлиб, уни $[0, +\infty]$ оралиқда текшириш кифоя.

Функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари мос равишда

$$f'(x)=-\frac{4x}{(x^2-1)^2},\quad f''(x)=\frac{4(1+3x^2)}{(x^2-1)^2}.$$

Биринчи тартибли ҳосила $[0, +\infty)$ оралиқнинг $x=1$ нуқтасидан бошқа барча нуқталарида аниқланган ва $x=0$ нуқтада нолга айланади, яъни $f'(0)=0$. Иккинчи тартибли ҳосила учун $f''(0)=-4<0$ бўлиб, бу $f(x)$ функциянинг $x=0$ нуқтада максимумга эришишини билдиради. Бинобарин максимум қиймат $f(0)=-1$ бўлади.

Энди $\{(0, 1)\cup(1, +\infty)\}$ тўпламда $f'(x)<0$ эканлигидан $f(x)$ функциянинг камаювчилиги келиб чиқади.

Равшанки,

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2+1}{x^2-1}=-\infty,\qquad \lim_{x\to -1+0}\frac{x^2+1}{x^2-1}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2+1}{x^2-1}=+\infty,\qquad \lim_{x\to 1-0}\frac{x^2+1}{x^2-1}=+\infty$$

бўлиб, бу $x=\pm 1$ нуқталар функциянинг иккинчи тур узилиш нуқталари, шу билан бирга $x=\pm 1$ тўғри чизиқлар берилган функция учун вертикал асимптоталар эканини билдиради. 6-теоремага кўра

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}\cdot\frac{1}{x}=0,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=1$$

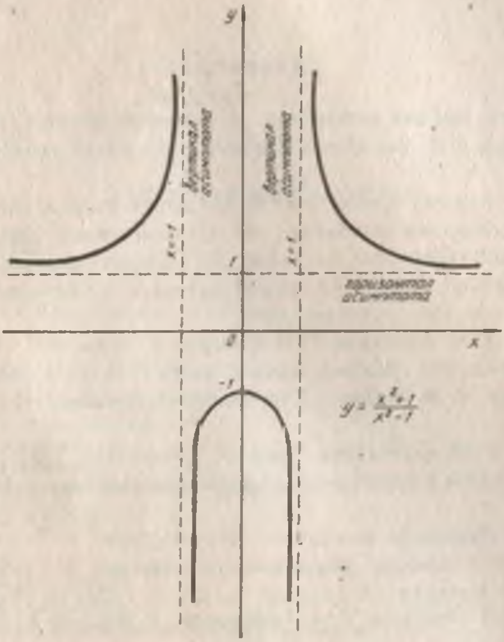
муносабатлардан $y=1$ тўгри чизиқ $f(x)$ функция графигининг асимптотаси бўлади.

Энди функция графигининг эгилиш нуқтасининг бор ёки йўқлигини текширамиз.

Берилган функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи $f''(x)=\frac{4(1+3x^2)}{(x^2-1)^3}$, $1+3x^2\neq 0$, бўлганидан $f''(x)\neq 0$ $(x\in R)$ эканини топамиз. Бундан эса функция графигида эгилиш нуқтаси йўқлиги келиб чиқади. Иккинчи тартибли ҳосила учун

$$[0,\quad 1) \quad \text{да} \quad f''(x) < 0,$$
$$(1,\ +\infty) \quad \text{да} \quad f''(x) \geqslant 0$$

тенгсизликлар ўринли. Демак, функция графиги [0, 1) да қаварик, (1, $+\infty$) да ботиқ. Бу маълумотлардан фойдаланиб функция графигини чизамиз (84- чизма).



84- чизма.

АДАБИЁТЛАР

1. *В. С. Шипачев*. Высшая математика. М., «Высшая школа», 1990.
2. *В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович*. Краткий курс высшей математики. М. Наука. 1986.
3. *И. А. Зайцев*. Высшая математика. М., «Высшая школа», 1991.
4. *И. И. Баврин*. Высшая математика. М., «Просвешение», 1980.
5. *Г. Сампер*. Математика для географов. М., «Высшая школа», 1981.
6. *Ю. И. Гильдербанд*. Лекции по высшей математики для биологов. Новосибирск, 1974.
7. *А. И. Кареев, З. М. Аксютина, Т. И. Савелев*. Курс высшей математики для экономических Вузов. М., «Высшая школа», часть I, II. 1982, 1983.
8. *О. В. Мантуров, Н. М. Матвеев*. Курс высшей математики. М., «Высшая школа», 1986.
9. *Е. У. Соатов*. Олий математика. Тошкент, «Ўқитувчи», 1993.
10. *А. А. Гусак*. Задачи и упражнения по высшей математике. I. Минск, «Вышэйшая школа», 1988.
11. *Д. К. Фадеев*. Лекции по алгебре. М. «Наука», 1984.
12. *В. А. Ильин, Э. Г. Позняк*. Аналитическая геометрия. М., «Наука», 1968.
13. *Т. Азларов, Х. Мансуров*. Математик анализ. I. Тошкент. «Ўқитувчи», 1986.
14. *А. Саъдуллаев, Х. Мансуров, Г. Худойберганов, А. Ворисов, Р. Ғуломов*. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами. I. Тошкент, «Ўзбекистон», 1993.

МУНДАРИЖА

Дастлабки маълумотлар

Алгебра

Аналитик геометрия

Математик анализ

Тўхтамурод Жўраев, Азимбой Саъдуллаев,
Гулмирза Худойберганов, Хожиакбар Мансуров,
Азизжон Ворисов

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

На узбекском языке

Учебник для студентов университетов
Издательство «Ўзбекистон» — 1995, Ташкент, 700129,
Навои, 30

Бадиий муҳаррир *Ж. Гурова*
Техник муҳаррир *М. Хужалқулови*
Мусаҳҳиҳ *Ш. Орипова*

Теришга берилди 4.04.94. Босишга рухсат этилди 14.04.95. Бичими 60×90
№ 2 босма қоғозига «Литературная» гарнитурада юқори босма усулида босилди.
Шартли бос. л. 17,5. Нашр т. 17,3. 5000 нусхада чоп этилди. Буюртма № 513. Баҳоси
шартнома асосида «Ўзбекистон» нашриёти, 700129, Тошкент, Навоий кўчаси, 30.
Нашр № 21—94

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитасининг ижарадаги Ташполиграф
комбинатида босилди. Тошкент, Навоий кўчаси, 30 1995.