514
Ч-56

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA
O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

Sh. Murodov, L. Hakimov, A. Xolmurzayev,
M. Jumayev, A. To‘xtayev

CHIZMA GEOMETRIYA

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi tomonidan oliy o‘quv yurtlari talabalari uchun darslik sifatida tavsiya etilgan

Professor Sh. Murodovning umumiy tahriri ostida

TOSHKENT
«IQTISOD – MOLIYA»
2006

БИБЛИОТЕКА
Бух. ТИП и ЛП
№ 9310

514.18
22.151.3
Ch-56

Taqrizchilar: **R. Ismatullayev** – texnika fanlari nomzodi,
Toshkent davlat pedagogika
universiteti professori
R. Azimov – texnika fanlari nomzodi,
Toshkent davlat texnika universiteti
«Chizma geometriya va muhandislik grafikasi»
kafedra mudiri, dotsent

Sh.Murodov va boshqalar. Chizma geometriya: Oliy o'quv yurtlari talabalari uchun darslik. — T.: «Iqtisod – Moliya» nashriyoti, 2006. – 296 b.

Mazkur darslik O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan texnika oliy o'quv yurtlari uchun tasdiqlangan «Chizma geometriya va muhandislik grafikasi» fani namunaviy dasturi asosida yozilgan.

Darslikda nuqta, to'g'ri chiziq va tekisliklarning to'g'ri burchakli proyeksiyalarini yasashning nazariy asoslari, shuningdek, egri chiziq va sirtlarning hosil bo'lishi va chizmada tasvirlanish usullari bayon etilgan. Geometrik shakllarning o'zaro va proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan vaziyatlari bilan bog'liq pozitsion va metrik masalalarni yechish, sirtlarga urinma tekisliklar o'tkazish, sirtlarning yoyilmalarini yasashga oid nazariy va amaliy masalalar ko'rilgan. Aksonometrik proyeksiyalar va ularni turli pozitsion masalalarni yechishda qo'llash keng yoritilgan.

Darslik oliy o'quv yurtlari talabalari uchun mo'ljallangan bo'lib, undan loyiha-konstruktorlik tashkilotlari xodimlari ham foydalanishlari mumkin.

UDK 514.18 (075.8)
BBK 22.151.3 я 73

© «Iqtisod – Moliya» nashriyoti,
© «Ezgulik manbai nashriyoti», 2006

SO‘ZBOSHI

O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimi oldida turgan asosiy vazifalardan biri «Kadrlar tayyorlash milliy dasturi»da belgilangan talablar asosida fanlar bo‘yicha davlat ta’lim standartlari va namunaviy dasturlarga mos zamonaviy darslik va o‘quv qo‘llanmalari yaratish va shu asosda talabalarga chuqur nazariy bilimlar berib, ularni yetuk mutaxassis qilib tayyorlashdir.

Texnik bilimlarni mukammal egallashning shartlaridan biri grafik savodxonlikni oshirish, ya’ni chizmalarni o‘qish va bajarishni bilishdir. Shu boisdan chizmalar chizishning asosi bo‘lgan chizma geometriya fanini chuqur o‘rganish talab etiladi.

Chizma geometriya matematikaning bir tarmog‘i hisoblanib, uch o‘lchamli fazodagi obyektlarning tekislikdagi grafik modelini qurish asoslarini o‘rganadi. Shu tufayli chizmani fazodagi geometrik shaklning tekislikdagi grafik modeli deb qarash mumkin. Bu esa oliy texnik ta’lim tizimida chizma geometriyaning o‘rni naqadar muhimligini belgilaydi.

Mazkur darslikda fanni o‘qitishda uning nazariy asoslarini texnika va qurilishda qo‘llash bilan bog‘liq ko‘pgina masalalar yoritilgan.

Darslikda barcha materiallar, jumladan, geometrik shakllarni proyeksiyalash va ularning o‘zaro vaziyatlarini aniqlashga doir pozitsion va metrik masalalar hozirgi zamon geometriyasi taraqqiyoti nuqtai nazaridan bayon etilgan.

Axborot va kompyuter texnologiyalari keng qo‘llanilayotganligi hisobga olinib, darslikda chizmalar grafik usul bilan bir qatorda, analitik usulda ham berilgan.

Fanning asosiy qonun-qoidalari ta’riflar yoki teoremalar tarzida keltirilgan.

Chizmalarning hosil bo‘lish jarayoni va bajarilish algoritmi fazoda va proyeksiyalarda bir xil tartibda berilgan.

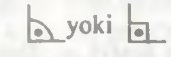
Darslikni tayyorlashda chizma geometriya fanining nazariy, amaliy va uslubiy yutuqlari, o‘qitishning yangi pedagogik texnologiyalaridan, shuningdek, mualliflarning uzoq yillar davomida shu sohada to‘plagan tajribalaridan foydalanildi.

Darslikning kirish bo‘limi, I, VIII, XII boblari, shuningdek, qisqacha tarixiy ma’lumotlar, asosiy geometrik o‘rinlar, atama va tushunchalar izohli lug‘ati professor Sh.K.Murodov (TDPU), III, IV va V boblari TAYI professori L.Q.Hakimov, VI, VII va XI boblari dotsent A.A.Xolmurzayev (FarPI), II, IX, X boblari katta o‘qituvchilar M.J.Jumayev va A.T.To‘xtayev (TAYI) hamda XIII bob M.J.Jumayev va Sh.K.Murodovlar tomonidan yozilgan.

QABUL QILINGAN SHARTLI BELGILAR

Belgilanishi	Nomlanishi
H, V, W	gorizontal, frontal, profil proyeksiyalar tekisliklari
$H_1, H_2, \ldots$ $V_1, V_2, \ldots$	gorizontal, frontal va profil proyeksiyalar tekisliklarining bir va ikki marta almashtirilgan vaziyatlari
$A, B, C, D, E, \ldots$ va $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$	fazodagi nuqtalar
$A', B', \ldots,$ $A'', B'', \ldots,$ $A''', B''', \ldots$	fazodagi $A, B, \ldots$ nuqtalarning gorizontal, frontal, profil proyeksiyalari
$A_P, B_P, C_P, \ldots$	fazodagi $A, B, C, \ldots$ nuqtalarning P tekislikdagi proyeksiyalari
$a, b, c, d, e, \ldots$ k, m, n	fazodagi to‘g‘ri yoki egri chiziqlar
$a', b', n', \ldots$ $a'', b'', n'', \ldots$ a''', b''', n'''	fazodagi $a, b, n, \ldots$ to‘g‘ri yoki egri chiziqlarning gorizontal, frontal, profil proyeksiyalari
h	gorizontal to‘g‘ri chiziqlar
f	frontal to‘g‘ri chiziqlar
p	profil to‘g‘ri chiziqlar
$P, Q, T, G, F, \ldots$	fazodagi umumiy vaziyatdagi tekisliklar
$H_1, H_2, H_3, \ldots$	gorizontal tekisliklar
$V_1, V_2, V_3, \ldots$	frontal tekisliklar
$W_1, W_2, W_3, \ldots$	profil tekisliklar
$P_H, Q_H,$ $P_V, Q_V,$ P_W, Q_W	fazodagi P va Q tekisliklarning gorizontal, frontal, profil izlari
$(AVC); a \| \| b; c \cap d$	geometrik elementlar bilan berilgan tekisliklar
$\Delta, \theta, \Phi, \Omega, \Gamma, \ldots$	grek alfavitining bosh harflari bilan belgilangan fazodagi sirtlar

QABUL QILINGAN SIMVOLLAR

Belgilanishi	Nomlanishi	Misol
$\in$ ($\notin$)	tegishli (tegishli emas)	Masalan, $A \in \Phi$ ($A \notin \Phi$) – A nuqta Φ shaklga tegishli (tegishli emas) yoki Φ shakl A nuqta orqali o'tadi (o'tmaydi)
$\equiv$ ($\not\equiv$)	ustma-ust tushgan (ustma-ust tushmagan)	Masalan, $A \equiv B$ – A va B nuqtalar ustma-ust tushadi ($\Phi_1 \not\equiv \Phi_2$ – Φ_1 va Φ_2 shakllar ustma-ust tushmaydi)
$\cap$	kesishgan	Masalan, $a \cap b$ – a va b to'g'ri chiziqlar o'zaro kesishadi
$\dot{-}$	ayqash to'g'ri chiziqlar	Masalan, $a \dot{-} b$ – a va b to'g'ri chiziqlar o'zaro ayqash
$\|\|(\nparallel)$	parallel (parallel emas)	Masalan, $a \| b$ $(a \nparallel b)$ – a va b to'g'ri chiziqlar parallel (parallel emas)
$\perp$	perpendikulyar	Masalan, $a \perp b$ – a va b to'g'ri chiziqlar o'zaro perpendikulyar
$\angle$	tekis yoki ikkiyoqli burchak	Masalan, $\angle BAC$ – AB va AC to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak
$a\hat{}b$	ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak	Masalan, $a\hat{}b$ – a va b to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak
$a\hat{}P$	to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak	Masalan, $a\hat{}P$ – a to'g'ri chiziq va P tekislik orasidagi burchak
$P\hat{}Q$	tekisliklar orasidagi ikkiyoqli burchak	Masalan, $P\hat{}Q$ – P va Q tekisliklari orasidagi ikkiyoqli burchak
 yoki	to'g'ri burchak belgisi	

KIRISH

1-§. Chizma geometriya fanining maqsadi va vazifalari

Chizma geometriya umumiy geometriyaning bir shoxobchasi bo‘lib, narsalarni tasvirlash usullari yordamida ularning shakllari, o‘lchamlari va o‘zaro joylashishlariga tegishli pozitsion va metrik masalalarni yechishni o‘rganadi.

Chizma geometriya matematika fanlari bilan uzviy bog‘liq bo‘lib, umumtexnika fanlaridan hisoblanadi. Chizma geometriya boshqa geometriyalardan o‘zining asosiy usuli, ya’ni tasvirlash usuli bilan farq qiladi. U tasvirlash usullari yordamida o‘quvchining fazoviy tasavvurini kengaytiradi, tasvirlarni yasash va oldindan yasalgan tasvirlarni o‘qiy bilish hamda amaliyotdagi turli muhandislik masalalarini yechishga yordam beradi. Chizma geometriya qonun-qoidalari bilan nafaqat mavjud narsalarni, balki tasavvur qilinadigan narsalarni ham tasvirlash mumkin.

Fazodagi shakllarning tekislikdagi chizmalari chizma geometriya usullari bilan ma’lum qonun-qoidalar asosida hosil qilinadi. Bu chizmalar orqali buyumning fazoviy shaklini chizish va o‘lchamlarini aniqlash mumkin. Chizmalar yordamida geometrik shakllarga tegishli stereometrik masalalar yechiladi. Chizmalarsiz fan va texnika taraqqiyotini tasavvur qilib bo‘lmaydi. Arxitektor va muhandislar ijodiy fikrlarini faqat chizmalar yordamida to‘liq bayon eta oladilar. Chizmalar asosida barcha muhandislik inshootlari quriladi, mashinalar, mashina qismlari, meditsina asboblari va hokazolar ishlab chiqariladi.

Shakllarning bizga ma’lum bo‘lgan barcha geometrik xossalarini ularning chizmalaridan olingan ma’lumotlardan ham aniqlasa bo‘ladi. Shuning uchun ham buyumlarning chizmalarini ularning geometrik xususiyatlarini o‘zida aks ettiruvchi tekis geometrik modellar deb atash mumkin.

Chizma geometriya fani quyidagilarni o‘rganadi:

- fazoviy shakllarning tekislikdagi tasvirlari, ya’ni tekis modellari (chizmalari)ni yasash;
- tekis chizmada geometrik masalalarni grafik yo‘l bilan yechish;
- shakllarning berilgan tekis chizmalari bo‘yicha ularning fazoviy ko‘rinishi va vaziyatini tasavvur qilish hamda yaqqol tasvirlarini yasash;
- geometrik shakllarning chizmalarini bajarish va o‘qish orqali o‘quvchining fazoviy tasavvurini rivojlantirish.

Ma’lumki, geometrik shaklning xossalarini analitik va grafik usullarda tekshirish mumkin. Shakllarning grafik modeliga asosan ularning analitik

usulda berilishini va aksincha, shakllarning analitik ko'rinishidan ularning chizmalarini yasash usullarini chizma geometriyada ham ko'rish mumkin.

Loyihalanadigan buyumlarni faqatgina grafik usulda tasvirlash hozirgi zamon talab chiqarish talablarini qanoatlantirmaydi. Shuning uchun chizmalarni bajarishda grafik usullar bilan birga analitik usullardan ham foydalaniladi.

Keyingi yillarda buyumlarning chizmalarini kompyuter grafikasi vositalari yordamida tayyorlashda avtomatlashtirilgan loyihalash sistemalarining kirib kelishi chizma geometriya fanining rivojlanishida yangicha mazmun kasb etmoqda.

2-§. Asosiy geometrik tushunchalar

Geometriyaning asosiy tushunchalaridan biri shakl (figura)dir.

Ta'rif. Har qanday tartibda joylashgan nuqtalar to'plami geometrik shakl (figura) deyiladi.

Geometrik shakllarni tashkil qiluvchi nuqtalar to'plami bir nechta va cheksiz ko'p nuqtalardan tuzilgan bo'lishi mumkin.

Geometrik shakllar juda ko'p. Ammo shulardan eng asosiylari to'g'ri chiziq va tekislikdir. Nuqtalar, to'g'ri chiziqlar va tekisliklar orasida ma'lum munosabat o'rnatilgan bo'lib, bu *yotishlilik* yoki *tegishlilik* deb yuritiladi. Masalan, A nuqta a to'g'ri chiziqqa tegishli – $A \in a$; A nuqta P tekislikka tegishli – $A \in P$; a to'g'ri chiziq P tekislikka tegishli – $a \in P$ va hokazo.

2.1. Nuqta. Nuqta eng boshlang'ich geometrik tushuncha bo'lib, u hajmsiz, yuzasiz, uzunlikka ega bo'lmagan geometrik element deb qabul qilingan. Nuqta chizmalarda shartli ravishda kichkina aylanacha ko'rinishida belgilanadi.

2.2. To'g'ri chiziq. Berilgan ikki nuqtadan o'tgan yagona geometrik shakl faqat to'g'ri chiziq bo'ladi. To'g'ri chiziqni bitta nurda yotuvchi nuqtalar to'plami deb ham qarash mumkin. To'g'ri chiziqning uzunligini haqiqiy miqdor bilan o'lchash mumkin emas. To'g'ri chiziq uzunligi cheksiz (∞) miqdordir. To'g'ri chiziq ikki nuqta bilan chegaralansa, to'g'ri chiziq kesmasi hosil bo'ladi. To'g'ri chiziq kesmasi haqiqiy miqdor o'lchoviga egadir.

To'g'ri chiziq ustidagi nuqtalar to'plamini ikki qismga – xos (chekli) va xosmas (cheksiz) nuqtalarga ajratish mumkin:

- xos A_1, A_2, A_3,... nuqtalarni berilgan a to'g'ri chiziq ustida belgilab yoki tanlab bo'ladi (1-rasm);
- cheksiz uzoqlikda joylashgan xosmas A_∞ nuqtani a to'g'ri chiziq ustida belgilab yoki tanlab bo'lmaydi;
- har bir to'g'ri chiziqda faqat bitta xosmas nuqta mavjud.

2.3. Tekislik. Tekislik ustida cheksiz ko'p nuqtalar va to'g'ri chiziqlar mavjuddir. Shunga ko'ra, tekislikni nuqtalar yoki to'g'ri chiziqlar to'plamidan

iborat deb qarash mumkin. Aniq sonli nuqtalar yoki to'g'ri chiziqlar berilganda tekislik berilgan hisoblanadi.

Tekislikda yotuvchi to'g'ri chiziqlarni ham ikki turga – xos (chekli) va xosmas (cheksiz)ga ajratish mumkin:

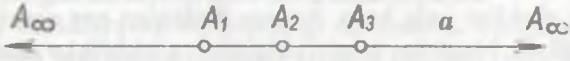
• xos to'g'ri chiziqlarni tekislikda chizish va vaziyatini belgilash mumkin (2-a rasm);

• tekislikka tegishli bo'lgan har qanday ikki to'g'ri chiziq umuman kesishadi. Agar bu to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel bo'lsa, u holda ular xosmas nuqtada (2-b rasm), agar parallel bo'lmasa, xos nuqtada (2-a rasm) kesishadi;

• tekislikning xosmas chizig'i tekislikda yotuvchi ikki ixtiyoriy to'g'ri chiziqning xosmas nuqtalarini tutashtirish bilan hosil qilinadi (2-v rasm).

Ma'lumki, tekislikdagi har bir to'g'ri chiziq bitta xosmas nuqtaga ega.

Tekislikdagi to'g'ri chiziqlarning xosmas nuqtalari geometrik o'rni tekislikning *xosmas chizig'i* deyiladi (2-v rasmdagi m_∞ chiziq). Tekislikning istalgan to'g'ri chizig'i uning xosmas chizig'i bilan bir nuqtada kesishadi. Tekislikdagi parallel to'g'ri chiziqlar bitta xosmas nuqtada kesishadi (2-b rasmdagi



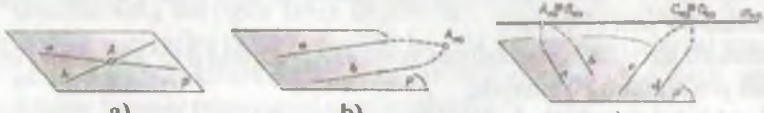
1-rasm.

A_∞ nuqta). To'g'ri chiziq va tekisliklarning xosmas elementlari nazariy masalalarni talqin qilishda va perspektiv tasvirlarni yasashda qo'llaniladi.

2.4. Geometrik fazo. Geometriyada bir jinsli (bir xil) obyektlarning to'plami *geometrik fazo* deb yuritiladi.

Geometrik fazoni nuqtalar, chiziqlar yoki sirtlar to'plamlaridan tuzilgan deb qarash mumkin. Ma'lumki, chiziqlar va sirtlar nuqtalardan tashkil topadi. Nuqta esa birinchi va boshlang'ich geometrik tushunchadir. Demak, geometrik fazoni shakl deb qarash mumkin.

Real obyektlarni o'rganish xossalariga qarab geometrik fazolar ham turlicha bo'ladi. Masalan, real obyekt Yevklid aksiomalari sistemasi bo'yicha o'rganilsa, Yevklid fazosi hosil bo'ladi. Yevklid fazosi uch o'lchamli (R_3)



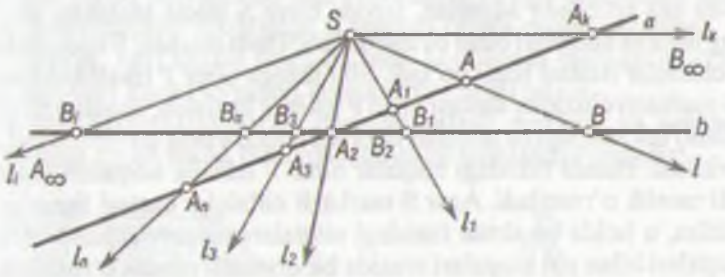
a) b) v)

2-rasm.

fazodir. Tekislik Yevklid fazosida ikki o'lchamli (R_2) bo'ladi. Biz o'rganayotgan geometriya Yevklid geometriyasi deb yuritiladi. Yevklid fazosining kengaytirilgan modelini birinchi bo'lib ulug' rus geometri N.I.Lobachevskiy (1792–1856) yaratdi. Bu model *Lobachevskiy geometriyasi* deb yuritiladi va bu geometriyaning o'ziga xos aksiomalar sistemasi mavjud.

3-§. Geometrik shakllarda o'zaro bir qiymatli moslik

Biror tekislikda *a* va *b* to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsin (3-rasm). Bu tekislikda ixtiyoriy S nuqtani olamiz. Bu nuqtadan ixtiyoriy *l* to'g'ri chiziq o'tkazilsa, bu to'g'ri chiziq *a* to'g'ri chiziqni *A* va *b* to'g'ri chiziqni *B* nuqtada kesadi. Xuddi shuningdek, S nuqtadan $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$ to'g'ri chiziqlar o'tkazilsa, unda ular *a* to'g'ri chiziqni $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ nuqtalarda va *b* to'g'ri chiziqni $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$ nuqtalarda kesib o'tadi. Bunda *a* to'g'ri chiziqning har bir nuqtasiga *b* to'g'ri chiziqning nuqtalari mos keladi. *a* va *b* to'g'ri chiziqlarning o'zaro kesishgan A_z nuqtasi o'z-o'ziga mos keladi.



3-rasm.

Shunday qilib, *a* va *b* to'g'ri chiziqlarga tegishli nuqtalar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatiladi. *a* va *b* to'g'ri chiziqlarda shunday nuqtalar mavjudki, bir to'g'ri chiziqning xos nuqtasiga ikkinchi to'g'ri chiziqning xosmas nuqtasi mos keladi va aksincha. Masalan, *a* to'g'ri chiziqning A_k nuqtasiga *b* to'g'ri chiziqning B_∞ xosmas nuqtasi, *b* to'g'ri chiziqning B_1 nuqtasiga *a* to'g'ri chiziqning A_∞ xosmas nuqtasi mos keladi.

Xuddi shuningdek, to'g'ri chiziq bilan tekislik yoki ikki tekislik uchun ham o'zaro bir qiymatli moslikni o'rnatish mumkin. Bu xulosalarni turli geometrik masalalarni yechishdagi grafik yasashlarda qo'llash mumkin.



I BOB. TASVIRLASH USULLARI

1.1-§. Umumiy ma'lumotlar

Muhim geometrik tushunchalardan biri shakllarni tasvirlashdir. Geometrik tasvirlash biror Φ shaklning nuqtalari bilan ikkinchi Φ_1 shaklning nuqtalari orasida bir qiymatli moslik o'rnatishdir.

Chizma geometriyada uch o'lchamli R_3 fazoning (tekislikning) har bir nuqtasini ikki o'lchamli R_2 fazoning (tekislikning) har bir nuqtasiga aniq grafik qoidalar asosida mos keltirib, bir qiymatli moslik o'rnatiladi. Shuning uchun chizma geometriyani fazoni tekislikda aks ettiruvchi grafik tasvirlash geometriyasi deb yuritish mumkin.

Geometrik fazo nuqtalar to'plami deb qaralib, proyeksiyalash yo'li bilan tekislikda aks ettiriladi. Masalan, fazoda biror S nuqta tanlanib, shu nuqta fazoning hamma nuqtalari bilan birlashtiriladi. Unda markazi S nuqtada bo'lgan to'g'ri chiziqlar dastasi hosil bo'ladi. Shu fazoga biror P tekislikni kiritamiz. Unda S markazli chiziqlar dastasi bilan P tekislik kesishib, nuqtalar to'plamini hosil qiladi. Tekislikdagi bu nuqtalar fazodagi nuqtalarning tasviri (proyeksiyasi) deb yuritiladi. Bunda fazodagi nuqtalar bilan P tekislik nuqtalari orasida bir qiymatli moslik o'rnatiladi. Agar S markazli chiziqlar dastasi fazosiga biror sirt kiritilsa, u holda bu sirtda fazodagi nuqtalarning tasviri hosil bo'ladi va fazo nuqtalari bilan sirt nuqtalari orasida bir qiymatli moslik o'rnatiladi.

Chizma geometriyada fazodagi shakllar markaziy yoki parallel proyeksiyalash usullari bilan biror tekislikda tasvirlanadi. Bu tekislik proyeksiyalar tekisligi deb yuritiladi. Shakllarning proyeksiyalar tekisligidagi tasvirini yasash esa ma'lum qonun-qoidalarga asoslanib bajariladi.

1.2-§. Markaziy proyeksiyalash usuli va uning xossalari

Markaziy proyeksiyalash usuli geometrik shakllarni tekislikda proyeksiyalashning umumiy holidir.

Markaziy proyeksiyalashda proyeksiyalar markazi S va proyeksiyalar tekisligi P beriladi (1.1-rasm). S va P sistemasida fazodagi biror A nuqta berilgan bo'lsin. A nuqtani S markaz orqali proyeksiyalar tekisligi P ga proyeksiyalaymiz. Buning uchun S markaz bilan A nuqtani to'g'ri chiziq orqali birlashtirib, uni davom ettiramiz. Hosil bo'lgan SA proyeksiyalovchi nur proyeksiyalar tekisligi P bilan A_p nuqtada kesishadi, ya'ni $A_p = SA \cap P$. Bunda A_p nuqta A nuqtaning S markaz bo'yicha P proyeksiyalar tekisligidagi *markaziy proyeksiyasi* deb yuritiladi.

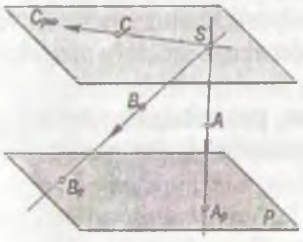
Fazodagi ikkinchi biror ixtiyoriy B nuqta ham A nuqta singari proyeksiyalanib, $SB \cap P = B_p$ nuqtaning P proyeksiyalar tekisligidagi vaziyati aniqlanadi. Agar biror C nuqtani P proyeksiyalar tekisligiga proyeksiyalovchi SC nur P tekislikka parallel bo'lsa $(SC \| P)$, u holda bu nur P tekisligi bilan cheksiz uzoqlikda kesishib, C_{P_∞} xosmas nuqtani hosil qiladi. SA, SB, SC,...to'g'ri chiziqlar *proyeksiyalovchi nurlar* deb yuritiladi.

Fazodagi biror nuqtalar to'plami proyeksiyalash markazi S orqali P proyeksiyalar tekisligiga proyeksiyalanganda S markazli to'g'ri chiziqlar dastasi hosil bo'ladi. Bu dastaning proyeksiyalar tekisligi P bilan kesishuvidan hosil bo'lgan nuqtalar to'plami fazodagi ma'lum bir nuqtalar to'plamining tasviri bo'ladi. Masalan, ABD uchburchakning markaziy proyeksiyasi $A_pB_pD_p$ uchburchak bo'ladi (1.2-rasm).

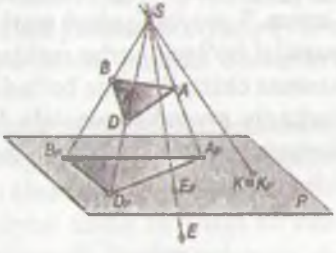
Proyeksiyalar tekisligining ostida joylashgan E nuqtaning E_p proyeksiyasi $SE \cap P = E_p$ bilan aniqlanadi. Proyeksiyalar tekisligida yotgan K nuqtaning K_p markaziy proyeksiyasi nuqtaning o'zi bilan ustma-ust $(K \equiv K_p)$ tushadi.

Markaziy proyeksiyalash konusli yoki qutbli proyeksiyalash, yoxud *perspektiva* deb ham yuritiladi. Masalan, markaziy proyeksiyalash apparatida biror *m* egri chiziq berilgan bo'lsin (1.3-rasm). *m* egri chiziqning nuqtalar to'plami proyeksiyalar tekisligiga S markaz orqali proyeksiyalansa, uning proyeksiyasi m_p egri chiziq hosil bo'ladi. U holda S markazdan o'tuvchi proyeksiyalovchi nurlar to'plami konus sirtini hosil qiladi.

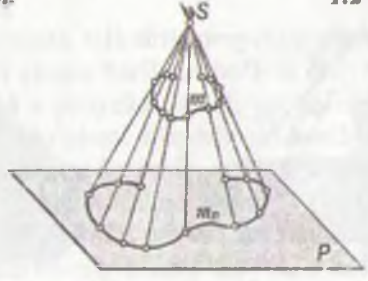
Markaziy proyeksiyalashda proyeksiyalash markazi va buyumning proyeksiyasiga qarab uning fazodagi vaziyatini aniqlab bo'lmaydi.



1.1-rasm.



1.2-rasm.



1.3-rasm.

Markaziy proyeksiyalashning quyidagi xossalari mavjud:

1-xossa. Nuqtaning markaziy proyeksiyasi nuqta bo'ladi.

2-xossa. SA nurda yotuvchi A, A_1, A_2, A_3,... nuqtalarning markaziy proyeksiyalari A_P nuqta bilan ustma-ust tushadi(1.4- rasm).

3-xossa. Proyeksiyalash markazidan o'tmaydigan to'g'ri chiziq kesmasining proyeksiyasi kesma bo'ladi.

Biror a to'g'ri chiziq BC kesmasi orqali berilgan bo'lsin (1.4-rasm). BC kesma S markaz orqali proyeksiyalar tekisligi P ga proyeksiyalanganda SBC proyeksiyalovchi tekislik hosil bo'ladi. Bu proyeksiyalovchi tekislik P bilan B_PC_P kesma bo'yicha kesishadi. $BC \in a$ bo'lgani uchun $B_PC_P \in a_P$ bo'ladi.

Proyeksiyalash markazi S dan o'tuvchi to'g'ri chiziqning markaziy proyeksiyasi nuqta bo'ladi. Masalan, DE to'g'ri chiziq kesmasining markaziy proyeksiyasi $D_P \equiv E_P$ nuqta bo'ladi (1.4-rasm).

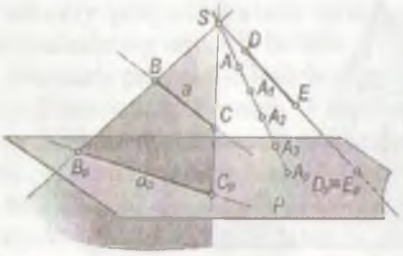
4-xossa. S markazdan o'tmaydigan tekislikning markaziy proyeksiyasi tekislik bo'ladi. Masalan, ABC uchburchak tekisligining nuqtalar to'plami S markaz bo'yicha proyeksiyalar tekisligi P ga proyeksiyalanganda (1.5-rasm) SABC proyeksiyalovchi piramida hosil bo'ladi. Bu piramidaning proyeksiyalar tekisligi P bilan kesishuvidan $A_PB_PC_P$ uchburchak hosil bo'ladi.

S markazdan o'tuvchi tekislik va unga tegishli geometrik shakllarning markaziy proyeksiyalari bitta to'g'ri chiziqqa proyeksiyalanadi. Masalan, SAB tekisligi va unga tegishli F nuqtaning proyeksiyasi $A_PF_PB_P$ kesmada bo'ladi (1.5-rasm).

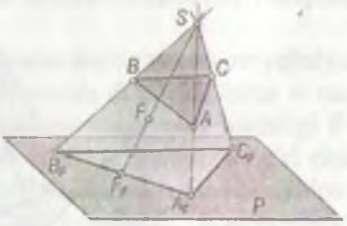
5-xossa. Agar biror tekis shakl proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lsa, uning proyeksiyasi o'ziga o'xshash shakl bo'ladi.

6-xossa. S proyeksiyalash markazidan o'tuvchi va proyeksiyalar tekisligi P ga parallel bo'lgan nurlar ustidagi nuqtalarning markaziy proyeksiyasi P ning xosmas chizig'i ustida bo'ladi.

Markaziy proyeksiyalashda S markaz, proyeksiyalar tekisligi P va proyeksiyalanuvchi shaklning o'zaro vaziyatlariga ko'ra quyidagi xossani keltirish mumkin:



1.4-rasm.



1.5-rasm.

7-xossa. Proyeksiyalanuvchi shaklning proyeksiyalar markazi bilan proyeksiyalar tekisligiga nisbatan joylashuviga qarab uning proyeksiyasi o'ziga nisbatan katta yoki kichik bo'lishi mumkin.

1.3-§. Parallel proyeksiyalash usuli va uning xossalari

Markaziy proyeksiyalashdagi S markazni biror yo'nalishda cheksiz uzoqlashtirilsa, u holda SA, SB,... proyeksiyalovchi nurlar o'zaro parallel bo'ladi (1.6-rasm). Bunday proyeksiyalash *parallel proyeksiyalash* deb yuritiladi. Demak, parallel proyeksiyalashni markaziy proyeksiyalashning xususiy holi deb qarash mumkin.

Parallel proyeksiyalashda proyeksiyalar tekisligi P va *s* proyeksiyalash yo'nalishi beriladi. P va *s* sistemada fazodagi biror A nuqta berilgan bo'lsin (1.6-rasm). Bu nuqtaning proyeksiyasini yasash uchun A nuqtadan *s* yo'nalishga parallel qilib nur o'tkaziladi. Bu nurning proyeksiyalar tekisligi P bilan kesishgan nuqtasi A_p bo'ladi. A_p nuqta fazodagi A nuqtaning *s* yo'nalish bo'yicha P dagi parallel proyeksiyasi deb yuritiladi. Proyeksiyalar tekisligining ustida joylashgan fazodagi ixtiyoriy biror B nuqtaning *s* yo'nalish bo'yicha parallel proyeksiyasi B_p bo'ladi. Bunda B va A nuqtalarning proyeksiyalovchi nurlari o'zaro parallel bo'lib, faqat ularning yo'nalishlari qarama-qarshidir. AA_p, BB_p to'g'ri chiziqlar *proyeksiyalovchi nurlar* deb yuritiladi. Proyeksiyalar tekisligi P ga tegishli C nuqtaning proyeksiyasi shu nuqtaning o'zida bo'ladi. Fazodagi ixtiyoriy *d* to'g'ri chiziqni proyeksiyalar tekisligi P ga *s* yo'nalish bo'yicha proyeksiyalash uchun shu to'g'ri chiziq ustidagi ixtiyoriy ikki D va E nuqtalar proyeksiyalari yasalsa kifoyadir (1.6-rasm). Bunda *d* to'g'ri chiziq nuqtalari orqali o'tuvchi parallel nurlar to'plami proyeksiyalovchi tekislikni hosil qiladi.

Parallel proyeksiyalashda *s* proyeksiyalash yo'nalishining berilishi shartdir. Chunki *s* proyeksiyalash yo'nalishi berilmagan holda ixtiyoriy A nuqtaning P proyeksiyalar tekisligidagi proyeksiyasini cheksiz ko'p hosil qilish mumkin.

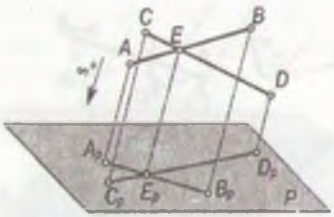
Buyumning birgina parallel proyeksiyasi uning fazodagi ko'rinishi va o'lchamlari haqida to'liq ma'lumot bera olmaydi. Buning uchun qo'shimcha shartlar berilishi lozim.

Parallel proyeksiyalash silindrik proyeksiyalash deb ham yuritiladi. Masalan, biror *m* egri chiziq berilgan bo'lsin (1.7-rasm). Bu egri chiziq nuqtalaridan o'tuvchi *s* proyeksiyalash yo'nalishiga parallel bo'lgan proyeksiyalovchi nurlar to'plami silindrik sirt hosil qiladi. Bu silindrik sirt proyeksiyalar tekisligi P bilan kesishib, m_1 egri chiziqni hosil qiladi.

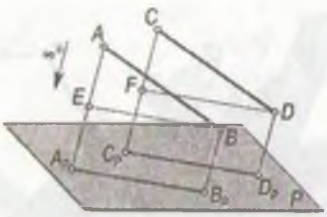
Parallel proyeksiyalash ikki xil bo'ladi:

1. *Qiyshiq burchakli parallel proyeksiyalash.* Bunda s_z proyeksiyalash yo'nalishi P proyeksiyalar tekisligi bilan o'tkir yoki o'tmas burchak tashkil qiladi.

2. *To'g'ri burchakli parallel proyeksiyalash.* Bunda proyeksiyalash yo'nalishi s_1 proyeksiyalar tekisligi P ga perpendikulyar bo'ladi.



1.10-rasm.



1.11-rasm.

perpendikulyar tushiriladi. Bu perpendikulyarning P tekislikdagi asosi A_p nuqta fazodagi A nuqtaning ortogonal proyeksiyasi bo'ladi.

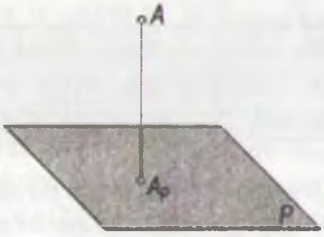
To'g'ri burchakli proyeksiyalashda geometrik shakl fazoda proyeksiyalar tekisligiga nisbatan ixtiyoriy holatda joylashgan bo'lsa, uning proyeksiyasida shaklning metrik (uzunligi, burchagi va boshqa) o'lchamlari o'zgaradi. Masalan, ortogonal proyeksiyalashda to'g'ri chiziq kesmasining proyeksiyasi o'zidan kichik yoki teng bo'ladi:

- agar to'g'ri chiziq kesmasi proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lsa, uning proyeksiyasining uzunligi kesmaning fazodagi uzunligiga teng bo'ladi (1.13-rasm);
- agar to'g'ri chiziq kesmasi proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lmasa, uning proyeksiyasining uzunligi o'zidan kichik bo'ladi, ya'ni $A_pB_p<AB$ bo'lib, $AB=A_pB_p/\cos\alpha$ bo'ladi. Bunda $\alpha=AB\hat{}P$ (1.14-rasm).

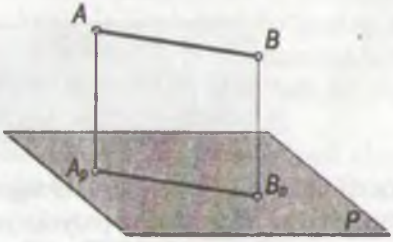
Fazoda berilgan biror ABCD trapetsiya (1.15-rasm) proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lmasa, uning burchaklari va tomonlarining haqiqiy o'lchamlari saqlanib qolmaydi. Lekin trapetsiyaning $A_pB_pC_pD_p$ proyeksiyasi orasidagi ayrim xususiyatlari o'zgarmaydi. Masalan, trapetsiyaning bir-biriga parallel bo'lgan AB va CD asoslarining A_pB_p va C_pD_p proyeksiyalari ham o'zaro parallel bo'ladi. Geometrik shakllarning proyeksiyalanish jarayonida o'zgarmagan xususiyatlari ularning **invariant xossalari** deb yuritiladi.

1.3-§ da keltirilgan parallel proyeksiyalarning barcha xossalari ortogonal proyeksiyalar uchun ham o'rinlidir.

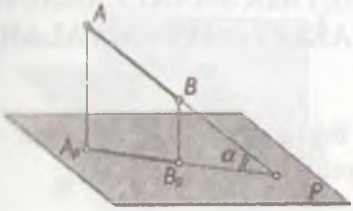
Ortogonal proyeksiyalashda biror shaklning barcha nuqtalaridan o'tuvchi nurlar o'zaro parallel bo'lib, berilgan geometrik shaklni proyeksiyalar tekisligiga proyeksiyalaydi. Buyumning bitta ortogonal proyeksiyasi bilan



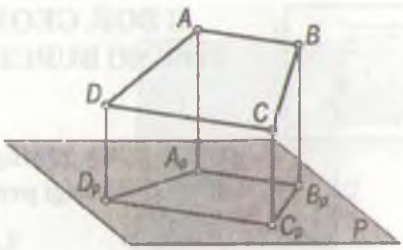
1.12-rasm.



1.13-rasm.



1.14-rasm.



1.15-rasm.

uning fazodagi vaziyatini aniqlab bo'lmaydi. Buning uchun biror ko'shimcha shart kiritish zarur. Bunday qo'shimcha shart sifatida buyumning birinchi proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lgan ikkinchi tekislikdagi tasvirini olish mumkin. Bu ikki proyeksiyalar tekisligidagi tasvirlar buyumning fazodagi vaziyatini aniqlaydi.

Ortogonal proyeksiyalash usuli texnik chizmalarni chizishda, inshootlarni loyihalashda ko'p qo'llaniladi. Bu usul tasvirning yaqqolligini bermasa ham, grafik ishlarning aniq bajarilishini ta'minlaydi va buyumlarning tekislikdagi tasvirlari orqali ularning o'lchamlarini oson va qulay aniqlaydi.

Texnik chizmalarni tuzishda proyeksiyalanuvchi buyumni o'zaro perpendikulyar tekisliklarga nisbatan shunday joylashtirish kerakki, unda buyumning asosiy o'lchamlari va elementlari qulay holda tasvirlansin. Faqat shundagina buyum tasvirlariga qarab uning fazodagi ko'rinishini tasavvur etish mumkin.

Nazorat savollari

1. Nuqtaning markaziy proyeksiyasi qanday yasaladi?
2. Qanday holda to'g'ri chiziqning markaziy proyeksiyasi nuqta bo'ladi?
3. Markaziy proyeksiyalashda nimalar berilgan bo'ladi?
4. Parallel proyeksiyalash usuli qanday bajariladi?
5. Parallel proyeksyalashda nimalar berilgan bo'ladi?
6. To'g'ri chiziqning parallel proyeksiyasi qanday yasaladi?
7. Parallel to'g'ri chiziqlarning proyeksiyalari qanday joylashgan bo'ladi?
8. Qanday holda to'g'ri chiziqning parallel proyeksiyasi nuqta bo'ladi?
9. «Ortogonal» so'zi nimani anglatadi?
10. To'g'ri chiziqqa tegishli nuqtalarning proyeksiyalari qanday joylashgan bo'ladi?

БИБЛИОТЕКА
Вух. ТИП и ЛП
№ У 310



II BOB. GEOMETRIK SHAKLLARNING TO'G'RI BURCHAKLI PROYEKSIYALARI

2.1-§. Nuqtaning ikki o'zaro perpendikulyar tekislikdagi proyeksiyalari

Biror buyumning tasviriga qarab uning o'qilishini ikkita o'zaro parallel bo'lmagan proyeksiyalar tekisligiga proyeksiyalash orqali ta'minlash mumkin.

Proyeksiyalar tekisliklarining o'zaro perpendikulyar vaziyatda tanlab olinishi buyum tasviri o'qilishini osonlashtiradi.

O'zaro perpendikulyar bo'lgan ikki tekislik bir-biri bilan kesishib, fazoni to'rt qismga – kvadrantlarga (choraklarga) bo'ladi. Fazoda gorizontal vaziyatda joylashgan (2.1-rasm) H tekislik *gorizontal proyeksiyalar tekisligi*, vertikal joylashgan V tekislik *frontal proyeksiyalar tekisligi* deb ataladi. H va V proyeksiyalar tekisliklari o'zaro perpendikulyar bo'lib, ularning kesishgan Ox chizig'i *proyeksiyalar o'qi* deyiladi. Bunda H va V tekisliklar proyeksiyalar tekisliklari sistemasini hosil qiladi.

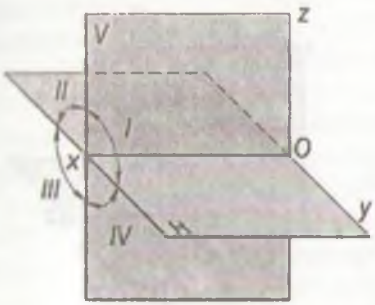
Proyeksiyalar tekisliklari sistemasining bunday fazoviy modelida turli geometrik shakllar, shuningdek, detallar, mashina va inshootlarni joylashtirib, so'ngra ularning chizmalarini yasash katta noqulayliklar tug'diradi va zaruriyati ham bo'lmaydi.

Buyumlarning chizmalarini bajarishda bu tekisliklarning bir tekislikka joylashtirilgan (jipslashtirilgan) tekis tasvirlaridan foydalaniladi. Shu maqsadda V proyeksiyalar tekisligi qo'zg'almasdan, H gorizontal proyeksiyalar tekisligini Ox proyeksiyalar o'qi atrofida pastga 90° ga aylantirib, V tekislik bilan ustma-ust tushirib jipslashtiradi (2.2-rasm). Natijada H va V tekisliklarda bajarilgan barcha yasashlar asosiy chizma tekisligi sifatida qabul qilingan V frontal proyeksiyalar tekisligiga joylashtiriladi. Bunda nuqta yoki geometrik shaklning bitta tekislikda joylashtirilgan ikki – gorizontal va frontal tasvirlari tekis chizma yoki kompleks chizma – epyur hosil qiladi. Bu usulni birinchi marta fransuz geometri Gaspar Monj (1746–1818) tavsiya etgan. Shuning uchun bu tekis chizma *Monj chizmasi* deb ham yuritiladi.

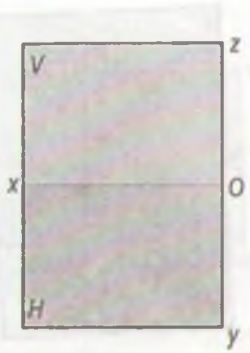
Amalda geometrik shakllarning to'g'ri burchakli proyeksiyalarini yasashda asosan proyeksiyalar o'qlaridan foydalaniladi. Shuning uchun chizmada proyeksiyalar tekisliklarining konturini tasvirlash shart emas (2.3-rasm).

Ma'lumki, barcha buyumlar nuqtalar to'plamidan tashkil topgan. Shuning uchun proyeksiyalashni nuqtadan boshlash maqsadga muvofiq bo'ladi. Biror nuqta yoki geometrik shakl fazoning turli choraklarida joylashishi mumkin.

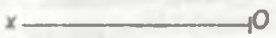
2.1.1. Birinchi chorakda joylashgan nuqtaning chizmasi. Fazodagi A nuqta I chorakda joylashgan bo'lsin (2.4-rasm). Uning H va V tekisliklardagi



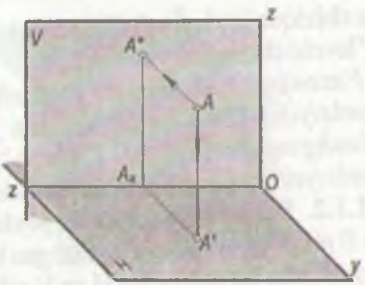
2.1-rasm.



2.2-rasm.



2.3-rasm.

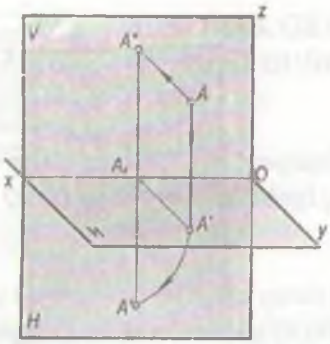


2.4-rasm.

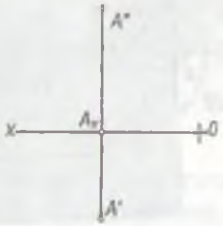
proyeksiyalarini yasash uchun bu nuqtadan mazkur tekisliklarga perpendikulyarlar o'tkazamiz va ularning bu tekisliklar bilan kesishish nuqtalarini aniqlaymiz. Faraz qilaylik, A nuqtadan H tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosi A′ bo'lsin. A nuqtadan V tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosi A″ ni aniqlash uchun A′ dan Ox o'qiga perpendikulyar o'tkazamiz va A_x nuqtani aniqlaymiz. V tekislikka tushirilgan perpendikulyarlar bilan Ox o'qidagi A_x nuqtadan o'tkazilgan perpendikulyarni kesishtirib, A″ nuqtani topamiz.

A nuqtadan H va V tekisliklarga o'tkazilgan perpendikulyarlarning A′ va A″ asoslari A nuqtaning *to'g'ri burchakli proyeksiyalari* deb yuritiladi. Bu yerda, A′ – A nuqtaning *gorizontal proyeksiyasi*, A″ – uning *frontal proyeksiyasi* deb ataladi va A(A′, A″) ko'rinishda yoziladi. Shakldagi AA′ va AA″ chiziqlar *proyeksiyalovchi nurlar* yoki *proyeksiyalovchi chiziqlar* deyiladi.

A nuqtaning chizmasini tuzish uchun tekisliklarning fazoviy modelini yuqorida qayd qilingan qoidaga muvofiq V tekislikka jipslashtiramiz (2.5-rasm). Bunda A nuqtaning A″ frontal proyeksiyasi V tekislikda bo'lgani uchun uning vaziyati o'zgarmay qoladi. Gorizontal A′ proyeksiyasi H tekislik bilan Ox o'qi atrofida pastga 90^0 ga buriladi va V tekislik davomida jipslashadi. Natijada A nuqtaning A′ gorizontal hamda A″ frontal proyeksiyalari Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan



2.5-rasm.



2.6-rasm.

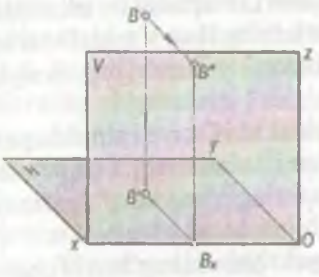
bitta chiziqda joylashadi (2.6-rasm). Bunda A'A''⊥Ox bo'lib, u proyeksiyalarni bog'lovchi chiziq deb yuritiladi.

Fazoning I choragida joylashgan har qanday nuqtaning gorizontal proyeksiyasi Ox o'qining ostida, frontal proyeksiyasi uning yuqorisida joylashgan bo'lib, ular Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan bitta proyeksiyalarni bog'lovchi chiziqda yotadi.

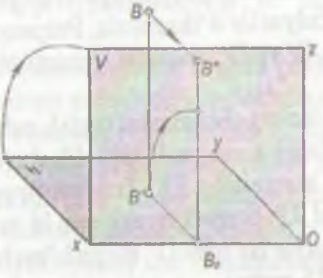
2.1.2. Ikkinchi chorakda joylashgan nuqtaning chizmasi. Fazodagi biror B nuqta II chorakda joylashgan bo'lsin (2.7-rasm). Uning proyeksiyalarini yasash uchun bu nuqtadan H va V tekisliklarga perpendikulyarlar o'tkazamiz. Bu perpendikulyarlarning proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishgan B' va B'' asoslari B nuqtaning gorizontal va frontal proyeksiyalari bo'ladi. B nuqtaning chizmasini tuzish uchun H tekislikni 2.8-rasmda ko'rsatilganidek V tekislikka jipslashtiramiz. Bunda B nuqtaning B'' frontal proyeksiyasi vaziyati o'zgarmay qoladi. Uning H tekislikdagi B' gorizontal proyeksiyasi esa V tekislikning yuqori qismi bilan jipslashadi va Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan $B''B_x$ proyeksiyalarni bog'lovchi chiziqda bo'ladi (2.9-rasm).

Fazoning II choragida joylashgan har qanday nuqtaning gorizontal va frontal proyeksiyalari Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan bitta proyeksiyalarni bog'lovchi chiziqda va Ox o'qining yuqorisida joylashadi.

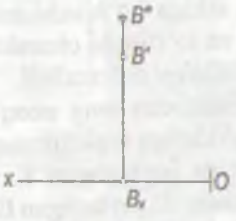
2.1.3. Uchinchi chorakda joylashgan nuqtaning chizmasi. Fazodagi biror C nuqta III chorakda joylashgan bo'lsin (2.10-rasm). Bu nuqtaning gorizontal va frontal proyeksiyalarini yasash uchun H va V tekisliklarga perpendikulyar tushiramiz. Bu perpendikulyarlarning H va V tekisliklardagi C' va C'' asoslari C nuqtaning gorizontal va frontal proyeksiyalari bo'ladi. Nuqtaning chizmasini yasash uchun H tekislikni V tekislikning davomida jipslashtiramiz (2.11-rasm). Bunda C nuqtaning C'' frontal proyeksiyasi V tekislikda bo'lgani uchun o'z vaziyatini o'zgartirmaydi. Uning C' gorizontal proyeksiyasi esa H tekislik bilan birga V tekislikning yuqori qismida jipslashadi va 2.12-rasmda ko'rsatilgan vaziyatni egallaydi.



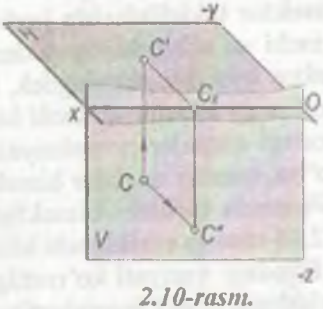
2.7-rasm.



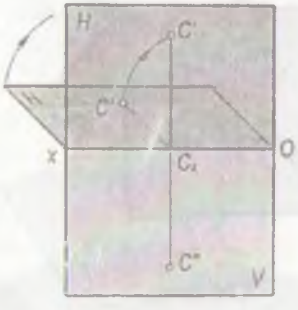
2.8-rasm.



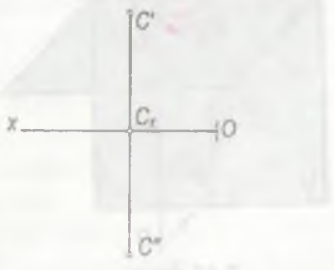
2.9-rasm.



2.10-rasm.



2.11-rasm.



2.12-rasm.

Fazoning III choragida joylashgan har qanday nuqtaning gorizontal proyeksiyasi Ox o'qining yuqorisida, frontal proyeksiyasi esa uning ostida, Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan bitta proyeksiyalarni bog'lovchi chiziqda yotadi.

2.1.4. To'rtinchi chorakda joylashgan nuqtaning chizmasi. Fazodagi biror D nuqta fazoda IV chorakda joylashgan bo'lsin (2.13-rasm). Uning H

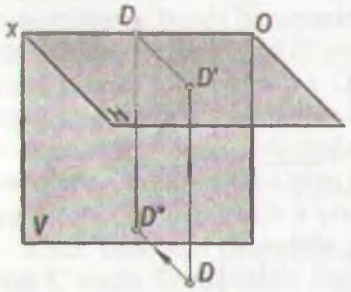
va V tekisliklardagi proyeksiyalarini yasash uchun D nuqtadan bu tekisliklarga perpendikulyarlar o'tkazamiz. Perpendikulyarlarning H va V tekisliklar bilan kesishgan D′ va D″ asoslari D nuqtaning gorizontal va frontal proyeksiyalari bo'ladi.

D nuqtaning chizmasini tuzish uchun H tekislikni Ox o'qi atrofida pastga 90^0 ga aylantiramiz va V tekislik davomi bilan jipslashtiramiz (2.14-rasm). Bunda D nuqtaning D″ frontal proyeksiyasining vaziyati o'zgarmaydi. Gorizontal D′ proyeksiyasi esa H tekislik bilan harakatlanib, Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan D″ nuqta bilan bitta proyeksiyalarni bog'lovchi chiziqda yotadi (2.15-rasm).

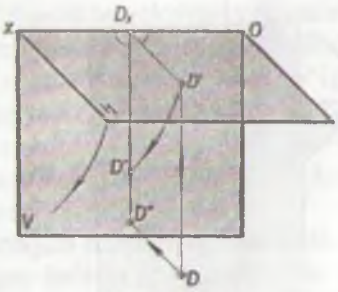
Fazoning IV choragida joylashgan har qanday nuqtaning gorizontal va frontal proyeksiyalari Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan bitta proyeksiyalarni bog'lovchi chiziqda va Ox o'qining ostida bo'ladi.

2.1.5. Bissektor tekisliklarida joylashgan nuqtalarning chizmalari. Fazoning birinchi va uchinchi choraklarini teng ikkiga bo'luvchi tekislik *birinchi bissektor tekisligi,* shuningdek, ikkinchi va to'rtinchi choraklarini teng ikkiga bo'luvchi tekislik *ikkinchi bissektor tekisligi* deb ataladi.

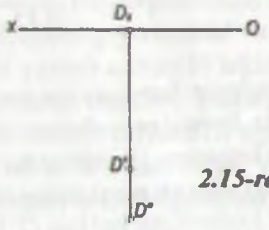
Agar fazodagi nuqtalar proyeksiyalar tekisliklaridan teng uzoqlikda joylashgan bo'lsa, bunday nuqtalar bissektor tekisliklariga tegishli nuqtalar bo'ladi. 2.16-rasmda birinchi bissektor tekisligida joylashgan K va L nuqtalarning, 2.18-rasmda esa ikkinchi bissektor tekisligida joylashgan E va F nuqtalarning fazodagi vaziyati ko'rsatilgan. Chizmada birinchi bissektor tekisligida joylashgan K va L nuqtalarning proyeksiyalari (K′, K″ va L′, L″) Ox o'qidan baravar uzoqlikda joylashadi (2.17-rasm). Ikkinchi bissektor



2.13-rasm.



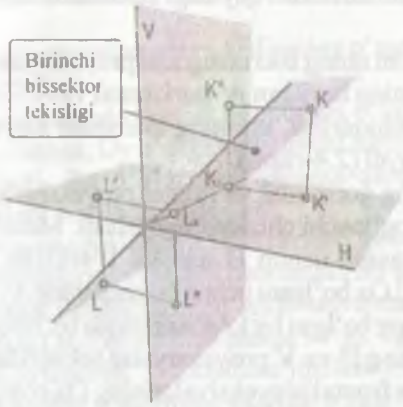
2.14-rasm.



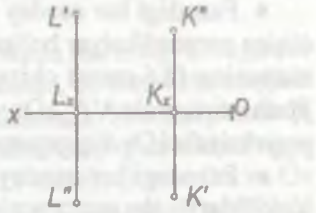
2.15-rasm.

tekisligida joylashgan E va F nuqtalarning proyeksiyalari (E′, E″ va F′, F″) chizmada ustma-ust tushadi (2.19-rasm).

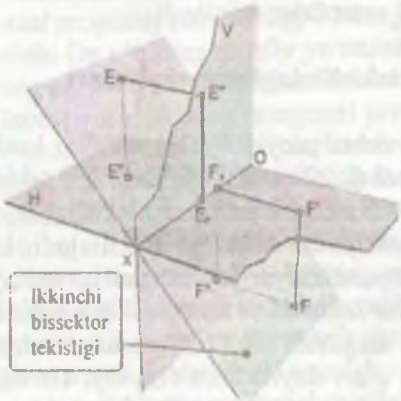
2.1.6. Proyeksiyalar tekisliklari va koordinatalar o‘qida joylashgan nuqtalarning chizmalari. Fazoda biror nuqta proyeksiyalar tekisligida yoki proyeksiyalar o‘qida joylashishi mumkin. Masalan, $A \in H$ bo‘lsin (2.20-rasm). Bunda A nuqtaning gorizontal proyeksiyasi A′ nuqtaning o‘ziga (A≡A′), frontal proyeksiyasi A″ esa Ox o‘qiga proyeksiyalanadi (2.21-rasm). Shuningdek, nuqta Ox proyeksiyalar o‘qida ham joylashishi mumkin. Masalan, $B \in Ox$ bo‘lsa, bu nuqtaning B′ gorizontal va B″ frontal proyeksiyalari shu B nuqtaning o‘ziga proyeksiyalanadi, ya’ni B≡B′≡B″ bo‘ladi (2.21-rasm).



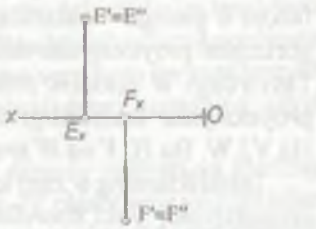
2.16-rasm.



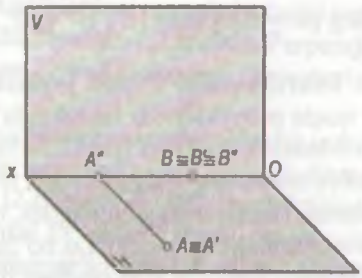
2.17-rasm.



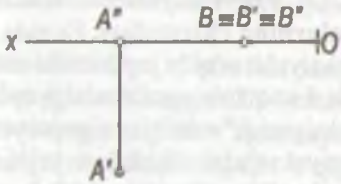
2.18-rasm.



2.19-rasm.



2.20-rasm.



2.21-rasm.

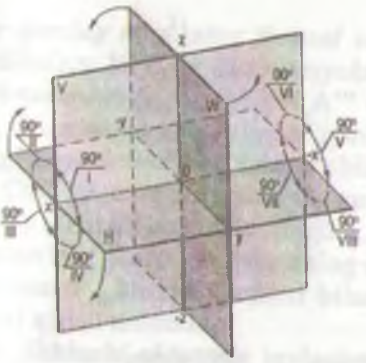
Turli choraklarda joylashgan nuqtalarni H va V proyeksiyalar tekisliklariga proyeksiyalash va ularning chizmalarini tuzishdan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin:

- Nuqtaning fazodagi vaziyatini uning ikki ortogonal proyeksiyasi to'la aniqlaydi. Haqiqatan ham, A nuqtaning berilgan A′ gorizontal va A″ frontal proyeksiyalaridan perpendikulyar chiqarilsa, ularning kesishish nuqtasi A nuqtaning fazodagi vaziyatini aniqlaydi (2.4-rasm).
- Fazodagi har qanday nuqtaning gorizontal va frontal proyeksiyalari Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan bir bog'lovchi chiziqda joylashadi. Masalan, A nuqtaning (2.6-rasm) chizmasini yasash uchun H tekislik V tekislik bilan jipslashtirilganda $A'A_x \perp Ox$ va $A''A_x \perp Ox$ bo'lgani uchun bu nuqtaning A′ va A″ proyeksiyalari Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan bir to'g'ri chiziqda bo'lib qoladi.
- Fazodagi har qanday nuqtaning H va V proyeksiyalar tekisliklaridan uzoqliklarini shu nuqta gorizontal va frontal proyeksiyalarining Ox o'qigacha bo'lgan masofalari aniqlaydi. Haqiqatan, A nuqtadan H tekislikkacha bo'lgan masofa (2.4-rasm) $AA'=A''A_x$ va V tekislikkacha bo'lgan masofa $AA''=A'A_x$. Demak, A nuqtaning H tekislikkacha bo'lgan masofasini $A''A_x$ va V tekislikkacha bo'lgan masofani $A'A_x$ masofalar aniqlaydi.

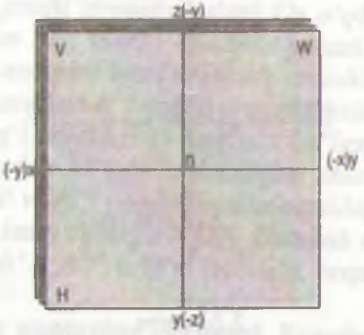
2.2-§. Nuqtaning uchta tekislikdagi proyeksiyalari

O'zaro perpendikulyar bo'lgan uchta proyeksiyalar tekisligi kesishib, fazoni 8 qismga – oktantlarga bo'ladi (2.22-rasm). Ma'lumki, H tekislik – gorizontal proyeksiyalar tekisligi, V – frontal proyeksiyalar tekisligi deyiladi. Tasvirdagi W tekislik *profil proyeksiyalar tekisligi* deb ataladi. Uchta proyeksiyalar tekislikligi o'zaro perpendikulyar joylashgan bo'ladi, ya'ni $H \perp V \perp W$. Bu *H, V va W proyeksiyalar tekisliklari sistemasi* deb yuritiladi.

Tekisliklarning o'zaro kesishishi natijasida hosil bo'lgan to'g'ri chiziqlar *proyeksiyalar* yoki *koordinatalar o'qlari* deyiladi va **Ox, Oy, Oz** harflari bilan belgilanadi. Proyeksiyalar o'qlarini tashkil qiluvchi Ox – *abssissalar o'qi,* Oy – *ordinatalar o'qi* va Oz – *applikatalar o'qi* deb ataladi.



2.22-rasm.



2.23-rasm.

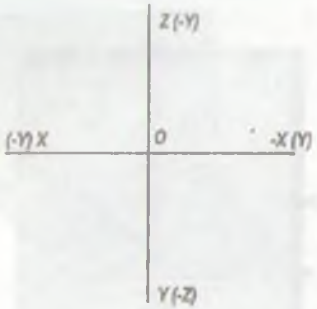
Uchta proyeksiyalar tekisligining o‘zaro kesishish nuqtasi O koordinatalar boshi deyiladi.

Bu sistemada musbat miqdor Ox o‘qiga (2.22-rasm) koordinatalar boshi O dan chapga, Oy o‘qiga kuzatuvchi tomonga va Oz o‘qiga yuqoriga qaratib qo‘yiladi. Bu o‘qlarning qarama-qarshi tomonlari manfiy miqdorlar yo‘nalishi bo‘lib hisoblanadi.

Proyeksiyalar tekisliklarida geometrik shakllarning ortogonal proyeksiyalarini yasashni osonlashtirish uchun, odatda, bu tekisliklarning bir tekislikka jipslashtirilgan tekis tasviridan foydalaniladi. Shu maqsadda H tekislikni Ox o‘qi atrofida pastga 90^0 ga va W tekislikni Oz o‘qi atrofida o‘ngga 90^0 ga aylantirib, V tekislikka jipslashtiriladi (2.23-rasm). Bunda Ox va Oz proyeksiyalar o‘qlarining vaziyati o‘zgarmay qoladi (2.24-rasm). H tekislik V tekislikka jipslashtirilganda Oy o‘qining musbat yo‘nalishi Oz o‘qining manfiy yo‘nalishi bilan, Oy o‘qining manfiy yo‘nalishi esa Oz o‘qining musbat yo‘nalishi bilan ustma-ust tushadi. Shuningdek, profil proyeksiyalar tekisligi W frontal proyeksiyalar tekisligi V bilan jipslashtirilganda Oy o‘qining musbat yo‘nalishi Ox o‘qining manfiy yo‘nalishi bilan, uning manfiy yo‘nalishi Ox o‘qining musbat yo‘nalishi bilan ustma-ust joylashadi.

Geometrik shaklning ortogonal proyeksiyalarini yasashda asosan H, V va W proyeksiyalar tekisliklari sistemasining koordinatalar o‘qlaridan foydalaniladi. Shuning uchun chizmada proyeksiyalar tekisliklarini tasvirlash shart emas (2.24-rasm). Shuningdek, tasvirni soddalashtirish uchun koordinata o‘qlarining manfiy yo‘nalishlari chizmada hamma vaqt ham ko‘rsatilmaydi (2.25-rasm). Koordinata o‘qlarining manfiy yo‘nalishlari nuqtaning qaysi oktantga tegishligiga qarab belgilanadi.

Amaliyotda nuqta va geometrik shakllarning fazoviy vaziyati va ularning ortogonal proyeksiyalariga oid masalalarni asosan I–IV oktantlarda yechish bilan chegaralaniladi. Nuqtaning proyeksiyalari fazoning qaysi oktantida joylashuviga qarab proyeksiyalar o‘qlariga nisbatan turlicha joylashadi.



2.24-rasm.



2.25-rasm.

2.2.1. Birinchi oktantda joylashgan nuqtaning chizmasi. Fazoning I oktantida joylashgan A nuqta va o'zaro perpendikulyar H, V va W proyeksiyalar tekisliklari sistemasi berilgan (2.26-a rasm). A nuqtaning ortogonal proyeksiyalarini yasash uchun bu nuqtadan proyeksiyalar tekisliklariga perpendikulyarlar o'tkazamiz.

Faraz qilaylik, A nuqtadan H tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosi A′ bo'lsin. Mazkur nuqtadan V tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosini aniqlash uchun A′ dan Ox ga perpendikulyar o'tkazamiz va bu o'qda A_x ni, so'ngra A_x dan Ox ga perpendikulyar qilib o'tkazilgan chiziqning A nuqtadan V tekislikka tushirilgan perpendikulyar bilan kesishgan A″ nuqtasini topamiz.

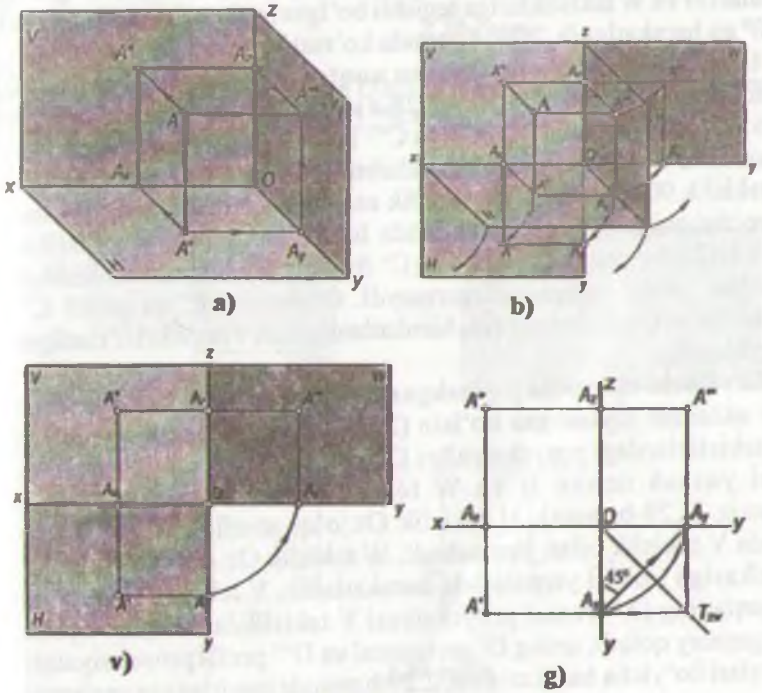
A nuqtadan W tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosini (2.26-a rasm) aniqlash uchun A′ dan Oy o'qiga tushirilgan perpendikulyar o'tkazamiz va A_y ni belgilaymiz. So'ngra A_y dan Oy ga perpendikulyar qilib o'tkazilgan chiziqning A nuqtadan W ga tushirilgan perpendikulyar bilan kesishgan A‴ nuqtasini topamiz. A nuqtadan W tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosi A‴ ni A″ dan Oz o'qigacha o'tkazilgan perpendikulyar orqali ham aniqlash mumkin.

A nuqtadan H, V va W tekisliklariga o'tkazilgan perpendikulyarlarning asoslari A′, A″ va A‴ nuqtaning ortogonal proyeksiyalari deyiladi. Bunda A′ – nuqtaning gorizontal proyeksiyasi, A″ – frontal proyeksiyasi va A‴ – profil proyeksiyasi deyiladi va A (A′,A″,A‴) ko'rinishida yoziladi. A nuqtaning chizmasini tuzish uchun V tekislikni qo'zg'atmasdan H va W proyeksiyalar tekisliklarini V tekislikka jipslashtiramiz (2.26-b rasm). A nuqtaning A″ frontal proyeksiyasi V tekislikka tegishli bo'lgani uchun uning vaziyati o'zgarmay qoladi. Gorizontal A′ va profil A‴ proyeksiyalar H va W tekisliklariga mos ravishda tegishli bo'lgani uchun bu tekisliklar Ox va Oz o'qlari atrofida pastga va o'ngga 90^0 ga buriladi va 2.26-b, v rasmda ko'rsatilgan vaziyatni egallaydi. A nuqtaning hosil bo'lgan chizmasida uning A′ va A″ proyeksiyalari Ox ga perpendikulyar bo'lgan bir proyeksion chiziqda, frontal A″ va A‴ profil proyeksiyalari esa Oz o'qiga perpendikulyar bo'lgan ikkinchi proyeksion chiziqda joylashadi.

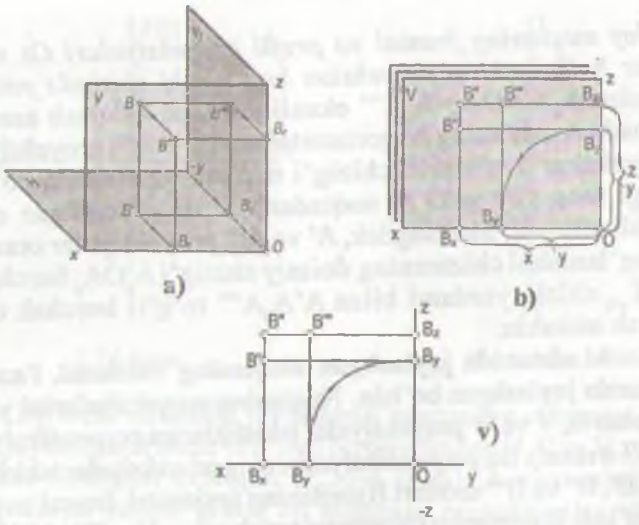
Har qanday nuqtaning frontal va profil proyeksiyalari Oz o'qiga perpendikulyar bo'lgan bitta proyeksion bog'lovchi chiziqda yotadi.

2.26-rasmdan $A_xA'=OA_y=A_zA'''$ ekanligini ham aniqlash mumkin. Demak, chizmada A nuqtaning A' gorizontal va A''' profil proyeksiyalari orasidagi proyeksion bog'lanish chizig'i markazi O nuqtada bo'lgan, radiusi OA_y ga teng yoy yoki A_y nuqtadan 45^0 da o'tkazilgan chiziq yordamida hosil qilinadi. Shuningdek, A' va A''' proyeksiyalar orasidagi proyeksion bog'lanishni chizmaning doimiy chizig'i A_xOA_y burchak A_x bissektrisasi T_{zw} chiziq yordami bilan $A'A_0A'''$ to'g'ri burchak orqali ham hosil qilish mumkin.

2.2.2. Ikkinchi oktantda joylashgan nuqtaning chizmasi. Fazodagi B nuqta II oktantda joylashgan bo'lsin. Nuqtaning proyeksiyalarini yasash uchun bu nuqtadan H, V va W proyeksiyalar tekisliklariga perpendikulyarlar o'tkazamiz (2.27-a rasm). Bu perpendikulyarlarning proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishgan B', B'' va B''' asoslari B nuqtaning gorizontal, frontal va profil proyeksiyalari bo'ladi. B nuqtaning chizmasini tuzish uchun H va W tekisliklarni V tekislikka jipslashtiramiz (2.27-b rasm).



2.26-rasm.

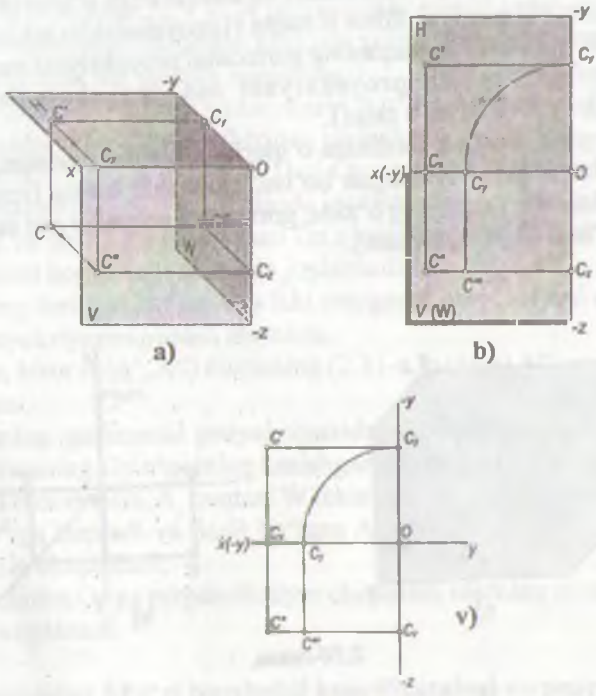


2.27-rasm.

B nuqtaning B″ frontal proyeksiyasi V tekislikda bo‘lgani uchun uning vaziyati o‘zgarmay qoladi. Bu nuqtaning B′ gorizontal va B‴ profil proyeksiyalari H va W tekisliklariga tegishli bo‘lgani uchun Ox va Oz o‘qlari atrofida 90^0 ga harakatlanib, 2.27-v rasmda ko‘rsatilgan vaziyatni egallaydi.

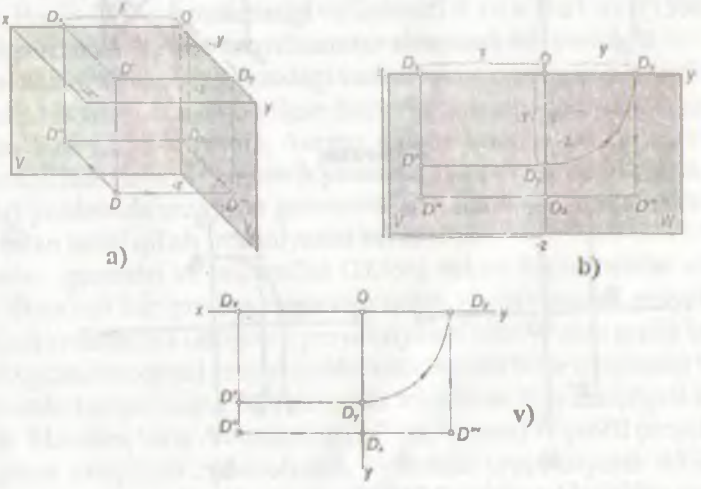
2.2.3. Uchinchi oktantda joylashgan nuqtaning chizmasi. Fazodagi C nuqta III oktantda joylashgan bo‘lsin (2.28-a rasm). Bu nuqtaning H, V va W tekisliklaridagi proyeksiyalari C′, C″ va C‴ bo‘ladi. Nuqtaning chizmasini yasash uchun H va W proyeksiyalar tekisliklarini V tekislik bilan jipslashtiramiz. Bunda H tekislik 90^0 yuqoriga, W tekislik esa Oz o‘qi atrofida 90^0 ga soat strelkasi yo‘nalishiga teskari yo‘nalishda harakatlantirilib, V tekislikka jipslashtiriladi (2.28-b rasm). C nuqtaning C″ frontal proyeksiyasi V tekislikda bo‘lgani uchun uning vaziyati o‘zgarmaydi. Gorizontal C′ va profil C‴ proyeksiyalar Ox va Oz o‘qlari atrofida harakatlanib, 2.28-v rasmda ko‘rsatilgan vaziyatni egallaydi.

2.2.4. To‘rtinchi oktantda joylashgan nuqtaning chizmasi. Fazodagi D nuqta IV oktantda joylashgan bo‘lsin (2.29-a rasm). Mazkur nuqtaning H, V va W tekisliklardagi proyeksiyalari D′, D″ va D‴ bo‘ladi. Nuqtaning chizmasini yasash uchun H va W tekisliklarini V tekislik bilan jipslashtiramiz (2.29-b rasm). H tekislik Ox o‘qi atrofida 90^0 yuqoriga ko‘tarilganda V tekislik bilan jipslashadi, W tekislik Oz o‘qi atrofida 90^0 ga soat strelkasiga teskari yo‘nalishda harakatlanib, V tekislik vaziyatiga keladi. D nuqtaning D″ frontal proyeksiyasi V tekislikda bo‘lgani uchun vaziyati o‘zgarmay qoladi, uning D′ gorizontal va D‴ profil proyeksiyalari Ox va Oz o‘qlari bo‘yicha harakatlanib, 2.29-b rasmda tasvirlangan vaziyatni



2.28-rasm.

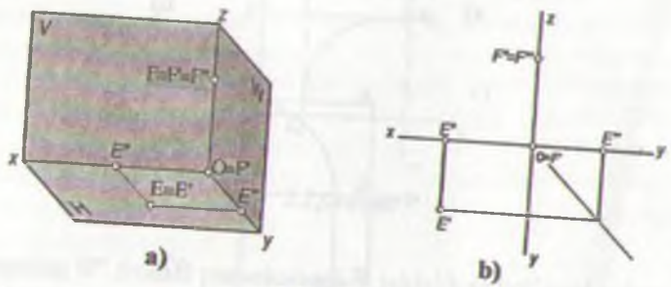
egallaydi. IV oktantda joylashgan D nuqta proyeksiyalarining koordinata o'qlari sistemasiga nisbatan joylashuvi 2.29-v rasmda tasvirlangan.



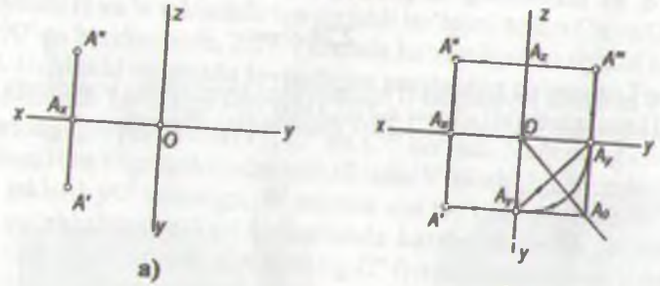
2.29-rasm.

2.2.5. Proyeksiyalar tekisliklari va koordinata o‘qlarida joylashgan nuqtalarning chizmalari. Biror E nuqta H proyeksiyalar tekisligiga tegishli bo‘lsin (2.30-a rasm). Bu nuqtaning gorizontal proyeksiyasi mazkur nuqtada (E≡E′), qolgan ikkita proyeksiyasi esa proyeksiyalar o‘qlariga proyeksiyalanadi (2.30-a, b rasm).

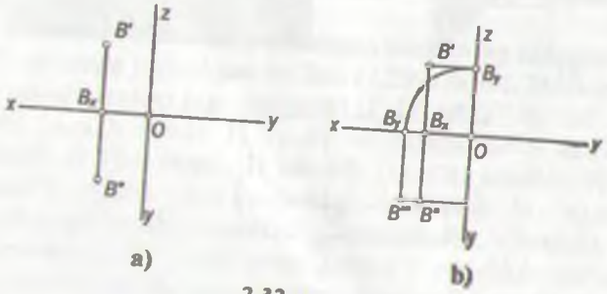
Shuningdek, nuqta koordinata o‘qlaridan birida, masalan, E nuqta Oz koordinatalar o‘qida joylashgan bo‘lsa, chizmada uning frontal va profil proyeksiyalari shu nuqtaning o‘zida, gorizontal proyeksiyasi esa koordinata boshida bo‘ladi (2.30-a, b rasm).



2.30-rasm.



2.31-rasm.



2.32-rasm.

Shunday qilib, nuqtani H, V va W proyeksiyalar tekisliklariga proyeksiyalash va uning tekis chizmasini tuzishdan quyidagi xulosalarga kelish mumkin:

Fazoda berilgan har qanday nuqtaning:

- gorizontal va frontal proyeksiyalari Ox o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan bir proyeksiyalarni bog‘lovchi chiziqda joylashadi;
- gorizontal va profil proyeksiyalari Oy o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan bir proyeksiyalarni bog‘lovchi chiziqda joylashadi;
- frontal va profil proyeksiyalari Oz o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan bir proyeksiyalarni bog‘lovchi chiziqda joylashadi.

Nuqtaning berilgan har qanday ikki ortogonal proyeksiyasi orqali uning uchinchi proyeksiyasini yasash mumkin.

Masalan, biror A (A′, A″) nuqtaning (2.31-a, b rasm) A‴ proyeksiyasini yasash uchun:

- nuqtaning gorizontal proyeksiyasidan Ox ga parallel qilib chiziq o‘tkaziladi va uning Oy o‘qi bilan kesishgan A_y nuqtasi aniqlanadi;
- OA_y ni radius qilib, A_y nuqtasi W tekislikning aylanish harakatiga mos ravishda 90^0 ga buriladi va hosil bo‘lgan A_y ning yangi vaziyatidan Oz ga parallel chiziq chiqariladi;
- A″ nuqtadan Oz ga perpendikulyar chiqarilib, ularning o‘zaro kesishuvi A‴ nuqta belgilanadi.

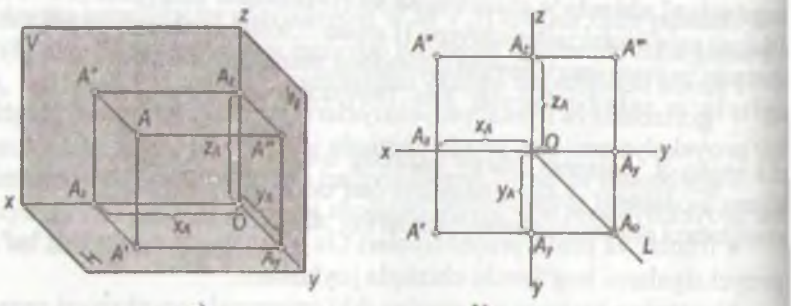
2.3-§. Nuqtaning to‘g‘ri burchakli koordinatalari va proyeksiyalari orasidagi bog‘lanish

Geometriyada har qanday nuqta va shaklning fazodagi vaziyatini o‘zaro perpendikulyar uchta koordinatalar tekisliklari sistemasiga nisbatan aniqlash qabul qilingan. Bu usul fransuz matematigi va faylasufi R e n e D e k a r t (1506–1650) ixtiro qilgani uchun **dekart koordinatalar sistemasi** deb yuritiladi.

Bu sistemada nuqtaning fazodagi vaziyatini uning x, y va z koordinatalari aniqlaydi. Masalan, fazoda berilgan biror A nuqtaning koordinatalari x_A, y_A va z_A bo‘ladi (2.33-a rasm). Ammo dekart koordinatalar sistemasida stereometrik masalalarni geometrik yasashlar fikran bajariladi, bu esa chizma asboblari yordamida muayyan geometrik shakllarni yasash va ularni grafik usullar bilan tahlil qilish imkoniyatini bermaydi.

Fransuz geometri va muhandisi G.Monj dekart koordinatalar sistemasi asosida fazodagi har qanday nuqtaning uchta koordinatasini proyeksiyalar tekisliklari sistemasida ortogonal proyeksiyalari bilan o‘zaro grafik bog‘ladi.

Haqiqatan, ortogonal proyeksiyalar sistemasida biror nuqtaning berilgan koordinatalari orqali uning proyeksiyalar tekisliklaridan uzoqligini aniqlash mumkin. Masalan, biror A nuqtaning (2.33-a, b rasm) W profil proyeksiyalar tekisligidan uzoqligini z_A abssissasi, V frontal proyeksiyalar tekisligidan uzoqligini y_A ordinatasi va H gorizontal proyeksiyalar tekisligidan uzoqligini z_A applikatasi kabi koordinatalari aniqlaydi.



2.33-rasm.

Biror nuqta berilgan koordinatalariga asosan fazoning turli oktantlaridan birida joylashgan bo'lishi mumkin. Buni aniqlash uchun takror koordinata o'qlarining yo'nalishi (2.22-rasm) ishoralariga asosan quyidagi jadvalni keltiramiz:

1-jadval

Oktantlar	Koordinatalar		
	x	y	z
I	+	+	+
II	+	-	+
III	+	-	-
IV	+	+	-
V	-	+	+
VI	-	-	+
VII	-	-	-
VIII	-	+	-

Bu jadvaldan foydalanib, nuqtaning berilgan koordinatalari ishoralari orqali uning qaysi oktantda joylashganligini aniqlash mumkin. Quyida koordinatalari bilan berilgan nuqtalarning fazodagi vaziyati va chizmasini yasashni ko'rib chiqamiz:

1-masala. A(50,30,60) nuqtaning berilgan koordinatalari bo'yicha uning fazoviy vaziyati va chizmasi yasalsin.

Yechish. A nuqta koordinatalari ishoralariga asosan I oktantda joylashgan (1-jadvalga qarang). Shuning uchun I oktantning proyeksiyalar tekisliklari fazoviy modelini va proyeksiyalar o'qlari sistemasini chizamiz (2.34-a rasm). Koordinata boshi O dan Ox o'qiga x_a=50 mm, Oy o'qiga y_a=30 mm va Oz o'qiga z_a=60 mm o'lchab qo'yamiz va A_x, A_y va A_z nuqtalarni belgilaymiz. A nuqtaning gorizontal A′ proyeksiyasini yasash uchun A_x va A_y nuqtalardan Ox va Oy o'qlariga

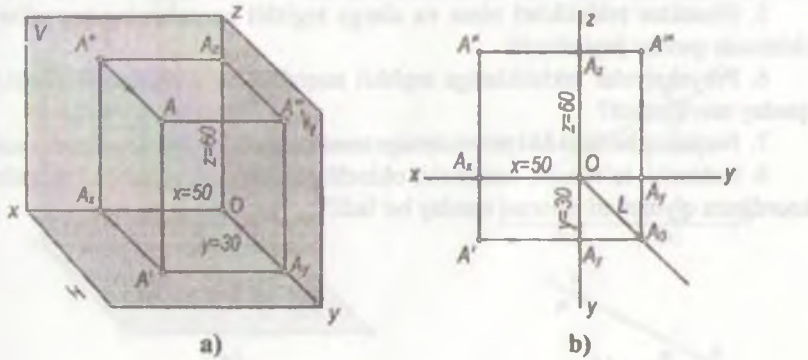
perpendikulyarlar o'tkazamiz. Bu perpendikulyarlarning kesishish nuqtasi A nuqtaning gorizontal proyeksiyasi A′ bo'ladi. Xuddi shuningdek, A_x va A_z nuqtalardan Ox va Oz o'qlariga o'tkazilgan perpendikulyarlarning kesishish nuqtasi A″ uning frontal proyeksiyasi A_y va A_z nuqtalardan Oy va Oz o'qlarga o'tkazilgan. Perpendikulyarlarning kesishish nuqtasi A nuqtaning profil proyeksiyasi A‴ bo'ladi. A nuqtaning fazodagi vaziyatini aniqlash uchun uning A′ , A″ va A‴ proyeksiyalaridan H, V va W tekisliklariga perpendikulyarlar o'tkazamiz. Bu perpendikulyarlarning kesishish nuqtasi A nuqtaning fazodagi o'rni bo'ladi. Umuman, A nuqtaning har qanday ikki proyeksiyasidan o'tkazilgan perpendikulyarlarning kesishish nuqtasi A nuqtaning fazoviy o'rnini aniqlaydi.

A nuqtaning chizmasini yasash uchun proyeksiyalar o'qlari sistemasida (2.34-b rasm) Ox o'qiga 40 mm, Oy o'qiga 30 mm va Oz o'qiga 60 mm o'lchamlarni qo'yamiz va A_x, A_y va A_z nuqtalarga ega bo'lamiz. Bu nuqtalardan Ox, Oy va Oz proyeksiyalar o'qlariga o'tkazilgan perpendikulyarlarning kesishish nuqtalari A nuqtaning A′ , A″ va A‴ proyeksiyalarini beradi, ya'ni A (A′, A″, A‴).

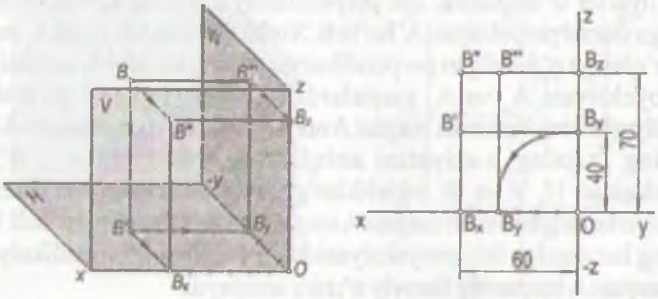
2-masala. B(60, –40, 70) nuqtaning berilgan koordinatalari bo'yicha fazoviy vaziyati va chizmasi yasalsin.

Yechish. B nuqta koordinatalari ishoralariga asosan II oktantda joylashgan. Nuqtaning proyeksiyalarini yasash uchun proyeksiyalar tekisliklarining fazoviy modelida (2.35-a rasm) koordinata o'qlariga berilgan $x_B=60$, $y_B=-40$, $z_B=70$ qiymatlarni qo'yamiz va hosil bo'lgan nuqtalarni B_x , B_y va B_z bilan belgilaymiz. So'ngra B_x va B_y nuqtalardan Ox va Oy o'qlarga, B_x va B_z dan Ox va Oz o'qlarga, B_y va B_z dan Oy va Oz o'qlarga perpendikulyarlar o'tkazamiz va ularning kesishgan B′, B″ va B‴ proyeksiyalaridan tegishlicha H, V va W tekisliklarga perpendikulyarlar o'tkazamiz. Bu perpendikulyarlarning kesishish nuqtasi izlangan B nuqta bo'ladi.

Nuqtaning chizmasini yasash uchun proyeksiyalar o'qlari sistemasini (koordinatalarning ishoralarini nazarda tutgan holda) chizamiz (2.35-b rasm).



2.34-rasm.



a) b)

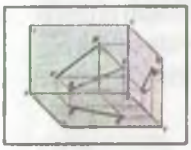
2.35-rasm.

Koordinata boshi O nuqtadan Ox o'qi bo'ylab x_v=60 mm, Oy o'qi bo'ylab y_v=-40 mm va Oz o'qi bo'ylab z_v=70 mm masofalarni o'lchab qo'yib, B_x, B_y va B_z nuqtalarga ega bo'lamiz. So'ngra yuqorida qayd qilingan tartibda B_x va B_y dan Ox va Oy o'qiga, B_x va B_y dan Ox va Oy o'qiga, B_x va B_z dan Ox va Oz o'qiga perpendikulyarlar o'tkazib, B′ va B″ proyeksiyalarini aniqlaymiz.

Nuqtaning profil B‴ proyeksiyasini yasash uchun B_y nuqtani Oz o'qiga jipslashgan Oy o'qidan Ox o'qiga jipslashgan Oy o'qiga ko'chiramiz. Bu B_y nuqtadan Oy o'qiga va B_y nuqtadan Oz o'qiga o'tkazilgan perpendikulyarlarning kesishish nuqtasi B‴ bo'ladi. Shunday qilib, B nuqtaning berilgan koordinatalariga ko'ra uning ortogonal proyeksiyasi yasaldi, ya'ni B (B′, B″, B‴).

Nazorat savollari

1. Fazo kvadrantlari yoki choraklari nima?
2. Tekis yoki kompleks chizma nima?
3. Nuqtaning gorizontal va frontal proyeksiyalari tekis chizmada qanday joylashadi?
4. Nuqtaning frontal va profil proyeksiyalari tekis chizmada qanday joylashadi?
5. Bissektor tekisliklari nima va ularga tegishli nuqtalarning proyeksiyalari chizmada qanday joylashadi?
6. Proyeksiyalar tekisliklariga tegishli nuqtalarning proyeksiyalari chizmada qanday tasvirlanadi?
7. Nuqtaning berilgan ikki proyeksiyasiga asosan uchinchi proyeksiyasi qanday yasaladi?
8. Uchinchi, to'rtinchi, beshinchi, oltinchi oktantlarda joylashgan nuqtalarning koordinata qiymatlari ishorasi qanday bo'ladi?



III BOB. TO‘G‘RI CHIZIQNING ORTOGONAL PROYEKSIYALARI

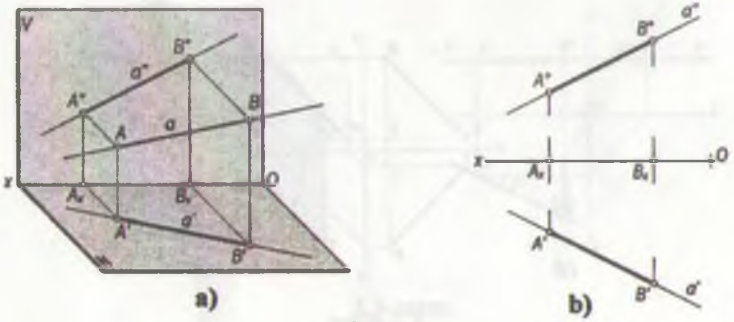
3.1-§. Umumiy vaziyatdagi to‘g‘ri chiziqning ortogonal proyeksiyalari

To‘g‘ri chiziq eng oddiy geometrik shakl hisoblanadi. Bir-biridan farqli ikki nuqta orqali faqat bitta to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin. Agar fazodagi bir-biridan farqli ikkita A va B nuqtalarni o‘zaro tutashtirib, ikki qarama-qarshi tomonga cheksiz davom ettirilsa, *a* to‘g‘ri chiziq hosil bo‘ladi (3.1-rasm).

To‘g‘ri chiziqning ikki nuqta bilan chegaralangan qismi shu *to‘g‘ri chiziq kesmasi* deyiladi.

To‘g‘ri chiziqlar *a, b, c* kabi yozma harflar bilan belgilanadi. Agar to‘g‘ri chiziqlar chegaralangan bo‘lsa, u holda *AB, CD, EF,...* tarzida belgilanadi. To‘g‘ri chiziqning proyeksiyalar tekisliklaridagi proyeksiyalari holatini uning ikki ixtiyoriy nuqtasining proyeksiyalari aniqlaydi. Masalan, 3.1-a rasmda berilgan *a* to‘g‘ri chiziqning ortogonal proyeksiyalarini yasash uchun bu chiziqqa tegishli ikki *A* va *B* nuqtalarning ortogonal *A′*, *A″* va *B′*, *B″* proyeksiyalari yasaladi. Bu ikki nuqtaning bir nomli proyeksiyalarini tutashtiruvchi *a′* va *a″* chiziqlar fazoda berilgan *a* to‘g‘ri chiziqning gorizontal va frontal proyeksiyalari bo‘ladi. Shuningdek, *AB* kesma va uning *A′B′* va *A″B″* proyeksiyalari *a* to‘g‘ri chiziqning fazodagi vaziyatini va uning *a′*, *a″* proyeksiyalarini aniqlaydi (3.1-b rasm).

Ta’rif. Proyeksiyalar tekisliklarining biortasiga parallel yoki perpendikulyar bo‘lmagan to‘g‘ri chiziq umumiy vaziyatdagi to‘g‘ri chiziq deyiladi.



3.1-rasm.

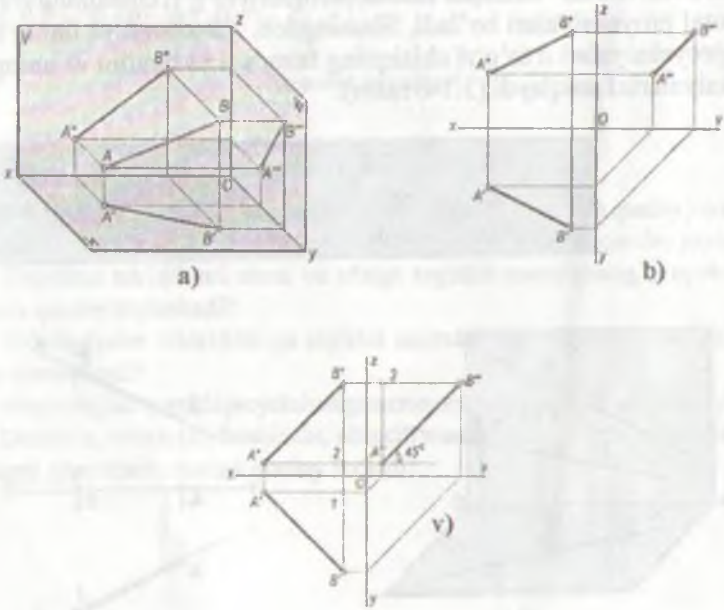
To‘g‘ri chiziqning gorizontal va frontal proyeksiyalariga asosan uning profil proyeksiyasini ham yasash mumkin. Buning uchun uning yuqorida tanlab olingan *A* va *B* nuqtalarining profil proyeksiyalari yasaladi va ular o‘zaro tutashtiriladi (3.2-a, b, v rasm).

To‘g‘ri chiziq proyeksiyalari faqat uning kesmasi proyeksiyalari orqaligina emas, balki ixtiyoriy qismi bilan ham berilishi mumkin. Umumiy vaziyatdagi to‘g‘ri chiziqning ortogonal proyeksiyalari to‘g‘ri chiziq bo‘ladi va ular proyeksiyalar o‘qlariga nisbatan ixtiyoriy burchaklarni tashkil etadi. Bu burchaklar α, β, γ harflari bilan belgilanadi.

Bu α, β, γ burchaklar AB kesmaning H, V, W proyeksiyalar tekisliklari bilan mos ravishda hosil qilgan burchaklaridir, ya’ni $\alpha=AB\hat{}H$, $\beta=AB\hat{}V$, $\gamma=AB\hat{}W$.

Umumiy vaziyatdagi to‘g‘ri chiziq kesmasi proyeksiyalar tekisliklariga qisqarib proyeksiyalanadi.Uning haqiqiy uzunligini aniqlash keyingi paragraflarda ko‘riladi.

Proyeksiya tekisliklari bilan bir xil burchak tashkil qilgan to‘g‘ri chiziqlar. Agar biror to‘g‘ri chiziq fazoda H, V va W lar bilan bir xil burchak hosil qilib joylashgan bo‘lsa, uning AB kesmasining uchala proyeksiyalari o‘zaro teng, ya’ni $AB\hat{}H=AB\hat{}V=AB\hat{}W$ bo‘lsa, $A'B'=A''B''=A'''B'''$ bo‘ladi. Bunda $A'B'=B''A''$ teng yonli trapetsiyadan $1B'=2B''=3A'''$ va $1B'=3B'''$, demak, $3A'''=3B'''$ bo‘lgani uchun $\angle 3A''B''=45^0$ bo‘ladi. Shu bilan birga $A'''B'''\|A''B''$ bo‘lib, $\Delta x=\Delta y=\Delta z$ bo‘ladi.



3.2-rasm.

3.2-§. Xususiy vaziyatdagi to‘g‘ri chiziqlarning proyeksiyalari

Ta'rif. Proyeksiyalar tekisligiga parallel yoki perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq xususiy vaziyatdagi to'g'ri chiziq deyiladi.

3.2.1. Proyeksiyalar tekisligiga parallel to‘g‘ri chiziqlar.

Gorizontal to‘g‘ri chiziq. Gorizontal proyeksiyalar tekisligi H ga parallel to‘g‘ri chiziq *gorizontal chiziq* (yoki *gorizontal*) deb ataladi (3.3-a, b rasm).

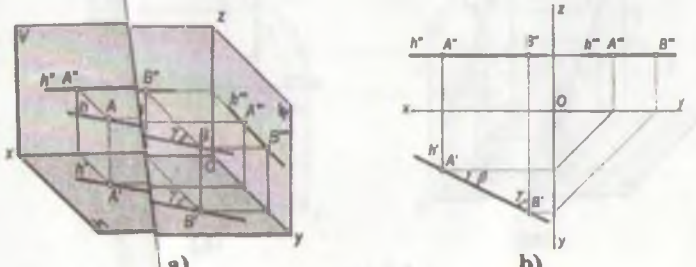
Gorizontalning barcha nuqtalari H tekislikdan baravar masofada ($AA'=BB'$) bo‘lganiuchun chizmada uning h'' frontal proyeksiyasi Ox o‘qiga, h''' profil proyeksiyasi esa Oy o‘qiga parallel bo‘ladi. Gorizontalning h' gorizontal proyeksiyasi ixtiyoriy vaziyatda bo‘ladi. Bu chiziq kesmasining gorizontal proyeksiyasi o‘zining haqiqiy o‘lchamiga teng bo‘lib proyeksiyalanadi. Chizmadagi β va γ burchaklar h gorizontalning V va W tekisliklari bilan mos ravishda hosil qilgan burchaklarining haqiqiy kattaligi bo‘ladi, ya’ni:

$$h \| H \Rightarrow h'' \| Ox \text{ va } h''' \| Oy,\ A'B' = |AB|,\ \beta = h \wedge V \text{ va } \gamma = h \wedge W.$$

Frontal to‘g‘ri chiziq. Frontal proyeksiyalar tekisligi V ga parallel to‘g‘ri chiziq *frontal to‘g‘ri chiziq* (yoki *frontal*) (3.4-a, b rasm) deb ataladi. Frontalning barcha nuqtala V tekislikdan baravar masofada bo‘lgani uchun chizmada uning f' gorizontal proeksiyasi Ox o‘qiga, f'' profil proyeksiyasi esa Oz o‘qiga parallel bo‘ladi. Frontaling frontal f'' proyeksiyasi ixtiyoriy vaziyatda bo‘ladi.

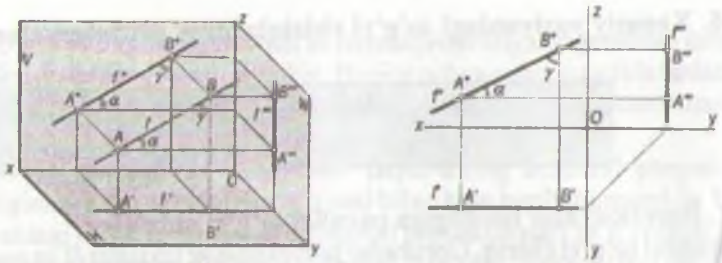
Mazkur chiq kesmasining frontal proyeksiyasi uning haqiqiy o‘lchamiga teng bo‘lib proyksiyalanadi. Chizmadagi α va β burchaklar f frontalni H va W proyeksiyalar tekisliklari bilan mos ravishda hosil qilgan burchaklarining haqiqiy kattaligi bo‘ladi, ya’ni:

$$f \| V \Rightarrow f' \| Ox \text{ va } f''' \| Oz,\ A''B'' = |AB|,\ \alpha = f \wedge H \text{ va } \gamma = f \wedge W.$$



a) b)

3.3-rasm.



a) b)

3.4-rasm.

Profil to‘g‘ri chiziq. Profil proyeksiyalar tekisligi W ga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq *profil to‘g‘ri chiziq* (yoki *profil*) deb ataladi (3.5, a, b rasm). Profilning barcha nuqtalari W tekislikdan baravar masofada bo‘lgani uchun chizmada uning gorizontal proyeksiyasi *Oy* o‘qiga parallel, frontal proyeksiyasi *Oz* o‘qiga parallel bo‘ladi.

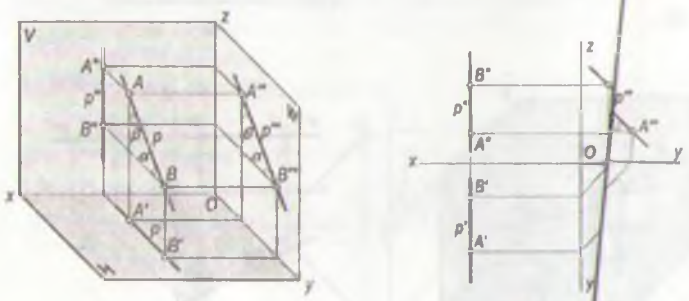
Profilning profil proyeksiyasi ixtiyoriy vaziyatda joylashgan bo‘lad. Mazkur chiziq kesmasining profil proyeksiyasi o‘zining haqiqiy o‘lchamiga ng bo‘lib proyeksiyalanadi.

Chizmadagi α va β burchaklar profil chiziqning H va V tekisklar bilan mos ravishda tashkil etgan burchaklarining haqiqiy kattaligi bo‘lad, ya’ni:

$$p \| W \Rightarrow p' \| Oy \text{ va } p'' \| Oz,\ A'''B''' = |AB|,\ \alpha = p \wedge H \text{ va } \beta = \wedge V.$$

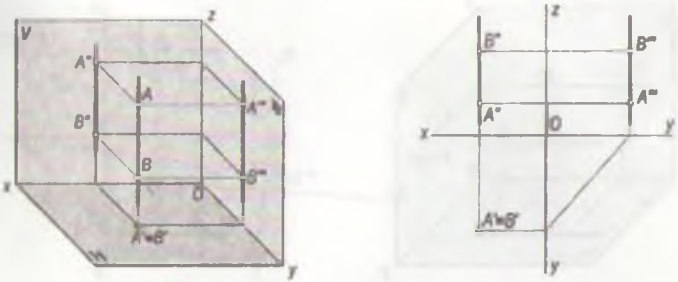
3.2.2. Proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlar. Proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlar *proyeksiyalovchi to‘g‘ri chiziqlar* deb ataladi.

Gorizontal proyeksiyalovchi to‘g‘ri chiziqlar. Gorizontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar to‘g‘ri chiziq *gorizontal proyeksiyalovchi to‘g‘ri chiziq* deb ataladi (3.6-a, b rasm). Bu to‘g‘ri chiziq H tekislik nuqta bo‘lib



a) b)

3.5-rasm.



a) b)

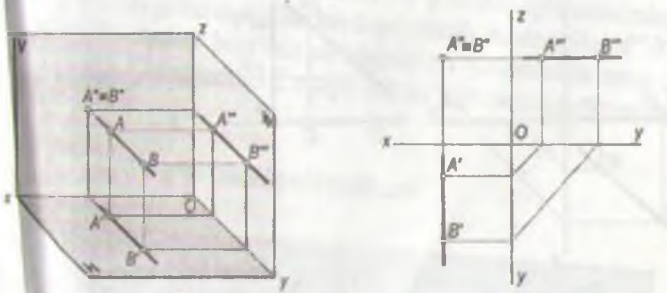
3.6-rasm.

proyeksiyalanadi. Uning frontal va profil proyeksiyalari Oz o'qiga parallel bo'ladi. Bu to'g'ri chiziq kesmasi V va W ga o'zining haqiqiy o'lchami bo'yicha proyeksiyalanadi.

Frontal proyeksiyalovchi to'g'ri chiziqlar. Frontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar to'g'ri chiziq *frontal proyeksiyalovchi to'g'ri chiziq* deb ataladi (3.7-a, b rasm). Bunday to'g'ri chiziq V tekisligiga nuqta bo'lib proyeksiyalanadi. Uning gorizontal va profil proyeksiyalari Oy o'qiga parallel bo'ladi. Bu to'g'ri chiziq kesmasi H va W proyeksiyalar tekisliklariga o'zining haqiqiy o'lchami bo'yicha proyeksiyalanadi.

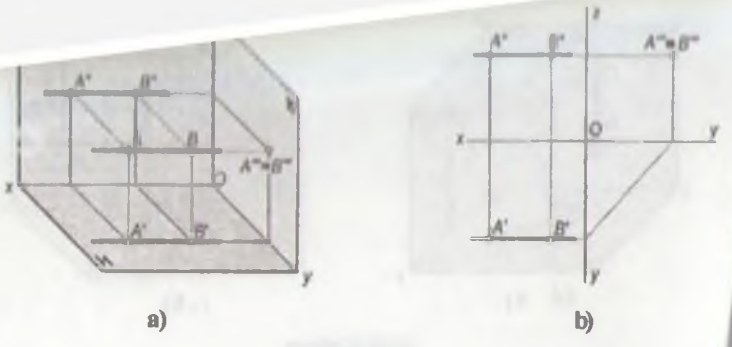
Profil proyeksiyalovchi to'g'ri chiziqlar. Profil proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar to'g'ri chiziq *profil proyeksiyalovchi to'g'ri chiziq* deb ataladi (3.8-a, b rasm). Bu to'g'ri chiziqlar profil tekisligiga nuqta bo'lib proyeksiyalanadi. Uning gorizontal va frontal proyeksiyalari Ox o'qiga parallel bo'ladi. Bu to'g'ri chiziq kesmasi H va V ga o'zining haqiqiy o'lchami bo'yicha proyeksiyalanadi.

3.2.3. Proyeksiyalar tekisliklari va koordinata o'qlariga tegishli to'g'ri chiziqlar. To'g'ri chiziqlar H, V va W proyeksiyalar tekisliklariga va Ox, Oy, Oz proyeksiyalar o'qlariga tegishli bo'lishi mumkin.



a) b)

3.7-rasm.



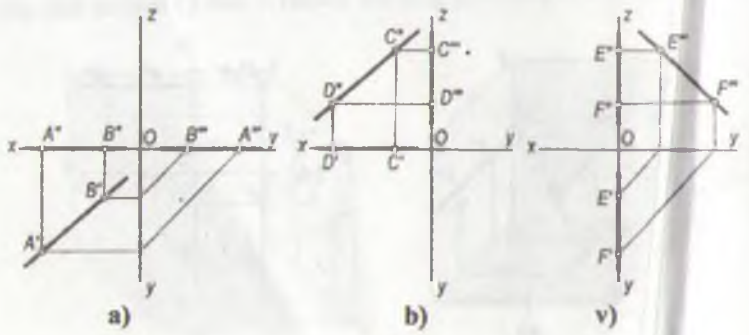
a) b)

3.8-rasm.

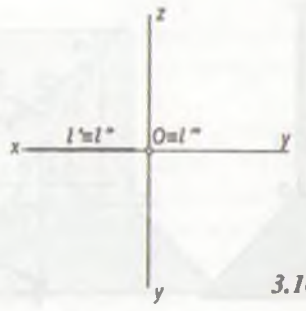
Agar to‘g‘ri chiziq biror proyeksiyalar tekisligiga tegishli bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziqning bir proyeksiyasi bevosita to‘g‘ri chiziqning o‘ziga, qolgan ikki proyeksiyasi esa koordinatalar o‘qiga proyeksiyalanadi. Masalan, CD (C′D′, C″D″) to‘g‘ri chiziq frontal proyeksiyalar tekisligi V ga tegishli bo‘lgani uchun (3.9-b rasm), uning C″D″ frontal proyeksiyasi mazkur to‘g‘ri chiziqqa, gorizontal C′D′ proyeksiyasi Ox o‘qiga, profil C‴D‴ proyeksiyasi esa Oz o‘qiga proyeksiyalanadi.

Shuningdek, 3.9-a rasmda H tekislikka tegishli AB (A′B′, A‴B‴) to‘g‘ri chiziqning, 3.9-v rasmda esa W tekislikka tegishli EF (E′F′, E‴F‴) to‘g‘ri chiziqlar proyeksiyalarining joylashishi ko‘rsatilgan.

To‘g‘ri chiziq koordinata o‘qlariga tegishli bo‘lsa, uning ikki proyeksiyasi shu o‘qning o‘ziga proyeksiyalanadi, bir proyeksiyasi esa koordinata boshi O ga nuqta bo‘lib proyeksiyalanadi. Masalan, $l \in Ox$ to‘g‘ri chiziqning l' gorizontal, l'' frontal proyeksiyalari Ox o‘qida, uning l''' profil proyeksiyasi esa koordinata boshi O ga proyeksiyalanadi (3.10- rasm).



3.9-rasm.



3.10-rasm.

3.3-§. To‘g‘ri chiziq kesmasini berilgan nisbatda bo‘lish

Parallel proyeksiyalashning xossasiga asosan biror nuqta fazodagi to‘g‘ri chiziq kesmasini qanday nisbatda bo‘lsa, uning bir nomli proyeksiyalari to‘g‘ri chiziq kesmasining proyeksiyalarini ham shunday nisbatlarda bo‘ladi.

3.11-a, b rasmda berilgan chizmaga asosan C nuqta AB kesmani AC:CB nisbatda bo‘lgan, deb qabul qilinsin. Yuqoridagi xossaga binoan, C nuqtaning proyeksiyalari *AB* kesmaning proyeksiyalarini xuddi shunday nisbatlarda bo‘ladi, ya’ni AC:CB=A′C′:C′B′=A″C″:C″B″.

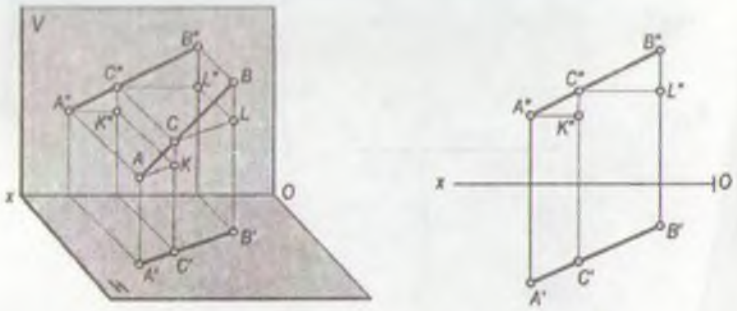
To‘g‘ri chiziqqa tegishli nuqtaning bunday xususiyatidan foydalanib, har qanday to‘g‘ri chiziq kesmasini ixtiyoriy nisbatda proporsional bo‘laklarga bo‘lish mumkin. Masalan, 3.12-rasmda berilgan *AB (A′B′, A″B″)* to‘g‘ri chiziq kesmasini teng 5 bo‘lakka bo‘lish uchun kesmaning ixtiyoriy, masalan, gorizontal proyeksiyasining A′ uchidan ixtiyoriy burchakda yordamchi *a* to‘g‘ri chiziq o‘tkaziladi. Bu to‘g‘ri chiziqqa ixtiyoriy o‘lchamli teng kesmalar besh marta qo‘yib chiqiladi. So‘ngra *5* va *B′* nuqtalar o‘zaro tutashtirilib, *4, 3, 2* va *1* nuqtalardan *5B′* chiziqqa parallel chiziqlar o‘tkaziladi.

Natijada *A′B′* kesma *5* ta teng bo‘lakka bo‘linadi. To‘g‘ri chiziq kesmasining gorizontal *A′B′* proyeksiyasidagi bu nuqtalardan foydalanib, kesmaning *A″B″* frontal proyeksiyasini proyeksion bog‘lanish chiziqlari yordamida teng 5 bo‘lakka bo‘lish qiyin emas. Chizmadagi C nuqta AB to‘g‘ri chiziq kesmasini *AC:CB=3:2* nisbatda bo‘ladi.

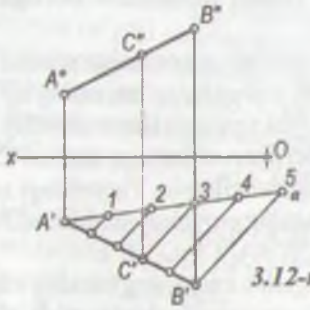
3.4-§. To‘g‘ri chiziqning izlari

Ta'rif. To'g'ri chiziqning proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishish nuqtalari to'g'ri chiziqning izlari deyiladi.

Umumiy vaziyatdagi to‘g‘ri chiziq hamma proyeksiyalar tekisliklarini kesib o‘tadi. Biror *a* to‘g‘ri chiziqning gorizontal proyeksiyalar tekisligi bilan kesishgan



3.11-rasm.



3.12-rasm.

nuqtasi uning *gorizontal izi*, frontal proyeksiyalar tekisligi bilan kesishgan nuqtasi *frontal izi* deyiladi. Shuningdek, to'g'ri chiziqning profil proyeksiyalar tekisligi bilan kesishgan nuqtasi uning *profil izi* deyiladi:

$$a \cap H = a_H,\ a \cap V = a_v \text{ va } a \cap W = a_W.$$

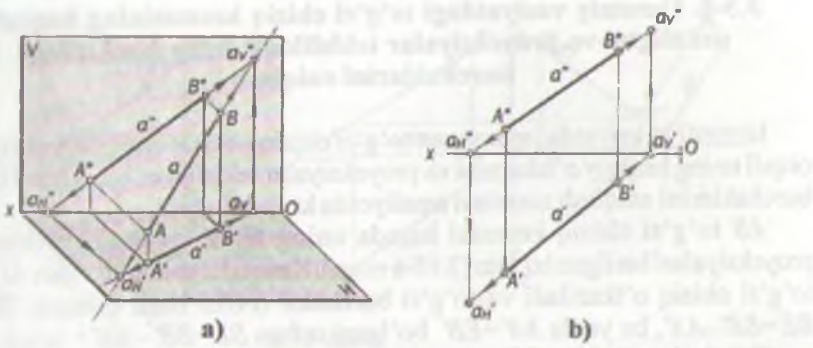
3.13-a rasmda a to'g'ri chiziq izlarini yasashning fazoviy modeli ko'rsatilgan.

To'g'ri chiziqning gorizontal izi proyeksiyalarini chizmada aniqlash uchun quyidagi yasash algoritmlari bajariladi (3.13-a, b rasm):

- to'g'ri chiziq frontal a'' proyeksiyasining Ox o'qi bilan kesishish nuqtasi $a_H'' = a'' \cap Ox$ topiladi;
- a_H'' nuqtadan Ox o'qiga perpendikulyar o'tkaziladi;
- to'g'ri chiziqning gorizontal proyeksiyasi a' bilan perpendikulyarning kesishish nuqtasi to'g'ri chiziq gorizontal izining gorizontal proyeksiyasi $a'_H \equiv a_H$ bo'ladi.

To'g'ri chiziq frontal izining proyeksiyalarini chizmada aniqlash uchun:

- to'g'ri chiziq gorizontal a' proyeksiyasining Ox o'qi bilan kesishish nuqtasi $a'_v = a' \cap Ox$ topiladi;



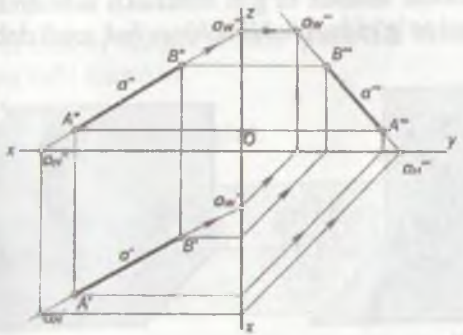
3.13-rasm.

- bu nuqtadan *Ox* o‘qiga perpendikulyar o‘tkaziladi;
- to‘g‘ri chiziqning frontal proyeksiyasi *a''* bilan perpendikulyarning kesishish nuqtasi uning frontal izining frontal proyeksiyasi $a_v'' \equiv a_v$ bo‘ladi.

To‘g‘ri chiziqning profil izini yasash uchun (3.14-rasm):

- uning frontal proyeksiyasi *Oz* o‘qi bilan kesishguncha davom ettiriladi;
- hosil bo‘lgan a_W'' nuqtadan *Oz* ga perpendikulyar chiqariladi;
- to‘g‘ri chiziqning profil proyeksiyasi bu perpendikulyar bilan kesishguncha davom ettiriladi va $a_W \equiv a_W'''$ aniqlanadi yoki to‘g‘ri chiziqning *a'* gorizontal proyeksiyasi *Oy* o‘qi bilan kesishguncha davom ettiriladi;
- hosil bo‘lgan nuqtadan *Oy* o‘qiga perpendikulyar chiqariladi;
- uning a_W'' dan Oz ga chiqarilgan perpendikulyar bilan kesishish nuqtasi *a* to‘g‘ri chiziqning profil izining profil proyeksiyasi bo‘ladi.

Shakldagi $a_W' a_W''$ nuqtalar mazkur *a* to‘g‘ri chiziq profil izining gorizontal va frontal proyeksiyalari bo‘ladi. a_W''' nuqta *a* to‘g‘ri chiziq profil izining profil proyeksiyasidir.



3.14-rasm.

3.5-§. Umumiy vaziyatdagi to‘g‘ri chiziq kesmasining haqiqiy uzunligini va proyeksiyalar tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklarini aniqlash

Umumiy vaziyatda joylashgan to‘g‘ri chiziq kesmasining proyeksiyalari orqali uning haqiqiy o‘lchamini va proyeksiyalar tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklarini aniqlash masalasi amaliyotda ko‘p uchraydi.

AB to‘g‘ri chiziq kesmasi hamda uning H, V va W tekisliklardagi proyeksiyalari berilgan bo‘lsin (3.15-a rasm). Kesmaning A nuqtasidan $AE \| A'B'$ to‘g‘ri chiziq o‘tkaziladi va to‘g‘ri burchakli ΔABE hosil qilinadi. Bunda $BE=BB'-AA'$, bu yerda $AA'=EB'$ bo‘lgani uchun $BE=BB'-EB'=\Delta z$ bo‘ladi.

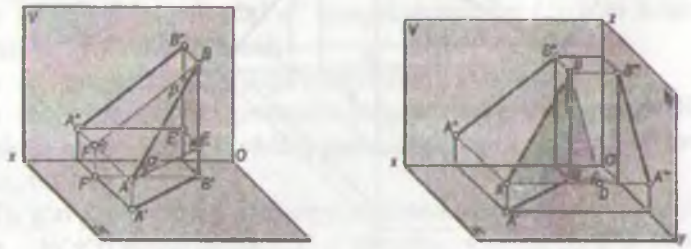
To‘g‘ri burchakli ABE uchburchakning AB gipotenuzasi AE katet bilan α burchak hosil qiladi. Bu burchak AB kesmaning H tekislik bilan hosil qilgan burchagi bo‘ladi.

To‘g‘ri chiziq kesmasining V proyeksiyalar tekisligi bilan hosil qilgan β burchagini aniqlash uchun to‘g‘ri burchakli ABF uchburchakdan foydalanamiz. Bu uchburchakning BF kateti AB kesmasining frontal proyeksiyasi $A''B''$ ga, ikkinchi AF kateti uning A va B uchlarining V tekislikdan uzoqliklarining ayirmasiga teng bo‘ladi. Bunda $AF=AA''-BB''$ bo‘lib, $BB''=FA''$ bo‘lgani uchun $AF=AA''-FA''=\Delta y$ bo‘ladi.

To‘g‘ri burchakli ABF ning AB gipotenuzasi BF katet bilan hosil qilgan β burchak AB kesmaning V tekislik hosil qilgan burchagi bo‘ladi.

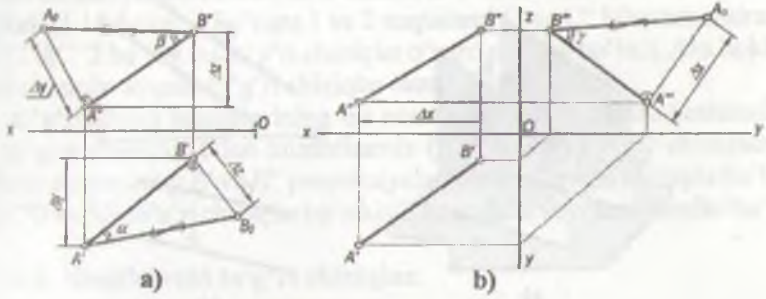
3.15-*b* rasmda AB kesmaning W tekislik bilan hosil qilgan γ burchagini aniqlash ko‘rsatilgan. Bu burchakni aniqlash uchun to‘g‘ri burchakli ΔABF dan foydalanamiz. Bu uchburchakning bir kateti AB kesmasining profil $A'''B'''$ proyeksiyasiga, ikkinchi AD kateti A va B uchlarining W tekislikdan uzoqliklari ayirmasiga teng bo‘ladi. Bunda $AD=AA'''-BB'''$ bo‘lib, $BB'''=DA'''$ bo‘lgani uchun $AD=AA'''-DA'''=\Delta x$ bo‘ladi.

Chizmada kesmaning berilgan proyeksiyalari orqali uning haqiqiy uzunligi va proyeksiyalar tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklarini aniqlash uchun yuqoridagi fazoviy model asosida to‘g‘ri burchakli uchburchaklar yasaladi. Shuning uchun bu usul *to‘g‘ri burchakli uchburchak usuli* deb yuritiladi.



a) b)

3.15-rasm.



3.16-rasm.

Masalan, *AB* kesmaning *A'B'*, *A''B''* va *A'''B'''* proyeksiyalariga asosan uning (3.16-a rasm) haqiqiy o'lchami va H bilan hosil qilgan α burchagini aniqlash uchun to'g'ri burchakli $A'B'B_0$ uchburchak yasaladi. Bu uchburchakning bir kateti kesmaning gorizontal proyeksiyasiga, ikkinchi kateti esa kesmaning *A* va B uchlari applikatalari ayirmasi Δz ga teng bo'ladi. Bu uchburchakning $A'B_0$ gipotenuzasi *AB* kesmaning haqiqiy o'lchami $A'B_0=AB$ bo'lib, AB^H=$\angle B'A'B_0=\alpha$ bo'ladi.

Kesmaning V tekislik bilan hosil qilgan β burchagini aniqlash uchun to'g'ri burchakli $\Delta A''B''A_0$ yasaladi. Bu uchburchakning bir kateti kesmaning frontal $A''B''$ proyeksiyasiga, ikkinchi kateti esa *AB* kesma uchlari ordinatalari ayirmasi Δy ga teng bo'ladi. Hosil bo'lgan $B''A_0=AB$ bo'lib, AB^V=$\angle A''B''A_0=\beta$ bo'ladi.

AB kesmaning W tekislik bilan hosil qilgan burchagini aniqlash uchun esa to'g'ri burchakli $\Delta A'''B'''A_0$ ni yasaymiz (3.16-b rasm). Bu uchburchakning bir kateti kesmaning profil $A'''B'''$ proyeksiyasi, ikkinchi kateti kesma uchlarining W tekislikdan uzoqliklarining abssissalar ayirmasi Δx bo'ladi. Hosil bo'lgan $B'''A_0=AB$ bo'lib, AB^W=$\angle A'''B'''A_0=\gamma$ teng bo'ladi.

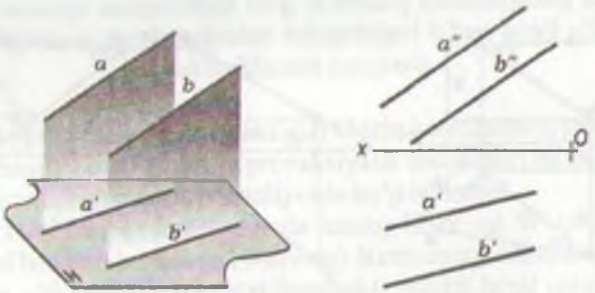
3.6-§. Ikki to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyatlari

Ikki to'g'ri chiziq fazoda o'zaro parallel, kesishuvchi yoki ayqash vaziyatlarda bo'lishi mumkin.

3.6.1. Parallel to'g'ri chiziqlar.

Ta'rif. Agar ikki to'g'ri chiziqning kesishuv nuqtasi bo'lmasa (yoki umumiy xosmas nuqtaga ega bo'lsa), ular parallel to'g'ri chiziqlar deyiladi.

Parallel proyeksiyalarning xossasiga asosan parallel to'g'ri chiziqlarning bir nomli proyeksiyalari ham o'zaro parallel bo'ladi (3.17-a, b rasm), ya'ni $a \parallel b$ bo'lsa, u holda $a' \parallel b'$, $a'' \parallel b''$, $a''' \parallel b'''$ bo'ladi.



a) b)

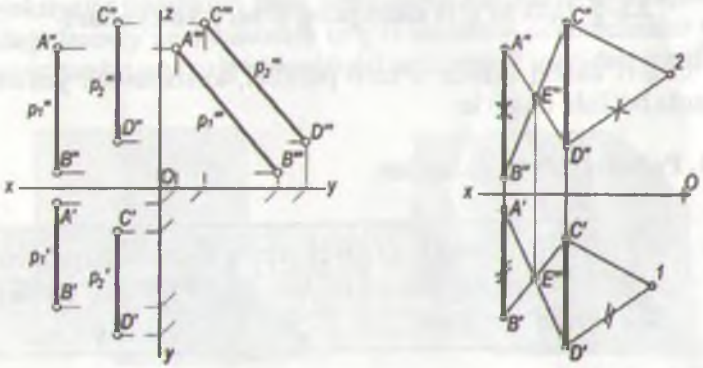
3.17-rasm.

Fazodagi umumiy vaziyatda joylashgan parallel to'g'ri chiziqlarning ikkita bir nomli proyeksiyalari o'zaro parallel bo'lsa, ularning uchinchi proyeksiyalari ham o'zaro parallel bo'ladi.

Ammo to'g'ri chiziqlar biror proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lsa, u holda yuqorida keltirilgan shart bajarilmaydi. Masalan, W tekislikka parallel bo'lgan profil to'g'ri chiziq kesmalarining bir nomli gorizontal va frontal proyeksiyalari (p_1 va p_2)ning o'zaro parallel bo'lishi yetarli bo'lmaydi (3.18-a rasm). Bunday hollarda to'g'ri chiziqlarning profil proyeksiyalarini yasash zarur. Bunda $p_1''' \| p_2'''$ bo'lsa, bu to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel bo'ladi. Agar $p_1''' \cap p_2'''$ bo'lsa, bu to'g'ri chiziqlar ayqash bo'ladi. Shuningdek, bu to'g'ri chiziqlarning o'zaro vaziyatini profil proyeksiyalaridan foydalanmasdan ham aniqlash mumkin.

Buning uchun:

- to'g'ri chiziq kesmalari bir nomli proyeksiyalarining nisbatlari tengligini aniqlaymiz. Kesmaning biror, masalan, D′, D″ nuqtasidan ixtiyoriy (o'tkir



a) b)

3.18-rasm.

burchak ostida) parallel chiziqlar o'tkazib, D'1=A'B' va D''2=A''B'' kesmalar qo'yiladi (3.18-b rasm). So'ngra 1 va 2 nuqtalarni C' va C'' bilan tutashtiramiz. Agar C'1||C''2 bo'lsa, bu to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel bo'ladi. Aks holda bu to'g'ri chiziqlar ayqash to'g'ri chiziqlar ekanligi isbotlanadi;

- to'g'ri chiziq kesmalarining bir nomli nuqtalarini o'zaro kesishadigan qilib to'g'ri chiziqlar bilan tutashtiramiz (3.18-b rasm). Agar chiziqlarning kesishish nuqtasining E' va E'' proyeksiyalari bir bog'lovchi chiziqda bo'lsa, u holda CD va AB to'g'ri chiziqlar bir tekislikka tegishli va o'zaro parallel bo'ladi.

3.6.2. Kesishuvchi to'g'ri chiziqlar.

Ta'rif. Agar ikki to'g'ri chiziq fazoda umumiy bir (xos) nuqtaga ega bo'lsa, ular kesishuvchi to'g'ri chiziqlar deyiladi.

Fazodagi to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasining proyeksiyasi shu to'g'ri chiziqlar proyeksiyalarining kesishish nuqtasida bo'ladi (3.19-rasm). Kesishuvchi to'g'ri chiziqlarning bir nomli proyeksiyalari ham chizmada o'zaro kesishadi va kesishish nuqtasi proyeksiyalari bir proyeksion bog'lovchi chiziqda bo'ladi.

Fazoda umumiy vaziyatda kesishuvchi to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsa, bu to'g'ri chiziqlarning faqat ikkita bir nomli proyeksiyalarining kesishishi kifoya qiladi.

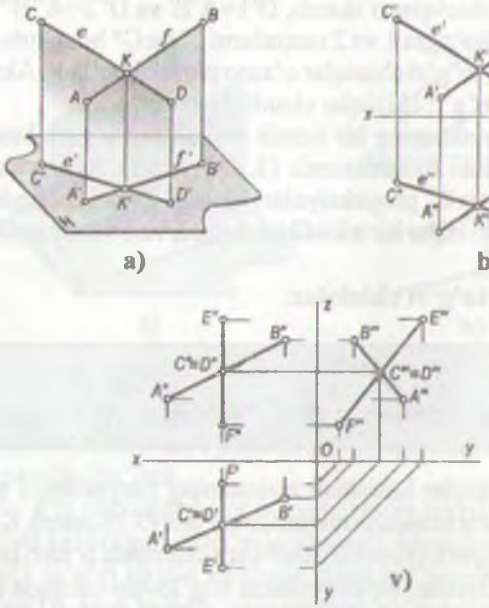
Agar kesishuvchi chiziqlarning biri proyeksiyalar tekisligining birortasiga parallel bo'lsa, u holda ularning ikkita bir nomli proyeksiyalarining o'zaro kesishuvi yetarli bo'lmaydi. Masalan, *AB* va *EF* to'g'ri chiziq kesmalarining biri *EF* kesma *W* tekislikka parallel joylashgan (3.19-v rasm). Bu chiziqlarning o'zaro vaziyatini ularning profil proyeksiyalarini yasash bilan aniqlash mumkin. Agar kesishish nuqtasining proyeksiyalari bir bog'lovchi chiziqda joylashsa, bu to'g'ri chiziqlar o'zaro kesishadi, aks holda to'g'ri chiziqlar kesishmaydi.

3.6.3. Ayqash to'g'ri chiziqlar.

Ta'rif. Ikki to'g'ri chiziq o'zaro parallel bo'lmasa yoki kesishmasa, ular ayqash to'g'ri chiziqlar deyiladi.

Ma'lumki, parallel va kesishuvchi to'g'ri chiziqlar bitta tekislikka tegishli bo'ladi. Uchrashmas to'g'ri chiziqlar esa bir tekislikda yotmaydi (3.20-a, b rasm). Uchrashmas to'g'ri chiziqlarning bir nomli proyeksiyalari chizmada o'zaro kesishsa ham, kesishish nuqtalari bir bog'lovchi chiziqqa tegishli bo'lmaydi.

Masalan, 3.20-rasmda AB (A'B', A''B'') va EF (E'F', E''F'') uchrashmas chiziqlar berilgan. Bu to'g'ri chiziqlar proyeksiyalarining 1'≡2' va 3''≡4'' kesishish nuqtalari fazoda bu to'g'ri chiziqlarning har biriga tegishli ikki nuqtaning proyeksiyalari bo'lmay, aksincha, 1∈EF, 2∈AB va 3∈EF, 4∈AB bo'ladi.



3.19-rasm.

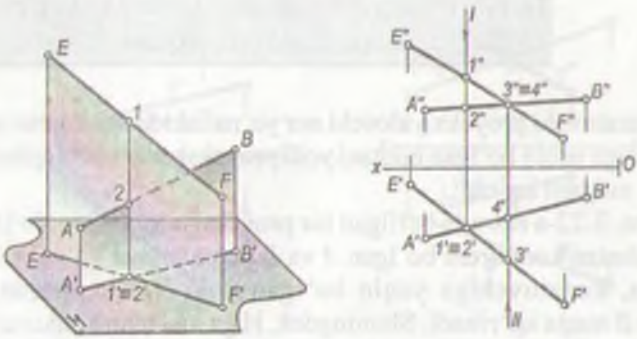
3.7-§. To‘g‘ri burchakning proyeksiyalanish xususiyatlari

Teorema. Agar to'g'ri burchakning bir tomoni tekislikka parallel bo'lib, ikkinchi tomoni bu tekislikka perpendikulyar bo'lmasa, mazkur to'g'ri burchak shu tekislikka haqiqiy kattalikda proyeksiyalanadi.

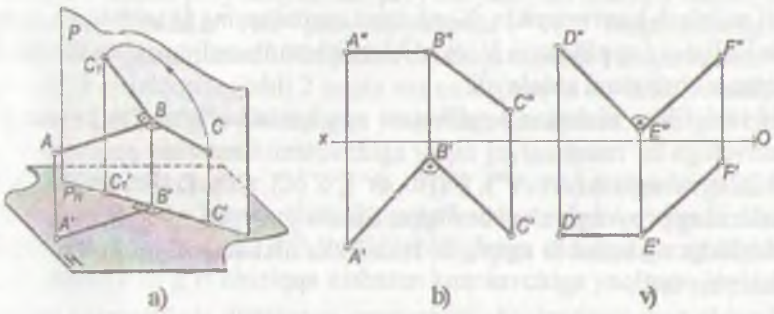
Bu teoremani isbotlash uchun 3.21-a rasmdan foydalanamiz. Shakldagi $\angle ABC=90^0$ ga teng va uning ikki tomoni H tekislikka parallel vaziyatda joylashgan deb faraz qilamiz. Bu vaziyatda uning gorizontal proyeksiyasining qiymati o‘ziga teng bo‘lib proyeksiyalanadi, ya’ni $\angle A'B'C'=90^0$ bo‘ladi.

To‘g‘ri burchakning BC tomonidan H tekislikka perpendikulyar qilib P tekislik o‘tkazamiz. U holda $AB\perp P$ bo‘lib, $H\cap P= P_H$ hosil bo‘ladi. Agar to‘g‘ri burchakning BC tomonini AB tomoni atrofida aylantirib, ixtiyoriy BC_1 vaziyatga keltirsak ham uning bu tomonining proyeksiyasi P_H bilan ustma-ust tushadi. Shunga ko‘ra, $\angle ABC_1=\angle A'B'C'=90^0$ bo‘ladi. Demak,

$\angle ABC=90^0$ bo‘lib, $AB\parallel H$ va $BC\parallel H$ bo‘lsa, $\angle A'B'C'=90^0$ bo‘ladi.



3.20-rasm.



3.21-rasm.

Chizmada ∠ABC(AB||H) va ∠DEF(DE||V) to‘g‘ri burchaklarning tasvirlanishi 3.21-b, v rasmlarda keltirilgan.

To‘g‘ri burchakning proyeksiyalanish xususiyatidan chizma geometriyada metrik masalalarni yechishda keng foydalaniladi.

3.8-§. Chizmalarda ko‘rinishlikni aniqlash

Geometrik shaklning fazodagi o‘zaro vaziyatlariga oid masalalar yechishda tasvirlarni yaqqollashtirish maqsadida ularning ko‘rinadigan va ko‘rinmaydigan qismlarini aniqlashga to‘g‘ri keladi.

Faqat birinchi oktantda joylashgan geometrik shakllarning kuzatuvchiga nisbatan yaqin turgan elementlari ko‘rinadi, uning orqasidagi elementlari ko‘rinmaydi. Boshqa oktantlarda joylashgan shakl yoki uning tarkibiy qismi ko‘rinmas deb hisoblanadi.

Geometrik shakllarning kuzatuvchiga nisbatan chizmada ko‘rinishligi konkurent nuqtalardan foydalanib aniqlanadi.

Ta'rif. Bitta proyeksiyalovchi nurda (to'g'ri chiziqda) joylashgan nuqtalar konkurent nuqtalar deyiladi.

Agar kuzatuvchi proyeksiyalovchi nur yo'nalishida konkurent nuqtalarga qarasa, u o'ziga yaqin bo'lgan nuqtani yoki proyeksiyalar tekisligidan uzoqroq joylashgan nuqtani ko'radi.

Masalan, 3.22-a rasmda berilgan bir proyeksiyalovchi nurda joylashgan va V ga nisbatan konkurent bo'lgan *A* va *B* nuqtalarga s yo'nalish bo'yicha qaralganda, kuzatuvchiga yaqin bo'lgan yoki V tekislikdan uzoqroq joylashgan *B* nuqta ko'rinadi. Shuningdek, H ga nisbatan konkurent bo'lgan C va D nuqtalarga s_1 yo'nalish bo'yicha qaralsa, H tekislikdan uzoqroq joylashgan C nuqta ko'rinadi.

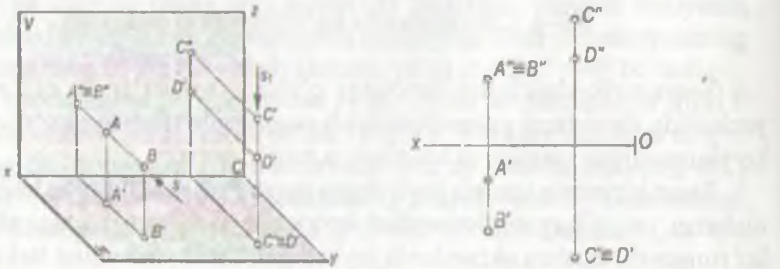
Chizmada konkurent nuqtalarning ko'rinishligini ularning koordinatalari orqali aniqlash ham mumkin. Konkurent nuqtalarning H tekislikka nisbatan ko'rinishligini *z* applikatasi, V tekislikka nisbatan *y* ordinatasi va W tekislikka nisbatan *x* abssissasi aniqlaydi.

H tekislikka nisbatan applikatasi eng katta bo'lgan konkurent nuqta kuzatuvchiga ko'rinadi.

3.22-b rasmda A (A′, A″), B (B″, B″), C (C′, C″), D (D′, D″) konkurent nuqtalarning proyeksiyalari berilgan. Bunda $y_A < y_B$ va $z_S > z_D$ bo'lgani uchun V tekislikka nisbatan B nuqta, H tekislikka nisbatan C nuqta ko'rinuvchi nuqtalar bo'ladi.

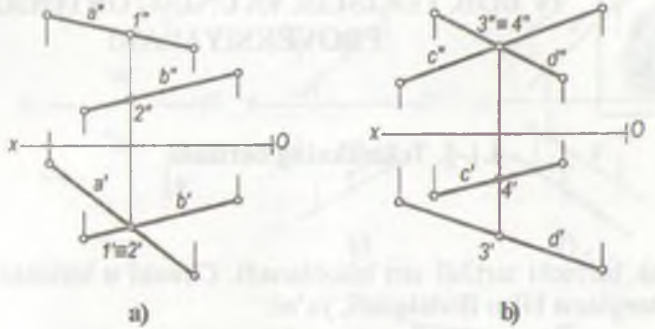
Fazoda turli vaziyatlarda joylashgan geometrik shakllarning chizmada ko'rinishligi ularga tegishli bo'lgan ayrim konkurent nuqtalarning ko'rinishligini tekshirish yo'li bilan aniqlanadi.

3.22 va 3.23-a rasmda *a (a′, a″)* va *b (b′, b″)* uchrashmas to'g'ri chiziqlar berilgan. Bu to'g'ri chiziqlar gorizontal proyeksiyalarning o'zaro kesishgan va H ga nisbatan konkurent bo'lgan nuqtalari 1′≡2′ ustma-ust proyeksiyalangan. Bu nuqtalardan qaysi biri ko'rinishligini aniqlash uchun



a) b)

3.22-rasm.



a) b)

3.23-rasm.

ularning gorizontal proyeksiyasidan proyeksiyalovchi chiziq o'tkazib, to'g'ri chiziqlarning frontal a'' va b'' proyeksiyalarida $1''$ va $2''$ nuqtalar belgilanadi va $z_1 > z_2$ ekanligi aniqlanadi. Natijada a chiziqqa tegishli 1 nuqta kuzatuvchiga ko'rinadi, b chiziqqa tegishli 2 nuqta esa uning ostida bo'ladi. Demak, a (a', a'') va b (b', b'') to'g'ri chiziqlarga yuqoridan qaraganda, a to'g'ri chiziq b to'g'ri chiziqqa nisbatan kuzatuvchiga yaqin joylashgan.

3.23-b rasmda ham c (c', c'') va d (d', d'') chiziqlarga V ga nisbatan qaraganda $y_3 > y_4$ bo'lgani uchun 3 nuqta kuzatuvchiga ko'rinadi. Shuning uchun c (c', c'') va d (d', d'') to'g'ri chiziqlarga oldidan qaraganimizda d to'g'ri chiziq c to'g'ri chiziqqa nisbatan kuzatuvchiga yaqinroq joylashgan.

Nazorat savollari

1. To'g'ri chiziqning proyeksiyalari qanday hosil bo'ladi?
2. Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziq nima?
3. To'g'ri chiziqning izlari nima?
4. Qanday xususiy vaziyatdagi to'g'ri chiziqlarni bilasiz?
5. Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziq kesmasining haqiqiy uzunligi qanday yasaladi?
6. O'zaro parallel to'g'ri chiziqlarning proyeksiyalari qanday bo'ladi?
7. Kesishuvchi va ayqash to'g'ri chiziqlarning proyeksiyalari bir-biridan qanday farqlanadi?
8. To'g'ri burchakning proyeksiyalanishi haqidagi teoremani tushuntirib bering.
9. Ko'rinishlikni aniqlashda konkurent nuqtalardan qanday foydalaniladi?



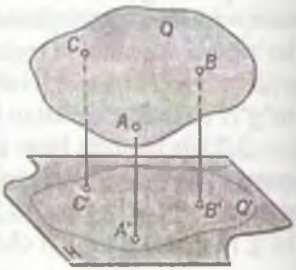
IV BOB. TEKISLIK VA UNING ORTOGONAL PROYEKSIYALARI

4.1-§. Tekislikning berilishi

Tekislik birinchi tartibli sirt hisoblanadi. Chunki u birinchi darajali algebraik tenglama bilan ifodalanadi, ya'ni:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Ortogonal proyeksiyalarda tekislikning fazodagi vaziyati uning berilishini ta'minlovchi elementlarning proyeksiyalari orqali aniqlanadi. Umumiy holda tekislikning fazoviy vaziyatini bir to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lmagan uchta nuqta aniqlaydi. Haqiqatan, 4.1-rasmdagi A, B va C nuqtalar fazoda biror Q tekislikning vaziyatini aniqlaydi. Bu nuqtalardan har birining fazoviy o'rni o'zgarishi bilan tekislikning vaziyati ham fazoda o'zgaradi.



4.1-rasm.

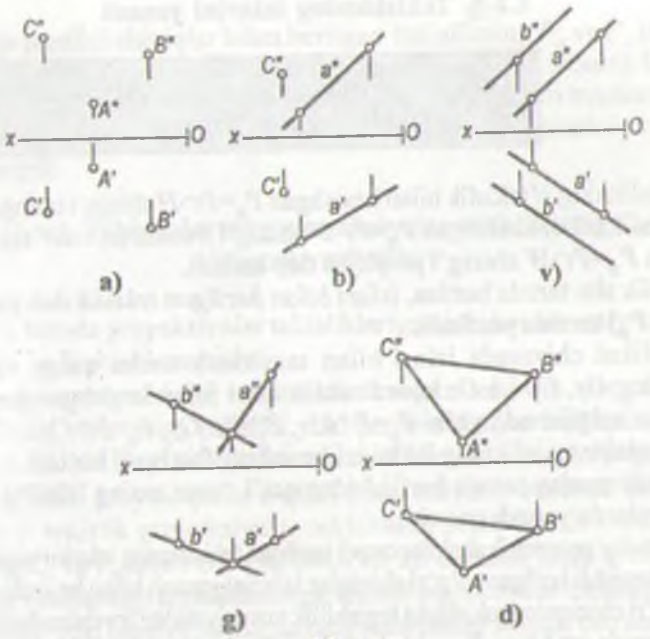
Uchta nuqtaning ikkitasi orqali hamma vaqt bir to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin. Shuningdek, uchta nuqta yordamida ikki parallel va kesishuvchi chiziqlar o'tkazish yoki tekis geometrik shakl (masalan, uchburchak) hosil qilish mumkin.

Chizma geometriyada tekisliklar quyidagi hollar bilan beriladi:

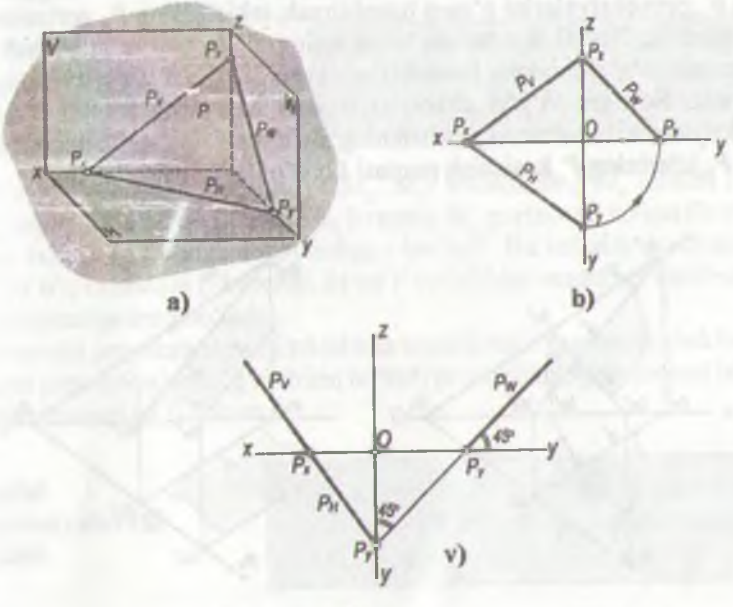
- bir to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lmagan uchta nuqtaning proyeksiyalari bilan (4.2-a rasm);
- bir to'g'ri chiziq va unga tegishli bo'lmagan nuqtaning proyeksiyalari bilan (4.2-b rasm);
- ikki parallel to'g'ri chiziq proyeksiyalari bilan (4.2-v rasm);
- ikki kesishuvchi to'g'ri chiziq proyeksiyalari bilan (4.2-g rasm);
- tekis geometrik shakllarning ortogonal proyeksiyalari orqali (4.2-d rasm).

Shuningdek, tekislik proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishish chiziqlari orqali berilishi ham mumkin. Masalan, 4.3-rasmda P tekislik H, V va W proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishgan P_H, P_V, P_W chiziqlar orqali berilishi ko'rsatilgan.

Agar biror tekislik proyeksiyalar tekisliklari bilan bir xil og'ish burchagi hosil qilsa, uning ikkita izi bir to'g'ri chiziqda yotadi. Uchinchi izi esa proyeksiyalarining o'qi bilan 45^0 burchak hosil qiladi (4.3-v rasm).



4.2-rasm.



4.3-rasm.

4.2-§. Tekislikning izlarini yasash

Ta'rif. Tekislikning proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishgan chiziqlari tekislikning izlari deyiladi.

P tekislikning H tekislik bilan kesishgan $P_H=P\cap H$ chizig'i uning *gorizontal izi*, V tekislik bilan kesishgan $P_V=P\cap V$ chizig'i *frontal izi* va W tekislik bilan kesishgan $P_W=P\cap W$ chizig'i *profil izi* deb ataladi.

Tekislik shu tarzda berilsa, *izlari bilan berilgan tekislik* deb yuritiladi va $P(P_H, P_V, P_W)$ tarzida yoziladi.

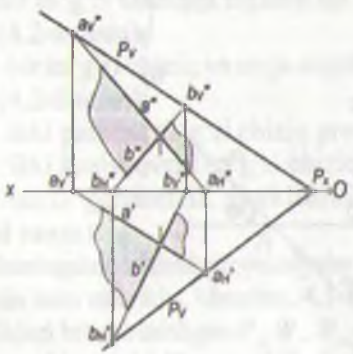
Tekislikni chizmada izlari bilan tasvirlash ancha qulay va afzaldir. Tekislikning Ox, Oy va Oz koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalari P_x, P_y, P_z bilan belgilanadi, ya'ni $P_x=P\cap Ox$, $P_y=P\cap Oy$, $P_z=P\cap Oz$.

Bu nuqtalar tekislikning ikkita izi kesishishidan hosil bo'ladi.

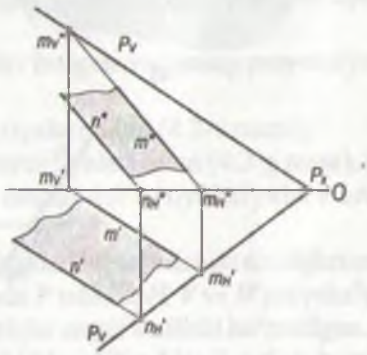
Tekislik qanday tarzda berilishidan qat'i nazar, uning izlarini ortogonal proyeksiyalarda yasash mumkin.

Har qanday geometrik shakllar orqali berilgan tekislikning izlarini yasash mazkur tekislikka tegishli bo'lgan to'g'ri chiziqlar izlarini yasash bilan bajariladi. Buning uchun to'g'ri chiziqning tekislikka tegishlilik xususiyatidan foydalaniladi.

4.4-rasmda $a\cap b$ kesishuvchi chiziqlar bilan berilgan tekislikning gorizontal izini yasash uchun to'g'ri chiziqlar gorizontal izlarining a'_H, a''_H va b'_H, b''_H proyeksiyalarini topamiz. Agar to'g'ri chiziqlar gorizontal izlarining gorizontal a'_H va b'_H proyeksiyalarini o'zaro tutashtirsak, tekislikning P_H gorizontal izini hosil qilamiz. Xuddi shu tarzda tekislikning P_V frontal izini yasash uchun kesishuvchi to'g'ri chiziqlar frontal izlarining $a'_V.a''_V$ va $b'_V.b''_V$ proyeksiyalarini yasaymiz. So'ngra to'g'ri chiziqlar frontal izlarining frontal a''_V va b''_V proyeksiyalarini tutashtirsak, tekislikning P_V frontal izini hosil qilamiz. Tekislik P_H va P_V izlarining P_x kesishish nuqtasi Ox o'qida bo'lishi shart.



4.4-rasm.



4.5-rasm.

Ikki $m \| n$ parallel chiziqlar bilan berilgan tekislikning P_H va P_V izlari ham to'g'ri chiziqlarining izlarini yasash yo'li bilan aniqlanadi (4.5-rasm). Umuman, turli geometrik shakllar bilan berilgan tekisliklarning izlari mazkur shaklga tegishli bo'lgan ikki kesishuvchi yoki parallel chiziqlarning izlarini yasash yo'li bilan aniqlanadi.

4.3-§. Tekisliklarning proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan vaziyatlari

Tekislik fazoda proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan umumiy va xususiy vaziyatlarda joylashishi mumkin.

Umumiy vaziyatdagi tekisliklar. Agar tekislik proyeksiyalar tekisliklarining birortasiga parallel yoki perpendikulyar bo'lmasa, *umumiy vaziyatdagi tekislik* deyiladi (4.3-a rasm). Chizmada umumiy vaziyatdagi tekislikning izlari proyeksiyalar o'qlari bilan ixtiyoriy burchak hosil qiladi. Agar biror P tekislik proyeksiyalar tekisliklari bilan bir xil burchak hosil qilsa, uning P_H va P_V izlari Ox o'qi bilan bir xil burchak hosil qiladi.

Xususiy vaziyatdagi tekisliklar. Agar tekislik proyeksiyalar tekisligining biriga perpendikulyar yoki parallel bo'lsa, *xususiy vaziyatdagi tekislik* deb ataladi.

Proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lgan tekisliklar *proyeksiyalovchi tekisliklar* deyiladi.

Gorizontal proyeksiyalovchi tekislik

Ta'rif. Gorizontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar tekislik gorizonta proyeksiyalovchi tekislik deyiladi.

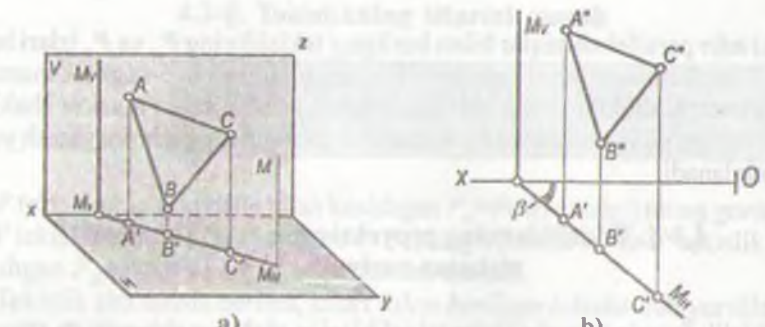
Gorizontal proyeksiyalovchi $M(M_H, M_V)$ tekislikning M_V frontal izi Ox o'qiga perpendikulyar bo'ladi (4.6-a, b rasm), M_H gorizontal izi esa Ox o'qiga nisbatan ixtiyoriy burchakda joylashgan bo'ladi. Bu tekislik gorizontal izi M_H va Ox o'q orasidagi β burchak M va V tekisliklar orasidagi burchakning haqiqiy qiymatiga teng bo'ladi.

Gorizontal proyeksiyalovchi tekislikka tegishli tekis geometrik shakllarning gorizontal proyeksiyalari to'g'ri chiziq bo'ladi va tekislikning gorizontal izi bilan ustma-ust tushadi (4.6-b rasm).

Frontal proyeksiyalovchi tekislik

Ta'rif. Frontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar tekislik frontal proyeksiyalovchi tekislik deyiladi.

Frontal proyeksiyalovchi $N(N_H, N_V)$ tekislikning gorizontal N_H izi Ox o'qiga perpendikulyar (4.7-a, b rasm), frontal N_V izi esa ixtiyoriy burchakda joylashgan



a) b)

4.6-rasm.

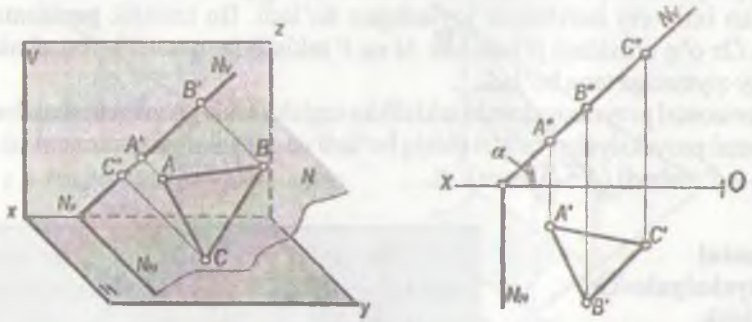
bo'ladi. Frontal proyeksiyalovchi tekislik frontal $N_v$izining Ox o'qi bilan hosil qilgan α burchagi N va H tekisliklar orasidagi burchakning haqiqiy qiymatiga teng. Frontal proyeksiyalovchi tekislikka tegishli bo'lgan tekis shakllarning frontal proyeksiyalari to'g'ri chiziq bo'ladi va tekislikning frontal izi bilan ustma-ust tushadi.

Profil proyeksiyalovchi tekislik

Ta'rif. Profil proyeksiyalar tekisliklariga perpendikulyar tekislik profil proyeksiyalovchi tekislik deb ataladi.

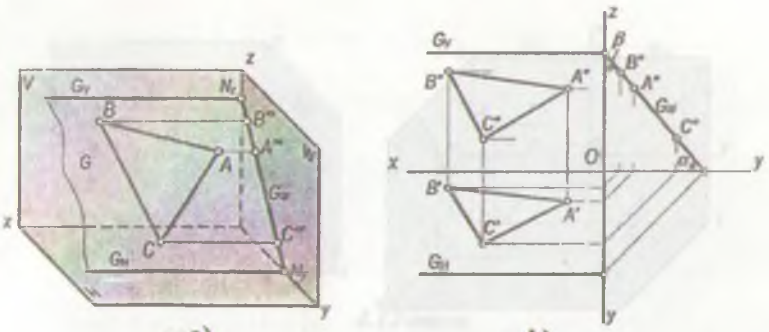
Bu tekislikning gorizontal G_H va frontal G_v izlari Ox o'qiga parallel bo'ladi (4.8-a rasm).

G profil proyeksiyalovchi tekislikning H va V tekisliklar bilan hosil qilgan α va β burchaklari 4.8-b rasmda ko'rsatilganidek haqiqiy kattalikda proyeksiyalanadi.



a) b)

4.7-rasm.



4.8-rasm.

Shuningdek, profil proyeksiyalovchi tekislik proyeksiyalar o'qi Ox dan ham o'tishi mumkin (4.9-a rasm). U holda G tekislikning gorizontal G_H va frontal G_V izlari Ox o'qida bo'ladi va tekislikning fazoviy vaziyatini aniqlab bo'lmaydi. Shuning uchun bunday hollarda mazkur tekislikning profil izi yoki shu tekislikka tegishli bo'lgan biror A (A', A'') nuqtaning ikki proyeksiyasi beriladi (4.9-b rasm). Bu nuqtaning A''' proyeksiyasi orqali tekislikning profil izini yasash mumkin (4.10-rasm).

Proyeksiyalovchi tekislikning ikkita izini chizmada tasvirlash shart emas. Tekislikning bitta izi, aynan gorizontal proyeksiyalovchi tekislikning gorizontal izi M_H, frontal proyeksiyalovchi tekislikning frontal izi N_V, profil proyeksiyalovchi tekislikning profil izi G_W, orqali ham ularning vaziyatini aniqlash mumkin (4.11-rasm).

Proyeksiyalar tekisligiga parallel tekisliklar.

Gorizontal tekislik

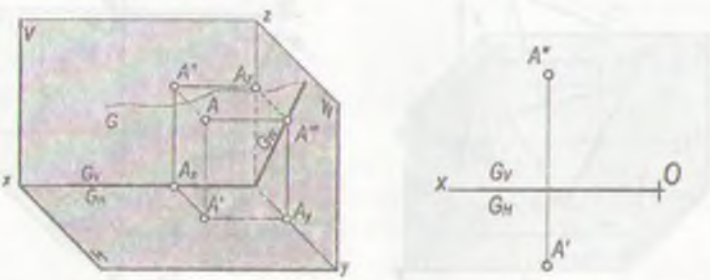
Ta'rif. Gorizontal proyeksiyalar tekisligiga parallel tekislik gorizontal tekislik deyiladi.

Bu tekislik bir vaqtda V va W tekisliklarga perpendikulyar bo'ladi. Tekislikning vaziyatini uning frontal H_{1V} izi aniqlaydi (4.12-a, b rasm).

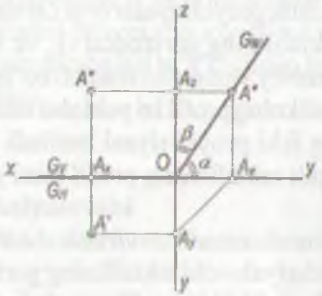
Frontal tekislik

Ta'rif. Frontal proyeksiyalar tekisligiga parallel tekislik frontal tekislik deyiladi.

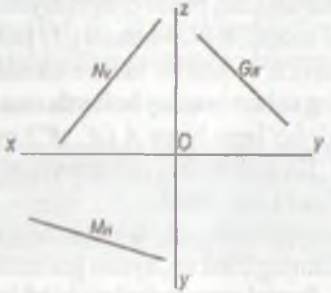
Bu tekislik bir vaqtda H va W tekisliklarga perpendikulyar bo'ladi. Tekislikning vaziyatini uning frontal V_{1H} izi aniqlaydi (4.12-a, b rasm).



4.9-rasm.



4.10-rasm.



4.11-rasm.

Profil tekislik

Ta'rif. Profil proyeksiyalar tekisligiga parallel tekislik profil tekislik deyiladi.

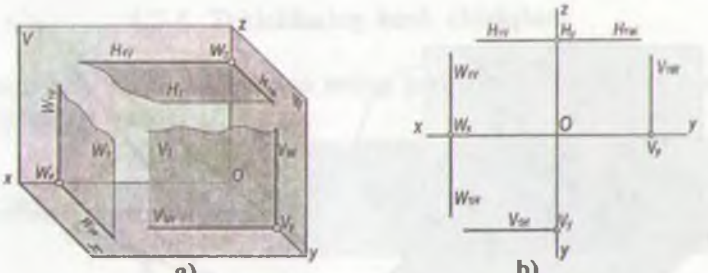
Profil W_1 tekislik bir vaqtda H gorizontal va V frontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'ladi. Tekislikning fazoviy vaziyatini uning W_{1H} gorizontal va W_{1V} frontal izlari aniqlaydi (4.12-a, b rasm).

4.4-§. Tekislik va to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyatlari

To'g'ri chiziq va tekislik fazoda o'zaro quyidagi vaziyatlarda bo'lishi mumkin:

- to'g'ri chiziq tekislikka tegishli ($a \in P$);
- to'g'ri chiziq tekislik bilan kesishadi ($a \cap P$);
- to'g'ri chiziq tekislikka parallel ($a \| P$);
- to'g'ri chiziq tekislikka perpendikulyar ($a \perp P$).

Tekislikka tegishli to'g'ri chiziq va nuqta. Quyidagi hollarda to'g'ri chiziq tekislikka tegishli bo'ladi:



4.12-rasm.

• agar to'g'ri chiziqning ikki nuqtasi tekislikka tegishli bo'lsa, bu to'g'ri chiziq tekislikka tegishli bo'ladi. Masalan, *a* to'g'ri chiziqning *A* va *B* nuqtalari (4.13-a, b rasm) *Q* tekislikka tegishli bo'lganligi uchun *a* to'g'ri chiziq *Q* tekislikka tegishli bo'ladi;

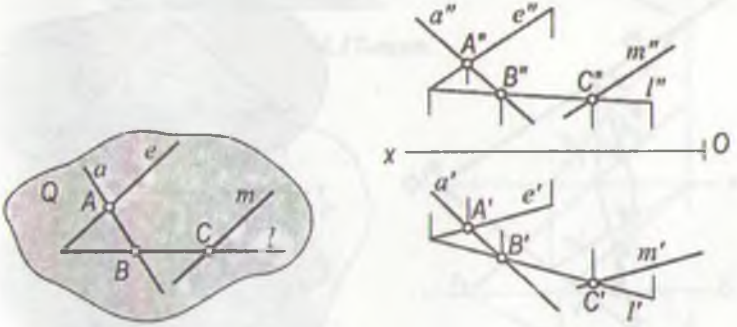
• agar *m* to'g'ri chiziqning bir nuqtasi tekislikka tegishli bo'lib, mazkur tekislikka tegishli yoki unga parallel biror to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, bu to'g'ri chiziq tekislikka tegishli bo'ladi. Masalan, *m* to'g'ri chiziqning *C* nuqtasi *Q* tekislikka tegishli va bu to'g'ri chiziq mazkur tekislikka tegishli *e* to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, u holda *m* to'g'ri chiziq *Q* tekislikka tegishli bo'ladi.

To'g'ri chiziqning tekislikka tegishli bo'lish shartlaridan quyidagi xulosalarga kelish mumkin:

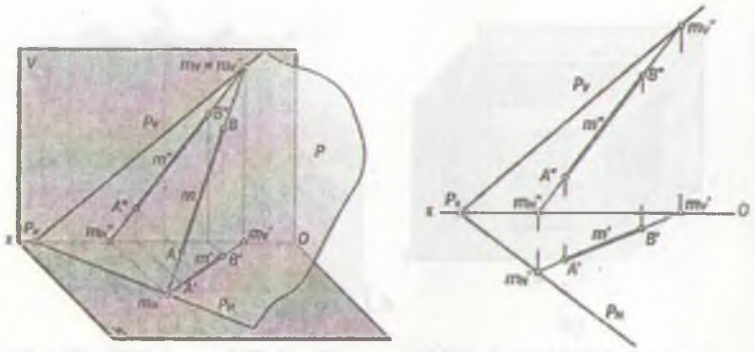
1-xulosa. Agar to'g'ri chiziq tekislikka tegishli bo'lsa, bu to'g'ri chiziqning bir nomli izlari tekislikning bir nomli izlariga tegishli bo'ladi (4.14-a, b rasm).

P tekislikka tegishli *m* to'g'ri chiziqning M_H gorizontal izi tekislikning P_H gorizontal izida, to'g'ri chiziqning M_V frontal izi tekislikning P_V frontal izida joylashgan. Demak, *m* to'g'ri chiziq P tekislikka tegishli bo'ladi, ya'ni $m \in P$.

2-xulosa. Agar nuqta tekislikka tegishli bo'lsa, bu nuqta tekislikning biror to'g'ri chizig'iga tegishli bo'ladi.



4.13-rasm.



a) b)

4.14-rasm.

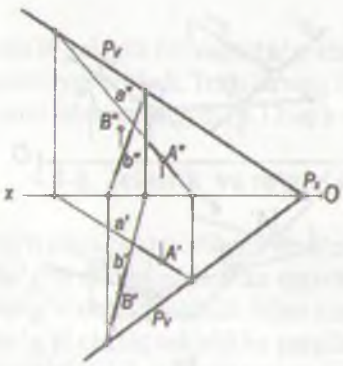
4.15-rasmda $P\,(P_H, P_V)$ tekislik bilan $A\,(A', A'')$ va $B\,(B', B'')$ nuqtalarning o‘zaro joylashuvi ko‘rsatilgan. Buning uchun:

- nuqtaning gorizontal A' (yoki frontal A'') proyeksiyasidan o‘tuvchi va tekislikka tegishli a to‘g‘ri chiziqning gorizontal a' (yoki frontal a'') proyeksiyasi o‘tkaziladi;
- to‘g‘ri chiziqning frontal a'' (yoki gorizontal a') proyeksiyasi yasaladi;
- A nuqtaning A' gorizontal va A'' frontal proyeksiyalari a to‘g‘ri chiziqning bir nomli a' va a'' proyeksiyalarida joylashgani uchun $A \in P$ bo‘ladi.

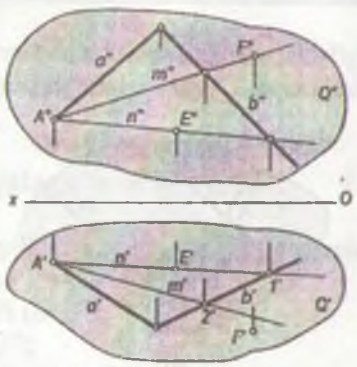
Xuddi shu tartibda $P\,(P_H, P_V)$ tekislik bilan $B\,(B', B'')$ nuqtaning o‘zaro vaziyatini tekshirganimizda $B' \in b'$ va $B'' \notin b''$ bo‘lgani uchun $B \notin P$ bo‘ladi.

4.16-rasmda a va b kesishuvchi chiziqlar orqali berilgan Q tekislik bilan E va F nuqtalarning o‘zaro vaziyati m va n chiziqlar yordamida aniqlangan:

- $E' \in n'$ va $E'' \in n''$ bo‘lgani uchun $E \in Q$ bo‘ladi;
- $F' \notin m'$ va $F'' \in m''$ bo‘lgani uchun esa $F \notin Q$ bo‘ladi.



4.15-rasm.



4.16-rasm.

4.5-§. Tekislikning bosh chiziqlari

Tekislikning bosh chiziqlariga uning gorizontali, frontali va eng katta og'ish chiziqlari kiradi.

Tekislikning gorizontali

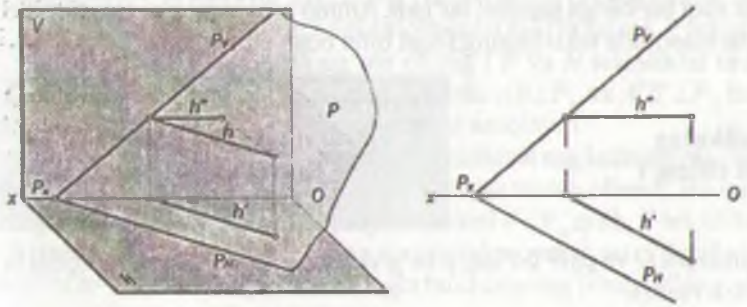
Ta'rif. Tekislikka tegishli to'g'ri chiziq H tekisligiga parallel bo'lsa, bu to'g'ri chiziq tekislikning gorizontali deyiladi.

Bunda $h \in P$ hamda $h \| H$ bo'lsa, h to'g'ri chiziq P tekislikning gorizontal chizig'i bo'ladi.

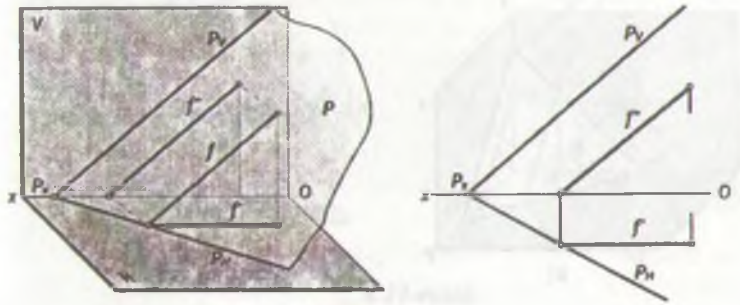
Chizmada tekislik gorizontalining frontal proyeksiyasi Ox ga parallel, ya'ni $h'' \| Ox$ bo'ladi, tekislik gorizontalining gorizontal proyeksiyasi esa tekislikning P_H iziga parallel, ya'ni $h' \| P_H$ bo'ladi (4.17-rasm).

Tekislikning frontali

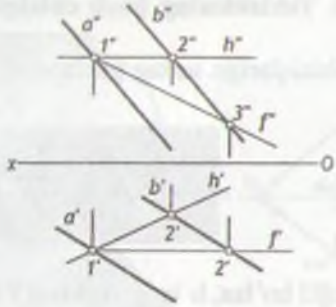
Ta'rif. Tekislikka tegishli to'g'ri chiziq V tekisligiga parallel bo'lsa, bu to'g'ri chiziq tekislikning frontali deyiladi.



4.17-rasm.



4.18-rasm.



4.19-rasm.

Bunda $f \in P$ hamda $f \| V$ bo'lsa, f to'g'ri chiziq P tekislikning frontal chizig'i bo'ladi.

Chizmada tekislik frontalining gorizontal proyeksiyasi proyeksiyalar o'qi Ox ga parallel bo'ladi, ya'ni $f' \| Ox$, tekislik frontalining frontal proyeksiyasi esa tekislikning P_v iziga parallel, ya'ni $f' \| P_v$ bo'ladi (4.18-rasm).

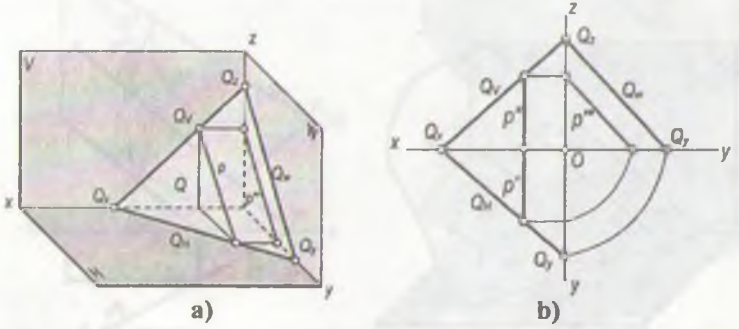
4.19-rasmda $a // b$ chiziqlar bilan berilgan tekislikning h gorizontal va f frontallarini yasash tasvirlangan.

Umuman, chizmada tekislikning cheksiz ko'p bosh chiziqlarini o'tkazish mumkin. Tekislikning bir nomli bosh chiziqlari (masalan, gorizontallari) hamma vaqt bir-biriga parallel bo'ladi. Ammo proyeksiyalar tekisligidan talab qilingan masofada tekislikning faqat bitta bosh chizig'ini o'tkazish mumkin.

Tekislikning profil chizig'i

Ta'rif. Agar tekislikka tegishli to'g'ri chiziq profil proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lsa, bu to'g'ri chiziq tekislikning profil chizig'i yoki profili deyiladi.

Bunda $p \in Q$ va $p \| W$ bo'lsa, p to'g'ri chiziq Q tekislikning profili bo'ladi (4.20-a, b rasm).



4.20-rasm.

Chizmada tekislik profil chizig'ining gorizontal va frontal proyeksiyasi Ox o'qiga perpendikulyar bo'ladi. Profil proyeksiyasi esa proyeksiyalar o'qlariga nisbatan turlicha joylashuvi mumkin. Agar tekislik izlari bilan berilgan bo'lsa, profilning profil proyeksiyasi tekislikning profil iziga parallel bo'ladi (4.20-b rasm).

Chizmada tekislikning cheksiz ko'p asosiy chiziqlarini o'tkazish mumkin. Tekislikning bir nomli bosh chiziqlari doimo o'zaro parallel bo'ladi. Ammo proyeksiyalar tekisligidan talab qilingan masofada tekislikning faqat bitta bosh chizig'ini o'tkazish mumkin.

Tekislikning eng katta og'ma chizig'i

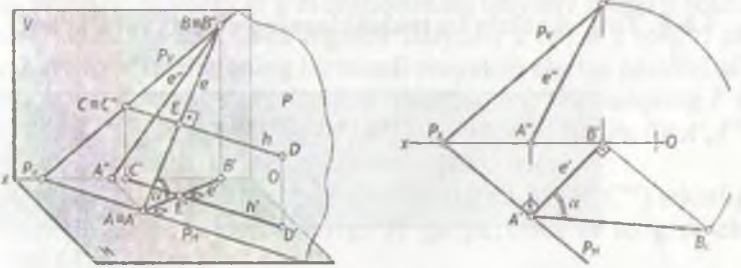
Ta'rif. Tekislikka tegishli va tekislikning bosh chiziqlaridan biri (gorizontal yoki frontal, profil)ga perpendikulyar to'g'ri chiziq tekislikning eng katta og'ma chizig'i deb ataladi.

Agar P tekislikka tegishli e to'g'ri chiziq tekislikning gorizontaliga perpendikulyar bo'lsa, u holda e to'g'ri chiziq P tekislikning H tekislikka nisbatan *eng katta og'ma chizig'i* deyiladi.

4.21-a rasmda P tekislikning H tekislikka eng katta og'ma chizig'i tasvirlangan. Bu yerda $h \in P$ va $h \| H$. To'g'ri burchakning proyeksiyalanish xususiyatidan: $\angle BED=90^0$ va $ED \| H$ bo'lgani uchun $\angle B'E'D'=90^0$ bo'ladi.

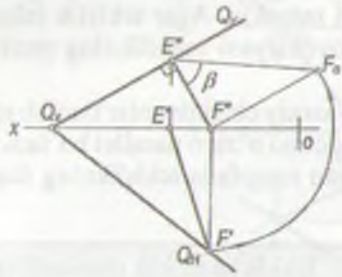
Tekislikning eng katta og'ma chizig'i orqali uning proyeksiyalar tekisligi bilan hosil qilgan ikkiyoqli burchagi aniqlanadi (4.21-b rasm). P tekislikning H tekislikka nisbatan eng katta og'ma chizig'i P va H tekisliklar orasidagi $\angle B_0A'B'$ chiziqli burchakni ifodalaydi. Chunki $AB \perp P_H$ va $A'B' \perp P_H$ bo'lgani uchun bu ikkiyoqli α burchakning qiymatini aniqlaydi.

P tekislikning H proyeksiyalar tekisligiga nisbatan eng katta og'ma chizig'ini yasash uchun P_H gorizontal izida ixtiyoriy A nuqta tanlab olinadi. Bu nuqtadan $e \in P$ to'g'ri chiziqning gorizontal proyeksiyasini $e' \perp P_H$ qilib, P tekislikning H tekislikka eng katta og'ma chizig'ining gorizontal proyeksiyasi o'tkaziladi va Ox o'qida $e' \cap Ox=B'$ nuqta aniqlanadi. So'ngra bu chiziqning frontal e'' proyeksiyasi

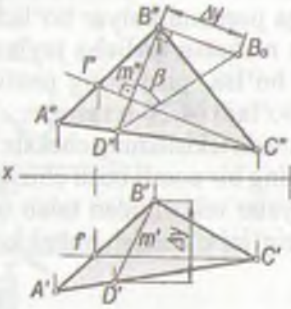


a) b)

4.21-rasm.



4.22-rasm.



4.23-rasm.

A'' va B'' nuqtalar yordamida yasaladi. Hosil bo‘lgan $e \in P$ to‘g‘ri chiziqning e' va e'' proyeksiyalari P tekislikning H tekislikka nisbatan eng katta og‘ma chizig‘ining proyeksiyalari bo‘ladi. Bu chiziqning H tekislik bilan hosil qilgan α burchagi aniqlanadi. Buning uchun to‘g‘ri burchakli uchburchak $\Delta A'B'B_0$ dan foydalanilgan (4.21-b rasm).

Xuddi shunday $Q(Q_H, Q_V)$ tekislikning V tekislik bilan hosil qilgan β burchagini yasash uchun (4.22-rasm) Q tekislikning frontal Q_V izida ixtiyoriy $E'' \in Q_V$ nuqta tanlab olinadi. Bu nuqta orqali Q_V ga perpendikulyar qilib tekislikning V tekislikka nisbatan eng katta og‘ma chizig‘ining frontal proyeksiyasi $E''F'' \perp Q_V$ o‘tkaziladi va uning $E'F'$ gorizontal proyeksiyasi yasaladi. Bu chiziqning V tekislik bilan hosil qilgan α burchagi to‘g‘ri burchakli $\Delta E''F''F_0$ orqali aniqlanadi. Bu burchak Q va V tekisliklar orasidagi ikkiyoqli burchakning haqiqiy qiymatiga teng bo‘ladi: $\beta = Q \wedge V$.

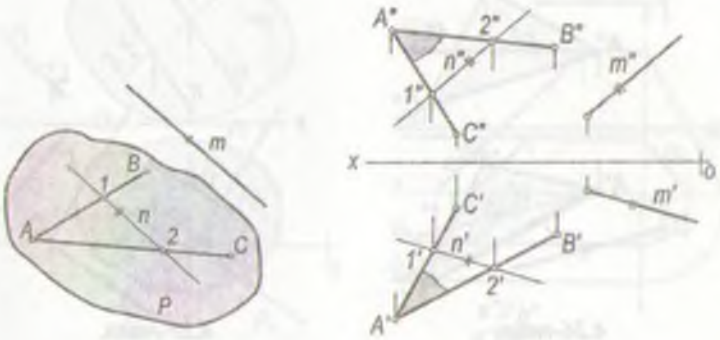
4.23-rasmda $DABC$ ($\Delta A'B'C'$, $\Delta A''B''C''$) orqali berilgan tekislikning V tekislik bilan hosil qilgan burchagi aniqlangan. Buning uchun ABC tekislikning f (f', f'') frontalini olamiz va unga perpendikulyar qilib berilgan tekislikning V tekislikka nisbatan eng katta og‘ma chizig‘i m (m', m'') dan foydalanamiz.

4.6-§. To‘g‘ri chiziq va tekisliklarning o‘zaro parallelligi

Ta'rif. Agar fazodagi m to'g'ri chiziq P tekislikka tegishli biror n to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, u holda bu to'g'ri chiziq tekislikka parallel bo'ladi.

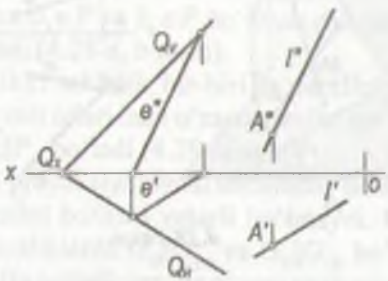
Bunda $n \in P$ bo‘lib, $m \| n$ bo‘lsa, $m \| P$ bo‘ladi (4.24-a, b rasm).

1-masala. A (A', A'') nuqtadan Q (Q_H, Q_V) tekislikka parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazish talab qilinsin (4.25-rasm).



a) b)

4.24-rasm.



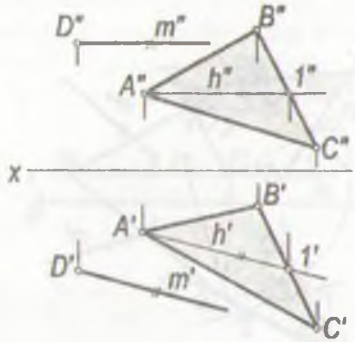
4.25-rasm.

Yechish. *A* nuqtadan *Q* tekislikka parallel qilib cheksiz ko'p to'g'ri chiziqlar o'tkazish mumkin. Shunday to'g'ri chiziqlarning ixtiyoriy bittasi o'tkaziladi.

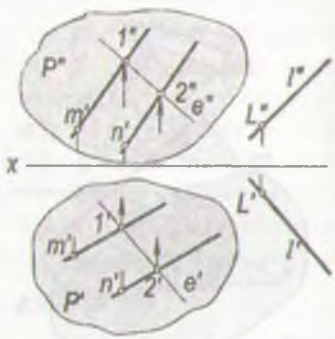
Buning uchun *Q* tekislikka tegishli ixtiyoriy *e (e', e")* to'g'ri chiziq tanlanadi. Bu to'g'ri chiziqning bir nomli proyeksiyalariga parallel qilib *A* nuqtaning *A'* va *A"* proyeksiyalaridan izlangan to'g'ri chiziqning *l'* va *l"* proyeksiyalari o'tkaziladi, ya'ni $e\,(e', e'') \in Q\,(Q', Q'')$ bo'lib, $l' \in A', l'' \in A''$ bo'lganda $l \| Q$ bo'ladi.

2-masala. D (D', D") nuqtadan *ABC* (*A'B'C'*, *A"B"C"*) tekisligi va gorizontal proyeksiyalar tekisligi *H* ga parallel *m* to'g'ri chiziq o'tkazilsin (4.26-rasm).

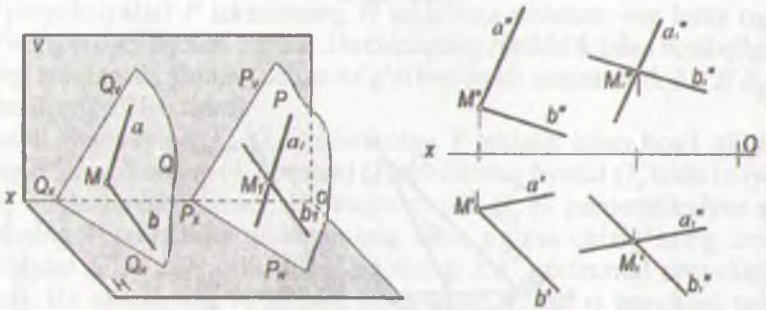
Yechish. ΔABC tekisligida *H* ga parallel qilib uning gorizontali *h* (*h'*, *h"*) to'g'ri chiziq o'tkaziladi. So'ngra D nuqtaning D' va D" proyeksiyalaridan $m' \| h'$ va $m'' \| h''$ qilib izlangan to'g'ri chiziqning proyeksiyalari o'tkaziladi.



4.26-rasm.



4.27-rasm.



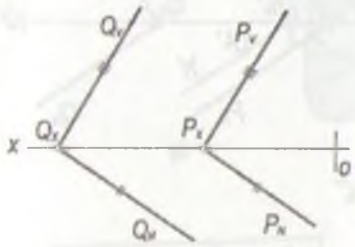
4.28-rasm.

3-masala. $P\ (m||n)$ tekislik va $l\ (l', l'')$ to‘g‘ri chiziqning o‘zaro vaziyati aniqlansin (4.27-rasm).

