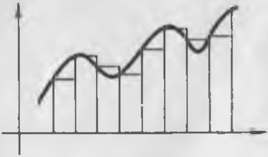
Ш.Ш.ШОҲАМИДОВ

АМАЛИЙ МАТЕМАТИКА УНСУРЛАРИ



"ЎЗБЕКИСТОН"

Ш. Ш. ШОҲАМИДОВ

АМАЛИЙ МАТЕМАТИКА УНСУРЛАРИ

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги Олий техника ўқув юртлари талабалари учун ўқув қўлланмаси сифатида тасдиқлаган

Тошкент — «Ўзбекистон» — 1997

Мазкур ўкув кўлланмасининг I—6- бобларида ҳисоблаш математикасининг хатоликлар назарияси, алгебраик ва трансцендент тенгламаларни такрибий ечиш усуллари, чизикли ва чизиксиз тенгламалар тизимини ечиш усуллари, интерполяцион формулалар, дифференциал тенгламаларни такрибий ечиш усуллари, аник интегралларни такрибий ҳисоблаш формулалари келтирилади.

Еттинчи ва саккизинчи боблар эса амалий математиканинг муҳим бўлимларидан бўлган эҳтимолликлар назарияси ва математик статистикага бағишланади. Математик программалаштириш кўлланманинг туккизинчи бобидан жой олган. Кўлланманинг сўнгги ўнинчи бобида вариацион ҳисоб ҳақидаги дастлабки маълумотлар берилган. Кўлланма олий техника институтларининг талабалари ва илмий ходимлар учун мўлжалланган бўлсада, шу соҳага қизиқувчилар ундан мустақил ўрганиш мақсадида ҳам фойдаланишлари мумкин.

Муҳаррир Ю. МУЗАФФАРХЎЖАЕВ

ISBN 5-640-02237-X

$$A\,\frac{1602000000-28}{M351(04)97}\,97$$

СЎЗБОШИ

Электрон ҳисоблаш машиналари (ЭҲМ) нинг инсон фаолиятининг турли соҳаларига тобора чуқуррок кириб бориши ҳозирги замон муҳандис (инженер)ларидан ҳисоблаш техникаси ва амалий математика усулларини етарли даражада билишларини талаб этмоқда. Олий техника ўқув юртларининг талабалари биринчи курсдаёқ ҳисоблаш усуллари ва алгоритмик тилларни ўрганадилар, улардан умуммуҳандислик ва махсус фанлар бўйича лаборатория ишлари, курс ишлари ҳамда диплом ишларини бажаришда фойдаланадилар.

Ҳисоблаш усулларини юқори малакали мутахассислар яратадилар. Олий техника ўқув юртларининг талабалари ва илмий ходимлари шу усулларнинг асосий ғояларини тушунсалар ва ўз масалаларини ечишда улардан фойдалана олсалар шунинг ўзи етарлидир. Ҳозирги пайтда амалий математиканинг қатор бўлимлари бўйича чуқур мазмунли дарсликлар, илмий ва ўқув қўлланмалари мавжуд. Аммо, уларнинг кўпида муайян математик йўналишгина ёритилган бўлиб, олий техника ўқув юртларининг талабалари уларни ўрганиш учун махсус математик тайёргарликка эга бўлмаганликлари туфайли бу фанни ўзлаштиришда қийналадилар. Айниқса ҳисоблаш математикаси усуллари ҳар томонлама тушунарли қилиб ёзилган қўлланма ва дарсликлар ўзбек тилида етарли эмаслиги талабалар учун бир қанча қийинчиликлар туғдирмоқда. Ушбу ўқув қўлланмаси шу қийинчиликларни озми-кўпми енгиллаштиради деган умиддамиз.

Ўқув қўлланмаси ўнта бобдан ташкил топган. Уларда ҳисоблаш математикаси усуллари (I — VI боблар), эҳтимоллар назарияси ва математик статистика (VII — VIII боблар), математик программалаштириш (IX боб) ва вариацион ҳисоб ҳақида дастлабки маълумотлар (X боб) келтирилган.

Ўқув қўлланмаси олий техника ўқув юртлари талабалари ва илмий ходимлари учун мўлжалланган бўлиб, у ҳисоблаш ишлари билан машғул бўлган турли соҳадаги ходимлар учун ҳам фойдали бўлиши мумкин.

Қўлланмани ёзишда муаллиф ўзининг кўп йиллар давомида Тошкент тўқимачилик ва енгил саноат институтининг «Амалий математика» кафедрасини бошқариш мобайнида талабаларга ҳамда малака ошириш курсларида ўтган машғулотларида тўплагаи тажрибаларини асос қилиб олди. Шунингдек, сўнгги йилларда мазкур соҳа бўйича ўзбек тилида чиққан адабиётдан ҳам фойдаланилди (уларнинг рўйхати қўлланманинг охирида келтирилган).

Қўлланманинг устида ишлашда ҳамкасбларимиз С. Ғойипов, М. Отамирзаев, Ж. Қурақбоев, М. Исроилов ва А. Хушбоқовлар катта ёрдам бердилар. Муаллиф уларга ўзининг самимий миннатдорчилигини изҳор этади.

I БОБ

ХАТОЛИКЛАР НАЗАРИЯСИ

1.1-§. АНИҚ ВА ТАҚРИБИЙ СОНЛАР ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Кундалик ҳаётимизда ва техникада учрайдиган кўпдан-кўп масалаларни ечишда турли сонлар билан иш кўришга тўғри келади. Булар аниқ ёки тақрибий сонлар бўлиши мумкин. Аниқ сонлар бирор катталикнинг аниқ қийматини ифодалайди. Тақрибий сонлар эса бирор катталикнинг аниқ қийматига жуда яқин бўлган сонни ифодалайди. Тақрибий соннинг аниқ сонга яқинлик даражаси ҳисоблаш ёки ўлчаш жараёнида йўл қўйилган хатолик билан ифодаланади.

Масалан, ушбуларда: «китобда 738 та варақ», «аудиторияда 30 та талаба», «учбурчакда 3 та қирра», «телефон аппаратида 10 та рақам»,— 738, 30, 3, 10 — аниқ сонлар. Ушбуларда эса: «ер бўлагининг периметри 210 м», «Ернинг радиуси 6000 км», «қаламнинг оғирлиги 8 г»,— 210, 6000, 8 тақрибий сонлар. Бу катталикларнинг тақрибий бўлишларига сабаб, ўлчов асбобларининг такомиллашмаганлигидир. Мутлақ аниқ ўлчайдиган ўлчов асбоблари йўқ бўлиб, улардан фойдаланганда маълум хатоликларга йўл қўйилади.

Бундан ташқари, Ер аниқ шар шаклида бўлмаганлиги туфайли, унинг радиуси тақрибий олинган. Учинчи мисолда эса қаламлар ҳар хил бўлганлиги учун уларнинг оғирлиги турлича. 8 г деб ўртача қаламнинг оғирлиги олинган.

Амалиётда тақрибий сон a деб, аниқ қийматли сон A дан бироз фарқ қиладиган ва ҳисоблаш жараёнида унинг ўрнида ишлатиладиган сонга айтилади.

Қисқалик учун бундан кейин аниқ қийматли сон ўрнига аниқ сон, катталикнинг тақрибий қиймати ўрнига тақрибий сон деб ёзамиз.

Амалий масалаларни ечиш асосан қуйидаги кетма-кет қадамлардан иборат:

1) ечилаётган масалани математик ифодалар орқали ёзиш;

2) қўйилган математик масалани ечиш.

Табиатда учрайдиган масалаларни доим ҳам аниқ математик тилда ифодалаш мумкин бўлмаганлиги туфайли масала маълум даражада идеаллашган модель воситасида ёзилади, яъни хатоликка йўл қўйилади (биринчи қадамда).

Масаланинг таркибига кирган баъзи параметрлар тажрибадан олинганлиги туфайли, бунда ҳам хатоликка йўл қўйилади. Буларнинг йиғиндиси эса **бошланғич информация хатолигини** келтириб чиқаради.

Жуда кўп ҳолларда математик масаланинг (иккинчи қадам) аниқ ечимини (аналитик) топишнинг иложи бўлмайди. Шунинг учун амалиётда тақрибий математик усуллар қўлланилади. Аниқ ечимнинг ўрнига тақрибий ечимни қабул қилиш (мажбурий равишда) яна хатоликни келтириб чиқаради. Масалани ечиш жараёнида бошланғич шартларни ва ҳисоблаш натижаларини яхлитлашда ҳам хатоликка йўл қўйилади, буни *ҳисоблаш хатоликлари* дейилади.

Тақрибий сонлар билан иш кўрилаётганда қуйидагиларга амал қилиш лозим:

1) тақрибий сонларнинг аниқлиги ҳақида маълумотга эга бўлиш;

2) бошланғич қийматларнинг аниқлик даражасини билган ҳолда натижанинг аниқлигини баҳолаш;

3) бошланғич қийматларнинг аниқлик даражасини шундай танлаш кераккы, натижа белгиланган аниқликда бўлсин.

1.2-§. АБСОЛЮТ ВА НИСБИЙ ХАТОЛИКЛАР

Фараз қилайлик A аниқ сон, a — унинг тақрибий қиймати бўлсин. Агар $a<A$ бўлса, *a ками билан олинган тақрибий сон* дейилади. Агар $a>A$ бўлса, *a ортиғи билан олинган тақрибий сон* дейилади.

1-таъриф. Тақрибий соннинг *хатолиги* деб A ва a орасидаги айирмага айтилади.

Хатоликни Δa деб белгиласак,

$$\Delta a=A-a; \tag{1.1}$$
$$A=\Delta a+a \tag{1.2}$$

бўлади.

2-таъриф. Тақрибий соннинг *абсолют хатолиги* деб A ва a орасидаги айирманинг модулига айтилади.

Абсолют хатоликни Δ деб белгиласак, у ҳолда

$$\Delta = |A - a| \tag{1.3}$$

бўлади.

Амалиётда кўп ҳолларда «0,01 гача аниқлик билан», «1 см гача аниқлик билан» ва ҳ.к. лар учрайди. Бу эса абсолют хатоликнинг 0,01; 1 см ва ҳ.к. га тенг эканлигини билдиради.

1-мисол. L узунликдаги кесмани 0,01 см аниқликда ўлчадилар ва $l = 21,4$ см натижани олдилар.

Бу ерда абсолют хатолик $\Delta l = 0,01$ см. (1.2) формулага асосан $L = 21,4 \pm 0,01$, яъни $21,39 \leqslant L \leqslant 21,41$.

Абсолют хатолик ўлчаш ёки ҳисоблашни фақат миқдорий томондан ифодалайди ва сифат томонларини тавсифламайди. Шу муносабат билан нисбий хатолик тушунчаси киритилади.

3-таъриф. Тақрибий сон a нинг нисбий хатолиги $\delta(a)$ деб абсолют хатолик Δa нинг A нинг модулига нисбатига айтилади:

$$\delta(a) = \frac{\Delta a}{|A|} \tag{1.4}$$

ёки

$$\delta(a) = \frac{\Delta a}{|a|}. \tag{1.5}$$

(1.4) ва (1.5) формулаларни 100 га кўпайтирилса, нисбий хатолик фоиз ҳисобида чиқади.

2-мисол. $a = 35,148 \pm 0,00074$ тақрибий соннинг нисбий хатоси (фоизларда) топилсин.

Бу ерда $\Delta a = 0,00074$; $A = 35,148$. (1.4) га асосан

$$\delta(a) = 0,00074 : (35,148) = 0,000022 \approx 0,003\ \%$$

3-мисол. Нисбий хатолиги $\delta(a) = 0,01\ \%$ бўлган $a = 4,123$ тақрибий соннинг абсолют хатолиги Δa топилсин.

Фоизни ўнли каср орқали ифодалаб ва (1.5) формулага асосан: $\Delta a = |a| \cdot \delta(a) = 4,123 \cdot 0,0001 = 0,0005$. $A = 4,123 \pm 0,0005$.

4-мисол. Жисмнинг оғирлигини ўлчашда $P = 23,4 \pm \pm 0,2$ г натижа олинган. Нисбий хатолик топилсин.

Бу ерда $\Delta P = 0,2$. У ҳолда

$$\delta(p) = \frac{0,2}{23,4} \cdot 100\ \% = 0,9\ \%.$$

1.3-§. ТАҚРИБИЙ СОНЛАР УСТИДА АМАЛЛАР

Тақрибий сонларни қўшганда ёки айирганда уларнинг абсолют хатоликлари қўшилади:

$$\Delta(a \pm b) = \Delta a + \Delta b, \tag{1.6}$$

бу ерда a ва b — тақрибий сонлар.
Тақрибий сонни тақрибий сонга бўлганда ёки кўпайтирганда уларнинг нисбий хатоликлари қўшилади:

$$\delta(a \cdot b) = \delta(a) + \delta(b); \tag{1.7}$$

$$\delta\left(\frac{a}{b}\right) = \delta(a) + \delta(b)$$

Тақрибий сонни даражага оширилганда, унинг нисбий хатолиги шу даража кўрсаткичига кўпайтирилади.

$$\delta(a^n) = n \cdot \delta \cdot (a). \tag{1.8}$$

Мисол. Қуйидаги функциянинг нисбий хатолиги топилсин:

$$y = \left(\frac{a+b}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

(1.6), (1.7) ва (1.8) формулалардан фойдалансак,

$$\delta(y) = \frac{1}{2}\delta(a+b) + 3\delta(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta a + \Delta b}{|a+b|} + 3\frac{\Delta x}{|x|}\right).$$

Фараз қилайлик, a бир ўзгарувчили функция $y = f(x)$ нинг аргументи x нинг тақрибий қиймати, Δa эса унинг абсолют хатолиги бўлсин. Бу функциянинг абсолют хатолиги сифатида унинг орттирмаси Δy ни олиш мумкин. Орттирмани эса дифференциал билан алмаштирсак:

$$\Delta y \approx dy$$

У ҳолда

$$\Delta y = |f'(a)| \cdot \Delta a$$

Ушбу мулоҳазани кўп ўзгарувчили функцияга ҳам қўллаш мумкин.

$U = f(x, y, z)$ функциянинг аргументлари x, y, z лар учун тақрибий қийматлар a, b, c лар бўлсин. У ҳолда

$$\Delta u = |f'_x(a, b, c)| \cdot \Delta a + |f'_y(a, b, c)| \cdot \Delta b + + |f'_z(a, b, c)| \cdot \Delta c, \tag{1.9}$$

бу ерда Δa, Δb, Δc — аргументлар абсолют хатолиги; f'_x, f'_y, f'_z — мос равишда x, y, z буйича олинган хусусий ҳосилалар.

Нисбий хатолик эса куйидаги формуладан аникланади:

$$\delta(u)=\frac{\Delta u}{|f(a,b,c)|} \tag{1.10}$$

II БОБ

АЛГЕБРАИК ВА ТРАНСЦЕНДЕНТ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ УСУЛЛАРИ

2.1-§. МАСАЛАНИНГ ҚЎЙИЛИШИ

Бир номаълумли исталган тенгламани қуйидаги кўринишга келтириш мумкин

$$f(x)=0, \tag{2.1}$$

бу ерда $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз.

Таъриф. (2.1) тенгламанинг *илдизи (ечими)* деб шундай $\xi(a\leqslant\xi\leqslant b)$ сонга айтиладики, ξ ни (2.1) га қўйганда

$$f(\xi)=0$$

айният ҳосил булади.

Агар (2.1) да $f(x)$ функция алгебраик, яъни

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n \tag{2.2}$$

бўлса, у ҳолда (2.1) *алгебраик тенглама* деб аталади. ((2.2) да $a_0, a_1,\ldots,a_n$ — исталган сонлар, n — натурал сон.)

Алгебраик тенгламага мисоллар:

$$x^2-5x+6=0;\ \sqrt{2x+6}+\sqrt{6x-4}=14;$$

$$\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}=\frac{x-1}{4}\ \text{ва т.к.}$$

Алгебраик тенглама деганда (2.2) кўринишдаги тенглама кўзда тутилади. Келтирилган мисоллардаги иккинчи ва учинчи тенгламаларни содда амаллар бажариб (2.2) кўринишга келтириш мумкин.

Агар (2.1) тенгламада $f(x)$ функция алгебраик бўлмаса, яъни уни (2.2) кўринишда ифодалаб булмаса, у холда (2.1) га трансцендент тенглама дейилади. Трансцендент тенгламага мисоллар:

$$x-10\sin x=0;\ 2x-2\cos x=0;\ lg\,(x+1)=tgx \quad \text{ва х.к.}$$

Кўрсаткичли (a^x), логарифмик ($log_a x$), тригонометрик ($\sin x$, $\cos x$, tgx, $ctgx$ ва х.к.) функциялар алгебраик бўлмаган (трансцендент) функциялардир.

(2.1) тенглама хакикий ёки комплекс илдизга эга бўлиши мумкин. Биз факат хакикий илдизлар топиш билан шугулланамиз ва куйидаги масалаларни ечамиз:

1) (2.1) тенглама хакикий илдизга эгами ёки йўкми; агар эга бўлса илдизлар сони нечта?

2) хакикий илдизларни аник усуллар билан ёки берилган аникликда такрибий усуллар билан топиш;

Олий алгебрадаги алгебраик тенгламаларнинг баъзи хоссаларини исботсиз келтирамиз:

1) Хар кандай алгебраик тенглама жуда бўлмаганда битта илдизга эга (хакикий ёки комплекс).

2) Хар кандай n тартибли алгебраик тенгламанинг илдизлари сони n дан катта бўлмайди.

3) Хар кандай хакикий коэффициентли алгебраик тенглама факат жуфт сонли комплекс илдизларга эга бўлиши мумкин.

4) Хар кандай ток даражали алгебраик тенглама жуда бўлмаганда битта хакикий илдизга эга.

Алгебраик тенглама илдизларини кандай топамиз?

1-, 2-тартибли тенгламалар учун тайёр хисоблаш формулалари мавжуд булиб, улар бизга урта мактаб математикасидан маълум. Бу формулаларда илдизлар тенгламанинг коэффициентлари оркали ифодаланади (масалан квадрат тенгламанинг илдизларини хисоблашда). 3- ва 4-тартибли тенгламалар учун хам формулалар мавжуд. Бирок бу формулалар мураккаб кўринишда. 5- ва ундан юкори даражали алгебраик тенгламалар учун бундай формулаларнинг булиши мумкин эмас. Буни Норвегиялик математик Абель исботлаган. Бундай тенгламаларни факат хусусий холлардагина ечиш мумкин (масалан $ax^n=b$ ни).

Шу муносабат билан хисоблаш математикасида катор такрибий усуллар ишлаб чикилган. Бу усуллар билан исталган даражали алгебраик ёки трансцендент тенгламаларни берилган аникликда ечиш мумкин. Шунинг учун тақрибий усуллар юқори даражали тенгламаларни ечиш учун асос бўлади.

«Берилган аниқликдаги тақрибий ечим» деганда нимани тушунамиз?

Фараз қилайлик, ξ (2.1) нинг аниқ ечими, x эса унинг ε аниқликдаги тақрибий ечими ($0<\varepsilon<1$) бўлсин. У ҳолда юқоридаги саволимизнинг жавоби $|\xi-x|\leqslant\varepsilon$ бўлади. Ушбу бобда биз бир номаълумли алгебраик ва трансцендент тенгламаларни баъзи тақрибий ечиш усуллари билан танишиб чиқамиз.

2.2-§. ИЛДИЗЛАРНИ АЖРАТИШ. ОРАЛИҚНИ ИККИГА БЎЛИШ УСУЛИ

Тенгламаларни тақрибий ечиш жараёни иккита босқичга ажратилади:

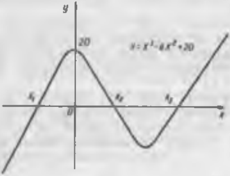
1) илдизларни ажратиш;

2) илдизларни берилган аниқликда топиш.

$[a;b]$ кесмада $f(x)=0$ тенгламанинг ξ дан бошқа илдизи йўқ бўлса, илдиз ξ ажратилган ҳисобланади. Илдизларни ажратиш учун $[a;b]$ кесмани шундай кесмачаларга бўлиш керакки, бу кесмачаларда тенгламанинг фақат битта илдизи бўлсин. Илдизларни **график** ва **аналитик** усуллар билан ажратиш мумкин.

Илдизларни график усулда ажратиш. I- усул. Бу усул жуда содда бўлиб қуйидагича бажарилади. Декарт координат тизимида $y=f(x)$ функциянинг графигини чизамиз (бу бизга ўрта мактаб дастуридан маълум). Шу графикнинг Ox ўқи билан кесишган нуқталари изланаётган илдизлар (тақрибий) бўлади.

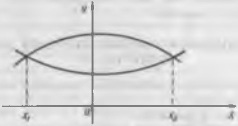
Мисол. $x^3-6x^2+20=0$ тенгламанинг тақрибий ечимлари x_1, x_2, x_3 1- расмда кўрсатилган.



1- расм.

2- усул. $f(x)=0$ тенгламани $f(x)=f_2(x)$ кўринишда ёзиб оламиз.

Декарт координат тизимида $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функцияларнинг графикларини чизамиз. Агар бу эгри чизиқлар ўзаро кесишса, кесишган нуқталаридан Ox ўқига тик чизиқ (перпендикуляр) ўтказамиз. Ҳосил бўлган нуқталар (ёки нуқта) тақрибий ечимлар бўлади. 2- расмдаги x_1 ва x_2 лар (2.1) тенгламанинг тақрибий ечимларидир.



2- расм

Бу усуллар билан тенгламалар ечганда аниқроқ ечимлар олиш учун графикларни иложи борича аниқ чизиш ва катта масштаб олиш лозим бўлади. Шунга қарамай график усуллар билан илдизларни юқори аниқликда ҳисоблаб бўлмайди. График усул билан тенгламанинг илдизларини бирор чегараланган кесмада аниқлаймиз, яъни чизмани исталганча катта ўлчовда ололмаймиз ва тенглама нечта илдизга эга эканлигига жавоб бера олмаймиз. Илдизларни юқори аниқликда топиш лозим бўлса, бошқа тақрибий усуллардан фойдаланиш керак.

Илдизларни аналитик усулда ажратиш. $f(x)=0$ тенгламанинг илдизларини аналитик усулда ажратиш учун олий математика курсидан баъзи теоремаларни исботсиз келтирамиз.

1-теорема. *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлиб, кесманинг четка нуқталарида турли ишорали қийматлар қабул қилса, у ҳолда $[a, b]$ кесмада $f(x)=0$ тенгламанинг жуда бўлмаганда битта илдизи ётади.*

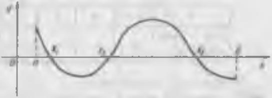
2-теорема. *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз ва монотон бўлиб, кесманинг четка нуқталарида турли ишорали қийматлар қабул қилса, у ҳолда $[a, b]$ кесмада $f(x)=0$ тенгламанинг фақат битта илдизи ётади.*

3-теорема. *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлиб ва кесманинг чекка нуқталарида турли ишорали қийматлар қабул қилиб, $[a, b]$ кесманинг ичида $f'(x)$ ҳосиласининг ишораси ўзгармаса, у ҳолда $[a, b]$ кесмада $f(x)=0$ тенгламанинг фақат битта илдизи ётади.*

Эслатма. 1) $y=f(x)$ функция берилган интервалда монотон дейилади, агар шу интервалга тегишли исталган $x_2 > x_1$ учун $f(x_1) \geqslant \geqslant f(x_1)$ ($f'(x) \geqslant 0$) (монотон ўсувчи) ёки $f(x_2) \leqslant f(x_1)$ ($f'(x) \leqslant 0$) (монотон камаювчи) бўлса

2) Агар $y=f(x)$ функция берилган интервалда узлуксиз бўлиб, интервалнинг ҳамма нуқталарида ҳосилалари мавжуд бўлса, у ҳолда функциянинг бу интервалда монотон бўлиши учун $f'(x) \geqslant 0$ ёки $f'(x) \leqslant \leqslant 0$ тенгсизликларнинг бажарилиши зарур ва етарли.

3- ва 4-расмларда 1- ва 2-теоремаларнинг яққол тасвири берилган.



3- расм

4- расм

Оралиқни иккига бўлиш усули. Фараз қилайлик, $f(x)=0$ тенгламанинг бирор ξ илдизи $[a, b]$ кесмада ажратилган бўлсин. Кесманинг узунлиги $d=b-a$ деб белгилайлик. Тенгламанинг ξ ечими $\varepsilon=0{,}001$ аниқликда топилсин. ξ илдиз $[a, b]$ нинг ичида бўлганлиги ($a<\xi<b$) учун a ни ками билан олинган тақрибий илдиз, b ни ортиғи билан олинган тақрибий илдиз деб олишимиз мумкин. Агар $d \leqslant 0{,}001$ бўлса масала ечилган ҳисобланади ва a ҳамда b лар $f(x)=0$ тенгламанинг берилган $\varepsilon=0{,}001$ аниқликдаги ечимлари бўлади. Бу ҳолда тақрибий ечим сифатида a ва b лардан ташқари булар орасида ётган исталган x_0 ($a<x_0<b$) ни олиш мумкин. Тақрибий ечим сифатида $x_0=\frac{a+b}{2}$ ни олиш мақсадга мувофиқ.

Энди фараз қилайлик $d > 0{,}001$ ва $[a, b]$ кесманинг ўртасида $c = \frac{a+b}{2}$ нуқта олинган бўлсин. У ҳолда $[a, b]$ кесма узунликлари $(b-a)/2$ га тенг бўлган $[a, c]$ ва $[c, b]$ кесмаларга ажрайди. Шу икки кесмадан қайси бирининг чекка нуқталарида $f(x)$ функция ишорасини ўзгартирса, шу кесмани олиб қолиб кейингисини ташлаб юборамиз. Қолган кесманинг узунлиги $d_1 \leqslant \varepsilon$ бўлса, шу ерда тўхтаймиз. Агар шарт бажарилмаса, олиб қолинган кесмада юқоридаги мулоҳазаларни такрорлаймиз. Иккига бўлиш жараёнини кесманинг узунлиги $d_n \leqslant \varepsilon$ (n — иккига бўлишлар сони) бўлгунига қадар давом эттирамиз.

Мисол. $x^3 - 4x - 1 = 0$ тенглама $\varepsilon = 0{,}001$ аниқликда ечилсин.

Қуйидаги жадвални тузамиз

x	-1	0	1	2	2,1	2,2
$f(x)$ нинг ишораси	+	−	−	−	−	+

Жадвалдан кўриняптики $[-1;0]$; $[2{,}1;\ 2{,}2]$ кесмаларда тақрибий ечим (1-теоремага асосан) бор. Биз учун қулай кесма $[2{,}1;\ 2{,}2]$. Бунда $f(2,1) = -1{,}39 < 0$; $f(2{,}2) = 0{,}850 > 0$. Бизда $a = 2{,}1$; $b = 2{,}2$. Бундан $d = b - a = 0{,}1 > \varepsilon$. Демак ҳисоблашни давом эттириш керак.

$$f(2{,}11) = -0{,}046 < 0;\ f(2{,}12) = 0{,}046 > 0.$$

Бу ердан $a = 2{,}11$; $b = 2{,}12$; $d = b - a = 0{,}01 > \varepsilon$. Ҳисоблашни яна давом эттирамиз:

$$f(2{,}114) = -0{,}0085 < 0;\ f(2{,}115) = 0{,}0009 > 0.$$

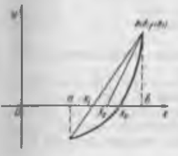
$a = 2{,}114$; $b = 2{,}115$; $d = b - a = 2{,}115 - 2{,}114 = 0{,}001 = \varepsilon$.

Қўйилган мақсадга эришдик, яъни кесманинг узунлиги d аввалдан берилган аниқлик $\varepsilon = 0{,}001$ дан катта эмас. Бу мисолда изланаётган тақрибий ечим ξ қуйидаги оралиқда бўлади $2{,}114 < \xi < 2{,}115$, яъни 2,114 ва 2,115 ларни тақрибий ечим тарзида олиш мумкин (ξ аниқлик билан). Амалда буларнинг ўрта арифметиги олинса ечим аниқлиги янада ошади.

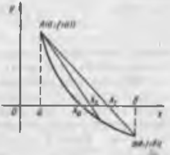
2.3- §. ВАТАРЛАР УСУЛИ

Алгебраик ва трансцендент тенгламаларни ечишда ватарлар усули кенг қўлланадиган усуллардан биридир. Бу усулни икки ҳолат учун кўриб чиқамиз.

I- ҳолат. Фараз қилайлик $f(x)=0$ тенгламанинг илдизи $[a, b]$ кесмада ажратилган ва кесманинг четка нуқталарида $f(a)\cdot f(b)<0$ бўлсин. Бундан ташқари биринчи ва иккинчи ҳосилалари бир хил ишорали қийматларга эга бўлсин, яъни $f'(x)\cdot f''(x)>0$ ёки $f(a)<0$; $f(b)>0$; $f'(x)>0$; $f''(x)>0$ (5- расм).



5- расм



6- расм

$f(x)=0$ — тенгламанинг аниқ ечими, $f(x)$ функция графигининг Ox ўқи билан кесишган нуқтаси x_0. A ва B нуқталарни тўғри чизиқ (ватар) билан туташтирамиз.

Олий математикадан маълумки, A ва B нуқталарда (5- расм) ўтган тўғри чизиқнинг тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}. \qquad (2.3)$$

Ўтказилган ватарнинг Ox ўқи билан кесишган нуқтаси x_1 ни тақрибий ечим деб қабул қиламиз ва унинг координатасини аниқлаймиз. (2.3) тенгликда $x=x_1$, $y=0$ деб ҳисоблаб уни x_1 га нисбатан ечамиз:

$$x_1=a-\frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)} \qquad (2.4)$$

Изланаётган ечим x_0 энди $[x_1;\ b]$ кесманинг ичида. Агар топилган x_1 ечим бизни қаноатлантирмаса юқорида айтилган мулоҳазаларни $[x_1; b]$ кесма учун такрорлаймиз ва x_2 нуктанинг координатини аниклаймиз:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(b - x_1)}{f(b) - f(x_1)}. \tag{2.5}$$

Агар x_2 илдиз ҳам бизни қаноатлантирмаса, яъни аввалдан берилган ε аниклик учун $|x_2 - x_1| \leqslant \varepsilon$ шарт бажарилмаса, x_3 ни ҳисоблаймиз:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(b - x_2)}{f(b) - f(x_2)} \tag{2.6}$$

ёки умумий ҳолда

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)}, \tag{2.7}$$

яъни ҳисоблашни $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \varepsilon$ шарт бажарилгунга қадар давом эттирамиз.

Юқорида келтирилган формулаларни $f(a) > 0$; $f(b) < 0$; $f'(x) < 0$; $f''(x) < 0$ учун ҳам қуллаш мумкин.

2-ҳолат. $f(x)$ функциянинг биринчи ва иккинчи ҳосилалари турли ишорали қийматларга эга деб фараз қилайлик, яъни $f'(x) \cdot f''(x) < 0$ ёки $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$ (6-расм).

A ва B нукталарни туғри чизиқ (ватар) билан туташтириб унинг тенгламасини ёзамиз

$$\frac{y - f(b)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - b}{b - a}. \tag{2.8}$$

Бу тенгламада $y = 0$ ва $x = x_1$ деб қабул қилиб, уни x_1 га нисбатан ечсак,

$$x_1 = b - \frac{f(b)(b - a)}{f(b) - f(a)}. \tag{2.9}$$

Топилган x_1 ни тақрибий ечим деб олиш мумкин. Агар топилган x_1 нинг аниқлиги бизни қаноатлантирмаса, юқоридаги мулоҳазани $[a, x_1]$ кесма учун такрорлаймиз, яъни x_2 ни ҳисоблаймиз:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - a)}{f(x_1) - f(a)}. \tag{2.10}$$

Агар $|x_2 - x_1| \leqslant \varepsilon$ шарт бажарилса, тақрибий ечим сифатида x_2 олинади, бажарилмаса x_3, x_4, ... лар ҳисобланади, яъни

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)} \qquad (2.11)$$

Хисоблаш жараёни $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$ бўлгунга қадар давом эттирилади. $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$ бўлган ҳол учун ҳам тақрибий илдиз (2.9) — (2.11) формулалар билан ҳисобланади. Демак, агар $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ бўлса тақрибий ечим (2.4–2.7) формулалар билан, $f'(x) \times f''(x) < 0$ бўлса (2.9) — (2.11) формулалар билан ҳисобланади.

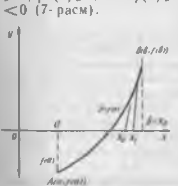
Мисол. $x^3 + x^2 - 3 = 0$ тенглама $\varepsilon = 0{,}005$ аниқликда ватарлар усули билан ҳисоблансин.

Ечиш. Илдизларни ажратсак, $0{,}5 < x < 1{,}5$ га эга бўламиз; бу ерда $f(0{,}5) = -2{,}625 < 0$; $f(1{,}5) = 2{,}600 > 0$; $f'(x) = 3x^2 + 2x$; $f''(x) = 6x + 2$. Қидирилаётган тақрибий илдиз $[0{,}5;\ 1{,}5]$ кесмада экан. Бу кесмада эса $f'(x) > 0$; $f''(x) > 0$. Демак биз тақрибий илдизни (2.4) — (2.7) формулалар ёрдамида ҳисоблаймиз (1- ҳолат). (2.4) дан $x_1 = 1{,}012$ ни, (2,5) дан $x_2 = 1{,}130$ ни; (2.6) дан $x_3 = 1{,}169$ ни, (2.7) дан ($n = 3$) $x_4 = 1{,}173$ ни топамиз. Бу ерда $|x_4 - x_3| = 1{,}173 - 1{,}169 = 0{,}004 < \varepsilon$. Демак шарт 4- қадамда бажарилди. Шунинг учун $x_4 = 1{,}173$ юқоридаги тенгламанинг $\varepsilon = 0{,}005$ аниқликдаги илдизи бўлади.

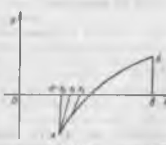
2.4-§. УРИНМАЛАР УСУЛИ. КОМБИНАЦИЯЛАНГАН УСУЛ

Уринмалар усулини Ньютон усули деб ҳам атайдилар. Бу усулни ҳам икки ҳолат учун кўриб чиқамиз.

1- ҳолат. Фараз қилайлик, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ ёки $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$ (7- расм).



7- расм



8- расм

$y=f(x)$ эгри чизикка B нуктада уринма ўтказамиз ва уринманинг Ox ўқи билан кесишган нуктаси x_1 ни аниқлаймиз.

Уринманинг тенгламаси қуйидагича:

$$y-f(b)=f'(b)\ (x-b), \tag{2.12}$$

бу ерда $y=0$, $x=x_1$ деб, (2.12) ни x_1 га нисбатан ечсак,

$$x_1=b-\frac{f(b)}{f'(b)}. \tag{2.13}$$

Шу мулоҳазани $[a;\ x_1]$ кесма учун такрорлаб, x_2 ни топамиз:

$$x_2=x_1-\frac{f(x)}{f'(x)}. \tag{2.14}$$

Умуман олганда

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{2.15}$$

Ҳисоблашни $|x_{n+1}-x_n|\leqslant\varepsilon$ шарт бажарилганда тўхтатамиз.

2- ҳолат. Фараз қилайлик, $f(a)<0$, $f(b)>0$, $f'(x)>0$, $f''(x)<0$ ёки $f(a)>0$, $f(b)<0$, $f'(x)<0$, $f''(x)>0$ (8- расм). $y=f(x)$ эгри чизикка A нуктада уринма ўтказамиз, унинг тенгламаси:

$$y-f(a)=f'(a)\ (x-a). \tag{2.16}$$

Бунда $y=0$, $x=x_1$ десак,

$$x_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}. \tag{2.17}$$

$[x_1;\ b]$ кесмадан

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \tag{2.18}$$

Умуман

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{2.19}$$

(2.13) ва (2.17) формулаларни бир-бири билан солиштирсак, улар бир-бирларидан бошланғич яқинлашиши (a ёки b) ни танлаб олиш билан фарқланадилар.

Бошлангич якинлашишни танлаб олишда куйидаги қоидадан фойдаланилади; бошланғич яқинлашиш тарзида $[a; b]$ кесманинг шундай чекка (a ёки b) қийматини олиш керакки, бу нуқтада $f(x)$ функциянинг ишораси унинг иккинчи ҳосиласининг ишораси билан бир хил бўлсин.

Мисол. $x-\sin x=0,25$ тенгламанинг илдизи $\varepsilon=0,0001$ аниқликда уринмалар усули билан аниқлансин.

Ечиш. Тенгламанинг илдизи $[0,982;\ 1,178]$ кесмада ажратилган (буни текширишни китобхонга ҳавола қиламиз); бу ерда $a=0,982$; $b=1,178$; $f'(x)=1-\cos x$; $f''(x)=\sin x>0$.

$[0,982;\ 1,178]$ кесмада $f(1,178)\cdot f''(x)>0$, яъни бошланғич яқинлашишда $x_0=1,178$. Ҳисоблашни (2.13) — (2.15) формулалар воситасида бажарамиз. Ҳисоблаш натижалари қуйидаги 2.1- жадвалда берилган.

2.1- жадвал

n	x_n	$-\sin x_n$	$f(x_n)=x_n-\sin x_n-0,25$	$f'(x_n)=1-\cos x_n$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1,178	−0,92384	0,00416	0,61723	−0,0065
1	1,1715	−0,92133	0,00017	0,61123	−0,0002
2	1,1713	−0,92127	0,00003	0,61110	−0,00005
3	1,17125				

Жадвалдан кўринадики, $|x_3-x_2|=|1,17125-1,1713|=0,00005<\varepsilon$. Демак ечим деб $x=1,17125$ ни ($\varepsilon=0,0001$ аниқликда) олиш мумкин.

5—8- расмларга диққат билан эътибор қилсак шуни кўрамизки, $f(x)=0$ тенгламанинг тақрибий ечимларини ватарлар ва уринмалар усули билан топганда аниқ ечимга икки чеккадан яқинлашиб келинади. Шунинг учун иккала усулни бир вақтнинг ўзида қўллаш натижасида мақсадга тезроқ эришиш мумкин. Бу усулни комбинациялашган усул деб атайдилар. Комбинациялашган усул юқорида келтирилган усулларнинг умумлашмаси бўлгани туфайли бу тўғрида кўп тўхталмаймиз.

2.5-§. КЕТМА-КЕТ ЯҚИНЛАШИШ УСУЛИ

Биздан $f(x)=0$ тенгламанинг илдизини аниқлаш талаб этилсин. Бу тенгламани қуйидаги (тенг кучли) кўринишда ёзамиз:

$$x=\varphi(x). \tag{2.20}$$

$f(x)=0$ тенгламани $x=\varphi(x)$ кўринишга келтиришни жуда енгил амаллар билан исталган вақтда амалга ошириш мумкин. (2.20) нинг илдизи $[a;\ b]$ кесмада ажратилган бўлсин. $[a;\ b]$ нинг ичида ихтиёрий x_0 нуқтани оламиз ($a\leqslant x_0\leqslant b$) ва бу нуқтани бошлангич (нолинчи) яқинлашиш деб қабул қиламиз. x_0 ни (2.20) нинг ўнг тарафидаги x нинг ўрнига қўйиб, ҳосил бўлган натижани x_1 десак,

$$x_1=\varphi(x_0). \tag{2.21}$$

x_1 ни биринчи яқинлашиш бўйича (2.20) нинг илдизи дейилади. Кейинги яқинлашишлар қуйидагича топилади:

$$\begin{aligned}
&x_2=\varphi(x_1),\\
&x_3=\varphi(x_2),\\
&\ldots\ldots\\
&x_n=\varphi(x_{n-1}),\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Бунинг натижасида қуйидаги кетма-кетликни тузамиз:

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n. \tag{2.22}$$

Агар (2.22) кетма-кетликнинг лимити мавжуд бўлса ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\bar{x}$), у ҳолда $\bar{x}$ (2.20) нинг илдизи бўлади. Бунинг исботи жуда содда. Агар $\varphi(x)$ ни узлуксиз функция десак,

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\varphi\ (x_{n-1})=\varphi(\lim_{n\to\infty} x_{n-1})=\varphi(\bar{x}),$$

яъни $\bar{x}=\varphi(\bar{x})$ бўлиб, $\bar{x}$ (2.20) нинг илдизи бўлади.

Агар (2.20) кетма-кетликнинг лимити мавжуд бўлмаса, у ҳолда кетма-кет яқинлашиш усулининг маъноси бўлмайди.

Юқорида айтилганлардан хулоса шуки, биз бу усул билан $f(x)=0$, $[x=\varphi(x)]$ тенгламанинг ечимини топмоқчи бўлсак, қуйидаги кетма-кет бажарилиши лозим бўлган жараённи ҳисоблашимиз керак бўлади:

$$\left.\begin{array}{l}x_1=\varphi(x_0),\\x_2=\varphi(x_1),\\x_3=\varphi(x_2),\\ \ldots\ldots\\x_n=\varphi(x_{n-1}),\\ \ldots\ldots\ldots\end{array}\right\} \qquad (2.23)$$

бу ерда x_0, x_1, x_2 ,..., $x_{n(i)}$ кетма-кет якинлашишлар; x_0 — бошлангич якинлашиш; x_1 — биринчи якинлашиш; x_2 — иккинчи якинлашиш ва ҳ.к.

(2.23) жараён якинлашувчи бўлишининг етарлилик шартларини қуйидаги теорема ифодалайди (теоремани исботсиз келтирамиз).

Теорема. *$x=\varphi(x)$ тенгламанинг илдизи $[a, b]$ кесмада ажратилган бўлиб, бу кесмада қуйидаги шартлар бажарилса:*

1) $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ да аниқланган ва дифференциалланувчи;

2) барча $x\in[a; b]$ учун $\varphi(x)\in[a, b]$;

*3) барча $x\in[a; b]$ да $|\varphi'(x)|\leqslant M<1$ бўлса, у ҳолда (2.23) жараён **яқинлашувчи** бўлади.*

Бу ерда шуни таъкидлаш лозимки, теореманинг шартлари факат етарли булиб, зарурий эмасдир, яъни (2.23) жараён бу шартлар бажарилмаганда ҳам якинлашувчи булиши мумкин. (2.23) ни ҳисоблаганимизда, ҳисоблашни аввалдан берилган ε аниклик учун қуйидаги тенгсизлик бажарилгунга қадар давом эттирамиз:

$$|x_n-x_{n-1}|\leqslant\varepsilon \qquad (n=1,2,3,4,\ldots)$$

Мисол. $4x-5\ln x=5$ тенглама $\varepsilon=0{,}0001$ аниқликда кетма-кет якинлашиш усули билан ечилсин.

Е ч и ш. Тенгламани $\ln x=\frac{4x-5}{5}$ кўринишда ёзамиз ва $y_1=\ln x$; $y_2=\frac{4x-5}{5}$ чизиқлар кесишган нуктани аниқлаймиз. Булар $x_0=2{,}28$; $x_0=0{,}57$. Буларни бошланғич якинлашиш нукталари деб оламиз. Берилган тенгламани $x=1{,}25(1+\ln x)$ кўринишда ёзсак, $\varphi(x)=1{,}25(1+\ln x)$ бўлади, бундан $\varphi'(x)=\frac{1{,}25}{x}$. Бу ҳолда $x_0=2{,}28$ учун кетма-кет яқинлашиш жараёни якинлашувчи бўлади:

$$\varphi'(x)=\frac{1,25}{x}<1.$$

Ҳисоблаш натижалари қуйидаги 2.2- жадвалда келтирилган:

2.2- жадвал

(1)	(2)	(3)
x	$\ln(1)+1$	1,25·(2)
2,28	1,82418	2,28022
2,28022	1,82427	2,28034
2,28034	1,82432	2,28040
2,28040	1,82435	2,28044
2,28044	1,82437	2,28046

Бошланғич яқинлашиш $x_0=0,57$ атрофида жараён яқинлашувчи бўлмайди, чунки

$$\varphi'(x)=\frac{1,25}{x_0}=\frac{1,25}{0,57}>1.$$

Бу ҳолда берилган тенгламани $x=e^{0,8x-1}$ кўринишда ёзиб, ҳисоблашни давом эттириш керак.

III БОБ

ЧИЗИҚЛИ ВА ЧИЗИҚЛИ БЎЛМАГАН АЛГЕБРАИК ТЕНГЛАМАЛАР ТИЗИМИНИ ЕЧИШ

3.1-§. ВЕКТОРЛАР ВА МАТРИЦАЛАР ҲАҚИДА БАЪЗИ МАЪЛУМОТЛАР. МАСАЛАНИНГ ҚЎЙИЛИШИ

Ушбу параграфда тенгламалар тизимларини ечиш усулларини кўришда лозим бўладиган векторлар ва матрицалар ҳақидаги асосий маълумотларни келтирамиз. Булар ўқувчига олий математика курсидан маълум бўлса-да, бу маълумотлар ушбу бобни ёритишда муҳим бўлганлиги туфайли бу ҳақда қисқача тўхталишни лозим топдик.

Вектор фазонинг иккита нуқтаси унинг боши ва охири билан аниқланади. Фараз қилайлик, барча векторлар фазонинг бирдан-бир нуқтаси — координата бошидан бошлансин. У ҳолда бу векторни аниқлаш учун фақат битта нуқтани, яъни унинг охирини кўрсатиш етарли бўлади, бу нуқта ўз навбатида унинг координаталари бўлмиш учта сон орқали ифодаланади.

Шундай қилиб, координата бошидан бошланган ҳар қандай вектор тартибланган сонларнинг учлиги билан аниқланадики, у вектор охирининг координаталари деб аталади. Аксинча, ҳар қандай тартибланган сонлар учлиги координата боши билан шу учта сон координаталари вазифасини утовчи нуқтани бирлаштирувчи ягона векторни аниқлайди. Биз x векторга унинг координаталари ёки ташкил этувчилари деб аталмиш x_1, x_2, x_3 сонлар учлигини мос қўямиз.

Энди векторлар устида бажариладиган амалларни кўриб чиқайлик.

Векторни сонга кўпайтириш учун унинг координаталари шу сонга кўпайтирилади, яъни

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3). \qquad (3.1)$$

Шунга ухшаш

$$(x_1, x_2, x_3) \pm (y_1, y_2, y_3) = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, x_3 \pm y_3). \quad (3.2)$$

Векторнинг модули (узунлиги) қуйидагича аниқланади:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \qquad (3.3)$$

x ва y векторларнинг скаляр кўпайтмаси деб уларнинг модулларининг ҳамда ораларидаги бурчак косинусининг кўпайтмасига айтилади:

$$x \cdot y = |x| \cdot |y| \cos(\widehat{x, y}).$$

Агарда x ва y векторлар мос равишда (x_1, x_2, x_3) ва (y_1, y_2, y_3) координаталарга эга бўлсалар, уларнинг скаляр кўпайтмаси қуйидагича аниқланади:

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3. \qquad (3.4)$$

Худди юқоридаги каби биз энди n ўлчовли вектор ва улар устида бажариладиган амалларни аниқлашимиз мумкин. n ўлчовли вектор деб тартибланган n та ҳақиқий $x_1, x_2, \dots, x_n$ сонларни айтамиз. Векторнинг λ сонга кўпайтмаси қуйидагича аниқланади:

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ҳамда $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ векторларнинг йиғиндиси ва айирмаси эса қуйидагига тенг:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \pm (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \dots, x_n \pm y_n).$$

n ўлчовли векторнинг модули деб қуйидаги сонга айтилади:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Икки векторнинг бир-бирига скаляр кўпайтмаси эса қуйидагига тенг:

$$x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

Баъзи ҳолларда битта вектор ўрнига векторлар тизими билан ишлашга тўғри келади. Бундай векторлар тизимининг координаталари тўғри бурчакли жадвал кўринишига эга бўлади ва матрица деб аталади. Матрица элементлари иккита рақамли (индексли) битта ҳарф орқали ифодаланади (масалан a_{ij}). Буларнинг биринчиси сатр рақамини, иккинчиси эса устун рақамини билдиради. Матрица элементлари икки томонидан қавслар ёки иккита вертикал тўғри чизиқ орасига олиб ёзилади. Масалан, учта сатр ва тўртта устундан иборат (3×4 тартибли) матрица қуйидагича ёзилади:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

Бу матрицани учта тўрт ўлчовли вектор сатрлар тизими сифатида ёки тўртта уч ўлчовли вектор устунлар тизими сифатида қараш мумкин.

Кўпинча устунлари ва сатрлари сони бир хил бўлган матрицалар учрайди. n та устун ва n та сатрдан иборат матрицани n- тартибли квадрат матрица дейилади.

Матрицалар устида амаллар оддийгина аниқланади. Бизга келгусида фақат матрицани векторга кўпайтириш ва уларнинг кўпайтмаси керак бўлиши туфайли шуларнигина кўриб чиқамиз.

Матрицанинг векторга кўпайтмаси деб шундай вектор устунга айтиладики, унинг координаталари матрица сатрларидаги векторларнинг берилган вектор устунга скаляр кўпайтмаларидан иборат, яъни

$$
\begin{Vmatrix} a_{11}\,a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\,a_{m2}\ldots a_{mn} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{Vmatrix}
$$

бу ерда

$$
\begin{aligned}
c_1 &= a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \ldots + a_{1n}b_n, \\
c_2 &= a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \ldots + a_{2n}b_n, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
c_m &= a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \ldots + a_{mn}b_n.
\end{aligned}
$$

Матрицаларнинг бир-бирига кўпайтмасини содда мисол тариқасида квадрат матрицалар учун аниқлаймиз. Иккита бир хил тартибли квадрат **матрицанинг кўпайтмаси** қуйидагича аниқланади:

$$
\begin{Vmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} b_{11}b_{12}\ldots b_{1n} \\ b_{21}b_{22}\ldots b_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}b_{n2}\ldots b_{nn} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} c_{11}c_{12}\ldots c_{1n} \\ c_{21}c_{22}\ldots c_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}c_{n2}\ldots c_{nn} \end{Vmatrix}
$$

бу ерда

$$
\begin{aligned}
&c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1}, \\
&c_{12} + a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \ldots + a_{1n}b_{n2}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \ldots + a_{2n}b_{n1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

ва умуман

$$
c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{ik}b_{nk},
$$

яъни i-сатр ва b-устундаги элемент биринчи матрица i-сатрининг иккинчи матрица k-устунига скаляр кўпайтмасига тенг.

Асосий диагоналидаги элементлар бирга, барча қолганлари эса нолга тенг бўлган квадрат матрица муҳим аҳамиятга эга. Бундай матрицани **бирлик матрица** дейилади ва E билан белгиланади:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Бундай матрица «бирлик» деб аталишига асосий сабаб ихтиёрий квадрат матрица A учун

$$A\cdot E=E\cdot A=A$$

тенглик ўринли.

Кўпчилик ҳолларда тескари матрица тушунчаси ҳам ишлатилади. A матрицага тескари A^{-1} матрица деб шундай матрицага айтиладики, унинг учун

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$$

тенглик ўринлик бўлади.

Юқорида келтирилганлардан фойдаланиб чизикли тенгламалар тизимини матрицалар ёрдамида ифодалаймиз.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n \end{array}\right\} \qquad (3.5)$$

тизим берилган бўлсин. A билан номаълумлар олдидаги коэффициентлардан ташкил топган матрицани белгилаймиз:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

B билан озод ҳадлардан иборат вектор устунни, X билан эса номаълумлардан иборат вектор устунни белгилаймиз:

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}; \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

У ҳолда берилган (3.5) тизим қуйидагича ёзилади:

$$A \cdot X = B. \qquad (3.6)$$

Назарий ва амалий математиканинг кўпгина масалалари чизиқли алгебраик тенгламалар тизимини ечишга олиб келади.

