Таким образом, площадь $\triangle\ O_aO_bO_c$ (обозначим ее Q) будет

$$Q=\frac{1}{2}\frac{ac}{\sin\frac{\hat{A}}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2}}\cos\frac{\hat{B}}{2}=$$

$$=\frac{ac\sin\hat{B}}{4}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\hat{A}}{2}\sin\frac{\hat{B}}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2}}. \qquad (1)$$

Найдем $\sin\frac{\hat{A}}{2}$:

$$\sin\frac{\hat{A}}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\hat{A}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$$

Так же находятся $\sin\frac{\hat{B}}{2}$ и $\sin\frac{\hat{C}}{2}$. Заменяя их в (1), получим

$$Q=S\frac{abc}{2(p-a)(p-b)(p-c)},$$

а объем пирамиды $MO_aO_bO_c$ будет

$$V=\frac{Sabcr}{3(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{1}{3}abc=\frac{4}{3}SR.$$

РАЗДЕЛ 3

161. Нет, не во всяком.

162. Указанным свойством обладает пирамида, у которой два противоположных двугранных угла тупые.

163. Докажите, что если прямая не перпендикулярна плоскости и образует равные углы с двумя пересекающимися прямыми этой плоскости, то проекция этой прямой на плоскость также образует равные углы с теми же прямыми, т. е. параллельна биссектрисе какого-то из двух углов, ими образованного.

164. Треугольник, четырехугольник и шестиугольник. Сечение куба не может быть правильным пятиугольником, поскольку у сечения, имеющего более трех сторон, найдется хотя бы одна пара параллельных сторон, а у правильного пятиугольника параллельных сторон нет.

165. Отложим на ребрах трехгранного угла от вершины S равные отрезки SA, SB, SC. Обозначим через O проекцию S на плоскость ABC. Треугольники ASB и AOB — равнобедренные с общим основанием AB, причем боковые стороны треугольника AOB меньше боковых сторон треугольника ASB. Следовательно, $\widehat{AOB}>\widehat{ASB}$. Аналогичные неравенства верны для других углов. Таким образом,

$$\widehat{ASB}+\widehat{BSC}+\widehat{CSA}<\widehat{AOB}+\widehat{BOC}+\widehat{COA}\leqslant 2\pi.$$

(Последняя сумма равна 2π, если O — внутри $\triangle ABC$, и меньше 2π, если O — вне $\triangle ABC$.)

Для доказательства второй части возьмем произвольную точку внутри данного угла и опустим из нее перпендикуляры на грани данного угла. Эти перпендикуляры будут являться ребрами другого трехгранного угла. (Полученный угол называется *дополнительным* к данному трехгранному углу. Этот прием является стандартным приемом в геометрии трехгранных углов.) Двугранные углы данного трехгранного угла дополняются до π плоскими углами дополнительного трехгранного угла, и наоборот. Если α, β, γ — двугранные углы данного трехгранного угла, то, используя выше доказанное неравенство для плоских углов, будем иметь $(\pi-\alpha)+(\pi-\beta)+(\pi-\gamma)<2\pi$, откуда следует, что $\alpha+\beta+\gamma>\pi$.

166. 1) Пусть S — вершина угла, M — точка на ребре, M_1 и M_2 — проекции M на два других ребра, N — проекция M на противоположную грань. Предположим, что ребро SM соответствует двугранному углу C. Если $|SM|=a$, то, находя последовательно $|SM_1|$, а затем из $\triangle MM_1N - |MN|$, или, по-другому, сначала $|SM_2|$, а затем из $\triangle MM_2N - |MN|$, придем к равенству

$$|MN| = a\sin\alpha\sin B = a\sin\beta\sin A,$$

т. е.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}.$$

2) Обозначим через $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ единичные векторы, направленные по ребрам трехгранного угла ($\boldsymbol{a}$ противолежит плоскому углу величины α, $\boldsymbol{b}$ — β, $\boldsymbol{c}$ — γ). Вектор $\boldsymbol{b}$ можно представить в виде: $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cos\gamma+\eta$, где $|\eta|=\sin\gamma$, η — вектор, перпендикулярный $\boldsymbol{a}$, аналогично $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cos\beta+\xi$, где $|\xi|=\sin\beta$, ξ перпендикулярен $\boldsymbol{a}$. Угол между векторами η и ξ равен A.

Перемножая скалярно $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, получим

$$\boldsymbol{bc}=\cos\alpha=(\boldsymbol{a}\cos\gamma+\eta)(\boldsymbol{a}\cos\beta+\xi)=$$
$$=\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos A,$$

что и требовалось.

3) Опустим из точки внутри угла перпендикуляры на грани данного угла. Получим, как известно (см. задачу 165), трехгранный угол, дополнительный к данному. Плоские углы данного трехгранного угла дополняют до π двугранные углы дополнительного. Применяя к дополнительному трехгранному углу 1-ю теорему косинусов, получим наше утверждение.

167. Воспользуйтесь 1-й теоремой косинусов (см. задачу 166).

168. Воспользуйтесь 2-й теоремой косинусов (см. задачу 166).

169. Сумма всех плоских углов тетраэдра равна 4π. Значит, найдется вершина, сумма плоских углов при которой не больше π. Все плоские углы при этой вершине — острые. В противном случае один угол был бы больше суммы двух других.

170. Этим свойством обладает ребро, имеющее наибольшую длину.

171. Пусть ABC — перпендикулярное сечение, $|BC|=a$, $|CA|=b$, $|AB|=c$. Проведем через A сечение AB_1C_1 (B и B_1, C и C_1 — на соответствующих ребрах). Пусть, далее $|BB_1|=|x|$, $|CC_1|=|y|$. (Если B_1 и C_1 — по одну сторону от плоскости ABC, то x и y — одного знака, если по разные стороны, то знаки x и y различны). Для того чтобы AB_1C_1 был правильным, необходимо и

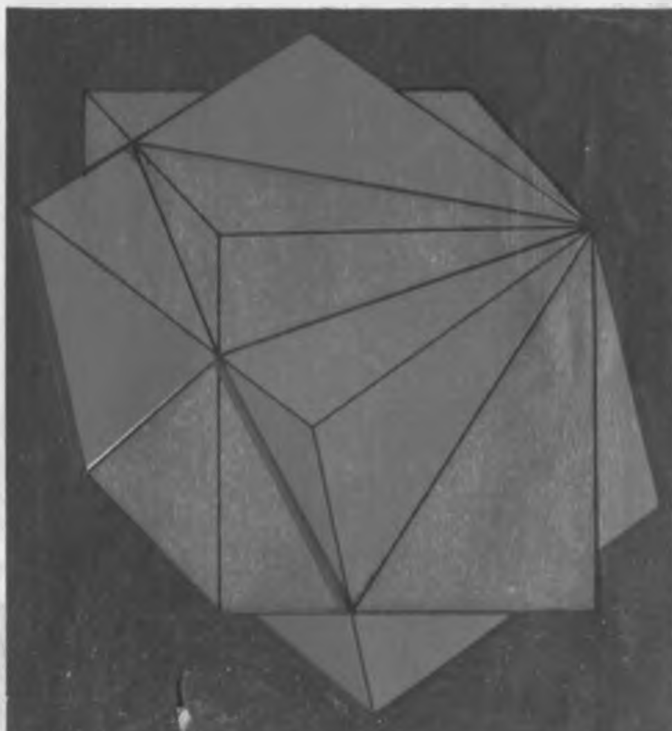
БИБЛИОТЕЧКА «КВАНТ»

выпуск 31

И. Ф. ШАРЫГИН

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

СТЕРЕОМЕТРИЯ



БИБЛИОТЕЧКА «КВАНТ»
выпуск 31

И. Ф. ШАРЫГИН

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ
СТЕРЕОМЕТРИЯ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1984

БИБЛИОТЕЧКА «КВАНТ»

выпуск 31

И. Ф. ШАРЫГИН

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

СТЕРЕОМЕТРИЯ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1984

СОДЕРЖАНИЕ

22.151.0
Ш 26
УДК 513.1/.2

Редактор выпуска Н. П. Долбилин.

Шарыгин И. Ф.

Ш26 Задачи по геометрии (стереометрия).— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.— 160 с. (Библиотечка «Квант». Вып. 31). —35 к.

Сборник содержит 340 задач по стереометрии и состоит из двух разделов. В первом разделе помещены в основном задачи вычислительного характера. Сюда же включены в виде задач некоторые теоремы и факты стереометрии, непосредственно примыкающие к школьному курсу. Во втором разделе собраны различные геометрические факты, неравенства, задачи на геометрические места точек, элементы геометрии тетраэдра и сферической геометрии. Они могут быть использованы во внеклассной работе, при подготовке к математическим олимпиадам.

Для школьников, преподавателей, студентов.

Ш $\dfrac{1702040000-015}{053(02)-84}$ 213-83

ББК 22.151.0
513

Ш $\dfrac{1702040000-015}{053(02)-84}$ 213-83

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга содержит 340 различных задач по стереометрии и является естественным продолжением вышедшей книги автора «Задачи по геометрии: Планиметрия» — М.: Наука, 1982 («Библиотечка «Квант», вып. 17). В связи с этим автор считает возможным ограничиться в предисловии лишь замечаниями, непосредственно относящимися к данной книге.

Задачи этого сборника разбиты на два больших раздела: задачи на вычисление и задачи на доказательство.

Наиболее простые задачи первого раздела снабжены лишь ответами, другие — краткими указаниями, наиболее трудные — более подробными указаниями и решениями. Здесь следует сделать две оговорки. Во-первых, в большинстве случаев решения задач лишь намечены, ряд деталей предлагается рассматривать читателю. Во-вторых, неся ответственность за предлагаемые решения, автор не считает целесообразным рекомендовать свои решения в качестве образца на конкурсном экзамене.

Во втором разделе собраны различные геометрические факты и теоремы, задачи на максимум и минимум (некоторые задачи этого раздела можно было бы отнести и к первому), задачи на геометрические места точек; здесь же рассматриваются некоторые вопросы геометрии тетраэдра, сферической геометрии и т. п.

Говоря о методах решения задач, предлагаемых в сборнике, приходится констатировать, что, по сравнению с задачами по планиметрии, резко возрастает удельный вес аналитических, счетных методов. Трудные стереометрические задачи предъявляют более высокие требования к общепрофессиональной подготовке читателя, к его умению проделать достаточно громоздкую вычислительную работу.

Автор

ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ

1. Дан куб с ребром a. Две вершины правильного тетраэдра лежат на его диагонали, а две оставшиеся — на диагонали его грани. Найти объем тетраэдра.

2. В основании четырехугольной пирамиды лежит прямоугольник, высота пирамиды h. Найти объем пирамиды, если известно, что все ее пять граней равновелики.

3. Среди пирамид, все ребра которых равны a, найти объем той пирамиды, которая имеет наибольшее число ребер.

4. Вокруг шара описана правильная усеченная четырехугольная пирамида, апофема которой равна a. Найти ее боковую поверхность.

5. Определить угол при вершине осевого сечения конуса, если его объем в три раза больше объема вписанного в него шара.

6. Три шара касаются плоскости данного треугольника в вершинах треугольника и между собой. Найти радиусы этих шаров, если стороны треугольника равны a, b и c.

7. Найти расстояние между скрещивающимися диагоналями двух соседних граней куба с ребром a. В каком отношении делит каждую из этих диагоналей их общий перпендикуляр?

8. Доказать, что площадь проекции многоугольника, расположенного в плоскости α, на плоскость β равна $S\cos\varphi$, где S — площадь многоугольника, φ — угол между плоскостями α и β.

9. Даны три прямые, проходящие через одну точку A. Пусть B_1 и B_2 — две точки на одной прямой, C_1 и C_2 — на другой, D_1 и D_2 — на третьей. Доказать, что

$$\frac{V_{AB_1C_1D_1}}{V_{AB_2C_2D_2}} = \frac{|AB_1|\cdot|AC_1|\cdot|AD_1|}{|AB_2|\cdot|AC_2|\cdot|AD_2|}.$$

10. Пусть α, β и γ — углы, образованные произвольной прямой с тремя попарно перпендикулярными прямыми. Доказать, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

11. Пусть S и P — площади двух граней тетраэдра, a — длина их общего ребра, α — двугранный угол между ними. Доказать, что объем тетраэдра V может быть найден по формуле

$$V = \frac{2SP \sin \alpha}{3a}.$$

12. Доказать, что для объема произвольного тетраэдра V справедлива формула $V = \frac{1}{6} abd \sin \varphi$, где a и b — два противоположных ребра тетраэдра, d — расстояние между ними, φ — угол между ними.

13. Доказать, что плоскость, делящая пополам двугранный угол при каком-либо ребре тетраэдра, делит противоположное ребро на части, пропорциональные площадям граней, заключающих этот угол.

14. Доказать, что для объема V многогранника, описанного около сферы радиуса R, справедливо равенство $V = \frac{1}{3} S_n R$, где S_n — полная поверхность многогранника.

15. Дан выпуклый многогранник, все вершины которого расположены в двух параллельных плоскостях. Доказать, что его объем можно вычислять по формуле

$$V = \frac{h}{6} (S_1 + S_2 + 4S),$$

где S_1 — площадь грани, расположенной в одной плоскости, S_2 — площадь грани, расположенной в другой плоскости, S — площадь сечения многогранника плоскостью, равноудаленной от двух данных, h — расстояние между данными плоскостями.

16. Доказать, что отношение объемов сферы и описанного около нее усеченного конуса равно отношению их полных поверхностей.

17. Доказать, что площадь части поверхности сферы, заключенной между двумя параллельными плоскостями, пересекающими сферу, можно найти по формуле

$$S = 2\pi Rh,$$

где R — радиус сферы, h — расстояние между плоскостями.

18. Доказать, что объем тела, получающегося при вращении кругового сегмента вокруг диаметра, его не

пересекающего, можно вычислять по формуле

$$V = \frac{1}{6}\pi a^2 h,$$

где a — длина хорды этого сегмента, а h — проекция этой хорды на диаметр.

19. Доказать, что отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке (центре тяжести тетраэдра) и делятся в ней в отношении $3:1$ (считая от вершин).

Доказать также, что в этой же точке пересекаются отрезки, соединяющие середины противоположных ребер, и делятся этой точкой пополам.

20. Доказать, что прямые, соединяющие середину высоты правильного тетраэдра с вершинами той грани, на которую эта высота опущена, попарно перпендикулярны.

21. Доказать, что сумма квадратов длин ребер тетраэдра в четыре раза больше, чем сумма квадратов расстояний между серединами его скрещивающихся ребер.

22. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *) с ребром a, K — середина ребра DD_1. Найти угол и расстояние между прямыми CK и A_1D.

23. Найти угол и расстояние между двумя скрещивающимися медианами двух боковых граней правильного тетраэдра с ребром a.

24. В основании пирамиды $SABCD$ лежит четырехугольник $ABCD$. Ребро SD является высотой пирамиды. Найти объем пирамиды, если известно, что $|AB| = |BC| = \sqrt{5}$, $|AD| = |DC| = \sqrt{2}$, $|AC| = 2$, $|SA| + |SB| = 2 + \sqrt{5}$.

25. В основании пирамиды лежит правильный треугольник со стороной a, боковые ребра имеют длину b. Найти радиус шара, касающегося всех ребер пирамиды или их продолжений.

26. Сфера проходит через вершины одной грани куба и касается сторон противоположной грани куба. Найти отношение объемов шара и куба.

27. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найти радиус сферы, проходящей через середины ребер AA_1, BB_1 и через вершины A и C_1.

---

*) $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — две грани куба, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — его ребра.

28. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат со стороной a, высота параллелепипеда равна b. Найти радиус сферы, проходящей через концы стороны AB основания и касающейся граней параллелепипеда, параллельных AB.

29. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная призма со стороной основания a. Найти площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через центр сферы и сторону основания призмы.

30. Два шара одного радиуса и два другого расположены так, что каждый шар касается трех других и данной плоскости. Найти отношение радиуса большего шара к меньшему.

31. Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром a. Найти радиус сферы, проходящей через вершины C и D и середины ребер AB и AC.

32. Одна грань куба лежит в плоскости основания правильной треугольной пирамиды, на одной из боковых граней пирамиды лежат две вершины куба, а на двух других по одной. Найти ребро куба, если сторона основания пирамиды равна a, а высота пирамиды h.

33. Двугранный угол при основании правильной n-угольной пирамиды равен α. Найти двугранный угол между соседними боковыми гранями.

34. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ *) проведены две плоскости: одна проходит через вершины A, B и C_1, а другая — через вершины A_1, B_1 и C. Эти плоскости разделили призму на четыре части. Объем меньшей из этих частей равен V. Найти объем призмы.

35. Через точку, находящуюся на расстоянии a от центра шара радиуса R ($R > a$), проведены три попарно перпендикулярные хорды. Найти сумму квадратов отрезков хорд, на которые их делит данная точка.

36. В основании правильной треугольной призмы лежит треугольник ABC со стороной a. На боковых ребрах взяты точки A_1, B_1 и C_1, удаленные от плоскости основания соответственно на расстояния $a/2$, a, $3a/2$. Найти угол между плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$.

37. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна апофеме боковой грани. Через сторону основания проведено сечение, делящее пополам поверх-

---

*) ABC и $A_1B_1C_1$ — основания призмы, AA_1, BB_1, CC_1 — ее боковые ребра. Точно так же следует понимать это и подобные обозначения во всех случаях, встречающихся далее в тексте.

ность пирамиды. Найти угол между плоскостью сечения и плоскостью основания пирамиды.

38. Центр шара находится в плоскости основания правильной треугольной пирамиды. Вершины основания лежат на поверхности шара. Найти l — длину линии пересечения поверхностей шара и пирамиды, если радиус шара равен R, а плоский угол при вершине пирамиды α.

39. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ (S — вершина) на диагонали AD взяты три точки, делящие диагональ на четыре равные части. Через эти точки проведены сечения, параллельные плоскости SAB. Найти отношения площадей полученных сечений.

40. В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен углу между боковым ребром и плоскостью основания. Определить двугранные углы между соседними боковыми гранями этой пирамиды.

41. В основании треугольной пирамиды, все боковые ребра которой попарно перпендикулярны, лежит треугольник площади S. Площадь одной из боковых граней Q. Найти площадь проекции этой грани на основание.

42. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, все ребра которой равны между собой. K — точка на ребре AB, отличная от A и B, M — на прямой B_1C_1, L — в плоскости грани ACC_1A_1. Прямая KL образует равные углы с плоскостями ABC и ABB_1A_1, LM образует равные углы с плоскостями BCC_1B_1 и ACC_1A_1, KM также образует равные углы с плоскостями BCC_1B_1 и ACC_1A_1. Известно, что $|KL| = |KM| = 1$. Найти ребро призмы.

43. В правильной четырехугольной пирамиде угол между боковым ребром и плоскостью основания равен углу между боковым ребром и плоскостью боковой грани, не содержащей это ребро. Найти этот угол.

44. Найти двугранный угол между основанием и боковой гранью правильной треугольной усеченной пирамиды, если известно, что в нее можно вписать шар и, кроме того, существует шар, касающийся всех ее ребер.

45. Три ребра треугольной пирамиды равны 1, а три других равны a. Ни одна грань не является правильным треугольником. В каких пределах может меняться a? Чему равен объем этой пирамиды?

46. Боковые грани треугольной пирамиды равновелики и наклонены к плоскости основания под углами α, β и γ. Найти отношение радиуса шара, вписанного в эту пирамиду, к радиусу шара, касающегося основания пирамиды и продолжений трех боковых граней.

47. Все ребра правильной шестиугольной призмы равны a. Найти площадь сечения, проведенного через сторону основания под углом α к плоскости основания.

48. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны $|AB| = a$, $|AD| = b$, $|AA_1| = c$. Найти угол между плоскостями AB_1D_1 и A_1C_1D.

49. В основании пирамиды $ABCDM$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной a, боковые ребра AM и BM также равны a, боковые ребра CM и DM имеют длину b. На грани CDM, как на основании, во внешнюю сторону построена треугольная пирамида $CDMN$, боковые ребра которой имеют длину a. Найти расстояние между прямыми AD и MN.

50. В тетраэдре одно ребро равно a, противоположное — b, а остальные — c. Найти радиус описанного шара.

51. В основании треугольной пирамиды лежит треугольник со сторонами a, b и c, противолежащие боковые ребра пирамиды равны соответственно m, n и p. Найти расстояние от вершины пирамиды до центра тяжести основания.

52. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$; через ребро AA_1 проведена плоскость, образующая равные углы с прямыми BC и B_1D. Найти эти углы.

53. Боковые ребра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны, причем одно из них равно a и равно сумме двух других. Найти радиус шара, касающегося основания пирамиды и продолжений ее боковых граней.

54. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной a, ребро SA равно b. Найти объем пирамиды, если известно, что боковые грани пирамиды равновелики.

55. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\widehat{A} = 90°$). Углы $\widehat{SAB}$, $\widehat{SCA}$, $\widehat{SAC}$, $\widehat{SBA}$ (в указанном порядке) составляют арифметическую прогрессию, разность которой отлична от нуля. Площади граней SAB, ABC и SAC составляют геометрическую прогрессию. Найти углы, составляющие прогрессию.

56. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной a. Найти объем этой пирамиды, если известно, что $\widehat{ASC} = \widehat{ASB} = \alpha$, $\widehat{SAB} = \beta$.

57. Точка K — середина ребра AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка L лежит на ребре BC. Отрезок KL

касается шара, вписанного в куб. В каком отношении отрезок KL делится точкой касания?

58. В тетраэдре $ABCD$ дано $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90°$, $|AB| = a$, $|DC| = b$, угол между ребрами AD и BC равен α. Найти радиус описанного шара.

59. Ребро куба и ребро правильного тетраэдра лежат на одной прямой, середины противоположных им ребер куба и тетраэдра совпадают. Найти объем общей части куба и тетраэдра, если ребро куба равно a.

60. В каком отношении делит объем треугольной пирамиды плоскость, параллельная двум ее скрещивающимся ребрам и делящая одно из других ребер в отношении $2 : 1$?

61. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде проведено сечение через диагонали оснований и сечение, проходящее через сторону нижнего основания и противоположную сторону верхнего основания. Угол между секущими плоскостями равен α. Найти отношение площадей сечений.

62. В правильную шестиугольную пирамиду вписан конус и около нее описан конус. Найти разность объемов описанного и вписанного конусов, если высота пирамиды H, радиус основания описанного конуса R.

63. Дан шар и точка внутри него. Через точку проведены произвольно три взаимно перпендикулярные плоскости, пересекающие шар по трем кругам. Доказать, что сумма площадей этих трех кругов постоянна, и найти эту сумму, если радиус шара R, а расстояние от точки пересечения плоскостей до центра шара равно d.

64. В шаре радиуса R проведен диаметр AB. Две прямые касаются шара в точках A и B и образуют между собой угол α ($\alpha < 90°$). На этих прямых взяты точки C и D так, что CD также касается шара и угол между AB и CD равен φ ($\varphi < 90°$). Найти объем тетраэдра $ABCD$.

65. В тетраэдре два противоположных ребра перпендикулярны, их длины a и b, расстояние между ними c. В тетраэдр вписан куб, четыре ребра которого перпендикулярны этим двум ребрам тетраэдра, и на каждой грани тетраэдра лежат в точности две вершины куба. Найти ребро куба.

66. Два равных треугольника KLM и KLN имеют общую сторону KL, $\widehat{KLM} = \widehat{LKN} = \pi/3$, $|KL| = a$, $|LM| = |KN| = 6a$. Плоскости KLM и KLN взаимно перпендикулярны. Шар касается отрезков LM и KN в их серединах. Найти радиус шара.

67. Шар радиуса R касается всех боковых граней треугольной пирамиды в серединах сторон ее основания. Отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром шара, делится пополам точкой пересечения с основанием пирамиды. Найти объем пирамиды.

68. В тетраэдре три двугранных угла прямые. Один из отрезков, соединяющих середины противоположных ребер тетраэдра, равен a, а другой b ($b > a$). Найти длину наибольшего ребра тетраэдра.

69. Прямой круговой конус с вершиной S вписан в треугольную пирамиду $SPQR$ так, что окружность основания конуса вписана в основание PQR пирамиды. Известно, что $\widehat{PSR} = \pi/2$, $\widehat{SQR} = \pi/4$, $\widehat{PSQ} = 7\pi/12$. Найти отношение площади боковой поверхности конуса к площади основания PQR пирамиды.

70. В основании пирамиды $ABCDE$ лежит параллелограмм $ABCD$. Ни одна из боковых граней не является тупоугольным треугольником. На ребре DC существует такая точка M, что прямая EM перпендикулярна BC. Кроме того, диагональ основания AC и боковые ребра ED и EB связаны соотношениями: $|AC| > \frac{5}{4}|EB| > \frac{5}{3}|ED|$. Через вершину B и середину одного из боковых ребер проведено сечение, представляющее собой равнобочную трапецию. Найти отношение площади сечения и площади основания пирамиды.

71. Отрезок AB единичной длины, являющийся хордой сферы радиуса 1, расположен под углом $\pi/3$ к диаметру CD этой сферы. Расстояние от конца C диаметра до ближайшего к нему конца A хорды AB равно $\sqrt{2}$. Определить величину отрезка BD.

72. В треугольной пирамиде $ABCD$ грани ABC и ABD имеют площади p и q и образуют между собой угол α. Найти площадь сечения пирамиды, проходящего через ребро AB и центр вписанного в пирамиду шара.

73. В треугольной пирамиде $ABCD$ через ребро AD ($|AD| = a$) и точку E — середину ребра BC — проведено сечение, образующее с гранями ACD и ADB соответственно углы α и β. Найти объем пирамиды, если площадь сечения ADE равна S.

74. $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребром a. Пусть M — центр грани ADC, N — середина ребра BC. Найти радиус шара, вписанного в трехгранный угол A и касающегося прямой MN.

75. В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит правильный треугольник ABC. Грань BCD образует с плоскостью основания угол $60°$. На прямой, проходящей через точку D перпендикулярно основанию, лежит центр сферы единичного радиуса, которая касается ребер AB, AC и грани BCD. Высота пирамиды DH в два раза меньше стороны основания. Найти объем пирамиды.

76. В треугольной пирамиде $SABC$ известно, что $|AC| = |AB|$, а ребро SA наклонено к плоскостям граней ABC и SBC под углом $45°$. Известно, что вершина A и середины всех ребер пирамиды, кроме SA, лежат на сфере радиуса 1. Доказать, что центр сферы расположен на ребре SA, и найти площадь грани ASC.

77. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Найти радиус сферы, касающейся отрезков AC_1 и CC_1, прямых AB и BC и пересекающей прямые AC и A_1C_1.

78. Шар касается плоскости основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ в точке A и, кроме того, касается вписанного в пирамиду шара. Через центр первого шара и сторону основания BC проведена секущая плоскость. Найти угол наклона этой плоскости к плоскости основания, если известно, что диагонали сечения перпендикулярны ребрам SA и SD.

79. На сфере, радиус которой равен 2, расположены три окружности радиуса 1, каждая из которых касается двух других. Найти радиус окружности, меньшей, чем данные, которая также расположена на данной сфере и касается каждой из данных окружностей.

80. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ длины ребер AB, BC и BB_1 равны соответственно $2a$, a и a, точка E — середина ребра BC. Вершины M и N правильного тетраэдра $MNPQ$ лежат на прямой C_1E, вершины P и Q — на прямой, проходящей через точку B_1 и пересекающей прямую AD в точке F. Найти: а) длину отрезка DF; б) расстояние между серединами отрезков MN и PQ.

81. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину a. Точки M и N лежат на отрезках BD и CC_1 соответственно. Прямая MN образует угол $\pi/4$ с плоскостью $ABCD$ и угол $\pi/6$ с плоскостью BB_1C_1C. Найти: а) длину отрезка MN; б) радиус шара с центром на отрезке MN, касающегося плоскостей $ABCD$ и BB_1C_1C.

82. Вершина A правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ совпадает с вершиной конуса, вершины B и C лежат на боковой поверхности этого конуса, а вершины B_1 и C_1 —

на окружности его основания. Найти отношение объемов конуса и призмы, если $|AA_1| = 2{,}4\,|AB|$.

83. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Точки P, K, L — середины ребер AA_1, A_1D_1, B_1C_1 соответственно, точка Q — центр грани CC_1D_1D. Отрезок MN с концами на прямых AD и KL пересекает прямую PQ и перпендикулярен ей. Найти длину этого отрезка.

84. В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ длина бокового ребра и высота основания равна a. Через вершину A проведены две плоскости: одна перпендикулярно прямой AB_1, вторая перпендикулярно прямой AC_1. Через вершину A_1 также проведены две плоскости: одна перпендикулярно прямой A_1B, вторая перпендикулярно прямой A_1C. Найти объем многогранника, ограниченного этими четырьмя плоскостями и плоскостью BB_1C_1C.

85. Точка O — общая вершина двух равных конусов, расположенных по одну сторону от плоскости α так, что только одна образующая каждого конуса (OA для одного конуса и OB для другого) принадлежит плоскости α. Известно, что величина угла между высотами конусов равна β, а величина угла между высотой и образующей конуса равна φ, причем $2\varphi < \beta$. Найти величину угла между образующей OA и плоскостью основания другого конуса, которой принадлежит точка B.

86. Внутри правильного тетраэдра $ABCD$ расположены два шара радиусов $2R$ и $3R$, касающиеся друг друга внешним образом, причем один шар вписан в трехгранный угол тетраэдра с вершиной в точке A, а другой — в трехгранный угол с вершиной в точке B. Найти длину ребра этого тетраэдра.

87. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ ($ABCD$ — основание) сторона основания равна a, а угол между боковым ребром и плоскостью основания равен α. Плоскость, параллельная диагонали основания AC и боковому ребру BS, пересекает пирамиду так, что в сечение можно вписать окружность. Определить радиус этой окружности.

88. Ребро правильного тетраэдра равно a. Плоскость P проходит через вершину B и середины ребер AC и AD. Шар касается прямых AB, AC, AD и той части плоскости P, которая заключена внутри тетраэдра. Найти радиус шара.

89. В правильном тетраэдре точки M и N являются серединами противоположных ребер. Проекция тетраэдра на плоскость, параллельную MN, представляет собой че-

тырехугольник площади S, один из углов которого равен 60°. Найти площадь поверхности тетраэдра.

90. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на AC взята точка M, а на диагонали BD_1 куба взята точка N так, что $\widehat{NMC} = 60^\circ$, $\widehat{MNB} = 45^\circ$. В каком отношении точки M и N делят отрезки AC и BD_1?

91. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит равнобочная трапеция $ABCD$, в которой AD параллельна BC, $|AD|/|BC| = n$, $n > 1$. Через ребра AA_1 и BC проведены плоскости, параллельные диагонали B_1D; через ребра DD_1 и B_1C_1 проведены плоскости, параллельные диагонали A_1C. Определить отношение объема треугольной пирамиды, ограниченной этими четырьмя плоскостями, к объему призмы.

92. Сторона основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна a. Точки M и N являются соответственно серединами ребер A_1B_1 и AA_1. Проекция отрезка BM на прямую C_1N равна $a/2\sqrt{5}$. Определить высоту призмы.

93. Два шара касаются между собой и граней двугранного угла, величина которого α. Пусть A и B — две точки касания этих шаров с гранями (A и B принадлежат разным шарам и разным граням). В каком отношении отрезок AB делится точками пересечения с поверхностями этих шаров?

94. Основанием пирамиды $ABCD$ является правильный треугольник ABC со стороной 12. Ребро BD перпендикулярно плоскости основания и равно $10\sqrt{3}$. Все вершины этой пирамиды лежат на боковой поверхности прямого кругового цилиндра, ось которого пересекает ребро BD и плоскость ABC. Определить радиус цилиндра.

95. Основанием пирамиды служит квадрат $ABCD$ со стороной a, боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и равно b. M — точка на ребре AS. Точки M, B и D лежат на боковой поверхности прямого кругового конуса с вершиной в точке A, а точка C — в плоскости основания этого конуса. Определить площадь боковой поверхности конуса.

96. Внутри прямого кругового конуса расположен куб так, что одно ребро куба лежит на диаметре основания конуса, вершины куба, не принадлежащие этому ребру, лежат на боковой поверхности конуса, центр куба лежит на высоте конуса. Найти отношение объема конуса к объему куба.

97. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ проведены два сечения. Первое сечение проходит через ребро AB и середину ребра CC_1, а второе — через ребро A_1B_1 и середину ребра CB. Найти отношение длины отрезка линии пересечения этих сечений, заключенного внутри призмы, к длине ребра AB.

98. В тетраэдре $ABCD$ ребро AB перпендикулярно ребру CD, $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$, площадь сечения, проходящего через ребро AB и середину ребра DC, равна S, $|DC| = a$. Найти объем тетраэдра $ABCD$.

99. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ (S — ее вершина). Ребро SC этой пирамиды совпадает с боковым ребром правильной треугольной призмы $A_1B_1CA_2B_2S$ (A_1A_2, B_1B_2 и CS — боковые ребра, а A_1B_1C — одно из оснований). Вершины A_1 и B_1 лежат в плоскости грани SAB пирамиды. Какую долю от объема всей пирамиды составляет объем части пирамиды, лежащей внутри призмы, если отношение длины бокового ребра пирамиды к стороне ее основания равно $2/\sqrt{3}$?

100. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 сторона верхнего основания $A_1B_1C_1D_1$ равна 1, а сторона нижнего основания равна 7. Плоскость, проходящая через ребро B_1C_1 перпендикулярно к плоскости AD_1C, делит пирамиду на две части равного объема. Найти объем пирамиды.

101. Основанием призмы $ABCA_1B_1C_1$ является правильный треугольник ABC со стороной a. Проекцией призмы на плоскость основания является трапеция с боковой стороной AB и площадью, в два раза большей площади основания. Радиус сферы, проходящей через вершины A, B, A_1, C_1, равен a. Найти объем призмы.

102. В плоскости дан квадрат $ABCD$ со стороной a и точка M на расстоянии b от его центра. Найти сумму объемов тел, получающихся при вращении треугольников ABM, BCM, CDM и DAM соответственно вокруг прямых AB, BC, CD и DA.

103. Точка D — середина ребра A_1C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Правильная треугольная пирамида $SMNP$ расположена так, что плоскость ее основания MNP совпадает с плоскостью ABC, вершина M лежит на продолжении AC, причем $|CM| = \frac{1}{2}|AC|$, ребро SN проходит через точку D, а ребро SP пересекает отрезок BB_1. В каком отношении отрезок BB_1 делится точкой пересечения?

104. Центры трех сфер, радиусы которых равны 3, 4 и 6, расположены в вершинах правильного треугольника со стороной 11. Сколько существует плоскостей, касающихся одновременно всех трех сфер?

105. Все плоские углы трехгранного угла $NKLM$ (N — вершина) прямые. На грани LNM взята точка P на расстоянии 2 от вершины N и на расстоянии 1 от ребра MN. Из некоторой точки S, расположенной внутри трехгранного угла $NKLM$, в точку P направлен луч света. Луч образует угол $\pi/4$ с плоскостью MNK и равные углы с ребрами KN и MN. Луч зеркально отражается от граней угла $NKLM$ сначала в точке P, затем — в точке Q, затем — в точке R. Найти сумму длин отрезков PQ и QR.

106. Основанием треугольной пирамиды $ABCD$ является треугольник ABC, в котором $\widehat{A} = \pi/2$, $\widehat{C} = \pi/6$, $|BC| = 2\sqrt{2}$. Длины ребер AD, BD и CD равны между собой. Сфера радиуса 1 касается ребер AD, BD, продолжения ребра CD за точку D и плоскости ABC. Найти величину отрезка касательной, проведенной из точки A к сфере.

107. Три шара, среди которых имеются два одинаковых, касаются плоскости P и, кроме того, попарно касаются друг друга. Вершина прямого кругового конуса принадлежит плоскости P, а ось конуса перпендикулярна этой плоскости. Все три шара расположены вне конуса, причем каждый из них касается его боковой поверхности. Найти косинус угла между образующей конуса и плоскостью P, если известно, что в треугольнике с вершинами в точках касания шаров с плоскостью один из углов равен 150°.

108. Объем тетраэдра $ABCD$ равен 5. Через середины ребер AD и BC проведена плоскость, пересекающая ребро CD в точке M. При этом отношение длины отрезка DM к длине отрезка CM равно 2/3. Вычислить площадь сечения тетраэдра указанной плоскостью, если расстояние от нее до вершины A равно 1.

109. В правильную треугольную пирамиду $SABC$ с вершиной S и основанием ABC вписан шар радиуса 2; высота пирамиды SK равна 6. Доказать, что существует единственная плоскость, пересекающая ребра основания AB и BC в некоторых точках M и N таких, что $|MN| = 7$, касающаяся шара в точке, удаленной на равные расстояния от точек M и N, и пересекающая продолжение высоты пирамиды SK за точку K в некоторой точке D. Найти длину отрезка SD.

110. Все ребра треугольной пирамиды $ABCD$ касаются некоторого шара. Три отрезка, соединяющие середины скрещивающихся ребер, равны. Угол ABC равен $100°$. Найти отношение высот пирамиды, опущенных из вершин A и B.

111. В пирамиде $SABC$ произведения длин ребер каждой из четырех граней равны одному и тому же числу. Длина высоты пирамиды, опущенной из S на грань ABC, равна $2\sqrt{\frac{102}{55}}$, а величина угла CAB равна $\arccos\left(\frac{1}{6}\sqrt{\frac{17}{2}}\right)$. Найти объем пирамиды $SABC$, если

$$|SA|^2 + |SB|^2 - 5|SC|^2 = 60.$$

112. В плоскости P дан равнобедренный треугольник ABC ($|AB| = |BC| = l$, $|AC| = 2a$). Шар радиуса r касается плоскости P в точке B. Две скрещивающиеся прямые проходят через точки A и C и касаются шара. Угол между каждой из этих прямых и плоскостью P равен α. Найти расстояние между этими прямыми.

113. Основанием пирамиды $ABCEH$ служит выпуклый четырехугольник $ABCE$, который диагональю BE делится на два равновеликих треугольника. Длина ребра AB равна 1, длины ребер BC и CE равны. Сумма длин ребер AH и EH равна $\sqrt{2}$. Объем пирамиды равен 1/6. Найти радиус шара, имеющего наибольший объем среди всех шаров, помещающихся в пирамиде.

114. В пирамиде $SABC$ прямая, пересекающая ребра AC и BS и перпендикулярная к ним, проходит через середину ребра BS. Грань ASB равновелика грани BSC, а площадь грани ASC в два раза больше площади грани BSC. Внутри пирамиды есть точка M, сумма расстояний от которой до вершин B и S равна сумме расстояний до всех граней пирамиды. Найти расстояние от точки M до вершины B, если $|AC| = \sqrt{6}$, $|BS| = 1$.

115. В основании пирамиды лежит прямоугольник с острым углом между диагоналями α ($\alpha < 60°$), боковые ребра ее равны между собой, а высота h. Внутри этой пирамиды расположена треугольная пирамида, вершина которой совпадает с вершиной первой пирамиды, а вершины основания лежат по одной на трех сторонах прямоугольника. Найти объем четырехугольной пирамиды, если все ребра треугольной пирамиды равны между собой, а боковые грани равновелики.

116. В треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC и равными боковыми ребрами сумма двугранных углов с ребрами SA и SC равна 180°. Известно, что $|AB| = a$, $|BC| = b$. Найти длину бокового ребра.

117. Дан правильный тетраэдр с ребром a. Сфера касается трех ребер тетраэдра, выходящих из одной вершины, в их концах. Найти площадь части сферической поверхности, расположенной внутри тетраэдра.

118. На поверхности сферы радиуса 2 расположены три попарно касающиеся друг друга окружности радиуса $\sqrt{2}$. Часть поверхности сферы, расположенная вне окружностей, представляет собой два криволинейных треугольника. Найти площади этих треугольников.

119. Три двугранных угла тетраэдра, не принадлежащие одной вершине, равны $\pi/2$. Оставшиеся три двугранных угла равны между собой. Найти эти углы.

120. Два шара вписаны в боковую поверхность конуса и касаются между собой. Третий шар проходит через две окружности, по которым касаются поверхности конуса первые два шара. Доказать, что объем части третьего шара, расположенной вне конуса, равен объему части конуса, заключенной между первыми двумя шарами внутри конуса.

121. Шар радиуса R касается одного основания усеченного конуса и его боковой поверхности по окружности, совпадающей с окружностью другого основания конуса. Найти объем тела, состоящего из объединения конуса и шара, если полная поверхность этого тела равна S.

122. Два треугольника — правильный со стороной a и равнобедренный прямоугольный с катетами, равными b,— расположены в пространстве так, что их центры тяжести совпадают. Найти сумму квадратов расстояний от всех вершин одного из них до всех вершин другого.

123. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) точка E — середина апофемы грани SBC, а точки F, L и M лежат на ребрах AB, AC и SC соответственно, причем $|AL| = \frac{1}{10}|AC|$. Известно, что $EFLM$ — равнобедренная трапеция и длина ее основания EF равна $\sqrt{7}$. Найти объем пирамиды.

124. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Основания цилиндра вписаны в грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Пусть M — точка на ребре AB такая, что $|AM| = a/3$, N — точка на ребре B_1C_1 такая, что $|NC_1| = a/4$. Через точки C_1 и M проходит плоскость, касающаяся основания цилиндра, вписанного в $ABCD$, а через A и N — плоскость, касающаяся основания, вписанного в $A_1B_1C_1D_1$.

Найти объем части цилиндра, заключенной между плоскостями.

125. Определить полную поверхность призмы, описанной около шара, если площадь ее основания равна S.

126. Центр сферы α лежит на поверхности сферы β. Отношение поверхности сферы β, лежащей внутри сферы α, ко всей поверхности сферы α равно 1/5. Найти отношение радиусов сфер α и β.

127. Около шара описан усеченный конус. Полная поверхность этого конуса S. Второй шар касается боковой поверхности конуса по окружности основания конуса. Найти объем усеченного конуса, если известно, что часть поверхности второго шара, находящаяся внутри первого имеет площадь Q.

128. Около шара описан усеченный конус, основания которого являются большими кругами двух других шаров. Определить полную поверхность усеченного конуса, если сумма поверхностей трех шаров есть S.

129. Через вершину прямого кругового конуса проведено сечение максимальной площади. Известно, что площадь этого сечения в два раза больше площади осевого сечения. Найти угол при вершине осевого сечения конуса

130. В конус вписана треугольная пирамида $SABC$ (S совпадает с вершиной конуса, A, B и C лежат на окружности основания конуса), двугранные углы при ребрах SA, SB и SC равны соответственно α, β и γ. Найти угол между плоскостью SBC и плоскостью, касающейся поверхности конуса по образующей SC.

131. Три точки A, B и C, расположенные на поверхности сферы радиуса R, попарно соединены дугами больших кругов, меньшими полуокружности. Через середины дуг $\breve{AB}$ и $\breve{AC}$ проведен еще один большой круг, пересекающий продолжение $\breve{BC}$ в точке K. Найти длину дуги $\breve{CK}$, если $|\breve{BC}| = l$ $(l < \pi R)$.

132. Найти объем тела, полученного при вращении правильного треугольника со стороной a вокруг прямой, параллельной его плоскости и такой, что проекция этой прямой на плоскость треугольника содержит какую-либо высоту треугольника.

133. Рассмотрим тело, состоящее из точек, удаленных от какой-либо точки внутри или на границе плоской выпуклой фигуры периметра $2p$ и площади S на расстояние не больше d. Найти объем этого тела.

134. Дана треугольная пирамида $SABC$. Шар радиуса

R касается плоскости ABC в точке C и ребра SA в точке S. Прямая BS вторично пересекает шар в точке, диаметрально противоположной точке C. Найти объем пирамиды $SABC$, если $|BC| = a$, $|SA| = b$.

135. Внутри правильной треугольной пирамиды расположена вершина трехгранного угла, все плоские углы которого прямые, а биссектрисы плоских углов проходят через вершины основания. В каком отношении поверхность этого угла делит объем пирамиды, если каждая грань пирамиды разделена ею на две равновеликие части?

136. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ объема V. Найти объем общей части двух тетраэдров AB_1CD_1 и A_1BC_1D.

137. Две одинаковые треугольные пирамиды объема V расположены в пространстве симметрично относительно точки O. Найти объем их общей части, если точка O лежит на отрезке, соединяющем вершину пирамиды с центром тяжести основания, и делит этот отрезок в отношении 1) $1:1$, 2) $3:1$, 3) $2:1$, 4) $4:1$, считая от вершины.

138. Правильный тетраэдр объема V повернут около прямой, соединяющей середины его скрещивающихся ребер, на угол α. Найти объем общей части данного тетраэдра и повернутого $(0 < \alpha < \pi)$.

139. Ребро куба равно a. Куб повернут около диагонали на угол α. Найти объем общей части первоначального куба и повернутого.

140. На плоское зеркало под углом α падает луч света. Зеркало поворачивается на угол β вокруг проекции луча на зеркало. На какой угол отклонится отраженный луч?

141. В пространстве даны точки A, B, C и D, причем $|AB| = |BC| = |CD|$, $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDA} = \alpha$. Найти угол между прямыми AC и BD.

142. Дана правильная n-угольная призма. Площадь основания равна S. Две плоскости пересекают все боковые ребра призмы таким образом, что объем части призмы между плоскостями равен V. Найти сумму длин отрезков боковых ребер призмы, заключенных между плоскостями, если известно, что плоскости не имеют общих точек внутри призмы.

143. Три последовательные стороны плоского выпуклого пятиугольника равны 1, 2 и a. Найти оставшиеся две стороны этого пятиугольника, если известно, что он является ортогональной проекцией на плоскость пра-

вильного пятиугольника. При каких значениях a задача имеет решение?

144. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, M — центр грани ABB_1A_1, N — точка на ребре B_1C_1, L — середина A_1B_1, K — основание перпендикуляра, опущенного из N на BC_1. В каком отношении точка N делит ребро B_1C_1, если $\widehat{LMK} = \widehat{MKN}$?

145. В правильной шестиугольной пирамиде центр описанной сферы лежит на поверхности вписанной. Найти отношения радиусов описанной и вписанной сфер.

146. В правильной четырехугольной пирамиде центр описанного шара лежит на поверхности вписанного шара. Найти величину плоского угла при вершине пирамиды.

147. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной a. Оба угла между противоположными боковыми гранями прямые. Двугранный угол при ребре SA равен α. Найти объем пирамиды.

148. Плоскость, пересекающая поверхность треугольной пирамиды, делит медианы граней, выходящие из одной вершины, в отношениях $2:1$, $1:2$, $4:1$ соответственно (считая от вершины). В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

149. n равных конусов имеют общую вершину. Каждый касается двух других по образующей, а все касаются одной плоскости. Найти угол при вершине осевого сечения этих конусов.

150. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскость, проходящая через A и касающаяся вписанного в куб шара, пересекает ребра A_1B_1 и A_1D_1 в точках K и N. Определить величину двугранного угла между плоскостями AC_1K и AC_1N.

151. Дан тетраэдр $ABCD$. Другой тетраэдр — $A_1B_1C_1D_1$ расположен так, что его вершины A_1, B_1, C_1, D_1 лежат соответственно в плоскостях BCD, CDA, DAB, ABC, а плоскости его граней $A_1B_1C_1$, $B_1C_1D_1$, $C_1D_1A_1$, $D_1A_1B_1$ содержат соответственно вершины D, A, B и C тетраэдра $ABCD$. Известно также, что A_1 совпадает с центром тяжести треугольника BCD, а прямые BD_1, CB_1, DC_1 делят пополам соответственно отрезки AC, AD, AB. Найти объем общей части этих тетраэдров, если объем тетраэдра $ABCD$ равен V.

152. В тетраэдре $ABCD$ дано $|BC| = |CD| = |DA|$, $|BD| = |AC|$, $|BD| > |BC|$, двугранный угол при ребре AB равен $\pi/3$. Найти сумму остальных двугранных углов.

153. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Известно, что пирамиды $ABCC_1$, ABB_1C_1 и $AA_1B_1C_1$ равны между собой. Найти двугранные углы между плоскостью основания и боковыми гранями призмы, если в основании лежит неравнобедренный прямоугольный треугольник.

154. В правильном тетраэдре $ABCD$ с ребром a в плоскостях BCD, CDA, DAB и ABC взяты соответственно точки A_1, B_1, C_1 и D_1 так, что прямая A_1B_1 перпендикулярна плоскости BCD, B_1C_1 перпендикулярна плоскости CDA, C_1D_1 перпендикулярна плоскости DAB и, наконец, D_1A_1 перпендикулярна плоскости ABC. Найти объем тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$.

155. n равных шаров радиуса R касаются боковой поверхности изнутри и плоскости основания конуса, причем каждый шар касается двух соседних; n шаров радиуса $2R$ расположены аналогичным образом, касаясь боковой поверхности с внешней стороны. Найти объем конуса.

156. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На отрезках AA_1 и BC_1 взяты точки M и N так, что прямая MN пересекается с прямой B_1D. Найти

$$\frac{|BC_1|}{|BN|}-\frac{|AM|}{|AA_1|}.$$

157. Про тетраэдр известно, что все его грани — подобные, но не все равные между собой треугольники. Кроме того, у любых двух граней есть по крайней мере одна пара равных ребер, не считая общего ребра. Найти объем этого тетраэдра, если длины двух ребер, лежащих в одной грани, равны 3 и 5.

158. Даны три взаимно перпендикулярные прямые, расстояние между любыми двумя равно a. Найти объем параллелепипеда, диагональ которого лежит на одной прямой, а диагонали двух соседних граней на двух других прямых.

159. Сечение правильной четырехугольной пирамиды некоторой плоскостью представляет собой правильный пятиугольник со стороной a. Найти объем пирамиды.

160. Дан треугольник ABC, площадь которого S, а радиус описанной окружности равен R. В вершинах A, B и C к плоскости треугольника восставлены перпендикуляры, и на них взяты точки A_1, B_1 и C_1 так, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 по длине равны соответствующим высотам треугольника, опущенным из вершин A, B и C. Найти объем пирамиды, ограниченной плоскостями A_1B_1C, A_1BC_1, AB_1C_1 и ABC.

ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ-МИНИМУМ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК

§ 1. Задачи на доказательство

161. Во всяком ли тетраэдре высоты пересекаются в одной точке?

162. Существует ли такая треугольная пирамида, что основания всех ее высот лежат вне соответствующих граней?

163. Доказать, что прямая, образующая равные углы с тремя пересекающимися прямыми плоскости, перпендикулярна плоскости.

164. Какие правильные многоугольники могут получаться при пересечении куба плоскостью?

165. Доказать, что сумма плоских углов трехгранного угла меньше 2π, а сумма двугранных углов — больше π.

166. Пусть плоские углы трехгранного угла равны α, β и γ, а противолежащие им двугранные углы — A, B и C. Доказать, что справедливы следующие равенства:

1) $$\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C}$$

(теорема синусов для трехгранного угла),

2) $$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A$$

(1-я теорема косинусов для трехгранного угла),

3) $$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos\alpha$$

(2-я теорема косинусов для трехгранного угла).

167. Доказать, что если все плоские углы трехгранного угла тупые, то и все двугранные углы также тупые.

168. Доказать, что если у трехгранного угла все двугранные углы острые, то и все плоские углы острые.

169. Доказать, что в произвольном тетраэдре найдется трехгранный угол, все плоские углы которого острые.

170. Доказать, что в произвольном многограннике, все грани которого — треугольники, найдется такое ребро, что все плоские углы, прилежащие к нему, — острые.

171. Доказать, что трехгранную призматическую поверхность можно пересечь плоскостью таким образом, что в сечении будет правильный треугольник.

172. В треугольной пирамиде все плоские углы при вершине A — прямые, ребро AB равно сумме двух других ребер, выходящих из A. Доказать, что сумма плоских углов при вершине B равна $\pi/2$.

173. Любой ли трехгранный угол можно пересечь плоскостью таким образом, что в сечении получится правильный треугольник?

174. Найти плоские углы при вершине трехгранного угла, если известно, что любое его сечение плоскостью есть остроугольный треугольник.

175. Доказать, что в любом тетраэдре имеется такая вершина, что из отрезков, равных выходящим из этой вершины ребрам, можно построить треугольник.

176. Доказать, что любой тетраэдр можно разрезать плоскостью на две части так, что из получившихся кусков можно вновь сложить такой же тетраэдр, приложив их друг к другу иным способом.

177. Найти плоские углы при вершине трехгранного угла, если известно, что существует другой трехгранный угол с той же вершиной, ребра которого лежат в плоскостях, образующих грани данного, и перпендикулярны противоположным ребрам данного угла.