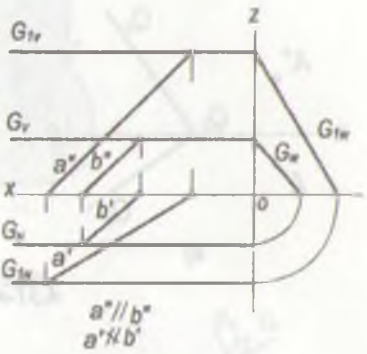
Yechish. To‘g‘ri chiziq va tekislikning o‘zaro vaziyatini aniqlash uchun P tekislikda $e' \| l'$ qilib to‘g‘ri chiziqning gorizontal proyeksiyasi o‘tkaziladi va uning frontal e'' proyeksiyasi yasaladi.Chizmada e'' to‘g‘ri chiziq l'' ga parallel bo‘lmagani uchun l to‘g‘ri chiziq tekislikka parallel bo‘lmaydi. l va P larning o‘zaro parallelligini $l'' \| e''$ qilib o‘tkazish bilan ham bajarish mumkin.

4.7-§. Tekisliklarning o‘zaro parallelligi

Ta'rif. Agar bir tekislikka tegishli o'zaro kesishuvchi ikki to'g'ri chiziq ikkinchi tekislikka tegishli o'zaro kesishuvchi ikki to'g'ri chiziqqa mos ravishda parallel bo'lsa, bu tekisliklar ham o'zaro parallel bo'ladi.



4.29-rasm.



4.30-rasm.

Agar Q tekislikka tegishli $a \cap b$ kesishuvchi to'g'ri chiziqlar ikkinchi P tekislikka tegishli $a_1 \cap b_1$ kesishuvchi to'g'ri chiziqlarga mos ravishda o'zaro parallel bo'lsa, bu tekisliklar ham o'zaro parallel bo'ladi. Ya'ni $a \in Q$, $b \in Q$ bo'lib, $a \cap b$ bo'lsa va $a_1 \in P$ va $b_1 \in P$ bo'lib, $a_1 \cap b_1$ bo'lsa hamda $a \| a_1$, $b \| b_1$ bo'lganda $Q \| P$ bo'ladi (4.28-a, b rasm).

Agar fazodagi ikki tekislik bir-biriga parallel bo'lsa, chizmada bu tekisliklarning bir nomli izlari ham o'zaro parallel bo'ladi, ya'ni $Q \| P$ bo'lsa, $Q_H \| P_H$, $Q_V \| P_V$ va $Q_W \| P_W$ bo'ladi (4.29-rasm).

Chizmada profil proyeksiyalovchi tekisliklar uchun ularning gorizontal va frontal izlari parallel bo'lishi yetarli bo'lmaydi. Masalan, 4.30-rasmda berilgan G va G_1 tekisliklarda $G_H \| G_{1H}$ va $G_V \| G_{1V}$ bo'lib, $G_W \nparallel G_{1W}$ bo'lgani uchun $G \nparallel G_1$ bo'ladi. Bu tekisliklarning o'zaro vaziyatini tekisliklarga tegishli a va b to'g'ri chiziqlar yordami bilan ham aniqlash mumkin, bunda $a \in G_1$ va $b \in G$ bo'lgan holda $a'' \| b''$ bo'lsa, $a' \| b'$ bo'lgani uchun $a \| b$ va $G \| G_1$ bo'ladi.

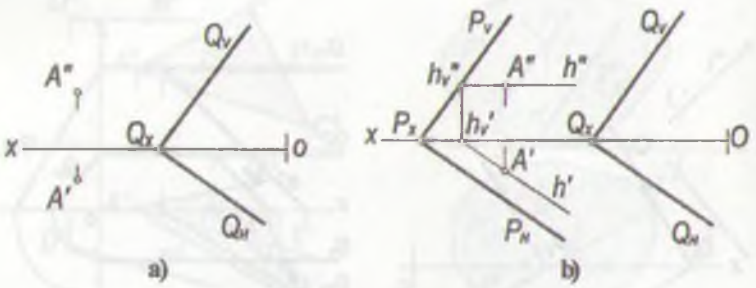
Fazodagi ixtiyoriy nuqta orqali berilgan tekislikka faqat bitta parallel tekislik o'tkazish mumkin.

1-masala. A (A', A'') nuqtadan Q (Q_H, Q_V) tekislikka parallel P(P_H, P_V) tekislik o'tkazish talab qilinsin (4.31-a rasm).

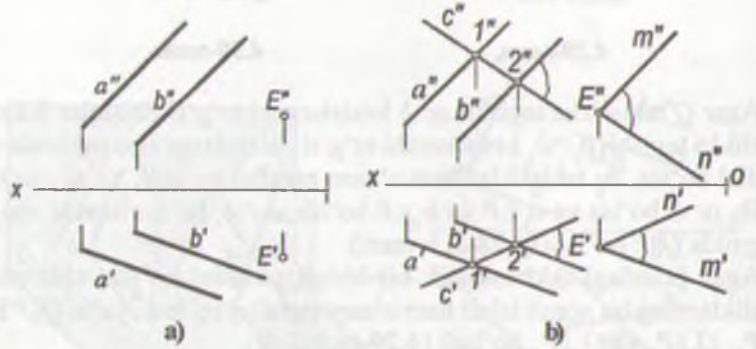
Yechish. Tekisliklarning parallellik xususiyatlariga ko'ra, P tekislikning izlari $P_H \| Q_H$ va $P_V \| Q_V$ $P_W \| Q_W$ bo'lishi shart. Masalani yechish uchun to'g'ri chiziq va tekislikning parallellik shartlaridan foydalanib, A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan Q tekislikka parallel qilib ixtiyoriy to'g'ri chiziq, jumladan, h (h', h'') gorizontali o'tkaziladi (4.31-b rasm).

Bu gorizontalning frontal izi h''_1 yasalib, undan izlangan P tekislikning P_V izi berilgan tekislikning Q_V iziga parallel qilib o'tkaziladi. So'ngra $P_V \cap Ox = P_X$ nuqtasidan Q tekislikning Q_H iziga parallel qilib izlangan tekislikning P_H izi o'tkaziladi.

2-masala. E (E', E'') nuqtadan a (a', a'') va b (b', b'') parallel chiziqlar bilan berilgan tekislikka parallel tekislik o'tkazish talab qilinsin (4.32-a, b rasm).



4.31-rasm.



4.32-rasm.

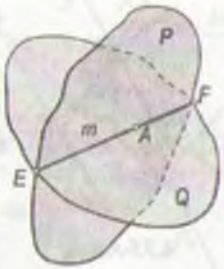
Yechish. Berilgan $(a \| b)$ tekislikka tegishli ixtiyoriy c (c', c'') to'g'ri chiziq o'tkazib, so'ngra E nuqtaning E' va E'' proyeksiyalaridan a va c chiziqlar proyeksiyalariga mos ravishda parallel qilib o'tkazilgan $m' \cap n'$, $m'' \cap n''$ kesishuvchi chiziqlar proyeksiyalari izlangan tekislik proyeksiyasi bo'ladi.

Tekislikka tegishli bo'lmagan nuqtadan mazkur tekislikka parallel bo'lgan cheksiz ko'p to'g'ri chiziqlar o'tkazish mumkin. Bunday to'g'ri chiziqlar to'plami berilgan tekislikka parallel bo'lgan tekislikni ifodalaydi.

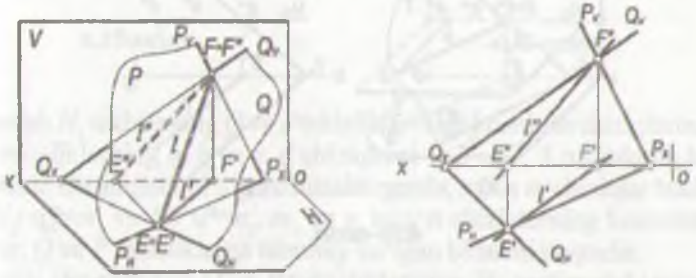
4.8-§. Tekisliklarning o'zaro kesishuvi

Ta'rif. Agar ikki tekislik umumiy to'g'ri chiziqqa ega bo'lsa, bu tekisliklar o'zaro kesishuvchi tekisliklar deyiladi.

Ikki P va Q tekisliklar m to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi, ya'ni $Q \cap P = m$. Demak, tekisliklarning o'zaro kesishish chizig'ini yasash uchun har ikkala tekislikka tegishli bo'lgan E va F umumiy nuqtalarni aniqlash kifoya qiladi (4.33-rasm).



4.33-rasm.



4.34-rasm.

4.34-a, b rasmda P va Q kesishuvchi tekisliklar berilgan. Tasvirdan yaqqol ko'rinib turibdiki, bu tekisliklarga umumiy bo'lgan E va F nuqtalar tekisliklarning bir nomli izlarining kesishish nuqtalari bo'ladi: $E=Q_H \cap P_H$ va $F=Q_V \cap P_V$.

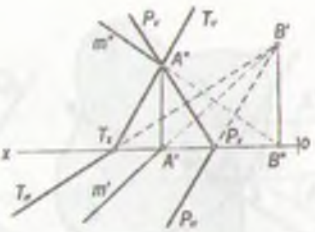
Bu nuqtalar o'zaro tutashtirilsa, Q va P tekisliklarning l kesishuv chizig'i hosil bo'ladi: $l=Q \cap P$.

Chizmada (4.34-b rasm) bu tekisliklarning kesishish chizig'i proyeksiyalarini yasash uchun tekisliklarning bir nomli izlari kesishish E va F nuqtalarining E', E'' va F', F'' proyeksiyalari aniqlanadi va nuqtalarning bir nomli proyeksiyalari o'zaro tutashtiriladi. Natijada hosil bo'lgan l' va l'' to'g'ri chiziqlar Q va P tekisliklar kesishish chizig'ining proyeksiyalari bo'ladi. Agar tekisliklarning izlari birinchi oktantda kesishmasa, u holda bir nomli izlarini davom ettirib, ularning kesishuv nuqtasini boshqa oktantda topish bilan kesishuv chizig'i nuqtalarining proyeksiyalarini yasash mumkin.

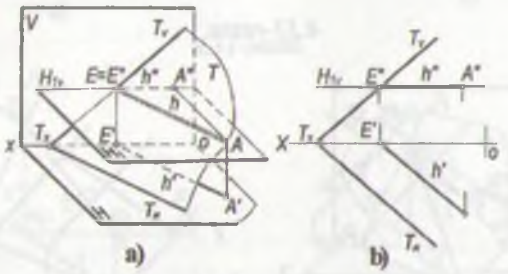
Masalan, T (T_H, T_V) va P (P_H, P_V) tekisliklarning (4.35-rasm) gorizontal izlari T_H va P_H ikkinchi oktantda kesishadi.

Kesishuvchi tekisliklarning biri gorizontal tekislik bo'lsa, bu tekisliklar gorizontal chiziq bo'yicha kesishadi.

4.36-a,b rasmda umumiy vaziyatdagi T tekislik bilan H_1 gorizontal tekislikning kesishish chizig'i h gorizontal bo'ladi. Haqiqatan, H_1 gorizontal tekislikning har bir nuqtasi H tekislikdan baravar uzoqlikda joylashgani uchun tekisliklarning



4.35-rasm.



4.36-rasm.

kesishuvchi chizig'i $h \| H$ bo'ladi. Agar umumiy vaziyatdagi tekislik frontal tekislik bilan kesishgan bo'lsa, bu tekisliklar frontal bo'yicha kesishadi.

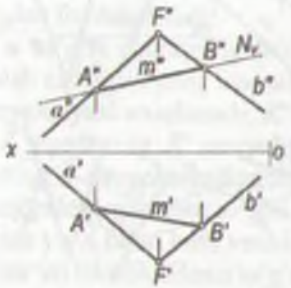
Ammo kesishuvchi tekisliklarning biri proyeksiyalovchi tekislik bo'lsa, proyeksiyalovchi tekislikning xossasiga muvofiq, ularning kesishish chizig'i proyeksiyalaridan biri proyeksiyalovchi tekislikning izida bo'ladi (4.37-rasm).

Kesishuvchi tekisliklarning bir nomli izlari chizma chegarasida kesishmasa, ularning kesishish chizig'ini yordamchi tekisliklar vositasida aniqlash mumkin. Masalan, umumiy vaziyatdagi P (P_H, P_V) va T(T_H, T_V) tekisliklarning kesishish chizig'ini yasash uchun H_1 gorizontal va V_1 frontal tekisliklardan foydalaniladi (4.38-rasm).

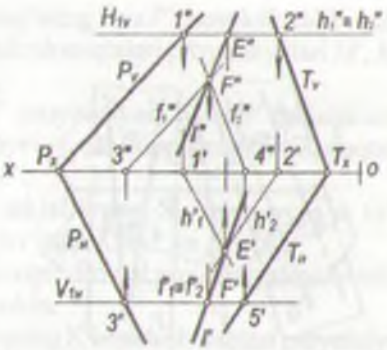
H_1 gorizontal tekislikning frontal izi $H_{1V} \| H$ qilib o'tkaziladi. Bu tekislik P tekislikni $h_1(h_1', h_1'')$, T tekislikni $h_2(h_2', h_2'')$ gorizontallar bo'yicha kesadi. Bu gorizontallarning kesishgan $E(E', E'')$ nuqtasi $E'=h_1' \cap h_2'$ va $E''=h_1'' \cap h_2''$ P va T tekisliklarning kesishish chizig'i umumiy nuqtalaridan biri bo'ladi.

Frontal tekislik $V_1 \| V$ qilib o'tkaziladi. Bu tekislik P va T tekisliklarni f_1 (f_1', f_1'') va $f_2(f_2', f_2'')$ frontallar bo'yicha kesadi. Bu frontallarning kesishish $F(F', F'')$ nuqtasi P va T tekisliklarning kesishish chizig'i umumiy nuqtalaridan ikkinchisi bo'ladi: $F''=f_1'' \cap f_2'$ va $F'= f_1' \cap f_2''$. Natijada E va F nuqtalarning E', F' va E'', F'' proyeksiyalari o'zaro tutashtirilsa, P va T tekisliklarning l kesishish chizig'ining l' va l'' proyeksiyalari hosil bo'ladi.

4.39-a, b rasmda umumiy vaziyatdagi $a \| b$ va $c \cap d$ chiziqlar bilan berilgan Q va P tekisliklarning kesishish chizig'ini yasash uchun gorizontal H_1 va H_2 tekisliklar o'tkazilgan.



4.37-rasm.



4.38-rasm.

Dastlab H_1 tekislikning Q va P tekisliklar bilan kesishish chiziqlarini aniqlash uchun tekisliklarning a, b va c, d chiziqlarni 1, 2 va 3, 4 nuqtalarda kesganligi belgilanadi. Bu nuqtalarni o'zaro tutashtirganda, m_1 va n_1 chiziqlar hosil bo'ladi, ya'ni $H_1 \cap Q = m_1$ va $H_1 \cap P = n_1$. m_1 va n_1 to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi $E = m_1 \cap n_1$ Q va P tekisliklarga umumiy bo'lgan birinchi nuqtadir.

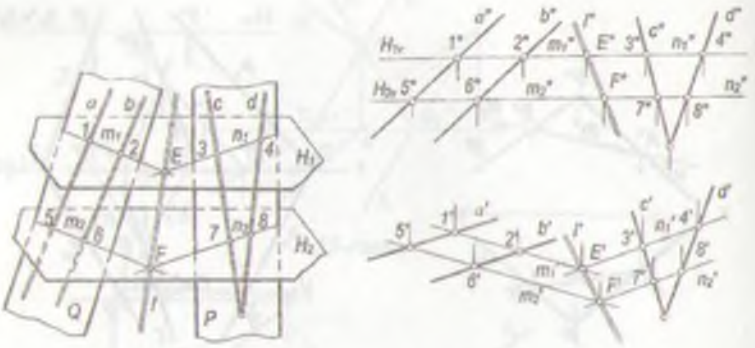
Xuddi shu tartibda Q va P tekisliklarning H_2 gorizontal tekislik bilan kesishish chizig'i aniqlanadi. Chizmada H_2 tekislik a, b va c, d chiziqlarni 5, 6 va 7, 8 nuqtalarda kesadi. Natijada $H_2 \cap Q = m_2$ va $H_2 \cap P = n_2$ hosil bo'ladi. Rasmda $H_2 \| H_1$ bo'lgani uchun $m_2 \| m_1$ va $n_2 \| n_1$ bo'ladi. Q va P tekisliklarning ikkinchi umumiy F nuqtasi m_2 va n_2 chiziqlarning o'zaro kesishish nuqtasi bo'ladi: $F = m_2 \cap n_2$.

Har ikkala P va Q tekisliklar uchun umumiy bo'lgan E va F nuqtalarni o'zaro tutashtirsak, tekisliklarning kesishish chizig'i hosil bo'ladi.

Chizmada (4.39-b rasm) Q va P tekisliklarning kesishish chizig'ini yasash uchun H_1 gorizontal tekislikning H_{1V} izini o'tkazib, uning a, b va c, d chiziqlarining frontal proyeksiyalari a'', b'' va c'', d''larni kesuvchi 1'', 2'' va 3'', 4'' nuqtalar belgilanadi. Bu nuqtalarning gorizontal 1', 2' va 3', 4' proyeksiyalari aniqlanib, o'zaro tutashtiriladi. m_1' va n_1' chiziqlar Q va P tekisliklarning H_1 tekislik bilan kesishgan chiziqlarining gorizontal proyeksiyalari bo'ladi. Kesishuvchi chiziqlarning frontal m_1'' va n_1'' proyeksiyalari H_1 tekislikning H_{1V} izida bo'ladi. Hosil bo'lgan m_1' va n_1' chiziqlarning kesishgan E' nuqtasi Q va P tekisliklarning kesishuv chizig'iga tegishli E nuqtaning gorizontal proyeksiyasi $E' = m_1' \cap n_1'$ bo'ladi. Bu nuqtaning E'' frontal proyeksiyasi esa H_1 tekislikning H_{1V} izida bo'ladi: $E'' \in H_{1V}$.

Xuddi shu tartibda Q va P tekisliklarning kesishish chizig'iga tegishli ikkinchi F nuqtasining F' va F'' proyeksiyalari H_2 gorizontal tekislikning H_{2V} izini H_{1V} ga parallel holda o'tkazib aniqlanadi.

Chizmadagi E', F' va E'', F'' proyeksiyalarni o'zaro tutashtiruvchi l' va l'' chiziqlar Q va P tekisliklar kesishish chizig'ining proyeksiyalari bo'ladi.



4.39-rasm.

4.9-§. To‘g‘ri chiziqning tekislik bilan kesishishi

Agar to‘g‘ri chiziq tekislikka parallel yoki tegishli bo‘lmasa, bu to‘g‘ri chiziq tekislik bilan kesishadi.

To‘g‘ri chiziq tekislik bilan kesishishi natijasida nuqta hosil bo‘ladi.

Bu nuqtani aniqlash uchun quyidagi yasash algoritmlaridan foydalaniladi (4.40-rasm):

- berilgan a to‘g‘ri chiziqdan yordamchi S tekislik o‘tkaziladi: $a \in S$;
- P va S tekisliklarning l kesishish chizig‘i yasaladi: $S \cap P = l$;
- a to‘g‘ri chiziqning l bilan kesishgan nuqtasi $K = a \cap l$ bo‘ladi.

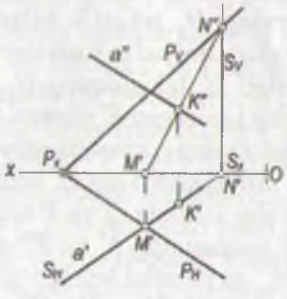
Natijada K nuqta a to‘g‘ri chiziqqa va P tekislikka tegishli umumiy nuqta bo‘ladi. Odatda, yordamchi S tekislik proyeksiyalovchi vaziyatda o‘tkaziladi.

Chizmada a (a', a'') to‘g‘ri chiziqning P (P_H, P_V) tekislik bilan kesishish nuqtasi K ning K' va K'' proyeksiyalarini yuqorida keltirilgan yasash algoritmlari bo‘yicha aniqlaymiz (4.41-rasm). Buning uchun:

- to‘g‘ri chiziqning a' proyeksiyasidan yordamchi gorizontal proyeksiyalovchi S tekislikning S_H izi o‘tkaziladi;



4.40-rasm.



4.41-rasm.

• S va P tekisliklar kesishuv chizig'ining l' va l'' proyeksiyalari yasaladi. Buning uchun tekisliklar izlarining kesishish nuqtalari proyeksiyalari M', M'' va N', N'' dan foydalaniladi;

• a to'g'ri chiziqning frontal a'' proyeksiyasi S va P tekisliklarning kesishish chizig'i l ning frontal l'' proyeksiyasi bilan kesishib, K nuqtaning K'' proyeksiyasi aniqlanadi: $K''=a''\cap l''$;

• K nuqtaning K' proyeksiyasi tekislikning S_H iziga yoki a to'g'ri chiziqning a' proyeksiyasiga tegishli bo'ladi: $K'\in a'$ va $K'\in S_H$.

Yuqoridagi misolni a to'g'ri chiziq orqali frontal proyeksiyalovchi tekislik o'tkazish yo'li bilan ham yechish mumkin.

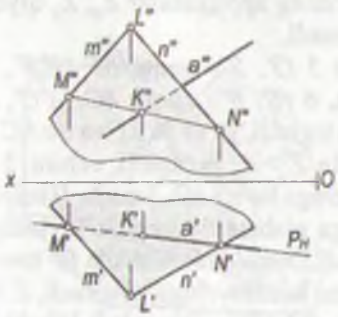
$P\ (m\cap n)$ tekislik bilan a to'g'ri chiziqning K kesishish nuqtasi proyeksiyalari 4.42-rasmda a to'g'ri chiziq orqali $S\ (S_H)$ gorizontal proyeksiyalovchi tekislik, 4.43-rasmda m to'g'ri chiziq orqali $S\ (S_V)$ frontal proyeksiyalovchi tekislik o'tkazish yo'li bilan aniqlangan.

Ayrim hollarda to'g'ri chiziqning tekislik bilan kesishish nuqtasi mazkur tekislikni ifodalovchi chegaralangan ABC tekis shaklning tashqarisida bo'lishi mumkin (4.44-a, b rasm). Bunday hollarda tekislik chegaralanmagan geometrik sirt ekanligini esda tutish lozim.

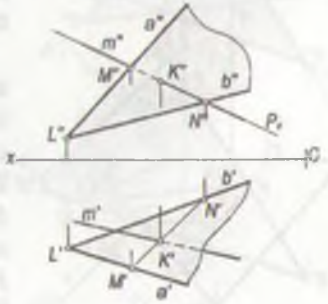
To'g'ri chiziqning tekislik bilan kesishish nuqtasini yasash algoritmidan foydalanib, turli geometrik tekis shakllarning o'zaro kesishish chiziqlarini yasash mumkin. Masalan, 4.45-rasmda ABC ($A'B'C'$, $A''B''C''$) va DEF ($D'E'F'$, $D''E''F''$) uchburchaklar bilan berilgan tekisliklarning o'zaro kesishish chizig'i proyeksiyalari $KL(K'L'$, $K''L'')$ yasalgan.

ΔABC va ΔDEF tekisliklarining kesishish chizig'i yasash uchun ulardan biri, masalan, ΔDEF ning EF va ED tomonlarining ΔABC tekislik bilan kesishish $K\ (K'$, $K'')$ va $L\ (L'$, $L'')$ nuqtalari aniqlanadi.

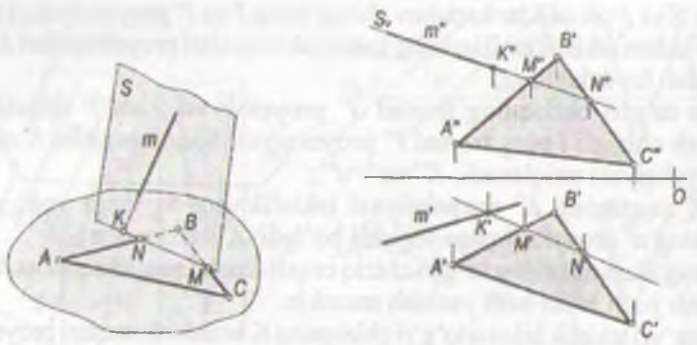
Buning uchun uchburchakning EF tomonidan yordamchi $T\ (T_1)$ frontal proyeksiyalovchi tekislik o'tkaziladi. Bu tekislikni ΔABC tekislik bilan kesishish 12 chizig'ining proyeksiyalari $1'2'$ va $1''2''$ bo'ladi. Uchburchakning



4.42-rasm.



4.43-rasm.



a) b)

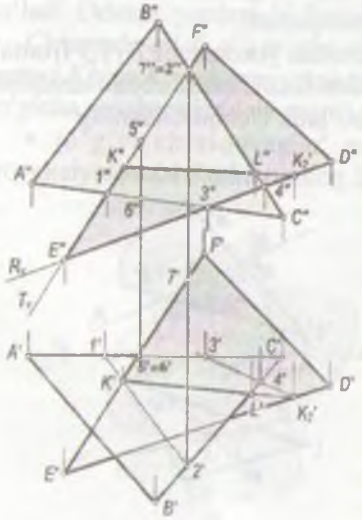
4.44-rasm.

EF tomonining 12 yoki ΔABC tekislik bilan kesishish nuqtasi K ning proyeksiyalari K' va K'' aniqlanadi.

Xuddi shu tartibda DEF uchburchak ED tomonining ΔABC tekislik bilan kesishish nuqtasi M ning M' va M'' proyeksiyalari yordamchi S (S_v) frontal proyeksiyalovchi tekislik vositasida aniqlanadi.

Chizmada hosil bo'lgan K' bilan L' va K'' bilan L'' proyeksiyalar o'zaro tutashtirilsa, uchburchaklar kesishish chizig'ining proyeksiyalari hosil bo'ladi. Uchburchaklar chegaralangan shakllar bo'lgani uchun ularning kesishish chizig'ining proyeksiyalari $K'L'$ va $K''L''$ chegarasida bo'ladi.

Uchburchaklarning proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan ko'rinadigan yoki ko'rinmaydigan qismlarini aniqlash uchun ularning tomonlariga tegishli konkurent nuqtalaridan foydalaniladi. Masalan, H tekislikka nisbatan ko'rinishlikni aniqlash uchun ΔABC va ΔDEF larning AC va EF tomonlari konkurent $5 \equiv 6 (5'6', 5''6'')$ nuqtalarining applikatalar Z_5, Z_6 qiymatlari taqqoslanadi.



4.45-rasm.

Agar 5 $(5', 5'')$ nuqta EF $(E'F', E''F'')$ tomonga, 6 $(6', 6'')$ nuqta AC $(A'C', A''C'')$ tomonga tegishli, ya'ni $5 \in EF$ va $6 \in AC$ bo'lsa, chizmada $Z_5 > Z_6$ bo'lgani uchun 5 nuqta kuzatuvchiga ko'rinadi. 5 nuqta H tekislikdan 6 nuqtaga nisbatan yuqorida joylashganligi aniqlanadi. Demak, H tekislikda EF tomonning $F'K'$ qismi kuzatuvchiga ko'rinadi, $E'K'$ ning bir qismi esa ΔABC ostida qoladi. U holda ΔABC ning AB tomoni $A'B'$ proyeksiyasi to'liq va BC tomoni $B'C''$ proyeksiyasining $B'L'$

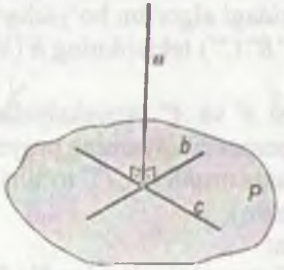
qismi ko'rinadi. ΔDEF ning ED tomoni $E'D'$ gorizontal proyeksiyasining bir qismi ΔABC ning gorizontal $A'B'C'$ proyeksiyasi ostida qoladi.

Uchburchakning V tekislikka nisbatan ko'rinishligini aniqlash uchun BC va EF tomonlariga tegishli 2 va 7 konkurent nuqtalarining $2'$, $7'$ va $2''$, $7''$ proyeksiyalaridan foydalanamiz. Agar $2 \in BC$ va $7 \in EF$ bo'lsa, chizmada $y_2 > y_7$ bo'lgani uchun 2 nuqta kuzatuvchiga ko'rinadi. Shuning uchun $2(2', 2'')$ nuqta tegishli BC tomonning $B''L''$ va EF tomonning $E''K''$ qismi ko'rinadi. Shuningdek, AC tomon $A''C''$ proyeksiyasining $1''3''$ qismi ko'rinmaydi. U holda uchburchak ED tomonining $E''D''$ proyeksiyasi to'liq ko'rinadi.

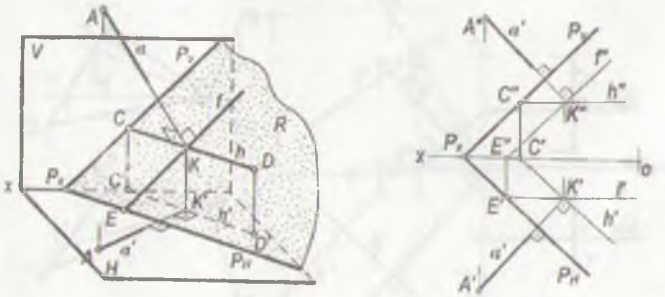
4.10-§. To'g'ri chiziqning tekislikka perpendikulyarligi

Ta'rif. Agar to'g'ri chiziq tekislikdagi ikki o'zaro kesishuvchi to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lsa, bu to'g'ri chiziq tekislikka ham perpendikulyar bo'ladi.

Bunda $b \in P$ va $c \in P$, $b \cap c$ hamda $a \perp b$ va $a \perp c$ bo'lsa, $a \perp P$ bo'ladi (4.46-rasm). Demak, tekislikka perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tekislikning asosiy chiziqlariga ham perpendikulyar bo'ladi.



4.46-rasm.



a) b)

4.47-rasm.

Faraz qilaylik, a to'g'ri chiziq tekislikning h gorizontali va f frontaligi perpendikulyar bo'lsin (4.47-a rasm).

To'g'ri burchakning proyeksiyalanish xususiyatiga muvofiq $\angle AKD=90^\circ$ bo'lib, $KD \| H$ bo'lgani uchun bu to'g'ri burchakning gorizontal proyeksiyasi $\angle A'K'D'=90^\circ$ bo'ladi. Demak, $A'K' \perp C'D'$ yoki $a' \perp h'$ bo'ladi.

P tekislik h gorizontalining gorizontal proyeksiyasi $h' \| P_H$ bo'lgani uchun $a' \perp P_H$ bo'ladi. Shuningdek, $a'' \perp f''$ yoki $a'' \perp P_V$ bo'lishini isbotlash qiyin emas (4.47-a rasm). Demak, $a \perp P$ bo'lsa, $a' \perp h'$ va $a'' \perp f''$ yoki $a' \perp P_H$ va $a'' \perp P_V$ bo'ladi (4.47-b rasm).

Fazoda to'g'ri chiziq tekislikka perpendikulyar bo'lishi uchun uning gorizontal proyeksiyasi tekislik gorizontalining gorizontal proyeksiyasiga, frontal proyeksiyasi esa tekislik frontalining frontal proyeksiyasiga va profil proyeksiyasi tekislik profilining profil proyeksiyasiga perpendikulyar bo'lishi kerak.

Agar tekislik chizmada izlari bilan berilgan bo'lsa, unga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqning bir nomli proyeksiyalari tekislikning bir nomli izlariga mos ravishda perpendikulyar bo'ladi (4.48-rasm).

To'g'ri chiziq va tekislikning o'zaro perpendikulyarlik shartidan foydalanib, ko'pgina metrik masalalarni yechish mumkin.

1-masala. ΔABC bilan berilgan tekislikning A uchidan unga perpendikulyar o'tkazilsin (4.49-rasm).

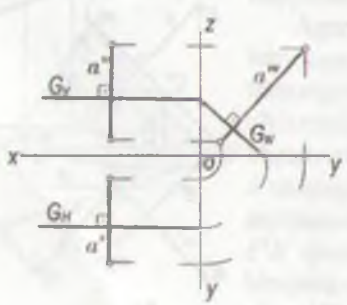
Yechish. Masalani quyidagi algoritm bo'yicha yechamiz:

- ΔABC ($\Delta A'B'C'$, $\Delta A''B''C''$) tekislikning h (h', h'') gorizontali va f (f', f'') frontali o'tkaziladi;
- tekislikning A nuqtasi A' va A'' proyeksiyalaridan ixtiyoriy uzunlikda $A'E' \perp h'$ va $A''E'' \perp f''$ qilib perpendikulyarning proyeksiyalari yasaladi.

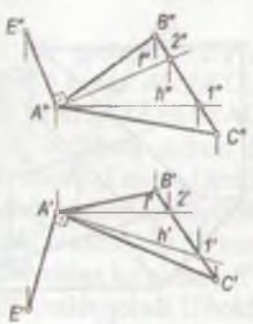
2-masala. $A(A', A'')$ nuqta orqali $l(l', l'')$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar tekislik o'tkazilsin (4.50-rasm).

Yechish. Buning uchun:

- A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan $h' \perp l''$ va $h'' \| Ox$ qilib izlangan tekislik gorizontalining proyeksiyalari o'tkaziladi;



4.48-rasm.



4.49-rasm.

• A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan $f' \| Ox$ va $f'' \perp l''$ qilib tekislik frontalining proyeksiyalari o'tkaziladi;

• hosil bo'lgan $h \cap f$ ($h' \cap f' \wedge h'' \cap f''$) kesishuvchi chiziqlar izlangan tekislikni ifoda qiladi.

Tekislikning gorizontali $h \perp l$ va frontali $f \perp l$ bo'lgani uchun bu tekislik l to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'ladi.

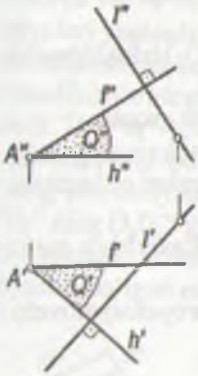
3-masala. $A(A', A'')$ nuqta orqali o'tuvchi va $b(b', b'')$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan tekislikning izlari qurilsin (4.51-rasm).

Yechish.

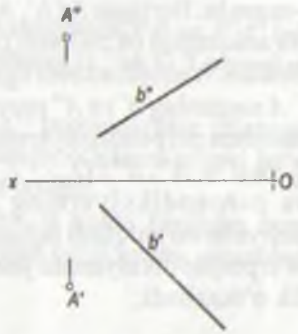
• A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan $h' \in A'$ va $h' \perp b'$ va $h'' \in A''$ va $h'' \| Ox$ qilib tekislikning gorizontali o'tkaziladi (4.52-rasm);

• gorizontalning frontal izining B' va B'' proyeksiyalari yasaladi;

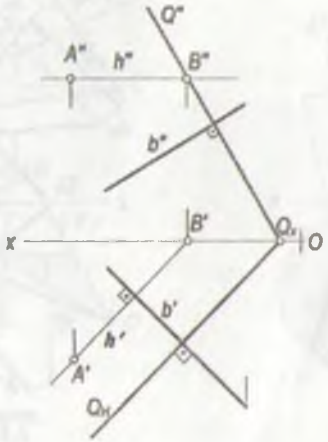
• Q tekislikning Q_V frontal izi $Q_V \in B''$ va $Q_V \perp b''$, Q_H gorizontal izi esa Q_X dan $Q_H \in Q_X$ va $Q_H \perp b'$ (yoki $Q_H \| h'$) qilib o'tkaziladi.



4.50-rasm.



4.51-rasm.



4.52-rasm.

Natijada $Q_H \perp b'$ va $Q_V \perp b''$ bo'lgani uchun $Q \perp b$ bo'ladi. Bu masalani tekislikning frontal chizig'ini o'tkazish yo'li bilan ham yechish mumkin.

4.10.1. Nuqta va tekislik orasidagi masofani aniqlash. Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikulyarning uzunligi bilan aniqlanadi. Bu perpendikulyarning uzunligini aniqlash uchun uning tekislikdagi asosini yasash zarur.

Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa quyidagi yasash algoritmi bo'yicha aniqlanadi (4.53-rasm):

- A nuqtadan Q tekislikka a perpendikulyar o'tkaziladi: $a \in A$ va $a \perp Q$;
- bu perpendikulyarning Q tekislik bilan kesishgan K nuqtasi (asosi) aniqlanadi: $K = a \cap Q$.

Buning uchun:

- a perpendikulyardan o'tuvchi yordamchi $S \in a$ tekislik o'tkaziladi;
- Q va S tekisliklarning l kesishish chizig'i yasaladi;
- a perpendikulyarning tekisliklarning kesishish chizig'i l bilan kesishgan K nuqtasi topiladi: $K = a \cap l$. Chizmadagi AK kesma A nuqtadan Q tekislikkacha bo'lgan izlangan masofa bo'ladi.

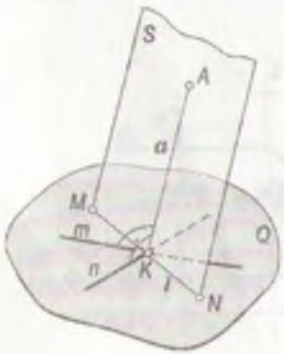
1-masala. Berilgan A (A′, A″) nuqtadan Q (Q_H, Q_V) tekislikkacha bo'lgan masofa aniqlansin (4.54-rasm).

Yechish. Yuqorida keltirilgan yasash algoritmiga asosan:

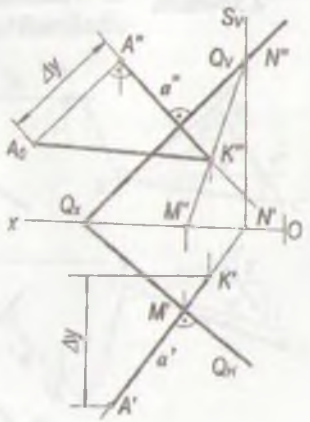
- A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan Q tekislikning Q_H va Q_V izlariga mos ravishda perpendikulyarning a' va a'' proyeksiyalari o'tkaziladi: $a' \in A'$, $a' \perp Q_H$ va $a'' \in A''$, $a'' \perp Q_V$.

Bu perpendikulyarning Q tekislik bilan kesishish nuqtasining proyeksiyalarini aniqlash uchun:

♦ a perpendikulyardan yordamchi gorizontal proyeksiyalovchi $S(S_H S_1)$ tekislik o'tkaziladi;



4.53-rasm.



4.54-rasm.

• Q va S tekisliklarning kesishish chizig'i $MN(M'N', M''N'')$ bilan a (a', a'') perpendikulyarning kesishish nuqtasi K ning K' va K'' proyeksiyalari aniqlanadi;

• chizmada hosil bo'lgan $A'K'$ va $A''K''$ izlangan masofaning proyeksiyalari bo'ladi. Bu masofaning haqiqiy o'lchami to'g'ri burchakli $\Delta A_0A''K''$ ning A_0K'' gipotenuzasi bo'ladi.

2-masala. D (D′, D″) nuqtadan ΔABC (ΔA′B′C′, ΔA″B″C″) tekislikkacha bo'lgan masofa aniqlansin (4.55-rasm).

Yechish. Masala quyidagi yasash algoritmi asosida yechiladi:

• ΔABC tekislikning gorizontal va frontal chiziqlari proyeksiyalari o'tkaziladi;

• D nuqtaning D′ va D″ proyeksiyalaridan perpendikulyarning m' va m'' proyeksiyalari $m' \in D'$, $m' \perp h'$ va $m'' \in D''$, $m'' \perp f''$ qilib o'tkaziladi;

• perpendikulyarning ΔABC tekislik bilan kesishgan nuqtasi D_1 ning D_1' va D_1'' proyeksiyalari aniqlanadi;

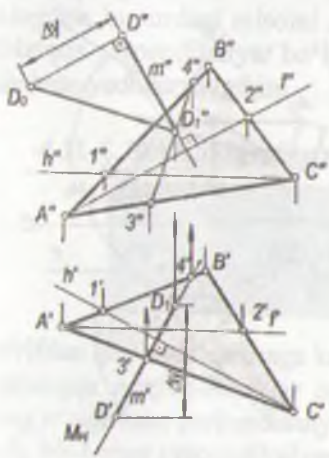
• m perpendikulyardan yordamchi gorizontal proyeksiyalovchi M (M_H, M_V) tekislik o'tkaziladi;

• ΔABC va M tekisliklar kesishish chizig'ining $3'4'$ va $3''4''$ proyeksiyalari yasaladi;

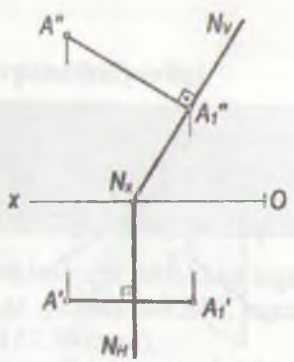
• tekisliklarning kesishish chizig'i proyeksiyalari $3'4'$ va $3''4''$ bilan m', m'' perpendikulyarning kesishish D_1 nuqtasining D_1' va D_1'' proyeksiyalari aniqlanadi: $D_1'' = m'' \cap 3''4''$ va $D'' \in m''$.

Chizmada hosil bo'lgan $D'D_1'$ va $D''D_1''$ proyeksiyalar izlangan DD_1 masofaning proyeksiyalari bo'ladi. Uning haqiqiy o'lchami to'g'ri bo'rchakli $\Delta D_0D''D_1''$ ning D_0D_1'' gipotenuzasidan iborat bo'ladi.

Agar tekislik xususiy vaziyatda berilsa, u holda berilgan nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofani aniqlash uchun qo'shimcha yasashlar talab



4.55-rasm.



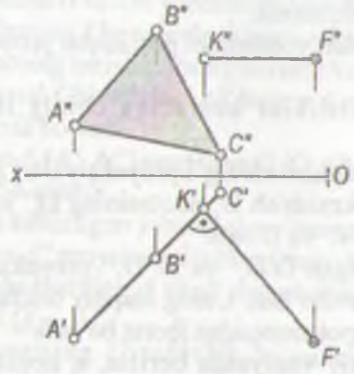
4.56-rasm.

qilinmaydi. Masalan, $A(A', A'')$ nuqtadan $N(N_{1'}, N_1)$ frontal proyeksiyalovchi tekislikkacha bo'lgan masofaning haqiqiy o'lchami (4.56-rasm) nuqtaning frontal A'' proyeksiyasidan tekislikning N_1 frontal iziga tushirilgan perpendikulyarning $A''K''$ frontal proyeksiyasiga teng bo'ladi.

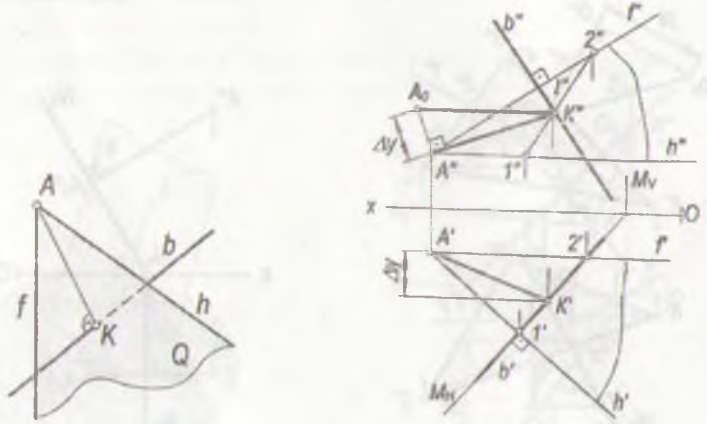
4.57-rasmda $F(F', F'')$ nuqtadan gorizontal proyeksiyalovchi ΔABC ($\Delta A'B'C'$, $\Delta A''B''C''$) tekislikkacha bo'lgan masofani aniqlash tasvirlangan.

4.10.2. Nuqta va to'g'ri chiziq orasidagi masofani aniqlash. To'g'ri chiziq va unga tegishli bo'lmagan nuqta orasidagi masofa shu nuqtadan mazkur to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning uzunligi bilan o'lchanadi.

Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa quyidagi tartibda aniqlanadi (4.58-a rasm):



4.57-rasm.



4.58-rasm.

• A nuqtadan b to'g'ri chiziqqa perpendikulyar qilib Q tekislik o'tkaziladi: $Q \in A$, $Q \perp b$;

• berilgan b to'g'ri chiziqning Q tekislik bilan kesishish K nuqtasi aniqlanadi: $A_1 = b \cap Q$;

• A va K nuqtalar o'zaro tutashtirilsa, hosil bo'lgan AK kesma A nuqtadan b to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa bo'ladi.

Chizmada $A(A', A'')$ nuqtadan $b(b', b'')$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani aniqlash uchun (4.58-b rasm):

• A nuqtadan b to'g'ri chiziqqa perpendikulyar Q tekislik o'tkazish uchun bu tekislikning $h(h', h'')$ gorizontali va $f(f', f'')$ frontali $A(A', A'')$ nuqtadan $b(b', b'')$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar qilib o'tkaziladi, ya'ni $h' \in A'$, $h' \perp b'$ va $h'' \in A''$, $h'' \| Ox$ hamda $f' \in A'$, $f'' \| Ox$ va $f' \in A'$, $f'' \in b''$;

• berilgan b to'g'ri chiziqning Q tekislik bilan kesishish nuqtasi K ning K' va K'' proyeksiyalarini aniqlash uchun $b(b', b'')$ to'g'ri chiziqdan yordamchi gorizontal proyeksiyalovchi $M(M_{1'}, M_1)$ tekislik o'tkaziladi. Q va M tekisliklarning kesishish chizig'i $12 = Q \cap M$ ning $1'2'$, $1''2''$ proyeksiyalari yasaladi;

• chizmada b to'g'ri chiziqning 12 chiziq bilan kesishgan K nuqtasining frontal proyeksiyasi $K'' = b'' \cap 1''2''$ bilan aniqlanadi. Uning K' gorizontal proyeksiyasi esa b' chiziqqa tegishli bo'ladi;

• A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalari K nuqtaning K' va K'' proyeksiyalari bilan tutashtiriladi. Hosil bo'lgan $A'K'$ va $A''K''$ kesmalar A nuqtadan b to'g'ri chiziqqacha masofaning proyeksiyalari bo'ladi.

Chizmadagi A_0K'' kesma A nuqtadan b to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofaning haqiqiy o'lchami bo'lib, u to'g'ri burchakli $\Delta A_0A''K''$ yasash yo'li bilan aniqlangan.

Shuningdek, bu turdagi misolni $A(A', A'')$ nuqtadan o'tuvchi $b(b', b'')$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan Q tekislikni izlari orqali o'tkazish yo'li bilan ham yechish mumkin.

4.11-§. Tekisliklarning o'zaro perpendikulyarligi

Ta'rif. Tekislikka perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqdan o'tuvchi barcha tekisliklar berilgan tekislikka perpendikulyar bo'ladi.

Bu ta'rifdan quyidagi xulosaga kelish mumkin, ya'ni tekislikka tegishli to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan har qanday tekislik mazkur tekislikning o'ziga ham perpendikulyar bo'ladi (4.59-rasm).

Demak, bir-biriga perpendikulyar bo'lgan tekisliklarni yasash ikki usul bilan bajarilishi mumkin:

1. Tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziqdan tekislik o'tkazish usuli.
2. Tekislikka tegishli to'g'ri chiziqqa perpendikulyar tekislik o'tkazish usuli.

Tekislikning ikki tekislikka perpendikulyarligi

Ta'rif. Agar biror tekislik ikki tekislikka umumiy bo'lgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lsa, u holda bu tekislik har ikkala tekislikka ham perpendikulyar bo'ladi.

Ma'lumki, Q va P tekisliklarga umumiy bo'lgan to'g'ri chiziq ularning l kesishish chizig'i bo'ladi. Tekisliklarning l kesishish chizig'ida ixtiyoriy B nuqta tanlab olamiz (4.60-rasm). Bu nuqtadan l ga perpendikulyar qilib a va b chiziqlarni o'tkazamiz. Natijada $a \cap b$ kesishuvchi to'g'ri chiziqlar T tekislikni hosil qiladi. Bu tekislik esa berilgan Q va P tekisliklarga perpendikulyar bo'ladi.

Demak, berilgan T tekislikka perpendikulyar bo'lgan l to'g'ri chiziqdan o'tuvchi har qanday tekislik unga perpendikulyar bo'ladi.

1-masala. $P(P_H, P_V)$ tekislikka perpendikulyar va Q_x dan o'tuvchi Q tekislik izlari bilan o'tkazilsin (4.61-rasm).

Yechish.

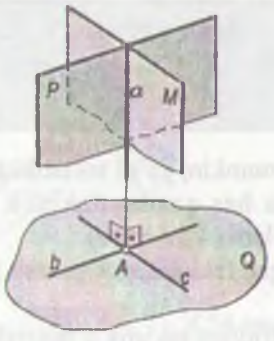
- P tekislikka perpendikulyar bo'lgan ixtiyoriy a to'g'ri chiziq o'tkaziladi;
- bu to'g'ri chiziqning a_H', a_H'' va a_V', a_V'' izlarining proyeksiyalari yasaladi;
- izlangan Q tekislikning gorizontal Q_H izi $Q_H \in a_H'$ va $Q_H \in Q_x$ qilib, uning frontal Q_V izi $Q_V \in a_V''$ va $Q_V \in Q_x$ qilib o'tkaziladi.

Bu masalani quyidagicha yechish ham mumkin: Q tekislikka perpendikulyar va P_x dan o'tuvchi tekislikni o'tkazish uchun (4.62-rasm) Q tekislikda ixtiyoriy $m \in Q$ to'g'ri chiziq olamiz. P tekislikning izlari P_x dan $P_H \perp m'$ va $P_V \perp m''$ qilib o'tkaziladi. Natijada $P \perp Q$ bo'ladi.

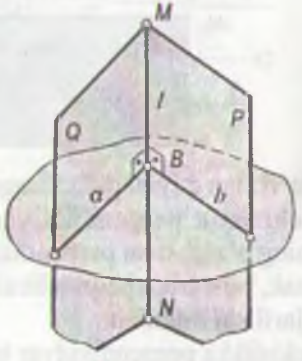
2-masala. Kesishuvchi $a \cap b (a' \cap b', a'' \cap b'')$ chiziqlar bilan berilgan tekislikka $d\,(d', d'')$ to'g'ri chiziqdan o'tuvchi perpendikulyar tekislik o'tkazish talab qilinsin (4.63-rasm).

Yechish.

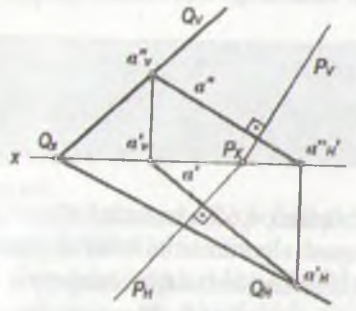
- berilgan tekislik gorizontali va frontalining h', h'' va f', f'' chiziqlari o'tkaziladi;



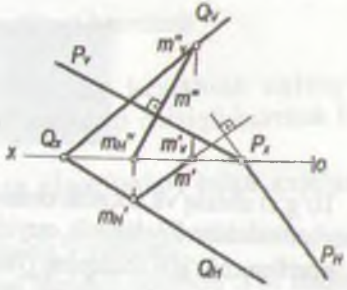
4.59-rasm.



4.60-rasm.



4.61-rasm.



4.62-rasm.

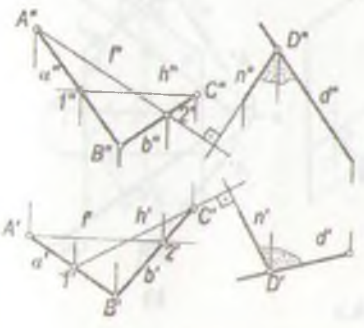
- d to'g'ri chiziqning ixtiyoriy D (D', D'') nuqtasidan $n\,(n', n'')$ to'g'ri chiziqning proyeksiyalari $n' \perp h'$ va $n'' \perp f''$ qilib o'tkaziladi. Hosil bo'lgan $d' \cap n'$ va $d'' \cap n''$ kesishuvchi chiziqlar hosil qilgan tekislik berilgan tekislikka perpendikulyar tekislikning proyeksiyalari bo'ladi.

3-masala. $A\,(A', A'')$ nuqtadan $Q\,(Q_H, Q_V)$ va $P\,(P_H, P_V)$ tekisliklarga perpendikulyar bo'lgan $T(T_H, T_1)$ tekislik o'tkazish talab qilinsin (4.64-rasm).

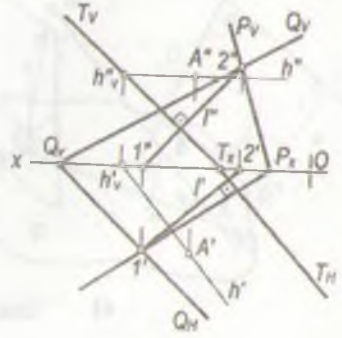
Yechish.

- Q va P tekisliklar kesishish chizig'ining l', l'' proyeksiyalari yasaladi;
- A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan izlangan tekislikning gorizontali (yoki frontali) tekisliklarning kesishish chizig'iga perpendikulyar qilib o'tkaziladi: $h' \perp l'$ va $h' \in A'$ hamda $h'' \| Ox$, $h'' \in A''$ va uning izlarining h_V', h_V'' proyeksiyalari yasaladi;
- izlangan tekislikning frontal izi $T_V \in h'$, $T_1 \perp l''$ $T_H \in T_x$, $T_H \perp l'$ qilib o'tkaziladi.

Natijada berilgan ikki tekislikka perpendikulyar bo'lgan uchinchi tekislik yasaladi: $T \perp Q$ va $T \perp P$.



4.63-rasm.



4.64-rasm.

4.12-§. To‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchakni aniqlash

Ta’rif. To‘g‘ri chiziq bilan uning tekislikdagi ortogonal proyeksiyasi orasidagi burchak shu to‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchak deyiladi.

To‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchak 4.65-a rasmda ko‘rsatilgan. Bu fazoviy modeldan foydalanib, quyidagi yasash algoritmlarini keltirish mumkin:

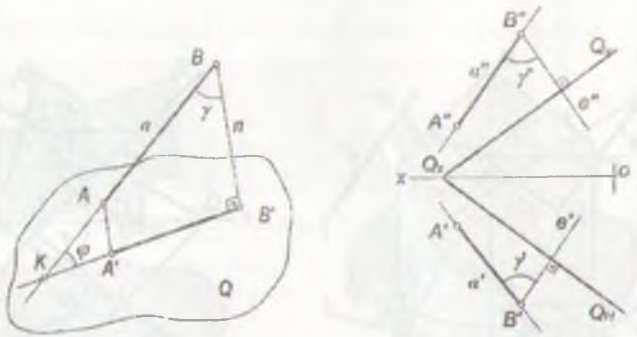
- berilgan a to‘g‘ri chiziqning Q tekislik bilan kesishish nuqtasi aniqlanadi: $L=a\cap Q$;
- to‘g‘ri chiziqda ixtiyoriy B nuqta tanlab olinadi. Bu nuqtadan berilgan Q tekislikka n perpendikulyarni tushirib, uning Q tekislik bilan kesishuv nuqtasi aniqlanadi: $B'=n\cap Q$;
- so‘ngra L va B nuqtalarni o‘zaro tutashtirish natijasida hosil bo‘lgan burchak a to‘g‘ri chiziq va Q tekislik orasidagi φ burchak bo‘ladi.

Chizmada to‘g‘ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchakni aniqalsh uchun yuqorida keltirilgan yasash algoritmlari to‘g‘ri chiziq bilan tekislikning perpendikulyarligi va kesishishi qoidalaridan foydalanib bajariladi. Bunda φ burchak a to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy B nuqtasidan Q tekislikka tushirilgan perpendikulyar orasidagi γ burchak orqali aniqlanadi (4.65-a, b rasm). $\varphi+\gamma=90^0$ bo‘lgani uchun $\varphi=90^0-\gamma$ bo‘ladi.

Masala. $Q(b\cap c)$ tekislik va a to‘g‘ri chiziq orasidagi φ burchak aniqlansin (4.66-rasm).

Yechish.

- tekislikning h (h', h'') gorizontali va f (f', f'') frontali o‘tkaziladi;
- to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy $A(A', A'')$ nuqtasidan tekislikning gorizontali va frontaliga e (e', e'') perpendikulyar o‘tkaziladi. Bunda $e'\in A'$, $e'\perp h'$ va $e''\in A''$, $e''\perp f''$ bo‘ladi;



a) b)

4.65-rasm.

• a va e to‘g‘ri chiziqlar orasidagi γ (γ', γ'') burchak belgilanadi. Natijada $\varphi=90^0-\gamma$ aniqlanadi.

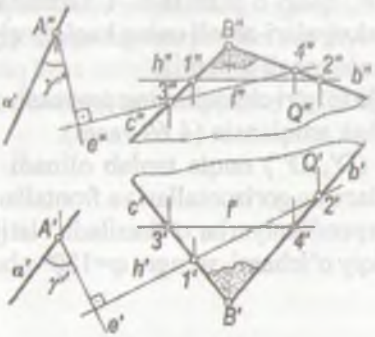
4.13-§. Ikki tekislik orasidagi burchak

Ikki tekislik orasidagi burchak ularning kesishish chizig‘iga perpendikulyar bo‘lgan ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi chiziqli burchak bilan o‘lchanadi.

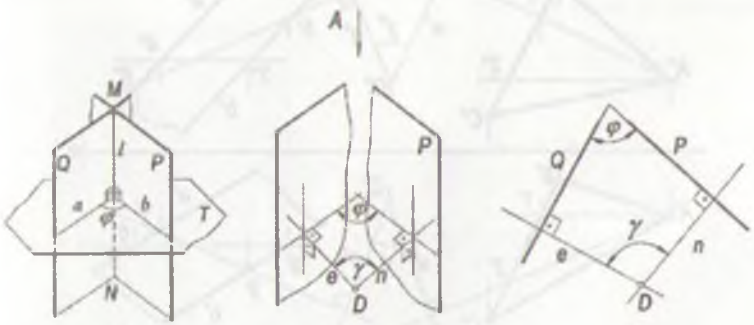
Bu chiziqli burchak quyidagi yasash algoritmlari bilan aniqlanadi (4.67-a rasm):

• P va Q tekisliklarning l kesishish chizig‘i yasaladi;

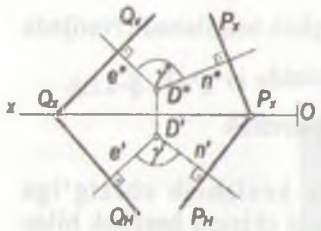
• tekisliklarning l kesishish chizig‘iga tegishli ixtiyoriy $A \in l$ nuqtadan perpendikulyar qilib T tekislik o‘tkaziladi. Bu tekislik Q va P tekisliklarga ham perpendikulyar bo‘ladi;



4.66-rasm.



4.67-rasm.



4.68-rasm.

• T tekislikning Q va P tekisliklar bilan kesishish a va b chiziqlari yasaladi: $a=Q\cap T$ va $b=P\cap T$;

• tekisliklarning kesishish chiziqlari orasidagi $a\wedge b=\varphi$ izlangan burchak bo'ladi.

P va Q tekisliklar orasidagi burchakni quyidagicha aniqlash ham mumkin (4.67, b-rasm):

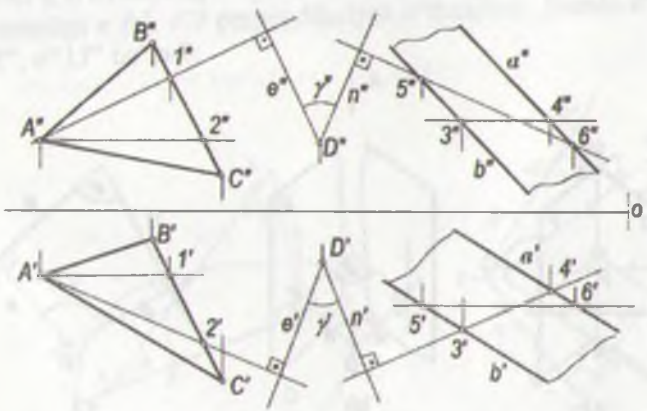
Fazoning ixtiyoriy D nuqtasidan berilgan Q va P tekisliklarga e va n perpendikulyarlar tushirib, bu perpendikulyarlar orasidagi γ burchak orqali φ burchakning qiymati $\varphi=180^0-\gamma$ formula orqali aniqlanadi.

1-masala. $Q(Q_H, Q_V)$ va $P(P_H, P_V)$ tekisliklar orasidagi burchak aniqlansin (4.68-rasm).

Yechish. Ixtiyoriy D (D', D") nuqtani tanlab olamiz va uning D', D" proyeksiyalaridan e va n perpendikulyarlarning proyeksiyalari $e'\perp Q_H \wedge e''\perp Q_V$ va $n'\perp P_H \wedge n''\perp P_V$ qilib o'tkaziladi. Chizmada hosil bo'lgan γ burchakning γ' va γ'' proyeksiyalari orqali uning haqiqiy qiymatini aniqlab, φ burchakni $\varphi=180^0-\gamma$ formula orqali topamiz.

2-masala. ΔABC va $a\|b$ to'g'ri chiziqlarning proyeksiyalari bilan berilgan tekisliklar orasidagi burchak aniqlansin (4.69-rasm).

Yechish. Ixtiyoriy D (D', D") nuqta tanlab olinadi. Uning D' va D" proyeksiyalaridan tekisliklarning gorizontallari va frontallariga $e'\perp h_1'$, $e''\perp f_1''$ va $n'\perp h_2'$, $n''\perp f_2''$ qilib perpendikulyarlar o'tkaziladi. Natijada hosil bo'lgan $\gamma(\gamma', \gamma'')$ burchakning haqiqiy o'lchami, so'ngra $\varphi=180^0-\gamma$ burchak aniqlanadi.



4.69-rasm.

Nazorat savollari

1. Tekislik chizmada qanday berilishi mumkin?
2. Tekislikning izi deb nimaga aytiladi?
3. Qanday tekisliklar proyeksiyalovchi deyiladi?
4. Gorizontal va gorizontal proyeksiyalovchi hamda frontal va frontal proyeksiyalovchi tekisliklarning farqi nimada?
5. Qanday chiziqlar tekislikning bosh chiziqlari deyiladi?
6. Tekislikning eng katta og'ma chiziqlari yordamida qanday burchaklarni aniqlanish mumkin?
7. Ikki tekislikning o'zaro kesishish chizig'ini yasashning umumiy algoritmi qanday?
8. To'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasini yasashning umumiy algoritmi nimadan iborat?
9. Tekislikka parallel bo'lgan to'g'ri chiziq qanday ketma-ketlikda o'tkaziladi?
10. Tekis chizmada berilgan ikki tekislikning o'zaro parallelligi qanday tekshiriladi?
11. Tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziqning proyeksiyalari qanday vaziyatda bo'ladi?
12. Qanday tekisliklar o'zaro perpendikulyar deyiladi?
13. To'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak qanday tartibda aniqlanadi?
14. Ikki tekislik orasidagi burchak qanday tartibda aniqlanadi?



V BOB. ORTOGONAL PROYEKSIYALARNI QAYTA TUZISH USULLARI

5.1-§. Umumiy ma'lumotlar

Geometrik shaklning proyeksiyalaridagi holatlari uning fazoda proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan joylashuviga bog'liq. Umumiy vaziyatdagi geometrik shakllarning proyeksiyalari proyeksiyalar tekisliklariga qisqarib proyeksiyalanadi (5.1-a, b rasm).

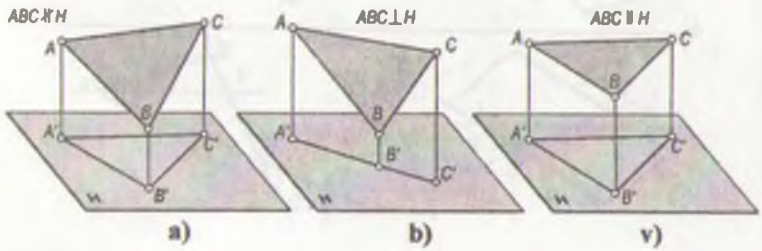
Agar geometrik shaklning proyeksiyasi asliga teng bo'lib proyeksiyalansa, bu shaklga oid metrik xarakteristikalarni, masalan, ΔABC tomonlarining haqiqiy o'lchamlari, uchlaridagi burchaklarning qiymatlari va boshqa xarakteristikalarni aniqlash mumkin (5.1-v rasm).

Demak, shunday xulosaga kelish mumkinki, agar geometrik shakl proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan fazoda xususiy vaziyatda berilsa yoki umumiy vaziyatda berilgan geometrik shakl xususiy vaziyatga keltirilsa, bu bilan metrik va pozitsion masalalarni yechish mumkin. Shuning uchun ayrim hollarda umumiy vaziyatda berilgan geometrik shakllarning berilgan ikki proyeksiyasi asosida maqsadga muvofiq ravishda yangi xususiy vaziyatga keltirilgan proyeksiyalari tuziladi.

Geometrik shaklning berilgan ortogonal proyeksiyalari asosida yangi proyeksiyalarini yasash **ortogonal proyeksiyalarni qayta tuzish** deyiladi.

Umumiy vaziyatda berilgan geometrik shakllarni xususiy vaziyatga keltirish asosan uch usulda bajariladi:

1. Umumiy vaziyatda berilgan geometrik shaklni fazoda harakatlantirib, proyeksiyalar tekisligiga nisbatan xususiy vaziyatga keltirish *tekis-parallel harakatlantirish usuli* deyiladi.



5.1-rasm.

2. *Aylantirish usuli.* Bunda proyeksiyalar tekisliklari o‘z holatlarini o‘zgartirmaydi. Proyeksiyalanuvchi shakl ularga qulay holga kelguncha biror o‘q atrofida aylantiriladi.

3. Geometrik shaklning fazoviy vaziyati o‘zgartirilmasdan proyeksiyalar tekisliklari sistemasini unga nisbatan xususiy vaziyatga kelguncha yangi proyeksiyalar tekisliklari bilan almashtirish *proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usuli* deyiladi.

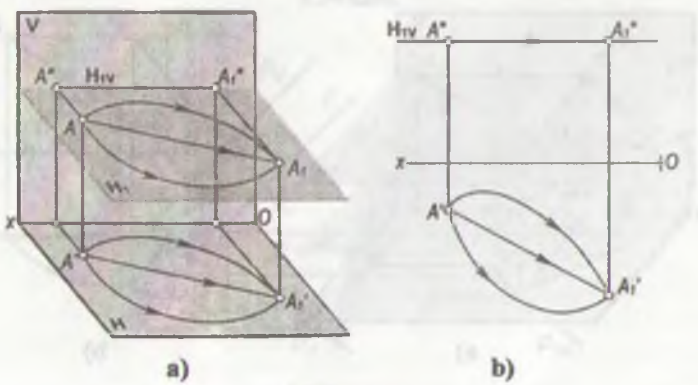
Quyida bu usullarni alohida ko‘rib chiqamiz.

5.2-§. Tekis-parallel harakatlantirish usuli

Tekis-parallel harakatlantirish usulida geometrik shaklning proyeksiyalar tekisliklari sistemasiga nisbatan vaziyatini maqsadga muvofiq ravishda o‘zgartirish uchun uning barcha nuqtalarining harakatlanish trayektoriyalari bir-biriga parallel tekisliklarda harakatlantirish yo‘li bilan bajariladi.

Harakatlantirish tekisliklarining vaziyati va geometrik shakl nuqtalari harakatlanish trayektoriyasining xarakteriga qarab tekis-parallel harakatlantirish usuli *parallel harakatlantirish* va *aylantirish usullariga* bo‘linadi.

Parallel harakatlantirish usuli. Bu usulda fazoda berilgan geometrik shaklning har bir nuqtasi proyeksiyalar tekisligiga parallel bo‘lgan gorizontal yoki frontal tekisliklarda harakatlantiriladi. Shuning natijasida hosil bo‘lgan yangi proyeksiyasining proyeksiyalar tekisligiga nisbatan vaziyati o‘zgaradi. 5.2-a, b rasmda A nuqta H_1 gorizontal tekislikda harakatlantirilib, A_1 vaziyatga keltirilgan. Bunda A nuqta A_1 vaziyatga qanday trayektoriya (to‘g‘ri yoki egri chiziqlar) bo‘ylab harakatlantirilishidan qat’i nazar, uning A'' frontal proyeksiyasi (A_1'' vaziyatga) tekislikning H_{1V} izi bo‘yicha harakatlanadi. Shuningdek, 5.3-a, b rasmdagi B nuqta V_1 frontal tekislikda B_1 vaziyatga har qanday trayektoriya bo‘yicha harakatlantirilmasin, uning B' proyeksiyasi V_{1H} izi bo‘yicha harakatlanib, B'_1 vaziyatni egallaydi.



a) b)

5.2-rasm.

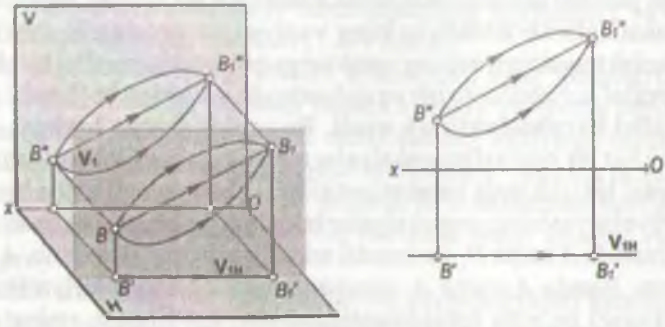
Yuqorida bayon etilganlardan quyidagi xulosalarga kelish mumkin:

- Fazoda nuqtani gorizontal proyeksiyalar tekisligiga parallel tekislikda har qanday trayektoriya bo'yicha harakatlantirilsa ham, uning frontal proyeksiyasi *Ox* o'qiga parallel to'g'ri chiziq bo'yicha harakatlanadi.
- Fazoda nuqtani frontal proyeksiyalar tekisligiga parallel tekislikda har qanday trayektoriya bo'yicha harakatlantirilsa ham, uning gorizontal proyeksiyasi *Ox* o'qiga parallel to'g'ri chiziq bo'yicha harakatlanadi.

Parallel harakatlantirish usulining bu xususiyatlaridan foydalanib, ayrim masalalarning yechilishini ko'rib chiqamiz.

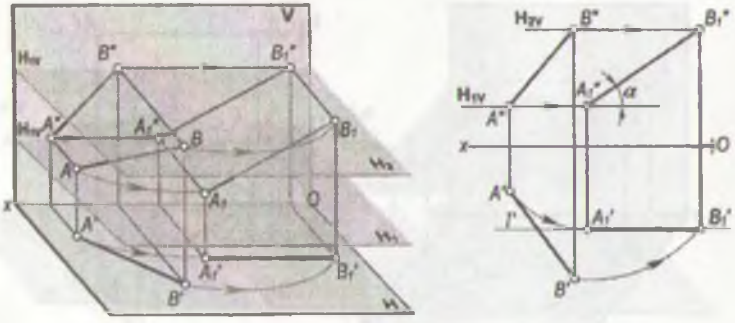
1-masala. Umumiy vaziyatda berilgan *AB* kesma *V* tekislikka parallel vaziyatga keltirilsin (5.4-a, b rasm).

Yechish. $AB \| V$ bo'lishi uchun chizmada $A'B' \| Ox$ bo'lishi kerak. Demak, bu masalani yechish uchun *H* tekislikda (5.4-a rasm) ixtiyoriy A_1' nuqta tanlab,



a) b)

5.3-rasm.



a) b)

5.4-rasm.

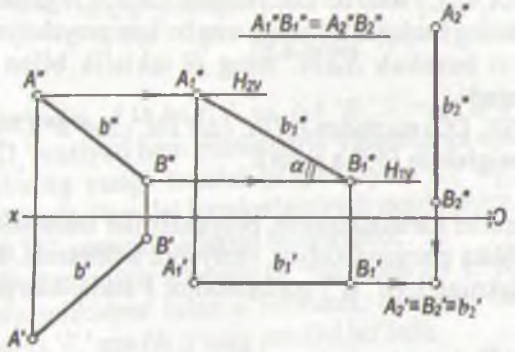
u orqali Ox o'qiga parallel l' to'g'ri chiziq o'tkazamiz va unga $A_1'B_1'=A'B'$ kesmani o'lchab qo'yamiz. Kesmaning yangi frontal proyeksiyasini parallel harakatlantirish xususiyatiga muvofiq aniqlaymiz: kesmaning A'' va B'' proyeksiyalari mos ravishda H_{1V} va H_{2V} bo'yicha Ox o'qiga parallel ravishda harakatlanadi va A_1'', B_1'' vaziyatlarga keladi. Natijada V tekislikka parallel A_1B_1 ($A_1'B_1'$, $A_1''B_1''$) to'g'ri chiziq kesmasining proyeksiyalari hosil bo'ladi.

Shuningdek, AB kesma V tekislikka parallel bo'lishi bilan birga uning haqiqiy o'lchami va H tekislik bilan tashkil etgan α burchagi aniqlanadi.

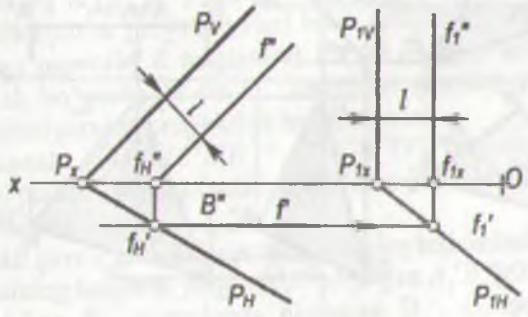
2-masala. Umumiy vaziyatdagi AB ($A'B'$, $A''B''$) kesma H tekislikka perpendikulyar vaziyatga keltirilsin (5.5-rasm).

Yechish. Dastlab AB kesmani harakatlantirib, V tekislikka parallel A_1B_1 ($A'_1B'_1$, $A_1''B_1''$) vaziyatga keltiramiz. So'ngra ixtiyoriy B_2'' nuqta tanlab olamiz va bu nuqtadan $b_2''\perp Ox$ to'g'ri chiziq o'tkazamiz hamda unga $A_2''B_2''=A_1''B_1''$ kesmani o'lchab qo'yamiz. Kesmaning gorizontal proyeksiyasi b_1' chiziq bo'yicha harakatlanib, $A_2'\equiv B_2'\equiv b_2'$ bo'lib proyeksiyalanadi.

3-masala. Umumiy vaziyatda berilgan P (P_H, P_V) tekislik H tekisligiga perpendikulyar vaziyatga keltirilsin (5.6-rasm).



5.5-rasm.



5.6-rasm.

Yechish. *P* tekislikning ixtiyoriy f (f′, f″) frontali o‘tkaziladi. So‘ngra *Ox* o‘qida ixtiyoriy nuqtadan $f_1'' \perp Ox$ qilib va chizmada ko‘rsatilgan *l* masofada tekislikning frontal izini $P_{1f} \perp Ox$ (yoki $P_{1f} \| f_1''$) qilib o‘tkazamiz. Tekislikning P_{1H} gorizontal izi P_{1x} va f_1' nuqtalardan o‘tadi.

4-masala. Umumiy vaziyatdagi ΔABC ($\Delta A'B'C'$, $\Delta A''B''C''$) tekislik *H* tekislikka parallel vaziyatga keltirilsin (5.7-rasm).

Yechish.

• ΔABC ni avval *V* tekislikka perpendikulyar vaziyatga keltiramiz. Buning uchun uchburchakning h (h′, h″) gorizontalini o‘tkazamiz. Chizmada ixtiyoriy A'_1 nuqta tanlab, bu nuqtadan $h'_1 \perp Ox$ qilib $\Delta A'_1B'_1C'_1 = \Delta A'B'C'$ yangi gorizontal proyeksiyasini yasaymiz;

• ΔABC ning yangi vaziyati *V* tekislikka perpendikulyar bo‘lgani uchun uning yangi frontal proyeksiyasi $C_1''A_1''B_1''$ kesma tarzida proyeksiyalanadi;

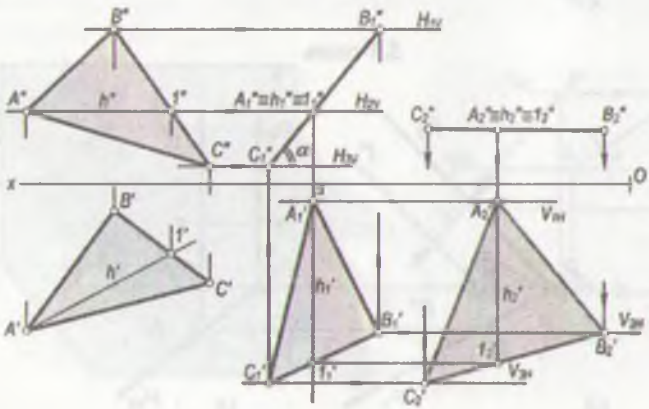
• ixtiyoriy C_2'' nuqta tanlab, bu nuqtadan *Ox* o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz va unga $C_2''A_2''B_2'' = C_1''A_1''B_1''$ bo‘lgan kesmani o‘lchab qo‘yamiz. Parallel harakatlantirish qoidasiga muvofiq uchburchak gorizontal proyeksiyasining A_2' B_2' va C_2' nuqtalari mos ravishda V_{1N}, V_{2N} va V_{3N} frontal tekisliklarning izlari bo‘yicha harakatlanishidan $\Delta A_2'B_2'C_2'$ hosil bo‘ladi. Natijada $\Delta A_2B_2S_2$ *H* ga parallel bo‘ladi va berilgan uchburchakning haqiqiy o‘lchamiga teng bo‘lgan proyeksiyasi hosil bo‘ladi.

Chizmadagi α burchak ΔABC ning *H* tekislik bilan hosil qilgan burchagini ko‘rsatadi.

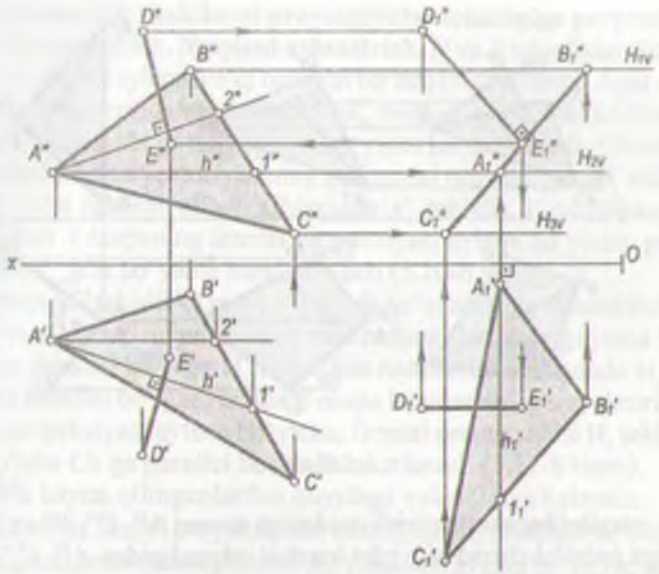
4-masala. D (D′, D″) nuqtadan ΔABC ($\Delta A'B'C'$, $\Delta A''B''C''$) tekislikkacha bo‘lgan masofa aniqlansin (5.8-a rasm).

Yechish.

• ΔABC ni parallel harakatlantirib, proyeksiyalar tekisliklarining biriga, masalan, *V* tekislikka perpendikulyar vaziyatga keltiramiz. Buning uchun mazkur uchburchakning h (h′, h″) gorizontalini *V* tekislikka perpendikulyar



5.7-rasm.



5.8-rasm.

vaziyatga keltirib, $A_1'1_1'=A'1'$ va $\Delta A_1'B_1'S_1'=\Delta A'B'S'$ qilib yasaladi. D′ nuqtaning D_1' vaziyati ham planimetrik yasashlarga asosan yasaladi. Bunda uchburchakning yangi frontal proyeksiyasi $C_1''A_1''B_1''$ kesma tarzida proyeksiyalanadi. Parallel harakatlantirish qoidalariga asosan D nuqtaning yangi D_1' va D_1'' proyeksiyalarini aniqlaymiz;

• masofaning haqiqiy o'lchami D_1'' nuqtadan $C_1''A_1''B_1''$ kesmaga tushirilgan $D_1''E_1''$ perpendikulyar bilan o'lchanadi. Izlangan masofaning gorizontal proyeksiyasi $D_1'E_1'$ esa Ox o'qiga parallel bo'ladi;

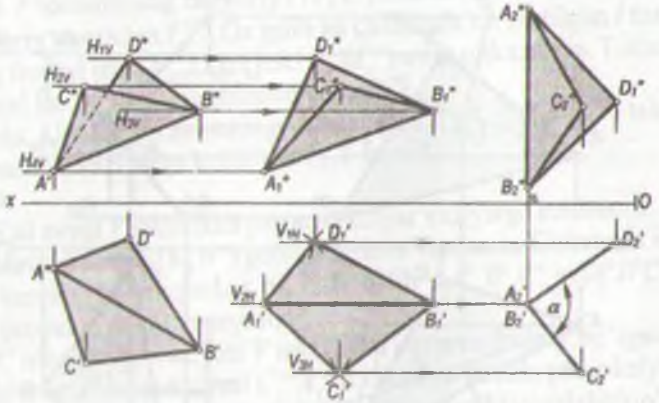
• izlangan masofaning proyeksiyalarini tekislikning berilgan proyeksiyalarida yasash uchun D nuqtaning D′ va D″ proyeksiyalaridan tekislikning h (h′, h″) gorizontali va f (f′, f″) frontaliga tushirilgan perpendikulyarlar proyeksiyalari bilan aniqlanadi. Parallel harakatlantirish qoidasiga muvofiq E nuqtaning E'' va E' proyeksiyalarini ko'rsatilgan yo'nalish bo'yicha D′ va D″ proyeksiyalardan tekislikka tushirilgan perpendikulyarning proyeksiyalarida topamiz.

5-masala. $CABD$ ($C'A'B'D'$, $C''A''B''D''$) ikkiyoqli burchakning haqiqiy kattaligi parallel harakatlantirish usulidan foydalanib aniqlansin (5.9-rasm).

Yechish.

• AB qirra V tekislikka parallel qilib joylashtiriladi. Buning uchun chizma maydonining ixtiyoriy joyida $A'B'=A_1'B_1'$ va $A_1'B_1'\|Ox$ qilib joylashtiriladi;

• A_1' va B_1' nuqtalarga nisbatan D_1', C_1' nuqtalarni planimetrik yasashlardan foydalanib yasaymiz. Hosil bo'lgan A_1, C_1', B_1' va D_1' nuqtalar yangi gorizontal proyeksiya bo'ladi;



5.9-rasm.

- parallel harakatlantirish qoidasiga asosan A″, *C″*, *B″* va D″ nuqtalar *Ox* o‘qiga parallel chiziq bo‘yicha harakat qilganligidan A_1'', C_1'', B_1'' va D_1'' yangi frontal proyeksiyalari yasaladi;
- *AB* qirra *H* tekisligiga perpendikulyar qilib joylashtiriladi. Buning uchun $A_1''B_1''=A_2''B_2''$ ni chizmaning ixtiyoriy joyida $A_2'B_2''\perp Ox$ qilib joylashtiramiz. $A''_2B''_2$ yangi frontal proyeksiya bo‘ladi;
- C_2'' va D_2'' nuqtalar esa A_2'' va B_2'' nuqtalarga nisbatan planimetrik yasashlar bilan yasaladi;
- parallel harakatlantirish qoidasiga asosan A'_1, C'_1, B'_1 va D'_1 nuqtalar *Ox* ga parallel harakat qilib, $A''_2=B''_2$, C'_2 va D'_2 nuqtalarning yangi gorizontal proyeksiyalarini hosil qiladi;
- bu nuqtalar o‘zaro tutashtirilsa, $\angle D_2'A_2'C_2'=\alpha$ chiziqli burchak *AB* qirradagi ikkiyoqli burchakni o‘lchaydi. Bu masalani *AB* qirrani *H* ga parallel qilib olish bilan ham yechish mumkin.

5.3-§. Aylantirish usuli

Aylantirish usuli parallel harakatlantirish usulining xususiy holi hisoblanadi. Bu usulda geometrik shaklga tegishli nuqtaning trayektoriyasi ixtiyoriy bo‘lmay, balki berilgan biror o‘qqa nisbatan aylana bo‘yicha harakatlanadi. Aylana markazi berilgan o‘qda joylashgan bo‘lib, aylanish radiusi esa harakatlanuvchi nuqta bilan aylanish o‘qi orasidagi masofaga teng yoki aylanish tekisligining aylanish o‘qi bilan kesishgan nuqtasi bo‘ladi.

Aylanish o‘qlari proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan perpendikulyar, parallel, shuningdek, proyeksiyalar tekisligiga tegishli va boshqa vaziyatlarda bo‘lishi mumkin.

Quyida turli vaziyatlarda joylashgan aylanish o‘qlari atrofida aylantirish usullarini ko‘rib chiqamiz.

5.3.1. Geometrik shakllarni proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar o'q atrofida aylantirish. Nuqtani aylantirish. H va V tekisliklar sistemasida ixtiyoriy A nuqta va i aylanish o'qi berilgan bo'lsin (5.10-a rasm). Agar A nuqtani $\perp V$ aylanish o'qi atrofida harakatlantirsak, mazkur nuqta V tekislikka parallel V_1 tekislikda radiusi OA ga teng aylana bo'yicha harakatlanadi. Shuningdek, A nuqta harakatlanish trayektoriyasining gorizontal proyeksiyasi V_1 tekislikning V_{1N} izi bo'yicha harakat qiladi. Chizmada V_1 tekislik V tekislikka parallel bo'lgani uchun A nuqtaning frontal proyeksiyasi aylana bo'yicha, gorizontal proyeksiyasi $V_{1N} \| Ox$ bo'yicha harakat qiladi (5.10-b rasm).

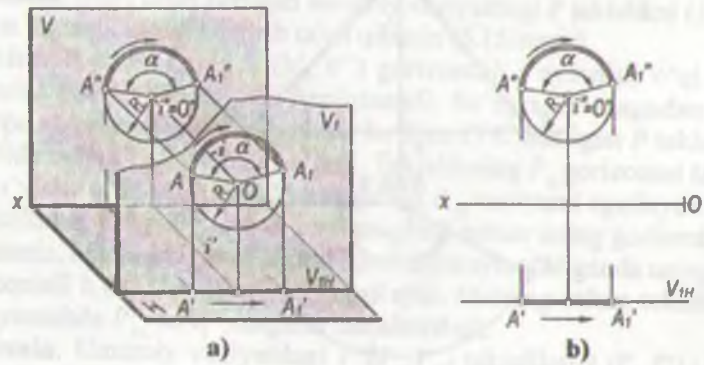
B nuqtaning H tekislikka perpendikulyar i o'qi atrofida aylantirilishi 5.11-a rasmda ko'rsatilgan. B nuqta B_1 vaziyatda radiusi OB ga teng aylana bo'yicha H tekislikka parallel bo'lgan H_1 tekislikda harakatlanadi. Bunda H_1 tekislik H tekislikka parallel bo'lgani uchun B nuqta harakatlanish trayektoriyasining gorizontal proyeksiyasi aylana bo'yicha, frontal proyeksiyasi H_1 tekislikning H_{1V} izi bo'yicha Ox ga parallel bo'lib harakatlanadi (5.11-b rasm).

Yuqorida bayon qilinganlardan quyidagi xulosalarga kelamiz:

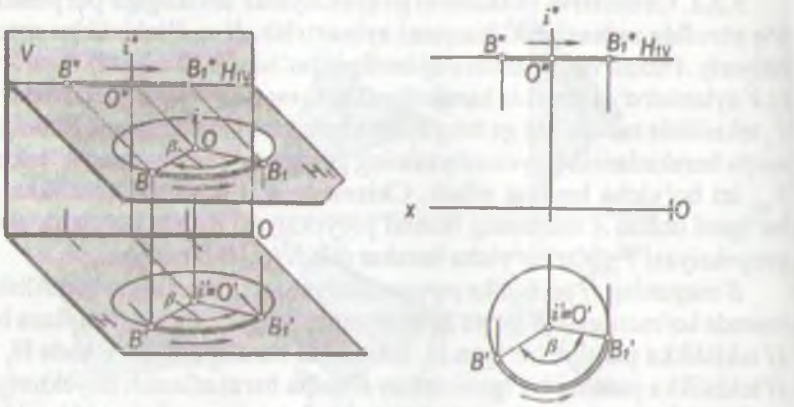
- Agar A nuqta frontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar o'q atrofida aylantirilsa, mazkur nuqtaning frontal proyeksiyasi aylana bo'yicha, gorizontal proyeksiyasi Ox o'qiga parallel to'g'ri chiziq bo'yicha harakatlanadi.
- Agar nuqta gorizontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar o'q atrofida aylantirilsa, nuqtaning gorizontal proyeksiyasi aylana bo'yicha, frontal proyeksiyasi Ox o'qiga parallel to'g'ri chiziq bo'yicha harakatlanadi.

Nuqtani proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar o'q atrofida aylantirish qoidalariga asosan umumiy vaziyatda joylashgan geometrik shakllarni xususiy yoki talab qilingan vaziyatga keltirish mumkin.

1-masala. Umumiy vaziyatdagi AB ($A'B'$, $A''B''$) kesma V tekislikka parallel vaziyatga keltirilsin (5.12-rasm).



5.10-rasm.

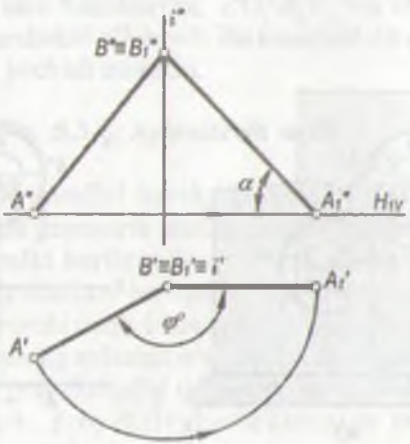


a) b)

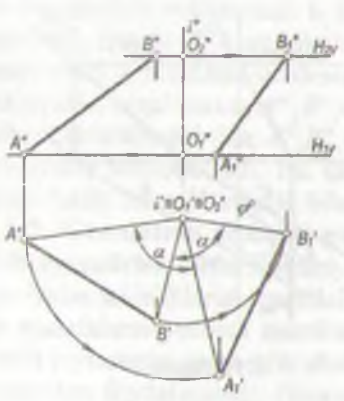
5.11-rasm.

Yechish. *AB* kesmaning biror, masalan, *B* uchidan $i \perp H$ aylantrish o'qi o'tkaziladi. So'ngra bu o'q atrofida kesmaning $A'B'$ gorizontal proyeksiyasini $A'B' \| Ox$ vaziyatga kelguncha aylantiramiz. Bunda *AB* kesmaning A'' nuqtasi $H_{II} \| Ox$ bo'yicha harakatlanib, A''_1 vaziyatni egallaydi. Shaklda hosil bo'lgan *AB* kesmaning yangi $A'_1B'_1$ va $A''_1B''_1$ proyeksiyalari uning *V* tekislikka parallelligini ko'rsatadi. Shakldagi α burchak *AB* kesmaning *H* tekislik bilan hosil qilgan burchagi bo'ladi.

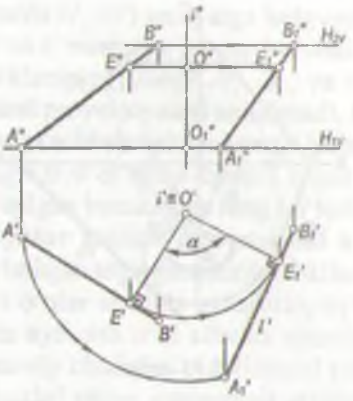
2-masala. *AB* ($A'B'$, $A''B''$) kesmani $i \perp H$ o'q atrofida α burchakka aylantirish talab qilinsin (5.13-rasm).



5.12-rasm.



5.13-rasm.



5.14-rasm.

Yechish. Kesmani α burchakka aylantirish uchun uning A' va B' proyeksiyalarini berilgan i o'qi atrofida $A'O'_1$ va $B'O'_2$ radiuslari bo'yicha α burchakka aylantirish kifoya qiladi.

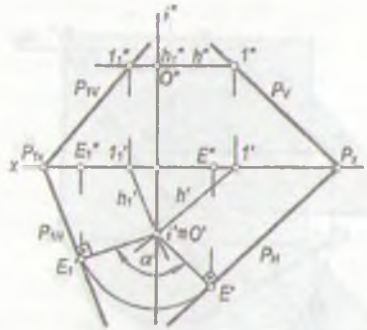
Aylantirish usulining qoidasiga muvofiq kesma uchlarining A'' va B'' proyeksiyalari $H_{1''}||Ox$ va $H_{2''}||Ox$ bo'yicha harakatlanadi. Natijada hosil bo'lgan $A_1B_1(A'_1B'_1, A''_1B''_1)$kesma AB kesmaning α burchakka aylantirilgan vaziyati bo'ladi. Bu masalani quyidagicha yechish ham mumkin: AB kesmaning $A'B'$ gorizontal proyeksiyasiga i aylanish o'qining gorizontal proyeksiyasi i' dan perpendikulyar o'tkaziladi (5.14-rasm). Hosil bo'lgan $E'O'$ aylantirish radiusi talab qilingan α burchakka aylantiriladi va E'_1O' ga perpendikulyar qilib l' chiziq o'tkaziladi. Bu chiziqqa shakldagi $A'E'=A'_1E'_1$ va $E'B'=E'_1B'_1$ kesmalar o'lchab qo'yiladi. So'ngra $A'_1B'_1$ ning frontal proyeksiyasi $A''_1B''_1$ yasaladi. Natijada AB kesmaning α burchakka aylantirilgan vaziyatining yangi $A'_1B'_1$ va $A''_1B''_1$ proyeksiyalari hosil bo'ladi.

3-masala. Izlari bilan berilgan umumiy vaziyatdagi P tekislikni $i \perp H$ o'qi atrofida α burchakka aylantirilish talab qilinsin (5.15-rasm).

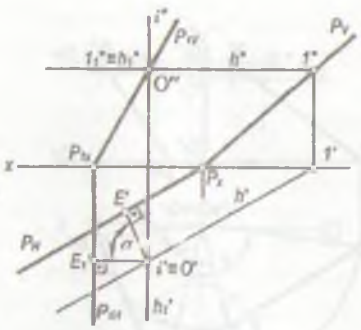
Yechish. P tekislikning h (h′, h″) gorizontali i aylanish o'qi orqali o'tkaziladi va $h \cap i$=>O (O′, O″) aniqlanadi. So'ngra O′ nuqtadan P_H ga $O'E'$ perpendikulyar tushiriladi. Hosil bo'lgan $O'E'$ berilgan P tekislikni i o'q atrofida aylantirish radiusi bo'ladi. Tekislikning P_H gorizontal izi $O'E'$ radius bo'yicha α burchakka aylantirilganda P_{1H} vaziyatni egallaydi.

Tekislikning yangi P_{1V} frontal izini aniqlash uchun uning gorizontalidan foydalanamiz. Ma'lumki, P tekislik α burchakka aylantirilganda uning h (h′, h″) gorizontali $h_1(h_1', h_1'')$ vaziyatni egallaydi. Shuning uchun tekislikning P_{1V} izini yasashda P_{1x} va $1_1''$ nuqtalar tutashtiriladi.

4-masala. Umumiy vaziyatdagi P $(P_H P_V)$ tekislikni i $(i', i'') \perp H$ o'q atrofida aylantirib, frontal proyeksiyalovchi tekislik vaziyatiga keltirish talab etilsin (5.16-rasm).



5.15-rasm.

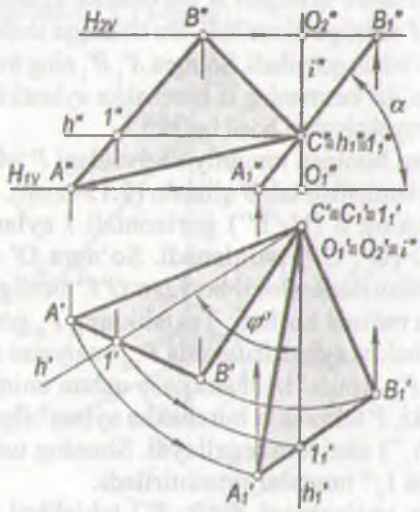


5.16-rasm.

Yechish. P tekislikning h (h′, h″) gorizontali *i (i′, i″)* o‘qi orqali o‘tkaziladi va gorizontalning i' o‘qi bilan kesishish nuqtasi O (O′,O″) topiladi. Tekislik bilan uning h (h′, h″) gorizontali O' atrofida aylantirilib, proyeksiyalovchi, ya’ni $h_1' \perp Ox$ vaziyatga keltiriladi. Gorizontalning h″ frontal proyeksiyasi esa $h_1'' \equiv 1_1''$ vaziyatda bo‘ladi. Tekislikning yangi P_{1x} frontal izi P_{1x} va $1_1''$ nuqtalardan o‘tadi.

5-masala. ΔABC ($\Delta A'B'C'$, $\Delta A''B''C''$) tekislikning H tekislik bilan tashkil etgan α burchagi aniqlansin (5.17-rasm).

Yechish. Izlangan α burchakni aniqlash uchun berilgan ΔABC tekislikni frontal proyeksiyalovchi vaziyatga keltirish kerak bo‘ladi. Buning uchun uchburchakning biror, masalan, C nuqtasidan $i' \perp H$ aylanish o‘qi o‘tkaziladi



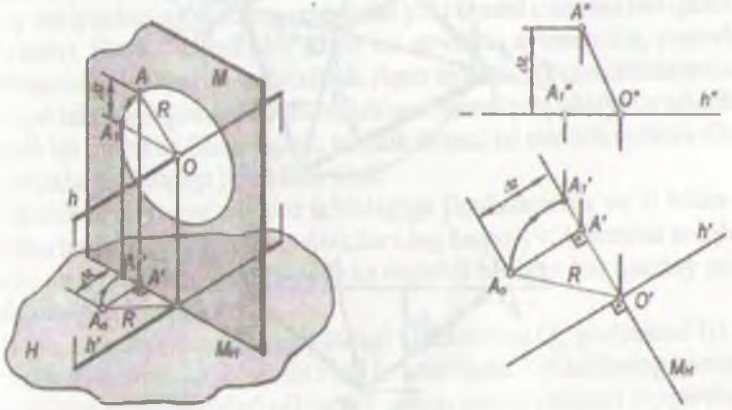
5.17-rasm.

va bu o‘q atrofida uchburchak $h_1 \perp V$ (epyurda $h'_1 \perp V$) vaziyatga kelguncha aylantiriladi. Bunda uchburchakning A, B va C nuqtalari ham φ burchakka harakatlanadi. Chizmada uchburchak uchlarining yangi A'_1, B'_1 va C'_1 proyeksiyalari orqali uning $A''_1B''_1C''_1$ frontal proyeksiyalari aniqlanadi. Bu nuqtalar o‘zaro tutashtirilsa, $A''_1B''_1C''_1$ kesma (uchburchakning yangi frontal proyeksiyasi) hosil bo‘ladi. Bu kesmaning Ox o‘qi bilan tashkil etgan α burchagi ΔABC ning H tekislik bilan hosil qilgan burchagiga teng bo‘ladi.

5.3.2. Geometrik shaklni proyeksiyalar tekisligiga parallel o‘q atrofida aylantirish. Umumiy vaziyatda joylashgan tekis geometrik shakllarni proyeksiyalar tekisliklariga parallel bo‘lgan o‘qlar atrofida aylantirib, ba’zi metrik masalalarni yechish mumkin. Bunda aylanish o‘qi sifatida umumiy vaziyatda joylashgan geometrik shaklning asosiy chiziqlari – gorizontal yoki frontallaridan foydalaniladi. Geometrik shaklni uning gorizontali atrofida aylantirib, H tekislikka parallel vaziyatga, shuningdek, uni frontali atrofida aylantirib, V tekislikka parallel vaziyatga keltirish mumkin.

Geometrik shakl proyeksiyalar tekisligiga parallel o‘q atrofida aylantirilganda uning har bir nuqtasi aylanish o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan tekislikda aylana bo‘ylab harakatlanadi. Masalan, A nuqta h gorizontal atrofida aylantirilganda radiusi OA ga teng aylana bo‘yicha $M \perp h$ tekislikda harakatlanadi (5.18-a rasm). Bunda uning gorizontal proyeksiyasi gorizontalning h' gorizontal proyeksiyasiga perpendikulyar to‘g‘ri chiziq bo‘yicha harakatlanadi.

Chizmada tasvirlangan $A(A', A'')$ nuqtani $A_1(A_1', A_1'')$ vaziyatga kelguncha aylantirish uchun aylanish markazi $O(O', O'')$ nuqtani aniqlash kerak (5.18-b rasm). Bu nuqta aylanish o‘qi h ning M tekislik bilan kesishish nuqtasi bo‘ladi. Chizmada aylantirish radiusi R ning haqiqiy o‘lchamini aniqlash uchun H tekislikda to‘g‘ri burchakli $\Delta O'A'A_0$ yasaymiz. Buning uchun AO radiusning $A'O'$ gorizontal proyeksiyasini to‘g‘ri burchakli uchburchakning bir kateti,



a) b)

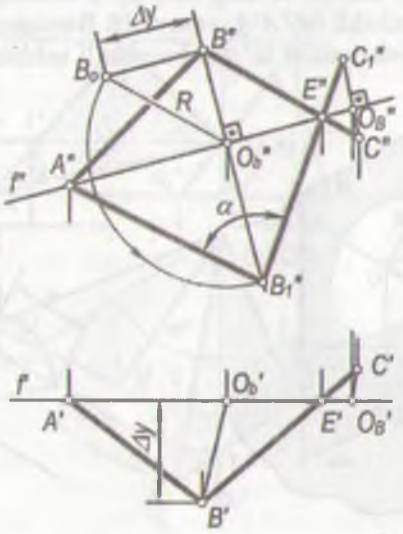
5.18-rasm.

OA kesma uchlari applikatalarining Δz ayirmasini ikkinchi kateti qilib olamiz. Bu uchburchakning gipotenuzasi izlangan aylantirish radiusi R bo'ladi. A nuqtaning aylantirilgandan keyingi yangi vaziyatining A'_1 gorizontal proyeksiyasi aylanish markazi O' nuqtada bo'lgan va $O'A_0$=R radiusli aylana yoyining $M(M_H)$ tekislikning izi bilan kesishgan A_1' nuqtasi bo'ladi. A nuqtaning yangi A_1'' frontal proyeksiyasi esa h'' to'g'ri chiziqda bo'ladi.

1-masala. Umumiy vaziyatdagi $\angle ABC$ ($\angle A'B'C'$, $\angle A''B''C''$)ning haqiqiy o'lchami aniqlansin (5.19-rasm).

Yechish. Berilgan burchakning gorizontali yoki frontalidan foydalaniladi. Mazkur burchakning haqiqiy o'lchamini aniqlash uchun chizmada uning f (f', f'') frontali o'tkazilgan. Rasmda hosil bo'lgan $\angle ABE$ ($\angle A'B'E'$, $\angle A''B''E''$)ning haqiqiy o'lchamini aniqlash uchun B nuqta aylantirish radiusining haqiqiy o'lchamini aniqlash kifoya. Buning uchun B'' nuqtadan f'' ga perpendikulyar o'tkaziladi va aylanish markazining $O_B(O'_B, O'_B)$, so'ngra aylantirish radiusining $BO_B(B'O'_B, B''O'_B)$ proyeksiyalari aniqlanadi. To'g'ri burchakli $\Delta O''_B B'' B''_O$ yasash bilan radiusning haqiqiy o'lchami $O''_B B''_1$=R aniqlanadi. B nuqtaning yangi vaziyatini yasash uchun O''_B dan R radius bilan $O''_B B''_1$ perpendikulyarning davomi bilan kesishguncha yoy o'tkaziladi va hosil bo'lgan B''_1 bilan A'' va E'' nuqtalar tutashtiriladi. Chizmada hosil bo'lgan α berilgan burchakning haqiqiy o'lchami bo'ladi.

2-masala. Umumiy vaziyatdagi ΔABC ($\Delta A'B'C'$, $\Delta A''B''C''$) ning haqiqiy o'lchami aniqlansin (5.20-a, b, v rasm).



5.19-rasm.

Yechish. Uchburchak gorizontali h (h′, h″) o‘tkaziladi. ΔABC ning haqiqiy o‘lchamini aniqlash uchun uning B (B', B'') va C (C', C'') uchlari aylantirish radiuslarining haqiqiy o‘lchamlari aniqlanadi.

Chizmada B nuqtaning aylantirish radiusini aniqlash uchun uning $O'B'$ va $O''B''$ proyeksiyalaridan foydalanib, to‘g‘ri burchakli $\Delta O'_0B'B'_0$ ni yasaymiz. Bu uchburchakning $O'B'_0$ gipotenuzasi B nuqtaning aylantirish radiusi bo‘ladi. B nuqtaning yangi vaziyati aylantirish markazining gorizontal proyeksiyasi O' dan radiusi $O'B_0$ ga teng qilib o‘tkazilgan yoyning harakat tekisligining M_H izi bilan kesishgan B_0 nuqtasi bo‘ladi.

Uchburchakning C va D nuqtalari aylanish o‘qiga tegishli bo‘lgani uchun ularning fazoviy vaziyatlari o‘zgarmaydi. Uchburchak A nuqtasi aylantirish radiusining haqiqiy o‘lchamini ham B nuqta aylantirish radiusining haqiqiy o‘lchamini topish kabi aniqlash mumkin. Ammo uchburchakning A nuqtasi h o‘qi atrofida B nuqta kabi harakatlanganda N (N_H) tekislikka va uchburchakning AB tomoniga tegishli bo‘lib qoladi. Uchburchakning AB tomoni esa qo‘zg‘almas D nuqtadan o‘tadi. Shuning uchun chizmada A nuqtaning yangi vaziyatini aniqlash uchun B_0 va D′ nuqtalar o‘zaro tutashtiriladi va A' nuqtadan $C'D'$ ga tushirilgan perpendikulyar bilan kesishguncha davom ettirilib, A_0 nuqta topiladi. Agar A_0, B_0 va C' nuqtalar o‘zaro tutashtirilsa, uchburchakning haqiqiy kattaligi hosil bo‘ladi.

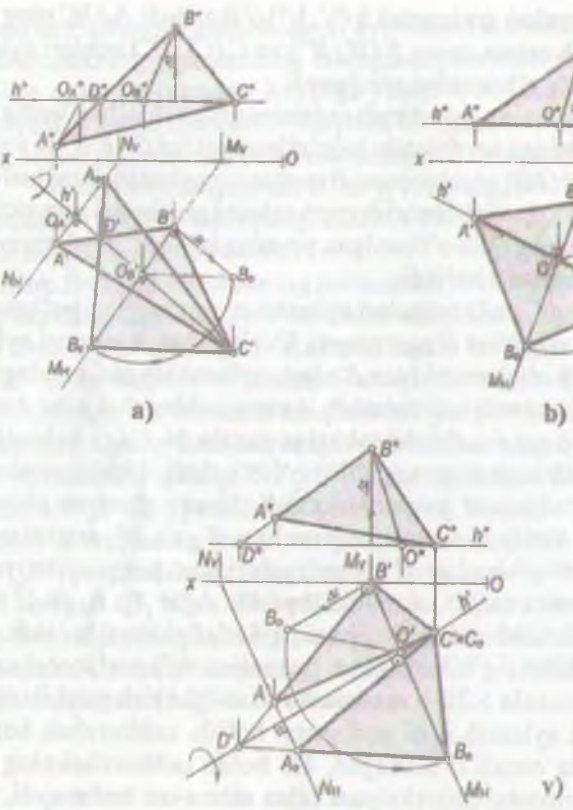
Agar uchburchakning biror tomoni (masalan, AC) gorizontal vaziyatda berilgan bo‘lsa, masala 5.20-b rasmda ko‘rsatilganidek yechiladi.

5.20-v rasmda aylanish o‘qi gorizontal bo‘lib, uchburchak konturidan tashqarida C nuqta orqali o‘tkazilgan. Bu holda uchburchakning haqiqiy kattaligi uning gorizontal proyeksiyasi bilan ustma-ust tushmaydi, natijada masalaning yechimi yaqqolroq bo‘ladi.

5.3.3. Geometrik shaklni proyeksiyalar tekisliklariga tegishli o‘q atrofida yoki tekislikning izi atrofida aylantirish. Aylanish o‘qi sifatida umumiy vaziyatdagi tekislikning gorizontal yoki frontal izlaridan biri qabul qilinadi (5.21-rasm). Bu holda tekislik biror izi atrofida aylantirilib, proyeksiyalar tekisliklarining biriga jipslashtiriladi. Agar aylanish o‘qi sifatida tekislikning gorizontal izi qabul qilinsa, bu tekislikni gorizontal proyeksiyalar tekisligi bilan jipslashtirish mumkin. Shuningdek, tekislik frontal izi atrofida aylantirilib, frontal proyeksiyalar tekisligiga jipslashtiriladi.

Tekisliklarni proyeksiyalar tekisligiga jipslashtirish yo‘li bilan mazkur tekislikka tegishli bo‘lgan tekis shakllarning haqiqiy o‘lchamini aniqlash yoki umumiy vaziyatda berilgan tekislikka tegishli bo‘lgan har qanday geometrik masalalarni yechish mumkin.

5.22-a rasmda umumiy vaziyatdagi Q tekislikni Q_H gorizontal izi atrofida aylantirib, H tekislikka jipslashtirish ko‘rsatilgan. Tekislikning gorizontal izi aylanish o‘qi sifatida qabul qilingani uchun uning vaziyati o‘zgarmaydi. Bu tekislikni H tekislikka jipslashtirish uchun mazkur tekislikka tegishli biror nuqtani H tekislikka jipslashtirish kifoya. Bunday nuqta sifatida tekislikning



5.20-rasm.

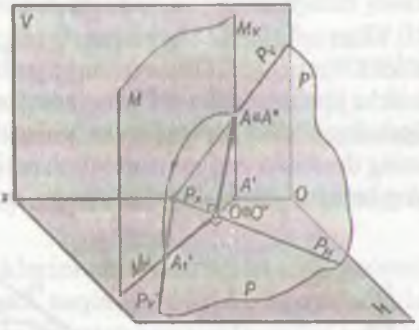
frontal iziga tegishli $B\,(B',B'')$ nuqtani olish mumkin. Bu nuqta orqali Q_H ga perpendikulyar M (M_H, M_V) gorizontal proyeksiyalovchi tekislik o'tkaziladi. B nuqta $O'B_0$=R radiusli yoy bo'yicha M_H iz bilan kesishguncha aylantiriladi. Natijada hosil bo'lgan B'_1 nuqta bilan Q_x ni o'zaro tutashtirsak, Q tekislikning H tekislikka jipslashtirilgan vaziyatiga ega bo'lamiz. Tekislikni bunday jipslashtirganda unga tegishli geometrik shakllar H tekislikka jipslashib, haqiqiy o'lchamlarida proyeksiyalanadi.

5.22-a rasmdan shuni aniqlash mumkinki, Q tekislikni Q_H izi atrofida aylantirib, H tekislikka jipslashtirishda Q_V iziga tegishli Q_xB_1 kesma o'zining haqiqiy o'lchamiga teng bo'lgani uchun $Q_xB''=Q_xB'_1$ bo'ladi. Demak, chizmada $Q(Q_H, Q_V)$ tekislikni H tekislikka jipslashtirish uchun uning Q_V izida tanlab olingan $B\equiv B''$ nuqta va Q_x markazdan Q_xB'' radius bilan yoy chizib, M tekislikning M_H izi bilan kesishgan B_1 nuqta aniqlanadi. So'ngra B_1 va Q_x nuqtalardan tekislikning Q_H izi o'tkaziladi.

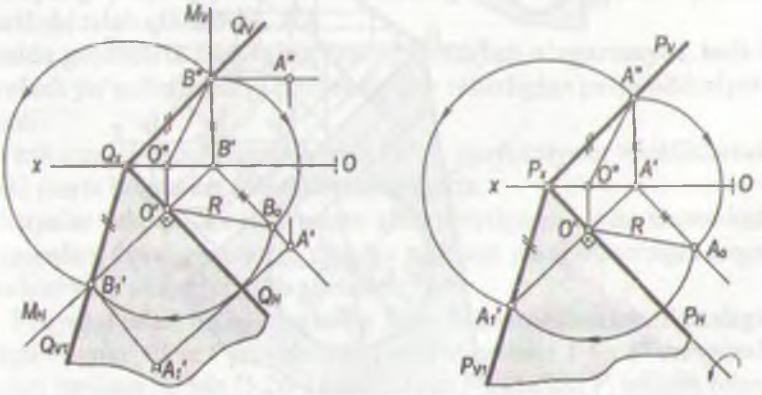
Chizmada P (P_H, P_V) tekislikni P_H izi atrofida aylantirib, H tekislikka jipslashtirish uchun aylantirish radiusining haqiqiy o'lchamini aniqlash zarur bo'lsin (5.22-b rasm). Ma'lumki, aylantirish radiusi tekislikning aylanish o'qiga perpendikulyar bo'ladi. To'g'ri burchakning proyeksiyalanish xususiyatiga ko'ra, tekislikning P_V izida olingan A (A', A'') nuqtaning A' proyeksiyasidan tekislikning P_H iziga perpendikulyar o'tkaziladi va O' hamda O'' nuqtalar topiladi. Chizmada hosil bo'lgan $O'A'$ va $O''A''$ aylantirish radiusining proyeksiyalari, $O'A_0$ esa uning haqiqiy o'lchami bo'ladi.

Xuddi shuningdek, P (P_H, P_V) tekislikni V tekislikka ham jipslashtirish mumkin (5.23-rasm). Buning uchun berilgan P tekislikning P_H gorizontal izida ixtiyoriy A nuqta tanlab, uning aylantirish radiusi $P_x A'$ aniqlanadi va tekislikning P_H izini P_V izi atrofida aylantirib, tekislikka jipslashtiriladi. Chizmadan ko'rinib turibdiki, P tekislik P_H izi atrofida aylantirilganda $P_x A'$ kesma $P_x A''_1$ ga teng bo'ladi.

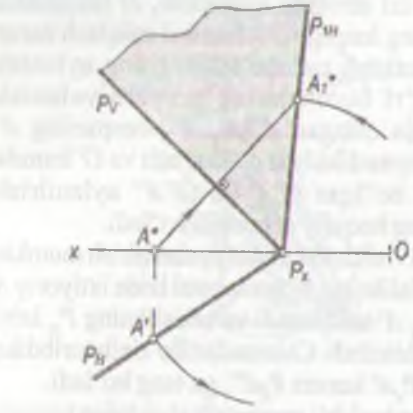
Umumiy vaziyatda berilgan tekislikka tegishli geometrik shaklning haqiqiy o'lchami uning xarakterli nuqtalarini proyeksiyalar tekisligiga



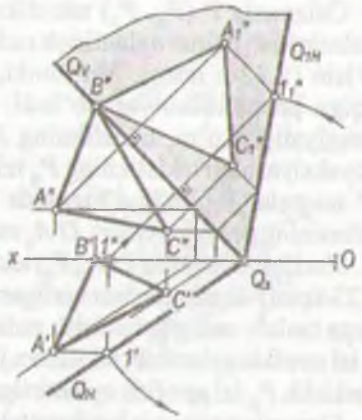
5.21-rasm.



5.22-rasm.



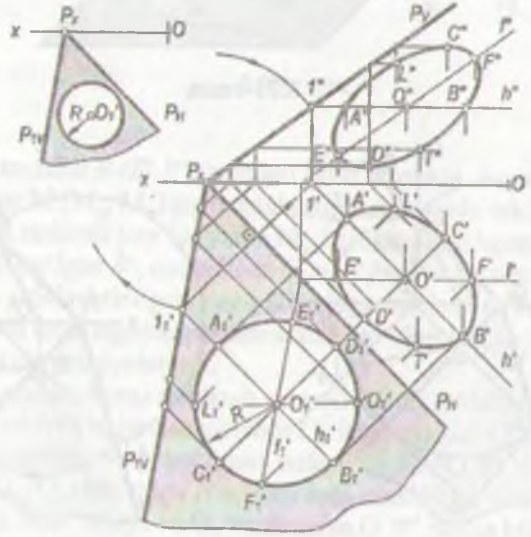
5.23-rasm.



5.24-rasm.

jipslashtirish yo'li bilan aniqlanadi. Masalan, Q (Q_H, Q_V) tekislikka tegishli ΔABC ($A'B'C'$, $A''B''C''$)ning (5.24-rasm) haqiqiy o'lchami uning A, B va C nuqtalarini V tekislikka jipslashtirish yo'li bilan aniqlanadi.

Tekislikning jipslashgan holati berilgan bo'lsa, uning dastlabki vaziyatini tiklash mumkin. Tekislikning dastlabki vaziyatini aniqlash natijasida tekislikka tegishli bo'lgan shakllarning ham proyeksiyalarini aniqlash mumkin.



5.25-rasm.

Masalan, P tekislikning H tekislikka jipslashtirilgan vaziyati P_H, P_V, P_{1V} izlari va shu tekislikka tegishli O_1 markaz va R radiusli aylana berilgan bo'lsin (5.25-rasm).

Bu aylananing P tekislikdagi proyeksiyalarini yasash uchun aylana markazidan tekislikning h'_1 gorizontali o'tkaziladi va $1'_1$ nuqta aniqlanadi. Bu nuqtadan tekislikning P_H iziga perpendikulyar o'tkazib, Ox proyeksiyalar o'qiga tegishli 1′ nuqta topiladi. Bu nuqtadan h'_1 ning h″ proyeksiyasi o'tkaziladi. So'ngra P_x markazdan $P_x1'_1$ radius bilan o'tkazilgan yoyning 1′ dan Ox o'qiga o'tkazilgan perpendikulyar bilan kesishgan 1″ nuqtasi topiladi. Bu nuqtadan h'_1 ning h″ proyeksiyasi o'tkaziladi. So'ngra 1″ va P_x nuqtalar tutashtirilib, tekislikning P_V izi hosil qilinadi. Aylana markazining proyeksiyalarini yasash uchun O'_1 dan P_H ga perpendikulyar o'tkazib, h′ bilan kesishgan O' nuqta va h″ da O'' nuqta topiladi. Shuningdek, bu gorizontalda joylashgan aylana A'_1 va B'_1 nuqtalarining A', A'' va B', B'' proyeksiyalari aniqlanadi.

Tekislikning f'_1 frontali aylananing markazi O'_1 dan P_{1V} ga parallel qilib o'tkazilib, aylana E'_1 va F'_1 nuqtalarining E', E'' va F′, F″ proyeksiyalari yasaladi.

Xuddi shu tarzda aylananing L'_1 va T'_1, C'_1 va D'_1 nuqtalarining proyeksiyalari tekislikning gorizontallari yordamida aniqlanadi. Bu nuqtalarning bir nomli proyeksiyalarini mos ravishda o'zaro tutashtirsak, aylananing gorizontal va frontal proyeksiyalari – ellipslar hosil bo'ladi.

5.4-§. Proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usuli

Proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usulida geometrik shaklning dastlabki fazoviy vaziyati saqlanib qoladi. Proyeksiyalar tekisliklari berilgan geometrik shaklga nisbatan xususiy (parallel yoki perpendikulyar) vaziyatda bo'lgan yangi proyeksiyalar tekisliklari bilan almashtiriladi. Bunda dastlabki va yangi proyeksiyalar tekisliklarining o'zaro perpendikulyarlik sharti bajarilishi talab qilinadi.

Bu usulda geometrik shaklning fazoviy vaziyati o'zgarmaydi, balki proyeksiyalash yo'nalishi yangi proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar qilib olinadi.

Geometrik masalada qo'yilgan shartga ko'ra, proyeksiyalar tekisliklarini bir yoki ikki marta ketma-ket almashtirish mumkin.

Proyeksiyalar tekisliklari ikki marta almashtirilganda, ular ketma-ket ravishda, masalan, avval geometrik shaklga nisbatan parallel, so'ngra unga perpendikulyar yoki aksincha qilib almashtiriladi.

5.4.1. Proyeksiyalar tekisliklarining bittasini almashtirish. Fazodagi biror A nuqta va uning H va V proyeksiyalar tekisliklaridagi A' va A'' ortogonal proyeksiyalari berilgan bo'lsin (5.26-a rasm). Agar V tekislikni V_1 tekislik bilan almashtirsak, $\frac{V_1}{H}$ yangi proyeksiyalar tekisliklari sistemasi hosil bo'ladi. A

nuqtaning V_1 tekislikdagi proyeksiyasini yasash uchun berilgan nuqtadan mazkur tekislikka perpendikulyar o'tkazib, yangi frontal proyeksiyasi A''_1 topiladi.

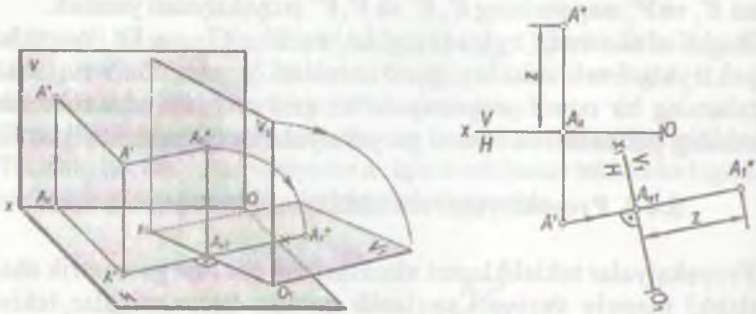
Rasmdagi yasashlardan ko'rinishicha, A'' nuqtadan Ox o'qigacha bo'lgan masofa A''_1 nuqtadan O_1x_1 o'qigacha bo'lgan masofaga tengdir, ya'ni $A''_1A_{x1}=A''A_x$.

Nuqtaning yangi proyeksiyalar sistemasidagi chizmasini yasash uchun yangi proyeksiyalar tekisligi dastlabki proyeksiyalar tekisligi bilan jipslashtiriladi.

Chizmada A nuqtaning yangi A''_1 proyeksiyasini yasash uchun A nuqtadan O_1x_1 ga perpendikulyar tushiriladi (5.26-b rasm). Uning davomiga $A''A_x$ masofa qo'yiladi.

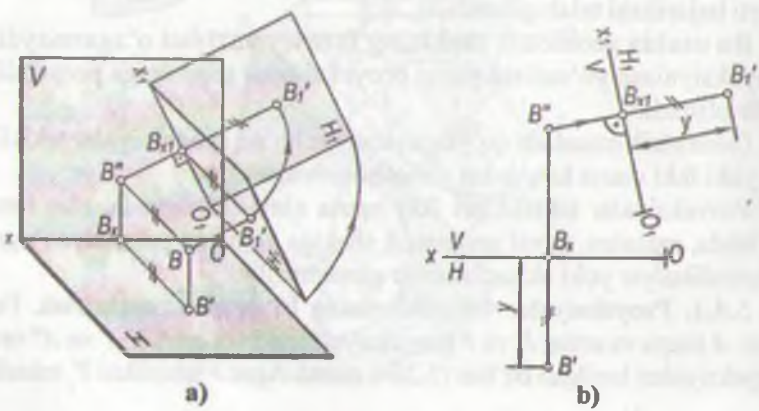
Natijada hosil bo'lgan A' va A''_1 lar A nuqtaning yangi $\frac{V_1}{H}$ tekisliklar sistemasidagi proyeksiyalari bo'ladi. Frontal proyeksiyalar tekisligi yangi proyeksiyalar tekisligi bilan almashtirilganda nuqtaning z koordinatasi o'zgarmaydi.

H va V proyeksiyalar tekisliklari sistemasida B nuqta B' va B'' proyeksiyalari berilgan bo'lsin (5.27-a rasm). H tekislikni $H_1 \perp V$ tekislik bilan almashtirsak,



a) b)

5.26-rasm.



a) b)

5.27-rasm.

$\frac{V}{H_1}$ yangi tekisliklar sistemasiga ega bo'lamiz. B nuqtadan H tekislikka perpendikulyar o'tkazib, bu nuqtaning B'_1 proyeksiyasini yasaymiz. Nuqtaning yangi tekisliklar sistemasidagi chizmasini yasash uchun (5.27-b rasm) H_1 tekislikni V tekislik bilan jipslashtiramiz. Chizmada B nuqtaning yangi proyeksiyasini yasash uchun uning B'' proyeksiyasidan O_1x_1 ga o'tkazilgan perpendikulyarning davomiga $B'_1B_{x1}=B'B_x$ masofa qo'yiladi. Natijada hosil bo'lgan B'_1 va B'' yangi $\frac{V}{H_1}$ tekisliklar sistemasidagi B nuqtaning chizmasi bo'ladi. Demak, gorizontal proyeksiya tekisligi almashtirilganda, nuqtaning yangi gorizontal proyeksiyasida y koordinatasi o'zgarmaydi.

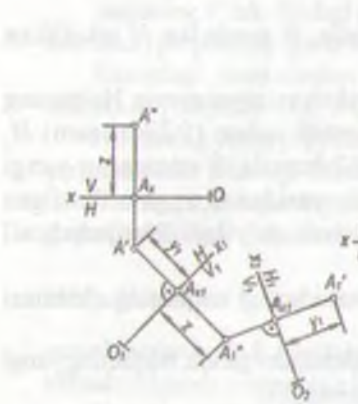
5.4.2. Proyeksiyalar tekisliklarini ketma-ket ikki marta almashtirish. Ayrim geometrik masalalarni yechishda proyeksiyalar tekisliklarini ketma-ket ikki marta almashtirish zarur bo'ladi.

5.28-rasmda A nuqtaning $\frac{V}{H}$ sistemasida berilgan A' va A'' proyeksiyalari orqali uning yangi A'_1 va A''_1 proyeksiyalarini yasash ko'rsatilgan. Buning uchun avval V tekislikni V_1 tekislik bilan almashtirib, $\frac{V_1}{H}$ sistema hosil qilinadi. Buning uchun chizmada ixtiyoriy vaziyatda O_1x_1 proyeksiyalar o'qi tanlab olinadi. A nuqtaning yangi A''_1 proyeksiyasini yasash uchun uning A' proyeksiyasidan O_1x_1 proyeksiyalar o'qiga perpendikulyar o'tkazib, uning davomiga $A''A_x$ masofa qo'yiladi. Natijada A nuqtaning $\frac{V}{H_1}$ sistemasidagi yangi A''_1 proyeksiyasi hosil bo'ladi. A nuqtaning A'_1 proyeksiyasini yasash uchun $\frac{V_1}{H}$ sistemadan $\frac{V_1}{H_1}$ sistemaga o'tiladi. Buning uchun ixtiyoriy vaziyatda joylashgan O_2x_2 o'qi olinadi va nuqtaning A''_1 proyeksiyasidan O_2x_2 ga perpendikulyar o'tkazib, uning davomiga $A'A_{x1}$ masofa qo'yiladi. Shunday qilib, O_2x_2 sistemasida A nuqtaning A''_1 va A'_1 yangi proyeksiyalari hosil bo'ladi.

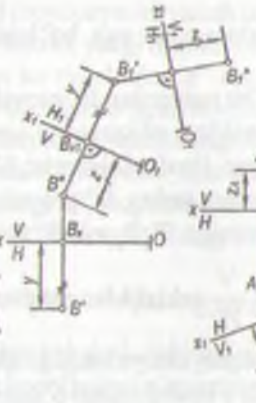
5.29-rasmda B nuqtaning $\frac{V}{H_1}$ sistemadan $\frac{V_1}{H}$ va $\frac{V_1}{H_1}$ sistemaga o'tish natijasida hosil bo'ladigan yangi B''_1 va B'_1 proyeksiyalarini yasash ko'rsatilgan.

Nuqtaning yangi proyeksiyalarini yasash qoidalariga asoslanib, geometrik shakllarning yangi, maqsadga muvofiq bo'lgan proyeksiyalarini yasash mumkin.

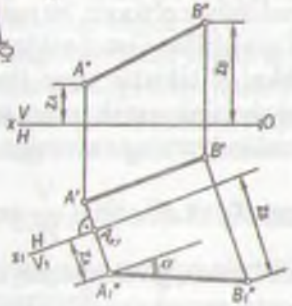
1-masala. Umumiy vaziyatda berilgan AB ($A'B'$, $A''B''$) kesmaning haqiqiy uzunligini aniqlash talab etilsin (5.30-rasm).



5.28-rasm.



5.29-rasm.



5.30-rasm.

Yechish. Buning uchun umumiy vaziyatda berilgan AB kesmaga parallel qilib gorizontal yoki frontal proyeksiyalar tekisligi yangi proyeksiyalar tekisligi bilan almashtiriladi. Chizmada masalani yechish uchun uning yangi O_1x_1 proyeksiyalar o'qi kesmaning biror, masalan, $A'B'$ gorizontal proyeksiyasiga parallel qilib olinadi. Hosil bo'lgan $\frac{V_1}{H}$ proyeksiyalar tekisliklari sistemasida AB kesma V_1 proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'ladi va bu tekislikda u haqiqiy uzunligiga teng bo'lib proyeksiyalanadi.

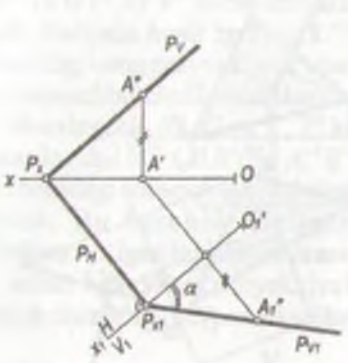
2-masala. Umumiy vaziyatdagi P (P_H, P_V) tekislikni frontal proyeksiyalovchi tekislik vaziyatiga keltirish talab etilsin (5.31-rasm).

Yechish. Ma'lumki, frontal proyeksiyalovchi tekislikning gorizontal izi Ox o'qiga perpendikulyar bo'ladi. Shuning uchun umumiy vaziyatdagi P tekislikni frontal proyeksiyalovchi vaziyatga keltirish uchun yangi O_1x_1 proyeksiyalar o'qi tekislikning P_H gorizontal iziga ixtiyoriy joydan perpendikulyar qilib olinadi.

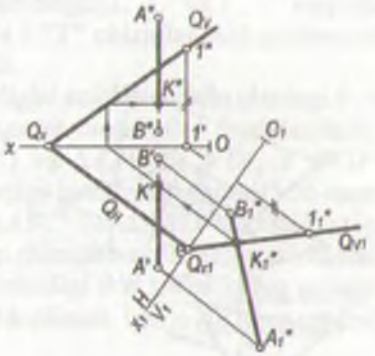
Tekislikning yangi P_{V1} izining yo'nalishini aniqlash uchun tekislikning P_V iziga tegishli biror, masalan, A (A', A'') nuqta olib, uning yangi A''_1 frontal proyeksiyasi yasaladi. Tekislikning yangi P_{V1} izi P_{x1} va A''_1 nuqtalardan o'tkaziladi. Chizmada ko'rsatilgan α burchak P tekislikning H tekislik bilan tashkil etgan burchagi bo'ladi.

3-masala. AB ($A'B'$, $A''B''$) to'g'ri chiziqning umumiy vaziyatdagi Q (Q_H, Q_V) tekislik bilan kesishish nuqtasi yasalsin (5.32-rasm).

Yechish. Masalani yechish uchun Q tekislikni gorizontal yoki frontal proyeksiyalovchi tekislik vaziyatiga keltiramiz. Buning uchun yangi O_1x_1 proyeksiyalar o'qi tekislikning biror iziga, masalan, Q_H ga perpendikulyar qilib o'tkaziladi. Natijada tekislikning yangi Q_{V1} izi hamda to'g'ri chiziqning A''_1 B''_1 proyeksiyasi yasaladi. Hosil bo'lgan kesmaning A''_1 B''_1 proyeksiyasi



5.31-rasm.



5.32-rasm.

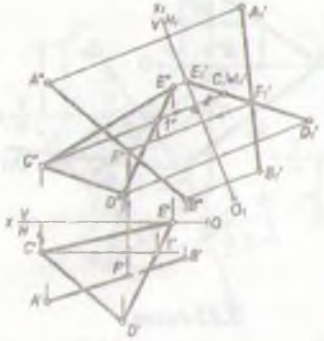
bilan tekislik Q_{V_1} izining kesishgan K''_1 nuqtasi AB kesmaning Q tekislik bilan kesishish nuqtasi bo'ladi. Bu nuqtani teskari yo'nalishda proyeksiyalab, berilgan to'g'ri chiziq kesmasi bilan tekislikning kesishish nuqtasining K′ va K″ proyeksiyalari yasaladi.

Xuddi shu usul bilan AB ($A'B'$, $A''B''$) to'g'ri chiziqning ΔCDE (ΔC′D′E′, Δ$C''D''E''$) bilan kesishish nuqtasining F′ va F″ proyeksiyalari yasaladi (5.33-rasm). Bunda mazkur uchburchak tekislik proyeksiyalovchi tekislik vaziyatiga keltiriladi. Buning uchun chizmada ΔCDE tekislikning biror bosh chizig'iga, masalan, $C1$ ($C'1'$,$C''1''$) frontaliga perpendikulyar qilib yangi O_1x_1 proyeksiyalar o'qi o'tkaziladi. Uchburchakning $C'_1D'_1E'_1$ to'g'ri chiziq kesmasi tarzida proyeksiyalangan proyeksiyasi va kesmaning $A'_1B'_1$ yangi proyeksiyalari yasaladi. Ularning o'zaro kesishgan F'_1 nuqtasi belgilanadi, so'ngra F nuqtaning frontal F″ va gorizontal F′ proyeksiyalari yasaladi.

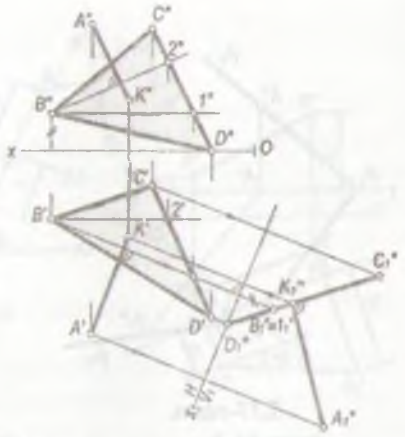
4-masala. A (A',A'') nuqtadan ΔBCD (Δ$B'C'$D′, Δ$B''C''$D″) tekislikkacha bo'lgan masofa aniqlansin (5.34-rasm).

Yechish. Bu masofa A nuqtadan ΔBCD tekislikka tushirilgan perpendikulyar bilan o'lchanadi. Masalani yechish uchun chizmada yangi proyeksiyalar o'qi uchburchak tekisligining asosiy chiziqlaridan biriga, masalan, gorizontaliga perpendikulyar, ya'ni $O_1x_1 \perp B'1'$ qilib o'tkaziladi. So'ngra uchburchakning to'g'ri chiziq kesmasi shaklida proyeksiyalangan yangi proyeksiyalovchi $D''_1B''_1C''_1$ vaziyati va nuqtaning A''_1 proyeksiyasi yasaladi. Izlangan masofaning haqiqiy uzunligi A''_1 dan $D''_1B''_1C''_1$ kesmaga o'tkazilgan $A''_1K''_1$ perpendikulyar bo'ladi. Bu masofaning gorizontal va frontal proyeksiyalarini teskari proyeksiyalash bilan K′ va K″ proyeksiyalar aniqlanadi. Mazkur K′ va K″ nuqtalar A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan uchburchakning gorizontal hamda frontallariga mos ravishda tushirilgan perpendikulyarning proyeksiyalarida bo'ladi.

Yechish. Masalani yechish uchun berilgan uchburchaklarning biri, masalan, ΔEFD proyeksiyalovchi vaziyatga keltiriladi. Buning uchun

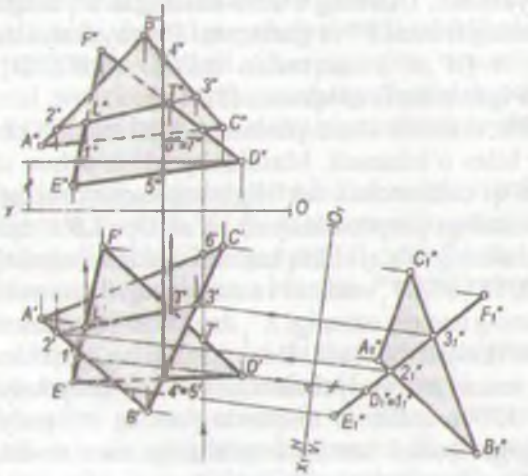


5.33-rasm.



5.34-rasm.

chizmada ΔEFD ning D′1′ va D″1″ gorizontalining proyeksiyalari hamda unga perpendikulyar. va'ni $O_1X_1 \perp D'1'$ qilib yangi proyeksiyalar o‘qi o‘tkaziladi. So‘ngra uchburchaklarning yangi $A''_1B''_1C''_1$ va $E''_1F''_1D''_1$ proyeksiyalari yasaladi. Bunda ΔEFD ning mazkur proyeksiyasi to‘g‘ri chiziq kesmasi shaklida proyeksiyalanadi. Proyeksiyalar tekisliklarining yangi sistemasida ikki uchburchak $2''_1 3''_1$ to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesishadi. Kesishish chizig‘ining 2′3′ gorizontal va 2″3″ frontal proyeksiyalarini teskari proyeksiyalash bilan uchburchaklarning dastlabki berilgan proyeksiyalari aniqlanadi. So‘ngra chizmada topilgan 2′3′ va 2″3″ kesmalarning ΔEFD ning



5.35-rasm.

L′F′, E″F″ va D′F′, D″F″ tomonlari bilan kesishgan L′, L″ va T′, T″ nuqtalari aniqlanadi. Natijada hosil bo‘lgan L′T′ va L″T″ chiziqlar ikki uchburchak kesishish chizig‘ining proyeksiyalari bo‘ladi.

Chizmada uchburchaklarning ko‘rinishligini aniqlash uchun ulardagi 4′, 4″ va 5′, 5″, shuningdek, 6′, 6″ va 7′, 7″ konkurent nuqtalardan foydalaniladi.

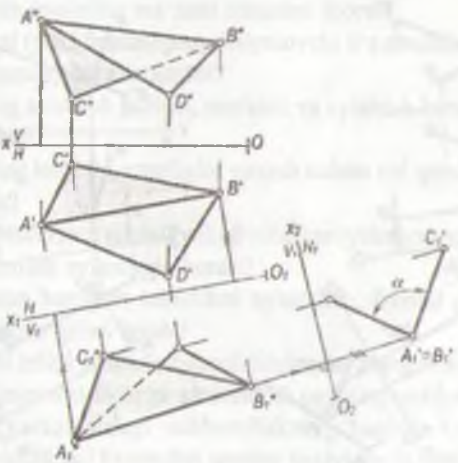
6-masala. ΔABC ($A'B'C'$, $A''B''C''$) va ΔABD ($A'B'D'$, $A''B''D''$) tekisliklari orasidagi ikkiyoqli burchakning haqiqiy kattaligi aniqlansin (5.36-rasm).

Yechish. Bu burchak berilgan ΔABC va ΔABD tekisliklariga perpendikulyar bo‘lgan tekisliklar orasidagi chiziqli burchak bilan o‘lchanadi. Shuning uchun ham yangi proyeksiyalar tekisligi ikki tekislikning umumiy AB kesishish chizig‘iga perpendikulyar qilib olinadi. Lekin AB qirra umumiy vaziyayatda bo‘lgani uchun $Ox\,\frac{V}{H}$ proyeksiyalar tekisliklari sistemasi avval $x_1 \parallel AB$ qilib (chizmada $O_1x_1 \parallel A'B'$), so‘ngra $H_1 \perp AB$ qilib (chizmada $O_2x_2 \perp A''_1B''_1$) ketma-ket almashtiriladi.

Natijada ΔABC va ΔABD yangi H_1 proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar vaziyatda bo‘lib qoladi va o‘zaro kesishuvchi kesmalar shaklida proyeksiyalanadi. Bu kesmalar orasidagi α chiziqli o‘tkir burchak izlangan burchak bo‘ladi.

7-masala. AB ($A'B'$, $A''B''$) va CD ($C'D'$, $C''D''$) uchrashmas to‘g‘ri chiziq kesmalari orasidagi masofa aniqlansin (5.37-rasm).

Yechish. Bunda CD kesmaga parallel qilib yangi V_1 frontal proyeksiyalar tekisligi o‘tkaziladi. Bu tekislikda CD va AB kesmalarning yangi frontal proyeksiyalari $C''_1D''_1$ va $A''_1B''_1$ yasaladi. So‘ngra $C''_1D''_1$ kesmaga



5.36-rasm.

perpendikulyar qilib H_1 tekislik o'tkaziladi. Bu tekislikda $C''_1D''_1$ va $A''_1B''_1$ larning yangi gorizontal proyeksiyalari topiladi. Bunda CD kesma $C'_1 \equiv D'_1$ nuqta ko'rinishida proyeksiyalanadi. Bu nuqtadan A'_1, B'_1 kesmaga tushirilgan E'_1, F'_1 kesmaning uzunligi CD va AB lar orasidagi masofa bo'ladi. Teskari proyeksiyalash bilan E va F nuqtalarning E', E'' va F', F'' proyeksiyalari yasalgan.

Yuqoridagi masalani, birinchidan, V_1 tekislikni AB kesmaga parallel va H_1 tekislikni uning yangi proyeksiyasiga perpendikulyar qilib yechsa, ikkinchidan, AB yoki CD kesmalardan biriga parallel qilib avval H tekislikni, so'ngra ularning proyeksiyalaridan biriga perpendikulyar qilib V ni almashtirsa ham bo'ladi.

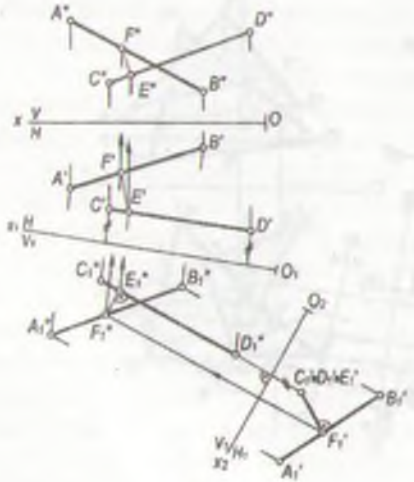
8-masala. Berilgan A (A', A'') nuqtadan BC ($B'C'$, $B''C''$) kesmagacha bo'lgan masofa aniqlansin (5.38-rasm).

Yechish. Buning uchun V tekislikni BC kesmaga parallel bo'lgan V_1 tekislik bilan almashtiramiz, ya'ni $V_1 \| B'C'$ sharti bajarilsin. BC kesma va A nuqtaning V_1 tekislikdagi yangi $B''_1C''_1$ va A''_1 frontal proyeksiyalari hosil qilinadi. So'ngra H tekislik H_1 tekislik bilan almashtiriladi. Bunda $H_1 \perp B''_1C''_1$ bo'lishi kerak.

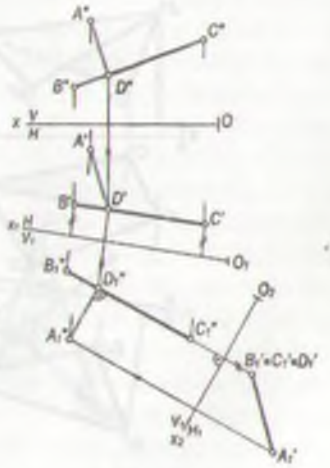
H_1 tekislikda BC va A larning yangi gorizontal proyeksiyalari yasaladi. Hosil bo'lgan A'_1 va $B'_1 \equiv C'_1$ nuqtalar orasidagi masofa A nuqtadan BC kesmagacha bo'lgan masofa bo'ladi. Bu masalani H ni $H_1 \| B''C''$, so'ngra V ni $V_1 \| B'_1C'_1$ qilib almashtirish yo'li bilan ham yechish mumkin.

9-masala. ΔCDE ($\Delta C'D'E'$, $\Delta C''D''E''$) uchburchakning proyeksiyalariga asosan uning haqiqiy kattaligi aniqlansin (5.39-rasm).

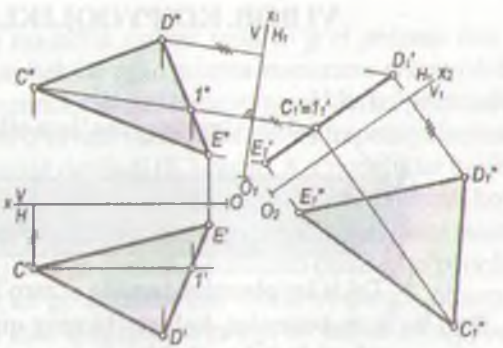
Yechish. Bunda H tekislikni H_1 tekislikka shunday almashtiramizki, $H_1 \perp \Delta CDE$ bo'lsin. Buning uchun $H_1 \perp C''1''$ (uchburchak frontalining frontal proyeksiyasi) bo'lsa, kifoya qiladi. Uchburchakning uchlarini H_1 tekislikka



5.37-rasm.



5.38-rasm.



5.39-rasm.

proyeksiyalab, yangi $C'_1D'_1E'_1$ gorizontal proyeksiya to'g'ri chiziq ko'rinishida hosil qilinadi. So'ngra V tekislikni V_1 tekislik bilan shunday almashtiramizki, $V_1 \| C'_1D'_1E'_1$ bo'lsin. C, D, E nuqtalarning V_1 tekislikdagi yangi $C''_1D''_1E''_1$ frontal proyeksiyalari yasaladi. Bu nuqtalarni o'zaro tutashtirib, $\Delta C''D''E'' = \Delta CDE$ haqiqiy kattaligini hosil qilamiz. Bu masalani uchburchakning gorizontalini o'tkazib va unga avval V_1 ni perpendikulyar qilib tekislik o'tkazish hamda hosil bo'lgan kesmaga (uchburchakning proyeksiyasi) H_1 tekislikni parallel qilib o'tkazish yo'li bilan ham yechish mumkin.

Nazorat savollari

1. Proyeksiyalarni qayta qurishning qanday usullari mavjud?
2. Tekis-parallel harakatlantirish usulining ma'nosi nimadan iborat?
3. Aylantirish usulining ma'nosi nimadan iborat?
4. Gorizontal (yoki frontal) proyeksiyalovchi o'q atrofida aylanayotgan nuqtaning proyeksiyalari qanday harakatlanadi?
5. Nuqtaning aylanish radiusi, markazi va aylanish harakat tekisliklari deganda nimalar tushuniladi?
6. Kesmaning haqiqiy uzunligini yasash uchun uni qanday vaziyatga kelguncha aylantirish kerak?
7. Uchburchakni gorizontal (yoki frontal) proyeksiyalovchi holga keltirish uchun uni qaysi o'q atrofida aylantirish kerak?
8. Izlari bilan berilgan tekislikni aylantirib, frontal proyeksiyalovchi holga keltirish uchun nima qilish kerak?
9. Tekislikni izlari atrofida aylantirishdan ko'zlangan maqsad nima?
10. Proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usulining mohiyati nimadan iborat?
11. Umumiy vaziyatdagi uchburchakning haqiqiy kattaligini yasash uchun proyeksiyalar tekisliklari ketma-ket qanday vaziyatlarda almashtiriladi?



VI BOB. KO'PYOQLIKLAR

6.1-§. Umumiy ma'lumotlar

Ta'rif. Hamma tomonidan tekis ko'pburchaklar bilan chegaralangan geometrik shakl ko'pyoqlik deyiladi.



6.1-rasm.

Tekis ko'pburchaklarning o'zaro kesishuvidan hosil bo'lgan kesmalar, ko'pyoqlikning qirralari va qirralar orasidagi ko'pburchaklar uning *yoqlari* deb ataladi. Qirralarning o'zaro kesishuv nuqtalari ko'pyoqlikning *uchlari* deb yuritiladi (6.1, 6.2-rasmlar).

Ko'pyoqlikning barcha yon yoqlarining yig'indisi uning *sirti* deb ataladi. Ko'pyoqlikning uchlari va qirralari uning *aniqlovchilari* hisoblanadi (6.1-rasm). Ko'pyoqlikning bir yon yog'ida yotmagan ikki uchini birlashtiruvchi kesma uning *diagonali* deb ataladi (6.2-rasm). Ko'pyoqlik aniqlovchilari uning istalgan yon yog'iga (tekislikka) nisbatan bir tomonda joylashsa, *qabariq ko'pyoqlik*, aksincha bo'lsa, *botiq ko'pyoqlik* deb yuritiladi. Ko'pyoqliqlarning bir necha turlari mavjud bo'lib, ulardan quyidagilarni ko'rib chiqamiz:

Piramida

Ta'rif. Yoqlaridan biri tekis ko'pburchak bo'lib, qolgan yoqlari esa umumiy uchga ega bo'lgan uchburchaklardan tuzilgan ko'pyoqlik piramida deyiladi.

Ko'pburchak piramidaning *asosi* va uchburchaklar esa uning *yon yoqlari* deb ataladi. Yon yoqlarining umumiy uchi piramidaning ham uchi hisoblanadi va u asos tekisligida yotmaydi. Asosi muntazam ko'pburchakli piramida *muntazam piramida* deb ataladi. Piramida balandligi asosining markazidan o'tib, unga perpendikulyar bo'lsa, *to'g'ri piramida*, perpendikulyar bo'lmasa, *og'ma piramida* deb yuritiladi (6.1-rasm).

Prizma

Ta'rif. Yon yoqlari to'rtburchaklardan va asosi ko'pburchakdan iborat bo'lgan ko'pyoqlik prizma deyiladi.

Yon yoqlarining kesishuv chiziqlari – prizma *qirralari*, qirralar orasidagi ko'pburchaklar uning *yoqlari* deyiladi (6.2-rasm). Prizmaning barcha qirralarini kesuvchi parallel tekisliklarda hosil bo'lgan ko'pburchaklar prizmaning *asoslari* deb ataladi. Yon qirralari asosiga nisbatan og'ma yoki perpendikulyar bo'lsa,

prizma ham mos ravishda *og'ma* yoki *to'g'ri prizma* deb ataladi. Asosi muntazam ko'pburchak bo'lgan prizma *muntazam prizma* deb yuritiladi.

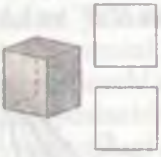
Asoslari o'zaro parallel tekisliklarda yotgan ikkita ko'pburchakdan, yon yoqlari esa asos uchlaridan o'tuvchi uchburchaklar va trapetsiyalardan iborat bo'lgan ko'pyoqlik *prizmatoid* deyiladi (6.3-rasm). Ko'pyoqliklar bir jinsli qabariq, bir jinsli botiq, yulduzsimon hamda ularning birlashishidan hosil bo'lgan murakkab ko'pyoqliklarga bo'linadi. Bir jinsli qabariq ko'pyoqliklar muntazam va yarim muntazam ko'pyoqliklarga ajraladi. Muntazam qabariq ko'pyoqliklar o'zaro teng bir xil muntazam ko'pburchaklardan iborat yoqlarga, o'zaro teng ikkiyoqli burchaklarga va o'zaro teng qirralarga ega bo'ladi. Bu ko'pyoqliklar asosan 5 xil bo'lib, **Platon jismlari** deb yuritiladi (6.1-jadval).

Ko'pyoqliklarning muhim xossalaridan birini Eyler quyidagicha bayon etgan:

Eyler teoremasi. Har qanday qavariq ko'pyoqlikda yoqlar bilan uchlar sonining yig'indisidan qirralar sonining ayirmasi ikkiga teng bo'ladi, ya'ni Yo+U-Q=2.

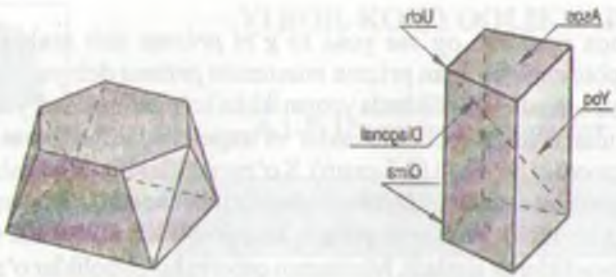
6.1-jadval

Muntazam ko'pyoqliklar

Tetraedr (6.4-rasm)	Kub – geksaedr (6.5-rasm)	Oktaedr (6.6-rasm)
		
Dodekaedr (6.7-rasm)	**Ikosaedr (6.8-rasm)**	**Kesik oktaedr (6.9-rasm)**
		
	Yo + U - Q = 2 Yo – yoqlar soni U – uchlar soni Q – qirralar soni	

Yon yoqlari turli shakldagi muntazam ko'pburchaklardan iborat bo'lgan ko'pyoqlik *yarim muntazam ko'pyoqlik* deb yuritiladi. Bu ko'pyoqliklar 18 xil bo'lib, ular **Arximed jismlari** deb yuritiladi. 6.9-rasmda Arximed jismlaridan biri bo'lgan kesik oktaedrning yaqqol tasviri keltirilgan.

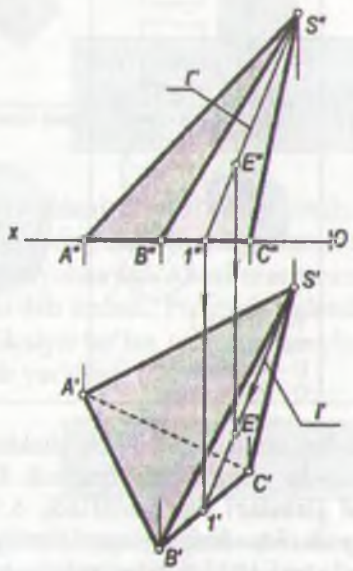
Ko'pyoqliklar texnikada turli ko'rinishdagi mashina detallari, ko'pyoqli linzalar yasashda hamda arxitektura va qurilish ishlarida keng ishlatiladi. Masalan, devor va poydevor bloklari, tom, ko'priklarning temir-beton panellari va inshootning boshqa qismlari ko'pyoqliklardan iborat bo'ladi.



6.2-rasm. 6.3-rasm.

Ko‘pyoqliklardan yana «*geodezik*» gumbazlar yasashda, keng oraliqli binolarni ustunsiz yopishda keng foydalaniladi. Qadimiy binolarda esa ular gumbaz, gumbaz osti, bino gumbazidan prizmatik qismiga o‘tish joylarida bezak — ornament sifatida ham qo‘llanilgan.

Ko‘pyoqlikning tekis chizmada tasvirlanishi. Ko‘pyoqlik chizmada o‘z aniqlovchilarining to‘g‘ri burchakli proyeksiyalari orqali beriladi. 6.10-rasmda *SABC* piramidaning tekis chizmasi o‘z aniqlovchilari: *S(S'S")* uchi, asosi *ABC (A'B'C', A"B"C")* uchburchakning proyeksiyalari orqali tasvirlangan. *SA*, *SB*, ... qirralarning proyeksiyalari *S,A,B,C* uchlarining bir nomli proyeksiyalarini birlashtiruvchi *S'A'* va *S"A"*, *S'B'* va *S"B"* va h.k. kesmalar bo‘ladi.



6.10-rasm.

Yoqlarining proyeksiyalari esa qirralarning proyeksiyalari bilan chegaralangan $S'A'B'$ va $S''A''B''$, $S'A'C'$ va $S''A''C''$,... tekis shakllardan iborat bo'ladi. Ko'pyoqlik sirtidagi ixtiyoriy $E(E'')$ nuqtaning yetishmagan E' proyeksiyasi yon tekislikka tegishli ixtiyoriy $l(l', l'')$ to'g'ri chiziq vositasida yasaladi (6.10-rasm).

6.2-§. Ko'pyoqliklarning tekislik bilan kesishishi

Ko'pyoqliklar tekislik bilan kesilganda kesimda ko'pburchak hosil bo'ladi. Hosil bo'lgan ko'pburchakning uchlari ko'pyoqlik qirralarining kesuvchi tekislik bilan kesishgan nuqtalari bo'ladi.

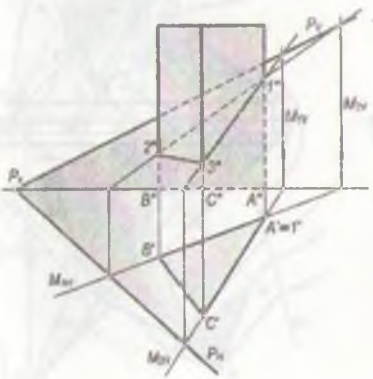
Kesimning tomonlari esa ko'pyoqlik yoqlarining kesuvchi tekislik bilan kesishish chiziqlari bo'ladi. Ko'pyoqlikning tekislik bilan kesilgan qismini quyidagi usullar bilan yasash mumkin:

- Kesim tomonlarini, ya'ni ko'pyoqlik yoqlarining kesuvchi tekislik bilan kesishish chizig'ini yasash usuli.
- Kesim uchlarini, ya'ni ko'pyoqlik qirralarining kesuvchi tekislik bilan kesishgan nuqtasini yasash usuli.
- Aralash usul, bunda yuqoridagi ikkala usuldan foydalaniladi.

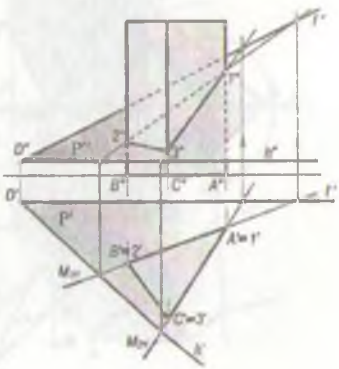
Bu usullardan qaysi birini qo'llash ko'pyoqlik va tekislikning tekis chizmada berilishiga qarab tanlanadi.

6.2.1. Kesim tomonlarini yasash usuli. Bu usul ikki tekislikning kesishish chizig'ini yasash algoritmini bir necha marta takrorlash asosida bajariladi. Bu usuldan proyeksiyalovchi vaziyatdagi prizmaning tekislik bilan kesishish chizig'ini yasashda foydalanish juda qulaydir. 6.11-rasmda uchyoqli to'g'ri prizmaning umumiy vaziyatdagi $P(P_H, P_V)$ tekislik bilan kesishuvidan hosil bo'lgan kesimining proyeksiyalari yasalgan.

Bunda prizmaning yon yoqlari orqali $M_1(M_{1H}, M_{1V})$ va $M_2(M_{2H}, M_{2V})$ gorizontal proyeksiyalovchi tekisliklar o'tkazilgan. Bu tekisliklarni berilgan P tekislik bilan



6.11-rasm.



6.12-rasm.

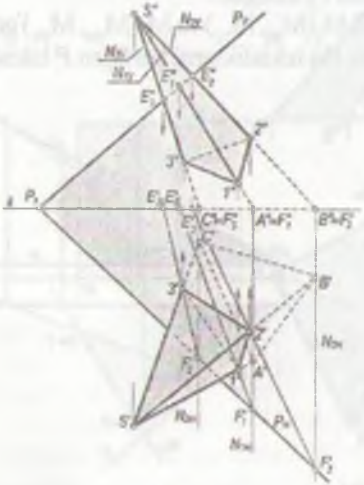
kesishgan chiziqlari yordamida kesim yuzasining 12(1′2′, 1″,2″), 13(1′,3′, 1″3″) tomonlari aniqlangan.

Aynan shu prizmaning o‘zaro kesishuvchi h (h′, h″) va f (f′, f″) to‘g‘ri chiziqlar orqali berilgan P (P′, P″) tekislik bilan kesishuv chizig‘ini yasash 6.12-rasmda ko‘rsatilgan. Bunda kesishish chiziqlari prizma yoqlari orqali o‘tkazilgan M_1 (M_{1H}) va M_2 (M_{2H}) gorizontal proyeksiyalovchi tekisliklar vositasida kesim yuzasining Δ123 (1′2′3′, 1″2″3″) proyeksiyalari yasalgan.

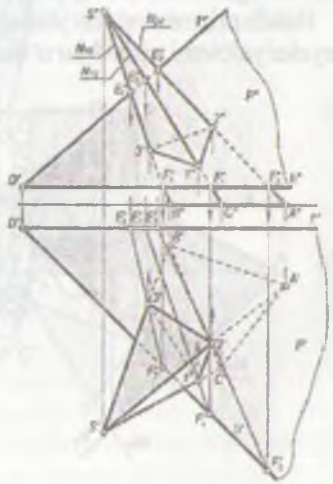
6.2.2. Kesim uchlarini yasash usuli. Bu usul 1-usulga nisbatan umumiyroq hisoblanib, to‘g‘ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasini yasash algoritmi asosida bajariladi. 6.13 va 6.14-rasmlarda asosi H proyeksiyalar tekisligida bo‘lgan SABC (S′A′B′C′, S″A″B″C″) piramidaning izlari bilan berilgan P (P_V,P_H) tekislik va kesishuvchi chiziqlar (h va f) proyeksiyalari orqali berilgan umumiy vaziyatdagi P (P′, P″) tekislik bilan kesishuvidan hosil bo‘lgan kesimini yasash ko‘rsatilgan.

Bunda kesim proyeksiyalari *Δ1′2′3′* va *Δ1″2″3″* ni yasash algoritmi quyidagicha bo‘ladi:

- *SA, SB, SC* qirralar orqali yordamchi N_1, N_2, N_3 frontal proyeksiyalovchi tekisliklar o‘tkaziladi;
- bu tekisliklarning P tekislik bilan kesishgan chiziqlari E_1F_1, E_2F_2, E_3F_3 ning proyeksiyalari yasaladi;
- kesishuv chiziqlari E_1F_1, E_2F_2, E_3F_3 bilan piramida qirralari *SA, SB, SC* ning mos ravishda kesishuv nuqtalari *1, 2, 3* larning proyeksiyalari aniqlanadi;
- hosil qilingan *1, 2, 3* nuqtalar o‘zaro birlashtirilib, kesim yuzasining proyeksiyalari *Δ1′2′3′* va *Δ1″2″3″* yasaladi.



6.13-rasm.

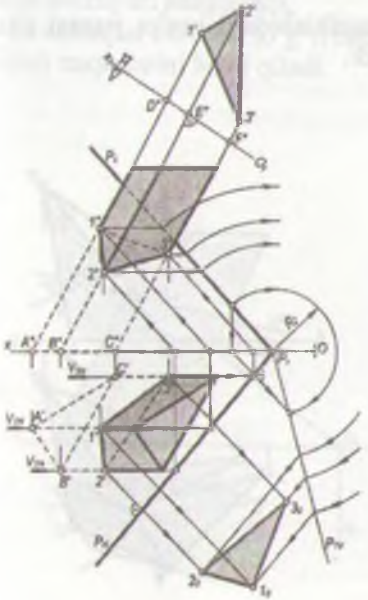


6.14-rasm.

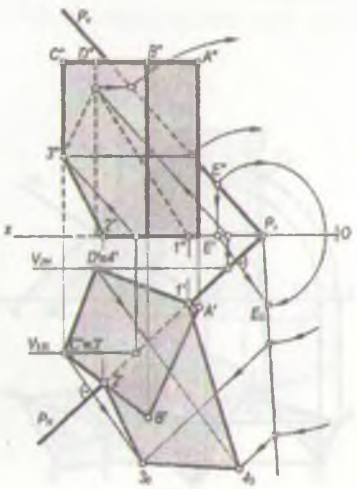
6.15-rasmda aynan shu usul bilan og'ma prizmaning umumiy holatdagi $P(P_1,P_H)$ tekislik bilan kesishish chizig'i proyeksiyalarini yasash prizma qirralari orqali V_1, V_2 va V_3 yordamchi frontal tekisliklar o'tkazish bilan ko'rsatilgan. Kesim yuzasi $\Delta 123$ ning haqiqiy kattaligi P ni P_H izi atrofida aylantirib, H ga jipslashtirish usuli bilan aniqlangan.

6.16-rasmda to'g'ri prizmaning umumiy vaziyatdagi P (P_V,P_H) tekislik bilan kesishish chizig'ining proyeksiyalarini yasash ko'rsatilgan. Kesimning 1 (1′, 1″) va 2 (2′, 2″) nuqtalari bevosita prizma asosi bilan P tekislikning P_H izi kesishgan nuqtalarida yotadi. C va D qirralar orqali o'tkazilgan yordamchi kesuvchi V_1 (V_{1H}), V_2 (V_{2H}) frontal tekisliklar vositasida 3,4 nuqtalar proyeksiyalari aniqlangan. Kesim yuzasining haqiqiy kattaligi P tekislikni uning P_H izi atrofida aylantirib, H ga jipslashtirish usulida yasalgan.

Agar ko'pyoqliklar proyeksiyalovchi tekisliklar bilan kesishsa, ularning kesim yuzasi proyeksiyalarini yasash yanada osonlashadi, chunki bunda kesim yuzasining bir proyeksiyasi proyeksiyalovchi tekislik izida bo'ladi. 6.17-rasmda og'ma piramidaning frontal proyeksiyalovchi $N(N_H,N_V)$ tekislik bilan kesishgan kesim yuzasi va uning haqiqiy kattaligini yasash ko'rsatilgan. 6.18-rasmda uchyoqli piramidani $N_1(N_{1V})$ va $N_1(N_{2V})$ frontal proyeksiyalovchi tekisliklar bilan kesib, kesimda hosil bo'lgan o'yiq qismining gorizontal proyeksiyasini yasash ko'rsatilgan. Kesim yuzasi proyeksiyalarini yasash yo'llarini chizmadan tushunib olish qiyin emas.



6.15-rasm.



6.16-rasm.

6.3-§. Ko‘pyoqlikning to‘g‘ri chiziq bilan kesishishi

To‘g‘ri chiziq qavariq ko‘pyoqlikning yoqlari bilan ikki nuqtada kesishadi. Bu nuqtalarning biri *kirish*, ikkinchisi *chiqish nuqtalari* deb yuritiladi. To‘g‘ri chiziq bilan ko‘pyoqlik sirtining kesishish nuqtalarini yasashda quyidagi usullardan foydalaniladi:

- To‘g‘ri chiziq orqali xususiy vaziyatdagi tekislik o‘tkazish usuli.
- To‘g‘ri chiziq orqali umumiy vaziyatdagi tekislik o‘tkazish usuli.

Quyida to‘g‘ri chiziq bilan ko‘pyoqlikning kesishish nuqtalarini yasashga oid bir necha misollarni ko‘rib chiqamiz.

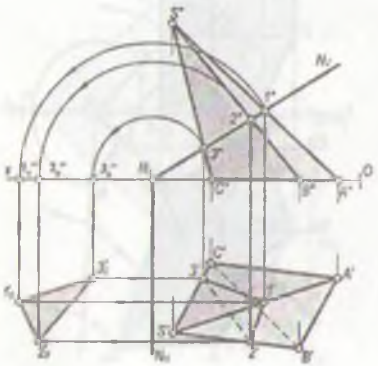
1-usul. To‘g‘ri chiziq bilan ko‘pyoqlik sirtining o‘zaro kesishish nuqtalarini xususiy vaziyatdagi tekislik vositasida yasash quyidagi yasash algoritmi asosida bajariladi:

- berilgan to‘g‘ri chiziq orqali xususiy vaziyatdagi tekislik o‘tkaziladi;
- xususiy vaziyatdagi tekislik bilan berilgan ko‘pyoqlikning o‘zaro kesishuvidagi kesim yuzasi chizig‘i aniqlanadi;
- kesim yuzasi chizig‘i bilan berilgan to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtalari belgilanadi.

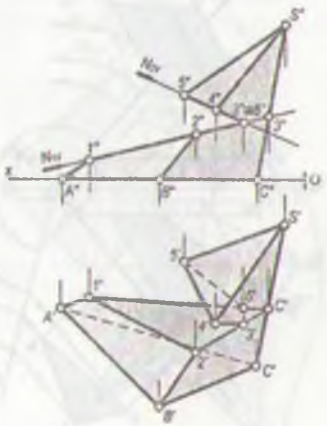
6.19-rasmda $l(l', l'')$ to‘g‘ri chiziqning uchyoqli prizma sirti bilan kesishish nuqtalarini yasash tasvirlangan.

Yasash algoritmi quyidagicha:

- l to‘g‘ri chiziq orqali frontal proyeksiyalovchi N (N_H, N_V) tekislik o‘tkaziladi: $l'' \in N_V$ va $N_H \perp Ox$;
- N tekislik bilan prizmaning kesishishidagi kesim yuzasi chizig‘i proyeksiyalari $1'2'3'$ va $1''2''3''$ yasaladi.



6.17-rasm.



6.18-rasm.

Kesim yuzasi chizig'i Δ123 bilan l to'g'ri chiziqning uchrashish nuqtalari E_1 va E_2 belgilanadi: $12 \cap l = E_1$ va $23 \cap l = E_2$. Bunda, avvalo, $1'2'3' \cap l' = E'_1$ va E'_2 lar aniqlanib, so'ngra proyeksion bog'lanish chizig'i orqali E''_1 va E''_2 lar holati aniqlanadi.

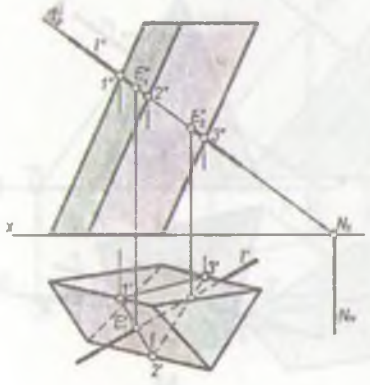
Agar ko'pyoqlikning yon yoqlari proyeksiyalovchi tekisliklar bo'lsa, to'g'ri chiziq bilan bunday sirtning kesishish nuqtalarini yasash juda soddalashadi.

6.20-rasmda to'rtyoqli to'g'ri prizma sirti bilan l (l', l'') to'g'ri chiziqning o'zaro kesishish E_1 (E'_1, E''_1), E_2 (E'_2, E''_2) nuqtalarini yasash tasvirlangan.

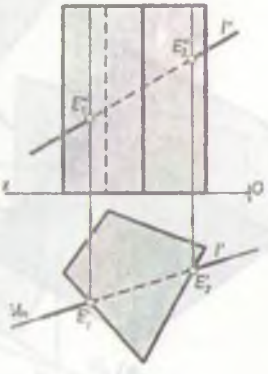
Bunda prizmaning yon yoqlari proyeksiyalovchi tekisliklardan iborat bo'lgani uchun l orqali $M(M_{II})$ gorizontal proyeksiyalovchi tekislik o'tkaziladi, kesishuv nuqtalari proyeksiyalari E'_1 va E'_2 belgilanadi. So'ngra ularning E''_1 va E''_2 proyeksiyalari yasaladi.

2-usul. To'g'ri chiziq bilan ko'pyoqlik sirtining o'zaro kesishish nuqtalarini umumiy vaziyatdagi yordamchi tekislik vositasida yasashda umumiy vaziyatdagi tekislik o'tkazish uchun markaziy yoki qiyshiq burchakli parallel proyeksiyalash usullarining biridan foydalaniladi. Bunda to'g'ri chiziqning ko'pyoqlik sirtiga kirish va chiqish nuqtalarini yasash algoritmi quyidagicha:

- berilgan to'g'ri chiziq orqali sirtning asosini kesuvchi umumiy vaziyatdagi yordamchi tekislik o'tkaziladi;
- yordamchi tekislik bilan sirt asosi tomonlarining kesishish nuqtalari belgilanadi;
- bu nuqtalar orqali yordamchi tekislik bilan sirt yon yoqlarining kesishish chiziqlari aniqlanadi;
- bu chiziqlar berilgan to'g'ri chiziq bilan kesishib, sirtga tegishli kirish va chiqish nuqtalarini hosil qiladi.



6.19-rasm.



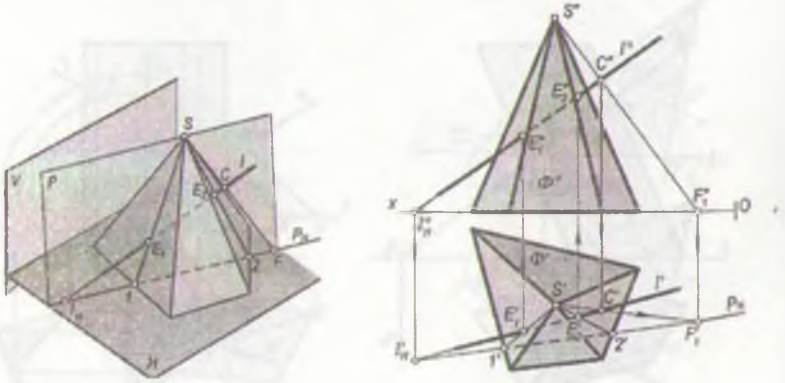
6.20-rasm.

6.21-a, b rasmda l (l', l'') to'g'ri chiziq bilan Φ (Φ', Φ'') piramidaning o'zaro kesishish nuqtasini yasash tasvirlangan. Bunda piramidaning S uchi va l to'g'ri chiziq orqali o'tuvchi umumiy vaziyatdagi P tekislikning P_H izini o'tkazish uchun:

- berilgan l to'g'ri chiziqning gorizontal l'_H izi yasaladi;
- piramidaning S uchidan to'g'ri chiziqni ixtiyoriy C (C', C'') nuqtada kesib o'tuvchi $SC(S'C', S''C'')$ to'g'ri chiziq o'tkazib, uning ham gorizontal F'_1 izi yasaladi;
- l'_H va F'_1 izlar orqali piramida asosini kesuvchi umumiy vaziyatdagi P tekislikning gorizontal P_H izini o'tkazamiz. P_H bilan piramida asosining kesishish nuqtalari $1'$ va $2'$ belgilanadi;
- S' nuqtani $1'$ va $2'$ nuqtalar bilan birlashtirib, P tekislik bilan piramidaning kesishish chizig'i $\Delta S'1'2'$ yasaladi;
- $\Delta S'1'2'$ bilan l to'g'ri chiziqning o'zaro uchrashish E'_1 va E'_2 nuqtalari belgilanadi. Bu nuqtalardan foydalanib, ularning frontal E''_1 va E''_2 proyeksiyalari aniqlanadi. Hosil bo'lgan E_1 va E_2 nuqtalar l to'g'ri chiziq bilan Φ piramida sirtining kesishishidagi kirish va chiqish nuqtalari bo'ladi.

Yuqorida bayon etilgan usul *yordamchi markaziy proyeksiyalash usuli* deb ham ataladi. Bu usuldan to'g'ri chiziq bilan konus sirtining kesishish nuqtalarini yasashda ham foydalaniladi. Prizma yoki silindr sirtlari bilan to'g'ri chiziqning kesishuv nuqtalarini yasashda ham umumiy vaziyatdagi tekisliklardan foydalangan qulay. Bunda berilgan to'g'ri chiziq bilan ko'pyoqlik sirtining o'zaro kesishish nuqtalari berilgan to'g'ri chiziq orqali ko'pyoqlikning yon qirralariga parallel qilib o'tkazilgan umumiy vaziyatdagi tekislik vositasida aniqlanadi.

Proyeksiyalash yo'nalishi ko'pyoqlik qirralariga parallel bo'lgani uchun bu *qiyshiq burchakli yordamchi parallel proyeksiyalash usuli* deb ham ataladi.



a) b)

6.21-rasm.

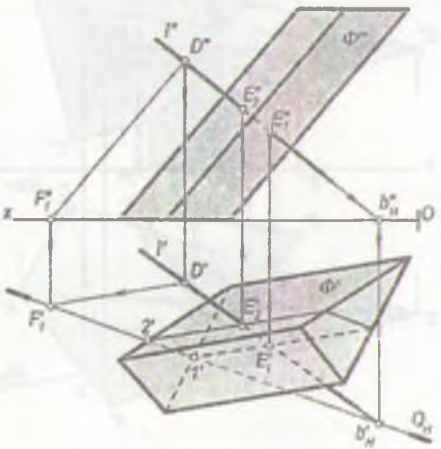
6.22-rasmda og‘ma vaziyatdagi Φ (Φ′, Φ″) prizma sirti bilan b (b', b'') to‘g‘ri chiziqning o‘zaro kesishish nuqtalarini yasash tasvirlangan. Bu misolni chizmada yechish algoritmi quyidagicha:

- berilgan b to‘g‘ri chiziqning gorizontal b_H (b'_H, b''_H) izi yasaladi;
- b to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy D (D′, D″) nuqtasidan prizmaning yon qirralariga parallel qilib to‘g‘ri chiziq o‘tkaziladi va uning ham gorizontal F_1 (F'_1, F''_1) izi aniqlanadi;
- b'_h va F'_1 izlar orqali prizmaning qirralariga parallel kesuvchi umumiy vaziyatdagi Q tekislikning Q_H izi o‘tkaziladi. Bu tekislik prizmaning asosini 1′ va 2′ nuqtalarda kesadi. Ushbu nuqtalardan prizma qirralariga parallel o‘tkazilgan kesim chiziqlari l' to‘g‘ri chiziqni E'_1 va E'_2 nuqtalarida kesadi. Bu nuqtalarning frontal proyeksiyalari E''_1 va E''_2 nuqtalar l'' to‘g‘ri chiziqda aniqlanadi. Natijada to‘g‘ri chiziqning prizma sirti bilan kesishishidagi kirish va chiqish nuqtalari hosil bo‘ladi.

6.4-§. Ko‘pyoqliklarning o‘zaro kesishishi

Ko‘pyoqliklar fazoda bir-biriga nisbatan o‘zaro joylashuviga qarab to‘la, qisman kesishgan yoki butunlay kesishmagan vaziyatlarda uchraydi. Ko‘pyoqliklar o‘zaro kesishganda bir yoki bir necha yopiq fazoviy yoki tekis siniq chiziqlar hosil bo‘ladi. Bu siniq chiziq uchlari ko‘pyoqlikning to‘g‘ri chiziq bilan kesishish nuqtalarini yasash usuli yordamida aniqlanadi. Agar kesishuvchi ko‘pyoqliklardan birini Φ va ikkinchisini Ω deb belgilasak, ularning kesishgan chizig‘ini yasash quyidagi algoritm bilan bajariladi:

- Φ ko‘pyoqlik qirralarining Ω ko‘pyoqlik sirti yoqlari bilan kesishish nuqtalari yoki Ω ko‘pyoqlik qirralarining Φ ko‘pyoqlik yoqlari bilan kesishish nuqtalari aniqlanadi;



6.22-rasm.

• Φ va Ω ko'pyoqliklar yon yoq tekisliklarining o'zaro kesishish chiziqlari yasaladi.

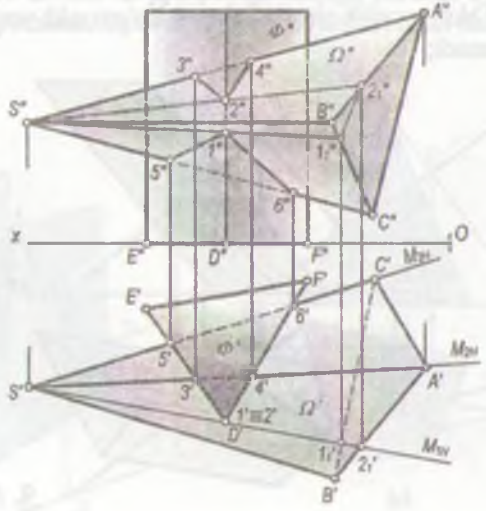
Hosil bo'lgan kesishish nuqtalari yoki chiziqlar tegishli tartibda birlashtirilsa, berilgan ko'pyoqliklarning kesishish chizig'I hosil bo'ladi. Ko'pyoqliklarning o'zaro kesishish chiziqlarini yasashda, avvalo, ularning kesishishida qatnashmaydigan qirralari aniqlanadi; so'ngra ko'pyoqliklarning ko'rinar-ko'rinmas qirralari aniqlanib, ularning ko'rinadigan qismlari asosiy tutash chiziqlarda yurgizib chiqiladi.

6.23-rasmda tasvirlangan prizma va piramida sirtlarining o'zaro kesishish chizig'ini yasash algoritmi quyidagicha bo'ladi:

• prizma qirralarining piramida sirti bilan kesishgan nuqtalari yasalgan. Rasmdan ko'rinib turibdiki, prizmaning faqat oldingi D qirrasigina piramida sirtini *1* va *2* nuqtalarda kesib o'tgan. Bu nuqtalar D nuqta orqali o'tgan $M_1(M_{1H})$ gorizontal proyeksiyalovchi tekislik yordamida yasalgan;

• piramida qirralarining prizma sirti bilan kesishgan *3,4,5,6* nuqtalari yasalgan. Piramidaning faqat *SA* va *SC* qirralari prizma bilan kesishadi. *SA* va *SC* qirralarining prizma bilan kesishgan *3(3', 3'')*, *4(4', 4'')*, *5(5', 5'')*, *6(6', 6'')* nuqtalari, 6.20-rasmda ko'rsatilganidek, $M_2(M_{2H})$ va $M_3(_{3H})$ gorizontal proyeksiyalovchi tekisliklar yordamida topilgan;

• aniqlangan 1'', 2'', 3'', 4'', 5'', 6'' nuqtalarning rasmda ko'rsatilganidek ko'rinar-ko'rinmas qismlari e'tiborga olinib, tartib bilan birlashtirib chiqilsa, ikki sirtning o'zaro kesishish siniq chizig'ining frontal proyeksiyasi hosil bo'ladi.



6.23-rasm.

Nazorat savollari

1. Ko‘pyoqlik deb nimaga aytiladi?
2. Ko‘pyoqlikning aniqlovchilariga nimalar kiradi?
3. Qanday ko‘pyoqlik piramida deb ataladi?
4. Qanday ko‘pyoqlik prizma deb ataladi?
5. Qanday ko‘pyoqlik to‘g‘ri ko‘pyoqlik deb ataladi?
6. Qanday ko‘pyoqlik muntazam ko‘pyoqlik deb yuritiladi?
7. Eyler teoremasida ko‘pyoqlikning qaysi xossalari keltirilgan?
8. Tekislik bilan ko‘pyoqlikning kesishishidagi kesim yuzasini yasashda qanday usullardan foydalaniladi?
9. To‘g‘ri chiziq bilan ko‘pyoqlikning kesishish nuqtalarini yasashda qanday usullardan foydalaniladi?
10. Ikki ko‘pyoqlikning o‘zaro kesishish chizig‘ini yasashda qanday usullardan foydalaniladi?



VII BOB. EGRI CHIZIQLAR

7.1-§. Umumiy ma'lumotlar

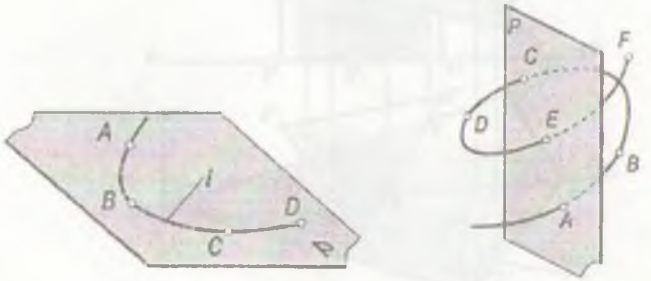
Chizma geometriyada egri chiziqlarning geometrik va mexanik xususiyatlaridan grafik ravishda amaliy foydalanish e'tiborga olinib, ularga oddiy kinematik ta'rif beriladi. Shuning uchun egri chiziq fazoda yoki tekislikda ma'lum yo'nalishda uzluksiz harakatlanuvchi biror nuqtaning izi sifatida qabul qilinadi.

Egri chiziqlar *tekis* (7.1-a rasm) va *fazoviy* (7.1-b rasm) *egri chiziqlarga* bo'linadi.

Egri chiziqlar qonuniy va qonunsiz egri chiziqlarga bo'linadi. Egri chiziqni tashkil qiluvchi nuqtalar to'plami ma'lum biror qonunga bo'ysunsa, u *qonuniy*, aksincha, nuqtalar to'plami hech qanday qonunga asoslanmagan bo'lsa, bunday egri chiziq *qonunsiz egri chiziq* deyiladi. Qonuniy egri chiziqlar dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamalariga qarab algebraik va transsendent egri chiziqlarga bo'linadi. Tenglamasi algebraik funksiya orqali ifodalangan egri chiziq *algebraik*, transsendent funksiya bilan ifodalangan egri chiziq esa *transsendent egri chiziq* deyiladi.

Algebraik egri chiziqlar tartib va sinf tushunchalari bilan xarakterlanadi. Egri chiziqlarning tartibi uni ifodalovchi tenglamaning darajasiga teng bo'ladi.

Grafik jihatdan tekis egri chiziqlarning tartibi uning to'g'ri chiziq bilan, fazoviy egri chiziqning tartibi esa uning biror tekislik bilan eng ko'p kesishish nuqtalari soni orqali aniqlanadi.



7.1-rasm.

Tekis egri chiziqning sinfi unga shu tekislikning ixtiyoriy nuqtasidan o'tkazilgan urinmalar soni bilan, fazoviy egri chiziq sinfi unga biror to'g'ri chiziq orqali o'tkazilgan urinma tekisliklar soni bilan aniqlanadi.

Egri chiziqning tartibi va sinfi har xil bo'ladi. Faqat ikkinchi tartibli egriliklarning tartibi va sinfi bir xil bo'lib, ikkiga teng bo'ladi.

7.2-§. Tekis egri chiziqlar. Ularga urinma va normallar o'tkazish

Ta'rif. Hamma nuqtalari bitta tekislikda yotgan egri chiziq tekis egri chiziq deyiladi.

Tekis egri chiziqlar analitik va grafik ko'rinishlarda berilishi mumkin. Analitik ko'rinishda ular quyidagi hollar bilan beriladi:

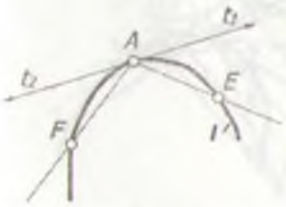
- dekart koordinatalar sistemasida $f(x,y)=0$ ko'phad bilan;
- qutb koordinatalar sistemasida $r=f(\varphi)$ bilan;
- parametrik ko'rinishda $x=x(t)$ va $y=y(t)$ bilan.

Egri chiziqlar grafik ko'rinishda berilishining turli usullari mavjud.

Tekislikka tegishli biror nuqtaning uzluksiz harakati natijasida tekis egri chiziq hosil bo'ladi. Tekis egri chiziqning har bir nuqtasidan unga bitta urinma va bitta normal o'tkazish mumkin.

7.2-rasmda berilgan *l* tekis egri chizig'iga uning biror A nuqtasida urinma va normal o'tkazish ko'rsatilgan. Buning uchun A nuqta orqali egri chiziqni kesuvchi AE va AF to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz. E nuqtani A nuqtaga egri chiziq bo'ylab yaqinlashtira boshlaymiz. Natijada AE kesuvchi A nuqta atrofida burila boshlaydi. E nuqta A nuqta bilan ustma-ust tushganda AE kesuvchi t_1 urinmani hosil qiladi. U *l* egri chiziqning berilgan nuqtasida o'tkazilgan *yarim urinma* deyiladi. F nuqtani ham egri chiziq ustida harakatlantirib, A nuqta bilan ustma-ust tushiramiz. AF kesuvchi t_2 yarim urinmani hosil qiladi. Qarama-qarshi yo'nalgan t_1 va t_2 yarim urinmalar hosil qilgan to'g'ri chiziq egri chiziqqa berilgan nuqtada o'tkazilgan *urinma* deyiladi. Shunday nuqtalardan tashkil topgan egri chiziq *ravon egri chiziq* deyiladi.

Egri chiziqning A nuqtadagi t urinmaga o'tkazilgan perpendikulyar *n* to'g'ri chiziq uning *normali* deb ataladi. Ba'zan yarim urinmalar ustma-ust tushmasdan o'zaro kesishishi mumkin. Bunday nuqtalar *sinish nuqtasi* deyiladi (7.3-rasm). Amaliyotda egri chiziqlarga urinma va normal o'tkazish masalalari ko'p uchraydi, shuning uchun urinma va normal o'tkazishning ba'zi bir grafik usullarini ko'rib chiqamiz.



7.2-rasm.