Чизиқли алгебраик тенгламаларни ечиш асосан икки усулга — аниқ ва итерацион усулларга бўлинади.

Аниқ усул деганда шундай усул тушуниладики, унинг ёрдамида чекли миқдордаги арифметик амалларни аниқ бажариш натижасида масаланинг аниқ ечимини топиш мумкин бўлади. Ҳаммага маълум бўлган Крамер қоидаси аниқ усулга мисол бўла олади. Лекин, Крамер қоидаси амалда жуда кам қўлланилади, чунки бу усул билан n-тартибли чизиқли алгебраик тенгламалар тизимини ечганда ниҳоятда кўп арифметик амалларни бажаришга тўғри келади.

Биз ҳисоблаш учун тежамли бўлган Гаусс ва бош элементлар аниқ усулларини кўриб чиқамиз. Булар номаълумларни кетма-кет йўқотиш ғоясига асосланган.

Итерацион (кетма-кет яқинлашиш) *усул* шу билан характерланадики, бу усулда чизиқли алгебраик тенгламалар тизимининг ечими кетма-кет яқинлашишларнинг лимитидек топилади.

Итерацион усулларни қўллаётганда фақат уларнинг яқинлашишларигина эмас, балки яқинлашишларнинг тезлиги ҳам катта аҳамиятга эга.

Бу усуллар айрим тизимлар учун жуда тез яқинлашиб, бошқа тизимлар учун секин яқинлашиши ёки умуман яқинлашмаслиги ҳам мумкин. Шунинг учун ҳам итерацион усулларни қўллаётганда тизимни аввал тайёрлаб олиш керак. Яъни, берилган тизимни унга тенг кучли бўлган шундай тизимга алмаштириш керакки, ҳосил бўлган тизим учун танланган усул тез яқинлашсин.

Тизимдаги тенгламалардан номаълумларни кетма-кет йўқотишни икки йўл билан амалга ошириш мумкин:

а) тенгламаларнинг керакли комбинацияларини тузиш;

б) алмаштиришнинг ҳар бир қадамида тизим матрицасининг бирор элементини ёки бирор устундаги диагонал элементнинг остидаги барча элементларини нолга айлантириш мақсадида бу матрицани махсус равишда танлаб олинган матрицага кўпайтириш.

Ҳар иккала ҳолда ҳам эътибор шунга қаратилиши керакки, алмаштиришлар натижасида берилган тизим унга тенг кучли булган тизимга алмашиши ҳамда содда кўринишга эга бўлиши лозим.

3.2-§. ГАУСС УСУЛИ

Гауссниng номаълумларни кетма-кет йўқотиш усули чизиқли алгебраик тенгламалар тизимини ечиш усуллари ичида энг универсал ва энг самаралисидир. Соддалик учун тўртта номаълумли тўртта чизиқли тизимни ечишнинг Гаусс усулини кўриб чиқамиз.

Ушбу тизим берилган бўлсин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=b_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=b_2; \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4=b_3, \\ a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4=b_4, \end{cases} \tag{3.7}$$

бу ерда x_i $(i=1,4)$ — номаълум сонлар, a_{ij} $(j=1,4)$ ва b_i $(i=1,4)$ — маълум коэффициентлар. Қулайлик учун $a_{15}=b_1$, $a_{25}=b_2$, $a_{35}=b_3$, $a_{45}=b_4$ деб оламиз.

Гаусс усулининг тўлиқ тавсифига ўтамиз. Биринчи қадамнинг етакчи элементи деб аталадиган a_{11} коэффициентни нолдан фарқли деб ҳисоблаймиз. (3.7) даги биринчи тенгламанинг ҳамма ҳадларини a_{11} га бўлиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3+b_{14}x_4=b_{15}, \tag{3.8}$$

бу ерда

$$b_{1j}=\frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j=2,3,4,5).$$

(3.8) тенгликдан фойдаланиб (3.7) тизимнинг иккинчи, учинчи ва тўртинчи тенгламаларидан x_1 номаълумни йўқотамиз. Бунинг учун (3.8) тенгламани a_{21}, a_{31} ва a_{41} га кўпайтириб натижани мос равишда тизимнинг иккинчи, учинчи ва тўртинчи тенгламаларидан айириш керак. У ҳолда уч номаълумли қуйидаги тизимга эга бўламиз:

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2+a_{23}^{(1)}x_3+a_{24}^{(1)}x_4=a_{25}^{(1)}; \\ a_{32}^{(1)}x_2+a_{33}^{(1)}x_3+a_{34}^{(1)}x_4=a_{35}^{(1)}; \\ a_{42}^{(1)}x_2+a_{43}^{(1)}x_3+a_{44}^{(1)}x_4=a_{45}^{(1)}. \end{cases} \tag{3.9}$$

бу ерда

$$a_{ij}^{1}=a_{ij}-a_{i1}b_{1j}\quad (i=2,3,4,\ j=2,3,4,5) \tag{3.10}$$

Энди шу тизимни ўзгартиришга киришамиз.

Иккинчи қадамни бажаришга ўтишдан олдин иккинчи қадамнинг етакчи элементи деб аталадиган a_{22}^{1} элементни нолдан фарқли деб фараз қиламиз (акс ҳолда тенгламаларнинг ўрнини тегишли равишда алмаштириш лозим). (3.9) тизимнинг биринчи тенгламасини a_{22} га бўламиз, у ҳолда

$$x_2+b_{23}^{(1)}x_3+b_{24}^{(1)}x_4=b_{25}^{(1)}, \tag{3.11}$$

бу ерда

$$b_{2j}^{(1)}=\frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\qquad (j=3,4,5)$$

Юқоридагига ўхшаш x_2 ни йўқотсак,

$$\begin{cases} a_{33}^{(2)}x_3+a_{34}^{(2)}x_4=a_{35}^{(2)}; \\ a_{43}^{(2)}x_3+a_{44}^{(2)}x_4=a_{45}^{(2)} \end{cases} \tag{3.12}$$

тизимга эга бўламиз, бу ерда

$$a_{ij}^{(2)}=a_{ij}^{(1)}-a_{i2}^{(1)}b_{2j}^{(1)}\quad (i=3,4;\ j=3,4,5) \tag{3.13}$$

(3.12) нинг биринчи тенгламасини $a_{33}^{(2)}$ га бўламиз, у ҳолда

$$x_3+b_{34}^{(2)}x_4=b_{35}^{(2)}$$

бўлади, бу ерда

$$b_{34}^{(2)}=\frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}},\quad b_{35}^{(2)}=\frac{a_{35}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}.$$

Бу тенглама ёрдамида (3.12) тизимнинг иккинчи тенгламасидан x_3 ни йўқотиб, қуйидаги тенгламага эга бўламиз:

$$a_{44}^{(3)}x_4=a_{45}^{(3)},$$

бу ерда

$$a_{4j}^{(3)}=a_{4j}^{(2)}-a_{43}^{(2)}b_{3j}^{(2)}\quad (j=4,5). \tag{3.14}$$

Шундай қилиб, (3.7) тизимни учбурчак матрицали ўзига тенг кучли бўлган қуйидаги тизимга келтирдик:

$$\begin{cases} x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3+b_{14}x_4=b_{15}; \\ x_2+b_{23}^{(1)}x_3+b_{24}^{(1)}x_4=b_{25}^{(1)}; \\ x_3+b_{34}^{(2)}x_4=b_{35}^{(2)}; \\ a_{44}^{(3)}x_4=a_{45}^{(3)}. \end{cases} \tag{3.15}$$

Бу ердан кетма-кет қуйидагиларни аниқлаймиз:

$$\begin{cases} x_4=\dfrac{a_{45}^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}; \\ x_3=b_{35}^{(2)}-b_{34}^{(2)}x_4; \\ x_2=b_{25}^{(1)}-b_{24}^{(1)}x_4-b_{23}^{(1)}x_3; \\ x_1=b_{15}-b_{14}x_4-b_{13}x_3-b_{12}x_2. \end{cases} \tag{3.16}$$

Шундай қилиб, (3.7) тизимни ечиш икки босқичдан иборат:

биринчи босқич — тўғри йўл — (3.7) тизимни (3.15) учбурчак кўринишига келтириш;

иккинчи босқич — тескари йўл — номаълумларни (3.16) формулалар ёрдамида аниқлаш.

Қўлда ҳисоблаётганда хатога йўл қўймаслик учун ҳисоблаш жараёнини текшириш маъқулдир. Бунинг учун биз ушбу

$$a_{i,n+2}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}+f_i \qquad (i=\overline{1,n})$$

йиғиндидан фойдаланамиз.

Агар сатр элементлари устида бажарилган амалларни ҳар бир сатрдаги текширувчи йиғинди устида ҳам бажарсак ва ҳисоблашлар хатосиз бажарилган бўлса, у ҳолда текширувчи йиғиндилардан тузилган устуннинг ҳар бир элементи мос равишда алмаштирилган сатрлар элементларининг йиғиндисига тенг булади. Бу ҳол эса биринчи босқич (тўғри юриш) ни текшириш учун хизмат қилади. Иккинчи босқич (тескари юриш) да эса, текширув $x_j=x_j+1$ $(j=\overline{1,4})$ ларни топиш билан бажарилади.

Тенгламалар тизимини қўлда ечилганда ҳисоблашларни қуйидаги 3.1- жадвалда кўрсатилган Гausсниннг ихчам тарҳи бўйича бажариш маъқулдир. (Жадвалда соддалик учун тўртта тенгламалар тизимини ечиш тарҳи келтирилган.)

3.1- жадвал

x_1	x_2	x_3	x_4	Озод ҳадлар	$\sum$	Тарх қисмлари
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	b_1	a_{15}	
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	b_2	a_{25}	
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	b_3	a_{35}	
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	b_4	a_{45}	A
...	...	...	...	...	...	
1	$\frac{a_{12}}{a_{11}}$	$\frac{a_{13}}{a_{11}}$	$\frac{a_{14}}{a_{11}}$	$\frac{b_1}{a_{11}}$	$\frac{a_{15}}{a_{11}}$	
	$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$a_{24}^{(1)}$	$b_2^{(1)}$	$a_{25}^{(1)}$	
	$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$a_{34}^{(1)}$	$b_3^{(1)}$	$a_{35}^{(1)}$	
	$a_{42}^{(1)}$	$a_{43}^{(1)}$	$a_{44}^{(1)}$	$b_4^{(1)}$	$a_{45}^{(1)}$	A_1
...	...	...	...	...	...	
	1	$\frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}}$	$\frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}}$	$\frac{b_2^{(1)}}{a_{22}}$	$\frac{a_{25}^{(1)}}{a_{22}}$	
		$a_{33}^{(2)}$	$a_{34}^{(2)}$	$b_3^{(2)}$	$a_{35}^{(2)}$	
		$a_{43}^{(2)}$	$a_{44}^{(2)}$	$b_4^{(2)}$	$a_{45}^{(2)}$	
...	...	...	...	...	...	A_2
		1	$\frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}}$	$\frac{b_3^{(2)}}{a_{33}}$	$\frac{a_{35}^{(2)}}{a_{33}}$	
			$a_{44}^{(3)}$	$b_4^{(3)}$	$a_{45}^{(3)}$	
...	...	...	...	...	...	A_3
			1	$\frac{b_4^{(3)}}{a_{44}}$	$\frac{a_{45}^{(3)}}{a_{44}}$	
			1	x_4	$\bar{x}_4$	
		1		x_3	$\bar{x}_3$	B
	1			x_2	$\bar{x}_2$	
1				x_1	$\bar{x}_1$	

Мисол. Қуйидаги тизим Гаусс усули билан ечилсин

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4=6; \\ 2x_1+x_2+x_2-x_4=3; \\ -x_1-3x_2-x_3+x_4=-8; \\ x_1+2x_2-x_2+2x_4=11. \end{cases}$$

Тизимни ечиш жараёни қуйидаги 3.2- жадвалда келтирилган.

3.2- жадвал

x_1	x_2	x_3	x_4	Озод ҳадлар	$\sum$	Тарх қисмлари
1	1	−2	1	6	7	
2	1	1	−1	3	6	
−1	−3	−1	1	−8	−12	A
1	2	−3	2	11	13	
...	...	...	...	...	...	
1	1	−2	1	6	7	
	−1	5	−3	−9	−8	
	−2	−3	2	−2	−5	
	1	1	1	5	8	A_1
...	...	...	...	...	...	
	1	−5	3	9	8	
		−13	8	16	11	
		6	−2	−4	0	
		...	...	...	...	A_2
		1	$-\frac{8}{13}$	$-\frac{16}{13}$	$-\frac{11}{13}$	
			$-\frac{22}{13}$	$-\frac{44}{13}$	$-\frac{66}{13}$	A_3
			1	2	3	
		1		0	1	B
	1			3	4	
1				1	2	

Шундай қилиб,

$$x_1=1;\ x_2=3;\ x_3=0;\ x_4=2$$

ечимига эга бўлдик.

Бош элементлар усули.

Гаусс усулида етакчи элементлар доим ҳам нолдан фарқли бўлавермайди. Баъзан эса улар нолга яқин сонлар бўлиши мумкин; бундай сонларга бўлганда катта абсолют хатога эга бўлган сонлар ҳосил бўлади. Бунинг натижасида тақрибий ечим аниқ ечимдан сезиларли даражада четлашиб кетади.

Ҳисоблашда бундай четлашишдан қутилиш учун Гаусс усули бош элементни танлаш йўли билан қўлланилади. Бу усулнинг Гаусс усулининг ихчам тарҳидан фарқи қуйидагидан иборат. Фараз қилайлик, номаълумларни йўқотиш жараёнида ушбу тизимга эгамиз:

$$\begin{cases} x_1+b_{12}^{(1)}x_2+b_{13}^{(1)}x_3+\ldots+b_{1n}^{(1)}x_n=b_{1,n+1}^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m+b_{m,m+1}^{(m)}x_{m+1}+\ldots+b_{mn}^{(m)}x_n=b_{m,n+1}^{(2)}, \\ a_{m+1,m+1}^{(m)}x_{m+1}+\ldots+a_{m+1}^{(m)}x_n=a_{m+1,n+1}^{(m)},\ \text{бу ерда} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,m+1}^{(m)}x_{m+1}+\ldots+a_{n,n}^{(m)}x_n=a_{n,n+1}^{(m)}, \end{cases}$$

$$b_{mj}^{(m)}=\frac{a_{mj}^{(m)}}{a_{mm}^{(m)}};\ a_{ij}^{(m)}=a_{ij}^{(m-1)}-a_{im}^{(m-1)}b_{mj}^{(m)}\quad (i,j\geqslant m+1).$$

Энди $|a_{m+1,k}^{(m)}|=\max\limits_{j}|a_{m+1,j}^{(m)}|$ тенгликни қаноатлантирадиган k- рақамни топиб, ўзгарувчиларни қайта белгилаймиз: $x_{m+1}=x_k$ ва $x_k=x_{m+1}$. Сўнгра $(m+2)$ тенгламадан бошлаб, барчасидан x_{m+1} номаълумни йўқотамиз. Бундай қайта белгилашлар йўқотиш тартибини ўзгартиришга олиб келади ва кўп ҳолларда ҳисоблаш хатолигини камайтиришга хизмат қилади.

Мисол. Бош элементлар усулидан фойдаланиб қуйидаги тизим ечилсин.

$$
\begin{cases}
1,1161x_1+0,1254x_2+0,1397x_3+0,1490x_4=1,5471, \\
0,182x_1+1,1675x_2+0,1768x_3+0,1871x_4=1,6471, \\
0,1968x_1=0,2071x_2+1,2168x_3+0,2271x_4=1,7471, \\
0,2368x_1+0,2471x_2+0,2568x_3+1,2671x_4=1,8471.
\end{cases}
$$

Тизимни ечиш жараёни қуйидаги 3.3- жадвалда келтирилсин.

3.3- жадвал

	i	m_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	$\sum - a_{i6}$
I	1	0,11759	1,11610	0,1254	0,1397	0,1490	1,5471	3,07730
	2	0,14766	0,1582	1,1675	0,1768	0,1871	1,6471	3,33760
	3	0,17923	0,1968	0,2071	0,2168	0,2271	1,7471	3,59490
	4		0,2368	0,2471	0,2568	1,2671	1,8471	3,85490
II	1	0,09353	1,08825	0,09634	0,10950		1,32990	2,62399
	2	0,11862	0,12323	1,13101	0,13888		1,37436	2,76748
	3		0,15436	0,16281	1,17077		1,41604	2,90398
III	1	0,07296	1,07381	0,08111			1,19746	2,35238
	2		0,10492	0,11170			1,20639	2,42301
IV	1		1,06616				1,10944	2,17560
V	1		1				1,04059	2,04059
	2			1			0,98697	1,98697
	3				1		0,93505	1,93505
	4					1	0,88130	1,88130

бу ерда $m_i = a_{iq}/a_{pq}$; барча $i \neq p$ лар учун a_{pq} — бош элемент. Жадвалдан қуйидаги ечимни ҳосил қиламиз:

$$x_1 = 1,04059; \quad x_2 = 0,98697;$$
$$x_3 = 0,93505; \quad x_4 = 0,88130.$$

3.3- §. ИТЕРАЦИОН УСУЛЛАР

3.1- § да итерацион усулларда ечим чексиз кетма-кетликларнинг лимити сифатида топилиши ҳақида айтиб ўтилган эди.

Бугунда турли тамойил (принцип)ларга асосланган жуда кўплаб итерацион усуллар мавжуд. Умуман, бу усулларнинг ўзига хос томонларидан бири шундан иборатки, йўл қўйилган хатоликлари ҳар қадамда тўғриланиб боради. Аниқ усуллар билан ишлаётганда, агар бирор қадамда хатога йўл қўйилса, бу хато охирги натижага ҳам таъсир қилади. Яқинлашувчи итерацион жараённинг бирор қадамида йўл қўйилган хатолик эса фақат бир неча итерация қадамини ортиқча бажаришгагина олиб келади холос. Бирор қадамда йўл қўйилган хатолик кейинги қадамларда тузатилиб борилади. Боз устига бу усулларнинг ҳисоблаш тартиби содда бўлиб, уларни ЭҲМ ларда ҳисоблаш қулайдир. Лекин ҳар бир итерацион усулнинг қўлланиш соҳаси чегаралангандир. Чунки итерация жараёни берилган тизим учун узоқлашиши ёки шунингдек, секин яқинлашиши мумкинки, бунинг оқибатида амалда ечимни қониқарли аниқликда топиб бўлмайди.

Шунинг учун ҳам итерацион усулларда фақат яқинлашиш масаласигина эмас, балки яқинлашиш тезлиги масаласи ҳам катта аҳамиятга эгадир. Яқинлашиш тезлиги дастлабки яқинлашиш векторининг қулай танланишига ҳам боғлиқдир.

Бу параграфда аввал итерацион усулларнинг умумий характеристикасини кўриб чиқамиз, сўнгра эса ҳисоблаш амалиётида кенг қўлланиладиган итерацион усулларни келтирамиз.

3.3.1. Итерацион усулларнинг умумий характеристикаси

Юқорида қайд этилганидек, итерацион усуллар тизимнинг изланган x ечимига яқинлашадиган y_0, y_1, y_2,... итерацион кетма-кетликларни қуришга асосланган. Ҳар бир шундай усул навбатдаги y_{k+1} яқинлашишни аввалгилари ёрдамида ҳисоблашга имкон берадиган итерацион формулалар билан характерланади. Энг содда ҳолда y_{k+1} ни ҳисоблашда фақат битта аввалги y_k итерациядан фойдаланилади. Бундай усуллар бир қадамли дейилади. Бир қадамли усуллар учун итерацион формулани қуйидаги

$$B_{k+1}\frac{y_{k+1}-y_k}{\tau_{k+1}}+Ay_k=f \tag{3.17}$$

стандарт каноник кўринишда ёзиш қабул қилинган; бунда τ_{k+1} — итерацион параметрлар ($\tau_{k+1}>0$), B_{k+1} — ёрдамчи махсусмас матрицалар. Агар τ ва B лар $k+1$ индексга боғлиқ бўлмаса, яъни (3.17) формула ихтиёрий k лар учун бир хил кўринишга эга бўлса, у ҳолда бу итерацион усул стационар усул дейилади. Стационар усуллар ҳисоблаш жараёнини ташкил этиш нуқтаи назаридан соддадир. Аммо ностационар усуллар бошқа устунликларга эга: улар $\{\tau_{k+1}\}$, $\{B_{k+1}\}$ кетма-кетликларни танлаш билан боғланган қўшимча «эркинлик даражасига» эга. Бундан y_k итерациялар тизимнинг x ечимига яқинлашиш тезлигини оширишда фойдаланиш мумкин.

(3.17) итерацион формула ёрдамида навбатдаги y_{k+1} яқинлашишни топиш ушбу

$$B_{k+1}y_{k+1}=F_{k+1} \tag{3.18}$$

тенгламалар тизимини ечишни талаб этади. Бунда

$$F_{k+1}=(B_{k+1}-\tau_{k+1}A)y_k+\tau_{k+1}f.$$

Шундай ҳисоблашни ҳар бир қадамда бажаришга тўғри келади. B_{k+1} матрица сифатида бирлик $B_{k+1}=E$ матрица олсак, итерацион кетма-кетлик ҳадларини ҳисоблаш учун энг содда тарҳга эга бўламиз. Бу ҳолда (3.17) формула кетма-кетликнинг навбатдаги y_{k+1} ҳадини унинг аввалги y_k ҳади орқали ошкор ифодалаш имконини беради:

$$y_{k+1}=y_k-\tau_{k+1}Ay_k+\tau_{k+1}f. \tag{3.19}$$

Ана шундай реккурент формулага асосланган итерацион усуллар ошкор усуллар дейилади.

Ошкормас усуллар ($B_{k+1}\neq E$ орасида B_{k+1} матрицани учбурчакли қилиб танланадиган усуллар энг кўп тарқалган. Бу ҳолда навбатдаги y_{k+1} итерацияни топиш учун y_{k+1} нинг компонентларини (3.18) учбурчакли тизимдан бирин-кетин Гаусс усулининг тескари юришига қилинганидек топишга келтирилади.

Қандайдир итерацион усулнинг қўлланиши $\{y_k\}$ кетма-кетлик тизимнинг x ечимига яқинлашишни билдиради:

$$\lim_{k\to\infty} y_k=x. \tag{3.20}$$

(3.20) тенглик қуйидагини англатади:

$$\sqrt{(y_1^{(k)}-x_1)^2+(y_2^{(k)}+x_2+\ldots+(y_n^{(k)}-x_n)}\to 0 \tag{3.21}$$

(3.21) дан кўринадики, y_k векторлар кетма-кетлигининг x векторга яқинлашишининг зарурий ва етарли шарти ҳар бир компонентнинг яқинлашувчилигидан иборат:

$$\lim_{k\to\infty} y_i^{(k)}=x_i, \quad i=1,2,\ldots,n.$$

Ушбу айирма $z_k = y_k - x$ хатолик дейилади. y_k ни $y_k = x + z_k$ куринишда ёзиб ва (3.17) га қўйиб, хатолик учун,

$$B_{k+1}\frac{z_{k+1}-z_k}{\tau_{k+1}}+Az_k=0 \qquad (3.22)$$

итерацион формулани ҳосил қиламиз. (3.17) дан фарқли улароқ, у тизимнинг ўнг томони (f) ни ўз ичига олмайди, яъни бир жинслидир. (3.20) яқинлашишни талаб этиш z_k нинг нолга интилиши лозимлигини англатади:

$$\lim_{k\to\infty} z_k=0. \qquad (3.23)$$

Ҳар бир итерацион усул яқинлашувчилигининг етарлилик шартлари A, B_{k+1} матрицалар ва τ_{k+1} итерацион параметрлар қаноатлантириши лозим бўлган кўринишда ифодаланади. Улардан баъзиларини, айниқса, итерацион параметрларни оптимал танлашга оид шартларни текширишни кейин. Натижада ҳисоблашларни бажараётганда итерацион параметрларни кўпинча тажриба йўли билан (эмпирик) танлашга тўғри келади.

3.3.2. Оддий итерацион усул

Фараз қилайлик,

$$Ax=b \qquad (3.24)$$

тизим бирор усул билан

$$x+Cx+f \qquad (3.25)$$

кўринишга келтирилган бўлсин, бу ерда C — қандайдир матрица, f — вектор устун. Дастлабки яқинлашиш вектори $x^{(0)}$ бирор усул билан (масалан, $x^{(0)}=0$) топилган бўлсин. Агар кейинги яқинлашишлар

$$x^{(k+1)}=Cx^{(k)}+f \qquad (k=0,1,2,...)$$

реккурент формула ёрдамида топилса, бундай усул оддий итерация усули дейилади.

Агарда C матрица элементлари

$$\sum_{j=1}^{n}|C_{ij}|\leqslant a<1 \qquad (i=1,2,...,n) \qquad (3.26)$$

ва

$$\sum_{i=1}^{n}|C_{ij}|\leqslant \beta<1 \qquad (j=1,2,...,n) \qquad (3.27)$$

шартлардан биронтасини қаноатлантирса, у ҳолда итерацион жараён берилган тенгламанинг x ечимига ихтиёрий бошлангич $x^{(0)}$ векторда якинлашиши исботланган, яъни

$$x=\lim_{k\to\infty} x^{(k)}$$

Шундай қилиб, тизимнинг аниқ ечими чексиз қадамлар натижасида ҳосил қилинади ва ҳосил қилинган кетма-кетликнинг ихтиёрий $x^{(k)}$ вектори тақрибий ечимни беради. Бу тақрибий ечимнинг хатолигини қуйидаги формулалардан бири орқали ифодалаш мумкин:

$$|x_i-x_i^{(k)}|\leqslant\frac{\alpha}{1-\alpha}\max_{j=1,2,\dots,n}|x_j^{(k)}-x_j^{(k-1)}|, \tag{3.28}$$

агарда (3.26) шарт бажарилса, ёки

$$|x_i-x_i^{(k)}|\leqslant\frac{\beta}{1-\beta}\sum_{j=1}^{n}|x_j^{(k)}-x_j^{(k-1)}|, \tag{3.29}$$

агарда (3.27) шарт бажарилса. Бу баҳоларни мос равишда қуйидагича кучайтириш мумкин:

$$m(x_i-x_i^{(k)}|\leqslant\frac{\alpha}{1-\alpha}\max|x_i^{(k)}-x_i^{(k-1)}|$$

ёки

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i-x_i^{(k)}|\leqslant\frac{\beta}{1-\beta}\sum_{i=1}^{n}|x_i^{(k)}-x_i^{(k-1)}|$$

Итерацион жараёнларни юқоридаги баҳолар олдиндан берилган аниқликни қаноатлантирганда тугаллайдилар.

Бошлангич x^{0} вектор, умуман олганда, ихтиёрий танланиши мумкин. Баъзан $x^{0}=f$ деб олишади. Аммо x^{0} векторнинг компонентлари сифатида номаълумларнинг қўпол тахминларда аниқланган қийматлари олинади.

(3.24) тизимни (3.25) кўринишга келтиришнн бир неча хил усулларда амалга ошириш мумкин. Фақат (3.26) ёки (3.27) шартлардан биронтасининг бажарилиши лозим. Шундай усуллардан иккитасига тўхталамиз.

Биринчи усул. Агарда A матрицанинг диоганал элементлари нолдан фарқли бўлса, яъни

$$a_{ii}\neq 0 \quad (i=1,2,\dots,n)$$

у ҳолда берилган тизимни

$$
\begin{cases}
x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n), \\
x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
x_n = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}),
\end{cases}
\tag{3.30}
$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу ҳолда C матрица элементлари қуйидагича аниқланади:

$$C_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad (i \neq j), \ C_{ii} = 0$$

ҳамда (3.26) ва (3.27) шартлар мос равишда қуйидаги кўринишни қабул қилади:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \leqslant \alpha < 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.31}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \leqslant \beta < 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.32}$$

(3.31) ва (3.32) тенгсизликлар A матрицанинг диагонал элементлари

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.33}$$

шартларни қаноатлантирганда ўринли бўлади.

Иккинчи усул. Бу усулни қуйидаги мисол орқали намойиш қиламиз.

Умуман олганда, ҳар қандай келтирилмаган матрицали тизим учун яқинлашувчи итерацион усуллар мавжуд, аммо уларнинг барчаси ҳисоблаш учун қулай эмас.

Агарда итерация усули яқинлашувчи бўлса, у ҳолда бу усул юқорида кўрилган усуллардан қуйидаги афзалликларга эга бўлади:

1. Итерацион жараён тезроқ яқинлашса, яъни тизимнинг ечимини аниқлаш учун n дан камроқ итерация талаб қилинса, у ҳолда вақтдан ютилади, чунки арифметик амаллар сони n^2 га мутаносиб (пропорционал) (Гаусс усули учун эса бу сон n^3 га мутаносиб).

2. Яхлитлаш хатоликлари итерация усулида натижага камроқ таъсир этади. Бундан ташқари итерация усули ўз хатолигини тўғрилаб борувчи усулдир.

3. Итерация усули тизимнинг муайян коэффициентлари нолга тенг бўлган ҳолда жуда ҳам қулайлашади. Бундай тизимлар хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни ечганда кўпроқ учрайди.

4. Итерация жараёнида бир хил турдаги амаллар бажарилади, бу эса ЭҲМ учун программалаштиришни осонлаштиради.

1- мисол. Қуйидаги тизим оддий итерация усули билан ечилсин:

$$\begin{cases} 10x_1+x_2-3x_3-2x_4+x_5=6, \\ -x_1+25x_2-x_3-5x_4-2x_5=11, \\ 2x_1+x_2-20x_3+2x_4-3x_5=-19, \\ x_2-x_3+10x_4-5x_5=10, \\ x_1+2x_2-x_3-2x_4-20x_5=-32. \end{cases}$$

Ечиш. Биринчи усулда айтилганидек, бу тизимнинг тенгламаларини мос равишда 10, 25, −20, 10, 20 ларга бўлиб, қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\begin{cases} x_1=0{,}6-0{,}1x_2+0{,}3x_3+0{,}2x_4-0{,}1x_5, \\ x_2=0{,}44+0{,}04x_1-0{,}04x_3+0{,}2x_4+0{,}08x_5, \\ x_3=0{,}95+0{,}1x_1+0{,}05x_2+0{,}1x_4-0{,}15x_5, \\ x_4=1-0{,}1x_2+0{,}1x_3+0{,}5x_5, \\ x_5=1{,}6+0{,}05x_1+0{,}1x_2+0{,}05x_3+0{,}1x_4, \end{cases}$$

бу ерда (3.31) шарт бажарилади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\sum_{j=1}^{4}|C_{1j}|=0{,}3<1; \quad \sum_{j=1}^{4}|C_{2j}|=0{,}28<1;$$

$$\sum_{j=1}^{4}|C_{3j}|=0{,}41<1; \quad \sum_{j=1}^{4}|C_{4j}|=0{,}5<1;$$

$$\sum_{j=1}^{4}|C_{5j}|=0{,}3<1.$$

Дастлабки яқинлашиш $x^{(0)}$ сифатида озод ҳадлар устуни (0,6; 0,44; 0,95; 1; 1,6) ни олиб кейинги яқинлашишларни топамиз:

$$x_1^{(1)}=0,6-0,1x_2^{(0)}+0,3_3^{(0)}+0,2x_4^{(0)}-0,1x_5^{(0)}=$$

$$=0,6-0,1\cdot 0,44+0,3\cdot 0,95+0,2\cdot 1-0,1\cdot 1,6=0,881,$$

$$x_2^{(1)}=0,44+0,04\cdot 0,6-0,04\cdot 0,95+0,2\cdot 1+0,08\cdot 1,6=0,754.$$

Шунга ухшаш $x_3^{(1)}=0,892$; $x_4^{(1)}=1,851$; $x_5^{(1)}=1,72$. Ҳисоблашларнинг давомини 3.4- жадвалда келтирамиз:

3.4- жадвал

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$	$x_5^{(k)}$
0	0,6	0,44	0,95	1	1,6
1	0,881	0,754	0,892	1,851	1,72
2	0,9884	0,9482	1,0029	1,9147	1,9859
3	0,9904	0,9814	0,9908	1,9939	1,9854
4	0,99944	0,99753	0,99769	1,99364	1,99897
5	0,99839	0,99865	0,99929	1,99954	1,99970
6	0,99986	0,99989	0,99977	1,99976	1,99960
7	0,999934	0,999920	1,000018	1,999788	1,999947
8	0,999974	0,999951	0,999976	2,000042	1,999978

Юқоридаги 3.4- жадвалдан курамизки, 8-итерация $x_1=0,999974$; $x_2=0,99951$; $x_3=0,99998$; $x_4=2,00004$; $x_5=1,99998$ ечимдан иборат. Бу топилган тақрибий ечим аниқ ечим

$$x_1^*=x_2^*=x_3^*=1; \quad x_4^*=x_5^*=2$$

дан бешинчи хонанинг бирликлари буйичагина фарқланади.

2- мисол.

$$\begin{cases} 1,02x_1-0,05x_2-0,10x_3=0,795, \\ -0,11x_1-1,03x_2-0,05x_3=0.849, \\ -0,11x_1-0,12x_2+1,04x_3=1,398 \end{cases}$$

тизимни 3 та итерация бажариб ечинг ва хатолигини баҳоланг.

Ечиш. Берилган тизим-матрицанинг диоганал элементлари бирга яқин, қолганлари эса бирдан анча кичик.

Шу сабабли итерация усулини қўллаш учун берилган тизимни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$x_1=0,795-0,02x_1+0,05x_2+0,10x_3;$$
$$x_2=0,849+0,11x_1-0,03x_2+0,05x_3;$$
$$x_3=1,398+0,11x_1+0,12x_2-0,04x_3.$$

(3.31) яқинлашиш шарти бу тизим учун бажарилади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\sum_{j=1}^{3}|C_{1j}|=0,02+0,05+0,10=0,17<1,$$
$$\sum_{j=1}^{3}|C_{2j}|=0,11+0,03+0,05=0,19<1,$$
$$\sum_{j=1}^{3}|C_{3j}|=0,11+0,12+0,04=0,27<1.$$

Бошланғич яқинлашиш x^{0} сифатида озод ҳадлар устуни элементларини икки хона аниқликда оламиз

$$x^{(0)}=\begin{pmatrix}0,80\\0,85\\1,40\end{pmatrix}$$

Энди кетма-кет қуйидагиларни аниқлаймиз:

$k=1$ да

$$x_1^{(1)}=0,795-0,016+0,0425+0,140=0,9615\approx0,962,$$
$$x_2^{(1)}=0,849+0,088-0,255+0,070=0,9815\approx0,982,$$
$$x_3^{(1)}=1,398+0,088+0,1020-0,056=1,532;$$

$k=2$ да

$$x_1^{(3)}=0,980,\ x_2^{(3)}=1,004,\ \ x_3^{(3)}=1,563.$$

$k=3$ да

$$x_1^{(3)}=0,980,\ x_2^{(3)}=1,004,\ x_3^{(3)}=1,563.$$

Номаълумларнинг $k=2$ ва $k=3$ даги қийматлари $3\cdot10^{-3}$ дан камроқ фарқ қилаяпти, шунинг учун номаълумларнинг тақрибий қийматлари сифатида

$$x_1\approx0,980,\ x_2\approx1,004,\ x_3\approx1,563$$

ларни оламиз. У ҳолда йўл қуйилган хатолик қуйидагича баҳоланади:

$$\frac{0{,}27}{1-0{,}27}\cdot 3\cdot 10^{-5}<1{,}1\cdot 10^{-5}$$

3.3.3. Зейдел усули

Зейдел усули чизиқли бир қадамли биринчи тартибли итерацион усулдир. Бу усул оддий итерацион усулдан шу билан фарқ қиладики, дастлабки яқинлашиш $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, ..., $x_n^{(0)}$ га кўра $x_1^{(1)}$ топилади. Сўнгра $x_1^{(1)}$, $x_2^{(0)}$,..., $x_n^{(0)}$ га кўра $x_2^{(1)}$ топилади ва ҳ.к. Барча $x_i^{(1)}$ лар аниқлангандан сўнг $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$, ... лар топилади. Аниқроқ айтганда, ҳисоблашлар қуйидаги тарҳ (схема) бўйича олиб борилади:

$$x_1^{(k+1)}=\frac{b_1}{a_{11}}-\sum_{j=2}^{n}\frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j^{(k)},$$

$$x_2^{(k+1)}=\frac{b_2}{a_{22}}-\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k+1)}-\sum_{j=3}^{n}\frac{a_{2j}}{a_{22}}x_j^{(k)},$$

. . . .

$$x_i^{(k+1)}=\frac{b_i}{a_{ii}}=\frac{b_i}{a_{ii}}-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{(k)},$$

. . . .

$$x_n^{(k+1)}=\frac{b_n}{a_{nn}}-\sum_{j=1}^{n-1}x_j^{(k+1)}.$$

3.3.2. даги яқинлашиш шартлари Зейдел усули учун ҳам ўринлидир. Кўпинча Зейдел усули оддий итерация усулига нисбатан яхшироқ яқинлашади, аммо ҳар доим ҳам бундай бўлавермайди. Бундан ташқари Зейдел усули программалаштириш учун қулайдир, чунки $x_i^{(k+1)}$ нинг қийматини ҳисобланаётганда $x_1^{(k)}$,..., $x_{i-1}^{(k)}$ ларнинг қийматини сақлаб қолишнинг ҳожати йўқ.

Мисол. Зейдел усули билан 3.3.2. даги 1- мисолнинг ечими 5 хона аниқликда топилсин.

Ечиш. Тизимни

$$x_1 = 0,6 - 0,1x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 - 0,1x_5,$$
$$x_2 = 0,44 + 0,04x_1 - 0,04x_3 + 0,2x_4 + 0,08x_5,$$
$$x_3 = 0,95 + 0,1x_1 + 0,05x_2 + 0,1x_4 - 0,15x_5,$$
$$x_4 = 1 - 0,1x_2 + 0,1x_3 + 0,5x_5,$$
$$x_5 = 1,6 + 0,05x_1 + 0,1x_2 + 0,05x_3 + 0,1x_4$$

кўринишда ёзиб оламиз ва дастлабки яқинлашиш $x^{(0)}$ сифатида оддий итерация усулидагидек $x^{(0)} = (0,6;\ 0,44;\ 0,95;\ 1;\ 1,6)$ деб оламиз.

Итерациянинг биринчи қадамини бажарамиз:

$$x_1^{(1)} = 0,6 - 0,1x_2^{(0)} + 0,3x_3^{(0)} + 0,2x_4^{(0)} - 0,1x_5^{(0)} =$$
$$= 0,6 - 0,1 \cdot 0,44 + 0,3 \cdot 0,95 + 0,2 \cdot 1 - 0,1 \cdot 1,6 = 0.881;$$
$$x_2^{(1)} = 0,44 + 0,04 \cdot x_1^{(4)} - 0,04x_3^{(0)} + 0,2x_4^{(0)} + 0,08x_5^{(0)} =$$
$$= 0,44 + 0,04 \cdot 0,881 - 0,04 \cdot 0,95 + 0,2 \cdot 1 + 0,08 \cdot 1,6 = 0,771;$$
$$x_3^{(1)} = 0,95 + 0,1x_1^{(1)} + 0,05x_2^{(1)} + 0,1x_4^{(0)} - 0,1x_5^{(0)} =$$
$$= 0,95 + 0,1 \cdot 0,881 + 0,05 \cdot 0,771 + 0,1 \cdot 1 - 0,15 \cdot 0,16 = 0,937;$$
$$x_4^{(1)} = 1 - 0,1x_2^{(1)} + 0,1x_3^{(1)} + 0,5x_5^{(0)} = 1,817;$$
$$x_5^{(1)} = 1,6 + 0,05x_1^{(1)} + 0,1x_2^{(1)} + 0,05x_3^{(1)} + 0,1x_4^{(1)} = 1,948.$$

Кейинги яқинлашишларни 3.5- жадвалда келтирамиз:

3.5- жадвал

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$	$x_5^{(k)}$
0	0,6	0,44	0,95	1	1,6
1	0,881	0,771	0,937	1,817	1,948
2	0,973	0,961	0,985	1,974	1,992
3	0,995	0,995	0,999	1,996	1,999
4	0,9995	0,9991	0,9997	1,9995	1,9998
5	0,99992	0,99989	0,99997	1,99991	1,99997
6	0,99999	0,99998	0,99999	1,99999	2,00000

Кўриниб турибдики, Зейдел усули оддий итерация усулига нисбатан тезроқ яқинлашмоқда.

3.4-§. ЧИЗИҚЛИ БЎЛМАГАН ТЕНГЛАМАЛАР ТИЗИМИ УЧУН КЕТМА-КЕТ ЯҚИНЛАШИШ УСУЛИ

Шу пайтгача биз фақат чизиқли тенгламалар тизимини ечиш усуллари билан танишдик. Энди тенгламалар тизими чизиқли бўлмаган ҳол устида тўхталамиз. Соддалик учун икки номаълумли иккита чизиқли бўлмаган тизимни оддий итерация усули билан ечишга тўхталамиз. Бундай тизим қуйидагича ёзилади:

$$\begin{cases} f(x, y)=0, \\ \varphi(x, y)=0. \end{cases} \tag{3.34}$$

Фараз қилайлик бошланғич x_0, y_0 яқинлашишлар берилган бўлсин. Берилган тизимни қуйидагича ёзамиз:

$$\begin{cases} x=F(x, y), \\ y=\Phi(x, y) \end{cases} \tag{3.35}$$

ҳамда бу тизимнинг ўнг томонидаги x ва y лар ўрнига бошланғич яқинлашиш x_0, y_0 ларни қўйиб, биринчи яқинлашишни аниқлаймиз:

$$\begin{cases} x_1=F(x_0, y_0), \\ y_1=\Phi(x_0, y_0). \end{cases} \tag{3.36}$$

Худди шунингдек иккинчи яқинлашишни аниқлаймиз:

$$\begin{aligned} x_2&=F(x_1, y_1), \\ y_2&=\Phi(x_1, y_2) \end{aligned} \tag{3.37}$$

ва умуман

$$\begin{cases} x_n=F(x_{n-1}, y_{n-1}), \\ y_n=\Phi(x_{n-1}, y_{n-1}). \end{cases} \tag{3.38}$$

Агарда $F(x, y)$ ва $\Phi(x, y)$ функциялар узлуксиз, ҳамда x_1, $x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ва $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда уларнинг лимитлари берилган тенгламанинг ечими бўлади.

Энди юқорида келтирилган итерацион жараённинг яқинлашувчи бўлиш шартларига тўхталамиз.

Теорема. x ва y (3.34) тизимнинг аниқ ечимлари, $a<x<b$, $c<y<d$ бўлиб, $x=a$, $x=b$, $y=c$ ва $y=d$ тўғри чизиқлар билан чегараланган тўғри тўртбурчак ичида бошқа ечимлар йўқ бўлса, у ҳолда кўрсатилган тўғри тўртбурчакда қуйидаги

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| \leqslant P_1, \quad \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \leqslant q_1, \quad \left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right| \leqslant P_2, \quad \left|\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right| \leqslant q_2$$

($P_1 + P_2 \leqslant M < 1$ ва $q_1 + q_2 \leqslant M < 1$) тенгсизликлар бажарилса, итерацион жараён якинлашувчи булади ва бошлангич якинлашиш x_0, y_0 сифатида тўғри тўртбурчакнинг ихтиёрий нуктасини олиш мумкин.

Теореманинг исботини келтириб утирмаймиз.

Мисол

$$\begin{cases} f(x, y) = x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0, \\ \varphi(x, y) = x^3 - y^3 - 6y + K = 0 \end{cases}$$

тизимнинг мусбат ечимини итерацион усул билан уч хона аниклнкда топинг.

Берилган тизимни куйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$x = \frac{x^3 + y^3}{6} + \frac{1}{2} = F(x, y),$$

$$y = \frac{x^3 - y^3}{6} + \frac{1}{3} = \Phi(x, y).$$

$0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ квадратни караймиз. Агарда x_0, y_0 нукта шу квадратга тегишли бўлса, у холда $0 < F(x_0, y_0) < 1$ ва $0 < \Phi(x_0, y_0) < 1$ бўлади. (x_0, y_0) бошлангич якинлашиш кандай танланишидан катъи назар (x_k, y_k) якинлашишлар квадратга тегишли бўлади, чунки

$$0 < (x_0^3 + y_0^3)/6 < \frac{1}{3},$$

$$-1/6 < (x_0^3 - y_0^3)/6 < \frac{1}{6}.$$

Бундан ташкари (x_k, y_k) нукталар $\frac{1}{2} < x < \frac{5}{6}$, $\frac{1}{6} < y < \frac{1}{2}$ квадратга тегишли. Бу квадрат нукталари учун:

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} < \frac{\frac{25}{36} + \frac{1}{4}}{2} = \frac{34}{72} < 1,$$

$$\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right| = \frac{x^2}{2} + \left|\frac{y^2}{2}\right| < \frac{34}{72} < 1$$

бажарилади.

Демак, кўрсатилган квадратда тизим ягона ечимга эга ва уни итерацион усулда аниклаш мумкин.

$x_0=\frac{1}{2}$ ва $y_0=\frac{1}{2}$ деб оламиз, у ҳолда

$$x_1=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}{6}=0{,}542,\quad y_1=\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{8}}{6}=0{,}333;$$

$$x_2=\frac{1}{2}+\frac{0{,}542^3+0{,}333^3}{6}=0{,}533,$$

$$y_2=\frac{1}{3}+\frac{0{,}542^3-0{,}333^3}{6}=0{,}354;$$

$$x_3=\frac{1}{2}+\frac{0{,}533^3+0{,}354^3}{6}=0{,}533,$$

$$y_3=\frac{1}{3}+\frac{0{,}533^3-0{,}354^3}{6}=0{,}351;$$

$$x_4=\frac{1}{2}+\frac{0{,}533^3+0{,}351^3}{6}=0{,}532,$$

$$y_4=\frac{1}{3}+\frac{0{,}533^3-0{,}351^3}{6}=0{,}351.$$

Бу ерда $q_1=q_2=34/72<0{,}5$ бўлгани сабабли биринчи учта ўнлик рақамларнинг мос тушганлиги керакли аниқликдаги ечимни топиш имкониятини беради. Шундай қилиб қуйидаги ечимга эга бўлдик

$$x=0{,}532;\quad y=0{,}351.$$

IV БОБ

ИНТЕРПОЛЯЦИЯЛАШ

4.1-§. МАСАЛАНИНГ ҚЎЙИЛИШИ

Аксарият ҳисоблаш усуллари масаланинг қўйилишида қатнашадиган функцияларни унга бирор муайян маънода яқин ва тузилиши соддароқ бўлган функцияларга алмаштириш ғоясига асосланган. Бу бобда функцияларни яқинлаштириш масаласининг энг содда ва жуда кенг қўлланиладиган қисми - функцияларни интерполяциялаш масаласи кўриб чиқилади.

Интерполяция масаласининг моҳияти қуйидагидан иборат. Фараз қилайлик $y=f(x)$ функция жадвал кўринишида берилган бўлсин:

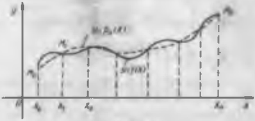
$$y_0=f(x_0),\ y_1=f(x_1),\ \ldots,\ y_n=f(x_n).$$

Одатда интерполяциялаш масаласи куйидагича куринишда куйилади: Шундай n-тартиблидан ошмаган $P(x) = P_n(x)$ купҳад топиш керакки, $P(x_i)$ берилган $x_i (i=0,1, ..., n)$ нукталарда $f(x)$ билан бир хил кийматларни кабул килсин, яъни $P(x_i)=y_i$.

Бу масаланинг геометрик маъноси куйидагидан иборат: даражаси n дан ортмайдиган шундай

$$y=P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n \tag{4.1}$$

купҳад курилсинки, унинг графиги берилган $M_i(x_i, y_i)$ $(i=0,1, ..., n)$ нукталардан утсин (9- расм). Бу ердаги x_i $(i=0,1,2, ..., n)$ нукталар интерполяция тугун нукталари ёки тугунлар дейилади. $P(x)$ эса интерполяцияловчи функция дейилади.



9- расм

Амалда топилган $P(x)$ интерполяцион формула $f(x)$ функциянинг берилган x аргументнинг (интерполяция тугунларидан фаркли) кийматларини ҳисоблаш учун кулланилади. Ушбу операция функцияни интерполяциялаш дейилади. (Агар $x \in (a, b)$ булса интерполяциялаш $x \notin [a, b]$ булса, экстраполяциялаш дейилади).

4.2- §. ЧЕКЛИ АЙИРМАЛАР ВА УЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

Фараз килайлик аргументнинг ўзаро тенг узокликда жойлашган $x_i=x_0+ih$, $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i=h=\text{const}$ (h — жадвал кадами) кийматларида $f(x)$ функциянинг мос равишдаги $y_i=f(x_i)$ кийматлари берилган булсин.

Биринчи тартибли чекли айирмалар деб

$$\Delta y_i=f(x_{i+1})-f(x_i)=y_{i+1}-y_i \tag{4.2}$$

ифодага иккинчи тартибли чекли айирмалар деб

$$\Delta^2 y_i=\Delta(\Delta y_i)=\Delta y_{i+1}-\Delta y_i=y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i \tag{4.3}$$

ифодага ва ҳоказо n-тартибли чекли айирмалар деб

$$\Delta^n y_i = \Delta(\Delta^{n-1} y_i) = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i \qquad (4.4)$$

ифодага айтилади. Чекли айирмаларни қуйидаги 4.1- жадвал кўринишида ҳам олиш мумкин.

4.1-жадвал

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	...
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$			
x_3	y_3	Δy_3				
x_4	y_4					
...						

(4.2) дан қуйидагига эгамиз:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i = (1+\Delta) y_i. \qquad (4.5)$$

Бу ердан кетма-кет қуйидагиларни келтириб чиқарамиз:

$$y_{i+2} = (1+\Delta) y_{i+1} = (1+\Delta)^2 y_i,$$
$$y_{i+3} = (1+\Delta) y_{i+2} = (1+\Delta)^3 y_i,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_{i+n} = (1+\Delta)^n y_i.$$

Ньютон биноми формуласидан фойдаланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$y_{i+n} = y_i + C_n^1 \Delta y_i + \ldots + \Delta^n y_i.$$

Бундан эса:

$$\Delta^n y_i = [(1+\Delta) - 1]^n y_i = (1+\Delta)^n y_i - C_n^1 (1+\Delta)^{n-1} y_i + $$
$$+ C_n^2 (1+\Delta)^{n-2} y_i - \ldots + (-1)^n y_i$$

ёки

$$\Delta^n y_i = y_{i+1} - C_n^1 y_{n+i-1} + C_n^2 y_{n+i-2} - \ldots + (-1)^n y_i. \qquad (4.6)$$

Масалан, (4.6) дан

$$\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i,$$
$$\Delta^3 y_i = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i$$

ва ҳ.к.

Чекли айирмалар қуйидаги хоссаларга эга.

1. Функциялар йиғиндисининг (айирмасининг) чекли айирмаси функцияларнинг чекли айирмалари йиғиндисига (айирмасига) тенг:

$$\Delta^n(f(x)\pm\varphi(x))=\Delta^n f(x)\pm\Delta^n\varphi(x).$$

2. Функция ўзгармас сонга кўпайтирилса, унинг чекли айирмаси ўша сонга кўпаяди:

$$\Delta^n(k\cdot f(x))=k\cdot\Delta^n f(x).$$

3. n-тартибли чекли айирманинг m-тартибли чекли айирмаси $(n+m)$-тартибли чекли айирмага тенг:

$$\Delta^m(\Delta^n y)=\Delta^{m+n}y.$$

4. n-тартибли кўпҳаднинг n-тартибли чекли айирмаси ўзгармас сонга, $n+1$-тартибли чекли айирмаси эса нолга тенг.