178. Прямая l образует острые углы α, β и γ с тремя взаимно перпендикулярными прямыми. Доказать, что $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.

179. Доказать, что сумма углов, образуемых ребрами трехгранного угла с противоположными гранями, меньше суммы его плоских углов.

Доказать также, что если плоские углы трехгранного угла — острые, то сумма углов, образуемых его ребрами с противоположными гранями, больше половины суммы плоских углов. Верно ли последнее утверждение для произвольного трехгранного угла?

180. Доказать, что сумма четырех двугранных углов тетраэдра (исключая любые два противоположные угла) меньше 2π, сумма же всех двугранных углов тетраэдра заключена между 2π и 3π.

181. Из произвольной точки основания правильной пирамиды восставлен перпендикуляр. Доказать, что сумма отрезков от основания перпендикуляра до пересечения с боковыми гранями или их продолжением есть величина постоянная.

182. Доказать, что если x_1, x_2, x_3, x_4 — расстояния от произвольной точки внутри тетраэдра до его граней, h_1, h_2, h_3, h_4 — соответствующие высоты тетраэдра, то

$$\frac{x_1}{h_1}+\frac{x_2}{h_2}+\frac{x_3}{h_3}+\frac{x_4}{h_4}=1.$$

183. Доказать, что плоскость, проходящая через середины двух скрещивающихся ребер тетраэдра, делит его на две части, равные по объему.

184. Доказать, что если в основании пирамиды $ABCD$ лежит правильный треугольник ABC и $\widehat{DAB}=\widehat{DBC}=\widehat{DCA}$, то пирамида правильная.

185. Пусть a и a_1, b и b_1, c и c_1 — пары противоположных ребер тетраэдра, α, β и γ — соответственно углы между ними (α, β и γ не превосходят 90°). Доказать, что из трех чисел $aa_1\cos\alpha$, $bb_1\cos\beta$, $cc_1\cos\gamma$ одно есть сумма двух других.

186. В тетраэдре $ABCD$ ребра DA, DB и DC равны соответствующим высотам треугольника ABC (DA равно высоте, проведенной из вершины A, и т. д.). Доказать, что сфера, проходящая через три вершины тетраэдра, пересекает ребра, выходящие из четвертой вершины, в трех точках, являющихся вершинами правильного треугольника.

187. Дана четырехугольная пирамида $MABCD$, в основании которой лежит выпуклый четырехугольник $ABCD$. Плоскость пересекает ребра MA, MB, MC и MD соответственно в точках K, L, P и N. Доказать, что выполняется соотношение

$$S_{BCD}\frac{|MA|}{|MK|}+S_{ADB}\frac{|MC|}{|MP|}=S_{ABC}\frac{|MD|}{|MN|}+S_{ACD}\frac{|MB|}{|ML|}.$$

188. Из произвольной точки пространства опущены перпендикуляры на грани данного куба. Получившиеся шесть отрезков являются диагоналями шести кубов. Доказать, что шесть сфер, каждая из которых касается всех ребер соответствующего куба, имеют общую касательную прямую.

189. Даны три параллельные прямые. A, B и C — фиксированные точки на этих прямых. Пусть M, N и L — соответственные точки на этих же прямых, расположенные по одну сторону от плоскости ABC. Доказать, что если: а) сумма длин отрезков AM, BN и CL постоянна, или б) сумма площадей трапеций $AMNB$, $BNLC$ и $CLMA$ постоянна, то плоскость MNL проходит через фиксированную точку.

190. Сумма длин двух скрещивающихся ребер тетраэдра равна сумме длин двух других скрещивающихся ребер. Доказать, что сумма двугранных углов, ребрами которых является первая пара ребер, равна сумме двугранных углов, ребрами которых является вторая пара ребер тетраэдра.

191. Пусть O — центр правильного тетраэдра. Из произвольной точки M, расположенной на одной из граней тетраэдра, опускают перпендикуляры на остальные три его грани. K, L, N — основания этих перпендикуляров. Доказать, что прямая OM проходит через центр тяжести треугольника KLN.

192. В тетраэдре $ABCD$ ребро CD перпендикулярно плоскости ABC, M — середина DB, N — середина AB, K — точка на ребре CD такая, что $|CK| = \frac{1}{3}|CD|$. Доказать, что расстояние между прямыми BK и CN равно расстоянию между прямыми AM и CN.

193. В плоскости одной из боковых граней правильной четырехугольной пирамиды взят произвольный треугольник. Этот треугольник проектируется на основание пирамиды, получившийся треугольник вновь проектируется на боковую грань, смежную с первоначальной. Доказать, что получившийся при последнем проектировании треугольник подобен первоначальному.

194. В тетраэдре $ABCD$ в грани BCD взята произвольная точка A_1. Через вершину A проведена произвольная плоскость. Прямые, проходящие через вершины B, C и D параллельно прямой AA_1, пересекают эту плоскость в точках B_1, C_1, D_1. Доказать, что объем тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$ равен объему тетраэдра $ABCD$.

195. Дан тетраэдр $ABCD$. В плоскостях, определяющих его грани, взяты точки A_1, B_1, C_1, D_1 таким образом, что прямые AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 параллельны между собой. Найти отношение объемов тетраэдров $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$.

196. Пусть D — одна из вершин тетраэдра, M — его центр тяжести, O — центр описанного шара. Известно, что точки D, M и точки пересечения медиан граней, содержащих D, лежат на поверхности одной сферы. Доказать, что прямые DM и OM перпендикулярны.

197. Доказать, что никакое тело в пространстве не может иметь в точности четное число осей симметрии.

198. Дана окружность и точка A в пространстве. Пусть B — проекция A на плоскость, в которой располо-

жена окружность, D — произвольная точка окружности. Доказать, что проекции B на AD лежат на одной окружности.

199. В основании пирамиды $ABCDE$ лежит четырехугольник $ABCD$, диагонали AC и BD которого перпендикулярны и пересекаются в точке M. Отрезок EM является высотой пирамиды. Доказать, что проекции точки M на боковые грани пирамиды лежат в одной плоскости.

200. Доказать, что, если прямая, проходящая через центр тяжести тетраэдра $ABCD$ и центр описанной около него сферы, пересекает ребра AB и CD, то $|AC| = |BD|$, $|AD| = |BC|$.

201. Доказать, что, если прямая, проходящая через центр тяжести тетраэдра $ABCD$ и центр вписанной в него сферы, пересекает ребра AB и CD, то $|AC| = |BD|$, $|AD| = |BC|$.

202. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через вершину A проведена плоскость, касающаяся вписанного в куб шара. Пусть M и N — точки пересечения этой плоскости с прямыми A_1B и A_1D. Доказать, что прямая MN касается вписанного в куб шара.

203. Доказать, что для тетраэдра, у которого все плоские углы при одной из вершин прямые, справедливо утверждение: сумма квадратов площадей прямоугольных граней равна квадрату площади четвертой грани (теорема Пифагора для прямоугольного тетраэдра).

204. Доказать, что сумма квадратов проекций ребер куба на произвольную плоскость постоянна.

205. Доказать, что сумма квадратов проекций ребер правильного тетраэдра на произвольную плоскость постоянна.

206. Два тела в пространстве двигаются по двум прямым с постоянными и неравными скоростями. Доказать, что существует такая фиксированная окружность в пространстве, отношение расстояний от любой точки которой до этих тел постоянно и равно отношению их скоростей.

207. Дан шар и две точки A и B вне его. Из A и B к шару проведены две пересекающиеся касательные. Доказать, что точка их пересечения лежит в одной из двух фиксированных плоскостей.

208. Три шара касаются плоскости данного треугольника в его вершинах и касаются между собой. Доказать, что, если треугольник разносторонний, то существуют два шара, касающиеся трех данных и плоскости треугольника, причем если r и ρ $(\rho > r)$ — радиусы этих шаров,

R — радиус окружности, описанной около треугольника, то $\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} = \frac{2\sqrt{3}}{R}$.

209. Дан тетраэдр $ABCD$. Один шар касается ребер AB и CD в точках A и C, а другой — в точках B и D. Доказать, что проекции AC и BD на прямую, проходящую через центры этих шаров, равны.

210. Существует ли пространственный пятиугольник такой, что отрезок, соединяющий любые две не соседние вершины, пересекает плоскость треугольника, образованного остальными тремя вершинами, во внутренней точке этого треугольника?

211. Доказать, что пятиугольник, все стороны которого равны между собой и углы которого также равны между собой, является плоским.

212. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, диагональ AC_1 которого равна d, а объем V. Доказать, что из отрезков, равных расстояниям от вершины A_1, B и D до диагонали AC_1, можно построить треугольник и что, если s — площадь этого треугольника, то $V = 2ds$.

213. Дан тетраэдр $ABCD$. A_1, B_1, C_1, D_1 — точки пересечения медиан граней BCD, CDA, DAB, ABC. Доказать, что существует тетраэдр $A_2B_2C_2D_2$, у которого ребра A_2B_2, B_2C_2, C_2D_2 и D_2A_2 равны и параллельны соответственно отрезкам AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1. Найти объем тетраэдра $A_2B_2C_2D_2$, если объем тетраэдра $ABCD$ равен V.

214. Дан тетраэдр. Доказать, что существует другой тетраэдр $KLMN$, ребра KL, LM, MN и NK которого перпендикулярны соответствующим граням данного тетраэдра и их длины численно равны площадям этих граней. Найти объем тетраэдра $KLMN$, если объем данного V.

215. Даны три пересекающиеся сферы. Через точку, расположенную на общей всем трем сферам хорде, проведены три хорды, принадлежащие различным сферам. Доказать, что концы этих трех хорд лежат на одной сфере.

216. В тетраэдре $ABCD$ проведено сечение плоскостью, перпендикулярной радиусу описанной сферы, идущему в вершину D. Доказать, что вершины A, B, C и точки пересечения плоскости с ребрами DA, DB, DC лежат на одной сфере.

217. Дана сфера, окружность на сфере и точка P, не принадлежащая сфере. Доказать, что вторые точки пересечения прямых, соединяющих точку P и точки на данной окружности, с поверхностью сферы образуют окружность.

218. Доказать, что линия пересечения двух конических поверхностей с параллельными осями и равными углами в осевых сечениях есть плоская кривая.

219. На ребрах AB, BC, CD и DA тетраэдра $ABCD$ взяты точки K, L, M и N, расположенные в одной плоскости. Пусть P — произвольная точка пространства. Прямые PK, PL, PM и PN вторично пересекают соответственно окружности, описанные около треугольников PAB, PBC, PCD и PDA в точках Q, R, S и T. Доказать, что точки P, Q, R, S и T лежат на поверхности сферы.

220. Доказать, что ребра выпуклого четырехгранного угла являются образующими конуса, вершина которого совпадает с вершиной этого угла, тогда и только тогда, когда суммы противоположных двугранных углов четырехгранного угла равны между собой.

221. Дан шестигранник, все грани которого — четырехугольники. Известно, что семь из восьми его вершин лежат на поверхности одной сферы. Доказать, что и восьмая вершина лежит на поверхности той же сферы.

222. На каждом ребре тетраэдра взята произвольная точка, отличная от вершины тетраэдра. Доказать, что четыре сферы, каждая из которых проходит через одну вершину тетраэдра и три точки, взятые на ребрах, выходящих из этой вершины, пересекаются в одной точке.

§ 2. Задачи на максимум-минимум. Геометрические неравенства

223. Дан двугранный угол. Прямая l лежит в плоскости одной из его граней. Доказать, что угол между прямой l и плоскостью другой грани наибольший, когда l перпендикулярна ребру этого двугранного угла.

224. В выпуклом четырехгранном угле все плоские углы равны 60°. Доказать, что углы между противоположными ребрами не могут быть одновременно острыми или одновременно тупыми.

225. Высота усеченной пирамиды равна h, площадь среднего сечения равна S. В каких пределах может меняться объем этой пирамиды?

226. Найти наибольшее значение объема тетраэдра, вписанного в цилиндр, радиус основания которого R, высота h.

227. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат $ABCD$. Найти наиболь-

шую возможную величину угла между прямой BD_1 и плоскостью BDC_1.

228. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ высота в два раза меньше стороны основания. Найти наибольшее значение угла A_1MC_1, где M — точка на ребре AB.

229. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. На продолжении ребра AD за точку D выбрана точка M так, что $|AM| = 2\sqrt{2/5}$. Точка E — середина ребра A_1B_1, точка F — середина ребра DD_1. Какое наибольшее значение может принимать отношение $|MP| / |PQ|$, где точка P лежит на отрезке AE, а точка Q — на отрезке CF?

230. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Точки E и F — середины ребер BB_1 и CC_1, соответственно. Рассматриваются треугольники, вершинами которых служат точки пересечения плоскости, параллельной плоскости $ABCD$, с прямыми AC_1, CE и DF. Найти наименьшее значение площади рассматриваемых треугольников.

231. В правильную четырехугольную пирамиду со стороной основания и высотой, равными 1, вписан прямоугольный параллелепипед, основание которого расположено в плоскости основания пирамиды, а вершины противоположной грани — на боковой поверхности пирамиды. Площадь основания параллелепипеда равна s. В каких пределах может меняться диагональ параллелепипеда?

232. Основаниями усеченной пирамиды являются правильные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ со сторонами 3 и 2 соответственно. Отрезок, соединяющий вершину C_1 с центром O основания ABC, перпендикулярен основаниям; $|C_1O| = 3$. Через вершину B и точки M и N — середины ребер A_1B_1 и B_1C_1 проведена плоскость. Рассматриваются цилиндры, расположенные внутри многогранника $ABCA_1MNC_1$, с основаниями в грани A_1MNC_1. Найти: а) наибольшее значение объема таких цилиндров с данной высотой h; б) наибольшее значение объема среди всех рассматриваемых цилиндров.

233. Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину a. Рассматриваются отрезки с концами на диагоналях BC_1 и CA_1 боковых граней, параллельные плоскости ABB_1A_1. Найти наименьшую длину таких отрезков.

234. Дан трехгранный угол и точка внутри него. Через эту точку проведена плоскость. Доказать, что объем тетраэдра, образованного данным углом и проведенной плоскостью, будет минимален в том случае, когда данная

точка будет центром тяжести треугольника, являющегося сечением трехгранного угла проведенной плоскостью.

235. Поверхность сферического сегмента равна S (рассматривается сферическая часть сегмента). Найти наибольшее значение объема этого сегмента.

236. На плоскости стоит куб с ребром a. Источник света расположен на расстоянии b $(b > a)$ от плоскости. Найти наименьшее значение площади тени, отбрасываемой кубом на плоскость.

237. Дан выпуклый центрально-симметричный многогранник. Рассмотрим сечения этого многогранника, параллельные заданной плоскости. Верны ли следующие утверждения:

1) наибольшую площадь имеет сечение, проходящее через центр;

2) для каждого сечения рассмотрим окружность наименьшего радиуса, его содержащую. Верно ли, что наибольший радиус такой окружности имеет сечение, проходящее через центр многогранника?

238. Какое наименьшее значение может принимать отношение объема конуса к объему цилиндра, описанных около одного и того же шара?

239. Два конуса имеют общее основание и расположены по разные стороны от него. Радиус основания r, высота одного конуса h, другого — H $(h \leqslant H)$. Найти наибольшее расстояние между двумя образующими этих конусов.

240. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Найти радиус наименьшего шара, касающегося прямых AB_1, B_1C, CD и DA.

241. Диагональ куба, ребро которого равно 1, лежит на ребре двугранного угла величины α $(\alpha < 180°)$. В каких пределах может меняться объем части куба, заключенной внутри этого угла?

242. Длины ребер прямоугольного параллелепипеда равны a, b и c. Чему равно наибольшее значение площади прямоугольной проекции этого параллелепипеда на плоскость?

243. Длины пяти ребер тетраэдра меньше единицы. Доказать, что объем тетраэдра меньше 1/8.

244. Вершина E пирамиды $ABCE$ находится внутри пирамиды $ABCD$. Верны ли следующие утверждения:

1) сумма ребер AE, BE и CE меньше суммы ребер AD, BD и CD;

2) хотя бы одно из ребер AE, BE, CE меньше соответствующего ребра AD, BD, CD?

245. Пусть r и R — соответственно радиусы вписанного и описанного шаров правильной четырехугольной пирамиды. Доказать, что

$$\frac{R}{r} > \sqrt{2} + 1.$$

246. Пусть R и r — соответственно радиусы описанного и вписанного шаров некоторого тетраэдра. Доказать, что $R > 3r$.

247. Два противоположных ребра тетраэдра имеют длины b и c, а остальные равны a. Чему равно наименьшее значение суммы расстояний от произвольной точки пространства до вершин этого тетраэдра?

248. Дан усеченный конус, в котором угол между образующей и большим основанием равен 60°. Доказать, что кратчайший путь по поверхности конуса между точкой на границе одного основания и диаметрально противоположной точкой другого основания имеет длину $2R$, где R — радиус большего основания.

249. Пусть a, b и c — три произвольных вектора. Доказать, что

$$|a| + |b| + |c| + |a + b + c| \geqslant$$
$$\geqslant |a + b| + |b + c| + |c + a|.$$

250. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. На прямой AA_1 взята точка M, а на прямой BC — точка N так, что прямая MN пересекает ребро C_1D_1. Найти наименьшее значение величины $|MN|$.

251. В основании четырехугольной пирамиды лежит прямоугольник, одна сторона которого равна a, боковые ребра пирамиды равны b. Найти наибольшее значение объема таких пирамид.

252. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Найти длину наименьшего отрезка, концы которого расположены на прямых AB_1 и BC_1, образующего угол 60° с плоскостью грани $ABCD$.

253. Три одинаковые цилиндрические поверхности радиуса R со взаимно перпендикулярными осями попарно касаются друг друга.

а) Чему равен радиус наименьшего шара, касающегося этих цилиндрических поверхностей?

б) Чему равен радиус наибольшего цилиндра, касающегося трех данных, ось которого проходит внутри треугольника с вершинами в точках касания трех данных цилиндров?

254. Две вершины тетраэдра расположены на поверхности сферы радиуса $\sqrt{10}$, две другие вершины — на поверхности сферы радиуса 2, концентрической с первой. Каков наибольший объем таких тетраэдров?

255. Два трехгранных угла расположены таким образом, что вершина одного из них равноудалена от граней другого и наоборот, расстояние между вершинами равно a. Каков минимальный объем шестигранника, ограниченного гранями этих углов, если все плоские углы одного из них по 60°, а другого — 90°?

256. Каков наибольший объем тетраэдра $ABCD$, все вершины которого лежат на поверхности сферы радиуса 1, а ребра AB, BC, CD и DA видны из центра сферы под углом 60°?

257. Дан правильный тетраэдр с ребром a. Найти радиус такого шара с центром в центре тетраэдра, для которого суммарный объем части тетраэдра, расположенной вне шара, и части шара, расположенной вне тетраэдра, достигает наименьшего значения.

258. Доказать, что среди треугольных пирамид с данным основанием и одинаковыми высотами наименьшую боковую поверхность имеет та, у которой вершина проектируется в центр вписанной в основание окружности.

259. Дан куб с ребром a. Пусть N — точка на диагонали боковой грани, M — точка на окружности, находящейся в плоскости основания, имеющей центр в центре основания и радиус $\frac{5}{12}a$. Найти наименьшее значение величины $|MN|$.

260. а) В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC, в котором $\widehat{BAC} = A$, $\widehat{CBA} = B$, радиус описанной около него окружности равен R. Ребро SC перпендикулярно плоскости ABC. Найти $|SC|$, если известно, что $\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} - \frac{1}{\sin\gamma} = 1$, где α, β и γ — углы, образованные ребрами SA, SB и SC с плоскостями граней SBC, SAC и SAB соответственно.

б) Пусть α, β и γ — углы, образованные ребрами трехгранного угла с плоскостями противоположных граней. Доказать, что $\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} - \frac{1}{\sin\gamma} > 1$.

261. Может ли правильный тетраэдр с ребром 1 пройти через круглое отверстие радиуса: а) 0,45; б) 0,44? Толщиной отверстия можно пренебречь.

§ 3. Геометрические места точек

262. Доказать, что в произвольном трехгранном угле биссектрисы двух плоских углов и угла, смежного к третьему плоскому углу, лежат в одной плоскости.

263. Доказать, что, если боковую поверхность цилиндра пересечь наклонной плоскостью, затем разрезать боковую поверхность вдоль образующей и развернуть на плоскость, то линия сечения будет представлять собой синусоиду.

264. На поверхности конуса дана линия, отличная от образующей и такая, что любые две точки этой линии могут быть соединены дугой, принадлежащей этой линии, представляющей собой на развертке конуса отрезок прямой. Сколько точек самопересечения имеет эта линия, если угол в осевом сечении конуса α?

265. Три взаимно перпендикулярные прямые проходят через точку O. A, B и C — точки на этих прямых такие, что

$$|OA| = |OB| = |OC|.$$

Пусть l — произвольная прямая, проходящая через O; A_1, B_1 и C_1 — точки, симметричные точкам A, B и C относительно l. Через A_1, B_1 и C_1 проведены три плоскости, перпендикулярные соответственно прямым OA, OB и OC. Найти геометрическое место точек пересечения этих плоскостей.

266. Найти геометрическое место середин отрезков, параллельных данной плоскости, концы которых находятся на двух скрещивающихся прямых.

267. Даны три попарно скрещивающиеся прямые. Найти:

а) геометрическое место центров тяжести треугольников ABC с вершинами на этих прямых;

б) геометрическое место центров тяжести треугольников ABC с вершинами на этих прямых, плоскости которых параллельны заданной плоскости.

268. Три попарно скрещивающиеся прямые l_1, l_2, l_3 перпендикулярны одной и той же прямой и пересекаются с ней. Пусть N и M — две такие точки на прямых l_1 и l_2, что прямая NM пересекает прямую l_3. Найти геометрическое место середин отрезков NM.

269. В пространстве задано несколько произвольных прямых и точка A. Через A проводится прямая таким образом, что сумма косинусов острых углов, образуемых

этой прямой с данными, равна заданному числу. Найти геометрическое место таких прямых.

270. Дан треугольник ABC и прямая l. A_1, B_1, C_1 — три произвольные точки на прямой l. Найти геометрическое место центров тяжести треугольников с вершинами в серединах отрезков AA_1, BB_1, CC_1.

271. Дана прямая l и точка A. Через A проводится произвольная прямая, скрещивающаяся с l. Пусть MN — общий перпендикуляр к этой прямой и к l (M — на прямой, проходящей через A). Найти геометрическое место точек M.

272. Две сферы α и β касаются сферы ω в точках A и B. На сфере α берется точка M, прямая MA вторично пересекает сферу ω в точке N, прямая NB вторично пересекает сферу β в точке K. Найти геометрическое место таких точек M, для которых прямая MK касается сферы β.

273. Дана плоскость и две точки по одну сторону от нее. Найти геометрическое место центров сфер, проходящих через эти точки и касающихся плоскости.

274. Найти геометрическое место середин общих касательных к двум заданным сферам.

275. Прямые l_1 и l_2 касаются некоторой сферы. Пусть M и N — две такие точки на l_1 и l_2, что прямая MN также касается этой же сферы. Найти геометрическое место точек касания прямой MN с этой сферой.

276. В пространстве дана точка O и две прямые. Найти геометрическое место точек M таких, что сумма проекций отрезка OM на данные прямые есть величина постоянная.

277. В пространстве даны две прямые и точка A на одной из них; через данные прямые проведены две плоскости, образующие прямой двугранный угол. Найти геометрическое место проекций точки A на ребро этого угла.

278. Даны три пересекающиеся плоскости, не имеющие общей прямой. Найти геометрическое место таких точек, сумма расстояний от которых до данных плоскостей постоянна.

279. Дан треугольник ABC. На прямой, перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через A, берется произвольная точка D. Найти геометрическое место точек пересечения высот треугольников DBC.

280. Даны три пересекающиеся плоскости и прямая l. Через некоторую точку M пространства проведена прямая, параллельная l и пересекающая плоскости в точках A, B и C. Найти геометрическое место таких точек M, что $|AM| + |BM| + |CM|$ постоянна.

281. Дан треугольник ABC. Найти геометрическое место таких точек M, что прямая, соединяющая центр тяжести пирамиды $ABCM$ и центр описанной около нее сферы, пересекает ребра AC и BM.

282. Трехгранный угол пересечен двумя плоскостями, параллельными данной плоскости. Пусть первая плоскость пересекает ребра трехгранного угла в точках A, B и C, а вторая — в точках A_1, B_1 и C_1 (одинаковыми буквами обозначены точки, принадлежащие одному и тому же ребру). Найти геометрическое место точек пересечения плоскостей ABC_1, AB_1C и A_1BC.

283. Дан плоский четырехугольник $ABCD$. Найти геометрическое место точек M таких, что боковую поверхность пирамиды $ABCDM$ можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился: а) прямоугольник, б) ромб, в) квадрат, г) в предыдущем случае найти геометрическое место центров квадратов.

284. На плоскости дан треугольник ABC. Найти геометрическое место таких точек M пространства, что прямая, соединяющая центр сферы, описанной около $ABCM$, с точкой G — центром тяжести тетраэдра $ABCM$, перпендикулярна плоскости AMG.

285. Окружность постоянного радиуса перемещается, касаясь граней трехгранного угла, все плоские углы которого прямые. Найти геометрическое место центров этих окружностей.

286. Паук сидит в одной из вершин куба, ребро которого равно 1 см. Паук ползет по поверхности куба со скоростью 1 см в секунду. Найти геометрическое место таких точек на поверхности куба, которых он может достичь за 2 секунды.

287. Дан трехгранный угол, все плоские углы которого прямые, O — вершина этого угла. Рассмотрим всевозможные ломаные длины a, начинающиеся в точке O и такие, что любая плоскость, параллельная одной из граней угла, пересекает эту ломаную не более чем в одной точке. Найти геометрическое место концов этой ломаной.

288. Дан шар с центром O. Пусть $ABCD$ — описанная около него пирамида, для которой выполняются неравенства $|OA| \geqslant |OB| \geqslant |OC| \geqslant |OD|$. Найти геометрические места точек A, B, C, и D.

289. Дан треугольник ABC. Найти геометрическое место таких точек M пространства, что из отрезков MA, MB и MC можно составить прямоугольный треугольник.

290. На поверхности земного шара берутся всевозможные точки, географическая широта которых равна их долготе. Найти геометрическое место проекций этих точек на плоскость экватора.

291. Дан прямой круговой конус и точка A вне его, находящаяся на расстоянии от плоскости его основания, равном высоте конуса. Пусть M — такая точка поверхности конуса, что луч света, идущий из A в M, зеркально отражаясь от поверхности конуса, будет параллелен плоскости основания. Найти геометрическое место проекций точек M на плоскость основания конуса.

292. Через фиксированную точку P внутри шара проводятся произвольно три взаимно перпендикулярных луча, пересекающих поверхность шара в точках A, B и C. Доказать, что точка пересечения медиан треугольника ABC и проекция точки P на плоскость ABC описывают одну и ту же сферическую поверхность.

293. Дан трехгранный угол с вершиной O и точка N. Произвольная сфера проходит через O и N и пересекает ребра трехгранного угла в точках A, B и C. Найти геометрическое место центров тяжести треугольников ABC.

Произвольный тетраэдр.

294. Дан произвольный тетраэдр и точка N. Доказать, что шесть плоскостей, каждая из которых проходит через одно ребро тетраэдра и параллельна прямой, соединяющей N с серединой противоположного ребра, пересекаются в одной точке.

295. Доказать, что шесть плоскостей, каждая из которых проходит через середину одного ребра тетраэдра и перпендикулярна противоположному ребру, пересекаются в одной точке (*точка Монжа*).

296. Доказать, что, если точка Монжа (см. задачу 295) лежит в плоскости какой-либо грани тетраэдра, то основание высоты, опущенной на эту грань, расположено на описанной около нее окружности.

297. Доказать, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки пространства до вершин тетраэдра равна сумме квадратов расстояний между серединами противоположных ребер и учетверенного квадрата расстояния от этой точки до центра тяжести тетраэдра.

298. Доказать, что у произвольного тетраэдра найдется не менее пяти и не более восьми сфер, каждая из которых касается плоскостей всех его граней.

299. $ABCD$ — пространственный четырехугольник (A, B, C и D не лежат в одной плоскости). Доказать, что существует по крайней мере восемь шаров, касающихся прямых AB, BC, CD и DA. Доказать также, что, если сумма каких-либо двух сторон четырехугольника равна сумме двух других сторон, то таких шаров существует бесчисленное множество.

300. Доказать, что произведение длин двух противоположных ребер тетраэдра, деленное на произведение синусов двугранных углов тетраэдра, соответствующих этим ребрам, для данного тетраэдра постоянно (теорема синусов).

301. Пусть S_i, R_i, l_i ($i = 1, 2, 3, 4$) — соответственно площади граней, радиусы описанных около этих граней кругов и расстояния от центров этих кругов до противоположных вершин тетраэдра. Доказать, что для объема тетраэдра справедлива формула

$$V = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} S_i^2 (l_i^2 - R_i^2)}.$$

302. Дан произвольный тетраэдр. Доказать, что существует треугольник, длины сторон которого численно равны произведениям длин противоположных ребер тетраэдра. Пусть S — площадь этого треугольника, V — объем тетраэдра, R — радиус описанной около него сферы. Тогда имеет место равенство $S = 6VR$. (*Формула Крелле*).

303. Пусть a и b — длины двух скрещивающихся ребер тетраэдра, α и β — величины соответствующих двугранных углов. Доказать, что выражение

$$a^2 + b^2 + 2ab \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$$

не зависит от выбора ребер. (*Теорема Бретшнейдера.*)

Равногранный тетраэдр.

304. Будем называть тетраэдр *равногранным*, если все его грани — равные треугольники, или, что то же, если противоположные ребра тетраэдра попарно равны. Доказать, что для того, чтобы тетраэдр был равногранным, необходимо и достаточно выполнения любого из следующих условий:

а) суммы плоских углов при любых трех вершинах тетраэдра равны 180°;

б) суммы плоских углов при каких-то двух вершинах тетраэдра равны 180° и, кроме того, какие-то два противоположных ребра равны;

в) сумма плоских углов при какой-либо вершине тетраэдра равна 180° и, кроме того, в тетраэдре есть две пары равных противоположных ребер;

г) выполняется равенство $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = \widehat{BAD} = \widehat{BCD}$, где $ABCD$ — данный тетраэдр;

д) все грани равновелики;

е) центры вписанной и описанной сфер совпадают;

ж) отрезки, соединяющие середины противоположных ребер, перпендикулярны;

з) центр тяжести и центр описанной сферы совпадают;

и) центр тяжести и центр вписанной сферы совпадают.

305. Доказать, что сумма косинусов двугранных углов тетраэдра положительна и не превосходит 2, причем равенство этой суммы 2 имеет место для равногранных тетраэдров и только для них.

306. Сумма плоских углов трехгранного угла равна 180°. Найти сумму косинусов двугранных углов этого трехгранного угла.

307. Доказать, что для равногранного тетраэдра

а) радиус вписанного шара вдвое меньше радиуса шара, касающегося одной грани тетраэдра и продолжений трех других (такой шар называется *вневписанным*).

б) центры четырех вневписанных шаров являются вершинами тетраэдра, равного данному.

308. Пусть h— высота равногранного тетраэдра, h_1 и h_2 — отрезки, на которые одна из высот грани делится точкой пересечения высот этой грани. Доказать, что $h^2 = 4h_1h_2$. Доказать также, что основание высоты тетраэдра и точка пересечения высот грани, на которую эта высота опущена, симметричны относительно центра окружности, описанной около этой грани.

309. Доказать, что в равногранном тетраэдре основания высот, середины высот и точки пересечения высот граней лежат на поверхности одной сферы (сфера 12 точек).

310. На плоскости дана окружность и точка M на расстоянии от ее центра, меньшем 1/3 ее радиуса. Пусть ABC — произвольный треугольник, вписанный в данную окружность, с центром тяжести в точке M. Доказать, что существуют две фиксированные точки в пространстве — D и D', симметричные относительно данной плоскости, такие, что тетраэдры $ABCD$ и $ABCD'$ — равногранные.

311. На плоскости дан квадрат $ABCD$. На сторонах BC и CD взяты точки P и Q так, что $|CP| + |CQ| = |AB|$. Пусть M — такая точка пространства, что в тетраэдре $APQM$ все грани — равные треугольники. Определить геометрическое место проекций точек M на плоскость, перпендикулярную плоскости квадрата и проходящую через диагональ AC.

Ортоцентрический тетраэдр.

312. Для того чтобы высоты тетраэдра пересекались в одной точке (такой тетраэдр называется *ортоцентрическим*), необходимо и достаточно, чтобы:

а) противоположные ребра тетраэдра были перпендикулярны;

б) одна высота тетраэдра проходила через точку пересечения высот основания;

в) суммы квадратов скрещивающихся ребер были равны;

г) отрезки, соединяющие середины скрещивающихся ребер, были равны между собой;

д) были равны произведения косинусов противоположных двугранных углов;

е) углы между противоположными ребрами были равны.

313. Доказать, что в ортоцентрическом тетраэдре центр тяжести расположен в середине отрезка, соединяющего центр описанной сферы с точкой пересечения высот.

314. Доказать, что в ортоцентрическом тетраэдре выполняется соотношение

$$|OH|^2 = 4R^2 - 3l^2,$$

где O — центр описанной сферы, H — точка пересечения высот, R — радиус описанной сферы, l — расстояние между серединами скрещивающихся ребер тетраэдра.

315. Доказать, что в ортоцентрическом тетраэдре все плоские углы, прилегающие к одной вершине, или одновременно острые, или тупые.

316. Доказать, что для ортоцентрического тетраэдра окружности 9 точек каждой грани принадлежат одной сфере (сфера 24 точек).

317. Доказать, что для ортоцентрического тетраэдра центры тяжестей и точки пересечения высот граней, а

также точки, делящие отрезки каждой высоты тетраэдра от вершины до точки пересечения высот в отношении $2:1$, лежат на одной сфере (сфера 12 точек).

318. Пусть H — точка пересечения высот ортоцентрического тетраэдра, M — центр тяжести какой-либо грани, N — одна из точек пересечения прямой HM с описанной около тетраэдра сферой (M — между H и N). Доказать, что $|MN| = 2|HM|$.

319. Пусть G — центр тяжести ортоцентрического тетраэдра, F — основание какой-либо высоты, K — одна из точек пересечения прямой FG с описанной около тетраэдра сферой (G — между K и F). Доказать, что $|KG| = 3|FG|$.

Произвольный многогранник. Сфера.

320. Доказать, что на сфере нельзя расположить три дуги больших кругов в 300° каждая так, чтобы никакие две не имели общих точек.

321. Доказать, что кратчайшей линией, соединяющей две точки на поверхности сферы, является меньшая дуга большого круга, проходящего через эти точки. (Рассматриваются линии, идущие по поверхности сферы.)

322. Дан многогранник, все ребра которого равны между собой и касаются некоторой сферы. Всегда ли существует сфера, описанная около этого многогранника?

323. Найти площадь треугольника, образованного при пересечении поверхности сферы радиуса R с трехгранным углом, двугранные углы которого равны α, β и γ, а вершина совпадает с центром сферы.

324. Пусть M — число граней, K — число ребер, N — число вершин выпуклого многогранника. Доказать, что

$$M - K + N = 2.$$

(Это соотношение впервые было получено Эйлером, причем оно справедливо не только для выпуклых многогранников, но и для более широкого класса так называемых *односвязных многогранников*.)

325. На поверхности сферы дана окружность. Доказать, что из всех сферических n-угольников, содержащих внутри себя данную окружность, наименьшую площадь имеет правильный сферический n-угольник.

326. Доказать, что в любом выпуклом многограннике найдется грань, имеющая меньше шести сторон.

327. Доказать, что в любом выпуклом многограннике найдется либо треугольная грань, либо вершина, в которой сходятся три ребра.

328. Доказать, что выпуклый многогранник не может иметь семь ребер. Доказать также, что при любом $n > 6$, $n \neq 7$ существует многогранник, имеющий n ребер.

329. Доказать, что у любого выпуклого многогранника найдутся две грани, имеющие равное число сторон.

330. Внутри сферы радиуса 1 находится выпуклый многогранник, все двугранные углы которого меньше $2\pi/3$. Доказать, что сумма длин ребер этого многогранника меньше 24.

331. Центр сферы радиуса R находится вне двугранного угла величины α на расстоянии a ($a < R$) от его ребра и расположен в плоскости одной из его граней. Найти площадь части поверхности сферы, расположенной внутри угла.

332. Шар радиуса R касается ребер четырехгранного угла, все плоские углы которого равны 60°. Поверхность шара, находящаяся внутри угла, состоит из двух криволинейных четырехугольников. Найти площади этих четырехугольников

333. Дан куб с ребром a. Определить площади частей описанной около этого куба сферы, на которые она разделена плоскостями граней куба.

334. Дан выпуклый многогранник. Некоторые из его граней окрашены в черный цвет, причем никакие две окрашенные грани не имеют общего ребра и число их больше половины числа всех граней многогранника. Доказать, что в этот многогранник нельзя вписать шар.

335. Какое наибольшее число шаров радиуса 7 могут одновременно, не пересекаясь, касаться шара радиуса 3?

В ы х о д   в   п р о с т р а н с т в о.

336. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и N так, что $|CM| + |CN| = |AB|$. Прямые AM и AN делят диагональ BD на три отрезка. Доказать, что из этих отрезков всегда можно составить треугольник, причем один угол этого треугольника равен 60°.

337. На плоскости даны $\triangle ABC$ и точка P. Прямая l пересекает прямые AB, BC и CA соответственно в точках C_1, A_1 и B_1. Прямые PC_1, PA_1 и PB_1 пересекают окружности, описанные соответственно вокруг треугольников PAB, PBC и PAC в точках C_2, A_2 и B_2, отличных от

P. Доказать, что точки P, A_2, B_2, C_2 лежат на одной окружности.

338. Доказать, что диагонали, соединяющие противоположные вершины описанного около окружности шестиугольника, пересекаются в одной точке. (*Теорема Брианшона.*)

339. Два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ расположены на плоскости так, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке. Доказать, что три точки пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2, B_1C_1 и B_2C_2, C_1A_1 и C_2A_2 расположены на одной прямой. (*Теорема Дезарга.*)

340. Три плоскости в пространстве пересекаются по одной прямой. Три трехгранных угла расположены так, что их вершины лежат на этой прямой, а ребра — в данных плоскостях (предполагается, что соответствующие ребра, т. е. ребра, расположенные в одной плоскости, не пересекаются в одной точке). Доказать, что три точки пересечения соответствующих граней этих углов лежат на одной прямой.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

РАЗДЕЛ I

1. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{108}$. 2. $\dfrac{4h^3}{45}$. 3. $\dfrac{5+\sqrt{5}}{24}a^3$. 4. $4a^3$.

5. $\pi - 2\arccos\dfrac{5\pm 2\sqrt{3}}{13}$. 6. $\dfrac{ab}{2c}, \dfrac{bc}{2a}, \dfrac{ca}{2b}$. 7. $a\sqrt{\dfrac{1}{3}}, \dfrac{1}{2}$.

8. Утверждение задачи очевидно для треугольника, одна сторона которого лежит на линии пересечения плоскостей α и β. Затем можно доказать его справедливость для произвольного треугольника, а затем и для произвольного многоугольника.

9. Возьмите в качестве оснований пирамид $AB_1C_1D_1$ и $AB_2C_2D_2$ треугольники AB_1C_1 и AB_2C_2.

10. Рассматриваемые углы равны углам, образованным диагональю некоторого прямоугольного параллелепипеда с тремя ребрами, выходящими из ее конца.

12. Рассмотрим параллелепипед, образованный плоскостями, проходящими через ребра тетраэдра параллельно противоположным ребрам. (Этот способ достраивания тетраэдра до параллелепипеда в дальнейшем будет неоднократно применяться.) Объем тетраэдра составляет 1/3 объема параллелепипеда (плоскости граней тетраэдра отсекают от параллелепипеда 4 треугольные пирамиды, объем каждой из которых составляет 1/6 объема параллелепипеда), а объем параллелепипеда легко выражается через данные величины, поскольку диагонали его граней равны и параллельны (или просто совпадают) соответствующим ребрам тетраэдра, а высота параллелепипеда равна расстоянию между соответствующими ребрами тетраэдра.

13. Легко видеть, что каждое из этих отношений (площадей граней и отрезков ребра) равно отношению объемов двух тетраэдров, на которые разделила данный тетраэдр биссекторная плоскость.

14. Соединив центр сферы с вершинами многогранника, разобьем его на пирамиды, основаниями которых являются грани многогранника, а высоты равны радиусу сферы.

15. Легко проверить справедливость данной формулы для тетраэдра. При этом надо рассмотреть два случая: 1) три вершины тетраэдра расположены в одной плоскости и одна вершина — в другой; 2) две вершины тетраэдра расположены в одной плоскости, две — в другой. Во втором случае для объема тетраэдра воспользуемся формулой задачи 12.

После этого заметим, что произвольный выпуклый многогранник можно разбить на тетраэдры, вершины которых совпадают с вершинами многогранника. Утверждение это достаточно очевидно, хотя доказательство его довольно громоздко. Более того, предлагаемая формула справедлива и для невыпуклых многогранников указанного типа, а также для тел, заключенных между двумя параллельными плоскостями, для которых площадь сечения плоскостью, параллельной этим плоскостям, есть квадратичная функция расстояния до одной из них. Эта формула носит название *формулы Симпсона*.

16. Поскольку описанный усеченный конус можно рассматривать как предел усеченных пирамид, описанных около той же сферы, для объема усеченного конуса справедлива формула задачи 14.

17. Докажем сначала следующее вспомогательное утверждение. Пусть отрезок AB вращается вокруг прямой l (l не пересекает отрезок AB). Перпендикуляр, восставленный к AB в точке C — середине AB, пересекает прямую l в точке O, MN — проекция AB на прямую l. Тогда площадь поверхности, полученной при вращении AB вокруг l, равна $2\pi \mid CO \mid \cdot \mid MN \mid$.

Поверхность, полученная при вращении AB, представляет собой боковую поверхность усеченного конуса с радиусами оснований BN и AM, высотой $\mid MN \mid$ и образующей AB. Проведем через A прямую, параллельную l, и обозначим через L точку ее пересечения с перпендикуляром BN, опущенным из B на l, $\mid MN \mid = \mid AL \mid$. Обозначим через K проекцию C на l. Заметим, что треугольники ABL и COK подобны. Учитывая это, получим, что боковая поверхность усеченного конуса равна

$$2\pi \frac{\mid BN \mid + \mid AM \mid}{2} \cdot \mid AB \mid = 2\pi \mid CK \mid \cdot \mid AB \mid =$$
$$= 2\pi \mid CO \mid \cdot \mid AL \mid = 2\pi \mid CO \mid \cdot \mid MN \mid.$$

Теперь с помощью предельного перехода нетрудно получить утверждение нашей задачи. (Если рассматриваемый шаровой пояс получается от вращения некоторой дуги $\smile{AB}$ окружности вокруг ее диаметра, то площадь поверхности этого пояса равна пределу площади поверхности, получающейся при вращении вокруг этого же диаметра ломаной $AL_1L_2 \ldots L_nB$, все вершины которой лежат на $\smile{AB}$, при условии, что длина наибольшего звена ломаной стремится к нулю.)

18. Пусть AB — хорда данного сегмента, O — центр круга. Обозначим через x расстояние от O до AB, а через R — радиус окружности. Тогда объем тела, получающегося при вращении сектора AOB вокруг диаметра, будет равен произведению площади поверхности, получающейся от вращения дуги $\smile{AB}$ (см. задачу 17), на $R/3$, т. е. этот объем равен

$$\frac{1}{3} 2\pi R^2 h = \frac{2}{3} \pi \left(x^2 + \frac{a^2}{4}\right) h = \frac{1}{6} \pi a^2 h + \frac{2}{3} \pi x^2 h.$$

Но второе слагаемое равно объему тела, получающегося при вращении треугольника AOC вокруг диаметра (см. решение задачи 17). Значит, первое слагаемое и есть объем тела, получающегося при вращении данного сегмента.

19. Поместив в вершинах пирамиды равные грузы, для нахождения центра тяжести системы можно сначала найти центр тяжести трех грузов, а затем, поместив в найденной точке утроенный груз, найти центр тяжести всей системы. Можно поступить иначе, найти

сначала центр тяжести двух грузов, затем двух других, после чего найти центр тяжести всей системы. Можно не прибегать к механической интерпретации, а рассмотреть треугольник, образованный двумя вершинами тетраэдра и серединой противоположного ребра.

21. Проведем через каждое ребро тетраэдра плоскость, параллельную противоположному ребру (см. решение задачи 12). Эти плоскости образуют параллелепипед, ребра которого равны расстояниям между серединами скрещивающихся ребер тетраэдра, а сами ребра тетраэдра являются диагоналями его граней. После этого воспользуемся тем, что в произвольном параллелограмме сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин его сторон.

22. Если M — середина BB_1, то $A_1M \parallel CK$. Следовательно, искомый угол равен углу MA_1D. С другой стороны, плоскость A_1DM параллельна CK, значит, расстояние между CK и A_1D равно расстоянию от точки K до плоскости A_1DM. Обозначим искомое расстояние через x, а искомый угол — через φ. Тогда имеем

$$V_{A_1MDK} = \frac{1}{3} S_{A_1MD} x = \frac{1}{3} S_{A_1KD} a = \frac{a^3}{12}.$$

Отсюда $x = \dfrac{a^3}{4S_{A_1MD}}$. Найдем стороны $\triangle A_1MD$:

$$\mid A_1D \mid = a\sqrt{2}, \quad \mid A_1M \mid = \frac{a\sqrt{5}}{2}, \quad \mid DM \mid = \frac{3}{2} a.$$

По теореме косинусов найдем $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$; таким образом,

$$S_{A_1MD} = \frac{3}{4} a^2, \quad x = \frac{a}{3}.$$

Ответ: $\arccos \dfrac{1}{\sqrt{10}}, \dfrac{a}{3}$.

23. Можно решать задачу тем же способом, каким была решена задача 22. Предложим иной способ определения расстояния между скрещивающимися медианами. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр, K — середина AB, M — середина AC. Спроектируем тетраэдр на плоскость, проходящую через AB перпендикулярно CK. Тетраэдр спроектируется в треугольник ABD_1, где D_1 — проекция D. Если M_1 — проекция M (M_1 — середина AK), то расстояние между прямыми CK и DM равно расстоянию от точки K до прямой D_1M_1. Это расстояние легко найти, поскольку D_1KM_1 — прямоугольный треугольник, в котором катеты D_1K и KM_1 равны соответственно $a\sqrt{2/3}$ (высота тетраэдра) и $a/4$.

Задача имеет два решения. Второе мы получим, если рассмотрим медианы CK и BN, где N — середина DC.

Ответ: $\arccos \dfrac{1}{6}, a\sqrt{\dfrac{2}{35}}$ и $\arccos \dfrac{2}{3}, a\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

24. Из условия задачи следует, что четырехугольник $ABCD$ не выпуклый.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

25. $\frac{(2b\pm a)a}{2\sqrt{3b^2-a^2}}$. 26. $\frac{41\pi\sqrt{41}}{384}$. 27. $a\sqrt{\frac{7}{8}}$.

28. $a+b\pm\sqrt{2ab-\frac{a^2}{4}}$. 29. $\frac{2a}{3}\sqrt{4R^2-a^2}$. 30. $2+\sqrt{3}$.

31. $\frac{a\sqrt{22}}{8}$. 32. $\frac{3ah}{3a+h(3+2\sqrt{3})}$.

33. $2\arccos\left(\sin\alpha\sin\frac{\pi}{n}\right)$.

34. $12V$. 35. $6R^2-2a^2$. 36. $\frac{\pi}{4}$. 37. $\mathrm{arctg}\,(2-\sqrt{3})$.

38. Если $0<\alpha<\arccos\frac{1}{4}$,

$$l=R\sqrt{27+3\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\left[\mathrm{arctg}\left(3\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)-\alpha\right];$$

если $\alpha\geqslant\arccos\frac{1}{4}$, $l=0$.

39. 25 : 20 : 9. 40. $\arccos(2-\sqrt{5})$. 41. $\frac{Q^2}{S}$.

42. Обозначим сторону основания и высоту призмы через a, $|KB|=x$. Из условия задачи следует, что проекция KM на плоскость основания параллельна биссектрисе угла C треугольника ABC, т. е. $|B_1M|=2x$, $|MC_1|=a-2x$. Пусть L_1 — проекция L на AC. Из условия задачи можно также получить, что $|LL_1|=|AL_1|\frac{\sqrt{3}}{2}$, $|L_1C|=a-2x$. Следовательно, величина $|AL_1|$ может принимать значения: 1) $|AL_1|=a-|MC_1|=a-(a-2x)=2x$; 2) $|AL_1|=a+(a-2x)=2(a-x)$. В первом случае $|KL|^2=|KL_1|^2+|LL_1|^2=a^2+10x^2-4ax$; во втором — $|KL|^2=6(a-x)^2$.

В обоих случаях $|KM|^2=3x^2+a^2$.

Решая соответственно две системы уравнений, получим для a два значения

$$a_1=\frac{7}{\sqrt{97}},\quad a_2=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{14}}{8}.$$

Ответ: $\frac{7}{\sqrt{97}}$, $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{14}}{8}$.

43. $\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

44. Продолжим боковые грани до пересечения. При этом мы получим две подобные пирамиды, основаниями которых являются большее и меньшее основания данной усеченной пирамиды. Пусть a — сторона большего основания усеченной пирамиды, α — двугранный угол при этом основании. Можно найти: высоту большей пирамиды — $h=\frac{a\sqrt{3}}{6}\,\mathrm{tg}\,\alpha$, радиус вписанного в нее шара — $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$, высоту меньшей пирамиды — $h_1=h-2r=\frac{a\sqrt{3}}{6}\left(\mathrm{tg}\,\alpha-2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$, сторону меньшего основания — $a_1=\frac{h_1}{h}a=a\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{tg}\,\alpha}$, боковое ребро большей пирамиды — $l=\frac{a\sqrt{3}}{6}\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha+4}$, боковое ребро меньшей пирамиды — $l_1=l\frac{h_1}{h}$; после этого воспользуемся условием существования шара, касающегося всех ребер усеченной пирамиды. Это условие эквивалентно существованию окружности, вписанной в боковую грань, т. е. должно выполняться равенство

$$2(l-l_1)=a+a_1.$$

Выражая l, l_1, a_1, через a и α, получим уравнение

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha+4}\cdot\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда найдем $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

Ответ: $2\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

45. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<a<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $a\neq 1$;

$$V=\frac{1}{12}\sqrt{(a^2+1)(3a^2-1-a^4)}.$$

46. $\frac{3-\cos\alpha-\cos\beta-\cos\gamma}{3+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}$.

47. Если $0<\alpha<\frac{\pi}{6}$, то $S=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2\cos\alpha}$; если $\frac{\pi}{6}<\alpha<\mathrm{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}$, то $S=\frac{a^2}{6\cos\alpha}(18\,\mathrm{ctg}\,\alpha-3\sqrt{3}-2\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}^2\alpha)$;

если $\mathrm{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $S=\frac{a^2}{\sqrt{3}\sin\alpha}(\sqrt{3}+\mathrm{ctg}\,\alpha)$.

48. $\arccos\left(\frac{a^2b^2+b^2c^2-c^2a^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\right)$.

49. Многогранник $ABMDCN$ является треугольной призмой с основанием ABM, боковыми ребрами AD, BC, MN.

Ответ: $\frac{b}{2a}\sqrt{4a^2-b^2}$.

50. $R = \dfrac{\sqrt{4c^4 - a^2b^2}}{2\sqrt{4c^2 - a^2 - b^2}}$.

51. $\dfrac{1}{3}\sqrt{3m^2 + 3n^2 + 3p^2 - a^2 - b^2 - c^2}$.