7.2.1. Egri chiziqqa undan tashqari olingan nuqta orqali urinma o'tkazish. Biror *l* egri chiziq va undan tashqarida olingan A nuqta berilgan (7.4-

Bunda φ burchak qancha katta bo'lsa, egri chiziq shuncha ko'p egilgan va aksincha, qanchalik kichik bo'lsa, egri chiziq shuncha kam egilgan bo'ladi. Egrilik qiymati egri chiziqning har bir nuqtasida har xil bo'ladi. Aylananing hamma nuqtasidagi egrilik bir xildir, to'g'ri chiziqda esa egrilik nolga teng. Har qanday egri chiziqning egriligi aylana yordamida aniqlanadi. Bu aylana egri chiziqdagi cheksiz yaqin uchta 1, 2, 3 nuqtalardan o'tadi. Uning radiusi *egrilik radiusi,* markazi esa *egrilik markazi* deyiladi. Egrilik radiusi R va egrilik miqdori *k* o'zaro teskari proporsionaldir: $k=1/R$, ya'ni egrilik radiusi R qancha katta bo'lsa, *k* egrilik shuncha kichik va aksincha, egrilik radiusi qancha kichik bo'lsa, *k* egrilik shuncha katta bo'ladi. Masalan, to'g'ri chiziqda egrilik radiusi cheksiz katta bo'lganligi tufayli egrilik nolga teng.

7.4-§. Evolyuta va evolventa

Biror *l* egri chiziqning hamma nuqtalari uchun egrilik markazlari yasalsa, ularning to'plami l_1 egri chiziqni hosil qiladi. Bu l_1 egri chiziq berilgan *l* egri chiziqning *evolyutasi* deb ataladi (7.10-rasm). *l* egri chiziq l_1 evolyutaga nisbatan *evolventa* deyiladi.

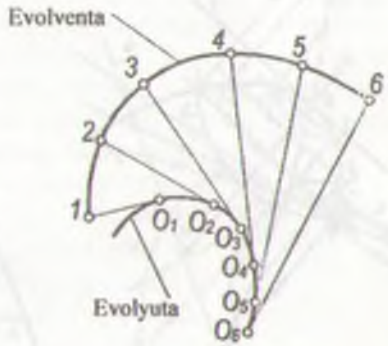
Evolyutaning urinmalari *l* evolventaning normallaridir. Evolyuta urinmalarida cheksiz ko'p evolventalar joylashgan bo'lishi mumkin. Shuning uchun egri chiziqning evolyutasi o'z evolventasini aniqlay olmaydi, lekin uning evolventasi o'z evolyutasini aniqlay oladi.

7.5-§. Tekis egri chiziq nuqtalarining klassifikatsiyasi

Tekis egri chiziqlar *monoton* va *ulama* chiziqlarga bo'linadi. *Monoton egri chiziq*ning qator nuqtalarida egrilik radiusi uzluksiz o'sib yoki kamayib boradi. Monoton egri chiziq yoylaridan tashkil topgan chiziq *ulama chiziq* deyiladi. Bu



7.9-rasm.



7.10-rasm.

yoylarning ulanish nuqtalari ulama chiziqning *uchlari*, ulanuvchi yoylarning o'zi esa ulama chiziqning *tomonlari* deb ataladi. Yoylarning ulanish xarakteriga qarab ulama chiziqning uchlari *oddiy* va *maxsus* nuqtalar bo'lishi mumkin. Egri chiziqning oddiy nuqtasida yarim urinmalar qarama-qarshi yo'nalishda bo'lib, bitta to'g'ri chiziq ustida yotadi va egrilik markazlari ustma-ust tushadi. Egri chiziqlarning maxsus nuqtalari quyidagilardan iborat:

Qo'sh nuqta. Yarim urinmalar qarama-qarshi yo'nalishga ega, normallar ustma-ust tushadi, egrilik markazlari esa har xil joylashadi (7.11-rasm).

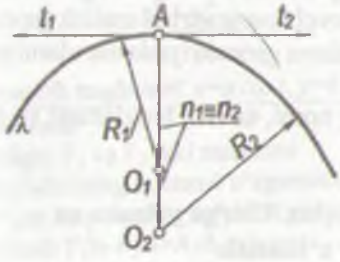
Egilib o'tish nuqtasi. Yarim urinmalar ham, normallar ham qarama-qarshi yo'nalishda bo'ladi (7.12-rasm).

Birinchi turdagi qaytish nuqtasi. Yarim urinmalar ustma-ust tushadi va bir xil yo'nalishda bo'ladi, normallar qarama-qarshi yo'nalishda bo'lib, bir chiziq ustida yotadi (7.13-rasm).

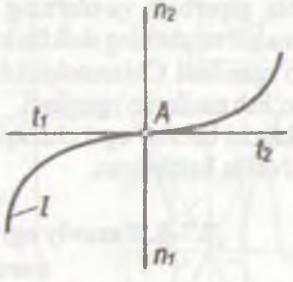
Ikkinchi turdagi qaytish nuqtasi. Yarim urinmalar va normallar juft-juft bo'lib, bir xil yo'nalishga ega bo'ladi (7.14-rasm).

Sinish nuqtasi. Yarim urinmalar va normallar har xil yo'nalishda bo'ladi (7.13-rasm).

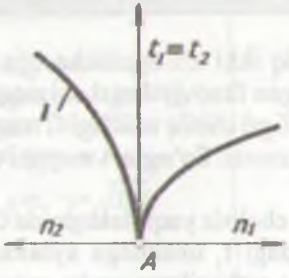
Tugun nuqta. Tugun nuqtada egri chiziq o'zini o'zi bir va bir necha marta kesib o'tadi (7.15-rasm).



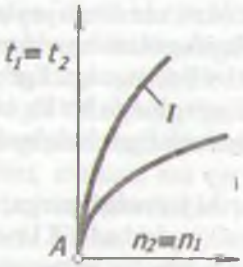
7.11-rasm.



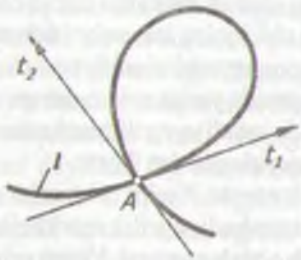
7.12-rasm.



7.13-rasm.



7.14-rasm.



7.15-rasm.

7.6-§. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar

Ta'rif. Ikkinchi darajali tenglamalar bilan ifodalanuvchi egri chiziqlar ikkinchi tartibli egri chiziqlar deyiladi.

Bunday chiziqlar to'g'ri chiziq bilan eng ko'pi ikki nuqtada kesishadi.Ikkinchi tartibli egri chiziqlar va ularning xususiyatlaridan mashinasozlikda, binokorlikda, umuman, muhandislik amaliyotining barcha tarmoqlarida keng foydalaniladi. Shu boisdan ham 2-tartibli egri chiziqlar mukammal o'rganilgan. Ularga aylana, ellips, parabola, giperbola va ularning xususiy hollari kiradi. Bu egri chiziqlarning tenglamalari va ularning shakllarini aniqlovchi parametrlari analitik geometriyada to'liq o'rganiladi. Chizmachilikda va chizma geometriyada esa ularni yasash va hosil bo'lish usullari o'rganiladi.

Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning nomi, ta'rifi, tenglamasi va shakllari 7.1-jadvalda keltirilgan.

7.7-§. Fazoviy egri chiziqlar. Ularga urinma va normallar o'tkazish

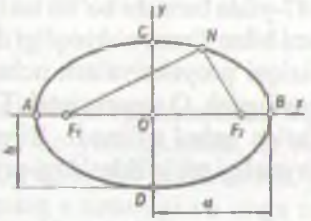
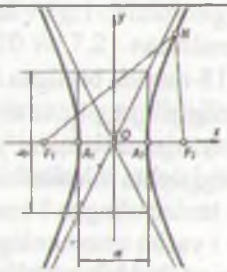
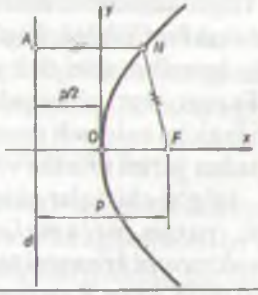
Ta'rif. Hamma nuqtalari bitta tekislikda yotmagan egri chiziq fazoviy egri chiziq deyiladi.

Fazoviy egri chiziq ikki xil egrilikka ega chiziq ham deb yuritiladi. 7.16-rasmda tasvirlangan fazoviy *l* egri chiziqqa uning C nuqtasida urinma o'tkazish ko'rsatilgan. Egri chiziq ustidagi C nuqta orqali CA va CB kesuvchi to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz. So'ngra A nuqtani egri chiziq bo'ylab C nuqtaga yaqinlashtira boramiz.

A nuqta C nuqtaga cheksiz yaqinlashganda CA kesuvchining limiti *l* egri chiziqning C nuqtasidagi t_1 urinmaga aylanadi. Bunda t_1 urinma *l* egri chiziqning C nuqtasida o'tkazilgan *yarim urinma* deyiladi. C nuqta orqali o'tuvchi t_2 yarim urinma ham CB kesuvchi orqali xuddi shunday yasaladi. U

o'zining limit vaziyatida t_1 yarim urinma bilan bitta *l* to'g'ri chiziqda yotadi (7.17-rasm). *l* fazoviy egri chiziqqa o'tkazilgan urinma orqali tekisliklar dastasi o'tadi. Egri chiziqning xarakterini aniqlash uchun shu tekisliklar dastasidan yopishma, to'g'rilovchi va ularga perpendikulyar bo'lgan normal deb ataluvchi tekisliklar muhim rol o'ynaydi.

7.1-jadval

Aylana Berilgan nuqtadan teng masofalarda joylashgan nuqtalarning to'plami aylana deyiladi. Kanonik tenglamasi: $x^2+y^2=R^2$ Parametrik tenglamasi: $x=R\cdot\cos t,\ y=R\cdot\sin t$	
Ellips Berilgan ikki F_1 va F_2 nuqtadan uzoqliklarining yig'indisi o'zgarmas miqdor bo'lgan nuqtalarning to'plami ellips deyiladi: $F_1N + F_2N = AB = const.$ Kanonik tenglamasi: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ Parametrik tenglamasi: $x=a\cos t,\ y=b\sin t$	
Giperbola Berilgan F_1 va F_2 ikki nuqtadan uzoqliklarining ayirmasi o'zgarmas miqdor bo'lgan nuqtalarning to'plami giperbola deyiladi: $F_1N-F_2N=A_1A_2=const.$ Kanonik tenglamasi: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ Parametrik tenglamasi: $x=a\sec t,\ y=b\,tg\,t$	
Parabola Berilgan nuqtadan va *d* to'g'ri chiziqdan teng masofalarda joylashgan nuqtalarning to'plami parabola deyiladi: FN=AN. Kanonik tenglamasi: $y^2=2px$ Parametrik tenglamasi: $x=t,\ y=\sqrt{2pt}$ yoki $y=t,\ x=t^2/2p$	

Egri chiziqning yopishma tekisligi quyidagicha yasaladi: berilgan *l* fazoviy egri chiziqda yotgan C nuqta orqali unga t_1, t_2 yarim urinmalar o'tkazilgan bo'lsin. 7.17-rasmda CA va CB kesuvchi to'g'ri chiziqlarni o'tkazib, t_1CA (Q_1) va t_2SB (Q_2) kesuvchi tekisliklarni hosil qilamiz. A va B nuqtalarni C nuqtaga yaqinlashtirganda Q_1 va Q_2 tekisliklar t_1 va t_2 yarim urinmalar atrofida aylanib va ustma-ust tushib, Q tekisligini hosil qiladi. Q tekislik *l* fazoviy egri chiziqqa uning berilgan S nuqtasida o'tkazilgan *yopishma tekislik* deyiladi.

Fazoviy egri chiziqning berilgan nuqtasida unga cheksiz ko'p normal o'tkazish mumkin. Normallar to'plami hosil qilgan N tekislik egri chiziqning berilgan nuqtasida o'tkazilgan *normal tekislik* deyiladi.

Normallar to'plamidagi chiziqlardan biri n_1 yopishma tekislik ustida yotadi ($n_1 \in Q$), boshqa biri n_2 esa unga perpendikulyar joylashgan ($n_2 \perp Q$) bo'ladi. Shulardan birinchisi n_1 – *bosh normal*, ikkinchisi n_2 – *binormal* deyiladi. Binormal n_2 va urinma t hosil qilgan T tekislik *to'g'rilovchi* (rostlovchi) *tekislik* deb ataladi.

O'zaro perpendikulyar N, Q, T tekisliklar uchyoqlikni tashkil qiladi. Bu 1847-yilda birinchi bo'lib taklif qilgan fransuz matematigi Jan Frederik Frene nomi bilan *Frene uchyoqligi* deb yuritiladi. Frene uchyoqligidan fazoviy egri chiziqni proyeksiyalash uchun tekisliklar sistemasi o'rnida foydalaniladi. Shuningdek, Q – gorizontal, T – frontal va N – profil proyeksiyalar tekisliklari sifatida qabul qilinadi. Biror fazoviy egri chiziq xossalari uning Frene uchyoqligi tekisliklaridagi proyeksiyalari bo'yicha tekshiriladi.

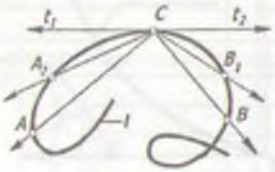
7.8-§. Fazoviy egri chiziqlarning tabiiy koordinatalarda berilishi

7.18-rasmda berilgan *l* fazoviy egri chiziqning 0, 1, 2, ... nuqtalarida unga o'tkazilgan t_0, t_1, t_2,... urinmalar va n_0, n_1, n_2,... binormallar tasvirlangan. Fazoviy egri chiziq bo'ylab harakatlanuvchi nuqta uzluksiz o'zgaruvchi quyidagi uchta miqdor bilan bevosita bog'liq bo'ladi:

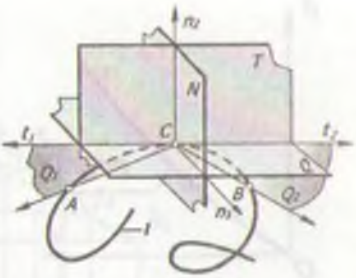
- tanlab olingan 0 nuqtadan boshlab qo'shni nuqtalar orasidagi s masofa;
- t yarim urinmaning burilish burchagi α;
- qo'shni binormallar orasidagi β burchak.

Yarim urinmalar orasidagi α burchak *qo'shni burchak*, binormallar orasidagi β burchak *burilish burchagi* deyiladi. s, α va β miqdorlar fazoviy egri chiziqning *tabiiy koordinatalari* deb yuritiladi.

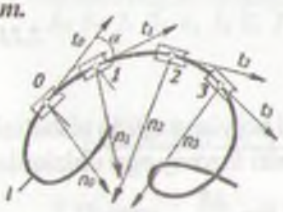
Fazoviy egri chiziqning α qo'shni burchagi va β burilish burchagini quyidagicha aniqlash mumkin (7.19-rasm): ixtiyoriy tanlab olingan biror 0 nuqtadan yarim urinma va binormallarga parallel qilib t_0, t_1, t_2,... va n_0, n_1, n_2,... to'g'ri chiziqlar chiqaramiz. Bu to'g'ri chiziqlar to'plami ikki konus sirti: *yarim urinmalar yo'naltiruvchi konusi va binormallar yo'naltiruvchi konusini* tashkil qiladi. 0 nuqtani sferaning markazi sifatida qabul qilib, biror R radiusli sfera o'tkazamiz. Bu sfera yarim urinmalar va



7.16-rasm.



7.17-rasm.

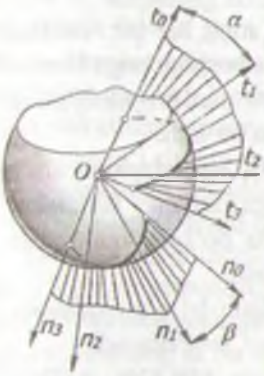


7.18-rasm.

binormallar yo'naltiruvchi konuslarini yarim urinmalar va binormallar sferik *indikatrisalari* deb ataluvchi egri chiziqlar bo'yicha kesadi. α va β burchaklar miqdorlari bo'yicha (masalan, radianda) indikatrisa yoy uzunliklari o'lchanadi. Fazoviy egri chiziqning s uzunligi va unga mos ravishda α qo'shni burchak va β burilish burchagi o'lchanib, quyidagi bog'liqliklar tuziladi: $\alpha=f(s)$, $\beta=f_1(s)$. Ular fazoviy egri chiziqning tabiiy koordinatalaridagi tenglamalari deb ataladi. 7.20 va 7.21-rasmlarda shu tenglamalarning grafiklari yasalgan.

Fazoviy egri chiziqning egriligi. $\alpha=f(s)$ tenglamaning grafigi bo'yicha $\Delta\alpha/\Delta s$ nisbatning $\Delta s\to 0$ dagi limitini aniqlash mumkin. Bu esa egri chiziqning berilgan nuqtasidagi egrilik radiusini aniqlaydi, ya'ni

$$R = \lim_{\Delta S\to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$$ bo'ladi.

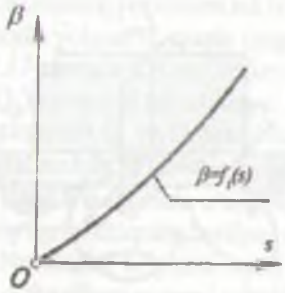


7.19-rasm.

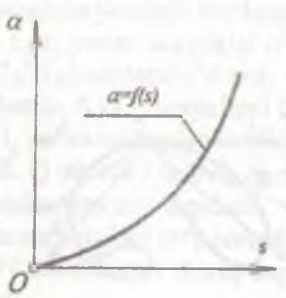
R ning miqdori egri chiziqning cheksiz yaqin uchta nuqtasi orqali o'tuvchi aylana radiusiga teng.

Egrilik radiusi qanchalik kichik bo'lsa, chiziq shuncha ko'p egilgan bo'ladi. Egrilik radiusiga teskari miqdor K_1 fazoviy egri chiziqning *birinchi egriligi* deyiladi. U quyidagicha ifodalanadi: $K_1=\frac{1}{R}$.

Fazoviy egri chiziqda uning o'z o'qi atrofida burilib harakatlanishi hisobiga ikkinchi xil egilish hosil bo'ladi. Burilish burchagi yopishma tekislikning burilishini ifodalaydigan β burchak bilan o'lchanadi.



7.20-rasm.



7.21-rasm.

$\beta=f_1(s)$ bog'lanish grafigi bo'yicha $\Delta\beta/\Delta s$ nisbatini aniqlash mumkin. $\Delta\beta/\Delta s$ nisbatning $\Delta s\to 0$ dagi limiti fazoviy egri chiziqning berilgan nuqtasidagi *vint parametri* deyiladi: $P = \lim\limits_{\Delta S\to 0} \frac{\Delta\beta}{\Delta s}$.

Vint parametriga teskari K_2 miqdor fazoviy egri chiziqning *ikkinchi egriligi* yoki *burilish egriligi* deyiladi. Uning qiymati $K_2 = \frac{1}{P}$ bo'ladi.

Fazoviy egri chiziqning berilgan nuqtasidagi to'la egriligi $K^2=K^2_1+K^2_2$ ifodasi bilan aniqlanadi.

7.9-§. Fazoviy egri chiziqning uzunligini uning to'g'ri burchakli proyeksiyalariga asosan aniqlash

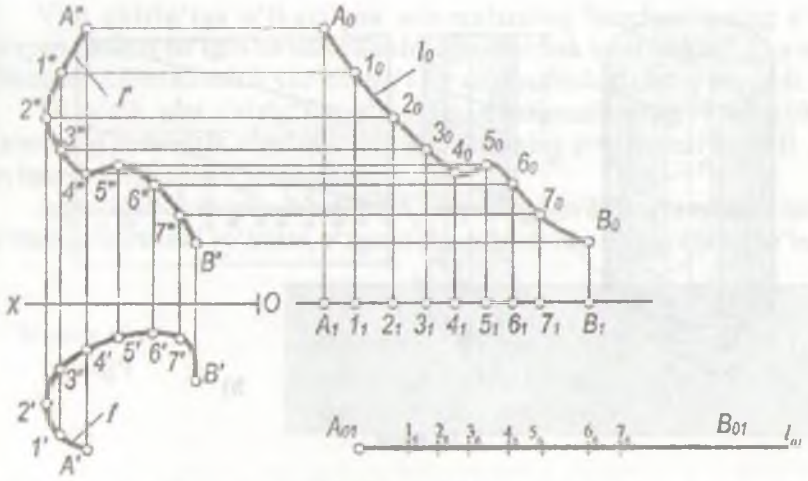
Biror fazoviy *l* egri chiziqning *l'* va *l''* to'g'ri burchakli proyeksiyalari berilgan bo'lsin (7.22-rasm). Uning uzunligini grafik usulda aniqlash uchun quyidagi yasash algoritmlari bajariladi:

Egri chiziqning *l'* gorizontal proyeksiyasi A'B' ning har bir bo'lagi ixtiyoriy tanlangan *a* to'g'ri chiziqning A_1 nuqtasidan boshlab unga ketma-ket qo'yib chiqiladi. Hosil bo'lgan A_1B_1 kesma A'B' gorizontal proyeksiyaning to'g'rilangani yoki uning uzunligini o'lchovchi kesma bo'ladi.

So'ngra *a* to'g'ri chiziqning A_1, 1_1, 2_1, 3_1,... B_1 nuqtalaridan unga perpendikulyarlar chiqariladi. Bu perpendikulyarlarga ixtiyoriy tanlangan gorizontal Ox chiziqdan *l''* (A''B'') nuqtalarigacha bo'lgan masofalar o'lchanib qo'yiladi. Natijada l_0 egri chiziq hosil qilinadi.

Chizmaning ixtiyoriy bo'sh joyida l_{01} to'g'ri chiziq olinib, bu to'g'ri chiziqqa l_0 egri chiziq nuqtalari ketma-ket o'lchab qo'yiladi, ya'ni l_0 to'g'rilanadi.

Hosil bo'lgan $A_{01}B_{01}$ kesma *l* fazoviy egri chiziq AB(A'B', A''B'') bo'lagining uzunligi bo'ladi.



7.22-rasm.

7.10-§. Vint chiziqlari

Silindrik vint chiziqlar

Ta'rif. Nuqtaning silindrik sirt bo'ylab aylanma va ilgarilanma harakati natijasida hosil bo'lgan trayektoriyasi silindrik vint chizig'i deyiladi.

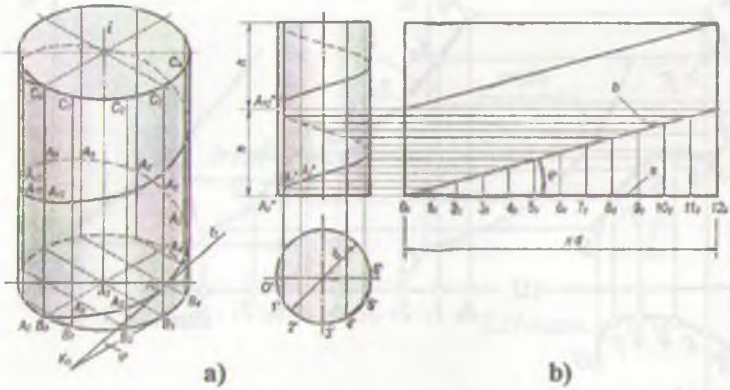
7.23-a rasmda A_0C_0 yasovchining bir necha holatlari A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3,... tasvirlangan. Bunda yoylar $A_0B_1=B_1B_2=B_2B_3=...$ o'zaro teng bo'lib, ularning har biri $\pi d/n$ ga teng bo'ladi. Bu yerda, d – silindr diametri, n – silindr asosi bo'laklarining soni.

Agar A_0 nuqtaning holatlari A_1, A_2, A_3, ... deb belgilansa, uning har bir ko'tarilishi $A_2B_2=2A_1B_1$, $A_3B_3=3A_1B_1$ va h.k. bo'lib, A_0A_{12} yasovchi bir marta aylanma harakat qilganda $A_{12}B_{12}=12A_1B_1$ bo'ladi. A_0A_{12} masofa — vint chizig'ining *qadami*, *i* – vint chizig'ining *o'qi*, A nuqtadan *i* gacha bo'lgan masofa vint chizig'ining *radiusi* deb yuritiladi.

Vint chizig'i chizilgan silindrning diametri va vint chizig'ining qadami uning *parametrlari* deyiladi. A nuqtaning yana bir marta aylanma harakatidan vint chizig'ining ikkinchi o'rami hosil bo'ladi.

7.23-b rasmda silindrik vint chizig'ining yasalishi ko'rsatilgan. Buning uchun o'qi H ga perpendikulyar, asos diametri d ga va balandligi 2h ga teng bo'lgan silindrning gorizontal va frontal proyeksiyalari yasaladi. Silindr asosi bo'lgan aylana teng 12 bo'lakka bo'linadi.

Xuddi shuningdek, vint chizig'ining qadami *h* ga teng bo'lgan $A_0''A_{12}''$ kesma ham 12 bo'lakka bo'linadi. Vint chizig'ining hosil bo'lish jarayoniga.



a) b)

7.23-rasm.

ya'ni A nuqtaning silindr yasovchisi bo'yicha va bu yasovchining o'q atrofida aylanma harakatiga asosan, aylananing har bir bo'lagidan yasovchilar va 1-12 kesmaning har bir bo'lagidan o'qqa perpendikulyar kesmalar (nuqtaning aylanma harakati frontal proyeksiyasi) chiqarilsa, *l''* vint chizig'ining frontal proyeksiyasi hosil bo'ladi. Uning gorizontal proyeksiyasi aylana bilan ustma-ust tushadi. Vint chizig'ining frontal proyeksiyasi sinusoidadagi o'xshash chiziq bo'ladi.

Silindrik vint chizig'ining yoyilmasi 7.23-b rasmda keltirilgan. Buning uchun biror *a* to'g'ri chiziqqa silindr asosi aylanasining yoy uzunligi πd qo'yiladi va u 12 ta teng bo'lakka bo'linadi. Hosil bo'lgan 0_0, 1_0, 2_0,....12_0 nuqtalardan *a* ga perpendikulyar chiziqlar chiqariladi. Bu perpendikulyarga vint chizig'i nuqtalarining applikatalari mos ravishda o'lchab qo'yiladi. Hosil bo'lgan nuqtalar to'plami *b* to'g'ri chiziqni hosil qiladi. Bu to'g'ri chiziqning *a* bilan tashkil qilgan φ burchagi og'ish burchagi bo'ladi. Vint chizig'ining A_1 nuqtasidan boshlab hosil bo'lgan ikkinchi bo'lagining aylanmasi ham b_1 to'g'ri chiziq shaklida ko'rsatilgan.

Vint chizig'ining ko'tarilish burchagi $\operatorname{tg}\varphi = h/\pi d$ formula bilan va uning bir o'ramining uzunligi $l = \sqrt{h^2 + (\pi d)^2}$ formula bilan aniqlanadi.

Silindrning vint chizig'i uning *geodezik chizig'i* deyiladi. Geodezik chiziqlar yordamida sirtdagi ixtiyoriy ikki nuqta orasidagi eng qisqa masofa o'lchanadi.

Silindrik vint chiziqlar o'ng va chap yo'nalishda bo'ladi. Nuqtaning ko'tarilishida harakat chapdan o'ng tomonga yoki tushishida o'ngdan chapga bo'lsa, hosil bo'lgan chiziq *o'ng yo'nalishli vint chizig'i* deyiladi.

Nuqtaning ko'tarilishida harakat o'ngdan chap tomonga yoki tushishida chapdan o'ngga bo'lsa, hosil bo'lgan chiziq *chap yo'nalishli vint chizig'i* deyiladi.

Silindrik vint chiziqlar mashinasozlikda va qurilishda keng qo'llaniladi.

Vint chizig'iga o'tkazilgan urinmalarning barchasi uning o'qiga perpendikulyar bo'lgan tekislik bilan bir xil φ burchak hosil qiladi (7.23-a rasm). Shuning uchun silindrik vint chizig'i *bir xil qiyalikdagi chiziq* deyiladi.

Silindrik vint chizig'iga o'tkazilgan urinmalarning N tekislikdagi izlarining geometrik o'rni silindrik sirt asosining *evolventasi* bo'ladi. Asos aylanasi esa *evolyuta* hisoblanadi.

Agar silindr sirtidagi boshlang'ich A_0 nuqtaning ilgarilanma va aylanma harakati o'zaro proporsional bo'lmasa, o'zgaruvchi qadamli vint chizig'i hosil bo'ladi.

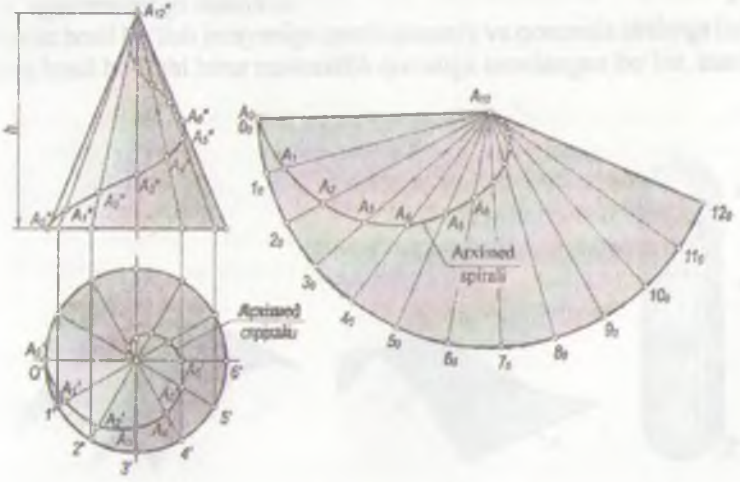
Konus vint chizig'i

Ta'rif. To'g'ri doiraviy konus sirtidagi A nuqta ilgarilanma va aylanma harakat qilsa, unda A nuqta konus sirtiga fazoviy vint chiziq chizadi. Bu chiziq konus vint chizig'i deb yuritiladi.

Nuqtaning konus yasovchisi bo'ylab harakati shu yasovchining aylanish burchagiga proporsionaldir. 7.24-a rasmda konusning 12 ta yasovchisining holatlari chizilgan va ularga nuqtalarning holatlari mos ravishda belgilangan. *A* nuqtaning konus sirti bo'ylab bir marta aylanishidan hosil bo'lgan *h* masofa *konus vint chizig'ining qadami* deb yuritiladi.

Konus vint chizig'ining konus o'qiga parallel tekislikdagi frontal proyeksiyasi to'lqin balandligi kamayuvchi sinusoidaga o'xshash egri chiziq bo'ladi. Uning konus o'qiga perpendikulyar tekislikdagi proyeksiyasi *Arximed spirali* bo'ladi.

7.24-b rasmda aylanma konus yoyilmasi va unda konus vint chizig'ining yoyilmadagi holati yasalgan. Bu chiziq yoyilmada Arximed spirali ko'rinishida bo'ladi.



7.24-rasm.

Nazorat savollari

1. Tekis va fazoviy egri chiziqlarning farqi nimada?
2. Egri chiziqqa urinma deb nimaga aytiladi?
3. Egri chiziqning egriligi deb nimaga aytiladi?
4. Egri chiziqning evolyutasi deb nimaga aytiladi?
5. Egri chiziqning biror nuqtasida unga normal qanday o'tkaziladi?
6. Tekis egri chiziqlarning maxsus nuqtalarini aytib bering.
7. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar deb nimaga aytiladi va ularning turlarini aytib bering.
8. Silindrik va konussimon vint chiziqlari qanday hosil bo'ladi?
9. Vint chizig'ining qadami nima?
10. Qanday chiziq geodezik chiziq deyiladi?



VIII BOB. SIRTLARNING HOSIL BO'LISHI VA TEKIS CHIZMADA BERILISHI

8.1-§. Umumiy ma'lumotlar

Biror chiziqning fazodagi uzluksiz harakati natijasida sirtlar hosil bo'ladi. Sirtlarni hosil qilishning turli usullari ma'lum.

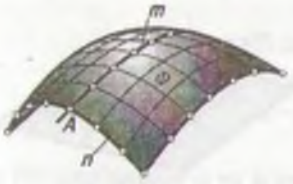
Fazoda *m* egri chiziq va uni *A* nuqtada kesib o'tuvchi *n* egri chiziq berilgan (8.1-rasm). Agar *n* egri chiziq *m* egri chiziq bo'ylab uzluksiz harakatlantirilsa, uning qator vaziyatlari to'plamidan iborat biror Φ sirt hosil bo'ladi. Bunda Φ sirtdagi *m* egri chiziq *sirtning yo'naltiruvchisi*, *n* egri chiziq uning *yasovchisi* deb ataladi. Aksincha, *n* egri chiziqni yo'naltiruvchi, *m* egri chiziqni yasovchi sifatida qabul qilish ham mumkin. Bunda *m* egri chiziq *n* egri chiziq bo'yicha harakatlangan bo'ladi.

Yasovchilarning turiga qarab egri chiziqli yasovchi hosil qilgan sirt *egri chiziqli sirt* (8.1-rasm), to'g'ri chiziqli yasovchi hosil qilgan sirt *to'g'ri chiziqli sirt* (8.2-rasm) deb ataladi.

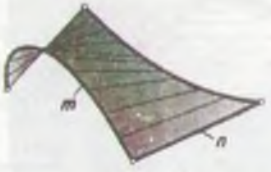
Ixtiyoriy sirtni uzluksiz harakatlantirish natijasida ham sirt hosil qilish mumkin. Bunda hosil bo'lgan Φ sirt harakatlanuvchi Φ_1 yasovchi sirtning har bir vaziyatida u bilan eng kamida bitta umumiy *n* chiziqqa ega bo'ladi. Masalan, o'zgarmas R radiusli sfera markazi (8.3-rasm) *a* to'g'ri chiziq bo'ylab uzluksiz harakatlantirilsa, Φ doiraviy silindr sirti hosil bo'ladi.

Sirt yasovchisi harakat davomida o'z shaklini uzluksiz o'zgartirib borishi yoki o'zgartirmasligi mumkin.

Sirtlar hosil bo'lish jarayoniga qarab qonuniy va qonunsiz sirtlarga bo'linadi. Sirtning hosil bo'lishi biror matematik qonunga asoslangan bo'lsa, bunday sirt



8.1-rasm.



8.2-rasm.



8.3-rasm.

qonuniy sirt deyiladi. Doiraviy silindr, konus, sfera ikkinchi tartibli va hokazo sirtlar bunga misol bo'la oladi.

Sirtning hosil bo'lishi hech qanday qonunga asoslanmagan bo'lsa, bunday sirt *qonunsiz sirt* deb ataladi. Bunga topografik (8.4-rasm) va empirik (tajriba asosida olingan) sirtlar (8.5-rasm) kiradi.

Qonuniy sirtlar, o'z navbatida, algebraik va transsendent sirtlarga bo'linadi.

Algebraik tenglamalar bilan ifodalangan sirt *algebraik*, transsendent tenglamalar bilan ifodalangan sirt *transsendent sirt* deyiladi. Sirtlarning tartibi va sinfi mavjud.

Chizma geometriyada sirtning tartibi uni tekislik bilan kesganda hosil bo'lgan kesimning tartibi bilan aniqlanadi. Biror to'g'ri chiziq orqali o'tib, sirtga uringan tekisliklar soni sirtning sinfini aniqlaydi.

Qonuniy sirtlar analitik yoki grafik usulda berilishi mumkin. Qonunsiz sirtlar faqat grafik va jadval usulida beriladi.

8.2-§. Sirtlarning berilish usullari

Chizma geometriyada sirtlar asosan analitik, kinematik va karkas usullarda beriladi.

8.2.1. Sirtlarning analitik usulda berilishi. Analitik geometriyada sirt bitta xususiyatga ega bo'lgan nuqtalar to'plami sifatida talqin qilinadi.

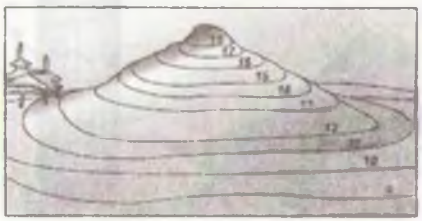
Sirtdagi biror ixtiyoriy A nuqtaning x, y, z koordinatalari orasidagi bog'lanish orqali undagi hamma nuqtalarga tegishli xususiyatni ifodalovchi tenglama *sirtning tenglamasi* deyiladi.

Uch o'lchamli fazoda sirt analitik usulda berilishi mumkin.

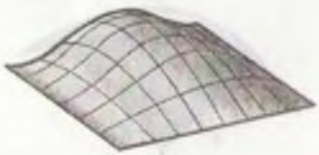
Sirt umumiy ko'rinishdagi oshkormas funksiya tenglamasi orqali quyidagicha beriladi:

$$F(x, y, z)=0. \qquad (1)$$

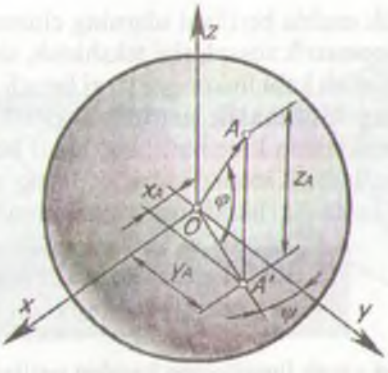
8.6-a rasmdagi sfera sirtida yotgan A nuqtaning x, y, z koordinatalari orasidagi bog'lanishni aniqlaydigan tenglama sferaning tenglamasini ifodalaydi. Markazi koordinata boshida joylashgan sferaning tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:



8.4-rasm.



8.5-rasm.



8.6-rasm.

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0. \quad (2)$$

Sirtni funksiyaning grafigi sifatida aniqlaydigan oshkor ko'rinishda berish mumkin:

$$z = f(x, y). \quad (3)$$

Sferaning tenglamasini z applikataga nisbatan

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \quad (4)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Sirt parametrlari orqali berilishi mumkin.

Sirtni $r = r(u, v)$ vektorlar orqali ifodalab, uni quyidagicha yozish mumkin:

$$x = x(u, v),\ u = u(u, v),\ z = z(u, v). \quad (5)$$

Bu tenglamalardagi u va v parametrlar bo'lib, ular (u, v) tekislikning ma'lum qismini uzluksiz bosib o'tadi.

Sferaning parametrik tenglamasi φ kenglik va ψ uzunlik (8.6-rasm) parametrlari orqali quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned} x &= R\cos\varphi\cos\psi, \\ y &= R\cos\varphi\sin\psi, \\ z &= R\sin\varphi. \end{aligned} \quad (6)$$

Agar (6) tenglamalar φ va ψ parametrlardan ozod qilinsa, sferaning x, y, z koordinatalar orqali ifodalangan (2) tenglamasiga ega bo'linadi.

Sirtlarning analitik usulda berilishi ularning chizmalarini kompyuterda chizish, differensial geometrik xossalarini tekshirish, shu jumladan, ularning yoyilmalarini aniq bajarish kabi imkoniyatlarni beradi.

8.2.2. Sirtlarning kinematik usulda berilishi. Biror chiziqning fazodagi uzluksiz harakatidan kinematik sirt hosil bo'ladi. Unda sirtning o'zi ham uzluksiz bo'ladi. Kinematik harakatning oddiy asosiy turlari: ilgarilanma, aylanma va bu ikki harakatning yig'indisi vintsimon harakatdir.

Kinematik sirt

Ta'rif. Yasovchisining kinematik harakati natijasida hosil bo'lgan sirt kinematik sirt deyiladi.

Harakatning turiga qarab ilgarilanma harakat natijasida hosil bo'lgan sirt *tekis parallel ko'chirish sirti,* aylanma harakatdan hosil bo'lgan sirt *aylanish sirti* va vintsimon harakat natijasida hosil bo'lgan sirt *vint sirti* deb ataladi.

Chizma geometriyada, ko'pincha, sirtlarning kinematik usulda hosil bo'lishidan foydalaniladi. Kinematik sirtlarning ko'rinishi uning yasovchisining shakliga va fazodagi harakat qonuniga bog'liq bo'ladi. Masalan, chiziqli sirtlarda yasovchining shakli to'g'ri chiziq bo'lib, uning fazodagi harakat qonunini sirtning yo'naltiruvchisi belgilaydi. Aylanish sirtlarida yasovchining shakli ixtiyoriy chiziq bo'lib, hosil bo'lish qonuni uning ma'lum o'q atrofida aylanishidir.

Vint sirtlarida yasovchining shakli to'g'ri yoki egri chiziq bo'lib, hosil bo'lish qonuni vintsimon (aylanma va ilgarilanma) harakatdir.

Tekis parallel ko'chirish sirtlari

Ta'rif. Yasovchining ma'lum yo'naltiruvchi bo'yicha doimo o'z-o'ziga parallel ravishda harakatlanishidan hosil bo'lgan sirt tekis parallel ko'chirish sirti deyiladi.

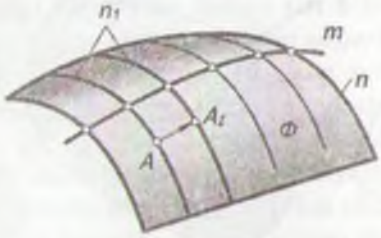
8.7-rasmda n tekis egri chiziqli yasovchining m egri chiziq bo'ylab doimo o'z-o'ziga parallel ravishda ilgarilanma harakatlanishi natijasida hosil bo'lgan Φ sirti ko'rsatilgan. Bu tekis parallel ko'chirish sirtidir. n yasovchining hamma nuqtalari harakat davomida m yo'naltiruvchiga o'xshash tekis egri chiziqlar hosil qiladi.

Agar m egri chiziq n_1 egri chiziq bo'ylab harakatlantirilsa, uning nuqtalari ham n_1 egri chizig'iga o'xshash egri chiziqlar hosil qiladi. Bu chiziqlar nuqtalarning yo'llari deyilib, sirt ustida to'r hosil qiladi.

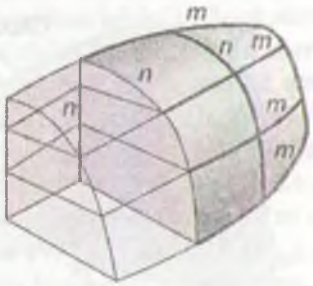
Kinematik sirt yasovchilarining uzluksiz harakati va sirtning o'zining uzluksizligidan quyidagi muhim xulosa kelib chiqadi: ***kinematik sirtning ixtiyoriy nuqtasidan shu sirtda yotuvchi va to'r oilalariga kiruvchi ikkita egri chiziq o'tkazish mumkin.***

Agar m yo'naltiruvchi to'g'ri chiziq bo'lsa, silindr sirti hosil bo'ladi.

Biror parabola boshqa parabola bo'yicha tekis siljitilsa, giperbolik paraboloid sirti hosil bo'ladi. Demak, bu sirtlar ham tekis parallel ko'chirish sirtlari turiga kiradi.



8.7-rasm.



8.8-rasm.

8.2.3. Sirtlarning karkas usulida berilishi. Ba'zi bir sirtlarni aniq geometrik qonuniyatlar bilan berib bo'lmaydi. Bunday sirtlar shu sirt ustida yotuvchi bir nechta nuqtalar yoki chiziqlar bilan beriladi.

Sirtning uning ustidagi bir necha nuqtalar yoki chiziqlar bilan berilishi uning *karkas usulida berilishi* deb yuritiladi. Sirt ustida tanlangan chiziqlar to'plami *sirtning karkaslari* deyiladi (8.8-rasm).

Sirtlarni uzluksiz karkaslar orqali hosil qilish qulaydir. Sirtlarning karkaslari fazoviy egri chiziqlar to'plamidan iborat bo'lishi mumkin. Ammo sirtlarni tekis egri chiziqlar (kesimlar) dan iborat karkaslari bilan berish qulayroqdir. Sirtlarning karkaslari bir, ikki va uch tekis kesimlar to'plamidan iborat bo'lishi mumkin (8.9-rasm). Bunda har bir to'plam sirtning asosiy karkasi bo'lib, qolganlari unga qo'shimcha karkas sifatida olinadi.

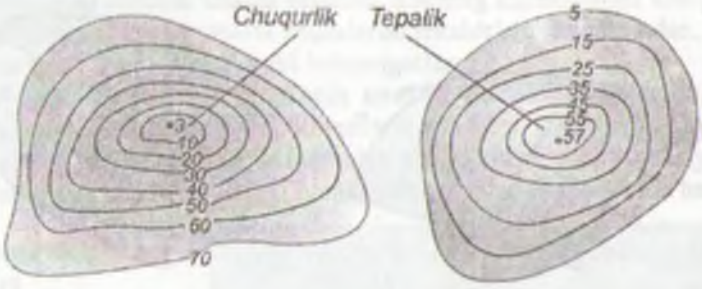
Har bir sirt bir parametrli tekis egri chiziqlardan tashkil topgan bo'lib, bu egri chiziqlarning joylashishi va xossalari sirtning xossalarini aniqlaydi.

Sirt nuqtali karkas yoki chiziqli karkaslari bilan berilishi mumkin. Sirt nuqtali karkas bilan berilsa, bu nuqtalar to'plami shunday tanlanishi kerakki, unga asosan sirtning va uning har bir bo'lagining ko'rinishi va shaklini tasavvur qilish mumkin bo'lsin.

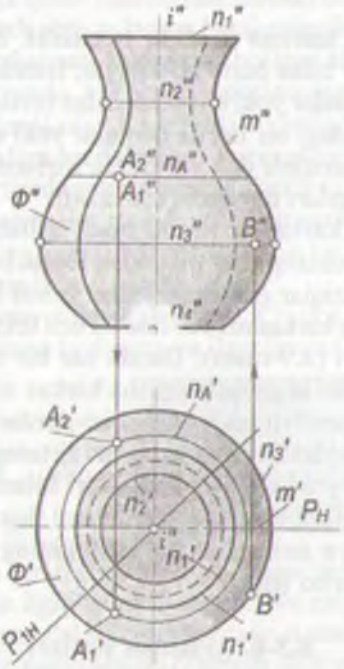
8.3-§. Aylanish sirtlari

Ta'rif. Biror tekis yoki fazoviy chiziqning qo'zg'almas to'g'ri chiziq atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt aylanish sirti deb ataladi.

Harakatlanuvchi chiziq *sirtning yasovchisi*, qo'zg'almas to'g'ri chiziq esa uning *aylanish o'qi* deyiladi. Yasovchi va aylanish o'qi aylanish sirtining aniqlovchilarini tashkil qiladi. 8.10-rasmda *m (m', m'')* egri chiziqning i (i', i'') aylanish o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan umumiy ko'rinishdagi aylanish sirti tekis chizmada tasvirlangan. Yasovchi va aylanish o'qi ma'lum



8.9-rasm.



8.10-rasm.

bo'lsa, aylanish sirti to'la berilgan hisoblanadi. Sirtning berilishini uning aniqlovchilari orqali Φ(m, *i*) ko'rinishida yozish mumkin.

Tekis chizmada aylanish sirti Φ'(m', *i'*) va Φ'' (m'', *i''*) proyeksiyalari bilan hamda aniqlovchilarning istalgan ikki proyeksiyasi bilan berilgan. Aylanish jarayonida yasovchining hamma nuqtalari aylanalar bo'yicha harakat qilib, bu aylanalar *sirtning parallellari* deyiladi. Aylanish o'qidan o'tgan barcha tekisliklar *meridian tekisliklari,* ularning aylanish sirti bilan

kesishish chiziqlari esa *sirtning meridianlari* deyiladi. Sirtning barcha meridianlari kongruent bo'ladi. Frontal meridian tekisligi *bosh meridian tekisligi* hisoblanib, uning sirt bilan kesishish chizig'i *bosh meridian chizig'i* yoki sirtning *frontal ocherki* deb ataladi. 8.10-rasmda umumiy ko'rinishdagi aylanish sirtining aylanish o'qi gorizontal proyeksiyalar tekisligi H ga perpendikulyar joylashganligi uchun sirtdagi parallellarning (n_1'', n_2'', n_3'',....) frontal proyeksiyalari to'g'ri chiziq kesmasi ko'rinishida, gorizontal proyeksiyalari esa haqiqiy kattalikda, ya'ni aylana ko'rinishida tasvirlanadi. Tekis chizmada $P(P_H)$ bosh va $P_1(P_{III})$ oddiy meridian tekisliklari hosil qilgan meridian kesimlari ko'rsatilgan. Bosh meridian V ga parallel bo'lganligi uchun uning frontal proyeksiyasi o'zining haqiqiy kattaligiga teng bo'ladi.

Agar parallelning bosh meridian bilan kesishish nuqtasidan bosh meridianga o'tkazilgan urinma aylanish o'qiga parallel bo'lsa, bu parallel *ekvator* yoki *bo'yin chizig'i* deyiladi. Bu parallel ikki yon qo'shni parallellardan katta bo'lsa — *ekvator,* agar ulardan kichik bo'lsa, *bo'yin chizig'i* deyiladi. Demak, biror aylanish sirtida bir necha ekvator va bo'yin chiziqlari bo'lishi mumkin. 8.10-rasmdagi aylanish sirtida parallellardan n_2 (n_2', n_2'') bo'yin, n_3 (n_3', n_3'') esa ekvator chizig'i hisoblanadi.

Boshqa sirtlar singari aylanish sirti ham cheksiz ko'p nuqtalar to'plamidan iboratdir. Bu nuqtalarni to'la-to'kis chizmada tasvirlab bo'lmaydi. Shuning uchun ham H va V ga perpendikulyar qilib aylanish sirtiga urinma silindrlar o'tkaziladi. Urinma silindrlarning H bilan kesishish chizig'i sirtning *gorizontal ocherki,* V bilan kesishish chizig'i esa uning *frontal ocherki* deyiladi. Aylanish sirtlari ko'pincha o'zining gorizontal va frontal ocherklari bilan tasvirlanadi. 8.10-rasmdagi aylanish sirtining frontal ocherki bosh meridian m'' va n_1'', n_4'' parallellari bilan, gorizontal ocherki n_2' va n_3' parallellari bilan tasvirlangan.

Gorizontal va frontal ocherklar sirt proyeksiyalarining ko'rinadigan va ko'rinmaydigan qismlarini aniqlashga ham yordam beradi.

Parallellar yordamida sirt ustida nuqtalarning proyeksiyalari topiladi. Masalan, aylanish sirtiga tegishli A_1 va A_2 nuqtalarning frontal proyeksiyalari A_1'' va A_2'' larning gorizontal proyeksiyalari A_1' va A_2' n_4 parallelning gorizontal proyeksiyasi n'_4 da aniqlangan.

Ekvatorda yotuvchi *B* nuqtaning gorizontal *B'* proyeksiyasi berilgan. Uning *B''* frontal proyeksiyasi ekvatorning n_3'' frontal proyeksiyasida bo'ladi.

Aylanish sirtlari mashinasozlikda va qurilish amaliyotida keng qo'llaniladi. Chunki ko'pchilik mexanizmlar aylanma harakat qiladi va aylanish sirtlari stanokda osongina yasaladi.

Sirtning eng katta paralleli uning *ekvatori*, eng kichik paralleli esa *bo'yni* deb ataladi.

Loyihalanadigan mashina mexanizmlarining vazifasi, unga qo'yiladigan texnik talablar va shakliga qarab aylanish sirtining yasovchisi tanlanadi.

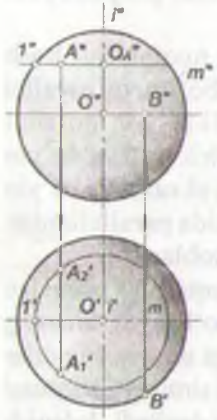
8.3.1. Ikkinchi tartibli aylanish sirtlari.

Ta'rif. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning o'z o'qlaridan biri atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt ikkinchi tartibli aylanish sirtlari deyiladi.

Ikkinchi tartibli aylanish sirtlaridan quyidagilarni ko'rib chiqamiz:

Sfera

Ta'rif. Aylananing o'z diametrlaridan biri atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt sfera deb ataladi.



8.11-rasm.

8.11-rasmda tasvirlangan sfera ustidagi A nuqtaning A'' frontal va B nuqtaning B' gorizontal proyeksiyalari berilgan. A nuqtaning A_1' va A_2' gorizontal proyeksiyalarini yasash uchun u orqali $O_4''1''$ radiusli parallel o'tkaziladi. A nuqtaning gorizontal proyeksiyalari shu parallelning gorizontal proyeksiyasida yotadi. A nuqta sferaning oldingi yoki orqa yarmida joylashgan bo'lishi mumkin. Shuning uchun uning gorizontal proyeksiyalari A_1' va A_2' nuqtalar parallelning gorizontal proyeksiyasida topiladi. B nuqta sfera ekvatorida yotganligi uchun uning B'' frontal proyeksiyasi bir qiymatli bo'lib, u ekvatorning frontal proyeksiyasida topiladi.

Markazi koordinatalar boshida bo'lgan sferaning kanonik tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ R \neq 0.$$

Markazi ixtiyoriy $A(x_1, y_1, z_1)$ nuqtada bo'lgan sfera tenglamasi

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = R^2$$

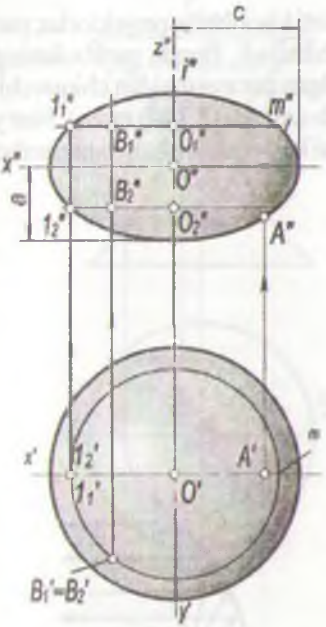
bo'ladi.

Aylanma ellipsoid sirt

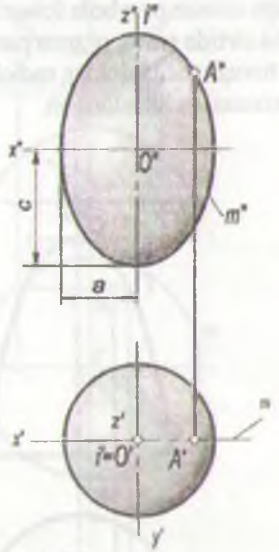
Ta'rif. Ellipsning o'z o'qlaridan biri atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt aylanma ellipsoid deyiladi.

Bunda m(m', m'') – ellips va $i(i', i'')$ aylanish o'qi ellips o'qi bilan ustma-ust tushadi va sirt $\Phi(i, m)$ ko'rinishda yoziladi.

Ellipsning kichik o'qi atrofida aylanishidan *siqiq aylanma ellipsoid* (8.12-rasm), katta o'qi atrofida aylanishidan *cho'ziq aylanma ellipsoid* hosil bo'ladi (8.13-rasm). 8.12- va 8.13-rasmlarda ellipsoidlar ustida berilgan A va B nuqtalarning bitta proyeksiyasi bo'yicha ularning yetishmaydigan proyeksiyalarini



8.12-rasm.



8.13-rasm.

yasash ko'rsatilgan. Nuqtalarning yetishmaydigan proyeksiyalari parallel, meridian va proyeksion bog'lanish chiziqlari yordamida aniqlangan.

Markazi koordinatalar boshida va katta o'qi aylanish o'qi bo'lgan ellipsning aylanishidan hosil bo'lgan aylanish ellipsoidining kanonik tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \text{ bunda } c \neq a \text{ bo'ladi.}$$

Yer sharining shakli siqilgan ellipsoid – geoidni eslatadi.

Aylanma paraboloid sirt

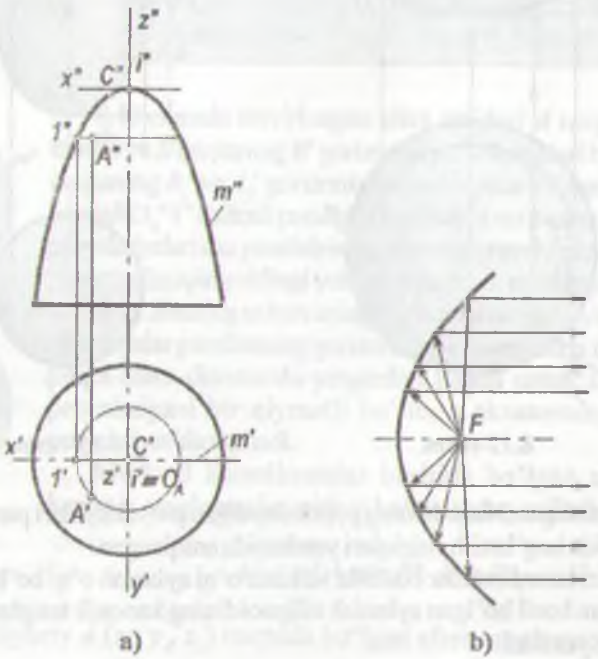
Ta'rif. Parabolaning o'z o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt aylanma paraboloid deyiladi.

8.14-rasmda m (m′, m″) parabolaning *i* (*i*′, *i*″) o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan Φ (*i*′, m) aylanma paraboloidning proyeksiyalari berilgan va uning ustida nuqta tanlash ko'rsatilgan.

Uchi koordinatalar boshida bo'lgan va o'qi Oz bo'lgan aylanma paraboloidning kanonik tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$x^2 + y^2 = -2pz, \text{ bunda } p \neq 0 \text{ bo'ladi.}$$

Aylanma paraboloid parabolik oynalar sirti hisoblanib, projektorlar, parabolik antennalar va avtomobil faralari uchun ishlatiladi. Bunda parabolaning fokal xossasiga asosan parabola fokusida o‘rnatilgan nur manbaidan chiquvchi nurlar parabola sirtida sinib, o‘zaro parallel bo‘lib qaytadi (8.14-b rasm). Nur yig‘ish sirtlari, tovush ushlagichlar, radiolokatorlarni konstruksiyalash ham parabolaning ushbu xossasiga asoslangan.



8.14-rasm.

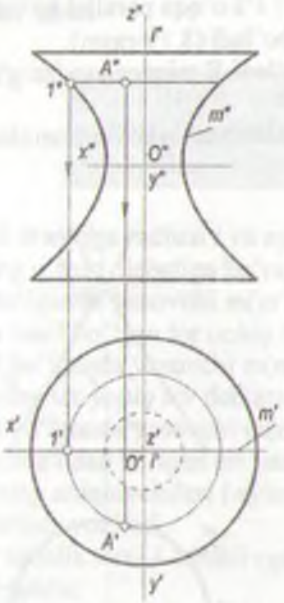
Aylanma giperboloid sirt

Ta'rif. Giperbolaning o'z mavhum yoki haqiqiy o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt aylanma giperboloid deyiladi.

Giperbolaning mavhum o‘q atrofida aylanishidan *bir pallali aylanma giperboloid* hosil bo‘ladi. 8.15-rasmda $i(i', i'')$ o‘qi atrofida m (m′, m″) giperbolaning aylanishidan hosil bo‘lgan bir pallali Φ (i, m) giperboloid va uning ustida nuqta tanlash ko‘rsatilgan.

Markazi koordinatalar boshida bo‘lgan bir pallali aylanma giperboloidning kanonik tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$ bunda $c \neq a$ bo‘ladi.



8.15-rasm.



8.16-rasm.

Giperbolaning o'z haqiqiy o'qi atrofida aylanishidan *ikki pallali aylanma giperboloid* hosil bo'ladi. Bu sirt qabariq tubi bilan bir-biriga qaratilgan qozonlarni eslatadi. Bunday sirt 8.16-rasmda tasvirlangan. $\Phi(i, m)$ ikki pallali giperboloid ustida A nuqtaning proyeksiyalari ko'rsatilgan. Ikki pallali aylanma giperboloidning tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,\ \text{bunda } c\neq 0 \text{ bo'ladi.}$$

8.3.2. To'g'ri chiziqning aylanishidan hosil bo'lgan ikkinchi tartibli aylanish sirtlari. To'g'ri chiziqning biror to'g'ri chiziq atrofida aylanishidan ham 2-tartibli aylanish sirti hosil bo'lishi mumkin.

• Aylanish o'qi $i(i', i'')$ atrofida u bilan ayqash $a(a', a'')$ to'g'ri chiziqning aylanishi natijasida bir pallali aylanma giperboloid sirti $\Phi(i, a)$ hosil bo'ladi (8.17-rasm).

• Yasovchi a to'g'ri chiziq aylanish o'qi i bilan kesishsa, ikkinchi tartibli aylanma konus sirti $\Phi(i, a)$ hosil bo'ladi (8.18-rasm).

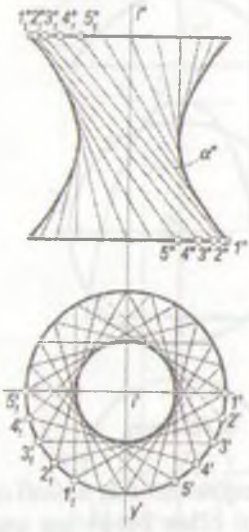
Uchi koordinata boshida bo'lgan aylanma konus sirtining kanonik tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,\ \text{bunda } c\neq a \text{ bo'ladi.}$$

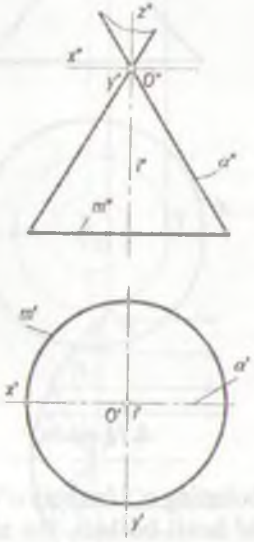
• $a(a', a'')$ yasovchi to‘g‘ri chiziq $i(i', i'')$ o‘qqa parallel bo‘lsa, ikkinchi tartibli aylanma silindr sirti Φ (i, a) hosil bo‘ladi (8.19-rasm).

Bu silindrning tenglamasi $x^2+y^2=R^2$ bo‘ladi. R miqdor a va i to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofadir.

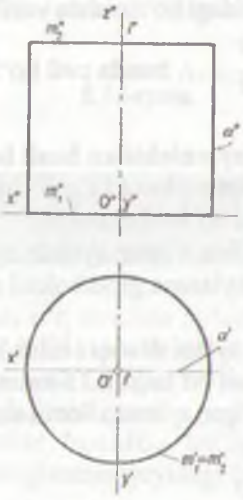
Bir pallali giperboloid, konus, silindr sirtlari ham aylanish, ham chiziqli sirtlar turiga kiradi.



8.17-rasm.



8.18-rasm.



8.19-rasm.

8.3.3. Tor sirti.

Ta'rif. Biror aylananing shu aylana tekisligida yotuvchi, ammo aylana markazidan o'tmaydigan ixtiyoriy i o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt tor sirti deyiladi.

Yasovchi *m* aylana radiusi r va aylana markazidan *i* o'qqacha bo'lgan R masofalarning o'zaro nisbatiga ko'ra, tor sirtlari turlicha bo'ladi:

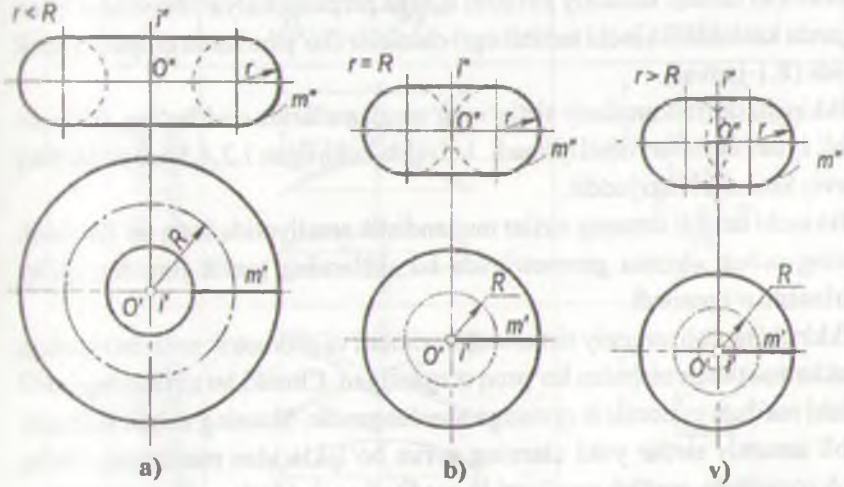
- r<R bo'lganda yasovchi m(m′, m″) aylana aylanish o'qi *i*(*i*′, *i*″) ni kesmaydi va hosil bo'lgan tor *ochiq tor* yoki *halqa* deyiladi (8.20-a rasm).
- r=R bo'lganda yasovchi m(m′, m″) aylana aylanish o'qi *i*(*i*′, *i*″) ga urinadi. Bunday tor *yopiq tor* deb ataladi (8.20-b rasm).
- r>R bo'lganda yasovchi m(m′, m″) aylana aylanish o'qi *i*(*i*′, *i*″) ni kesadi. Bu holda hosil bo'lgan tor ham *yopiq tor* deyiladi (8.20-v rasm).

Tor sirtining aniqlovchilari *i* aylanish o'qi va m yasovchi aylana bo'ladi va Φ (*i*, *a*) tarzida yoziladi.

Ixtiyoriy tekislik torni 4-tartibli egri chiziq bo'yicha kesadi, shuning uchun tor 4-tartibli sirtdir.

Markazi koordinatalar boshida va r=R bo'lgan tor sirtining tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$(z^2 + x^2 + y^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0.$$



8.20-rasm.

8.4-§. Ikkinchi tartibli umumiy sirtlar

Ikkinchi tartibli umumiy sirtlarning kanonik tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + k=0.$$

Agar bu tenglamaning har ikkala tomoni o'nta koeffitsientdan birortasiga, masalan, k koeffitsientiga bo'linsa, $\frac{A}{k}, \frac{B}{k}, \frac{C}{k}$, ... kabi 9 ta nisbat hosil bo'ladi. Bularning har biri ikkinchi tartibli sirtning parametrlari bo'la oladi. Demak, ikkinchi tartibli sirt 9 ta nuqta orqali berilishi mumkin.

Ikkinchi tartibli umumiy sirtlarning grafik tarzda berilishi va ularni aniqlovchi geometrik parametrlar 8.1-jadvalda keltirilgan. Ikkinchi tartibli umumiy sirtlardan uch o'qli ellipsoid, bir pallali va ikki pallali giperboloidlar markaziy sirtlarga kiradi. Qolgan barcha sirtlar markazsizdir. Markaziy sirtlar uchta simmetriya tekisligiga ega. Ularning simmetriya tekisliklari $y=0$ (XOZ), $x=0$ (YOZ) va $z=0$ (XOY) koordinata tekisliklari bo'ladi. Markaziy sirtlarning bu tekisliklar bilan kesishuvidan hosil bo'lgan kesim ularning *bosh kesimlari* deb yuritiladi. Simmetriya tekisligiga parallel bo'lgan tekisliklardagi kesimlarni sirtlar tenglamasidan foydalanib va kesimlarning o'xshashligiga asosan osongina yasash mumkin.

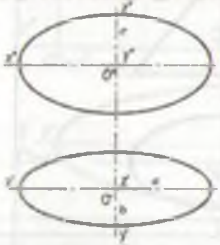
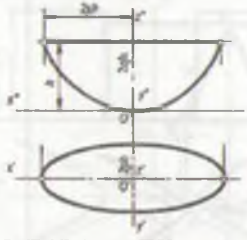
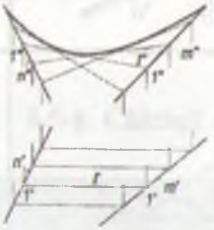
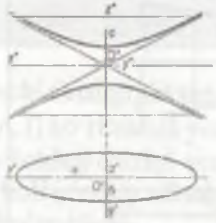
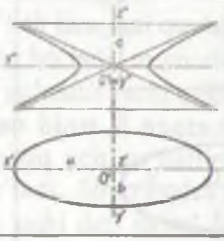
Ikkinchi tartibli umumiy sirtlarni o'qiga perpendikulyar tekisliklar bilan kesganda kesimda ikkinchi tartibli egri chiziqlar (ko'p hollarda ellipslar) hosil bo'ladi (8.1-jadval).

Ikkinchi tartibli umumiy sirtlarning tenglamalarida $a=b$ bo'lsa, ikkinchi tartibli aylanish sirtlari hosil qilinadi. Jadvalda keltirilgan 1,2,4,5,6,9 sirtlarning doiraviy kesimlari mavjuddir.

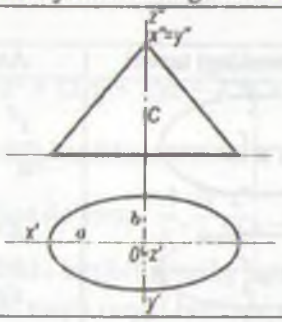
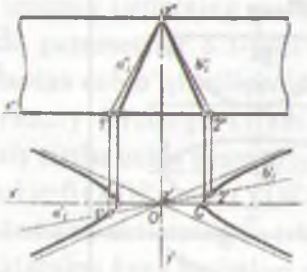
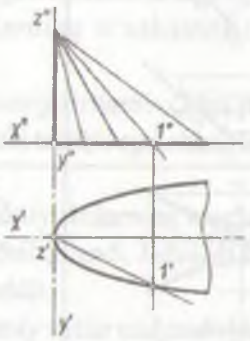
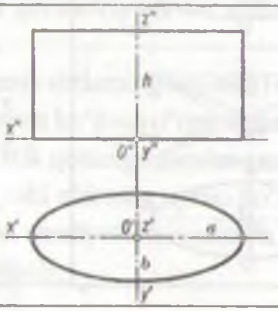
Ikkinchi tartibli umumiy sirtlar muhandislik amaliyotida keng qo'llaniladi. Shuning uchun chizma geometriyada bu sirtlarning grafik jihatdan qulay tasvirlanishi o'rganiladi.

Ikkinchi tartibli umumiy sirtlarning kesimlari va geometrik xossalari boshqa murakkab sirtlarga nisbatan ko'proq o'rganilgan. Chunki bu sirtlarning hosil bo'lishi ma'lum matematik qonunga asoslangandir. Shuning uchun ikkinchi tartibli umumiy sirtlar yoki ularning ayrim bo'laklaridan mashinasozlikda, samolyotsozlikda, qurilish amaliyotida, meditsina asboblari yasashda va boshqa sohalarda keng foydalaniladi.

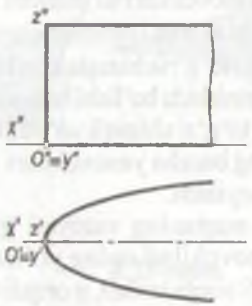
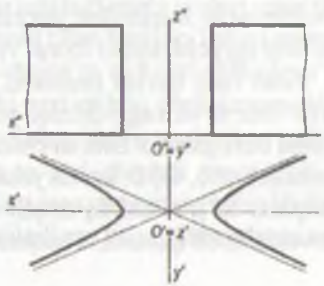
8.1-jadval

№	Nomi	Monj chizmasidagi tasviri	Analitik berilishi
1.	Uch o'qli ellipsoid		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$ bunda $a>c>b$ $c>a>b$ $a>b>c$ $b>a>c$ $c>b>a$ $b>c>a$
2.	Elliptik paraboloid		$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2Z,$ bunda $p>q$ yoki $p<q$
3.	Giperbolik paraboloid		$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,$ bunda $p>q$ yoki $p<q$
4.	Ikki pallali giperboloid		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$ bunda $0<c<\infty$ va $a>b$
5.	Bir pallali giperboloid		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$ bunda $0<c<\infty$ va $a>b$

8.1-jadval (davomi)

№	Nomi	Monj chizmasidagi tasviri	Analitik berilishi
6.	Elliptik konus		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, bunda $0<c<\infty$ va $a>b$
7.	Giperbolik konus		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, bunda $a>b$ va $0<c<\infty$
8.	Parabolik konus		$x^2-2py=z^2$, bunda $p\neq 0$
9.	Elliptik silindr		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $z=h$, bunda $a>b$

8.1-jadval (davomi)

10.	Parabolik silindr		$y^2 = 2px$ $z = h,$ bunda $p \neq 0$
11.	Giperbolik silindr		$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $z = h,$ bunda $a > b$

8.5-§. Chiziqli sirtlar

Ta'rif. To'g'ri chiziqning fazoda berilgan uchta (m, n va l) yo'naltiruvchi chiziqlarni kesib o'tib, uzluksiz harakatlanishidan hosil bo'lgan sirt chiziqli sirt deyiladi.

Bu sirt uch yo‘naltiruvchi chiziqli sirt deb yuritiladi. Chiziqli sirt aniqlovchi parametrlar orqali Φ (m, n, l) ko‘rinishda yoziladi.

8.21-a rasmda umumiy holdagi chiziqli sirtni hosil qilish ko‘rsatilgan. Chiziqli sirtning bunday umumiy holi *qiyshiq silindr* deyiladi. 8.21-b rasmda qiyshiq silindrning yaqqol tasviri ko‘rsatilgan.

Bu sirtning hosil bo‘lish jarayoni quyidagichadir: m, n va l egri chiziqli yo‘naltiruvchilar berilgan bo‘ladi. m chiziqda ixtiyoriy A nuqta tanlaymiz (8.21-a rasm). l chiziqni yo‘naltiruvchi qilib, (A, l) konus sirti hosil qilamiz. Bu konus n chiziq bilan biror B nuqtada kesishadi. A,B,C nuqtalarni tutashtiruvchi to‘g‘ri chiziq uch yo‘naltiruvchi sirt (qiyshiq silindr)ning yasovchilaridan biri bo‘ladi. Shuningdek, m ga tegishli bo‘lgan barcha nuqtalarni konuslarning uchi deb qabul qilib, l chiziq shu konuslarning

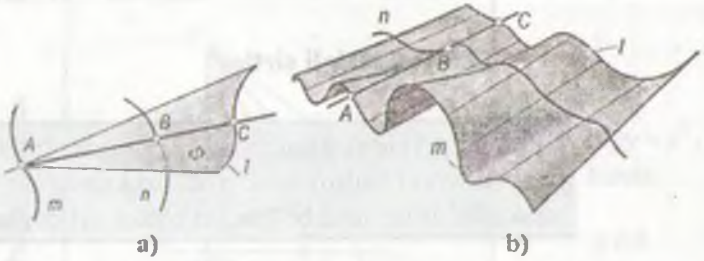
yo‘naltiruvchisi bo‘lganda, bu konuslar n chiziq bilan kesishib, uning ustida konusga tegishli nuqtalar hosil qiladi. Bu nuqtalardan o‘tuvchi chiziqlar qiyshiq silindr sirtining to‘g‘ri chiziqli yasovchilari to‘plamini hosil qiladi.

Xususiy hollarda yo‘naltiruvchi *m, n* va *l* egri chiziqlarning ba’zilari yoki hammasi to‘g‘ri chiziq bo‘lishi mumkin.Bu to‘g‘ri chiziqlardan birontasi cheksiz uzoqlikda (xosmas) yoki ba’zilari nuqta ko‘rinishida bo‘lishi ham mumkin.

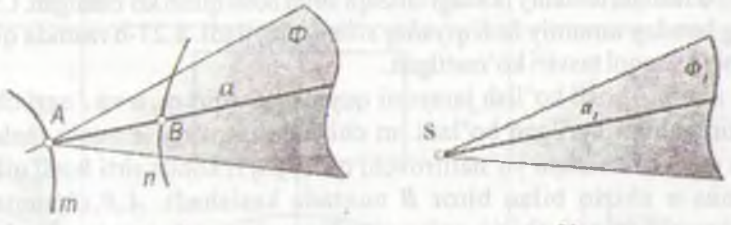
Cheksiz uzoqlikda bo‘lgan to‘g‘ri chiziqli yo‘naltiruvchining vaziyati biror tekislik bilan beriladi va sirtning barcha yasovchilari unga parallel bo‘ladi. Bu tekislik *parallelizm tekisligi* deyiladi.

Cheksiz uzoqlashtirilgan nuqtaning vaziyati biror to‘g‘ri chiziq bilan beriladi va sirtning barcha yasovchilari uning yo‘nalishiga parallel bo‘ladi.

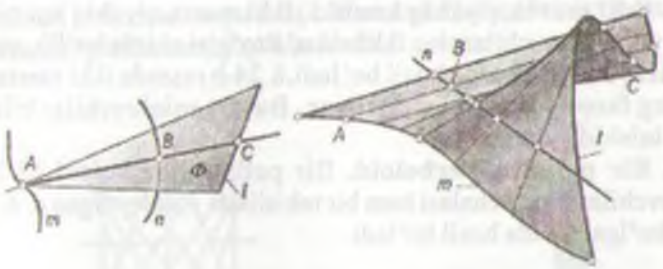
Agar fazoda ixtiyoriy biror S nuqta tanlab, u orqali Φ qiyshiq silindr sirtining yasovchilariga parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazilsa, biror Φ_1 konus sirti hosil bo‘ladi. Bu konus sirti *yo‘naltiruvchi konus* deb yuritiladi (8.22-a, b rasm). Demak, qiyshiq silindr sirtini ikki egri chiziqdan iborat yo‘naltiruvchilar (m, n) va yo‘naltiruvchi konus Φ_1 bilan ham berish mumkin. Bunday holda sirtni yasash algoritmi quyidagicha bo‘ladi: m va n egri chiziqli yo‘naltiruvchilar hamda S uchli Φ_1 yo‘naltiruvchi konus berilgan bo‘lsin. m chiziq ustidagi ixtiyoriy *A* nuqtani biror Φ_1 konusning uchi deb olib, $\Phi \| \Phi_1$ konus yasaladi. So‘ngra $\Phi \cap n = B$ nuqta aniqlanadi. *A* va *B* nuqtalar to‘g‘ri chiziq orqali tutashtirilib, qiyshiq silindrning to‘g‘ri chiziqli yasovchisi hosil qilinadi. *A* nuqtani m egri chiziq bo‘yicha



8.21-rasm.



8.22-rasm.



a) b)

8.23-rasm.

harakatlantirib, n chiziq ustida *B* nuqta singari qator nuqtalar hosil qilish mumkin. Qiyshiq silindrning bu usul bilan hosil bo'lishini geometrik tomondan quyidagicha tahlil qilish mumkin: sirtning m va n egri chiziqli yo'naltiruvchilari xos chiziqlar bo'lib, *l* yo'naltiruvchi egri chiziq cheksiz uzoqlashtirilgan bo'ladi. Cheksiz uzoqlashtirilgan *l* yo'naltiruvchining vaziyati yo'naltiruvchi konus orqali beriladi, ya'ni sirtning har bir to'g'ri chiziqli yasovchisi *m* va *n* chiziqlarni kesib, yo'naltiruvchi konusning mos yasovchisi bilan cheksiz uzoqlikda kesishadi.

Chiziqli sirtlar yoyiladigan va yoyilmaydigan sirtlarga bo'linadi.

Ta'rif. Cheksiz yaqin turgan ikki qo'shni yasovchi (to'g'ri chiziq) o'zaro parallel yoki kesishuvchi bo'lib, tekis element hosil qilsa, bunday chiziqli sirtlar yoyiladigan sirtlar deyiladi.

Yoyiladigan sirtlarga konus, silindr sirtlari misol bo'la oladi.

Agar cheksiz yaqin turgan ikki qo'shni yasovchi (to'g'ri chiziq) o'zaro uchrashmas vaziyatda bo'lsa, bunday chiziqli sirtlar *yoyilmaydigan sirtlar* deyiladi.

8.6-§. Yoyilmaydigan chiziqli sirtlar

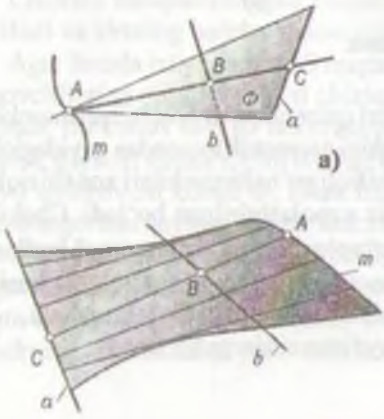
Yoyilmaydigan chiziqli sirtlarga quyidagilar kiradi:

8.6.1. Qiyshiq silindr. Qiyshiq silindr (8.21-a,b rasm) uchala yo'naltiruvchisi ham egri chiziq ko'rinishida bo'lganda hosil bo'ladi. Uning aniqlovchilari m, n, *l* egri chiziqlardan iborat bo'lib, Φ(m, n, *l*) ko'rinishida yoziladi. Bu sirtlarning yaqqol tasviri 8.21-b rasmda berilgan.

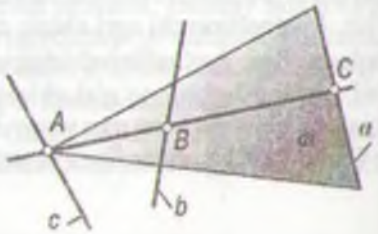
8.6.2. Ikki marta qiyshiq silindroid. Ikki marta qiyshiq silindroid (8.23-a,b rasm) yo'naltiruvchilarining ikkitasi m, n egri chiziq va uchinchisi *l* to'g'ri chiziq bo'lgan hollarda hosil bo'ladi. 8.23-b rasmda bunday sirtning yaqqol tasviri berilgan. Bu sirt aniqlovchilar bilan Φ(m, n, *l*) ko'rinishida yoziladi.

8.6.3. Ikki marta qiyshiq konoid. Ikki marta qiyshiq konoid (8.24-a,b rasm) yo'naltiruvchilarning ikkitasi *a, b* to'g'ri chiziq bo'lib, uchinchisi *m* egri chiziq bo'lgan holda hosil bo'ladi.8.24-b rasmda ikki marta qiyshiq konoidning fazoviy tasviri ko'rsatilgan. Bu sirt aniqlovchilar bilan $\Phi(m, a, b)$ ko'rinishida yoziladi.

8.6.4. Bir pallali giperboloid. Bir pallali giperboloid (8.25-rasm) yo'naltiruvchilarining uchalasi ham bir tekislikda yotmaydigan *a, b, c* to'g'ri chiziqlar bo'lgan holda hosil bo'ladi.



8.24-rasm.



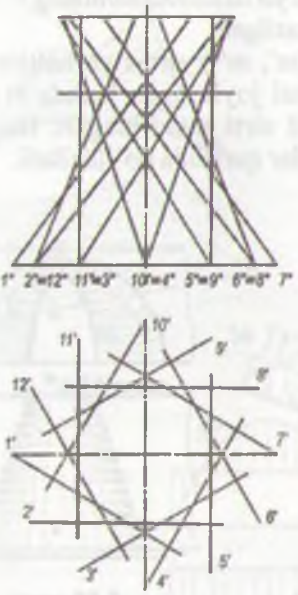
8.25-rasm.

Bir pallali giperboloid sirtida ikki to'g'ri chiziqlar oilasi mavjud bo'lib, ularning har biriga mansub biror to'g'ri chiziq ikkinchi oiladagi hamma to'g'ri chiziqlarni kesib o'tadi.

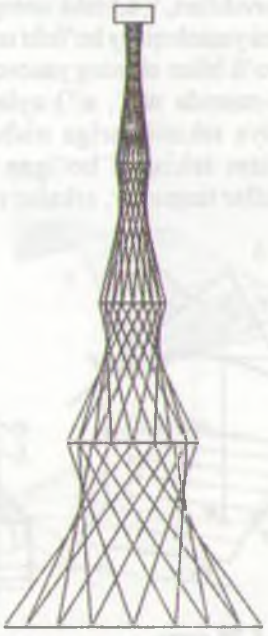
Teorema. Bir pallali giperboloidning har bir nuqtasidan uning ikkita to'g'ri chiziqli yasovchisi o'tadi.

Sirtning yo'naltiruvchilari sifatida bitta oilaga mansub bo'lgan xohlagan uchta to'g'ri chiziqni qabul qilish mumkin. Sirt aniqlovchilari bilan $\Phi(a, b, c)$ ko'rinishida yoziladi. 8.26-rasmda bir pallali giperboloid o'zining ikki oilaga mansub bo'lgan to'g'ri chiziqli yasovchilari bilan tekis chizmada tasvirlangan. Bu sirt yasovchilarining xossalaridan qurilish texnikasida foydalanishni birinchi marta akademik V.G.Shuxov (1853–1939) tavsiya qilgan. Bir pallali aylanma giperboloiddan radiomachta, suv minorasi kabi inshootlarni konstruksiyalashda foydalanilgan. Bu konstruksiyalar o'zining mustahkamligi va yengilligi tufayli qurilish texnikasida keng tarqalgan. 1921-yili Moskvada Shuxov loyihasi asosida 160 metrli 6 seksiyali (6 ta

giperboloid) radiomachta qurildi (8.27-rasm). Hozirgi kunlarda ham bu sirtdan qurilish amaliyotida keng foydalaniladi.



8.26-rasm.



8.27-rasm.

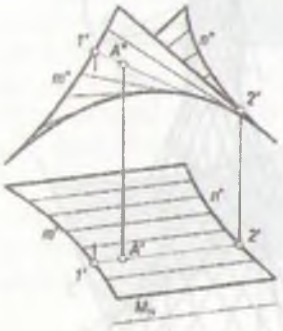
8.6.5. Silindroid. Ikki yo'naltiruvchi *m, n* xos egri chiziq bo'lib, uchinchisi *a* cheksiz uzoqlashtirilgan, ya'ni xosmas a_∞ to'g'ri chiziq bo'lsa, hosil bo'lgan chiziqli sirt *silindroid* deyiladi. Silindroid ikki marta qiyshiq silindroidning xususiy holidir. Sirtning hamma to'g'ri chiziqli yasovchilari xosmas to'g'ri chiziqli yasovchining vaziyatini aniqlaydigan parallelizm tekisligiga parallel bo'ladi. Silindroidni aniqlovchilari bilan $\Phi(m, n, a_\infty)$ yoki $\Phi(m, n, P)$ ko'rinishda yozish mumkin.

8.28-rasmda *m* va *n* yo'naltiruvchilari egri chiziqlar va gorizontal proyeksiyalovchi parallelizm tekisligi $M(M_\mu)$ bilan berilgan silinroid sirti tekis chizmada tasvirlangan. Silindroid sirti ustidagi ixtiyoriy $A(A', A'')$ nuqtaning A' proyeksiyasiga asosan uning ikkinchi A'' proyeksiyasi vaziyatini aniqlash uchun shu nuqta orqali sirtning parallelizm tekisligiga parallel bo'lgan yasovchisi o'tkaziladi. So'ngra yasovchining ikkinchi proyeksiyasi va uning ustida berilgan A nuqtaning A'' proyeksiyasi yasaladi.

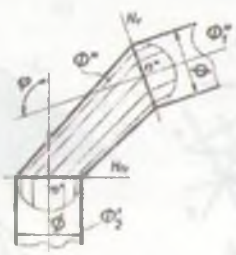
Silindroid sirtlari mashinasozlikda va qurilish amaliyotida keng qo'llaniladi. Truboprovodlarning o'tish qismlarini ulash konstruksiyalarida (8.29-rasm), plug ag'dargichlari sirtlarini hosil qilishda, ba'zi bir gumbaz va arkalarni loyihalashda (8.30-rasm) silindroidlardan foydalanish mumkin.

8.29-rasmda bir xil diametrli va o'qlari φ burchak hosil qiluvchi Φ_1 va Φ_2 aylanma silindrlarning Φ silindroid sirti orqali birlashtirilishi tasvirlangan. Bunda H_{IV} va N_V tekisliklarda yotuvchi m va n aylanalar – silindroid sirtining yo'naltiruvchilari, V tekislik uning parallelizm tekisligidir. Bu silindroid sirtining chizmasini yasash qulay bo'lishi uchun m va n yo'naltiruvchilarni teng 12 bo'lakka bo'lish yo'li bilan sirtning yasovchilari o'tkazilgan.

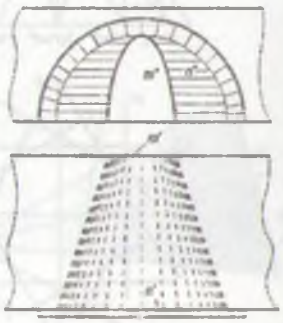
8.30-rasmda n(n′, n″) aylana va m(m′, m″) ellips yo'naltiruvchilari proyeksiya tekisliklariga nisbatan frontal joylashgan hamda H tekislik parallelizm tekisligi bo'lgan silindroid sirti tasvirlangan. Bu tipdagi silindroidlar tunnellar, arkalar va gumbazlar qurishda qo'llaniladi.



8.28-rasm.



8.29-rasm.



8.30-rasm.

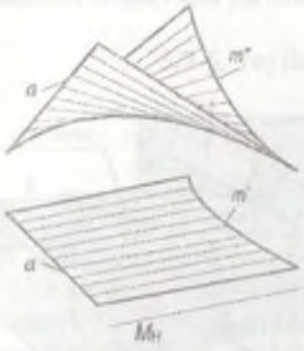
8.6.6. Konoid. Konoid ikki marta qiyshiq konoidning xususiy holi bo'lib, u to'g'ri chiziqli yo'naltiruvchilarning birini cheksiz uzoqlashtirganda hosil bo'ladi. Konoidning to'g'ri va egri chiziqli xos yo'naltiruvchilarini kesib o'tuvchi yasovchilari parallelizm tekisligiga parallel bo'ladi, ya'ni parallelizm tekisligining xosmas chizig'ini ham kesib o'tadi. 8.31-rasmda *a* to'g'ri chiziq va m egri chiziqli yo'naltiruvchilar hamda $M(M_{II})$ parallelizm tekisligi bilan berilgan konoid tekis chizmada tasvirlangan.

Konoid sirti aniqlovchilari bilan $\Phi(m, a, b_z)$ yoki $\Phi(m, a, M)$ ko'rinishida yoziladi. *a* to'g'ri chiziq ixtiyoriy vaziyatda berilishi, *m* egri chiziq tekis yoki fazoviy qilib olinishi mumkin. Ular bir tekislikda yotmasligi shart, aks holda sirt tekislikka aylanadi.

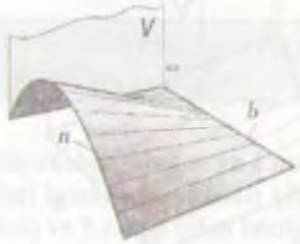
Agar yo'naltiruvchi *a* to'g'ri chiziq proyeksiyalar tekisliklarining birortasiga perpendikulyar bo'lsa, hosil bo'lgan sirt *to'g'ri konoid* deb, perpendikulyar bo'lmasa, *og'ma konoid* deb yuritiladi.

8.32-rasmda *n* parabola va *b* to'g'ri chiziqli yo'naltiruvchilari bilan berilgan konoidning yaqqol tasviri berilgan. Bu sirt uchun V tekisligi parallelizm tekisligi vazifasini o'taydi. Konoidning bunday xususiy hollari ba'zi bino va inshootlar yopmalarida ishlatiladi.

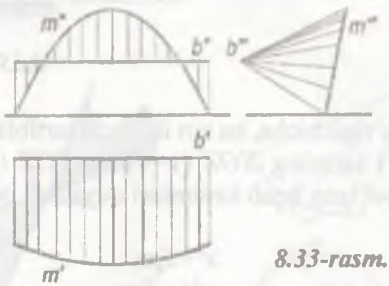
8.33-rasmdagi chizmada tasvirlangan konoid YuNESKOning binosiga kirishdagi ayvonchaning sxematik ko'rinishidir. Bunda konoid sirtini hosil qiluvchi aniqlovchilar *b* to'g'ri chiziq va m egri chiziq bo'lib, uning tekisligi W ga perpendikulyardir.



8.31-rasm.



8.32-rasm.



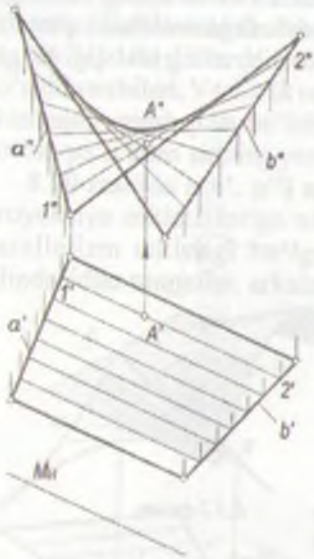
8.33-rasm.

8.6.7. Giperbolik paraboloid. Qiyshiq tekislik sirti — giperbolik paraboloiddir. Giperbolik paraboloid sirti bir pallali giperboloid sirtining xususiy holi bo'lib, bunda to'g'ri chiziqli yo'naltiruvchilarning bittasi cheksiz uzoqlashtirilganda (xosmas to'g'ri chiziq) hosil bo'ladi. Giperbolik paraboloid sirti aniqlovchilar bilan $\Phi(a, b, c_\infty)$ yoki $\Phi(a, b, M)$ ko'rinishida yoziladi. Bu sirt 8.34-rasmda tasvirlangan. Giperbolik paraboloid sirtini biror parabolaning ikkinchi parabola bo'yicha harakatlanishidan ham hosil qilish mumkin.

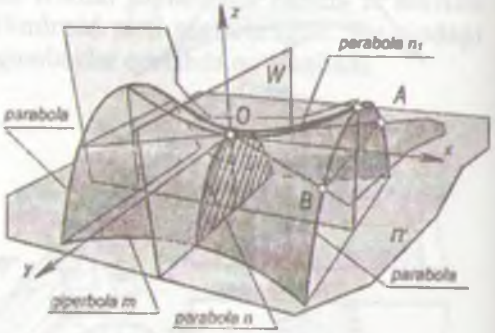
8.35-rasmda tasvirlangan giperbolik paraboloid sirti *n* parabolaning YOZ tekisligiga parallel bo'lib, uchi doim n_1 parabola bo'yicha harakatlanishidan yoki bu sirtni XOY tekisligiga parallel tekisliklardagi *m* giperbolalarning karkasidan hosil bo'lgan deyish ham mumkin. Shunga ko'ra, bu sirt *giperbolik paraboloid* yoki *parabolik giperboloid* deb yuritiladi.

Bu sirtning kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad \text{bunda } p \neq q. \qquad (1)$$



8.34-rasm.



8.35-rasm.

Tenglamadan ko'rinishicha, bu sirt ikkinchi tartiblidir.

Darhaqiqat, (1) sirtning XOZ ($y=0$) va YOZ ($x=0$) tekisliklar bilan kesishganda hosil bo'lgan bosh kesimlari quyidagi parabolalar bo'ladi:

$$x^2=2pz, \tag{2}$$
$$y^2=-2qz. \tag{3}$$

Sirtni XOY ($z=0$) tekislik bilan kesganda

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=0 \tag{4}$$

tenglama hosil bo'ladi. Bu esa quyidagi ikki to'g'ri chiziqni ifodalaydi:

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0 \quad \text{va} \quad \frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=0.$$

Sirtni XOY tekisliklariga parallel, ya'ni $z=h$ tekisliklar bilan kesganda kesimda

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2h \tag{5}$$

giperbola hosil bo‘ladi.

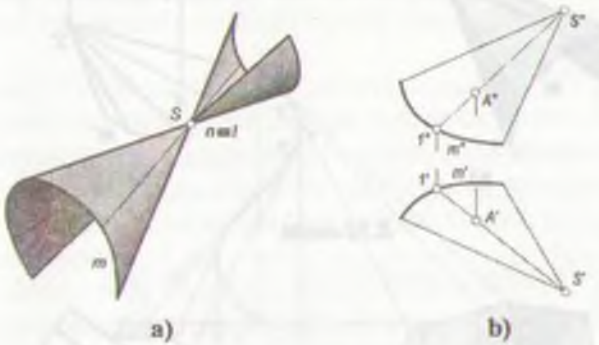
Giperbolik paraboloid sirtidan qurilish amaliyotida, arxitektura binolari va inshootlarining yopmalari sifatida keng foydalaniladi.

Parallelizm tekisligiga ega bo‘lgan sirtlar belgiyalik geometr olim nomi bilan *Katalan sirtlari* deb yuritiladi.

8.7-§. Yoyiladigan chiziqli sirtlar

Ta'rif. Cheksiz yaqin yasovchilari o'zaro kesishgan yoki o'zaro parallel bo'lgan sirt yoyiluvchi sirt deyiladi.

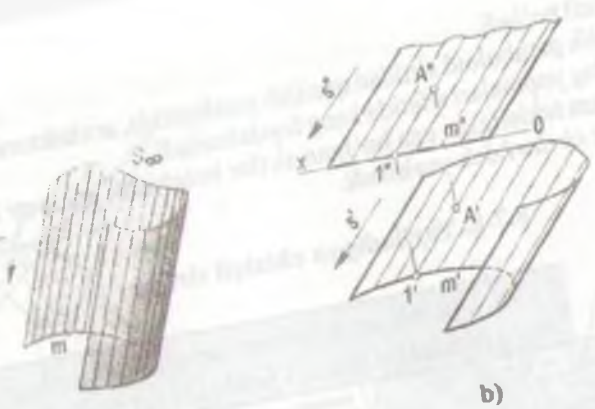
Uch yo‘naltiruvchi sirtning m, n, *l* yo‘naltiruvchilaridan *n* va *l* nuqta bo‘lib, ular ustma-ust tushsa, uning yasovchilari konus sirtini hosil qiladi (8.36-a rasm). Shuning uchun konus *m* egri chiziq va S nuqta bilan beriladi. Uning aniqlovchilari Φ(*m*, S) bo‘ladi. 8.36-b rasmda *m(m′, m″)* yo‘naltiruvchi va S(S′, S″) uchi bilan berilgan konusning tekis chizmada berilishi va sirtda nuqta tanlash ko‘rsatilgan.



a) b)

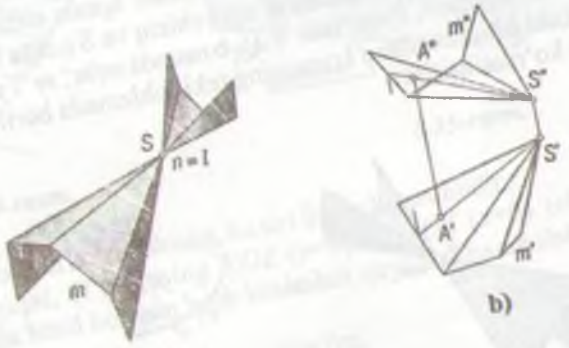
8.36-rasm.

Agar S nuqta biror s yo‘nalishda cheksiz uzoqlashtirilsa, *m* egri chizig‘ini kesib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar (yasovchilar) s yo‘nalishiga parallel bo‘lib qoladi. Konusning bu xususiy holi *silindr* deb yuritiladi (8.37-a rasm). 8.37-b rasmda silindrning tekis chizmada berilishi ko‘rsatilgan. Demak, silindr o‘z yo‘naltiruvchisi va yasovchisining yo‘nalishi bilan beriladi: 8.36-a rasmdagi *m* yo‘naltiruvchi siniq chiziq bo‘lsa, hosil bo‘lgan sirt *piramida* (8.38-a rasm) deb yuritiladi. 8.38-b rasmda piramidaning ortogonal proyeksiyalarda berilishi ko‘rsatilgan. Agar uchi biror s yo‘nalishda cheksiz uzoqlashtirilsa, piramidaning qirralari o‘zaro parallel bo‘lib qoladi va bu sirt *prizma* deb ataladi (8.39-a rasm). Prizmaning chizmada berilishi 8.39-b rasmda ko‘rsatilgan.



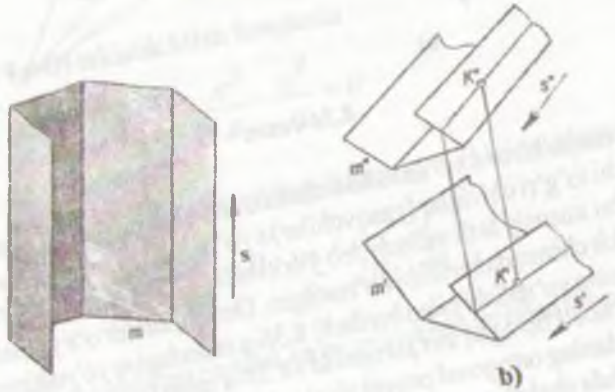
a) b)

8.37-rasm.



a) b)

8.38-rasm.



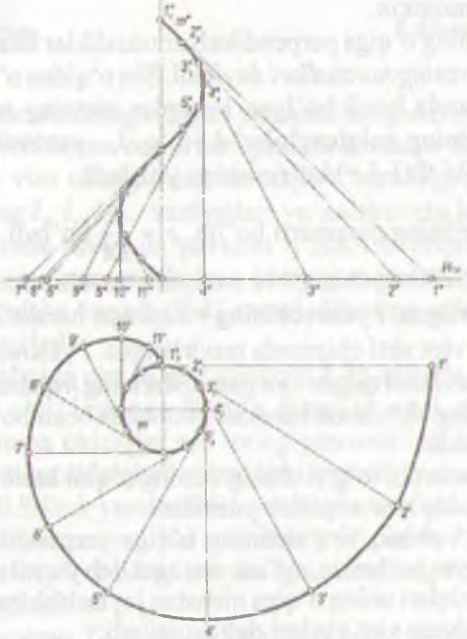
a) b)

8.39-rasm.

8.7.1. Qaytish qirrali yoyiladigan chiziqli sirtlar. Torslar.

Ta'rif. Biror fazoviy egri chiziqqa urinib o'tuvchi chiziqlar to'plamidan hosil bo'lgan sirt qaytish qirrali sirt deb ataladi.

Qaytish qirrali sirtlar *torslar* deb ham ataladi. Bunda fazoviy egri chiziq sirtning yo'naltiruvchisi, urinma chiziqlar esa uning yasovchilari bo'ladi (8.40-rasm). Sirtning cheksiz ikki yaqin urinma chiziqlari o'zaro kesishganligi uchun qaytish qirrali sirt yoyiluvchi bo'ladi. Tors ham 8.40-rasmdagi umumiy holda berilgan chiziqli sirtning xususiy holidir. Bunda m va n egri chiziqlar ustma-ust tushadi va l cheksiz uzoqlashgan, ya'ni xosmas l_∞ egri chiziq bo'lib, uning vaziyati yo'naltiruvchi konus orqali beriladi. Tors sirtini yasash uchun yo'naltiruvchi konusni shunday tanlash mumkinki, bunda konusning yasovchilariga mos ravishda parallel qilib yo'naltiruvchi, egri chiziqqa urinma qilib sirtning yasovchilari o'tkaziladi. Bunga yoyiluvchi gelikoid (8.41-rasm) misol bo'la oladi. Tors to'g'ri chiziqning egri chiziqqa uzluksiz urinib harakatlanishi davomida qoldirgan izi sifatida qaraladi. Tors sirtining qaytish qirrasi biror chekli nuqta bo'lganda konus sirti hosil bo'ladi. Sirtning hamma yasovchilari chekli nuqtadan o'tadi va u konusning uchi hisoblanadi.



8.40-rasm.

Qaytish qirrasi biror cheksiz nuqta bo'lsa, silindrik sirt hosil bo'ladi. Silindrik sirtning hamma yasovchilari o'zaro parallel bo'ladi.

8.7.2. Vint sirtlari. Biror doimiy o'qqa parallel holda ilgarilanma va shu o'qqa nisbatan aylanma harakatlar natijasida hosil bo'lgan harakat *vintsimon harakat* deyiladi.

Ta'rif. Biror chiziqning vintsimon harakati natijasida hosil bo'lgan sirt vint sirti deyiladi.

Vintsimon harakatlanuvchi chiziq sirtning yasovchisi bo'ladi. Chiziqning ilgarilanma harakati va burilish burchagi $\Delta h=k\wedge\beta$ bog'lanishda bo'ladi. Bunda Δh – yasovchining Δt vaqtdagi chiziqli va $\Delta\beta$ burchakli siljishlari, k – proporsionallik koeffitsientidir. Agar k koeffitsient o'zgarmas (yoki o'zgaruvchi) miqdor bo'lsa, o'zgarmas (yoki o'zgaruvchi) qadamli *vint sirti* hosil bo'ladi.

Yasovchining bir marta to'la aylanishida bosib o'tgan h masofa *vint sirtining qadami* deb ataladi.

Vintsimon harakat davomida yasovchining har bir nuqtasi vint chizig'ini hosil qilib, ular *vint sirtining parallellari* deb ataladi. Bu vint parallellarining qadami o'zaro teng bo'ladi va ayni bir vaqtda vint sirtining qadamiga ham tengdir.

Vint sirtining karkasini yasovchi egri chiziqlar oilasi va vint parallellari oilasi bilan berish mumkin.

Vint sirtining uning o'qiga perpendikulyar tekisliklar bilan kesganda hosil bo'lgan kesimlari *sirtning normallari* deyiladi. Sirt o'qidan o'tuvchi tekisliklar dastasi bilan kesganda hosil bo'lgan kesimlar *sirtning meridianlari* deb yuritiladi. Vint sirtining aniqlovchilari i – o'q, l – yasovchi *va* h – qadam bo'lib, $\Phi(i, l, h)$ yoki $\Phi(i, l, r)$ ko'rinishida yoziladi.

Bunda r vint sirtining parametri bo'lib, $r = \frac{h}{2\pi}$ bo'ladi.

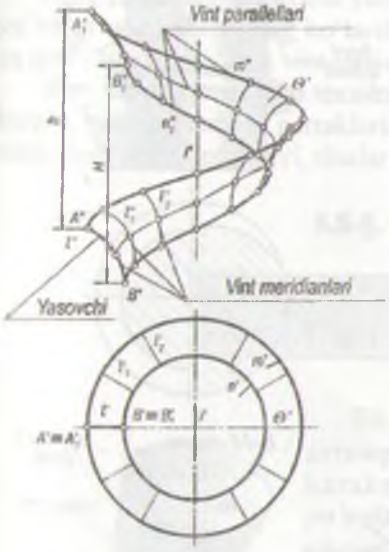
8.41-rasmda $i(i', i'')$ o'q chizig'i va u orqali o'tuvchi tekislikda yotgan $l(l', l'')$ egri chizig'i berilgan. l yasovchining vintsimon harakati natijasida hosil bo'lgan $\theta(\theta', \theta'')$ vint sirti chizmada tasvirlangan. l yasovchining $A(A', A'')$ va $B(B', B'')$ nuqtalari hosil qilgan vint parallellarining h qadami o'zaro tengdir.

To'g'ri chiziqning vintsimon harakati natijasida hosil bo'lgan vint sirtlari *gelikoid* deb yuritiladi.

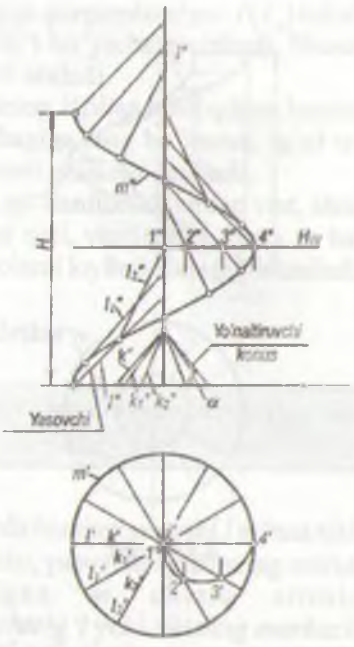
Vint sirtining yasovchi to'g'ri chizig'i uning o'qini kesib o'tsa, *yopiq vint sirti* va kesmasa, *ochiq vint sirti* deb yuritiladi.

Yasovchi to'g'ri chiziq vint sirtining o'qiga perpendikulyar bo'lsa — *to'g'ri*, perpendikulyar bo'lmasa, *og'ma vint sirti* deb yuritiladi. Vint sirtining yasovchi to'g'ri chiziqlari uning o'qiga nisbatan joylashishiga qarab Arximed. evolventa va konvolyuta vint sirtlari deb yuritiladi.

8.42-rasmda sirtni aniqlovchi yo'naltiruvchilar sifatida i o'q chiziq, m vint chizig'i va yo'naltiruvchi konus sirti berilgan.



8.41-rasm.

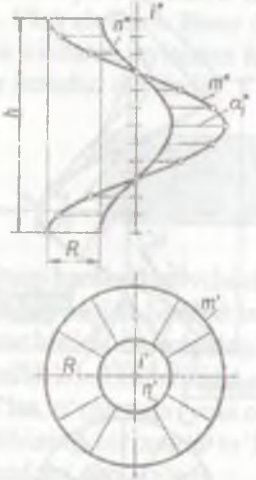


8.42-rasm.

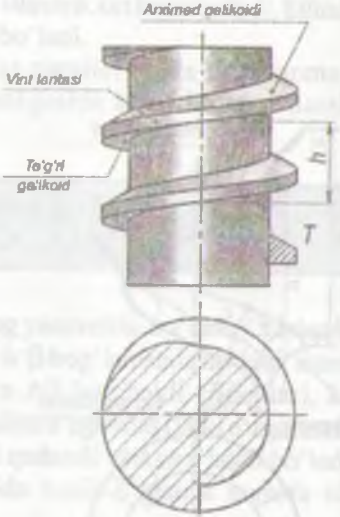
Uchinchi yo'naltiruvchining vaziyati yasovchilari gorizontal tekislik bilan α burchak hosil qiluvchi konus orqali berilgan. Bu konus *yo'naltiruvchi konus* deyiladi. α burchak vint chizig'ining ko'tarilish burchagi β ga teng emas ($\alpha \neq \beta$). l yasovchining l_1, l_2, l_3, ... vaziyatlari yo'naltiruvchi konusning k_1, k_2, k_3, yasovchilariga mos ravishda parallel o'tkazish orqali yasaladi. Bu gelikoidni uning o'qiga perpendikulyar biror gorizontal $H_1(H_{1V})$ tekisligi Arximed spirali bo'yicha kesadi (8.42-rasm). Shuning uchun ham bu sirt *Arximed vint sirti* deyiladi.

Parallelizm tekisligiga ega to'g'ri gelikoid 8.43-rasmda ko'rsatilgan. U ikki silindr bilan cheklangan. Bunda fazoviy egri chiziq sirtning yo'naltiruvchisi, urinma chiziqlar esa uning yasovchilari bo'ladi. Sirtning cheksiz ikki yaqin urinma chiziqlari o'zaro kesishganligi uchun qaytish qirrali sirt yoyiluvchi bo'ladi.Silindr yasovchilari orasidagi masofa bo'lgan R kesmaga vintsimon harakat berilsa, uning ikki uchi *m(m', m'')* va *n(n', n'')* chiziqlarni hosil qiladi. Silindrlar orqali sirtidagi ana shu ikki vint chizig'i bilan cheklangan qismi *vint lentasi* deyiladi.

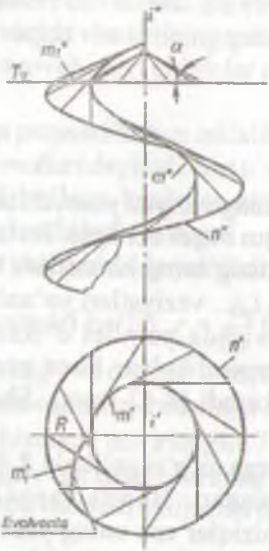
O'q tekisligida yotgan *T* trapetsiyaga silindr bo'ylab vintsimon harakat berilsa, u vint hosil qiladi (8.44-rasm). Bu vint Arximed gelikoidi, vint lentasi, to'g'ri gelikoidlar bilan cheklangan bo'ladi.



8.43-rasm.



8.44-rasm.



8.45-rasm.

8.45-rasmda ochiq og'ma gelikoid tasvirlangan. Bunda yo'naltiruvchi konusning gorizontal tekislik bilan hosil qilgan α burchagi vint chizig'ining (m yo'naltiruvchining) ko'tarilish burchagi β ga teng (α=β). Shuning uchun ham yasovchilar hamma vaziyatlarida yo'naltiruvchi vint chizig'iga urinadi. Bunday holda yo'naltiruvchi vint chiziq qaytish qirrasi bo'ladi. Hosil bo'lgan sirt esa yoyiladigan chiziqli sirtga (torsga) aylanadi. Bunday

gelikoid *tors-gelikoid* deyiladi. Uning o'qiga perpendikulyar $T(T_v)$ tekislik sirt bilan $m(m_1', m_1'')$ evolventa egri chizig'i bo'yicha kesishadi. Shuning uchun bu sirt *evolventali gelikoid* ham deb ataladi.

Agar yo'naltiruvchi konus yasovchilarining H bilan hosil qilgan burchagi yo'naltiruvchi chiziqning ko'tarilish burchagiga teng bo'lmasa, ya'ni $\alpha \neq \beta$ va $\alpha \neq 90°$, hosil bo'lgan vint sirti *konvolyutali gelikoid* deyiladi.

Vint sirtlari qurilish va texnikada keng qo'llaniladi. Ulardan vint, shnek, burg'u, prujina, turbina parraklarining yassi sirti, ventilyator, kema va havo vintlarining ishchi organlari, zinalar va hokazolarni loyihalashda foydalaniladi.

8.8-§. Siklik sirtlar

Ta'rif. Aylana markazi biror chiziq bo'ylab harakatlanishidan hosil bo'lgan sirt siklik sirt deyiladi.



8.46-rasm.

Siklik sirtlarda harakatlanuvchi *l* aylana siklik sirtning *yasovchisi*, yasovchi aylananing markazi harakatlanadigan *m* chiziq sirtning *yo'naltiruvchi chizig'i* yoki sirtning *markazlar chizig'i* deb yuritiladi (8.46-rasm). Harakat davomida yasovchi aylananing radiusi o'zgaruvchan va o'zgarmas bo'lishi mumkin.

Siklik sirt aniqlovchilari bilan $\Phi(m, R)$ ko'rinishida yoziladi.

Siklik sirtni berish uchun uning yasovchisi markazining harakat qonuni va radiusining o'zgarish funksiyasi berilgan bo'lishi zarur. Siklik sirtlarning karkasi aylanalardan iborat.

Aylanish sirtlari ham siklik sirtlar turiga kiradi.

Aylanish sirtlarining o'zgaruvchi yoki o'zgarmas parallellari siklik sirtning yasovchilari bo'ladi. Aylanish o'qi sirtning markazlar chizig'i hisoblanadi.

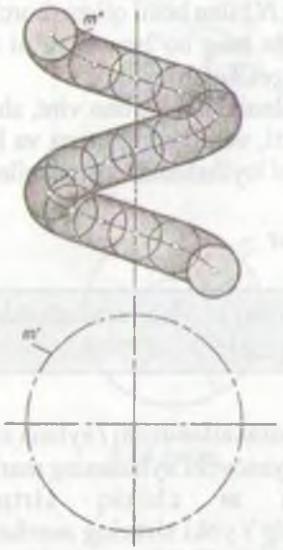
Ikkinchi tartibli aylanish sirtlarini va doiraviy kesimga ega bo'lgan umumiy holdagi ikkinchi tartibli sirtlarni ham siklik sirt deb qarash mumkin.

Agar yasovchi aylananing tekisligi yo'naltiruvchi *m* chiziqqa doim perpendikulyar bo'lsa, hosil bo'lgan sirt *naysimon sirt* bo'ladi (8.46-rasm). Naysimon sirt siklik sirtning xususiy holidir. O'zgaruvchan radiusli naysimon sirtni berish uchun markazlar chizig'i m va yasovchi *l* aylana radiusining o'zgarish qonuniyati berilgan bo'lishi zarur.

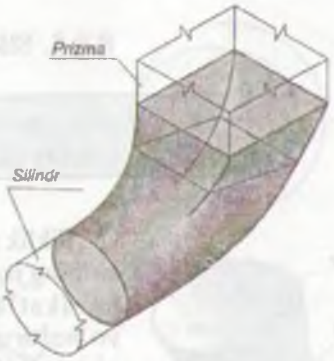
Naysimon sirt yasovchisining radiusi o'zgarmas bo'lsa, hosil bo'lgan sirt *truba* deb yuritiladi (8.47-rasm).

Aylanma silindrni o'qi to'g'ri chiziq bo'lgan trubali sirt deyish mumkin. Sferaning vint chizig'i bo'yicha harakatidan vintli truba sirti hosil bo'ladi (8.47-rasm). Vintsimon trubali sirtga prujina misol bo'la oladi.

Siklik sirtning yana bir turi *kanal sirtdir.* Kanal sirtning shakli bir tekis uzluksiz o'zgarib boruvchi yopiq chiziqning harakatidan hosil bo'ladi.



8.47-rasm.



8.48-rasm.

8.48-rasmda ikkinchi tartibli silindr va to'rtburchakli prizma sirtlarini ulaydigan mufta vazifasini bajaruvchi kanal sirtining yaqqol tasviri ko'rsatilgan.

Nazorat savollari

1. Sirtlar qanday hosil bo'ladi?
2. Sirtning yasovchisi va yo'naltiruvchisi nima?
3. Sirtlar hosil bo'lishining qanday usullari mavjud?
4. Sirtlarni hosil qilishning kinetik usulini tushuntirib bering.
5. Aylanish sirtlari nima va ularga misollar keltiring.
6. Aylanish sirtlarining xarakterli chiziqlari nima?
7. Chiziqli va chiziqli bo'lmagan sirtlarning farqi nimada?
8. Qanday sirtlar yoyiladigan sirtlar deyiladi?
9. Vint sirtining hosil bo'lishini tushuntirib bering.
10. Bir pallali va ikki pallali giperboloid sirtlar qanday hosil bo'ladi?
11. Siqiq va cho'ziq ellipsoidlarning farqi nimada?
12. To'g'ri chiziq kesmasini aylantirish yo'li bilan qanday sirtlar hosil bo'lishi mumkin?
13. Ikkinchi tartibli sirtlarga qanday sirtlar kiradi?
14. Sirtga tegishli bo'lgan yuzadagi nuqta qanday aniqlanadi?
15. Tor va tors sirtlarning farqi nimada?



IX BOB. SIRTLARNING TEKISLIK VA TO‘G‘RI CHIZIQ BILAN KESISHISHI

9.1-§. Umumiy ma’lumotlar

Sirtlarning tekislik bilan kesishish chizig‘i to‘g‘ri chiziq, siniq chiziq va egri chiziq tarzidagi tekis shakllardan iborat bo‘lishi mumkin. Bu hol tekislik bilan qanday sirtning kesishishiga va sirt bilan tekislikning o‘zaro vaziyatiga bog‘liq.

Sirt bilan tekislik kesishish chizig‘ining shaklini uni yasashdan oldin bilish mumkin. Shunga ko‘ra, uni yasashning biror usuli tanlanadi. Agar kesishish chizig‘i to‘g‘ri chiziq bo‘lsa, uning ikki nuqtasi, siniq chiziq bo‘lsa, uning sinish nuqtalari (uchlari), egri chiziq bo‘lsa, uning tayanch (xarakterli) va bir necha ixtiyoriy nuqtalari topilib, ular o‘zaro tutashtiriladi.

Egri chiziqli sirtlarning tekislik bilan kesishish chizig‘i umumiy holda egri chiziqdan iborat bo‘ladi. Bu chiziqni yasash uning tayanch nuqtalarini topishdan boshlanadi. Tayanch nuqtalarga sirtlarning chetki yasovchilari – ocherklariga tegishli nuqtalar va proyeksiyalar tekisliklaridan eng uzoq va eng yaqin masofalarda bo‘lgan nuqtalar kiradi. Qolgan nuqtalar oraliq nuqtalar hisoblanadi.

Yuqorida qayd qilingan nuqtalar sirtga tegishli bo‘lganligi sababli bu nuqtalar shu sirtning yasovchilari, karkaslari, parallellari, meridianlari va h.k. chiziqlariga ham tegishli bo‘ladi. Shuning uchun sirtning tekislik bilan kesishish chizig‘ini yasash sirt bilan tekislikning kesishish nuqtalarini topishdan iborat bo‘ladi.

Chiziqli sirtning tekislik bilan kesishish chizig‘ini yasash uchun sirtning har bir yasovchisi bilan tekislikning kesishish nuqtalarini aniqlash lozim.

Demak, tekislikning ko‘pyoqlik yoki egri chiziqli sirtlar bilan kesishish chizig‘ini yasash to‘g‘ri chiziq yoki egri chiziqning tekislik bilan kesishish nuqtalarini topishga asoslanadi.

9.2-§. Sirtlarning proyeksiyalovchi tekisliklar bilan kesishishi

Odatda, kesim chizig‘i konturining proyeksiyalarini yasash uning tayanch nuqtalarini topishdan boshlanadi.

Agar sirtni kesuvchi tekislik proyeksiyalovchi bo‘lsa, kesim chizig‘ining proyeksiyalarini yasash soddalashadi, chunki bu holda kesishish chizig‘ining proyeksiyalaridan biri to‘g‘ri chiziq kesmasidan iborat bo‘ladi.

Quyida ba’zi sirtlarning proyeksiyalovchi tekisliklar bilan kesishishini ko‘rib chiqamiz.

1-masala. Og‘ma elliptik konusning $H_1(H_{IV})$ gorizontal tekislik bilan kesishish chizig‘i yasalsin (9.1-rasm).

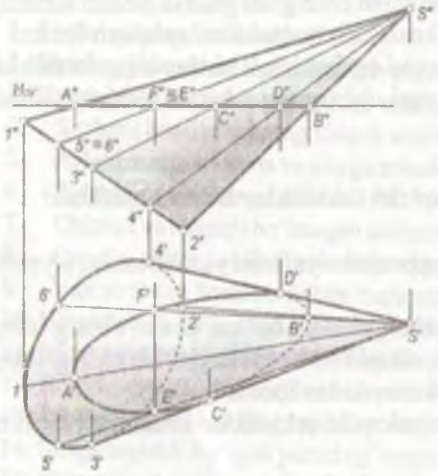
Yechish. Konusning bir necha yasovchilari o'tkaziladi va ularning kesuvchi tekislik bilan kesishish nuqtalari belgilanadi.

Kesishish chizig'ining A″B″ frontal proyeksiyasi kesuvchi tekislikning frontal izi bilan ustma-ust tushadi. A(A′, A″) va B(B′, B″) nuqtalar kesimni o'ng va chap tomondan chegaralovchi nuqtalardir. Ularning A′ va B′ gorizontal proyeksiyasi ular orqali o'tuvchi S1 va S2 yasovchilarning gorizontal proyeksiyalari S′1′ va S′2′ larda bo'ladi. Konusning gorizontal ocherk yasovchilari S′3′, S′4′ bilan H_I tekislikning kesishish nuqtalarini yasash uchun bu yasovchilarning frontal S″3″ va S″4″ proyeksiyalari bilan tekislik H_{II} izining kesishish nuqtalari C″ va D″ lar belgilab olinadi. Bu nuqtalardan proyeksion bog'lanish chiziqlari o'tkaziladi va ularning S′3′, S′4′ yasovchilar bilan kesishgan C′ va D′ nuqtalari topiladi.

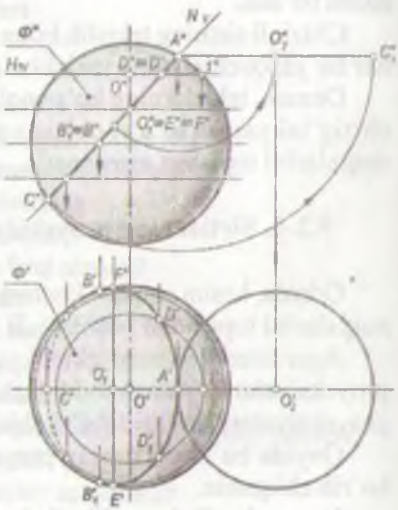
Kesimning oraliq nuqtalarini yasash uchun A″B″ kesmada ixtiyoriy E″≡F″ nuqtalar belgilab olinadi. Bu nuqtalar orqali S″5″≡S″6″ yasovchilarning frontal proyeksiyalari o'tkaziladi, so'ngra ularning S′5′ va S′6′ gorizontal proyeksiyalari ustida E′ va F′ belgilab olinadi. Shu tarzda yana bir necha nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari yasaladi.

Gorizontal proyeksiyada kesimning ko'rinishligi quyidagicha aniqlanadi: konusning 4′, 6′, 1′, 5′ va 3′ nuqtalaridan o'tgan yasovchilarga tegishli D′, F′, A′, E′ va C′ nuqtalar ko'rinadi. Qolgan nuqtalar esa ko'rinmaydi. Shunga asosan kesimning D′, F′, A′, E′, C′ qismi uzluksiz tutash chiziq bilan, D′, B′, C′ qismi esa shtrix chiziq bilan tekis tutashtiriladi.

2-masala. Sferaning N_ν frontal proyeksiyalovchi tekislik bilan kesishuv chizig'i proyeksiyalari yasalsin (9.2-rasm).



9.1-rasm.



9.2-rasm.

Yechish. Kesimning A″C″ frontal proyeksiyasi tekislikning N_v frontal izi bilan ustma-ust tushadi. Kesimning gorizontal proyeksiyasi esa nuqtalarning sferaga tegishlilik shartiga ko'ra yasaladi. B va B_1 nuqtalar sferaning ekvatoriga tegishli bo'lganligi uchun ularning B′ va B_1′ gorizontal proyeksiyalari gorizontal proyeksiyaning ocherkida belgilab olinadi. A va C nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari A′ va C′ nuqtalar esa sfera bosh meridianining gorizontal proyeksiyasida yotadi.

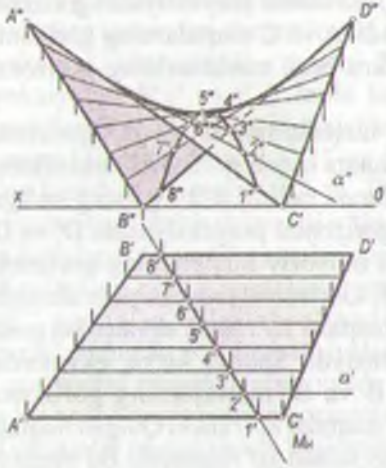
Kesimga tegishli ixtiyoriy D va D_1 nuqtalarning D′ va D_1′ gorizontal proyeksiyalarini yasash uchun D″≡D_1″ nuqta orqali gorizontal tekislikning H_{IV} frontal izi o'tkaziladi. Bu tekislik sferani radiusi 0″1″ ga teng bo'lgan aylana bo'yicha kesadi. Bu aylananing gorizontal proyeksiyasida D′ va D_1′ nuqta hosil qilinadi. Oraliqdagi boshqa ixtiyoriy nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari ham xuddi shunday yasaladi. Gorizontal proyeksiyada sferaning ekvatoridan yuqorida joylashgan hamma nuqtalar ko'rinadi, ekvatordan pastki qismida joylashgan nuqtalar esa ko'rinmaydi. Shunga ko'ra, ekvatordan yuqorida joylashgan A, D, D_1, E, F, B va B_1 nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari A′, D′, D_1′, E′, F′, B′ va B_1′ nuqtalar ko'rinadi. Qolgan nuqtalar esa ekvatorning pastki qismida yotganligi uchun ko'rinmaydi. Bu yerda A, B, B_1 va C lar tayanch nuqtalar bo'ladi. Rasmda kesim yuzining haqiqiy kattaligini yasash aylantirish usulida bajarib ko'rsatilgan.

3-masala. V parallelizm tekisligiga ega bo'lgan giperbolik paraboloidning M(M_{II}) gorizontal proyeksiyalovchi tekislik bilan kesishish chizig'i proyeksiyalari yasalsin (9.3-rasm).

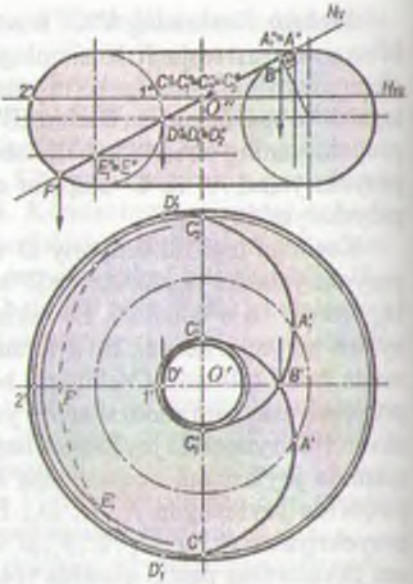
Yechish. Kesishish chizig'ining gorizontal proyeksiyasi tekislikning M_{II} izi bilan ustma-ust tushadi. Uning frontal proyeksiyasini yasash uchun giperbolik paraboloid (qiyshiq tekislik) ning bir necha yasovchilari o'tkazilib, ularning M tekislik bilan kesishish nuqtalari belgilanadi. Masalan, qiyshiq tekislik *a(a′, a″)* yasovchisining M tekislik bilan kesishish nuqtasini yasash uchun *a′* yasovchi va kesuvchi tekislikning M_{II} gorizontal izining kesishish nuqtasi 2′ belgilab olinadi. So'ngra 2′ nuqtadan proyeksion bog'lanish chizig'i chiqarilib, *a″* dagi frontal proyeksiyasi 2″ aniqlanadi. Kesimning 3(3′, 3″)...7(7′, 7″) nuqtalarini yasash 2(2′, 2″) nuqtani yasash kabi bajariladi.

4-masala. Torning frontal proyeksiyalovchi N(N_v) tekislik bilan kesishish chizig'i proyeksiyalari yasalsin (9.4-rasm).

Yechish. Kesishish chizig'ining frontal proyeksiyasi tekislikning frontal izi N_v bilan ustma-ust tushgan. Uning gorizontal proyeksiyasini yasash uchun frontal proyeksiyada tayanch nuqtalarning A″≡A_1″, B″, D″≡D_1″≡D_2″ va F″ frontal proyeksiyalari belgilab olinadi. Bu nuqtalar torga tegishli bo'lganligi uchun ularning gorizontal proyeksiyalarini yasash qiyin emas. Oraliqdagi ixtiyoriy nuqtalarning proyeksiyalari esa quyidagicha yasaladi: kesimning frontal proyeksiyasida ixtiyoriy C″≡C_1″≡C_2″≡C_3″ nuqtalar belgilanadi. Keyin ular orqali yordamchi gorizontal H_1 tekislikning H_{IV} izi o'tkaziladi. Bu tekislik torni radiuslari 0″1″ va 0″2″ kesmalarga teng bo'lgan aylanalar (parallellar) bo'yicha kesadi. Bu aylanalarning



9.3-rasm.



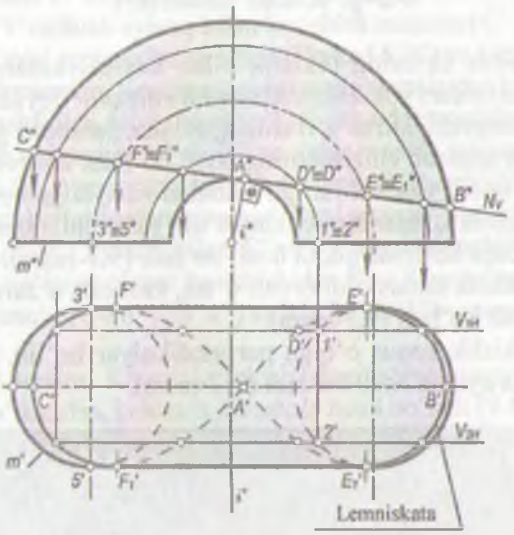
9.4-rasm.

gorizontal proyeksiyalarini yasab, $C''\equiv C_1''\equiv C_2''\equiv C_3''$ nuqtalardan tushirilgan proyeksion bog'lovchi chiziq bilan kesishish nuqtalari C', C'_1, C'_2 va C_3' lar belgilab olinadi.Xuddi shuningdek, boshqa oraliq nuqtalar ham yasaladi. Hosil bo'lgan nuqtalarning ko'rinishligini torning ekvatoriga nisbatan aniqlab, ularni tekis egri chiziq bilan tutashtirsak, u holda *Paskal chig'anog'i* deb nomlangan egri chiziq hosil bo'ladi.

5-masala. Berilgan tor sirtining $N(N_v)$ tekislik bilan kesishish chizig'i proyeksiyalari yasalsin (9.5-rasm).

Yechish. Chizmadan ko'rinib turibdiki, kesuvchi tekislik torning ichki konturiga urinma vaziyatda o'tkazilgan. Bu holda torning bunday kesimi *lemniskata egri chizig'i* deb yuritiladi.

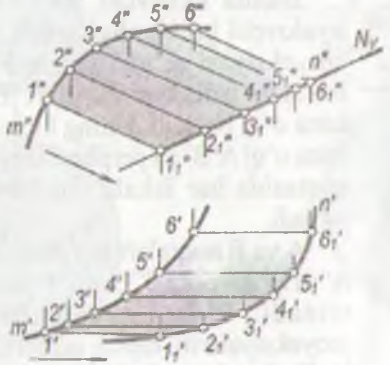
Kesishish chizig'ining frontal proyeksiyasi kesuvchi tekislikning N_v frontal izi bilan ustma-ust tushadi. Uning gorizontal proyeksiyasini yasash uchun tor V_1, V_2 yordamchi frontal tekisliklar bilan kesiladi. Hosil bo'lgan parallellarning $N(N_v)$ tekislik bilan kesishish nuqtalari A'', B'', C'', D'', E'' va F'' lar belgilanadi. So'ngra bu nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari tegishli tekisliklar izlarida topiladi va o'zaro silliq chiziq bilan tutashtiriladi. Gorizontal proyeksiyada kesishuv chizig'ining ko'rinishligi aniqlanadi. Bu lemniskata deb nomlangan egri chiziqdir. Bunda tor yasovchisi *m(m', m'')* ning *m'* gorizontal proyeksiyasiga tegishli 3'...4'...5'... nuqtalardan o'tgan parallellardagi F_1'...C'...F' va E_1'...B'...E' nuqtalar ko'rinadi. Qolgan nuqtalar esa ko'rinmaydi.



9.5-rasm.

6-masala. Ixtiyoriy silindrik sirt $m(m', m'')$ yo'naltiruvchisi va yasovchilarining yo'nalishi bilan berilgan. Mazkur sirtning $N(N_V)$ frontal proyeksiyalovchi tekislik bilan kesishish chizig'i proyeksiyalari yasalsin (9.6-rasm).

Yechish. Bu sirtning $N(N_V)$ tekislik bilan kesishish chizig'ining proyeksiyalarini yasash uchun $m(m', m'')$ yo'naltiruvchi chiziqda ixtiyoriy $1(1', 1'')$, $2(2', 2'')$, $3(3', 3'')$... nuqtalarni belgilab hamda ular orqali silindrning yasovchilarini o'tkazib, bu yasovchilarning berilgan $N(N_V)$ tekislik bilan kesishish nuqtalari $1_1(1_1', 1_1'')$, $2(2_1', 2_1'')$, $3(3_1', 3_1'')$... lar belgilab olinadi va ular $n(n', n'')$ tekis egri chiziq bilan tutashtiriladi.



9.6-rasm.

9.3-§. Konus kesimlari

Doiraviy konus sirtining tekislik bilan kesishishidan hosil bo‘lgan chiziqlar *konus kesimlari* yoki *ikkinchi tartibli chiziqlar* deyiladi. Bu chiziqlar oilasiga o‘zaro kesuvchi ikki to‘g‘ri chiziq, aylana, parabola, giperbola, ellips kiradi. Bu oilaga mansub chiziqlarning hosil bo‘lishi kesuvchi tekislikning konus o‘qiga va uning yasovchilariga nisbatan vaziyatiga bog‘liq bo‘ladi.

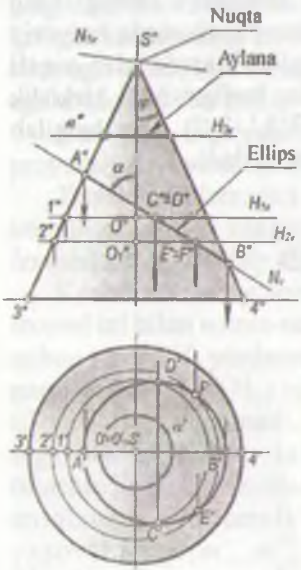
Kesuvchi tekislik konusning uchidan o‘tib, yasovchilardan birortasi bilan kesishmasa, u holda kesimda nuqta hosil bo‘ladi (9.7-rasm).

Kesuvchi tekislik konus o‘qi orqali o‘tsa, kesimda o‘zaro kesuvchi ikki to‘g‘ri chiziq hosil bo‘ladi (9.7-rasm).

Kesuvchi tekislik konus o‘qiga perpendikulyar bo‘lib, uning uchidan o‘tmasa, kesimda aylana hosil bo‘ladi (9.7-rasm).

Teorema. Aylanma konusning tekislik bilan kesishuvidan hosil bo'lgan kesimning konus o'qiga perpendikulyar bo'lgan tekislikdagi to'g'ri burchakli proyeksiyasi 2-tartibli egri chiziq bo'lib, uning fokuslaridan biri konus uchining shu tekislikdagi proyeksiyasi bo'ladi.

Elliptik kesim. Kesuvchi tekislik bilan konus o‘qi orasidagi α burchak konus yasovchilari va o‘qi orasidagi φ burchakdan katta ($\alpha > \varphi$) bo‘lsa, kesimda *ellips* hosil bo‘ladi.



9.7-rasm.

Kesuvchi tekislik konusning barcha yasovchilarini kesib, $\alpha \neq 90^0$ bo‘lsa, kesimda *ellips* hosil bo‘ladi (9.7-rasm).

To‘g‘ri doiraviy konusning $N(N_V)$ frontal proyeksiyalovchi tekislik bilan kesishish chizig‘ini yasash 9.7-rasmda ko‘rsatilgan.

Bunda kesuvchi tekislik frontal proyeksiyalovchi bo‘lganligi sababli ellipsning frontal proyeksiyasi to‘g‘ri chiziq kesmasi A″B″ dan iborat bo‘ladi. Ayni vaqtda A″B″ kesma ellipsning katta o‘qi bo‘ladi. Uning kichik o‘qi C′D′ kesma katta o‘qi A′B′ ga perpendikulyar bo‘lib, kesishish nuqtasida har ikkala o‘q bir-birini teng ikkiga bo‘ladi.

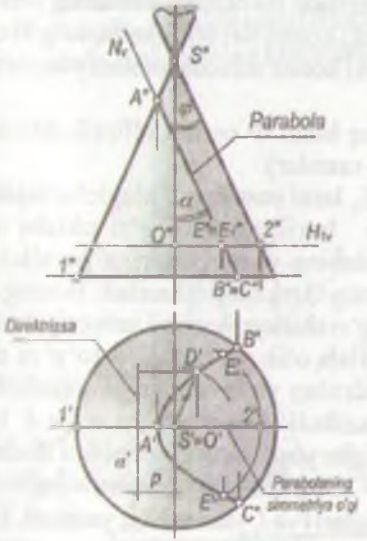
A va B nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari A′ va B′ bevosita S′3′ va S′4′ yasovchilarda belgilab olinadi. C va D nuqtalarning gorizontal proyeksiyalarini topish uchun C″≡D″ nuqta orqali $H_1(H_{1V})$ gorizontal tekislik o‘tkaziladi. Radiusi 0″1″ kesmaga teng bo‘lgan aylana 0′ markaz

bo'yicha chiziladi. C″≡D″ nuqtadan proyeksion bog'lanish chizig'i o'tkazilib, uning 0″1″=0′1′ radiusli aylana bilan kesishish nuqtalari C′ va D′ lar belgilab olinadi. Gorizontal proyeksiyada ellipsni katta (A′B′) va kichik (C′D′) o'qlari bo'yicha yasash mumkin. Kesimga tegishli oraliq nuqtalardan bir nechtasi yasalib, ular o'zaro tutashtirilsa, ellips hosil bo'ladi. Shunday nuqtalardan E′ va F′ larni yasashni ko'rib chiqaylik. A″ va B″ nuqtalar orasida ixtiyoriy E″≡ F″ nuqta olib, u orqali $H_2(H_{2V})$ gorizontal tekislik o'tkaziladi. Bu tekislikning konus bilan kesishish chizig'i bo'lgan aylananing gorizontal proyeksiyasi bo'lgan 0″2″ radiusli aylana chiziladi. Bu aylana bilan E″≡F″ nuqtadan tushirilgan proyeksion bog'lanish chizig'ining o'zaro kesishishidan E va F nuqtalar hosil bo'ladi. Bu nuqtalarni konusning S4(S′4′, S″4″) va S5(S′5′, S″5″) yasovchilari orqali ham topish mumkin.

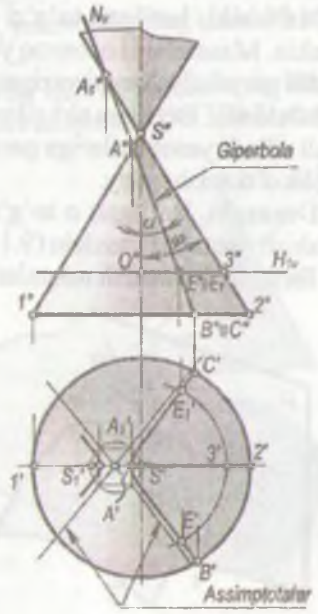
Parabolik kesim. Kesuvchi tekislik konusning yasovchilaridan biriga parallel qilib o'tkazilsa, kesimda *parabola* hosil bo'ladi (9.8-rasm).

Kesuvchi tekislik konusning uchidan o'tmagan va $\alpha=\varphi$ bo'lgan holda ham kesimda *parabola* hosil bo'ladi.

Rasmda to'g'ri doiraviy konus bilan $N(N_V)$ tekislikning kesishuvi ko'rsatilgan. Kesuvchi tekislik frontal proyeksiyalovchi bo'lganligi sababli parabolaning frontal proyeksiyasi tekislikning N_V frontal izi bilan ustma-ust tushadi. Uning gorizontal proyeksiyasi parabola bo'lganligi uchun uni A′ uchi, S′ fokusi hamda a' direktrissasi bo'yicha yasash mumkin. A′ nuqta bevosita



9.8-rasm.



9.9-rasm.

S′1′ yasovchida belgilab olinadi, uning chap tomonida A′S′ masofada a' direktrissasi parabolaning simmetriya o‘qiga perpendikulyar qilib o‘tkaziladi.

Kesimga tegishli ixtiyoriy nuqtalarni quyidagicha topish ham mumkin: A″B″ kesimda ixtiyoriy $E''\equiv E_1''$ nuqta belgilab olinadi. Bu nuqta orqali H_1 gorizontal tekislikning frontal H_{1V} izi o‘tkaziladi. Bu tekislik konusni R=0″2″ radiusli aylana bo‘yicha kesadi. Bu aylananing gorizontal proyeksiyasi bilan $E''\equiv E_1''$ nuqtadan tushirilgan proyeksion bog‘lanish chizig‘i o‘zaro kesishib, E′ va E'_1 nuqtalarni hosil qiladi.

Giperbolik kesim. Kesuvchi tekislik konusning ikkita yasovchisiga parallel bo‘lsa, u konusni *giperbola* bo‘yicha kesib o‘tadi. Bunda $\alpha^0<\varphi^0$ bo‘ladi. Bunday tekisliklar xususiy holda konus o‘qiga parallel bo‘ladi (9.9-rasm).

9.4-§. Sirtlarning to‘g‘ri chiziq bilan kesishishi

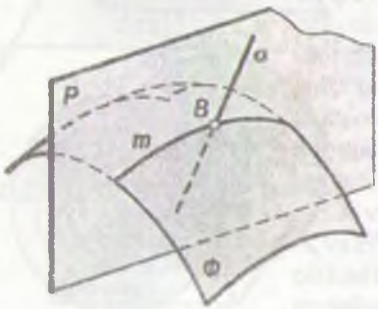
To‘g‘ri chiziq bilan sirtlarning kesishish nuqtalari sirtlarning tekislik bilan kesishish chizig‘ini yasashga asoslanib topiladi. Umuman, biror a to‘g‘ri chiziq bilan Φ sirtning kesishish nuqtasi quyidagicha aniqlanadi (9.10-rasm):

- berilgan a to‘g‘ri chiziq orqali ixtiyoriy yordamchi P tekislik o‘tkaziladi: $P\in a$;
- Φ sirt bilan P tekislikning kesishish chizig‘i m yasaladi: $\Phi\cap P=m$;
- m chiziq bilan berilgan a to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtasi B belgilab olinadi: $a\cap m=B$.

Ma’lumki, berilgan to‘g‘ri chiziq orqali istalgancha tekislik o‘tkazish mumkin. Masalalarni osonroq yechish uchun to‘g‘ri chiziq orqali yordamchi tekislik proyeksiyalovchi vaziyatda o‘tkaziladi. Bu holda masalaning yechilishi soddalashadi. Berilgan sirt silindrik yoki konus sirt bo‘lganda, to‘g‘ri chiziq orqali silindr yasovchilariga parallel yoki konus uchidan umumiy vaziyatdagi tekislik o‘tkazish qulay.

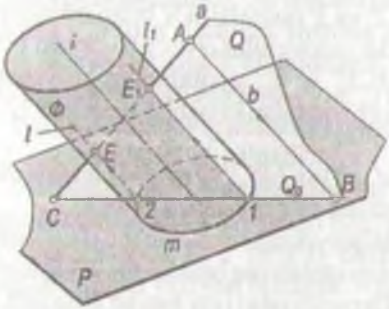
1-masala. Berilgan a to‘g‘ri chiziq bilan Φ og‘ma elliptik silindrning kesishish nuqtalari yasalsin (9.11, 9.12-rasmlar).

Yechish. Kesishish nuqtalari E va E_1 larni yasash quyidagicha bajariladi:

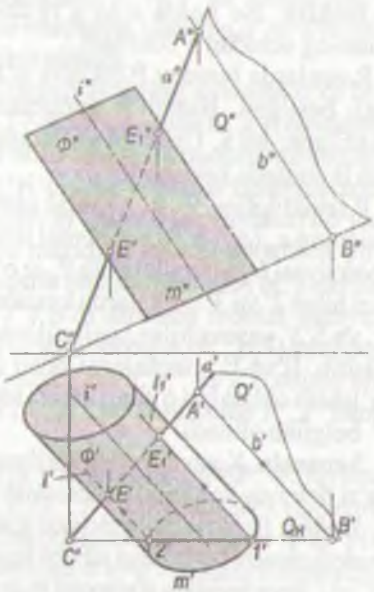


9.10-rasm.

- berilgan a to‘g‘ri chiziq orqali silindrning yasovchilariga parallel qilib ixtiyoriy Q tekislik o‘tkaziladi. Buning uchun a to‘g‘ri chiziqqa tegishli ixtiyoriy A nuqtani belgilab olib, u orqali b to‘g‘ri chiziq silindrning yasovchilariga parallel qilib o‘tkaziladi. Kesishuvchi a va b to‘g‘ri chiziqlar yordamchi Q tekislikni ifodalaydi;
- Q tekislik bilan Φ silindrning kesishish chiziqlari l va l_1 yasovchilar yasaladi. Buning uchun Q tekislik va silindrning asos tekisligi P ning o‘zaro kesishish chizig‘i BC yasaladi.



9.11-rasm.

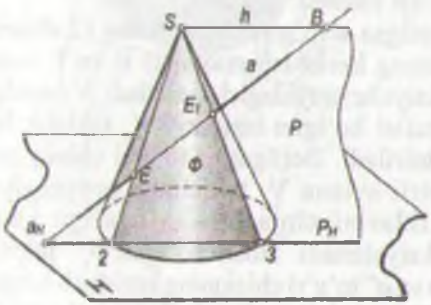


9.12-rasm.

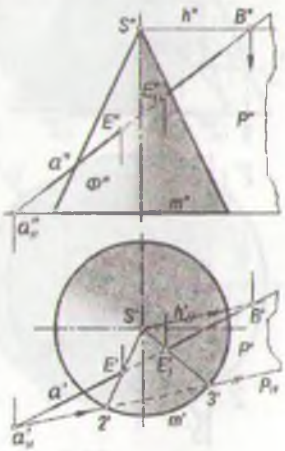
BC to'g'ri chiziqning silindr asosi *m* bilan kesishish nuqtalari 1 va 2 orqali *l* va l_1 yasovchilar (kesishish chiziqlari) o'tkaziladi;

- berilgan *a* to'g'ri chiziq bilan *l* va l_1 yasovchilarning kesishish nuqtalari E va E_1 belgilab olinadi.

2-masala. Asosi H tekislikka tegishli bo'lgan to'g'ri doiraviy konus sirti bilan *a* to'g'ri chiziqning kesishish nuqtalari aniqlansin (9.13, 9.14-rasmlar).



9.13-rasm.



9.14-rasm.

Yechish. Bu holda *a* to‘g‘ri chiziq orqali o‘tuvchi yordamchi tekislik konusning uchidan o‘tkaziladi.

Rasmlarda bunday P tekislik o‘zaro kesishuvchi *a* va *h* to‘g‘ri chiziqlar orqali berilgan. Bunda *h* gorizontal to‘g‘ri chiziq konusning S uchidan o‘tkazilgan: $h \in S$. Ushbu *h* gorizontal to‘g‘ri chiziq berilgan *a* to‘g‘ri chiziq bilan B nuqtada kesishadi.

P tekislikning P_H gorizontal izini yasab olamiz. Buning uchun *a* to‘g‘ri chiziqning a_H (a_H', a_H'') gorizontal izini topib, u orqali gorizontalning gorizontal proyeksiyasi *h* ga parallel qilib P_H iz o‘tkaziladi. Konusning *m'* asosi tekislikning P_H izi bilan 2′ va 3′ nuqtalarda kesishadi. 2′ va 3′ nuqtalarni S′ bilan tutashtirib, S′2′ va S′3′ yasovchilar hosil qilinadi. Bu yasovchilar *a'* to‘g‘ri chiziq bilan kesishib, E′va E_1' nuqtalarni hosil qiladi. E′ va E_1' nuqtalardan proyeksion bog‘lanish chiziqlari o‘tkazilib, *a''* to‘g‘ri chiziq bilan kesishish nuqtalari E″ va E_1'' belgilab olinadi.

3-masala. Xususiy holda berilgan *a(a', a'')* va *b(b', b'')* to‘g‘ri chiziqlarning to‘g‘ri doiraviy konus bilan kesishish nuqtalari aniqlansin (9.15-rasm).

Yechish. Berilgan *a* to‘g‘ri chiziq gorizontal proyeksiyalovchi, *b* to‘g‘ri chiziq frontal proyeksiyalovchi bo‘lganligi sababli kesishish nuqtalarining bittadan proyeksiyalari E′ va F″≡L″ (mos ravishda gorizontal va frontal proyeksiyalari) ma’lum bo‘lib qoladi. Bu nuqtalar orqali o‘tuvchi yasovchilarning avval S′3′, S″2″≡S″2_1″, so‘ngra S″3″, S′2′ va S′2_1′ proyeksiyalari o‘tkaziladi. *a''* va S″3″ larning o‘zaro kesishish nuqtasi E″ hamda *b'* bilan S′2′ va S′21′ larning kesishish nuqtalari F′ va L′ belgilab olinadi.



9.15-rasm.

4-masala. To‘g‘ri chiziqning sfera bilan kesishish nuqtalari aniqlansin (9.16-rasm).

Yechish. Berilgan *a(a', a'')* to‘g‘ri chiziqning sfera bilan kesishish nuqtalarini yasash uchun bu to‘g‘ri chiziq orqali M(M_H) gorizontal proyeksiyalovchi tekislik o‘tkaziladi. Bu tekislik sferani diametri 1′2′ kesmaga teng bo‘lgan aylana bo‘yicha kesadi. 1′2′ diametrli aylananing gorizontal proyeksiyasi tekislikning M_H izi bilan ustma-ust tushadi: 1′2′≡M_H.

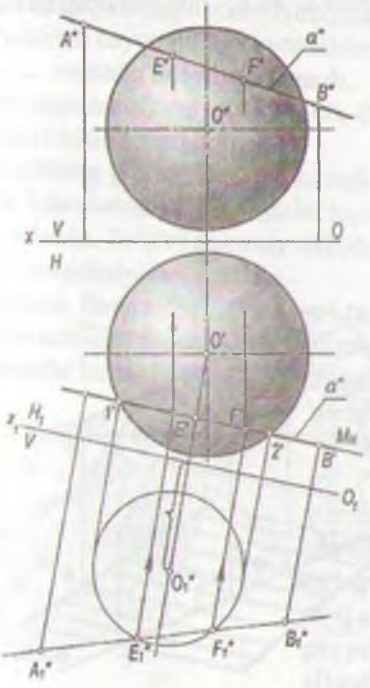
Berilgan *a* to‘g‘ri chiziq bilan 12 diametrli aylananing kesishish nuqtalari E va F larning proyeksiyalari quyidagicha yasaladi: V tekislik M ga parallel bo‘lgan ixtiyoriy V_1 tekislik bilan almashtiriladi. Berilgan *a* to‘g‘ri chiziq va 12 diametrli aylana V_1 tekislikka proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usuliga asosan proyeksiyalanadi. Hosil bo‘lgan O_1'' markazli aylana va *a''* to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtalari E″ va F″ lar belgilab olinadi. Bu nuqtalardan O_1x_1 proyeksiyalar o‘qiga perpendikulyarlar o‘tkazilib,

ularning a' to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtalari E′ va F′ lar aniqlanadi. Bu nuqtalardan esa Ox o'qiga perpendikulyarlar chiqarilib, ularning a'' to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtalari E″ va F″ lar belgilab olinadi.

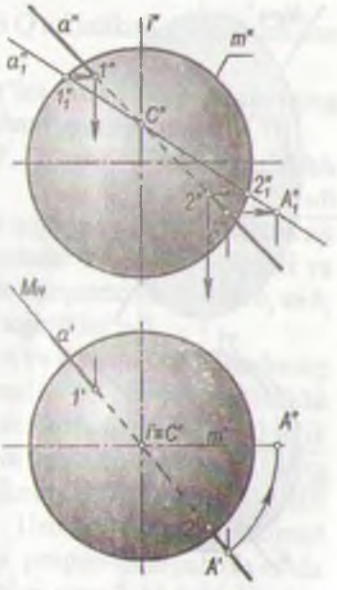
Agar $a(a', a'')$ to'g'ri chiziq biror aylanish sirtining aylanish o'qi bilan kesishadigan vaziyatda berilgan bo'lsa (9.17-rasm), u holda to'g'ri chiziqni bu o'q atrofida aylantirib, uning aylanish sirti bilan kesishish nuqtalarini osongina yasash mumkin. Berilgan $a(a', a'')$ to'g'ri chiziq orqali o'tgan gorizontal proyeksiyalovchi $M(M_H)$ tekislik sferani $m(m', m'')$ meridiani (aylana) bo'yicha kesadi (chizmada m'' ko'rsatilmagan). Bu meridian frontal tekislikka ellips bo'lib proyeksiyalanadi. Bu ellipsni chizmaslik maqsadida $m(m', m'')$ meridian va $a(a', a'')$ to'g'ri chiziq sirtning $i(i', i'')$ o'qi atrofida frontal vaziyatga kelguncha aylantiriladi. U holda $a(a', a'')$ to'g'ri chiziq $a_1(a_1', a_1'')$ vaziyatga, $m(m', m'')$ meridian esa $m_1(m_1', m_1'')$ vaziyatga keladi. a_1'' to'g'ri chiziq bilan m_1'' bosh meridianning kesishish nuqtalari $1_1''$, $2_1''$ lar yordamida $1''$, $2''$ hamda $1'$, $2'$ nuqtalar belgilab olinadi.

5-masala. Umumiy vaziyatdagi $a(a', a'')$ to'g'ri chiziqning $\Phi(\Phi', \Phi'')$ aylanma ellipsoid bilan kesishish nuqtalari $E(E', E'')$, $E_1(E_1', E_1'')$ aniqlansin (9.18-rasm).

Yechish. Bunda a to'g'ri chiziqning ellipsoid aylanish o'qi bilan kesishmaydigan vaziyati berilgan. Agar berilgan a to'g'ri chiziq ellipsoidning

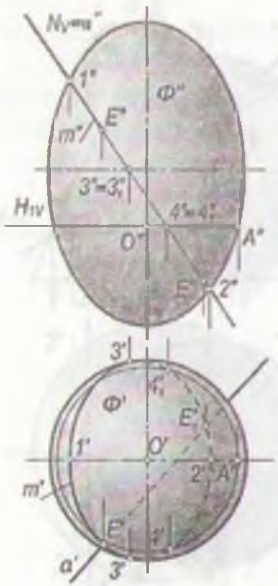


9.16-rasm.

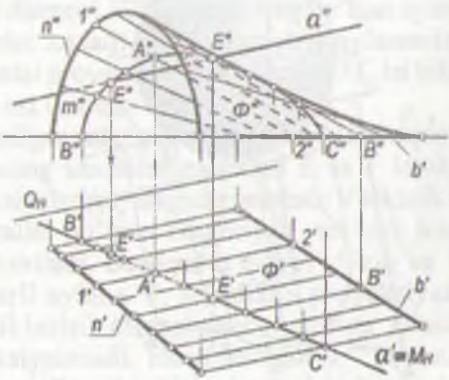


9.17-rasm.

aylanish o‘qi bilan kesishadigan bo‘lsa, u holda bunday masalani 9.17-rasmda ko‘rsatilganidek yechishimiz mumkin. Berilgan a to‘g‘ri chiziqning ellipsoid bilan kesishish nuqtalari E va E_1 larni yasash uchun to‘g‘ri chiziq orqali frontal proyeksiyalovchi $N(N_v)$ tekislik o‘tkaziladi. $N(N_v)$ tekislikning ellipsoid bilan kesishish chizig‘i $m(m', m'')$ yasaladi. Bu chiziqning berilgan to‘g‘ri chiziq bilan kesishuvida izlanayotgan nuqtalar hosil bo‘ladi. Tekislikning N_v frontal izi, to‘g‘ri chiziqning a'' frontal proyeksiyasi va kesishish chizig‘ining frontal proyeksiyasi m'' lar ustma-ust tushadi. Kesishish chizig‘ining m' gorizontal proyeksiyasini yasash uchun m'' ga tegishli ixtiyoriy nuqtalarni belgilab, ularning gorizontal proyeksiyasini topish va ularni tekis egri chiziq bilan tutashtirish kerak. Ellipsoidning frontal konturiga tegishli $1(1', 1'')$ va $2(2', 2'')$ nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari $1'$ va $2'$ nuqtalar bevosita belgilab olinadi. Ixtiyoriy olingan $4(4', 4'')$ va $4_1(4_1', 4_1'')$ nuqtalarning $4'$ va $4_1'$ gorizontal proyeksiyalarini yasash uchun $4''=4_1''$ nuqta orqali gorizontal tekislikning frontal izi H_{1V} o‘tkaziladi. So‘ngra gorizontal proyeksiyada radiusi $0'A'=0''A''$ bo‘lgan aylana chizamiz. $4=4_1''$ nuqtadan proyeksion bog‘lanish chizig‘ini tushirib, $0'A'$ radiusli aylana bilan kesishish nuqtalari $4'$ va $4_1'$ lar belgilab olinadi. Qolgan nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari ham xuddi shunday yasaladi. a to‘g‘ri chiziq va m kesishish chizig‘ining gorizontal proyeksiyalari a', m' o‘zaro kesishib, E' va E_1' nuqtalarni hosil qiladi. E' va E_1' nuqtalardan proyeksion bog‘lanish chiziqlarini chiqarib, ularning a'' frontal proyeksiya bilan kesishuvida E'' va E_1'' nuqtalar hosil qilinadi.



9.18-rasm.



9.19-rasm.

6-masala. $n(n', n'')$ va $b(b', b'')$ yo'naltiruvchilari va $Q(Q_H)$ parallelizm tekisligi bilan berilgan konoidning $a(a', a'')$ to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtalari proyeksiyalari yasalsin (9.19-rasm).

Yechish. Bunda berilgan to'g'ri chiziq orqali gorizontal proyeksiyalovchi $M(M_H)$ tekislik o'tkaziladi. Uning konoid bilan kesishish chizig'i $m(m', m'')$ yasaladi. $a(a', a'')$ to'g'ri chiziq va $m(m', m'')$ chiziqning o'zaro kesishish nuqtalari $E(E', E'')$ va $E_1(E_1', E_1'')$ lar belgilab olinadi.

9.5-§. Sirtlarning umumiy vaziyatdagi tekisliklar bilan kesishishi

Sirtlarning umumiy vaziyatdagi tekislik bilan kesishish chiziqlari quyidagi algoritm asosida bajariladi:

- berilgan Φ sirt va Q tekislik yordamchi kesuvchi P_1 tekislik bilan kesiladi (9.20-rasm). P_1 yordamchi tekislikni shunday o'tkazish kerakki, uning Φ sirt bilan kesishish chizig'i to'g'ri chiziq yoki aylana singari sodda chiziq bo'lsin;
- yordamchi P_1 tekislik bilan Φ sirtning kesishish chizig'i m_1 yasaladi: $\Phi \cap P_1 = m_1$;
- berilgan Q va P_1 tekisliklarning o'zaro kesishish to'g'ri chizig'i yasaladi: $Q \cap P_1 = a_1$;
- a_1 va m_1 chiziqlarning kesishish nuqtasi A_1 ni belgilab, $(A_1 = a_1 \cap m_1)$ olinadi. a_1 va m_1 chiziqlarining kesishish nuqtalari bitta yoki ko'p bo'lishi mumkin.

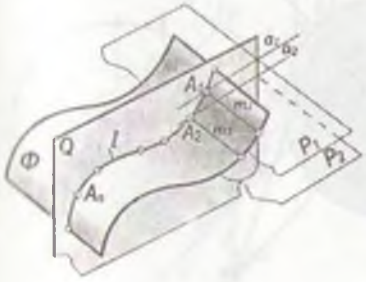
Yuqorida bayon qilingan yasashlarga asosan P_2, P_3,... tekisliklar o'tkazilib, A_2, A_3,... nuqtalar holati aniqlanadi.

Bu nuqtalar o'zaro tutashtirilib, Φ sirt bilan Q tekislikning kesishishidan tekis egri chiziq l hosil qilinadi.

Φ sirtning Q tekislik bilan kesishish chizig'ini shu sirt yasovchilarining tekislik bilan kesishish nuqtalarini topish orqali ham yasash mumkin.

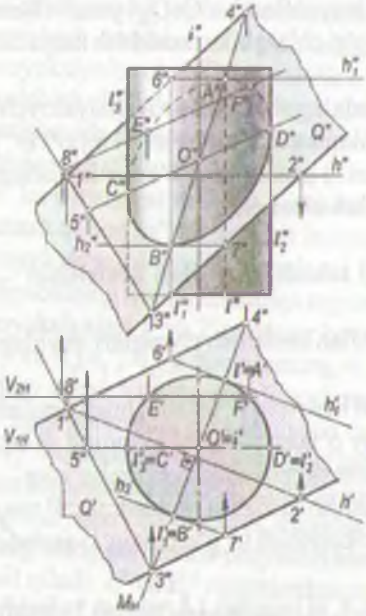
1-masala. To'g'ri doiraviy silindrning $Q(Q', Q'')$ tekislik bilan kesishish chizig'i proyeksiyalari yasalsin.

Yechish. Bunda $A(A', A'')$ yuqori va $B(B', B'')$ quyi nuqtalarni topish ikki xil usulda ko'rsatilgan. Bu usullardan biri urinma gorizontallar o'tkazishdir. Yuqori va quyi nuqtalar kesuvchi tekislikning silindrga urinma vaziyatda o'tkazilgan h_1 va h_2 gorizontallariga tegishli bo'ladi.



9.20-rasm.

Ikkinchisi A va B nuqtalarni silindrning $i(i', i'')$ o'qi orqali o'tuvchi va Q tekislikka perpendikulyar bo'lgan $M(M_H)$ tekislik yordamida ham topish mumkin. Buning uchun Q tekislikning ixtiyoriy h gorizontali o'tkaziladi. Uning h' gorizontal proyeksiyasiga perpendikulyar ravishda silindrning i o'qi orqali M tekislikning gorizontal M_H izi o'tkaziladi. Bu tekislik silindrni l va l_1 yasovchilari bo'yicha,



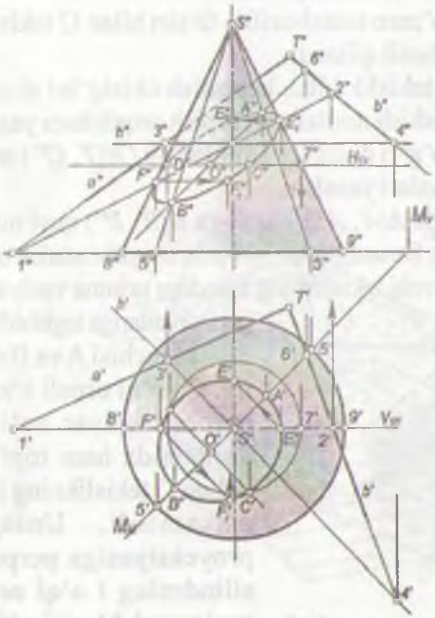
9.21-rasm.

berilgan Q tekislikni esa 34 to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesadi. 34 kesishish chizig‘i va l, l_1 yasovchilarning frontal proyeksiyalari 3″4″ hamda l', l'' larning o‘zaro kesishuvidan A″ va B″ nuqtalar hosil bo‘ladi. Yuqori va quyi nuqtalarning A′ va B′ proyeksiyalari silindr asosining proyeksiyasiga tegishli bo‘ladi.

Silindr ocherkiga tegishli C va D nuqtalar shu ocherkni ifodalovchi l_2, va l_3 yasovchilarning Q tekislik bilan kesishuvida hosil bo‘lgan, oraliqdagi E va F nuqtalar esa C hamda D nuqtalar singari topiladi.

2-masala. To‘g‘ri doiraviy konusning berilgan tekislik bilan kesishuvidagi kesim yuzasi proyeksiyalari yasalsin (9.22-rasm).

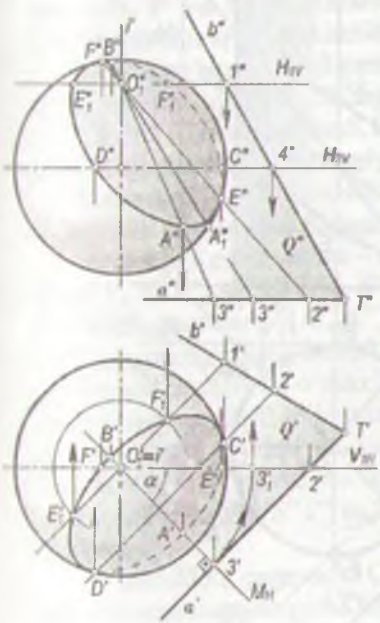
Yechish. Kesuvchi tekislik o‘zaro kesishuvchi $a(a', a'')$ va $b(b', b'')$ to‘g‘ri chiziqlar bilan berilgan. Dastlab tayanch nuqtalarning topilishini ko‘rib chiqamiz. Kesishish chizig‘ining konus ocherkiga tegishli, ya’ni konus chetki yasovchilari S9 va



9.22-rasm.

S8 larning berilgan tekislik bilan kesishish nuqtalari E, F lar quyidagicha topiladi: S9 va S8 yasovchilar orqali yordamchi V_{III} frontal tekislik o'tkaziladi. U berilgan $(a \cap b)$ tekislikni 12 (1'2', 1''2'') to'g'ri chiziq, konusni esa S8(S'8', S''8'') va S9(S'9', S''9'') yasovchilar bo'yicha kesadi. 12 to'g'ri chiziq bilan S8 va S9 yasovchilarning kesishuvidan E(E', E'') va F(F', F'') nuqtalar hosil bo'ladi.

Kesimning yuqori va quyi nuqtalari esa konusning i o'qi orqali o'tuvchi va berilgan tekislikka perpendikulyar bo'lgan yordamchi $M(M_H)$ tekislikdan foydalanib topiladi. Buning uchun berilgan tekislikning ixtiyoriy $h(h', h'')$ gorizontali o'tkaziladi. Bu gorizontalning h_1' proyeksiyasiga perpendikulyar qilib S' nuqta orqali yordamchi M tekislikning M_H izini o'tkazamiz. M tekislikning konus bilan kesishish chiziqlari S5 va $S5_1$ yasovchilar hamda berilgan tekislik bilan kesishish chizig'i $S_1 6(S_1'6', S_1''6'')$ larning frontal proyeksiyalari o'tkaziladi. Ular o'zaro kesishib, mos ravishda quyi B va yuqori A nuqtalarning frontal proyeksiyalari B'' va A'' nuqtalarni hosil qiladi. A va B nuqtalar orasidagi masofa kesim yuza – ellipsning katta o'qi bo'ladi. Uning kichik o'qi CD ni topish uchun AB kesmani teng ikkiga bo'luvchi O_1 nuqta orqali AB ga perpendikulyar to'g'ri chiziq o'tkaziladi. Bu holda CD kichik o'q gorizontal vaziyatdagi to'g'ri chiziq bo'lib, uning proyeksiyasini yordamchi $H_1(H_{IV})$ tekislikdan foydalanib topamiz. Gorizontal proyeksiyada kesuvchi tekislikning M_H izi kesishish chizig'ining simmetriya o'qi bo'ladi. Oraliqdagi E_1 va F_1 nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari E_1' va F_1' nuqtalar shu simmetriya o'qiga asoslanib yasalgan. So'ngra ular orqali E_1'' va F_1'' nuqtalar topilgan. Hosil bo'lgan nuqtalarning ko'rinishligi V_{III} frontal simmetriya tekisligi bo'yicha aniqlanib, tekis egri chiziq bilan tutashtiriladi.



9.23-rasm.

3-masala. Shar sirtining $Q(a \cap b)$ tekislik bilan kesishishidagi kesim yuzasining proyeksiyalari yasalsin (9.23-rasm).

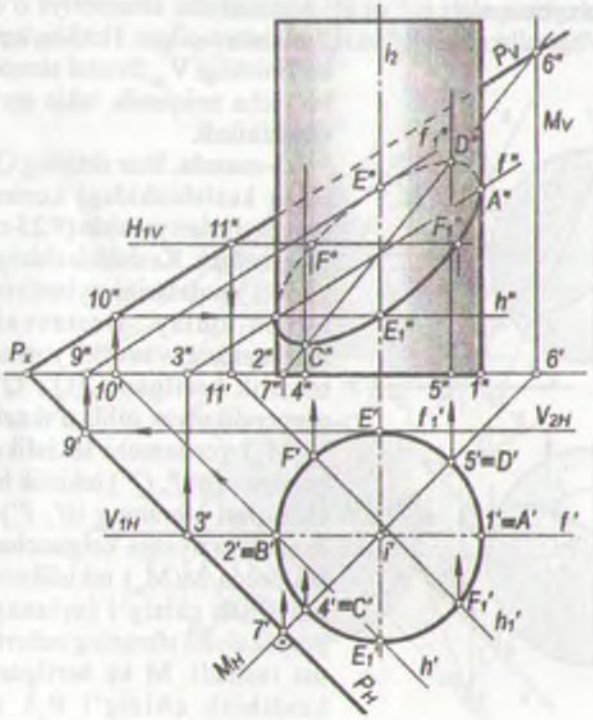
Yechish. Kesishish chizig'ining quyi va yuqori nuqtalarini aylantirish usuli bilan topish qulay. Dastavval, sferaning markazidan o'tuvchi yordamchi $M(M_H)$ tekislik berilgan $Q(Q', Q'')$ tekislikka perpendikulyar qilib o'tkaziladi. So'ngra $M(M_H)$ yordamchi tekislikning sfera va berilgan $Q(Q', Q'')$ tekislik bilan kesishish chiziqlari sferaning $i(i', i'')$ o'qi atrofida frontal vaziyatga kelguncha aylantiriladi. Bu holda $M(M_H)$ tekislikning sfera bilan kesishish chizig'i (aylana) ning frontal proyeksiyasi sferaning ocherki bilan ustma-ust tushadi. M va berilgan tekislikning kesishish chizig'i $0_1 3$ ning frontal proyeksiyasi $0_1''3''$ esa $0_1''3_1''$ vaziyatni

egallaydi. Demak, sferaning frontal proyeksiyadagi ocherki bilan $0_1''3_1''$ to'g'ri chiziqning kesishish nuqtalarini belgilab (rasmda faqat A_1'' nuqta belgilangan), ularni teskari yo'nalishda α burchakka burish kerak bo'ladi. Buning uchun A_1'' nuqtadan gorizontal vaziyatda to'g'ri chiziq o'tkazib, uning $0_1''3''$ to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtasi A'' ni belgilash yetarli bo'ladi. B'' nuqta ham xuddi shunday topiladi. Ocherklarning berilgan tekisliklar bilan kesishish nuqtalari C, D, E va F lar H_2 hamda V_1 tekisliklar yordamida topilgan. Oraliqdagi ixtiyoriy nuqtalardan E_1 va E_2 esa yordamchi H_1 tekislikdan foydalanib topilgan.

4-masala. H tekislikda joylashgan to'g'ri doiraviy silindrning ixtiyoriy vaziyatdagi $P(P_H, P_V)$ tekislik bilan kesishishidagi kesim yuzasi proyeksiyalari yasalsin (9.24-rasm).

Yechish. Kesim yuzasining gorizontal proyeksiyasi silindrning gorizontal proyeksiyasi (asosi) bilan ustma-ust tushadi. Shuning uchun kesimning faqat frontal proyeksiyasi topiladi.

Dastlab silindrning chetki 1, 2 yasovchilari bilan P tekislikning kesishish nuqtalari A va B ning frontal proyeksiyalari A'' va B'' nuqtalar topiladi. Buning



9.24-rasm.

uchun chetki yasovchilar orqali $V_1(V_{1H})$ frontal tekislik o'tkaziladi. Bu tekislik berilgan P tekislikni frontal chiziq bo'yicha kesadi. Kesishish chizig'ining frontal proyeksiyasi *f''* silindr chetki yasovchilarining frontal proyeksiyalari bilan kesishib, A'' va B'' nuqtalarni hosil qiladi.

Kesimning eng yuqori va eng quyi nuqtalarining frontal proyeksiyalari D'' va C'' nuqtalarni topish uchun silindr o'qidan o'tuvchi va P tekislikka perpendikulyar bo'lgan $M(M_H, M_V)$ gorizontal proyeksiyalovchi tekislik o'tkaziladi: $i \in M_H \perp H$. Bu tekislik silindrni *4(4', 4'')* va *5(5', 5'')* yasovchilari, P tekislikni esa *67(6'7', 6''7'')* to'g'ri chiziq bo'yicha kesadi. Yasovchilarning frontal proyeksiyalari *6''7''* to'g'ri chiziq bilan kesishib, D'' va C'' nuqtalarni hosil qiladi.

Kesimning boshqa nuqtalarini kesuvchi tekislikning gorizontal yoki frontal chiziqlaridan foydalanib topish mumkin. Masalan, E nuqtaning frontal proyeksiyasi *E''* ni topish uchun *E* nuqtadan o'tkazilgan $V_2(V_{2H})$ tekislik silindrni yasovchisi bo'yicha, P tekislikni $f_1(f_1', f_1'')$ frontal chiziq bo'yicha kesadi. Frontalning fronta! proyeksiyasi f_1'' va *E'* nuqtadan o'tuvchi yasovchi o'zaro kesishib, *E''* nuqtani hosil qiladi. *F'* va F_1'' nuqtalar ixtiyoriy $H_1(H_{1V})$ gorizontal yordamchi tekislik o'tkazish yo'li bilan topiladi. Yordamchi tekislikning H_{1V} izi *C''* va *D''* nuqtalar oralig'ida o'tkaziladi. Bu tekislik silindrni aylana bo'yicha kesadi. Bu aylananing gorizontal proyeksiyasi silindrning asosi bilan ustma-ust tushadi. Berilgan $P(P_H, P_V)$ tekislik $H_1(H_{1V})$ tekislik bilan $1_1(1_1', 1_1'')$ nuqtadan o'tuvchi $h(h_1', h_1'')$ gorizontal bo'ylab kesishadi.

h_1 gorizontalning gorizontal proyeksiyasi h_1' va silindrning asosi o'zaro kesishib, F' va F_1' nuqtalarni hosil qiladi. Bu nuqtalardan proyeksion bog'lanish chiziqlari o'tkazilib, H_{IV} izda F'' va F_1'' nuqtalar belgilab olinadi.

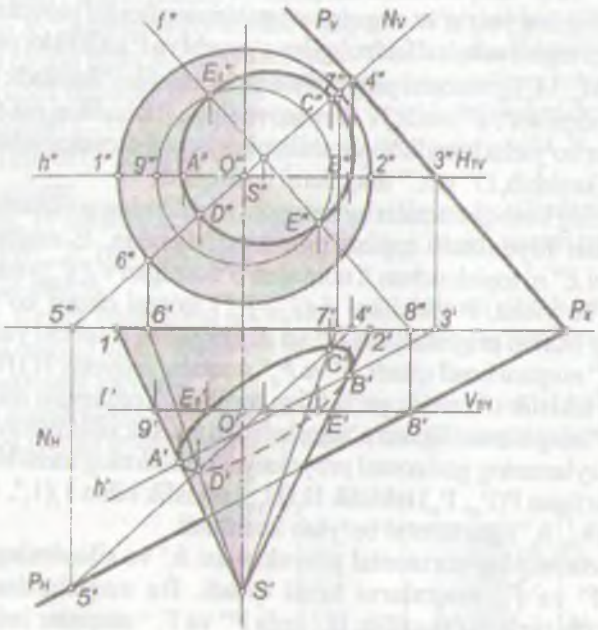
Silindrning kuzatuvchiga qaratilgan oldingi yarim qismi ko'rinadi, orqa tomondagi qismi esa ko'rinmaydi. Shunga asosan kesimning frontal proyeksiyasidagi $A''F_1''E_1''C''B''$ qismi ko'rinadi, B''F''E''D''A'' qismi esa ko'rinmaydi. Bu nuqtalarni tartibi bilan tutashtirib, tekis egri chiziq — ellips hosil qilinadi.

5-masala. Asosi V tekislikda joylashgan to'g'ri doiraviy konusning $P(P_H, P_V)$ tekislik bilan kesishishidagi kesim yuzasi proyeksiyalari yasalsin (9.25-rasm).

Yechish. Kesim yuzasi – ellipsning proyeksiyalarini yasash konusning S1(S'1', S''1'') va S2(S'2', S''2'') yasovchilari bilan $P(P_H, P_V)$ tekislikning kesishish nuqtalari A(A', A'') va B(B', B'') larni topishdan boshlanadi. S1 va S2 yasovchilarning frontal proyeksiyalari S''1'' va S''2'' lar orqali $H_1(H_{1V})$ gorizontal tekislik izi o'tkaziladi. Bu tekislik berilgan P tekislikni 3(3', 3'') nuqtadan o'tgan $h(h', h'')$ gorizontal chiziq bo'yicha kesadi. Bu gorizontalning *h'* gorizontal proyeksiyasi konusning S'1' va S'2' chetki yasovchilari bilan kesishib, A' va B' nuqtalarni hosil qiladi. Bu nuqtalardan proyeksion bog'lanish chizig'ini o'tkazib, S''1'' va S''2'' yasovchilarda A'' va B'' nuqtalar belgilab olinadi.

V tekislikka eng yaqin C(C', C'') va eng uzoq D(D', D'') nuqtalarning proyeksiyalari quyidagicha topiladi: konusning o'qi orqali o'tuvchi va berilgan $P(P_H, P_V)$ tekislikka perpendikulyar bo'lgan $N(N_H, N_V)$ frontal proyeksiyalovchi tekislik o'tkaziladi. Bu tekislik konusni S6(S'6', S''6'') va

S7(S′7′, S″7″) yasovchilari bo‘yicha kesadi. $P(P_H, P_V)$ va $N(N_H, N_V)$ tekisliklar esa 45(4′5′, 4″5″) to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesishadi, ya’ni $P \cap N = 45$.



9.25-rasm.

Bu to‘g‘ri chiziqning 4′5′ gorizontal proyeksiyasi S6 va S7 yasovchilarning gorizontal proyeksiyalari S′6′ va S′7′ lar bilan kesishib, D′ va C′ nuqtalarni hosil qiladi. Bu nuqtalardan proyeksion bog‘lanish chiziqlari o‘tkazilib, S″6″ va S″7″ yasovchilarda D″ va C″ nuqtalar belgilab olinadi.

Oraliqdagi ixtiyoriy nuqtalar esa konusning o‘qiga perpendikulyar yordamchi frontal tekisliklar o‘tkazish bilan topiladi. Masalan, C′ va D′ nuqtalar oralig‘ida V_1 frontal tekislikning V_{1H} gorizontal izi o‘tkaziladi. Bu tekislik konusni radiusi 0′9′ ga teng aylana bo‘yicha, P tekislikni esa 8(8′, 8″) nuqtadan o‘tuvchi f(f′, f″) frontal bo‘yicha kesadi. Frontal proyeksiyada chizilgan 0′9′=0″9″ radiusli aylana va f″ to‘g‘ri chiziq o‘zaro kesishib, E″ va E_1″ nuqtalarni hosil qiladi. Bu nuqtalardan proyeksion bog‘lanish chiziqlari o‘tkazilib, f′ to‘g‘ri chiziqda E′ va E_1′ nuqtalar belgilab olinadi. Hosil bo‘lgan nuqtalar silliq tutashtirilib, kesim yuzasi – ellips chiziladi. Frontal proyeksiyada kesimga tegishli bo‘lgan hamma nuqtalar ko‘rinadi. Gorizontal proyeksiyada esa konusning yuqori yarmida joylashgan kesimning A′E_1′C′B′ qismi ko‘rinadi, B′E′D′A′ qismi esa ko‘rinmaydi. Bu nuqtalarni tartibi bilan tutashtirib, tekis egri chiziq — ellipsni hosil qilamiz.

9.6-§. Sirtlarning to‘g‘ri chiziq va tekislik bilan kesishuvini yasashda ba’zi qo‘shimcha usullar

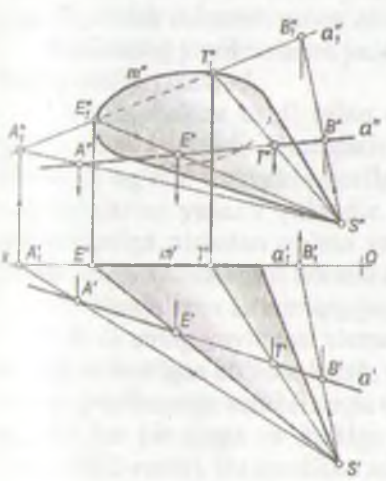
Piramida yoki konus sirtlar qatnashgan pozitsion masalalarni yechishda markaziy proyeksiyalashdan foydalanish maqsadga muvofiq.

1-masala. Konus sirti bilan ixtiyoriy $a(a', a'')$ to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtalarini yasash kerak bo‘lsin (9.26-rasm).

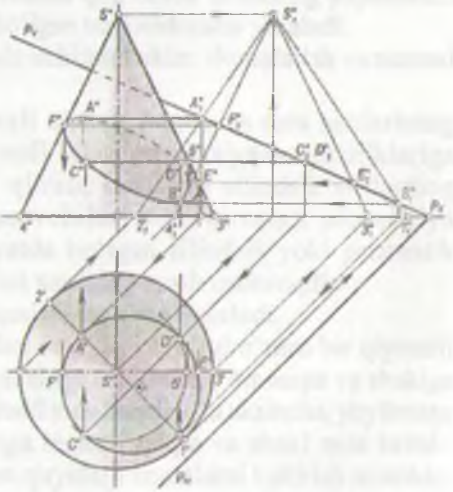
Yechish. Konusning V asos tekisligini proyeksiyalar tekisligi, uchi S nuqtani esa proyeksiyalash markazi deb qabul qilamiz. U holda konus sirtining V dagi markaziy proyeksiyasi uning $m(m', m'')$ asosi bilan ustma-ust tushadi. $a(a', a'')$ to‘g‘ri chiziqning V tekislikdagi markaziy proyeksiyasi $a_1(a_1', a_1'')$ esa A(A′, A″) va B(B′, B″) nuqtalar orqali aniqlanadi. Konusning m'' asosi va $a1''$ to‘g‘ri chiziqning o‘zaro kesishish nuqtalari E_1'' va T_1'' lar izlanayotgan kesishish nuqtalarining markaziy proyeksiyalari bo‘ladi. E_1'' va T_1'' nuqtalar S proyeksiyalash markazining frontal proyeksiyasi S″ bilan tutashtiriladi. Natijada ular a'' bilan kesishib, E″ va T″ nuqtalarni hosil qiladi. E″ va T″ nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari E′ va T′ a' to‘g‘ri chiziq ustida aniqlanadi.

2-masala. To‘g‘ri doiraviy konusning umumiy vaziyatdagi $P(P_H, P_V)$ tekislik bilan kesishish chizig‘ini yasash talab qilinsin (9.27-rasm).

Yechish. Konus va P tekislik V frontal proyeksiyalar tekisligiga P tekislikning gorizontal yo‘nalishi bo‘yicha proyeksiyalangan. Bunday proyeksiyalashda kesishish chizig‘ining yordamchi proyeksiyasi A_1'' B_1'' kesma bo‘lib, u tekislikning P_V izi bilan ustma-ust tushadi. Kesishish chizig‘ining A_1'', B_1'', $C_1''\equiv D_1''$, E_1'' va F_1'' nuqtalari orqali konusning yordamchi yasovchilari o‘tkaziladi. So‘ngra bu yasovchilarning gorizontal va frontal



9.26-rasm.

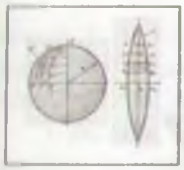


9.27-rasm.

proyeksiyalari yasalib, ularga izlanayotgan nuqtalarning avval A″, B″, C″, D″, E″, F″ frontal proyeksiyalari, keyin A′, B′, C′, D′, E′, F′ gorizontal proyeksiyalari aniqlanadi. Bunda A – kesishuv chizig'ining yuqori, B – quyi, E va F nuqtalar esa konusning ocherkiga tegishli nuqtalardir. Kesishish chizig'i AB kesma ellipsning katta o'qi bo'lib, kichik o'qi esa CD kesma bo'ladi.

Nazorat savollari

1. Sirtlarning tekislik bilan kesishish chizig'ini yasashning umumiy algoritmi nimalardan iborat?
2. Sferani tekislik bilan kesganda qanday shakl hosil bo'ladi va uning proyeksiyalari qanday yasaladi?
3. Silindrning tekislik bilan kesishuvidan qanday shakllar hosil bo'lishi mumkin?
4. Konus kesimlari nimalardan iborat?
5. Sirtning tekislik bilan kesishish chizig'idagi maxsus nuqtalar nimalardan iborat?
6. Sirtlar qanday tekisliklar bilan kesilsa, kesimning bitta proyeksiyasi to'g'ri chiziq kesmasi bo'ladi?
7. Qanday tekisliklar tor sirtini aylanalar bo'yicha kesadi?
8. To'g'ri chiziq bilan sirtning kesishish nuqtalarini yasash qanday bajariladi?
9. To'g'ri chiziq bilan konusning kesishish nuqtalarini yasashda yordamchi kesuvchi tekislikni qanday vaziyatda o'tkazish maqsadga muvofiq bo'ladi?
10. To'g'ri chiziq aylanish sirtlarining aylanish o'qini kesib o'tsa, ularning kesishish nuqtalarini qanday usulda yasash osonroq bo'ladi?



X BOB. SIRTLARNING YOYILMALARINI YASASH

10.1-§. Umumiy ma'lumotlar

Sirtni egilish deformatsiyasi yordamida tekislikka aylantirish mumkin bo'lsa, bunday sirt *yoyiladigan sirt* deyiladi. Sirtning biror bo'lagi tekislikning ma'lum bir sohasiga yoyilishi mumkin. Masalan, silindrik sirt tekislikning o'zaro parallel ikki to'g'ri chizig'i orasidagi sohasida yoyiladi. Konus sirti esa tekislikka tegishli ikki kesishuvchi to'g'ri chiziqlar orasidagi sohada yoyiladi.