Мисол. Жадвал қадамини $h=1$ ва дастлабки қийматни $x_0=0$ деб ҳисоблаб, $y=2x^3-2x^2+3x-1$ кўпҳаднинг айирмалар жадвали тузилсин.

Ечиш. y нинг $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$ нуқталардаги қийматларини ҳисоблаймиз: $y_0=-1$, $y_1=2$, $y_2=13$, $y_3=$ $=44$. Бундан эса қуйидагилар келиб чиқади: $\Delta y_0=y_1-$ $-y_0=3$, $\Delta y_1=y_2-y_1=11$, $\Delta^2y_0=\Delta y_1-\Delta y_0=8$. Бу қийматларни 4.2- жадвалга жойлаштирамиз:

4.2- жадвал

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	−1	8		
1	2	11	8	12
2	13	31	20	12
3	44	63	32	12
4	107	107	44	
5	214			
...	...	...	...	...

Берилган функция 3- даражали кўпҳад бўлганлиги сабабли унинг 3- тартибли айирмаси ўзгармас сон бўлиб, $\Delta^3y_i=12$ бўлади. Жадвалнинг қолган устунлари

$$\Delta^2y_{i+1}=\Delta^2y_i+12,\quad (i=0,1,2,...);$$
$$\Delta y_{i+1}=\Delta y_i+\Delta^2y_i\quad (i=1,2,...);$$
$$y_{i+1}=y_i+\Delta y_i\quad (i=2,3,..)$$

формулалар ёрдамида тўлдирилади.

4.3-§. НЬЮТОННИНГ БИРИНЧИ ИНТЕРПОЛЯЦИОН ФОРМУЛАСИ

Фараз қилайлик $y=f(x)$ функция учун $y_i=f(x)$ қийматлар берилган ва интерполяция тугунлари тенг узоқликда жойлашган бўлсин, яъни $x_i = x_0+ih$ $(i=0,1,2,\dots,h)$ (h — интерполяция қадами). Аргументнинг мос қийматларида даражаси h дан ошмайдиган мос қийматлар оладиган кўпҳад тузиш лозим бўлсин ва бу кўпҳад қуйидаги кўринишга эга бўлсин:

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\dots+$$
$$+a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}). \qquad (4.7)$$

Бу n-тартибли кўпҳад. Интерполяция масаласидаги шартга кўра $P_n(x)$ кўпҳад $x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_n$ интерполяция тугунларида $P_n(x_0)=y_0$, $P_n(x_1)=y_1$, $P_n(x_2)=y_2$, ..., $P_n(x_n)=y_n$ қийматларни қабул қилади. $x=x_0$ деб тасаввур этсак, (4.7) формуладан $y_0=P_n(x_0)=a_0$, яъни $a_0=y_0$. Сўнгра x га x_1 ва x_2 ларнинг қийматларини бериб, кетма-кет қуйидагига эга бўламиз:

$$y_1=P_n(x_1)=a_0+a_1(x_1-x_0),\ \text{бундан}\ a_1=\frac{\Delta y_0}{h},$$

$$y_2=P_n(x_2)=a_0+a_1(x_2-x)+a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1),$$

яъни

$$y_2-2\Delta y_0-y_0=2h^2a_2$$

ёки $y_2-2y_1+y_0=2h^2a_2$, бундан $a_2=\dfrac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}$.

Бу жараённи давом эттириб, $x=x_n$ учун қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$a_n=\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}.$$

Топилган $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$ коэффициентларнинг қийматларини (4.7) формулага қўйсак,

$$P_n(x)=y_0+\frac{\Delta y_0}{1!h}(x-x_0)+\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1)+\dots+$$

$$+\frac{\Delta^n y_0}{n!y^n}(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1}) \qquad (4.8)$$

кўринишга эга бўламиз. Бу формулада $\frac{x-x_0}{h}=q$, яъни $x=x_0+hq$ белгилаш киритилса, у ҳолда

$$\frac{x-x_1}{h}=\frac{x-x_0-h}{h}=q-1,$$

$$\frac{x-x_2}{h}=\frac{x-x_0-2h}{h}=q-2 \text{ ва ҳ.к.}$$

Натижада Ньютоннинг 1- интерполяцион формуласига эга бўламиз:

$$P_n(x)=P_n(x_0+qh)=y_0+q\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\ldots+$$

$$+\frac{q(q-1)\cdot\ldots\cdot(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \tag{4.9}$$

Ньютоннинг 1- интерполяцион формуласини $[a, b]$ нинг бошлангич нукталарида қўллаш қулай.

Агар $n=1$ бўлса, у ҳолда $P_1(x)=y_0+q\Delta y_0$ кўринишдаги чизиқли интерполяцион формулага, $n=2$ бўлганда эса

$$P_2(x)=y_0+q\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y_0$$

кўринишдаги параболик интерполяцион формулага эга бўламиз.

Ньютоннинг 1-формуласини *олдинга қараб интерполяциялаш формуласи* ҳам дейилади.

(4.9) формуланинг қолдиқ ҳади

$$R_n(x)=h^{n+1}\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \tag{4.10}$$

бу ерда $\xi\in[x_0, x_n]$.

Функциянинг аналитик кўриниши ҳар доим ҳам маълум бўлавермайди. Бундай ҳолларда чекли айирмалар тузилиб,

$$f^{(n+1)}(\xi)\approx\frac{\Delta^{n+1}y_0}{h^{n+1}}$$

деб олинади. У ҳолда Ньютоннинг биринчи интерполяцион формуласи учун хатолик

$$R_n(x) \approx \frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(n+1)!} \Delta^{(n+1)} y_0 \qquad (4.11)$$

формула оркали топилади.

Мисол. $y = \lg x$ функциянинг 4.3- жадвалда берилган кийматларидан фойдаланиб унинг $x = 1001$ булган холдаги кийматини топинг.

4.3- жадвал

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1000	3,0000000	43214	—426	8
1010	3,0043214	42788	—418	9
1020	3,0086002	42370	—409	8
1030	3,0128372	41961	—401	
1040	3,0170333	41560		
1050	3,0211893			

Ечиш. Чекли айирмалар жадвалини тузамиз. 4.3- жадвалдан куриниб турибдики, 3- тартибли чекли айирма ўзгармас, шу сабабли (4.9) формула учун $n = 3$ олиш етарли:

$$y(x) = P_3(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$x = 1001$ учун $q = 0,1$ $(h = 10)$. Шунинг учун

$$\lg 1001 = 3,0000000 + 0,1 \cdot 0,0043214 + \frac{0,1 \cdot 0,9}{2} \times$$

$$\times 0,0000426 + \frac{0,1 \cdot 0,9 \cdot 1,9}{6} \cdot 0,0000008 = 3,0004341.$$

Энди колдик хадни бахолаймиз. (4.10) формулага асосан $n = 3$ бўлганда куйидагига эгамиз:

$$R_3(x) = \frac{h^4 \cdot q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!} f^{(4)}(\xi),$$

бу ерда $1000 < \xi < 1030$.

$f(x) = \lg x$ бўлгани сабабли $f^{(4)}(x) = -\frac{3!}{x^4}\lg e$; шунинг учун

$$|f^{(4)}(\xi)| < \frac{3!}{(1000)^4} \lg e.$$

$h=10$ ва $q=0{,}1$ учун қуйидагига эга бўламиз:

$$|R_3(1001)| < \frac{0{,}1\cdot 0{,}9\cdot 1{,}9\cdot 2{,}9\cdot 10^4 \lg e}{4\cdot (1000)^4} \approx 0{,}5\cdot 10^{-9}.$$

Шундай қилиб, қолдиқ ҳад $R_3(1001) \approx 0{,}5\cdot 10^{-9}$ экан.

4.4-§. НЬЮТОННИНГ ИККИНЧИ ИНТЕРПОЛЯЦИОН ФОРМУЛАСИ

Ньютоннинг биринчи интерполяцион формуласи жадвалнинг бошида ва иккинчи формуласи эса жадвалнинг охирида интерполяциялаш учун мўлжалланган. Ньютоннинг иккинчи интерполяцион формуласини келтириб чиқарамиз.

Фараз қилайлик $y=f(x)$ функциянинг $n+1$ та қиймати маълум бўлсин, яъни аргументнинг $n=1$ та $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ қийматларида функциянинг қийматлари $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ бўлсин. Тугунлар орасидаги масофа h ўзгармас бўлсин. Қуйидаги кўринишдаги интерполяцион кўпҳадни қурамиз:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_0 + a_1(x-x_n) + a_2(x-x_n)(x-x_{n-1}) + \\ &+ a_3(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2}) + \ldots + \\ &+ a_n(x-x_n)(x-x_{n-1})\ldots(x-x_1). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Бунда қатнашаётган $a_0, a_1, \ldots, a_n$ номаълум коэффициентларни топишни $x=x_n$ бўлган ҳолдан бошлаш керак. Сўнгра аргументга $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots$ қийматлар бериб, қолган коэффициентлар аниқланади.

4.3-§ да қурилган мулоҳазаларни (4.12) формула учун ҳам қўлласак, у ҳолда номаълум коэффициентлар $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ларни топиш учун қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$a_0 = y_n,\ a_1 = \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h},\ a_2 = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}, \ldots, a_n = \frac{\Delta_n y_0}{n!h^n}.$$

Топилган коэффициентларнинг қийматларини (4.12) формулага қўйсак,

$$\begin{aligned} P_n(x) &= y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x-x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x-x_n)x - \\ &- x_{(n-1)} + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_n)\ldots(x-x_1) \end{aligned} \tag{4.13}$$

кўринишдаги *Ньютоннинг иккинчи интерполяцион форму-*

ласи келиб чиқади. Бу формулада $q=(x-x_n)/h$ белгилаш киритсак,

$$P_n(x)=y_n+q\Delta y_{n-1}+\frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2}+\ldots+$$

$$+\frac{q(q+1)\ldots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0 \qquad (4.14)$$

ҳосил бўлади. Баъзан бу формулани *орқага қараб интерполяциялаш формуласи* ҳам дейилади. (4.14) формуладан $[a, b]$ кесманинг охирги нукталарида фойдаланиш кулайрокдир.

Ньютоннинг иккинчи интерполяцион формуласининг қолдиқ ҳадини баҳолаш формуласи қуйидагича бўлади:

$$R_n(x)=h^{n+1}\frac{q(q+1)\ldots(q+n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),$$

бу ерда $q=(x-x_n)/h$, $\xi\in[x_0, x_n]$.

Агар функциянинг аналитик кўриниши маълум бўлмаса, у ҳолда чекли айирмалар тузилиб,

$$f^{(n+1)}(\xi)\approx\frac{\Delta^{n+1}y_0}{h^{n+1}}$$

деб олинади. Шунинг учун Ньютоннинг иккинчи интерполяцион формуласи учун хатолик формуласи

$$R_n(x)\approx\frac{q(q+1)\ldots(q+n)}{(n+1)!}\Delta^{(n+1)}y_n$$

бўлади.

Мисол. $y=\lg x$ функциянинг 4.4- жадвалда берилган қийматларидан фойдаланиб, унинг $x=1044$ даги қийматини ҳисобланг ($h=10$).

4.4- жадвал

x	y
1000	3,0000000
1010	3,0043214
1020	3,0086002
1030	3,0128372
1040	3,0170333
1050	3,0211893

Ечиш. Чекли айирмалар жадвалини тузамиз:

4.5- жадвал

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1000	3,0000000	43214	—426	8
1010	3,0043214	42788	—418	9
1020	3,0086002	42370	—409	8
1030	3,0128372	41961	—401	
1040	3,0170333	41560		
1050	3,0211893			

$x_n = 1050$ булсин, у холда

$$q = \frac{x - x_n}{h} = \frac{1044 - 1050}{10} = -0{,}6. \qquad (4.14)$$

4.5- жадвалдаги тагига чизилган айирмалардан фойдаланган холда (4.14) формулага асосан куйидагига эга буламиз:

$$\lg 1044 = 3{,}0211893 + (-0{,}6) \cdot 0{,}0041560 +$$
$$+ \frac{(-0{,}6) \cdot (-0{,}6+1)}{2} \times 0{,}0000401 +$$
$$+ \frac{(-0{,}6) \cdot (-0{,}6+1) \cdot (-0{,}6+2)}{6} \cdot 0{,}0000008 = 3{,}0187005.$$

4.5- §. ЛАГРАНЖНИНГ ИНТЕРПОЛЯЦИОН ФОРМУЛАСИ

Топилиши лозим булган купхаднинг куринишини куйидагича олайлик:

$$L_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n, \qquad (4.15)$$

бу ерда a_i $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$ — номаълум узгармас коэффициентлар. Шартга кура $L_n(x)$ функция x_0, x_1, ..., x_n интерполяциялаш тугунларида $L_n(x_0) = y_0$, $L_n(x_1) = y_1$, ..., $L_n(x_n) = q_n$ кийматларга эришади. Буни хисобга олган холда (4.15) дан куйидагиларни топиш мумкин:

x_0 интерполяция тугунида

$$L_n(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n$$

ва нихоят x_n интерполяция тугунида

$$L_n(x_n)=a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\ldots+a_nx_n^n.$$

Ушбу ифодаларни тенгламалар тизими кўринишида ёзсак:

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\ldots+a_nx_0^n=y_0,\\ a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\ldots+a_nx_1^n=y_1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\ldots+a_nx_n^n=y_n. \end{cases} \tag{4.16}$$

бу ерда x_i ва y_i ($i=0,1,2,\ldots,n$) — берилган функциянинг жадвал қийматлари. Бу тизимнинг детерминанти

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \ldots & x_0^n\\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \ldots & x_1^n\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ тугунлар устма-уст тушмаган ҳолда нолдан фарқли бўлади. Масала мазмунидан равшанки, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ нуқталар бир-биридан фарқли, демак бу детерминант нолдан фарқлидир. Шунинг учун ҳам (4.16) тизим ва шу билан бирга қўйилган интерполяция масаласи ягона ечимга эга. Бу тизимни ечиб, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ларни топиб (4.15) га қўйсак, $L_n(x)$ кўпҳад аниқланади. Биз $L_n(x)$ нинг ошкор кўринишини топиш учун бошқача йўл тутамиз. Аввало фундаментал кўпҳадлар деб аталувчи $Q_i(x)$ ларни, яъни

$$Q_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases} 0, \text{ агар } i\neq j \text{ бўлганда},\\ 1, \text{ агар } i=j \text{ бўлганда} \end{cases} \tag{4.17}$$

шартларни қаноатлантирадиган n-даражали кўпҳадларни қурамиз.

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_iQ_i(x) \tag{4.18}$$

изланаётган интерполяцион кўпҳад бўлади. (4.17) шартни қаноатлантирувчи кўпҳад

$$Q_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \tag{4.19}$$

кўринишида бўлади. (4.19) ни (4.18) га қўйсак,

$$L_n(x) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \cdot y_i \quad (4.20)$$

кўринишдаги Лагранж интерполяцион формуласига эга бўламиз.

Бу формуланинг хусусий ҳолларини кўрайлик: $n=1$ бўлганда Лагранж кўпҳади икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини беради:

$$L_1(x) = \frac{x-x_1}{x_1-x_0} y_0 + \frac{x-x_0}{x_0-x_1} y_1.$$

Агар $n=2$ бўлса, у ҳолда квадратик интерполяцион кўпҳадга эга бўламиз, бу кўпҳад учта нуқтадан ўтувчи ва вертикал ўққа эга бўлган параболани аниқлайди:

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 +$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2.$$

Лагранж интерполяцион формуласининг бошқа кўринишини келтирамиз. Бунинг учун

$$w_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x-x_i)$$

кўпҳадни киритамиз. Бундан ҳосила олсак,

$$w'_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[\prod_{i \neq k} (x-x_i) \right]$$

Квадрат қавс ичидаги ифода $x=x_j$ ва $k \neq j$ бўлганда нолга айланади, чунки (x_j-x_i) кўпайтувчи қатнашади. Демак,

$$w'_{n+1}(x_j) = \prod_{i \neq j} (x_j - x_i).$$

Шунинг учун ҳам, $\prod_{i \neq j} \frac{x-x_i}{x_j-x_i}$ Лагранж коэффициентини

$$\frac{w_{n+1}(x)}{w'_{n+1}(x_j)(x-x_j)}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бунда эса Лагранж купхади куйидаги куринишга эга булади:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)w_{n+1}(x)}{w'_{n+1}(x_i)(x-x_i)} . \qquad (4.21)$$

Энди тугунлар бир хил узоқликда жойлашган $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1} = h$ хусусий ҳолни кўрамиз.

Бу ҳолда соддалик учун $x = x_0 + th$ алмаштириш бажарамиз, у ҳолда

$$x - x_j = h(t-j), \; w_{n+1}(x) = h^{n+1}w^*_{n+1}(t),$$

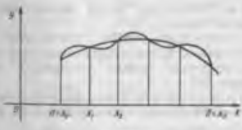
бу ерда

$$w^*_{n+1}(t) = t(t-1)\ldots(t-n), \; w^*_{n+1}(x_j) = (-1)j!(h-j)!h^n$$

бўлиб, (4.21) Лагранж интерполяцион кўпҳади қуйидаги кўринишни олади:

$$L_n(x+th) = w^*_{n+1}(x) \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{n-j}f(x_j)}{(t-j)j!(n-j)!} . \qquad (4.22)$$

Энди Лагранж интерполяцион формуласининг қолдиқ ҳадини баҳолашни кўрамиз. Агар бирор $[a, b]$ оралиқда берилган $f(x)$ функцияни $L_n(x)$ интерполяцион кўпҳад билан алмаштирсак, улар интерполяция тугунларида ўзаро устма-уст тушиб, бошқа нуқталарда эса бир-биридан фарқ қилади (10- расм). Шунинг учун қолдиқ ҳаднинг $R(x) = f(x) - L_n(x)$ кўринишини топиш ва уни баҳолаш билан шуғулланиш мақсадга мувофиқ. Бунинг учун интерполяция тугунларини ўз ичига оладиган $[a, b]$ оралиқда $f(x)$ функция $(n+1)$ — тартибли $f^{(n+1)}(x)$ узлуксиз ҳосилага эга деб фараз қиламиз. Интерполяциянинг қолдиқ ҳади $R(x)$ учун қуйидаги теорема ўринлидир:



10- расм

Теорема. *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда $(n+1)$-тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлса, у ҳолда интерполяция қолдиқ ҳадини*

$$f(x) - L_n(x) = R(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!} \tag{4.23}$$

кўринишда ифодалаш мумкин. Бу ерда $\xi \in [a, b]$ бўлиб, умуман айтганда x нинг функциясидир.

Исботи. Теоремани исботлаш учун ёрдамчи $\varphi(z) = R(z) - K\omega_{n+1}(z)$ функцияни текширамиз (бу ерда K номаълум ўзгармас коэффициент). Бу функциянинг $z = x_0, x_1, \ldots, x_n$ ларда ноль қийматларини қабул қилиши равшан. Номаълум K коэффициентни шундай танлаймизки, $\varphi(z)$ функция $z = x \in (a, b]$ ва $x = x_i (i = \overline{0, n})$ нуқталарда ноль қийматини қабул қилсин. Демак,

$$K = \frac{R(x)}{\omega_{n+1}(x)}. \tag{4.24}$$

Натижада $\varphi(z)$ функция $[a, b]$ оралиқнинг $n+2$ та $x_0, x_1, \ldots, x_n$ нуқталарида нолга айланади. Ролль теоремасига кўра $\varphi'(z)$ бу оралиқда камида $n+1$ та нуқтада нолга айланади, $\varphi''(z)$ эса камида n та нуқтада ва ҳоказо, $\varphi^{n+1}(z)$ камида битта нуқтада нолга айланади. Айтайлик, бу нуқта ξ бўлсин: $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$.

Бундан $L_n(x)$ нинг n-даражали кўпҳад эканлигини ҳисобга олсак:

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - L_n^{(n+1)}(\xi) - K\omega_{n+1}^{(n+1)}(\xi) =$$

$$= f^{(n+1)}(\xi) - K(n+1)! = 0,$$

яъни

$$K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Бундан ва (4.24) дан, (4.23) формуланинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

Мисол. Агар $\ln 100$, $\ln 101$, $\ln 102$, $\ln 103$ ларнинг қийматлари маълум бўлса, Лагранжнинг интерполяцион формуласи ёрдамида $\ln 100{,}5$ ни қандай аниқликда ҳисоблаш мумкин?

Ечиш. Лагранж интерполяцион формуласининг қолдиқ ҳади, агар $n = 3$ бўлса, қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Бизнинг ҳолда $x_0=100$, $x_1=101$, $x_2=102$, $x_3=103$, $x=100{,}5$; $100<\xi<100{,}5$. Чунки $f(x)=\ln x$ у ҳолда $f^{(4)}(x)=-\frac{6}{x^4}$. Шундай қилиб,

$$|R(100{,}5)|\leqslant\frac{6}{(100)^4\cdot 4!}\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 1{,}5\cdot 2{,}5=0{,}23\cdot 10^{-8}.$$

4.6-§ ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ. ТЕСКАРИ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

1. Экстраполяция. Экстраполяция, яъни аргументнинг жадвалдаги қийматларидан ташқари қийматларида функциянинг қийматини топиш масаласи устида тўхталиб ўтамиз. Экстраполяциялаш одатда, жадвалнинг бир-икки қадами миқёсида бажарилади. Чунки аргументнинг жадвалдаги қийматидан узоқроқ қийматида экстраполяцияланганда хато ортиб кетади. Жадвал бошида экстраполяциялаш учун Ньютоннинг биринчи интерполяцион формуласи қўлланилиб, жадвал охирида эса иккинчиси қўлланилади. Интерполяцион кўпҳаднинг тартиби одатда жадвалнинг амалий ўзгармас айирмаларининг тартибига тенг қилиб олинади.

Мисол. 4.6-жадвалдан фойдаланиб $x=1{,}210$ ва $x=1{,}2638$ нуқталар учун кўпҳаднинг кўриниши аниқлансин.

4.6-жадвал

x	$y=f(x)$	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1,215	0,106044	7232	−831	95
1,220	0,113276	6396	−742	93
1,225	0,119671	5653	−649	93
1,230	0,125324	5004	−556	91
1,235	0,130328	44448	−465	90
1,240	0,134776	3983	−375	88
1,245	0,138759	3606	−287	87
1,250	0,142367	3321	−200	
1,255	0,145688	3121		
1,260	0,148809			

Ечиш. Жадвалдаги учинчи тартибли айирма амалда ўзгармасдир. Шунинг учун ҳам учинчи тартибли интерполяцион формуладан фойдаланамиз. Жадвал бошида ва охирида экстраполяциялаш учун формулалар қуйидагича ёзилади:

$$P_3(x)=0{,}106044+0{,}007232q+(-0{,}000837)\cdot\frac{q(q-1)}{2}+$$

$$+0{,}000095\cdot\frac{q(q-1)(q-2)}{3!},$$

$$P_3(x)=0{,}148809+0{,}003121q+(-0{,}000200)\cdot\frac{q(q-1)}{2}+$$

$$+0{,}000087\cdot\frac{q(q+1)(q+2)}{3!}.$$

Биринчи формулага $q=(x-x_0)/h=\frac{1{,}210-1{,}215}{0{,}005}=-1$ қийматни қўйсак:

$$y(1{,}210)\approx 0{,}106044+(-1)\cdot 0{,}007232+$$

$$+\frac{(-1)\cdot(-2)}{2}\cdot(-0{,}000837)+$$

$$+\frac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)}{3!}\cdot 0{,}000095=0{,}097880.$$

Шунга ухшаш $q=\frac{x-x_4}{h}=\frac{1{,}2638-1{,}260}{0{,}005}=0{,}76$ ни иккинчи формулага қўйсак,

$$y(1{,}2638)\approx 0{,}148809+0{,}76\cdot 0{,}003121+\frac{0{,}76\cdot 1{,}76}{2}\times$$

$$\times(-0{,}000200)+\frac{0{,}76\cdot 1{,}76\cdot 2{,}76}{3!}\cdot 0{,}0000535=0{,}1511007.$$

II. Тескари интерполяция. Шу пайтгача $y=f(x)$ функциянинг жадвали берилган ҳолда аргументнинг берилган қиймати x да функциянинг тақрибий қийматини топиш масаласи билан шуғулландик. Тескари интерполяция масаласи қуйидагича қўйилади: $y=f(x)$ функциянинг берилган y қиймати учун аргументнинг шундай x қийматини топиш керакки, $f(x)y$ бўлсин. Фараз қилайлик, жадвалнинг қаралаётган оралиғида $f(x)$ функция монотон ва демак, бир қийматли тескари функция $x=\varphi(y)$ $(f(\varphi(y))=y)$ мавжуд бўлсин. Бундай ҳолда тескари интерполяция $\varphi(y)$ функция учун одатдаги интерполяцияга келтирилади. $x=\varphi(y)$ қийматни топиш учун Лагранж ёки Ньютоннинг тугунлари ҳар хил узоқликда жойлашган кол учун формулалардан фойдаланиш мумкин. Масалан, Лагранжнинг интерполяцион формуласи

$$L_n(y) = \sum_{i=0}^{n} x_i \prod_{j \neq i} \frac{y - y_j}{y_i - y_j} \qquad (4.25)$$

куринишга эга булиб, колдик хади

$$\varphi(y) - L_n(y) = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (y - y_i)$$

булади.

Агар $f(x)$ монотон булмаса, юкоридаги формула ярамайди. Бундай холда у ёки бу интерполяцион формулани ёзиб, аргументнинг маълум кийматларидан фойдаланиб ва функцияни маълум деб хисоблаб, хосил булган тенглама у ёки бу усул билан аргументга нисбатан ечилади.

Мисол. Функциянинг куйидаги кийматлари жадвали берилган:

4.7- жадвал

x	0,880	0,881	0,882	0,883
$y = f(x)$	2,4109	2,4133	2,4157	2,4181

x аргументнинг шундай киймати топилсинки, $y = 2,4$ булсин.

Ечиш. 4.7- жадвалдаги кийматларга кура функция монотон, шунинг учун хам $n = 3$ деб олиб, (4.25) формуладан фойдаланамиз:

$$L_3(y) = \frac{2,4142 - 2,4133)(2,4142 - 2,4157)(2,4142 - 2,4181)}{(2,4109 - 2,4133)(2,4109 - 2,4157)(2,4109 - 2,4181)}\, 0,880 +$$

$$+ \frac{(2,4142 - 2,4109)(2,4142 - 2,4157)(2,4142 - 2,4181)}{(2,4133 - 2,4109)(2,4133 - 2,4157)(2,4133 - 2,4181)}\, 0,881 +$$

$$+ \frac{(2.41 - 2,4109)(2,4142 - 2,4133)(2,4142 - 2,4181)}{(2,4157 - 2,4109)(2,4157 - 2,4133)(2,4157 - 2,4181)}\, 0,882 +$$

$$+ \frac{(2,4142 - 2,4109)(2,4142 - 2,4133)(2,4142 - 2,4157)}{(2,4181 - 2,4109)(2,4181 - 2,4133)(2,4181 - 2,4157)}\, 0,883 =$$

$$= -0,0634766 \cdot 0,880 + 0,6982421 \cdot 0,88! +$$
$$+ 0,4189452 \cdot 0,882 - 0,0537109 \cdot 0,883 = 0,88137.$$

4.3—4.6- §§ да келтирилган мулохазалардан сунг куйидагиларни айтиш мумкин:

Ньютоннинг биринчи интерполяцион формуласи $[a, b]$ кесманинг бошлангич нукталарида интерполяциялаш ва кесманинг охирги нукталарида экстраполяциялаш учун, иккинчи формуласи эса кесманинг охирги нукталарида интерполяциялаш ва кесманинг бошлангич нукталарида экстрополяциялаш учун кулланилади. Шуни ҳам айтиш лозимки, экстраполяциялаш интерполяциялашга караганда каттарок хатоликлар беради, яъни унинг кулланиш чегараси чекланган. Лагранж ва Ньютон интерполяцион формулаларини бир-бирлари билан солиштирсак куйидагилар билан фаркланишини курамиз:

Лагранж формуласидаги ҳар бир ҳад тенг ҳукукли n-тартибли купҳаддан иборат. Шунинг учун аввалдан (ҳисобланмасдан аввал) бирорта ҳадини ташлаб юбора олмаймиз. Ньютон формуласининг ҳадлари эса даражаси ошиб борувчи купҳадлардан иборат булиб, уларнинг коэффициентлари факториалларга булинган чекли айирмалардан иборат. Бу кетма-кет чекли айирмалар одатда 4.2-§ га мувофик тез кичрайиб боради. Шунинг учун Ньютон формуласидаги кичик коэффициентлар олдидаги ҳадларни ташлаб юборишимиз мумкин. Яъни бу ҳолда функциянинг оралик кийматларини етарли аникликда содда интерполяцион формулалардан фойдаланиб ҳисоблаш мумкин.

V БОБ

ИНТЕГРАЛЛАРНИ ТАКРИБИЙ ҲИСОБЛАШ

5.1-§. МАСАЛАНИНГ КУЙИЛИШИ

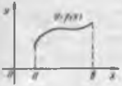
Кундалик ҳаётимизда учрайдиган куп муҳандислик масалаларини ечишда аник интегралларни ҳисоблашга тугри келади. Фараз килайлик, $\int_a^b f(x)\,dx$ ни ҳисоблаш талаб этилсин. Бу ерда $f(x)$ — $[a; b]$ кесмада берилган узлуксиз функция. Бу интегрални ҳисоблашда куйидаги формула (Ньютон — Лейбниц формуласи) кулланилади:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

бу ерда $F(x)$ — бошланғич функция. Агар бошланғич функция $F(x)$ ни элементар функциялар оркали ифодалаб булмаса ёки интеграл остидаги функция $f(x)$ жадвал кўринишида берилса, у ҳолда (5.1) формуладан фойдаланиш мумкин эмас. Бу ҳолда аниқ интегрални тақрибий формулалар орқали ҳисоблашга тўғри келади. Бундай формулаларга *квадратур формулалар* дейилади.

Бундай формулаларни келтириб чиқариш учун аниқ интегралнинг геометрик маъносини билмоқлик лозим.

Агар $[a;\ b]$ кесмада $f(x) \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ нинг қиймати сон жиҳатидан $y=f(x)$ функцияни графиги ҳамда $x=a$, $x=b$, тўғри чизиқлар билан чегараланган шакл (фигура) нинг юзига тенг (11- расм). Агар $[a;\ b]$ кесмада $f(x) \leqslant 0$ бўлса, интегралнинг қиймати юқорида келтирилган шаклнинг тескари ишора билан олинган юзига тенг (12- расм).



11- расм

12- расм

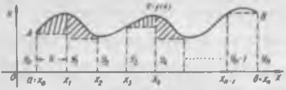
Шундай қилиб аниқ интегрални ҳисоблаш деганда бирор шаклнинг юзини ҳисоблаш тушунилади. Қуйида аниқ интегрални ҳисоблаш учун баъзи тақрибий формулалар билан танишиб чиқамиз.

5.2- §. ТЎҒРИ ТЎРТБУРЧАКЛАР ВА ТРАПЕЦИЯЛАР ФОРМУЛАСИ

Фараз қилайлик, биздан $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ аниқ интегралнинг тақрибий қийматини топиш талаб этилсин. $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ нуқталар ёрдамида $[a;\ b]$ кесмани n та тенг бўлакчаларга бўламиз. Ҳар бир бўлакчанинг узунлиги $h=\frac{b-a}{n}$. Бўлиниш нуқталари эса:

$$x_0=a;\ x_1=a+h;\ x_2=a+2h;\ x_3=a+ +3h \ldots x_{n-1}=a+(n-1)h;\ x_n=b.$$

Бу нукталарни тугун нукталар деб атаймиз. $f(x)$ функциянинг тугун нукталаридаги кийматлари $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ булсин. Булар $y_0=f(a)$; $y_1=f(x_1)...y_n=f(b)$ ларга тенг булади (13- расм).



13- расм

13- расмдан куринадики, $aABb$ эгри чизикли трапециянинг юзини топиш учун $[a, b]$ кесмани булиш натижасида хосил булган барча туртбурчакларнинг юзини хисоблаб, уларни жамлаш керак булади. Албатта бу юзачаларни хисоблашларда маълум даражада хатоликларга йул куйилади (штрихланган юзачалар). Буларни ва 5.1- § да айтилган аниқ интегралнинг геометрик маъносини хисобга олсак, куйидагини ёзишимиз мумкин булади:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\cdot y_0+hy_1+hy_2+...+hy_{n-1}=$$

$$=h(y_0+y_1+y_2+...+y_{n-1})=h\sum_{k=0}^{n-1} y_k.$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\sum_{k=0}^{n-1} y_k. \qquad (5.2)$$

Бу ерда тугри туртбурчак юзини хисоблашда унинг чап томон ординатаси олинди. Агар унг томон ординатани олсак хам шундай формулага эга буламиз:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h(y_1+y_2+y_3+...+y_n)=h\sum_{k=1}^{n} y_k;$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\sum_{k=1}^{n} y_k \qquad (5.3)$$

(5.2) ва (5.3) ларни мос равишда *чап* ва *унг формулалар* дейилади. Агар 13- расмга эътибор берсак, (5.2) формула билан интегралнинг қиймати ҳисоблангаида интегралнинг тақрибий қиймати аниқ қийматидан маълум даражада камроқ чиқади, (5.3) ёрдамида ҳисоблангаида эса тақрибий қиймат аниқ қийматдан маълум даражада каттароқ чиқади. Яъни (5.2) ва (5.3) формулалар ёрдамида аниқ интегралнинг тақрибий қиймати ҳисоблангандa бу формулалардан бири интегралнинг аниқ қийматини ками билан ифодаласа, иккинчиси эса кўпи билан ифодалайди. 13- расмдан кўринадики, (5.2) ва (5.3) формулаларни қўллаганда йўл қўйиладиган хатоликни камайтириш учун бўлиниш нуқталарини иложи борича кўпроқ олиш, яъни қадам h ни тобора кичрайтириш лозим бўлади. Албатта, h ни кичрайтириш ҳисоблаш жараёнининг кескин ўсишига олиб келади. Бу нарсадан хавотирга тушмаслигимиз керак, чунки бутун ҳисоблаш жараёни ЭҲМ га юкланади.

Мисол. Тўгри тўртбурчаклар формулалари (5.2) ва (5.3) ёрдамида $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ интегралнинг тақрибий қийматлари топилсин.

Е ч и ш. Бу ерда $a=0$; $b=1$; $n=10$; $h=(b-a)/n=0,1$.

$$f(x)=\frac{1}{1+x}.$$

$$x_0=a=0;\; x_1=a+h=0,1;\; x_2=a+2h=0,2;$$
$$x_3=a+3h=0,3;$$
$$x_4=a+4h=0,4 \ldots x_9=a+9h=0,9;\; x_{10}=b=1.$$

$$y_0=f(x)=\frac{1}{1+x_0}=\frac{1}{1+0}=1;\; y_1=f(x_1)=\frac{1}{1+0,1}=0,909;$$

$$y_2=f(x_2)=0,833;\; y_3=f(x_3)=0,769; \ldots y_9=f(x_9)=0,53;$$
$$y_{10}=f(x_{10})=0,5.$$

(5.2) дан $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}\approx 0,1\,(1+0,909+\ldots+0,526)=0,718.$

(5.3) дан $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}\approx 0,1\,(0,909+0,833+\ldots+0,5)=$

$=0,6688$

Маълумки, $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}=\ln 2$, $\ln 2\approx 0,693$. Булардан кўринадики, аниқ ечим чап ва ўнг формулалар орқали топилган ечимлар орасида ётади.

Топилган ечимлар 0,718 ва 0,668 нинг ўрта арифметигини олсак, бу 0,693 га тенг бўлади, бу эса аниқ ечим билан устма-уст тушади.

Бу хулосаларни назарга олган ҳолда (5.2) ва (5.3) формулалар ҳадларини мос равишда қўшиб ўрта арифметигини олсак, қуйидаги ифода ҳосил бўлади:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right) =$$

$$= h\left(\frac{y_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} y_k + \frac{y_n}{2}\right) \qquad (5.4)$$

(5.4) формула *трапециялар формуласи* деб аталади. Бу формула ёрдамида топилган интегралнинг тақрибий қийматининг аниқлигини ошириш учун бўлиниш нуқталари сони «n» ни икки, уч ва ҳ.к. марта ошириш керак бўлади. Албатта бунда ҳам ҳисоблаш ҳажми бир неча маротаба ошади.

5.3-§. СИМПСОН ФОРМУЛАСИ

Симпсон формуласи юқорида келтириб чиқарилган (5.2), (5.3) ва (5.4) формулаларга қараганда аниқлиги юқори бўлган формула ҳисобланади. Бу формулада интегралнинг қийматини юқори аниқликда олиш учун бўлиниш қадамларини тобора ошириш талаб этилмайди. $[a;b]$ кесмани $a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots x_{n-1} < x_n = b$ нуқталар билан $n = 2m$ та жуфт тенг бўлакчаларга ажратамиз. $y = f(x)$ эгри чизиққа тегишли бўлган (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) нуқталар орқали парабола ўтказамиз (14-расм). Бизга маълумки, бу параболанинг тенгламаси

$$y = Ax^2 + Bx + C \qquad (5.5)$$

14-расм

булади, бу ерда A, B, C — хозирча номаълум булган коэффициентлар. $[x_0, x_2]$ кесмадаги эгри чизикли трапециянинг юзини шу кесмадаги парабола билан чегараланган эгри чизикли трапециянинг юзи билан алмаштирсак, куйидагига эга буламиз:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_2} (Ax^2+Bx+C)\,dx = \left[A\frac{x^3}{3}+Cx+B\frac{x^2}{2}\right]_{x_0}^{x_2} =$$

$$= A\frac{x_2^3-x_0^3}{3}+B\frac{x_2^2-x_0^2}{2}+C(x_2-x_0).$$

(x_2-x_0) ни кавсдан ташкарига чикариб, умумий махражга келтирсак:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \frac{x_2-x_0}{6}\,[2A(x_0^2+x_0x_2+x_2^2)+$$

$$+3B(x_0+x_2)+6C]. \qquad (5.6)$$

(5.5) даги номаълум A, B, C коэффициентлар куйидагича топилади: x нинг x_0, x_1, x_2 кийматларида $f(x)$ нинг кийматлари y_0, y_1, y_2 эканини ва $x_1=\frac{x_0+x_2}{2}$ жамини хисобга олсак, (5.5) дан:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= Ax_0^2+Bx_0+C,\\ y_1 &= A\left(\frac{x_0+x_2}{3}\right)^2+B\frac{x_0+x_2}{2}+C,\\ y_2 &= Ax_2^2+Bx_2+C.\end{aligned}\right\} \qquad (5.7)$$

(5.7) нинг иккинчи ифодасини туртга купайтириб, учала тенгликни бир-бирига кушсак:

$$y_0+4y_1+y_2 = A[x_0^2+(x_0+x_2)^2+$$

$$+x_2^2]+B[x_0+2(x_0+x_2)+x_2]+6C=$$

$$=2A[x_0^2+x_0x_2+x_2^2]+3B(x_0+x_2)+6C. \qquad (5.8)$$

Бу ифодани (5.6) билан солиштирсак, уларнинг унг тарафлари бир хил эканлигини курамиз. (5.8) ни (5.6) нинг унг тарафига куйсак ва $x_2-x_0=2h$ $[h=(b-a)/n]$ эканлигини эътиборга олсак, куйидаги такрибий тенгликни топамиз:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2). \qquad (5.9)$$

Худди шундай формулани $[x_2, x_4]$ кесма учун ҳам келтириб чиқариш мумкин:

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4). \qquad (5.10)$$

Бу формулаларни бутун кесма $[a, b]$ учун келтириб чиқариб, бир-бирига қўшсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\ldots+$$

$$+2y_{2m-2}+4y_{2m-1}+y_{2m}). \qquad (5.11)$$

Бу топилган формула *Симпсон формуласидир*. Баъзи ҳолларда уни *параболалар формуласи* деб ҳам атайдилар.

(5.11) ни эслаб қолиш унчалик қийин эмас: тоқ рақамли ординаталар тўртга, жуфт рақамли ординаталар (икки чеккадаги ординатадан ташқари) иккита кўпайтирилади. Чеккадаги ординаталар y_0, y_{2m} эса бирга кўпайтирилади.

Мисол. $I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ интегралнинг қийматини трапециялар формуласи ҳамда Симпсон формуласи ёрдамида топинг.

Е ч и ш: Бу ерда $0 \leqslant x \leqslant 1$; $n=10 \cdot a=0$; $b=1 \cdot h=(b-a)/n=0{,}1$; $f(x)=y=\frac{1}{1+x^2}$. Қуйидаги 5.1- жадвални тузамиз:

5.1- жадвал

x	x^2	$1+x^2$	$y=f(x)=\frac{1}{1+x^2}$	x	x^2	$1+x^2$	$y=f(x)=\frac{1}{1+x^2}$
0,0	0,00	1,00	1,0000000	0,6	0,36	1,36	0,73522941
0,1	0,01	1,01	0,9900990	0,7	0,49	1,49	0,6711409
0,2	0,04	1,04	0,9615385	0,8	0,64	1,64	0,6097561
0,3	0,09	1,09	0,9174312	0,9	0,81	1,81	0,5524862
0,4	0,16	1,16	0,8620690	1,0	1,00	2,00	0,5000000
0,5	0,25	1,25	0,8000000				

Трапециялар формуласига асосан

$$I=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\approx h\left(\frac{y_0+y_{10}}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_9\right)=$$

$$=0,1\left(\frac{1+0,5}{2}+0,9900990+\ldots+0,5524862\right)=0,7849815.$$

Симпсон формуласига асосан

$$I=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\approx\frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+4y_5+$$

$$+2y_6+4y_7+2y_8+4y_9+y_{10})=$$

$$=\frac{0,1}{3}[1+0,5+4(0,9900990+0,9174312+\ldots+$$

$$+0,5524862+2(0,9615385+\ldots+0,6097561)]=0,7853981.$$

Бизга маълумки, $\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}\approx0,78539816.$

Булардан кўринадики, бу мисол учун трапециялар формуласи қўлланганда нисбий хатолик 0,06 % дан ошмайди. Симпсон формуласи қўлланганда эса нисбий хатолик деярли йўқ.

5.4-§. ИНТЕГРАЛЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ҲИСОБЛАШДА ЙЎЛ ҚЎЙИЛГАН ХАТОЛИКЛАРНИ БАҲОЛАШ

Фараз қилайлик, $\int_a^b f(x)dx$ интегралнинг аниқ қиймати I бўлсин. У ҳолда

$$I=I_m+R, \qquad (5.12)$$

бу ерда I_m — трапециялар формуласи ёки Симпсон формуласи ёрдамида интегрални ҳисоблаганда чиққан натижа; R — шу формулаларни қўллаганда йўл қўйилган хатолик. Агар интеграл остидаги $f(x)$ функция аналитик (формула) кўринишда бўлса, интегралларни тақрибий ҳисоблаш хатолигини ифодаловчи формулаларни математик анализ усуллари билан келтириб чиқариш мумкин. Агар интеграл остидаги функция жадвал ёки график кўринишда бўлса, бундай формулаларни келтириб чиқаришнинг иложи бўлмайди. Шунинг учун бу ҳолда бошқа усуллар қўллашга тўғри келади. Шулардан баъзи бирларини кўриб чиқамиз.

Ўкувчига ортиқча қийинчиликлар туғдирмаслик ҳамда қисқалик учун формулаларни келтириб чиқаришни (исботлашни) лозим кўрмадик. Юқорида айтилганидек, булар ҳаммаси математик анализ усуллари ёрдамида исботланади.

Фараз қилайлик $\int_a^b f(x)dx$ интегрални $n=2m$ та ва $n=4m$ та бўлакчаларга бўлиб, Симпсон формуласини қўллаб олинган натижалар I_{2m} ва I_{4m} бўлсин. I_{2m} нинг қийматини I_{4m} билан солиштириб Симпсон формуласининг аниқлиги ҳақида мулоҳаза юритиш мумкин. Бунда I_{4m} нинг хатолиги қуйидаги сондан катта бўлмайди:

$$R_{4m} \leqslant \frac{|I_{4m}-I_{2m}|}{15}. \qquad (5.13)$$

$[a, b]$ кесмада $M_k = \max f^{k}(x)$. (5.12) дан $R = I - I_m$. Бу ҳолда хатоликлар қуйидагича баҳоланади:

Трапециялар формуласи учун

$$|R| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}; \ (M_2 = f''(x)) \qquad (5.14)$$

Симпсон формуласи учун

$$|R| \leqslant \frac{M_4(b-a)^5}{180(2m)^4}; \ (M_4 = f^{(IV)}(x)). \qquad (5.15)$$

Мисол. $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$ интегрални трапециялар ва Симпсон формулалари ёрдамида ҳисоблаганда йўл қўйиладиган хатоликлар топилсин.

Ечиш.

$f(x) = \frac{1}{1+x}$; $f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$; $f^{(IV)}(x) = \frac{2}{(x+1)^5}$ $[0; 1]$ кесмада $|f''(x)| \leqslant 2$; $|f^{(IV)}(x)| \leqslant 24$.

$n=8$ да (5.14) дан трапециялар формуласи учун:

$$|R| \leqslant \frac{2}{12 \cdot 64} = \frac{1}{384} < 0{,}003.$$

(5.15) дан Симпсон формуласи учун:

$$|R| \leqslant \frac{24}{180 \cdot 8^4} = \frac{1}{30720} < 0{,}000034.$$

VI БОБ

ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ УСУЛЛАРИ

6.1-§. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА ҲАҚИДА ДАСТЛАБКИ МАЪЛУМОТ. МАСАЛАНИНГ ҚЎЙИЛИШИ

Агар тенгламада номаълум функция ҳосила ёки дифференциал остида қатнашса, бундай тенглама *дифференциал тенглама* дейилади.

Агар дифференциал тенгламадаги номаълум функция фақат бир ўзгарувчига боғлиқ бўлса, бундай тенглама *оддий дифференциал тенглама* дейилади. Масалан:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{3}\,(1-2y); \quad y' = \frac{x^4}{2}; \quad \frac{dy}{dt} = t^2 - 1;$$

$$\sqrt{2}\,\frac{d^2y}{dx^2} = x^2 + 1; \quad xdy = 3dx.$$

Агар дифференциал тенгламадаги номаълум функция икки ёки ундан ортиқ ўзгарувчиларга боғлиқ бўлса, бундай тенглама *хусусий ҳосилали дифференциал тенглама* дейилади. Масалан:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z).$$

Дифференциал тенгламанинг т а р т и б и деб, шу тенгламада қатнашувчи ҳосиланинг (дифференциалнинг) энг юқори тартибига айтилади. Масалан:

$$\frac{dz}{dx} = 5(z-1); \quad (u')^3 = x^2 + 2$$

биринчи тартибли тенгламалар,

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 5\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial z^3}\right), \quad \frac{d^4 T}{dt^4} = 1 - (t^2 + 2)$$

эса 4-тартибли дифференциал тенгламалардир.

Бу бобда фақат оддий дифференциал тенгламаларни кўриб чиқамиз. n-тартибли оддий дифференциал тенгламанинг умумий кўриниши қуйидагича:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})=0, \qquad (6.1)$$

бу ерда x — эркли ўзгарувчи; y — номаълум функция, y', y'', ..., $y^{(n)}$ — номаълум функциянинг ҳосилалари.

(6.1) ни кўп ҳолларда қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$y^{(n)}=f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \qquad (6.2)$$

(6.2) нинг ечими (ёки интеграли) деб уни қаноатлантирувчи шундай $y=\varphi(x)$ функцияга айтиладики, $\varphi(x)$ ни (6.2) га қўйганда у айниятга айланади.

Оддий дифференциал тенглама ечимининг графиги унинг интеграл эгри чизиғи дейилади.

n-тартибли дифференциал тенгламанинг ечимида n та эркли ўзгармас сон қатнашади. Бу ўзгармас сонларни ўз ичига олган ечим *умумий ечим (умумий интеграл)* дейилади. Умумий ечимнинг график кўриниши интеграл эгри чизиқлар дастасини ифодалайди. Умумий ечимда қатнашувчи эркли ўзгармасларнинг аниқ сон қийматлари маълум бўлса умумий ечимдан хусусий ечимни ажратиб олиш мумкин.

Умумий ечимга кирувчи эркли ўзгармаслар масаланинг бошланғич шартларидан аниқланади. Бунда масала қуйидагича қўйилади: (6.1) дифференциал тенгламанинг шундай ечими $y=\varphi(x)$ ни топиш кераккки, бу ечим эркли ўзгарувчи x нинг берилган қиймати $x=x_0$ да қуйидаги қўшимча шартларни қаноатлантирсин:

$$x=x_0 \text{ да } y=y_0,\ y'=y'_0,\ y''=y''_0,\ \dots,\ y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)} \qquad (6.3)$$

(6.3) шартлар *бошланғич шартлар* дейилади, $x_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ — сонлар эса *ечимнинг бошланғич қийматлари* дейилади. Бошланғич шартлар (6.3) ёрдамида умумий ечимдан хусусий ечимни ажратиб олинади. (6.2) дифференциал тенгламанинг ечимини (6.3) бошланғич шартлар асосида топишга *Коши масаласи* дейилади. Биринчи тартибли дифференциал тенглама ($n=1$) учун Коши масаласи қуйидагичадир: бошланғич шарт $x=x_0$ да $y=y_0$ ни қаноатлантирувчи $y'=f(x, y)$ дифференциал тенгламанинг ечими топилсин. Биринчи тартибли дифференциал учун Коши масаласининг геометрик маъноси шундаки, умумий ечимдан (эгри чизиқлар дастасидан) координаталари $x=x_0$, $y=y_0$ бўлган нуқтадан ўтувчи интеграл эгри чизиқ ажратиб олинади.

Мисол. $\frac{dy}{dx}=2x$ тенгламанинг $x_0=1$ да $y_0=2$ бошлангич шартни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Е ч и ш. $dy=2xdx$. Бундан $y=x^2+c$. Бу ечим параболалар дастасини ифодалайди. Бошлангич шартдан фойдалансак, $2=1+c$; $c=1$. Демак хусусий ечим $y=x^2+1$ булади. Яъни параболалар дастасидан (умумий ечимдан) M_0 (1; 2) нуқтадан утувчи парабола ажратиб олинди.

Агар $f(x, y)$ бирор $R_{[a,b]}=\{|x-x_0|<a; |y-y_0|<b\}$ соҳада узлуксиз булиб, шу соҳада Липшиц шарти

$$|f(x, y)-f(x, y)|\leqslant N|y+y|$$

бажарилса, у ҳолда Коши масаласи $y(x_0)=y_0$ шартни бажарувчи ягона ечимга эгадир (бунда N — Липшиц доимийси)

Дифференциал тенгламаларнинг аниқ ечимини топиш жуда камдан-кам ҳоллардагина мумкин булади. Амалиётда учрайдиган купдан-куп масалаларда аниқ ечимни топишнинг иложи булмайди. Шунинг учун дифференциал тенгламаларни ечишда тақрибий усуллар муҳим роль уйнайди. Бу усуллар ечимлар қай тарзда ифодаланишларига қараб қуйидаги гуруҳларга булинадилар:

1. *Аналитик усуллар.* Бу тақрибий усулларда ечим аналитик (формула) куринишда чиқади.

