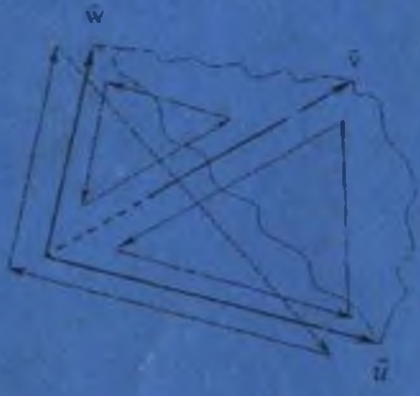
Д.Ғ. Рахимов

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА



ТКТИ

Д.Ғ.РАҲИМОВ

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

I

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим
вазирлиги олий техник ўқув юртлари талабалари учун
дарслик сифатида тавсия этган

ТОШКЕНТ – 2003

Раҳимов Д. Ғ. Олий математика. I. – Т., «ЎАЖБНТ» Маркази, 2003, 536 б.

Икки жилддан иборат “Олий математика” дарслиги олий техник ўқув юртларининг бакалаврлар тайёрлаш учун олий математика фани бўйича тасдиқланган ўқув дастури асосида ёзилган.

Дарсликнинг биринчи жилди чизиқли алгебра ва аналитик геометрия, бир ўзгарувчили функциянинг дифференциал ва интеграл ҳисоб курси, кўп ўзгарувчили функциянинг дифференциал ҳисоби ва вектор-функциянинг дифференциал ҳисоби қисмларини ўз ичига олган.

Олий техник ўқув юртларининг талабалари учун мўлжалланган.

Тақризчилар: Мираҳмедов Ш.А.– физика-математика фанлари доктори, профессор,
Носиров Ф.У. — физика-математика фанлари доктори

СЎЗ БОШИ

Бисмиллоҳир роҳманир роҳийм.

Ассалому-алайкум, муҳтарам илм аҳли. Сиз билан ушбу китоб орқали мулоқотда бўлишдек бахтни бизга муяссар қилгани учун Аллоҳ таолога ҳамду-санолар бўлсин.

Аллоҳнинг хоҳиши билан юртимиз мустақил бўлгач, халқаро стандартларга яқинлашиш мақсадида мамлакатимизда икки босқичли ўқув тизимига ўтилди. 1999 йилда мамлакатимиз Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги томонидан шу тизим учун олий техник ўқув юртларида ўқитиладиган барча фанлар бўйича, шу жумладан, олий математика бўйича ҳам ўқув дастурлари ишлаб чиқилди.

Олий математика бўйича ёзилган дарсликлар талайгина бўлса ҳам, уларнинг аксарияти ўқув дастурининг айрим қисмларигагина бағишланган (масалан, чизиқли алгебра ва аналитик геометрия, дифференциал ва интеграл ҳисоб курси, эҳтимоллар назарияси ва математик статистика ва ҳ.к.). Олий математиканинг барча жабҳаларини ўз ичига олиб ёзилган дарсликлар эса саноқли эди.

Ана шу информацион тақчилликни тўлдириш мақсадида муаллиф ўзининг Тошкент давлат техника университетидаги ўттиз йиллик тажрибасига таяниб, ўтилган дарслар давомида вужудга келган услубий мулоҳазалари асосида янги дастурга мос келувчи, олий математиканинг барча қисмларини қамровчи дарслик ёзиб, уни ўқувчилар муҳокамасига тақдим этаяпти.

Уни ёзишда муаллиф машҳур рус ва чет эл олимлари томонидан яратилган дарсликлардан ҳамда Тошкент давлат техника университетининг «2-олий математика» кафедраси ўқитувчилари томонидан яратилган маърузалар матнидан кенг фойдаланди.

Дарслик икки қисмга бўлиниб, биринчи қисмига асосан олий техник ўқув юртларининг 1-босқичида ўқитиладиган мавзулар киритилди.

Чизиқли алгебра элементлари фақат аналитик геометрия масалалари учунгина зарур бўлмай, балки олий математиканинг бошқа қисмларида ҳам қўллангани учун муаллиф бу қисмга умумийлик тусини бериш мақсадида унинг барча масалаларини 1-бобда баён қилди.

Аналитик геометрия масалалари шу бобнинг охирги 5-§идан бошлаб баён қилинади. Мулоҳазаларда қатъийлик руҳини сақлаш мақсадини кўзлаб, муаллиф ўқда, текисликда ва фазода киритилган координаталар системасида йўналиш тушунчасининг зарурлигига ўқувчининг эътиборини тортади. Ана шу қатъийлик руҳи мос равишда 2 ва 3-бобларда баён қилинган текисликдаги аналитик геометрия ва фазодаги аналитик геометрияларда сақланган.

2-бобга текисликдаги аналитик геометриянинг асосий масалалари бўлмиш тўғри чизиқнинг тенгламалари, уларга доир масалалар, асосий иккинчи тартибли чизиқлар ва уларнинг каноник тенгламалари, координаталар системасини алмаштириш ва улар ёрдамида иккинчи тартибли чизиқларнинг умумий тенгламаларини каноник кўринишга келтириш масалалари киритилган.

3-боб фазодаги аналитик геометрия масалаларига бағишланган. Аввал иккинчи даражали алгебраик тенгламанинг геометрик тасвирига таъриф берилиб, ундан келиб чиқадиган умумий мулоҳазалар келтирилган. Сўнг фазонинг асосий элементлари бўлмиш текислик, тўғри чизиқ ва иккинчи тартибли сиртлар, уларнинг тенгламалари, уларга доир масалалар ёритилган. 3-боб иккинчи тартибли сиртнинг умумий тенгламасини каноник кўринишга келтириш масалаларининг баёни билан якунланади.

Олий математиканинг математик таҳлил қисмига доир мавзулар 4-бобдан бошлаб баён қилинади. 4- ва 5-бобларда умумий тушунчалар: ўзгармас ва ўзгарувчи миқдорлар, тўпламлар, кетма-кетликлар ва уларнинг лимити, лимит билан боғлиқ бўлган тушунчалар ва хоссалар кўрилган. Кейин икки ва ундан ортиқ ўзгарувчилар ўртасидаги муносабатлар, хусусан, бир ўзгарувчининг функцияси, уларнинг турлари, лимитлари ва лимит тушунчаси билан боғлиқ бўлган хоссалар, миқдорларни солиштириш масалалари таҳлил қилинган.

6-боб бир ўзгарувчили функциянинг дифференциал ҳисобига бағишланган. Ҳосила тушунчаси, элементар, мураккаб ва тескари функцияларнинг ҳосилалари, дифференциал ва унинг тақрибий ҳисоблашда қўлланилиши, юқори тартибли ҳосилалар ва дифференциаллар баён қилиниб, уларнинг функциянинг таҳлилига ва функция лимитларида вужудга келадиган аниқмасликларга қўлланилиши кўриб чиқилган.

Функцияларни текширишда ҳосила ва дифференциалларнинг хоссаларидан фойдаланиш масалалари 7-бобда давом эттирилади. Бунда функцияни тўла тафтиш қилиш ва унинг натижалари ёрдамида функция графигини қуришнинг умумий схемаси берилган.

Функция интеграл ҳисоби учун зарур бўладиган олий алгебранинг комплекс сонлар ва кўпҳадларга доир айрим масалалари 8-бобда баён қилиниб, интеграл ҳисоб масалалари 9- ва 10-бобларда кўриб чиқилган.

Интеграл ҳисобнинг муҳандислик масалаларига қўлланилиши ва бу ҳисобларда зарурияти туғиладиган тақрибий усуллар баёнига 11-боб бағишланган.

12- ва 13-бобларда кўп ўзгарувчили функция ва вектор-функциянинг дифференциал ҳисоби баён қилиниб, функцияларнинг дифференциал ҳисобига якун ясалади.

Кўп ўзгарувчили функцияларнинг интеграл ҳисоби: каррали, эгри чизиқли ва сирт интеграллари ҳамда улар билан боглиқ бўлган масалалар дарсликнинг иккинчи жилдига киритилди. Улар 17-, 18- ва 19-бобларда баён қилинади.

Дарсликнинг ёзилиш жараёнида унинг айрим қисмлари кафедранинг услубий семинарида кўп муҳокама қилинди. Бу дарслик сифатининг яхшиланишига ёрдам берди. Бунинг учун муаллиф кафедранинг барча аъзоларига, шахсан дарсликнинг ёзилиш жараёнида қуллаб-қувватлаган проф. Ф.У. Носировга, қўлёзмани компьютерга киритиш ва нашрга тайёрлаш ишларида кўп ёрдам кўрсатган Р.Ғ. Раҳимовга, таҳрир қилиб берган А. Ҳасановга ва дарсликни синчиклаб кўриб чиқиб, қимматли маслаҳатларини аямаган проф. Ш.А. Мираҳмедовга ўз миннатдорчилигини изҳор қилади.

Дарслик муаллифнинг биринчи йирик иши бўлгани сабабли, шубҳасиз, камчиликлардан холи эмас. Бу китоб тўғрисидаги ҳурматли китобхонларнинг танқидий фикр ва мулоҳазаларини муаллиф чуқур мамнуният билан қабул қилади.

Муаллиф ўз меҳнатининг ва номлари юқорида зикр қилинган инсонлар кўмагининг маҳсули бўлмиш ушбу китоб ўқувчининг илм олишдек заҳматли ишида ёрдам беради, деб умид қилади, унга Аллоҳдан қунт, сабр-тоқат ва мадад сўраб қолади. Ушбу дарсликнинг яратилишига сабаб бўлган барча инсонлардан Аллоҳ рози бўлсин.

Сиз-у бизга Аллоҳнинг маърифати ёғилсин. Ассалому-алайкум ва раҳматуллоҳи ва баракатуҳ.

1 БОБ.
ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРА ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1-§. ДЕТЕРМИНАНТЛАР

1.1. Иккинчи ва учинчи тартибли детерминантлар

Қуйидаги a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} ҳақиқий сонлардан тузилган

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

квадрат жадвал 2-тартибли квадрат матрица дейилади, бу ерда a_{ij}-унинг элементлари, a_{11}, a_{12} ва a_{21}, a_{22} унинг сатр элементлари, a_{11}, a_{21} ва a_{12}, a_{22} устун элементлари деб аталади. a_{ij} нинг биринчи индекси i сатр рақами, j устун рақамини билдиради. Мисол учун, a_{21} 2-сатр ва 1-устунда жойлашган. Бу матрицанинг детерминанти деб, қуйидаги сонга айтамиз:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \qquad (1)$$

Худди шундай,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

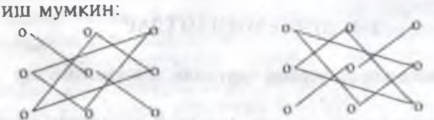
квадрат жадвални 3-тартибли квадрат матрица деб атасак, унинг детерминанти деб қуйидаги сонни айтамиз:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+ \qquad (2)$$

$$+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

(1) ва (2) детерминантлар мос равишда 2-тартибли ва 3-тартибли детерминантлар деб ҳам аталади.

(2) детерминантни ҳисоблаш учун «учбурчаклар усули» деб аталувчи қуйидаги диаграммадан фойдаланиш мумкин:



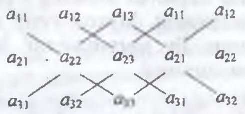
a) (+) b) (-)

Ҳар бир диаграммада туташтирилган элементлар ўзаро кўпайтирилиб, кейин натижалар қўшилади,

а) диаграммадаги йиғинди «+» ишораси билан,

б) диаграммадаги йиғинди эса «-» ишора билан олиниб, иккала натижа ўзаро қўшилади.

3-тартибли детерминантларни ҳисоблаш учун «Саррюс усули» деб аталувчи қуйидаги диаграмма ҳам мавжуд:



бу ерда туташтирилган элементлар ўзаро кўпайтирилиб, асосий диагоналга параллел туташтирилганлари алоҳида қўшилиб «+» ишора билан, ён диагоналга параллел туташтирилганлари алоҳида қўшилиб «-» ишора билан олиниб, натижалар қўшилади.

1.2. Детерминантларнинг хоссалари

1. Агар детерминантнинг барча йўл элементларини устун элементларига ёки аксинча алмаштирилса, унинг қиймати ўзгармайди:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2. Агар детерминантнинг икки ёнма-ён турган йўл (устун) элементлари ўрнини мос равишда алмаштирсак, детерминант қиймати қарама-қарши ишорага ўзгаради:

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} =$$

$$= -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

3. Агар детерминантнинг бирор йўл (устун) элементлари умумий λ кўпайтувчига эга бўлса, у ҳолда бу кўпайтувчини детерминант ташқарисига чиқариш мумкин:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix} = \lambda a_{11}a_{22} - \lambda a_{12}a_{21} =$$

$$= \lambda(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Хусусан, агар $\lambda=0$ бўлса, детерминант қиймати нолга тенгдир.

4. Агар детерминантнинг бирор йўл (устун) элементлари мос равишда бошқа йўл (устун) элементларига пропорционал бўлса, у ҳолда детерминант қиймати нолга тенг бўлади:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{11} \\ a_{21} & \lambda a_{21} \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} = \lambda(a_{11}a_{21} - a_{11}a_{21}) = 0.$$

5. Агар детерминантнинг йўл (устун) элементлари икки ифоданинг йиғиндиси кўринишида бўлса, у ҳолда детерминант икки детерминант йиғиндиси кўринишида ёзилиши мумкин:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a^{1}_{12} + a^{11}_{12} \\ a_{21} & a^{1}_{22} + a^{11}_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a^{1}_{12} \\ a_{21} & a^{1}_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a^{11}_{12} \\ a_{21} & a^{11}_{22} \end{vmatrix}$$

6. Агар детерминантнинг йўл (устун) элементларини бирор $\lambda\neq 0$ сонга кўпайтириб, мос равишда бошқа йўл (устун) элементларига қўшсак, детерминант қиймати ўзгармайди:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + \lambda a_{11} \\ a_{21} & a_{22} + \lambda a_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{11} \\ a_{21} & \lambda a_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Юқорида келтирилган хоссалар детерминант учинчи ва ундан юқори тартибли бўлганда ҳам ўринлидир.

Кейинги хоссаларни киритиш учун учинчи тартибли Δ детерминантдан фойдаланамиз:

$$\Lambda = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Берилган учинчи тартибли детерминантнинг i-йўли ва j-устунини ўчириш натижасида ҳосил бўлган иккинчи тартибли детерминант a_{ij} элементнинг минори дейилади ва M_{ij}-деб белгиланади.

Масалан, a_{11} элементнинг минори

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Худди шунингдек, a_{12}-ники

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

га тенг ва ҳоказо.

Қуйидаги $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ ифода a_{ij} элементнинг алгебраик тўлдирувчиси дейилади. a_{11} элементнинг алгебраик тўлдирувчиси $A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, a_{12} элементники эса

$A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ ва ҳоказо.

7. Детерминантнинг бирор йўл (устун) элементларини мос равишда ўзининг алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтириб қўшсак, у ҳолда йиғинди детерминант қийматига тенг бўлади. Ҳақиқатан,

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$
$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{13}A_{13}$$
$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$
$$\Lambda = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$
$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$$
$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

Тенгликларнинг тўғри эканлигини исботлаш қийин эмас.

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} -$$
$$- a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) -$$
$$- a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

8. Детерминантнинг бирор йўл (устун) элементларини мос равишда бошқа йўл (устун) элементларининг алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтириб қўшсак, у ҳолда йиғинди нолга тенг бўлади. Масалан,

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$$
$$a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{32} = 0$$
$$a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0$$
$$a_{11}A_{13} + a_{21}A_{23} + a_{23}A_{33} = 0$$

ва ҳоказо. Ҳақиқатан,

$$a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} +$$
$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{13}a_{22} - a_{11}a_{12}a_{23} +$$
$$+ a_{12}a_{13}a_{21} + a_{11}a_{13}a_{22} - a_{12}a_{13}a_{21} = 0.$$

Юқорида келтирилган хоссалар қуйида киритиладиган n-тартибли детерминантлар учун ҳам ўринлидир.

1.3. *n*-тартибли детерминантлар

Биринчи n та натурал сонларнинг $\{1,2,\ldots, n\}$ тўпламига ўзини ҳар қандай π мос қўйиш n-тартибли ўринлаштириш дейилади. Ҳар қандай n-тартибли π ўринлаштириш қуйидагича ёзилиши мумкин:

$$\pi=\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \cdots & i_n \\ \alpha_{i_1} & \alpha_{i_2} \cdots & \alpha_{i_n}\end{pmatrix},$$

хусусан,

$$\pi=\begin{pmatrix} 1 & 2 \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}$$

каноник ўринлаштириш дейилади.

Агар $i<j$ бўлиб, $\alpha_i>\alpha_j$ бўлса π ўринлаштиришда (i, j) жуфтлик инверсияни ташкил этади деймиз. Агар барча инверс жуфтликлар сони $S(\pi)$ жуфт бўлса, π ўринлаштириш жуфт, агар $S(\pi)$ тоқ бўлса, π ўринлаштириш тоқ дейилади.

Мисол. Қуйидаги

$$\pi=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

ўринлаштиришнинг жуфт ёки тоқ эканлигини аниқланг.

Ечиш. Берилган ўринлаштиришни каноник кўринишда ёзиб оламиз:

$$\pi=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

ва инверсиялар сонини ҳисоблаймиз. Инверс жуфтликларни (1,4), (2,3), (2,4), (3,4) лар ташкил этгани учун $S(\pi)=4$, демак, π-жуфт ўринлаштириш экан.

Таъриф. *Қуйидаги*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

квадрат матрицанинг n-тартибли детерминанти деб, қуйидаги сонга айтилади:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{\pi}(-1)^{S(\pi)}a_{1\pi(1)}\cdots a_{n\pi(n)},$$

бу ерда йиғинди барча n-тартибли ўринлаштиришлар бўйича бажарилади.

Бу таърифни тушуниш учун $n=3$ бўлган ҳолни кўрайлик. Барча 3-тартибли ўринлаштиришлар қуйидагича бўлади:

$$\pi_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix},\quad \pi_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad \pi_3=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix},$$

$$\pi_4=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix},\quad \pi_5=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix},\quad \pi_6=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

Ҳар бир ўринлаштириш учун инверсия сонини ҳисобласак, $S(\pi_1)=0$, $S(\pi_2)=2$, $S(\pi_3)=2$, $S(\pi_4)=3$, $S(\pi_5)=1$, $S(\pi_6)=1$ эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. У ҳолда таърифга кўра:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

яъни 3-тартибли детерминант учун аввал келтирилган формулани ҳосил қилдик.

Юқоридагига ўхшаб, n-тартибли детерминант учун ҳам алгебраик тўлдирувчини киритиш мумкин. У ҳолда 2-тартибли ва 3-тартибли детерминантларнинг барча хоссалари n-тартибли детерминантлар учун ҳам ўринли бўлади. Хусусан,

$$\det A=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\qquad (\mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{n})\tag{3}$$

$$\det A=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\qquad (\mathrm{k}=1,\ldots,\mathrm{n})\tag{4}$$

бу ерда A_{ik} алгебраик тўлдирувчилар n-1 тартибли детерминантлардир, шу сабабли, (3), (4) формулаларни n-тартибли детерминантни ҳисоблашнинг тартибини пасайтириш ёки сатр ва устун элементлари бўйича ёйиш усули деб ҳам аташади.

Мисол. Ҳисобланг:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1\end{vmatrix}$$

Ечиш. Масалан, 3-устун элементларини аввал 2-устунга ва −2 га кўпайтириб, 1-устунга қўшамиз:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ -9 & 7 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -9 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

3-устунни -4 га ва 3 га кўпайтириб, мос равишда 1- ва 2-устунларга қўшсак:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -13 & 10 & 3 \\ -13 & 10 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -13 & 10 \\ -13 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

2-§. МАТРИЦАЛАР

2.1. Матрицалар устида арифметик амаллар

Таъриф. *mxn ўлчамли матрица деб, a_{ij}, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$ сонлардан тузилган m та сатр, n та устунли қуйидаги*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

жадвалга айтамиз. Матрица қисқача, $A=\|a_{ij}\|$ кўринишда ҳам ёзилиши мумкин.

Агар $m=n$ бўлса, *A квадрат матрица* дейилади.

Агар барча $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$ лар учун $a_{ij}=b_{ij}$ бўлса, бир хил ўлчамли $A=\|a_{ij}\|$ ва $B=\|b_{ij}\|$ матрицаларни тенг деймиз, яъни $A=B$.

Бир хил ўлчамли $A=\|a_{ij}\|$ ва $B=\|b_{ij}\|$ матрицаларнинг йиғиндиси $A+B$ деб, шундай $C=\|c_{ij}\|$ матрицага айтамизки, бунда $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$ бўлади.

1-*мисол.*

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 5 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$A=\|a_{ij}\|$ матрицани α сонга кўпайтмаси деб, A матрицанинг барча элементларини α га кўпайтиришдан ҳосил бўладиган $B=\|b_{ij}\|$, $b_{ij}=\alpha a_{ij}$, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$, матрицага айтамиз.

2-*мисол.*

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}.$$

mxn ўлчамли $A=\|a_{ij}\|$ матрицанинг *nxk* ўлчамли $B=\|b_{ij}\|$ матрицага кўпайтмаси деб, элементлари

$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$

формулалардан аниқланадиган *mxk* ўлчамли $C=\|c_{ij}\|$ матрицага айтамиз.

3-*мисол.*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 4-2 & 0+2 \\ 0-3 & 0+1 & 0-1 \\ 3+3 & 12-1 & 0+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 6 & 11 & 1 \end{pmatrix} = C.$$

Агар $m \neq k$ бўлса, $B \cdot A$ кўпайтмани бажариб бўлмайди, лекин агар $m=k$ бўлса, умумий ҳолда $A \cdot B = B \cdot A$ бўлмайди, чунки $A \cdot B$ *mxm* ўлчамли, $B \cdot A$ эса *nxn* ўлчамли матрица бўлади. Ҳатто $m=n$ бўлган ҳолда ҳам матрицалар кўпайтмаси учун коммутативлик (ўрин алмаштириш) хоссаси ўринли эмас. Масалан,

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3\\ -3 & -2 & -4\\ 9 & 7 & 11\end{pmatrix},\qquad B\cdot A=\begin{pmatrix} 7 & 7 & 2\\ -2 & -2 & -1\\ 18 & 15 & 6\end{pmatrix},$$

яъни $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Бевосита текшириш йўли билан қуйидаги:

1) $(\lambda A)\cdot B=A\cdot(\lambda B)=\lambda\cdot(A\cdot B)$, λ-сон;

2) $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$;

3) $C\cdot(A+B)=C\cdot A+C\cdot B$;

4) $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$

хоссаларнинг ўринли эканлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Агар A ва B nxn ўлчамли квадрат матрицалар бўлса, у ҳолда

1) $\det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B$;

2) $\det(\lambda A)=\lambda^n\det A$

муносабатлар ўринли бўлади.

Агар барча i, j лар учун $a^T_{ij}=a_{ji}$ бўлса, $A^T=||a^T_{ij}||$ матрицани $A=||a_{ij}||$ матрицага транспонирланган матрица деймиз.

Агар A mxn ўлчамли матрица бўлса, A^T nxm ўлчамли матрица бўлади.

4-*мисол*.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix},\qquad A^T=\begin{pmatrix} 3 & -1\\ -2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Қуйидаги хоссалар ўринли:

1) $(A^T)^T=A$;

2) $(A+B)^T=A^T+B^T$;

3) $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$.

Агар $A^T=A$ бўлса, квадрат A матрица симметрик, $A^T=-A$ бўлса, кососимметрик матрица деб аталади.

Теорема. *Ҳар қандай A квадрат матрицани симметрик B ва кососимметрик C матрицалар йиғиндиси кўринишида ифодалаш мумкин.*

2.2. Тескари матрица

Қуйидаги nxn ўлчамли матрицани кўрайлик:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

Ихтиёрий nxn ўлчамли $A=||a_{ij}||$ матрица учун $A\cdot E=E\cdot A=A$ эканлигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас, яъни E матрицалар учун бирлик вазифасини бажаради. Шунинг учун E ни *бирлик матрица* деб айтилади.

Детерминанти 0 га тенг бўлган қуйидаги ҳар қандай nxn ўлчамли $A=||a_{ij}||$ матрица *махсус матрица* деб аталади:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=0$$

Акс ҳолда, яъни $\det A\neq 0$ бўлса, A матрица *махсус бўлмаган матрица* дейилади.

Масалан, аввалги параграфда кўрилган мисолга кўра

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 6 & 1\end{pmatrix}$$

матрица махсус матрица, чунки

$$\det A=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 6 & 1\end{vmatrix}=0$$

Таъриф. *Агар $A\cdot B=B\cdot A=E$ муносабат ўринли бўлса, nxn ўлчамли квадрат $B=||b_{ij}||$ матрицани махсус бўлмаган nxn*

ўлчамли $A=||a_{ij}||$ матрицага тескари матрица деб аталади. Тескари матрица $B=A^{-1}$ кўринишда белгиланади.

Энди тескари матрицани бевосита ҳисоблаш усулларини кўрамиз.

Фараз қилайлик, $A=||a_{ij}||$ махсус бўлмаган квадрат матрица бўлсин. Агар A_{ij} – a_{ij} элементнинг $\det A$ даги алгебраик тўлдирувчиси бўлса, у ҳолда

$$A^{v}=\begin{pmatrix} A_{12} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

A га ***бириктирилган матрица*** деб аталади. Детерминантнинг 3-, 4-хоссаларига асосан қуйидаги келиб чиқади:

$$A^{v}A=A\ A^{v}\ =\det A\cdot E,\ \text{бундан}\ A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^{v}$$

Тескари матрицани ҳисоблашнинг бу усули ***бириктирилган матрицалар усули*** деб аталади.

5-*мисол.* Бириктирилган матрицалар усули билан

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

матрицага тескари матрицани топинг.

Ечиш. $\det A=-4$. Демак, *A* махсус бўлмаган матрица экан. Унинг барча алгебраик тўлдирувчиларини топамиз:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=4,\quad A_{21}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=-8,\quad A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=-7,\quad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=9,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-5$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=-6,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=10,\quad A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=-6.$$

Шунинг учун,

$$A^{v}=\begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

ва

$$A^{-1}=-\frac{1}{4}A^{v}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -7/4 & 9/4 & -5/4 \\ 3/2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Қуйида кўриладиган усулимиз *элементар алмаштиришлар усули* деб аталади.

Агар *A* *n*x*n* ўлчамли махсус бўлмаган квадрат матрица бўлса, унинг учун ўлчами *n*x2*n* бўлган $Г_A=(A|E)$ матрица тузиб оламиз, яъни *A* матрицага бирлик *E* матрицани бирлаштириб тузамиз. Ҳосил бўлган $Г_A$ матрицанинг сатрлари устида элементар алмаштиришлар бажариб, уни *(E|B)* кўринишга келтирамиз. У ҳолда $B=A^{-1}$ бўлади.

6-*мисол.* Элементар алмаштиришлар усули ёрдамида қуйидаги матрицага тескари матрицани топинг:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ечиш. $Г_A$ матрицани тузиб оламиз:

$$Г_A=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$Г_A$ матрицанинг сатрларини мос равишда γ_1, γ_2, γ_3 деб белгилаб олиб, улар устида қуйидаги алмаштиришларни бажарамиз:

$$\gamma_1^{I}=\frac{1}{3}\gamma_1,\qquad \gamma_1^{II}=\gamma_1^{I}-\frac{2}{7}\gamma_2^{I},\qquad \gamma_1^{III}=\gamma_1^{II}-\frac{1}{24}\gamma_3^{II}$$

$$\gamma_2' = \gamma_2 - \frac{4}{3}\gamma_1, \quad \gamma_2'' = \frac{3}{7}\gamma_2', \quad \gamma_2''' = \gamma_2'' - \frac{1}{12}\gamma_3''$$

$$\gamma_3' = \gamma_3 - \frac{2}{3}\gamma_1, \quad \gamma_3'' = \gamma_3' + \frac{1}{7}\gamma_2', \quad \gamma_3''' = \frac{7}{24}\gamma_3''.$$

Натижада кетма-кет қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 7/3 & 2/3 & -4/5 & 1 & 0 \\ 0 & -1/3 & 10/4 & -2/3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/7 & 5/7 & -2/7 & 0 \\ 0 & 1 & 2/7 & -4/7 & 3/7 & 0 \\ 0 & 0 & 24/7 & -6/7 & 1/7 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & -7/24 & -1/24 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 5/12 & -1/12 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/24 & 7/24 \end{array}\right).$$

Демак,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -7/24 & -1/24 \\ -1/2 & 5/12 & -1/12 \\ -1/4 & 1/24 & 7/24 \end{pmatrix}.$$

Тескари матрица қуйидаги хоссаларга эга:

1^0. $(\alpha A)^{-1}=A^{-1}/\alpha \ (\alpha\neq 0)$

2^0. $(AB)^{-1}= B^{-1}A^{-1}$

3^0. $(A^{-1})^{T}=(A^{T})^{-1}$

1^0-хоссанинг исботи. Агар $\alpha\neq 0$ бўлса, $\det (\alpha A)=\alpha^n\det A\neq 0$ бўлади, шунинг учун $\alpha A=\|\alpha a_{ij}\|$ матрица махсус эмас, демак, $(\alpha A)^{-1}$ мавжуд. Агар A_{ij} деб αA матрицанинг αa_{ij} элементининг алгебраик тўлдирувчиси, A_{ij} деб эса A матрицанинг a_{ij} элементининг алгебраик тўлдирувчисини белгиласак, у ҳолда $A_{ij}=\alpha^{n-1}A_{ij}$ эканлигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Шу сабабли,

$$(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha^n \det A}\|A_{ji}\| = \frac{1}{\alpha^n \det A}\|\alpha^{n-1}A_{ji}\| =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\det A}\|A_{ji}\| = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\det A}A^{v} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$$

2^0-хоссанинг исботи. Агар $B^{-1}A^{-1}$ ни $A{\cdot}B$ га ўнг томонидан кўпайтирилса

$$AB{\cdot}B^{-1}A^{-1}=A\,(BB^{-1})\,A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E.$$

Агар чап томонидан кўпайтирсак:

$$B^{-1}A^{-1}AB=B^{-1}(A^{-1}A)\,B=B^{-1}EB=B^{-1}B=E$$

бўлади. Демак, ҳақиқатан $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ экан.

3^0-хоссанинг исботи. A^T ни $(A^{-1})^{T}$ га чап томонидан кўпайтирайлик, у ҳолда 2.1даги транспонирланган матрицаларнинг 3-хоссасига кўра

$$A^T(A^{-1})^{T}=(A^{-1}A)^{T}=E^T=E$$

ва A^T ни $(A^{-1})^{T}$ га ўнг томонидан кўпайтирсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$(A^{-1})^{T}A^T=(AA^{-1})^{T}=E^T=E.$$

3-§. АРИФМЕТИК ВЕКТОРЛАР ФАЗОСИ. МАТРИЦАНИНГ РАНГИ

3.1. Арифметик векторлар

Ихтиёрий n та $x_1, x_2,\ldots, x_n$ сонларнинг ҳар қандай тартибланган тўплами арифметик вектор дейилади ва $x=(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ каби белгиланади. $x_1, x_2,\ldots, x_n$ сонлар x арифметик векторнинг компоненталари деб аталади.

Арифметик вектор устида қуйидаги амалларни киритамиз:

Қўшиш: агар $x=(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ ва $y=(y_1, y_2,\ldots, y_n)$ бўлса, у ҳолда

$$x+y=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ldots,\ x_n+y_n) \qquad (3.1)$$

бўлади.

Сонга кўпайтириш: агар λ-бирор сон ва $x=(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ арифметик вектор бўлса, у ҳолда

$$\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_n) \qquad (3.2)$$

бўлади.

Барча арифметик векторлар тўплами юқоридаги киритилган амалларга кўра арифметик векторлар фазоси деб аталади ва R^n билан белгиланади. Бу фазо чизиқли фазо бўлади. Ҳақиқатан, ихтиёрий $x,\ y\in R^n$ лар учун

1) $x+y=y+x$;

2) $(x+y)+z=x+(y+z)$;

3) $x+0=x$, бу ерда $0=(0,\ldots,0)$ нол вектор;

4) ҳар қандай x, y учун шундай z мавжудки, $x=y+z$, z ни x ва y ларнинг айирмаси деб аталади ва $z=x-y$ деб белгиланади;

5) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)\ x$, λ,μ — ихтиёрий сонлар;

6) $1\ x=x$;

7) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$;

8) $(\lambda+\mu)\ x=\lambda x+\mu x$.

Эслатма. Агар $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$ сонлар ҳақиқий бўлса, R^n ҳақиқий арифметик векторлар фазоси, агар $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$ лар комплекс бўлса, R^n комплекс арифметик фазо деб аталади.

Агар шундай бир вақтда нолга тенг бўлмаган $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_S$ сонлар мавжуд бўлиб, $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\ldots+\lambda_Sx_S=0$ бўлса, арифметик векторларнинг $\{x_1,\ x_2,\ldots,\ x_S\}$ системаси чизиқли боғлиқ дейилади. Акс ҳолда, бу система чизиқли боғлиқ эмас дейилади.

Фараз қилайлик, Q-арифметик векторларнинг ихтиёрий тўплами бўлсин. Агар

а) $e_k\in Q,\ k=1,2,\ldots,\ s$;

б) $\boldsymbol{B}$ система чизиқли боғлиқ бўлмаса;

в) ихтиёрий $x\in Q$ учун шундай $\lambda_1,\ldots,\lambda_S$ топилсаки,

$$x=\sum_{k=1}^{s}\lambda_k e_k \qquad (3.3)$$

бўлса, $\boldsymbol{B}=\{e_1,\ e_2,\ldots,\ e_S\}$ система Q да базис ташкил этади дейилади.

(3.3) формула x векторнинг $\boldsymbol{B}$ базис бўйича ёйилмаси деб аталади. $\lambda_1,\ldots,\lambda_S$ коэффициентлар x векторнинг $\boldsymbol{B}$ базисдаги координаталари дейилади.

1-*мисол.* Агар $a_1=(4,1,3,-2)$, $a_2=(1,2,-3,2)$, $a_3=(16,9,1,-3)$, $a_4=(0,1,2,3)$, $a_5=(1,-1,15,0)$ бўлса, $3a_1+5a_2-a_3-2a_4+2a_5$ ни ҳисобланг.

Ечиш: (3.1) ва (3.2) га асосан $3a_1=(12,3,9,-6)$, $5a_2=(5,10,-15,10)$, $2a_4=(0,2,4,6)$, $2a_5=(2,-2,30,0)$, $3a_1+5a_2-a_3-2a_4+2a_5=(12+5-16-0+2,\ 3+10-9-2-2,\ 9-15-1-4-30,\ -6+10+3-6+0)=(3,0,-41,1)$.

2-*мисол.* $x_1=(-3,1,5)$ ва $x_2=(6,-3,15)$ арифметик векторларнинг чизиқли боғлиқ ёки чизиқли боғлиқ эмаслигини аниқланг.

Ечиш: Таърифга кўра

$$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2=(-3\lambda_1+6\lambda_2,\ \lambda_1-3\lambda_2,\ 5\lambda_1+15\lambda_2)=0$$

бундан,

$$-3\lambda_1+6\lambda_2=0,$$
$$\lambda_1-3\lambda_2=0,$$
$$5\lambda_1+15\lambda_2=0.$$

Кўриниб турибдики, бу тенгликларни бир вақтда фақат $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$ қийматлар қаноатлантиради. Демак, берилган векторлар чизиқли боғлиқ эмас экан.

3-*мисол.* $e_1=(1,1,1,1,1)$, $e_2=(0,1,1,1,1)$, $e_3=(0,0,1,1,1)$, $e_4=(0,0,0,1,1)$, $e_5=(0,0,0,0,1)$ арифметик векторлар системаси R^5 да базис ташкил этишини кўрсатинг.

Ечиш. Аввал бу система чизиқли боғлиқ эмаслигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан,

$$\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3+\lambda_4e_4+\lambda_5e_5=(\lambda_1,\lambda_1+\lambda_2,\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4,\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5)=0,$$

бундан

$$\lambda_1=0,\ \lambda_1+\lambda_2=0,\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0,\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0$$
$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5=0$$

ва кетма-кет $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=0$, $\lambda_4=0$, $\lambda_5=0$ ҳосил бўлади, яъни бу система чизиқли боғлиқ эмас экан.

Энди $x=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$ R^5 нинг ихтиёрий элементи бўлсин. У ҳолда

$$x=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)=(x_1,\ x_1,\ x_1,\ x_1,\ x_1)+(0,\ x_2-x_1,\ x_2-x_1,\ x_2-x_1,\ x_2-x_1)+(0,\ 0,\ x_3-x_2,\ x_3-x_2,\ x_3-x_2)+(0,\ 0,\ 0,\ x_4-x_3,\ x_4-x_3)+(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ x_5-x_4)=x_1(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)+(x_2-x_1)(0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)+(x_3-x_2)(0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1)+(x_4-x_3)(0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1)+(x_5-x_4)(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)=x_1e_1+(x_2-x_1)\ e_2+(x_3-x_2)\ e_3+(x_4-x_3)\ e_4+(x_5-x_4)\ e_5.$$

Агар $x=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)\neq0$ бўлса, у ҳолда x_1, x_2-x_1, x_3-x_2, x_4-x_3, x_5-x_4 бир вақтда нолга тенг бўлмайди. Шу сабабли $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ R^5 да базис бўлар экан. Масалан, $x=(1, 0, 1, 0, 1)$ арифметик векторнинг шу базисдаги координаталари $x=(1, -1, 1, -1, 1)$ бўлади.

1-теорема. *Агар a_1, a_2, a_3 арифметик векторлар чизиқли боғлиқ ва a_3 вектор a_1 ва a_2 векторлар орқали чизиқли ифодаланмаса, a_1 ва a_2 лар фақат ўзгармас кўпайтувчигагина фарқ қилади.*

Исботи. a_1, a_2, a_3 чизиқли боғлиқ бўлгани учун бир вақтда нолга тенг бўлмаган шундай $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ сонлар топиладики, $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\lambda_3 a_3$ бўлади. Агар $\lambda_3\neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$a_3=-\frac{\lambda_1}{\lambda_3}a_1-\frac{\lambda_2}{\lambda_3}a_2$$

деб ёзиш мумкин, лекин бу теорема шартига зид, чунки a_3 вектор a_1 ва a_2 орқали чизиқли ифодаланиб қолади. Шу сабабли $\lambda_3=0$ бўлиши шарт. У ҳолда

$$\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2=0,$$

бўлади, бундан эса, агар $\lambda_1\neq 0$ бўлса,

$$a_1=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}a_2$$

келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

2-теорема. *Агар a_1, a_2,…, a_n арифметик векторлар чизиқли боғлиқ бўлмаса-ю, a_1, a_2,…, a_n, b лар чизиқли боғлиқ бўлса, у ҳолда b вектор a_1, a_2,…, a_n вектор орқали чизиқли ифодаланади.*

Исботи. a_1, a_2,…, a_n, b векторлар теорема шартига кўра чизиқли боғлиқ бўлгани учун бир вақтда нолга тенг бўлмаган шундай $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n+1}$ сонлар топиладики,

$$\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_n a_n+\lambda_{n+1}b=0 \tag{3.4}$$

бўлади. Бу ерда $\lambda_{n+1}\neq 0$ бўлиши шарт, акс ҳолда, яъни агар $\lambda_{n+1}=0$ бўлса,

$$\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_n a_n=0$$

бўлиб, бундан ва a_1, a_2,…, a_n ларнинг чизиқли боғлиқ эмаслигидан $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$ келиб чиқади, яъни a_1, a_2,…, a_n, b чизиқли боғлиқ эмас деган хато хулосага келамиз. Шу сабабли $\lambda_{n+1}\neq 0$, у ҳолда (3.4) ни

$$b=-\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}}a_1-\frac{\lambda_2}{\lambda_{n+1}}a_2-\ldots-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}a_n$$

деб ёзиш мумкин. Теорема исбот бўлди.

3-теорема. *a_1, a_2,…, a_m арифметик векторлар орқали чизиқли ифодаланувчи ҳар қандай $n>m$ та b_1, b_2,…, b_n арифметик векторлар системаси чизиқли боғлиқ бўлади.*

Исботни математик индукция усули билан амалга оширамиз.

$m=1$ бўлганда теореманинг тўғрилигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Теорема $m=k$-1 учун тўғри бўлсин деб фараз қилиб, $m=k$ учун текширамиз.

Агар

$$b_1=c_{11}a_1+\ldots+c_{1k}a_k,$$
$$b_2=c_{21}a_1+\ldots+c_{2k}a_k,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$b_n=c_{n1}a_1+\ldots+c_{nk}a_k$$

бўлса, қуйидаги 2 ҳол юз бериши мумкин.

1. Барча c_{11}, c_{21},…, c_{n1} коэффициентлар нолга тенг. Унда b_1, b_2,…, b_n лар k-1 та векторлар орқали чизиқли ифодаланиб қолади, бу ҳол учун фаразимизга кўра теорема тўғри.

2. b_1 нинг коэффициентларидан камида биттаси нолдан фарқли. Умумийликни бузмаган ҳолда $c_{11}\neq 0$ деб фараз қилиш мумкин.

Агар

$$b_2^| = b_2-\frac{c_{21}}{c_{11}}b_1$$

$$b_3^| = b_3-\frac{c_{31}}{c_{11}}b_1$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$b_n^| = b_n-\frac{c_{n1}}{c_{11}}b_1$$

десак, бу векторлар a_1, a_2,…, a_m орқали чизиқли ифодаланади ва уларнинг сони n-1 теорема шартига кўра k-1 дан катта. Қилинган фаразга кўра бу система чизиқли боғлиқ, яъни шундай бир вақтда нолга тенг бўлмаган $\gamma_2,\ldots,\gamma_n$ сонлар топиладики,

$$\gamma_2 b_2^{|} + \ldots + \gamma_n b_n^{|} = 0$$

бўлади. Агар $b_2^{|},\ldots,b_n^{|}$ лар ўрнига уларнинг $b_1, b_2,\ldots, b_n$ лар орқали ифодасини қўйсак,

$$\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \ldots + \gamma_n b_n = 0\,,$$

бу ерда

$$\gamma_1 = -\frac{c_{21}}{c_{11}}\gamma_2 - \ldots - \frac{c_{n1}}{c_{11}}\gamma_n$$

ҳосил бўлади. $\gamma_1, \gamma_2,\ldots,\gamma_n$ бир вақтда нолга тенг бўлмагани учун $b_1, b_2,\ldots, b_n$ лар чизиқли боғлиқ эканлиги келиб чиқади.

Ҳар қандай векторлар системаси $Q\subset R^n$ камида битта базисга эга ва бу системанинг барча базислари бир хил сондаги векторлардан тузилган булади. Бу сонни Q системанинг ранги деб аталади ва $rangQ$ ёки $r(Q)$ кўринишда белгиланади.

R^n фазонинг ранги n ‚га тенг, уни бу фазонинг ўлчами деб аталади. R^n да базис ташкил этувчи қуйидаги система

$$\begin{aligned} e_1&=(1, 0, 0, \ldots, 0),\\ e_2&=(0, 1, 0, \ldots, 0),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ e_n&=(0, 0, 0, \ldots, 1) \end{aligned}$$

каноник базис деб аталади.

R^n нинг ҳар қандай x векторига унинг шу базисдаги координатлар устунини ўзаро бир қийматли мос қўйиш мумкин, яъни

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Эслатма. Векторнинг компоненталари билан унинг бирор базисдаги координаталарини фарқлаш зарур. Улар фақат каноник базис учун бир хил бўлади, холос. Бунга 3-мисолда келтирилган вектор мисол бўла олади.

3.2. Матрицанинг ранги

Фараз қилайлик, *mxn* ўлчамли A матрицада ихтиёрий равишда унинг k та сатр ва k та устуни бирор усул билан танланган бўлсин, бу ерда $k\leq min\ (m, n)$. Бу танланган сатр ва устунлардан тузилган k-тартибли детерминант A матрицанинг k-тартибли минори дейилади.

Таъриф. *Нолдан фарқли минорларнинг энг юқори тартиби А матрицанинг ранги деб аталади.*

Агар $r\ (A)=r$ бўлса, нолдан фарқли r—тартибли ҳар қандай минор A матрицанинг базис минори деб аталади.

mxn ўлчамли A матрицанинг барча йўлларини (сатрларини ё устунларини) R^n нинг ёки мос равишда R^m нинг арифметик векторлари системаси деб қараш мумкин.

Исботсиз қуйидаги теоремани келтирамиз.

3-теорема. *Матрицанинг ранги унинг йўллари системасининг рангига тенг бўлади ва базис минорини ўз ичига олган йўллар системасида базис ташкил этади.*

Матрица рангини ҳисоблашнинг иккита усулини кўрамиз.

1-усул ўраб турувчи минорлар усули деб аталади.

Агар M_2 минор M_1 минорни тўла ўз ичига олса, M_2 минор M_1 минорни ўраб туради деймиз. Масалан,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

матрицада

$$M_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

бўлса,

$$M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

уни ўраб турувчи минор бўлади.

Фараз қилайлик, A матрицада нолдан фарқли бирор k-тартибли минор M аниқланган бўлсин. M ни ўраб турувчи $(k+1)$-тартибли минорларни кўриб чиқамиз. Агар бу минорларнинг ҳаммаси нолга тенг бўлса, у ҳолда матрицанинг ранги k бўлади. Агар бу $(k+1)$-тартибли минорларнинг орасида ҳеч бўлмаганда битта нолдан фарқлиси M_{k+1} бўлса, M_{k+1} ни ўраб турувчи барча $(k+2)$-тартибли минорларни кўриб чиқамиз ва ҳоказо. Бу жараён то ўраб турувчи минорлар орасида камида битта нолдан фарқли топилмагунча давом этади.

4-*мисол*. Қуйидаги матрицанинг рангини топинг:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Ечиш. Кўриниб турибдики,

$$M_2 = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Уни ўраб турувчи 3-тартибли минорлар орасида, масалан,

$$M_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 5 & -3 & 4 \\ 7 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

минор нолдан фарқли. Лекин M_3 ни ўраб турувчи 4-тартибли минорлар

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Шу сабабли A матрицанинг ранги $r\ (A)=3$, унинг базис минори M_3 бўлади.

2-усул элементар алмаштиришлар усули деб аталади.

Матрицалар устида қуйидаги элементар алмаштиришлар деб аталувчи алмаштиришларни бажариш мумкин:

1) бирор йўлни сонга кўпайтириш;

2) бирор йўлнинг элементларига унга пропорционал бўлган ундан аввалги йўлнинг элементларини қўшиш;

3) бирор йўлнинг элементларига унга пропорционал бўлган ундан кейинги йўл элементларини қўшиш.

Бу алмаштиришларнинг биринчисини сатрлар устида бажариш учун берилган матрицани қуйидаги махсус тузилган

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \alpha & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

матрицага чапдан кўпайтириш кифоя.

2) алмаштиришни сатрлар устида бажариш учун эса берилган матрицани қуйидаги

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \vdots & \ddots & & \\ & & \alpha & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

матрицага чапдан кўпайтириш ва ниҳоят 3) алмаштиришни сатрлар устида бажариш учун шу матрицани қуйидаги

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & \cdots & \alpha & & \\ & & \ddots & \vdots & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

матрицага чапдан кўпайтириш кифоя. Масалан,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha x & \alpha y & \alpha z \\ u & v & w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u+\alpha x & v+\alpha y & w+\alpha z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ x+\alpha u & y+\alpha v & z+\alpha w \\ u & v & w \end{pmatrix}$$

Агар бу алмаштиришлар устунлар устида бажариладиган бўлса, берилган матрицани шу махсус тузилган матрицаларга мос равишда ўнгдан кўпайтириш керак.

Агар сатрлар устида 1) ва 2) алмаштиришларни бир неча марта бажариш лозим бўлса, берилган матрицани

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & 0 \\ . & . & . & . \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

матрицага чапдан кўпайтириш керак бўлади.

Худди шундай, агар 1) ва 3) алмаштиришларни бир неча марта сатрлар устида бажариш лозим бўлса, бу матрицани

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

матрицага чапдан кўпайтириш етарли.

Агар устунлар устида 1) ва 2) алмаштиришлар бир неча марта бажариладиган бўлса, матрицани (3.6) га ўнгдан, агар 1) ва 3) алмаштиришлар бажариладиган бўлса, берилган матрицани (3.5) га ўнгдан кўпайтириш кифоя қилади.

Бу усул қуйидаги теоремага асосланади.

3-теорема. *Матрицанинг йўллари устида бажариладиган ҳар қандай элементар алмаштиришлар матрица рангини ўзгартирмайди.*

Исботи. Фараз қилайлик, $r\ (A)=r$ бўлиб, базис минор

$$M_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ . & . & . & . \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

бўлсин. M_r нинг йўлларини ўз ичига олган $\overline{a}_1=(a_{11}, a_{12},\ldots, a_{1r},\ldots, a_{1n})$, ..., $\overline{a}_r=(a_{r1}, a_{r2},\ldots, a_{rr},\ldots, a_n)$ арифметик векторларнинг системасини қарайлик. $M_r \neq 0$ бўлгани учун $\overline{a}_1,\ldots, \overline{a}_r$ система барча йўллар системасида базис ташкил этади.

Агар M_r йўлларини ўз ичига олган йўллар устида алмаштиришлар бажариб, уларни

$$(a_1,0,\ldots,0,\ a'_{1,\ r+1},\ldots,\ a'_{1n}),$$
$$(0,\ a_2,\ldots,0,\ a'_{2,\ r+1},\ldots,\ a'_{2n}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(0,0,\ldots,\ a_r,\ a'_{r,\ r+1},\ldots,\ a'_{rn})$$

кўринишга келтирсак, бу арифметик векторлардан тузилган система ҳам барча йўллар системасида базис ташкил этади. Кўриниб турибдики, бу система ранги ҳам r га тенг. Теорема исбот бўлди.

5-мисол. Ушбу

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 4 & -1\\ 0 & 2 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

матрицанинг ранги топилсин.

Ечиш. 1-йўлни -2 га кўпайтириб, 2-йўлга қўшамиз:

$$A\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 4 & -1\\ 0 & 2 & -1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 9 & -8\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 9 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 9 & -8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 9 & 0\end{pmatrix}$$

охирги матрицанинг ранги 3 га тенг, чунки

$$M_3=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{vmatrix}=81\neq 0\cdot$$

Демак, $r\,(A)=3$ экан.

6-мисол. $a_1=(1,-1,0,0)$, $a_2=(0,1,-1,0)$, $a_3=(1,0,-1,1)$, $a_4=(0,0,0,1)$, $a_5=(3,-5,2,-3)$ векторларни чизиқли боғлиқликка текширинг. Унинг рангини ва базис минорини топинг.

Ечиш. Берилган векторлардан қуйидаги матрицани тузиб оламиз:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 3 & -5 & 2 & -3\end{pmatrix}$$

Бу матрица устида қуйидаги алмаштиришларни кетма-кет бажарамиз:

$$A\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 3 & -5 & 2 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -5 & -3 & -3\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -5 & -3 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -5 & -3 & -3\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -3 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

охирги матрицанинг ранги 3 га тенг ва базис минор

$$M_3=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

Демак, берилган векторлар системаси чизиқли боғлиқ экан.

4-§. ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ

4.1. Умумий тушунчалар

Қуйидаги n та номаълумли m та тенгламалар системасини қарайлик

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \qquad (4.1)$$

Агар бу ерда

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n} \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

десак, (4.1) ни матрица кўринишда ёзиш мумкин:

$$AX=B. \qquad (4.2)$$

Агар B=0 бўлса, система бир жинсли, акс ҳолда бир жинсли бўлмаган система дейилади. (4.1) системанинг ечими деб (4.2) ни айниятга айлантирадиган ҳар қандай n та компонентали устун вектор X га айтилади (X ечимга мос келувчи $x \in R^n$ арифметик векторни ҳам (4.1) системанинг ечими деб атаймиз).

Агар система камида битта ечимга эга бўлса, уни биргаликда дейилади, акс ҳолда биргаликда эмас деймиз.

Агар иккита система ечимлари тўплами бир хил бўлса, уларни эквивалент деб атаймиз.

4.2. Чизиқли тенгламалар системасини ечишнинг матрицалар усули ва Крамер формулалари

Фараз қилайлик, (4.1) системада $n=m$ бўлсин. Агар $\det A \neq 0$ бўлса, у ҳолда маълумки (2.2 бўлимга қаранг), бундай матрицага тескари A^{-1} матрица мавжуд. A^{-1} ни (4.2) га чапдан кўлласак:

$$X= A^{-1}B \qquad (4.3)$$

тенглик ҳосил бўлади. (4.3) нинг ўнг томонидаги кўпайтириш амалини бажариб, ҳосил бўлган устунларнинг мос компоненталарини тенглаб, (4.1) нинг

ягона ечимини ҳосил қиламиз. Системани ечишнинг бу усули матрицалар усули деб аталади.

Ечимни юқорида кўрсатилган усул ёрдамида топайлик. У ҳолда

$$x_i = \frac{A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n}{\det A}, i = 1,2,\ldots,n. \qquad (4.4)$$

ҳосил бўлади. Тенгликларни ўнг томонидаги каср суратидаги йиғиндини детерминантнинг бирор йўли бўйича ёйиб ҳисоблаш усулидан (қаранг, 1.3 бўлим, (3), (4) формулалар) фойдаланиб, қуйидаги

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} \cdots a_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} \cdots a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{n}}$$

детерминантлар кўринишида ифодалаш мумкин.

Агар Δ=detA деб белгиласак, (4.4) тенгликларни

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \qquad \mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{n}} \qquad (4.5.)$$

кўринишда ёзиб олса бўлади. Бу (4.5) формулалар Крамер формулалари деб аталади.

Мисол. Қуйидаги тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + 5x_2 &= -3 \end{aligned}$$

Ечиш. Системанинг

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

матрицаси махсус эмас, чунки $\det A=-2 \neq 0$. Бириктирилган матрицаси

$$A^{\vee} = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}$$

кўринишга эга. У ҳолда тескари матрица

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}$$

бўлади ва ниҳоят,

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Бундан, $x_1=2$, $x_2=-1$, $x_3=1$ эканлиги келиб чиқади.

Энди системани Крамер формулалари ёрдамида ҳисоблаймиз:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -4, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -2.$$

Демак, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1$ экан.

Эслатма. Агар (4.1) система бир жинсли бўлиб, унинг матрицаси хосмас, яъни $\Delta=\det\neq 0$ бўлса, у ҳолда бундай система ягона тривиал деб аталувчи нол $x=(0,0,\ldots,0)$ ечимга эга бўлади. Ҳақиқатан, бундай системанинг озод ҳадлари нол бўлгани учун барча Δ_i, $(i=1,2,\ldots, n)$ детерминантлар нолга тенг бўлади, Крамер формулаларига асосан эса $x_1=0$, $x_2=0,\ldots x_n=0$ эканлиги келиб чиқади. Шу сабабли, бир жинсли чизиқли тенгламалар системаси ноллан фарқли, яъни камида битта компонентаси нолга тенг бўлмаган, $x=(x_1,\ldots, x_n)$ ечимга эга бўлиши учун унинг матрицаси хос бўлиши шарт ($\Delta=0$).

4.3. Ихтиёрий чизиқли тенгламалар системасини ечиш

Бунда умуман $n=m$ бўлиши шарт эмас, деб ҳисоблаймиз. Қуйидаги матрица

$$\bar{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

кенгайтирилган матрица деб аталади.

Теорема *(Кронекер-Капелли). (4.1) система биргаликда бўлиши учун rangA= rang A бўлиши зарур ва етарлидир.*

Зарурлиги. Фараз қилайлик, (4.1) система биргаликда ва $r\ (A)=k$ бўлсин. Биз $r\ (\bar{A})=k$ эканини исботлашимиз керак. $r\ (A)=k$ бўлгани учун A матрицага $\bar{A}$ матрицага ҳам тегишли бўлган k-тартибли нолдан фарқли минор мавжул. Шунинг учун $r\ (\bar{A})\geq k$ бўлади. Энди бу минорни қамровчи $\bar{A}$ матрицанинг ҳар қандай k+1-тартибли минори нолга тенг эканлигини исботлаш зарур. Бу минорнинг битта устуни озод ҳадлардан иборат. Умумийликни бузмаган ҳолда, бу минор

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & b_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k} & b_{k+1} \end{vmatrix}$$

деб фараз қилишимиз мумкин, чунки акс ҳолда системанинг тенгламаларини ва номаълумларнинг жойини алмаштириб шу ҳолга олиб келса бўлади. Шартга кўра (4.1) система биргаликда, шунинг учун шундай $x=(x_1,\ldots, x_n)$ арифметик вектор мавжудки, у системани қаноатлантиради, хусусан, у системанинг биринчи $k+1$ та тенгламасини ҳам қаноатлантиради. У ҳолда

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1+\ldots+a_{1,k}x_k+\lambda_1=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k+1,1}x_1+\ldots+a_{k+1,k}x_k+\lambda_{k+1}=0 \end{array}\right\} \qquad (4.6)$$

бу ерда

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_1=a_{1,k+1}x_{k+1}+\ldots+a_{1n}x_n-b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_{k+1}=a_{k+1,k+1}x_{k+1}+\ldots+a_{k+1,n}x_n-b_{k+1} \end{array}\right\} \qquad (4.7)$$

(4.6) асосида қуйидаги

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}y_1+\ldots+a_{1,k}y_k+\lambda_1y_{k+1}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k+1,1}y_1+\ldots+a_{k+1,k}y_k+\lambda_{k+1}y_{k+1}=0 \end{array}\right\} \qquad (4.8)$$

системани тузиб оламиз. Бу система биргаликда, чунки уни нолдан фарқли $y=(x_1,\ldots,\ x_k,1)$ ечим қаноатлантиради. У ҳолда (4.2 бўлимдаги эслатмага қаранг) бир жинсли (4.7) системанинг детерминанти нолга тенг, яъни

$$0=\begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1k} & a_{1,k+1}x_{k+1}+\ldots+a_{1n}x_n-b_1 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k+1,1}\ldots a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1}x_{k+1}+\ldots+a_{k+1,n}x_n-b_{k+1} \end{vmatrix}=$$

$$=\sum_{S=k+1}^{n}x_S\begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1k} & a_{1S} \\ \cdots\cdots & \cdots \\ a_{k+1,1}\ldots a_{k+1,k} & a_{k+1,S} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1k} & b_1 \\ \cdots\cdots & \cdots \\ a_{k+1,1}\ldots a_{k+1,k} & b_{k+1} \end{vmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1k} & b_1 \\ \cdots\cdots & \cdots \\ a_{k+1,1}\ldots a_{k+1,k} & b_{k+1} \end{vmatrix},$$

чунки $r\ (A)=k$ бўлгани учун йиғиндига кирувчи барча детерминантлар нолга тенг. Демак, $r\ (\bar{A})=k$ экан.

Етарлилиги: Энди $r\ (A)=r\ (\bar{A})=k$ бўлсин деб фараз қилайлик. Система биргаликда эканлигини исбот қилиш керак. Қилинган фаразга кўра, системанинг шундай k та тенгламаси мавжудки, унинг номаълумлари олдидаги коэффициентлардан тузилган k-тартибли детерминанти нолдан фарқлидир. Тенгламанинг биринчи қисмида қилинганидек, умумийликни бузмаган ҳолда бу айнан

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1+\ldots+a_{1,n}x_n=b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}x_1+\ldots+a_{kn}x_n=b_k \end{array}\right\} \qquad (4.9)$$

тенгламалар деб фараз қилиш мумкин. Шартга кўра, унинг учун

$$\sigma=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1k} \\ \cdots\cdots \\ a_{k1}\cdots a_{kk} \end{vmatrix}\neq 0.$$

(4.9) системани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+\ldots+a_{1k}x_k=b_1-a_{1,k+1}x_{k+1}-\ldots-a_{1n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}x_1+\ldots+a_{kk}x_k=b_k-a_{k,k+1}x_{k+1}-\ldots-a_{kn}x_n. \end{array}\right\} \qquad (4.10)$$

$\sigma\neq0$ бўлгани учун бу система ягона ечимга эга ва уни Крамер формулалари ёрдамида топиш мумкин:

$$x_1=\frac{\sigma_1}{\sigma}=\frac{1}{\sigma}\sum_{S=1}^{k}A_{S1}(b_1-a_{1,k+1}x_{k+1}-\ldots-a_{1n}x_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (4.11.)$$

$$x_k=\frac{\sigma_k}{\sigma}=\frac{1}{\sigma}\sum_{S=1}^{k}A_{Sk}(b_k-a_{k,k+1}x_{k+1}-\ldots-a_{kn}x_n),$$

бу ерда A_{si}, $(i=1,2,\ldots,k)$, a_{si} элементининг σ детерминантдаги алгебраик тўлдирувчисидир. $x_{k+1},\ldots,$ x_n ларга ҳар хил қийматлар бериш мумкин, $x_1,\ldots,\ x_k$

ларнинг қийматлари эса (4.11) формулалар орқали ҳисобланади. Демак, (4.10) система чексиз кўп ечимга эга экан.

Энди бу ечимлар (4.1) системанинг (4.10) га кирмаган тенгламаларини ҳам қаноатлантиришини кўрсатишимиз керак. Бунинг учун (4.11) ечимлар (4.1) нинг $k+1$ тенгламасининг ҳам ечими эканлигини кўрсатиш кифоя.

(4.1) системанинг аввалги $k+1$ та тенгламасини олиб, уларни (4.6) кўринишида ёзиб оламиз. Фараз қилайлик, x арифметик вектор (4.5) нинг дастлабки k та тенгламасининг ечими бўлсин. Худди юқоридагидек, (4.8) тенгламалар системасини тузиб оламиз. Бу системанинг детерминанти нолга тенг. Шунинг учун бу система тривиал бўлмаган $y_1,\dots, y_{k+1}$ ечимга эга. Бу ерда $y_{k+1}\neq 0$, чунки, акс ҳолда (4.8) система $y_1,\dots, y_k,0$ ечимга эга бўлади, бундан $y_1=0,\dots,$ $y_k=0$ эканлиги келиб чиқади, чунки $\sigma\neq 0$, яъни (4.8) тривиал $y_1=y_2=\dots=y_{k+1}=0$ ечимга эга бўлиб қолади. (4.6) система бир жинсли бўлгани учун

$$y_1' = \frac{y_1}{y_{k+1}}, \dots, y_k' = \frac{y_k}{y_{k+1}}, 1$$

сонлар ҳам бу системанинг ечими бўлади. У ҳолда $y_1',\dots,y_k'$ лар (4.5) системанинг дастлабки k та тенгламаларининг ечими бўлади. Бизга маълумки, бу система ягона $x_1,\dots, x_k$ ечимга эга эди. $\sigma\neq 0$ бўлгани учун $z_1' = x_1, \dots, z_k' = x_k$ бўлиши шарт. Агар бу қийматларнинг ва $z_{k+1}' = 1$ ни (4.7) нинг $k+1$-тенгламасига қўйсак, тенглик бажарилишига ишонч ҳосил қиламиз. Демак, $x_1,\dots, x_k$ лар (4.5) нинг $k+1$-тенгламасини қаноатлантиради ва (4.6) га асосан $x=(x_1,\dots, x_n)$ (4.1) нинг $k+1$-тенгламасининг ечими экан. Теорема тўлиқ исбот бўлди.

Эслатма. Агар $x_{k+1}=c_1,\dots,$ $x_n=c_{n-k}$ десак, барча $x_1,\dots,$ x_k лар $c_1,\dots,$ c_{n-k} ларга боғлиқ бўлиб қолади.

$(x_1(c_1,\dots, c_{n-k}),\dots, x_k\ (c_1,\dots, c_{n-k}), c_1,\dots, c_{n-k})^T$ устун (4.1) нинг умумий ечими деб аталади.

1-*мисол*. Қуйидаги системани ечинг:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ x + y + 2z &= 1, \\ x + y + 3z &= 2. \end{aligned}\right\}$$

Ечиш.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Шунинг учун

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

матрица учун $r(A)=2$, чунки $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Кенгайтирилган

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

матрица учун $r(\overline{A}) = 3$, чунки шу матрицанинг қуйидаги минори

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

яъни $r(\overline{A}) > r(A)$ бўляпти. Юқоридаги теоремага асосан, бу система ечимга эга эмас дейиш мумкин.

3-*мисол*. Системани ечинг:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=1,\\ x+y+2z&=1,\\ 2x+2y+4z&=2.\end{aligned}\right\}$$

Ечиш. Унинг детерминанти

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{vmatrix} = 0 .$$

Бевосита ҳисоблаш йўли билан $r(A) = r(\overline{A}) = 2$ эканлигига ишонч ҳосил қилишимиз мумкин. Берилган системанинг биринчи ва иккинчи тенгламаларидан

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=1,\\ x+y+2z&=1\end{aligned}\right\}$$

системани тузиб оламиз. Уни ўз навбатида

$$\left.\begin{aligned} x+z&=1-y,\\ x+2z&=1-y\end{aligned}\right\}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бу система учун

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 1 \neq 0 .$$

Шу сабабли, у ягона ечимга эга:

$$x = \begin{vmatrix} 1-y & 1\\ 1-y & 2\end{vmatrix} = 1-y, \qquad z = \begin{vmatrix} 1 & 1-y\\ 1 & 1-y\end{vmatrix} = 0.$$

Демак, *y* нинг ҳар қандай қийматида *(1-y, y, 0)* учлик берилган системанинг ечими бўлади. Агар *y=C* десак, *(1-C, C, 0)* устун берилган системанинг умумий ечими бўлади.

4.4. Бир жинсли системалар

Қуйидаги

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0,\\ \ldots\ldots&\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (4.11)$$

бир жинсли системани қарайлик. Бу система ҳар доим биргаликда, чунки унинг камида тривиал $x=0$ ечими бор. Унинг тривиал бўлмаган ечими мавжуд бўлиши учун $r(A)=r<\min(m, n)$ бўлиши зарур ва етарлидир.

Фараз қилайлик, $Q\subset R^n-$бир жинсли (4.11) системанинг барча ечимлари тўплами бўлсин. Бу тўпламдаги ҳар қандай базис *n-r* та $e_1, e_2, \ldots, e_{n-r}$ чизиқли боғлиқ бўлмаган векторлардан тузилгандир. Каноник базисда унга мос келувчи $E_1, E_2, \ldots, E_{n-r}$ векторлар системаси фундаментал ечимлар системаси деб аталади. Унинг ечимини

$$X=C_1E_1+\ldots+C_{n-r}E_{n-r}$$

куринишда ёзиш мумкин, бу ерда $C_1, \ldots, C_{n-r}$ ихтиёрий ўзгармаслар.

4-*мисол*. Қуйидаги бир жинсли системанинг фундаментал ечимлар системасини ва умумий ечимини топинг:

$$\begin{aligned} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4&=0,\\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4&=0,\\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4&=0.\end{aligned}$$

Ечиш. Бу системанинг матрицасини тузиб оламиз:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3\\ 3 & -6 & 4 & 2\\ 4 & -8 & 17 & 11\end{pmatrix}$$

r (A)=2 (текширинг!). Базис минор сифатида, масалан,

$$M_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

ни олишимиз мумкин. У ҳолда системанинг 3-тенгламасини ташлаб, уни қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$5x_3 + 3x_4 = -2x_1 + 4x_2,$$
$$4x_3 + 2x_4 = -3x_1 + 6x_2.$$

Бунда, агар $x_1=C_1$, $x_2=C_2$ десак,

$$x_3 = -\frac{5}{2}C_1 + 5C_2, \qquad x_4 = \frac{7}{2}C_1 - 7C_2$$

топилади. Демак, системанинг умумий ечими

$$X = (C_1, C_2) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ -\frac{5}{2}C_1 + 5C_2 \\ \frac{7}{2}C_1 - 7C_2 \end{pmatrix}$$

бўлади. Бундан мос равишда $C_1=1$, $C_2=0$ ва $C_1=0$, $C_2=1$ деб, фундаментал ечимлар системасини топамиз:

$$E_1 = X = (1,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}, \qquad E_2 = X = (0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

4.5. Жордан-Гausснинг номаълумларни кетма-кет йўқотиш усули

Бу усулнинг асосий маъноси берилган (4.1) системанинг кенгайтирилган матрицасини ёзиб олиб, унинг йўллари устида элементар алмаштиришлар бажариб, уни қуйидаги кўринишга келтиришдир:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a'_{1.r+1} & \cdots & a'_1 & \vline & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a'_{2,r+1} & \cdots & a'_2 & \vline & b'_2 \\ . & . & . & . & . & . & . & \vline & . \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} & \vline & b'_r \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & \cdots & 0 & \vline & b'_{r+1} \\ . & . & . & . & . & . & . & \vline & . \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \vline & b'_m \end{pmatrix} \qquad (4.12)$$

(4.12) матрица ўз навбатида (4.1)га эквивалент бўлган

$$\begin{aligned} x_1 + a'_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\ x_2 + a'_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ x_r + a'_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{rn}x_n &= b'_r \\ 0 &= b'_{r+1} \\ . \; . \; . \\ 0 &= b'_m \end{aligned} \qquad (4.13)$$

тенгламалар системасининг кенгайтирилган матрицасидир. Агар (4.12) да $b'_{r+1}, \ldots, b'_m$ сонларнинг ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли бўлса, (4.13) ва ўз навбатида (4.1) системалар биргаликда бўлмайди.

Агар $b'_{r+1} = \ldots = b'_m = 0$ бўлса, у ҳолда система биргаликда бўлади ва (4.13) формулалар $x_1, \ldots, x_r$ номаълумларнинг $x_{r+1}, \ldots, x_n$ номаълумлар орқали ифодасини беради.

5-*мисол.* Системани ечинг:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1, \\ x_1 \qquad + 3x_3 + 4x_4 &= 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 1. \end{aligned}\right\}$$

Ечиш. Системанинг кенгайтирилган матрицасини ёзиб олайлик:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right).$$

Бу матрицанинг сатрлари устида элементар алмаштиришлар бажарамиз:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -4 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -1/2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -5/2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -13/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 15/4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -13/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

бундан $x_4=2$, $x_3=-13/4$, $x_2=3/2$, $x_1=15/4$ келиб чиқади.

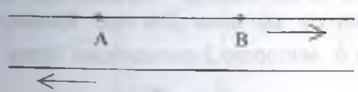
5-§. ВЕКТОРЛАР АЛГЕБРАСИ

5.1. Умумий тушунчалар

Элементар геометриядан маълумки, кесма деб тўғри чизиқнинг икки нуқтаси билан чегараланган бўлагига айтилади. Унинг узунлиги деб, танланган масштаб бирлигига нисбатан кесманинг чегаралари орасидаги масофани ўлчаш натижасида олинадиган мусбат сон қийматини тушунамиз.

Агар бирор тўғри чизиқда икки А ва В нуқталар олиб, шу тўғри чизиқ бўйлаб силжийдиган нуқтани қарасак, бу нуқта тўғри чизиқда икки йўналиш аниқлайди: биттаси А нуқтадан В нуқта томонга қараб, иккинчиси тескари, яъни В нуқтадан А нуқта томонга ҳаракатланганда. Бу йўналишлардан бирини мусбат йўналиш деб атасак, унга тескари йўналишни манфий йўналиш деб аташ мумкин.

Мусбат йўналишга эга бўлган тўғри чизиқ ўқ деб аталади.



1-расм.

Агар ўқлар параллелгина бўлиб қолмай, мусбат йўналишлари ҳам бир хил бўлса, у ҳолда бу ўқларни бир хил йўналган деймиз. Параллел бўлиб, мусбат йўналишлари тескари бўлган ўқлар қарама-қарши йўналган ўқлар деб аталади. Агар ўқлар ўзаро перпендикуляр бўлса, мусбат йўналишлари қандайлигидан қатъи назар ортогонал ўқлар дейилади.

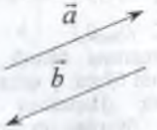
Агар тўғри чизиқнинг бирор кесмасида мусбат йўналиш берилган бўлса, бу кесма вектор деб аталади. Кесманинг чегара нуқталаридан бирини унинг боши, иккинчисини охири десак, векторнинг мусбат йўналиши унинг бошидан охирига қараб бўлади.

Боши A нуқтада, охири B нуқтада бўлган вектор $\overrightarrow{AB}$ кўринишда белгиланади. Векторни битта ҳарф билан белгилаш ҳам қабул қилинган. Масалан, $\vec{a},\vec{b}$ ёки $\vec{c}$ ва ҳоказо....

Векторнинг узунлиги деб, шу векторни ифодаловчи кесманинг узунлиги тушунилади. Демак, агар AB кесманинг узунлигини $|\overline{AB}|$, $A\vec{B}$ векторнинг узунлигини $|A\vec{B}|$ деб белгиласак, $|A\vec{B}|=|AB|$ бўлади. Худди шундай $\vec{a}$ векторнинг узунлиги учун $|\vec{a}|$ белги қабул қилинган.

Боши ва охири устма-уст тушган $A\vec{A}$ вектор нол вектор деб аталади ва $\vec{0}$ кўринишда белгиланади. Маълумки, $|A\vec{A}|=|\vec{0}|=0$ бўлади.

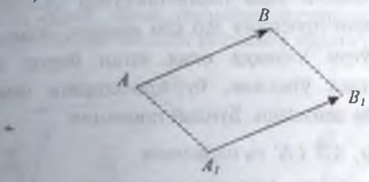
Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар параллел, узунликлари ва мусбат йўналишлари бир хил бўлса, уларни тенг дейилади ва $\vec{a}=\vec{b}$ деб ёзилади. Узунликлари бир хил параллел векторлар ҳар доим ҳам тенг бўлавермайди, масалан, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар 2-расмдагидек бўлса.



2-расм.

Узунликлари бир хил, параллел, лекин қарама-қарши йўналган $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар қарама-қарши векторлар деб аталади. $\vec{a}$ векторга қарама-қарши вектор $-\vec{a}$ деб белгиланади. Масалан, 2- расмдаги $\vec{b}$ вектор $\vec{a}$ га қарама-қарши вектор, шу сабабли $\vec{b}=-\vec{a}$.

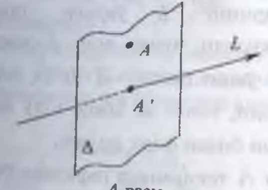
Агар $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$ бўлса, у ҳолда $\overrightarrow{AB}$ векторни A_1 нуқтага параллел кўчирилди деб тушунилади (3-расмга қаранг).



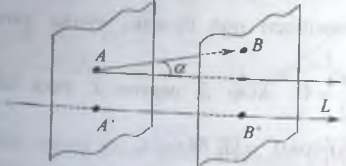
3-расм.

Битта тўғри чизиқда ёки параллел тўғри чизиқларда жойлашган векторлар коллинеар векторлар деб аталади.

A нуқтанинг L тўғри чизиқдаги проекцияси деб, L тўғри чизиқнинг унга перпендикуляр бўлган A нуқтадан ўтувчи текислик билан A' кесишиш нуқтасига айтилади (4-расмга қаранг).



4-расм.



5-расм.

$\vec{a} = \vec{AB}$ векторнинг L ўқидаги проекцияси деб, $\vec{a}$ векторнинг узунлигини унинг L ўқ билан ташкил этган α бурчагининг косинусига кўпайтмасига айтамиз (5-расмга қаранг), яъни

$$\text{пр}_L\vec{a} = |\vec{a}|\cos\alpha, \; (0 \le \alpha \le \pi).$$

Эслатма. Проекциянинг юқорида келтирилган таърифи Δ текислик L ўққа перпендикуляр бўлгани учун, тўғри бурчакли проекция деб ҳам аталади. Агар Δ текисликни L тўғри чизиққа оғма ўтган бирор Δ' текисликка параллел ўтказсак, бу проекцияни оғма бурчакли проекция дейилади. Бундай проекция

$$np_L\vec{AB} \; (\Delta' \text{ га параллел})$$

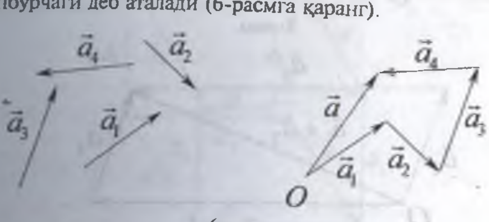
кўринишда белгиланади. Агар қавс ичида ҳеч қандай маълумот берилмаган бўлса, бу проекцияни тўғри бурчакли (ортогонал) проекция деб тушунамиз.

Тенг векторларнинг битта ўқдаги проекциялари ҳам тенг ва бир векторнинг ўзаро параллел L ва L' ўқлардаги проекциялари ҳам тенг бўлади. Қарама-қарши векторларнинг L ўқдаги проекциялари ишорасига фарқ қилади, чунки агар $\vec{a}$ вектор L ўққа α бурчакка оғиб ўтган бўлса, $-\vec{a}$ L ўқ билан $\alpha + \pi$ бурчак ташкил этади, $\cos\alpha$ ва $\cos(\pi + \alpha)$ лар қиймати маълумки, ишораси билан фарқ қилади.

Агар $\vec{a}$ вектор Δ текисликка параллел бўлса, унинг L ўқдаги проекцияси нол бўлади, чунки $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$, $np_L\vec{a} = |\vec{a}|\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$. Агар $\vec{a}$ вектор L ўққа параллел бўлса, $np_L\vec{a} = |\vec{a}|\cos 0^0 = |\vec{a}|$ бўлади.

5.2. Векторлар устида арифметик амаллар

Бизга $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ векторлар берилган бўлсин. Ихтиёрий O нуқта олиб, $\vec{a}_1$ ни бошини шу нуқтага, $\vec{a}_2$ ни $\vec{a}_1$ нинг охирига, $\vec{a}_3$ ни $\vec{a}_2$ нинг охирига ва ҳ. к. тартибда барча векторларни параллел кўчирамиз. Ҳосил бўлган синиқ чизиқ берилган векторлар системасининг кўпбурчаги деб аталади (6-расмга қаранг).