Ta'rif. Sirt biror bo'lagining cho'zilmasdan, yirtilmasdan tekislikka yoyilishidan hosil bo'lgan tekis shakl uning yoyilmasi deyiladi.

Yoyiladigan sirtlarga to'g'ri chiziqli sirtlardan faqat yondosh yasovchilari xos yoki xosmas nuqtalarda kesishadigan sirtlar kiradi.

Torslarda yondosh yasovchilarning kesishish nuqtalari qaytish qirrasida, konus sirtlarda uning uchida va silindrik sirtlarda cheksiz uzoqlikdagi nuqtada bo'ladi.

Sirtlarning yoyilmalarini yasash muhandislik amaliyotida katta ahamiyatga ega. Mashinasozlik, samolyotsozlik va qurilishda turli-tuman konstruksiyalarning shakllarini hosil qilish uchun yaxlit chizma qog'ozida sirtlarning yoyilmalari yasalib, ishlab chiqarish uchun zarur bo'lgan turli andozalar yasaladi.

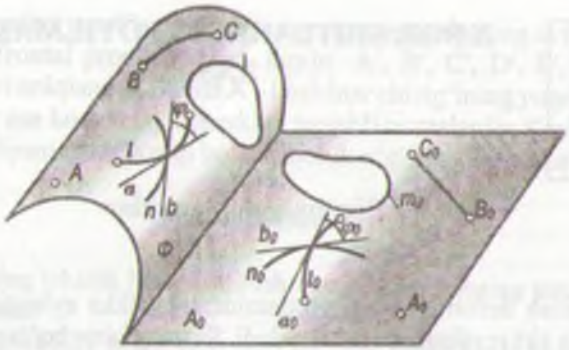
Sirtlarning yoyilmalarini yasashda uchburchaklar, dumalatish va normal kesim usullari mavjud.

Uchburchaklar usuli bilan qirrali sirtlar, konus va tors sirtlarining yoyilmalari yasaladi. Dumalatish usuli bilan proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan og'ma vaziyatda berilgan qirrali, konus va silindrik sirtlarning yoyilmalarini yasash qulaydir. Yasovchilari yoki qirralari proyeksiya tekisliklariga nisbatan og'ma vaziyatda bo'lgan silindrik yoki prizmatik sirtlarning yoyilmalarini normal kesim usulida yasash osonroqdir.

Yoyilmaydigan sirtlarning yoyilmalari taqriban yasaladi.

Sirt va uning yoyilmasi elementlari orasida quyidagi o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan bo'lishi kerak, ya'ni sirtga tegishli har bir nuqta va shaklga shu sirt yoyilmasiga tegishli nuqta va shakl mos keladi yoki aksincha, yoyilmaga tegishli har bir nuqta va shaklga sirtga tegishli nuqta va shakl mos kelishi kerak (10.1-rasm). Bu moslikka asosan quyidagi xossalarni keltirish mumkin:

1-xossa. Sirt va uning yoyilmasiga tegishli mos yoylarning uzunliklari o'zaro teng bo'ladi: $l = l_0$.



10.1-rasm.

Natija. Sirt va uning yoyilmasiga tegishli mos yopiq egri chiziqlar bir xil yuzaga ega bo'ladi: $S_{\sigma} = S_{\sigma_0}$.

2-xossa. Sirtga tegishli ikki chiziq orasidagi burchak yoyilmaga tegishli mos chiziqlar orasidagi burchakka tengdir: $\varphi = \varphi_{\sigma}$.

3-xossa. Sirtga tegishli to'g'ri chiziqqa yoyilmada ham to'g'ri chiziq mos keladi. Ammo yoyilmaga tegishli to'g'ri chiziqqa sirtning biror to'g'ri chizig'i hamma vaqt ham mos kelmaydi.

4-xossa. Sirtga tegishli o'zaro parallel to'g'ri chiziqlarga yoyilmada ham o'zaro parallel to'g'ri chiziqlar mos keladi.

5-xossa. Agar sirtga tegishli egri chiziqqa yoyilmada to'g'ri chiziq mos kelsa, bunday chiziq sirtning *geodezik chizig'i* deyiladi. 10.1-rasmda ko'rsatilgan sirtning *BC* chizig'i uning geodezik chizig'i bo'la oladi.

Ta'rif. Sirtga tegishli ikki nuqta orasidagi eng qisqa masofada tutashtiruvchi chiziq sirtning geodezik chizig'i deb ataladi.

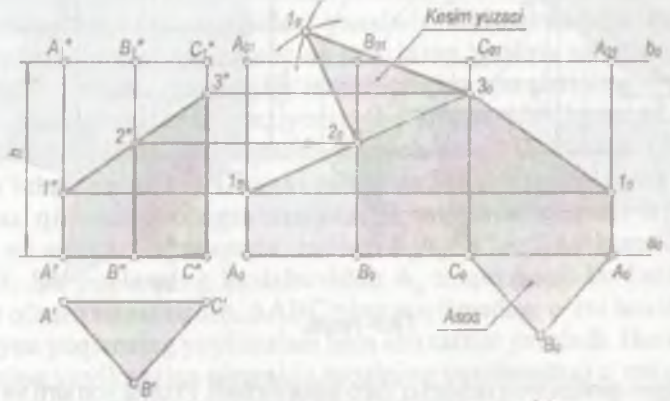
Sirtning yoyilmasini yasash deganda uni yirtmasdan, uzmasdan yoki g'ijimlamasdan faqat egib bir tekislikka jipslashtirish tushuniladi. Albatta, bunday jarayon sirtni biror chizig'i (qirrasi, yasovchilari va shu kabilar) bo'yicha kesib, amalga oshirilishi mumkin. Lekin amaliyotda sirtlarning yoyilmalari yasalib, so'ngra egish deformatsiyasi yordamida bu yoyilmalardan kerakli konstruksiyalar yasaladi. Shuning uchun ham sirtlarning yoyilmalarini tekislik (qog'oz) da yasash muhim ahamiyat kasb etadi.

10.2-§. Ko'pyoqliklarning yoyilmalari

Ko'pyoqliklarning to'la yoyilmasini yasash uchun uning yon yoqlari va asoslarining yoyilmalari yasaladi. Bunday yoqlar (uchburchak yoki ko'pburchak) ni yoyilmada yasash ularga teng bo'lgan yoqlarni yasash

demakdir. Bunday yasash uchun yoqlarning tomonlari, ya'ni qirralarining haqiqiy uzunliklari bo'lishi kerak. Agar ularning haqiqiy uzunliklari chizmada bo'lmasa, ularni turli usullar orqali yasash mumkin.

1-masala. Asosi H tekislikda yotgan uchburchakli to'g'ri prizmaning yoyilmasini yasash talab qilinsin (10.2-a,b rasm).

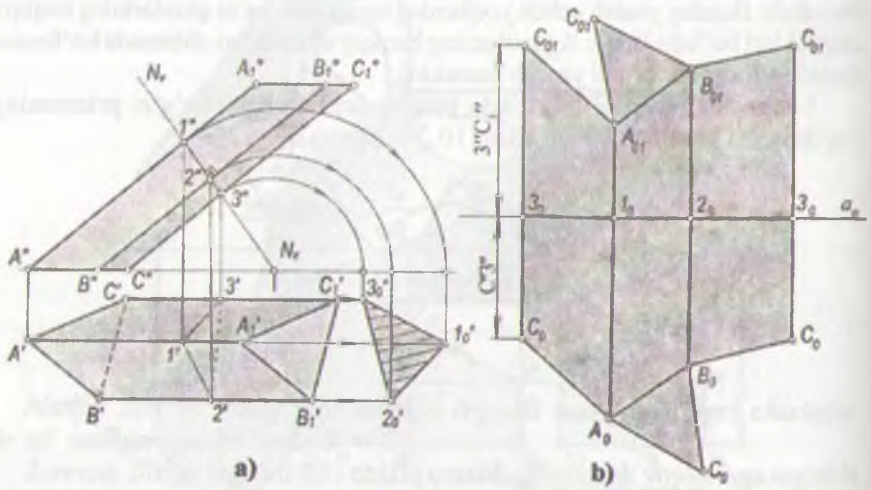


10.2-rasm.

Yechish. Prizmaning yon qirralari frontal proyeksiyada, asosidagi qirralari esa gorizontal proyeksiyada haqiqiy uzunlikda tasvirlangan. Prizmaning yoyilmasini yasash uchun dastlab uning biror, masalan, AA_1 qirrasi bo'ylab xayolan kesish kerak. So'ngra uchta to'g'ri to'rtburchaklar (yon yoqlar)yonma-yon qo'yib yasaladi. Bu to'rtburchaklarning balandligi prizmaning balandligi h ga, asoslari esa mos ravishda A′B′, B′A′ va C′A′ kesmalarga teng bo'ladi. Hosil bo'lgan yon sirtning yoyilmasiga asoslari qo'shiladi va prizmaning to'la yoyilmasi hosil bo'ladi.

10.3-a,b rasmlarda berilgan uchyoqli og'ma prizmaning yon qirralari frontal vaziyatda bo'lgani uchun ularning haqiqiy uzunliklari $A''A_1''$, $B''B_1''$ va $C''C_1''$ kesmalarga teng bo'ladi. Asoslari gorizontal vaziyatda bo'lganligi uchun asos qirralarining haqiqiy qiymati A′B′, B′A′ va C′A′ kesmalarga teng bo'ladi. Bunday og'ma prizmaning yoyilmasini normal kesim usulida yasash qulay hisoblanadi. Buning uchun og'ma prizmaning yon qirralariga perpendikulyar qilib ixtiyoriy $N(N_V)$ tekislik o'tkaziladi. Normal kesim 123 uchburchakning proyeksiyalari (1′2′3′, 1″2″3″) hosil qilinadi. So'ngra normal kesimning haqiqiy kattaligi $\Delta 1_0 2_0 3_0$ aylantirish usulida yasaladi.

Yoyilmani yasash uchun ixtiyoriy (bo'sh) joyda a_0 – yordamchi chiziq ingichka qilib o'tkaziladi. Bu chiziqqa normal kesim tomonlarining haqiqiy uzunliklari biror (masalan, 3_0) nuqtadan boshlab o'lchab qo'yiladi (10.3-b rasm). Hosil bo'lgan 3_0, 1_0, 2_0 va 3_0 nuqtalardan a_0 chiziqqa perpendikulyar vaziyatda chiziq o'tkaziladi. Bu chiziqlarga qirralarning haqiqiy uzunliklari o'lchab qo'yiladi. Yoyilmada $C''3''=C_03_0$ va $3''C''=3_0C_0$ qirraning o'lchab qo'yilishi ko'rsatilgan.

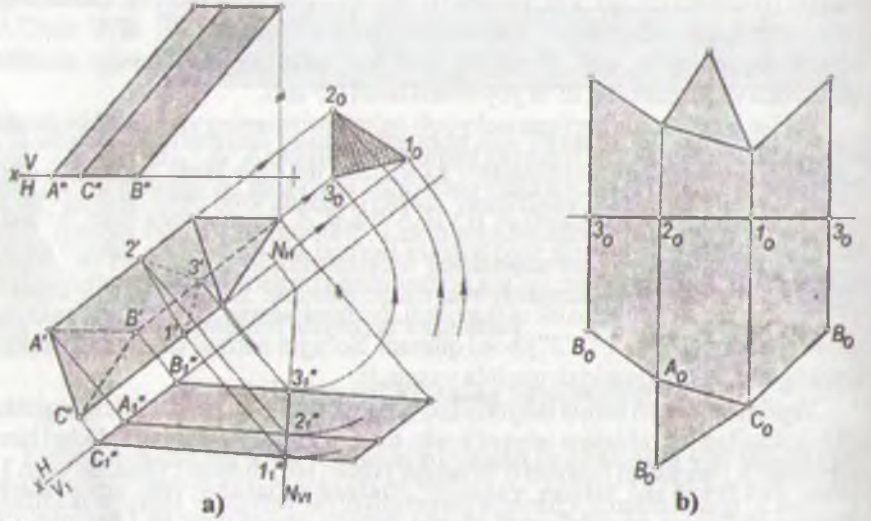


10.3-rasm.

Hosil bo'lgan qirralarning uchlari o'zaro tutashtiriladi. Prizma yon sirti va asosining haqiqiy kattaligi yoyilmasi qo'shilib, to'la yoyilma hosil bo'ladi.

2-masala. Berilgan yon qirralari umumiy vaziyatda bo'lgan uchyoqli prizmaning yoyilmasini yasash talab etilsin (10.4-a rasm).

Yechish. Mazkur masala yuqorida keltirilgan masala asosida yechiladi. Dastlab prizma qirralari va normal kesimining haqiqiy uzunliklarini yasash

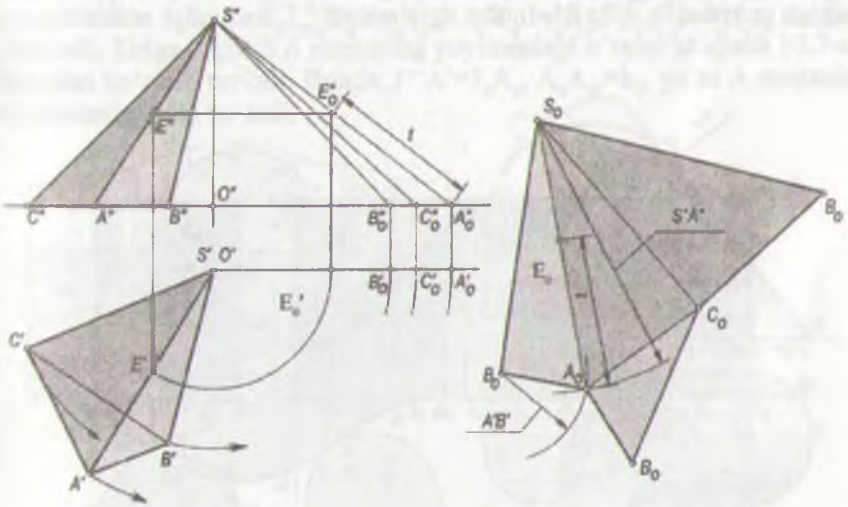


10.4-rasm.

kerak bo'ladi. Buni esa proyeksiyalar tekisliklarini prizma qirralariga parallel vaziyatda almashtirish bilan amalga oshirish maqsadga muvofiqdir. Chizmadagi qolgan yasashlar va yoyilmaning hosil qilinishi ortiqcha tushuntirishlarni talab qilmaydi (10.4-b rasm).

3-masala. Asosi H tekislikka tegishli bo'lgan uchyoqli og'ma piramidaning to'la yoyilmasi yasalsin (10.5-a rasm).

Yechish. Piramida kabi sirtlarning yoyilmalarini yasashda uchburchak usulidan foydalaniladi. Buning uchun dastlab piramida yon qirralarining haqiqiy uzunliklari yasaladi. Chizmada ular aylantirish usuli yordamida topilgan. Asos qirralarining haqiqiy uzunliklari A′B′, B′C′ va C′A′ kesmalarga teng bo'ladi. Piramida yon sirtining yoyilmasini yasash uchun chizmaning ixtiyoriy (bo'sh) joyida S_0 nuqta belgilab olinadi (10.5-b rasm). Bu nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqqa $S_0B_0=S''B''$ kesma o'lchab qo'yiladi. Chunki piramida SB qirrasi bo'yicha kesilgan deb faraz qilinadi. So'ngra markazi B_0 nuqtada, radiusi $B_0A_0=B'A'$ bo'lgan va markazi S_0 nuqtada, radiusi $S_0A_0=S''A_0''$ bo'lgan ikkita yoy chiziladi. Bu yoylarning kesishuvidan A_0 nuqta hosil bo'ladi. $S_0B_0A_0$ nuqtalar o'zaro tutashtirilib, ΔABC ning yoyilmadagi o'rni hosil qilinadi. Qolgan yon yoqlarning yoyilmalari ham shu tarzda yasaladi. Hosil bo'lgan yon sirtning yoyilmasiga piramida asosining yoyilmadagi o'rni qo'shilsa, piramida sirtining to'la yoyilmasi hosil bo'ladi.



a) b)

10.5-rasm.

10.3-§. Silindrik sirtlarning yoyilmalarini yasash

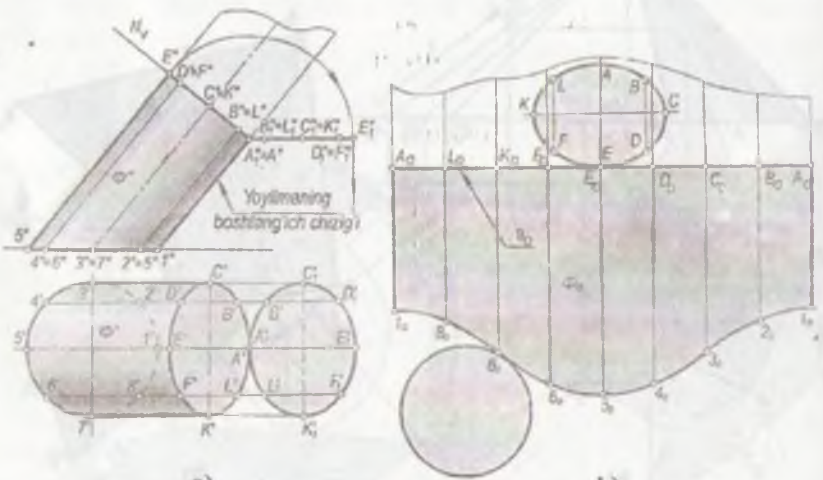
Silindrik sirtlarning yoyilmalarini yasashda normal kesim va dumalatish usullaridan foydalaniladi. Har ikkala usul bilan ham yoyilmani yasashda silindrik sirt approksimatsiya qilinib, prizmatik sirtga keltiriladi va masala prizmaning yoyilmasini yasash kabi bajariladi.

Umuman, biror silindrning yoyilmasini yasash uchun: silindr yoyilmasida qatnashadigan yasovchilarning haqiqiy uzunliklari aniqlanadi; qo'shni yasovchilar orasidagi asos yoylarining haqiqiy uzunliklari topiladi; planimetrik yasashlarga asosan silindr elementlari ketma-ket yoyilmada yasaladi.

10.6-a rasmda yasovchilari frontal vaziyatda va asosi *H* tekislikda yotgan og'ma elliptik silindr tasvirlangan. Bunday silindrning yoyilmasi (10.6-b rasm) normal kesim usulida bajarilgan. Silindrik sirt prizmatik sirtga approksimatsiya qilinadi. Buning uchun silindr asosi ixtiyoriy bo'laklarga bo'linadi (rasmda 8 ta teng bo'lakka bo'lingan).

Bu holda silindr *8* yoqli prizmaga almashtiriladi. Silindrning yasovchilariga perpendikulyar bo'lgan $N(N_v)$ tekislik bilan kesishish chizig'i yasaladi. Kesishish chizig'i, ya'ni normal kesimning haqiqiy kattaligi aylantirish usuli bilan topiladi.

Silindrik sirtning yoyilmasini yasash uchun chizma qog'ozining bo'sh joyida ixtiyoriy a_o to'g'ri chiziq o'tkaziladi. Yoyilmaning boshlang'ich chizig'i deb 1A yasovchi olingan. a_o to'g'ri chiziqqa uzunligi normal kesimning perimetriga teng bo'lgan $[A_0A_0]$ kesma o'lchab qo'yiladi. Bu kesmaga A_0 nuqtadan boshlab $A_oL_o=A_o'L_o'$, $L_oK_o=L_o'K_o'$, $K_oF_o=K_o'F_o'$,... kesmalar o'lchab



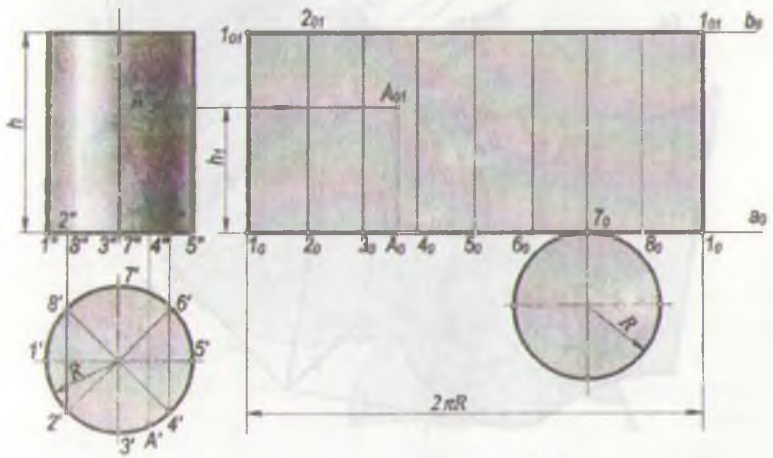
10.6-rasm.

qo'yilib, oraliqdagi L_o, K_o, F_o, ... nuqtalar aniqlanadi. Bu nuqtalar orqali a_0 to'g'ri chiziqqa perpendikulyarlar o'tkaziladi. 10.6-a rasmda silindr yasovchilarining frontal proyeksiyalari o'z haqiqiy uzunliklariga teng ekanligini ko'rish mumkin. Shuning uchun yasovchilarning frontal proyeksiyadagi uzunliklari o'lchab olinib, yoyilmadagi mos perpendikulyarlarga qo'yiladi. O'lchab qo'yilgan kesmalarning ikkinchi uchlari tekis egri chiziq bilan tutashtiriladi. Hosil bo'lgan Φ_0 shakl Φ silindr yon sirtining yoyilmasi bo'ladi. Φ_0 shakl silindrning asosi va normal kesimining haqiqiy kattaligi bilan to'ldirilib, to'la yoyilma hosil qilinadi.

Asoslari aylanish o'qiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri doiraviy silindr yon sirtining yoyilmasi to'g'ri to'rtburchakdan iborat bo'lib, bunday to'rtburchakning tomonlari $2\pi R$ va h_0 ga teng bo'ladi (10.7-a,b rasm). Bu yerda, R – asosning radiusi, h – silindrning balandligi. Asosi H tekisligiga tegishli va o'qi unga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri doiraviy silindrning to'la yoyilmasini yasash 10.7-b rasmda ko'rsatilgan.

Bunda silindrning 1_o2_o *(1'2', 1''2'')* yasovchisi yoyilmaning boshlang'ich chizig'i deb olingan.

Ixtiyoriy a_0 to'g'ri chiziq o'tkazib, unga $[1_o1_o] = 2\pi R$ kesma o'lchab qo'yiladi va u teng 8 bo'lakka bo'linadi. Kesmaning har ikkala uchidan a_0 to'g'ri chiziqqa perpendikulyarlar chiqarilib, ularga $1_o1_{o1}=h$ kesma, ya'ni silindrning balandligiga teng kesmalar o'lchab qo'yiladi. Hosil bo'lgan $1_o1_{o1}1_{o1}1_o$ to'g'ri to'rtburchak berilgan silindr yon sirtining yoyilmasi bo'lib, to'la yoyilmani yasash uchun 1_o1_{o1} va 2_o2_{o1} tomonlarga urinuvchi qilib silindrning asosi chiziladi. Sirtga tegishli A nuqtaning yoyilmadagi o'rnini aniqlash 10.7-a,b rasmdan ko'rinib turibdi. Bunda $3'^{\frown}A'=3_oA_o$, $A_oA_{o1}=h_1$, ya'ni A nuqtaning applikatasiga teng bo'ladi.



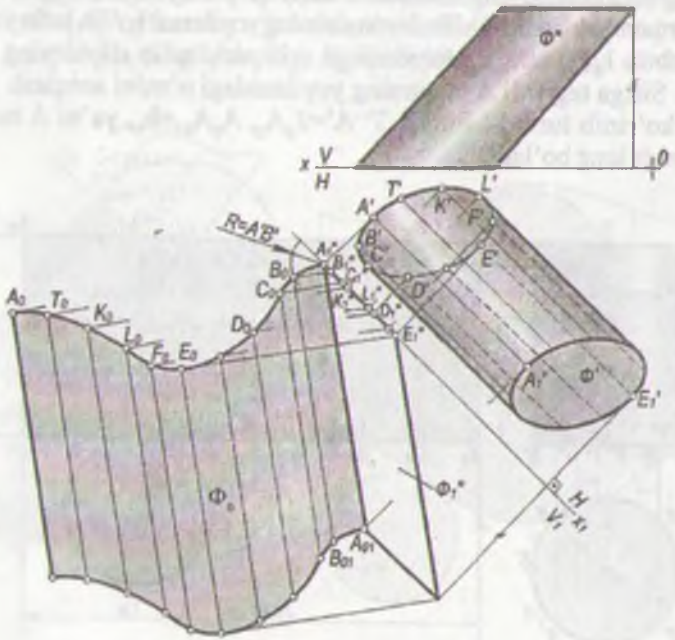
10.7-rasm.

10.8-rasmda tasvirlangan Φ og'ma elliptik silindr yon sirtining yoyilmasi dumalatish usulida bajarilgan. Dastavval, silindr uning yasovchilariga parallel bo'lgan V tekislikka proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usuli bilan proyeksiyalanadi.

Silindrning AA_1(A′A′$_1$, A″A″$_1$) yasovchisi yoyilmaning boshlang'ich chizig'i deb olingan. Φ silindr o'zining AA_1 yasovchisi orqali o'tgan tekislikka yoyiladi. Buning uchun silindrik sirt yana prizmatik sirtga approksimatsiya qilinadi va prizmaning yoyilmasini yasash kabi bajariladi. Silindr yasovchilaridan biri BB_1(B′B′$_1$, B″B″$_1$) ning yoyilmadagi o'rni B_0B_{01} ni yasashni ko'rib chiqaylik. Markazi A_1'' nuqtada va radiusi A′B′ ga teng bo'lgan aylana yoyi chiziladi. B_1'' nuqtadan esa $A_1''A_{01}''$ yasovchiga perpendikulyar to'g'ri chiziq o'tkaziladi. Ular o'zaro kesishib, yoyilmaga tegishli B_0 nuqtani hosil qiladi. B_0 nuqta orqali $A_1''A_{01}''$ ga parallel qilib B_0B_{01} (B_0B_{01}=$A_1''A_{01}''$) yasovchi o'tkaziladi. Yoyilmadagi C_0, D_0 ... nuqtalar va ular orqali o'tuvchi yasovchilar ham B_0 nuqta va B_0B_{01} yasovchi singari yasaladi.

10.4-§. Konus sirtlarning yoyilmalarini yasash

Umumiy holdagi konus sirtining yoyilmasi ham piramida yoyilmasini yasashdagidek uchburchaklar usuli bilan bajariladi. Buning uchun konus o'ziga ichki chizilgan ko'pyoqli piramidaga approksimatsiya qilinadi va shu

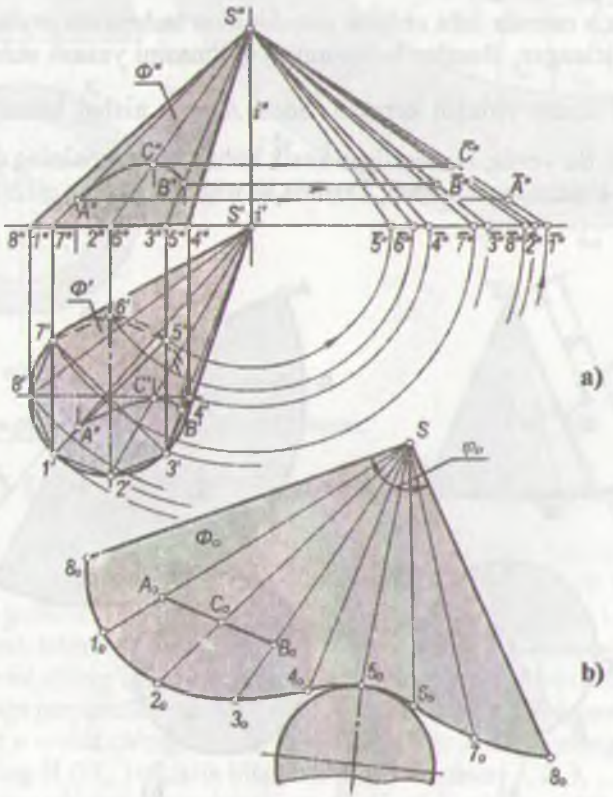


10.8-rasm.

piramidaning yoyilmasi konus sirtining yoyilmasi deb qabul qilinadi. Ichki chizilgan ko'pyoqli piramidaning yoqlari qanchalik ko'p bo'lsa, konus sirtining yoyilmasi shunchalik aniq bo'ladi. Umuman, konusni yoyish uchun uning bir necha yasovchilarining haqiqiy uzunliklari va yo'naltiruvchi egri chizig'i (yoki uning bo'laklari) — asosining haqiqiy uzunligi topiladi. So'ngra konus yasovchilari va asosining bo'laklari birin-ketin yoyilmaga ko'chiriladi.

10.9-a rasmda asosi H tekislikka tegishli Φ og'ma konus tasvirlangan. Bu konusning yoyilmasini yasashda uchburchaklar usulidan foydalanamiz. Konusni o'ziga ichki chizilgan piramidaga approksimatsiyalaymiz. Konus yasovchilari yoki ichki chizilgan piramida qirralarining haqiqiy uzunliklarini yasash rasmda aylantirish usulida bajarilgan.

S8 yasovchini yoyilmaning boshlang'ich chizig'i deb olamiz. Chizma qog'ozining bo'sh joyida ixtiyoriy S_0 nuqtani belgilaymiz (10.9-b rasm). 10.9-a rasmdan S8 yasovchining haqiqiy uzunligi bo'lgan $S''8_1''$ kesmani o'lchab va uni S_0 nuqtadan chiqarilgan ixtiyoriy a_0 to'g'ri chiziqqa qo'yib, 8_0



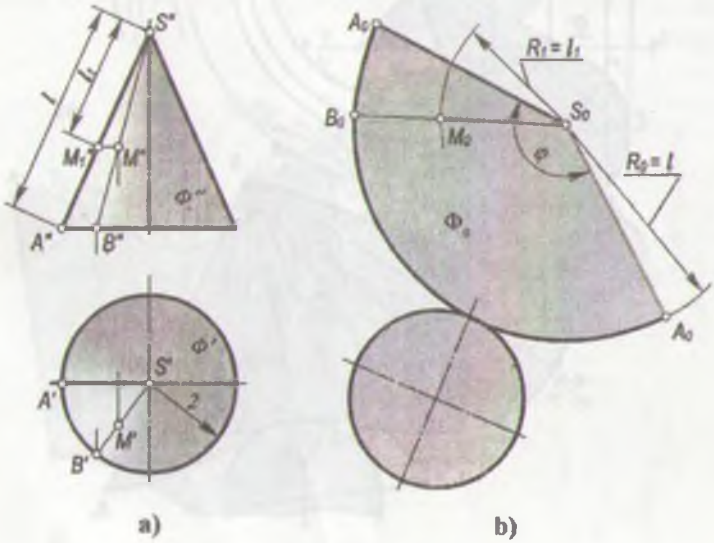
10.9-rasm.

nuqtani hosil qilamiz. So'ngra S_0 nuqtani markaz, $S''1_1''$ ni radius qilib yoy chizamiz. Markazi 8_0 nuqtada va radiusi $8'1'$ bo'lgan ikkinchi yoy chizamiz. Har ikkala yoylar o'zaro kesishib, 1_0 nuqtani hosil qiladi. Yoyilmaning qolgan 2_0, 3_0, 4_0, ... nuqtalari ham shu tartibda yasaladi. Hosil bo'lgan Φ_0 shakl berilgan konus yon sirtining yoyilmasi bo'ladi. Uni konusning asosi – ellips bilan to'ldirib, to'la yoyilmani hosil qilamiz. $\Phi(\Phi', \Phi'')$ konus sirtidagi AB egri chiziqqa Φ_0 shaklda A_0B_0 to'g'ri chiziq mos kelgan. Shuning uchun AB – konusning geodezik chizig'i bo'ladi. Shuningdek, konusning hamma yasovchilari uning geodezik chizig'i bo'la oladi.

10.10-a,b rasmda asosi H tekislikka tegishli va o'qi unga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri doiraviy $\Phi(\Phi', \Phi'')$ konus Monj chizmasida berilgan. Bunday konus yon sirtining yoyilmasi doira sektoridan iborat bo'ladi.

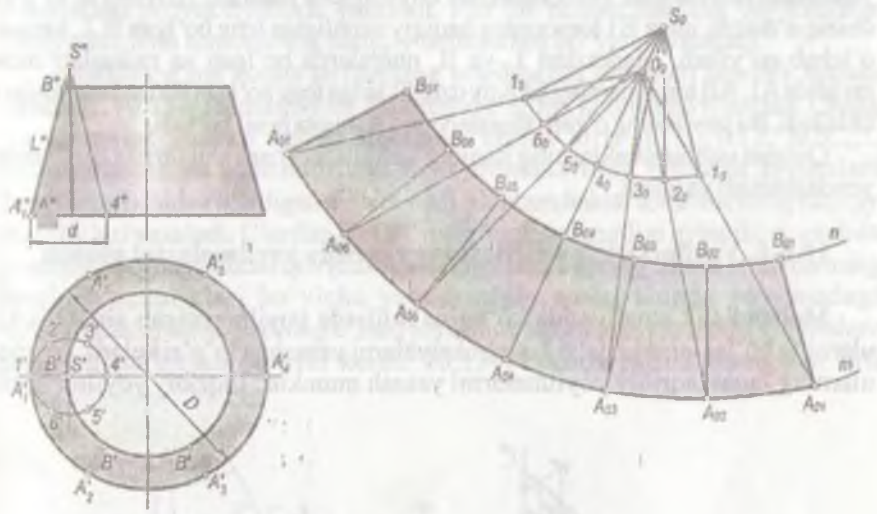
Doiraviy sektoming radiusi konus yasovchisining uzunligi l ga teng, markaziy burchagi $\varphi = \frac{r}{l} 360°$ bo'ladi. Bu yerda, r – konus asosining radiusi, l – konusning yasovchisi.

10.11-a,b rasmda uchi chizma maydonidan tashqarida joylashgan kesik konus tasvirlangan. Bunday konusning yoyilmasini yasash uchun shunday yordamchi konus chizish kerakki, unda $K = \frac{d}{D}$ nisbat butun son orqali ifodalansin. Bu yerda, D – berilgan kesik konus katta asosining diametri, d – yordamchi konusning diametri. Rasmda bu nisbat 3 ga teng qilib olingan.



10.10-rasm.

Dastlab yordamchi konusning yoyilmasini yasaymiz (10.11-b rasm). Keyin $\angle 1_0S_01_0$ning bissektrisasiga tegishli ixtiyoriy O_0 nuqta orqali O_01_0, O_02_0 O_03_0,... nurlarni o'tkazamiz. Bu nurlarga O_0 nuqtadan boshlab $O_0A_{01}=K'O_01_0$, $O_0A_{02}=K'O_02_0$, $O_0A_{03}=K'O_03_0$,... kesmalarni o'lchab qo'yamiz. Hosil bo'lgan A_{01}, A_{02}, A_{03}... nuqtalarni tekis egri chiziq bilan tutashtiramiz. Amalda bunday egri chiziqning markazi O_0 nuqtada, radiusi O_0A_{01} bo'lgan aylana yoyi ko'rinishida chiziladi. So'ngra A_{01}, A_{02}, A_{03},... nuqtalar orqali S_01_0, S_02_0, S_03_0,... yasovchilarga mos ravishda parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazib, ularga kesik konusning A"B" yasovchisiga teng bo'lgan $A_{01}B_{01}$, $A_{02}B_{02}$, $A_{03}B_{03}$,... kesmalarni o'lchab qo'yamiz. Hosil bo'lgan B_{01}, B_{02}, B_{03},... nuqtalarni tekis egri chiziq bilan tutashtirib, kesik konus yon sirtining yoyilmasini hosil qilamiz.



a) b)

10.11-rasm.

10.5-§. Qaytish qirrali sirtlarning yoyilmalarini yasash

Qaytish qirrali sirtlarning yoyilmalarini yasash ham konus sirtlarning yoyilmalarini yasashdagidek uchburchaklar usulida bajariladi. 10.12-a rasmda yoyiladigan gelikoid va 10.12-b rasmda uning yoyilmasini yasash ko'rsatilgan. Qaytish qirrali silindrik vint chizig'ida A, B, C,... nuqtalarni belgilab olamiz. Ular orqali vint chizig'iga urinmalar o'tkazib, sirt yasovchilarini hosil qilamiz. Sirtning o'qiga perpendikulyar bo'lgan H_1 tekislik bilan sirtni kesamiz. Bu holda berilgan sirt n – vint chizig'i va m – evolventa bilan chegaralangan bo'ladi. Urinmalarning $H_1(H_{1V})$ tekislik bilan kesishish nuqtalari *1, 2,* 3, ... ni belgilab olamiz. Sirtning qo'shni yasovchilari orasidagi bo'laklarining, ya'ni egri chiziqli to'rtburchaklarning bittadan diagonallarini o'tkazib, ularni ikkita

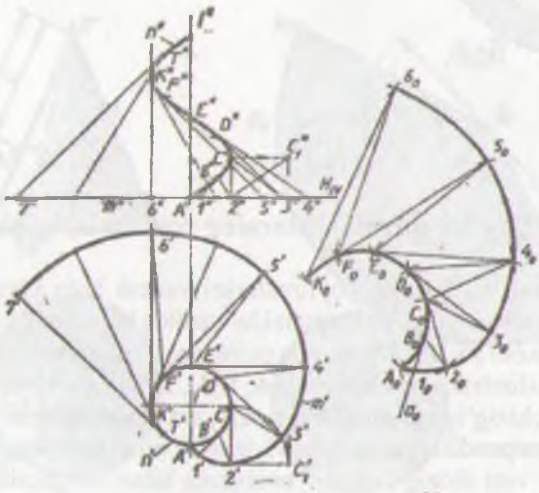
uchburchakka ajratamiz. Masalan, BC21 bo'lakning B2 diagonalini o'tkazib, uni B12 va B2C uchburchaklarga ajratamiz. Agar *A, B, C,* ... nuqtalar orasidagi masofalar qisqa bo'lsa, uchburchaklarning egri chiziqli tomonlarini to'g'ri chiziq kesmasi deb qarash mumkin.

Shunday qilib, qaytish qirrali sirt ko'pyoqlik sirtiga approksimatsiya qilinadi. Bu holda sirt yoyilmasini yasash ko'pyoqlik sirtining yoyilmasini yasash kabi bajariladi. Buning uchun uchburchaklarning uchala tomonlarining haqiqiy uzunliklari yasaladi. Shunday tomonlardan biri, masalan, *C2* ning haqiqiy uzunligini yasash 10.12-a rasmda aylantirish usulida bajarilib ko'rsatilgan. Uchburchaklar tomonlarining haqiqiy uzunliklari bo'yicha yoyilmada uchburchaklar ketma-ket yasaladi. 10.12-b rasmda yoyilma $A_0B_0l_0$ uchburchakni yasashdan boshlangan. Bu uchburchak quyidagicha yasaladi: ixtiyoriy a_0 to'g'ri chiziq o'tkazib, unga B1 tomonning haqiqiy uzunligiga teng bo'lgan B_0l_0 kesma o'lchab qo'yiladi. Markazlari l_0 va B_0 nuqtalarda bo'lgan va radiuslari mos ravishda A1, AB tomonlarning haqiqiy uzunliklariga teng bo'lgan ikki aylana yoylari chiziladi. Bu yoylarning o'zaro kesishuvidan A_0 nuqta hosil bo'ladi.

Qolgan uchburchaklarning haqiqiy kattaliklari ham shu tarzda bir-biriga yondashtirilib yasaladi.

10.6-§. Yoyilmaydigan sirtlarning taqribiy yoyilmalarini yasash

Muhandislik amaliyotida ko'pgina hollarda yoyilmaydigan sirtlar yoki ularning bo'laklaridan ba'zi konstruksiyalarni yasashga to'g'ri keladi. Ammo ularning faqat taqribiy yoyilmalarini yasash mumkin. Taqribiy yoyilmalarni



a) b)

10.12-rasm.

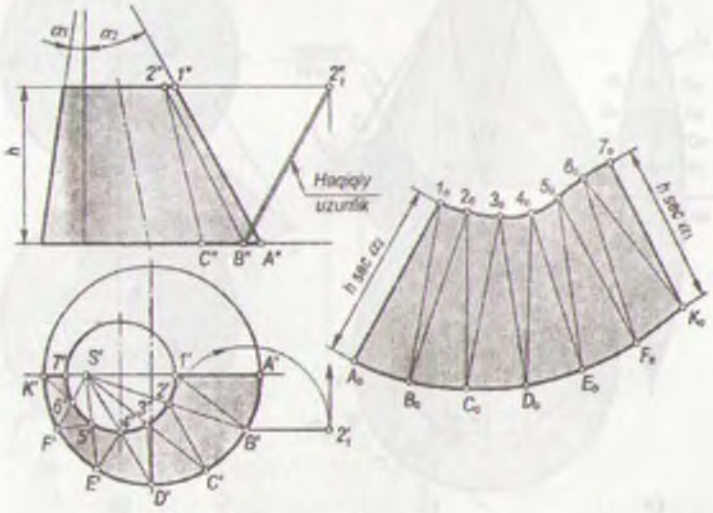
yasashning umumiy usuli shundan iboratki, berilgan sirt yoyiladigan sirtlardan biriga (ko'pyoqlik, silindrik yoki konussimon) approksimatsiya qilinadi.

Sirtlarning yoyilmalarini taqribiy yasashning uch usuli mavjud:

1. Yordamchi uchburchaklar usuli.
2. Yordamchi silindrik sirtlar usuli.
3. Yordamchi konus sirtlar usuli.

Yordamchi uchburchaklar usuli. Bu usulning mohiyati quyidagidan iborat: dastlab yoyilmaydigan sirt uchburchaklarga bo'lib chiqiladi, ya'ni berilgan sirt ko'pyoqlik sirtiga approksimatsiya qilinadi. Keyin ko'pyoqlik sirtining yoyilmasi yasaladi. Buning uchun uchburchak tomonlarining haqiqiy uzunliklari proyeksiyalarda yasaladi. Har bir uchbuchakning yoyilmadagi vaziyati uchala tomonining haqiqiy uzunliklari bo'yicha yasaladi.

Amalda og'ma konus sirtlarining yoyilmalari umuman taqribiy usulda yasaladi. 10.13-a rasmda Monj chizmasida og'ma konus tasvirlangan. Uning yoyilmasini yasash uchun berilgan konus sirti A1B, B12, B2C,... uchburchaklarga ajratiladi. Bu uchburchaklarning bittadan tomonlari konusning uchidan o'tadigan qilib olinadi. Uchburchaklar tomonlarining haqiqiy uzunliklari yasaladi. Ulardan biri *B2* ning haqiqiy uzunligi aylantirish usulida yasalgan. Yoyilmani hosil qiluvchi uchburchaklarni ularning uchala tomonlarining haqiqiy uzunliklari bo'yicha yasash qiyin emas. Bunda yoyilmadagi uchburchaklar tomonlarining o'zaro joylashuv tartibi proyeksiyadagi joylashuv tartibi bilan bir xil bo'lishi kerak. 10.13-b rasmda og'ma konus yon sirti



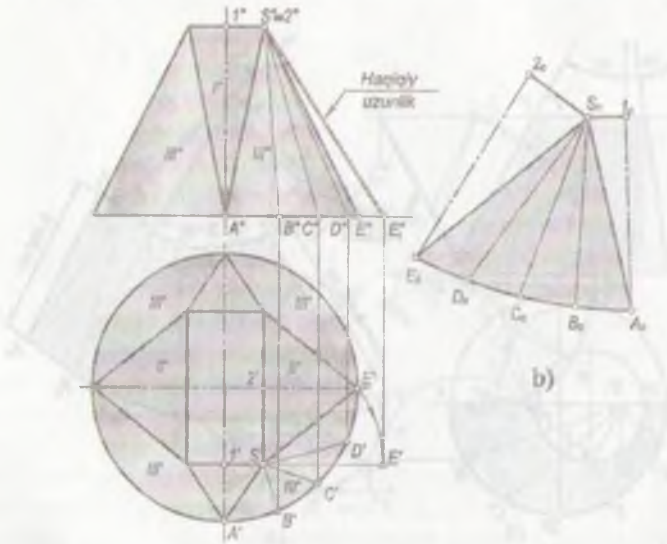
a) b)

10.13-rasm.

yoyilmasining yarmi ko‘rsatilgan. 10.14-a rasmda tasvirlangan sirt silindrik trubadan to‘rtburchakli trubaga o‘tish elementi bo‘lib, u ikkita I ko‘rinishdagi, ikkita II ko‘rinishdagi tekis uchburchaklardan hamda to‘rtta III ko‘rinishdagi elliptik konus sirtlaridan tashkil topgan. Bunday sirtning yoyilmasini yasash uchun dastlab konus sirtlarini piramida sirtlariga approksimatsiya qilamiz (rasmda faqat bitta konus sirtining piramidaga approksimatsiya qilinishi ko‘rsatilgan). Buning uchun konusning asosida bir necha *A*, *B*, *C*, D, *E* nuqtalarni belgilab olib, ularni konusning uchi bilan tutashtiramiz. Hosil bo‘lgan uchburchaklar tomonlarining haqiqiy uzunliklarini yasaymiz. 10.14-a rasmda SE tomonning haqiqiy uzunligini yasash ko‘rsatilgan. Bu sirt yoyilmasini yasash uchun tomonlarning haqiqiy uzunliklari bo‘yicha uchburchaklar yasaymiz.

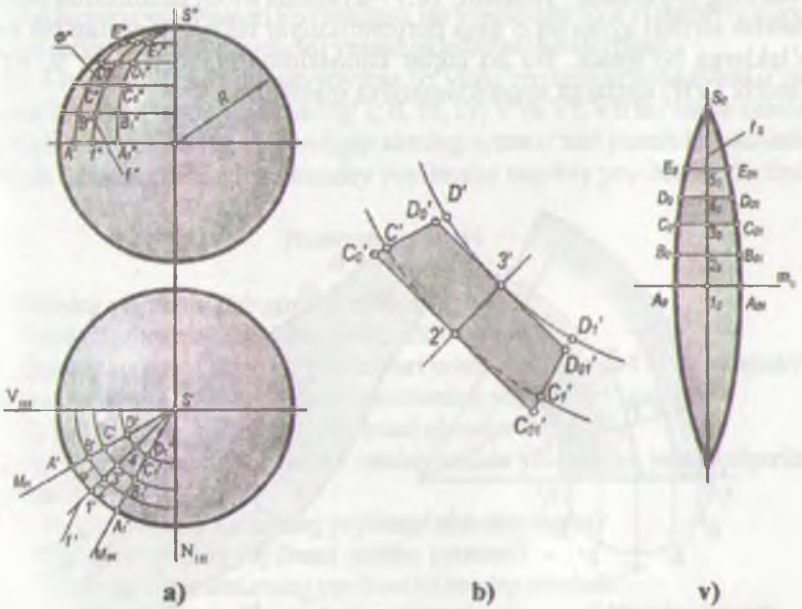
Berilgan sirtning *S2EA1* choragi yoyilmasini yasash 10.14-b rasmda ko‘rsatilgan. Qolgan choraklarining yoyilmasi ham yuqorida bayon qilinganidek yasaladi.

Yordamchi silindrik sirtlar usuli. Bu usul yoyilmaydigan aylanish sirtlarining taqribiy yoyilmalarini yasashda qulay. Uning mohiyati quyidagidan iborat: berilgan sirt meridianlari bo‘yicha bir necha o‘zaro teng bo‘laklarga bo‘lib chiqiladi. Bu bo‘laklar, o‘z navbatida, silindrik sirtlar bilan almashtiriladi. Bunday silindrik sirtlar berilgan sirtga har bo‘lagining o‘rta meridiani bo‘yicha urinib o‘tishi shart. 10.15-a rasmda proyeksiyalari bilan berilgan sferik sirt bo‘lagining taqribiy yoyilmasi 10.15-b rasmda tasvirlangan.



10.14-rasm.

Dastavval, sferik sirtni meridianlar bo'yicha kesuvchi V_1, M, M_1 va W_1 tekisliklar bilan teng bo'laklarga bo'lamiz. Bunda bo'laklar soni qancha ko'p bo'lsa, sferaning yoyilmasi shuncha aniqroq bo'ladi. M va M_1 tekisliklar orasidagi sferaning $\Phi(\Phi', \Phi'')$ bo'lagi yoyilmasini yasashni ko'rib chiqamiz. Bu bo'lakni silindrik sirt bilan almashtiramiz. Bunday almashtirish 10.15-v rasmda kattalashtirib ko'rsatilgan. *M* va M_1 meridional tekisliklar orasidagi masofalar silindrik sirt yasovchilarining uzunliklari bo'ladi. Demak, bu yasovchilar gorizontal vaziyatdagi kesmalar bo'lib, ularning gorizontal proyeksiyalari haqiqiy uzunliklarida tasvirlanadi. Bunday silindrik sirt Φ bo'lakning o'rta meridiani f bo'yicha urinuvchi bo'ladi. Φ bo'lakning yoyilmasini yasash uchun gorizontal vaziyatda ixtiyoriy t_o to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. Unga $A_0 1_0 = A'1'$ va $1'A_1' = 1_0 A_{01}$ kesmalarni o'lchab qo'yamiz. Bu kesmaning o'rtasidan unga perpendikulyar qilib f_0 to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziq o'rta meridional kesim uzunligining yarmi $\frac{\pi D}{2}$ ni 1_0 nuqtadan boshlab o'lchab qo'yib, S_0 nuqtani belgilab olamiz. 1, 2, 3, 4, 5 va *S* nuqtalar orasidagi masofalarning haqiqiy uzunliklarini aniqlab, f_0 to'g'ri chiziqqa 1_0, 2_0, 3_0, 4_0 va 5_0 nuqtalarni belgilaymiz. Bu nuqtalar orqali gorizontal to'g'ri chiziqlar o'tkazib, ularga f_0 vertikal to'g'ri chiziqdan boshlab har ikkala tomonga 1′, 2′, 3′, 4′ va 5′ nuqtalar orqali o'tgan yasovchilarning



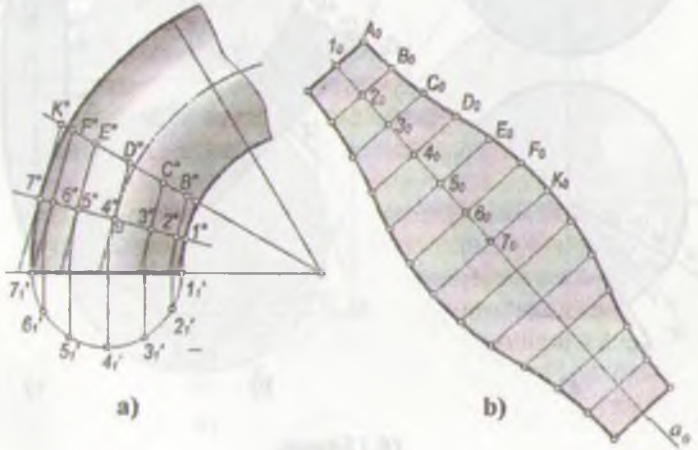
a) b) v)

10.15-rasm.

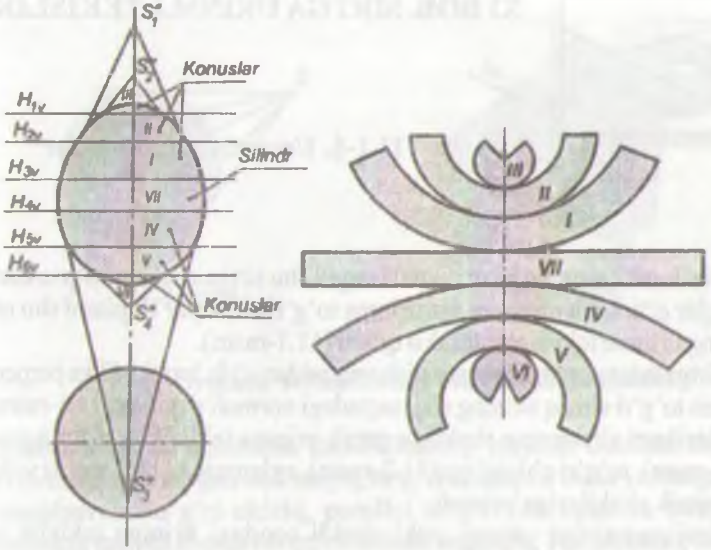
yarmini o'lchab qo'yamiz. Hosil bo'lgan A_0, B_0, C_0, D_0, E_0, S_0 va S_{01}, A_{01}, B_{01}, C_{01}, D_{01}, E_{01} nuqtalarni tekis egri chiziq bilan tutashtiramiz. $A_0S_0A_{01}$ shakl Φ bo'lak yoyilmasining yarmi hisoblanadi. Ikkinchi yarmining yoyilmasi ham xuddi shu tarzda yasaladi. Sfera sirtining to'la yoyilmasini hosil qilish uchun shunday yoyilmadan yana n–1 tasini yasash kerak bo'ladi, bunda n – sferik sirt bo'laklarining soni. Yuqorida ko'rilgan hol uchun n=12.

10.16-a rasmda tasvirlangan tor halqaning taqribiy yoyilmasini yasash uchun uni 12 teng bo'lakka bo'lib, bir bo'lagining yoyilmasini yasaylik (10.16-b rasm). Torning bu bo'lagini tashqi chizilgan yordamchi silindrik sirt bilan almashtiramiz. Bunday silindrik sirt halqa bo'lagining o'rta meridiani yoki normal kesimi bo'yicha urinadi. Yoyilmani yasash uchun gorizontal vaziyatda a_0 to'g'ri chiziq o'tkazamiz (10.16-b rasm) va unga normal kesimning uzunligini o'lchab qo'yamiz. Keyin bu to'g'ri chiziqda 1_0, 2_0, 3_0,... nuqtalarni belgilab, ular orqali a_0 to'g'ri chiziqda perpendikulyar qilib yordamchi silindrning yasovchilarini o'tkazamiz. Bularga yasovchilarning uzunliklarini o'lchab qo'yamiz. Hosil bo'lgan A_0, B_0, C_0,... nuqtalarni tekis egri chiziq bilan tutashtirib, yoyilmani hosil qilamiz. Bu esa halqa 1/12 qismining yoyilmasi bo'ladi.

Yordamchi konus sirtlar usuli. Bu usul bilan konturi egri chiziqli aylanish sirtlarining taqribiy yoyilmasi yasaladi. Berilgan sirt aylanish o'qiga perpendikulyar tekisliklar bilan kesiladi. Sirtning har bir bo'lagi konussimon yoki silindrik sirtlarga approksimatsiya qilinadi va bu sirtlarning yoyilmalari yasaladi. 10.17-a rasmda Monj chizmasida berilgan aylanish sirtlari aylanish o'qiga perpendikulyar tekisliklar bilan bir necha bo'laklarga bo'linadi. Bu bo'laklar konussimon (I, II, III, IV, V, VI) va silindrik (VII) sirtlarga approksimatsiya qilinadi.



10.16-rasm.



a) b)

10.17-rasm.

10.17-b rasmda konussimon va silindrik sirtlarga approksimatsiya qilingan sirt bo‘laklarining yoyilmalari ko‘rsatilgan. Bu yoyilmalar to‘g‘ri doiraviy silindr va konus sirtlarning yoyilmalarini yasashga asoslanib bajarilgan.

10.17-b rasmda hosil qilingan yoyilma bo‘yicha berilgan sirtning aynan o‘zini yasab bo‘lmaydi. Bunda yoyilmadagi I, II, III, IV, V va VI, VII bo‘laklar orasida ochiq joylar mavjud bo‘lib, ular berilgan sirtning aynan o‘zini yasash imkoniyatini bermaydi. Shuning uchun ham bunday yoyilmalar taqribiy yoyilmalar deyiladi.

Nazorat savollari

1. Sirtning yoyilmasi deb nimaga aytiladi?
2. Yoyiladigan sirtlar deb nimaga aytiladi?
3. Qanday ko‘pyoqliklarning yoyilmalari uchburchaklar usuli bilan yasaladi?
4. Normal kesim usuli bilan qanday sirtlarning yoyilmalari yasaladi?
5. To‘g‘ri doiraviy silindrning yoyilmasi nimadan iborat?
6. Og‘ma silindrning yoyilmalari qanday usulda yasaladi va yasash algoritmi nimalardan iborat?
7. To‘g‘ri doiraviy konusning yoyilmasi nimadan iborat?
8. Og‘ma konusning yoyilmasi qanday yasaladi?
9. Yoyilmaydigan sirtlarning yoyilmalari qanday yasaladi?
10. Taqribiy yoyilmalarni yasashning triangulyatsiya usuli nimadan iborat?
11. Elliptik konusning yoyilmasi qanday yasaladi?
12. Sferaning taqribiy yoyilmasi qanday yasaladi?



XI BOB. SIRTGA URINMA TEKISLIKLAR

11.1-§. Umumiy ma'lumotlar

Ma'lumki, sirtning biror nuqtasi orqali shu sirtga cheksiz ko'p urinma to'g'ri chiziqlar o'tkazish mumkin. Bu urinma to'g'ri chiziqlar to'plami shu nuqtadagi sirtning urinma tekisligini tashkil qiladi (11.1-rasm).

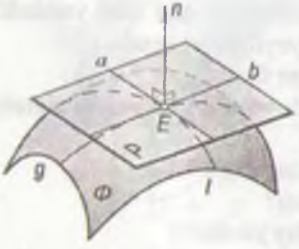
Sirtga urinma tekislikning urinish nuqtasidan o'tib, bu tekislikka perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq sirtning shu nuqtadagi *normali* deyiladi (11.1-rasm).

Berilgan sirtlarning shakliga qarab urinma tekisliklar sirtning nuqtasiga (11.1-rasm), to'g'ri chizig'iga (11.2-rasm), aylanasiga (11.3-rasm) yoki boshqa geometrik shakllariga urinadi.

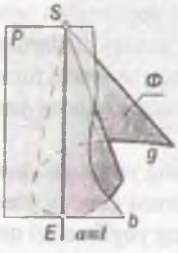
Berilgan sirtga yagona yoki chekli sondagi urinma tekislik quyidagi hollarda o'tkazilishi mumkin:

- sirt ustidagi nuqta orqali;
- sirt tashqarisidagi nuqta orqali;
- berilgan to'g'ri chiziq orqali;
- berilgan to'g'ri chiziqqa parallel;
- berilgan tekislikka parallel;
- berilgan ikki sirtga urinma va hokazo.

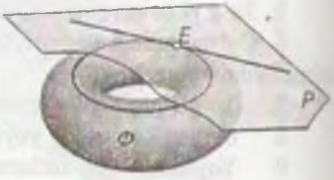
Bu shartlar tekislikning berilish usullari bilan uzviy bog'liq bo'lib, sirtlarning turiga qarab tanlanadi. Masalan, ikkinchi holda S nuqtadan shar sirti uchun cheksiz urinma tekisliklarni o'tkazish imkonini beradi (11.4-rasm). Shar sirti uchun chekli urinma tekislik hosil qilish masalasi faqat 1-, 3-, 5-hollar qo'yilganda hal bo'ladi (11.5-rasm). Boshqa sirtlar uchun ham xuddi shunday mulohaza yuritish mumkin.



11.1-rasm.



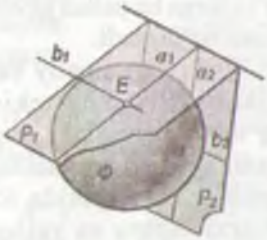
11.2-rasm.



11.3-rasm.



11.4-rasm.



11.5-rasm.

11.2-§. Urinma tekislikning chizmada berilishi

Urinma tekislik, chizmada tekisliklarning berilish usullari singari, bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan uch nuqta, to‘g‘ri chiziq va unda yotmagan nuqta, ikki kesishuvchi to‘g‘ri chiziq, parallel to‘g‘ri chiziqlar va boshqa tekis shakllarining proyeksiyalari orqali berilishi mumkin. Tekislikning berilishida qatnashuvchi nuqtalar va to‘g‘ri chiziqlar urinish nuqtalari yoki urinish chiziqlarini ifodalashi mumkin. Masalan, konus sirtiga uringan tekislik kesishuvchi ikki to‘g‘ri chiziq ko‘rinishida berilishi mumkin va bu chiziqlarning biri urinish chizig‘i bo‘lib xizmat qiladi (11.2-rasm).

Urinma tekislik sirtga qanday urinishidan qat’i nazar, urinish chiziqlariga tegishli nuqtalar elliptik, parabolik, giperbolik nuqtalarga bo‘linadi.

Sirtning elliptik nuqtasi

Ta’rif. Agar urinma tekislik sirt bilan bitta umumiy nuqtaga ega bo‘lsa va shu nuqta orqali o‘tuvchi sirtning barcha kesim chiziqlari urinma tekislikning bir tomonida qolsa, sirtning bunday urinish nuqtasi elliptik nuqta deyiladi (11.1-rasm).

Bunga ellipsoid, paraboloid, shar sirtlarining nuqtalari misol bo‘la oladi.

Sirtning parabolik nuqtasi

Ta’rif. Agar urinma tekislik sirt bilan to‘g‘ri chiziq hosil qilib urinsa, bu urinish chizig‘ining nuqtalari parabolik nuqtalar deyiladi (11.2-rasm).

Bunga konus, silindr kabi sirtlar misol bo‘ladi.

Sirtning giperbolik nuqtasi

Ta’rif. Agar urinma tekislik sirtga urinib, uni kessa, hosil bo‘lgan kesishish chizig‘iga oid sirtning nuqtasi giperbolik nuqta deyiladi (11.6-rasm).

Bunday sirtlarga bir pallali giperboloid, giperbolik paraboloid kabi sirtlarning nuqtalari misol bo‘la oladi.

Urinma tekisliklar amaliy va nazariy jihatdan katta ahamiyatga ega. Nazariy jihatdan urinma tekisliklardan differensial geometriyada sirtlarning urinish nuqtasi atrofidagi xossalarini o‘rganishda keng foydalaniladi. Urinish nuqtasidagi normalning yo‘nalishini aniqlashdan esa muhandislik amaliyotida foydalaniladi. Bundan tashqari, urinma tekisliklar arxitektura va rassomchilikda sirtlarning o‘z soyasi yoki tushgan soyasi chegaralarini aniqlashda, chizma geometriyada sirtlarning ocherklarini yasashda keng qo‘llaniladi.

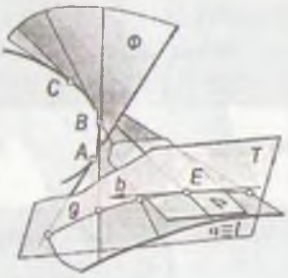
11.3-§. Sirtning ixtiyoriy nuqtasi orqali urinma tekislik o‘tkazish

Sirtdagi ixtiyoriy nuqtadan yagona urinma tekislik o‘tadi. Bu tekislik sirtning urinish nuqtasiga o‘tkazilgan bir juft kesishuvchi urinma to‘g‘ri chiziqlarning proyeksiyalari orqali tasvirlanadi (11.7, 11.10-rasmlar). Sirtning ixtiyoriy nuqtasiga urinma tekislik o‘tkazishga doir bir necha masalani ko‘rib chiqamiz.

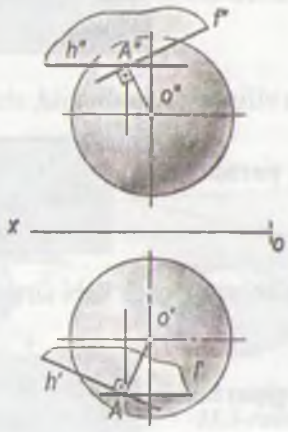
1-masala. Sferaning A(A′, A″) nuqtasi orqali urinma tekislik o‘tkazilsin (11.7-rasm).

Yechish. Izlangan urinma tekislik urinish nuqtasi A(A′, A″) orqali o‘tkazilgan OA(O′A′, O″A″) radiusga perpendikulyar bo‘ladi. Shunga ko‘ra, to‘g‘ri chiziq va tekislikning o‘zaro perpendikulyarlik shartiga asosan A nuqtadan sferaning OA radiusiga perpendikulyar qilib ikkita urinma to‘g‘ri chiziq, ya’ni gorizontal h(h′, h″) va frontal f(f′, f″) chiziqlar o‘tkaziladi. Bu chiziqlar birgalikda izlangan urinma tekislikni ifodalaydi.

2-masala. Φ(Φ′, Φ″) aylanish sirtining ixtiyoriy A(A′, A″) elliptik nuqtasi orqali unga urinma tekislik o‘tkazilsin (11.8-rasm).

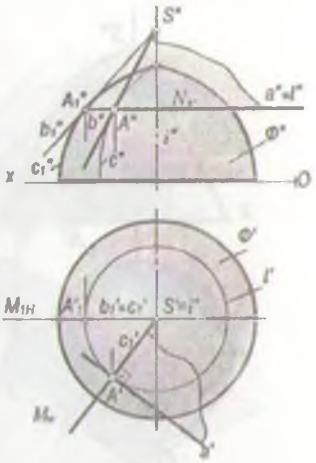


11.6-rasm.



11.7-rasm.

Yechish. Izlangan urinma tekislikni sirtning A nuqtasi orqali o'tgan paralleli va meridianiga urinma bo'lgan to'g'ri chiziqlar orqali ifodalash qulaydir. Urinma tekislikni ifodalovchi chiziqlarni yasash algoritmi quyidagicha bo'ladi:



11.8-rasm.

- A(A′, A″) nuqtadan sirtning $N(N_V)$ tekislikdagi l (l', l'') paralleli va $M(M_H)$ tekislikdagi $c(c', c'')$ meridiani o'tkaziladi;
- l (l', l'') parallelning A (A′, A″) nuqtasidan $a(a', a'')$ urinma o'tkaziladi, bu urinma tekislikning gorizontali bo'ladi.
- $c(c', c'')$ meridian chizig'iga o'tkazilgan urinmaning b' gorizontal proyeksiyasi a' ga perpendikulyar qilib o'tkaziladi;
- b urinma chiziqning frontal proyeksiyasi b'' ni yasash uchun aylanish o'qi $i(i', i'')$ va A(A′, A″) urinish nuqtasidan iborat M meridian tekisligini V proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgunga qadar i atrofida burib, A nuqtaning yangi $A_1(A'_1, A''_1)$ vaziyati aniqlanadi;
- A urinish nuqtasining yangi A''_1 frontal proyeksiyasidan sirtning frontal proyeksiyasi chegara chizig'i c''_1 ga urinma o'tkazib, i' o'qi bilan kesishgan joyda S″ nuqta aniqlanadi;
- S″ va A″ nuqtalarni birlashtirib, b'' hosil qilinadi. Natijada hosil bo'lgan kesishuvchi $a(a', a'')$ va $b(b', b'')$ urinma chiziqlar izlangan urinma tekislikni ifodalaydi.

3-masala. Konus sirtining ixtiyoriy B(B′, B″) parabolik nuqtasi orqali urinma tekislik o'tkazilsin (11.9-rasm).

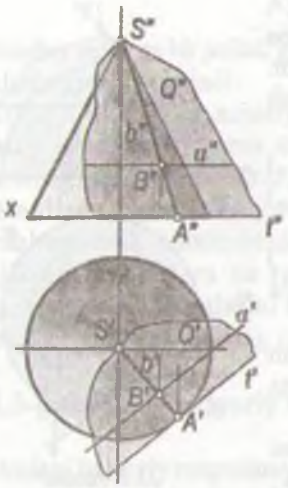
Yechish. Izlangan tekislik konus sirti bilan to'g'ri chiziq bo'ylab urinadi. Uni yasash algoritmi quyidagicha:

- konus uchi S(S′, S″) bilan berilgan B(B′, B″) nuqtani o'zaro birlashtirib, urinish chizig'ining b' va b'' proyeksiyalari aniqlanadi;
- $b(b', b'')$ chiziqning konus asosi bilan kesishgan A(A′, A″) nuqtasidan konus asosiga urinma to'g'ri chiziq t(t′, t″) o'tkaziladi. Bunda $t' \perp b'$ bo'ladi;
- hosil bo'lgan kesishuvchi $b(b', b'')$ va t(t′, t″) to'g'ri chiziqlar izlangan urinma tekislikni ifodalaydi. Konus uchi orqali cheksiz ko'p urinma tekisliklar o'tadi, chunki S dan o'tuvchi cheksiz yasovchi — urinish chiziqlari mavjuddir.

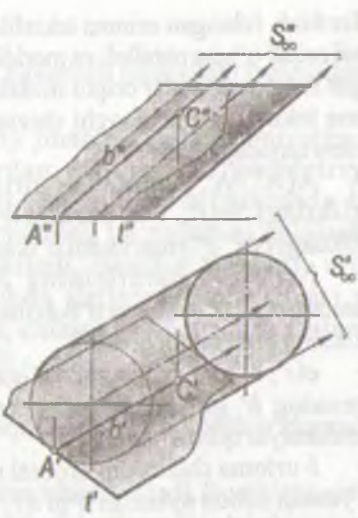
Silindr sirtiga urinma tekislik o'tkazish 3-masaladagidek bo'lib, faqat urinish chizig'ini silindr yasovchilariga parallel qilib o'tkazish yetarlidir (11.10-rasm).

11.4-§. Sirt tashqarisidagi nuqta orqali urinma o'tkazish

Sirt tashqarisidagi nuqtadan faqat chiziqli sirtlargagina chekli sondagi urinma tekislik o'tkazish mumkin. Quyida ixtiyoriy nuqtadan konus sirtlariga urinuvchi tekisliklar yasashni ko'rib chiqamiz.



11.9-rasm.



11.10-rasm.

1-masala. Konus sirtida yotmagan E nuqta orqali konus sirtiga urinma tekislik yasalsin (11.11-rasm).

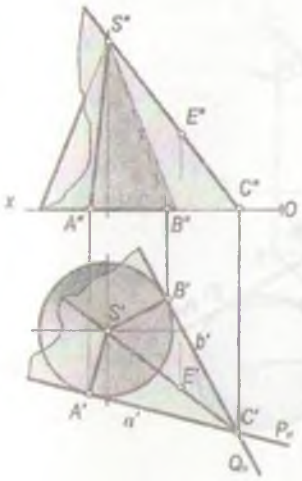
Yechish. Urinma tekislikning vaziyatini berilgan nuqta va urinish chizig'i aniqlaydi. Buning uchun konus uchi S(S′, S″) bilan E(E′, E″) nuqta tutashtirilsa, bu to'g'ri chiziqdan o'tuvchi va konus sirtiga urinuvchi tekisliklar dastasi hosil bo'ladi. Bu tekisliklar SE qirrada o'zaro kesishib, ikkiyoqli burchak hosil qiladi. Urinma tekisliklarni yasash algoritmi quyidagicha:

- S′ va E′, S″ va E″ nuqtalarni o'zaro birlashtirib, uning gorizontal izi C(C′, C″) yasaladi;
- SE qirraning gorizontal izi C′ dan konus asosiga A′ va B′ nuqtalarda urinuvchi P va Q tekisliklarning P_H va Q_H izlari o'tkaziladi;
- S′ uch bilan A′ va B′ nuqtalar birlashtirilib, konus yasovchilari bo'lgan SA va SB urinish chiziqlarining gorizontal S′A′ va S′B′ proyeksiyalari aniqlanadi;
- SA va SB urinish chiziqlarining frontal S″A″ va S″B″ proyeksiyalari yasaladi. Natijada P va Q urinma tekisliklarning proyeksiyalari ΔS′A′C′ va ΔS″A″C″, ΔS′B′C′ va ΔS″B″C″ hosil bo'ladi. Bu tekisliklar masalaning ikki yechimga ega ekanligini tasdiqlaydi.

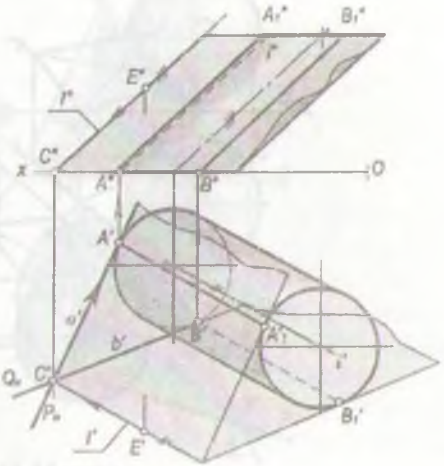
2-masala. Silindr sirtidan tashqarida yotgan E nuqta orqali unga urinib o'tuvchi tekislik yasalsin (11.12-rasm).

Yechish. Yasash algoritmi quyidagicha:

- E(E′, E″) nuqtadan silindr yasovchisiga parallel *l* (*l*′, *l*″) to'g'ri chiziq o'tkaziladi va uning gorizontal izi C(C′, C″) yasaladi;
- *l* to'g'ri chiziqning gorizontal izi C′ orqali silindrning H tekisligidagi asosiga urinib o'tuvchi P va Q tekisliklarning $P_H(a)$ va $Q_H(b)$ izlarini o'tkazib, A(A′, A″) va B(B′, B″) urinish nuqtalari aniqlanadi;



11.11-rasm.



11.12-rasm.

• bu nuqtalardan esa P va Q tekisliklarning sirtga urinish chiziqlari $AA_1(A'A_1', A''A_1'')$ va $BB_1(B'B_1', B''B_1'')$ lar o‘tadi.

Natijada kesishuvchi $l \cap a$ va $l \cap b$ to‘g‘ri chiziqlar P va Q urinma tekisliklarini ifodalaydi. Bu masala ham ikkita yechimga ega bo‘ladi.

11.5-§. Berilgan to‘g‘ri chiziq orqali urinma tekislik o‘tkazish

Berilgan to‘g‘ri chiziq orqali sirtga urinma tekislik o‘tkazish masalasi tekislikning nuqta, shu nuqtadan o‘tmagan to‘g‘ri chiziq orqali berilish usuli bilan bog‘liqdir, ya’ni tekislik sirtga bitta nuqtasi bilan urinishi mumkin.

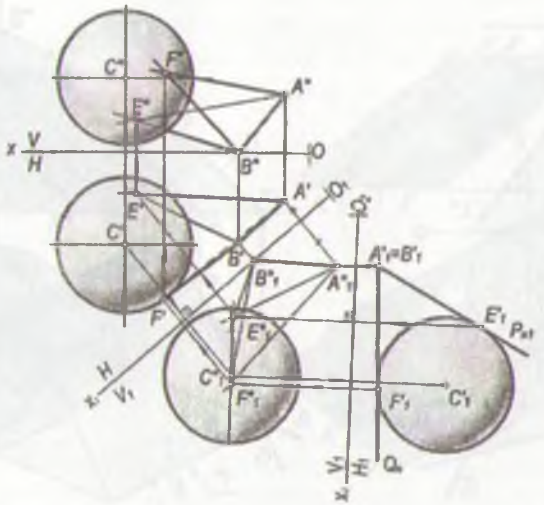
Shar tashqarisida olingan AB to‘g‘ri chiziq orqali shar sirtiga urinma tekislik o‘tkazish 11.13-rasmda tasvirlangan.

Ma’lumki, berilgan AB to‘g‘ri chiziq orqali sharga ikkita P va Q urinma tekisliklar o‘tkazish mumkin. Yasash algoritmi quyidagicha:

• berilgan AB to‘g‘ri chiziq proyeksiyalar tekisliklarini ikki marta almashtirish usuli yordamida proyeksiyalovchi $A_1' \equiv B_1'$ vaziyatga nuqta ko‘rinishida keltiriladi;

• yangi tekisliklar sistemasidagi sharning proyeksiyasi konturiga urinma qilib P_{III} va Q_{III} urinma tekislik izlari o‘tkaziladi va E_1', F_1' urinish nuqtalari aniqlanadi;

• so‘ngra E_1' va F_1' nuqtalarni teskari proyeksiyalash yo‘li bilan dastlab ularning E_1'', F_1'', so‘ngra E′, F′ va E″, F″ proyeksiyalari aniqlanadi. Bu nuqtalarni tegishli A va B nuqtalar bilan tutashtirish natijasida izlangan P(AB,E), Q(AB,F) urinma tekisliklarning (A′B′, E′), (A″B″, E″) va (A′B′, F′), (A″B″, F″) proyeksiyalari hosil bo‘ladi;



11.13-rasm.

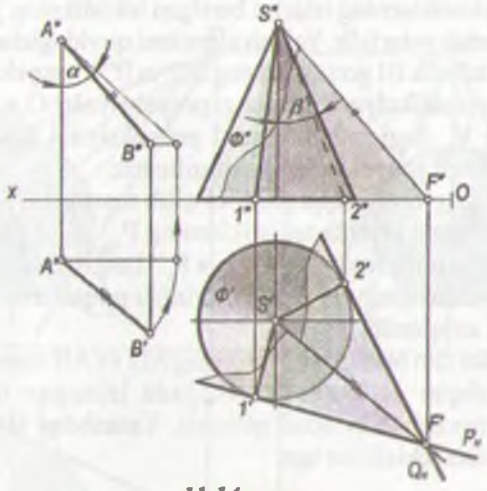
- agar AB to‘g‘ri chiziq shar sirti bilan kesishsa, u holda masala yechimga ega bo‘lmaydi.

11.6-§. Berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan urinma tekislik o‘tkazish

Berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel qilib sirtga urinma tekislik o‘tkazish masalasi faqat chiziqli sirtlar uchun o‘rinli bo‘lib, urinma tekislik kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar ko‘rinishida tasvirlanadi. Masalan, konusga urinma tekislik o‘tkazganda berilgan to‘g‘ri chiziqning konus o‘qi bilan hosil qilgan α burchagi konus yasovchisi bilan o‘qi orasidagi β burchagiga teng yoki undan katta bo‘lishi lozim. Aks holda, urinma tekislik yasab bo‘lmaydi. $\alpha \geq \beta$ shartni qanoatlantiruvchi AB to‘g‘ri chiziqqa parallel hamda berilgan Φ konus sirtiga urinuvchi tekislik yasashni ko‘rib chiqamiz (11.14-rasm). Buning uchun konus uchi S(S′, S″)dan berilgan AB(A′B′, A″B″) to‘g‘ri chiziqqa parallel SF(S′F′, S″F″) to‘g‘ri chiziq o‘tkazib, uning gorizontal izi F(F′, F″)ni yasaymiz. Qolgan yasashlar xuddi 11.4-§ dagi 1-masala kabi bajariladi. To‘g‘ri chiziq bilan tekislikning parallellik shartiga asosan yasalgan P(SF1) va Q(SF2) urinma tekisliklar berilgan AB to‘g‘ri chiziqqa parallelidir, chunki SF to‘g‘ri chiziq ikkala urinma tekislik uchun umumiy bo‘lib, AB to‘g‘ri chiziqqa parallelidir.

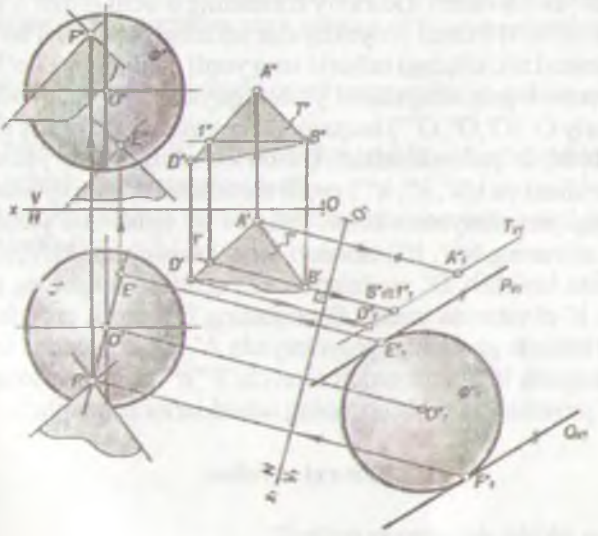
11.7-§. Berilgan tekislikka parallel bo‘lgan urinma tekislik o‘tkazish

Berilgan tekislikka parallel va sirtga urinuvchi tekislik o‘tkazish masalalari asosan egri chiziqli sirtlarga tegishlidir.



11.14-rasm.

Berilgan T(AD∩AB) tekislikka parallel qilib va Φ shar sirtiga urinma tekislik o'tkazish 11.15-rasmda keltirilgan. Izlangan urinma tekislik ikkita bo'lib, ularni ikki kesishuvchi to'g'ri chiziq tarzida tasvirlash qulaydir. Urinma tekislikni yasash uchun proyeksiyalar tekisliklarini bir marta almashtirish usuli yordamida berilgan T tekislik proyeksiyalovchi tekislik vaziyatiga keltiriladi. Shaming ham yangi almashtirilgan proyeksiyasi yasalib, so'ngra



11.15-rasm.

izlangan urinma tekisliklarning izlarini berilgan tekislikning yangi vaziyatiga parallel qilib o'tkazish yetarlidir. Yasash algoritmi quyidagicha:

- berilgan T tekislik B1 gorizontalining B′1′ va B″1″ proyeksiyalari yasaladi;
- B′1′ ga perpendikulyar qilib yangi proyeksiyalar O_1x_1 o'qi o'tkaziladi va T tekislikning V_1 dagi yangi frontal proyeksiyasi $A_1''D_1''B_1''$ hamda sharning O_1'' markazli proyeksiyasi hosil qilinadi;
- $A_1''D_1''B_1''$ to'g'ri chiziqqa parallel qilib markazi O_1'' nuqtadagi shar proyeksiyasiga izlangan urinma tekisliklarning P_{V1} va Q_{V1} izlari o'tkaziladi va ularning sharga urinish nuqtalari E_1'' va F_1'' belgilanadi;
- teskari proyeksiyalash yo'li bilan urinish nuqtalarining E′, E″ va F′, F″ proyeksiyalari aniqlanadi;
- E va F nuqtalardan berilgan tekislikning AD va AB tomonlariga parallel qilib to'g'ri chiziqlar o'tkaziladi. Natijada izlangan urinma parallel tekisliklarning proyeksiyalari hosil qilinadi. Yasashdan ko'rinib turibdiki, masala ikkita urinma tekislikka ega.

11.8-§. Sirt proyeksiyalarining ocherklarini yasash

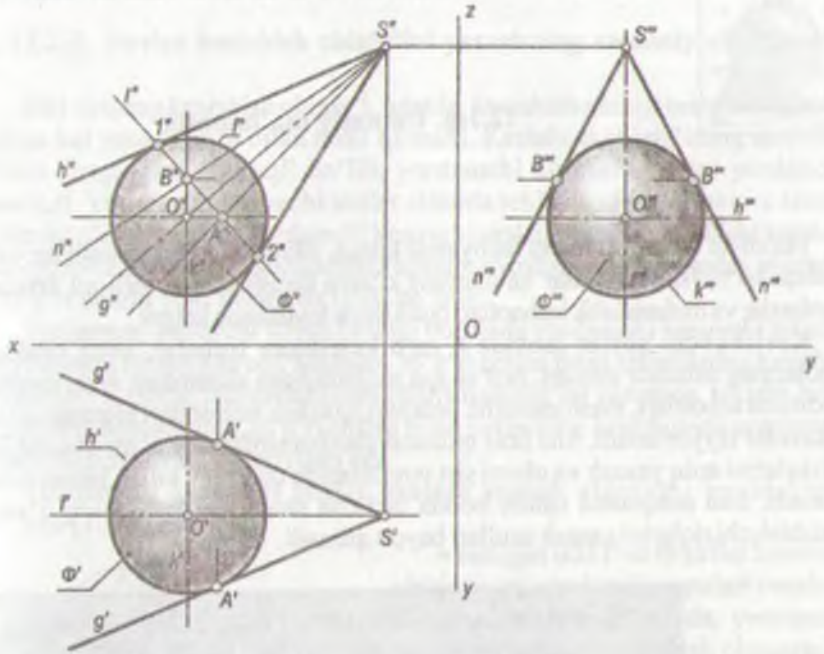
Ta'rif. Kuzatuvchiga nisbatan sirtning aniq shaklini belgilovchi tasliqi konturi sirtning ocherki deyiladi.

O'qi frontal vaziyatda bo'lgan S(S′, S″) uchli og'ma doiraviy konusning frontal proyeksiyasiga asosan uning gorizontal va profil ocherklarini yasash talab qilinadi (11.16-rasm). Doiraviy konusning S uchi orqali o'tuvchi uning o'qi SO(S′O′, S″O″) frontal proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgani uchun konusning frontal tekislikdagi ocherki teng yonli uchburchak bo'ladi.

Qolgan ocherk proyeksiyalarini yasash quyidagicha bajariladi: konusning o'qida ixtiyoriy O′ (O′,O″,O‴) nuqtani markaz qilib olib, konus sirtiga urinma yordamchi Φ(Φ′, Φ″) sfera chiziladi. Ushbu sferaning h(h′, h″) ekvatori, f(f′, f″, f‴) bosh meridiani va k(k′, k″, k‴) profil meridiani bo'lgan aylanalar chiziladi. Φ sfera frontal proyeksiyasida konus sirtiga 1″2″ aylana bo'yicha urinadi. Bu 1″2″ aylana sferaning h(h′, h″) ekvatori bilan kesishib — A(A′, A″), k″ profil meridiani bilan kesishib, B″ nuqtalarni hosil qiladi. A nuqtaning gorizontal A′ proyeksiyasi h′ ekvatorida yotadi. B nuqtaning B‴ profil proyeksiyasi k‴ da aniqlanadi. Natijada gorizontal proyeksiyada A′ nuqta orqali o'tuvchi S′g′ va profil proyeksiyada B‴ nuqta orqali o'tuvchi S‴n‴ chiziqlar konusning chetki yasovchilari proyeksiyalari bo'lib, uning ocherklarini hosil qiladi.

Nazorat savollari

1. Urinma tekislik deb nimaga aytiladi?
2. Qanday chiziq sirtning normali deyiladi?
3. Berilgan sirtga urinma tekislik qanday shartlar asosida o'tkaziladi?



11.16-rasm.

4. Qanday nuqtalar sirtning elliptik, parabolik va giperbolik nuqtalari deyiladi?

5. Sirt tashqarisidagi nuqtadan unga qanday qilib urinma tekislik o'tkazish mumkin?

6. Sirt tashqarisidagi to'g'ri chiziq orqali unga nechta va qanday qilib urinma tekislik o'tkazish mumkin?

7. Berilgan tekislikka parallel nechta urinma tekislik o'tkazish mumkin?

8. Sirtning ocherki deb nimaga aytiladi?

9. Berilgan to'g'ri chiziqqa parallel qilib hamma vaqt konus sirtiga urinuvchi tekislik o'tkazsa bo'ladimi?



XII BOB. SIRTLARNING O'ZARO KESISHISHI

12.1-§. Umumiy ma'lumotlar

Insoniyat o'zining amaliy faoliyatida konus, silindr, shar, ko'pyoqliklar yoki boshqa ko'rinishdagi sirtlar va ularning o'zaro kesishishidan turli xil arkalar, gumbazlar va muhandislik inshootlari qurilishida foydalanib kelgan.

Kesishuvchi sirtlar asosida o'zaro kesishgan trubalar, keng oraliqli binolarning ustunsiz tomlari, neft va gaz saqlanadigan sistemalar, rezervuarlar, meditsina asboblari, mashinasozlik detallari, qurilish inshootlari elementlari va hokazolar tayyorlanadi. Shu bois muhandislardan sirtlarning o'zaro kesishish chiziqlarini aniq yasash va ularni sirt yoyilmasida tasvirlay bilish bilimi talab qilinadi. Shu maqsadda ushbu bobda turlicha shakldagi sirtlarning o'zaro kesishish chiziqlarini yasash usullari bayon qilinadi.

Ta'rif. Ikki sirtning kesishish chizig'i deb ular uchun umumiy bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rniga aytiladi.

Kesishuvchi sirtlarning hosil bo'lishiga qarab ularning kesishish chizig'i quyidagi ko'rinishlarda uchraydi:

- Kesishuvchi sirtlar egri chiziqli yoki to'g'ri chiziqli sirtlar bo'lsa, ularning kesishish chizig'i umumiy holda fazoviy egri chiziq bo'ladi.
- Kesishuvchi sirtlarning biri egri chiziqli, ikkinchisi ko'pyoqlik sirti bo'lsa, u holda ularning kesishish chizig'i tekis egri chiziq bo'ladi.
- Kesishuvchi sirtlarning ikkalasi ham ko'pyoqlik sirti bo'lsa, ularning kesishish chizig'i fazoviy yoki tekis siniq chiziq bo'ladi.

Kesishuvchi sirtlar analitik usulda o'z tenglamalari bilan berilsa, ularni birga yechib, kesishish chiziqlarining tenglamasi hosil qilinadi.

Kesishish chizig'ining tartibi umumiy holda kesishuvchi sirtlarning tartibiga qarab belgilanadi. Agar sirtlardan biri m tartibli, ikkinchisi n tartibli bo'lsa, ularning kesishish chizig'ining tartibi mn ga teng bo'ladi, ya'ni $\Phi_1^m \cap \Phi_2^n = a^{m \cdot n}$.

Kesishuvchi sirtlarning ikkalasi ham 2-tartibli bo'lsa, ular 4-tartibli egri chiziq bo'yicha kesishadi, ya'ni $\Phi_1^2 \cap \Phi_2^2 = a^4$ bo'ladi.

Kesishuvchi sirtlardan biri 2-tartibli va ikkinchisi ko'pyoqlik sirti bo'lsa, ular 2-tartibli egri chiziqlar bo'yicha kesishadi, ya'ni $\Phi_1^2 \cap \Phi_2^{q>} = ka^2$. Bunda k — 2-tartibli egri chiziqlar soni. Bu ko'pyoqlik sirtining yoqlari soni orqali aniqlanadi.

12.2-§. Sirtlar kesishish chizig'ini yasashning umumiy algoritmi

Ikki sirtning kesishish chizig'i, odatda, kesishish chizig'ining nuqtalarini ketma-ket yasash yo'li bilan hosil qilinadi. Kesishish chizig'ining nuqtalari ikkala sirtga ham taalluqli bo'lib, yordamchi kesuvchi sirtlar yordamida yasaladi. Yordamchi kesuvchi sirtlar sifatida tekislik, sfera, konus va silindr sirtlarini olish mumkin. Yordamchi kesuvchi sirtlar shunday tanlanishi kerakki, u berilgan sirtlar bilan kesishganida kesimda chizilishi oddiy va qulay chiziqlar – to'g'ri chiziq yoki aylanalar hosil bo'lsin.

Yordamchi kesuvchi sirtlar oldingi boblarda yordamchi kesuvchi tekislik ko'rinishida ishlatilgan edi. Masalan, to'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishuv nuqtasini yasashda, tekisliklarning kesishish chizig'ini yasashda, tekislik bilan sirtlarning kesishuvida, to'g'ri chiziq bilan sirtlarning kesishuvida yordamchi kesuvchi tekisliklar o'tkazilgan edi.

Yordamchi kesuvchi sirtlar usulida yasash algoritmi quyidagicha bo'ladi (12.1-rasm):



12.1-rasm.

- berilgan ikki Γ va Φ sirtlar kesishish chizig'ining xarakterli nuqtalari yasaladi. Bu nuqtalar, o'z navbatida, yordamchi kesuvchi sirtlarni o'tkazish chegarasini aniqlaydi;
- yordamchi kesuvchi Ω sirt o'tkaziladi. Bunda Ω va Φ sirtlar o'zaro kesishib, n ($\Phi \cap \Omega = n$) chiziqni, Γ sirt bilan Ω sirt kesishib, m ($\Gamma \cap \Omega = m$) chiziqni hosil qiladi;
- n va m chiziqlar kesishib ($n \cap m = A, B, \ldots$), $A, B, \ldots$ nuqtalarni hosil qiladi.

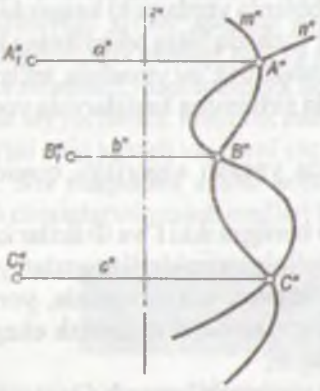
Bu nuqtalar berilgan Φ va Γ sirtlar kesishish chizig'ining nuqtalaridir. Bunday yasash algoritmi yetarli marta takrorlansa, kesishish chizig'ini yasash uchun yetarli nuqtalar hosil qilinadi. Bu nuqtalar ma'lum tartibda lekalo yordamida silliq tutashtirilsa, berilgan ikki sirtning kesishish chizig'i hosil bo'ladi.

Agar yordamchi kesuvchi sirt tekislik bo'lsa, xosmas o'qli tekisliklar dastasi hosil bo'ladi. Agar yordamchi kesuvchi sirt sferadan iborat bo'lsa, konsentrik yoki ekssentrik sferalar oilasi hosil bo'ladi. Shunga ko'ra, ikki kesishuvchi sirtning kesishish chiziqlarini yasashda yordamchi kesuvchi tekisliklar dastasi, yordamchi kesuvchi konsentrik va ekssentrik sferalar usullari hosil bo'ladi. Bu usullarning qo'llanilishi to'g'risida keyinchalik batafsil to'xtab o'tamiz.

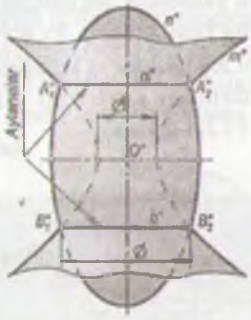
12.3-§. Umumiy o'qqa ega bo'lgan aylanish sirtlarining o'zaro kesishishi

Ta'rif. Umumiy o'qqa ega bo'lgan aylanish sirtlari chekli sondagi aylanalar bo'yicha kesishadi.

Isboti. Ikkita aylanish sirtining $m(m'')$ va $n(n'')$ meridianlari (yasovchilari) hamda ular uchun umumiy bo'lgan $i(i'')$ o'q berilgan bo'lsin (12.2-rasm). m'' va n'' meridianlarning kesishish nuqtalarini A'', B'', C'',... harflar bilan belgilaymiz. Agar m va n egri chiziqlar i o'q atrofida aylantirilsa, Φ va Γ aylanish sirtlari hosil bo'ladi (shaklda bu sirtlar tasvirlanmagan). Unda m'' va n'' egri chiziqlarning aylanishi natijasida ularga umumiy bo'lgan A'', B'', C'',... nuqtalar a'', b'', c'',... aylanalar chizadi. Bu aylanalar esa ikkala sirt uchun umumiydir. Demak, a'', b'', c'',... aylanalar umumiy o'qli Φ va Γ aylanish sirtlarining kesishish chiziqlari bo'ladi.

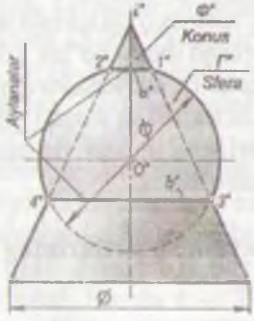


12.2-rasm.



12.3-rasm.

12.3-rasmda umumiy o'qqa ega bo'lgan aylanma ellipsoid va bir pallali giperboloidlarning kesishish chiziqlari a'' va b'' aylanalar frontal proyeksiyada ko'rsatilgan. 12.4 va 12.5-rasmlarda sferaning doiraviy silindr va doiraviy konus sirtlari bilan kesishish chiziqlari tasvirlangan. Bu sirtlarning o'qlari proyeksiyalar tekisliklarining biriga perpendikulyar qilib olingan.

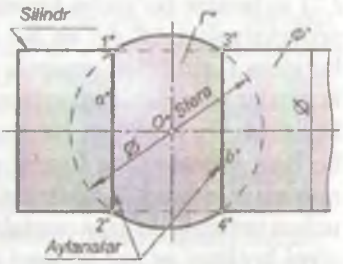


12.4-rasm.



12.5-rasm.

Yuqoridagi teoremadan quyidagi natijani chiqarish mumkin:



12.6-rasm.

Natija. *Markazi aylanish sirtining o'qida bo'lgan har qanday Γ(Γ″) sfera shu aylanish sirti bilan aylanalar bo'ylab kesishadi* (12.6-rasm).

Haqiqatan, Φ(Φ″) aylanish sirti *i*(*i*″) o'qining ixtiyoriy *O*(*O*″) nuqtasini markaz qilib olib, Ω″ sfera chizilgan. Φ va Γ sirtlar *a*″ va *b*″ aylanalar bo'yicha kesishgan (tasvirlar faqat frontal proyeksiyada keltirilgan). Yuqorida keltirilgan xulosa va misollar aylanish sirtlari kesishish chizig'ini yasashda qo'llaniladigan konsentrik va ekssentrik sferalar usullarining asosi hisoblanadi.

12.4-§. O'qlari umumiy nuqtaga ega bo'lgan aylanish sirtlarining o'zaro kesishuvi. Yordamchi sferalar usuli

Ma'lumki, markazi biror aylanish sirtining o'qida bo'lgan sfera bu sirtni chekli sondagi aylanalar bo'yicha kesadi. Bu aylanalar proyeksiyalar tekisliklarining biriga to'g'ri chiziq kesmasi shaklida, ikkinchisiga aylana yoki ellips ko'rinishida proyeksiyalanadi. Aylanish sirtlari bilan sferaning o'zaro kesishish chizig'i haqidagi bu muhim xulosa ikkita aylanish sirtining o'zaro kesishish chiziqlarini yasashga imkon beradi.

Yordamchi kesuvchi sferalar to'plami konsentrik yoki ekssentrik ko'rinishlarda bo'ladi. Kesishuvchi sirtlarning xarakteriga qarab yordamchi kesuvchi sferalarning biror usuli ishlatiladi.

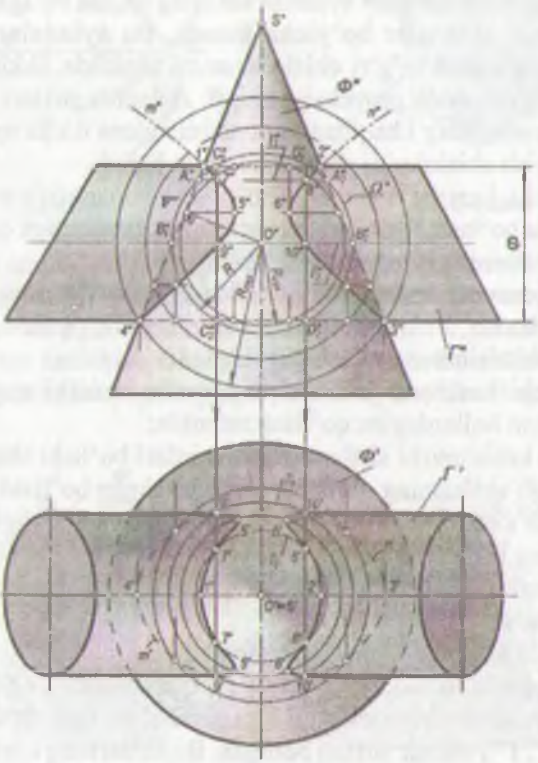
12.4.1. Konsentrik sferalar usuli. Ikki aylanish sirtining o'qlari umumiy nuqtaga ega bo'lsa, bu o'qlar bitta tekislikni tashkil qiladi. Bu tekislik har ikkala sirt uchun simmetriya tekisligi bo'ladi.

Yordamchi kesuvchi konsentrik sferalar usulini quyidagi shartlar qanoatlantirgan hollardagina qo'llash mumkin:

- o'zaro kesishuvchi sirtlar aylanish sirtlari bo'lishi shart;
- aylanish sirtlarining o'qlari o'zaro kesishgan bo'lishi kerak;
- aylanish sirtlarining o'qlari (yoki simmetriya tekisligi) proyeksiyalar tekisliklarining biriga parallel bo'lishi yoki sirt o'qlarining biri proyeksiyalar tekisliklarining biriga parallel, ikkinchi o'q esa ikkinchi proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lishi kerak.

Yordamchi kesuvchi konsentrik sferalarning markazi sirtlarning o'qlari kesishgan nuqtada bo'ladi. 12.7-rasmda o'qlari umumiy *O*(*O*′, *O*″) nuqtada kesishuvchi va simmetriya tekisligi *V* ga parallel bo'lgan Φ(Φ′, Φ″) aylanma konus va Γ(Γ′, Γ″) silindr sirtlari berilgan. Bu sirtlarning kesishish chizig'ini yasash uchun *O*″ nuqtani markaz qilib, *R* radiusli Ω(Ω″) sfera chiziladi. Ω sfera Φ sirt bilan umumiy o'qqa ega bo'lgani uchun ular $l_1(l_1', l_1'')$ va $l_2(l_2',$

l_2'') aylanalar bo'yicha kesishadi. Shaklda bu aylanalarning V tekislikdagi proyeksiyalari A_1'' A_2'' va B_1'' B_2'' kesmalar tarzida tasvirlangan. Shuningdek, bu sfera Γ sirt bilan umumiy o'qqa ega bo'lgani uchun C_1'' C_2'' va D_1'' D_2'' kesmalar ko'rinishidagi aylanalar bo'yicha kesishadi. Bu aylanalarning o'zaro kesishish 7″, 8″, 9″ va 10″ nuqtalari har ikkala Φ va Γ sirtlar uchun umumiy bo'lgan nuqtalarning frontal proyeksiyalari bo'ladi. Xuddi shuningdek, O'' nuqtani markaz qilib, konsentrik sferalar chiziladi, ular yordamida Φ va Γ sirtlar uchun umumiy bo'lgan nuqtalarni yasash mumkin. Bu nuqtalarning geometrik o'rni bo'lgan m'' va n'' egri chiziqlar Φ va Γ sirtlarning kesishish chizig'i bo'ladi. Φ va Γ sirtlar frontal ocherklarining 1″, 2″, 3″, 4″ kesishish nuqtalari bu sirtlar kesishish chizig'ining xarakterli nuqtalaridan hisoblanadi. O' nuqtadan eng uzoqda joylashgan 4″ xarakterli nuqtadan o'tuvchi sferaning radiusi R_{max} bo'ladi. Kesishish chizig'ining xarakterli nuqtalaridan yana bir jufti Φ va Γ sirtlarining birortasiga R_{min} radiusli urinma sfera o'tkazish bilan aniqlanadi. Eng kichik sferaning R_{min} radiusi quyidagicha aniqlanadi (12.7-rasm): O'' nuqtadan berilgan sirtlarning biri chekka yasovchisiga $O''E''$ va $O''F''$

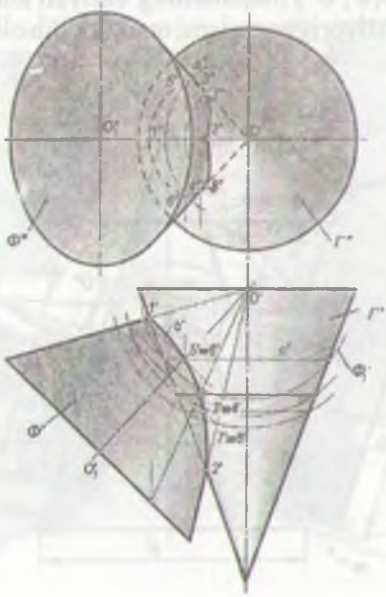


12.7-rasm.

perpendikulyarlar o'tkaziladi. Bunda $O'E'' > O'F''$ bo'lsa, $R_{max} = O'E''$ bo'ladi. Agar $O'E'' < O'F''$ bo'lsa, $R_{min} = O'F''$ bo'ladi, $O'E'' = O'F'' = R_{min}$ bo'lgan holda eng kichik sfera ikkala sirtga urinib, kesishish chizig'i ikkita tekis egri chiziqqa ajraladi. Shunday qilib, urinma sferani shunday o'tkazish kerakki, u sirtlarning biriga urinsin va ikkinchisini kesib o'tsin. 12.7-rasmda Γ sirtga urinma bo'lgan R_{min} radiusli sfera o'tkazish bilan yasalgan egri chiziqning 5, 6 xarakterli nuqtalari aniqlangan. Bu nuqtalarda egrilik buriladi yoki yo'nalishini o'zgartiradi. Kesishish chizig'ining boshqa nuqtalari R_{max} va R_{min} radiusli sferalar orasida ixtiyoriy sferalar o'tkazish bilan aniqlanadi. Konus va silindrlarning o'zaro kesishish chizig'i $m(m'')$ va n larga tegishli nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari konus o'qiga perpendikulyar bo'lgan parallel kesuvchi gorizontal tekisliklar orqali aniqlanadi. Shunday qilib, konsentrik sferalar usuli bilan ikki aylanish sirtining kesishish chiziqlarini yasash quyidagi sxema bo'yicha bajariladi:

- ikki aylanish sirti o'qlarining kesishish nuqtasi konsentrik sferalar markazi sifatida qabul qilinadi;
- sirtlarning frontal (yoki gorizontal) ocherklarining kesishish nuqtalari xarakterli nuqtalar sifatida belgilanadi va R_{max} radiusli sfera aniqlanadi;
- eng kichik R_{min} radiusli sfera chiziladi. Natijada yana bir juft xarakterli nuqtalar aniqlanadi;
- R_{max} va R_{min} lar orasida sferalar o'tkazilib, oraliq nuqtalar topiladi.

12.8-rasmda o'qlar $O(O', O'')$ nuqtada kesishuvchi va simmetriya tekisligi H proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgan ikki doiraviy konusning kesishish



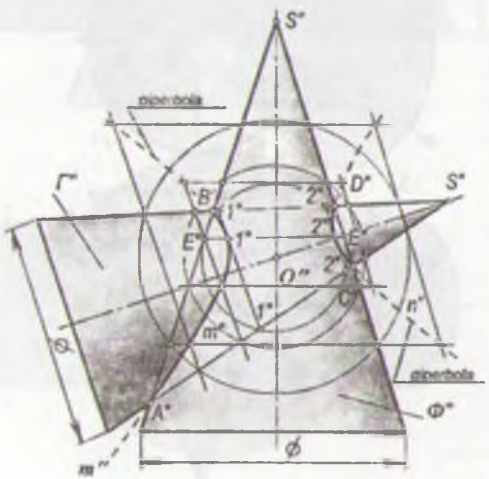
12.8-rasm.

chizig'i konsentrik sferalar usuli bilan yasalgan. Bunda, avvalo, kesishish chizig'ining xarakterli 1(1′, 1″) va 2(2′, 2″) nuqtalari aniqlanadi. So'ngra O' nuqtani markaz qilib olib, ikkala konusni kesadigan qilib Φ_1' sfera o'tkaziladi. Φ_1' sfera Γ' konus bilan a' aylana bo'yicha, Φ' konus bilan b' aylana bo'yicha kesishadi. Bu aylanalarning kesishish nuqtalari $5' \equiv 6'$ ikki konusning kesishish chizig'iga tegishli bo'ladi. a aylananing a'' proyeksiyasi yasalib, uning ustida 5″ va 6″ nuqtalar yasaladi. Kesishish chizig'ining qolgan nuqtalari ham yuqoridagidek yasaladi va o'zaro tutashtiriladi.

12.9-rasmda simmetriya tekisligi proyeksiyalar tekisligi V ga parallel bo'lgan ikki aylanma konusning kesishish chizig'i konsentrik sferalar usuli bilan frontal proyeksiyalar tekisligida tasvirlangan.

12.4.2. Ekssentrik sferalar usuli. Markazlari biror aylanma sirt o'qining turli nuqtalarida joylashgan sferalar *ekssentrik sferalar* deb yuritiladi. 12.10-rasmda konus o'qi va sfera markazi $O(O', O'')$ bitta frontal simmetriya tekisligida joylashgan.

Bu ikki sirtning kesishish chizig'ini yasash uchun, avvalo, ularning frontal ocherklarining kesishishdagi xarakterli nuqtalari 1″ va 2″ belgilanadi. Ma'lumki, har qanday ikki sfera aylana bo'yicha kesishadi. Markazi konus o'qida bo'lgan sfera ham konus bilan aylana bo'yicha kesishadi. Shuning uchun konus o'qining biror nuqtasini markaz qilib olib, ixtiyoriy radius bilan yordamchi sferalar yasash yo'li bilan bu ikki sirtning kesishish chizig'i yasaladi. Konus o'qidagi O_1'' nuqtani markaz qilib olib, R_1 radiusli sfera yordamida kesishish chizig'ining $3(3', 3'') \equiv 4(4', 4'')$ nuqtalari yasalgan. Shuningdek, konus o'qidagi O_2'' nuqtani markaz qilib olib, R_2 radiusli sfera yordamida $5(5', 5'') \equiv 6(6', 6'')$ nuqtalarning vaziyati aniqlangan. Xuddi shu tarzda konus o'qidagi ixtiyoriy nuqtalarni markaz qilib olib, ixtiyoriy radiuslar



12.9-rasm.

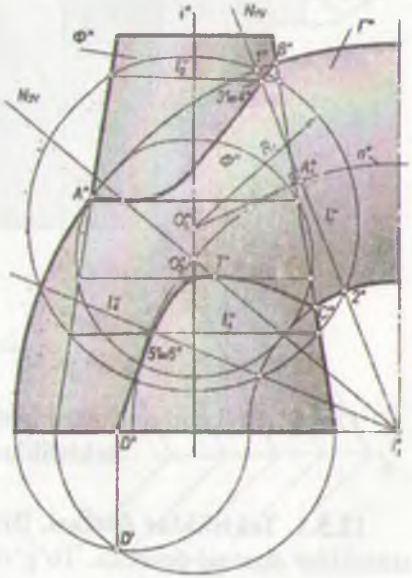
bilan sferalar chizish yordamida ikkala sirtning kesishish chizig'i $m(m'')$ yasalgan. m ning gorizontal m' proyeksiyasi konus o'qiga perpendikulyar bo'lgan parallel kesuvchi gorizontal tekisliklar orqali aniqlanadi.

Aylanma kesik konus va tor sirtlarining kesishish chizig'ini yasash frontal proyeksiya tekisligida ko'rsatilgan (12.11-rasm). Konusning o'qi i'' va tor yasovchilarining markazlari yotuvchi n'' chiziq bitta frontal tekislikda joylashgan. Bu sirtlarning kesishish chizig'ini yasash uchun torning frontal proyeksiya tekisligidagi i_1'' o'qi orqali N_{IV} frontal proyeksiyalovchi tekislikning izi o'tkaziladi. Bu tekislik torning n'' markazlar chizig'ini ixtiyoriy A_1'' nuqtada kesadi. Bunda N_{1V} tekislik torni l_1'' aylana bo'yicha kesadi. l_1'' aylananing markazi A_1'' nuqtadan aylana tekisligiga perpendikulyar chiqariladi. Uning aylanma konus o'qi i'' bilan kesishish nuqtasi O_1'' belgilanadi. O_1'' nuqtani markaz qilib olib, torning l_1'' aylanasidan o'tuvchi R_1 radiusli sfera chiziladi. Bu yordamchi sfera konus bilan l_2'' va l_3'' aylanalar va tor sirti bilan l_1'' va l_4'' aylanalar bo'yicha kesishadi. l_1'' va l_2'' aylanalarning kesishish nuqtalari $3''\equiv4''$ hamda l_3'' va l_4'' aylanalarning kesishish nuqtalari $5''\equiv6''$ izlanayotgan egri chiziqning nuqtalari bo'ladi. Chunki $3''\equiv4''$ va $5''\equiv6''$ nuqtalar konus va tor sirtlari uchun umumiy nuqtalardir.

Aylanma konus va tor sirtlar kesishish chizig'ining xarakterli A'', B'' va C'' nuqtalari bu sirtlar frontal ocherklarining kesishish nuqtalari yordamida aniqlangan. Sirtlar o'qlarining kesishish nuqtasi O_2'' orqali tor sirtiga urinma



12.10-rasm.

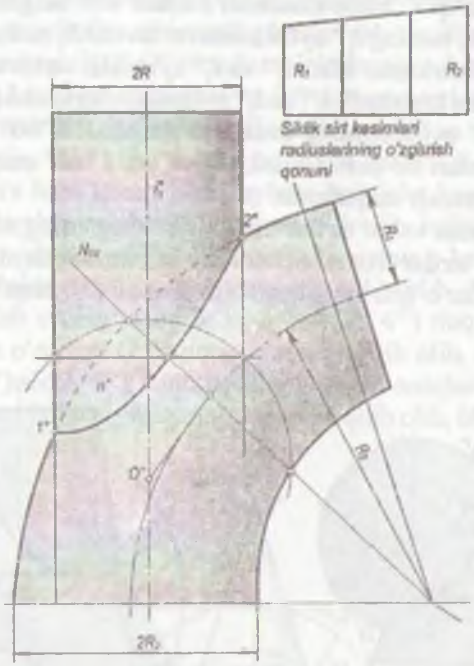


12.11-rasm.

qilib o‘tkazilgan $\Phi(\Phi'')$ sfera sirti orqali A'' va $7''$ xarakterli nuqtalar aniqlangan. Bu nuqtalar egrilikning burilish nuqtalari bo‘ladi.

Torning n'' aylanish o‘qi orqali bir necha frontal proyeksiyalovchi tekisliklar izlarini o‘tkazib va bu tekisliklarda hosil bo‘lgan aylanalar orqali markazi konus o‘qida turlicha joylashgan yordamchi sferalar o‘tkazib, egri chiziqning qolgan oraliq nuqtalari yasaladi.

12.12-rasmda siklik va silindrik sirtlardan tashkil topgan truboprovodning bir qismi frontal proyeksiyada tasvirlangan. Bunda aylanish silindri bilan naysimon siklik sirtning n'' kesishish chizig‘ini yasash ekssentrik sferalar usuli bilan ko‘rsatilgan. Har ikkala sirt uchun umumiy bo‘lgan n'' egri chiziqning barcha nuqtalarini yasash yuqorida keltirilgan misolga asosan bajarilgan.



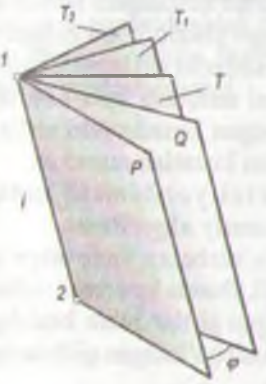
12.12-rasm.

12.5-§. Sirtlarning o‘zaro kesishish chizig‘ini yasash. Kesuvchi tekisliklar dastasi usuli

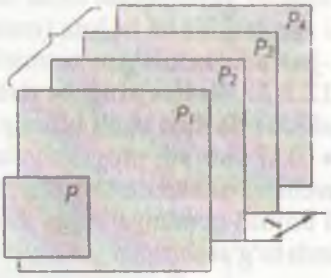
12.5.1. Tekisliklar dastasi. Bitta to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi tekisliklar *tekisliklar dastasi* deyiladi. To‘g‘ri chiziq tekisliklar dastasining o‘qi deb yuritiladi. Tekisliklar dastasi xos (12.13-rasm) yoki xosmas o‘qqa (12.14-rasm) ega bo‘ladi. Xos o‘qli tekisliklar dastasining chizmadagi bir nomli

izlari bir nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasini tashkil qiladi (12.15-rasm). Shu izlar dastasining 1″ va 2″ nuqtalari tekisliklar dastasi *i* o'qining izlaridan iborat bo'ladi. Dasta tekisliklarining vaziyati esa bitta parametr, ya'ni aylanish burchagi φ ning kattaligi orqali aniqlanadi.

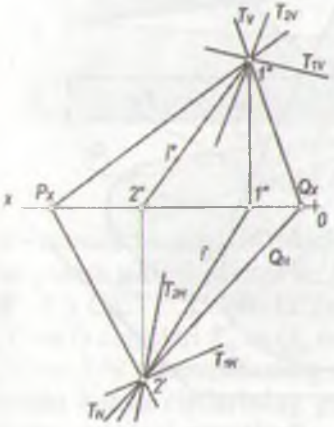
Xosmas o'qqa ega bo'lgan tekisliklar dastasining chizmadagi bir nomli izlari o'zaro parallel to'g'ri chiziqlar dastasidan iborat bo'ladi (12.16-rasm). Bu dasta tekisliklarining vaziyati bitta parametr, ya'ni tekisliklar orasidagi *l* masofa bilan aniqlanadi. Xosmas o'qqa ega bo'lgan tekisliklar dastasining yo'nalishi esa biror *Q* yo'naltiruvchi tekislik orqali beriladi. Bu tekislik *parallelizm tekisligi* deb ham yuritiladi.



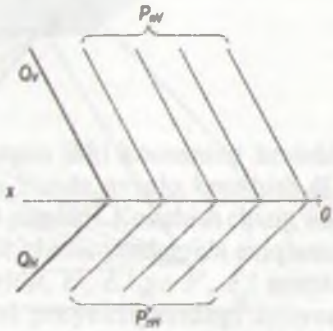
12.13-rasm.



12.14-rasm.



12.15-rasm.



12.16-rasm.

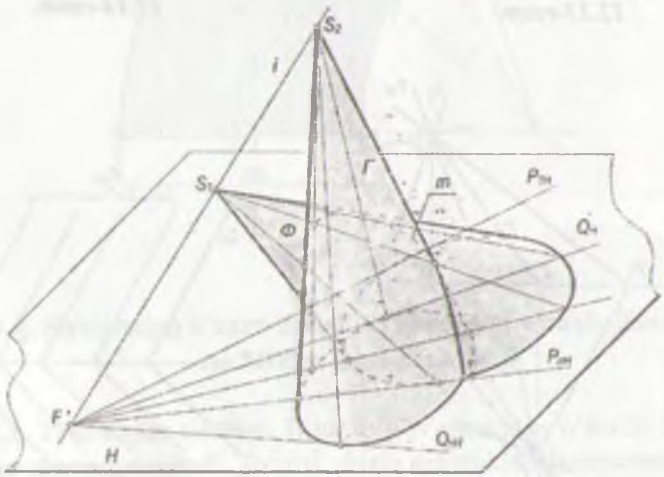
Tekisliklar dastasi, asosan, tekislik bilan sirtning, sirt bilan sirtning va sirt bilan ko'pyoqlik sirtining o'zaro kesishish chiziqlarini yasashda yordamchi kesuvchi tekisliklar dastasi usuli nomi bilan ishlatiladi.

12.5.2. Chiziqli sirtlarning o'zaro vaziyatini ularning kesishish chiziqlarini yasamasdan aniqlash. Har bir chiziqli sirtning yasovchilari orqali o'tgan tekisliklar dastasi sirtning asos tekisligida izlar dastasi to'plamini hosil qiladi. Bu izlar dastasi sirt asosiga urinuvchi izlar orasida bo'ladi.

Asoslari bir tekislikda yotgan sirtlarning o'zaro vaziyatini shu sirtlarning yasovchilari orqali o'tgan umumiy o'qli kesuvchi tekisliklar dastasi izlari to'plamining o'zaro vaziyati aniqlaydi. Agar izlar dastasi o'zaro kesishsa, sirtlar ham kesishadi. Ular kesishmasa, sirtlar ham kesishmaydi. 12.17-rasmda asoslari H tekislikda yotgan ikki konus sirtining o'zaro vaziyati aniqlangan. S_1 va S_2 konus uchlari orqali o'tgan kesuvchi tekisliklar $P_{1H}...P_{nH}$ va $Q_{1H}...Q_{nH}$ izlar to'plamini hosil qilgan. Bu to'plamlar qisman kesishgani uchun konus sirtlari ham qisman kesishib, bitta m fazoviy egri chiziq hosil qilgan. Izlar to'plamining bu xususiyati berilgan o'zaro kesishuvchi sirtlarning kesishish chiziqlarini yasamasdan oldin uning xarakterini aniqlash imkonini beradi. Buni asoslari bir tekislikda (masalan, H da) yotgan kesishuvchi sirtlarning 12.1-jadvalda keltirilgan sxematik chizmalaridan kuzatish mumkin.

12.5.3. Sirtlarning kesishish chiziqlarini yordamchi kesuvchi tekisliklar dastasi usuli bilan yasashning umumiy algoritmi:

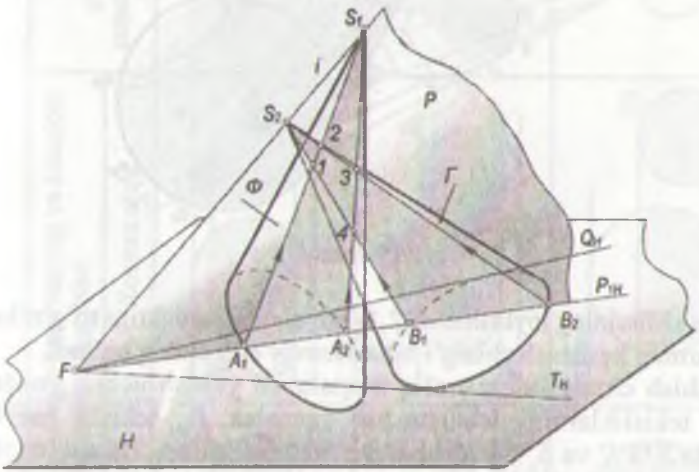
- ikki sirtning proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan vaziyatiga qarab kesuvchi tekisliklar dastasining vaziyati tanlanadi. Bunda kesuvchi sirtlarning hosil bo'lish qonuniyatlariga asosan, ular berilgan sirtlar bilan kesishganda kesimda to'g'ri chiziqlar yoki aylanalar to'plami hosil bo'ladigan qilib tanlanadi;



12.17-rasm.

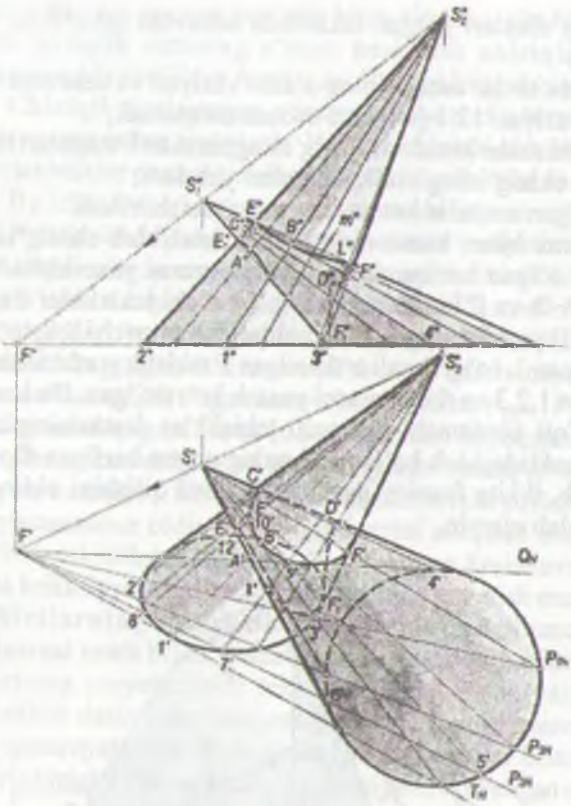
- sirtlarning asoslari yotgan tekislikda kesuvchi tekisliklar izlarining dastasi yasaladi;
- kesishuvchi sirtlar asoslarining o'zaro vaziyati va kesuvchi tekisliklar izi dastasining vaziyati 12.1-jadvalga asosan aniqlanadi;
- kesishuvchi sirtlar kesishish chizig'ining xarakterli nuqtalari belgilanadi;
- kesishish chizig'ining oraliq nuqtalari yasaladi;
- hosil bo'lgan nuqtalar ketma-ket ravon tutashtiriladi.

12.5.4. Konus bilan konusning o'zaro kesishish chizig'ini yasash. Konus uchidan o'tgan har qanday tekislik konusni yasovchilari bo'yicha kesadi. Berilgan Φ va Γ konuslarni kesib o'tuvchi tekisliklar dastasining *i* o'qi kesishuvchi konuslarning S_1 va S_2 uchlaridan o'tuvchi S_1S_2 to'g'ri chiziq bo'ladi (12.18-rasm). *i* o'qi orqali o'tkazilgan *P* tekislik yordamida ikki sirtga umumiy bo'lgan 1,2,3 va 4 nuqtalarni yasash ko'rsatilgan. Bu konuslarning asosi va xos o'qli yordamchi kesuvchi tekisliklar dastasining izlari 12.1-jadvalning 1-punktidagidek bo'ladi. Shuning uchun berilgan Φ va Γ sirtlar qisman kesishib, ikkita fazoviy egri chiziq hosil qilishini oldindan jadval yordamida aniqlab olamiz.



12.18-rasm.

12.19-rasmda asoslari *H* tekislikda yotgan ikki konusning kesishish chizig'ini yasash tekis chizmada ko'rsatilgan. Bunda, avvalo, kesishish *A*(*A'*, *A''*), *B*(*B'*, *B''*), *C*(*C'*, *C''*), D(D', D'') nuqtalari yasaladi. Kesishish chizig'ining *A* va *B*, *C* va D nuqtalari T_H va Q_H urinma tekisliklar yordamida aniqlanadi. Ular $S_2'1'$ va $S_1'4'$ yasovchilarning nuqtalaridir. *E'*, E_1' va *F'*, F_1' nuqtalar kesishuvchi konus sirtlarining gorizontal proyeksiyasidagi ixtiyoriy yasovchilari ustidagi nuqtalardir. Bu nuqtalar esa kesuvchi tekisliklar dastasining P_{1H}, P_{2H}, P_{3H}, ... kabi izlari yordamida hosil qilingan.



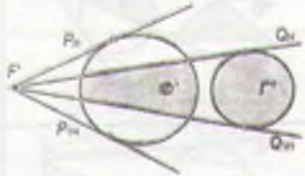
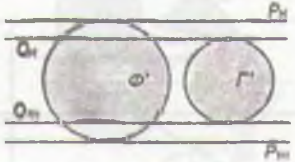
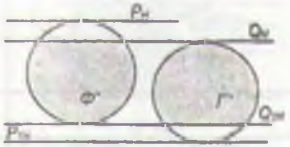
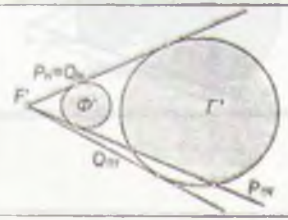
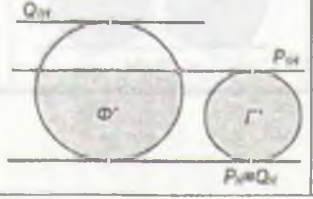
12.19-rasm.

Konus sirtlarining joylashishi 12.1-jadvalning 2-punktiga to‘g‘ri kelgani uchun ularning kesishish chizig‘i bitta fazoviy egri chiziq bo‘ladi.

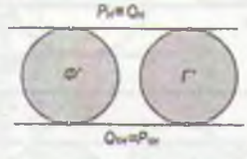
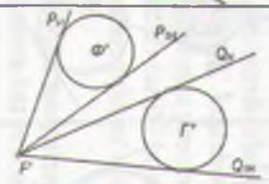
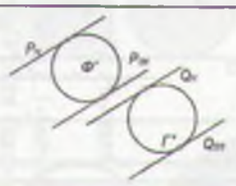
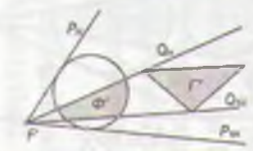
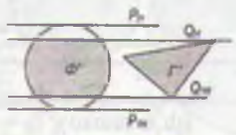
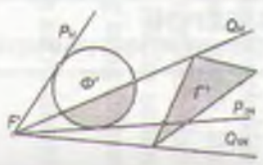
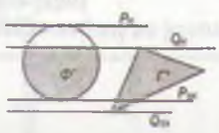
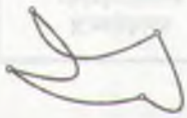
Kesishish chizig‘ining oraliq nuqtalarini yasash uchun yordamchi kesuvchi tekisliklarning istalgan biri, masalan, P_{2H} tekislik har ikkala konuslarda $S_1'5'6'$ va $S_2'7'8'$ uchburchaklar hosil qiladi. Bu uchburchaklar o‘zaro kesishib, 9′, 10′, 11′ va 12′ kesishish nuqtalarini hosil qiladi. Bu nuqtalarning frontal proyeksiyalari mos yasovchilarning frontal proyeksiyalari ustida topiladi. Xuddi shu yasash tartibi boshqa kesuvchi tekisliklar uchun yetarli marta takrorlansa, ikki konus sirti o‘zaro kesishish chizig‘ining qolgan nuqtalari ham hosil bo‘ladi.

Hosil bo‘lgan barcha kesishish nuqtalari yasovchilarning ko‘rinishligi qoidasiga amal qilgan holda ketma-ket ravon tutashtiriladi.

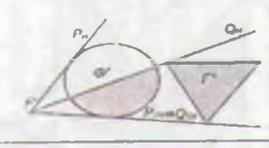
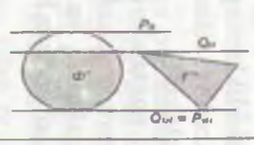
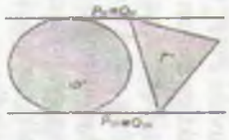
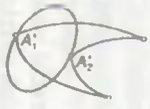
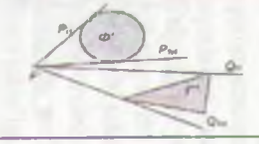
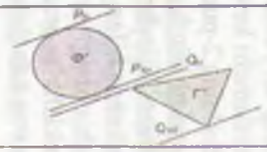
12.5.5. Konus bilan piramidaning o‘zaro kesishish chiziqlarini yasash. Konus bilan piramida sirtlari fazoviy siniq egri chiziq hosil qilib kesishadi. Bu sirtlarning o‘zaro vaziyati 12.1-jadvaldan foydalanib aniqlanadi. Kesishish

№	Kesishuvchi sirtlar asoslarining o'zaro vaziyati va kesuvchi tekisliklar dastasining izlari		Kesishish chizig'ining sxematik ko'rinishi	Kesishuvchi sirtlarning o'zaro vaziyati
	Xos o'qli	Xosmas o'qli		
1.				Φ va Γ sirtlar o'zaro to'liq kesishib, ikkita fazoviy egri chiziq hosil qiladi.
2.				Φ va Γ sirtlar o'zaro qisman kesishib, bitta fazoviy egri chiziq hosil qiladi.
3.				Φ va Γ sirtlar o'zaro qisman kesishib, bitta kesishish nuqtasiga ega bo'lgan bitta yopiq egri chiziq hosil qiladi. A nuqta sirtlarning urinish nuqtasi bo'ladi.

12.1-jadval (davomi)

4.				Φ va Γ sirtlar o‘zaro to‘liq kesishib, ikkita tekis egri chiziq hosil qiladi. Kesishish chiziqlari A'_1 va A'_2 nuqtalarda bir-biri bilan kesishadi. A'_1 va A'_2 nuqtalar Φ va Γ sirtning urinish nuqtalari bo‘ladi.
5.				Φ va Γsirtlar o‘zaro kesishmaydi.
6.				Φ sirt bilan Γ ko‘pyoqlik sirti o‘zaro to‘liq kesishib, ikkita fazoviy chiziq siniq egri chiziq hosil qiladi.
7.				Φ sirt bilan Γ ko‘pyoqlik sirti qisman kesishib, bitta fazoviy siniq egri chiziq hosil qiladi.

12.1-jadval (davomi)

8.				Φ sirt bilan Γ ko‘pyoqlik sirti qisman kesishib, urinish nuqtasiga ega bo‘lgan bitta fazoviy siniq egri chiziq hosil qiladi. A nuqta Φ va Γ sirtlarning o‘zaro urinish nuqtasi bo‘ladi.
9.				Φ sirt bilan Γ ko‘pyoqlik sirti o‘zaro to‘liq kesishib, A_1 va A_2 urinish nuqtalariga ega bo‘lgan ikkita fazoviy siniq chiziq hosil qiladi. A_1 va A_2 nuqtalar Φ va Γ sirtlarning o‘zaro urinish nuqtalari bo‘ladi.
10				Φ sirt bilan Γ ko‘pyoqlik o‘zaro kesishmaydi.

chizig'ining sinish nuqtalari piramida qirralarining konus sirti bilan kesishgan nuqtalaridir. Kesishish chizig'ining tekis egri chiziqlari piramida yoqlarining konus sirti bilan kesishgan chiziqlaridir. Bu chiziqlar ikkinchi tartibli tekis egri chiziqlar hisoblanib, tekislik bilan sirtning o'zaro kesishish chizig'ini yasash algoritmidan foydalanib yasalsa ham bo'ladi. Konus bilan piramida sirtining o'zaro kesishish chizig'ini yasash algoritmi, umuman olganda, konus bilan konusning kesishish chizig'ini yasash algoritmining o'zginasidir. Faqat xarakterli nuqtalar qatoriga piramida qirralarining konus sirti bilan kesishgan nuqtalarini ham yasashni kiritish yetarli.

12.5.6. Konus bilan silindrning o'zaro kesishish chizig'ini yasash. Konus bilan silindr sirtlari o'zaro kesishganda fazoviy, xususiy hollarda esa tekis egri chiziq hosil bo'ladi.

Asosi bir tekislikda yotuvchi konus va silindr sirtlarining kesishish chizig'ini yasash uchun konusning S_2 uchidan silindr yasovchilariga parallel qilib kesuvchi tekisliklar dastasining i o'qi o'tkaziladi (12.20-rasm).

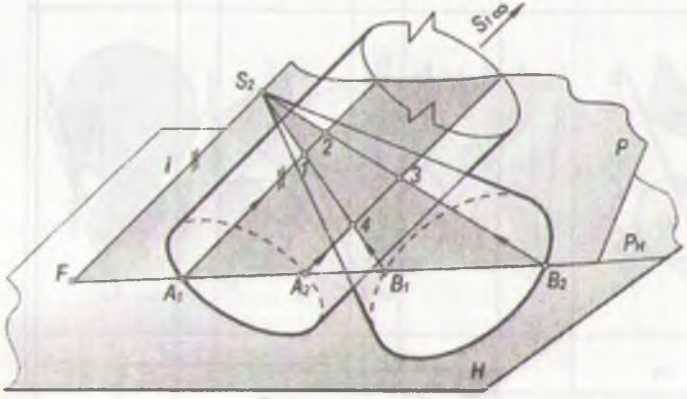
Bu dastaning istalgan P tekisligi konusni $S_2B_1B_2$ uchburchak, silindrni esa A_1, A_2 nuqtalardan o'tuvchi yasovchilari bilan kesadi. Ularning o'zaro kesishishi natijasida kesishish chizig'ining 1, 2, 3, 4 nuqtalari hosil bo'ladi.

12.21-rasmda asoslari H tekislikda yotgan konus bilan silindr sirtlarining kesishish chizig'ini yasash tekis chizmada ko'rsatilgan. Buning uchun sirtlarga urinuvchi yordamchi kesuvchi P_1, P_4 tekisliklarning P_{1H}, P_{4H} izlari yasaladi.

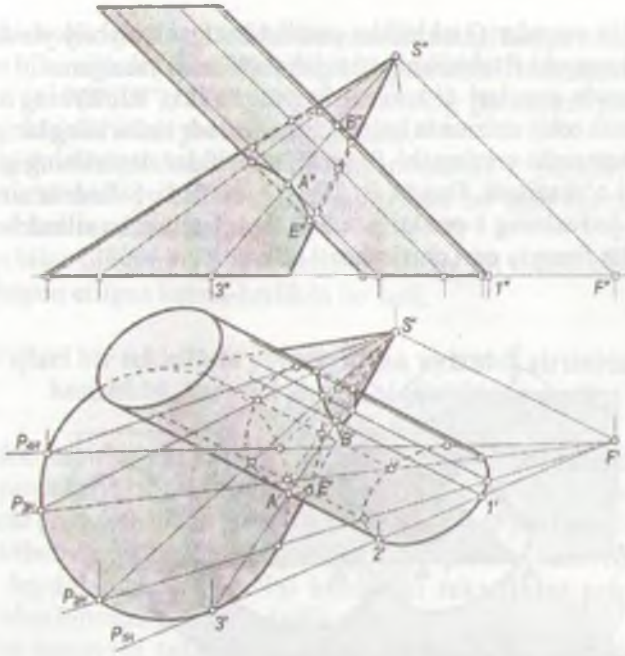
12.1-jadvalning 2-punktiga asosan konus va silindrning butunlay kesishib, bitta yopiq egri chiziq hosil qilishi aniqlanadi.

Konus bilan silindrning xarakterli nuqtalarini aniqlash 12.19-rasmda ko'rsatilgan konus bilan konusning o'zaro kesishishidek bajariladi.

Kesishish chizig'ining oraliq nuqtalari P_1 va P_4 tekisliklar orasidagi yordamchi tekisliklar orqali yasaladi. Hosil bo'lgan barcha kesishish nuqtalari ketma-ket ravon tutashtiriladi.



12.20-rasm.



12.21-rasm.

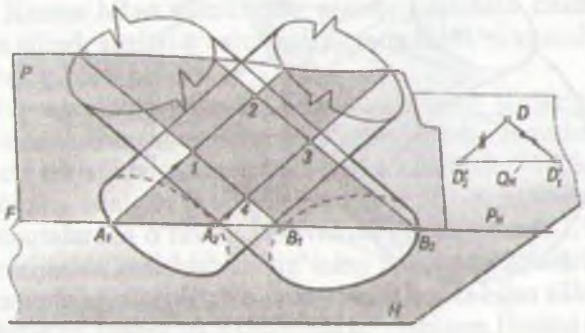
12.5.7. Konus bilan prizmaning o‘zaro kesishish chizig‘ini yasash. Konus bilan prizma sirti o‘zaro kesishib, fazoviy siniq egri chiziq hosil qiladi. Bu kesishish chizig‘ining sinish nuqtalari prizma qirralarining konus sirti bilan kesishish nuqtalaridir. Kesishish chizig‘ining tekis egri chiziqlari prizma yoqlarining konus sirti bilan kesishuvidan hosil bo‘ladi.

Xususiy holda konus bilan prizmaning kesishish chizig‘i tekislik bilan sirtning kesishish chizig‘ini yasash algoritmini bir necha marta qo‘llash yo‘li bilan aniqlanadi. Umumiy holda esa, konus bilan prizmaning kesishish chizig‘ini yasash algoritmi konus bilan silindrning kesishish chizig‘ini yasash algoritmining o‘zginasi bo‘lib, faqat xarakterli nuqtalar soniga qo‘shimcha ravishda prizma qirralarining konus bilan kesishish nuqtalarini yasash kifoyadir.

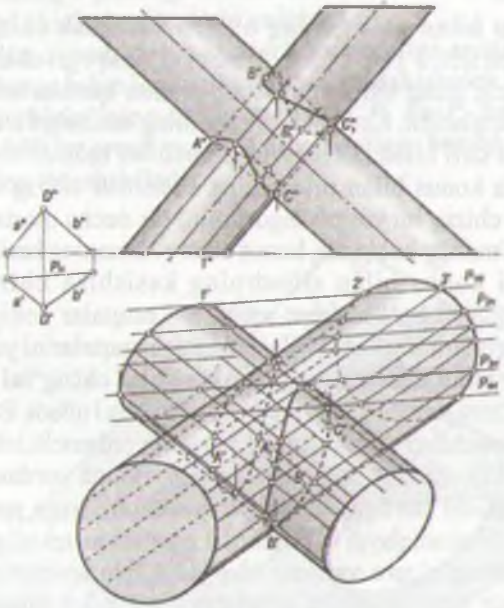
12.5.8. Silindr bilan silindrning o‘zaro kesishish chizig‘ini yasash. Silindr bilan silindr sirti o‘zaro kesishib, fazoviy egri chiziq hosil qiladi. Bu silindrlarning to‘g‘ri chiziqli yasovchilari orqali o‘tgan kesuvchi yordamchi tekisliklar dastasi o‘zaro parallel bo‘lib, xosmas o‘qqa ega bo‘ladi. Bunda yordamchi tekisliklar dastasining yo‘nalishi berilgan silindrlar yasovchilariga parallel bo‘lgan yo‘naltiruvchi tekislikni aniqlaydi va bu tekislik parallelizm tekisligi deb yuritiladi. Berilgan silindrlarning o‘zaro vaziyati 12.1-jadvaldan aniqlab olinadi. 12.22-rasmda ikki silindr sirti kesishish chizig‘ining 1,2,3,4 nuqtalarini yasash

ko'rsatilgan. Bu nuqtalar Q tekislikka parallel bo'lgan ixtiyoriy yordamchi va ikki silindrni kesuvchi P tekislikni o'tkazish yo'li bilan yasalgan.

12.23-rasmda asoslari H tekislikda yotgan ikki silindrning kesishish chizig'ini yasash tekis chizmada ko'rsatilgan. Silindr sirtlarining biriga urinib, ikkinchisini kesuvchi yordamchi P_1 va P_4 tekisliklar dastasining gorizontal P_{1H}, P_{4H} izlari o'tkaziladi. Bunda $P_{1H} \| P_{4H} \| Q_H$ bo'ladi. Silindrlarning o'zaro vaziyati 12.1-jadvalning 1-punktiga mos kelgani uchun bu silindrlar qisman kesishib, ikkita fazoviy egri chiziq hosil qiladi.



12.22-rasm.



12.23-rasm.

Kesishish chizig'ining xarakterli nuqtalari xuddi konus bilan konusning yoki konus bilan silindr kesishish chizig'ining xarakterli nuqtalari kabi bo'ladi. Bu $A(A', A'')$, $B(B', B'')$, $C(C', C'')$ nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari P_{2P}, P_{3P}..., tekislik izlari yordamida yasaladi.

Kesishish chizig'ining boshqa oraliq nuqtalari P parallel yordamchi tekisliklar o'tkazish yo'li bilan yasaladi. Hosil bo'lgan barcha kesishish nuqtalari o'zaro ravon birlashtiriladi.

Prizma bilan silindrning o'zaro kesishish chizig'ini yasash algoritmi xuddi yuqorida bayon etilgan ketma-ketlikda bo'ladi.

12.6-§. O'qlari bir tekislikda yotmaydigan aylanish sirtlarining o'zaro kesishishi. Parallel kesuvchi tekisliklar usuli

Agar ikki kesishuvchi sirtlarning o'qlari o'zaro kesishmasdan, ulardan biri biror proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lib, ikkinchi sirtning o'qi ikkinchi proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar yoki parallel bo'lsa, u holda bu sirtlarning kesishish chizig'ini yasashda parallel kesuvchi tekisliklar usulidan foydalaniladi. Parallel kesuvchi tekisliklar proyeksiyalar tekisliklaridan birortasiga parallel qilib olinadi.

Parallel kesuvchi tekisliklar usulining qulayligi shundaki, bunda yordamchi kesuvchi tekisliklar kesishuvchi sirtlarni aylanalar va to'g'ri chiziqlar bo'yicha kesadi. Parallel kesuvchi tekisliklar usulida tekisliklar dastasining o'qi xosmas bo'ladi. Bu usul bilan yechiladigan bir necha sirtlarning o'zaro kesishuvini ko'rib chiqamiz.

12.6.1. Ikki silindrning o'zaro kesishishi. 12.24-rasmda kesishuvchi silindrlarning biri gorizontal proyeksiyalovchi, ikkinchisining o'qi frontal proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgan holda silindrlar tasvirlangan.

Bu sirtlarning kesishish chizig'ini yasashda yordamchi kesuvchi tekisliklar V tekislikka parallel bo'ladi. Ularning o'zaro vaziyati chizmaning gorizontal proyeksiyasidan ko'rinib turibdi. Kesishish chizig'ining xarakterli 1(1′, 1″), 2(2′, 2″), 4(4′, 4″), 5(5′, 5″) nuqtalari yordamchi kesuvchi frontal V_{1P}, V_{2P}, V_{3P}... tekisliklar yordamida hosil qilingan. Bunda yordamchi parallel tekisliklar har ikkala silindrni yasovchilari bo'yicha kesadi. Bir tekislikda yotuvchi ikki silindrga mansub bo'lgan yasovchilarning kesishish nuqtalari ikkala sirt uchun umumiy bo'lib, yasaladigan m (m', m'') egri chiziqning nuqtalari bo'ladi. m egri chiziqning qolgan nuqtalari V_{1H} va V_{2H} tekisliklar orasida yordamchi kesuvchi tekisliklar o'tkazish yo'li bilan yasalgan. Kesishish chizig'i frontal proyeksiyasining silindrning V_5 simmetriya tekisligidan kuzatuvchi tomondagi nuqtalari ko'rinadi, uning orqasidagi nuqtalari esa ko'rinmaydi.

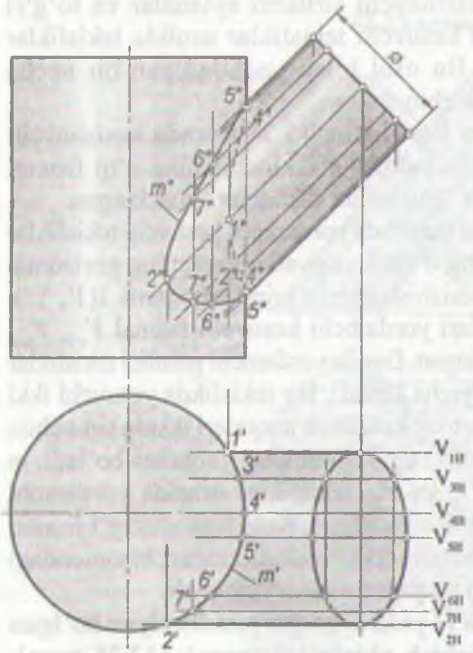
12.6.2. O'qlari uchrashmas va H yoki V ga perpendikulyar bo'lgan aylanish sirtlarining o'zaro kesishish chizig'ini yasash (12.25-rasm). Kesishuvchi sirtlardan doiraviy silindr o'qi V tekislikka va doiraviy konus o'qi H tekislikka perpendikulyar bo'lganda yordamchi parallel kesuvchi

tekisliklar gorizontal tekisliklar bo'ladi. Bu tekisliklar konusni aylanalar va silindrni yasovchilari bo'yicha kesadi. Hosil bo'lgan aylana va yasovchilar o'zaro kesishib, kesishish chizig'ining nuqtalarini hosil qiladi.

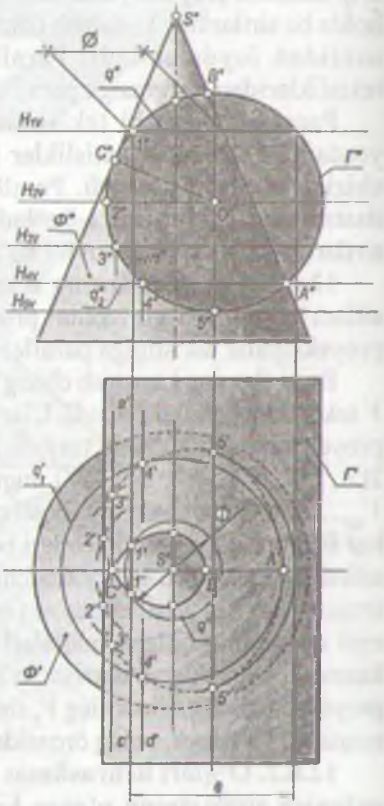
Kesishish chizig'ining $A(A', A'')$, $B(B', B'')$, $C(C', C'')$ nuqtalari xarakterli nuqtalardir. Ular bevosita sirtlar frontal ocherklarining kesishish nuqtalaridn belgilanadi. Qolgan nuqtalar kesuvchi tekisliklar yordamida yasaladi. Masalan, 1,2,3,4,5 nuqtalar $H_1 \| H$,... va $H_5 \| H$ tekisliklar o'tkazib, gorizontal proyeksiyadagi q va q_1 aylanalarning va a', b', c' va d' to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan to'rtburchak kesimlarining kesishuvidan hosil qilingan. Qolgan nuqtalar ham shu tartibda hosil qilinadi.

2(2′, 2″) xarakterli nuqta Γ silindrning $H_2(H_{2V})$ simmetriya tekisligini o'tkazish yo'li bilan topiladi. Kesishish chizig'ining ko'rinadigan va ko'rinmaydigan nuqtalari ham H_2 simmetriya tekisligi yordamida aniqlanadi.

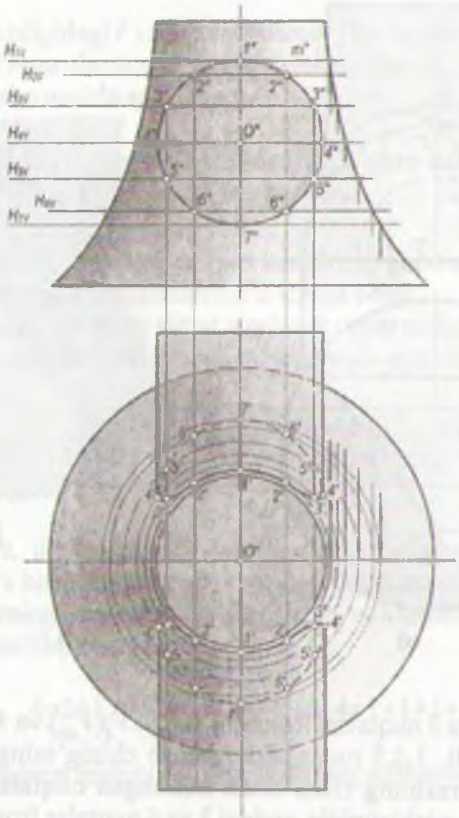
12.26-rasmda o'qlari kesishib, o'zaro perpendikulyar bo'lgan aylanish silindri bilan tor sirti bo'lagining kesishish chizig'ini yasash tasvirlangan.



12.24-rasm.



12.25-rasm.

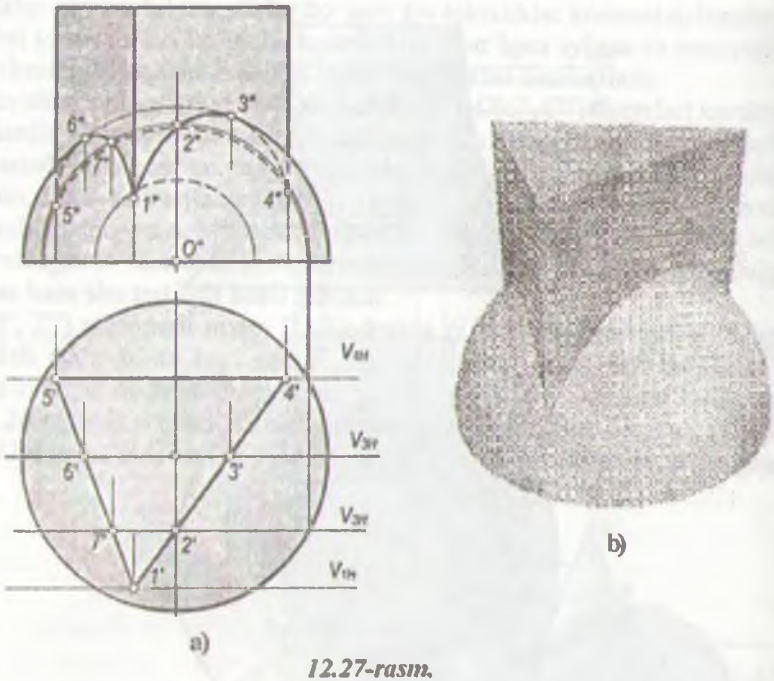


12.26-rasm.

Kesishish egri chizig'ini yasash $H_1(H_{11})$,... gorizontal kesuvchi tekisliklar o'tkazish yo'li bilan yasalgan. Bunday holda sirtlarning kesishish egri chizig'i ikkita simmetrik bo'lakdan iborat bo'ladi. 1, 4, 7 xarakterli nuqtalar H_{11}, H_{41} va H_{71} tekisliklar yordamida yasalgan. Kesishgan egri chiziq gorizontal proyeksiyasining ko'rinadigan va ko'rinmaydigan qismlari H_4 simmetriya tekisligi yordamida aniqlanadi.

12.6.3. Yarim sfera bilan uchburchakli to'g'ri prizmaning o'zaro kesishishi. Sfera bilan prizma sirti fazoda siniq egri chiziq bo'yicha kesishadi. 12.27-a, b rasmda yarim sfera va qirralari H tekislikka perpendikulyar bo'lgan uchburchakli prizma tasvirlangan. Yordamchi kesuvchi tekisliklar frontal tekisliklardan iborat bo'ladi. Bu tekisliklar sferani parallellari bo'yicha, prizmani esa yon qirralariga parallel to'g'ri chiziqlar bo'yicha kesadi.

Rasmdan ko'rinib turibdiki, prizma sirti sharni to'la kesadi va uchta aylana hosil bo'ladi. Ularning V dagi proyeksiyalari ellipslar va aylana bo'lib proyeksiyalanadi. Shar va prizma sirti o'zaro kesishish chizig'ining



12.27-rasm.

xarakterli 1,4,5,6 va 3 nuqtalari frontal $V_1(V_{1H})$, $V_4(V_{4H})$ va $V_3(V_{3H})$ tekisliklar yordamida yasaladi. 1,4,5 nuqtalar kesishish chizig'ining sinish nuqtalari bo'lib, prizma qirrasining sfera bilan kesishgan nuqtalaridir. V_3 tekislik sharning simmetriya tekisligidir, undagi 3 va 6 nuqtalar frontal proyeksiyada kesishish chizig'ining ko'rinadigan qismini ajratib turuvchi nuqtalardir. Qolgan yasashlar rasmdan ko'rinib turibdi. Bu misolda yordamchi parallel kesuvchi tekisliklarni gorizontal tekislik qilib olsa ham bo'ladi.

12.6.4. O'qlari o'zaro parallel bo'lgan aylanish sirtlarining o'zaro kesishishi. O'qlari parallel bo'lgan Φ siqiq aylanma ellipsoid bilan Γ aylanish sirti 12.28-a, b rasmda tasvirlangan. Bu sirtlarning o'qlari H tekisligiga perpendikulyar joylashgan. Sirtlarning fazoda bunday berilishida yordamchi kesuvchi tekisliklar sirtlarning o'qlariga perpendikulyar qilib o'tkaziladi. Dastlab kesishuv chizig'ining 1(1′, 1″) va 6(6′, 6″) xarakterli nuqtalari belgilanadi. Qolgan nuqtalar $H_2(H_{2V})$, $H_3(H_{3V})$ ... kesuvchi tekisliklar yordamida yasaladi. Kesuvchi gorizontal yordamchi tekisliklar berilgan ikkala aylanish sirtini aylanalar bo'yicha kesadi. Kesimlarda hosil bo'lgan bu aylanalar o'zaro kesishib, ikkala sirtga oid bo'lgan kesishish chizig'ining nuqtalarini beradi. Masalan, 12.28-rasmda 2(2′, 2″), $2_1(2_1', 2_1'')$ nuqtalarni hosil qilishda H_{2V} tekisligi o'tkazilgan. Bu tekislik sirtlarning birini $l(l', l'')$, ikkinchisini $n(n', n'')$ aylanalar bo'yicha kesgan. Hosil bo'lgan l va n aylanalar o'zaro kesishib, 2(2′, 2″) va $2_1(2_1', 2_1'')$ nuqtani hosil qiladi. ya'ni gorizontal

proyeksiyalar tekisligidagi l' va n' aylanalarning kesishishidan $2'$ va $2_1'$ nuqtalar hosil bo'ladi, so'ngra ularning V dagi proyeksiyalari H_{2_1} da yasaladi. Qolgan barcha nuqtalar shu usulda aniqlanadi.

12.7-§. Ikkinchi tartibli sirtlarning o'zaro kesishishidagi maxsus hollar

Ikkinchi tartibli sirtlarning o'zaro kesishishi geometrik va muhandislik amaliyotidagi ko'pgina masalalarni o'z ichiga oladi.

Ma'lumki, ikkinchi tartibli sirtlar algebraik sirtlar turkumiga kiradi. Shuning uchun ularning kesishish chiziqlari ham algebraik egri chiziqlar bo'ladi.

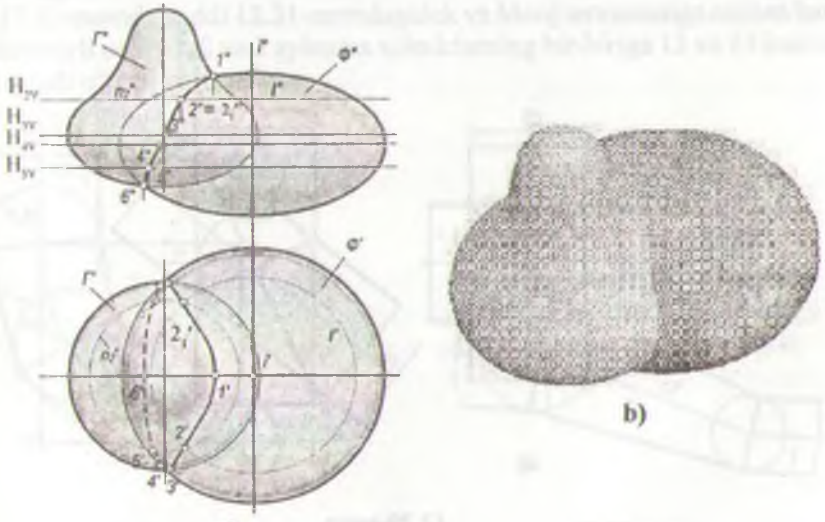
Ta'rif. Ikki sirt kesishish chizig'ining tartibi sirtlar tartibining ko'paytmasiga tengdir.

Shunga ko'ra, ikkita ikkinchi tartibli sirt kesishganda to'rtinchi tartibli kesishish chizig'i hosil bo'ladi: $\Phi_1^2 \cap \Phi_2^2 = n^4$. Sirtlarning kesishish chizig'i, kesishuvchi sirtlarning vaziyati va shakliga qarab, turli tartibli egriliklarga ajraladi.

Masalan, 4-tartibli egri chiziq

$$4=3+1,\ 4=2+1+1,\ 4=2+2,\ 4=1+1+1+1$$

tartibdagi egri chiziqlarga ajralishi mumkin. Bularning geometrik ma'nosi quyidagicha:



12.28-rasm.

• To‘rtinchi tartibli egri chiziq bitta uchinchi tartibli egri chiziqqa va to‘g‘ri chiziqqa ajralgan. Umumiy to‘g‘ri chiziqli yasovchiga ega bo‘lgan har qanday chiziqli ikkinchi tartibli ikki sirtning kesishuvida bu holni ko‘rish mumkin.

• To‘rtinchi tartibli egri chiziq bitta ikkinchi tartibli egri chiziqqa va ikkita to‘g‘ri chiziqqa ajraladi.

• To‘rtinchi tartibli egri chiziq ikkita ikkinchi tartibli egri chiziqqa ajralgan. Bu holni keyinroq batafsil ko‘rib chiqamiz.

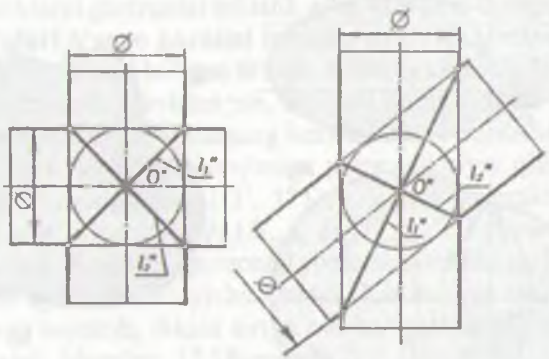
• To‘rtinchi tartibli egri chiziq to‘rtta to‘g‘ri chiziqqa ajraladi. Bu holni umumiy o‘qqa ega bo‘lgan aylanma va elliptik silindrlar misolida ko‘rish mumkin.

12.7.1. Monj teoremasi va uning xususiy hollari.

Teorema. Agar ikki o'zaro kesishuvchi ikkinchi tartibli sirtlarning tashqarisida yoki ichkarisida biror uchinchi ikkinchi tartibli sirtni urinma vaziyatda chizish mumkin bo'lsa, u holda berilgan sirtlar ikkita tekis egri chiziq bo'yicha kesishadi. Egri chiziqlarning tekisliklari urinish nuqtalarini tutashtiruvchi to'g'ri chiziq orqali o'tadi.

Monj teoremasi muhandislik amaliyotida ikkinchi tartibli ikki sirtning tashqarisida yoki ichkarisida sfera chizish mumkin bo‘lgan hollarda ularning kesishish chizig‘ini yasash uchun qo‘llaniladi. Monj teoremasiga doir bir necha misollarni ko‘ramiz. Chizmalar frontal proyeksiyalar tekisligidagi tasvirlar orqali berilgan.

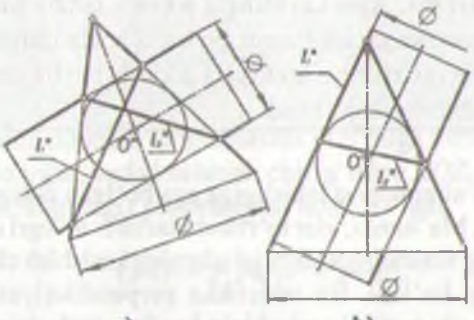
Masalan, 12.29-a,b rasmda o‘qlari kesishuvchi holda joylashgan ikki aylanma kesishuvchi silindrlar ichiga sferalar chizilgan. Teoremaga asosan bu silindrlar ikki l_1'' va l_2'' ellipslar bo‘yicha kesishadi. 12.30-a,b rasmda aylanma silindr



a) b)

12.29-rasm.

bilan konusning kesishish chizig'ini yasash ko'rsatilgan. Bunda silindr va konusga urinuvchi sirt sfera, sirtlarning kesishish chiziqlari l_1'' va l_2'' ellipslardir.

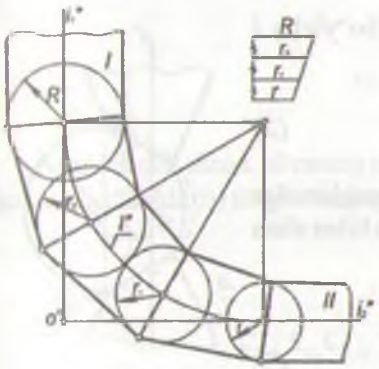


a) b)

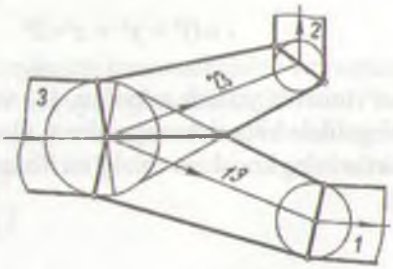
12.30-rasm.

Monj teoremasi truboprovodlarni loyihalashda qo'llanilishi mumkin. O'qlari o'zaro O'' nuqtada kesishuvchi har xil diametrli ikki silindrik *I* va *II* trubalar berilgan. Ularni tutashtiruvchi oraliq trubalar yasash kerak bo'lsin (12.31-rasm). Buning uchun, avvalo, trubaning i_1'' va i_2'' o'qlarini l'' aylana yoyi bilan tutashtiramiz. So'ngra bu yoyni teng bo'laklarga bo'lib, bo'linish nuqtalarini sferalarning markazi sifatida qabul qilamiz. *r* va *R* radiuslar proporsional o'zgartirilgan holda sferalar chiziladi. Har ikki yonma-yon sferalarga urinmalar o'tkazib, konuslar hosil qilinadi. Ikkita yonma-yon konuslar umumiy ichki sferaga ega bo'lgani uchun ellipslar bo'yicha kesishadi. Ular chizmada kesma tarzida tasvirlangan.

12.32-rasmda xuddi 12.31-rasmdagidek va Monj teoremasiga asosan har xil diametrli uchta 1, 2 va 3 aylanma silindrlarning bir-biriga 13 va 23 konus sirti orqali o'tishi ko'rsatilgan.



12.31-rasm.



12.32-rasm.

12.7.2. Umumiy simmetriya tekisligiga ega bo'lgan ikkinchi tartibli sirtlarning kesishuvi.

> **Teorema.** Agar kesishuvchi ikkinchi tartibli ikki sirt umumiy simmetriya tekisligiga ega bo'lsa, u holda ularning kesishish chizig'i simmetriya tekisligida ikkinchi tartibli chiziq bo'lib proyeksiyalanadi.

Isboti. Umumiy simmetriya tekisligiga ega bo'lgan ikkinchi tartibli ikki sirt berilgan bo'lsin. Ma'lumki, ular to'rtinchi tartibli m^4 egri chiziq bo'yicha kesishadi. Sirtlarning simmetriya tekisligi ularning kesishish chizig'ining ham simmetriya tekisligi bo'ladi. Bu tekislikka perpendikulyar bo'lgan biror tekislik bilan to'rtinchi tartibli egri chiziq kesilsa, unda to'rtta nuqta hosil bo'ladi. Shu nuqtalardan bir jufti simmetriya tekisligining bir tomonida, ikkinchi jufti uning ikkinchi tomonida yotadi. Bu nuqtalar ham simmetrik joylashgan bo'ladi. Demak, to'rtinchi tartibli egri chiziqning shunday ikki nuqtasi mavjudki, ular simmetriya tekisligiga nisbatan simmetrik joylashadi. Shuning uchun ularning simmetriya tekisligidagi ortogonal proyeksiyalari ustma-ust tushadi. To'rtinchi tartibli egri chiziqning hamma nuqtalari shu tarzda proyeksiyalansa, ikkinchi tartibli egri chiziq hosil bo'ladi.

Bu teoremaning isbotini analitik usulda ham ko'rsatish mumkin. Umumiy frontal simmetriya tekisligiga ega bo'lgan aylanma konus va sfera berilgan bo'lsin (12.33-rasm). Bu ikki sirt ham ikkinchi tartibli bo'lgani uchun ular to'rtinchi tartibli egri chiziq bo'yicha kesishadi.

$z = kx$ yasovchi to'g'ri chiziq Oz o'qi atrofida aylantirilsa, aylanma konus sirti hosil bo'ladi. U holda bu konusning tenglamasi

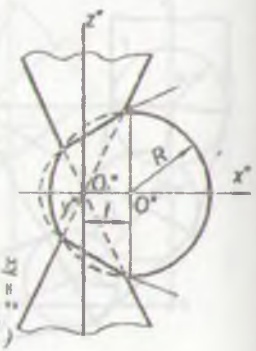
$$z^2=k^2 (x^2 + y^2) \qquad (1)$$

ko'rinishda yoziladi. Markazi Ox o'qi bo'yicha l masofaga siljigan sferaning tenglamasini

$$(x-l)^2 + y^2 + z^2=R^2 \qquad (2)$$

ko'rinishda yozish mumkin. (1) va (2) tenglamalar birgalikda bitta sistemaga olinsa, ular konus bilan sfera sirtlarining kesishish chizig'ini ifodalaydi:

$$\begin{cases} z^2 = k^2(x^2 + y^2) \\ (x-l)^2 + y^2 + z^2 = R^2 \end{cases} \qquad (3)$$



12.33-rasm.

yoki

$$\begin{cases} y^2 = \dfrac{z^2}{k^2} - x^2 \\ (x-l)^2 + y^2 + z^2 = R^2. \end{cases} \tag{4}$$

4-sistemaning ikkinchi tenglamasida y^2 o'rniga birinchi tenglamadagi y^2 ning qiymati qo'yilsa, unda kesishish chizig'ining XOZ, ya'ni V tekisligidagi (simmetriya tekisligidagi) proyeksiyasi hosil bo'ladi:

$$(x-l)^2 + z^2 / k^2 - x^2 + z^2 = R^2. \tag{5}$$

Ba'zi soddalashtirishlardan so'ng (5) ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$z^2 = 2\frac{lk^2}{1+k^2}x + \frac{k^2}{1+k^2}(R^2 - l^2). \tag{6}$$

Bu yerda $\dfrac{lk^2}{1+k^2} = p, \dfrac{k^2}{1+k^2}(R^2 - l^2) = q$ deb belgilansa, (6) tenglamani

$$z^2 = 2px + q \tag{7}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Natijada umumiy simmetriya tekisligiga ega bo'lgan aylanma konus va sfera sirtlari kesishish chizig'ining shu tekislikdagi proyeksiyasi parabola (7) ekanligi kelib chiqadi.

(5) tenglamada $z = 0$ deb olinsa, parabola uchining koordinatasi topiladi:

$$x_0 = \frac{l^2 - R^2}{2l}. \tag{8}$$

Agar $l=0$ deb olinsa, sferaning markazi aylanma konus uchi bilan bir nuqtada bo'linadi, u holda (6) tenglamaning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$z^2 = \frac{R^2k^2}{1+k^2} \tag{9}$$

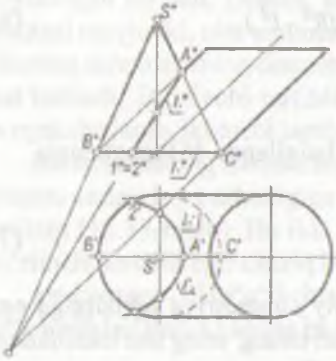
yoki

$$z = \pm \frac{Rk}{\sqrt{1+k^2}}. \qquad (10)$$

Bu tenglama (10) ikkita parallel to'g'ri chiziq tenglamasini ifodalaydi. Bu holda (6) parabola frontal tekislikda ikki parallel to'g'ri chiziqqa ajralgan bo'ladi, ya'ni 4-tartibli egri chiziq ikkita aylanaga ajraladi. Haqiqatan, umumiy o'qqa ega bo'lgan ikki aylanma sirt doim aylanalar bo'yicha kesishadi.

12.8-§. Ikkinchi tartibli sirtlarning o'zaro kesishishiga oid teoremalar

1-teorema. Agar ikkinchi tartibli ikki sirt bitta tekis egri chiziq bo'yicha kesishsa, u holda ular yana biror egri chiziq bo'yicha kesishadi va bu ham tekis egri chiziq bo'ladi.



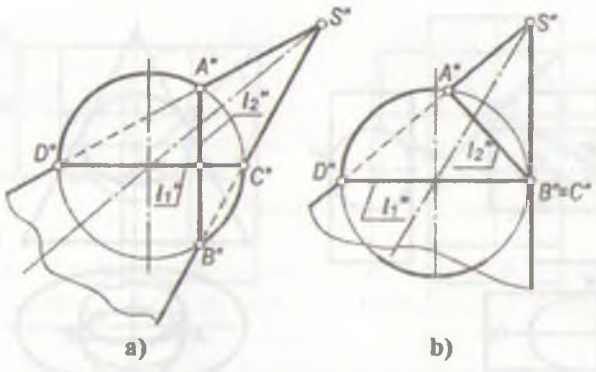
12.34-rasm.

Isboti. Teorema birinchi qismining shartiga asosan ikkinchi tartibli ikki sirt bitta tekis egri chiziq bo'yicha kesishadi. Bu egri chiziq faqat ikkinchi tartibli bo'lishi mumkin. Chunki ikkinchi tartibli sirtlarni ixtiyoriy tekislik bilan kesganda ham ikkinchi tartibli chiziq hosil bo'ladi. Ikkita ikkinchi tartibli sirt to'rtinchi tartibli egri chiziq bo'yicha kesishgani uchun ikkinchi noma'lum bo'lgan egri chiziq ham Monj teoremasiga asosan ikkinchi tartibli egri chiziq bo'ladi. 12.34-rasmda umumiy asosi aylana bo'lgan silindr va konus sirtlari berilgan. Kesishuvchi bu sirtlar ikkinchi tartibli va bitta umumiy aylana bo'yicha kesishgan. Teorema shartiga asosan bu sirtlarga tegishli yana bitta tekis egri chiziq bo'lishi lozim. Izlanayotgan ikkinchi tekis egri chiziq $l_2(l_2', l_2'')$ ellips bo'ladi. Shunday qilib, konus va silindr sirtlari bir aylana va bir ellips bo'yicha kesishadi.

Teoremaning natijasi sifatida quyidagilarni keltirish mumkin:

Ta'rif. Agar sfera biror sirt bilan aylana bo'yicha kesishsa, u holda bu sfera shu sirt bilan yana bir aylana bo'yicha kesishadi.

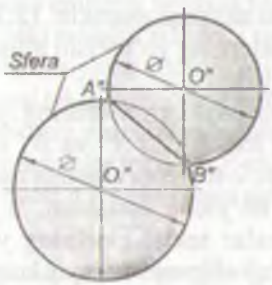
12.35-a,b rasmda sfera bilan konusning kesishishi V tekislikka tasvirlangan. Bunda sfera va konus uchun umumiy bo'lgan tekis egri chiziqlardan biri sferaning katta l_1'' gorizontal kesimidir. Teorema shartiga ko'ra, yana bir tekis kesim mavjud. Izlangan tekis kesim l_2'' aylana bo'ladi.

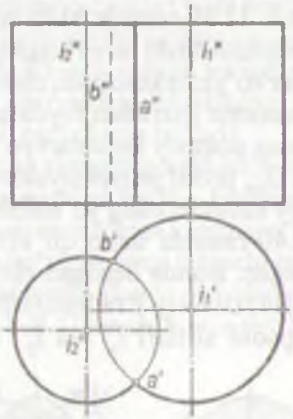


a) b)

12.35-rasm.

Ikkinchi tartibli sirtlarning kesishuvidagi to'rtinchi tartibli egri chiziq ikkita tekis chiziqqa ajraladigan va ulardan biri mavhum bo'lgan hollar ham uchraydi. 12.36-rasmda har xil diametrli sferalarning kesishishi tasvirlangan. Ular bitta tekis egri chiziq – $A''B''$ aylana bo'yicha kesishgan. Bunda ikkinchi tekis egri chiziq mavhum deb qaraladi.

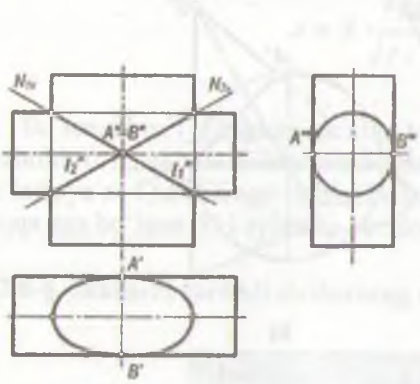




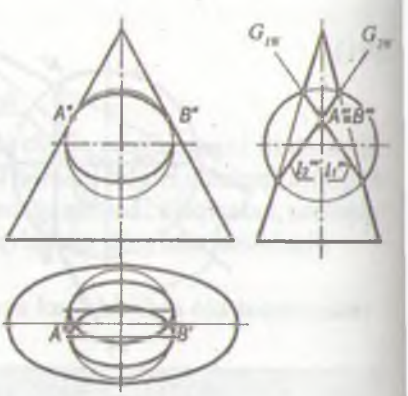
12.36-rasm. *12.37-rasm.*

O'qlari parallel bo'lgan ikkinchi tartibli ikki aylanma silindr ikkita parallel yasovchi (yoki bitta tekis egri chiziq) bo'yicha kesishadi. Ikkinchi tekis egri chiziq (ikkita yasovchi) mavhumdir (12.37-rasm).

2-teorema. Agar ikkinchi tartibli ikki sirt ikkita nuqtada urinsa, u holda ularning kesishish chiziqlari ham ikkinchi tartibli ikki tekis egri chiziqqa ajraladi.



12.38-rasm.



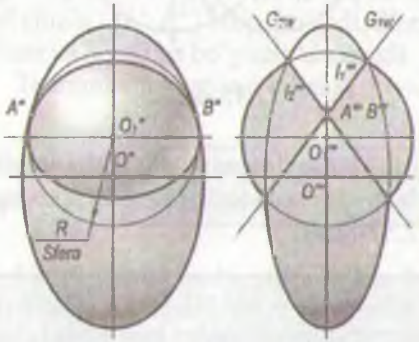
12.39-rasm.

Bu tekis egri chiziqlarning tekisliklari urinish nuqtalarini tutashtiruvchi to‘g‘ri chiziq orqali o‘tadi.

12.38-rasmda ikkita urinish nuqtasiga ega bo‘lgan aylanma va elliptik silindrlarning kesishishi tasvirlangan. Bu sirtlar l_1'' va l_2'' ellipslar bo‘yicha kesishadi. 12.39-rasmda ikkita urinish nuqtasiga ega bo‘lgan elliptik konus va sferaning kesishishi tasvirlangan. Teorema shartiga ko‘ra, bu sirtlar l_1'' va l_2'' aylanalar bo‘yicha kesishadi, chunki sferaning tekis kesimlari faqat aylanalardir.

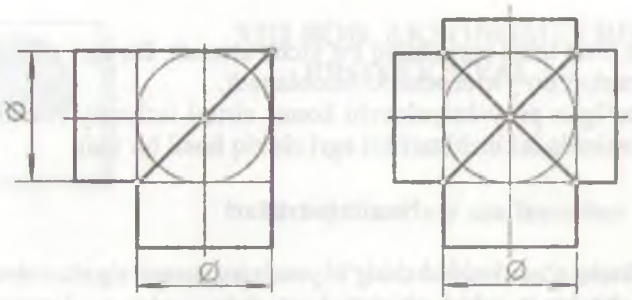
2-teorema shartidan foydalanib, umumiy ko‘rinishdagi ikkinchi tartibli sirtlarning doiraviy kesimlari yo‘nalishlarini aniqlash mumkin. 12.39-rasmda G_{1W} va G_{2W} profil proyeksiyalovchi tekisliklarning yo‘nalishi elliptik konus doiraviy kesimlarining yo‘nalishini aniqlaydi.

12.40-rasmda ucho‘qli ellipsoid doiraviy kesimlarining yo‘nalishi aniqlangan. Bunda berilgan ellipsoidning ichida ikki A'' va B'' nuqtalarga urinuvchi ixtiyoriy R radiusli sfera chiziladi. 2-teorema shartiga asosan sfera va ellipsoid sirtlari l_1'' va l_2'' aylanalar bo‘yicha kesishadi. G_{1W} va G_{2W} aylanalar tekisliklarining yo‘nalishi ucho‘qli ellipsoid doiraviy kesimlarining yo‘nalishi bo‘ladi.



12.40-rasm.

12.41-a,b rasmlarda shar atrofida chizilgan ikki aylanma silindrning kesishishi V tekislikka tasvirlangan. Silindrik sirtlar ikki tekis egri chiziqlari ellipslar bo‘yicha kesishadi. Qurilish amaliyotida silindrlarning shunday vaziyatda kesishishi *novali gumbaz* deb yuritiladi. 12.42-a,b,v,g rasmlarda o‘qlari o‘zaro kesishgan o‘tish trubalarini yasash misollari ko‘rsatilgan.



a) b)

12.41-rasm.

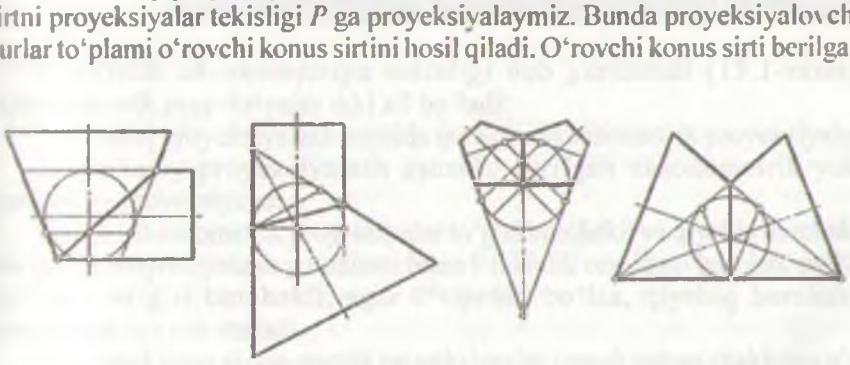
3-teorema. Ikkinchi tartibli sirtlarning ocherki (konturi) ikkinchi tartibli egri chiziqdan iborat.

Bu teorema ikkinchi tartibli sirtlarni tasvirlashda alohida ahamiyatga ega, chunki ikkinchi tartibli sirtlar ko'pincha chizmada o'zining ocherklari bilan beriladi.

Isboti. 1. Parallel proyeksiyalashda ikkinchi tartibli sirtlarning xossasiga asosan uni har qanday tekislik bilan kesganda ikkinchi tartibli tekis egri chiziq hosil bo'ladi. Bu egri chiziqning ixtiyoriy vaziyatdagi tekislikdagi parallel proyeksiyasi umumiy holda ikkinchi tartibli egri chiziq bo'ladi.

Kesuvchi tekislik ikkinchi tartibli sirtning simmetriya tekisligi bo'lib, u asosiy proyeksiyalar tekisliklarining biriga parallel bo'lsa, kesimning shu proyeksiyasi tekisliklaridagi parallel proyeksiyalari o'ziga kongruent bo'ladi.

2. Markaziy proyeksiyalashda S markaz bo'yicha biror ikkinchi tartibli Φ sirtni proyeksiyalar tekisligi P ga proyeksiyalaymiz. Bunda proyeksiyalovchi nurlar to'plami o'rovchi konus sirtini hosil qiladi. O'rovchi konus sirti berilgan



a) b) v) g)

12.42-rasm.

Φ sirt bilan bitta tekis egri chiziq bo'yicha urinadi. Bu egri chiziq berilgan sirtning S markaz bo'yicha ocherki hisoblanadi.

Hosil bo'lgan proyeksiyalovchi konus sirtini ixtiyoriy P tekislik bilan kesganda kesimda ikkinchi tartibli egri chiziq hosil bo'ladi.

Nazorat savollari

1. Ikki sirtning o'zaro kesishish chizig'ini yasashning umumiy algoritmi nimadan iborat?
2. Ikki sirtning kesishish chizig'ini yasashda qanday yordamchi sirtlardan foydalaniladi?
3. Sirtlarning o'zaro kesishish chizig'ida qanday nuqtalar xarakterli deyiladi?
4. Umumiy o'qqa ega bo'lgan aylanish sirtlarining o'zaro kesishish chizig'ini qanday egri chiziqlar bo'ladi?
5. Konsentrik va ekssentrik sferalardan qanday hollarda foydalaniladi?
6. Sferaning har qanday aylanma sirt bilan kesishuvidan nima hosil bo'ladi va u qanday aniqlanadi?
7. Monj teoremasi va undan kelib chiqadigan xususiy hollarni aytib bering.
8. Bitta sferaga tashqi chizilgan silindr va konusning o'zaro kesishishidan qanday chiziqlar hosil bo'ladi?
9. Yordamchi kesuvchi tekisliklar dastasi usulining mohiyati nimadan iborat?
10. Silindr bilan prizmaning o'zaro kesishish chizig'ini yasashda yordamchi tekislik qanday vaziyatda o'tkaziladi?
11. O'qlari kesishmaydigan og'ma silindr va konuslarning kesish chizig'ini yasashda kesuvchi tekislik qanday o'tkaziladi?



XIII BOB. AKSONOMETRIK PROYEKSIYALAR

13.1-§. Umumiy ma'lumotlar

Ma'lumki, ortogonal proyeksiyalarda chizmalarni chizish birmuncha qulay bo'lib, buyumning metrik xarakteristikalari ham saqlanadi. Buning boisi ortogonal proyeksiyalashda buyum proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan qulay holda joylashtiriladi. Ortogonal proyeksiyalash usulida tuzilgan chizmalarda qirqim va kesimlardan foydalanib, buyumning ichki va tashqi ko'rinishini yetarlicha aniqlash mumkin. Ammo ortogonal proyeksiyalardagi chizmalarga ko'ra, ularning fazoviy shakllarini tasavvur qilish qiyin. Bunday hollarda buyum chizmasini uning yaqqol tasviri bilan to'ldirish zaruriyati tug'iladi.

Bunday tasvirlar aksonometrik proyeksiyalar bo'la oladi. Lekin aksonometrik proyeksiyalarning hammasi ham yaqqol bo'lavermaydi. Buyumni yaqqol qilib tasvirlash proyeksiyalash yo'nalishi va proyeksiyalar tekisligining vaziyatlariga bog'liq bo'ladi. Aksonometrik proyeksiya qisqacha **aksonometriya** deb yuritiladi (*aksonometriya* grekcha so'z bo'lib, *axon* – o'q, *metreo* – o'lchayman, ya'ni «o'qlar bo'yicha o'lchash» degan ma'noni bildiradi).

Ta'rif. Dekart koordinatalar sistemasida joylashtirilgan buyum va uning proyeksiyalarining shu sistema bilan birgalikda berilgan s yo'nalish bo'yicha ixtiyoriy olingan biror P tekislikdagi proyeksiyasi uning aksonometriyasi deyiladi.

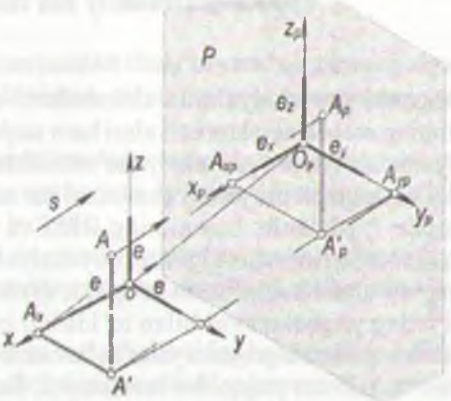
P tekislik *aksonometriya tekisligi* deb yuritiladi (13.1-rasm). Aksonometrik proyeksiyalar ikki xil bo'ladi:

1. Parallel proyeksiyalash asosida qurilgan aksonometrik proyeksiyalar.
2. Markaziy proyeksiyalash asosida qurilgan aksonometrik yoki perspektiv proyeksiyalar.

Parallel aksonometrik proyeksiyalar to'g'ri burchakli va qiyshiq burchakli bo'ladi. s proyeksiyalash yo'nalishi bilan P tekislik orasidagi burchak $\varphi=90^\circ$ bo'lsa – to'g'ri burchakli, agar $0^0<\varphi\neq90^0$ bo'lsa, qiyshiq burchakli aksonometriya deb ataladi.

Biror shaklning aksonometrik proyeksiyasini yasash uchun shaklning o'zi va uning ortogonal proyeksiyalaridan birini aksonometrik proyeksiyalar tekisligiga proyeksiyalash yetarlidir. Masalan, fazodagi A nuqta ortogonal proyeksiyalaridan biri A′ proyeksiyasi bilan birga P aksonometriya tekisligiga tasvirlangan (13.1-rasm). Bunda A_p nuqta A nuqtaning aksonometrik

proyeksiyasi bo'ladi. A'_p nuqta esa A nuqtaning *ikkilamchi proyeksiyasi* deb yuritiladi. Shakldagi $OA_xA'A$ siniq chiziq tomonlari A nuqtaning *x, y* va *z* koordinatalaridan iborat bo'lganligi uchun *koordinatalar siniq chizig'i* deb yuritiladi. Uning aksonometrik proyeksiyasi $O_pA_{xp}A'_pA_p$ siniq chiziq bo'ladi.



13.1-rasm.

O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 lar aksonometrik proyeksiyalar o'qlari, O_p esa O koordinatalar boshining aksonometriyasi bo'ladi.

Aksonometrik proyeksiyalar parallel proyeksiyalar turiga mansub bo'lganligi uchun ular parallel proyeksiyalarning hamma xossalariga ega.

Shunga ko'ra, $AA' \| Oz$, $A'A_x \| Oy$, $A'A_y \| Ox$ bo'lganligi uchun $A_1A'_1 \| O_1z_1$, $A'_1A_{xp} \| O_1y_1$, $A'_1Ay_1 \| O_1x_1$ bo'ladi.