2. *График усуллар.* Бу ҳолларда ечимлар график куринишларда ифодаланади.

3. *Рақамли усуллар.* Бунда ечим жадвал куринишида олинади.

Ҳисоблаш математикасида мазкур уч гуруҳга кирувчи бир қанча усуллар ишлаб чиқилган. Бу усулларнинг бирбирларига нисбатан муайян камчиликлари ва устунликлари мавжуд. Муҳандислик масалаларини ечишда шуларни ҳисобга олган ҳолда у ёки бу усулни танлаб олиш лозим булади.

6.2-§. КЕТМА-КЕТ ЯҚИНЛАШИШ УСУЛИ (ПИКАР АЛГОРИТМИ)

Пикар алгоритми аналитик усуллардан булиб амалий масалаларни ечишда қулланилади.

Фараз қилайлик,

$$y'=f(x, y)$$

дифференциал тенгламанинг унг томони $\{|x-x_0|\leqslant a;\ |y-y_0|\leqslant b\}$ туртбурчакда узлуксиз ва y буйича узлуксиз хусусий ҳосилага эга булсин. (6.4) тенгламанинг $x=x_0$ да

$$y(x_0)=y_0 \tag{6.5}$$

бошлангич шартни каноатлантирувчи ечими топилсин. (6.4) дан $y'=\frac{dy}{dx}=f(x,y)$; $dy=f(x,y)dx$ Бу ифоданинг иккала томонини x_0 дан x гача интегралласак,

$$\int_{x_0}^{x} dy = \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx$$

Бундан (6.5) ни хисобга олинса,

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y)dx \tag{6.6}$$

(6.6) да номаълум функция интеграл ифодаси остида катнашганлиги туфайли у **и н т е г р а л т е н г л а м а** деб аталади. (6.6) да $f(x,y)$ функциядаги y нинг урнига унинг маълум киймати y_0 ни куйиб биринчи якинлашиш буйича ечимни топамиз:

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_0). \tag{6.7}$$

Энди (6.6) даги $f(x,y)$ функциядаги y нинг ўрнига унинг маълум киймати y_1 ни куйсак, иккинчи якинлашиш буйича ечим $y_2(x)$ ни топамиз:

$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_1)dx. \tag{6.8}$$

Ушбу жараённи давом эттирсак,

$$\left\{\begin{array}{l} y_3(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_2)dx, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_{n-1})dx. \end{array}\right. \tag{6.9}$$

Шундай килиб, куйидаги функциялар кетма-кетлиги $\{y_i(x)\}$ ни ташкил килдик:

$$y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x),\ \dots,\ y_n(x). \tag{6.10}$$

(6.10) кетма-кетлик яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлиши мумкин. Қуйидаги теоремани исботсиз келтирамиз:

Теорема. *Агар $(x_0;\ y_0)$ нуқта атрофида $f(x,y)$ функциянинг узлуксиз ва чегараланган хусусий ҳосиласи $f'_y(x,y)$ мавжуд бўлса, у ҳолда $\{y_i(x)\}$ кетма-кетлик (6.4) тенгламанинг ечими бўлган ва $y(x_0)=y_0$ шартни қаноатлантирувчи $y(x)$ функцияга яқинлашади.*

Демак, дифференциал тенгламаларни ечишда ушбу теореманинг шартлари бажарилса (яъни (6.10) яқинлашувчи бўлса), Пикар усулини қўллаш мумкин. Агар (6.10) узоқлашувчи бўлса, бу усулнинг маъноси бўлмайди.

Мисол. Кетма-кет яқинлашиш усули билан (Пикар усули) $y'=\frac{dy}{dx}=x+y$ дифференциал тенгламанинг $x=0$ да $y=1$ шартни қаноатлантирувчи хусусий ечими топилсин.

Е ч и ш. $\frac{dy}{dx}=x+y$. Бундан $x=0$ да $y=1$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$y=1+\int_0^x (x+y)\,dx.$$

(6.7) га асосан,

$$y_1=1+\int_0^x (x+1)\,dx=1+x+\frac{x^2}{2}.$$

(6.8) га асосан

$$y_2=1+\int_0^x \left(x+1+x+\frac{x^2}{2}\right)dx=1+x+x^2+\frac{x^3}{6}.$$

y_3 ва y_4 ни ҳисоблаймиз:

$$y_3=1+\int_0^x \left(x+1+x+x^2+\frac{x^3}{6}\right)dx=1+x+x^2+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{24};$$

$$y_4=1+\int_0^x \left(x+1+x+x^2+\frac{x^4}{24}\right)dx=1+x+x^2+$$

$$+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{120}$$

Берилган тенгламанинг аниқ ечими:

$$y=2e^x-x-1=1+x+x^2+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{12}+$$

$$+\frac{x^5}{60}+\frac{x^6}{360}+\ldots$$

Бундан кўринадиган тақрибий ечимлар y_3 ва y_4 аниқ ечимдан фақат охирги ҳадлари билан фарқ қиладилар.

6.3-§. ДАРАЖАЛИ ҚАТОРЛАР ЁРДАМИДА ИНТЕГРАЛЛАШ. КЕТМА-КЕТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАШ УСУЛИ

Фараз қилайлик, n-тартибли

$$y^{(n)}=f(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)}) \qquad (6.11)$$

дифференциал тенглама учун

$$x=x_0,\ y=y_0,\ y'=y_0',\ y_0'',\ldots,\ y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)} \qquad (6.12)$$

бошлангич шартлар берилган.

(6.11) нинг ўнг томони $M_0(x_0,\ y_0,\ y_0',\ldots,\ y_0^{(n-1)})$ бошланғич нуқтада аналитик функция. (6.11) нинг ечими $y=y(x)$ ни Тейлор қатори (x_0 — нуқта атрофида) кўринишида қидирамиз:

$$y=y_0+y_0'(x-x_0)+\frac{y_0''}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$\frac{y_0^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n+\ldots, \qquad (6.13)$$

бу ерда $|x-x_0|<h$; h — етарли кичик сон.

(6.13) қаторнинг коэффициентларини топиш учун, (6.12) ни ҳисобга олган ҳолда (6.11) дан талаб қилинган миқдорда ҳосила олинади. Топилган коэффициентлар y', y_0'', y_0''', y_0^{IV} ни (6.13) га қўйсак, ечимни $(x-x_0)$ даражалари бўйича қатор кўринишда оламиз. Агар $x_0=0$ бўлса, ечим x нинг даражалари бўйича қатор кўринишида чиқади. Юқорида келтирилган усулни оддий дифференциал тенгламалар тизими учун ҳам қўллаш мумкин.

Мисол.

$$y''=x^2y \qquad (6.14)$$

тенгламанинг $x_0=0$, $y_0=1$, $y_0'=0$ бошлангич шартни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Ечиш. Бу мисол учун (6.13) катор куйидаги куринишда ёзилади:

$$y=1+\frac{y_0''}{2!}x^2+\frac{y_0'''}{3!}x^3+\ldots+\frac{y_0^{(n)}}{n!}x^n+\ldots \qquad (6.15)$$

(6.14) дан кетма-кет хосила олсак,

$$y'''=2xy+x^2y';$$
$$y^{(4)}=2y+2xy'+2xy'+x^2y''=2y+4xy'+x^2y;$$
$$y^{(5)}=2y'+4y'+4xy''+2xy''=x^2y'''=6y'+6xy''+x^2y''';$$
$$y^{(6)}=12y''+8xy'''+x^2y^{(4)};$$
$$y^{(7)}=20y'''+10xy^{(4)}+x^2y^{(4)};$$
$$y^{(8)}=30y^{(4)}+12xy^{(5)}+x^2y^{(6)}.$$

Бу тенгликларнинг хар бирига $x=x_0$, $y_2=1$, $y_0'=0$ бошлангич шартни кулласак, куйидагиларни топамиз: $y_0''=0$; $y_0'''=0$; $y_0^{(4)}=2$; $y_0^{(5)}=y_0^{(6)}=y_0^{(7)}=0$; $y^{(8)}=30\cdot 2=60$.

Буларни (6.15) га куйиб изланаётган ечимни топамиз:

$$y=1+\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{672}x^8+\ldots$$

6.4-§. НОМАЪЛУМ КОЭФФИЦИЕНТЛАР УСУЛИ

Фараз килайлик, ушбу

$$y'=f(x,\ y) \qquad (6.16)$$

дифференциал тенглама учун $x=x_0$; $y=y_0$ бошлангич шарт берилган. Номаълум коэффициентлар усули (6.16) нинг ечимини коэффициентлари номаълум булган куйидаги катор куринишида излашга асосланган:

$$y=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+\ldots \qquad (6.17)$$

Номаълум a_0, a_1, a_2 коэффициентлар куйидагича топилади: (6.17) дан хосила олиб (6.16) га куйилади. Сунгра x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентлари бир-бирларига тенглаштирилади ва $x=x_0$ да $y=y_0$ ни хисобга олган холда номаълум a_0, a_1, a_2, ... коэффициентлар топилади. Топилган a_0, a_1, a_2 коэффициентларни (6.17) га куйсак, изланаётган ечимни топамиз.

Мисол. $y''=x^2y$ тенгламанинг $x_0=0$ бошлангич шартда $y_0=1$, $y'_0=0$ ни каноатлантирувчи ечими топилсин.

Ечиш. Бу мисолни 6.3-§ да кўрган эдик. $x_0=0$ булгани учун ечимни куйидаги катор куринишда кидирамиз:

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_nx^n+\dots \qquad (6.18)$$

Бундан икки марта хосила олсак,

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\dots+na_nx^{n-1}, \qquad (6.19)$$

$$y''=2a_2+6a_3x+12a_4x^2+\dots+a_nn(n-1)x^{n-2}. \qquad (6.20)$$

(6.18) ва (6.19) дан бошлангич шартни хисобга олган холда $a_0=1$; $a_1=0$ эканлигини аниклаймиз. a_0 ва a_1 ни (6.18) га куйсак,

$$y=1+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\dots+a_nx^n. \qquad (6.21)$$

Бу каторнинг колган коэффициентларини топиш учун (6.20) ва (6.21) ларни $y''=x^2y$ га куйсак, куйидагини аниклаймиз:

$$2a_2+6a_3x+12a_4x^2+20a_5x^3+30a_6x^4+\dots+$$
$$+n(n-1)a_nx^{n-2}-x^2(1+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\dots+$$
$$+a_nx^n+\dots)=0$$

Бу тенгликни x нинг даражалари буйича гурухларга ажратамиз:

$$2a_2+6a_3x+(12a_4-1)x^2+20a_5)x^3+30a_6-a_2)x^4+$$
$$+(42a_7-a_3)x^5+\dots=0.$$

Биз ечимни $x\neq0$ булган хол учун кидираётганимиз туфайли x нинг олдидаги коэффициентларни 0 га тенглаштиришимиз лозим булади: $a_2=0$; $a_3=0$; $12a_4-1=0$. Бундан $a_4=\frac{1}{12}$; $a_5=0$; $30a_6-a_2=0$. Бундан эса $a_6=0$ ва х.к.

Буларни хисобга олган холда ечимни куйидагича ёзиш мумкин

$$y=1+\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{672}x^8+\dots$$

6.5-§. ЭЙЛЕР ВА РУНГЕ — КУТТА УСУЛЛАРИ

Юкорида (6.2—6. 4- §§. да) курилган усуллар такрибий аналитик усуллар булиб, бу холларда ечимлар аналитик (формула) куринишларида олинди. Бу усуллар билан топилган ечимнинг аниқлик даражаси ҳақида фикр юритиш бирмунча мураккаб бўлади. Масалан, кетма-кет дифференциаллаш усулини қўллаганда қаторнинг жуда кўп ҳадларини ҳисоблашга тўғри келади ва кўп ҳолларда бу қаторнинг умумий ҳадини аниқлаб бўлмайди. Пикар алгоритмини қўллаганимизда эса, жуда кўп мураккаб интегралларни ҳисоблашга тўғри келади ва кўп ҳолларда интеграл остидаги функциялар элементар функциялар орқали ифодаланмайди. Амалий масалаларни ечишда ечимларни формула кўринишида эмас, балки жадвал кўринишида олиш қулай бўлади. Дифференциал тенгламаларни рақамли усуллар билан ечганда ечимлар жадвал кўринишида олинади. Амалий масалаларни ечишда кўп қўлланиладиган Эйлер ва Рунге — Кутта усулларини кўриб чиқамиз.

Эйлер усули. Қуйидаги

$$y' = f(x, y) \tag{6.22}$$

биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг $[a, b]$ кесмада бошланғич шарт $x = x_0$ бўлган ҳол учун $y = y_0$ ни қаноатлантирувчи ечими топилиши лозим бўлсин. $[a, b]$ кесмани $x_0, x_1, x_2 \dots x_n$ нуқталар билан n та тенг бўлакчаларга ажратамиз; бунда $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$, $h = \frac{b-a}{n}$ — қадам.

(6.22) тенгламани $[a, b]$ кесмага тегишли бўлган бирор $[x_k, x_{k+1}]$ кесмада интегралласак,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y)\,dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'\,dx =$$

$$= y(x) \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = y(x_{k+1}) - y(x_k) = y_{k+1} - y_k,$$

яъни

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y)\,dx. \tag{6.23}$$

Бу ерда интеграл остидаги функцияни $x = x_k$ нуқтада бошланғич ўзгармас қийматига тенг деб қабул қилинса, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y)\,dx = f(x_k, y_k)\cdot x \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = f(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k) = y_k' \cdot h.$$

У ҳолда (6.23) дан

$$y_{k+1} = y_k + y_k' h. \tag{6.24}$$

$y_{k+1} - y_k = \Delta y_k$, яъни $y_k' h = \Delta y_k$ деб белгиласак,

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k. \tag{6.25}$$

Ушбу жараённи $[a, b]$ га тегишли бўлган ҳар бир кесмача учун такрорлаб, (6.22) нинг ечимини ифодаловчи жадвални тузамиз. Эйлер усулининг геометрик маъноси шундайки, бунда (6.22) нинг ечимини ифодаловчи интеграл эгри чизик синик (II) чизиклар билан алмаштирилади (15- расм). Эйлер усулини дифференциал тенгламалар тизимини ечишда ҳам қўллаш мумкин.

15- расм

Қуйидаги тизим

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z), \\ z' = f_2(x, y, z) \end{cases} \tag{6.26}$$

учун

$$x = x_0 \text{ да } y = y_0,\ z = z_0 \tag{6.27}$$

бошлангич шарт берилган. (6.26) нинг тақрибий ечимлари қуйидаги формулалар орқали топилади:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,\quad z_{i+1} = z_i + \Delta z_i,$$

бу ерда

$$\Delta y_i = hf_1(x_i, y_i, z_i);\ \Delta z_i = hf_2(x_i, y_i, z_i) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

Мисол. $y' = y - x$ тенгламанинг ечими $[0;\ 1{,}5]$ кесма учун Эйлер усули билан топилсин. Бошланғич шарт $x_0 = 0$; $y_0 = 1{,}5$; қадам $h = 0{,}25$.

Ечиш. Қуйидаги 6.1- жадвални тузамиз.

6.1-жадвал

i	x_i	y_i	$y_i' = y_i - x_i$	$\Delta y_i = hy_i'$
1	2	3	4	5
0	0	1,5000	1,5000	0,3750
1	0,25	1,8750	1,6250	0,4062
2	0,50	2,2812	1,7812	0,4453
3	0,75	2,7265	1,9765	0,4941
4	1,00	3,2206	2,2206	0,5552
5	1,25	3,7758	2,5258	0,6314
6	1,50	4,4702		

Бу жадвални қуйидагича тузамиз:

I. Бошланғич шарт сифатида 2- ва 3-устунларнинг 1-сатрини ёзамиз.

II. $y_i' = y_i - x_i$ тенгламадан y_i' ($i = 0, 1, 2, ..., 5$) ни топамиз ва уни (4) устуннинг 1-сатрига ёзамиз.

III. 4-устуннинг қийматини h га кўпайтириб ($\Delta y_i = hy_i'$, $i = 1, 2, ..., 5$ ни ҳисоблаб), натижани 5-устунга ёзамиз.

IV. 3- устундаги қийматни 5-устундаги қийматга (сатрларни мослаб) қўшиб $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$ ни ҳисоблаймиз ва натижани 3-устуннинг кейинги сатрига ёзамиз. Бу жараённи [0; 1, 5] кесмадаги ҳамма нуқталар учун такрорлаймиз.

Рунге — Кутта усули. Рунге — Кутта усули кўп жиҳатдан Эйлер усулига ўхшаш, аммо аниқлик даражаси Эйлер усулига нисбатан юқори бўлган усуллардан биридир. Рунге — Кутта усули билан амалий масалаларни ечиш жуда қулай. Чунки, бу усул орқали номаълум функциянинг x_{i+1} даги қийматини топиш учун унинг x_i даги қиймати аниқ бўлиши етарлидир. Рунге — Кутта усули унинг аниқлаш даражасига кўра бир неча турларга бўлинади. Шулардан амалиётда энг кўп қўлланиладигани тўртинчи даражали аниқликдаги Рунге — Кутта усулидир.

Биринчи тартибли $y = f(x, y)$ дифференциал тенглама учун $x = x_i$ ($i = 0, 1, 2, ...n$) $y = y_i$ маълум бўлсин. Бу ерда y_i бошланғич шарт маъносида бўлмаслиги ҳам мумкин. Номаълум функция y нинг $x = x_{i+1}$ даги қиймати

$y_{i+1}=y_{i+1}(x)$ ни топиш учун қуйидаги кетма-кет ҳисоблаш жараёнини амалга оширмоқ лозим бўлади:

$$\begin{cases} K_1^{(i)}=hf_i(x_i, y_i), \\ K_2^{(i)}=hf_i(x_i+h/2, y_i+K_1^{(i)}/2), \\ K_3^{(i)}=hf_i(x_i+h/2, y_i+K_2^{(i)}/2), \\ K_4^{(i)}=hf_i(x_i+h, y_i+K_3^{(i)}). \end{cases} \tag{6.28}$$

Функциянинг орттирмаси Δy_i қуйидаги формуладан топилади:

$$\Delta y_i=(1/6)(K_1^{(i)}+2K_2^{(i)}+2K_3^{(i)}+K_4^{(i)}), \tag{6.29}$$

бу ерда $h=(b-a)/n$ — интеграллаш қадами. Тенгламанинг ечими қидирилаётган $[a, b]$ кесма $x_i=x_0+ih$ $(i=0, 1, 2, ..., n)$ нуқталар билан ўзаро тенг n та бўлакка бўлинган. i нинг ҳар бир қиймати учун (6.28) ва (6.29) даги амалларни бажарамиз ва номаълум функция y нинг қийматларини (тенгламанинг ечимини) қуйидаги формуладан топамиз:

$$y_{i+1}=y_i+\Delta y_i \quad (i=0, 1, 2, ..., n). \tag{6.30}$$

Рунге — Кутта усули билан дифференциал тенгламани ечишда жадвал тузилса ҳисоблаш жараёни бирмунча аниқлашади. Жадвални тузиш тартиби қуйидагича:

I. 2- ва 3-устунларга x ва y нинг керак бўлган қийматлари ёзилади.

II. x ва y ларнинг қийматларини (2- ва 3-устунлардан) $y'=f(x, y)$ тенгламанинг ўнг тарафига қўйилади ва натижаларни 4-устунга (сатрларни мос келтириб) қўйилади.

III. Топилган $f(x, y)$ қийматларни интеграллаш қадами h га кўпайтирилади ва натижалар 5-устунга ёзилади.

IV. $K_1^{(0)}$ ни I га, $K_2^{(0)}$ ва $K_3^{(0)}$ ларни 2 га, $K_4^{(0)}$ ни 1 га кўпайтириб уларни 6-устунга ёзамиз.

I — IV жараённи K^i нинг $(i=0, 1, 2, ...n)$ ҳар бир қиймати учун такрорлаймиз. 6-устундаги қийматларнинг йиғиндисини ҳисоблаб, натижани 6 га бўламиз ва $\Delta y=\frac{1}{6}(K_1^{(i)}+2K_2^{(i)}+2K_3^{(i)}+K_4)$ ни топамиз. Ва ниҳоят, $y_{i+1}=y_i+\Delta y_i$ топилади. Юқорида келтирилган ҳисоблаш тартибини $[a; b]$ кесманинг барча нуқталари учун такрорлаймиз.

Жадвал қуйидаги кўринишга эга булади:

6.2-жадвал

	x	y	$y'=f(x,y)$	$k=hf(x,y)$	Δy
1	2	3	4	5	6
	x_0	y_0	$f(x_0, y_0)$	$k_1^{(0)}$	$k_1^{(0)}$
	$x+\frac{h}{2}$	$y_0+\frac{k_1^{(0)}}{2}$	$f(x_0+\frac{h}{2}; y_0+\frac{k_1^{(0)}}{2})$	$k_2^{(0)}$	$2k_2^{(0)}$
0	$x_0+\frac{h}{2}$	$y_0+\frac{k_2^{(0)}}{2}$	$f(x_0+\frac{h}{2}; y_0+\frac{k_2^{(0)}}{2})$	$k_3^{(0)}$	$2k_3^{(0)}$
	x_0+h	$y_0+k_3^{(0)}$	$f(x_0+h; y_0+k_3^{(0)})$	$k_4^{(0)}$	$k_3^{(0)}$
					$\frac{1}{6}\sum=\Delta y_0$
	x_1	$y_1=y_0+\Delta y_0$	$f(x_1, y_1)$	$k_1^{(1)}$	$k_1^{(1)}$
	$x_1+\frac{h}{2}$	$y_1+\frac{k_1^{(1)}}{2}$	$f(x_1+\frac{h}{2}; y_1+\frac{k_1^{(1)}}{2})$	$k_2^{(1)}$	$2k_2^{(1)}$
1	$x_1+\frac{h}{2}$	$y_1+\frac{k_2^{(1)}}{2}$	$f(x_1+\frac{h}{2}; y_1+\frac{k_2^{(1)}}{2})$	$k_3^{(1)}$	$2k_3^{(1)}$
	x_1+h	$y_1+k_3^{(1)}$	$f(x_1+h; y_1+k_3^{(1)})$	$k_4^{(1)}$	$k_4^{(1)}$
					$\frac{1}{6}\sum=\Delta y_1$
2	x_2	$y_2=y_1+\Delta y_1$			

VII БОБ

ЭҲТИМОЛЛИКЛАР НАЗАРИЯСИ

Эҳтимолликлар назарияси математика фанининг муҳим тармоқларидан биридир. Эҳтимолликлар назариясининг унсурлари (элементлари) XVI — XVII асрларда вужудга кела бошлади. Шу даврларда қимор ўйинлари жуда кенг тарқалган бўлиб, бу ўйинлар математикларнинг ҳам эътиборини ўзига жалб этган эди. Бу ўйинларда кузатилаётган ҳодисалар ўзига хос қонуниятларга бўйсунишини билган Гюйгенс, Паскаль, Ферма, Кардано ва бошқа олимлар бу қонунларни ҳар томонлама ўргандилар ва эҳтимолликлар назариясига оид эҳтимоллик, математик кутилма ва шунга ухшаш тушунчаларни киритдилар.

Эҳтимолликлар назарияси ривожининг кейинги босқичи Яков Бернулли (1654—1705) номи билан боғлиқ. У исботлаган теорема кейинчалик «катта сонлар қонуни» номини олган бўлиб, олдинроқ йиғилган фактларнинг биринчи назарий асосланиши эди.

Эҳтимолликлар назариясининг кейинги ютуқлари Муавр, Лаплас, Гаусс, Пауссон ва бошқалар номи билан боғлиқдир.

Эҳтимолликлар назарияси ривожининг янги, айниқса самарадор даври П. Л. Чебишев (1821—1894) ва унинг шогирдлари А. А. Марков (1856—1922), А. М. Ляпунов (1857—1918) номлари билан боғлиқ. Бу даврда эҳтимолликлар назарияси уйғунлашган математик фан бўлиб қолди. Унинг кейинги ривожланиши Фишер, В. Феллер, С. Н. Бернштейн, А. Н. Колмогоров, А. Я. Хинчин, Б. В. Гнеденко, Н. В. Смирнов ва бошқалар номлари билан боғлиқ.

Ўзбекистонда эҳтимолчилар мактабининг вужудга келиши В. И. Романовский, Т. А. Саримсоков, С. Х. Сирожиддинов ва уларнинг шогирдлари номлари билан боғлиқдир. Ўзбек эҳтимолчилари мактаби умумий муаммоларнинг қуйилиши ва уларнинг ҳал этилиши, фундаментал илмий тадқиқот ишларининг сифати ва салмоғи бўйича жаҳонда олдинги уринлардан бирида туради.

Эҳтимолликлар назарияси математик статистиканинг асосий аппаратигина булиб қолмай, бундан ташқари унинг усуллари оммавий хизмат кўрсатиш назариясида, ишончлилик назариясида, технологик жараённи таҳлил қилишда ва бошқа мақсадларда қўлланилади.

7.1-§. ҲОДИСА ВА ЭҲТИМОЛЛИКЛАР ТУШУНЧАСИ. ҲОДИСАЛАР УСТИДА АМАЛЛАР

Эҳтимолликлар назариясининг асосий тушунчаларидан бири «тажриба» ва тажриба натижасида кузатилиши мумкин бўлган ҳодисалар тушунчаларидир. Тажриба ҳодисани рўёбга келтирувчи шартлар мажмуи «S» нинг бажарилишини таъминлашдан иборатдир.

Тажрибадан тажрибага ўтганда рўй бераётган ҳодисалар ўзгариб турадиган ҳоллар ҳаётда кенг миқёсда учраб туради. Бу ерда эса, албатта, тажрибани вужудга келтирувчи шартлар мажмуи «S» ўзгармас бўлган ҳоллар тушунилади. Масалан, утказилаётган тажриба бир жинсли тангани муайян шароитда ташлашдан иборат булсин. Албатта, бу ерда тажрибадан тажрибага утганда руй берувчи ҳодисалар ҳар хил булади, масалан, бир тажрибада «Герб» (Г) тушган булса, бошқасида танганинг иккинчи томони — «рақам» (Р) тушиши мумкин.

Тажриба, кузатишлар, улчашларнинг натижалари ҳодисалардан иборат булади. Тажриба натижасида руй беришн олдиндан аниқ булмаган ҳодиса *тасодифий ҳодиса* дейилади. Тажрибанинг ҳар қандай натижаси *элементар ҳодиса* дейилади. Тажриба натижасида руй бериши мумкин булган барча элементар ҳодисалар туплами *элементар ҳодисалар фазоси* дейилади. Элементар ҳодисалар фазосини U орқали, ҳар бир элементар ҳодисани эса e орқали белгилаймиз.

2- мисол. Тажриба симметрик, бир жинсли тангани икки марта ташлашдан иборат булсин. Бунда элементар ҳодисалар қуйидагича булади:

$e_1=$ (ГГ) — биринчи ташлашда герб, иккинчисида ҳам герб тушиш ҳодисаси;

$e_2=$ (ГР) — биринчи ташлашда герб, иккинчисида эса рақам тушиш ҳодисаси;

$e_3=$ (РГ) — биринчи ташлашда рақам, иккинчисида герб тушиш ҳодисаси;

$e_4=$ (РР) — биринчи ташлашда ҳам, иккинчисида ҳам рақам тушиш ҳодисаси;

3- мисол. Тажриба нуктани [2,5] сегментга тасодифий равишда ташлашдан иборат булсин, бу ерда элементар ҳодисалар фазоси $U=[e]=[2,5]$ тупламдан иборатдир, яъни у континуум қувватга эга.

Бу айтганларимизни якунлаб, шундай хулоса қилишимиз мумкин: ҳар қандай тажриба унинг натижасида руй бериши мумкин булган элементар ҳодисалар тупламини вужудга келтиради ва бу ҳодисалар туплами чекли, саноқли ва ҳатто континуум қувватга эга булиши мумкин. Ҳар қандай тасодифий ҳодиса эса элементар ҳодисалар тупламидан иборат булиб, унинг «катта-кичиклиги» унга кирган элементар ҳодисаларнинг сонига боғлиқ булади.

Тасодифий ҳодисаларни, одатда, лотин алифбосининг бош ҳарфлари A, B, C,.... лар билан белгиланади. «Энг катта» ҳодиса U булиб, у барча элементар ҳодисалар тупламидан иборатдир.

Агар тажриба натижасида $A(A\subset U)$ га кирган e элементар ҳодисаларнинг бирортаси руй берса, *A ҳодиса* *рўй берди* дейилади. Агар шу элементар ҳодисалардан бирортаси ҳам рўй бермаса, A ҳодиса рўй бермади ва A ҳодисага тескари ҳодиса (уни $\bar{A}$ орқали белгилаймиз) рўй берди деймиз. A ва $\bar{A}$ *ўзаро қарама-қарши ҳодисалар* дейилади.

Тажриба натижасида ҳар гал рўй берадиган ҳодиса *муқаррар ҳодиса* дейилади. Юқорида келтирилган барча элементар ҳодисалар фазоси U муқаррар ҳодисага мисол бўла олади. Бирорта ҳам элементар ҳодисани ўз ичига олмаган ҳодиса *мумкин бўлмаган ҳодиса* дейилади ва V орқали белгиланади. Табиийки, бу ҳодиса тажриба натижасида сира ҳам рўй бериши мумкин эмас. Рўй бермайдиган ҳодиса V ни тўплами маъносида $\varnothing$ бўш тўплам билан, муқаррар ҳодиса U ни Ω универсал тўплам билан белгилаймиз, яъни $U=\Omega$, $V=\varnothing$.

4- мисол. A ҳодиса иккинчи мисолдаги тажрибада герб икки марта тушишидан иборат бўлсин. Бу ҳолда $A=(e_1)$ бўлади, яъни тажриба натижасида e_1 рўй берса, A ҳодиса рўй берди деймиз. Агар e_1 рўй бермаса, A ҳодиса рўй бермади деймиз, у ҳолда A га қарама-қарши ҳодиса $\bar{A}$ рўй берган бўлади.

Тасодифий ҳодисалар орасида қуйидагича муносабатлар бўлиши мумкин:

1. Агар A ҳодисани ташкил этган элементар ҳодисалар B ҳодисага ҳам тегишли бўлса, A ҳодиса B ҳодисани э р г а ш т и р а д и дейилади ва $A\subset B$ каби белгиланади. Кўриниб турибдики, бу ҳолда A рўй берса, B ҳам албатта рўй беради, лекин B рўй берса, A нинг рўй бериши шарт эмас.

2. Агар A ва B ҳодисалар бир хил элементар ҳодисалар тўпламидан ташкил топган бўлса, яъни A ни ташкил этган барча элементар ҳодисалар албатта B га ҳам тегишли ва аксинча, B ни ташкил этган барча элементар ҳодисалар албатта A га ҳам тегишли бўлса, A ва B ҳодисалар т е н г дейилади ва $A=B$ каби белгиланади.

3. A ва B ҳодисаларнинг й и ғ и н д и с и деб A ёки B нинг ёки иккаласининг ҳам рўй беришидан иборат C ҳодисани айтамиз. A ва B ҳодисаларнинг йиғиндисини $A\cup B$ ёки $A+B$ орқали белгиланади.

4. A ва B ҳодисаларнинг бир вақтда рўй беришини таъминловчи барча $e\in U$ лардан ташкил топган C ҳодиса A ва B ҳодисаларнинг к ў п а й т м а с и дейилади ва $A\cap B$ ёки AB каби белгиланади.

5. A ва B ҳодисаларнинг а й и р м а с и деб A рўй бериб,

B рўй бермаслигидан иборат C ходисага айтилади. A ва B ҳодисаларнинг айирмаси $A \backslash B$ ёки $A-B$ каби белгиланади.

6. Агар $A \cap B = \varnothing$ бўлса, A ва B ҳодисалар биргаликда эмас дейилади.

7. A ҳодисага қарама-қарши $\bar{A}$ ҳодиса A га кирмаган барча элементар ҳодисалар тўпламидан иборатдир, яъни $A \cap \bar{A} = \varnothing$ ва $A \cup \bar{A} = U$.

8. Агар $A_1 U ... U A_n = U$ бўлса, $A_1, ..., A_n$ ҳодисалар ҳодисаларнинг тўлиқ гуруҳини ташкил этади дейилади. Хусусан, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, ..., n$ ва $A_1 + + ... + A_n = U$ бўлса, $A_1, ..., A_n$ ҳодисалар ўзаро биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг тўлиқ гуруҳини ташкил этади дейилади.

Шундай қилиб, тасодифий ҳодисаларнинг таърифидан фойдаланиб, қуйидаги муносабатларнинг ўринли эканлигини кўрсатиш мумкин:

а) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ — коммутативлик қонуни;

б) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ — ассоциативлик қонуни;

в) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ — айнийлик қонуни;

г) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ — дистрибутивлик қонуни.

7.2-§. ЭҲТИМОЛЛИК ТАЪРИФЛАРИ

7.2.1. Эҳтимолликнинг мумтоз таърифи

Олдинги параграфда кўриб ўтилган мисолларда элементар ҳодисалар фазоси Ω чекли ёки саноқли бўлишини кўрдик.

Агар элементар ҳодисалар фазоси чекли ҳодисалардан иборат бўлса, у *элементар ҳодисаларнинг дискрет фазоси* дейилади. Агар Ω да мусбат қийматли $P(e_i)$ функция берилган бўлса ва у $P(\Omega) = \sum_{e \in \Omega} P(e) = 1$ шартни қаноатлантирса, у ҳолда Ω да эҳтимолликлар тақсимоти берилган дейилади.

Таъриф. Ҳар қандай $A \in \Omega$ тасодифий *ҳодисанинг эҳтимоллиги* деб, ушбу $P(A) = \sum_{e \in A} P(e)$ сонга айтилади.

5-мисол. Бир жинсли кубни ташлашда i очко ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) тушиш ҳодисасини e_i билан белгилайлик.

рўй берди дейилади. Агар шу элементар ҳодисалардан бирортаси ҳам рўй бермаса, A ҳодиса рўй бермади ва A ҳодисага тескари ҳодиса (уни $\bar{A}$ орқали белгилаймиз) рўй берди деймиз. A ва $\bar{A}$ *ўзаро қарама-қарши ҳодисалар* дейилади.

Тажриба натижасида ҳар гал рўй берадиган ҳодиса *муқаррар ҳодиса* дейилади. Юқорида келтирилган барча элементар ҳодисалар фазоси U муқаррар ҳодисага мисол бўла олади. Бирорта ҳам элементар ҳодисани ўз ичига олмаган ҳодиса *мумкин бўлмаган ҳодиса* дейилади ва V орқали белгиланади. Табиийки, бу ҳодиса тажриба натижасида сира ҳам рўй бериши мумкин эмас. Рўй бермайдиган ҳодиса V ни тўплами маъносида $\varnothing$ бўш тўплам билан, муқаррар ҳодиса U ни Ω универсал тўплам билан белгилаймиз, яъни $U=\Omega$, $V=\varnothing$.

4- мисол. A ҳодиса иккинчи мисолдаги тажрибада герб икки марта тушишидан иборат бўлсин. Бу ҳолда $A=(e_1)$ бўлади, яъни тажриба натижасида e_1 рўй берса, A ҳодиса рўй берди деймиз. Агар e_1 рўй бермаса, A ҳодиса рўй бермади деймиз, у ҳолда A га қарама-қарши ҳодиса $\bar{A}$ рўй берган бўлади.

Тасодифий ҳодисалар орасида қуйидагича муносабатлар бўлиши мумкин:

1. Агар A ҳодисани ташкил этган элементар ҳодисалар B ҳодисага ҳам тегишли бўлса, A ҳодиса B ҳодисани э р г а ш т и р а д и дейилади ва $A\subset B$ каби белгиланади. Кўриниб турибдики, бу ҳолда A рўй берса, B ҳам албатта рўй беради, лекин B рўй берса, A нинг рўй бериши шарт эмас.

2. Агар A ва B ҳодисалар бир хил элементар ҳодисалар тўпламидан ташкил топган бўлса, яъни A ни ташкил этган барча элементар ҳодисалар албатта B га ҳам тегишли ва аксинча, B ни ташкил этган барча элементар ҳодисалар албатта A га ҳам тегишли бўлса, A ва B ҳодисалар т е н г дейилади ва $A=B$ каби белгиланади.

3. A ва B ҳодисаларнинг й и ғ и н д и с и деб A ёки B нинг ёки иккаласининг ҳам рўй беришидан иборат C ҳодисани айтамиз. A ва B ҳодисаларнинг йиғиндисини $A\cup B$ ёки $A+B$ орқали белгиланади.

4. A ва B ҳодисаларнинг бир вақтда рўй беришини таъминловчи барча $e\in U$ лардан ташкил топган C ҳодиса A ва B ҳодисаларнинг к ў п а й т м а с и дейилади ва $A\cap B$ ёки AB каби белгиланади.

5. A ва B ҳодисаларнинг а й и р м а с и деб A рўй бериб,

B рўй бермаслигидан иборат C ҳодисага айтилади. A ва B ҳодисаларнинг айирмаси $A \setminus B$ ёки $A - B$ каби белгиланади.

6. Агар $A \cap B = \varnothing$ бўлса, A ва B ҳодисалар биргаликда эмас дейилади.

7. A ҳодисага қарама-қарши $\bar{A}$ ҳодиса A га кирмаган барча элементар ҳодисалар тўпламидан иборатдир, яъни $A \cap \bar{A} = \varnothing$ ва $A \cup \bar{A} = U$.

8. Агар $A_1 \cup \ldots \cup A_n = U$ бўлса, $A_1, \ldots, A_n$ ҳодисалар ҳодисаларнинг тўлиқ гуруҳини ташкил этади дейилади. Хусусан, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ ва $A_1 + \ldots + A_n = U$ бўлса, $A_1, \ldots, A_n$ ҳодисалар ўзаро биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг тўлиқ гуруҳини ташкил этади дейилади.

Шундай қилиб, тасодифий ҳодисаларнинг таърифидан фойдаланиб, қуйидаги муносабатларнинг ўринли эканлигини кўрсатиш мумкин:

а) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ — коммутативлик қонуни;

б) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ — ассоциативлик қонуни;

в) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ — айнийлик қонуни;

г) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ — дистрибутивлик қонуни.

7.2-§. ЭҲТИМОЛЛИК ТАЪРИФЛАРИ

7.2.1. Эҳтимолликнинг мумтоз таърифи

Олдинги параграфда кўриб ўтилган мисолларда элементар ҳодисалар фазоси Ω чекли ёки саноқли бўлишини кўрдик.

Агар элементар ҳодисалар фазоси чекли ҳодисалардан иборат бўлса, у *элементар ҳодисаларнинг дискрет фазоси* дейилади. Агар Ω да мусбат қийматли $P(e_i)$ функция берилган бўлса ва у $P(\Omega) = \sum_{e \in \Omega} P(e) = 1$ шартни қаноатлантирса, у ҳолда Ω да эҳтимолликлар тақсимоти берилган дейилади.

Таъриф. Ҳар қандай $A \in \Omega$ тасодифий *ҳодисанинг эҳтимоллиги* деб, ушбу $P(A) = \sum_{e \in A} P(e)$ сонга айтилади.

5-мисол. Бир жинсли кубни ташлашда i очко ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) тушиш ҳодисасини e_i билан белгилайлик.

У ҳолда элементар ҳодисалар фазоси $\Omega=\{e\}$, $i=\overline{1,6}$ бўлади. Куб бир жинсли бўлгани сабабли e_i ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллиги $P(e_i)=\frac{1}{6}$ бўлади. Бундай аниқланган эҳтимоллик қуйидаги хоссаларга эга:

1. $P(\varnothing)=0,\ P(\Omega)=\sum\limits_{e\in\Omega}P(e)=1.$

2. $P(A\cup B)=\sum\limits_{e\in A\cup B}P(e)=\sum\limits_{e\in A}P(e)+\sum\limits_{e\in B}P(e)-$

$$-\sum_{e\in A\cap B}P(e)=P(A)+p(B)-p(A\cap B).$$

3. $P(\bar{A})=\sum\limits_{e\in\bar{A}}P(e)=\sum\limits_{e\in\Omega/A}P(e)=\sum\limits_{e\in\Omega}P(e)-$

$$-\sum_{e\in A}P(e)=1-P(A).$$

Иккинчи хоссадан, хусусий ҳолда $A\cap B=\varnothing$ бўлганда, $P(A\cap B)=P(A)+P(B)$ (қўшиш теоремаси) келиб чиқади. Буни э ҳ т и м о л л и к н и н г ч е к л и а д д и т и в л и к ҳ о с с а с и дейилади ва у биргаликда рўй бермайдиган $(A_i\cap A_j=\varnothing,\ i\neq j)$ ҳар қандай $\{A_i\}$ ҳодисалар учун ҳам ўринли.

Агар Ω чекли n та элементар ҳодисадан ташкил топган бўлиб, ҳар бир элементар ҳодиса e_i нинг эҳтимоллиги $P(e_i)$ ни $\frac{1}{n}$ га тенг деб олинса, e_i элементар ҳодисалар т е н г и м к о н и я т л и дейилади. Бундай фазода ҳар қандай A ҳодисанинг эҳтимоллиги қуйидагича аниқланади:

$$P(A)=\sum_{e_i\in A}P(e_i)=\frac{A\text{ га кирган элементлар сони}}{n}=\frac{m}{n}.$$

Ҳодиса функцияси $P(A)$ нинг эҳтимолликнинг ҳамма хоссаларига эга эканлигини кўриш мумкин. Эҳтимолликнинг юқоридаги киритилган таърифи унинг м у м т о з (к л а с с и к) т а ъ р и ф и дейилади. Мумтоз таъриф фақат тенг имкониятли чекли сондаги элементар ҳодисалардан ташкил топган Ω фазо учун киритилиши мумкин, бу ҳол эса мумтоз таърифни қўллашни чегаралайди, сабаби Ω элементлари чекли бўлибгина қолмай, балки турли имкониятли бўлиши ҳам мумкин.

6- мисол. Бешта бир хил қоғознинг ҳар бирига қуйидаги ҳарфлардан бири ёзилган: қ, а, й, и, қ. Қоғозлар яхшилаб аралаштирилган. Битталаб олинган ва кетма-кет бир қатор қилиб терилган «қайиқ» сўзини ўқиш мумкинлиги эҳтимолини топинг.

Ечиш. Тажрибаларнинг ҳамма бўлиши мумкин бўлган натижалар сони 5 та ҳарфдан тузиш мумкин бўлган барча ўрин алмаштиришлар сонига, яъни $5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$ га тенг. Шулардан фақат биттаси «қайиқ» сўзини ташкил қилади. Шунинг учун бу ерда $m=1$, $n=120$. A ҳодисасининг изланаётган эҳтимоллиги эса

$$P(A)=\frac{1}{120}\approx0{,}008.$$

7.2.2. Эҳтимолликнинг геометрик таърифи

Бирор Q соҳа берилган бўлиб, Q_1 соҳани ўз ичига олсин: $Q_1\subset Q\cdot Q$ соҳага таваккалига ташланган нуқтанинг Q_1 соҳага ҳам тушиши эҳтимоллигини топиш талаб этилсин. Ташланган нуқта Q га албатта тушсин ва унинг бирор Q_1 қисмига тушиш эҳтимоллиги шу Q_1 қисмнинг ўлчамига (узунлигига, юзига, ҳажмига) пропорционал бўлиб, Q_1 нинг тузилишига ва Q_1 ни Q нинг қаерида жойлашганлигига боғлиқ бўлмасин. Бу шартларда қаралаётган ҳодисанинг эҳтимоллиги

$$P=\frac{\text{mes}Q_1}{\text{mes}Q}$$

формула ёрдамида аниқланади. Бу ерда аниқланган P функция эҳтимолликнинг барча хоссаларини қаноатлантиради.

7- мисол. Узунлиги 20 см бўлган L кесмага узунлиги 10 см бўлган l кесма жойлаштирилган. Катта кесмага таваккалига қўйилган нуқтанинг кичик кесмага ҳам тушиш эҳтимоллигини топинг. Нуқтанинг кесмага тушиш эҳтимоллиги кесманинг узунлигига мутаносиб (пропорционал) бўлиб, унинг жойлашишига боғлиқ эмас, деб фараз қилинади.

Ечиш. Масаланинг шартига кўра $l=10$ см, $L=20$ см. Умумийликка ҳалал келтирмасдан L кесманинг саноқ боши l кесма билан устма-уст тушади деб қараймиз. Унда қаралаётган ҳодисанинг эҳтимоллиги

$$P=\frac{10\text{ см}}{20\text{ см}}=\frac{1}{2};$$

7.2.3. Эҳтимолликнинг статистик таърифи

Узоқ кузатишлар шуни кўрсатадики, шартлар ўзгармас бўлганда бирор A ҳодисанинг рўй бериши ёки рўй бермаслиги маълум турғунлик характерига эга бўлар экан. A ҳодисанинг n та тажрибада рўй беришлар сонини β деб олсак, у ҳолда жуда кўп сондаги кузатишлар учун $\frac{\beta}{n}$ нисбат деярли ўзгармас миқдор бўлиб қолаверади. $\frac{\beta}{n}$ нисбат A ҳодисанинг **р ў й   б е р и ш   ч а с т о т а с и** дейилади. Частотанинг турғунлик хусусияти «демографик» характердаги ҳодисаларда яққол сезилади. Масалан, қадимги замонларда бутун бир давлат учун ва катта шаҳарлар учун туғилган ўғил болалар сонининг ҳамма туғилган болалар сонига нисбати йилдан-йилга деярли ўзгармаслиги кузатилган. Қадимги Хитойда бизнинг эрамиздан 2238 йил аввал аҳолининг рўйхатида бу сон асосан $\frac{1}{2}$ га тенг деб ҳисобланган.

Агар тажрибалар сони етарлича кўп бўлса, у ҳолда шу тажрибаларда қаралаётган A ҳодисанинг рўй бериш частотаси бирор ўзгармас $P \in [0,1]$ сон атрофида турғун равишда тебранса, бу P сонни A ҳодисанинг **р ў й   б е р и ш   э ҳ т и м о л л и г и** деб қабул қиламиз. Бу усулда аниқланган эҳтимоллик **ҳ о д и с а н и н г   с т а т и с т и к   э ҳ т и м о л л и г и** дейилади. Эҳтимолликнинг бу таърифи жуда бўш, сабаби бирор ҳодисанинг рўй бериш частоталари кетма-кетлиги турли тажрибалар ўтказилганда турлича бўлади. Бундан ташқари, биз частоталар кетма-кетлигини эмас, балки унинг чекли элементларини оламиз, чунки ҳамма кетма-кетликни олиб бўлмайди.

7.3-§. ЭҲТИМОЛЛИКНИНГ ХОССАЛАРИ

Эҳтимолликнинг қуйидаги тўққиз хоссасини келтириш мумкин:

1. Агар A ҳодиса B ҳодисани эргаштирса, яъни $A \subset B$ бўлса, у ҳолда $P(A) \leqslant P(B)$ бўлади.

И с б о т и. Ҳамма ҳолларнинг умумий сони n дан A ва B ҳодисаларга, мос равишда m_1 таси ва m_2 таси қулайлик туғдирсин. Бинобарин, $P(A) = \frac{m_1}{n}$; $P(B) = \frac{m_2}{n}$. Шартга кўра A ҳодиса B ҳодисани эргаштиради, шунинг учун

A ҳодисага қулайлик туғдирувчи m_1 та ҳол B ҳодисага қулайлик туғдирувчи m_2 та ҳолнинг таркибига киради, яъни $m_1 \leqslant m_2$ ёки $P(A) \leqslant P(B)$.

2. Агар A ва B ҳодисалар тенг кучли бўлса, у ҳолда уларнинг эҳтимолликлари тенг: $P(A) = P(B)$.

Исботи. Агар A ва B ҳодисалар тенг кучли бўлса, у ҳолда A ҳодиса B ҳодисани эргаштиради. B ҳодиса эса A ҳодисани эргаштиради. Шунинг учун биринчи хоссага асосан $P(A) \leqslant P(B)$ ва $P(B) \leqslant P(A)$ деб ёзиш мумкин. Бундан $P(A) = P(B)$ бўлади.

3. Ҳар қандай A ҳодисанинг эҳтимоллиги манфий бўла олмайди, яъни $P(A) \geqslant 0$.

Исботи. Ҳар доим $m \geqslant 0$ ва $n > 0$ бўлганлиги учун $P(A) = \frac{m}{n}$ формулага кўра $P(A) = \frac{m}{n} \geqslant 0$.

4. Муқаррар ҳодисанинг эҳтимоллиги бирга тенг.

5. V мумкин бўлмаган ҳодисанинг эҳтимоллиги нолга тенг, яъни $P(V) = 0$.

6. $P = (A) = 1 - P(A)$.

Бу хосса $A \cup \bar{A} = \Omega$ ва $A \cap \bar{A} = V$ дан келиб чиқади.

7. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, чунки, $A \cup B = A \cup (A / (A \cap B))$, $B = AB + (B / AB)$

8. $P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$.

9. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

Шундай қилиб, исталган A тасодифий ҳодисанинг эҳтимоллиги мусбат тўғри каср билан ифодаланади. Бу каср қанчалик бирга яқин бўлса, A ҳодисанинг рўй беришига ишонч шунчалик кўп бўлади. Агар бу каср нолга яқин бўлса, у ҳолда битта синашда ҳодисани амалда мумкин бўлмайди деб ҳисоблайдилар. Юқоридаги хоссалар эҳтимолликнинг мумтоз (классик) таърифига асосан ифодаланади.

Эҳтимолликнинг статистик таърифи учун ҳам шу хоссаларнинг ўринли эканлигини исботлаш мумкин.

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. Кутичада рангидан бошқа ҳеч фарқи бўлмаган 10 та қалам бор, улардан 7 таси қора, 3 таси қизил ва яхшилаб аралаштирилган. Таваккалига олинган қаламнинг қизил бўлиш эҳтимоллигини топинг.

Жавоб: $P = 0,3$.

2. Гурухда 17 та талаба булиб, улардан 8 таси кизлар. Шу талабалар орасида 7 билет уйналмокда. Билетга эга булганлар орасида 4 та киз булиши эхтимоллигини топинг.

Ж а в о б: $P \approx 0{,}302$.

3. Телефонда ракам тера туриб, абонент битта ракамни эсидан чикариб куйди ва уни таваккалига терди. Керакли ракам терилганлик эхтимоллигини топинг.

Ж а в о б: $P = \frac{1}{10}$.

7.4-§. ШАРТЛИ ЭҲТИМОЛЛИКЛАР. ҲОДИСАЛАРНИНГ БОҒЛИҚМАСЛИГИ

Биз ҳодисанинг эҳтимоллигини аниклашнинг асосида S комплекс шарт-шароит ётишини биламиз.

Агар $P(A)$ эҳтимолликни ҳисоблашда S комплекс шарт-шароитдан бошқа ҳеч кандай шарт-шароит талаб килинмаса, бундай эҳтимоллик *шартсиз эҳтимоллик* дейилади.

Баъзан А ҳодисанинг эҳтимоллигини бирор B ҳодиса рўй бергандан сўнг ҳисоблашга тўғри келади. Бундай эҳтимоллик шартли эҳтимоллик дейилади ва $P(A/B)$ ёки $P_B(A)$ каби белгиланади.