52. Возьмем на продолжении ребра CC_1 точку K так, что $B_1K \parallel BC_1$, а через ребро BB_1 проведем плоскость, параллельную данной (рис. 1). Эта плоскость должна проходить или через внутреннюю, или через внешнюю биссектрису угла DB_1K. Поскольку отношение, в котором плоскость, проходящая через BB_1, делит DK_1,

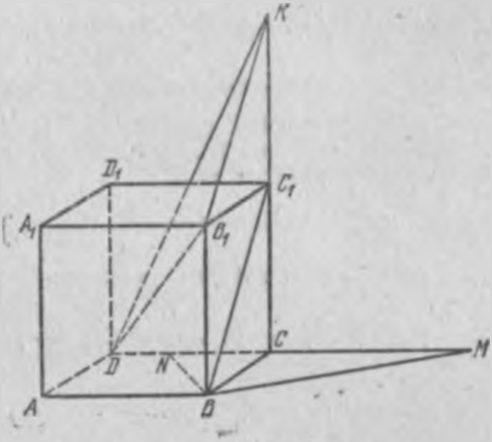


Рис. 1.

равно отношению, в котором она делит DC, возможны два случая: плоскость проходит через точку N на ребре DC такую, что $|DN|/|NC| = \sqrt{3}/\sqrt{2}$, или же она проходит через точку M на его продолжении и опять $|DM|/|MC| = \sqrt{3}/\sqrt{2}$. Найдем расстояние от точки K до первой плоскости. Оно равно расстоянию от точки C до прямой BN. Если это расстояние x, то

$$x = \frac{2S_{BNC}}{|BN|} = \frac{a\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{11-4\sqrt{6}}} = \frac{a(\sqrt{6}-1)\sqrt{2}}{5}$$

и

$$\sin\varphi = \frac{x}{|B_1K|} = \frac{\sqrt{6}-1}{5},$$

где φ — угол между плоскостью BB_1N и прямыми B_1D и B_1K. Точно так же находится другой угол.

Ответ: $\arcsin\dfrac{\sqrt{6}\pm 1}{5}$.

53. Пусть $ABCD$ — данная пирамида, боковые ребра которой $|DA| = a$, $|DB| = x$, $|DC| = y$; по условию, эти ребра перпен-

дикулярны и $x+y=a$. Нетрудно найти, что

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2(x^2+y^2)+x^2y^2},\quad V_{ABCD}=\frac{1}{6}axy.$$

С другой стороны, если R — радиус искомого шара, то

$$V_{ABCD}=\frac{R}{3}(S_{DAB}+S_{DBC}+S_{DCA}-S_{ABC})=$$

$$=\frac{R}{6}\left[ax+ay+xy-\sqrt{a^2(x^2+y^2)+x^2y^2}\right]=$$

$$=\frac{R}{6}\left(a^2+xy-\sqrt{a^4-2xya^2+x^2y^2}\right)=\frac{R}{3}xy.$$

Приравнивая два выражения для V_{ABCD}, найдем $R=\frac{a}{2}$.

54. Из условия следует, что вершина S проектируется или в центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$, или в центр вневписанной в него окружности. (Вневписанная окружность касается одной стороны треугольника и продолжений двух других сторон треугольника.)

Ответ: если $\frac{a}{\sqrt{3}}<b<a$, то $V=\frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2}$; если $a<b<a\sqrt{3}$, возможны два ответа:

$$V_1=\frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2},\quad V_2=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}\sqrt{b^2-a^2};$$

если $b>a\sqrt{3}$, возможны три ответа:

$$V_1=\frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2},\quad V_2=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}\sqrt{b^2-a^2},$$

$$V_3=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}\sqrt{b^2-3a^2}.$$

55. Пусть углы $\widehat{SAB}$, $\widehat{SCA}$, $\widehat{SAC}$, $\widehat{SBA}$ равны $\alpha-2\varphi$, $\alpha-\varphi$, α, $\alpha+\varphi$. По теореме синусов из $\triangle SAB$ найдем:

$$|SA|=|AB|\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(2\alpha-\varphi)},$$

а из $\triangle SAC$ найдем:

$$|SA|=|CA|\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(2\alpha-\varphi)}.$$

Но по условию $|AB|=|AC|$. Значит, $\sin(\alpha+\varphi)=\sin(\alpha-\varphi)$, откуда $\alpha=\pi/2$. Условие, связывающее площади треугольников SAB, ABC и SAC, приводит к уравнению $\operatorname{ctg}^2\varphi\cos 2\varphi=1$, откуда $\varphi=\frac{1}{2}\arccos(\sqrt{2}-1)$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}-\arccos(\sqrt{2}-1)$, $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arccos(\sqrt{2}-1)$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\arccos(\sqrt{2}-1)$.

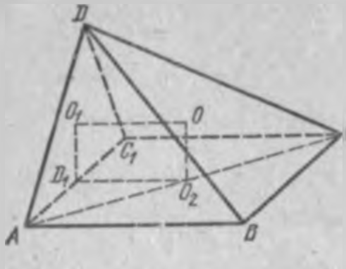


Рис. 2.

56. Пусть $|SA| = l$, l легко выражается через a, α и β. Если $l \leqslant a$, то $\triangle ASC = \triangle ASB$. (Будем строить $\triangle ASC$: возьмем угол с вершиной S величины α, отложим на одной стороне $|SA| = l$, построим окружность радиуса a с центром в A; поскольку $a \geqslant l$, эта окружность пересечет вторую сторону угла в одной точке.) Если же $l > a$, то возможны два случая: $\triangle ASC = \triangle ASB$ и $\widehat{ACS} = \alpha + \beta$. Отрезок l будет меньше, равен или больше a в зависимости от того, будет ли $2\alpha + \beta$ больше, равно или меньше π.

Кроме того, в обоих случаях плоские углы, прилежащие к вершине A, должны удовлетворять условиям, при которых возможен трехгранный угол.

Ответ. Если $\beta > \frac{\pi}{6}$, $2\alpha + \beta \geqslant \pi$, то

$$V = \frac{a^2 \sin(\alpha + \beta)}{12 \sin \alpha} \sqrt{1 - 2\cos 2\beta};$$

если $\beta < \frac{\pi}{6}$, $\alpha < \frac{\pi}{3}$, $\alpha + \beta > \frac{\pi}{3}$, то

$$V = \frac{a^2 \sin(\alpha + \beta)}{12 \sin \alpha} \sqrt{3\sin^2\beta - [2\cos(2\alpha + \beta) + \cos\beta]^2};$$

если $\beta > \frac{\pi}{6}$, $\alpha < \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3} < \alpha + \beta < \frac{2\pi}{3}$, то возможны оба приведенных выше ответа.

57. $\frac{4}{5}$, считая от точки K.

58. Возьмем C_1 так, что $ABCC_1$ — прямоугольник (рис. 2). D_1 — середина AC_1, O_1, O_2 — соответственно центры окружностей, описанных около треугольников AC_1D, ABC, O — центр сферы, описанной около $ABCD$. Очевидно, O_2 — середина AC, AB и C_1C перпендикулярны AD и AC_1, следовательно, плоскости ADC_1 и $ABCC_1$ перпендикулярны, а $O_1D_1O_2O$ — прямоугольник. Таким образом, $|DC_1| = \sqrt{|DC|^2 - |C_1C|^2} = \sqrt{b^2 - a^2}$, радиус окружности, описанной около $\triangle DC_1A$, будет равен

$$R_1 = \frac{|DC_1|}{2\sin \widehat{DAC_1}} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2\sin\alpha}.$$

А радиус сферы $R = |OA|$ можно найти из прямоугольного треугольника AO_1O (на рисунке этот треугольник не изображен):

$$R = \sqrt{|AO_1|^2 + |O_1O|^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{\sin^2\alpha} + a^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\alpha}\sqrt{b^2 - a^2\cos^2\alpha}.$$

59. Пусть K — середина ребра AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, M — середина ребра D_1C_1. K и M одновременно являются серединами ребер PQ и RS правильного тетраэдра $PQRS$. D_1C_1 лежит на RS. Если ребро тетраэдра равно b, то $|MK| = b\sqrt{2}/2 = a\sqrt{2}$. Значит, $b = 2a$.

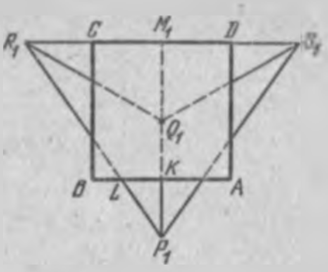


Рис. 3.

Спроектируем тетраэдр на плоскость $ABCD$ (рис. 3), P_1, Q_1, R_1, S_1 — проекции P, Q, R, S. Поскольку PQ составляет с этой плоскостью угол 45°, то длина P_1Q_1 будет $a\sqrt{2}$.

Пусть L — точка пересечения прямой AB и прямой P_1R_1. Из подобия треугольников P_1LK и $P_1R_1M_1$ найдем

$$|LK| = \frac{|R_1M_1|\cdot|P_1K|}{|P_1M_1|} = \frac{a}{1+\sqrt{2}} < \frac{a}{2}.$$

Значит, ребро тетраэдра PR (а, следовательно, и другие ребра: PS, QR и QS) пересекает куб.

Для вычисления объема получившегося тела удобно это тело рассматривать как тетраэдр со срезанными углами.

Ответ: $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}(16\sqrt{2}-17)$.

60. Обозначим длины этих скрещивающихся ребер через a и b, расстояние между ними — через d, угол — через φ, по формуле задачи 15 найдем объемы получившихся частей

$$V_1 = \frac{10}{81}abd\sin\varphi, \qquad V_2 = \frac{7}{162}abd\sin\varphi.$$

Ответ: $\frac{20}{7}$.

61. Площадь проекции второго сечения на первую плоскость вдвое меньше площади первого сечения. С другой стороны (см. задачу 8), отношение площади проекции второго сечения к площади самого сечения равно $\cos\alpha$.

Ответ: $2\cos\alpha$.

62. $\frac{1}{12}\pi R^2H$.

63. Если x, y и z — расстояния от центра шара до проведенных плоскостей, то $x^2+y^2+z^2=d^2$, а сумма площадей трех кругов будет равна

$$\pi[(R^2-x^2)+(R^2-y^2)+(R^2-z^2)] = \pi(3R^2-d^2).$$

64. Пусть $|AC| = x$, $|BD| = y$ (AC и BD касаются шара). D_1 — проекция D на плоскость, проходящую через AC параллельно BD. Имеем

$$|CD| = x+y = \frac{2R}{\cos\varphi}, \qquad |CD_1| = 2R\operatorname{tg}\varphi.$$

В $\triangle CAD_1$ угол $\widehat{CAD_1}$ равен α или $180° - \alpha$. В соответствии с этим x и y должны удовлетворять одной из двух систем уравнений

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{2R}{\cos\varphi}, \\ x^2+y^2-2xy\cos\alpha=4R^2\operatorname{tg}^2\varphi, \end{cases} \qquad (1)$$

или

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{2R}{\cos\varphi}, \\ x^2+y^2+2xy\cos\alpha=4R^2\operatorname{tg}^2\varphi. \end{cases} \qquad (2)$$

Для системы (1) получим: $x+y=\frac{2R}{\cos\varphi}$, $xy=\frac{R^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$; для системы (2) — $x+y=\frac{2R}{\cos\varphi}$, $xy=\frac{R^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. Учитывая неравенство $(x+y)^2\geqslant 4xy$, получим, что система (1) имеет решение при $\varphi\geqslant\frac{\alpha}{2}$, а система (2) — при $\varphi\geqslant\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$. Поскольку объем тетраэдра $ABCD$ равен $\frac{1}{3}xyR\sin\alpha$, получим ответ: если $\frac{\alpha}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$, объем тетраэдра равен $\frac{2}{3}R^3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; если $\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}$, возможны два значения объема $\frac{2}{3}R^3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{2}{3}R^3\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

65. Пусть общий перпендикуляр к данным ребрам делится кубом на отрезки y, x и z, $y+x+z=c$ (x — ребро куба, y примыкает к ребру a). Грани куба, параллельные данным ребрам, пересекают тетраэдр по двум прямоугольникам, у первого стороны $\frac{x+z}{c}a$, $\frac{yb}{c}$, у второго — $\frac{z}{c}a$, $\frac{x+y}{c}b$, при этом меньшие стороны этих прямоугольников равны ребру куба, т. е. $\frac{y}{c}b=x$, $\frac{z}{c}a=x$, откуда

$$y=\frac{cx}{b},\quad z=\frac{cx}{a}\quad\text{и}\quad x=\frac{abc}{ab+bc+ca}.$$

66. Пусть O_1 и O_2 — проекции центра шара O на плоскости KLM и KLN, P — середина ML.

Проекции O_1 и O_2 на KL должны совпадать. Можно доказать, что эти проекции попадают в середину KL — точку Q (рис. 4). Поскольку двугранный угол между плоскостями KLM и KLN равен $90°$, радиус искомой сферы будет

$$\sqrt{|PO_1|^2+|O_1Q|^2}.$$

Если мы продолжим O_1P до пересечения с прямой KL в точке R, то из прямоугольного треугольника PLR найдем $|RL|=6a$,

$|RP|=3a\sqrt{3}$. Затем найдем

$$|RQ|=\frac{11a}{2},\quad |O_1Q|=\frac{11a\sqrt3}{6},\quad |RO_1|=\frac{11a\sqrt3}{3},$$

$$|PO_1|=\frac{11a\sqrt3}{3}-3a\sqrt3=\frac{2a\sqrt3}{3}.$$

Следовательно, радиус сферы равен

$$\sqrt{\frac{4a^2}{3}+\frac{121a^2}{12}}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{137}{3}}.$$

67. Используя равенство касательных, выходящих из одной точки, докажем, что в основании лежит правильный треугольник и медианы боковых граней, проведенные к сторонам основания, равны. Из этого будет следовать, что пирамида правильная.

Ответ: $\dfrac{R^3\sqrt6}{4}$.

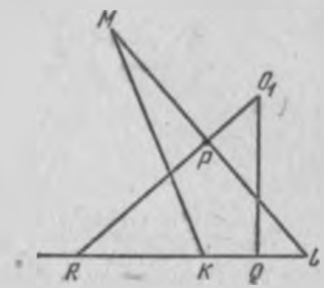


Рис. 4.

68. Данные три угла не могут прилегать к одной грани; далее, они не могут прилегать к одной вершине, поскольку в этом случае все отрезки, соединяющие середины противоположных ребер, будут равны. Остается случай, когда три ребра, соответствующие прямым углам, образуют незамкнутую ломаную. Пусть это будут ребра AB, BC и CD. Обозначим $|AB|=x$, $|BC|=y$, $|CD|=z$. Тогда расстояние между серединами AB и CD будет $\sqrt{\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{4}}$, а между AC и BD (или AD и BC) — $\frac{1}{2}\sqrt{x^2+z^2}$. Наибольшим будет ребро $|AD|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{b^2+3a^2}$.

69. $\pi\dfrac{4\sqrt3-3}{13}$.

70. Сначала докажем, что $ABCD$ — прямоугольник и плоскость DEC перпендикулярна плоскости $ABCD$. Для этого проведем через E сечение, перпендикулярное BC. Это сечение должно пересечь основание по прямой, проходящей через M и пересекающей отрезки BC и AD (возможно, в их концах). Далее, провести через B сечение, являющееся равнобочной трапецией, можно лишь при условии, что это сечение содержит ребро AB, причем $|DE|=|EC|$, $|AE|=|EB|$. Следовательно,

$$\frac{3}{5}|AC|\geqslant|ED|=|EC|,\qquad \frac{4}{5}|AC|\geqslant|EB|=|AE|,$$

т. е. $|AC|^2\geqslant|CE|^2+|AE|^2$ и $\triangle AEC$ — не остроугольный. Но $\widehat{AEC}$ не может быть тупым, так как тогда тупым был бы $\widehat{DEC}$.

Таким образом, $|AC| = \frac{5}{4}|AE| = \frac{5}{3}|EC|$.

Ответ: $\frac{3}{8}\sqrt{\frac{65}{14}}$.

71. Проведем через C прямую, параллельную AB, и возьмем на ней точку E так, что $|CE| = |AB|$, $ABEC$ — параллелограмм. Если O — центр сферы, то, поскольку $\widehat{OCE} = \pi/3$ и $|CE| = 1$ (следует из условия), $\triangle OCE$ — правильный. Значит, точка O равноудалена от всех вершин параллелограмма $ABEC$. Отсюда следует, что $ABEC$ — прямоугольник, проекция O на плоскость $ABEC$ — точка K — центр $ABEC$ и $|BD| = 2|OK| = 2\sqrt{|OC|^2 - \frac{1}{4}|BC|^2} = 1$.

72. Если x — площадь искомого сечения, $|AB| = a$, то, воспользовавшись для объема пирамиды $ABCD$ и ее частей формулой задачи 11, получим

$$\frac{2}{3}\frac{px\sin\frac{\alpha}{2}}{a} + \frac{2}{3}\frac{qx\sin\frac{\alpha}{2}}{a} = \frac{2}{3}\frac{pq\sin\alpha}{a},$$

откуда

$$x = \frac{2pq\cos\frac{\alpha}{2}}{p+q}.$$

73. $\frac{8S^2\sin\alpha\sin\beta}{3a\sin(\alpha+\beta)}$.

74. При пересечении шара плоскостью AMN получим окружность, вписанную в треугольник AMN. В этом треугольнике $|AN| = a\frac{\sqrt{3}}{2}$, $|AM| = a\frac{\sqrt{3}}{3}$, $|MN| = \frac{a}{2}$ (находится из $\triangle CMN$). Следовательно, если L — точка касания искомого шара с AM, то

$$|AL| = \frac{|AN| + |AM| - |MN|}{2} = \left(\frac{5}{12}\sqrt{3} - \frac{1}{4}\right)a.$$

Шар, вписанный в $ABCD$, имеет радиус $r = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\,a$ и касается плоскости ACD в точке M.

Таким образом, если x — радиус искомого шара, то

$$\frac{x}{r} = \frac{|AL|}{|AM|} = \frac{5-\sqrt{3}}{4}.$$

Отсюда $x = \frac{5\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{48}a$.

75. $\frac{9\sqrt{3}}{8}$.

76. $\sqrt{3}$.

77. $a\sqrt{2}$.

78. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

79. Обозначения: O — центр сферы, O_1, O_2, O_3 — центры данных окружностей, O_4 — центр искомой окружности. Очевидно, $\triangle O_1O_2O_3$ — правильный. Найдем его стороны (M — точка касания окружностей с центрами O_1 и O_2). $|O_1M| = |O_2M| = 1$, $|OM| = 2$. Значит, $\widehat{MOO_1} = \widehat{MOO_2} = 30°$, $|OO_1| = |OO_2| = \sqrt{3}$, $|O_1O_2| = \sqrt{3}$. OO_4 перпендикулярна плоскости $O_1O_2O_3$ и проходит через центр $\triangle O_1O_2O_3$, расстояния от O_1, O_2 и O_3 до OO_4 равны 1. Пусть K — точка касания окружностей O_1 и O_4, L — основание перпендикуляра, опущенного из O_1 на OO_4. $KN \perp LO_1$, $|O_1L| = |O_1K| = 1$, $|OO_1| = \sqrt{3}$. Из подобия прямоугольных треугольников O_1KN и OO_1L найдем $|O_1N| = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Таким образом, искомый радиус $|O_4K| = |LN| = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}$.

80. Поскольку противоположные ребра правильного тетраэдра перпендикулярны, перпендикулярными должны быть прямые C_1E и B_1F (рис. 5).

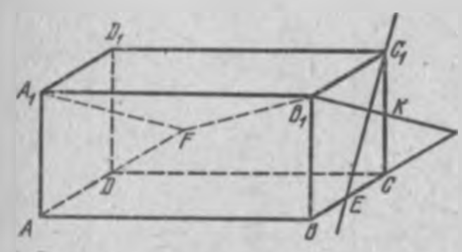


Рис. 5.

Если K — середина C_1C, то, поскольку прямые B_1K и B_1A_1 перпендикулярны прямой C_1E, прямая B_1F должна лежать в плоскости, проходящей через B_1K и B_1A_1, а отсюда следует, что $A_1F \parallel B_1K$ и, значит, $|DF| = a$ (это ответ на пункт а)).

б) Расстояние между серединами MN и PQ равно расстоянию между прямыми B_1F и C_1E. Его можно найти, приравнивая различные выражения для объема тетраэдра FB_1C_1E:

$$\frac{1}{3}S_{B_1C_1E}2a = \frac{1}{6}|FB_1|\cdot|C_1E|\cdot x.$$

Отсюда $x = \frac{4a}{3\sqrt{5}}$.

81. а) a; б) $\frac{a(2-\sqrt{2})}{2}$.

82. Пусть $|AB| = a$, тогда $|AB_1| = |AC_1| = 2{,}6\,a$. Возьмем на прямых AB и AC точки K и L так, что $|AK| = |AL| = |AB_1| = |AC_1| = 2{,}6a$. Равнобочная трапеция KLC_1B_1 вписана в окружность основания конуса. Все стороны этой трапеции легко вычисляются, значит, находится и радиус описанной около нее окружности, он равен $\frac{13}{20}\sqrt{7}a$.

Теперь можно найти объемы конуса и призмы.

Ответ: $\frac{15379\pi}{4800\sqrt{3}}$.

83. Заметим, что отрезок MN своей точкой пересечения с прямой PQ делится пополам. Спроектируем этот отрезок на плоскость $ABCD$. Если N_1 — проекция N, K_1 — середина AD, Q_1 — середина DC (K_1 и Q_1 — проекции K и Q), то N_1M перпендикулярен AQ_1 и делится точкой пересечения пополам. Значит, $\widehat{N_1AD} = 2\widehat{Q_1AD}$. Отсюда найдем $|N_1K_1|$, затем $|N_1M|$.

Ответ: $\frac{a}{3}\sqrt{14}$.

84. Проведем через ребро AA_1 плоскость, перпендикулярную плоскости BCC_1B_1 (рис. 6). M и N — точки пересечения этой плоскости с C_1B_1 и CB. Возьмем на MN точку K так, что $|NK| = |MN|$. По условию AA_1MN — квадрат, значит, AK перпендикулярна AM,

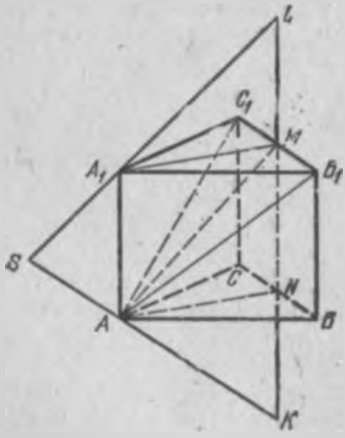


Рис. 6.

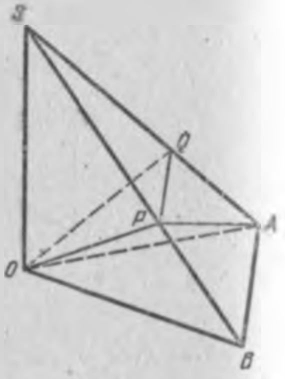


Рис. 7.

отсюда следует, что AK перпендикулярна плоскости AC_1B_1, т. е AK есть прямая, по которой пересекаются плоскости, проходящие через вершину A. Аналогично для вершины A_1 определим точку L. Прямые AK и A_1L пересекаются в точке S. Таким образом, наш многогранник представляет собой четырехугольную пирамиду $SKPLQ$ с вершиной S, основание которой находится в плоскости BB_1C_1C. Далее, B_1N есть проекция AB_1. Отсюда следует, что плоскость, проходящая через A перпендикулярно AB_1, пересекается с плоскостью BB_1C_1C по прямой, перпендикулярной B_1N. Из условия следует, что $\triangle B_1NC_1$ — правильный. Значит, четырехугольник $PLQK$, являющийся основанием пирамиды $SPLQK$, есть ромб, составленный из двух правильных треугольников со стороной $|KL| = 3a$.

Ответ: $\frac{9a^2\sqrt{3}}{4}$.

85. Искомый угол дополняет до $\pi/2$ угол между образующей OA и осью второго конуса. Обозначим через P и Q центры оснований данных конусов, через S — точку, в которой плоскости оснований конусов пересекают перпендикуляр, восставленный к плоскости OAB в точке O (рис. 7). В пирамиде $SOAB$ известно $|OA| = |OB|$, SO перпендикулярно плоскости OAB, OP и OQ перпендикулярны соответственно SB и SA, $\widehat{POB} = \widehat{QOA} = \varphi$, $\widehat{POQ} = \beta$. Надо найти $\widehat{POA}$. Пусть $|OA| = |OB| = l$, $|AB| = a$. Тогда

$$|OP| = |OQ| = l\cos\varphi, \qquad |SA| = |SB| = \frac{l}{\sin\varphi},$$

$$|SP| = |SQ| = |OP|\operatorname{ctg}\varphi = l\,\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi},$$

$$|PQ| = |AB|\,\frac{|SP|}{|SB|} = a\cos^2\varphi.$$

С другой стороны,

$$|PQ| = 2\,|OP|\sin\frac{\beta}{2} = 2l\cos\varphi\sin\frac{\beta}{2}.$$

Отсюда

$$a\cos\varphi = 2l\sin\frac{\beta}{2}. \qquad (1)$$

Найдем теперь $|PA|$:

$$|PA|^2 = |PB|^2 + |AB|^2 - 2\,|PB|\cdot|AB|\cos\widehat{PBA} =$$
$$= l^2\sin^2\varphi + a^2 - 2l\sin\varphi\cdot a\,\frac{a\sin\varphi}{2l} = l^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi.$$

Но, если $\gamma = \widehat{POA}$, то из $\triangle\, POA$ имеем:

$$|PA|^2 = l^2\cos^2\varphi + l^2 - 2l^2\cos\varphi\cos\gamma.$$

Приравнивая два выражения для $|PA|^2$ и учитывая (1), найдем

$$\cos\gamma = \cos\varphi - \frac{2\sin^2\frac{\beta}{2}}{\cos\varphi}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} - \arccos\left(\cos\varphi - \dfrac{2\sin^2\frac{\beta}{2}}{\cos\varphi}\right)$.

86. $(5\sqrt{6} + \sqrt{22})\,R$.

87. Если плоскость пересекает ребра AD и CD, то в сечении будет треугольник, при этом радиус вписанной окружности будет меняться от 0 до $\dfrac{a}{\sqrt{2}\,(2\cos\alpha + \sqrt{4\cos^2\alpha + 1})}$.

Пусть теперь плоскость пересекает ребра AB и BC в точках P и N, SA и SC — в точках Q и R, SD — в точке K и продолжения AD и CD — в точках L и M (рис. 8). Поскольку прямые PQ и NR параллельны и касаются окружности, вписанной в наше сечение, то PN есть диаметр этой окружности. Обозначим $|PN| = 2r$, будем иметь

$$|ML| = 2a\sqrt{2} - 2r,$$

$$|KL| = \frac{a\sqrt{2} - r}{2\cos\alpha}\sqrt{4\cos^2\alpha + 1},$$

$$S_{MKL} = \frac{(a\sqrt{2} - r)^2}{2\cos\alpha}.$$

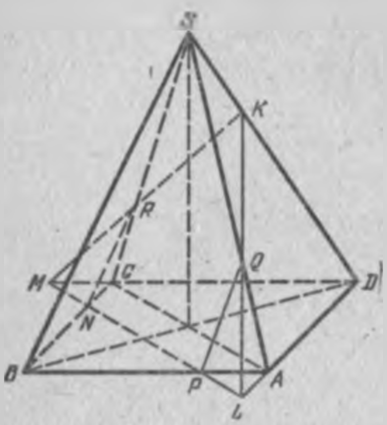


Рис. 8.

Таким образом,

$$r = \frac{a\sqrt{2} - r}{2\cos\alpha + \sqrt{4\cos^2\alpha + 1}},$$

откуда

$$r = \frac{a\sqrt{2}}{1 + 2\cos\alpha + \sqrt{4\cos^2\alpha + 1}}.$$

Ответ:

$$0 < r \leqslant \frac{a}{\sqrt{2}\,(2\cos\alpha + \sqrt{4\cos^2\alpha + 1})},$$

$$r = \frac{a\sqrt{2}}{1 + 2\cos\alpha + \sqrt{4\cos^2\alpha + 1}}.$$

88. Проведем сечение плоскостью, проходящей через ребро AB и точку L — середину CD, K — точка пересечения плоскости P и AL, высота, опущенная из A на BL, пересекает BK в точке N, BL — в точке Q (рис. 9). Нетрудно доказать, что центр сферы лежит на прямой AQ. При этом центр сферы может быть на отрезке AN (точка O) и на продолжении AQ (точка O_1).

Радиус первой сферы равен радиусу окружности, касающейся AB и BK и имеющей центр на AN. Обозначим его через x; x можно найти из соотношения

$$S_{BAN} = \frac{1}{2}(|AB| + |BN|)\,x,$$

$$|BN| = \frac{4}{5}|BK| = \frac{2}{5}\sqrt{2|AB|^2 + 2|BL|^2 - |AL|^2} = \frac{\sqrt{11}}{5}a,$$

$$S_{BAN} = \frac{2}{5}S_{BAL} = \frac{\sqrt{2}}{10}a^2,$$

значит, $x = \dfrac{\sqrt{2}a}{5 + \sqrt{11}}$. Так же находится радиус второй сферы.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}a}{5 \pm \sqrt{11}}$.

89. Пусть x — ребро тетраэдра, $|MN| = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$. Если ребро, середина которого M, образует с данной плоскостью угол α, то противоположное образует угол $\dfrac{\pi}{2} - \alpha$. Проекция тетраэдра на эту плоскость представляет собой равнобочную трапецию с основаниями $x\cos\alpha$ и $x\sin\alpha$ и расстоянием между основаниями, равным $\dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

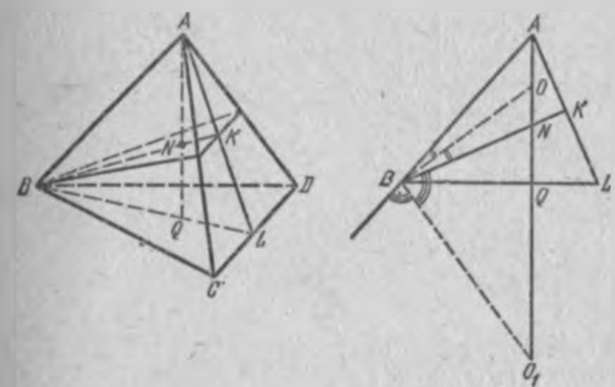


Рис. 9.

Таким образом, $S = \dfrac{x^2}{2\sqrt{2}}(\cos\alpha + \sin\alpha)$. Кроме того, по условию, угол при большем основании $60°$, откуда $|\cos\alpha - \sin\alpha| = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Ответ: $3S\sqrt{2}$.

90. Пусть ребро куба равно 1. Обозначим через O центр грани $ABCD$. Из того, что $\widehat{NMC} = 60°$ и $\widehat{NOC} = 90°$, следует, что O — между M и C. Обозначим $|OM| = x$, $|NB| = y$. Тогда $|MN| = 2x$, $|NO| = x\sqrt{3}$, $|MB| = \sqrt{\dfrac{1}{2} + x^2}$. Применяя теорему косинусов к треугольникам MNB и ONB, получим

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} + x^2 = 4x^2 + y^2 - 2xy\sqrt{2}, \\ 3x^2 = \dfrac{1}{2} + y^2 - \dfrac{2}{\sqrt{3}}y. \end{cases}$$

Отсюда найдем: $x = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $|AM| : |MC| = 2 - \sqrt{3}$, $|BN| : |ND_1| = 2$.

91. Плоскость, проходящая через AA_1 параллельно B_1D, будет параллельной плоскости DD_1B_1B. Точно так же плоскость, проходящая через DD_1 параллельно A_1C, будет параллельна плоскости AA_1C_1C.

С другой стороны, плоскости, проходящие через ребра BC и B_1C_1, будут параллельны плоскостям AB_1C_1D и A_1BCD_1. Учитывая это обстоятельство, построим сечение наших многогранников плоскостью, параллельной основаниям и проходящей через середины боковых ребер, и плоскостью, проходящей через середины параллельных сторон оснований призмы (см. рис. 10). На рисунках L и K

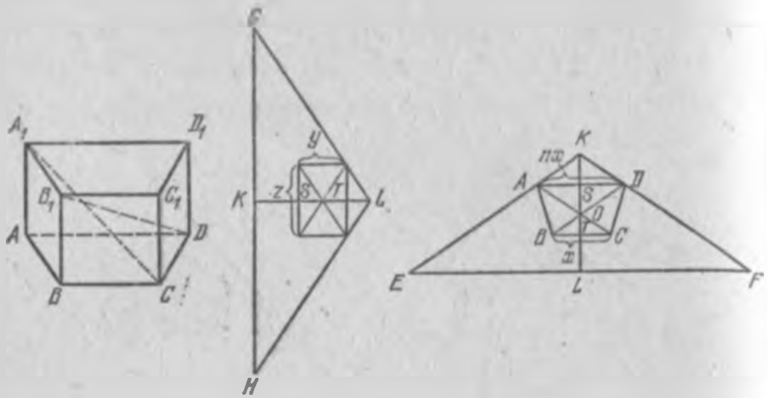


Рис. 10.

являются серединами противоположных ребер EF и HG треугольной пирамиды $EFGH$, сами ребра EF и HG перпендикулярны. Обозначая $|BC| = x$, $|AD| = nx$, высоту трапеции $ABCD$ через y, высоту призмы через z, найдем

$$|KS| = |SO| = \frac{yn}{n+1}, \quad |TL| = \frac{y}{2},$$

$$|KL| = y\left(\frac{3}{2} + \frac{n}{n+1}\right), \quad |EF| = \frac{5n+3}{2}x, \quad |GH| = \frac{5n+3}{n+1}z.$$

Объем призмы равен $\frac{(n+1)xyz}{2}$. Объем треугольной пирамиды $\frac{1}{6}|EF|\cdot|GH|\cdot|KL| = \frac{(5n+3)^2}{24(n+1)^2}xyz$.

Ответ: $\frac{(5n+3)^2}{12(n+1)^2}$.

92. Пусть высота призмы равна x. Возьмем на продолжении ребра B_1B точку K так, что $|BK| = \frac{3}{2}x$, $|B_1K| = \frac{5}{2}x$. Поскольку KN параллельна BM и $|KN| = 2|BM|$, проекция KN на CN вдвое больше проекции BM на CN, т. е. она равна $\frac{a}{\sqrt{5}}$. В $\triangle CNK$ имеем

$$|CN| = \sqrt{a^2 + \frac{x^2}{4}}, \quad |NK| = \sqrt{a^2+4x^2}, \quad |CK| = \sqrt{a^2 + \frac{25}{4}x^2}.$$

В зависимости от того, острый или тупой угол $\widehat{C_1NK}$, будем иметь два уравнения:

$$a^2 + \frac{25}{4}x^2 = \left(a^2 + \frac{x^2}{4}\right) + (a^2+4x^2) - 2\sqrt{a^2+\frac{x^2}{4}}\cdot\frac{a}{\sqrt{5}},$$

или

$$a^2 + \frac{25}{4}x^2 = \left(a^2 + \frac{x^2}{4}\right) + (a^2+4x^2) + 2\sqrt{a^2+\frac{x^2}{4}}\cdot\frac{a}{\sqrt{5}}.$$

Ответ: $\frac{a}{2\sqrt{5}}$ или a.

93. Обозначим через A_1 и B_1 две других точки касания, R и r — радиусы шаров. В трапеции AA_1BB_1 найдем основания: $|AA_1| = 2R\cos\frac{\alpha}{2}$, $|BB_1| = 2r\cos\frac{\alpha}{2}$ и боковые стороны $|AB_1| = |A_1B| = 2\sqrt{Rr}$, после чего определим диагонали $|AB| = |A_1B_1| = 2\sqrt{Rr\left(1+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}$. Если шар, проходящий через A и A_1, пересекает AB в точке K, то $|A_1B|^2 = |BK|\cdot|BA|$, откуда

$$|BK| = \frac{2\sqrt{Rr}}{\sqrt{1+\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{|AB|}{1+\cos^2\frac{\alpha}{2}}, \quad |AK| = \frac{|AB|\cos^2\frac{\alpha}{2}}{1+\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Так же находятся другие части, на которые разделен отрезок AB.

Ответ: Отрезок AB разделен в отношении

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} : \sin^2\frac{\alpha}{2} : \cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

94. Можно доказать, что ось цилиндра должна проходить через середину ребра BD и принадлежать плоскости BDL, где L — середина AC. Пусть ось цилиндра образует с BD острый угол α. Спроектируем пирамиду на плоскость, перпендикулярную оси цилиндра, получим четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$, в котором $|A_1C_1| = |AC| = 12$. Диагонали A_1C_1 и B_1D_1 перпендикулярны, точка пересечения диагоналей F делит A_1C_1 пополам, а диагональ D_1B_1 делится точкой F на отрезки $6\sqrt{3}\cos\alpha$ и $10\sqrt{3}\sin\alpha - 6\sqrt{3}\cos\alpha$. Из условия $|A_1F|\cdot|FC_1| = |B_1F|\cdot|FD_1|$ получим для α уравнение

$$\sin^2\alpha - 5\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha = 0,$$

откуда найдем $\operatorname{tg}\alpha_1 = 1$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = 4$. Но $|B_1D_1| = 10\sqrt{3}\sin\alpha$ и равняется диаметру основания цилиндра. Получим два значения для радиуса основания цилиндра: $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ и $\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{17}}$.

95. Возьмем на ребре AS точку K так, что $|AK| = a$. Тогда точки B, D и K принадлежат сечению конуса плоскостью, параллельной основанию конуса ($|AB| = |AD| = |AK|$). Из того, что C лежит в плоскости основания, следует, что плоскость BDK делит пополам высоту конуса. Таким образом, поверхность нашего конуса в четыре раза больше поверхности конуса, радиус основания которого равен радиусу окружности, описанной около $\triangle BDK$, с образующей, равной a.

Ответ: $\frac{4\pi\sqrt{2}a^2\left(\sqrt{b^2+2a^2}-a\right)}{\sqrt[4]{b^2+2a^2}\cdot\sqrt{3\sqrt{b^2+2a^2}-4a}}$.

96. Пусть радиус основания конуса равен R, высота — h, ребро куба — a. Сечение конуса плоскостью, параллельной основанию и проходящей через центр куба, есть окружность радиуса $R\frac{2h-a\sqrt{2}}{2h}$, в которую вписан прямоугольник (сечение куба) со сторонами a и $a\sqrt{2}$, т. е.

$$3a^2 = R^2\frac{(2h-a\sqrt{2})^2}{h^2}. \qquad (1)$$

Сечение конуса, параллельное основанию конуса и проходящее через ребро куба, противоположное ребру, лежащему в основании, есть окружность с радиусом $R\frac{h-a\sqrt{2}}{h}$. С другой стороны, диаметр этой окружности равен a, т. е.

$$a = 2R\frac{h-a\sqrt{2}}{h}. \qquad (2)$$

Из соотношений (1), (2) получим

$$h = \frac{\sqrt{2}(5+\sqrt{3})}{4}a, \quad R = \frac{2\sqrt{3}-1}{2}a.$$

Ответ: $\frac{\pi(53-7\sqrt{3})\sqrt{2}}{48}$.

97. $\frac{3}{5}$.

98. Из равенства $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ и перпендикулярности AB и DC можно получить, что точки C и D симметричны относительно плоскости, проходящей через AB перпендикулярно CD.

Ответ: $\frac{aS}{3}$.

99. Пусть K — середина AB, P — основание перпендикуляра, опущенного из K на CS. Возьмем на AB точки M и N так, что $\triangle PMN$ — правильный (рис. 11). Пирамиду $SPMN$ можно достроить до правильной призмы $PMNSM_1N_1$ так, что PMN и SM_1N_1 будут ее основаниями, а PS, MM_1, NN_1 — ее боковыми ребрами. Призма $A_1B_1CA_2B_2S$ будет гомотетична призме $PMNSM_1N_1$ с центром в S и коэффициентом $|CS|/|PS|$. Легко видеть, что искомая доля объема пирамиды $SABC$, находящаяся внутри призмы $A_1B_1CA_2B_2S$, равна отношению $|MN|/|AB|$. Обозначим $|AB| = a\sqrt{3}$, $|CS| = 2a$. Найдем:

$$|SK| = \frac{\sqrt{13}}{2}a, \quad |CK| = \frac{3}{2}a, \quad |PS| = \frac{5}{4}a, \quad |PK| = \frac{3\sqrt{3}}{4}a,$$

$$|MN| = |PK|\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2}a, \quad |MN|/|AB| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

100. Пусть плоскость, проходящая через B_1C_1, пересекает AB и DC в точках K и L (рис. 12). По условию, объемы многогранников $AKLDA_1B_1C_1D_1$ и $KBCLB_1C_1$ равны. Применим к ним формулу Симпсона (задача 15), обозначив $|AK| = |DL| = a$. Поскольку

высоты этих многогранников равны, получим для a уравнение

$$7a+1+4\,\frac{(a+1)}{2}\cdot\frac{(7+1)}{2}=(7-a)\,7+4\,\frac{(7-a)}{2}\cdot\frac{(7+1)}{2},$$

откуда $a=\dfrac{16}{5}$.

Обозначим высоту пирамиды через h. Введем систему координат, взяв ее начало в центре $ABCD$, оси x и y параллельными AB и BC. Точки A, C и D_1 будут иметь координаты $\left(-\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}, 0\right)$,

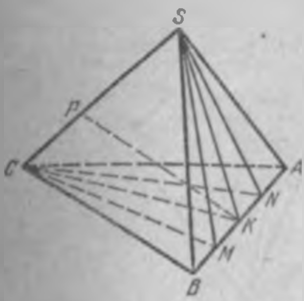


Рис. 11.

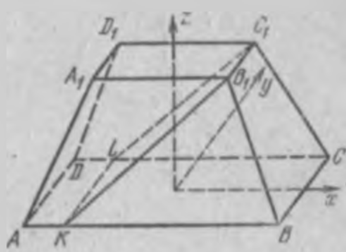


Рис. 12.

$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, h\right)$. Нетрудно найти уравнение плоскости ACD_1; $hx - hy + z = 0$. Плоскость KLC_1B_1 будет иметь уравнение $10hx - 8z + 3h = 0$. Нормальный вектор к первой плоскости $n\,(h, -h, 1)$, ко второй $m\,(10h, 0, -8)$. Условие их перпендикулярности даст нам $10h^2-8=0$, $h=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. Объем пирамиды равен $\dfrac{36\sqrt{5}}{5}$.

101. Возможны два случая:

1. Боковыми сторонами трапеции являются проекции ребер AB и B_1C_1. Можно доказать, что в этом случае центр сферы находится в точке C. Объем призмы будет равен $3a^3/8$.

2. Боковыми сторонами трапеции являются проекции ребер AB и A_1C_1. В этом случае центр сферы проектируется в центр окружности, описанной около трапеции $ABC_1'A_1'$, высота трапеции равна $a\sqrt{5/3}$, объем призмы равен $a^3\sqrt{5}/4$.

Ответ: $\dfrac{3a^3}{8}$ или $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{4}$.

102. $\dfrac{\pi}{3}\,a\,(a^2+2b^2)$.

103. Спроектируем данные многогранники на плоскость ABC (рис. 13). На рисунке отсутствуют проекции точек A_1, B_1 и C_1 — они совпали с точками A, B и C; S_1 и D_1 — проекции точек S и D. Если мы на отрезке PS_1 возьмем точку K так, что $|PK| = |ND_1|$, то точка K является проекцией точки K_1, в которой ребро PS пере-

екает плоскость $A_1B_1C_1$. Таким образом, искомое отношение равно

$$\frac{|KB|}{|BP|}=\frac{|ND_1|-|PB|}{|PB|}=\frac{(|S_1N|-|D_1S_1|)-(|PS_1|-|BS_1|)}{|PS_1|-|BS_1|}=$$

$$=\frac{|BS_1|-|D_1S_1|}{|S_1M|-|BS_1|}. \qquad (1)$$

Следовательно, наша задача свелась к нахождению отрезков $|S_1M|$, $|BS_1|$, $|D_1S_1|$, где S_1 — точка, из которой стороны $\triangle BD_1M$

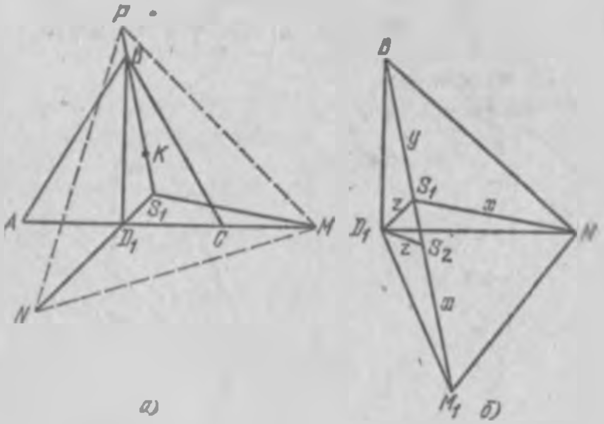


Рис. 13.

видны под равными углами, $\triangle BD_1M$ — прямоугольный с катетами $|D_1M| = 2a$, $|BD_1| = a\sqrt{3}$.

Обозначим $|S_1M| = x$, $|S_1B| = y$, $|S_1D_1| = z$.

Повернем $\triangle D_1S_1M$ на угол 60° вокруг точки D_1 (рис. 13, б), $\triangle D_1S_1S_2$ — правильный со стороной z; точки B, S_1, S_2, M_1 — на одной прямой, $\widehat{BD_1M_1} = 150°$. Из $\triangle BD_1M_1$ найдем $x + y + z = a\sqrt{13}$. Высота $\triangle BD_1M_1$, опущенная на сторону BM_1, равна $a\sqrt{\frac{3}{13}}$, откуда $z = \frac{2a}{\sqrt{13}}$, $y + \frac{z}{2} = \sqrt{3a^2 - \frac{3a^2}{13}} = \frac{6a}{\sqrt{13}}$.

Теперь легко найти $y = \frac{5a}{\sqrt{13}}$, $x = \frac{6a}{\sqrt{13}}$. Подставляя найденные значения в (1), получим, что искомое отношение, считая от вершины B, равно 3.

104. Любая касательная плоскость делит пространство на две части, при этом либо все три сферы расположены в одной части, либо две — в одной, а одна в другой. Очевидно, что, если некоторая плоскость касается сфер, то и плоскость, ей симметричная относительно плоскости, проходящей через центры сфер, также является касательной. Покажем, что не существует плоскости, касающейся данных сфер так, что сферы радиусов 3 и 4 находятся по одну сторону от нее, а сфера радиуса 6 — по другую.

Пусть центры сфер радиусов 3, 4 и 6 находятся в точках A, B и C. Плоскость, касающаяся данных сфер указанным выше образом, разделит стороны AC и BC в отношениях $1:2$ и $2:3$, т. е.

пройдет через точки K и L на AC и BC такие, что $|CK| = 22/3$, $|CL| = 33/5$. Нетрудно найти расстояние от C до KL. Оно равно $33\sqrt{3/91} < 6$. Отсюда следует, что через KL нельзя провести плоскость, касающуюся сферы радиуса 6 с центром в C. Можно показать, что все другие касательные плоскости существуют, а всего их будет 6.

105. Решение задачи основано на том, что продолжение падающего луча симметрично отраженному лучу относительно той грани, от которой луч отражается. Введем естественным образом систему координат, взяв ее начало в точке N, а в качестве осей x, y и z — ребра NK, NL и NM, обозначим через Q' и R' последовательные точки пересечения прямой SP с координатными плоскостями, отличными от LNM. Имеем: $|PQ| = |PQ'|$, $|QR| = |Q'R'|$.

Точка P имеет координаты $(0, 1, \sqrt{3})$. Обозначим через α, β, α углы, образованные лучом SP с осями координат. Из условия следует, что $\beta = \pi/4$, далее найдем $\cos\alpha$ из равенства $2\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$, $\cos\alpha = 1/2$ (α — острый угол). Следовательно, вектор a $(1/2, \sqrt{2}/2, 1/2)$ параллелен прямой SP. Если A (x, y, z) — произвольная точка на этой прямой, то

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + ta,$$

или покоординатно

$$x = \frac{t}{2}, \quad y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t, \quad z = \sqrt{3} + \frac{t}{2}.$$

Координаты y и z обращаются в нуль при $t_1 = -\sqrt{2}$ (это будет точка Q') и при $t_2 = -2\sqrt{3}$ (точка R'). Таким образом, $Q'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $R'(-\sqrt{3}, 1 - \sqrt{6}, 0)$,

$$|PQ'| = \sqrt{2}, \quad |Q'R'| = 2\sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

Ответ: $2\sqrt{3}$.

106. Обозначим через K точку касания сферы с продолжением CD, а через M и L — точки касания с ребрами AD и BD, N — середина BC (рис. 14). Так как $|CD| = |DB| = |DA|$, DN перпендикулярна плоскости ABC, $|DK| = |DM| = |DL|$, KL параллельна DN, ML параллельна AB, значит, плоскость KLM перпендикулярна плоскости ABC, $\widehat{KLM} = 90°$. Если O — центр сферы, то прямая DO перпендикулярна плоскости KLM, т. е. DO параллельна плоскости ABC, следовательно, $|DN| = 1$ (радиусу сферы). Кроме того, DO проходит через центр окружности, описанной около $\triangle KLM$,— середину KM. Отсюда следует, что $\widehat{ODM} = \frac{1}{2}\widehat{KDM}$. Далее, $|DA| = |DC| = \sqrt{|CN|^2 + |DN|^2} = \sqrt{3}$, $|CA| = |CB|\cos 30° = \sqrt{6}$, т. е. $\triangle CDA$ — прямоугольный, $\widehat{CDA} = 90°$, $\widehat{ODM} = 45°$, $|DM| = |OM| = 1$. Искомый отрезок касательной равен $|AM| = |AD| - |DM| = \sqrt{3} - 1$.

107. Пусть O_1, O_2, O_3 — точки касания шаров с плоскостью P, причем в точке O_1 касается шар радиуса r, а в O_2 и O_3 — радиусов R, O — вершина конуса (рис. 15), φ — угол между образующей

конуса и плоскостью P. Можно найти, что

$$|O_1O| = r\,\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}, \quad |OO_2| = |OO_3| = R\,\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2},$$

$$|O_1O_2| = |O_1O_3| = 2\sqrt{Rr},\ |O_2O_3| = 2R.$$

Поскольку $|O_1O_2| = |O_1O_3|$, то равным $150°$ может быть лишь угол $\widehat{O_2O_1O_3}$, значит, $R/r = 4\sin^2 75° = 2+\sqrt{3}$.

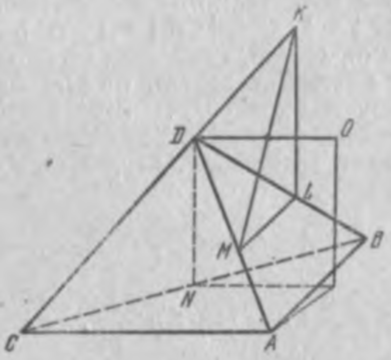


Рис. 14.

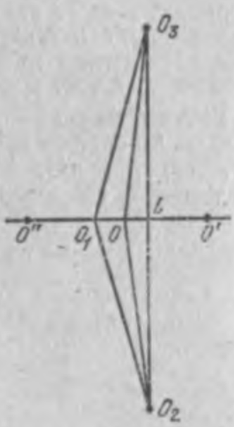


Рис. 15.

Далее, если L — середина O_2O_3, то

$$|OL| = \sqrt{|OO_2|^2 - |O_2L|^2} = R\sqrt{\mathrm{ctg}^2\frac{\varphi}{2} - 1},$$

$$|O_1L| = \sqrt{|O_1O_2|^2 - |O_2L|^2} = \sqrt{4Rr - R^2}.$$

Точка O находится на прямой O_1L, причем она может быть как на отрезке O_1L, так и на его продолжении за точки L или O_1 (на рисунке O' и O''). Соответственно получим три соотношения

$$|O_1L| = |OO_1| + |OL|, \quad |O_1L| = |O_1O'| - |O'L|,$$
$$|O_1L| = |O''L| - |O''O_1|.$$

Заменив в каждом из этих трех соотношений $R = (2+\sqrt{3})\,r$, $\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi}{2} = x$, в первых двух придем к противоречию ($x = 1$ или $x = -2\sqrt{3}/3$), в третьем случае найдем $x = 2\sqrt{3}/3$.

Ответ: $\cos\varphi = \frac{1}{7}$.