13.2-§. Aksonometrik o'qlar va ular bo'yicha o'zgarish koeffitsientlari

Dekart koordinatalar sistemasidagi uchala koordinata o'qlari uchun umumiy bo'lgan *e* uzunlikni masshtab birligi sifatida qabul qilamiz (13.1-rasm). Buni *natural masshtab birligi* deb ataymiz. Natural masshtab birligi *e* kesmani *Ox*, *Oy* va *Oz* koordinata o'qlariga qo'yib, P tekislikka proyeksiyalasak, e_x, e_y, e_z kesmalar hosil bo'ladi. Bu kesmalar *aksonometrik masshtab birliklari* deb yuritiladi. Ularning *e* ga nisbatlari aksonometrik o'qlar bo'yicha *o'zgarish koeffitsientlari* deb yuritiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\frac{e_x}{e} = k_x, \quad \frac{e_y}{e} = k_y, \quad \frac{e_z}{e} = k_z, \qquad (1)$$

13.1-rasmdan

$$\frac{O_pA_{xp}}{OA_x}=\frac{e_x}{e}=k_x,\quad \frac{O_pA_{yp}}{OA_y}=\frac{e_y}{e}=k_y,\quad \frac{O_pA_{zp}}{OA_z}=\frac{e_z}{e}=k_z \qquad (2)$$

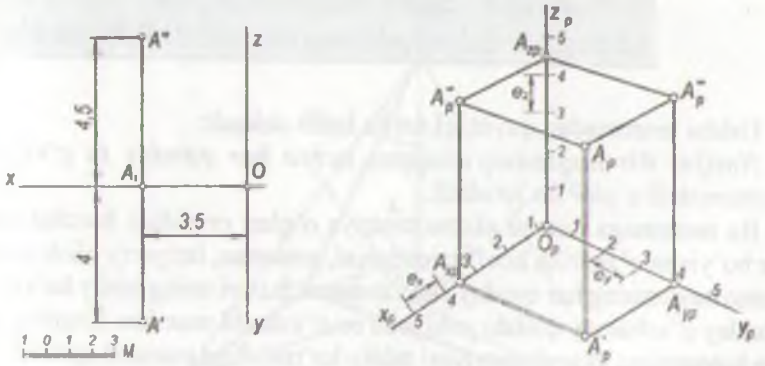
tengliklarni yozish mumkin.

Demak, A nuqtaning dekart va aksonometrik koordinatalari orasidagi bog'lanishni quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$\frac{x_p}{x}=k_x \text{ yoki } x_p=k_x x,\ \frac{y_p}{y}=k_y \text{ yoki } y_p=k_y y,\ \frac{z_p}{z}=k_z \text{ yoki } z_p=k_z z. \qquad (3)$$

Aksonometrik o'qlarning vaziyatlari va shu o'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsientlari berilgan bo'lsa, fazodagi har qanday nuqtaning aksonometriyasini yasash mumkin. Buning uchun nuqtaning x, y va z koordinatalarini mos o'zgarish koeffitsientlariga ko'paytirib, aksonometrik o'qlar bo'yicha (yoki ularga parallel) o'lchab qo'yiladi va uch bo'g'inli koordinatalar siniq chizig'ining aksonometriyasi yasaladi. Masalan, fazodagi koordinatalari 3,5; 4 va 4,5 sonlarga teng bo'lgan A nuqtaning aksonometriyasini yasash kerak bo'lsin (13.2-a rasm). Buning uchun O_px_p o'qiga O_p nuqtalardan boshlab $O_pA_{xp}=3,5e_x$ kesma o'lchab qo'yiladi va A_{xp} nuqta belgilab olinadi (13.2-b rasm). Bu nuqtadan O_py_p o'qiga parallel qilib $A_{xp}A'_p=4e_y$ kesma va hosil bo'lgan A'_p nuqtadan O_p2_{zp} o'qiga parallel qilib $A'_pA_p=4,5e_z$ kesma o'lchab qo'yiladi. Hosil bo'lgan A_p nuqta A nuqtaning aksonometrik proyeksiyasi, A_p' esa A nuqtaning ikkilamchi proyeksiyasi bo'ladi.

Aksonometrik proyeksiyalar uch turga bo'linadi:



a) b)

13.2-rasm.

1. Uchala o‘qlar bo‘yicha o‘zgarish koeffitsientlari o‘zaro teng bo‘lsa, ya’ni $k_x=k_y=k_z$ bo‘lganda hosil bo‘lgan aksonometriya *izometrik proyeksiyalar* deyiladi.

2. O‘zgarish koeffitsientlaridan ikkitasi o‘zaro teng bo‘lib, uchinchisi ulardan farqli bo‘lsa, ya’ni $k_x=k_y\neq k_z$, $k_z=k_y\neq k_x$ yoki $k_x=k_z\neq k_y$ bo‘lganda hosil bo‘lgan aksonometriya *dimetrik proyeksiyalar* deyiladi.

3. Uchala o‘qlar bo‘yicha o‘zgarish koeffitsienti turlicha bo‘lgan aksonometriyalar ($k_x=k_y\neq k_z$ bo‘lsa) *trimetrik proyeksiyalar* deyiladi.

13.3-§. Aksonometriyaning asosiy teoremasi

Qiyshiq burchakli aksonometrik proyeksiyada aksonometrik o‘qlar va ular bo‘yicha o‘zgarish koeffitsientlari ixtiyoriy tanlab olinishi mumkin. Aksonometrik proyeksiyalardagi bunday xususiyatni 1853-yilda avstriyalik matematik Karl Polke (1810–1876) aniqlab, quyidagi xulosaga kelgan:

> **Teorema.** Tekislikka tegishli bitta nuqtadan chiquvchi ixtiyoriy uchta kesma fazoda joylashgan bitta nuqtadan chiquvchi o‘zaro perpendikulyar va teng uchta kesmaning parallel proyeksiyasi bo‘lishi mumkin.

1864-yilda K.Polkening shogirdi G.A.Shvars bu teoremani umumlashtirdi va uning sodda isbotini berdi. Keyinchalik aksonometriyaning Polke–Shvars nomi bilan yuritiladigan bu asosiy teoremasi quyidagicha ta’riflanadi:

> **Teorema.** Diagonallari bilan berilgan har qanday tekis to‘rtburchakni ixtiyoriy olingan tetraedrga o‘xshash tetraedrning parallel proyeksiyasi deb qabul qilish mumkin.

Ushbu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi:

Natija. *Bir nuqtadan chiqqan uchta har qanday to‘g‘ri chiziq aksonometrik o‘qlar bo‘la oladi.*

Bu teoremaga binoan aksonometriya o‘qlari orasidagi burchaklarni va ular bo‘yicha o‘zgarish koeffitsientlarini, umuman, ixtiyoriy olish mumkin. Ammo buyumning har qanday aksonometrik tasviri uning tabiiy ko‘rinishiga butunlay o‘xshamay qolishi yoki juda oz o‘xshashi mumkin. Shuning uchun ham buyumning aksonometriyasi tabiiy ko‘rinishiga mumkin qadar ko‘proq o‘xshash bo‘lishi hamda aksonometriyani osonroq yasash maqsadida amalda aksonometriyaning ba’zi xususiy turlarigina qo‘llaniladi. Ular *standart aksonometrik proyeksiyalar* deb yuritiladi. Bunday aksonometrik proyeksiyalar kitobning 13.7 va 13.8-§ida ko‘riladi.

13.4-§. O‘zgarish koeffitsientlari va proyeksiyalash burchagi orasidagi o‘zaro bog‘lanish

Aksonometriyaning asosiy teoremasiga asosan aksonometrik proyeksiyalar o‘qlari va ular bo‘yicha o‘zgarish koeffitsientlarini ixtiyoriy olish mumkin.Ammo ular bir-biri bilan o‘zaro uzviy bog‘liq bo‘ladi.

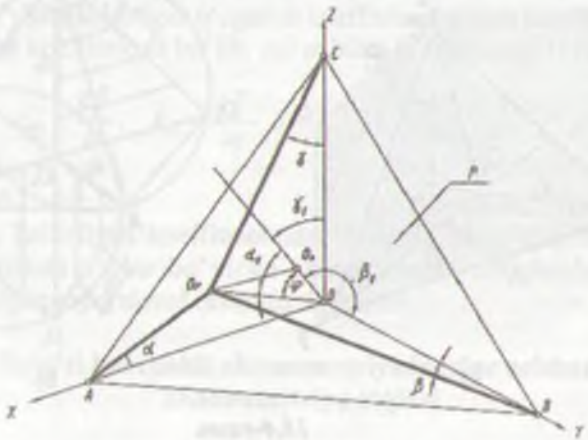
Ox, *Oy* va *Oz* koordinatalar o‘qlarini P aksonometrik proyeksiyalar tekisligiga φ burchak ostida proyeksiyalaymiz (13.3-rasm). Bunda koordinatalar boshi O nuqtaning P tekislikdagi proyeksiyasi O_p bo‘ladi. Bunday qiyshiq burchakli aksonometrik proyeksiyalashning proyeksiyalanish burchagi φ ni chizmada hosil qilish uchun O nuqtadan P tekislikka OO_0 perpendikulyarni tushiramiz. OO_p va O_pO_0 to‘g‘ri chiziqlar orasidagi φ burchak proyeksiyalash burchagi bo‘ladi.

1-teorema. Qiyshiq burchakli aksonometrik proyeksiyada o‘qlar bo‘yicha o‘zgarish koeffitsientlari kvadratlarining yig‘indisi 2 soni bilan proyeksiyalash burchagi kotangensi kvadratining yig‘indisiga teng.

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=2+ctg^2\varphi. \qquad (1)$$

Ushbu teoremaning isboti Sh.Murodov va boshqalarning «Chizma geometriya kursi» darsligida (1988-y.) keltirilgan.

2-teorema. To‘g‘ri burchakli aksonometrik proyeksiyalashda o‘qlar bo‘yicha o‘zgarish koeffitsientlari kvadratlarining yig‘indisi 2 ga teng.



13.3-rasm.

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=2. \quad (2)$$

Isboti. 13.4-a,b rasmda P aksonometrik proyeksiyalar tekisligi va OXYZ dekart koordinatalar sistemasi keltirilgan.

O koordinatalar boshining P tekislikdagi ortogonal proyeksiyasi O_p nuqta A,B,C nuqtalar bilan tutashtirilsa, O_pA, O_pB, O_pC aksonometriya o'qlari hosil bo'ladi. Bu o'qlarning *Ox*, *Oy* va *Oz* hosil qilgan burchaklarini mos ravishda α, β va γ bilan belgilaymiz. Bunda OO_pA, OO_pB, OO_pC lar to'g'ri burchakli uchburchaklar bo'lganligi uchun

$$O_pA:OA=\cos\alpha,\ O_pB:OB=\cos\beta \text{ va } O_pC:OC=\cos\gamma \quad (3)$$

bo'ladi.

OO_p proyeksiyalash yo'nalishi bilan *Ox*, *Oy* va *Oz* o'qlar orasidagi burchaklar α_1, β_1 va γ_1 yo'naltiruvchi burchaklar deyiladi.

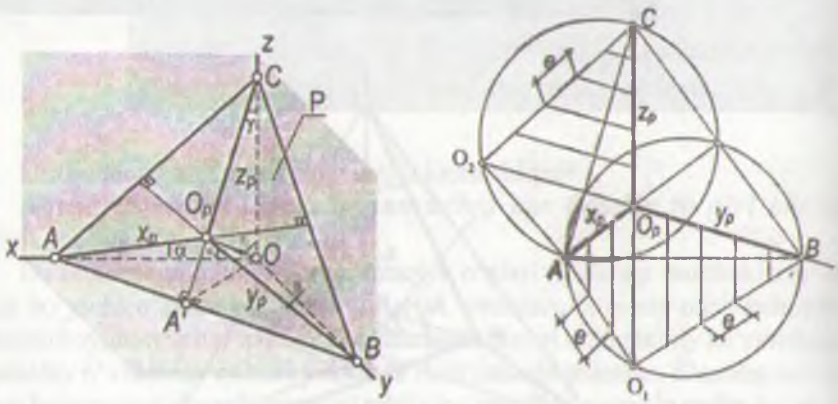
Analitik geometriyadan ma'lumki, yo'naltiruvchi burchaklar kosinuslari kvadratlarining yig'indisi 1 ga teng, ya'ni:

$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1=1. \quad (4)$$

Chizmadan ko'rinib turibdiki, $\alpha_1=90^0-\alpha$, $\beta_1=90^0-\beta$ va $\gamma_1=90^0-\gamma$ bo'lgani uchun ular (4) ifodaga qo'yib soddalashtirilsa,

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1 \quad (5)$$

bo'ladi.



13.4-rasm.

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$, $\sin^2\beta=1-\cos^2\beta$ va $\sin^2\gamma=1-\cos^2\gamma$ ekanligini e'tiborga olgan holda (5) ifodani soddalashtirishdan so'ng quyidagicha yozish mumkin:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2. \qquad (6)$$

$k_x=O_pA:OA=\cos\alpha$; $k_y=O_pB:OB=\cos\beta$ va $k_z=O_pC:OC=\cos\gamma$ bo'lgani uchun (2) ifodaning to'g'riligi isbotlandi.

To'g'ri burchakli aksonometrik proyeksiyalarda keltirilgan o'zgarish koeffitsientlari. Aksonometrik masshtablardan foydalanmasdan aksonometrik proyeksiyalar yasash juda ko'p vaqtni oladi. Chunki dekart koordinatalar o'qlariga parallel bo'lgan har bir kesma aksonometriyalarining uzunliklarini hisoblab topishga to'g'ri keladi. Shunin... keltirilgan o'zgarish koeffitsientlaridan foydalaniladi. Masalan, ixtiyoriy to'g'ri burchakli trimetrik proyeksiyalar quyidagi o'zgarish koeffitsientlari bilan berilgan bo'lsin:

$$k_x=0,92,\ k_y=0,47,\ k_z=0,96,$$

bu (2) ifodaga qo'yilsa,

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=(0,92)^2+(0,47)^2+(0,96)^2=1,9889\approx 2$$

hosil bo'ladi.

O'qlar bo'yicha natural (aniq) o'zgarishni (3) koeffitsientlar $\frac{1}{0,92}=1,09$ ga ko'paytirsak, $k_x=0,92\cdot 1,09=1,0028$, $k_y=0,47\cdot 1,09=0,5123$, $k_z=0,96\cdot 1.09=1,0464$ bo'ladi. Bularni yaxlitlab, $k_X^K=1$, $k_Y^K=0,5$ va $k_Z^K=1$ deb olsak, $k_X^K=k_X\cdot 1,09$, $k_Y^K=k_y\cdot 1,09$, $k_Z^K=k_z\cdot 1,09$ bo'ladi. Bunda k_x^k, k_y^k va k_z^k o'qlar bo'yicha keltirilgan o'zgarish koeffitsientlari deb belgilangan. Bunda 1,09 keltirish koeffitsienti bo'lib, uni m bilan belgilaymiz. U holda

$$k_X=\frac{k_X^K}{m},\quad k_Y=\frac{k_Y^K}{m},\quad k_Z=\frac{k_Z^K}{m}\quad \text{yoki}\quad (k_x^K)^2+(k_y^K)^2+(k_z^K)^2=2m^2$$

hosil bo'ladi.

Demak, keltirilgan koeffitsientlari bo'yicha bajarilgan aksonometrik proyeksiyalarda o'qlar bo'yicha aksonometrik masshtablar keltirish koeffitsientiga proporsional ravishda o'zgaradi.

13.5-§. To'g'ri burchakli aksonometriyada izlar uchburchagi va aksonometriya o'qlari

Dekart koordinatalar sistemasi OXYZ da P aksonometriya tekisligini joylashtirganda u koordinata tekisliklari bilan kesishib, ABC uchburchakni

hosil qiladi (13.4-a rasm). Bu uchburchak aksonometriyada *izlar uchburchagi* deb yuritiladi.

1-teorema. To'g'ri burchakli aksonometriyada aksonometriya o'qlari izlar uchburchagining balandliklari bo'ladi.

Isboti. *Oz* koordinatalar o'qi XOY tekislikka perpendikulyar va $OO_p \perp P$ bo'lganligi sababli $A'OC$ uchburchak tekisligi XOY va P tekisliklarga ham perpendikulyar bo'ladi. $\Delta A'OC \perp XOY$ bo'lganligi uchun $A'C \perp AB$ yoki $z_p \perp AB$ bo'ladi. Xuddi shuningdek, $y_p \perp AC$ va $x_p \perp BC$ ekanligini ham isbot qilish mumkin.

2-teorema. To'g'ri burchakli aksonometriyada izlar uchburchagi o'tkir burchakli uchburchakdir.

Isboti. XOY, XOZ va YOZ koordinatalar tekisliklari to'g'ri burchakli uchyoqlikni hosil qiladi (13.4-a rasm). Bu uchyoqliklarning P tekislik bilan kesishuvidan hosil bo'lgan ABC uchburchakda $A'C \perp AB$ bo'lishi 1-teoremadan ma'lum. Demak, $AA'C$ uchburchak to'g'ri burchakli bo'lganligi sababli $\angle CAA' < 90^0$ bo'ladi. Shuningdek, $\angle A'BC < 90^0$ va $\angle ACB < 90^0$ bo'ladi.

3-teorema. To'g'ri burchakli aksonometriyada aksonometriya o'qlari orasidagi burchaklar o'tmas burchaklardir.

Isboti. 1-teoremada aksonometriya o'qlari izlar uchburchagining balandliklari, 2-teoremada esa izlar uchburchagining o'tkir burchakli bo'lishi isbot qilingan edi. Planimetriyadan ma'lumki, har qanday o'tkir burchakli uchburchakning balandliklari o'zaro o'tmas burchak ostida kesishadi.

To'g'ri burchakli aksonometriyada izlar uchburchagi teng tomonli uchburchak bo'lsa, bunday aksonometriya *izometriya* bo'ladi, teng yonli uchburchak bo'lsa — *dimetriya*, tomonlari har xil bo'lgan uchburchak bo'lsa, *trimetriya* bo'ladi.

Izlar uchburchagi ABC berilgan bo'lsa, O_pA, O_pB va O_pC kesmalarning uzunliklarini aniqlash mumkin (13.4-b rasm). Izlar uchburchagida x_p, y_p va z_p o'qlar o'tkazilgan. Bunday chizmani XOY, XOZ, YOZ tekisliklar bilan ifodalangan uchyoqlikning P tekislikka to'g'ri burchakli proyeksiyasi deyish mumkin (13.4-a rasmga qarang). Jipslashtirish usulidan foydalanib, AO_pB uchburchakning proyeksiyasiga ko'ra uning haqiqiy kattaligi AO_pB ni yasaymiz. Buning uchun $\angle AOB = 90^0$ bo'lganligi tufayli diametri AB ga teng bo'lgan aylana chizamiz. O_p nuqtadan ABga perpendikulyar tushirib, O_1 nuqta ni belgilab olamiz. Uni A va B nuqtalar bilan tutashtiramiz.

$\frac{O_PA}{O_1A}$ va $\frac{O_PB}{O_1B}$ nisbatlar x_p va y_p o'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsientlari hisoblanadi:

$$k_x = \frac{O_PA}{O_1A}. \quad k_y = \frac{O_PB}{O_1B}.$$

Xuddi shuningdek, O_2 nuqtani aniqlab, z_p o'q bo'yicha o'zgarish koeffitsienti $k_z = \frac{O_PC}{O_2C}$ ni aniqlash mumkin. Agar AO_1B va AO_2C uchburchaklarning tomonlariga O_1 va O_2 nuqtalardan boshlab natural uzunlik birliklarini qo'ysak, ularning mos aksonometrik o'qlardagi proyeksiyalarini aniqlash bilan aksonometrik masshtablarni yasash mumkin.

13.6-§. Aylananing aksonometriyasi

Aylana tekisligining aksonometriya tekisligiga nisbatan vaziyatiga qarab aylana aksonometriyasi ellips, aylana yoki to'g'ri chiziq kesmasidan iborat bo'lishi mumkin. Umumiy hollarda aylananing aksonometriyasi ellips bo'ladi.

Ta'rif. Aylananing har qanday o'zaro perpendikulyar diametrlarining aksonometriyasi — ellipsning qo'shma diametrlaridan iborat bo'ladi.

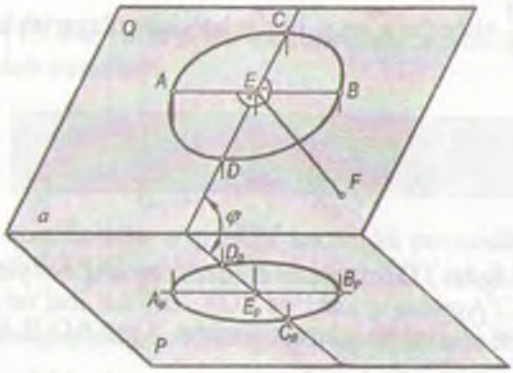
Aksonometriya o'qlariga parallel bo'lgan qo'shma diametrning uzunligi aylana diametrininig mos o'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsientiga ko'paytirilganiga teng.

Qiyshiq burchakli aksonometriyada ellips kichik o'qining uzunligi 0 (nol) dan aylana diametri d gacha, katta o'qining uzunligi d dan ∞ gacha o'zgarishi mumkin.

To'g'ri burchakli aksonometriyalarda ellips katta o'qining uzunligi d ga, kichik o'qining uzunligi $d\cos\varphi$ ga teng. Bu yerda, φ — aylana tekisligi bilan aksonometrik proyeksiyalar tekisligi orasidagi burchak.

Aylananing to'g'ri burchakli aksonometriyasi. Chizmachilikda ko'p hollarda aylananing to'g'ri burchakli aksonometriyasi bo'lgan ellipsni chizish uchraydi.

Aylana tekisligi Q aksonometrik proyeksiyalar tekisligi P bilan o'zaro o'tkir burchak φ^0 hosil qilib kesishganda aylananing aksonometriyasi ellips bo'ladi (13.5-rasm). Bu ellipsning katta o'qi A_pB_p aylananing AB diametriga, kichik o'qi C_pD_p esa aylana diametrining φ burchak kosinusiga ko'paytirilganiga teng bo'ladi, ya'ni:



13.5-rasm.

$$A_pB_p=AB,\ C_pD_p=CD\cos\varphi.$$

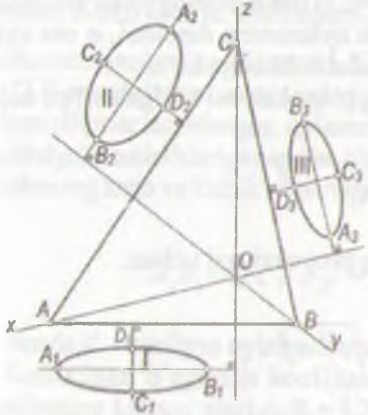
Parallel proyeksiyalarning xossalariga ko'ra, ellipsning A_pB_p katta o'qi Q va P tekisliklarning o'zaro kesishish chizig'i a ga parallel, C_pD_p kichik o'qi esa bu to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'ladi,ya'ni:

$$A_pB_p\|a,\ C_pD_p\perp a.$$

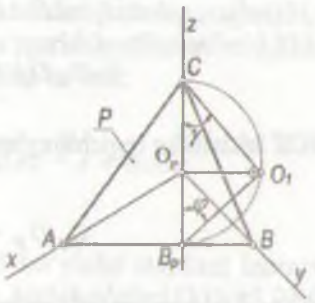
Shunday qilib, aylananing aksonometrik proyeksiyasini yasash uchun aylana markazi E nuqtaning proyeksiyasi e_p nuqta yasalib, bu nuqtadan ellipsning katta va kichik o'qlari o'tkaziladi. Ellipsni uning katta va kichik o'qlari bo'yicha yasashning ko'p usullari mavjud.

Ko'pincha H, V, W yoki ularga parallel tekisliklarda yotuvchi aylanalarning aksonometrik proyeksiyalarini yasashga to'g'ri keladi. Bunday aylanalar aksonometriyalarini yasashni batafsil ko'rib chiqamiz.

Ma'lumki, to'g'ri burchakli aksonometriyada P aksonometrik proyeksiyalar tekisligi H, V, W tekisliklar bilan kesishadi. P tekislikning bu tekisliklar bilan kesishish chiziqlari izlar uchburchagining tomonlaridan iborat bo'ladi. Demak, H tekislikka tegishli aylanani P tekislikka proyeksiyalashdan hosil bo'ladigan I ellipsning katta o'qi izlar uchburchagining AB tomoniga, V tekislikka tegishli aylana proyeksiyasi — II ellipsning katta o'qi AC tomoniga, W tekislikka tegishli aylana proyeksiyasi — III ellipsning katta o'qi BC tomoniga parallel bo'ladi (13.6-rasm). To'g'ri burchakli aksonometriyada aksonometriya o'qlari izlar uchburchagining balandligidan iborat bo'ladi. Shunga ko'ra, I ellips uchun $A_1B_1\perp OC$ (Oz), II ellips uchun $A_2B_2\perp OB$ (Oy), III ellips uchun $A_3B_3\perp OA$ (Ox) bo'ladi. Ellipslarning C_1D_1, C_2D_2 va C_3D_3 kichik o'qlari A_1B_1, A_2B_2 va A_3B_3 katta o'qlariga doim mos ravishda perpendikulyar bo'ladi.



13.6-rasm.



13.7-rasm.

To‘g‘ri burchakli aksonometriyada ellipsning katta o‘qi doim tegishli aylanalarning diametrlariga teng bo‘ladi, kichik o‘qlari aksonometriyaning turiga qarab o‘zgaradi. Kichik o‘qining uzunliklarini hisoblash mumkin. Buning uchun 13.7-rasmga murojaat qilamiz. *Oz* o‘qidan o‘tuvchi va izlar uchburchagining AB tomoniga perpendikulyar qilib o‘tkazilgan tekislik P tekislikni CB_p to‘g‘ri chiziq bo‘yicha, XOY tekislikni esa eng katta og‘ma chizig‘i O_pB_p bo‘yicha kesib o‘tadi. Natijada CO_1B_p to‘g‘ri burchakli uchburchak hosil qilinadi. Bu uchburchakning CO_1B_p jipslashgan vaziyati rasmda ko‘rsatilgan. Buning uchun diametri CB_p kesma bo‘lgan yarim aylana chiziladi va O_p nuqtadan *Oz* o‘qqa perpendikulyar chiqarib, uning yarim aylana bilan kesishish nuqtasi O_1 belgilab olinadi. O_1 nuqtani C va B_p nuqtalar bilan tutashtirib, γ va φ burchaklar aniqlanadi. Bu burchaklar mos ravishda P tekislik bilan *Oz* o‘qi va XOY tekislik orasidagi burchaklar bo‘ladi. Bundan *Oz* o‘qi bo‘yicha o‘zgarish koeffitsienti $k_z=\cos\gamma$ ekanligi ma’lum. XOY tekislikning eng katta qiyalik chizig‘i O_1B_p ning yo‘nalishi bo‘yicha o‘zgarish koeffitsienti $k_{XOY}=\cos\varphi$ bo‘ladi. To‘g‘ri burchakli CO_1B_p uchburchakdan $\cos^2\varphi=1-\cos^2\gamma$ bo‘lgani uchun

$$k_{XOY}=\sqrt{1-k_z^2}$$

bo‘ladi.

Xuddi shuningdek, XOZ va YOZ tekisliklarining eng katta qiyalik chiziqlari yo‘nalishlari bo‘yicha o‘zgarish koeffitsientlarining qiymatlarini keltirib chiqarish mumkin:

$$k_{XOZ}=\sqrt{1-k_y^2},\ k_{YOZ}=\sqrt{1-k_x^2}.$$

Yuqorida ellipsning kichik o'qi $C_pD_p = CD\cos\varphi$ ekanligini ko'rib chiqqan edik. Bunda CD – proyeksiyalanayotgan aylananing diametri, φ esa aylana tekisligi bilan P tekislik orasidagi burchakdir. Shunga ko'ra,

- *XOY* tekislikka tegishli aylananing proyeksiyasi bo'lgan ellips uchun:

$$C_pD_p = CD\sqrt{1-k_z^2};$$

- *XOZ* tekislikka tegishli aylananing proyeksiyasi uchun:

$$C_pD_p = CD\sqrt{1-k_y^2};$$

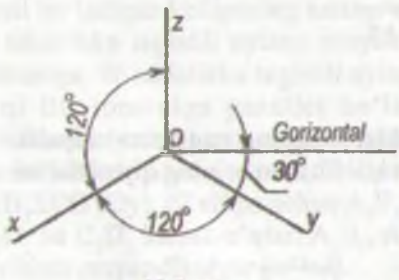
- *YOZ* tekislikka tegishli aylananing proyeksiyasi uchun:

$$C_pD_p = CD\sqrt{1-k_x^2}$$

bo'ladi.

13.7-§. To'g'ri burchakli standart aksonometriyalar

13.7.1. To'g'ri burchakli standart izometriya. To'g'ri burchakli aksonometriyada aksonometrik proyeksiyalar tekisligi P koordinatalar tekisliklari bilan bir xil burchak hosil qilsa, izlar uchburchagi teng tomonli bo'lib, uning balandligi bissektrisasi ham bo'ladi. Shuning uchun to'g'ri burchakli izometriyada aksonometrik o'qlar orasidagi burchaklar 120^0 ga teng (13.8-rasm). Bu holda o'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsientlari $k_x=k_y=k_z$ bo'lib, $k_x^2+k_y^2+k_z^2=2$ tenglikdan $3k_x^2=2$ yoki $k_x=\sqrt{\frac{2}{3}}=0{,}82$ hosil bo'ladi. Demak, $k_x=k_y=k_z=0{,}82$ bo'lib, u *natural o'zgarish koeffitsienti* deyiladi. Buyumning aniq izometriyasini yasash uchun dastlab undagi har bir nuqtani *x, y, z* koordinatalari yoki uning eni, bo'yi va balandligini 0,82 ga ko'paytirib chizishga to'g'ri keladi.



13.8-rasm.

Lekin buyumlarnig to'g'ri burchakli izometriyasini yasashda o'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsientlari 1 ga teng qilib olinsa, chizish sur'ati tezlashadi. Bu holda $k_x=k_y=k_z=1$ bo'lib, ular izometriyada *keltirilgan o'zgarish koeffitsientlari* deb

yuritiladi. Bunda keltirish koeffitsienti $m = \frac{1}{0,82} = 1,22$ ga teng bo'lib, buyumning aksonometriyasi asliga nisbatan 1,22 marta kattalashadi.

13.9-rasmda kub va uning yoqlariga ichki chizilgan aylanalarning izometriyalari bo'lgan ellipslar tasvirlangan. Aylananing tekisliklari (kubning yoqlari) H, V va W proyeksiyalar tekisliklariga parallel. Natural o'zgarish koeffitsientlari 0,82 bo'yicha ellipslarning katta va kichik o'qlari quyidagicha bo'ladi:

$$A_pB_p = d,\ C_pD_p = \sqrt{1 - 0,82^2}\, d = 0,58d,$$

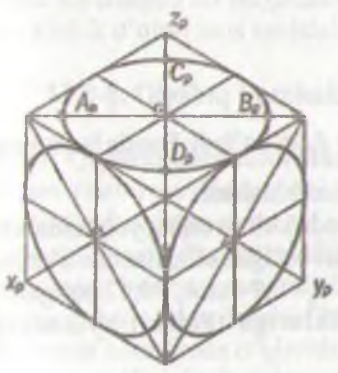
bunda d – berilgan aylana diametri.

Keltirilgan o'zgarish koeffitsientlari bo'yicha stardant izometriyada ellipslarning katta o'qlari $A_pB_p = 1,22d$ ga, kichik o'qlari $C_pD_p = 1,22 \cdot 0,58d = 0,71d$ ga teng bo'ladi.

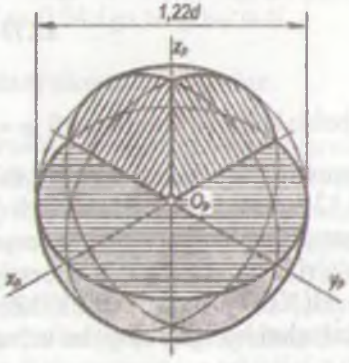
Shunday qilib, diametri d ga teng bo'lgan aylanalar gorizontal, frontal va profil yoki ularga parallel bo'lgan tekisliklarda joylashgan bo'lsa, bunday aylanalarning izometriyasidagi ellipslarning A_pB_p katta o'qi d ga, C_pD_p kichik o'qi esa $0,58d$ ga teng, keltirilgan o'zgarish koeffitsientlari bo'yicha esa $A_pB_p = 1,22d$, $C_pD_p = 0,71d$ bo'ladi.

13.10-rasmda to'g'ri burchakli izometriyada tasvirlangan sferaning diametri $1,22d$ ga teng. Bunda d – sferaning diametri.

13.7.2. To'g'ri burchakli standart dimetriya. Agar aksonometrik proyeksiyalar tekisligi koordinatalar tekisliklaridan ikkitasi bilan bir xil burchak hosil qilsa, bunday aksonometriya to'g'ri burchakli dimetriya deyiladi. Bunda o'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsientlari $k_x = k_y \neq k_z$, $k_x = k_z \neq k_y$ yoki $k_y = k_z \neq k_x$ bo'lishi mumkin.



13.9-rasm.

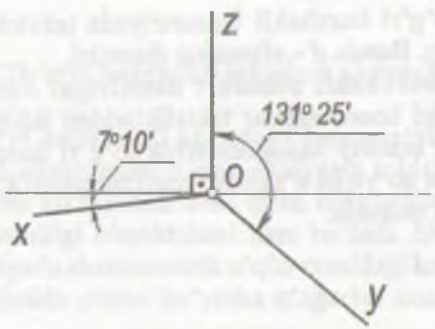


13.10-rasm.

To‘g‘ri burchakli dimetriyaning juda ko‘p turlari mavjud bo‘lib, ulardan aksonometrik o‘qlarning o‘zaro joylashuvi 13.11-rasmda ko‘rsatilgan vaziyatdagi holati standartda tavsiya qilingan. Bu o‘qlarni α va β burchaklarning tangenslari orqali oson yasash mumkin, chunki $tg\alpha = \frac{1}{8}$, $tg\beta = \frac{7}{8}$. Standart dimetriyada o‘qlar bo‘yicha o‘zgarish koeffitsientlarining $k_x = k_z \neq k_y$ holi qabul qilinib, $k_x = k_z = 2k_y$ yoki $k_y = 1/2\, k_x$ deb olingan. U holda $k^2_x + k^2_y + k^2_z = 2$ tenglikka yuqoridagi qiymatlarni qo‘yib, $k_x^2 + k_x^2 + \frac{k_x^2}{4} = 2$ yoki $9k_x^2 = 8$ ga ega bo‘lamiz. Bundan $k_x = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}94$ ni hosil qilamiz. Demak, $k_z \approx 0{,}94$; $k_z \approx 0{,}94$; $k_y \approx 0{,}47$ hosil bo‘ladi.

Amaliyotda to‘g‘ri burchakli dimetrik proyeksiyalarni yasash uchun quyida keltirilgan o‘zgarish koeffitsientlaridan foydalaniladi:

$$k_x = 1,\ k_z = 1,\ k_y = 0{,}5.$$



13.11-rasm.

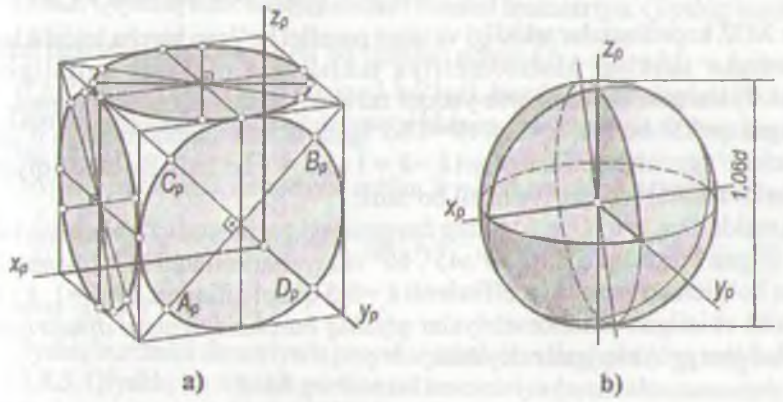
U holda keltirish koeffitsienti $m = \frac{1}{0{,}94} = 1{,}06$ bo‘ladi. Bunda buyumning aksonometriyasi asliga nisbatan 1,06 marta kattalashadi.

13.12-a rasmda to‘g‘ri burchakli dimetriyada kub va uning yoqlarida ichki chizilgan aylanalarning dimetrik proyeksiyalari bo‘lgan ellipslar tasvirlangan.

To‘g‘ri burchakli standart dimetriyada $k_x = k_z = 0{,}94$ va $k_y = 0{,}47$ bo‘lganligi uchun H(XOY) hamda W(YOZ) tekisliklariga tegishli aylananing proyeksiyalari bo‘lgan ellipslar uchun

$$C_p D_p = CD\sqrt{1 - 0.94^2} = 0.33d$$

bo‘ladi. V(XOZ) tekislikka tegishli aylananing proyeksiyasi ellips uchun esa $C_pD_p = d\sqrt{1 - 0{,}47^2} = 0{,}88d$ bo‘ladi.



a) b)

13.12-rasm.

Keltirilgan o‘zgarish koeffitsientlari bo‘yicha XOY va YOZ tekisliklariga parallel bo‘lgan yoqlardagi ellipslar (aylananing dimetriyasi) uchun katta o‘qlar $A_pB_p=1{,}06d$, kichik o‘qlar $C_pD_p=0{,}35d$ bo‘ladi. Chunki $C_pD_p=1{,}06\cdot0{,}33d$. XOZ tekislikka parallel bo‘lgan yoqdagi ellips uchun $A_pB_p=1{,}06d$, $C_pD_p=0{,}93d$. Chunki $C_pD_p=1{,}06\cdot0{,}88d=0{,}93d$.

Sferaning to‘g‘ri burchakli dimetriyasini keltirilgan o‘zgarish koeffitsientlari bo‘yicha chizish 13.12-b rasmda ko‘rsatilgan. Sferaning dimetriyasi D_1 diametrli aylana bo‘lib, $D_1=1{,}06d$ ga teng.

Diametri d ga teng aylanalar gorizontal va profil tekisliklarda joylashgan bo‘lsa, ularning dimetriyasidagi ellipslarning katta va kichik o‘qlari mos ravishda $1{,}06d$ va $0{,}35d$ ga teng. Agar diametri d ga teng aylana frontal tekislikda joylashgan bo‘lsa, bunday aylananing dimetriyasidagi ellipsning katta va kichik o‘qlari mos ravishda $1{,}06d$ va $0{,}94d$ ga teng bo‘ladi.

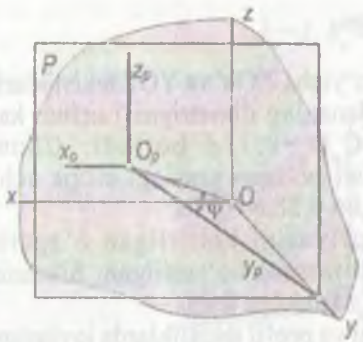
13.8-§. Qiyshiq burchakli standart aksonometriyalar

13.8.1. Qiyshiq burchakli standart frontal dimetriya. Buyumlarning yaqqol tasvirlarini qiyshiq burchakli aksonometriyada yasash uchun qiyshiq burchakli standart izometriya va dimetriyalardan foydalaniladi. Bunda P aksonometrik proyeksiyalar tekisligi xususiy holda, ya’ni koordinata tekisliklarining birortasiga parallel qilib olinadi. Bu holda proyeksiyalash yo‘nalishini aksonometrik tekislikka perpendikulyar qilib olib bo‘lmaydi. Chunki bunda koordinata o‘qlaridan biri nuqta bo‘lib proyeksiyalanadi. Bu esa tasvir yaqqolligini ta’minlamaydi. Agar P aksonometriya tekisligi XOZ koordinatalar tekisligiga parallel qilib olinsa (13.13-rasm), $O_1x_p \| Ox$, $O_1z_p \| Oz$

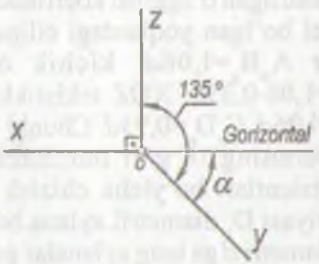
bo'lganligi uchun $O_p x_p$ va $O_p z_p$ o'qlar o'zaro perpendikulyar bo'lib, bu o'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsientlari $k_x = k_z = 1$ bo'ladi, k_y esa OO_pB to'g'ri burchakli uchburchakdan topiladi va $k_y = \frac{OO_p}{OB} = ctg$ ga teng bo'ladi. Bu holda XOZ koordinatalar tekisligi va unga parallel bo'lgan barcha tekisliklarda joylashgan shakllar aksonometriya tekisligiga o'zining kattaligicha proyeksiyalanadi. Bu esa narsa yaqqol tasvirini yasashni osonlashtiradi.

Agar $\varphi = 45^0$ bo'lsa, $k_y = ctg\ 45^0 = 1$ bo'lgani uchun aksonometriya o'qlari bo'yicha o'zgarish koeffitsientlari $k_x = k_z = 1$ va $k_y = 1$ bo'ladi. Bu holda qiyshiq burchakli frontal izometriya hosil bo'ladi.

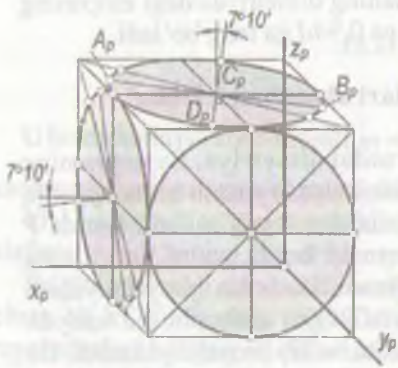
Amalda $O_p y_p$ o'qi $O_p x_p$ o'qining davomidagi gorizontal to'g'ri chiziq bilan hosil qilgan burchagi α ning 30^0, 45^0, 60^0 vaziyatlari olinadi (13.14-rasm) va bu o'q bo'yicha o'zgarish koeffitsienti $k_y = 0{,}5$ qabul qilingan. $k_x = k_z = 1$, $k_y = 0{,}5$ bo'yicha chizilgan aksonometriyalar *qiyshiq burchakli frontal dimetriyalar* yoki *kabinet proyeksiyalar* deyiladi.



13.13-rasm.



13.14-rasm.



13.15-rasm.

Qiyshiq burchakli frontal dimetriyada aksonometriya o'qlarining vaziyati 13.14-rasmda ko'rsatilganidek qabul qilingan, ya'ni XOZ=90°, YOZ=135°. O'zgarish koeffisientlari esa $k_x = k_z = 1$ va $k_y = 0{,}5$ bo'ladi.

13.15-rasmda kub va uning yoqlaridagi ichki chizilgan aylanalarning aksonometriyalari qiyshiq burchakli frontal dimetrik proyeksiyada tasvir-langan. Bunda XOZ tekislikka parallel yoqda yotgan aylana dimetriyadagi aylanaga teng bo'lib proyeksiyalanadi. Qolgan yoqlardagi aylanalar ellipslar bo'lib proyeksiyalanadi.

Bu ellipslar o'qlari keltirilgan o'zgarish koeffitsientlari bo'yicha 1,06d va 0,33d ga teng bo'ladi.

13.8.2. Qiyshiq burchakli standart frontal izometriya. Qiyshiq burchakli frontal izometriyada $k_x=k_z=k_y=1$ bo'lganligi uchun $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 2 + ctg^2\varphi$ dan $1^2+1^2+1^2=2+ctg^2\varphi$ yoki $ctg^2\varphi=1$ bo'ladi, bundan $\varphi=arcctg1=45^0$.

Demak, qiyshiq burchakli izometriyada φ proyeksiyalash burchagi 45^0 ga teng ekan.

Qiyshiq burchakli dimetriya uchun $k_x=k_z=1$ va $k_y=0,5$ bo'lgani uchun $1^2 + (\frac{1}{2})^2 + 1^2 = 2 + ctg^2\varphi$ yoki $ctg^2\varphi = \frac{1}{4}$, bundan $ctg^2\varphi = \frac{1}{4}$ bo'lib, $\varphi = arcctg\frac{1}{2} \approx 63^0$ bo'ladi.

Qiyshiq burchakli dimetriyada proyeksiyalash burchagi φ=63° ga teng bo'ladi.

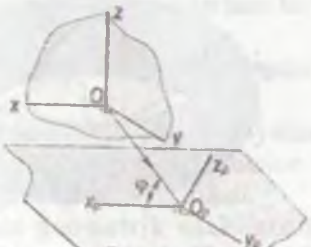
13.8.3. Qiyshiq burchakli gorizontal izometriya (zenit aksonometriyasi). Agar P aksonometriya tekisligi XOY koordinatalar tekisligiga parallel bo'lsa, u holda hosil bo'lgan tasvir gorizontal izometriya (zenit aksonometriyasi) deyiladi (13.16-rasm). Bunda φ burchak ixtiyoriy bo'lishi mumkin.

O_px_p va O_py_p o'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsientlari $k_x=k_y=1$ bo'lib, O_pz_p o'q bo'yicha o'zgarish koeffitsienti k_z esa 0,7 dan 1 gacha deb olinishi mumkin. Ko'p hollarda $k_z=1$ deb olinadi.

Zenit aksonometriyasidan juda katta qurilish maydonida joylashgan binolar, yo'llar, aerodromlar va hokazolarning o'zaro joylashuvini kichik masshtabda ko'rsatishda foydalaniladi. 13.17-rasmda minoraning zenit aksonometriyasi tasvirlangan. Minoraning plani α burchakka burilgan.

13.9-§. Aylanish sirtlarining ocherklarini aksonometriyada yasash

13.9.1. Parallellar usuli. Bu usul asosan aylanish o'qi bo'ylab cho'zilgan aylanish sirtlarining aksonometriyalarini yasashda qo'llaniladi. 13.18-a



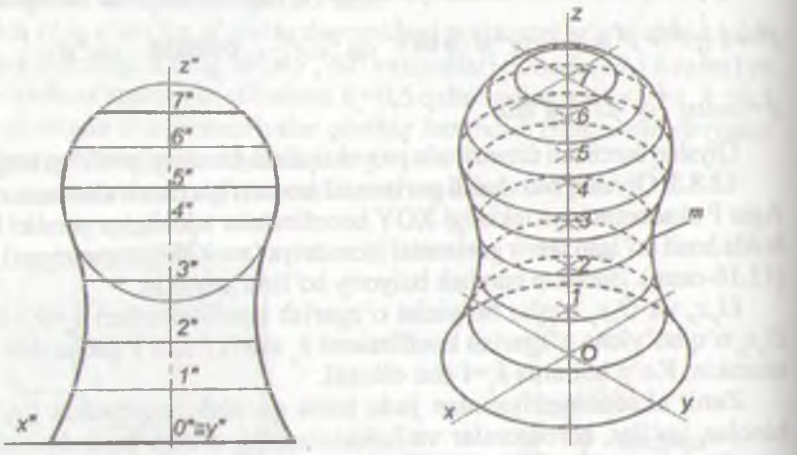
13.16-rasm.



13.17-rasm.

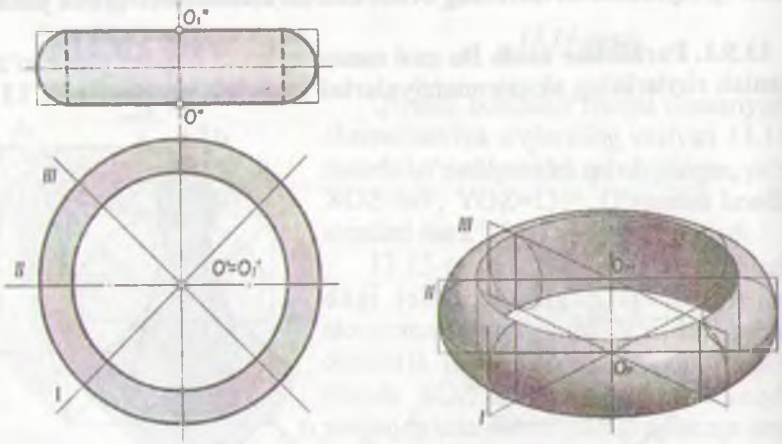
rasmdagi chizmada berilgan aylanish sirtining bir necha parallellari (aylanalari) o‘tkaziladi. Bu parallellarning aksonometriyalari bo‘lgan ellipslar chiziladi. Bu ellipslarni o‘rab oluvchi *m* egri chiziq aylanish sirtining ocherki bo‘ladi. Sirtning aksonometriyasi 13.18-b rasmda to‘g‘ri burchakli izometriyada yasalgan.

13.9.2. Meridianlar usuli. Aylanish o‘qlari bo‘yicha siqiq bo‘lgan sirtlarning aksonometriyasini yasashda bu usuldan foydalanish mumkin. Sirtning bir necha meridianlari o‘tkazilib, ularning aksonometriyasi yasaladi. 13.19-a rasmda tor sirtining aksonometriyasi to‘g‘ri burchakli izometriyada



a) b)

13.18-rasm.

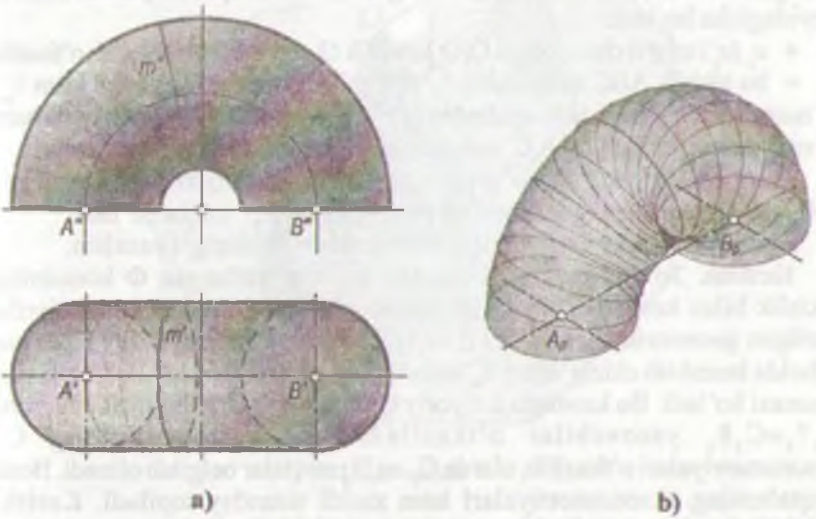


a) b)

13.19-rasm.

ko‘rsatilgan. Bunda tor meridianlari(aylanalar)ning aksonometriyalari bo‘lgan ellipslarni o‘rab oluvchi chiziq aylanish sirtining ocherkini ifodalaydi.

13.20-a rasmda berilgan yarim tor (halqa) ning aksonometriyasini yasash 13.20-b rasmda to‘g‘ri burchakli izometriyada bajarilgan.



13.20-rasm.

Bunday torning aksonometriyasini yasash uchun dastlab H tekislikka tegishli va markazlari A(A″, A″) va B(B′, B″) nuqtalarda bo‘lgan ikki yasovchi aylananing aksonometriyalari bo‘lgan ellipslar chiziladi. So‘ngra bu aylanalar markazlari A_p va B_p nuqtalar orqali o‘tuvchi frontal vaziyatdagi A″B″ yarim aylananing aksonometriyasi chiziladi.Bu yarim aylana tor yasovchilari markazlari harakat qiluvchi chiziq bo‘lib, unda bir necha (yetarli miqdorda) nuqtalar olinadi.Markazlari mazkur nuqtalarda bo‘lgan *m(m′, m″)* kabi yasovchi aylanalarning aksonometriyalari chiziladi. Ushbu ellipslarni o‘rab(qamrab) oluvchi chiziq torning konturi hisoblanadi. Yasovchi aylanalarning aksonometriyalari o‘rniga ushbu markazlar bo‘yicha radiusi yasovchi aylana radiusi bilan bir xil bo‘lgan sferalarning aksonometriyalari(aylanalar) chizilsa ham bo‘ladi.

13.10-§. Aksonometriyada pozitsion masalalarni yechish

Aksonometrik proyeksiyalarda geometrik shakllarning o‘zaro joylashuviga qarab turli pozitsion masalalar ortogonal proyeksiyalardagi qoidalarga asoslanib yechiladi.

Bunda geometrik shakllarning aksonometriyasi hamda ularning ikkilamchi proyeksiyalaridan biri berilishi kerak. Ko‘pincha shakllarning gorizontal tekislikdagi ikkilamchi proyeksiyalaridan foydalaniladi.

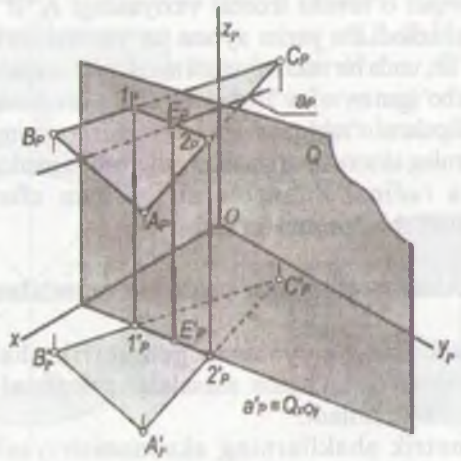
1-masala. Berilgan a to'g'ri chiziqning Q tekislik bilan kesishish nuqtasi yasalsin.

Yechish. ABC uchburchak tekisligining $A_pB_pC_p$ va a to'g'ri chiziqning a_p proyeksiyasi hamda ularning ikkilamchi proyeksiyalari $A_p'B_p'C_p'$, a_p' berilgan bo'lsin (13.21-rasm). Ularning kesishish nuqtasini yasash algoritmi quyidagicha bo'ladi:

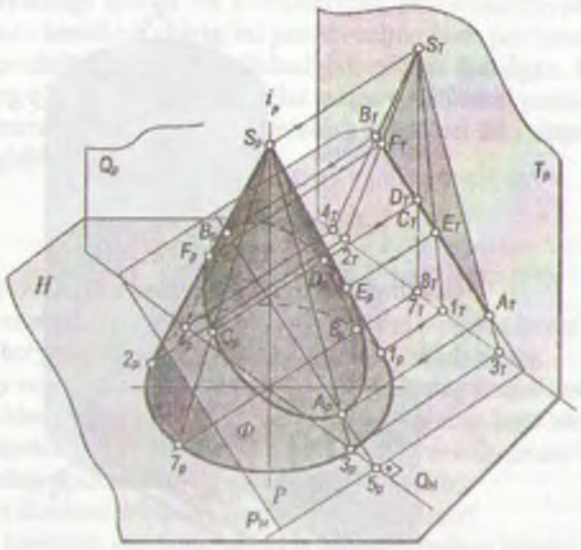
- a_p (a_p') to'g'ri chiziq orqali $Q(Q_p)$ tekislik O_pz_p o'qqa parallel qilib o'tkaziladi;
- bu tekislik ABC tekislikning $A_p'B_p'C_p'$ ikkilamchi proyeksiyasi bilan $1_p'$ va $2_p'$ nuqtalarda kesishadi. Bu nuqtalardan O_pz_p o'qqa parallel chiziqlar chiqarib hamda 1_p va 2_p nuqtalarni B_pC_p va A_pC_p tomonlar ustida belgilab, o'zaro tutashtiriladi;
- so'ngra a_p va 1_p2_p to'g'ri chiziqlarning o'zaro kesishuv nuqtasi E_p belgilab olinadi. Uning ikkilamchi proyeksiyasi E_p' nuqta bo'ladi.

2-masala. Konusning tekislik bilan kesishish chizig'i yasalsin.

Yechish. To'g'ri burchakli izometriyada tasvirlangan Φ konusning P tekislik bilan kesishish chizig'ini yasash algoritmi quyidagicha bajariladi: berilgan geometrik shakllar $T \perp P$ tekislikka proyeksiyalanadi (13.22-rasm). U holda kesishish chizig'ining T_p tekislikdagi proyeksiyasi A_TB_T to'g'ri chiziq kesmasi bo'ladi. Bu kesmada ixtiyoriy $C_T \equiv D_T$ nuqtalarni belgilab, ular orqali $C_T7_T \equiv C_T8_T$ yasovchilar o'tkaziladi. Bu yasovchilarning C_T8_T aksonometriyalari o'tkazilib, ularda C_T va D_T nuqtalar belgilab olinadi. Boshqa nuqtalarning aksonometriyalari ham xuddi shunday topiladi. Kesishish chizig'ining konus ocherkiga urinish nuqtalari E_p va F_p lar quyidagicha topiladi: konusning ocherkini ifodalovchi S_p1_p va S_p2_p yasovchilarning T_p tekislikdagi S_T1_T va S_T2_T proyeksiyalari o'tkaziladi. Ularning A_TB_T kesma bilan kesishish nuqtalari E_T va F_T lar belgilab olinadi. E_T va F_T nuqtalardan teskari yo'nalishda nurlar o'tkazib, ularning mos ravishda S_p1_p va S_p2_p yasovchilar



13.21-rasm.



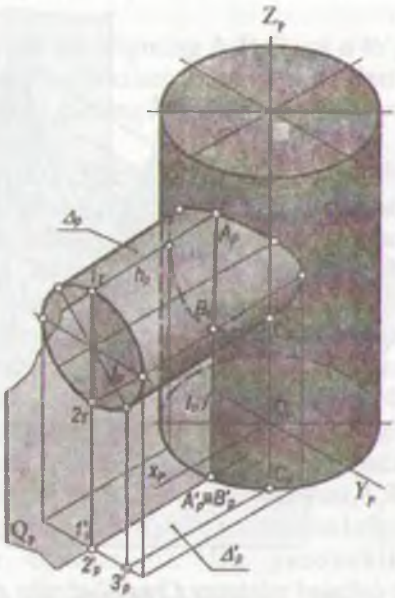
13.22-rasm.

bilan kesishish nuqtalari E_p va F_p lar belgilab olinadi. Kesimning A_p – quyi va B_p – yuqori nuqtalarini ortogonal proyeksiyalarga oid qoidalarga asoslanib topish mumkin. Buning uchun konusning i_p o'qidan o'tuvchi va berilgan P tekislikka perpendikulyar Q_p tekislikdan foydalanamiz. Bu tekislik konusni S_p3_p va S_p4_p yasovchilari, berilgan tekislikni esa 5_p6_p to'g'ri chiziq bo'yicha kesadi. S_p3_p va S_p4_p yasovchilarning 5_p6_p to'g'ri chiziq bilan kesishishidan A_p va B_p nuqtalar hosil bo'ladi. Hosil bo'lgan nuqtalarni tekis egri chiziq bilan tutashtirib, konusning P tekislik bilan kesishish chizig'i yasaladi.

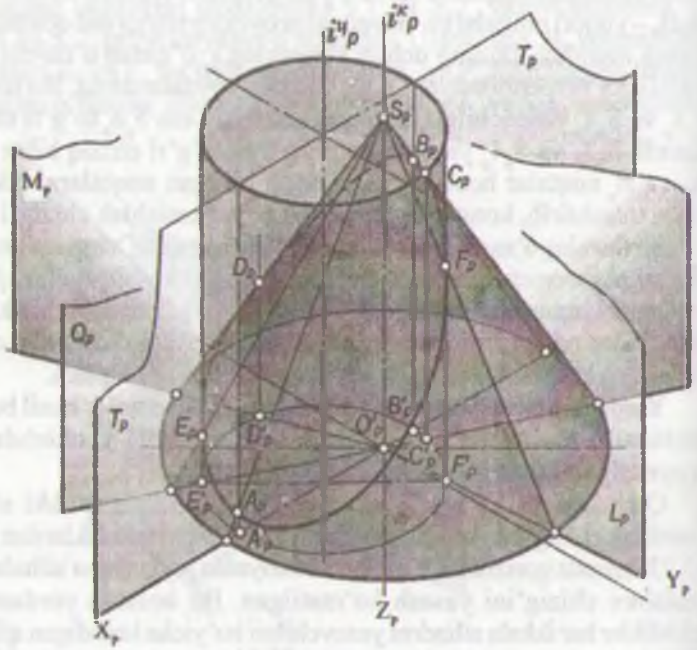
Sirtlarning o'zaro kesishish chiziqlarini yasash. Ortogonal proyeksiyalardagi singari aksonometriyada ham sirtlarning o'zaro kesishish chiziqlarini yasashda yordamchi kesuvchi tekisliklardan foydalaniladi. Bunda kesuvchi tekisliklar berilgan sirtlar bilan oddiy chiziqlar bo'yicha kesishadi. Bu egri chiziqlar o'zaro kesishib, sirtlarning kesishish chizig'iga tegishli nuqtalarni hosil qiladi.

Yordamchi tekislik yasalishi oson bo'lgan chiziqlar hosil bo'ladigan qilib tanlanadi. Bu shartga ko'ra, ba'zi masalalarni yechishda qo'shimcha proyeksiyalashdan ham foydalanish mumkin.

Quyidagi 13.23 va 13.24-rasmlarda tasvirlangan ikki sirtning o'zaro kesishish chizig'ini yasashda yordamchi kesuvchi tekisliklardan foydalanilgan. 13.23-rasmda gorizontal va vertikal vaziyatda joylashgan silindrlarning o'zaro kesishuv chizig'ini yasash ko'rsatilgan. Bu holatda yordamchi kesuvchi tekisliklar har ikkala silindrni yasovchilari bo'yicha kesadigan qilib o'tkazilgan. Silindrlar yasovchilari o'zaro kesishib, izlanayotgan egri chiziqqa tegishli nuqtalarni hosil qiladi. 13.24-rasmda esa aylanish o'qlari o'zaro parallel bo'lgan



13.23-rasm.



13.24-rasm.

vertikal vaziyatdagi silindr va konuslarning aksonometriyalari berilgan. Ularning o‘zaro kesishish chizig‘ini yasash uchun ham yordamchi tekisliklar ularning yasovchilari bo‘yicha kesishadigan qilib o‘tkazilgan. Bu tekisliklar konus sirtining o‘qidan o‘tkazilgan. Ular konus va silindrni yasovchilari orqali kesadi. Bu yasovchilarning o‘zaro kesishish nuqtalari ikki sirtning kesishish chizig‘iga tegishli nuqtalar bo‘ladi.

Nazorat savollari

1. Aksonometrik proyeksiyalar qanday hosil qilinadi?
2. Aksonometriya asosiy teoremasining mohiyati nimadan iborat?
3. O‘qlar bo‘yicha o‘zgarish koeffitsientlarini ta’riflab bering.
4. Haqiqiy va keltirilgan o‘zgarish koeffitsientlarining farqini tushuntiring.
5. Izlar uchburchagi nima va u haqidagi teoremalarning qaysi birini bilasiz?
6. Proyeksiyalash burchagi va o‘zgarish koeffitsientlari orasida qanday bog‘lanish bor
7. Aylananing aksonometriyasi haqida nimalar bilasiz?
8. Standart aksonometriyaning qanday turlarini bilasiz?
9. To‘g‘ri burchakli standart izometriya haqida nimalarni bilasiz?
10. To‘g‘ri burchakli standart dimetriyani ta’riflab bering.
11. Qiyshiq burchakli standart dimetriya (kabinet proyeksiya) haqida nimalar bilasiz?
12. Zenit aksonometrik proyeksiyalar qanday maqsadlarni ko‘zlab chiziladi?
13. Aksonometrik proyeksiyalarda pozitsion masalalarni yechish uchun nimalarga e`tibor beriladi?

QISQACHA TARIXIY MA'LUMOTLAR

Chizma geometriya boshqa fanlar singari inson mehnat faoliyati natijasida vujudga kelgan.

Qadimgi inshootlar qoldiqlaridan ma'lum bo'lishicha, miloddan avval ham tasvirlar asosida bajarilgan chizmalardan foydalanilgan. Sanoat va texnika tarmoqlarining rivojlanishi bilan tasvirlarni yasash usullari ham takomillashib borgan.

Bizgacha yetib kelgan fanga taalluqli eng qadimgi yozma manbalardan biri rim arxitektori Mark Vitruviy ning (mil.av.I asr) «Arxitektura haqida o'nta kitob» traktatidir. U o'z asarida narsalarning gorizontal va frontal proyeksiyalarini proyeksion bog'lanishsiz keltirgan.

Uyg'onish davrida arxitektura va tasviriy san'atning jadal rivojlanishi natijasida G'arbiy Yevropada geometrik asosda tasvirlash usullari haqidagi ta'limotlar paydo bo'la boshladi. Bu sohadagi nazariyotchilardan biri italyan olimi Leon Alberti (1404–1472) bo'lib, u o'zining «Rassomchilik haqida» va «Me'morchilik haqida» nomli asarlarida perspektivaning matematik asoslarini ishlab chiqdi.

Grafik yasashlar usullarining keyingi rivoji italyan rassomi, olimi va muhandisi Leona rdo da Vinchi (1452–1519) nomi bilan bog'liq. U o'z amaliy faoliyatida perspektiv tasvirlar, shu jumladan, «kuzatish» perspektivasi qonunlarini qo'llash doirasini kengaytirdi.

Taniqli nemis rassomi Albrext Dyurer (1471–1528) o'zining «Qo'llanma» asarida tekis va fazoviy egri chiziqlarni yasashning bir qancha usullarini keltiradi. U «Dyurer usuli» deb nomlangan perspektiv yasashlarning yangi o'ziga xos usulini yaratgan.

Italyan olimi Gvido Ubaldi ning (1545–1607) «Perspektiva bo'yicha olti kitob»i ulkan nazariy ahamiyatga ega. U perspektiv tasviriga binoan narsaning haqiqiy o'lchamlarini aniqlashga asos solgan.

Fransuz matematigi Jirar Dezarg (1593–1662) «Narsalarni perspektivada tasvirlashning umumiy usuli» nomli asarida perspektiv yasashlarda koordinatalar usulini qo'llash bilan chizma geometriya faniga katta hissa qo'shdi.

Nemis geometri Lambert (1723–1777) elementar geometriya masalalarini perspektiv yasashlar asosida grafik usulda yechishni tavsiya qildi.

Shunday qilib, XVIII asr oxirlariga kelib proyeksiyalash usullari bo'yicha yetarli tajriba to'plandi. Ammo bu usullar tarqoq bo'lib, yaxlit nazariyaga birlashtirilmagan edi. Fransuz geometri Gaspar Monj (1746–1818) o'zining «Geometrie descriptive» («Chizma geometriya») asarida tasvirlash usullari sohasidagi bilimlarni umumlashtirdi va sistemaga soldi. U bu bilan chizma geometriyaga fan sifatida asos soldi.

O'rta Osiyoda chizma geometriyaga oid ilk ma'lumotlar IX–XI asrlarda yashab o'tgan qomusiy olimlar Muhammad al-Xorazmiy (780–850), Abu Nasr Forobiy (873–950), Abu Rayhon Beruniy (973–1048), Abu Ali ibn Sino (980–1037) va boshqalarning «Geometriya», «Geodeziya», «Astronomiya» kabi asarlarida keltirilgan.

Temuriylar davrida Movarounnahr hududida muhtasham binolar, masjid va madrasalar qad ko'tardi. Barpo etilgan binolar, albatta, aniq chizmalar asosida qurilgan. Chizmalar esa maxsus chizmachilik asboblari vositasida bajarilganligi haqida ko'pgina ma'lumotlar bor. Bu davrdagi tasvirlash usullari haqidagi ma'lumotlar hali o'rganilmagan bo'lib, o'z tadqiqotchilarini kutmoqda.

Rossiyada chizma geometriya 1810-yildan Peterburg yo'l muhandislari korpusi instituti (hozirgi Peterburg temir yo'llar transporti instituti)da fransuz tilida o'qitila boshladi. Fanni o'qitish uchun G. Monjning shogirdi K. Potye taklif qilindi. Keyinchalik Potyening yordamchisi Ya. A. Sevastyanov (1796–1849) chizma geometriyadan rus tilida ma'ruzalar o'qiy boshladi. 1821-yilda u «Chizma geometriya asoslari» kursini nashr etadi. Bu rus tilidagi birinchi original darslik bo'lib, o'z davrida Yevropada ushbu fan bo'yicha yozilgan kitoblardan ancha ustun turadi. Ya. A. Sevastyanovga 1824-yilda ruslardan birinchi professorlik unvoni berildi.

Professor V. I. Kurdyumov ning (1853–1904) ishlari o'zining nazariy jihatdan chuqurligi, ilmiy asoslarining izchilligi bilan ajralib turadi. Uning 1886–1905-yillar mobaynida chop etilgan ilmiy ishlari chizma geometriyaning barcha bo'limlari: ortogonal proyeksiyalar, egri chiziqlar va sirtlar, perspektiva, aksonometrik proyeksiyalarni qamrab oladi. V. I. Kurdyumov: «Chizma geometriya chizmaning grammatikasidir», – deb ta'kidlagan.

Akademik Ye. S. Fyodorov (1853–1919) tasvir usullariga yangicha qarashlarni ilgari surdi. Uning vektorli chizma geometriya haqidagi fikrlari hozir ham ilmiy ahamiyatini yo'qotgani yo'q. Olim o'zining «Yangi geometriya chizmachilikning asosi sifatida», «Yangi chizma geometriya» kabi asarlarida sonlar o'rniga vektorlardan foydalandi.

Texnika fanlari doktori, professor N. A. Rinin (1877–1943) tasvirlash usullari sohasidagi juda ko'p ilmiy ishlar muallifidir. Uning fanning barcha bo'limlarini qamrab oluvchi «Chizma geometriya», «Aksonometriya», «Sonlar bilan belgilangan proyeksiyalar», «Perspektiva», «Chiziqli perspektiva elementlari» kabi mashhur darsliklaridan tashqari, ko'pgina ilmiy-tadqiqot xarakteridagi ishlari ma'lum.

D. I. Kargin (1880–1949) chizma geometriya va muhandislik grafikasi faniga katta hissa qo'shgan olim bo'lib, grafik hisoblashlar va yasashlarni aniq bajarish bo'yicha ilmiy ishlar olib borgan. D. I. Kargin grafika bo'yicha birinchi fan doktoridir.

Professor M. Ya. Gromov (1884–1963) ilmiy ishlarining asosiy yo'nalishi egri chiziqlar va sirtlarning hosil bo'lish nazariyasini boyitishdan iborat. U sobiq ittifoqda birinchilar qatorida «Chizma geometriyada egri chiziqlar va sirtlarning kinematik asoslari» mavzusida doktorlik dissertatsiyasini himoya qilgan.

1935–1941-yillarda M. Ya. Gromov Toshkent to'qimachilik va yengil sanoat instituti «Chizma geometriya va chizmachilik» kafedrasiga rahbarlik qildi. Shu davrda u ilmiy-metodik ishlarni rivojlantirib, 1937-yilda «Proyeksion chizmachilik bo'yicha masalalar to'plami» o'quv qo'llanmasini yaratdi. Olim 1941–1945-yillarda hozirgi Toshkent irrigatsiya va melioratsiya instituti «Chizma geometriya va mashinasozlik chizmachiligi» kafedrasiga mudir bo'lib, shu yillari O'rta Osiyo politexnika institutida ma'ruzalar o'qidi.

Fizika-matematika fanlari doktori, professor N. F. Chetveruxin (1891–1974) sovet davrining eng mashhur geometrlaridan biridir. U bir necha yil chizma geometriya va muhandislik grafikasi ekspert komissiyasining raisi bo'lgan. N. F. Chetveruxinning «Shartli tasvirlash nazariyasi» asari tasvirlar nazariyasiga qo'shilgan ulkan hissa bo'ldi. Bundan tashqari, olimning «Geometriya kursida fazoviy shakllar chizmalari», «To'liq va to'liq bo'lmagan tasvirlar», «Proyeksion chizmachilikda stereometrik masalalar» va boshqa ishlari ham shu mavzuga bag'ishlangan. U «Oliy geometriya», «Chizma geometriya kursi», «Geometrik yasashlarning usullari» nomli darsliklar muallifidir.

Professor V. O. Gordon (1892–1971) chizma geometriya va muhandislik grafikasini o'qitish bo'yicha yetuk mutaxassis bo'lib, uning umumta'lim maktablari uchun chizmachilikdan darsligi bir necha yillar mobaynida millionlab o'quvchilar uchun zarur qo'llanma vazifasini o'tab kelgan.

1941–1945-yillarda V. O. Gordon Toshkent to'qimachilik va yengil sanoat instituti «Chizma geometriya va chizmachilik» kafedrasiga rahbarlik qildi. Shu yillarda u «Chizma geometriya kursi» kitobini yozib tugatadi. Hozirgi kunda bu kitob 24 marta qayta nashr qilinib, Rossiya oliy texnika o'quv yurtlari uchun asosiy klassik darslik hisoblanadi.

Texnika fanlari doktori, professor A. I. Dobryakov ning (1895–1947) «Chizma geometriya kursi» ancha mukammal darslik hisoblanib, arxitektura-qurilish ixtisosligidagi oliy o'quv yurtlariga mo'ljallangan. Olimning «Chizma geometriyadan masalalar to'plami» ushbu kitobning mantiqiy davomidir.

A. I. Dobryakov tomonidan perspektiva va soyalar nazariyasining o'ta muhim masalalari ishlab chiqilib, natijada yangi teoremalar ta'riflab berildi.

Professor S. M. Kolotov ning (1885–1965) tasvirlash usullarini rivojlantirish sohasidagi xizmatlari alohida o'rin tutadi. 1926–1944-yillarda ukrain olimi O'zbekistonning turli qurilish tashkilotlarida va O'rta Osiyo industrial instituti «Chizma geometriya va arxitektura loyihalash» kafedrasida ishlab, 1933-yili «Chizma geometriya kursi»ni chop etdi. Bu darslikda u yordamchi proyeksiyalash usulining qulayligini isbotladi. S. M. Kolotov o'zining «Soyalar yasashning yangi nazariyasi», «Yordamchi proyeksiyalash», «Chizma geometriya kursi» kabi kitoblarida tasvirlash usullarini kengaytirishning yangi sohalari mavjudligini ko'rsatdi.

O'zbekistonda chizma geometriya tarixi Turkiston Xalq Universiteti (hozirgi O'zbekiston Milliy universiteti) faoliyati bilan bog'liq. 1930–1934-yillarda universitet tarkibidan bir necha oliy texnika o'quv yurtlari ajralib chiqib, ularda «Chizma geometriya va chizmachilik» kafedralari tashkil qilinadi va o'qitila boshlaydi. Dastlabki yillarda fanni o'qitish metodikasiga, talabalar bajaradigan chizmalar (topshiriqlar) to'plamlari tuzishga va yosh o'qituvchilar pedagogik mahoratini oshirishga katta e'tibor berildi.

O'zbekistonda chizma geometriya fani bo'yicha birinchi pedagog Rahim Xorunov (1911–1992) sanaladi. 1953-yilda R. Xorunov Leningradda «Parallel proyeksiyalashda yaqqol tasvirlar yasashning ba'zi bir masalalari» mavzusida nomzodlik dissertatsiyasini himoya qiladi. 1953–1983-yillar davomida u Toshkent temir yo'llar transporti institutida kafedra mudiri bo'lib, o'z ilmiy maktabini yaratdi, bir necha nomzodlik ishlariga rahbarlik qildi.

1961-yili R. Xorunov tomonidan «Chizma geometriya kursi»dan darslik chop etilib, bu o'zbek tilida chizma geometriya fani terminologiya tizimi majmuasi yaratilishiga olib keldi. Darslikning keyingi nashrlariga fanning namunaviy dasturida belgilangan barcha bo'limlar kiritilib, u arxitektura-qurilish mutaxassislariga mo'ljallab tayyorlangan.

1966-yilda R. Xorunovga professorlik unvoni, 1981-yilda O'zbekistonda xizmat ko'rsatgan fan arbobi unvoni berildi.

Yusuf Qirg'izboyev (1912–1995) Toshkent to'qimachilik va yengil sanoat institutida 1951–1978-yillarda kafedra mudiri sifatida faoliyat yuritgan. U 1958-yilda o'zbek tilida birinchi marta mexanika ixtisosliklari uchun «Chizma geometriya» darsligini chop etadi. Kitobda tasvirlash usullarida ishlatiladigan o'zbekcha atamalar tizimi yaratildi. 1961-yili Yu. Qirg'izboyevga dotsentlik unvoni beriladi.

1974-yilda Yu. Qirg'izboyev, E. Sobitov, L. Hakimov va I. Rahmonovlar muallifligida «Mashinasozlik chizmachiligi kursi» chop etildi. Bu o'zbek tilida yaratilgan birinchi adabiyot bo'lib, unda nazariy va amaliy ma'lumotlar bilan bir qatorda chizmachilikka oid atamalar ishlab chiqildi.

1963-yildan boshlab respublikamiz pedagoglaridan Sh. K. Murodov birinchi bo'lib Kiyevdagi prof. S. M. Kolotov ilmiy maktabiga aspiranturaga kirishi munosabati bilan ukrain va o'zbek olimlari o'rtasida ilmiy hamkorlik vujudga keladi. Kiyev ilmiy maktabining hozirgi rahbari texnika fanlari doktori, professor V. Ye. Mixaylenkoning 1968-yilda Buxoro va Samarqand oily o'quv yurtlarida ma'ruzalar o'qishi, undan keyingi yillarda Toshkent, Samarqand, Buxoro, Urganch, Chimkent va Jambul shaharlariga tashrif buyurib, ilmiy seminarlar o'tkazishi hamda izlanuvchi va aspirantlar tanlab olinishi O'zbekiston va qo'shni respublikalarda fanning rivojlanishiga turtki bo'ldi. Hozirda respublikamizda faoliyat yuritayotgan 26 fan nomzodidan 23 tasi shu ilmiy maktabda dissertatsiya himoya qilgan, ulardan 3 tasi professor (Sh. K. Murodov, J. Ya. Yodgorov, R. Q. Ismatullayev) va bittasi fan doktori (D. F. Qo'chqorova) bo'ldi.

ASOSIY GEOMETRIK O'RINLAR

Ba'zi bir geometrik masalalarni yechish geometirik o'rinlarni qo'llash bilan bajariladi.

Nuqta, to'g'ri chiziq, egri chiziq va sirtlarga tegishli bo'lgan pozitsion va metrik masalalar shartlarini qanoatlantiruvchi masalaning berilish shartiga geometrik o'rinlar tanlanadi.

Ta'rif. *Fazodagi elementlarning (nuqta, to'g'ri chiziq, tekislik) geometrik o'rni deb biror aniq shartlarni qanoatlantiruvchi shu elementlar to'plamiga aytiladi.*

Quyida ba'zi bir geometrik o'rinlarni keltiramiz:

1. ***Berilgan elementlardan bir xil uzoqlikdagi (masofadagi) elementlarning geometrik o'rinlari.***

1.1. Berilgan O nuqtadan bir xil R uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o'rni tekislikda markazi O nuqtada va radiusi R masofaga teng bo'lgan aylana, fazoda esa markazi O nuqtada bo'lgan R radiusli sfera bo'ladi.

1.2. Berilgan ikki A va B nuqtalardan bir xil uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o'rni tekislikda berilgan ikki nuqtani tutashtiruvchi AB kesmaning o'rtasidan o'tuvchi perpendikulyar to'g'ri chiziq, fazoda esa AB kesma o'rtasidan o'tuvchi va unga perpendikulyar bo'lgan tekislik bo'ladi.

1.3. Bir to'g'ri chiziqda yotmagan uchta nuqtadan bir xil uzoqlikdagi nuqtaning geometrik o'rni tekislikda berilgan uch nuqtadan o'tuvchi aylana markazi, fazoda esa berilgan uch nuqtadan o'tuvchi aylana markazidan o'tib, aylana tekisligiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq yoki berilgan nuqtalarni birlashtiruvchi vatarlarning o'rtasidan o'tuvchi va aylana tekisligiga perpendikulyar bo'lgan ikki tekislikning kesishish chizig'i bo'ladi.

1.4. Bir tekislikda yotmagan to'rt nuqtadan bir xil uzoqlikdagi nuqtaning geometrik o'rni berilgan nuqtalar yotgan shar sirtining markazi bo'ladi.

1.5. Berilgan to'g'ri chiziqdan bir xil masofadagi nuqtalarning geometrik o'rni o'qi berilgan to'g'ri chiziq bo'lgan aylanma silindr sirtining nuqtalari bo'ladi.

1.6. Ikki parallel to'g'ri chiziqdan barobar uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o'rni tekislikda berilgan to'g'ri chiziqlarning ixtiyoriy ikki nuqtasini tutashtiruvchi kesmalarning o'rtasidan o'tuvchi va berilgan to'g'ri chiziqlarga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq, fazoda esa berilgan to'g'ri chiziqlarning ixtiyoriy ikki nuqtasini tutashtiruvchi kesmalarning o'rtasidan o'tuvchi va parallel to'g'ri chiziqlar tekisligiga perpendikulyar bo'lgan tekislik bo'ladi.

1.7. Fazodagi uchta o'zaro parallel to'g'ri chiziqdan barobar uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o'rni yasovchilari shu to'g'ri chiziqlar bo'lgan aylanma silindr sirtining o'qi bo'ladi.

1.8. Ikki kesishuvchi to'g'ri chiziqdan barobar uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o'rni tekislikda to'g'ri chiziqlar tashkil qilgan qo'shni burchaklarning perpendikulyar bissektrisalari, fazoda esa ikki kesishuvchi to'g'ri chiziq tashkil qilgan qo'shni burchaklar bissektrisalaridan o'tuvchi va to'g'ri chiziq tekisligiga perpendikulyar bo'lgan ikki o'zaro perpendikulyar tekislik bo'ladi.

1.9. Fazodagi bir nuqtada o'zaro kesishuvchi to'g'ri chiziqlardan barobar uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o'rni uchi berilgan to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi bo'lgan aylanma konusning o'qi bo'ladi.

1.10. Berilgan tekislikdan barobar uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o'rni ikki o'zaro parallel tekislik bo'lib, ular berilgan tekislikdan berilgan uzoqlikda joylashgan bo'ladi.

1.11. Ikki parallel tekislikdan barobar uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o'rni berilgan tekisliklarga parallel bo'lgan tekislik bo'lib, u berilgan tekisliklarning ixtiyoriy ikki nuqtasini birlashtiruvchi kesmalarning o'rtasidan o'tadi.

1.12. Ikki kesishuvchi tekislikdan barobar uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o'rni tekisliklar tashkil qilgan ikkiyoqli burchaklarni teng ikkiga bo'luvchi o'zaro perpendikulyar bo'lgan ikkita tekislik bo'ladi.

1.13. R radiusli aylanadan L masofadagi nuqtalarning geometrik o'rni R<L bo'lganda R+L va R>L bo'lganda R=L radiusli konsentrik aylanalar bo'ladi.

1.14. R_1 radiusli sferadan L_1 masofadagi nuqtalarning geometrik o'rni $R_1<L_1$ bo'lganda R_1+L_1 va $R_1>L_1$ bo'lganda R_1-L_1 radiusli konsentrik sferalar bo'ladi.

1.15. Berilgan *a* to'g'ri chiziqqa parallel bo'lib, undan L masofadagi to'g'ri chiziqlarning geometrik o'rni o'qi *a* to'g'ri chiziq bo'lib, radiusi R=L bo'lgan aylanma silindrning yasovchilari bo'ladi.

1.16. Berilgan A nuqtadan bir xil L masofadagi parallel to'g'ri chiziqlarning geometrik o'rni radiusi R=L bo'lgan aylanma silindrning yasovchilari bo'ladi.

1.17. Berilgan *a* to'g'ri chiziqqa parallel bo'lmagan va undan L masofadagi to'g'ri chiziqlarning geometrik o'rni o'qi *a* to'g'ri chiziq bo'lib, radiusi R=L bo'lgan aylanma silindrga urinma to'g'ri chiziqlar bo'ladi.

1.18. Berilgan A nuqtadan o'tib, biror *a* to'g'ri chiziqdan L masofadagi to'g'ri chiziqlarning geometrik o'rni o'qi *a* to'g'ri chiziq bo'lgan radiusi R=L aylanma silindrga A nuqtadan urinib o'tuvchi ikki tekislik bo'ladi.

1.19. Berilgan P tekislikdan L masofadagi to'g'ri chiziqlarning geometrik o'rni P dan L masofada joylashgan ikki o'zaro parallel tekislik bo'ladi.

1.20. Berilgan O nuqtadan bir xil L masofada joylashgan tekisliklarning geometrik o'rni markazi O nuqtada va radiusi R=L bo'lgan shar sirtiga urinma tekisliklar to'plami bo'ladi.

1.21. Berilgan A nuqtadan o'tuvchi va biror O nuqtadan L masofadagi tekisliklarning geometrik o'rni ikki markazi O nuqtada va radiusi R=L bo'lgan shar sirtiga urinma tekislik bo'ladi.

1.22. Berilgan *a* to'g'ri chiziqqa parallel va undan L masofadagi tekisliklarning geometrik o'rni o'qi *a* to'g'ri chiziq, radiusi R=L bo'lgan aylanma silindr sirtiga urinuvchi tekisliklar to'plami bo'ladi.

2. ***Berilgan to'g'i chiziq va tekislikka bir xil qiyalikdagi to'g'ri chiziq va tekisliklarning geometrik o'rinlari.***

2.1. Biror *a* to'g'ri chiziqning A nuqtadan o'tib, unga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqlarning geometrik o'rni to'g'ri chiziqqa perpendikulyar tekislik bo'ladi.

2.2. Fazoda berilgan A nuqtadan o'tib, biror *a* to'g'ri chiziq bilan α burchak tashkil qiluvchi to'g'ri chiziqlarning geometrik o'rni uchi A nuqtada bo'lgan aylanma konus sirtining yasovchilar to'plami bo'ladi.

2.3. Fazoda berilgan A nuqtadan o'tuvchi va biror P tekislik bilan β burchak tashkil qiluvchi to'g'ri chiziqlarning geometrik o'rni o'qi A nuqtadan o'tib, P tekislikka perpendikulyar bo'lgan va yasovchilari P bilan β burchak tashkil qilgan aylanma konus sirtining yasovchilar to'plami bo'ladi.

2.4. Ikki kesishuvchi to'g'ri chiziqqa bir xil qiyalikdagi to'g'ri chiziqlarning geometrik o'rni berilgan to'g'ri chiziqlar tashkil qilgan qo'shni burchaklar bissektrisalaridan o'tuvchi va to'g'ri chiziqlar tekisligiga perpendikulyar bo'lgan ikkita o'zaro perpendikulyar tekislik bo'ladi.

2.5. Ikki ayqash to'g'ri chiziqqa bir xil qiyalikdagi to'g'ri chiziqlarning geometrik o'rni ikki o'zaro perpendikulyar tekislik bo'ladi.

2.6. Ikki kesishuvchi tekislikka bir xil qiyalikdagi to'g'ri chiziqlarning geometrik o'rni tekisliklar tashkil qilgan ikkiyoqli burchaklarni teng ikkiga bo'luvchi ikkita o'zaro perpendikulyar tekislik bo'ladi.

2.7. Bir nuqtada kesishuvchi uchta tekislikka bir xil qiyalikdagi to'g'ri chiziqlarning geometrik o'rni kesishuv nuqtasidan o'tuvchi har bir juft bissektor tekisliklarining kesishuvidan hosil bo'lgan to'rtta to'g'ri chiziq bo'ladi.

2.8. Berilgan A nuqtadan o‘tib, biror P tekislik bilan α burchak tashkil qiluvchi tekisliklarning geometrik o‘rni uchi A nuqtada va o‘qi to‘g‘ri chiziq bo‘lgan yasovchilari u bilan berilgan burchak hosil qilgan aylanma konus sirtiga urinma tekisliklar to‘plami bo‘ladi.

2.9. Berilgan A nuqtadan o‘tib, biror P tekislik bilan β burchak hosil qilgan tekisliklarning geometrik o‘rni uchi A nuqtada, o‘qi P tekislikka perpendikulyar bo‘lgan va yasovchilari P ga β burchakka og‘ishgan aylanma konus sirtiga urinma tekisliklar to‘plami bo‘ladi.

3. ***Geometrik elementlarning boshqa ba’zi bir geometrik o‘rinlari.***

3.1. To‘g‘ri burchakli uchburchakning to‘g‘ri burchagi uchining geometrik o‘rni sfera sirtining nuqtalari bo‘lib, uning diametri to‘g‘ri burchakning gipotenuzasiga teng bo‘ladi.

3.2. Konus va silindr sirtlariga nisbatan bir xil qiyalikdagi nuqtalarning geometrik o‘rni bu sirtlarning o‘qlari bo‘ladi.

3.3. Berilgan aylanadan o‘tuvchi sferalar markazlarining geometrik o‘rni shu aylana markazidan o‘tuvchi va aylana tekisligiga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq bo‘ladi.

3.4. Berilgan A nuqtadan o‘tib, berilgan *a* to‘g‘ri chiziqni kesuvchi to‘g‘ri chiziqlarning geometrik o‘rni tekislik bo‘ladi.

3.5. Berilgan A nuqtadan o‘tib, berilgan P tekislikka parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlarning geometrik o‘rni P tekislikka parallel bo‘lgan tekislik bo‘ladi.

3.6. Sfera sirtida berilgan A nuqtalan o‘tib, sirtga urinuvchi to‘g‘ri chiziqlarning geometrik o‘rni shu nuqtaga urinma tekislik bo‘lib, u sferaning A nuqtasidagi radiusiga perpendikulyar bo‘ladi.

3.7. Fazoda berilgan 3 ta o‘zaro ayqash to‘g‘ri chiziqni kesuvchi to‘g‘ri chiziqlarning geometrik o‘rni bir kovakli elliptik yoki aylanma giperboloidning to‘g‘ri chiziqli yasovchilari bo‘ladi.

3.8. Berilgan 2 ta ayqash to‘g‘ri chiziqni kesuvchi va biror P tekislikka parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlarning geometrik o‘rni giperbolik paraboloid sirtining to‘g‘ri chiziqli yasovchilar to‘plami bo‘ladi.

ATAMA VA TUSHUNCHALAR IZOHLI LUG‘ATI

A

Algebraik egri chiziq	tenglamasi algebraik funksiya orqali ifodalangan egri chiziq
Algebraik sirt	algebraik tenglamalar bilan ifodalangan sirt
Algebraik sirt sinfi	ixtiyoriy to‘g‘ri chiziqdan o‘tib, sirtga urinuvchi tekisliklarning eng ko‘p soni bilan aniqlanadi
Algebraik sirt tartibi	sirtning to‘g‘ri chiziq bilan kesishishidan hosil bo‘lgan nuqtalarning eng ko‘p soni bilan aniqlanadi yoki sirtni ifodalovchi tenglama darajasi
Algoritm	masalani yechish rejasi yoki ketma-ketligi
Arximed jismlari	muntazam ko`pyoqliklarning uchlari kesilganda hosil bo‘lgan yarim muntazam ko‘pyoqliklar
Aylanish o`qi	fazodagi shaklni biror proyeksiyalar tekisligiga qulay holga keltirishda uni aylantirish uchun tanlangan to‘g‘ri chiziq
Aylanish radiusi	aylanish markazidan harakatlanuvchi nuqtagacha bo‘lgan masofa
Aylanma yoki aylanish sirti	biror to‘g‘ri chiziq, tekis yoki fazoviy egri chiziqning qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirt
Aylantirish markazi	aylanish o`qi bilan aylantirish tekisligining kesishuv nuqtasi
Aylantirish tekisligi	biror shaklning nuqtasi orqali o`tuvchi va aylanish o`qiga perpendikulyar tekislik
Aylantirish usuli	proyeksiyalar tekisliklarini o`zgartirmay, berilgan shaklni biror o`q atrofida aylantirib, proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan qulay holatga keltirish

B

Binormal	fazoviy chiziqning biror nuqtasidan unga o`tkazilgan yopishma tekislik va urinmaga perpendikulyar bo`lgan to`g`ri chiziq
Bir pallali giperboloid	uch yo‘naltiruvchisi xos to`g‘ri chiziq bo`lgan chiziqli sirt
Birinchi turdagi qaytish nuqtasi	bu nuqtada egri chiziqning yarim urinmalari ustma-ust tushadi va bir xil yo‘nalishda bo‘ladi
Bissektor tekisligi	H vaV proyeksiyalar tekisliklaridan barobar uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o`rni yoki H va V tekisliklar orasidagi bissektor tekisligi

Bo‘yin chizig‘i	aylanish sirtining eng kichik paralleli bo‘lib, uning bosh meridiani bilan kesishgan nuqtasida bosh meridianga o‘tkazilgan urinma aylanish o‘qiga parallel bo‘ladi
Bosh meridian	aylanish sirtining frontal simmetriya tekisligi bilan kesishgan chizig‘i
Bosh meridian tekisligi	aylanish o‘qi orqali o‘tgan frontal kesuvchi tekislik
Bosh normal	fazoviy chiziqning biror nuqtasidan unga o‘tkazilgan yopishma tekislikda yotuvchi va urinmaga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq
D	
Diskret karkas	uzuq-yuluq karkas
Dodekaedr	yon yoqlari 12 muntazam uchburchakdan iborat bo‘lgan qavariq ko‘pyoqlik sirti yoki muntazam 12 yoqlik
E	
Egri chiziq	fazoda yoki tekislikda ma’lum yo‘nalishda uzluksiz harakatlanuvchi biror nuqtaning qoldirgan izi
Egri chiziq sinfi	fazoviy egri chiziqlarda biror to’g‘ri chiziq orqali unga o‘tkazilgan eng ko’p urinma tekisliklar, tekis egri chiziqlarda esa tekislikdagi biror nuqtadan unga o‘tkazilgan eng ko‘p urinmalar soni bilan aniqlanadi
Egri chiziq normali	egri chiziqning urinish nuqtasidan urinmaga o‘tkazilgan perpendikulyar to‘g‘ri chiziq
Egri chiziq tartibi	fazoviy egri chiziqlarda tekislik bilan egri chiziqning eng ko‘p kesishish nuqtalari, tekis egri chiziqlarda esa to‘g‘ri chiziq bilan egri chiziqning eng ko’p kesishish nuqtalari soni bilan aniqlanadi
Egri chiziq urinmasi	egri chiziq bilan umumiy nuqtaga ega bo‘lgan to‘g‘ri chiziq
Egri chiziqning egriligi	egri chiziqda o‘tkazilgan qo‘shni yarim urinmalar orasidagi burchakning ular orasidagi yoy uzunligiga nisbatining limiti
Ekssentrik sferalar usuli	murakkab aylanma sirtlarning kesishuv chizig‘ini aniqlashda qo‘llaniladigan usul
Ekvator	aylanish sirtidagi eng katta parallel bo‘lib, uning bosh meridian bilan kesishuv nuqtasida bosh meridianga o‘tqazilgan urinmalar aylanish o‘qiga parallel bo‘ladi
Elliptik kesim	konusning barcha yasovchilarini kesib, uning o‘qiga perpendikulyar bo‘lmagan tekislik kesishishidan hosil bo‘lgan shakl
Epyur	fransuzcha so‘z bo‘lib, «chizma» degan ma’noni bildiradi
Evolventa	evolyutani hosil qilgan egri chiziq unga nisbatan evolventa deb ataladi

Evolyuta	egri chiziqning hamma nuqtalari uchun yasalgan egrilik markazlarining geometrik o'rni
F	
Fazoviy egri chiziq	hamma nuqtalari bitta tekislikda yotmagan egri chiziq
Frene uchyoqligi	o'zaro perpendikulyar yopishma, normal va rostlovchi tekisliklardan iborat uchyoqlik
Frontal proyeksiyalovchi tekislik	frontal (V) proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lgan tekislik
Frontal proyeksiyalovchi to'g'ri chiziq	frontal (V) proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq
Frontal tekislik	frontal (V) proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgan tekislik
Frontal to'g'ri chiziq	frontal (V) proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq
Frontal proyeksiyalar tekisligi	shakllarning frontal proyeksiyalari yotgan frontal tekislik (V)
G	
Giperbolik kesim	konusning ikki yasovchiga parallel tekislik bilan kesishishidan hosil bo'lgan shakl
Giperbolik nuqtalar	sirtning bunday nuqtasida unga o'tkazilgan urinma tekislik sirtni kesib o'tadi
Gorizontal proyeksiyalar tekisligi	shaklning gorizontal proyeksiyalari yotgan gorizontal tekislik (H)
Gorizontal proyeksiyalovchi tekislik	gorizontal (H) proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lgan tekislik
Gorizontal proyeksiya-lovchi to'g'ri chiziq	gorizontal (H) proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq
Gorizontal tekislik	gorizontal (H) proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgan tekislik
Gorizontal to'g'ri chiziq	gorizontal (H) proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq
Geksaedr	muntazam 6 yoqlik
I	
Ikki karra qiyshiq kanoid	ikki yo'naltiruvchisi xos to'g'ri chiziq va uchinchi yo'naltiruvchisi xos egri chiziq bo'lgan chiziqli sirt
Ikki karra qiyshiq silindroid	ikki yo'naltiruvchisi xos egri chiziq va uchinchi yo'naltiruvchisi xos to'g'ri chiziq bo'lgan chiziqli sirt
Ikkinchi qaytish nuqtasi	egri chiziqning bunday nuqtasida urinma va normallar ustma-ust tushib, bir tomonga yo'nalgan bo'ladi
Ikkinchi tartibli aylanish sirtlari	ikkinchi tartibli egri chiziqlarning o'z o'qlaridan biri atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirtlar
Ikkinchi tartibli sirtlar	biror to'g'ri chiziq bilan eng ko'p ikki nuqtada kesishgan sirtlar yoki tenglamasining darajasi ikkiga teng sirtlar

Ikosaedr	yon yoqlari 20 muntazam uchburchakdan iborat bo'lgan qavariq ko'pyoqlik sirti yoki muntazam 20 yoqlik
J	
Jipslashtirish usuli	aylantirish usulining xususiy holi bo'lib, bunda aylantirish o'qi sifatida tekislikning biror izi qabul qilinadi va uning atrofida aylantirib, tekislik shu proyeksiyalar tekisligiga jipslashtiriladi
K	
Kanal sirti	tekis kesimlardan iborat uzluksiz karkasdan tashkil topgan sirt. Tekis kesim fazoda ma'lum yo'nalishga ega bo'lib, harakat jarayonida o'z shaklini bir me'yorda o'zgartirishi mumkin
Karkas	sirtlarni aniqlaydigan nuqtalar yoki chiziqlar to'plami
Kinematik sirt	yasovchisining kinematik harakatlanishi natijasida hosil bo'lgan sirt
Kirish va chiqish nuqtalari	to'g'ri chiziqlarning sirt bilan kesishish nuqtalari
Ko'pyoq	bir necha tekisliklarning kesishuvidan hosil bo'lgan shakl
Ko'pyoq qirrasi	ko'pyoqlik yoqlarining kesishuv chiziqlari
Ko'pyoqlik	tomonlari tekis uchburchak yoki ko'pburchaklar bilan chegaralangan qirrali sirt
Ko'pyoqlik uchi	ko'pyoqlik qirralarining kesishuv nuqtalari
Konkurent nuqtalar	bir proyeksiyalovchi nurda yotgan nuqtalar
Konsentrik sferalar usuli	aylanma sirtlarning o'zaro kesishuv chizig'ini yasashda qo'llaniladigan usul
Konus kesimilari	konus sirtining biror tekslik bilan kesishishidan hosil bo'lgan kesim yuzasi
Koordinata o'qlari	proyeksiyalar tekisliklarining kesishgan chiziqlari
Kub	yoqlari 6 ta kvadratdan iborat bo'lgan qavariq ko'pyoqlik sirti
M	
Markaziy proyeksiyalash	proyeksiyalash markazi nuqta bo'lib, u orqali tekislikda hosil qilingan proyeksiya
Monoton egri chiziq	egriligi bir me'yorda oshib yoki kamayib boruvchi egri chiziq
Muntazam ko'pyoqlik	muntazam ko'pburchaklardan iborat yoqlarga va o'zaro teng qirralarga ega bo'lgan ko'pyoqlik
Meridian	aylanish o'qi orqali o'tgan tekislikning aylanish sirti bilan kesishgan chizig'i
Meridian tekisligi	aylanish o'qi orqali o'tgan tekislik

Metril masala	berilgan shakllarning o'zaro vaziyatiga nisbatan ularning metrikasini yoki oldindan berilgan metrik shartni qanoatlantiruvchi shakllarning o'zaro vaziyatini aniqlash
N	
Normal	egri chiziqning biror nuqtasida unga o'tkazilgan urinmaga perpendikulyar to'g'ri chiziq. Sirtning biror nuqtasida unga o'tkazilgan urinma tekislikka perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq
Normal kesim	biror sirtni uning o'qiga perpendikulyar tekislik bilan kesganda hosil bo'lgan kesim
Normal tekislik	fazoviy egri chiziqning biror nuqtasida unga o'tkazilgan urinmaga perpendikulyar bo'lgan tekislik
O	
Oktaedr	asosi kvadrat va yon yoqlari 8 ta muntazam uchburchakdan iborat bo'lgan qavariq ko'pyoqlik sirti
Oktant	uchta o'zaro perpendikulyar tekislikning fazoni 8 ta bo'lakka bo'lishi
Ortogonal proyeksiyalarni almashtirish	masala yechishda grafik amallarni soddalashtirish uchun qo'llaniladigan chizmani qayta tuzish usullari
Ortogonal proyeksiyalash	to'g'ri burchakli proyeksiyalash
P	
Parabolik kesim	konusning bitta yasovchisiga parallel tekislik kesishishidan hosil bo'lgan shakl
Parabolik nuqtalar	urinma tekislikning sirtga to'g'ri chiziq bo'yicha urinishidan hosil bo'lgan urinish chizig'ining nuqtalari
Parallel proyeksiyalash	proyeksiyalovchi nurlar o'zaro parallel bo'lgan proyeksiyalash
Parametr	narsaning holati va shaklini aniqlashda qatnashadigan ko'rsatkichlar
Parametrlashtirish	narsalar to'plamining holati va shakli parametrlarini aniqlash
Piramida	asosi uchburchak yoki ko'pburchak, yon yoqlari umumiy uchga ega bo'lgan uchburchaklardan iborat qirrali sirt
Platon jismlari	muntazam ko'pburchaklardan iborat yonlarga, o'zaro teng ikkiyoqli burchaklarga va o'zaro teng qirralarga ega bo'lgan (tetraedr, kub, oktaedr, dodekaedr, ikosaedr) qavariq ko'pyoqlik sirti
Pozitsion masala	berilgan shakllarning o'zaro tegishliligini, ya'ni o'zaro umumiy elementlarni aniqlaydigan masala

Prizma	asoslari o'zaro parallel bo'lib, uchburchak yoki ko'pburchaklardan, yon yoqlari to'rtburchaklardan iborat qirrali sirt
Prizmatoid	asoslari parallel tekisliklarda yotgan ikkita ko'pburchakdan, yon yoqlari esa ikkala asos uchlaridan iborat uchburchak va trapetsiyalar bo'lgan qavariq ko'pyoqlik sirti
Profil proyeksiyalovchi tekislik	profil (W) proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lgan tekislik
Profil proyeksiyalovchi to'g'ri chiziq	profil (W) proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq
Profil tekislik	profil (W) proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgan tekislik
Profil to'g'ri chiziq	profil (W) proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq
Proyeksiya	narsaning proyeksiyalovchi nurlarning proyeksiyalar tekisligi bilan kesishuvidan hosil bo'lgan tasviri
Proyeksiyalar tekisligi	proyeksiyalar yotgan tekislik
Proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish	narsaning holatini o'zgartirmasdan, unga nisbatan proyeksiyalar tekisliklarining holatini qulay qilib o'zgartirish
Proyeksiyalash	bu jarayonda proyeksiyalanuvchi obyekt nuqtalari orqali nurlar o'tkazilib, ularning proyeksiyalar tekisligi bilan kesishuv nuqtalari aniqlanadi
Proyeksiyalash markazi	proyeksiyalovchi nurlar chiqadigan xos yoki xosmas nuqta
Proyeksiyalash nuri	proyeksiyalanuvchi nuqta bilan proyeksiyalash markazini bog'lovchi to'g'ri chiziq

Q

Qavariq ko'pyoqlik	yoqlari bir tomonida joylashgan ko'pyoqlik
Qirrali sirt kesim yuzasi	qirrali sirt bilan tekislik kesishishidan hosil bo'lgan shakl
Qiyshiq burchakli proyeksiyalash	proyeksiyalovchi nurlar proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lmagan holda hosil bo'lgan proyeksiyalash
Qo'sh nuqta	egri chiziqning bu nuqtasida yarim urinmalar bir to'g'ri chiziqni tashkil qilib, qarama-qarshi yo'nalishga, normallar esa ustma-ust tushib, bir yo'nalishga ega bo'ladi
Qonuniy egri chiziq	muayyan biror qonunga bo'ysunuvchi nuqtalar to'plami
Qonuniy sirt	hosil bo'lish jarayoni biror qonunga asoslangan sirt
Qonunsiz egri chiziq	o'z harakati bilan biror qonunga bo'ysunmagan nuqtalar to'plami
Qonunsiz sirt	hosil bo'lish jarayoni biror qonunga asoslanmagan sirt

R

Ravon egri chiziq	hamma nuqtalariga qarama-qarshi yo‘nalgan yarim urinmalar bir to‘g‘ri chiziqda yotuvchi egri chiziq
Rostlovchi tekislik	fazoviy egri chiziqning biror nuqtasiga urinma va binormal orqali o‘tuvchi tekislik

S

Siklik sirt	markazlari egri chiziqli yo‘naltiruvchi bo‘ylab harakatlanuvchi aylana hosil qilgan sirt
Sinish nuqtasi	egri chiziqning bu nuqtasida yarim urinmalar o‘zaro burchak hosil qiladi
Sirt	biror chiziq yoki sirtning fazoda uzluksiz harakatlanishi natijasida hosil bo‘lgan geometrik shakl
Sirt kesim yuzasi	biror sirt bilan tekislikning kesishishidan hosil bo‘lgan shakl
Sirt yasovchisi	o‘z harakati bilan sirtni hosil qiluvchi chiziq yoki sirt
Sirt yo‘naltiruvchisi	sirt yasovchisining harakatlanishini belgilovchi chiziq
Sirtga urinma tekislik	sirtning biror nuqtasidan o‘tgan ikki kesim chizig‘iga o‘tkazilgan urinmalardan tashkil bo‘lgan tekislik
Sirtlarning o‘zaro kesishish chizig‘i	ikki kesishuvchi sirtlar uchun umumiy bo‘lgan nuqtalarning geometrik o‘rni
Sirtning sinfi	biror to‘g‘ri chiziqdan sirtga o‘tkazilgan urinma tekisliklarning eng ko‘p soni bilan aniqlanadi
Sirtning normali	sirtning biror nuqtasida unga o‘tkazilgan urinma tekislikka perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq
Sirtning tartibi	biror to‘g‘ri chiziq bilan sirt kesishgan nuqtalarning eng ko‘p soni bilan aniqlanadi

T

Tekis egri chiziq	hamma nuqtalari bitta tekislikda yotgan egri chiziq
Tekis parallel ko‘chirish sirti	yasovchisi o‘z harakati davomida o‘z-o‘ziga parallel bo‘lib qoladigan sirt
Tekis parallel ko‘chirish usuli	aylantirish usulining xususiy holi bo‘lib, bunda aylanish o‘qining holati ko‘rsatilmaydi
Tekislikka perpendikulyar to‘g‘ri chiziq	tekislikdagi o‘zaro kesishuvchi ikki to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar to‘g‘ri chiziq
Tekisliklar dastasi	bir to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi tekisliklar to‘plami
Tekislikning eng katta og‘ish chizig‘i	tekislikka tegishli bo‘lib, uning gorizontallari va frontallariga yoki profillariga perpendikulyar to‘g‘ri chiziq

Tekislikning frontali	tekislikda yotgan va V ga parallel to‘g‘ri chiziq
Tekislikning gorizontali	tekislikda yotgan va H ga parallel to‘g‘ri chiziq
Tekislikning izlari	tekislikning proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishgan chiziqlari
Tekislikning profili	tekislikda yotgan va W ga parallel to‘g‘ri chiziq
Tetraedr	yoqlari to‘rt muntazam uchburchakdan iborat piramida
To‘g‘ri burchakli proyeksiyalash	proyeksiyalovchi nurlarni proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar holda proyeksiyalash
To‘g‘ri burchakli uchburchak usuli	kesmaning proyeksiyalari bo‘yicha uning haqiqiy uzunligini va proyeksiyalar tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklarini aniqlashda qo‘llaniladigan usul. Uchburchakning bir kateti sifatida kesmaning proyeksiyasi, ikkinchi kateti sifatida esa kesma uchlarining shu tekislikdan uzoqliklar ayirmasi olinadi
To‘g‘ri burchakning proyeksiyalanish xususiyati	to‘g‘ri burchakning bir tomoni tekislikka parallel bo‘lib, ikkinchi tomoni unga perpendikulyar bo‘lmasa, uning proyeksiyasi ham to‘g‘ri burchak bo‘ladi
To‘g‘ri chiziqning izlari	to‘g‘ri chiziqning proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishgan nuqtalari
To‘g‘ri chiziqning tekislikka parallelligi	tekislikda yotgan biror to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq
To‘g‘ri kanoid	bitta yo‘naltiruvchisi xos egri chiziq, ikkinchisi to‘g‘ri chiziq va uchinchisi xosmas to‘g‘ri chiziq bo‘lgan chiziqli sirt
To‘g‘ri silindroid	ikki yo‘naltiruvchisi xos egri chiziq, uchinchisi esa xosmas to‘g‘ri chiziq bo‘lgan chiziqli sirt
Tors	fazoviy egri chiziqqa urinuvchi to‘g‘ri chiziqlar hosil qilgan yoyiluvchi chiziqli sirt
Transsendent egri chiziq	transsendent tenglama bilan ifodalangan egri chiziq
Transsendent sirt	transsendent tenglamalar bilan ifodalangan sirt
Triangulyatsiya	sirkul yordamida uchburchakdan foydalanib yasash usuli
Trubasimon sirt	egri chiziqli yunaltiruvchisi bo‘yicha unga perpendikulyar harakatlanuvchi yoki doimiy radiusga ega aylana hosil qilgan sirt
U	
Umumiy vaziyatdagi tekislik	proyeksiyalar tekisliklarining birortasiga ham parallel yoki perpendikulyar bo‘lmagan tekislik
Umumiy vaziyatdagi to‘g‘ri chiziq	proyeksiyalar tekisliklarining birortasiga ham parallel yoki perpendikulyar bo‘lmagan to‘g‘ri chiziq

V

Vint chizig‘i	silindr yoki konus sirtida bir me’yorda aylanma va ilgarilanma harakat qiluvchi nuqtaning trayektoriyasi
Vint sirti	biror chiziq yoki sirtning vintsimon harakati natijasida hosil bo‘lgan sirt

X

Xatolar egri chizig‘i	egri chiziqni kesuvchi vatarlarning o‘rta nuqtalaridan o‘tgan egri chiziq
Xosmas nuqta	to‘g‘ri chiziqning cheksiz uzoqlashgan nuqtasi
Xosmas tekislik	uch o‘lchamli fazoning cheksiz uzoqlashgan nuqtalar to‘plami
Xosmas to‘g‘ri chiziq	tekislikning cheksiz uzoqlashgan chizig‘i
Xususiy vaziyatdagi tekislik	proyeksiyalar tekisliklarining biriga parallel yoki perpendikulyar bo‘lgan tekislik
Xususiy vaziyatdagi to‘g‘ri chiziq	proyeksiyalar tekisliklarining biriga parallel yoki perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq

Yo

Yopishma tekislik	fazoviy egri chiziq ustida yotgan nuqta va unga cheksiz yaqin bo‘lgan ikki nuqtadan o‘tgan tekislik
Yordamchi proyeksiyalash	asosiy proyeksiyalash yo‘nalishiga qo‘shimcha ravishda bajariladigan proyeksiyalash
Yoyilmaydigan sirt	cheksiz yaqin qo‘shni ikki yasovchisi o‘zaro ayqash bo‘lgan chiziqli sirt
Yoyiluvchi sirt	cheksiz yaqin qo‘shni ikki yasovchisi o‘zaro kesishgan chiziqli sirt

Ch

Chiziq	nuqtaning tekislik yoki fazodagi harakatlanishtidan qoldirgan trayektoriyasi
Chiziqli sirt	uchta fazoviy egri chiziqni bir vaqtda kesib harakatlanuvchi to‘g‘ri chiziq hosil qilgan sirt
Chorak	ikki o‘zaro perpendikulyar tekislikning fazoni 4 ta bo’lakka bo’lishi

O‘

O‘zaro parallel tekisliklar	bir tekislikda yotgan va o‘zaro kesishgan ikki chiziq ikkinchi tekislikda yotgan va o‘zaro kesishuvchi ikki to‘g‘ri chiziqqa mos ravishda parallel bo‘lgan tekisliklar
O‘zaro perpendikulyar tekislik	bir tekislikda yotgan to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan tekislik yoki tekislikka perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi tekislik

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Alijonov O.I., Xolmurzaev A.A. Muhandislk grafikasi. – Farg'ona, Texnika nashriyoti, 2005.

2. Ismatullaev R. Chizma geometriya. –T., 2003.

3. Murodov Sh. Gidrotexniklar uchun chizma geometriya. –T.: O'qituvchi, 1991.

4. Murodov Sh., Hakimov L., Odilov P., Shomurodov A., Jumaev M. Chizma geometriya kursi. – T.: O'qituvchi, 1988.

5. Xorunov R. Chizma geometriya kursi. –T.: O'qituvchi, 1995.

6. Бубенников А.В. Начертательная геометрия. – М.: Высшая школа, 1985.

7. Гордон В.О. Семенцов-Огиевский М.А. Начертательная геометрия. Под ред. Н.Н. Крылова.– М.: Высшая школа, 2000.

8. Михайленко В.Е., Пономарев А.М. Инженерная графика: Учебник. –Киев: Высшая школа, 1990.

9. Фролов С.А. Начертательная геометрия. –М.: Машиностроение, 1983.

10. Чекмарев А.А. Начертательная геометрия и черчение. –М.: Высшая школа, 1999.

MUNDARIJA

So'zboshi.....3

Kirish

1-§. Chizma geometriya fanining maqsadi va vazifalari.....6
2-§. Asosiy geometrik tushunchalar.....7
3-§. Geometrik shakllarda o'zaro bir qiymatli moslik.....9

I bob. Tasvirlash usullari

1.1-§. Umumiy ma'lumotlar.....10
1.2-§. Markaziy proyeksiyalash usuli va uning xossalari.....10
1.3-§. Parallel proyeksiyalash usuli va uning xossalari.....13
1.4-§. To'g'ri burchakli proyeksiyalash.....15

II bob. Geometrik shakllarning to'g'ri burchakli proyeksiyalari

2.1-§. Nuqtaning ikki o'zaro perpendikulyar tekislikdagi proyeksiyalari.....18
2.2-§. Nuqtaning uchta tekislikdagi proyeksiyalari.....24
2.3-§. Nuqtaning to'g'ri burchakli koordinatalari va proyeksiyalari orasidagi bog'lanish.....31

III bob. To'g'ri chiziqning ortogonal proyeksiyalari

3.1-§. Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziqning ortogonal proyeksiyalari.....35
3.2-§. Xususiy vaziyatdagi to'g'ri chiziqlarning proyeksiyalari.....37
3.3-§. To'g'ri chiziq kesmasini berilgan nisbatda bo'lish.....41
3.4-§. To'g'ri chiziqning izlari.....41
3.5-§. Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziq kesmasining haqiqiy uzunligini va proyeksiyalar tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklarini aniqlash.....44
3.6-§. Ikki to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyatlari.....45
3.7-§. To'g'ri burchakning proyeksiyalanish xususiyatlari.....48
3.8-§. Chizmalarda ko'rinishlikni aniqlash.....49

IV bob. Tekislik va uning ortogonal proyeksiyalari

4.1-§. Tekislikning berilishi.....52
4.2-§. Tekislikning izlarini yasash.....54
4.3-§. Tekisliklarning proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan vaziyatlari.....55
4.4-§. Tekislik va to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyatlari.....58
4.5-§. Tekislikning bosh chiziqlari.....61
4.6-§. To'g'ri chiziq va tekisliklarning o'zaro parallelligi.....64
4.7-§. Tekisliklarning o'zaro parallelligi.....66
4.8-§. Tekisliklarning o'zaro kesishuvi.....68
4.9-§. To'g'ri chiziqning tekislik bilan kesishishi.....72

4.10-§. To‘g‘ri chiziqning tekislikka perpendikulyarligi....75
4.11-§. Tekisliklarning o‘zaro perpendikulyarligi....81
4.12-§. To‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchakni aniqlash....84
4.13-§. Ikki tekislik orasidagi burchak....85

V bob. Ortogonal proyeksiyalarni qayta tuzish usullari
5.1-§. Umumiy ma’lumotlar....88
5.2-§. Tekis-parallel harakatlantirish usuli....89
5.3-§. Aylantirish usuli....94
5.4-§. Proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usuli....105

VI bob. Ko‘pyoqliklar
6.1-§. Umumiy ma’lumotlar....114
6.2-§. Ko‘pyoqliklarning tekislik bilan kesishishi....117
6.3-§. Ko‘pyoqlikning to‘g‘ri chiziq bilan kesishishi....120
6.4-§. Ko‘pyoqliklarning o‘zaro kesishishi....123

VII bob. Egri chiziqlar
7.1-§. Umumiy ma’lumotlar....126
7.2-§. Tekis egri chiziqlar. Ularga urinma va normallar o‘tkazish....127
7.3-§. Tekis egri chiziqning egriligi....129
7.4-§. Evolyuta va evolventa....130
7.5-§. Tekis egri chiziq nuqtalarining klassifikatsiyasi....130
7.6-§. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar....132
7.7-§. Fazoviy egri chiziqlar. Ularga urinma va normallar o‘tkazish....132
7.8-§. Fazoviy egri chiziqlarning tabiiy koordinatalarda berilishi....134
7.9-§. Fazoviy egri chiziqning uzunligini uning to‘g‘ri burchakli proyeksiyalariga asosan aniqlash....136
7.10-§. Vint chiziqlari....137

VIII bob. Sirtlarning hosil bo‘lishi va tekis chizmada berilishi
8.1-§. Umumiy ma’lumotlar....141
8.2-§. Sirtlarning berilish usullari....142
8.3-§. Aylanish sirtlari....145
8.4-§. Ikkinchi tartibli umumiy sirtlar....154
8.5-§. Chiziqli sirtlar....157
8.6-§. Yoyilmaydigan chiziqli sirtlar....159
8.7-§. Yoyiladigan chiziqli sirtlar....165
8.8-§. Siklik sirtlar....171

IX bob. Sirtlarning tekislik va to‘g‘ri chiziq bilan kesishishi
9.1-§. Umumiy ma’lumotlar....173
9.2-§. Sirtlarning proyeksiyalovchi tekisliklar bilan kesishishi....173
9.3-§. Konus kesimlari....178
9.4-§. Sirtlarning to‘g‘ri chiziq bilan kesishishi....180
9.5-§. Sirtlarning umumiy vaziyatdagi tekisliklar bilan kesishishi....185
9.6-§. Sirtlarning to‘g‘ri chiziq va tekislik bilan kesishuvini yasashda ba’zi qo‘shimcha usullar....191

X bob. Sirtlarning yoyilmalarini yasash
10.1-§. Umumiy ma'lumotlar....193
10.2-§. Ko'pyoqliklarning yoyilmalari....194
10.3-§. Silindrik sirtlarning yoyilmalarini yasash....198
10.4-§. Konus sirtlarning yoyilmalarini yasash....200
10.5-§. Qaytish qirrali sirtlarning yoyilmalarini yasash....203
10.6-§. Yoyilmaydigan sirtlarning taqribiy yoyilmalarini yasash....204

XI bob. Sirtga urinma tekisliklar
11.1-§. Umumiy ma'lumotlar....210
11.2-§. Urinma tekislikning chizmada berilishi....211
11.3-§. Sirtning ixtiyoriy nuqtasi orqali urinma tekislik o'tkazish....212
11.4-§. Sirt tashqarisidagi nuqta orqali urinma o'tkazish....213
11.5-§. Berilgan to'g'ri chiziq orqali urinma tekislik o'tkazish....215
11.6-§. Berilgan to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan urinma tekislik o'tkazish....216
11.7-§. Berilgan tekislikka parallel bo'lgan urinma tekislik o'tkazish....216
11.8-§. Sirt proyeksiyalarining ocherklarini yasash....218

XII bob. Sirtlarning o'zaro kesishishi
12.1-§. Umumiy ma'lumotlar....220
12.2-§. Sirtlar kesishish chizig'ini yasashning umumiy algoritmi....221
12.3-§. Umumiy o'qqa ega bo'lgan aylanish sirtlarining o'zaro kesishishi....221
12.4-§. O'qlari umumiy nuqtaga ega bo'lgan aylanish sirtlarining o'zaro kesishuvi. Yordamchi sferalar usuli....223
12.5-§. Sirtlarning o'zaro kesishish chizig'ini yasash. Kesuvchi tekisliklar dastasi usuli....228
12.6-§. O'qlari bir tekislikda yotmaydigan aylanish sirtlarining o'zaro kesishishi. Parallel kesuvchi tekisliklar usuli....239
12.7-§. Ikkinchi tartibli sirtlarning o'zaro kesishishidagi maxsus hollar....243
12.8-§. Ikkinchi tartibli sirtlarning o'zaro kesishishiga oid teoremalar....248

XIII bob. Aksonometrik proyeksiyalar
13.1-§ Umumiy ma'lumotlar....253
13.2-§. Aksonometrik o'qlar va ular bo'yicha o'zgarish koeffitsientlari....254
13.3-§. Aksonometriyaning asosiy teoremasi....256
13.4-§. O'zgarish koeffitsientlari va proyeksiyalash burchagi orasidagi o'zaro bog'lanish....257
13.5-§. To'g'ri burchakli aksonometriyada izlar uchburchagi va aksonometriya o'qlari....259
13.6-§. Aylananing aksonometriyasi....261
13.7-§. To'g'ri burchakli standart aksonometriyalar....264
13.8-§. Qiyshiq burchakli standart aksonometriyalar....267
13.9-§. Aylanish sirtlarining ocherklarini aksonometriyada yasash....269
13.10-§. Aksonometriyada pozitsion masalalarni yechish....271

Qisqacha tarixiy ma'lumotlar....276
Asosiy geometrik o'rinlar....279
Atama va tushunchalar izohli lug'ati....282

Foydalanilgan adabiyotlar....291

Sh.Murodov, L.Hakimov, A.Xolmurzayev,
M.Jumayev, A. To'xtayev

CHIZMA GEOMETRIYA

Oliy o'quv yurtlari talabalari uchun darslik

Toshkent — 2006

«Iqtisod — Moliya» nashriyoti

Muharrir	*M.H.Usmonova*
Texnik muharrir	*T. I. Smirnova*
Musahhiha	*M.Sa'dullayeva*
Kompyuterda sahifalovchi	*Sh. Hazratova*

Bosishga ruxsat etildi 28.07.2006. Bichimi 60x90$^{1}/_{16}$. Ofset bosma.
Shartli bosma tabog'i 18,0. Hisob-nashriyot tabog'i 18,5. Adadi 3000 nusxa.
Buyurtma № 2006–18/31. Bahosi shartnoma asosida.

515
A-37

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA
MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

**Abu Rayhon Beruniy nomidagi
Toshkent davlat texnika universiteti**

T.D. Azimov

CHIZMA GEOMETRIYA

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi tomonidan oliy o‘quv yurtlari talabalari uchun o‘quv qo‘llanma sifatida tavsiya etilgan

Toshkent
«IQTISOD-MOLIYA»
2008

БИБЛИОТЕКА
... ТИИ и ЛП
№ 4525

22.151.3

Taqrizchilar: **T. Rixsiboyev** – TTYSI "Chizma geometriya va muhandislik grafikasi" kafedrasi t.f.n., dotsent;
N.A. Nadirova – TDTU "Chizma geometriya va muhandislik grafikasi" kafedrasi katta o'qituvchisi

Azimov T.D.

A37 **Chizma geometriya.** Oliy texnika o'quv yurtlari uchun o'quv qo'llanma. / T.D. Azimov; O'zbekiston Respublikasi oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi, Abu Rayhon Beruniy nomidagi Toshkent davlat texnika universiteti. – T.: IQTISOD-MOLIYA, 2008. - 164 b.

O'quv qo'llanmada chizma geometriya fanining amaliy mashg'ulotlari to'plami o'zbek tilida keltirilgan bo'lib, unda nuqta, to'g'ri chiziq, tekislik, ikki tekislik, to'g'ri chiziq va tekislik, sirtlar, tekisliklar bilan sirtlar kesishuvi, ikki sirt kesishuvi, proyeksiyalarni qayta tuzish, burchaklarni aniqlash, nazorat yozma ishga doir masalalarni yechish, shuningdek, olimpiada masalalaridan namunalar, mustaqil ta'lim uchun masalalar berilgan.

O'quv qo'llanma texnika oliy o'quv yurtlari bakalavrlari uchun tayyorlangan bo'lib, undan chizma geometriya mutaxassislari ham foydalanishlari mumkin.

BBK 22.151.3я73

ISBN 978-9943-13-075-3

© «IQTISOD-MOLIYA», 2008
© Azimov T.D., 2008

So‘zboshi

Chizma geometriya umumtexnikaviy fan bo‘lib, u talabalarga umummuhandislik va maxsus texnikaviy fanlarni o‘rganishlarida zamin bo‘ladi.

Istalgan bir yangi detal, mashina, mexanizmlarni tayyorlash uchun ularning loyihasini, ya’ni chizmasini chizish kerak bo‘ladi. Hozirgi vaqtda texnika yo‘nalishida ta’lim olayotgan bakalavrlar, bugungi kunni talabiga javob beradigan darajada grafik tayyorgarlikka ega bo‘lishlari zarur. Ular chizmalar yordamida o‘zlarini ijodiy o‘ylarini, texnikaviy fikrlarini bayon qilib, amaliyotga tatbiq qila olishlari kerak. «Chizma geometriya» fanidan amaliy mashg‘ulotlar to‘plami o‘quv qo‘llanmasi kafedra professor – o‘qituvchilari tomonidan o‘zbek va rus tillarida o‘qilayotgan ma’ruzalar matniga tegishli 19 ta amaliy mashg‘ulotlarni o‘tkazishga mo‘ljallangan.

O’quv qo‘llanma tarkibiga “Chizma geometriya” fanining barcha mavzulari bo‘yicha uslubiy jihatdan masalalar kiritilgan bo‘lib, hozirgi zamon yangi pedagogik texnologiyalari asosida “Nuqta”, “To‘g‘ri chiziq” mavzulariga test savollari berilgan. Shuningdek, ikki oraliq baholash uchun ijodiy yozma nazorat ishi tuzilgan. Shu bilan birga, yakuniy yozma ish savollaridan namunaviy masalalarning yechimi va algoritmi, Respublikamizda o‘tkaziladigan olimpiada masalalaridan namunalar, mustaqil ta’lim uchun bir qator masalalar kiritilgan.

O‘quv qo‘llanmaning chizma geometriyadan masalalar yechishga oid uslubiy ko‘rsatmalari va talablari

Mazkur o‘quv qo‘llanma asosan chizma geometriyadan o‘tkaziladigan amaliyot darslari uchun tuzilganligi sababli talabalardan:

1. Masalalar yechish uchun alohida katakli daftar tutishlari va shu daftarning har bir betida ikkitadan masala yechishni rejalashtirishlari;

2. Har bir masalaning grafik berilishini nomlash, ularning matnli shartlari, yechish algoritmlarini batafsil bayon qilishlari;

3. Masalalarni grafik aniq bajarish uchun chizmachilik o‘quv qurollari - **30°, 45°** li uchburchaklik chizg‘ichlar, sirkul, lekalolar, shuningdek, masalalarni rangli grafik bezash uchun havo rang qalam – grafik berilishi uchun, qora – yasash chiziqlari uchun, qizil – javobi uchun ishlatilishi;

4. Masalalarning grafik berilishi va ularni yechish jarayonida chiziq turlaridan:

a) uzluksiz asosiy tutash yo‘g‘on chiziqlar – **S=0,5 ÷ 1,4 mm** - masalaning grafik berilishi, javobi, ko‘rinuvchi kontur va kesishish chiziqlari uchun, chizma formatiga qarab;

b) shtrix chiziqlar - **S/3 ÷ S/2** - ko‘rinmas kontur va ko‘rinmas kesishish chiziqlari uchun;

v) uzluksiz ingichka tutash chiziqlar – **S/4** - bog‘lovchi va yasash chiziqlari uchun qo‘llanishi talab qilinadi.

Chizma geometriya epyurida yechiladigan har bir masala o‘zining shu epyurida fazoviy geometrik xususiyatlarini aniq ko‘rishini talab qilishi bois talabalardan:

1) har bir masalani avvalo fazoda yechishni, ya’ni:

a) masalaning shartiga ko‘ra epyurida berilgan geometrik shakllar elementlarining fazoviy shakllari va fazodagi joylanishlarini tasvirlashni ko‘z oldiga keltira bilish;

b) masalalarni fazoda yechish tartibini aniqlash va fazoviy yechimini ko‘rsatish;

v) fazoviy yechim asosida masalalarning epyurdagi yechimini ishlab chiqish talab qilinadi.

O‘quv qo‘llanmadagi masalalarni yechish uchun ma’ruzalar va chizma geometriya darsliklaridan ma’lum bo‘lgan quyidagi asosiy topshiriqlarni bajarishlari zarur:

1. To‘g‘ri chiziqning haqiqiy uzunligini topish;
2. To‘g‘ri chiziq izlarini aniqlash;
3. Tekislikda umumiy vaziyatdagi to‘g‘ri chiziq, gorizontal, frontal o¢tkazish;
4. Tekislikda nuqta tanlash;
5. Nuqta orqali umumiy vaziyatdagi tekislik o‘tkazish;
6. To‘g‘ri chiziq orqali gorizontal, frontal proyeksiyalovchi tekisliklar o‘tkazish;
7. Ikki parallel yoki kesishuvchi chiziqlar bilan berilgan tekisliklarning izlarini o‘tkazish;
8. Berilgan nuqta orqali tekislikka parallel tekislik o‘tkazish;
9. Izlari bilan berilgan ikki tekislikning kesishish chizig‘ini yasash;
10. Berilgan nuqta orqali tekislikka parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazish;
11. Berilgan nuqta orqali to‘g‘ri chiziqqa parallel tekislik o‘tkazish;
12. To‘g‘ri chiziqning tekislik bilan uchrashish nuqtasini topish;
13. Nuqtadan tekislikka perpendikular o‘tkazish;
14. Nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqa perpendikular tekislik o‘tkazish;
15. Nuqtadan berilgan tekislikka perpendikular tekislik o‘tkazish;
16. Kesmaning haqiqiy uzunligini aylantirish usulidan foydalanib, topish;
17. Tekislikni proyeksiyalar tekisligiga joylashtirish;
18. Kesmaning haqiqiy uzunligini joylashtirish usulida topish;
19. Kesmaning haqiqiy uzunligini proyeksiyalar tekisligini almashtirish usulidan foydalanib, topish;
20. Chiziqli burchakning haqiqiy kattaligini aniqlash;
21. Ko‘pyoqlik sirtida nuqta tanlash;
22. Sirtlarni to‘g‘ri chiziq bilan uchrashish nuqtasini aniqlash;
23. Sirtlarni tekislik bilan kesishish chiziqlarini aniqlash;
24. Sirtlarning o‘zaro kesishish chizig‘ini aniqlashni har bir talaba puxta o‘zlashtirgan bo‘lishi talab qilinadi.

Chizma geometriya fanining amaliy darslarini puxta o‘zlashtirish uchun talabalar nazariy mavzularni o‘rganib, tahlil qilib kelishlari shart.

1,2-dars	Mavzu: Chizma normallari

1-dars . KXYAT standartlari:

GOST 2.301-68. Chizma formatlari.

GOST 2.302-68. Masshtablar.

GOST 2.303-68. Chiziqlar.

2-dars. GOST 2.304-81. Shriftlar.

Sarvaraqni bajarish.

ToshDTU

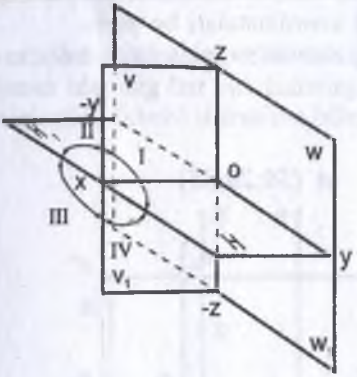
"Chizma geometriya va muhandislik grafikasi" kafedrasi

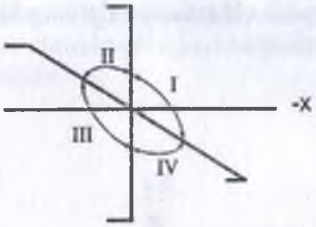
CHIZMALAR TO'PLAMI

Shifr: 35-05 NGF
Bajardi: Alimov K.A.

2007 – 2008 o'quv yili

3-dars	Mavzu: Nuqta



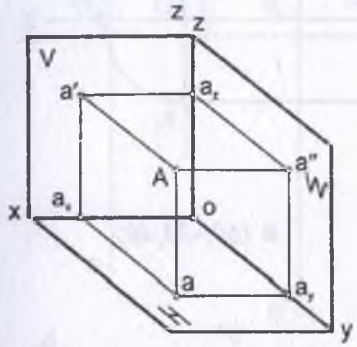


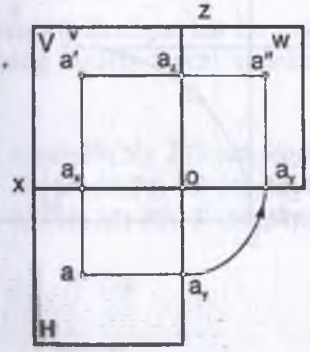
a - A'
a' - A"
a" - A"'

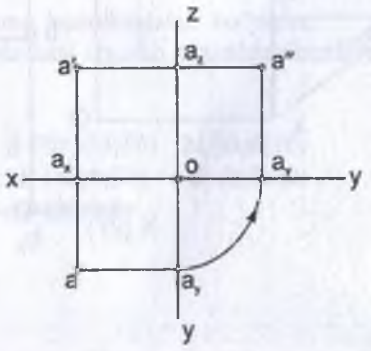
$|AH|=|Aa|=|a'a_x|=Z_A$

$|AV|=|Aa'|=|aa_x|=Y_A$

$|AW|=|Aa''|=|a'a_x|=X_A$



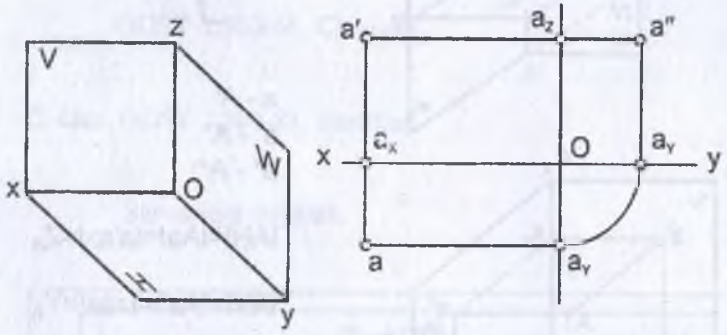




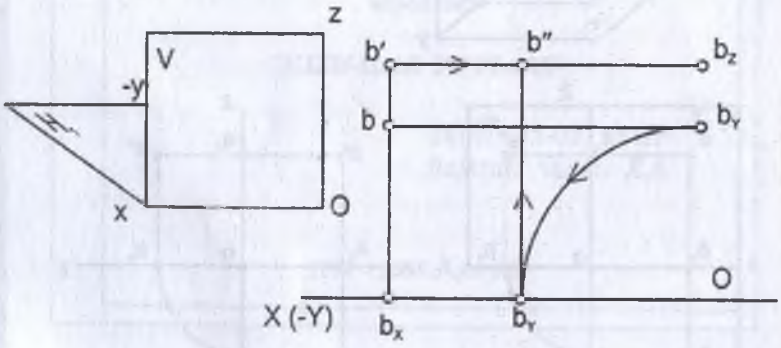
3-dars	Mavzu: Nuqta

1-misol. Berilgan har bir nuqtaning koordinatalari bo'yicha tegishli oktantlarda ularning fazoviy tasviri va tekis chizmasi chizilsin.

A (50;20;35)

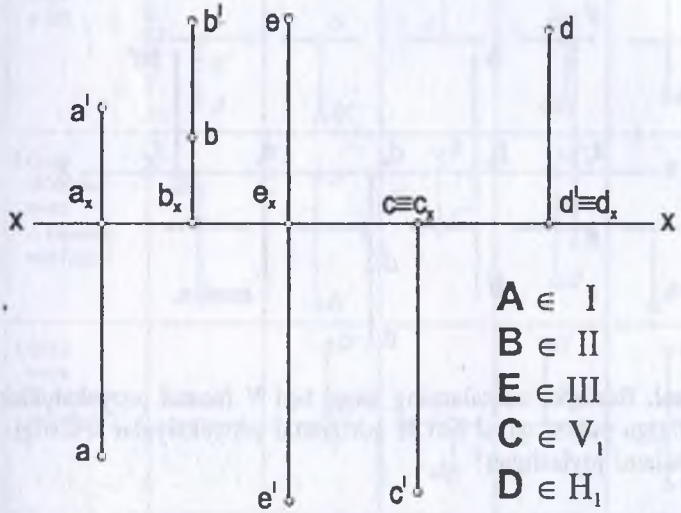


B (60;-30;40)



3-dars	Mavzu: Nuqta

2-misol. Nuqtalarning tekis chizmalarida berilgan proyeksiyalariga binoan ularning har biri fazoning qaysi choraklarida joylashganligi aniqlansin. Javobi simvolika bilan yozilsin.

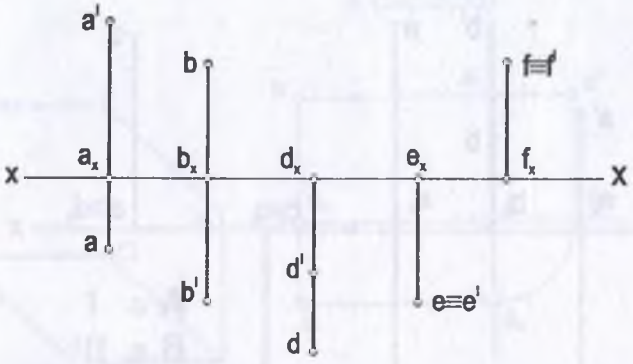


3-misol. Berilgan har bir nuqtaning koordinatalari bo'yicha, uning fazoviy tasviri va tekis chizmasi tegishli oktantda chizilsin.

A (40;20;30)	D (40;50;60)	S (50;-50;50)	M (0;0;20)
B (40;-60;30)	E (40;40;40)	P (40;0;50)	N (0;50;0)
C (40;-20;-50)	F (50;30;0)	Q (30;0;0)	

3-dars	Mavzu: Nuqta

4-misol. Nuqtalarning tekis chizmasida berilgan proyeksiyalariga binoan ularning har biri fazoning qaysi choragida joylashganligini chizmada berilgan nuqtalardan o'qing. Javobi simvolika bilan yozilsin.



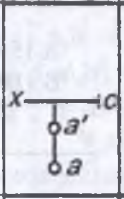
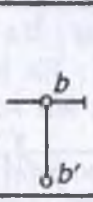
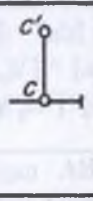
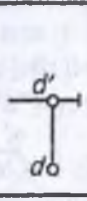
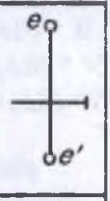
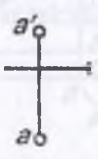
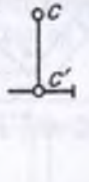
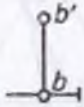
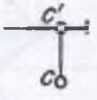
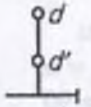
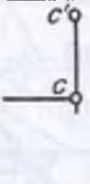
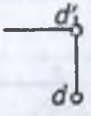
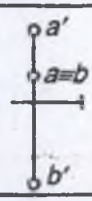
5-misol. Berilgan nuqtalarning qaysi biri **V** frontal proyeksiyalar tekisligiga yaqin, qaysi biri **H** gorizontal proyeksiyalar tekisligidan baland joylashgan?

6-misol. A (40,30,40) nuqta berilgan. Aniqlash kerak:

a) **A=S(v)(B) A** nuqtaga, **V** proyeksiya tekislikka nisbatan, simmetrik bo'lgan **B** nuqtaning tekis chizmasi;

в) **A=S(н)(C)**
c) **A=S[ox)(D)**
d) **A=S[oy)(E)**
e) **A=S(o)(F)**

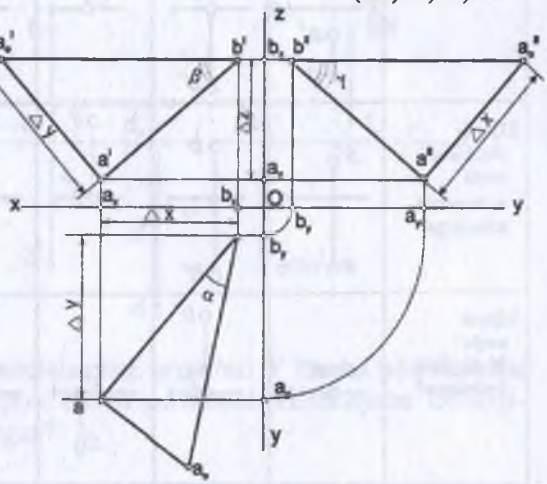
3-dars	Mavzu: Nuqta

Mavzu:	NUQTA			Variant:	0
Masalaning sharti	JAVOBLAR				
	1	2	3	4	5
1.Qaysi nuqta $\in$ H?					
2.Qaysi chizmada nuqta $\in$ bissektor tekisligiga?					
3.Qaysi nuqta W ga yaqin joylashgan?					
4.Qaysi chizmada nuqta $\in$ [Ox)?					
5.Qaysi chizmada nuqta $A=S_{[Ox]}(B)$?					

4-dars	Mavzu: To‘g‘ri chiziq

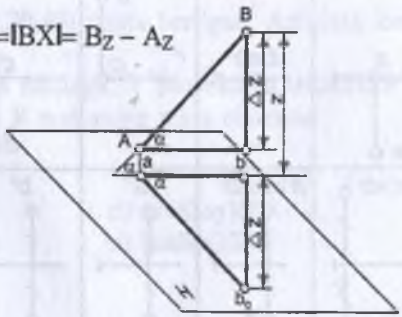
1 - misol. Koordinatalari bilan berilgan **AB** to‘g‘ri chiziq kesmasining epyuri chizilsin. **AB** kesmaning haqiqiy uzunligi va proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan og‘ish burchaklari aniqlansin.

A (55;60;10),
B (10;10;45)



[AC] II [ab]
|AC| = |ab|
[AB] ^ H = α
[AB] ^ [AC] = α
[ab] ^ [bb$_o$] = 90^0
|ab$_o$|= |AB|
[ab] ^ [ab$_o$] = α

$\Delta Z = |Bb| - |Aa| = |BX| = B_Z - A_Z$



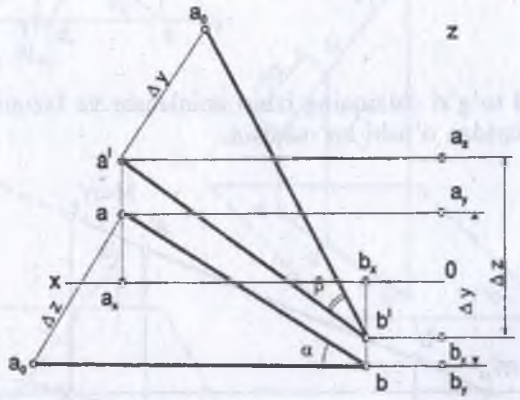
4-dars	Mavzu: To‘g‘ri chiziq

$\Delta Z = |b'b_z| - |a'a_z| = |b'c'| = b_z - a_z = 45 - 10 = 30$
$\Delta Y = |aa_y| - |bb_y| = |aa'| = a_y - b_y = 60 - 10 = 50$
$\Delta X = |a'a_z| - |b'b_z| = |a'c'| = a_x - b_x = 55 - 10 = 45$

$|aa_0| = |\Delta Z|$; $|a_0b| = |AB|$; $[a_0b] \wedge [ab] = \alpha; \alpha = (AB) \wedge H$
$|a'a'_0| = |\Delta Y|$; $|a'_0b'| = |AB|$; $[a'_0b'] \wedge [a'b'] = \beta; \beta = (AB) \wedge V$
$|a''a''_0| = |\Delta X|$; $|a''_0b''| = |AB|$; $[a''_0b''] \wedge [a''b''] = \gamma; \gamma = (AB) \wedge W$

2 - misol. Koordinatalari bilan berilgan **AB** to‘g‘ri chiziq kesmasining epyuri chizilsin. **AB** kesmaning haqiqiy uzunligi va proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan og‘ish burchaklari aniqlansin.

A (70;-20;40), B (20;30;-20)

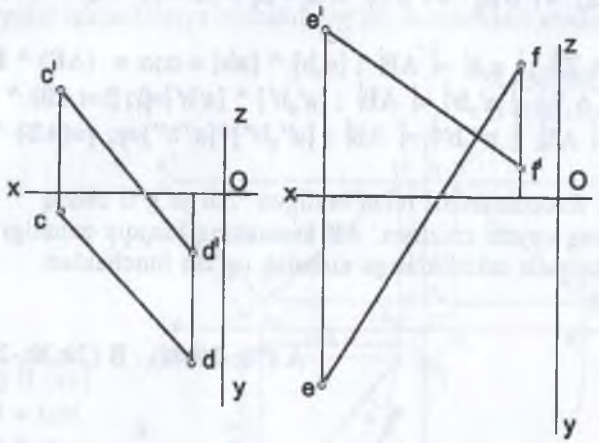


$\Delta X = a_z - b_z = 40 - (-20) = 60$
$|a_0b| = |AB|$; $[a_0b] \wedge [ab] = \alpha$; $\alpha = (AB) \wedge H$
$\Delta Y = a_y - b_y = -40 - 30 = -50$
$|a'_0b'| = |ABI|$; $[a'_0b'] \wedge [a'b'] = \beta$; $\beta = (AB) \wedge V$

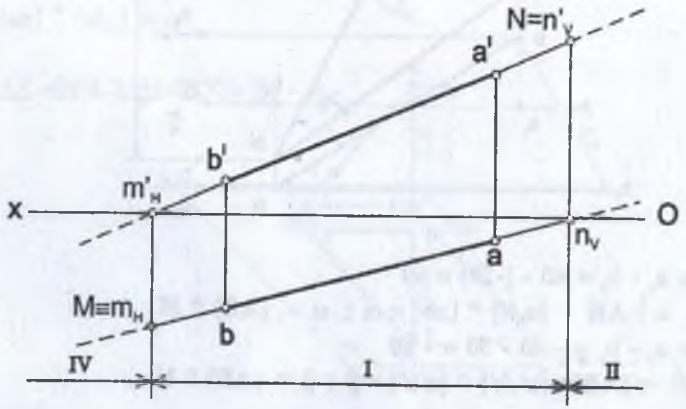
3. A (70;10;40), B (20;50;-20)

4. A (70;30;40), B (30;-10;20)

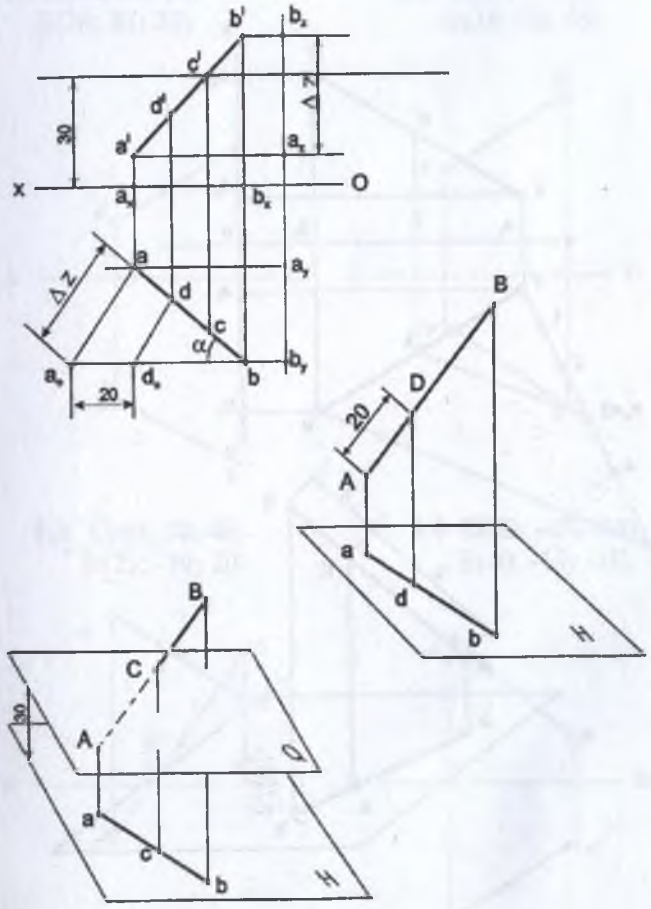
5. A (60;-30;50), B (10;-60;10)



6 - misol. AB to‘g‘ri chiziqning izlari aniqlansin va fazoning qaysi choraklaridan o‘tishi ko‘rsatilsin.



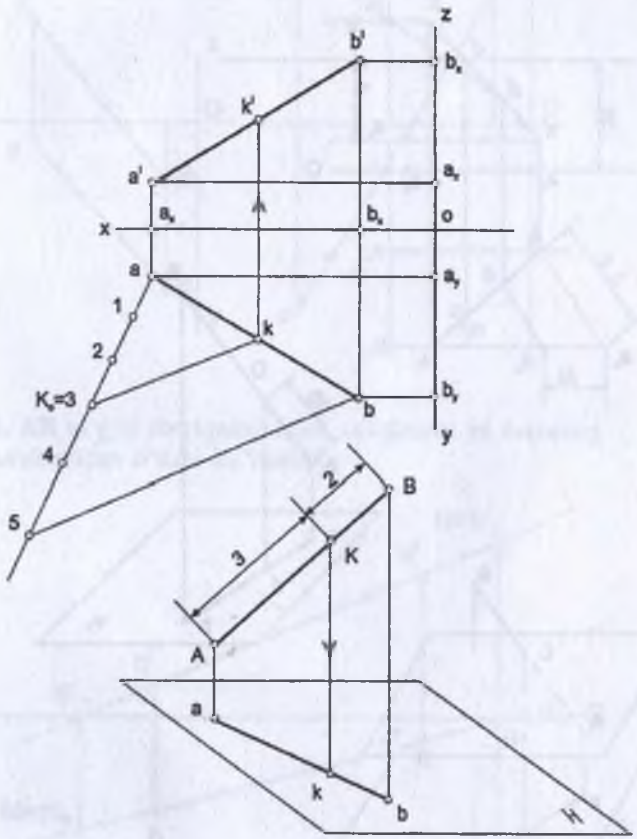
7 - misol. AB to‘g‘ri chiziqda H tekislikdan **30 mm** uzoqlikda yotuvchi C nuqta va A uchidan **20 mm** uzoqlikda yotuvchi D nuqta topilsin.



4-dars	Mavzu: To'g'ri chiziq

8- misol. AB kesmada uni $\frac{[AK]}{[KB]} = \frac{3}{2}$ nisbatda bo'luvchi **K** nuqta aniqlansin.

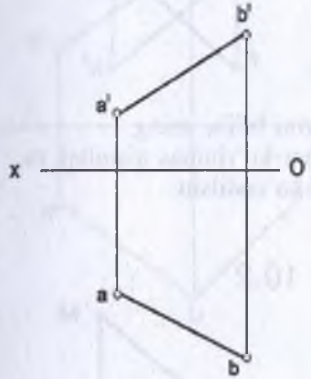
A(70; 10; 10) **B(20; 35; 40)**



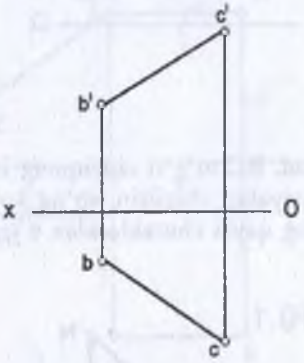
4-dars	Mavzu: To'g'ri chiziq

9-misol. AB to'g'ri chiziqning izlari aniqlansin va fazoning qaysi choraklaridan o'tishi ko'rsatilsin.

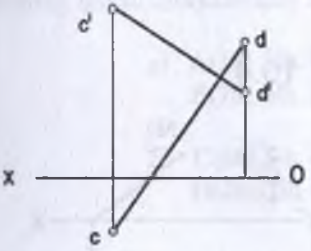
9.1 A(50; 50; 15)
B(20; 85; 35)



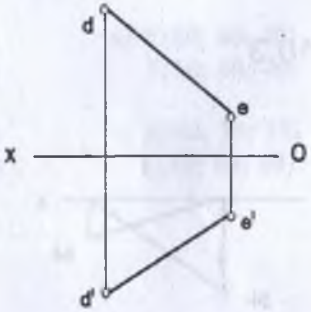
9.2 B(50; 15; 30)
C(10; 55; 55)



9.3 C(60; 20; 45)
D(25; -10; 20)



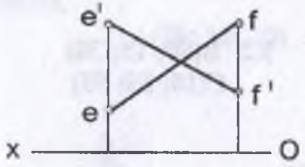
9.4 D(80; -45; -50)
E(40; -15; -25)



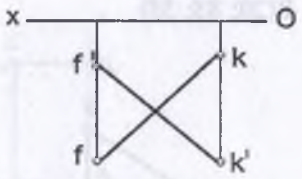
БИБЛИОТЕКА
Бух. ТИИ и ЛП
№ Ч 5225

4-dars	Mavzu: To'g'ri chiziq

9.5 E(90; -10; 35)
F(45; -35; 15)

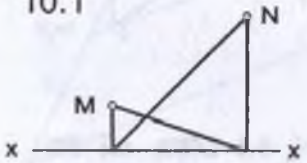


9.6 F(70; 30; -10)
K(25; 10; -35)

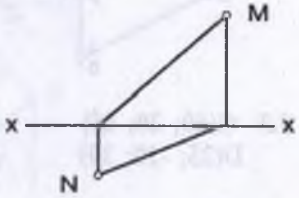


10-misol. BC to'g'ri chiziqning izlarini bilib, uning proyeksiyalari chizilsin, so'ng ko'rinar-ko'rinmas qismlari va fazoning qaysi choraklaridan o'tishi ko'rsatilsin.

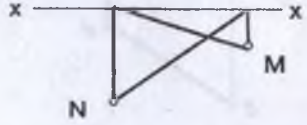
10.1



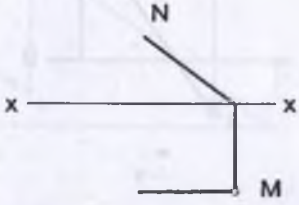
10.2



10.3

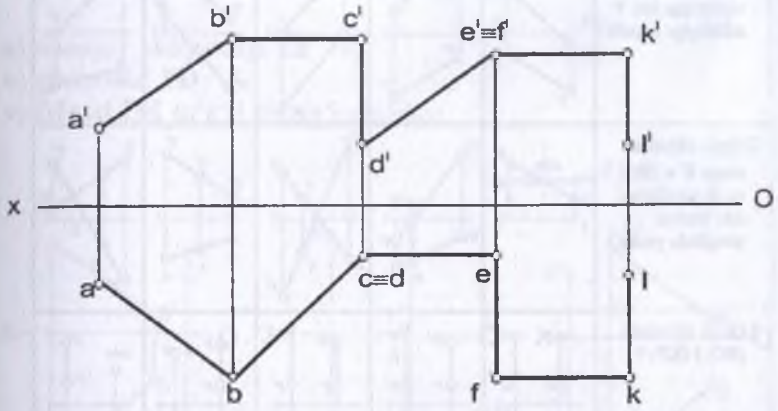


10.4



4-dars	Mavzu: To‘g‘ri chiziq

11- misol. Berilgan siniq chiziqning uzunligi topilsin va uning har bir kesmasi fazoda proyeksiyalar tekisligiga nisbatan qanday vaziyatda joylashganligi aniqlansin.



12- misol. Koordinatalari orqali berilgan to‘g‘ri chiziqning tekis chizmasi chizilsin, so‘ngra to‘g‘ri chiziqning izlari aniqlansin va fazoning qaysi choraklaridan o‘tishi ko‘rsatilsin.

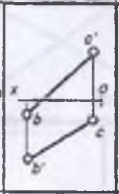
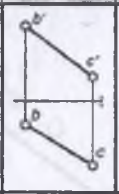
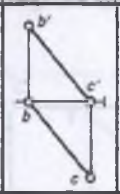
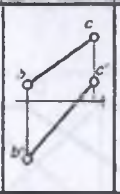
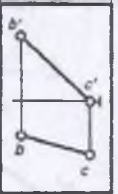
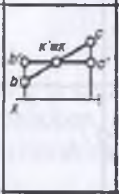
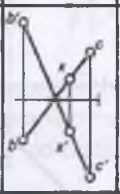
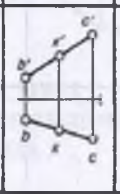
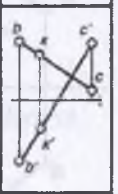
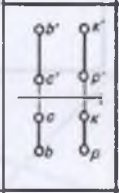
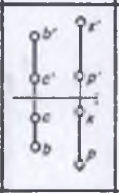
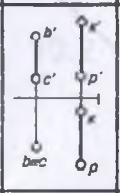
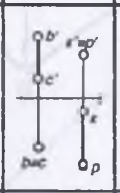
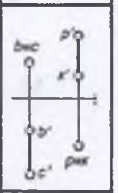
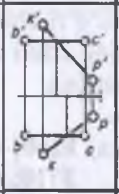
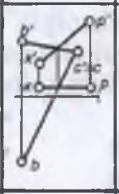
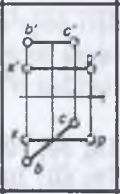
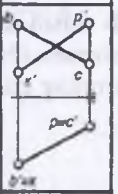
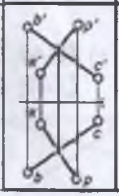
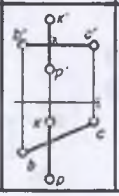
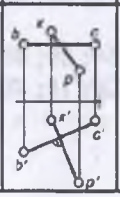
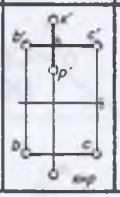
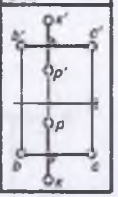
а) **A(10; 30; 70)**
B(70; 60; 20)

б) **C(60; 50; 40)**
D(20; 10; 40)

в) **E(60; 40; 20)**
F(10; 40; 40)

г) **K(40; 20; 35)**
L(40; 60; 60)

4-dars	Mavzu: To'g'ri chiziq

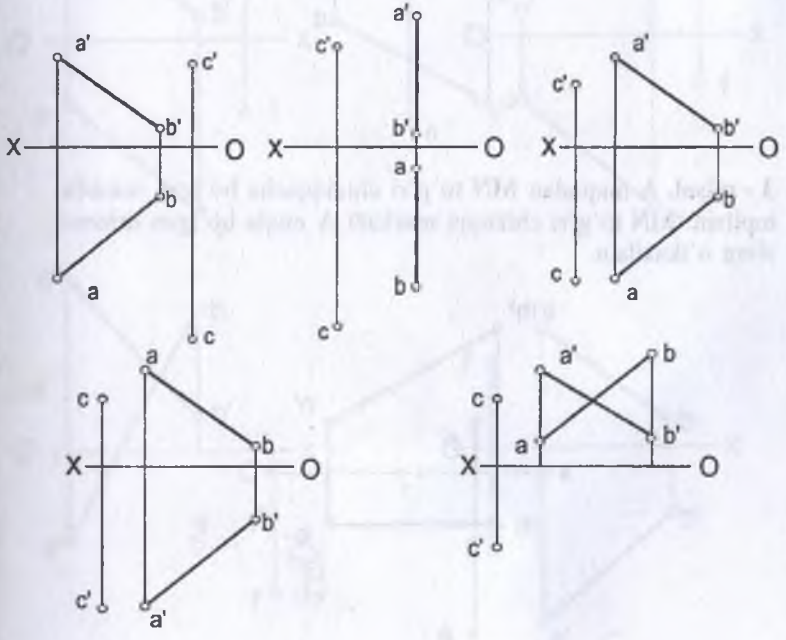
Mavzu:	TO'G'RI CHIZIQ			Variant:	0
Masalaning shartl	J A V O B L A R				
	1	2	3	4	5
1.Qaysi chizmada *BC* kesmaning uchlaridan biri V tekisligiga tegishli?					
2.Qaysi chizmada nuqta $K \in (BC)$ V va H tekisliklaridan baravar uzoqlikda yotadi?					
3.Qaysi chizmada $(BC) \parallel (KP)$?					
4.Qaysi chizmada $(BC) \cap (KP)$?					
5.Qaysi chizmada $(BC)\ ^{\wedge}\ (KP)=90°$?					

5-dars	Mavzu: Ikki to‘g‘ri chiziqning o‘zaro holatlari

Kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar

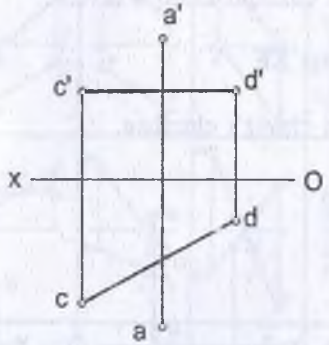
1 – misol. Berilgan **AB** to‘g‘ri chiziq va **C** nuqta. **C** nuqtadan o‘tgan va **AB** to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tuvchi:

a) umumiy vaziyatdagi **EF**
b) gorizontal **FD**
v) frontal **DK** to‘g‘ri chizig‘i chizilsin.

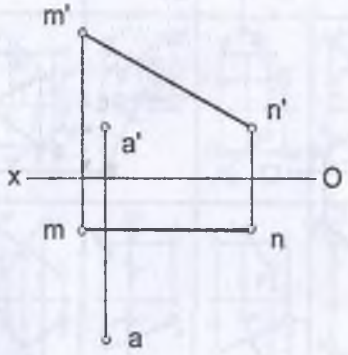


5-dars	Mavzu: Ikki to‘g‘ri chiziqning o‘zaro holatlari

2 - misol. A nuqta orqali CD to‘g‘ri chiziqqa perpendikular va uni kesib o‘tuvchi AB to‘g‘ri chiziq o‘tkazilsin. Algoritmi batafsil ko‘rilsin.



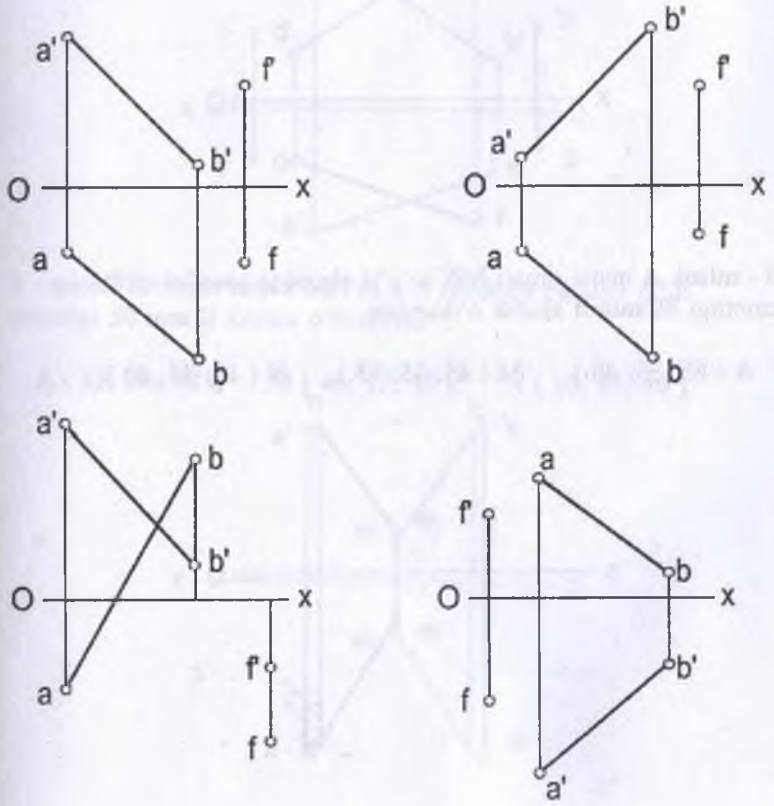
3 - misol. A nuqtadan MN to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa topilsin. MN to‘g‘ri chiziqqa markazi A nuqta bo‘lgan urinma sfera o‘tkazilsin.



5-dars	Mavzu: Ikki to‘g‘ri chiziqning o‘zaro holatlari

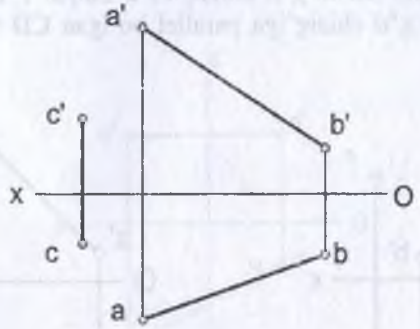
Parallel to‘g‘ri chiziqlar

1 - misol. Berilgan **AB** to‘g‘ri chiziq va **F** nuqta. **F** nuqtadan o‘tgan va **AB** to‘g‘ri chizig‘iga parallel bo‘lgan **CD** to‘g‘ri chiziq o‘tkazilsin.



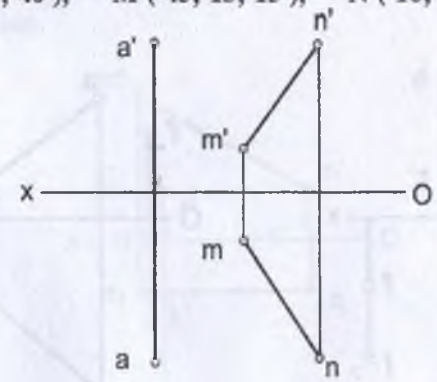
5-dars	Mavzu: Ikki to'g'ri chiziqning o'zaro holatlari

2-misol. C nuqta orqali H tekisligiga parallel va AB to'g'ri chiziqni kesib o'tuvchi CD to'g'ri chiziq o'tkazilsin.



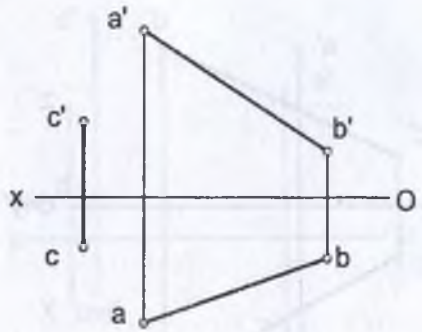
3 - misol. A nuqta orqali MN to'g'ri chiziqqa parallel qilib uzunligi **50 mm** li kesma o'tkazilsin.

A (65; 35; 40), M (45; 15; 15), N (10; 45; 40).



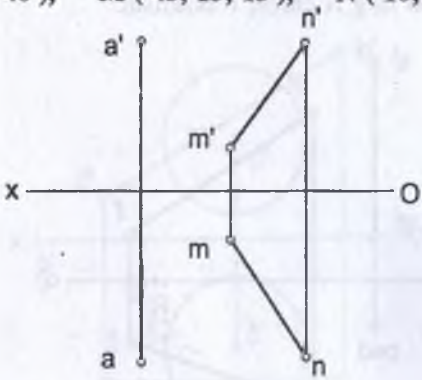
5-dars	Mavzu: Ikki to‘g‘ri chiziqning o‘zaro holatlari

2-misol. C nuqta orqali H tekisligiga parallel va AB to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tuvehi CD to‘g‘ri chiziq o‘tkazilsin.



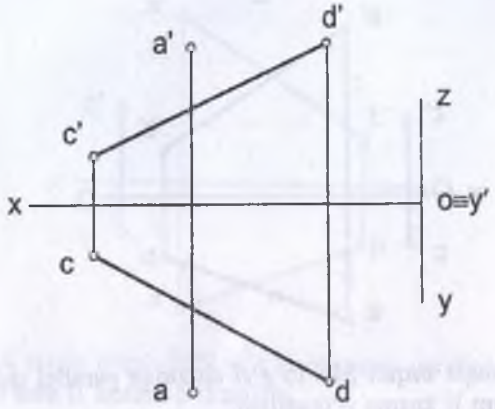
3 - misol. A nuqta orqali MN to‘g‘ri chiziqqa parallel qilib uzunligi **50 mm** li kesma o‘tkazilsin.

A (65; 35; 40), M (45; 15; 15), N (10; 45; 40).

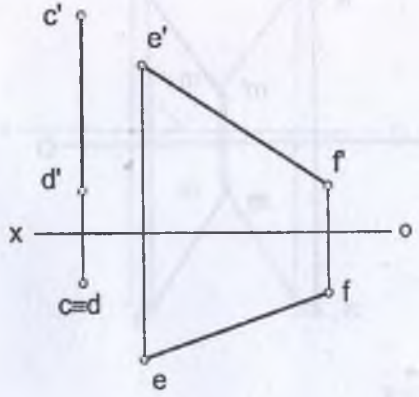


6-dars	Mavzu: Ikki to‘g‘ri chiziqning o‘zaro holatlari

1 - misol. A nuqta orqali berilgan **CD** to‘g‘ri chiziqni va **OY** proyeksiya o‘qini kesib o‘tuvchi **AB** to‘g‘ri chiziq o‘tkazilsin.

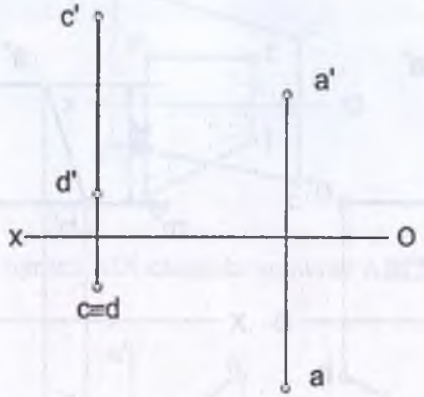


2 - misol. **CD** va **EF** to‘g‘ri chiziqlarga perpendikular va ularni kesib o‘tuvchi **AB** to‘g‘ri chiziq o‘tkazilsin.

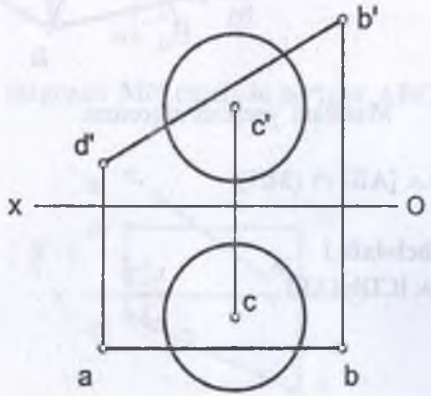


6-dars	Mavzu: Ikki to‘g‘ri chiziqning o‘zaro holatlari

3 - misol. **A** nuqta orqali **CD** to‘g‘ri chiziqdan **30 mm** uzoqlikda o‘tuvchi **AB** gorizontal chiziq o‘tkazilsin.

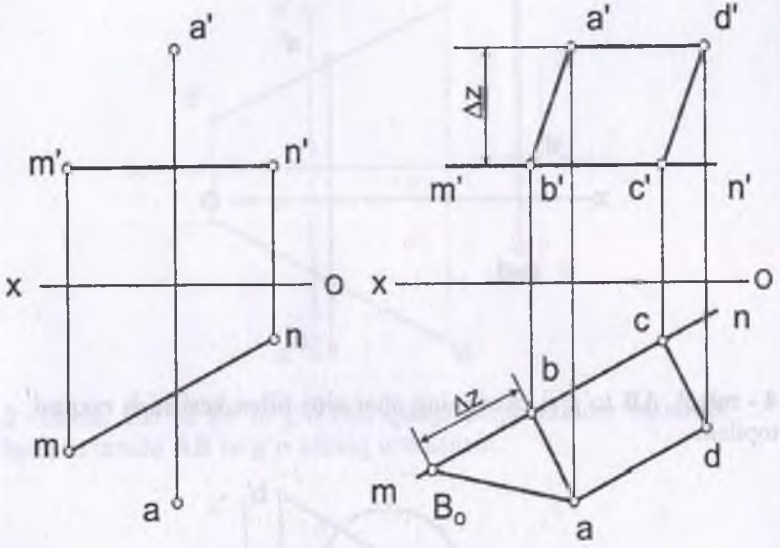


4 - misol. **AB** to‘g‘ri chiziqning shar sirti bilan kesishish nuqtasi topilsin.



6-dars	Mavzu: Kompleks masalalar

1 - misol. **BC** tomoni **MN** chiziqda yotuvchi **ABCD** kvadrat chizilsin.

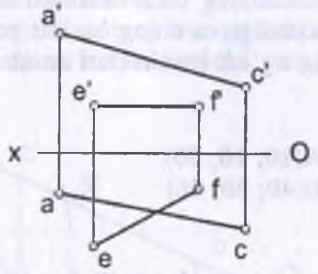


Masalani yechish algoritmi

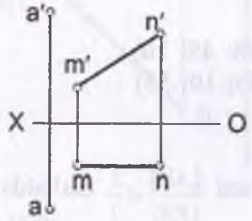
1. [AB] ⊥ (MN) ∧ [AB] ∩ (MN)
2. |AB|=|aB$_0$|
3. |BC|=|AB|⇒|bc|=|aB$_0$|
4. [CD] ll [AB] ∧ |CD|=|AB|
5. [AD] ll [BC]

6-dars	Mavzu: Kompleks masalalar

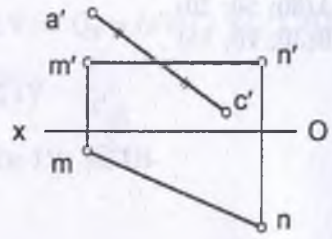
2 - misol. B uchi to‘g‘ri burchakli va EF to‘g‘ri chiziqda yotuvchi to‘g‘ri burchakli ABC uchburchak chizilsin.



3 - misol. BC tomoni MN chiziqda yotuvchi ABCD kvadrat chizilsin.



4 - misol. BD diagonali MN chiziqda bo‘lgan ABCD kvadrat chizilsin.



6-dars	«Nuqta» va « To‘g‘ri chiziq»

1- misol. Berilgan **A** va **B** nuqtalarning koordinatalari asosida **AB** to‘g‘ri chiziq kesmasining tekis chizmasi chizilsin, **AB** kesmaning haqiqiy uzunligi va uning har bir proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan og‘ish burchaklari aniqlansin.

A(10; 10; 50)
B(40; 30; 10)

2- misol. **AB** to‘g‘ri chiziqda **H** tekislikdan **40 mm** uzoqlikda yotuvchi **C** nuqta va **A** uchidan **20 mm** uzoqlikda yotuvchi **D** nuqta aniqlansin.

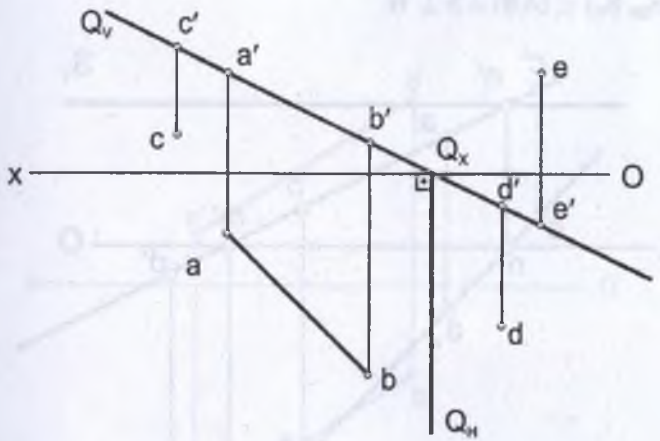
A(90; 45; 10)
B(30; 10; 55)

3- misol. **AB** kesmada uni $\frac{[AK]}{[KB]} = \frac{3}{2}$ nisbatda bo‘luvchi **K** nuqta aniqlansin.

A(80; 50; 20)
B(30; 10; 55)

7-dars	Mavzu: Tekislik

1 - misol. AB to'g'ri chiziq orqali mumkin bo'lgan xususiy holatdagi tekisliklar o'tkazilsin.
Har bir tekislik uchun fazoning har qaysi burchaklarida joylashgan va ulardan o'tuvchi bittadan ixtiyoriy nuqta olinsin.



1. $Q \subset (AB) \wedge Q \perp V$?

$Q(Q_V, Q_H)$?

$Q \subset (AB) \wedge Q \perp V \Rightarrow Q_V \equiv (a'b') \wedge Q_H \perp (Ox)$

$Q \subset$ I, II, III, IV

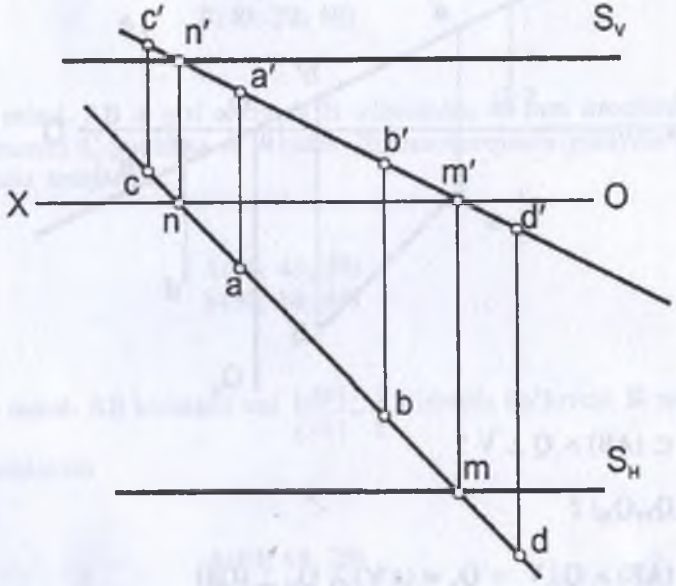
A∈ I, C∈ II, D∈ IV, E∈ III

7-dars	Mavzu: Tekislik

2. $T(T_H, T_V) \subset (AB) \wedge T \perp H$

Mustaqil ravishda bajarilsin.

3. $S(S_H, S_V) \subset (AB) \wedge S \perp W$



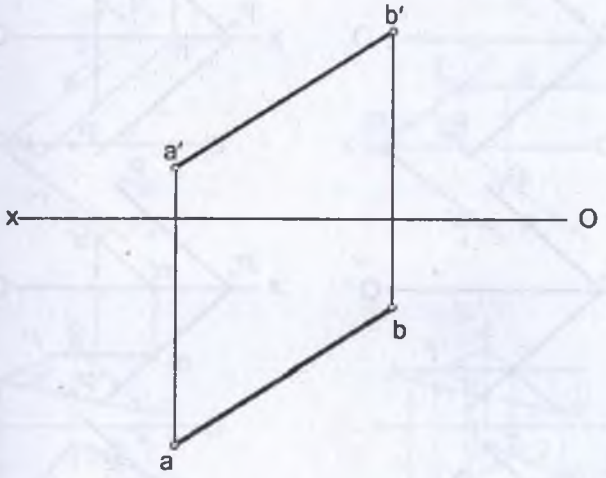
$S(S_H, S_V) \subset (AB) \wedge S \perp W \Rightarrow S_V, S_H \parallel (ox) \wedge M \in S_H \wedge N \in S_V$

$S \subset$ II, I, IV

$A \in$ I, $C \in$ II, $D \in$ IV

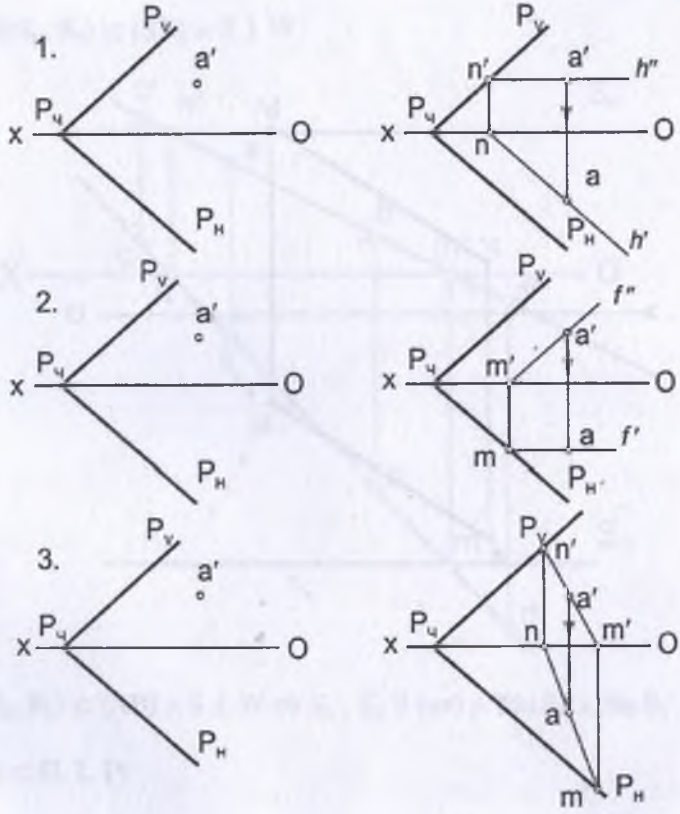
7-dars	Mavzu: Tekislik

1 - misol. AB to‘g‘ri chiziq orqali mumkin bo‘lgan xususiy holatdagi tekisliklar o‘tkazilsin.
Har bir tekislik uchun **AB** to‘g‘ri chiziq o‘tayotgan choraklarda joylashgan va shu chiziqda yotuvchi bittadan ixtiyoriy nuqta tanlab olinsin.



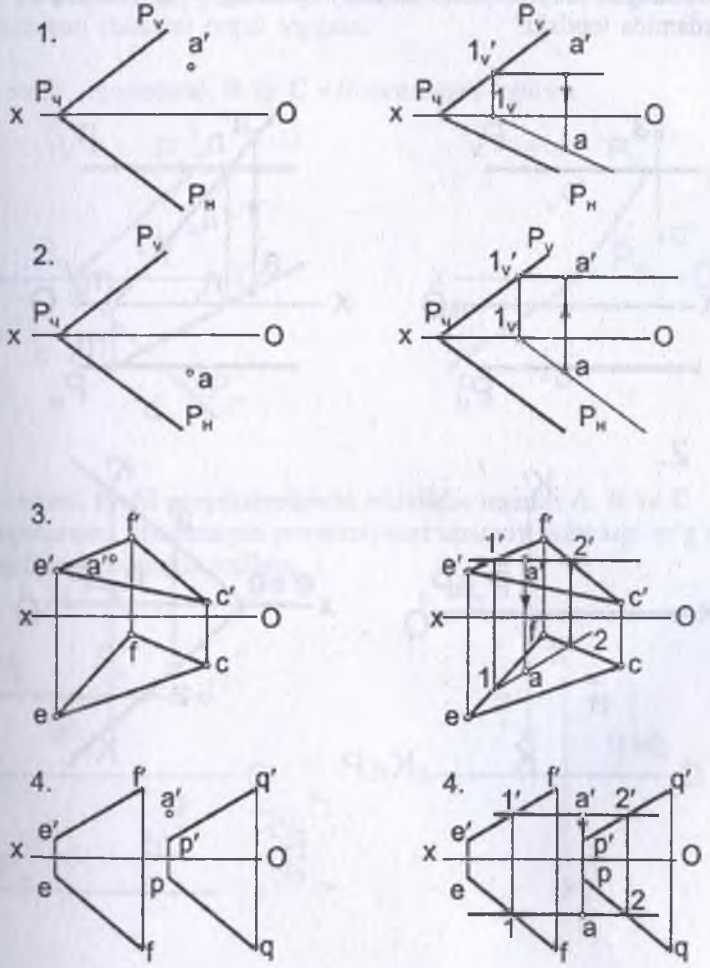
8-dars	Mavzu: Tekislik

1 - misol. P tekislikda yotuvchi nuqtaning yetishmagan proyeksiyasi topilsin:
Masalani yechish uchun tekislikning quyidagi chiziqlaridan foydalanilsin:
1) gorizontal 2) frontal 3) umumiy holatdagi to'g'ri chiziq



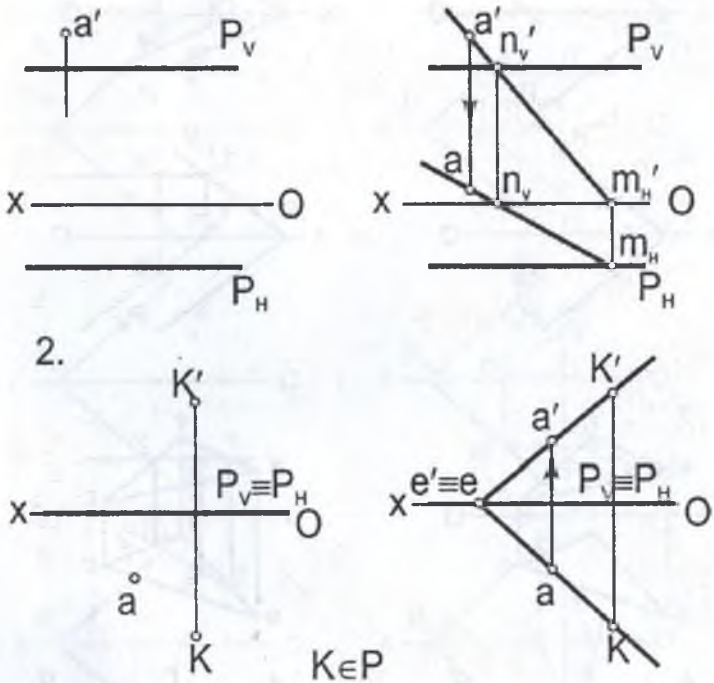
8-dars	Mavzu: Tekislik

2 - misol. Berilgan tekislikning A nuqtasi orqali uning gorizontali o'tkazilsin.



8-dars	Mavzu: Tekislik

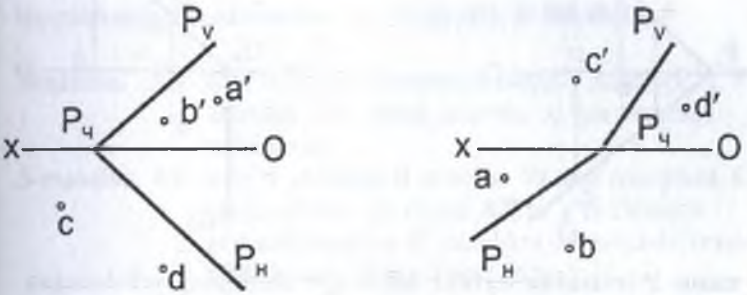
3 - misol. Profil proyeksiyalovchi tekislikka tegishli nuqtalarning yetishmagan proyeksiyalari umumiy holatdagi to'g'ri chiziqlar yordamida topilsin.



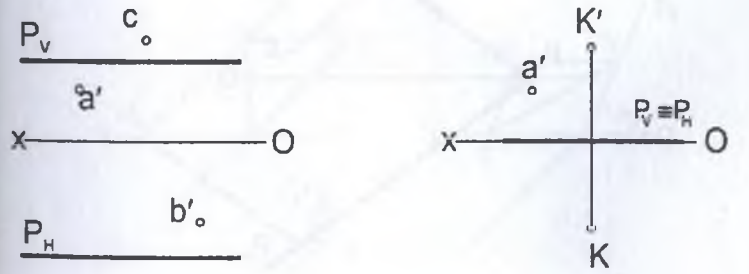
8-dars	Mavzu: Tekislik

1 - misol. P tekislikda yotuvchi va bir proyeksiyasi berilgan **A, B, C, D,** nuqtalarning yetishmagan proyeksiyalari frontal yoki gorizontal chiziqlar orqali topilsin.

A va D – gorizontal, B va C - frontal orqali topilsin.