Мисол. Қутида 8 та оқ ва 7 та қора шар бор. Таваккалига олинган шарнинг оқ бўлишини A ҳодиса деб, қора бўлишини B ҳодиса деб оламиз. Қутидан икки марта таваккалига биттадан шар оламиз, уларни қайтариб солмасдан синашдан олдин A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллиги $P(A)=\frac{8}{16}$, B ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллиги $P(B)=\frac{7}{15}$ бўлади. Фараз қилайлик, агар биринчи олган шаримиз оқ бўлган бўлса (A ҳодиса), у ҳолда иккинчи олган шаримизнинг қора бўлиш (B ҳодиса) эҳтимоллиги $P(B)=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$ бўлади.

Шундай қилиб, шартли эҳтимоллик таърифи умумий ҳолда қуйидагича ифодаланади:

1-таъриф. (Ω, F, P) эҳтимоллик фазоси берилган бўлиб, $A, B \in F$ ва $P(B)>0$ бўлсин. У ҳолда A ҳодисанинг B шартдаги эҳтимоллиги деб, қуйидаги формула билан аниқланадиган эҳтимолликка айтилади:

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

Шартли эҳтимолликнинг хоссалари:

1. $P(A/B)\geqslant 0$;
2. $P(\Omega/B)=1$;
3. $A_1, A_2\in\Omega$, $A_1\cap A_2=V$ бўлса, у ҳолда $P(A_1+A_2/B)=P(A_1/B)+P(A_2/B)$ тенглик ўринлик бўлади;
4. Агар A ва $\bar{A}$ ҳодисалар ўзаро қарама-қарши ҳодисалар бўлса, у ҳолда $P(A/B)=1-P(\bar{A}/B)$ тенглик ўринли бўлади.

Шунингдек, агар $P(A)>0$ бўлса, B ҳодисанинг A шартдаги эҳтимоллиги.

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

формула ёрдамида топилади. Шартли эҳтимолликни топиш формуласидан ҳодисаларнинг кўпайтмаси эҳтимоллигини топиш учун қуйидаги формулани келтириб чиқариш мумкин:

$$P(AB)=P(B)\cdot P(A/B)=P(A)\cdot P(B/A). \qquad (7.1)$$

2-таъриф. Агар $P(A/B)=P(A)$ тенглик бажарилса A ҳодиса B ҳодисага *боғлиқ эмас* дейилади. Шунингдек, A ҳодиса B ҳодисага боғлиқ бўлмаса ва B ҳодиса ҳам A га боғлиқ бўлмаса $P(B/A)=P(B)$ тенглик бажарилади.

3-таъриф. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалар берилган бўлсин. $1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_s\leqslant n$ сонларни оламиз. Агар

$$P\left(\prod_{k=1}^{s} A_{i_k}\right)=\prod_{k=1}^{s} P(A_{i_k}) \quad (1\leqslant s\leqslant n)$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $A_1, \ldots, A_n$ ҳодисалар биргаликда боғлиқ эмас дейилади.

Шунингдек, ҳодисаларнинг жуфт-жуфти билан боғлиқмаслигидан биргаликда боғлиқмаслиги келиб чиқмайди.

8-мисол. Цехда 7 эркак ишчи ва 6 аёл ишчи ишлайди. Табель рақамлари бўйича таваккалига 3 киши ажратилди. Барча ажратиб олинган кишилар эркаклар бўлиш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш: Ҳодисаларни қуйидагича белгилайлик: A_1 — биринчи ажратилган эркак киши, A_2 — иккинчи ажратилган эркак киши, A_3 — учинчи ажратилган эркак киши. Учала ажратилган эркак киши ҳодисасини эса A деб белгилайлик. У ҳолда $P(A_1)=\frac{7}{10}$; $P(A_2/A_1)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$; $P(A_3/A_1A_2)=\frac{5}{8}$ тенгликлар ўринли бўлади. Агар $A=A_1A_2A_3$ эканини эътиборга олсак, изланаётган ҳодисанинг эҳтимоллиги қуйидагича бўлади:

$$P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)=\frac{7}{10}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8}=\frac{7}{24}.$$

7.5-§. ТЎЛИҚ ЭҲТИМОЛЛИК ФОРМУЛАСИ. БЕЙЕС ФОРМУЛАСИ

Фараз қилайлик, A ҳодиса тўлиқ гуруҳ ташкил этувчи биргаликда бўлмаган $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ҳодисалардан биттаси ва фақат биттаси рўй берганлик шартидагина рўй берсин, бошқача қилиб айтганда,

$$A=\bigcup_{i=1}^{n} AB_i$$

бу ерда $(AB_i)\cap(AB_j)=V,\ i\neq j$. У ҳолда қўшиш теоремасига асосан,

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(AB_i).$$

Агар $P(AB_i)=P(A/B_i)\cdot P(B_i)$ эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\cdot P(A/B_i). \qquad (7.2)$$

Бу тенглик **тўлиқ эҳтимоллик формуласи** дейилади.

9-мисол. Икки тикувчи эркаклар шимини тикмоқда. Биринчи тикувчи тайёрлаган шимларининг 1-навли бўлиш эҳтимоллиги 0,8 га, иккинчиси тайёрлаган шимларининг 1-навли бўлиш эҳтимоллиги 0,9 га тенг. Таваккалига (таваккалига танлаган тикувчидан) олинган шимнинг 1-навли бўлиш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. Таваккалига олинган шим учун қуйидаги гипотезалар ўринли бўлади:

H_1 гипотеза — шимнинг биринчи тикувчи тайёрлаган бўлиш эҳтимоллиги;

H_2 гипотеза — шимнинг иккинчи тикувчи тайёрлаган булиш эҳтимоллиги.

Уларнинг эҳтимолликлари қуйидагича булади:

$$P(H_1)=\frac{1}{2},\ P(H_2)=\frac{1}{2}.$$

Агар олинган шимнинг I- навли булишини A ходиса деб олсак, у ҳолда бу ходисаларнинг турли гипотезалардаги эҳтимоллиги, масаланинг шартига кура, $P(A/H_1)=0{,}8$, $P(A/H_2)=0{,}9$ булади. Юқорида топилганларни тулиқ эхтимоллик формуласига қуйиб, изланаётган ходиса учун қуйидагини топамиз:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 0{,}8+\frac{1}{2}\cdot 0{,}9=0{,}85.$$

Энди тулиқ эхтимоллик формуласидан фойдаланиб Бейес формуласини келтириб чиқамиз. B_i ва A ходисаларнинг купайтмаси учун ушбу

$$P(B_i/A)=P(A)\cdot P(B_i/A)=P(B_i)\cdot P(A/B_i)$$

формуланинг уринлилигидан

$$P(B_i/A)=\frac{P(B_i)\cdot P(A/B_i)}{P(A)}$$

муносабатга эга буламиз. Тулиқ эҳтимоллик формуласини қулласак, **Бейес формуласини** ҳосил қиламиз:

$$P(B_i/A)=\frac{P(B_i)\cdot P(A/B_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}(B_i)\cdot P(A/B_i)}. \qquad (7.3)$$

Бейес формуласи A ходиса руй берганлиги маълум булгандан сунг гипотезалар эҳтимолликларини қайта баҳолашга имкон беради.

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. Қутида 10 та ипли ғалтак булиб, улардан 4 таси буялган. Йиғувчи таваккалига 3 та ипли ғалтак олди. Олинган ипнинг ҳеч булмаганда биттаси буялган булиш эҳтимоллигини топинг.

Жавоб: $P=\frac{5}{6}$.

бўлишини кўриш мумкин. Ҳақиқатан ҳам $\sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} = (q+p)^n = 1$. (7.4) ифода $p(x+q)^n$ бином ёйилмасининг x^n қатнашган ҳадининг коэффициенти бўлгани сабабли $P_n(m)$ ларни эхтимолликнинг биномиал тақсимот қонуни дейилади.

n да $P_n(m)$ эҳтимоллик m нинг функцияси эканлиги кўриниб турибди. Бу функцияни текшириб кўрайлик:

$$\frac{P_n(m+1)}{P_n(m)} = \frac{n-m}{m+1} = \frac{p}{q} \qquad (6)$$

1) агар $(n-m)p > (m+1)q$, яъни $np-q > m$ бўлса, (б) тенгликдан $P_n(m+1) > P_n(m)$ бўлади.

2) агар $np-q=m$ бўлса, (б) тенгликдан $P_n(m+1) = P_n(m)$ келиб чиқади.

3) агар $np-q<m$ бўлса, (б) тенгликдан $P_n(m+1) < P_n(m)$ келиб чиқади.

Бу текширишлардан кўринадики, $P_n(m)$ эҳтимоллик m ўсиши билан олдин ўсиб бориб, энг катта қийматга эришиб, m нинг кейинги ўсишларида камаювчи функция бўлар экан. Шунингдек, агар $np-q$ бутун сон бўлса, $P_n(m)$ эхтимоллик m нинг иккита $m_0=np-q$ ва $m_0=np-q+1$ қийматида энг катта қийматга эришишини кўрамиз. Агар $np-q$ бутун сон бўлмаса, $P_n(m)$ эҳтимоллик ўзининг энг катта қийматига m_0 дан катта бўлган энг кичик бутун сон қийматида эришади.

Агар кузатилаётган ҳодисанинг энг катта эҳтимоли юз бериш сонини δ деб олсак, $np-q$ бутун сон бўлмаганда

$$np-q<\delta<np+p \qquad (7.5)$$

тенгсизликлар ҳосил бўлади. Бу тенгсизликлар n марта синашда A ҳодисанинг энг катта эхтимли юз бериш сони ётадиган чегарани кўрсатади.

10- мисол. Заёмнинг ўйнаш муддатида битта облигациянинг ютиш эҳтимоллиги 0,25 га тенг. 8 та облигация мавжуд бўлса, шулардан иккитасининг ютиш эхтимоллиги нечага тенг?

Ечиш. Масала шартига кўра $n=8$, $m=2$, $p=0{,}25$, $q=0{,}75$. Бернулли формуласига кўра ҳисоблаймиз.

$$P_8(2) = C_8^2 p^2 q^6 = \frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}(0{,}25)^2\cdot(0{,}75)^6 = 28\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{729}{4096} \approx 0{,}3115.$$

Демак, 8 та облигациядан иккитасининг ютиш эхтимоллиги $\approx 0{,}3115$ га тенг.

Агар n ва m катта сонлар бўлса, у ҳолда $P_n(m)$ эҳтимолликни Бернулли формуласидан фойдаланиб ҳисоблаш маълум қийинчиликка олиб келади, чунки бунда катта сонлар устида амаллар бажариш талаб этилади. Бундан, бизни қизиқтираётган эҳтимолликни Бернулли формуласини қулламасдан ҳам ҳисоблаш мумкин деган савол туғилиши табиий.

Бу мумкин экан. Лапласнинг локал теоремаси синашлар сони етарлича катта бўлганда ҳодисанинг n та тажрибада роса m марта рўй бериш эҳтимоллигини тақрибий ҳисоблаш учун асимптотик формула беради.

Шуни айтиб ўтиш кераки, хусусий ҳолда, $P=\frac{1}{2}$ учун асимптотик формулани 1730 йилда Муавр исбот қилган эди. 1783 йилда эса Муавр формуласини Лаплас 0 ва 1 дан фарқли ихтиёрий $P\in]0,1[$ учун умумлаштирган. Шу сабабли бу ерда сўз бораётган теорема баъзан Муавр — Лаплас теоремаси деб аталади. Биз фақат Лапласнинг локал теоремасининг ўзини ва унинг қўлланилишини кўрсатамиз холос.

Теорема. *Агар ҳар бир синашда A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллиги $P(0<p<1)$ ўзгармас бўлиб, ноль ва бирдан фарқли бўлса, у ҳолда n та синашда A ҳодисанинг роса m марта рўй бериш эҳтимоллиги $P_n(m)$ тақрибан (n қанча катта бўлса, шунча аниқ)*

$$Y=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2p}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x)$$

функциянинг $X=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ даги қийматига тенг.

$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ функциянинг x аргументининг мусбат қийматларига мос қийматларидан тузилган жадваллар мавжуд. $\varphi(-x)=\varphi(x)$ бўлганлиги сабабли бу жадваллардан аргументнинг қийматлари манфий бўлганда ҳам фойдаланилади. Шундай қилиб, n та эркли синашда A ҳодисанинг роса m марта рўй бериш эҳтимоллиги тақрибан қуйидагига тенг:

$$P(m)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x), \tag{7.6}$$

бу ерда $X = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

11-мисол. Корхонада ишлаб чиқарилган буюмнинг яроқсиз бўлиш эҳтимоллиги 0,2 га тенг бўлса, 400 та буюмдан иборат партиядаги яроқсиз буюмлар сони роса 80 бўлиш эҳтимоллигини топинг.

Е ч и ш. Шартга кўра $n = 400$, $m = 80$, $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$. Лапласнинг асимптотик формуласидан фойдаланамиз:

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \cdot \varphi(x) = \frac{1}{8} \cdot \varphi(x)$$

x нинг қийматини ҳисоблаймиз:

$$x = \frac{80 - 400 \cdot 0{,}2}{8} = 0.$$

Жадвалдан $\varphi(0) = 0{,}3989$ эканлигини топамиз.

Изланаётган эҳтимоллик:

$$P_{400}(80) = \frac{1}{8} \cdot 0{,}3989 = 0{,}04986.$$

7.8-§. ЛАПЛАСНИНГ ИНТЕГРАЛ ТЕОРЕМАСИ

Фараз қилайлик, n та тажриба ўтказилаётган бўлиб, уларнинг ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллиги ўзгармас ва p га $(0 < p < 1)$ тенг бўлсин. n та тажрибада A ҳодисанинг камида m_1 марта ва кўпи билан m_2 марта рўй бериш эҳтимоллиги $P_n(m_1, m_2)$ ни қандай ҳисоблаш мумкин? Бу саволга Л а п л а с н и н г и н т е г р а л т е о р е м а с и жавоб беради. Уни қуйида исботсиз келтирамиз:

Теорема. *Агар ҳар бир синашда A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллиги P ўзгармас бўлиб, ноль ва бирдан фарқли бўлса, у ҳолда n та синашда A ҳодисанинг m_1 дан m_2 мартагача рўй бериш эҳтимоллиги $P_n(m_1, m_2)$ тақрибан қуйидаги аниқ интегралга тенг:*

$$P_n(m_1, m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \qquad (7.7)$$

бу ерда $a = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$ ва $b = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Лапласнинг интеграл теоремасини қўллаш билан ечиладиган масалаларда

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

ифодани ҳисоблашга тўғри келади. Бу интеграл учун махсус жадвал бор. Бу жадвалда $\Phi(x)$ функциянинг мусбат x ларга мос қийматлари келтирилган. $\Phi(x)$ функциянинг тоқлигидан фойдаланиб, жадвалдан $x<$ <0 бўлган ҳолда ҳам фойдаланилади. Жадвалда $\Phi(x)$ функциянинг $x\in[0,5]$ сегментдаги қийматлари берилган, агар $x>5$ бўлса, у ҳолда $\Phi(x)=0{,}5$ деб олинади. Жадвалдан фойдаланиш осон бўлиши учун қуйидаги формуладан фойдаланиш қулайдир:

$$P_n(m_1, m_2)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\Phi(b)-\Phi(a). \qquad (7.8)$$

12- мисол. Ихтиёрий олинган пилланинг яроқсиз чиқиш эҳтимоллиги 0,2 га тенг. Тасодифан олинган 400 та пилладан 70 тадан 100 тагачаси яроқсиз бўлиш эҳтимоллигини топинг.

Е ч и ш. Шартга кўра $p=0{,}2$; $q=0{,}8$; $n=400$; $m_1=70$; $m_2=100$.

Лапласнинг интеграл формуласидан фойдаланамиз:

$$P_{400}(70{,}100)\approx\Phi(b)-\Phi(a)$$

Интегралнинг юқори ва қуйи чегараларини ҳисоблаймиз:

$$a=\frac{70-400\cdot0{,}2}{\sqrt{400\cdot0{,}2\cdot0{,}8}}=-1{,}25,$$

$$b=\frac{100-400\cdot0{,}2}{\sqrt{400\cdot0{,}2\cdot0{,}8}}=2{,}5$$

Шундай қилиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P_{400}(70{,}100)=\Phi(2{,}5)-\Phi(1{,}25)=\Phi(2{,}5)+\Phi(1{,}25).$$

Жадвалдан қуйидагини топамиз:

$$\Phi(2{,}5)=0{,}4938;\ \Phi(1{,}25)=0{,}3944.$$

Изланаётган эҳтимоллик

$$P_{400}(70{,}100)=0{,}4938+0{,}3944=0{,}8882.$$

Лапласнинг локал теоремаси p ва q эҳтимоллик 0,5 атрофида бўлганда $P_n(m)$ ни ҳисоблаш учун яхши натижалар беради. Аммо, p ва q лар 1 га ёки 0 га яқин бўлганда бу формула маълум хатоликларга олиб келади. Шу сабабли, p ва q лар 1 га ёки 0 га яқин бўлганда $P_n(m)$ учун локал теоремадан бошқа асимптотик формула топиш зарурати туғилади. Бу масалани Пуассон теоремаси ҳал қилади.

Теорема. *Агар $n\to\infty$ да $P_n\to 0$ муносабат бажарилса, у ҳолда*

$$P_n(m)-\frac{(nP_n)^m}{m!}e^{-nP_n}\to 0$$

муносабат ўринли бўлади.

Исботи. $a=np$ деб белгилаймиз ва $P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$ формуладан $P=\frac{a}{n}$ ва $q=1-\frac{a}{n}$ эканлигини эътиборга олиб, қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$P_n(m)=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!}\cdot\left(\frac{a}{n}\right)^m\cdot\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-m}=$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!}\,\frac{a^m}{n}\left(1-\frac{a}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{a}{n}\right)^m=$$

$$=\frac{a^m}{m!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\dots\cdot\frac{(n-m+1)}{n}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m}=$$

$$=\frac{a^m}{m!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\left(1-\frac{a}{n}\right)^n\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m}.$$

Бу тенгликда m сонни чекли деб ҳисоблаб, $n\to\infty$ да лимитга ўтамиз:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m}=1$$

ва $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^n=e^{-a}$ ларни ҳисобга олиб, узил-кесил қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$\lim_{n\to\infty}P_n(m)=\frac{a^m}{m!}e^{-a}$$

ёки

$$P_n(m) \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a}. \qquad (7.9)$$

Бу формула Пуассон таксимоти конунини ифодалайди. a ва m маълум булганда $P_n(m)$ ни топиш учун махсус жадваллар мавжуд.

13- мисол. Йигирувчи 1000 урчукда ишлайди. Бир минут мобайнида битта урчукда ипнинг узилиш эхтимоллиги 0,004 га тенг. Бир минут мобайнида бешта урчукда ипнинг узилиш эхтимоллиги топилсин.

Е ч и ш. Масаланинг шартига кура $n=1000$; $p=0{,}004$; $m=5$. Кўриниб турибдики, n деярли катта, p эса жуда кичик микдор. Шунинг учун $P(m) \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a}$ Пуассон формуласини куллаймиз:

$$a=np, \; a=1000 \cdot 0{,}002=4.$$

Эхтимоллик эса

$$P_{1000}(m) \approx \frac{4^5}{5!} \cdot e^{-4}=0{,}1563$$

МАШК УЧУН МАСАЛАЛАР

1. Пахта уруғининг униб чиқиши 70 % ни ташкил этади. 10 та экилган пахта уругидан: а) 8 тасининг, б) камида 8 тасининг униб чикиш эхтимоллигини топинг.

Ж а в о б : а) 0,2334; б) 0,3827.

2. Пахтанинг 70 % ни узун толалар ташкил этади. Таваккалига олинган 10 та тола орасида 6 тадан кўп булмаган узун тола булиш эхтимоллигини топинг.

Ж а в о б: 0,1727.

3. Йўловчининг поездга кечикиш эхтимоллиги 0,2 га тенг булса, 855 та йўловчидан поездга кечикканларнинг энг катта эхтимол сони топилсин.

Ж а в о б: 17.

4. Факультет талабаларининг имтихон сессиясидан «4 ва «5» билан ўтиш эхтимоллиги 0,9 га тенг. Тасодифий олинган 400 талабадан 34 тадан 55 тагачаси хеч булмаса битта фандан «4» дан паст бахо олиш эхтимоллигини топинг.

Ж а в о б: 0,8351.

5. Заводда ишлаб чиқарилган маҳсулотнинг сифатини кузатиш натижасида барча маҳсулотнинг ўртача 0,4 брак бўлиши аниқланган. 1000 та маҳсулотдан иборат бўлган партияда бештадан кўп бўлмаган брак маҳсулот бўлиши эҳтимоллиги топилсин.

Ж а в о б: $P=0,7852$.

7.10-§. ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАР ВА ТАҚСИМОТ ФУНКЦИЯЛАРИ

Биз баъзи бир миқдорларнинг у ёки бу тасодифий таъсир натижасида турли қийматларни қабул қилишини кўрамиз. Масалан:

1) 1-январда Тошкентда туғилган қиз болалар сони;
2) ғўза тупидаги гуллаган кўсаклар сони;
3) пахта толасининг узунлиги;
4) ҳар йилги қуёшли кунлар сони — булар бари турлича бўлади, яъни тасодифий характерга эга.

Тасодифий миқдор таърифини беришдан олдин ўлчовли функция тушунчасини киритамиз. Бизга $\langle \Omega, F \rangle$, $\langle R, G \rangle$ ўлчовли фазолар ва $\xi:\Omega\to R$ функция берилган бўлиб, бу функция учун $A\in G$ эканидан $\xi^{-1}(A)=\{|W|\gamma(W)\in A\}\in F$ экани келиб чиқса, бундай функция *ўлчовли функция* дейилади.

Агар $\langle \Omega, F, p \rangle$ ихтиёрий эҳтимоллик фазоси бўлса, ҳар қандай $\xi:\langle \Omega, F\rangle\to\langle R, G\rangle$ ўлчовли функция *тасодифий миқдор* дейилади.

14- мисол. Танга ташлаганимизда Ω иккита элементар ҳодиса — герб ва рақам тушиши содир бўлади. Агар танганинг гербли томони тушса 1, рақамли томони тушса 0 ёзсак, у ҳолда 1 ёки 0 ни қабул қилувчи тасодифий миқдорни ҳосил қиламиз.

Тасодифий миқдорнинг таърифига кўра ихтиёрий $X\in R$ учун

$$\{W|\xi(w)<x\}=\{\xi<x\}^{-1}(]-\infty,\ x[)\in F, \text{ сабаби }]-\infty,\ x[\in G.$$

Бундан $F_\xi(x)=\{w:\gamma<x\}$ функциянинг R да аниқланганлиги келиб чиқади. Бу функция ξ тасодифий миқдорнинг т а қ с и м о т ф у н к ц и я с и дейилади.

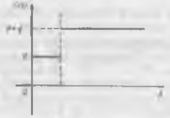
а) Агар ξ тасодифий миқдор $0, 1, 2, \ldots, n$ қийматларни

$$p\{\xi=R\}=C_n^R P^R - q^{n-R},\ R=\overline{0, n}$$

эҳтимоллик билан қабул қилса, бу тасодифий миқдор *биномиал қонун бўйича тақсимланган тасодифий миқдор* дейилади. Унинг тақсимот функцияси қуйидагича бўлади:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{агар } x<0 \text{ бўлса,} \\ \sum\limits_{k\leqslant x} C_n^k P^k q^{n-k}, & \text{агар } 0\leqslant x\leqslant n \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } n<x \text{ бўлса,} \end{cases}$$

Графиги эса қуйидагича бўлади:



16-расм

б) ξ тасодифий миқдор $X_1, X_2, \ldots, X_n$ қийматларни $P(\xi=x_k)=\frac{1}{N}$, $R=1, N$ эҳтимолликлар билан қабул қилса, бу тасодифий миқдор *текис тақсимланган тасодифий миқдор* дейилади. Унинг тақсимот функцияси қуйидагича бўлади:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{агар } X\leqslant X_1 \text{ бўлса,} \\ \frac{R}{N}, & \text{агар } X_R<X\leqslant X_{R+1} \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } X_N<X. \end{cases}$$

в) Агар тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси

$$\Phi(x)=C\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-a)^2}{2G^2}}\,du$$

кўринишда бўлса, бундай тасодифий миқдор *нормал тақсимланган тасодифий миқдор* дейилади (бу ерда $C>0$, $G>0$, $-\infty<a<\infty$ — ўзгармас сонлар).

Таксимот функцияси қуйидаги хоссаларга эга:

1. Барча ҳақиқий x лар учун $0 \leqslant F_{\xi}(x) \leqslant 1$;
2. $F_{\xi}(x)$ камаймайдиган функция;
3. Таксимот функцияси чапдан узлуксиз, яъни

$$F_{\xi}(x) = F_{\xi}(x-0) = \lim_{x_m \to x} F(x_m);$$

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

5. Таксимот функциясининг сакрашга эга бўлган нуқталар тўплами кўпи билан саноқли бўлиши мумкин.

1- таъриф. Агар ξ тасодифий миқдор чекли ёки саноқли сондаги $\{X_R\}$ қийматларни $\{P_R\}(\Sigma P_n = 1)$ эҳтимолликлар билан қабул қилса, уни д и с к р е т т а с о д и ф и й м и қ д о р дейилади. Масалан, 100 та чақалоқ ичида ўғил болалар сони 0,1,2,...,100 қийматларни қабул қилиши мумкин бўлган тасодифий миқдорлар дискрет тасодифий миқдорлар бўлади. Дискрет тасодифий миқдорнинг таксимот функцияси

$$F(x) = \sum_{(R: X_R < x)} P_R$$

формула билан аниқланади.

2- таъриф. Агар ξ тасодифий миқдорнинг таксимот функциясини

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

кўринишда ёзиш мумкин бўлса, бу тасодифий миқдорни а б с о л ю т у з л у к с и з т а қ с и м л а н г а н т а с о д и ф и й м и қ д о р дейилади. Бу ердаги $f(x)$ функция ξ тасодифий миқдорнинг з и ч л и к ф у н к ц и я с и дейилади. Таърифга кўра $F'(x) = f(x)$ бўлади.

Зичлик функцияси қуйидаги хоссаларга эга:

1. Зичлик функцияси манфий эмас:

$$f(x) \geqslant 0.$$

Ҳақиқатан ҳам, $F(x)$ функция камаймайдиган функция бўлгани учун, унинг ҳосиласи ҳамма нуқталарда доим мусбат бўлади.

2. Агар $f(x)$ зичлик функцияси, X_0 нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда $P(x_0 \leqslant \xi < X_0 + dx)$ эҳтимоллик зичлик функциясининг X_0 нуктадаги кийматига нисбатан юқори тартибли чексиз кичик микдор аниқлигида эквивалент булади:

$$P(x_0 \leqslant \xi < x_0 + dx) \approx f(x)dx.$$

3. Зичлик функциясидан $]-\infty, +\infty[$ оралик буйича олинган интеграл 1 га тенг:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

7.11-§. ТАСОДИФИЙ МИКДОРЛАРНИНГ СОНЛИ ХАРАКТЕРИСТИКАЛАРИ

1. Математик кутилма

Юқорида айтилганлардан тақсимот қонуни тасодифий микдорни тўлиқ характерлашини биламиз. Лекин кўпинча тақсимот қонуни номаълум булиб, кам маълумотлар билан чекланишга тўғри келади. Баъзан ҳатто тасодифий миқдорни йиғма тасвирлайдиган сонлардан фойдаланиш қулайроқ булади. Бундай сонлар тасодифий миқдорнинг сонли характеристикалари дейилади. Муҳим сонли характеристкалар жумласига математик кутилма ҳам тааллуқлидир.

Дискрет ва узлуксиз тасодифий миқдорларнинг математик кутилмасини алоҳида-алоҳида куриб утамиз.

1-таъриф. ξ тасодифий миқдор $\{X_R\}$ кийматларни $\{P_R\}$ эҳтимолликлар билан қабул қилсин. У ҳолда $\sum_{R=1}^{\infty} X_R P_R$ қатор йиғиндиси ξ тасодифий микдорнинг *математик кутилмаси* дейилади ва

$$M(\gamma) = \sum_{R=1}^{\infty} x_R P_R \qquad (7.10)$$

каби белгиланади.

15-мисол. Тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини билган ҳолда унинг математик кутилмасини топинг:

γ	3	5	2
P	0,1	0,6	0,3

Е ч и ш. Изланаётган математик кутилма, (7.10) формулага асосан, $M(\xi) = 3 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}3 = 3{,}9$ булади.

2- таъриф. *Узлуксиз тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси деб*

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \tag{7.11}$$

интегралга (агар бу интеграл абсолют якинлашувчи булса) айтилади.

16- мисол. $[a, b]$ ораликда текис таксимланган γ тасодифий микдорнинг математик кутилмасини топинг.

Е ч и ш. Мазкур математик кутилма куйидагича топилади:

$$M(\xi) = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{b+a}{2}$$

Математик кутилма қуйидаги хоссаларга эга:

1. Ўзгармас соннинг математик кутилмаси шу соннинг ўзига тенг.

2. $|M\xi| \leqslant M|\xi|$ тенгсизлик ўринли.

3. Агар $M\xi$, $M\eta$ ва $M(\xi+\eta)$ ларнинг ихтиёрий иккитаси мавжуд бўлса, у ҳолда ушбу $M(\xi+\eta) = M(\xi) + M(\eta)$ тенглик ўринли бўлади.

4. Ўзгармас сонни математик кутилма ишорасидан ташкарига чиқариб ёзиш мумкин, яъни $M(c\xi) = cM(\xi)$, $c = \text{const}$.

5. Агар $\delta \leqslant \xi \leqslant \beta$ бўлса, $\delta \leqslant M(\xi) \leqslant \varepsilon$ булади.

6. Агар $\xi \geqslant 0$ ва $M(\xi) = 0$ бўлса, у ҳолда $\xi = 0$ тенглик 1 эҳтимоллик билан бажарилади.

7. ξ ва η тасодифий микдорлар ўзаро боглиқ булмаса Агар $M(\xi)$ ва $M(\eta)$ мавжуд бўлса, у ҳолда $M(\xi\eta) = M(\xi) \times M(\eta)$

2. Дисперсия

1- таъриф. *Тасодифий миқдорнинг дисперсияси деб* $M[\xi - M(\gamma)]^2$ ифодага айтилади ва $D(\xi)$ каби белгиланади. Демак,

$$D(\xi) = M(\xi - M(\xi))^2 . \tag{7.12}$$

Агар ξ тасодифий микдор $\{x_n\}$ кийматларни $\{p_k\}$ эхтимолликлар билан қабул қилса, $\eta=[\xi-M(\xi)]^2$ тасодифий миқдор $\{[x_k-M(\xi)]^2\}$ кийматларни ҳам $\{p_k\}$ эҳтимолликлар билан қабул қилади ва бу тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси учун

$$M(\eta)=D(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-M(\xi)]^2p_k. \tag{7.13}$$

Шунингдек, ξ тасодифий миқдорнинг дисперсиясини қуйидаги формула билан ҳисоблаш қулайдир:

$$D(\xi)=M(\xi^2)-[M(\xi)]^2. \tag{7.14}$$

Энди узлуксиз тасодифий миқдор дисперсиясининг таърифини берамиз. ξ тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси $f(x)$ бўлсин.

2- таъриф. *Узлуксиз тасодифий миқдорнинг дисперсияси* деб

$$D(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(\xi)]^2f(x)dx \tag{7.15}$$

интегралнинг қийматига айтилади. Агар мумкин бўлган қийматлар $[a, b]$ кесмага тегишли бўлса, у ҳолда узлуксиз тасодифий миқдорнинг дисперсияси деб

$$D(\xi)=\int_a^b[x-M(\xi)]^2f(x)\cdot dx \tag{7.16}$$

интегралнинг қийматига айтилади.

16- мисол. $[a, b]$ ораликда текис тақсимланган ξ тасодифий миқдорнинг дисперсиясини топинг.

Ечиш. $M(\xi)=\frac{a+b}{2}$ эканини ҳисобга олсак,

$$D(\xi)=\int_a^b x^2\cdot\frac{dx}{b-a}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

3- таъриф. Тақсимот функцияси $F(x)$ бўлган тасодифий миқдорнинг дисперсияси бундай аниқланади:

$$D(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(\xi)]^2dF(x). \tag{7.17}$$

Дисперсияни ҳисоблашда қуйидаги формулалардан фойдаланиш қулайдир:

$$D(\xi) = \int_a^b x^2 f(x)\,dx - [M(\xi)]^2, \tag{7.18}$$

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - [M(\xi)]^2. \tag{7.19}$$

Дисперсия қуйидаги хоссаларга эга:

1. Ўзгармас соннинг дисперсияси нолга тенг:

$$D(C) = 0.$$

2. Ўзгармас сонни квадратга ошириб, дисперсия ишорасидан ташқарига чиқариш мумкин, яъни

$$D(C\xi) = C^2 D(\xi).$$

3. Ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар йиғиндисининг дисперсияси бу тасодифий миқдорлар дисперсиясининг йиғиндисига тенг, яъни

$$D(\xi + \eta) = D(\xi) + D(\eta).$$

17- мисол. Агар X ва Y тасодифий миқдорлар ўзаро боғлиқ бўлмаса, $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$ бўлади.

Ечиш. 2 ва 3- хоссаларга асосан

$$D(X - Y) = D(X) + D(-Y) = D(X) + (-1)^2 DY = \\ = D(X) + D(Y).$$

МАШҚ УЧУН МИСОЛЛАР

1. Ўғил ва қиз болаларнинг туғилиш эҳтимолликларини тенг деб фараз қилиб, 5 болали оилада ўғил болалар сонини ифодаловчи X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини тузинг.

2. γ тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси қуйидагича:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } X \leqslant 0 \text{ бўлса}, \\ \frac{X}{4}, & \text{агар } 0 < X \leqslant 4 \text{ бўлса}, \\ 1, & \text{агар } X > 4 \text{ бўлса}. \end{cases}$$

Бу тасодифий миқдорнинг математик кутилмасини топинг.

3. Қуйидаги интеграл функция билан берилган γ тасодифий миқдорнинг математик кутилмасини ва дисперсиясини топинг:

$$F(x) = \begin{cases} X \leqslant 0 \text{ да } 0; \\ 0 < X \leqslant 1 \text{ да } X; \\ X > 1 \text{ да } 1. \end{cases}$$

7.12-§. КАТТА СОНЛАР ҚОНУНИ

Маълумки, тасодифий миқдор синаш якунида мумкин бўлган қийматлардан қайси бирини қабул қилишини аввалдан ишонч билан айтиб бўлмайди, чунки у ҳисобга олиб бўлмайдиган бир қанча тасодифий сабабларга боғлиқ бўлиб, биз уларни ҳисобга ололмаймиз. Ҳар бир тасодифий миқдор ҳақида ана шу маънода жуда кам маълумотга эга бўлганимиз учун етарлича катта сондаги тасодифий миқдорлар йиғиндиси тўғрисида ҳам бирор нарса айта олишимиз қийиндек кўринади. Аслида эса бу ундай эмас. Муайян нисбатан кенг шартлар остида етарлича катта сондаги тасодифий миқдорлар йиғиндисининг тасодифийлик характери деярли йўқолар ва у қонуниятга айланиб қолар экан.

Амалиёт учун жуда кўп тасодифий сабабларнинг биргаликдаги таъсири тасодифга деярли боғлиқ бўлмайдиган натижага олиб келадиган шартларни билиш жуда катта аҳамиятга эга, чунки бу ҳол ҳодисаларнинг қандай ривожланишини кўра билишга имкон беради. Бу шартлар умумий ном билан катта сонлар қонуни деб юритиладиган теоремаларда кўрсатилади. Булар жумласига Чебишев ва Бернулли теоремалари (бошқа теоремалар ҳам бор, лекин улар бу ерда қаралмайди) мансуб. Чебишев теоремаси катта сонлар қонунининг энг умумийси, Бернулли теоремаси эса энг соддасидир. Биз бу ерда теоремаларнинг ўзини исботсиз ва уларнинг қўлланишини ўрганамиз.

1. Чебишев теоремаси

Агар $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ эркли тасодифий миқдорлар бўлиб, уларнинг дисперсиялари текис чегараланган (ўзгармас C сондан катта эмас) бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{M(\xi_1)+M(\xi_2)+\ldots+M(\xi_n)}{n}\right|\geqslant\varepsilon\right\}=0$$

Шундай килиб, **Чебишев теоремаси** бундай даъво килади: *агар дисперсиялари чегараланган тасодифий миқдорларнинг етарлича кўп сондагиси қаралаётган бўлса, у ҳолда бу тасодифий миқдорларнинг ўртача арифметик қиймати n ўсиши билан бу тасодифий миқдорлар ўрта қийматларининг ўрта арифметигига исталганча яқин бўлади.*

Юкоридаги биз кўрган Чебишев теоремасининг моҳияти бундай: айрим эркли тасодифий микдорлар ўз математик кутилмасидан анча фарқ киладиган кийматлар қабул қилсада, етарлича катта сондаги тасодифий миқдорларнинг арифметик ўртача қиймати катта эҳтимоллик билан тайин ўзгармас сонга, чунончи $\frac{M(\xi_1)+M(\xi_2)+\ldots+M(\xi_n)}{n}$ сонга (ёки, хусусий ҳолда a сонга) якин кийматларни катта эҳтимоллик билан қабул қилади. Бошқача сўз билан айтганда, айрим тасодифий микдорлар анчагина сочилган бўлиши мумкин, лекин уларнинг арифметик ўртача қиймати кам тарқоқ булади.

Шундай килиб, ҳар бир тасодифий микдор мумкин бўлган кийматлардан қайсинисини қабул қилишини аввалдан айтиб бўлмайди, аммо уларнинг арифметик ўртача қиймати қандай қиймат қабул қилишини олдиндан кўра билиш мумкин. Чебишев теоремаси фақат дискрет тасодифий миқдорлар учун эмас, балки узлуксиз миқдорлар учун ҳам ўринлидир.

Чебишев теоремасининг амалиёт учун аҳамияти каттадир. Масалан, одатда бирор физик катталикни ўлчаш учун бир нечта ўлчашлар ўтказилади ва уларнинг арифметик ўртача қиймати изланаётган ўлчаш сифатида қабул қилинади. Қандай шартларда бундай ўлчаш усулини тўғри деб ҳисоблаш мумкин? Бу саволга Чебишев теоремаси (унинг хусусий ҳоли) жавоб беради.

Статистикада қўлланиладиган танлама усул Чебишев теоремасига асосланган. Бу усулнинг моҳияти шундан иборатки, унда унча катта бўлмаган тасодифий танламага асосланиб барча текширилаётган объектлар тўплами (бош тўплам) тўғрисида мулоҳаза юритилади. Масалан, бир той пахтанинг сифати ҳақида ҳар ер-ҳар ердан олинган пахта толаларидан иборат тутамнинг сифатига караб хулоса чикарилади. Тутамдаги пахта толаларининг сони тойдагидан анча кам бўлса ҳам, тутам етарлича кўп сондаги юзлаб толалардан иборатдир.

2. Бернулли теоремаси

Фараз қилайлик, ўзаро боғлиқ бўлмаган тажрибалар кетма-кетлиги ўтказилган бўлсин. Ҳар бир тажрибада A ходисанинг рўй бериш эҳтимоллиги P га тенг бўлсин. A ходисанинг k-тажрибада рўй бериш сонини ξ_k десак, у ҳолда $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_k, \ldots$ ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги ҳосил бўлади. Булар учун $M\xi_k = P$; $D\xi_k = Pq$. Бу тасодифий миқдорларнинг n тасининг ўртача арифметиги A ҳодиса рўй беришларининг нисбий частотаси $\frac{S_n}{n}$ бўлади, бу ерда $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ частота n та ўзаро боғлиқ бўлмаган тажрибада A ҳодисанинг рўй беришлар сони. Маълумки $MS_n = np$; $DS_n = npq$.

Теорема (Бернулли). *Ихтиёрий* $\varepsilon > 0$ *сон учун*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - P\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Демак, тажрибалар сони етарлича катта бўлса, A ҳодиса рўй беришининг нисбий частотаси А ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллигига яқин бўлади.

Бернулли теоремасидан шундай хулоса чиқариш мумкин: айрим шартлар остида қўшилувчилар сони етарлича катта бўлганда тасодифий миқдорлар йиғиндиси ўзининг тасодифийлик характерини маълум маънода «йўқотар» экан. Бу эса эҳтимолликлар назариясининг асосий масалаларидан бири ҳисобланади.

3. Яқинлашиш турлари

Биз тасодифий миқдорларни битта $\langle\Omega, F, P\rangle$ эҳтимоллик фазосида берилган деб фараз қиламиз. Ўлчовли функциялар назариясидан маълумки, ўлчовли функциялар устида қўшиш, айириш, кўпайтириш ва (махраждаги функция нолдан фарқли бўлса) бўлиш амали бажариш натижасида ҳосил бўладиган функция яна ўлчовли, шу билан бирга ўлчовли функциялар кетма-кетлигининг лимити (агар мавжуд бўлса) яна ўлчовли булади. Шунга ухшаш натижалар тасодифий микдорлар учун ҳам уринли. Тасодифий миқдорлар кетма-кетлигининг яқинлашиши масаланинг талабига қараб турлича булиши мумкин.

1-таъриф. Агар ихтиёрий мусбат $\varepsilon > 0$ сон учун $n \to \infty$ да $p(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \to 0$ булса, у ҳолда $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги P эҳтимоллик буйича ξ тасодифий миқдорга яқинлашади деймиз ва $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ каби белгилаймиз.

Айтайлик, g ихтиёрий узлуксиз, чегараланган функция булсин. Агар $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ булса, у ҳолда

$$Mg(\xi_n) \to Mg(\xi). \tag{7.20}$$

Агар ξ_n ва ξ ларнинг тақсимот функцияларини мос равишда $F_n(x)$ ва $F(x)$ деб белгиласак, у ҳолда (7.20) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dF_n(x) \to \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dF(x). \tag{7.21}$$

2-таъриф. Агар $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги учун

$$p\left\{w \,\Big|\, \lim_{n\to\infty} \xi_n(w) = \xi(w)\right\} = 1$$

тенглик уринли булса, у ҳолда $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги ξ тасодифий миқдорга 1 эҳтимоллик билан яқинлашади деймиз, яъни яқинлашиш учун $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(w) = \xi(w)$ муносабатни қаноатлантирмайдиган w нуқталарнинг улчови нолга тенг булади.

Биз 1 эҳтимоллик билан яқинлашишни $\xi_n \xrightarrow{p(1)} \xi$ каби белгилаймиз. 1 эҳтимоллик буйича яқинлашиш

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{w \,\Big|\, \sup_{m>n} (\xi_m - \xi > \varepsilon)\right\} = 0$$

га тенг кучлидир.

3-таъриф. Агар $n \to \infty$ да $M|\xi_n - \xi|^r \to 0$ шарт бажарилса, $\{\xi_n\}$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги ξ га уртача r-тартибда яқинлашади деймиз. Бу яқинлашишни $\xi_n \xrightarrow{r} \xi$ каби белгилаймиз.

Хусусан, $r = 2$ да бу яқинлашиш уртача квадратик яқинлашиш дейилади ва $l \cdot i \cdot m \cdot \xi_n = \xi$ каби белгиланади.

Бизга $\{\xi_n\}$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги берилган бўлиб, $F_n(x)=P\{\xi_n<x\}$ бўлсин.

4-таъриф. Агар $\{F_n(x)\}$ тақсимот функциялари кетма-кетлиги $n\to\infty$ да $F(x)=P\{\xi<x\}$ га $F(x)$ тақсимот функциясининг ҳар бир узлуксизлик нуқтасида яқинлашса, у ҳолда $\{\xi_n\}$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги ξ га тақсимот бўйича яқинлашади дейилади ва $\xi_n\xrightarrow{D}\xi$ каби белгиланади (бу ерда D инглизча «disizibution» — тақсимот сўзининг бош ҳарфидан олинган).

Айтайлик, $H=\{H\}$ тўплам $H=H(x)$ функциялардан иборат синф бўлиб, бу тўпламдаги функциялар қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) $H(x)$ камаймайдиган функция;

2) $H(-\infty)=0$, $H(+\infty)\leqslant 1$;

3) $H(x)$ чапдан узлуксиз функция.

Биз $F=\{F\}$ деб H синфнинг шундай қисм тўпламини оламизки, бунда $F(+\infty)=1$, яъни $F(x)$ ξ тасодифий миқдор тақсимот функциясининг худди ўзи бўлади.

5-таъриф. Агар ихтиёрий узлуксиз ва чегараланган $h(x)$ функция учун

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x)dH_n(x)=\int_{-\infty}^{\infty} h(x)dH(x)$$

тенглик ўринли бўлса, НЭH_n функциялар кетма-кетлиги НЭH функцияга суст яқинлашади дейилади ва қисқача $H_n\xrightarrow{W}H^*$ каби белгиланади (бу ерда W ҳарфи инглизча «Weak» — «суст» сўзининг бош ҳарфидан олинган).

7.13-§. МАРКАЗИЙ ЛИМИТ ТЕОРЕМА

Кўп ҳолларда тасодифий миқдорлар йиғиндисининг тақсимот қонунларини аниқлашга тўғри келади. Фараз қилайлик, ўзаро боғлиқ бўлмаган $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ тасодифий миқдорларнинг йиғиндиси $S=\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n$ берилган бўлсин ва ҳар бир ξ_i $(i=1,n)$ тасодифий миқдор «0» ёки «1» қийматини мос равишда q ва p эҳтимоллик билан қабул қилсин. У ҳолда S_n тасодифий миқдор биноминал қонун бўйича тақсимланган тасодифий миқдор бўлиб, уларнинг математик кутилмаси np, га дисперсияси эса npq га тенг бўлади. S_n тасодифий миқдор $0, 1, 2, \dots, n$ қийматларни қабул қила олади ва демак, n ортиши билан S_n тасодифий миқдорнинг қабул қиладиган қийматлари исталганча катта сон бўлиши мумкин, шунинг учун S_n тасодифий миқдор ўрнига

$$\eta_n = \frac{S_n - A_n}{B_n}$$

тасодифий миқдорни кўриш мақсадга мувофиқдир. Бу ифодада A_n, B_n лар n га боғлиқ бўлган сонлар. Хусусан, A_n ва B_n ларни $A_n = MS_n = np$, $B_n = DS_n = npq$ кўринишда танланса, у ҳолда **Муавр — Лапласнинг интеграл теоремасини** қуйидагича баён этиш мумкин: *агар* $0 < p < 1$ *бўлса,* $n \to \infty$ *да ихтиёрий* a, $b \in (-\infty, \infty)$ *да*

$$P\left\{a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}} dz \qquad (7.22)$$

муносабат ўринли бўлади.

Табиий равишда бундай савол туғилади: (7.22) муносабат ихтиёрий тасодифий миқдорлар учун ҳам ўринли бўладими? (7.22) ўринли бўлиши учун S_n даги қўшилувчиларнинг тақсимот функцияларига қандай шартлар қўйиш керак?

Бу масалани ҳал қилишда П. Л. Чебишев ва унинг шогирдлари А. А. Марков, А. М. Ляпуновларнинг хизматлари каттадир. Уларнинг тадқиқотлари шуни кўрсатадики, қўшилувчи тасодифий миқдорларга жуда ҳам умумий шартлар қўйиш мумкин экан. Бу шартларнинг маъноси — айрим олинган қўшилувчининг умумий йиғиндига сезилмайдиган таъсир кўрсатишини таъминлашдир.

Таъриф. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги берилган бўлсин. Агар шундай $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, $B_n > 0$ сонлар кетма-кетлиги мавжуд бўлсаки, $n \to \infty$ да

$$P\left\{\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - A_n}{B_n} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

муносабат $x \in (-\infty, \infty)$ да бажарилса, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги учун марказий лимит теоремаси ўринли дейилади. Бу ҳолда

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - A_n}{B_n}$$

тасодифий миқдор $n \to \infty$ да асимптотик нормал тақсимланган дейилади.

Марказий лимит теоремасининг баъзи кўринишларини келтирамиз.

1. Бир хил тақсимланган боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги учун марказий лимит теорема.

Математик кутилмаси a ва дисперсияси G^2 бўлган, ўзаро боғлиқ бўлмаган, бир хил тақсимланган $\{\xi_n\}$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги берилган бўлсин. Умумийликка зарар келтирмасдан, $a=0$, $G^2=1$ деймиз. Қуйидаги тасодифий миқдорни киритамиз ва теоремани исботсиз берамиз:

$$S_n=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n,\ \eta_n=\frac{S_n}{\sqrt{n}}.$$

Теорема. Юқорида келтирилган $\{\xi_n\}$ *кетма-кетлик учун* $n\to\infty$ *да*

$$P(\eta_n<x)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

муносабат ихтиёрий X $(X\in K)$ *да бажарилади.*

2. Боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги учун марказий лимит теорема

Боғлиқ бўлмаган $\{\xi_n\}$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги учун $M\xi_k=a_k$, $D\xi_k=G^2{}_k$ бўлсин. Қуйидаги белгиларни киритамиз ва теоремани исботсиз берамиз:

$$A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,\ B_n^2=\sum_{k=1}^{n}G_k^2,\ S_n=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n,$$

$$\eta_n=\frac{S_n-A_n}{B_n},\ F_k(x)=P(\xi_k<x),$$

$$L_n(r)=\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x-a_k|>rB_n}(x-a_n)^2dF_k(x),$$

$$f_k(t)=Me^{it\xi_k},\ \varphi_n(t)=Me^{it\eta_n}.$$

Теорема. *Ихтиёрий* $r>0$ *учун* $n\to\infty$ *да*

$$L_n(r)\to 0 \qquad (7.23)$$

бўлса, $\{\xi_n\}$ *учун марказий лимит теорема ўринли бўлади.*

(7.23) шарт Л и н д б е р г ш а р т и дейилади. Линдберг шартининг бажарилиши ихтиёрий R да $\frac{1}{B_n}(\xi_k - a_k)$ қўшилувчиларнинг текис равишда кичиклигини таъминлайди. Ҳақиқатан ҳам,

$$P|\xi_R - a_R| > rR_n = \int\limits_{|x-a_R|>rBn} dF_R(x) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(rBn)^2} \int\limits_{|x-a_R|>rBn} (x-a_R)^2 dF_R(x)$$

эканлиги эътиборга олинса,

$$P\{\max_{1\leqslant R\leqslant n} |\xi_R - a_R| > rBn\} = P \bigcup_{k=1}^{n} (|\xi_R - a_R| >$$

$$> rBn) \leqslant \sum_{R=1}^{n} P(|\xi_R - a_R| > rBn) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{r^2 B_n^2} \sum_{R=1}^{n} \int\limits_{|x-a_R|>rBn} (x-a_R)^2 dF_R(x).$$

Агар Линдберг шарти бажарилса, у ҳолда охирги тенгсизликнинг ўнг томони, $r > 0$ сон ҳар қандай бўлганда ҳам, $n \to \infty$ да нолга интилади.

Теорема (А. М. Ляпунов). *Агар* $n \to \infty$ *да* $\frac{C}{B_n^2 + S} \to 0$ *шарт бажарилса,* $n \to \infty$, $X \in (-\infty, \infty)$ *да* $P(\eta_n < x) \to \varphi(x)$ *муносабат бажарилади.*

18-мисол. Қуйидаги боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги учун марказий лимит теореманинг ўринлилиги текширилсин:

$$P(\xi_R = \pm R) = \frac{1}{2}^{\left(-\frac{1}{2}\right)} R, \; P(\xi_n = 0) = 1 - R^{-\frac{1}{2}}$$

Е ч и ш. Ляпунов шартини текширамиз:

$$M\xi_R = 0; \; D\xi_R = R^{\frac{1}{2}} = G_R^2; \; B_n^2 \approx A_1 n^{5/2};$$

$$C_R^3 \pm R^{5/2}; \; C_n = \sum_{R=1}^{n} R^{5/2} \approx A_2 n^{7/2}.$$

Демак,

$$\frac{C_n}{B_n} \approx \frac{A_2 n^{7/3}}{A_1 n^{13/4}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Шундай қилиб, марказий лимит теорема ўринли экан.