108. Обозначим через K и L середины ребер AD и BC, N и P — точки пересечения проведенной плоскости с прямыми AB и AC (рис. 16). Найдем отношения $|PA|/|PC|$ и $|PK|/|PM|$. Проведем KQ и AR параллельно DC, Q — середина AC.

$$|AR| = |DM|, \qquad \frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|AR|}{|MC|} = \frac{|DM|}{|MC|} = \frac{2}{3},$$

$$\frac{|PK|}{|PM|}=\frac{|KQ|}{|MC|}=\frac{|DC|}{2|MC|}=\frac{5}{6}.$$

Затем найдем

$$\frac{|AN|}{|NB|}=\frac{2}{3},\quad \frac{|PN|}{|PL|}=\frac{4}{5},$$

$$\frac{V_{PAKN}}{V_{ABCD}}=\frac{|PA|\cdot|AK|\cdot|AN|}{|AC|\cdot|AD|\cdot|AB|}=\frac{2}{5},$$

т. е. $V_{PAKN}=2$. Поскольку высота, опущенная из A на PNK, равна 1, $S_{PNK}=6$,

$$\frac{S_{PML}}{S_{PNK}}=\frac{|PK|\cdot|PN|}{|PM|\cdot|PL|}=\frac{3}{2},\qquad S_{PML}=9.$$

Таким образом, площадь сечения будет $S_{PML}-S_{PNK}=3$.

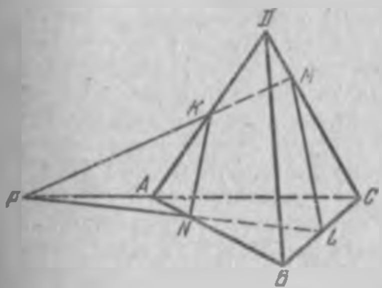


Рис. 16.

109. Зная радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, и высоту пирамиды, нетрудно найти сторону основания. Она равна 12, $|MK|=|KN|$ (по условию касательные к шару из точек M и N равны).

Пусть $|BM|=x$, $|BN|=y$. Найдя $|MN|$ по теореме косинусов из $\triangle BMN$, а $|MK|$ и $|NK|$ — из треугольников BMK и BNK, получим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2-xy=49, \\ x^2-12x=y^2-12y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-xy=49, \\ (x-y)(x+y-12)=0. \end{cases}$$

Эта система имеет решение $x_1=y_1=7$. В этом случае расстояние от K до MN равно $4\sqrt{3}-\frac{7\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}<2$, т. е. плоскость, проходящая через MN и касающаяся шара, в самом деле, пересекает продолжение SK за точку K,

$$|KD|=\frac{12}{13},\quad |SD|=6\frac{12}{13}.$$

Второе решение этой системы удовлетворяет условию $x+y=12$. Из первого уравнения получим $(x+y)^2-3xy=49$.

$= 95/3$. Отсюда следует, что

$$KN = |S_{BMK} + S_{BNK} - S_{BMN}| =$$

$$= \left| x\sqrt{3} + y\sqrt{3} - xy\frac{\sqrt{3}}{4} \right| = \frac{49\sqrt{3}}{12}.$$

довательно, высота, опущенная из K на MN, равна $\frac{7}{6}\sqrt{3} > 2$, е. в этом случае плоскость, проходящая через MN и касающаяся ра, не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $6\frac{12}{13}$.

110. Из того, что ребра пирамиды $ABCD$ касаются шара, следует, о суммы противоположных ребер пирамиды равны. Достроим пирамиду $ABCD$ до параллелепипеда, проведя через каждое ребро пирамиды плоскость, параллельную противоположному ребру. Ребра пирамиды будут являться диагоналями граней параллелепипеда (рис. 17), а ребра параллелепипеда равны расстояниям между серединами противоположных ребер пирамиды. Пусть $|AD| = a$, $|BC| = b$, тогда любые два противоположных ребра пирамиды будут равны a и b. Докажем это. Пусть $|AB| = x$, $|DC| = y$. Тогда $x + y = a + b$, $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ (последнее равенство ледует из того, что все грани параллелепипеда — ромбы с авными сторонами).

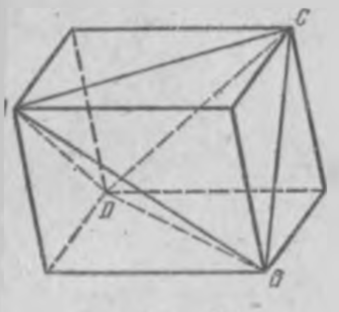


Рис. 17.

Отсюда следует, что $x = a$, $y = b$ или $x = b$, $y = a$. Значит, $\triangle ABC$ по крайней мере две стороны равны между собой. Но $\widehat{BC} = 100°$, следовательно, $|AB| = x = |BC| = b$, $|AC| = a$, $|DB| = b$, $|DC| = a$.

Из $\triangle ABC$ найдем $a = 2b \sin 50°$,

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ADC} h_B = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} h_B =$$

$$= \frac{1}{3} S_{DBC} h_A = \frac{1}{3} \cdot \frac{b^2 \sin 100°}{2} h_A,$$

откуда $\frac{h_A}{h_B} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2b^2 \sin 100°} = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, 50°$.

111. Равенство произведений длин ребер при каждой грани означает, что противоположные ребра пирамиды равны. Достроим пирамиду $SABC$ обычным образом до параллелепипеда, проведя через каждое ребро плоскость, параллельную противоположному ребру. Ввиду равенства противоположных ребер пирамиды $SABC$, получившийся параллелепипед будет прямоугольным. Обозначим ребра этого параллелепипеда через a, b и c, как показано на рис. 18.

Проведем в $\triangle BCD$ высоту DL. Из $\triangle BCD$ найдем

$$|DL| = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}},$$

$$|AL| = \sqrt{a^2 + |DL|^2} = \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{\sqrt{b^2 + c^2}},$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}.$$

Объем пирамиды $SABC$ составляет 1/3 объема параллелепипеда, высота на грань ABC дана, получаем уравнение

$$\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \cdot \sqrt{\frac{102}{55}} = abc. \tag{1}$$

По теореме косинусов для $\triangle ABC$ получим

$$6a^2 = \sqrt{a^2 + c^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{\frac{17}{2}}. \tag{2}$$

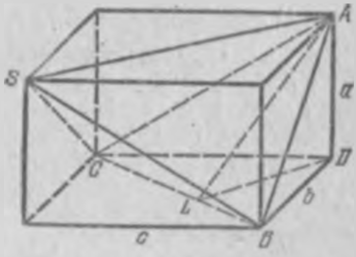


Рис. 18.

И, наконец, последнее условие задачи даст нам

$$c^2 - 2a^2 - 2b^2 = 30. \tag{3}$$

Решив систему (1)—(3), найдем $a^2 = 34$, $b^2 = 2$, $c^2 = 102$.

Ответ: $\frac{34\sqrt{6}}{3}$.

112. Обозначим через M и N точки касания с шаром касательных, проведенных из A и B, M_1 и N_1 — проекции точек M и N на

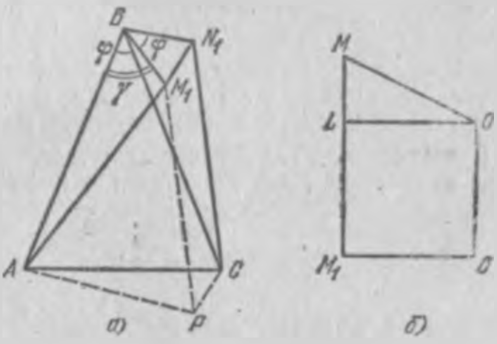


Рис. 19.

плоскость ABC (рис. 19, а; на рисунке изображены один из двух эквивалентных случаев расположения касательных, при которых эти касательные скрещиваются, в двух других случаях эти касальные лежат в одной плоскости). Нетрудно найти: $|AM| = |CN| = l$, $|MM_1| = |NN_1| = l\sin\alpha$, $|AM_1| = |CN_1| = l\cos\alpha$. Найдем $|BM_1|$ и $|BN_1|$ (рис. 19, б; O — центр шара, $|BM_1|$)

$$|BN_1| = |BM_1| = |OL| = \sqrt{r^2 - (l\sin\alpha - r)^2} = \sqrt{2rl\sin\alpha - l^2\sin^2\alpha}.$$

При повороте вокруг точки B на угол $\varphi = \widehat{ABC}$ точка A перейдет в C, M_1 — в N_1, следовательно, треугольники BM_1N_1 и BAC подобны,

$$|MN| = |M_1N_1| = |BM_1|\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{2a}{l}\sqrt{2rl\sin\alpha - l^2\sin^2\alpha};$$

$\triangle M_1BN_1$ получается из $\triangle ABC$ поворотом вокруг B на угол $\gamma = \widehat{ABM_1}$ с последующей гомотетией. Следовательно, угол между M_1N_1 и AC равен γ, а поскольку M_1N_1 и MN параллельны, угол между MN и AC — также γ.

Из $\triangle BM_1A$ найдем

$$\cos\gamma = \frac{2rl\sin\alpha - l^2\sin^2\alpha + l^2 - l^2\cos^2\alpha}{2l\sqrt{2rl\sin\alpha - l^2\sin^2\alpha}} = \frac{r\sin\alpha}{\sqrt{2rl\sin\alpha - l^2\sin^2\alpha}}.$$

Затем

$$\sin\gamma = \frac{\sqrt{2rl\sin\alpha - (l^2 + r^2)\sin^2\alpha}}{\sqrt{2rl\sin\alpha - l^2\sin^2\alpha}}.$$

Найдем, используя полученные значения для $|MN|$, $|MM_1|$ и $\sin\gamma$, объем пирамиды $ACMN$:

$$V_{ACMN} = \frac{1}{6}|AC|\cdot|MN|\cdot|MM_1|\sin\gamma = \frac{2a^2\sin\alpha}{3}\sqrt{2rl\sin\alpha - (l^2 + r^2)\sin^2\alpha}. \quad (1)$$

Возьмем теперь точку P так, что M_1N_1CP — параллелограмм, значит, $MNCP$ — также параллелограмм. Пусть β — угол между AM и CN, тогда $\beta = \widehat{AMP}$. Но $\triangle ABM_1$ получается из $\triangle CBN_1$ поворотом вокруг B по часовой стрелке на угол $\varphi = \widehat{ABC}$. Отсюда следует, что угол между AM_1 и CN_1 равен φ, а, значит, и $\widehat{AM_1P} = \varphi$, т. е. треугольники AM_1P и ABC подобны. Из этого подобия найдем $|AP| = 2a\cos\alpha$. Угол β равен углу $\widehat{AMP}$, $\triangle AMP$ — равнобедренный, в котором $|AM| = |MP| = l$, $|AP| = 2a\cos\alpha$. Следовательно,

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{a\cos\alpha}{l},$$

$$\sin\beta = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} = \frac{2a\cos\alpha\sqrt{l^2 - a^2\cos^2\alpha}}{l^2}.$$

Выразим объем пирамиды $ACMN$ по-другому,

$$V_{ACMN} = \frac{1}{6}|AM|\cdot|CN|\,x\sin\beta = \frac{1}{3}ax\cos\alpha\sqrt{l^2 - a^2\cos^2\alpha}.$$

где x — искомое расстояние. Сравнивая эту формулу с равенством

(1), получим

$$x = \frac{2a \operatorname{tg} \alpha \sqrt{2rl \sin \alpha - (l^2 + r^2) \sin^2 \alpha}}{\sqrt{l^2 - a^2 \cos^2 \alpha}}.$$

113. Пусть $|EA| = x$, площадь $\triangle EMA$ будет наибольшей, если $|EH| = |HA| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, и равна при этом $\frac{x}{2}\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}}$. Расстояние от B до плоскости EAH не больше чем $|AB| = 1$. Поскольку $S_{AEB} = S_{EBC}$,

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{2} V_{ABCEH} = V_{ABEH} \leqslant \frac{x}{12}\sqrt{2 - x^2} =$$

$$= \frac{1}{12}\sqrt{x^2(2 - x^2)} \leqslant \frac{1}{24}[x^2 + (2 - x^2)] = \frac{1}{12}.$$

Таким образом, $x = 1$, и ребро AB перпендикулярно плоскости EAH. $ABCE$ —квадрат со стороной 1.

Рассмотрим две треугольные призматические поверхности: первая образована плоскостями $ABCE$, AHE и BCH; вторая — $ABCE$, ECH и ABH. Очевидно, радиус наибольшего шара, помещающегося в пирамиде $ABCEH$, равен радиусу наименьшего из шаров, вписанных в эти призмы. Радиус же шара, вписанного в каждую из этих призм, равен радиусу окружности, вписанной в перпендикулярное сечение. Перпендикулярное сечение первой призмы представляет собой прямоугольный треугольник с катетами 1 и 1/2, радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен $\frac{3 - \sqrt{5}}{4}$. Перпендикулярное сечение второй призмы есть треугольник AHE, радиус окружности, вписанной в него, равен $\frac{\sqrt{2} - 1}{2} > \frac{3 - \sqrt{5}}{4}$.

Ответ: $\frac{3 - \sqrt{5}}{4}$.

114. Из того, что прямая, перпендикулярная ребрам AC и BS, проходит через середину BS, следует, что грани ACB и ACS равновелики.

Пусть $S_{ASB} = S_{BSC} = Q$, тогда $S_{ACB} = S_{ACS} = 2Q$. Обозначим через A_1, B_1, C_1, S_1 проекции M на грани BCS, ACS, ABS, ABC соответственно, h_A, h_B, h_C, h_S — высоты, опущенные на эти грани, V — объем пирамиды. Тогда будем иметь

$$|MA_1| + 2|MB_1| + |MC_1| + 2|MS_1| = \frac{3V}{Q}.$$

Но, по условию, $|MB| + |MS| = |MA_1| + |MB_1| + |MC_1| + |MS_1|$. Из двух последних равенств следует:

$$|MB| + |MB_1| + |MS| + |MS_1| = \frac{3V}{Q}.$$

Но

$$V = \frac{1}{3} h_S \cdot 2Q = \frac{1}{3} h_B \cdot 2Q = \frac{Q}{3}(h_B + h_S).$$

Следовательно, $|MB| + |MB_1| + |MS| + |MS_1| = h_B + h_S$. С другой стороны, $|MB| + |MB_1| \geqslant h_B$, $|MS| + |MS_1| \geqslant h_S$. Значит, $|MB| + |MB_1| = h_B$, $|MS| + |MS_1| = h_S$, и высоты, опущенные из B и S, пересекаются в точке M, а ребра AC и BS перпендикулярны.

Из условий задачи следует также, что общий перпендикуляр к AC и BS делит пополам также и AC. Пусть F — середина AC, E — середина BS. Обозначим $|FE| = x$. Тогда

$$Q = S_{ASB} = \frac{1}{2}|SB|\cdot|AE| = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + \frac{3}{2}},$$

$$2Q = S_{ACB} = \frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}.$$

Получим уравнение $\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{x^2+\frac{1}{4}} = \sqrt{x^2+\frac{3}{2}}$, откуда $x = \frac{3}{2}$. Рассмотрев равнобедренный треугольник BFS, в котором $|BS| = 1$, $|BF| = |FS|$, высота $|FE| = \frac{3}{2}$, M — точка пересечения высот, найдем $|BM| = |SM| = \frac{\sqrt{10}}{6}$.

115. Поскольку боковые ребра четырехугольной пирамиды равны между собой, ее вершина E проектируется в точку O — центр прямоугольника $ABCD$. С другой стороны, из равенства ребер треугольной пирамиды следует, что все ее вершины основания лежат на окружности с центром в точке O.

Пусть окружность, на которой лежат вершины основания треугольной пирамиды, пересекает стороны прямоугольника $ABCD$ в точках, обозначения которых даны на рис. 20, *а*. Из того, что боковые грани треугольной пирамиды — равнобедренные равновеликие треугольники, следует, что углы при вершинах этих треугольников либо равны, либо дополняют друг друга до 180°. Значит,

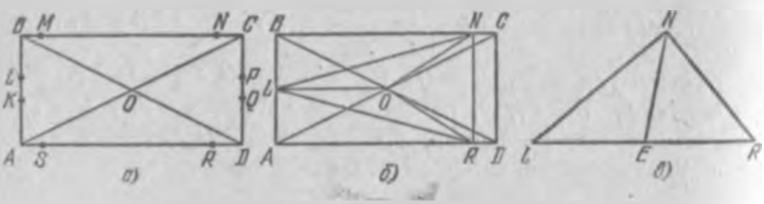


Рис. 20.

в основании лежит равнобедренный треугольник. (Докажите, что он не может быть правильным.) Далее, две вершины этого треугольника не могут находиться на меньших сторонах прямоугольника $ABCD$. Если основанием будет $\triangle LNS$, то $|SL| = |LN|$, $\widehat{SLN} = 90°$, а отсюда будет следовать, что $ABCD$ — квадрат. Если же основанием будет $\triangle LNR$, то из условия $\alpha < 60°$ будет следовать, что $|BN| > |NR|$. Значит, равными будут стороны RL и LN, что возможно, когда точки K и L совпадают с серединой AB.

Рассуждая аналогично, придем к еще одной возможности: вершины основания треугольной пирамиды находятся в точках R, N и P, при этом P есть середина CD.

Рассмотрим первый случай (рис. 20, *б*). Пусть $|LO| = |ON| = |OR| = r$. Тогда $|NR| = |CD| = 2r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Но, поскольку $\widehat{LEN} + \widehat{NER} = 180°$, треугольники LNE и NER, будучи приложенными друг к другу (см. рис. 20, *в*), образуют прямоугольный $\triangle LNR$. Значит,

$$|LN| = \sqrt{4|LE|^2 - |NR^2|} = \sqrt{4h^2 + 4r^2 - 4r^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

С другой стороны,

$$|LN|^2 = \left(r + r\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\right)^2 + r^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

Таким образом,

$$r^2 = \frac{2h^2}{2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} - 1}.$$

Применяя аналогичные рассуждения к $\triangle NRP$, получим, что $r^2 < 0$.

Ответ: $\dfrac{8h^3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{3\left(2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} - 1\right)}$.

116. Продолжим ребро SA за точку S и возьмем на продолжении точку A_1 так, что $|SA_1| = |SA|$. В SA_1BC двугранные углы при ребрах SA_1 и SC будут равны, а поскольку $|SA_1| = |SC|$, то $|A_1B| = |CB| = b$. Треугольник ABA_1 — прямоугольный с катетами a и b. Следовательно, гипотенуза $|AA_1| = 2|AS| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$.

117. Рассмотрим тетраэдр с ребром $2a$. Поверхность сферы, касающейся всех его ребер, разбивается поверхностью тетраэдра на 4 равных сегмента и 4 равных криволинейных треугольника, каждый из которых равен искомому треугольнику. Радиус сферы равен $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, высота каждого сегмента равна $a\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, следовательно, площадь искомого криволинейного треугольника равна

$$\frac{1}{4}\left[4\pi a^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4\cdot 2\pi a^2\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right] = \frac{\pi a^2}{6}(2\sqrt{3} - 3).$$

118. Рассмотрим куб с ребром $2\sqrt{2}$. Сфера с центром в центре куба, касающаяся его ребер, имеет радиус 2. Поверхность сферы разбивается поверхностью куба на 6 сегментов и 8 криволинейных треугольников, равных меньшему из искомых треугольников.

Ответ: $\pi(3\sqrt{2} - 4)$ и $\pi(9\sqrt{2} - 4)$.

119. $\arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

120. Проведем сечение через ось конуса. Рассмотрим трапецию BCD, образовавшуюся в этом сечении, где A и B — точки касания юверхностью конуса одного шара, C и D — другого. Можно доэать, что если F — точка касания шаров, то F — центр окружсти, вписанной в $ABCD$.

В дальнейшем, при определении объемов тел, образующихся вращения соответствующих сегментов, следует воспользоваться ормулой, полученной в задаче 18.

121. $\frac{1}{3}SR$.

122. Воспользуемся формулой Лейбница (см. (1) задача 153) *)

$$|MG|^2 = |MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 - \frac{1}{3}(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2),$$

е G — центр тяжести треугольника ABC.

Если теперь ABC — данный прямоугольный треугольник, $_1B_1C_1$ — данный правильный треугольник, G — их общий центр яжести, то

$$|A_1A|^2 + |A_1B|^2 + |A_1C|^2 = 3|A_1G|^2 + \frac{4}{3}b^2 = a^2 + \frac{4}{3}b^2.$$

аписав аналогичные равенства для B_1 и C_1 и сложив их, получим, то искомая сумма квадратов равна $3a^2 + 4b^2$.

123. Пусть сторона основания пирамиды равна a, а боковое ебро — b. Проведем через FE плоскость, параллельную ASC, обоначим через K и N точки пересечения этой плоскости с BC и SB. Іоскольку E — середина апофемы грани SCB, то $|AF| = |CK| = a/4$, $|SN| = b/4$, $|KE| = 2|EN|$.

Проведем через L прямую, параллельную AS, обозначим через P ее точку пересечения с SC. Будем иметь $|SP| = 0{,}1\,b$. Треугольники LPC и FNK подобны, их соответствующие стороны параллельны, кроме того, LM и FE также параллельны, т. е. $|PM|/|MC| = |NE|/|EK| = 1/2$, следовательно, $|SM| = 0{,}4b$.

Теперь найдем:

$$|LF|^2 = \frac{19}{400}a^2, \quad |ME|^2 = \frac{15}{400}a^2 + \frac{1}{100}b^2.$$

Из условия $|LF| = |ME|$ получим $a = b$. Треугольник FNK — правильный со стороной $\frac{3}{4}a$, $|FE|^2 = \frac{7}{16}a^2 = 7$. Следовательно, $a = b = 4$.

Ответ: $\frac{16}{3}\sqrt{2}$.

124. Докажите, что плоскость, пересекающая боковую поверхность цилиндра, делит его объем в том же отношении, в котором она делит ось цилиндра.

Ответ: $\frac{\pi a^3}{24}$.

---

*) Здесь и далее (1) обозначает: Шарыгин И. Ф. Задачи по геометрии: Планиметрия.— М.: Наука, 1982 («Библиотечка «Квант», вып. 17).

125 Каждая грань призмы представляет собой параллелограмм. Если мы соединим точку касания этой грани и вписанного шара со всеми вершинами этого параллелограмма, то наша грань разобьется на четыре треугольника, причем сумма площадей двух из них, прилежащих к сторонам оснований, равна сумме площадей двух других. Площади треугольников первого типа для всех боковых граней дадут в сумме $2S$. Значит, боковая поверхность равна $4S$, а вся поверхность призмы $6S$.

126. Если бы сферы α и β пересекались, то площадь поверхности части сферы β, расположенной внутри сферы α, составляла бы 1/4 всей поверхности сферы α. (Эта часть представляла бы сегмент высотой $\frac{r^2}{2R}$, где r — радиус сферы α, R — радиус сферы β. Следовательно, его поверхность будет $2\pi R\,\frac{r^2}{2R}=\pi r^2$.) Значит, сфера α содержит внутри себя сферу β и отношение радиусов равно $\sqrt{5}$.

127. При решении задачи используются следующие факты:

1) центр вписанного в конус шара лежит на поверхности второго шара (рассмотрите соответствующее утверждение из планиметрии);

2) из того что центр вписанного шара лежит на поверхности второго, будет следовать, что площадь поверхности вписанного шара равна $4Q$, а его радиус будет $\sqrt{Q/\pi}$;

3) объем усеченного конуса, в который вписан шар, также выражается через полную поверхность усеченного конуса и радиус шара, как и объем описанного многогранника, т. е. $V=\frac{1}{3}S\sqrt{\frac{Q}{\pi}}$.

128. Докажите, что, если R и r — радиусы окружностей оснований усеченного конуса, то радиус вписанного шара будет $\sqrt{Rr}$.

Ответ: $\frac{S}{2}$.

129. Любое из рассматриваемых сечений представляет собой равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны образующей конуса. Следовательно, наибольшую площадь имеет то сечение, у которого наибольшее значение принимает синус угла при вершине. Если угол при вершине осевого сечения конуса — острый, то осевое сечение имеет наибольшую площадь. Если этот угол — тупой, то наибольшую площадь имеет прямоугольный треугольник.

Ответ: $\frac{5}{6}\pi$.

130. Проведем SO — высоту конуса. Образовалось три пирамиды $SABO$, $SBCO$, $SCAO$. В каждой из этих пирамид двугранные углы при боковых ребрах SA и SB, SB и SC, SC и SA равны. Обозначим эти углы через x, y и z. Получим систему

$$\begin{cases} x+y=\beta, \\ y+z=\gamma, \\ z+x=\alpha, \end{cases}$$

откуда найдем $z=\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}$, а искомый угол будет равен $\frac{\pi-\alpha+\beta-\gamma}{2}$.

131. Хорда BC параллельна любой плоскости, проходящей че- середины хорд AB и AC. Следовательно, хорда BC параллельна скости, проходящей через центр сферы и середины дуг $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{AC}$. юда следует, что большой круг, проходящий через B и C, и ьшой круг, проходящий через середины дуг $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{AC}$, пересе- тся в двух точках K и K_1 таким образом, что диаметр KK_1 па- лелен хорде BC.

Ответ: $\frac{\pi R}{2} \pm \frac{l}{2}$.

132. Легко видеть, что сечение данного тела плоскостью, пер дикулярной оси вращения, представляет собой кольцо, площадь орого не зависит от расстояния оси вращения до плоскости тре- льника.

Ответ: $\frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{24}$.

133. Если данная плоская фигура представляет собой выпук- й многоугольник, то рассматриваемое тело состоит из призмы объ- а $2dS$, полуцилиндров с суммарным объемом $\pi p d^2$ и совокупности ровых секторов, в сумме составляющих шар объема $\frac{4}{3}\pi d^3$. Следо- тельно, в этом случае объем тела будет равен $2dS + \pi p d^2 + \frac{4}{3}\pi d^3$. евидно, эта формула справедлива и для произвольной выпуклой гуры.

134. Пусть O — центр шара, CD — диаметр, M — середина C. Докажем, что $|AB| = |AC|$. Для этого достаточно доказать, то $AM \perp BC$. По условию, $SA \perp OS$, кроме того, $SM \perp OS$ (тре- угольники CSD, CSB, BCD — прямоугольные, O и M — середины D и CB). Следовательно, плоскость AMS перпендикулярна OS, $M \perp OS$. Но $AM \perp CD$, значит, AM перпендикулярна плоскости CD, таким образом, $AM \perp BC$.

Ответ: $\frac{Ra^2 \sqrt{4b^2 - a^2}}{6(4R^2 + a^2)}$.

135. На рис. 21, а $SABC$ — данная пирамида, SO — ее высота, — вершина трехгранного угла. Из условия следует, что G нахо-

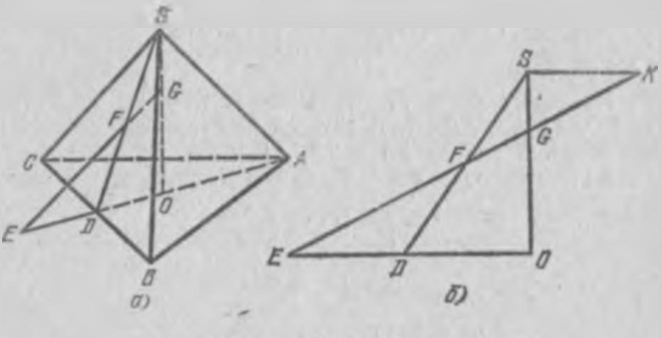


Рис. 21.

дится на SO. Кроме того, грани трехгранного угла при пересечении с плоскостью основания ABC образуют правильный треугольник, стороны которого параллельны сторонам $\triangle ABC$ и проходят через его вершины. Следовательно, если одно из ребер трехгранного угла пересекает плоскость ABC в точке E, а грань CSB — в точке F, то F лежит на апофеме SD боковой грани CSB и $|ED| = |DA|$.

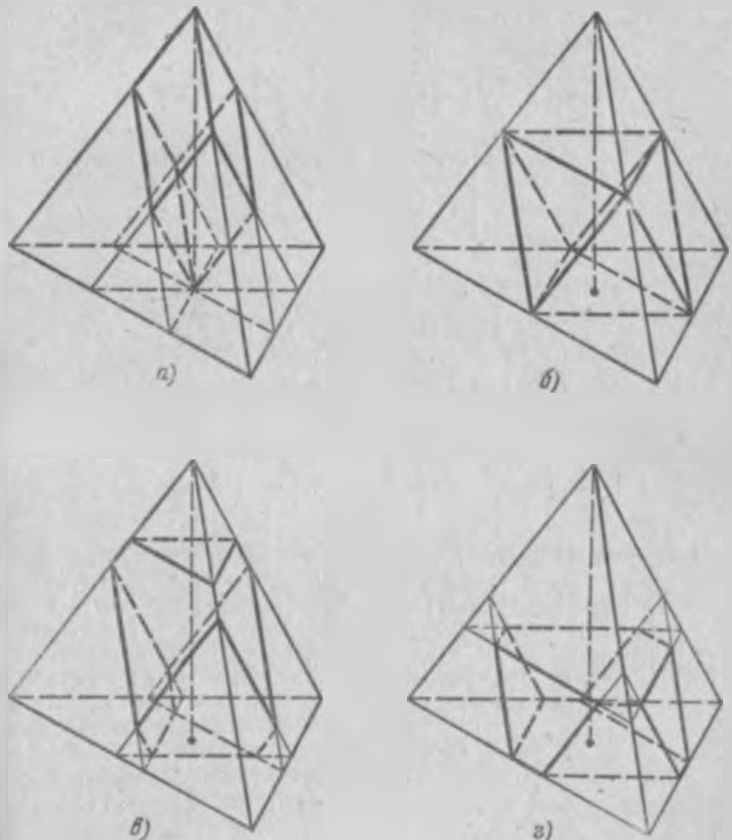


Рис. 22.

По условию, $|SF| = |FD|$. Проведем через S прямую, параллельную EO, и обозначим через K точку пересечения этой прямой с прямой EF (рис. 21, б). Имеем $|SK| = |ED|$. Значит, $\frac{|SG|}{|GO|} = \frac{|SK|}{|EO|} = \frac{|ED|}{|EO|} = \frac{3}{4}$. Таким образом, объем пирамиды $GABC$ составляет 4/7 объема пирамиды $SABC$.

С другой стороны, построенный трехгранный угол делит часть пирамиды $SABC$, расположенную над пирамидой $GABC$, пополам.

Ответ. Объем части пирамиды, расположенной вне трехгранного угла, к объему части внутри него относится как 3 : 11.

136. $\frac{V}{6}$.

37. На рисунках 22, *а—г* изображены общие части этих двух ...нид для всех четырех случаев.

1) Общая часть представляет собой параллелепипед (рис. 22, *а*). ...определения объема надо от объема исходной пирамиды от... объемы трех пирамид, ей подобных с коэффициентом подобия ...а прибавить объемы трех пирамид, также подобных исходной ...эффициентом подобия 1/3. Таким образом, объем равен:

$$V\left[1-3\left(\frac{2}{3}\right)^3+3\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]=\frac{2}{9}V.$$

2) Общая часть есть октаэдр (рис. 22, *б*), объем которого

$$V\left[1-4\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]=\frac{V}{2}.$$

3) Общая часть изображена на рис. 22, *в*. Для определения ее ...ема надо от объема исходной пирамиды отнять объем пирамиды, ...подобной с коэффициентом подобия 1/3 (на рисунке эта пирамида ...рху), затем отнять объемы трех пирамид, также подобных исход... с коэффициентом подобия 5/9, и прибавить объемы трех пирамид, ...оторых коэффициент подобия 1/9. Таким образом, объем общей ...ти равен

$$V\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^3-3\left(\frac{5}{9}\right)^3+3\left(\frac{1}{9}\right)^3\right]=\frac{110}{243}V.$$

4) Общая часть изображена на рис. 22, *г*. Объем ее равен

$$V\left[1-\left(\frac{3}{5}\right)^3-3\left(\frac{7}{15}\right)^3+3\left(\frac{1}{15}\right)^3\right]=\frac{12}{25}V.$$

138. Пусть ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a, K ... — середины ребер CD и AB (рис. 23). Возьмем на ребре CB точку M, проведем через M сечение, перпендикулярное KL. Обозначим $|CM|=x$ и определим величину x, при которой прямоугольник, получившийся в нашем сечении, будет иметь угол между диагоналями, равный α. Поскольку стороны получившегося прямоугольника равны x и $a-x$, величину x можно найти из уравнения:

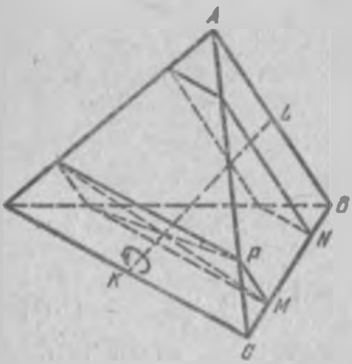


Рис. 23.

$$\frac{x}{a-x}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},\qquad x=\frac{a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Если мы возьмем на ребре BC еще и точку N так, что $|BN|=|CM|=x$, и проведем через нее ...сечение, перпендикулярное KL, мы получим второй прямоугольник ...с углом между диагоналями, равным α. Из этого следует, что ...плоскость BCD после поворота вокруг KL на угол α против ча...совой стрелки будет проходить через точки K, P и N. Таким образом после поворота плоскость BCD отсечет от тетраэдра $ABCD$ пирамиду $KPNC$, объем которой равен

$$\frac{|KC|}{|CD|}\cdot\frac{|CP|}{|CA|}\cdot\frac{|CN|}{|CB|}V_{ABCD}=\frac{x(a-x)}{2a^2}V=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2}V.$$

Те же рассуждения будут верны для любой грани тетраэдра. Следовательно, объем общей части будет равен $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2}V$.

139. Пусть куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ поворачивается на угол α вокруг диагонали AC_1 (рис. 24). Возьмем на ребрах A_1B_1 и A_1D_1 точки K и L так, что $|A_1K|=|A_1L|=x$, опустим на K и L перпендикуляры на диагональ AC_1; ввиду симметрии куба относительно плоскости ACC_1A_1 эти перпендикуляры пройдут через одну точку M на диагонали AC_1. Пусть величина x выбрана таким образом, что $\widehat{KML}=\alpha$. Тогда после поворота вокруг диагонали AC_1 против часовой стрелки (если смотреть в направлении от A к C_1) на угол α точка K перейдет в L. Возьмем также на ребрах B_1A_1 и B_1B точки P и Q на том же расстоянии x от вершины B_1. После того же поворота точка Q перейдет в P. Следовательно, грань ABB_1A_1 после поворота пройдет через точки A, L и P и отсечет от нашего куба

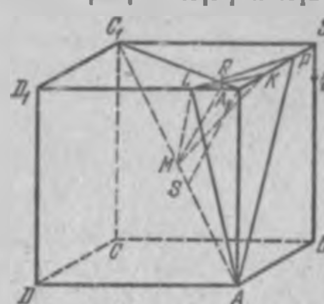


Рис. 24.

пирамиду AA_1PL, объем которой равен $\frac{1}{6}ax(a-x)$. Те же рассуждения верны для всех граней. Таким образом, объем общей части равен $a^3-ax(a-x)$. Нам осталось найти величину x из условия $\widehat{KML}=\alpha$. Для этого соединим M с серединой отрезка LK — точкой R. Имеем $|MR|=x\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $|C_1R|=a\sqrt{2}-x\frac{\sqrt{2}}{2}$, и из подобия треугольников C_1RM и C_1A_1A найдем $x=\dfrac{2a}{1+\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$.

Таким образом, объем общей части равен $\dfrac{3a^3\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2}$.

140. Пусть A — какая-то точка на луче, B — точка падения луча на зеркало, K и L — проекции A на данное зеркало и на повернутое, A_1 и A_2 — точки, симметричные A относительно этих

кал соответственно. Искомый угол равен углу $\widehat{A_1BA_2}$. Если $|\ldots B| = a$, то $|A_1B| = |A_2B| = a$, $|AK| = a\sin\alpha$. Посколь-ку $\widehat{KAL} = \beta$, то $|KL| = |AK|\sin\beta = a\sin\alpha\sin\beta$, $|A_1A_2| = 2|KL| = 2a\sin\alpha\sin\beta$. Таким образом, если φ — искомый угол, то $\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\alpha\sin\beta$.

Ответ: $2\arcsin(\sin\alpha\sin\beta)$.

141. Зафиксируем $\triangle ABC$, тогда в $\triangle ADC$ известны две его стороны $|AC|$ и $|DC|$ и угол $\widehat{ADC} = \alpha$. Построим в плоскости ADC окружность радиуса $|AC|$ с центром в C (рис. 25, *а*). Если

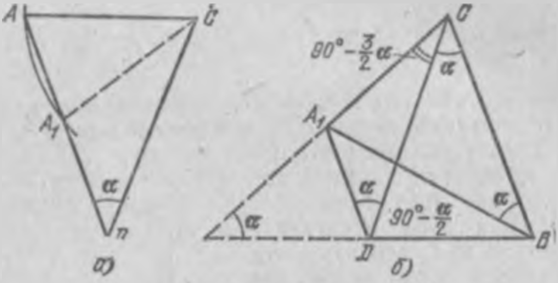


Рис. 25.

$\alpha \geqslant 60°$, то существует лишь один треугольник, имеющий данные стороны и угол (вторая точка A_1 окажется по другую сторону от точки D), это треугольник, равный треугольнику ABC. В этом случае AC и BD перпендикулярны.

Если же $\alpha < 60°$, то существует вторая возможность (на рис. 25, *а* это $\triangle A_1DC$), для которой $\widehat{CA_1D} = 90° + \frac{\alpha}{2}$, $\widehat{A_1CD} = 90° - \frac{3\alpha}{2}$. Но в этом случае в вершине C (рис. 25, *б*) сходятся углы $\widehat{BCA_1} = 90° - \frac{\alpha}{2}$, $\widehat{BCD} = \alpha$, $\widehat{A_1CD} = 90° - \frac{3\alpha}{2}$, а поскольку $90° - \frac{\alpha}{2} = \left(90° - \frac{3\alpha}{2}\right) + \alpha$, то точки A_1, B, C и D лежат в одной плоскости и угол между A_1C и BD будет α.

Ответ: если $\alpha \geqslant 60°$, то угол между AC и BD равен $90°$, если $\alpha < 60°$, то угол между AC и BD может быть равен или $90°$, или α.

142. Пусть в основании призмы лежит многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$, O — центр описанной около него окружности. Пусть далее некоторая плоскость пересекает ребра призмы соответственно в точках $B_1, B_2, \ldots, B_n$. M — такая точка плоскости, что прямая MO перпендикулярна плоскости основания призмы. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\sum_{k=1}^{n} |A_kB_k| = n\,|MO|, \tag{1}$$

$$V = S\,|MO|, \tag{2}$$

где V — объем части призмы, заключенной между основанием и проведенной плоскостью.

Докажем равенство (1). При n четном оно очевидно. Пусть n — нечетно. Рассмотрим треугольник $A_kA_{k+1}A_l$, где A_l — вершина, наиболее удаленная от A_k и A_{k+1}. Пусть C_k и C_k' — середины A_kA_{k+1} и B_kB_{k+1} соответственно. Тогда $\frac{|C_kO|}{|OA_l|} = \cos\frac{\pi}{n} = \lambda$. Теперь нетрудно доказать, что

$$|MO| = \frac{|C_kC_k'| + |A_lB_l|\lambda}{1+\lambda} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(|A_kB_k| + |A_{k+1}B_{k+1}|) + |A_lB_l|\lambda}{1+\lambda}.$$

Сложив эти равенства для всех k (при $k = n$ вместо $n + 1$ следует взять 1), получим утверждение (1).

Для доказательства равенства (2) рассмотрим многогранник $A_kA_{k+1}OB_kB_{k+1}M$. Если теперь V_k — объем этого многогранника, то по формуле Симпсона (см. задачу 15)

$$V_k = \frac{b_n}{6}\left(\frac{|A_kB_k| + |A_{k+1}B_{k+1}|}{2}a_n + \right.$$

$$\left. + 4\,\frac{|A_kB_k| + |A_{k+1}B_{k+1}| + 2|MO|}{4}\cdot\frac{a_n}{2}\right) =$$

$$= a_nb_n(|A_kB_k| + |A_{k+1}B_{k+1}| + |MO|) =$$

$$= \frac{S}{3n}(|A_kB_k| + |A_{k+1}B_{k+1}| + |MO|),$$

где a_n, b_n — соответственно сторона и апофема многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$. Сложив эти равенства для всех K, учитывая (1), получим равенство (2).

Теперь нетрудно заключить, что ответом на вопрос нашей задачи будет величина $\frac{nV}{S}$.

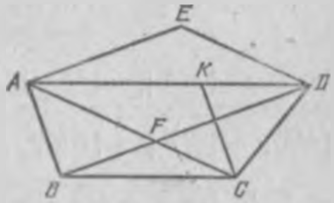


Рис. 26.

143. Пусть пятиугольник $ABCDE$ является проекцией правильного пятиугольника, причем $|AB| = 1$, $|BC| = 2$, $|CD| = a$, $ABCD$ — трапеция, в которой $\frac{|AD|}{|BC|} = \lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, F — точка пересечения ее диагоналей, $AFDE$ — параллелограмм. Проведем CK параллельно AB (рис. 26). В $\triangle CKD$ имеем $|CK| = 1$, $|KD| = 2(\lambda - 1)$, $|CD| = a$. Обозначим $\widehat{CDK} = \varphi$. Запишем теорему косинусов для треугольников CKD и ACD:

$$1 = a^2 + 4(\lambda - 1)^2 - 4(\lambda - 1)a\cos\varphi,$$

$$|AC|^2 = a^2 + 4\lambda^2 - 4a\lambda\cos\varphi.$$

Из этих двух соотношений найдем

$$|AC| = \sqrt{\frac{4\lambda^2 - 3\lambda - a^2}{\lambda - 1}},$$

$$|ED| = |AF| = \frac{\lambda}{\lambda + 1}\sqrt{\frac{4\lambda^2 - 3\lambda - a^2}{\lambda - 1}}.$$

Аналогично находим

$$|AE| = |FD| = \frac{\lambda}{\lambda + 1}\sqrt{\frac{a^2\lambda - 1 + 4\lambda^2 - 4\lambda}{\lambda - 1}}.$$

Ответ. Две другие стороны равны:

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\sqrt{14 + 10\sqrt{5} - 2(\sqrt{5} + 1)a^2}$$

и

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\sqrt{a^2(6 + 2\sqrt{5}) + 6(\sqrt{5} + 1)}.$$

Задача имеет решение при $\sqrt{5} - 2 < a < \sqrt{5}$.

144. Пусть ребро куба равно a, $|NC_1| = x$. Найдем:

$$|LM| = \frac{a}{2}, \quad |NK| = \frac{x}{\sqrt{2}},$$

$$|LN|^2 = |LB_1|^2 + |B_1N|^2 = \frac{a^2}{4} + (a - x)^2 = \frac{5}{4}a^2 - 2ax + x^2,$$

$$|LK|^2 = |LB_1|^2 + |B_1K|^2 = |LB_1|^2 + |B_1N|^2 + |NK|^2 +$$

$$+ 2|B_1N| \cdot |NK|\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{4} + (a - x)^2 + \frac{x^2}{2} + (a - x)x =$$

$$= \frac{5}{4}a^2 - ax + \frac{x^2}{2},$$

$$|MN|^2 = |MB_1|^2 + |B_1N|^2 = \frac{3a^2}{2} - 2ax + x^2,$$

$$|MK|^2 = |MB|^2 + |BK|^2 - |MB| \cdot |BK| = \frac{3a^2}{2} - \frac{3}{2}ax + \frac{x^2}{2}.$$

Если $\widehat{LMK} = \widehat{MKN} = \varphi$, то по теореме косинусов для треугольников LMK и MKN получим:

$$|LK|^2 = |LM|^2 + |MK|^2 - 2|LM| \cdot |MK|\cos\varphi,$$

$$|MN|^2 = |MK|^2 + |KN|^2 - 2|MK| \cdot |KN|\cos\varphi.$$

Исключая из этих уравнений $\cos\varphi$, получим

$$|LK|^2 \cdot |KN| - |MN|^2 \cdot |LM| =$$
$$= (|LM| - |KN|)(|LM| \cdot |KN| - |MK|^2).$$

Выражая входящие в это равенство отрезки по найденным выше формулам, получим

$$\left(\frac{5a^2}{4}-ax+\frac{x^2}{2}\right)\frac{x}{\sqrt{2}}-\left(\frac{3a^2}{2}-2ax+x^2\right)\frac{a}{2}=$$
$$=\left(\frac{a}{2}-\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{ax}{2\sqrt{2}}-\frac{3a^2}{2}+\frac{3ax}{2}-\frac{x^2}{2}\right).$$

Из этого уравнения найдем $x=a\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Ответ: $\frac{|B_1N|}{|NC_1|}=\sqrt{2}+1$.

145. Возможны два случая: 1) центр описанной сферы совпадает с центром основания и 2) центр описанной сферы находится в точке поверхности вписанной сферы, диаметрально противоположной центру основания.

Во втором случае, обозначив через R и r радиусы вписанной и описанной сфер, найдем высоту пирамиды $2r+R$ и сторону основания $\sqrt{R^2-4r^2}$. Сечение, проходящее через высоту и середину стороны основания пирамиды, есть равнобедренный треугольник с высотой $R+2r$, основанием $\sqrt{3(R^2-4r^2)}$ и радиусом вписанной окружности, равным r. Исходя из этого, для R и r можно получить соотношение $3R^2-6Rr-4r^2=0$.

Ответ: $\frac{3+\sqrt{21}}{3}$ (в обоих случаях).

146. Возможны два случая: 1) центр описанного шара совпадает с центром основания, 2) центр описанного шара находится в точке поверхности вписанного шара, диаметрально противоположной центру основания. В первом случае плоский угол при вершине равен $\pi/2$.

Рассмотрим второй случай. Обозначим через a, b и l соответственно сторону основания, боковое ребро и апофему боковой грани, тогда

$$b^2=l^2+\frac{a^2}{4}, \qquad (1)$$

r — радиус вписанного шара равен радиусу окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием a и боковой стороной l;

$$r=\frac{a\sqrt{2l-a}}{2\sqrt{2l+a}}, \qquad (2)$$

R — радиус описанного шара равен радиусу окружности, описанной около равнобедренного треугольника с основанием $a\sqrt{2}$ и боковой стороной b;

$$R=\frac{b^2\sqrt{2}}{2\sqrt{2b^2-a^2}}. \qquad (3)$$

При этом центр окружности должен быть внутри треугольника, что означает $b>a$. Поскольку расстояние от центра описанного шара до основания есть $2r$, то $R^2-\frac{a^2}{2}=4r^2$. Заменяя в этом авенстве R и r по формулам (2) и (3), получим после упрощения

$$\frac{(b^2-a^2)^2}{2(2b^2-a^2)}=\frac{a^2(2l-a)}{2l+a}.$$

ыражая b через a и l по формуле (1), получим

$$\left(l^2-\frac{3a^2}{4}\right)^2=a^2(2l-a)^2.$$

Учитывая, что $b>a$ или $l>a\frac{\sqrt{3}}{2}$, получим, что a и l удовлетворяют уравнению

$$l^2-\frac{3a^2}{4}=a(2l-a),$$

ткуда $\frac{l}{a}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left(\text{для второго корня } \frac{l}{a}<\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{\pi}{6}$.

147. Пусть K — проекция вершины S на плоскость $ABCD$, L, M, N и P — проекции S на стороны AB, BC, CD и DA.

Из условия следует, что треугольники LSN и MSP — прямоугольные с прямыми углами при вершине S. Следовательно,

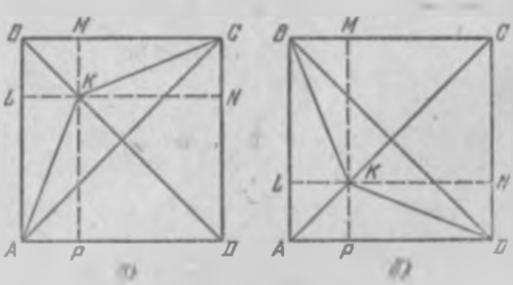


Рис. 27.

$|LK|\cdot|KN|=|MK|\cdot|KP|=|KS|^2$. А поскольку $|LK|+|KN|=|MK|+|KP|=a$, возможны два случая: или $|LK|=|KM|$, $|KP|=|KN|$, или $|LK|=|KP|$, $|MK|=|KN|$, т. е. точка K расположена на какой-то из диагоналей AC или BD. Разберем оба случая.

1) K — на диагонали BD (рис. 27, a). На этом рисунке изображена проекция пирамиды на плоскость $ABCD$. Точка S находится «над» K). Обозначим $|LK|=|KM|=x$. Теперь найдем:

$$|KS|=\sqrt{|LK|\cdot|KN|}=\sqrt{x(a-x)},$$

$$|SL|=\sqrt{|LK|^2+|KS|^2}=\sqrt{ax},$$

$$S_{ABS}=\frac{a\sqrt{ax}}{2}.$$

Аналогично $S_{ADS}=\frac{a\sqrt{a(a-x)}}{2}$. Далее, $V_{ABDS}=\frac{1}{6}a^2\sqrt{x(a-x)}$.

С другой стороны, по формуле задачи 11

$$V_{ABDS}=\frac{2}{3}\frac{S_{ABS}S_{BDS}\sin\alpha}{|AK|}=\frac{a^3\sqrt{x(a-x)}\sin\alpha}{6\sqrt{(a-x)^2+x^2+x(a-x)}}.$$

Приравнивая два выражения для V_{ABDS}, получим

$$x^2-ax+a^2\cos^2\alpha=0,$$

откуда $x(a-x)=a^2\cos^2\alpha$,

$$V_{ABCDS}=\frac{a^3|\cos\alpha|}{3}.$$

Задача имеет решение, если $|\cos\alpha|\leqslant\frac{1}{2}$. Кроме того, угол при ребре AS тупой, поскольку плоскость ASM перпендикулярна грани ASD, а эта плоскость проходит внутри двугранного угла между плоскостями ASB и ASD. Следовательно, в 1-м случае задача имеет решение, если $\frac{\pi}{2}<\alpha\leqslant\frac{2\pi}{3}$.

2) Точка K находится на диагонали AC (рис. 27, *б*). Рассуждая так же, как в случае 1), получим (по-прежнему $|LK|=x$)

$$V_{ABDS}=\frac{a^3\sqrt{x(a-x)}}{6}=\frac{a^3x\sin\alpha}{6\sqrt{x(a+x)}},$$

откуда легко найдем $x=a|\cos\alpha|$,

$$V=\frac{a^3\sqrt{|\cos\alpha|(1-|\cos\alpha|)}}{6}.$$

Как и в 1-м случае, $\alpha>\frac{\pi}{2}$. Таким образом, получаем

Ответ: если $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{2\pi}{3}$, возможны два ответа:

$$V_1=-\frac{a^3\cos\alpha}{6},\quad V_2=\frac{a^3\sqrt{-\cos\alpha(1+\cos\alpha)}}{6};$$

если $\alpha>\frac{2\pi}{3}$, $V=\frac{a^3\sqrt{-\cos\alpha(1+\cos\alpha)}}{6}$.

148. Решим сначала следующую задачу. В $\triangle ABC$ на сторонах AB и AC взяты точки L и K так, что $\frac{|AL|}{|LB|}=m$, $\frac{|AK|}{|KC|}=n$. В каком отношении прямая KL делит медиану AM?

Обозначим через N точку пересечения KL и AM, Q — точка пересечения KL и BC, P — точка пересечения KL и прямой, параллельной BC, проходящей через A. Пусть $|BC|=2a$, $|QC|=b$, $|AP|=c$, $n>m$. Тогда из подобия соответствующих треугольников будем иметь: $\frac{c}{b}=n$, $\frac{c}{b+2a}=m$, откуда $\frac{|AN|}{|NM|}=\frac{c}{b+a}=\frac{2mn}{m+n}$.

Пусть теперь m, n и p — отношения, в которых разделены плоскостью ребра AB, AC и AD, для их определения будем иметь систему

$$\frac{2mn}{m+n}=2,\qquad \frac{2np}{n+p}=\frac{1}{2},\qquad \frac{2pm}{p+m}=4,$$

откуда

$$m=-\frac{4}{5},\quad n=\frac{4}{9},\quad p=\frac{4}{7}.$$

То, что $-1<m<0$, означает, что точка L лежит на продолжении AB за точку A, т. е. наша плоскость пересекает ребра AC, AD, BC и BD. Далее, определив отношения, в которых разделены ребра BC и BD $\left(\text{получим } \frac{5}{7} \text{ и } \frac{5}{9}\right)$, найдем ответ: $\frac{7123}{16901}$.

149. Рассмотрим пирамиду $SABC$ (рис. 28), в которой $|CA|=|AB|$, $\widehat{BAC}=\frac{2\pi}{n}$, SA перпендикулярна плоскости ABC, и такую, что вершина A проектируется на плоскость SBC в точку O — центр окружности, вписанной в SBC.