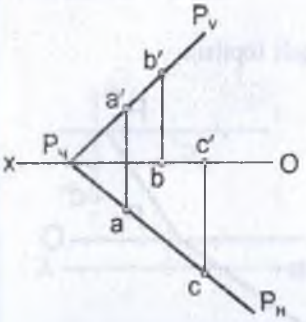


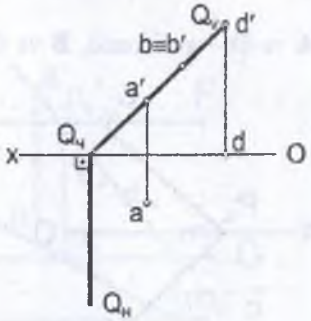
2 - misol. Profil proyeksiyalovchi tekislikka tegishli **A, B** va **C** nuqtalarning yetishmagan proyeksiyalari umumiy holatdagi to'g'ri chiziqlar yordamida topilsin.



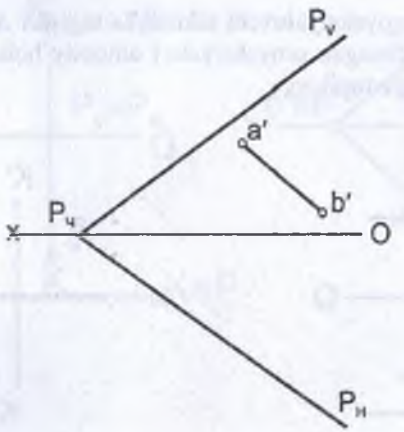
8- dars	Mavzu: Tekislik

3 - misol. Berilgan nuqtalarning tekislikka tegishli-tegishli emasligi aniqlansin.





4 - misol. P tekislikka tegishli **AB** to'g'ri chiziqning yetishmagan proyeksiyasi chizilsin.



9- dars	Mavzu: Nuqta. To'g'ri chiziq. Tekislik

1 - Nazorat ishi

Bilet №0

1-masala. **AB** to'g'ri chiziqning gorizontal va frontal izlari aniqlansin va fazoning qaysi choraklaridan o'tishi ko'rsatilsin:

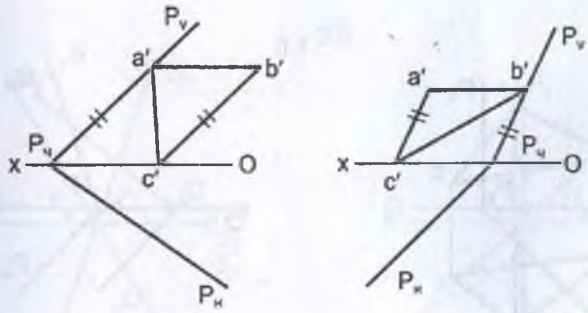
Nuqtalarning koordinatalari : **A (35,65,45), B (60,40,20).**

2-masala. **AB** to'g'ri chiziq kesmaning haqiqiy uzunligi va **V** tekisligi bilan hosil qiluvchi og'ish burchagi aniqlansin.

3-masala. **AB** to'g'ri chiziqda **B** uchidan **20 mm** uzoqlikda **C** nuqta olinsin va undan **AB** to'g'ri chiziqqa perpendikular va **H** tekislikni **M** nuqtada kesuvchi **CM** frontal chiziq o'tkazilsin.

4-masala. **AB** kesmani **AD : DB = 5 : 4** nisbatda bo'luvchi va **D** nuqta orqali applikata o'qini **E** nuqtada kesib o'tuvchi **DE** gorizontal chiziq o'tkazilsin.

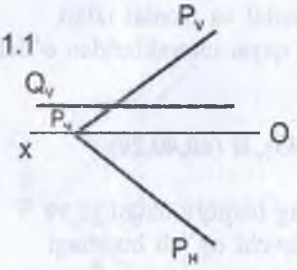
5-masala. **P** tekislikka tegishli uchburchak **ABC** ning yetishmagan proyeksiyasi chizilsin.



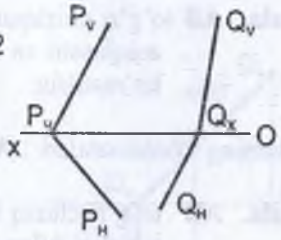
10- dars	Mavzu: Ikki tekislik

1 - misol. Berilgan tekisliklarning o'zaro kesishuv chizig'ining proyeksiyalari chizilsin.

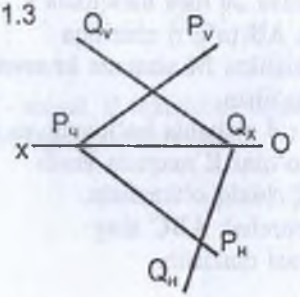
1.1



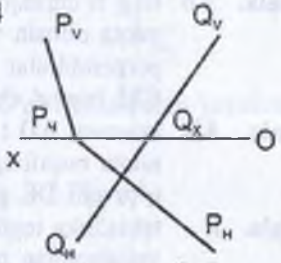
1.2



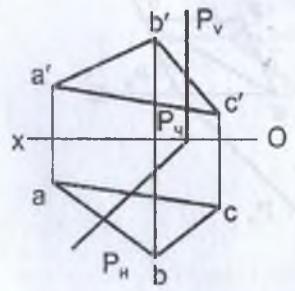
1.3



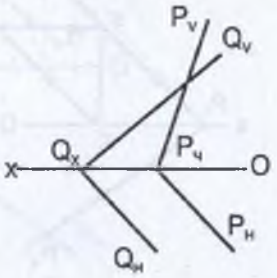
1.4



1.5



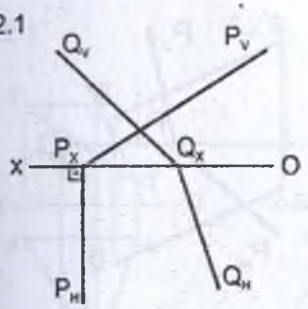
1.6



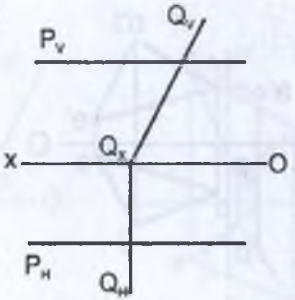
10- dars	Mavzu: Ikki tekislik

2 - misol. Berilgan tekisliklarning o'zaro kesishuv chizig'ining proyeksiyalari aniqlansin.

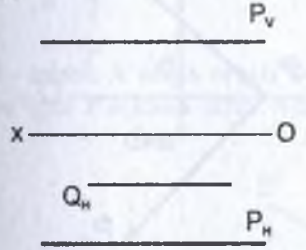
2.1



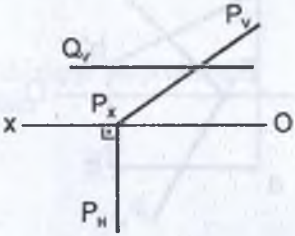
2.2



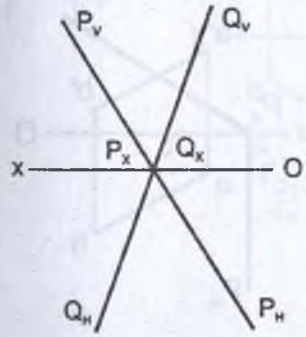
2.3



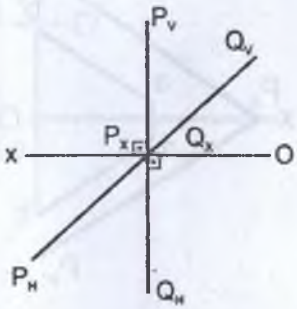
2.4



2.5



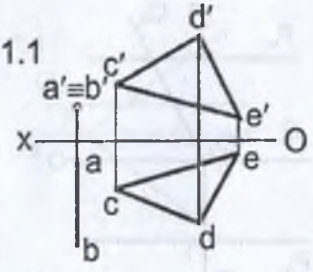
2.6



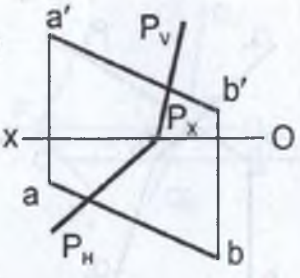
11- dars	Mavzu: To'g'ri chiziq va tekislik

1 - misol. AB to'g'ri chiziq bilan berilgan tekisliklarning kesishish nuqtasi topilsin.

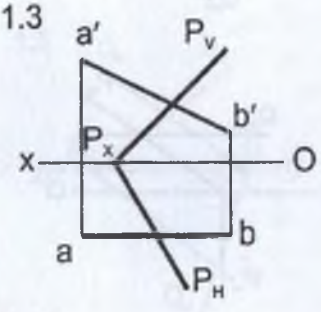
1.1



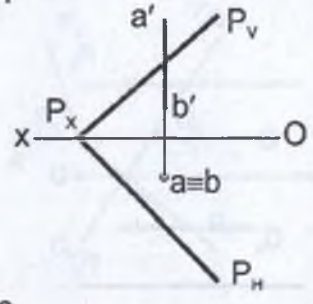
1.2



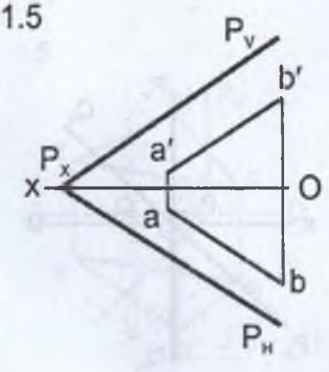
1.3



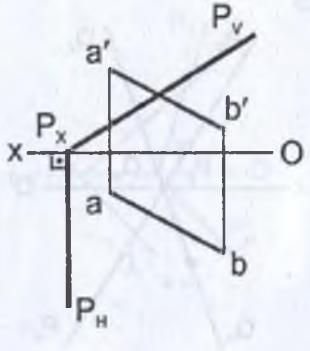
1.4



1.5



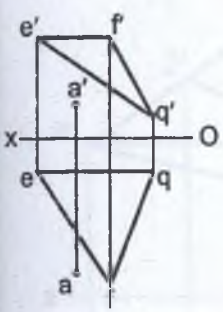
1.6



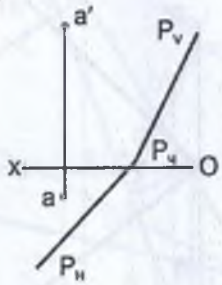
11- dars	Mavzu: To‘g‘ri chiziq va tekislik

2 - misol. A nuqta orqali berilgan tekislikka perpendikular chiziq o‘tkazilsin va unga **30 mm** uzunlikdagi kesma o‘lchab qo‘yilsin.

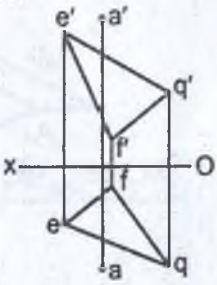
2.1



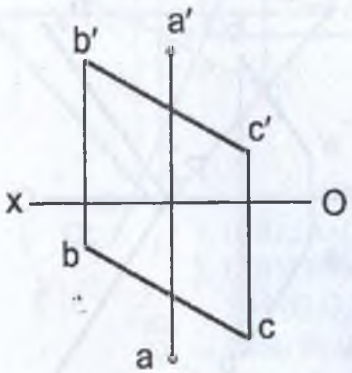
2.2



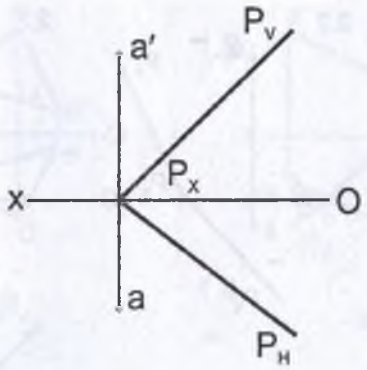
2.3



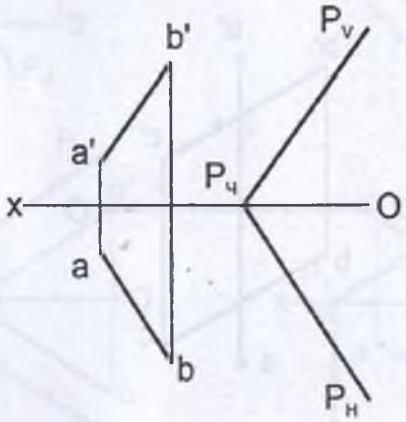
3 - misol. A nuqta orqali BC to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo‘lgan P tekislik izlari bilan o‘tkazilsin.



4 - misol. **A** nuqta **P** tekislikka proyeksiyalansin.



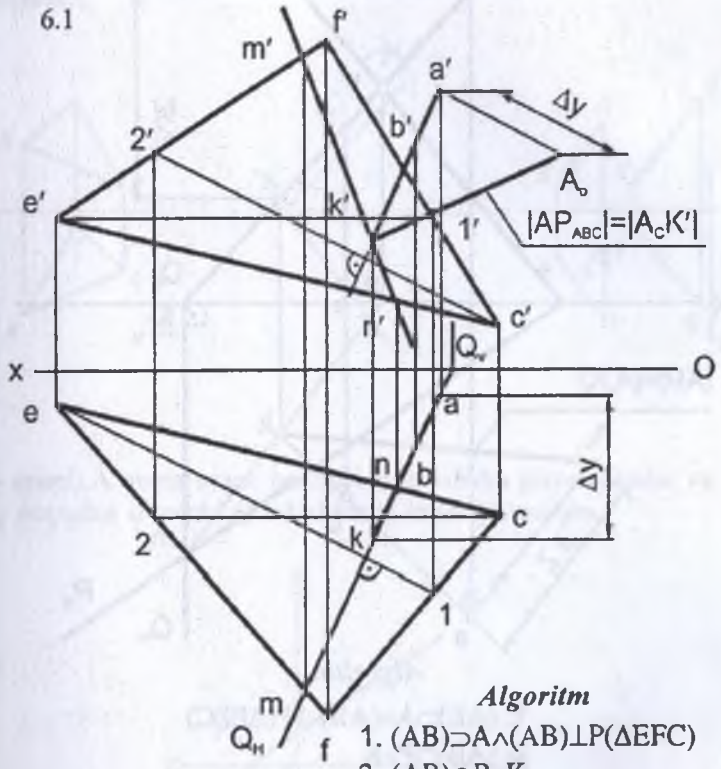
5 - misol. **AB** to‘g‘ri chiziq orqali berilgan **P** tekislikka perpendikulyar bo‘lgan **Q** tekislikning izlari o‘tkazilsin.



11- dars	Mavzu: To‘g‘ri chiziq va tekislik

6 - misol. A nuqtadan berilgan tekislikkacha bo‘lgan masofa aniqlansin.

6.1

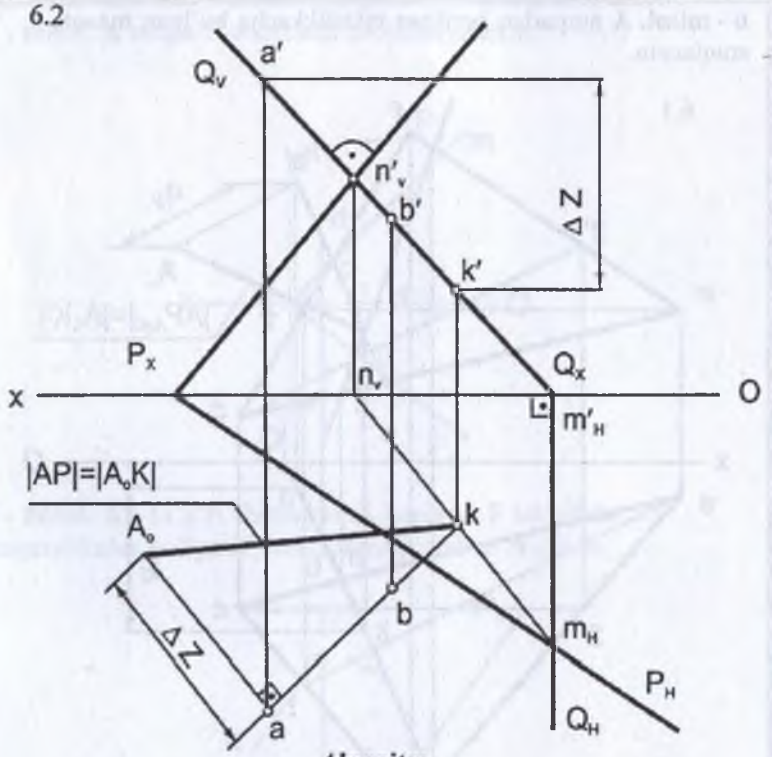


Algoritm

1. $(AB) \supset A \wedge (AB) \perp P(\Delta EFC)$
2. $(AB) \cap P = K$
   - 2.1 $Q(Q_v Q_H) \supset (AB) \wedge Q \perp H$
   - 2.2 $\Theta \cap P(\Delta EFC) = (MN)$
   - 2.3 $(MN) \cap (AB) = K$
3. $|AK| = |AP(\Delta EFC)|$

11- dars	Mavzu: To'g'ri chiziq va tekislik

6.2

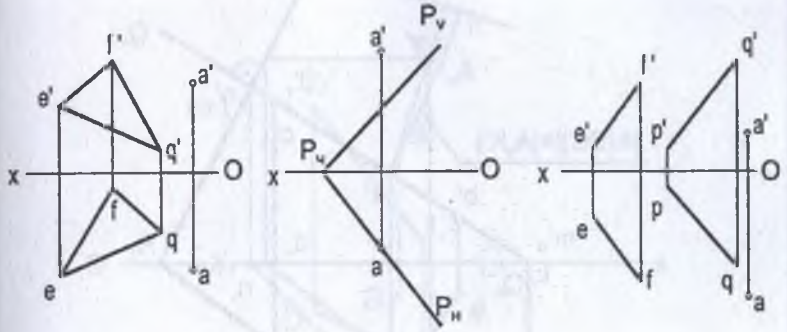


Algoritm

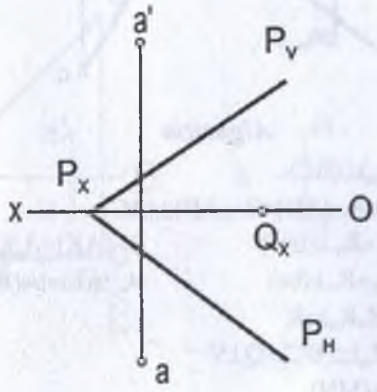
1. $(AB)\supset A \wedge (AB) \perp P(\Delta EFC)$
2. $(AB)\cap P=K$
   - 2.1 $Q(Q_vQ_H)\supset(AB)\wedge Q\perp V$
   - 2.2 $Q\cap P=(MN)$
   - 2.3 $(MN)\cap(AB)=K$
3. $|AK|=|AP(P_vP_H)|$

11- dars	Mavzu: To‘g‘ri chiziq va tekislik

7 - misol. A nuqtadan berilgan tekislikkacha bo‘lgan masofa aniqlansin.

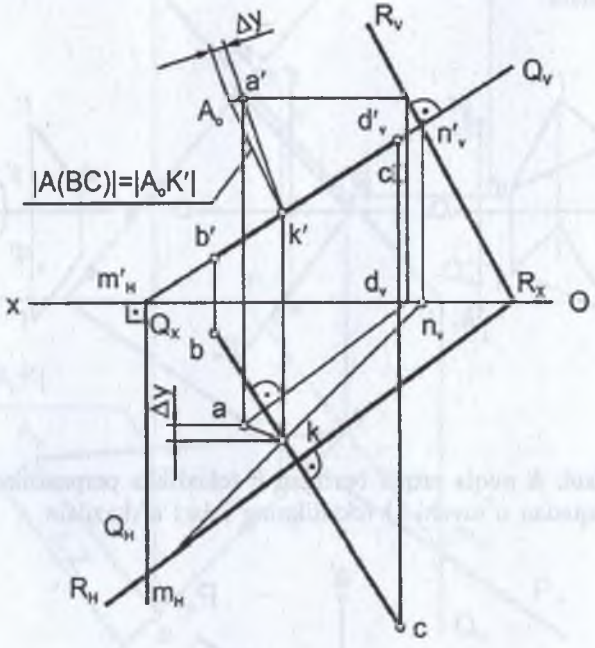


8 - misol. A nuqta orqali berilgan P tekislikka perpendikulyar va Q_X nuqtadan o‘tuvchi Q tekislikning izlari o‘tkazilsin.



11- dars	Mavzu: To‘g‘ri chiziq va tekislik

9 - misol. A nuqtadan **BC** to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa aniqlansin.



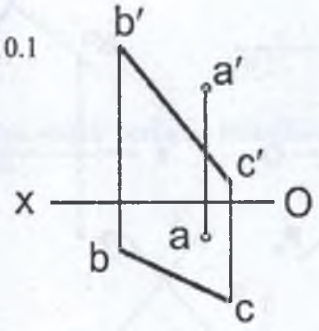
Algoritm

1. $A \supset R(R_v R_н) \perp (BC)$
   - 1.1 $(AD) \in A \wedge (AD) \| H \wedge (AD) \perp (BC)$
   - 1.2 $R_v \in D \wedge R_v \perp (b'c')$
   - 1.3 $R_v \in R_x \wedge R_v \perp (bc)$
2. $(BC) \cap R(R_v R_н) = K$
   - 2.1 $R(R_v R_н) \supset (BC) \wedge Q \perp V$
   - 2.2 $Q \cap R = (MN)$
   - 2.3 $(MN) \cap (BC) = K$
3. $[AK] = A_oK'$
4. $|AK| = |A(BC)|$

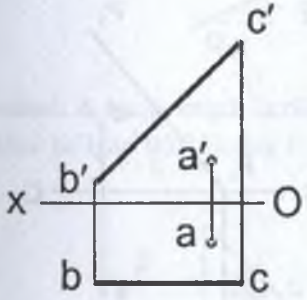
11- dars	Mavzu: To'g'ri chiziq va tekislik

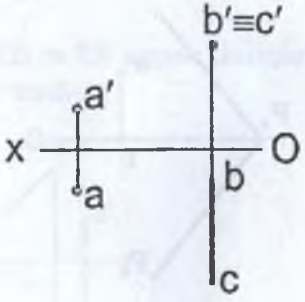
10- misol. A nuqtadan **BC** to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa aniqlansin.

10.1



10.2 9.3

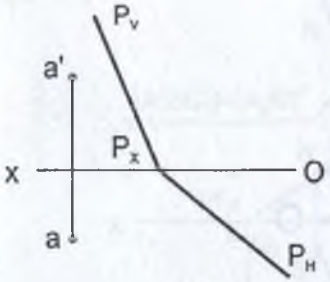




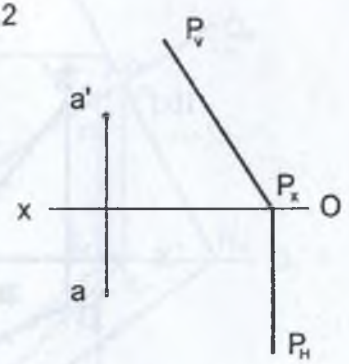
12- dars	Mavzu: To‘g‘ri chiziq bilan tekislikning va ikki tekislikning parallelligi

1 - misol. A nuqta orqali berilgan **P** va **H** tekisliklarga parallel AB to‘g‘ri chiziq o‘tkazilsin va unga **30 mm** uzunlikda kesma o‘lchab qo‘yilsin.

1.1

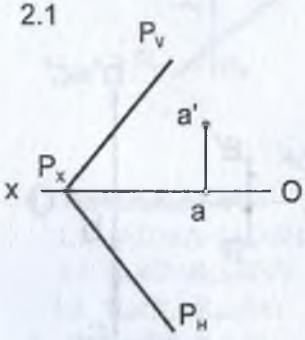


1.2

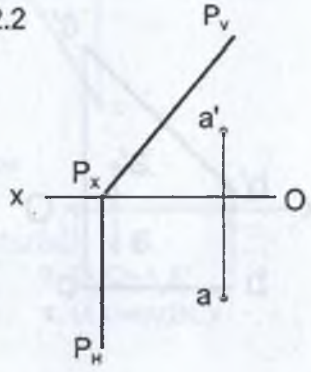


2 - misol. A nuqta orqali berilgan **P** tekislikka parallel bo‘lgan **G** tekislikning izlari o‘tkazilsin.

2.1

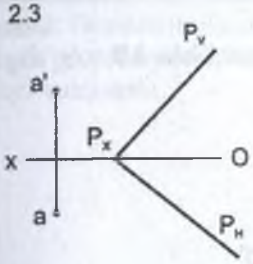


2.2

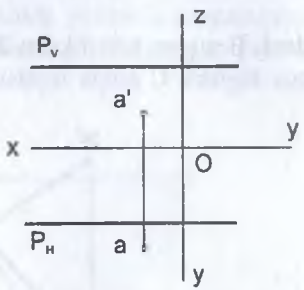


12- dars	Mavzu: Ikki tekislikning parallelligi

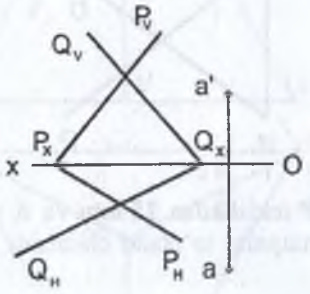
2.3



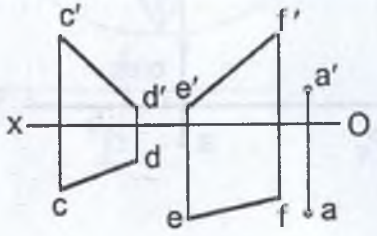
2.4



3 - misol. A nuqta orqali berilgan tekisliklarga parallel to'g'ri chiziq o'tkazilsin.

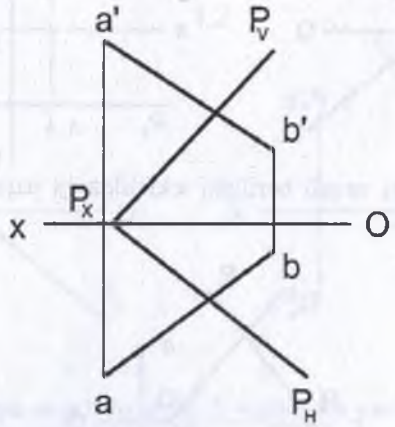


4 - misol. A nuqta orqali berilgan CD va EF ayqash chiziqlarga parallel bo'lgan tekislikning izlari o'tkazilsin.

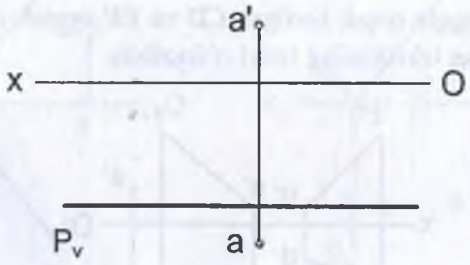


12- dars	Mavzu: Ikki tekislikning parallelligi

5 - misol. Berilgan tekislikdan **20 mm** uzoqlikda **AB** to'g'ri chiziqqa tegishli **C** nuqta topilsin.

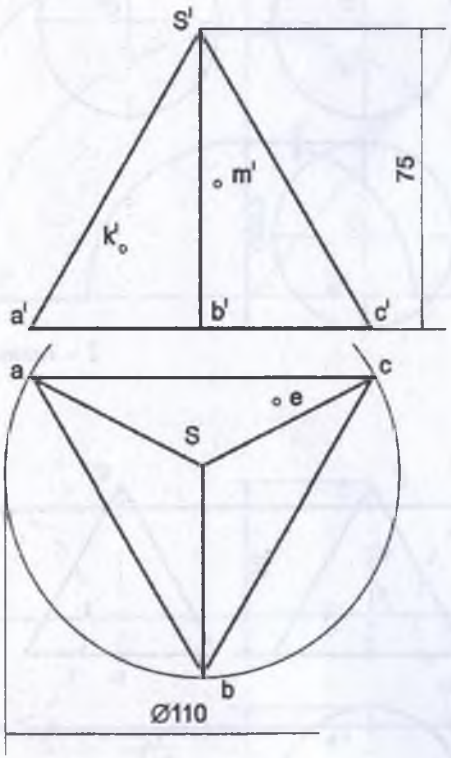


6 - misol. Berilgan **P** tekislikdan **15 mm** va **A** nuqtadan **25 mm** uzoqlikda yotuvchi nuqtalar to'plami chizilsin.



13- dars	Mavzu: Sirtlar

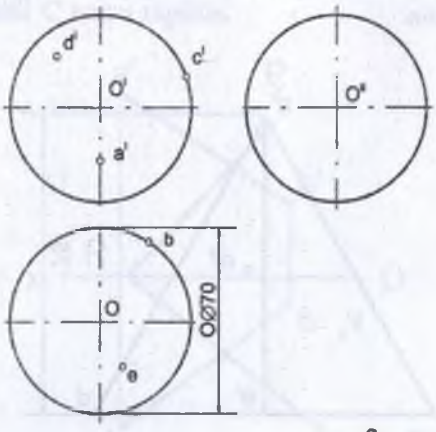
1 - misol. Geometrik jismlarning sirtida yotuvchi nuqtalarning berilgan proyeksiyalari bo'yicha ularning yetishmagan proyeksiyalari aniqlansin.



1 - rasm.

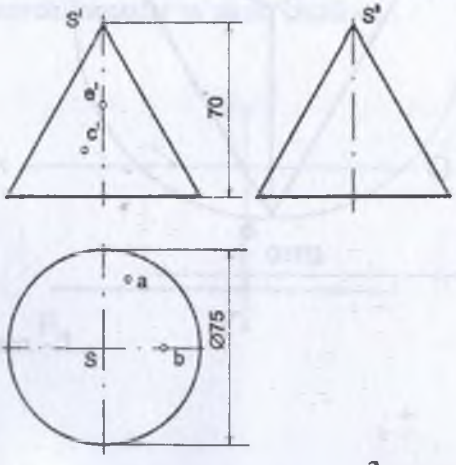
13- dars	Mavzu: Sirtlar

2 - misol.



2 - rasm.

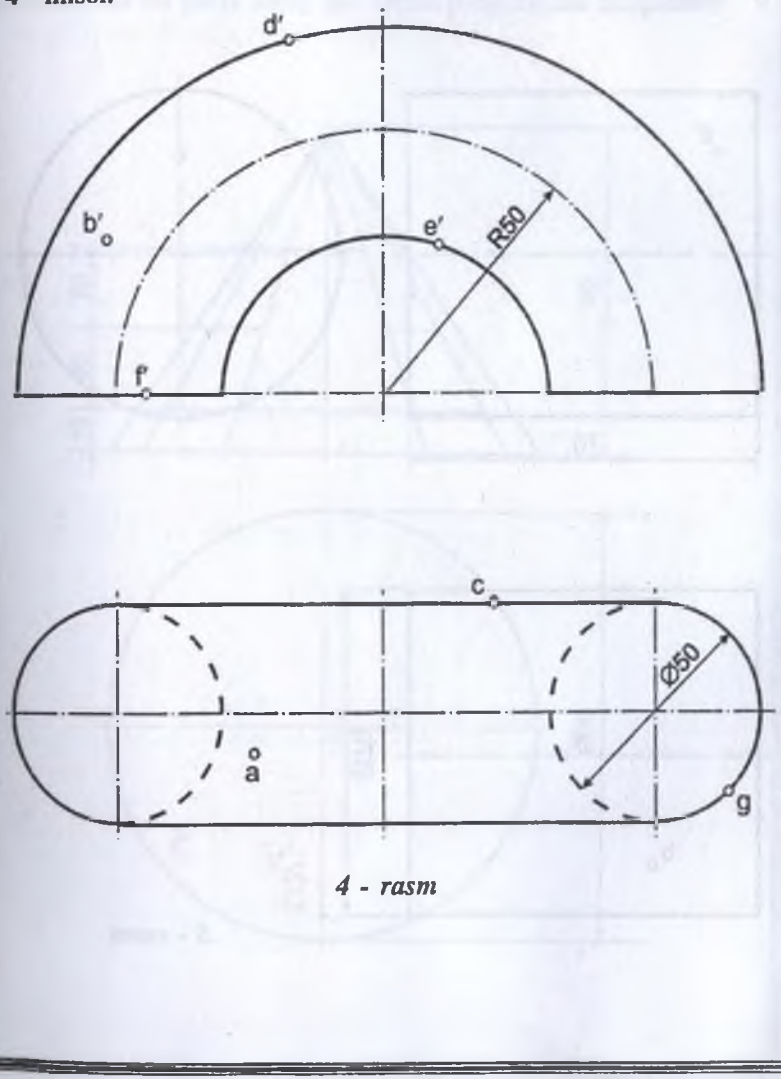
3 - misol.



3 - rasm.

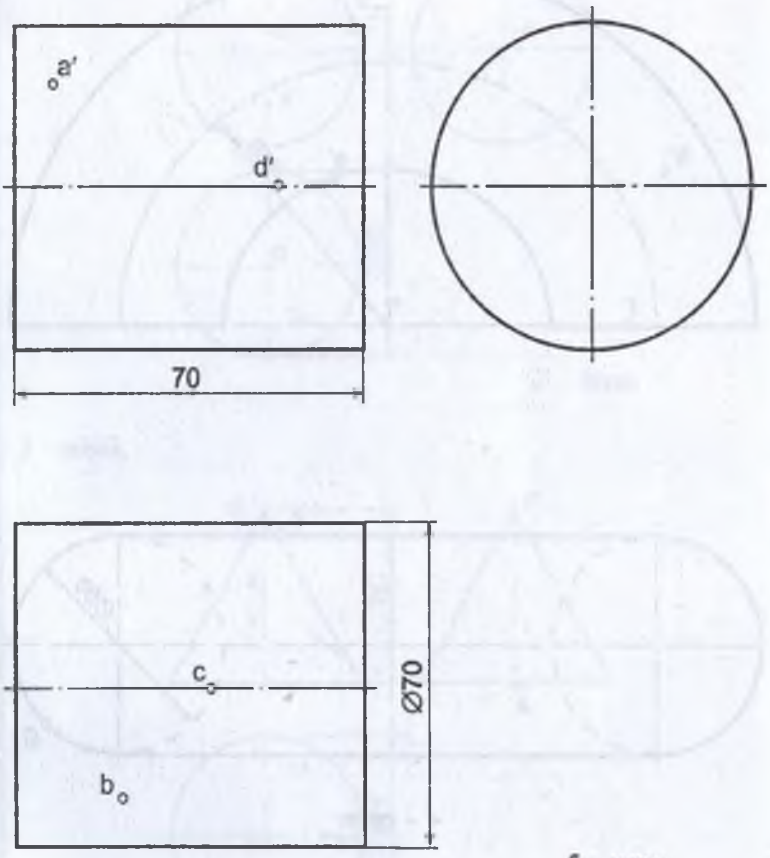
13- dars	Mavzu: Sirtlar

4 - misol.



4 - rasm

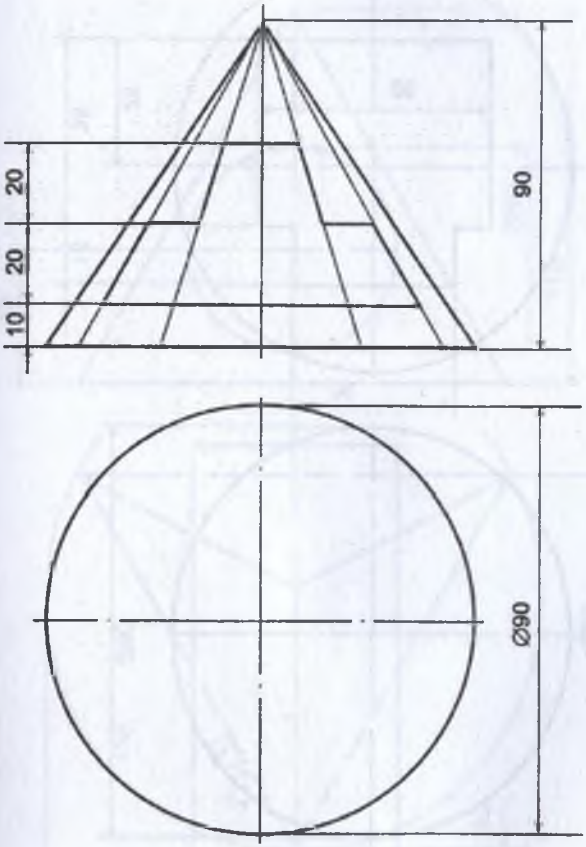
5 - misol.



5 - rasm

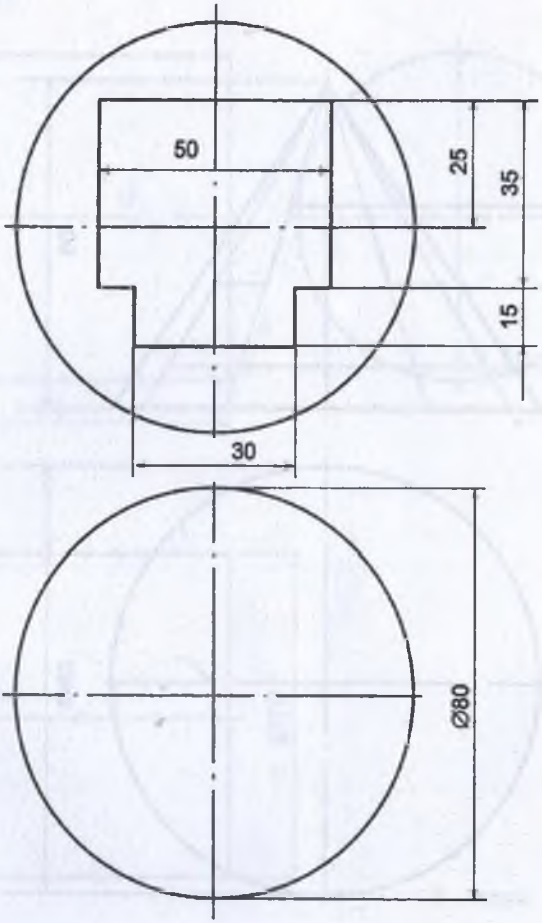
14- dars	Mavzu: Tekisliklar bilan sirtlar kesishuvi

1 - misol. Konusning ko'rinar sirtiga tegishli figuraning frontal proyeksiyasi bo'yicha uning gorizontal proyeksiyasi aniqlansin.



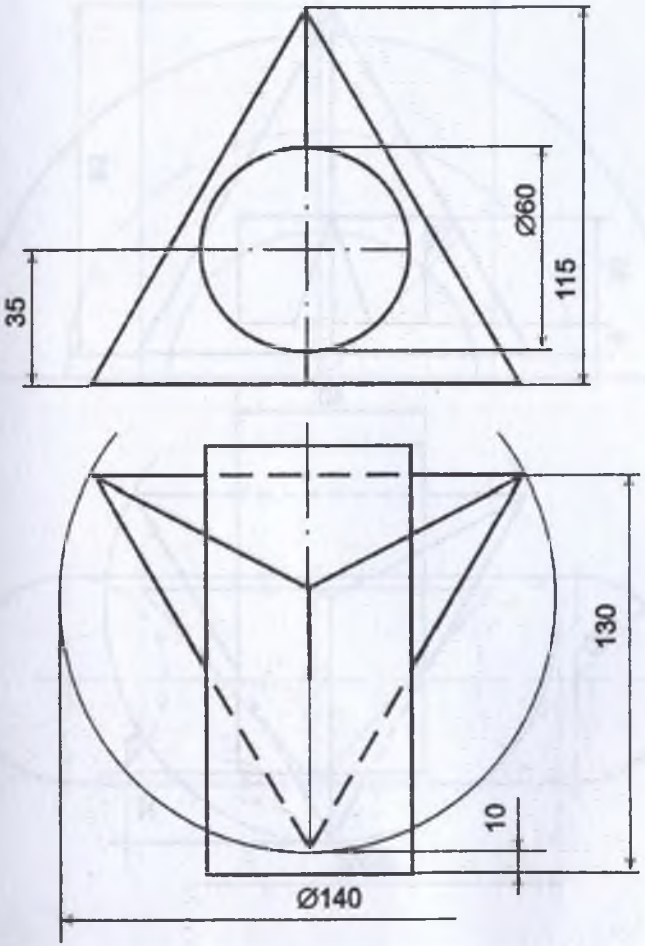
14- dars	Mavzu: Tekisliklar bilan sirtlar kesishuvi

2 - misol. Teshikli sferaning gorizontal proyeksiyasi aniqlansin.



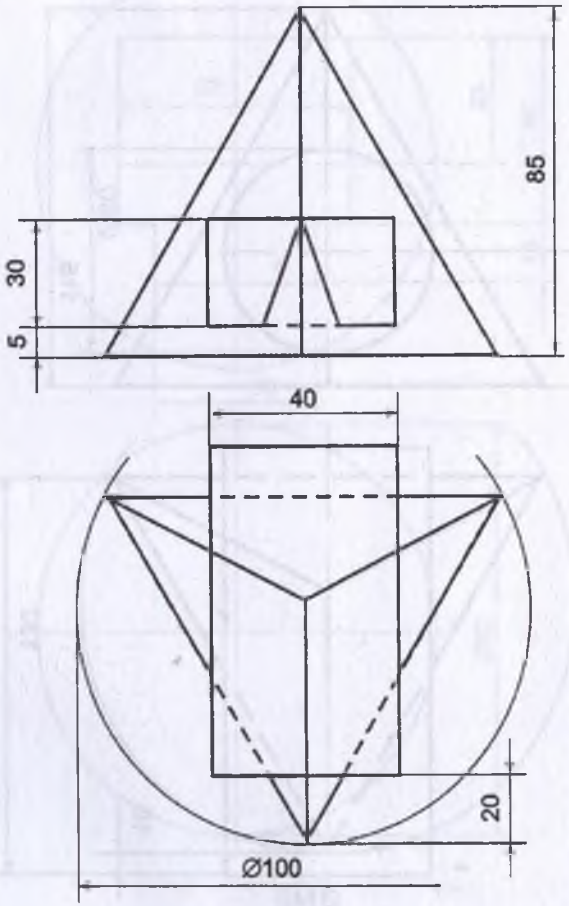
15- dars	Mavzu: Ikki sirt kesishuvi

3 - misol. Geometrik jismlar bilan berilgan sirtlarning kesishgan chizig'ining proyeksiyalari aniqlansin.



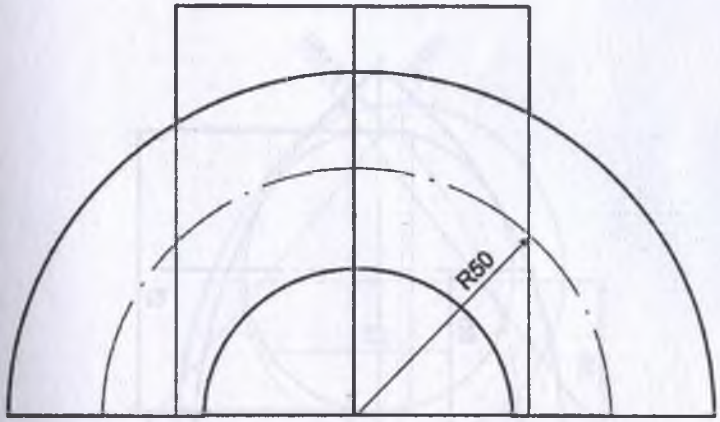
15- dars	Mavzu: Ikki sirt kesishuvi

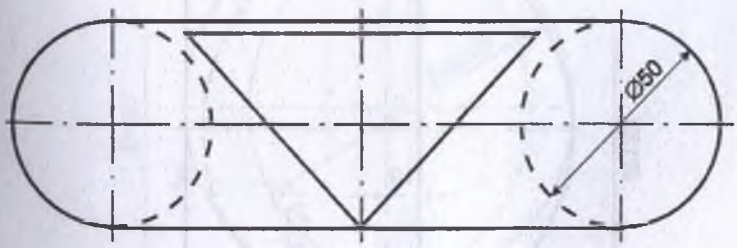
4 - misol. Berilgan geometrik sirtlarning kesishgan chizig'ining proyeksiyalari aniqlansin.



15- dars	Mavzu: Ikki sirt kesishuvi

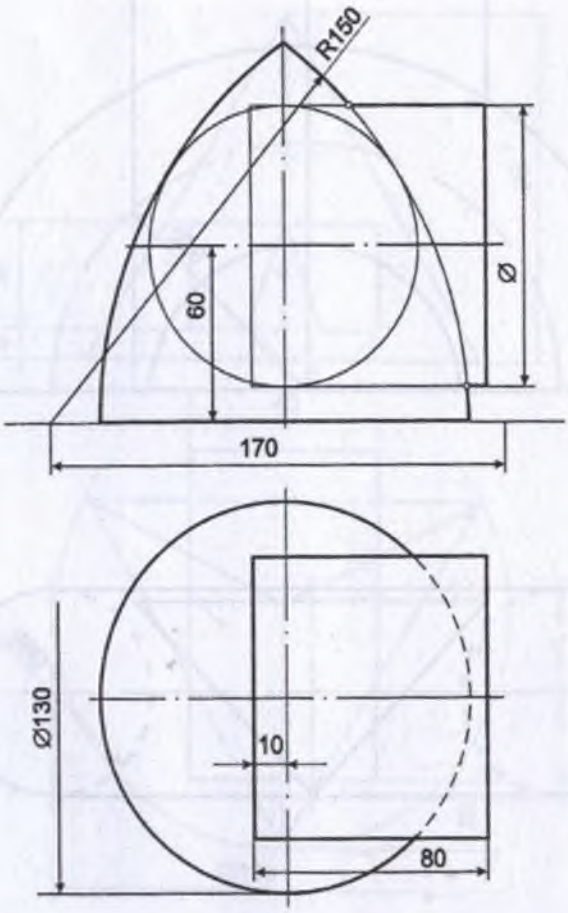
5 - misol. Geometrik sirtlarning kesishgan chizig'ining proyeksiyalari aniqlansin.





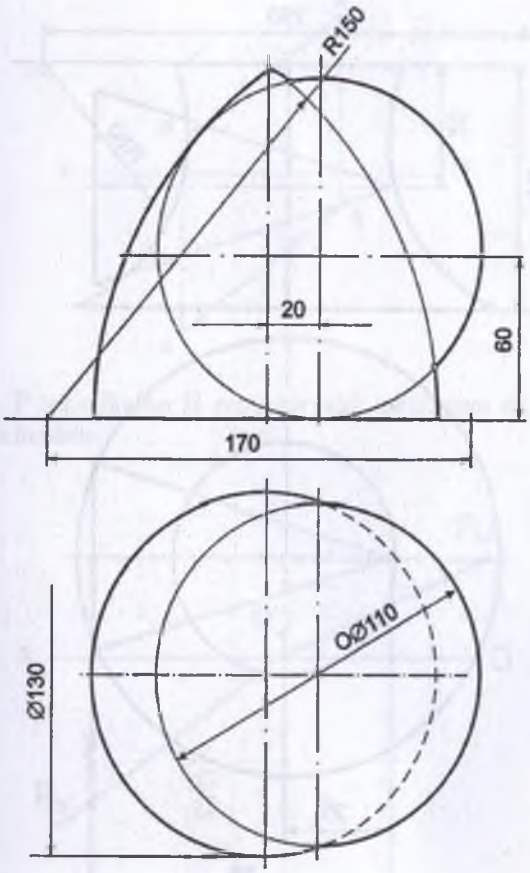
15- dars	Mavzu: Ikki sirt kesishuvi

6 - misol. Geometrik sirtlarning kesishgan chizig'ining proyeksiyalari aniqlansin.



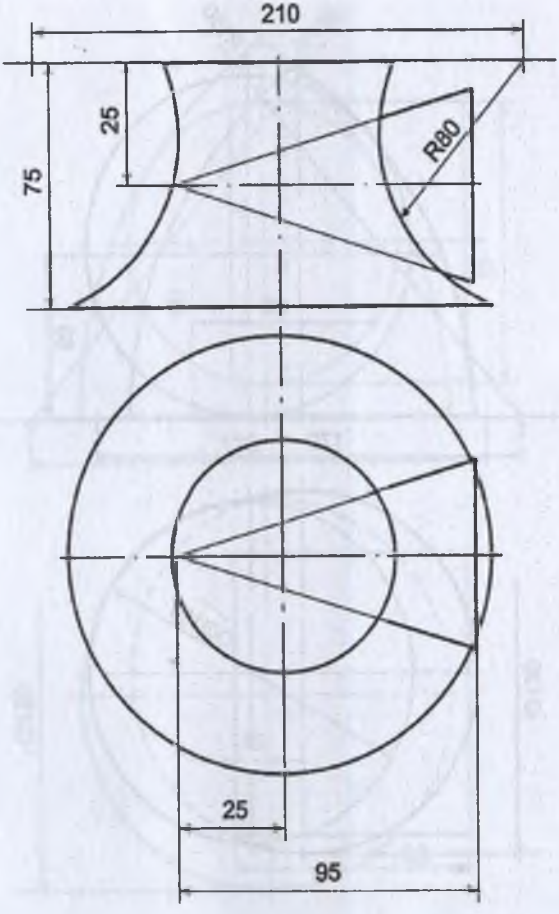
15- dars	Mavzu: Ikki sirt kesishuvi

7 - misol. Geometrik jismlar sirtlarining o'zaro kesishish chizig'ining proyeksiyalari yordamchi sfera (shar)lar usuli bilan aniqlansin.



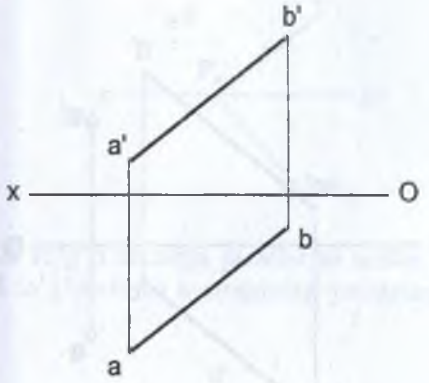
15- dars	Mavzu: Ikki sirt kesishuvi

8 - misol. Geometrik jismlar sirtlarining o'zaro kesishish chizig'ining proyeksiyalari yordamchi sfera (shar)lar usuli bilan chizilsin.

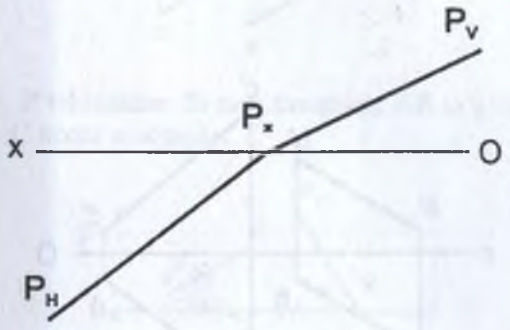


16- dars	Mavzu: Proyeksiyalar tekisligini almashtirish

1 - misol. AB to'g'ri chiziqning H tekislikka og'ish burchagi aniqlansin.

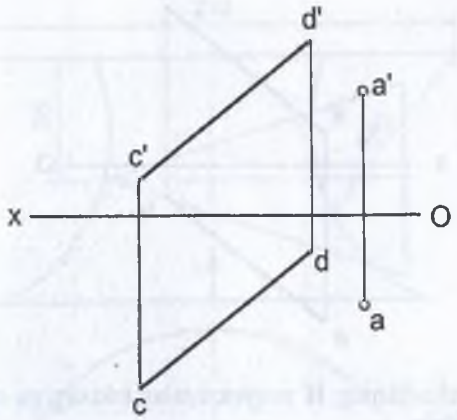


2 - misol. P tekislikning H proyeksiyalar tekisligiga og'ish burchagi chizilsin.

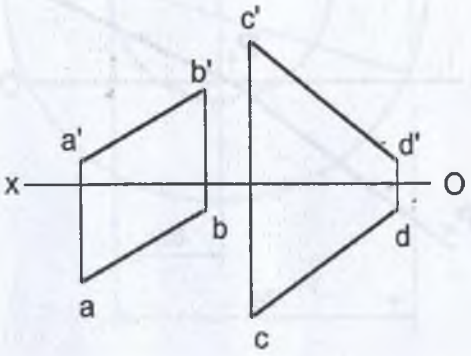


16- dars	Mavzu: Proyeksiyalar tekisligini almashtirish

3 - misol. A nuqtadan CD to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa aniqlansin.

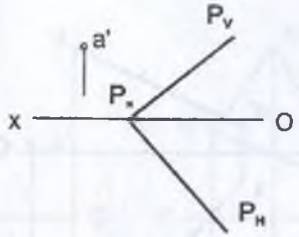


4 - misol. AB va CD ayqash to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofa aniqlansin.

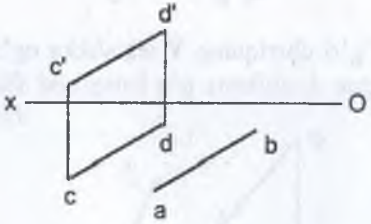


16- dars	Mavzu: Proyeksiyalar tekisligini almashtirish

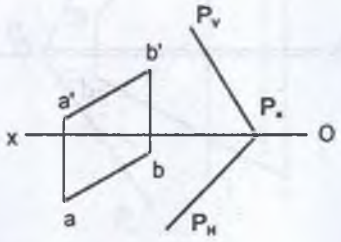
5 - misol. P tekislikdan **20 mm** uzoqlikda yotuvchi **A** nuqtaning yetishmagan proyeksiyasi aniqlansin.



6 - misol. CD to'g'ri chiziqqa parallel va undan **20 mm** uzoqlikda o'tuvchi **AB** to'g'ri chiziq kesmasining yetishmagan proyeksiyasi aniqlansin.

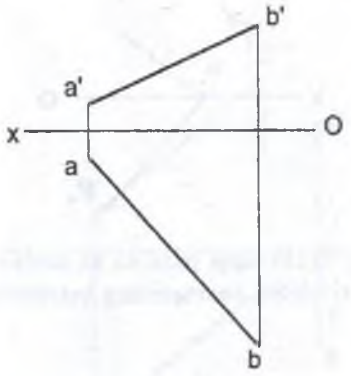


7 - misol. P tekislikdan **20 mm** uzoqlikda **AB** to'g'ri chiziqda yotuvchi **C** nuqta aniqlansin.

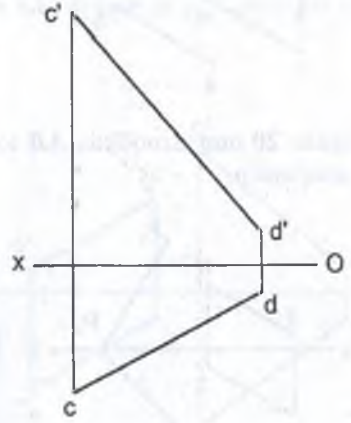


17- dars	Mavzu: Aylantirish

1 - misol. AB to‘g‘ri chiziqning H tekislikka og‘ish burchagi aniqlansin.

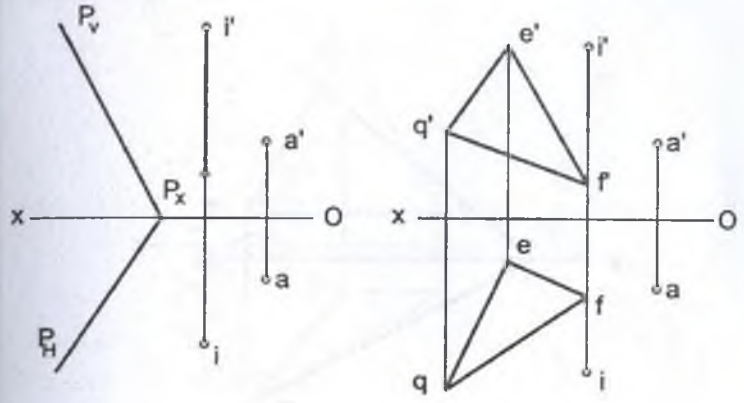


2 - misol. CD to‘g‘ri chiziqning V tekislikka og‘ish burchagi aniqlansin.

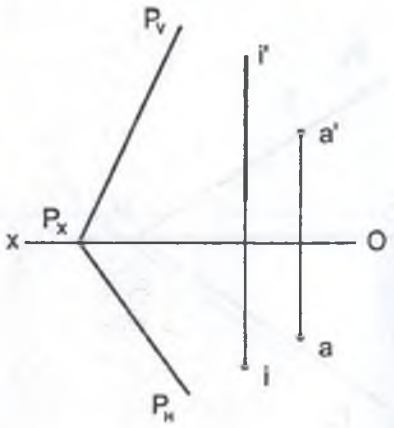


17- dars	Mavzu: Aylantirish

3 - misol. Berilgan **i** o'q atrofida aylantirish bilan **A** nuqta **P** tekislikka joylashtirilsin.

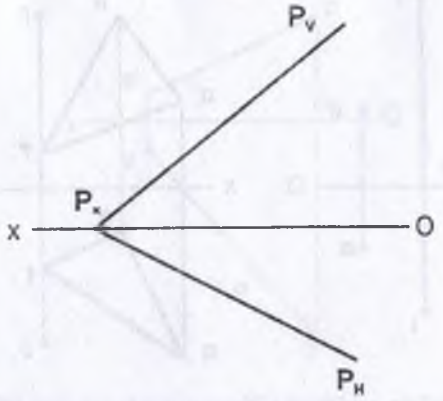


4 - misol. **P** tekislik berilgan **i** o'q atrofida **A** nuqta bilan jipslashguncha aylantirilsin.

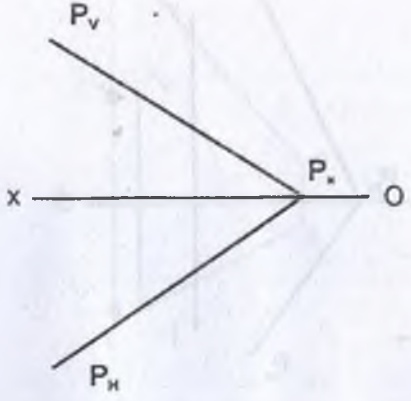


17- dars	Mavzu: Aylantirish

5 - misol. Aylantirish usuli bilan berilgan **P** tekislikning **H** proyeksiyalar tekisligiga og'ish burchagi aniqlansin.

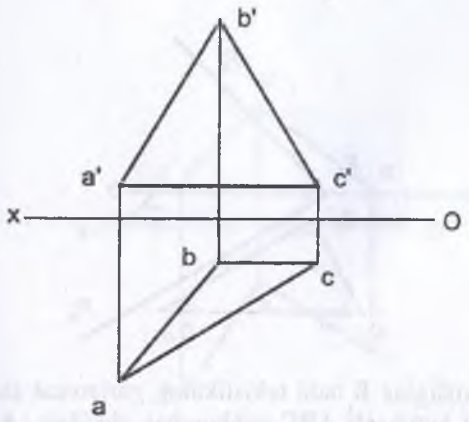


6 - misol. Aylantirish usuli bilan **P** tekislik profil – proyeksiyalovchi tekislik holatiga keltirilsin.

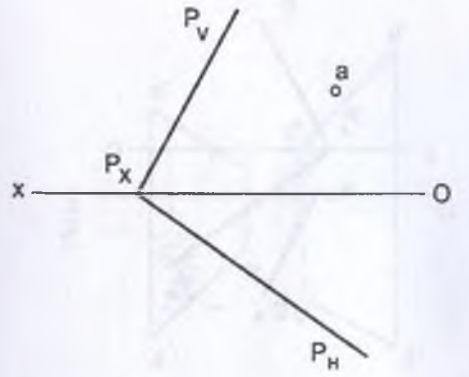


18- dars	Mavzu: Joylashtirish

1 - misol. Aylantirish usuli bilan **ABC** uchburchakning haqiqiy ko'rinishi aniqlansin.

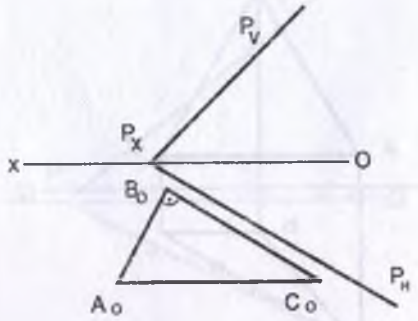


2 - misol. **P** tekislikda markazi **A** nuqta va radiusi **15 mm** ga teng bo'lgan aylananing proyeksiyalari chizilsin.

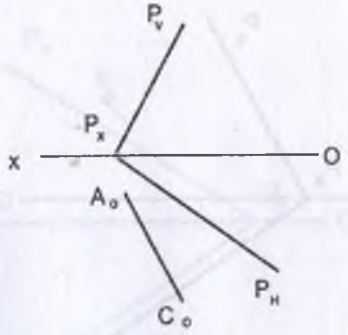


18- dars	Mavzu: Joylashtirish

3 - misol. P tekislikka tegishli uchburchak ABC ning H tekisligi bilan joylashgan holati berilgan, uning gorizontal va frontal proyeksiyalari chizilsin.

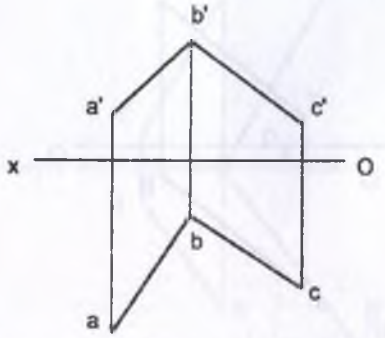


4 - misol. P tekisligida B uchi tekislikning gorizontal izida yotuvchi to'g'ri burchakli ABC uchburchak chizilsin. A_0C_0 gipotenuza AC ning joylashgan holati.

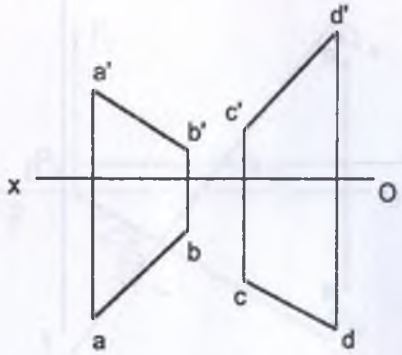


18- dars	Mavzu: Burchaklarni aniqlash

1 - misol. AB va BC kesishgan to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakning haqiqiy qiymati aniqlansin.

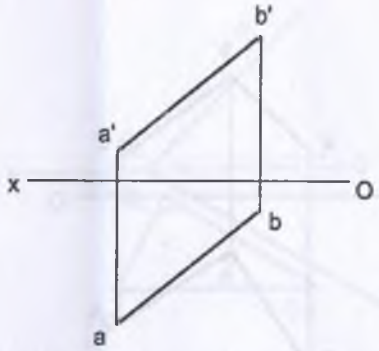


2 - misol. AB va CD uchrashmas to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakning haqiqiy qiymati aniqlansin.

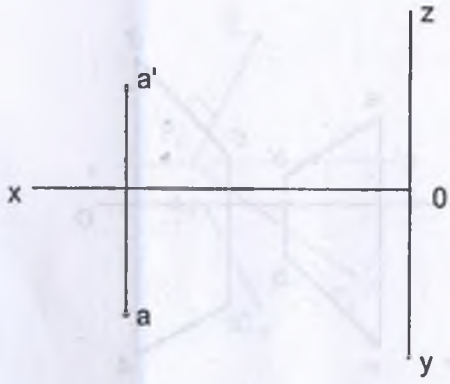


18- dars	Mavzu: Burchaklarni aniqlash

3 - misol. AB va OX o‘q orasidagi burchakning haqiqiy qiymati aniqlansin.

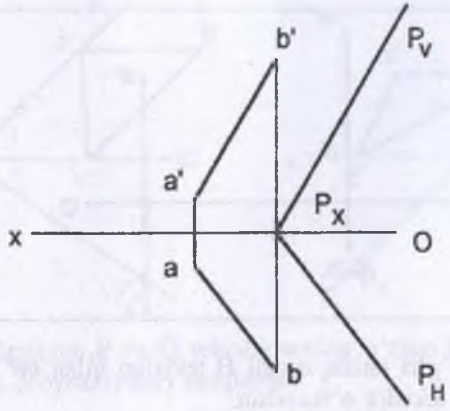


4 - misol. A nuqta orqali OY o‘qini 60^0 burchak ostida kesib o‘tuvchi AB to‘g‘ri chiziq chizilsin.

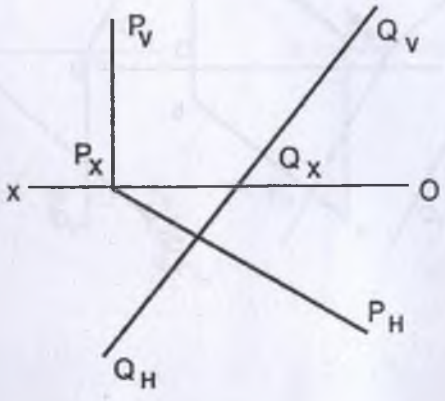


18- dars	Mavzu: Burchaklarni aniqlash

5 - misol. **AB** to'g'ri chiziq bilan **P** tekislik orasidagi burchakning haqiqiy qiymati aniqlansin.

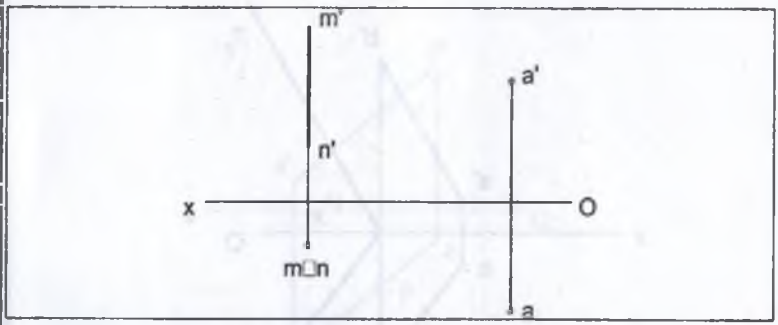


6 - misol. **Q** va **P** tekisliklar orasidagi burchakning haqiqiy qiymati aniqlansin.

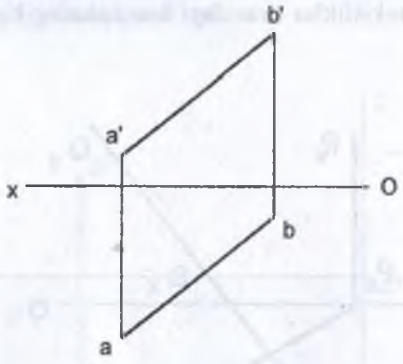


18- dars	Mavzu: Burchaklarni aniqlash

7 - misol. **A** nuqta orqali **MN** to'g'ri chiziqdan **30 mm** uzoqda va **H** tekisligi bilan 60^0 burchak hosil qiluvchi to'g'ri chiziq o'tkazilsin.

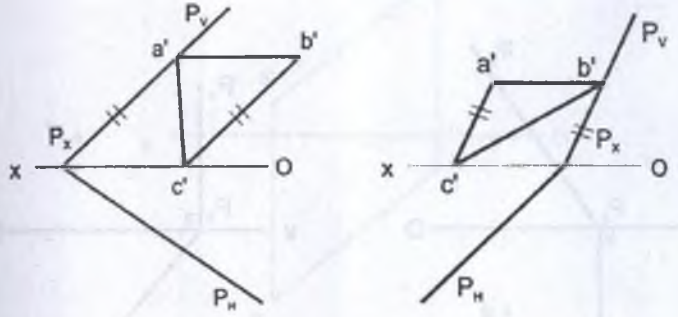


8 - misol. **AB** to'g'ri chiziq orqali **H** tekisligi bilan 60^0 burchak hosil qiluvchi **P** tekislik o'tkazilsin.

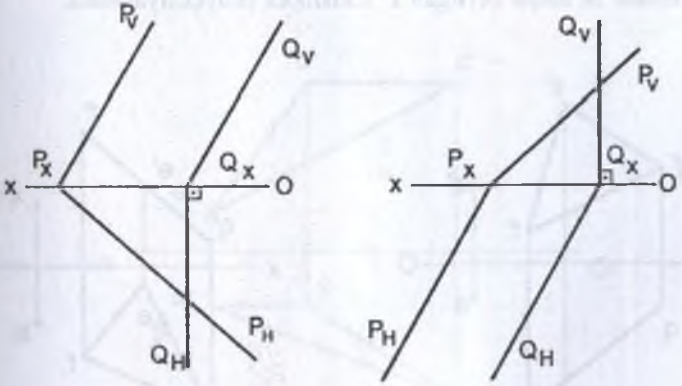


19- dars	Kompleks masalalar

1 - misol. **P** tekislikka tegishli **ABC** uchburchakning gorizontal proyeksiyasi aniqlansin.

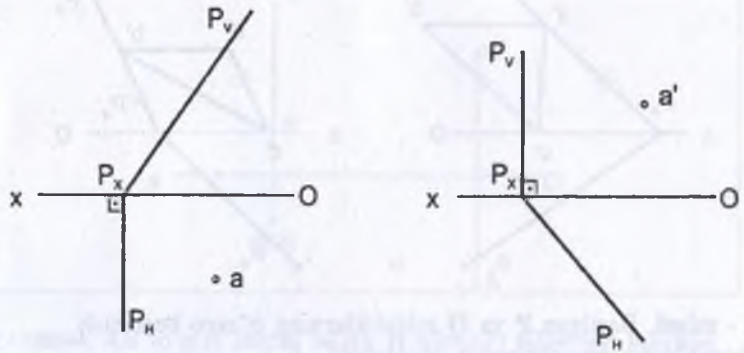


2 - misol. Berilgan **P** va **Q** tekisliklarning o'zaro kesishish chizig'ining proyeksiyalari aniqlansin.

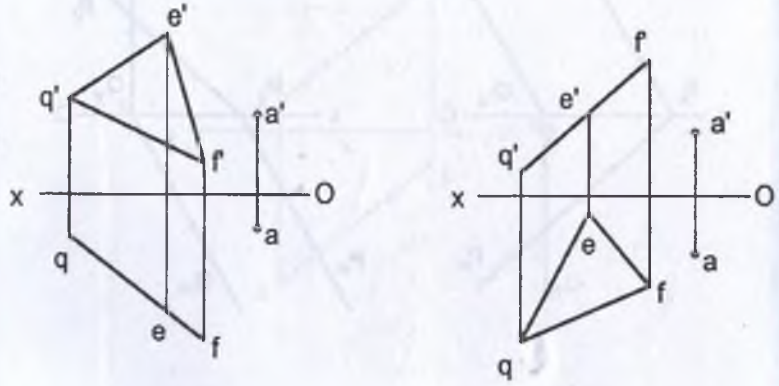


19- dars	Kompleks masalalar

3 - misol. Berilgan **P** tekislikdan **30 mm** uzoqlikda yotuvchi **A** nuqtaning yetishmagan proyeksiyasi aniqlansin.

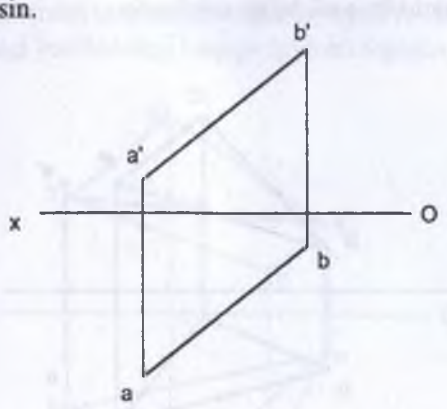


4 - misol. A nuqta berilgan **P** tekislikka proyeksiyalansin.

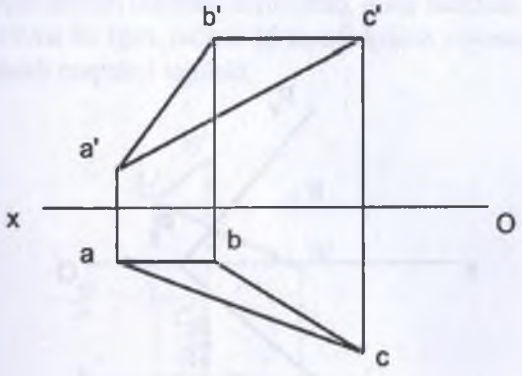


19- dars	Kompleks masalalar

1 - misol. AB to‘g‘ri chiziq kesmasining uzunligi aylantirish usuli bilan aniqlansin.

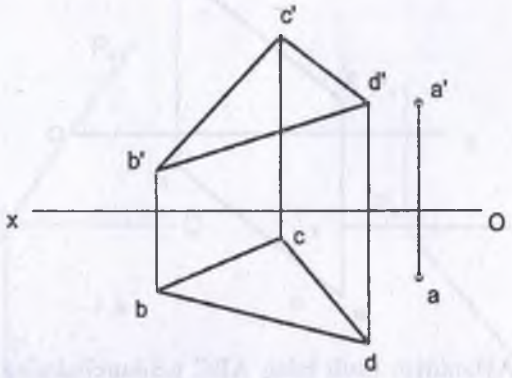


2 - misol. Aylantirish usuli bilan ABC uchburchakning haqiqiy ko‘rinishi aniqlansin.

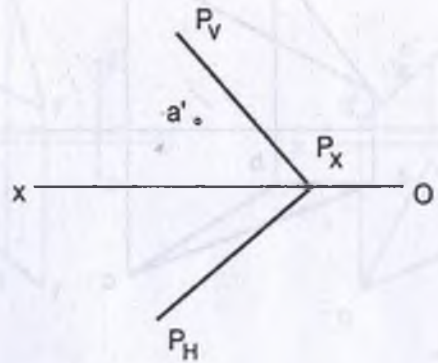


19- dars	Kompleks masalalar

3 - misol. **A** nuqtadan **BCD** uchburchak tekisligigacha bo'lgan masofa almashtirish usuli bilan aniqlansin.

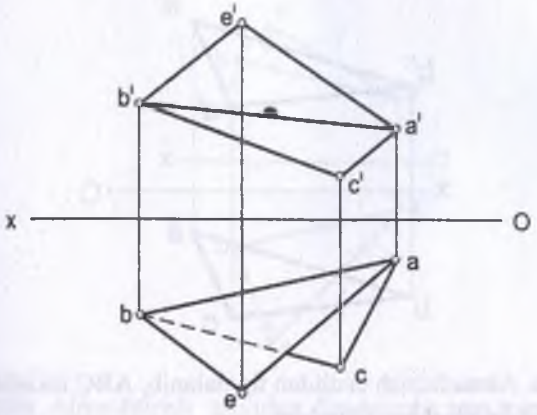


4 - misol. **P** tekisligida yotuvchi **A** nuqta **H** tekislikka joylashtirilsin.

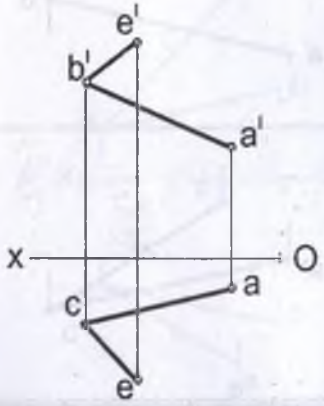


Yakuniy yozma ishga doir masalalar

22-masala. Almashtirish usulidan foydalanib, **ABC** va **ABE** tekisliklar orasidagi burchakning haqiqiy qiymati topilsin.

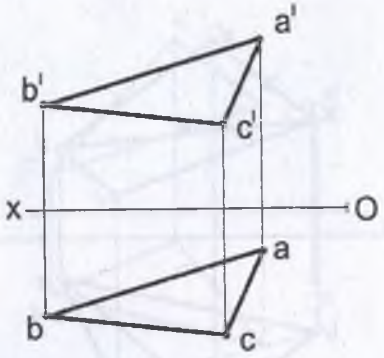


23-masala. Almashtirish usulidan foydalanib, **ABE** burchak tomonlariga urinma bo'lgan, radiusi **15 mm** li aylana yoyining markazi va urinish nuqtalari topilsin.

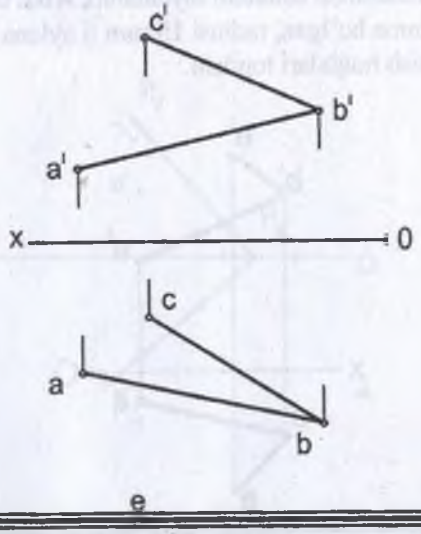


Yakuniy yozma ishga doir masalalar

24-masala. Aylantirish usulidan foydalanib, **ABC** uchburchak ichiga chizilgan urinma aylananing markazi topilsin.

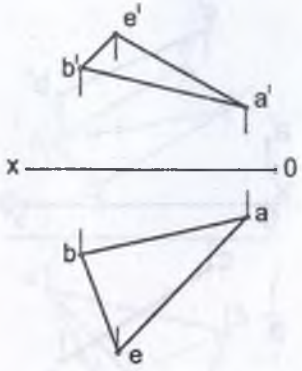


25-masala. Almashtirish usulidan foydalanib, **ABC** tekislikdan **30 mm** uzoqlikda tekislik o'tkazilsin.

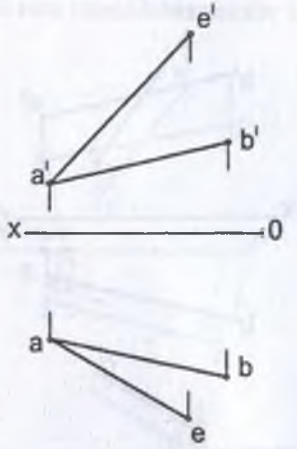


Yakuniy yozma ishga doir masalalar

26-masala. Almashtirish usulidan foydalanib, **ABE** uchburchakning haqiqiy ko'rinishi aniqlansin.

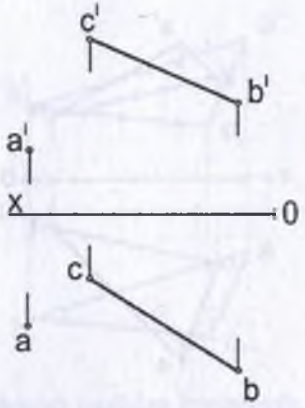


27-masala. Almashtirish usulidan foydalanib, yon tomonlaridan biri **AB** kesma va asosi **AE** to'g'ri chiziqda yotuvchi teng yonli uchburchak chizilsin.

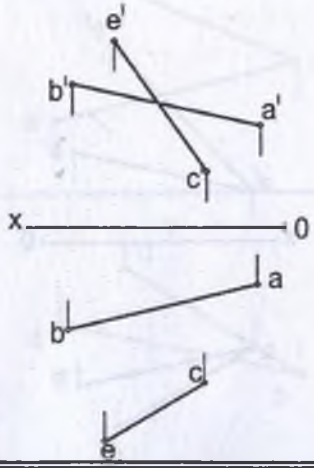


Yakuniy yozma ishga doir masalalar

28-masala. Almashtirish usulidan foydalanib, **A** nuqtadan **BC** to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofaning haqiqiy uzunligi topilsin.

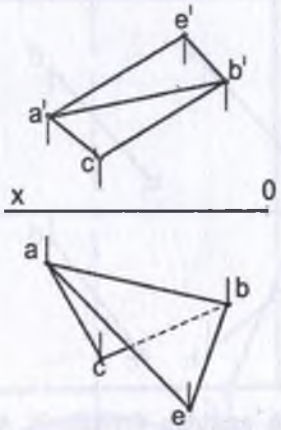


29-masala. Almashtirish usulidan foydalanib, **AB** va **CE** ayqash to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofaning haqiqiy uzunligi topilsin.

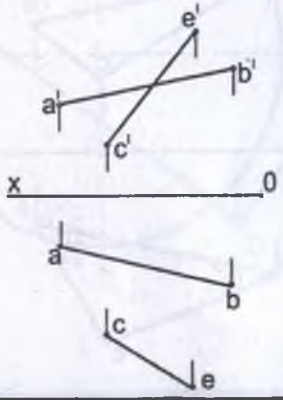


Yakuniy yozma ishga doir masalalar

30-masala. Almashtirish usulidan foydalanib, **AB** qirra orasidagi ikki yoqli burchak tomonlaridan **15 mm** uzoqlikda to'g'ri chiziq o'tkazilsin.

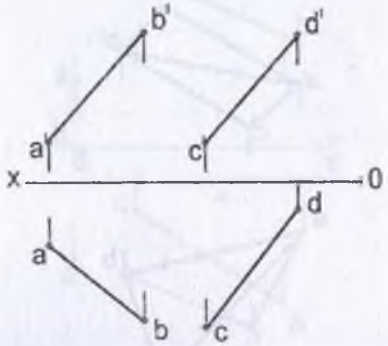


31-masala. Almashtirish usulidan foydalanib, **AB** to'g'ri chiziqda **CE** to'g'ri chiziqdan **40 mm** uzoqlikda nuqtalar topilsin.

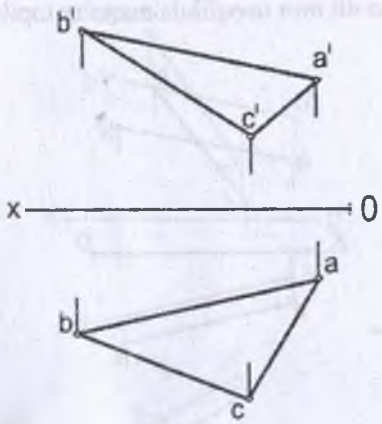


Yakuniy yozma ishga doir masalalar

32-masala. Almashtirish usulidan foydalanib, **AB** va **CD** ayqash to‘g‘ri chiziqlarning **AB** to‘g‘ri chizig‘ini kesib o‘tuvchi va **CD** to‘g‘ri chizig‘idan **40 mm** uzoqlikda unga parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazilsin.

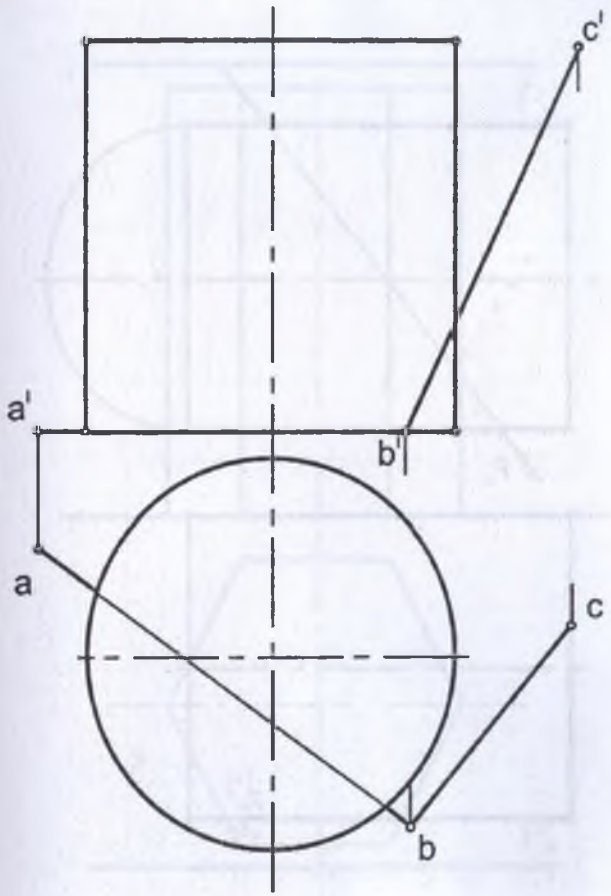


33-masala. Almashtirish usulidan foydalanib, **ABC** uchburchakning tashqarisiga urinma chizilgan aylananing markazi topilsin.



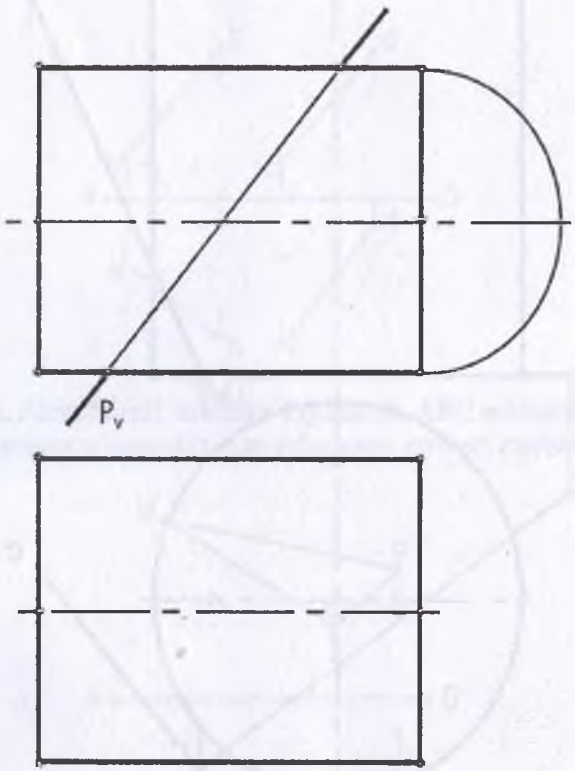
Yakuniy yozma ishga doir masalalar

34-masala. Berilgan sirtni ABC tekisligi bilan kesishgan chizig'ining proyeksiyalari chizilsin. Tekislik shaffof deb qabul qilinsin.



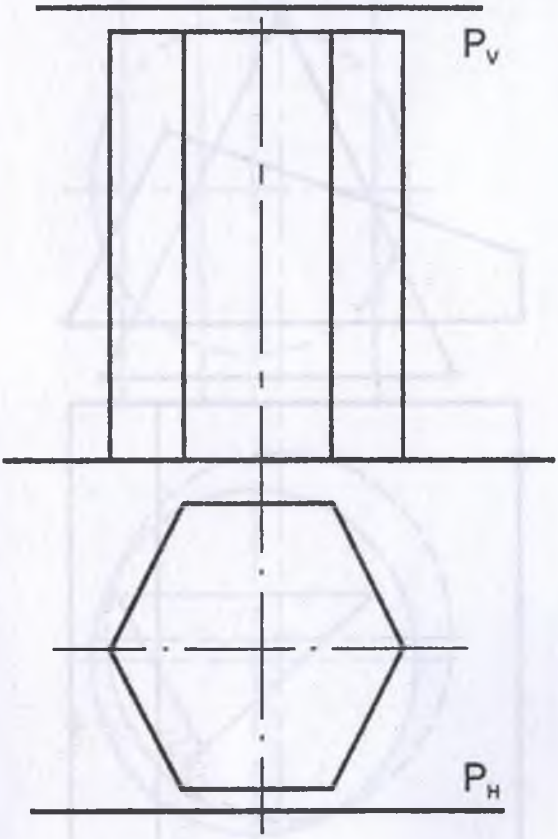
Yakuniy yozma ishga doir masalalar

35-masala. Berilgan sirtni P tekislik bilan kesishgan chizig'ining gorizontal proyeksiyasi va uning haqiqiy ko'rinishi topilsin. Tekislikni shaffof deb qabul qilish kerak.

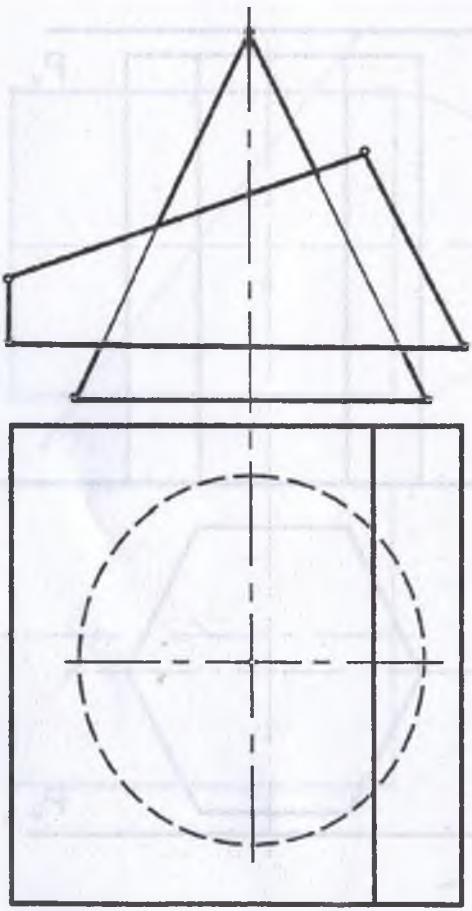


Yakuniy yozma ishga doir masalalar

36-masala. Profil proyeksiyasidan foydalanmay, berilgan sirt bilan $P(P_H, P_V)$ tekislikning kesishgan chizig'ining proyeksiyalari topilsin. Tekislikni shaffof deb qabul qilish kerak.

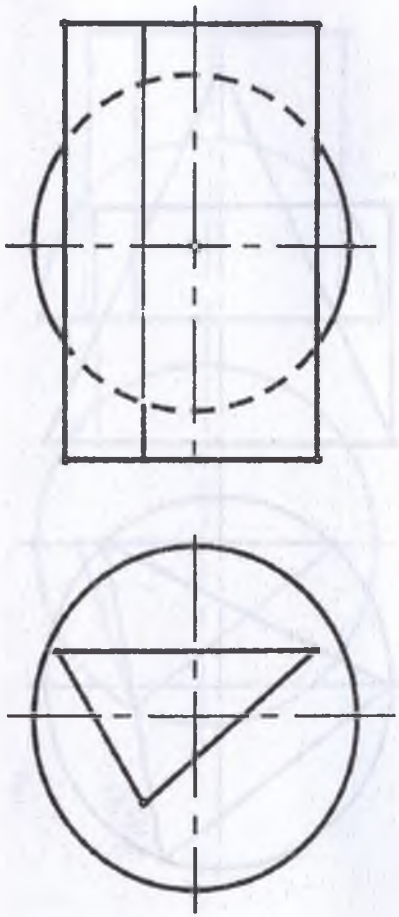


37-masala. Berilgan ikki sirtning o‘zaro kesishish chizig‘ining proyeksiyalari chizilsin.



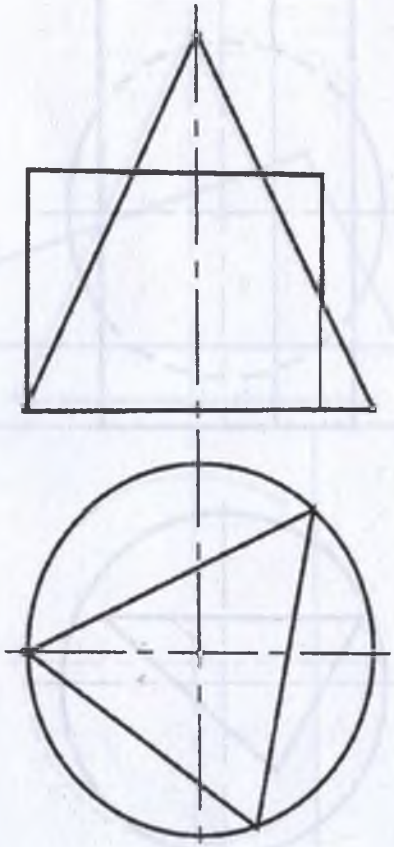
Yakuniy yozma ishga doir masalalar

38-masala. Berilgan ikki sirtning o‘zaro kesishish chizig‘ining proyeksiyalari chizilsin.



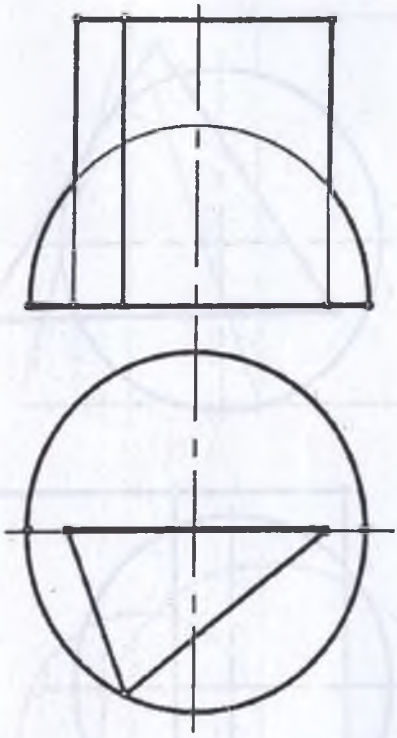
Yakuniy yozma ishga doir masalalar

39-masala. Berilgan ikki sirtning o‘zaro kesishish chizig‘ining proyeksiyalari chizilsin.

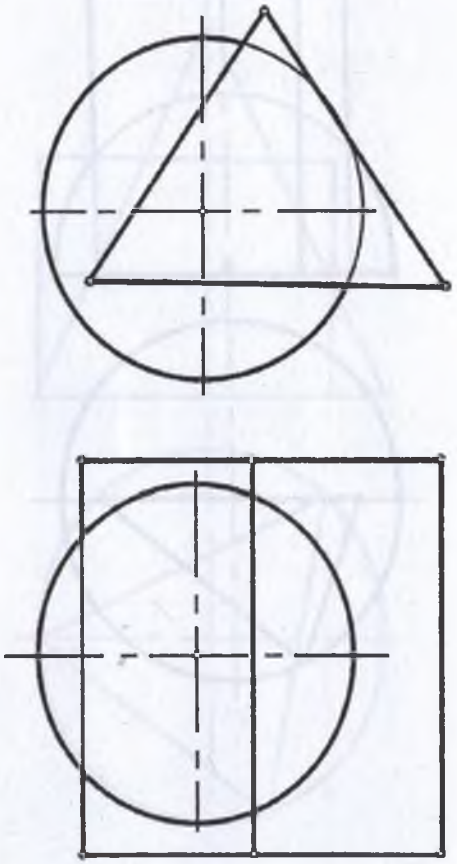


Yakuniy yozma ishga doir masalalar

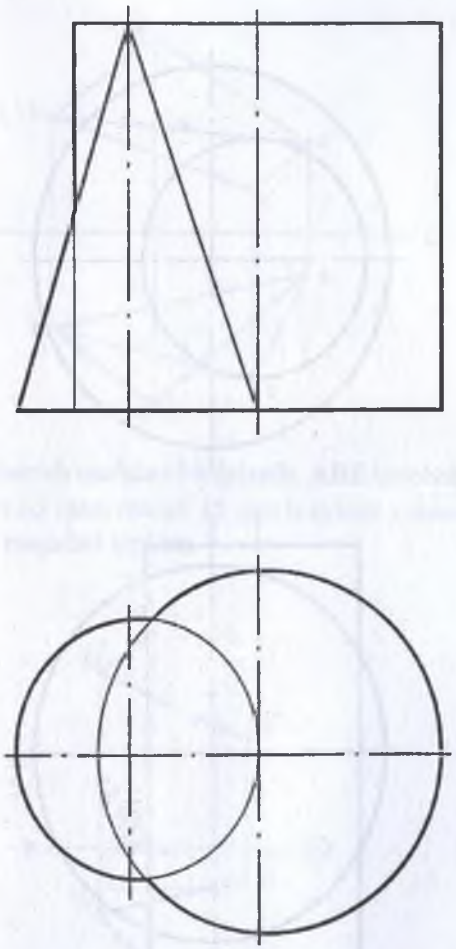
40-masala. Berilgan ikki sirtning o‘zaro kesishish chizig‘ining proyeksiyalari chizilsin.



41-masala. Berilgan ikki sirtning o‘zaro kesishish chizig‘ining proyeksiyalari chizilsin.

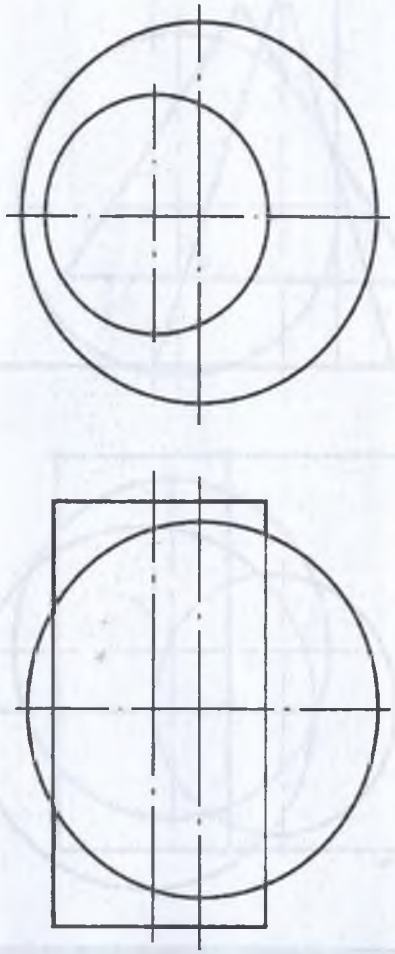


42-masala. Berilgan ikki sirtning o‘zaro kesishish chizig‘ining proyeksiyalari chizilsin.



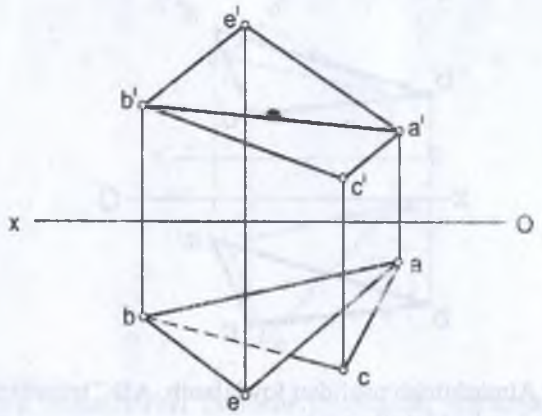
Yakuniy yozma ishga doir masalalar

43-masala. Berilgan ikki sirtning o'zaro kesishish chizig'ining proyeksiyalari chizilsin.

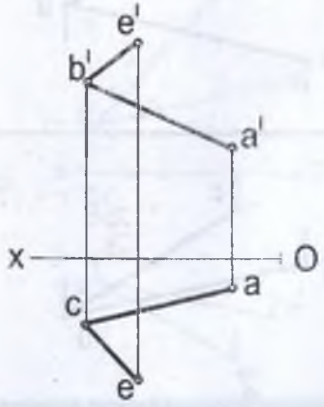


Yakuniy yozma ishga doir masalalar

22-masala. Almashtirish usulidan foydalanib, **ABC** va **ABE** tekisliklar orasidagi burchakning haqiqiy qiymati topilsin.

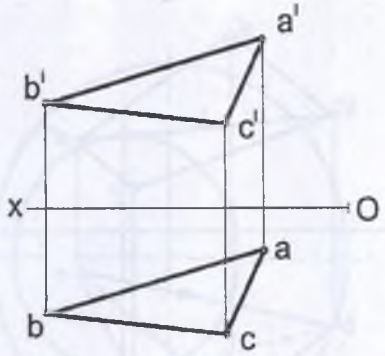


23-masala. Almashtirish usulidan foydalanib, **ABE** burchak tomonlariga urinma bo'lgan, radiusi **15 mm** li aylana yoyining markazi va urinish nuqtalari topilsin.

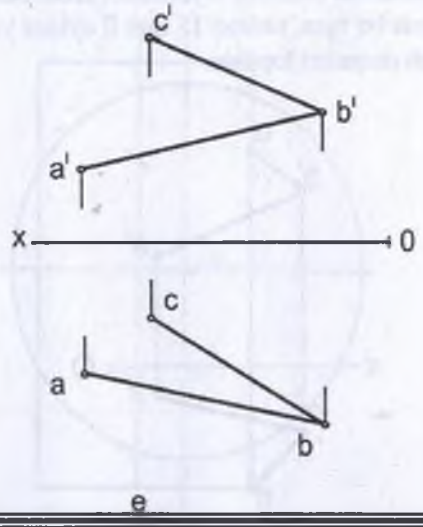


Yakuniy yozma ishga doir masalalar

24-masala. Aylantirish usulidan foydalanib, **ABC** uchburchak ichiga chizilgan urinma aylananing markazi topilsin.

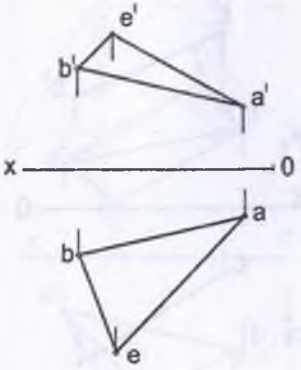


25-masala. Almashtirish usulidan foydalanib, **ABC** tekislikdan **30 mm** uzoqlikda tekislik o'tkazilsin.

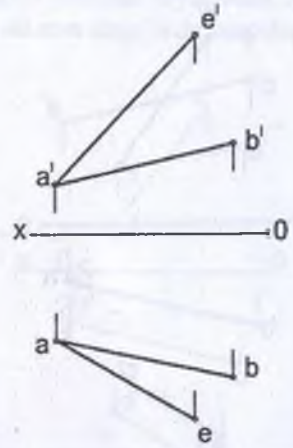


Yakuniy yozma ishga doir masalalar

26-masala. Almashtirish usulidan foydalanib, **ABE** uchburchakning haqiqiy ko'rinishi aniqlansin.

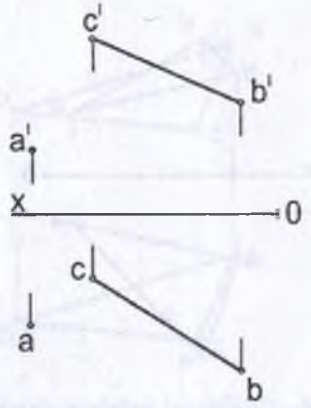


27-masala. Almashtirish usulidan foydalanib, yon tomonlaridan biri **AB** kesma va asosi **AE** to'g'ri chiziqda yotuvchi teng yonli uchburchak chizilsin.

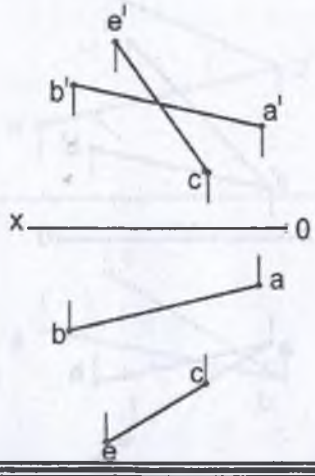


Yakuniy yozma ishga doir masalalar

28-masala. Almashtirish usulidan foydalanib, **A** nuqtadan **BC** to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofaning haqiqiy uzunligi topilsin.

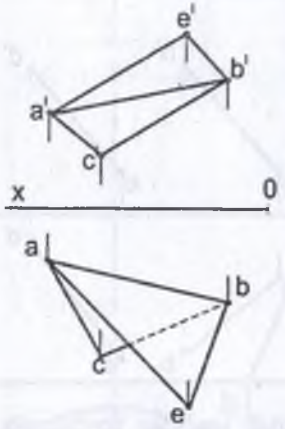


29-masala. Almashtirish usulidan foydalanib, **AB** va **CE** ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi masofaning haqiqiy uzunligi topilsin.

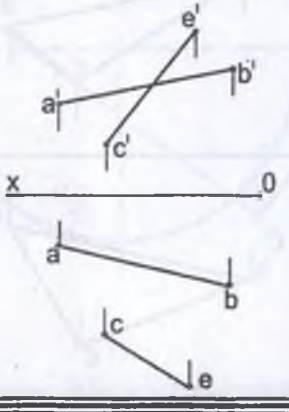


Yakuniy yozma ishga doir masalalar

30-masala. Almashtirish usulidan foydalanib, **AB** qirra orasidagi ikki yoqli burchak tomonlaridan **15 mm** uzoqlikda to'g'ri chiziq o'tkazilsin.

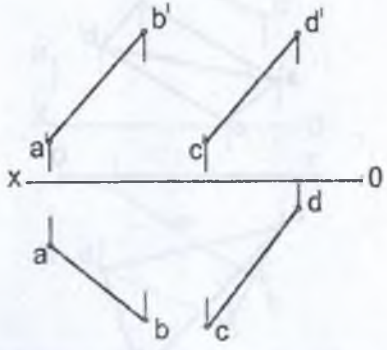


31-masala. Almashtirish usulidan foydalanib, **AB** to'g'ri chiziqda **CE** to'g'ri chiziqdan **40 mm** uzoqlikda nuqtalar topilsin.

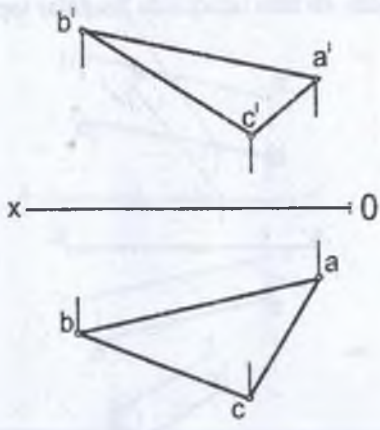


Yakuniy yozma ishga doir masalalar

32-masala. Almashtirish usulidan foydalanib, **AB** va **CD** ayqash to'g'ri chiziqlarning **AB** to'g'ri chizig'ini kesib o'tuvchi va **CD** to'g'ri chizig'idan **40 mm** uzoqlikda unga parallel to'g'ri chiziq o'tkazilsin.

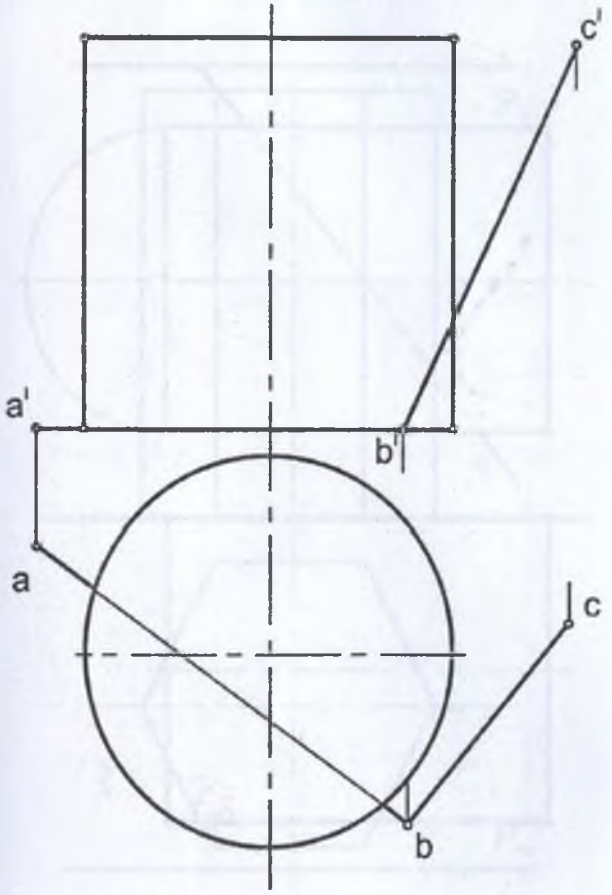


33-masala. Almashtirish usulidan foydalanib, **ABC** uchburchakning tashqarisiga urinma chizilgan aylananing markazi topilsin.



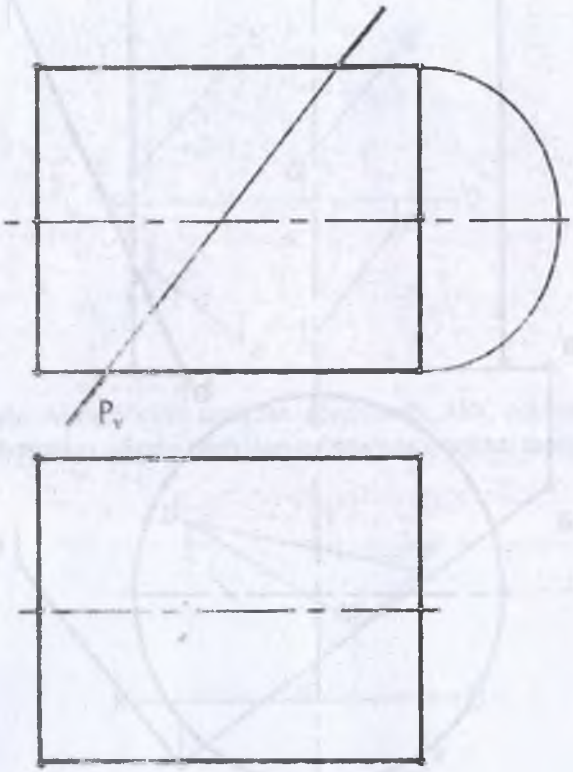
Yakuniy yozma ishga doir masalalar

34-masala. Berilgan sirtni ABC tekisligi bilan kesishgan chizig'ining proyeksiyalari chizilsin. Tekislik shaffof deb qabul qilinsin.



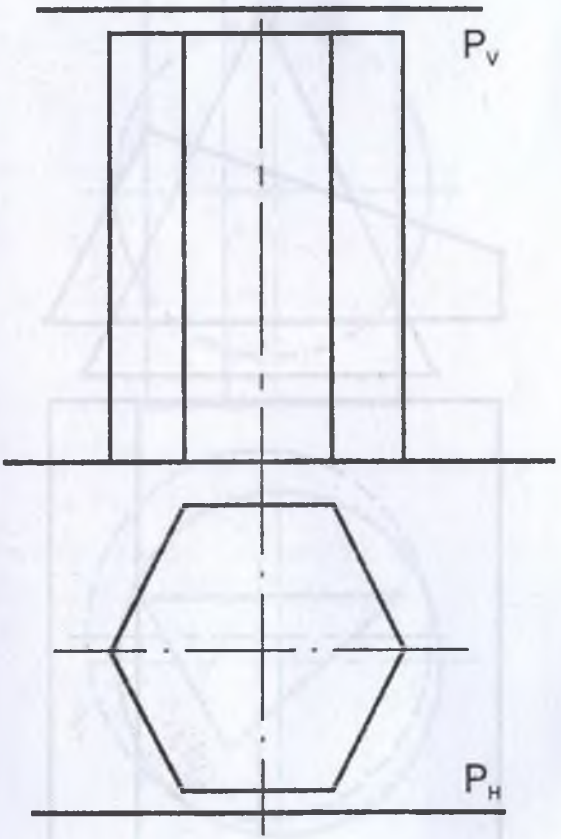
Yakuniy yozma ishga doir masalalar

35-masala. Berilgan sirtni P tekislik bilan kesishgan chizig'ining gorizontal proyeksiyasi va uning haqiqiy ko'rinishi topilsin. Tekislikni shaffof deb qabul qilish kerak.

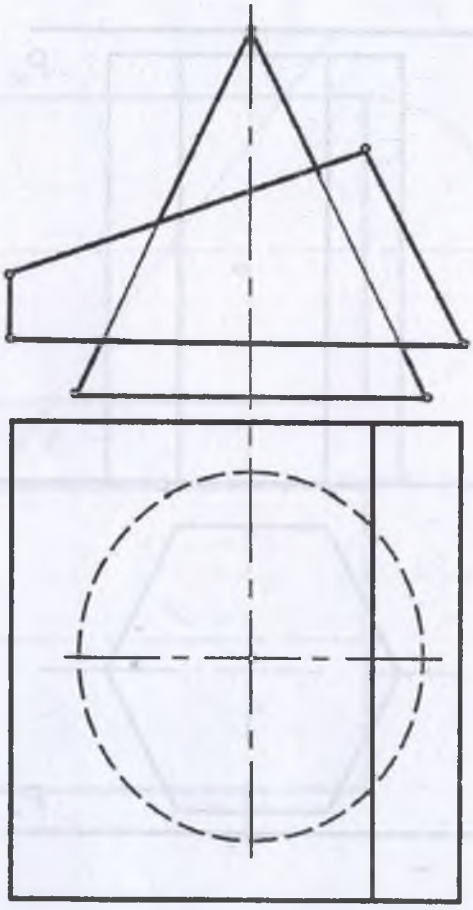


Yakuniy yozma ishga doir masalalar

36-masala. Profil proyeksiyasidan foydalanmay, berilgan sirt bilan $P(P_H, P_V)$ tekislikning kesishgan chizig'ining proyeksiyalari topilsin. Tekislikni shaffof deb qabul qilish kerak.

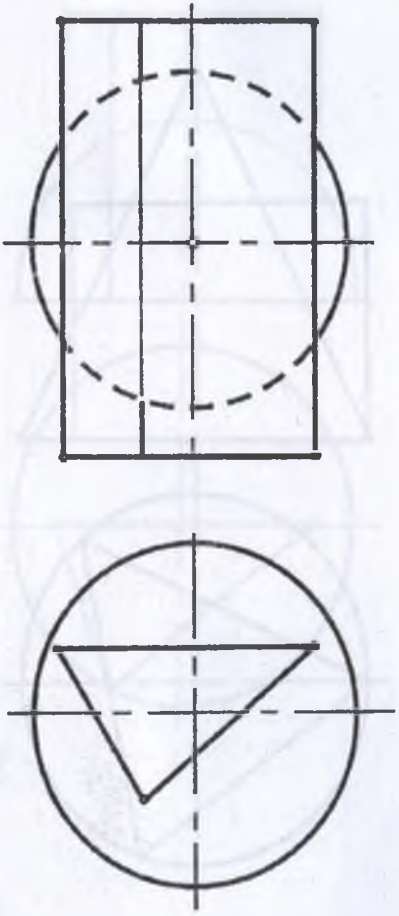


37-masala. Berilgan ikki sirtning o‘zaro kesishish chizig‘ining proyeksiyalari chizilsin.



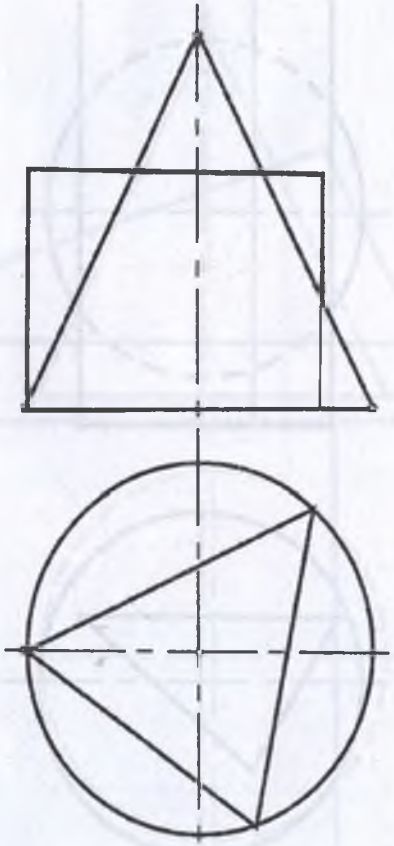
Yakuniy yozma ishga doir masalalar

38-masala. Berilgan ikki sirtning o'zaro kesishish chizig'ining proyeksiyalari chizilsin.



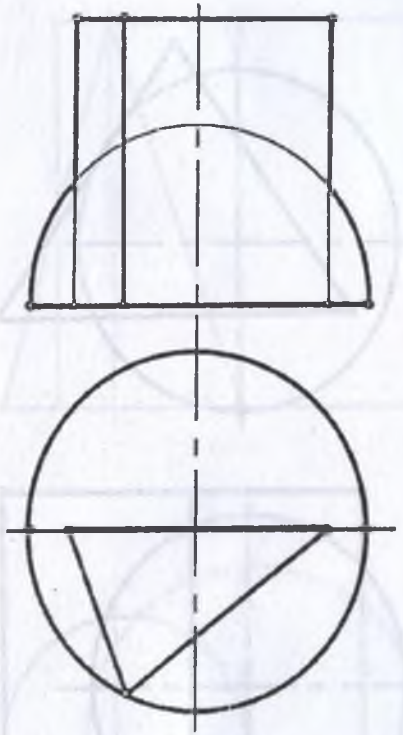
Yakuniy yozma ishga doir masalalar

39-masala. Berilgan ikki sirtning o‘zaro kesishish chizig‘ining proyeksiyalari chizilsin.

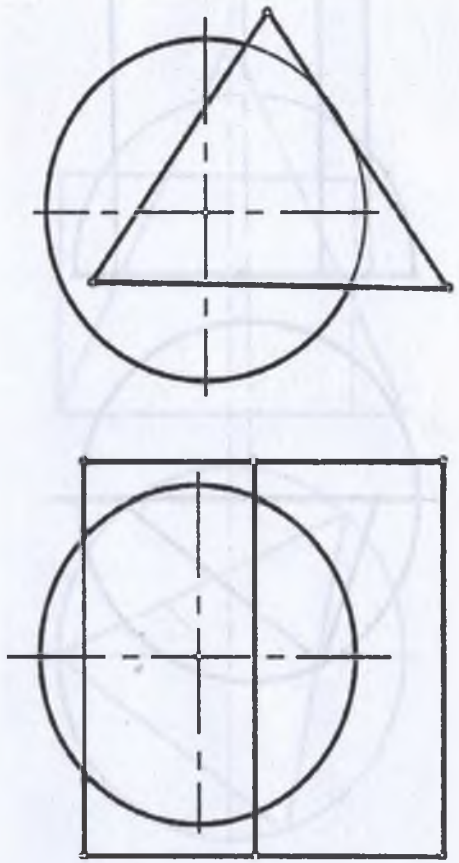


Yakuniy yozma ishga doir masalalar

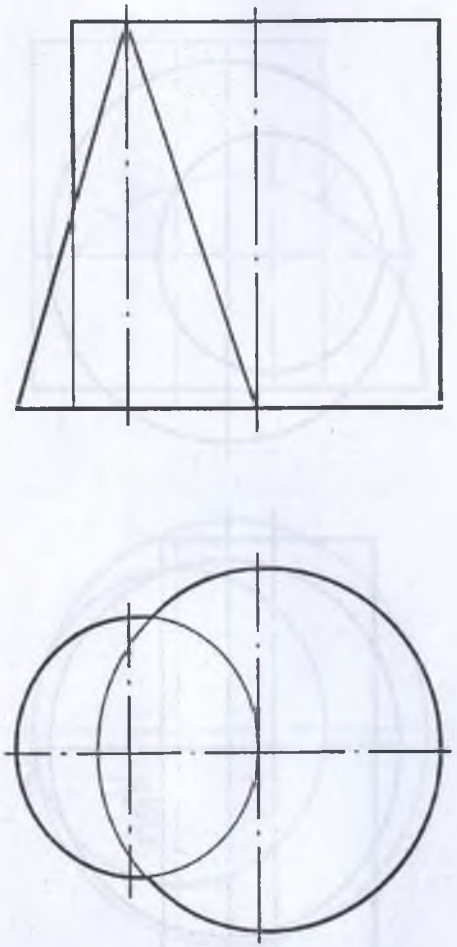
40-masala. Berilgan ikki sirtning o‘zaro kesishish chizig‘ining proyeksiyalari chizilsin.



41-masala. Berilgan ikki sirtning o‘zaro kesishish chizig‘ining proyeksiyalari chizilsin.

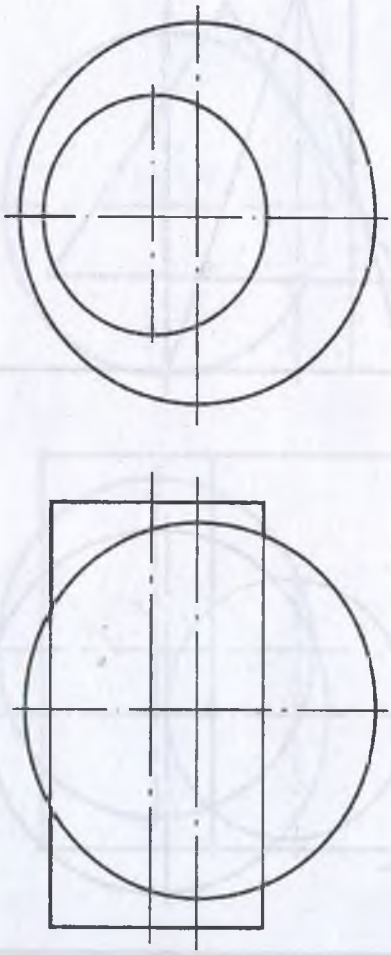


42-masala. Berilgan ikki sirtning o‘zaro kesishish chizig‘ining proyeksiyalari chizilsin.



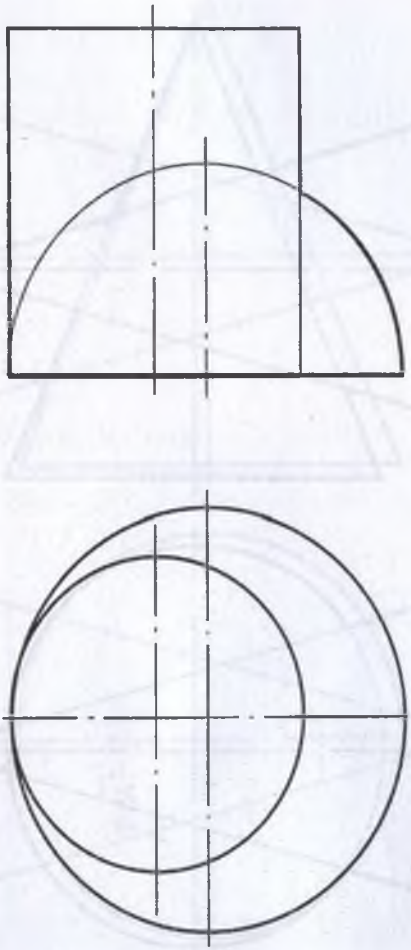
Yakuniy yozma ishga doir masalalar

43-masala. Berilgan ikki sirtning o‘zaro kesishish chizig‘ining proyeksiyalari chizilsin.



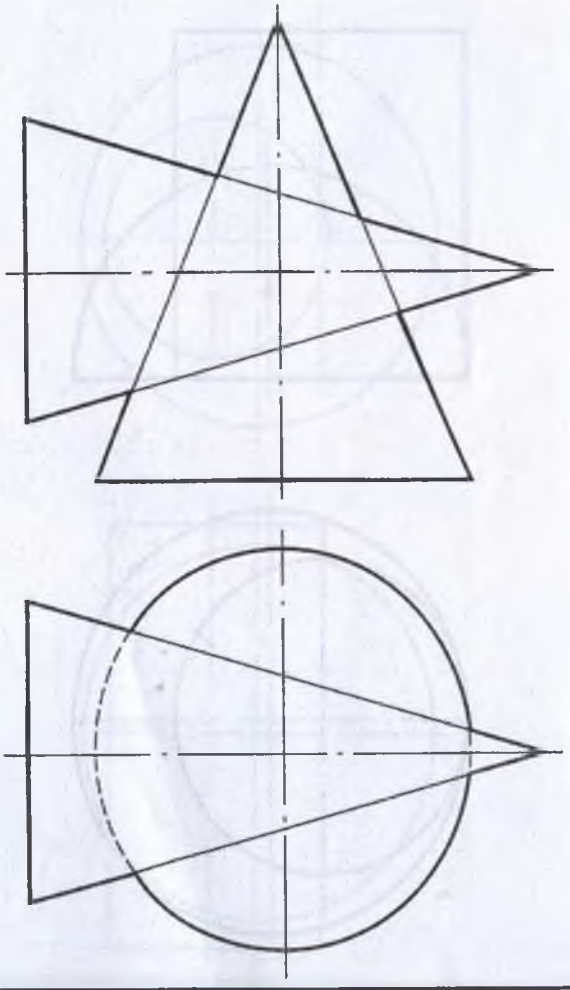
Yakuniy yozma ishga doir masalalar

44-masala. Berilgan ikki sirtning o‘zaro kesishish chizig‘ining proyeksiyalari chizilsin.



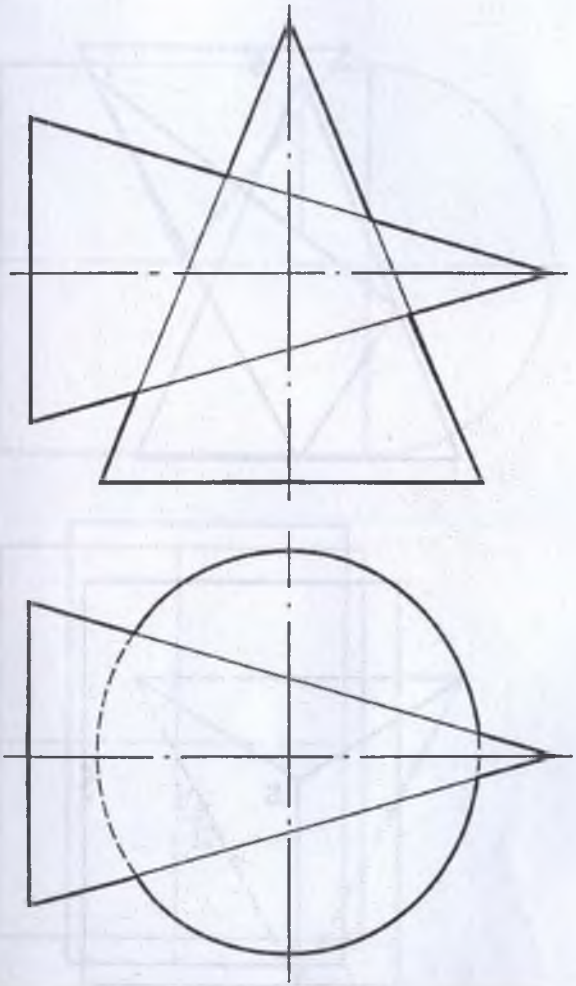
Yakuniy yozma ishga doir masalalar

45-masala. Berilgan ikki sirtning o‘zaro kesishish chizig‘ining proyeksiyalari chizilsin.



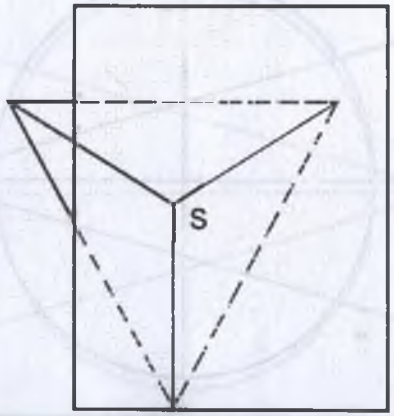
Yakuniy yozma ishga doir masalalar

45-masala. Berilgan ikki sirtning o‘zaro kesishish chizig‘ining proyeksiyalari chizilsin.

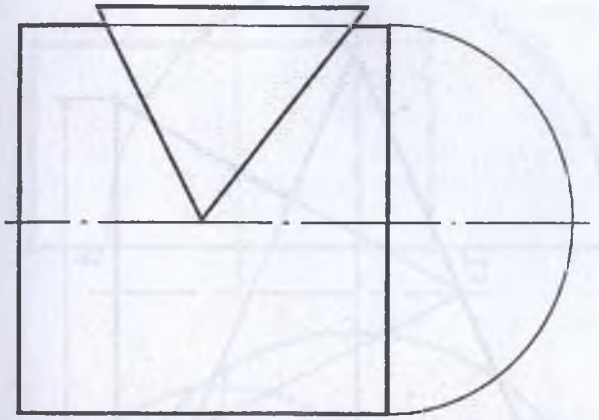


47-masala. Berilgan ikki sirtning o‘zaro kesishish chizig‘ining proyeksiyalari chizilsin.





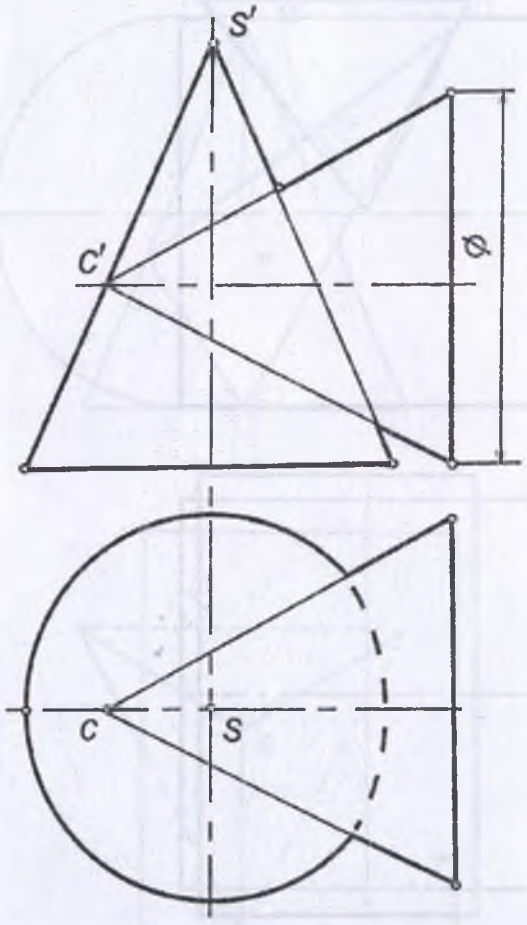
48-masala. Berilgan ikki sirtning o‘zaro kesishish chizig‘ining proyeksiyalari chizilsin.



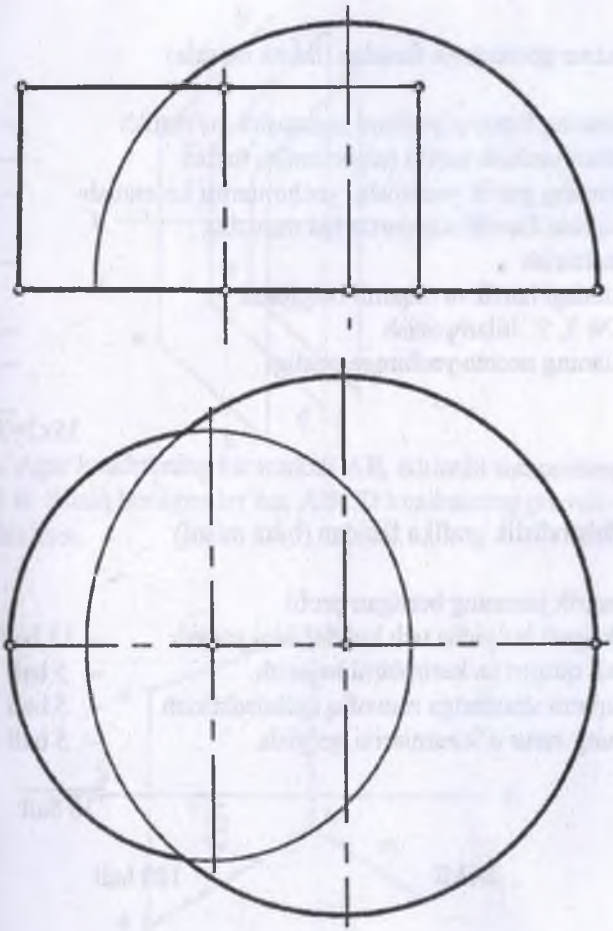


Yakuniy yozma ishga doir masalalar

49-masala. Berilgan ikki sirtning o‘zaro kesishish chizig‘ining proyeksiyalari chizilsin.



50-masala. Berilgan ikki sirtning o‘zaro kesishish chizig‘ining proyeksiyalari chizilsin.



Olimpiada masalalari

ToshDTU miqyosida "Chizma geometriya va muhandislik grafikasi" fani bo'yicha o'tkaziladigan "Olimpiada" masalalariga qo'yiladigan talablar va reyting ballarining mezoni.

I. Chizma geometriya fanidan (ikkita masala)

1. Masalaning fazoviy yechimi sxemasini ko'rsatish	– 4 ball
2. Masalani yechish tartibi (algoritmi)ni tuzish	– 4 ball
3. Masalaning grafik yechilishi yechimlarini ko'rsatish	– 20 ball
4. Chiziqlarni Davlat standartlariga muvofiq qalinlashtirish	– 2 ball
5. Masaladagi harfli va raqamli belgilarni shrift № 3, 5 bilan yozish	– 2 ball
6. Masalaning nechta yechimga egaligi	– 3 ball
	35x2=70 ball

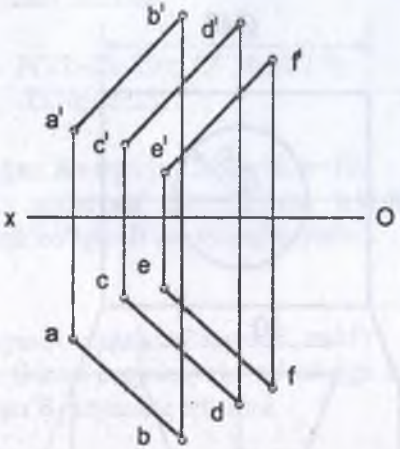
II. Muhandislik grafika fanidan (bitta misol)

1. Geometrik jismning berilgan profil proyeksiyasi bo'yicha uch ko'rinishini yasash.	– 15 ball
2. Foydali qirqim va kesimlarni bajarish.	– 5 ball
3. Chiziqlarni standartga muvofiq qalinlashtirish	– 5 ball
4. Jismning zarur o'lchamlarini qo'yish.	– 5 ball
	30 ball

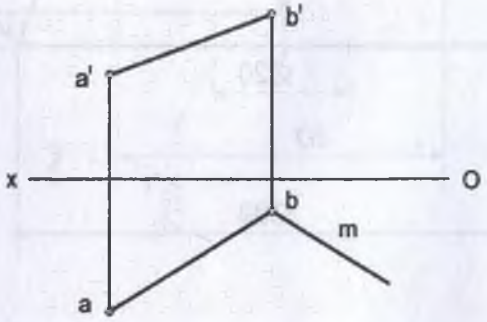
JAMI: 100 ball

Olimpiada masalalari

1-masala. O‘zaro parallel AB, CD, va EF to‘g‘ri chiziqlardan barobar uzoqlikda o‘tgan parallel MN to‘g‘ri chiziqning proyeksiyalari chizilsin.

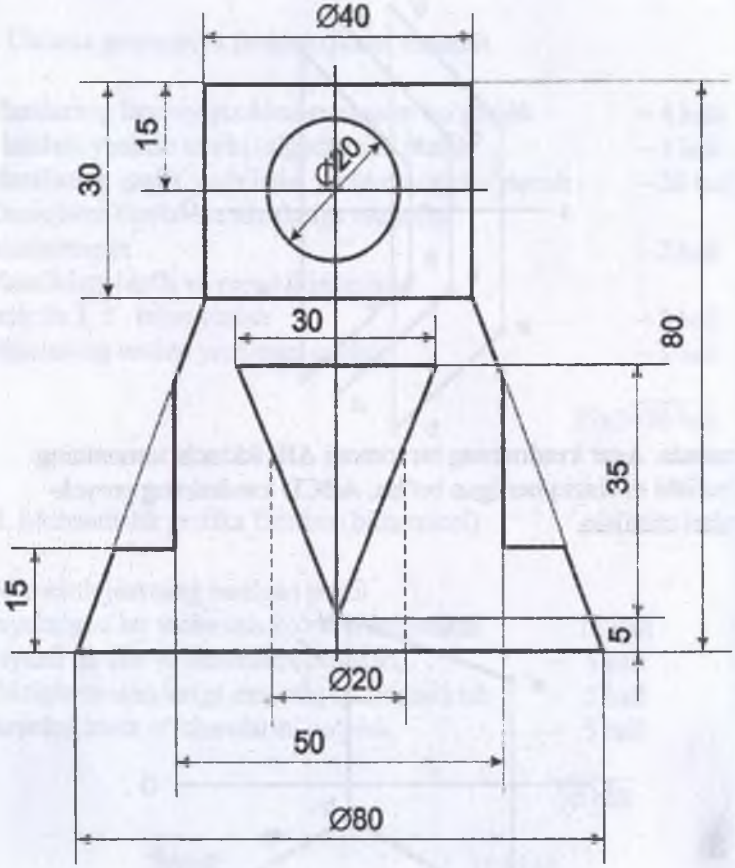


2-masala. Agar kvadratning bir tomoni AB, ikkinchi tomonining yo‘nalishi m chiziq berilgan bo‘lsa, ABCD kvadratning proyeksiyalari chizilsin.



Olimpiada masalalari

3-masala. Berilgan geometrik jismning frontal proyeksiyasi bo'yicha gorizontal va profil proyeksiyalari chizilsin. Kerakli qirqim va kesimlar bajarilsin. O'lchamlar qo'yilsin.



Mustaqil ta'lim masalalari

I. Geometrik figuralarni proyeksiyalash

1-masala. Berilgan nuqtalarning koordinatalari orqali gorizontal va frontal proyeksiyalari chizilsin.

A(20;25;10); B(15;-15;-20); C(-10;20;15);
D(25;10;-25); E(10;-25;25)

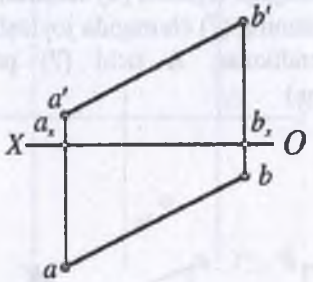
2-masala. Berilgan: A nuqta (x=20, y=15, z=10)
Aniqlash kerak: gorizontal proyeksiyalar tekisligiga nisbatan A nuqtaga simmetrik bo'lgan B nuqtaning epyurini.

3-masala. Berilgan A nuqta (x=25, y=-15, z=15)
Aniqlash kerak: frontal proyeksiyalar tekisligiga nisbatan A nuqtaga simmetrik bo'lgan B nuqtaning epyurini.

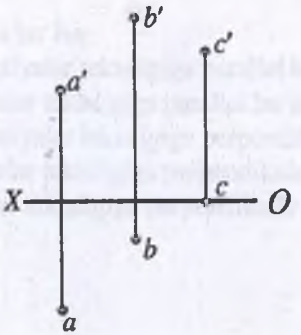
4-masala. Berilgan A nuqta (x=10, y=-20, z=-25)
Aniqlash kerak: *X* proyeksiya o'qiga nisbatan A nuqtaga simmetrik bo'lgan B nuqtaning epyurini.

II. Ortogonal proyeksiyalarni qayta tuzish usullari

8-masala. Proyeksiyalar tekisligini almashtirib, [AB] kesma frontal proyeksiyalar tekisligiga parallel vaziyatga keltirilsin.

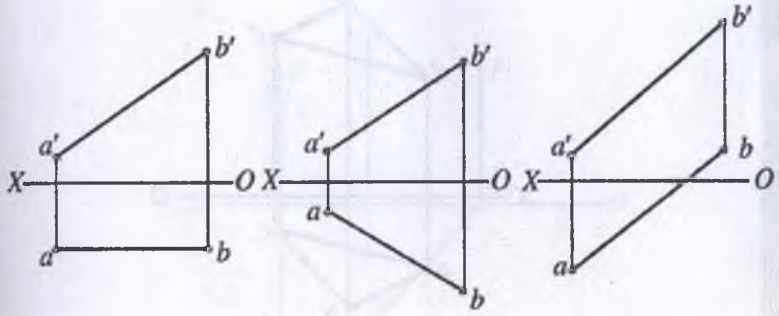


9-masala. A, B, C nuqtalarning proyeksiyalari yangi proyeksiyalar tekisligi tizimida chizilsin.

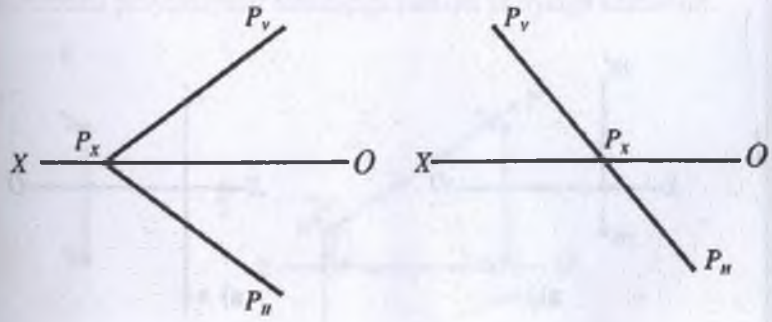


Mustaqil ta'lim masalalari

10-masala. Proyeksiyalar tekisligini almashtirib, [AB] kesma gorizontal proyeksiyalovchi vaziyatga keltirilsin.

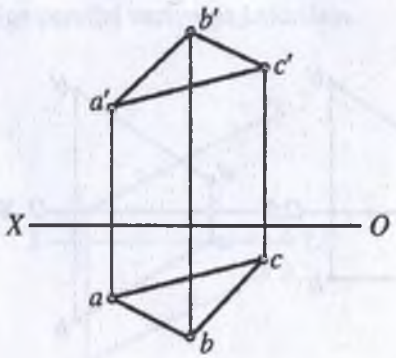


11-masala. Proyeksiyalar tekisligini almashtirib, **P** tekisligining yangi izi shunday chizilsinki, u yangi proyeksiyalar tizimida gorizontal proyeksiyalovchi vaziyatga kelsin.



Mustaqil ta'lim masalalari

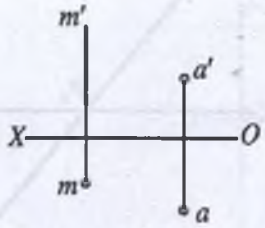
12-masala. Proyeksiyalar tekisliklarini almashtirib, ABC uchburchakning uchlaridan o'tuvchi aylana og'irlik markazi aniqlansin.



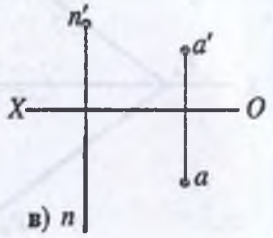
13-masala. Soat strelkasi yo'nalishida A nuqta 90° burchakka aylantirilsin.

a) gorizontal proyeksiyalovchi ***m*** o'q atrofida;

b) frontal proyeksiyalovchi ***n*** o'q atrofida;



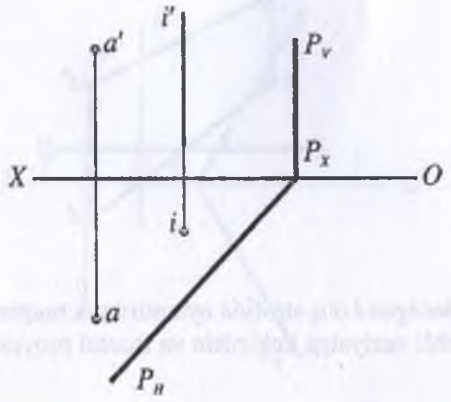
а)



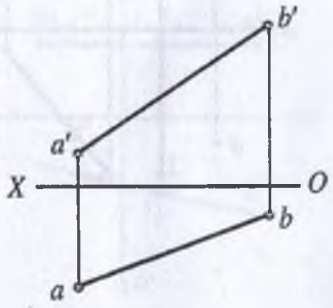
в) *n*

Mustaqil ta'lim masalalari

14-masala. Berilgan *i* o'q atrofida aylantirib, A nuqta P tekislikka joylashtirilsin.

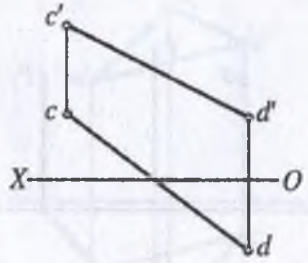


15-masala. V ga perpendikular o'q atrofida aylantirib, [AB] kesma gorizontal proyeksiyalar tekisligiga parallel vaziyatga keltirilsin.

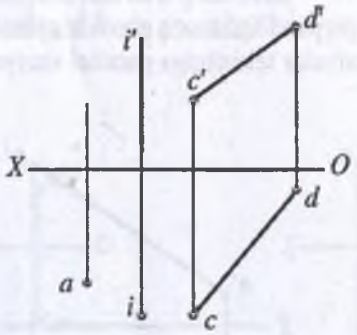


Mustaqil ta'lim masalalari

16-masala. O'q atrofida aylantirib, [CD] kesma frontal proyeksiyalar tekisligiga parallel vaziyatga keltirilsin.

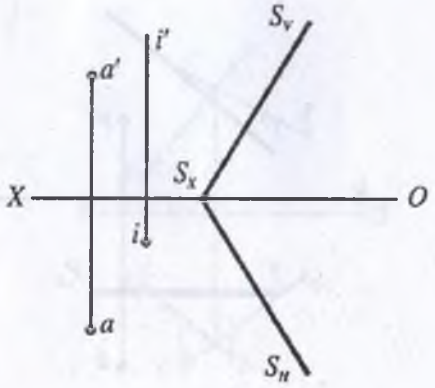


17-masala. Berilgan *i* o'q atrofida aylantirib, A nuqtaning CD to'g'ri chiziqqa tegishli vaziyatga keltirilsin va frontal proyeksiyasi aniqlansin.

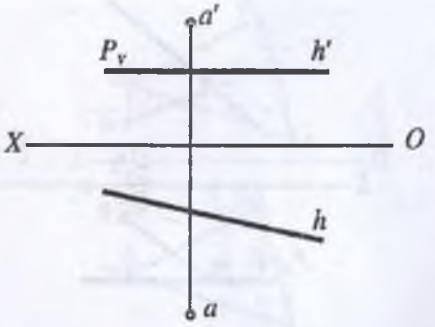


Mustaqil ta'lim masalalari

18-masala. Berilgan ***i*** o'q atrofida aylantirib, **A** nuqta **S** tekislikka joylashtirilsin.

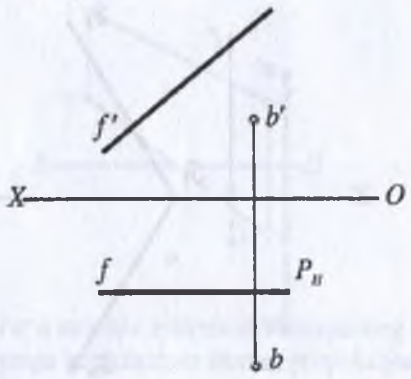


19-masala. **A** nuqta $h_0(h,h')$ gorizontal atrofida aylantirib, **P** gorizontal tekislikka joylashtirilsin.

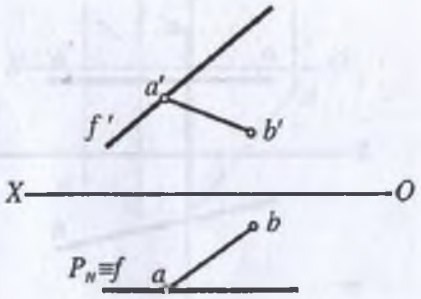


Mustaqil ta'lim masalalari

20-masala. B nuqta $f_0(f,f')$ frontal atrofida aylantirilib, frontal P tekislikka joylashtirilsin.

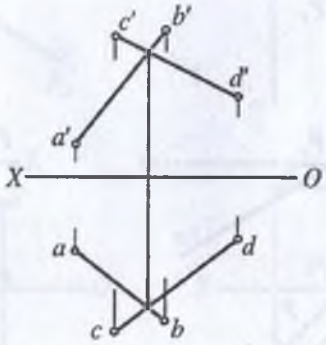


21-masala. [AB] kesma frontal o'q f atrofida aylantirilib, $(A \in f_0)$, frontal P tekislikka joylashtirilsin.

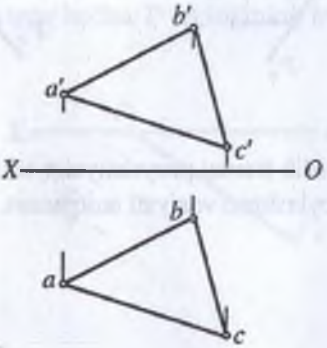


Mustaqil ta'lim masalalari

22-masala. AB va **CD** kesishuvchi to'g'ri chiziqlar orqali berilgan tekislikni uning frontal chizig'i atrofida aylantirib, frontal proyeksiyalar tekisligiga parallel vaziyatga keltiring.

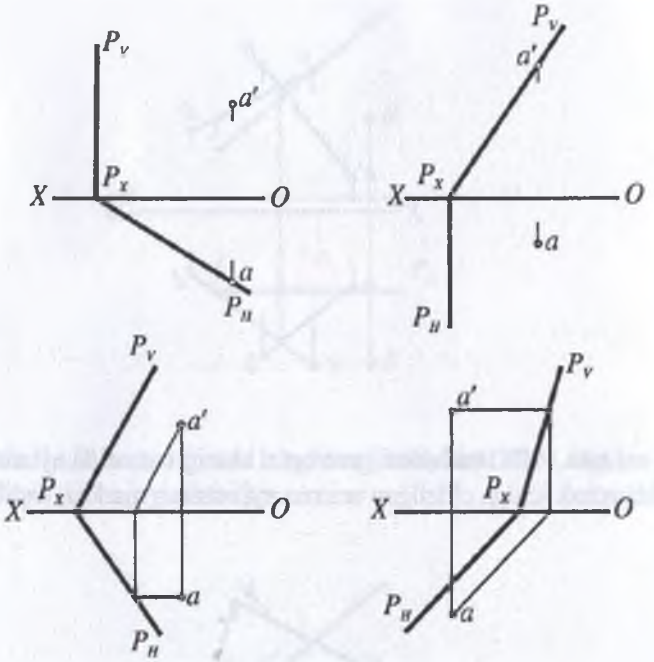


23-masala. ABC tekislikni gorizontal chizig'i atrofida aylantirib, uchburchak ichiga chizilgan urinma aylananing markazi topilsin.



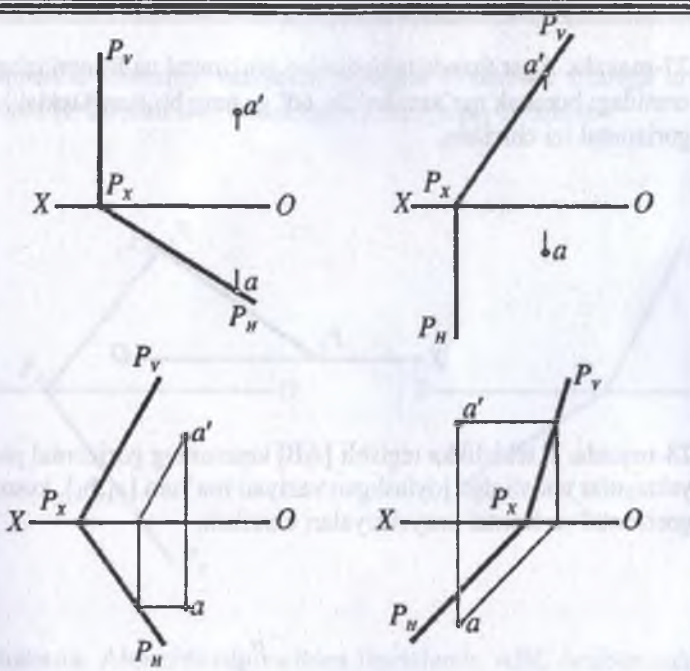
Mustaqil ta'lim masalalari

24-masala. P tekislik gorizontal proyeksiyalar tekisligiga joylashtirilsin va A nuqtani joylashgan vaziyati aniqlansin.

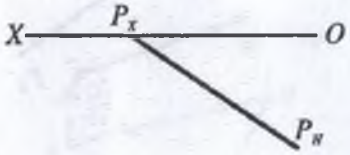


25-masala. P tekislik frontal proyeksiyalar tekisligiga joylashtirilsin va A nuqtaning joylashgan vaziyati aniqlansin.

Mustaqil ta'lim masalalari

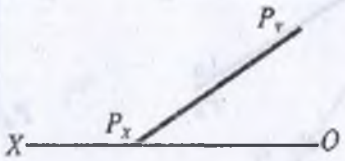


26-masala. Agar fazoda tekislik izlari P_H va P_V orasidagi burchak ma'lum bo'lib, 45^0 ga teng bo'lsa, P tekislikning frontal izi chizilsin.

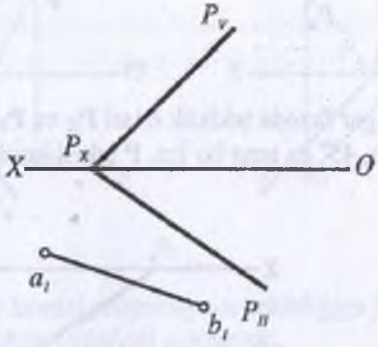


Mustaqil ta'lim masalalari

27-masala. Agar fazoda tekislikning gorizontal va frontal izlari orasidagi burchak ma'lum bo'lib, 60^0 ga teng bo'lsa, **P** tekislikning gorizontal izi chizilsin.

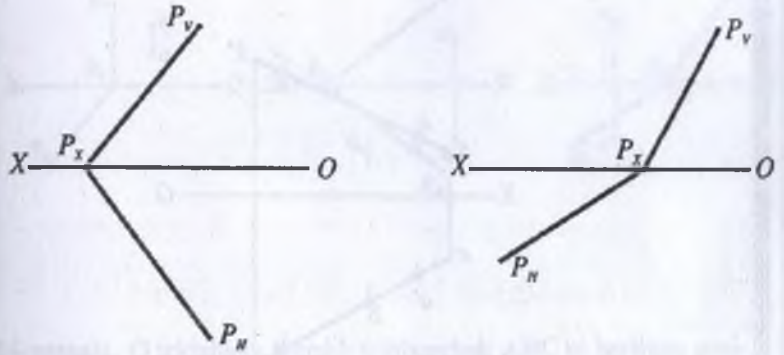


28-masala. **P** tekislikka tegishli **[AB]** kesmaning gorizontal proyeksiyalar tekisligiga joylashgan vaziyati ma'lum **[a_1,b_1]**, kesmaning gorizontal va frontal proyeksiyalari chizilsin.

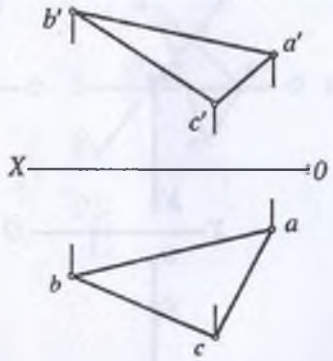


Mustaqil ta'lim masalalari

29-masala. Umumiy vaziyatda berilgan **P** tekislik izlariga urinma bo'lgan **R=30 mm** li aylananing proyeksiyalari chizilsin.

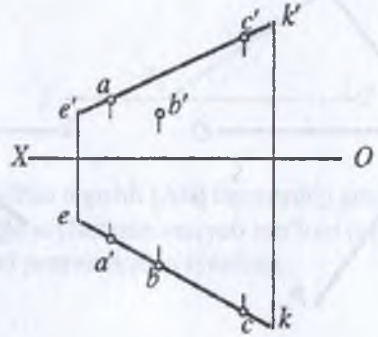


30-масала. Almashtirish usulidan foydalanib, **ABC** uchburchakning tashqarisiga urinma chizilgan aylananing markazi topilsin.

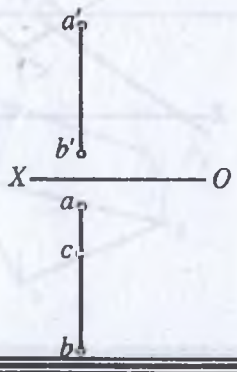


III. Vaziyatga oid masalalar

31-masala. A, B, C nuqtalarning qaysi biri KE to'g'ri chiziqqa tegishliligini aniqlang.

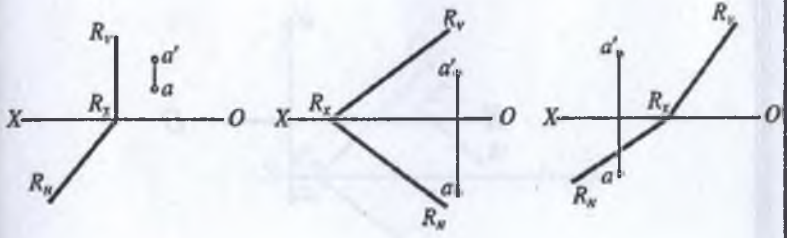


32-masala. [AB] kesma orqali berilgan to'g'ri chiziqda C nuqtaning proyeksiyasi aniqlansin. C nuqtaning gorizontal proyeksiyasi ma'lum va $C \in [AB]$.

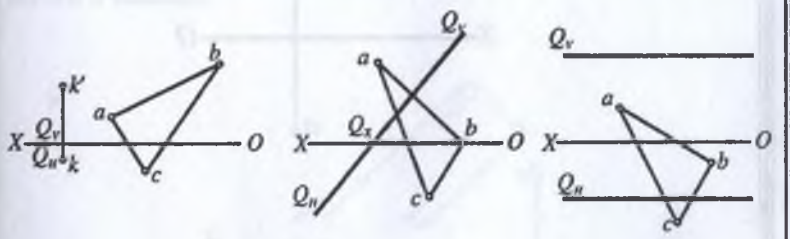


Mustaqil ta'lim masalalari

33-masala. A nuqta va R tekislik berilgan. A nuqtaning R tekislikka tegishliligini aniqlang.

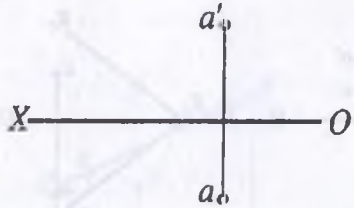


34-masala. Q tekislikka tegishli uchburchak ABC ni berilgan gorizontal proyeksiyasi orqali frontal proyeksiyasini chizing. $\Delta ABC \in Q$

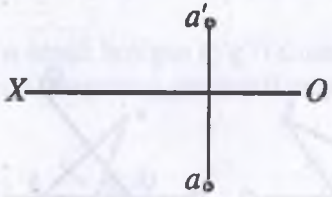


Mustaqil ta'lim masalalari

35-masala. A nuqta orqali ixtiyoriy bo'lgan gorizontal proyeksiyalovchi tekislik o'tkazilsin.

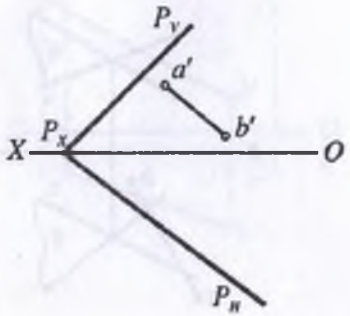


36-masala. A nuqta orqali x o'qiga parallel tekislikning izlari o'tkazilsin.

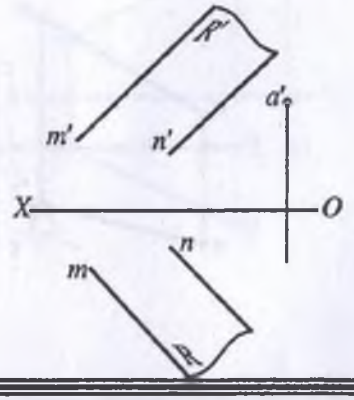


Mustaqil ta'lim masalalari

37-masala. P tekislikka tegishli (AB) to'g'ri chiziqning gorizontal proyeksiyasi chizilsin.

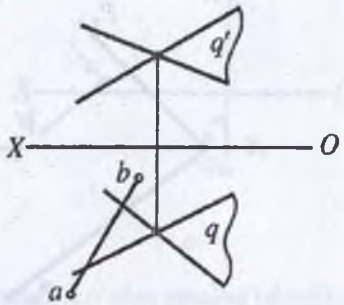


38-masala. R tekislikka tegishli A nuqta orqali tekislikning gorizontali o'tkazilsin.

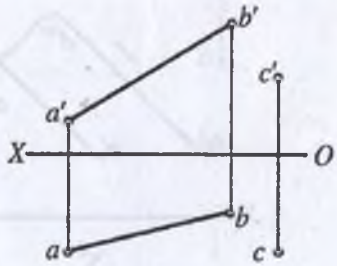


Mustaqil ta'lim masalalari

39-masala. Q tekislikka tegishli (AB) to'g'ri chiziqning gorizontal proyeksiyasi ma'lum, frontal proyeksiyasi aniqlansin.

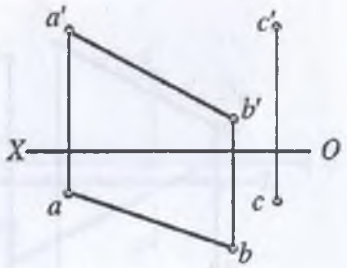


40-masala. Berilgan AB kesmani kesuvchi C nuqta orqali o'tuvchi gorizontal proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgan EK to'g'ri chiziq o'tkazilsin.

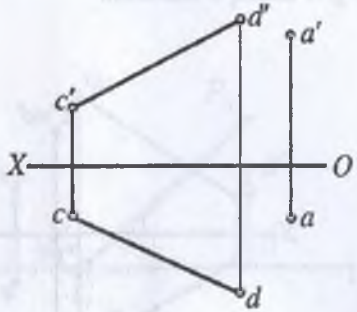


Mustaqil ta'lim masalalari

41-masala. C nuqta orqali (AB) to'g'ri chiziqni va *Ox* o'qini kesib o'tuvchi to'g'ri chiziq o'tkazilsin.

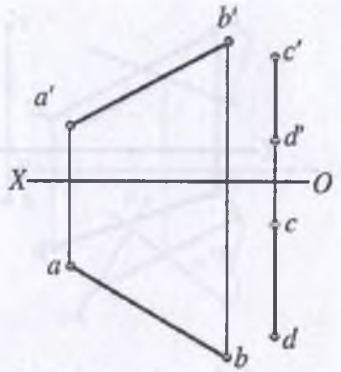


42-masala. A nuqta orqali frontal proyeksiyalar tekisligiga parallel va (CD) to'g'ri chiziqni kesib o'tuvchi to'g'ri chiziq o'tkazilsin.

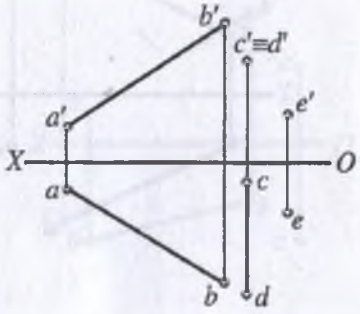


Mustaqil ta'lim masalalari

43-masala. Berilgan **[AB]** va **[CD]** kesmalarni kesuvchi gorizontal proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq o'tkazilsin.

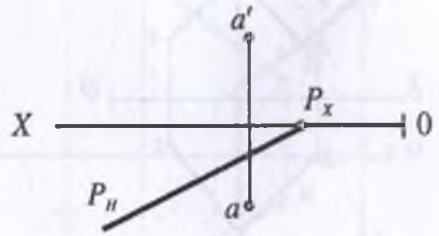


44-masala. Berilgan **[AB]** va **[CD]** kesmalarni kesib, **E** nuqta orqali o'tuvchi **(EK)** to'g'ri chiziq o'tkazilsin.

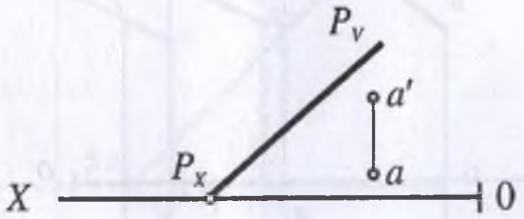


Mustaqil ta'lim masalalari

45-масала. A nuqta P tekislikka tegishli, P tekislikning frontal izi chizilsin.

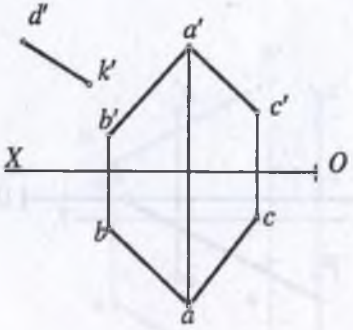


46-масала. A nuqta P tekislikka tegishli, P tekislikning gorizontal izi chizilsin.

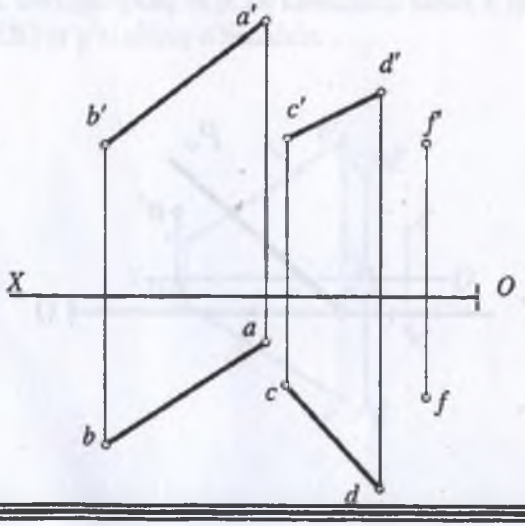


Mustaqil ta'lim masalalari

47-масала. Berilgan **ABC** tekislikka tegishli **DK** to'g'ri chiziqning yetishmagan proyeksiyasi chizilsin.

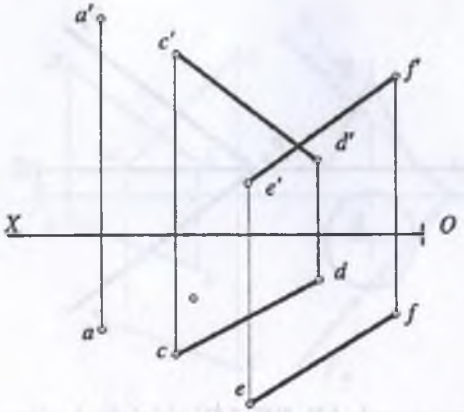


48-масала. CD to'g'ri chiziqning **ABF** tekislik bilan uchrashish nuqtasi aniqlansin.

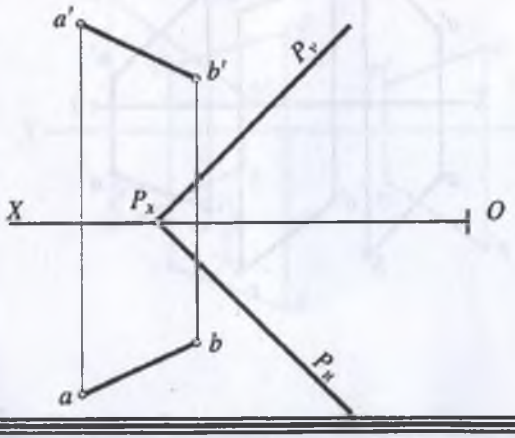


Mustaqil ta'lim masalalari

49-масала. CD to'g'ri chiziqning AEF tekislik bilan uchrashish nuqtasi aniqlansin.

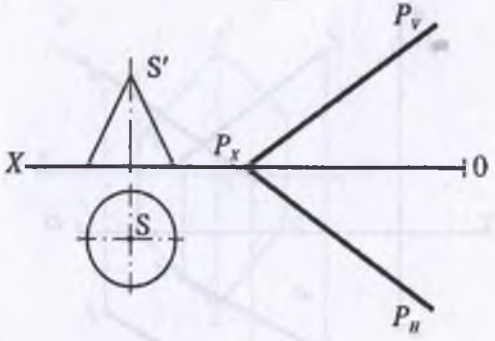


50-масала. AB to'g'ri chiziqning P tekislik bilan kesishish nuqtasining proyeksiyalari aniqlansin.

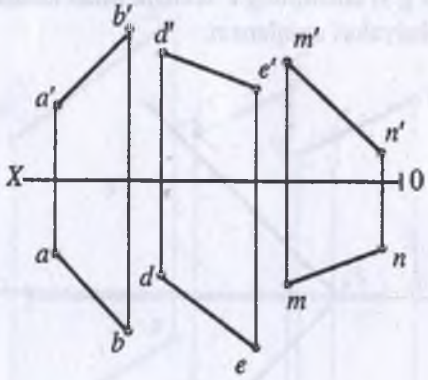


Mustaqil ta'lim masalalari

51-масала. Konus sirtida P tekislikka parallel to'g'ri chiziqlar o't-kazilsin.

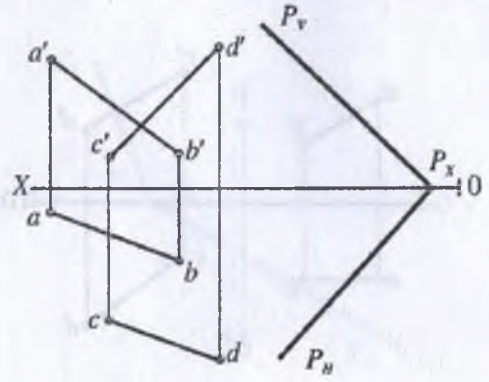


52-масала. Uchta ayqash **AB**, **DE**, **MN** chiziqlar berilgan, ularni kesib o'tuvchi to'g'ri chiziq o'tkazilsin.

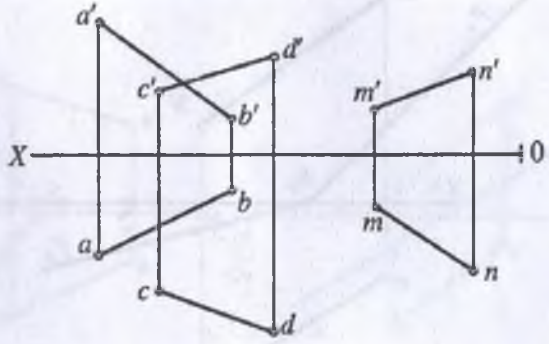


Mustaqil ta'lim masalalari

53-масала. P tekislikka perpendikular bo'lgan va AB, CD ayqash chiziqlarni kesib o'tuvchi MN to'g'ri chiziq o'tkazilsin.

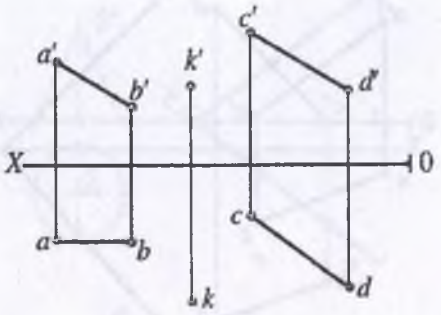


54-масала. AB va CD chiziqlarni kesib o'tuvchi va MN to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq o'tkazilsin.

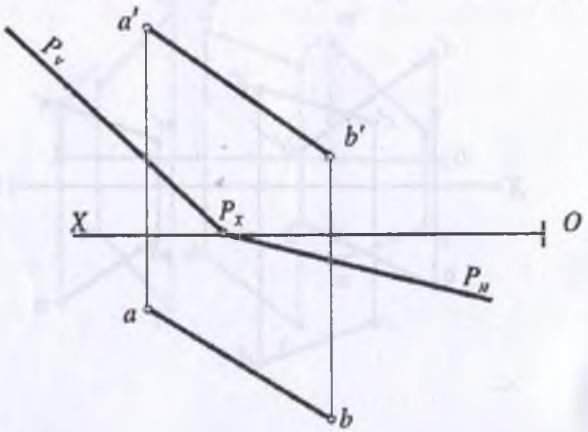


Mustaqil ta'lim masalalari

55-масала. K nuqta orqali CD to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgan va AB to'g'ri chiziqni kesib o'tuvchi to'g'ri chiziq o't-kazilsin.

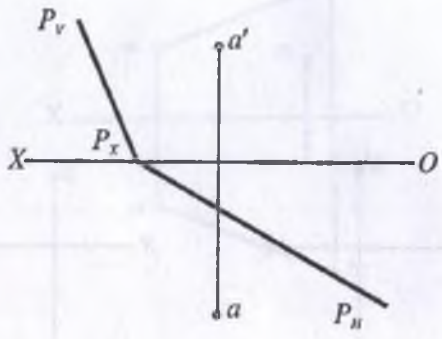


56-масала. AB to'g'ri chiziqning P tekislik bilan kesishish nuqta-sining proyeksiyalari aniqlansin.

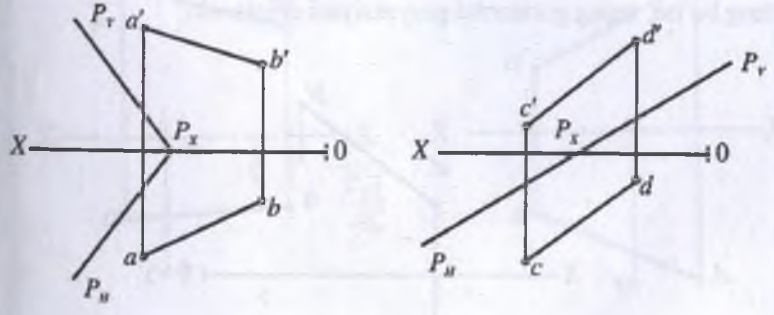


Mustaqil ta'lim masalalari

57-масала. A nuqta orqali berilgan P tekislikka perpendikular bo'lgan Q tekislik o'tkazilsin.



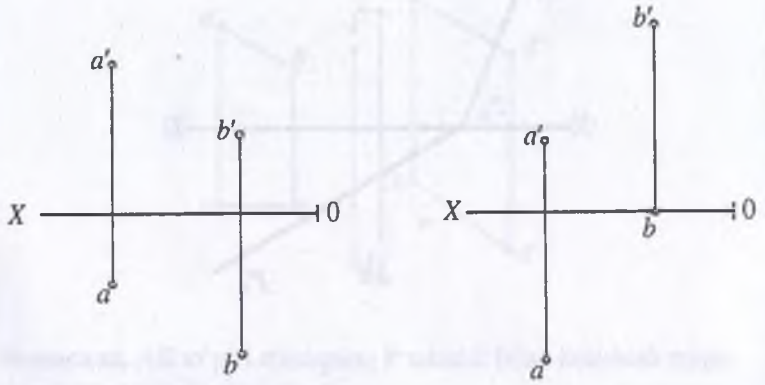
58-масала. AB to'g'ri chiziq orqali berilgan P tekislikka perpendikular bo'lgan Q tekislik o'tkazilsin.



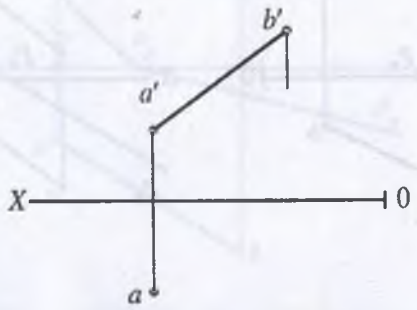
Mustaqil ta'lim masalalari

IV. O'lchovli masalalar

59-masala. A va B nuqtalar orasidagi masofa aniqlansin.

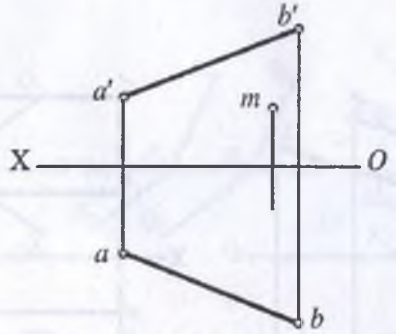


60- masala. Agar AB kesmaning uzunligi ma'lum bo'lib, 35 mm ga teng bo'lsa, uning gorizontal proyeksiyasi aniqlansin.

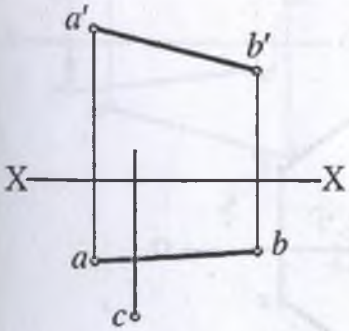


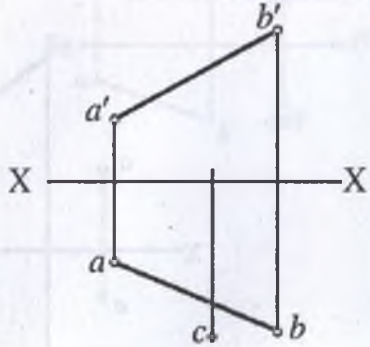
Mustaqil ta'lim masalalari

61-масала. **AB** kesmaning uchlaridan baravar uzoqlikda joylashgan **M** nuqtaning gorizontal proyeksiyasi aniqlansin.



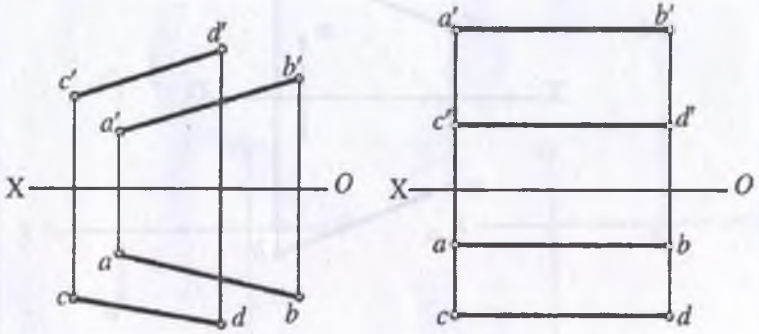
62-масала. Agar nuqta **AB** to'g'ri chiziqdan **20 mm** uzoqlikda joylashgan bo'lsa, **C** nuqtaning frontal proyeksiyasi aniqlansin.



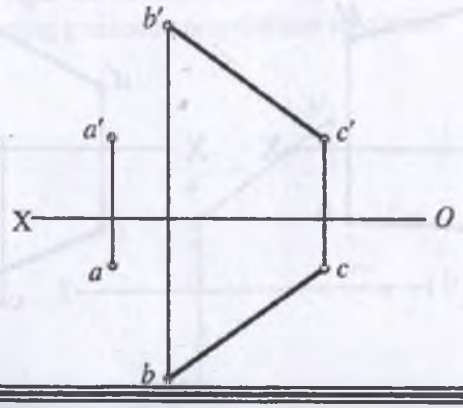


Mustaqil ta'lim masalalari

63-масала. O'zaro parallel **AB** va **CD** to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa aniqlansin.

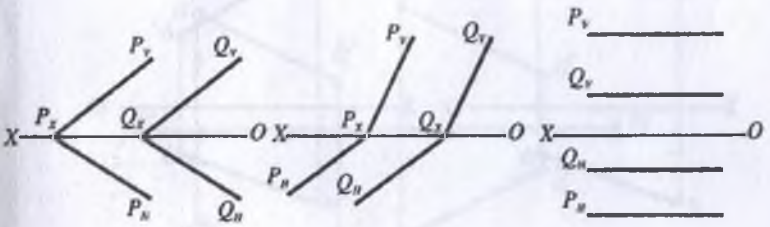


64-масала. **A** nuqtadan **20 mm** masofada, **BC** to'g'ri chiziqdan **25 mm** masofada va unga parallel bo'lgan **DE** to'g'ri chiziqning proyeksiyalari chizilsin.

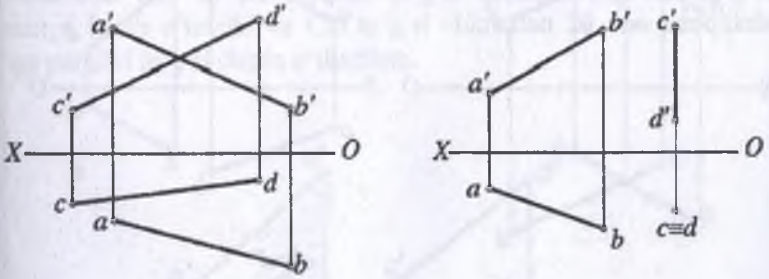


Mustaqil ta'lim masalalari

65-масала. O'zaro parallel P va Q tekisliklar orasidagi masofa aniqlansin.

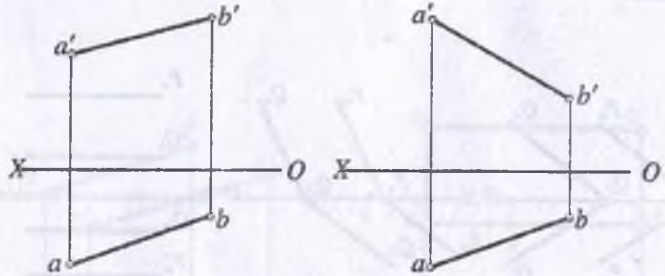


66-масала. AB va CD ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa aniqlansin.

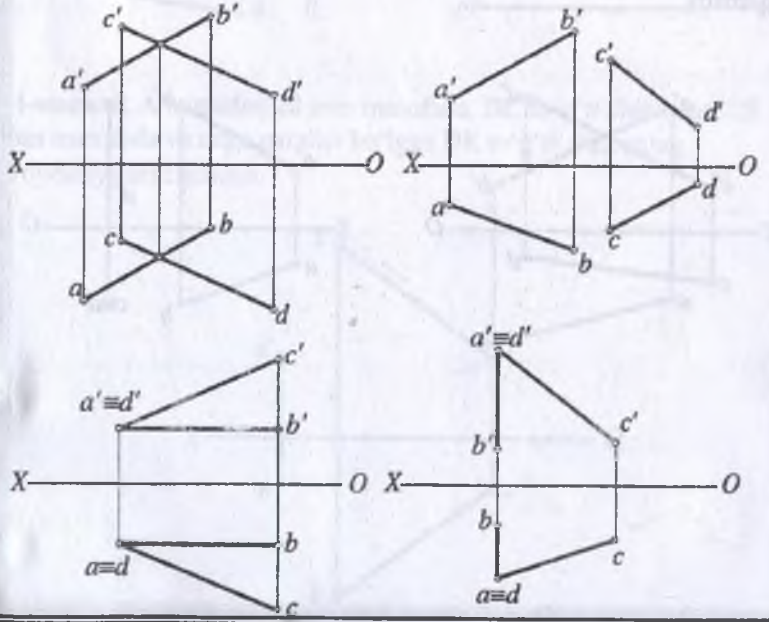


Mustaqil ta'lim masalalari

67-масала. **AB** to'g'ri chiziq va *OX* proyeksiyalar o'qi orasidagi masofa aniqlansin.

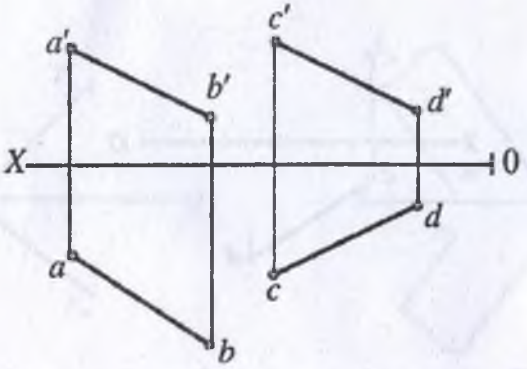


68-масала. **AB** va **CD** to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak aniqlansin.

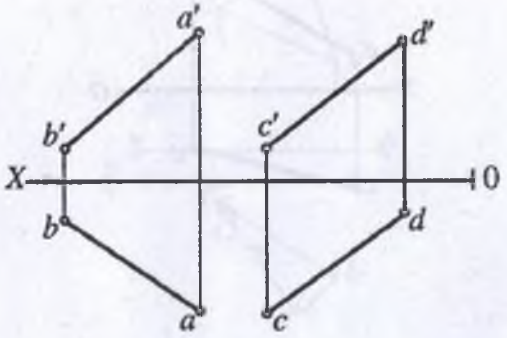


Mustaqil ta'lim masalalari

69-masala. AB to'g'ri chiziqda CD to'g'ri chiziqdan 40 *mm* uzoqlikda joylashgan nuqta topilsin.

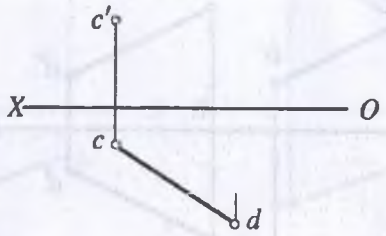


70-масала. AB va CD ayqash to'g'ri chiziqlarning AB to'g'ri chiziqni kesib o'tuvchi va CD to'g'ri chiziqdan 20 *mm* uzoqlikda unga parallel to'g'ri chiziq o'tkazilsin.

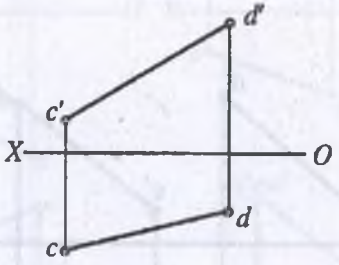


Mustaqil ta'lim masalalari

71-масала. Agar **CD** kesmaning uzunligi **30 mm** ga teng bo'lsa, uning frontal proyeksiyasi aniqlansin.

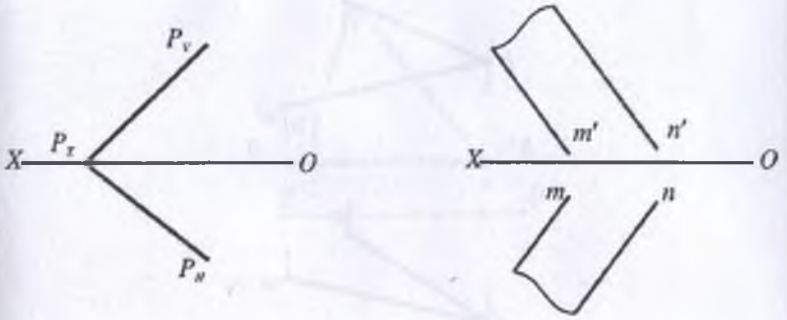


72-masala. **CD** to'g'ri chiziqda gorizontal proyeksiyalar tekisligidan **20** ***mm*** masofada **A** nuqtani va frontal proyeksiyalar tekisligidan **15** ***mm*** masofada **B** nuqtaning proyeksiyalarini aniqlang.

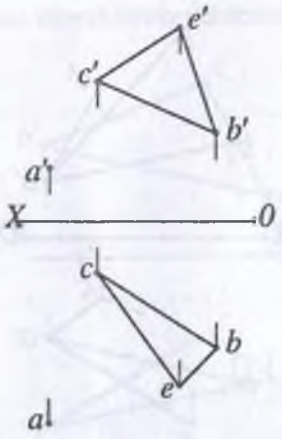


Mustaqil ta'lim masalalari

73-masala. P tekislikda gorizontal proyeksiyalar tekisligidan 20 *mm* masofada bo'lgan A nuqta aniqlansin.

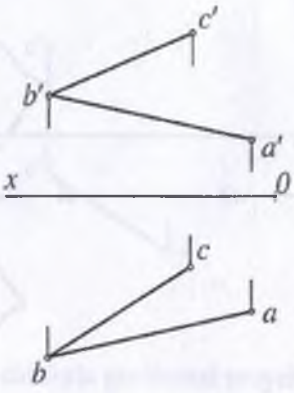


74-масала. A nuqtadan BCE tekislikkacha bo'lgan masofaning haqiqiy uzunligi aniqlansin.

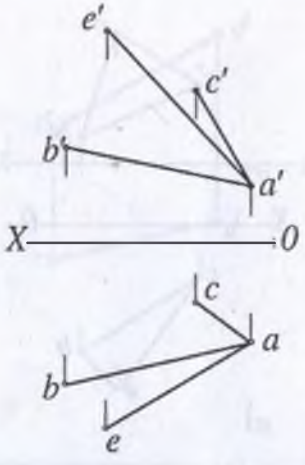


Mustaqil ta'lim masalalari

75-масала. ABC tekislikdan **40 mm** uzoqlikda va unga parallel bo'lgan tekislik o'tkazilsin.

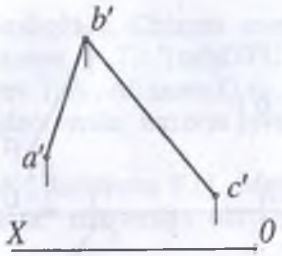


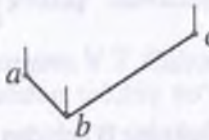
76-масала. **AE** to'g'ri chiziqda **ABC** tekislikdan **40 mm** uzoqlikda bo'lgan nuqta topilsin.



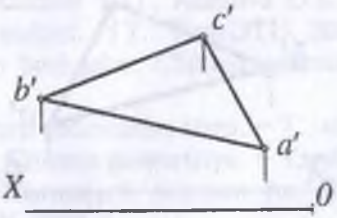
Mustaqil ta'lim masalalari

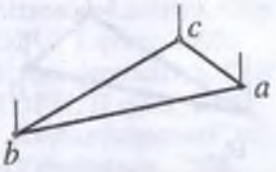
77-масала. ABC tekislikdan **40 mm** uzoqlikda unga parallel tekislik o'tkazilsin.





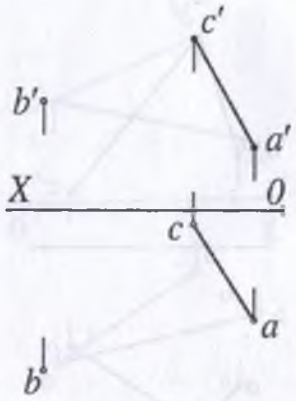
78-масала. Asosi ABC uchburchak bo'lgan, balandligi **40 mm** ga teng to'g'ri prizma proyeksiyalari chizilsin.