VIII БОБ

МАТЕМАТИК СТАТИСТИКА УНСУРЛАРИ

8.1-§. МАТЕМАТИК СТАТИСТИКАНИНГ АСОСИЙ МАСАЛАЛАРИ. БОШ ВА ТАНЛАНМА ТЎПЛАМ

Статистика фани табиатда ва жамиятда буладиган оммавий ҳодисаларни ўрганади. Статистика сўзи лотинча булиб, ҳолат, вазият деган маънони англатади.

Математик статистика — статистик маълумотларни кузатиш, тўплаш ва шу асосда баъзи бир хулосалар чиқариш билан шуғулланувчи фандир.

Математик статистиканинг асосий масалалари:

1. Фараз қилайлик, ξ тасодифий миқдор устида n та ўзаро боғлиқ бўлмаган тажриба ўтказилиб, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ қийматлари олинсин. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ лар бўйича ξ тасодифий миқдорнинг номаълум $F(x)$ тақсимот функциясини баҳолаш математик статистиканинг вазифаларидан биридир.

2. ξ тасодифий миқдор R та номаълум параметрга боғлиқ маълум кўринишдаги тақсимот функциясига эга бўлсин. γ тасодифий миқдор устида кузатишларга асосланиб бу номаълум параметрларни баҳолаш математик статистиканинг иккинчи вазифасидир.

3. Кузатилган миқдорларнинг тақсимот қонунлари ва баъзи характеристикалари ҳақидаги турли фаразлар «статистик гипотезалар» деб аталади. У ёки бу гипотезани текшириш учун кузатишлар орқали ёки махсус тажрибалар ўтказиш йўли билан маълумотлар олиб, уларни қилинган гипотезага мувофиқ назарий жиҳатдан кузатилаётган маълумотлар билан таққослаб кўриш математик статисканинг навбатдаги вазифасидир.

* * *

Одатда, бир жинсли объектлар тўпламини бу объектларни характерловчи бирор сифат ёки сон белгисига нисбатан ўрганиш талаб қилинади.

Масалан, пахтазордаги ҳали очилмаган кусакларнинг ўртача оғирлигини аниқлаш керак бўлсин. Талаб этилган ўртача оғирликни билиш учун даладаги ҳамма кусакларни йиғиб олиш ва уларни тортиш лозим, лекин бу билан катта даладаги ҳосил исроф қилинган бўлар эди.

Бундай ҳолларда кўсакларнинг бир қисминигина йиғиб олиб, уларнинг ўртача оғирлигини билган ҳолда бутун даладаги кусакларнинг ўртача оғирлиги тўғрисида фикр юритиш мумкин. Текширишнинг бундай усули т а н л а н м а у с у л, ўлчаш учун йиғиб олинган кусаклар т а н л а н м а т ў п л а м, пахтазордаги ҳамма кусаклар тўплами эса б о ш т ў п л а м дейилади.

Шундай қилиб, *танланма тўплам* деб тасодифий равишда олинган объектлар тўпламига, *бош тўплам* деб эса танланма тўплам ажратиб олинадиган объектлар тўпламига айтилади.

Бош ёки танланма *тўпламнинг ҳажми* деб, бу тўпламдаги объектлар сонига айтилади.

Бош тўплам ҳажмини N, танланма тўплам ҳажмини эса n билан белгилаймиз. Танланмани бир неча усулда олиш мумкин.

Агар бош тўпламдан танланма тўплам ажратилиб, бу тўплам устида кузатиш олиб боргандан сўнг бу танланма тўплам кейинги танлашдан олдин яна бош тўпламга қайтарилса ва кейин яна танланма олинса ва ҳ.к. равишда давом эттирилса, бундай танлаш усули такрорий танланма дейилади.

Агар бош тўпламдан танланма тўплам ажратиб, бу тўплам устида кузатиш олиб борилгандан сўнг бош тўпламга қайтарилмаса, бундай танлаш усули *такрорий бўлмаган танланма* дейилади. Амалда кўпинча такрорий бўлмаган танлаб олиш усулидан фойдаланилади. Албатта, бу иккала танланма олиш усулида ҳам танланма тўплам бош тўпламнинг барча хусусиятларини сақлаган ҳолда олиниши керак.

Агар танланма тўплам бош тўпламнинг деярли барча хусусиятларини ўзида сақласа, у ҳолда бундай танланма *репрезентатив (ваколатли) танланма* дейилади.

Репрезентатив танланма ҳосил қилиш учун биз танланмани тасодифий қилиб тузамиз. Танлаб олиш усули бош тўпламнинг бизни қизиқтирадиган белгисига ҳеч қандай таъсир қилмайди ва бош тўпламнинг ҳар бир элементи танланмада бир хил имконият билан қатнашиши таъминланади.

8.2-§. ВАРИАЦИОН ҚАТОР. ТАНЛАНМАНИНГ ТАҚСИМОТ ФУНКЦИЯСИ

Фараз қилайлик, тажрибалар бир хил шароитда бир-бирига боғлиқ бўлмаган бирор ξ тасодифий миқдор устида n марта ўтказилиб,

$$X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n \tag{8.1}$$

натижалар олинган бўлсин. Маълумки, тажриба натижалари сон қийматлари бўйича тартибсиз жойлашган бўлиши мумкин.

Агар (8.1) ифодани қийматлари бўйича ўсиш (ёки камайиш) тартибида

$$X_1^* \leqslant X_2^* \leqslant \ldots \leqslant X_n^* \ (\text{ёки } X_n^* \geqslant \ldots \geqslant X_1^*)$$

жойлаштирилса, X_1^*, $X_2^*, \ldots,$ X_n^* вариацион қатор дейилади, (8.1) танланмадаги X_i, $i=1,2,\ldots,n$ ларни эса варианталар деб юритилади.

Масалан, пиллаларнинг узунлигини ўлчашда ушбу қийматлар (см. ҳисобида) ҳосил бўлган: 3,30; 3,40; 3,25; 3,40; 3,60; 3,45; 3,43; 3,50; 3,35; 3,55. Бунда мос вариацион қатор қуйидаги кўринишда ёзилади: 3,25; 3,30; 3,35; 3,40; 3,40; 3,43; 3,45; 3,50; 3,55; 3,60. Умуман, (8.1) вариантларнинг ҳар бири бир неча марта такрорланиши мумкин. Масалан, X_1^* варианта n_1 марта,..., X_n^* варианта эса n_R марта такрорлансин ва $n=n_1+n_2+\ldots+n_R$ бўлсин. n_1, $n_2,\ldots,n_R$ сонлар частоталар дейилади. Вариацион қатор ва унга мос частоталар ушбу

$$\begin{array}{c} X_1^*,\ X_2^*, \ldots,\ X_n^* \\ n_1,\ n_2\ , \ldots,\ n_R \end{array}$$

кўринишда ёзилади. Бундан кейин, соддалик учун вариацион қатордаги «*» белгисини қўймаймиз.

Агар таҳлил қилиниши лозим бўлган тўпламда варианталар сони кўп бўлса, уларни гуруҳларга ажратиб, сўнгра жадвал ёки қатор кўринишида ёзиб кузатиш олиб бориш мақсадга мувофиқ бўлади. Албатта, варианталарни гуруҳларга сифат жиҳатдан ёки сон жиҳатдан ажратиш мумкин.

Масалан, 8.1- жадвалда пахта селекцияси ва генетика илмий текшириш институтидан тажриба станциясида маълум навли 60 туп ғўзанинг асосий поясидаги бўғинлар сонини ҳисоблаш натижаси келтирилган

8.1- жадвал

12	12	12	10	13	11	14	11	14	11
12	11	11	11	12	11	13	11	10	12
11	12	13	13	11	12	12	12	13	13
11	13	15	13	14	13	13	14	13	12
12	13	11	14	11	12	13	13	12	13
13	12	12	14	14	12	11	12	12	12

Берилган тўпламдаги қийматларни кўздан кечириб, 8.2- жадвални ҳосил қиламиз:

8.2- жадвал

Ғўзанинг асосий поясидаги бўғинлар сони (X_i)	10	11	12	13	14	15	Жами
Бўғинлар сони X_i бўлган ғўзалар сони (n_i)	2	15	20	16	6	1	60

8.2- жадвалнинг биринчи (юқори) сатри вариантаrange қийматларидан иборат. Иккинчи (қуйи) сатрдаги сонлар варианталар қийматларининг такрорланишини кўрсатади. Ҳар бир частотанинг танланма ҳажмига нисбати шу вариантанинг нисбий частотаси дейилади ва

$$W_i = \frac{n_i}{n}, \quad i = \overline{1, R} \tag{8.2}$$

каби белгиланади. Шунингдек, $W_1 = \frac{n_1}{n}$, $W_2 = \frac{n_2}{n}$, ...,

$W_R = \frac{n_R}{n}$ нисбатлар белгининг тегишли қийматларига мос бўлган нисбий частоталарни ташкил қилади. Натижада қуйидаги жадвалга эга бўламиз:

8.3- жадвал

x_i	$x_1, x_2, \ldots, x_k$
W_i	$W_1, W_2, \ldots, W_k$

Кўп ҳолларда 8.3- жадвал γ тасодифий миқдорнинг статистик ёки эмпирик тақсимоти дейилади.

Нисбий частоталар йиғиндиси бирга тенг. Ҳақиқатан ҳам,

$$W_1+W_2+\ldots+W_R=\frac{n_1}{n}+\frac{n_2}{n}+\ldots+\frac{n_R}{n}=$$
$$=\frac{n_1+n_2+\ldots+n_R}{n}=\frac{n}{n}=1.$$

8.2- жадвалда берилган вариацион қатор учун статистик тақсимот қуйидагича ёзилади:

X_i	10	11	12	13	14	15
W_i	$\frac{2}{60}$	$\frac{15}{60}$	$\frac{20}{60}$	$\frac{16}{60}$	$\frac{6}{60}$	$\frac{1}{60}$

Берилган вариантларни сон жиҳатдан гуруҳларга ажратиб кузатиш ҳам мумкин.

Узлуксиз ўзгарувчан варианталарда тўпламдаги ҳамма варианталарни маълум сондаги гуруҳларга ажратилади, сўнгра эса ҳар бир гуруҳга кирган варианталар сони ҳисобланади. Натижада вариацион қатор жадвал кўринишда ҳосил бўлади. Аммо такрорланишлар сони айрим, алоҳида олинган вариантага тегишли бўлмасдан, балки гуруҳга тегишли бўлади, яъни гуруҳнинг такрорланиш сони бўлади. Масалан, берилган катта ёшдаги эркак ишчиларнинг бўйига кўра тақсимланиши узлуксиз вариантага мисол бўла олади (8.4- жадвал). Бундай вариацион қатор интервалли вариацион қатор дейилади.

8.4- жадвал

Бўйи (см, ҳисобида)	Эркаклар сони, n_i	Бўйи (см, ҳисобида)	Эркаклар сони, n_i
143—146	1	167—170	170
146—149	2	170—173	120
149—152	8	173—176	64
152—155	26	176—179	28
155—158	65	179—182	10
158—161	120	182—185	3
161—164	181	185—188	1
164—167	201	жами	1000

Гуруҳлар сонини танлашда (бу сонни R ҳарфи билан белгилаймиз), одатда, қуйидаги мулоҳазаларга амал қилинади:

1) гуруҳлар сонини тоқ бўлгани маъқул;

2) тўпламнинг ҳажми катта бўлганда ($n > 100$) гуруҳлар сони катта (масалан, 9,11, 13) бўлгани, ҳажми кичик бўлганда эса кичик (масалан, 5,7,9) бўлгани маъқул. Тажриба шуни кўрсатадики, тўпламни нечта гуруҳга ажратишгагина эмас, балки биринчи гуруҳнинг чегаралари қандай аниқланишига ҳам бефарқ қараб бўлмайди. Гуруҳ оралиғи (кенглиги) ни катта олмаслик керак ва биринчи гуруҳнинг чегараларини шундай олиш кераккн, энг кичик варианта шу гуруҳнинг тахминан ўртасига тўғри келсин.

Бу мулоҳазаларнинг ҳаммаси оқибат натижада тақсимотнинг характерли хусусиятларини тусиб қўймаслик, тасодифий ўзгаришларни эса силлиқлаб юбориш мақсадини кўзда тутади.

Гуруҳлар оралиғи (кенглиги) ва улар чегараларининг жойлашиши масаласининг ҳал этилишини биз 8.4- жадвалда берилган тўплам мисолида кўрамиз. Гуруҳнинг кенглиги ΔX_i ҳамма гуруҳлар учун бир хил бўлади ва у энг катта ва энг кичик варианталар айирмасини гуруҳлар сонига нисбати билан аниқланади. Бу мисолда $X_{max} = 188$ ва $X_{min} = 143$, гуруҳлар сони $R = 15$ деб оламиз, у ҳолда

$$\Delta X_i = \frac{188 - 143}{15} = \frac{45}{15} = 3.$$

Кўпинча, бизнинг шу мисолдаги каби, $X_{max} - X_{min}$ гуруҳлар сони R га (қабул қилинган аниқликда) қолдиқсиз бўлинмайди. Бундай ҳолларда гуруҳ кенглигини ортиш томонга яхлитланади, чунки акс ҳолда вариация оралиғининг умумий кенглиги камайган бўлар эди ва демак, варианталарнинг четки қийматлари унга кирмай қолар эди. Бундай яхлитлашда бутун интервал бирмунча кенгаяди, шу билан бирга кенгайтиришни кичик қийматлар томонига ҳам, катта қийматлар томонига ҳам қилиш мумкин, лекин кенгайтиришни шундай бажариш кераккн, қийматларнинг биттаси ҳам гуруҳларнинг чегарасига тушмасин.

Тўпламни гуруҳларга ажратиш ўрганилаётган белгининг фақат дискрет ёки узлуксиз ўзгарувчанлигига эмас, балки тўпламнинг ҳажмига ҳам боғлиқ бўлишини эсда саклашимиз керак булади. Туплам вариантларининг бир қисми (улуши) бирор X сондан кичик, тенг ёки ундан катта булиши мумкин. Шунинг учун ҳар бир X га йигилган нисбий частоталар мос келади, уларни $F_n(x)$ оркали белгилаймиз. X узгариши билан йигилган нисбий частоталарнинг қийматлари ҳам узгаради. Шунинг учун $F_n(x)$ ни X нинг функцияси деб ҳисоблаймиз.

Вариантларнинг X сондан кичик булган қийматларининг нисбий частотаси эмпирик тақсимот функцияси дейилади, яъни

$$F_n(x)=\frac{m(X<x)}{n} \text{ ёки } F_n(x)=\frac{m(x)}{n}, \qquad (8.3)$$

бу ерда $m(x)$ ифода X дан кичик булган вариантлар сони, n — туплам ҳажми. Бош туплам тақсимотнинг $F(x)$ интеграл функциясини танланма тақсимотининг эмпирик функциясидан фарқ қилган ҳолда тақсимотнинг назарий функцияси дейилади. Эмпирик ва назарий функциялар орасидаги фарқ шундаки, $F(x)$ назарий функция $X<x$ ҳодиса эҳтимоллигини, $F_n(x)$ эмпирик функция эса шу ҳодисанинг узининг нисбий частотасини аниқлайди. $F_n(x)$ функциянинг таърифидан унинг қуйидаги хоссалари келиб чиқади:

1) Эмпирик функциянинг қийматлари $[0;\ 1]$ кесмага тегишли;

2) $F_n(x)$ камаймайдиган функция;

3) Агар X_1 — энг кичик варианта булса, у ҳолда $X_i\leqslant X_1$ да $F_n(x)=0$, X_k энг катта варианта булса, у ҳолда $X_i\geqslant X_k$ да $F_n(x)=1$.

Шундай қилиб, танланма тақсимотининг эмпирик функцияси бош туплам тақсимотининг назарий функциясини баҳолаш учун хизмат қилади.

Мисол. Танланманинг қуйида берилган тақсимоти буйича унинг эмпирик функциясини топинг.

Вариантлар X_i:	5	7	10	15
Частоталар n_i:	2	3	8	7

Ечиш. Танланма ҳажмини топамиз:

$$n=2+3+8+7=20.$$

Энг кичик варианта 5 га тенг, демак,

$$X\leqslant 5 \text{ да } F_n(x)=0.$$

$X<7$ қиймат, хусусан $X_1=5$ қиймат 2 марта кузатилган, демак,

$$5 < x \leqslant 7 \text{ да } F_n(x) = \frac{2}{20} = 0{,}1$$

$X < 10$ қийматлар, жумладан $X_1 = 5$ ва $X_2 = 7$ қийматлар $2+3=5$ марта кузатилган, демак,

$$7 < X \leqslant 10 \text{ да } F_n(X) = \frac{5}{20} = 0{,}25.$$

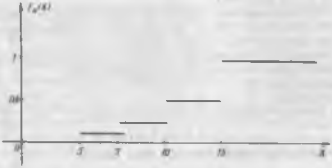
$X < 15$ қийматлар, жумладан $X_1 = 5$, $X_2 = 7$ ва $X_3 = 10$ қийматлар $2+3+8=13$ марта кузатилган, демак,

$$10 < X \leqslant 15 \text{ да } F_n(x) = \frac{13}{20} = 0{,}65.$$

$X = 15$ энг катта варианта бўлгани сабабли $X > 15$ да $F_n(x) = 1$. Изланаётган эмпирик функция:

$$F_n(x) \begin{cases} X \leqslant 5 \text{ да } 0; \\ 5 \leqslant X \leqslant 7 \text{ да } 0{,}1; \\ 7 < X \leqslant 10 \text{ да } 0{,}25; \\ 10 < X \leqslant 15 \text{ да } 0{,}65; \\ X > 15 \text{ да } 1. \end{cases}$$

Тўғри бурчакли координаталар тизимида бу функциянинг графигини ясаймиз (17- расм).



17- расм

Тупламда вариантлар гуруҳларга ажратилгандан сунг тақсимотнинг характери озми-кўпми ойдинлашади. Лекин тақсимотни график равишда тасвирлаганда унинг характери янада яққоллашади.

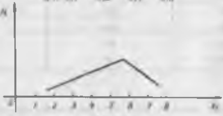
Тақсимотни график равишда тасвирлаш усуллари ичида жуда кўп қўлланиладиган иккитасини — полигон ва гистограмма ясашни кўриб чиқамиз.

1. Частоталар полигони деб, кесмалари (X_1, n_1), (X_2, n_2),..., (X_R, n_R) нуқталарни туташтирадиган синиқ чизиққа айтилади. Полигонни ясаш учун абсциссалар ўқига X_i вариантларни, ординаталар ўқига эса уларга мос n_i частоталарни қўйиб чиқилади. Сўнгра (X_i, n_i) нуқталарни тўғри чизиқ кесмалари билан туташтириб, частоталар полигонини ҳосил қиламиз.

2. Нисбий частоталар деб, кесмалари (X_1, W_1),...,(X_R, W_R) нуқталарни туташтирадиган синиқ чизиққа айтилади. Нисбий частоталар полигонини ясаш учун абсциссалар ўқига X_i вариантларини, ординаталар ўқига эса уларга мос W_i частоталарни қўйиб чиқилади. Сўнгра ҳосил бўлган нуқталарни тўғри чизиқ кесмалари билан туташтириб, нисбий частоталар полигони ҳосил қилинади.

Масалан, 18- расмда ушбу

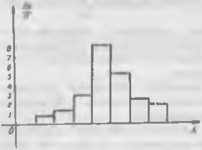
X_i:	1,5	3,5	5,5	7,5
W_i:	0,1	0,2	0,4	0,3



18- расм

тақсимотнинг нисбий частоталари полигони тасвирланган.

3. Частоталар гистограммаси деб, асослари $h(\Delta x)$ узунликдаги интерваллар, баландликларга эса n_i дан иборат бўлган тўғри тўрт бурчаклардан иборат погонасимон шаклга айтилади. Бу ерда n — бош тупламнинг бизни қизиқтирадиган белгисининг кузатилган қийматларини ўз ичига олган интервал узунлиги, n_i эса i-интервалга тушган вариантлар сони. Кўп ҳолларда



19- расм

частота гистограммаси белги узлуксиз булган холда кулланилади.

Частоталар гистограммасини ясаш учун абсциссалар укига кисмий интерваллар, уларнинг устига эса $\frac{n_i}{n}$ масофада абсциссалар укига параллел кесмалар утказилади. Масалан, 19- расмда 8.5-жадвалда келтирилган $n = 100$ хажмли таксимот частоталари гистограммаси тасвирланган.

8.5- жадвал

Узунлиги $h=5$ булган кисмий интервал	n_i интервал варианталари частоталарининг йигиндиси	Частота зичлиги n_i/n
5—10	4	0,8
10—15	6	1,2
15—20	16	3,2
20—25	36	7,2
25—30	24	4,8
30—35	10	2,0
35—40	4	0,5

4. Нисбий частоталар гистрограммаси деб асослари h узунликдаги интерваллар, баландликлари эса $\frac{W_i}{h}$ нисбатга (нисбий частота зичлигига) тенг булган тугри туртбурчаклардан иборат погонавий шаклга айтилади. Нисбий частоталар полигонини ясаш учун абсциссалар укига кисмий интервалларни куйиб чикилади, уларнинг тепасидан эса $\frac{W_i}{h}$ масофада абсциссалар укига параллел кесмалар утказилади.

Статистик ҳисобнинг асосий масалаларидан бири параметрлар деб аталадиган ва вариацион қаторнинг хусусиятларини етарли даражада ифодалаб берадиган характеристикаларни аниқлашдан иборат. Вариацион қаторлар қуйидагиларга асосан бир-биридан фарқ қилиши мумкин:

а) белгининг атрофида кўпчилик вариантларнинг тўпланган қиймати бўйича. Белгининг бу қиймати тўпламда белгининг ривожланиш даражасини ёки бошқача айтганда, қаторнинг марказий тенденциясини, яъни қаторнинг ўзига хослигини акс эттиради;

б) параметрларнинг қатор марказий тенденциясини акс эттирувчи қиймат атрофида ўзгарувчанлиги даражаси, яъни ўша қийматдан фарқ қилиш даражаси бўйича.

Бунга мос равишда статистик кўрсаткичлар икки гуруҳга бўлинади: қаторнинг марказий тенденциясини (ёки ривожланиш даражасини) ифодаловчи кўрсаткичлар: қаторнинг ўзгарувчанлик даражасини ифодаловчи кўрсаткичлар.

Биринчи гуруҳга турли «ўртача қийматлар» мода, медиана, арифметик ўртача қиймат, геометрик ўртача қиймат киради.

Иккинчи гуруҳга — абсолют ўртача фарқ (четланиш), ўртача квадратик фарқ, дисперсия, вариация ва ассиметрия коэффициентлари киради.

1. (8.1) танланманинг ўртача арифметик қиймати деб,

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad (8.4)$$

ифодага айтамиз.

Мисол. 5 та бир хил катталикдаги ер бўлагининг ҳар бир гектаридан 32, 28, 30, 31, 33 центнердан пахта ҳосили йиғиб олинган бўлса, бу ҳолда ўртача ҳосил

$$\bar{X} = \frac{32+28+30+31+33}{5} + 30.8\text{ ц}$$

бўлади.

Агар тасодифий миқдор устида олиб борилган кузатиш натижалари $X_1, \ldots, X_k$ мос равишда $n_1, \ldots, n_k$ марта такрорланса, у ҳолда ўртача арифметик қиймат қуйидаги формула ёрдамида аниқланади:

$$\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i X_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} \tag{8.5}$$

Масалан, 8.6- жадвалда ҳар бир гектар ердан олинган пахта ҳосили тақсимоти (ц. ҳисобида) берилган. Бунда 28 ц. ҳосил икки марта, 29 ц. ҳосил 5 марта кузатилган ва ҳ.к.

8.6-жадвал

x_i	28	29	30	31	32
n_i	2	5	8	4	3
$x_i n_i$	56	145	240	124	96

Бу ҳолда ўртача ҳосил

$$\bar{X}=\frac{2\cdot 28+5\cdot 29+8\cdot 30+4\cdot 31+3\cdot 32}{2+5+8+4+3}=\frac{661}{22}\ 30{,}05 \text{ ц.}$$

2. Ўртача арифметик қиймат танланма тўплам учун сон белгисининг қайси қиймати характерли эканлигини кўрсатади. Аммо у танланма тўпламни характерлаш учун етарли эмас, чунки танланма тўплам ҳадларининг ўзгарувчанлиги тўпламнинг асосий хусусияти ҳисобланади. Юқоридаги масалаларда вариантaларнинг қийматлари уларнинг ўртача арифметик қийматидан озми-кўпми тарқоқ бўлиши мумкинлигини кўрдик. Шу тарқоқликни характерлаш учун танланма дисперсия тушунчаси киритилади.

(8.1) танланманинг *танлама дисперсияси* деб,

$$G^2=\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (X_i-\bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i} \tag{8.6}$$

ифодага айтилади. Танланма дисперсиядан олинган квадрат илдиз

$$G=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(X_i-\bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i}} \qquad (8.7)$$

га *тақсимотнинг ўртача квадратик хатоси* (ўртача квадратик четланиши) дейилади.

(8.6) ва (8.7) га ўхшаш бош танланманинг д и с п е р с и я с и ва ў р т а ч а к в а д р а т и к ч е т л а н и ш и н и киритиш мумкин:

$$G_Б^2=\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(X_i-\bar{X})^2}{N};$$

$$G_Б=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(X_i-\bar{X})^2}{N}}, \qquad (8.8)$$

бу ерда $N=\sum_{i=1}^{k} n_i$.

Дисперсияни ҳисоблашда қуйидаги формуладан фойдаланиш мақсадга мувофиқ бўлади:

$$G^2=\overline{X^2}-(\bar{X})^2. \qquad (8.9)$$

3. Танланма тўпламнинг ўртача арифметик қиймати ва танлама дисперсиясидан бошқа характеристикалари ҳам мавжуд бўлиб, уларга медиана ва мода киради:

а) Вариацион қаторни варианталар сони тенг бўлган икки қисмга ажратадиган варианта вариацион қаторнинг *медианаси* дейилади ва Me деб белгиланади. Агар варианталар сони тоқ, яъни $n=2R+1$ бўлса, у ҳолда $M=X_{R+1}$ бўлади; агар варианталар сони жуфт, яъни $n=2R$ бўлса, у ҳолда

$$Me=\frac{X_R+X_{R+1}}{2}$$

деб олинади. Агар тўпламнинг ҳажми катта бўлса, аввал уни гуруҳларга ажратилади, сўнгра йиғилган такрорланишлар қатори тузилади ва медиана қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$Me = X_0 + h\,\frac{S_1 - S_2}{f}, \qquad (8.10)$$

бу ерда X_0 — кузатишлар натижаларининг ярми жойлашган гуруҳнинг қуйи чегараси; h — оралиқнинг қиймати; S_1 — қатор умумий сонининг ярми; S_2 — медиана жойлашган гуруҳдан олдинги гуруҳнинг йиғилган такрорланиши; f — медиана жойлашган гуруҳнинг такрорланиши.

б) Энг катта частотага эга бўлган вариантага *мода* дейилади ва *Mo* билан белгиланади. Масалан, ушбу

варианта	1	4	7	9
частота	5	2	20	6

қатор учун мода 7 га тенг. Узлуксиз вариацион қаторларда мода, одатда вариантлар сони энг кўп бўлган гуруҳда бўлади. Бу гуруҳ модал гуруҳ деб аталади.

Гуруҳ ичида кузатишлар текис тақсимланмаган бўлиши мумкин, шунинг учун моданинг қийматини қуйидаги формула бўйича ҳисоблаганда яхшироқ натижага эга бўлиш мумкин:

$$Mo = X_0 + h\,\frac{n_M - n_{M-1}}{(n_M - n_{M-1}) + (n_M - n_{M+1})}, \qquad (8.11)$$

бу ерда X_0 — модал гуруҳнинг қуйи чегараси, h — гуруҳ оралиғи (кенглиги), n_M, n_{M-1}, n_{M+1} — модал гуруҳ ҳамда унга мос равишда чап ва ўнгдан қўшни гуруҳларнинг такрорланишлари.

4. G нинг бир ўзи ўрганилаётган миқдорнинг ўзгарувчанлигини тўлиқ характерлаб бера олмайди. Масалан, ўртача узунлиги 5,4 мм бўлган буғдой донлари учун $G = 1{,}8$ мм стандарт вариантларнинг анчагина тарқоқ эканлигини билдирса, ўртача узунлиги 129 мм бўлган бодринглар учун эса ўша $G = 1{,}8$ мм қиймат узунликларига нисбатан бу бодрингларнинг деярли бир хил эканлигини кўрсатади. Шу сабабли вариация коэффициенти (нисбий ўртача фарқ) тушунчаси киритилади. ***Вариация коэффициенти*** деб

$$V = \frac{G}{\bar{X}} \cdot 100\ \% \qquad (8.12)$$

ифодага айтилади. Вариация коэффициенти ҳадлари турли ўлчам бирликларига эга бўлган тўпламларнинг ўзгарувчанлигини таққослашга ҳам имконият беради.

чунки у таққосланадиган микдорларнинг улчам бирлигига боғлиқ булмаган нисбий сондир.

5. Арифметик уртача киймат ва уртача квадратик четланиш вариацион каторнинг муҳим характеристикаларидир. Аммо улар вариантaларнинг арифметик уртача кийматига нисбатан гуруҳларга кандай таксимланиши ҳакида ҳеч кандай маълумот бермайди. Лекин вариацион каторнинг тузилиши ҳакидаги маълумот ҳодисанинг биометрик таҳлилининг муҳим элементини ташкил этади.

Вариацион каторларда вариантaлар гуруҳларга арифметик уртача кийматнинг иккала томонидан етарли даражада текис таксимланиши мумкин, яъни симметрик таксимотларнинг мода, медиана ва арифметик уртача кийматлари бир-бирига тенг булиши мумкин. Аммо статистик амалиётда асимметрик дейиладиган (яъни симметрик булмаган) таксимотлар ҳам учраб туради.

Таксимотнинг *асимметрия* (кийшайганлик) *коэффициенти* деб

$$A_s = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (X_i - \bar{X})^3}{\sigma^3} \qquad (8.13)$$

ифодага айтилади. Бу коэффициент ёрдамида таксимотнинг носимметриклиги аникланади. Симметрик таксимот функциялар учун $A_s = 0$. Агар $A_s \leqslant 0{,}25$ булса, асимметрия кам деб ҳисобланади. $A_s \geqslant 0{,}5$ да таксимотнинг асимметрликлиги куп бўлади.

6. Эмпирик таксимотнинг нормал таксимотдан четланишини баҳолашда эксцессдан ҳам фойдаланилади. *Таҳсимотнинг эксцесси* деб

$$E_k = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (X_i - \bar{X})^4}{\sigma^4} - 3 \qquad (8.14)$$

ифодага айтилади.

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. Ипакчилик илмий текшириш институтида 60 дона пилланинг буйи ва эни ҳакида олинган маълумотлар куйида келтирилган. Уларни гуруҳларга ажратиб, вариацион катор тузинг, таксимот гистограммаси ва полигонини ясанг.

а) пилланинг эни (см. ҳисобида)

1,65	1,60	1,55	1,67	1,67	1,67
1,75	1,64	1,60	1,70	1,70	1,60
1,57	1,66	1,75	1,50	1,60	1,55
1,64	1,64	1,57	1,65	1,63	1,60
1,70	1,73	1,48	1,70	1,70	1,60
1,52	1,55	1,70	1,52	1,65	1,55
1,55	1,65	1,60	1,60	1,45	1,70
1,60	1,65	1,58	1,75	1,55	1,60
1,60	1,72	1,62	1,55	1,70	1,55
1,45	1,70	1,65	1,70	1,65	1,70

б) пилланинг бўйи (см. ҳисобида)

3,20	3,30	3,20	3,20	3,45	3,30
3,45	3,25	3,40	3,45	3,10	3,30
3,30	3,40	3,40	3,50	3,35	3,30
3,34	3,40	3,45	3,35	3,40	2,25
3,45	3,45	3,20	3,50	3,10	3,30
2,20	3,25	3,40	3,20	3,30	3,35
3,25	3,25	3,30	3,30	3,10	3,40
3,20	3,20	3,30	2,90	3,40	3,35
2,90	3,20	3,45	3,45	2,90	3,35
3,25	3,30	3,20	3,35	3,50	3,10

Бу мисолдаги тўпламчаларнинг эмпирик тақсимот функцияларини топинг ва графигини ясанг.

2. Қуйида эркаклар бўйлари ҳақида (см. ҳисобида) маълумотлар берилган.

162	151	161	170	167	164	166	164	173	172
165	153	164	169	170	154	163	159	161	167
168	164	170	166	176	157	159	158	160	161
167	155	168	167	173	165	175	165	174	167
170	169	159	159	160	156	161	162	161	181
158	169	160	169	161	161	166	164	170	180
158	169	169	165	166	172	168	171	178	179
171	165	161	162	182	164	171	169	176	177
170	169	171	160	165	165	179	161	170	175
168	171	163	165	168	166	166	169	178	173
167	172	169	171	168	162	165	168	167	166
165	168	167	170	170	159	169	160	171	174

X арифметик ўртача қиймат, Me, Mo ва G ни аниқланг.

8.5-§. КОРРЕЛЯЦИЯ НАЗАРИЯСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1. Статистик муносабатлар

Кўпинча тажриба ишларида турли сон ва сифат белгилари орасидаги муносабатларни ўрганишга тўғри келади. Белгилар орасида икки турдаги боғланиш — функционал ва корреляцион (ёки статистик) боғланишлар мавжуд.

Функционал боғланишларда бир ўзгарувчан миқдорнинг ҳар қайси қийматига бошқа ўзгарувчан миқдорнинг аниқ битта қиймати мос келади. Бундай боғланишлар аниқ фанлар — математика, физика ва химияда айниқса яққол кузатилади. Масалан: термометрдаги симоб устунининг баландлиги ҳаво ёки сувнинг ҳарорати ҳақида аниқ ва бир қийматли маълумот беради. Аммо кўпинча бир белгининг аниқ қийматига бошқа белгининг бир эмас, балки бир қанча турли қийматлари тўғри келади, баъзан бу қийматлар аниқмас бўлиб қолиши ҳам мумкин. Масалан; ҳосил солинган ўғит миқдорига боғлиқ, лекин бу боғланишда аниқ мослик йўқ. Бир хил сифатли, бир хил миқдорда ўғит берилганда ҳам ҳосил турлича бўлиши мумкин, чунки ҳосилнинг миқдори ўғитдан ташқари бошқа кўп сабабларга ҳам боғлиқ бўлади.

Агар γ тасодифий миқдорнинг ҳар бир қийматига бирор қонун асосида η тасодифий миқдорнинг аниқ қиймати мос келса, у ҳолда γ ва η орасидаги муносабат **статистик** ёки **корреляцион муносабат** дейилади. Агар γ ва η тасодифий миқдорлар устида кузатиш олиб борилган бўлиб, кузатишлар натижалари мос равишда $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ва $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ лардан иборат бўлса, у ҳолда γ ва η орасидаги муносабатни қуйидаги жадвал кўринишида ифодалаш мумкин:

8.7- жадвал

γ	X_1	X_2	...	X_n
η	Y_1	Y_2	...	Y_n

Агар кузатишлар натижасида ҳосил бўладиган X_i, Y_i жуфтларнинг сони катта бўлса ва улар орасида такрорланадиган жуфтлар бўлса, у ҳолда 8.7- жадвални қуйидаги «икки ўлчовли» жадвал билан алмаштириш мумкин:

η \ γ	X_1	X_2	X_3	...	X_R	X_n
Y_1	m_{11}	m_{12}	m_{13}	...	m_{1R}	m_{y1}
Y_2	m_{21}	m_{22}	m_{23}	...	m_{2R}	m_{y2}
Y_3	m_{31}	m_{32}	m_{33}	...	m_{3R}	m_{y3}
...	...	...	...	...	...	...
Y_s	m_{s1}	m_{s2}	m_{s3}	...	m_{sR}	m_{ys}
m_x	m_{x1}	m_{x2}	m_{x3}	...	m_{xR}	n

8.8- жадвал корреляцион жадвал дейилади. Унинг баъзи хоссаларини кўриб чиқамиз:

1. $X_1, X_2, ..., X_R$ сонлар γ тасодифий миқдорнинг R та турли қийматини ифодалайди. $Y_1, Y_2, ..., Y_s$ сонлар эса η миқдорнинг s та турли қийматини ифодалайди.

2. Жадвалнинг i- сатр ва j- устунларнинг кесишиш жойида кузатишларда γ ва η миқдорларнинг мос X_i, Y_j жуфт қийматларининг неча марта рўй берганини кўрсатувчи m_{ij} сон туради. m_{ij} сонлар т а к р о р л а н и ш л а р дейилади.

3. Охирги сатрда $m_{x1}, m_{x2}, ..., m_{xR}$ сонлар туради. Улар ҳамма кузатишларда мос $X_1, X_2, ..., X$ қийматлар неча марта рўй берганини кўрсатади. $m_{x1}, m_{x2}, ..., m_{xR}$ сонларнинг ҳар бири мос устуннинг ҳамма такрорланишлари йиғиндисига тенг, яъни

$$m_{xi} = m_{i1} + m_{i2} + ... + m_{is}$$

4. Охирги устунда $m_{y1}, m_{y2}, ..., m_{ys}$ сонларга эгамиз. Улар барча кузатишларда мос $Y_1, Y_2, ..., Y_s$ қийматлар неча марта рўй берганини кўрсатади. $m_{y1}, m_{y2}, ..., m_{ys}$ сонларнинг ҳар бири мос сатрнинг ҳамма такрорланишлари йиғиндисига тенг, яъни

$$m_{yj} = m_{1j} + m_{2j} + ... + m_{Rj}.$$

5. $m_{x1}, m_{x2}, ..., m_{xR}$ сонларнинг йиғиндиси $m_{y1}, m_{y2}, ..., m_{ys}$ сонларнинг йиғиндисига тенг ва бу йиғиндиларнинг ҳар бири алоҳида барча кузатишлар сони n га тенг бўлади, яъни

$$\sum_{i=1}^{R} m_{xi} = \sum_{j=1}^{s} m_{yj} = n.$$

6. 8.8- корреляцион жадвалда у тасодифий микдорнинг хар бир айрим кийматига η тасодифий микдорнинг аник таксимоти мос келади. Корреляцион муносабатлар тўғри ва тескари, тўғри чизикли ва эгри чизикли, оддий ва кўп белгилар орасидаги боғланишлар бўлиши мумкин.

Тўғри корреляцион муносабатда корреляцияланаётган белгилардан бирининг ортиши (камайиши) бошкасининг ортишига (камайишига) олиб келади. Масалан, атрофдаги хавонинг харорати пасайиши билан нафас олиш тезлиги камаяди. Тескари турдаги муносабатда коррелирланаётган белгилардан бирининг ортиши билан бошкаси камаяди.

2. Корреляция коэффициенти

Биз юкорида тўғри корреляцион муносабатдан белгилардан бирининг ортиши (камайиши) бошкасининг ортишига (камайишига) олиб келишини биламиз.

Боғликлик микдори (корреляция коэффициенти)ни

$$r_{xy}=\frac{\Sigma X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{nG_x G_y} \qquad (8.15)$$

формула ёрдамида аниклаш мумкин, бу ерда G_x, G_y — мос равишда X ва Y нинг ўртача квадратик четланиши, $\bar{X}$ ва $\bar{Y}$ — танланманинг ўртача арифметиги.

Назарий корреляция коэффициентининг хоссалари (8.15) ифода учун хам ўринлидир. Агар $-1 \leqslant r_{xy} \leqslant \leqslant 0$ бўлса, у холда бу микдорлардан бирининг ортиши мос равишда иккинчисининг камайишига олиб келади. Агар $|r_{xy}|=1$ бўлса, бу хол X ва Y орасида чизикли корреляция мавжудлигини кўрсатади ва аксинча.

Корреляция коэффициенти $r_{xy}=0$ бўлганда X ва Y орасида тўғри чизикли корреляцион муносабат мавжуд бўлиши мумкин эмас, аммо эгри чизикли корреляцион муносабат мавжуд бўлиши мумкин.

3. Регрессия тенгламаси

Корреляция коэффициенти иккита белгининг ўзаро боғланиш даражасини кўрсатади, лекин белгининг иккинчи белгига караб сон жихатдан кандай ўзгаришини очиб бера олмайди. Бу муносабатни X ва Y белгилар орасида регрессия тенгламаси деб аталувчи боғланиш маълум даражада очиб бера олади. Бунда X нинг ўзгаришига қараб Y ни аниқлаш ва аксинча, Y нинг ўзгаришига қараб, X ни аниқлаш мумкин. Энг кичик квадратлар усули деб аталувчи усулдан фойдаланиб, X ва Y лар орасидаги чизиқли регрессия тенгламаси $Y_x = kx + b$ ни тузамиз (бу ерда k ва b — номаълум коэффициентлар). Бу усулга кўра, агар $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ лар кузатиш натижаларидан иборат бўлиб, бу қийматлар билан Y_x нинг $X_1, X_2, ..., X_n$ ларига мос келувчи қийматлари орасидаги айирмалар квадратларининг йиғиндиси кичик бўлса яхши натижага эришилган бўлади. Шу мақсадда

$$F(k, b) = \sum_{i=1}^{n} (Y_n^2 - Y_i)^2 \qquad (8.16)$$

ёки

$$F(k, b) = \sum_{i=1}^{n} (kx_i + b - y_i)^2$$

функцияни кўрамиз. Бу ифода энг кичик қийматга эришиши учун

$$\frac{\partial F(k, b)}{\partial k} = 2 \sum_{i=1}^{n} (kX_i + b - Y_i) X_i = 0,$$

$$\frac{\partial F(k, b)}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^{n} (kX_i + b - Y_i) = 0$$

ёки

$$\begin{cases} R \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 + b \sum\limits_{i=1}^{n} X_i = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i Y_n \\ R \sum\limits_{i=1}^{n} X_i + nd \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i \end{cases}$$

тенгликлар бажарилиши керак. Бу тизимнинг ечими:

$$k = \frac{n \sum\limits_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i}{n \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 \right)} = r_{xy} \cdot \frac{G_y}{G_x};$$

$$b=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sum_{i=1}^{n} Y_i + \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}=\bar{Y}-k\bar{X}.$$

$z_{xy}\frac{G_y}{G_x}$ ифода Y нинг X га нисбатан регрессия коэффициенти дейилади. X нинг Y ка нисбатан корреляция коэффициентини K_{xy} оркали белгиласак, у холда Y нинг X га нисбатан регрессия тенгламаси

$$Y_x=ky_j x\cdot(X-X)+\bar{Y};$$

X нинг Y ка нисбатан регрессия тенгламаси

$$X_y=kx_i\cdot(Y-\bar{Y})+\bar{X}$$

кўринишда бўлади.

Чизикли регрессиядан ташкари эгри чизикли регрессия хам мавжуд. Энг содда эгри чизикли регрессия тенгламалари сифатида

$$Y_x=ax^2+bx+c;\ Y_x=ax^3+bx^2+cx+b,$$

$$Y_x=\frac{a}{x}+b$$

ларни караш мумкин.

МАШКЛАР

1. Куйида берилган жадвалдан фойдаланиб, Y билан X орасидаги чизикли регрессия тенгламасини тузинг:

$y \backslash x$	10	15	20	25	30	35	40	45	n_y
80	2	1	—	—	—	—	—	—	3
100	3	4	3	—	—	—	—	—	10
120	—	—	5	10	8	—	—	—	23
140	—	—	—	1	—	6	1	1	9
160	—	—	—	—	—	—	4	1	5
n_x	5	5	8	11	8	6	5	2	$n=50$

2. Қуйида берилган корреляцион жадвалдан фойдаланиб, Y нинг X га нисбатан тўгри чизикли регрессия тенгламасини тузинг:

$y \backslash x$	5	8	11	14	17	20	n_y
10	3	5	—	—	—	—	8
15	—	4	4	—	—	—	8
20	—	—	7	35	8	—	50
25	—	—	2	10	8	—	20
30	—	—	—	5	6	3	14
n_x	3	9	13	50	22	3	$n=100$

IX БОБ

МАТЕМАТИК ПРОГРАММАЛАШТИРИШ

Бугунги ишлаб чикариш жараёнининг тобора мураккаблашиб, бозор муносабатларининг кенгайиб бориш жараёнида хар бир ишни таҳлил қилиб, улардан тўгри хулоса чиқаришга асос берувчи илмий назариялар жуда зарур булмоқда. Бундай назариянинг асосини математик программалаштириш ташкил этади.

«Программалаштириш» деганда масаланинг ечимларини кетма-кет ҳосил қилиш жараёнини тушуниш керак. Бу шундай жараёнки, унда энг аввал бошлангич ечим топилади, сунгра бу ечим қадам-бақадам яхшиланиб борилади. Бу жараён энг яхши программа топилгунча давом эттирилади. Ҳар бир босқичда махсус курсаткичлар ёрдамида қандай иш тутиш кераклиги, оптимал ечимга қандай яқинлашиш кераклиги курсатиб борилади.

Математик программалаштириш математиканинг асосан куп вариантли ечимга эга булган иқтисодий масалаларнинг энг яхши, мақсадга мувофик (оптимал) ечимини топишга ёрдам берувчи бир тармогидир.

Математик программалаштириш ч и з и к л и п р о г р а м м а л а ш т и р и ш, ч и з и к л и б у л м а г а н п р о г р а м м а л а ш т и р и ш ва д и н а м и к п р о г р а м м а л а ш т и р и ш деб аталувчи қисмларни уз ичига олади. Шуни айтиб утиш керакки, чизикли булмаган программалаштириш масаласини ечиш учун умумий универсал усул йуқ. Шу пайтгача яратилган усуллар асосан чизикли булмаган программалаштириш масалаларининг айрим хусусий ҳоллари учун мослаштирилган. Айрим чизиқли бўлмаган программалаштириш масалалари учун чизиқли аппроксимация топилиб, уларни чизиқли программалаштириш усулларини қўллаб ечиш мумкин.

Баъзи иқтисодий жараёнлар вақтга боғлиқ бўлади. Бундай масалаларнинг турли босқичлардаги ечимини аниқлаш учун динамик программалаштириш усуллари қўлланилади. Ушбу китобда биз фақат чизиқли программалаштиришни кўриш билан чегараланамиз.

9.1-§. ЧИЗИҚЛИ ПРОГРАММАЛАШТИРИШ

Агар мақсад функцияси ва чекланишлар тизими номаълумларга нисбатан чизиқли бўлса, у ҳолда программалаштириш *чизиқли программалаштириш* дейилади. Агар улар чизиқли бўлмаган ифодалардан ташкил топган бўлса, у ҳолда программалаштириш чизиқли бўлмаган программалаштириш дейилади.

Умумий ҳолда чизиқли программалаштириш масаласи бундай таърифланади. Ушбу

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \end{cases} \tag{9.1}$$

чизиқли чекланишлар тизимида

$$y = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{9.2}$$

чизиқли функциянинг экстремум қийматлари топилсин. Бу ерда y функция чизиқли бўлганлиги сабабли, умумий ҳолда $\frac{\partial\varphi}{\partial x} \neq 0$ бўлади. Унда (9.1) шартларни қаноатлантирувчи соҳанинг ички нуқталарида функция экстремум қийматга эришмайди. Функцияга экстремум қиймат берувчи нуқта бу соҳанинг четларида ётади. Шу сабабли функциянинг (9.1) шартли чекланишлардаги экстремум қийматини топиш учун олий математика курсидаги функциянинг шартсиз экстремум қийматини топиш усулларидан фарқ қилувчи махсус усуллар ишлатилишини талаб қилинади. Чизиқли программалаштириш шундай усулларни ўрганади.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m = b_1; \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m = b_m. \end{cases} \quad (9.3)$$

$$x_1 \geqslant 0, \; x_2 \geqslant 0, \ldots, \; x_m \geqslant 0. \quad (9.4)$$

$$z_{\min} = c_1x_1 + \ldots + c_mx_m. \quad (9.5)$$

9.3-§. ЧИЗИҚЛИ ПРОГРАММАЛАШТИРИШ МАСАЛАЛАРИНИ ТУРЛИ КЎРИНИШЛАРДА ИФОДАЛАШ

Чизиқли программалаштириш масаласи умумий ҳолда қуйидагича ифодаланади:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \gtreqless b_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \gtreqless b_m \end{cases} \quad (9.6)$$

$$x_1 \geqslant 0, \; \ldots, \; x_n \geqslant 0; \quad (9.7)$$

$$z_{\max(\min)} = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n. \quad (9.8)$$

(9.6) ва (9.7) шартларни қаноатлантирувчи номаълумларнинг шундай қийматларини топиш керакки, улар (9.8) чизиқли функцияга минимал (максимал) қиймат берсин. Масаланинг (9.6) ва (9.7) шартлари унинг чегараловчи шартлари деб, (9.8) чизиқли функцияни эса масаланинг мақсади ёки мақсад функцияси деб аталади. Масаладаги (9.6) шартнинг чап томони ва мақсад функцияси номаълумларга нисбатан чизиқли экани кўриниб турибди. Шунинг учун ҳам (9.6) — (9.8) масала чизиқли программалаштириш масаласи деб аталади.

Аниқ масалаларда (9.6) шарт тенгламалар тизимидан иборат бўлиши мумкин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (9.9)$$

$$x_1 \geqslant 0, \; x_2 \geqslant 0, \; \ldots, \; x_n \geqslant 0; \quad (9.10)$$

$$z_{min} = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n. \qquad (9.11)$$

(9.9) – (9.11) куриниш чизикли программалаштириш масаласининг **канониk куриниши** деб аталади. Берилган (9.9) – (9.11) масала векторлар ёрдамида куйидагича ифодаланади:

$$A_1X_1 + A_2X_2 + \ldots + A_nX_n = A_0; \qquad (9.12)$$

$$x \geqslant 0; \qquad (9.13)$$

$$z_{min} = CX. \qquad (9.14)$$

Бу ерда

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — вектор катор

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — вектор устун.

Масаланинг матрица ёрдамидаги ифодаси бундай:

$$AX = A_0; \qquad (9.15)$$

$$X \geqslant 0; \qquad (9.16)$$

$$Z_{min} = CX, \qquad (9.17)$$

бу ерда $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — матрица катор, $A = a_{ij}$ коэффициентлардан ташкил топган матрица:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ — устун матрица}$$

Берилган масалани йигиндилар ёрдамида ифодалаш хам мумкин:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, m); \qquad (9.18)$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j=1,\ n); \tag{9.19}$$

$$Z_{\min} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{9.20}$$

Чизикли программалаштириш масалаларини қуйида келтирилган таъриф кўринишларида ҳам ифодалаш мумкин.

1- таъриф. Берилган (9.9) — (9.11) масаланинг *мумкин бўлган ечими* ёки *режаси* деб, унинг (9.6) — (9.7) шартларини қаноатлантирувчи $X=(x_1,\ \dots x_n)$ векторларга айтилади.

2- таъриф. Агар (9.12) ёйилмадаги мусбат x_i коэффициентли A_i $(i=1,\ m)$ векторлар ўзаро чизикли боғлиқ бўлмаса, $X=(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$ режа *таянч режа* дейилади.

3- таъриф. $X=(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$ таянч режадаги мусбат компонентлар сони m га тенг бўлса, бу режа *айнимаган таянч режа*, акс ҳолда *айниган таянч режа* дейилади.