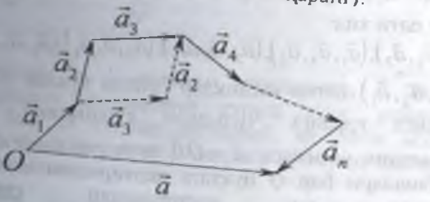
6-расм.

Бу кўпбурчакни ёпувчи $\vec{a}$ томони берилган векторларнинг йиғиндиси деб аталиб, қуйидаги

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + ... + \vec{a}_n$$

кўринишда белгиланади.

Векторларни қўшишнинг бу таърифи йиғинди учун коммутативлик (яъни қўшилувчиларнинг ўрнини алмаштириш) хоссасига эга (7-расмга қаранг).

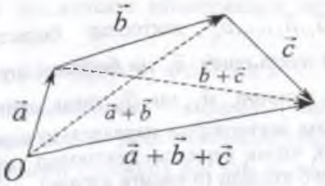


7-расм.

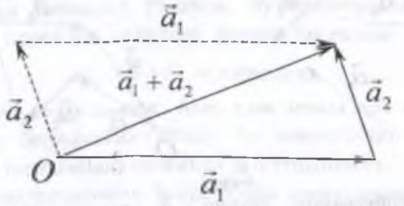
Бу қўшиш амали учун ассоциативлик хоссаси, яъни $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлар учун

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$$

муносабат ҳам ўринли (8-расмга қаранг).



8-расм.



9-расм.

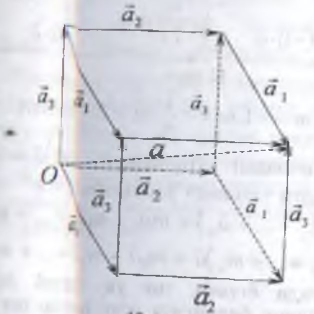
Агар $\vec{a}_1$ ва $\vec{a}_2$ векторлар йиғиндисини 9-расмдагидек, яъни $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ векторлар бошини О нуқтага келтириб бажарилса, у ҳолда векторлар параллелограмм қоидаси бўйича қўшилди деб атаймиз.

Агар $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ ва $\vec{a}_3$ векторлар берилган бўлса, уларни олти хил:

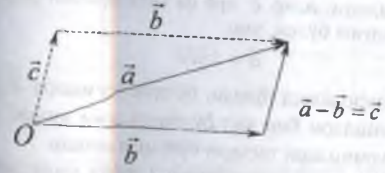
$\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right),\left(\vec{a}_1,\vec{a}_3,\vec{a}_2\right),\left(\vec{a}_2,\vec{a}_1,\vec{a}_3\right),\left(\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_1\right),\left(\vec{a}_3,\vec{a}_1,\vec{a}_2\right)$

ва $\left(\vec{a}_3,\vec{a}_2,\vec{a}_1\right)$ кетма-кетликлар бўйича қўшиш мумкин (10-расмга қаранг). Чизмадан кўринадики, барча кетма-кетлик натижаси $\vec{a}=\overrightarrow{OB}$ векторга олиб келади, яъни бошлари бир О нуқтага келтирилган векторлар йиғиндиси, шу векторлардан қурилган параллелепипеднинг O учидан чиқиб унга қарама-қарши учига йўналган диагоналдан иборат бўлар экан. Худди шу хулосага қўшишнинг параллелограмм усули ёрдамида ҳам келса бўлади. Бу ишни бажаришни ўқувчининг ўзига ҳавола қиламиз.

Таъриф. $\vec{a}$ *ва* $\vec{b}$ *векторларнинг айирмаси деб, шундай* $\vec{c}$ *векторга айтамизки, унинг* $\vec{b}$ *вектор билан йиғиндиси* $\vec{a}$ *вектор бўлади, яъни* $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$. Буни $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ кўринишда белгилаш қабул қилинган.



10-расм.



11-расм.

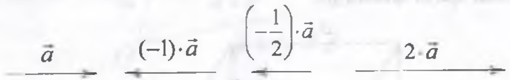
Таърифдан ва 11-расмдан кўринадики, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг айирмасини қуриш учун, уларнинг бошини бир O нуқтага келтириб, айирувчи вектор охиридан камаювчи вектор охирига йўналган векторни олиш керак экан.

Эслатма. $\vec{a}-\vec{b}$ айирмани $\vec{a}$ ва $-\vec{b}$ ни қўшиб бажарса ҳам бўлади, яъни

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$$

Бизга $\vec{a}$ вектор ва бирор m сон (скаляр) берилган бўлсин.

Таъриф. *$m\vec{a}$ кўпайтма деб, шундай $\vec{b}$ векторга айтамизки, 1) $\left|\vec{b}\right| = |m||\vec{a}|$ ва 2) агар $m > 0$ бўлса, $\vec{a}$ каби йўналган, агар $m < 0$ бўлса, $\vec{a}$ га тескари йўналган*



12-расм.

12-расмда $m = -1, m = -\frac{1}{2}, m = 2$ бўлган ҳоллар кўрсатилган. Чизмадан кўринадики, $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$. Бу кўпайтма қуйидаги тақсимот хоссаларига эга:

1^0. $m\left(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + ... + \vec{a}_n\right) = m\vec{a}_1 + m\vec{a}_2 + ... + m\vec{a}_n$

2^0. $\left(m_1 + m_2 + ... + m_n\right)\vec{a} = m_1\vec{a} + m_2\vec{a} + ... + m_n\vec{a}$.

Бирор L ўқда ётувчи, шу ўқ бўйлаб йўналган, узунлиги бир ўлчов бирлигига тенг вектор шу ўқнинг орти деб аталади. Агар $\vec{e}$ орт ва унга параллел бирор $\vec{a}$ вектор берилган бўлса, уни

$$\vec{a} = \pm|\vec{a}|\vec{e}$$

кўринишда ифодаласа бўлади, бу ерда «+» ишора $\vec{a}$ ва $\vec{e}$ нинг йўналишлари бир хил бўлганда ва «-» ишора $\vec{a}$ ва $\vec{e}$ нинг йўналишлари тескари бўлганда олинади.

$\vec{a}$ ва $\vec{e}$ векторларнинг бирор L ўқдаги проекциялари қуйидаги хоссаларга эга:

$$np_L\vec{a} + np_L\vec{b} = np_L\left(\vec{a} + \vec{b}\right), \tag{5.1}$$

$$np_L\left(m\vec{a}\right) = mnp_L\vec{a}. \tag{5.2}$$

Худди шундай $\vec{a} = \left(\vec{a} - \vec{b}\right) + \vec{b}$ эканлигини эътиборга олсак,

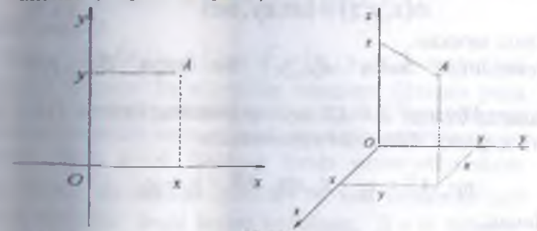
$$np_L\left(\vec{a} - \vec{b}\right) + np_L\vec{b} = np_L\vec{a}$$

ёки

$$np_L\vec{a} - np_L\vec{b} = np_L\left(\vec{a} - \vec{b}\right) \tag{5.3}$$

5.3. Декарт координаталар системасида векторлар

Текисликда ўзаро перпендикуляр, O нуқтада кесишувчи x ва y ўқлар, фазода эса ўзаро перпендикуляр, O нуқтада кесишувчи x, y, z ўқлар берилган бўлсин. O нуқтани координаталар боши, x, y, z ўқларни координаталар ўқлари деб атаймиз. Текисликдаги ва фазодаги ҳар қандай нуқта ўрни унинг координаталар ўқидаги проекцияларининг O нуқтагача бўлган масофалари орқали ягона равишда аниқланади. Бу масофаларни шу нуқтанинг координаталари деб атаймиз (13-расмга қаранг).



13-расм.

Уч ўлчовли фазода олинган ихтиёрий нуқтани O нуқта билан бирлаштириб турувчи $\overrightarrow{OA}$ вектор A нуқтанинг радиус-вектори деб аталади. $\overrightarrow{OA}$ векторнинг x, y ва z ўқлардаги проекцияларини мос равишда x, y, z деб белгиласак, улар 13-расмдан кўринадики, A нуқтанинг координаталаридан иборат бўлади. x ни A

нуқтанинг абсциссаси, y ни ординатаси ва z ни аппликатаси деб атаймиз.

(x, y, z) сонлар учлиги фазонинг A нуқтаси билан унинг радиус-вектори ўртасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатади. Шу сабабли, (x, y, z) учликни айрим ҳолларда A нуқта ёки $\overrightarrow{OA}$ вектор деб тушунамиз.

Ҳар қандай векторни ўзига параллел равишда кўчириш мумкин бўлгани учун, агар $\overrightarrow{OA} = (x, y, z)$ бўлиб, уни ўзига параллел кўчириш натижасида ҳосил бўлган вектор $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ бўлса, у ҳолда $x = x_1, y = y_1, z = z_1$ бўлади.

(5.1),(5.2) ва (5.3) хоссаларга кўра

$$(x, y, z) \pm (x_1, y_1, z_1) = (x \pm x_1, y \pm y_1, z \pm z_1) \quad (5.4)$$

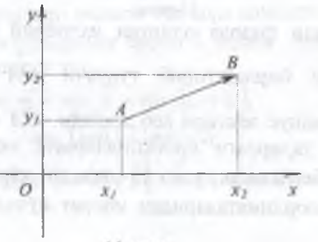
$$\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z), \quad (5.5)$$

деб ёзиш мумкин.

Текисликда боши $A(x_1, y_1)$ ва охири $B(x_2, y_2)$ нуқталарда бўлган $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ вектор берилган бўлсин (14-расмга қаранг). Чизмадан кўринадики,

$$np_x \overrightarrow{AB} = x_2 - x_1, np_y \overrightarrow{AB} = y_2 - y_1.$$

Демак,



14-расм.

$$\vec{a} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

экан. Худди шундай, фазода берилган $\overrightarrow{AB}$, бу ерда $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$, вектор учун

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

x, y, z ўқларининг ортларини мос равишда $\vec{i}, \vec{j}$ ва $\vec{k}$ билан белгилаймиз. Ихтиёрий (x, y, z) векторни

$$(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

кўринишда ифодалаш мумкин. Ҳақиқатан, агар

$$\vec{i} = (1,0,0), \vec{j} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1)$$

эканлигини эътиборга олсак,

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) =$$
$$= (x,0,0) + (0, y,0) + (0,0, z) = (x, y, z)$$

келиб чиқади.

Бизга $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ ва $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ векторлар берилган бўлсин. Бу векторлар параллел бўлиши учун уларнинг координаталари қандай шартларни каноатлантириши кераклигини аниқлаш талаб этилган бўлсин. Агар $\vec{a} = 0$ бўлса, у ҳолда унинг йўналиши аниқ эмас, шу сабабли уни $\vec{b}$ га ҳам параллел деб қараш мумкин. Энди фараз қилайлик, $\vec{a} \neq 0$ бўлсин. $\vec{b}$ вектор $\vec{a}$ га параллел бўлиши учун $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ бўлиши зарур ва етарлидир. Охирги тенгликни

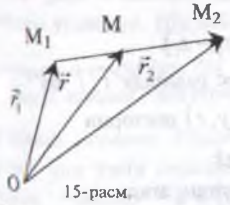
$$x_2 = \lambda x_1, y_2 = \lambda y_1, z_2 = \lambda z_1$$

кўринишда ёзиб олиш мумкин. Бундан

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

келиб чиқади. Демак, икки вектор коллениар бўлиши учун, уларнинг координаталари мос равишда пропорционал бўлиши зарур ва етарли экан.

Векторларнинг бу хусусиятидан фойдаланиб, учлари $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ва $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нуқталарда бўлган M_1M_2 кесмани берилган $M_1M : MM_2 = \lambda : 1$ нисбатда бўлувчи M нуқтанинг координаталарини топиш масаласини ҳал киламиз.



15-расм.

Агар $\vec{OM}_1 = \vec{r}_1, \vec{OM}_2 = \vec{r}_2, \vec{OM} = \vec{r}$ десак, у ҳолда

$$\vec{M_1M} = \vec{r} - \vec{r}_1, \vec{MM}_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}$$

бўлади. $\vec{M_1M}$ ва $\vec{MM}_2$ векторлар коллениар бўлгани учун, берилган нисбатга кўра

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r})$$

бўлади. Бундан $\lambda \neq -1$ бўлгани учун

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2}{1+\lambda}$$

ёки

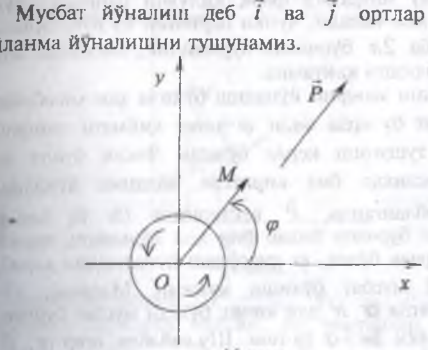
$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

5.4. Текисликда йўналишни аниқлаш

Маълумки, ҳар бир векторнинг йўналишини унинг координата ўқлари билан ташкил этган бурчаклари тўла аниқлаб беради. Масалан, текисликдаги векторни қарасак, у Ox ва Oy ўқлари билан мос равишда α ва β бурчаклар ташкил эталики, бу бурчаклар учун $\alpha + \beta = \pi/2$ муносабат ўринлидир. Шу сабабли, берилган вектор йўналишини фақат битта бурчак ёрдамида ҳам аниқласа бўлади дейиш мумкин, лекин бунда текисликда мусбат айланма йўналиш киритилган бўлиши шарт.

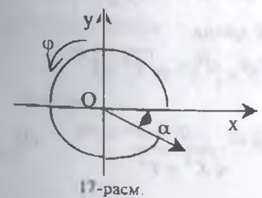
Таъриф. *Ўзаро параллел бўлмаган $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар аниқлаган текисликдаги айланма йўналиш деб, $\vec{a}$ вектордан $\vec{b}$ векторгача бўлган энг қисқа (яъни π дан кичик) бурилиш бурчагига айтамиз.*

Мусбат йўналиш деб $\vec{i}$ ва $\vec{j}$ ортлар аниқлаган айланма йўналишни тушунамиз.

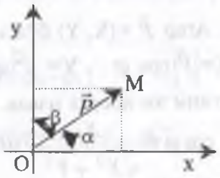


16-расм.

Фараз қилайлик, $\vec{P}$ — текисликнинг ихтиёрий вектори бўлсин. Унинг бошини координата боши O га кўчириб, $\vec{OM}$ радиус-вектор билан устма-уст туширамиз. φ — $\vec{P}$ векторнинг Ox ўқи билан ташкил этган бурчаги, яъни Ox ни мусбат йўналишда бурганда $\vec{OM}$ билан устма-уст тушиш бурчаги бўлсин. Аёнки,



17-расм.



18-расм.

φ бурчак $\vec{P}$ векторнинг йўналишини тўла аниқлаб беради. Бу бурчак худди тригонометриядагидек 2π дан ошиқ қийматларни ҳам қабул қилади деб тушунилса, у ҳолда бир йўналишга φ бурчакнинг бир-биридан 2кπ (к-бутун сон) миқдорга фарқ қилувчи саноқсиз кўп қийматлари мос келади, чунки берилган бу йўналишни неча маротаба 2π бурчакка бурмайлик, натижада яна аввалги йўналишга қайтамиз.

φ бурчакни манфий йўналиш бўйича ҳам ҳисобласа бўлади, фақат бу ерда энди φ нинг қиймати манфий бўлади деб тушуниш керак бўлади. Лекин бунда φ бурчак текисликда биз киритган айланма йўналиш бўйича ҳисобланганда, $\vec{P}$ векторнинг Ox ўқ билан ташкил этган бурчаги билан бир хил бўлмайди, чунки α мусбат бурчак бўлса, φ ҳисоблаш йўналишига қараб, ё манфий ё мусбат бўлиши мумкин. Масалан, 17-расмдаги ҳолатда α π дан кичик бўлган мусбат бурчак, φ эса ё $-\alpha$, ёки $2\pi-\alpha$ га тенг. Шу сабабли, агар α, β лар мос равишда $\vec{P}$ векторнинг Ox ва Oy ўқлари билан ташкил этган бурчаклари бўлса, у ҳолда φ

1-чоракда бўлса: $\alpha=\varphi$, $\beta=\pi/2-\varphi$

2-чоракда бўлса: $\alpha=\varphi$, $\beta=\varphi-\pi/2$

3-чоракда бўлса: $\alpha=2\pi-\varphi$, $\beta=\varphi-\pi/2$

4-чоракда бўлса: $\alpha=2\pi-\varphi$, $\beta=2\pi+\pi/2-\varphi$

бўлади. Агар $\vec{P}=\{X, Y\}$ бўлса, у ҳолда

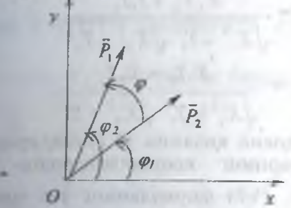
$$X=|\vec{P}|\cos\varphi, \quad Y=|\vec{P}|\sin\varphi, \quad |\vec{P}|=\sqrt{X^2+Y^2}$$

эканлигини эътиборга олсак,

$$\cos\varphi=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}, \quad \sin\varphi=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}} \qquad (1)$$

келиб чиқади.

(1) формулалар $\vec{P}$ векторнинг йўналишини тўла аниқлаб беради. φ нинг қийматини (1) нинг битта формуласидан, масалан, Sin φ орқали аниқласа бўлади, лекин бу векторнинг йўналишини аниқлаш учун етарли эмас, бунинг учун Cos φ нинг ишорасини ҳам билиш керак бўлади.



19-расм.

Фараз қилайлик, $\vec{P}_1=\{X_1, Y_1\}$ ва $\vec{P}_2=\{X_2, Y_2\}$ векторлар берилган бўлсин. Бу векторлар орасидаги бурчакни, агар у $\vec{P}_1$ дан $\vec{P}_2$ га қараб ўлчанса, $(\vec{P}_1, \hat{} \, \vec{P}_2)$ кўринишда ифодалаймиз; агар бу бурчак йўналиши текисликнинг мусбат йўналиши билан бир хил бўлса, бу бурчакни мусбат қийматлар билан ўлчаймиз, акс ҳолда бу бурчак катталигини манфий қийматлар билан ифодалаймиз. $\vec{P}_1$ ва $\vec{P}_2$ орасидаги бурчакни топайлик. Агар $\vec{P}_1$ ва $\vec{P}_2$ векторларнинг Ox ўқ билан ташкил этган бурчаклари мос равишда φ_1 ва φ_2 бўлса, у ҳолда

$$\varphi=(\vec{P}_1, \hat{} \, \vec{P}_2)=\varphi_2-\varphi_1.$$

Бундан

$$\cos\varphi=\cos(\varphi_2-\varphi_1), \quad \sin\varphi=\sin(\varphi_2-\varphi_1)$$

ёки

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \cos\varphi_2 \cos\varphi_1 + \sin\varphi_2 \sin\varphi_1,$$

$$\sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin\varphi_2 \cos\varphi_1 - \sin\varphi_1 \cos\varphi_2,$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}}, \quad \sin\varphi_1 = \frac{Y_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}}$$

эканлигини эътиборга олсак,

$$\cos\varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}\sqrt{X_2^2 + Y_2^2}} \qquad (5.7)$$

$$\sin\varphi = \frac{X_1Y_2 - X_2Y_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}\sqrt{X_2^2 + Y_2^2}} \qquad (5.8)$$

муносабатларни ҳосил қиламиз. (5.7) формуланинг ўнг томони векторларнинг координаталарига нисбатан симметрик бўлса, (5.8) формуланинг ўнг томони, $\vec{P}_1$ билан $\vec{P}_2$ нинг ўринларини алмаштирганда ўз ишорасини тескарисига алмаштиради. Шу сабабли,

$$\left(\vec{P}_2, \hat{\ } \vec{P}_1\right) = -\left(\vec{P}_1, \hat{\ } \vec{P}_2\right) + 2k\pi,$$

$$\cos\left(\vec{P}_2, \hat{\ } \vec{P}_1\right) = \cos\left(\vec{P}_1, \hat{\ } \vec{P}_2\right), \sin\left(\vec{P}_2, \hat{\ } \vec{P}_1\right) = -\sin\left(\vec{P}_1, \hat{\ } \vec{P}_2\right).$$

1-*мисол.* $\vec{Q} = \{3,4\}$ вектор билан 60^0 бурчак ташкил этувчи, узунлиги 2 бўлган $\vec{P}$ векторни топинг.

Ечиш. Агар $\varphi = (Ox, \hat{\ } \vec{Q})$ десак, у ҳолда $\varphi + 60^0 = (Ox, \hat{\ } \vec{P})$ бўлади. Шу сабабли, $\cos\varphi = 3/5$, $\sin\varphi = 4/5$ эканлиги учун

$$X = 2\cos(\varphi + 60^0) = 2(\cos\varphi \cos 60^0 - \sin\varphi \sin 60^0) =$$

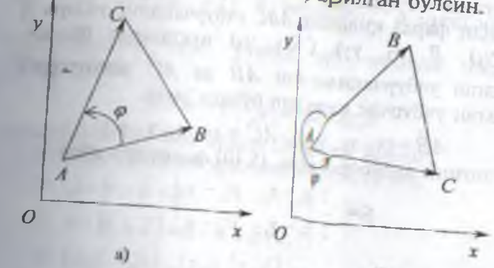
$$= 2(\cos\varphi \frac{1}{2} - \sin\varphi \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}\sqrt{3} = \frac{3 - 4\sqrt{3}}{5},$$

$$Y = 2\sin(\varphi + 60^0) = 2(\sin\varphi \cos 60^0 + \cos\varphi \sin 60^0) =$$

$$= 2(\frac{4}{5}\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{5}.$$

5.5. Боши бир нуқтага қўйилган икки векторга қурилган учбурчак юзи

Бошлари A нуқтага келтирилган $\vec{P}_1 = \vec{AB} = \{X_1, Y_1\}$ ва $\vec{P}_2 = \vec{AC} = \{X_2, Y_2\}$ векторлар берилган бўлсин.



20-расм.

B ва C учларини бирлаштириб, ABC учбурчакни ҳосил қиламиз. Шу учбурчак юзини ҳисоблайлик. Агар $\varphi = \left(\vec{P}_2, \hat{\ } \vec{P}_1\right)$ бўлса, маълумки,

$$S = \frac{1}{2}|\vec{P}_1||\vec{P}_2|\sin\varphi \qquad (5.9)$$

Бу ерда, агар $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ векторлар аниқлайдиган айланма йўналиш Oxy текисликнинг мусбат айланма йўналиши билан бир хил бўлса (қаранг, 20-расм, а)), юза қиймати мусбат, акс ҳолда (қаранг, 20-расм, б)) манфий бўлади.

Энди (5.9) да $\sin\varphi$ ўрнига (5.8) ни қўйсак;

$$S=\frac{1}{2}(X_1Y_2-X_2Y_1)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \qquad (5.10)$$

формулани ҳосил қиламиз.

Агар $\vec{P}_1$ ва $\vec{P}_2$ векторларга тортилган параллелограммни кўрсак, унинг юзи учун

$$S=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}$$

формулага эга бўламиз.

Энди фараз қилайлик, ABC учбурчакнинг учлари A (x_1, y_1), B (x_2, y_2), C (x_3, y_3) нуқталарда бўлсин. Берилган учбурчакнинг юзи $\vec{AB}$ ва $\vec{AC}$ векторларга қурилган учбурчак юзига тенг бўлади. Агар

$$\vec{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1),\quad \vec{AC}=(x_3-x_1,\ y_3-y_1)$$

эканлигини эътиборга олсак, (5.10) формулага кўра

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$$

ёки

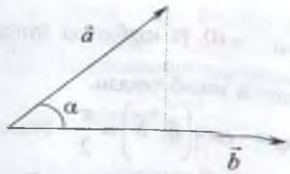
$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

формулаларга эга бўламиз.

5.6. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси

Таъриф. *$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси деб, бу векторлар узунликларининг улар орасидаги бурчак косинусига кўпайтмасига айтамиз, яъни*

$$\vec{a}\circ\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\left(\vec{a},\hat{\ }\vec{b}\right).$$



21-расм.

Вектор проекциясининг таърифига кўра, $|\vec{a}|\cdot\cos\alpha$ (бу ерда $\alpha=\left(\vec{a},\hat{\ }\vec{b}\right)$) $\vec{a}$ векторнинг $\vec{b}$ вектордаги проекциясига тенг бўлади, шу сабабли скаляр кўпайтмани

$$\vec{a}\circ\vec{b}=|\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b}$$

кўринишда ҳам ёзса бўлади (21-расмга қаранг).

Скаляр кўпайтма қуйидаги хоссаларга эга:

1^0. $\vec{a}\circ\vec{b}=\vec{b}\circ\vec{a}$,

2^0. $\vec{a}\circ\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\circ\vec{b}+\vec{a}\circ\vec{c}$,

3^0. $\left(\lambda\vec{a}\right)\circ\left(\mu\vec{b}\right)=\left(\lambda\mu\right)\cdot\left(\vec{a}\circ\vec{b}\right)$, ($\lambda,\mu$ – ихтиёрий сонлар)

4^0. $\vec{a}\circ\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$,

5^0. $\vec{a}\circ\vec{b}=0$ бўлиши учун $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ лар ўзаро перпендикуляр бўлиши зарур ва етарлидир.

1^0-хоссанинг исботи.

$$\vec{a}\circ\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha=|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos\alpha=\vec{b}\circ\vec{a}$$

2^0-, 3^0- ва 4^0-хоссаларнинг исботини бажаришни ўқувчининг ўзига ҳавола қиламиз.

5^0-хоссанинг исботи. Зарурлиги. $\vec{a}\circ\vec{b}=0$ булсин. У ҳолда, $0=\vec{a}\circ\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$ дан $|\vec{a}|\neq 0, |\vec{b}|\neq 0$

бўлгани учун $\cos\alpha = 0$, ўз навбатида бундан $\alpha = \frac{\pi}{2}$, яъни $\bar{a} \perp \bar{b}$ эканлиги келиб чиқади.

Етарлиги. Агар $\alpha = \left(\vec{a}, \hat{} \, \vec{b}\right) = \frac{\pi}{2}$ бўлса, у ҳолда $\cos\alpha = 0$, шу сабабли $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0$ бўлади. 5^0-хосса векторларнинг перпендикулярлик шарти деб аталади.

4^0- ва 5^0-хоссаларга асосан

$$\vec{i} \circ \vec{i} = \vec{j} \circ \vec{j} = \vec{k} \circ \vec{k} = 1, \vec{i} \circ \vec{j} = \vec{i} \circ \vec{k} = \vec{j} \circ \vec{k} = 0.$$

Энди, агар $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ бўлса, у ҳолда

$$\vec{a} \circ \vec{в} = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right) \circ \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right) = x_1x_2\vec{i}^{\,2} +$$
$$x_1y_2\vec{i} \circ \vec{j} + x_1z_2\vec{i} \circ \vec{k} + y_1x_2\vec{j} \circ \vec{i} + y_1y_2\vec{j}^{\,2} + y_1z_2\vec{j} \circ \vec{k} +$$
$$z_1x_2\vec{k} \circ \vec{i} + z_1y_2\vec{k} \circ \vec{j} + z_1z_2\vec{k}^{\,2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Хусусан, агар $\vec{a} = \vec{в}$ бўлса,

$$\vec{a} \circ \vec{a} = \vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2 = x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2}$$

ёки

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2}}.$$

Бу формуладан фойдаланиб, фазонинг ихтиёрий $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ нуқталари орасидаги масофа d_{AB} ни қуйидагича топса бўлади:

$$d_{AB} = |\vec{a}| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

2-*мисол.* $(1,1,1)$ ва $(1,2,3)$ векторларнинг узунлигини топинг.

Ечиш.

$$|(1,1,1)| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}, |(1,2,3)| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

3-*мисол.* $\vec{a} = (1,0,1)$ ва $\vec{в} = (1,2,2)$ векторлар орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш. Скаляр кўпайтманинг таърифидан

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

формулани келтириб чиқарамиз. Бундан

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}, |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3,$$
$$\vec{a} \circ \vec{b} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 1 + 2 = 3.$$

Демак,

$$\cos\alpha = \frac{3}{3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Фараз қилайлик, берилган $\vec{a}$ вектор x ўқи билан α бурчак, y ўқи билан β бурчак, z ўқи билан γ бурчак ташкил этсин. У ҳолда

$$X = np_x\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha,$$
$$Y = np_y\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\beta,$$
$$Z = np_z\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\gamma.$$

эканлигидан

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$
$$\cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \qquad (5.11)$$
$$\cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

(5.6) ни квадратларга кўтариб,ўзаро қўшсак,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{X^2 + Y^2 + Z^2} = 1$$

муносабатни ҳосил қиламиз.

(5.6) дан топиладиган $\cos\alpha, \cos\beta$ ва $\cos\gamma$ қийматлар $\vec{a}$ векторнинг косинус йўналтирувчилари деб аталади.

Агар $\vec{a} = \bar{e} = (l, m, n)$ орт бўлса, у ҳолда

$$l = \cos\alpha, m = \cos\beta, n = \cos\gamma \ .$$

5.7. Чизиқли евклид фазоси

Текисликдаги ҳар бир нуқтага унинг $\overline{OA}$ радиус-векторини ўзаро бир қийматли мос қўйайлик. Натижада, радиус-векторлар учун киритилган қўшиш, айириш ((5.4) га қаранг) ва векторни сонга кўпайтириш ((5.5) га қаранг) амалларига кўра, бу радиус-векторлар тўплами, яъни текислик чизиқли фазога айланади, яъни чизиқли фазонинг барча хоссаларини қаноатлантиради. Бу чизиқли вектор фазони R_2 билан белгилаймиз. Худди шундай мулоҳаза қилиб, уч ўлчовли фазони чизиқли вектор фазога айлантириб, уни R_3 билан белгилаймиз.

Агар 3-§ да киритилган R^n чизиқли фазода унинг икки $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ векторлари учун скаляр кўпайтма

$$x \circ y = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \qquad (5.12)$$

кўринишда киритилса, R^n n ўлчамли чизиқли евклид фазоси деб аталади, уни биз R_n билан белгилаймиз.

Скаляр кўпайтма (5.12) учун қуйидаги хоссалар ўринли.

1^0. $x \circ x \geq 0, x \circ x = 0$ фақат $x = 0 = (0,0,...,0)$ бўлсагина,

2^0. $x \circ y = y \circ x$,

3^0. $(\alpha x + \beta y) \circ z = \alpha(x \circ z) + \beta(y \circ z)$,

4^0. $|x \circ y| \leq \sqrt{x \circ x} \cdot \sqrt{y \circ y}$,

Охирги хосса Коши-Буняковский тенгсизлиги деб юритилади.

1^0-3^0-хоссаларнинг исботи содда бўлгани учун уларни бажаришни ўқувчига ҳавола қилиб, 4^0-хоссанинг исботини келтирамиз.

Ҳақиқатан, ихтиёрий λ ҳақиқий сон учун

$$0 \leq (x + \lambda y) \circ (x + \lambda y) = x \circ x + \lambda \cdot y \circ x + \lambda \cdot x \circ y +$$

$$\lambda^2 \cdot y \circ y = x \circ x + 2\lambda \cdot x \circ y + \lambda^2 \cdot y \circ y = a + 2\lambda b + c\lambda^2,$$

бу ерда $a = x \circ x, b = x \circ y, c = y \circ y$ деб белгиланди. Маълумки, агар квадрат учҳаднинг қийматлари манфий бўлмаса, унинг графиги λ ўқдан юқорида жойлашган бўлади, шу сабабли, у λ ўқни кесиб ўтмайди. Бу ҳол, агар дискриминант $b^2 - ac \leq 0$ ёки $b^2 \leq ac$ бўлгандагина рўй беради. Хосса тўлиқ исбот бўлди.

Агар (5.12) да $x = y$ десак,

$$x \circ x = |x|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2}$$

Бундан

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2}} \ .$$

У ҳолда Коши-Буняковский тенгсизлигини

$$|x \circ y| \leq |x| \cdot |y|$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бундан кўринадики, шундай λ, $-1 \leq \lambda \leq 1$ мавжудки, унинг учун

$$x \circ y = \lambda \cdot |x| \cdot |y|$$

ўринли бўлади. Агар $\lambda = \cos\omega$ десак ($[0, \pi]$ да $\cos\omega = \lambda$ ягона ечимга эга, яъни ҳар бир λ учун фақат битта ω бурчак топилади), охирги тенгликни

$$x \circ y = |x| \cdot |y| \cos\omega \qquad (5.13)$$

кўринишда ёзиш мумкин бўлади. ω сон x ва y векторлар орасидаги бурчак деб аталади.

Агар x ва y векторларнинг скаляр кўпайтмаси

$$x \circ y = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = 0$$

бўлса, улар ортогонал векторлар дейилади.

(5.13) дан кўринадики, нолга тенг бўлмаган x ва y векторларнинг ортогонал бўлиши учун улар орасидаги бурчак $\omega = \dfrac{\pi}{2}$ бўлиши зарур ва етарлидир.

$$|x + y| \le |x| + |y| \qquad (5.14)$$

Ушбу Минковский тенгсизлиги деб аталади. Бундан, хусусан,

$$||x| - |y|| \le |x - y|$$

тенгсизлик келиб чиқади.

(5.14) ни исботлашни ўқувчига ҳавола қиламиз.

R_n чизиқли фазонинг ҳар бир x элементига шу фазонинг y элементини мос қўйиш қоидаси R_n ни ўзига акслантириш деб аталади.

R_n нинг чизиқли оператори деб, R_n ни ўзига акслантирувчи ва

$$A(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot Ax\,,\quad A(x + y) = Ax + Ay$$

хоссаларга эга бўлган ҳар қандай A акслантиришга айтилади. Буни $A : R_n \to R_n$ кўринишда ёзиш қабул қилинган.

Бизга R_n чизиқли фазонинг A чизиқли оператори ва шу фазонинг бирор $\Re = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n)$ базиси берилган бўлсин. $A\bar{e}_\kappa, \kappa = 1,2,...,n$, векторларни $\Re$ базис бўйича ёйилик:

$$A\bar{e}_\kappa = a_{1\kappa}\bar{e}_1 + ... + a_{n\kappa}\bar{e}_n\,,\ \kappa = 1,2,...,n.$$

У ҳолда қуйидаги

$$[A] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица A чизиқли операторнинг $\Re$ базисдаги матрицаси деб аталади. Агар матрица чизиқли операторнинг қайси базисдаги матрицаси эканлигини кўрсатиш зарур бўлса, бу матрица учун $[A]_\Re$ белги ишлатилади.

Чизиқли оператор ўз матрицаси билан ягона равишда аниқланади, яъни агар x, y лар R_n нинг ихтиёрий элементлари бўлиб, X, Y лар уларнинг мос равишда координаталар устунлари бўлса, у ҳолда $y = Ax$ дан $Y = [A]X$ келиб чиқади.

R_n фазонинг чизиқли операторлари учун қуйидаги амалларни киритиш мумкин:

а) операторлар йиғиндиси: $(A + B)x = Ax + Bx$, ўз навбатида $[A + B] = [A] + [B]$;

б) операторни сонга кўпайтириш: $(\lambda \cdot A)x = \lambda \cdot (Ax)$ ва $[\lambda \cdot A] = \lambda \cdot [A]$;

в) операторлар кўпайтмаси: $(AB)x = A(Bx)$, ва ўз навбатида $[AB] = [A] \cdot [B]$.

Ҳар қандай $x \in R_n$ учун $Ex = x$ муносабатни қаноатлантирувчи E операторни бирлик оператор деймиз. A операторга тескари оператор деб, $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ муносабатни қаноатлантирувчи A^{-1} операторга айтамиз. A операторга тескари оператор мавжуд бўлиши учун (бу ҳолда A оператор махсусмас оператор деб аталади) унинг ҳар қандай базисдаги $[A]$

матрицаси махсус бўлмаслиги зарур ва етарлидир, бундан ташқари $\left[A^{-1}\right]=[A]^{-1}$.

4-мисол. R_3 нинг $Ax=(x_2+x_3, 2x_1+x_3, 3x_1-x_2+x_3)$ оператори чизиқли оператор эканлигини кўрсатинг ва унинг каноник базисдаги матрицасини тузинг.

Ечиш. Агар $x=(x_1,x_2,x_3)$ ва $y=(y_1,y_2,y_3)$ лар R_3 нинг ихтиёрий элементлари бўлса, у ҳолда

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_{2,3}+y_3),\quad \lambda\cdot x=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)$$

га асосан,

$$A(x+y)=(x_2+y_2+x_3+y_3,2(x_1+y_1)+x_3+=$$
$$y_3,3(x_1+y_1)-(x_2+y_2)+(x_3+y_3))=(cx_3+2y_1+y_3,3x_1-$$
$$-x_2+x_3+3y_1-y_2+y_3)=(x_2+x_3,2x_1+x_3,3x_1-x_2+x_3)+$$
$$+(y_2+y_3,2y_1+y_3,3y_1-y_2+y_3)=Ax+Ay$$

$$A(\lambda x)=(\lambda x_2+\lambda x_3,2\lambda x_1+\lambda x_3,3\lambda x_1-\lambda x_2+\lambda x_3)=$$
$$=\lambda(x_2+x_3,2x_1+x_3,3x_1-x_2+x_3)=\lambda Ax.$$

Демак, берилган оператор чизиқли экан.

$$A\vec{e}_1=(0,2,3)=0\cdot\vec{e}_1+2\cdot\vec{e}_2+3\cdot\vec{e}_3,$$
$$A\vec{e}_2=(1,0,-1)=1\cdot\vec{e}_1+0\cdot\vec{e}_2-1\cdot\vec{e}_3,$$
$$A\vec{e}_3=(1,1,1)=1\cdot\vec{e}_1+1\cdot\vec{e}_2+1\cdot\vec{e}_3.$$

Бундан

$$[A]=\begin{pmatrix}0&2&3\\1&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

5-мисол. $Ax=(x_1,x_2+1,x_3+2)$ операторни чизиқликка текширинг.

Ечиш.

$$A(x+y)=(x_1+y_1,x_2+y_2+1,x_3+y_3+2)=$$
$$=(x_1,x_2+1,x_3+2)+(y_1,y_2,y_3)\neq Ax+Ay,$$

яъни берилган оператор чизиқли эмас.

6-мисол. $Ax=(2x_2,-2x_1+3x_2+2x_3,4x_1-x_2+5x_3)$, $Bx=(-3x_1+x_2,2x_2+x_3,-x_2+3x_3)$ операторлар берилган. $C=AB$ операторни ва унинг $[C]$ матрицасини топинг.

Ечиш. Аввал $[A]$ ва $[B]$ матрицаларни топиб оламиз. $A\vec{e}_1=(0,-2,4), A\vec{e}_2=(2,3,-1), A\vec{e}_3=(0,2,5)$ ва $B\vec{e}_1=(-3,0,0), B\vec{e}_2=(0,2,-1), B\vec{e}_3=(1,1,3)$ бўлгани учун

$$[A]=\begin{pmatrix}0&2&0\\-2&3&-1\\4&-1&5\end{pmatrix},\quad [B]=\begin{pmatrix}-3&0&1\\0&2&1\\0&-1&3\end{pmatrix}.$$

У ҳолда

$$[C]=[A]\cdot[B]=\begin{pmatrix}0&4&2\\6&4&7\\-12&-7&18\end{pmatrix}.$$

Бундан

$$C\vec{e}_1=(0,6,-12),\quad C\vec{e}_2=(4,4,-7),\quad C\vec{e}_3=(2,7,18)$$

ва

$$Cx=C(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3)=x_1\cdot(C\vec{e}_1)+x_2\cdot(C\vec{e}_2)+$$
$$+x_3\cdot(C\vec{e}_3)=(4x_2+2x_3,6x_1+4x_2+7x_3,-12x_1-7x_2+18x_3).$$

Агар

$$Ax=\lambda x \tag{5.15}$$

тенглик бирор $x\neq 0, x\in R_n$ учун ўринли бўлса, у ҳолда λ сон A чизиқли операторнинг хос сони, x эса A операторнинг λ хос сонига мос келувчи хос вектори деб аталади.

R_n фазода (5,10) тенгликни унга эквивалент бўлган қуйидаги матрица тенглигига алмаштириш мумкин:

$$[A-\lambda E]X=0,\quad X\neq 0. \tag{5.16}$$

Охирги тенгликдан, λ сон A операторнинг хос сони бўлиши учун $\det[A-\lambda E]=0$ бўлиши зарур ва старли эканлиги келиб чиқади. $p(\lambda)=\det[A-\lambda E]$ A операторнинг характеристик кўпҳади деб аталади.

Демак, хос сон характеристик кўпҳаднинг ечими бўлар экан. Унга мос келувчи хос векторнинг координаталар устуни (5.16) бир жинсли тенгламалар системасининг бирор нолдан фарқли ечими бўлади.

7-*мисол.* $Ax=(2x_1-x_2+2x_3, 5x_1-3x_2+3x_3, -x_1-2x_3)$ операторнинг хос сони ва унга мос келувчи хос векторларини топинг.

Ечиш. Аввал A операторнинг матрицасини тузиб оламиз:

$$[A]=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Берилган операторга мос келувчи бир жинсли тенгламалар ситемаси қуйидаги кўринишни олади:

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1-x_2+2x_3=0 \\ 5x_1-(3+\lambda)x_2+3x_3=0 \\ -x_1-(2+\lambda)x_3=0. \end{cases} \qquad (5.17)$$

Бундан характеристик кўпҳадни топамиз:

$$p(\lambda)\equiv\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda+1)^3.$$

Демак, хос сон $\lambda=-1$ экан. Бу сонни (5.17) га қўйсак,

$$\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3=0 \\ 5x_1-2x_2+3x_3=0 \\ -x_1-x_2=0. \end{cases}$$

Бундан $x_1=-x_3$, $x_1=x_2$. Агар $x_1=\alpha$ десак,

$$X=\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

бўлади. Агар A оператор R_n фазода $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ хос сонларга мос келувчи n та чизиқли боғлиқ бўлмаган $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ хос векторларга эга бўлса, у ҳолда A операторнинг шу хос векторларидан тузилган система R_n да базис ташкил этади. A операторнинг шу базисдаги матрицаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$[A]=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

8-*мисол.* A чизиқли операторнинг қуйидаги матрицасини диагонал кўринишга келтиринг:

$$[A]=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ечиш.

$$p(\lambda)\equiv\det[A-\lambda E]=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-2)(1-\lambda^2)=0.$$

Бундан хос сонларни топамиз: $\lambda_1=2, \lambda_2=1, \lambda_3=-1.$

Уларга мос келувчи хос векторларни топиш учун аввал (5.11) системага $\lambda_1=2$ ни қўямиз:

$$\begin{cases} -x_1+2x \quad =0 \\ -2x_1-2x_2-3x_3=0 \end{cases}$$

Бундан, $E_1=(2,1,-2)^T$. Худди шундай, агар $\lambda_2=1$ десак, (5.11) система

$$\begin{cases} x_2=0 \\ -2x_1-2x_2-2x_3=0 \end{cases}$$

кўринишни олади. Демак, $E_2=(1,0,-1)^T$ экан. Агар (16) да $\lambda_3=-1$ десак,

$$\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ 3x_2=0. \end{cases}$$

Бундан, $E_3=(0,0,1)^T$.

Демак, E_1, E_2, E_3 базисда A операторнинг матрицаси

$$[A]=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5.8. Икки векторнинг вектор кўпайтмаси

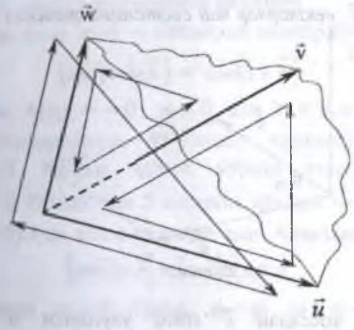
Аввал R₃ фазода йўналиш тушунчасини киритиб оламиз.

Бир текисликда ётган учта векторни компланар векторлар деб атаймиз. Бир текисликда ётмаган ҳар қандай векторлар учлигини компланар бўлмаган векторлар деймиз. Бизга компланар бўлмаган, бошлари бир нуқтага келтирилган $\vec u$, $\vec v$, $\vec w$ векторлар берилган бўлсин.

Таъриф. *Агар* $(\vec u,\vec v)$, $(\vec v,\vec w)$, $(\vec w,\vec u)$ *векторлар жуфтликлари аниқлайдиган айланма йўналишлар ўзлари ётган текисликларда мусбат айланма йўналиш билан бир хил бўлса,* $\vec u$, $\vec v$, $\vec w$ *векторлар учлиги чап системани ташкил*

ади деймиз. Лоақал битта жуфтлик йўналиши ўзи ётган кисликнинг мусбат айланма йўналишидан фарқ қилса, ндай учликни ўнг система деб атаймиз.

9-*мисол.* $\vec i$, $\vec j$, $\vec k$ ортлар учлиги чап системани шкил этади, чунки $(\vec i,\vec j)$, $(\vec j,\vec k)$ ва $(\vec k,\vec i)$ фтликлар йўналиши мос равишда *Oxy*, *Oyz*, *Ozx* кисликларнинг мусбат йўналиши билан бир хилдир.



22-расм.

$\vec i$, $\vec k$, $\vec j$ учлик эса ўнг системадир, чунки $(\vec i,\vec k)$ фтлик аниқлаган айланма йўналиш Ozx кислигининг мусбат йўналишига тескари. Худди ндай, $(\vec k,\vec j)$ ва $(\vec j,\vec i)$ жуфтликлар аниқлаган анма йўналишлар мос равишда Oyz ва Oxy кисликларининг мусбат йўналишига тескаридир.

Энди геометрия ва амалий математика масала- ила кенг қўлланиладиган вектор кўпайтма унчасини киритамиз.

Таъриф. $\vec a$ *ва* $\vec b$ *векторларнинг вектор кўпайтмаси деб, қуйидаги учта хусусиятга эга бўлган* $\vec c$ *векторга айтамиз:*

1) $\vec{c}$ нинг узунлиги $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар узунликлари ва улар орасидаги φ бурчак синуси кўпайтмасига тенг:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}|\ |\vec{b}|\ \sin\varphi\ ; \tag{5.18}$$

2) $\vec{c}$ вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ётган текисликка перпендикуляр, жумладан $\vec{a}$ га ҳам ва $\vec{b}$ га ҳам перпендикуляр;

3) $\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c}$ векторлар чап системани ташкил этади.

23-расм.

Биринчи хоссадан $\vec{c}$ `нинг узунлиги $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга тортилган параллелограмм юзига тенг эканлиги келиб чиқади:

$$S = \left|\vec{a} \quad \times \quad \vec{b}\right|$$

ёки

$$S\,\Delta = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \quad \times \quad \vec{b}\right|. \tag{5.19}$$

Юқорида киритилган икки кўпайтмаларга (яъни скаляр ва вектор кўпайтмалар) берилган номлар уларнинг натижаларига қараб танланганлигини эслатиб ўтамиз.

Вектор кўпайтма қуйидаги хоссаларга эга:

1-хосса. $\vec{a}\times\vec{b}=0$ бўлиши учун $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлар коллинеар бўлиши зарур ва етарлидир.

Бу хосса векторларнинг коллинеарлик шарти деб юритилади.

Исботи (5.18) тенгликдан келиб чиқади.

2-хосса. $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$, яъни кўпайтувчилар ўрни алмашса, натижа фақат ўз ишорасини ўзгартиради.

Ҳақиқатан, агар кўпайтмада $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ўрнини алмаштирсак, $\vec{b},\vec{a},\vec{a}\times\vec{b}$ учлик ўнг система бўлиб қолади, $\vec{a}\times\vec{b}$ нинг ишорасини тескарисига алмаштирсак, унда $\vec{b},\vec{a},-\vec{a}\times\vec{b}$ учлик чап системага айланади.

3-хосса. Агар m, n — ихтиёрий сонлар бўлса,

$$(m\vec{a})\times(n\vec{b}) = mn(\vec{a}\times\vec{b}).$$

Исботи. Агар $m=0$, $n\neq 0$ ёки $m\neq 0, n=0$ бўлса, тенглик бажарилиши ўз-ўзидан кўриниб турибди. $m\neq 0, n=1$ бўлган ҳолни кўриш етарли, чунки $m=1, n\neq 0$ бўлган ҳол 2-хоссани қўллаш ҳисобига биз кўрмоқчи бўлган ҳолга келтирилади. Аввалабор,

$$\left|(m\vec{a})\times\vec{b}\right| = |m\vec{a}||\vec{b}|\sin\phi\,,$$

бу ерда агар $m>0$ бўлса, $\phi=\varphi$ ва $m<0$ бўлса, $\phi=\pi-\varphi$, лекин иккала ҳолда ҳам $\sin\phi=\sin\varphi$ бўлгани учун

$$\left|(m\vec{a})\times\vec{b}\right| = |m||\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi = |m|\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.$$

Иккинчидан, $m\vec{a}$ вектор $\vec{a}$ векторга коллинеар, шу сабабли $\vec{a}\times\vec{b}$ вектор $m\vec{a}$ га перпендикуляр. $m(\vec{a}\times\vec{b})$ вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ га коллинеар бўлгани учун $m(\vec{a}\times\vec{b})$ вектор $m\vec{a}$ га ва $\vec{b}$ га перпендикулярдир. Ва ниҳоят, агар $m>0$ бўлса, $\vec{a}$ ва $m\vec{a}$ векторлар, $\vec{a}\times\vec{b}$ ва $m(\vec{a}\times\vec{b})$ векторлар бир хил йўналган бўлади, шу сабабли $\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{a}\times\vec{b}$ учлик чап система бўлгани учун

$m\,\vec{a}, \vec{b}, m(\vec{a}\times\vec{b})$ учлик ҳам чап система бўлади. $m<0$ бўлган ҳол ҳам худди шундай текширилади. Хосса тўлиқ исбот бўлди.

4-хосса.

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}.$$

Исботи. Аввал $\vec{a}=\vec{e}$ орт бўлган ҳолни кўрайлик. $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторларни 24-расмда кўрсатилгандек қилиб, $\vec{e}$ га перпендикуляр бўлган π текисликка проекциялаймиз ва бу проекцияларни $\vec{e}$ орт атрофида соат мили ҳаракати бўйлаб 90^0 га бурсак, $\vec{e}\times\vec{b}$ ва $\vec{e}\times\vec{c}$ векторлар ҳосил бўлади.

$np_\pi(c+\vec{b})=np_\pi\vec{b}+np_\pi\vec{c}$ бўлгани учун $\vec{e}\times\vec{b}$ ва $\vec{e}\times\vec{c}$ ларнинг йиғиндиси бўлган ва уларга тортилган параллелограммнинг диагонали $\vec{e}\times(\vec{b}+\vec{c})$ га тенг бўлади.

$$\vec{e}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{e}\times\vec{b}+\vec{e}\times\vec{c}.$$

Энди агар $\vec{a}$ ихтиёрий нолдан фарқли вектор бўлса, $\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a}_0$ деб (бу ерда $\vec{a}_0$ — $\vec{a}$ векторнинг орти),

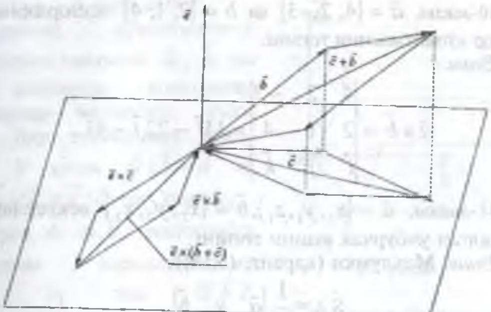
$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|\vec{a}_0\times(\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|(\vec{a}_0\times(\vec{b}+\vec{c}))=$$
$$=|\vec{a}|(\vec{a}_0\times\vec{b}+\vec{a}_0\times\vec{c})=|\vec{a}|(\vec{a}_0\times\vec{в})+|\vec{a}|(\vec{a}_0\times\vec{c})=$$
$$=|\vec{a}|\vec{a}_0\times\vec{в}+|\vec{a}|\vec{a}_0\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{в}+\vec{a}\times\vec{c}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Хосса тўлиқ исбот бўлди.

Бу хоссадан хусусан қуйидаги муносабат келиб чиқади:
$(\vec{a}+\vec{в})\times(\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{a}\times\vec{d}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{d}$.

Вектор кўпайтманинг хоссаларидан ортлар учун қуйидаги муносабатлар келиб чиқади:

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{i}^2=0,\quad \vec{j}^2=0, \vec{k}^2=0,$$
$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}, \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},$$
$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\quad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}, \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}.$$



24-расм.

Шу сабабли, агар векторлар ўз проекциялари билан берилган бўлса, яъни $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$ бўлса, у ҳолда

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=a_xb_x\vec{i}^2+$$
$$+a_xb_y(\vec{i}\times\vec{j})+a_xb_z(\vec{i}\times\vec{k})+a_yb_x(\vec{j}\times\vec{i})+a_yb_y\vec{j}^2+$$
$$+a_yb_z(\vec{j}\times\vec{k})+a_zb_x(\vec{k}\times\vec{i})+a_zb_y(\vec{k}\times\vec{j})+a_zb_z(\vec{k}\times\vec{k})=$$
$$=a_xb_y\vec{k}-a_xb_z\vec{j}-a_yb_x\vec{k}+a_yb_z\vec{i}+a_zb_x\vec{j}-a_zb_y\vec{i}=$$
$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$
$$=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\end{vmatrix}$$

10-*мисол.* $\vec{a}=\{4, 2,-3\}$ ва $\vec{b}=\{2, 1, 4\}$ векторларнинг вектор кўпайтмасини топинг.

Ечиш.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}4 & 2 & -3\\ 2 & 1 & 4\\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\end{vmatrix}=11\vec{i}-22\vec{j}-4\vec{k}.$$

11-*мисол.* $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\},\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$ векторларга тортилган учбурчак юзини топинг.

Ечиш. Маълумки (қаранг, (5.19)),

$$S\Delta=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.$$

Шу сабабли,

$$S\Delta=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}^2}.$$

12-*мисол.* $A(1,-1,2), B(0,1,-1)$ ва $C(-1,2,3)$ учлари берилган $ABCD$ параллелограммнинг юзини топинг.

Ечиш. $\vec{a}=\vec{AB}=\{-1,2,-3\},\vec{в}=\vec{AC}=\{-2,3,1\}$ векторлар тузиб олиб, аввалги мисол натижасини қўлласак:

$$S=\sqrt{\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}-1 & -3\\ -2 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{vmatrix}^2}=\sqrt{11^2+7^2+1}=$$

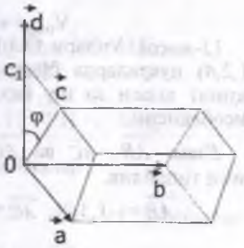
$$=\sqrt{121+49+1}=\sqrt{171}\textit{кв.бирлик}.$$

5.9. Уч векторнинг аралаш кўпайтмаси

$\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторларнинг аралаш кўпайтмаси деб $\vec{a}$ векторни $\vec{b}$ векторга вектор кўпайтмасидан ҳосил бўлган натижанинг $\vec{c}$ векторга скаляр кўпайтмасига айтилади ва қуйидагича белгиланади:

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ ёки $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

Аралаш кўпайтманинг геометрик маъноси: $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторлар компланар векторлар бўлмасин, яъни улар бир текисликда ётмасин. У ҳолда $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{d}$ ва $(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}=\vec{d}\circ\vec{c}$ =dcCosφ=dc$_1$; Бу ерда d- $\vec{a},\vec{b}$ векторларга қурилган параллелограмм юзи, c$_1$ эса $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ векторларга қурилган паралле-лепипеднинг баландлиги бўлгани учун $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ аралаш кўпайтма ўша параллелепипеднинг ҳажмига тенг бўлади.



25-расм.

Аралаш кўпайтманинг хоссалари:

1. Исталган иккита векторнинг ўрни алмашса аралаш кўпайтма ишорасини ўзгартиради:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}=-(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{b}=-(\vec{c}\times\vec{b})\circ\vec{a}.$$

2. Агар учта вектордан иккитаси тенг бўлса ёки параллел бўлса, аралаш кўпайтма нолга тенг бўлади.

3. «∘» ва «×» амаллари белгисининг ўрниларини алмаштириш мумкин, яъни $(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}=\vec{a}\circ(\vec{b}\times\vec{c})$.

4. $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторлар компланар бўлиши учун (битта текисликда ётиши учун) $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ =0 бўлиши зарур ва етарли.

5.10. Параллелепипед ва пирамиданинг ҳажми

$\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторларга қурилган параллелепипеднинг ҳажми

$$V_{пар}=\pm\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}.$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторларга қурилган пирамиданинг ҳажми

$$V_{\text{пир}}=\pm 1/6\ \vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ .$$

13-*мисол.* Учлари O (0,0,0), A (5,2,0), B (2,5,0) ва C (1,2,4) нуқталарда бўлган пирамиданинг ҳажми, ABC ёқнинг юзаси ва шу ёққа туширилган перпендикуляр ҳисоблансин.

Ечиш. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{AO}$ векторларнинг проекцияларини топайлик.

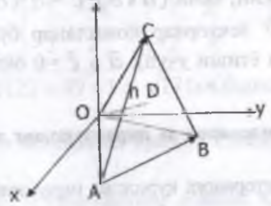
$$\overrightarrow{AB}=\{-1,3,0\},\ \overrightarrow{AC}=\{-4,0,4\},\ \overrightarrow{AO}=\{-5,-2,0\}$$

$$V_{\text{пир}}=1/6\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}$$

$$V_{\text{пир}}=-1/6\begin{vmatrix}-3 & 3 & 0\\ -4 & 0 & 4\\ -5 & -2 & 0\end{vmatrix}=-1/6(-60-24)=84/6=14 \text{ куб.б.}$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|12\vec{i}+12\vec{k}+12\vec{j}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{12^2+12^2+12^2}=6\sqrt{3}$$



26-расм.

2-БОБ.
ТЕКИСЛИКДАГИ АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ

1-§. ТЕКИСЛИКДАГИ ТЎҒРИ ЧИЗИҚ

1.1. Умумий тушунчалар

Фараз қилайлик, бизга x ва ўзгарувчи миқдорларни боғловчи

$$F(x,y)=0 \tag{1}$$

тенглама берилган бўлсин. Бу тенглама ўз навбатида бир ўзгарувчини, масалан, y ни иккинчисининг, яъни x нинг функцияси сифатида аниқлайди. Агар (1) ни y га нисбатан ечиб олсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$y=f(x), \tag{2}$$

бу ерда $f(x)$ бир қийматли ёки кўп қийматли функция бўлиши мумкин, бу функциянинг қийматлари x ўзгарганда узлуксиз ўзгаради деб фараз қилайлик.

x ва y миқдорларни Oxy декарт координаталар текислигининг бирор M нуқтасининг координаталари сифатида қараймиз. У ҳолда (2) тенглик x ўзгарувчининг ҳар бир қийматига y нинг аниқ бир қийматини мос қўяди.

Шу сабабли, x нинг ҳар бир қийматига текисликнинг координаталари x ва $y=f(x)$ бўлган аниқ бир M нуқтаси мос келади.

Энди, агар x узлуксиз қийматларни қабул қилса, у ҳолда M Oxy текислигида узлуксиз ўзгариб, нуқталарнинг геометрик ўрнини чизади. Бу геометрик ўрнини чизиқ деб атаймиз.

Демак, чизиқ координаталари (1) ёки (2) кўринишдаги тенгламани қаноатлантирувчи нуқталарнинг геометрик ўрни экан. (1) ёки (2) тенглама ўз навбатида чизиқнинг тенгламаси деб аталади.

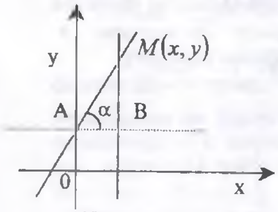
Энди, агар айтилган гапларни умумлаштирсак, берилган чизиқнинг тенгламаси деб, (1) ёки (2) кўринишга эга бўлган шундай тенгламага айтамизки, бу тенглама фақат берилган тўғри чизиқда ётувчи нуқтанинг координаталарини x ва y нинг ўрнига қўйгандагина қаноатланади.

Агар $F(x,y) \equiv Ax + By + C$ бўлса, (1) ни 1-тартибли тенглама деймиз, у ифодалайдиган чизиқни тўғри чизиқ деб атаймиз.

Агар $F(x,y) \equiv Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + M$ бўлса, (1) ни 2-тартибли тенглама, унга мос келувчи чизиқни эса 2-тартибли чизиқ деб атаймиз.

Мисол тариқасида тўғри чизиқ ва айлананинг тенгламасини тузамиз.

1. Тўғри чизиқ тенгламаси. Фараз қилайлик, y ўқини $A(0,b)$ нуқтада кесиб ўтувчи ва x ўқига α бурчак остида оғиб ўтган Δ тўғри чизиқ берилган бўлсин.



27-расм.

$M(x,y)$ Δ тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Расмга кўра, $BM = AB \cdot tg\alpha$, бу ерда BM ва AB лар $\overline{BM}$ ва $\overline{AB}$ векторларнинг кесма катталиги. $BM = y - b, AB = x$ бўлгани учун юқоридаги формуладан

$$y - b = tg\alpha \cdot x,$$

ёки

$$y = kx + b, \qquad (3)$$

келиб чиқади, бу ерда

$$k = tg\alpha \qquad (4)$$

деб белгиланди. (3) тенгламани берилган тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси координаталари қаноатлантиради ва аксинча, координаталари (3) ни қаноатлантирадиган ҳар қандай нуқта Δ тўғри чизиқда ётади. k коэффициент (4) га кўра, α бурчакка боғлиқ бўлгани учун бурчак коэффициент деб аталади, b эса бошланғич ордината дейилади.

2. Айлана тенгламаси. Радиуси r ва маркази $C(a,b)$ нуқтада бўлган айланани кўрайлик. Таърифга кўра, айлана $C(a,b)$ нуқтагача бўлган масофалари ўзгармас r га тенг бўлган нуқталарнинг геометрик ўрнидир.

Агар $M(x,y)$ текисликнинг ихтиёрий нуқтаси бўлса, у ҳолда

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r,$$

ёки тенгликни квадратга кўтариб, илдизни йўқотсак,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Бу тенглама берилган айлананинг тенгламасидир.

Агар айлананинг маркази координаталар боshида бўлса, у ҳолда унинг тенгламаси соддароқ бўлади:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

1.2. Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси

Теорема. *Оху координаталар текислигида ҳар қандай тўғри чизиқнинг тенгламаси*

$$Ax + By + C = 0 \qquad (5)$$

кўринишда бўлади, ва аксинча, (5) кўринишдаги ҳар қандай тенглама Оху координаталар текислигида тўғри чизиқни ифодалайди.

Исботи. Юқорида кўрилганидек, x ўқига оғиш бурчаги маълум бўлган ҳар қандай тўғри чизиқнинг тенгламаси $y = kx + b$ кўринишда бўлади. Буни ўз навбатида $kx - y + b = 0$ кўринишга келтириб олса бўлади. Энди, агар тўғри чизиқнинг бир нуқтаси $M_0(x_0, y_0)$ ва унга перпендикуляр бўлган бирор $\bar{s} = \{A, B\}$ вектор берилган бўлса, у ҳолда тўғри чизиқда ётувчи ҳар қандай $M(x,y)$ нуқта учун $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ вектор $\vec{s}$ векторга перпендикуляр бўлади. Векторларнинг перпендикулярлик шартига кўра $\vec{s} \circ \overline{M_0M} = 0$ ёки

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{6}$$

Қавсларни очиб ва $C = -Ax_0 - By_0$ деб белгиласак. (6) ни (5) кўринишга келтирса бўлади.

Энди теореманинг иккинчи қисмини исбот қиламиз. Агар (5) да $B \neq 0$ бўлса, у ҳолда (5) тенгликни B га бўлиб юбориб, уни

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

кўринишга келтириб оламиз. Агар $k = -\frac{A}{B}, b = -\frac{C}{B}$ десак, охирги тенгликни $y = kx + b$ деб ёзса бўлади. Маълумки, бу тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламасидир.

Агар $B = 0$ бўлса, у ҳолда $A \neq 0$, шунинг учун (5) қуйидаги кўринишни олади:

$$x = -\frac{C}{A},$$

бу ерда $a = -\frac{C}{A}$ десак, $x = a$, яъни x ўқига перпендикуляр тўғри чизиқ тенгламаси ҳосил бўлади. Теорема исбот бўлди.

(5) тенглама тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси дейилади, (6) эса бир нуқтадан ўтган тўғри чизиқ тенгламаси деб аталади.

Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси (5) тўлиқ бўлмаган уч ҳолни кўрамиз:

1) $C = 0$, бунда тенглама $Ax + By = 0$ кўринишни олади, бу тенглама координаталар бошидан ўтган тўғри

чизиқни ифодалайди. Ҳақиқатан, $x = 0, y = 0$ координаталар бу тенгламани қаноатлантиради.

2) $A = 0, B \neq 0$, бунда (5) $By + C = 0$ кўринишга келади, бу тенглама x ўқига параллел ўтадиган тўғри чизиқни ифодалайди. Хусусан, агар $C = 0$ бўлса, $y = 0$ ҳосил бўлади, бу x ўқининг тенгламасидир.

3) $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$ бўлсин. У ҳолда (5) нинг озод ҳади C ни тенгликнинг ўнг томонига ўтказсак ва $-C$ га бўлиб юборсак:

$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1$$

ёки

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

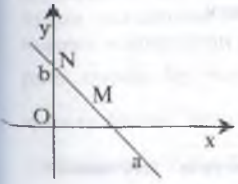
Қуйидаги белгилашларни киритсак,

$$a = -\frac{C}{A}, b = -\frac{C}{B}$$

тенглама

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{7}$$

кўринишга келади. (7) ни тўғри чизиқнинг кесмалардаги тенгламаси деб атаймиз, чунки бу тўғри чизиқ x ўқини $M(a,0)$ нуқтада, y ўқини $N(0,b)$ нуқтада кесиб ўтади (2-расм).



28-расм.

Мисол. $3x - 5y + 15 = 0$ тўғри чизиқнинг кесмалардаги тенгламасини тузинг.

Ечиш. Озод ҳад 15 ни тенгликнинг ўнг томонига ўтказиб, -15 га бўлиб юборсак:

$$\frac{x}{-5} + \frac{y}{3} = 1.$$

Демак, берилган тўғри чизиқ x ва y ўқларидан мос равишда $a=-5, b=3$ кесмалар ажратар экан.

Умумий тенгламанинг A ва B коэффициентлари геометрик маънога эга. (6) дан маълумки, A ва B коэффициентлар тўғри чизиққа перпендикуляр векторнинг координаталаридир. Агар $\vec{a}=\{-B, A\}$ вектор тузиб олсак, $\vec{s}$ ва $\vec{a}$ векторлар перпендикуляр экан-лигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Шу сабабли, $\vec{a}$ вектор берилган тўғри чизиққа параллел бўлади, уни шу хусусиятига кўра, тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори, $\vec{s}$ ни эса нормал вектор деб аташади.

1.3. Тўғри чизиқнинг бошқа турдаги тенгламалари

Агар $M_0(x_0, y_0)$ тўғри чизиқнинг берилган нуқтаси ва $\vec{a}=\{m,n\}$ унинг йўналтирувчи вектори бўлса, унинг тенгламасини қуйидагича тузса ҳам бўлади.

Фараз қилайлик, $M(x,y)$ нуқта тўғри чизиқнинг силжувчи нуқтаси бўлсин. У ҳолда, $\vec{a}$ ва $\overline{M_0M}$ векторлар ўзаро параллел бўлади. Векторларнинг коллениарлик шартига кўра

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}. \tag{8}$$

Бу тенглама тўғри чизиқнинг каноник тенгламаси деб аталади.

Агар (8) да касрларни t га тенгласак,

$$x-x_0=mt\,,\ y-y_0=nt$$

ёки

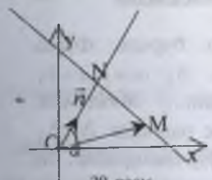
$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \end{cases}$$

«параметрик тенгламалар» деб аталувчи тенгламани ҳосил қиламиз.

Агар тўғри чизиқнинг иккита $M_1(x_1,y_1), M_2(x_2,y_2)$ нуқталари маълум бўлса, у ҳолда $\vec{a}=\overline{M_1M_2}$ векторни йўналтирувчи вектор деб қараш мумкин, шунинг учун бу тўғри чизиқнинг тенгламаси (8) га кўра

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \tag{9}$$

булади. Бу тенглама икки нуқтадан ўтган тўғри чизиқнинг тенгламаси деб аталади.



29-расм.

Энди, фараз қилайлик, бизга Δ тўғри чизиқ ва унинг нормал вектори $\vec{n}$ берилган бўлсин.

Агар α $\vec{n}$ векторнинг x ўқига оғиш бурчаги бўлса, у ҳолда шу векторнинг орти $\vec{n}_0=\{\cos\alpha, \sin\alpha\}$ бўлади. $|\vec{n}_0|=1$.

$M(x,y)$ Δ тўғри чизиқнинг силжувчи нуқтаси ва $ON=p$ бўлсин. У ҳолда (29-расмга қаранг)

$$p=np_{\vec{n}_0}\overrightarrow{OM}=|\vec{n}_0|\cdot np_{\vec{n}_0}\overrightarrow{OM}=\vec{n}_0\circ\overrightarrow{OM}=x\cos\alpha+y\sin\alpha.$$

Бундан

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0 \tag{10}$$

келиб чиқади. (10) тенглама тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси деб аталади.

Агар тўғри чизиқ $Ax+By+C=0$ тенглама билан берилган бўлиб, бу тенглама нормал тенгламами ёки йўқми эканлигини аниқлаш учун бу тўғри чизиқнинг нормал векторининг узунлиги бирга тенглигини текшириш кифоя. Бу тенглама $|\vec{n}|=\sqrt{A^2+B^2}=1$ бўлсагина нормал булади. Агар $|\vec{n}|=\sqrt{A^2+B^2}\neq 1$ бўлса, берилган тенгламани $\pm\sqrt{A^2+B^2}$ ифодага бўлиш керак:

$$\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y\mp\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0 \qquad (11)$$

(10) формуладан маълумки, озод ҳаднинг ишораси манфий бўлиши шарт, шу сабабли, охирги тенгликдаги ишоралардан бирини озод ҳаднинг ишорасига тескари қилиб танлаш зарур. Шунда (11) нормал тенгламага айланади. $\pm\sqrt{A^2+B}$ ифода нормалловчи кўпайтувчи деб аталади.

1.4. Тўғри чизиққа доир турли масалалар

1. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Фараз қилайлик, бизга $\Delta_1 : y = k_1x + b_1$ ва $\Delta_2 : y = k_2x + b_2$ тўғри чизиқлар берилган бўлсин. Маълумки, $k_1 = tg\alpha_1, k_2 = tg\alpha_2$, бу ерда α_1, α_2 мос равишда Δ_1, Δ_2 тўғри чизиқларнинг x ўқига оғиш бурчакларидир. Бу бурчакларни Oxy текислигидаги мусбат йўналиш бўйлаб ҳисобланган деб тушунамиз. Агар $\alpha_2 > \alpha_1$ бўлса, Δ_1, Δ_2 тўғри чизиқлар орасидаги бурчак деб $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ бурчакни тушунамиз. У ҳолда

$$tg\alpha = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \qquad (12)$$

(12) дан кўринадики, агар $k_1 = k_2$ бўлса, $\alpha = 0$ ёки $\alpha = \pi$ бўлади, яъни Δ_1 ва Δ_2 тўғри чизиқлар параллел бўлади, ва аксинча, агар Δ_1 ва Δ_2 тўғри чизиқлар параллел бўлса, $tg\alpha = 0$, бундан эса $k_1 = k_2$ келиб чиқади. Шу сабабли, $k_1 = k_2$ тенглик тўғри чизиқларнинг параллеллик шарти деб аталади. Агар Δ_1 ва Δ_2 тўғри чизиқлар перпендикуляр, яъни $\alpha = \frac{\pi}{2}$ бўлса, у ҳолда (12) дан $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$ муносабат келиб чиқади. Бу тенгликни тўғри чизиқларнинг перпендикулярлик шарти деб атаймиз.

2. Икки тўғри чизиқ тенгламасини биргаликда текшириш. Фараз қилайлик, бизга икки Δ_1 ва Δ_2 тўғри чизиқларнинг тенгламаларидан тузилган

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \qquad (13)$$

система берилган бўлсин. Маълумки, бу система ягона ечимга эга бўлиши учун

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

бўлиши зарур ва етарлидир. Бу эса $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ тенгсизликка эквивалент. Бу ҳолда (13) нинг ягона ечими Δ_1 ва Δ_2 тўғри чизиқларда ётувчи нуқтанинг координаталарини беради, яъни Δ_1 ва Δ_2 тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасини аниқлайди.

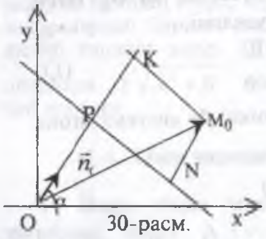
Агар

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

бўлса, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ бўлади, Бунда икки ҳол юз беради: 1) агар (13) система чексиз кўп ечимга эга бўлса, бу $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ бўлганда бажарилади, у ҳолда Δ_1 ва Δ_2 тўғри чизиқлар устма-уст тушади; 2) (13) система умуман ечимга эга эмас, бу $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ бўлганда юз беради, бунда берилган тўғри чизиқлар умуман кесишмайди, яъни улар параллел бўлади.

3. Нуқтадан берилган тўғри чизиққача бўлган масофа.

$M_0(x_0, y_0)$ нуқтадан Δ тўғри чизиққача бўлган $|NM_0| = d$ масофани топиш талаб этилган бўлсин. Δ тўғри чизиқнинг $\bar{n}_0$ нормалини қуриб олайлик. Агар M_0 нуқта Δ га нисбатан $\bar{n}_0$ нормалнинг мусбат йўналиши томонида жойлашган бўлса, у ҳолда масофа $+d$, акс ҳолда $-d$ бўлади.



30-расм.

Буни M_0 нуқтанинг Δ тўғри чизиқдан δ четланиши деб атаймиз. Расмдан кўринадики,

$$p + \delta = np_{\bar{n}_0}\, \overline{OM_0} = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha\ ,$$

бундан

$$\delta = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p \qquad (14)$$

ёки

$$d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p| \qquad (15)$$

келиб чиқади. Демак, нуқтадан берилган тўғри чизиққача бўлган масофани топиш учун нуқтанинг координаталарини тўғри чизиқ нормал тенгламасини чап томонидаги номаълумлар ўрнига қўйиш кифоя экан.

Агар тўғри чизиқ тенгламаси нормал бўлмаса, у ҳолда нормалловчи кўпайтувчи ёрдамида нормал кўринишга келтириб, сўнгра (15) формула ёрдамида талаб қилинган масофани ҳисоблаймиз.

1.5. Тўғри чизиқлар дастасининг тенгламаси

Текисликнинг $S(x_0, y_0)$ нуқтасидан ўтган барча тўғри чизиқлар тўплами S марказли тўғри чизиқлар дастаси деб аталади.

Теорема. *Агар* $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ *ва* $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ *лар* S *нуқтада кесишувчи тўғри чизиқлар, ва* α, β *бир вақтда нолга тенг бўлмаган ихтиёрий сонлар бўлса, у ҳолда*

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \qquad (16)$$

S *нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси бўлади.*

Исботи. Аввал (16) ҳақиқатан тенглама эканлигини кўрсатайлик, бунинг учун уни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + (\alpha C_1 + \beta C_2) = 0\,. \qquad (17)$$

Бу ерда $\alpha A_1 + \beta A_2$ ва $\alpha B_1 + \beta B_2$ бир вақтда нолга тенг бўла олмайди, чунки акс ҳолда, $\alpha A_1 + \beta A_2 = 0$ ва $\alpha B_1 + \beta B_2 = 0$ дан $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = -\frac{\beta}{\alpha}$ келиб чиқади, буни эса бўлиши мумкин эмас, чунки бу тўғри чизиқлар шартга кўра кесишади. Бу эса (17) тенглама эканлигини кўрсатади. Демак, у текисликда бирор тўғри чизиқни ифодалайди. Энди бу тўғри чизиқ S нуқтадан ўтишини кўрсатсак кифоя. Ҳақиқатан, (17) даги номаълумлар ўрнига x_0, y_0 ларни қўйсак, $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0$ ва $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0$ эканлигидан,

$$\alpha(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1) + \beta(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Агар, масалан, $\alpha \neq 0$ бўлса, (17) ни қуйидаги кўринишда ёзса бўлади:

$$(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0\,,$$

бу ерда $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$ деб белгиланди.

Мисол. S нуқтада кесишувчи $2x + 3y - 5 = 0$, $7x + 15y + 1 = 0$ тўғри чизиқлар берилган бўлсин. S нуқтадан $12x - 5y - 1 = 0$ тўғри чизиққа перпендикуляр ўтган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

Ечиш. Аввал берилган тўғри чизиқлар кесишишини текширамиз: $\frac{2}{7} \neq \frac{3}{15}$. Демак, улар кесишмайди. Даста тенгламаси

$$2x + 3y - 5 + \lambda(7x + 15y + 1) = 0.$$

Буни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$(2 + 7\lambda)x + (3 + 15\lambda)y + (-5 + \lambda) = 0. \qquad (18)$$

Бу тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини топайлик:

$$k = -\frac{2 + 7\lambda}{3 + 15\lambda}.$$

Берилган тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти $k_1 = \frac{12}{5}$ бўлгани учун, уларнинг перпендикулярлик шартига кўра

$$-\frac{2 + 7\lambda}{3 + 15\lambda} = -\frac{5}{12}.$$

Бундан $\lambda = -1$. Бу қийматни (18) га қўйсак,

$$5x + 12y + 6 = 0.$$

2-§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛАР

Биз аввалги параграфда биринчи тартибли чизиқлар туркумига кирувчи тўғри чизиқларни ўргандик. Бу параграфни иккинчи тартибли чизиқларга, яъни x ва y га нисбатан 2-тартибли

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (1)$$

тенгламалар билан ифодаланувчи чизиқларга бағишлаймиз. Биз асосан бундай чизиқлар туркумига кирувчи энг содда эгри чизиқлар бўлмиш айлана, эллипс, гипербола ва параболаларни кўриб чиқамиз. Қуйида бу чизиқларга таърифлар бериб, уларнинг тенгламаларини шу таърифлар асосида келтириб

чиқариб, улар ёрдамида бу эгри чизиқларнинг шаклини ва хусусиятларини ўрганамиз.