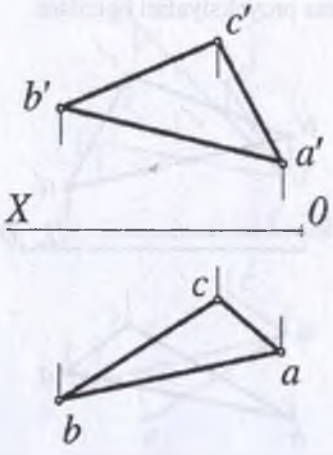


Mustaqil ta'lim masalalari

79-масала. B nuqtadan CA to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofaning haqiqiy uzunligi aniqlansin.



80-масала. ABC uchburchakning B uchidan o'tuvchi balandligining haqiqiy uzunligi topilsin.



Adabiyotlar

1. Davlat standartlari. GOSTlar. KXYaT. Asosiy qoidalar.

2. Azimov T.D. Chizma geometriya. Oliy texnika o'quv yurtlari uchun o'quv qo'llanma. – T.: ToshDTU, 2005.

3. Xorunov R., Akbarov A.A. Chizma geometriyadan masalalar yechish metodlari. – T.: «O'qituvchi», 1995.

4. Azimov T.D. «Chizma geometriya» fanidan ma'ruzalar matni. – T.: ToshDTU , 2005.

5. Azimov T.D. va boshqalar. Chizma geometriyadan amaliy darslar uchun o'quv qo'llanma. – T.: ToshDTU, 2003.

6. Azimov T.D. Fayziyev T.R., Alimova D.K., Mirzaraimova V.T. "Chizma geometriya" fanidan oraliq nazorat savollari to'plami. – T.: ToshDTU, 2007.

7. Xodjimuxamedov B.R., Karimova V.N., Mavjudov S.S. "Chizma geometriya" fanidan "Nuqta" mavzusiga oid testlar to'plami. –T.: ToshDTU, 2006.

8. Xojimuxamedov B.R., Yakubova M.M., Sobirova D.U. "Chizma geometriya" fanidan "To'gri chiziq" mavzusiga oid testlar to'plami. – T.: ToshDTU, 2006.

9. Azimov T.D., Mirzaraimova V.T. Chizma geometriyadan shaxsiy uy vazifalarini bajarish yuzasidan uslubiy ko'rsatmalar. I qism. – T.: ToshDTU, 2003.

10. Azimov T.D., Mirzaraimova V.T., Abdurahmonov Sh. Chizma geometriyadan shaxsiy uy vazifalarini bajarish yuzasidan uslubiy ko'rsatmalar. II qism. – T.: ToshDTU, 2004.

11. Umarov A.R., Azimov T.D., Alimova D.K., Raximov A.M. Tasvirlarni o'zgartirish usullari. – T.: ToshDTU, 2004.

12. Murodov Sh. va boshqalar. Chizma geometriya kursi. – T.: «O'qituvchi», 2006.

13. Xorunov R. Chizma geometriya kursi. – T.: «O'qituvchi», 1999.

14. Qirg'izboyev Yu. Chizma geometriya. – T.: «O'qituvchi», 1976.

15. Азимов Т.Д. Конспект лекции по «Начертательной геометрии». – Т.: ТГТУ, 2001.

16. Ismatullayev R. Chizma geometriya. Oliy o'quv yurtlari uchun o'quv qo'llanma. – T.: TDPU, I qism, 2005.

17. Ismatullayev R. Chizma geometriya. Oliy o'quv yurtlari uchun metodik qo'llanma. – T.: TDPU, II qism, 2006.

18. Raxmonov I., Abduraxmonov A. Chizmachilikdan ma'lumotnomalar. – T.: «O'zbekiston», 2006.

3 6 7 2 4 3 1 1 1 1 1

19. Чекмарев А.А. Начертательная геометрия и черчение. – М.: ВЛАДОС, 2005.

20. Гордон В.О., Семенцов-Огиевский М.А. Курс начертательной геометрии. – М.: «Машиностроение», 1988.

21. Азимов Т.Д., Файзиев Т.Р., Собирова Д.У., Мавжудов С.С. Сборник вопросов по 1-му промежуточному контролю знаний студентов по начертательной геометрии. – Т.: ТГТУ, 2002.

22. Sobitov E. Chizma geometriya qisqa kursi. – T.: «O'qituvchi», 1993.

23. Davletov S. Chizma geometriya. Oliy texnika o'quv yurtlari uchun o'quv qo'llanma. – T.: TTYSI, 2006.

24. Abdullayev U.A. Chizma geometriyadan masalalar to'plami. – T.: «O'qituvchi», 1999.

25. Abdullayev U.A. Chizma geometriya va chizmachilik asoslari. – T.: «O'qituvchi», 1997.

26. Бубенников А.В., Громов М.Я. Начертательная геометрия. – М.: «Машиностроение», 1985.

MUNDARIJA

So'zboshi....3
1,2-dars....6
3-dars....7
4-dars....12
5-dars....24
6-dars....28
7-dars....31
8-dars....34
9-dars....39
10-dars....40
11-dars....42
12-dars....50
13-dars....53
14-dars....57
15-dars....59
16-dars....65
17-dars....68
18-dars....71
19-dars....77
Yakuniy yozma ishga doir masalalar....83
Olimpiada masalalari....120
Mustaqil ta'lim masalalari....123

Azimov T.D.

CHIZMA GEOMETRIYA

O'quv qo'llanma

Muharrir *H.Teshaboyev*
Kompyuterda sahifalovchi *A.Ro'ziyev*

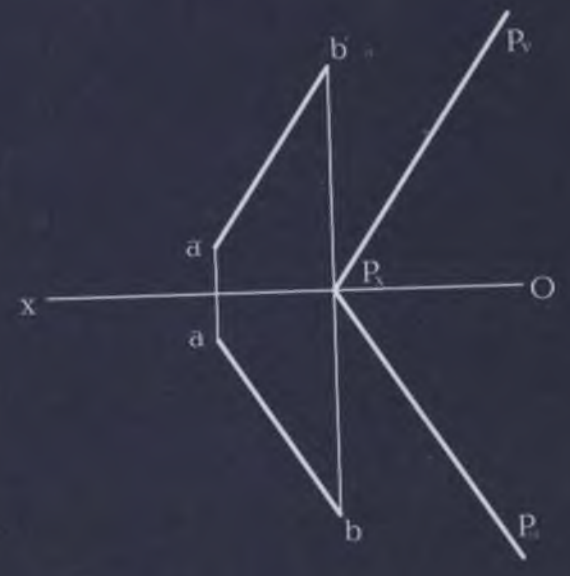
Bosishga ruxsat etildi 11.07.2008. Qog'oz bichimi 60x84$^{1}/_{16}$.
Hisob-nashr tabog'i 10,25. Adadi 1000.
Buyurtma № 103.

«IQTISOD-MOLIYA» nashriyotida tayyorlandi.
100084, Toshkent, Kichik halqa yo'li ko'chasi, 7-uy.
Hisob-shartnoma 54-2008.

«Toshkent tezkor bosmaxonasi» MCHJ da chop etildi
100200. Toshkent, Radial tor ko'chasi 10 uy.

T.D. AZIMOV

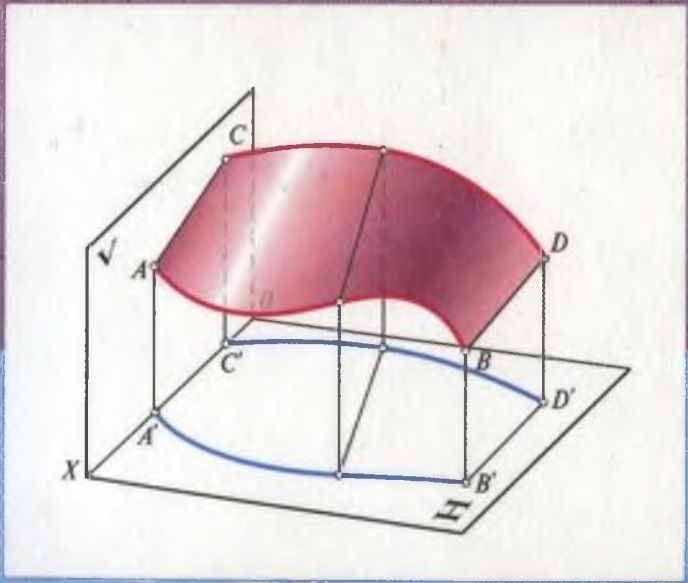
CHIZMA GEOMETRIYA



"IQTISOD-MOLIYA"

B.B. QULNAZAROV

CHIZMA GEOMETRIYA



515
K-81.

B. B. QULNAZAROV

CHIZMA GEOMETRIYA

(Qisqa kursi)

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi («San'at va qurilish» — 5140900) bakalavriat ta'lim yo'nalishi talabalari uchun o'quv qo'llanma sifatida tavsiya etgan

БИБЛИОТЕКА
Бух. ТИП и ЛП
№ Ч 166

TOSHKENT
«O'ZBEKISTON»
2006

22.151.3
K 81

Texnika fanlari nomzodi, dotsent **A. Masariddinov** umumiy tahriri ostida

Ushbu qo'llanma kasbiy ta'lim yo'nalishidagi muhandis-pedagog, talabalar uchun mo'ljallangan bo'lib, chizma geometriya fani bo'yicha tuzilgan namunaviy dastur asosida yozilgan. Undan bakalavr talabalar bilimini reyting asosida baholash, grafik ishlarni mustaqil bajarishda yordamchi adabiyot sifatida foydalanish maqsad qilib qo'yilgan.

Qo'llanma ikki qismdan iborat bo'lib, birinchi qismda ortogonal va aksonometrik proyeksiyalar, ikkinchi qismda ortogonal va aksonometriyada soyalar, perspektiva, unda soyalar haqida qisqacha ma'lumot berilgan.

Taqrizchi: t.f.n. dots. I. SUVONQULOV, SamDU «Umumiy texnika kafedrasi»

ISBN 5-640-02043-1

Q $\frac{2004020000-164}{M351(04)2006}$ 2006

© «O'ZBEKISTON» NMIU, 2006-y.

SO'ZBOSHI

Respublikamizda xalq xo'jaligini rivojlantirish, fan-texnika, kompyuter texnologiyasi va xalqaro «INTERNET» axborot tizimini yanada yuksaltirish maqsadida ta'lim tizimini tubdan isloh qilish masalasi qo'yildi. Ayni paytda qabul qilingan «Ta'lim to'g'risida»gi qonun, «Kadrlar tayyorlash milliy dasturi» bunga amaliy javob bo'lib, oldimizga ulkan vazifalarni qo'ydi. Bu vazifalarni bajarishda Oliy o'quv yurtlari, o'z ixtisosligi bo'yicha chuqur nazariy bilimlarga va puxta amaliy malakalarga ega bo'lgan mutaxassislar tayyorlab yetishtirish vazifasini o'z zimmasiga oladi.

Zamonaviy, har tomonlama yetuk mutaxassislar tayyorlash uchun oliy o'quv yurtlarida kasbiy ta'lim yo'nalishlari ochilib, unda malakali muhandis-pedagoglar tayyorlash masalasi qo'yildi va unga erishilmoqda. Shu maqsadda ilg'or pedagogik texnologiyalardan foydalanib, o'quv jarayonini qiziqarli tashkil qilish, mavjud darsliklar qatorida, talabalarning bilim darajasini reyting asosida baholash va berilgan mavzularni o'zlashtirishda yordamchi adabiyot sifatida foydalanish ko'zda tutilgan holda shu yo'nalishdagi mutaxassislar uchun oliy ta'lim vazirligi tasdiqlagan o'quv dasturi asosida yozildi.

O'quv qo'llanma ikki qismdan iborat bo'lib, birinchi qismda ortogonal va aksonometrik proyeksiya usullari, ikkinchi qismda esa ortogonal va aksonometriyada soyalar, perspektiva va unda soyalar, sonli proyeksiyalar haqida qisqacha boshlang'ich tushunchalar berilgan.

Qo'llanmani tuzishda qimmatli maslahatlari uchun SamDAQI «Chizma geometriya va muhandislik grafikasi» kafedrasi professori X.U.Uzoqovga, dotsent R.U.Alimovga, kafedra mudiri dots. A.Masariddinovlarga muallif o'z minnatdorchiligini bildiradi. Ushbu qo'llanma ilk bor yozilayotganligi sababli kamchiliklardan xoli deb bo'lmaydi. Qo'llanma haqida bildirilgan fikr-mulohazalaringizni muallif mamnunlik bilan qabul qiladi. Samarqand shahar, Lolazor ko'chasi 70-uy, SamDAQI.

Kiritilgan shartli belgilar

1. Nuqtalar:
— fazoda A, B, C, D, E, F, 1, 2, 3, 4;
— gorizontal tekislikda — A', B', C';
— frontal tekislikda — A'', B'', C'';
— profil tekislikda — A''', B''', C''',...
2. Chiziqlar;
— fazoda — a, b, c, d, e;
— gorizontal tekislikda — a', b', c', d', e';
— frontal tekislikda — a'', b'', c'', d'', e''...;
— profil tekislikda — a''', b''', c''', d''', e''';
3. Gorizontal to'g'ri chiziq — h;
4. Frontal to'g'ri chiziq — f;
5. Profil to'g'ri chiziq — p;
6. Tekisliklar — P, R, Q, T...;
7. Burchaklar — α, β, γ;
8. Proyeksiya tekisliklari;
N — gorizontal;
V — frontal;
W — profil tekislik;
9. H_1, V_1, W_1, H_2, V_2, W_2 — gorizontal, frontal, profil proyeksiya tekisliklarining almashtirilgan vaziyatlari;
10. P_H, P_V, P_W, — P tekislikning, gorizontal, frontal, profil proyeksiya tekisliklaridagi izlari;
11. A_0, B_0, 1_0, 2_0, ... — yoyilmadagi yoki haqiqiy kattalikdagi nuqtalar;
12. $\subset$ — tegishlilik, masalan $A \subset P$, A nuqta P tekislikka tegishli yoki P tekislikda yotibdi. $\not\subset$ — tegishli emas;
13. $\equiv$ — ustma-ust tushish, masalan $A \equiv B$, A va B nuqtalar ustma-ust proyeksiyalangan.
14. $\cap$ kesishgan, masalan, $a \cap b$, a va b chiziqlar kesishgan; $\not\cap$ — kesishmagan.
15. // ($\not\parallel$) — parallel (parallel emas);
16. $\pm$ — ayqash to'g'ri chiziqlar;
17. $\perp$ — perpendikular;
18. $\hat{}$ — to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak.
19. $\llcorner$ — to'g'ri burchak.
20. $\angle$ — burchak, ikki yoqli burchak.

KIRISH

1. Chizma geometriya fani va uning ahamiyati

Chizma geometriya — bu grafik tasvirlash fani bo'lib, u proyeksiyalash usuliga asoslangan holda, fazoviy shakllarni ularning bir-biriga bo'lgan vaziyatlarini va fazoviy yechimlarini tekislikda tasvirlar orqali o'rganadi. Chizma geometriya boshqa geometriyalardan asosan tasvirlash usuli bilan farq qiladi va boshqa fanlar qatori matematika bilan ham uzviy bog'langandir. Chunki, analitik geometriyada metrik va fazitsion masalalar analitik usulda yechilsa, chizma geometriyada grafik usulda bajariladi.

Chizmalar orqali jismlarning fazodagi shaklini tasavvur qilish va o'lchamlarini aniqlash mumkin. Chizma geometriya fanining yana bir xususiyati shundaki, bo'lajak muhandis, arxitektor, konstruktor va dizaynerlarning fazoviy tasavvurini kengaytiradi, ularni ijodiy fikrlashga, yangi-yangi modellarni, loyihalarni, konstruksiyalarni yaratishga undaydi, ular o'zining ijodiy fikrlarini chizmalar yordamida bayon etadilar. Shunday qilib, chizma geometriya qonunlari asosida faqat bor narsalarni emas, balki tasavvur qilingan bo'lajak loyihalarni ham tasvirlash mumkin, bu esa olamshumul yangiliklar yaratish imkonini beradi.

Tarixga nazar tashlansa, narsalarni tasvirlash kishilar hayotida juda qadimdan paydo bo'lgan. Chizmalarning rivojlanishi tasvirlar chizishdan boshlangan bo'lib, kishilar hali yozishni bilmaganlari holda, o'zlari ko'rgan narsalarning tasvirini qoyalar, tog' devorlarga va boshqa joylarga tirnab, o'yib ishlaganlar. Ana shu oddiy rasmlarni tasvirlash asosida birinchi «ieroglif» yozuvlar kelib chiqqan. Bunday tasvirlar Xitoy, Misr, O'rta Osiyo va boshqa

joylarda ko'p uchraydi. Bu kabi grafik uculda, ya'ni tekislikda shartli belgilarni tasvirlash va undan foydalanish g'oyalari insoniyat rivojlanishida ko'p asrlik tarixga ega.

Fazoviy shakllarni tekislikda tasvirlash, ularni amalda tatbiq qilish nazariyasini rivojlantirishda bir qancha olimlar ish olib bordilar. Ulardan qadimgi grek olimlari Esxil, Anaksagor, Demokrit va boshqalar shular jumlasidandir. O'rta Osiyo olimlaridan Al-Xorazmiy, Al-Forobiy, Abu Rayhon Beruniylar o'z ilmiy ishlarida proyeksiyalar usulini tatbiq etib, chizmalar chizganlar. Foydalangan asboblari ham chizmalar asosida yaratilgan. Abu Ali ibn Sino tibbiyot fanidan tashqari, o'z ilmiy-amaliy faoliyatida tasvirlar chizish nazariyasini yaratib, ancha yuqori darajadagi chizmalarni amalda tatbiq qilgan.

Grafik tasvirlash usullarining yanada rivojlanishi uyg'onish davriga to'g'ri keladi. Italyan olimi va rassomi Leonardo da Vinchi chizma geometriyaga tegishli bo'lgan perspektiva nazariyasiga katta hissa qo'shdi.

XVIII asr oxirlarida fransuz muhandisi va matematigi Gaspar Monj proyeksion tasvirlar tuzish bo'yicha to'plagan tajribalarini umumlashtirdi va ilmiy asosladi. U 1798-yilda «Chizma geometriya» kitobini yozib, unda birinchi marta o'zaro perpendikular tekisliklarga to'g'ri burchakli (ortogonal) proyeksiyalash usulini qo'lladi. Bu usul hozirgacha «Monj usuli» deb yuritilib kelinmoqda.

XIX asrda proyeksion tasvirlash usullarini yanada rivojlantirishda rus olimlaridan Y.A.Sevostyanov, N.I. Makarov, V.I. Kurdyumovlar katta hissa qo'shdilar. 1821-yilda Y.A Sevostyanov tomonidan birinchi marta rus tilida chizma geometriya darsligi nashrdan chiqarildi.

Respublikamizda chizmachilik va chizma geometriya fanini rivojlantirishda Y. Qirg'izboyev, R. Xorunov va yana boshqa ko'pgina olimlar katta hissa qo'shdilar. Ular 1959—1961-yillarda birinchi marta o'zbek tilida chizma geometriyadan qo'llanma va darsliklar yaratdilar.

Hayotdagi barcha narsa (buyum)lar, jismlar chizma geometriya nuqtayi nazaridan geometrik jismlardan tashkil topgan, geometrik jismlar esa, geometrik element (nuqta,

to'g'ri chiziq va tekislik) lardan iborat deb qaraladi. Haqiqatdan ham piramidaning uchlari nuqtalardan, qirralari to'g'ri chiziq kesmalaridan, tomonlari esa tekisliklardan iborat, shu jumladan barcha buyumlar geometrik jismlarning o'zaro kompleks kesishuvidan hosil bo'lgan. Demak, buyumlarning tasvirini chizishda «oddiydan murakkabga» tomon nuqtalarning chizmasini chizishdan boshlab o'rganiladi.

Chizma geometriya fanida quyidagilar o'rganiladi:

1) fazoviy jismlarni tekislikda tasvirlash usullari;

2) chizmada geometrik masalalarni grafik usulda yechish;

3) jismlarning chizmasi bo'yicha ularning fazoviy ko'rinishini tasavvur qilish va yaqqol tasvirini hamda maket va modellarini yasash;

4) jismlarning grafik va analitik modellari hamda ularning biridan ikkinchisiga o'tish usullari.

Chizma geometriyada geometrik masalalarni asosiy uchta guruhga bo'lish mumkin:

Pozitsion masalalar. Bunda geometrik jismlarning o'zaro joylashish vaziyatiga nisbatan ularning kesishuvi natijasida hosil bo'ladigan natijalar o'rganiladi. To'g'ri chiziq va tekislik, tekislik bilan tekislikning kesishgan chiziqlarini topish kabi masalalar kiradi.

Metrik masalalar. Metrik masalalar guruhiga to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa va burchaklarni aniqlash kiradi. o'zaro perpendikular to'g'ri chiziqlar yoki tekisliklar yasash, ularning haqiqiy kattaligini aniqlash, sirtlarga normallar o'tkazish, turli sirtlarning yoyilmalarini yasash va hokazo.

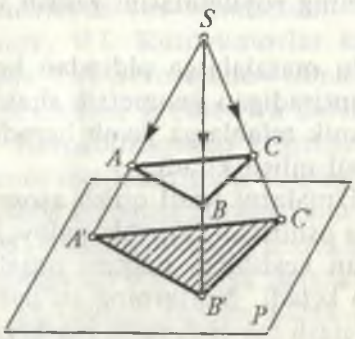
Konstruktiv masalalar. Bu masalalarga oldindan berilgan biror shartni qanoatlantiradigan geometrik shakllarni yasash, ma'lum bir texnik talablarga javob beradigan egri chiziq va sirtlar hosil qilish kiradi.

Chizma geometriyada chizmalarni hosil qilish asosan proyeksiyalash usulida amalga oshiriladi. Proyeksiyalovchi nurlarning biror tekislik bilan kesishgan nuqtasi orqali, proyeksiyalash usuli vujudga keladi. Nurlarning yo'nalishiga qarab ikki xil proyeksiyalash mavjud, ya'ni markaziy va parallel proyeksiyalash.

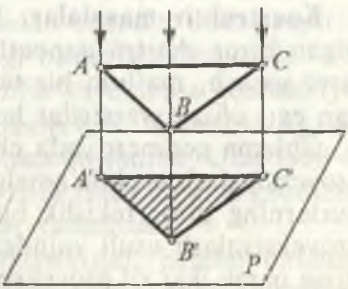
2. Asosiy proyeksiyalash usullari

Markaziy proyeksiyalash. Fazodagi har qanday jism nuqtalardan tashkil topgan, shuning uchun proyeksiyalashni nuqtalarning proyeksiyasidan boshlab o'rganiladi. Markaziy proyeksiyalash apparati asosan proyeksiyalash tekisligi P va unda yotmagan S nuqtadan iborat. Agar proyeksiya nurlari bitta S nuqtadan taralsa, markaziy proyeksiyalash deb ataladi (1-rasm). Nur taratuvchi manba (S) dan o'tuvchi nurlar proyeksiya tekisligi bilan kesishib, fazodagi A, B, C nuqtalarning A_1, B_1, C_1 proyeksiyalarini hosil qiladi. Bunda S nuqta proyeksiya markazi, SA_1, SB_1, SC_1 proyeksiyalovchi nurlar A_1, B_1, C_1 lar ABC nuqtalarning proyeksiyalari va P esa proyeksiya tekisligi deyiladi.

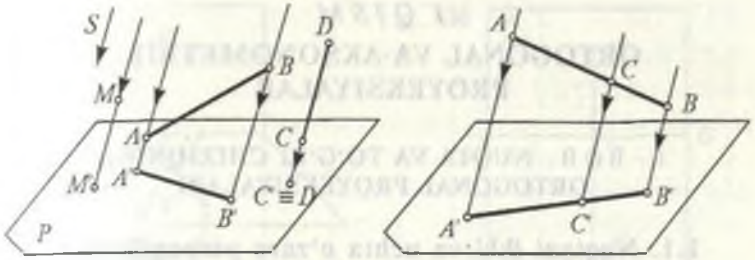
Parallel proyeksiyalash. Agar proyeksiya markazi S cheksiz uzoqlikda deb hisoblansa, keladigan nurlar o'zaro parallel bo'ladi, unda parallel proyeksiyalash deb ataladi. Bunda nurlarning tekislikka tushayotgan qiyalik burchagiga qarab qiyshiq burchakli, agar tik, ya'ni to'g'ri burchak ostida bo'lsa, to'g'ri burchakli proyeksiyalash deb ataladi (2-rasm). Fazoda berilgan A, B, C nuqtalardan o'tayotgan nurlar P tekislikda to'g'ri burchakka tushyapti, demak, A_1, B_1, C_1 to'g'ri burchakli proyeksiyadir. To'g'ri burchakli proyeksiyalashni chizma geometriyada ortogonal proyeksiyalash deb yuritiladi. Texnika chizmachiligida qo'llaniladigan barcha asosiy proyeksiyalashlar ortogonal proyeksiyalash usulida bajariladi.



1-rasm.



2-rasm.



3-rasm.

4-rasm.

Parallel proyeksiyalarning xossalari

1 - x o s s a. Nuqtaning parallel proyeksiyasi nuqta bo'ladi. 3-rasmda M nuqta berilgan, uning proyeksiyasi M' bo'ladi.

2 - x o s s a. Proyeksiyalash nuriga parallel bo'lmagan to'g'ri chizmaning proyeksiyasi to'g'ri chiziq bo'ladi, agar to'g'ri chiziq nur yo'nalishiga parallel bo'lsa, nuqta bo'lib proyeksiyalanadi (3-rasm).

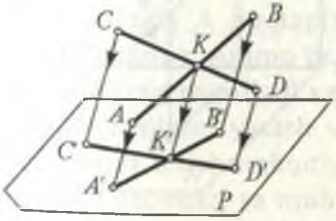
3 - x o s s a. To'g'ri chiziq kesmasida yotgan nuqtaning proyeksiyasi shu to'g'ri chiziq proyeksiyasida bo'ladi.

4 - x o s s a. Agar nuqta to'g'ri chiziqni biror nisbatda bo'lsa, uning proyeksiyasi ham shu nisbatda bo'linadi (4-rasm).

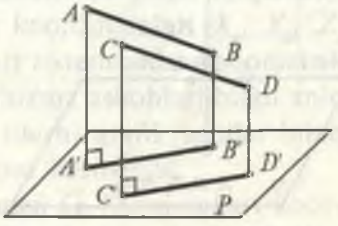
5 - x o s s a. Kesishgan to'g'ri chiziqlar nuqtasining proyeksiyasi, shu to'g'ri chiziqlar proyeksiyasining kesishgan nuqtasida bo'ladi (5-rasm.)

6 - x o s s a. Parallel to'g'ri chiziqlarning tekislikdagi proyeksiyalari ham parallel bo'ladi va parallel to'g'ri chiziqlarning nisbati bu kesmalar proyeksiyalarining nisbatiga teng (6-rasm).

7 - x o s s a. To'g'ri burchakli parallel proyeksiyalashda to'g'ri chiziq kesmasining proyeksiyasi o'zidan kichik yoki o'ziga teng bo'ladi (6-rasm).



5-rasm.



6-rasm.

I QISM
ORTOGONAL VA AKSONOMETRIK PROYEKSIYALAR

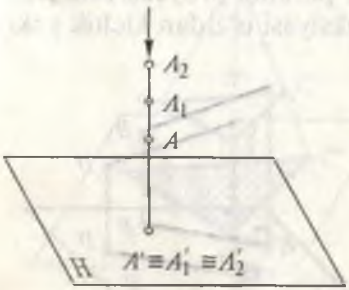
I - BOB. NUQTA VA TO'G'RI CHIZIQNING ORTOGONAL PROYEKSIYALARI

1.1. Nuqtani ikki va uchta o'zaro perpendikular tekisliklarga proyeksiyalash

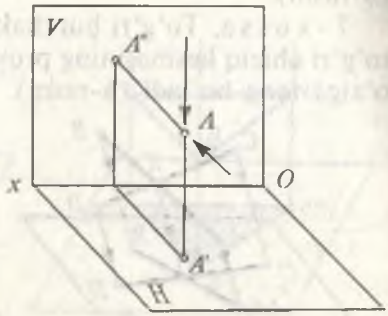
Proyeksiyalovchi nur proyeksiyalar tekisligiga perpendikular bo'lsa, to'g'ri burchakli yoki ortogonal proyeksiyalash deyiladi. Ortogonal proyeksiyalashda proyeksiyalovchi nurlar ko'rsatilmaydi.

Bitta nurda yotuvchi A, A_1, A_2 nuqtalarning tekislikka ortogonal proyeksiyalanishi bitta proyeksiyani tashkil qiladi, ya'ni ustma-ust tushadi. Bunda bitta proyeksiya bilan fazodagi A, A_1, A_2 nuqtalarning vaziyatini, holatini aniqlash mumkin bo'lmaydi (7-rasm). Uning fazodagi vaziyatini aniqlash uchun kamida ikkita yoki uchta tekislikdan foydalanishga to'g'ri keladi. Buning uchun fazoda bir-biriga perpendikular bo'lgan ikkita ($H \perp V$) tekislik olinadi. Bunda, H — gorizontal proyeksiya tekisligi, V — esa frontal proyeksiya tekisligi deb ataladi (8-rasm).

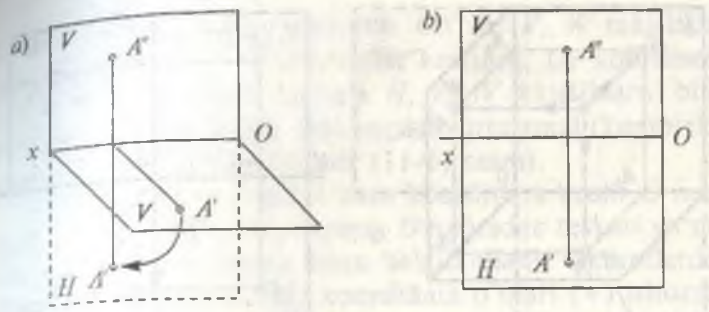
Proyeksiya tekisliklar orasi bo'shliq, ya'ni fazo deb olinib, unda A nuqta berilgan. A nuqtaning proyeksiyalarini



7-rasm.



8-rasm.



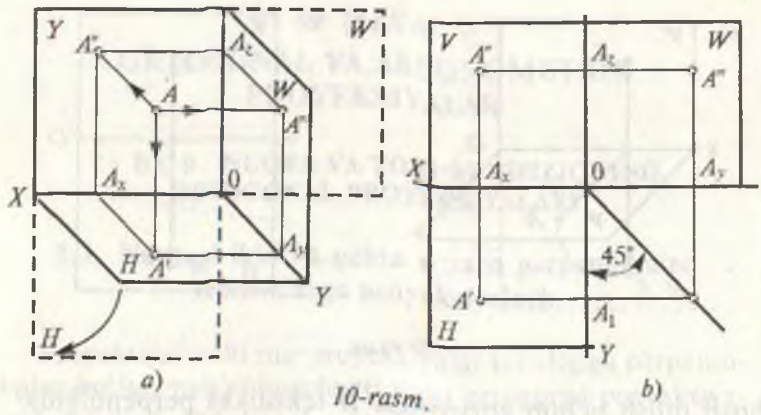
9-rasm.

hosil qilish uchun gorizontal H tekislikka perpendikular qilib proyeksiyalanadi va A' gorizontal proyeksiyasini, frontal V tekislikka perpendikular proyeksiyalab, A'' — frontal proyeksiyasi hosil qilinadi.

Ikkita tekislik kesishishi natijasida Ox o'qi hosil bo'ladi. Ana shu Ox o'qi atrofida gorizontal H tekislikni pastga aylantirib, (9-*a*, rasm) V — frontal tekislik bilan bir tekislikka yoyilsa, uning kompleks chizmasi (epyuri) hosil bo'ladi (9-*b*, rasm). Bunga MONJ chizmasi ham deyiladi. Epyur — lotincha so'z bo'lib, tekis chizma degan ma'noni anglatadi.

Geometriyada nuqta, to'g'ri chiziq, tekislik yoki jismlarning fazodagi vaziyatini o'zaro perpendikular uchta koordinatali tekisliklar sistemasiga nisbatan aniqlash qabul qilingan. Bu metodni fransuz matematigi Fene Dekart (1506—1550) ixtiro qilgani uchun Dekart koordinatalar sistemasi deb yuritiladi. Bu sistemada nuqtaning fazodagi vaziyatini uning X, Y, Z koordinatalari bo'yicha aniqlanadi. Masalan, fazoda A nuqtaning koordinatalari X_A, Y_A, Z_A bo'ladi (10-rasm). Ammo dekart sistemasida steriometrik masalalar fikran bajariladi va chizma asboblari bilan aniq geometrik jismlarni yasash va ularni grafik usullar bilan tahlil (analiz) qilish imkoniyatini bermaydi.

Fransuz geometri va muhandisi G. Monj dekart koordinatalar sistemasi asosida fazodagi har qanday nuqtaning

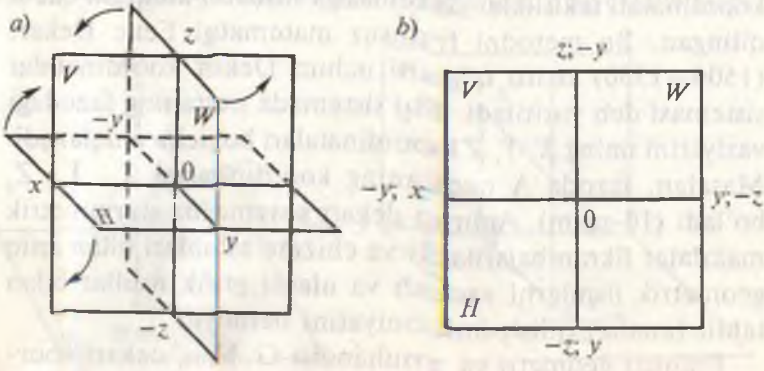


10-rasm.

uchta koordinatasini proyeksiyalar tekisligi sistemasida ortogonal proyeksiyalari bilan o'zaro grafik bog'ladi.

Berilgan (H va V) tekisliklarga perpendikulyar qilib uchinchi W — profil proyeksiya tekisligi kiritiladi. A nuqtani unga perpendikulyar qilib proyeksiyalansa A''' nuqta, ya'ni A nuqtaning profil proyeksiyasi hosil bo'ladi (10-*a*, rasm). Uning kompleks chizmasi 10-*b*, rasmda ko'rsatilgan. Uchala (H, V, W) tekisliklarni yo'nalish bo'yicha davom ettirilsa, fazoni sakkiz bo'lakka bo'ladi, ya'ni sakkizta oktant hosil bo'ladi (11-*a*, rasm).

Okto — lotincha so'z bo'lib «sakkiz» demakdir. H, V, W proyeksiya tekisliklari o'zaro kesishib, koordinata boshi



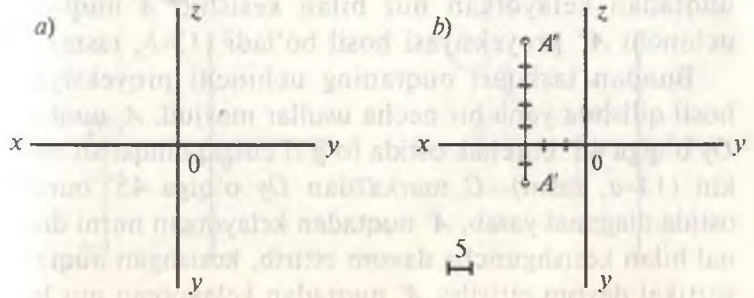
11-rasm.

O ni, H, V tekisliklar kesishib OX ni, V, W tekisliklar kesishib Oz ni, H, W tekisliklar kesishib, Oy koordinata o'qlarini hosil qiladi. Uchala H, V, W tekisliklarni bitta tekislikka jipslashtirilsa yoki yoyilsa, ortogonal (kompleks) chizma epyur paydo bo'ladi (11-*b*, rasm).

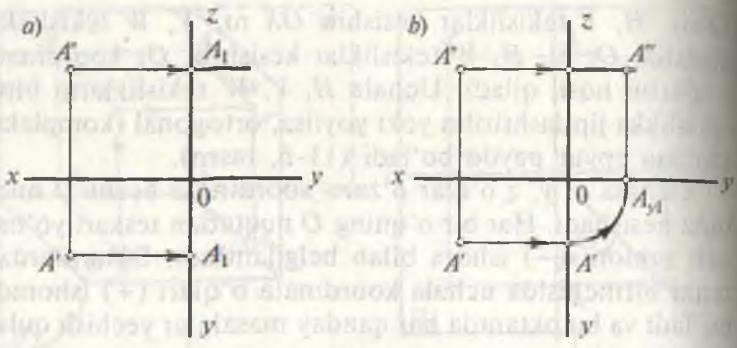
Uchala x, y, z o'qlar o'zaro koordinata boshi O nuqtada kesishadi. Har bir o'qning O nuqtadan teskari yo'nalish tomoni (−) ishora bilan belgilaniladi. Oktantlardan faqat birinchisida uchala koordinata o'qlari (+) ishorada bo'ladi va bu oktantda har qanday masalalar yechish qulay hisoblanadi.

Chizma geometriya fanida metrik va pozitsion masalalarni yechish uchun ortogonal proyeksiyalar asosiy rol o'ynaydi. Sababi H va W proyeksiya tekisliklari V — frontal tekisligi bilan bitta tekislikka yoyilganda undagi proyeksiya tekisligiga parallel bo'lgan barcha masofalar o'z haqiqiy kattaligida proyeksiyalanadi. Shuning uchun metrik va pozitsion masalalarni yechish maqsadga muvofiq hisoblanadi.

Nuqtaning ikki proyeksiyasi bo'yicha uchinchi proyeksiyasini topish. Buning uchun birinchi navbatda tekislikda o'zaro perpendikulyar chiziqlar chiziladi, ular kesishgan nuqta O koordinata boshi hisoblanadi (12-*a*, rasm). Unda Ox, Oy, Oz koordinat o'qlari hosil bo'lib, bu yerda Oy o'qi ikkiga ajralib ketadi. Mana shu o'qlarga berilgan koordinata o'lchamlari bo'yicha A nuqtaning proyeksiyalari joylashtiriladi.



12-rasm.

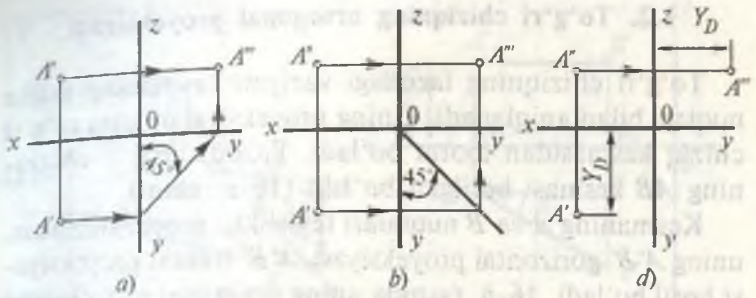


13-rasm.

Misol: $A(15;10;25)$ berilgan. Uning proyeksiyalarini topish talab qilinsin.

Yechish: X o'qi bo'yicha uch katak (har bir katak 5 mm), Y o'qi bo'yicha ikki katak, Z o'qi bo'yicha besh katak o'lchab qo'yiladi va A nuqtaning ikkita proyeksiyasi A', A'' nuqtalar hosil qilinadi (12-*b*, rasm). Endi A nuqtaning shu ikki proyeksiyasi bo'yicha uchinchi proyeksiyasini hosil qilish uchun A' va A'' proyeksiyalardan Ox o'qiga parallel proyeksiya chiziqlari o'tkaziladi (13-*a*, rasm), A' nuqtadan o'tgan nur Oy o'qi bilan A_y nuqtada kesishadi, sirkul ignasini O markazga, qalamni A_y ga qo'yib soat miliga teskari yoki pastdan yuqoriga aylantirilsa gorizontal vaziyatdagi Oy o'qi bilan kesishib A_{y1} nuqtani hosil qiladi, shu nuqtada yuqoriga perpendikular chiqarilsa, A'' nuqtadan kelayotgan nur bilan kesishib A nuqtaning uchinchi A''' proyeksiyasi hosil bo'ladi (13-*b*, rasm).

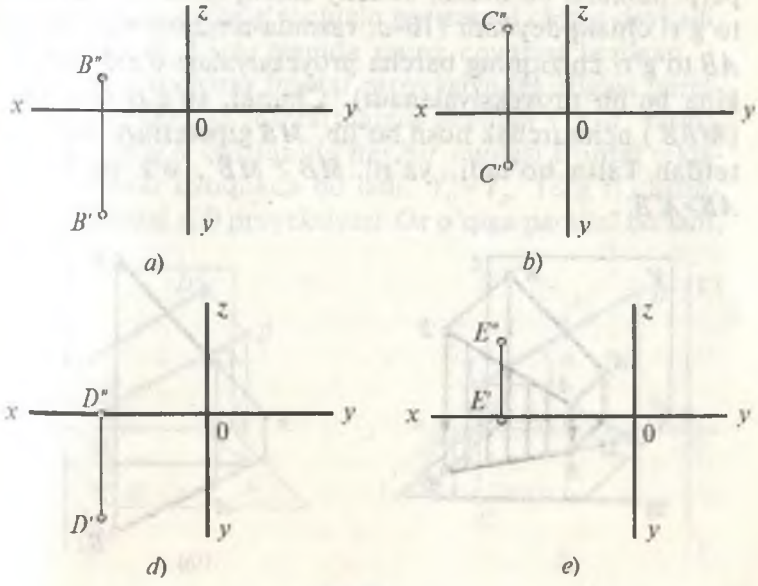
Bundan tashqari nuqtaning uchinchi proyeksiyasini hosil qilishda yana bir necha usullar mavjud. A_y nuqtadan Oy o'qiga 45° burchak ostida to'g'ri chiziq chiqarish mumkin (14-*a*, rasm). O markazdan Oy o'qiga 45° burchak ostida diagonal yasab, A' nuqtadan kelayotgan nurni diagonal bilan kesishguncha davom ettirib, kesishgan nuqtadan vertikal davom ettirilsa A'' nuqtadan kelayotgan nur bilan kesishib A''' proyeksiyani hosil qilish mumkin (14-*b*, rasm).



14-rasm.

Yana bir usul A' nuqtadan Ox o'qigacha bo'lgan Y masofani A'' nuqtadan kelayotgan nur bo'yicha Oz o'qidan keyinga o'lchab qo'yilsa ham A''' nuqtani topish mumkin (14-*d*, rasm).

Misollarni bajaring: Berilgan nuqtalarning ikki proyeksiyasi bo'yicha uchinchi proyeksiyasini yasang (15-*a*, *b*, *d*, *e*, rasmlar).



15-rasm.

1.2. To‘g‘ri chiziqning ortogonal proyeksiyasi

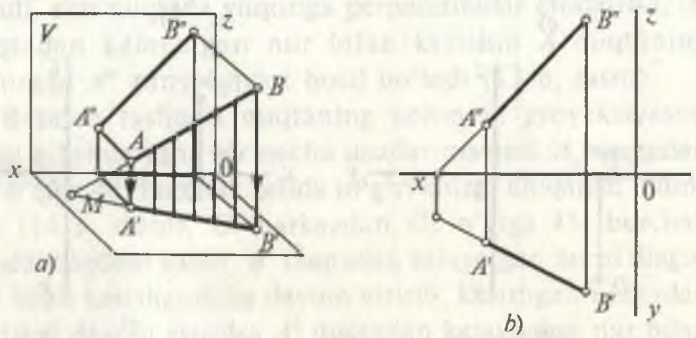
To‘g‘ri chiziqning fazodagi vaziyati kesmaning ikkita nuqtasi bilan aniqlanadi. Uning proyeksiyalari ham to‘g‘ri chiziq kesmasidan iborat bo‘ladi. Fazoda to‘g‘ri chiziqning AB kesmasi berilgan bo‘lsin (16-*a*, rasm).

Kesmaning A va B nuqtalari tekislikka proyeksiyalansa, uning $A'B'$ gorizontal proyeksiyasi, $A''B''$ frontal proyeksiyasi hosil bo‘ladi. 16-*b*, rasmda uning ortogonal proyeksiyasi (epyuri) berilgan.

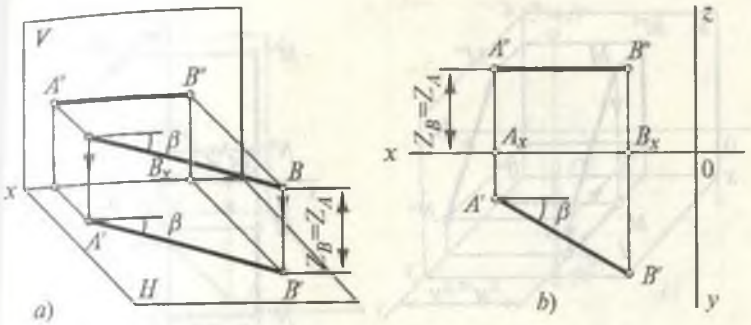
Fazoda to‘g‘ri chiziqlar turli vaziyatda joylashishi mumkin, ularning proyeksiyalari ham turlicha bo‘ladi. To‘g‘ri chiziqning proyeksiya tekisliklariga nisbatan ikki xil vaziyati o‘rganiladi:

1. Umumiy vaziyatdagi to‘g‘ri chiziq.
2. Xususiy vaziyatdagi to‘g‘ri chiziq.

Umumiy vaziyatdagi to‘g‘ri chiziq. Agar to‘g‘ri chiziq proyeksiya tekisliklaridan birortasiga ham parallel yoki perpendikular bo‘lmasa, bunday chiziq umumiy vaziyatda to‘g‘ri chiziq deyiladi (16-*a*, rasmda umumiy vaziyatdagi AB to‘g‘ri chiziqning barcha proyeksiyalari o‘zidan kichkina bo‘lib proyeksiyalanadi). Chunki, to‘g‘ri burchakli (MBB') uchburchak hosil bo‘lib, MB gipotenuza MB' katetdan katta bo‘ladi, ya’ni $MB > MB'$, o‘z navbatida $AB > A'B'$.



16-rasm.



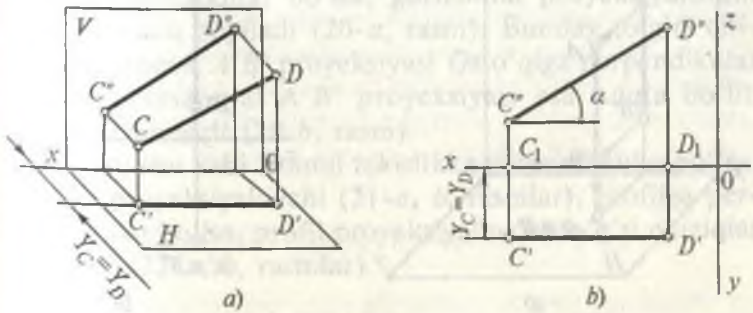
17-rasm.

Xususiy vaziyatdagi to‘g‘ri chiziq. Agar to‘g‘ri chiziq proyeksiya tekisliklaridan biriga parallel yoki perpendikular bo‘lsa, bunday to‘g‘ri chiziq xususiy vaziyatdagi to‘g‘ri chiziq deyiladi. Agar to‘g‘ri chiziq biror proyeksiya tekisligiga parallel bo‘lsa, to‘g‘ri burchakli to‘rtburchak bo‘lib uning qarama-qarshi tomonlari o‘zaro teng bo‘lib qoladi, demak o‘z haqiqiy kattaligida proyeksiyalanadi (17-*a*, rasm).

Bu berilgan *AB* to‘g‘ri chiziq gorizontal chiziq deyiladi, chunki *AB//H*. 17-*b*, rasmda uning epyurasi berilgan.

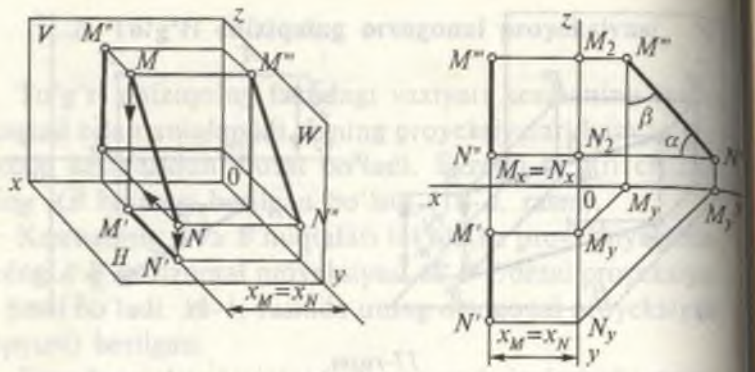
Agar to‘g‘ri chiziq frontal proyeksiya tekisligiga parallel (*CD//V*) bo‘lsa, frontal chiziq deyiladi (18-*a*, rasm).

Bunda to‘g‘ri chiziqning har bir nuqtasi frontal tekislikdan baravar uzoqlikda bo‘ladi, $Y_C=Y_D$. To‘g‘ri chiziqning gorizontal *CD* proyeksiyasi *Ox* o‘qiga parallel bo‘ladi,



18-rasm.

БИБЛИСТЕКА
Бух. ТИП и ЛП
№ 4-165

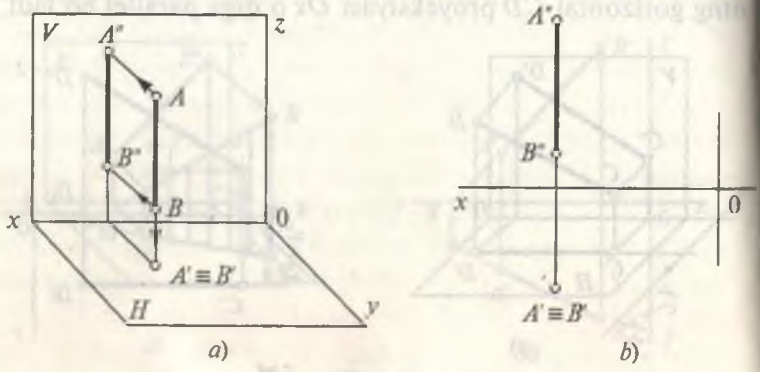


19-rasm.

frontal proyeksiyasi esa haqiqiy kattalikda proyeksiyalanadi, α burchak esa H gorizontal tekislik bilan hosil qilgan burchak, chunki, $CD//C''D''$ (18-*b*, rasm).

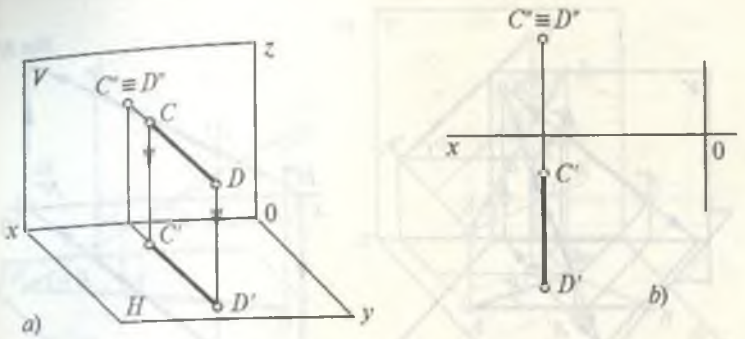
Agar to'g'ri chiziq profil (W) proyeksiya tekisligiga parallel ($MN//W$) bo'lsa, profil chiziq deyiladi. Bunda MN to'g'ri chiziqning barcha nuqtalari W profil tekislikdan baravar uzoqlikda yotibdi (19-*a*, rasm). MN to'g'ri chiziqning frontal $M''N''$ proyeksiyasi Oz o'qiga, gorizontal $M'N'$ proyeksiyasi esa Oy o'qiga parallel (19-*b*, rasm). Profil proyeksiyasi esa haqiqiy kattaligida proyeksiyalanadi.

Agar berilgan to'g'ri chiziq kesmasi proyeksiya tekisliklaridan biriga perpendikulyar bo'lsa, proyeksiyalovchi to'g'ri chiziq deyiladi.

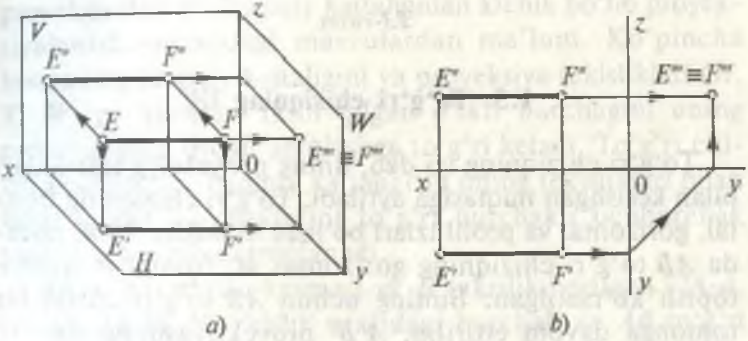


a) *b)*

20-rasm.



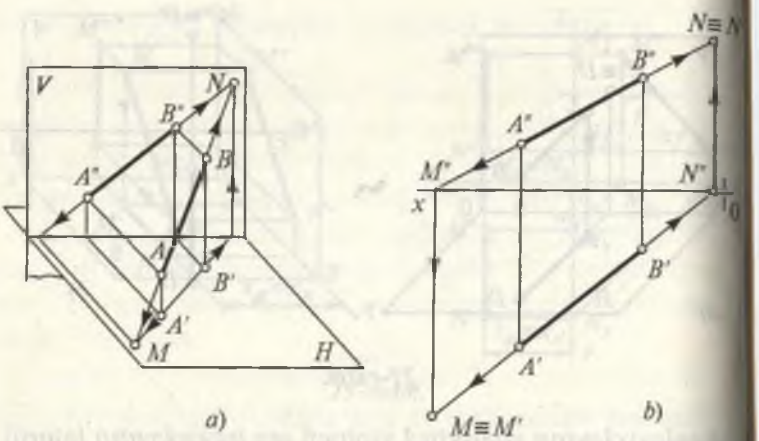
21-rasm.



22-rasm.

Masalan, berilgan AB to‘g‘ri chiziq gorizontal tekislikka perpendikulyar bo‘lsa, gorizontal proyeksiyalovchi to‘g‘ri chiziq deyiladi (20-*a*, rasm). Bunday to‘g‘ri chiziqning frontal $A''B''$ proyeksiyasi Ox o‘qiga perpendikulyar bo‘ladi, gorizontal A′B′ proyeksiyasi esa nuqta bo‘lib proyeksiyalanadi (20-*b*, rasm).

Xuddi shu kabi frontal tekislikka perpendikulyar bo‘lsa, frontal proyeksiyalovchi (21-*a*, *b*, rasmlar), profilga perpendikulyar bo‘lsa, profil proyeksiyalovchi to‘g‘ri chiziqlar deyiladi (22-*a*, *b*, rasmlar).



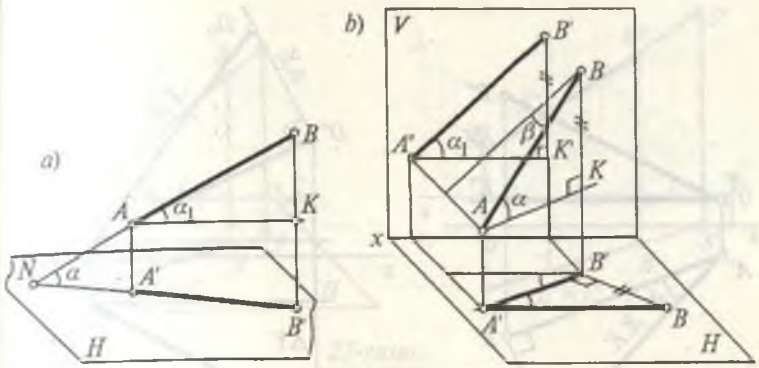
23-rasm.

1.3. To‘g‘ri chiziqning izi

To‘g‘ri chiziqning izi deb, uning proyeksiya tekisliklari bilan kesishgan nuqtasiga aytiladi. To‘g‘ri chiziqning frontal, gorizontal va profil izlari bo‘lishi mumkin. 23-*a*, rasmda AB to‘g‘ri chiziqning gorizontal M, frontal N izlarini topish ko‘rsatilgan. Buning uchun AB to‘g‘ri chiziq bir tomonga davom ettirilib, $A'B'$ proyeksiyasining davomi bilan kesishgan nuqtasi gorizontal izi M va ikkinchi tomonga davom ettirilsa frontal izi N topiladi. 23-*b*, rasmda uning ortogonal proyeksiyasi $A''B''$ to‘g‘ri chiziqning frontal proyeksiyasini OX o‘q bilan kesishguncha davom ettiriladi va kesishgan nuqtasi pastga proyeksiyalanadi, $A'B'$ gorizontal proyeksiyasining davomi bilan kesishib gorizontal izi M nuqtani hosil qiladi. Ikkinchi izi N nuqta ham xuddi shu tarzda to‘g‘ri chiziqning proyeksiyalarini davom ettirish orqali topiladi.

1.4. To‘g‘ri chiziqning haqiqiy kattaligini topish

Fazodagi to‘g‘ri chiziq kesmasi proyeksiya tekisliklariga nisbatan umumiy vaziyatda bo‘lganligi sababli uning



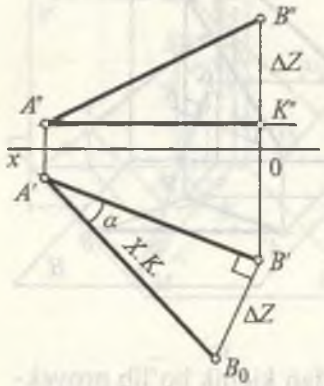
24-rasm.

proyeksiyalari o'z haqiqiy kattaligidan kichik bo'lib proyeksiyalanish yuqoridagi mavzulardan ma'lum. Ko'pincha kesmaning haqiqiy kattaligini va proyeksiya tekisliklari (*H*, *V*, *W*) ga nisbatan hosil qilgan o'tkir burchagini uning proyeksiyalari orqali aniqlashga to'g'ri keladi. To'g'ri chiziq kesmasining haqiqiy kattaligi va uning tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklarini to'g'ri burchakli uchburchak yasash usuli bilan aniqlanadi.

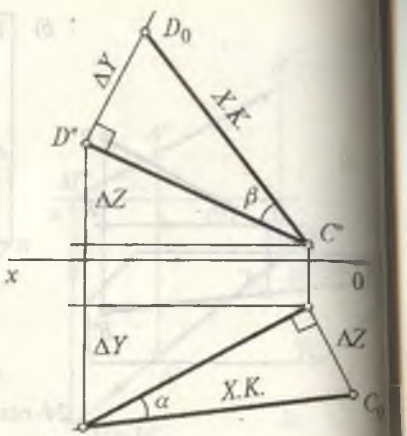
AB to'g'ri chiziq kesmasi va *H* tekislik berilgan (24-*a*, rasm). *AB* va *H* tekislik orasidagi burchak va *AB* to'g'ri chiziqning haqiqiy kattaligini topish uchun *A* nuqtadan *H* tekislikka parallel to'g'ri chiziq o'tkaziladi va *ABK* to'g'ri burchakli uchburchak hosil qilinadi. Bu uchburchakni *AK* atrofida aylantirib *AB*//*H* holatiga keltiriladi va proyeksiyalansa *AB* to'g'ri chiziqning haqiqiy kattaligi va *H* tekislik orasidagi burchak aniqlanadi. Endi A nuqtadan *A'B'*ga parallel qilib to'g'ri chiziq o'tkazilsa, *ABK* to'g'ri burchakli uch burchak va α_1 o'tkir burchak hosil bo'ladi (24-*b*, rasm).

To'g'ri burchakning proyeksiyalanishi. Agar to'g'ri burchakning bir tomoni tekislikka parallel bo'lib, ikkinchi tomoni unga perpendikular bo'lmasa, bu to'g'ri burchak tekislikka haqiqiy kattaligida proyeksiyalanadi.

25-rasmda umumiy vaziyatdagi *AB* to'g'ri chiziqning ortogonal proyeksiyasi, ya'ni epyurasi berilgan, uning



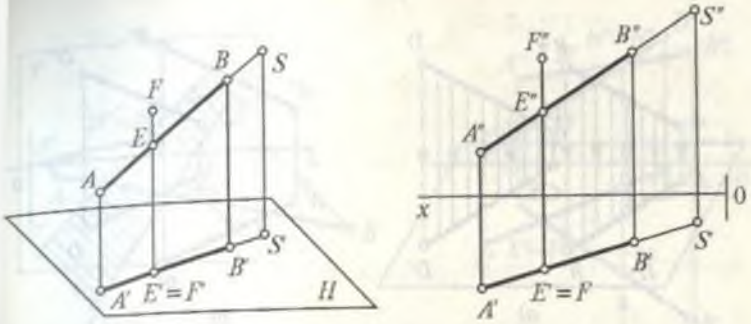
25-rasm.



26-rasm.

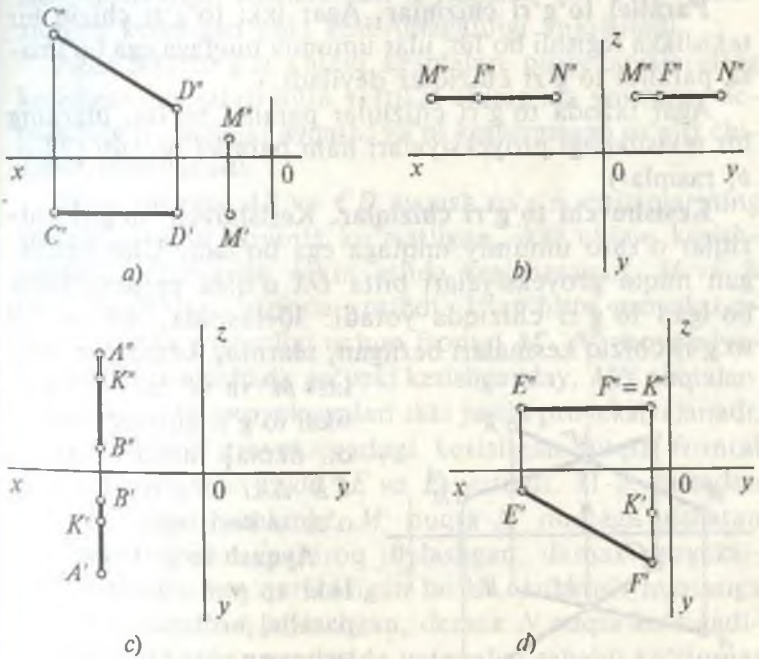
haqiqiy kattaligini topish talab qilinsin. Buning uchun A'' nuqtadan OX o'qiga parallel o'tkazib $A''B''K''$ uchburchak hosil qilinadi. Gorizontal $A'B'$ga perpendikular qilib B'' nuqtadan to'g'ri chiziq chiqariladi. ΔZ ($B''B_x - B_xK$) masofa o'lchab qo'yiladi va A' nuqta bilan tutashtiriladi, hosil bo'lgan $A'B_0$ chiziq AB to'g'ri chiziqning haqiqiy kattaligi hisoblanadi. Bunda α burchak esa, AB to'g'ri chiziq bilan H tekislik orasidagi burchakdir. 26-rasmda CD to'g'ri chiziqning frontal va gorizontal tekisliklarda haqiqiy kattaligini topish ko'rsatilgan. Profil tekislikda ham shunday usulda bajariladi.

To'g'ri chiziqda yotuvchi va yotmagan nuqtalar. Berilgan to'g'ri chiziq va nuqtaning ikki proyeksiyasi bo'yicha ularning vaziyatini aniqlash mumkin. S nuqta AB to'g'ri chiziqda yotibdi, chunki AB to'g'ri chiziq davom ettirilsa S nuqtadan o'tadi (27-*a*, rasm). Uning ikki proyeksiyasi ham to'g'ri chiziq proyeksiyalarida yotibdi. F nuqta to'g'ri chiziqda yotmaganligi uning bitta proyeksiyasida yotgani bilan ikkinchi proyeksiyasida yotmayapti, shuning uchun, F nuqta AB to'g'ri chiziqda emas (27-*b*, rasm). Demak, nuqta to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lishi uchun, uning ikkita proyeksiyasi ham to'g'ri chiziqning proyeksiyalarida yotishi shart.

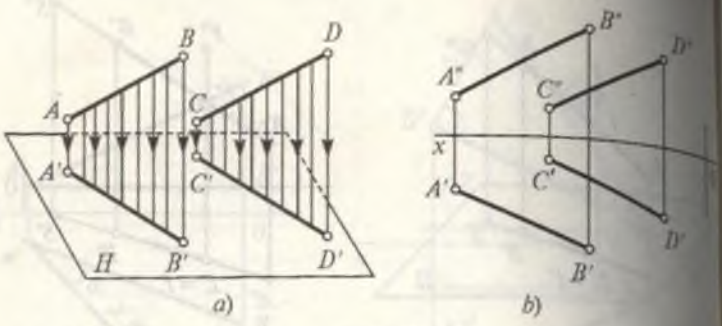


27-rasm.

Topshiriqlarni bajaring: 28-rasmda berilgan nuqta to'g'ri chiziqda yotgan yoki yotmaganligini aniqlang.



28-rasm.



29-rasm.

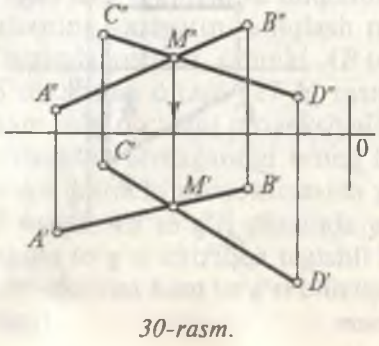
1.5. To‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro vaziyatlari

Ikki to‘g‘ri chiziq fazoda o‘zaro parallel, kesishuvchi yoki uchrashmas (ayqash) vaziyatlarda bo‘lishi mumkin.

Parallel to‘g‘ri chiziqlar. Agar ikki to‘g‘ri chiziq bir tekislikka tegishli bo‘lib, ular umumiy nuqtaga ega bo‘lmasa parallel to‘g‘ri chiziqlar deyiladi.

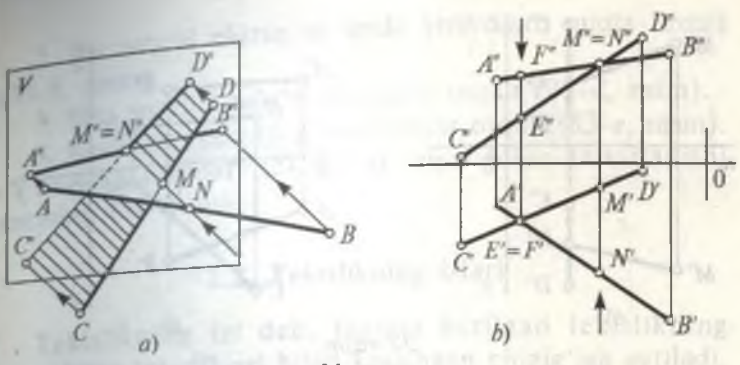
Agar fazoda to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lsa, ularning bir tekislikdagi proyeksiyalari ham parallel bo‘ladi (29-*a*, *b*, rasmlar).

Kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar. Kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro umumiy nuqtaga ega bo‘ladi. Ular kesishgan nuqta proyeksiyalari bitta OX o‘qiga perpendikular bo‘lgan to‘g‘ri chiziqda yotadi. 30-rasmda, AB va CD to‘g‘ri chiziq kesmalari berilgan, ularning kesishgan nuqtasi M' va M'' lar bitta vertikal to‘g‘ri chiziqda yotibdi, demak fazodagi AB va CD ikki to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro kesishgan.



30-rasm.

Ayqash to‘g‘ri chiziqlar. Ikki to‘g‘ri chiziq o‘zaro parallel bo‘lmasa yoki kesishmasa ular ayqash (uchrashmas) to‘g‘ri chiziqlar deyiladi. Ular bir tekislikda



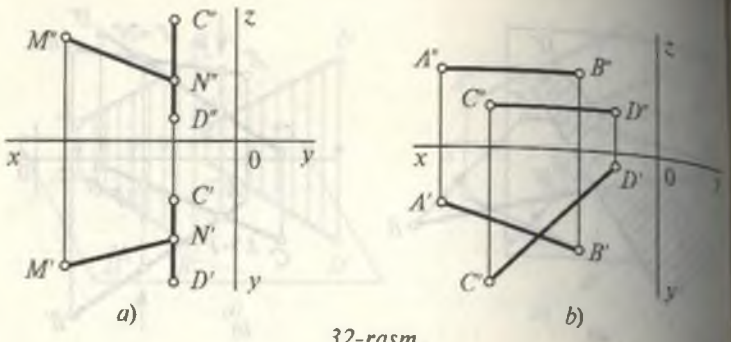
31-rasm.

yotmaydi. Geometrik shakllarning ko'rinishliligini *konkurent* nuqtalardan foydalanib aniqlanadi. Bitta proyeksiyalovchi nurda joylashgan nuqtalar konkurent nuqtalar deyiladi. Konkurent nuqtalardan foydalanib ikki to'g'ri chiziqning kesishgan yoki kesishmaganligi aniqlanadi.

Agar ikki to'g'ri chiziq kesmalari proyeksiyalarining kesishgan nuqtalari bitta vertikal chizig'ida yotmasa, demak to'g'ri chiziqlar ayqash, ya'ni kesishmagan to'g'ri chiziqlar hisoblanadi.

31-*a*, rasmda AB va CD ayqash to'g'ri chiziqlarining vaziyati yaqqol tasvirda ko'rsatilgan, ikki chiziq kesishganday ko'rinsa-da, lekin aslida kesishmagan, M va N nuqtalar ikkita chiziqda yotibdi. Ular bitta proyeksiyalovchi nurda yotganligi uchun frontal M'', N'' proyeksiyalari ustma-ust tushadi, go'yoki kesishganday, MN nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari ikki joyda proyeksiyalanadi.

Gorizontal proyeksiyadagi kesishgan nuqta frontal proyeksiyada ikki joyda (E va F) yotibdi. 31-*b*, rasmdan shuni ko'rish mumkinki, M' nuqta N' nuqtaga nisbatan frontal tekislikka yaqinroq joylashgan, demak proyeksiyalash tomonidan qaraladigan bo'lsa, kuzatish nuqtasiga N' nuqta yaqinroq joylashgan, demak N nuqta ko'rinadigan, M nuqta uning orqasida yotganligi sababli ko'rinmas hisoblanadi. Xuddi shu kabi F nuqta ko'rinadigan, E nuqta esa ko'rinmaydigan nuqta deyiladi.



a) *b)*

32-rasm.

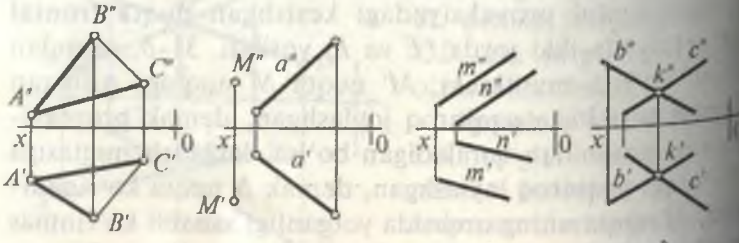
Topshiriqni bajaring: 32-*a*, *b*, rasmda berilgan to'g'ri chiziqlarning kesishmaganligini aniqlang.

2-BOB. TEKISLIKNING ORTOGONAL PROYEKSIYALARI

2.1 Tekisliklar va ularning epyurda tasvirlanishi

Tekisliklar birinchi darajali algebraik tenglama bilan ifodalanganligi sababli, birinchi tartibli sirt hisoblanadi. Fazoda tekislikni cheksiz deb hisoblash mumkin, lekin epyurda tasvirlash uchun uning bir bo'lagi (uchburchak, to'rtburchak, aylana va h.k.) shakllar bilan tasvirlash yetarli hisoblanadi. Demak, tekisliklar epyurda quyidagicha berilishi mumkin:

1. Bir to'g'ri chiziqda yotmagan uchta nuqta (*A*, *B*, *C*) orqali (33-*a*, rasm).



a) *b)* *c)* *d)*

33-rasm.

2. Bir to'g'ri chiziq va unda yotmagan nuqta orqali (33-*b*, rasm).

3. Ikki parallel to'g'ri chiziqlar orqali (33-*d*, rasm).

4. Kesishgan ikki to'g'ri chiziqlar orqali (33-*e*, rasm).

Bundan tashqari tekisliklar izlari bilan tasvirlanishi mumkin (34-rasm).

2.2. Tekislikning izlari

Tekislikning izi deb, fazoda berilgan tekislikning proyeksiya tekisliklari bilan kesishgan chizig'iga aytiladi.

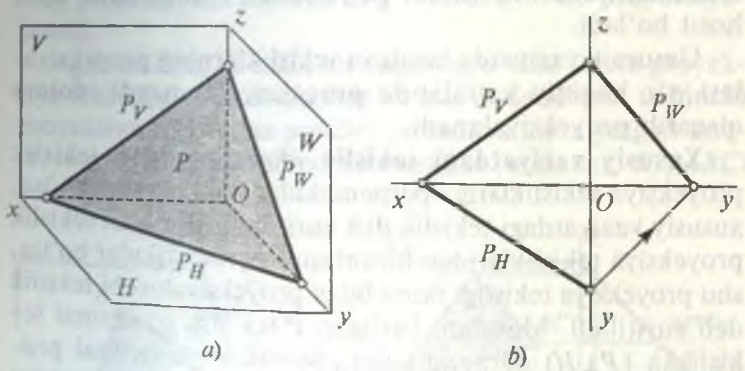
P tekislik proyeksiya tekisliklari bilan kesishib P_V, P_H va P_W izlari hosil bo'ladi (34-*a*, *b*, rasm).

Bunda :

P_H — P tekislikning gorizontal izi;

P_V — P tekislikning frontal izi;

P_W — P tekislikning profil izi.



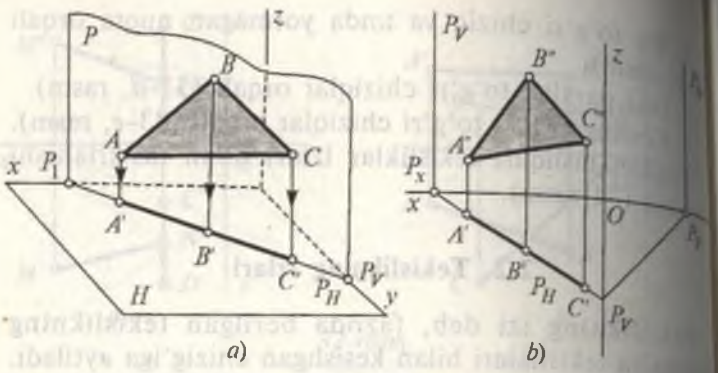
34-rasm.

2.3. Tekislikning proyeksiya tekisliklariga nisbatan vaziyatlari

Tekisliklar fazoda berilishiga qarab, proyeksiya tekisliklariga nisbatan asosan ikki xil ko'rinishda bo'ladi:

1) umumiy vaziyatda;

2) xususiy vaziyatda.



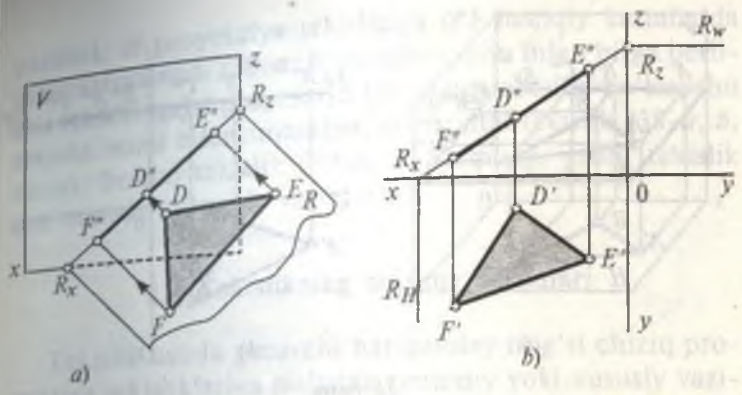
35-rasm.

Umumiy vaziyatdagi tekislik. Agar berilgan tekislik proyeksiya tekisliklaridan birontasiga ham parallel yoki perpendikular bo'lmasa, bunday tekislik umumiy vaziyatdagi tekislik deyiladi (34-rasm). Bunday tekislik proyeksiya tekisliklari bilan kesishadi va yuqorida aytilganidek izlar hosil bo'ladi.

Umumiy vaziyatda berilgan tekisliklarning proyeksiyalari o'z haqiqiy kattaligida proyeksiyalanmaydi, doimo qisqarib proyeksiyalanadi.

Xususiy vaziyatdagi tekislik. Agar berilgan tekislik proyeksiya tekisliklariga perpendikular yoki parallel bo'lsa, xususiy vaziyatdagi tekislik deb yuritiladi. Berilgan tekislik proyeksiya tekisliklaridan birontasiga perpendikular bo'lsa, shu proyeksiya tekisligi nomi bilan proyeksiyalovchi tekislik deb yuritiladi. Masalan, berilgan P tekislik gorizontal tekislikka ($P \perp H$) perpendikular, demak P gorizontal proyeksiyalovchi tekislik deb ataladi va shu tekislikka to'g'ri chiziq holatida proyeksiyalanadi. Undagi yotgan barcha nuqta, to'g'ri chiziq va tekis shakllar shu tekislikning gorizontal izida yotadi (35-*a*, rasm). Epyurda 35-*b*, rasmdagidek tasvirlanadi.

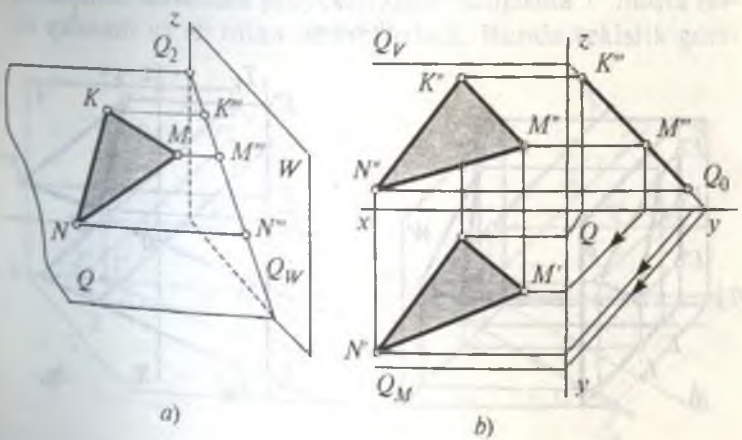
Xuddi shunday berilgan R tekislik frontal proyeksiya tekisligiga ($R \perp V$) perpendikular bo'lsa, frontal proyeksiyalovchi tekislik deyiladi (36-*a*, rasm). 36-*b*, rasmda uning epyuri tasvirlangan.



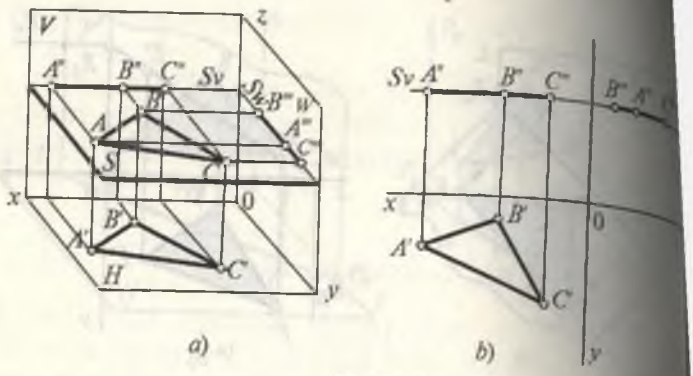
36-rasm.

Berilgan Q tekislik profil proyeksiya tekisligiga ($Q \perp W$) perpendikulyar bo'lsa, profil proyeksiyalovchi tekislik deyiladi (37-*a*, rasm). 37-*b* rasmda uning epyurasi tasvirlangan. Uchala proyeksiyalovchi tekislikda yotuvchi uchburchak ham proyeksiya tekislikka to'g'ri chiziq bo'lib proyeksiyalanadi.

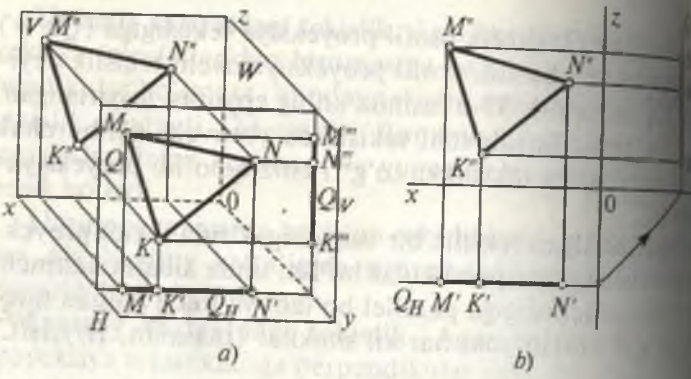
Agar berilgan tekislik bir vaqtning o'zida ikkita proyeksiya tekisligiga perpendikulyar bo'lsa, unda albatta uchinchi proyeksiya tekisligiga parallel bo'ladi va unda yotgan nuqta, to'g'ri chiziq yoki har xil shakllar (masalan, $H//ABC$)



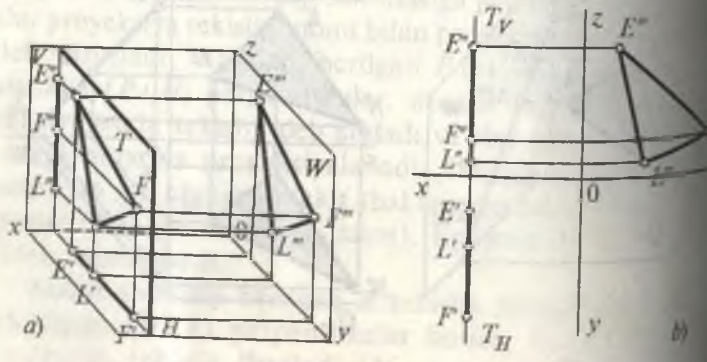
37-rasm.



38-rasm.



39-rasm.



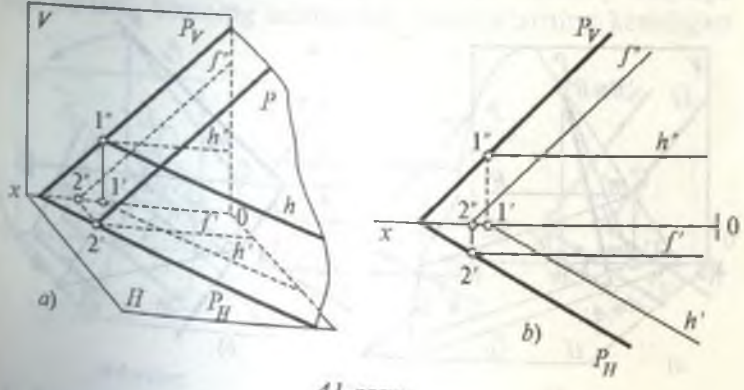
40-rasm.

parallel, H proyeksiya tekisligiga o'z haqiqiy kattaligida proyeksiyalanadi (38-*a*, *b*, rasmlar). Shu bilan birga berilgan tekislik qaysi proyeksiya tekisligiga parallel bo'lsa, shu tekislik nomi bilan, masalan, gorizontal tekislik (38-*a*, *b*, rasm), frontal tekislik (39-*a*, *b*, rasmlar), profil tekislik deb ataladi (40-*a*, *b*, rasmlar).

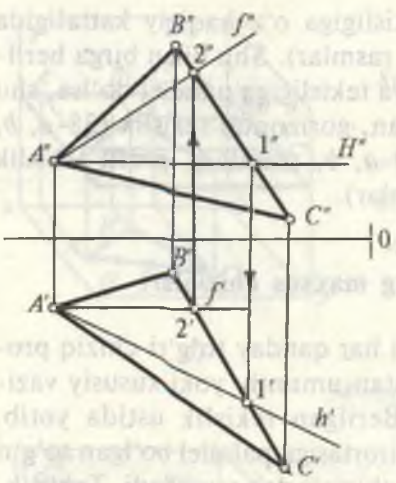
2.4 Tekislikning maxsus chiziqlari

Tekislik ustida yotuvchi har qanday to'g'ri chiziq proyeksiya tekisliklariga nisbatan umumiy yoki xususiy vaziyatda bo'lishi mumkin. Berilgan tekislik ustida yotib, proyeksiya tekisliklaridan birortasiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tekislikning maxsus chizig'i deb yuritiladi. Tekislikning maxsus chiziqlari ichida gorizontal va frontal proyeksiya tekisliklariga parallel to'g'ri chiziqlar eng ko'p qo'llaniladi: h — tekislik gorizontali, ya'ni gorizontal tekislikka parallel chiziq, frontal proyeksiya tekisligiga parallel to'g'ri chiziq esa, f — tekislik frontali deyiladi (41-rasm).

42-rasmda ABC tekislikka tekislik gorizontali o'tkazish ko'rsatilgan. Buning uchun A'' nuqtadan OX o'qiga parallel h to'g'ri chiziq o'tkaziladi, hosil bo'lgan $1''$ nuqtani gorizontal tekislikka proyeksiyalash natijasida $1'$ nuqta hosil qilinadi va A' bilan tutashtiriladi. Bunda tekislik gori-



41-rasm.



42-rasm.

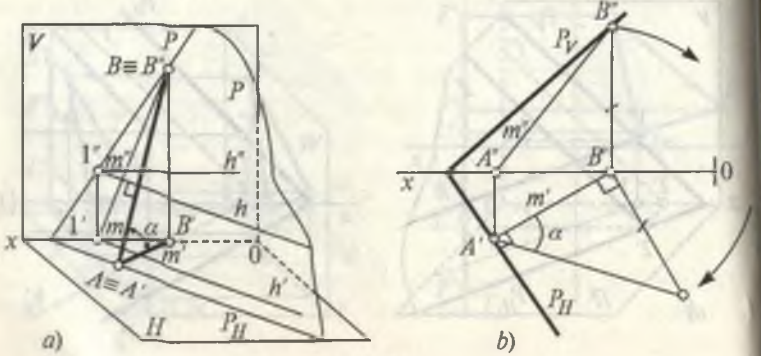
zontalining h' gorizont proyeksiyasi hosil bo'lad tekislik frontali $f(A2)$ ha shu usulda bajariladi.

Tekislikda yotuvch proyeksiya tekisliklarig parallel cheksiz chiziql o'tkazish mumkin. De mak, cheksiz tekislik go rizontallari yoki frontal lari o'tkazish mumki ekan.

Ko'pgina geometrik masalalarni bajarishda te kislikning maxsus chiziq lari muhim ahamiyatg ega, bu chiziqlarsiz ayrim masalalarni yechib bo'lmaydi.

Tekislikning eng katta og'ma chiziqlari. Tekislik ustida yotib, uning gorizontal yoki fontal izlariga perpendikular bo'lgan to'g'ri chiziq tekislikning eng katta og'ma chizig'i deyiladi.

Tekislikning eng katta og'ma chiziqlari uning gorizontal va frontal proyeksiya tekisliklariga nisbatan hosil qilgan og'ish burchaklarini aniqlashga yordam beradi. Ikki tekislik orasidagi burchak chiziqli burchak bilan o'lchanadi.



43-rasm.

Tekislikning gorizontal chiziqlariga nisbatan perpendikular joylashgan eng katta og'ma chiziqlarining gorizontal proyeksiyalari ularning gorizontal proyeksiyalariga perpendikular bo'ladi. Frontal chiziqlarga nisbatan perpendikular joylashgan eng katta og'ma chiziqlarning frontal proyeksiyalari esa ularning frontal proyeksiyalariga perpendikular bo'ladi (43-*a*, rasm). 43-*b*, rasmda epyurasi tasvirlangan.

2.5 Tekisliklarning o'zaro vaziyatlari

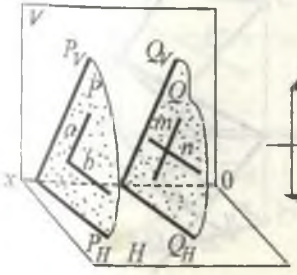
Tekisliklar qanday bo'lishidan qat'iy nazar ular o'zaro parallel, kesishgan bo'lishi mumkin.

O'zaro parallel tekisliklar. Agar birinchi tekislikda yotgan kesishuvchi ikki to'g'ri chiziq, ikkinchi tekislikda yotgan kesishuvchi ikki to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, ikkala tekislik ham o'zaro parallel bo'ladi (44-rasm). 45-rasmda epyuri tasvirlangan.

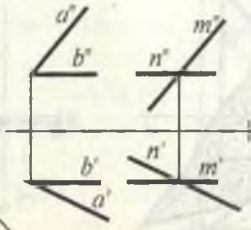
Agar tekisliklar parallel bo'lsa, ularning bir nomli izlari ham parallel bo'ladi (46-rasm).

Agar tekisliklar parallel bo'lmasa, albatta kesishadi va bitta umumiy chiziqqa ega bo'ladi.

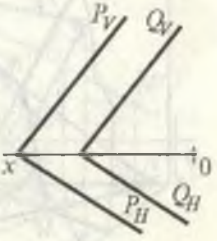
Ikki tekislikning kesishuv chizig'i. Har qanday ikkita tekisliklar kesishishi natijasida to'g'ri chiziq hosil bo'lishi geometriya kursidan ma'lum, ular ikki umumiy nuqtaga ega bo'ladi. Shuning uchun ikki tekisliklarning kesishgan



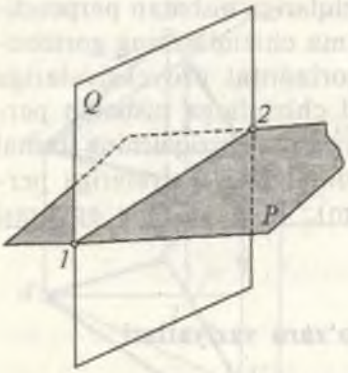
44-rasm.



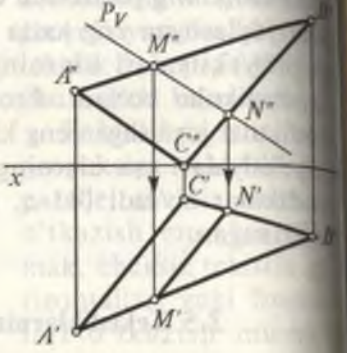
45-rasm.



46-rasm.



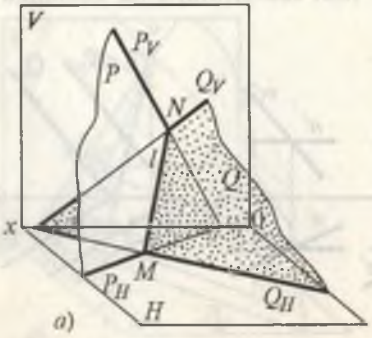
47-rasm.

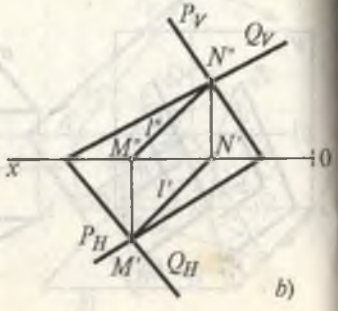


48-rasm.

nuqtasini topish kifoya, o'z navbatida chiziq ikki nuqta orqali ifodalanadi (47-rasm).

P frontal proyeksiyalovchi va *ABC* umumiy vaziyatdagi tekisliklar berilgan, ularning kesishgan chizig'ini topish talab qilinsin (48-rasm). Bunda *P* tekislik frontal proyeksiyalovchi bo'lganligi sababli ularning kesishgan nuqtalari *M"N"* aniq ko'rinib turibdi, ular gorizontal proyeksiya tekisligiga proyeksiyalansa *M'N'* nuqtalar hosil bo'ladi, ular tutashtirilsa ikki tekislikning kesishgan chizig'i hosil bo'ladi. 49-rasmda *Q* umumiy vaziyatdagi tekislik va *P* tekislik berilgan. Ularning kesishgan chizig'ini topish kerak bo'lsin. *P* tekisliklarning gorizontal tekislikdagi izi bilan





49-rasm.

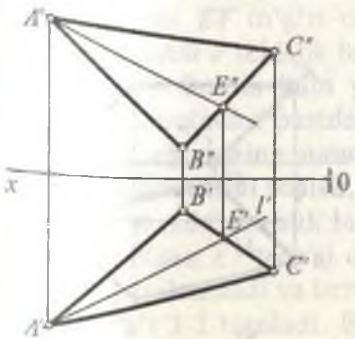
kesishgan nuqtalari $M'N'$ topiladi va ularning frontal proyeksiyalari $M''N''$ nuqtalar topiladi, MN to'g'ri chiziq ikki tekislikning kesishgan chizig'i hisoblanadi.

2.6 Tekislik va to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyatlari

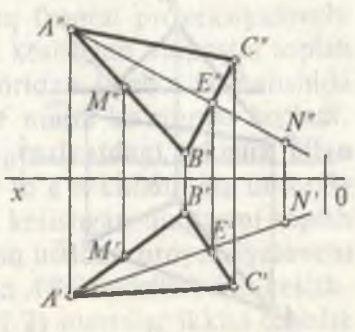
Geometriya kursidan ma'lumki, agar berilgan to'g'ri chiziqning ixtiyoriy ikki nuqtasi tekislikda yotsa, to'g'ri chiziq tekislikda yotibdi deb hisoblanadi. Uchburchak ABC tekislikning A va E nuqtalaridan o'tuvchi to'g'ri chiziq shu tekislikda yotibdi. Chunki, to'g'ri chiziq uchburchak ABC tekislik bilan umumiy ikki nuqtaga ega (50-rasm).

Tekislikda yotuvchi to'g'ri chiziqning xar bir nuqtasi tekislikda yotibdi deb hisoblanadi. Masalan, M nuqta berilgan ABC uchburchak tekisligining AB tomonida yotibdi, buni M'' va M' nuqtalar $A''B''$ va $A'B'$ to'g'ri chiziqda yotganligidan bilsa bo'ladi (51-rasm). N nuqta ham ABC tekislikda yotgan AE to'g'ri chiziqda yotibdi, chunki N'' va M' nuqtalar AE to'g'ri chizig'ining bir nomli proyeksiyalarida yotibdi.

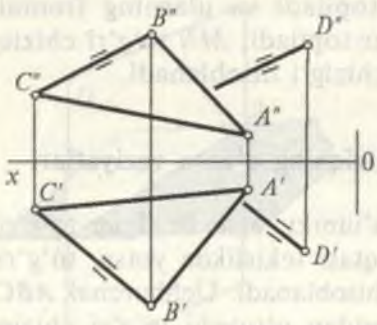
Agar fazodagi to'g'ri chiziq berilgan tekislikda yotuvchi bironta to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, fazodagi to'g'ri chiziq tekislikka parallel hisoblanadi. Fazoda uchburchak ABC tekislik berilgan, unda yotmagan D nuqtadan tekislikka parallel chiziq o'tkazish kerak bo'lsin (52-rasm). Buning uchun D nuqtadan tekislikning BC tomoniga DE chi-



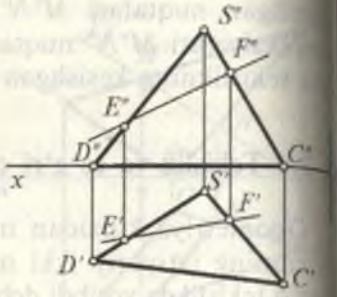
50-rasm.



51-rasm.



52-rasm.



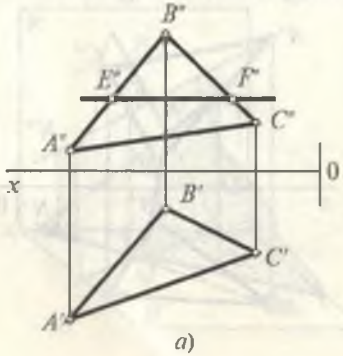
53-rasm.

ziq o'tkazilsa kifoya, demak tekislikka parallel to'g'ri chiz hosil bo'ladi.

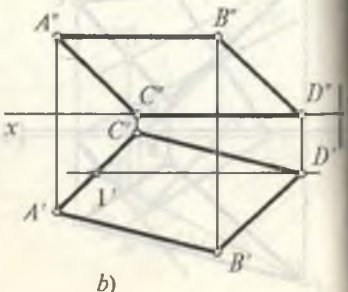
DSC uchburchak tekisligida yotuvchi *EF* to'g'ri chiz o'tkazilsin. Buning uchun tekislikning *D"S"C"* front proyeksiyasidan xohlagan ikki nuqtasini kesib o'tuvch *E"F"* to'g'ri chiziq o'tkaziladi (53-rasm). Bu nuqtalarnin gorizontal *E"F"* proyeksiyalari topiladi, demak tekislikd yotuvchi to'g'ri chiziq o'tkaziladi.

Topshiriqlarni bajaring (54-*a*, *b*, rasmlar): te kislikka tegishli to'g'ri chiziqlarning yetishmagan proyek siyasini toping.

To'g'ri chiziqning tekislik bilan kesishuvi. To'g'ri ch ziqning proyeksiyalovchi tekislik bilan kesishgan nuqtas

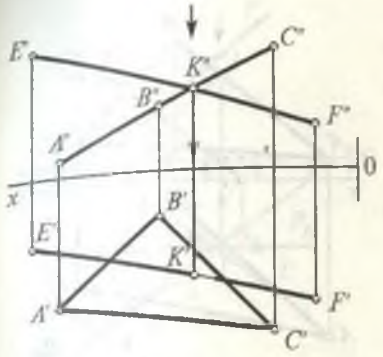


a)

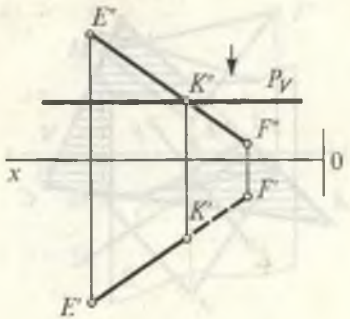


b)

54-rasm.



55-rasm.

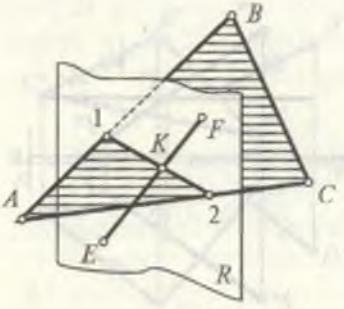


56-rasm.

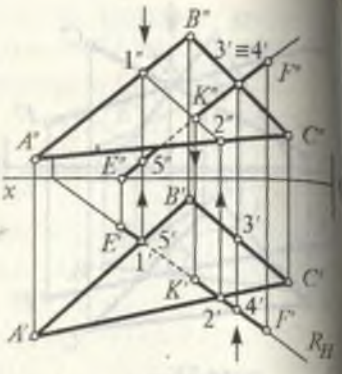
ni topish uchun to'g'ri chiziqning tekislik izi bilan kesishgan nuqtasini topib, uning ikkinchi tekislikdagi proyeksiyasini topish kerak bo'ladi (55-rasm). *ABC* frontal proyeksiyalovchi tekislik bilan *EF* to'g'ri chiziqning kesishgan nuqtasini topish ko'rsatilgan. Ma'lumki, proyeksiyalovchi tekislikning izi to'g'ri chiziq bo'ladi, undagi barcha nuqtalar iziga proyeksiyalanadi. *ABC* tekislikning frontal proyeksiyasi $A''B''C''$ ko'rinib turibdiki, to'g'ri chiziq holatida, u bilan $E''F''$ to'g'ri chiziq K'' nuqtada kesishyapti, nuqtaning gorizontal proyeksiyasini topish uchun pastga proyeksiyalanadi. Proyeksiyalanuvchi nur $E'F'$ to'g'ri chiziq bilan kesishgan nuqtasi K' topiladi. Bunda strelka bilan ko'rsatilgan yuqori C'' nuqta tomoni ko'rinadigan F' pastda bo'lganligi sababli ko'rinmas hisoblanadi.

56-rasmda *EF* to'g'ri chiziq frontal proyeksiyalovchi yoki gorizontal *P* tekislik bilan kesishgan nuqtasini topish ko'rsatilgan. Bunda ham yuqoridan strelka yo'nalishida qaralsa *K* nuqtadan pastdagi *F* nuqta ko'rinmas bo'ladi.

To'g'ri chiziqning umumiy vaziyatdagi tekislik bilan kesishgan nuqtasini topish. *EF* to'g'ri chiziqning umumiy vaziyatdagi *ABC* tekislik bilan kesishgan nuqtasini topish uchun berilgan *EF* to'g'ri chiziq ustidan proyeksiyalovchi *R* tekislik o'tkaziladi va berilgan *ABC* tekislik bilan kesishgan chizig'i 1 2 topiladi. Bu (1 2) nuqtalar ikkita tekislik uchun ham umumiydir (57-rasm).

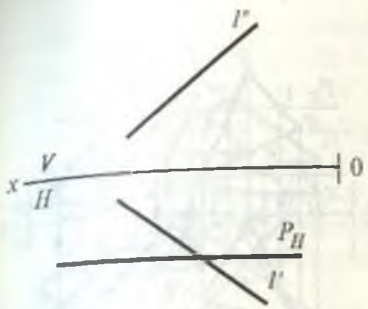


57-rasm.

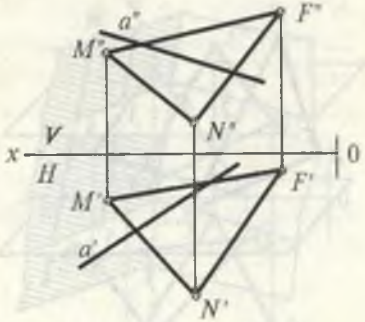


58-rasm.

Berilgan EF to'g'ri chiziq ustidan R tekislik o'tkazilganligi sababli 1, 2 to'g'ri chiziq bilan EF to'g'ri chiziq nuqtada kesishadi. Demak, EF to'g'ri chizig'ining ABC tekislik bilan kesishgan nuqtasi K, ABC tekislik uchun ham EF to'g'ri chiziq ustidan o'tkazilgan R tekislik uchun ham umumiydir. Endi, shu vaziyat epyurda qanday bajariladi (58-rasm)? Buning uchun EF to'g'ri chizig'ining gorizontal proyeksiyasi $E'F'$ bo'yicha gorizontal proyeksiyalovchi R tekislikning gorizontal proyeksiyasi $R_{//}$ o'tkaziladi va 1'2' nuqtalar hosil qilinadi. Bu nuqtalarning frontal proyeksiyalari 1''2'' topilib, ular tutashtirilsa, $E'F'$ to'g'ri chiziq bilan K'' nuqtada kesishadi. Endi K nuqtaning gorizontal proyeksiyasi K' topiladi. Demak, tekislik va to'g'ri chiziqning kesishgan nuqtasi topildi. Endi ularning ko'rinar va ko'rinmas tomonlarini aniqlash kerak, buning uchun $E''F''$ va tekislik tomoni $B''C''$ larning kesishgan $3''=4''$ nuqtalari topiladi. Pastdan strelka yo'nalishi bo'yicha qaralsa, frontal tekislikka nisbatan 4 nuqta 3 nuqtadan uzoqda joylashgan, demak 4 nuqta ko'rinadigan, 3 nuqta esa ko'rinmaydigan bo'ladi. Xuddi shu usulda 1'5' nuqtalar ham aniqlanadi, ya'ni 1'' nuqta yuqorida, 5'' nuqta pastda joylashganligi sababli 1 nuqta ko'rinadigan, 5 nuqta ko'rinmaydigan bo'ladi. Bundan ko'rinib turibdiki, EF to'g'ri chizig'ining F dan K nuqtagacha qismi ko'rinadi, K nuq-



59-rasm.



60-rasm.

tadan E nuqtagacha qismi ko'rinmaydigan bo'ladi va shtrix chiziq bilan tasvirlanadi.

Topshiriqni bajaring:

59-rasmda P tekislik bilan l to'g'ri chiziqning kesishgan nuqtasini toping.

60-rasmda berilgan NMF tekislik bilan a to'g'ri chiziqning kesishgan nuqtasini toping.

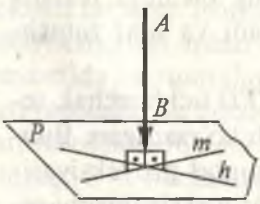
Ikkita umumiy vaziyatdagi tekisliklarning o'zaro kesishgan chizig'ini topish. Ikki umumiy vaziyatdagi tekisliklarning o'zaro kesishgan chizig'ini topish uchun yordamchi proyeksiyalovchi tekisliklar o'tkazish usulidan foydalaniladi. Buni osonroq tushuntirish uchun yaqqol tasvirda ifodalash maqsadga muvofiq bo'ladi (61-*a*, rasm). Bunda, uchburchak ABC va f va n parallel to'g'ri chiziqlar orqali ikkita umumiy vaziyatdagi tekisliklar berilgan. ABC tekisliklarning kesishgan chizig'ini topish uchun yordamchi frontal proyeksiyalovchi R tekislik o'tkaziladi, natijada ABC tekislik bilan 1 va 2 nuqtalarda kesishadi, ikkinchi ($f//n$) tekislik esa 3 va 4 nuqtalarda kesishadi. Hosil bo'lgan 1, 2 va 3, 4 nuqtalar tutashtirilsa, ularning kesishgan nuqtasi K topiladi. Endi R tekislikka parallel Q tekislik o'tkaziladi va yuqorida ko'rsatilgani kabi berilgan tekislik bilan kesishgan chiziqlarning kesishgan L nuqtasi topiladi. Topilgan K va L nuqtalar tutashtirilsa, berilgan

M'' bilan N'' va M' bilan N' tutashtiriladi. Demak ABC va EFD tekisliklarning kesishgan chizig'i MN to'g'ri chiziq ekan. Ularning ko'rinar-ko'rinmasligini topish o'tgan mavzularda bajarilganidek topiladi, ya'ni 5, 6 nuqtalar gorizontal proyeksiyada ustma-ust tushyapti. $5''$ nuqta yuqorida bo'lganligi sababli 5 nuqta yotgan $B'N'$ qirra ko'rinadigan 6 nuqta yotgan ED qirra ko'rinmaydigan hisoblanadi. 4, 7 nuqtalar ham xuddi shu usulda topiladi.

Topshiriqni bajaring: 63-rasmda berilgan ikki tekislikning o'zaro kesishgan chizig'ini yasang.

To'g'ri chiziq bilan tekislikning o'zaro perpendikularligi. Elementar geometriyadan ma'lumki, agar to'g'ri chiziq tekisikda yotgan kamida ikkita kesishgan to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lsa, berilgan to'g'ri chiziq tekislikka perpendikular hisoblanadi. Bu perpendikular to'g'ri chiziq orqali cheksiz tekisliklar o'tkazish mumkin.

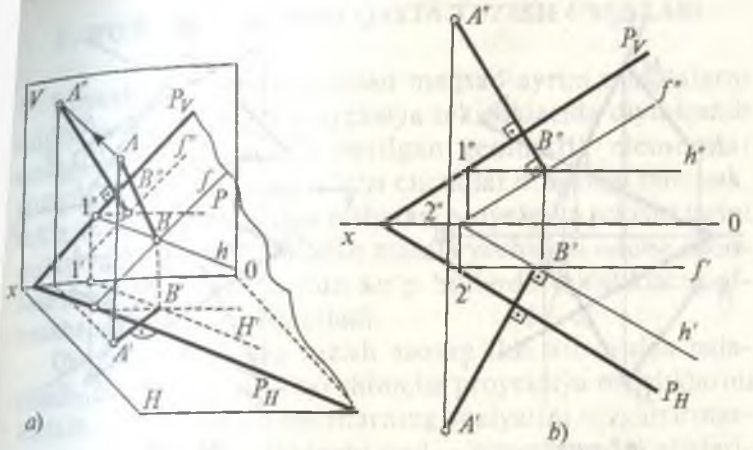
64-rasmda ko'rsatilganidek, P tekislikka AB to'g'ri chiziq perpendikular bo'lishi uchun unda yotuvchi kesishgan ikki ($m \cap n$) to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lishi kerak.



64-rasm.

65-*a*, rasmda P tekislik va unga perpendikular AB to'g'ri chiziqning yaqqol tasviri berilgan. Bunda AB to'g'ri chiziqning B nuqtasidan tekislikning maxsus chiziqlari h va f o'tkaziladi.

AB to'g'ri chiziqning gorizontal proyeksiyasi $A'B'$ tekislik gorizontalining gorizontal h' proyeksiyasiga perpendikular bo'ladi. Frontal $A''B''$ proyeksiyasi esa tekislik frontal frontal f'' proyeksiyasiga perpendikular bo'ladi. Bundan quyidagi qoida kelib chiqadi. Agar to'g'ri chiziq tekislikka perpendikular bo'lsa, bu chiziqning gorizontal proyeksiyasi tekislik gorizontalining gorizontal proyeksiyasi va gorizontal iziga, frontal proyeksiyasi esa tekislik frontalining frontal proyeksiyasiga va frontal iziga perpendikular bo'ladi. 65-*b*, rasmdagi epyurasida A' dan h' ga perpendikular, A'' dan f''ga

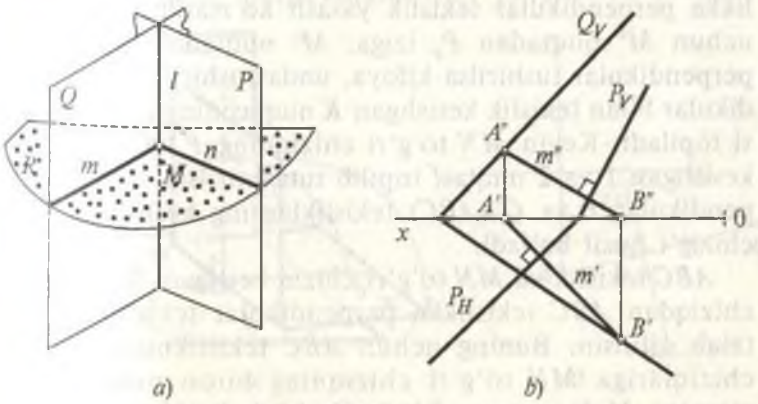


65-rasm.

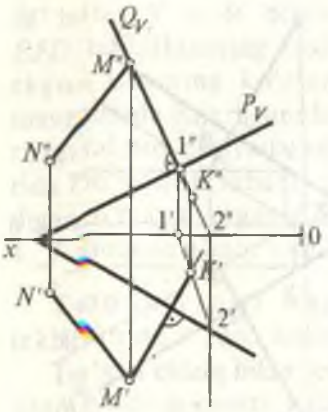
perpendikular o'tkazilgan. Demak, tekislikka tushirilgan perpendikular uning izlariga ham perpendikular bo'ladi. ($A''B'' \perp P_V$, $A'B' \perp P_H$)

2.7. O'zaro perpendikular tekisliklar yasash

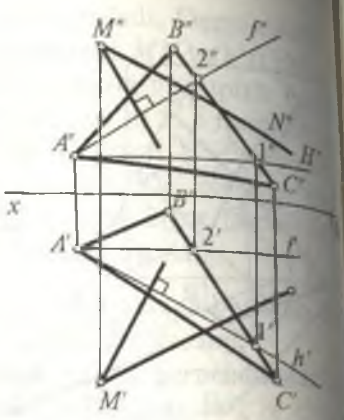
Ikki tekislikning bir-biriga nisbatan perpendikularlik shartini quyidagicha ta'riflash mumkin: Agar biror tekislik ikkinchi tekislikka perpendikular bo'lgan to'g'ri chiziq



66-rasm.



67-rasm.



68-rasm.

orqali o'tsa, bu tekisliklr o'zaro perpendikular bo'ladi. Bundan quyidagi xulosaga kelish mumkin: tekislikka tegishli to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgan har qanday tekislik mazkur tekislikning o'ziga ham perpendikular bo'ladi (66-*a*, rasm). 66-*b*, rasmda $P(P_H, P_V)$ tekislikka perpendikular va O_x nuqtadan o'tuvchi Q tekislik izlari bilan o'tkazish ko'rsatilgan. Bunda P tekislikka perpendikular ixtiyoriy m chiziq o'tkazilib, $A''B''$ va $A'B'$ nuqtalar topiladi. Izlangan Q tekislikning Qn izini Qx, B' nuqtalardan, Qv izini esa QxA'' nuqtalardan o'tkaziladi. Natijada $P \cap Q$ bo'ladi. 67-rasmda MN to'g'ri chiziq orqali P tekislikka perpendikular tekislik yasash ko'rsatilgan. Buning uchun M'' nuqtadan P_V iziga, M' nuqtadan esa P_H ga perpendikular tushirilsa kifoya, unda tushirilgan perpendikular bilan tekislik kesishgan K nuqtasining proyeksiyasi topiladi. Keyin MN to'g'ri chiziqning P tekislik bilan kesishgan 1 va 2 nuqtasi topilib tutashtirilsa, o'zaro perpendikular P va Q (ABC) tekisliklarning kesishgan (12) chizig'i hosil bo'ladi.

ABC tekislik va MN to'g'ri chiziq berilgan, MN to'g'ri chiziqdan ABC tekislikka perpendikular tekislik yasash talab qilinsin. Buning uchun ABC tekislikning maxsus chiziqlariga MN to'g'ri chiziqning biron nuqtasidan, masalan M dan perpendikular tushiriladi (68-rasm).

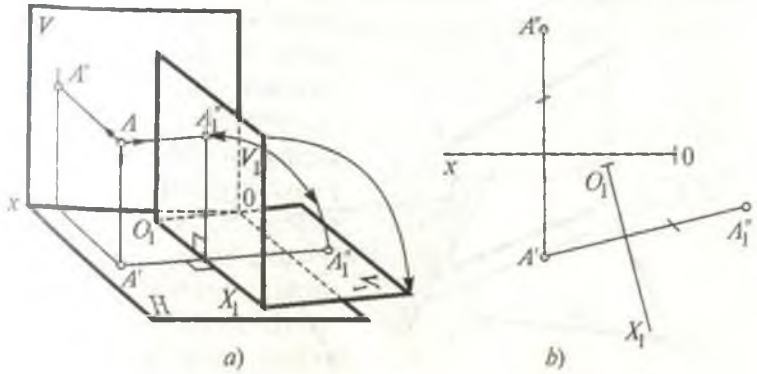
3-BOB. EPYURLARNI QAYTA TUZISH USULLARI

Epyurlarni qayta tuzishdan maqsad ayrim masalalarni oddiy usulda bajarish proyeksiya tekisliklarida qiyinlashib qoladi. Shuning uchun berilgan geometrik elementlar (to'g'ri chiziq kesmasi, to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak, tekis shakllar va h.k.) ga nisbatan proyeksiya tekisliklarini qulay vaziyatga keltirib olish masala yechishni ancha osonlashtiradi. Shuning uchun ko'p hollarda tekisliklarni almashtirish usuli qo'llaniladi.

Chizmalarni qayta tuzish asosan ikki xil usulda bajariladi. Birinchi usul — qo'shimcha proyeksiya tekisliklarini kiritib, geometrik elementlarning vaziyatini o'zgartirmasdan almashtirishdir. Ikkinchi usul — proyeksiya tekisliklarini o'zgartirmasdan chizma elementlarini qulay vaziyatga keltirishdir. Bunga aylantirish, tekis harakat usuli, jipslashtirish usuli va h.k.lar misol bo'la oladi.

3.1. Proyeksiya tekisliklarini almashtirish usuli

Proyeksiyalar tekisligini almashtirishning asl maqsad va mazmuni shundan iboratki, proyeksiyalash, asosiy proyeksiya tekisliklari qolib boshqa yangi proyeksiya tekisliklariga o'tadi. Unda barcha proyeksiyalash qonuniyatlari masofa, perpendikularlik, parallellik xossalari

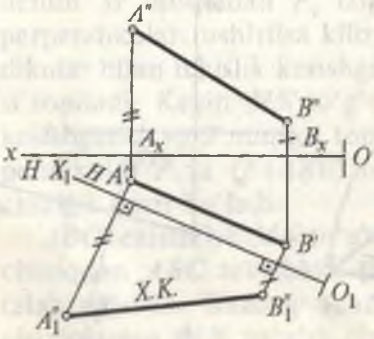


69-rasm.

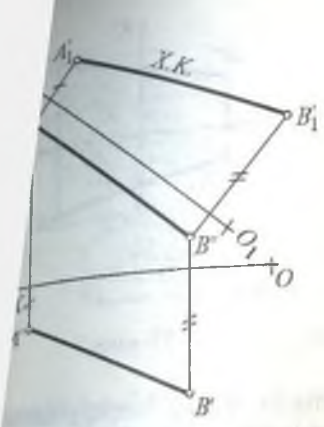
saqlanib qolinadi. Kiritilayotgan yangi proyeksiya tekisligi, V yoki H tekisliklariga perpendikular qilib olinishi kerak. Yangi tekislikning qanday vaziyatda olinishi masalaning shartiga qarab bajariladi. Bu usulni osonroq tushunish uchun chizmani yaqqol tasvirda bajarish maqsadga muvofiqdir. 69-rasmda A nuqtaning V_1 tekislikdagi proyeksiyasini yasash uchun berilgan nuqtadan mazkur tekislikka perpendikular o'tkazib, ya'ni frontal proyeksiyasi A'' topiladi. Bunda A'' dan OX o'qigacha bo'lgan, masofa A'' dan O_1X_1 gacha bo'lgan masofaga teng ekanligini ko'rish mumkin, ya'ni $A_1''A_{x1} = A''A_x$.

Bu masalani epyurda yasash uchun yangi proyeksiya tekisligi (V_1) ni O_1X_1 o'q bo'yicha H tekislikka jipslashtiriladi. A nuqtadan O_1X_1 ga perpendikular tushirib, uning davomiga $A''A_x$ masofa o'lchab, A'' nuqta topiladi, bu A nuqtaning yangi proyeksiyasi hisoblanadi (69-*b*, rasm). 70-rasmda AB to'g'ri chiziqqa parallel qilib V_1 tekislik, ya'ni O_1X_1 o'q olindi va unga perpendikular qilib A' va B' nuqtalar proyeksiyalanadi, A' dan chiqarilgan perpendikular chiziqqa $A''A_X$ masofa, B' dan chiqarilgan chiziqqa esa $B'B_1$ masofa o'lchab qo'yildi. Hosil bo'lgan $A_1''B_1''$ nuqtalarni tutashtirilsa, AB to'g'ri chiziqning yangi proyeksiyasi, ya'ni haqiqiy kattaligi hosil bo'ladi.

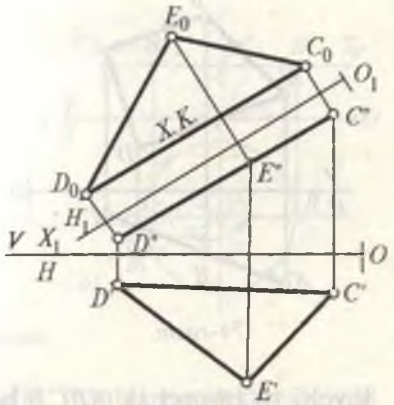
Frontal proyeksiya tekisliklarida ham xuddi shunday bajariladi (71-rasm). Frontal proyeksiyalovchi DCE tekislik berilgan, uning haqiqiy kattaligini tekislikni almashtirish usulida topish talab qilinsin (72-rasm). Uchburchak DCE tekislik frontal proyeksiyalovchi bo'lganligi sababli uning frontal proyeksiyasi $D''C''E''$ to'g'ri chiziq bo'lib proyeksiyalanadi. Uning haqiqiy kattaligini tekislikni almashtirish usuli bilan topish uchun yangi H_1 tekisligini $D''C''E''$ ga parallel qilib



70-rasm.



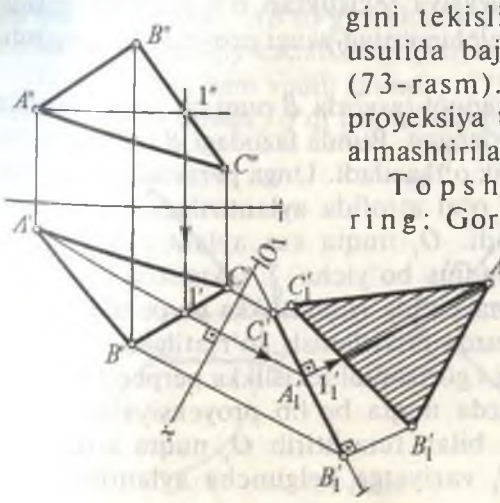
71-rasm.



72-rasm.

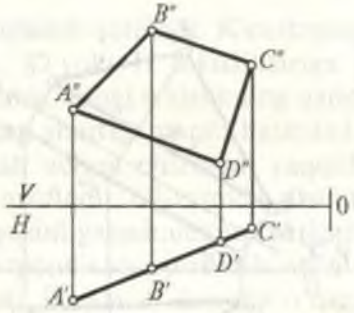
o'tkaziladi, ya'ni $C''E'' // H_1$, bunda O_1X_1 o'qi $D''C''E''$ga parallel qilib chiziladi va tekislikning har bir uchidan O_1X_1 o'qqa perpendikular qilib proyeksiya chiziqlari o'tkaziladi. Shu chiziqlarga OX o'qidan $D''C''$ va E'' masofalar o'lchanib olib, O_1X_1 o'qidan perpendikular chiziqlarga o'lchab qo'yiladi. Unda D_0, C_0, E_0 nuqtalar hosil bo'ladi, ular o'zaro tutashtirilsa tekislikning haqiqiy kattaligi hosil bo'ladi.

Umumiy vaziyatdagi ABC tekislikning haqiqiy kattaligini tekislikni almashtirish usulida bajarish ko'rsatilgan (73-rasm). Buning uchun proyeksiya tekisligi ikki marta almashtiriladi

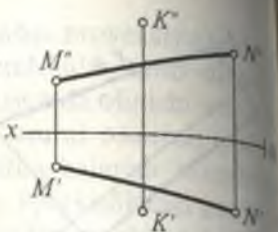


73-rasm.

Topshiriqni bajaring: Gorizontal proyeksiya-



74-rasm.



75-rasm.

lovchi to'rtburchak *ABCD* berilgan, uning haqiqiy kattaligini tekislikni almashtirish usuli bilan toping (74-rasm).

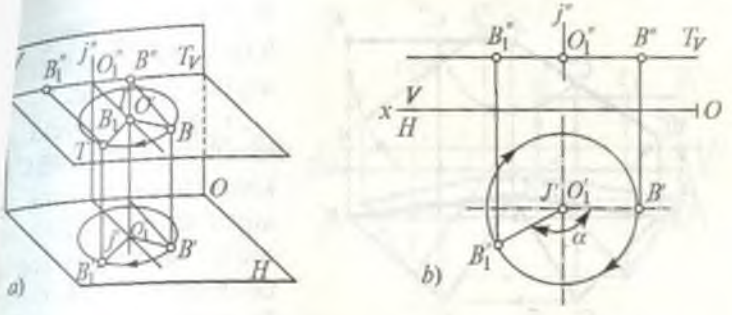
75-rasmda berilgan *K* nuqtadan *NM* to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani tekislikni almashtirish usuli bilan aniqlang.

3.2. Aylantirish usuli

Aylantirish usulining mohiyati shundan iboratki, geometrik elementni proyeksiya tekisliklariga nisbatan bironta proyeksiya tekisligiga perpendikular o'q atrofida tekis aylantiriladi. Proyeksiya tekisliklari o'z holatida qoladi. Epyurda burilgan elementning yangi proyeksiyasi yasaladi, xolos.

76-*a*, rasmda yaqqol tasvirda *B* nuqtani *j* o'qi atrofida aylantirilgani tasvirlangan. Bunda fazodagi *B* nuqta ustidan gorizontal *T* tekislik o'tkaziladi. Unga perpendikular *I* o'qi olinib, *B* nuqta *I* o'qi atrofida aylantiriladi va yangi B_1 nuqta hosil bo'ladi. O_1 nuqta esa aylantirish markazi hisoblanib, O_1B radius bo'yicha *T* tekislikda yoy hosil bo'ladi. *I* o'q o'z navbatida *H* tekislikka perpendikulardir. 76-*b*, rasmda epyurda tasvirlanish ko'rsatilgan.

Aylantirish o'qi i gorizontal tekislikka perpendikularligi sababli O_1 markazda nuqta bo'lib proyeksiyalanadi. O_1 nuqtani *B'* nuqta bilan tutashtirib O_1 nuqta atrofida α burchak ostida B_1 vaziyatga kelguncha aylantiriladi va

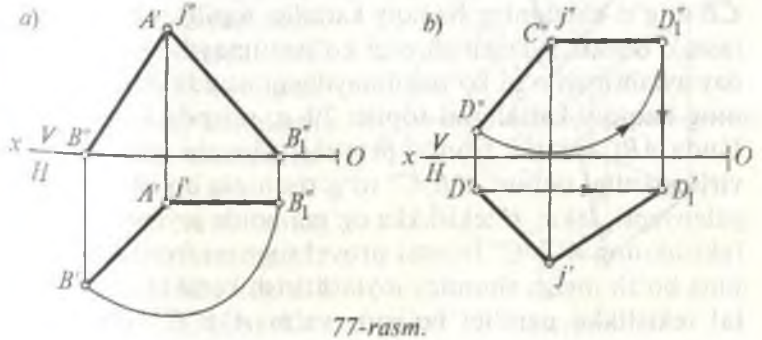


76-rasm.

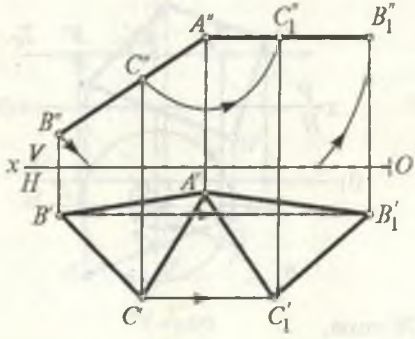
aylana hosil bo'ladi. T tekislik frontal proyeksiyalovchi bo'lganligi sababli undagi barcha nuqtalar T_V iziga proyeksiyalanadi, bunda aylana (trayektoriyasi) to'g'ri chiziq $B''B_1''$ kesmasi hosil bo'ladi. Demak, B nuqtani aylantirish usuli bilan yangi B_1 proyeksiyasi hosil qilindi.

77-*a*, rasmda umumiy vaziyatda joylashgan AB to'g'ri chizig'i berilgan. Uni aylantirish usulida haqiqiy kattaligini topish kerak bo'lsin. Buning uchun to'g'ri chiziqning A uchidan H ga perpendikulyar j o'qi o'tkaziladi va B'' nuqta A'' nuqta atrofida B tekislikka parallel vaziyatga kelguncha aylantiriladi. Bunda gorizontalda yangi A', B_1', frontal tekislikda esa $A_1''B_1''$ to'g'ri chiziq kesmasi hosil bo'ladi. Ma'lumki, AB to'g'ri chiziq V tekislikka parallel bo'lsa, $A''B_1''$ haqiqiy kattalikdagi proyeksiyasi hisoblanadi.

77-*b*, rasmda ham xuddi shunday CD to'g'ri chiziq kesmasi berilgan. Bunda j o'qi frontal teksilikka perpendikulyar



77-rasm.



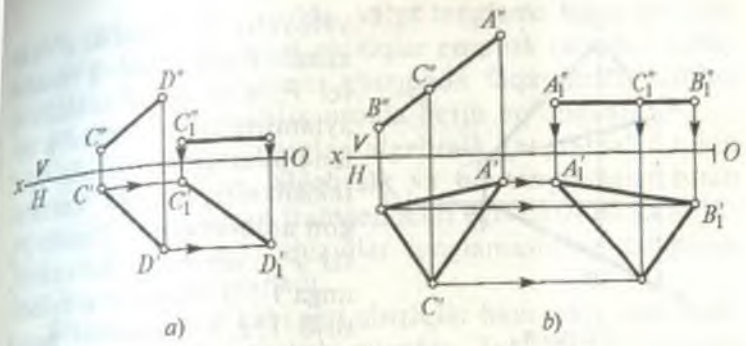
78-rasm.

$V \perp j$ qilib olingan. ham yuqorida ayti usulda bajariladi.

Frontal proyeksiy lovchi vaziyatda ABC kislik berilgan, uni a lantirish usuli bilan h qiqiy kattaligini topi talab qilinsin (78-rasm). Buning uchun AB tekislikning A'' nuqtas dan V tekislikka perpen dikular qilib aylantirib, j o'qi o'tkaziladi va shu o'q atro fida tekislikning B va C nuqtalari gorizontal tekislikk nisbatan A nuqta holatigacha aylantirilib, $B_1''C_1''$ nuqtalar topiladi, umuman olganda ABC tekislik gorizontal tekislikka parallel bo'lguncha aylantiriladi. Keyin $B_1'C_1'$ nuqtalar A' nuqta bilan tutashtiriladi. Hosil bo'lgan $A'B_1'C_1'$ uchburchak tekislikning haqiqiy kattaligi bo'ladi.

3.3. Tekis parallel harakat usuli

Bu aylantirish o'qlarini ko'rsatmasdan almashtirish usuli tekis parallel harakat usuliga kiradi. Bunda CD to'g'ri chiziqning frontal $C''D''$ proyeksiyasini tekislikning biror bo'sh joyiga olib borib, $C_1'D_1'$ vaziyatda joylashtirib, gorizontal tekislikda uning yangi $C_1'D_1'$ proyeksiyasi topilsa CD to'g'ri chiziqning haqiqiy kattaligi topilgan bo'ladi (79-rasm). Bunda aylantirish o'qi ko'rsatilmaydi. Xuddi shunday aylantirish o'qi ko'rsatilmaydigan usulda ABC tekislikning haqiqiy kattaligini topish 79-*a*, rasmda ko'rsatilgan. Unda ABC tekislik frontal proyeksiyalovchi vaziyatda tasvirlanganligi uchun $A''B''C''$ to'g'ri chiziq bo'lib proyeksiyalanyapti, lekin H tekislikka og'ma holda joylashgan. Endi tekislikning $A''B''C''$ frontal proyeksiyasini frontal tekislikning bo'sh joyiga shunday joylashtirish kerakki, u gorizontal tekislikka parallel bo'lsin, ya'ni $A_1''B_1''C_1''$ OX. Keyin

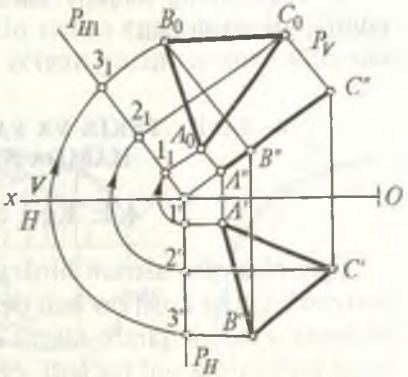


79-rasm.

$AB''C''$ nuqtalardan gorizontal tekislikka perpendikular nurlar o'tkaziladi, $A'B'C'$ nuqtalardan esa OX o'qiga parallel chiziqlar o'tkaziladi, bu chiziqlar frontal nurlar bilan kesishib $A_1'B_1'C_1'$ nuqtalarni hosil qiladi, ular tutashtirilsa ABC tekislikning haqiqiy kattaligi hosil bo'ladi (79-*b*, rasm).

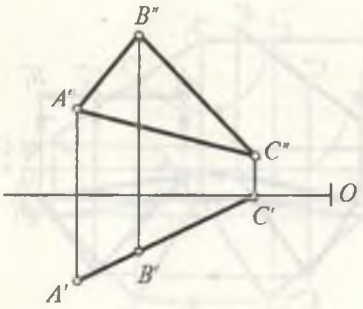
3.4. Tekislikni jipslashtirish usuli

Bu usulni aylantirishning xususiy holi deb qaralsa bo'ladi, chunki geometrik shaklning haqiqiy kattaligini topish uchun shu tekislik izi atrofida gorizontal yoki frontal tekislik bilan jipslashguncha aylantiriladi, shunda geometrik shaklning haqiqiy kattaligi aniqlanadi. Frontal proyeksiyalovchi ABC tekislik berilgan. Uning haqiqiy kattaligini jipslashtirish usulida topish talab qilinsin (80-rasmda shu masalaning bajarilishi ko'rsatilgan).



80-rasm.

Berilgan ABC tekislik ustidan frontal proyeksi-



81-rasm.

yalovchi P tekislik o'tk... ziladi. P tekislikning front... izi P_V atrofida P tekislik... aylantirib frontal tekislik h... lan jipslashtirish usulida AB... tekislikning haqiqiy kattal... gini aniqlamoqda. Bunda P izi P_{H1} vaziyatga keltirilib unga $1'2'3'$ nuqtalarni aylantirib $1_1'2_1'3_1'$ nuqtalar hosil qilinadi va ulardan P_{H1} ga nisbatan chiqarilgan perpendikular chiziqlar $A''B''C''$ nuqtalardan chiqarilgan perpendikular chiziqlar bilan kesishib, $A_1''B_1''C_1''$ nuqtalarni hosil qiladi. Ularni tutashtirilsa haqiqiy kattaligi topiladi.

Topshiriqni bajaring: 81-rasmda berilgan ABC tekislikning haqiqiy kattaligini aylantirish usulida bajaring.

Savollar

1. To'g'ri chiziqning haqiqiy kattaligini aniqlash uchun yangi o'q qanday joylashtiriladi?
2. Tekislikni almashtirish usuli necha xil?
3. Aylantirish usuli qanday bajariladi?
4. Jipslashtirish usuli nimadan iborat?
5. Tekislikning haqiqiy kattaligini topishda necha marta tekislik almashtiriladi?

4-BOB. TEKIS VA FAZOVIY CHIZIQLAR HAMDA SIRTLAR

4.1. Egri chiziqlar

Egri chiziqlar asosan biror nuqtaning harakati (trayektoriyasi) izidan hosil bo'ladi deb qarash mumkin. Egri chiziqlarning turiga qarab, ularni qonuniy va qonunsiz guruhlarga bo'lish ma'qul bo'ladi, chunki qonuniy egri chiziqlar ma'lum bir qonun-qoidaga muvofiq hosil bo'ladi va u

grafik yoki analitik usulda, ya'ni tenglama bilan berilishi mumkin. Qonunsiz egri chiziqlar empirik (amaliy) tabiiy xarakterda bo'lib, ularni chizmada faqat grafik usulda berish mumkin, analitik usulda berib bo'lmaydi.

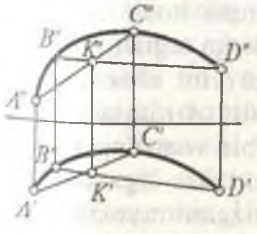
Qonuniy egri chiziqlar algebraik tenglamalar bilan aniqlab bo'ladigan, algebraik va bu tenglamalar bilan aniqlab bo'lmaydigan transsendenit egri chiziqlarga bo'linadi. Algebraik egri chiziqlar tenglamasining darajasiga bog'liq holda aniqlanadi.

Siniq chiziqlar kabi egri chiziqlar ham tekis yoki fazoviy, yopiq va ochiq bo'lishi mumkin. Tekis egri chiziqlarga doira, uning yoyilmasi (evolventa), ellips, parabola, giperbola, turli spirallar va siklik egri chiziqlar kiradi. Fazoviy egri chiziqlarga esa, bitta tekislikda yotmagan, ayrim sirtlarda yotgan egri chiziqlar kiradi. Fazoviy egri chiziqlarning tartibi shu egri chiziqning umumiy vaziyatdagi tekisliklar bilan kesishgan nuqtalarning soniga bogliq holda aniqlanadi.

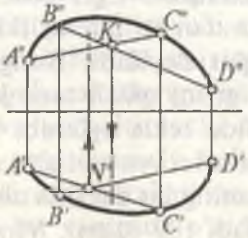
Egri chiziqlarning tekis yoki fazoviy ekanligini aniqlash xuddi siniq chiziqlarni aniqlash kabi bo'ladi (82-rasm).

83-rasmda egri chiziq vatarlari kesishgan nuqtalar to'g'ri proyeksiyalanmayapti, demak, egri chiziq fazoviy egri chiziqdir. Agar egri chiziqning nuqtasi orqali o'tkazilgan ikkita yarim urinma chiziq birga qo'shilib bir to'g'ri chiziqni tashkil qilsa, egri chiziq bu nuqtada ravon bo'ladi, birga qo'shilmasa ravon bo'lmaydi.

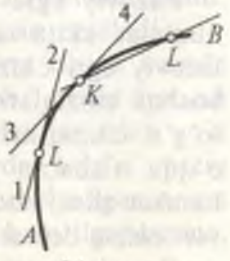
84-rasmda AB egri chiziq ravon egri chiziqdir, chunki uning LK nuqtalari orqali o'tgan yarim urinma chiziqlar



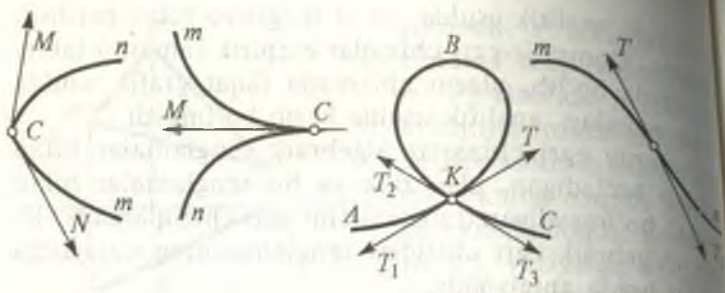
82-rasm.



83-rasm.



84-rasm.



85-rasm. *86-rasm.* *87-rasm.* *88-rasm.*

bir butun chiziqni tashkil qiladi. Ya'ni L_1 va L_2, K_1 va K_2 yarim urinmalar o'zaro tegishlicha qo'shilgan.

85-rasmda *m* egri chiziq *C* nuqta orqali o'tgan. *CM* va *CN* yarim urinma chiziqlar bir-birlari bilan qo'shilmagan, shuning uchun bu chiziq ravon bo'lmaydi. Bu yerda *C* nuqta sinish nuqtasi deyiladi.

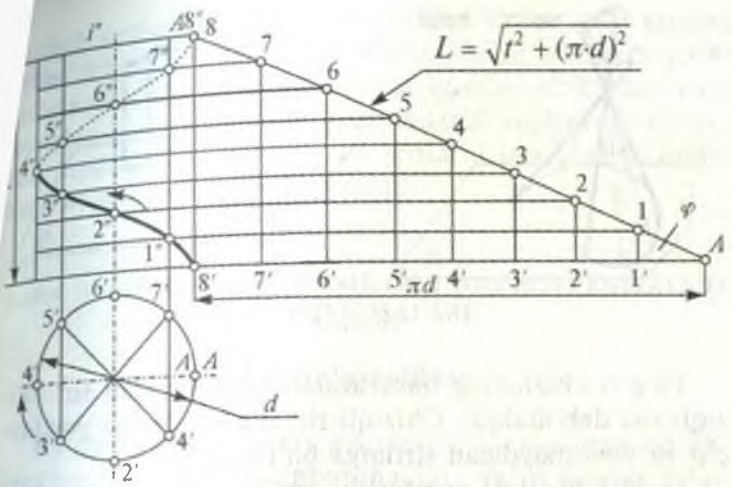
Tekis ravon egri chiziqlarda quyidagi «Maxsus nuqtalar»ni uchratish mumkin:

1) **qaytish nuqtasi.** Egri chiziq bu nuqtada o'zining yo'nalishini o'zgartiradi. Qaytish nuqtasi *C* orqali o'tgan *CM* to'g'ri chiziq egri chiziqning har ikki (*m* va *n*) tarmog'iga ham urinma bo'ladi (86-rasm);

2) **qo'shaloq nuqta** yoki **to'g'ri nuqta**. Bu nuqtada *ABC* egri chiziq o'z-o'zini kesib o'tadi. Tugun nuqta *K* orqali TT_1 va T_2T_3 urinma chiziqlar o'tadi (87-rasm);

3) **qayrilish nuqtasi.** Egri chiziq o'zining TT_1 urinma chizig'ini shu *S* nuqtadan kesib, uning ikkinchi tomoniga o'tadi (88-rasm).

Fazoviy egri chiziqlar. Egri chiziqni hosil qiluvchi nuqtalar ikkita va undan ko'p tekisliklarga tegishli bo'lsa, fazoviy egri chiziqlar deyiladi. Bunga vint chiziqlar va boshqa chiziqlarni misol qilish mumkin. *A* nuqta i (o'q) to'g'ri chiziq atrofida tekis aylanib, bir vaqtning o'zida o'qqa nisbatan parallel yo'nalishda tekis ilgarilanma harakat qilsa, nuqtaning bu davrida chizgan trayektoriyasi *vint chiziq* deb ataladi (89-rasm). Vint chiziq o'ramining yoyilmasi to'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi



89-rasm.

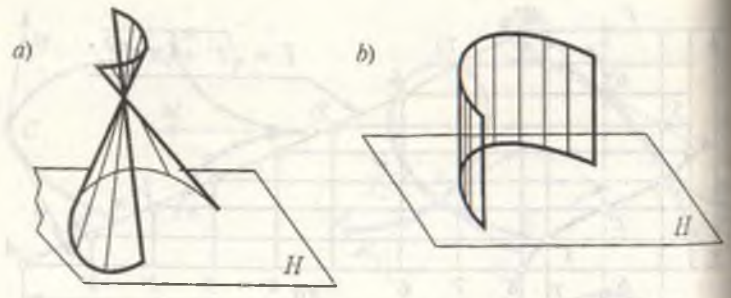
hisoblanib, uning uzunligi $L = \sqrt{t^2 + (\pi \cdot d)^2}$ ga teng. Bunda: t — qadami, d — aylana diametri. Bundan tashqari konus vint chiziqlar mavjud.

4.2. Sirtlar haqida umumiy tushuncha

Chizma geometriya fani nuqtayi nazaridan sirtlarni o'rganish uchun, biror chiziqning fazodagi harakatidan hosil bo'ladi deb qarash mumkin. Bu sirtlar haqidagi tushunchani osonlashtiradi.

Sirt hosil qiluvchi egri chiziq, yasovchi chiziq deb yuritiladi. Yasovchi chiziqning har qanday nuqtasi biror qo'zg'almas siniq yoki egri chiziq bo'ylab harakatlanadi, bu qo'zgalmas chiziq yo'naltiruvchi chiziq deyiladi.

Yasovchi va yo'naltiruvchi chiziqning turiga hamda yasovchi chiziqning harakatlariga qarab, sirtlar har xil bo'ladi. Yasovchi va yo'naltiruvchi chiziqlar tekis yoki fazoviy egri chiziq yoki, xususiy hollarda, to'g'ri chiziq bo'lishi mumkin. Ularning harakati esa turlicha ilgarilanma yoki aylanma, yoki bir vaqtning o'zida ham ilgarilanma, ham aylanma harakatda bo'lishi mumkin.

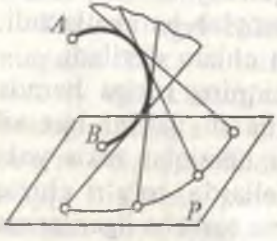


90-rasm.

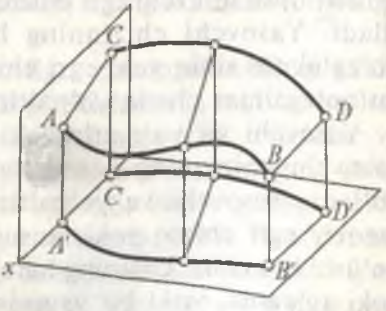
To'g'ri chiziqning harakatidan hosil bo'lgan sirt chiziqli sirt deb ataladi. Chiziqli sirt o'z navbatida yoyiluvchi va yoyilmaydigan sirtlarga bo'linadi.

To'g'ri chiziqli yoyiluvchi sirtlarning cheksiz yaqin yasovchilari bir tekislikda yotadi, ya'ni yasovchilar bir nuqtada kesishadi yoki ular o'zaro parallel bo'ladi (90-*a*, *b*, rasmlar). Yasovchi chiziqlarning kesishgan nuqtalari ma'lum fazoviy egri chiziqni hosil qiladi. Bunday egri chiziq **qaytish qirrasi** deb ataladi. Demak, chiziqli yoyiluvchi sirtlar to'g'ri chiziqning qaytish qirrasiga hamma vaqt urinma harakat qilish natijasida hosil bo'ladi. 91-rasmda qaytish qirrasi bor sirtlar (tors sirtlar) yoyiladigan sirtlar jumlasiga kiradi.

Eng yaqin yondosh yasovchilari tekis element hosil qilmaydigan ya'ni yasovchilar o'zaro uchrashmaydigan to'g'ri



91-rasm.



92-rasm.

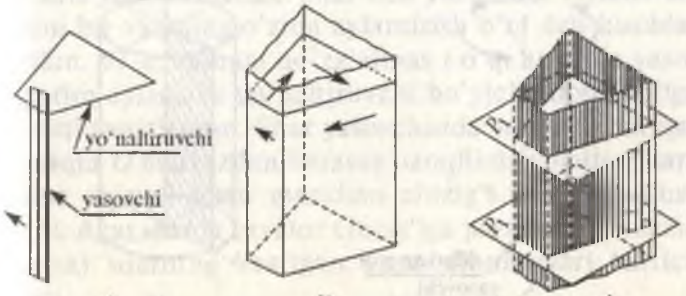
chiziqli sirtlar **chiziqli yoyilmaydigan sirtlar yoki qiyshiq sirtlar** deb ataladi. Ularni tekislik ustida bir tekislikda yoyib bo'lmaydi (92-rasm). Texnikada bunday sirtlardan ko'p foydalanib bo'lmaydi. Ko'proq chiziqli yoyiluvchi sirtlardan foydalaniladi, chunki bu sirtlarni hosil qilish oddiy harakat qonunlariga bo'ysunadi.

5-BOB. GEOMETRIK JISMLARNING PROYEKSIYALARI VA YOYILMALARI

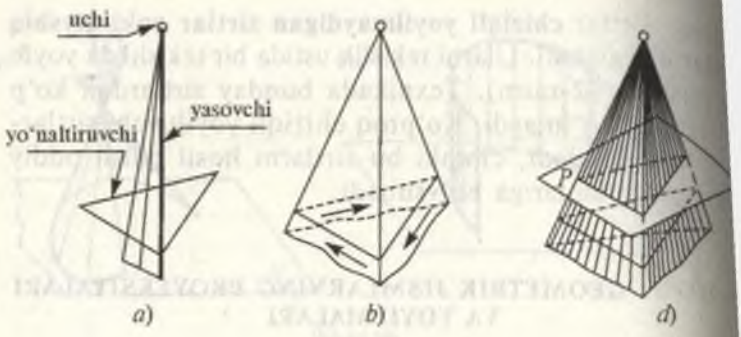
5.1. Ko'pyoqliklar

Ko'pyoqlik — fazoviy geometrik shaklga ega bo'lib, hamma tomondan ko'pburchaklar, ya'ni yoqlar bilan chegaralangan bo'ladi. Hayotda eng ko'p qo'llaniladigan ko'pyoqliklardan piramida va prizmadir. Yon qirralarini yopiq siniq chiziq bo'yicha harakatlanuvchi yasovchi asosida hosil bo'lgan deb qarash mumkin (93-*a*, rasm). Prizma hosil qilishda yo'naltiruvchi bo'yicha yasovchilar o'tkazish bilan prizma hosil bo'ladi (93-*b*, rasm). Tekislik bilan kesilgan tomonlari esa prizma asoslari deyiladi.

Qirraning bir uchini *S* nuqtada qoldirib, ikkinchi uchini yopiq siniq chiziq bo'yicha yo'naltirsa piramida hosil bo'ladi. Endi piramida balandligiga perpendikular holatda



93-rasm.



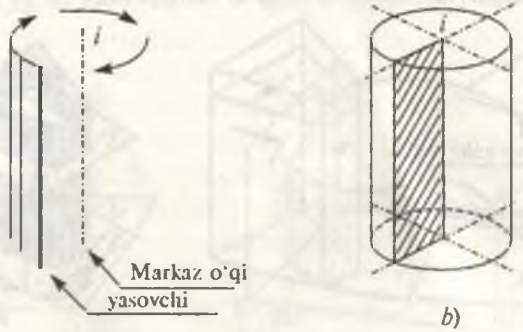
94-rasm.

kesuvchi P tekislik o'tkazilsa, barcha qirralarni kesib o'tib, piramidaning asosini hosil qiladi (94-rasm).

5.2. Aylanish sirtlar

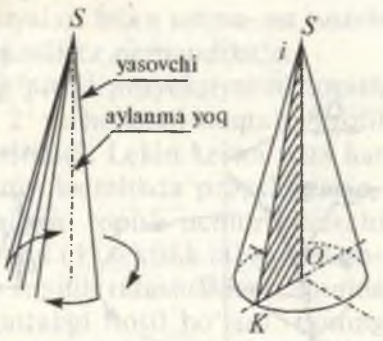
Aylanish sirtlar deb biror chiziqning ikkinchi qo'zg'almas o'q (to'g'ri chiziq) atrofida aylanishidan hosil bo'lishiga aytiladi. Unda ikkita chiziq asosiy rol o'ynaydi, qo'zg'almas o'q va yasovchi chiziqlar, yasovchi chiziqlarning turli-tumanligiga qarab, turlicha sirtlar hosil bo'ladi, masalan, silindrik, konus shaklidagi sirtlar.

Aylanish sirtlarining proyeksiyasi va yoyilmalarini yasash. Silindr — aylanma sirt bo'lib, qo'zg'almas i o'q atrofida unga parallel to'g'ri chiziqni aylana bo'yicha ay-



95-rasm.

lantirishdan silindrik sirt hosil bo'ladi. Yasovchilariga perpendikulyar ikkita parallel tekisliklar bilan kesilsa, to'g'ri doiraviy silindr hosil bo'ladi. 95-rasmda to'g'ri doiraviy silindrni hosil qilish ko'rsatilgan. Bundan tashqari elliptik, og'ma va h.k. silindrik sirtlar mavjud.



a) *b)*

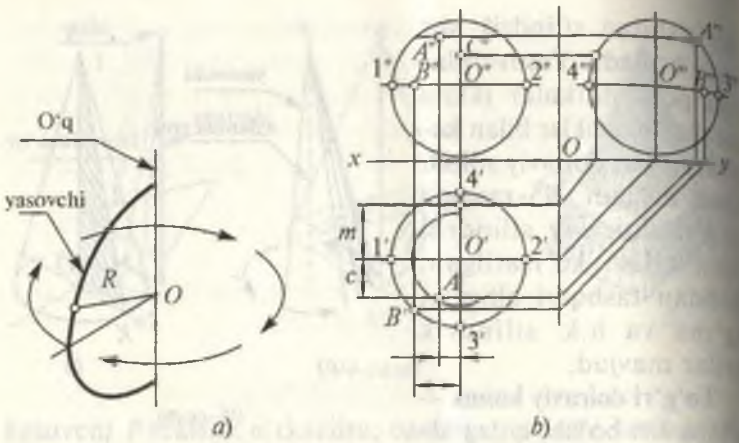
96-rasm.

To'g'ri doiraviy konus — aylana sirt bo'lib, qo'zg'almas i o'q va unda yotgan S nuqtadan o'tgan yasovchining aylana bo'yicha aylanishidan hosil bo'lgan sirtga aytiladi. Konus sirtini uning o'qiga perpendikulyar qilib qirqilsa, to'g'ri doiraviy konus hosil bo'ladi (96-*a*, rasmlar).

Konus uchi deb atalmish S nuqtada barcha konus yasovchilari kesishadi. S nuqtadan asos markazi O nuqtagacha bo'lgan masofa konus balandligi deyiladi. To'g'ri konusni, to'g'ri burchakli uchburchakni bitta kateti atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan deb ham hisoblash mumkin (96-*b*, rasm). To'g'ri doiraviy konusdan tashqari elliptik konuslar ham mavjud.

Shar (sfera). Agar yarim aylana yasovchi o'z o'qi, ya'ni diametri atrofida aylantirilsa, sferik sirt hosil bo'ladi, buni shar sirti yoki shunchaki shar deb yuritiladi. Aylana diametrini bir vaqtning o'zida aylantirish o'qi deb hisoblash mumkin. 97-*a*, rasmda qo'zg'almas i o'qi atrofida yasovchi yarim aylana va yo'naltiruvchi bo'yicha hosil bo'lgan shar sirti tasvirlangan. Shar yasovchisida yotuvchi har qanday nuqta O markazdan baravar uzoqlikda yotadi. Sharda ekvator chizig'i bilan meridian chizig'i bir xil radiusda bo'ladi. Agar sharda ekvator chizig'iga parallellar o'tkazilsa (yasalsa) ularning kesilgan yuza diametrlari turlicha bo'ladi.

Shar sirtida yotuvchi A, B, C nuqtalarni ortogonal proyeksiyasida yasash uchun frontal yoki profil nuqtalar



97-rasm.

proyeksiyalari ustidan gorizontal tekislik o'tkaziladi, hosil bo'lgan kesim yuzasi aylana radiuslari bo'yicha sharning gorizontal proyeksiyasida aylanalar chiziladi va shu aylanalarga nuqtalar proyeksiyalansa, nuqtalarning gorizontal proyeksiyasi hosil bo'ladi (97-*b*, rasm).

5.3. Ko'pyoqliklarni proyeksiyalovchi tekisliklar bilan kesish va yoyilmasini yasash

Prizmani proyeksiyalovchi tekislik bilan kesish. Asosi to'rtburchakdan iborat bo'lgan to'g'ri prizmaning asosi gorizontal tekislikda yotibdi. Uni izlari bilan berilgan frontal proyeksiyalovchi *P* tekislik bilan kesish 98-rasmda ko'rsatilgan.

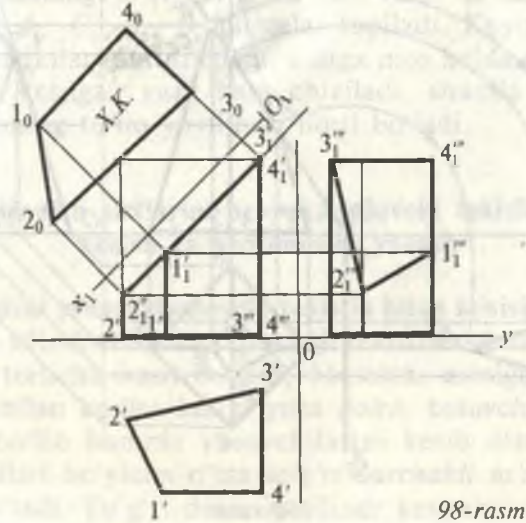
Shu prizmaning tekislik bilan kesishishini ortogonal proyeksiyalarda bajarish talab etilsa, uning kesib olingan yuqori qismi ingichka chiziqlar bilan kesilgan prizma chiziladi. Uning pastki tomoni yo'g'on chiziq bilan chiziladi.

Kesuvchi *P* tekislik frontal tekislikka perpendikular bo'lgani sabab, undagi kesim yuza ham frontal teksilikka to'g'ri chiziq bo'lib proyeksiyalandi. Undagi eng chetki nuqtalar kesim yuzaning haqiqiy uzunligi hisoblanadi. Prizmaning gorizontal proyeksiyasida hosil bo'lgan kesim

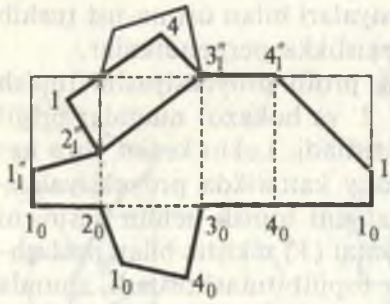
yuza uning qirralari proyeksiyalari bilan ustma-ust tushib qoladi, chunki qirralar u tekislikka perpendikulyar.

Prizma kesim yuzasining profil proyeksiyasini topish uchun frontal tekislikda (1′ 2′ va hokazo) nuqtalar profil qirralarda topiladi va tutashtiriladi. Lekin kesim yuza har uchala tekislikda ham haqiqiy kattalikda proyeksiyalanmaydi. Uning haqiqiy kattaligini topish uchun kesuvchi P tekislik, P_v izi bo'yicha frontal (V) tekislik bilan jipslashtiriladi va (1_0 2_0...) nuqtalar topilib tutashtiriladi, shunda kesim yuzasining haqiqiy kattaligi hosil bo'ladi. Buning uchun frontal proyeksiyada to'g'ri chiziq holatidagi kesim yuzaga parallel qilib, ya'ni 0_1 X_1 o'qi chiziladi, unga perpendikulyar qilib har bir nuqtalardan chiziqlar o'tkaziladi. Unga OX o'qidan (1′, 2′, va hokazo) nuqtalargacha bo'lgan masofa o'lchab O_1 X_1 o'qidan yuqoriga qo'yiladi va ular 1_0, 2_0, va h.k.) tutashtiriladi, natijada kesim yuzaning haqiqiy kattaligi hosil bo'ladi (98-rasm).

Kesilgan prizmaning yoyilmasini yasash uchun gorizontal to'g'ri chiziqqa gorizontal proyeksiyadagi 1′ 2′ va h.k. nuqtalar orasidagi masofalar o'lchab qo'yiladi. Shu nuqtalardan frontal proyeksiyadagi qirralarning ($3''3_1''$;$4''4_1''$ va h.k.) balandligi o'lchab qo'yiladi, unda prizmaning



98-rasm.

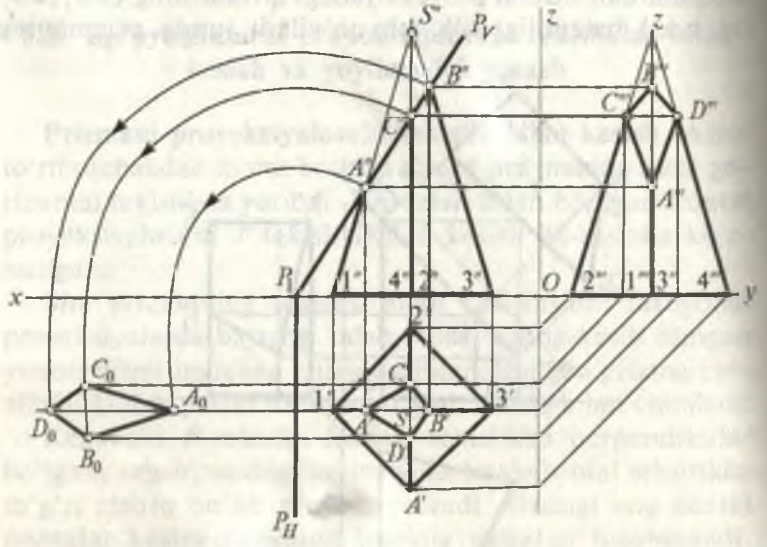


99-rasm.

to'liq yoyilmasi hosil bo'ladi, endi kesilgan qirralar haqiqiy o'lchamini ($1''1_1''$; $2''2_1''$ va h.k.) frontal proyeksiyadan olib har bir mos qirralarga qo'yib chiqilsa va tutashtirilsa, kesilgan prizmaning yoyilmasi hosil bo'ladi (99-rasm).

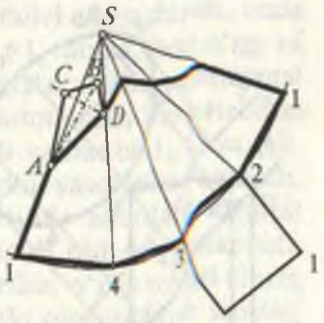
Muntazam piramidani proyeksiyalovchi tekislik bilan kesish. Muntazam piramidani proyeksiyalovchi P tekislik bilan kesish hamda kesim yuzasi va uning haqiqiy kattaligini topish talab qilinsin. Unda asosi kvadratdan iborat gorizontal tekislik ustida turgan piramida va uni frontal proyeksiyalovchi P tekislik izlari (P_v, P_H) bilan berilgan (100-rasm).

Kesuvchi tekislikning P_v izi, piramidaning qirralarini A'', B'', C'' va D'' nuqtalarda kesib o'tayapti, ularning gorizontal (A', B', C', D') va profil A''', B''', C''', D'''



100-rasm.

proyeksiyalari topilib tutashtirilsa, kesilgan yuzaning mos proyeksiyalari hosil bo'ladi.



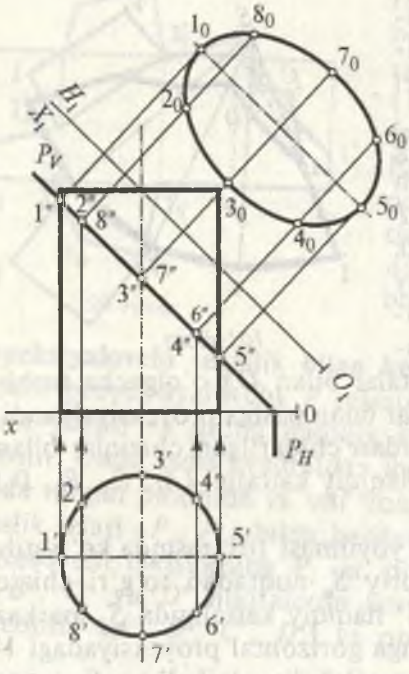
101-rasm.

Endi kesim yuzaning haqiqiy kattaligini yasash uchun prizmadagidek P tekislikni gorizontal tekislik bilan jipslashtirib haqiqiy kattaligi hosil qilinadi, buning uchun P_v izini aylantirib, A'', B'', C'', D'' nuqtalar bilan OX o'qigacha tushiriladi, ular vertikal chiziqlar bilan pastga proyeksiyalanadi, mos A' B' C' D' nuqtalardan chiqarilgan chiziqlar bilan kesishib kesim yuzaning haqiqiy kattaligi (A_0, C_0, B_0, D_0) hosil bo'ladi.

Kesilgan piramidaning yoyilmasi 101-rasmda ko'rsatilganidek bajariladi. Ixtiyoriy S_0 nuqtadan to'g'ri chiziq o'tkazilib bitta qirra S'' 1'' haqiqiy kattaligida S_0 markaz bo'yicha yoy chiziladi, unga gorizontal proyeksiyadagi 1' 2', 2' 3' va h.k. masofalar o'lchab qo'yiladi va S_0 nuqta bilan tutashtiriladi. Ularga kesilgan piramida qirralarining haqiqiy kattaligi 1'' A'', 3'' B'', 2''' C''' va 4''' D''' lar o'lchab qo'yilib, A_0, C_0, B_0, D_0 nuqtalar topiladi. Keyin A_0, B_0, C_0, D_0 nuqtalar tutashtiriladi, ularga mos holda asos ham chizilib, kesilgan yuza ham chiziladi, shunda kesilgan piramidaning to'liq yoyilmasi hosil bo'ladi.

5.4. Aylanish sirtlarini proyeksiyalovchi tekislik bilan kesish va yoyilmasini yasash

Silindrni proyeksiyalovchi tekislik bilan kesish. To'g'ri doiraviy silindrni turli vaziyatdagi tekisliklar bilan kesilsa yuzalar turlicha hosil bo'ladi, Masalan: asosiga parallel tekislik bilan kesilsa kesim yuza *doira*, kesuvchi tekislik og'ma bo'lib hamma yasovchilarini kesib o'tsa *ellips*, yasovchilari bo'yicha o'tsa *to'g'ri burchak* yoki *to'rtburchak* hosil bo'ladi. To'g'ri doiraviy silindr kesimini ortogonal



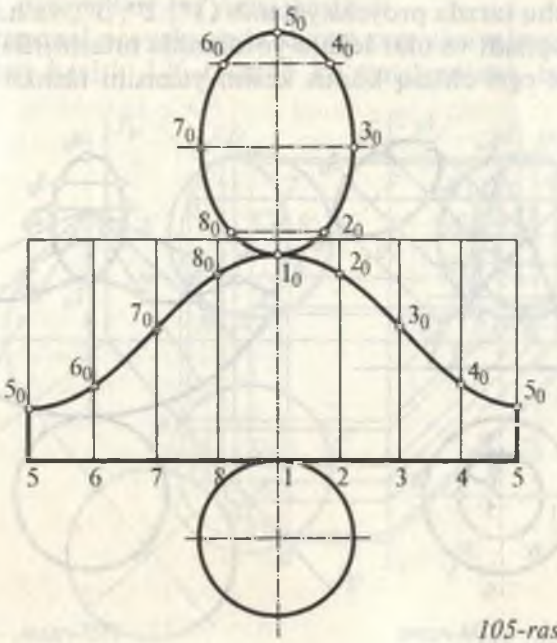
104-rasm.

proyeksiyalarda bajarish 102-rasmda ko'rsatilgan. Unda silindr o'qi gorizontal tekislikka perpendikular, ya'ni asosi shu tekislik ustida yotadi va aylana ko'rinishida proyeksiyalanadi, qolgan proyeksiyalari to'g'ri to'rtburchak bo'lib proyeksiyalanadi. Kesuvchi P tekislik frontal proyeksiyalovchi bo'lganligi uchun P_v izida to'g'ri chiziq holatda proyeksiyalanadi, silindrning asosi teng sakkizda bulinadi, P tekislik silindr yasovchilari bilan kesishgan nuqtalar, ya'ni kesim yuzi ham to'g'ri chiziq holatidadir. Uning gorizontal proyeksiyasi silindr asosi bo'yicha aylana ko'rinishida, profil proyeksiyasi esa ellips ko'rinishida namoyon bo'ladi. Har uchala proyeksiyada ham kesim yuza haqiqiy kattalikda emas, chunki kesuvchi tekislik uchala proyeksiya tekisligida birontasiga ham parallel emas. Endi kesim yuzasining haqiqiy kattaligini topish uchun P_v tekislikka, ya'ni kesim yuzining frontal proyeksiyasiga parallel qilib H_1 tekislik o'tkaziladi, unda $O_1X_1 // P_V$. Silindr kesim yuzasidagi 1″, 2″, ... va h.k. nuqtalardan O_1X_1 o'qiga perpendikular chiqariladi va OX o'qidan 1′, 2′, va h.k. nuqtalargacha bo'lgan masofani OX o'qidan yuqoriga o'lchab qo'yilsa 1_0, 2_0, va h.k. nuqtalar hosil bo'ladi ular lekalo yordamida tutashtiriladi. Bunda kesim yuzaning haqiqiy kattaligi ellips bo'lib shakllanadi.

Kesilgan silindrning yoyilmasini yasash uchun qog'ozning bo'sh joyiga gorizontal ixtiyoriy chiziq chiziladi. Unga

silindr balandligi o'lchamida parallel chiziq chiziladi, unda biror nuqta tanlanib, masalan, 1_0 nuqta undan o'ng va chap tomonlarga navbatdagi nuqtalar silindrning gorizontal proyeksiyasidan haqiqiy o'lchamni olib, shu gorizontal chiziq bo'yicha qo'yib chiqiladi va har bir 1_0, 2_0, va h.k. nuqtalardan vertikal chiziqlar, ya'ni yasovchilar o'tkaziladi, shu yasovchilarga kesilgan silindr nuqtalarini frontal proyeksiyasidan haqiqiy o'lchamni olib qo'yib chiqiladi. Ular lekalo yordamida tutashtirilsa, o'ziga xos egri chiziq hosil bo'ladi. Yoyilmaning pastki qismiga silindr asosini, yuqori qismiga esa haqiqiy kattalikdagi kesim yuzaning chizmasi chiziladi, shunday qilib kesilgan silindrning to'liq yoyilmasi hosil bo'ldi (103-rasm).

Konusni proyeksiyalovchi tekislik bilan kesish. To'g'ri doiraviy konusni tekislik bilan kesganda konus o'qiga nisbatan kesuvchi tekislikning vaziyatiga bog'liq holda, agar kesuvchi tekislik konus asosiga parallel bo'lsa, *doira*, og'ma bo'lib barcha yasovchilarini kesib o'tsa, *ellips*, konus uchi-



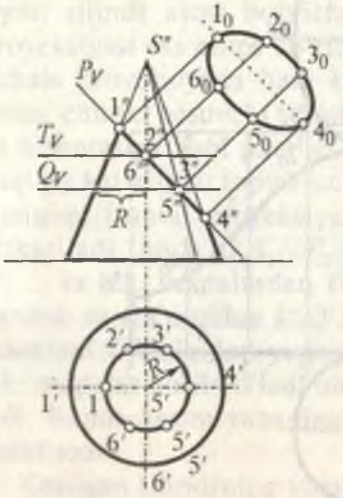
105-rasm.

dan o'tib yasovchilari bo'yicha o'tsa, *uchburchak*, konus o'qiga parallel bo'lsa, *giperbola*, konus yasovchilaridan bittasiga parallel bo'lsa, *parabola* hosil bo'ladi. Shunday qilib, kesuvchi tekislik vaziyatiga bog'liq holda konus kesimda turlicha ikkinchi tartibli egri chiziqlar paydo bo'ladi.

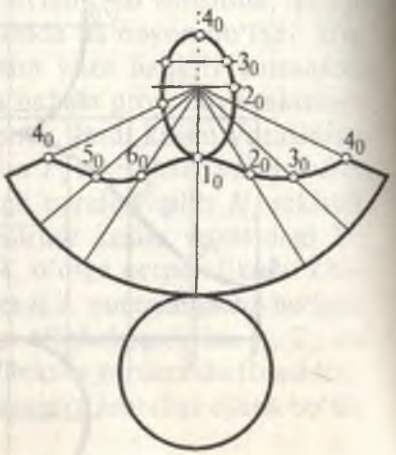
To'g'ri doiraviy konusni proyeksiyalovchi tekislik bilan kesish ortogonal proyeksiyada 104-rasmdagidek bajariladi. Unda konus asosi gorizontal tekislikka parallel, aylana o'qi esa perpendikulyar joylashgan, frontal va profil proyeksiyalari teng yonli uchburchaklardan iborat bo'ladi.

Kesuvchi P tekislik frontal tekislikka perpendikulyar, ya'ni proyeksiyalovchi vaziyatda. Shu bilan birga barcha yasovchilarini kesib o'tadi, demak, kesim chizig'i ellipsni hosil qiladi.

Kesim yuzani hosil qilish uchun proyeksiyalovchi P tekislik bilan konus yasovchilarining kesishgan nuqtalari (1″, 2″, 3″ va h.k.) topiladi. Shu yasovchilarning gorizontal proyeksiyalari chiziladi va nuqtalar proyeksiyalanib 1′, 2′, 3′ va h.k. nuqtalar topiladi. Profil proyeksiyasi ham xuddi shu tarzda proyeksiyalanib (1‴, 2‴, 3‴, va h.k.) nuqtalar topiladi va ular lekalo yordamida tutashtiriladi, hosil bo'lgan egri chiziq konus kesim yuzasini tashkil qiladi.



104-rasm.



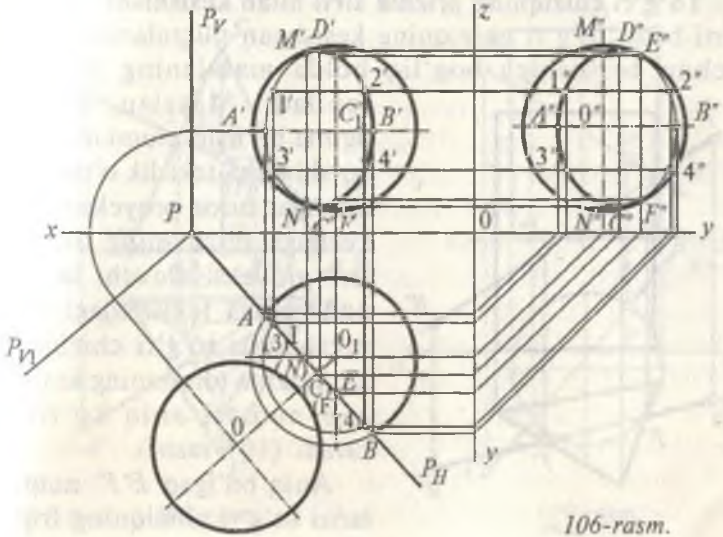
105-rasm.

Lekin kesim yuza haqiqiy kattalikda emas, chunki kesuvchi tekislik proyeksiya (H va W) tekisliklariga og'ma holatda. Uning haqiqiy kattaligini topish bundan oldingi mavzulardagidek topiladi. Kesilgan konus izometriyasini yasash 104-rasmda ko'rsatilgan.

105-rasmda kesilgan konus yoyilmasi ko'rsatilgan, bu yerda ixtiyoriy S_0 nuqta olinib konus yasovchisining haqiqiy kattaligida yarim aylana chiziladi, bitta yasovchidan boshlab gorizontaldagi aylana uzunligi, unga esa kesilgan konus yasovchilarining haqiqiy kattaliklari o'lchab qo'yiladi va tutashtiriladi. Pastiga konus asosi, undan keyin kesim yuza chiziladi. Shunday qilib kesilgan konusning to'liq yoyilmasi hosil bo'ladi.

Sharni proyeksiyalovchi tekislik bilan kesish. Sharning boshqa jismlardan farqi shundaki, uning uchala proyeksiyasi ham aylana bo'lib proyeksiyalanadi. Sharning yana bir xususiyati shundan iboratki, uni har qanday tekislik bilan qirqqanda ham kesim yuza doira ko'rinishida bo'ladi. Kesuvchi tekislik sharning vertikal o'qi bo'yiga o'tsa uning meridianlari bo'yicha, agar vertikal o'qiga perpendikulyar bo'lsa, parallellari bo'yicha kesiladi.

Ortogonal proyeksiyada sharni proyeksiyalovchi tekislik bilan kesish 106-rasmda ko'rsatilganidek bajariladi.



106-rasm.

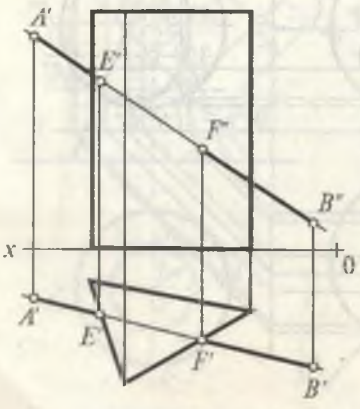
Unda kesuvchi P tekislik gorizontal proyeksiyalovchi bo'lib P_v, P_H izlari balan berilgan. Shar bilan kesishgan nuqtalar P_H izida 1′; 2′; 3′; va h.k. nuqtalar topiladi. Bu nuqtalar frontal va profil proyeksiya tekisliklarda topiladi. Bunda ham kesim yuzaning haqiqiy kattaligini topish uchun P tekislikni P_H izi bo'yicha aylantirib gorizontal tekislik bilan jipslashtiriladi. O_0 nuqta topiladi va AO_0 radius bo'yicha aylana chiziladi. Ana shu doira kesim yuzining haqiqiy kattaligi hisoblanadi.

Savollar

1. Ko'pyoqlarning tekislik bilan kesishgan chizig'i qanday ko'rinishida bo'ladi?
2. Aylanish sirtlari tekislik bilan kesishganda qanday chiziqlar hosil bo'ladi?
3. Aylanish sirtlar yoyilmasi nimaga asoslanib bajariladi?
4. Sharning qanday xususiyatlari bor?

5.5. Geometrik jismlar bilan to'g'ri chiziqning kesishuvi

To'g'ri chiziqning prizma sirti bilan kesishishi. Prizma sirti bilan to'g'ri chiziqning kesishgan nuqtalarini topish uchun berilishiga bog'liq holda masalaning yechimi topiladi. Masalan, prizma og'ma bo'lishi mumkin, unda qo'shimcha tekislik o'tkaziladi. Agar biror proyeksiya tekisligiga prizmaning tomonlari proyeksiyalovchi bo'lsa, unda o'sha tekislikdagi proyeksiyasida to'g'ri chiziq bilan prizma tomonning kesishgan nuqtasi aniq ko'rinib turadi (107-rasm).



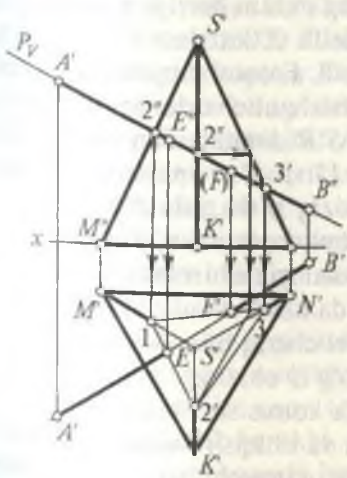
107-rasm.

Aniq bo'lgan $E'F'$ nuqtalarni to'g'ri chiziqning fron-

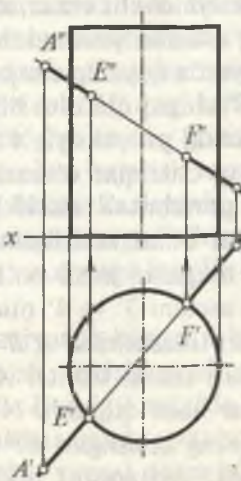
tal $A''B''$ proyeksiyasiga olib chiqilsa, kesishgan nuqtalarning frontal E'', F'' proyeksiyalari hosil bo'ladi. Bunda ikkinchi nuqtani kirish va chiqish nuqtalari deb hisoblasa bo'ladi. Masalaning yechimi bundan oldingi o'tilgan mavzularda, ya'ni geometrik sirtlarni tekislik bilan, yoki to'g'ri chiziqning tekislik bilan kesishgan nuqtalarini topishga o'xshab ketadi.

Piramida sirtining to'g'ri chiziq bilan kesishishi. To'g'ri chiziqning piramida bilan kesishgan nuqtasini topish bir necha usullarda, masalan, berilgan to'g'ri chiziq ustidan yordamchi proyeksiyalovchi tekislik o'tkazish, to'g'ri chiziq ustidan yasovchi o'tkazish usullarida topish mumkin. Yordamchi tekislik o'tkazish usuli 108-rasmda ko'rsatilgan. Unda $A''B''$ chiziq ustidan frontal proyeksiyalovchi P_v izi bilan tekislik o'tkazilgan. P tekislik bilan kesishgan chiziqning gorizontal proyeksiyasi topiladi. Bu chiziq $A'B'$ chiziq bilan $E'F'$ nuqtalarda kecishadi, ular frontal proyeksiyada ham topiladi.

Silindr sirti bilan to'g'ri chiziqning kesishishi. Silindr sirti bilan to'g'ri chiziqning kesishgan nuqtalarini topish, xuddi prizma sirti bilan to'g'ri chiziqning kesishgan nuqtalarini topishga aynan o'xshab ketadi. Chunki prizma



108-rasm.



109-rasm.

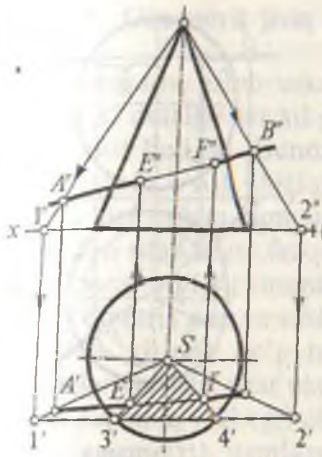
silindrning xususiy holidir, asosi gorizontal proyeksiya tekisligida yotuvchi to'g'ri doiraviy silindr va umumiy vaziyatidagi AB to'g'ri chiziq kesmasi berilgan. Ularning kesishgan nuqtasini topish sharti qo'yilgan (109-rasm). Ma'lumki, bunday paytda silindr yon sirti gorizontal proyeksiya tekisligida aylana ko'rinishida proyeksiyalanadi. Shuning uchun to'g'ri chiziqning gorizontal $A'B'$ proyeksiyasi bilan silindr gorizontal proyeksiyasi o'zaro kesishgan. E' va F' nuqtalari aniq ko'rinib turibdi, ularni to'g'ri chiziqning frontal $A''B''$ proyeksiyasiga proyeksiyalab, $E''F''$ nuqtalar topiladi. Demak, to'g'ri chiziqning silindr sirti bilan kesishgan EF nuqtalar topiladi. Ulardan biri kirish, ikkinchisi chiqish nuqtalari deyiladi va bunda ko'rinar-ko'rinmas nuqtalar aniqlanadi.

To'g'ri doiraviy konus sirtining to'g'ri chiziq bilan kesishishi. Konus sirtining to'g'ri chiziq bilan kesishgan nuqtalarini topish konus sirtining proyeksiya tekisliklariga nisbatan vaziyatiga bog'liq.

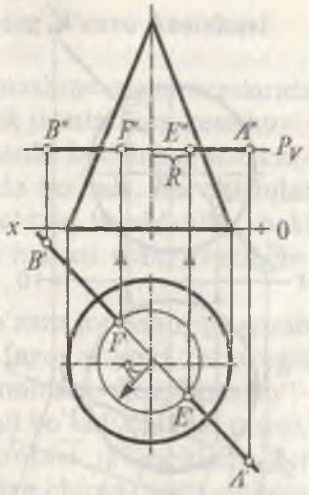
Asosi gorizontal tekislikda bo'lgan to'g'ri doiraviy konus va umumiy vaziyatidagi AB to'g'ri chiziq berilgan. Ularning kesishgan nuqtalarini topish talab qilinsin. Konus sirti proyeksiya tekisliklariga nisbatan silindr sirtiga o'xshab proyeksiyalovchi emas, shuning uchun berilgan AB to'g'ri chiziq ustidan yordamchi tekislik o'tkaziladi (110-rasm).

Epyurda quyidagicha bajariladi. Frontal proyeksiyada $A''S''$ va $S''B''$ chiziq OX o'qi bilan kesishguncha davom ettiriladi. Gorizontal proyeksiya $A'S'$ va $S'B'$ nuqtalardan ham xuddi shunday chiziqlar o'tkaziladi. $1''$ va $2''$ nuqtalardan pastga qarab gorizontal tekislikka chiziq o'tkazilib $A'S'$ va $S'B'$ chiziqlar bilan kesishguncha davom ettirilsa, kesishgan $1'$ va $2'$ nuqtalar hosil bo'ladi, ular tutashtiriladi, bu chiziq konus asosini $3'$ va $4'$ nuqtalarda kesib o'tadi. Shu nuqtalar S' bilan tutashtirilsa $A'B'$ to'g'ri chiziq bilan kesishish $E'F'$ nuqtalari ularni frontal $A''S''$ to'g'ri chiziqqa proyeksiyalab, $E''F''$ lar hosil qilinadi. Natijada konus sirti bilan AB to'g'ri chiziqning kesishgan EF kirish va chiqish nuqtalari topildi.

Asosi gorizontal tekislikda yotuvchi to'g'ri doiraviy konus va gorizontal vaziyatdagi AB to'g'ri chiziq beril-



110-rasm.

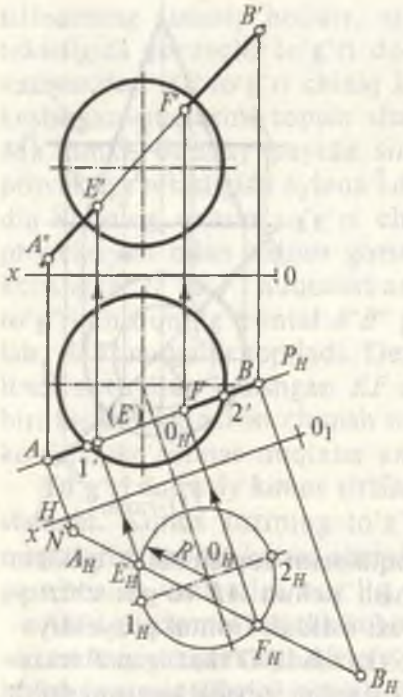


111-rasm.

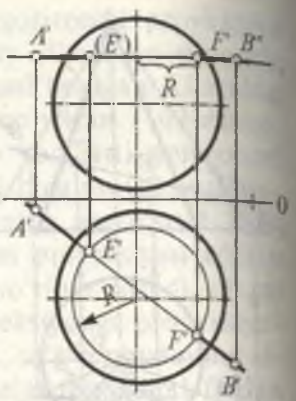
gan, ularning kesishgan nuqtalarini topish talab qilinsin (111-rasm). Masalani yechish uchun AB to'g'ri chiziqning frontal $A''B'$ proyeksiyasi ustidan frontal proyeksiyalovchi P tekislikning P_v izi o'tkaziladi. O'tkazilgan P tekislik konus asosiga parallel bo'lganligi sababli konusni doira shaklda kesib o'tadi, ya'ni gorizontal proyeksiyada konus markazidan R_1 radius bo'yicha aylana chiziladi. Bu aylana $A'B'$ to'g'ri chizig'ini $E'F'$ nuqtalardan kesib o'tadi, ularni frontal tekisligida topilsa $E''F''$ nuqtalar hosil bo'ladi. Shu tariqa konus sirti bilan AB to'g'ri chiziqning kirish va chiqish nuqtalari topiladi. Agar to'g'ri chiziq gorizontal proyeksiyalovchi bo'lsa, ikki xil usulda bajarish mumkin.

Shar sirtining to'g'ri chiziq bilan kesishishi. Shar sirtining to'g'ri chiziq bilan kesishishi to'g'ri chiziqning proyeksiyasi tekisliklariga nisbatan, vaziyatga bog'liq holda turlicha bo'lishi mumkin.

Agar to'g'ri chiziq umumiy vaziyatda berilgan bo'lsa, shar bilan kesishgan nuqtasini topish, tekislikni almashtirish usulida bajarilsa oson topiladi. Bunday holatda shuni esdan chiqarmaslik kerakki, sharni har qanday vaziyatdagi tekislik bilan kesishganda ham kesim yuzasi doira bo'ladi. Shuni hisobga olib to'g'ri chiziqning gorizontal $A'B'$



112-rasm.



113-rasm.

proyeksiyasidan gorizontal proyeksiyalovchi P P_H tekislik o'tkaziladi va unga parallel tekislikka proyeksiyalanadi, ya'ni tekislikni almashtirish usulida, O_1X_1 o'qi $A'B'$ ga parallel qilib o'tkaziladi. OX o'qidan A'' va B'' masofalar O_1X_1 o'qidan o'lchab A_1'' va B_1'' nuqtalar topiladi. Ular tutashtirilsa, 1'0 masofaga teng R radius bo'yicha chizilgan aylana bilan kesishib E'', F'', nuqtalarni hosil qiladi, ularni teskariga proyeksiyalab E'' va F'' nuqtalarda topiladi (112-rasm). Ana shu nuqtalar shar va AB to'g'ri chizig'ining izlanayotgan kirish va chiqish nuqtalari hisoblanadi. Agar shar sirti bilan kesishuvchi to'g'ri chiziq gorizontal vaziyatda bo'lsa, unda to'g'ri chiziqning $A''B''$ ustidan frontal proyeksiyalovchi P tekislik o'tkaziladi.

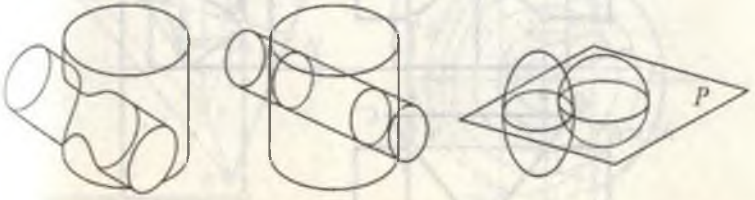
Natijada sharning tekislik bilan kesishgan chizig'i R radiusli aylana hosil bo'ladi. Sharning gorizontal proyeksiyasida R radius bilan aylana chizilsa $A'B'$ bilan $E''F''$ nuqtalarda kesishadi, ularni frontal tekislikka proyeksiyalab $E''F''$ nuqtalar topiladi (113-rasm). Agar to'g'ri chiziq frontal proyeksiyalovchi bo'lsa ham xuddi shunday bajariladi.