4- таъриф. Чизикли функция (9.11) га энг кичик ёки энг катта қиймат берувчи $X=(x_1,\ \dots\ x_n)$ каноник режа масаланинг оптимал режаси ёки оптимал ечими дейилади.

9.4-§. ТЕНГСИЗЛИКНИ ТЕНГЛАМАГА АЙЛАНТИРИШ

n та номаълумли

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leqslant b \tag{9.21}$$

чизикли тенгсизлик берилган бўлсин. Бу тенгсизликни тенгламага айлантириш учун унинг кичик томонига манфий бўлмаган номаълум

$$x_{n+1} \geqslant 0 \tag{9.22}$$

ни қўшамиз. Натижада $n+1$ та номаълумли чизикли тенглама ҳосил бўлади:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + x_{n+1} = b \tag{9.23}$$

Берилган (9.21) тенгсизликни тенгламага айлантириш учун қўшилган $x_{n+1} \geqslant 0$ номаълум қ ў ш и м ч а ў з г а р у в ч и деб аталади.

Шундай йўл билан чизикли программалаштириш масаласининг чегараловчи шартларидаги тенгсизликларни тенгламага айлантириш мумкин. Бунда шунга эътибор бериш керакки, тизимдаги турли тенгсизликларни тенгламага айлантириш учун қўшиладиган қўшимча ўзгарувчилар бир-биридан фарқли бўлиши керак.

Масалан, чизиқли программалаштириш масаласининг математик модели

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{1n}x_n\leqslant b_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\leqslant b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}\leqslant b_m \end{cases} \qquad (9.24)$$

$$x_j\geqslant 0 \ (j=1,n), \qquad (9.25)$$

$$z_{min}=c_1x_1+\ldots+c_nx_n \qquad (9.26)$$

кўринишда бўлса, бу масаладаги тенгсизликларни кичик томонига $x_{n+1}\geqslant 0$, $x_{n+2}\geqslant 0$, ..., $x_{n+m}\geqslant 0$ қўшимча ўзгарувчилар қўшиш ёрдамида тенгламага айлантириш мумкин. Бу ўзгарувчилар z_{min} га 0 коэффициент билан киритилади. Натижада берилган (9.24) — (9.26) масала қуйидаги кўринишга келтирилади:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_{n+1}=b_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n+x_{n+2}=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n+x_{m+n}=b_m \end{cases} \qquad (9.27)$$

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ \ldots,\ x_n\geqslant 0,\ x_{n+1}\geqslant 0,\ \ldots,\ x_{m+1}\geqslant 0. \qquad (9.28)$$

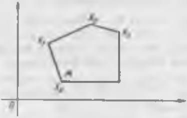
$$z_{min}=c_1x_2+\ldots+c_nx_n+0(x_{n+1}+\ldots+x_{n+m}). \qquad (9.29)$$

9.5-§. ЧИЗИҚЛИ ПРОГРАММАЛАШТИРИШ МАСАЛАСИ ЕЧИМЛАРИНИНГ ХУСУСИЯТЛАРИ

Чизиқли программалаштириш масаласининг режалари ва чизиқли функциянинг бир қанча хусусиятлари бор. Қуйида буларнинг хусусиятларига доир бўлган теоремаларни (исботсиз) ва улардан келиб чиқадиган баъзи хулосаларни келтирамиз.

1-теорема. Чизиқли программалаштириш масаласининг режалари қавариқ тўпламни ташкил этади.

2-теорема. Чизиқли программалаштириш масаласининг чизиқли функцияси ўзининг оптимал қийматига шу масаланинг режаларидан ташкил топган қавариқ тўпламнинг четки нуқтасида эришади. Агар чизиқли функция M қавариқ тўпламнинг бирдан ортиқ четки нуқтасида оптимал кийматга эришса, у шу нукталарнинг каварик комбинациясидан иборат булган ихтиёрий нуктада ҳам узининг оптимал кийматига эришади (20- расм).



20- расм

3- теорема. Агар K та узаро чизикли боглик булмаган $A_1, A_2, \ldots, A_k$ векторлар берилган булиб, улар учун

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_kx_K = A_0$$

тенглик барча $x_i \geqslant 0$ ларда уринли булса, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_K, 0, \ldots, 0)$ вектор M каварик тупламнинг четки нуктаси булади.

Юкорида танишган теоремалардан куйидаги хулосаларни чикариш мумкин.

1- хулоса. Чизикли программалаштириш масаласи таянч режаларидан ташкил топган туплам M каварик тупламнинг четки нукталар тупламига мос келади ва аксинча, хар бир таянч режа K тупламнинг бирор четки нуктасига мос келади.

2- хулоса. Чизикли программалаштириш масаласининг оптимал ечимини M тупламнинг четки нукталари орасидан кидириш керак.

Чизикли программалаштириш масаласини ечиш усуллари M тупламнинг четки нукталари ичида оптимал нуктани кидиришга асосланган. Бу усуллардан бири симплекс усуллир. Симплекс усул асосларининг алгоритм тархи билан танишишдан олдин чизикли программалаштириш масаласининг геометрик интерпретацияси билан танишайлик.

9.6-§. ЧИЗИКЛИ ПРОГРАММАЛАШТИРИШ МАСАЛАСИНИНГ ГЕОМЕТРИК ТАЛКИНИ

Бизга чизикли

$$Z = \sum_{i=1} C_iX_i \qquad (9.30)$$

функциянинг куйидаги чизикли

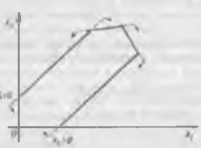
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \quad (i=\overline{1,m}), \\ x_j \geqslant 0 \quad (j=\overline{1,n}) \end{cases} \qquad (9.31)$$

чеклаиин шартларини каноатлантирадиган минимумини топиш талаб килинган булсин. Тенгсизликлар тизими (9.31) ни каноатлантирадиган ихтиёрий $x_1, x_2, \dots, x_n$ сонлар туплами унинг ечимлари дейилади. Агар (9.31) тизим хеч булмаса битта ечимга эга булса тизим биргаликда дейилади. Акс холда эса, тизим биргаликда эмас дейилади.

Бундан кейин биз (9.31) тенгсизликлар тизимини биргаликда деб фараз киламиз. $n=2$ булганда (9.31) дан куйидаги тизимни хосил киламиз:

$$\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j \leqslant b_i; \quad x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0. \qquad (9.32)$$

Бу тенгсизликларнинг хар бири $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ тугри чизик билан, ечимларнинг манфий булмаслик шартлари $x_j \geqslant 0$, $j=1,2$ эса $x_j=0$ тугри чизик билан чегараланган ярим текисликлар булади. (9.32) тенгсизликлар тизими биргаликда булганлиги учун хеч булмаганда битта ечимга эга булади, яъни чегаравий тугри чизиклар бир-бири билан кесишиб, уринли ечимлар тупламини хосил килади. Демак, $n=2$ булганда уринли ечимлар туплами куп-бурчакнинг нукталаридан иборат булади. Масалан, $m=4$ булганда уринли ечимлар туплами 21-расмда курсатилган купбурчакдан иборат булади. Агар (9.31) да $n=3$ булса, бу тенгсизликларнинг хар бирига геометрик нуктаи назардан караганда уларнинг хар бири



21- расм

$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3=b_i$ текисликлар билан, ечимларнинг манфий бўлмаслик шартлари — $x_j\geqslant 0$ лар эса, $x_j=0$ текисликлар билан чегараланган уч ўлчовли ярим фазолардан иборат бўлади.

Иккинчи томондан, (9.31) тизим биргаликда бўлганлиги сабабли бу ярим фазолар кесишиб, бирор бир кўпёқлик ҳосил қилади. Кўпёқлик эса ўринли ечимлар тўпламини беради, яъни уни қаноатлантиради ва ниҳоят, (9.31) да $n>3$ бўлса, бу тенгсизликларнинг ҳар бири

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n=b_i$$

гипертекисликлар билан, ечимларнинг манфий бўлмаслик шартлари эса $x_j=0$ гипертекисликлар билан чегараланган ярим фазолардан иборат бўлади. Бу ярим фазолар кесишиб ўринли ечимлар тўплами бўлган бирорта кўпёқликни ҳосил қилади.

Бу мулоҳазалар чизиқли программалаштириш масалаларини геометрик нуқтаи назардан қуйидагича изоҳлашга имкон беради: ўринли ечимлар тўплами бўлган кўпёқликнинг шундай нуқтасининг координаталарини топиладики, бу нуқтада мақсад функцияси (9.30) ўзининг энг кичик қийматига эришади.

9.7-§. ЧИЗИҚЛИ ПРОГРАММАЛАШТИРИШ МАСАЛАСИНИ ГРАФИК УСУЛДА ЕЧИШ

Чизиқли программалаштириш масаласини график усулда ечиш уни геометрик тасвирлашга асосланган. Икки ўлчовли фазода (текисликда) берилган чизиқли программалаштириш масалаларини ечиш учун график усулни қўллаш мумкин. $n\geqslant 3$ ўлчовли фазода берилган масалаларни график усул билан ечиш ноқулай, чунки бу ҳолда ечимлардан ташкил топган қавариқ кўпбурчакни ясаш қийинлашади.

Икки ўлчовли фазода берилган қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини кўрайлик:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2\leqslant b_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2\leqslant b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2\leqslant b_m \end{cases} \qquad (9.33)$$

$$x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0, \qquad (9.34)$$

$$z_{\min} = c_1x_1 + c_2x_2 \qquad (9.35)$$

Фараз қилайлик, (9.33) тизим (9.34) шартли қаноатлантирувчи ечимларга эга ҳамда улардан ташкил топган туплам чекли бўлсин. (9.33) ва (9.34) тенгсизликларнинг ҳар бири $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$, $x_1 = 0$; $x_2 = 0$ чизиқлар билан чегараланган ярим текисликларни ифодалайди. Чизиқли функция ҳам маълум бир ўзгармас

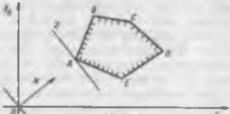
$$c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$$

қийматда тўғри чизиқни ифодалайди. Ечимлардан ташкил топган кавариқ тўпламни ҳосил қилиш учун

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1; \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 = b_m, \end{cases}$$

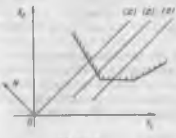
$$x_1 = 0, \ x_2 = 0;$$

тўғри чизиқлар билан чегараланган кўпбурчакни ясаймиз. Фараз қилайлик бу кўпбурчак *ABCDE* бўлсин (22- расм).

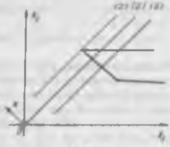


23- расм

Чизиқли функцияни ихтиёрий ўзгармас C_0 сонга тенг деб олайлик. Натижада $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const} = C_0$ тўғри чизиқ ҳосил бўлади. Бу тўғри чизиқни $N(c_1;\ c_2)$ вектор йўналишида ёки унга тескари йўналишда ўзига параллел равишда суриб бориб кавариқ кўпбурчакнинг чизиқли функциясига энг кичик қиймат берувчи четки нуқтасини аниқлаймиз. 23- расмдан кўриниб турибдики, чизиқли функция ўзининг минимал қийматига кавариқ кўпбурчакнинг A нуқтасида эришади. $A(x_1;\ x_2)$ нуқтанинг координатаси масаланинг чизиқли функциясига минимал қиймат



23- расм



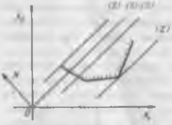
24- расм

берувчи оптимал ечими булади. Унинг координаталари AB ва AE тугри чизикларни ифодаловчи тенгламалар тизимини ечиш оркали аникланади.

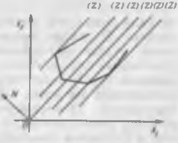
Агар ечимлардан ташкил топган каварик купбурчак чегараланмаган булса икки холдан бири юз бериши мумкин:

1- хол. $c_1x_1+c_2x_2=\text{const}$ тугри чизик N вектор буйича ёки унга карама-карши йуналишда силжиб бориб хар доим каварик купбурчакни кесиб утади. Аммо на минимал, на максимал кийматга эришмайди. Бу холда чизикли функция куйидан ва юкоридан чегараланмаган булади (23- расм).

2- хол. $c_1x_1+c_2x_2=\text{const}$ тугри чизик N вектор буйича силжиб бориб каварик купбурчакнинг бирорта четки нуктасида узининг минимум ёки максимум кийматига эришади. Бу холда чизикли функция юкоридан чегараланган, куйидан эса чегараланмаган (24- расм) ёки куйидан чегараланган юкоридан эса чегараланмаган булиши мумкин (25- расм). Баъзи чизикли функциялар хам куйидан хам юкоридан чегараланган булиши мумкин.



25- расм



26- расм

Мисол.

$$\begin{cases} 5x_1+4x_2\leqslant 20, \\ 4x_1+5x_2\leqslant 20; \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0, \end{cases} \qquad z_{max}=2x_1-5x_2$$

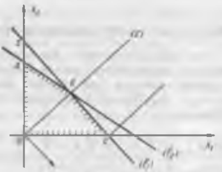
Масалани график усулда ечинг (26- расм).

Е ч и ш. Ечимлардан ташкил топган қаварик кўпбурчакни ясаш учун координаталар тизимида

$$5x_1+4x_2=20\ (l_1);\quad 4x_1+5x_2=20\ (l_2)$$

чизикларни ясаймиз (27- расм). Берилган тенгсизликларни қаноатлантирувчи ечим штрихланган $OABC$ купбурчакни ташкил қилади. Энди координатлар бошидан $N=(2, -5)$ векторни ясаймиз ва унга тик бўлган тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу тўғри чизиқ

$$2x_1+5x_2=\text{const}$$



27- расм

тенглама орқали ифодаланади. Уни вектор йўналишида ўзига параллел равишда силжитиб борамиз. Натижада чизиқли функцияга максимум қиймат берувчи $c=(4, 0)$ нуқтани топамиз. Бу нуқтанинг координатлари $x_1=4$; $x_2=0$ масаланинг оптимал ечими бўлади ва $z_{max}=8$ булади.

9.8- §. СИМПЛЕКС УСУЛ

Юқорида кўрганимиздек, чизиқли программалаштириш масаласининг оптимал режасини унинг барча режаларидан ташкил топган қаварик тўпламнинг четки нукталари орасидан излаш керак. Бундай нукталар сони ёки бошкача айтганда масаладаги таянч режалар сони n дан m тадан тузилган C_n^m гурухлаш оркали аникланади. Масаладаги номаълумлар сони (n) ва тенгламалар сони (m) катта булганда барча таянч режаларнинг оптималлигини текшириб чикиш анча кийин булади. Шунинг учун таянч режаларни тартиб билан текшириб чикиб, улар ичидан оптимал режани аниклаб берувчи ечиш тархи (схемаси)ни бериш талаб килинади.

Чизикли программалаштириш масаласини ечишнинг бундай тархларидан бири с и м п л е к с у с у л дир. Бу усул бошланғич таянч режадан чекли сондаги интерациядан кейин оптимал режани хосил килиш йулини курсатади ва бунда хар бир навбатдаги итерация олдингисига нисбатан оптимал режага якинрок режани беради. Ечиш жараёни оптимал ечим топилгунча ёки масаланинг чизикли функцияси чекли минимумга эга эмаслиги аниклангунча давом эттирилади.

1. Масаланинг таянч режаларини тузиш

Чизикли программалаштириш масаласи берилган булсин ва масалада m та узаро чизикли боглик булмаган бирлик векторлар мавжуд деб фараз киламиз. Бу векторлар $A_1, A_2, \ldots A_m$ булсин. У холда масала куйидаги куринишда булади:

$$\begin{cases} x_1+a_{1,m+1}x_{m+1}+\ldots+a_{1n}x_n=b_1; \\ x_2+a_{2m+1}x_{m+1}+\ldots+a_{2n}x_n=b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m+a_{m,m+1}x_{m+1}+\ldots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{9.36}$$

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ \ldots,\ x_m\geqslant 0,\ x_{m+1}\geqslant 0,\ \ldots,\ x_n\geqslant 0, \tag{9.37}$$

$$z_{\min}=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n. \tag{9.38}$$

(9.36) тизимни вектор куринишда ёзамиз:

$$A_1X_1+A_2X_2+\ldots+A_mX_m+A_{m+1}X_{m+1}+A_nX_n=A_0, \quad (9.38)$$

бу ерда

$$A_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\0\end{pmatrix}, \ldots, A_m=\begin{pmatrix}0\\0\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\1\end{pmatrix}, A_{m+1}=\begin{pmatrix}a_{1,m+1}\\a_{2,m+1}\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\a_{m,m+1}\end{pmatrix}, \ldots,$$

$$A_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\a_{mn}\end{pmatrix}, A_0=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\b_m\end{pmatrix}.$$

$A_1, A_2, \ldots, A_m$ векторлар n ўлчовли фазода ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмаган бирлик векторлардан иборат бўлиб, бу фазонинг базисини ташкил қилади. (9.36) да $x_1, x_2, \ldots x_m$ ўзгарувчиларни базис ўзгарувчилар, $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ ўзгарувчиларни эса базис бўлмаган ўзгарувчилар деб қабул килиб, базис бўлмаган ўзгарувчиларни нолга тенглаймиз, базис ўзгарувчиларни эса мос равишда (9.36) тизимнинг озод ҳадларига тенглаймиз. Натижада

$$X_0=(x_1=b_1, x_2=b_2, \ldots, x_m=b_m, x_{m+1}=0, \ldots, x_n=0) \quad (9.39)$$

бошланғич режани ҳосил қиламиз. Бу режага қуйидаги

$$A_1X_1+A_2X_2+\ldots+A_mX_m=A_0 \quad (9.40)$$

ёйилма мос келади. Бу ёйилмадаги $A_1, A_2, \ldots, A_m$ векторлар ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмаган векторлар бўлмаганлиги сабабли, топилган бошланғич (9.39) режа таянч режа бўлади.

Энди бошланғич режадан фойдаланиб янги таянч режани топиш мумкинлигини кўрсатамиз. $A_1, A_2, \ldots, A_m$ векторлар n ўлчовли фазонинг базисини ташкил қилади. Шу сабабдан $A_1, A_2, \ldots, A_n$ векторларнинг ихтиёрийсини A_j базис вектор орқали қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$A_j=X_{1j}A_1+X_{2j}A_2+\ldots+X_{mj}A_m. \quad (9.41)$$

Фараз қилайлик, бирорта вектор, масалан A_{m+1}-векторнинг ёйилмасидаги коэффициентлардан камида биттаси (масалан, $x_{i,\ m+1}$) нолдан фарқли бўлсин:

$$A_{m+1} = X_{1,m+1}A_1 + X_{2,m+2}A_2 + \ldots + X_{m,m+1}A_m. \qquad (9.42)$$

Ихтиёрий $\theta > 0$ сон олиб (9.42) тенгликнинг иккала томонини бу сонга купайтирамиз ва (9.40) ифодадан ҳадма-ҳад айирамиз, натижада қуйидаги тенгликка эга буламиз:

$$(X_1 - \theta X_{1,m+1})A_1 + (X_2 - \theta X_{2,m+1})A_2 + \ldots +$$
$$+ (X_m - \theta X_{m,m+1})A_m + \theta A_{m+1} = A_0. \qquad (9.43)$$

Агар

$$X_1 - \theta X_{1,m+1} \geqslant 0,\ X_2 - \theta X_{2,m+1} \geqslant 0, \ldots,$$
$$X_m - \theta X_{m,m+1} \geqslant 0 \text{ булса,}$$
$$X_1 = (X_1 - \theta X_{1,m+1},\ X_2 - \theta X_{2,m+1}, \ldots,\ X_m - \theta X_{m,\,m+1},\ 0,0,\ldots,\theta)$$

вектор режа булади, $\theta > 0$ булганлиги сабабли X_1 режанинг компоненталари манфий булмайди, шунинг учун $x_{2,m+1} > 0$ булган компоненталарни қураминз. Демак, шундай $\theta > 0$ ни топишимиз керакки, $x_{i,m+1} > 0$ булганда $x_i - \theta_{i,m+1}$ булади. Бундан

$$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{X_i}{X_{i,m+1}}.$$

X_1 режа ихтиёрий

$$0 < \theta < \min_{x_{i,m+1} > 0} \frac{X_i}{X_{i,m+1}}$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи θ учун режа булади. Лекин таянч режа уз ичига $m+1$ та компонентани олмайди, шунинг учун x_1 режадаги камида битта компонентани нолга айлантириш керак. Фараз қилайлик,

$$\theta = \theta_0 = \min_{x_{i,m+1} > 0} \frac{X_i}{X_{i,m+1}} = \frac{X_k}{X_{k,m+1}}$$

булсин. Бу ҳолда X_1 режанинг k-компонентаси $X_k - \theta X_{k,m+1} = 0$ булади. θ нинг қийматини (9.43) га қуйиб, қуйидаги ёйилмани ҳосил қиламиз:

$$X_2'A_2 + X_3'A_3 + \ldots + X_m'A_m + X_{m+1}'A_{m+1} = A_0.$$

Бу ёйилмага янги таянч режа

$$X_1' = (0;\ X_2';\ X_3';\ \ldots,\ X_m';\ X_{m+1}',\ 0;\ \ldots,\ \theta)$$

мос келади; бу ерда $X_i' = X_i - \theta_0 X_{i,m+1}$ $(i = 2,3,\ldots,\ m)$, $X_{m+1}' = \theta_0$. Бундан кейинги таянч режани ҳосил қилиш учун базисга кирмаган ихтиёрий векторнинг базис векторлар оркали ёйилмасини аниклаш ҳамда шундай $\theta_0>0$ сонни топиш керакки, унинг ёрдамида янги вектор базисга кирсин ва эски базис векторлардан бирортаси базисдан чиксин. Шундай килиб, янги таянч режаларни ҳосил килиш жараёни базисга киритиладиган ва базисдан чикариладиган векторни танлашдан иборатдир.

Мисол. Берилган масаланинг таянч режасини тузинг ва янги таянч режага ўтинг:

$$\begin{cases} x_1+2x_4-3x_5-2x_6=5; \\ x_2+3x_4-2x_5-4x_6=6; \\ x_3-4x_4-x_5-2x_6=3, \end{cases}$$

$$x_j\geqslant 0 \ (j=1,6), \ z_{min}=x_1-x_2-x_3+x_4-2x_5+x_6.$$

Ечиш. Тизимни вектор куринишда ёзамиз:

$$A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+A_4x_4+A_5x_5+A_6x_6=A_0,$$

бу ерда A_1, A_2, A_3 — базис векторлар, x_1, x_2, x_3 — базис ўзгарувчилар, x_4, x_5, x_6 — базис бўлмаган ўзгарувчилар. Базис бўлмаган ўзгарувчиларга ноль кийматлар бериб, бошлангич

$$x_0=(x_1=5; \ x_2=6; \ x_3=3; \ x_4=0; \ x_5=0; \ x_6=0)$$

режани топамиз. Бу режага

$$5A_1+6A_2+3A_3=A_0 \qquad (9.44)$$

ёйилма мос келади. Янги таянч режага ўтиш учун базисга кирмаган вектордан биттасини базисга кирмаган векторлардан биттаси билан алмаштирамиз. Масалан, A_4 вектор билан алмаштирамиз ва унинг базис векторлар билан ёйилмасини топамиз:

$$2A_1+3A_2-4A_3=A_4 \qquad (9.45)$$

Бу ёйилманинг икки томонини $\theta>0$ га кўпайтириб, (9.44) ифодадан ҳадма-ҳад айирамиз:

$$(5-2\theta)A_1+(6-3\theta)A_2+(3-4\theta)A_3+\theta A_4=A_0. \qquad (9.46)$$

Базисдан чикариладиган векторни аниклаш учун $\theta_0=\min\left(\frac{5}{2}, \frac{6}{3}\right)=\frac{6}{3}=2$ ни топамиз. $\theta=2$ кийматни (9.46) га куйиб, A_2 векторни базисдан чикарамиз ва куйидаги ёйилмага эга буламиз:

$$A_1+11A_3+2A_4=A_0.$$

Бу ёйилмага

$$X_1=(x_1=1;\ x_2=\theta;\ x_3=11;\ x_n=2,\ x_5=0;\ x_6=0)$$

режа мос келади. Энди A_4 нинг ўрнига A_5 ни базисга киритамиз. Бу векторнинг базис векторлар бўйича ёйилмаси:

$$-3A_1-2A_2-A_3=A_5.$$

(9.47) ифоданинг икки томонини $\theta>0$ сонга кўпайтириб, натижани (9.44) дан айириб, қуйидагига эга бўламиз:

$$(5+3\theta)A_1+(6+2\theta)A_2+(3+\theta)A_3+\theta A_5=A_0\,.$$

Бу ёйилмадан кўринадики, бирорта ҳам векторни базисдан чиқариб бўлмайди. Бу ёйилмага мос келувчи

$$X_2=(5+3\theta;\ 6+2\theta;\ 3+\theta;\ 0;\ \theta;\ 0)$$

режа таянч режа бўлмайди, сабаби $\theta>0$ шарт бажарилмайди ва 4 та мусбат компонентани ўз ичига олади

2. Оптималлик шарти. Оптимал режани топиш

Қуйидаги

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{9.48}$$

$$x_j\geqslant 0,\ (j=\overline{1,n}), \tag{9.49}$$

$$z_{min}=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \tag{9.50}$$

чизиқли программалаштириш масаласининг режалари мавжуд ва ҳар бир таянч режа хосмас деб фараз қиламиз. Масаланинг

$$X=(x_1=b_1;\ x_2=b_2;\ \ldots,\ x_m=b_m;\ x_{m+1}=0,\ \ldots,\ x_n=0)$$

таянч режага мос келувчи ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмаган $A_1,\ A_2\ldots\ A_m$ векторлар тизими маълум бўлсин. У ҳолда

$$A_1X_1+A_2X_2+\ldots+A_mX_m=A_0 \tag{9.51}$$

ва

$$C_1X_1+C_2X_2+\ldots+C_mX_m=Z_0, \tag{9.52}$$

бу ерда Z_0 — чизикли функциянинг X таянч режадаги киймати, $X_i > 0$; C_i — чизикли функциянинг коэффициентлари; A_1, A_2, ..., A_m векторлар ўзаро чизикли боглик булмаган векторлар булганлиги сабабли ихтиёрий базис бўлмаган A_j векторнинг бу векторлар оркали факат битта ёйилмасини топиш мумкин:

$$X_{1j}A_1 + X_{2j}A_2 + \ldots + X_{mj}A_m = A_j. \qquad (9.53)$$

Бу векторга чизикли функциянинг

$$C_1X_{1j} + C_2X_{2j} + \ldots + C_mX_{mj} = Z_j \qquad (9.54)$$

киймати мос келади. A_j векторга мос келувчи чизикли функциянинг коэффициентини C_j билан белгилаймиз. У холда куйидаги теоремалар уринли булади.

1-теорема. *Агар X_0 таянч режада тайинланган j учун $Z_j - C_j > 0$ тенгсизлик ўринли бўлса, X_0 режа оптимал режа бўлмайди ва шундай X режа топиш мумкин буладики, унинг учун $Z(X) < Z(X_0)$ тенгсизлик уринли булади.*

Исбот. (9.53) ва (9.22) ифодаларни $\theta > 0$ га купайтириб, мос равишда (9.51) ва (9.52) ифодалардан айирамиз. Натижада куйидагиларга эга буламиз:

$$(X_1 - \theta X_{1j})A_1 + (X_2 - \theta X_{2j})A_2 + \ldots +$$
$$+ (X_m - \theta X_{mj})A_m + \theta A_j = A_0;$$
$$(X_1 - \theta X_{1j})C_1 + (X_2 - \theta X_{2j})C_2 + \ldots + (X_m - \theta X_{mj})C_m +$$
$$+ \theta C_j = Z(X_0) - \theta(Z_j - C_j). \qquad (9.56)$$

Агар (9.55) даги A_1, A_2, ..., A_m, A_j векторлар олдидаги коэффициентлар манфий булмаса, $Z = Z(X_0) - \theta(Z_j - C_j)$ га мос келувчи янги режага эга буламиз.

Маълумки, X_1, X_2, ..., X_m номаълумлар мусбат хамда $\theta > 0$ учун (9.55) даги A_1, A_2, ..., A_m, A_j векторларнинг хар бири олдидаги коэффициентларнинг манфий булмаслигига эришиш мумкин.

Теореманинг шартига кура

$$Z_j - C_j > 0,$$

шунинг учун

$$Z(X) = Z = Z_0 - \theta(Z_j - C_j) < Z_0 = Z(X_0).$$

Теорема исбот килинди.

2-теорема. *Агар $X = (X_1, \ldots, X_m)$ таянч режа учун $Z_j - C_j \leq 0$ уринли булса, бу режа оптимал режа булади.*

Бу теореманинг исботи 1-теореманинг исботи каби булади.

Бу теоремадан куйидаги натижалар келиб чикади.

1-натижа. $Z_j - C_j \leqslant 0$ тенгсизлик чизиқли программалаштириш масаласининг минимал қийматининг режасини тузиш учун оптималлик шарти бўлади. $Z_j - C_j$ айирма эса режанинг баҳоси дейилади.

Шундай қилиб, масаланинг минимал қийматининг оптимал режасини тузиш учун $Z_j - C_j$ айирманинг мусбат бўлмаслиги етарли ва зарурдир.

2-натижа. $Z_j - C_j \geqslant 0$ тенгсизлик чизиқли программалаштириш масаласининг максимум қийматининг режасини тузиш учун оптималлик шарти бўлади. Шундай қилиб, масаланинг максимум қийматининг оптимал режасини тузиш учун $Z_j - C_j$ айирманинг манфий бўлмаслиги етарли ва зарурдир.

3. Симплекс усул алгоритми

Юқоридаги 1- ва 2-теоремаларга асосан, берилган бошланғич режадан бошлаб таянч режалар кетма-кетлигини ҳосил қилиб бориб, бу жараённи оптимал ечим топилгунча давом эттириш мумкин.

Фараз қилайлик,

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_m)$$

масаланинг бошланғич таянч режаси, $A_1, A_2, \dots, A_m$ шу режага мос келувчи ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмаган векторлар тизими бўлсин. Бу векторлардан ташкил топган $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ матрицани B билан белгилаймиз. У ҳолда $BX = A_0$. Бундан

$$X = B^{-1} \cdot A_0.$$

Умумий кўринишда

$$X_j = B^{-1} A_j$$

келиб чиқади. Бу ерда

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_m),\ X_j = (X_{1j}, X_{2j}, \dots, X_{mj})$$

вектор устунлар.

Симплекс жараённи бошлашдан олдин масаланинг векторларини қуйидагича гуруҳлаймиз:

$$(A_0 | A_1, A_2, \dots, A_m | A_{m+1}, \dots, A_n)$$

ёки

$$(A_0 | B | A_{m+1}, \dots, A_n). \qquad (9.57)$$

Элементлари айрим қисмлардан иборат бўлган (9.57) матрицани B^{-1} га кўпайтирамиз ва қуйидагига эга бўламиз:

$$(B^{-1}A_0|B^{-1}B|B^{-1}A_{m+1},\ \dots,\ B^{-1}A_n)$$

ёки

$$(X|I_m|X_{m+1},\ \dots,\ X_n).$$

Сўнгра ҳар бир $j=1,n$ учун Z_j-C_j ни ҳисоблаймиз. Агар барча j лар учун $Z_j-C_j\geqslant 0$ бўлса, 2-теоремага асосан топилган таянч режа оптимал режа бўлади. Агар Z_j-C_j айирма баъзан j лар учун мусбат бўлса, 1-теоремага асосан топилган таянч режа оптимал режа бўлмайди ва бу режани оптимал режага яқин бўлган бошқа режа билан алмаштириш керак бўлади.

Берилган масалада дастлабки $A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_m$ векторлар m ўлчовли вектор фазодаги базисни ташкил қилсин, яъни $B=(A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_m)=I_m$ бўлсин, бу ерда I_m матрица m ўлчовли бирлик матрица. Бу ҳолда $B^{-1}\ B=I_m$ бўлганлиги сабабли

$$X=A_0 \text{ ва } X_j=A_j \text{ бўлади.}$$

Масаланинг берилганларини 9.2- жадвалга жойлаштирамиз (чизиқли тизими $AX=B$ кўринишда берилган масала учун $x_i=b_i,\ x_{ij}=a_{ij}$ деб қабул қиламиз).

Z_j ифода X вектор-устуннинг C вектор-устунга скаляр кўпайтмасидан иборат, яъни

$$Z_0=\sum_{i=1}^{m} C_i\cdot X_i,$$

$$Z_j=\sum_{i=1}^{m} C_i\cdot X_{ij}$$

Z_0 ва Z_j-C_j ларни жадвалнинг $m+1$ — қаторидаги тегишли устунларга жойлаштирамиз. Базис векторлар учун ҳар доим $Z_j=C_j=0$ бўлади.

Агар $Z_j-C_j\leqslant 0$ бўлса,

$$X=(X_1=b_1,\ X_2=b_2;\ \dots,\ X_m=b_m)$$

оптимал режа бўлади. Бу режадаги чизиқли функциянинг қиймати Z_0 га тенг.

9.2- жадвал

Ҳисоблашнинг биринчи итерацияси

i	Базис вектор	C	A_0 (режа)	C_1	C_2	…	C_m	C_{m+1}	…	C_n
				A_1	A_2	…	A_m	A_{m+1}	…	A_n
1	A_1	C_1	b_1	1	0	…	0	$X_{1,m+1}$	…	X_{1n}
2	A_1	C_2	b_2	0	1	…	0	$X_{2,m+1}$	…	X_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	A_m	C_m	b_m	0	0	…	1	$X_{m,m+1}$	…	X_{mn}
$m+1$	Z_j-C_j	Z_j-C_j	Z_0	Z_1-C_1	Z_2-C_2	…	Z_m-C_m	$Z_{m+1}-C_{m+1}$	…	Z_n-C_n

Энди камида битта j учун $Z_j - C_j < 0$ булсин деб фараз қилайлик. Бу ҳолда топилган таянч режани оптимал режага яқинроқ режа билан алмаштириш керак, бунинг учун

$$\max_{Z_j - C_j > 0} (Z_j - C_j) = Z_k - C_k = \Delta_k$$

шартни қаноатлантирувчи A_k векторни базисга киритиб, базисдан

$$\min_{X_{ik} > 0} \frac{X_i}{X_{ik}} = \frac{X_l}{X_{lk}} = \theta$$

шартни қаноатлантирувчи A_l векторни чиқариш керак булади.

Янги режа учун $A_1, A_2, \ldots, A_{l-1}, A_{l+1}, \ldots, A_m, A_k$ векторлар базис векторлар булади. Янги таянч режани ҳосил қилиш ва унинг оптимал режа эканлигини текшириш учун A_0 ва A_j векторларнинг базис векторлар орқали ёйилмасини ҳосил қилиш керак.

Дастлабки базис векторларидан тузилган матрица бирлик матрицадан иборат эди, яъни

$$(A_1, A_2, \ldots, A_m = I).$$

Шунинг учун

$$A_0 = X_1 A_1 + X_2 A_2 + \ldots + X_l A_l + \ldots + X_m A_m, \tag{9.58}$$

$$A_k = X_{1k} A_1 + X_{2k} A_2 + \ldots + X_{lk} A_l + \ldots + X_{mk} A_m; \tag{9.59}$$

$$A_j = X_{1j} A_1 + X_{2j} A_2 + \ldots + X_{lj} A_l + \ldots + X_{mj} A_m \tag{9.60}$$

(9.59) дан

$$A_l = \frac{1}{x_{lk}} (A_k - X_{1k} A_1 - X_{2k} A - \ldots - X_{mk} A_m) . \tag{9.61}$$

A_l нинг бу қийматини (9.58) га қуямиз, натижада қуйидагига эга буламиз:

$$A_0 = X_1 A_1 + X_2 A_2 + \ldots +$$

$$+ \left[\frac{X_l}{X_{lk}} (A_k - {}_1 k A_1 - X_{2k} A_2 - \ldots - X_{mk} A_m) \right] + \ldots + X_m A_m$$

ёки

$$A_0 = \left(X_1 - \frac{X_l}{X_{lk}} X_{1k} \right) A_1 + \ldots + \frac{X_l}{X_{lk}} A_k + \ldots + \left(X_m - \frac{X_l}{X_{lk}} X_{mk} \right) A_m$$

Шундай қилиб, $X_1 = (X_1', X_2', \ldots, X_m')$ янги таянч режа қуйидаги формулалар орқали ҳисобланади

$$\begin{cases} X'_i = X_i - \dfrac{X_l}{X_{lk}} X_{ik} \quad (i \neq l); \\ X'_k = \dfrac{X_l}{X_{lk}}. \end{cases} \tag{9.62}$$

Худди шунингдек, (9.61) ни (9.60) га қўйиб A_j векторнинг янги базис векторлар бўйича ёйилмасини ҳосил қиламиз:

$$A_j = X'_{1j}A_1 + X'_{2j}A_2 + \ldots + X'_{kj}A_k + \ldots + X'_{mj}A_m$$

бу ерда

$$\begin{cases} X'_{ij} = X_{ij} - \dfrac{X_{lj}}{X_{lk}} X_{ik}, \\ X'_{kj} = \dfrac{X_{lj}}{X_{lk}}. \end{cases} \tag{9.63}$$

(9.62) ва (9.63) ни бирлаштириб, $j=0, 1, 2, \ldots, n$ лар учун янги таянч режани ва A_j векторларнинг янги базис векторлар бўйича ёйилмасининг формуласини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} X'_{ij} = X_{ij} - \dfrac{X_{lj}}{X_{lk}} X_{ik}; \\ X'_{kj} = \dfrac{X_{lj}}{X_{lk}}. \end{cases} \tag{9.64}$$

Бу формула Жордан — Гауссниң тўла ажратиш формуласидир. $j=k$ да

$$X'_{ik} = X_{ik} - \frac{X_{lk}}{X_{lk}} X_{ik} = 0;$$

$$X'_{lk} = \frac{X_{lk}}{X_{lk}} = 1.$$

Янги базисга киритилаётган векторнинг X_{lk} га (бундан кейин бу элементни аниқловчи элемент деб атаймиз) мос келувчи элементи 1 га тенг бўлиб, қолган элементлари 0 га тенг бўлади.

Янги режа учун

$$Z'_j - C_j = C_1X'_{1j} + C_2X'_{2j} + \ldots + C_mX'_{mj} - C_j$$

бўлганлиги сабабли (9.63) дан фойдаланиб қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$Z_j-C_j=Z_j-C_j-\frac{X_{ij}}{X_{ik}}(Z_k-C_k). \qquad (9.65)$$

Худди шунингдек, X_i' нинг қийматини (9.62) дан

$$Z_0'=C_1X_1'+\ldots+C_kX_k'+\ldots+C_mX_m'$$

ифодага қўйиб

$$Z_0=Z_0-\frac{X_{ij}}{X_{ik}}(Z_k-C_k) \qquad (9.66)$$

ни топамиз.

Юқоридагилардан хулоса қилиб айтганда, симплекс жадвал устида тартиб билан қуйидаги ишларни бажариш керак:

1. Ҳар бир j учун $Z_j-C_j=\Delta_j$ лар текширилади. Агар барча j лар учун $\Delta_j\leqslant 0$ бўлса, топилган режа оптимал режа бўлади.

2. Агар бирорта j учун $Z_j-C_j>0$ бўлса, базисга киритиладиган вектор танланади. Базисга

$$\max_{\Delta_j>0}\Delta_j=\Delta_k$$

шартни қаноатлантирувчи A_k вектор киритилади.

3. Базисдан чиқарилиши керак бўлган вектор аниқланади. Базисдан

$$\min_{X_{ik}>0}\left(\frac{X_i}{X_{ik}}\right)=\frac{X_l}{X_{lk}}$$

га мос келувчи A_l вектор чиқарилади. Агар A_k векторга мос келувчи барча $X_{ik}\leqslant 0$ бўлса, чизиқли функция қуйидан чегараланмаган бўлади;

4. Аниқловчи элемент $X_{lk}>0$ танлангандан сўнг симплекс жадвал (9.63) формула орқали алмаштирилади.

Шундай йўл билан ҳар бир итерацияда янги таянч режа топилади. 1- ва 2- теоремага асосан симплекс усул ё оптимал режани беради ёки масаладаги чизиқли функциянинг чекли минимумга эга эмаслигини аниқлайди.

Мисол.

$$\begin{aligned} x_1+x_4-2x_5&=1;\\ x_2-2x_4+x_5&=2; \end{aligned} \qquad (9.67)$$

$$\begin{cases} X'_i = X_i - \dfrac{x_i}{x_{ik}} X_{ik} & (i \neq l); \\ X'_k = \dfrac{X_l}{X_{lk}}. \end{cases} \tag{9.62}$$

Худди шунингдек, (9.61) ни (9.60) га қўйиб A_j векторнинг янги базис векторлар бўйича ёйилмасини ҳосил қиламиз:

$$A_j = X'_{1j}A_1 + X'_{2j}A_2 + \dots + X'_{kj}A_j + \dots + X'_{mj}A_m$$

бу ерда

$$\begin{cases} X'_{ij} = X_{ij} - \dfrac{X_{lj}}{X_{lk}} X_{ik}; \\ X'_{kj} = \dfrac{X_{lj}}{X_{lk}}. \end{cases} \tag{9.63}$$

(9.62) ва (9.63) ни бирлаштириб, $j = 0, 1, 2, \dots, h$ лар учун янги таянч режани ва A_j векторларнинг янги базис векторлар бўйича ёйилмасининг формуласини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} X'_{ij} = X_{ij} - \dfrac{X_{lj}}{X_{lk}} X_{ik}; \\ X'_{lj} = \dfrac{X_{lj}}{X_{lk}}. \end{cases} \tag{9.64}$$

Бу формула Жордан — Гausснинг тўла ажратиш формуласидир. $j = k$ да

$$X'_{ik} = X_{ik} - \frac{X_{lk}}{X_{lk}} X_{ik} = 0;$$

$$X'_{lk} = \frac{X_{lk}}{X_{lk}} = 1.$$

Янги базисга киритилаётган векторнинг X_{lk} га (бундан кейин бу элементни аниқловчи элемент деб атаймиз) мос келувчи элементи 1 га тенг бўлиб, қолган элементлари 0 га тенг бўлади.

Янги режа учун

$$Z'_j - C_j = C_1X'_{1j} + C_2X'_{2j} + \dots + C_mX'_{mj} - C_j$$

бўлганлиги сабабли (9.63) дан фойдаланиб қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$Z_j' - C_j = Z_j - C_j - \frac{X_{ij}}{X_{ik}}(Z_k - C_k). \tag{9.65}$$

Худди шунингдек, X_i' нинг қийматини (9.62) дан

$$Z_0' = C_1 X_1' + \ldots + C_k X_k' + \ldots + C_m X_m'$$

ифодага қўйиб

$$Z_0 = Z_0 - \frac{X_{ij}}{X_{ik}}(Z_k - C_k) \tag{9.66}$$

ни топамиз.

Юқоридагилардан хулоса қилиб айтганда, симплекс жадвал устида тартиб билан қуйидаги ишларни бажариш керак:

1. Ҳар бир j учун $Z_j - C_j = \Delta_j$ лар текширилади. Агар барча j лар учун $\Delta_j \leqslant 0$ бўлса, топилган режа оптимал режа бўлади.

2. Агар бирорта j учун $Z_j - C_j > 0$ бўлса, базисга киритиладиган вектор танланади. Базисга

$$\max_{\Delta_j > 0} \Delta_j = \Delta_k$$

шартни қаноатлантирувчи A_k вектор киритилади.

3. Базисдан чиқарилиши керак бўлган вектор аниқланади. Базисдан

$$\min_{X_{ik} > 0} \left(\frac{X_i}{X_{ik}} \right) = \frac{X_l}{X_{lk}}$$

га мос келувчи A_l вектор чиқарилади. Агар A_k векторга мос келувчи барча $X_{ik} \leqslant 0$ бўлса, чизиқли функция қуйидан чегараланмаган бўлади;

4. Аниқловчи элемент $X_{lk} > 0$ танлангандан сўнг симплекс жадвал (9.63) формула орқали алмаштирилади.

Шундай йўл билан ҳар бир итерацияда янги таянч режа топилади. 1- ва 2- теоремага асосан симплекс усул ё оптимал режани беради ёки масаладаги чизиқли функциянинг чекли минимумга эга эмаслигини аниқлайди.

Мисол.

$$x_1 + x_4 - 2x_5 = 1;$$
$$x_2 - 2x_4 + x_5 = 2; \tag{9.67}$$

1. Маълум бир жониворни ҳар куни овқатлантириш учун миқдори 9 бирликдан кам бўлмаган T_1 тўйимли модда, миқдори 8 бирликдан кам бўлмаган T_2 тўйимли модда ва миқдори 12 бирликдан кам бўлмаган T_3 тўйимли модда керак бўлсин. Бу тўйимли моддалардан икки хил, яъни O_1 ва O_2 озуқа тайёрлаш керак бўлса ва ҳар бир озуқадаги тўйимли моддаларнинг миқдори ҳамда ҳар бир озуқа бирлигининг нархлари 9.6- жадвалдагидек берилган бўлса, қўйилган масаланинг математик модели тузилсин. Масаланинг ечимларини график ва симплекс усулда топинг.

9.6- жадвал

Тўйимли моддалар	Тўйимли моддалар миқдори	Ҳар бир кг озуқадаги тўйимли модда бирлигининг миқдори	
		0_1	0_2
T1	9	3	1
T2	8	1	2
T3	12	1	6
1 кг озуқанинг нархи (сўмларда)		4	6

2. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масалаларини график усулда ечинг:

а) $\begin{cases} 2x_1+x_2\leqslant 1; \\ x_1+2x_2\leqslant 1; \\ 2x_1-x_2=1 \end{cases}$

$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0.$
$z_{max}=x_1-x_2$

б) $\begin{cases} x_1-x_2\leqslant 1; \\ 5x_1+x_2\leqslant 1, \end{cases}$

$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,$
$z_{max}=x_1+x_2.$

в) $\begin{cases} x_1+x_2\leqslant 12; \\ x_1-x_2\leqslant 8, \end{cases}$

$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,$
$z_{max}=x_1-2x_2$

г) $\begin{cases} 7x_1+2x_2\geqslant 14; \\ -x_1+2x_2\geqslant 2; \\ 7x_1+10x_2\leqslant 28, \end{cases}$

$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,$
$z_{max}=3x_1-2x_2.$

3. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масалалари симплекс усул билан ечилсин.

а) $z_{min}=x_1+6x_2-7x_3+x_4+5x_5;$

$$\begin{cases}5x_1+4x_2-13x_3-2x_4+x_5=20;\\ x_1-x_2+5x_3-x_4+x_5=8,\end{cases}$$

$x_j\geqslant 0 \quad (j=\overline{1,5}).$

б) $z_{min}=2x_1+3x_2+5/2x_3;$

$$\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3\leqslant 6;\\ 2x_1+4x_2+3x_3\leqslant 16;\\ 3x_1+4x_2+2x_3\leqslant 12,\end{cases}$$

$x_j\geqslant 0 \quad (j=\overline{1,3}).$

в) $z_{min}=-x_1+x_2;$

$$\begin{cases}-x_1+x_2+x_3=1;\\ x_1-2x_2+x_4=2;\end{cases}$$

$x_j\geqslant 0 \quad (j=\overline{1,4}).$

9.9-§. НАҚЛИЁТ МАСАЛАСИ

Нақлиёт (транспорт, улов) масаласи чизиқли программалаштириш масалалари ичида назарий ва амалий жиҳатдан энг яхши ўзлаштирилган масалалардан бири бўлиб, ундан саноат ва қишлоқ хўжалик маҳсулотларини ташишни оптимал режалаштириш ишларида муваффақиятли равишда фойдаланилмоқда.

Нақлиёт масаласи махсус чизиқли программалаштириш масалалари синфига тегишли бўлиб, унинг чегараловчи шартларидаги коэффициентлардан тузилган (a_{ij}) матрицанинг элементлари 0 ва 1 рақамларидан иборат бўлади ва ҳар бир устунда фақат иккита элемент 0 дан фарқли, қолганлари эса 0 га тенг бўлади.

Нақлиёт масаласининг математик модели ва унинг иқтисодий маъноси билан танишайлик.

Наклиёт масаласининг математик модели ва иктисодий маъноси

Фараз килайлик, m та $A_1, A_2, \ldots, A_m$ пунктларда бир хил маҳсулот ишлаб чикарилсин. Маълум бир давр ичида ҳар бир A_i пунктда ишлаб чикарилган маҳсулотнинг микдори a_i га тенг булсин. Ишлаб чикарилган маҳсулотлар $B_1, B_2, \ldots, B_n$ пунктларда истеъмол килинсин ҳамда ҳар бир B_j пунктнинг шу давр ичида маҳсулотга булган талаби b_j ($j = \overline{1, n}$) га тенг булсин. $A_1, A_2, \ldots, A_m$ пунктларда ишлаб чикарилган маҳсулотларнинг умумий микдори $B_1, B_2, \ldots, B_n$ пунктларнинг маҳсулотга булган талабларининг умумий микдорига тенг, яъни

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

деб фараз киламиз. Ҳар бир ишлаб чикариш пункти A_i дан ҳар бир истеъмол килувчи пунктга маҳсулот ташиш имконияти булсин ва B_j гача бирлик маҳсулотни олиб бориш учун сарф килинадиган харажат C_{ij} пул бирлигига тенг булсин.

X_{ij} билан режалаштирилган давр ичида A_i пунктдан B_j пунктга олиб бориладиган маҳсулотнинг умумий микдорини белгилаймиз. Наклиёт масаласининг берилган параметрларини 9.7- жадвалга жойлаштирамиз.

9.7- жадвал

Ишлаб чиқариш пунктлари	Ишлаб чиқарилган маҳсулот	Истеъмол пунктлари			
		B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	...	x_{1n} c_{1n}
A_2	a_2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	...	x_{2n} c_{2n}
A_1	a_1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	...	x_{1n} c_{1n}
A_m	a_m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	...	x_{mn} c_{mn}
Маҳсулотга бўлган талаб		b_1	b_2	...	b_n

Ҳар бир истеъмол қилувчи пунктни ҳар бир ишлаб чиқариш пунктига шундай бириктириш керакки:

1) ҳар бир ишлаб чиқариш пунктидаги маҳсулотлар тўлиқ тақсимлансин;

2) ҳар бир истеъмол қилувчи пунктнинг талаби тўлиқ қаноатлантирилсин;

3) сарф қилинган нақлиёт харажатларининг жами минимал бўлсин.

Масаланинг 1- шартини қуйидаги тенгламалар тизими орқали ифодалаш мумкин:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}=a_1; \\ x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}=a_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}=a_m. \end{cases} \tag{9.70}$$

Масаланинг 2- шарти эса қуйидаги тенгламалар тизими кўринишида ифодаланади:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{m1}=b_1; \\ x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{m2}=b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{1n}+x_{2n}+\ldots+x_{mn}=b_n. \end{cases} \tag{9.71}$$

Масаланинг иқтисодий маъносига кўра, номаълумлар манфий бўлмаслиги керак:

$$x_{ij}\geqslant 0 \quad (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}). \tag{9.72}$$

Масаланинг 3- шарти қуйидаги чизиқли функция орқали ифодаланади:

$$z_{\min}=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\ldots+c_{mn}x_{mn}. \tag{9.73}$$

(9.70) — (9.73) шартлар биргаликда нақлиёт масаласининг м а т е м а т и к м о д е л и деб аталади.