2.1. Айлананинг умумий тенгламаси

1.1-§ да маркази $C(a,b)$ нуқтада, радиуси r бўлган айлана таърифидан фойдаланиб, унинг тенгламаси

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

кўринишда булиши исботланган эди. Агар қавсларни очиб, ифодани соддалаштирсак, у (1) кўринишни олади.

Энди аксинча мулоҳаза қиламиз, яъни қандай ҳолларда (1) тенглама айланани ифодалайди? Бунинг учун, аввалambор аёнки, x^2 ва y^2 нинг коэффициентлари $A = C \neq 0$ булиши ва xy нинг коэффициенти нол бўлиши шарт, масалан, (1)

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (2)$$

кўринишда бўлиши керак. Агар (2) да қўшилувчиларни ўрин алмаштириб, тўла квадратга келтириб, ифодани ихчамласак, (2) қуйидаги

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \frac{D^2 + E^2 - AF}{A^2} \qquad (3)$$

кўринишга келади. Бу ерда уч ҳол бўлиши мумкин.

1-ҳол: $D^2 + E^2 - AF < 0$. Бунда (3) тенгликнинг маъноси бўлмайди, чунки ҳар қандай x, y учун тенгликнинг чап томони ҳамиша мусбат бўлади. Демак,(3) ҳеч қандай чизиқни ифодаламайди.

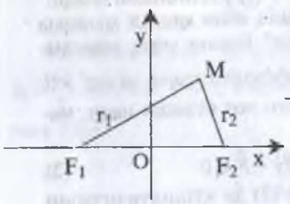
2-ҳол: $D^2 + E^2 - AF = 0$. Бу ҳолда (3) ни фақат $x = a$ ва $y = b$ қийматларгина қаноатлантиради, яъни (3) фақат битта $C(a,b)$ нуқтани ифодалайди.

3-ҳол: $D^2 + E^2 - AF > 0$. Бунда тенгликнинг ўнг томони ҳам мусбат бўлади, шунинг учун агар ўнг томонни r^2 десак, у (2) кўринишни олади, яъни (3) айланани ифодалайди.

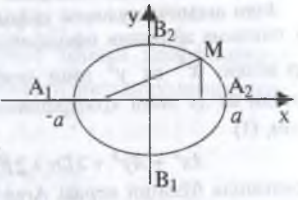
2.2. Эллипс

Таъриф. *Фокуслар деб аталувчи F_1 ва F_2 нуқталаргача бўлган масофалари йиғиндиси ўзгармас $2a$ бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни эллипс деб аталади.*

F_1 ва F_2 нуқталар x ўқида ётиб, координаталар бошига симметрик ва улар орасидаги масофа $2c$ бўлсин деб фараз қилайлик. У ҳолда уларнинг координаталари $F_1(-c,0)$ ва $F_2(c,0)$ бўлади.



31-расм.



32-расм.

Таърифга кўра, $r_1 + r_2 = 2a$, бу ерда $r_1 = |F_1M|$, $r_2 = |F_2M|$ ва $2c < 2a$ (31-расмга қаранг), яъни $c < a$. Агар c=0 бўлса, F_1 ва F_2 нуқталар устма-уст тушиб, $r_1=r_2=a$ бўлади, яъни эллипс айланадан иборат бўлади. Икки нуқта орасидаги масофа формуласига кўра

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,,\ r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,.$$

У ҳолда

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

бўлади. Бу тенгликни соддалаштириш мақсадида илдизлардан бирини тенгликнинг ўнг тарафига ўтказиб, уни иккала тарафини квадратга кўтарамиз:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2\,.$$

Илдиз қатнашган ҳадни чап томонга, қолган ҳадларни ўнг томонга ўтказиб ихчамласак,

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

ҳосил бўлади. Буни яна квадратга кўтариб ихчамласак,

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

тенгликка келамиз. $a^2 - c^2 > 0$ эканлигини эътиборга олиб ва $b^2 = a^2 - c^2$ белгилаш киритиб, охирги тенгликни a^2b^2 га бўлиб юборсак,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (4)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенглама эллипснинг каноник тенгламаси деб аталади.

Бу тенгламадан кўриниб турибдики, эллипс координата ўқларига нисбатан симметрик бўлади, яъни агар $M(x,y)$ эллипсда ётувчи нуқта бўлса, у ҳолда $M(x,-y)$, $M(-x,y)$ ва $M(-x,-y)$ нуқталар ҳам эллипсга тегишли бўлади (буни текширишни ўқувчининг ўзига ҳавола қиламиз). Шу сабабли, эллипснинг шаклини 1-чоракда ўрганиш билан кифояланса бўлади.

(4) тенгламадан кўриниб турибдики, $\frac{x^2}{a^2} \le 1$, $\frac{y^2}{b^2} \le 1$, яъни $-a \le x \le a$, $-b \le y \le b$ бўлади. (4) тенгламани y га нисбатан ечиб оламиз:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,. \qquad (5)$$

Агар биз шаклни 1-чоракда текширмоқчи бўлсак, (5) да илдиз олдида «+» ишорани олсак етарли, яъни

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

деймиз. Агар $x = 0$ бўлса, $y = b$ бўлади. x қиймати ортса, y ни қиймати камаяди ва $x = a$ бўлганда $y = 0$

бўлади. Натижада эллипснинг B_2A_2 ёйи ҳосил бўлади (32-расмга қаранг). Эллипснинг қолган қисмларини унинг симметриклик хусусиятидан фойдаланиб чизиб оламиз. Демак, эллипс 32-расмда кўрсатилгандек, ёпиқ чизиқ экан. A_1, A_2, B_1 ва B_2 нуқталар эллипснинг учлари деб аталади.

$2a$ эллипснинг катта ўқи, $2b$ эса кичик ўқи; шу жумладан, a ва b мос равишда катта ярим ўқ ва кичик ярим ўқ дейилади.

Агар $a = b$ бўлса, у ҳолда (4) тенглама

$$x^2 + y^2 = a^2$$

кўринишни олади, яъни эллипс айланадан иборат бўлади, бунда $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ миқдор нолга тенг бўлади.

Агар $a \neq b$ бўлса, c миқдор нолга тенг бўлмайди, шу сабабли, уни эллипснинг айланадан четланиш ўлчами сифатида қараса бўлади. Уни эллипснинг чизиқли эксцен-триситети деб атаймиз. Унинг катта ярим ўқ a га нисбати

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \tag{6}$$

эллипснинг сонли эксцентритети ёки содда қилиб эксцентритет деб аталади. $c < a$ бўлгани учун эллипснинг эксцентритети ҳамиша бирдан кичик бўлади: $e < 1$.

Эллипснинг ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтасидан фокусларигача бўлган масофа бу нуқтанинг фокал радиуслари деб аталади.

1-расмда булар $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ ва $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Агар уларни квадратга кўтариб, иккинчисидан биринчисини айирсак,

$$r_2^2 - r_1^2 = 4cx$$

ёки

$$(r_2 - r_1)(r_1 + r_2) = 4cx$$

тенгликни оламиз. Агар бу тенгликка эллипснинг таърифини қўлласак,

$$(r_2 - r_1) \cdot 2a = 4cx$$

ёки

$$r_2 - r_1 = 2ex$$

ҳосил бўлади. Натижада, қуйидаги

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 2a \\ r_2 - r_1 = 2ex \end{cases}$$

системага келамиз. Агар уларни мос равишда ҳадма-ҳад айирсак ва қўшсак:

$$r_2 = a - ex\,,\ r_1 = a + ex \tag{7}$$

формулаларни оламиз.

Мисол. $2x^2+4y^2=8$ эллипснинг фокуслари координаталари, эксцентриситети ва абсциссаси 1 га тенг бўлган нуқталарнинг фокал радиуслари топилсин.

Ечиш. Эллипс тенгламасини 8 га бўламиз: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, бу тенгликдан $a^2=4$, $a=2$, $b^2 = 2$, $b = \sqrt{2}$,

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4-2} = \sqrt{2},$$

демак, $F_1(\sqrt{2}, 0)$, $F_2(-\sqrt{2}, 0)$ нуқталар эллипснинг фокусларидир. Эллипснинг эксцентриситети $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

x=1 бўлгани учун

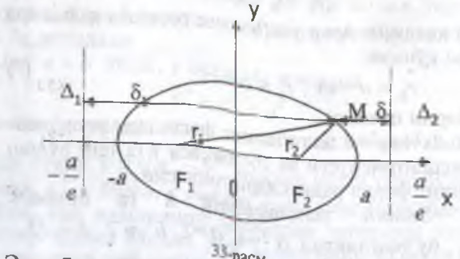
$$r_1 = a - ex = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = \frac{4-\sqrt{2}}{2}, r_2 = \frac{4+\sqrt{2}}{2}.$$

(7) формулаларни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$r_1 = e\left(\frac{a}{e} - x\right),\ r_2 = e\left(\frac{a}{e} + x\right). \tag{8}$$

$\delta_1 = \frac{a}{e} - x$ ва $\delta_2 = \frac{a}{e} + x$ миқдорлар эллипснинг $M(x, y)$ нуқтасидан Ox ўқига перпендикуляр ўтган Δ_2 ва Δ_1 тўғри чизиқларгача бўлган масофаларни билдиради. Бу тўғри чизиқлар Ox ўқини мос равишда $\frac{a}{e}$ ва $-\frac{a}{e}$

нуқталарда кесиб ўтади. $e<1$ бўлгани учун $-\frac{a}{e}<-a$ ва $\frac{a}{e}>a$ бўлади, яъни Δ_1 ва δ_2 тўғри чизиқлар эллипсдан ташқарида жойлашган (33-расмга қаранг).



33-расм.

Энди белгилашларга биноан (8) ни

$$\frac{r_1}{\delta_1}=e\,,\ \frac{r_2}{\delta_2}=e$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бундан кўринадики, эллипснинг ҳар қандай нуқтаси учун

$$\frac{r_1}{\delta_1}=\frac{r_2}{\delta_2} \tag{9}$$

бўлар экан.

Бундай хусусиятга эга бўлган Δ_1 ва Δ_2 тўғри чизиқлар эллипснинг директрисалари деб аталади.

Бу билан биз директрисаларнинг қуйидаги хоссасини исбот қилдик:

Эллипснинг ихтиёрий нуқтасидан фокусларигача бўлган масофаларининг мос директрисаларигача бўлган масофаларига бўлган нисбати бирдан кичик ўзгармас сондир.

2.3. Гипербола

Таъриф. *Фокуслар деб аталувчи F_1 ва F_2 нуқталаргача бўлган масофалар айирмасининг абсолют қиймати ўзгармас $2a$ бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни гипербола деб аталади.*

Таърифга кўра, $r_1-r_2=\pm 2a$, бу ерда $r_1=|F_1M|, r_2=|F_2M|$, M гиперболанинг ихтиёрий нуқтаси. Агар фокуслар орасидаги масофани $2c$ десак, у ҳолда эллипсдан фарқли ўлароқ, гипербола учун $c>a$ бўлади, чунки агар фокусларни 31-расмдагидек Ox ўқида O нуқтага нисбатан симметрик жойлаштирсак, $2c$ ΔF_1MF_2 нинг учинчи томони бўлиб, у қолган икки томонлари айирмасидан катта бўлади.

Худди юқоридагидек, $r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, $r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ ни $r_1-r_2=\pm 2a$ тенгликка қўйиб, ифодани ихчамласак, натижада

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

тенгламага келамиз. Лекин бу ерда $a^2-c^2<0$. Шу сабабли, агар $a^2-c^2=-b^2$ деб, охирги тенгликни $a^2(a^2-c^2)=-a^2b^2$ га бўлиб юборсак,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{10}$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу тенглама гиперболанинг каноник тенгламаси деб аталади.

Худди юқоридагидек, бу ерда ҳам гипербола Ox ва Oy ўқларига нисбатан симметрик эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Бундан ташқари гипербола O нуқтага нисбатан ҳам симметрик бўлади, шу сабабли O нуқтани унинг маркази деб ҳам аташади.

Таърифдан кўринадики, гипербола икки тармоқдан иборатдир: бир тармоғи $r_1>r_2$ тенгсизликни қаноатлантирадиган нуқталарнинг геометрик ўрни, иккинчи тармоғи эса $r_1 < r_2$ тенгсизликни қаноатлантирадиган нуқталарнинг геометрик ўрни.

Гиперболанинг (10) тенгламасини y га нисбатан ечиб олайлик:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\ .$$

Бундан $x^2 \geq a^2$, яъни $x \geq a$ ёки $x \leq -a$ бўлиши кераклиги келиб чиқади. Демак, гипербола тўлиқ $x = a$ ва $x = -a$ параллеллар орасидаги соҳадан ташқарида ётар экан.

Гиперболанинг 1-чоракдаги тармоғини текширайлик. У ҳолда

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

бўлади. Бу ерда, агар $x = a$ бўлса, $y = 0$ бўлади. Агар x ўсиб борса, y ҳам ўсади. Демак, тармоқ чексизгача чўзилади. Агар x нинг қийматлари a дан то ∞ гача ортиб борса, у ҳолда x^2 билан a^2 орасидаги тафовут катталаша боради, x етарлича катта бўлганда x^2 билан $x^2 - a^2$ орасидаги фарқ етарлича кичик бўлиб, x ўсиб борган сайин бу фарқ нолгача камайиб боради, яъни $y = +\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ қиймат билан $Y = +\frac{b}{a}\sqrt{x^2}$ қиймат орасидаги фарқ камайиб боради. Геометрик нуқтаи назардан бу тенгламалари $y = +\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ ва $y = +\frac{b}{a}\sqrt{x^2}$ бўлган чизиқлар ўзаро яқинлаша боришини билдиради. Лекин x нинг ҳеч бир қийматида $y = Y$ бўлмагани учун бу чизиқлар кесишмайди. Бундай хусусиятга эга бўлган

$$y = +\frac{b}{a}x \qquad (11)$$

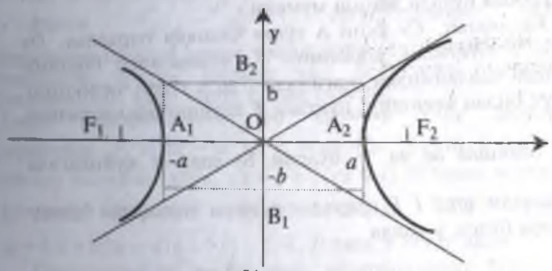
тўғри чизиқни гиперболанинг асимптотаси деб атаймиз. Гиперболанинг симметриклик хусусиятидан $x \longrightarrow -\infty$ да 4-чоракдаги тармоғи ҳам шу тўғри чизиққа яқинлашиши келиб чиқади.

Айнан шундай мулоҳазалар билан гиперболанинг 2- ва 4-чораклардаги тармоқлари

$$y = -\frac{b}{a}x \qquad (12)$$

тўғри чизиққа яқинлашади деган фикрга келамиз. Демак, гипербола тенгламалари (11) ва (12) бўлган иккита асимптотага эга экан.

Гиперболанинг Ox ўқини кесиб ўтган A_1 ва A_2 нуқталарини унинг учлари деб, $A_1A_2 = 2a$ ни бўйлама ўқи деб ва $B_1B_2 = 2b$ ни кўндаланг ўқи деб атаймиз. a ва b мос равишла бўйлама ва кўндаланг ярим ўқлари деб аталади.



34-расм.

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ миқдорни гиперболанинг чизиқли эксцентритети деб, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ ни эса, сонли экс-центритети деб атаймиз. $c > a$ бўлгани учун гиперболанинг эксцентриситети бирдан катта, яъни $e > 1$ бўлади.

Гиперболанинг фокал радиуслари

$$r_1 = \pm(ex + a),\ r_2 = \pm(ex - a)$$

бўлади, бу ерда гиперболанинг ўнг тармоқ нуқталари учун «+» ишора ва чап тармоқ нуқталари учун «-» ишора олинади.

Бу ерда ҳам гиперболанинг $M(x, y)$ нуқтасидан Ox ўқига перпендикуляр ўтган $\Delta_1 : x = \frac{a}{e}$ ва $\Delta_2 : x = -\frac{a}{e}$ тўғри чизиқларни гиперболанинг директрисалари деб атаймиз.

Айнан юқоридагидек мулоҳазалар билан директрисаларнинг қуйидаги хоссасини исботлаш мумкин:

Гиперболанинг ихтиёрий нуқтасидан фокусларигача бўлган масофаларининг мос директрисаларигача бўлган масофаларига нисбати бирдан катта ўзгармас сондир.

Эллипс ва гиперболанинг бу хоссасини умумлаштириб, берилган F нуқта ва берилган Δ тўғри чизиқларгача бўлган масофалари нисбати ўзгармас $e \neq 1$ сон бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни эллипс ёки гипербола бўлади дейиш мумкин.

Ҳақиқатан, Oy ўқни Δ тўғри чизиққа параллел, Ox ўқни F нуқтадан ўтказамиз. Координаталар бошини шундай танлаймизки, натижада F ва Δ тўғри чизиқнинг Ox ўқ билан кесишиш нуқтаси K ларнинг абсциссалари мос равишда ae ва $\frac{a}{e}$ бўлсин. Бу ерда a қуйидагича танланади: агар l F нуқтадан Δ тўғри чизиққача бўлган масофа бўлса, у ҳолда

$$l = |FK| = \left|\frac{a}{e} - ae\right| = \frac{a|1-e^2|}{e}$$

тенгликдан

$$a = \frac{el}{|1-e^2|}. \qquad (13)$$

Агар $M(x, y)$ берилган геометрик ўринларнинг бири бўлса, у ҳолда қўйилган шартга кўра $r = e\delta$ бўлиши керак, бу ерда

$$r = \sqrt{(x-ae)^2 + y^2} \text{ ва } \delta = \left|\frac{a}{e} - x\right|.$$

Демак,

$$\sqrt{(x-ae)^2 + y^2} = e\left|\frac{a}{e} - x\right|$$

экан. Бу тенгликнинг иккала тарафини квадратга кўтариб, ҳосил бўлган ифодани ихчамласак,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$

ҳосил бўлади. Агар $e < 1$ бўлса, $a^2(1-e^2) = b^2$ белгилаш киритиб эллипснинг тенгламасини, агар $e > 1$ бўлса, $a^2(1-e^2) = -b^2$ деб гиперболанинг тенгламасини ҳосил қиламиз.

Мисол. $x^2/_{16} - y^2/_9 = 1$ гиперболанинг ўнг тармоғида шундай нуқта топилсинки, бу нуқтадан ўнг фокусгача бўлган масофа чап фокусигача бўлган масофасидан икки марта кичик бўлсин.

Ечиш. Гиперболанинг ўнг тармоғи учун фокал радиуслар $r_1 = ex - a$ ва $r_2 = ex + a$ бўлади. У ҳолда масала шартига кўра, $ex + a = 2(ex - a)$ бўлиши керак. Бундан $x = 3a/e$ келиб чиқади. Бу ерда $a = 4, e = c/a = \sqrt{16+9}/4 = 5/4$. Демак, $x = 9{,}6$ экан.

Ординатасини топиш учун гиперболанинг тенгламасидан фойдаланамиз:

$$y = \pm\frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 16} = \pm\frac{3}{4}\sqrt{\left(\frac{48}{5}\right)^2 - 16} = \pm\frac{3}{5}\sqrt{119}.$$

Демак, масала шартини иккита $M_1\left(9{,}6; 0{,}6\sqrt{119}\right)$ ва $M_2\left(9{,}6; -0{,}6\sqrt{119}\right)$ нуқталар қаноатлантирар экан.

2.4. Парабола

Таърифф. *Фокус деб аталувчи F нуқтадан директриса деб аталувчи тўғри чизиққача бўлган масофалари тенг бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни парабола деб аталади.*

Агар $M(x,y)$ параболанинг ихтиёрий нуқтаси, r бу нуқтадан F нуқтагача бўлган масофа ва δ директрисагача бўлган масофа бўлса, у ҳолда таърифга кўра $r=\delta$ бўлади.

Фокусдан директрисагача бўлган масофа p бўлсин. Ox ўқини фокусдан директрисага перпендикуляр қилиб ўтказайлик. Координаталар бошини фокус билан директриса ўртасида олайлик. У ҳолда фокуснинг координаталари $F\left(+\frac{p}{2},0\right)$ ва директрисанинг Ox ўқ билан кесишган нуқтаси $K\left(-\frac{p}{2},0\right)$ бўлади.

Икки нуқта орасидаги масофа формулаларига кўра

$$r=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}\,,\ \delta=x+\frac{p}{2}.$$

У ҳолда парабола тенгламаси

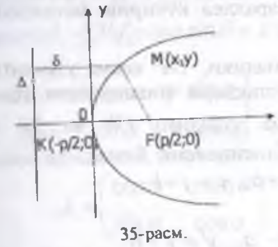
$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}$$

бўлади. Агар буни квадратга кўтариб ихчамласак,

$$y^2=2px \tag{14}$$

тенгликка келамиз. Буни параболанинг каноник тенгламаси деб атаймиз.

Параболанинг (14) тенгламаси x нинг фақат манфий бўлмаган қийматлари учун маънога эга. Шу сабабли, парабола Oy ўқнинг ўнг тарафида жойлашгандир. Агар $x=0$ бўлса, $y=0$ бўлади, яъни парабола координаталар бошидан ўтар экан. O нуқтани параболанинг учи деб атаймиз. Демак, парабола чизиғи 35-расмдагидек бўлар экан.



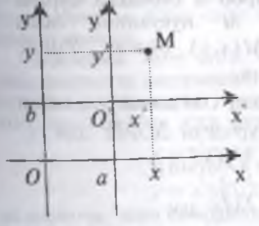
35-расм.

3-§. ДЕКАРТ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИНИ АЛМАШТИРИШ ВА ҚУТБ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИ

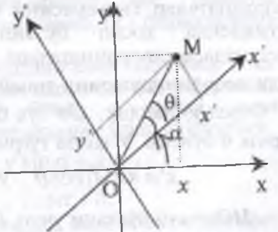
3.1. Координаталарни параллел кўчириш

Фараз қилайлик, Oxy координаталар системаси берилган бўлсин. Текисликнинг ихтиёрий M нуқтасининг шу системадаги координаталари $M(x,y)$ бўлсин.

Боши $O'(a,b)$ нуқтада бўлган $O'x'y'$ координаталар системасида берилган M нуқтанинг координаталарини топайлик (36-расмга қаранг). Бу ерда янги



36-расм



37-расм.

$O'x'y'$ система эски Oxy системанинг бошини $O'(a,b)$ нуқтага параллел кўчириш натижасида ҳосил бўлган бўлсин.

Чизмадан кўринадики, Ox кесма узунлиги Oa ва ax кесмалар узунликлари йиғиндисига тенг. Худди шундек, Oy кесма узунлиги Ob ва by кесмалар узунликлари йиғиндисига тенг. Демак,

$$x = x'+a,\ \ y = y'+b \tag{1}$$

ёки

$$x' = x - a,\ \ y' = y - b. \tag{1'}$$

Эслатма. Агар фазода $Oxyz$ координаталар системасини $O'(a,b,c)$ нуқтага параллел кўчириш натижасида янги $O'x'y'z'$ координаталар системаси ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда $M(x,y,z)$ нуқтанинг янги координаталари

$$x' = x - a,\ \ y' = y - b,\ \ z' = z - c$$

формулалар орқали аниқланади.

3.2. Координаталар системасини буриш

Фараз қилайлик, янги $O'x'y'$ система эски Oxy координаталар системасини бирор α бурчакка буриш натижасида ҳосил бўлсин. M нуқтанинг эски системадаги координаталари $M(x,y)$ бўлсин. Унинг янги координаталарини топайлик.

Фараз қилайлик, Ox' ўқ билан OM кесма орасидаги бурчак θ бўлсин. У ҳолда тўғри бурчакли $\Delta OMx'$ дан

$$x' = |OM|\cos\theta,\ \ y' = |OM|\sin\theta.$$

$\angle MOx$=α+0 бўлгани учун ΔOMx дан

$$x = |OM|\cos(\alpha+\theta) = |OM|(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta) =$$

$$= |OM|\cos\alpha\cos\theta - |OM|\sin\alpha\sin\theta = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$

$$y = |OM|\sin(\alpha+\theta) = |OM|(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta) =$$

$$= |OM|\sin\alpha\cos\theta + |OM|\cos\alpha\sin\theta = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Демак,

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

экан. Бу алмаштиришнинг матрицаси

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

хосмас, чунки $\det A = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \neq 0$. Шунинг учун унга тескари матрица мавжуд:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

У ҳолда янги координаталарнинг эскилари орқали ифодаси қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

1-эслатма. Янги координаталар системаси эски координаталар системасини α бурчакка буриш натижасида ҳосил бўлгани учун, янги координаталар системасини -α бурчакка буриб, эски координаталар системасига қайтамиз. Шу сабабли (2) формулаларда эски ва янги координаталарнинг мос равишда ўринларини ва α ни -α га алмаштириб, (2') формулаларга келиш мумкин.

2-эслатма. Агар янги координаталар системаси эски координаталар системасини ҳам параллел, ҳам α бурчакка буриш натижасида ҳосил бўлса, у ҳолда янги координаталардан эски координаталарга ўтиш формуласи

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b, \end{aligned}\right\}$$

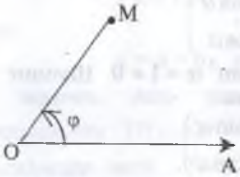
ва аксинча, эски координаталардан янги координаталарга ўтиш формулалари

$$\left.\begin{aligned} x' &= (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha \\ y' &= -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha \end{aligned}\right\}$$

бўлади. Буни исботлашни ўқувчига ҳавола қиламиз.

3.3. Қутб координаталар системаси

Биз бу ерда қулай ва келажакда кўп қўлланиладиган қутб координаталар системасини киритамиз.



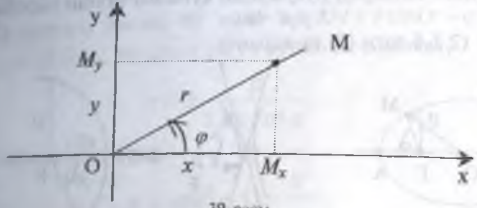
38-расм.

1. Текисликда қутб координаталар системаси қутб деб аталувчи O нуқта ва O нуқтадан чиққан қутб ўқи деб аталувчи OA нур нуқталари орқали аниқланади.

M текисликнинг ихтиёрий нуқтаси ва қутбдан бу нуқтагача бўлган масофа r бўлсин. Қутб ўқи ОМ кесма билан устма-уст тушиши учун уни φ бурчакка буриш керак бўлсин. Агар буриш йўналиши текислик йўналишига тескари бўлса, бу бурчакни « – « ишора билан, агар йўналишлар бир хил бўлса, «+» ишора билан оламиз. Атаманинг умумийлигини сақлаган ҳолда, бу бурчакни қутб бурчаги деб атаймиз.

r ва φ ни M нуқтанинг қутб координаталари деб атаймиз.

Кўп ҳолларда, бир вақтда ҳам декарт ва ҳам қутб координаталар системаларидан фойдаланишга тўғри келади. Шунинг учун нуқтанинг бир системадаги координаталарини билган ҳолда, иккинчи системадаги координаталарини ҳам билиш муҳим рол ўйнайди. Биз бу ерда бир координаталардан иккинчи координаталарга ўтиш формулаларини қутб боши декарт координаталар системасининг боши билан, қутб ўқи Ox ўқи билан устма-уст тушган хусусий ҳол учун чиқарамиз.



39-расм.

Фараз қилайлик, M текисликнинг ихтиёрий нуқтаси (x, y) – унинг декарт координаталари, (r, φ) – қутб координаталари бўлсин. M_x ва M_y билан М нуқтадан Ox ва Oy ўқларига туширилган перпендикулярларнинг асосини белгилайлик (39-расмга қаранг). ΔOMM_x дан $OM_x = |OM|\cos\varphi$, $OM_y = |OM|\sin\varphi$. Демак,

$$x = r\cos\varphi\,,\ \ y = r\sin\varphi\,. \tag{3}$$

Бу формулаларни декарт координаталарнинг қутб координаталар орқали ифодаси деб атаймиз. Энди тескари ифодани топиш учун (3) даги тенгликларни квадратга кўтариб қўшсак:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

тенглик ҳосил бўлади. Бундан ва ΔOMM_x дан

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,,\ \ tg\varphi = \frac{y}{x} \tag{4}$$

келиб чиқади. Булар декарт координаталардан қутб координаталарга ўтиш формулалари деб аталади.

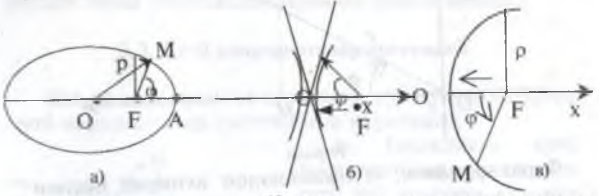
1-*мисол*. Маркази координаталар бошида, радиуси ρ бўлган айлананинг қутб координаталар системасидаги тенгламаси $r =$ρ бўлади.

2-*мисол*. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$ эллипснинг қутб координаталар системасидаги тенгламасини тузинг.

Ечиш. Қутб сифатида ўнг фокусни олайлик. У ҳолда эллипснинг ихтиёрий нуқтасидан қутбгача бўлган масофа

$$r = a - ex \tag{5}$$

булади (2.2-§ даги (7) га қаранг).



40-расм.

40, а)-расмдан кўринадики,

$$x = np_x\overrightarrow{OM} = np_x\left(\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FM}\right) = c + r\cos\varphi = ae + r\cos\varphi .$$

Буни (5) га қўйиб, ихчамлагандан сўнг

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi} \tag{6}$$

тенгликка келамиз, бу ерда $p = a(1 - e^2) = \dfrac{b^2}{a}$, чунки $e^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \dfrac{b^2}{a^2}$. (6) тенглама эллипснинг қутб тенгламасидир.

3-*мисол.* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболанинг қутб координаталар системасидаги тенгламасини тузинг.

Ечиш. Бу ерда ҳам қутб сифатида ўнг фокусни олайлик. У ҳолда қутб ўқи Ox ўққа тескари йўналган бўлади (40,б)-расмга қаранг). 2.3-§га асосан гиперболанинг ихтиёрий нуқтасидан биз танлаган қутбгача бўлган масофа

$$r = \pm(ex - a) \tag{7}$$

бўлади, бу ерда «+» ишора ўнг тармоқ учун ва «-» ишора чап тармоқ учун олинар эди.

Худди юқоридагидек, 40, б-расмдан

$$x = np_x\overrightarrow{OM} = np_x\left(\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FM}\right) = c + np_x\overrightarrow{FM} = ae + np_x\overrightarrow{FM}$$

келиб чиқади, лекин бу ерда $np_x\overrightarrow{FM} = r\cos(\pi - \varphi) = -r\cos\varphi$. Демак, буларни (7) га қўйиб ихчамласак,

$$r = \pm\frac{p}{1 \pm e\cos\varphi} \tag{8}$$

ҳосил бўлади, бу ерда

$$p = a(e^2 - 1) = \frac{b^2}{a},$$

бу гиперболанинг қутб тенгламасидир.

4-*мисол.* $y^2 = 2px$ параболанинг қутб тенгламасини тузинг.

Ечиш. 40, в)-расмга асосан

$$x = np_x\overrightarrow{OM} = np_x\overrightarrow{OF} + np_x\overrightarrow{FM} = \frac{p}{2} - r\cos\varphi .$$

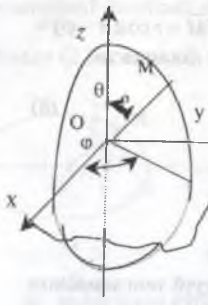
Буни $r = \dfrac{p}{2} + x$ га қўйсак,

$$r = \frac{p}{1 + \cos\varphi} \tag{9}$$

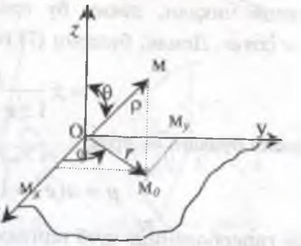
тенгламани ҳосил қиламиз. Бу параболанинг қутб тенгламасидир.

2. Фазода қутб координаталар системасининг асосий элементлари бу: қутб деб аталувчи O нуқта, қутб ўқи деб аталувчи Oz ўқ ва бу ўққа тиралган қутб яримтекислиги деб аталувчи Ozx яримтекислигидир.

Фараз қилайлик (41-расмга қаранг), M фазонинг бирор нуқтаси, $\rho = \left|\overrightarrow{OM}\right|$, θ - $\overrightarrow{OM}$ векторнинг z ўқ билан ташкил этган бурчаги. φ - M нуқтадан ўтиб z ўққа тиралган яримтекислик билан Ozx қутб яримтекислик орасидаги бурчак бўлсин.



41-расм.



42-расм.

ρ, θ ва φ миқдорлар M нинг қутб координаталари деб аталади. Бундай аниқланган координаталарга эга бўлган нуқталар ρ радиусли сферада жойлашгани учун уларни M нуқтанинг сферик координаталари деб ҳам аташади.

Энди қутб координаталар билан декарт координаталар орасидаги муносабатларни топайлик. Бунинг учун биз Oz ўқ қутб ўқи билан устма-уст тушсин, Ox ўқ қутб яримтекислигида ётсин ва Oy ўқ қутб яримтекислигига перпендикуляр бўлсин деб фараз қиламиз (42-расмга қаранг). У ҳолда

$$z = np_z\overline{OM} = \rho\cos\theta .$$

M нуқтани Oxy текисликка проекциялайлик. Фараз қилайлик, M_0 нуқта унинг Oxy текисликдаги проекцияси бўлсин. Бу нуқтанинг Oxy текисликдаги қутб координаталари r ва φ бўлсин.

ΔOMM_0 дан

$$r = |OM_0| = \rho\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \rho\sin\theta .$$

У ҳолда (3) га асосан

$$x = r\cos\varphi = \rho\sin\theta\cos\varphi ,$$
$$y = r\sin\varphi = \rho\sin\theta\sin\varphi$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. Демак,

$$x = r\cos\varphi = \rho\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi = \rho\sin\theta\sin\varphi, \qquad (10)$$
$$z = \rho\cos\theta.$$

Энди тескари муносабатни аниқлайлик. Бунинг учун (10) даги тенгликларни квадратларга кўтариб қўшамиз:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} .$$

(10) нинг учинчи тенглигидан θ ни

$$\cos\theta = \frac{z}{\rho}$$

биринчи ва иккинчи тенгликларидан

$$\cos\varphi = \frac{x}{\rho\sin\theta}, \ \sin\varphi = \frac{y}{\rho\sin\theta}.$$

φ бурчакни топамиз ёки уларни қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$
$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \qquad (11)$$
$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

3. M нуқтанинг ҳолатини унинг Oxy текисликдаги проекциясининг қутб координаталари r, φ ва $z = |M_0M|$ координатаси орқали аниқласа ҳам бўлади. Бундай аниқланган r, φ, z координаталар цилиндрик

координаталар деб аталади. Бу координаталарнинг декарт координаталар билан боғловчи муносабати

$$x = r\cos\varphi\,,\ \ y = r\sin\varphi\,,\ \ z = z\,. \qquad (12)$$

4-§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛАРНИНГ ТЕНГЛАМАЛАРИНИ КАНОНИК КЎРИНИШГА КЕЛТИРИШ

2-§ да биз 2-тартибли

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (1)$$

тенгламани $A = C \neq 0$ бўлган хусусий ҳолда текширган эдик.

Энди фараз қилайлик, $A \neq C$ бўлсин. У ҳолда (1) ни

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = \left(Ax + By + D\right)x + \\ + \left(Bx + Cy + E\right)y + \left(Dx + Ey + F\right) = 0 \qquad (2)$$

кўринишда ёзиб олса бўлади. Буни текширишни ўқувчининг ўзига ҳавола қиламиз.

Координаталар системасини алмаштириш ҳисобига (1) ни ихчам, яъни каноник кўринишга келтириш масаласини кўрайлик. Бунинг учун алмаштиришни шундай танлаймизки, натижада номаълумлар кўпайтмаси қатнашган ҳад йўқолиб, чизиқли ифодасидаги ҳадлар сони ё етарлича камайсин ёки бутунлай йўқолсин.

Аввал

$$x = x'+a\,,\ \ y = y'+b \qquad (3)$$

алмаштириш бажарамиз. Бунда координаталар боши $O'(a,b)$ нуқтага кўчади. (3) ни (1) га олиб бориб қўямиз:

$$A(x'+a)^2 + 2B(x'+a)(y'+b) + C(y'+b)^2 + 2D(x'+a) + \\ + 2E(y'+b) + F = Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + 2\left(Aa + Bb + D\right)x' + \\ + 2\left(Ba + Cb + E\right)y' + \left(Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb + F\right) = 0.$$

a ва b ни шундай танлаймизки, натижада x' ва y' лар олдидаги коэффициентлар нолга айлансин, яъни

$$\begin{cases} Aa + Bb + D = 0 \\ Ba + Cb + E = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Агар $AC - B^2 \neq 0$ бўлса, (4) ягона ечимга эга. Системани ечиб, топилган a ва b ни охирги тенгламага қўйсак, тенглама

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + F_0 = 0 \qquad (5)$$

кўринишга келади, бу ерда (2) га асосан

$$F_0 = \left(Aa + Bb + D\right)a + \left(Ba + Cb + E\right)b + \left(Da + Eb + F\right) = Da + Eb + F\,.$$

Агар (5) тенгламани $M\left(x', y'\right)$ нуқта қаноатлантирса, у ҳолда бу тенгламани $N\left(-x', -y'\right)$ нуқта ҳам қаноатлантиради. Демак, (5) тенглама билан ифодаланган чизиқ (5) ни қаноатлантирадиган $O'(a,b)$ нуқтага нисбатан симметрик бўлган нуқталар жуфтликларининг геометрик ўрнидан иборат экан. Шу сабабли, $O'(a,b)$ нуқтани бу эгри чизиқнинг маркази деб аташади. Битта марказга эга бўлган эгри чизиқни марказий чизиқ деб атаймиз. Марказий чизиққа, масалан, эллипс ва гипербола мисол бўлиши мумкин. Демак, биз бажарган алмаштириш геометрик нуқтаи назардан координаталар бошини эгри чизиқ марказига кўчиришни билдирар экан.

Энди $O'x'y'$ координаталар системасини шундай α бурчакка бурамизки, натижада $x'y'$ олдидаги коэффициент нолга айлансин. Аввалги параграфдан маълумки, буриш қуйидаги алмаштириш ёрдамида бажарилади:

$$\begin{cases} x' = \tilde{x}\cos\alpha - \tilde{y}\sin\alpha \\ y' = \tilde{x}\sin\alpha + \tilde{y}\cos\alpha. \end{cases}$$

Буларни (5) га қўйиб ихчамласак,

$$\tilde{x}^2\left(A\cos^2\alpha + B\sin 2\alpha + C\sin^2\alpha\right) + \tilde{x}\tilde{y}\left(2B\cos 2\alpha - \right. \\ \left. -(A - C)\sin 2\alpha\right) + \tilde{y}^2\left(A\sin^2\alpha - B\sin 2\alpha + C\cos^2\alpha\right) + F_0 = 0. \qquad (6)$$

Агар

$$2B\cos 2\alpha-(A-C)\sin 2\alpha=0$$

ёки

$$Btg^2\alpha+(A-C)tg\alpha-B=0 \qquad (7)$$

десак, (6) қуйидаги кўринишни олади:

$$\widetilde{A}\widetilde{x}^2+\widetilde{C}\widetilde{y}^2+F_0=0, \qquad (8)$$

бу ерда

$$\widetilde{A}=A\cos^2\alpha+B\sin 2\alpha+C\sin^2\alpha,$$

$$\widetilde{C}=A\sin^2\alpha-B\sin 2\alpha+C\cos^2\alpha.$$

(7) ни ечиб, $tg\alpha$ ни топгандан сўнг,

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}},\ \sin\alpha=\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$$

топилади. Бу қийматлардан фойдаланиб, $\widetilde{A}$ ва $\widetilde{B}$ коэффициентларни аниқлаймиз. Шу билан (8) тенглама тузиб бўлинади.

Агар $\widetilde{A}$ ва $\widetilde{C}$ ларнинг ишоралари бир хил, F_0 нинг ишораси уларникига тескари бўлса, (8) эллипсни, агар $\widetilde{A}$ ва $\widetilde{C}$ ларнинг ишораси ҳар хил бўлса, F_0 нинг ишораси қандай булишидан қатъи назар, (8) гиперболани беради. Агар $\widetilde{A}$, $\widetilde{C}, F_0$ нинг ишоралари бир хил бўлса,(8) мавҳум эллипсни беради:

$$\frac{\widetilde{x}^2}{m^2}+\frac{\widetilde{y}^2}{n^2}=-1.$$

Агар F_0 =0 бўлса, у ҳолда $\widetilde{A}$ ва $\widetilde{C}$ нинг ишоралари бир хил бўлганда, (8) битта нуқтани, $\widetilde{A}$ ва $\widetilde{C}$ нинг ишоралари ҳар хил бўлса, (8) гиперболанинг каноник тенгламасига ўхшаш

$$\frac{\widetilde{x}^2}{m^2}-\frac{\widetilde{y}^2}{n^2}=0$$

тенгламага келса ҳам, лекин у ўзаро кесишувчи иккита

$$\frac{\widetilde{x}}{m}-\frac{\widetilde{y}}{n}=0,\ \frac{\widetilde{x}}{m}+\frac{\widetilde{y}}{n}=0$$

тўғри чизиқни беради.

1-мисол.

$$17x^2+12xy+8y^2-46x-28y+17=0$$

тенгламани каноник кўринишга келтиринг.

Ечиш. Аввал (3) алмаштиришни бажарамиз. Бунда a ва b ни топиш учун вужудга келадиган (4) система қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases}17a+6b-23=0,\\ 6a+8b-14=0.\end{cases}$$

Бу системани ечими $a=1$ ва $b=1$. У ҳолда

$$F_0=-23a-14b+17=-20.$$

Демак, (3) алмаштириш натижасида берилган тенглама

$$17x'^2+12x'y'+8y'^2-20=0$$

кўринишга келтирилар экан.

Энди кўчирилган координаталар ўқларини α бурчакка бурамиз, яъни (5) алмаштиришни бажарамиз. Бунда α ни топиш учун ҳосил бўладиган тенглама қуйидагича бўлади:

$$6tg^2\alpha+9tg\alpha-6=0.$$

Бундан $tg\alpha=\frac{1}{2}$ ва $tg\alpha=-2$. Биз ўткир бурчакка мос келадиган биринчи ечимни оламиз. У ҳолда

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{2}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha=\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Бу қийматлардан фойдаланиб, $\widetilde{A}$ ва $\widetilde{C}$ коэффициентларни аниқлаймиз:

$$\widetilde{A}=A\cos^2\alpha+B\sin 2\alpha+C\sin^2\alpha=17\cdot\frac{4}{5}+12\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+8\cdot\frac{1}{5}=20,$$

$$\widetilde{C}=A\sin^2\alpha-B\sin 2\alpha+C\cos^2\alpha=17\cdot\frac{1}{5}-12\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+8\cdot\frac{4}{5}=5.$$

Демак, эгри чизиқнинг $O'\widetilde{xy}$ координаталар системасидаги тенгламаси

$$20\tilde{x}^2 + 5\tilde{y}^2 - 20 = 0$$

ёки

$$\frac{\tilde{x}^2}{1} + \frac{\tilde{y}^2}{4} = 1$$

экан. Бу яримўқлари 2 ва 1 бўлган эллипсдир.

Агар (4) система ечимга эга бўлмаса, яъни (4) нинг асосий детерминанти

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = 0$$

бўлса, у ҳолда чизиқнинг ё маркази бўлмайди ёки маркази чексиз кўп бўлади, шу сабабли, биз бундай ҳолларда аввал буриш алмаштиришини бажарамиз:

$$\begin{cases} x = \tilde{x}\cos\alpha - \tilde{y}\sin\alpha \\ y = \tilde{x}\sin\alpha + \tilde{y}\cos\alpha. \end{cases} \tag{9}$$

Буни (1) га қўйсак, у қуйидаги кўринишга келади:

$$\tilde{x}^2\left(A\cos^2\alpha + B\sin2\alpha + C\sin^2\alpha\right) + \widetilde{xy}\left(2B\cos2\alpha - \right.$$
$$\left.(A-C)\sin2\alpha\right) + \tilde{y}^2\left(A\sin^2\alpha - B\sin2\alpha + C\cos^2\alpha\right) + \tag{10}$$
$$+ 2\tilde{x}\left(D\cos\alpha + E\sin\alpha\right) + 2\tilde{y}\left(E\cos\alpha - D\sin\alpha\right) + F = 0.$$

α бурчакни шундай танлаймизки, натижада

$$2B\cos2\alpha - (A-C)\sin2\alpha = 0$$

бўлсин. Бунинг учун (7) ни ечиш кифоя.

Топилган α га кўра, (10) қуйидаги кўринишни олади:

$$\tilde{A}\tilde{x}^2 + \tilde{C}\tilde{y}^2 + 2\tilde{D}\tilde{x} + 2\tilde{E}\tilde{y} + F = 0\,. \tag{11}$$

Энди (11) ни каноник кўринишга келтириш учун параллел кўчириш алмаштиришини бажариш кифоя. Баён қилинган усул янада тушунарли бўлиши учун уни қуйидаги мисолда кўриб чиқайлик.

2-*мисол.* $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$ тенгламани каноник кўринишга келтиринг.

Ечиш. Бу ерда $\delta = 4\cdot1 - 2^2 = 0$. Шу сабабли, берилган тенглама билан аниқланган эгри чизиқ марказий эмас. (10) алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда (7) тенглама қуйидагича бўлади:

$$2tg^2\alpha - 3tg\alpha - 2 = 0\,.$$

Бундан $tg\alpha = -\frac{1}{2}$ ва $tg\alpha = 2$. Биз ўткир бурчакка мос келадиган биринчи ечимни оламиз. У ҳолда

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt5},\ \sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt5}\,.$$

Бу қийматлардан фойдаланиб, $\tilde{A}, \tilde{C}, \tilde{D}$ ва $\tilde{E}$ коэффициентларни аниқлаймиз:

$$\tilde{A} = A\cos^2\alpha + B\sin2\alpha + C\sin^2\alpha = 4\cdot\frac{1}{5} - 4\cdot\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \frac{4}{5} = 0\,,$$

$$\tilde{C} = A\sin^2\alpha - B\sin2\alpha + C\cos^2\alpha = 4\cdot\frac{4}{5} + 4\cdot\frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt5} + \frac{1}{5} = 5\,,$$

$$\tilde{D} = D\cos\alpha + E\sin\alpha = -1\cdot\frac{1}{\sqrt5} - 7\cdot\frac{2}{\sqrt5} = -3\sqrt5\,,$$

$$\tilde{E} = E\cos\alpha - D\sin\alpha = -7\cdot\frac{1}{\sqrt5} + 1\cdot\frac{2}{\sqrt5} = -\sqrt5\,.$$

Демак, эгри чизиқнинг $O\widetilde{xy}$ координаталар системасидаги тенгламаси

$$5\tilde{y}^2 - 6\sqrt5\tilde{x} - 2\sqrt5\tilde{y} + 7 = 0 \tag{12}$$

кўринишда бўлар экан. Бу ерда биринчи ва учинчи ҳадларни бирлаштириб, уларни тўла квадратга келтирсак,

$$\left(\tilde{y} - \frac{\sqrt5}{5}\right)^2 - \frac{6\sqrt5}{5}\left(\tilde{x} - \frac{\sqrt5}{2}\right) = 0$$

тенгламага келамиз. Энди бу ерда

$$x' = \tilde{x} - \frac{\sqrt5}{5},\ y' = \tilde{y} - \frac{\sqrt5}{5}$$

параллел кўчириш алмаштиришини бажарсак, (12) тенглама

$$y'^2 = \frac{6\sqrt{5}}{5}x'$$

каноник кўринишга келади. Маълумки, бу параболанинг тенгламаси.

3-*мисол.* $4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$ тенгламани каноник кўринишга келтиринг.

Ечиш. Бу ерда $\delta = 4 \cdot 1 - 2^2 = 0$, лекин (4) система битта $2a - b + 1 = 0$ тенгламага тенг кучли. Демак, берилган чизиқ $2x - y + 1 = 0$ тўғри чизиқда ётувчи чексиз кўп марказга эга экан. Берилган тенгламани қуйидаги кўпайтувчиларга ажратиш мумкин:

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y - 3 = (2x - y + 3)(2x - y - 1).$$

У ҳолда берилган тенглама қуйидаги икки тенгламага тенг кучли бўлади:

$$2x - y - 1 = 0 \text{ ва } 2x - y + 3 = 0, \qquad (13)$$

яъни берилган чизиқ тенгламалари (13) бўлган иккита тўғри чизиқни ифодалайди. Марказларнинг геометрик ўрни бўлмиш $2x - y + 1 = 0$ тўғри чизиқ (13) тўғри чизиқларнинг ўртасидан ўтган тўғри чизиқ экан.

3-БОБ.
ФАЗОДАГИ АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ

1-§. ФАЗОДАГИ ТЕКИСЛИК ТЕНГЛАМАЛАРИ

1.1. Умумий тушунчалар

Фараз қилайлик, x, y, z — ихтиёрий ўзгарувчи миқдорлар бўлсин. Агар

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

тенглик x, y, z нинг фақат айрим қийматларидагина ўринли бўлса, у ҳолда (1) ни x, y, z га нисбатан тенглама деб атаймиз. Агар (1) даги номаълумлар ўрнига шу $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ сонларни қўйганда тенглик айниятга айланса, учта сон $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ (1) тенгламани қаноатлантиради деймиз.

(1) тенгламани қаноатлантирадиган ҳар бир x_0, y_0, z_0 сонлар учлигига фазонинг $M(x_0, y_0, z_0)$ нуқтасини мос қўямиз. Бундай нуқталарнинг геометрик ўрнини сирт деб атаймиз, (1) ни эса шу сиртнинг тенгламаси деймиз.

Агар сирт тенгламаси берилган бўлиб, бирор нуқтанинг шу сиртда ётиш ёки ётмаслигини текшириш талаб қилинган бўлса, у ҳолда берилган нуқтанинг координаталарини тенгламанинг номаълумлари ўрнига қўйиш кифоя. Аналитик геометриянинг вазифаси қаралаётган сиртни унинг тенгламаси ёрдамида ўрганишдир.

Сиртнинг ихтиёрий $M(x, y, z)$ нуқтаси унинг силжувчи нуқтаси деб аталади.

Мисол сифатида сферанинг тенгламасини тузайлик. Сферанинг таърифига кўра, сферанинг маркази деб аталувчи $C(a, b, c)$ нуқтадан сферанинг силжувчи нуқтаси орасидаги масофа r ўзгармасдир. Демак,

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r$$

ёки

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.$$

Агар сферанинг маркази координаталар бошида бўлса, у ҳолда

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

Фазодаги аналитик геометрияда асосан алгебраик тенгламалар билан ифодаланган сиртлар ўрганилади. Масалан, тенгламаси

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (2)$$

кўринишда бўлган сирт 1-тартибли сирт деб аталади. Тенгламаси

$$\begin{aligned}&Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+\\&+2Fyz+2Gx+2Hy+2Kz+L=0\end{aligned} \qquad (3)$$

бўлган сиртларни 2-тартибли сиртлар деб атаймиз. Юқорида кўрилган мисолдан сфера 2-тартибли сирт эканлиги келиб чиқади.

1.2. Текисликнинг умумий тенгламаси

1-теорема. *Декарт координаталар системасида текислик 1-тартибли сиртдир.*

Исботи. Бирор декарт координаталар системасида берилган α текислигида унинг бирор нуқтаси $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ва унга перпендикуляр ўтган қандайдир $\vec{n}=\{A,B,C\}$ вектор берилган бўлсин.

Фараз қилайлик, $M(x,y,z)$ текисликнинг силжувчи нуқтаси бўлсин. Бу нуқта α текислигида ётиши учун $\overline{M_0M}$ вектор $\vec{n}$ га перпендикуляр бўлиши шарт, яъни $\vec{n}\perp\overline{M_0M}$.

Векторларнинг перпендикулярлик шартидан $\overrightarrow{M_0M}\circ\vec{n}=0$ ёки

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (4)$$

келиб чиқади. Агар $M(x,y,z)$ нуқта α текислигида ётмаса, (4) ўринли бўлмайди, шу сабабли (4) тенглик $M(x,y,z)$ нуқтанинг ўрнини тўла аниқлайди. Агар (4) даги қавсларни очиб ва $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$ деб белгиласак,

$$Ax+By+Cz+D=0$$

ҳосил бўлади. Теорема исбот бўлди.

Текисликка перпендикуляр бўлган нолдан фарқли ҳар қандай вектор текисликка нормал вектор деб, ва шу сабабли, (4) тенглама нормал вектори $\vec{n}$ бўлиб, $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нуқтадан ўтган текислик тенгламаси деб аталади.

2-теорема. *Декарт координаталар системасида ҳар қандай 1-тартибли тенглама текисликни аниқлайди.*

Исботи. Бирор декарт координаталар системасида (2) тенглама берилган бўлсин. Фараз қилайлик, x_0,y_0,z_0 шу тенгламанинг бирор ечими бўлсин, яъни (2) ни қаноатлантирувчи сонлар бўлсин. У ҳолда

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \qquad (5)$$

бўлади. (2) дан (5) ни айирсак,

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

ҳосил бўлади. Маълумки, бу тенглама нормал вектори $\vec{n}$ бўлиб, $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нуқтадан ўтган текислик тенгламасидир. (4) тенглама (2) га эквивалент бўлгани учун (2) ҳам α текисликнинг тенгламаси бўлади. Теорема исбот бўлди.

Текисликнинг (2) тенгламасини унинг умумий тенгламаси деб атаймиз.

Мисол. $\vec{n}=\{2,2,3\}$ векторга перпендикуляр булиб, $M_0(1,1,1)$ нуқтадан ўтган текислик тенгламаси тузилсин.

Ечиш. (4) га асосан

$$2(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0$$

ёки

$$2x+2y+3z-7=0.$$

3-теорема. *Агар икки* $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ *ва* $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ *тенгламалар бир текисликни ифодаласа, у ҳолда бу тенгламаларнинг мос коэффициентлари ўзаро пропорционал бўлади.*

Исботи. Ҳақиқатан, агар теорема шарти ўринли бўлса, у ҳолда $\vec{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$ ва $\vec{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$ векторлар берилган текисликка перпендикуляр бўлади, демак, улар ўзаро коллениар. Векторларнинг коллениарлик шартига кўра, A_2,B_2,C_2 сонлар A_1,B_1,C_1 сонларга пропорционал бўлади. Агар пропорционаллик коэффициентини μ десак, $A_2=A_1\mu, B_2=B_1\mu, \, C_2=C_1\mu$. Агар $M_0(x_0,y_0,z_0)$ текисликнинг ихтиёрий нуқтаси бўлса, у ҳолда унинг координаталари ҳар бир тенгламани қаноатлантиради, яъни $A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1=0$ ва $A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2=0$ бўлади. Агар уларнинг бирини μ га кўпайтириб, иккинчисидан айирсак, $D_2-D_1\mu=0$ ҳосил бўлади. Бундан эса

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}=\frac{D_2}{D_1}=\mu$$

келиб чиқади.

1.3. Текисликнинг кесмалардаги тенгламаси

Маълумки, A,B,C,D коэффициентлар бир вақтда нолга тенг бўлмайди. (2) тенгламада бу коэффициентларнинг айримлари нолга тенг бўлган бир неча хусусий ҳолларни кўриб чиқайлик.

1) $D=0$; тенглама $Ax+By+Cz=0$ кўринишга келади. Бу тенгламани $x=0, y=0, z=0$ сонлар

қаноатлантиради, яъни текислик координаталар бошидан ўтади.

2) C=0; тенглама $Ax+By+D=0$ кўринишда бўлади. Бу текисликнинг нормал вектори $\vec{n}=\{A,B,0\}$ z ўқига перпендикуляр, демак. текисликнинг ўзи шу ўққа параллел ўтади.

3) $B=0, C=0$; бунда $Ax+D=0$ га эга бўламиз. Унинг нормал вектори $\vec{n}=\{A,0,0\}$ y ва z ўқларига перпендикуляр, у ҳолда текислик Oyz текислигига параллел ўтади. Хусусан, агар $D=0$ бўлса, $x=0$ ҳосил бўлиб, бу текислик Oyz координаталар текислиги билан устма-уст тушишига ишонч ҳосил қиламиз.

Юқоридагидек фикр юритиб, $Ax+Cz+D=0$ тенглама y ўқига параллел текисликни, $By+Cz+D=0$ тенглама x ўқига параллел текисликни аниқлашига ишонч ҳосил қиламиз. Буларнинг хусусий ҳоли сифатида, $y=0$ тенглама Oxz координаталар текислигининг, $z=0$ эса Oxy текислигининг тенгламаси эканлигини кўрамиз.

4) A,B,C,D коэффициентларнинг бирортаси ҳам нолга тенг бўлмасин. У ҳолда озод ҳадни тенг-ликнинг ўнг томонига ўтказиб, тенгламани $-D$ га бўлиб юборамиз:

$$\frac{Ax}{-D}+\frac{By}{-D}+\frac{Cz}{-D}=1$$

ёки

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1$$

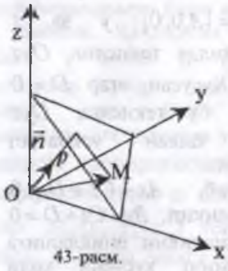
Агар $a=-\frac{D}{A}, b=-\frac{D}{B}, c=-\frac{D}{C}$ белгилашлар киритсак,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{6}$$

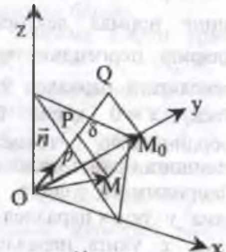
ҳосил бўлади. (6) тенгламани текисликнинг кесмалардаги тенгламаси деб аташади.

1.4. Текисликнинг нормал тенгламаси

Фараз қилайлик, бизга π текислик, унинг нормали $\vec{n}$ ва координаталар бошидан текисликкача бўлган масофа p берилган бўлсин.



43-расм.



44-расм.

$\vec{n}$ векторнинг координата ўқлари билан ташкил этган бурчаклари α, β, γ бўлсин. Агар $\vec{n}_0$ $\vec{n}$ векторнинг орти бўлса, у ҳолда

$$\vec{n}_0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$$

бўлади. Текисликнинг силжувчи нуқтасини $M(x, y, z)$ десак, унинг радиус-вектори $\overline{OM} = \{x, y, z\}$ бўлади.

Чизмадан кўринадики, $np_{\vec{n}_0}\overline{OM} = p$. Маълумки,

$$np_{\vec{n}_0}\overline{OM} = |\vec{n}_0| \cdot np_{\vec{n}_0}\overline{OM} = \vec{n}_0 \circ \overline{OM} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma.$$

Бундан,

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad (7)$$

(7) тенглама текисликнинг нормал тенгламаси дейилади.

Агар текисликнинг тенгламаси (3) кўринишда берилган бўлса, уни нормал тенгламами ёки йўқлигини

$$\mu = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \qquad (8)$$

ифоданинг қийматига қараб аниқлаймиз: агар $\mu = 1$ бўлса, (3) нормал тенглама бўлади, акс ҳолда (3) ни $\pm\mu$ га бўлиб

$$\pm\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}x \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}y \pm$$
$$\pm\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}z \mp \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \qquad (9)$$

ҳосил қиламиз. Бу тенглама нормал бўлиши учун энди (9). даги ишоралардан бирини озод ҳад D нинг ишорасига тескари қилиб олинса кифоя. (3) тенглама μ ифода ёрдамида нормал кўринишга келтирилгани учун $1/\mu$ ни нормалловчи кўпайтувчи деб аташади.

1.5. Текисликка доир айрим масалалар

1. Нуқтадан берилган текисликкача бўлган масофа. Фараз қилайлик, π текислик ва унда ётмаган бирор $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқта берилган бўлсин. M_0 нуқтадан π текисликкача бўлган d масофани топиш талаб қилинган бўлсин.

Берилган текисликнинг нормали $\vec{n}_0$ ни қуриб оламиз. Агар M_0 нуқта ва координаталар боши π текисликнинг ҳар хил томонларида жойлашган бўлса, у ҳолда M_0 нуқтанинг π текисликдан четланиши деб $\delta = +d$ га, акс ҳолда $\delta = -d$ га айтамиз.

M_0 нуқтани нормалга проекциялайлик. У ҳолда 44-чизмадан кўринадики,

$$\delta = PQ = OQ - OP.$$

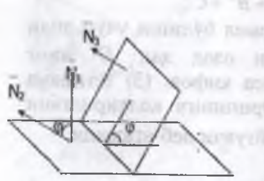
$OP = p, OQ = np_{\bar{n}_0}\overline{OM_0}$ эканлигини эътиборга олсак, $\delta = np_{\bar{n}_0}\overline{OM_0} - p \quad np_{\bar{n}_0}\overline{OM_0} = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma$ бўлгани учун

$$\delta = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p \qquad (10)$$

формулага эга бўламиз. У ҳолда

$$d = |\, x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p\,|.$$

2. **Икки текислик орасидаги бурчак.** Фараз қилайлик, бизга $\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ва $\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ текисликлар берилган бўлсин. $\bar{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ ва $\bar{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ берилган текисликларнинг нормал векторлари. 45-расмдан кўринадики, текисликлар орасидаги бурчак уларнинг нормаллари орасидаги бурчакка тенг. Шунинг учун нормал векторлар орасидаги бурчакни қидирамиз. Маълумки,



45-расм.

$$\cos\varphi = \frac{\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2}{|\bar{N}_1|\,|\bar{N}_2|}$$

ёки

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (11)$$

Агар $\Delta_1 \perp \Delta_2$ бўлса, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ бўлади. У ҳолда $\cos\varphi = 0$ ва (11) га асосан $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$. Бу тенгликни текисликларнинг перпендикулярлик шарти деб аташади. Агар Δ_1 текислик Δ_2 текисликка

параллел бўлса, у ҳолда $\bar{N}_1$ вектор $\bar{N}_2$ векторга коллениар бўлади. Векторларнинг коллениарлик шартига кўра $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ бўлади. Бу муносабат текисликларнинг параллеллик шарти деб аталади.

3. Уч нуқтадан ўтган текислик тенгламаси. Бизга Δ текисликнинг учта $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$ нуқтаси берилган бўлсин. Агар $M(x, y, z)$ шу текисликнинг силжувчи нуқтаси бўлса, у ҳолда $\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}$ векторлар Δ текисликда ётади, яъни улар компланар бўлади.

$$\overline{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\},$$
$$\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\},$$
$$\overline{M_1M_3} = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}$$

эканлигидан ва векторларнинг компланарлик шартидан

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

келиб чиқади.

2-§. ФАЗОДАГИ ТЎҒРИ ЧИЗИҚ

2.1. Фазодаги тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси

Агар берилган $\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ва $\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ текисликлар параллел бўлмаса, у ҳолда улар тўғри чизиқ бўйлаб кесишади. Шу сабабли, фазодаги тўғри чизиқни икки текисликнинг кесишиш чизиғи сифатида қараймиз. Демак, фазода тўғри чизиқ қуйидаги тенгламалар системаси билан аниқланади:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \quad (12)$$

(12) тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси дейилади. Агар Δ_1 ва Δ_2 текисликлар параллел бўлса, (12) тўғри чизиқни ифодаламайди. Демак, берилган тенгламалар системаси тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси эканлигини аниқлаш учун номаълумлар олдидаги мос коэффициентлар пропорционал эмаслигини текшириш керак экан.

Бир тўғри чизиқ бўйлаб чексиз кўп текисликлар кесишади. Бундай текисликларни текисликлар дастаси деймиз. Агар шу дастага тегишли иккита текисликнинг тенгламаси маълум бўлса, шу дастанинг бошқа текислиги тенгламаси

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \quad (13)$$

бўлади. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун, аввал (13) тенглама эканлигини текширайлик. Бунинг учун, (13) ни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$(\alpha A_1+A_2\beta)x+(\alpha B_1+\beta B_2)y+(\alpha C_1+\beta C_2)z+(\alpha D_1+\beta D_2)=0.$$

Агар бир вақтда $\alpha A_1+\beta A_2=0, \alpha B_1+\beta B_2=0, \alpha C_1+\beta C_2=0$ бўлса, у ҳолда

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=-\frac{\beta}{\alpha}$$

бўлади. Бу эса дастлабки фаразга зид, чунки бу ҳолда Δ_1 ва Δ_2 текисликлар параллел бўлади ва улар тўғри чизиқни ифодаламайди. Бу зиддият (13) тенглама эканлигини кўрсатади. Бу тенглама 1-даражали тенглама бўлгани учун у текисликни ифодалайди.

Агар α, β нинг бири, масалан, $\alpha \neq 0$ бўлса, у ҳолда (13) ни қуйидаги кўринишга келтириш мумкин:

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0.$$

2.2. Тўғри чизиқнинг каноник ва параметрик тенгламалари

Бизга фазода тўғри чизиқнинг бирор $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтаси ва унга параллел бўлган $\vec{a}=\{l,m,n\}$ вектор берилган бўлсин. Фараз қилайлик, $M(x,y,z)$ тўғри чизиқнинг силжувчи нуқтаси бўлсин. У ҳолда $\vec{a}$ ва $\overline{M_0M}$ векторлар параллел бўлади. Векторларнинг коллениарлик шартига кўра

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \quad (14)$$

келиб чиқади. $\vec{a}$ вектор M нуқтанинг тўғри чизиқда бўлишини таъминлагани учун уни тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори деб аташади. (14) ни тўғри чизиқнинг каноник тенгламаси деб атаймиз. Агар тўғри чизиқ умумий тенгламаси билан берилган бўлса, унинг бу тенгламасини каноник кўринишга келтирса бўлади. Ҳақиқатан, бизга (13) берилган бўлсин. Бу системани аниқлайдиган текисликларни мос равишда Δ_1 ва Δ_2 деб белгилайлик. Уларнинг нормал векторлари $\vec{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$ ва $\vec{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$ бўлади. Тўғри чизиқнинг каноник тенгламасини тузиш учун: 1) унинг бирор $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтасини билиш керак; бу нуқтани топиш учун (13) даги номаълумлардан бирига қиймат бериб, масалан $z=z_0$ деб, (13) системани x ва y га нисбатан ечиб, $x=x_0, y=y_0$ ни топамиз; 2) тўғри чизиқнинг йўналтирувчи $\vec{a}=\{l,m,n\}$ векторини топиш керак; қаралаётган тўғри чизиқ икки текисликнинг кесишиш чизиғи бўлгани учун. у $\vec{n}_1$ ва $\vec{n}_2$ векторларга перпендикуляр бўлади. Шунинг учун, $\vec{a}$ вектор сифатида $\vec{n}_1$ ва $\vec{n}_2$ векторларга перпендикуляр бўлган ихтиёрий векторни, шу жумладан, уларнинг вектор кўпайтмасини олиш мумкин, яъни $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Мисол. Берилган тўғри чизиқнинг каноник тенгламасини тузинг:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z - 11 = 0, \\ 2x + y - 3z - 1 = 0. \end{cases}$$

Ечиш. Агар $x_0 = 1$ десак, системадан $y_0 = 2, z_0 = 1$ келиб чиқади, демак, $M_0(1,2,1)$ экан. Энди йўналтирувчи векторни топамиз. Системадан $\vec{n}_1 = \{3,2,4\}, \vec{n}_2 = \{2,1,-3\}$ ни аниқлаймиз. У ҳолда $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \{-10,17,-1\}$ бўлади, бундан $l = -10, m = 17, n = -1$ топилади. Буларни (14) га олиб бориб қўйсак,

$$\frac{x-1}{-10} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{-1}.$$

Агар (14) даги нисбатларни t га тенгласак,

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t,$$

бундан

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt \end{cases} \tag{15}$$

келиб чиқади. (15) ни тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаси деб аташади, бу ерда t параметр ролини ўйнайди. Тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаси одатда тўғри чизиқ билан текисликнинг кесишиш нуқтасини топиш масаласида ишлатилади.

Мисол. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}$ тўғри чизиқ билан $2x + y + z - 6 = 0$ текисликнинг кесишиш нуқтасини топинг.

Ечиш. Аввал тўғри чизиқнинг параметрик тенгламасини тузиб оламиз:

$$x = 2 + t, y = 3 + t, z = 4 + 2t.$$

Энди буларни текислик тенгламасига олиб бориб қўямиз:

$$2(2 + t) + (3 + t) + (4 + 2t) - 6 = 0.$$

Бундан $t = -1$ топилади, бу қийматни параметрик тенгламага қўйиб, $x = 1, y = 2, z = 2$ ни топамиз.

2.3. Тўғри чизиққа доир айрим масалалар

Фараз қилайлик, тўғри чизиқнинг икки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ нуқтаси берилган бўлсин. Бу тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори сифатида $\bar{a} = \overline{M_1M_2}$ векторни олиш мумкин. Агар $M(x, y, z)$ нуқта тўғри чизиқнинг силжувчи нуқтаси бўлса, у ҳолда $\overline{M_1M}$ ва $\bar{a}$ векторлар параллел бўлади. Берилган координаталарга кўра,

$$\overline{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$$
$$\vec{a} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

Векторларнинг коллениарлик шартига кўра:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Охирги тенглик икки нуқтадан ўтган тўғри чизиқ тенгламаси деб аталади.

Энди фараз қилайлик, бизга

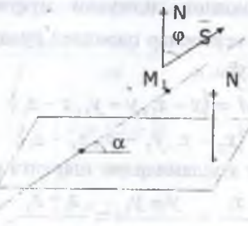
$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \text{ ва } \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

тўғри чизиқлар берилган бўлсин. Улар орасидаги бурчак уларнинг йўналтирувчи векторлари $\bar{a}_1 = \{l_1, m_1, n_1\}, \vec{a} = \{l_2, m_2, n_2\}$ орасидаги бурчакка тенг. Шу сабабли,

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}_1 \circ \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

бўлади. Агар тўғри чизиқлар перпендикуляр бўлса, у ҳолда $\varphi = \frac{\pi}{2}, \cos\varphi = 0$, шу сабабли $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$ бўлади. Бу тенгликни тўғри чизиқларнинг перпендикулярлик шарти деб атаймиз. Агар тўғри чизиқлар параллел бўлса, $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ нинг коллениарлик шартидан $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ келиб чиқади. Бу тенглик тўғри чизиқларнинг параллеллик шарти деб аталади.

Бизга $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ тўғри чизиқ ва $Ax + By + Cz + D = 0$ текислик берилган бўлсин.



46-расм.

46-расмдан кўринадики, тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак α ва йўналтирувчи вектор билан текисликнинг нормал вектори орасидаги бурчак φ нинг йиғиндиси $\alpha + \varphi = \frac{\pi}{2}$, бундан $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$ ёки $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Шу сабабли, φ ни топсак кифоя. Демак,

$$\cos\varphi = \sin\alpha = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Агар тўғри чизиқ текисликка параллел бўлса, у ҳолда йўналтирувчи вектор нормалга перпендикуляр бўлади, шунинг учун

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

Бу тенглик тўғри чизиқ билан текисликнинг параллеллик шарти дейилади. Агар тўғри чизиқ билан текислик перпендикуляр бўлса, у ҳолда йўналтирувчи вектор билан нормал вектор параллел бўлади. У ҳолда тўғри чизиқ билан текисликнинг перпендикулярлик шарти

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$$

бўлади.

3-§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ СИРТЛАР

3.1. Умумий тушунчалар

Фазодаги бирор декарт координаталар системасида x, y, z ларга нисбатан

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \qquad (1)$$

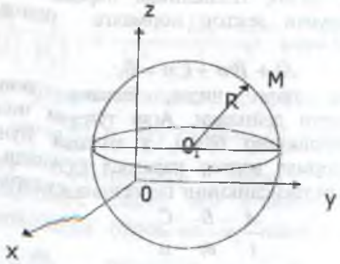
тенгламани қаноатлантирадиган нуқталар тўплами иккинчи тартибли сирт дейилади. 2-тартибли сиртларга сфера, эллипсоид, гиперболоид, цилиндр, конус ёки бир қанча айланма сиртларни мисол қилиб келтириш мумкин. Биз бу параграфда айнан ана шу сиртлар билан танишамиз.

3.2. Сфера

Сферанинг таърифи ва унинг каноник тенгламаси 1-§ да берилган эди: маркази $O_1(x_0, y_0, z_0)$ нуқтада, радиуси r бўлган сферанинг каноник тенгламаси

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

эди.



47-расм.

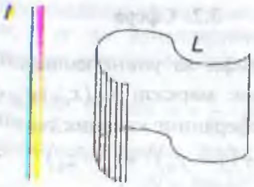
Мисол. $x^2+y^2+z^2+2x+4y-20=0$ тенглама билан берилган сферанинг маркази ва радиуси R топилсин.

Ечиш. $x^2+y^2+z^2+2x+4y-20=0$ дан тўла квадрат ажратамиз: $x^2+2x+1+y^2+4y+4+z^2=25$ ёки $(x+1)^2+(y+2)^2+z^2=5^2$.

Демак, $O_1(-1;\ -2;\ 0)$ сфера маркази ва R=5 сфера радиуси экан.

3.3. Цилиндрик сиртлар

Таъриф. *Фазода йўналтирувчи деб аталган L чизиқни кесиб ўтувчи ва бирор l тўғри чизиққа параллел бўлган барча тўғри чизиқлардан ҳосил бўлган сирт цилиндрик сирт деб аталади.*



48-расм.

Ясовчиси OZ ўққа параллел бўлган цилиндрик сиртнинг тенгламаси $F(x,y)=0$ бўлади. Шунингдек, $F(x,z)=0$ ясовчиси OY ўққа параллел бўлган, $F(y,z)=0$ эса ясовчиси OX ўққа параллел бўлган сиртни аниқлайди. $F(x,y)=0$, $F(x,z)=0$, $F(y,z)=0$ тенгламалар мос равишда XOY, XOZ, YOZ текисликлардаги эгри чизиқларни ифодалайди ва улар цилиндрик сиртларнинг йўналтирувчилари дейилади.

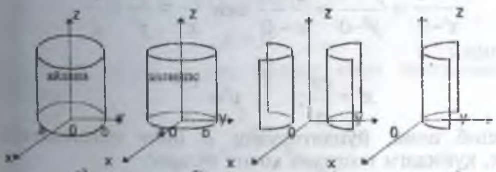
Ясовчилари OZ ўққа параллел бўлган қуйидаги энг муҳим цилиндрик сиртларни кўрамиз. Уларнинг йўналтирувчилари мос равишда айлана, эллипс, гипербола, параболадан иборат:

а) $x^2+y^2=a^2$ — тўғри доиравий цилиндр;

б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ — эллиптик цилиндр;

в) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ — гиперболик цилиндр;

г) $y^2=2px$ — параболик цилиндр.

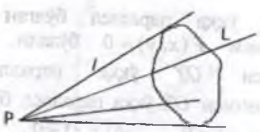


а) б) в) г)

49-расм.

3.4. Конус сирт

Таъриф. *Фазода йўналтирувчи деб аталган L чизиқни кесиб ўтувчи ва берилган P нуқтадан ўтувчи барча l тўғри чизиқлардан ҳосил бўлган сирт конус сирт (ёки иккинчи тартибли конус) деб аталади.*



50-расм.

P нуқта – конуснинг учи, *L* –йўналтирувчиси ва *l* – ясовчиси деб аталади.

Мисол. Учи координаталар марказида ётган ва йўналтирувчиси *L* эллипс бўлган: $L:\begin{cases} z = c \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$ конус тенгламаси тузилсин.

Ечиш. Фараз қилайлик, $M(x', y', c)$ нуқта *L* нинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин, у ҳолда конуснинг ясовчиси *O* (0;0;0) ва $M(x', y', c)$ нуқталардан ўтган тўғри чизиқ бўлади. Унинг фазодаги каноник тенгламасини топамиз:

$$\frac{x-0}{x'-0}=\frac{y-0}{y'-0}=\frac{z-0}{c-0} \text{ ёки } \frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{c}$$

Бундан

$$x'=\frac{cx}{z}; \qquad y'=\frac{cy}{z}$$

ни топиб олиб, йўналтирувчи *L* нинг тенгламасига қўйсак, қуйидаги тенглама ҳосил бўлади:

$$\frac{c^2x^2}{a^2z^2}+\frac{c^2y^2}{b^2z^2}=1 \text{ ёки } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Бу иккинчи тартибли конуснинг тенгламаси дейилади. Агар бунда *a*=*b* деб олсак, йўналтирувчиси $\left.\begin{matrix} z = c \\ x^2+y^2=a^2 \end{matrix}\right\}$ *a* радиусли айлана бўлган тўғри айланма конус ҳосил бўлади, унинг симметрия ўқи *OZ* дан иборат бўлади:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Шунингдек, ўқлари *OY* ва *OX* координата ўқларидан иборат ва учи координаталар марказида ётувчи иккинчи тартибли конусларнинг тенгламалари мос равишда

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \text{ ва } -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

бўлади.

3.5. Айланма сиртлар

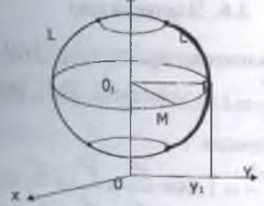
Таъриф. *Бирор L чизиқнинг l ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган нуқталар тўплами айланма сирт дейилади.*

L чизиқ айланма сиртнинг медианаси, *l* (чизиқ) ўқ эса унинг айланма ўқи дейилади. Биз айланиш ўқлари *OZ, OY, OX* ўқларидан иборат бўлган ҳоллар билан чегараланамиз.