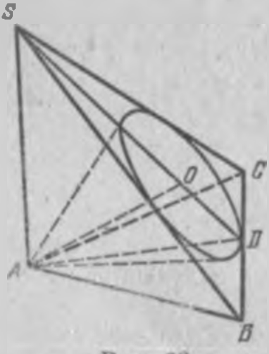


Рис. 28.

Впишем в эту пирамиду конус так, что его вершина совпадает с A, а окружностью его основания является окружность, вписанная в SBC. Очевидно, что если мы возьмем n таких пирамид, основания которых расположены на плоскости ABC так, что их основания, равные $\triangle ABC$, образуют правильный n-угольник с центром в A, то конусы, вписанные в эти пирамиды, образуют нужную нам систему конусов.

Далее, пусть D — середина BC, $|OD|=r$, $|AD|=l$. Тогда $|SD|=\frac{l^2}{r}$, $|BD|=l\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$. Поскольку $\widehat{SBD}=2\widehat{OBD}$, $\operatorname{tg}\widehat{SBD}=\frac{|SD|}{|BD|}=\frac{l}{r\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}$, $\operatorname{tg}\widehat{OBD}=\frac{r}{l\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}$, можно составить уравнение

$$\frac{l}{r\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}=\frac{2\frac{r}{l\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}}{1-\frac{r^2}{l^2\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}}},$$

откуда $\frac{r}{l}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}}}$.

О т в е т: $2\arcsin\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}}{\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{n}}}$.

150. Пусть плоскость AKN касается шара в точке P, а прямая AP пересекает NK в точке M (рис. 29). Тогда плоскость C_1NA является биссекторной плоскостью двугранного угла, образованного плоскостями D_1C_1A и C_1MA (плоскости D_1AN и ANM касаются шара, а плоскости D_1C_1A и C_1MA проходят через его центр).

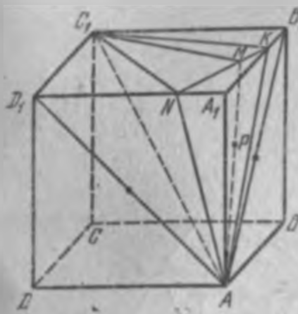


Рис. 29.

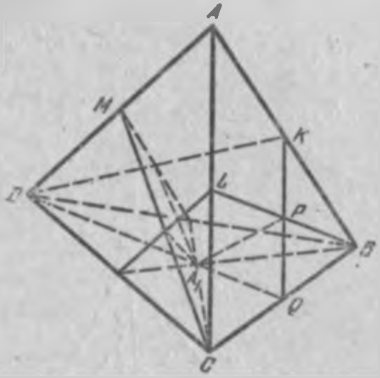


Рис. 30.

Точно так же плоскость C_1KA является биссекторной плоскостью двугранного угла, образованного плоскостями MC_1A и C_1B_1A. Таким образом, двугранный угол между плоскостями AC_1K и AC_1N вдвое меньше двугранного угла между плоскостями AD_1C_1 и AB_1C_1, равного $2\pi/3$.

О т в е т: $\pi/3$.

151. Пусть K, L и M — середины ребер AB, AC и AD (рис. 30). Тогда из условия задачи следует, что тетраэдр $A_1B_1C_1D_1$ ограничивают плоскости DKA_1, BLA_1, CMA_1 и плоскость, проходящая через A параллельно BCD. При этом вершины B_1, C_1 и D_1 расположены так, что точки M, K и L являются серединами CB_1, DC_1 и BD_1 (на рисунке точки B_1, C_1, D_1 отсутствуют).

Пусть теперь Q — середина BC, P — точка пересечения BL и KQ. Для того чтобы найти объем общей части двух пирамид $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, мы должны от объема пирамиды $ABCD$ — V — отнять объемы трех пирамид, равновеликих $DKBQ$ (каждая из них имеет объем $\dfrac{1}{4}V$), и прибавить объемы трёх пирамид, равновеликих A_1BQP. Объем последней пирамиды равен $\dfrac{1}{24}V$. Таким образом, объем общей части равен $\dfrac{3}{8}V$.

152. Докажем сначала, что двугранные углы при ребрах DB и AC равны $\pi/2$. Пусть $|AD|=|CD|=|BC|=a$, $|BD|=|AC|=b$, $|AB|=c$, $b>a$. Опустим из D и C перпендикуляры

DK и CL на ребро AB (рис. 31, a). Обозначим

$$|AK| = |BL| = |x|, \quad |KL| = |c - 2x|, \quad |DK| = |CL| = h.$$

Поскольку двугранный угол при ребре AB равен $\pi/3$, то $|DC|^2 = |DK|^2 + |CL|^2 - |DK| \cdot |CL| + |KL|^2$, т. е. $a^2 = h^2 + (c - 2x)^2$; заменяя $h^2 = a^2 - x^2$, получим $3x^2 - 4cx + c^2 = 0$, откуда $x_1 = c/3$, $x_2 = c$. Из условия $b > a$ следует, что $x < c/2$, значит, $x = c/3$. Таким образом, величины a, b и c связаны соотношением $c^2 = 3(b^2 - a^2)$.

Найдем площади треугольников ABD и ACD:

$$S_{ABD} = S_{ABC} = \frac{1}{2} c \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{9}} = \frac{1}{2} c \sqrt{\frac{4a^2 - b^2}{3}},$$

$$S_{ACD} = S_{BDC} = \frac{1}{4} b \sqrt{4a^2 - b^2}.$$

Выражая объем тетраэдра $ABCD$ по формуле задачи 11 через двугранный угол при ребре AB и площади граней ABD и ABC,

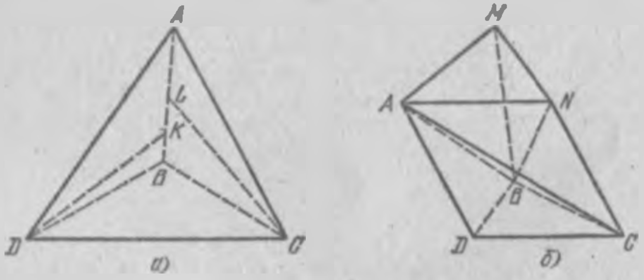


Рис. 31.

а затем через φ — двугранный угол при ребре AC (он также равен углу при ребре BD) и площади граней ABC и ACD, получим

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \frac{S_{ABD} S_{ABC}}{|AB|} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \frac{S_{ACD} S_{ABC}}{|AC|} \sin \varphi,$$

откуда

$$\sin \varphi = \frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} \frac{|AC|}{|AB|} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{2c \sqrt{\frac{4a^2 - b^2}{3}}}{b \sqrt{4a^2 - b^2}} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.$$

Значит, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Для определения суммы трех оставшихся двугранных углов рассмотрим призму $BCDMNA$ (рис. 31, $б$). Тетраэдр $ABCN$ равен тетраэдру $ABCD$, поскольку плоскость ABC перпендикулярна плоскости $ADCN$, $ADCN$ — ромб, следовательно, тетраэдры $ABCD$

и $ABCN$ симметричны относительно плоскости BCA. Точно так же тетраэдр $ABMN$ симметричен тетраэдру $ABCN$ относительно плоскости ABN (угол при ребре BN в тетраэдре $ABCN$ равен углу при ребре BD тетраэдра $ABCD$, т. е. равен $\pi/2$), следовательно, тетраэдр $ABMN$ равен тетраэдру $ABCN$ и равен исходному тетраэдру $ABCD$.

Двугранные углы призмы при ребрах CN и BM равны соответственно двугранным углам при ребрах DC и BC тетраэдра $ABCD$. А поскольку сумма двугранных углов при боковых ребрах треугольной призмы равна π, сумма двугранных углов при ребрах AD, DC и CB тетраэдра $ABCD$ также равна π, а сумма всех двугранных углов тетраэдра, исключая данный угол при ребре AB, равна 2π.

153. Пусть в треугольнике ABC стороны BC, CA и AB равны соответственно a, b и c. Из того, что пирамиды $ABCC_1$, ABB_1C_1 и $AA_1B_1C_1$ равны, следует, что в каждой из них есть по две грани,

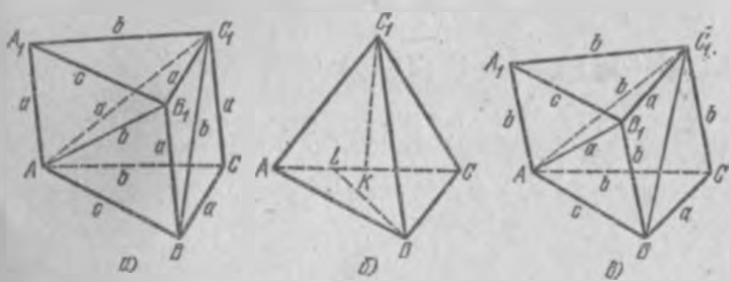


Рис. 32.

равных треугольнику ABC. В самом деле, если в каждой пирамиде была бы одна такая грань, то между вершинами пирамид $ABCC_1$ и $A_1B_1C_1A$ было бы соответствие $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$, $C_1 \to A$, т. е. $|CC_1| = |AC_1|$, $|BC_1| = |B_1A|$, а это означало бы, что в пирамиде ABC_1B_1 нет ни одной грани, равной $\triangle ABC$. Теперь нетрудно заключить, что боковое ребро призмы равно или a, или b, или c (если, например, $\triangle AC_1B = \triangle ABC$, то в пирамиде $A_1B_1C_1A$ грань A_1B_1A соответствует грани AC_1B пирамиды $ABCC_1$ и $\triangle A_1B_1A = \triangle ABC$).

Разберем все возможные случаи.

1) $|AA_1| = |BB_1| = |CC_1| = a$ (рис. 32, а). Тогда из вершины C пирамиды $ABCC_1$ выходят два ребра длины a и одно длины b, а ребру CC_1 противолежит ребро длины c. Отсюда следует, что вершине C пирамиды $ABCC_1$ должна соответствовать вершина C_1 пирамиды $A_1B_1C_1A$ и $|AC_1| = a$. Теперь можно заключить, что $|AB_1| = |BC_1| = b$.

Во всех трех пирамидах двугранные углы при ребрах, имеющих длину b, равны, при этом два этих угла в сумме дают π (два угла, например, при ребре C_1B в пирамидах $ABCC_1$ и ABB_1C_1), т. е. каждый из них равен $\pi/2$.

Проведем перпендикуляры BL и C_1K к ребру AC (рис. 32, б). Поскольку двугранный угол при ребре AC — прямой, то

$$b^2 = |C_1B|^2 = |C_1K|^2 + |KL|^2 + |LB|^2 =$$
$$= |C_1C|^2 - |KC|^2 + (|KC| - |LC|)^2 + |BC|^2 - |LC|^2 =$$
$$= 2a^2 - bx,$$

где $x = |LC|$, и находится из уравнения

$$a^2 - x^2 = c^2 - (b - x)^2, \qquad x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}.$$

Таким образом, $3a^2 - 3b^2 + c^2 = 0$. Но $\triangle ABC$ по условию прямоугольный. Это возможно лишь при условии $c^2 = a^2 + b^2$. Следовательно, $b = a\sqrt{2}$, $c = a\sqrt{3}$.

Теперь можно найти двугранный угол при ребре BC нашей призмы. $\widehat{ACC_1} = \pi/4$ является линейным углом этого двугранного угла (треугольники ABC и C_1CB — прямоугольные, с прямыми углами при вершине C). Двугранный угол при ребре AB пирамиды $ABCC_1$ равен $\pi/3$. Покажем это. Пусть этот угол равен φ. Тогда двугранный угол при ребре AB призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен 2φ, а при ребре A_1B_1 — равен φ, таким образом,

$$3\varphi = \pi, \qquad \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

2) $|AA_1| = |BB_1| = |CC_1| = b$ (рис. 32, *в*). В этом случае в пирамиде $ABCC_1$ из вершины C выходят два ребра длины b и одно длины a. Значит, такая же вершина есть и в пирамиде $A_1B_1C_1A$. Это может быть или вершина A, или C_1. В обоих случаях получаем $|AB_1| = a$, $|AC_1| = b$ (напоминаем, что должны найтись две грани со сторонами a, b и c). Таким образом, в пирамидах $ABCC_1$

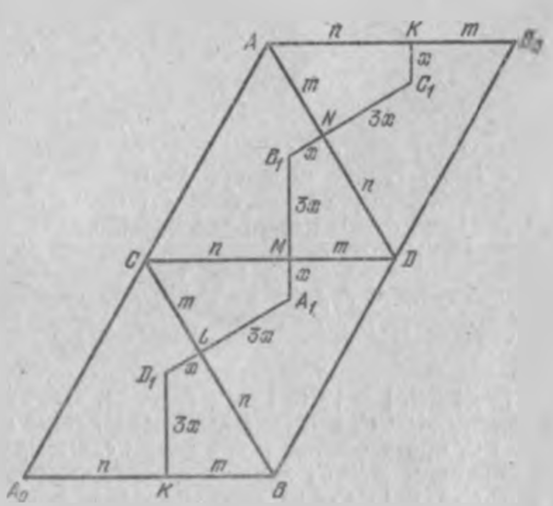


Рис. 33.

и $A_1B_1C_1A$ имеется по одной грани, представляющей из себя правильный треугольник со стороной b, в то время как в пирамиде ABB_1C_1 такой грани нет, чему бы ни равнялось ребро BC_1. Таким образом, этот случай невозможен.

3) $|AA_1| = |BB_1| = |CC_1| = c$. Этот случай, по существу, совпадает с 1-м, только основания ABC и $A_1B_1C_1$ меняются местами.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ $\left(\text{или } \frac{3\pi}{4}\right)$, $\frac{\pi}{3}$ $\left(\text{или } \frac{2\pi}{3}\right)$.

154. Опустим перпендикуляры A_1M и B_1M на CD, B_1N и C_1N на AD, C_1K и D_1K на AB, D_1L и A_1L на CB.

Поскольку
$$\frac{|A_1M|}{|B_1M|} = \frac{|B_1N|}{|NC_1|} = \frac{|C_1K|}{|KD_1|} = \frac{|D_1L|}{|A_1L|} = \frac{1}{3}$$
(эти отношения равны косинусу двугранного угла при ребре тетраэдра) и $|A_1B_1| = |B_1C_1| = |C_1D_1| = |D_1A_1|$, то должны выполняться равенства $|A_1M| = |B_1N| = |C_1K| = |D_1L| = x$, $|B_1M| = |NC_1| = |KD_1| = |A_1L| = 3x$ (на рис. 33 изображена развертка тетраэдра). Каждое ребро CD, DA, AB, BC окажется разделенным на отрезки m и n так, как показано на рисунке. Учитывая, что $m + n = a$, найдем $x = \frac{a\sqrt{3}}{12}$, $m = \frac{5a}{12}$, $n = \frac{7a}{12}$, после чего найдем объем тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$.

Ответ: $\frac{a^3\sqrt{2}}{162}$.

155. Не ограничивая общности, будем считать, что все образующие конуса, касающиеся шаров, касаются одновременно двух шаров — внутреннего и внешнего. Проведем сечение через вершину конуса S и центры двух шаров, касающихся одной образующей

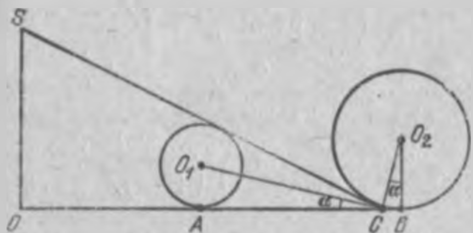


Рис. 34.

(рис. 34, обозначения понятны из рисунка). Из условия, что n шаров радиуса R касаются друг друга, следует равенство $|OA| = \frac{R}{\sin\frac{\pi}{n}}$, аналогично $|OB| = \frac{2R}{\sin\frac{\pi}{n}}$. Следовательно, $|AB| = a = \frac{R}{\sin\frac{\pi}{n}}$.

Пусть $|AC| = x$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{x}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2R}{a-x}$. Перемножив эти равенства, получим уравнение для x:
$$x^2 - ax + 2R^2 = 0,$$
откуда $x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 8R^2}}{2}$, $x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 8R^2}}{2}$, где $a = \frac{R}{\sin\frac{\pi}{n}}$.

Условие $a^2 - 8R^2 \geqslant 0$ приводит к неравенству $\sin\frac{\pi}{n} < \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Кроме того, должно выполняться неравенство $\operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{x} < 1$. Теперь нетрудно получить, что корень x_1 подходит, если $\frac{1}{3} < \sin\frac{\pi}{n} < \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Для корня x_2 остается одно ограничение: $\sin\frac{\pi}{n} < \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Можно доказать, что $\frac{1}{3} < \sin\frac{\pi}{n} < \frac{1}{2\sqrt{2}}$ лишь при $n = 9$.

Объем конуса будет равен $\frac{1}{3}\pi(a+x)^2\operatorname{tg}2\alpha$. Выражая a, x и $\operatorname{tg}2\alpha$ по соответствующим формулам через R и n, получим

Ответ:

$$V = \frac{\pi R^3\left(3+\sqrt{1-8\sin^2\frac{\pi}{n}}\right)^2\left(1+\sqrt{1-8\sin^2\frac{\pi}{n}}\right)}{12\sin^2\frac{\pi}{n}\left(1-6\sin^2\frac{\pi}{n}+\sqrt{1-8\sin^2\frac{\pi}{n}}\right)},$$

$$n \geqslant 9.$$

Кроме того, при $n = 9$ возможно еще одно значение:

$$\frac{\pi R^3\left(3-\sqrt{1-8\sin^2\frac{\pi}{9}}\right)^2\left(1-\sqrt{1-8\sin^2\frac{\pi}{9}}\right)}{12\sin^2\frac{\pi}{9}\left(1-6\sin^2\frac{\pi}{9}-\sqrt{1-8\sin^2\frac{\pi}{9}}\right)}.$$

156. Спроектируем куб на плоскость, перпендикулярную B_1D, получим правильный шестиугольник $ABCC_1D_1A_1$ (рис. 35) со стороной $\sqrt{\frac{2}{3}}a = b$, где a — ребро куба (правильный треугольник BC_1A_1 спроектируется в равный ему треугольник, так как плоскость BC_1A_1 перпендикулярна B_1D). Рассмотрим $\triangle KAC_1$, в нем $|KA| = |AC_1| = 2b$, прямая NM проходит через середину AC_1. Пусть

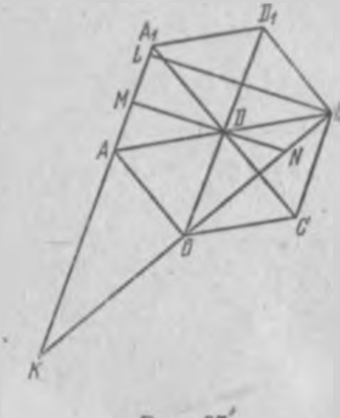


Рис. 35.

$$\frac{|AM|}{|AA_1|} = x.$$

Проведем C_1L параллельно MN. Будем иметь:

$$|ML| = |AM|,$$

$$\frac{|KN|}{|KC_1|} = \frac{|KM|}{|KL|} = \frac{2+x}{2+2x},$$

откуда

$$\frac{|BN|}{|BC_1|}=\frac{2(|KN|-|BC_1|)}{|KC_1|}=$$
$$=2\frac{|KN|}{|KC_1|}-1=\frac{2+x}{1+x}-1=\frac{1}{1+x}.$$

Таким образом,

$$\frac{|BC_1|}{|BN|}-\frac{|AM|}{|AA_1|}=1+x-x=1.$$

157. Если два неравных и подобных треугольника имеют две равные стороны, то легко убедиться, что стороны каждого из них образуют геометрическую прогрессию, причем стороны одного из них можно обозначить через a, λa, $\lambda^2 a$, другого — λa, $\lambda^2 a$, $\lambda^3 a$.

Далее, если стороны треугольника образуют геометрическую прогрессию и две из них равны 3 и 5, то третья сторона равна $\sqrt{15}$ (в других случаях сумма двух сторон будет меньше третьей). Нетрудно доказать теперь, что в нашем тетраэдре две грани есть треугольники со сторонами 3, $\sqrt{15}$, 5, а две другие имеют стороны $\sqrt{15}$, 5, $5\sqrt{\frac{5}{3}}$ или же $3\sqrt{\frac{3}{5}}$, 3, $\sqrt{15}$; соответственно задача имеет два ответа $\frac{55\sqrt{6}}{18}$ и $\frac{11}{10}\sqrt{10}$.

158. Введем прямоугольную систему координат так, чтобы первая прямая совпала с осью x, вторая — была параллельна оси y и проходила через точку $(0,\ 0,\ a)$, а третья — параллельна оси z и проходила через точку $(a,\ a,\ 0)$. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, у которого точки A и C лежат на первой прямой и имеют координаты $(x_1,\ 0,\ 0)$, $(x_2,\ 0,\ 0)$, точки B и C_1 — на второй, их координаты — $(0,\ y_1,\ a)$, $(0,\ y_2,\ a)$, точки D и B_1 — на третьей прямой, их координаты — $(a,\ a,\ z_1)$, $(a,\ a,\ z_2)$. Из условия равенства векторов $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B_1C_1}$ получим $a-x_1=x_2=-a$, $a=-y_1=y_2-a$, $z_1=-a=a-z_2$, откуда $x_1=2a$, $x_2=-a$, $y_1=-a$, $y_2=2a$, $z_1=-a$, $z_2=2a$. Таким образом, $A\ (2a,\ 0,\ 0)$, $B\ (0, -a,\ a)$, $C\ (-a,\ 0,\ 0)$, $D\ (a,\ a, -a)$, $B_1\ (a,\ a,\ 2a)$, $C_1\ (0,\ 2a,\ a)$. Можно проверить, что $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Далее, $|AC|=3a$, $|AB|=a\sqrt{6}$, $|BC|=a\sqrt{3}$, т. е. $\triangle ABC$ — прямоугольный, значит, площадь $ABCD$ будет $|AB|\cdot|BC|=3a^2\sqrt{2}$. Уравнение плоскости $ABCD$ есть $y+z=0$, значит, расстояние от B_1 до нее будет равно $\frac{3a}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $9a^2$.

159. Рассмотрим правильную пирамиду $ABCDS$, в которой проведено сечение $KLMNP$, представляющее собой правильный пятиугольник со стороной a (рис. 36). Пусть диагональ основания пирамиды равна b, боковое ребро l. Обозначим также $|SM|=xl$, $|SN|=yl$. Поскольку пятиугольник $KLMNP$ — правильный,

$$|LN|=2a\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}a=\mu a,$$

$$\frac{|MF|}{|FG|} = \frac{1-\cos\frac{2\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \lambda.$$

Имеем: $|KP| = a$, $|GO| = \frac{b-a}{2}$. С другой стороны, $|OE| = |OC|\frac{|SM|}{|SC|} = \frac{b}{2}x$, $|ME| = |SO|\frac{|MC|}{|SC|} = h(1-x)$, $|FO| = h(1-y)$, где h — высота пирамиды, следовательно,

$$\frac{|GO|}{|FO|} = \frac{|OE|}{|ME|-|FO|}, \quad |GO| = \frac{(1-y)xb}{2(y-x)}.$$

Приравнивая найденные выражения для $|GO|$, получим уравнение

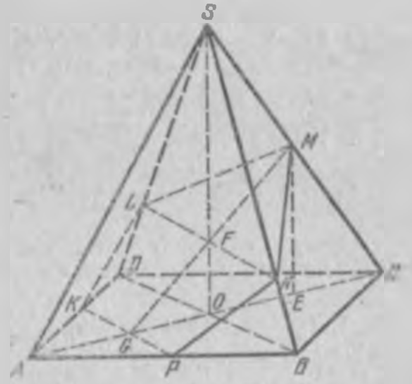


Рис. 36.

$$\frac{(1-y)xb}{y-x} = b-a. \qquad (1)$$

Далее:

$$\frac{|OE|}{|GO|} = \frac{|MF|}{|FG|} = \lambda,$$

откуда

$$\frac{y-x}{1-y} = \lambda. \qquad (2)$$

Поскольку $|LN| = \mu a$, $|LN| = y|DB|$, то

$$yb = \mu a. \qquad (3)$$

И, наконец, рассмотрим $\triangle PNB$, в котором $|PN| = a$, $|NB| = (1-y)l$, $|PB| = \frac{b-a}{2}\sqrt{2}$, $\cos\widehat{PBN} = \cos\widehat{ABS} = \frac{b}{2\sqrt{2}l}$.

По теореме косинусов получим

$$a^2 = (1-y)^2 l^2 + \frac{(b-a)^2}{2} - \frac{(1-y)(b-a)b}{2} \qquad (4)$$

Учитывая, что $\mu = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, из уравнений (1) — (3) найдем $y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{5}+3}{2}a$, после чего из уравнения (4) получим

$$l^2 = \frac{a^2(7+3\sqrt{5})}{4} = \frac{b^2}{2}.$$

Таким образом, объем пирамиды равен

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{b^2}{2}\sqrt{l^2-\frac{b^2}{4}} = \frac{b^3}{12} = \frac{(9+4\sqrt{5})}{12}a^3.$$

160. Введем обычные обозначения: a, b, c — стороны треугольника, h_a, h_b, h_c — его высоты, p — полупериметр, r — радиус вписанной окружности. Пусть M — точка пересечения плоскостей A_1B_1C, A_1BC_1 и AB_1C_1, O_a, O_b, O_c — центры вневписанных окружностей (O_a — центр окружности, касающейся стороны BC и продолжений AB и AC и т. д.). Докажем, что искомой является пирамида $O_aO_bO_cM$, причем высота, опущенная из точки M, проходит через O — центр вписанной окружности и $|MO| = 2r$.

Рассмотрим, например, плоскость A_1B_1C. Пусть K — точка пересечения этой плоскости с прямой AB,

$$\frac{|KA|}{|KB|} = \frac{|AA_1|}{|BB_1|} = \frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a} = \frac{|AC|}{|BC|},$$

т. е. K есть точка пересечения с прямой AB биссектрисы внешнего угла C. Отсюда следует, что основанием нашей пирамиды, в самом деле, является треугольник $O_aO_bO_c$ и что точка M проектируется в точку O. Найдем $|MO|$:

$$\frac{|MO|}{h_a} = \frac{|OO_a|}{|AO_a|} = \frac{r_a - r}{r_a},$$

где r_a — радиус вневписанной окружности с центром в O_a; $r_a = \dfrac{S}{p-a}$, $r = \dfrac{S}{p}$, $h_a = \dfrac{2S}{a}$, следовательно,

$$|MO| = h_a\frac{r_a - r}{r_a} = \frac{2S}{a}\,\frac{\dfrac{1}{p-a} - \dfrac{1}{p}}{\dfrac{1}{p-a}} = \frac{2S}{p} = 2r.$$

Найдем площадь $\triangle O_aO_bO_c$. Заметим, что O_aA, O_bB, O_cC — высоты этого треугольника. Легко находятся углы $\triangle O_aO_bO_c$, например,

$$\widehat{O_cO_aO_b} = \widehat{BO_aC} = 180° - \left(90° - \frac{\hat{B}}{2}\right) - \left(90° - \frac{\hat{C}}{2}\right) = 90° - \frac{\hat{A}}{2}.$$

Аналогично находятся другие углы. Окружность с диаметром O_bO_c проходит через B и C, следовательно,

$$|O_bO_c| = \frac{|BC|}{\sin\widehat{BO_bC}} = \frac{a}{\sin\dfrac{\hat{A}}{2}},$$

точно так же $|O_bO_a| = \dfrac{c}{\sin\dfrac{\hat{C}}{2}}$, отсюда

$$|O_aA| = |O_aO_b|\sin\widehat{O_aO_bA} = \frac{c}{\sin\dfrac{\hat{C}}{2}}\cos\frac{\hat{B}}{2}.$$

достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$c^2 + x^2 = b^2 + y^2,$$
$$b^2 + y^2 = a^2 + (x - y)^2.$$

Покажем, что эта система всегда имеет решение. Пусть $a \geqslant b$ и $c \geqslant b$. Легко показать, что множество точек плоскости (x, y), удовлетворяющих первому уравнению и расположенных в первой четверти, есть линия, которая при возрастании x неограниченно приближается к прямой $y = x$, а при $x = 0$ $y = \sqrt{c^2 - b^2}$. (Как известно, уравнение $y^2 - x^2 = k$ описывает равнобочную гиперболу.) Аналогично, линия, которую описывает второе уравнение, при возрастании x приближается к прямой $y = x/2$, а при x, стремящемся к нулю, y неограниченно возрастает. (Множество точек, удовлетворяющих второму уравнению, также является гиперболой.) Отсюда следует, что эти две линии пересекаются, т. е. система уравнений всегда имеет решение.

172. Обозначим две оставшиеся вершины тетраэдра через C и D. По условию $|AC| + |AD| = |AB|$. Рассмотрим квадрат $KLMN$ со стороной, равной $|AB|$. Возьмем на его сторонах LM и MN точки P и Q так, что $|PM| = |AD|$, $|QM| = |AC|$. Тогда $|LP| = |AC|$, $|NQ| = |AD|$, $|PQ| = |DC|$ и, следовательно, $\triangle KLP = \triangle ABC$, $\triangle KNQ = \triangle BAD$, $\triangle BDC = \triangle KPQ$. Из этих равенств следует утверждение задачи.

173. Нет, не любой. Например, если один плоский угол трехгранного угла достаточно мал, а два других плоских угла прямые, то легко убедиться, что никакое сечение этого трехгранного угла не является правильным треугольником.

174. Покажите, что если хотя бы один плоский угол данного трехгранного угла не является прямым, то можно его пересечь плоскостью так, чтобы в сечении был тупоугольный треугольник. Если же все плоские углы трехгранного угла прямые, то любое его сечение является остроугольным треугольником. Для этого достаточно выразить стороны произвольного сечения по теореме Пифагора через отрезки ребер и проверить, что сумма квадратов двух любых сторон сечения больше квадрата третьей стороны.

175. Пусть a — длина наибольшего ребра, b и c — длины ребер, примыкающих к одному концу ребра a, e и f — к другому. Имеем: $(b + c - a) + (e + f - a) = b + c + e + f - 2a > 0$. Отсюда следует, что выполняется хотя бы одно из двух неравенств $b + c - a > 0$ или $e + f - a > 0$. Значит, из отрезков a, b, c или a, e, f можно построить треугольник.

176. В любом тетраэдре найдется вершина, для которой сумма двух каких-то плоских углов меньше $180°$. (На самом деле справедливо более сильное утверждение: найдется вершина, сумма всех плоских углов при которой не превосходит $180°$.) Пусть этим свойством обладает вершина A. Возьмем на ребрах, выходящих из A, точки K, L, M так, что $\widehat{ALM} = \widehat{KAL} = \alpha$, $\widehat{ALK} = \widehat{LAM} = \beta$. Это можно сделать, если $\alpha + \beta < 180°$.

Таким образом,

$$\triangle KAL = \triangle LAM, \quad \triangle KLM = \triangle KAM.$$

Двугранный угол при ребре AK в пирамиде $AKLM$ равен углу при ребре LM, двугранный угол при ребре AM равен углу при ребре KL. Нетрудно убедиться, что тетраэдр $KLMA$ совместится сам с собой, если ребро KA совместить с LM, а ребро AM — с KL.

177. Предположим, что ни один плоский угол данного трехгранного угла не является прямым. Пусть S — вершина данного угла. Перенесем параллельно второй трехгранный угол так, чтобы его вершина совпала бы с некоторой точкой A какого-либо ребра данного угла (рис. 37). AB, AC и AD параллельны ребрам второго двугранного угла. Точки B и C находятся на ребрах данного угла или на их продолжениях. Но AB перпендикулярна SC, AC перпендикулярна SB, следовательно, проекции BS и CS на плоскость ABC будут соответственно перпендикулярны AC и AB, т. е. S проектируется в точку пересечения высот $\triangle ABC$, значит, AS перпендикулярна BC. Таким образом, ребро AD параллельно BC, а это означает, что все ребра второго трехгранного угла принадлежат одной плоскости. Если же один плоский угол данного трехгранного угла прямой, то все ребра второго должны лежать в одной грани данного (той, которая соответствует прямому плоскому углу). Если в точности два плоских угла данного трехгранного угла прямые, то два ребра второго должны совпадать с одним ребром данного. Таким образом, второй трехгранный угол может быть невырожденным только в случае, если все плоские углы данного — прямые.

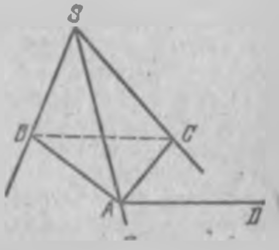


Рис. 37.

178. Можно считать, что прямая l является диагональю прямоугольного параллелепипеда и образует углы α, β и γ с его ребрами. Тогда, сложив три равных параллелепипеда так, как показано на рис. 38, мы получим, что углы между тремя диагоналями этих параллелепипедов, выходящими из общей вершины, равны 2α, 2β, 2γ. Следовательно, $2\alpha + 2\beta + 2\gamma < 2\pi$.

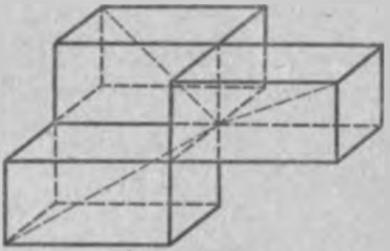


Рис. 38.

179. Пусть S — вершина угла, A, B и C — какие-то точки на его ребрах. Докажем, что угол между любым ребром и плоскостью противоположной грани всегда меньше любого из двух плоских углов, заключающих это ребро. Поскольку угол между прямой и плоскостью не может быть тупым, нам достаточно рассмотреть случай, когда плоские углы, примыкающие к ребру, острые.

Пусть A_1 — проекция A на грань SBC, A_2 — проекция A на ребро SB, поскольку $|SA_2| \geqslant |SA_1|$, $\widehat{ASA_1} < \widehat{ASA_2} = \widehat{ASB}$ (напомним, что все плоские углы при вершине S — острые). Отсюда легко следует первая часть нашей задачи.

Докажем вторую часть. Имеем: $\widehat{ASB} - \widehat{BSA_1} \leqslant \widehat{ASA_1}$, $\widehat{ASC} - \widehat{CSA_1} \leqslant \widehat{ASA_1}$ (хотя бы одно неравенство строгое). Сложив эти неравенства, получим

$$\widehat{ASB} + \widehat{ASC} - \widehat{CSB} < 2\widehat{ASA_1}.$$

Записав аналогичные неравенства для каждого ребра и сложив их, получим наше утверждение. Взяв трехгранный угол, все плоские углы которого тупые, а сумма их близка к 2π, убедимся, что в этом случае утверждение второй части не будет верным.

180. Пусть α и α_1, β и β_1, γ и γ_1 — двугранные углы тетраэдра (одинаковыми буквами обозначены углы, соответствующие противоположным ребрам). Рассмотрим четыре вектора a, b, c и d, перпендикулярные граням тетраэдра, направленные во внешнюю сторону по отношению к тетраэдру и имеющие длины, численно равные площадям соответствующих граней. Сумма этих векторов равна нулю. (Можно дать следующую интерпретацию этого утверждения. Рассмотрим сосуд в виде нашего тетраэдра, наполненный газом. Сила давления на каждую грань представляет собой вектор, перпендикулярный этой грани и пропорциональный по длине ее площади. Очевидно, что сумма этих векторов равна нулю.) Угол между любыми двумя векторами дополняет до π соответствующий двугранный угол тетраэдра. Прикладывая эти векторы один к другому в различном порядке, мы будем получать различные пространственные четырехугольники. Углы каждого четырехугольника равны соответствующим двугранным углам тетраэдра (исключаются два противоположных). Но сумма углов пространственного четырехугольника меньше 2π. В самом деле, проведем диагональ этого четырехугольника. В результате четырехугольник разобьется на два треугольника, сумма углов которых равна 2π. Сумма же углов четырехугольника меньше суммы углов этих треугольников, поскольку в любом трехгранном угле плоский угол меньше суммы двух других. Таким образом, мы доказали, что выполняются три неравенства: $\alpha + \alpha_1 + \beta + \beta_1 < 2\pi$, $\beta + \beta_1 + \gamma + \gamma_1 < 2\pi$, $\gamma + \gamma_1 + \alpha + \alpha_1 < 2\pi$. (В этом и заключалась первая часть задачи.) Сложив эти неравенства, получим $\alpha + \alpha_1 + \beta + \beta_1 + \gamma + \gamma_1 < 3\pi$. Для завершения доказательства заметим, что сумма двугранных углов любого трехгранного угла больше π (см. задачу 165).

Сложив неравенства, соответствующие каждой вершине тетраэдра, мы завершим доказательство.

З а м е ч а н и е. При решении этой задачи мы использовали прием, заключающийся в том, что вместо данного трехгранного угла мы рассматривали другой трехгранный угол, ребра которого перпендикулярны граням данного. Получившаяся пара трехгранных углов обладает тем свойством, что плоские углы одного из них дополняют двугранные углы другого до π. Называются такие углы *дополнительными*, или *полярными*. Прием этот весьма распространен в сферической геометрии. Мы им также уже пользовались в задаче 165.

181. Утверждение задачи следует из того, что для правильного многоугольника сумма расстояний от произвольной точки внутри него до его сторон есть величина постоянная.

182. Если S_1, S_2, S_3, S_4 — площади соответствующих граней тетраэдра, V — его объем, то

$$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4} = \frac{S_1x_1}{S_1h_1} + \frac{S_2x_2}{S_2h_2} + \frac{S_3x_3}{S_3h_3} + \frac{S_4x_4}{S_4h_4} = \frac{S_1x_1 + S_2x_2 + S_3x_3 + S_4x_4}{3V} = 1.$$

183. Пусть M и K — середины ребер AB и DC тетраэдра $ABCD$. Плоскость, проходящая через M и K, пересекает ребра AD и BC в точках L и N (рис. 39, *а*). Поскольку плоскость DMC делит объем тетраэдра пополам, нам достаточно доказать, что пирамиды

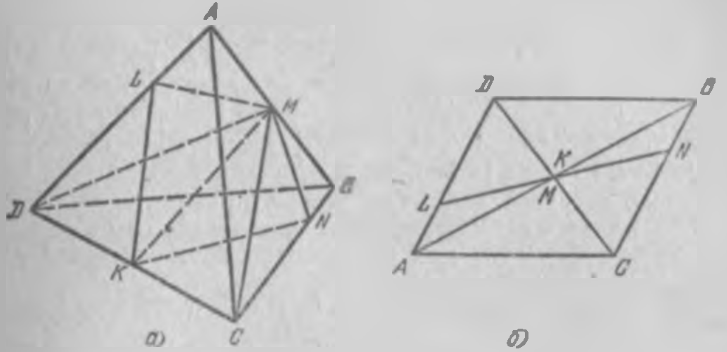


Рис. 39.

$DLKM$ и $KCMN$ равновелики. Отношение объема пирамиды $KCMN$ к объему всего тетраэдра $ABCD$ равно $\frac{1}{4}\frac{|CN|}{|CB|}$. Аналогично, для пирамиды $DLKM$ это отношение равно $\frac{1}{4}\frac{|DL|}{|DA|}$. Значит, нам нужно доказать равенство:

$$\frac{|DL|}{|DA|}=\frac{|CN|}{|CB|}.$$

Спроектируем наш тетраэдр на плоскость, перпендикулярную прямой KM. Тетраэдр $ABCD$ спроектируется в параллелограмм с диагоналями AB и CD (рис. 39, *б*). Прямая LN будет проходить через точку пересечения его диагоналей, следовательно, наше утверждение доказано.

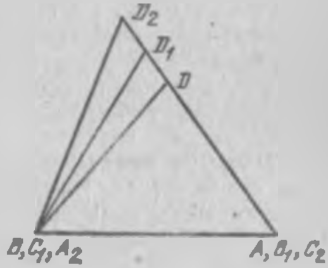


Рис. 40.

184. Пусть для определенности $|DA| \leqslant |DB| \leqslant |DC|$, и хотя бы одно неравенство строгое. Наложим треугольники DAB, DBC и DCA так, чтобы совпали равные углы и равные стороны (рис. 40).

На рисунке вершины второго треугольника имеют индексы 1, третьего — индексы 2. Но $|D_2A_2| = |DA| < |D_1C_1|$ (по условию). Следовательно, $\widehat{D_2D_1B}$ — острый, а $\widehat{BD_1D}$ — тупой и $|DB| > |D_1C_1|$ — противоречие.

185. Проведем через каждое ребро тетраэдра плоскость, параллельную противоположному ребру. Три пары получившихся плоскостей образуют параллелепипед. Противоположные ребра тетраэдра будут являться диагоналями пары противоположных гра-

ней параллелепипеда. Пусть, например, a и a_1 — диагонали двух противоположных граней параллелепипеда, m и n — их стороны ($m > n$). Тогда $a_1a_2\cos\alpha = m^2 - n^2$. Записав подобные равенства для каждой пары противоположных ребер, докажем наше утверждение.

186. Пусть сфера проходит через вершины A, B и C и пересекает ребра DA, DB и DC в точках K, L и M. Из подобия треугольников DKL и ABD найдем: $|LK| = |AB| \dfrac{|DL|}{|DA|}$, а из подобия треугольников DML и DBC найдем: $|ML| = |BC| \dfrac{|DL|}{|CD|}$. Но $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |BD| = 2S_{ABC}$.

Теперь нетрудно убедиться, что $|LK| = |ML|$.

З а м е ч а н и е. Утверждение нашей задачи будет верным для любого тетраэдра, у которого произведения противоположных ребер равны.

187. Принадлежность точек K, L, P и N одной плоскости означает, что

$$V_{MKLP} + V_{MPNK} = V_{MNKL} + V_{MLPN}. \qquad (1)$$

Из задачи 9 следует, что

$$V_{MKLP} = \frac{|MK| \cdot |ML| \cdot |MP|}{|MA| \cdot |MB| \cdot |MC|} V_{MABC},$$

$$V_{MPNK} = \frac{|MP| \cdot |MN| \cdot |MK|}{|MC| \cdot |MD| \cdot |MA|} V_{MADC},$$

$$V_{MNLK} = \frac{|MN| \cdot |ML| \cdot |MK|}{|MD| \cdot |MA| \cdot |MB|} V_{MABD},$$

$$V_{MLPN} = \frac{|ML| \cdot |MP| \cdot |MN|}{|MB| \cdot |MC| \cdot |MD|} V_{MBCD}.$$

Заменяя этими выражениями соответствующие величины в (1), деля на $|MK| \cdot |ML| \cdot |MP| \cdot |MN|$, умножая на $|MA| \times \times |MB| \cdot |MC| \cdot |MD|$, выражая объем каждой из оставшихся пирамид через площадь основания и высоту h, получим, после сокращения на $h/3$, утверждение нашей задачи.

188. Докажите, что прямая, проходящая через данную точку параллельно какой-либо диагонали куба, будет касаться каждого шара.

189. Оба пункта следуют из следующего общего утверждения: если сумма $\alpha|AM| + \beta|BN| + \gamma|CL|$, где α, β, γ — заданные коэффициенты, постоянна, то плоскость MNL проходит через фиксированную точку. Это утверждение, в свою очередь, следует из равенства

$$\alpha|AM| + \beta|BN| = (\alpha + \beta)|PQ|,$$

где P — точка на AB, Q — на MN,

$$\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{|MQ|}{|QN|} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

190. Если в тетраэдре $ABCD$ выполняется равенство $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$, то точно так же, как это делается

в плоском случае, можно доказать, что существует шар, касающийся ребер AB, BC, CD, DA, причем все точки касания находятся внутри отрезков AB, BC, CD и DA. Если мы проведем через центр шара O и какое-либо ребро плоскость, то каждый из рассматриваемых двугранных углов будет разделен соответствующей плоскостью на два, при этом для каждой части любого двугранного угла найдется равная ему часть соседнего угла. Например, угол между плоскостями OAB и ABC равен углу между плоскостями OBC и ABC.

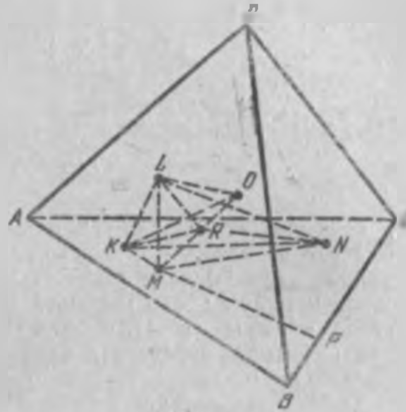


Рис. 41.

191. Пусть R — точка пересечения OM с плоскостью KLN (рис. 41). Утверждение, что R есть центр тяжести $\triangle KLN$, эквивалентно утверждению, что объемы тетраэдров $MKLO$, $MLNO$ и $MNKO$ равны. Обозначим через x, y, z расстояния от M до сторон $\triangle ABC$. Поскольку плоскость KLM перпендикулярна ребру AD, расстояние от O до KLM равно проекции OM на AD, которая равна проекции MP на AD, где P — основание перпендикуляра, опущенного из M на BC. Легко видеть, что проекция MP на AD равна $\frac{z}{\sqrt{3}}$, где z — расстояние от M до BC. Если α — двугранный угол между гранями тетраэдра $ABCD$, то

$$V_{KMLO}=\frac{1}{6}\,|KM|\cdot|ML|\sin\alpha\cdot\frac{z}{\sqrt{3}}=\frac{xyz\sqrt{2}}{27}.$$

Точно такими же будут объемы двух других тетраэдров: $MLNO$ и $MNKO$.

192. Спроектируем тетраэдр на плоскость, проходящую через N перпендикулярно CN. Обозначим через A_1, B_1, D_1, K_1 и M_1 проекции точек A, B, D, K и M. Расстояние между BK и CN будет равно расстоянию от точки N до B_1K_1, точно так же расстояние между AM и CN равно расстоянию от N до A_1M_1. Но $\triangle A_1D_1B_1$ — равнобедренный. Прямая A_1M_1 проходит через K_1 (K_1 — точка пересечения медиан). А поскольку $\triangle A_1K_1B_1$ — также равнобедренный, N равноудалена от A_1K_1 и B_1K_1.

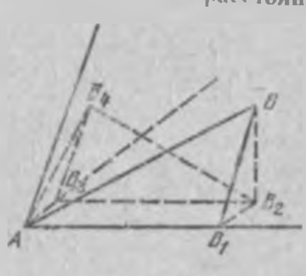


Рис. 42.

193. Пусть A — вершина основания пирамиды, B — точка в плоскости какой-либо боковой грани, $|AB| = a$, B_1 — проекция B на сторону основания, B_2 — проекция B на плоскость основания, B_3 — проекция B_2 на ребро основания, смежное с AB_1, B_4 — проекция B_2 на боковую грань, смежную с

гранью, содержащей AB (рис. 42). Если теперь α — двугранный угол при основании пирамиды, $\widehat{BAB_1} = \varphi$, то

$$|B_2B_1| = |AB_1| = a\cos\varphi,$$
$$|AB_3| = |B_1B_2| = |B_1B|\cos\alpha = a\sin\varphi\cos\alpha,$$
$$|B_3B_4| = |B_3B_2|\cos\alpha = a\cos\varphi\cos\alpha,$$

и, наконец,

$$|AB_4| = \sqrt{|AB_3|^2 + |B_3B_4|^2} = \\ = a\sqrt{\sin^2\varphi\cos^2\alpha + \cos^2\varphi\cos^2\alpha} = a\cos\alpha.$$

Отсюда следует, что длина любого отрезка, находящегося в плоскости какой-либо боковой грани, после двукратного проектирования, указанного в условии задачи, умножится на $\cos\alpha$ (с помощью параллельного переноса переведем один из концов данного отрезка в вершину A). Следовательно, любая фигура при таком проектировании перейдет в фигуру, ей подобную, с коэффициентом подобия $\cos\alpha$.

194. Утверждение задачи следует из равенств

$$V_{AA_1BC} = V_{AA_1B_1C} = V_{AA_1B_1C_1}$$

и аналогичных равенств для объемов пирамид AA_1CD и AA_1DB.

195. Пусть M — точка пересечения прямых CB_1 и C_1B. Вершина A лежит на DM. Проведем через точки D, D_1 и A плоскость. Обозначим через K и L ее точки пересечения с C_1B_1 и CB, а через A_2 — точку пересечения прямой AA_1 с D_1K (рис. 43). Из того, что CC_1B_1B — трапеция и KL проходит через точку пересечения ее диагоналей, следует, что $|KM| = |ML|$. Далее, рассмотрев трапецию D_1KLD, докажем, что $|AA_1| = \frac{1}{2}|AA_2|$. Следовательно,

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}V_{A_1BCD}.$$

Но из предыдущей задачи следует, что $V_{A_1BCD} = V_{A_1B_1C_1D_1}$. Таким образом, отношение объемов пирамид $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$ равно 3.

196. Введем следующие обозначения: $ABCD$ — данный тетраэдр, $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$, $|DA| = m$, $|DB| = n$, $|DC| = p$. Пусть далее G — центр тяжести $\triangle ABC$, N — точка пересечения прямой DM с описанной сферой, K — точка пересечения прямой AG с окружностью, описанной около $\triangle ABC$ (рис. 44). Воспользуемся следующим несложно доказываемым равенством:

$$|AG|\cdot|GK| = \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Тогда

$$|DG|\cdot|GN| = |AG|\cdot|GK| = \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2),$$

следовательно,

$$|GN| = \frac{a^2+b^2+c^2}{9t},$$

где

$$t = |DG| = \frac{1}{2}\sqrt{3m^2+3n^2+3p^2-a^2-b^2-c^2} \qquad (1)$$

(см. задачу 51), $|DN| = |DG| + |GN| = t + \frac{a^2+b^2+c^2}{9t} = \frac{m^2+n^2+p^2}{3t}$. Утверждение, что OM перпендикулярна DM, равносильно утверждению, что $|DN| = 2|DM| = 2\cdot\frac{3}{4}|DG| = \frac{3}{2}t$, т. е. $\frac{m^2+n^2+p^2}{3t} = \frac{3}{2}t$, откуда, заменяя t его выражением (1) через величины ребер тетраэдра, получим

$$a^2+b^2+c^2 = m^2+n^2+p^2. \qquad (2)$$

Если A_1, B_1, C_1 — центры тяжестей граней DBC, DCA и DAB, то в тетраэдре $A_1B_1C_1D$ будем иметь

$$|B_1C_1| = \frac{a}{3}, \quad |C_1A_1| = \frac{b}{3}, \quad |A_1B_1| = \frac{c}{3},$$

$$|DA_1| = \frac{2}{3}m_a, \quad |DB_1| = \frac{2}{3}n_b, \quad |DC_1| = \frac{2}{3}p_c,$$

где m_a, n_b и p_c — медианы к сторонам BC, CA и AB в треугольниках DBC, DCA и DAB. Если теперь t_1 — расстояние от вершины

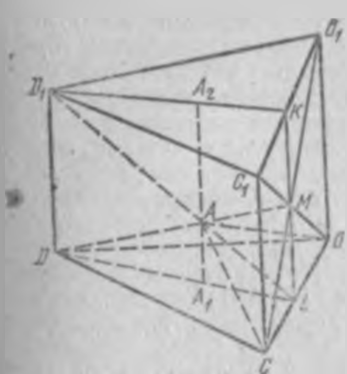


Рис. 43.

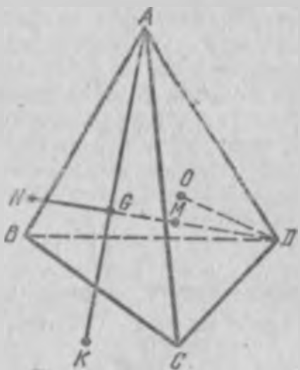


Рис. 44.

D до точки M, то, поскольку M по условию лежит на поверхности сферы, описанной около тетраэдра $A_1B_1C_1D$, а прямая DM проходит через центр тяжести треугольника $A_1B_1C_1$, для определения величины $|DM|$ мы можем воспользоваться формулой, полученной нами выше для $|DN|$, т. е.

$$|DM| = \frac{4m_a^2+4n_b^2+4p_c^2}{27t_1},$$

где

$$l_1 = \frac{1}{9}\sqrt{12(m_a^2 + n_b^2 + p_c^2) - a^2 - b^2 - c^2}.$$

Воспользовавшись известной формулой длины медианы треугольника, получим

$$|DM| = \frac{4m^2 + 4n^2 + 4p^2 - a^2 - b^2 - c^2}{27l_1},$$

где

$$l_1 = \frac{2}{9}\sqrt{3m^2 + 3n^2 + 3p^2 - a^2 - b^2 - c^2} = \frac{2}{3}l.$$

С другой стороны, $|DM| = \frac{3}{4}l$, т. е.

$$\frac{4m^2 + 4n^2 + 4p^2 - a^2 - b^2 - c^2}{18l} = \frac{3}{4}l.$$

Заменяя l по формуле (1), получим (2), что и требовалось.