5.6. Geometrik jism sirtlarining o'zaro kesishuvi

Texnikada, asbob-uskunalar, mashina mexanizmlarida aksariyat detallar har xil geometrik jismlarning kesishuvidan hosil bo'lgan. Bunday jismlarda kesishgan sirt chiziqlari yoki o'tish chiziqlari paydo bo'ladi. Bu chiziqlar ikkala sirt uchun ham umumiy chiziq hisoblanib, shakl jihatidan ular tekis, fazoviy yoki har xil siniq chiziqlardan iborat bo'lishi mumkin.

Geometrik jism va sirtlarning o'zaro joylashuviga qarab kesishuv chizig'i ko'p hollarda fazoviy yoki tekis egri chiziqlar bo'lishi, agar ular bir tomonlama kesishgan bo'lsa, yopiq siniq yoki egri chiziq hosil bo'ladi (114-*a*, rasm). Agar geometrik jismlardan birontasi ikkinchisini bir tomonidan kirib, ikkinchi tomonidan chiqsa, unda alohida yopiq siniq yoki egri chiziq hosil bo'ladi (114-*b*, rasm)

Geometrik jismlarning o'zaro kesishish chizig'ini topish uchun avvalambor yordamchi proyeksiyalovchi tekisliklar o'tkaziladi (114-*d*, rasm). Birinchi navbatda har ikkala sirtga tegishli xarakterli, ya'ni eng chetki, eng yuqorigi, eng pastki va hokazo nuqtalar aniqlanadi. Undan keyin shu nuqtalar orasida yana yordamchi proyeksiyalovchi tekisliklar o'tkazilsa, bu tekislik birinchi jismni biror chiziq orqali kesadi; ikkinchi jismni ham o'z navbatida ikkinchi chiziq orqali kesadi, ana shu ikki jismdagi chiziqlarning kesishgan nuqtasi ikki jismga ham tegishli bo'lib, ikki jism sirtlarining kesishgan nuqtalaridan biri bo'ladi. Ikki sirt kesishish nuqtalarining qolganlari ham shu tarzda topiladi va tutashtiriladi.



116-rasm.

Ikkita ko'pyoqlikning o'zaro kesishuv chizig'ini yasash. Ikkita ko'pyoqlikning o'zaro kesishuv chizig'ini topish quyidagi ko'rinishlarda bo'lishi mumkin:

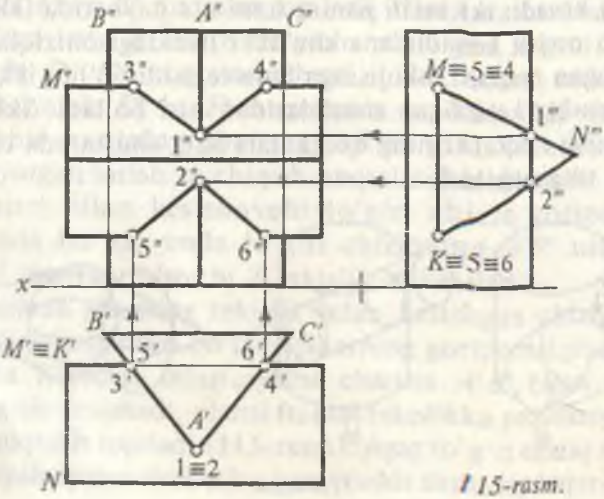
1. Ko'pyoqlikning qirrasi ikkinchi ko'pyoqlikning tomoni bilan kesishuvi, bu to'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishgan nuqtasini topish demakdir.

2. Ikkita ko'pyoqlikning qirralari kesishgan nuqta, bu ikki to'g'ri chiziqning kesishgan nuqtalari demakdir.

3. Ikki ko'pyoqlikning tomonlari kesishganda to'g'ri chiziq hosil bo'ladi, bu ikki tekislikning o'zaro kesishgan chizig'i demakdir.

Ikkita prizmaning kesishgan chizig'ini yasash. Berilgan ko'pyoqlar proyeksiyalovchi vaziyatda bo'lsa, ularning kesishgan chizig'ini topish ancha oson kechadi. Ikkita prizma berilgan, birining qirralari gorizontal proyeksiyalovchi, ikkinchisi profil proyeksiyalovchi holatda. Bunda birinchi profil proyeksiyalovchi qirralar ikkinchi vertikal holatdagi prizmaning tomonlarini kesib o'tadi.

Vertikal ABC asosli prizmaning A qirrasi MNK asosli prizma tomonlarini $1'''$ va $2'''$ nuqtalarda kesib o'tyapti, bu profil proyeksiyada topiladi va frontal, gorizontal tekislikdagi proyeksiyalari aniqlanadi (115-rasm). $3'$, $4'$, $5'$, $6'$ nuqtalar gorizontal proyeksiyada topiladi va bu nuq-



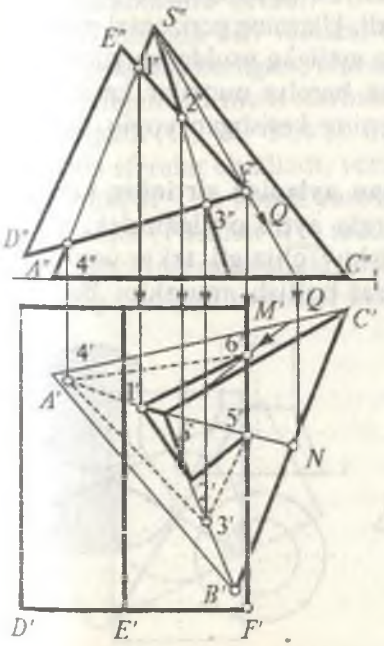
115-rasm.

talarning frontal 3″, 4″, 5″, 6″, profil 3‴, 4‴, 5‴, 6‴, proyeksiyalari topiladi. Bu nuqtalar o‘zaro tutashtirilsa, ikki prizmaning o‘zaro kesishgan siniq chizig‘i hosil bo‘ladi.

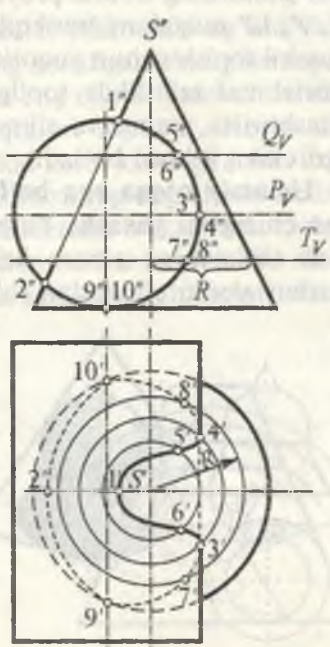
Prizma va piramidaning kesishgan chizig‘ini yasash. Prizma va piramidaning kesishgan chizig‘ini topishdan oldin ularning proyeksiya tekisliklariga nisbatan vaziyatlari o‘rganilib chiqiladi.

Vertikal vaziyatda piramida, gorizontal vaziyatda prizma berilgan. Ularning kesishgan chizig‘ini topish uchun birinchi ko‘pyoqlikning tomoni ikkinchi ko‘pyoqlikning qirrasi bilan kesishgan nuqtasini topishdan boshlanadi, shunda masalani bajarish yanada osonlashtiradi (116-rasm).

Aylanish sirtlarining kesishgan chizig‘ini yasash o‘qi frontal proyeksiya tekisligiga perpendikular, silindr va o‘qi gorizontal proyeksiya tekisligiga perpendikular bo‘lgan konus berilgan, ikkala sirtning kesishgan chizig‘ini topish talab qilinsin (117-rasm).



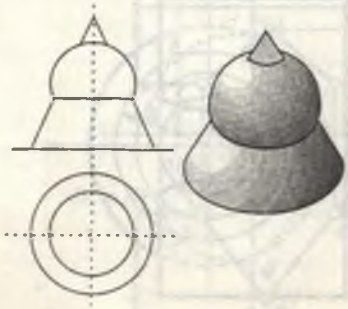
116-rasm.



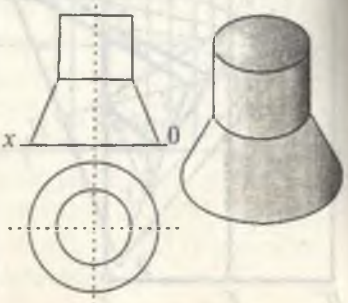
117-rasm.

Bunda silindrning frontal proyeksiyasi aylana bo'lib proyeksiyalanadi, shunda ikki sirt kesishgan chizig'i silindrning frontal proyeksiyasida aniq ko'rinadi, ya'ni silindr sirti bilan konus yasovchilarining kesishgan nuqtalari (1″, 2″ va h.k.)ni aniqlab ularni gorizontal proyeksiyada topiladi. Masalan, 1″ va 2″ nuqtalar konusning eng chetki yasovchisida yotibdi, demak, bu yasovchi frontal tekislikka parallel joylashgan. 1′ va 2′ nuqtalar ana shu yasovchida bo'ladi. Frontaldagi 3″ va 4″ nuqtalarning gorizontal proyeksiyalarini topish uchun gorizontalga parallel bo'lgan frontal proyeksiyalovchi P (P_v) tekisligi o'tkaziladi. Bu tekislik konus sirti bilan R radiusli aylana bo'yicha kesishadi, ana shu R radius bilan konusning gorizontal proyeksiyasida aylana chiziladi va 3″ va 4″ nuqtalarning gorizontal proyeksiyasi 3′ va 4′ nuqtalar shu aylanada topiladi. 5, 6, 7, 8, 9, 10 nuqtalarni topish uchun ham xuddi shu usulda P tekislikdan masofada unga parallel qilib Q va M frontal proyeksiyalovchi tekisliklar o'tkaziladi, ular silindrning frontal proyeksiyasi bilan kesishib 5″, 6″, 7″, 8″, 9″, 10″ nuqtalarni hosil qiladi. Ularning gorizontal proyeksiyasini topish uchun yuqorida aytilgan usulda ish yuritiladi. Gorizontal tekislikda topilgan barcha nuqtalar ketma-ket tutashtirilsa, konus va silindrning kesishgan yopiq fazoviy egri chizig'i hosil bo'ladi.

Umumiy o'qqa ega bo'lgan aylanish sirtining kesishgan chizig'ini yasash. Yuqorida aytib o'tilganidek, aylanish sirtlarining o'zaro kesishuv chizig'i tekis yopiq va fazoviy yopiq chiziqdan iborat bo'lishi mumkin. Bu ikki



118-rasm.



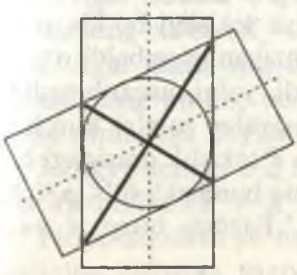
119-rasm.

aylanish sirtlarining o'zaro joylashuviga va ular shaklining katta-kichikligiga bog'liq. Misol uchun, konus va shar (118-rasm) yoki konus va silindrning o'qlari umumiy bo'lsa, kesishgan chizig'i aylanadan iborat bo'ladi (119-rasm).

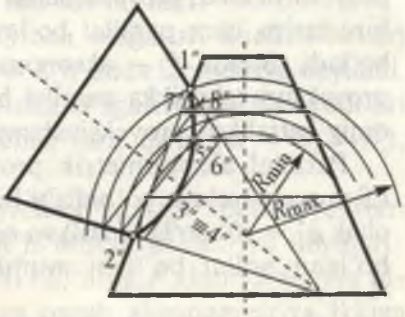
Ikki silindr berilgan bo'lsa, birinchi navbatda ularning vaziyatlari, diametrlarining katta, kichikligi o'rganiladi, shunga qarab, ularning kesishgan chizig'i topiladi. Agar silindrlar (biri vertikal, ikkinchisi og'ma bo'lsa ham) diametrlari teng bo'lsa, ularning kesishgan chizig'i ikkita kesishgan ellipsdan iborat bo'ladi (120-rasm).

Aylanish sirtlarining kesishgan chizig'ini yordamchi sfera usulida yasash. Aylanish sirtlarining o'qlari bir nuqtada kesishib proyeksiya tekisliklaridan birontasiga parallel bo'lsa, ularning kesishgan chizig'ini topish konsentrik shar (sfera) usulida ancha oson kechadi. Bu paytda yordamchi proyeksiyalar tekisligidan foydalanish maqsadga muvofiq emas, chunki konusning tekisliklar bilan kesishgan chizig'i murakkablashib ketadi.

121-rasmda biri vertikal kesik, ikkinchisi og'ma vaziyatdagi konus berilgan, ularning kesishgan chizig'ini topish ko'rsatilgan. Birinchi navbatda eng chetki yasovchilarning kesishgan (1″, 2″, 3″,4″,) nuqtalari topiladi. Keyin ular orasida sferalar chiziladi, vertikal kesik konusga ichki urinma qilib, R_{min} va konus yasovchilarining eng chetki kesishgan nuqta (1″)sidan R_{max} radusli sferalar o'tkaziladi. Qolgan yordamchi sferalar shular orasida bo'lishi kerak. Bu sferalarning berilgan konuslar bilan kesishgan chiziqlari o'zaro



120-rasm.



121-rasm.

kesishib, ikki sirt konuslar kesishgan chizig'ining nuqtalari 5″, 6″, 7″, 8″ larni hosil qiladi, ular tutashtirilsa, ikki konusning kesishgan chizig'i hosil bo'ladi.

6 - BOB. AKSONOMETRIK PROYEKSIYALAR[1]

6.1. To'g'ri va qiyshiq burchakli aksonometrik proyeksiyalar

Ortogonal proyeksiyalash texnik chizmalarda tasvirlar yasashning asosiy usuli hisoblansa-da, lekin ortogonal proyeksiyalardagi chizmalar detalning yetarli darajada yaqqolligini namoyon qila olmaydi. Ayniqsa mashinalarning murakkab detallari yoki qurilishda ishlatiladigan turli konstruksiyalarni, ortogonal chizmalariga ko'ra ularning fazoviy shaklini tasavvur qilish birmuncha qiyin kechadi. Bunday hollarda detallarning chizmasini uning yaqqol tasviri bilan to'ldirish zaruriyati tug'iladi, bunday tasvir **aksonometriya** deyiladi.

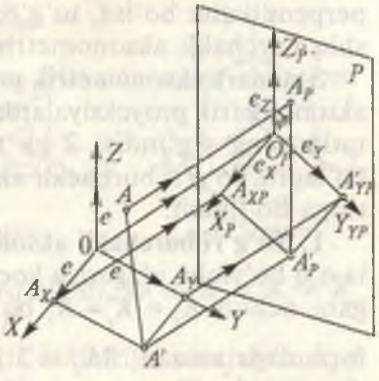
Detal va uning ortogonal proyeksiyalari hamda u joylashgan dekart koordinatalar sistemasining biror yo'nalish bo'yicha ixtiyoriy olingan tekislikdagi tasviri aksonometriya deb ataladi.

«Aksonometriya» — grekcha so'zdan olingan bo'lib, «o'qlar bo'yicha o'lchash» degan ma'noni anglatadi. Mazmuni shundaki, narsa yoki geometrik jism biror P tekislikka to'g'ridan-to'g'ri o'z holicha biror S yo'nalish bo'yicha proyeksiyalansa, proyeksiyalash nuri uchala o'q (X, Y, Z)ning birortasiga ham parallel bo'lmaydi va yaqqol tasviri hosil bo'ladi. Bunda P — aksonometriya tekisligi bo'lib, o'qlar proyeksiya tekislikka parallel bo'lmaganligi sababli o'z haqiqiy kattalikda proyeksiyalanmaydi, ya'ni qisqarib tushadi.

Parallel aksonometrik proyeksiyalar to'g'ri burchakli (S proyeksiyalash yo'nalishi bilan P tekislik orasidagi burchak $\varphi^\circ = 90^\circ$ bo'lgan hol) va qiyshiq burchakli ($0^\circ < \varphi < 90^\circ$) bo'lgan hollar bo'lishi mumkin. Fazoda biror A nuqta

[1] Aksonometrik proyeksiyalar, Sh. Murodovning «Gidrotexnikalar uchun chizma geometriya» kitobidan foydalanildi.

o'zining ortogonal proyeksiyalari bilan berilgan bo'lsin (122-rasm). A nuqta uning proyeksiyalari va koordinata o'qlarini biror S yo'nalishi bo'yicha ixtiyoriy olingan P tekislikka proyeksiyalanadi.



122-rasm.

Bunda P — aksonometriya tekisligi, S — nur yo'nalishi, O nuqtaning aksonometrik proyeksiyasi Op bo'lib, OX, OY, OZ o'qlarning aksonometrik proyeksiyalari esa $O_P X_P$; $O_P Y_P$; $O_P Z_P$ bo'ladi va ular aksonometrik o'qlar deb ataladi. Bunda $A(A^1)$ nuqtaning aksonometrik proyeksiyasi $A_p(A^1_p)$ nuqtalar bo'ladi. OX, OY, OZ o'qlarning har biriga biror natural masshtab birligiga teng (e) kesma o'lchab qo'yilgan.

Demak, Dekart koordinata sistemasidagi e natural birlik kesmasi aksonometriya o'qlariga o'zgarib tushadi. Buning uchun e_x/e, e_y/e va e_z/e nisbatlar olinadi. Bunda $k_x = e_x/e$, $k_y = e_y/e$ va $k_Z = e_Z/e$ deb belgilanadi va aksonometriyada o'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsiyentlari deb ataladi. O'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsiyentlari va aksonometrik o'qlar orasidagi burchaklar ham har xil bo'ladi. O'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsiyentlari va aksonometrik o'qlar orasidagi burchaklar ham har xil bo'ladi.

1. Agar uchala o'q bo'yicha o'zgarish koeffitsientlari o'zaro teng bo'lsa ($K_x = K_y \neq K_z$), unda izometriya deyiladi.

2. Agar ikkita o'q bo'yicha o'zgarish koeffitsiyentlari o'zaro teng bo'lib, uchinchisi farq qilsa ($K_x = K_y \neq K_z$), unda dimetriya deyiladi.

3. Agar uchala o'q bo'yicha o'zgarish koeffitsiyentlari har xil bo'lsa ($K_x \neq K_y \neq K_z$), bunda trimetriya deyiladi.

Proyeksiyalash yo'nalishi (S) ning P aksonometriya tekisligiga nisbatan vaziyatiga qarab aksonometriya ikkiga bo'lingan. Agar nur yo'nalishi aksonometriya tekisligiga

perpendikular bo'lsa, to'g'ri burchakli, og'ma bo'lsa qiyshiq burchakli aksonometriya deyiladi.

Standart aksonometrik proyeksiyalar. To'g'ri burchakli aksonometrik proyeksiyalarda o'zgarish koeffitsiyenti kvadratlarining yig'indisi 2 ga teng, ya'ni $K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = 2$ bo'ladi[1]. To'g'ri burchakli aksonometrik proyeksiyalar uch turga bo'linadi:

1. To'g'ri burchakli aksonometriya. Izometriyada uchala o'q bo'yicha o'zgarish koeffitsiyentlari o'zaro teng bo'lgani uchun $K_x = K_y = K_z$ bo'ladi. Unda $K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = 2$ formulaga asosan, $3K_x^2 = 2$ yoki $K_x = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}82$ bo'ladi. Demak, $K_x = K_y = K_z = 0{,}82$ marta o'zgaradi. Biror detalning izometriyasini yasash uchun uning eni, bo'yi, balandliklari va boshqa o'lchamlarini 0,82 ga ko'paytirish kerak bo'ladi, bunda izometriya yasash murakkablashadi. Shuning uchun muhandislik tajribasida 0,82 o'rniga o'zgarish koeffitsiyentlari $K_x = K_y = K_z = 1$ deb olinadi.

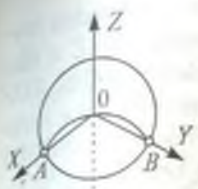
Bunda keltirilgan koeffitsiyentlar $m = 1/K_x = 1 : \sqrt{\frac{2}{3}} = 1 : 0{,}82 = 1{,}22$ bo'ladi, demak, yasalgan izometriya haqiqiy tasvirdan 1,22 marta katta bo'ladi. To'g'ri burchakli izometriyada o'qlar orasi 120° ga teng. Izometrik o'qlarni yasashda ikki usuldan foydalanish mumkin.

Sirkulda bajarish: 1) O nuqtadan Oz o'q vertikal qilib o'tkaziladi; 2) O markaz bo'yicha ixtiyoriy aylana chiziladi va 0_1 nuqta belgilanadi; 3) O_1 nuqtadan aylana radusiga teng radius bilan yoy chizilib aylana ustida $A_y B_x$ nuqtalar hosil qilinadi. OA va OB to'g'ri chiziqlar OX va OY o'qlar holatini belgilaydi (123-rasm).

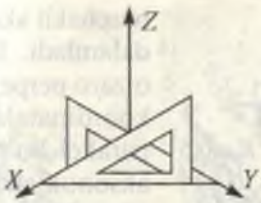
Uchburchak usuli: 1) O nuqtadan vertikal OZ o'qi o'tkaziladi; 2) 30°, 60°, 90° li uchburchakning kichik kateti OZ o'qi parallel qo'yiladi. Uchburchak gipotenuzasi bilan O nuqta orqali OX va OY o'qlar o'tkaziladi (124-rasm). Demak o'qlar orasi 120° ga teng bo'ladi (125-rasm).

2. To'g'ri burchakli (ortogonal) dimetriya. To'g'ri burchakli dimetriya o'zgarish koeffitsiyentlaridan ikkitasi o'za-

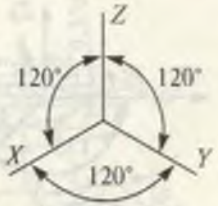
[1] Isbotini Sh. Murodov va boshqalar, «Chizma geometriya kursi», «O'qituvchi», 1988-y., kitobidan qaralsin.



123-rasm.



124-rasm.



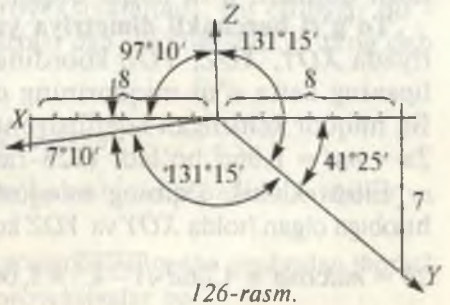
125-rasm.

ro teng bo'ladi, uchinchisi farq qiladi, ya'ni $K_x = K_y \neq K_z$, $K_x = K_z \neq K_y$ yoki $K_x = K_z \neq K_y$.

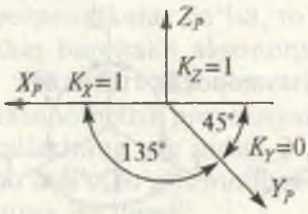
Ko'pincha to'g'ri burchakli dimetriya chizishda $K_x = K_z = 0{,}5K_y$ holati ishlatiladi. Unda asosan $K_z^2 + 1/4K_y^2 = 2$; $9K_z^2 = 8$ yoki $K_x = \sqrt{\frac{8}{9}} = 0{,}94$ bo'ladi. Demak, $K_x = K_z = 0{,}94$ bo'lib, $K_y = 0{,}47$ bo'ladi. Lekin detalning dimetriyasini yasashda bu ancha qiyinlik tug'diradi. Shuning uchun keltirilgan dimetriya qo'llanib, o'zgarish koeffitsiyentlari $K_x = K_z = 1$; $K_y = 0{,}5$ tarzda olinadi. Bunda keltirilgan koeffitsiyent $m = \frac{3}{2}\sqrt{2} = 1 : 0{,}94 = 1{,}06$ bo'ladi, demak narsaning dimetriyasi 1,06 marta kattalashadi. Shuning uchun o'qlar orasidagi burchakning ikkitasi 131° 25' ga, uchinchisi esa 9,7° 10' ga teng bo'ladi (126-rasm).

Dimetrik o'qlarning bajarish tartibi: 1) O nuqtadan OZ vertikal o'tkaziladi, unga perpendikulyar qilib gorizontal h chiziq o'tkaziladi; 2) gorizontal chiziq bo'yicha O nuqtadan chap va o'ng tomonlarga 8 birlik o'lchab qo'yilgan; 3) chap tomondan bir birlik, o'ng tomondan 7 birlik pastga o'lchab A va B nuqtalar hosil qilinadi; 4) OA va OB lar tutashtirilib OX, OY o'qlar yasaladi.

Qiyshiq burchakli (frontal) dimetriya. Dimetriya yasash qulayroq bo'lish uchun ayrim hollarda narsalarning aksonometriya tekisligiga parallel qilib olinadi, bunda qiyshiq



126-rasm.



127-rasm.

burchakli aksonometriyadan foydalaniladi. Demak, X, Z o'qlar o'zaro perpendikular bo'lib, XOZ koordinatalar tekisligi va unga parallel bo'lgan barcha shakllar aksonometriya tekisligiga o'zining haqiqiy kattaligida proyeksiyalanadi. Bu esa narsaning yaqqol tasvirini chizishni ancha osonlashtiradi (127-rasm).

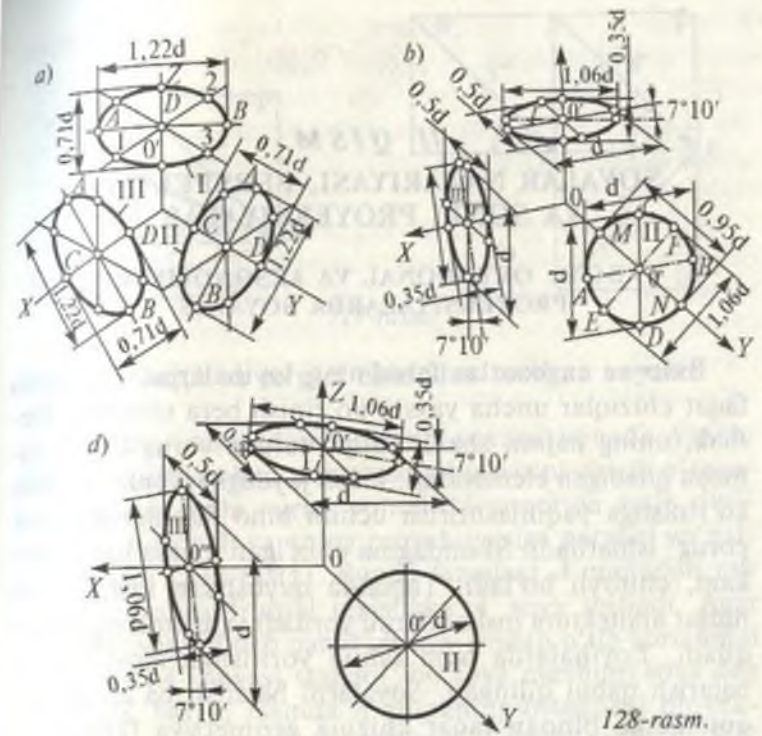
6.2. Aylananing aksonometrik proyeksiyasi

Aylananing to'g'ri bo'rchakli izometriyasini yasash. To'g'ri burchakli izometriyada XOY, XOZ va YOZ koordinata tekisliklari uchun ellipsning katta va kichik o'qlarining miqdori bir xil o'zgaradi. Keltirish koeffitsiyenti $m = 1,22$ ni hisobga olganda ellipsning katta o'qi $2a = md = 1,22d$ bo'ladi. Uning kichik o'qi $2b = md\cos\varphi = 1,22d\sqrt{1-k^2} = 1,22\sqrt{1-\frac{2}{3}}$ bo'ladi.

128-rasmda aylananing keltirilgan izometriyasini yasash ko'rsatilgan. Gorizontal ellips yasash uchun aylana markazining proyeksiyasi O' nuqta orqali OX va OY o'qlariga parallel qilib to'g'ri chiziqlar o'tkaziladi. Bu to'g'ri chiziqlarga berilgan aylananing diametri o'lchab qo'yiladi va 1, 2, 3, 4 nuqtalar hosil qilinadi. O' nuqtadan OZ o'qqa perpendikular chiqarib, unga $1,22d$ o'lchab qo'yiladi va ellipsning katta o'qi AB hosil qilinadi. So'ngra OZ o'qi bo'yicha $0,71d$ kesma qo'yilib, ellipsning kichik o'qi CD hosil qilinadi. 8 ta nuqta orqali ellips chiziladi.

To'g'ri burchakli dimetriya yasash. Ortogonal dimetriyada XOY, XOZ, YOZ koordinata tekisliklari uchun ellipsning katta o'qi miqdorining o'zgarishi bir xil bo'ladi. Bu miqdor keltirilgan koeffitsiyentni hisobga olingan holda $2a = md = 1,06d$ bo'ladi (128-rasm).

Ellips kichik o'qining miqdori keltirilgan koeffitsiyent hisobiga olgan holda XOY va YOZ koordinata tekisliklari uchun $2b = md\cos\varphi = 1,06d\sqrt{1-k^2} = 1,06d\sqrt{1-\frac{8}{9}} \approx 0,35d$ bo'ladi.



128-rasm.

XOY koordinata tekisligi uchun ellipsning kichik o'qi $2b = md\sqrt{1-k_y^2} = 1{,}06d\sqrt{1-\frac{8}{9}} \approx 0{,}95d$ bo'ladi.

128-*d*, rasmda qiyshiq burchakli (frontal) dimetriya yasash ko'rsatilgan. Unda *XOZ* koordinata tekisligida aylana o'z kattaligida proyeksiyalanadi. *XOY* va *YOZ* tekisliklarida esa ellips bo'lib proyeksiyalanadi. Bu ellipslar qo'shimcha diametrining kattasi *d*ga, kichigi *d*/2 ga teng deb hisoblanadi.

Savollar

1. Aksonometrik proyeksiya tushunchasi nimadan iborat va necha xil bo'ladi?
2. Izometrik proyeksiya o'qlari orasi necha gradusdan iborat?
3. Necha xil dimetrik proyeksiyalar bor?

II QISM

SOYALAR NAZARIYASI, PERSPEKTIVA VA SONLI PROYEKSIYALAR

7-BOB. ORTOGONAL VA AKSONOMETRIK PROYEKSIYALARDA SOYALAR

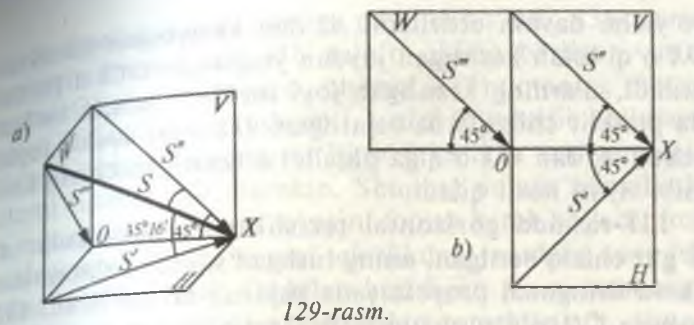
Bino va inshootlar fasadining loyihalarini chizganda faqat chiziqlar uncha yaxshi ko'rinish bera olmaydi. Demak, uning hajmi shakli chiqib turgan yorug'likdan himoya qiladigan elementlari, kirish joydagi ayvonlarni tabiiy ko'rinishga yaqinlashtirish uchun bino fasadlarida soya, yorug' ishlatiladi. Shundagina chizilgan loyiha juda ko'rkam, chiroyli bo'ladi. Tabiatda quyoshdan tushayotgan nurlar arxitektura inshootlarini yoritadi va ularda soya hosil qiladi. Loyihalarda ham tabiiy yoritishga moslab soya bajarish qabul qilingan. Soyalarni bajarish ba'zi qonunqoidalarga binoan faqat chizma geometriya fanidagina o'rganiladi. Ortogonal proyeksiyalarda asosan parallel nurlardan foydalaniladi. Quyosh va oy cheksiz uzoqlikda deb, ulardan tushayotgan nurlar parallel hisoblanadi. Ortogonal va aksonometrik proyeksiyalarda soya bajarishda nur yo'nalishi uchun kubning diagonali qabul qilingan (129-rasm).

Kubning diagonali yoq (tomon)larining har qaysisi bilan $35°16'$ burchakni tashkil qilib, to'g'ri burchakli proyeksiyalar o'qiga $45°$ qiya qilib proyeksiyalanadi. Mart oyining o'rtalarida soat 10^{00} atrofida Toshkent viloyati hududida quyosh nurining og'ish burchagi $35°16'$ ga teng bo'ladi[1].

129-*a*, rasmda kubning yaqqol tasviri berilgan, 129-*b*, rasmda esa uning ortogonal proyeksiyasi tasvirlangan.

---

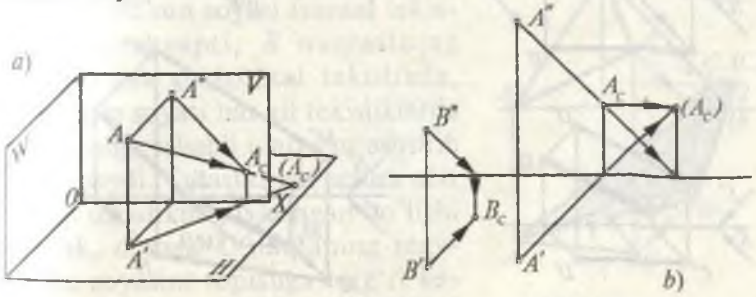
[1] *R. Xorunov.* «Chizma geometriya kursi», 264-bet. T., «O'qituvchi», 196[illegible].



129-rasm.

7.1. Nuqta va to'g'ri chiziqdan tushgan soyalar

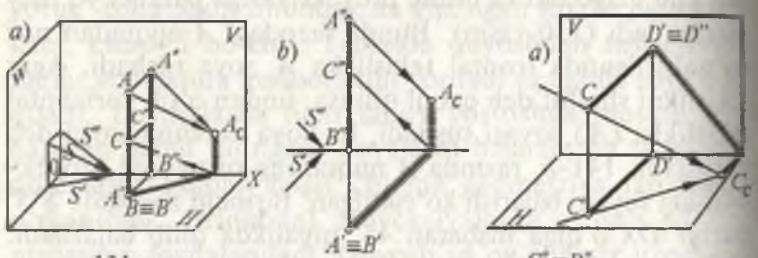
Fazodagi nuqtadan tushgan soyani yanada yaxshi tasavvur qilish uchun uning yaqqol tasvirini chizib o'rganganma'qul, unda nurlar yo'nalishi yuqorida aytib o'tilgan kub diagonali va uning proyeksiyasiga parallel yo'nalgan bo'ladi (130-rasm). Bunda fazodagi A nuqtadan nur yo'naltirilganda frontal tekislikka A_c soya tushadi. Agar tekislikni shaffof deb qabul qilinsa, undan o'tib gorizontal tekislikka (A_c) soyasi tushadi, bu soya mavhum soya deb yuritiladi. 141-*b*, rasmda A nuqtaning ortogonal proyeksiyasida soyani bajarish ko'rsatilgan. Birinchi navbatda $S''S'$ nurlar OX o'qiga nisbatan 45° qiyalikda qilib bajariladi. Ularga parallel qilib A' va A'' nuqtalardan nurlar o'tkaziladi. Nurlardan qaysi biri birinchi bo'lib OX o'qi bilan kesishsa, shu nuqtadan OX o'qiga perpendikulyar chiqariladi va A nuqtaning A_c soyasini hosil qiladi. Mavhum (A_c) soyani topish uchun A' dan kelayotgan nurni 45° yo'nalishi



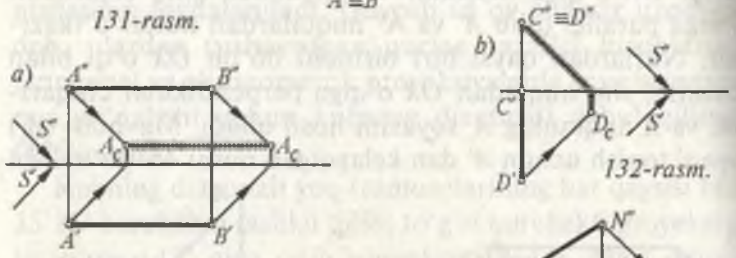
130-rasm.

bo'yicha davom ettiriladi. A'' dan kelayotgan nurni esa OX o'qi bilan kesishgan joydan yuqoriga vertikal yo'naltiriladi, ularning kesishgan joyi mavhum nuqta bo'ladi. Bu punktir chiziqlarda bajarilgan. Ikkinchi usulda topish uchun A_c dan OX o'qiga parallel o'tkazilgan chiziq kesishib, A_c ni hosil qiladi.

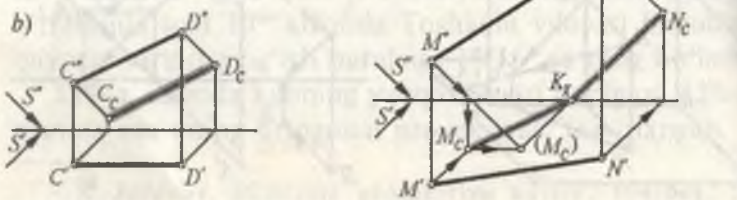
131-rasmda gorizontal tekislikka perpendikular AB to'g'ri chiziq berilgan, uning tushgan soyasini aksonometrik va ortogonal proyeksiyada bajarish ko'rsatilgan. 132-rasmda CD to'g'ri chiziq frontal tekislikka perpendikular joylashgan, uning soyasini yasash ham oldingi misoldagidek ko'rsatilgan. 133-*a*, rasmda AB to'g'ri chiziq V va H tekisliklariga parallel, unda tushayotgan soyasi ham o'ziga parallel bo'lishi ko'rinib turibdi. 133-*b*, rasmda CD to'g'ri chiziq faqat frontal tekislikka parallel, shuning uchun uning



131-rasm.



132-rasm.



133-rasm. *134-rasm.*

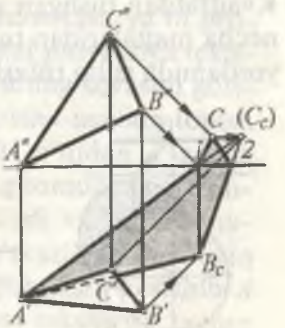
soyasi frontal proyeksiyasiga parallel bo'ladi. 134-rasmda umumiy vaziyatdagi MN to'g'ri chiziq berilgan, uning soyasi OX o'qida sinyapti, chunki ikki nuqtaning proyeksiyasi ikki tekislikka tushyapti, ularni tutashtirib bo'lmaydi. To'g'ri chiziq nuqtalarini bitta tekislikka tushgandagina ularni tutashtirish mumkin. Shuning uchun nuqtalardan birortasining mavhum soyasini topish kerak bo'ladi, frontaldagi soya N_c, gorizontal tekislikdagi mavhum soya (M_c) bilan tutashtiriladi, Ox bilan kesishgan Kx nuqtasi esa N nuqtaning frontal soyasi N_c bilan tutashtiriladi, shunda haqiqiy singan soya kelib chiqadi. Demak MN to'g'ri chiziqning soyasi OX o'qida K_x nuqtada sinyapti.

7.2. Tekis shakllardan tushgan soyalar

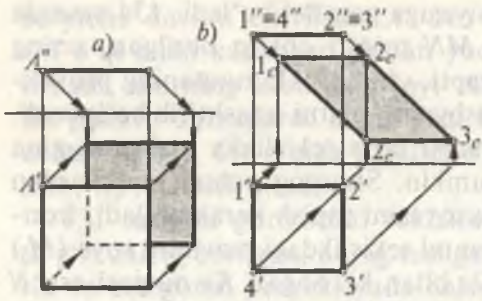
Tekis (yassi) shakllarga yorug'lik tushgan paytda bir tomoni yorug', ikkinchi tomoni to'liq o'z soyasida bo'ladi. Agar biror shakl soya tushadigan tekislikka parallel bo'lsa, tushayotgan soya ham o'sha shaklni takrorlaydi, masalan, uchburchak bo'lsa tushgan soya ham uchburchak, to'rtburchak bo'lsa, to'rtburchak va h.k. bo'ladi.

Tekis shaklardan tushayotgan soyalarni bajarishda avvalo ularning xarakterli nuqtalaridan tushayotgan soyalar topiladi va ular tutashtiriladi. 135-rasmda ABC uchburchak berilgan, undan tushayotgan soyani topish talab qilinsin.

Uchburchakning A uchi gorizontal tekislikda yotganligi sababli uning soyasi o'zida bo'ladi, C nuqta yuqorida berilganligi uchun soyasi frontal tekislikka tushyapti, B nuqtasining soyasi esa gorizontal tekislikda, nuqtalar soyasi har xil tekisliklarda yotganligi sababli ularni tutashtirib bo'lmaydi. Tutashtirish uchun ular bitta tekislikda joylashgan bo'lishi kerak, demak C nuqtaning mavhum soyasini topishga to'g'ri keladi. Mavhum (C_c) soya aniqlan-



135-rasm.



136-rasm.

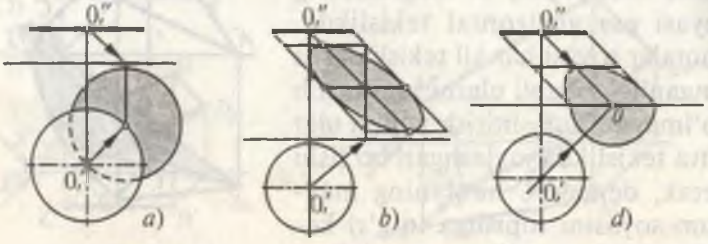
gandan keyin uni A' va BC nuqtalar bilan tutashtiriladi, bu chiziqlar OX o'qi bilan kesishganda 1 va 2 nuqtalar C_c bilan birlashtiriladi, shunday qilib ABC uchburchakning haqiqiy soyasi hosil bo'ladi, soya OX o'qida 1 va 2 nuqtalarda sinyapti.

136-*a*, rasmda gorizontal tekislikka parallel kvadrat berilgan undan tushayotgan soya o'ziga teng kvadratdan iborat. Demak, yassi shakl qaysi tekislikka parallel bo'lsa, o'sha tekislikda uning soyasi o'z shaklini o'zgartirmaydi. 136-*b*, rasmda xuddi shu kvadrat, lekin uning soyasi frontal tekislikka tushyapti, unda romb shakli kelib chiqyapti.

Ta'rif: Berilgan tekislik qaysi proyeksiya tekisligiga parallel bo'lsa, undagi soyasi o'ziga teng bo'ladi.

137-*a*, rasmda gorizontal tekislikka parallel aylana berilgan, undan tushayotgan soya ham o'ziga teng aylanadan iborat.

137-*b*, rasmda ham gorizontalga parallel, lekin frontal tekislikka yaqin bo'lganligi sababli uning soyasi frontal tekislikka ellips shaklida tushyapti. Uning soyasini yasash uchun aylanaga chetki kvadrat chizig'i chizib olinadi. Kvadratdan tushgan soya ichida aylananing xarakterli bir necha nuqtalaridan tushayotgan soyalar topilib, ular lekalo yordamida silliq tutashtiriladi, natijada ellips hosil bo'ladi.



137-rasm.

137-*d*, rasmda ham gorizontal tekislikka parallel aylana berilgan. Bu aylana markazi O_1 ikkala H, V proyeksiya tekisligiga ham bir xil masofada joylashgan, demak, aylana soyasining yarmi doira, yarmi esa ellips bo'lib tushadi. Uni topish bundan oldingi misollarda keltirilgan usulda bajariladi.

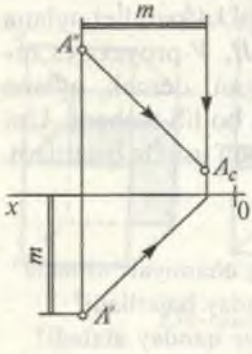
Savollar

1. Ortogonal proyeksiyada soyalarning ahamiyati nimada?
2. Ortogonal proyeksiyada soyalar qanday bajariladi?
3. Quyosh va oydan tushayotgan nurlar qanday ataladi?
4. Nuqtaning mavhum soyasi deganda nimani tushuniladi?
5. To'g'ri chiziq proyeksiya tekisligiga parallel bo'lsa, tushuvchi soya qanday bo'ladi?
6. Tekislikdan tushayotgan soya qanday bajariladi?
7. Berilgan kvadrat tekislik gorizontal tekislikka parallel bo'lsa, undan tushayotgan soya qanday bo'ladi?

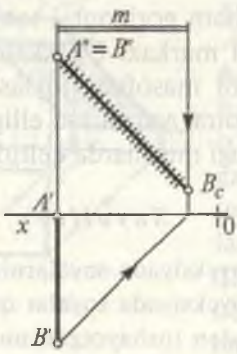
7.3. Soya yasashning «masofa chiqarish» usuli

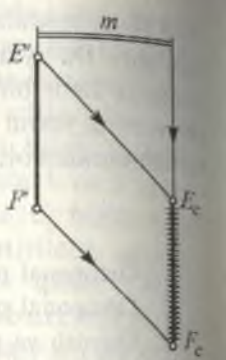
Frontal proyeksiya tekisligida soya yasashning «masofa chiqarish» usuli, bu geometrik element (nuqta, to'g'ri chiziq, tekislik, jism)larning bitta frontal proyeksiyasida uning ordinatasidan foydalanib soyasini bajarish demakdir (ordinata — bu fazodagi nuqtadan proyeksiya tekisliklarigacha bo'lgan masofa).

Agar fazodagi jism nuqtalarining ordinatasi, ya'ni proyeksiya tekisliklarigacha (masalan, frontal proyeksiya tekisligigacha) bo'lgan masofa aniq bo'lsa, uning soyasini gorizontal proyeksiyasisiz, «masofa chiqarish» usulida topish mumkin (138-rasm). Buning uchun OX o'qidan A' gacha bo'lgan (m) masofani, A'' nuqtadan o'ng tomonga gorizontal chiziq chizib o'ngga o'lchab qo'yiladi va shu kesmaning oxirgi nuqtasidan vertikal chiziq o'tkaziladi, bu chiziq A'' nuqtadan 45° qiyalikda tushuvchi nur bilan kesishib A nuqtaning A_c soyasini hosil qiladi. Buni tekshirish uchun A nuqtaning gorizontal proyeksiyasi A' nuqtadan ham 45° nur o'tkazilsa xuddi shu A_c nuqtada kesishadi. Demak, m



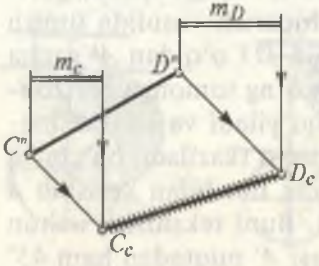
138-rasm.





139-rasm.

masofa nuqtadan frontal tekislikkacha bo'lgan masofadir. Bu usulning afzalligi jisimning gorizontal proyeksiyasini bajarishga ketadigan vaqtni tejashdan iborat. 139-rasmda frontal tekislikka perpendikulyar AB hamda gorizontal tekislikka perpendikulyar EF to'g'ri chiziqlar berilgan. Ularning soyasini «masofa chiqarish» usulida topish talab qilinsin (bunda m masofa berilgan). AB to'g'ri chiziq frontal tekislikka perpendikulyar bo'lganligi uchun uning frontal proyeksiyasi nuqta bo'lib proyeksiyalanadi, agar A nuqtasi frontal tekislikda yotsa, uning soyasini topish uchun m masofa $A''B''$ nuqtadan o'ng tomonga o'lchab qo'yiladi va oxirgi uchidan vertikal chiziq $A''B''$ soyasi nuqtadan esa 45° li nur o'tkaziladi, ularning kesishgan B_c nuqtasigacha bo'lgan masofa AB to'g'ri chiziqning $A''B_c$ soyasini hosil qiladi. Bu to'g'ri chiziq soyani boshqa chiziqlardan farqlash uchun biror rangda yoki shtrixchalarda bajariladi.



140-rasm.

Endi EF to'g'ri chiziqning soyasini «masofa chiqarish» usulida topish uchun, berilgan m masofa o'ng uchidan vertikal chiziq va $E''F''$ nuqtalardan 45° li nur o'tkazilsa, ular kesishib EF to'g'ri chiziqning E_cF_c soyasini hosil qiladi.

140-rasmda umumiy vaziyatdagi CD to'g'ri chiziq va ordi-

nata masofalar $m_D m_c$ berilgan, CD to'g'ri chiziqning «masofa chiqarish» usulida soyasini yasash talab qilinsin.

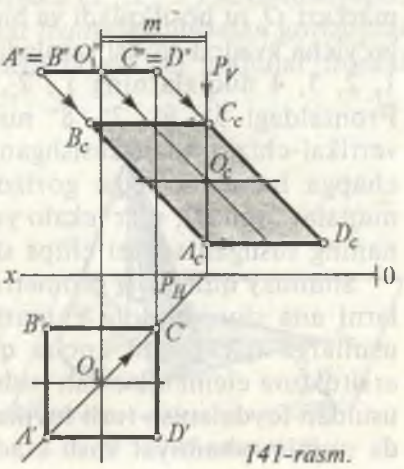
Buning uchun yuqorida ta'riflanganidek C'' nuqtadan m_c, D'' nuqtadan esa m_D masofa o'ng tomonga o'lchab, ularning chetki nuqtalaridan vertikal chiziqlar o'taziladi. Bu vertikal chiziqlar C'' va D'' nuqtalardan tushuvchi nurlar bilan kesishib CD to'g'ri chiziqning $C_c D_c$ soyasini hosil qiladi.

Tekis shakllardan tushgan soyani yasash. 141-rasmda goriontal vaziyatda joylashgan $ABCD$ kvadrat va m masofa berilgan, uning soyasini «masofa chiqarish» usulida bajarish talab qilinsin.

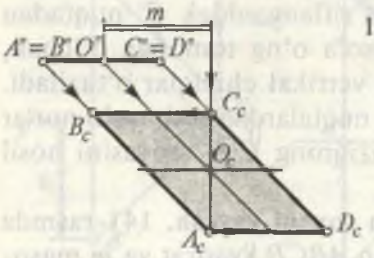
Buning uchun kvadrat markazidan frontal tekislikkacha bo'lgan m masofani, kvadratning frontal proyeksiyasi markazi O_1'' dan o'ng tomonga o'lchab qo'yib, uning chetki nuqtasidan vertikal chiziq o'tkaziladi, u kvadrat markazi O_1'' nuqtadan 45° burchan ostida tushuvchi nur bilan kesishib uning soyasi (O_c)ni hosil qiladi, bu kvadrat soyasining markazi demakdir.

Bunda $A''B''$ va $C''D''$ nuqtalardan tushayotgan nurlar vertikal chiziq bilan A_c va C_c nuqtalarda kesishadi, A_c nuqtadan o'ng tomonga, C_c nuqtadan esa chap tomonga gorizontal chiziqlar o'tkazilsa, tushuvchi nurlar bilan kesishib, B_c va D_c nuqtalarni aniqlaydi va natijada kvadratning $(A_c B_c C_c D_c)$ tushgan soyasini hosil qiladi.

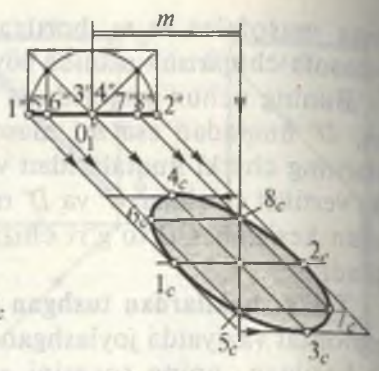
$A'C'$ nuqtalardan o'tuvchi gorizontal proyeksiyalovchi tekislikning frontal izi O_c nuqtadan o'tib kvadrat markazi O_1'' nuqtadan frontal tekislikkacha bo'lgan masofaning m masofaga teng ekanligini isbotlaydi. Demak, m ma-



141-rasm.



142-rasm.



143-rasm.

sofa qo'yilsa, narsaning gorizontal proyeksiyasini chizish talab qilinmaydi.

142-rasmda xuddi shu *ABCD* kvadratning tushgan soyasini gorizontal proyeksiyasiz, berilgan *m* masofa bo'yicha topish ko'rsatilgan.

143-rasmda gorizontal vaziyatdagi aylananing tushgan soyasini «masofa chiqarish» usulida topish ko'rsatilgan. Uning soyasini topish uchun aylana sirtida kvadrat chizib, diagonallar o'tkazish natijasida aylana teng sakkiz bo'lakka bo'linadi. Aylana markazi O_1'' dan o'ng tomondagi *m* masofa bo'yicha o'tkazilgan vertikal chiziq O_1'' nuqtadan tushayotgan nur bilan kesishib O_c aylana soyasining markazi O_c ni hosil qiladi va birinchi navbatda shu markaz bo'yicha kvadrat soyasi yasaladi. Buning uchun kvadratdagi 1, 2, 3, 4 nuqtalarning 1_c, 2_c, 3_c, 4_c soyalari aniqlanadi. Frontaldagi 5″, 6″, 7″, 8″ nuqtalardan nurlar o'tkazib, vertikal chiziq bilan kesishgan 5_c va 8_c nuqtalar, ulardan chapga hamda o'ngga gorizontallar o'tkazib, 6_c va 7_c nuqtalar topiladi, ular lekalo yordamida tutashtirilsa aylananing tushgan soyasi ellips shaklda hosil bo'ladi.

Shunday qilib turli geometrik jismlardan tushgan soyalarni ana shu «masofa chiqarish» usulida topish boshqa usullarga qaraganda ancha qulay hisoblanadi, ayniqsa arxituktura elementlaridan tushgan soyalarni bajarishda bu usuldan foydalanish turli loyihalarni ishlashda, tayyorlashda muhim ahamiyat kasb etadi.

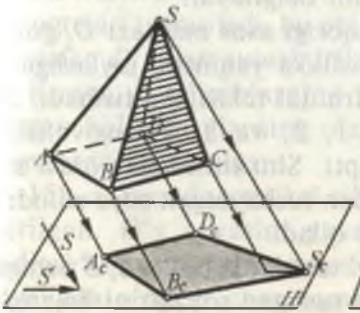
7.4. Geometrik jismlarning soyalari

Geometrik jismlar hajmga ega bo'lganligi sababli, ularda albatta o'z soyasi hosil bo'ladi. Jismlarning o'z soyasi chegarasi bo'yicha uning biror tekislikka soyasi hosil bo'ladi.

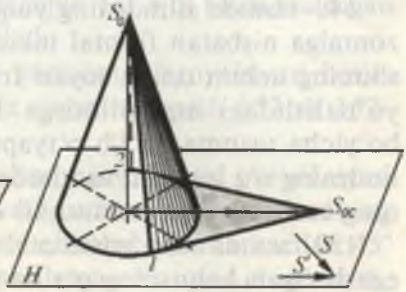
144-rasmda fazoda asosi to'rtburchakdan iborat piramida berilgan, S yo'nalishidagi nurlar H tekislikka uning soyasini tushiradi. Piramidaning o'z soyasini chegaralovchi $SBAD$ nuqtalardan tushgan soyalar aynan undan tushuvchi soyasini belgilaydi.

145-rasmda asosi gorizontal (H) tekislikda yotgan konus tasvirlangan S yo'nalish bo'yicha S_1 uchining soyasi (S_{1c}) topishdan boshlanadi. S_{1c} nuqtadan konus asosiga urinma o'tkazilsa, 1, 2 nuqtalar hosil bo'ladi, ularni konus uchi bilan tutashtirilsa, konusning o'z soyasi hosil bo'ladi. Demak bunda ham 1, S_1, 2 o'z soyasining chegarasi bo'yicha (1, S_c, 2) konusdan tushgan soyani hosil qiladi. Shuni esdan chiqarmaslik kerakki, jismning o'z soyasi ochroq, tushgan soyasi esa to'qroq rangda bajariladi. 146-rasmda prizmaning ortogonal proyeksiyalarida tushgan soyalarini yasash ko'rsatilgan.

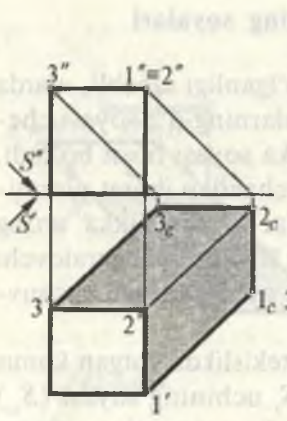
Prizma asosi gorizontal tekislikda joylashgani uchun uning soyasi o'zida bo'ladi. Prizma yuqorisidagi 1, 2, 3 uchlaridan gorizontal tekislikka (1_c, 2_c, 3_c) soya tushyapti, sababi shundaki, bu nuqtalar frontalga nisbatan gorizontal tekislikka yaqinroq. 147-rasmda esa bu nuqtalar frontal



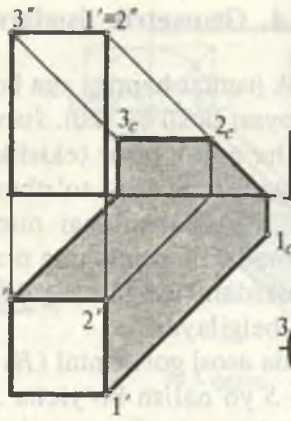
144-rasm.



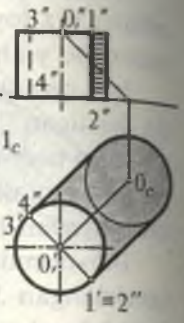
145-rasm.



146-rasm.



147-rasm.



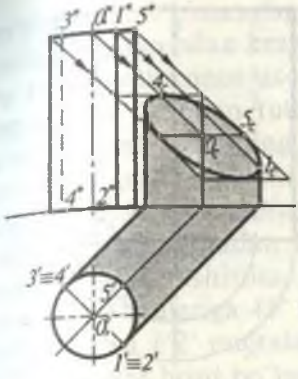
148-rasm.

proyeksiya tekisligiga yaqin, shuning uchun ularning (1_c, 2_c, 3_c) soyasi frontal tekislikka tushyapti.

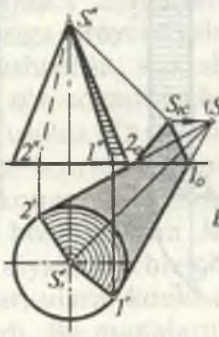
148-rasmda asosi gorizontal tekislikda yotgan silindrning tushayotgan soyasi ko'rsatilgan, bunda silindr asosi gorizontal tekislikka parallel va yaqinroq joylashgan. Shuning uchun uning asosi o'zgarmasdan aylana bo'lib tushadi. To'liq soyani bajarish uchun ana shu aylana soya va silindr asosiga urinma (1_c, 2′, va 3_c, 4′) lar o'tkazilsa kifoya, silindrning to'liq soyasi hosil bo'ladi. Silindrning frontal proyeksiyasidagi o'z soyasini topish uchun gorizontal tekislikdagi 1′ 2′ va 3′ 4′ nuqtalarni yuqoriga proyeksiyalab 1″2″ va 3″4″ nuqtalar topiladi, ana shu chegaraning o'ng tomoni silindrning o'z soyasini belgilaydi.

149-rasmda silindrning yuqorigi asos markazi O_2 gorizontalga nisbatan frontal tekislikka yaqinroq joylashgan, shuning uchun uning soyasi frontal tekislikka tushadi. S' yo'nalishdagi nur silindrga 1, 2, va 3, 4 yasovchilar bo'yicha urinma bo'lib o'tyapti. Shu urinmalar orasi silindrning o'z soyasini va ulardan tushayotgan soya silindrning tushgan soyasini tashkil qiladi.

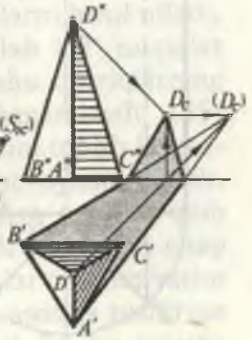
150-rasmda asosi gorizontal tekislikda bo'lgan, S uchiga ega bo'lgan konusning o'z va tushgan soyalarini bajarish tasvirlangan. Bunda har doimgidek 45° qiyalikda $S''S'$ nur-



149-rasm.



150-rasm.



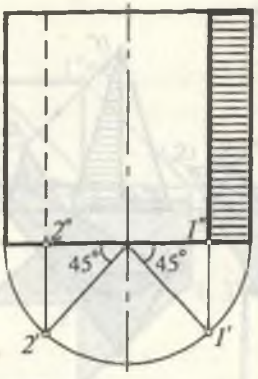
151-rasm.

larga parallel qilib konus uchun S ning haqiqiy S_c va mavhum (S_c) soyalar aniqlanadi. Mavhum soya (S_c) bilan konus asosi bir tekislikda yotganligi sababli $1'S_c$ va $2'S_c$ urinmalar o'tkaziladi. Bu chiziqlar OX o'qining 1, 2, nuqtalarda kesib o'tadi. Shu nuqtalarni konus uchining haqiqiy soyasi (S_c) bilan tutashtirilsa, konusning tushgan soyasi aniqlanadi, $S'1'2'$ nuqtalarning o'ng tomoni esa o'z soyasini belgilaydi.

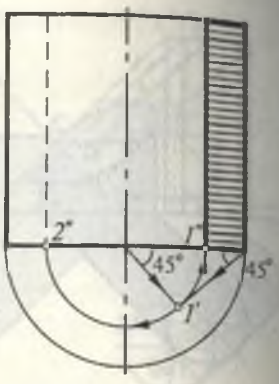
151-rasmda asosi uchburchakli D uchga ega asosi gorizontal tekislikda joylashgan piramida berilgan. Bunda ham konusda soya yasash kabi bajariladi, chunki ular bir-biriga o'xshash jismlardir. Piramida uchi D frontal tekislikka yaqinroq bo'lganligi uchun shu tekislikka soyasi tushadi. Mavhum (DC) soya bilan piramida asosining A va B nuqtalari tushiriladi, bu chiziqlar OX o'qi bilan kesishgan nuqtalar D_c bilan tutashtiriladi.

Konus va silindrlarning gorizontal proyeksyasi berilmagan hollarda ularning o'z soyasini topish 152 va 153-rasmlarda ko'rsatilgan.

152-*a*, rasmda vertikal silindrning frontal proyeksiyasi berilgan. O'z soyasini yasash uchun silindr asosining radiusi bo'yicha yarim aylana chiziladi. O markazdan 45° qiyalikda o'ng va chap tomonlarga chiziqlar chiqariladi, yarim aylana bilan kesishib 1 va 2 nuqtalarni ular silindr



152-rasm.

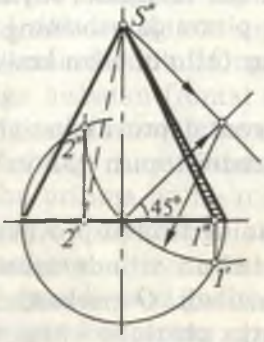


153-rasm.

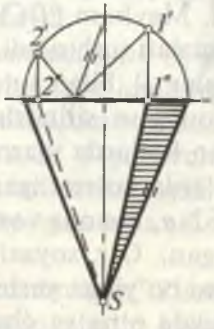
asosiga proyeksiyalansa 1″ va 2″ to‘g‘ri chiziqlar uning o‘z soyasini belgilaydi.

153-rasmda silindr asosida O_1'' va eng chetki nuqtalardan 45° qiyalikda chiziqlar chiqarilsa, ular kesishib 1 nuqtani beradi, uni O markaz bo‘yicha o‘ngga-chapga aylantirilsa 1″ va 2″ nuqtalar hosil bo‘ladi. Ulardan chiqarilgan vertikal chiziqlar oralig‘i silindrning o‘z soyasini tashkil etadi.

154-rasmda vertikal konusning frontal proyeksyasi berilgan, uning o‘z soyasini (ikkinchi proyeksiyasiz) yasash uchun asosining radiusi R bo‘yicha aylana chiziladi, keyin asos markazi O_1'' va S'' nuqtalardan o‘tkazilgan 45° qiyalikdagi chiziqlar kesishib O_2 markazni hosil qiladi, O_2 markaz



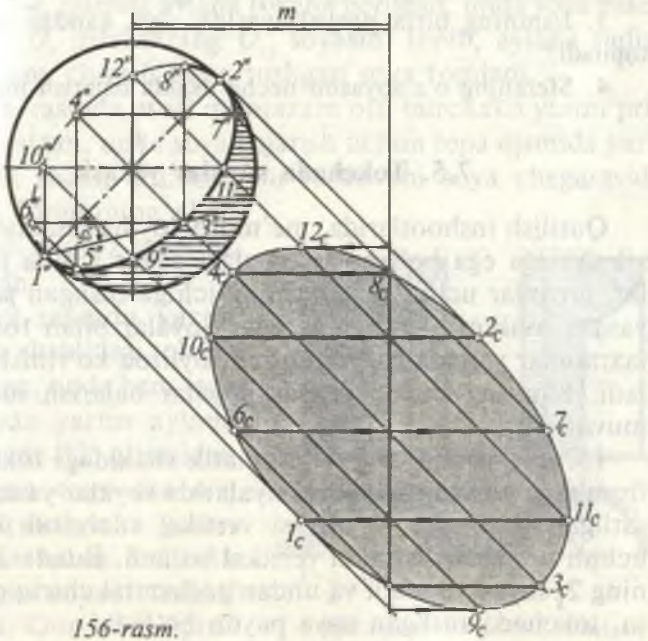
154-rasm.



155-rasm.

bo'yicha $O_2\ O'_1$ masofaga teng bo'lgan R_1 radiusli yoy R radiusli aylana bilan kesishib 1′ 2′ nuqtalarni hosil qiladi, bu nuqtalarni konus asosiga proyeksiyalab 1″2″ nuqtalar topiladi va S'' bilan tutashtirilsa, ana shu chiziqlarning o'ng tomoni konusning o'z soyasini chegaralaydi. 155-rasmda konusda ikkinchi usulda o'z soyasini topish ko'rsatilgan. Unda asos radiusi bo'yicha yarim aylana chizib, eng yuqorigi nuqtadan konus yasovchisiga parallel qilib asosga chiziq tushirilsa, hosil bo'lgan M nuqtadan chap va o'ng tomonlariga 45° qiyalikda chiziqlar chizilsa yarim aylana bilan 1′2′ nuqtalar, ularni konus asosiga tushirilsa 1″2″ nuqtalar hosil bo'ladi. Bu nuqtalarni S bilan tutashtirilib konusning o'z soyasi hosil qilinadi.

156-rasmda fazoda shar (sfera) berilgan, uning o'z soyasi va frontal tekislikka tushgan soyasini yasash ko'rsatilgan. Bunda m — sharning vertikal o'qidan frontal tekislikka bo'lgan masofa. Birinchi navbatda sharning o'z soyasi yasaladi, buning uchun shar markazidan S'' S' nurlar o'tkaziladi. Hosil bo'lgan 1 nuqtadan 45° li chiziqqa 30°



156-rasm.

qiyalikda o'tkazilgan chiziq ikkinchi S'' yo'nalishdagi markazdan o'tgan chiziq bilan kesishib, ikkinchi (10) nuqtani beradi. Undan gorizontal va vertikal chiziqlar o'tkazilsa, a_1 va b nuqtalar hosil bo'ladi. Bunda bir xil masofaga teng kvadratlar masofalarini kerakli chiziqlarga o'lchab qo'yilsa, ellips, ya'ni shar soyasining chegarasi (1, 2, 3, 4 va h.k. 12 nuqtalar) hosil bo'ladi. Sharning tushgan soyasini yasash uchun uning vertikal o'qdan o'ng tomonga m masofani o'lchab, vertikal chiziq chiziladi. Sharning o'z soyasini belgilovchi 1, 2, 3 va h.k. nuqtalardan tushayotgan nurlar bu vertikal chiziq bilan kesishib, o'sha nuqtalarning tushgan (1_c, 2_c, 3_c va h.k. nuqtalar) soyalari topiladi. Ular lekalo yordamida silliq tutashtirilsa, sharning tushgan soyasini tashkil qiladi.

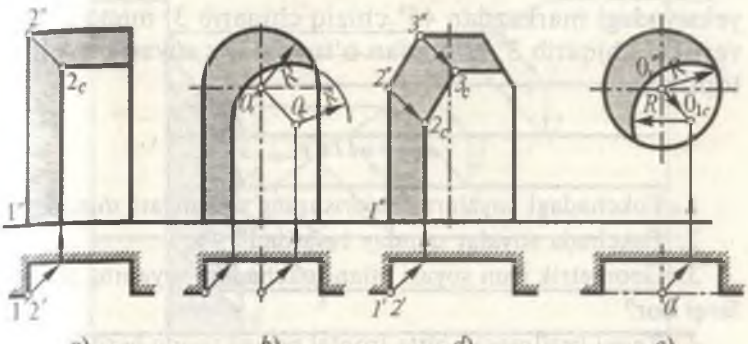
Savollar

1. Geometrik jismlarda o'z va tushgan soyalarining farqi nimada va ular qanday tasvirlanadi?
2. Jismdan tushgan soya qanday topiladi?
3. Jismning bitta proyeksiyasida soya qanday usullarda topiladi?
4. Sferaning o'z soyasini necha usulda bajarish mumkin?

7.5. Tokchada soyalar yasash

Qurilish inshootlarida, me'moriy loyiha fasadlarda turli xil shaklga ega bo'lgan tokchalar, devor ichida taxmonlar, javonlar uchraydi. Ularning ichiga tushgan soyalarni yasash muhim ahamiyatga ega. Soyalar bilan tokchalar, taxmonlar yanada hajmliroq, chiroyliroq ko'rinishda bo'ladi. Shuning uchun ularda soyalar bajarish maqsadga muvofiqdir.

157-*a*, rasmda to'g'ri prizmatik shakldagi tokchaning frontal va gorizontal proyeksiyalarida soyalar yasash ko'rsatilgan. Uning 1, 2 qirrasi vertikal vaziyatda bo'lgani uchun uning soyasi ham vertikal bo'ladi. Bunda 2 nuqtaning 2_s soyasi topiladi va undan gorizontal chiziq o'tkazilsa, tokchada tushgan soya paydo bo'ladi.



157-rasm.

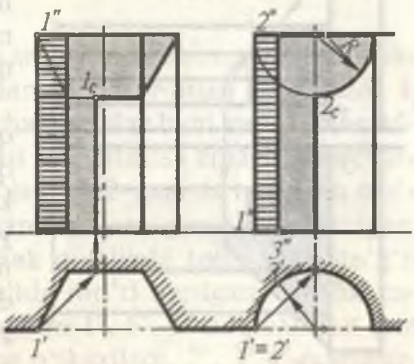
157-*b*, rasmda tepa qismi yarim aylana tokcha berilgan. Bunda aylana markazi O_1ning soyasi aniqlanib yarim aylana radiusi bo'yicha aylana chizilsa soya hosil bo'ladi.

157-*d*, rasmda tepa qismi muntazam olti burchakning yarim shaklidagi tokcha berilgan. Undagi 2″, 3″, 4″ nuqtalarning soyasini topib ularni tutashtirish kifoya.

157-*e*, rasmda aylana tokcha berilgan, unda soya yasash uchun O, markazning O_{1S} soyasini topib, aylana radiusi bilan yoy chizish bilan tushgan soya topiladi.

158-rasmda asosi muntazam olti burchakli yarim prizma berilgan, unda soya bajarish uchun tepa qismida yarim prizma shakli chiziladi bu tushuvchi soya chegarasidir, uchta tomonning chap tomoni esa o'z soyasida bo'ladi.

159-rasmda yarim silindr shaklidagi tokcha berilgan, unda ham tepa qismida yarim aylana chiziladi 1″2″ qirrasidan tushgan soya esa o'q chiziq bo'yicha yarim aylana bilan kesishib tushgan soyani tashkil qiladi. Gorizontal pro-



158-rasm. *159-rasm.*

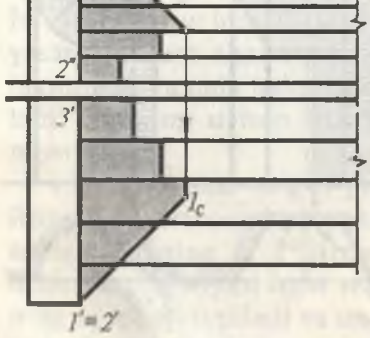
yeksiyadagi markazdan 45° chiziq chiqarib 3′ nuqta undan vertikal chiqarib 3″ nuqtadan o‘tuvchi o‘z soyasi chegarasi topiladi.

Savollar

1. Tokchadagi soyalarni bajarishning ahamiyati nimada?
2. Tokchada soyalar qanday bajariladi?
3. Geometrik jism soyasi bilan tokchadagi soyaning qanday farqi bor?
4. Rejasi berilmagan bitta frontal proyeksiyada berilgan tokchalarda soyalar qanday bajariladi?

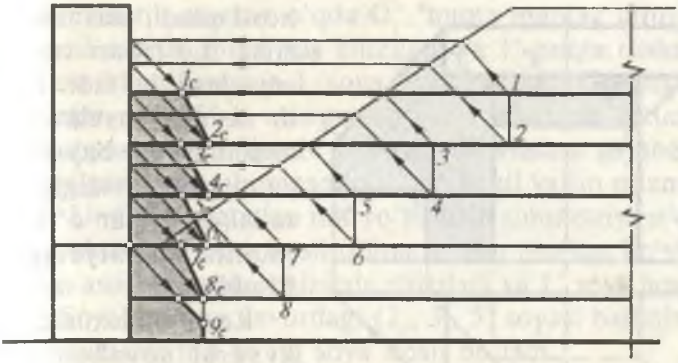
7.6. Bino qismlaridan tushgan soyalar

Bino qismlariga tushayotgan soyalarni to‘g‘ri bajarish loyihani yanada ko‘rkamlashtiradi. 160-rasmda himoya devoridan zina bosqichlariga tushayotgan soyani yasash ko‘rsatilgan, zinaning himoya devori to‘g‘ri to‘rtburchakdan iborat, 1, 2 vertikal qirradan tushayotgan soya zinaning profilini takrorlaydi, to‘siqning 1″2″ qirrasi birinchi bosqichdan uning kengligiga teng (a) masofada joylashgan. Himoya devorining gorizontal qirrasi 1″3″ 45° burchak hosil qilgan nur bilan ustma-ust tushadi. Bu nurning pog‘onali soya bilan kesishgan nuqtasi 1″C himoya devor uchun 1″ning soyasi bo‘ladi.

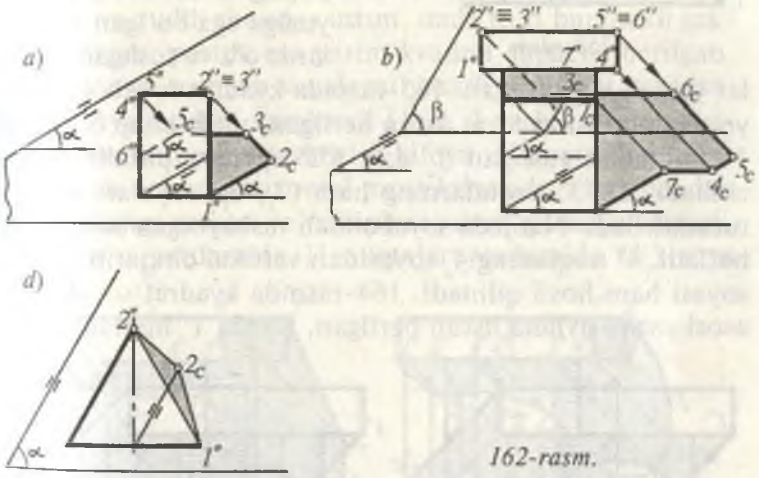


160-rasm.

161-rasmda besh bosqichli zina va yon devori qiya holda u zinaning profil ko‘rinishida ingichka chiziq yordamida tasvirlangan. Zinaning yon himoya devoridan tushgan soyani bajarish, zina yuqori qirrasi 1″ nuqtadan 45° li nur yo‘nalishiga teskari nur yo‘naltiriladi, u



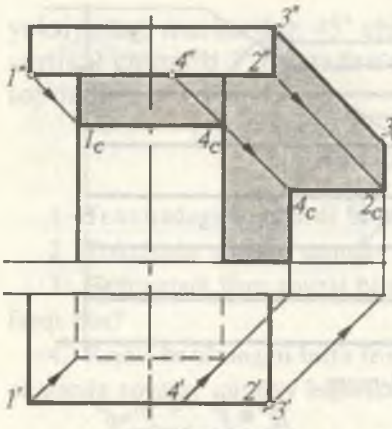
161-rasm.



162-rasm.

devor profili bilan kesishgan joydan gorizontal yo'nalishda 1‴ nuqta topiladi, undan 45°li nur bilan zina ustida 1_c soya topiladi. Qolgan barcha nuqtalar ham xuddi shu usulda bajarilib, nuqtalar soyasi tutashtirilsa zinaga yondevordan tushgan soya hosil bo'ladi. 162-rasmda turli tom mo'rilaridan tomga tushayotgan soyalarni yasash ko'rsatilgan.

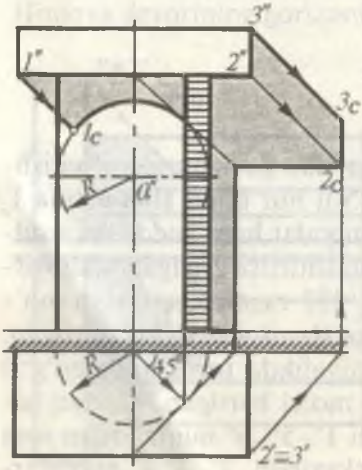
162-*a* rasmda α burchak qiyalikda tom, unda to'g'ri to'rtburchak prizma shaklida mo'ri berilgan. Undan tushayotgan soyani topish uchun 1″, 5″, 6″ nuqtalardan tom qiyaligiga parallel chiziqlar o'tkaziladi, 2″, 3″,4″ nuqtalardan tushayotgan nurlar bilan kesishib (2_c, 3_c, 4_c) soyalarni



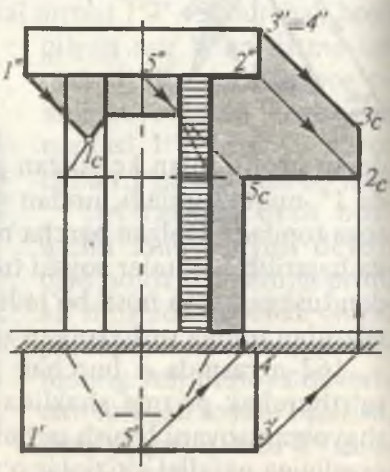
163-rasm.

hosil qiladi, ular tutashtirilsa mo'ridan tushgan soya hosil bo'ladi. 162-*b*, *d*, rasmda soyalar xuddi shu usulda bajariladi, ya'ni tom qiyaligiga parallel chiziqlar o'tkazish muhim ahamiyatga ega hisoblanadi.

Keyingi rasmlarda usti kvadrat soyabon bilan yopilgan turli xil kesim yuziga ega bo'lgan ustunlarda o'z va tushgan soyalar yasash ko'rsatilgan. 163-rasmda kvadrat soyabon bilan yopilgan asosi kvadrat ustun berilgan, unda chap burchak 1″ nuqtadan tushgan 1_c dan 1″2″ qirraga parallel soya tushadi, 2″, 3″ nuqtalarning ham (2_c, 3_c) soyalari topilib tutashtiriladi. Natijada soyabondan tushayotgan soya hosil bo'ladi. 4″ nuqtaning 4_c soyasidan vertikal chiqarib, ustun soyasi ham hosil qilinadi. 164-rasmda kvadrat soyabonli, asosi yarim aylana ustun berilgan, bunda 1″ nuqtadan 45°



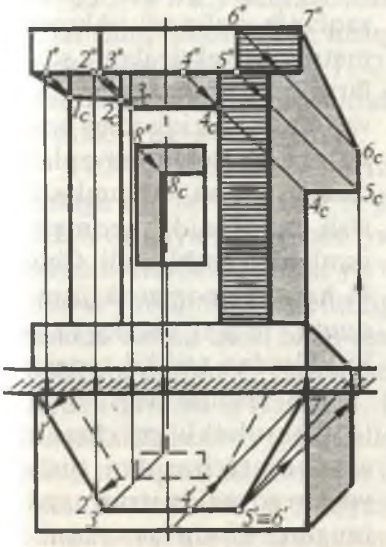
164-rasm.



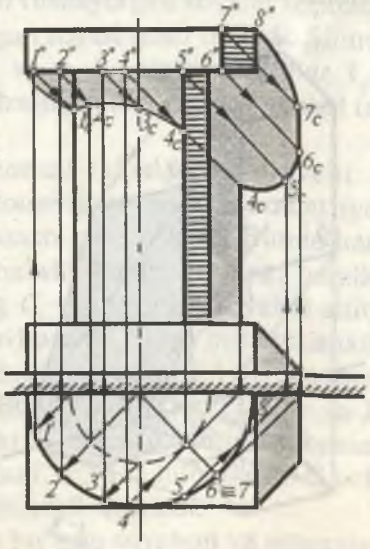
165-rasm.

li nur yo'naltirib markaz o'qda O_1'', nuqta markaz qilinib ustun asosi radiusi bilan yoy chiziladi va 1″ nuqta tushayotgan nur bilan kesishib 1_c soya hosil bo'ladi. Gorizontal proyeksiyaga 45° li urinma chiziq yordamida ustunning o'z soyasi hosil qilinadi. 165-rasmda kvadrat soyabon bilan yopilgan asosi muntazam olti burchakli yarim prizma berilgan. Unda 1″ nuqtadan nur yo'naltirib simmetriya o'qi bilan kesishib O_1'' nuqta hosil qilinadi. Shu markaz bo'yicha ustun asosi ingichka chiziqda chiziladi va $1_c''$ soya hosil bo'ladi. Soyabonning devordagi (2_c, 3_c, 5) soyasi bajariladi. Ular tutashtirilsa to'liq soya hosil bo'ladi.

166-rasmda ham asosi oltiburchakli yarim prizma soyabon va xuddi shunday ustun, unda to'rt burchakli tokcha qurilgan, pastda esa yarim kvadrat supacha berilgan, undan o'z va tushgan soyalarni yasash usuli ko'rsatilgan. Bunda soyabondagi xarakterli (1, 2, 3 va h.k.) nuqtalarining soyasini topib tutashtirish kifoya. 1″ nuqtaning soyasini topish uchun gorizontal proyeksiyasidagi burchakdan S'' yo'nalishga teskari yo'naltirib soyabon qirrasiga chiqarilib 1′ va u yordamida 1″ nuqtalar yordamida (1_c) soya



166-rasm.



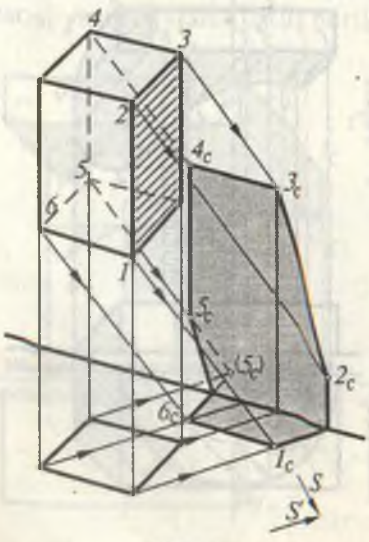
167-rasm.

topiladi. Qolgan 2, 3, 4 va h.k. nuqtalar ham xuddi shu usulda topiladi. U nuqtalar birlashtirilsa soyabon va ustundagi o'zining va tushgan soyalari aniqlaniladi. 167-rasmda esa, asosi yarim aylana soyabon va to'g'ri to'rtburchakli tokchasi bor ustunning soyasini bajarish ko'rsatilgan. Bunda ham soyalar olding qo'llanilgan usullarda bajariladi, faqat unda soyalar sinig to'g'ri chiziqlardan iborat bo'lsa, bunda egri chiziqlar asosida soya hosil bo'ladi. Tokchadagi soya ham oldingi mavzularda ta'riflangandek bajariladi.

7.7. Aksonometriyada soyalar

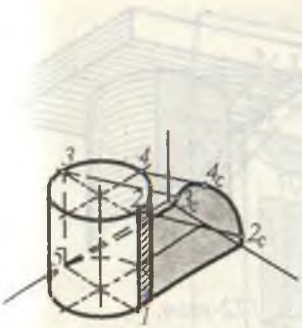
Bino va inshootlar yoki jismlarning aksonometrik proyeksiyalarida soyalar bajarish, uning yaqqolligini, hajmini va relyeflik darajasini yanada oshirib ko'rsatadi. Aksonometriyada nurlarning yo'nalishini qulay vaziyatda ixtiyoriy tanlab olish mumkin, uning albatta gorizontal yoki frontal proyeksiyasi bo'lishi shart.

Proyeksiyada soyalar qanday bajarilgan bo'lsa, aksonometrik proyeksiyalarda ham xuddi shu qonun-qoidalar saqlanib qolinadi. Aksonometrik proyeksiyalarda soyalarni bajarishda aslida nuqta va to'g'ri chiziqlardan boshlash kerak, lekin mavzularni osonlashtirish, umumlashtirish maqsadida geometrik jismlardan boshlanadi. Chunki har bir geometrik jismlar nuqta, to'g'ri chiziq va tekisliklardan tashkil topgan.

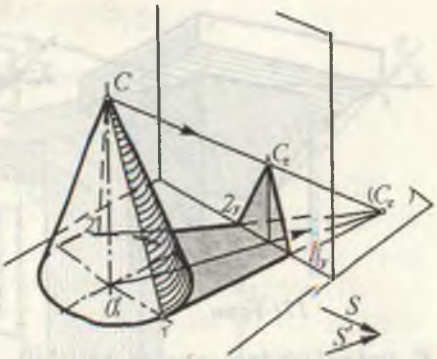


168-rasm.

168-rasmda asosi to'g'ri to'rtburchakli prizmaning aksonometriyasidan tushayotgan soyani bajarish tasvirlangan. Unda avvalambor nur yo'nalishi S, S' qulay va-



169-rasm.



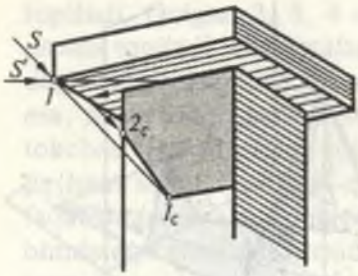
170-rasm.

ziyatda tanlab olinadi. Keyin prizma uchlari 1, 2, 3, 4, va h.k nuqtalardan S nur yo'nalishi bo'yicha nur o'tkazib, ularning soyalari topiladi va tutashtiriladi.

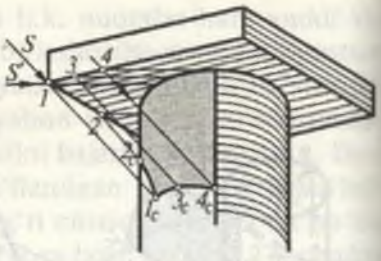
169-rasmda asosi gorizontal tekislikda yotgan to'g'ri doiraviy silindrning aksonometriyasida o'z va tushgan soyalarini yasash ko'rsatilgan. Unda nur yo'nalishi (S, S') tanlab olinadi va unga parallel qilib silindrning xarakterli (1, 2, 3 va h.k.) nuqtalaridan tushayotgan soyalar topiladi. Ular silliq tutashtirilsa, tushgan soyasi hosil bo'ladi. Silindr asosiga urinma chiziq 1, 2 va 4, 5 to'g'ri chiziqlar 1,5, nuqtalarda sinyapti va silindrning yarim soyasi vertikal tekislikka tushib qolmoqda.

170-rasmda asosi gorizontal tekislikda yotuvchi C uchiga ega bo'lgan to'g'ri doiraviy konus aksonometriyasidan tushayotgan soyani yasash ko'rsatilgan. Bunda ham birinchi navbatda nurlar yo'nalishi tanlanadi. Unga parallel nurlar yordamida C uchning C_c va mavhum soyalari aniqlanadi. Konus asosi bilan mavhum (C_c) soya bitta tekislikda bo'lgani uchun C_c nuqtadan konus asosiga 1 va 2 nuqtalardan urinma o'tkaziladi. Bu chiziqlar Y o'qini $1y$ va $2y$ nuqtalarda kesib o'tyapti, ular C_c bilan tutashtirilsa, konusning to'liq soyasi hosil bo'ladi. 1 va 2 nuqtalarni C uchi bilan birlashtirib, o'z soyasi hosil qilinadi.

171-rasmda asosi kvadrat bo'lgan soyabon va ustunning aksonometriyasida soya bajarish ko'rsatilgan. Bunda S va



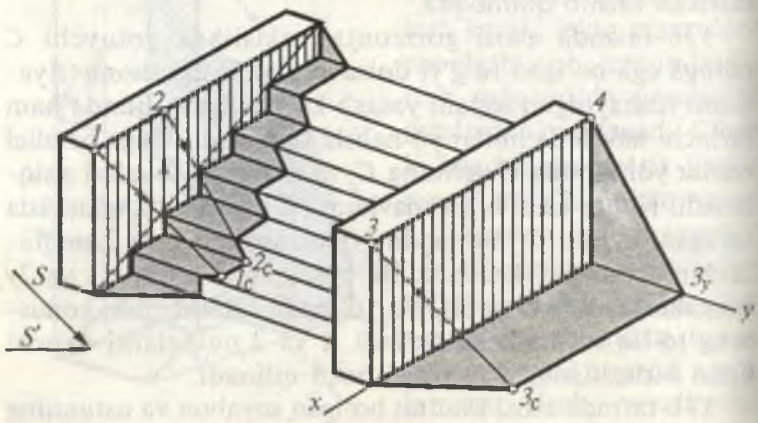
171-rasm.



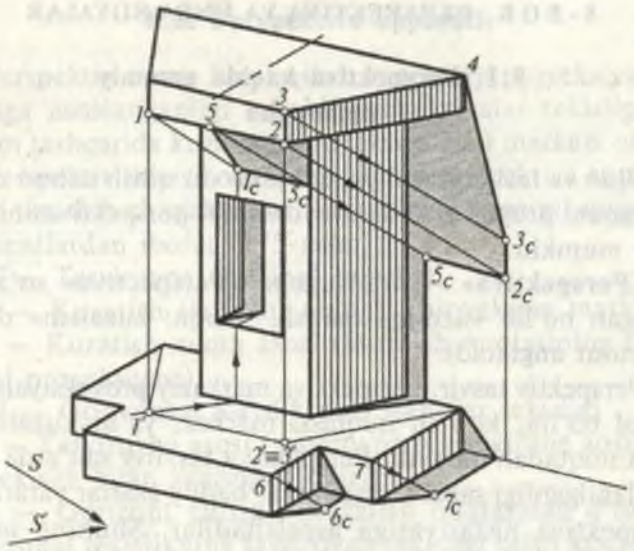
172-rasm.

S' yo'nalishdagi nurlar kesishib, nuqtaning (1_c) soyasini hosil qilyapti, ustunning yuqori qirrasini davom ettirib, soyabon qirrasida 2 nuqta hosil qilinadi va uning soyasi (2_c) ni 1_c bilan tutashtirib, to'liq tushgan soya chegarasi aniqlanadi. 172-rasmda kvadrat soyabon va silindr ustun berilgan, uning soyasi ham xuddi oldingi misoldagidek topiladi, bunda farqi tushgan soya qisman egri chiziq ko'rinishida bo'ladi, chunki to'g'ri chiziqning egri sirtdagi soyasi egri chiziq bo'lishi o'tgan mavzulardan ma'lum.

173-rasmda besh bosqichli zina va himoya devorlarining aksonometrik proyeksiyasida o'zining va tushgan soyalarini bajarish ko'rsatilgan. Bunda nur yo'nalishi aniqlangandan so'ng, 1 nuqtadan unga parallel qilib nur o'tkazib uning 1_c soyasi topiladi, ikkinchi bosqich zinasidan 2



173-rasm.



174-rasm.

nuqtaning soyasini topib zinaning vertikal qismidagi soya yo'nalishi aniqlanadi va ularga parallel qilib boshqa zina bosqichidagi soyalar topiladi. 3 nuqtadan S ga, 3″ nuqtadan esa S' ga parallel nurlar o'tkazib, ularning kesishgan (3_c) soyasi aniqlanadi. 3_c dan X o'qiga parallel qilib 3_y nuqta topiladi va u 4 nuqta bilan tutashtirilsa, zina himoya devorining to'liq soyasi hosil bo'ladi. 174-rasmda ustida muntazam oltiburchakli yarim prizma soyaboni o'rtasida to'g'ri to'rtburchakli tokchasi pastida esa yarim aylana supachasi bor me'moriy maketning aksonometriyasi berilgan. Unda o'z va tushgan soyalarini yasashga misol keltirilgan, uning soyasini yasash uchun har galgiday, aksonometriyada nur yo'nalishi SS' tanlanadi, ana shunga parallel qilib prizmali soyaboning xarakterli (1, 2, 3 va h.k.) nuqtalaridan nurlar o'tkaziladi va ular tutashtirilib tushgan soyasi aniqlanadi. Buning uchun yarim prizma soyabon asosi gorizontal tekislikda chizib olinadi. Unda 1 nuqtadan S ga va 1′ nuqtadan S' ga parallel chiziqlar o'tkazilib, ular kesishgan nuqta 1 nuqtaning 1_c soyasi bo'ladi. Prizma ustun va supachaning o'ng tomoni o'z soyasida bo'ladi.

8 - BOB. PERSPEKTIVA VA UNDA SOYALAR

8.1. Perspektiva haqida umumiy tushuncha

Bino va inshootlarni yaqqol tasavvur qilish uchun uning ortogonal proyeksiyasidan foydalanib, perspektivasini chizish mumkin.

«Perspektiva» — fransuzcha «Perspective» so'zidan olingan bo'lib «uzoqqa qarash, uzoqni kuzatish» degan ma'noni anglatadi.

Perspektiv tasvir, perspektiva markaziy proyeksiyalashga misol bo'lib, ko'rish nuqtasi, markaz, ya'ni kuzatuvchi bitta nuqtadan qaraydi. Perspektiva tasviriy san'atda ko'p qo'llanilganligi sababli, rassomlar badiiy asarlar yaratishda perspektiva nazariyasiga asoslanadilar. Shuning uchun perspektiva tasviriy san'atning grammatikasidir. Arxitektura va muhandislik qurilish ishlarida perspektivadan keng foydalaniladi. Binolar va ularning kompozitsion yechimi perspektivada tekshiriladi va kerakli o'zgartirishlar kiritish mumkin.

Perspektiva bajarilishiga qarab turlicha bo'ladi:

1. **Chiziqli perspektiva** — tasvir asosan vertikal, ba'zan esa og'ma tekisliklarda bajariladi.
2. **Panoramali perspektiva** — tasvir silindr ichki sirtiga bajariladi.
3. **Gumbazli perspektiva** — tasvir gumbaz yoki sharsimon ellipsoid sirtlar ichiga bajariladi.
4. **Teatral perspektiva** — tasvir bir necha ketma-ket sirtlarga bajarilib, teatr sahnasini bezash uchun ishlatiladi.
5. **Havoyi perspektiva** — tasviriy san'atda fazoning chuqurligi va kengligi rang orqali bajariladi.

Shunga o'xshash bir necha perspektivalar mavjud, bulardan eng asosiysi chiziqli perspektiva bo'lib, me'moriy loyihalashlarda juda ko'p ishlatilishi sababli bu chuqur o'rganiladi.

8.2. Perspektiva apparati

Perspektiv tasvir hosil qilish markaziy proyeksiyalash usuliga asoslanganligi sababli proyeksiyalar tekisligi va undan tashqarida kuzatish (proyeksiyalash) markazi olinadi. Perspektiv tasvir hosil qilish uchun perspektiva apparati bilan tanishib chiqish zarur. Perspektiva apparati quyidagi elementlardan iborat (175-rasm):

T — Tasviroyna (kartina) tekisligi.

S — Kuzatish (ko'rish) nuqtasi (proyeksiya markazi).

s — Kuzatish nuqta asosi (kuzatish nuqtasining ortogonal proyeksiyasi).

H — Gorizontal tekislik yoki narsalar tekisligi .

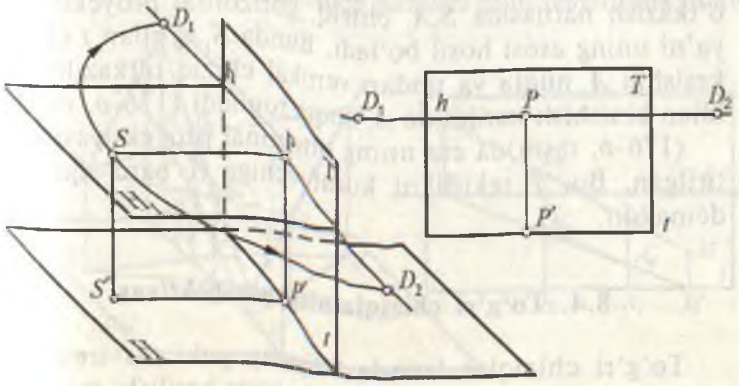
t — Tasviroyna asosi (tasviroyna tekisligining gorizontal tekislik bilan kesishgan chizig'i).

h — Gorizont chizig'i (kuzatish nuqtasidan o'tuvchi gorizontal tekislikning tasviroyna tekisligi bilan kesishgan chizig'i).

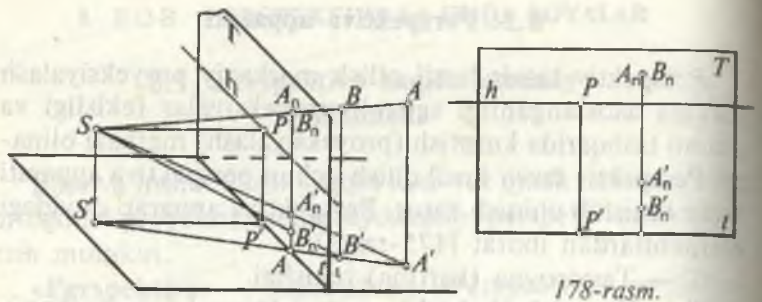
SS' — Kuzatish nuqtasi balandligi.

D_1D_2 — Distansion uzoqdagi nuqtalar taxminan ko'rish nuqtasi S dan tasvir oynagacha bo'lgan masofa (PS) masofaga teng, $PD_1=PS$.

P — Tasviroyna markazi (tasvir oyna tekisligiga kuzatish nuqtasidan tushirilganda perpendikulyar chiziqning shu tekislik bilan kesishgan nuqtasi). Bu ko'rish nuqtasining asosiy chizig'i deyiladi.



175-rasm.



178-rasm.

P' — Markaziy nuqtaning asosi.

SP — Tasviroyna bilan kuzatish nuqtasigacha bo'lgan eng qisqa masofasi (bosh ko'rish masofasi yoki bosh ko'rish nuri).

A — Proyeksiyalanuvchi nuqta (fazoda).

A^1 — Proyeksiyalanuvchi nuqtaning asosi (A nuqtaning gorizontal proyeksiyasi).

A^1_n — A nuqtaning perspektiv tasviri (perspektivasi).

8.3. Nuqtaning perspektivasi

Fazodagi A nuqtaning perspektivasini yasash uchun u kuzatish nuqtasi S bilan tutashtiriladi. Hosil bo'lgan SA chiziq tasviroyna bilan kesishib, A nuqtaning perspektivasi A_1ni hosil qiladi. SA chiziq bo'yicha vertikal tekislik o'tkazish natijasida S_1A_1 chiziq, gorizontal proyeksiyasi, ya'ni uning asosi hosil bo'ladi. Bunda S_1A_1 bilan t chiziq kesishib A_t nuqta va undan vertikal chiziq o'tkazilib SA bilan kesishish natijasida A_t nuqta topiladi (176-*a*, rasm).

(176-*b*, rasm)da esa uning ortogonal proyeksiyasi keltirilgan. Bu, P tekislikni kuzatuvchiga ro'baro' qo'yish demakdir.

8.4. To'g'ri chiziqlarning perspektivasi

To'g'ri chiziqlar fazoda ixtiyoriy yoki tasviroynaga nisbatan parallel, perpendikular holatda berilishi mumkin

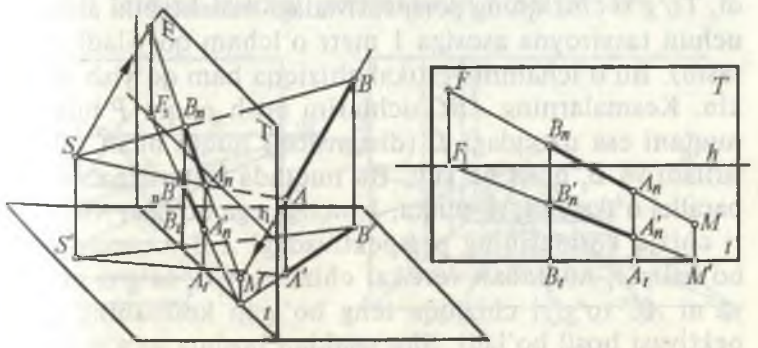
(177-rasmda ixtiyoriy vaziyatdagi AB to'g'ri chiziqning perspektivasini yasash ko'rsatilgan).

Tasviroynaga parallel bo'lmagan har qanday to'g'ri chiziq u bilan albatta biror nuqtada kesishadi. AB to'g'ri chiziqning tasviroyna bilan kesishgan nuqtasi M ikkinchi uchi cheksizlikdagi F fokus nuqtaga borib tutashadi. F nuqtani topish uchun kuzatish nuqtasi S dan AB kesmaga parallel chiziq o'tkaziladi. Bu chiziq tasviroyna bilan kesishib, cheksizlikdagi fokus nuqta F ni beradi. Endi AB kesmaning perspektivasini hosil qilish uchun tasvir oynada MF nuqtalar tutashtiriladi, A va B nuqtalar S nuqta orqali o'tkazilgan chiziq MF to'g'ri chiziq bilan kesishib, A_nB_n nuqtalarni hosil qiladi, bu A_nB_n to'g'ri chiziq kesmasi AB kesmaning perspektivasi deyiladi.

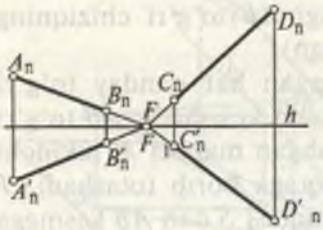
Agar AB to'g'ri chiziqning gorizontal proyeksiyasi A^1B^1 ni ham S nuqta bilan tutashtirilsa, $A^1_nB^1_n$ to'g'ri chiziq kesmasi, ya'ni A^1B^1 ning perspektivasi hosil qilingan bo'ladi. Shunday qilib, fazodagi AB to'g'ri chiziq kesmasi va gorizontal A^1B^1 proyeksiyasining perspektivalari yasaldi.

Agar berilgan AB to'g'ri chiziqqa m to'g'ri chiziq parallel qilib o'tkazilsa, uning fokus nuqtasi ham shu F nuqtada bo'ladi, ($AB//m$). 177-*b*, rasmda uning ortogonal proyeksiyasi tasvirlangan.

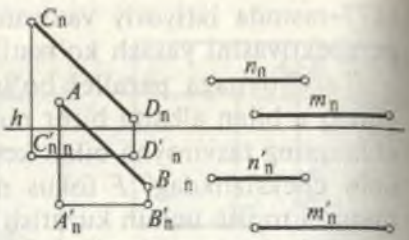
Har qanday yo'nalishdagi to'g'ri chiziqlarning fokus nuqtalari alohida-alohida bo'ladi, buning uchun kuzatish nuqtasidan berilgan chiziqqa parallel qilib tasviroyna bilan



177-rasm.



178-rasm.



179-rasm.

kesishguncha davom ettiriladi. Kesishgan nuqta esa shu to'g'ri chiziqning fokus nuqtasi hisoblanadi. Demak, har qanday holatdagi gorizontal to'g'ri chiziqning fokus nuqtasi gorizont h chizig'ida joylashadi. Bunday paytda F va uning asosi f nuqtalar bitta nuqtada ustma-ust tushadi (178-rasm). Agar berilgan to'g'ri chiziqlar tasviroynaga perpendikular bo'lsa, ular uchun fokus nuqta P hisoblanadi.

Agar berilgan to'g'ri chiziqlar tasviroynaga parallel holatda bo'lsa, ularning perspektivasi ham parallel joylashgan bo'ladi (179-rasm).

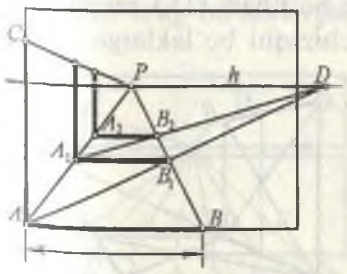
8.5. Perspektiva masshtabi

Perspektivada tasvirlanayotgan narsalar tasviroyna tekisligidan qancha uzoqlashsa, shuncha kichkina bo'lib boraveradi. Haqiqiy kattalik faqat tasviroyna tekisligida bo'ladi. To'g'ri chiziqning perspektivadagi masshtabini aniqlash uchun tasviroyna asosiga 1 metr o'lcham qo'yiladi (180-rasm). Bu o'lchamni vertikal chiziqqa ham qo'yish mumkin. Kesmalarning ABC uchlarini bosh nuqta P bilan, A nuqtani esa uzoqdagi D (distansion) nuqta bilan tutashtiriladi va B_1 hosil bo'ladi. Bu nuqtada tasviroyna asosiga parallel o'tkazilsa, A_1 nuqta, 1 metrga ega bo'lgan AB to'g'ri chiziq kesmasining perspektivadagi A_1B_1 kesmasi hosil bo'ladi. A_1 nuqtadan vertikal chizilsa A_1C_1 to'g'ri chiziq, ya'ni AC to'g'ri chiziqqa teng bo'lgan kesmaning perspektivasi hosil bo'ladi. Shu usuldan boshqa to'g'ri chiziq kesmalarining perspektivasini hosil qilish mumkin.

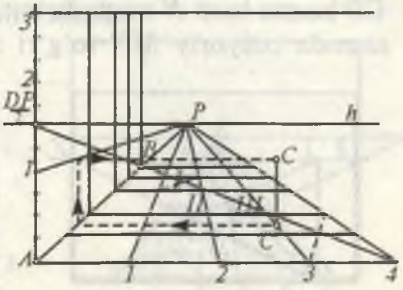
Perspektiva masshtablari bir necha xil bo'lib tasviroyna asosi **kenglik masshtabi**, gorizont chizig'ida kesishadigan har qanday gorizontal chiziqlarni, ya'ni AP chiziqni **chuqurlik masshtabi** va tasviroynaning yon (vertikal) tomonini **balandlik masshtablari** deb yuritiladi.

Perspektiv masshtablaridan foydalanib har xil uzoqlikda joylashgan va turli balandlik, kengliklarda turgan narsalarning o'rnini perspektivada to'g'ri aniqlash mumkin. Bu masalani ma'lum kattalikdagi kvadratlardan perspektiv to'rlar yasash yo'li bilan amalga oshiriladi. Perspektiv to'rlar yasash uchun berilgan masshtabga binoan shartli (masalan, 1 m) kesma tasviri oyna asosining A burchagidan o'lchab (1, 2, 3, 4 va hokazo) nuqtalar bilan belgilanadi va P nuqta bilan tutashtiriladi (181-rasm). Uzoqdagi nuqta D bilan 4 nuqta tutashtirilsa, AP to'g'ri chiziq bilan kesishib 8 m ichkaridagi B nuqta hosil bo'ladi. $B4$ chiziqning $1P$, $2P$, $3P$, $4P$ chiziqlar bilan kesishgan I, II, III nuqtalaridan gorizontal chiziqlar o'tkazilsa P yo'nalgan tomoni, ya'ni uzunligi 2 m ga eni esa 1 m ga teng bo'lgan to'rlar yasaladi. Hosil bo'lgan katak diagonallarining kesishgan joylaridan yana gorizontal chiziqlar o'tkazilsa, 1×1 m li kvadratlar perspektivasi hosil bo'ladi.

A nuqtadan vertikal chiziqlar bo'yicha 1, 2, 3, 4 nuqtalar belgilanib P bilan tutashtirilsa va gorizontaldagi chiziqlarni AB bilan kesishgan joyidan vertikal chiziqlar chiqarilsa, 1×1 m li vertikal kvadrat perspektivasi hosil bo'ladi.



180-rasm.



181-rasm.

C nuqtada turgan jismning balandligini aniqlash uchun C^1 dan AB chiziq tomon gorizontal chiziq yo'naltiriladi, kesishgan joydan 1,5 m li chiziqchaga vertikal chiziq chiziladi. Kesishgan joyidan yana teskariga gorizontal chiziq chiziladi. C^1 nuqtadan chiqarilgan vertikal chiziq gorizontal punktir chiziq bilan kesishib S nuqta, ya'ni jism balandligini hosil qiladi.

8.6. Perspektivada to'g'ri chiziqlarni bo'laklarga bo'lish

Yuqorida aytilganidek perspektiva yasash asosan ikki xilda bajariladi:

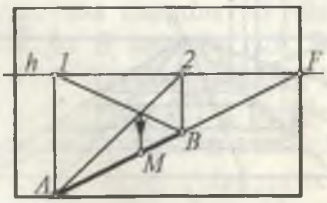
1. Reja va fasad yordamida.

2. Qurilmalarni perspektivada bo'laklarga bo'lish yordamida, chunki ko'p hollarda rejada ayrim jihatlar chizilmaydi.

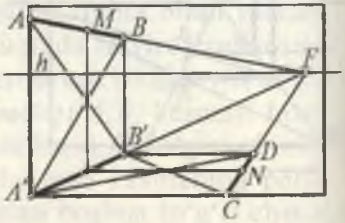
Shuning uchun perspektivada bo'laklarga bo'lish muhim ahamiyat kasb etadi.

Berilgan to'g'ri chiziqlar tasviroynaga parallel bo'lishi yoki bo'lmasligi mumkin.

1. To'g'ri chiziq tasviroynaga parallel bo'lmagan vaziyatda bo'lsa, 182-rasmdagidek bajariladi. Bunda gorizontal AB to'g'ri chiziq berilgan, uni teng bo'lakka bo'lish uchun A va B nuqtalarni gorizont chizig'iga proyeksiyalab 1, 2 nuqtalar hosil qilinadi, to'rtburchakning diagonallari kesishgan nuqtadan vertikal chiziq chiqarilsa, AB kesmani M nuqtada teng bo'lakka bo'ladi. Xuddi shu usulda CD kesma ham N nuqtada teng bo'linadi (183-rasm). 184-rasmda ixtiyoriy MN to'g'ri chiziqni bo'laklarga bo'lish

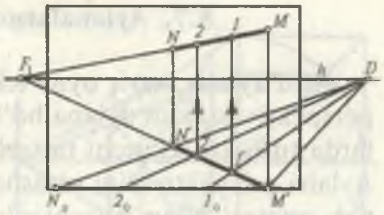


182-rasm.



183-rasm.

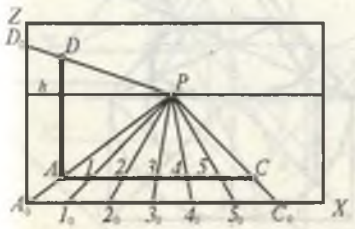
ko‘rsatilgan. Bunda MN to‘g‘ri chizig‘ining haqiqiy kattaligi tasviroyna asosi t da MN_0 masofa kerakli bo‘laklarga ($1_0 2_0$ va hokazo) bo‘linadi, so‘ngra D_1 bilan tutashtiriladi.



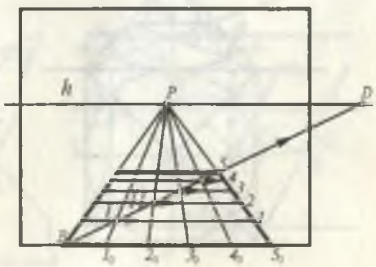
184-rasm.

Natijada bu chiziqlar MN kesmani $1^1 2^1$ nuqtalarda bo‘ladi. Fazodagi AB to‘g‘ri chiziqni ham shu usulda bo‘lish ko‘rsatilgan.

2. To‘g‘ri chiziq tasviroynaga parallel va vertikal vaziyatlarda bo‘lsa, 185-rasmdagidek bajariladi. Bunda AD vertikal, AC gorizontal kesmalar berilgan, ularni bo‘laklarga bo‘lish talab qilinsin. A, D va C perspektivadagi nuqtalar P nuqta bilan tutashtirilsa tasviroyna asosida va unda yotuvchi ZX chiziqlarida $A_0 D_0 C_0$ nuqtalar hosil bo‘ladi. Bu kesmalar berilgan to‘g‘ri chiziqlarning haqiqiy kattaligi hisoblanadi. Ana shu $A_0 D_0$ va $A_0 C_0$ to‘g‘ri chiziq kesmasini 1_0, 2_0, 3_0 va hokazo bo‘laklarga bo‘lib P nuqta bilan tutashtirilsa, bu chiziqlar AC kesmalarni 1, 2, 3 va hokazo bo‘laklarga bo‘ladi. 186-rasmda gorizontal kvadratni teng bo‘laklarga bo‘lish ko‘rsatilgan. Unda kuzatish nuqtasidan tasviroynagacha bo‘lgan asosiy masofa d o‘lchab gorizont chiziqda D nuqta topiladi. Uni kvadratning B nuqtasi bilan tutashtirilsa P ga boruvchi chiziqlar bilan kesishib nuqtalar hosil qiladi. Bu nuqtalardan gorizontal chiziqlar o‘tkazilsa, kvadratning perspektivasi 1, 2, 3 va hokazo teng bo‘laklarga bo‘linadi.



185-rasm.



186-rasm.

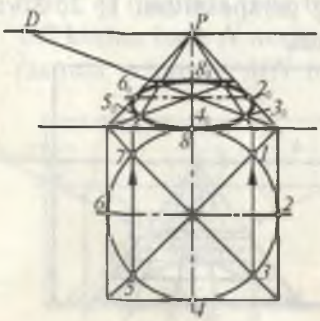
8.7. Aylanalarning perspektivasi

Agar aylana tasvir oyna tekisligiga parallel bo'lsa, uning perspektivasi ham aylana bo'ladi. Bundan boshqa vaziyatlarda turli xil ikkinchi tartibli egri chiziqlar hosil bo'ladi. Aylana perspektivasini yasashda uning har bir nuqtasi kuzatish nuqtasi bilan tutashtirilsa, konus yasovchilari paydo bo'ladi. Konus yasovchilarning tasviroyna bilan kesishish natijasida aylana, ellips, parabola, giperbola egri chiziqlari hosil bo'ladi. Bunday chiziqlarning hosil bo'lishi kuzatish nuqtasidan tasviroynagacha o'tkazilgan parallel holi tekisliklarga bog'liq. O'quv dasturida faqat ellips ko'rinishidagi tasvir yasab o'rganiladi.

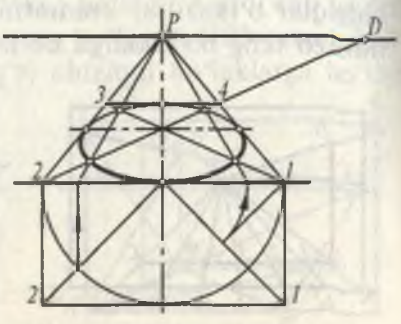
187-rasmda narsalar tekisligida joylashgan aylananing perspektivasini yasash ko'rsatilgan.

Buning uchun aylana sirtida kvadrat yasaladi, diagonallar o'tkazilib aylana bir necha 1, 2, 3 va hokazo bo'laklarga bo'linadi. Bu nuqtalar t chiziqqa proyeksiyalanadi va R nuqta bilan tutashtiriladi. Bu chiziqlarning diagonal t_0D bilan kesishgan nuqtalaridan gorizontal chiziqlar o'tkazilib 1_0, 2_0, 3_0 va hokazo nuqtalar topiladi. Ular silliq tutashtirilsa aylananing perspektivasi hosil bo'ladi.

188-rasmda esa xuddi shu aylananing perspektivasi uning rejasi chizmasdan boshqa usulda bajarilgan. Unda o'rtadagi O_1 nuqta markaz qilib olinadi va O_0 nuqtadan R radiusli aylana yoy chiziladi. U bir necha teng bo'laklarga

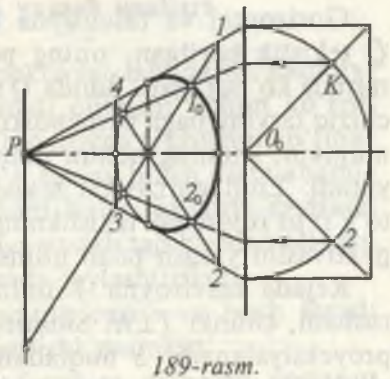


187-rasm.



188-rasm.

bo'linadi, 1 nuqtadan 45° burchak ostida chiqarilgan chiziq bilan diagonal kesishgan K nuqtani tasvir-oyna asosiga proyeksiyalanadi, hosil bo'lgan nuqtalar P bilan tutashtiriladi. Kvadrat diagonallari bilan kesishgan 2, 4 nuqtalar aylananing perspektivadagi kerakli nuqtalari hisoblanadi va bu nuqtalardan foydalanib 6,8 nuqtalar topiladi.

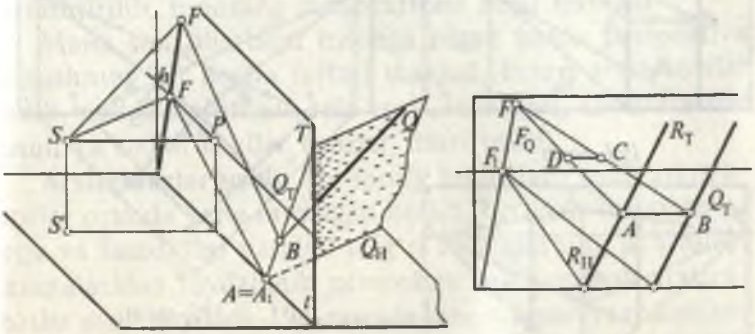


189-rasm.

189-rasmda vertikal holatdagi aylanalarning perspektivasini yasash ko'rsatilgan.

8.8. Tekislikning perspektivasi

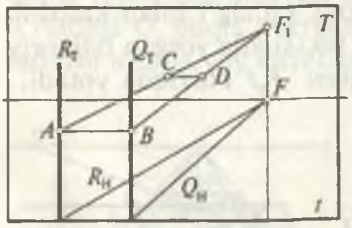
Chizma geometriya fanida tekisliklarni tasvirlashning bir necha usullari ma'lum, shu jumladan izlari bilan ham beriladi. 190-rasmda umumiy vaziyatdagi Q tekislikning perspektivasini yasash ko'rsatilgan. Bunda Q tekislikning gorizontal tekislik bilan kesishgan chizig'i (izi) Q_H ga parallel chiziq o'tkaziladi. Bu gorizont chizig'i bilan kesishib F fokus nuqtasi hosil bo'ladi. Q tekislikda yotgan ixtiyoriy B_c to'g'ri chiziqning fokus nuqtasi F_1F chiziqda yotadi.



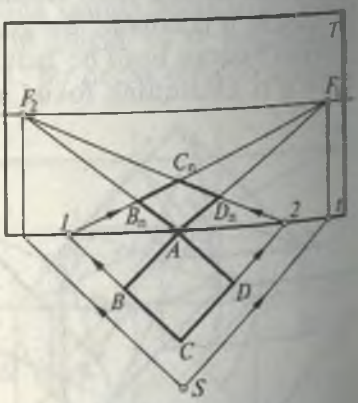
190-rasm.

Gorizontal va tasviroyna tekisliklariga perpendikular Q tekislik berilgan, uning perspektivasini yasash 193-rasmda ko'rsatilgan. Bunda Q tekislikning $Q_{//}$ izi AB to'g'ri chiziq tasviroynaga perpendikular to'g'ri chiziq deb qarash mumkin, shuning uchun uning fokus nuqtasi P nuqtada yotadi. Endi gorizontal tekislikda yotuvchi A, B, C, D to'g'ri to'rtburchak tekislikning rejasi bo'yicha uning perspektivasini yasash talab qilinsin (192-rasm).

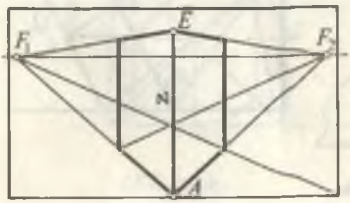
Rejada tasviroyna T uning asosi t bilan ustma-ust tushadi, chunki $T \perp H$. Shuning uchun tasviroyna vertikal proyeksiyalanadi, S nuqtadan $A_1B_1C_1D_1$ to'g'ri to'rtburchak tomonlariga parallel chiziqlar o'tkaziladi va $f_1^1f_2^1$ nuqtalar hosil qilinadi, ularni gorizont chizig'iga proyeksiyalab F_1F_2 fokus nuqtalari topiladi. Tasviroyna asosida yotgan A nuqtani ular bilan tutashtiriladi. To'g'ri to'rtburchakning BC va CD tomonlari ham tasvir oynaga yo'naltiriladi va kesishgan 1^12^1 nuqtalar hosil qilinib, 1 nuqtani F bilan, 2 nuqtani F_2 bilan tutashtirib, A, B, C, D tekislikning perspektivasi ($AB_nC_nD_n$) hosil qilinadi. 193-rasmda shu to'rtburchak ustiga qurilgan vertikal tekisliklarning perspektivasi tasvirlangan. Unda balandlik AE (Z masofa) qirrasi tasviroyna tekislikning o'zida yotganligi sababli haqiqiy kattalikda bo'ladi.



191-rasm.



192-rasm.



193-rasm.

8.9. Perspektiva yasash usullari

Bino va inshootlar perspektivasi ishonarli, haqiqiy, tabiiy ko'rinayotganday chiroyli chiqishi uchun ko'rish nuqtasi, bosh nur (chiziq) va tasviroyna tekisligini ko'rinayotgan narsaga nisbatan to'g'ri tanlay bilish katta ahamiyatga ega. Shuning uchun ham bular ixtiyoriy ravishda tanlanmasdan, balki perspektiva yasash tajribasidan olingan ma'lum qonun-qoidalar asosida joylashtiriladi.

Binoning perspektivasi uning rejasi va bosh fasadi bo'yicha uch bosqichda bajarilishi mumkin.

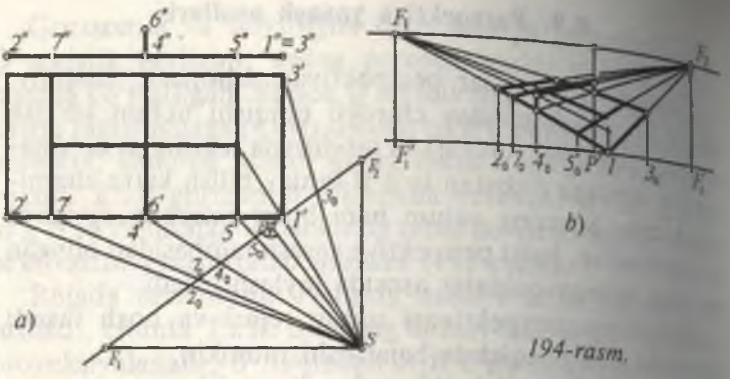
Birinchi bosqichda bino fasadiga nisbatan gorizont chizig'i, rejaga nisbatan esa tasviroyna tekisligi, ko'rish nuqtasi va bosh nuqta tanlanadi. Rejadagi asosiy nuqtalar ko'rish nuqtasi bilan tutashtirilib tasviroyna asosi (izi)ga proyeksiyalanadi. Tasviroyna izida rejadagi to'g'ri chiziqlarning tushish nuqtalari va tasviroyna izlari aniqlanadi.

Ikkinchi bosqichda tasviroyna asosi va gorizont chiziqdan iborat tasviroyna tekisligida topilgan tushish nuqtalari gorizont chizig'iga, to'g'ri chiziqlarning tasviroyna izlari va nuqtalarning proyeksiyalari esa tasviroyna asosiga ko'chiriladi. Bu nuqtalar yordamida bino rejasining perspektivasi yasaladi.

Uchinchi bosqichda yasalgan reja perspektivasiga fasad bo'yicha bino elementlarining balandliklari o'lchab qo'yiladi. So'ngra topilgan nuqtalar ma'lum tartibda tutashtirilib, binoning perspektivasi hosil qilinadi.

Mana shu jihatlarni hisobga olgan holda perspektiva yasashning bir necha turlari mavjud, bular: arxitektorlar usuli, pastga tushirilgan reja usuli, to'r usuli, koordinatalar usuli va radial usullar (nurlar izlari usuli).

Arxitektorlar usuli. Me'moriy loyihalash usuli arxitektorlar orasida keng tarqalgan bo'lib, berilgan inshootning reja va fasadidagi parallel to'g'ri chiziqlarning uchrashuv nuqtalaridan foydalanib perspektiv tasvir yasash arxitektorlar usuli deyiladi. 194-rasmda tennis korti (maydonchasi) berilgan, uning perspektivasini arxitektorlar usulida

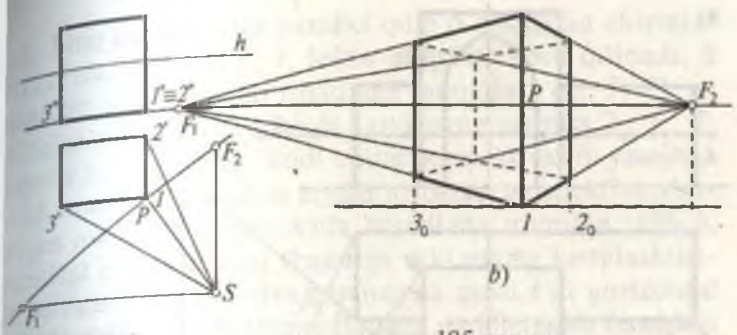


194-rasm.

yasash talab qilinsin, maydoncha rejasidagi nuqtalarini 1,2,3 va hokazolar bilan belgilanadi.

Tasviroyna tekisligini maydonchaning birinchi burchagidan gorizont chiziqqa nisbatan taxminan 35° qiyalikda olinadi. Endi kuzatish nuqtasi *S* tanlanadi, unda ko'rish burchagi taxminan 28°—35° bo'lishi kerak.

Maydoncha tomonlariga parallel qilib *S* nuqtadan chiziqlar o'tkaziladi va F_1, F_2 nuqtalar topiladi. *S* nuqtadan tasviroynaga perpendikulyar o'tkazib, tasviroyna markazi *P* topiladi. Maydoncha rejasidagi 1, 2, 3 va hokazo nuqtalarni *S* nuqta bilan tutashtirib, tasviroyna asosida 2_1, 3_1, 4_1 va hokazo nuqtalar topiladi. Endi ikkinchi bosqichda tasviroyna asosi chiziladi, unga parallel qilib yuqoridan gorizont chizig'i *h* chiziladi. Rejadagi tasviroyna asosi *t* chiziqdagi nuqtalar F_1, F_2, P_1, 2_1, 3_1 va hokazo oralaridagi masofalar o'zgartirmasdan gorizontal holatdagi *t* chiziqqa o'lchab qo'yiladi (194-*b*, rasm). Buni oddiy bir varaq qog'oz parcha yordamida bajarish mumkin. Asos *t* chiziqdagi 1 nuqtani fokus nuqtalar F_1 va F_2, bilan tutashtiriladi, 2_1 nuqtadan vertikal chiziq chiqarib $1F_2$ chiziq bilan kesishgan 2 nuqta topiladi, u F_1 bilan tutashtiriladi. Endi *P* nuqtadan chap tomondagi 4_1, 5_1, 6_1 nuqtalardan ham vertikal chiziq chiqarib F_1 ga tutashuvchi chiziqlar bilan kesishib 4_1, 5_1, 7_1 nuqtalarni hosil qiladi. Endi rejadagi 4',8' chiziqni tasviroyna asosigacha davom ettiriladi, kesishgan nuqta M_0 bo'ladi. Bu nuqta gorizontal *t* chiziqqa



195-rasm.

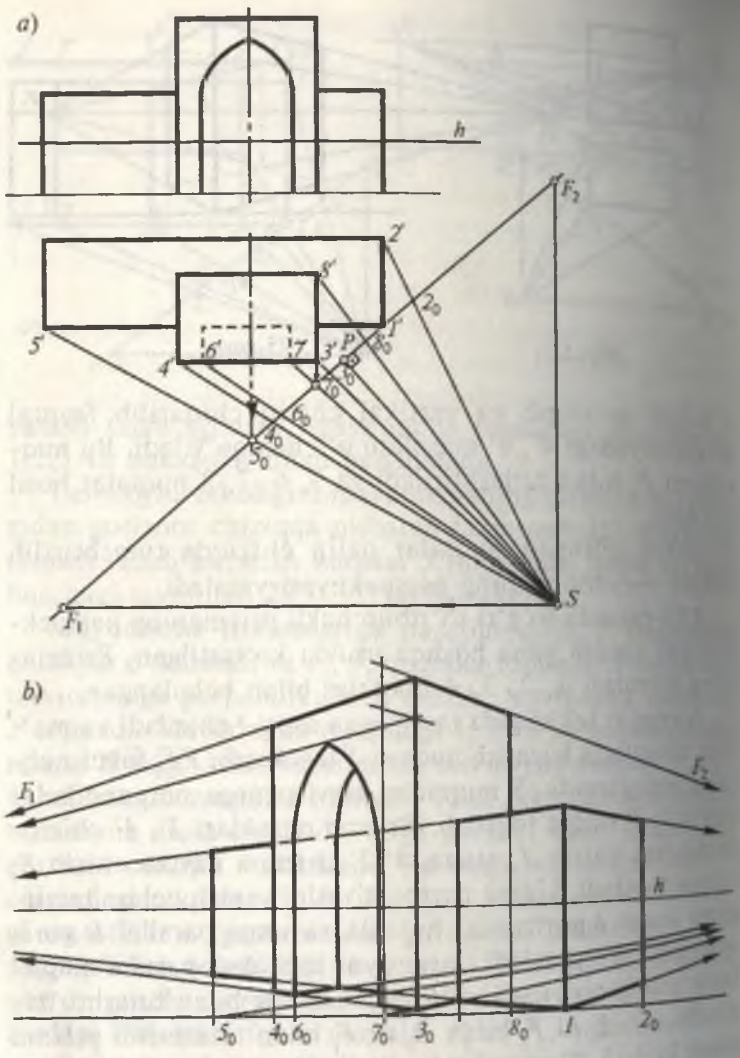
o'lchab qo'yiladi va vertikal chiziq chiqarilib frontal proyeksiyadagi 4′, 6′ masofani o'lchab qo'yiladi. Bu nuqtalarni F_2 bilan birlashtiriladi va 5, 6, 7, 8 nuqtalar hosil qilinadi.

Hosil qilingan nuqtalar qalin chiziqda tutashtirilib tennis maydonchaning perspektivasi yasaladi.

195-rasmda to'g'ri to'rtburchakli prizmaning perspektivasini yasash yana boshqa usulda ko'rsatilgan. Prizmaning qirralari 1, 2, 3, 4 nuqtalar bilan belgilangan.

Narsalar tekisligida tasviroyna asosi *t* chiziladi va ma'lum masofada kuzatish nuqtasi *S* tanlanadi. F_1F_2 fokus nuqtalar aniqlanadi. *S* nuqtadan tasviroynaga perpendikular tushirib *P* nuqta topiladi. Prizma rejasidagi 3′, 4′ chiziqni davom ettirib A_0 nuqta, 4′,2′ chiziqni davom ettirib B_0 nuqta topiladi. Uning perspektivasini yasash uchun tasviroyna asosi *t* gorizontal holatda va unga parallel *h* gorizont chizig'i yasaladi, tasviroyna asosidagi barcha nuqtalar o'lchab qo'yiladi va F_1, F_2 nuqtalar bilan tutashtiriladi. Bunda A_0 ni F_2 bilan B_0 ni F_1 bilan tutashtirib prizma asosi 1, 2, 3, 4 nuqtalar topiladi, ulardan vertikal chiziqlar chiqarilib 1 nuqtadan chiqqan qirraga prizma balandligi o'lchab qo'yiladi. Uni F_1, F_2 nuqtalar bilan tutashtirib prizmaning perspektivasi hosil qilinadi (195-*b*, rasm).

196-*a*, rasmda binoning shartli fasadi va rejasi berilgan, uning perspektivasini qurish talab qilinsin. Bu ikki bosqichda bajarilishi mumkin:



198-rasm.

Fasadda gorizont chizig'i *h* tanlanadi, rejada 1, 2, 3 va hokazo nuqtalar belgilaniladi, kuzatish nuqtasi yaqin burchak (1, 6) dan tasviroyna asosi o'tkaziladi, ko'rish nuqtasi *S* belgilanadi. *S* dan tasviroyna asosi *t* ga perpendikular tushirib bosh chiziq chiziladi va *P* nuqta aniqla-

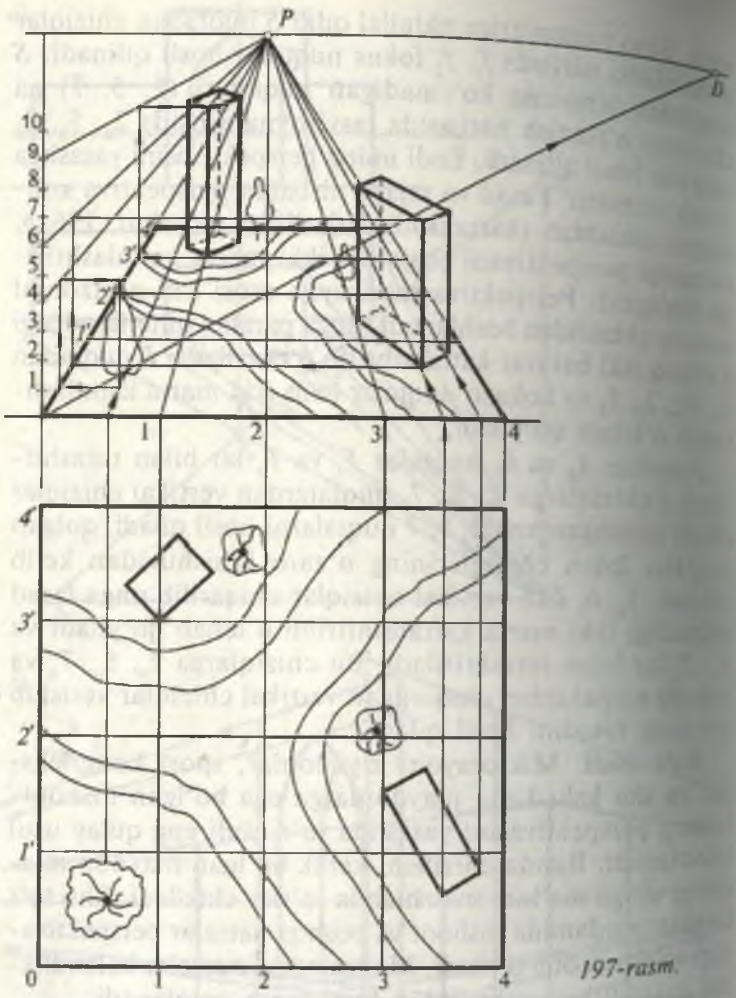
nadi. Bino tomonlariga parallel qilib S nuqtadan chiziqlar o'tkaziladi, natijada f_1, f_2 fokus nuqtalar hosil qilinadi. S nuqtadan binoning ko'rinadigan nuqtalari (2, 5, 7) ga chiziqlar o'tkazish natijasida tasviroyna asosida 2_0, 5_0, 7_0 nuqtalar hosil qilinadi. Endi uning perspektivasini yasashga o'tish mumkin. Fasad va rejaga nisbatan perspektiva xohlangan masshtab (kattalik)da bajarilishi mumkin. 196-*b*, rasmdagi perspektivani (bajarish ikki marta kattalashtirilib berilgan). Perspektiva tasviroyna asosi t ni gorizontal holatda chizishdan boshlanadi, unga parallel qilib fasaddagi h chiziq ikki baravar kattalashtirib o'tkaziladi, P nuqtadan F_1, F_2, 2_0, 5_0 va hokazo nuqtalar ham ikki marta kattalashtirilib o'lchab qo'yiladi.

Asosdagi 1_0 va 6_0 nuqtalar F_1 va F_2 lar bilan tutashtiriladi u chiziqlarga 2_0, 5_0, 7_0 nuqtalardan vertikal chiziqlar chizib tutashgan joyi 2, 5, 7 nuqtalarni hosil qiladi, qolgan nuqtalar fokus chiziqlarining o'zaro kesishuvidan kelib chiqadi. 1_0, 6_0 dan vertikal chiziqlar chiqarilib unga fasad balandligi ikki marta kattalashtirilib o'lchab qo'yiladi va F_1, F_2 lar bilan tutashtiriladi. Bu chiziqlarga 2_0, 5_0, 7_0 va hokazo nuqtalardan chiqarilgan vertikal chiziqlar kesishib binoning fasadini hosil qiladi.

To'r usuli. Mikrorayon, xiyobonlar, sport komplekslari va shu kabi katta maydonlarga ega bo'lgan inshootlarning perspektivasini yasashda to'r usuli eng qulay usul hisoblanadi. Bunda chizilishi kerak bo'lgan maydon rejasining ustiga ma'lum masshtabda to'rlar chiziladi. Shu to'r kataklar yordamida inshoot va boshqa narsalar perspektivadagi to'rlarga olib o'tiladi. Manzaradagi narsalar balandliklari balandlik masshtabidan foydalanib aniqlanadi.

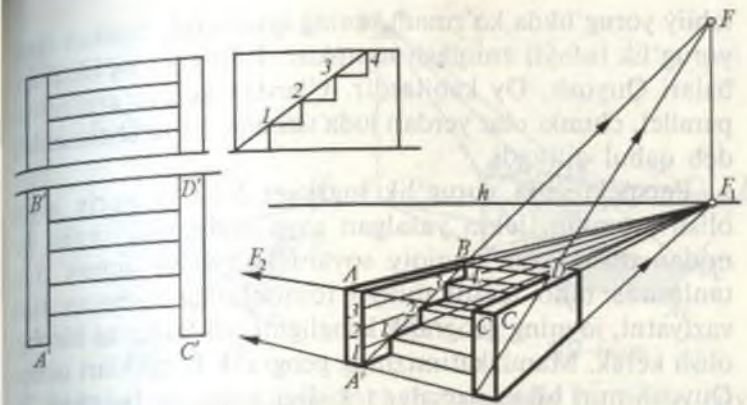
197-rasmda istirohat bog'i berilgan, uni to'r usulda perspektivasini yasash talab qilinsin. Buning uchun reja ustiga kataklar chiziladi 1, 2, 3, 4 va hokazo. Ko'rish nuqtasini aylana markazidan o'tuvchi chiziq bo'yiga 6 metr balandlikda tanlanadi. Uning yuqorisida to'rning perspektivasi yasaladi.

Rejadagi shakllarni qaysi katakda qanday joylashganligiga qarab perspektiva katagiga xuddi shunday shaklda ko'chirib chiziladi. Tasvirlanayotgan maydoncha ustiga



197-rasm.

chizilgan kvadratlar qancha kichik bo'lsa, uning perspektivasi shuncha aniqlikda chiqadi. Rejadagi chap tomondagi 5 metrli daraxtlar balandlik masshtablari bo'yicha aniqlanadi. O'ng tomondagi daraxt 4 metr, u ham balandlik masshtabi bo'yicha topiladi. Uni bajarish bosqichlari strelka bilan ko'rsatiladi. Hosil qilingan perspektiva shartli ranglarda bajarilsa, chizma yanada chiroyli, tabiiy muhitga yaqin chiqadi.



198-rasm.

8.10. Zinaning perspektivasi

Zinalarning perspektivasini yasash uchun perspektiva masshtabi usullaridan ko'proq foydalanib bajariladi. Masalan, ma'lum o'lchamlarga ega bo'lgan 4 bosqichli zina berilgan bo'lsin. Uning perspektivasini yasash 200-rasmda ko'rsatilgan.

Berilgan asos *a*, *b*, *c*, *d* to'rtburchakdan iborat va *ABCD* 1:2 nisbat qiyalikda 4 bosqichli zina yasash uchun *AB* va *DC* nuqtalarning F_3 fokus nuqtasi topiladi, bu F_2 dan o'tuvchi vertikal chiziqda joylashadi. Endi *A'* kesmani teng 4 bo'lakka bo'lish uchun *A* dan o'tuvchi vertikal chiziqni teng 4 bo'lakka bo'lish kerak bo'ladi. Bunda *A'* nuqtani *B* nuqta bilan tutashtiruvchi chiziq F_3 nuqtani hosil qiladi, qolgan 1, 2, 3, 4 nuqtalar ham F_1 bilan tutashtiriladi. Bu chiziqlar A^1, F_3 chiziqni bo'laklarga bo'ladi, demak har bir bo'laklardan vertikal chiziqlar chizilsa, *AB* chiziqni teng bo'laklarga bo'ladi. Hosil bo'lgan nuqtalarni F_1, F_2 fokus nuqtalar bilan tutashtiriladi, bu zina bosqichlarini hosil qiladi.

8.11. Perspektivada soyalar yasash

1. Nuqta va to'g'ri chiziqning soyasini yasash. Tabiatdagi har qanday narsa, buyum yoki bino va inshootlar

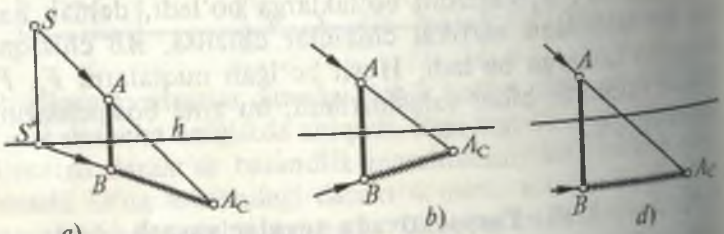
tabiiy yorug'likda ko'rinadi, uning qiyofasini, hajmini faqat yorug'lik tufayli aniqlash mumkin. Tabiiy yorug'lik manbalari Quyosh, Oy kabilardir. Ulardan kelayotgan nurlar parallel, chunki ular yerdan juda uzoqda, ya'ni cheksizlikda deb qabul qilinadi.

Perspektivada yorug'lik markazi S ni ixtiyoriy joyda olish mumkin, lekin yasalgan soya loyihalanayotgan binodan tushadigan haqiqiy soyani ko'rsatish uchun S ni tanlashda bino fasadi dunyo tomonlariga nisbatan turli vaziyatni, joyning geografik kengligini, yil fasllarini hisobga olish kerak. Mamlakatimizning geografik kengliklari uchun Quyosh nuri bilan narsalar tekisligi orasidagi burchak 30° dan 45° gacha olinishi mumkin, ertalab va kechga yaqin hamda o'rta kengliklarda 30° atrofida, janubiy kengliklar va peshin vaqtida esa 45° atrofida olinishi tavsiya etiladi. Umuman bu burchakni 35°, 16' qilib olish aniqroq bo'lib, yerga tushayotgan yorug'lik nuri yerda turgan kubning diagonaliga parallel bo'ladi[1].

Quyoshning o'z perspektivasi S gorizont chizig'idan yuqorida bo'ladi, asosi esa S' hamma vaqt gorizont chizig'ida bo'ladi. Endi vertikal chiziqning tushayotgan soyasini yasash ko'rib chiqiladi.

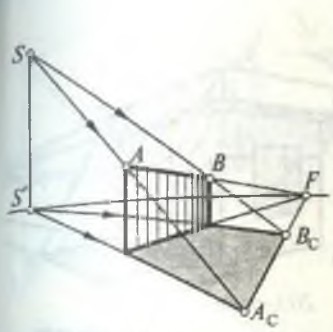
199-*a*, rasmda Quyosh P nuqtadan chap yuqori tomonda joylashgan. Kuzatuvchiga vertikal AB chiziqning o'ng tomonida soya ko'rinadi.

199-*b*, rasmda Quyosh kuzatuviga nisbatan orqada chap tomonda, soya esa o'ng oldi tomoniga tushyapti.

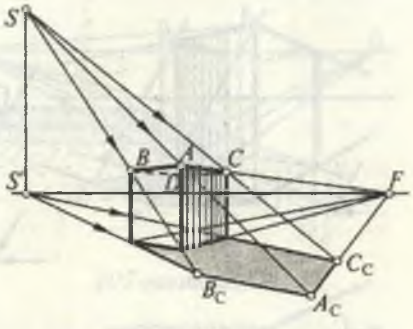


199-rasm.

[1] *I. Rahmonov.* «Perspektiva», T., «O'qituvchi», 1993, 159-bet.



200-rasm.



201-rasm.

199-*d*, rasmda Quyosh chap tomonda yuqorida, soya gorizont chizig'iga parallel holda tushyapti.

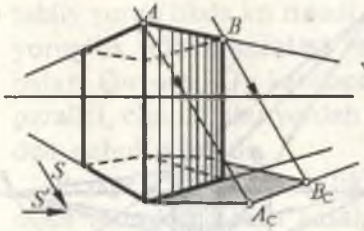
200-rasmda *ABCD* tekislikning perspektivasi berilgan, unda soya bajarish uchun gorizont tepasida Quyosh *S* uning *S'* asosi gorizont chizig'ida tanlab olinadi. *SA*, *SB* va *S'CS'D* nurlar o'tkaziladi va ularning kesishgan nuqtalari A_c, B_c aniqlanadi. Natijada CDA_cB_c tushgan soya hisoblanadi. *ABCD* tekislikda esa o'z soyasi hosil bo'ladi. Ular qanday narsaga nur tushganda o'zining va tushgan soyalari hosil bo'ladi, o'zining soyasiga nisbatan tushgan soya to'qroq rangda bo'ladi.

201-rasmda *ABCD* to'g'ri burchakli prizma berilgan. Orqa chap tomondan nur tushyapti, soyasini yasash uchun *ABC* nuqtalar *S* bilan, *A'B'C'* nuqtalari *S'* bilan tutashtirilsa, ular kesishib $A_cB_cC_c$ nuqtalar, ya'ni *ABC* larning soyasini, ularni o'zaro va *DC* bilan tutashtirilsa prizmaning tushgan soyasini hosil qiladi.

202-rasmda xuddi shu prizma faqat nurlar yo'nalishi ixtiyoriy berilgan. Bunda ham berilgan nurlarga parallel qilib *ABC* va $A^1B^1C^1$ lardan nurlar o'tkazilsa ular kesishib ($A^1A_cB_cC_cC^1$) prizmaning soyasini paydo qiladi.

O'quv topshiriqlarida nurlar ixtiyoriy faqat S^1 gorizont chizig'iga parallel qilib olinadi, ana shunda bajariladigan soyalar eng yaxshi vaziyatda bo'ladi.

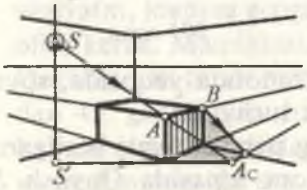
203-rasmda matbuot do'koni (kioska) berilgan. Undan tushayotgan va o'zining soyasini yasash uchun *SS'* nurlar yo'nalishi belgilab olinadi. Yuqorida ko'rsatilgan



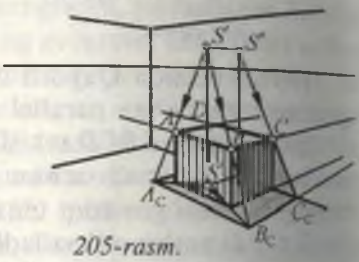
202-rasm.



203-rasm.



204-rasm.



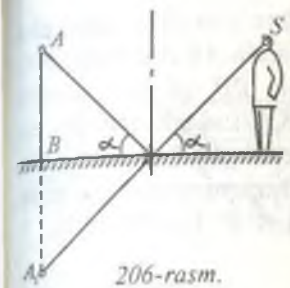
205-rasm.

misollar kabi kioskaning eng asosiy nuqtalari, qirralari tanlanib olinadi va ulardan yerga tushayotgan soyasi topiladi. Bu nuqtalar o'zaro tutashtirilsa kioskaning yerga tushgan soyasi hosil bo'ladi.

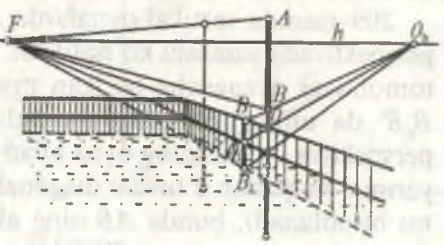
2. Sun'iy yoritishda soyalar. Yonib turgan lampadan tushayotgan nurlar narsalarning soyalarini devorlarga tushiradi. 204-rasmda sandiqning *ABCD* tomonidan tushayotgan soya tasvirlangan. 205-rasmda sandiqdan devorga va polga tushayotgan soya tasvirlangan. Sandiqning usti *ABCD* to'g'ri to'rtburchakdan iborat, bu yerda nuqtalarning soyasini topib tutashtirilsa kifoya.

8.12. Buyum aksining perspektivasi

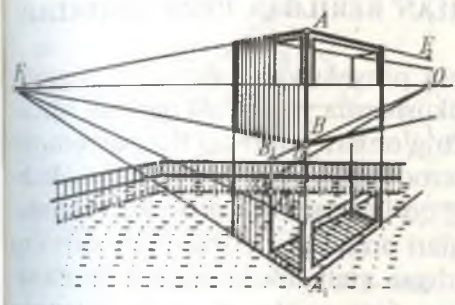
Narsalarning suv yoki ko'zgu sathida aksining prespektivasini yasash xuddi simmetrik tasvirlar yasashga o'xshaydi, unda simmetrik o'q aks etuvchi tekislikda bo'ladi. Fizika fanidan ma'lumki, nurning tushish burchagi, aks etish burchagi α ga teng. Bunda *S* nuqtadan qaralsa, A_1 mavhum nuqta, ya'ni *A* nuqtaning aksi bo'lib ko'rinadi



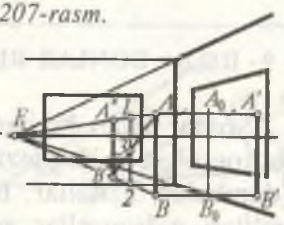
206-rasm.



207-rasm.



208-rasm.



209-rasm.

(206-rasm). Bino va inshootlar daryo va ko'llar sohilida joylashganda, ularning suvdagi aksi xuddi shu qonuniyatga asosan qo'llaniladi. Shunday hollarda loyihalanayotgan inshootlar suvdagi aksining perspektivasini yasashga to'g'ri keladi.

207-rasmda suv qirg'ogida AB vertikal to'g'ri chiziq berilgan, uning aksini yasash uchun, gorizont chizig'ida biror O_h nuqta tanlanib, B bilan tutashtirilsa, qirg'oq qirrasida B_1 nuqta hosil bo'ladi. Bu nuqtadan vertikal chiziq tushirilsa, suv sathi bilan kesishib O nuqtani hosil qiladi. Endi B_1O_1 masofani O_1 dan pastga o'lchab B_2 topiladi. F_1 bilan tutashtirilsa, qirg'oq aksi paydo bo'ladi. O_1 nuqta O_h bilan tutashtirilsa, AB ning davomi bilan kesishib O nuqtani beradi. OA masofani O dan pastga o'lchab qo'yib, A_1 nuqta topiladi. Hosil bo'lgan OA_1 to'g'ri chiziq AB ning suvdagi aksi hisoblanadi. 208-rasmda binoning aksi tasvirlangan.

209-rasmda vertikal oynalarda AB to'g'ri chiziqning aksi perspektivada yasalishi ko'rsatilgan. Bunda AB chiziqdan o'ng tomondagi oynagacha bo'lgan masofa BB_0 ga teng masofa B_0B^1 da uning aksi hosil bo'ladi. Oldindagi oynada esa perspektiva chizig'ining oyna bilan kesishgan 1, 2 chiziqning yarmi 3 nuqtadan o'tuvchi diagonal chiziqning asosiy o'lchami hisoblanadi, bunda AB ning aksi $A''B''$ hisoblanadi.

9-BOB. SONLAR BILAN BERILGAN PROYEKSIYALAR

Sonlar bilan berilgan proyeksiyalar asosan topografik kartografiya va geodezik ishlarda yer sirtida qurilish ishlari (dambalar, kanallar, to'g'onlar, temir yo'llar, avtomobil yo'llari, gidrouzellar, aerodromlar va h.k.lar) ni loyihalashda va tasvirlashda keng qo'llaniladi. Bu proyeksiya yordamida gorizontal chiziqlari orqali tasvirlangan yer sirtining relyefi va unda bajariladigan muhandislik ishlari tasvirlanadi. Chizma geometriya fani sonlar bilan belgilangan proyeksiyalash usulining nazariy tomonlarini geometrik nuqtai nazaridan o'rganadi va bu usulning muhandislik ishlariga tatbiqini ko'rsatadi.

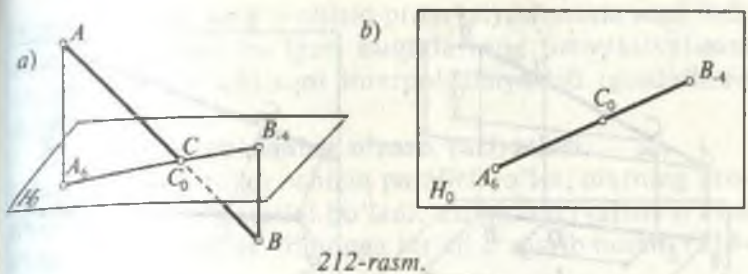
Boltiq dengizi suvining sathi nol darajali gorizontal proyeksiyalar tekisligi deb qabul qilingan va H_0 deb yoziladi[1].

9.1. Nuqta va to'g'ri chiziqning sonli proyeksiyasi

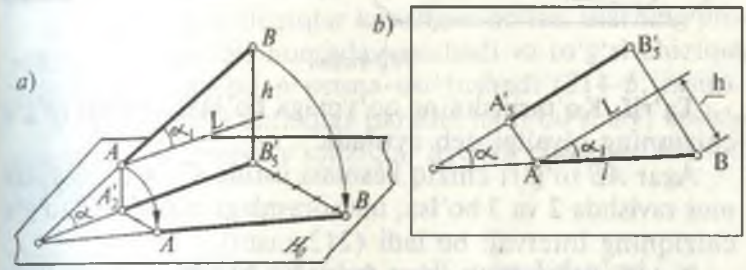
Sonli proyeksiya usulida nuqta, to'g'ri chiziq, tekislik va narsalarning proyeksiyasini faqat bitta gorizontal N_0 tekislikda tasvirlanadi, uning balandlik masofasi esa son bilan yoziladi (210-*a*, rasm). Masalan, A_3 yozilgan bo'lsa, H_0 tekislikdan 3 metr balandlikda deb tushuniladi, bu musbat ishorani anglatadi-yu, lekin ishora yozilmaydi. Agar nuqta nol darajadagi (H_0) tekislikdan pastda joylashgan bo'lsa minus (−) ishora bilan yoziladi (210-*b*, rasm).

---

[1] *Ш. Муродов* ва бошқалар. «Чизма геометрия курси». Т. «Ўқитувчи», 1988, 328-бет.



212-rasm.



211-rasm.

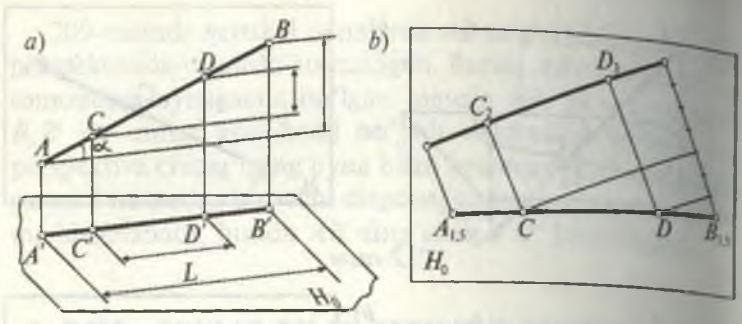
AB chiziqning H_0 tekislik bilan kesishgan C nuqtasi nolinchi darajadagi nuqta (C_0) deyiladi.

To'g'ri chiziqning qiyaligi va intervali. To'g'ri chiziq har doim ikki nuqtasining sonlar bilan belgilangan proyeksiyalari asosida beriladi yoki tasvirlanadi. Masalan, A_2 va B_5 nuqtalar berilgan bo'lsa, AB to'g'ri chiziq kesmasini aniqlaydi (211-*a*, rasm). To'g'ri chiziqning nol darajadagi tekislikka qiyaligi tgα bilan, qiyalik esa i harfi bilan belgilanadi. Demak AB to'g'ri chiziqning qiyaligi tgα ga teng:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BB' - AA'}{A'B'} = \frac{h}{L}$$

Bundan xulosa qilib aytish mumkinki, to'g'ri chiziq qiyaligi to'g'ri chiziq nuqtalari ayirmasining, uning proyeksiyasi uzunligi bo'linmasiga teng. Yana aniqroq qilib aytganda, balandlik (h) ning AB proyeksiya uzunligi nisbatiga teng (211-*b*, rasm)

$$i = h/L$$



212-rasm.

Ta'rif. Ko'tarilishning qo'ymaga bo'lgan nisbati to'g'ri chiziqning qiyaligi deb aytiladi.

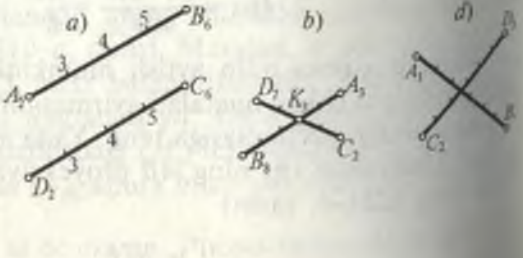
Agar *AB* to'g'ri chiziq kesmasi ustida *C* va *D* nuqtalari mos ravishda 2 va 3 bo'lsa, ular orasidagi masofa *AB* to'g'ri chiziqning intervali bo'ladi (212-rasm).

Ta'rif. Balandliklarning farqi, bir birlikka teng bo'lgan ikki nuqtaning gorizontal proyeksiyalari orasidagi masofa to'g'ri chiziqning intervali deyiladi (212-*b*, rasm).

To'g'ri chiziqlarni darajalash (gradullash). To'g'ri chiziqni interpolyatsiyalash kesmani proporsional bo'laklarga bo'lish qonuniyatlariga amal qilgan holda bajariladi. Masalan, $A_{5,3}$ va $B_{8,9}$ nuqtalarning proyeksiyalari bilan berilgan biror *l* to'g'ri chiziqni interpolyasiyalash talab qilinsin (213-rasm). Demak, $A_{5,3}$ nuqtadan ixtiyoriy *l* to'g'ri chiziq chizib, $A_{5,3}$ nuqtadan boshlab 0,7 o'lchanadi, keyingi sonlar 1 birlik bo'lib, oxirgi birlik 0,9 birlik bo'lib qoladi. Oxirgi nuqtani $B_{8,9}$ bilan tutashtirib qolgan nuqtalardan unga parallel chiziqlar chizilsa *AB* to'g'ri chiziq gradul-



213-rasm.



214-rasm.

lanadi. Demak, to'g'ri chiziq proyeksiyasi ustida sonli belgilari butun son bo'lgan nuqtalarning proyeksiyalarini aniqlash to'g'ri chiziqni interpolyatsiyalash (gradullash) deyiladi.

Ikki to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyatlari.

1. Agar ikki to'g'ri chiziq parallel bo'lsa, ularning proyeksiyalari ham parallel bo'ladi, uning intervallari o'zaro teng va nuqtalari bir tomonga bir xil o'zgarib boradi (214-*a*, rasm).

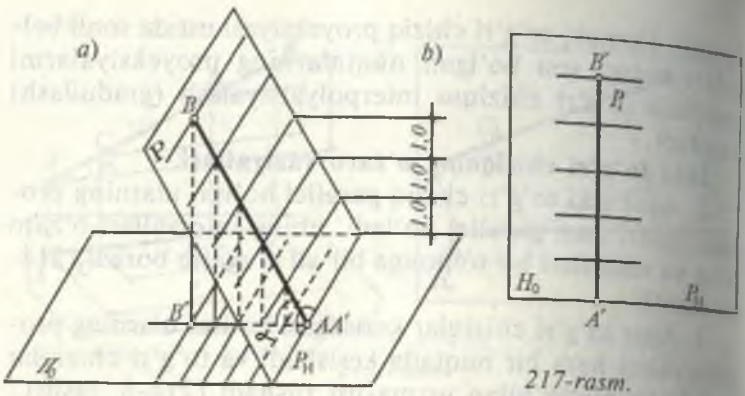
2. Agar to'g'ri chiziqlar kesishgan bo'lsa, ularning proyeksiyalari ham bir nuqtada kesishadi va to'g'ri chiziqlar kesishgan nuqta bilan ustma-ust tushadi (214-*b*, rasm).

3. Agar to'g'ri chiziqlar parallel ham bo'lmay, kesishmagan bo'lsa, bunday chiziqlar ayqash chiziqlar deyiladi (214-*d*, rasm).

9.2. Tekisliklarning sonli proyeksiyalari

Tekisliklarning ortogonal proyeksiyada berilishi kabi, sonli proyeksiya tekisligi (H_0) da ham, bir to'g'ri chiziqda yotmagan uchta nuqta to'g'ri chiziq va unda yotmagan nuqta; ikki parallel to'g'ri chiziqlar va kesishgan to'g'ri chiziqlar orqali beriladi. Lekin, sonli proyeksiyada tekisliklar ko'pincha qiyalik masshtablari bilan tasvirlanadi. 215-*a*, rasmda nolinchi darajadagi H_0 tekislik ustida P tekislik berilgan, u H_0 tekislikda P tekislikning eng katta og'ish burchagi AB to'g'ri chiziq orqali tasvirlangan $A'B' \perp P_H$; $AB \perp P_H$. AB to'g'ri chiziq va uning proyeksiyasi $A'B'$ orasidagi burchak P tekislikning H_0 tekislik orasidagi α burchak demakdir.

P tekislikning H_0 tekislikdagi proyeksiyasini hosil qilish uchun P tekislikni har bir metr balandlikda (oraliqda) H_0 tekislikka parallel tekisliklar o'tkazish natijasida AB ga perpendikular 1, 2, 3 va h.k. chiziqlar hosil bo'ladi, ularni H_0 tekislikka proyeksiyalasa $A'B'$ chiziqda 1, 2, 3 va h.k. chiziqlarni tashkil qiladi (215-*b*, rasm). Demak, H_0 tekislikda P tekislik uning eng katta og'ish burchagini hosil qiluvchi $A'B'$ to'g'ri chiziq orqali ifodalanar ekan, unda



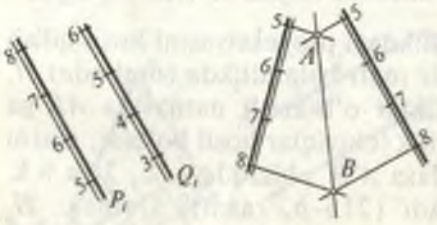
217-rasm.

har bir metrda o'tkazilgan chiziqlar berilgan tekislikning eng katta og'ish burchagi chiziqning intervali hisoblanadi.

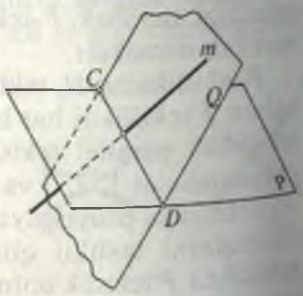
Eng katta og'ish burchak hosil qiluvchi intervali to'g'ri chiziqning proyeksiyasi tekislikning qiyalik mashtabi deyiladi. U ikkita (biri qalin, biri ingichka) chiziqlarda chiziladi va P_i bilan belgilaniladi (215-*b*, rasm).

Tekisliklarning o'zaro parallelligi. Agar tekisliklar parallel bo'lsa, ularning qiyalik masshtablari ham parallel. qiyalik masshtabi intervallari bir-biriga teng va qiyalik masshtabi belgilari bir tomonga oshib boradi (216-rasm).

Kesishuvchi tekisliklar. Agar tekisliklar kesishuvchi bo'lsa, ularning qiyalik masshtab belgilari ham kesishadi. bu tekislik gorizontallarini qisqacha qilib gorizontali deb yuritish mumkin. 217-rasmda P va Q tekisliklarining kesishgan chizig'i AB to'g'ri chiziq hisoblanadi. A nuqta



216-rasm. *217-rasm.*

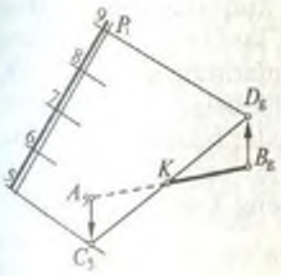


218-rasm.

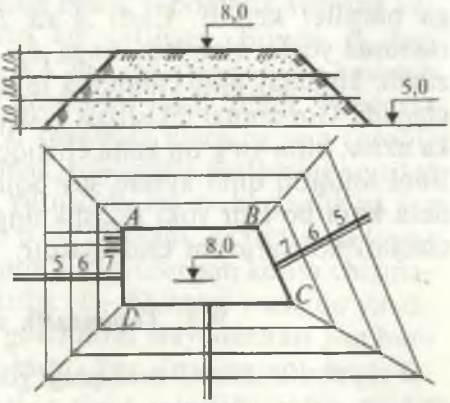
P va Q tekisliklarning 5-gorizontallari, B nuqta esa 8-gorizontallari kesishishi natijasida hosil bo'ladi.

To'g'ri chiziqning tekislik bilan kesishuvi. Berilgan m to'g'ri chiziqning P tekislik bilan kesishgan nuqtasini topish uchun m to'g'ri chiziq ustidan yordamchi Q tekislik o'tkaziladi. P va Q tekisliklarining kesishgan n chizig'i topiladi. m chiziqni davom ettirib, n chiziq bilan kesishgan A nuqta topiladi. Ana shu nuqta m to'g'ri chiziqning P tekislik bilan kesishgan nuqtasi hisoblanadi (218-rasm). 219-rasmda R tekislik bilan AB to'g'ri chiziqning kesishgan nuqtasini topish ko'rsatilgan. P tekislikning qiyalik masshtabi P_i va $A_5'B_9'$ to'g'ri chiziq berilgan. Buning uchun A_5 va B_9 lardan ixtiyoriy 5 va 9-gorizontallar chiqariladi, bu ixtiyoriy Q tekislikning gorizontallaridir. Endi P tekisliklarning 5 va 9 gorizontallari chiziladi va ular kesishib C_5 va D_9 nuqtalarni beradi, C_5 va D_9ni tutashtiruvchi chiziq berilgan A_5B_9 chiziq bilan K nuqtada kesishadi. Demak, K nuqta P tekislik va AB to'g'ri chiziqning kesishgan nuqtasi hisoblanadi.

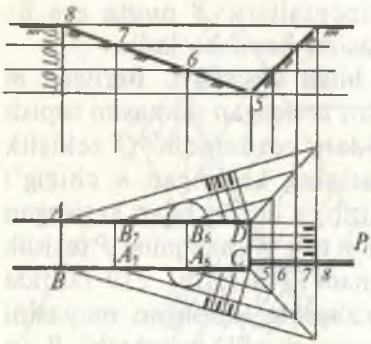
Tekisliklarning kesishuviga bog'liq topshiriqlar. Gorizontal tekislikning 5-gorizont belgisida 8-balandlikda $ABCD$ trapetsiya shaklidagi tuproq supacha yasash talab qilinsin (220-rasm). Buning uchun $ABCD$ trapetsiyani chizib, barcha tomonlariga qiyalik mashtablari chiziladi va ularga qiyalik belgilar (i_k=1:1 va i_7=1:5) qo'yiladi. Shu



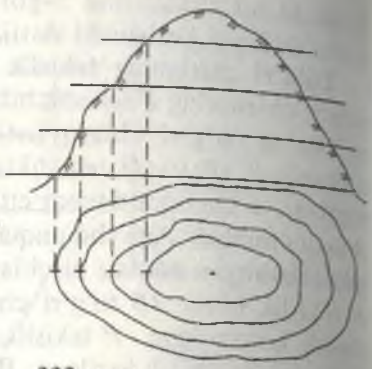
219-rasm.



220-rasm.



221-rasm.



222-rasm.

belgidan trapesiya tomonlariga parallel gorizontallar chiziladi, tomonlarning gorizontallari o'zaro kesishib burchakni teng bo'luvchi diagonallar hosil qilinadi. Ana shu oxirgi gorizontallar tuproqning asosiy chegarasini tashkil etadi, Demak, 8-gorizontalda *ABCD* supacha yasaldi.

221-rasmda *ABCD* qiyalikdagi yo'lak *AB*8-gorizontalda *CD* esa 5-gorizontalida, chuqurlik qiyaligi $i=2/3$. Bu qiyalikdagi chuqurchaning tomonlariga perpendikular qilib qiyalik masshtablari, ularga esa gorizont chiziqlar chiziladi. ularning kesishgan chizig'i yon tekisliklarning kesishgan chizig'ini tashkil qiladi, *SD* tomon 5-gorizontalda va unga parallel bo'lganligi sababli *ABCD* ning gorizontallari *CD* ga parallel ketadi. Endi *A* va *B* nuqtalardan 1 birlik radiusda yoylar chiziladi, unga A_7, B_7 lardan urinma o'tkaziladi. Shunday qilib chuqurlik tomonlarining qiyaligi kelib chiqadi. Gorizontal tekislikda nishablik belgisi bitta ingichka uzun, bitta yo'g'on kalta chiziqchalar bilan ko'rsatiladi. Buni aniqroq qilib aytsak suv oqimini ko'rsatuvchi belgi desa ham bo'ladi yoki tekislikning eng katta og'ish burchagini ko'rsatuvchi chiziqlardir.

9.3. Topografik sirtlar

Yer relyefini bir xil oraliqdagi gorizontal tekisliklar bilan qirqilsa sirtqi chiziqlar hosil bo'ladi. Ana shu chiziqlar yer relyefining gorizontallari deyiladi (222-rasm). Demak,

yer relyefini chizmada uning gorizontallari orqali tasvirlanar ekan. Yer sirtining barcha fazoviy, hajmiy shakllarining yig'indisi tushuniladi. Yer relyefi aslida juda murakkab sirtlar toifasiga kiradi. Yer relyefi topografik kartalarda gorizontallar, balandlik, chuqurlik va har xil shartli belgilar yordamida tasvirlanishi **topografik sirt** tasviri deyiladi.

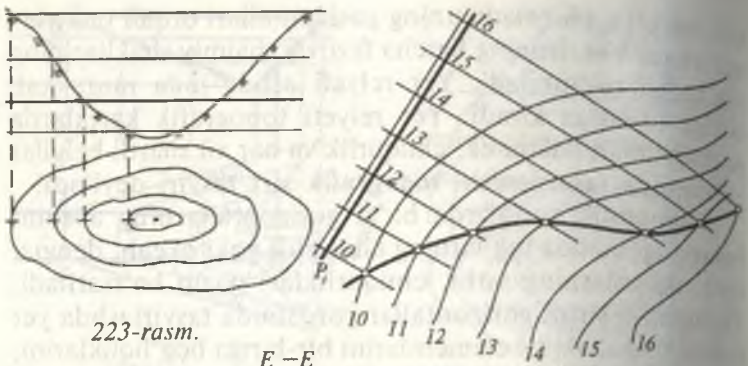
Topografik kartalarda ba'zi gorizontallarning absolut balandligi hamda tog'larning cho'qqisi yoki okean, dengiz, ko'l, daryolarning sathi, chuqurliklari yozib ko'rsatiladi. Topografik sirtni gorizontallar yordamida tasvirlashda yer relyefining shakl va elementlarini bir-biriga bog'liqliklarini, xarakteristikasini va boshqa ma'lumotlarni bilishga imkon beradi. Gorizontallarning o'zaro joylashuvi va ularning shakllari asosida yer relyefining shaklini aniqlash mumkin*.

Chizmalarda pastdan yuqoriga yoki yuqoridan pastga yo'nalishlar ba'zida sonlar bilan emas, balki kichkina chiziqcha (shtrix)lar bilan belgilaniladi. 222-rasmda balandlik berilgan, demak chiziqchalar gorizontallar tashqarisiga, 223-rasmda esa chuqurlik tasvirlangan chiziqchalar, gorizontallar ichkarisiga qo'yilgan.

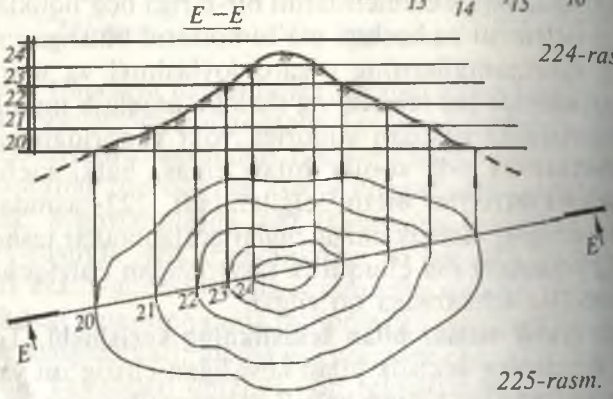
Topografik sirtlar bilan tekislikning kesishishi. Topografik sirtlarning tekislik bilan kesishgan chizig'ini yasash uchun ularning bir xil son belgili gorizontallarining kesishgan nuqtasini topib tutashtirish kerak. 224-rasmda P tekislikning P_1 masshtab qiyaligi bilan, topografik sirtning kesishgan chizig'ini yasash ko'rsatilgan. Bunda P_1 dagi gorizontal (11, 12, 13 va h.k.)lar relyef sirti bilan kesishib ularning 10_0,... 15_0, egri chizig'ini hosil qiladi. Topografik sirtlarini tekislik bilan kesganda ularning yon (profil) qirqimi hosil bo'ladi. Demak, topografik sirtlarning vertikal kesimi uning **profili** deb yuritiladi, bu muhandislik va yer inshootlari qurilishida ko'p qo'llaniladi. 225-rasmda topografik sirti kesimi, ya'ni profili tasvirlangan kesim chizmasining ustida kesishuv tekislik (E—E) nomi yozib qo'yiladi.

Topografik sirt bilan gorizontal maydonchasi yon burchaklarining o'zaro kesishishi. Yer sirtining yon bag'irla-

* *И. Раҳмонов.* «Чизма геометрия курси», Т., «Ўқитувчи», 1984, 226-бет.



223-rasm.

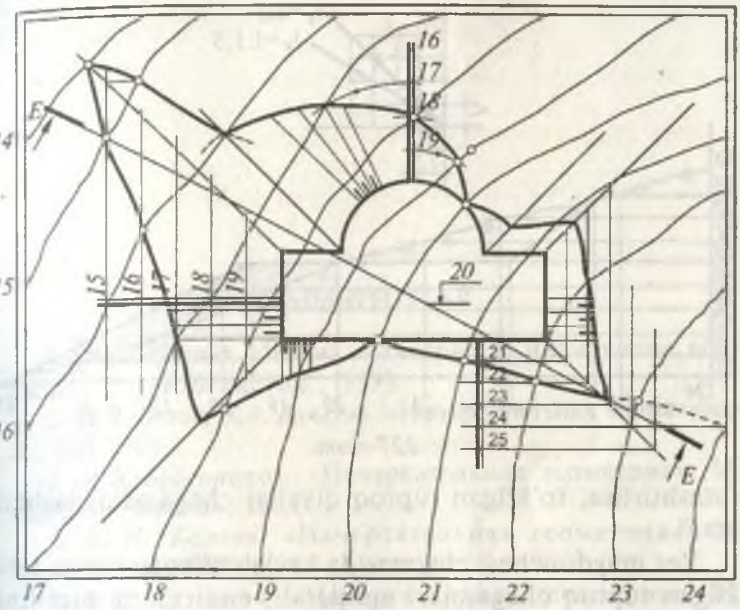


224-rasm.

225-rasm.

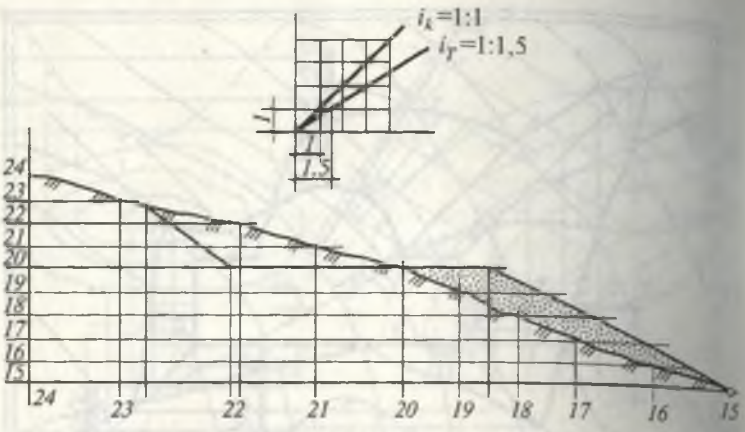
rida biror-bir maqsadda gorizontal holatda yer maydoni qurishga to'g'ri kelsa, yer ustidan tuproqni kavlab olib, pastga tashlash, kavlangan va to'kilgan tuproqdan kerakli maydoncha yaratish mumkin. Bunda kavlab olingan chuqurlik qiyaligi va to'kilgan tuproq qiyaliklari hosil bo'ladi.

226-rasmda 20-gorizontalda maydoncha qurish ko'rsatilgan. Unda kavlab olingan joy qiyaligi $i_k = 1:1$, to'kilgan tuproq qiyaligi $i_T = 1:1.5$ nisbatda bo'lishi kerakligi talab qilingan. Yer sirtining 20-gorizontalida maydonchaning $A_{20}B_{20}$ nuqtalarida kesishadi. Maydonchaning bir tarafida yarim aylana shakli 20-gorizontalning pastki tomonida joylashgan, bunga qiyalik masshtabi $i_T = 1:1.5$ o'lcham, yuqori tomonga qiyalik masshtabi $i_k = 1:1$ o'lcham qo'yib maydoncha tomonga parallel qilib gorizontallar o'tkaziladi. Masalan, 227-*a*, rasmda masshtab grafigi tuzilgan, undan



226-rasm.

1 birlik kavlanadigan qiyalik masshtabiga, 1,5 birlik to'kilgan tuproq qiyaligi masshtabiga o'lchab qo'yiladi. Endi yer sirtining 21-gorizontali bilan kavlangan joy qiyalik masshtabining 21-gorizontal kesishgan nuqta, 22-gorizontallar kesishgan nuqta va hokazo nuqtalarini topib tutashtirilsa, kavlab olingan joy chegarasi hosil bo'ladi. Endi $A_{20}B_{20}$ nuqtalardan pastdagi yer sirti gorizontallari bilan to'kilgan tuproq qiyaligi masshtabi gorizontallarining kesishgan nuqtalari topiladi va ular tutashtirilsa to'kilgan tuproq chegarasi hosil bo'ladi. Eng muhimi maydoncha burchaklaridan burchakni teng ikkiga bo'luvchi diagonal chiziqlar chiqariladi, bu chiziq ikki yon sirtning kesishgan chiziqlaridir. Gorizontallar kesishgan nuqtalardan hosil bo'lgan chiziqlar ana shu diagonallar bilan kesishgan joydan ikkinchi tomon chegarasini hosil qiladi. Maydonchadagi yarim aylanaga ham qiyalik masshtabi 19, 18, 17 va h.k. sonli belgilari qo'yilib, gorizontallar aylana markazi bo'yicha yoy shaklida o'tkaziladi, bular yer sirti gorizontallari (19, 18, 17 va h.k.) bilan kesishadi. Hosil bo'lgan bir qancha nuqtalar



227-rasm.

tutashtirilsa, to'kilgan tuproq qiyaligi chegarasini tashkil etadi.

Yer maydonchasi chizmasida kavlab olingan joy va to'kilgan tuproq chegaralari aniqlandi, endi uning profilini chizish talab etilsa, kerakli joydan E—E tekislik o'tkaziladi. Bunda ishni osonlashtirish uchun bir varaq qog'oz E—E kesuvchi tekislik ustiga qo'yiladi va barcha belgilar qog'ozda nuqtalar bilan belgilab 227-*b*, rasmda ko'rsatilganidek gorizontal va vertikal chiziqlar chizib qog'ozdagi belgilarni koordinata boshi (24)ga qog'ozdagi 24 belgiga ustma-ust qo'yiladi va boshqa 23, 22, 21 va h.k. nuqtalar ko'chirilib qo'yiladi. Bu nuqtalardan ingichka vertikal chiziqlar chiziladi, vertikal holatdagi balandlik masshtabi chizig'idagi 17, 18, 19 va h.k. sonlardan ingichka gorizontal chiziqlar o'tkazib vertikal 17, 18, 19 va h.k. chiziqlar bilan kesishgan nuqtalar tutashtirilsa yer sirti kesimi, ya'ni profili hosil bo'ladi. Bunda qolgan $A_{20}B_{20}$ va kavlangan joy chegarasi kesishgan *C*, tushirilgan joy chegarasi kesishgan *D* nuqtalardan ham vertikal chiziqlar chiqarib kavlangan joy, maydoncha va to'kilgan joy qirqimi hosil qilinadi. Grafik ishlarni bajarishda yer sirtini yashilga, maydonchani esa sariq rangga hamda kavlangan va to'kilgan tuproqni jigarrangga bo'yalsa, topshiriq yanada chiroyli, hajmli va tabiiy bo'lib ko'rinadi.

ADABIYOTLAR

1. *У. Абдуллаев.* «Чизма геометрия ва чизмачилик асослари». Т., «Ўзбекистон", 1999.
2. *Н.В. Белов, А.А. Виксель.* «Начертательная геометрия». Л., СИ 1969.
3. *А.В. Бубенников.* «Начертательная геометрия». М., «Высшая школа», 1985.
4. *Ю.И. Короев.* «Начертательная геометрия». М., Стройиздат, 1987.
5. *И.С. Кузнецов.* «Начертательная геометрия». М., «Высшая школа», 1981.
6. *Ш.М. Муродов.* ва бошқалар. «Чизма геометрия курси». Т., «Ўқитувчи», 1988.
7. *И. Раҳмонов.* «Чизма геометрия курси». Т., «Ўқитувчи», 1984.
8. *И. Раҳмонов.* «Перспектива». Т., «Ўқитувчи», 1993.
9. *И. Собитов.* «Чизма геометрия қисқача курси». Т., «Ўқитувчи», 1973.
10. *Р. Хорунов.* «Чизма геометрия курси». Т., «Ўқитувчи», 1974.
11. *Ю. Қирғизбоев.* «Чизма геометрия». Т., «Ўқитувчи», 1972.

MUNDARIJA

So'zboshi 3
Kirish 5
1. Chizma geometriya fani va uning ahamiyati 5
2. Asosiy proyeksiyalash usullari 8

I QISM. ORTOGONAL VA AKSONOMETRIK PROYEKSIYALAR

1-bob. Nuqta va to'g'ri chiziqning ortogonal proyeksiyalari 10
1.1. Nuqtani ikki va uchta o'zaro perpendikular tekisliklarga proyeksiyalash 10
1.2. To'g'ri chiziqning ortogonal proyeksiyasi 16
1.3. To'g'ri chiziqning izi 20
1.4. To'g'ri chiziqning haqiqiy kattaligini topish 20
1.5. To'g'ri chiziqlarning o'zaro vaziyatlari 24
2-bob. Tekislikning ortogonal proyeksiyalari 26
2.1 Tekisliklar va ularning epyurda tasvirlanishi 26
2.2. Tekislikning izlari 27
2.3. Tekislikning proyeksiya tekisliklariga nisbatan vaziyatlari 27
2.4 Tekislikning maxsus chiziqlari 31
2.5 Tekisliklarning o'zaro vaziyatlari 33
2.6 Tekislik va to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyatlari 35
2.7. O'zaro perpendikular tekisliklar yasash 43
3-bob. Epyurlarni qayta tuzish usullari 45
3.1. Proyeksiya tekisliklarini almashtirish usuli 45
3.2. Aylantirish usuli 48
3.3.Tekis parallel harakat usuli 50
3.4.Tekislikni jipslashtirish usuli 51
4-bob. Tekis va fazoviy chiziqlar hamda sirtlar 52
4.1. Egri chiziqlar 52
4.2. Sirtlar haqida umumiy tushuncha 55
5-bob. Geometrik jismlarning proyeksiyalari va yoyilmalari 57

5.1. Ko'pyoqliklar 57
5.2. Aylanish sirtlar 58
5.3. Ko'pyoqliklarni proyeksiyalovchi tekisliklar bilan kesish va yoyilmasini yasash 60
5.4. Aylanish sirtlarini proyeksiyalovchi tekislik bilan kesish va yoyilmasini yasash 63
5.5. Geometrik jismlar bilan to'g'ri chiziqning kesishuvi 68
5.6. Geometrik jism sirtlarining o'zaro kesishuvi 73
6-bob. Aksonometrik proyeksiyalar 78
6.1. To'g'ri va qiyshiq burchakli aksonometrik proyeksiyalar 78
6.2. Aylananing aksonometrik proyeksiyasi 82

II QISM. SOYALAR NAZARIYASI, PERSPEKTIVA VA SONLI PROYEKSIYALAR

7-bob. Ortogonal va aksonometrik proyeksiyalarda soyalar 84
7.1. Nuqta va to'g'ri chiziqdan tushgan soyalar 85
7.2. Tekis shakllardan tushgan soyalar 87
7.3. Soya yasashning «masofa chiqarish» usuli 89
7.4. Geometrik jismlarning soyalari 93
7.5. Tokchada soyalar yasash 98
7.6. Bino qismlaridan tushgan soyalar 100
7.7. Aksonometriyada soyalar 104
8-bob. Perspektiva va unda soyalar 108
8.1. Perspektiva haqida umumiy tushuncha 108
8.2. Perspektiva apparati 109
8.3. Nuqtaning perspektivasi 110
8.4. To'g'ri chiziqlarning perspektivasi 110
8.5. Perspektiva masshtabi 112
8.6. Perspektivada to'g'ri chiziqlarni bo'laklarga bo'lish 114
8.7. Aylanalarning perspektivasi 116
8.8. Tekislikning perspektivasi 117
8.9. Perspektiva yasash usullari 119
8.10. Zinaning perspektivasi 125
8.11. Perspektivada soyalar yasash 125
8.12. Buyum aksining perspektivasi 128
9-bob. Sonlar bilan berilgan proyeksiyalar 130
9.1. Nuqta va to'g'ri chiziqning sonli proyeksiyasi 130
9.2. Tekisliklarning sonli proyeksiyalari 133
9.3. Topografik sirtlar 136
Adabiyotlar 141

Qulnazarov B.B.

K81 Chizma geometriya: Bakalavriat ta'lim yo'nalishi talabalari uchun o'quv qo'llanma/ — T.: O'zbekiston nashriyot-matbaa ijodiy uyi, 2006. — 144 b.

ISBN-5-640-02043-1

$Q\frac{2004020000\text{-}164}{M351(04)2006}2006$

BBK 22.151.3ya73

B.B. Qulnazarov

CHIZMA GEOMETRIYA

Oliy o'quv yurtlari talabalari uchun o'quv qo'llanma

Muharrir *P. A'zamova*
Badiiy muharrir *M. Kudryashova*
Texn. muharrir *T. Xaritonova*
Musahhih *N. Umarova*
Kompyuterda sahifalovchi *Y. Gilmutdinova*

Bosishga 03.03.06 da ruxsat etildi. Bichimi $84\times108^{1}/_{32}$.
«Tayms» garniturada ofset bosma usulida bosildi.
Shartli b.t. 7,56. Nashr t. 8,15. Jami 1000 nusxa.
K-175-raqamli buyurtma.

O'zbekiston Respublikasi Matbuot va axborot agentligining «O'zbekiston» nashriyot-matbaa ijodiy uyida bosildi.
Toshkent, 700129. Navoiy, 30.

2741-47.