1) Айланиш ўқи *OZ* ўқидан, *L* медианаси эса *OYZ* текислигида ётган

$$\left.\begin{matrix} F(y,z)=0 \\ x=0 \end{matrix}\right\}$$

тенгламали текис чизиқ бўлган сирт тенгламасини тузайлик.



51-расм.

$M\ (x,y,z)$ айланма сиртнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин, M нуқта орқали OZ ўқига перпендикуляр қилиб Q текислик ўтказайлик, Q текисликда айланма сиртнинг маркази $O_1(0,0,z)$ бўлади. L чизиқда $P(0,y_1,z)$ нуқта олайлик. У ҳолда $|O_1M|=|O_1P|=|y_1|$ бўлгани учун

$$|O_1M_1|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-z)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$|y_1|=\sqrt{x^2+y^2}; \qquad y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$$

$P(0,y_1,z)$ нуқта L медианада ётгани учун унинг тенгламасини қаноатлантиради, яъни $F(y_1,z)=0$ ўринли бўлади.

Бундан ушбу тенглама ҳосил бўлади:

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0. \qquad (1)$$

2) Агар $F\ (y,z)=0$, $x=0$ L медианани OY ўқи атрофида айлантирилса, у айланма жисмнинг тенгламаси қуйидагича кўринишда бўлади:

$$F(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0 \qquad (2)$$

3) Агар $F\ (x,y)=0$, $z=0$ L медиана OX ўқи атрофида айлантирилса бундан ҳосил бўлган айланма жисмнинг тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$F(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0. \qquad (3)$$

3.6. Эллипсоидлар

1. Айланма эллипсоидлар. а) Агар XOZ текислигида берилган $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсни OZ ўқи атрофида айлантирсак, тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{c^2}=1 \text{ ёки } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (4)$$

кўринишда бўлган айланма эллипсоид ҳосил бўлади.

б) Агар шу эллипсни OX ўқи атрофида айлантирсак, ушбу

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ ёки } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (5)$$

айланма эллипсоид ҳосил бўлади ва ҳ. к.

с) Агар (4) ёки (5) да $a=c$ деб олсак:

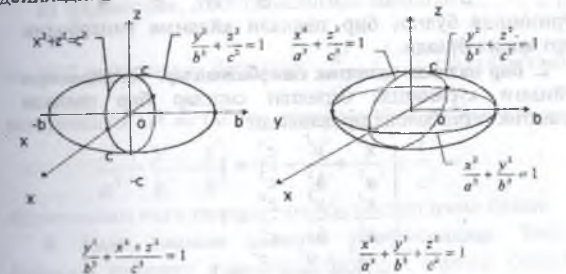
$$x^2+y^2+z^2=a^2 \qquad (6)$$

сфера ҳосил бўлади.

2. Эллиптик эллипсоид. Тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (7)$$

кўринишида берилган сирт фазода эллиптик эллипсоид дейилади.



52-расм.

3.7. Гиперболоидлар

1. Бир паллали айланма гиперболоидлар. а) YOZ текисликда берилган $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ гипербола OZ ўқи атрофида айлантирилса, тенгламаси

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ ёки } \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

кўринишда бўлган бир паллали айланма гиперболик сирт ҳосил бўлади:

б) Агар *ХОУ* текисликда берилган $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гипербола *ОУ* ўқи атрофида айлантирилса, тенгламаси

$$\frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ ёки } \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

кўринишда бўлган бир паллали айланма гиперболик сирт ҳосил бўлади:

с) Агар *XOZ* текислигида берилган $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ гипербола *OZ* ўқи атрофида айлантирилса, тенгламаси

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ ёки } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

кўринишда бўлган бир паллали айланма гиперболик сирт ҳосил бўлади.

2. Бир паллали эллиптик гиперболоидлар. Тенгламалари қуйидаги кўринишда берилган сиртлар бир паллали эллиптик гиперболоидлар дейилади:

$$\left|\begin{array}{l}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\end{array}\right.$$

Бу сиртлар мос равишда $z=h$, $y=k$, $x=t$ текисликлар билан кесилса, кесимда эллипслар ҳосил бўлади.

3. Икки паллали айланма гиперболоидлар. а) Агар *УOZ* текислигида берилган $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ гипербола *ОУ* ўқи атрофида айлантирилса, тенгламаси

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2+z^2}{c^2}=1 \text{ ёки } \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{c^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Бир паллали айланма гиперболоид

Бир паллали эллиптик гиперболоид

53-расм.

кўринишда бўлган икки паллали айланма гиперболоид ҳосил бўлади.

б) Шунингдек, *ХОУ* текислигида берилган $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{c^2}=1$ ва *XOZ* текислигида берилган $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ гиперболалар мос равишда *OX* ва *OZ* ўқи атрофида айлантирилса,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1; \quad -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

кўринишдаги икки паллали гиперболоидлар ҳосил бўлади.

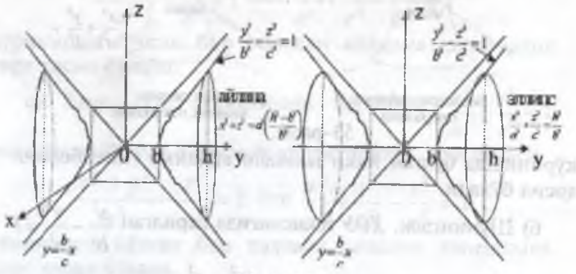
4. Икки паллали эллиптик гиперболоидлар. Тенгламалари қуйидаги кўринишда берилган сиртлар фазода икки паллали эллиптик гиперболоидлар дейилади:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ ёки } -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1;$$

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ ёки } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1;$$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ ёки } \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Қуйида OY ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ икки паллали айланма гиперболоид ва $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ икки паллали эллиптик гиперболоидлар шаклини келтирамиз:



54-расм.

3.8. Параболоидлар

1. Айланма параболоидлар. а) Агар XOY текислигида берилган $y^2=2px$ парабола OX ўқи атрофида айлантирилса, тенгламаси $y^2+z^2=2px$ кўринишда бўлган айланма параболоид (сирт) ҳосил бўлади. Агар бу сиртни $x=h$ текислик билан кессак, кесимда $y^2+z^2=2ph$ айлана ҳосил бўлади.

б) XOZ текислигида берилган $x^2=2pz$ парабола ва YOZ текислигида берилган $z^2=2py$ параболани мос равишда OZ ва OY ўқлари атрофида айлантирсак,

$$y^2+x^2=2pz;\quad x^2+z^2=2py$$

айланма параболоидлар деб аталувчи сиртлар ҳосил бўлади.

---

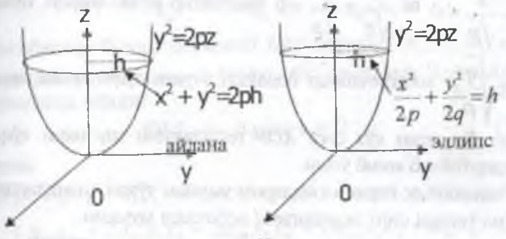
2. Эллиптик параболоидлар. Тенгламаси умумий ҳолда қуйидагича кўринишда берилган сиртлар эллиптик параболоидлар дейилади:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z;$$

$$\frac{x^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2y;$$

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2x.$$

Қуйида OZ ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган $y^2+x^2=2pz$ ва $\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$ эллиптик параболоидларнинг шаклини келтирамиз:



55-расм.

3. Гиперболик параболоидлар. Тенгламаси умумий ҳолда қуйидаги кўринишда берилган сиртлар гиперболик параболоидлар дейилади:

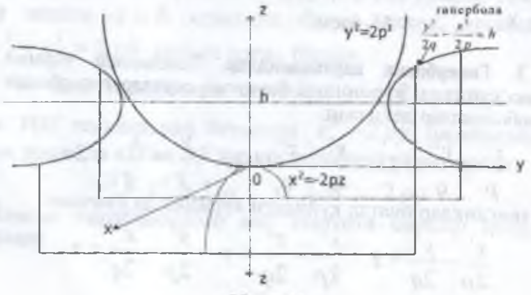
$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z\quad \frac{x^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2y\quad \frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2x;$$

бу тенгликлар одатда қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}=z\quad \frac{x^2}{2p}-\frac{z^2}{2q}=y\quad \frac{y^2}{2p}-\frac{z^2}{2q}=x.$$

Қуйида $\frac{y^2}{2q}-\frac{x^2}{2p}=z$ гиперболик параболоид шаклини келтирамиз. Агар сиртни $z=h$ текислик билан кессак, кесимда $\frac{y^2}{2qh}-\frac{x^2}{2ph}=1$ гипербола; $x=0$ текисликда $y^2=2qz$ парабола; $y=0$ текисликда $x^2=2pz$ парабола ва ниҳоят $z=0$ текисликда $\frac{y^2}{2q}-\frac{x^2}{2p}=0$ ёки $\frac{y}{q}-\frac{x^2}{p}=0$ ёки $\left(\frac{y}{\sqrt{q}}-\frac{x}{\sqrt{p}}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{q}}+\frac{x}{\sqrt{p}}\right)=0$ тенгламага келамиз. Бундан $\frac{y}{\sqrt{q}}-\frac{x}{\sqrt{p}}=0$ ва $\frac{y}{\sqrt{q}}+\frac{x}{\sqrt{p}}=0$ тенгликлар келиб чиқади. Булар $y=\pm\sqrt{\frac{q}{p}}x$ координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқларни беради. Бу деган сўз сирт *ХОУ* текислигини шу икки тўғри чизиқлар бўйлаб кесиб ўтади.

Гиперболик параболоидларни умуман тўғри чизиқлардан ташкил топган сирт эканлигини исботлаш мумкин.



56-расм.

4-§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ СИРТ ТЕНГЛАМАЛАРИНИ КАНОНИК КЎРИНИШГА КЕЛТИРИШ

Иккинчи тартибли сиртларнинг умумий

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2+$$
$$+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 \qquad (1)$$

тенгламасини каноник кўринишга келтириш масаласи анча мураккаб. У инвариантлар деб аталувчи сонли параметрлар ёрдамида мураккаб мулоҳазалар асосида амалга оширилади. Биз бу ерда нисбатан содда, ишлатишда қулай икки усулни кўриб чиқамиз. Бу иккала усулни хусусан иккинчи тартибли чизиқларга ҳам қўллаш мумкин эканлигини эътиборга олиб, умумий мулоҳазаларни иккинчи тартибли n та ўзгарувчили тенгламалар учун бажарамиз.

1. Агар (1) да

$$x=\frac{x_1}{x_4},\ y=\frac{x_2}{x_4},\ z=\frac{x_3}{x_4}$$

муносабатлар билан берилган бир жинсли x_1,x_2,x_3,x_4 декарт координаталарга ўтсак, бу тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4)=0\,, \qquad (2)$$

бу ерда

$$\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3+$$
$$+a_{33}x_3^2+2a_{14}x_1x_4+2a_{24}x_2x_4+2a_{34}x_3x_4+a_{44}x_4^2 \qquad (3)$$

ўзгарувчиларига нисбатан бир жинсли кўпҳад, биз уни квадратик форма деб атаймиз. Аёнки, агар $x_4=1$ десак,

$$\Phi(x_1,x_2,x_3,1)=F(x,y,z)$$

бўлади, бу ерда $F(x,y,z)-$ (1) нинг чап томонидаги ифода. Шунинг учун (2) учун чиқарилган ҳар қандай хулоса (1) учун ҳам ўринли бўлади.

Фараз қилайлик, бизга

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \qquad (4)$$

квадратик форма берилган бўлсин. Мақсад, шундай

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}x'_j\,,\ i = 1,2,\ldots,n\,, \qquad (5)$$

чизиқли алмаштириш бажариш керакки, натижада (4) қуйидаги каноник кўринишга келсин:

$$\Phi' = \lambda_1 x'^2_1 + \lambda_2 x'^2_2 + \ldots + \lambda_r x'^2_r\,, \qquad (6)$$

бу ерда $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ ноллан фарқли ўзгармаслар.

Қилинадиган мулоҳазалар янада тушунарли бўлиши учун аввал икки ўзгарувчили квадратик формани кўрайлик:

$$\Phi = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2\,.$$

Фараз қилайлик, бу ифодага камида битта квадрат қатнашган ҳад кирсин, яъни a_{11} ва a_{22} коэффициентларнинг камида бири нолдан фарқли бўлсин. Умумийликни бузмаган ҳолда, $a_{11} \neq 0$ дейиш мумкин, чунки акс ҳолда, ўзгарувчилар тартибини алмаштириб, шу натижага келса бўлади. У ҳолда

$$\Phi = a_{11}\left(x_1^2 + \frac{2a_{12}}{a_{11}}x_1x_2\right) + a_{22}x_2^2 = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}x_2}{a_{11}}\right)^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}x_2^2 + a_{22}x_2^2$$

ёки

$$\Phi = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2\right)^2 + \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\right)x_2^2$$

деб ёзиш мумкин.

Агар

$$x'_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2\,,\ x'_2 = x_2$$

деб чизиқли алмаштириш бажарсак, берилган форма қуйидаги каноник кўринишга келади:

$$\Phi' = \lambda_1 x'^2_1 + \lambda_2 x'^2_2\,,$$

бу ерда $\lambda_1 = a_{11}$, $\lambda_2 = \dfrac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}}$.

Юқорида биз $a_{11} = a_{22} = 0$ бўлмасин деб фараз қилган эдик. Агар берилган формада $a_{11} = a_{22} = 0$ бўлса, яъни форма

$$\Phi = 2a_{12}x_1x_2$$

кўринишда бўлса (бу ерда $a_{12} \neq 0$ бўлиши шарт, акс ҳолда форма айнан нолга тенг бўлиб қолади), у ҳолда

$$x'_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}\,,\ x'_2 = \frac{x_1 - x_2}{2}\,, \text{ яъни } x_1 = x'_1 + x_2\,,\ x_2 = x'_1 - x_2$$

десак,

$$\Phi' = 2a_{12}\left(x'^2_1 - x'^2_2\right) = 2a_{12}x'^2_1 - 2a_{12}x'^2_2 = \lambda_1 x'^2_1 + \lambda_2 x'^2_2$$

бўлади, бу ерда $\lambda_1 = 2a_{12}$, $\lambda_2 = -2a_{12}$.

Энди умумий ҳолга қайтайлик. Агар (4) да квадратли ҳадлар қатнашмаган бўлса, яъни барча $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 0$ бўлиб, масалан, $a_{ij} \neq 0$ бўлса (бундай коэффициент албатта мавжуд, чунки акс ҳолда форма айнан нолга тенг бўлиб қолади), у ҳолда

$$\left.\begin{aligned} x'_i = \frac{x_i + x_j}{2}\,,\ x'_j = \frac{x_i - x_j}{2}\,,\\ x'_k = x_k\,, k \neq i, k \neq j \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

алмаштириш бажариб, квадратик формадаги $2a_{ij}x_ix_j$ ҳад ўрнига $2a_{ij}x'^2_i - 2a_{ij}x'^2_j$ ҳадни, яъни квадратли ҳадларни ҳосил қиламиз. Шу сабабли, (4) форма камида битта квадратли ҳадни ўз ичига олади деб фараз қилиш мумкин. Худди юқоридагидек, умумийликни бузмаган ҳолда, $a_{11} \neq 0$ дейиш мумкин.

Ф форманинг ичидан x_1 қатнашган барча ҳадларни ажратиб олайлик:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n. \qquad (*)$$

Бу йиғиндини қуйидаги кўринишга келтириб оламиз:

$$a_{11}\left(x_1^2 + \frac{2a_{12}}{a_{11}}x_1x_2 + \ldots + \frac{2a_{1n}}{a_{11}}x_1x_n \right) =$$

$$= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \right)^2 + (x_1 \textit{ қатнашмаган барча ҳадлар}) \qquad (**)$$

(**) ни квадратик формага (*) ўрнига олиб бориб қўйайлик, у ҳолда

$$\Phi = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \right)^2 + \Phi_1(x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

ифодага келамиз, бу ерда Φ_1 - $x_2, x_3, \ldots, x_n$ ларга нисбатан квадратик форма.

Агар

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n, \\ x_2' = x_2, x_3' = x_3, \ldots, x_n' = x_n \end{cases} \qquad (8)$$

алмаштириш бажарсак, Φ квадратик формамиз

$$\Phi' = a_{11}x_1'^2 + \Phi_1(x_2', \ldots, x_n')$$

кўринишга келади.

Агар Φ_1 айнан нолга тенг бўлса, у ҳолда келтириш жараёни тўхтайди, акс ҳолда юқоридаги усулни энди Φ_1 учун қўллаб, ундан битта квадрат қатнашган ҳад ва $n-2$ та ўзгарувчининг квадратик формасини ажратиб оламиз. Бу жараённи то квадратик формада фақат ўзгарувчиларнинг квадратлари қатнашган ҳадлар қолгунча давом эттирамиз. Бу албатта (7) ёки (8) каби қатор алмаштиришлар ёрдамида бажарилади.

2. Ортогонал алмаштиришлар усули. (4) кўринишда берилган квадратик формани қуйидагича ёзиб олайлик:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} x_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right). \qquad (9)$$

Агар бу ерда

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \ i = 1,2,\ldots,n, \qquad (10)$$

чизиқли алмаштириш бажарсак, (9) қуйидаги

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} x_ix_i' = x \circ x' = x \circ Ax \qquad (11)$$

кўринишга келади, бу ерда $x \circ x'$ - R_n чизиқли фазонинг $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ва $x' = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$ элементларининг скаляр кўпайтмаси ва A (10) алмаштиришнинг матрицаси:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

Фараз қилайлик, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ лар (12) матрицанинг хос сонлари, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ лар эса (11) нинг шу хос сонларга мос келувчи ортонормал хос векторлари бўлсин, яъни

$$A\varphi_i = \lambda_i\varphi_i, \ \varphi_i \circ \varphi_i = 1, \ \varphi_i \circ \varphi_j = 0, \ i \neq j, \ i,j = 1,2,\ldots,n. \qquad (13)$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ лар R_n да базис ташкил этади (1-боб, 5.7-§ га қаранг). Ихтиёрий $x \in R_n$ нинг шу базис бўйича ёйилмаси

$$x = \sum_{i=1}^{n} y_i\varphi_i \qquad (14)$$

бўлсин. У ҳолда

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} y_i A\varphi_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \lambda_i \varphi_i \qquad (15)$$

булади. (14) ва (15) ларни (11) га қўйсак, (13) га асосан

$$\Phi = x \circ Ax = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \varphi_i\right) \circ \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \lambda_i \varphi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Энди 2-тартибли сиртнинг умумий (1) тенгламасини кўрайлик. Унинг бош ҳадларидан тузилган

$$\Phi = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 \qquad (16)$$

ифода x, y, z га нисбатан квадратик формадир.

Бу форманинг матрицасини тузиб олайлик:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Бу матрицанинг

$$D \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

характеристик тенгламасини ечиб, матрицанинг хос сонларини топамиз: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Уларга мос келувчи хос векторларни топиш учун

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_i)\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 = 0, \\ a_{21}\xi_1 + (a_{22}-\lambda_i)\xi_2 + a_{23}\xi_3 = 0, \quad i = 1,2,3, \\ a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + (a_{33}-\lambda_i)\xi_3 = 0, \end{cases}$$

бир жинсли тенгламалар системаларини тузиб оламиз. Бу системалардан ҳар бирининг ечимини топиб, уларни нормаллаштирамиз. Фараз қилайлик, бу

$$\vec{e}_1 = (e_{11}, e_{12}, e_{13}),\ \vec{e}_2 = (e_{21}, e_{22}, e_{23}),\ \vec{e}_3 = (e_{31}, e_{32}, e_{33})$$

векторлар бўлсин. У ҳолда (16) формани каноник кўринишга келтирувчи алмаштириш матрицаси

$$S = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{pmatrix}$$

бўлади. Бу алмаштиришни бажаргандан сўнг (16) ушбу

$$\Phi' = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$$

кўринишга, (1) эса қуйидаги

$$F(x', y', z') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a_{14}x' + 2a_{24}y' + 2a_{34}z' + a_{44} = 0$$

кўринишга келади. Ва ниҳоят, координаталарни параллел кўчириб, (1) ни ушбу

$$F''(x'', y'', z'') = \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + a_{44} = 0$$

каноник кўринишга олиб келамиз.

1-*мисол.* $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$ эгри чизиқнинг тенгламасини каноник кўринишга келтиринг.

Ечиш. Бош ҳадларининг матрицаси

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

У ҳолда хос сонларни қуйидаги

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ ёки } \lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0$$

характеристик тенгламадан топамиз: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 8$.

Уларга мос келувчи хос векторларни топайлик. Аввал $\lambda_1 = 2$ дейлик. У ҳолда

$$\begin{cases} 3\xi_1 + 3\xi_2 = 0, \\ 3\xi_1 + 3\xi_2 = 0 \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз. Унинг ечими $(\alpha, -\alpha)$. Буни нормаллаштирсак, хос вектор келиб чиқади: $\vec{e}_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

Энди $\lambda_2 = 8$ десак,

$$\begin{cases} -3\xi_1 + 3\xi_2 = 0, \\ 3\xi_1 - 3\xi_2 = 0 \end{cases}$$

система ҳосил булади. Бунинг ечими (α, α). Уни нормаллаштириб, иккинчи хос векторни топамиз: $\bar{e}_2 = \left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$.

$\bar{e}_1$ ва $\bar{e}_2$ векторлар ортогонал, чунки $\bar{e}_1 \circ \bar{e}_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. Бу икки вектордан фойдаланиб, алмаштириш матрицасини тузайлик:

$$S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Демак, берилган тенгламада

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} x' + \dfrac{1}{\sqrt{2}} y', \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} x' + \dfrac{1}{\sqrt{2}} y' \end{cases}$$

чизиқли алмаштириш бажариш керак экан. Натижада берилган тенглама

$$2x'^2 + 8y'^2 - 16\sqrt{2}y' - 16 = 0$$

кўринишга келади. Бу тенгликнинг иккинчи ва учинчи ҳадларини тўла квадратгача тўлдирсак,

$$2x'^2 + 8\left(y' - \sqrt{2}\right)^2 = 32$$

бўлади. Координаталарни $x'' = x', y'' = y' - \sqrt{2}$ формулалар бўйича параллел кўчирсак,

$$2x''^2 + 8y''^2 = 32 \text{ ёки } \frac{x''^2}{16} + \frac{y''^2}{4} = 1$$

тенгламага эга бўламиз. Демак, берилган чизиқ эллипс экан.

2-мисол. $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 6 = 0$ сирт тенгламасини каноник кўринишга келтиринг.

Ечиш. Бош ҳадларининг матрицаси

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристик тенгламаси

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

қуйидаги кўринишга келади:

$$(\lambda - 6)(\lambda^2 - \lambda - 6) = 0.$$

Бундан $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -2$.

$\lambda_1 = 6$ учун хос вектор

$$\begin{cases} -5u_1 + u_2 + 3u_3 = 0, \\ u_1 - u_2 + u_3 = 0, \\ 3u_1 + u_2 - 5u_3 = 0 \end{cases}$$

системадан топилади: $\bar{u} = \alpha(1,2,1)$. Уни нормаллаштирайлик:

$$\bar{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Агар $\lambda_2 = 3$ десак,

$$\begin{cases} -2\vartheta_1 + \vartheta_2 + 3\vartheta_3 = 0, \\ \vartheta_1 + 2\vartheta_2 + \vartheta_3 = 0, \\ 3\vartheta_1 + \vartheta_2 - 2\vartheta_3 = 0 \end{cases}$$

система ҳосил бўлади. Унинг ечими: $\bar{\vartheta} = \beta(1;-1;1)$. У ҳолда иккинчи хос вектор

$$\vec{e}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

бўлади.

Учинчи хос сон $\lambda_3=-2$ учун

$$\begin{cases}3\omega_1+\omega_2+3\omega_3=0,\\ \omega_1+7\omega_2+\omega_3=0,\\ 3\omega_1+\omega_2+3\omega_3=0\end{cases}$$

системани ечамиз: $\vec{\omega}=\gamma(1;0;-1)$. У ҳолда учинчи хос вектор

$$\vec{e}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

бўлади.

$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ векторлар ўзаро ортогонал (буни текширишни ўқувчига ҳавола қиламиз).

Демак, берилган тенгламани каноник кўринишга олиб келувчи чизиқли алмаштириш

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{6}}z',$$

$$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{2}{\sqrt{6}}z',$$

$$z=-\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{6}}z'$$

бўлар экан. Бу алмаштиришдан сўнг берилган тенглама

$$6x'^2+3y'^2-2z'^2-6=0 \text{ ёки } \frac{x'^2}{1}+\frac{y'^2}{2}-\frac{z'^2}{3}=1$$

кўринишга келади. Демак, берилган сирт бир паллали гиперболоид экан.

4-БОБ.
ЎЗГАРУВЧИ ВА ЎЗГАРМАС МИҚДОРЛАР

1-§. УМУМИЙ ТУШУНЧАЛАР

1.1.Ўзгарувчи ва ўзгармас миқдорлар, тўпламлар

Табиат, фан ва техника масалаларида бир миқдорнинг иккинчи миқдорга боғлиқ равишда ўзгаришини кўп кузатамиз. Шу сабабли ўзгарувчи миқдор тушунчаси математикада асосий тушунчалардан ҳисобланади.

Ўзгарувчи миқдор деб, текширилаётган масаладаги камида иккита қиймат қабул қилувчи миқдорга айтамиз. Кўрилаётган масаладаги миқдор фақат битта қиймат қабул қилса, у ҳолда бу миқдорни ўзгармас миқдор деб атаймиз.

Агар ўзгарувчи миқдорнинг барча қийматларини жамласак, ўзгарувчи миқдорнинг қийматлари тўпламини ҳосил қиламиз. Бу тўпламга кирувчи қийматларни тўпламнинг элементлари деб атаймиз.

Тўпламлар бош ҳарфлар *A*, *B*, *C*,..., *X*, *Y*,..., билан, уларнинг элементлари эса кичик ҳарфлар *a*, *b*, *c*,..., *x*,*y*,..., билан белгиланади.

Агар x элемент *A* тўпламга тегишли бўлса, уни $x\in A$ кўринишда белгилаймиз, агар тегишли бўлмаса, у ҳолда $x\notin A$ деб белгилаймиз.

Агар *A* тўпламнинг барча элементлари *B* тўпламга ҳам тегишли бўлса, уни $A\subset B$ деб ёзамиз ва *A* тўпламни *B* тўпламнинг қисм тўплами деб атаймиз.

$A\subset B$ белги билан бир қаторда унга тенг кучли бўлган $B\supset A$ белгилашни ҳам ишлатамиз.

Агар тўплам бирорта ҳам элементга эга бўлмаса, у ҳолда бу тўпламни бўш тўплам деб атаймиз ва $A=\varnothing$ кўринишда белгилаймиз.

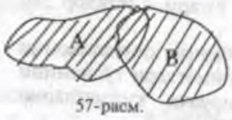
Агар $A\subset B$ ва $B\subset A$ бўлса, *A* ва *B* тўпламлар тенг, яъни $A=B$ деймиз.

Келгусида биз фақат сонли тўпламлар, яъни элементлари сонлар бўлган тўпламлар билан ишлаймиз.

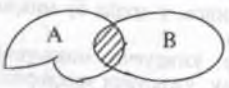
Тўпламлар учун ҳам, сонлар учун бажариладиган қўшиш, айириш ва кўпайтириш амалларининг барча хоссаларига эга бўлган арифметик амалларни киритиш мумкин.

Ихтиёрий A ва B тўпламларнинг йиғиндиси деб, A ва B тўпламларнинг элементларидан тузилган C тўпламга айтамиз (57-расм). Бу йиғиндини $C=A+B$ ёки $C=A\cup B$ кўринишда ёзиш қабул қилинган, хусусан, $A+A=A$.

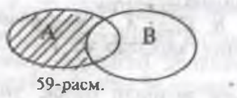
A ва B тўпламларнинг кўпайтмаси ёки кесишмаси деб, бир вақтда ҳам A га, ҳам B тўпламга тегишли бўлган элементлар тўпламига айтамиз ва AB ёки $A\cap B$ кўринишда белгилаймиз (58-расм). Хусусан, $A\cap A=A$.



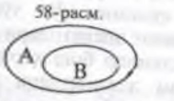
57-расм.



58-расм.



59-расм.



60-расм.

Агар $AB=\varnothing$ бўлса, A ва B тўпламлар кесишмайди деймиз. Юқорида киритилган амаллар учун қуйидаги хоссалар ўринли: 1) $A+B=B+A$; 2) $(A+B)\ C=AC+BC$; 3) $(AB)\ C=A\ (BC)$; 4) $(A+B)+C=A+(B+C)$.

Бу хоссаларнинг 2)-сини исботлаймиз, қолганлари шу тариқа исбот қилинади. Агар $x\in\ (A+B)\ C$ бўлса, кўпайтманинг таърифига кўра, $x\in A+B$ ва $x\in C$ бўлади. Йиғиндининг таърифига кўра, $x\in A$ ёки $x\in B$ бўлади, масалан, $x\in A$ бўлсин. У ҳолда $x\in AC$ ва демак, $x\in AC+BC$. Бундан $(A+B)\ C\ \subset\ AC+BC$. Энди агар $x\in AC+BC$ бўлса, у ҳолда ё $x\in AC$ ёки $x\in BC$ бўлади, масалан, $x\in AC$ бўлсин. Бундан $x\in A$ ва $x\in C$, булардан эса $x\in A+B$ ва $x\in C$ ёки $x\in\ (A+B)\ C$ келиб чиқади. Демак, $AC+BC\subset(A+B)\ C$. Тўпламларнинг тенглик таърифидан $(A+B)\ \ C\ =AC+BC$ эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

A ва B тўпламларнинг айирмаси деб, A тўпламнинг B тўпламга кирмаган элементлари тўпламига айтамиз, бу тўпламни $A\backslash B$ кўринишда белгилаймиз (59-расм). Умуман, $(A\backslash B)+B\neq A$, лекин, агар $B\subset A$ бўлса, $(A\backslash B)+B=A$ бўлади.

1.2. Кесма, интервал, чегараланган тўплам

Фараз қилайлик, a ва b сонлар учун $a<b$ муносабат ўринли бўлсин.

Кесма ёки сегмент деб, $a\leq x\leq b$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи барча x лар тўпламига айтамиз. Бу тўплам $\left[a,b\right]$ кўринишда белгиланади.

$a<\ x\ <\ b$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи x лар тўпламини интервал деб атаб, $\left]a,b\right[$ кўринишда белгилаймиз.

$a\leq x<b$ ва $a<x\leq b$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи x лар тўпламини эса, мос равишда $\left[a,b\right),\left(a,b\right]$ кўринишда белгилаб, яримочиқ кесмалар ёки яриминтерваллар деб атаймиз.

Кўпинча чексиз ва яримчексиз интерваллар деб аталувчи $\left(-\infty,\infty\right),\left(-\infty,a\right],\left(-\infty,a\right),\left(a,\infty\right),\left[a,\infty\right)$ тўпламлар ҳам ишлатилади.

Агар a ва $b, a<b$ лар чекли бўлса, $b-a$ ни $\left[a,b\right]$, $\left(a,b\right),\left(a,b\right],\left[a,b\right)$ кесмаларнинг узунлиги деб атаймиз.

$c\ (\ a<c<b\ )$ нуқтани ўз ичига олган ҳар қандай $\left(a,b\right)$ интервал c нуқтанинг атрофи дейилади. Хусусан, $\left(c-\varepsilon,c+\varepsilon\right)$ интервал c нуқтанинг ε атрофи деб аталади.

Фараз қилайлик, $X=\left\{x\right\}$ ҳақиқий сонларнинг ихтиёрий тўплами бўлсин. Агар шундай ҳақиқий M сон мавжуд бўлсаки, X тўпламнинг барча x элементлари учун $x\leq M$ муносабат ўринли бўлса, X тўплам юқоридан чегараланган, агар m сон мавжуд бўлиб, барча

x лар учун $x \geq m$ муносабат ўринли бўлса, у ҳолда X тўплам қуйидан чегараланган ва ниҳоят, агар X тўплам ҳам юқоридан, ҳам қуйидан чегараланган бўлса, уни чегараланган деб аташ қабул қилинган.

Агар тўплам чегараланган бўлмаса, у ҳолда уни чегараланмаган тўплам деймиз. Буни яна қуйидагича таърифлаш мумкин: агар ҳар қандай $M > 0$ сон учун X тўпламнинг шундай x_0 элементи мавжуд бўлсаки, унинг учун $|x_0| > M$ муносабат ўринли бўлса, X тўпламни чегараланмаган тўплам деб атаймиз.

1.3. Саноқли тўплам

Агар ҳар қандай $n \in N$ учун X тўпламда n тадан ортиқ элемент мавжуд бўлса, X тўплам чексиз тўплам дейилади. Агар A нинг ҳар қандай a элементига B тўпламнинг бирор $в$ элементини мос қўювчи ўзаро бир қийматли мослик мавжуд бўлса, A ва B тўпламлар эквивалент дейилади, яъни иккита ҳар хил $a_1, a_2 \in A$ элементларга иккита ҳар хил $b_1, b_2 \in B$ элементлар мос келади ва ҳар бир $в \in B$ элементга бирор $a \in A$ элемент мос келади. Буни $A \sim B$ кўринишда белгилаймиз.

Масалан, агар A r радиусли айлананинг нуқталари тўплами, B $R > r$ радиусли концентрик айлананинг нуқталари тўплами бўлса, у ҳолда $A \sim B$ булади.

Агар $X = \{x\} \sim N = \{n\}$ бўлса, X тўплам саноқли дейилади. Масалан, барча жуфт натурал сонлар тўплами саноқли, чунки бунинг учун ҳар бир жуфт натурал сонни $2n$ кўринишда ёзиб, $2n \leftrightarrow n$ мослик ўрнатиш кифоя.

Таърифдан кўринадики, саноқли X тўпламнинг элементларини тартибга олиш мумкин, яъни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}.$$

1-теорема. *Саноқли ёки чекли E^k тўпламларнинг саноқли йиғиндиси саноқли тўпламдир.*

Исботи. E^k тўпламнинг элементлари $x^k{}_j, j = 1,2,...,$ бўлса, уларни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$E^1 = \{x^1{}_1, x^1{}_2, x^1{}_3, ...\},$$
$$E^2 = \{x^2{}_1, x^2{}_2, x^2{}_3, ...\},$$
$$E^3 = \{x^3{}_1, x^3{}_2, x^3{}_3, ...\},$$

....

Буларни қуйидаги тартибда ёзиб чиқамиз:

$$x^1{}_1, x^1{}_2, x^2{}_1, x^1{}_3, x^2{}_2 . x^3{}_1, x^1{}_4, ...,$$

натижада $\{y_1, y_2, y_3, ...\}$ тўпламни ҳосил қиламиз.

2-теорема. *Рационал сонлар тўплами саноқлидир.*

Исботи. Аввал мусбат рационал сонларни кўриб чиқамиз $Q_+ = \left\{\frac{p}{q}\right\}$. $p+q$ натурал сонни p/q соннинг кўрсаткичи деб атаймиз. Фараз қилайлик, A_n кўрсаткичи n бўлган рационал сонлар тўплами бўлсин. A_n тўпламлар чекли сондаги элементлардан тузилган. Масалан,

$$A_1 = 0, A_2 = \left\{\frac{1}{1}\right\}, A_3 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{1}\right\}, A_4 = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}\right\}, ...$$

Кўриниб турибдики $Q_+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Агар қавс ичидаги элементларни 1-теоремада бажарилган тартибда белгилаб чиқсак,

$$r_1 = 1, r_2 = \frac{1}{2}, r_3 = 2, r_4 = \frac{1}{3}, r_5 = 3, ...$$

кетма-кетликни ҳосил қиламиз, бу ерда қайта такрорланган сонлар, масалан 2 ташлаб юборилди. Демак, Q_+ саноқли экан. $Q_- = \left\{-\frac{p}{q}\right\}$ тўпламнинг саноқли эканлиги худди шу каби исбот қилинади. Шу сабабли барча рационал сонлар тўплами $Q = Q_+ \cup Q_- \cup \{0\}$ ҳам саноқлидир.

3-теорема. *Барча ҳақиқий сонлар тўплами саноқли эмас.*

Бу теоремани исботсиз келтирамиз.

2-§. КЕТМА-КЕТЛИКНИНГ ЛИМИТИ

2.1. Кетма-кетликнинг лимити тушунчаси

Саноқли $X=\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,\ldots\}$ тўпламни кетма-кетлик деб атаймиз. Кетма-кетлик $\{x_n\}$ кўринишда ҳам ёзилади, бу ерда x_n кетма-кетликнинг n - ҳади деб аталади.

Мисоллар:

1) $$\left\{\frac{1}{n}\right\}=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots\right\},$$

2) $$\left\{\frac{n-1}{n}\right\}=\left\{0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\ldots\right\},$$

3) $$\left\{n^{(-1)^{n+1}}\right\}=\left\{1,\frac{1}{2},3,\frac{1}{4},5,\ldots\right\},$$

4) $$\left\{3^{(-1)^n}\right\}=\left\{\frac{1}{3},3,\frac{1}{3},3,\ldots\right\},$$

5) $$\left\{n^2+3\right\}=\left\{4,7,12,\ldots\right\},$$

6) $$\left\{(-1)^n n\right\}=\left\{-1,2,-3,4,\ldots\right\}.$$

1-, 2- ва 4-мисолдаги кетма-кетликлар чегараланган, 3-,5- ва 6-мисолдаги кетма-кетликлар эса чегараланмагандир. Шундай бўлса ҳам 3-мисолдаги кетма-кетлик қуйидан 0 сони билан, 5-мисолдаги кетма-кетлик эса қуйидан 4 сони билан чегараланган.

4-мисолдаги кетма-кетликда жуфт ҳадлари такрорланган, яъни $x_2=x_4=x_6=\ldots=2$. Тўпламларда бундай элементлар бир марта олинар эди, кетма-кетликларда эса бу элементлар ҳар хил деб тушунилади.

Агар $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг барча ҳадлари битта сонга тенг бўлса, бу кетма-кетликни ўзгармас деймиз.

Таъриф. *Агар ихтиёрий $\varepsilon>0$ сон учун шундай $n_0=n_0(\varepsilon)$ сон топилсаки, барча натурал $n>n_0$ сонлар учун*

$$|x_n-a|<\varepsilon \qquad (1)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, a сон $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити деб аталади.

Буни

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim x_n=a \text{ ёки } x_n\to a$$

кўринишда белгилаб, $\{x_n\}$ кетма-кетлик a лимитга интилади ёки яқинлашади деймиз.

Ўзгармаснинг лимити ўзига тенг. $\lim x_n=\lim a=a$

1-мисолдаги кетма-кетликнинг лимити 0 га тенг. Ҳақиқатан, таърифга кўра, ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$ бўлиши керак, бу тенгсизликни ечайлик. Бундан, $\frac{1}{\varepsilon}<n$. Агар $n_0=n_0(\varepsilon)\ =\frac{1}{\varepsilon}$ десак, у ҳолда барча $n>n_0$ лар учун $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$ бўлади.

2-мисолдаги кетма-кетликнинг лимити 1 га тенг. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун

$$\left|1-\frac{n-1}{n}\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

тенгсизликни ечиш кифоя. Юқорида бу тенгсизлик ҳар қандай $\varepsilon>0$ учун $n>n_0=n_0(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}$ бўлганда бажарилишини кўрсатган эдик. Бу

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1$$

эканлигини билдиради.

7-*мисол*. Агар $|q|<1$ бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n\to\infty} q^n=0. \qquad (2)$$

Ҳақиқатан, агар $q \neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$|q^n - 0| = |q^n| < \varepsilon$$

тенгсизлик

$$n \lg|q| < \lg \varepsilon,$$

бўлганда, яъни

$$n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg|q|} = n_0(\varepsilon)$$

бўлганда ўринли бўлади. Энди, агар $q = 0$ бўлса, q^n нинг барчаси ноллардан иборат бўлади, унинг лимити эса 0 га тенг.

Ихтиёрий ҳақиқий a сонни қарайлик. Маълумки, ҳар қандай ҳақиқий сонни чексиз ўнли касрга ёйиш мумкин:

$$a = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots.$$

Агар

$$a^{(n)} = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots . a_n$$

десак, у ҳолда

$$\lim_{n \to \infty} a^{(n)} = a \tag{3}$$

бўлади.

Ҳақиқатан,

$$\left|a - a^{(n)}\right| = 0, \underbrace{0 \ldots 0}_{n} a_{n+1} a_{n+2} \cdots \leq 10^{-n}$$

бўлгани учун, юқорида кўрилган мисолга кўра, агар $q = 10^{-1}$ десак, ҳар қандай $\varepsilon > 0$ учун шундай n_0 топиладики, $n > n_0$ лар учун

$$\left|a - a^{(n)}\right| < \varepsilon$$

ўринли бўлади.

Бундан ҳар қандай ҳақиқий сон бирор рационал сонлар кетма-кетлигининг лимити бўлади, деган хулоса келиб чиқади. Хусусан, ҳар қандай иррационал сонни старлича аниқликда рационал сон билан яқинлаштириш мумкин. Шу сабабли рационал сонлар тўплами Q барча ҳақиқий сонлар тўплами R да зич жойлашган дейилади.

Лимитни таърифидаги (1) тенгсизлик қуйидаги икки тенгсизликка

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \text{ ёки } a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

тенг кучли. Бундан, $n > n_0$ лар учун $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ бўлиши, яъни a нинг ε — атрофига тегишли бўлиши келиб чиқади.

У ҳолда лимитни қуйидагича таърифласа ҳам бўлади:

a сон x_n кетма-кетликнинг лимити бўлади, агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун шундай n_0 сон топилсаки, $n > n_0$ индекслар учун x_n ҳадлар a нинг ε атрофига тегишли бўлса. Демак, хулоса қилиб айтганда, a сон x_n кетма-кетликнинг лимити бўлиши учун a нинг бирор ε атрофида кетма-кетликнинг чексиз кўп элементи ётиб, ташқарисида чекли сондаги элементи қолиши керак экан.

8-*мисол.* Қуйидаги:

$$\left\{(-1)^{n+1}\right\} = \{1, -1, 1, -1, \ldots\} \tag{4}$$

кетма-кетлик лимитга эга эмас.

Ҳақиқатан, тескарисини фараз қилайлик, яъни кетма-кетлик a лимитга эга бўлсин. Бу нуқтанинг $\frac{1}{3}$ атрофини кўрайлик. Бу оралиқ бир вақтда ҳам 1 ни, ҳам -1 ни ўз ичига олмайди, чунки оралиқ узунлиги 1, -1 ва 1 сонлар орасидаги масофа эса 2 га тенг, яъни атроф ташқарисида (4) нинг чексиз кўп элементи қоляпти, бу эса юқоридаги лимит ҳақидаги хулосамизга зид. Бу зиддият a (4) нинг лимити бўла олмаслигини билдиради, a ихтиёрий сон бўлгани учун бундан (4) бирорта ҳам лимитга эга эмаслиги келиб чиқади.

Кетма-кетликнинг лимити қуйидаги хоссаларга эга:

1-хосса. *Агар кетма-кетликнинг лимити мавжуд бўлса, у ягона бўлади.*

Исботи. Тескарисини фараз қилайлик, яъни x_n кетма-кетлик a ва b ҳар хил лимитларга эга бўлсин. У ҳолда лимитнинг таърифига кўра, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $n_1(\varepsilon)$ ва $n_2(\varepsilon)$ сонлар топиладики, $n > n_1(\varepsilon)$ ва $n > n_2(\varepsilon)$ бўлганда мос равишда $|x_n - a| < \varepsilon$ ва $|x_n - b| < \varepsilon$ бўлади. Агар $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ десак, $n > n_0$ лар учун

$$|a-b| = |x_n - b + a - x_n| \le |x_n - a| + |x_n - b| < 2\varepsilon$$

бўлади, ε ихтиёрий кичик сон бўлгани учун бу тенгсизлик $a = b$ бўлгандагина ўринли бўлиши мумкин.

2-хосса. Чекли лимитга эга бўлган кетма-кетлик чегараланган бўлади.

Исботи. Агар x_n кетма-кетлик a чекли лимитга эга бўлса, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай $n_0(\varepsilon)$ сон топиладики, $n > n_0$ лар учун $|x_n - a| < \varepsilon$ ва ўз навбатида $|x_n| - |a| \le |x_n - a| < \varepsilon$ ёки $|x_n| \le |a| + \varepsilon$ бўлади. Агар

$$M = max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|, |a| + \varepsilon\}$$

десак, барча натурал n лар учун $|x_n| \le M$ муносабат ўринли бўлади. Бу $\{x_n\}$ кетма-кетлик чегараланганлигини кўрсатади.

3-хосса. Нолдан фарқли a лимитга эга бўлган $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун шундай n_0 топиладики, $n > n_0$ лар учун $|x_n| > \frac{|a|}{2}$ муносабат ўринлидир. Агар $a > 0$ бўлса, кўрсатилган n лар учун $x_n > \frac{a}{2}$, ва агар $a < 0$ бўлса,

$x_n < \frac{a}{2}$ бўлади, яъни x_n кетма-кетлик ҳадлари бирор номердан бошлаб, a нинг ишорасини такрорлайди.

Исботи. Агар $x_n \to a \ne 0$ бўлса, у ҳолда $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ учун шундай n_0 топиладики, $n > n_0$ лар учун

$$\frac{|a|}{2} > |a - x_n| \ge |a| - |x_n|$$

ёки $|x_n| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}$ бўлади. Энди юқоридаги тенгсизликни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$a - \frac{|a|}{2} < x_n < a + \frac{|a|}{2}.$$

Агар $a > 0$ бўлса, у ҳолда бундан $x_n > a - \frac{|a|}{2} = \frac{a}{2}$ ва агар $a < 0$ бўлса, $x_n < a + \frac{|a|}{2} = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$ келиб чиқади.

4-хосса. Агар $x_n \to a$, $y_n \to b$ ва барча натурал n лар учун $x_n \le y_n$ бўлса, у ҳолда $a \le b$ бўлади.

Исботи. Тескарисини фараз қилайлик, яъни $b < a$ бўлсин. Берилган $0 < \varepsilon < \frac{(a-b)}{2}$ учун щундай n_1 ва n_2 ни танлаш мумкинки, $n > n_1$ учун $a - \varepsilon < x_n$, ва $n > n_2$ учун $y_n < b + \varepsilon$ бўлади. Энди агар $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ десак, у ҳолда $n > n_0$ лар учун $y_n < b + \varepsilon < < a - \varepsilon < x_n$ бўлади. Зиддиятга келдик, бу қилган фаразимиз хато эканлигини билдиради.

5-хосса. Агар с га яқинлашувчи $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун шундай n_0 мавжуд бўлсаки, $n>n_0$ лар учун $x_n \in [a,b]$ бўлса, у ҳолда с $\in [a,b]$ бўлади.

Исботи. Шартга кўра, $a \le x_n \le b$. Бу тенгсизликлардан с ни айирамиз: $a-c \le x_n - c \le b-c$. Бу ерда c$<a$ бўлмайди, чунки акс ҳолда с нинг шундай ε атрофи мавжудки, у берилган кетма-кетликнинг чексиз кўп x_n элементларини ўз ичига олиб, улар учун $x_n \le$ с $+\varepsilon < a$ тенгсизлик ўринли бўлади. Бундай бўлиши мумкин эмас, чунки шартга кўра танланган n лар учун $a \le x_n$.

$b<c$ хам бўлаолмайди, чунки акс ҳолда шундай $\varepsilon>0$ сон мавжудки, $b<c-\varepsilon$ бўлади. Шу ε сон учун шундай n_0 мавжудки, $n>n_0$ учун $b<c-\varepsilon \le x_n$ бўлади. Бунинг бўлиши мумкин эмас, чунки шартга кўра $x_n \le b$. Демак, $a \le$ c $\le b$.

Эслатма. Агар хоссанинг бирор шарти бузилса, у ҳолда хосса ўринли бўлмаслиги мумкин, масалан, $x_n = 1/_{n+1} \in (0,1)$, лекин c=0$\in$[0,1].

6-хосса. Агар барча натурал n лар учун $x_n \le y_n \le z_n$ булиб, x_n ва z_n кетма-кетликлар бир хил a лимитга интилса, у ҳолда y_n кетма-кетлик ҳам шу лимитга интилади.

Исботи. Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай n_1 ва n_2 сонлар топиладики, $n>n_1$ учун $a-\varepsilon < x_n$ ва $n>n_2$ учун $z_n < a+\varepsilon$ бўлади. Агар $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ десак, $n>n_0$ бўлганда, $a-\varepsilon<x_n \le y_n \le z_n < a+\varepsilon$, бундан эса $|y_n - a| < \varepsilon$ эканлиги келиб чиқади.

7-хосса. Агар $x_n \to a$ бўлса, у ҳолда $|x_n| \to |a|$ булади.

Бунинг исботи $\big||x_n|-|a|\big| \le |x_n - a|$ тенгсизликдан келиб чиқади.

2.2. Лимитга эга бўлган ўзгарувчилар устида арифметик амаллар

Берилган $\{x_n\},\{y_n\}$ кетма-кетликлар мос равишда чекли a ва b лимитларга эга бўлсин, деб фараз қилайлик.

1^0. $\lim(x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n$

2^0. $\lim(x_n y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n$

3^0. агар $\lim y_n \ne 0$ бўлса, $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}$.

Исботлари. Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун n_0 сонни шундай танлаймизки, $n>n_0$ учун

$$|x_n - a| < \varepsilon/2,\ |y_n - b| < \varepsilon/2$$

бўлсин. У ҳолда $n>n_0$ учун

$$|(x_n \pm y_n)-(a \pm b)| \le |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

булади. Бу 1^0 нинг ўринли эканлигини кўрсатади. Энди 2^0 ни исботлаш учун қуйидаги муносабатни кўрайлик:

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \le |x_n y_n - a y_n| + \\ + |a y_n - ab| = |y_n||x_n - a| + |a||y_n - b|. \qquad (5)$$

2-хоссага кўра y_n кетма-кетлик лимитга эга бўлгани учун чегараланган, яъни шундай $M>0$ сон мавжудки,

$$|y_n| \le M,\ n = 1,2,..., \qquad (6)$$

$$|a| \le M \qquad (7)$$

Ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун n_0 сонни шундай танлаймизки, $n>n_0$ лар учун

$$|x_n - a| < \varepsilon / 2M, \ |y_n - b| < \varepsilon / 2\mathrm{M}$$

бўлсин. У ҳолда $n > n_0$ учун

$$|x_n y_n - ab| < \frac{M\varepsilon}{2M} + \frac{M\varepsilon}{2M} = \varepsilon .$$

Фараз қилайлик, $b \neq 0$ бўлсин. У ҳолда

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{x_n b - y_n a}{y_n b}\right| = \frac{|(x_n - a)b + (b - y_n)a|}{|y_n||b|} \leq$$

$$\leq \frac{|x_n - a|}{|y_n|} + \frac{|b - y_n||a|}{|y_n||b|}. \tag{8}$$

Энди 3-хоссага кўра, етарлича катта n_1 учун $n > n_1$ бўлганда

$$|y_n| > \frac{|b|}{2} \tag{9}$$

бўлади. Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун n_2 ва n_3 сонларни шундай танлаймизки, $n > n_2$ бўлганда

$$|x_n - a| < \varepsilon \frac{|b|}{4} \tag{10}$$

а $n > n_3$ бўлганда

$$|a||y_n - в| < \varepsilon \frac{b^2}{4} \tag{11}$$

ўлсин. У ҳолда, агар $n_0 = max\{n_1, n_2, n_3\}$ десак, $n > n_0$ ўлганда, (8)-(11) тенгсизликларга кўра

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| < \frac{\varepsilon \cdot |b|}{4} \cdot \frac{2}{|b|} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

2.3. Чексиз кичик ва чексиз катта миқдорлар

1-Таъриф. *Лимити нолга тенг бўлган ҳар қандай етма-кетлик чексиз кичик миқдор дейилади.*

Демак, агар ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун шундай n_0 топилсаки, $n > n_0$ учун $|\alpha_n| < \varepsilon$ бўлса, α_n кетма-кетлик чексиз кичик миқдор бўлар экан.

Бундан, x_n кетма-кетлик a лимитга эга бўлиши учун у $x_n = a + \alpha_n$, (бу ерда α_n чексиз кичик миқдор), бўлиши зарур ва етарли эканлиги келиб чиқади.

2-Таъриф. Агар ҳар қандай *$M>0$ учун шундай n_0 топилсаки, $n > n_0$ учун $|\beta_n| > M$ бўлса, β_n кетма-кетликни чексиз катта миқдор деймиз.* Буни

$$\lim \beta_n = \infty \text{ ёки } \beta_n \to \infty \tag{12}$$

кўринишда ёзиб, β_n чексизликка интиляпти деб аташ қабул қилинган.

Айрим ҳолларда β_n нинг ишорасига қараб, уни

$$\lim \beta_n = +\infty , \ \beta_n \to +\infty \tag{13}$$

ёки

$$\lim \beta_n = -\infty , \ \beta_n \to \infty \tag{14}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Лекин $\{(-1)^n n\}$ кетма-кетлик мисолида (12) кўринишда ифодаланиши мумкин бўлган кетма-кетликни на (13) кўринишда, на (14) кўринишда ифодалаб бўлмаслигини кўриш мумкин.

1-хосса. Агар α_n чегараланган ва β_n чексиз катта миқдорлар бўлса, у ҳолда $\frac{\alpha_n}{\beta_n} \to 0$ бўлади.

Исботи. Шартга кўра, α_n чегараланган миқдор бўлгани учун, шундай $M_1>0$ сон мавжудки, $|\alpha_n| < M_1$, ва β_n чексиз катта миқдор бўлгани учун ихтиёрий $M_2>0$ сон учун шундай n_0 топиладики, $n > n_0$ учун $|\beta_n| > M_2$ бўлади. У ҳолда $n > n_0$ учун

$$\left|\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right| = \frac{|\alpha_n|}{|\beta_n|} < \frac{M_1}{M_2} = \varepsilon$$

бўлади. M_2 ихтиёрий катта сон бўлиб, n_0 унга боғлиқ ҳолда топилгани учун ε ихтиёрий кичик бўлиб, n_0 ε га боғлиқ бўлади.

Натижа. Агар α_n чексиз катта миқдор бўлса, у ҳолда $\beta_n = \frac{1}{\alpha_n}$ чексиз кичик миқдор бўлади.

2-хосса. Агар x_n қуйидан мусбат a сон билан чегараланган ва α_n нолдан фарқли чексиз кичик миқдор бўлса, у ҳолда $\frac{x_n}{\alpha_n} \to \infty$ бўлади.

Исботи. Шартга кўра, барча натурал n учун $|x_n| = x_n > a > 0$ ва ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай n_0 топиладики, $n > n_0$ учун $|\alpha_n| < \varepsilon$ бўлади. У ҳолда

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| > \frac{a}{\varepsilon} = \mathrm{M}$$

тенгсизлик барча $n > n_0$ учун бажарилади.

Натижа. Агар α_n чексиз кичик миқдор бўлса, у ҳолда $\beta_n = \frac{1}{\alpha_n}$ чексиз катта миқдор булади.

3-хосса. Чексиз кичик миқдор α_n билан чегараланган x_n миқдор кўпайтмаси чексиз кичик миқдордир.

Исботи. Ҳақиқатан ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай n_0 топиладики, $n > n_0$ учун $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ бўлади, бу ерда барча натурал n учун $|x_n| \le M$. У ҳолда $n > n_0$ учун

$$|\alpha_n x_n - 0| = |\alpha_n| \cdot |x_n| \le \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$$

бўлади.

2.4. Аниқмасликлар

Юқорида келтирилган хоссаларнинг шартлари қаноатланмайдиган барча бошқа ҳолларда натижаси аниқ хулосага олиб келмайдиган қуйидаги ҳолатлар юз беради, масалан:

агар $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$, бўлса, $n \to \infty$ да $\frac{x_n}{y_n} = 1 \to 1$,

агар $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n^2}$ бўлса, $n \to \infty$ да $\frac{x_n}{y_n} = n \to \infty$,

агар $x_n = \frac{1}{n^2}$, $y_n = \frac{1}{n}$ бўлса, $n \to \infty$ да $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \to 0$,

агар $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$ бўлса, $\frac{x_n}{y_n} = (-1)^n$, бу кетма-кетликнинг лимити мавжуд эмас. Демак, $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ эканлиги $\frac{x_n}{y_n}$ ифоданинг натижаси тўғрисида аниқ бир хулоса чиқаришга етарли эмас экан. Шунинг учун $\frac{x_n}{y_n}$ ифодани $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ бўлганда $\left(\frac{0}{0}\right)$ кўринишдаги аниқмаслик деб аташади.

Худди шундай, $x_n \to \infty$, $y_n \to \infty$ бўлганда, $\frac{x_n}{y_n}$ ифодани $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ кўринишдаги аниқмаслик деб атаймиз.

Агар $x_n \to 0$, $y_n \to \infty$ бўлса, у ҳолда $x_n y_n$ ифода $(0 \cdot \infty)$ кўринишдаги аниқмаслик дейилади.

Ва ниҳоят, агар $x_n \to +\infty, y_n \to -\infty$ бўлса, $x_n + y_n$ ифода $(\infty - \infty)$ кўринишдаги аниқмаслик деб аталади.

Айрим ҳолларда берилган ифодаларни соддалаштириш ҳисобига аниқ бир натижага келиш мумкин. Буни аниқмасликларни очиш деб атаймиз.

Аниқмасликларни очишга доир мисоллар кўрайлик.

1-*мисол.* Агар

$$x_n = a_m n^m + ... + a_1 n + a_0,$$

$$y_n = b_\kappa n^\kappa + b_{\kappa-1} + ... + b_1 n + b_0, \ (a_m \neq 0, b_\kappa \neq 0),$$

бўлса, у ҳолда $\frac{x_n}{y_n}$ ифода $n \to \infty$ да $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ кўринишдаги аниқмаслик бўлади.

1) Агар $\kappa = m$ бўлса, сурат ва маҳражни n^m га бўламиз:

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{a_m + \frac{a_{m-1}}{n} + ... + \frac{a_0}{n^m}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{n} + ... + \frac{b_0}{n^m}} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{a_m}{b_m},$$

яъни $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a_m}{b_m}$.

2) Агар $m > \kappa$ бўлса, $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \infty$, агар $m < \kappa$ бўлса, $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = 0$ бўлади.

2-*мисол.* Агар $x_n = \sqrt{n+1}, y_n = \sqrt{n}$ бўлса, у ҳолда $x_n - y_n$ ифода $n \to \infty$ да $(\infty - \infty)$ кўринишдаги аниқмаслик бўлади. Бу аниқмаслик қуйидаги тартибда очилади:

$$x_n - y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} =$$

$$= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \cdot \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to 0.$$

Демак, $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$.

2.5. Монотон кетма-кетликлар

Таъриф. *Агар барча* $n \in N$ *учун* $x_n \leq x_{n+1}$ $(x_n \geq x_{n+1})$ *тенгсизликлар ўринли бўлса,* $\{x_n\}$ *камаймайдиган (ўсмайдиган) кетма-кетлик дейилади.*

Агар $x_n < x_{n+1}$ $(x_n > x_{n+1})$ қатъий тенгсизликлар ўринли бўлса, у ҳолда $\{x_n\}$ қатъий ўсувчи (қатъий камаювчи) ёки қисқача ўсувчи (камаювчи) кетма-кетлик дейилади. Ўсувчи ва камаювчи, камаймайдиган ва ўсмайдиган кетма-кетликлар монотон кетма-кетликлар деб аталади.

Монотон кетма-кетликларнинг элементларини қуйидагича тартибга солиш мумкин:

$$x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n \leq x_{n+1} \leq ... \text{ ёки } x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n \geq x_{n+1} \geq ....$$

Бу тенгсизликлардан кўринадики, камаймайдиган кетма-кетлик қуйидан ва ўсмайдиган кетма-кетлик юқоридан чегараланган бўлар экан.

Ҳар қандай монотон кетма-кетлик ҳам чекли лимитга эга бўлавермайди. Масалан, $\{n^2+1\}$ кетма-кетлик чексиз монотон ўсади, шу сабабли унинг лимити чекли бўлмайди.

Қуйидаги Больцано-Вейерштрасс теоремаси бу саволга тўлиқ жавоб беради.

Теорема. *Камаймайдиган (ўсмайдиган) ва юқоридан* M *(қуйидан* m *) сони билан чегараланган*

$$x_1, x_2, x_3 ....., x_n, ... \qquad (15)$$

ҳақиқий сонлар кетма-кетлиги M *дан катта (* m *дан кичик) бўлмаган* a *лимитга эга:*

$$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \leq M \ \ (\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \geq m). \qquad (16)$$

Исботи. (15) кетма-кетликнинг барча элементларини чекли ёки чексиз ўнли касрлар билан ифодалаймиз:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = x_{10}, x_{11}x_{12}\dots x_{1\kappa}\dots\\
&x_2 = x_{20}, x_{21}x_{22}\dots x_{1\kappa}\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (17)\\
&x_n = x_{n0}, x_{n1}x_{n2}\dots x_{n\kappa}\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .
\end{aligned}
$$

Икки ҳол бўлиши мумкин: $x_1 > 0$ ёки $x_1 \le 0$.

Фараз қилайлик, $x_1 > 0$ ва (15) кетма-кетлик камаймайдиган бўлсин. У ҳолда барча n учун $x_n > 0$ бўлади.

Кетма-кетлик камаймайдиган бўлгани учун (17) даги касрларнинг бутун қисмлари учун $x_{n0} \le x_{n+1,0} \le$M муносабат ўринли бўлади. М чекли сон бўлгани учун x_{n0} сонлар орасида **М** дан ошиб кетмайдигани бор. Фараз қилайлик, у $x_{n_1 0}$ бўлсин, уни шартли равишда a_0 билан белгилайлик. Маълумки, $a_0 \le$ М. (17) даги касрларнинг вергулдан кейинги биринчи рақамлари $n \ge n_1$ учун $x_{n1} \le x_{n+1,1}$ муносабатда бўладилар. Табиийки, уларнинг орасида ҳам каттаси бор, фараз қилайлик, у $x_{n_2 1}$ бўлсин, уни шартли равишда a_1 билан белгилайлик. Агар $n \ge n_2 > n_1$ бўлса, $a_0, a_1 \le x_n \le M$ бўлади. Энди математик индукция усулини қўллаймиз, яъни бирор n_κ учун $n \ge n_\kappa$ бўлганда $a_0, a_1a_2\dots a_{n_\kappa} \le x_n \le M$ бўлсин, деб фараз қилайлик. $n \ge n_\kappa$ лар учун

$x_n = a_0, a_1a_2..a_{n_\kappa} x_{n,n_{\kappa+1}}\dots$ бўлгани учун уларнинг вергулдан кейинги $n_{\kappa+1}$-хонасидаги $x_{n,n_\kappa+1}$ рақамларини солиштириб чиқамиз. $n \ge n_\kappa$ учун $x_{n,n_{\kappa+1}} \le x_{n+1,n_{\kappa+1}}$ муносабат ўринли, уларнинг орасида энг каттаси мавжуд, фараз қилайлик, у $x_{n_m,n_{\kappa+1}}$ бўлсин, уни $a_{n_\kappa+1}$ билан белгилайлик. Демак, $n \ge n_m$ лар учун $a_0, a_1a_2..a_{n_\kappa} a_{n_\kappa+1} \le x_n \le M$ $a = a_0, a_1a_2..a_n\dots$ деб белгилайлик. У ҳолда, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ бўлишини исботлаш қолди.

Ҳақиқатан, етарлича катта n_0 учун

$$x_n = a_0, a_1a_2..a_{n_0} x_{n,n_{0+1}}\dots.$$

У ҳолда,

$$|a - x_n| = 0,\underbrace{00...0}_{n_0}\beta_{n_0+1}\beta_{n_0+2}\dots \le 10^{-n_0}$$

Маълумки, ихтиёрий $0<\varepsilon$ учун шундай n_1 топиладики, $n > n_1$ учун $10^{-n} < \varepsilon$ бўлади. Агар $n_2 = max\{n_0, n_1\}$ десак, $n > n_2$ учун $|x_n - a| < \varepsilon$ бўлади.

Энди, агар $x_1 \le 0$ бўлса, у ҳолда унга шундай с сонни қўшамизки, натижада $x_1 + c > 0$ бўлсин. У ҳолда $y_n = x_n + c$ кетма-кетлик учун юқорида исботланганига кўра, b лимит мавжуд. Шу сабабли $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}(y_n - c) = b - c \le M.$

Энди, агар берилган кетма-кетлик ўсмайдиган бўлиб, қуйидан m сон билан чегараланган бўлса, у ҳолда $\{-x_n\}$ кетма-кетлик камаймайдиган ва юқоридан m билан чегараланган кетма-кетлик бўлади. Исботланганига кўра, бу кетма-кетлик учун лимит мавжуд $\lim\limits_{n\to\infty}(-x_n) = -a \le -m$. Демак, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\lim\limits_{n\to\infty}(-x_n) = -(-a) = a \ge m$ экан. Теорема исбот бўлди.

Мисол. Ихтиёрий a сон учун

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$$

Ҳақиқатан, агар $|a|\le 1$ бўлса, бу тенгликнинг тўғрилиги равшандир. Агар $a>1$ бўлса, $u_n=\frac{a^n}{n!}$ деб белгилаймиз. У ҳолда $n\to\infty$ да $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{a}{n+1}\to 0$ бўлади.

Бундан, етарлича катта n_0 учун $\forall\ n>n_0$ ларда $u_{n+1}<u_n$ бўлиши келиб чиқади, яъни u_n кетма-кетлик камаювчи ва қуйидан 0 сони билан чегараланган. У ҳолда u_n кетма-кетликнинг лимити мавжуд:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=A\ge 0.$$

Худди шундай,

$$A=\lim_{n\to\infty}u_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(u_n\cdot\frac{a}{n+1}\right)=A\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{n+1}\right)=A\cdot 0=0.$$

Берилган тенглик $a<0$ бўлганда ҳам тўғри эканлиги $n\to\infty$ да $\left|\frac{a^n}{n!}\right|=\frac{|a|^n}{n!}\to 0$ бўлишидан келиб чиқади.

2.6. е сони. Натурал логарифмлар

$\{x_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ кетма-кетликнинг ўсувчи ва юқоридан чегараланганлигини кўрсатайлик.

Ньютон биномига асосан

$$(a+b)^n=\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{n(n-1)...(n-\kappa+1)}{\kappa!}a^{n-\kappa}b^{\kappa}.$$

У ҳолда

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+...+\frac{n(n-1)(n-2)...[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot...\cdot n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n. \qquad (18)$$

(18) ифодала алгебраик алмаштиришлардан сўнг

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+...$$
$$...+\frac{1}{1\cdot 2\cdot...\cdot n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \qquad (19)$$

Бу тенгликдан $x_n\ge 2$ эканлиги кўриниб турибди. Агар (19) да n ни n+1 га алмаштирсак, (19) га асосан

$$x_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+$$
$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+...+\frac{1}{1\cdot 2\cdot...\cdot n(n+1)}$$
$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)...\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

Бунда барча к лар учун $1-\frac{\kappa}{n}<1-\frac{\kappa}{n+1}$ эканлигини эътиборга олсак, барча натурал n лар учун $x_n\le x_{n+1}$ бўлишига ишонч ҳосил қиламиз. Агар барча $\kappa=1,2,...,n-1$ учун $\left(1-\frac{\kappa}{n}\right)<1$ ва $\frac{1}{\kappa!}\le\frac{1}{2^{\kappa-1}}$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$x_n\le 1+1+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}\le 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}\le$$
$$\le 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+...\right)=1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3 \qquad (20)$$

Демак, $\{x_n\}$ кетма-кетлик монотон ва юқоридан 3 билан чегараланган экан. У ҳолда Вейерштрасс теоремасига кўра, бу кетма-кетлик чекли лимитга эга. Бу лимитни Л. Эйлернинг таклифига кўра е деб белгилаш қабул қилинган. Юқоридаги хулосаларга асосан 2 < е < 3 бўлади. (20) га асосан, бу лимитни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$e=\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{1}{\kappa!}+\frac{\theta}{n!}\ (n>2), \tag{21}$$

бу ерда, θ - 0<θ<1. Бундан е иррационал сон ва унинг аникроқ қиймати е=2.7182818284 ... эканлиги келиб чиқади. Ҳақиқатан, тескарисини фараз қилайлик, яъни $e=\frac{p}{q}$ бўлсин, бу ерда, p, q натурал сонлар. У ҳолда (21) да $n=q$ десак,

$$\frac{p}{q}=\sum_{\kappa=0}^{q}\frac{1}{\kappa!}+\frac{\theta}{q!}.$$

Бу тенгликнинг иккала тарафини q! га кўпайтирсак ва $l=q!\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!}$ десак,

$$p(q-1)!-\ell=\theta\,, \tag{22}$$

келиб чиқади. (22) нинг чап томони бутун сон ва ўнг томони оддий каср. Бу қарама-қаршилик қилган фаразимиз хато эканлигини кўрсатади.

Асоси e бўлган логарифмлар натурал логарифмлар деб аталади, a нинг натурал логарифми учун $\ln a$ белги қабул қилинган. Ўнли ва натурал логарифмлар қуйидаги муносабатлар билан боғланган:

$$\lg N=M\ln N \tag{23}$$

$$\ln N=1/M\cdot\lg N \tag{24}$$

Бу ерда M натурал логарифмлардан ўнли логарифмларга ўтиш модули.

$$M=\lg e=\lg 2.718\approx0.4343,$$

$$1/\mathrm{M}=\ln10\approx2.303$$

Шуларга асосан (23) ва (24) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\lg N=0.4343\ln N$$

$$\ln N=2.303\lg N$$

Мисоллар. Жадвалдан фойдаланмасдан ҳисобланг.

$$\ln100=\ln102=2\ln10=2\cdot2,303=4.606$$

$$\ln0,001=\ln10\text{-}3=-3\ln10=-3\cdot2,303=-6,909$$

$$\ln\sqrt{10}=\frac{1}{2}\ln10=\frac{1}{2}\cdot2,303=1,151.$$

2.7. Больцано-Вейерштрасс теоремаси

Таъриф. *Агар* $a\le a'<\ b'\le b$ *бўлса,* $[a,b]$ *кесма* $[a',b']$ *кесмани қамрайди деймиз. Буни* $[a,b]\subset[a'.b']$ *кўринишда ёзамиз.*

1-теорема. Агар $\sigma_n=[a_n,b_n]$ ($n=1,2,3,\ldots$) узунликлари нолга интилувчи $d_n=b_n-a_n\to0$ ($n\to\infty$), бир-бирини ичига қамралган кесмалар кетма-кетлиги бўлса, яъни $n=1,2,3\ldots.$ лар учун $\sigma_{n+1}\subset\sigma_n$ бўлса, у ҳолда барча σ_n кесмаларга тегишли бўлган ягона c нуқта мавжуд.

Исботи. Теорема шартига кўра ҳар қандай m учун:

$$a_1\le a_2\le\ldots\le b_m.$$

Бундан кўринадики, $\{a_n\}$ кетма-кетлик камаймайдиган ва юқоридан ҳар қандай m учун b_m сон билан чегараланган, шу сабабли Вейерштрасс теоремасига кўра у ягона $c\le b_m$ лимитга эга. m ихтиёрий сон бўлгани учун хусусан $a_n\le c\le b_n$ муносабат ҳам ўринли. Демак, барча $n=1,2,3\ldots.$ учун $c\in\sigma_n$. Энди бундай нуқта ягона эканлигини исботлайлик. Фараз қилайлик, бундай нуқталар иккита $c\ne c_1$ бўлсин. У ҳолда, $a_n\le c,c_1\le b_n$ бўлгани учун, ҳар қандай n учун

$$b_n - a_n \geq |c - c_1| > 0$$

бўлади, бу $b_n - a_n \to 0$ шартга зиддир.

Бундан ташқари,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left[(b_n - a_n) + a_n\right] = c.$$

Энди фараз қилайлик, бизга (15) кетма-кетлик берилган бўлсин. Унинг ичидан танлаб, янги тузилган ҳар қандай

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots, x_{n_k}, \ldots \quad (n_1 < n_2 < n_3 < \ldots)$$

кетма-кетлик (15) нинг хусусий кетма-кетлиги дейилади.

Агар (15) кетма-кетлик чекли ёки чексиз лимитга эга бўлса, унинг ҳар қандай хусусий кетма-кетлиги ҳам шу лимитга эга бўлади. (15) нинг лимитга эга эмаслигидан унинг бирорта ҳам хусусий кетма-кетлиги лимитга эга эмаслиги келиб чиқмайди. Масалан,

$$1, -1, 1, -1, \ldots$$

кетма-кетлик лимитга эга бўлмаса ҳам унинг

$$1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots \text{ ва } -1, -1, \ldots, -1, \ldots$$

хусусий кетма-кетликлари мос равишда 1 ва -1 лимитларга эга.

Чегараланмаган ёки $\pm\infty$ га интилувчи кетма-кетликдан чекли лимитга яқинлашувчи хусусий кетма-кетликни ҳар доим ҳам ажратиб олиб бўлавермайди. Лекин агар кетма-кетлик чегараланган бўлса, у ҳолда бу муаммони қуйидаги теорема ҳал қилади.

2-теорема (Больцано-Вейерштрасс теоремаси). Ҳар қандай чегараланган (15) кетма-кетликдан чекли лимитга яқинлашувчи хусусий кетма-кетликни ажратиб олиш мумкин.

Исботи. (15) кетма-кетлик чегараланган бўлгани учун унинг барча элементларини ўз ичига олган $[a, b]$ кесма мавжуд, бу ерда, масалан, a (15) нинг қуйи чегараси ва b унинг юқори чегараси бўлади. Бу оралиқни тенг иккига бўлиб, (15) нинг чексиз кўп элементларини қамраган қисмини оламиз. Бундай қисм мавжуд, чунки акс ҳолда (15) нинг чексиз кўп элементлари $[a, b]$ дан ташқарида қолган бўлади, буни эса бўлиши мумкин эмас. Агар иккала қисми ҳам чексиз кўп элементларни ўз ичига олса, у ҳолда уларнинг ихтиёрий биттасини олиб, уни $[a_1, b_1]$ билан белгилаймиз. Ундан (15) нинг бирор x_{n_1} элементини танлайлик ва $[a_1, b_1]$ ни яна тенг иккига бўлиб, ундан (15) нинг чексиз кўп элементларини қамраган қисмини олиб, уни $[a_2, b_2]$ деб белгилайлик. Бу қисмдан (15) нинг x_{n_1} га тенг бўлмаган бошқа x_{n_2} элементини олайлик. Бу жараённи чексиз давом эттирсак, бир-бирининг ичига қамралган ва узунликлари

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$$

нолга интилувчи кесмалар ва улардан танлаб олинган $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ хусусий кетма-кетлик ҳосил бўлади. У ҳолда, 1-теоремага ва $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$ бўлгани учун 2.1. бўлимдаги кетма-кетликларнинг 6-хоссасига кўра шундай c нуқта мавжудки, $\lim\limits_{n_k\to\infty} x_{n_k} = c$ бўлади.

2.8. Чекли лимитнинг мавжудлик шарти

Фараз қилайлик, (15) кетма-кетлик чекли a лимитга эга бўлсин:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

яъни ҳар қандай $\varepsilon > 0$ учун шундай $n_0 = n_0(\varepsilon)$ сон топилсинки, барча $n > n_0$ лар учун

$$|x_n - a| < \varepsilon/2$$

бўлсин. У ҳолда барча $n, m > n_0$ лар учун

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

бўлади, яъни чекли лимитга яқинлашувчи ҳар қандай x_n кетма-кетлик учун Коши шарти: ҳар қандай $\varepsilon > 0$ учун шундай $n_0 = n_0(\varepsilon)$ сон топиладики, $n, m > n_0$ учун

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \qquad (25)$$

муносабат ўринли бўлади.

Коши шартини қаноатлантирувчи кетма-кетлик фундаментал кетма-кетлик деб аталади.

Демак, чекли лимитга эга бўлган кетма-кетлик фундаментал кетма-кетлик бўлар экан. Бунга тескари бўлган хулоса ҳам ўринли, яъни ҳар қандай фундаментал кетма-кетлик чекли лимитга эга бўлади.

Ҳақиқатан, агар x_n фундаментал кетма-кетлик бўлса, у ҳолда у Коши шартини қаноатлантиради. (25) ни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$|x_n|-|x_m| < |x_n - x_m| < \varepsilon$$

ёки

$$|x_n| \le |x_m| + \varepsilon.$$

Агар

$$M = \max_{n\le n0}\{|x_n|, 1+|x_m|\}$$

десак, барча $n\in N$ лар учун $|x_n| \le M$ бўлади. У ҳолда, Больцано-Вейерштрасс теоремасига кўра, x_n кетма-кетликдан бирор чекли a лимитга яқинлашувчи $\{x_{n_k}\}$ хусусий кетма-кетликни ажратиб олиш мумкин. a лимитга x_n кетма-кетлик ҳам яқинлашади. Ҳақиқатан Коши шартига кўра ҳар қандай $\varepsilon > 0$ учун шундай $n_0 = n_0(\varepsilon)$ сон топиладики, $n, m > n_0$ учун

$$|x_n - x_m| < \varepsilon/2 \qquad (26)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. $\kappa \to \infty$ да $x_{n_k} \to a$ бўлгани учун шундай κ_0 ни топиш мумкинки, барча $\kappa > \kappa_0$ учун

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon/2$$

бўлади. Энди агар $\kappa \to \infty$ да $n_\kappa \to \infty$ бўлишини эътиборга олсак, шундай $\kappa_1 > \kappa_0$ топиладики, $n_{\kappa_1} > n_0$ бўлади. У ҳолда, (26) га кўра барча $n > n_0$ лар учун

$$|x_n - a| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - a| \le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Бундан a x_n кетма-кетликнинг лимити эканлиги келиб чиқади.