197. Зафиксируем какую-либо ось симметрии l. Тогда, если l' является также осью симметрии, и при этом l' не пересекается с l или пересекает l, но не под прямым углом, то прямая l'', симметричная l' относительно l, также является осью симметрии. Это очевидно. Если же какая-либо прямая l_1 является осью симметрии, причем l_1 пересекается с l и перпендикулярна l, то прямая l_2, проходящая через точку пересечения l и l_1 и перпендикулярная им, также будет осью симметрии. Убедиться в этом можно, например, следующим образом. Примем прямые l, l_1, l_2 за оси координат.

Применяя последовательно к точке $M(x, y, z)$ преобразования симметрии относительно прямых l и l_1, мы переведем точку M сначала в $M_1(x, -y, -z)$, а затем M_1 в $M_2(-x, -y, z)$. Таким образом, последовательное применение преобразования симметрии относительно прямых l и l_1 эквивалентно симметрии относительно l_2.

Из наших рассуждений следует, что все оси симметрии, исключая l, можно разбить на пары, т. е. число осей симметрии, если оно конечно, непременно нечетное.

198. Пусть M — проекция B на AD. Очевидно, M принадлежит поверхности сферы с диаметром AB. С другой стороны, можно показать, что $|AM| \cdot |AD| = |AB|^2$. Из этого следует, что все точки M должны принадлежать некоторой сферической поверхности, содержащей данную окружность. Значит, точки M принадлежат одной окружности, по которой пересекаются две эти сферические поверхности.

199. Докажите, что проекции точки M на стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на одной окружности (если K и L — проекции M на AB и BC, то точки B, K, M и L — на одной окружности, и, значит, $\widehat{MLK} = \widehat{MBK}$, $\widehat{MKL} = \widehat{MBL}$. То же самое для других сторон).

После этого можно воспользоваться результатом задачи 198.

200. Поскольку центр тяжести лежит на прямой, соединяющей середины ребер AB и CD, из условия задачи будет следовать, что эта прямая будет перпендикулярна ребрам AB и CD.

201. Пусть K и M — середины ребер AB и CD. Из условия следует, что прямая KM проходит через точку O — центр вписанного шара, O равноудалена от граней ACD и BCD. Следовательно, точ-

ка K также равноудалена от этих граней. Отсюда следует, что эти грани равновелики. Точно так же равновеликими оказываются грани ABC и ABD. Если мы теперь спроектируем тетраэдр на плоскость, параллельную ребрам AB и CD, то проекцией будет параллелограмм с диагоналями AB и CD. Отсюда следует утверждение нашей задачи.

202. Повернем куб вокруг диагонали AC_1 на некоторый угол. Поскольку плоскость треугольника A_1BD перпендикулярна AC_1, а его стороны касаются вписанного в куб шара, стороны треугольника, получающегося из A_1BD после поворота, также будут касаться вписанного шара. При соответствующем выборе угла поворота грань AA_1B_1B перейдет в данную плоскость, а отрезок MN будет отрезком диагонали повернутой грани.

203. Обозначим через α, β, γ углы, образованные прямоугольными гранями с четвертой гранью. Если S_1, S_2, S_3, S_4 — площади граней, то $S_1 = S_4 \cos\alpha$, $S_2 = S_4 \cos\beta$, $S_3 = S_4 \cos\gamma$. После этого можно воспользоваться тем, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Это следует, например, из того, что углы, образованные высотой, опущенной на четвертую грань, с боковыми ребрами пирамиды равны также α, β и γ (см. задачу 10).

204. Возьмем прямую, перпендикулярную данной плоскости, и обозначим через α, β и γ углы, образуемые этой прямой с ребрами куба. Проекции ребер на плоскость принимают значения $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$. А поскольку $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, сумма квадратов проекций будет равна

$$4a^2(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma) = 8a^2,$$

где a — ребро куба.

205. Проведем через каждое ребро тетраэдра плоскость, параллельную противоположному ребру. Мы получим куб, в который вписан тетраэдр. Если ребро тетраэдра b, то ребро куба будет $b/\sqrt{2}$. Проекция каждой грани куба есть параллелограмм, диагонали которого равны проекциям ребер тетраэдра. Сумма квадратов всех диагоналей равна удвоенной сумме квадратов проекций ребер тетраэдра и равна удвоенной сумме квадратов проекций ребер куба.

Воспользовавшись результатом предыдущей задачи, получим, что сумма квадратов проекций ребер правильного тетраэдра на произвольную плоскость равна $8\dfrac{b^2}{2} = 4b^2$.

206. Рассмотрим сначала случай, когда данные прямые скрещиваются. Обозначим через A и B положения точек в некоторый момент времени, k — отношение их скоростей (скорость тела, находящегося в точке A, в k раз больше скорости другого тела). M и N — две точки на прямой AB такие, что $|AM| : |MB| = |AN| : |NB| = k$ (M — на отрезке AB), O — середина MN. Доказательство утверждения нашей задачи разобьем на следующие пункты:

1) Точки M, N и O перемещаются по прямым, причем прямые, по которым перемещаются точки A, B, M, N и O, параллельны одной плоскости.

2) Прямые, по которым перемещаются точки M и N, перпендикулярны.

3) Если две прямые перпендикулярны и скрещиваются, то любая сфера, построенная как на диаметре на отрезке, концы которого расположены на этих прямых, проходит через точки P и Q,

где PQ — общий перпендикуляр к этим прямым (P и Q находятся на прямых).

4) Геометрическим местом точек L таких, что $|AL|:|LB| =$ $= k$, есть поверхность сферы, построенной на MN как на диаметре.

Из утверждений 1) — 4) следует, что окружность, существова- ние которой утверждается в задаче, есть окружность, получаю- щаяся при вращении точки P (или Q) вокруг прямой, по которой перемещается точка O, где P и Q — концы общего перпендикуляра к прямым, по которым перемещаются точки M и N.

Пункты 1) и 2) можно доказать, например, следующим образом. Пусть A_0 и B_0 — положения точек в некоторый фиксированный момент времени. Спроектируем наши точки параллельно прямой A_0B_0 на плоскость, параллельную заданным прямым. Точки A_0 и B_0 спроектируются в одну точку C, точки же A, B, M, N и O спроектируются в точки A', B', M', N' и O'. Тогда точки M' и N' будут основаниями биссектрис внутреннего и внешнего угла C треугольника $A'B'C$. Значит, M', N' и O' перемещаются по прямым, причем $\widehat{M'CN'} = 90°$. Отсюда следует, что и точки M, N и O так- же перемещаются по прямым, поскольку очевидно, что каждая из этих точек расположена в фиксированной плоскости, параллельной заданным прямым. Пункт 3) очевиден. Пункт 4) следует из соответ- ствующего утверждения планиметрии.

В случае, когда точки A и B перемещаются по двум пересекаю- щимся прямым, рассуждения несколько видоизменяются. Задача сводится к доказательству существования в плоскости, содержащей заданные прямые, двух фиксированных точек P и O таких, что $|AP|:|PB| = |AQ|:|QB| = k$.

207. Пусть O — центр шара, r — его радиус, AP и BQ — ка- сательные к шару (P и Q — точки касания), M — точка пересече- ния прямых AP и BQ. Обозначим: $|OA| = a$, $|OB| = b$, $|PM| =$ $= |QM| = x$. Тогда $|OM|^2 = r^2 + x^2$, $|AM|^2 = (\sqrt{a^2 - r^2} \pm$ $\pm x)^2$, $|BM|^2 = (\sqrt{b^2 - r^2} \pm x)^2$.

Если знаки одинаковые, то выполняется соотношение

$$\sqrt{b^2 - r^2}\,|AM|^2 - \sqrt{a^2 - r^2}\,|BM|^2 + \\ + (\sqrt{a^2 - r^2} - \sqrt{b^2 - r^2})\,|OM|^2 = l_1. \quad (1)$$

Если знаки разные, то

$$\sqrt{b^2 - r^2}\,|AM|^2 + \sqrt{a^2 - r^2}\,|BM|^2 - \\ - (\sqrt{a^2 - r^2} + \sqrt{b^2 - r^2})\,|OM|^2 = l_2, \quad (2)$$

где l_1 и l_2 — константы, зависящие от r, a и b.

Поскольку сумма коэффициентов при $|AM|^2$, $|BM|^2$ и $|OM|^2$ в выражениях (1) и (2) равна нулю, геометрическим местом точек M, для которых выполняется одно из этих соотношений, является пло- скость. В обоих случаях эта плоскость перпендикулярна плоскости OAB.

208. Пусть ABC — данный треугольник, стороны которого, как обычно, равны a, b и c. Радиусы трех шаров, касающихся между собой и плоскости треугольника в точках A, B и C, равны соответ- ственно $\frac{bc}{2a}$, $\frac{ca}{2b}$, $\frac{ab}{2c}$. Обозначим через x радиус шара, касаю- щегося трех данных и плоскости треугольника, M — точка касания

этого шара с плоскостью. Имеем:

$$|MA| = 2\sqrt{\frac{bcx}{2a}}, \quad |MB| = 2\sqrt{\frac{acx}{2b}}, \quad |MC| = 2\sqrt{\frac{abx}{2c}}.$$

Следовательно, $|MA|:|MB| = b:a$, $|MB|:|MC| = c:b$ или $|MA|:|MB|:|MC| = bc:ac:ab$.

Для любого неравностороннего треугольника существуют ровно две точки M_1 и M_2, для которых выполняется это соотношение. При этом, если воспользоваться теоремой Бретшнейдера (см. зада- чу 149 из (1)), получим что, если $\hat{A} = \alpha$ — наименьший угол тре- угольника, углы $\widehat{BM_1C}$ и $\widehat{BM_2C}$ равны $60° + \alpha$ и $60° - \alpha$. Пусть $\widehat{BM_1C} = 60° + \alpha$. Запишем для $\triangle BM_1C$ теорему косинусов, обо- значив радиус шара, касающегося плоскости в точке M_1, через r ($x = r$),

$$a^2 = \frac{2acr}{b} + \frac{2abr}{c} - 4ar\cos(60° + \alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = 2\left(\frac{c}{ab} + \frac{b}{ac} - \frac{2\cos(60° + \alpha)}{a}\right). \quad (1)$$

Аналогично, считая, что радиус шара, касающегося плоскости в точке M_2, есть ρ, получим

$$\frac{1}{\rho} = 2\left(\frac{c}{ab} + \frac{b}{ac} - \frac{2\cos(60° - \alpha)}{a}\right). \quad (2)$$

Вычитая (2) из (1), получим

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} = \frac{4[\cos(60° - \alpha) - \cos(60° + \alpha)]}{a} =$$

$$= \frac{8\sin 60° \sin\alpha}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{R},$$

что и требовалось.

209. Пусть M — середина AB, O_1 и O_2 — центры шаров, R_1 и R_2 — их радиусы, тогда

$$|MO_1|^2 - |MO_2|^2 = \left(R_1^2 + \frac{|AB|^2}{4}\right) - \left(R_2^2 + \frac{|AB|^2}{4}\right) = R_1^2 - R_2^2.$$

Это означает, что середины всех отрезков общих касательных к данным шарам лежат в одной плоскости, перпендикулярной отрезку O_1O_2. Отсюда следует справедливость утверждения нашей задачи.

210. Такого пятиугольника не существует.

211. Пусть $A_1A_2A_3A_4A_5$ — данный пятиугольник. Из условия следует, что все диагонали пятиугольника равны между собой. Выберем три вершины пятиугольника таким образом, чтобы две оставшиеся вершины находились по одну сторону от плоскости, определяемой тремя взятыми вершинами. Пусть, например, это будут вершины A_2, A_3, A_5. Тогда вершины A_1 и A_4 будут симмет- ричны друг другу относительно плоскости, проходящей через сере- дину A_2A_3 и перпендикулярной A_2A_3. Это следует из того, что $\triangle A_2A_3A_5$ — равнобедренный, $|A_2A_5| = |A_3A_5|$, A_1 и A_4 — по одну сторону от плоскости $A_2A_3A_5$ и $|A_1A_2| = |A_4A_3|$, $|A_1A_5| =$ $= |A_4A_5|$, $|A_1A_3| = |A_4A_2|$. Значит, точки A_1, A_2, A_3, A_4

в одной плоскости. Дальнейшее понятно. Случаи, когда искомая плоскость проходит через другие вершины, рассматриваются аналогично.

212. Обозначим через M точку пересечения диагонали AC_1 с плоскостью A_1BD. Тогда M — точка пересечения медиан треугольника A_1BD, и, кроме того, M делит диагональ AC_1 в отношении $1:2$, т. е. $|AM| = \frac{1}{3}d$.

Рассмотрим пирамиду ABA_1D (рис. 45). Возьмем на прямой BM точку K так, что $|MK| = |BM|$, и построим призму $MKDANP$. Нетрудно заметить, что расстояния между боковыми ребрами этой призмы равны соответствующим расстояниям от точек A_1, B и D до AM. Следовательно, стороны сечения, перпендикулярного боковым ребрам призмы $MKDANP$, равны этим расстояниям. Далее, объем пирамиды ABA_1D равен объему построенной призмы и составляет $^1/_6$ объема параллелепипеда, т. е. $\frac{1}{6}V = \frac{1}{3}dS$, $V = 2dS$.

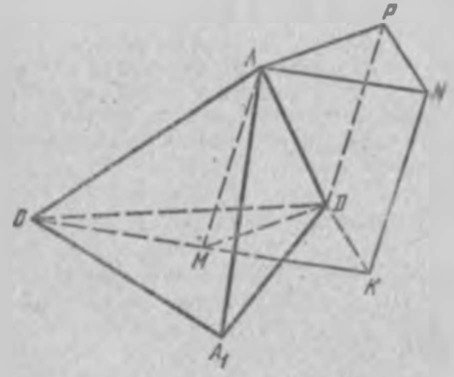


Рис. 45.

213. Пусть M — центр тяжести тетраэдра $ABCD$. Объем пирамиды $MABC$ составляет $^1/_4$ объема данного тетраэдра. Достроим пирамиду $MABC$ до параллелепипеда так, чтобы отрезки MA, MB, MC являлись бы его ребрами. На рис. 46 этот параллелепипед изображен отдельно. Очевидно, ребра MC, CK, KL и диагональ ML этого параллелепипеда равны и параллельны соответственно MC, MA, MB и MD. Но объемы пирамид $MABC$ и $MCKL$ равны, т. е. каждый из них составляет $\frac{1}{4}V_{ABCD}$. Следовательно, объем тетра-

Рис. 46.

эдра, о котором идет речь в задаче, составляет $\left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} V_{ABCD} =$
$= \frac{16}{27} V.$

214. При решении задачи 180 нами было доказано, что сумма векторов, перпендикулярных граням тетраэдра, направленных во внешнюю по отношению к тетраэдру сторону и по длине равных площадям соответствующих граней, равна нулю. Из этого следует существование тетраэдра $KLMN$.

При нахождении объема тетраэдра мы воспользуемся следующей формулой:

$$V = \frac{1}{6} abc \sin\alpha \sin\beta \sin C,$$

где a, b и c — длины ребер, выходящих из какой-либо вершины тетраэдра, α и β — два плоских угла при этой вершине, C — двугранный угол между плоскостями граней, соответствующих углам α и β. Если теперь α, β и γ — все плоские углы при этой вершине, A, B и C — двугранные углы, то

$$V^3 = \left(\frac{1}{6}\right)^3 a^2b^2c^2 \sin^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma \sin A \sin B \sin C. \qquad (1)$$

Возьмем теперь какую-либо точку внутри тетраэдра, опустим перпендикуляры из нее на три грани тетраэдра, соответствующих рассматриваемому трехгранному углу, и отложим на каждом из них отрезки, по длине численно равные площадям этих граней. Очевидно, объем тетраэдра, образованного этими отрезками, равен объему тетраэдра $KLMN$. Плоские углы при вершине трехгранного угла, образованного этими отрезками, равны $180° - A$, $180° - B$, $180° - C$, двугранные углы — $180° - \alpha$, $180° - \beta$, $180° - \gamma$. Следовательно, используя равенство (1), получим для W — объема этого тетраэдра

$$W^3 = \left(\frac{1}{6}\right)^3 S_1^2 S_2^2 S_3^2 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma, \qquad (2)$$

где S_1, S_2, S_3 — площади граней, образованных ребрами a, b и c, т. е. $S_1 = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$, $S_2 = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$, $S_3 = \frac{1}{2} ca \sin\beta$.

Заменяя S_1, S_2, S_3 в (2), получим

$$W^3 = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^6 a^4b^4c^4 \sin^4\alpha \sin^4\beta \sin^4\gamma \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C. \qquad (3)$$

Сравнивая выражения (1) и (3), получим

$$W = \frac{3}{4} V^2.$$

215. Утверждение задачи следует из того, что произведения отрезков, на которые каждая из этих хорд делится точкой пересечения, равны между собой.

217. Утверждение нашей задачи следует из такого планиметрического факта. Если через точку P, расположенную вне данной окружности, проведены две прямые, пересекающие окружность соответственно в точках A и A_1, B и B_1, то прямая A_1B_1 параллелькасательной к окружности, описанной около PAB, проведенной ез точку P.

Таким образом, множество точек, о которых говорится в задаче, ет принадлежать плоскости, параллельной плоскости, касаю-ися в точке P сферы, проходящей через данную окружность и ку P.

218. Уравнение

$$(x-a)^2+(y-b)^2=k^2(z-c)^2$$

сывает коническую поверхность, вершина которой находится в ке $S(a, b, c)$, ось параллельна оси z, $k=\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол меж-осью конуса и образующей. Вычитая друг из друга уравнения 'х конических поверхностей с осями, параллельными оси z, инаковыми параметрами k, но различными вершинами, получим зейное соотношение между x, y и z.

219. Обозначим через F точку пересечения прямых KL и MN, ерез E — точку пересечения прямой PF со сферой, проходящей ез точки P, A, B и C (предполагаем, что P не лежит в плос-сти грани ABC).

Точки P, Q, R и E принадлежат одной окружности, пред-вляющей собой сечение сферы, проходящей через P, A, B и C, оскостью, проходящей через точки P, K и L. Но, поскольку — точка пересечения прямых KL и MN, точки P, S, T и E дол-ы принадлежать окружности, являющейся сечением сферы, оходящей через P, A, C и D, плоскостью, определяемой точка-P, M и N. Следовательно, точки P, Q, R, S и T лежат на ух окружностях, имеющих две общие точки — P и E, а такие окружности принадлежат одной сфере.

Замечание. Мы рассмотрели случай общего положения данных точек, для полноты решения нам нужно рассмотреть еще сколько предельных случаев, например, P лежит в плоскости ани, KL и MN параллельны и т. д.

220. Пусть ребра SA, SB, SC и SD четырехгранного угла вляются образующими конуса, ось которого SO. Тогда в трехгран-м угле, образованном прямыми SO, SB и SC, двугранные углы ебрами SA и SB равны. Рассмотрев три других таких угла, легко лучим, что суммы противоположных двугранных углов данного тырехгранного угла равны.

Обратно. Пусть суммы противоположных двугранных углов вны. Рассмотрим конус, образующими которого являются пря-е SA, SB и SC. Допустим, что SD не является образующей. означим через SD_1 прямую, по которой пересекаются поверх-сть конуса и плоскость ASD. Мы получим два четырехгранных ла $SABCD$ и $SABCD_1$, в каждом из которых суммы противополож-х двугранных углов равны. Из этого будет следовать, что в трех-анном угле, дополнительном к углу $SCDD_1$ (смотри решение за-ч 165 и 166), один плоский угол равен сумме двух других, что не-зможно.

221. Пусть все вершины шестигранника $ABCDEFKL$, за ис-ючением C, расположены на поверхности сферы с центром O ис. 47). Обозначим через C_1 точку пересечения прямой KC с по-рхностью сферы.

Для краткости будем обозначать через $\sphericalangle FEL$ двугранный ол между плоскостями FEO и FLO (аналогично обозначаются тальные двугранные углы). Используя утверждение (прямое) задачи 220, можем записать:

$$\sphericalangle FEL + \sphericalangle FKL = \sphericalangle EFK + \sphericalangle ELK,$$
$$\sphericalangle AEF + \sphericalangle ABF = \sphericalangle EAB + \sphericalangle EFB,$$
$$\sphericalangle AEL + \sphericalangle ADL = \sphericalangle ELD + \sphericalangle EAD,$$
$$\sphericalangle FKC_1 + \sphericalangle FBC_1 = \sphericalangle KFB + \sphericalangle KC_1B,$$
$$\sphericalangle LKC_1 + \sphericalangle LDC_1 = \sphericalangle KLD + \sphericalangle KC_1D.$$

Сложив все эти равенства, учитывая, что сумма любых трех двугранных углов, имеющих общее ребро (например, OE), равна 2π, получим

$$\sphericalangle ABC_1 + \sphericalangle ADC_1 = \\ = \sphericalangle BAD + \sphericalangle BC_1D,$$

а это означает (см. задачу 220, обратное утверждение), что ребра OA, OB, OC_1 и OD являются образующими одного конуса. Отсюда следует, что C_1 лежит в плоскости ABD, т. е. C_1 совпадает с C.

Требует отдельного рассмотрения случай, когда O находится вне многогранника.

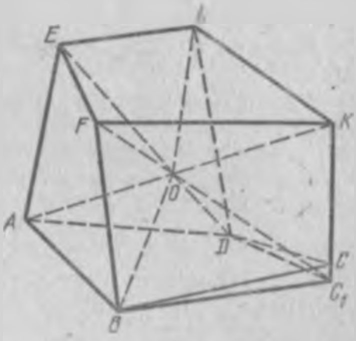


Рис. 47.

222. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр, K, L, M, N, P и Q — данные точки соответственно на ребрах AB, AC, AD, BC, CD и DB. Обозначим через D_1 точку пересечения окружностей, проходящих через K, B, N и C, L, N. Нетрудно доказать, что точка D_1 принадлежит окружности, проходящей через точки A, K и L. Аналогично в плоскостях BCD, ACD и ADB определим точки A_1, B_1 и C_1. Пусть, наконец, F — точка пересечения трех сфер, описанных около тетраэдров $KBNQ$, $LCNP$ и $NDPQ$. Воспользуемся результатом задачи 221. В многограннике с вершинами B, N, A_1, Q, K, D_1, F, C_1 все вершины лежат на поверхности сферы, пять граней — BKD_1N, BKC_1Q, BNA_1Q, D_1NA_1F, A_1QC_1F являются плоскими четырехугольниками, следовательно, и четырехугольник KD_1FC_1 является плоским. Точно так же докажем, что плоскими являются четырехугольники LD_1FB_1 и MB_1FC_1.

И, наконец, в шестиграннике $AKD_1LMB_1FC_1$ семь вершин A, K, D_1, L, M, B_1, C_1 лежат на поверхности сферы, проходящей через A, K, L и M, значит, и точка F лежит на этой же сфере.

224. Пусть S — вершина угла. Пересечем угол плоскостью таким образом, чтобы образовалась пирамида $SABCD$, в которой $ABCD$ — основание, а противоположные боковые ребра равны:

$$|SA| = |SC|, \quad |SB| = |SD|.$$

(Докажите, что это всегда можно сделать.) Поскольку плоские углы при вершинах равны между собой, $ABCD$ — ромб. Пусть O — точка пересечения AC и BD. Обозначим $|AC| = 2x$, $|BD| = 2y$, $|SO| = z$. Будем считать, что $x < y$. Если $\widehat{ASC}$ и $\widehat{BSD}$ — острые, то $z > y$, а это означает, что в $\triangle ASB$ $|AB| < |AS| < |BS|$, т. е. $\widehat{ASB}$ — меньший угол этого треугольника, $\widehat{ASB} < 60°$.

Так же рассматривается предположение, что оба угла тупые.

225. От Sh до $\frac{4}{3}$ Sh.

226. Наибольший объем имеет тетраэдр, два противоположных ребра которого перпендикулярны и являются диаметрами оснований. Его объем равен $\frac{2}{3}R^2h$.

227. Пусть $|AB| = |BC| = 1$, $|AA_1| = x$.

$$V_{DD_1BC_1} = \frac{1}{3} S_{DBD_1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{6} x.$$

С другой стороны,

$$V_{DD_1BC_1} = \frac{1}{3} S_{DBC_1} |D_1B| \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + x^2} \cdot \sqrt{2 + x^2} \quad \sin\varphi,$$

где φ — угол между D_1B и плоскостью DBC_1.

Таким образом,

$$\sin\varphi = \frac{x}{\sqrt{(2 + x^2)(1 + 2x^2)}}, \quad \frac{1}{\sin^2\varphi} = 2x^2 + \frac{2}{x^2} + 5 \geqslant 9,$$

откуда следует, что наибольшим значением φ будет $\arcsin\frac{1}{3}$.

228. Пусть высота призмы равна 1, $|AM| = x$. Опишем около треугольника A_1MC_1 окружность. Рассмотрим тело, получающееся при вращении дуги A_1MC_1 этой окружности вокруг хорды A_1C_1. Угол A_1MC_1 будет наибольшим, если прямая AB касается поверхности полученного тела. Последнее имеет место в том случае, если прямые MO и AB, где O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, перпендикулярны, значит, прямая MO делит A_1C_1 в отношении $\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{x}{2 - x}$.

С другой стороны, можно показать, что MO делит A_1C_1 в отношении $\frac{|A_1M| \cos \widehat{A_1C_1M}}{|C_1M| \cos \widehat{C_1A_1M}}$. Выражая стороны и косинусы углов A_1MC_1 через x, получим уравнение

$$\frac{(1 + x^2)(4 - x)}{x(9 - 4x + x^2)} = \frac{x}{2 - x} \Leftrightarrow x^3 + 3x - 4 = 0,$$

откуда $x = 1$. Наибольшее значение угла A_1MC_1 равно $\frac{\pi}{2}$.

229. Прямые AE и CF перпендикулярны. Пусть Q_1 — проекция Q на плоскость ABB_1A_1. Q_1 лежит на отрезке BL, где L — середина AA_1. Пусть N — точка пересечения AE и LB. Нетрудно найти, что $|AN| = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Обозначим: $|AP| = \frac{1}{\sqrt{5}} + x$, $|NQ_1| = y$. Тогда $|PM|^2 = \frac{8}{5} + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + x\right)^2$, $|PQ|^2 = x^2 + y^2 + 1$, $\frac{|PM|^2}{|QP|^2}$ достигает наибольшего значения при $y = 0$. Осталось найти наибольшее значение дроби $\frac{\frac{9}{5} + \frac{2}{\sqrt{5}}x + x^2}{x^2 + 1}$. Это значение достигается при $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

230. Рассмотрим $\triangle KLM$, представляющий собой проекцию данного треугольника на плоскость $ABCD$, K — на прямой CB, L — на CD, M — на CA. Если $|CK| = x$, то $|CL| = |a - x|$, $|CM| = \sqrt{2}\left|a - \frac{x}{2}\right|$.

Нетрудно получить, что

$$S_{KLM} = \frac{1}{2}\left|x(a-x) - a\left(a - \frac{x}{2}\right)\right| = \frac{1}{4}(2x^2 - 3ax + 2a^2).$$

Наименьшее значение равно $\frac{7a^2}{32}$.

231. Пусть x — высота параллелепипеда. Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью, проходящей на расстоянии x от ее основания. В сечении получится квадрат со стороной $(1 - x)$, в который вписан прямоугольник площади s, являющийся гранью параллелепипеда. Возможны два случая:

1) Основание параллелепипеда есть квадрат со стороной $\sqrt{s}$. Диагональ параллелепипеда $d = \sqrt{x^2 + 2s}$, причем

$$(1-x)\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \sqrt{s} \leqslant (1-x)$$

или

$$1 - \sqrt{2s} \leqslant x \leqslant 1 - \sqrt{s}.$$

Таким образом, в этом случае, если $s < \frac{1}{2}$, $1 - 2\sqrt{2s} + 4s \leqslant d^2 \leqslant$ $\leqslant 1 - 2\sqrt{s} + 3s$, если же $s \geqslant \frac{1}{2}$, $2s < d^2 \leqslant 1 - 2\sqrt{s} + 3s$.

2) Стороны грани параллелепипеда, вписанной в сечение, параллельны диагоналям сечения. Обозначим их через y и z. Наша задача заключается в том, чтобы исследовать изменение функции $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$ при условиях

$$\begin{cases} yz = s, \\ y + z = (1-x)\sqrt{2}. \end{cases}$$

(Получившаяся система совместна, если $1 - x \geqslant \sqrt{2s}$, $0 < x \leqslant$ $\leqslant 1 - \sqrt{2s}$.) Имеем:

$$d^2 = x^2 + (y+z)^2 - 2yz = x^2 + 2(1-x)^2 - 2s = \\ = 3x^2 - 4x + 2 - 2s.$$

Если $s < \frac{1}{18}$, то наименьшее значение d^2 достигается при $x = \frac{2}{3}$, если же $s > \frac{1}{18}$, то при $x = 1 - \sqrt{2s}$. Кроме того, $d^2 < 2 - 2s$. Объединяя результаты пунктов 1) и 2), получим

Ответ: если $0 < s < \frac{1}{18}$, то

$$\sqrt{\frac{2}{3} - 2s} \leqslant d < \sqrt{2 - 2s};$$

и $\frac{1}{18} < s < \frac{7+2\sqrt{6}}{25}$, то

$$\sqrt{1-2\sqrt{2s}+4s} < d < \sqrt{2-2s};$$

и $\frac{7+2\sqrt{6}}{25} < s < \frac{1}{2}$, то

$$\sqrt{1-2\sqrt{2s}+4s} < d < \sqrt{1-2\sqrt{s}+3s};$$

и $\frac{1}{2} < s < 1$, то

$$\sqrt{2s} < d < \sqrt{1-2\sqrt{s}+3s}.$$

232. Проведем сечение многогранника $ABCA_1MNC_1$ плоскостью, проходящей на расстоянии h от плоскости $A_1B_1C_1$, и спроецируем получившееся сечение на плоскость $A_1B_1C_1$ (рис. 48). На рисунке проекция этого сечения обозначена штриховыми линиями. Очевидно, что окружность основания цилиндра должна находиться внутри трапеции $KLNC_1$ (K, L — точки пересечения A_1C_1 и MN с проекцией этого сечения). Если $h = 3$, плоскость сечения совпадает с плоскостью ABC, а точки K и L — с серединами сторон B_1C_1 и A_1C_1. Если $h < 3$, $|ML| = |A_1K| = \frac{h}{3}$, $|LN| = 1 - \frac{h}{3}$, $|KC_1| = 2 - \frac{h}{3}$.

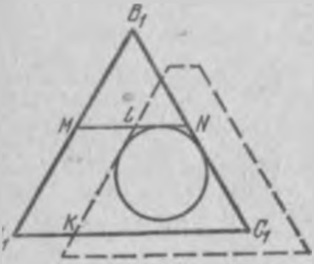


Рис. 48.

Нетрудно убедиться, что при $h < \frac{3}{2}$ радиус наибольшей окружности, помещающейся в трапеции $KLNC_1$, равен $\frac{\sqrt{3}}{4}$, а при $h > \frac{3}{2}$ от радиус равен радиусу окружности, вписанной в правильный треугольник со стороной $|KC| = 2 - \frac{h}{3}$, т. е. он равен $\left(2 - \frac{h}{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Ответ: а) если $0 < h < \frac{3}{2}$, $V = \frac{3}{16}\pi h$; если $\frac{3}{2} < h < 3$, $= \frac{\pi}{12} h \left(2 - \frac{h}{3}\right)^2$;

б) наибольшее значение объема будет при $h = 2$, $V = \frac{8\pi}{27}$.

233. Если плоскость, проведенная через наш отрезок параллельно грани ABB_1A_1, пересекает CB в точке K так, что $|CK| = a$, проекция отрезка на грань ABC имеет длину x, а проекция его ребро CC_1 равна $|a - 2x|$; таким образом, длина отрезка будет вна

$$\sqrt{x^2 + (a-2x)^2} = \sqrt{5x^2 - 4ax + a^2}.$$

аименьшая длина равна $\frac{a}{\sqrt{5}}$.

234. Аналогом нашей задачи на плоскости является следующее утверждение. Дан угол и точка N внутри него. Рассмотрим всевозможные треугольники, образуемые сторонами угла и прямой, проходящей через точку N. Наименьшую площадь среди таких треугольников имеет тот, для которого сторона, проходящая через N, делится точкой N пополам.

Вернемся к нашей задаче. Пусть M — данная точка внутри трехгранного угла. Плоскость, проходящая через M, пересекает ребра трехгранного угла в точках A, B, C. Пусть прямая AM пересекает BC в точке N. Тогда, если проведенная плоскость отсекает тетраэдр наименьшего объема, точка N должна быть серединой BC. В противном случае, поворачивая плоскость вокруг прямой AN, мы сможем уменьшить объем тетраэдра.

235. Если h — высота сегмента, то его объем равен $\frac{1}{2}Sh - \frac{1}{3}\pi h^3$. Наибольшим объем будет при $h=\sqrt{\frac{S}{2\pi}}$; он будет равен $\frac{S}{3}\sqrt{\frac{S}{2\pi}}$.

236. Заметим, что тень, отбрасываемая одной лишь верхней гранью куба (считая, что все остальные грани прозрачны), представляет из себя квадрат со стороной $\frac{ab}{b-a}$. Отсюда следует, что площадь тени, отбрасываемой кубом, будет наименьшей, когда источник света расположен над верхней гранью (освещена одна верхняя грань куба); она будет равна $\left(\frac{ab}{b-a}\right)^2$ с учетом площади нижней грани куба.

237. Утверждение 1) верно, докажем это. Обозначим через M_1 многоугольник, получающийся при пересечении нашего многогранника плоскостью, не проходящей через его центр, S — площадь этого многоугольника. M_2 — многоугольник, симметричный M_1 относительно центра многогранника. Обозначим через П наименьший выпуклый многогранник, содержащий M_1 и M_2 (П называется *выпуклой оболочкой* M_1 и M_2). Очевидно, П — центрально-симметричный многогранник, его центр совпадает с центром исходного многогранника. Все вершины П есть или вершины M_1 или вершины M_2. Пусть M — многоугольник, получающийся при пересечении П плоскостью, проходящей через центр, параллельной граням M_1 и M_2, q — его площадь. Возьмем какую-либо грань N многогранника П, отличную от M_1 и M_2. Очевидно, что любое сечение многогранника П плоскостью, параллельной N, должно или одновременно пересекать все три многоугольника M_1, M_2 и M или не пересекать ни один из них, причем, ввиду выпуклости многогранника П, отрезки l_1, l_2 и l, по которым эта плоскость пересекает M_1, M_2 и M, связаны соотношением $l \geqslant \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$. Отсюда следует, что $q \geqslant S$. (Проинтегрируем неравенство $l \geqslant \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$ по всевозможным плоскостям, параллельным N.)

Утверждение 2) неверно. Построим пример. Рассмотрим в декартовой системе координат многогранник, точки которого удовлетворяют неравенству $|x| + |y| + |z| \leqslant 1$. (Этот многогранник пред-

(авляет собой правильный октаэдр.) Все грани этого многогранника ть правильные треугольники со стороной $\sqrt{2}$ и радиусом опи-нной окружности $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Сечение этого многогранника плоско-ью, проходящей через начало координат и параллельной лю-ой его грани, представляет собой правильный шестиугольник со ороной $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и таким же радиусом описанной окружности. Но $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Замечание. Для произвольного выпуклого центрально-имметричного тела справедливо следующее утверждение. Пусть R R_0 — радиусы наименьших окружностей, содержащих сечения нного тела двумя параллельными плоскостями, причем вторая лоскость проходит через центр, тогда $R_0 \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} R$. При этом, как ы уже видели, равенство достигается для правильного октаэдра.

238. $\frac{4}{3}$.

239. Пусть A и B — вершины конусов, M и N — две точки а окружности оснований, L — точка, диаметрально противополож-ая точке M ($|AM| = \sqrt{r^2 + H^2}$, $|BM| = \sqrt{r^2 + h^2}$). Проведем рез M плоскость, перпендикулярную AM, и обозначим через , N_1 и L_1 проекции B, N и L на эту плоскость. Расстояние между M и BN равно расстоянию между M и B_1N_1 и не может быть ольше, чем $|MB_1|$.

Из условия $h \leqslant H$ следует, что $|MB_1| \leqslant |ML_1|$, т. е. что точка находится внутри или на границе проекции основания конусов проведенную плоскость, и расстояние между M и B_1N_1 равно B_1, если MB_1 и B_1N_1 перпендикулярны.

Ответ: $\frac{(h + H) r}{\sqrt{r^2 + H^2}}$.

240. Продолжим ребро B_1B за точку B и возьмем на продолже-ии точку K, $|BK| = a$. Нетрудно видеть, что K равноудалена от ех сторон четырехугольника AB_1CD. Возьмем теперь на диагона-и B_1D точку L так, что $\frac{|B_1L|}{|LD|} = \sqrt{2}$. Точка L является основанием ссектрис треугольников B_1AD и B_1CD и, значит, L также равно-далена от сторон четырехугольника AB_1CD. Теперь можно дока-ть, что все точки прямой KL равноудалены от сторон четырехуголь-ника. Таким образом, искомый радиус равен кратчайшему расстоя-нию между прямой KL и любой из прямых, образующих четырех-гольник AB_1CD. Найдем расстояние, например, между прямыми L и AD. Спроектируем K и L на плоскость CDD_1C_1. Получим точ-и K_1 и L_1. Искомое расстояние равно расстоянию от точки D до рямой K_1L_1.

Ответ: $a\sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$.

241. Пусть на ребре двугранного угла лежит диагональ AC_1 уба, грани угла пересекают ребра куба в точках M и N. Нетрудно аметить, что, если объем части куба внутри этого угла достигает

своего наибольшего или наименьшего значения, то площади треугольников AC_1M и AC_1N должны быть равны (в противном случае, поворачивая угол в нужном направлении, мы сможем этот объем как увеличить, так и уменьшить).

Если $0 < \alpha \leqslant 60°$, то рассматриваемая часть куба имеет объем, заключенный в интервале от $\dfrac{1}{2\sqrt{3}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}$ до $\dfrac{2}{3\left(1+\sqrt{3}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right)}$.

При $\alpha = 60°$ этот объем постоянен и равен $^1/_6$.

При $60° < \alpha \leqslant 120°$ нужно концы интервала увеличить на $^1/_6$, а α заменить на $\alpha - 60°$, при $120° < \alpha \leqslant 180°$ — увеличить на $^1/_3$, а α заменить на $\alpha - 120°$.

242. Заметим, что площадь проекции любого параллелепипеда всегда вдвое больше площади проекции какого-либо треугольника с вершинами в концах трех ребер параллелепипеда, выходящими из одной его вершины. Для прямоугольного параллелепипеда все такие треугольники равны. Наибольшая площадь проекции прямоугольного параллелепипеда будет в том случае, когда один из таких треугольников параллелен плоскости, на которую проектируется параллелепипед. Таким образом, наибольшая площадь проекции равна $\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$.

243. Докажите, что объем такого тетраэдра меньше, чем объем тетраэдра, две грани которого — правильные треугольники со стороной 1, образующие прямой угол.

244. 1) Это утверждение неверно. Например, возьмем внутри треугольника ABC две точки D_1 и E_1 так, чтобы сумма расстояний от D_1 до вершин треугольника была бы меньше суммы расстояний от E_1 до вершин. Возьмем теперь точку D достаточно близко к D_1 так, чтобы сумма расстояний от D до вершин A, B и C оставалась бы меньше суммы расстояний от точки E_1. Точку E возьмем внутри $ABCD$ на перпендикуляре к плоскости ABC, восставленном в точке E_1.

2) Это утверждение верно. Докажем это. Обозначим через M точку пересечения прямой DE с плоскостью ABC. Очевидно, M — внутри треугольника ABC.

Прямые AM, BM и CM разбивают плоскость треугольника ABC на шесть частей. Проекция D на плоскость ABC — точка D_1 — находится в одной из этих шести частей. В зависимости от того, где находится D_1, один из углов $\widehat{D_1MA}$, $\widehat{D_1MB}$, $\widehat{D_1MC}$ — тупой. Если это $\widehat{D_1MA}$, то и $\widehat{DMA}$ будет тупым, а, значит, и $\widehat{DEA}$ тоже. Отсюда следует, что $|DE| < |DA|$.

245. Пусть $2a$ — сторона основания, h — высота пирамиды. Тогда R равен радиусу окружности, описанной около равнобедренного треугольника с основанием $2a\sqrt{2}$ и высотой h, $R = \dfrac{2a^2 + h^2}{2h}$; r равен радиусу окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием $2a$ и высотой h,

$$r = \frac{a}{h}\left(\sqrt{a^2 + h^2} - a\right).$$

Пусть

$$\frac{R}{r} = \frac{2a^2 + h^2}{2a\left(\sqrt{a^2 + h^2} - a\right)} = k, \qquad h^2 = xa^2.$$

Будем иметь $2+x=2k(\sqrt{1+x}-1)$, откуда $x^2+4(1+k-k^2)x+4+8k=0$. Дискриминант этого уравнения равен $16k^2(k^2-2k-1)$. Таким образом, $k \geqslant \sqrt{2}+1$, что и требовалось.

246. Центры тяжести граней тетраэдра служат вершинами тетраэдра, подобного данному с коэффициентом подобия $1/3$. Следовательно, радиус сферы, проходящей через центры тяжестей граней данного тетраэдра, равен $R/3$. Очевидно, этот радиус не может быть меньше радиуса сферы, вписанной в данный тетраэдр.

247. Пусть в тетраэдре $ABCD$ $|AB|=b$, $|CD|=c$, остальные ребра равны a. Если N — середина AB, M — середина CD, то прямая MN является осью симметрии тетраэдра $ABCD$ (рис. 49, *а*).

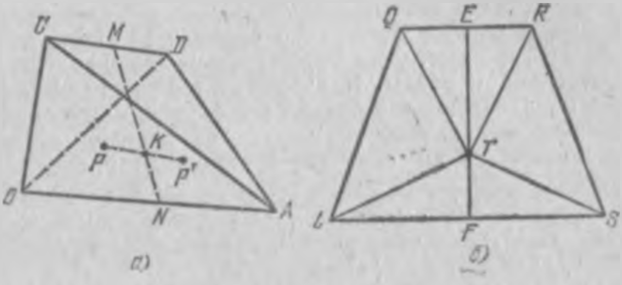


Рис. 49.

Теперь нетрудно доказать, что точка, для которой сумма расстояний до вершин тетраэдра достигает наименьшего значения, должна находиться на прямой MN. В самом деле, возьмем произвольную точку P и точку P', симметричную ей относительно прямой MN. Тогда суммы расстояний от P и P' до вершин тетраэдра равны. Если K — середина PP' (K лежит на MN), то в треугольниках PAP', PBP', PCP' и PDP' AK, BK, CK и DK — медианы, а медиана треугольника меньше полусуммы сторон, ее заключающих.

Величину $|MN|$ нетрудно найти,

$$|MN|=\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}-\frac{c^2}{4}}=d.$$

Рассмотрим равнобочную трапецию $LQRS$ (рис. 49, *б*), в которой основания $|LS|$ и $|QR|$ равны b и c, а высота равна d. Пусть F и E — середины оснований LS и QR. Если K — точка на MN, а T — на FE, причем $|FT|=|NK|$, то, очевидно, суммы расстояний от K до вершин A, B, C и D и от T до вершин L, S, Q и R равны. А в трапеции $LQRS$ (да и в любом выпуклом четырехугольнике) сумма расстояний до вершин достигает наименьшего значения в точке пересечения диагоналей и равна сумме диагоналей.

О т в е т: $\sqrt{4a^2+2bc}$.

248. Докажем, что кратчайший путь, ведущий из точки A окружности большего основания, в диаметрально противоположную точку C другого основания, состоит из образующей AB и диаметра BC. Его длина $2R$. Обозначим через r — радиус меньшего основания, O — его центр. Рассмотрим путь, идущий из A в некоторую точку M меньшего основания. Дуга $\widetilde{AM}$, расположенная на

боковой поверхности конуса, будет иметь наименьшую длину, если на развертке боковой поверхности конуса ей будет соответствовать отрезок прямой. Но развертка боковой поверхности конуса с углом между образующей и основанием, равным $\pi/3$, и радиусом основания R представляет собой полукруг радиуса $2R$. Значит, развертка усеченного конуса есть полукольцо. При этом, если дуге $\overset{\frown}{BM}$ на

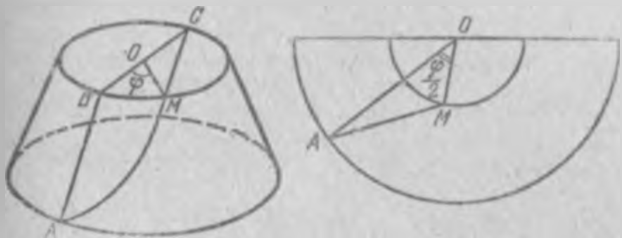


Рис. 50.

основании соответствовал центральный угол φ, то на развертке этой дуге будет соответствовать центральный угол $\frac{\varphi}{2}$ (рис. 50). Следовательно,

$$|AM|^2 = 4R^2 + 4r^2 - 8Rr\cos\frac{\varphi}{2}, \quad |MC| = 2r\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Нам осталось доказать, что

$$\sqrt{4R^2 + 4r^2 - 8Rr\cos\frac{\varphi}{2}} + 2r\cos\frac{\varphi}{2} \geqslant 2R.$$

Это неравенство доказывается с помощью очевидных преобразований.

249. Зафиксируем величины $|a|$, $|b|$, $|c|$, обозначим через x, y и z косинусы углов соответственно между a и b, b и c, c и a.

Рассмотрим разность между левой и правой частями доказываемого неравенства.

Получим

$$|a| + |b| + |c| + \\ + \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + 2|a|\cdot|b|x + 2|b|\cdot|c|y + 2|c|\cdot|a|z} - \\ - \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + 2|a|\cdot|b|x} - \sqrt{|b|^2 + |c|^2 + 2|b|\cdot|c|y} - \\ - \sqrt{|c|^2 + |a|^2 + 2|c|\cdot|a|z} = f(x, y, z).$$

Заметим, что функция $\varphi(t) = \sqrt{d+t} - \sqrt{l+t} = \dfrac{d-l}{\sqrt{d+t} + \sqrt{l+t}}$ монотонна по t. Из этого следует, что $f(x, y, z)$ достигает своего наименьшего значения, когда x, y, z равны ± 1, т. е. когда векторы a, b и c коллинеарны. В этом случае наше неравенство легко проверяется.

250. Пусть прямая MN пересекает D_1C_1 в точке L. Обозначим: $|AM| = x$, $|BN| = y$. Из условия следует, что $x > a$, $y > a$. Спроектировав все точки на плоскость ABB_1A_1, найдем $\dfrac{|C_1L|}{|LD_1|} =$

$= \dfrac{a}{x-a}$, спроектировав же их на плоскость $ABCD$, найдем $\dfrac{|C_1L|}{|LD_1|} = \dfrac{y-a}{a}$. Следовательно, $\dfrac{a}{x-a} = \dfrac{y-a}{a}$, откуда $xy = (x+y)a$. Но $(x+y)^2 \geqslant 4xy$. Значит, $xy \geqslant 4a^2$.

Теперь получим $|MN|^2 = x^2 + y^2 + a^2 = (x+y)^2 - 2xy + a^2 = \dfrac{(xy)^2}{a^2} - 2xy + a^2 = \dfrac{1}{a^2}(xy - a^2)^2 \geqslant 9a^2$. Наименьшее значение $|MN|$ равно $3a$.

251. Если x — длина двух других сторон прямоугольника, то объем пирамиды равен $\dfrac{ax}{3}\sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{x^2}{4}}$. Наибольшее значение объема будет при $x = \sqrt{\dfrac{4b^2 - a^2}{2}}$, оно равно $\dfrac{a(4b^2 - a^2)}{12}$.

252. Пусть M — точка на прямой AB_1, N — на прямой BC_1, M_1 и N_1 — проекции M и N на плоскость $ABCD$. Обозначим: $|BM_1| = x$, $|BN_1| = y$, тогда

$$|M_1N_1| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |MN| = \sqrt{x^2 + y^2 + (a - x - y)^2}.$$

По условию $|MN| = 2|M_1N_1|$, следовательно, $(a - x - y)^2 = 3(x^2 + y^2)$. Пусть $x^2 + y^2 = u^2$, $x + y = v$, тогда $2u^2 - v^2 \geqslant 0$, а поскольку $u^2 = {}^1/_3(a - v)^2$, то, заменяя u^2 в неравенстве, связывающем u и v, получим неравенство для v: $v^2 + 4av - 2a^2 < 0$, откуда $-a(2 + \sqrt{6}) < v < a(\sqrt{6} - 2)$. Теперь найдем наименьшее значение $|MN|$, оно равно $2a(\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

253. Рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $2R$. Расположим оси данных цилиндров на прямых AA_1, DC, B_1C_1.

а) Центр куба удален от всех ребер куба на расстояние $R\sqrt{2}$. Любая точка пространства удалена на расстояние большее, чем $R\sqrt{2}$, хотя бы от одного ребра AA_1, DC, B_1C_1. Это следует из того, что цилиндры с осями AA_1, DC, B_1C_1 и радиусами $R\sqrt{2}$ имеют единственную общую точку — центр куба. Следовательно, радиус наименьшего шара, касающегося всех трех цилиндров, равен $R(\sqrt{2}-1)$.

б) Если K, L и M — середины ребер AA_1, DC и B_1C_1, то прямая, проходящая через центр куба перпендикулярно плоскости KLM, удалена от прямых AA_1, DC и B_1B_1 на расстояние $R\sqrt{2}$; $\triangle KLM$ — правильный, его центр совпадает с центром куба. Отсюда следует, что любая прямая, пересекающая плоскость KLM, удалена хотя бы от одной из вершин $\triangle KLM$ на расстояние не большее, чем радиус описанной около него окружности, равный $R\sqrt{2}$. Таким образом, радиус наибольшего цилиндра, касающегося трех данных и удовлетворяющего условиям задачи, равен $R(\sqrt{2}-1)$.

254. Пусть $ABCD$ — тетраэдр наибольшего объема, O — центр данных сфер. Каждый отрезок, соединяющий O с вершиной тетраэдра, должен быть перпендикулярен грани, противоположной этой вершине. Если, например, AO не перпендикулярен плоскости BCD, то на поверхности той сферы, на которой лежит точка A, можно найти точки, более удаленные от плоскости BCD, чем точка A. (Это рассуждение, очевидно, остается верным, если A, B, C и D лежат

на поверхностях различных сфер и даже не обязательно концентрических.) Отсюда следует, что противоположные ребра тетраэдра $ABCD$ попарно перпендикулярны. Пусть, далее, точки A и B лежат на сфере радиуса $R=\sqrt{10}$, а C и D — на сфере радиуса $r=2$. Обозначим через x и y расстояния от O до AB и CD соответственно.

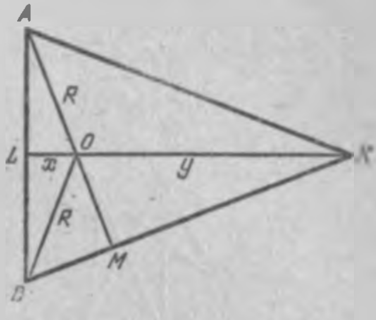


Рис. 51.

Проведем через AB сечение, перпендикулярное CD. Обозначим через K точку пересечения этой плоскости с CD. Учитывая свойства нашего тетраэдра $ABCD$, нетрудно доказать, что $|AK|=|BK|$, O — точка пересечения высот $\triangle ABK$. Проведем высоты KL и AM (рис. 51). Из подобия треугольников ALO и OKM найдем $|OM|=\frac{xy}{R}$. Далее, $|AB|=2\sqrt{R^2-x^2}$, и из подобия треугольников AOL и AMB получим

$$\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}=\frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{R+\frac{xy}{R}},$$

откуда $2x^2+xy=R^2$. Точно так же получим уравнение $2y^2+xy=r^2$. Из системы уравнений

$$\begin{cases} 2x^2+xy=10,\\ 2y^2+xy=4\end{cases}$$

найдем $x=2$, $y=1$. Объем тетраэдра $ABCD$ будет равен $6\sqrt{2}$.