Нақлиёт масаласининг математик моделини йиғинди кўринишда ҳам ифодалаш мумкин:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i; \tag{9.74}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j; \tag{9.75}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \tag{9.76}$$

$$z_{min} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}. \tag{9.77}$$

9.10-§. НАҚЛИЁТ МАСАЛАСИНИНГ ХУСУСИЯТЛАРИ

Биз юқорида наклиёт масаласи математик моделининг (9.70) — (9.77) кўринишда ёзилишини кўрдик. Масаладаги ҳар бир a_i, b_j ва c_{ij} лар манфий бўлмаган сонлардир. Агар бу масалада

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = A \tag{9.78}$$

тенглик ўринли бўлса, яъни ишлаб чиқарилган маҳсулотлар йиғиндиси унга бўлган талаблар йиғиндисига тенг бўлса, у ҳолда бу масалани *ёпиқ моделли наклиёт масаласи* деб атаймиз.

1- Теорема. *Ҳар қандай ёпиқ моделли наклиёт масаласи ечимга эга.*

Исботи. Шартга кўра

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = A > 0.$$

У ҳолда $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{A}$ берилган масаланинг режаси бўлади. Ҳақиқатан ҳам

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{A} \geqslant 0, \text{ чунки } a_i \geqslant 0, b_j \geqslant 0, A > 0;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{A} = \frac{a_i}{A} \sum_{j=1}^{n} b_j = a_i;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum \frac{a_i b_j}{A} = \frac{b_j}{A} \sum_{i=1}^{m} a_i = b_j.$$

Демак, $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{A}$ наклиёт масаласининг ҳамма шартларини қаноатлантиради. Шунинг учун бу миқдор масаланинг режаси бўлади.

2- теорема. *Агар масаладаги барча a_i ва b_j лар бутун* *сонлардан иборат булса, наклиёт масаласининг ечими бутун сондан иборат булади.*

Теореманинг исботини наклиёт масаласининг бошлангич таянч режаларини топиш усулларида куриш мумкин.

3-теорема. *Ихтиёрий наклиёт масаласининг оптимал режаси мавжуддир.*

Исботи. 1-теоремага асосан масаланинг камида битта режаси мавжуддир. (9.74), (9.75) шартлардаги коэффициентлар ва барча a_i, b_j лар мусбат бутун сонлар булганлиги сабабли x_{ij} юкоридан чегараланган булади ва унинг киймати мос a_i ва b_j ларнинг кийматидан ошмайди.

Шундай килиб, наклиёт масаласи режаларидан ташкил топган туплам буш туплам булмайди, у чегараланган туплам булади. Демак, наклиёт масаласи оптимал режага эга.

9.11-§. НАКЛИЁТ МАСАЛАСИНИНГ БОШЛАНГИЧ ТАЯНЧ РЕЖАСИНИ ТОПИШ УСУЛЛАРИ

Бошка чизикли программалаштириш масалалари каби наклиёт масаласини ечиш жараёни ҳам бошлангич таянч режани топишдан бошланади. Наклиёт масаласининг бошлангич таянч режасини топиш усуллари куп булиб, куйида биз «Шимоли-гарбий бурчак» усули ва «устундаги минимал элемент» усули билан танишамиз.

А. «Шимоли-гарбий бурчак» усули.

Фараз килайлик, наклиёт масаласининг шартлари куйидаги 9.8- жадвалга жойлаштирилган булсин.

9.8-жадвал

a_i \ b_j	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}
...	...	...	...	...
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}

«Шимоли-ғарбий бурчак» усулининг ғояси қуйидагилардан иборат:

Энг аввал шимоли-ғарбда жойлашган x_{11} номаълумнинг қийматини аниқлаймиз:

$x_{11}=\min(a_1, b_1)$. Агар $a_1 \leqslant b_1$ бўлса, $x_{11}=a_1$ ва $x_{1j}=0$ агар $b_1 \leqslant a_1$ бўлса, $x_{11}=b_1$ ва $x_{i1}=0$ бўлади.

Фараз қилайлик, биринчи ҳол бажарилсин. Бу ҳолда 1-қадамдан сўнг масаланинг ечимларидан ташкил топган матрица қуйидаги кўринишда бўлади:

1-қадам.

$$\begin{array}{cccc|c} x_{11}=a_1 & 0 & 0 & \dots 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots x_{2n} & a_2 \\ & & & & \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \dots x_{mn} & a_m \\ \hline b_1-a_1 & b_2 & b_3 & \dots b_n & \end{array} \tag{9.79}$$

Энди иккинчи қатордаги биринчи элементнинг қийматини топамиз:

Агар $a_2<b_1-a_1$ бўлса, $x_{21}=b_1-a_1$ ва $x_{i1}=0$.

Агар $a_2<b_1-a_1$ бўлса, $x_{21}=a_2$ ва $x_{2j}=0$.

Фараз қилайлик, матрица учун ҳам 1-ҳол бажарилсин, у ҳолда

2-қадам.

$$\begin{array}{cccc|c} x_{11}=a_1 & 0 & 0 & \dots 0 & 0 \\ x_{21}=b_1-a_1 & x_{22} & x_{23} & \dots x_{2n} & a_2-b_1+a_1 \\ 0 & x_{32} & x_{33} & \dots x_{3n} & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & x_{m2} & x_{m3} & \dots x_{mn} & a_m \\ \hline 0 & b_2 & b_3 & \dots b_n & \end{array}$$

Худди шундай йўл билан давом этиб, ҳар бир қадамда маълум бир x_{ij} нинг қиймати топилади. $x_{ij}=\min(a_i b_j)$ ва a_i ёки b_i нолга айлантирилади. Бу жараён барча a_i ва b_j лар нолга айлангунча такрорланади. Маълумки, ҳар бир x_{ij} нинг қиймати a_i ва b_j ларнинг турли комбинацияларини айириш ёки қўшиш ёрдамида топилади. Шунинг учун a_i ва b_j лар бутун бўлганда топилган таянч режа бутун сонли булади. Бундан ташқари, юқоридаги 2- теоремага асосан таянч режадаги нолдан фарқли x_{ij} номаълумларнинг сони $n+m-1$ дан ошмайди.

Мисол. Қуйидаги нақлиёт масаласининг бошланғич режасини топинг:

9.9- жадвал

a_i \ b_j	3	6	2	1
4	2	5	9	5
2	8	3	5	8
3	7	3	1	4
3	5	9	7	2

Е ч и ш. 1- қ а д а м. $x_{11}=\min(4,3)=3$.
Шунинг учун $b_1=0$ ва $a_1=4-3=1$ га ўзгаради. $x_{21}=$ $=x_{31}=x_{41}=0$.

2- қ а д а м. $x_{12}=\min(1,6)=1$.
Бунда $a_1=0$ ва $b_2=6-1=5$ га ўзгаради, $x_{13}=x_{14}=0$.

3- қ а д а м. $x_{22}=\min(2,5)=2$.
Бунда $a_2=0$ ва $b_2=5-2=3$ га ўзгаради, ҳамда $x_{23}=$ $=x_{24}=0$ бўлади.

4- қ а д а м. $x_{32}=\mathrm{mm}(3,3)=3$.
Бунда $a_3=b_2=0$ бўлади ҳамда $x_{33}=x_{34}=0$, $b_{42}=0$.

5- қ а д а м. $x_{43}=0$, $a_4=3-2=1$ га ўзгаради.

6- қ а д а м. $x_{44}=\min(1,1)=1$.
Бунда $a_4=b_4=0$ бўлади ва масалани ечиш жараёни тугайди.

Топилган режа қуйидаги 9.10- жадвал кўринишида бўлади.

9.10- жадвал

a_i \ b_j	3	6	2	1
4	2 3	5 1	9	5
2	8	3 2	5	8
3	7	3 3	1	4
3	5	9	7 2	2 1

У ҳолда

$$x_{21}=\min(a_2,\ b_1)=\min(11{,}5)=5.$$

Демак, $x_{21}=b_1=5$. Шунинг учун $x_{i1}=0$ бўлади, яъни 1- устун ўчирилади. Натижада

$$C''=\begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

матрица ҳосил бўлади. Бу матрица учун

$$b_1^{(1)}=5-5=0,$$

$$a_2^{(1)}=11-5=6\,.$$

3. C'' матрицанинг энг кичик элементи

$$\min C_{ij}=C_{14}=3\,.$$

Шунинг учун $x_{14}=\min(a_1,\ b_1)=\min(11{,}7)=7.$
Бу ерда 4- устун ўчирилади ва $a_1^{(1)}=a_1-x_{14}=11-7=4$ бўлади. Натижада янги

$$C'''=\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

матрица ҳосил бўлади.

4. C''' матрицанинг элементлари орасида энг кичиги топилади:

$$\min C''_{ij}=C_{22}=4.$$

Бу ҳолда

$$x_{22}=\min(a_2^{(1)},\ b_2)=\min(6{,}9)=6.$$

Натижада 2- қатор ўчирилади ҳамда b_2 нинг қиймати

$$b_2^{(1)}=b_2-x_{22}=9-6=3$$

га ўзгаради ва янги C^{IV} матрица-қатор ҳосил бўлади:

$$C^{IV}=(8{,}5).$$

Шундай йўл билан 5- қаторда $x_{13}=1$ топилиб, 3- устун ўчирилади. Ҳосил бўлган x матрица қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$x=\begin{Vmatrix}0 & 3 & 1 & 7\\ 5 & 6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 8 & 0\end{Vmatrix}$$

Бу матрица берилган наклиёт масаласининг таянч режасидир.

9.12-§. НАҚЛИЁТ МАСАЛАСИНИНГ ОПТИМАЛ ЕЧИМИНИ ТОПИШНИНГ ПОТЕНЦИАЛ УСУЛИ

Потенциал усул наклиёт масаласини ечиш учун қулланилган биринчи универсал усул бўлиб, у 1949 йилда рус олимлари Л. В. Канторович ва М. К. Гавурин томонларидан яратилган. Бу усулнинг асосий ғояси наклиёт масаласига мослаштирилган симплекс усул бўлиб, биринчи марта чизиқли программалаштириш масалаларини ечиш усулларига боғлиқ бўлмаган ҳолда тасвирланган.

Потенциал усулда ечимни излаш бошланғич таянч режадан бошланиб, оптимал ечимга яқинроқ бўлган янги таянч режаларга ўтиб борилади ва чекли сондаги итерациядан сўнг масаланинг оптимал ечими топилади. Ҳар бир итерацияда топилган таянч режа оптимал режа эканини текшириш учун ҳар бир ишлаб чиқарувчи (A_i) ва истеъмол қилувчи (B_j) пунктга унинг потенциали деб аталувчи миқдорлар U_i ва V_j мос қўйилади. Бу потенциаллар шундай танланадики, бунда ўзаро боғланган A_i ва B_j пунктларга мос келувчи потенциаллар йиғиндиси C_{ij} га (A_i дан B_j га бирлик маҳсулотни ташиш учун сарф қилинадиган наклиёт харажатига) тенг бўлиши керак

Теорема. *Агар $X=(X_{ij})$ режа наклиёт масаласининг оптимал режаси бўлса, у ҳолда унга*

$$U_i+V_j=C_{ij}\qquad (X_{ij}>0); \tag{9.80}$$

$$U_i+V_j\leqslant C_{ij}\qquad (X_{ij}=0) \tag{9.81}$$

шартларни қаноатлантирувчи $n+m$ та U_i ва V_j потенциаллар мос келади.

Исбот. Фараз қилайлик, $X=(X_{ij})$ режа учун (9.80), (9.81) шартлар ўринли бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $X'=(X'_{ij})$ режа учун

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X'_{ij} \geqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(U_i+V_j)X'_{ij} = \sum_{i=1}^{m} U_i \sum_{j=1}^{n} X'_{ij} +$$

$$+\sum_{j=1}^{n} V_j \sum_{i=1}^{m} X'_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i U_i + \sum_{j=1}^{n} b_j V_j = \sum_{i=1}^{m} U_i \sum_{j=1}^{n} X_{ij} +$$

$$+\sum_{j=1}^{n} V_j \sum_{i=1}^{m} X_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(U_i+V_j)X_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}.$$

Демак, X режадаги Y чизикли функциянинг киймати унинг ихтиёрий X' режадаги кийматидан кичик бўлаяпти. Шу сабабли X режа оптимал режа булади.

Шундай килиб, потенциаллар усулининг алгоритми куйидагидан иборат.

1. Юкорида курилган усулларнинг биридан фойдаланиб бошлангич режа топилади.

2. Топилган режанинг оптимал эканлигини текшириш учун потенциал тизим тузилади. Бунинг учун (9.79) формуладан фойдаланиб хар бир тўлдирилган катакча учун (9.80) кўринишда потенциал тенгламалар тузилади. Маълумки, наклиёт масаласининг режадаги 0 дан фаркли бўлган ўзгарувчилари сони $n+m-1$ та. Демак, потенциал тенгламалар тизими $n+m$ та, номаълумлар эса $n+m+$ $+1$ та. Бу тизимда номаълумлар сони тенгламалар сонидан ортик бўлганлиги сабабли потенциалларнинг сон кийматини топиш учун улардан ихтиёрий биттасига ихтиёрий киймат (соддалик учун ноль киймат) бериб, колганларини бирин-кетин топиш мумкин.

Фараз килайлик, U_i маълум булсин, у холда (9.80) дан V_j топилади:

$$V_j = C_{ij} - U_i.$$

Агар V_j маълум бўлса, у холда U_i куйидагича топилади:

$$U_i = C_{ij} - V_j.$$

Барча потенциалларнинг сон кийматини аниклаб бўлгач, хамма бўш катакчалар учун

$$\Delta_{ij} = U_i + V_j - C_{ij} \qquad (9.82)$$

хисобланади. Агар барча i ва j лар учун $\Delta_{ij} \leqslant 0$ ўринли булса, топилган бошланғич режа оптимал режа бўлади.

3. Агар i ва j ларнинг камида битта қиймати учун $\Delta_{ij} \geqslant 0$ бўлса, бошланғич таянч режа алмаштирилади. Бунинг учун

$$\max_{\Delta_{ij} > 0} \Delta_{ij} = \Delta_{iK}$$

шартни қаноатлантирувчи (iK) катакча тўлдирилади (X_{ik} номаълум базисга киритилади). $X_{iK}=0$ деб фараз қилиб (IK катакчага θ киритилади. Сўнгра (IK) катакчадан бошлаб соат мили бўйлаб ҳаракат қилиб тўлдирилган катакчаларга тартиб билан $(-)$ ва $(+)$ ишоралар қўйиб борилади. Натижада ёпиқ K контур ҳосил бўлади:

$$K = K^{-1} \cup K^{+1}$$

бу ерда K^{-}, K^{+} — $(=)$ ва $(+)$ ишорали катакчаларни ўз ичига олувчи ярим контурлар. Қуйидаги формула билан θ нинг сон қиймати топилади:

$$\theta = \min_{X_{ij} \in K^{-}} X_{ij} = X_{pq}. \tag{9.83}$$

4. Янги таянч режа ҳисобланади:

$$\begin{aligned}
&X'_{ik} = 0;\\
&X'_{pq} = 0;\\
&X'_{ij} = X_{ij} \quad \text{агар } X_{ij} \in K;\\
&X'_{ij} = X_{ij} + \theta \quad \text{агар } X_{ij} \in K^{+};\\
&X'_{ij} = X_{ij} - \theta \quad \text{агар } X_{ij} \in K^{-}
\end{aligned}$$

Янги таянч режадаги тўлдирилган катакчалар сони $n + m - 1$ та бўлганлиги сабабли (9.83) шартни қаноатлантирувчи катакчалар бирдан ортиқ бўлса, улардан биттасини бўш катакчага айлантириб, қолган катакчалардаги таксимотни θ га тенг деб қабул қилинади. Топилган янги режа учун яна такрор потенциаллар тизими топилади ва янги режанинг оптимал бўлишлик шарти текширилади. Агар янги таянч режа оптимал бўлмаса, у ҳолда яна қайтадан 3-, 4- бандларда бажарилган ишлар такрорланади. Такрорланиш жараёни оптимал режа топилгунча, яъни барча бўш катакчалар учун $\Delta_{ij} = U_i + V_j - C_{ij}$ шарт бажарилгунча такрорланади.

Мисол. Берилган нақлиёт масаласини потенциал усули билан ечинг.

$a_i \setminus b_j$	200	200	100	100	250	U_i
100	10 $100-\theta$	7 $\boxed{8}$	4 $\boxed{9}$	1 $\boxed{11}$	4 $\boxed{5}$	0
250	2 $100+\theta$	7 $150-\theta$	10 $\boxed{-5}$	6 $\boxed{-2}$	11 $\boxed{-12}$	−8
200	8 $\boxed{-8}$	5 $50+\theta$	3 100	2 $50-\theta$	2 $\boxed{-3}$	−10
300	11 $\boxed{3}$	8 $\boxed{11}$	12 $\boxed{5}$	16 50	13 250	4
V_j	10	15	13	12	9	

Ечиш. 1. Бошланғич таянч режани «Шимоли-ғарбий бурчак» усули билан топамиз.

2. Ҳар бир тўлдирилган катакчалар учун потенциал тенгламалар тузиб, қуйидаги тизимни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} &U_1+V_1=10, && U_3+V_3=3;\\ &U_2+V_1=2, && U_3+V_4=2;\\ &U_2+V_2=7, && U_4+V_4=16;\\ &U_3+V_2=5, && U_4+V_5=15. \end{aligned}$$

Бу тизимдаги номаълумлар сони тенгламалар сонидан битта кўп. Шунинг учун ихтиёрий бир потенциални (масалан U_1 ни) 0 га тенг деб қабул қилиб, қолганларини бирин-кетин топиш мумкин.

$$U=(0,\ -8,\ -10,\ 4);$$
$$V=(10,\ 15,\ 13,\ 12,\ 9)$$

3. Ҳар бир бўш катакча учун

$$\Delta_{ij}=U_i+V_j-C_{ij}$$

ни ҳисоблаб уни бўш катакчанинг пастки ўнг бурчагига ёзамиз.

$$\max_{\Delta x_{ij}>0}\Delta_{ij}=\Delta_{14}=\Delta_{24}=11$$

бўлганлиги сабабли (1,4) катакчага (ёки (4,2) катакчага) θ сонни киритамиз ва (1,1), (2,1), (2,2), (3,2), (3,4) катакчаларни ўз ичига олувчи ёпиқ K контурни тузамиз:

$$K=K^{-1}\cup K^{+}.$$

бу ерда (1,1), (2,2), (3,4) $\in K^-$ ва (2,1), (3,2) $\in K^+$

4. θ нинг сон қийматини топамиз:

$$\theta = \max_{x_{ij} \in K^-} X_{ij} = X_{34} = 50.$$

Янги таянч режани аниқлаймиз ва уларни 9.13- жадвалга жойлаштирамиз:

9.13- жадвал

$a_i \setminus b_j$	200	200	100	100	250	U_i
100	10 $50-\theta$	7 $\boxed{8}$	4 $\boxed{9}$	1 $50+\theta$	4 $\boxed{-6}$	0
250	2 $50+\theta$	7 $100-\theta$	10 $\boxed{-10}$	6 $\boxed{-13}$	11 $\boxed{-21}$	−8
200	8 $\boxed{-8}$	5 100	3 100	2 $\boxed{-11}$	2 $\boxed{-14}$	−10
300	11 $\boxed{14}$	8 θ $\boxed{22}$	12	16 $50-\theta$	13 250	15
V_j	10	15	13	1	−2	$\theta=50$

Юқоридаги усул билан потенциаллар тизимини тузиб ва уни ечиб,

$$U = (0,\ -8,\ -10,\ 15);$$
$$V = (10,\ 15,\ 13,\ 1,\ -2)$$

эканини топамиз. Барча бўш катакчалар учун $\Delta_{ij} = U_i + V_j - C_{ij}$ ни ҳисоблаймиз.

9.13- жадвалдан кўринадики,

$$\max_{\Delta X_{ij} > 0} \Delta_{ij} = \Delta_{42} = 22.$$

Шу сабабли (4,2) катакчага θ ни киритиб, жадвалда кўрсатилган ёпиқ K контурни тузамиз ва

$$\theta = \min_{x_{ij} \in K^-} X_{ij} = X_{44} = 50$$

эканлигини топамиз. Сунгра (9.82) формула орқали янги таянч режани топиб 9.14- жадвалга жойлаштирамиз ва юқоридаги амалларни такрорлаймиз.

9.14- жадвал

$a_i \setminus b_j$	200	200	100	100	250	U_i
100	10 $0-\theta$	7 $\boxed{8}$	4 $\boxed{9}$	1 $\boxed{100}$	4 θ $\boxed{-16}$	0
250	2 $200+\theta$	7 $50+\theta$	10 $\boxed{-5}$	6 $\boxed{-13}$	11 $\boxed{1}$	−8
200	8 $\boxed{-8}$	5 100	3 100	2 $\boxed{-11}$	2 $\boxed{8}$	−10
300	11	8 $50+\theta$	12	16	13 $250-\theta$	−7
V_j	10	15	13	1	20	$\theta=0$

9.15- жадвал

$a_i \setminus b_j$	200	200	100	100	250	U_i
100	10 $\boxed{-16}$	7 $\boxed{-3}$	4 $\boxed{-7}$	1 100	4 0	0
250	2 200	7 50	10 $\boxed{-5}$	6 $\boxed{3}$	11 $\boxed{1}$	8
200	8 $\boxed{-8}$	5 $100-\theta$	3 100	2 $\boxed{5}$	2 θ $\boxed{8}$	6
300	11 $\boxed{-8}$	8 $50+\theta$	12 $\boxed{-6}$	16 $\boxed{-6}$	13 $250-\theta$	9
V_i	−6	−1	−3	1	4	$\theta=100$

9.16- жадвал

$a_i \setminus b_j$	200	200	100	100	250	U_i
100	10 $\boxed{-16}$	7 $\boxed{-8}$	4 $\boxed{1}$	1 $100-\theta$	4 $0+\theta$	0
250	2 200	7 $50-\theta$	10 $\boxed{3}$	6 θ $\boxed{3}$	11 $\boxed{1}$	8
200	8 $\boxed{-16}$	5 $\boxed{-8}$	3 100	2 $\boxed{-3}$	2 100	−2
300	11 $\boxed{-8}$	8 $150+\theta$	12 12	16 $\boxed{-6}$	13 $150-\theta$	9
V_i	−6	−1	5	1	4	$\theta=50$

9.17- жадвал

$a_i \setminus b_j$	200	200	100	100	250	U_i
100	10 $\boxed{-13}$	7 $\boxed{-8}$	4 $\boxed{1}$	1 50	4 50	0
250	2 200	7 $\boxed{-11}$	10 $\boxed{0}$	6 50	11 $\boxed{-2}$	5
200	8 $\boxed{-13}$	5 $\boxed{-8}$	3 $100-\theta$	2 $\boxed{-3}$	2 $100+\theta$	−2
300	11 $\boxed{-5}$	8 200	12 θ $\boxed{2}$	16 $\boxed{-6}$	13 $100-\theta$	9
V_i	−3	−1	5	1	4	$\theta=100$

9.18- жадвал

$a_i \setminus b_j$	200	200	100	100	250	U_i
100	10 $\boxed{-15}$	7 $\boxed{-5}$	4 θ $\boxed{1}$	1 50	4 $50-\theta$	0
250	2 200	7 $\boxed{-1}$	10 $\boxed{0}$	6 50	11 $\boxed{-2}$	5
200	8 $\boxed{-11}$	5 $\boxed{-8}$	3 $0-\theta$	2 $\boxed{-3}$	2 $200+\theta$	−2
300	11 $\boxed{-7}$	8 200	12 100	16 $\boxed{-8}$	13 $\boxed{-2}$	7
V_i	−3	1	5	1	4	$\theta=0$

9.19- жадвал

$a_i \setminus b_j$	200	200	100	100	250	U_i
100	10 $\boxed{-13}$	7 $\boxed{-7}$	4 0	1 50	4 50	0
250	2 200	7 $\boxed{-2}$	10 $\boxed{-1}$	6 50	11 $\boxed{-2}$	5
200	8 $\boxed{-11}$	5 $\boxed{-7}$	3 $\boxed{-1}$	2 $\boxed{-3}$	2 200	−2
300	11 $\boxed{-6}$	8 200	12 100	16 $\boxed{-7}$	13 $\boxed{-1}$	8
V_i	−3	0	4	1	4	

9.19- жадвалда келтирилган режа оптимал режа булади, чунки барча буш катакчалар учун

$$\Delta_{ij}=(U_i+V_j-C_{ij})\leqslant 0.$$

Шундай килиб, саккизинчи циклда куйидаги оптимал ечимга эга буламиз:

$$X_{14}=50,\qquad X_{15}=50,$$
$$X_{21}=200,\qquad X_{24}=50,$$
$$X_{35}=200,\qquad X_{42}=200,\qquad X_{43}=100.$$

$$Z_{\min}=50+4\cdot 50+2\cdot 200+6\cdot 50+2\cdot 200+$$
$$+8\cdot 200+12\cdot 100=4150.$$

МАШКЛАР

1. A_1 ва A_2 станцияларга мос равишда 30 ва 40 комплектдан мебель келиб тушди. A_1 вокзалдан B_1, B_2 ва B_3 магазинларга 1 комплектдан мебелни етказиб бериш учун сарфланадиган наклиёт харажати мос равишда 2 сум, 3 сум ва 4 сумни, A_2 вокзалдан эса мос равишда 2 сум, 5 сум ва 3 сумни ташкил килсин. B_1, B_2, B_3 магазинларга мос равишда 15, 25 ва 30 комплектдан мебелни етказиб беришда сарф килинадиган жами наклиёт харажати энг кам буладиган оптимал ечим топилсин

2. Куйидаги наклиёт масаласининг оптимал ечимини потенциал усули билан ечинг:

$$\begin{array}{ll} a_1=70; & b_1=30; \\ a_2=90; & b_2=95; \\ a_3=50, & b_3=25; \\ & b_4=60; \end{array}\qquad C=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 & 4 \\ 6 & 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

X БОБ

ВАРИАЦИОН ҲИСОБ ҲАҚИДА БОШЛАНҒИЧ МАЪЛУМОТЛАР

10.1-§. ОПЕРАТОРЛАР ВА ФУНКЦИОНАЛЛАР ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Бизга олий математика курсидан маълумки, тупламлар орасидаги муносабат асосан акслантириш оркали аникланади. Бирор X тўпламни иккинчи Y тўпламга акслантириш учун X нинг ҳар бир элементини Y тўпламнинг бирор элементига мос келтириш керак. Масалан, $y=x^2$ функция D ҳақиқий сонлар тўпламидаги x элементга манфий бўлмаган ҳақиқий сонлар тўплами D_+ даги y элементни мос қўяди, яъни D тўпламни D_+ тўпламга акс эттиради. Умуман ҳар қандай функция сонларнинг маълум бир тўпламини бошқа бир сонлар тўпламига акс эттиради.

Аммо, бу акс эттиришларни амалга ошириш учун бирор қоида ёки қонун берилиши керак. Масалан, $y=x^2$ функциядаги қоида берилган сонни квадратга кўтаришдан. $y=\sqrt{x}$ функцияда эса илдиздан чиқаришдан иборатдир. Шу қоидаларга кўра тўпламларни акс эттира туриб, биз муайян амални бажарамиз. Бу ҳолда тўпламлар орасидаги акс эттириш жараёнини шартли равишда $y=Ax(X\in X, y\in Y)$ кўринишда ёзиш мумкин.

1-таъриф. Ихтиёрий X ва Y тўпламлар учун акслантириш қоидаси A оператор деб аталади. Агар X тўпламнинг ҳар бир x элементига аниқ A қоида асосида Y тўпламнинг биттагина y элементи мос келтирилган бўлса, X тўпламда A оператор берилган дейилади. X тўплам A операторнинг *аниқлаш соҳаси*, x эса A операторнинг аргументи дейилади.

Демак бирор оператор берилди дейиш учун шу оператор ёрдамида бажарилиши керак бўлган амаллар аниқ ва тўла таърифланиши шарт. Масалан, қуйидаги

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1m}x_m&=y_1;\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2m}x_m&=y_2;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nm}x_m&=y_m \end{aligned} \qquad (10.1)$$

алгебраик тенгламалар тизими ёрдамида m ўлчовли $X=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ вектор n ўлчовли $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ векторга мос келтирилади, яъни R_m векторлар фазоси R_n векторлар фазосига акс эттирилади.

Агар

$$A=\begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1m} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nm} \end{vmatrix} \qquad (10.2)$$

матрица киритилса, (10.1) ни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$y+Ax. \tag{10.3}$$

Курилаётган A оператор маънога эга булиши учун (10.3) дан (10.1) га ўтиш коидаси берилган булиши шарт. Бу қоида матрицани векторга кўпайтириш амали деб аталувчи ушбу

$$Y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \quad (i=1, n)$$

формула билан аникланади.

Маълумки, дифференциал тенгламалар функционал тўпламларни бир-бирига акс эттиради. Масалан,

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2p(t)\frac{dx(t)}{dt} + q(t)x(t) = y(t) \tag{10.4}$$

тенгламада операторни

$$A = \frac{d^2}{dt^2} + 2p\frac{d}{dt} + q$$

ифода ёрдамида киритсак, (10.4) куйидаги куринишга келади

$$Ax = y. \tag{10.5}$$

Демак, $y=Ax$ оператор берилиши учун:

1) иккита X ва Y туплам;

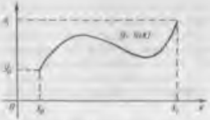
2) A операторнинг аниқ маъноси берилиши керак.

Оператор орқали муҳандислар амалиётида учрайдиган деярли ҳамма тенгламаларни ягона усул билан ифодалаш мумкин. Бу эса ҳар хил масалаларни умумий нуктаи назардан караб, уларни текшириш имконини беради.

2-таъриф. Агар операторнинг қийматлари соҳаси Y ҳақиқий сонлардан иборат, яъни $Y=R$ булса, бундай оператор *функционал* деб аталади.

Масалан, X векторлар тўплами булсин. X дан бирор n векторни белгилаб олиб, функционал сифатида $Ax=(x, n)$ скаляр кўпайтмани мумкин. Шунга ухшаш, функционал сифатида берилган иккита $A(x_0; y_0)$ ва $B(x_1, y_1)$ нуқталарни бирлаштирувчи текисликдаги ёки фазодаги эгри чизиқли ёйнинг узунлиги l ни ҳам олиш мумкин (28- расм).

Олий математикадан маълумки, агар эгри чизик тенгламаси $y=y(x)$ маълум булса, у ҳолда ёйнинг узунлиги куйидаги формула (функционал) ёрдамида топилади:



78-расм

$$l(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx. \qquad (10.6)$$

Ихтиёрий сиртнинг S юзаси хам функционал ҳисобланади. Агар сирт тенгламаси $z = z(x, y)$ бўлса, у ҳолда юза S (функционал) қуйидагича топилади:

$$S(z(x, y)) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy, \qquad (10.7)$$

бу ерда D — сиртнинг XOY текислигига проекцияси. Механикадаги инерция моменти, статик моментлар, бир жинсли эгри чизиқ ва сиртларнинг оғирлик марказлари ҳам функционаллар ҳисобланади.

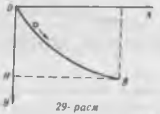
Келтирилган мисоллар асосида қуйидаги н а т и ж а г а келиш мумкин: *функционал* деб, шундай ўзгарувчи миқдорларга айтиладики, уларнинг қийматлари бир ёки бир неча функцияларни танлаш орқали аниқланади. Функционаллар операторларнинг хусусий ҳолларидир. Маълумки, $y = f(x)$ берилиши билан сонга сон мос келтирилар эди. Демак, функция билан функционални фарқлай билиш керак.

10.2-§. ВАРИАЦИОН ҲИСОБНИНГ УЧ МАСАЛАСИ

Вариацион ҳисобнинг пайдо бўлишига (XVII аср) ва жадал суръат билан ривожланишига қуйидаги учта масала асосий туртки бўлган

1. Брахистохрона ҳақидаги масала

Бу масала И. Бернулли томонидан қўйилган энг тез думалаш чизиғи — брахистохрона тўғрисидаги масаладир. Масала қуйидагича қўйилади: вертикал текисликда битта тик тўғри чизикда ётмаган иккита O ва B нукталар берилган бўлиб, каттик жисм ўзининг оғирлик кучи таъсирида O дан B га энг киска вакт ичида думалайдиган йўл топилсин (29- расм). O ва B нукталарни туташтирувчи энг киска йўл тўғри чизик бўлсада, харакатланаётган жисм факат ўз оғирлик кучи таъсирида думалаётган бўлганлиги сабабли бу масаланинг ечими тўғри чизик бўлмайди.



29- расм

Қўйилган масала

$$L(y(x)) = \int_{0}^{b} \frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{\sqrt{2gy(x)}}\, dx \qquad (10.8)$$

функционалга минимум киймат берувчи $y=y(x)$ функцияни топиш масаласига келтирилади.

Брахистохрона тўғрисидаги масаланинг ечими И. Бернулли, Г. Лейбниц, Я. Бернулли, И. Ньютон ва Г. Лопиталь томонидан берилган бўлиб, бу чизик *циклоида* эканлиги аникланган.

2. Геодезик чизик ҳақидаги масала

Бирор $\varphi(x,y,z)=0$ сиртнинг берилган иккита нуктасини бирлаштирувчи чизиклар ичида энг кичик узунликка эга бўлгани топилсин. Бундай энг киска чизик г е о д е з и к ч и з и к дейилади.

Бу масала

$$L(y(x), z(x)) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+(y'(x))^2+(z'(x))^2}\,dx \qquad (10.9)$$

функционалга минимум киймат берувчи функцияларни топишга келтирилади. Бу шартли экстремум масаласи бўлиб, $y(x)$ ва $z(x)$ функциялар

$$\varphi(x)y(x); \quad z(x))=0 \qquad (10.10)$$

30- расм

шартни каноатлантириши зарурдир (30- расм).

Бу масалани Я. Бернулли ечган.

3. Изопериметрик масала

Энг катта S юзани чегараловчи, узунлиги l га тенг бўлган берк чизик топилсин.

Бу масала ҳам функционалнинг экстремумини топишга келтирилади. Бу ерда ўзига хос бўлган қўшимча шарт — эгри чизик узунлигининг ўзгармас бўлишлик шарти юклатилади, яъни

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x(t))^2+(y(t))^2}\; dt \qquad (10.11)$$

функционал ўзгармас кийматини сақлайди. Бундай турдаги масалаларни ечиш усули Л. Эйлер томонидан ишлаб чиқилган.

Вариацион ҳисобнинг энг содда масаласи, ушбу

$$F(u) = \int_{a}^{b} \Phi(x,u,u')\,dx \qquad (10.12)$$

функционал энг кичик қиймат берувчи ва

$$u(a)=A; \; u(b)=B \qquad (10.13)$$

шартларни каноатлантирадиган $u(x)$ функцияни топишдан иборат. Бу ерда Φ — ўз аргументларига нисбатан узлуксиз ва дифференциалланувчи функциядир. Шундай қилиб, вариацион ҳисоб функционалларнинг максимал ва минимал (экстремал) қийматларини топиш усулларини ўрганади. Механика ва физиканинг кўпгина қонунлари каралаётган жараёнларда масала функционалларнинг ўз максимуми ёки минимумига эришиш кераклиги тасдиқига келтирилади. Қонунларнинг бундай тарзда баён этилиши механика ва физиканинг вариацион тамойили (принципи) номи билан юритилади.

10.3-§. ФУНКЦИЯ ВА ФУНКЦИОНАЛ ОРАСИДАГИ ЎХШАШЛИК

Вариацион масалаларни ечиш усуллари, яъни функционалларни максимум ва минимумга текшириш билан функцияларни максимум ва минимумга текширишнинг яқин ухшашлиги бор. Шунинг учун функция ва функционалларга оид баъзи маълумотларни солиштириб чиқайлик:

1. Функция. Агар z узгарувчи x ўзгарувчининг функцияси булса, у холда қуйидагича белгиланади:

$$z=f(x).$$

Бу боғланиш орқали x нинг олиши мумкин булган қийматлар соҳасига тегишли хар бир сон учун мос x сони топилади, яъни функция орқали сонга сон мос кетирилади.

Функционал. Ўзгарувчи миқдор V, $y(x)$ функцияга боглик бўлган функционал дейилади ва

$$V=V[y(x)]$$

орқали белгиланади, яъни бирорта тупламга тегишли булган хар бир $y(x)$ функцияга унга мос V қиймат тугри келса, демак функционал орқали функцияга сон мос келтирилади.

2. Аргумент орттирмаси. $f(x)$ функция аргументи x нинг ортирмаси деб, бу узгарувчининг иккита қиймати орасидаги айирмага айтилади ва қуйидагича белгиланади:

$$\Delta x=x-x_1.$$

$V[y(x)]$ функционал аргументи $y(x)$ нинг орттирмаси ёки вариацияси деб иккита функция орасидаги айримага айтилади ва қуйидагича белгиланади:

$$\delta y=y(x)-y_1(x).$$

Бу ерда $y(x)$ бирорта функциялар тупламига тегишли ва ихтиёрий узгара олади деб фараз қилинади.

3. $f(x)$ функциянинг узлуксизлиги. $f(x)$ функция узлуксиз дейилади, агар аргумент x нинг кичик узгаришига $f(x)$ функциясининг кичик ўзгариши мос келса.

$V[y(x)]$ функционалнинг узлуксизлиги. $V[y(x)]$ функционал узлуксиз дейилади, агар $y(x)$ нинг кичик ўзгаришига $V[y(x)]$ функционалнинг кичик узгариши мос келса. Бу ерда функционалнинг аргументи бўлган $y(x)$ функциянинг кичик ўзгаришини ойдинлаштирайлик. $y(x)$ функциянинг кичик ўзгариши $y=y(x)$ ва $y=y_1(x)$ эгри чизиқлар бир-бирига яқин ёки кам фарқ қилади деган фикр билан бир хилдир.

1- таъриф. Агар барча x лар учун $|y(x)-y_1(x)|\leqslant\varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, $y=y(x)$ ва $y=y_1(x)$ эгри чизиқлар *нолинчи тартибли яқинликка эга* дейилади. Бу ерда $\varepsilon>$ >0 ихтиёрий кичик сон.

2- таъриф. Агар барча x лар учун

$$|y(x)-y_1(x)|\leqslant\varepsilon \text{ ва } |y'(x)-y_1'(x)|\leqslant\varepsilon$$

шартлар бажарилса. $y=y(x)$ ва $y=y_1(x)$ эгри чизиқлар биринчи *тартибли яқинликка эга* дейилади.

Демак 1- тартибли яқинликка эга бўлиш учун ординаталар бир-бирига яқин бўлишидан ташқари яқинлик нуқталаридан ўтказилган уринмалар йўналиши ҳам бир бўлиши, яъни яқин бўлиши керак.

4. Функция дифференциали. $f(x)$ функциянинг дифференциали қуйидагига тенг:

$$df=\frac{\partial}{\partial\alpha}[f(x+\alpha\cdot\Delta x)]|_{\alpha=0}$$

Функционалнинг вариацияси. $V[y(x)]$ функционалнинг вариацияси қуйидагига тенг:

$$\delta V=\frac{\partial}{\partial\alpha}[V(y(x)+\alpha\delta y)]|_{\alpha=0}.$$

10.4-§. ВАРИАЦИОН ҲИСОБНИНГ ОДДИЙ МАСАЛАСИ. ЭЙЛЕР ТЕНГЛАМАСИ

Таъриф. Агар $V[y(x)]$ функционалнинг $y=y_0(x)$ эгри чизиққа яқин чизиқдаги қиймати $V[y_0(x)]$ дан катта бўлмаса, яъни

$$\Delta V=V[y(x)]-V[y_0(x)]\leqslant 0$$

ёки

$$V[y(x)]\leqslant V[y_0(x)]$$

бўлса, мазкур функционал $y=y_0(x)$ эгри чизиқда максимумга эришади дейилади,

Агар $\Delta V\geqslant 0$ шарт бажарилса, $V[y(x)]$ функционал минимумга эришади дейилади. Функционалнинг экстремумга эга бўлишининг зарурий шартларини исботсиз келтирамиз.

1- теорема. *Агар $V[y(x)]$ функционал $y=y_0(x)$ эгри чизиқда максимумга ёки минимумга эришса, у ҳолда $y=y_0(x)$ да функционалнинг вариацияси нолга тенг бўлади: $\delta V=0$*

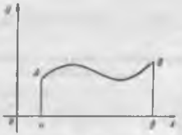
10.2-§ да келтирилган вариацион ҳисобнинг оддий масаласини кўрайлик.

$$V[y(x)]=\int_a^b F(x, y, y')dx \qquad (10.14)$$

функционални экстремумга текширамиз. $F(x, y, y')$ функции барча аргументлари бўйича узлуксиз биринчи ва иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларга эга деб фараз қиламиз. Узлуксиз ҳосилаларга эга булган ва қуйидаги

$$y(a)=A;\ y(b)=B \qquad (10.15)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи барча функционал ичидан шундайи топилсинки, (10.14) функционал экстремумга эга бўлсин. Яъни масала вариацион ҳисобнинг оддий масаласи $P_1(a;A)$ ва $P_2(b;B)$ нуқталарни бирлаштирувчи чизиқлар (функциялар) ичидан (10.14) функционалнинг экстремумини қидиришдан иборат (31- расм).



31- расм

2- теорема. *(10.14) функционалнинг биринчи тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлган (10.15) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $y(x)$ функцияда экстремумга эга бўлишининг зарурий шарти бу функциянинг Эйлер тенгламаси*

$$F_y-\frac{d}{dx}(F_{y'})=0 \qquad (10.16)$$

ёки

$$y''(x)\cdot F_{y'y'}+y'(x)\cdot F_{yy'}+F_{xy'}-F_y=0 \qquad (10.17)$$

ни қаноатлантиришидан иборатдир.

Мисол. Қуйидаги

$$V[y(x)]=\int_1^2 (y'^2-2xy)\,dx,\quad y(1)=0,\quad y(2)=-1$$

функционал қандай эгри чизиқдан экстремумга эга бўлиши мумкин?

Ечиш.

$$F(x,y,y')=y'^2-2xy \text{ ва}$$

$$F_{y'}=2y';\ F_{y'y'}=2;\ F_y=-2x$$

$$F_{yy'}=0;\ F_x=-2y;\ F_{xy'}=0$$

бўлгани учун Эйлер тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$2y''-(-2x)=0$$

ёки

$$y''+x=0$$

Бу тенгламанинг умумий ечимини топамиз:

$$y''=-x,$$

$$\int y''dx=-\int x\,dx,$$

$$y'=-\frac{x^2}{2}+C_1$$

$$\int y'dx=-\frac{1}{2}\int x^2dx+C_1\int dx$$

$$y=-\frac{1}{6}\cdot x^3+C_1\cdot x+C_2$$

C_1 ва C_2 ўзгармасларни $y(1)=0$ ва $y(2)=-1$ чегаравий шартлардан топамиз:

$$\begin{cases} y(1)=-\frac{1}{6}+C_1+C_2=0,\\ y(2)=-\frac{1}{6}\cdot 8+2C_1+C_2=-1.\end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1+C_2=\frac{1}{6}, \\ 2C_1+C_2=\frac{1}{3}, \end{cases}$$

$$C_1=\frac{1}{6};\ C_2=0.$$

Демак, берилган функционал

$$y(x)=-\frac{x^3}{6}+\frac{x}{6}=\frac{x}{6}(1-x^2)$$

эгри чизикда экстремумга эга булади. Шуни эслатиб утиш керакки, Эйлер тенгламаси иккинчи тартибли дифференциал тенглама булиб, хар доим хам интеграллаш осон булавермайди.

10.5-§. ЭЙЛЕР ТЕНГЛАМАСИНИНГ ХУСУСИЙ ХОЛЛАРИ

Эйлер тенгламасининг куйидаги соддалаштирилган куринишларини куриб чикайлик.

1. F функция y' га боглик эмас; бу холда $F=F(x;y)$ булади ва Эйлер тенгламаси (10.17):

$$F_y(x,\ y)=0 \tag{10.18}$$

куринишга келади (чунки $F_{y'}=0$). Бу холда (10.15) чегаравий шартлар бажарилмаслиги мумкин. Шунинг учун каралаётган вариацион масаланинг ечими мавжуд булмаслиги мумкин.

2. F функция $y'(x)$ га чизикли боглик, яъни

$$F(x,\ y,\ y')=M(x,\ y)+N(x,\ y)\cdot y'. \tag{10.19}$$

Эйлер тенгламаси (10.17) куйидаги куринишга келади:

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial y}=0 \tag{10.20}$$

Умуман айтганда (10.20) тенглик билан берилган эгри чизик чегаравий шартларни каноатлантирмайди, демак, вариацион масала бу холда ечимга эга эмас.

Мисол.

$$V[y(x)]=\int_0^1 (y^2+x^2\cdot y')\,dx,$$

$$y(0)=0;\ y(1)=P$$

функционалнинг экстремаллари топилсин.

Ечиш. $F=y^2+x^2\cdot y'$ булгани сабабли Эйлер тенгламаси (10.17) $y-x=0$ булади.

$y(0)=0$ чегаравий шарт бажарилади. Иккинчи чегаравий шарт эса фақат $P=1$ дагина бажарилади. $P\neq 1$, да эса берилган чегаравий шартларни қаноатлантирувчи экстремаллар мавжуд эмас.

3. F функция фақат y' га боғлиқ, яъни

$$F=F(y') \qquad (10.21)$$

булсин. Бу ҳолда Эйлер тенгламаси (10.17) қуйидаги куринишга эга булади:

$$y''\cdot F_{y'y'}=0. \qquad (10.22)$$

Бу ердан $y''(x)=0$ ёки $y=C_1x+C_2$ — иккита C_1 ва C_2 параметрларга эга булган тўғри чизиқлар оиласини топамиз. Демак бу ҳолда экстремаллар тўғри чизиқлардан иборат булади.

4. F функция фақат x ва y' га боғлиқ, яъни

$$F=F(x, y') \qquad (10.23)$$

булсин. Бу ҳолда Эйлер тенгламаси (10.17)

$$\frac{d}{dx}F_{y'}(x, y')=0 \qquad (10.24)$$

куринишда булада. Бу ердан

$$F_{y'}(x, y')=C_1$$

ни ҳосил қиламиз.

5. F функция фақат y ва y' га боғлиқ, яъни

$$F=F(y, y') \qquad (10.25)$$

булсин. Бу ҳолда Эйлер тенгламаси (10.17) қуйидаги куринишда булади:

$$F_y-F_{y'y}\cdot y'-F_{y'y'}\cdot y''=0, \qquad (10.26)$$

чунки $F_{xy'}=0$ булади.

(10.26) тенгламани интеграллаш учун аввал ҳар иккала томонини y' га купайтирамиз, у ҳолда қуйидагига эга буламиз:

ИЛОВА

$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ва $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$ қийматлар жадвали

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
0,00	0,3989	0,0000				49	3538	1879
01	3989	0040	25	3867	0987			
02	3989	0080	26	3857	1026	0,50	0,3521	0,1915
03	3988	0120	27	3847	1064	51	3503	1950
04	3986	0160	28	3836	1103	52	3485	1985
			29	3825	1141	53	3467	2019
05	3984	0199				54	3448	2054
06	3982	0239	0,30	0,3814	0,1179			
07	3980	0279	31	3802	1217	55	3429	2088
08	3977	0319	32	3790	1255	56	3410	2123
09	3973	0359	33	3778	1293	57	3391	2157
			34	3765	1331	58	3372	2190
0,10	0,3970	0,0398				59	3352	2224
11	3965	0438	35	3752	1368			
12	3961	0478	36	3739	1406	0,60	0,3332	0,2257
13	3956	0517	37	3725	1443	61	3312	2291
14	3961	0557	38	3712	1480	62	3292	2324
			39	3697	1517	63	3271	2357
15	3945	0596				64	3251	2389
16	3939	0636	0,40	0,3683	0,1554			
17	3932	0675	41	3668	1591	65	3230	2422
18	3925	0714	42	3653	1628	66	3209	2454
19	3918	0753	43	3637	1664	67	3187	2486
			44	3621	1700	68	3166	2517
0,20	0,3910	0,0793				69	3144	2549
21	3902	0832	45	3605	1736			
22	3894	0871	46	3589	1772	0,70	0,3123	0,2580
23	3885	0910	47	3572	1808	71	3101	2611
24	3876	0948	48	3555	1844	72	3079	2642

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
73	3056	2673				36	1582	4131
74	3034	2703	05	2299	3531	37	1561	4147
			06	2275	3554	38	1539	4162
75	3011	2734	07	2251	3577	39	1518	4177
76	2989	2764	08	2227	3599			
77	2966	2794	09	2203	3621	1,40	0,1497	0,4192
78	2943	2823				41	1476	4207
79	2920	2852	1,10	0,2179	0,3643	42	1456	4222
			11	2155	3665	43	1435	4236
0,80	0,2897	0,2881	12	2131	3686	44	1415	4251
81	2874	2910	13	2107	3708			
82	2850	2939	14	2083	3729	45	1334	4265
83	2827	2967				46	1374	4279
84	2803	2995	15	2059	3749	47	1354	4279
			16	2036	3770	48	1334	4306
85	2780	3023	17	2012	3790	49	1315	4319
86	2756	3051	18	1989	3810			
87	2732	3078	19	1965	3830	1,50	0,1295	0,4332
88	2709	3106				51	1276	4345
89	2685	3133	1,20	0,1942	0,3849	52	1257	4357
			21	1919	3869	53	1238	4370
0,90	0,2661	0,3159	22	1895	3888	54	1219	4382
91	2637	3186	23	1872	3907			
92	2613	3212	24	1849	3925	55	1200	4394
93	2689	3238				56	1182	4406
94	2565	3264	25	1826	3944	57	1163	4418
			26	1804	3962	58	1145	4429
95	2541	3289	27	1781	3980	59	1127	4441
96	2516	3315	28	1758	3997			
97	2492	3340	29	1736	4015	1,60	0,1109	0,4452
98	2468	3365				61	1092	4463
99	2444	3389	1,30	0,1714	0,4032	62	1074	4474
			31	1691	4049	63	1057	4484
1,00	0,2420	0,3413	32	1669	4066	64	1040	4495
01	2396	3438	33	1647	4082			
02	2371	3461	34	1626	4099	65	1023	4505
03	2347	3485				66	1006	4515
04	2323	3508	35	1604	4115	67	0989	4525

МУНДАРИЖА

V боб. Интегралларни тақрибий ҳисоблаш

VI боб. Оддий дифференциал тенгламаларни тақрибий ечиш усуллари

VII боб. Эҳтимолликлар назарияси

VIII боб Математик статистика унсурлари

IX боб. Математик программалаштириш

Шомансур Шомаджитович Шоҳамидов

ЭЛЕМЕНТЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

На узбекском языке

Издательство «Ўзбекистон» — 1997,
700129, Ташкент, Навои, 30

Бадиий муҳаррир *Т. Қаноатов*
Техник муҳаррир *С. Собирова*
Мусаҳҳиҳ *С. Тоҳирова*

Теришга берилди 06.01.97. Босишга рухсат этилди 03.04.97. Бичими $84 \times 108^1/_{32}$ «Литературная» гарнитурада юқори босма усулида босилди. Шартли бос. т. 10,92. Нашр т. 9,79. Нусхаси 1000. Буюртма № Д-806.

«Ўзбекистон» нашриёти, 700129, Тошкент, Навоий кўчаси, 30.
Нашр № 104—96

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитаси ижарадаги Тошкент матбаа комбинатида босилди, 700129, Тошкент, Навоий кўчаси, 30.