Юқориди исбот қилинган фикрларни қуйидаги теорема кўринишида ифодалаймиз:

3-теорема (лимит мавжудлигининг Коши шарти). Ҳақиқий сонлар кетма-кетлиги $\{x_n\}$ чекли лимитга эга бўлиши учун у фундаментал кетма-кетлик бўлиши зарур ва етарлидир.

5-БОБ.

ФУНКЦИЯ. ФУНКЦИЯНИНГ ЛИМИТИ

1-§. ФУНКЦИЯ ТУШУНЧАСИ

Фараз қилайлик, бизга E, F тўпламлар ва E нинг ҳар бир x элементига F нинг бирор y элементини мос қўювчи қуйидаги f акслантириш берилган бўлсин:

$$f: E \to F. \qquad (1)$$

Агар $E \subset R_1$ ва $F \subset R_1$ бўлса, f бир ўзгарувчили функция, агар $E \subset R^n, F \subset R_1$ бўлса, f ни кўп ўзгарувчили функция ва агар $E \subset R^n, F \subset R^n$ бўлса, f ни вектор функция деб атаймиз.

Функцияни $y = f(x)$ кўринишда ҳам ёзиш қабул қилинган. E тўплам f функциянинг аниқланиш ёки берилиш соҳаси, F эса f функциянинг қийматлар соҳаси дейилади. Аниқланиш соҳаси учун $D(f)$ ва қийматлар соҳаси учун $R(f)$ белгилашлар ишлатилади. Агар $x \in E$ бўлса, у ҳолда y ёки $f(x)$ функциянинг x нуқтадаги қийматини билдиради.

Агар x E тўпламнинг ўзгарувчиси бўлса, x ни эркли ўзгарувчи ёки аргумент деб аташади.

Функцияни белгилаш учун яна $\Phi, \Psi, \varphi, \phi, \psi, \ldots$ ҳарфлар, аргументни белгилаш учун $\theta, \tau, \omega, \xi, \zeta, \ldots$ ҳарфлар ишлатилади.

Биз бу ва кейинги уч бобда асосан бир ўзгарувчили функцияларни ўрганамиз.

Агар $f: E_1 \to E_2$ ва $\varphi: E_2 \to E_3$ бўлса, у ҳолда, $Z = \varphi(f(x))$ функция мураккаб функция ёки f ва φ функцияларнинг суперпозицияси деб аталади. Мураккаб функция к та функция суперпозициясидан иборат бўлиши мумкин:

$$z = f_1(f_2(\ldots(f_к(x))\ldots)).$$

Функцияларга кўп мисоллар келтириш мумкин. Масалан, r радиусли доира юзи $S = \pi r^2$ r радиуснинг функциясидир. Радиус масофа сифатида фақат мусбат қийматлар қабул қилиши мумкин бўлгани учун бу функциянинг аниқланиш соҳаси $R_+ = (0, \infty)$ бўлади. Агар $S = \pi r^2$ формулани геометрик маъносисиз қарасак, у ҳолда, бу функциянинг аниқланиш соҳаси R_1 бўлади.

Мисоллар:

1) $y = \sqrt{1 - x^2}, \ D(f) = [-1, 1],$

2) $y = \lg(1 + x), \ D(f) = (1, \infty),$

3) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, \ D(f) = R \setminus \{1\},$

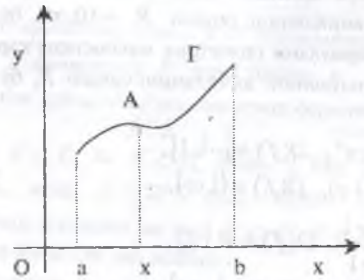
4) $y = \arcsin x, \ D(f) = [-1, 1].$

1) ва 2)-мисоллардаги функциялар мураккаб функциялардир, чунки 1) функция $y = \sqrt{u}, u = 1 - v$, $v = x^2$ функцияларнинг, 2) функция эса $y = \lg u, u = 1 + x$ функцияларнинг суперпозициясидан иборат.

Келтирилган мисолларда функция формулалар ёрдамида берилган, бундан функция фақат формулалар билан берилар экан, деган хулоса келиб чиқмайди. Масалан, x нинг ҳар бир қийматига унинг бутун қисмини мос қўювчи $E(x)$ функциянинг ҳар бир қийматини кўрсатолсак ҳам: $E(1) = 1, E(2{,}3) = 2, E(\pi) = 3$ ва ҳ.к., уни ҳеч қандай формула билан ифодалаб бўлмайди.

$(x, f(x))$ жуфтлик тузиб олиб, координаталар текислигидан бу жуфтликка координаталари x ва $f(x)$ бўлган нуқтани мос қўямиз. Барча $x \in D$ ларга мос қўйилган бундай нуқталарнинг геометрик ўрнини $f(x)$ функциянинг графиги деб атаймиз.

Функциянинг кўп хусусиятлари: аниқланиш соҳаси, ўсиш ва камайиш оралиқлари, узилиш нуқталари атрофида ва чексизликда ўзини тутиши, графикда яққол кўрингани учун функциянинг графигини қуриш ва ундан фойдаланиш амалиётда жуда муҳим рол ўйнайди.



61-расм.

Айрим ҳолларда функция график кўринишда берилиши ҳам мумкин. Масалан, сейсмик изланишларда ишлатиладиган жиҳозлар сейсмик ўзгаришларни график кўринишда ифодалайди ёки тиббиётда ишлатиладиган кардиограмма асбоби юрак хуружи графигини чизиб беради ёки техникада кенг қўлланиладиган оциллограф асбоби ҳам бунга мисол бўлади.

Агар $f(x)$ функция бирор (a,b) оралиқда берилган бўлиб, $\alpha\neq0$ ихтиёрий ўзгармас сон бўлса, у ҳолда, α ва f функциялар ёрдамида: 1)$\alpha f(x)$, 2) $f(x)+\alpha$, 3) $f(x-\alpha)$,4) $f(\alpha x)$ функцияларни тузиб олиш мумкин. 1- ва 2-функциялар (a,b) оралиқда аниқланган, лекин 1-функция графигининг ординатаси $f(x)$ ординатага нисбатан α маротаба узайтирилган. 2-функциянинг графиги, агар $\alpha>0$ бўлса, $f(x)$ функциянинг графигини α миқдор тепага ва агар $\alpha<0$ бўлса, $|\alpha|$ миқдор пастга суриш натижасида ҳосил бўлади. 3-функциянинг графиги эса $f(x)$ функциянинг графигини α миқдор

ўнгга, агар $\alpha>0$ бўлса ва агар $\alpha<0$ бўлса, шу графикни $|\alpha|$ миқдор чапга суриб ҳосил қилинади. Ва ниҳоят, 4-функция $\left(\frac{a}{\alpha},\frac{b}{\alpha}\right)$ интервалда аниқланган; унинг графиги f функция графигини α маротаба сиқиш натижасида ҳосил бўлади.

Агар f функция нолга нисбатан симметрик бўлган тўпламда аниқланган бўлса ва шу тўпламнинг барча нуқталари учун $f(-x)=f(x)$ ёки $f(-x)=-f(x)$ муносабат ўринли бўлса, бу функцияни мос равишда жуфт ёки тоқ функция деб атаймиз.

Таърифдан кўриниб турибдики, жуфт функциянинг графиги y ўқига нисбатан симметрик, тоқ функциянинг графиги эса координата бошига нисбатан симметрик бўлади. Масалан, $x^{2k}, \cos x, \sqrt{1-x^2}, f(|x|)$ — жуфт функциялар, $x^{2k+1}, \sin x, x\sqrt{1+x^2}$ функциялар эса тоқ функциялардир.

Жуфт ёки тоқ функциялар кўпайтмаси жуфт, жуфт ва тоқ функциялар кўпайтмаси эса тоқ функция бўлади.

Ҳар қандай функция жуфт ёки тоқ бўлиши шарт эмас. Масалан, x^2-x+1 тоқ ҳам, жуфт ҳам эмас.

f функция E тўпламда ўсувчи (камаймайдиган) функция дейилади, агар ҳар қандай $x_1,x_2\in E,\ x_1<x_2$ лар учун $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)\leq f(x_2))$ муносабат ўринли бўлса.

f функция E тўпламда камаювчи (ўсмайдиган) функция дейилади, агар ҳар қандай $x_1,x_2\in E,\ x_1<x_2$ лар учун $f(x_1)>f(x_2)$ $(f(x_1)\geq f(x_2))$ муносабат ўринли бўлса.

f функция E тўпламда чегараланган дейилади, агар ҳар қандай $x\in E$ учун $|f(x)|\leq M$ муносабатни қаноатлантирадиган мусбат M сони топилса, акс ҳолда f функция E тўпламда чегараланмаган дейилади.

Масалан, $y = \frac{1}{x}$ функция камаювчи ва $(0,\infty)$ оралиқда чегараланмаган, лекин $(1,\infty)$ оралиқда чегараланган.

Агар f функция учун шундай T сон мавжуд бўлсаки, барча $x \in D(f)$ лар учун $x + T \in D(f)$ бўлиб, $f(x)=f(x+T)$ муносабат ўринли бўлса, бу функцияни даврий функция, T ни унинг даври деб атаймиз. Масалан, $\sin x, \cos x$ даври 2π бўлган даврий функциялардир.

Функция қуйидаги жадвал кўринишида ҳам берилиши мумкин:

x	x_1	x_2	..	x_n
y	y_1	y_2	..	y_n

Демак, функция аналитик кўринишда, яъни арифметик, алгебраик ва тригонометрик амаллар билан ифодаланувчи формулалар ёки график билан ё бўлмаса, жадвал кўринишда берилиши мумкин экан.

Берилган функция тўғрисида тўла тасаввурга эга бўлиш учун унинг, масалан, аналитик ифодаси етарли бўлмаслиги мумкин, шу сабабли, графиги қурилади, агар функция график ёки жадвал кўринишида берилган бўлса, унинг аналитик ифодасини тузиш зарурияти туғилиши мумкин, бу эса анча мураккаб масала. Бунга доир масалаларни биз кейинги бобларда батафсил кўриб чиқамиз.

Биз шу пайтгача бир қийматли функцияларни кўрдик, лекин f функция $x \in E$ га y нинг биттадан ошиқ қийматларини ҳам мос қўйиши мумкин, бундай функцияни кўп қийматли функция деб атаймиз. Масалан, $\arcsin x, \arccos x, \mathrm{arctg} x$ лар шундай функциялар жумласига киради:

$$y = (-1)^k \arcsin x + k\pi,\ y = \pm \arccos x + 2k\pi,$$

$$y = (-1)^k \mathrm{arctg} x + k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

x ва y лар ўртасидаги муносабат қуйидаги кўринишда берилиши ҳам мумкин:

$$F(x, y) = 0. \qquad (2)$$

Бундай кўринишда берилган функцияни ошкормас функция, (2) ни эса унинг тенгламаси деб атаймиз. Масалан,

$$x^2 + y^2 = r^2$$

айлананинг тенгламаси ошкормас функцияга мисол бўлади. У ошкор бўлмаган ҳолатда битта икки қийматли

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2},\ (-r \leq x \leq r);$$

функцияни ёки иккита бир қийматли $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ ва $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ функцияларни аниқлайди. Уларнинг графиклари биргаликда маркази координаталар бошида бўлган r радиусли айланани ифодалайди.

Ошкормас функциянинг графиги координаталари (2)нинг ечимларидан тузилган нуқталарнинг геометрик ўрнидан иборат бўлади.

Агар (2) ни юқорида келтирилган мисолдагидек, бирор ўзгарувчига нисбатан ечсак, $y = \varphi(x)$ ёки $x = \psi(y)$ кўринишдаги функцияни ҳосил қиламиз. Бунда $x = \psi(y)$ функцияни $y = \varphi(x)$ функцияга тескари функция деб атаймиз.

2-§. ФУНКЦИЯНИНГ ЛИМИТИ

2.1. Таърифлар. Чексизликка интилувчи функциялар. Чегараланган функциялар

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция a нуқтанинг ўзида бўлмаса ҳам унинг бирор атрофида аниқланган бўлсин. Агар x a га, чексиз кўп элементлари a нинг шу атрофига тегишли бўлган ҳар қандай $\{x_n\}$ кетма-кетлик бўйлаб интилганда ҳам $f(x)$ нинг уларга мос келувчи қийматлари кетма-кетлиги

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ldots,f(x_n),\ldots \qquad (1)$$

фақат A лимитга эга бўлса, A ни $f(x)$ функциянинг $x \to a$ даги лимити деб аталади ва

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \qquad (2)$$

кўринишда ёзилади.

1-*мисол.* $f(x)=x^2-2x+4$ функциянинг $x \to 2$ даги лимитини топайлик. 2 га интилувчи ихтиёрий x_n кетма-кетликни қарайлик. У ҳолда, кетма-кетлик лимитининг хоссаларига кўра

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(x_n{}^2 - 2x_n + 4) = \lim_{x\to 2} x_n{}^2 -$$

$$-2\lim_{x\to 2} x_n + 4 = 4 - 4 + 4 = 4$$

Демак, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$.

2-*мисол.* $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ функция барча $x \neq 0$ ларда аниқланган. Бу функциянинг $x \to 0$ даги лимитини аниқлайлик.

0 га интилувчи қуйидаги кетма-кетликларни кўрайлик:

$$\left\{x_n^{I}\right\} = \left\{\frac{2}{(4n+1)\pi}\right\},\quad \left\{x_n^{I}\right\} = \left\{\frac{1}{2n\pi}\right\},$$

у ҳолда,

$$f(x_n^{I}) = \cos\frac{(4n+1)\pi}{2} = 0,$$

$$f(x_n^{II}) = \cos 2n\pi = 1.$$

Берилган $f(x)$ функция 0 га интилувчи икки хил кетма-кетлик учун иккита ҳар хил лимитга эга бўлди. Демак, берилган функция $x \to 0$ да лимитга эга эмас.

Функция лимитига қуйидагича таъриф берса ҳам бўлади.

Таъриф. *Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топилсаки,*

$$|x-a| < \delta$$

бўлганда,

$$|f(x)-A| < \varepsilon$$

муносабат ўринли бўлса, у ҳолда A сон $f(x)$ функциянинг $x \to a$ даги лимити дейилади.

Функция лимитига берилган бу икки таъриф ўзаро эквивалент.

Ҳақиқатан фараз қилайлик, A сон $f(x)$ функциянинг биринчи таъриф бўйича $x \to a$ даги лимити бўлсин ва у иккинчи таъриф маъносида лимит бўлмасин. У ҳолда шундай ε_0 мавжудки, унинг учун керакли δ ни топиб бўлмайди, яъни ҳар қандай δ учун $0 < |x-a| < \delta$ бўлса ҳам камида битта шундай x_δ топиладики, унинг учун

$$|f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon_0$$

бўлади.

Энди, агар $\delta = \frac{1}{к}$ (к=1,2,3,….) деб, уларнинг ҳар бирига мос $0 < |x_к - a| < \frac{1}{к}$ ва $|f(x_к) - A| \geq \varepsilon_0$ (к=1,2,3,….) муносабатларни қаноатлантирувчи барча $x_к = x_\delta$ ларни топсак, улардан $x_к \to a$ бўлса ҳам, $f(x_к)$ ларнинг A га интилмаслиги келиб чиқади. Демак, қилинган фараз хато, яъни A сон $f(x)$ функциянинг иккинчи таъриф бўйича ҳам лимитидир.

Энди тескарисини исботлайлик, яъни A сон $f(x)$ функциянинг иккинчи таъриф бўйича лимити бўлсин. У ҳолда, x нинг қийматларидан тузилган a га интилувчи $\{x_n\}$ кетма-кетлик мавжуд. Берилган ε учун иккинчи таърифда сўралган δ ни топайлик. Энди, шундай натурал n_0 ни танлаймизки, $n > n_0$ бўлганда

$|x_n - a| < \delta$ бўлсин. У ҳолда, иккинчи таърифга кўра, $n > n_0$ лар учун $|f(x_n) - A| < \varepsilon$ бўлади. Бундан $\{f(x_n)\}$ кетма-кетликнинг A га интилиши келиб чиқади. $\{x_n\}$ кетма-кетлик ихтиёрий бўлгани учун, A сон $f(x)$ функциянинг биринчи таъриф маъносида ҳам лимити бўлади.

1-*мисол.* $f(x) = x^2$ функциянинг $x \to 1$ даги лимити 1 эканлигини кўрсатайлик.

Ҳақиқатан $\varepsilon > 0$ ихтиёрий сон бўлсин. 1 нинг (1/2, 3/2) атрофини қарайлик. Бу атрофнинг ихтиёрий x нуқтаси учун

$$|x^2 - 1| = |x - 1||x + 1| \le \frac{5}{2}|x - 1|.$$

Агар $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\varepsilon\right\}$ десак, у ҳолда, $|x - 1| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x лар учун

$$|x^2 - 1| \le \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5}\varepsilon = \varepsilon.$$

Буни биринчи таъриф бўйича исбот қилса ҳам бўлади. Масалан, агар $x_n \to 1$ ихтиёрий кетма-кетлик бўлса, лимитларнинг хоссасига кўра,

$$\lim x_n^{\ 2} = \lim x_n \cdot \lim x_n = 1 \cdot 1 = 1.$$

2-*мисол.* $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ функция $D(f) = R \setminus \{2\}$ да аниқланган. Унинг $x \to 2$ даги лимитини топайлик. $D(f)$ нинг ихтиёрий x нуқтаси учун $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$.

Агар $\{x_n\} \subset D(f)$ 2 га интилувчи ихтиёрий кетма-кетлик бўлса, у ҳолда,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n^{\ 2} - 4}{x_n - 2} = \lim_{n \to \infty}(x_n + 2) = 2 + 2 = 4.$$

$f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ ва $\varphi(x) = x + 2$ ҳар хил функциялар бўлса ҳам (чунки уларнинг аниқланиш соҳаси ҳар хил), уларнинг $x \to 2$ даги лимитлари тенг экан.

Агар $f(x)$ бирор $K > 0$ учун $|x| > K$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x лар учун аниқланган бўлса ва ихтёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай $M > K$ сон топилсаки, $|x| > M$ бўлган барча x лар учун $|f(x) - A| < \varepsilon$ бўлса, у ҳолда, A сон $f(x)$ функциянинг $x \to \infty$ даги лимити деб аталади. Буни:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

кўринишда ёзамиз.

Бундай лимитга таърифни кетма-кетлик тилида берса ҳам бўлади.

Агар $\{x_n\}$ ∞ га интилувчи ихтиёрий кетма-кетлик

$$\lim_{x_n \to \infty} f(x_n) = A$$

бўлса, у ҳолда, A сон $f(x)$ функциянинг $x \to \infty$ даги лимити деб аталади.

Бу икки таъриф эквивалентлигининг исботи юқорида чекли a учун бажарилгани каби бўлади.

Умуман, $f(x)$ функциянинг чекли a учун $x \to a$ даги ва $x \to \infty$ даги лимитларининг хоссалари бир хил бўлгани учун бу хоссаларни иккала ҳолга битта қилиб берамиз. Айрим ҳоллардагина зарурият туғилса, a нинг чекли, $+\infty$ ёки $-\infty$ эканлигини кўрсатамиз.

a нинг ихтиёрий атрофини U_a билан белгилайлик. Агар $a = \infty$ ($+\infty$ ёки $-\infty$) бўлса, a нинг атрофи деб, етарлича катта $M > 0$ учун

$$|x| > M \ (x > M \text{ ёки } x < -M)$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x лар тўпламини тушунамиз. Айтиш лозимки, иккита $U_a^{\ 1}$ ва $U_a^{\ 2}$ атрофларнинг кесишмаси ҳам бирор U_a атроф бўлади.

Агар $f(x)$ функция a нинг бирор U_a атрофида чегараланмаган бўлса, яъни ҳар қандай $M > 0$ учун ва барча $x \in U_a$ лар учун $|f(x)| > M$ бўлса,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

деб ёзамиз. Бундай функцияларни $x \to a$ даги чексиз катта миқдор деймиз.

Эслатма. Агар $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ бўлиб, U_a да $f(x) > 0$ ($f(x)<0$) бўлса, у ҳолда, $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ ($\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$) деб ёзилади.

2.2. Функция лимитлари ҳақидаги асосий теоремалар

1-теорема. *Агар* $\lim_{x\to a} f(x) = A$, *(*A *- чекли сон) бўлса, у ҳолда* $f(x)$ *бирор* U_a *атрофда чегараланган бўлади.*

Исботи. Теорема шартидан, масалан, ε=1 учун шундай U_a атроф мавжудки, унинг барча нуқталари учун

$$1 > \left|f(x) - A\right| \geq |f(x)| - |A|$$

эканлиги келиб чиқади. Бундан, U_a нинг барча нуқталари учун

$$|f(x)| \leq 1 + |A|$$

ни ҳосил қиламиз. Теорема исбот бўлди.

2-теорема. *Агар* $\lim_{x\to a} f(x) = A$, *(*A *- чекли сон) бўлса, у ҳолда шундай* U_a *атроф мавжудки, барча* $x \in U_a$ *лар учун*

$$|f(x)| > \frac{|A|}{2}.$$

Агар $A > 0$ бўлса, $f(x) > A/2$, $A < 0$ бўлса, $f(x) < A/2$.

Теореманинг исботи 2.1-§ даги 3-хоссанинг исботи каби бажарилади.

3-теорема. *Агар* $\lim_{x\to a} f_1(x) = A_1$, $\lim_{x\to a} f_2(x) = A_2$, *ва бирор* U_a *атрофда* $f_1(x) \leq f_2(x)$ *бўлса, у ҳолда,* $A_1 \leq A_2$ *бўлади.*

Исботи. Фараз қилайлик, $x_n \to a$ бирор кетма-кетлик бўлсин. Шундай n_0 топиладики, $n > n_0$ лар учун $x_n \in U_a$ бўлади. Теорема шартига кўра бундай x_n лар учун $f_1(x_n) \leq f_2(x_n)$ бўлади. У ҳолда, 2.1-§ даги 4-хоссага кўра, $A_1 \leq A_2$.

4-теорема. *Агар* $\lim_{x\to a} f_1(x) = A$, $\lim_{x\to a} f_2(x) = A$, *ва бирор* U_a *атрофда* $f_1(x) \leq \varphi(x) \leq f_2(x)$ *бўлса, у ҳолда,*

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = A.$$

Исботи. Фараз қилайлик, $x_n \to a$ бирор кетма-кетлик бўлсин. Шундай n_0 топиладики, $n > n_0$ лар учун $x_n \in U_a$ бўлади. Теорема шартига кўра, бундай x_n лар учун $f_1(x_n) \leq \varphi(x_n) \leq f_2(x_n)$ бўлади. У ҳолда 2.1-§ даги 6-хоссага кўра, $\lim_{x_n\to a} \varphi(x_n) = A$. $\{x_n\}$ кетма-кетлик ихтиёрий бўлгани учун, $\lim_{x\to a} \varphi(x) = A$ бўлади.

5-теорема. *Чекли* $\lim_{x\to a} f(x) = A$ *лимитнинг мавжуд бўлиши учун* $f(x)$ *нинг* a *нуқтанинг ўзида бўлмаса ҳам, унинг атрофида аниқланганлиги ва ҳар қандай* $\varepsilon>0$ *учун унинг шундай* U_a *атрофи мавжуд бўлиши зарур ва етарлики, ихтиёрий* $x', x'' \in U_a, x', x'' \neq a$ *лар учун*

$$\left|f(x') - f(x'')\right| < \varepsilon$$

бўлсин.

Зарурлиги. Фараз қилайлик, $\lim_{x\to a} f(x) = A$ чекли бўлсин. У ҳолда, $f(x)$ функция a нуқтанинг бирор атрофида аниқланган бўлади. Бундан ташқари, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай U_a атроф мавжудки, агар

$x \in U_a$, $x \neq a$, бўлса, $|f(x)-A|<\varepsilon/2$ бўлади. Агар $x', x'' \in U_a, x', x'' \neq a$ бўлса, у ҳолда,

$$|f(x')-f(x'')| \leq |f(x')-A|+|A-f(x'')| < \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

Етарлилиги. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция a нуқтанинг ўзида бўлмаса ҳам, унинг атрофида аниқланган ва ҳар қандай $\varepsilon>0$ учун унинг шундай U_a атрофи мавжуд бўлсинки, ихтиёрий $x', x'' \in U_a, x', x'' \neq a$ лар учун

$$|f(x')-f(x'')| < \varepsilon$$

бўлсин. a га интилувчи бирор $\{x_n\}$, $x_n \neq a$ кетма-кетликни олайлик. Кетма-кетликлар учун Коши шартига кўра (қаранг 4-боб, 2.8-§), ҳар қандай $\varepsilon>0$ учун шундай $n_0=n_0(\varepsilon)$ сон топиладики, $n,m>n_0$ лар учун

$$|x_n-x_m| < \varepsilon,$$

яъни $x_n, x_m \in U_a$. У ҳолда, $n,m>n_0$ лар учун

$$|f(x_n)-f(x_m)| < \varepsilon,$$

яъни $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик Коши шартини қаноатлантиради ва шу сабабли лимитга эга. Энди ҳар хил $\{x_n\}$ кетма-кетликлар учун $\{f(x_n)\}$ кетма-кетликлар бир хил лимитга интилишини кўрсатиш қолди.

Фараз қилайлик, $x_n \to a$, $x'_n \to a$; $x_n, x'_n \neq a$ $(n=1,2,\ldots)$ бўлсин. У ҳолда, юқорида исбот қилинганига асосан, шундай A ва A'лар мавжудки, $f(x_n) \to A$ ва $f(x'_n) \to A'$ бўлади. Янги a га интилувчи $\{x_1, x'_1, x_2, x'_2, \ldots, x_n, x'_3, \ldots\}$ кетма-кетликни тузамиз. У ҳолда юқорида исботланганига кўра, унга мос келувчи $\{f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), \ldots, f(x_n), f(x'_n), \ldots\}$ кетма-кетлик ҳам чекли лимитга эгадир. Бу — $A=A'$ бўлсагина мумкин. Теорема исбот бўлди.

6-теорема. *Агар* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ *ва* $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)=B$, *$(A, B$ — чекли сонлар) бўлса, у ҳолда*

1^0. $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\pm\varphi(x)]=A\pm B$;

2^0. $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\varphi(x)]=A\ B$;

3^0. Агар $B \neq 0$ бўлса, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{A}{B}$.

Исботи. 1^0 ни исбот қиламиз, 2^0 ва 3^0 нинг исботлари шунга ўхшаш бажарилади.

Ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун a нинг шундай U_a, V_a атрофлари мавжудки, барча $x \in U_a$ лар учун $|f(x)-A|<\varepsilon/2$ ва барча $x \in V_a$ лар учун $|\varphi(x)-B|<\varepsilon/2$ бўлади. У ҳолда, барча $x \in U_a \cap V_a$ лар учун

$$|[f(x)\pm\varphi(x)]-(A\pm B)|=|[f(x)-A]\pm[\varphi(x)-B]| \leq$$
$$\leq |f(x)-A|+|\varphi(x)-B| < \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

Бундан ташқари, қуйидаги икки муносабат ҳам ўринли:

1. Агар $f(x)$ чегараланмаган функция ва $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)=0$ бўлса, у ҳолда,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}=\infty.$$

2. Агар $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ ва $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)=\propto$ (A — чекли сон) бўлса, у ҳолда,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}=0.$$

Айрим ҳолларда $f(x)$ функция a нинг ўзида эмас, балки унинг бирор $(a,b]$ ($[b,a)$) атрофида аниқланган бўлиши мумкин, у ҳолда функциянинг $x \to a$ даги лимитини бир ёқламали лимити деб, хусусан, $x \in (a,b]$

$x \in U_a$, $x \neq a$, бўлса, $|f(x)-A|<\varepsilon/2$ бўлади. Агар $x', x'' \in U_a, x', x'' \neq a$ бўлса, у ҳолда,

$$|f(x')-f(x'')| \leq |f(x')-A|+|A-f(x'')| < \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

Етарлилиги. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция a нуқтанинг ўзида бўлмаса ҳам, унинг атрофида аниқланган ва ҳар қандай $\varepsilon>0$ учун унинг шундай U_a атрофи мавжуд бўлсинки, ихтиёрий $x', x'' \in U_a, x', x'' \neq a$ лар учун

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

бўлсин. a га интилувчи бирор $\{x_n\}$, $x_n \neq a$ кетма-кетликни олайлик. Кетма-кстликлар учун Коши шартига кўра (қаранг 4-боб, 2.8-§), ҳар қандай $\varepsilon>0$ учун шундай $n_0=n_0(\varepsilon)$ сон топиладики, $n, m>n_0$ лар учун

$$|x_n-x_m|<\varepsilon,$$

яъни $x_n, x_m \in U_a$. У ҳолда, $n, m>n_0$ лар учун

$$|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon,$$

яъни $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик Коши шартини қаноатлантиради ва шу сабабли лимитга эга. Энди ҳар хил $\{x_n\}$ кетма-кетликлар учун $\{f(x_n)\}$ кетма-кетликлар бир хил лимитга ингилишини кўрсатиш қолди.

Фараз қилайлик, $x_n \to a$, $x'_n \to a$; $x_n, x'_n \neq a$ $(n=1,2,\ldots)$ бўлсин. У ҳолда, юқорида исбот қилинганига асосан, шундай A ва A'лар мавжудки, $f(x_n)\to A$ ва $f(x'_n)\to A'$ бўлади. Янги a га интилувчи $\{x_1, x'_1, x_2, x'_2, \ldots, x_n, x'_3, \ldots\}$ кетма-кетликни тузамиз. У ҳолда юқорида исботланганига кўра, унга мос келувчи $\{f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), \ldots, f(x_n), f(x'_n), \ldots\}$ кетма-кетлик ҳам чекли лимитга эгадир. Бу — $A=A'$ бўлсагина мумкин. Теорема исбот булди.

6-теорема. *Агар* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ *ва* $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=B$, *($A$, B — чекли сонлар) бўлса, у ҳолда*

1^0. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm\varphi(x)]=A\pm B$;

2^0. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\varphi(x)]=A\,B$;

3^0. Агар $B\neq 0$ *бўлса,* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{A}{B}$.

Исботи. 1^0 ни исбот қиламиз, 2^0 ва 3^0 нинг исботлари шунга ўхшаш бажарилади.

Ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун a нинг шундай U_a, V_a атрофлари мавжудки, барча $x\in U_a$ лар учун $|f(x)-A|<\varepsilon/2$ ва барча $x\in V_a$ лар учун $|\varphi(x)-B|<\varepsilon/2$ бўлади. У ҳолда, барча $x\in U_a\cap V_a$ лар учун

$$|[f(x)\pm\varphi(x)]-(A\pm B)|=|[f(x)-A]\pm[\varphi(x)-B]|\leq$$
$$\leq|f(x)-A|+|\varphi(x)-B|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

Бундан ташқари, қуйидаги икки муносабат ҳам ўринли:

1. Агар $f(x)$ чегараланмаган функция ва $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ бўлса, у ҳолда,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\infty.$$

2. Агар $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ ва $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\propto$ (A — чекли сон) бўлса, у ҳолда,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0.$$

Айрим ҳолларда $f(x)$ функция a нинг ўзида эмас, балки унинг бирор $(a,b]$ ($[b,a)$) атрофида аниқланган бўлиши мумкин, у ҳолда функциянинг $x\to a$ даги лимитини бир ёқламали лимити деб, хусусан, $x\in(a,b]$

бўлса, ўнг лимити ва агар $x \in [b,a)$ бўлса, чап лимити деб аталади. Улар мос равишда $f(a+0)$ ва $f(a-0)$ кўринишда белгиланади.

Агар $f(x)$ функция (a,b) интервалда аниқланган бўлса, у ҳолда, a нуқтада ўнг $f(a+0)$ лимити ва b нуқтада чап $f(b-0)$ лимити маънога эгадир.

Эслатма. $f(a+0)=f(a-0)=A$ тенглик $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ лимитнинг мавжудлигига эквивалент.

1-*мисол.* $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$ эканлигини исботланг.

Ҳақиқатан ҳар қандай x учун $|\sin x|<|x|$ бўлгани учун ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун $\delta=\varepsilon$ десак, $|x-0|<\delta$ бўлганда,

$$|\sin x-0| = y < |x| = |x-0| < \delta = \varepsilon$$

бўлади.

2-*мисол.* $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ эканлигини исботланг.

Аввалги мисолдагидек, ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун $\delta=\sqrt{2\varepsilon}$ десак, $|x-0|<\delta$ бўлганда,

$$|\cos x-1| = |\cos x-\cos 0^0| = \left|2\sin^2\frac{x}{2}\right| <$$

$$< 2\cdot\left|\left(\frac{x-0}{2}\right)\right|^2 = \frac{1}{2}|x-0|^2 < \frac{1}{2}\delta^2=\varepsilon$$

бўлади.

2.3. 1-ажойиб лимит

Келажакда кўп ишлатиладиган қуйидаги лимитни

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad (1)$$

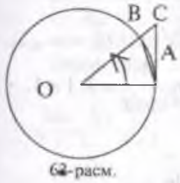
1-ажойиб лимит деб аташади. Буни исботлашдан аввал, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ лар учун $\sin x<x<tgx$ бўлишини кўрсатайлик. Бунинг учун R радиусли доирада AOB ўткир бурчак,

AB ватар ва A нуқтада ўтказилган AC уринмани кўрайлик (қаранг, 62-расм). Расмдан кўринадики,

$$S_{\Delta AOB} < S_{\text{сек}AOB} < S_{\Delta AOC}.$$

Бунда:

$$\frac{1}{2}R^2\cdot\sin x < \frac{1}{2}R^2\cdot x < \frac{1}{2}R^2\cdot tgx.$$



62-расм.

Агар буларни $\dfrac{1}{2}R^2$ га бўлиб юборсак, $\sin x<x<tgx$ ни ҳосил қиламиз. $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ эканлигини эътиборга олиб, охирги тенгсизликни $\sin x$ га бўлиб юборсак,

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x.$$

Бундан

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x$$

келиб чиқади. Лекин

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\sin\frac{x}{2}<x.$$

Шунинг учун

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<x.$$

Бундан ўз навбатида,

$$0<\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<|x|$$

келиб чиқади. Охирги тенгсизликлар $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ қиймматлар учун ҳам ўринлидир. Энди, агар ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун $\delta=\varepsilon$ десак, $|x-0|=|x|<\delta$ бўлганда, $\left|\dfrac{\sin x}{x}-1\right|<\varepsilon$ бўлади. (1) исбот бўлди.

1-*мисол.*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\cdot\alpha=\alpha\cdot$$

2-*мисол.*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

3-*мисол.*

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x.}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1.$$

4-*мисол.*

$$\lim_{x\to\infty}x\cdot\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1,$$

бу ерда, $y=\frac{1}{x}$ деб белгиладик, $x\to\infty$ да $y\to 0$ бўлади.

2.4. 2-ажойиб лимит

Биз аввалги бобнинг 2.6-§ ида қуйидаги лимитни кўрган эдик:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\,. \tag{2}$$

Лекин бу лимит ∞ га интилувчи ҳар қандай $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун ҳам ўринли.

Ҳақиқатан фараз қилайлик, $x_n\to+\infty$ ихтиёрий кетма-кетлик ва $[x_n]=\kappa_n$ x_n нинг бутун қисми бўлсин.

У ҳолда, $\kappa_n\le x_n<\kappa_n+1\le x_n+1<\kappa_n+2$ ва

$$\left(1+\frac{1}{\kappa_n+1}\right)^{\kappa_n+1}<\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n+1}<\left(1+\frac{1}{\kappa_n}\right)^{\kappa_n+2}<e\left(1+\frac{1}{\kappa_n}\right)^2.$$

$x_n\to+\infty$ да $\kappa_n\to+\infty$, шунинг учун юқоридаги тенгсизликнинг биринчи ва охирги ифодалари e га интилади. У ҳолда,

$$\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n+1}\to e.$$

$1+\frac{1}{x_n}\to 1$ эканлигини эътиборга олсак, (2) ни $x_n\to+\infty$ бўлган ҳол учун исбот қилган бўламиз.

Энди, агар $x_n\to-\infty$ бўлса, у ҳолда, $x'_n=-x_n\to+\infty$ ва

$$\lim_{x_n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}=\lim_{x'_n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x'_n}\right)^{-x'_n}=\lim_{x'_n\to+\infty}\left(\frac{x'_n}{x'_n-1}\right)^{x'_n}=$$

$$=\lim_{x'_n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x'_n-1}\right)^{x'_n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{x'_n-1}\right)\right]=e\cdot$$

Демак,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\cdot \tag{3}$$

5-*мисол.*

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e.$$

Бу тенглик (3) дан $\frac{1}{x}=u$ алмаштириш натижасида ҳосил бўлади.

6-*мисол.* Ҳар қандай α учун

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x=e^\alpha,\ \lim_{u\to 0}(1+\alpha u)^{\frac{1}{u}}=e^\alpha.$$

Агар α=0 бўлса, бу тенглик ихтиёрий x учун $1^x=1$ эканлигидан келиб чиқади. Энди α≠0 бўлсин. Агар $x\to\infty$ бўлса, $\frac{x}{\alpha}\to\infty$ ва

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{x/\alpha}\right]^\alpha=e^\alpha.$$

3-§. УЗЛУКСИЗ ФУНКЦИЯЛАР

3.1. Таърифлар

Функциянинг лимити билан боғлиқ бўлган олий математиканинг яна бир муҳим тушунчаси бу функциянинг узлуксизлик тушунчасидир. Биз бу ерда келтирадиган функциянинг узлуксизлигига бериладиган таъриф XIX асрда яшаб ижод қилган чехиялик Б. Больцано ва фарангистонлик О. Кошига тақалади.

Фараз қилайлик, бизга $f(x)$ функция ва бирор $x_0 \in D(f)$ нуқта берилган бўлсин.

Функциянинг $x \to x_0$ даги лимити тушунчасини киритганимизда x x_0 қийматни қабул қилиши шарт эмас, деб айтган эдик. Бу қиймат ҳатто $D(f)$ га тегишли бўлмаслиги ҳам мумкин, агар тегишли бўлганда ҳам лимитни ҳисоблаш жараёнида $f(x_0)$ қиймат эътиборга олинмаган эди.

Биз ҳозир айнан

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (1)$$

бўладиган ҳолларни кўрамиз.

Агар (1) тенглик бажарилса, $f(x)$ функция $x=x_0$ нуқтада узлуксиз, акс ҳолда функция қиймати бу нуқтада узулишга эга деймиз.

Функция узлуксизлигига қуйидагича таъриф берса ҳам бўлади:

x_0 нуқтага яқин жойлашган бошқа $x_1 \in D(f)$ нуқтани $x_1=x_0+\Delta x$ кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда Δx миқдор x нинг орттирмаси, деб аталади. x_1 нинг жойлашишига қараб Δx мусбат ёки манфий бўлиши мумкин. У ҳолда

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

миқдорни f функциянинг x_0 нуқтадаги Δx орттирмага мос келувчи орттирмаси, деб атаймиз.

Агар $\Delta x \to 0$ да лимитга ўтсак, (1) га асосан $\Delta f \to 0$ бўлади, яъни агар функция узлуксиз бўлса, у ҳолда

$\Delta x \to 0$ да $\Delta f \to 0$ бўлар экан. Акси ҳам ўринли, яъни агар $\Delta x \to 0$ да $\Delta f \to 0$ бўлса, у ҳолда,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

ёки

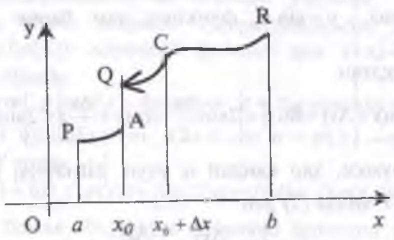
$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0+\Delta x)]-f(x_0)=0.$$

Бу ерда, $x=x_0+\Delta x$ десак, $\Delta x \to 0$ да $x \to x_0$ бўлади. Шунинг учун охирги тенгликни (1) кўринишда ёзса бўлади.

Демак, функция узлуксиз бўлиши учун $\Delta x \to 0$ да $\Delta f \to 0$ бўлиши зарур ва етарли экан.

Шу сабабли функциянинг узлуксизлигига қуйидагича таъриф берамиз:

$f(x)$ функцияни x_0 нуқтада узлуксиз деймиз, агар $f(x)$ x_0 нуқтанинг ўзида ва унинг бирор атрофида аниқланган бўлиб, унинг аргументнинг Δx орттирмасига мос келувчи Δf орттирмаси $\Delta x \to 0$ да нолга интилса.



63-расм.

Ҳар қандай функция учун ҳам $\Delta x \to 0$ да $\Delta f \to 0$ бўлавермайди (63-расмга қаранг).

Функция узлуксизлигига яна «ε,δ» тилида ҳам таъриф берса бўлади:

Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, $|x-x_0|< \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x лар учун $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $x=x_0$ нуқтада узлуксиз дейилади.

(1) тенгликни қуйидагича ёзиш ҳам мумкин:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x),$$

яъни узлуксиз функция белгиси остида лимитга ўтиш мумкин.

1-*мисол.* Ўзгармас $y=C$ функция x нинг ҳар қандай қиймати учун узлуксиз. Ҳақиқатан, агар x га функциянинг $y=C$ қиймати мос келса, $x+\Delta x$ га ҳам $y=C$ қиймат мос келади. Шунинг учун $\Delta f=0$ ва $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f=\lim\limits_{\Delta x\to 0} 0=0$ бўлади.

2-*мисол.* x нинг барча қийматлари учун $y=x$ функция ҳам узлуксиз, чунки $\Delta y=\Delta x$, шу сабабли $\Delta x\to 0$ да $\Delta y\to 0$ бўлади.

3-*мисол.* $y=\sin x$ функция ҳам барча x ларда узлуксиз.

Ҳақиқатан

$$|\Delta y| = |\sin(x+\Delta x)-\sin x| = \left|2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\right| \le 2\left|\sin(\frac{\Delta x}{2})\right|. \quad (2)$$

Маълумки, ҳар қандай α учун $|\sin\alpha|<|\alpha|$ (2.3-§ га қаранг). У ҳолда (2) дан

$$|\Delta y| \le 2\left|Sin\frac{\Delta x}{2}\right| \le 2\frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x|$$

ва ўз навбатида, бундан $\Delta x\to 0$ да $\Delta y\to 0$ эканлиги келиб чиқади.

3.2. Асосий теоремалар

1-теорема. *Агар f ва φ функциялар $x=x_0$ нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(x)\pm\varphi(x)$, $f(x)\cdot\varphi(x)$ ва агар*

$\varphi(x_0)\neq 0$ бўлса, $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ лар ҳам $x=x_0$ нуқтада узлуксиз бўлади.

Теорема исботи 2.2-§ даги 6-теоремадан келиб чиқади. Ҳақиқатан f ва φ функцияларнинг $x=x_0$ нуқтадаги узлуксизлиги $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ ва $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)$ тенгликларга тенг кучли бўлгани учун масалан, агар $\varphi(x_0)\neq 0$ бўлса,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)}$$

бўлади. Бу эса, ўз навбатида $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ нинг $x=x_0$ нуқтада узлуксиз эканлигини билдиради.

2-теорема. *Агар $f(u)$ функция $u=A$ нуқтада ва $u=\varphi(x)$ функция $x=x_0$ нуқтада узлуксиз, $\varphi(x_0)=A$ бўлса, у ҳолда уларнинг суперпозициясидан тузилган $F(x)=f(\varphi(x))$ мураккаб функция ҳам $x=x_0$ нуқтада узлуксиз бўлади.*

Исботи. $u=\varphi(x)$ функция $x=x_0$ нуқтада узлуксиз, $\varphi(x_0)=A$ бўлгани учун, $x\to x_0$ да $u=\varphi(x)\to\varphi(x_0)=A$ бўлади. У ҳолда,

$$\lim_{x\to x_0}F(x)=\lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))=\lim_{u\to A}f(u)=f(A)=f(\varphi(x_0))=F(x_0)$$

бўлади. Демак, берилган мураккаб функция узлуксиз экан.

4-*мисол.* n -даражали

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

кўпҳад $a_0,a_1,\ldots,a_n$ ўзгармас сонлар ва $y=x$ узлуксиз функциялар устида қўшиш, айириш ва кўпайтириш амалларини кетма-кет бажариш натижасида ҳосил бўлади. Шу сабабли 1-теоремага кўра, у барча x лар учун узлуксиздир.

64-расмда учала $f(x_0), f(x_0-0), f(x_0+0)$ сонлар тенг бўлмагани учун функция бу нуқтада ҳам чапдан, ҳам ўнгдан узилишга эга. 65-расмда $f(x_0)=f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, демак, функция бу нуқтада чапдан узлуксиз ва ўнгдан узилишга эга. 66-расмда эса $f(x_0-0)\neq f(x_0)=f(x_0+0)$, шу сабабли функция бу нуқтада чапдан узилишга эга ва ўнгдан узлуксиз. 67-расмда $f(x_0)\neq f(x_0-0)=f(x_0+0)$, бунда функция йўқотиладиган узилиш нуқтасига эга дейилади, чунки f ни узлуксиз функцияга айлантириш учун (1) тенгликни бажарилишини талаб қилиш етарли. 69-расмда $x=a$ нуқтада f аниқланмаган бўлса ҳам, $f(x_0-0)=f(x_0+0)$ бўлгани учун уни $x=a$ нуқтада аниқлаш мумкин, бунинг учун (1) нинг бажарилишини талаб қилиш кифоя. 68-расмдаги $x=a$ нуқта узилиш нуқтаси, функция бу нуқтада аниқланмаган.

Агар $f(x_0-0)$ ва $f(x_0+0)$ лимитларнинг камида биттаси чексиз ёки мавжуд бўлмаса, бу нуқтани 2-тур узилиш нуқтаси, деб атаймиз.

1-*мисол.*

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, x > 0, \\ 0, x = 0, \\ -1, x < 0, \end{cases}$$

функция $x\neq 0$ барча нуқталарда узлуксиз, $x=0$ нуқтада 1-тур узилишга эга, чунки $\operatorname{sign}(0+0)=1, \operatorname{sign}(0-0)=-1$.

2-*мисол.*

$$f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x}, x \neq 0, \\ 0, x = 0, \end{cases}$$

функция $x=0$ нуқтада чап ва ўнг лимитларга эга эмас (2.1-§ даги 2-мисолни қаранг), шу сабабли функция бу нуқтада 2- тур узилишга эга.

3-*мисол.*

$$y = \begin{cases} \frac{1}{x}, x \neq 0, \\ 2, x = 0, \end{cases}$$

функция $x \neq 0$ нуқталарда узлуксиз. $x=0$ нуқтада чап ва ўнг лимитлари чексизга тенг, шунинг учун бу нуқта 2-тур узилиш нуқтасидир.

5-теорема. *Агар f функция $[a,b]$ оралиқда камаймаса, у ҳолда a нуқтада ўнг лимит $f(a+0)$ ва b нуқтада чап лимити $f(b-0)$ мавжуд ва $f(a+0)\geq f(a)$, $f(b-0)\leq f(b)$.*

Исботи. Теорема шартига кўра барча $x\in[a,b]$ лар учун $f(x)\leq f(b)$.

$[a,b]$ оралиқдан b га интилувчи $\{x_n\}$ кетма-кетлик олайлик. Функциянинг бу кетма-кетлик элементларига мос келувчи қийматлари кетма-кетлиги $\{f(x_n)\}$ камаймайдиган ва юқоридан $f(b)$ билан чегараланган. Вейерштрасс теоремасига кўра бу кетма-кетлик $f(b)$ дан катта бўлмаган лимитга эга:

$$\lim_{\substack{x_n \to b \\ x_n < b}} f(x) \leq f(b).$$

Тенгсизликнинг чап томонида турган ифода таърифга кўра функциянинг b нуқтадаги чап лимити $f(b-0)$. Демак, $f(b-0)$ мавжуд ва $f(b-0)\leq f(b)$.

Функциянинг a нуқтадаги ўнг лимити $f(a+0)$ нинг мавжудлиги худди шундай исбот қилинади.

Натижа. Агар f функция $[a,b]$ оралиқда камаймаса, у ҳолда ихтиёрий $x\in[a,b)$ нуқтанинг ўнг лимити $f(x+0)\geq f(x)$ ва ихтиёрий $x\in(a,b]$ нуқтанинг чап лимити $f(x-0)\leq f(x)$ мавжуд.

Ҳақиқатан $x=a,b$ бўлган ҳол учун бу хулосалар 5-теоремадан келиб чиқади. Фараз қилайлик, $x\in(a,b)$ бўлсин. Теорема шартига кўра функция $[a,x]$ ва $[x,b]$ оралиқларда камаймайди. Шу сабабли 5-теоремага кўра $f(x-0)$, $f(x+0)$ лимитлар мавжуд ва $f(x-0)\leq f(x)\leq f(x+0)$.

Бу ерда, f функция x нуқтада узлуксиз бўлиши учун $f(x-0)=f(x+0)$ бўлиши зарур ва етарлидир.

Агар $f(x-0)<f(x+0)$ бўлса, функция бу нуқтада 1-тур узилишга эга бўлади.

3.4. Кесмада узлуксиз функция. Вейерштрасс теоремаси

f функциянинг бирор чекли оралиқнинг барча x нуқталарида аниқланганлигидан унинг шу оралиқда чегараланганлиги келиб чиқмайди. Масалан, $x \in (0,1]$ да $f(x)=\frac{1}{x}$, $f(0)=0$ функция $[0,1]$ оралиқда аниқланган, лекин бу оралиқда чегараланмаган, чунки x 0 га яқинлашган сайин функция қийматлари чексиз орта боради. Бундай ҳол юз беришига сабаб, функция 0 нуқтада узилишга эга.

Оралиқнинг барча нуқталарида узлуксиз бўлган функциялар учун бундай ҳолат ҳеч қачон юз бермайди.

Таъриф. *Агар f функция барча $x \in (a,b)$ нуқталарда узлуксиз, a нуқтада ўнгдан ва b нуқтада чапдан узлуксиз бўлса, у ҳолда f функция $[a,b]$ оралиқда узлуксиз дейилади.*

6-теорема. *Агар f функция $[a,b]$ оралиқда узлуксиз бўлса, у шу оралиқда чегараланган бўлади.*

Исботи. Тескарисини фараз қилайлик, яъни f функция $[a,b]$ оралиқда чегараланмаган бўлсин. У ҳолда ҳар бир натурал n сон учун шундай $x_n \in [a,b]$ нуқта топиладики,

$$|f(x_n)| > n \quad (n=1,2,\ldots) \tag{2}$$

муносабатлар ўринли бўлади.

$\{x_n\}$ кетма-кетлик чегараланган бўлгани учун Больцано-Вейерштрасс теоремасига кўра (4 боб, 2.7-§ га қаранг), ундан бирор $\alpha \in [a,b]$ сонга яқинлашувчи хусусий $\{x_{n_k}\}$ кетма-кетлик ажратиб олиш мумкин. Теорема шартига кўра f функция α нуқтада узлуксиз, шу сабабли

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\alpha)\,. \tag{3}$$

Зиддиятга келдик, (3) тенглик (2) муносабатга зид. Демак, қилган фаразимиз хато, яъни функция $[a,b]$ оралиқда чегараланган.

6-теореманинг хулосасини геометрик нуқтаи назардан 70-расмда тушуниш мумкин: узлуксиз функция графиги $y=K$ ва $y=-K$ тўғри чизиқлар оралиғида жойлашган бўлади.

Маълумки, чексиз кўп элементли чегараланган сонли тўплам таркибига унинг энг катта элементи (энг кичик элементи) кирмаслиги мумкин. Агар f функция x нинг ўзгариш соҳасида аниқланган ва ҳатто чегараланган бўлса ҳам унинг $\{f(x)\}$ қийматлари тўплами ичида энг катта ёки энг кичик қиймати бўлмаслиги мумкин. Бундай ҳолатларда $f(x)$ функция шу оралиқда ўзининг аниқ юқори ёки аниқ қуйи чегарасига етишмаслиги мумкин.

Масалан, $f(x)=x-E(x)$ функция учун шундай: [0, c] (c≥1) оралиқда ўзгарган барча x лар учун функциянинг аниқ юқори чегараси бор, лекин функция бу қийматига [0, c] оралиқда эришмайди, яъни функциянинг энг катта қиймати йўқ. Бунинг сабаби берилган [0, c] оралиқ функциянинг узилиш нуқтасини ўз ичига олганлигидадир. Бу муаммони қуйидаги теорема ҳал қилади. 6-теорема Вейерштрасснинг биринчи теоремаси деб аталса, қуйидаги теорема Вейерштрасснинг иккинчи теоремаси деб аталади.

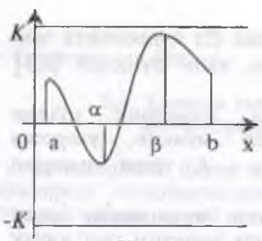
7-теорема. *Агар f функция $[a,b]$ оралиқда узлуксиз бўлса, у ҳолда функция шу оралиқда ўзининг энг катта ва энг кичик қийматларига эришади.*

Исботи. Фараз қилайлик, функциянинг аниқ юқори чегараси M бўлсин, у қуйидагича ёзилади:

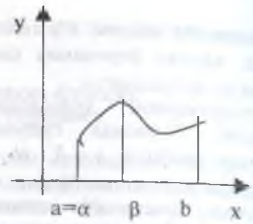
$$M = \sup\{f(x)\}\,.$$

6-теоремага кўра бу чекли сон. Тескарисини фараз қилайлик, яъни берилган оралиқнинг барча нуқталари учун $f(x)<M$ бўлсин. Қуйидаги ёрдамчи функцияни тузиб оламиз

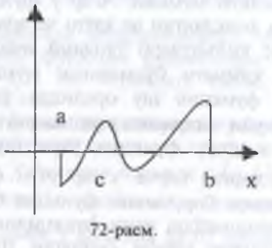
$$\varphi(x) = \frac{1}{M-f(x)}\,.$$



70-расм.



71-расм.



72-расм.

Қилинган фаразга кўра, махраж нолга айланмайди. Демак, функция берилган оралиқда узлуксиз ва 6-теоремага асосан у чегараланган: $\varphi(x) \leq \mu$, $\mu > 0$. У ҳолда

$$f(x) \leq M - \frac{1}{\mu},$$

яъни M дан кичик бўлган $M - \frac{1}{\mu}$ сон $f(x)$ функция учун юқори чегара бўляпти. Бунинг эса бўлиши мумкин эмас, чунки функциянинг аниқ юқори чегараси M. Вужудга келган зиддият теоремани исботлайди, яъни $[a,b]$ оралиқда шундай x_0 нуқта топиладики, $f(x_0)=M$ сон $f(x)$ функциянинг энг катта қиймати бўлади.

Функциянинг энг кичик қиймати ҳақидаги хулоса айнан шундай исбот қилинади.

70-расмда акс эттирилган $f(x)$ функция ўзининг энг кичик ва энг катта қийматларини $[a,b]$ оралиқнинг ичида мос равишда $x=\alpha$ нуқтада ва $x=\beta$ нуқтада қабул қиляпти. 71-расмда функция минимум қийматига оралиқнинг чап чегарасида ва максимум қийматига оралиқнинг ичидаги қандайдир нуқтада эришяпти.

Больцано-Кошининг биринчи теоремаси. Агар f функция $[a,b]$ оралиқда узлуксиз ва оралиқнинг чекка нуқталарида ҳар хил ишорали қийматлар қабул қилса, у ҳолда (a,b) да шундай с нуқта топиладики, бу нуқтада

$$f(c) = 0$$

бўлади.

72-расмда акс эттирилган функция теореманинг ҳамма шартларини қаноатлантиради, яъни $[a,b]$ оралиқда узлуксиз ва $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. График $c \in (a,b)$ нуқтада x ўқини кесиб ўтяпти. Теорема шундай бўлишини таъкидлаяпти.

Теореманинг исботи. $[a,b]$ оралиқни σ_0 билан белгилайлик. σ_0 ни тенг иккига бўламиз. Агар σ_0 нинг ўртасида функция нолга тенг бўлса, теорема исбот бўлади, агар бундай бўлмаса, қайси бўлакнинг чегара нуқталарида функция қийматлари ҳар хил ишорали бўлса, ўша қисмни олиб, уни σ_1 билан белгилаймиз ва тенг иккига бўламиз. Агар функция σ_1 нинг ўртасида нолга тенг бўлса, теорема исбот бўлади, акс ҳолда функция қийматларининг ишораларини ҳар бир бўлак чегараларида текширамиз. Қайси бўлак чегарасида ишоралар ҳар хил бўлса, ўша бўлакни σ_2 билан белгилаб, уни яна тенг иккига бўламиз ва ҳ. к., бу жараённи давом эттириб, биз ё функция қиймати нолга тенг бўладиган нуқтага дуч келамиз, бунда теорема исбот бўлади ёки бир-бирининг ичига қамралган $\sigma_0 \supset \sigma_1 \supset \sigma_2 \supset \ldots$ оралиқлар кетма-кетлигини ҳосил қиламиз. σ_i оралиқнинг чап чегарасини a_i билан ва ўнг чегарасини b_i билан белгилаймиз. Барча $i = 1,2,3,...$ лар учун шартга кўра, масалан, $f(a_i) < 0$ ва $f(b_i) > 0$. σ i оралиқ узунлиги

$$b_i - a_i = \frac{b-a}{2^i},$$

$i \to \infty$ да нолга интилади. У ҳолда қамралган кесмалар ҳақидаги теоремага кўра (4 боб, §2.7 даги 1-теорема) $\{a_i\},\{b_i\}$ кетма-кетликлар бир хил лимитга интилади, яъни

$$\lim_{i\to\infty} a_i = \lim_{i\to\infty} b_i = c$$

бўлади. Функция узлуксиз бўлгани учун

$$f(c) = \lim_{i\to\infty} f(a_i) \le 0 \text{ ва } f(c) = \lim_{i\to\infty} f(b_i) \ge 0 .$$

Бундан $f(c) = 0$ эканлиги келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Исбот қилинган теорема тенгламаларни ечишда кенг қўлланилади. Масалан, тоқ даражали

$$f(x) = a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \ldots + a_{2n} x + a_{2n+1} = 0$$

алгебраик тенгламани кўрайлик. Абсолют қиймати бўйича етарлича катта бўлган x лар учун кўпҳаднинг ишораси бош ҳаднинг ишораси каби бўлади, яъни мусбат x лар учун a_0 нинг ишорасидек бўлади ва манфий x лар учун унга тескари ишорада бўлади. Кўпҳад узлуксиз бўлгани учун у ишораларини ўзгартира бориб, натижада бирор оралиқ нуқтада нолга айланади. Демак, ҳар қандай тоқ даражали алгебраик тенглама камида битта ечимга эга экан.

Больцано-Кошининг 1-теоремасидан фақат ечим-нинг мавжудлигини аниқлашда эмас, балки бу ечимни тақрибий топишда ҳам фойдаланилади. Масалан, $f(x) = x^4 - x - 1$ бўлсин. $f(1)$=-1, $f(2)$=13 бўлгани учун ечим 1 ва 2 орасида бўлиши мумкин. [1,2] оралиқни 1,1; 1,2; 1,3;... нуқталар билан тенг 10 бўлакка бўламиз

ва кетма-кет равишда бу нуқталарда функциянинг қийматларини ҳисоблаймиз:

$f(1,1)$=-0,63…; $f(1,2)$=-0,12…; $f(1,3)$=+0,55; …

Бундан ечим 1,2 ва 1,3 нуқталар орасида эканлигини аниқлаймиз. [1,2; 1,3] оралиқни ҳам тенг 10 бўлакка бўламиз ва ҳисоблаймиз:

$f(1,21)$=–0,06…; $f(1,22)$=–0,04…; $f(1,23)$=+0,058…; …

Бундан ечим 1,22 ва 1,23 нуқталар орасида эканлигини билиб оламиз ва ҳ.к., бу жараённи давом эттириб, ечимни етарлича хатолик билан топамиз, мисол учун, 1,22 ни 0,01 хатолик билан ечим, деб қабул қилиш мумкин.

Больцано-Кошининг иккинчи теоремаси. Агар f функция $[a,b]$ оралиқда узлуксиз, $f(a) = A, f(b) = B, A \ne B$ бўлса, у ҳолда A, B лар орасидаги ҳар қандай C сон учун $[a,b]$ оралиқда камида битта шундай c нуқта топиладики, $f(c) = C$ булади.

Исботи. Ёрдамчи $\varphi(x) = f(x) - C$ функцияни тузиб оламиз. f функция $[a,b]$ оралиқда узлуксиз бўлгани учун, φ ҳам шу орлиқда узлуксиздир ва теорема шартига кўра, C A ва B лар орасидаги сон бўлгани учун $[a,b]$ нинг чегараларида ҳар хил ишорали қийматларга эга, чунки масалан, агар $A < B$ булса, $A < C < B$ бўлади ва

$$\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0,\ \varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0.$$

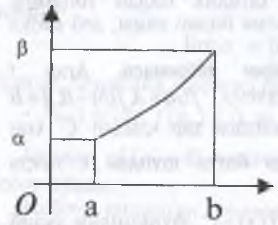
У ҳолда аввалги теоремага кўра, $[a,b]$ оралиқда шундай c нуқта топиладики, $\varphi(c) = f(c) - C = 0$ бўлади. Бундан $f(c) = C$ эканлиги келиб чиқади.

Натижа. $[a,b]$ оралиқда узлуксиз бўлган ҳар қандай f функция ўзининг шу оралиқдаги энг кичик ва энг катта қийматлари орасидаги барча қийматларни қабул қилади.

Агар функция энг кичик қийматига α нуқтада ва энг катта қийматига β нуқтада эришса, масалан, α < β бўлса, $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$ бўлади. У ҳолда натижанинг исботи Больцано-Кошининг 2-теоремасини $[\alpha,\beta]$ оралиқда қўллашдан келиб чиқади.

3.5. Тескари узлуксиз функциялар

$[a,b]$ оралиқда узлуксиз ва қатъий ўсувчи бўлган $y = f(x)$ функция берилган бўлсин. $f(a) = \alpha, f(b) = \beta$ бўлсин, деб фараз қилайлик. Бу функциянинг графиги узлуксиз эгри чизиқдир (73-расмга қаранг).



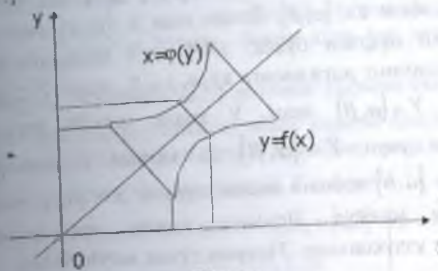
73-расм.

Агар x a дан b гача ўсиб борса, y $[\alpha,\beta]$ ораликнинг α дан то β гача бўлган барча қийматларини узлуксиз ўсиб қабул қилади. У ҳолда ҳар бир $y \in [\alpha,\beta]$ учун $y = f(x)$ бўладиган ягона $x \in [a,b]$ мос келади. Бу билан $[\alpha,\beta]$ оралиқда берилган $y = f(x)$ функцияга тескари бўлган $x = \varphi(y)$ функцияни аниқладик. Маълумки, $x = \varphi(y)$ функция $[\alpha,\beta]$ оралиқда қатъий ўсиб, уни $[a,b]$ оралиққа ўзаро бир қийматли акслантиради: барча $y \in [\alpha,\beta]$ лар учун $f[\varphi(y)] = y$ ва барча $x \in [a,b]$ лар учун $\varphi[f(x)] = x$.

$x = \varphi(y)$ функциянинг графигини 1-координаталар чорагининг биссектрисаси атрофида текисликни 180^0 бурчак остида буриш натижасида ҳосил қиламиз. Буриш жараёнида график узлуксизлигича қолгани учун, $x = \varphi(y)$ функция $[\alpha,\beta]$ оралиқда узлуксиз бўлади, дейиш мумкин. Бундай геометрик мулоҳаза қуйидаги теореманинг тўғрилигига асос бўлади:

Теорема. *Агар* $y = f(x)$ *функция* $[a,b]$ *оралиқда узлуксиз, қатъий ўсувчи ва* $f(a) = \alpha, f(b) = \beta$ *бўлса, у ҳолда* f *га тескари бўлган* $x = \varphi(y)$ *функция мавжуд ва бу функция ўзаро бир қийматли, қатъий ўсувчи ва* $[\alpha,\beta]$ *оралиқда узлуксиздир.*

Теоремани қуйидаги лемма ёрдамида исбот қиламиз:



74-расм.

Лемма. Агар қатъий ўсувчи $y = f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқни $[\alpha,\beta]$ оралиққа акслантирса, у ҳолда f $[a,b]$ оралиқда узлуксиз бўлади.

Исботи. Ихтиёрий $x_0 \in (a,b)$ нуқта олайлик. f қатъий ўсувчи бўлгани учун унга мос келувчи $y_0 = f(x_0)$ нуқта (α,β) интервалга тегишли бўлади. Етарлича кичик ε > 0 ни шундай танлаймизки, $\alpha < y_0 - \varepsilon < y_0 < y_0 + \varepsilon < \beta$ бўлсин. Шартга кўра, шундай $x_1, x_2 \in (a,b)$ лар топиладики, $y_0 - \varepsilon = f(x_1), y_0 + \varepsilon = f(x_2)$ бўлади. f ўсувчи бўлгани учун $x \in (x_1, x_2)$ эканлигидан $y_0 - \varepsilon = f(x_1) < f(x) < f(x_2) = y_0 + \varepsilon$ келиб чиқади. Бундан $|f(x) - y_0| < \varepsilon$ ёки $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ни ҳосил қиламиз. Демак, f функция $x_0 \in (a,b)$ нуқтада узлуксиз экан. f функциянинг $x_0 = a$ ёки $x_0 = b$ нуқталарда бир томонли узлуксизлиги худди шундай исбот қилинади.

Теореманинг исботи. Фараз қилайлик, $Y = f([a,b])$ бўлсин. $f(a) = \alpha, f(b) = \beta$ ва f функция ўсувчи бўлгани учун ҳар қандай $x \in [a,b]$ учун $\alpha \le f(x) \le \beta$ бўлади, яъни $Y \subset [\alpha, \beta]$. Лекин агар y $[\alpha, \beta]$ кесманинг ихтиёрий нуқтаси бўлса, 3.4-§ даги Больцано-Коши теоремасининг натижасига кўра $y \in Y$, яъни $Y \subset [\alpha, \beta]$. Демак, $Y = [\alpha, \beta]$ экан. У ҳолда қатъий ўсувчи f функция учун $Y = [\alpha, \beta]$ да қатъий ўсувчи $[\alpha, \beta]$ кесмани $[a,b]$ кесмага акслантирувчи $x = \varphi(y)$ тескари функция мавжуд. Леммага асосан эса $x = \varphi(y)$ функция узлуксиздир. Теорема тўлиқ исбот бўлди.

3.6. Текис узлуксиз функциялар

$[a,b]$ кесмада (интервалда, ярим интервалда) узлуксиз бўлган f функция берилган бўлсин. У ҳолда бу кесманинг (интервалнинг, ярим интервалнинг) ихтиёрий x_0 нуқтаси учун берилган $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $|x - x_0| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $x \in [a,b]$ $((a,b), (a,b], [a,b))$ лар учун $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ бўлади.

x_0 нуқта ўзгариши билан ўзгармас ε учун δ ҳам ўзгариши мумкин, яъни δ фақат ε га боғлиқ бўлмай, балки x_0 га ҳам боғлиқ бўлади.

Шу сабабли берилган $\varepsilon > 0$ учун функциянинг берилган оралиғидаги барча x ларга бир хил $\delta > 0$ мос келадиган функцияларни ажратишга эҳтиёж туғилади.

Таъриф. *Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ топилсаки, $|x_1 - x_2| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $x_1, x_2 \in X$ лар учун*

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

муносабат ўринли бўлса, X тўпламда аниқланган f функция шу тўпламда текис узлуксиз дейилади.

Агар функция X тўпламда текис узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функция X нинг ҳар қандай X' қисм тўпламида ҳам текис узлуксиз бўлади. Лекин акси ҳар доим ҳам ўринли эмас.

Теорема (Кантор[1]). *$[a,b]$ оралиқда узлуксиз бўлган ҳар қандай f функция шу оралиқда текис узлуксиз бўлади.*

Исботи. Тескарисини фараз қилайлик. яъни шундай $\varepsilon > 0$ мавжуд бўлсинки, ҳар қандай $\delta > 0$ учун $|x_1 - x_2| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $x_1, x_2 \in [a,b]$ лар топилиб,

$$|f(x_1) - f(x_2)| \ge \varepsilon$$

муносабат ўринли бўлсин.

Нолга интилувчи мусбат $\{\delta_n\}$ сонлар кетма-кетлигини олайлик. Ҳар бир δ_n учун

$$|x_{1,n} - x_{2,n}| < \delta_n \text{ ва } |f(x_{1,n}) - f(x_{2,n})| \ge \varepsilon$$

муносабатларни қаноатлантирувчи $x_{1,n}, x_{2,n} \in [a,b]$ лар топилади.

$\{x_{1,n}\}$ кетма-кетлик чегараланган (чунки барча $n = 1,2,3,\ldots$ лар учун $x_{1,n} \in [a,b]$), шу сабабли Больцано-Вейерштрасс теоремасига кўра ундан қандайдир

---

[1] [1] Георг Кантор (1845-1918) — машҳур олмон математиги, тўпламлар назариясининг асосчиси.

$x_0 \in [a,b]$ га интилувчи $\{x_{1,n_k}\}$ хусусий кетма-кетлик ажратиб олиш мумкин. $\kappa \to \infty$ да $x_{1,n_K} - x_{2,n_K} \to 0$ бўлгани учун $\{x_{2,n_k}\}$ хусусий кетма-кетлик ҳам $x_0 \in [a,b]$ нуқтага интилади. Шу сабабли f функциянинг x_0 нуқтада узлуксизлигидан

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{1,n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x_{2,n_k}) = f(x_0)$$

бўлади. Агар (1) да $\kappa \to \infty$ да лимитга ўтсак,

$$\varepsilon \le \lim_{k\to\infty}\left|f(x_{1,n_k}) - f(x_{2,n_k})\right| = \left|f(x_0) - f(x_0)\right| = 0$$

келиб чиқади. Бунинг эса бўлиши мумкин эмас, чунки шартга кўра $\varepsilon > 0$. Бу зиддият қилинган фараз хато эканлигини кўрсатади. Теорема исбот бўлди.

Бу теоремадан бевосита қуйидаги натижа келиб чиқади:

Натижа. Агар $y = f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда узлуксиз бўлса, у ҳолда ҳар қандай берилган $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ топиладики, оралиқни узунликлари δ дан кичик бўлган бўлакларга қандай усулда бўлмайлик, $y = f(x)$ функциянинг шу бўлаклардаги тебраниши ε дан кичик бўлади.

Мисол. $y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ функция $\forall\ \delta > 0$ учун $[\delta,1]$ оралиқда узлуксиз ва юқоридаги теоремага кўра у шу оралиқда текис узлуксиз. Лекин бу функция $(0,1]$ ярим интервалда узлуксиз бўлса ҳам, унда текис узлуксиз эмас.

Ҳақиқатан $x_\kappa = \frac{2}{\pi(2\kappa+1)} (\kappa = 0,1,2,...)$ нуқталар $(0,1]$ ярим интервалга тегишли ва улар учун

$$\left|f(x_{k+1}) - f(x_k)\right| = \left|Sin\frac{\pi(2k+3)}{2} - Sin\frac{\pi(2k+1)}{2}\right| =$$

$$= \left|(-1)^{k+1} - (-1)^k\right| = 2$$

муносабат ўринли. Агар $\varepsilon = 1$ десак, ҳар қандай $\delta > 0$ сон учун шундай κ топиладики,

$$\left|x_{\kappa+1} - x_\kappa\right| = \frac{4}{\pi(2\kappa+3)(2\kappa+1)} < \delta$$

бўлса ҳам, лекин

$$\left|f(x_{k+1}) - f(x_k)\right| = 2 > \varepsilon = 1$$

бўлади. Бундан берилган функцияни [0,1] да узлуксиз бўладиган қилиб давом эттириб бўлмайди, деган хулоса келиб чиқади, чунки акс ҳолда, теоремага кўра функция [0,1] да текис узлуксиз, демак [0,1] да ҳам текис узлуксиз бўлиши керак. Бунинг эса бўлиши мумкин эмаслигини юқорида исбот қилдик.

3.7. Элементар функциялар

C (ўзгармас), $x^n, a^x, \log_a x$, $\sin x, \cos x, tgx, \arcsin x$, $\arccos x, arctgx$ функцияларни энг содда элементар функциялар, деб атаймиз. Улар устида бажарилган арифметик амаллар ёки суперпозициялар натижасида ҳосил бўладиган барча мураккаб функцияларни элементар функциялар деймиз. Масалан, $y = \ln(e^x + \sin^2 x + 1)$ элементар функциядир.

Элементар функцияларни ўрганиб чиқиш математик таҳлил нуқтаи назаридан фойдадан холи эмас.

а) Ўзгармас C функция. Аввал кўрганимиздек барча ҳақиқий сонлар тўпламида аниқланган, унинг графиги X ўқидан C масофада бу ўққа параллел ўтган тўғри чизиқдан иборат. Юқорида бу функциянинг ҳақиқий сонлар ўқида узлуксиз эканлигини исбот қилган эдик.

б) $y=x^n$ — даражали функция (n — ўзгармас). Натурал n лар учун бу функция барча ҳақиқий сонлар тўпламида аниқланган, у срда узлуксиз (3.2-§, 4-мисолга қаранг). Бу функция $[0,\infty)$ да қатъий ўсувчи, чунки ҳар қандай $x_1<x_2$ лар учун

$$x_2^n-x_1^n=(x_2-x_1)(x_2^{n-1}+x_2^{n-2}x_1+...+x_1^{n-1})>0.$$

Бундан ташқари $y=x^n$ функция $X=[0,\infty)$ ярим интервални $Y=[0,\infty)$ ярим интервалга акслантиради, шу сабабли 3.6-§ даги теорсмага кўра, унга тескари бўлган бир қийматли, узлуксиз ва қатъий ўсувчи функция мавжуд. Бу функцияни $x=y^{1/n}=\sqrt[n]{y}$ $(y\geq 0)$ кўринишда белгилаб, y нинг n даражали арифметик илдизи, деб атаймиз.

Агар $n=2к+1$ бўлса, $y=x^n$ функция тоқ функция бўлади. У $(-\infty,+\infty)$ оралиқда узлуксиз, қатъий ўсувчи ва $(-\infty,+\infty)$ оралиқни $(-\infty,+\infty)$ оралиққа акслантиради, шу сабабли $(-\infty,+\infty)$ оралиқда узлуксиз, қатъий ўсувчи тескари функцияга эга:

$$x=\sqrt[2к+1]{y}\ (y\in(-\infty,+\infty)).$$

Бу ерда $y>0$ лар учун $\sqrt[2к+1]{y}$ ифода y нинг 2к+1-даражали арифметик илдизи ва $y<0$ лар учун $\sqrt[2к+1]{y}=-\sqrt[2к+1]{|y|}$.

Агар $n=2к$ бўлса, $y=x^n$ функция жуфт функция бўлади. У $(-\infty,+\infty)$ интервални $[0,\infty)$ яриминтервалга акслантиради. Лекин бу функция $(-\infty,+\infty)$ интервалда монотон эмас ва шу сабабли унга тескари функция икки қийматли:

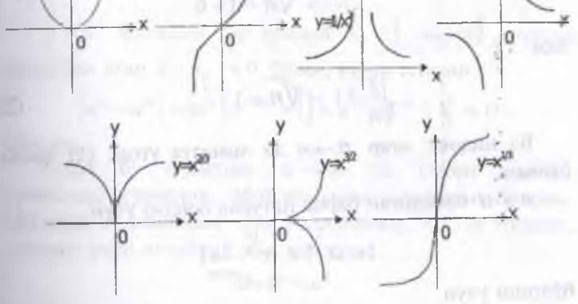
$$x=\pm\sqrt[2к]{y}\ \ (y\geq 0).$$

Қуйида $y=x^n$ функциянинг n ҳақиқий сон бўлган айрим ҳоллардаги графиклари берилган:

в) $y=a^x$ — кўрсаткичли функция $(a\neq 1, a>0)$. Бу ерда икки ҳол бўлиши мумкин: 1) $a>1$ ва 2) $0<a<1$.

1-ҳол: агар $a>1$ бўлса, функциянинг аниқланиш соҳаси $D(f)=(-\infty,+\infty)$ ва бу функция $(-\infty,+\infty)$ ни $(0,+\infty)$ га акслантиради, яъни барча $x\in(-\infty,+\infty)$ лар учун $a^x>0$. Бундан ташқари, ҳар қандай $x\in(0,+\infty)$ лар учун $a^x>1$.

Ҳақиқатан рационал x лар учун $a^x>1$ бўлиши ўрта мактабдан маълум. Энди агар x — иррационал бўлса, унинг бутун қисмини $[x]=к$ десак, $x\geq к$ бўлади, бундан $a^x>a^к>1$.



75-расм

Бу функция ўсувчи, яъни $y>x$ муносабатда бўлган ҳар қандай $x,y\in(-\infty,+\infty)$ лар учун $a^y>a^x$. Ҳақиқатан $a^y-a^x=a^x(a^{y-x}-1)>0$, чунки барча $x\in(-\infty,+\infty)$ лар учун $a^x>0$ ва y-x>0 бўлгани учун $a^{y-x}-1>0$.

1-*мисол.*

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1. \qquad (1)$$

Ҳақиқатан мусбат λ лар учун Ньютон биномига кўра

$$(1+\lambda)^n = 1 + n\lambda + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 + \ldots > 1 + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 .$$

Агар бу ерда $\lambda = \sqrt[n]{n} - 1$ десак,

$$n > 1 + \frac{n(n-1)}{2}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2$$

ёки $n \geq 2$ лар учун

$$\frac{2}{n} > \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 > 0.$$

Агар бу тенгсизликлардан квадрат илдиз олсак,

$$\sqrt{\frac{2}{n}} > \sqrt[n]{n} - 1 > 0$$

ёки

$$\sqrt{\frac{2}{n}} + 1 > \sqrt[n]{n} > 1. \qquad (2)$$

Ва ниҳоят, агар $n \to \infty$ да лимитга ўтсак (1) ҳосил бўлади.