255. Пусть A — вершина трехгранного угла, плоские углы которого прямые, B — вершина другого угла. Возьмем на отрезке AB точку M такую, что $2|AM|=|MB|$. Проведем через точку M плоскость, перпендикулярную AB. Проведенная плоскость пересечет каждый из этих двух трехгранных углов по правильному треугольнику со стороной $b=a\sqrt{\frac{2}{3}}$. На рис. 52,*а* $\triangle PQR$ соответствует сечению трехгранного угла с вершиной A. Грань BCD отсекает от пирамиды $APQR$ пирамиду $QFKL$ (где находится точка F, понятно из рис. 52, *б*). Объем этой пирамиды пропорционален произведению $|QK|\cdot|QL|\cdot|QF|$. Величина $|QF|$, очевидно, достигает наибольшего значения при $\alpha=\pi/3$, где $\alpha=\widehat{CMQ}$. Докажем, что $|KQ|\times\times|QL|$ достигает наибольшего значения также при $\alpha=\pi/3$. Поскольку KL касается вписанной в PQR окружности, периметр $\triangle KQL$ постоянен и равен b. Обозначим $|KQ|=x$, $|QL|=y$, тогда $|KL|=b-x-y$. Запишем теорему косинусов для $\triangle KQL$:

$$(b-x-y)^2=x^2+y^2-xy\Rightarrow b^2-2b(x+y)+3xy=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow b^2-4b\sqrt{xy}+3xy\geqslant 0.$$

Следовательно, или $\sqrt{xy}\leqslant\frac{b}{3}$, или $\sqrt{xy}\geqslant b$. Но $0<x<\frac{b}{2}$

и $0 < y < \frac{b}{2}$. Значит, $\sqrt{xy} < \frac{b}{3}$. Равенство достигается, если $x = y = \frac{b}{3}$.

Таким образом, объем пирамиды $QKLF$ наибольший при $\alpha = \pi/3$. При этом $|KQ| = |QL| = \frac{b}{3} = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$. Далее при

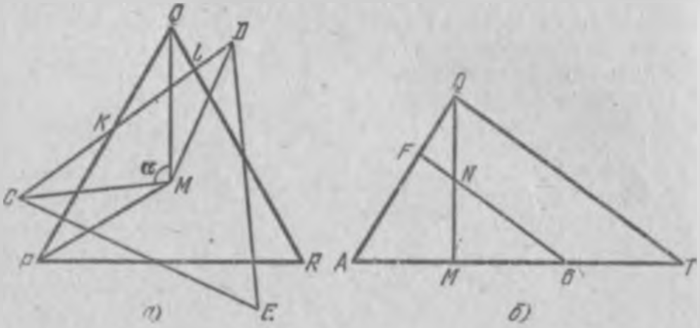


Рис. 52.

$\alpha = \pi/3$ N — середина QM (рис. 52,б). Проводя QT параллельно FB, получим $|BT| = |MB|$. Таким образом,

$$\frac{|AF|}{|FQ|} = \frac{|AB|}{|BT|} = \frac{3}{2}, \qquad |QF| = \frac{2}{5}|AQ|.$$

Объем пирамиды $APQR$ легко находится, он равен $\frac{a^3\sqrt{3}}{54}$. От пирамиды $APQR$ отрезаются три пирамиды, равные пирамиде $QFKL$.

Объем каждой из них составляет $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2}{45}$ объема $APQR$. Таким образом, при $\alpha = \pi/3$ от пирамиды $APQR$ останется многогранник объема

$$\frac{a^3\sqrt{3}}{54}\left(1 - \frac{2}{15}\right) = \frac{13a^3\sqrt{3}}{810}.$$

Рассуждая точно так же, получим, что при $\alpha = \pi/3$ от пирамиды $BCDE$ останется многогранник наименьшего объема, и объем этого многогранника будет $\frac{11a^3\sqrt{3}}{324}$.

Сложив полученные объемы, получим ответ $\frac{a^3\sqrt{3}}{20}$.

256. Обозначим $|BD| = 2x$. Нетрудно найти

$$V = V_{ABCD} = \frac{x\,|1 - 2x^2|\sqrt{3 - 4x^2}}{6(1 - x^2)}.$$

Заменив $u = 1 - x^2$, а затем $w = 4u + 1/u$, получим

$$(6V)^2 = \frac{x^2(1-2x^2)^2(3-4x^2)}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{(1-u)(2u-1)^2(4u-1)}{u^2} = \left(5 - \frac{1}{u} - 4u\right)\left(4u + \frac{1}{u} - 4\right) =$$

$$= (5-w)(w-4) = -w^2 + 9w - 20.$$

Наибольшее значение достигается при $w = 9/2$, откуда

$$x = \sqrt{1-u} = \sqrt{1 - \frac{9 \pm \sqrt{17}}{16}}.$$

Ответ: наибольшее значение V_{ABCD} равно $\frac{1}{12}$.

257. Пусть x — радиус шара, $V(x)$ — сумма объема части шара, расположенной вне тетраэдра, и части тетраэдра — вне шара. Легко видеть, что $V'(x) = S_1(x) - S_2(x)$, где $S_1(x)$ — поверхность части шара, расположенной вне тетраэдра, $S_2(x)$ — поверхность части шара, расположенной внутри тетраэдра. Минимум достигается при $S_1(x) = S_2(x)$, откуда $x = a\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

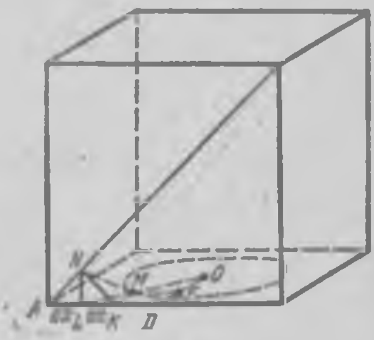


Рис. 53.

258. Пусть a, b, c — стороны основания, $p = \frac{a+b+c}{2}$, r — радиус вписанной окружности, x, y, z — расстояния от основания высоты пирамиды до сторон a, b, c, h — высота пирамиды. Тогда

$$S_{бок} = \frac{1}{2} a \sqrt{h^2 + x^2} + \frac{1}{2} b \sqrt{h^2 + y^2} + \frac{1}{2} c \sqrt{h^2 + z^2}.$$

Заметим, что функция $f(x) = \sqrt{h^2 + x^2}$ вогнута (выпукла вниз). А для таких функций справедливо неравенство:

$$\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n) \geqslant f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n),$$

$$\alpha_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1.$$

Воспользуемся этим неравенством. Получим

$$S_{бок} = p\left(\frac{a}{2p}\sqrt{h^2 + x^2} + \frac{b}{2p}\sqrt{h^2 + y^2} + \frac{c}{2p}\sqrt{h^2 + z^2}\right) \geqslant$$

$$\geqslant p\sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2p}x + \frac{b}{2p}y + \frac{c}{2p}z\right)^2} =$$

$$= p\sqrt{h^2 + \frac{S_{осн}^2}{4p^2}} = p\sqrt{h^2 + r^2},$$

что и требовалось.

259. Если O — центр окружности, L — проекция N на плоскость основания, то точка M, поскольку M — ближайшая к N точка окружности, должна находиться на отрезке LO. С другой стороны, поскольку N — ближайшая к M точка диагонали грани, MN — перпендикуляр к этой диагонали, а, значит, KN также перпендикулярна этой диагонали, где K — проекция M на грань, содержащую эту диагональ (рис. 53).

Пусть $|AL| = ax$, $\triangle ANK$ — равнобедренный прямоугольный, следовательно, $|LK| = |AL| = ax$,

$$|MK| = |OD|\frac{|LK|}{|LD|} = \frac{ax}{1-2x},$$

$$|KD| = \frac{a}{2}(1-4x).$$

Записав для $\triangle MOE$ (ME параллельна AD) теорему Пифагора, получим для x уравнение

$$\frac{(1-4x)^2}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{1-2x}\right)^2 = \frac{25}{144} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [6(1-4x)(1-2x)]^2 + [6(1-4x)]^2 = [5(1-2x)]^2.$$

Заменив в правой части $5^2 = 3^2 + 4^2$ и перенося ее влево, получим

$$[6(1-4x)(1-2x)]^2 -$$
$$-[3(1-2x)]^2 + [6(1-4x)]^2 - [4(1-2x)]^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 9(1-2x)^2(1-8x)(3-8x) + 4(5-16x)(1-8x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (1-8x)[9(1-2x)^2(3-8x) + 4(5-16x)] = 0.$$

Легко видеть, что точка K должна находиться левее точки D т. е. $0 < x < {}^1/_4$, значит, выражение в квадратных скобках не равно нулю, $x = {}^1/_8$.

Ответ: $a\frac{\sqrt{34}}{24}$.

260. а) Пусть $|SC| = d$, a, b, c — стороны $\triangle ABC$, h_a, h_b, h_c — высоты $\triangle ABC$, s — его площадь. Тогда

$$\sin\alpha = \frac{h_a}{\sqrt{d^2+b^2}}, \quad \sin\beta = \frac{h_b}{\sqrt{d^2+a^2}}, \quad \sin\gamma = \frac{h_c}{\sqrt{d^2+h_c^2}}.$$

Таким образом, получаем для d уравнение

$$\frac{\sqrt{d^2+b^2}}{h_a} + \frac{\sqrt{d^2+a^2}}{h_b} = 1 + \frac{\sqrt{d^2+h_c^2}}{h_c}.$$

Умножая это уравнение на $2s$, получим

$$a\sqrt{d^2+b^2} + b\sqrt{d^2+a^2} = 2s + \sqrt{c^2d^2+4s^2}. \quad (1)$$

Умножив и разделив левую и правую части (1) на разности соответствующих величин (считаем, что $\hat{A} \neq \hat{B}$), получим

$$\frac{a^2-b^2}{a\sqrt{d^2+b^2} - b\sqrt{d^2+a^2}} = \frac{c^2}{\sqrt{c^2d^2+4s^2}-2s},$$

откуда

$$ac^2\sqrt{d^2+b^2}-bc^2\sqrt{d^2+a^2}=(a^2-b^2)\left(\sqrt{c^2d^2+4s^2}-2s\right). \qquad (2)$$

Умножив (1) на b^2-a^2 и сложив с (2), получим

$$a(b^2+c^2-a^2)\sqrt{a^2+b^2}+b(b^2-a^2-c^2)\sqrt{d^2+a^2}=4s(b^2-a^2).$$

С помощью теорем косинусов и синусов последнее уравнение преобразуется к виду

$$\cos A\cdot\sqrt{d^2+b^2}-\cos B\cdot\sqrt{d^2+a^2}=\frac{b^2-a^2}{2R}. \qquad (3)$$

Правую часть уравнения (3) преобразуем следующим образом:

$$\frac{b^2-a^2}{2R}=2R(\sin^2 B-\sin^2 A)=2R\sin(A+B)\sin(B-A),$$

после чего умножим обе части (3) на $\cos A\cdot\sqrt{d^2+b^2}+\cos B\times\times\sqrt{d^2+a^2}$, получим уравнение

$$(\cos^2 A-\cos^2 B)\,d^2+b^2\cos^2 A-a^2\cos^2 B=$$
$$=2R\sin(A+B)\sin(B-A)\left(\cos A\cdot\sqrt{d^2+b^2}+\cos B\cdot\sqrt{d^2+a^2}\right). \qquad (4)$$

В уравнении (4) $\cos^2 A-\cos^2 B=\sin(A+B)\sin(B-A)$, $b^2\cos^2 A-a^2\cos^2 B=4R^2\sin(B+A)\sin(B-A)$. Следовательно, после сокращения уравнение (4) преобразуется в

$$\cos A\cdot\sqrt{d^2+b^2}+\cos B\cdot\sqrt{d^2+a^2}=\frac{d^2}{2R}+2R. \qquad (4')$$

Сложив (3) и (4′), получим

$$2\cos A\cdot\sqrt{d^2+b^2}=\frac{d^2}{2R}+2R(\sin^2 B+\cos^2 A),$$

откуда

$$\left(\sqrt{d^2+b^2}-2R\cos A\right)^2=0,$$

$$d^2=4R^2(\cos^2 A-\sin^2 B)=4R^2\cos(A+B)\cos(A-B).$$

Таким образом,

$$|SC|=2R\sqrt{\cos(A+B)\cos(A-B)}.$$

Задача имеет решение, если $A+B<90°$, т. е. в треугольнике ABC угол C — тупой.

б) Воспользуемся обозначениями пункта а). Тогда наше неравенство перепишется в виде

$$\frac{\sqrt{d^2+a^2}}{h_b}+\frac{\sqrt{d^2+b^2}}{h_a}-\frac{\sqrt{d^2+h_c^2}}{h_c}\geqslant 1.$$

Если угол C — острый, то правая часть, как это следует из пункта а), никогда не равна 1, следовательно, неравенство имеет место, поскольку оно выполняется при $d=0$. Если же C — угол тупой (или прямой), правая часть равна 1 при единственном значении d (если C — прямой угол, то $d = 0$). Но при $d = 0$ и достаточно больших значениях d неравенство очевидно (при больших d оно следует из неравенства треугольника), следовательно, если бы при каком-либо значении d левая часть была бы меньше 1, то левая часть принимала бы значение, равное 1, при двух различных значениях d.

261. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр. Возьмем точки M и N на ребрах BC и BD и решим следующую задачу: при каком положении точек M и N радиус наименьшей окружности, содержащей внутри себя треугольник AMN (рассматриваются окружности, расположенные в плоскости AMN), достигает наименьшего значения? (Очевидно, радиус наименьшего отверстия не может быть меньше величины этого радиуса. Для этого достаточно рассмотреть тот момент в процессе прохождения тетраэдра сквозь отверстие, когда две вершины тетраэдра находятся по одну сторону от плоскости отверстия, третья — по другую, а четвертая — в плоскости отверстия.)

Предположим, что точки M и N соответствуют искомому треугольнику. Допустим, этот треугольник — остроугольный. Тогда наименьшая окружность, его содержащая, совпадает с описанной окружностью. Опишем около треугольника AMN окружность и рассмотрим тело, получающееся при вращении дуги AMN этой окружности около хорды AN. Прямая BC должна касаться поверхности этого тела. В противном случае на BC мы могли бы взять точку M_1 так, что радиус окружности, описанной около $\triangle AM_1N$, был бы меньше радиуса окружности, описанной около $\triangle AMN$. Тем более BC должна касаться поверхности сферы, проходящей через A, M и N, имеющей центр в плоскости AMN. Точно так же этой сферы должна касаться и прямая BD. Следовательно, $|BM| = |BN|$. Обозначим $|BM| = |BN| = x$. Пусть K — середина MN, L — проекция B на плоскость AMN (L — на продолжении AK). Из предыдущего следует, что LM и LN — касательные к окружности, описанной около $\triangle AMN$. $\triangle AMN$ — равнобедренный, $|AM| = |AN| = \sqrt{x^2 - x + 1}$, $|MN| = x$. Если $\widehat{MAN} = \alpha$, то

$$\cos\alpha = \frac{x^2 - 2x + 2}{2(x^2 - x + 1)}, \quad \sin\alpha = \frac{x\sqrt{3x^2 - 4x + 4}}{2(x^2 - x + 1)},$$

$$|LK| = |MK|\operatorname{tg}\alpha = \frac{x^2\sqrt{3x^2 - 4x + 4}}{2(x^2 - 2x + 2)}.$$

Рассмотрим $\triangle AKB$, $\widehat{AKB} = \beta > 180°$; $\cos\beta = \dfrac{3x - 2}{\sqrt{3(3x^2 - 4x + 4)}}$, $|LK| = -|KB|\cos\beta = \dfrac{x(2 - 3x)}{2\sqrt{3x^2 - 4x + 4}}$. Приравнивая два выражения для $|LK|$, получим для x после упрощений уравнение

$$3x^3 - 6x^2 + 7x - 2 = 0. \qquad (1)$$

Радиус окружности, описанной около $\triangle AMN$, будет

$$R = \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{3x^2 - 4x + 4}}.$$

(Можно показать, что, если $\triangle AMN$ — прямоугольный, то его гипотенуза не меньше, чем $\sqrt{15 - 10\sqrt{2}} > 0{,}9$.) Покажем, что в отверстие найденного радиуса наш тетраэдр может пройти.

Отметим на ребрах CB и CA точки L и P так, что $|CL| = |CP| = |BM| = |BN| = x$, где x удовлетворяет уравнению (1).

Поставим тетраэдр на плоскость, содержащую данное отверстие так, чтобы M и N были на границе отверстия. Будем вращать тетраэдр вокруг прямой MN, пока ребро AB, пройдя отверстие, не станет параллельным нашей плоскости. Затем, оставляя AB параллельным этой плоскости, переместим тетраэдр $ABCD$ так, чтобы точки P и L попали на границу отверстия. И, наконец, будем вращать тетраэдр вокруг PL, пока ребро DC не выйдет из отверстия. (Тетраэдр окажется расположенным по другую сторону от нашей плоскости, причем грань ABC будет лежать в этой плоскости.)

Ответ: радиус наименьшего отверстия $R = \dfrac{x^2 - x + 1}{\sqrt{3x^2 - 4x + 4}}$, где x — корень уравнения $3x^3 - 6x^2 + 7x - 2 = 0$. Соответствующие вычисления приводят к следующим приближенным значениям $x \approx 0{,}3913$, $R \approx 0{,}4478$ с ошибкой, не превосходящей $0{,}00005$.

262. Пусть S — вершина угла. Возьмем на ребрах точки A, B и C так, что $|SA| = |SB| = |SC|$. Биссектрисы углов ASB и BSC проходят через середины отрезков AB и BC, а биссектриса угла, смежного с углом CSA, параллельна CA.

264. $\left[\dfrac{1}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}\right]$, если $\dfrac{1}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$ — число не целое, $\dfrac{1}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}} - 1$, если $\dfrac{1}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$ — число целое, где $[x]$ — целая часть x.

265. Данные прямые будем рассматривать как оси координат. Пусть прямая образует с этими осями углы α, β и γ. Тогда проекции векторов $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OC_1}$ на оси OA, OB и OC соответственно будут равны $a\cos 2\alpha$, $a\cos 2\beta$, $a\cos 2\gamma$, $a = |OA|$. Следовательно, M — точка пересечения плоскостей, проходящих через A_1, B_1, C_1 соответственно перпендикулярно OA, OB, OC,— будет иметь координаты ($a\cos 2\alpha$, $a\cos 2\beta$, $a\cos 2\gamma$). Множество точек с координатами ($\cos^2\alpha$, $\cos^2\beta$, $\cos^2\gamma$) есть треугольник с вершинами в концах единичных векторов осей. Следовательно, искомое геометрическое место точек также есть треугольник, вершины которого имеют координаты $(-a, -a, a)$; $(-a, a, -a)$; $(a, -a, -a)$.

266. Обозначим данные прямые через l_1 и l_2. Проведем через l_1 плоскость p_1, параллельную l_2, а через l_2 — плоскость p_2, параллельную l_1. Очевидно, что середины отрезков с концами на l_1 и l_2 принадлежат плоскости p, параллельной p_1 и p_2 и равноудаленной от p_1 и p_2. (Можно показать, что, если рассматривать всевозможные такие отрезки, их середины целиком заполнят плоскость p.) Спроектируем теперь эти отрезки на плоскость p параллельно заданной плоскости. Их концы теперь будут лежать на двух прямых, являющихся проекциями прямых l_1 и l_2, а сами проекции окажутся параллельными заданной прямой плоскости p, представляющей собой линию пересечения плоскости p и заданной плоскости. Из этого следует, что искомое геометрическое место точек есть прямая.

267. а) Все пространство.

б) Точно так же, как это делалось в задаче 266, можно доказать, что геометрическое место точек, делящих в данном отношении все-

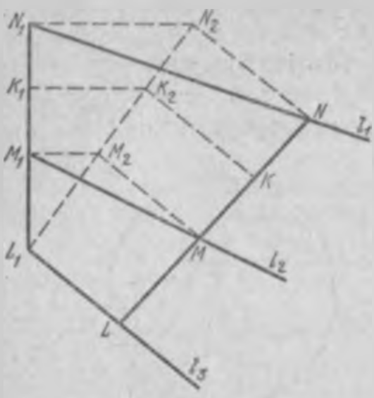


Рис. 54.

возможные отрезки, параллельные данной плоскости, с концами на данных скрещивающихся прямых, есть прямая линия. Применяя дважды это утверждение (сначала найдем геометрическое место середин сторон AB, а затем — геометрическое место центров тяжести треугольников ABC), докажем, что в этом случае геометрическое место центров тяжести треугольников ABC есть прямая линия.

268. Проведем через общий перпендикуляр к прямым плоскость p, перпендикулярную l_3. Пусть прямая NM пересекает l_3 в точке L, N_1, M_1, L_1 — точки пересечения прямых l_1, l_2, l_3 с общим перпендикуляром, N_2, M_2 — проекции N и M на проведенную плоскость, α и β — углы, образуемые прямыми l_1 и l_2 с этой плоскостью, K — середина NM, K_1 и K_2 — проекции K на общий перпендикуляр и на плоскость p (рис. 54). Имеем

$$\frac{|KK_2|}{|K_1K_2|} = \frac{|NN_2| + |MM_2|}{|N_2N_1| + |M_2M_1|} = \frac{|N_2N_1| \operatorname{tg}\alpha + |M_2M_1| \operatorname{tg}\beta}{|N_2N_1| + |M_2M_1|} =$$

$$= \frac{|N_1L_1| \operatorname{tg}\alpha + |M_1L_1| \operatorname{tg}\beta}{|N_1L_1| + |M_1L_1|} = \mathrm{const},$$

значит, точка K описывает прямую линию.

269. Введем прямоугольную систему координат, выбрав ее начало в точке A. Пусть $e_1(a_1, b_1, c_1)$, $e_2(a_2, b_2, c_2)$, ..., $e_n(a_n, b_n, c_n)$ — единичные векторы, параллельные данным прямым, $e(x, y, z)$ — единичный вектор, параллельный прямой, удовлетворяющей условиям задачи. Таким образом, получаем для e уравнение

$$|a_1x + b_1y + c_1z| +$$
$$+ |a_2x + b_2y + c_2z| + \ldots + |a_nx + b_ny + c_nz| = \mathrm{const}.$$

Легко теперь видеть, что геометрическим местом концов вектора e будет множество окружностей или их частей, расположенных на поверхности единичной сферы с центром в A.

270. Поместим в точках A, B, C, A_1, B_1 и C_1 равные грузы. Тогда центр тяжести полученной системы грузов будет совпадать с центром тяжести треугольника с вершинами в серединах отрезков AA_1, BB_1, CC_1.

С другой стороны, центр тяжести этой системы совпадает с серединой отрезка GH, где G — центр тяжести треугольника ABC, H — центр тяжести трех грузов, находящихся в A_1, B_1 и C_1.

При изменении A_1, B_1 и C_1 точка H перемещается по прямой l, а точка G остается неподвижной. Значит, точка M — середина GH будет описывать прямую, параллельную l.

271. Проведем через A прямую t, параллельную l. Искомое геометрическое место точек представляет собой цилиндрическую поверхность, в которой l и t — диаметрально противоположные образующие, исключая сами прямые l и t.

272. Докажем сначала, что если прямая MK касается сферы β, то она касается также и сферы α. Рассмотрим сечение данных сфер плоскостью, проходящей через точки M, K, A, B и N (рис. 55). $\widehat{MKB}$ измеряется половиной дуги $\widetilde{KB}$, заключенной внутри этого угла, следовательно, $\widehat{MKB} = \widehat{BAN}$, так как угловые измерения дуг $\widetilde{KB}$ и $\widetilde{BN}$ равны (берутся дуги, расположенные по разные сторо-

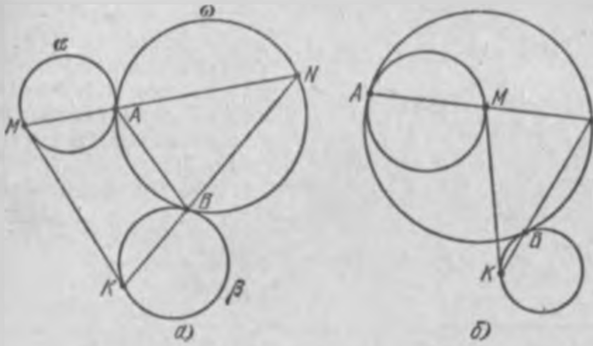


Рис. 55.

ны от прямой KN, если касание внешнее (рис. 55, *а*), и расположенные по одну сторону, если касание внутреннее (рис. 55, *б*)). Отсюда следует, что $\widehat{AMK} = \widehat{ABN}$ или $\widehat{AMK} = 180° - \widehat{ABN}$, а это означает, что $\widehat{AMK}$ измеряется половиной $\widetilde{AM}$, так как соответственные дуги $\widetilde{AM}$ и $\widetilde{AN}$ имеют равное угловое измерение, т. е. MK касается окружности, по которой приведенное сечение пересекает сферу α.

Теперь можно доказать, что геометрическое место точек M есть окружность.

273. Пусть A и B — данные точки, C — точка пересечения прямой AB с данной плоскостью, M — точка касания какого-либо шара с плоскостью. Поскольку $|CM|^2 = |CA| \cdot |CB|$, M лежит на окружности с центром в точке C и радиусом $\sqrt{|CA| \cdot |CB|}$. Следовательно, центр сферы принадлежит боковой поверхности прямого цилиндра, основанием которого является эта окружность. С другой стороны, центр сферы принадлежит плоскости, проходящей через середину AB и перпендикулярной AB. Таким образом, искомое геометрическое место точек есть линия пересечения боковой поверхности цилиндра и плоскости (эта линия называется *эллипсом*).

274. Обозначим через O_1, O_2 и R_1, R_2 соответственно центры и радиусы данных сфер; M — середина какой-либо общей касательной. Тогда легко видеть, что

$$|O_1M|^2 - |O_2M|^2 = R_1^2 - R_2^2,$$

и, следовательно, M лежит в плоскости, перпендикулярной отрезку O_1O_2 и пересекающей этот отрезок в такой точке N, что

$$|O_1N|^2 - |O_2N|^2 = R_1^2 - R_2^2.$$

Посмотрим, в каких пределах может меняться величина $|NM|$. Пусть $|O_1O_2| = a$ и $R_1 \geqslant R_2$, тогда

$$|O_1N| = \frac{1}{2}\left(\frac{R_1^2 - R_2^2}{a} + a\right).$$

Если $2x$ — длина общей касательной, середина которой — точка M, то

$$|MN|^2 = |O_1M|^2 - |O_1N|^2 = x^2 + R_1^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{R_1^2 - R_2^2}{a} + a\right).$$

Теперь, если $a \geqslant R_1 + R_2$, то величина $4x^2$ меняется в пределах от $a^2 - (R_1 + R_2)^2$ до $a^2 - (R_1 - R_2)^2$, а, значит, в этом случае геометрическим местом точек M будет кольцо, плоскость которого перпендикулярна O_1O_2, центр находится в точке N, внутренний радиус равен

$$\frac{1}{2}(R_1 - R_2)\sqrt{1 - \frac{(R_1 + R_2)^2}{a^2}},$$

а внешний —

$$\frac{1}{2}(R_1 + R_2)\sqrt{1 - \frac{(R_1 - R_2)^2}{a^2}}.$$

Если же $a < R_1 + R_2$, т. е. сферы пересекаются, то внутренний радиус кольца будет равен радиусу окружности их пересечения, т. е. он будет

$$\frac{1}{2a}\sqrt{(a + R_1 + R_2)(a + R_1 - R_2)(a + R_2 - R_1)(R_1 + R_2 - a)}.$$

275. Обозначим через A и B точки касания прямых l_1 и l_2 со сферой, а через K — точку касания прямой MN со сферой. Будем иметь

$$|AM| = |MK|, \quad |BN| = |NK|.$$

Спроектируем l_1 и l_2 на плоскость, перпендикулярную AB. Пусть A_1, M_1, N_1 и K_1 — соответственно проекции точек A (а также B), M, N и K. Очевидно,

$$\frac{|A_1M_1|}{|AM|} = p, \quad \frac{|A_1N_1|}{|BN|} = q,$$

где p и q — постоянные величины. Пусть теперь d и h — расстояния от K_1 до прямых A_1M_1 и A_1N_1.

Будем иметь

$$\frac{d}{h} = \frac{\frac{1}{2}|A_1M_1|\,d}{\frac{1}{2}|A_1N_1|\,h} \cdot \frac{|A_1N_1|}{|A_1M_1|} = \frac{S_{A_1M_1K_1}}{S_{A_1N_1K_1}} \cdot \frac{|A_1N_1|}{|A_1M_1|} =$$

$$= \frac{|M_1K_1|}{|N_1K_1|} \cdot \frac{|A_1N_1|}{|A_1M_1|} = \frac{|MK|}{|NK|} \cdot \frac{|A_1N_1|}{|A_1M_1|} =$$

$$= \frac{|AM|}{|A_1M_1|} \cdot \frac{|A_1N_1|}{|BN|} = \frac{q}{p}.$$

Таким образом, отношение расстояний от точки K_1 до двух заданных прямых плоскости постоянно. Это означает, что точка K_1 принадлежит одной из двух прямых, проходящих через точку A_1, А искомое геометрическое место точек представляет собой две окружности на поверхности данной сферы. Эти окружности получаются при пересечении сферы двумя плоскостями, проходящими через прямые, которые описывает точка K_1, и прямую AB. Сами точки A и B исключаются.

279. Пусть BK — высота $\triangle ABC$, H — точка пересечения высот $\triangle ABC$, BM — высота $\triangle DBC$, N — точка пересечения высот $\triangle DBC$. Докажем, что N является проекцией точки H на плоскость DBC.

В самом деле, KM перпендикулярна DC, поскольку BM перпендикулярна DC, а KM есть проекция BM на плоскость ADC. Таким образом, плоскость KMB перпендикулярна ребру DC, следовательно, HN перпендикулярна DC. Точно так же HN перпендикулярна ребру DB. Значит, HN перпендикулярна плоскости DBC. Нетрудно доказать теперь, что N лежит в плоскости, проходящей через AD перпендикулярно BC.

Искомое геометрическое место точек представляет собой окружность с диаметром HL, где L — основание высоты, опущенной из A на BC, плоскость которой перпендикулярна плоскости ABC.

283. Обозначим через P и Q точки пересечения противоположных сторон четырехугольника $ABCD$. Если сечение плоскостью боковой поверхности пирамиды $ABCDM$ есть параллелограмм, то плоскость сечения должна быть параллельна плоскости PQM, при этом стороны параллелограмма будут параллельны прямым PM и QM. Значит, для того чтобы в сечении мог получиться прямоугольник, угол $\widehat{PMQ}$ должен быть прямым, т. е. M лежит на поверхности сферы с диаметром PQ. (Тем самым пункт а) решен.)

б) Обозначим через K и L точки пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ с прямой PQ. Поскольку диагонали параллелограмма, получающегося при пересечении боковой поверхности пирамиды $ABCDM$ плоскостью, будут параллельны прямым MK и ML, этот параллелограмм будет ромбом, если $\widehat{KML} = 90°$, т. е. M лежит на поверхности сферы с диаметром KL.

в) Из двух предыдущих пунктов следует, что геометрическим местом точек M будет окружность, являющаяся пересечением сфер с диаметрами PQ и KL.

г) Геометрическим местом точек является коническая поверхность с вершиной в точке пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, образующей которой является окружность из предыдущего пункта.

284. Если K и L — середины BC и AM, O — центр сферы, описанной около $ABCM$, то, поскольку G — середина LK и OG перпендикулярна LK, $|OL| = |OK|$. Отсюда следует, что $|AM| = |BC|$, т. е. M лежит на поверхности сферы с центром в A и радиусом $|BC|$.

Пусть, далее, N — центр тяжести $\triangle ABC$, O_1 — центр окружности, описанной около $\triangle ABC$, G_1 — проекция G на плоскость ABC. Поскольку по условию OG перпендикулярна AK, то и O_1G_1 перпендикулярна AK. Значит, G лежит в плоскости, проходящей через O_1 и перпендикулярной AK. Отсюда, поскольку

$$|NG| = \frac{1}{4}|NM|,$$

следует, что и точка M лежит в плоскости, перпендикулярной AK.

Таким образом, искомое геометрическое место точек представляет собой линию пересечения сферы и плоскости, т. е., вообще говоря, является окружностью.

285. Введем прямоугольную систему координат, взяв за начало O вершину трехгранного угла, а оси направим по ребрам этого угла. Пусть плоскость окружности составляет с координатными плоскостями XOY, YOZ и ZOX углы α, β и γ. Тогда точка O_1 — центр окружности — будет иметь координаты $(R\sin\beta,\ R\sin\gamma,\ R\sin\alpha)$, где R — радиус окружности. Проведем из начала координат прямую, перпендикулярную плоскости окружности. Эта прямая будет образовывать с осями углы β, γ и α. Следовательно,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

и, значит,

$$|OO_1|^2 = R^2(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma) = 2R^2.$$

Таким образом, точка O_1 лежит на поверхности сферы с центром в O и радиусом $R\sqrt{2}$. С другой стороны, расстояние от O_1 до координатных плоскостей не превосходит R.

Следовательно, искомое множество представляет собой сферический треугольник, ограниченный плоскостями $x = R$, $y = R$, $z = R$ на поверхности сферы $|OO_1| = R\sqrt{2}$, расположенный в первом октанте.

286. Пусть паук находится в вершине A куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Рассмотрим треугольник DCC_1. Нетрудно доказать, что кратчайший путь, соединяющий A с любой точкой внутри треугольника DCC_1, пересекает ребро DC. При этом, если грани $ABCD$ и DCC_1D_1 «развернуть» так, чтобы получился прямоугольник, составленный из двух квадратов $ABCD$ и DCC_1D_1, то кратчайший путь будет представлять собой отрезок прямой линии. Следовательно, дуга окружности радиуса 2 см, центр которой при развертке находится в точке A, расположенная внутри треугольника DCC_1, будет являться частью границы искомого геометрического места точек. Вся граница состоит из шести таких дуг и разбивает поверхность куба на две части. Та часть, которая содержит вершину A вместе с границей, и является искомым геометрическим местом точек.

287. Примем ребра трехгранного угла за оси координат. Пусть $(x,\ y,\ z)$ — координаты вектора $\overline{OA}$, $(x_i,\ y_i,\ z_i)$ — координаты i-й стороны ломаной. Каждая сторона ломаной рассматривается как вектор. Тогда

$$x = \sum x_i,\ y = \sum y_i,\ z = \sum z_i,$$

при этом из условия задачи следует, что все x_i отличны от нуля и совпадают по знаку с x (то же верно для y_i и z_i). Очевидно, $|OA| < a$. С другой стороны,

$$|x| + |y| + |z| = \sum(|x_i| + |y_i| + |z_i|) \geqslant \sum l_i = a$$

(l_i — длина i-го звена ломаной).

Нетрудно показать, что любая точка A, удовлетворяющая условиям $|OA| < a$, $|x| + |y| + |z| > a$, где x, y, z — координаты точки A, может являться концом ломаной, имеющей не более трех звеньев, удовлетворяющей условиям задачи. Пусть, например, M_1

и M_2 — две точки, расположенные на одной прямой, выходящей из точки O такие, что $|x_1|+|y_1|+|z_1|=a$, $x_1y_1z_1\neq 0$ (x_1, y_1, z_1 — координаты точки M_1), $|OM_2|=a$. Рассмотрим ломаную с вершинами $(0, 0, 0)$, $(x_1, 0, 0)$, $(x_1, y_1, 0)$, (x_1, y_1, z_1). Длина этой ломаной равна a. «Растягивая» эту ломаную, мы получим все точки отрезка M_1M_2 (исключая M_1). Таким образом, искомое геометрическое место точек состоит их всех точек вне октаэдра $|x|+|y|+|z|=a$ и внутри или на поверхности сферы с центром в O и радиусом a. При этом исключаются точки, расположенные в координатных плоскостях.

288. Прежде всего заметим, что если r — радиус шара, вписанного в $ABCD$, то, во-первых, все ребра тетраэдра $ABCD$ больше, чем $2r$, и, во-вторых, радиус окружности, вписанной в любую грань тетраэдра, больше r. Первое утверждение очевидно. Для доказательства второго проведем через центр вписанного шара плоскость, параллельную, например, грани ABC. Получим в сечении $\triangle A_1B_1C_1$, подобный $\triangle ABC$ с коэффициентом подобия, меньшим единицы, и содержащий внутри себя окружность радиуса r.

1) Условием, определяющим множество точек A, будет неравенство $|OA|\geqslant 3r$. Равенство $|OA|=3r$ будет справедливо для правильного тетраэдра. Если бы для какой-либо точки A выполнялось бы неравенство $|OA|<3r$, то радиус наименьшего шара, содержащего тетраэдр $ABCD$, был бы меньше $3r$, что невозможно (см. задачу 246).

2) Условием, определяющим множество точек B, будет неравенство $|OB|>r\sqrt{5}$. В самом деле, если для какой-либо точки B выполнялось бы неравенство $|OB|\leqslant r\sqrt{5}$, то для $\triangle DBC$ радиус окружности, его содержащей, был бы не больше, чем $\sqrt{5r^2-r^2}=2r$, т. е. радиус окружности, вписанной в $\triangle DBC$, был бы не больше r, что невозможно.

3) Условием, определяющим множество точек C, является неравенство $|OC|>r\sqrt{2}$. В самом деле, если $|OC|\leqslant r\sqrt{2}$, то $|CD|\leqslant 2r$.

4) Условием, определяющим множество точек D, будет неравенство $|OD|>r$.

Покажем, что $|OD|$ может быть сколь угодно большим. Для этого в качестве тетраэдра $ABCD$ возьмем тетраэдр, все грани которого — равные равнобедренные треугольники, угол при вершине у которых достаточно мал. Тогда центры вписанного и описанного шара будут совпадать, а отношение $\frac{R}{r}$, где R — радиус описанного шара, может быть сколь угодно большим.

289. Если MC — гипотенуза соответствующего треугольника, то должно выполняться равенство $|MC|^2=|MA|^2+|MB|^2$. Введя прямоугольную систему координат, легко убедиться, что точка M должна описывать поверхность сферы. Найдем центр и радиус этой сферы.

Пусть C_1 — середина AB, C_2 — на продолжении CC_1, $|C_1C_2|=|CC_1|$ ($ACBC_2$ — параллелограмм). Обозначим стороны $\triangle ABC$, как обычно, через a, b и c, m_c — медиана к стороне AB. Будем иметь

$$|MA|^2+|MB|^2=2|MC_1|^2+\frac{|AB|^2}{2}=2|MC_1|^2+\frac{c^2}{2}.$$

Поскольку

$$|MA|^2 + |MB|^2 = |MC|^2,$$

получим

$$|MC|^2 - 2|MC_1|^2 = \frac{c^2}{2}. \qquad (1)$$

Пусть $\widehat{MC_2C} = \varphi$, запишем для треугольников MC_2C и MC_2C_1 теорему косинусов

$$|MC|^2 = |MC_2|^2 + 4m_c^2 - 4|MC_2|\, m_c \cos\varphi, \qquad (2)$$

$$|MC_1|^2 = |MC_2|^2 + m_c^2 - 2|MC_2|\, m_c \cos\varphi. \qquad (3)$$

Умножим (3) на 2 и вычтем из (2), получим, учитывая (1), что

$$|MC_2|^2 = 2m_c^2 - \frac{c^2}{2} = a^2 + b^2 - c^2.$$

Таким образом, для этого случая множество точек M будет не пусто, если $a^2 + b^2 - c^2 \geqslant 0$, т. е. угол C в $\triangle ABC$ не тупой. Все множество точек M, следовательно, для остроугольного треугольника состоит из трех сфер, центры которых находятся в точках C_2, A_2 и B_2 таких, что CAC_2B, ABA_2C, BCB_2A — параллелограммы, а радиусы соответственно равны $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$, $\sqrt{b^2 + c^2 - a^2}$, $\sqrt{a^2 + c^2 - b^2}$. Для прямоугольного $\triangle ABC$ искомое множество состоит из двух сфер и точки, а для тупоугольного — из двух сфер.

290. Пусть O — центр земного шара, A — точка экватора, соответствующая нулевому меридиану, M — точка на поверхности земного шара с долготой и широтой, равными φ, N — проекция M на плоскость экватора. Введя в плоскости экватора прямоугольную систему координат, взяв в качестве оси x прямую OA, а начало в точке O, получим, что N имеет координаты: $x = R\cos^2\varphi$, $y = R\cos\varphi\sin\varphi$, где R — радиус земного шара. Легко проверить, что координаты точки N удовлетворяют уравнению

$$\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4},$$

т. е. искомое множество есть окружность с центром $\left(\frac{R}{2}, 0\right)$ и радиусом $\frac{R}{2}$.

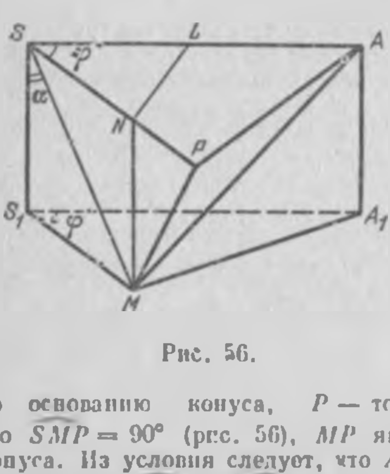


Рис. 56.

291. Введем следующие обозначения: S — вершина конуса, N — проекция точки M на плоскость, проходящую через точки S и A параллельно основанию конуса, P — точка на прямой SN такая, что $\widehat{SMP} = 90°$ (рис. 56), MP является нормалью к поверхности конуса. Из условия следует, что AP параллельна отраженному лучу. Значит, $\widehat{AMP} = \widehat{MPA}$, $|AM| = |AP|$. Пусть α — угол меж-

ду высотой конуса и образующей, $|SA| = a$. Плоскость, проходящая через M параллельно плоскости SPA, пересекает ось конуса в точке S_1, A_1 — проекция A на эту плоскость,

$$|SS_1| = x,\ \widehat{MS_1A_1} = \varphi,\ |MA_1| = y.$$

По теореме косинусов для $\triangle S_1MA_1$ будем иметь

$$y^2 = x^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha + a^2 - 2ax\,\mathrm{tg}\,\alpha\cos\varphi. \qquad (1)$$

Кроме того,

$$|PA|^2 = |MA|^2 = y^2 + x^2, \qquad (2)$$

$$|SP| = \frac{|SM|}{\sin\alpha} = \frac{x}{\cos\alpha\sin\alpha} = \frac{2x}{\sin 2\alpha}. \qquad (3)$$

Записывая теорему косинусов для $\triangle SPA$, используя соотношения (1) — (3), будем иметь

$$x^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha - 2ax\,\mathrm{tg}\,\alpha\cos\varphi + x^2 = \frac{4x^2}{\sin^2 2\alpha} - \frac{4ax}{\sin 2\alpha}\cos\varphi,$$

откуда $x = a\sin 2\alpha\cos\varphi$.

Если мы теперь восставим к SN в точке N перпендикуляр в плоскости SPA и обозначим через L его точку пересечения с SA, то

$$|SL| = \frac{|SN|}{\cos\varphi} = \frac{x\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos\varphi} = 2a\sin^2\alpha.$$

Таким образом, $|SL|$ постоянна, следовательно, точка N описывает окружность с диаметром SL.

292. При решении задачи нам понадобятся следующие утверждения из планиметрии. Если в окружности радиуса R через точку P, находящуюся на расстоянии d от ее центра, проведены две взаимно перпендикулярные хорды AD и BE, то

а) $|AD|^2 + |BE|^2 = 8R^2 - 4d^2$,

б) перпендикуляр, опущенный из P на AB, делит пополам хорду DE.

Эти два утверждения обобщаются на пространственный случай следующим образом.

Если через точку P, находящуюся внутри шара радиуса R и с центром в O, на расстоянии d от его центра проведены три взаимно перпендикулярные хорды AD, BE и CF, то

а*) $|AD|^2 + |BE|^2 + |CF|^2 = 12R^2 - 8d^2$,

б*) прямая, проходящая через P перпендикулярно плоскости ABC, проходит через точку пересечения медиан $\triangle DEF$.

Докажем пункт а*). Пусть R_1, R_2, R_3 — радиусы окружностей, описанных соответственно около четырехугольников $ABDE$, $ACDF$ и $BCEF$, d_1, d_2, d_3 — расстояния в этих четырехугольниках от центров описанных кругов до точки P, x, y, z — соответственно расстояния от точки O до плоскостей этих четырехугольников. Тогда $x^2 + y^2 + z^2 = d^2$, $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2) = 2d^2$, $R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 3R^2 - d^2$.

Таким образом, воспользовавшись утверждением пункта а), получим

$$|AD|^2+|BE|^2+|CF|^2=\frac{1}{2}[(|AD|^2+|BE|^2)+$$
$$+(|BE|^2+|CF|^2)+(|CF|^2+|AD|^2)]=$$
$$=\frac{1}{2}(8R_1^2-4d_1^2+8R_1^2-4d_2^2+8R_3^2-4d_3^2)=12R^2-8d^2.$$

Для доказательства пункта б*) спроектируем проведенную прямую на плоскости четырехугольников $ABDE$, $ACDF$ и $BCEF$, после чего воспользуемся пунктом б).

Перейдем теперь к утверждению нашей задачи. Построим на отрезках PA, PB и PC параллелепипед и обозначим через M вершину этого параллелепипеда, противоположную точке P.

Аналогично, для отрезков PD, PE и PF определим точку N. K — точка пересечения PM с плоскостью ABC, Q — середина PM, T — середина PN, O_1 — центр окружности, описанной около $\triangle ABC$, H — основание перпендикуляра, опущенного из P на ABC.

Из пункта б*) следует, что H лежит на прямой NP. Далее, K — точка пересечения медиан треугольника ABC, $|PK|=\frac{1}{3}|PM|$. Прямая OQ перпендикулярна плоскости ABC и проходит через точку O_1, поскольку O и Q — центры двух сфер, проходящих через точки A, B и C. (Заметим, что попутно мы здесь доказали, что точки O_1, K и H находятся на одной прямой, причем $|KH|=2|O_1K|$. Как известно, эта прямая называется *прямой Эйлера*.)

Таким образом, $OQ \parallel NP$, точно так же $TO \parallel MP$. Значит, O — середина NM.

Возьмем на отрезке OP точку S так, что $|PS|=\frac{1}{3}|PO|$. Перпендикуляр, опущенный из S на KH, проходит через середину KH. Следовательно, $|SK|=|SH|$. Но $SK \parallel OM$,

$$|SK|=\frac{1}{3}|OM|=\frac{1}{6}|NM|.$$

Из пункта а*) следует, что $|NM|^2=12R^2-8d^2$ (NM — диагональ параллелепипеда, ребра которого равны $|AD|$, $|BE|$, $|CF|$), т. е. $|SK|=\frac{1}{3}\sqrt{3R^2-2d^2}$ — величина, не зависящая от того, как провели отрезки PA, PB, PC.

293. Обозначим через a, b и c единичные векторы, направленные по ребрам трехгранного угла. Пусть, далее, $\overline{ON}=e$, P — центр сферы, $\overline{OP}=u$, $\overline{OA}=xa$, $\overline{OB}=yb$, $\overline{OC}=zc$.

Точки O, N, A, B и C принадлежат одной сфере с центром в P. Это означает

$$(u-e)^2=u^2, \quad (xa-u)^2=u^2,$$
$$(yb-u)^2=u^2, \quad (zc-u)^2=u^2,$$

откуда

$$\begin{cases} e^2-2eu=0,\\ x-2au=0,\\ y-2bu=0,\\ z-2cu=0. \end{cases} \qquad (1)$$

Пусть $e = \alpha a + \beta b + \gamma c$. Умножая второе, третье и четвертое уравнения системы (1) соответственно на α, β и γ и вычитая из первого, получим

$$e^2 - \alpha x - \beta y - \gamma z = 0. \qquad (2)$$

Если M — центр тяжести $\triangle ABC$, то

$$\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}) = \frac{1}{3}(xa + yb + zc).$$

Учитывая уравнение (2), можем сделать вывод, что геометрическим местом точек M будет плоскость.

294. Докажите, что каждая из этих плоскостей проходит через точку, симметричную точке N относительно центра тяжести тетраэдра.

295. Докажите, что все эти плоскости проходят через точку, симметричную центру описанной около тетраэдра сферы относительно его центра тяжести.

296. При решении задачи 295 мы доказали, что точка Монжа симметрична центру описанной около тетраэдра сферы относительно центра тяжести тетраэдра. Следовательно, если точка Монжа принадлежит плоскости какой-либо грани тетраэдра, то центр описанной сферы удален от этой грани на расстояние, равное половине соответствующей высоты, и расположен по ту же сторону от грани, что и сам тетраэдр. Из этого легко получить утверждение нашей задачи.

297. Воспользуйтесь равенством

$$|MA|^2 + |MB|^2 = \frac{4|MD|^2 + |AB|^2}{2},$$

где D — середина AB, и тем, что в произвольном тетраэдре сумма квадратов его противоположных ребер равна удвоенной сумме квадратов расстояний между серединами двух пар его остальных ребер (см. задачу 21).

298. Обозначим площади граней тетраэдра через S_1, S_2, S_3, S_4; V — объем тетраэдра. Если r — радиус шара, касающегося всех плоскостей, образующих тетраэдр, то при соответствующем выборе знаков $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, 2, 3, 4$, должно выполняться равенство $(\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2 + \varepsilon_3 S_3 + \varepsilon_4 S_4)\frac{r}{3} = V$. При этом, если для данного набора ε_i величина r, определяемая последним равенством, положительна, то соответствующий шар существует.

Так, у произвольного тетраэдра всегда существует один вписанный шар ($\varepsilon_i = +1$) и четыре вневписанных шара (одно $\varepsilon_i = -1$, остальные $+1$), т. е. четыре таких шара, каждый из которых имеет центр вне тетраэдра и касается одной его грани во внутренней точке этой грани.

Далее, очевидно, что если при каком-либо выборе ε_i шар существует, то для противоположного набора ε_i шар не существует. Это означает, что шаров не более восьми. Ровно восемь их будет в том случае, когда сумма площадей любых двух граней не равна сумме площадей двух других.

299. Для любых двух соседних сторон четырехугольника существуют две плоскости, равноудаленные от них (биссекторные плоскости самого угла четырехугольника и угла, с ним смежного). При этом, если три такие плоскости, соответствующие трем вершиям четырехугольника, пересекаются в некоторой точке, то через эту точку проходит одна из двух биссекторных плоскостей четвертой вершины. Таким образом, при нахождении точек, равноудаленных от прямых, образующих четырехугольник, нам достаточно рассматривать биссекторные плоскости трех углов этого четырехугольника. Поскольку каждой вершине соответствуют две плоскости, точек пересечения будет, вообще говоря, восемь.

Нам осталось выяснить, при каких условиях какие-то три такие плоскости не пересекаются. Так как наш четырехугольник пространственный, никакие две биссекторные плоскости не параллельны. Значит, осталась возможность, когда одна биссекторная

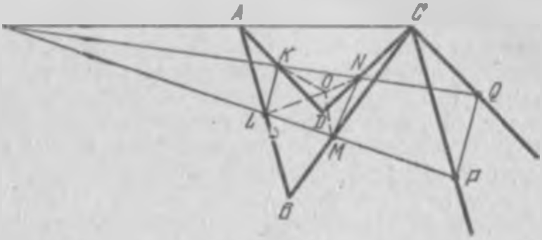


Рис. 57.

плоскость параллельна линии пересечения двух других. А это означает, что, если через какую-либо точку пространства провести три плоскости, параллельные данным, то эти три плоскости будут пересекаться по прямой.

Пусть, для определенности, не пересекаются биссекторные плоскости трех внутренних углов четырехугольника $ABCD$. Проведем через вершину C прямые, параллельные сторонам AB и AD (рис. 57), и отложим на этих прямых отрезки CP и CQ, $|CP| = |CQ|$. Такие же отрезки CM и CN отложим на сторонах CB и CD.

Из приведенных выше рассуждений следует, что биссекторные плоскости углов MCP, PCQ, QCN и NCM пересекаются по прямой, и, значит, все точки этой прямой равноудалены от прямых CP, CQ, CN, CM, т. е. прямые CP, CQ, CN, CM лежат на поверхности конуса, а четырехугольник $PQNM$ является вписанным. Пусть плоскость четырехугольника $PQNM$ пересекает AB и AD в точках L и K. Прямая LK параллельна QP, а это означает, что $NMLK$ — также вписанный четырехугольник. Кроме того, нетрудно видеть, что

$$|LB| = |MB|, \quad |KD| = |DN|, \quad |KA| = |AL|.$$

Отсюда, в частности, следует, что $|AB| + |DC| = |AD| + |BC|$.