$n > a$ бўладиган барча натурал сонлар учун

$$1 < a^{1/n} < n^{1/n} \underset{n\to\infty}{\to} 1$$

бўлгани учун

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1 \qquad (3)$$

бўлади. Энди агар x_n ихтиёрий нолга интилувчи мусбат сонлар кетма-кетлиги бўлса, $\left[\frac{1}{x_n}\right] = \kappa_n$ десак, $0 < x_n \leq \frac{1}{\kappa_n}$ ва $1 = a^0 < a^{x_n} \leq a^{\frac{1}{\kappa_n}}$ бўлади. У ҳолда (3) га асосан

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = 1 .$$

$\{x_n\}$ кетма-кетлик ихтиёрий бўлгани учун биз ўнг лимитнинг мавжудлигини исботладик:

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} a^x = 1 .$$

У ҳолда чап лимит ҳам мавжуддир :

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} a^x = \lim_{\substack{-x\to0\\-x>0}} \frac{1}{a^{-x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\substack{u\to0\\u>0}} a^u} = \frac{1}{1} = 1 .$$

Демак,

$$\lim_{x\to0} a^x = 1 . \qquad (4)$$

$y = a^x$ функция ҳар қандай $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ нуқтада узлуксиз: агар $x - x_0 \to 0$ бўлса, (4) га асосан

$$\left|a^x - a^{x_0}\right| = \left|a^{x_0}\left(a^{x-x_0} - 1\right)\right| = a^{x_0}\left|a^{x-x_0} - 1\right| \to 0$$

бўлади.

Энди бу функция $x \to \infty$ да ўзини қандай тутишини кўрайлик. $M>0$ старлича катта сон бўлсин. Шундай α рационал сон топиладики, $a^{\alpha} > M$ бўлади, шунинг учун ихтиёрий $x > \alpha$ лар учун

$$M < a^{\alpha} < a^x ,$$

яъни $x \to +\infty$ да $a^x \to +\infty$ экан.

Энди, агар $x \to -\infty$ бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{-x\to+\infty} \frac{1}{a^{-x}} = \frac{1}{\lim\limits_{u\to+\infty} a^u} = 0$$

бўлади.

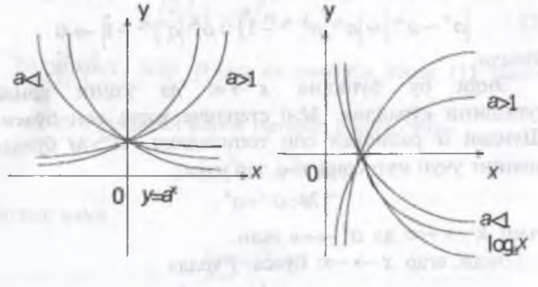
2-ҳол: $0 < a < 1$. Агар

$$a^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$$

десак, биз кўрмоқчи бўлган ҳол 1-ҳолга келтирилади, чунки $\frac{1}{a}>1$. Бу ҳолда ҳам функциянинг аниқланиш соҳаси $D(f)=(-\infty,+\infty)$, ва у $(-\infty,+\infty)$ ни $(0,+\infty)$ га акслантиради, яъни барча $x\in(-\infty,+\infty)$ лар учун $a^x>0$. Бундан ташқари, ҳар қандай $x\in(0,+\infty)$ лар учун $a^x<1$ ва $x\in(-\infty,0)$ лар учун $a^x>1$. Бу ҳолда ҳам функция ўз аниқланиш соҳасида узлуксиз ва қатъий камаювчи.

Агар $x\to+\infty$ бўлса, $a^x\to 0$ ва $x\to-\infty$ бўлса, $a^x\to+\infty$ бўлади.

$y=a^x$ функциянинг иккала ҳол учун графиги қуйидагича бўлади:



76-расм.

г) $y=\log_a x$. Бу ерда ҳам икки ҳол бўлиши мумкин. Аввал $a>1$ деб фараз қилайлик. $y=a^x$ функция $(-\infty,+\infty)$ да узлуксиз, қатъий ўсувчи ва $(-\infty,+\infty)$ ни $(0,+\infty)$ га акслантиргани учун унга тескари $(0,+\infty)$ да

узлуксиз ва қатъий ўсувчи функция мавжуд. Уни y нинг a асосга нисбатан логарифми, деб атаймиз ва $x=\log_a y$ кўринишда ёзамиз. Агар бу тенгликда x ва y ни ўрнини алмаштирсак, юқорида билдирилган фикрларга асосан

$$\lim_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty,\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\log_a x=-\infty.$$

Тескари функциянинг таърифига кўра қуйидаги айниятлар ўринли:

$$a^{\log_a x}=x\ (0<x<+\infty),\ \log_a a^x=x\ (-\infty<x<+\infty).$$

a нинг e асосга нисбатан логарифмини a нинг натурал логарифми, деб атаймиз ва $\log_e a=\ln a$ кўринишда ёзамиз.

Агар $0<a<1$ бўлса, $y=\log_a x$ функция $(-\infty,+\infty)$ да узлуксиз ва қатъий камаювчи.

Бу функциянинг графиги юқоридаги расмда кўрсатилган.

д) Тригонометрик функциялар. $\sin x,\cos x,tgx,ctgx$ ва бошқа тригонометрик функциялар ўқувчига ўрта мактабдан маълум.

Маълумки, (3.1-§, 3-мисолга қаранг), $y=\sin x$ функция $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ораликда узлуксиз ва қатъий ўсувчи, бу ораликни $[-1,+1]$ ораликқа ўзаро бир қийматли акслантиради. Шу сабабли, унга тескари бир қийматли, узлуксиз функция мавжуд:

$$x=\arcsin x, D(f)=[-1,+1].$$

Агар $y=\sin x$ функцияни $(-\infty,+\infty)$ ораликда қарасак, унга тескари функция кўп қийматли $\arcsin y$ функция булади, унинг барча қийматлари қуйидаги формула ёрдамида топилади:

$$x=\arcsin y=(-1)^k\arcsin y+k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$ 4)

Худди шундай

$$y=\cos x \ (0\le x\le\pi),$$

$$y=tgx \quad (-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}),$$

функцияларга тескари функциялар мос равишда

$$x=\arccos y, (y\in[-1,+1])$$

$$x=arctgy, (y\in(-\infty,+\infty)).$$

Агар берилган функцияларни $(-\infty,+\infty)$ оралиқда қарасак, уларга тескари функциялар мос равишда

$$x=\arccos y=\pm\arccos y+2k\pi,$$

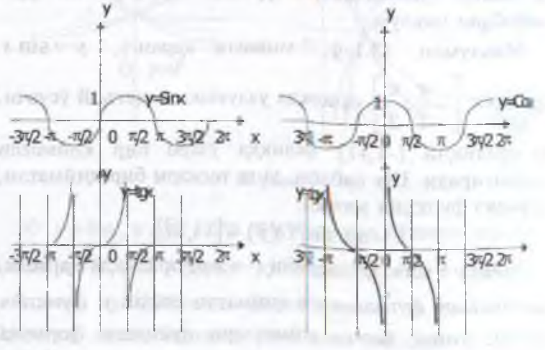
$$x=arctgy=arctgy+k\pi$$

$$(k=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

е) Гиперболик функциялар. Қуйидаги функциялар

$$\text{shx}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, \text{chx}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, \text{thx}=\frac{\text{shx}}{\text{chx}}, \text{cthx}=\frac{\text{chx}}{\text{shx}}$$

мос равишда гиперболик синус, косинус, тангенс ва котангенс функциялар, деб аталади.



77-расм

$shx, chx. thx$ функциялар $(-\infty,+\infty)$ оралиқда аниқланган, cthx функция эса $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ оралиқда аниқланган.

Бу функциялар учун қуйидаги формулалар ўринли эканлигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас:

$$sh(x+y)=shxchy+shychx,$$

$$ch(x+y)=chxchy+shxshy,$$

$$ch^2x-sh^2x=1.$$

Юқорида келтирилган элементар функцияларнинг хоссаларидан фойдаланиб, қуйидаги лимитларни ҳисоблайлик:

2-*мисол.* $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1, \lim\limits_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e=\frac{1}{\ln a}$

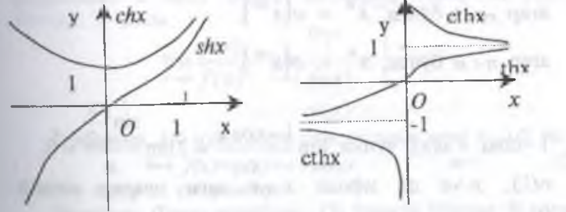
эканлигини исботланг.

Ҳақиқатан, в) га асосан $\ln x$ функция $(0,+\infty)$ оралиқда узлуксиз бўлгани учун ва 2.3-§ даги 5-мисолга кўра

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{1/x}=\ln\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x}=\ln e=1.$$

3-*мисол.*

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a, \ (0< a), \ \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\ln e=1.$$



78-расм

Ҳақиқатан агар $a^x-1=u$ десак, кўрсаткичли функциянинг узлуксизлигига кўра $x\to0$ да $u\to0$ бўлади. Энди агар $x\ln a=\ln(1+u)$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}\ln a=\ln a\cdot\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}=\ln a.$$

3.8. «О» ва «о» миқдорлар. Миқдорларни солиштириш

a нуқтанинг ўзида бўлмаса ҳам, унинг бирор U_a атрофида берилган $\varphi(x)$, $f(x)$ функцияларни қарайлик. a нуқта чекли сон ёки чексиз ($-\infty$, $+\infty$ ёки ∞) бўлиши мумкин. Барча $x\in U_a$ лар учун $\varphi(x)\neq 0$ бўлсин.

1-таъриф. *Агар*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0 \tag{1}$$

бўлса, $x\to a$ да $f(x)$ функцияни $\varphi(x)$ функцияга нисбатан о-кичик миқдор деб атаймиз ва

$$f(x)\underset{x\to a}{=}o(\varphi(x)) \tag{2}$$

кўринишда ёзамиз.

Масалан:

$$x^2\underset{x\to 0}{=}o(x),$$

агар $m<n$ бўлса, $x^n\underset{x\to 0}{=}o(x^m)$,

агар $n<m$ бўлса, $x^n\underset{x\to +\infty}{=}o(x^m)$.

$1-\cos x\underset{x\to 0}{=}o(x)$, чунки $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x}=0.$

o(1), $x\to a$ да ифода $x\to a$ даги чексиз кичик миқдорни билдиради. Масалан, $f(x)=\frac{1}{\ln x}\underset{x\to +\infty}{=}o(1).$

(1) ни $f(x)=\varepsilon(x)\varphi(x)$ деб ёзиш мумкин, бу ерда $x\to a$ да $\varepsilon(x)\to 0$. Агар (1) муносабат $x\to a$ да чексиз кичик миқдор бўлган $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар учун бажарилган бўлса, $f(x)$ ни $\varphi(x)$ га нисбатан $x\to a$ да юқори тартибли чексиз кичик миқдор деймиз. Агар (1) даги $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар $x\to a$ да чексиз катта миқдорлар бўлса, у ҳолда $f(x)$ ни $\varphi(x)$ га нисбатан $x\to a$ да қуйи тартибли чексиз катта миқдор деймиз.

2-таъриф. *Агар*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=1 \tag{3}$$

муносабат ўринли бўлса, $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар $x\to a$ да эквивалент миқдорлар дейилади ва $f(x)\approx\varphi(x)$ кўринишда ёзилади.

Масалан, $x\to 0$ да

$$\sin x\approx x, 1-\cos x\approx\frac{x^2}{2}, \ln(1+x)\approx x, e^x-1\approx x, a^x-1\approx x\ln a. \tag{4}$$

1-теорема. *Агар*

$$x\to a \text{ да } f(x)\approx\varphi(x) \text{ бўлса,} \tag{5}$$

у ҳолда

$$x\to a \text{ да } \varphi(x)\approx f(x) \tag{6}$$

бўлади.

Исботи. Агар бирор U_a да $\varphi(x)\neq 0$ бўлса, (5) га кўра, равшанки, a нинг бирор кичикроқ атрофида $f(x)\neq 0$ бўлади. У ҳолда

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\frac{f(x)}{\varphi(x)}}=\frac{1}{1}=1.$$

2-теорема. *(5) муносабат бажарилиши учун $x\to a$ да*

$$f(x)=\varphi(x)+o\ (\varphi(x)) \tag{7}$$

бўлиши зарур ва етарлидир.

Зарурлиги. Фараз қилайлик, (5) ўринли бўлсин. У ҳолда шундай $\varepsilon(x)$ функция мавжудки, $x\to a$ да $\varepsilon(x)\to 0$ бўлиб, $\frac{f(x)}{\varphi(x)}=1+\varepsilon(x)$ дейиш мумкин. Бундан

$$f(x)=\varphi(x)+\varepsilon(x)\varphi(x)=\varphi(x)+o(\varphi(x))$$

келиб чиқади.

Етарлилиги. Агар (7) ўринли бўлса, у ҳолда

$$f(x) = \varphi(x) + o(\varphi(x)) = \varphi(x) + \varepsilon(x)\varphi(x),$$

бўлади, бу ерда $x \to a$ да $\varepsilon(x) \to 0$. Демак,

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1 + \varepsilon(x) \underset{x \to a}{\to} 1.$$

Бундан (5) келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

3-теорема. *Агар $x \to a$ да $\varphi(x) \approx \varphi_1(x)$ бўлса, у ҳолда*

$$\lim_{x \to a}[f(x)\varphi(x)] = \lim_{x \to a}[f(x)\varphi_1(x)], \tag{8}$$

$$\lim_{x \to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a}\frac{f(x)}{\varphi_1(x)} \tag{9}$$

муносабатлар ўринли бўлади.

(8) ва (9) тенгликларда ўнг томондаги лимитлар мавжуд бўлсагина чап томондаги лимит мавжуд бўлади, деб тушунмоқ керак, яъни агар ўнг томондаги лимит мавжуд бўлмаса, чап томондаги лимит ҳам мавжуд бўлмайди.

Исботи. (8) ни исбот қилиш билан чегараланамиз. Фараз қилайлик, (8) нинг ўнг томонидаги лимит мавжуд бўлсин. У ҳолда

$$\lim_{x \to a}[f(x)\varphi(x)] = \lim_{x \to a}\left[f(x)\varphi_1(x)\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}\right] = \lim_{x \to a}[f(x)\varphi_1(x)] \cdot$$

$$\cdot \lim_{x \to a}\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} = \lim_{x \to a}[f(x)\varphi_1(x)] \cdot 1 = \lim_{x \to a}[f(x)\varphi_1(x)].$$

1-*мисол.* $x \to 0$ да $tgx \approx x$, чунки

$$\lim_{x \to 0}\frac{tgx}{x} = \lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin x}{x} \cdot \cos x\right) = 1.$$

2-*мисол.*

$$\lim_{x \to 0}\frac{tg^3 x}{x^3 + x} = \lim_{x \to 0}\frac{x^3}{x^3 + x} = \lim_{x \to 0}\frac{x^2}{x^2 + 1} = 0.$$

3-таъриф. *Агар $f(x)$ функция учун шундай $A \neq 0$ ва m сонлар топилсаки, $x \to a$ да $f(x) \approx A(x-a)^m$ бўлса, у ҳолда $A(x-a)^m$ функция $f(x)$ функциянинг a нуқта атрофидаги бош даражали ҳади деб аталади.*

4-таъриф. Агар барча $x \in E$ лар учун $|f(x)| \leq C|\varphi(x)|$, (бу ерда C x га боғлиқ бўлган ўзгармас), бўлса, у ҳолда f E тўпламда φ тартибга эга ёки f E тўпламда φ га нисбатан O-катта миқдор деб атаймиз ва қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$f(x) = O(\varphi(x)). \tag{10}$$

Хусусан $f(x) = O(1)$ тенглик f функциянинг E тўпламда чегараланганлигини билдиради.
Мисоллар:

1) $\sin x = O(1), \sin x = O(x), x \in (-\infty, +\infty)$;
2) $[1, +\infty)$ да $x = O(x^2)$;
3) $[0,1]$ да $x^2 = O(x)$.

6-БОБ.
БИР ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯ УЧУН ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБ

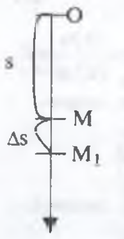
1-§. ҲОСИЛА ВА УНИ ҲИСОБЛАШ

1.1. Асосий тушунчалар

Биз бу бобдан бошлаб ўқувчи эътиборига олий математиканинг энг асосий тушунчаларидан бири — дифференциал ва интеграл ҳисобини ҳавола қиламиз. Дифференциал ва интеграл ҳисобнинг бошланғич тушунчалари XVII асрда вужудга келди ва XVIII асрга келиб инглиз олими И.Ньютон ва фаранг олими Г.В.Лейбницларнинг буюк хизматлари туфайли мукаммал назария кўринишига эга бўлди.

Аввал кейинги бўлимда киритиладиган ҳосила тушунчасига асос солган бир нечта амалий масалаларни кўрайлик:

1. Моддий нуқтанинг оний тезлиги. Моддий нуқтанинг эркин тушиш масаласини кўрайлик. Агар t вақт тушиш бошидан бошлаб ҳисобланса, шу вақт ичида босиб ўтилган йўл



79-расм.

$$s = \frac{gt^2}{2} \qquad (1)$$

формула билан ҳисобланади, бу ерда, $g = 9{,}81$. Нуқта ҳаракатининг t вақтдаги ϑ тезлигини топиш талаб қилинган бўлсин.

t ўзгарувчига Δt орттирма берайлик ва $t+\Delta t$ вақтдан сўнг моддий M нуқтанинг M_1 ҳолатини кўрайлик. Йўлнинг Δt вақт оралиғида олган MM_1 орттирмасини Δs билан белгилайлик. У ҳолда t ўрнига $t+\Delta t$ ни (1) га қўйсак

$$s + \Delta s = \frac{g}{2}(t + \Delta t)^2$$

бўлади. Бундан

$$\Delta s = \frac{g}{2}\left(2t \cdot \Delta t + \Delta t^2\right).$$

Агар Δs ни Δt га бўлсак, моддий нуқтанинг MM_1 йўлни босиб ўтган ўртача тезлигини топамиз:

$$\vartheta_{\text{ўр}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = gt + \frac{g}{2} \cdot \Delta t\,.$$

Нуқтанинг t вақтдаги ϑ оний тезлиги деб, $\vartheta_{\text{ўр}}$ ўрта тезлигининг Δt нолга интилгандаги лимитига айтамиз:

$$\vartheta = \lim_{\Delta t \to 0}\left(gt + \frac{g}{2}\Delta t\right) = gt.$$

Умуман, нуқтанинг текис ҳаракат тезлиги ϑ ҳам худди шундай ҳисобланади. Бунда, агар ҳаракат тенгламаси $s=f(t)$ бўлса, нуқтанинг t вақтдаги оний тезлиги

$$\vartheta = \lim_{\Delta t \to 0} \vartheta_{\text{ўр}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

бўлади.

2. Ток кучи. $Q = f(t)$ симдан t вақт ичида ўтадиган электр миқдорини билдирсин. У ҳолда

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

токнинг $[t, t+\Delta t]$ вақт оралиғида ўтган ток кучини билдиради. Шу сабабли,

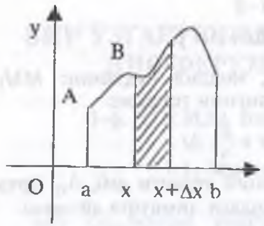
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = I$$

лимит токнинг t моментдаги кучини беради.

3. Массанинг тақсимот зичлиги. Фараз қилайлик, x ўқининг $[a,b]$ кесмасида бирор масса умуман нотекис тарқалган бўлсин. У ҳолда $[a,x]$ кесмадаги масса миқдори

$$M = F(x) \ (a \le x \le b),$$

яъни x нинг функцияси бўлади, чунки бу миқдор $aABx$ шакл юзасига пропорционал. $[x, x + \Delta x]$ оралиққа тўғри келувчи масса миқдори



80-расм.

$$\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x)$$

бўлади.

У ҳолда шу оралиқдаги ўртача масса зичлиги $\frac{\Delta F}{\Delta x}$ бўлса, унинг лимити

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x} = \mu$$

массанинг x нуқтасидаги зичлигини беради.

Юқорида келтирилган масалаларнинг барчасида асосий миқдор функция орттирмасининг аргумент орттирмасига бўлган нисбатининг лимитидир. Мана шу лимитни функциянинг ҳосиласи деймиз. Қатъий таъриф қуйидагича:

Таъриф. *Берилган* $y = f(x)$ *функциянинг аниқланиш соҳасига тегишли бўлган бирор нуқтасида олган* Δy *орттирмасининг аргументнинг мос* Δx *орттирмасига нисбатининг қуйидаги лимити:*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x) \qquad (2)$$

мавжуд бўлса, бу лимит берилган функциянинг ҳосиласи, деб аталади.

Ҳосила учун кўпинча $y', \frac{df(x)}{dx}, \frac{dy}{dx}$ белгилар ҳам ишлатилади.

x нинг ҳар бир ўзгармас қиймати учун $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ миқдор Δx нинг функцияси бўлади:

$$\psi(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (\Delta x \neq 0).$$

f функциянинг x нуқтада ҳосиласи мавжуд бўлиши учун f фақат x нуқтанинг ўзида эмас, балки унинг бирор атрофида ҳам аниқланган бўлиши зарур. Шу ҳолдагина $\psi(\Delta x)$ функция нолга етарлича яқин бўлган Δx лар учун аниқланган бўлади.

Функция ҳосилага эга деганда асосан (1) лимит чекли бўлиши назарда тутилади, лекин агар (1) лимит мавжуд бўлиб, чексиз ($-\infty, +\infty$ ёки ∞) бўлса, у ҳолда f функция берилган нуқтада чексиз ҳосилага эга деймиз.

Агар (1) формулада $\Delta x \to 0$, $\Delta x > 0$ бўлганда лимит мавжуд бўлса, бу лимитни f функциянинг ўнг ҳосиласи, деб атаймиз. Уни $f'_r(x)$ кўринишда белгилаймиз.

Худди шундай, агар (1) лимит $\Delta x \to 0$, $\Delta x < 0$ лар учун мавжуд бўлса, бу лимитни f функциянинг чап ҳосиласи деб атаб, уни $f'_ч(x)$ кўринишда белгилаймиз.

•Бундай ҳолат агар f функция $[a,b]$ оралиқда берилган бўлса, шу оралиқнинг чекка нуқталарида юз беради. Агар f функциянинг барча $x \in (a,b)$ нуқталарда ҳосиласи, a нуқтада ўнг ҳосиласи ва b нуқтада чап ҳосиласи мавжуд бўлса, у ҳолда f функциянинг $[a,b]$ оралиқда ҳосиласи мавжуд ёки f функция $[a,b]$ оралиқда дифференциалланувчи дейилади.

Функциянинг берилган нуқтадаги лимити мавжуд бўлиши учун унинг шу нуқтадаги ўнг ва чап лимитлари мавжуд ва тенг бўлиши зарур эканлигидан, функция x нуқтада дифференциалланувчи бўлиши учун унинг шу нуқтада ўнг ва чап ҳосилалари мавжуд бўлиб,

$$f'_r(x) = f'_ч(x) = f'(x)$$

бўлиши зарурдир.

Агар функциянинг x нуқтада чап ва ўнг ҳосилалари мавжуд бўлса-ю, лекин улар тенг бўлмаса ($f'_r(x) \neq f'_ч(x)$), у ҳолда функция шу нуқтада дифференциалланувчи бўлмайди.

Мисол. $y = |x|$ функция учун

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|x+\Delta x| - |x|}{\Delta x}.$$

Агар $x>0$ бўлса, етарлича кичик Δx лар учун $x+\Delta x>0$ ва

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

Агар $x<0$ бўлса, у ҳолда етарлича кичик Δx лар учун $x+\Delta x<0$ ва

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\left(x+\Delta x\right)-(-x)}{\Delta x}=-\frac{\Delta x}{\Delta x}=-1.$$

Демак, чап ҳосила -1 га ва ўнг ҳосила $+1$ га тенг, шу сабабли берилган функция $x=0$ нуқтада дифференциалланувчи эмас .

Бизга маълумки (4-боб, 3.2-§, 6-мисолга қаранг), $y=|x|$ функция x нинг барча қийматларида, шу жумладан, $x=0$ нуқтада ҳам узлуксиз. Демак, функциянинг нуқтада узлуксизлигидан функциянинг шу нуқтада ҳосиласи мавжудлиги келиб чиқмас экан. Лекин акси ҳамиша ўринли, яъни берилган функциянинг нуқтада чекли ҳосиласи мавжудлигидан унинг шу нуқтада узлуксизлиги келиб чиқади.

Ҳақиқатан (1) лимит бирор x нуқтада мавжуд ва чекли бўлса, у ҳолда (1) ни қуйидаги кўринишда ёзса бўлади:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\varepsilon(\Delta x), \tag{3}$$

бу ерда, $\Delta x\to 0$ да $\varepsilon(\Delta x)\to 0$. (3) дан

$$\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+\Delta x\,\varepsilon(\Delta x)$$

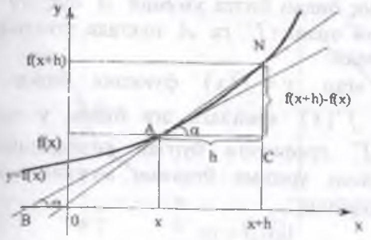
келиб чиқади. Бунда $\Delta x\to 0$ да лимитга ўтсак,

$$\lim_{x\to 0}\Delta y=0,$$

яъни функция x нуқтада узлуксиз экан.

1.2. Ҳосиланинг геометрик маъноси

Фараз қилайлик, (a,b) интервалда узлуксиз $y=f(x)$ функция берилган бўлсин. Унинг графиги Γ узлуксиз эгри чизиқ бўлади. Γ да $A(x,f(x))$ нуқта олиб, шу нуқтада Γ га уриниб ўтган тўғри чизиқ, яъни уринмани топиш масаласини кўрайлик. Бунинг учун Γ да бошқа $N(x+h,f(x+h))$ нуқтани олайлик, бу ерда $h\neq 0$ (81-расмга қаранг). A ва N нуқталардан ўтган тўғри чизиқнинг Ox ўқ билан ташкил этган бурчаги β бўлсин, $-\pi/2<\beta<\pi/2$ деб фараз қиламиз. 81-расмда β>0 , $h=AC,\Delta y=CN$ ва шу сабабли $\Delta y/h=tg\beta$.



81-расм.

Агар $h\to 0$ бўлса, функция узлуксиз бўлгани учун $\Delta y\to 0$ ва N нуқта Γ бўйлаб A нуқтага интилади. Агар бунда β бурчак $-\pi/2$ ва $\pi/2$ ларга тенг бўлмаган бирор α лимитга эга бўлса, у ҳолда

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h}=\lim_{h\to 0}tg\beta=tg\alpha \tag{4}$$

лимит мавжуд ва у f нинг x бўйича ҳосиласига тенг, яъни

$$f'(x)=tg\alpha . \tag{5}$$

Ва аксинча, агар чекли $f'(x)$ ҳосила мавжуд бўлса, у ҳолда $\beta\to\alpha=\mathrm{arctgf'}(x)$ бўлади. Бунда AN тўғри чизиқ A нуқтадан ўтиб, Ox ўқ билан α бурчак ташкил этган BA тўғри чизиқ ҳолатини эгаллашга интилади.

$\varGamma$ эгри чизиқ билан битта умумий A нуқтага эга бўлган BA тўғри чизиқ $\varGamma$ га A нуқтада ўтказилган уринма, деб аталади.

Биз ҳозир агар $y=f(x)$ функция бирор x нуқтада чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда функциянинг $\varGamma$ графигига бурчак коэффициенти $tg\alpha=f'(x)$ бўлган уринма ўтказиш мумкинлигини исбот қилдик. Аксинча,

$$\lim \beta=\alpha$$

лимитнинг мавжудлигидан чекли $f'(x)$ ҳосиланинг мавжудлиги ва (3), (4) тенгликларнинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

Айрим ҳолларда тенг бўлмаган чап ва ўнг ҳосилалар мавжуд бўлиши мумкин, бунда A нуқта $\varGamma$ нинг бурчак нуқтаси дейилади. Бундай ҳолларда A нуқтадан $\varGamma$ га ҳеч қандай уринма ўтмайди, лекин бурчак коэффициентлари мос равишда

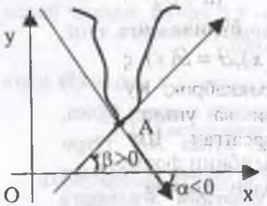
$$tg\alpha_1=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'_ч(x),\ \ tg\alpha_2=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'_г(x)$$

бўлган чап ва ўнг уринмалар мавжуд дейиш мумкин (82-расмга қаранг).

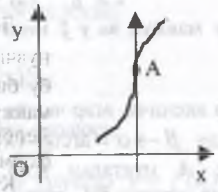
Агар функциянинг x нуқтадаги ҳосиласи чексиз бўлса:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\infty,$$

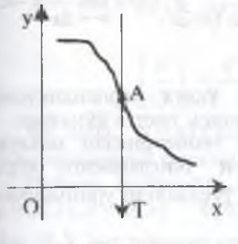
у ҳолда қуйидаги тўртта ҳол юз беради:



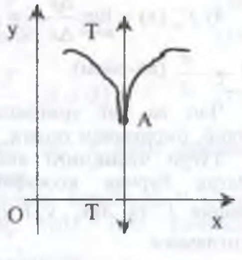
82-расм.



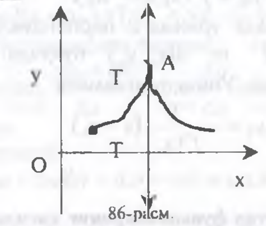
83-расм.



84-расм.



85-расм.



86-расм.

1) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty,\ \ \beta\to\dfrac{\pi}{2}$ (83-расм)

2) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty,\ \ \beta\to-\dfrac{\pi}{2}$ (84-расм)

3) $f'_ч(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty,\ \beta\to-\dfrac{\pi}{2},\qquad f'_г(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty,$

$\beta\to\dfrac{\pi}{2}$ (85-расм).

Чап уринма x ўқига перпендикуляр бўлиб пастга йўналган, ўнг уринма эса x ўқига перпендикуляр бўлиб, юқорига йўналган.

4) $f'_{ч}(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$, $\beta\to\dfrac{\pi}{2}$, $\quad f'_{ў}(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty$, $\beta\to-\dfrac{\pi}{2}$ (86-расм).

Чап ва ўнг уринмалар x ўқига перпендикуляр бўлиб, биринчиси тепага, иккинчиси пастга йўналган.

Тўғри чизиқнинг аналитик геометриядан маълум бўлган бурчак коэффициентли тенгламасига кўра график Γ га $A(x_0,y_0)$ нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламаси

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0) \tag{6}$$

бўлади. Шу нуқтада уринмага перпендикуляр бўлган тўғри чизиқни Γ га $A(x_0,y_0)$ нуқтада ўтказилган нормал деб атаймиз. Унинг тенгламаси

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \tag{7}$$

бўлади.

1.3. Элементар функцияларнинг ҳосилалари

Ўзгармас C функциянинг ҳосиласи нолга тенг, чунки бу функция учун $\Delta y=0$ ва

$$C'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0. \tag{8}$$

Даражали функция $y=x^n$ ($n=1,2,\ldots$) нинг ҳосиласи

$$\left(x^n\right)'=nx^{n-1}. \tag{9}$$

Ҳақиқатан Ньютон биномига биноан

$$\frac{1}{\Delta x}\left[(x+\Delta x)^n-x^n\right]=\frac{1}{\Delta x}\left[x^n+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2+\ldots+\right.$$
$$\left.+\Delta x^n-x^n\right]=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x+\ldots+\Delta x^{n-1}\xrightarrow[\Delta x\to 0]{}nx^{n-1}.$$

Дифференциаллашнинг қуйидаги тўртта қоидаси мавжуд:

$$(u\pm\vartheta)'=u'\pm\vartheta', \tag{10}$$
$$(u\vartheta)'=u\vartheta'+u'\vartheta, \tag{11}$$
$$\left(\frac{u}{\vartheta}\right)'=\frac{u'\vartheta-u\vartheta'}{\vartheta^2}\quad(\vartheta\neq 0). \tag{12}$$

Бу ерда, $u=u(x),\vartheta=\vartheta(x)$ лар x нинг дифференциалланувчи функцияларидир.

Исботи. Аргументга Δx орттирма берайлик. У ҳолда $u=u(x),\vartheta=\vartheta(x)$ функциялар ҳам мос равишда $\Delta u,\Delta\vartheta$ орттирмалар олишади. Бундан

$$\Delta(u\pm\vartheta)=\left[(u+\Delta u)\pm(\vartheta+\Delta\vartheta)\right]-(u\pm\vartheta)=\Delta u\pm\Delta\vartheta,$$

ва ҳосиланинг таърифига биноан

$$(u\pm\vartheta)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(u\pm\vartheta)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\vartheta}{\Delta x}=u'\pm\vartheta'$$

келиб чиқади.

Худди шундай

$$\Delta(u\vartheta)=(u+\Delta u)(\vartheta+\Delta\vartheta)-u\vartheta=u\Delta\vartheta+\vartheta\Delta u+\Delta u\Delta\vartheta$$

ва

$$(u\vartheta)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(u\vartheta)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u\Delta\vartheta+\vartheta\Delta u+\Delta u\Delta\vartheta}{\Delta x}=$$
$$=u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\vartheta}{\Delta x}+\vartheta\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\vartheta}{\Delta x}=$$
$$=u\vartheta'+u'\vartheta+0\cdot\vartheta'=u\vartheta'+u'\vartheta.$$

Бу ерда, дифференциалланувчи функция узлуксиз бўлгани учун $\Delta x\to 0$ да $\Delta u\to 0$ бўлишидан фойдаланилди.

Ва ниҳоят, шу хоссага биноан

$$\left(\frac{u}{\vartheta}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{u+\Delta u}{\vartheta+\Delta\vartheta}-\frac{u}{\vartheta}\right)\cdot\frac{1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\vartheta\Delta u-u\Delta\vartheta}{(\vartheta+\Delta\vartheta)\vartheta\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\vartheta\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta\vartheta}{\Delta x}}{(\vartheta+\Delta\vartheta)\vartheta}=\frac{u'\vartheta-u\vartheta'}{\vartheta^2}.$$

$y = \sin x$ функцияни қарайлик. Унинг ҳосиласи

$$(\sin x)' = \cos x \tag{13}$$

бўлади, чунки

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

Бу ерда $\cos x$ функциянинг узлуксизлигидан фойдаланилди.

Худди шундай қуйидаги ҳосилани ҳам исбот қилса бўлади:

$$(\cos x)' = -\sin x\,. \tag{14}$$

У ҳолда

$$(tgx)' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \tag{15}$$

$$(ctgx)' = -\cos ec^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{16}$$

Ҳақиқатан мисол учун,

$$(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot (\sin x)' - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$y = \log_a x$ ($x > 0$) функция учун

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Иккинчи ажойиб лимитга кўра,

$$\lim_{u \to 0} \frac{\log_a(1 + u)}{u} = \log_a e$$

бўлгани учун

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{1}{x \ln a}. \tag{17}$$

Хусусан,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \tag{17'}$$

1.4. Мураккаб функциянинг ҳосиласи

1-теорема. *Агар* $x = \varphi(t)$ *функция* t *нуқтада,* $y = f(x)$ *функция* x *нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда мураккаб*

$$y = F(t) = f[\varphi(t)] \tag{18}$$

функция ҳам t *нуқтада дифференциалланувчи бўлади ва бу ҳосила учун қуйидаги формула ўринли:*

$$F'(x) = f'(x) \cdot \varphi'(t) \tag{19}$$

ёки

$$y'_t = y'_x \cdot x'_t. \tag{20}$$

Исботи. Агар t га $\Delta t \neq 0$ орттирма берсак, $x = \varphi(t)$ функция $\Delta x = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$ орттирма олади. $y = f(x)$ функция x нуқтада дифференциалланувчи бўлгани учун 1.1-§ даги (2) формулага асосан

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x\,, \tag{21}$$

бу ерда, $\Delta x \to 0$ да $\varepsilon(\Delta x) \to 0$.

Энди (21) ни Δt га бўламиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon(\Delta x)\frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{22}$$

$x = \varphi(t)$ функция t нуқтада дифференциалланувчи бўлгани учун у шу нуқтада узлуксиз, шу сабабли $\Delta t \to 0$ да $\Delta x \to 0$.

Юқоридаги (22) тенгликда $\Delta t \to 0$ да лимитга ўтамиз. У ҳолда $\Delta x \to 0$ ва $\varepsilon(\Delta x) \to 0$,ва шунинг учун

$$y'_t = f'(x)x'(t) + 0 \cdot x'(t) = f'(x)x'(t) = y'_x \cdot x'_t .$$

Теорема исбот бўлди.

Эслатма. Агар мураккаб функция учта $z = f(y)$, $y = \varphi(x), x = \psi(t)$ функциянинг суперпозициясидан иборат бўлса ва уччала функция мос нуқталарда дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда $z'_t = z'_y \cdot y'_x \cdot x'_t$ бўлади.

1-*мисол.* $y = \ln \sin x$. Агар $u = \sin x$ десак, $y = \ln u$ бўлади. У ҳолда

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{1}{u} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = ctgx .$$

2-*мисол.* $y = \sin ax$. $y'_x = \cos ax \cdot (ax)' = a \cdot \cos ax$.

3-*мисол.* $y = \sin(x^2 + 2x - 1)$. $y'_x = \cos u \cdot (x^2 + 2x - 1)' =$ $= 2(x+1) \cdot \cos(x^2 + 2x - 1)$.

1.5. Тескари функциянинг ҳосиласи

Теорема. *$y = f(x)$ функция (a,b) интервалда узлуксиз, қатъий ўсувчи ва бирор $x \in (a,b)$ нуқтада чекли нолдан фарқли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. У ҳолда f функцияга тескари бўлган $x = f^{-1}(y) = g(y)$ функция ҳам мос нуқтада*

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \tag{23}$$

ёки

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} \tag{23'}$$

формула билан аниқланувчи ҳосилага эга бўлади.

Исботи. Маълумки (5-боб,3.5-§ даги теоремага қаранг), қатъий ўсувчи ва узлуксиз функцияга тескари функция ҳам қатъий ўсувчи ва узлуксиз бўлади. Шу сабабли, агар f нинг (a,b) интервалдаги энг кичик ва энг катта қийматлари мос равишда A ва B бўлса, $x = g(y)$ функция (A,B) интервалда қатъий ўсувчи ва узлуксиз бўлади.

y га $\Delta y \neq 0$ орттирма берайлик. f қатъий монотон бўлгани учун унга тескари функция ҳам нолдан фарқли Δx орттирма олади. Шунинг учун

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

дейиш мумкин. Агар $\Delta y \to 0$ бўлса, $x = g(y)$ узлуксиз бўлгани учун Δx ҳам нолга интилади. Лекин $\Delta x \to 0$ да теорема шартига кўра, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x) \neq 0$. У ҳолда

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}$$

лимит ҳам мавжуд бўлади.

Натижа. Агар $f'(x) \neq 0$ x нинг функцияси сифатида (a,b) да узлуксиз бўлса, у ҳолда $g'(y)$ (A,B) да узлуксиз бўлади.

Ҳақиқатан агар (1) да $x = g(y)$ десак;

$$g'(y) = \frac{1}{f'[g(y)]},$$

яъни $g'(y)$ учта $z = \frac{1}{u}, u = f'(x)$ ва $x = g(y)$ узлуксиз функцияларнинг суперпозициясидан иборат бўлади. У ҳолда аввалги параграфдаги теоремага асосан $g'(y)$ ҳам узлуксиз бўлади.

1.6. Элементар функцияларнинг ҳосилалари (давоми)

1. $y = a^x$. Бундан $x = \log_a y$ - тескари функцияни топамиз. У ҳолда

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\frac{1}{y\ln a}} = y\ln a = a^x \ln a, \text{ яъни } \left(a^x\right) = a^x \ln a.$$

Хусусан,

$$\left(e^x\right) = e^x, \ \left(e^{-x}\right) = -e^{-x}.$$

2. $y = \arcsin x \quad \left(|x| < 1, \ -\pi/2 < y < \pi/2\right)$. $x = \sin y$ - тескари функция. Шу сабабли

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

яъни

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Илдиз олдида + ишора олинганининг сабаби $-\pi/2 < y < \pi/2$ лар учун $\cos y > 0$.

3. $(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. $y = arctgx$, $x = tgy$ - тескари функция $(-\infty < x < \infty, \ -\pi/2 < y < \pi/2)$. У ҳолда

$$(arctgx)' = \frac{1}{(tgy)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+tgy} = \frac{1}{1+x^2},$$

яъни

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

5. Худди шундай

$$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

6. $y = x^\alpha$, ($x > 0, \alpha -$ихтиёрий ҳақиқий сон). Маълумки,

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

e^u ва $\alpha \ln x$ дифференциалланувчи функциялар бўлгани учун мураккаб функциянинг ҳосиласи ҳақидаги теоремага кўра

$$\left(x^\alpha\right) = \left(e^{\alpha \ln x}\right) = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot \frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1},$$

яъни

$$\left(x^\alpha\right) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

7. $y = u(x)^{\vartheta(x)}$ ($u > 0$) – кўринишдаги функцияда $u(x), \vartheta(x)$ лар x нинг дифференциалланувчи функцияларидир.

У ҳолда

$$u^\vartheta = e^{\vartheta \ln u}$$

ва

$$\left(u^\vartheta\right) = e^{\vartheta \ln u}(\vartheta \ln u)' = u^\vartheta\left(\frac{\vartheta}{u}u' + \vartheta' \ln u\right).$$

8. Гиперболик функциялар:

$$(shx)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx,$$

$$(chx)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = shx,$$

$$(thx)' = \left(\frac{shx}{chx}\right)' = \frac{ch^2x - sh^2x}{ch^2x} = \frac{1}{ch^2x},$$

$$(cthx)' = \left(\frac{chx}{shx}\right)' = \frac{sh^2x - ch^2x}{sh^2x} = -\frac{1}{sh^2x}, (x \neq 0).$$

9. $y = Arshx$ функция $x = shy$ функцияга тескари функциядир. Бундан

$$(Arshx)' = \frac{1}{(shy)'} = \frac{1}{chy} = \frac{1}{\sqrt{1+sh^2y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

1.7. Ҳосилалар жадвали

Юқорида келтириб чиқарилган ҳосилаларни қуйидаги тартибда жадвал кўринишида ёзиб оламиз:

$1. y = c \qquad y' = 0$

$2. y = x \qquad y' = 1$

$3. y = x^{\alpha} \qquad y' = \alpha x^{\alpha-1}$

$y = \frac{1}{x} \qquad y' = -\frac{1}{x^2}$

$y = \sqrt{x} \qquad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$4. y = a^x \qquad y' = a^x \cdot \ln a$

$y = e^x \qquad y' = e^x$

$5. y = \log_a x \qquad y' = \frac{\log_a e}{x}$

$y = \ln x \qquad y' = \frac{1}{x}$

$6. y = \sin x \qquad y' = \cos x$

$7. y = \cos x \qquad y' = -\sin x$

$8. y = tgx \qquad y' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$9. y = ctgx \qquad y' = -\csc^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$10. y = \arcsin x \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$11. y = \arccos x \qquad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$12. y = arctgx \qquad y' = \frac{1}{1+x^2}$

$13. y = arcctgx \qquad y' = -\frac{1}{1+x^2}$

$14. y = shx \qquad y' = chx$

$15. y = chx \qquad y' = shx$

$16. y = thx \qquad y' = \frac{1}{ch^2x}$

$17. y = cthx \qquad y' = -\frac{1}{sh^2x}$

2-§. ДИФФЕРЕНЦИАЛ

2.1. Функциянинг дифференциали

Аввалги параграфда биз, агар берилган $y = f(x)$ функциянинг чекли ҳосиласи мавжуд бўлса, қуйидаги муносабат ўринли эканлигини кўрган эдик:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x),$$

бу ерда, $\Delta x \to 0$ да $\varepsilon(\Delta x) \to 0$. (2) дан

$$\Delta y = f'(x)\cdot\Delta x + \Delta x\cdot\varepsilon(\Delta x)$$

ёки

$$\Delta y = f'(x)\cdot\Delta x + \underset{\Delta x\to 0}{o(\Delta x)} \qquad (1)$$

келиб чиқади.

Таъриф. *Агар* $y = f(x)$ *нинг* Δy *орттирмаси*

$$\Delta y = A\cdot\Delta x + \underset{\Delta x\to 0}{o(\Delta x)} \qquad (2)$$

кўринишда ифодаланса, *функция* x *нуқтада дифференциалланувчи деймиз,*бу ерда, A x га боғлиқ бўлиб, Δx га боглиқ эмас.

Аввалги параграфда биз ҳеч қандай қўшимча тушунтиришларсиз x нуқтада чекли ҳосиласи мавжуд бўлган функцияни шу нуқтада дифференциалланувчи деймиз деб кетган эдик. Ҳозир биз юқоридаги таъриф асосида шунга изоҳ берамиз ва бу иккала тушунча бир-бирига эквивалент эканлигини кўрсатувчи қуйидаги теоремани исбот қиламиз.

Теорема. $y = f(x)$ *функция* x *нуқтада дифференциалланувчи, яъни унинг* x *нуқтадаги орттирмаси (2) кўринишда ифодаланиши учун унинг шу нуқтада чекли ҳосиласи мавжуд бўлиши зарур ва етарлидир. У ҳолда* $A = f'(x)$ *бўлади.*

Исботи. Шартнинг етарли эканлиги юқорида исбот қилинган, шу сабабли биз фақат зарурий қисмини исбот қиламиз.

Фараз қилайлик, $y = f(x)$ функция x нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. Унда (2) га асосан $\Delta x \neq 0$ лар учун

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \underset{\Delta x\to 0}{\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}} = A + \underset{\Delta x\to 0}{o(1)}$$

бўлади. $\Delta x \to 0$ да ўнг томоннинг лимити A га тенг:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = A\,,$$

яъни

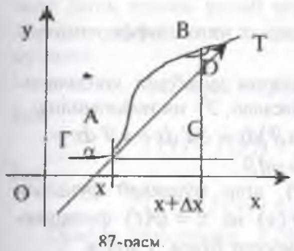
$$f'(x) = A\,.$$

Теорема исбот бўлди.

(2) ифоданинг ўнг томонидаги иккинчи қўшилувчи Δx га нисбатан чексиз кичик миқдор бўлгани учун, ўнг томоннинг Δx га нисбатан чизиқли қисми $A\cdot\Delta x$ ёки юқоридаги теоремага кўра $f'(x)\cdot\Delta x$, орттирманинг асосий қисми ва $y = f(x)$ функциянинг дифференциали, деб аталади ва dy ёки $df(x)$ кўринишда белгиланади. Демак,

$$dy = df = f'(x)\cdot\Delta x$$

экан.



87-расм.

Дифференциалнинг геометрик нуқтаи назардан қандай маъно беришини тушуниш учун $y = f(x)$ функциянинг графигини кўрайлик.

$T - Г$ га абсциссаси x бўлган A нуқтада ўтган уринма бўлсин. Агар T нинг x ўқига оғиш бурчаги α бўлса, у ҳолда $f'(x) = tg\alpha$ бўлади.

$$dy = f'(x)\Delta x = tg\alpha\Delta x = CD,$$

$$DB = \Delta y - dy = \underset{\Delta x\to 0}{o(\Delta x)}\,.$$

Демак, функциянинг Δx орттирмага мос келувчи x нуқтадаги дифференциали уринмада ётувчи нуқта ординатасининг орттирмасига тенг экан, яъни $dy = CD$. $\Delta y = CB$ бўлгани учун умуман чизиқли функциядан бошқа барча ҳолларда $dy \neq \Delta y$ бўлади. Чизиқли $y = Ax + B$ функция учун барча x ларда $\Delta y = A\cdot\Delta x = dy$, хусусан, $y = x$ функция учун $dy = dx = \Delta x$. Шу сабабли, функция дифференциалини

$$dy = f'(x)dx$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бундан

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

яъни функциянинг x нуқтадаги ҳосиласи функциянинг шу нуқтадаги дифференциалининг аргумент дифференциалига нисбатига тенг экан.

Дифференциаллар қуйидаги қоидалар бўйича ҳисобланади:

1^0. $d(u \pm \vartheta) = du \pm d\vartheta$,

2^0. $d(u \cdot \vartheta) = ud\vartheta + \vartheta du$, $d(cu) = cdu$ (c — ўзгармас)

3^0. $d\left(\frac{u}{\vartheta}\right) = \frac{\vartheta du - ud\vartheta}{\vartheta^2}$ ($\vartheta \neq 0$),

бу ерда, $u = u(x), \vartheta = \vartheta(x)$ лар x нинг дифференциалланувчи функцияларидир.

Буларнинг исботи ҳосилаларни ҳисоблаш қоидаларидан осонгина келиб чиқади. Масалан, 2^0- ни исботлайлик:

$$d(u\vartheta) = (u\vartheta)' dx = (u'\vartheta + u\vartheta')dx = \vartheta u' dx + u\vartheta' dx =$$
$$= \vartheta du + ud\vartheta.$$

Маълумки (1.4-§ қаранг), агар мураккаб функция дифференциалланувчи $y = f(x)$ ва $x = \varphi(t)$ функцияларнинг суперпозициясидан иборат бўлса, у ҳолда

$$y'_t = y'_x \cdot x'_t$$

бўлар эди. У ҳолда $y = F(t) = f[\varphi(t)]$ функциянинг дифференциали

$$dy = y'_t\, dt = y'_x \cdot x'_t\, dt = y'_x\, dx$$

бўлади, бу ерда, $x'_t dt = dx$ эканлигидан фойдаланилди. Бу тенглик мураккаб функциянинг асосий аргумент бўйича дифференциал кўриниши билан оралиқ аргумент бўйича дифференциал кўриниши бир хил экан деган маънони билдиради. Шунинг учун дифференциалнинг бу хусусиятини дифференциал кўринишининг инвариантлиги деб аташади. Демак, мураккаб функциянинг дифференциалини оралиқ аргумент бўйича олинган ҳосиланинг шу аргумент дифференциалига кўпайтмаси кўринишида ёки асосий аргумент бўйича олинган ҳосиласининг асосий аргумент дифференциалига кўпайтмаси кўринишида ифодаласа ёки ҳисобласа бўлар экан.

2.2. Дифференциалнинг тақрибий ҳисобларда қўлланиши

Аввалги бўлимдаги (1) формулага кўра

$$\Delta y = dy + \underset{\Delta x \to 0}{o(\Delta x)}.$$

Бундан етарлича кичик Δx лар учун

$$\Delta y \approx dy = f'(x)dx \tag{1}$$

экан деган хулоса келиб чиқади. Агар бу ерда $\Delta x = x - x_0$ ёки $x_0 + \Delta x = x$ десак, (1) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$$

ёки

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

ёки

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Охирги тенгликни x нинг x_0 га етарлича яқин қийматлари учун $f(x)$ функцияни тақрибан чизиқли функцияга алмаштириш, деб тушуниш мумкин. Геометрик нуқтаи назардан бу $y = f(x)$ эгри чизиқнинг $(x_0, f(x_0))$ нуқта атрофидаги қисмини шу нуқтада ўтказилган уринманинг кесмаси билан алмаштирилганини билдиради.

Бундан, агар $x_0 = 0$ десак, x нинг етарлича кичик қийматлари учун $(1+x)^\mu \approx 1 + \mu x$, хусусан $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$, $e^x \approx 1 + x$, $\ln(1+x) \approx x$, $\sin x \approx x$, $tgx \approx x$ ва ҳ.к. дейиш мумкин.

Бундан ташқари дифференциал тушунчаси тақрибий ҳисобларда хатоликларни баҳолаш учун ҳам ишлатилади.

Фараз қилайлик, f функциянинг x нуқтадаги қийматини ҳисоблаш керак бўлсин. Агар x ни унинг тақрибий қиймати $x+\Delta x$ билан алмаштириш зарурати туғилган бўлса, у ҳолда

$$f(x)\approx f(x+\Delta x)$$

тақрибий муносабат вужудга келади. Бу ерда йўл қўйилган абсолют хатолик

$$|\Delta y|=|f(x+\Delta x)-f(x)|$$

бўлади. Агар f функция x нуқтада дифференциалланувчи бўлса, (1) га асосан етарлича кичик Δx лар учун абсолют хатолик дифференциалнинг абсолют қийматига тенг бўлади:

$$|\Delta y|\approx|dy|.$$

Нисбий хатолик тақрибан қуйидагича ифодаланади:

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right|\approx\left|\frac{dy}{y}\right| \ (y=f(x)\neq 0).$$

Мисол. Агар тақрибан

$$\sqrt[3]{8,001}\approx\sqrt[3]{8}=2$$

десак, у ҳолда хатолик тақрибан $y=\sqrt[3]{x}$ функциянинг $x=8$ нуқтада $\Delta x=0,001$ орттирмага нисбатан ҳисобланган дифференциалига тенг:

$$dy=\frac{1}{3}x^{-2/3}\Delta x=\frac{1}{3}8^{-2/3}\cdot 0,001=\frac{1}{12000}.$$

2.3. Юқори тартибли ҳосилалар ва дифференциаллар

Агар $y=f(x)$ функция бирор (a,b) оралиқда чекли $y'=f'(x)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда бу ҳосила ўз навбатида x нинг янги функцияси бўлади, шу сабабли, у ҳам x бўйича дифференциалланувчи бўлиши мумкин. Агар бу янги функциянинг (a,b) оралиқда ҳосиласи мавжуд бўлса, бу ҳосилани $y=f(x)$ функциянинг иккинчи ҳосиласи ёки иккинчи тартибли ҳосиласи деб атаймиз. Бу ҳосила учун

$$y''=(y')',\ f''(x)=(f'(x))'$$

белгилашларнинг бирортаси ишлатилади.

Шу бобнинг 1.1-§ да жисмнинг оний тезлиги йўлдан вақт бўйича олинган ҳосилага тенг эди: $\vartheta=\frac{ds}{dt}$, тезланиш эса тезликдан вақт бўйича олинган ҳосилага тенг бўлади: $a=\frac{d\vartheta}{dt}$. Демак, тезланиш йўлнинг вақт бўйича иккинчи ҳосиласига тенг экан: $a=s''$.

Худди шундай, агар $y=f(x)$ функция (a,b) оралиқда чекли $y''=f''(x)$ ҳосилага эга бўлиб, бу иккинчи ҳосила ўз навбатида x бўйича дифференциалланувчи бўлса, иккинчи ҳосиланинг ҳосиласини $y=f(x)$ функциянинг учинчи ҳосиласи ёки учинчи тартибли ҳосиласи деб атаймиз ва қуйидаги белгиларнинг бирортаси билан ифодалаймиз:

$$y'''=(y'')',\ f'''(x)=(f''(x))'.$$

Худди шу тартибда, учинчи ҳосиладан тўртинчи ҳосилага ўтиш мумкин ва ҳоказо. Ва ниҳоят, агар $(n-1)$-ҳосила (a,b) оралиқда чекли ҳосилага эга бўлса, бу ҳосилани $y=f(x)$ функциянинг $n-$ ҳосиласи ёки $n-$тартибли ҳосиласи, деб атаймиз ва қуйидаги белгиларнинг бирортаси билан ифодалаймиз:

$$y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right),f^{(n)}(x),\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right),\frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Мисоллар.

1^0. $\left(e^x\right)^{(n)}=e^x$,

2^0. $\left(a^x\right)=a^x\ln a,\left(a^x\right)'=a^x\ln^2 a,\ldots,\left(a^x\right)^{(n)}=a^x\ln^n a.$

3^0. $\left(x^m\right)=mx^{m-1},\left(x^m\right)'=m(m-1)x^{m-2},\ldots$

$\ldots,\left(x^m\right)^{(n)}=m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$

Хусусан, агар m натурал бўлса,

$$\left(x^m\right)^{(m)} = m! \text{ ва } n > m \text{ лар учун } \left(x^m\right)^{(n)} = 0.$$

4^0. $(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), (\sin x)'' = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' =$

$$\sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right), \ldots, (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

5^0. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$

6^0. $(\ln x)' = \frac{1}{x}, (\ln x)^{(n)} = \left((\ln x)'\right)^{(n-1)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = (-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{x^n}.$

7^0. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2} = \cos^2 y = \cos y\cdot\sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right),$

$$(arctgx)'' = \left[-\sin y\cdot\sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + \cos y\cdot\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right]\cdot y' =$$

$$= \cos^2 y\cdot\cos\left(2y + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 y\cdot\sin 2\left(y + \frac{\pi}{2}\right),$$

. . . .

$$(arctgx)^{(n)} = (n-1)!\cdot\cos^n y\cdot\sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right).$$

$n-$ ҳосилалар учун

$$(u \pm \vartheta)^{(n)} = u^{(n)} \pm \vartheta^{(n)}.$$

Лекин x бўйича n маротаба дифференциалланувчи $u = u(x), \vartheta = \vartheta(x)$ функциялар кўпайтмаси учун бу бироз мураккаброқ. Кўпайтма учун $n-$ ҳосиланинг мавжудлигини ва унинг ифодасини биринчи бўлиб Лейбниц кўрсатган. Шу сабабли у таклиф этган формулани Лейбниц формуласи деб аташади.

Кўпайтмадан ҳосила олиш қоидасини кетма-кет қўлласак

$$y' = u'\vartheta + u\vartheta', y'' = u''\vartheta + 2u'\vartheta' + \vartheta'',$$
$$y''' = u''' + 3u''\vartheta + 3u'\vartheta'' + \vartheta''', \ldots$$

Бундан математик индукция усулини қўллаб,

$$y^{(n)} = (u\vartheta)^{(n)} = u^{(n)} + nu^{(n-1)}\vartheta' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n)}\vartheta'' +$$

$$+ \ldots + u\vartheta^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C^i{}_n u^{(n-i)}\vartheta^{(i)}$$

эканлигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас, бу ерда

$$C^i{}_n = \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot i}$$

Ньютон биномининг коэффициентларидир. Бунинг исботини ўқувчининг ўзига ҳавола қиламиз.

Бизга маълумки, $y = f(x)$ функциянинг x нуқтадаги дифференциали унинг шу нуқтадаги ҳосиласи билан эркли ўзгарувчининг дифференциали кўпайтмасига тенг эди:

$$dy = f'(x)dx. \qquad (1)$$

Бу ерда, $dx = \Delta x$, яъни x га боғлиқ бўлмаган ўзгармас сон, шу сабабли унинг x бўйича ҳосиласи нолга тенг:

$$(dx)' = 0.$$

Агар (1) ни $y = f(x)$ функциянинг x нуқтадаги биринчи дифференциали десак, (1) нинг шу нуқтадаги дифференциали $y = f(x)$ функциянинг иккинчи дифференциали ёки иккинчи тартибли дифференциали, деб аталади. Бу қуйидагича белгиланади:

$$d^2y = d(dy).$$

Бу дифференциални ҳисоблаш учун (1) дан x бўйича ҳосила олиб, уни dx га кўпайтириш кифоя:

$$d^2y = d[f'(x)dx] = d[f'(x)]\cdot dx = f''(x)dx\cdot dx = f''(x)dx^2.$$

Худди шундай, иккинчи дифференциалнинг дифференциалини учинчи дифференциал ёки учинчи тартибли дифференциал, деб атаймиз:

$$d^3y = d(d^2y).$$

Ва умуман, $(n-1)$-тартибли дифференциалнинг дифференциали $y = f(x)$ функциянинг n – дифференциали ски n-тартибли дифференциали, деб аталади ва қуйидагича белгиланади:

$$d^n y = d(d^{n-1}y).$$

Бундан

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n \qquad (2)$$

муносабатни математик индукция усули билан келтириб чиқариш қийин эмас. Шу сабабли бу ишни ўқувчининг ўзига ҳавола қиламиз.

(2) дан

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} \qquad (3)$$

муносабат, яъни $y = f(x)$ функциянинг x бўйича n ҳосиласи унинг n-дифференциалининг $dx^n = (dx)^n$ га бўлинмасига тенг эканлиги келиб чиқади.

(2) дан фойдаланиб дифференциаллар учун Лейбниц формуласини келтириб чиқариш мумкин, бунинг учун ҳосилалар учун Лейбниц формуласини dx^n га кўпайтириш кифоя. Натижада қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$d^n(u\vartheta) = \sum_{i=0}^{n} C^i{}_n d^{n-i}u \cdot d^i\vartheta,$$

бу ерда, $d^0u = u, d^0\vartheta = \vartheta$.

Маълумки, биринчи дифференциал кўриниши инвариантлик хусусиятиги эга (2.1-§ га қаранг). Шундай хусусиятга юқори тартибли дифференциаллар ҳам эгами, деган табиий савол туғилади. Масалан, иккинчи дифференциал шу хоссага эга эмас.

Ҳақиқатан, агар $y = f(x)$, $x = \varphi(t)$ мураккаб функция берилган бўлса,

$$d^2y = d(y'_x \cdot dx) = dy'_x \cdot dx + y'_x d(dx) = y''_{xx} \cdot dx^2 + y'_x \cdot d^2x, \qquad (4)$$

бу ерда, x ўзгарувчи t нинг функцияси бўлгани учун dx ўзгармас эмас, шу сабабли, умуман, $d(dx) = d^2x \neq 0$. (4) тенглик $d^2y = y''_{xx} \cdot dx^2$ кўринишга фақат $x = at + b$ бўлгандагина келади. Демак, бошқа барча ҳолатларда иккинчи дифференциал (4) кўринишда бўлади, яъни икиинчи дифференциал инвариантлик хусусиятига эга эмас.

Мисол. $y = x^2, x = t^2$ бўлсин. Бундан

$$dy = 2x \cdot dx, d^2y = 2dx^2. \qquad (5)$$

Энди, $x = t^2$ эканлигини эсласак, $y = t^4$ ва бундан

$$dy = 4t^3dt, d^2y = 12t^2dt^2$$

келиб чиқади. dy учун шундай натижага $x = t^2$ ни (5) га олиб бориб, қўйиб ҳам келса бўлади. Лекин d^2y учун бундай эмас, яъни шундай алмаштиришни бажариб, $12t^2dt^2$ ўрнига $8t^2dt^2$ ни ҳосил қиламиз.

Агар (4) формулани қўлласак,

$$d^2y = 2dx^2 + 2xd^2x = 2 \cdot (2tdt)^2 + 2t^2 \cdot 2dt^2 = 12t^2dt^2,$$

яъни тўғри натижага келамиз.

2.4. Параметрик функцияларни дифференциаллаш

Фараз қилайлик, y билан x орасидаги муносабат t параметр орқали берилган бўлсин:

$$\left.\begin{matrix} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{matrix}\right\}, t \in (a,b). \qquad (1)$$

y дан x бўйича ҳосилани x ва y ларнинг t бўйича ҳосилалари орқали топамиз. Биринчи дифференциалнинг инвариантлигидан $y'_x = \frac{dy}{dx}$, лекин $dy = y'_t \cdot dt, dx = x'_t dt$ Шу сабабли

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \quad \left(x'_t \neq 0\right). \qquad (2)$$

Иккинчи тартибли ҳосила учун

$$y''_{xx} = \frac{d}{dx} y'_x = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{x'_t y''_{tt} - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^2}. \qquad (3)$$

Мисол.

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t \end{aligned}\right\}, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Ечиш.

$$x'_t = -a\sin t, y'_t = b\cos t, x''_{tt} = -a\cos t, y''_{tt} = -b\sin t.$$

У ҳолда (2) ва (3) формулаларга асосан

$$y'_x = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a} ctgt,$$

$$y''_{xx} = -\frac{b}{a}\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right) \cdot \frac{1}{-a\sin t} = -\frac{b}{a^2} \cdot \frac{1}{\sin^3 t}.$$

3-§. ЎРТА ҚИЙМАТ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМАЛАР

3.1. Ферма[1] теоремаси

Функциянинг ҳосилаларини билиш кейинги бобларда (7- ва 10-бобларга қаранг) қуриладиган функцияни таҳлил қилишда асосий омил ҳисобланади. Биз бу параграфни шу таҳлил учун зарур бўлган, кўринишидан содда, лекин муҳим теоремалар ва формулаларга бағишлаймиз.

Қуйида келтириладиган теорема Фермага тақалади. Ферма учун ҳосила тушунчаси маълум бўлмаганидан у таклиф этган теорема биз келтирган теорема кўринишидан анча фарқ қилади. Лекин асосий мағзи бир бўлганлиги сабабли бу теоремани Ферма номи билан аташ қабул қилинган.

Таъриф. *Агар барча* $x \in U_c$ *лар учун*

$$f(c) \geq f(x) \qquad (1)$$

$$(\text{мос равишда } f(x) \geq f(c)) \qquad (1')$$

бўлса, $x = c$ *нуқтада ва унинг бирор* $U_c = (c - \delta, c + \delta)$ *атрофида аниқланган* $y = f(x)$ *функция* $x = c$ *нуқтада локал максимумга (минимумга) эришади, деймиз.*

Локал максимум ёки минимумни локал экстремум, деб атаймиз. $x = c$ локал экстремум нуқта, деб аталади.

Агар f функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз ва унинг ички $c \in (a, b)$ нуқтасида максимумга (минимумга) эришса, у ҳолда равшанки, c ўз навбатида локал максимум (минимум) нуқта ҳам бўлади. Лекин f функция $[a, b]$ оралиқнинг чегара нуқталаридан бирида максимумга (минимумга) эришса, бу нуқта локал максимум (минимум) бўлмайди, чунки f функция бу нуқтанинг тўлиқ атрофида (a нуқтанинг чапида ва b нуқтанинг ўнгида) аниқланмаган.

Ферма теоремаси. *Агар* $y = f(x)$ *функция* $x = c$ *нуқтада ва унинг бирор* $U_c = (c - \delta, c + \delta)$ *атрофида аниқланган, чекли* $f'(c)$ *ҳосиласи мавжуд ва шу нуқтада локал максимумга (минимумга) эришса, у ҳолда*

$$f'(c) = 0$$

бўлади.

Исботи. Фараз қилайлик, f функция $x = c$ нуқтада локал максимумга эришсин, яъни барча $x \in U_c$ лар учун

$$f(c) \geq f(x).$$

Ҳосиланинг таърифига кўра,

---

[1] Пьер Ферма (1601-1665) – машҳур фаранг математиги, чексиз кичик миқдорлар таҳлилига асос солганлардан бири.

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c},$$

(1) га асосан $x > c$ лар учун

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0,$$

ва демак, $x \to c + 0$ да лимитга ўтсак,

$$f'(c) \leq 0 \qquad (2)$$

га эга бўламиз. Агар $x < c$ бўлса, у ҳолда

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

бўлади, бунда $x \to c - 0$ да лимитга ўтсак,

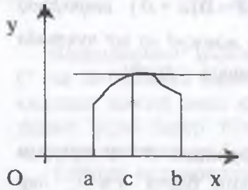
$$f'(c) \geq 0 \qquad (3)$$

келиб чиқади. У ҳолда (2) ва (3) ларни солиштирсак,

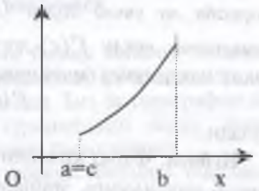
$$f'(c) = 0$$

эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

Ҳосиланинг геометрик маъносини эсласак, $f'(c)$ қиймат $y = f(x)$ функциянинг графигига $x = c$ нуқтада ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини берар эди.



88-расм.



89-расм.

Ҳосиланинг нолга тенг бўлиши шу уринманинг Ox ўқига параллел ўтишини билдиради (88-расмга қаранг).

Теореманинг исботида $x = c$ нуқта ички нуқта бўлиши талаб қилинган эди, чунки бу нуқтадаги қиймат билан унинг чап ва ўнг томонларида жойлашган нуқталардаги қийматлар солиштирилди. Бу талабсиз теорема ўринли бўлмай қолиши мумкин: агар f функция ёпиқ оралиқда аниқланиб, унинг чегарасида локал экстремумга эришса, бу нуқтада ҳосила (агар у мавжуд бўлса) нолга тенг бўлмай қолиши мумкин (89-расмга қаранг).

3.2. Ролль[1] теоремаси

Дифференциал ҳисобнинг кўп теоремалари ва формулалари асосида биз қуйида келтирадиган Ролль номи билан боғлиқ бўлган теорема ётади. Бу теоремани Ролль фақат кўпҳадлар учун исбот қилган.

Теорема. *Агар* $y = f(x)$ *функция 1)* $[a,b]$ *оралиқда узлуксиз, 2)* (a,b) *интервалда дифференциалланувчи ва 3) оралиқнинг чегараларидаги қийматлари тенг* $f(a) = f(b)$ *бўлса, у ҳолда шундай* $c \in (a,b)$ *нуқта топиладики,* $f'(c) = 0$ *бўлади.*

Исботи. Агар f функция $[a,b]$ оралиқда ўзгармас бўлса, у ҳолда (a,b) интервалнинг барча c нуқталари учун $f'(c) = 0$ бўлади.

Энди $y = f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда ўзгарувчи бўлсин дейлик. f функция $[a,b]$ оралиқда узлуксиз бўлгани учун Вейерштрасс теоремасига кўра (5-боб, 3.4-§, 7-теоремага қаранг) у шу оралиқда ўзининг энг кичик m ва энг катта M қийматларига мос равишда қандайдир $x_1, x_2 \in [a,b]$ нуқталарда эришади. Бу нуқталарнинг иккаласи бир вақтда чегара нуқталари бўлиши мумкин эмас, чунки акс ҳолда, теореманинг 3)- талабига кўра,

---

[1] Мишель Ролль (1652-1719) — фаранг математиги, узоқ вақт янги ҳисобга қарши бўлган, бу изланишларга умрини охиридагина қўшилган.

$$f(a)=f(b)=\min_{x\in[a,b]} f(x)=\max_{x\in[a,b]} f(x),$$

ва бундан ўз навбатида $f(x)=m=M, \forall x\in\left[a,b\right]$, яъни f $\left[a,b\right]$ оралиқда ўзгармас деган хулоса келиб чиқади. Бу бизнинг талабимизга зид. Шу сабабли бу нуқталарнинг камида биттаси ички нуқта бўлади. Уни c деб белгилайлик. Бу нуқтада локал экстремумга эришиляпти, бундан ташқари бу нуқтада теореманинг 2)- талабига кўра, $f'(c)$ ҳосила мавжуд. У ҳолда Ферма теоремасига кўра, $f'(c)=0$ бўлади.

Теореманинг барча шартлари муҳим, чунки масалан, $y=x-E(x)$ функция $x=1$ нуқтада узилишга эга, теореманинг бошқа барча шартларини [0,1] оралиқда қаноатлантиради ва (0,1) интервалнинг барча нуқталарида $f'(x)=1$ ёки

$$y=\begin{cases}1, \text{ агар } x=0 \text{ булса},\\ x, \text{ агар } 0<x\le 1 \text{ булса},\end{cases}$$

функция $x=0$ нуқтада узилишга эга, теореманинг бошқа барча шартларини [0,1] оралиқда қаноатлантиради ва (0,1) интервалнинг барча нуқталарида $f'(x)=1$ ёки масалан, $y=x$ функция теореманинг 3)-шартидан бошқа барча шартларини қаноатлантиради ва $\forall x\in(0,1)$ лар учун $f'(x)=1$. $y=|x|$ функция [-1,1] оралиқда узлуксиз, чегара нуқталаридаги қийматлари тенг, лекин 0 нуқтада минимумга эришса ҳам шу нуқтада ҳосиласи мавжуд эмас.

3.3. Чекли орттирмалар ҳақидаги теоремалар

Ролль теоремасидан бевосита келиб чиқадиган чекли орттирмалар ҳақидаги теоремалар деб аталувчи қуйидаги теоремаларнинг биринчиси Лагранжга[1] тегишли.

---

[1] Жозеф-Луи Лагранж (1736-1813) — машҳур фаранг математиги ва механиги.

Теорема (Лагранж). *Агар* $y=f(x)$ *функция 1)* $\left[a,b\right]$ *оралиқда аниқланган, узлуксиз ва 2)* $\left(a,b\right)$ *интервалда дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда шундай* $c\in\left(a,b\right)$ *нуқта топиладики, бу нуқтада*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \tag{4}$$

муносабат бажарилади.

Бу теорема кўпинча ўрта қиймат ҳақидаги теорема, деб ҳам юритилади.

Исботи. $\left[a,b\right]$ оралиқда қуйидаги ёрдамчи функцияни киритайлик:

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Бу функция Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Ҳақиқатан у $\left[a,b\right]$ оралиқда узлуксиз, чунки узлуксиз $f(x)$ ва чизиқли функциялар айирмасидан иборат. $\left(a,b\right)$ интервалда дифференциалланувчи:

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

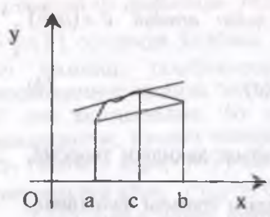
ва ниҳоят, $F(a)=F(b)=0$. У ҳолда Ролль теоремасига кўра $\left(a,b\right)$ интервалда шундай c нуқта топиладики, $F'(c)=0$ бўлади. Бундан

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \text{ ёки } \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

келиб чиқади.

Мисол. $f\ (x)=\sqrt[3]{x^2}+5$ функция [-1,2] кесмада узлуксиз, шу кесманинг $x\neq0$ бўлган барча ички нуқталарида дифференциалланувчи: $f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ ва Лагранж теоремасининг иккинчи шарти бузиляпти.

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{\sqrt[3]{4}-1}{3}=\frac{2}{3\sqrt[3]{c}}\Rightarrow\sqrt[3]{c}=\frac{2}{\sqrt[3]{4}-1}\Rightarrow c=\frac{8}{(\sqrt[3]{4}-1)^3}>8,$$



90-расм.

демак, $c\notin(-1,2)$.

Лагранж теоремасининг геометрик маъноси қуйидагича:

(4) нинг чап томони $(a,f(a))$ ва $(b,f(b))$ нуқталарни тортиб турувчи ватарнинг *Ox* ўқига оғиш бурчагининг тангенсини, ўнг томони эса абциссаси $c\in(a,b)$ бўлган нуқтада графикка ўтказилган уринманинг *Ox* ўқига оғиш бурчагининг тангенсидир (90-расмга қаранг). Демак, Лагранж теоремасига кўра, агар эгри чизиқ $[a,b]$ оралиқда узлуксиз ва (a,b) интервалда дифференциалланувчи бўлган функциянинг графиги бўлса, у ҳолда графикда абциссаси қандайдир $c\in(a,b)$ бўлган нуқта топиладики, бу нуқтадан графикка ўтказилган уринма эгри чизиқнинг чекка $(a,f(a))$ ва $(b,f(b))$ нуқталарини тортиб турувчи ватарга параллел бўлади.

Оралиқ c қийматни қулайлик учун

$$c=a+\theta(b-a),0<\theta<1$$

кўринишда ёзиш қабул қилинган. Унда Лагранж формуласи қуйидаги кўринишни олади:

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(a+\theta(b-a))\ (0<\theta<1).\qquad(5)$$

Теорема (Коши). *Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a,b]$ оралиқда узлуксиз, (a,b) интервалда дифференциалланувчи ва (a,b) нинг барча нуқталарида $g'(x)\neq0$ бўлса, у ҳолда шундай $x=c$ $(a<c<b)$ нуқта топиладики*, бу нуқтада

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

тенглик ўринли бўлади.

Исботи. $g(b)-g(a)\neq0$, чунки акс ҳолда Ролль теоремасига кўра, шундай $\xi\in(a,\ b)$ нуқта топиладики, $g'(\xi)=0$ бўлади, бу эса теорема шартига зид. Қуйидаги ёрдамчи функцияни тузамиз:

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot[g(x)-g(a)].$$

Бундан $F(a)=0,F(b)=0$ эканлигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Бу функция $[a,b]$ оралиқда узлуксиз ва (a,b) интервалда дифференциалланувчи бўлган функциялар айирмасидан тузилгани учун $[a,b]$ оралиқда узлуксиз ва (a,b) интервалда дифференциалланувчи бўлади. У ҳолда Ролль теоремасига кўра шундай $c\in(a,b)$ нуқта топиладики, бу нуқтада $F'(c)=0$ бўлади. Лекин

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(x)$$

бўлгани учун, бу тенгликда $x=c$ десак,

$$F'(c)\equiv f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c)=0$$

ёки

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

ва теорема исботланди.

Мисол. $f(x)=x^3+8$, $g(x)=x^3+x+1$ функциялар $[-1,2]$ кесмада узлуксиз ва унинг барча ички нуқталарида дифференциалланувчи эканлиги равшан ($a=-1$, $b=2$)

$$\frac{f(2)-f(-1)}{g(2)-g(-1)}=\frac{8+8-(-1)^3-8}{8+2+1-[(-1)^3-1+1]}=\frac{9}{11+1}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

$f'(x)=3x^2$, $g'(x)=3x^2+1\neq0$, $x=1$ нуқтада $\frac{f'(1)}{g'(1)}=\frac{3\cdot1}{3\cdot1+1}=\frac{3}{4}$.

Бундан $\frac{f(2)-f(-1)}{g(2)-g(-1)}=\frac{f'(1)}{g'(1)}$; $-1<1<2$.

Агар Коши теоремасида $g(x)=x$ десак, Лагранж теоремаси келиб чиқади, яъни Лагранж теоремаси Коши теоремасининг хусусий ҳоли экан.

3.4. Аниқмасликларни очиш. Лопиталь қоидалари

Агар $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ бўлса, у ҳолда $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ нисбат $x\to a$ да $\dfrac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмаслик, деб аталади. Бу аниқмасликни очиш деганда, агар у мавжуд бўлса, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ лимитни топишни тушунамиз. Бундай лимитни топишнинг усуллари кўп, лекин биз ҳозир кўрадиган усулда бу лимитни ҳосилалар нисбатининг лимитига келтирилади. Бу усул И. Бернуллига[1] тегишли бўлса ҳам, математикада ўзининг «Чексиз кичиклар таҳлили» китобида биринчи маротаба чоп эттирган Г.Ф. Лопиталь[2] номи билан маълум.

1-теорема. *Агар 1)* $f(x)$ *ва* $g(x)$ *функциялар* $x=a$ *нуқтанинг ўзида бўлмаса ҳам, унинг бирор атрофида аниқланган ва дифференциалланувчи, 2)* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=$ $=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, *3) шу атрофнинг барча нуқталари учун* $g(x)$ *ва* $g'(x)\neq 0$ *ва ниҳоят, 4)* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ *лимит мавжуд бўлса, у ҳолда* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *лимит ҳам мавжуд* ва

---

[1] Иоганн Бернулли (1667-1748) — математика тарихида машҳур бўлган голланд оиласининг вакили, Г.В.Лейбницнинг сафдошларидан булган.

[2] Гильом Франсуа дс Лопиталь (1661-1704) -- фаранг математиги, у ҳам Лейбниц мактабининг вакили, матнда келтирилган китоб дифференциал ҳисобнинг дастлабки курси ҳисобланади.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g'(x)}=A. \qquad (1)$$

Исботи. a — чекли сон бўлсин ($a=\infty$ бўлган ҳол кейинроқ кўрилади). $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларни $x=a$ нуқтада $f(a)=g(a)=0$ деб аниқлайлик[3]. У ҳолда бу функциялар $x=a$ нуқтада узлуксиз бўлади. Агар $x>a$ бўлса, $[a,x]$ оралиқни ва агар $x<a$ бўлса, $[x,a]$ оралиқни қараймиз. Аниқлик учун $[a,x]$ оралиқни қарайлик (иккинчи ҳол айнан шундай кўрилади). $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a,x]$ оралиқда узлуксиз, (a,x) да дифференциалланувчи, шу сабабли Коши теоремасига кўра шундай $c\in(a,b)$ нуқта топиладики,

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ ёки } \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

бўлади.

Агар $x\to a$ десак, ўз навбатида $c\to a$ бўлади, шу сабабли теорема шартига кўра

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to a}\frac{f(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

муносабат ўринли бўлади Теорема исбот бўлди.

1-*эслатма.* Агар (1) нинг ўнг томонидаги лимит мавжуд бўлмаса, чап томонидаги лимит ҳам мавжуд бўлмаслиги мумкин.

1-*мисол.* Маълумки (5-боб, 3.7-§ га қаранг), $\sin x\approx x$, шу сабабли

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0,$$

лекин

---

[3] Аввалдан $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $x=a$ нуқтада аниқланган ва узлуксиз, деб фараз қилиш мумкин эди, лекин амалиёт айнан теоремадагидек шарт қўйиш мақбулроқ эканини кўрсатади.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$$

мавжуд эмас.

2-*эслатма.* Агар $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ифода яна $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмаслик бўлиб, $f'(x), g'(x)$ функциялар 1-теореманинг ҳамма шартларини қаноатлантирса, у ҳолда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

бўлади.

2-*мисол.*

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x}=2$$

ёки

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\cos x\cdot(-\sin x)}{\cos^4 x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\sin x}{\cos^3 x}}{\sin x}=2.$$

2-теорема. *Агар 1) $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $x=a$ нуқтанинг ўзида бўлмаса ҳам унинг бирор атрофида аниқланган ва дифференциалланувчи, 2) $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\infty$, 3) шу атрофнинг барча нуқталари учун $g(x)$ ва $g'(x)\neq 0$, ниҳоят, 4) $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ лимит мавжуд бўлса, у ҳолда $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ лимит ҳам мавжуд* ва

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

Бу теоремада кўрилаётган ифодани $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмаслик? деб атаймиз.

Исботи. Теореманинг 2)-шартига биноан, x нинг барча қийматлари учун $f(x)>0$ ва $g(x)>0$ дейиш мумкин.

Аввал A чекли сон бўлган ҳолни кўрайлик. У ҳолда лимитнинг таърифига кўра ихтиёрий $\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta>0$ сон топиладики, $|x-a|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x лар учун $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ тенгсизлик ўринли бўлади. $[x,a+\delta]$ оралиққа Коши теоремасини қўлласак, шундай $c\in(x,a+\delta)$ нуқта топиладики,

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

бўлади. Демак,

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Қуйидаги айниятни кўрайлик:

$$\frac{f(x)}{g(x)}-A=\frac{f(a)-Ag(a)}{g(x)}+\left[1-\frac{g(a)}{g(x)}\right]\cdot\left[\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}-A\right].$$

Унинг ҳақлигига тенгликнинг ўнг томонини соддалаштириб ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

Теореманинг 2)-шартига кўра $x\to a$ да $g(x)\to\infty$ бўлгани учун $(a,a+\delta)$ оралиқнинг барча нуқталари учун

$$g(x)>g(a) \text{ ва } \left|\frac{f(a)-Ag(a)}{g(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

бўлади. У ҳолда юқоридаги айниятга кўра барча $x\in(a,a+\delta)$ лар учун

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

бўлади.

Энди, агар $A=\infty$ бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0$$

бўлади. Ҳозир исбот қилинганига кўра, бундан

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=0$$

келиб чиқади. У ҳолда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0.$$

Теорема тўлиқ исбот бўлди.

3-*эслатма*. Агар $a=\infty$ бўлса, $x={}^{1}\!/_{t}$ алмаштириш ёрдамида $a=0$ бўлган ҳолга келтирилади:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right)'}{\left(g\left(\frac{1}{t}\right)\right)'}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}.$$

3-*мисол.* $a>1$ ва ихтиёрий $\alpha>0$ учун

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=0.$$

Бу $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмаслик. Унга Лопиталь қоидасини $к\geq\alpha$ маротаба қўлласак,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}}{a^x\cdot(\ln a)^k}=0,$$

чунки натижада натурал α лар учун касрнинг суратида x йўқолади ёки x нинг даражаси манфий бўлиб қолади.

4-*мисол.* Агар α ихтиёрий мусбат сон бўлса,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0.$$

Бу ҳам $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмаслик ва $x^\alpha,\ln x$ функциялар 2-теореманинг барча шартларини қаноатлантиради. Шунинг учун

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0.$$

Юқорида кўрилган аниқмасликлардан ташқари, уларга келтириладиган «0·∞«, «0^0», «∞^0», «∞–∞« ва «1^∞« кўринишдаги аниқмасликлар ҳам кўпинча учраб туради.

Агар $x\to a$ да $f(x)\to 0$ ва $g(x)\to\infty$ бўлса, $f(x)\,g(x)$ ифода «0·∞« кўринишдаги аниқмаслик бўлади. Бу $f\cdot g=\frac{f}{\frac{1}{g}}$ алмаштириш ёрдамида $"\frac{0}{0}"$ кўринишдаги аниқмасликка ёки $f\cdot g=\frac{g}{\frac{1}{f}}$ алмаштириш ёрдамида $"\frac{\infty}{\infty}"$ кўринишдаги аниқмасликка келтирилади.

5-*мисол.* Ихтиёрий $\alpha>0$ лар учун

$$\lim_{x\to 0}x^\alpha\ln x=0.$$

Ҳақиқатан

$$\lim_{x\to 0} x^{\alpha}\ln x = 0 = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to 0} x^{\alpha} = 0.$$

Агар $f(x)-g(x)$ ифодада $x\to a$ да $f(x)\to\infty$ ва $g(x)\to\infty$ бўлса, $f(x)-g(x)$ ифода «∞-∞« кўринишдаги аниқмаслик бўлади. Бу "$\frac{0}{0}$" кўринишдаги аниқмасликка, масалан,

$$f(x)-g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f}} - \frac{1}{\frac{1}{g}} = \frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{g}}$$

алмаштириш ёрдамида келтирилиши мумкин.

6-*мисол.*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x - tgx) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ctgx-\cos x}{\cos x\cdot ctgx} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-1/\sin^2 x + \sin x}{-\sin x\cdot ctgx - \cos x\cdot 1/\sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^3 x}{\cos x\cdot(1+\sin^2 x)} = 0.$$

«0^0», «∞^0» ва «1^{∞}« кўринишдаги аниқмасликлар f^{g} ифодада вужудга келади. Агар $f > 0$ бўлса, у ҳолда $f^{g} = e^{g\ln f}$ дейиш мумкин. Бунда $g\ln f$ ифода «0·∞« кўринишдаги аниқмаслик бўлади. Агар $\lim\limits_{x\to a} g\ln f = k$ бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{x\to a} f^{g} = e^{k}$ бўлади.

7-*мисол.* $\lim\limits_{x\to 0} x^{x}$. Бунда $x^{x} = e^{x\ln x}$ бўлгани учун

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} x = 0.$$

У ҳолда

$$\lim_{x\to 0} x^{x} = 1.$$

4-§. ТЕЙЛОР ФОРМУЛАСИ

4.1. Кўпҳад учун Тейлор[1] формуласи

Агар бизга n-даражали

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^{n} \qquad (1)$$

кўпҳад берилган бўлса, уни n маротаба кетма-кет дифференциалласак:

$$P_n{}'(x) = a_1 + 2\cdot a_2x + 3\cdot a_3x^2 + \ldots + n\cdot a_nx^{n-1},$$

$$P_n{}''(x) = 1\cdot 2\cdot a_2 + 2\cdot 3\cdot a_3x + \ldots + (n-1)n\cdot a_nx^{n-2},$$

$$P_n{}'''(x) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot a_3 + \ldots + (n-2)(n-1)n\cdot a_nx^{n-3},$$

……………………………………………

$$P_n^{(n)}(x) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot a_n$$

ва уларда $x=0$ десак, (1) нинг коэффициентларини унинг ҳосилалари билан боғловчи қуйидаги формулаларни ҳосил қиламиз:

$$a_0 = P_n(0), a_1 = \frac{P_n{}'(0)}{1!}, a_2 = \frac{P_n{}''(0)}{2!}, \ldots, a_n = \frac{P_n^{(n)}(0)}{n!}.$$

Агар буларни (1) га олиб бориб қўйсак, $P_n(x)$ кўпҳад учун янги кўриниш оламиз:

$$P_n(x) = P_n(0) + \frac{P_n{}'(0)}{1!}x + \frac{P_n{}''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(0)}{n!}x^{n}. \qquad (2)$$

---

[1] Брук Тейлор (1685-1731) – инглиз математиги, Ньютоннинг издошларидан.

Энди, агар ихтиёрий x_0 учун (1) да $x = x_0 + (x - x_0)$ деб, қавсларни очиб, ифодани $x - x_0$ нинг даражалари бўйича ихчамласак:

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + + \ldots b_n(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} b_k(x - x_0)^k \tag{3}$$

ҳосил бўлади. (3) ни $P_n(x)$ кўпҳаднинг $x - x_0$ нинг даражалари бўйича ёйилмаси деб атаймиз. Аслида $P_n(x)$ кўпҳад x_0 га боғлиқ бўлмаса ҳам, унинг (3) ёйилмасидаги $b_0, b_1, \ldots, b_n$ коэффициентлар a_i ва x_0 га боғлиқ. Агар (3) да $x - x_0 = \xi$ десак, $P_n(x) = P_n(x_0 + \xi) = p_n(\xi)$ ва (3) га кўра

$$p_n(\xi) = b_0 + b_1\xi + b_2\xi^2 + \ldots + b_n\xi^n$$

бўлгани учун (2) асосан

$$b_k = \frac{p_n^{(n)}(0)}{n!}, \quad k = 0,1,2,\ldots,n,$$

ларга эга бўламиз.

Лекин

$$p_n(\xi) = P_n(x_0 + \xi), p_n'(\xi) = P_n'(x_0 + \xi), p_n''(\xi) = P_n''(x_0 + \xi), \ldots,$$

бўлгани учун

$$p_n(0) = P_n(x_0), p_n'(0) = P_n'(x_0), p_n''(0) = P_n''(x_0), \ldots,$$

ва

$$b_k = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{n!}, \quad k = 0,1,2,\ldots,n, \tag{4}$$

яъни (3) ёйилма коэффициентлари ўзининг ва ҳосилаларининг x_0 нуқтадаги қийматлари орқали ифодаланар экан.

Буларни (3) га қўйсак:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n(x_0)}{1!}(x - x_0) + + \frac{P_n''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{5}$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу формула $P_n(x)$ *кўпҳад учун Тейлор формуласи*, деб аталади. Бунинг хусусий ҳоли бўлган (2) формулани *Маклорен формуласи*, деб аташади.

1-*мисол*. $P_n(x) = (a + x)^n$ ва $x_0 = 0$ бўлсин. Унда

$$P_n^{(k)}(x) = n(n-1)\ldots(n-k+1)(a+x)^{n-k},$$

$$P_n^{(k)}(0) = n(n-1)\ldots(n-k+1)a^{n-k},$$

ва (5) га асосан

$$(a + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} a^{n-k} x^k,$$

яъни Ньютон биноми, деб аталувчи формулани ҳосил қиламиз.

4.2. Ихтиёрий функция учун Тейлор формуласи

Фараз қилайлик, x_0 нуқтанинг бирор U_{x_0} атрофида $n+1$ маротаба узлуксиз дифференциалланувчи ихтиёрий $y = f(x)$ функция берилган бўлсин. Бу функция учун (5) га ўхшаш $y = f(x)$ функциянинг n-даражали Тейлор кўпҳади деб аталувчи қуйидаги

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{6}$$

кўпҳадни тузиб оламиз.

Бу кўпҳаднинг x_0 нуқтадаги қиймати $f(x)$ функциянинг шу нуқтадаги қийматига тенг бўлса ҳам, x_0 нуқтанинг атрофидаги бошқа нуқталарда умуман айтганда $P_n(x) \neq f(x)$. Бундан ташқари,

$$P_n'(x_0) = f'(x_0), P_n''(x_0) = f''(x_0), \ldots, P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0). \quad (7)$$

Қуйидаги белгилашни киритайлик:

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x). \quad (8)$$

У ҳолда

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ + \ldots \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x) \quad (9)$$

формулани $f(x)$ функциянинг Тейлор формуласи деб атаймиз, бу ерда, $r_n(x)$ $f(x)$ функциянинг Тейлор формуласининг n-тартибли қолдиғи дейилади.

$r_n(x)$ функциянинг $f^{(n+1)}(x)$ ҳосила орқали ифодасини топайлик.

(7) ва (8) ларга асосан $r_n(x_0) = r_n'(x_0) = \ldots = r_n^{(n)}(x_0) = 0$. Ёрдамчи $\varphi(x) = (x - x_0)^{n+1}$ функцияни кўрайлик. Бу функция учун $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \ldots = \varphi^{(n)}(x_0)$. $r_n(x)$ ва $\varphi(x)$ функцияларга U_{x_0} атрофда Коши теоремасини қўлласак:

$$\frac{r_n(x)}{\varphi(x)} = \frac{r_n(x) - r_n(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{r_n'(x_1)}{\varphi'(x_1)} = \frac{r_n'(x_1) - r_n'(x_0)}{\varphi'(x_1) - \varphi'(x_0)} = \frac{r_n''(x_2)}{\varphi''(x_2)} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{r_n^{(n)}(x_n)}{\varphi^{(n)}(x_n)} = \frac{r_n^{(n)}(x_n) - r_n^{(n)}(x_0)}{\varphi^{(n)}(x_n) - \varphi^{(n)}(x_0)} = \frac{r_n^{(n+1)}(x_{n+1})}{\varphi^{(n+1)}(x_{n+1})},$$

бу ерда, $x_1 \in (x_0, x) \subset U_{x_0}$ ва $x_{k+1} \in (x_0, x_k) \subset U_{x_0}, k = 1, 2, \ldots, n.$

Лекин $\varphi^{(n+1)}(x) = (n+1)!, r_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - 0 = f^{(n+1)}(x)$. Демак, агар $x_{n+1} = c$ десак, у ҳолда

$$r_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \quad (10)$$

келиб чиқади. Бу Тейлор формуласининг Лагранж кўринишидаги қолдиқ ҳади, деб аталади. Агар (10) ни (9) га олиб бориб қўйсак:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \quad (11)$$

Агар (11) да $x_0 = 0$ бўлса, бу формулани Маклорен формуласи, деб атаймиз.

4.3. Қолдиқ ҳаднинг ҳар хил кўринишлари

Айрим ҳолларда қолдиқ ҳаднинг Лагранж кўриниши яроқсизлик қилади. Бундай ҳолларда қолдиқнинг бошқа кўринишларидан фойдаланилади. Биз ҳозир шулардан иккитасини кўриб чиқамиз.

Қолдиқнинг (10) ифодасидаги c нуқта (x_0, x) оралиққа тегишли бўлгани учун уни $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$, деб ёзиш мумкин (3.3-§, (5) формулага қаранг).

Энди, Коши теоремасини U_{x_0} атрофда $r_n(x)$ ва $\varphi(x) = x - x_0$ функцияларга қўлласак:

$$\frac{r_n(x)}{\varphi(x)} = \frac{r_n(x) - r_n(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{r_n'(c)}{1} = r_n'(c), \quad (12)$$

бу ерда $\varphi(x_0) = 0, \varphi'(x) = 1$ эканлиги эътиборга олинди. (10) дан

$$r_n'(x) = \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n+1)}(c)$$

ёки

$$r_n'(c) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!}(1 - \theta)^n (x - x_0)^n.$$

У ҳолда (12) га кўра

$$r_n(x)=r_n'(c)\cdot\varphi(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1} \quad (13)$$

келиб чиқади. (13) ни қолдиқ ҳаднинг Коши кўриниши, деб атаймиз.

Қолдиқ ҳаднинг Лагранж ва Коши кўринишлари асосан $f(x)$ функцияни Тейлор формуласи бўйича $P_n(x)$ кўпҳадга алмаштириб, бунда йўл қўйилган хатоликни баҳолаш учун ишлатилади. Айрим ҳолларда, бизга бу хатолик эмас балки қолдиқ ҳаднинг $x \to x_0$ бўлганда ўзини x_0 нуқта атрофида қандай тутиши ёки аниқроқ қилиб айтсак, қолдиқ ҳаднинг кичиклик тартиби қизиқтиради. Бу тартибни $f(x)$ функцияга қўйилган талаблардан енгилроқ шартларда ҳам топса бўлади. Масалан, $f(x)$ функция x_0 нуқта атрофида n маротаба узлуксиз дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда,(11) формулада n ни n-1 га алмаштирсак:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n,$$

бу ерда, c нуқта (x_0,x) ораликқа тегишли бўлгани учун $x\to x_0$ бўлганда $c\to x_0$, шу сабабли $f^{(n)}(c)\to f^{(n)}(x_0)$ ва

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\alpha(x),$$

бу ерда $x \to x_0$ бўлганда $\alpha(x)\to 0$, яъни $\alpha(x)\cdot(x-x_0)^n=o((x-x_0)^n)$.

У ҳолда

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n). \quad (14)$$

Демак,

$$r_n(x)=o((x-x_0)^n) \quad (15)$$

Қолдиқнинг (15) кўринишини Пеано[1] таклиф этган.

Қуйидаги теорема берилган f функцияни (14) формула бўйича ягона равишда ёйиш мумкинлигини кўрсатади.

Теорема. *Агар* $f(x)$ *функция* x_0 *нуқта атрофида*

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n), \quad (16)$$

$$f(x)=b_0+b_1(x-x_0)+\ldots+b_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n), \quad (17)$$

ёйилмаларга эга бўлса, у ҳолда барча $k=0,1,\ldots,n$ *лар учун* $a_k=b_k$ *бўлади.*

Исботи. Агар (16) ва (17) тенгликларнинг ўнг томонларини тенглаб, $x\to x_0$ бўлганда лимитга ўтсак, $a_0=b_0$ ҳосил бўлади. Энди, бу тенгликни $x-x_0$ га бўлиб, $x\to x_0$ бўлганда лимитга ўтсак, $a_1=b_1$ келиб чиқади. Шу тартибда давом этиб, натижада $a_n=b_n$ эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

Функциянинг (14) ёйилмаси «локал» характерга эга эканлиги, яъни бу ёйилма функциянинг фақат $x\to x_0$ бўлганда қандай ўзгаришини характерлаши (14) тенгликдан кўриниб турибди.

Агар (11) ва (14) да $f(x_0)$ ни тенгликнинг чап томонига ўтказиб, $x-x_0=\Delta x$ десак:

$$\Delta f(x_0)\equiv f(x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1} \quad (11a)$$

ва

$$\Delta f(x_0)\equiv f(x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n+o(\Delta x^n) \quad (14a)$$

---

[1] Жузеппе Пеано (1858-1932) — италиялик математик.

муносабатларга эга бўламиз. Агар бу тengликларда Δx ни dx га алмаштириб,

$$f'(x_0)dx = df(x_0), f''(x_0)dx^2 = d^2 f(x_0), \ldots,$$

$$f^{(n)}(x_0)dx^n = d^n f(x_0), f^{(n+1)}(c)dx^{n+1} = d^{n+1} f(x_0)$$

эканлигини эсласак:

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(c)$$

$$\left(c = x_0 + \theta\Delta x, 0 < \theta < 1\right) \qquad (11б)$$

ёки

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0) + o\left(\Delta x^n\right) \quad (14б)$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, агар $\Delta x \to 0$ десак, функциянинг чексиз кичик $\Delta f(x_0)$ орттирмасидан, фақат унинг бош қисми — биринчи дифференциали эмас, балки юқори тартибли $d^2 f(x_0), \ldots, d^n f(x_0)$ дифференциаллари билан махраждаги факториаллар аниқлигида устма-уст тушувчи юқори тартибли кичик ҳадлари ҳам ажралди.

4.4. Элементар функцияларни Тейлор формулалари бўйича ёйиш

1. $f(x) = e^x$. Бу функция $(-\infty, \infty)$ оралиқда чексиз дифференциалланувчидир ва

$$f^{(k)}(x) = e^x, \;\; f^{(k)}(0) = 1 \;\; (k = 0, 1, \ldots), \;\; f^{(n-1)}(c) = e^c.$$

У ҳолда (11) формулага кўра

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + r_n(x), \;\; r_n(x) = \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}, \;\; c \in (0, x), \qquad (18)$$

бу ерда, x ҳам мусбат, ҳам манфий бўлиши мумкин.

(18) формуладан фойдаланиб, e сонини 0,001 аниқлик билан ҳисоблаш мумкин. $x = 1$ учун (18) га кўра:

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + r_n(1), \qquad (19)$$

бу ерда

$$r_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!} \;\; (0 < c < 1).$$

n ни шундай танлаш керакки, натижада

$$r_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!} \leq 0{,}001$$

бўлсин. Бунинг учун $e^c < 3$ бўлганлигидан, $\frac{3}{(n+1)!} \leq 0{,}001$ тенгсизликни ечиш кифоя. Бу тенгсизлик, масалан, $n = 6$ учун бажарилади. Демак,

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{6!} = 2{,}718.$$

Эслатма. $0 < c < 1$ бўлгани учун, $1 < e^c < 3$. Лекин $n > 2$ лар учун $\frac{e^c}{n+1} = \theta$, бу ерда $0 < \theta < 1$. У ҳолда (19) ни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{\theta}{n!}. \qquad (20)$$

Бу формула 4-боб, 2.6-§ да e сонининг иррационал эканлигини исботлашда ишлатилган эди.

2. $y = \sin x$. Бу функция ҳам барча ҳосилаларга эга ва

$$(\sin x)^{(n)}\big|_{x=0} = \sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, \text{агар} n = 2k, \\ (-1)^k, \text{агар} n = 2k+1. \end{cases}$$

У ҳолда бу функция учун Тейлор формуласи қуйидагича бўлади:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{k+1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + r_{2k}(x), \quad (21)$$

бу ерда

$$r_{2k}(x)=\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\sin\left(\theta x+(2k+1)\frac{\pi}{2}\right)=\underset{x\to0}{o}\left(x^{2k}\right).$$

1-*мисол.* $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}$ ни ҳисобланг.

(21) кўра

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right).$$

Шунинг учун

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)-x}{x^3}=$$

$$=-\frac{1}{6}+\lim_{x\to0}\frac{o\left(x^3\right)}{x^3}=-\frac{1}{6}.$$

3. $y=\cos x$. Худди юқоридагидек,

$$f^{(k)}(x)=\cos\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ f(0)=1,$$

$$f^{(2k)}(0)=(-1)^k,\ \ f^{(2k-1)}(0)=0\ \ (k=1,2,3,\dots).$$

Демак, агар $n=2k+1$ десак,

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+r_{2k+1}.$$

4. $f(x)=\ln(1+x)$. Бу функция $x>-1$ лар учун аниқланган ва барча тартибли ҳосилаларига эга:

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n},\ f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}(n-1)!,$$

ва ниҳоят,

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\dots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+r_n(x).$$

5. $f(x)=(1+x)^m$. Маълумки,

$$f^{(n)}(x)=m(m-1)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

$$f^{(n)}(0)=m(m-1)\dots(m-n+1).$$

У ҳолда

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\dots+ \\ +\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n+r_n(x). \tag{22}$$

2-*мисол.* Ҳисобланг ($m\neq n, m\neq0, n\neq0$):

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+x}-\sqrt[n]{1+x}}{x}.$$

(22) формуладан фойдалансак:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+x}-\sqrt[n]{1+x}}{x}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{x}{m}+o(x)-\left(1+\frac{x}{n}+o(x)\right)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)+o(x)}{x}=\lim_{x\to0}\left[\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)+o(1)\right]=\frac{1}{m}-\frac{1}{n}.$$

6. $f(x)=\operatorname{arctg}x$. Маълумки (2.3-§, 7^0-мисолга қаранг),

$$f^{(n)}(x)=(n-1)!\cdot\cos^n y\cdot\sin n\left(y+\frac{\pi}{2}\right),\ \ f^{(2k)}(0)=0,$$

$$f^{(2k-1)}(0)=(-1)^{k-1}(2k-2)!.$$

У ҳолда бу функция учун Тейлор формуласи қуйидагича бўлади:

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}+r_{2k}(x).$$

7-БОБ.
ФУНКЦИЯЛАРНИ ҲОСИЛАЛАР ЁРДАМИДА ТЕКШИРИШ

1-§. Функциянинг монотонлигини текшириш

Функциянинг ўзгаришини текшириш жараёнида унинг қийматлари қайси оралиқда ўзгармаслиги ёки қайси оралиқда монотонлигини аниқлаб берувчи шартларга зарурият туғилади. Биз бу параграфда шу шартларни аниқлаш билан шуғулланамиз.

1.1. Функциянинг ўзгармаслик шарти

Теорема. *Агар $f(x)$ функция (a,b) интервалда айнан нолга тенг бўлган ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ шу интервалда ўзгармас бўлади.*

Исботи. (a,b) интервалнинг бирор ўзгармас x_0 нуқтасини ва унинг бирор $U_{x_0} \subset (a,b)$ атрофини қарайлик. Шу атроф учун Лагранж теоремасини (6-боб. 3.3-§ га қаранг) қўлласак:

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0),\ \forall x \in U_{x_0},$$

бу ерда, $c \in (x_0, x)$ ёки $c \in (x, x_0)$.

Теорема шартига кўра, барча $x \in (a,b)$ларда, жумладан, $c \in U_{x_0} \subset (a,b)$ нуқтада $f'(c) = 0$. Шу сабабли барча $x \in (a,b)$ лар учун

$$f(x) = f(x_0) = const.$$

Теорема исбот бўлди.

Бу теоремадан интеграл ҳисоб учун зарур бўлган қуйидаги натижа келиб чиқади:

Натижа. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар (a,b) интервалда айнан тенг бўлган ҳосилага эга бўлса, яъни барча $x \in (a,b)$ ларда

$$f'(x) = g'(x)$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар шу оралиқда фақат ўзгармас миқдорга фарқ қилади:

$$f(x) = g(x) + C.$$

Буни исботлаш учун юқоридаги теоремани $f(x)$-$g(x)$ айирмага қўллаш кифоя.

Мисол. $\operatorname{arctg} x$ ва $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$ функцияларнинг ҳосилалари x нинг ±1 қийматларидан бошқа барча қийматларида ўзаро тенг. Буни текширишни ўқувчининг ўзига ҳавола қиламиз. Шу сабабли

$$arctgx = \frac{1}{2} arctg \frac{2x}{1-x^2} + C \qquad (1)$$

тенглик фақат $(-1,1)$, $(-\infty,-1)$ ва $(1,+\infty)$ оралиқлардагина бажарилади. Яна қизиқ томони шундаки, C нинг қиймати ҳар бир оралиқ учун ҳар хил, масалан, биринчи оралиқ учун C=0, бунга ишонч ҳосил қилиш учун (1) да x=0 дейиш кифоя, агар (1) да $x \to -\infty$ да лимитга ўтсак, иккинчи оралиқда $C = \frac{\pi}{2}$ эканлиги ва ниҳоят, (1) да $x \to +\infty$ да лимитга ўтсак, учинчи оралиқ учун $C = -\frac{\pi}{2}$ эканлиги келиб чиқади.

1.2. Функциянинг монотонлик шарти

Энди, функция ҳосиласи нолга тенг бўлмаган ҳол учун функция қандай ўзгаришини текширамиз.

1-теорема. *Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда узлуксиз, (a,b) интервалда манфий бўлмаган (мусбат) ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда камаймайди (ўсади).*

Исботи. Ҳақиқатан агар $a \le x_1 < x_2 \le b$ десак, $[x_1, x_2]$ оралиқ учун Лагранж теоремаси ўринли бўлади, яъни (x_1, x_2) да шундай c нуқта топиладики, унинг учун

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \qquad (2)$$

тенглик бажарилади. Теорема шартига кўра, $(a.b)$ интервалда $f'(x) \ge 0$ ($f'(x) > 0$) бўлгани учун, бу тенгсизлик $c \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$ нуқтада ҳам ўринли бўлади, яъни $f'(c) \ge 0$ (мос равишда $f'(c) > 0$) бўлади.

У ҳолда (2) дан $f(x_2) - f(x_1) \ge 0$ ($f(x_2) - f(x_1) > 0$) келиб чиқади. x_1 ва x_2 лар ихтиёрий танлангани учун $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда камаймайди (ўсади).

Таъриф. *Агар шундай $\delta > 0$ топилсаки, $0 < \Delta x < \delta$ лар учун*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \ \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0\right)$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада ўсувчи (камаювчи) дейилади.

2-теорема. *Агар $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$) бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада ўсувчи (камаювчи) бўлади.*

Исботи. $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ бўлгани учун, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ топиладики, $|\Delta x| < \delta$ лар учун

$$f'(x_0) - \varepsilon < \frac{\Delta y}{\Delta x} < f'(x_0) + \varepsilon$$

бўлади. Агар $f'(x_0) > 0$ бўлса, у ҳолда $\varepsilon < f'(x_0)$ деб танласак,

$|\Delta x| < \delta$ лар учун $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ бўлади. Теорема исбот бўлди.

1-эслатма. 1-теоремада функциянинг (a, b) интервалда $f'(x) \ge 0$ бўлган ҳосиласи мавжудлигидан унинг шу оралиқда камаймаслиги исбот қилинган эди. Лекин акси ҳам ўринли, яъни агар функция (a, b) интервалда дифференциалланувчи ва камаймайдиган бўлса, у ҳолда шу интервалда $f'(x) \ge 0$ бўлади, чунки агар (a, b) интервалда шундай x_0 нуқта мавжуд бўлсаки, бу нуқтада $f'(x_0) < 0$ бўлса, 2-теоремага асосан функция x_0 нуқтада камаювчи бўлиб қолади, бу эса қилинган фаразга зид.

Агар функция дифференциалланувчи ва (a, b) интервалда қатъий ўсувчи булиб, бу функция ҳақида бошқа маълумотларга эга бўлмасакда, барибир (a, b) интервалда $f'(x) \ge 0$ бўлади дейишга тўғри келади, чунки қатъий ўсувчи функция (a, b) интервалнинг бирор нуқтасида нолга тенг бўлган ҳосилага эга бўлиши мумкин. Масалан, x^3 функция $(-\infty, +\infty)$ да қатъий ўсади ва $x = 0$ нуқтада унинг ҳосиласи нолга тенг, худди шундай $f(x) = x - \sin x$ функция ўсувчи, чунки унинг ҳосиласи $f'(x) = 1 - \cos x$ ҳеч қаерда манфий эмас, лекин $x = 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ нуқталарда нолга тенг.

2-эслатма. Функциянинг x_0 нуқтада ўсувчилигидан унинг шу нуқта атрофида ҳам ўсиши келиб чиқмайди. Масалан,

$$F(x) = \begin{cases} 0, x = 0, \\ \dfrac{x}{2} - x^2 \sin\dfrac{1}{x}, x \ne 0, \end{cases}$$

функция $x = 0$ нуқтада ўсувчи, чунки

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}-x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\frac{1}{2}.$$

Лекин бу функция монотон эмас, чунки унинг ҳосиласи $F'(x)=\frac{1}{2}-2x\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}$ нолнинг ихтиёрий кичик атрофида ҳам мусбат, ҳам манфий қийматлар қабул қилади: $x_k={}^{1}\!/_{k\pi}$ $(k=1,2,\ldots)$ нуқталарда жуфт k лар учун 3/2 га, тоқ k лар учун −1/2 га тенг.

3-теорема. Агар $f(x)$ функция жуфт (тоқ) ва $[-a,a]$ оралиқда дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда $f'(x)$ тоқ (жуфт) функция бўлади.

Исботи. Теорема шартига кўра $\forall x\in[-a,a]$ лар учун $f(x)=f(-x)$. Агар бу тенгликни дифференциалласак:

$$f'(x)=-f'(-x),$$

яъни функция тоқ эканлиги келиб чиқади.

2-§. ФУНКЦИЯНИНГ ЛОКАЛ ЭКСТРЕМУМЛАРИ

Локал экстремум нуқталарга таърифни 6-боб, 3.1-§ да берган эдик. Бундай нуқталарни қуйидагича таърифласа ҳам бўлади:

Агар шундай $\delta>0$ сонни кўрсатиш мумкин бўлсаки, функциянинг c нуқтадаги Δy орттирмаси c нинг δ-атрофида $\Delta y=f(x)-f(c)\le 0$ (мос равишда $\Delta y=f(x)-f(c)\ge 0$) тенгсизликни қаноатлантирса. $f(x)$ функция c нуқтада локал максимумга (минимумга) эришади деймиз.

Ферма теоремасига кўра (6-боб, 3.1-§ га қаранг), агар функцчя x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлиб,

шу нуқтада локал экстремумга эришса, у ҳолда $f'(x_0)=0$ бўлар эди.

Юқорида кўрган мисолларимиздан маълумки, ҳосилани нолга айлантирадиган ҳар қандай нуқта экстремум нуқта бўлавермайди. Шу сабабли $f'(x)=0$ тенгламанинг ечимларини $f(x)$ функциянинг стационар нуқталари, деб атаймиз.

Функция локал экстремумларга ҳосиласи мавжуд бўлмаган нуқталарда ҳам эришиши мумкин, масалан, $y=|x|$ функция $x=0$ нуқтада дифференциалланувчи эмас, лекин бу нуқтада минимумга эришади.

Демак, функциянинг локал экстремумларини стационар нуқталари, яъни ҳосиласи мавжуд бўлиб, бу ҳосилани нолга айлантирадиган нуқталар орасидан ёки ҳосиласи мавжуд бўлмаган нуқталар орасидан қидириш керак экан.

Бундан хулоса шуки,

$$f'(x)=0 \tag{1}$$

шарт дифференциалланувчи f функция x нуқтада локал экстремумга эришиши учун зарурий шарт экан, лекин етарли эмас.

Шу сабабли стационар нуқталар орасидан локал экстремумларни ажратиб олиш учун қўшимча шартлар зарур. Бу шартларни локал экстремумнинг етарли шартлари, деб атаймиз.

2.1. Локал экстремумларни биринчи ҳосила ёрдамида аниқлаш

Фараз қилайлик, x_0 $f(x)$ функциянинг стационар нуқтаси бўлсин ва функция бу нуқтада ва унинг бирор U_δ атрофида узлуксиз, шу нуқтанинг ўзида бўлмаса-да, унинг U_δ атрофида чекли ҳосилага эга ва бу ҳосила

U_δ да x_0 нинг чап томонида ҳам, ўнг томонида ҳам доимий ишорага эга бўлсин.

1-теорема. *1) Агар* $x\in(x_0-\delta, x_0)$ *лар учун* $f'(x)>0$, *ва* $x\in(x_0, x_0+\delta)$ *лар учун* $f'(x)<0$ *бўлса,* x_0 *нуқта локал максимум бўлади; 2) агар* $x\in(x_0-\delta, x_0)$ *лар учун* $f'(x)<0$ *ва* $x\in(x_0, x_0+\delta)$ *лар учун* $f'(x)>0$ *бўлса,* x_0 *нуқта локал минимум бўлади; 3) агар ҳосила* x_0 *нуқтанинг чап ва ўнг томонларида бир хил ишорали бўлса, бу нуқта локал экстремум бўлмайди.*

Исботи. 1) $(x_0-\delta, x_0)$ да $f'(x)>0$ бўлса, 1-§, 1-теоремага кўра функция бу оралиқда ўсади ва шу сабабли барча $x\in(x_0-\delta, x_0)$ лар учун $f(x)<f(x_0)$ бўлади,$(x_0, x_0+\delta)$ да $f'(x)<0$ бўлса, ўша теоремага кўра функция бу оралиқда камаяди ва демак, барча $x\in(x_0, x_0+\delta)$ лар учун $f(x_0)>f(x)$ бўлади. Бундан хулоса: $\forall x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ лар учун $f(x_0)\geq f(x)$, яъни x_0 нуқта локал максимум экан.

2) Худди юқоридагидек мулоҳаза қилсак, $x\in(x_0-\delta, x_0)$ лар учун $f'(x)<0$ эканлигидан, барча $x\in(x_0-\delta, x_0)$ лар учун $f(x_0)<f(x)$ ва $(x_0, x_0+\delta)$ да $f'(x)>0$ эканлигидан, барча $x\in(x_0, x_0+\delta)$ лар учун $f(x_0)<f(x)$ бўлиши келиб чиқади. Демак, $\forall$ $x\in(x-\delta, x+\delta)$ лар учун $f(x_0)\leq f(x)$, яъни x_0 нуқта локал минимум экан.

3) Агар $x\in(x_0-\delta, x_0)$ лар учун $f'(x)<0$ (>0) ва $x\in(x_0, x_0+\delta)$ лар учун ҳам $f'(x)<0$ (>0) бўлса, функция x_0 нуқтанинг чап томонида ҳам, ўнг томонида ҳам камаяди (ўсади). Шу сабабли x_0 нуқта локал экстремум бўлмайди.

1-эслатма. Теоремада биринчи ҳосила x_0 нуқтадан ўтиш жараёнида ишорасини ўзгартирса, локал экстремум бўлади дейиляпти, лекин бунда $f'(x_0)$ нинг мавжудлиги шарт эмас, фақат $f(x)$ x_0 нуқтада узлуксиз бўлса етарли.

1-*мисол.* $f(x)=\begin{cases}1+x, x<0,\\ -x, x\geq 0.\end{cases}$

91-расм.

Бу функциянинг ҳосиласи $x=0$ нуқтанинг чап томонида «+» ишорага ва ўнг томонида «—» ишорага эга, лекин функция $x=0$ нуқтада узлуксиз ҳам, дифференциалланувчи ҳам эмас (91-расмга қаранг).

2-*мисол.* $y=\dfrac{1}{1+x^2}$; $y'=-\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$. Бу ердан кўриналики, $x<0$ лар учун $y'>0$ ва $x>0$ лар учун $y'<0$; бундан ташқари функция $x=0$ нуқтада узлуксиз. Шунинг учун 1-теоремага кўра берилган функция $x=0$ нуқтада локал максимумга эга. Функциянинг бошқа локал экстремумлари йўқ.

3-*мисол.* $y=2-x^2\left(1-\sin\dfrac{1}{x}\right)$ $(x\neq0)$, $y(0)=2$. Бу функция $x=0$ нуқтада узлуксиз ва локал максимумга эришади: барча x лар учун $y(x)\leq y(0)=2$. Лекин $x=0$ нинг ҳеч қайси атрофи учун $x<0$ ларда ўсиб, $x>0$ ларда камаймайди, чунки

$$y'=-2x\left(1-\sin\frac{1}{x}\right)-\cos\frac{1}{x}\ \ (x\neq0),$$

$$y'(0)=\lim_{x\to0}\frac{2-x^2\left(1-\sin\frac{1}{x}\right)-2}{x}=-\lim_{x\to0}x\left(1-\sin\frac{1}{x}\right)=0.$$

Кичик x лар учун $2x\left(1-\sin\frac{1}{x}\right)$ ифода қиймати етарлича кичик, шунинг учун ҳосиланинг ишораси $\cos\frac{1}{x}$ га боғлиқ. $x \to 0$ да $\cos\frac{1}{x}$ бир неча маротаба ± 1 қийматни қабул қилади.

2.2. Локал экстремумларни иккинчи ҳосила ёрдамида текшириш

2-теорема. *x_0 нуқта f функциянинг стационар нуқтаси, яъни $f'(x_0)=0$ ва унинг атрофида f икки марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлсин. Агар $f''(x_0)<0$ бўлса, x_0 нуқта f функциянинг локал максимуми ва агар $f''(x_0)>0$ бўлса, x_0 нуқта f функциянинг локал минимуми бўлади.*

Исботи. Берилган функцияни $n=1$ бўлган ҳол учун Тейлор формуласига ёйлик:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2 \quad (c\in(x_0,x)). \qquad (2)$$

Бундан теорема шартига кўра $f'(x_0)=0$ бўлгани учун

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2. \qquad (2')$$

Фараз қилайлик, $f''(x_0)<0$ бўлсин. f'' x_0 нуқта атрофида узлуксиз бўлгани учун шундай $\delta>0$ топиладики, барча $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ лар учун $f''(x)<0$ бўлади. У ҳолда (2') даги қолдиқ ҳад $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ лар учун

$$\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(c)\le 0$$

бўлади. Бундан $\forall x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ лар учун

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)\le 0$$

эканлиги келиб чиқади, яъни x_0 локал максимум экан.

Худди шундай, агар $f''(x_0)>0$ бўлса, x_0 нинг атрофида $f''(x)>0$, шу жумладан, $f''(c)>0$ бўлади. У ҳолда (2') даги қолдиқ ҳад шу атрофда манфий бўлмайди. Шу сабабли x_0 нинг атрофидаги барча x лар учун

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)\ge 0$$

бўлади, яъни x_0 локал минимум экан.

4-мисол. $y=x^2+5, y'=2x$, $x=0$–стационар нуқта экан.

Барча x лар учун $y''=2>0$, демак, 2-теоремага кўра $x=0$ – локал минимум экан.

2-эслатма. $f'(x_0)=0$ ва $f''(x_0)=0$ бўлиши x_0 нуқтанинг экстремум бўлишини таъминламайди. Масалан, $y=x^3$ ва $y=x^4$ функцияларнинг биринчи ва иккинчи ҳосилалари $x=0$ нуқтада нолга тенг, лекин биринчи функциямиз бу нуқтада экстремумга эга эмас, иккинчиси эса локал минимумга эга.

3-теорема. $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n)}(x_0)=0, f^{(n+1)}(x_0)\ne 0$ *ва $f^{(n+1)}(x)$ x_0 нуқтанинг атрофида узлуксиз бўлсин. Агар $(n+1)$-жуфт ва $f^{(n+1)}(x_0)<0$ бўлса, f функция x_0 нуқтада локал максимумга; агар $(n+1)$-жуфт ва $f^{(n+1)}(x_0)>0$ бўлса, f функция x_0 нуқтада локал минимумга эришади; ва ниҳоят, агар $(n+1)$-тоқ ва $f^{(n+1)}(x_0)\ne 0$ бўлса, f функция x_0 нуқтада ҳеч қандай экстремумга эришмайди.*

Исботи. f функциянинг x_0 нуқта атрофидаги Тейлор ёйилмасига теорема шартини қўлласак:

$$f(x)-f(x_0)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c) \quad (c\in(x_0,x)). \qquad (3)$$

Агар бу ерда $(n+1)$-жуфт бўлса, (2') формуладек мулоҳаза қиламиз. Энди $(n+1)$-тоқ ва $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$ бўлсин. $f^{(n+1)}(x)$ x_0 нуқта атрофида узлуксиз бўлгани туфайли, унинг учун шундай $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ интервал мавжудки, у ерда у $f^{(n+1)}(x_0)$ нинг ишорасини сақлайди. Агар x x_0 нуқтадан ўсиб ўтса, $(x-x_0)^{n+1}$ ўз ишорасини ўзгартиради, $f^{(n+1)}(x_0)$ нинг ишораси эса ўзгармайди. Шу сабабли,(3) тенгликнинг ўнг тарафи ва ўз навбатида $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ ҳам ўз ишорасини ўзгартиради, яъни x_0 нуқта локал экстремум бўлмайди.

4-теорема. *Агар* $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)>0$ *(<0) бўлса, у ҳолда* f *функция* x_0 *нуқтада локал минимумга (максимумга) эришади.*

Бу теореманинг 2-теоремадан фарқи шундаки, 4-тсоремада иккинчи ҳосиланинг узлуксизлиги талаб қилинмай, фақат мавжудлиги талаб қилиняпти. Шу маънода 2-теоремани 4-теореманинг хусусий ҳоли дсб қараш мумкин.

4-теореманинг исботи.

$$f''(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{x-x_0} > 0,$$

бўлгани учун 5-боб, 2.2-§, 2-теоремага кўра x_0 нинг етарлича кичик атрофида $\frac{f'(x)}{x-x_0} > 0$ бўлади. У ҳолда $x < x_0$ лар учун $f'(x) < 0$ ва $x > x_0$ лар учун $f'(x) > 0$ бўлади. Демак, 1-теоремага кўра x_0 нуқта локал минимум экан. $f''(x_0) < 0$ ҳол худди юқоридагидек текширилади.

3-§. ФУНКЦИЯНИНГ ЭНГ КАТТА ВА ЭНГ КИЧИК ҚИЙМАТЛАРИ

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a,b]$ ораликда узлуксиз бўлсин. У ҳолда Вейерштрасс тсоремасига кўра (5-боб, 3.3-§ га қаранг) бу функция $[a,b]$ да ўзининг энг катта ва энг кичик қийматларига эришади. Функция бу қийматларга ё (a,b) интервалда ёки чегаравий $x=a$ ва $x=b$ нуқталарда эришиши мумкин. (a,b) интервалда энг катта ва энг кичик қийматларга эришилаётган нуқталар юқоридаги мулоҳазаларга асосан локал экстремум нуқталар бўлади. Шу сабабли энг катта ва энг кичик қийматларга эришилаётган нуқталарни ё стационар нуқталар орасидан, ё ҳосиласи мавжуд бўлмайдиган нуқталар орасидан қидириш керак экан. Агар бу нуқталар чекли $x_1, x_2, \ldots, x_m$ тўпламни ташкил этса, у ҳолда

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) = \max\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_m)\}$$

ва

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) = \min\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_m)\}.$$

5-*мисол.* $f(x) = \sin x + \cos x$ функциянинг $[0,\pi]$ оралиқдаги энг катта ва энг кичик қийматлари топилсин.

Аввал ҳосиласини ҳисоблаймиз: $f'(x) = \cos x - \sin x$. Уни нолга тенглаб, стационар нуқталарини топамиз:

$$\cos x - \sin x = 0.$$

Бу тенгламанинг $[0,\pi]$ оралиққа тегишли ечими фақат $x=\pi/4$. У ҳолда $f(0)=1$, $f(\pi/4)=\sqrt{2}$, $f(\pi)=-1$ бўлгани учун

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) = \sqrt{2}, \quad \min_{x\in[a,b]} f(x) = -1.$$

6-*мисол.* Ер сатҳига φ бурчак остида жойлаштирилган тўпдан бошланғич ϑ_0 тезликда отилган ўқнинг учиш масофаси

$$R = \frac{\vartheta_0^{\,2} \sin 2\varphi}{g} \qquad (4)$$

формула билан ҳисобланади, бу ерда, g — оғирлик кучининг тезланиши. Берилган бошланғич тезликда ўқнинг энг узоқ масофага тушиши учун тўпни қандай бурчак остида жойлаштириш кéрак?

Ечиш. Табиийки, $0 \le \varphi \le \pi/2$ бўлиши керак. (4) ни шу оралиқда максимумга текширамиз:

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{2\vartheta_0^{\,2} \cos 2\varphi}{g}, \ \frac{2\vartheta_0^{\,2} \cos 2\varphi}{g} = 0,$$

бундан критик нуқта $\varphi=\pi/4$ эканлиги келиб чиқади.

$$\frac{d^2R}{d\varphi^2} = -\frac{4\vartheta_0^{\,2} \sin 2\varphi}{g}, \ \left(\frac{d^2R}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=\pi/4} = -\frac{4\vartheta_0^{\,2}}{g} < 0.$$

Демак, $\varphi=\pi/4$ да учиш масофаси R максимумга эришар экан:

$$(R)_{\varphi=\pi/4} = \frac{\vartheta_0^{\,2}}{g}.$$

Функциянинг $[0,\pi/2]$ оралиқ чегараларидаги қийматлари

$$(R)_{\varphi=0} = 0, \ (R)_{\varphi=\pi/2} = 0.$$

Демак, ўқ энг узоқ масофага тушиши учун уни ер сатҳига 45^0 бурчак остида узиш керак экан.

7-*мисол.* Ҳажми V бўлган цилиндрнинг тўла сирти S энг кичик бўлиши учун унинг ўлчамлари қандай бўлиши керак?

Ечиш. Цилиндр асосининг радиусини r ва баландлигини h билан белгилайлик. У ҳолда

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh, \ V = \pi r^2 h$$

бўлади. Бундан $h = \frac{V}{\pi r^2}$ ни топиб, S учун ёзилган формулага қўйсак:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} \ \text{ёки} \ S = 2\left(\pi r^2 + \frac{V}{r}\right)$$

ҳосил бўлади, бу ерда, V берилган сон. Натижада S юза r радиуснинг функцияси сифатида ифодаланди. Бу функциянинг $0<r<\infty$ оралиқдаги энг кичик қийматини топайлик:

$$\frac{dS}{dr} = 2\left(2\pi r - \frac{V}{r^2}\right) = 0,$$

бундан

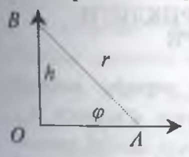
$$r_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, \ \left(\frac{d^2S}{dr^2}\right)_{r=r_1} = 2\left(2\pi + \frac{2V}{r^3}\right)_{r=r_1} > 0.$$

Демак, S функция $r=r_1$ нуқтада минимумга эга экан. Энди $\lim\limits_{r\to 0} S = \infty$ ва $\lim\limits_{r\to\infty} S = \infty$ эканлигини эътиборга олсак, S функция $r=r_1$ нуқтада энг кичик қийматга эришади дейиш мумкин. Бу қийматга

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, \ h = \frac{V}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r$$

нуқталарда эришилади. Демак, берилган ҳажмли цилиндрнинг тўлиқ юзи баландлиги асосининг диаметрига тенг бўлганда энг кичик бўлар экан.

8-*мисол.* Электр чироғи тик OB тўғри чизиқ бўйлаб бирор блокка бириктирилган ҳолда ҳаракат қила оладиган бўлсин. Текисликдаги A нуқтада ёруғлик энг юқори бўлиши A учун электр чироқни текисликдан қандай баландликка қўйиш лозим?



92-расм

Маълумки, A нуқтадаги I ёруғлик $I = c\dfrac{\sin\varphi}{r^2}$ қоида бўйича аниқланади. Агар h ни эркли ўзгарувчи сифатида қарасак, у ҳолда 92-расмдан $\sin\varphi = \dfrac{h}{r}$, $r = \sqrt{h^2 + a^2}$ ларни аниқласак,

$$I = c \cdot \frac{h}{\left(h^2 + a^2\right)^{3/2}} \; (0 < h < +\infty)$$

формула ҳосил бўлади. Бу функцияни максимумга текширамиз:

$$I_h' = c \cdot \frac{a^2 - 2h^2}{\left(h^2 + a^2\right)^{5/2}}$$

ҳосила $h = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ нуқтада нолга айланади. Энди,

$$I\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2c}{3\sqrt{3a^2}} > 0\,,\; I(0) = I(\infty) = 0$$

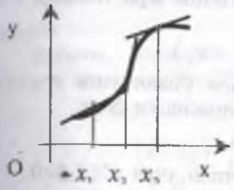
қийматлар ичида энг каттаси $h = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ нуқтада эришиляпти.

Демак, чироқни $h = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ баландликка ўрнатиш керак экан.

4-§. ЭГРИ ЧИЗИҚНИНГ ҚАВАРИҚЛИГИ. БУРИЛИШ НУҚТАЛАРИ

1-таъриф. *Агар нуқтанинг шундай атрофи мавжуд бўлсаки, бу атрофдаги барча нуқталар учун абциссаси* x_0 *бўлган нуқтада эгри чизиққа ўтказилган ҳар қандай уринма эгри чизиқдан юқорида (пастда) жойлашган бўлса,* $y=f(x)$ *эгри чизиқ* x_0 *нуқтада қавариқлиги юқорига (пастга) қараган деймиз.*

2-таъриф. *Агар* x x_0 *нуқтадан ўтаётганда чизиқнинг абциссаси* x *бўлган нуқтаси уринманинг томонидан иккинчи томон ўтса,* x_0 *нуқта* $y=f(x)$ *чизиқнинг бурилиш дейилади.* Масалан, 93-расмд x_3 нуқта бурилиш нуқтасиди



93-расм

Айрим ҳолларда "қавар лиги юқорига (пастга) қара жумла ўрнига "ботиқлиги па (юқорига) қараган" ишлатилади. Масалан, 93-расмдаги x_1 нуқтад чизиқнинг қавариқлиги пастга қараган, x_2 нуқтада қавариқлиги юқорига (93-расм) қараган.

Бу таърифлар эгри чизиқнинг уриниш нуқта нинг етарлича кичик атрофида уринмага нисба қандай жойлашгани ҳақида маълумот беради. Лекин таърифлар барча ҳолатлар учун ўринли бўлавер экан, масалан,

$$f(x) = \begin{cases} 0, x = 0, \\ x^2 \sin\dfrac{1}{x^2}, x \neq 0, \end{cases}$$

функция учун x ўқи унинг графигини $x=0$ нуқт кесиб ва уриниб ўтади, лекин $x=0$ нуқта бури нуқтаси эмас.

1-теорема. *Агар* f *функциянинг* x_0 *нуқтас иккинчи ҳосиласи узлуксиз ва* $f''(x_0) > 0$ *(<0) бўлса ҳолда* $y=f(x)$ *эгри чизиқнинг* x_0 *нуқтада қавариқ пастга (юқорига) қараган бўлади.*

Исботи. f функцияни x_0 нуқта атрофида Тей формуласи бўйича ёйилик:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r_1(x),$$

$$r_1(x) = \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(x_0 + \theta(x - x_0)), 0 < \theta < 1.$$

Абциссаси x_0 бўлган нуқтада бизнинг эгри чизиққа ўтказилган уринманинг тенгламаси

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

бўлади. У ҳолда эгри чизиқ нуқтаси билан унга x_0 нуқтада ўтказилган уринма нуқтаси орасидаги фарқ

$$f(x) - Y = r_1(x)$$

бўлади. f'' x_0 нуқтада узлуксиз бўлгани учун $f''(x_0)>0$ эканлигидан x_0 нинг етарлича кичик атрофидаги барча x лар учун $f''(x_0+\theta(x-x_0))>0$ бўлиши келиб чиқади. Шунинг туфайли кўрсатилган x лар учун $r_1(x) > 0$ бўлади. Демак, график ўз уринмасидан юқорида жойлашган, яъни эгри чизиқ қавариқлиги пастга қараган экан.

Худди шундай, агар $f''(x_0)< 0$ бўлса, у ҳолда x_0 нинг бирор кичик атрофидаги барча x лар учун $r_1(x) < 0$ бўлади, яъни график ўз уринмасидан пастда жойлашган бўлади. Демак, эгри чизиқ қавариқлиги юқорига қараган экан.

Натижа. Агар x_0 $y=f(x)$ эгри чизиқнинг бурилиш нуқтаси ва бу нуқтада $f''(x_0)$ иккинчи ҳосила мавжуд бўлса, у ҳолда $f''(x_0)=0$ бўлиши зарурдир.

Шу сабабли амалда икки маротаба дифференциалланувчи $y=f(x)$ эгри чизиқнинг бурилиш нуқтасини $f''(x)=0$ тенглама ечимлари орасидан қидирилади.

$f''(x_0)=0$ шарт бурилиш нуқтаси учун етарли эмас. Масалан, $y = x^4$ функциянинг иккинчи ҳосиласи $x=0$ нуқтада нолга тенг, лекин бу нуқта минимум нуқтадир.

Бурилиш нуқтаси учун етарли шартни қуйидаги теоремалар беради:

2-теорема. *Агар f функциянинг учинчи ҳосиласи f''' x_0 нуқтада узлуксиз, $f''(x_0)=0$ ва $f'''(x_0)\neq 0$ бўлса, у ҳолда x_0 нуқта $y=f(x)$ эгри чизиқнинг бурилиш нуқтаси бўлади.*

Исботи. Берилган шартларда Тейлор формуласи бўйича ёйилма қуйидагича бўлади:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r_2(x),$$

$$r_2(x) = \frac{(x - x_0)^3}{3!} f'''(x_0 + \theta(x - x_0)), 0 < \theta < 1.$$

f''' нинг x_0 нуқтада узлуксизлигидан ва $f'''(x_0)\neq\theta$ эканлигидан x_0 нуқтанинг бирор атрофида $f'''(x_0+\theta(x-x_0))$ нинг ишораси бир хил бўлади. Лекин $(x-x_0)^3$ кўпайтувчи x нинг x_0 нуқтадан ўтиш жараёнида ўз ишорасини ўзгартиради, шу сабабли $r_2(x)$ ҳам ўз ишорасини ўзгартиради, яъни x_0 нуқтанинг бир томонида график уринмадан, масалан, пастда бўлса, иккинчи томонида юқорида бўлади. Теорема исбот бўлди.

Агар $f'''(x_0)=0$ бўлса, юқоридаги теорема ўринли бўлмайди, бунга юқорида келтирилган $y = x^4$ функция мисол бўла олади. Бундай ҳолатлар учун етарли шартни қуйидаги теорема беради:

3-теорема. *f функция қуйидаги хусусиятларга эга бўлсин:*

$$f''(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0,$$

$f^{(n+1)}(x)$ ҳосила x_0 нуқтада узлуксиз ва $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$.

У ҳолда, агар n тоқ сон бўлса, $y=f(x)$ эгри чизиқнинг қавариқлиги $f^{(n+1)}(x_0)>0$ бўлганда пастга, $f^{(n+1)}(x_0)<0$ бўлганда юқорига қараган бўлади; ва агар n — жуфт бўлса, x_0 нуқта $y=f(x)$ эгри чизиқнинг бурилиш нуқтаси бўлади.

Исботи худди юқоридагидек бажарилади, фақат исботлаш давомида ишлатиладиган Тейлор формуласи бўйича ёйилмаси бу гал қуйидагича бўлади:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)).$$

3-таъриф. *Агар $y=f(x)$ эгри чизиқнинг абциссалари x_1, x_2 $(a\le x_1<x_2\le b)$ бўлган нуқталар орасидаги ихтиёрий ёйи уни тортиб турувчи ватардан пастда (юқорида) бўлмаса, $y=f(x)$ эгри чизиқни $[a,b]$ оралиқда қавариқлиги юқорига (пастга) қараган деймиз.*

Агар f функция $[a,b]$ оралиқда дифференциалланувчи бўлса, юқоридаги таъриф қуйидагига эквивалент: агар $y=f(x)$ эгри чизиқнинг қавариқлиги (a,b) интервалнинг ҳар бир нуқтасида юқорига (пастга) қараган бўлса, $y=f(x)$ эгри чизиқни $[a,b]$ оралиқда қавариқлиги юқорига (пастга) қараган деймиз.

4-теорема. *f функция $[a,b]$ оралиқда узлуксиз ва (a,b) интервалда икки маротаба дифференциалланувчи бўлсин.* У ҳолда $y=f(x)$ эгри чизиқнинг $[a,b]$ оралиқда қавариқлиги юқорига (пастга) қараган бўлиши учун барча $x\in(a,b)$ лар учун $f''(x)\le 0$ (≥ 0) бўлиши зарур ва етарлидир.

1-*мисол.* $y=x^3+3x^2, y'=3x^2+6x$, $x_1=0$ ва $x_2=-2$ нуқталарда $y'=0$; $y''=6x+6, y''(0)=6>0, y''(-2)=-6<0$,

ва $x=-1$ нуқтада $y''=0$, $y'''=6\ne 0$, демак, $x=-1$ бурилиш нуқтаси экан. $x>-1$ лар учун $y''(x)>0$ ва $x<-1$ лар учун $y''(x)<0$. Шу сабабли функция графигининг қавариқлиги $(-\infty,-1)$ оралиқда юқорига ва $(-1,\infty)$ оралиқда пастга қараган.

2-*мисол.* $y=(x-1)^{1/3}$, $y'=\frac{1}{3}(x-1)^{-2/3}, y''=-\frac{2}{9}(x-1)^{-5/3}$;

иккинчи ҳосила ҳеч қаерда нолга айланмайди ва $x=1$ да мавжуд эмас. $x>1$ лар учун $y''(x)<0$ ва $x<1$ лар учун $y''(x)>0$. Демак, функция графигининг қавариқлиги $(-\infty,1)$ оралиқда пастга ва $(1,\infty)$ оралиқда юқорига қараган, шу сабабли, $x=1$ нуқта бурилиш нуқтаси бўлади.

5-§. ФУНКЦИЯ ГРАФИГИНИНГ АСИМПТОТАЛАРИ

Агар

$$\lim_{\substack{x\to a+0\\ x>a}} f(x) \text{ ёки } \lim_{\substack{x\to a-0\\ x<a}} f(x)$$

лимитларнинг камида биттаси ∞ га тенг бўлса, $x=a$ тўғри чизиқ $y=f(x)$ функциянинг графигига вертикал асимптота бўлади деймиз.

Агар $y=f(x)$ функция $x>M$ $(x<M)$ лар учун аниқланган бўлса, у ҳолда $y=kx+b$ тўғри чизиқни узлуксиз $y=f(x)$ эгри чизиқнинг $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ даги оғма асимптотаси деймиз, агар $f(x)=kx+b+\alpha(x)$, бу ерда, $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ (x\to-\infty)}}\alpha(x)=0$ бўлса.

1-*мисол.* $y=\frac{1}{x}$ функция учун $x=0$ ўқ вертикал асимптота бўлади, чунки

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x}=+\infty,\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{x}=-\infty .$$

2-*мисол.* $y=x+\frac{\sin x}{x}$ $(x\neq 0)$. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ бўлгани учун $Y=x$ тўғри чизиқ $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$ да ҳам) да берилган функция учун оғма асимптота бўлади.

3-*мисол.* $y=\sqrt{x}$ $(x\geq 0)$ функция графигининг оғма асимптоталари йўқ, чунки k ва b ларнинг ҳеч бир қийматида $x\to+\infty$ бўлганда $\sqrt{x}-kx-b$ ифода нолга интилмайди.

Теорема. *$Y=kx+b$ тўғри чизиқ $y=f(x)$ функция графигига $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$) да оғма асимптота бўлиши учун*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\ \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=b \tag{1}$$

чекли лимитларнинг мавжуд бўлиши зарур ва етарлидир.

Зарурлиги. Фараз қилайлик, $Y=kx+b$ тўғри чизиқ $y=f(x)$ функция графигига $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$) да оғма асимптота бўлсин. У ҳолда таърифга кўра $f(x)-kx-b=\alpha(x)$ ифода $x\to+\infty$ да нолга интилади. Бундан

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[k+\frac{b}{x}+\frac{\alpha(x)}{x}\right]=k,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[b+\alpha(x)\right]=b.$$

Етарлилиги. Фараз қилайлик, (1) лимитлар мавжуд бўлсин. У ҳолда лимитнинг таърифига кўра иккинчи лимитдан $f(x)-kx-b=\alpha(x)$ миқдор $x\to+\infty$ да чексиз кичик миқдор бўлиши, яъни $f(x)=kx+b+\alpha(x)$ бўлиши келиб чиқади. Шу мулоҳазани $x\to-\infty$ учун қайтариб чиқиш мумкин.

Агар $k=0$ бўлса, асимптота горизонтал дейилади.

4-*мисол.* 2-боб, 2.3-§ да $y=\pm\frac{b}{a}x$ тўғри чизиқлар

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (|x|\geq a, a\geq b>0)$$

гиперболанинг оғма асимптоталари эканлигини кўрган эдик. Ҳозир шунга бошқа йўл билан ишонч ҳосил қиламиз.

Берилган тенгламани y га нисбатан ечамиз:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

Бундан

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\pm\frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}=\pm\frac{b}{a}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[y-\left(\pm\frac{b}{a}x\right)\right]=\pm\frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-a^2}-x\right]=$$

$$=\pm\frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}=0.$$

Худди шу усулда $x\to-\infty$ ҳол ҳам текширилади. Демак, ҳақиқатан, $y=\pm\frac{b}{a}x$ тўғри чизиқлар бизнинг гиперболамизга оғма асимптоталар экан.

6-§. УЗЛУКСИЗ ВА СИЛЛИҚ ЭГРИ ЧИЗИҚЛАР

5-бобда функциянинг берилиш усуллари кўрилган эди. Бу параграфда биз воситачи вазифасини бажарувчи параметр ёрдамида бериладиган функцияларни кўриб чиқамиз.

Бирор (a,b) интервалда ўзгарувчи t параметрнинг узлуксиз функцияларидан тузилган қуйидаги:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad (1)$$

системани кўрайлик. xOy координаталар текислигида t параметрнинг қийматлари бўйича тартибланган $(\varphi(t),\psi(t))$ нуқталарнинг геометрик ўрни узлуксиз эгри чизиқни ифодалайди, яъни x ва y ўзгарувчилар ўртасида функционал боғланишни аниқлайди. Бундай усулда аниқланган функцияни тенгламаси (1) бўлган параметрик функция, деб атаймиз. Агар φ функция t нинг монотон функцияси бўлса, (1) нинг биринчи тенгламасидан $t = \varphi^{-1}(x)$ ни аниқлаб, иккинчи тенгламага қўйилса, функциянинг бизга маълум

$$y = f(x) = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right) \qquad (2)$$

ифодасини ҳосил қиламиз.

Таъриф. *Агар $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ функциялар (a,b) интервалда узлуксиз дифференциалланувчи бўлиб, уларнинг ҳосилалари*

$$\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 > 0,\ \forall t \in (a,b), \qquad (3)$$

тенгсизликни қаноатлантирса, тенгламаси (1) бўлган эгри чизиқ силлиқ дейилади.

Силлиқ чизиқ тенгламасини ҳар доим (2) кўринишга келтириш мумкин. Ҳақиқатан силлиқ чизиқ учун (3) ўринли, бу тенгсизлик эса $\varphi'(t)$ ва $\psi'(t)$ ларнинг биронтаси нолдан фарқли бўлганда бажарилади. Масалан, параметрнинг бирор $t_0 \in (a,b)$ қийматида $\varphi'(t_0) \neq 0$ бўлсин. У ҳолда $\varphi'(t)$ нинг узлуксизлигидан t_0 нинг шундай $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ атрофи мавжудки, у ерда $\varphi'(t)$ функция $\varphi'(t_0)$ нинг ишорасини сақлайди. Демак, $\varphi(t)$ функция $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ оралиқда қатъий монотондир. У ҳолда бизга маълумки, бундай функция учун тескари функция мавжуд.

Агар бирор $t_0 \in (a,b)$ қийматда $\psi'(t_0) \neq 0$ бўлса, юқоридагидек мулоҳаза қилиб, (1) нинг қуйидаги

$$x = g(y) = \varphi\left(\psi^{-1}(y)\right)$$

кўринишга келтирилишига ишонч ҳосил қиламиз.

Юқоридаги мулоҳазалардан хулоса қилсак, силлиқ чизиқнинг ихтиёрий нуқтасида уринма ўтказиш мумкин экан.

Мисол. Барча $-\infty < t < +\infty$ лар учун

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases}$$

тенгламалар координаталар текислигида эллипсни аниқлайди. Эллипс маълумки, (2-боб, 2.2-§ га қаранг), силлиқ эгри чизиқдир, ҳақиқатан

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = (a\sin t)^2 + (b\cos t)^2 = b^2(\sin^2 t + \cos^2 t) = b^2 > 0,$$

бу ерда, $0 < b \leq a$, деб фараз қилинди, агар $0 < a \leq b$ бўлса ҳам тахминан шундай хулосага келинади.

7-§. ФУНКЦИЯ ГРАФИГИНИ ҚУРИШНИНГ УМУМИЙ СХЕМАСИ

Юқоридаги текширишлар функция графиги тўғрисида умумий тасаввурга эга бўлиш учун зарур эди. Бу параграфда биз шуни қандай амалга ошириш билан шуғулланамиз. Бу қуйидаги тартибда бажарилади:

1. f функциянинг аниқланиш соҳаси $D(f)$ ни топиш.

2. f функциянинг стационар ва критик x_1, x_2, $x_3, \ldots$, нуқталарини топиш. Стационар нуқталарда: $f(x_1), f(x_2), \ldots$ қийматларни ҳисоблаш ва уларни локал экстремумликка текшириш. Критик нуқталарда бир ёқлама $f(x_k - 0)$ ва $f(x_k + 0)$ лимитларни ҳисоблаш керак. Агар маънога эга бўлса,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x),\ \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

лимитларни ҳам аниқлаш лозим.

3. $D(f)$ соҳани $x_к$ нуқталар, ҳар бирида $f'(x)\neq 0$ бўлган бир нечта интервалларга бўлади. Агар $f'(x)$ бу интервалларда узлуксиз бўлса, уларда ўз ишорасини сақлайди. Ҳар бир оралиқда бу ишораларни аниқлаб, функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топамиз.

4. Ҳар бир оралиқда иккинчи ҳосилани нолга айлантирадиган $x_{к,1}$, $x_{к,2},\ldots$, к=0,1,2,..., нуқталарни аниқлаб, бу нуқталарда $f(x_{к,1}), f(x_{к,2}),\ldots$, қийматларни ҳисоблаш зарур. Бу нуқталар орасида бурилиш нуқталари бўлиши мумкин. Бурилиш нуқталари ажратган интервалларда $f''(x)$ нинг ишораларини аниқлаб, қавариқлик ва ботиқлик оралиқларини топамиз.

5. Агар имкони бўлса, $f(x)=0$ тенгламанинг ечимларини топиб, бу нуқталар атрофида $f(x)$ нинг ишораларини аниқлаш лозим.

6. Асимптоталари бор-йўқ эканлигини текшириш, яъни

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k\,,\ \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=b$$

лимитларни ҳисоблаш керак.

Бу текширишлар асосида жадвал тузиб, кейин шу жадвал ёрдамида функция графиги ясалади.

Агар функция жуфт ёки тоқ бўлса, у ҳолда функцияни x нинг фақат мусбат қийматлари учун текшириш кифоя, чунки жуфт функциянинг графиги ордината ўқига нисбатан симметрик, тоқ функция графиги эса координата бошига нисбатан симметрикдир.

Юқорида айтилган амалларнинг бажарилишини қуйидаги $y=f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ функция мисолида кўрайлик.

Ечиш. 1. Функциянинг аниқланиш соҳаси: $-\infty< x <\infty$.

Берилган функция тоқ функциядир, чунки

$$y(-x)=-\frac{x}{1+x^2}=-y(x)$$

функция узлуксиздир.

2. Стационар нуқталарни аниқлаймиз:

$$y'=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2};\ y'=0,\ \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=0,\ 1-x^2=0$$

$$x_1=-1;\ x_2=1.$$

Бу нуқталарни локал экстремумликка текширайлик. Бунинг учун 2- тартибли ҳосилани оламиз.

$$y''=\frac{-2x(1+x^2)^2-2(1+x^2)\cdot 2x\cdot(1-x^2)}{(1+x^2)^4}=$$

$$=\frac{-2x(1+x^2+2-2x^2)}{(1+x^2)^3}=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3};$$

$$y''|_{x=-1}=1/2>0.$$

Демак, $x=-1$ нуқтада функция минимумга эга. $y_{min}|_{x=-1}=-1/2;$

$$y''|_{x=1}=-1/2<0.$$

Демак, $x=1$ нуқтада функция максимумга эга.

$$y_{max}|_{x=1}=1/2;$$

3. Функциянинг ўсиш ва камайиш интерваллари: $(-\infty;\ -1)$ да $y'<0$ — функция камаяди,$(-1;\ 1)$ да $y'>0$ — функция ўсади,$(1;\ \infty)$ да $y'<0$ — функция камаяди.

4. Эгри чизиқнинг қавариқлик ва ботиқлик соҳаларини ва бурилиш нуқталарини аниқлаймиз.

$$y''=0,\ \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}=0;\ 2x(x^2-3)=0.$$

$$x_1=-\sqrt{3},\ x_2=0,\ x_3=\sqrt{3},$$

у ҳолда $(-\infty;\ -\sqrt{3})$ да $y''<0$ - эгри чизиқ қавариқ; $(-\sqrt{3};\ 0)$ да $y''>0$ — эгри чизиқ ботиқ; $(0;\ \sqrt{3})$ да $y''<0$ — эгри чизиқ қавариқ; $(\sqrt{3};\ \infty)$ да $y''>0$ — эгри чизиқ ботиқ.

$$y|_{x=-\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{4};\ y|_{x=0}=0;\ y|_{x=-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Демак, $(-\sqrt{3};\ -\frac{\sqrt{3}}{4})$, (0;0), $(\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{4})$ нуқталар бурилиш нуқталаридир.

5. Берилган функция x =0 да нолга тенг. $(-\infty,0)$ оралиқда $f(x) < 0$ ва $(0,+\infty)$ интервалла $f(x) > 0$.

6. Эгри чизиқнинг асимптоталарини аниқлаймиз.

а) Эгри чизиқнинг вертикал асимптотаси йўқ.

б) Оғма асимптотаси:

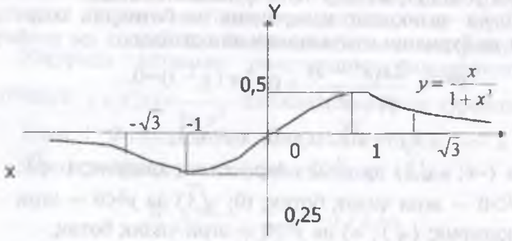
$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x(1+x^2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x^2} = 0; \quad b = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2} = 0.$$

Демак, y=0 — горизонтал асимптота экан.

Бу топилган маълумотлар асосида қуйидаги жадвални тузайлик:

x	$(-\infty,\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},-1)$	-1	(-1,0)	0	(0,1)	1	$(1,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},\infty)$
y'	<0	-	<0	0	>0	-	>0	0	<0	-	<0
y''	<0	0	>0	-	>0	0	<0	1	>0	0	>0
y	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	↘
	қава-рик	бури-лиш нуқта	ботиқ	min	ботиқ	б.н.	қава рик	max	ботиқ	бури-лиш нуқга	ботиқ

Жадвалга ва юқоридаги текшириш натижаларига асосланиб функциянинг графигини чизамиз.



94-расм.

8-БОБ.
КОМПЛЕКС СОНЛАР. КЎПҲАДЛАР

1-§. КОМПЛЕКС СОНЛАР. БОШЛАНҒИЧ ТУШУНЧАЛАР

Маълумки, ҳар қандай ҳақиқий соннинг квадрати мусбат бўлади. Квадрати манфий бўлган сонлар ҳам манжуд, масалан, a–ib, $(\sqrt{-4})^2$=-4. Бундай сонларни мавҳум сонлар, деб атаймиз. Мавҳум сонлар тўпламида бирлик вазифасини $\sqrt{-1}$ сони бажаради, чунки масалан, $\sqrt{-9} = 3\sqrt{-1} = 3i$ ёки $\sqrt{-7} = i\sqrt{7}$ ва ҳ. к., шунинг учун уни мавҳум бирлик дейиш қабул қилинган. Бу сон $i = \sqrt{-1}$, деб белгиланади.

Қуйидаги

$$z = a + ib \tag{1}$$

кўринишдаги сонларни комплекс сонлар, деб атаймиз. Бу ерда, a ва b сонлар ҳақиқий сонлар, агар $a = 0$ бўлса, у мавҳум сонга, ва агар $b = 0$ бўлса, ҳақиқий сонга айланади. Демак, ҳақиқий ва мавҳум сонларни комплекс сонларнинг хусусий ҳоли, деб қараш мумкин экан.

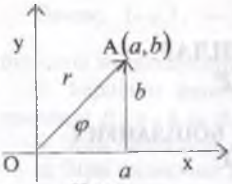
a ва b сонлар z соннинг мос равишда ҳақиқий ва мавҳум қисмлари дейилади. Улар учун

$$a = \mathrm{Re}\,z, \ b = \mathrm{Im}\,z$$

белгилашлар ишлатилади.

$z = a + ib$ ва $\bar{z} = a - ib$ сонлар қўшма комплекс сонлар, деб аталади.

Агар $a_1 = a_2$ ва $b_1 = b_2$ бўлса, $z_1 = a_1 + ib_1$ ва $z_2 = a_2 + ib_2$ сонлар ўзаро тенг, яъни $z_1 = z_2$ деймиз, агар a =0 ва b =0 бўлса, $z = a + ib$ =0 деймиз.



95-расм.