Пусть теперь O — центр окружности, описанной около четырехугольника $KLMN$. Из равенства треугольников LOB и MOB следует, что O равноудалена от прямых AB и BC. Точно так же покажем, что O равноудалена от всех прямых, образующих четырехугольник $ABCD$, т. е. O — центр шара, касающегося прямых AB, BC, CD и DA. Ввиду произвольности выбора точек P и Q получим, что в этом случае существует бесконечно много шаров, касающихся прямых AB, BC, CD и DA. Точно так же разбираются и другие случаи, при этом будут возникать аналогичные соотношения между сторонами $ABCD$: $|AB| + |AD| = |CD| + |CB|$, $|AB| + |BC| = |AD| + |DC|$. Нетрудно показать, что указанные соотношения между сторонами четырехугольника $ABCD$ являются необходимыми и достаточными условиями существования бесконечного числа шаров, касающихся сторон четырехугольника. Во всех остальных случаях таких шаров в точности восемь.

300. Используя для объема тетраэдра формулу задачи 11, докажем, что каждое из рассматриваемых отношений равно $\frac{4S_1S_2S_3S_4}{9V^2}$, где S_1, S_2, S_3, S_4 — площади граней тетраэдра, V — его объем.

301. Если h_i ($i = 1, 2, 3, 4$) — высота соответствующей грани тетраэдра, то

$$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} S_i^2(l_i^2-R_i^2)} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} S_i^2h_i^2\,\frac{l_i^2-R_i^2}{h_i^2}} = V\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\frac{l_i^2-R_i^2}{h_i^2}}.$$

Если теперь d_i — расстояние от центра описанного шара до i-й грани, R — радиус этого шара, то

$$l_i^2 - R_i^2 = (l_i^2 - h_i^2) - (R^2 - d_i^2) + h_i^2 = [R^2 - (h_i - d_i)^2] - (R^2 - d_i^2) + h_i^2 = 2h_id_i.$$

Таким образом, под корнем оказалось выражение

$$\sum\frac{d_i}{h_i} = 1$$

(см. задачу 182), что и требовалось.

(Мы предполагали, что центр описанного шара находится внутри тетраэдра. Если центр находится вне его, рассуждения такие же, при этом одну из величин d_i следует считать отрицательной.)

302. Обозначим длины ребер тетраэдра $ABCD$ так, как показано на рис. 58,*а*. Проведем через вершину A плоскость, касающуюся описанного около тетраэдра $ABCD$ шара. Тетраэдр ABC_1D_1 на рисунке образован этой касательной плоскостью, плоскостями ABC, ABD, а также плоскостью, проходящей через B параллельно грани ADC. Аналогично тетраэдр AB_2C_2D образован этой же касательной плоскостью, плоскостями ABD, ADC и плоскостью, проходящей через D параллельно ABC.

Из подобия треугольников ABC и ABC_1 (рис. 58, *б*, AC_1 — касательная к окружности, описанной около $\triangle ABC$, следовательно, $\widehat{BAC_1} = \widehat{BCA}$, кроме того, $BC_1 \parallel AC$, значит, $\widehat{C_1BA} = \widehat{BAC}$) найдем $|AC_1| = \frac{ac}{b}$. Аналогично найдем $|AD_1| = \frac{nc}{m}$, $|AC_2| = \frac{mp}{b}$, $|AB_2| = \frac{mn}{c}$. Но треугольники AC_1D_1 и AB_2C_2 подобны, значит,

$$\frac{|C_1D_1|}{|AC_2|} = \frac{|AD_1|}{|AB_2|}, \quad |C_1D_1| = \frac{pc^2}{bm}.$$

ним четырехугольника, пересекаются в некоторой точке, то через эту точку проходит одна из двух биссекторных плоскостей четвертой вершины. Таким образом, при нахождении точек, равноудаленных от прямых, образующих четырехугольник, нам достаточно рассматривать биссекторные плоскости трех углов этого четырехугольника. Поскольку каждой вершине соответствуют две плоскости, точек пересечения будет, вообще говоря, восемь.

Нам осталось выяснить, при каких условиях какие-то три такие плоскости не пересекаются. Так как наш четырехугольник пространственный, никакие две биссекторные плоскости не параллельны. Значит, осталась возможность, когда одна биссекторная

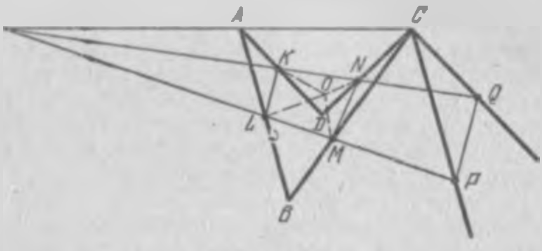


Рис. 57.

плоскость параллельна линии пересечения двух других. А это означает, что, если через какую-либо точку пространства провести три плоскости, параллельные данным, то эти три плоскости будут пересекаться по прямой.

Пусть, для определенности, не пересекаются биссекторные плоскости трех внутренних углов четырехугольника $ABCD$. Проведем через вершину C прямые, параллельные сторонам AB и AD (рис. 57), и отложим на этих прямых отрезки CP и CQ, $|CP| = |CQ|$. Такие же отрезки CM и CN отложим на сторонах CB и CD.

Из приведенных выше рассуждений следует, что биссекторные плоскости углов MCP, PCQ, QCN и NCM пересекаются по прямой, и, значит, все точки этой прямой равноудалены от прямых CP, CQ, CN, CM, т. е. прямые CP, CQ, CN, CM лежат на поверхности конуса, а четырехугольник $PQNM$ является вписанным. Пусть плоскость четырехугольника $PQNM$ пересекает AB и AD в точках L и K. Прямая LK параллельна QP, а это означает, что $NMLK$ — также вписанный четырехугольник. Кроме того, нетрудно видеть, что

$$|LB| = |MB|, \quad |KD| = |DN|, \quad |KA| = |AL|.$$

Отсюда, в частности, следует, что $|AB| + |DC| = |AD| + |BC|$.

Пусть теперь O — центр окружности, описанной около четырехугольника $KLMN$. Из равенства треугольников LOB и MOB следует, что O равноудалена от прямых AB и BC. Точно так же покажем, что O равноудалена от всех прямых, образующих четырехугольник $ABCD$, т. е. O — центр шара, касающегося прямых AB, BC, CD и DA. Ввиду произвольности выбора точек P и Q получим, что в этом случае существует бесконечно много шаров, касающихся прямых AB, BC, CD и DA. Точно так же разбираются и другие случаи, при этом будут возникать аналогичные соотношения между сторонами $ABCD$: $|AB| + |AD| = |CD| + |CB|$, $|AB| + |BC| = |AD| + |DC|$. Нетрудно показать, что указанные соотношения между сторонами четырехугольника $ABCD$ являются необходимыми и достаточными условиями существования бесконечного числа шаров, касающихся сторон четырехугольника. Во всех остальных случаях таких шаров в точности восемь.

300. Используя для объема тетраэдра формулу задачи 11, докажем, что каждое из рассматриваемых отношений равно $\frac{4S_1S_2S_3S_4}{9V^2}$, где S_1, S_2, S_3, S_4 — площади граней тетраэдра, V — его объем.

301. Если h_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ — высота соответствующей грани тетраэдра, то

$$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} S_i^2(l_i^2-R_i^2)} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} S_i^2h_i^2\,\frac{l_i^2-R_i^2}{h_i^2}} =$$

$$= V\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\frac{l_i^2-R_i^2}{h_i^2}}.$$

Если теперь d_i — расстояние от центра описанного шара до i-й грани, R — радиус этого шара, то

$$l_i^2 - R_i^2 = (l_i^2 - h_i^2) - (R^2 - d_i^2) + h_i^2 =$$

$$= [R^2 - (h_i - d_i)^2] - (R^2 - d_i^2) + h_i^2 = 2h_id_i.$$

Таким образом, под корнем оказалось выражение

$$\sum \frac{d_i}{h_i} = 1$$

(см. задачу 182), что и требовалось.

(Мы предполагали, что центр описанного шара находится внутри тетраэдра. Если центр находится вне его, рассуждения такие же, при этом одну из величин d_i следует считать отрицательной.)

302. Обозначим длины ребер тетраэдра $ABCD$ так, как показано на рис. 58,*а*. Проведем через вершину A плоскость, касающуюся описанного около тетраэдра $ABCD$ шара. Тетраэдр ABC_1D_1 на рисунке образован этой касательной плоскостью, плоскостями ABC, ABD, а также плоскостью, проходящей через B параллельно грани ADC. Аналогично тетраэдр AB_2C_2D образован этой же касательной плоскостью, плоскостями ABD, ADC и плоскостью, проходящей через D параллельно ABC.

Из подобия треугольников ABC и ABC_1 (рис. 58, *б*, AC_1 — касательная к окружности, описанной около $\triangle ABC$, следовательно, $\widehat{BAC_1} = \widehat{BCA}$, кроме того, $BC_1 \parallel AC$, значит, $\widehat{C_1BA} = \widehat{BAC}$) найдем $|AC_1| = \frac{ac}{b}$. Аналогично найдем $|AD_1| = \frac{nc}{m}$, $|AC_2| = \frac{mp}{b}$, $|AB_2| = \frac{mn}{c}$. Но треугольники AC_1D_1 и AB_2C_2 подобны, значит,

$$\frac{|C_1D_1|}{|AC_2|} = \frac{|AD_1|}{|AB_2|}, \quad |C_1D_1| = \frac{pc^2}{bm}.$$

Заметим, что если длины сторон $\triangle AC_1D_1$ умножить на величину $\frac{bm}{c}$, то их длины окажутся численно равными величинам am, bn и cp, таким образом,

$$S_{AD_1C_1} = \frac{c^2}{b^2m^2} S.$$

Пусть, далее, AM — диаметр описанного шара, BK — высота

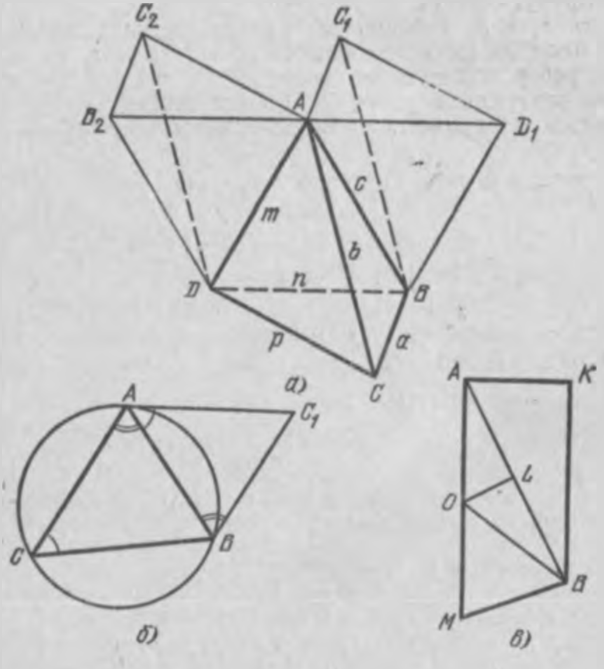


Рис. 58.

пирамиды ABC_1D_1, опущенная из B на AC_1D_1 (рис. 58, в). Из подобия треугольников ABK и OLA ($OL \perp AB$) найдем $|BK| = \frac{c^2}{2R}$. Значит,

$$V_{AD_1C_1B} = \frac{1}{3} \frac{c^4}{2Rb^2m^2} S.$$

И, наконец,

$$\frac{V_{AD_1C_1B}}{V} = \frac{S_{ABC_1}S_{ABD_1}}{S_{ABC}S_{ABD}} = \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{c^2}{m^2}, \quad V_{AD_1C_1B} = \frac{c^4}{b^2m^2} V.$$

Сравнивая два выражения для $V_{AD_1C_1B}$, получим справедливость доказываемого утверждения.

Замечание. Из наших рассуждений следует, что углы треугольника, длины сторон которого численно равны произведениям длин противоположных ребер тетраэдра, равны углам между касательными к окружностям, описанным около трех граней тетраэдра. Касательные проведены через общую для этих граней вершину и расположены в плоскости соответствующей грани. Легко видеть, что это же будет верно и для вырожденного тетраэдра — плоского четырехугольника. Отсюда, в частности, можно получить теорему косинусов (теорему Бретшнейдера (1) № 1<9) для плоского четырехугольника.

303. Пусть S_1 и S_2 — площади граней, имеющих общее ребро a, S_3 и S_4 — площади двух оставшихся граней. Пусть, далее, a, m и n — длины ребер, образующих грань S_1, а α, γ и δ — примыкающие к ним двугранные углы, V — объем тетраэдра. Тогда нетрудно убедиться в справедливости следующего равенства:

$$a\frac{3V}{S_1}\operatorname{ctg}\alpha + m\frac{3V}{S_1}\operatorname{ctg}\gamma + n\frac{3V}{S_1}\operatorname{ctg}\delta = 2S_1,$$

или

$$a\operatorname{ctg}\alpha + m\operatorname{ctg}\gamma + n\operatorname{ctg}\delta = \frac{2S_1^2}{3V}.$$

Записав такие равенства для всех граней тетраэдра, сложив равенства, соответствующие граням S_1 и S_2, и вычтя два других, получим

$$a\operatorname{ctg}\alpha - b\operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{3V}(S_1^2 + S_2^2 - S_3^2 - S_4^2).$$

Возведем последнее равенство в квадрат, заменим $\operatorname{ctg}^2\alpha$ и $\operatorname{ctg}^2\beta$ на $\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1$ и $\frac{1}{\sin^2\beta} - 1$, воспользуемся равенствами

$$\frac{a^2}{\sin^2\alpha} = \frac{4S_1^2S_2^2}{9V^2}, \quad \frac{b^2}{\sin^2\beta} = \frac{4S_3^2S_4^2}{9V^2}$$

(см. задачу 11) и окончательно получим

$$a^2 + b^2 + 2ab\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{9V^2}(2Q - T),$$

где Q — сумма квадратов попарных произведений площадей граней, T — сумма четвертых степеней площадей граней.

304. Необходимость всех условий очевидна. Будем доказывать их достаточность.

а) Утверждение задачи легко доказать, если сделать развертку тетраэдра (поверхность тетраэдра надо разрезать по трем ребрам, выходящим из одной вершины).

б) Сделаем развертку тетраэдра $ABCD$ так, как показано на рис. 59, а, в предположении, что суммы плоских углов при вершинах B и C равны 180°. Точки D_1, D_2, D_3 соответствуют вершине D. Возможны два случая:

1) $|AD| = |BC|$. В этом случае $|D_2A| + |D_3A| = 2|BC| = |D_2D_3|$, т. е. $\triangle D_2AD_3$ вырождается, точка A должна совпасть с точкой K — серединой D_2D_3.

2) $|AB| = |CD|$ (или $|AC| = |BD|$). В этом случае будет $|KB| = |AB|$, причем точка A находится на срединном перпендикуляре к стороне D_2D_3. Если $\triangle D_1D_2D_3$ — остроугольный, то $|AB| < |KB|$ для точек A, расположенных внутри $\triangle KBC$, и $|AB| > |KB|$ для точек, расположенных вне $\triangle KBC$.

Если же $\triangle D_1D_2D_3$ — тупоугольный (тупой угол или при вершине D_2, или при вершине D_3), то при одной из двух вершин тетраэдра (или B, или C) один плоский угол будет больше суммы двух других углов.

в) Пусть $|AB| = |CD|$, $|AC| = |DB|$, а сумма углов при вершине D равна $180°$. Имеем $\triangle ACD = \triangle ABD$, следовательно, $\widehat{ADB} = \widehat{DAC}$.

Таким образом, $\widehat{ADB} + \widehat{ADC} + \widehat{CDB} = \widehat{DAC} + \widehat{ADC} + \widehat{CDB} = 180°$. Отсюда следует, что $\widehat{CDB} = \widehat{ACD}$ и $\triangle ACD = \triangle CDB$, $|AD| = |CB|$.

г) Разрежем тетраэдр по ребрам и образовавшиеся четыре треугольника наложим друг на друга так, чтобы совпали равные углы. На рис. 59, б одинаковые буквы соответствуют одной вершине

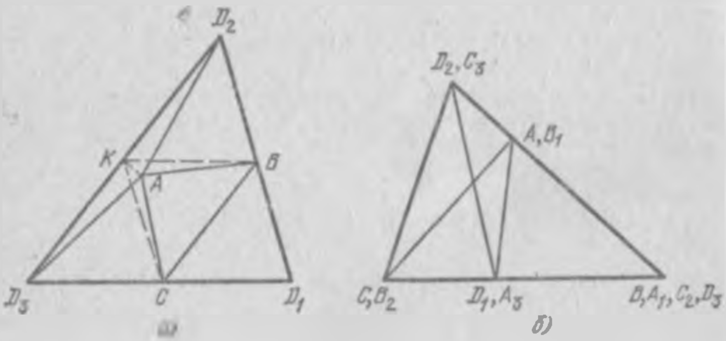


Рис. 59.

тетраэдра, одинаковые индексы — одной грани. Одинаковые буквы, соответствующие одной точке, показывают, что в этой точке совпали соответствующие вершины соответствующих треугольников. Следовательно,

$$|C_3A_3| = |CA|, \quad |B_2D_2| = |B_1D_1|,$$

а это означает, что AC_3 параллельна B_2D_1, что невозможно.

д) Спроектируем тетраэдр $ABCD$ на плоскость, параллельную ребрам AB и CD. Тогда можно доказать, что проекции треугольников ABC и ABD будут равновелики. Точно так же равновеликими будут проекции треугольников ACD и BCD. А это означает, что проекцией $ABCD$ будет параллелограмм с диагоналями AB и CD. Отсюда будут следовать равенства $|AC| = |BD|$, $|AD| = |BC|$. Точно так же доказывается равенство $|AB| = |CD|$.

е) Пусть O_1 — точка касания вписанной сферы с гранью ABC, а O_2 — с гранью BCD. Из условия следует, что O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных около ABC и BCD. Кроме того, $\triangle BCO_1 = \triangle BCO_2$. Из этого следует, что

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BO_1C} = \frac{1}{2}\widehat{BO_2C} = \widehat{BDC}.$$

Рассуждая так же, получим, что все плоские углы, прилежащи к вершине D, равны соответствующим углам треугольника ABC, т. е. их сумма равна $180°$. То же можно утверждать и про остальные вершины тетраэдра $ABCD$. Далее воспользуемся пунктом з).

ж) Достроим данный тетраэдр до параллелепипеда обычным способом, т. е. проведя через каждое ребро тетраэдра плоскость, параллельную противоположному ребру. Тогда необходимым и достаточным условием равногранности тетраэдра будет условие, чтобы получившийся параллелепипед был прямоугольным. А из того, что ребра этого параллелепипеда равны и параллельны соответствующим отрезкам, соединяющим середины противоположных ребер тетраэдра, будет следовать наше утверждение.

з) Если O — центр сферы, описанной около тетраэдра $ABCD$, то из условия будет следовать, что $\triangle AOB = \triangle COD$, поскольку оба треугольника — равнобедренные с равными боковыми сторонами, равными медианами, выходящими из вершины O (O совпадает с серединой отрезка, соединяющего середины AB и CD). Следовательно, $|AB| = |CD|$. Так же доказывается равенство других пар противоположных ребер.

и) Из того, что расстояния от центра тяжести до всех граней равны, будет следовать равенство высот тетраэдра, а затем и равновеликость его граней (см.п.д)).

305. Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ — векторы, перпендикулярные граням тетраэдра, направленные во внешнюю сторону и по длине равные площадям соответствующих граней, а $\boldsymbol{e}_a$, $\boldsymbol{e}_b$, $\boldsymbol{e}_c$, $\boldsymbol{e}_d$ — единичные векторы, имеющие те же направления, что и $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$. Пусть, далее, s обозначает сумму косинусов двугранных углов, а $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{e}_a + \boldsymbol{e}_b + \boldsymbol{e}_c + \boldsymbol{e}_d$.

Легко видеть, что $k^2 = 4-2s$. Таким образом, в самом деле, $s \leqslant 2$ и $s=2$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{e}_a + \boldsymbol{e}_b + \boldsymbol{e}_c + \boldsymbol{e}_d = 0$. Но, поскольку $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d} = 0$ (см. задачу 214), мы получаем, что при $s = 2$ длины векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ равны между собой, т. е. все грани равновелики, а из равновеликости граней следует их равенство (см. задачу 304, д)). Для завершения доказательства нам осталось показать, что $s > 0$ или что $|\boldsymbol{k}| < 2$.

Для удобства будем считать, что $|\boldsymbol{a}| = 1$, $|\boldsymbol{b}| \leqslant 1$, $|\boldsymbol{c}| \leqslant 1$, $|\boldsymbol{d}| \leqslant 1$. Тогда $\boldsymbol{e}_a = \boldsymbol{a}$, $|\boldsymbol{k}| = |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}+(\boldsymbol{e}_b-\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{e}_c-\boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{e}_d-\boldsymbol{d})| \leqslant |\boldsymbol{e}_b-\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{e}_c-\boldsymbol{c}| + |\boldsymbol{e}_d-\boldsymbol{d}| = 3-(|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|+|\boldsymbol{d}|) \leqslant 3-|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}| = 3-|\boldsymbol{a}| = 2$. Равенство может иметь место лишь в том случае, когда все векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ коллинеарны; поскольку это не так, $|\boldsymbol{k}| < 2$, $s > 0$.

306. Рассмотрим тетраэдр, все грани которого — равные треугольники, углы которых соответственно равны плоским углам нашего трехгранного угла. (Докажите, что такой тетраэдр существует.) Все трехгранные углы этого тетраэдра равны данному трехгранному углу. Сумма косинусов двугранных углов такого тетраэдра (см. задачу 304) равна 2. Следовательно, сумма косинусов двугранных углов данного трехгранного угла равна 1.

307. Достроив тетраэдр до параллелепипеда, проведя через каждое ребро плоскость, параллельную противоположному ребру, получим для равногранного тетраэдра, как известно, прямоугольный параллелепипед.

Центр вписанного шара совпадает с центром параллелепипеда, а центры вневписанных шаров находятся в вершинах параллелеторого $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Но плоскости A_1EG и $ABCD$ пересекаются по диагонали BD. Значит, точка M лежит в плоскости, проходящей через BD и образующей угол φ с плоскостью $ABCD$, а геометрическим местом проекции точек M будут два отрезка, выходящих из середины AC под углом φ к AC так, что $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$, и имеющих длину $a\frac{\sqrt{2}}{2}$ (рис. 62,в).

312. а) Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр. Если его высоты пересекаются в точке H, то DH перпендикулярна плоскости ABC и, значит, DH перпендикулярна BC. Точно так же AH перпендикулярна BC. Следовательно, плоскость DAH перпендикулярна BC, т. е. ребра DA и BC перпендикулярны.

Обратно, пусть противоположные ребра тетраэра $ABCD$ попарно перпендикулярны. Проведем через DA плоскость, перпендикулярную BC. Покажем, что высоты тетраэдра, проведенные из вершин A и D, лежат в этой плоскости.

Обозначим через K точку пересечения проведенной плоскости с ребром BC. Высота DD_1 треугольника ADK будет перпендикулярной прямым AK и BC, значит она является высотой тетраэдра. Таким образом, любые две высоты тетраэдра пересекаются, значит, все четыре пересекаются в одной точке.

б) Нетрудно доказать, что если одна высота тетраэдра проходит через точку пересечения высот соответствующей грани, то противоположные ребра тетраэдра попарно перпендикулярны. Это следует из теоремы о трех перпендикулярах. Значит, пункты а) и б) эквивалентны.

в) Равенство сумм квадратов противоположных ребер тетраэдра равносильно условию перпендикулярности противоположных ребер (см. пункт а)).

г) Достроим тетраэдр до параллелепипеда, как обычно, проведя через каждое ребро плоскость, параллельную противоположному ребру. Ребра получившегося параллелепипеда равны расстояниям между серединами скрещивающихся ребер тетраэдра. С другой стороны, условие перпендикулярности противоположных ребер тетраэдра, согласно пункту а) эквивалентное условию ортоцентричности данного тетраэдра, в свою очередь, эквивалентно условию равенства ребер получившегося параллелепипеда (диагонали каждой грани равны и параллельны двум противоположным ребрам тетраэдра, т. е. каждая грань должна быть ромбом).

д) Из задач 300, 303 следует, что это условие эквивалентно условию пункта в).

е) Пусть a и a_1, b и b_1, c и c_1—длины трех пар противоположных ребер тетраэдра, α — угол между ними. Из задачи 185 следует, что из трех чисел $aa_1\cos\alpha$, $bb_1\cos\alpha$, $cc_1\cos\alpha$ одно равно сумме двух других. Если $\cos\alpha \neq 0$, то из трех чисел aa_1, bb_1, cc_1 одно равно сумме двух других. Но это невозможно, поскольку существует треугольник, длины сторон которого численно равны величинам aa_1, bb_1, cc_1 (см. задачу 302).

313. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр. Достроим его обычным способом до параллелепипеда. Поскольку $ABCD$ — ортоцентрический, все ребра параллелепипеда будут равны между собой. Пусть A_1B_1 — диагональ грани параллелепипеда, параллельная AB, O — центр шара, описанного около $ABCD$, H — точка пересечения высот, M — центр тяжести (рис. 63). Тогда треугольники ABH и A_1B_1O симметричны относительно точки M. Это следует из того, что ABB_1A_1 — параллелограмм и, кроме того, A_1O перпендикулярна плоскости ACD (точки O и A_1 равноудалены от точек A, C и D), а, значит, параллельна BH. Точно так же OB_1 параллельна AH.

314. Введем те же обозначения, что и в предыдущей задаче. Пусть K и L — середины AB и A_1B_1. Тогда $KOLH$ — параллелограмм. Следовательно,

$$|OH|^2 = 2|OK|^2 + 2|OL|^2 - |KL|^2 =$$

$$= 2\left(R^2 - \frac{|AB|^2}{4}\right) + 2\left(R^2 - \frac{|CD|^2}{4}\right) - l^2 =$$

$$= 4R^2 - \frac{1}{2}(|AB|^2 + |CD|^2) - l^2 = 4R^2 - 3l^2.$$

315. Если $ABCD$ — ортоцентрический тетраэдр, то (см. задачу 312, в))

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2,$$

откуда

$$|AB|^2 + |AC|^2 - |BC|^2 = |AD|^2 + |AC|^2 - |CD|^2,$$

т. е. углы $\widehat{BAC}$ и $\widehat{DAC}$ или одновременно острые или тупые.

316. Сечение ортоцентрического тетраэдра любой плоскостью, параллельной противоположным ребрам и проходящей на равном расстоянии от этих ребер, есть прямоугольник, диагонали которого равны расстоянию между серединами противоположных ребер тетраэдра (все эти расстояния равны между собой, см. задачу 312, г)).

Отсюда следует, что середины всех ребер ортоцентрического тетраэдра лежат на поверхности сферы, центр которой совпадает с центром тяжести данного тетраэдра, а диаметр равен расстоянию между серединами противоположных ребер тетраэдра. Значит, все четыре окружности 9 точек лежат на поверхности этой сферы.

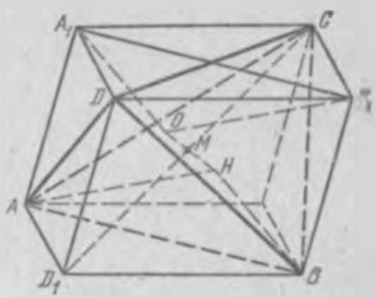


Рис. 63.

317. Пусть O, M и H — соответственно центр описанного шара, центр тяжести и ортоцентр (точка пересечения высот) ортоцентрического тетраэдра; M — середина отрезка OH (см. задачу 313). Центры тяжести граней тетраэдра служат вершинами тетраэдра, гомотетичного данному, с центром гомотетии в точке M и коэффициентом $\left(-\frac{1}{3}\right)$. При этой гомотетии точка O перейдет в точку O_1, расположенную на отрезке MH так, что $|MO_1| = \frac{1}{3}|OM|$, O_1 будет центром сферы, проходящей через центры тяжестей граней.

С другой стороны, точки, делящие отрезки высот тетраэдра от вершин до ортоцентра в отношении 2: 1, служат вершинами тетраэдра, гомотетичного данному с центром гомотетии в H и коэффициентом 1/3. При этой гомотетии точка O, как легко видеть, перейдет в ту же точку O_1. Таким образом, восемь из двенадцати точек лежат на поверхности сферы с центром в O_1 и радиусом втрое меньшим, чем радиус сферы, описанной около тетраэдра.

Докажем, что точки пересечения высот каждой грани лежат на поверхности той же сферы. Пусть O', H' и M' — центр описанной окружности, точка пересечения высот и центр тяжести какой-либо грани. O' и H' являются проекциями точек O и H на плоскость этой грани, а M' делит отрезок $O'H'$ в отношении $1:2$, считая от точки O' (известный планиметрический факт). Теперь легко убедимся (см. рис. 64), что проекция O_1 на плоскость этой грани — точка O_1' совпадает с серединой отрезка $M'H'$, т. е. O_1 равноудалена от M' и H', что и требовалось.

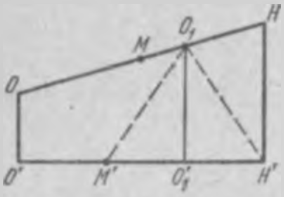


Рис. 64.

318. Центры тяжести граней ортоцентрического тетраэдра лежат на поверхности сферы гомотетичной сфере, описанной около тетраэдра, с центром гомотетии в точке M и коэффициентом 1/3 (см. решение задачи 317). Отсюда следует утверждение задачи.

319. Основания высот ортоцентрического тетраэдра лежат на поверхности сферы, гомотетичной сфере описанной около тетраэдра, с центром гомотетии в точке G и коэффициентом гомотетии $-\frac{1}{3}$ (см. решение задачи 317). Отсюда следует утверждение задачи.

320. Предположим противное. Пусть плоскости, в которых расположены дуги, пересекаются попарно на поверхности шара в точках A и A_1, B и B_1, C и C_1 (рис. 65). Поскольку каждая дуга больше $180°$, она должна содержать хотя бы одну из любых двух противоположных точек окружности, на которой она расположена.

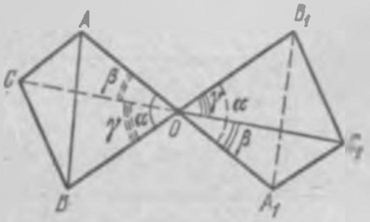


Рис. 65.

Занумеруем эти дуги и соответственно плоскости, в которых они расположены, — I, II, III. A и A_1 — точки пересечения плоскостей I и II, B и B_1 — плоскостей II и III, C и C_1 — плоскостей III и I. Каждая из точек A, A_1, B, B_1, C, C_1 должна принадлежать одной дуге. Пусть A_1 и C_1 принадлежат дуге I, B_1 — дуге II. Тогда B и C должны принадлежать дуге III, A — дуге II. Обозначим через α, β, γ плоские углы трехгранных углов, как показано на рисунке, O — центр сферы. Поскольку дуга I не содержит точек A и C, должно выполняться неравенство $360° - \beta > 300°$.

Аналогично, поскольку дуга II не содержит точек B и A_1, должно быть $180° + \alpha > 300°$ и, наконец, для дуги III будем иметь $360° - \gamma > 300°$. Таким образом, $\beta < 60°$, $\alpha > 120°$, $\gamma < 60°$, значит, $\alpha > \beta + \gamma$, что невозможно.

321. Пусть A и B — две точки на поверхности сферы, C — точка на меньшей дуге большого круга, проходящего через A и B.

Докажем, что кратчайший путь из A и B должен проходить через C. Рассмотрим две окружности α и β на поверхности сферы, проходящие через C, с центрами на радиусах OA и OB (O — центр сферы). Пусть линия, соединяющая A с B, не проходит через

C и пересекает окружность α в точке M, окружность β в точке N.

Повернув окружность α вместе с той частью линии, которая расположена внутри нее, так, чтобы M совпала с C, а окружность β так, чтобы N совпала с C, мы получим линию, соединяющую A и B, длина которой, очевидно, меньше длины рассматриваемой линии.

322. Описанная сфера может не существовать. Примером может служить многогранник, построенный следующим образом. Возьмем куб и на его гранях, как на основаниях, во внешнюю сторону построим правильные четырехугольные пирамиды с двугранными углами при основании, равными 45°. В результате мы получим 12-гранник (ребра куба не являются ребрами этого многогранника), имеющий 14 вершин, 8 из которых являются вершинами куба, 6 — вершинами построенных пирамид, не сопадающими с вершинами куба.

Легко видеть, что все ребра этого многогранника равны между собой и равноудалены от центра куба, в то время как вершины не могут принадлежать одной сфере.

323. Заметим прежде всего, что площадь сферического «двуугольника», образованного пересечением поверхности сферы с гранями двугранного угла величины α, ребро которого проходит через центр сферы, равна $2\alpha R^2$. Это следует из того, что эта площадь пропорциональна величине α, а при $\alpha = \pi$ она равна $2\pi R^2$.

Каждой паре плоскостей, образующих две грани данного трехгранного угла, соответствуют на поверхности сферы два «двуугольника». Сложив их площади, мы получим поверхность сферы, увеличенную на $4S_{\triangle}$, где $S_{\triangle}$ — площадь искомого треугольника. Таким образом,

$$S_{\triangle} = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

Величина $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ называется *сферическим избытком* сферического треугольника.

324. Рассмотрим сферу с центром внутри многогранника и спроектируем ребра многогранника из центра сферы на поверхность сферы.

Поверхность сферы разобьется на многоугольники. Если n_k — число сторон k-го многоугольника, A_k — сумма его углов, S_k — площадь, то

$$S_k = R^2[A_k - \pi(n_k - 2)].$$

Сложив эти равенства для всех K, получим

$$4\pi R^2 = R^2(2\pi N - 2\pi k + 2\pi M).$$

Отсюда

$$N - K + M = 2.$$

325. Пусть α — центральный угол, соответствующий сферическому радиусу окружности (угол между радиусами сферы, проведенными из центра сферы в центр окружности и точку на окружности).

Рассмотрим сферический треугольник, соответствующий трехгранному углу с вершиной в центре сферы, одно ребро которого OL проходит через центр окружности, другое — OA через точку на окружности, а третье — OB расположено так, что плоскость OAB касается окружности, причем двугранный угол при ребре OL равен φ, $\widehat{LOA} = \alpha$.

По 2-й теореме косинусов (см. задачу 166) найдем двугранный угол при ребре OB, он равен $\arccos(\cos\alpha \sin\varphi)$. Любой описанный многоугольник (а наш многоугольник можно считать описанным, в противном случае его площадь можно было бы уменьшить) можно разбить на треугольники описанного вида. Сложив их площади, мы увидим, что площадь многоугольника достигает наименьшего значения вместе с суммой $\arccos(\cos\alpha \sin\varphi_1) + \arccos(\cos\alpha \sin\varphi_2) + \ldots + \arccos(\cos\alpha \sin\varphi_N)$, где $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ — соответствующие двугранные углы, $\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_N = 2\pi$. После этого можно воспользоваться тем, что функция $\arccos(k \sin\varphi)$ является вогнутой (выпуклой вниз) функцией при $0 < k < 1$. Отсюда следует, что минимум нашей суммы достигается при $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_N$.

326. Обозначим, как в задаче 324, через N — число граней, K — число ребер, M — число вершин нашего многогранника,

$$N - K + M = 2. \tag{1}$$

Поскольку из каждой вершины выходит по крайней мере три ребра и при этом каждое ребро считается дважды, $M \leqslant \frac{2}{3}K$. Подставляя M в (1) получим

$$N - \frac{1}{3}K \geqslant 2,$$

откуда $2K \leqslant 6N - 12$, $\frac{2K}{N} < 6$. Последнее означает, что найдется грань, число сторон в которой меньше 6. В самом деле, занумеруем грани и обозначим через $n_1, n_2, \ldots, n_N$ число сторон каждой грани. Тогда

$$\frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_N}{N} = \frac{2K}{N} < 6.$$

327. Если каждая грань имеет более трех сторон и из каждой вершины выходит более трех ребер, то (обозначения задачи 324)

$$K \geqslant 2M, \quad K \geqslant 2N$$

и $N - K + M \leqslant 0$, что невозможно.

328. Если все грани — треугольники, то число ребер кратно 3. Если найдется хотя бы одна грань с числом сторон более трех, то число ребер не меньше восьми. $2n$ ребер ($n \geqslant 3$) имеет n-угольная пирамида. $(2n + 3)$ ребер ($n \geqslant 3$) имеет многогранник, который получится, если от n-угольной пирамиды «отсечь» треугольную плоскостью, проходящей достаточно близко к одной из вершин основания.

329. Если данный многогранник имеет n граней, то каждая грань может иметь от трех до $(n - 1)$ сторон. Отсюда следует, что найдутся две грани с равным числом.

330. Рассмотрим так называемую d-окрестность нашего многогранника, т. е. множество точек, каждая из которых удалена хотя бы от одной точки многогранника на расстояние, не большее чем d. Поверхность получившегося тела состоит из плоских частей, равных соответствующим граням многогранника, цилиндрических частей, соответствующих ребрам многогранника (причем, если

l_i — длина какого-либо ребра, α_i — двугранный угол при этом ребре, то поверхность части соответствующего цилиндра равна $(\pi - \alpha_i)\, l_i d)$, и сферических частей, соответствующих вершинам многогранника, суммарная поверхность которых равна поверхности сферы радиуса d. С другой стороны, площадь поверхности d-окрестности многогранника меньше поверхности сферы радиуса $d + 1$, т. е.

$$S + d\sum (\pi - \alpha_i)\, l_i + 4\pi d^2 < 4\pi (d + 1)^2.$$

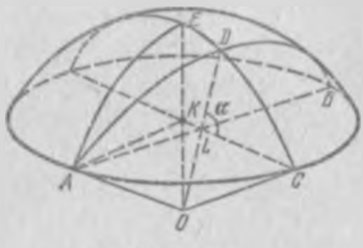


Рис. 66.

А поскольку $\alpha_i < \frac{2\pi}{3}$, получим

$$\sum l_i < 24,$$

что и требовалось.

331. На рис. 66 O — центр сферы, A и B — точки пересечения ребра двугранного угла с поверхностью сферы, D и C — середины дуг $\overset{\frown}{ADB}$ и $\overset{\frown}{ACB}$, плоскость ADB проходит через O, E — вершина сегмента, отсекаемого плоскостью ACB. Площадь криволинейного треугольника ADC составляет половину искомой. С другой стороны (считаем $\alpha < \frac{\pi}{2}$),

$$S_{ADC} = S_{AEC} - S_{AED}. \tag{1}$$

Найдем S_{AEC}. Если φ — угол между плоскостями AEO и OEC, $|EK| = h$, то, очевидно, $S_{AEC} = \frac{\varphi}{2\pi} 2\pi Rh = \varphi Rh$; h и φ легко находятся:

$$h = |EK| = R - |OK| = R - a\sin\alpha,$$

$$\sin\varphi = \sin \widehat{AKL} = \frac{|AL|}{|AK|} = \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{\sqrt{R^2 - a^2\sin^2\alpha}},$$

$$\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{\sqrt{R^2 - a^2\sin^2\alpha}}.$$

Таким образом,

$$S_{AEC} = R(R - a\sin\alpha)\arcsin\frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{\sqrt{R^2 - a^2\sin^2\alpha}}. \tag{2}$$

Найдем теперь S_{AED}. Как известно (см. задачу 323),

$$S_{AED} = R^2(\varphi + \psi + \gamma - \pi),$$

где φ, ψ и γ — двугранные углы трехгранного угла с вершиной в O и ребрами OE, OA и OD. Угол φ нами уже найден выше.

Для определения угла ψ (угол при ребре OA) воспользуемся 1-й теоремой косинусов (задача 166) применительно к трехгранному углу с вершиной A, для которого

$$\widehat{KAL} = \frac{\pi}{2} - \varphi, \quad \sin\widehat{KAO} = \frac{a\sin\alpha}{R}, \quad \sin\widehat{LAO} = \frac{a}{R}.$$

Следовательно,

$$\cos\psi = \frac{\dfrac{\sqrt{R^2-a^2}}{\sqrt{R^2-a^2\sin^2\alpha}} - \sqrt{1-\dfrac{a^2\sin^2\alpha}{R^2}}\sqrt{1-\dfrac{a^2}{R^2}}}{\dfrac{a\sin\alpha}{R}\cdot\dfrac{a}{R}} =$$

$$= \frac{\sqrt{R^2-a^2}}{\sqrt{R^2-a^2\sin^2\alpha}}\sin\alpha.$$

Очевидно, что $\gamma = \pi/2$. Следовательно,

$$S_{AED} = R^2\left[\arcsin\frac{\sqrt{R^2-a^2}}{\sqrt{R^2-a^2\sin^2\alpha}} + \right.$$

$$\left. + \arccos\frac{\sqrt{R^2-a^2}\sin\alpha}{\sqrt{R^2-a^2\sin^2\alpha}} - \frac{\pi}{2}\right]. \qquad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получим после упрощения ответ.

Ответ:

$$2R^2\arccos\frac{R\cos\alpha}{\sqrt{R^2-a^2\sin^2\alpha}} -$$

$$- 2Ra\sin\alpha\arccos\frac{a\cos\alpha}{\sqrt{R^2-a^2\sin^2\alpha}}.$$

332. Рассмотрим правильный октаэдр с ребром $2R$. Шар, касающийся всех его ребер, имеет радиус R. Поверхность шара разбивается поверхностью октаэдра на восемь сферических сегментов и шесть криволинейных четырехугольников, равных меньшему из двух искомых.

Ответ: $\dfrac{2\pi R^2}{3}\left(4\sqrt{\dfrac{2}{3}}-3\right)$, $\pi R^2\left(\dfrac{16}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}-2\right)$.

333. Двенадцать «двуугольников» площадью $\dfrac{\pi a^2(2-\sqrt{3})}{4}$ и шесть криволинейных четырехугольников площадью $\dfrac{\pi a^2(\sqrt{3}-1)}{2}$.

334. Предположим, что в данный многогранник можно вписать шар. Соединим точку касания шара с какой-либо гранью со всеми вершинами этой грани. Каждая грань разобьется на треугольники. Треугольники, расположенные в соседних гранях, имеющие общее ребро, равны. Следовательно, каждому «черному» треугольнику соответствует равный ему «белый» треугольник. Сумма углов треугольников при каждой точке касания равна 2π. Сумма этих углов по всем граням равна $2\pi n$, где n — число граней. Из этой суммы более половины приходится на долю «черных» треугольников (по условию), а сумма соответствующих углов для белых треугольников, по доказанному, не меньше. Противоречие.

335. Докажем, что таких шаров не может быть больше шести. Допустим, их семь. Соединим центры всех семи шаров с центром данного и обозначим через $O_1, O_2, \ldots, O_7$ точки пересечения этих отрезков с поверхностью данного шара. Для каждой точки O_i рассмотрим на сфере множество точек, для которых расстояние (по

поверхности сферы) до точки O_i не больше, чем расстояние до любой другой точки O_k, $k \neq i$. Сфера разобьется на семь сферических многоугольников. Каждый многоугольник является пересечением шести полусфер, содержащих точку O_i, границей которых является большой круг, по которому плоскость, проходящая через середину отрезка O_iO_k перпендикулярно ему, пересекает сферу.

Каждый из образовавшихся многоугольников содержит внутри себя окружность, сферический радиус которой виден из центра исходной сферы под углом α, $\sin\alpha = 0{,}7$.

Обозначим через K и N соответственно число сторон и вершин получившегося разбиения. (Каждая сторона является общей стороной двух соседних многоугольников и считается один раз. То же справедливо для вершин.) Легко видеть, что для подобного разбиения справедлива формула Эйлера (см. задачу 324). В нашем случае это даст $K = N + 5$. С другой стороны, $K \geqslant \frac{3}{2}N$, поскольку из каждой вершины выходит по крайней мере три стороны, а каждая сторона считается дважды.

Теперь нетрудно получить, что $K \leqslant 15$, $N \leqslant 10$. В задаче 325 мы доказали, что среди всех сферических n-угольников, содержащих данную окружность, наименьшую площадь имеет правильный n-угольник. Кроме того, можно показать, что сумма площадей правильных n- и $(n+2)$-угольника больше удвоенной площади правильного n-угольника. (Рассматриваются многоугольники, описанные около одной окружности.) Очевидно также, что площадь правильного описанного n-угольника уменьшается с ростом n. Из этого следует, что сумма площадей получившихся семи многоугольников не может быть меньше суммы площадей пяти правильных четырехугольников и двух правильных пятиугольников, описанных около окружности со сферическим радиусом, которому соответствует центральный угол $\alpha = \arcsin 0{,}7$. Площадь соответствующего правильного пятиугольника будет

$$s_5 = 9\left[10\arccos\left(\cos\alpha\sin\frac{\pi}{5}\right) - 3\pi\right],$$

правильного четырехугольника

$$s_4 = 9\left[8\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha\right) - 2\pi\right].$$

Нетрудно доказать, что $2s_5 + 5s_4 > 36\pi$. Таким образом, семь шаров радиуса 7 не могут одновременно, не пересекаясь, касаться шара радиуса 3. В то же время легко показать, что шесть шаров могут быть так расположены.

336. Рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Возьмем на ребрах A_1B и A_1D точки K и L так, что $|A_1K| = |CM|$, $|A_1L| = |CN|$. Пусть P и Q — точки пересечения прямых AK и BA_1, AL и DA_1.

Стороны треугольника A_1PQ, как легко видеть, равны соответствующим отрезкам диагонали BD. А поскольку $\triangle BA_1D$ — правильный, наше утверждение доказано.

337. Если бы точка P не лежала в плоскости $\triangle ABC$, то утверждение задачи было бы очевидным, поскольку в этом случае точки P, A_2, B_2 и C_2 принадлежали бы сечению поверхности сферы, описанной около тетраэдра $ABCP$, плоскостью, проходящей через

P и l. Утверждение нашей задачи теперь можно получить с помощью предельного перехода.

338. Пусть $ABCDEF$ — плоский шестиугольник, описанный около окружности. Возьмем произвольный пространственный шестиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 67), отличный от $ABCDEF$, проекция которого на нашу плоскость есть шестиугольник $ABCDEF$, и соответствующие стороны которого проходят через точки касания шестиугольника $ABCDEF$ с окружностью. Для доказательства существования такого шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ достаточно одну вершину, например A_1, взять произвольно на перпендикуляре к плоскости, восставленном в точке A, тогда остальные вершины определятся однозначно. В самом деле, пусть a, b, c, d, e, f — длины касательных к окружности, проведенных соответственно через точки A, B, C, D, E, F, и h — расстояние от A_1 до плоскости. Тогда B_1 находится по другую сторону от плоскости, по сравнению с A на расстоянии $\frac{hb}{a}$, C_1 — по ту же сторону, что и A_1, на расстоянии $\frac{hb}{a}\cdot\frac{c}{b}=\frac{hc}{a}$ от плоскости и т. д. Наконец, найдем, что F_1 лежит по другую сторону от плоскости, нежели A_1, на расстоянии $\frac{hf}{a}$ и, значит, A_1 и F_1 лежат на прямой, проходящей через точку касания AF с окружностью.

Любые две противоположные стороны шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ расположены в одной плоскости. Это следует из того, что все углы, которые образуют стороны шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ с данной плоскостью, равны. Следовательно, любые две диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, пересекаются, а отсюда и все три диагонали шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (они не лежат в одной плоскости) пересекаются в одной точке. Поскольку шестиугольник $ABCDEF$ — проекция шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, теорема доказана.

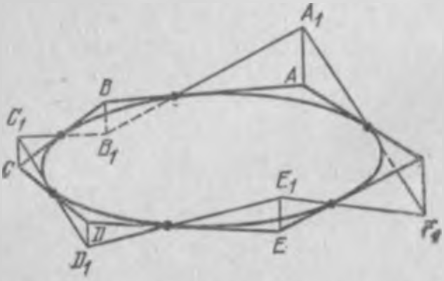


Рис. 67.

339. Указанную в задаче плоскую конфигурацию можно рассматривать как проекцию пространственной — трехгранный угол, пересеченный двумя плоскостями,— для которой наше утверждение очевидно.

340. Эта задача представляет собой один из возможных трехмерных аналогов теоремы Дезарга (см. задачу 339). Для решения ее удобно «выйти» в четырехмерное пространство.

Расскажем сначала о некоторых свойствах этого пространства.

Простейшими фигурами четырехмерного пространства будут точка, прямая, плоскость и трехмерное многообразие, которое мы будем называть *гиперплоскостью*. Первые три фигуры — это наши старые знакомые из трехмерного пространства. Правда, некоторые утверждения, связанные с ними, нуждаются в перефразировке.

Например, вместо следующей аксиомы трехмерного пространства: если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой,— следует ввести аксиому: если две различные плоскости, принадлежащие одной гиперплоскости, имеют общую точку, то они пересекаются по прямой. Введение нового геометрического образа — гиперплоскости — заставляет ввести связанную с ним группу аксиом, аналогично тому, как при переходе от геометрии плоскости — планиметрии к геометрии трехмерного пространства — стереометрии вводится группа аксиом (вспомните, каких?), выражающих основные свойства плоскостей в пространстве. Эта группа состоит из следующих трех аксиом:

1. Какова бы ни была гиперплоскость, существуют точки, ей принадлежащие, и точки, ей не принадлежащие.

2. Если две различные гиперплоскости имеют общую точку, то они пересекаются по плоскости, т. е. существует плоскость, принадлежащая каждой из гиперплоскостей.

3. Если прямая, не принадлежащая плоскости, имеет с ней общую точку, то существует единственная гиперплоскость, содержащая эту прямую и эту плоскость.

Из этих аксиом непосредственно следует, что четыре точки, не принадлежащие одной плоскости, определяют гиперплоскость; точно так же три прямые, не принадлежащие одной плоскости, но имеющие общую точку, или две различные плоскости, имеющие общую прямую, определяют гиперплоскость. Мы не будем доказывать эти утверждения; попытайтесь сделать это самостоятельно.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится следующий факт, справедливый в четырехмерном пространстве: три различные гиперплоскости, имеющие общую точку, имеют общую прямую. В самом деле, по аксиоме 2 любые две из трех гиперплоскостей имеют общую плоскость. Возьмем две плоскости, по которым пересекается какая-то из трех гиперплоскостей с двумя другими. Эти две плоскости, принадлежащие одной гиперплоскости, имеют общую точку, и, значит, пересекаются по прямой или совпадают.

Перейдем теперь к доказательству нашего утверждения. Если бы три плоскости, о которых говорится в условии, были расположены в четырехмерном пространстве, то утверждение было бы очевидным. Действительно, каждый трехгранный угол определяет гиперплоскость. Две гиперплоскости пересекаются по плоскости. Эта плоскость не принадлежит третьей гиперплоскости (по условию, эти гиперплоскости пересекают одну из данных плоскостей по трем прямым, не проходящим через одну точку), и, следовательно, пересекается с ними по прямой линии. Любые три соответствующие грани трехгранных углов лежат в одной гиперплоскости, определяемой двумя плоскостями, на которых расположены соответствующие ребра, и поэтому каждая тройка соответствующих граней имеет общую точку. Три эти точки принадлежат трем гиперплоскостям, определяемым трехгранными углами, и, как было доказано, лежат на одной прямой. Теперь для завершения доказательства достаточно «увидеть» в данном условии задачи проекцию соответствующей четырехмерной конфигурации плоскостей и трехгранных углов.

Игорь Федорович Шарыгин
ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ (СТЕРЕОМЕТРИЯ)

(Серия: «Библиотечка Квант»)

Редактор *И. М. Овчинникова*
Технический редактор *Е. В. Морозова*
Корректоры *О. А. Бутусова, Т. С. Вайсберг*

ИБ № 12259

Сдано в набор 17.05.83. Подписано к печати 02.12.83. Т-22249.
Формат 84×108¹/₃₂. Бумага тип. № 3. Обыкновенная гарнитура
Высокая печать. Условн. печ. л. 8,4. Усл. кр.-отт. 8,82. Уч.-изд. л. 10,92.
Тираж 150 000 экз. Заказ № 3217. Цена 35 коп.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука»
121099, Москва, Шубинский пер., 10