Ҳар бир $z = a + ib$ сонга Oxy текислигида координаталари a ва b бўлган $A(a,b)$ нуқтани мос қўйиш мумкин. Ва аксинча, текис-ликнинг ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтасига $z = x + iy$ сонни мос қўйиш мумкин. Комплекс сонлар тасвирланган бундай текисликни z комплекс ўзгарувчининг текислиги дейилади. Бу текисликнинг Ox ўқининг нуқталарига ҳақиқий сонлар ва Oy ўқининг нуқталарига соф мавҳум сонлар мос келади. Шу сабабли z комплекс ўзгарувчи текислигининг Ox ўқи ҳақиқий ўқ ва Oy ўқи мавҳум ўқ, деб аталади.

$A(a,b)$ нуқтани координаталар боши билан бирлаштириб $\overline{OA}$ векторни ҳосил қиламиз. Айрим ҳолларда комплекс сонларни геометрик тасвири сифатида $\overline{OA}$ векторни қараш қулайроқ.

Агар қутб нуқтаси координаталар боши билан, қутб ўқи эса Ох ўқнинг мусбат йўналиши билан устма-уст тушадиган қутб координаталар системасида $A(a,b)$ нуқтанинг қутб координаталари φ ва r бўлса, у ҳолда

$$a = r\cos\varphi\,,\ b = r\sin\varphi$$

бўлади (95-расмга қаранг). Буни (1) га қўйсак:

$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (2)$$

ифода ҳосил бўлади. Буни комплекс соннинг тригонометрик ифодаси деб, r ни z нинг модули, φ ни эса z нинг аргументи, деб атаймиз. Улар қуйидагича белгиланади:

$$r = |z|,\ \varphi = \arg z\ . \qquad (3)$$

φ ва r ларнинг a ва b лар орқали ифодаси

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},\ \ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$

бўлади.

Демак,

$$\left.\begin{array}{l} |z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}, \\ \arg z = \arg(a + ib) = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} \end{array}\right\} \qquad (4)$$

экан.

φ нинг Oxy текислигининг мусбат йўналиши бўйлаб олинган қийматлари аргументнинг мусбат қийматлари ва тескари йўналишда олинган қийматларини аргументнинг манфий қийматлари, деб қабул қилинган. Ҳар бир комплекс сонга аргументнинг ягона қиймати эмас, балки $2\pi k$ га фарқ қилувчи қийматлари мос келади.

Қўшма $z = a + ib$ ва $\bar{z} = a - ib$ комплекс сонлар учун $|z| = |\bar{z}|, \arg z = -\arg \bar{z}$ муносабатлар ўринли.

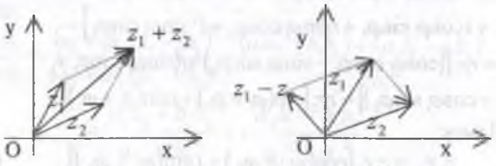
2-§. КОМПЛЕКС СОНЛАР УСТИДА АСОСИЙ АМАЛЛАР

1. Комплекс сонларни қўшиш. $z_1 = a_1 + ib_1$ ва $z_2 = a_2 + ib_2$ сонларнинг йиғиндиси, деб қуйидаги:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \quad (1)$$

тенглик орқали аниқланган комплекс сонга айтамиз.

(1) формуладан комплекс сонларни қўшиш шу сонларни ифодаловчи векторларни қўшиш қоидаси бўйича бажарилиши келиб чиқяпти (96-расм, а) га қаранг).



а) б)

96-расм.

2. Комплекс сонларни айириш. $z_1 = a_1 + ib_1$ ва $z_2 = a_2 + ib_2$ сонларнинг айирмаси деб шундай комплекс сонга айтамизки, уни z_2 га қўшганда, йиғинди z_1 га тенг бўлади:

$$z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2). \quad (2)$$

Бундан икки комплекс сон айирмасининг модули шу сонларни комплекс текисликда ифодаловчи нуқталар орасидаги масофага тенг эканлиги келиб чиқади (96-расм, б)):

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}.$$

3. Комплекс сонларни кўпайтириш. Маълумки, $i^2 = -1$. У ҳолда $i^3 = -i, i^4 = (-1)^2 = 1, i^5 = i$ ва ҳ.к. ихтиёрий бутун k лар учун $i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i, \ i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$. Шунга асосан

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 - b_1 b_2$$

ёки

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(b_1 a_2 + a_1 b_2). \quad (3)$$

Агар комплекс сонлар тригонометрик кўринишда берилган бўлса:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2), \quad (4)$$

у ҳолда

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 +$$
$$+ i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2] =$$
$$= r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 +$$
$$+ \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

Демак,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \quad (3')$$

яъни комплекс сонларнинг кўпайтмаси шундай комплекс сон эканки, унинг модули кўпайтувчи сонлар

модулларининг кўпайтмасига, аргументи эса кўпайтувчиларнинг аргументлари йиғиндисига тенг экан.

(3) тенгликдан $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ ёки $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$ келиб чиқади.

4. Комплекс сонларни бўлиш. $z_1 = a_1 + ib_1$ ва $z_2 = a_2 + ib_2$ сонларнинг бўлинмаси, деб шундай z сонга айтамизки, $z_1 = z_2 z$ бўлади. Агар

$$\frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy$$

бўлса, у ҳолда

$$a_1 + ib_1 = (a_2 + ib_2)(x + iy) = (a_2 x - b_2 y) + i(a_2 y + b_2 x).$$

Бу тенгликдан x ва y ларни топиш учун

$$a_1 = a_2 x - b_2 y, \ b_1 = b_2 x + a_2 y$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Системани ечсак,

$$x = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \ y = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

бўлади. Демак,

$$z = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \quad (5)$$

экан. Шу натижага қуйидаги усул билан келса ҳам бўлади:

$$\frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} =$$
$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Агар комплекс сонлар (4) тригонометрик кўринишда берилган бўлса, у ҳолда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} =$$

$$+ \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} = \qquad (6)$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Демак, комплекс сонлар нисбатининг модули модуллар нисбатига, аргументи эса бўлинувчининг аргументидан бўлувчининг аргументини айирганига тенг экан.

Юқорида комплекс сонлар учун киритилган амалларни ҳақиқий сонларга (уларни комплекс сонларнинг хусусий ҳоли деб қараб) қўлласак, у ҳолда бу амалларни арифметикадан бизга маълум бўлган амаллар билан бир хил эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

Агар (1),(2),(3) ва (5) ифодаларда комплекс сонни унга қўшма бўлган сонга алмаштирсак, амаллар натижалари аввалги натижаларга қўшма бўлади. Бундан хусусан қуйидаги теорема келиб чиқади:

Теорема. *Агар ҳақиқий коэффициентли*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

кўпҳадга x *ўзгарувчи ўрнига аввал* $a+ib$ *ни, кейин* $a-ib$ *ни қўйсак, у ҳолда олинган натижалар ҳам қўшма бўлади.*

3-§. КОМПЛЕКС СОНЛАРНИНГ ДАРАЖАЛАРИ ВА ИЛДИЗЛАРИ

1. Даражага кўтариш. Аввалги параграфдаги (3') формулада $z_1 = z_2$ десак,

$$z^2 = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

бўлади. Агар (3') формулани кетма-кет n маротаба қўлласак:

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad (1)$$

келиб чиқади. Бу формула Муавр формуласи, деб аталади.

Демак, комплекс сонни мусбат бутун даражага кўтариш учун модулини шу даражага кўтариб, аргументини даража кўрсаткичига кўпайтириш керак экан.

1-*мисол.* $(1+i)^{10}$ ни ҳисобланг.

Ечиш. Аввал тригонометрик кўринишга келтириб оламиз. Бу ерда, $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\varphi = \text{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$. У ҳолда

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

бўлади. Демак,

$$(1+i)^{10} = 2^5\left(\cos\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 32\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}\right) = 32\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 32i.$$

2. Илдиз чиқариш. Комплекс соннинг n — даражали илдизи деб, n — даражаси илдиз остидаги сонга тенг бўлган сонга айтамиз, яъни

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

деймиз, агар

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

бўлса, охирги тенгликдан

$$\rho^n = r\,,\; n\psi = \varphi + 2k\pi$$

келиб чиқади. Бундан

$$\rho = \sqrt[n]{r}\,,\; \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

га эга бўламиз, бу ерда, k — ихтиёрий бутун сон, $\sqrt[n]{r}$ — мусбат r соннинг арифметик илдизи. Демак,

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right). \quad (2)$$

k га кетма-кет 0,1,2,..., $n-1$, қийматлар бериб, илдизнинг ҳар хил n та қийматини топамиз. k нинг бошқа барча қийматларида бу илдиз қийматлари такрорланади.

Нолдан фарқли ҳақиқий A сонниңг n-илдизи n та қийматга эга, чунки бу сонни комплекс сонниңг хусусий ҳоли деб қараб, қуйидаги тригонометрик кўринишда ёзиш мумкин:

$$\text{агар } A > 0 \text{ бўлса, } A = |A|(\cos 0 + i\sin 0); \quad (3)$$

$$\text{агар } A < 0 \text{ бўлса, } A = |A|(\cos\pi + i\sin\pi). \quad (4)$$

2-*мисол.* Бир рақамининг барча кубик илдизларини топинг.

Ечиш. Бирни тригонометрик кўринишда ёзиб оламиз:

$$1 = \cos 0 + i\sin 0.$$

Бунга (2) формулани қўлласак:

$$\sqrt[3]{1} = \cos\frac{0+2k\pi}{3} + i\sin\frac{0+2k\pi}{3}.$$

k га кетма-кет 0,1,2 қийматлар бериб, илдизнинг қуйидаги учта қийматини топамиз:

$$x_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1, x_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3},$$

$$x_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$$

ёки

$$x_1 = 1,\ \ x_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \ x_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. Иккиҳадли тенгламаларни ечиш. Қуйидаги

$$x^n = A$$

кўринишдаги тенгламаларни иккиҳадли тенглама дейишади.

Шу тенгламани ечайлик. Бунинг учун аввал A ни тригонометрик кўринишга келтириб оламиз. Агар A ҳақиқий мусбат сон бўлса, (3) га асосан

$$x = \sqrt[n]{A}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$(k = 0,1,2,\ldots,n-1.)$$

ва агар A ҳақиқий манфий сон бўлса, (4) га асосан

$$x = \sqrt[n]{|A|}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{n}\right)$$

$$(k = 0,1,2,\ldots,n-1.)$$

Агар A комплекс сон бўлса, x нинг барча қийматлари (2) формула ёрдамида топилади.

3-*мисол.* $x^4 = 1$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Аввалги мисолдагидек иш тутсак,

$$x = \sqrt[4]{\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi} = \cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4}$$

бўлади. k га кетма-кет 0,1,2 ва 3 қийматларни берсак:

$$x_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1,$$

$$x_2 = \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4} = i,$$

$$x_3 = \cos\frac{4\pi}{4} + i\sin\frac{4\pi}{4} = -1,$$

$$x_4 = \cos\frac{6\pi}{4} + i\sin\frac{6\pi}{4} = -i.$$

4-§. КОМПЛЕКС КЎРСАТКИЧЛИ ФУНКЦИЯ ВА УНИНГ ХОССАЛАРИ

Агар x ва y ҳақиқий ўзгарувчилар бўлса, $z = x + iy$ комплекс ўзгарувчи бўлади. Униң ҳар бир қийматига комплекс ўзгарувчининг Oxy текислигида бирор нуқта мос келади.

Таъриф. Z ўзгарувчининг ҳар бир қийматига бошқа w ўзгарувчининг бирор қийматини мос қўювчи f

қоидани Z комплекс ўзгарувчининг функцияси, деб атаймиз. Бундай функцияни $w = f(z)$ ёки $w = w(z)$ кўринишда белгилаймиз.

Бу ерда комплекс ўзгарувчининг функцияларидан фақат биттасини $- w = e^z = e^{x+iy}$ кўрсаткичли функцияни кўрамиз. Бу функцияни яна қуйидагича ёзиш мумкин:

$$w = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y). \tag{1}$$

1-*мисол.* $e^{2+i\frac{\pi}{3}} = e^2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = e^2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$

2-*мисол.* $e^{0+i\frac{\pi}{2}} = e^0\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = i;$

3-*мисол.* $e^{x+i0} = e^x(\cos 0 + i\sin 0) = e^x.$

Кўрсаткичли функция қуйидаги хоссаларга эга:

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2}$. Ҳақиқатан агар $z_1 = x_1 + iy_1$ ва $z_2 = x_2 + iy_2$ бўлса, у ҳолда

$$e^{z_1+z_2} = e^{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = \tag{2}$$
$$= e^{x_1}e^{x_2}[\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)]$$

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1+iy_1}e^{x_2+iy_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)$$
$$e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) = e^{x_1}e^{x_2}[\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)]. \tag{3}$$

(2) ва (3) тенгликларнинг ўнг томонлари бир хил бўлгани учун чап томонлари ҳам тенг бўлади.

2. $e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$. Буни 1-хоссага ўхшаш исботлаш мумкин.

Буни бажаришни ўқувчига топширамиз.

3. Агар $m-$ бутун сон бўлса, $(e^z)^m = e^{mz}$ бўлади. Бунинг исботи 1- ва 2-хоссалардан келиб чиқади.

4. $e^{z+2\pi i} = e^z$, яъни комплекс ўзгарувчининг кўрсаткичли функцияси даври $2\pi i$ бўлган даврий функциядир.

Ҳақиқатан (1) формулага ва 1-хоссага кўра

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = e^z.$$

Қуйидаги

$$w = u(x) + i\vartheta(x) \tag{4}$$

комплекс ифода, ҳақиқий функциялари бу ерда, $u(x)$ ва $\vartheta(x)$ ҳақиқий x ўзгарувчининг ҳақиқий ўзгарувчининг комплекс функцияси дейилади.

Агар

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = u(x_0), \ \lim_{x\to x_0}\vartheta(x) = \vartheta(x_0)$$

лимитлар мавжуд бўлса, у ҳолда $w_0 = u(x_0) + i\vartheta(x_0)$ (4) функциянинг $x \to x_0$ бўлгандаги лимити дейилади.

Агар $u'(x)$ ва $\vartheta'(x)$ мавжуд бўлса, у ҳолда

$$w'_x = u'(x) + i\vartheta'(x) \tag{5}$$

ифодани ҳақиқий ўзгарувчи комплекс функциясининг ҳақиқий аргумент бўйича ҳосиласи, деб атаймиз.

Ҳақиқий ўзгарувчининг қуйидаги:

$$w = e^{\alpha x+i\beta x} = e^{(\alpha+i\beta)x},$$

кўрсаткичли функциясини кўрайлик, бу ерда, α, β ўзгармас ҳақиқий сонлар. Уни яна қуйидагича ёзиш мумкин:

$$w = e^{\alpha x}[\cos\beta x + i\sin\beta x]$$

ёки

$$w = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Бу функциянинг ҳосиласини топайлик. (5) га асосан

$$w'_x = \left(e^{\alpha x}\cos\beta x\right)' + i\left(e^{\alpha x}\sin\beta x\right)' =$$
$$= e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x) + ie^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x) =$$
$$= \alpha\left[e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)\right] + i\beta\left[e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)\right] =$$
$$= (\alpha + i\beta)\left[e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)\right] = (\alpha + i\beta)e^{(\alpha+i\beta)x}.$$

Демак, агар $k=\alpha+i\beta$ ихтиёрий комплекс сон бўлса, у ҳолда

$$\left(e^{kx}\right)=ke^{kx},\ \left(e^{kx}\right)'=\left[\left(e^{kx}\right)\right]=k\left(e^{kx}\right)=k^2e^{kx}$$

ва ихтиёрий n учун

$$\left(e^{kx}\right)^{(n)}=k^ne^{kx}.$$

5-§. ЭЙЛЕР ФОРМУЛАСИ

Агар аввалги параграфдаги (1) тенгликда $x=0$ десак, математикада Эйлер формуласи номи билан машҳур бўлган қуйидаги:

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y \qquad (1)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Агар бу ерда y ни $-y$ га алмаштирсак:

$$e^{-iy}=\cos y-i\sin y \qquad (2)$$

бўлади. (1) ва (2) тенгликлардан

$$\cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2},\ \sin y=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i} \qquad (3)$$

муносабатлар келиб чиқади.

Ихтиёрий z комплекс сон берилган бўлса, уни қуйидаги:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

тригонометрик кўринишда ёзиш мумкин. У ҳолда Эйлер формуласига кўра

$$z=re^{i\varphi}$$

ифодага эга бўламиз. Бу ифодани комплекс соннинг кўрсаткичли кўриниши деймиз.

Мисол. 1, i, -2, $-i$ сонларни кўрсаткичли кўринишга келтиринг.

Ечиш. $1=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi=e^{2k\pi i}$,

$$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=e^{\frac{\pi}{2}i},$$

$$-2=2(\cos\pi+i\sin\pi)=2e^{\pi i},$$

$$-i=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Кўрсаткичли функциянинг хоссаларига (4-§ га қаранг) таянган ҳолда, комплекс сонлар устида бажариладиган амалларни уларнинг кўрсаткичли ифодаси устида осонгина бажариш мумкин.

Ҳақиқатан, агар $z_1=r_1e^{i\varphi_1}$ ва $z_2=r_2e^{i\varphi_2}$ бўлса, у ҳолда

$$z_1\cdot z_2=r_1e^{i\varphi_1}\cdot r_2e^{i\varphi_2}=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},$$

$$z^n=\left(re^{i\varphi}\right)^n=r^ne^{in\varphi},$$

$$\sqrt[n]{re^{i\varphi}}=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}} \quad (k=0,1,2,\dots,n-1).$$

6-§. КЎПҲАДНИ КЎПАЙТУВЧИЛАРГА АЖРАТИШ

n-даражали кўпҳад, деб қуйидаги:

$$P_n(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k \qquad (1)$$

функцияга айтамиз, бу ерда, a_k — ҳақиқий ёки комплекс коэффициентлар, $a_n\neq0$, z — умуман олганда, комплекс ўзгарувчи z нинг ҳар бир қийматига мос келувчи функциянинг $P_n(z)$ қиймати комплекс бўлиши ҳам мумкин. z_0 ни (1) нинг илдизи ёки ноли деймиз, агар $P_n(z_0)=0$ бўлса.

Бу ерда ҳам ҳақиқий ўзгарувчининг кўпҳади каби (6-боб, 4.1-§ га қаранг) $P_n(z)$ кўпҳадни ҳар қандай комплекс z_0 сон учун z- z_0 нинг даражалари бўйича ёйиш мумкин эканлигини, яъни

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k (z - z_0)^k \qquad (2)$$

бўлишини кўрсатиш мумкин. Бундан $P_n(z_0) = b_0$.

1-теорема *(Безу). $P_n(z)$ кўпҳад z_0 илдизга эга бўлиши учун, у z- z_0 га қолдиқсиз бўлиниши, яъни уни*

$$P_n(z) = (z - z_0) P_{n-1}(z) \qquad (3)$$

кўринишда ифодалаш мумкинлиги зарур ва етарлидир, бу ерда $P_{n-1}(z)$ бирор n-1-даражали кўпҳад.

Зарурлиги. Агар z_0 (1) нинг илдизи бўлса, у ҳолда $b_0 = 0$ бўлиши керак, чунки $P_n(z_0) = b_0$. Агар $b_0 = 0$ бўлса, у ҳолда (2) тенглик

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{n} b_k (z - z_0)^k = (z - z_0) \sum_{k=0}^{n-1} b_k (z - z_0)^k = (z - z_0) P_{n-1}(z)$$

кўринишга келади.

Етарлилиги. Агар (2) тенглик ўринли бўлса, у ҳолда (2) да z ўрнига z_0 ни қўйсак, $P_n(z_0) = 0$ бўлади. Теорема исбот бўлди.

Натижа. Ихтиёрий z_0 учун $P_n(z)$ кўпҳадни z- z_0 га бўлинса, қолдиқда $P_n(z_0)$ бўлади.

Мисол. $P_3(z) = z^3 - 6z^2 + 11z - 6$ кўпҳад z=1 да нолга тенг, шунинг учун бу кўпҳад z-1 га қолдиқсиз бўлинади:

$$P_3(z) = z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = (z - 1)(z^2 - 5z + 6).$$

Агар $f(z) = 0$ тенгламада $f(z) = P_n(z)$ бўлса, бундай тенгламани алгебраик тенглама. бошқа барча ҳолларда ноалгебраик тенглама деймиз.

Демак, $P_n(z)$ =0 алгебраик тенгламанинг илдизлари $P_n(z)$ кўпҳаднинг илдизлари билан бир хил экан.

Ноалгебраик тенглама биронта ҳам илдизга эга бўлмаслиги мумкин, масалан: $e^{z} = 0$. Лекин алгебраик тенгламалар учун бундай эмас.

2-теорема. *Ҳар қандай алгебраик тенглама камида битта ҳақиқий ёки комплекс илдизга эга.*

Бу теорема алгебранинг асосий теоремаси деб аталади. Биз уни исботсиз келтирамиз.

Агар z_0 $P_n(z)$ кўпҳаднинг илдизи бўлса, у ҳолда бу кўпҳад (3) кўринишда ифодаланар эди. Агар $P_{n-1}(z_0) \neq 0$ бўлса, у ҳолда Безу теоремасига кўра $P_{n-1}(z)$ кўпҳад z − z_0 га ва демак, $P_n(z)$ кўпҳад $(z - z_0)^2$ га бўлин-майди. Бу ҳолда z_0 $P_n(z)$ кўпҳаднинг оддий илдизи (ноли) дейилади. Агар $P_{n-1}(z_0) = 0$ бўлса, у ҳолда Безу теоремасидан $P_{n-1}(z)$ z- z_0 га қолдиқсиз бўлиниши ва шу сабабли $P_n(z) = (z - z_0)^2 P_{n-2}(z)$ бўлиши келиб чиқади. Бу ерда, $P_{n-2}(z)$ қандайдир n-2-даражали кўпҳад. Агар $P_{n-2}(z_0) \neq 0$ бўлса, z_0 $P_n(z)$ кўпҳаднинг 2 каррали илдизи (ноли) дейилади. Ва ниҳоят, агар бирор натурал $s \leq n$ учун

$$P_n(z) = (z - z_0)^s P_{n-s}(z), \ P_{n-s}(z_0) \neq 0$$

бўлса, бу ерда, $P_{n-s}(z_0)$ бирор n-s-даражали кўпҳад, z_0 $P_n(z)$ кўпҳаднинг s каррали илдизи (ноли) дейилади.

3-теорема. *Ҳар қандай n-даражали алгебраик тенглама, карралигини ҳисобга олган ҳолда, n та комплекс илдизга эга, яъни $P_n(z)$ кўпҳад қуйидаги кўринишда кўпайтувчиларга ажралади:*

$$P_n(z) = a_n(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\ldots(z-z_m)^{k_m}, \quad (4)$$

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n,$$

бу ерда, $z_1, z_2, \ldots, z_m$ лар $P_n(z)$ кўпҳаднинг карралари мос равишда $k_1, k_2, \ldots, k_m$ бўлган илдизларидир.

Исботи. Асосий теоремага кўра $P_n(z)$ кўпҳад камида битта илдизга эга. Бу илдизни z_1 билан, унинг каррасини k_1 билан белгилайлик. У ҳолда

$$P_n(z) = (z-z_1)^{k_1} P_{n-k_1}(z), \ \ P_{n-k_1}(z_1) \neq 0 .$$

Агар $n-k_1 = 0$, яъни $k_1 = n$ бўлса, у ҳолда $P_{n-k_1}(z) = a_n$ бўлади, бундан $P_n(z) = a_n(z-z_1)^n$ келиб чиқади, шу билан теорема исбот бўлади.

Агар $k_1 < n$ бўлса, у ҳолда $P_{n-k_1}(z)$ $(z-z_1)^{k_1}$ га бўлинмайдиган $n-k_1$-даражали кўпҳад бўлади. Асосий теоремага кўра у ҳам камида битта z_2 илдизга эга, унинг карраси k_2 бўлсин. Натижада қуйидаги муносабатни оламиз:

$$P_n(z) = (z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2} P_{n-k_1-k_2}(z), \ \ P_{n-k_1-k_2}(z_j) \neq 0, j = 1,2 .$$

Агар $n-k_1-k_2 = 0$ бўлса, у ҳолда $P_{n-k_1-k_2}(z) = a_n$ бўлади. Агар $n-k_1-k_2 \neq 0$ бўлса, у ҳолда бу жараённи

давом эттирамиз. Охир-оқибат чекли қадамдан кейин бу жараён тўхтайди ва (4) муносабатга келамиз. Агар (4) нинг ўнг томонига z ўрнига топилган $z_1, z_2, \ldots, z_m$ лардан фарқли қийматларни қўйсак, у нолга айланмайди, яъни (4) муносабат ягонадир.

Натижа. n-даражали кўпҳад n тадан ортиқ иллизга эга эмас.

4-теорема. *Агар иккита n-даражали $\varphi_1(z)$ ва $\varphi_2(z)$ кўпҳадлар қийматлари аргументнинг $n+1$ та ҳар хил $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n$ қийматларида тенг бўлса, у ҳолда бу кўпҳадлар айнан тенгдир.*

Исботи. Қуйидаги

$$f(z) = \varphi_1(z) - \varphi_2(z)$$

функция даражаси n дан ортиқ бўлмаган кўпҳаддир ва у n та $z_1, z_2, \ldots, z_n$ нуқталарда нолга айланади. У ҳолда уни

$$f(z) = a_n(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n) \quad (5)$$

кўринишда ифодалаш мумкин.

Лекин теорема шартига кўра, бу кўпҳад z_0 нуқтада ҳам нолга тенг. (5) ифоданинг бирорта ҳам чизиқли кўпайтувчиси бу нуқтада нолга тенг эмас. Шунинг учун $a_n = 0$ бўлади, яъни $f(z) \equiv 0$. Демак, $\varphi_1(z) - \varphi_2(z) \equiv 0$ ёки $\varphi_1(z) \equiv \varphi_2(z)$.

5-теорема. *Агар*

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$$

кўпҳад айнан нолга тенг бўлса, у ҳолда унинг барча коэффициентлари нолга тенгдир.

Исботи. Берилган кўпҳадни (5) кўринишда ёзиб оламиз:

$$P_n(z) = a_n(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n).$$

Агар теорема шартига кўра бу кўпҳад айнан нолга тенг бўлса, у ҳолда у $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ларга тенг бўлмаган бирор z нуқтада ҳам нолга тенг бўлади. Лекин $z - z_1$, $z - z_2, \ldots,$ $z - z_n$ ларнинг бирортаси нолга тенг эмас, шу сабабли, фақат $a_n = 0$ бўлиши мумкин. Айнан шундай $a_{n-1} = 0, a_{n-2} = 0, \ldots, a_0 = 0$ эканлиги исбот қилинади.

6-теорема. *Агар икки кўпҳад бир-бирига айнан тенг бўлса, у ҳолда уларнинг мос коэффициентлари ўзаро тенг бўлади.*

Теореманинг исботи берилган кўпҳадларнинг айирмаси айнан нолга тенглигидан ва 5-теоремадан келиб чиқади.

7-теорема. *Агар z_1 $f(z)$ кўпҳаднинг $k_1 > 1$ каррали илдизи бўлса, у ҳолда z_1 $f'(z)$ ҳосиланинг $k_1 - 1$ каррали илдизи бўлади.*

Исботи. Теорема шартидан

$$f(z) = (z - z_1)^{k_1} \varphi(z)$$

бўлиши келиб чиқади, бу ерда, $\varphi(z_1) \neq 0$. Бу тенгликни дифференциалласак:

$$f'(z) = k_1(z - z_1)^{k_1-1} \varphi(z) + (z - z_1)^{k_1} \varphi'(z) =$$
$$= (z - z_1)^{k_1-1}\left[k_1\varphi(z) + (z - z_1)\varphi'(z)\right]$$

бўлади. Агар бу ерда,

$$\psi(z) = k_1\varphi(z) + (z - z_1)\varphi'(z)$$

десак, $\psi(z_1) = k_1\varphi(z_1) + (z_1 - z_1)\varphi'(z_1) = k_1\varphi(z_1) \neq 0$ эканлигидан z_1 $f'(z)$ ҳосиланинг $k_1 - 1$ каррали илдизи эканлиги келиб чиқади. Хусусан, агар $k_1 = 1$ бўлса, z_1 $f'(z)$ ҳосиланинг илдизи бўлмайди.

Бу теоремадан z_1 $f''(z)$ ҳосиланинг $k_1 - 2$ каррали илдизи, $f'''(z)$ ҳосиланинг $k_1 - 3$ каррали илдизи ва ҳ.к. $f^{(k_1-1)}(z)$ ҳосиланинг оддий илдизи ва ниҳоят, $f^{(k_1)}(z_1) \neq 0$ бўлиши келиб чиқади.

7-§. КОМПЛЕКС ЕЧИМЛАР ҲОЛИДА КЎПҲАДНИ КЎПАЙТУВЧИЛАРГА АЖРАТИШ

Фараз қилайлик, (1) кўпҳад берилган бўлсин.

1-теорема. *Агар ҳақиқий коэффициентли*

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \qquad (1)$$

кўпҳад $a + ib$ илдизга эга бўлса, у ҳолда $a - ib$ ҳам унинг илдизи бўлади.

Исботи. Агар $z_0 = a + ib$ сон (1) нинг илдизи бўлса, у ҳолда 2-§ даги теоремага кўра:

$$P_n(\bar{z}_0) = \overline{P_n(z_0)} = \bar{0} = 0,$$

яъни $\bar{z}_0 = a - ib$ ҳам (1) нинг илдизи экан.

Демак, (1) кўпҳад

$$(z - a - ib)(z - a + ib) = (z - a)^2 + b^2$$

ифодага бўлинар экан, яъни

$$P_n(z) = \left[(z - a)^2 + b^2\right] \cdot P_{n-2}(z),$$

бу ерда, $P_{n-2}(z)$ n-2-даражали ҳақиқий коэффициентли кўпҳад.

Юқоридаги фикрларни умумлаштирсак, қуйидаги хулосага келамиз:

2-теорема. *Ҳақиқий коэффициентли $P_n(z)$ кўпҳад қуйидаги кўринишда кўпайтувчиларга ажралади:*

$$P_n(z) = a_n(z - z_1)^{k1} \ldots (z - z_r)^{kr}\left[(z - a_1)^2 + b_1^2\right]^{1} \ldots$$
$$\left[(z - a_s)^2 + b_s^2\right]^{s} = a_n \prod_{i=1}^{r}(z - z_i)^{k_i} \prod_{j=1}^{s}\left[(z - a_j)^2 + b_j^2\right]^{j}, \qquad (2)$$

бу ерда, $b_j > 0, k_1 + \ldots + k_r + 2(l_1 + \ldots + l_s) = n,$ $z_1, z_2, \ldots, z_r$ лар $P_n(z)$ кўпҳаднинг карралари мос равишда $k_1, \ldots, k_r$ бўлган ҳақиқий илдизлари, $a_1 \pm ib_1, \ldots, a_s \pm ib_s$ лар эса $P_n(z)$ кўпҳаднинг карралари мос равишда $l_1, \ldots, l_s$ бўлган ўзаро қўшма комплекс илдизларидир.

8-§. ИНТЕРПОЛЯЦИЯЛАШ. ЛАГРАНЖНИНГ ВА НЬЮТОННИНГ ИНТЕРПОЛЯЦИОН ФОРМУЛАЛАРИ

Фараз қилайлик, бирор ҳодисани ўрганиш жараёнида x ва y миқдорлар ўртасида функционал боғланиш борлиги ва x нинг $[a, b]$ оралиққа тегишли $x_0, x_1, \ldots, x_n$ қийматларига y нинг $y_0, y_1, \ldots, y_n$ қийматлари мос келиши аниқланган бўлиб, бу боғланишнинг аналитик ифодаси номаълум бўлсин.

Масала шу номаълум $y = \varphi(x)$ функцияни $[a, b]$ оралиқда аниқ ёки тақрибан ифодаловчи кўпҳадни қуришдан, яъни

$$y_0 = \varphi(x_0), y_1 = \varphi(x_1), \ldots, y_n = \varphi(x_n)$$

қийматлари $[a, b]$ оралиқда берилган $y = \varphi(x)$ функцияни тақрибан ифодаловчи даражаси $\leq n$ бўлган $P(x)$ кўпҳадни қуришдан иборат.

Бундай кўпҳад сифатида $x_0, x_1, \ldots, x_n$ нуқталардаги қийматлари y нинг $y_0, y_1, \ldots,$ y n қийматлари билан устма-уст тушадиган кўпҳадни олган маъқул. Бундай масалани функцияни интерполяциялаш дейилади.

Интерполяциялавчи кўпҳад сифатида қуйидаги:

$$P(x) = C_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) + C_1(x - x_0)$$
$$(x - x_2)\ldots(x - x_n) + C_2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)\ldots \tag{1}$$
$$(x - x_n) + \ldots + C_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

кўпҳадни оламиз. $C_0, C_1, \ldots, C_n$ коэффициентларни

$$P(x_0) = y_0,\ P(x_1) = y_1, \ldots,\ P(x_n) = y_n \tag{2}$$

шартларни қаноатлантирадиган қилиб танлаш керак.

(1) формулада $x = x_0$ дейлик, у ҳолда (2) га кўра

$$y_0 = C_0(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n),$$

бундан

$$C_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)}.$$

Агар (1) да $x = x_1$ десак, у ҳолда

$$y_1 = C_1(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n),$$

бундан

$$C_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)},$$

ва ҳ.к. (1) да $x = x_n$ деб

$$y_n = C_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1}),$$

тенгликни, бундан эса

$$C_n = \frac{y_n}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})}$$

ҳосил қиламиз.

Топилган коэффициентларни (1) га қўйсак:

$$P(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)} y_0 +$$
$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)} y_1 + \tag{3}$$
$$+ \ldots + \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})} y_n.$$

Бу формула Лагранжнинг интерполяцион формуласи, деб аталади.

Айтиш лозимки, агар номаълум $y = \varphi(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда $n + 1$-тартибли ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $y = \varphi(x)$ функцияни $P(x)$ кўпҳадга алмаштирилганда йўл қўйилган хатолик, яъни $R(x) = \varphi(x) - P(x)$ миқдор

$$|R(x)| < |(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)| \frac{1}{(n+1)!} \max|\varphi^{(n+1)}(x)|$$

тенгсизликни қаноатлантиради.

Мисол. Тажриба натижасида $y=\varphi(x)$ функциянинг $\varphi(1)=3, \varphi(2)=-5, \varphi(-4)=4$ қийматлари олинган бўлсин. $y=\varphi(x)$ функцияни тақрибан 2-даражали кўпҳад билан ифодаланг.

Ечиш. (3) формулага кўра $n=2$ бўлган ҳол учун:

$$P(x)=\frac{(x-2)(x+4)}{(1-2)(1+4)}\cdot 3+\frac{(x-1)(x+4)}{(2-1)(2+4)}\cdot(-5)+\frac{(x-1)(x-2)}{(-4-1)(-4-2)}\cdot 4$$

ёки

$$P(x)=-\frac{39}{30}x^2-\frac{123}{30}x+\frac{252}{30}.$$

Бундан ташқари бошқа интерполяцион формулалар ҳам мавжуд, шулардан бири — Ньютон интерполяцион формуласидир. Бу формулада юқоридаги масаладан фарқли ўлароқ, $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ нуқталар орасидаги масофа бир хил, масалан, h бўлсин, деб фараз қилинади.

$$\Delta y_0=y_1-y_0,\ \Delta y_1=y_2-y_1,\ \Delta y_2=y_3-y_2,\ldots,$$

$$\Delta^2 y_0=y_2-2y_1+y_0=\Delta y_1-\Delta y_0,\ \Delta^2 y_1=\Delta y_2-\Delta y_1,\ldots,$$

$$\Delta^3 y_0=y_3-3y_2+3y_1-y_0=\Delta^2 y_1-\Delta^2 y_0,\ \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta^n y_0=\Delta^{n-1}y_1-\Delta^{n-1}y_0.$$

Буларни мос равишда 1-,2-,..., n-тартибли айирмалар, деб атаймиз.

$x_0, x_1, \ldots, x_n$ нуқталардаги қийматлари $y_0, y_1, \ldots, y_n$ бўлган n-даражали кўпҳад қуйидагича бўлади:

$$P(x)=y_0+\Delta y_0\frac{x-x_0}{h}+\frac{\Delta^2 y_0}{2!}\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\Delta^n y_0}{n!}\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left[\frac{x-x_0}{h}-(n-1)\right]. \qquad (4)$$

Мана шу формула Ньютоннинг интерполяцион формуласи, деб аталади.

Аслида 6-§ нинг 4-теоремасига кўра x нинг $n+1$ та қийматидаги $n+1$ та қийматлари тенг бўлган даражаси n дан катта бўлмаган кўпҳадлар бир хил бўлади. Лекин бу интерполяцион кўпҳадлар бир хил бўлса ҳам ёзилиш тартиби билан фарқ қилади.

Интерполяцион формулалар инженерлик изланишларда кўп ишлатиладиган тақрибий ҳисобларда кенг қўлланилади. Биз ҳозир шулардан бири — тақрибий дифференциаллашда Ньютон кўпҳадини қандай қўлланишини кўрамиз.

Агар $y=\varphi(x)$ функциянинг $x_0, x_1, \ldots, x_n$ нуқталардаги қийматлари $y_0, y_1, \ldots, y_n$ лар берилган бўлса, (4) формулага асосан:

$$\varphi(x)\approx P(x)=y_0+\Delta y_0\frac{x-x_0}{h}+\frac{\Delta^2 y_0}{2!}\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\Delta^n y_0}{n!}\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left[\frac{x-x_0}{h}-(n-1)\right]$$

тақрибий тенгликни ёзиш мумкин. Агар бу тенгликни дифференциаллаб, ҳосил бўлган муносабатда $x=x_0$ десак, ҳосиланинг x_0 нуқтадаги тақрибий қийматини ҳосил қиламиз:

$$\varphi'(x_0)\approx P'_n{}'(x_0)=\frac{\Delta y_0}{h}-\frac{\Delta^2 y_0}{2h}+\frac{\Delta^3 y_0}{3h}-\frac{\Delta^4 y_0}{4h}+\ldots \qquad (5)$$

9-§. ЧЕБИШЕВ НАЗАРИЯСИ

Интерполяциялаш усули ёрдамида қурилган кўпҳад асл функция билан $n+1$ та нуқтада устма-уст тушса ҳам қолган нуқталарда ундан жуда катта фарқ қилиши мумкин, бу эса бажарилаётган ҳисобларда катта хатоларга олиб келиши мумкин. Шунинг учун табиий савол туғилади: $[a,b]$ оралиқда узлуксиз $y=\varphi(x)$ функцияни тақрибан ифодаовчи даражаси $\leq n$ бўлган $P(x)$ кўпҳадни олдиндан берилган ихтиёрий аниқлик билан қуриш мумкинми? Бошқача қилиб айтганда, $[a,b]$ оралиқнинг барча нуқталари учун $\varphi(x)$ ва $P(x)$ орасидаги фарқнинг абсолют қиймати олдиндан берилган ҳар қандай мусбат ε сондан ҳам кичик бўладиган $P(x)$ кўпҳадни қуриш мумкинми? Бу саволга қуйидаги теорема жавоб беради:

Вейерштрасс теоремаси. Агар $\varphi(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда узлуксиз бўлса, у ҳолда ҳар қандай $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $P(x)$ кўпҳад мавжудки, $[a,b]$ оралиқнинг барча нуқталари учун

$$|\varphi(x)-P(x)|<\varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Ана шундай кўпҳадга Бернштейн кўпҳади мисол бўла олади: $\varphi(x)$ функция $[0,1]$ оралиқда узлуксиз бўлсин. Қуйидаги n-даражали кўпҳадда

$$B_n(x)=\sum_{m=0}^{n}\varphi\left(\frac{m}{n}\right)C_n^m x^m(1-x)^{n-m},$$

бу ерда, C_n^m — биномиал коэффициентлар, $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)$ — берилган функциянинг $x=\frac{m}{n}$ нуқтадаги қиймати, n ни шундай танлаш мумкинки, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун $[0,1]$ оралиқнинг барча нуқталарида

$$|B_n(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади.

Энг яхши яқинлашиш назариясини П.Л. Чебишев[1] яратган. Бу назариянинг яратилишига унинг машиналарда кенг қўлланиладиган шарнирлар механизми назарияси бўйича бажарган ишлари сабаб бўлган. Бундай механизмларни ўрганиш жараёнида у берилган даражали кўпҳадлар орасидан берилган оралиқда нолдан энг кам фарқ қилувчи кўпҳадни танлаш масаласига тўқнаш келди. У бундай кўпҳадларни қурди ва кейинчалик бу кўпҳадлар Чебишев кўпҳадлари, деб атала бошлади. Бу кўпҳадлар математика ва техниканинг кўп масалаларида кенг қўлланиб келинмоқда.

---

[1] П.Л.Чебишев (1821-1894) — буюк рус математиги.

9-БОБ.
АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ

1-§. БОШЛАНҒИЧ ФУНКЦИЯ ВА АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ

Фан ва техниканинг кўп масалаларида функция ҳосиласини билган ҳолда, ўзини тиклаш зарурияти учрайди. Масалан, 6-бобнинг 1-§ ида ҳаракатнинг берилган $s = f(t)$ тенгламасини дифференциаллаб, нуқтанинг $\vartheta = \frac{ds}{dt}$ тезлигини ва яна бир маротаба дифференциаллаб, нуқтанинг тезланишини топиш мумкинлигини кўрган эдик. Аслида, тескари масалани ечишга тўғри келади, яъни берилган $a = a(t)$ функция учун шундай $\vartheta = \vartheta(t)$ функцияни тиклаш керакки, $a = a(t)$ бу функция учун ҳосила вазифасини ўтасин ва функция учун шундай функцияни топиш керакки, унинг ҳосиласи $\vartheta = \vartheta(t)$ бўлсин. Биз бу бобни шу масалага бағишлаймиз.

1-таъриф. *Агар* $[a,b]$ *оралиқнинг барча нуқталари учун* $F'(x) = f(x)$ *муносабат ўринли бўлса,* $F(x)$ $[a,b]$ *оралиқда* $y = f(x)$ *функциянинг бошланғич*[1] *функцияси дейилади.*

1-*мисол.* $f(x) = 2x$ функция учун таърифга кўра $F(x) = x^2$ бошланғич функция бўлади, чунки $(x^2)' = 2x$.

2-*мисол.* $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ функцияга $F(x) = tgx$ бошланғич функция бўлади, чунки $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

---

[1] " бошланғич" атамасини биринчи маротаба Лагранж киритган.

Ҳар бир функциянинг, агар мавжуд бўлса, бошланғич функцияси ягона эмас (7-боб, 1-§ даги теорема натижасига қаранг), яъни бошланғич функциялар ўзгармасга фарқ қилади. Масалан, $x^2 + C$ ҳар қандай C ўзгармас сон учун $f(x) = 2x$ функциянинг бошланғич функцияси бўлади, чунки $(x^2 + C)' = 2x$.

2-таъриф. *Агар* $F(x)$ *функция* $f(x)$ *нинг бошланғичи бўлса,* $F(x) + C$ *ифода* $f(x)$ *функциянинг аниқмас интеграли деб аталиб,* $\int f(x)dx$ *кўринишда белгиланади.*

Демак, таърифга кўра, агар $F'(x) = f(x)$ бўлса,

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

бўлар экан. Бу ерда, $f(x)$ интеграл остидаги функция, $f(x)dx$ интеграл остидаги ифода ва $\int$ — интеграл белгиси, деб аталади.

$\int$ белги биринчи маротаба Лейбницнинг 1686 йилда чоп эттирган «Чуқур геометрия ва бўлинмаслар таҳлили ҳамда чексизлик» мемуарида учрайди. Лейбниц ва Ньютоннинг ўша даврдаги хатларидан[1] маълум бўлишича, интеграл тушунчаси Ньютонга ҳам маълум бўлган. Лейбниц ўз мемуарида $\int$ белги остидаги dx ифоданинг зарурлиги ҳақида ҳам гапириб ўтган. Лекин «интеграл» атамасини биринчи маротаба ака-ука Бернуллилар ишлатган.

Геометрик нуқтаи назардан аниқмас интеграл эгри чизиқни Oy ўқ бўйлаб параллел суриш натижасида ҳосил бўладиган эгри чизиқлар оиласини тасвирлайди.

Ҳар қандай функция учун бошланғич функция мавжудми, деган табиий савол туғилади. Бошланғич функциялар фақат берилган оралиқда узлуксиз бўлган функциялар учунгина мавжуддир. Демак, аниқмас интеграл узлуксиз функциялар учун мавжуд экан. Буни биз кейинги бобда исботлаймиз.

Берилган $f(x)$ функциянинг бошланғич функциясини топиш жараёни $f(x)$ функцияни интеграллаш, деб аталади.

Аниқмас интеграл таърифидан бевосита қуйидагилар келиб чиқади:

1. Аниқмас интегралнинг ҳосиласи интеграл остидаги функцияга тенг, яъни агар $F'(x) = f(x)$ бўлса, у ҳолда

$$\left(\int f(x)dx\right) = f(x). \tag{1}$$

2. Аниқмас интегралнинг дифференциали интеграл остидаги ифодага тенг, яъни

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx. \tag{2}$$

3. Бирор функция дифференциалининг аниқмас интеграли шу функция билан ўзгармаснинг йиғиндисига тенг:

$$\int dF(x) = F(x) + C. \tag{3}$$

Ҳосилалар жадвали ва аниқмас интеграл таърифидан фойдаланиб, интеграллар жадвалини тузиб олиш мумкин:

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (C=const, n $\neq -1$)

2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ (a>0)

4. $\int e^x dx = e^x + C$

5. $\int \sin x dx = -\cos x$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} =- \mathrm{ctg} x + C$

9. $\int \mathrm{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$

10. $\int \mathrm{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$

11. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C.$ $(a \neq 0)$

12. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$ $(a \neq 0)$

13. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$ $(a \neq 0)$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$ $(a \neq 0)$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C$ $(a \neq 0)$

Аниқмас интеграл қуйидаги хоссаларга эга:

1^0. Агар A — ўзгармас сон, C — бирор ўзгармас бўлса, у ҳолда

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx + C$$

бўлади, яъни ўзгармас кўпайтувчини интеграл белгиси ташқарисига чиқариш мумкин.

2^0. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx + C$.

Ҳақиқатан, агар тенгликни ўнг томонини дифференциалласак:

$$\left(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right)' = \left(\int f(x)dx\right)' \pm \left(\int g(x)dx\right)' = f(x) \pm g(x).$$

Демак, тенгликни чап ва ўнг томонлари $f(x) \pm g(x)$ ифоданинг бошланғич функциялари экан, шу сабабли улар ўзгармасга фарқ қилади.

3^0. Агар $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғичи бўлса, у ҳолда

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$$

бўлади.

Бу хосса ҳам юқоридагидек, дифференциаллаб исбот қилинади.

Мисол. $\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш.

$$\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int \frac{x^4-2x^2+x^2-2}{x^{2/3}}dx = \int \frac{x^4-x^2-2}{x^{2/3}}dx =$$

$$= \int (\frac{x^4}{x^{2/3}} - \frac{x^2}{x^{2/3}} - \frac{2}{x^{2/3}})dx = \int x^{10/3}dx - \int x^{4/3}dx - 2\int x^{-2/3}dx =$$

$$= \frac{x^{10/3+1}}{10/3+1} - \frac{x^{4/3+1}}{4/3+1} - 2\frac{x^{-2/3+1}}{-2/3+1} + C = \frac{3}{13}x^{13/3} - \frac{3}{7}x^{7/3} - 6x^{1/3} + C$$

Энди олинган жавобнинг тўғрилигини текшириш учун ундан ҳосила олиб, интеграл остидаги функция билан таққослаймиз:

$$(\frac{3}{13}x^{3/13} - \frac{3}{7}x^{7/3} - 6x^{1/3} + C)' = x^{10/3} - x^{4/3} - 2x^{-2/3} =$$

$$= \frac{x^4-x^2-2}{x^{2/3}} = \frac{x^4-2x^2+x^2-2}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{x^2(x^2-2)+(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}} =$$

$$= \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Демак топилган натижа тўғри экан.

2-§. ИНТЕГРАЛЛАШНИНГ ЎРНИГА ҚЎЙИШ УСУЛИ

Фараз қилайлик, биздан

$$\int f(x)dx$$

интегрални ҳисоблаш талаб қилинган бўлсин.

Интеграл остидаги ифодада

$$x = \varphi(t), \qquad (1)$$

деб ўзгарувчини алмаштирамиз, бу ерда, $\varphi(t)$ — тескари функцияга эга, узлуксиз дифференциалланувчи узлуксиз функция. У ҳолда, қуйидаги тенглик ўринли:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]d\varphi(t) = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (2)$$

Бу тенгликни исботлаш учун (2) ни дифференциаллаймиз. Чап томонининг ҳосиласи

$$\left(\int f(x)dx\right)'_x = f(x).$$

Ўнг томонини мураккаб функциядан ҳосила олиш қоидасига кўра дифференциаллаймиз:

$$\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_x = \left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_t \cdot \frac{dt}{dx} =$$

$$= f[\varphi(t)]\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x).$$

Охирги тенгликда (1) нинг ҳосиласи $x'(t) = \varphi'(t)$ ва тескари функциянинг ҳосиласини ҳисоблаш формуласига кўра $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}$ бўлишидан фойдаланилди.

Демак, (2) нинг чап ва ўнг томонларидан алоҳида-алоҳида олинган ҳосилалари ўзаро тенг экан, яъни (2) тенгликнинг иккала томонида турган ифодалар $f(x)$ нинг бошланғичи экан.

Интеграллашнинг бу усулини қўллашдан мақсад, берилган интегрални соддароқ, енгил ҳисобланадиган интегралга олиб келишдан иборат. Айрим ҳолларда, бу мақсадга (1) алмаштириш эмас, балки $t = \psi(x)$ кўринишдаги алмаштириш тезроқ олиб келади. Масалан,

$$\int \frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)}$$

кўринишдаги интегралда $t = \psi(x)$ десак, у ҳолда

$$dt = \psi'(x)dx\ ,$$

$$\int \frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\psi(x)| + C\ .$$

бўлади.

1-*мисол.* $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$. $x = \sin t$ алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда $dx = \cos t dt$ ва демак,

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int \cos t \cdot \cos t dt =$$

$$\int \cos^2 t dt = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left[\int dt + \int \cos 2t dt\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right) + C,$$

бу ерда, $t = \arcsin x, \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2}$ эканлигидан ва интегралнинг хоссаларидан фойдаланилди.

2-*мисол.* $\int \frac{xdx}{1+x^2}$. Агар $t = 1 + x^2$ десак, $dt = 2xdx$ ва

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln t + C = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$$

бўлади.

3-*мисол.* $\int e^{x^2} xdx = \frac{1}{2}\int e^{x^2} 2xdx = \left(x^2 = u, 2xdx = du\right) =$

$$= \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C\ .$$

4-*мисол.* $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(x/a\right)^2} = \left(x = at, dx = adt\right) =$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{adt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}arctgt + C = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C\ .$$

5-*мисол.* $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(x/a\right)^2}} = \left(x = at, dx = adt\right) =$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{adt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin\frac{x}{a} + C\ .$$

3-§. КВАДРАТ УЧҲАД ҚАТНАШГАН ИНТЕГРАЛЛАР

Бундай интеграллар асосан қуйидаги кўринишда бўлади:

$$1. J_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}; 2. J_2 = \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx;$$

$$3. J_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}; 4. J_4 = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx;$$

$$5. J_5 = \int \sqrt{ax^2+bx+cdx}.$$

Бундай интегралларни ҳисоблаш учун интеграл остида қатнашган учҳаддан тўлиқ квадрат ажратилиб, иккиҳад квадратининг алгебраик йиғиндисига келтирилади. Натижада ҳосил бўлган ифодани интеграллар жадвали ёрдамида интеграллаш мумкин бўлади.

Квадрат учҳаддан тўлиқ квадрат қуйидагича ажратилади:

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) =$$

$$a[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}] = a[(x + \frac{b}{2a})^2 \pm k^2]$$

бу ерда, $\pm k^2 = \dfrac{4ac-b^2}{4a^2}$. Бунда плюс ёки минус ишора ax^2+bx+c квадрат учҳаднинг илдизлари ҳақиқий ёки комплекс бўлишига қараб аниқланади, яъни b^2-$4ac$ ни ишорасига қараб аниқланади.

Тўлиқ квадрат ажратилгандан кейин юқорида келтирилган интеграллар қуйидаги кўринишни олади:

$$1.J_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{(x+\frac{b}{2a})^2 \pm k^2}$$

Бунда $x+b/2a=t$, $dx=dt$ десак,

$$J_1 = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 \pm k^2}$$

бу эса жадвалдаги интегралдир.

1-*мисол.* $\int \dfrac{dx}{2x^2+8x+20}$ ҳисоблансин.

Ечиш. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+8x+20} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+4x+10} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+4x+4+10-4} =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+2)^2+6} = J; x+2 = t dx = dt$$

$$J = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+6} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{6}} arctg \frac{t}{\sqrt{6}} + C;$$

t ўрнига *x* орқали ифодасини қўйиб, охирги натижани топамиз:

$$J = \frac{1}{2\sqrt{6}} arctg \frac{x+2}{\sqrt{6}} + C$$

$$2.J_2 = \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+(B-\frac{Ab}{2a})}{ax^2+bx+c}dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + (B-\frac{Ab}{2a})\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$$I = \int \frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c} = \left| \begin{array}{c} ax^2+bx+c=t \\ (2ax+b)dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C =$$

$$\ln|ax^2+bx+c| + C$$

$$J_2 = \frac{A}{2a}\ln|ax^2+bx+c| + (B-\frac{Ab}{2a})J_1.$$

2-*мисол.* $J = \int \dfrac{x+3}{x^2-2x-5}dx$ ҳисоблансин.

$$J = \int \frac{x+3}{x^2-2x-5}dx = \int \frac{1/2(2x-2)+(3+21/2)}{x^2-2x-5}dx =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)dx}{x^2-2x-5} + 4\int \frac{dx}{x^2-2x-5} = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5| +$$

$$4\int \frac{dx}{(x-1)^2-6} = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5| + 2\frac{1}{\sqrt{6}}\ln|\frac{\sqrt{6}-(x-1)}{\sqrt{6}+(x-1)} + C$$

$3.J_3 = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$; Бу интеграл юқорида кўрилган алмаштиришлар натижасида қуйидаги кўринишга келтирилади:

$a>0$ бўлганда $J_3 = \dfrac{1}{\sqrt{a}}\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}$

$a<0$ бўлганда $J_3 = \dfrac{1}{\sqrt{|a|}}\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}}$

Булар эса жадвалдаги интеграллардир.

3-*мисол.* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-3}}$ ҳисоблансин.

Ечиш. x^2-$4x$-3=$(x$-$2)^2$—7 dx=d $(x$-$2)$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-3}} = \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2-7}} = \ln|x-2+\sqrt{(x-2)^2-7} + C$$

жадвалдаги интегралга асосан ҳисобланди.

$$4. J_4 = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx;$$

$$J_4 = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+(b-\frac{Ab}{2a})}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + (B-\frac{Ab}{2a})\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

$$I = \int \frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \left[\begin{matrix} ax^2+bx+c=t \\ (2ax+b)dx=dt \end{matrix}\right] =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}+C = 2\sqrt{ax^2+bx+c}+C,$$

$$J_4 = \frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+(B-\frac{Ab}{2a})J_3$$

4-мисол. $\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx$ ҳисоблансин.

Ечиш.

$$\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}} = dx \int \frac{5/2(2x+4)+(3-10)}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx =$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{(2x+4)dx}{\sqrt{x^2+4x+10}} - 7\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}} = 5\sqrt{x^2+4x+10} -$$

$$-7\ln|x+2+\sqrt{(x+2)^2+6}|+C = 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7\ln|x+$$

$$2+\sqrt{x^2+4x+10}|+C.$$

5.$J_5 = \int\sqrt{ax^2+bx+cdx}$. Бунда ҳам интеграл остидаги квадрат учҳаддан тўла квадрат ажратамиз:

$$J_5 = \int\sqrt{ax^2+bx+cdx} = \int\sqrt{a[(x+\frac{b}{2a})^2 \pm k^2]dx} =$$

$$= \left[\frac{4ac-b^2}{4a^2} = \pm k^2; x+\frac{b}{2a} = t; dx = dt\right] = \int\sqrt{a(t^2 \pm k^2)dt}.$$

Бу интеграл эса қуйидаги формула ёрдамида ҳисобланади:

$$\text{(A)}.\ \int\sqrt{t^2+bdt} = \frac{t}{2}\sqrt{t^2+b}+\frac{b}{2}\ln|t+\sqrt{t^2+b}|+C,$$

$$\text{(B)}.\ \int\sqrt{a^2-t^2}dt = \frac{t}{2}\sqrt{a^2-t^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{t}{a}+C.$$

5-мисол. $\int\sqrt{x^2+2x+6dx}$ ҳисоблансин.

Буни ҳисоблаш учун тўла квадрат ажратиб, $t = x+1$, $b=5$ белгилашдан сўнг (A) формула қўлланилади:

$$x^2+2x+6 = (x+1)^2+5,$$

$$\int\sqrt{x^2+2x+6dx} = \int\sqrt{(x+1)^2+5d(x+1)} =$$

$$= \frac{x+1}{2}\sqrt{(x+1)^2+5}+\frac{5}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+5}\right|+C.$$

4-§. БЎЛАКЛАБ ИНТЕГРАЛЛАШ УСУЛИ

Бизга иккита дифференциалланувчи $u(x)$ ва $\vartheta(x)$ функциялар берилган бўлсин. Бу функциялар кўпайтмаси $u\vartheta$ нинг дифференциалини топайлик. Бу дифференциал қуйидагича аниқланади:

$$d(u\vartheta) = ud\vartheta + \vartheta du.$$

Бунинг икки томонини ҳадма-ҳад интеграллаб, қуйидагини топамиз:

$$u\vartheta = \int ud\vartheta + \int \vartheta du$$

ёки

$$\int ud\vartheta = u\vartheta - \int \vartheta du. \qquad (1)$$

Охирги топилган ифода бўлаклаб интеграллаш формуласи дейилади.

Бу формулани қўллаб интеграл ҳисоблаганда $\int u d\vartheta$ кўринишдаги интеграл, анча содда бўлган $\int \vartheta du$ кўринишдаги интегралга келтирилади.

Агар интеграл остида $y=\ln x$ функция ёки иккита функциянинг кўпайтмаси ҳамда тескари тригонометрик функциялар қатнашган бўлса, бунда бўлаклаб интеграллаш формуласи қўлланилади. Бу усул билан интеграллаганда янги ўзгарувчига ўтишнинг хожати йўқ.

Умуман, аниқмас интегрални ҳисоблаганда топилган натижа ёнига ўзгармас ($C=const$) ни қўшиб қўйиш шарт. Акс ҳолда интегралнинг битта қиймати топилиб, қолганлари ташлаб юборилган бўлади. Бу эса интеграллашда хатоликка йўл қўйилган деб ҳисобланади.

1-*мисол.* $\int x \operatorname{arctg} x dx$ ни ҳисобланг.

Ечиш.

$u = arctgx \quad d\vartheta = xdx, \quad du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad \vartheta = \int xdx = x^2/2$

(бунда $C=0$ деб олинди). (1) формулани қўллаймиз.

$$\int x \operatorname{arctg} x dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2(1+x^2)} dx \qquad (*)$$

$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$ ни алоҳида ҳисоблаймиз

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = \int (1 - \frac{1}{1+x^2}) dx = x - \operatorname{arctg} x + C$$

буни (*) га қўямиз.

$$\int x \operatorname{arctg} x dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x + C$$

2-*мисол.* $\int x \ln x dx$ ни ҳисобланг.

Ечиш. Агар $u = \ln x$, $xdx = d\vartheta$ десак, $du = \frac{dx}{x}$, $\vartheta = \int xdx = \frac{x^2}{2}$ бўлади. У ҳолда

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

3-*мисол.* $J_1 = \int e^{ax} \sin bx dx$ ва $J_2 = \int e^{ax} \cos bx dx$ интегралларни ҳисобланг ($a, b \neq 0$-ўзгармас сонлар).

Ечиш. J_1 интегралда $u = e^{ax}, d\vartheta = \sin bx dx$ десак, $du = ae^{ax} dx$, $\vartheta = -\frac{\cos bx}{b}$ бўлади. Буларни интегралга қўйсак:

$$J_1 = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}J_2. \quad (2)$$

Энди J_2 интегралда $u = e^{ax}, d\vartheta = \cos bx dx$ десак, у ҳолда

$$du = ae^{ax} dx, \ \vartheta = \frac{\sin bx}{b} \text{ ва (1) га кўра}$$

$$J_2 = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}J_1. \qquad (3)$$

(3) ни (2) га олиб бориб қўямиз:

$$J_1 = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\left(\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}J_1\right)$$

ёки

$$J_1 + \frac{a^2}{b^2}J_1 = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx.$$

Бундан ва (3) дан

$$J_1 = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C,$$

$$J_2 = \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C.$$

4-*мисол.* Фараз қилайлик, $k > 1$-натурал сон ва $a > 0$ бўлсин. У ҳолда

$$I_{k-1} = \int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{k-1}} = \int\frac{x^2+a^2}{\left(x^2+a^2\right)^k}dx = a^2\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^k} +$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{x\cdot 2x}{\left(x^2+a^2\right)^k}dx = = \left(u = x, d\vartheta = \frac{2xdx}{\left(x^2+a^2\right)^k}\right) =$$

$$a^2\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^k} + \frac{1}{2}\left[\frac{x}{(1-k)\left(x^2+a^2\right)^{k-1}} - \frac{1}{k-1}\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{k-1}}\right],$$

бундан

$$I_k = \frac{x}{2a^2(k-1)\left(x^2+a^2\right)^{k-1}} - \frac{2k-3}{2a^2(k-1)}I_{k-1}.$$

Натижада берилган интегрални ҳисоблаш учун рекуррент формула ҳосил қилдик. Агар бу жараённи k -1 маротаба қўлласак, бизга маълум бўлган

$$I_1 = \int\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$$

интегралга келамиз.

5-*мисол.* Агар $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ - n - даражали алгебраик кўпҳад булса, у ҳолда $\int P_n(x)e^{bx}dx$, $\int P_n(x)\cos bxdx$, $\int P_n(x)\sin bxdx$ кўринишдаги интеграллар бўлаклаб интеграллаш усулини n маротаба қўллаб

ҳисобланади. Бунда ҳар гал u функция сифатида кўпҳад олинади, яъни аввал $u = P_n(x)$, кейин $u = P_n'(x)$ ва ҳ.к., натижада интеграл соддалашиб мос равишда

$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C, \quad \int\cos bxdx = \frac{1}{b}\sin bx + C,$$

$$\int\sin bxdx = -\frac{1}{b}\cos bx + C$$

интегралларга келади.

Бу турдаги интегралларни ҳисоблашнинг бошқа усули ҳам бор, уни ноаниқ коэффициентлар усули деб аташади. Бу усулни қандай қўлланишини масалан. $\int P_n(x)e^{bx}dx$ интеграл мисолида кўрайлик. Табиийки, унинг бошланғичи $Q_n(x)e^{ax}$ кўринишда бўлади, шунинг учун бу интегрални $Q_n(x)e^{ax} + C = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + b_0 + C$ кўринишда излаймиз, бу ерда мақсад номаълум $b_0, b_1, \ldots, b_n$ коэффициентларни топишдадир.

Бошланғич функциянинг таърифига кўра,

$$\left(Q_n(x)e^{ax} + C\right) = P_n(x)e^{ax} \text{ ёки } Q_n(x) + bQ_n(x) = P_n(x). \quad (4)$$

Охирги тенгликнинг иккала тарафида n-даражали кўпҳад турибди. Маълумки (8-боб, 6-§, 6-теоремага қаранг), бу кўпҳадлар тенг бўлиши учун x нинг бир хил даражалари олдидаги мос коэффициентлари тенг бўлиши керак. Уларни ўзаро тенглаб, номаълум коэффициентларни топиш учун чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Юқорида айтилганларни қуйидаги интеграл мисолида кўрайлик:

$$\int\left(x^2+1\right)e^xdx = \left(ax^2+bx+c\right)e^x + C$$

Бунда

$$P_2(x) = x^2 + 1,\ Q_2(x) = ax^2 + bx + c.$$

(4) тенглик қуйидаги кўринишда бўлади:

$$ax^2 + (2a + b)x + b + c = x^2 + 1.$$

Бундан

$$a = 1,\ 2a + b = 0,\ b + c = 1.$$

Бу тенгламалардан: $a = 1, b = -2, c = 3$. Демак,

$$\int (x^2 + 1) e^x dx = (x^2 - 2x + 3) e^x + C.$$

5-§. РАЦИОНАЛ КАСРЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

Иккита алгебраик $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ва $Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ кўпҳадларнинг

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \tag{1}$$

нисбати рационал функция ёки рационал каср, деб аталади, бу ерда $a_n, b_m \neq 0$, $n \geq 0, m \geq 1$.

Қуйидаги

$$\begin{gathered} \frac{A}{x-a}, \frac{A}{(x-a)^k}\ (k \geq 2), \\ \frac{Ax + B}{x^2 + px + q}, \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k}\ (k \geq 2), \end{gathered} \tag{2}$$

кўринишдаги рационал функциялар энг содда рационал касрлар, деб аталади, бу ерда, A, B, a, p, q – ўзгармас сонлар, k – натурал сон, $x^2 + px + q$ квадрат учҳад ҳақиқий илдизларга эга эмас, яъни $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

Учинчи ва тўртинчи кўринишдаги рационал функцияларни интеграллашни 3-§ да кўрган эдик. Аввалги иккита касрнинг интеграли эса қуйидагича бўлади:

$$A \int \frac{dx}{x-a} = A \ln|x - a| + C,$$

$$A \int \frac{dx}{(x-a)^k} = -\frac{A}{k-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$$

Агар (1) рационал касрнинг суратида турган кўпҳадни даражаси n махраждa турган кўпҳаднинг даражаси m дан кичик бўлса, (1) ни тўғри каср, акс ҳолда нотўғри каср дейимиз.

Агар (1) нотўғри каср бўлса, кўпҳадни кўпҳадга бўлиш қоидасига кўра бўлиб, уни

$$f(x) = \text{кўпҳад} + \frac{P_{n_1}(x)}{Q_{m_1}(x)} \quad (n_1 < m_1)$$

кўринишга келтириш мумкин. Кўпҳадни интеграллашни аввалги параграфларда кўрдик. Демак, ҳар қандай рационал функцияни интеграллашдаги асосий қийин-чилик тўғри касрни интеграллашга келтирилар экан. Ихтиёрий тўғри касрни интеграллаш қуйидаги теоремага асосланади.

Теорема. *Агар ҳақиқий тўғри (1) касрнинг махражи*

$$Q_m(x) = b_m (x - c_1)^{k_1} \ldots (x - c_r)^{k_r} (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \ldots (x^2 + p_s x + q_s)^{l_s}$$

кўринишда кўпайтувчиларга ажралса, у ҳолда (1) ягона равишда қуйидаги:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{1,1}}{(x - c_1)^{k_1}} + \frac{A_{1,2}}{(x - c_1)^{k_1 - 1}} + \ldots + \frac{A_{1,k_1}}{x - c_1} +$$

……………………………………………………………

$$+\frac{A_{r,1}}{(x-c_r)^{k_r}}+\frac{A_{r,2}}{(x-c_r)^{k_r-1}}+\ldots+\frac{A_{r,k_r}}{x-c_r}+$$

$$+\frac{B_{1,1}x+C_{1,1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}}+\frac{B_{1,2}x+C_{1,2}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1-1}}+\ldots+\frac{B_{1,l_1}x+C_{1,l_1}}{x^2+p_1x+q_1}+$$

……………………………………………………

$$+\frac{B_{s,1}x+C_{s,1}}{\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{l_s}}+\frac{B_{s,2}x+C_{s,2}}{\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{l_s-1}}+\ldots+\frac{B_{s,l_s}x+C_{s,l_s}}{x^2+p_sx+q_s} \quad (2)$$

кўринишда энг содда касрлар йиғиндисига ёйилади.

Демак, бу теоремага кўра ҳар қандай ҳақиқий тўғри рационал каср учун кўрсатилган индекслари бўйича шундай A, B, C ўзгармас сонлар топиладики, (2) муносабат x нинг $c_1, c_2, \ldots, c_r$ қийматларидан бошқа барча қийматлари учун бажарилади.

Бу коэффициентларни аниқлаш учун одатда ноаниқ коэффициентлар усули қўлланилади. Бу усулни биринчи маротаба И. Бернулли қўллаган.

Бу усулни қуйидаги каср мисолида кўрсатамиз:

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Тенгликнинг ўнг тарафини умумий махражга келтириб, суратларини тенгласак:

$$2x^2+2x+13=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x^2+1)(x-2)+(Dx+E)(x-2). \quad (3)$$

Бу тенгликнинг ўнг томонини ихчамлаб, тенгликнинг иккала томонидаги x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаб, қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$x^4:\ A+B=0,$
$x^3:\ -2B+C=0,$

$x^2:\ 2A+B-2C+D=2,$
$x:\ -2B+C-2D+E=2,$

$x^0:\ A-2C-2E=13,$

бунлан

$$A=1,\ B=-1,\ C=-2,\ D=-3,\ E=-4.$$

Демак,

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{1}{x-2}-\frac{x+2}{x^2+1}-\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}.$$

Худди шу натижага x нинг ўрнига кетма-кет $-1,0,1,2$ ва -2 қийматларни қўйиб келса ҳам бўлади. Бунда номаълум коэффициентларни топиш учун қуйидаги система ҳосил бўлади:

$$\begin{cases}25A=25,\\ A-2C-2E=13,\\ 4A+6(B-C)+3(D-E)=13,\\ 4A-2(B+C)-(D+E)=17,\\ 25A+20(2B-C)+4(2D-E)=17.\end{cases}$$

(2) даги қўшилувчи касрларнинг интегралини эсласак, қуйидаги хулосага келамиз:

Ҳар қандай рационал функциянинг интеграли рационал функция, логарифмик ва арктангенс функциялар орқали ифодаланади.

Кўргазма сифатида юқоридаги мисолга қайтамиз:

$$\int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)}dx=\int\frac{dx}{x-2}-\int\frac{x+2}{x^2+1}dx-\int\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{3-4x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1}-4\mathrm{arctg}x+C.$$

6-§. ИРРАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

Бу параграфда биз рационал бўлмаган функцияларни ўзгарувчини алмаштириш усули ёрдамида қандай қилиб рационал ифодага олиб келиш йўлларини, ва ниҳоят норационал функцияларнинг интегралларини алмаштириш натижасида ҳосил бўлган рационал ифодаларга 5-§ да берилган усулларни қўллаб ҳисоблашни кўрамиз. Бу — жараённи рационаллаштириш усули дейилади.

1. $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, бу ерда a,b,c,d -ўзгармас сонлар, m -натурал сон, $ad-bc\neq 0$, $R(x,y)$ - ўз аргументларига нисбатан рационал ифода.

Берилган интегрални

$$t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

алмаштириш рационаллаштиради. Ҳақиқатан

$$t^m=\frac{ax+b}{cx+d}.$$

Бундан

$$x=\frac{b-dt^m}{ct^m-a},\ dx=\frac{mt^{m-1}(ad-bc)}{(ct^m-a)^2}dt.$$

У ҳолда

$$\int R\left(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=$$

$$\int R\left(\frac{b-dt^m}{ct^m-a},t\right)\frac{mt^{m-1}(ad-bc)}{(ct^m-a)^2}dt=\int R_1(t)dt\ ,$$

бу ерда $R_1(t)-\ t$ нинг рационал функцияси.

1-*мисол.* $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}=\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{x+1}.$

Ечиш. Агар $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$ десак, $x=\frac{t^3+1}{t^3-1}$, $dx=-\frac{6t^2dt}{(t^2-1)^2}$ бўлади. У ҳолда

$$\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{x+1}=\int\frac{-3dt}{t^3-1}=\int\left(-\frac{1}{t-1}+\frac{t+2}{t^2+t+1}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}+\sqrt{3}\mathrm{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C.$$

2-*мисол.* $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int\frac{dx}{\left(\sqrt[6]{x}\right)^3+\left(\sqrt[6]{x}\right)^2}=\left(\sqrt[6]{x}=t\right)=\int\frac{6t^5dt}{t^2+t^3}=$

$$=6\int(t^2-t+1)dt-\ln|1+t|=2t^3-3t^2+6t-\ln|1+t|+C.$$

2. $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, бу ерда a,b,c -ўзгармас сонлар.

Интеграл остидаги квадрат учҳад табиий каррали илдизга эга эмас, чунки акс ҳолда интеграл остидаги ифода рационал ифодага айланиб қолади. Агар у ҳақиқий ҳар хил x_1, x_2 илдизларга эга бўлса, у ҳолда

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=(x-x_1)\sqrt{a\frac{x-x_2}{x-x_1}}$$

деб, берилган интеграл юқорида кўрилган 1-тур интегралга келтирилади.

Энди, фараз қилайлик, квадрат учҳад ҳақиқий илдизларга эга эмас ва $a>0$ бўлсин. У ҳолда берилган интегрални Эйлернинг 1-алмаштириши, деб аталувчи

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}\cdot x$$

алмаштириш рационаллаштиради. Ҳақиқатан, агар бу тенгликни квадратга кўтариб ихчамласак, $bx+c=t^2-2\sqrt{a}\cdot tx$ ва бундан

Шу сабабли, (1) ни

$$t = tg\frac{x}{2} \qquad (2)$$

алмаштириш рационаллаштиради. Ҳақиқатан, (2) дан

$$x = 2\mathrm{arctg}\,t\,,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}\,,$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}\,,\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,.$$

Буларни (1) га қўйсак:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt\,.$$

1-*мисол.* $\int\frac{dx}{\sin x}$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш.

$$\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C\,.$$

Юқорида келтирилган (2) алмаштириш универсал алмаштириш, деб аталади. Бу усул айрим ҳолларда мураккаб рационал функцияларга олиб келади, шунинг учун бу усул билан бир қаторда мақсадга тезроқ олиб келувчи алмаштиришлар ҳам ишлатилади. Шулардан айримларини кўриб чиқайлик. Аввал изоҳлаш жараёнида зарур бўладиган бир нечта тушунчаларни киритиб олайлик.

Агар $R(-x,y) = R(x,y)$ $(R(x,-y) = R(x,y))$ бўлса, $R(x,y)$ функция x га (y га) нисбатан жуфт дейилади, агар $R(-x,y) = -R(x,y)$ $(R(x,-y) = -R(x,y))$ бўлса, $R(x,y)$ функция x га (y га) нисбатан тоқ дейилади.

Фараз қилайлик,

$$R(u,\vartheta) = \frac{P(u,\vartheta)}{Q(u,\vartheta)} \quad (u = \sin x, \vartheta = \cos x)$$

бўлсин, бу ерда, P ва Q лар u, ϑ лар бўйича кўпҳадлар.

Агар P u га (ϑ га) нисбатан ва Q u га (ϑ га) нисбатан бир вақтда жуфт ёки тоқ бўлса, $R(u,\vartheta)$ u га (ϑ га) нисбатан жуфт бўлади.

Агар P u га (ϑ га) нисбатан жуфт (тоқ) ва Q u га (ϑ га) нисбатан тоқ (жуфт) бўлса, $R(u,\vartheta)$ u га (ϑ га) нисбатан тоқ бўлади.

P ва Q лар кўпҳад бўлгани учун $R(u,\vartheta)$ бирор аргументига, масалан, u га нисбатан жуфт бўлса, уни

$$R(u,\vartheta) = R_1(u^2, \vartheta)$$

кўринишга, яъни u нинг жуфт даражаларини ўз ичига олган кўпҳад кўринишига келтириш мумкин.

Агар $R(u,\vartheta)$ u га нисбатан тоқ бўлса, уни

$$R(u,\vartheta) = R_2(u^2, \vartheta)\cdot u$$

кўринишга келтирса бўлади.

1. Агар $R(u,\vartheta)$ u га нисбатан тоқ бўлса, у ҳолда

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R_2(\sin^2 x, \cos x)\sin x dx =$$
$$= -\int R_2(1-\cos^2 x, \cos x)d\cos x$$

бўлади ва демак, $t = \cos x$ алмаштириш рационал функциянинг интегралига олиб келади.

2-*мисол.* $\displaystyle\int\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx = -\int\frac{1-t^2}{t^2}dt = \int dt - \int\frac{dt}{t^2} =$

$$= t + \frac{1}{t} + C = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C\,.$$

2. Агар $R(u,\vartheta)$ ϑ га нисбатан тоқ бўлса, у ҳолда

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R_0(\sin x, \cos^2 x)\cos x dx =$$
$$= \int R_0(\sin x, 1-\sin^2 x)d\sin x$$

бўлади ва демак, $t = \sin x$ алмаштириш билан мақсадга етишамиз.

3-мисол. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)d\sin x =$

$$= \int t^2(1-t^2)dt = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

3. Агар $R(u,\vartheta)$ бирваракайига иккала ўзгарувчисига нисбатан жуфт бўлса, яъни

$$R(-u,-\vartheta) = R(u,\vartheta)$$

бўлса, u ни $\frac{u}{\vartheta}\vartheta$ га алмаштириб,

$$R(u,\vartheta) = R(\frac{u}{\vartheta}\vartheta,\vartheta) = R^*(\frac{u}{\vartheta},\vartheta)$$

муносабатга келамиз. У ҳолда

$$R^*(\frac{u}{\vartheta},-\vartheta) = R^*(\frac{u}{\vartheta},\vartheta)$$

тенгликка ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Шу сабабли

$$R^*(\frac{u}{\vartheta},\vartheta) = R^*_1(\frac{u}{\vartheta},\vartheta^2),$$

дейиш мумкин. Демак,

$$R(\sin x,\cos x) = R_1^*(\operatorname{tg}x,\cos^2 x) = R_1^*\left(\operatorname{tg}x,\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right) = R_1^{**}(\operatorname{tg}x)$$

экан. Бундан берилган интегрални $t = tgx$ алмаштириш рационаллаштириши келиб чиқади.

Эслатма. Ҳар қандай $R(u,\vartheta)$ рационал ифодани қуйидаги:

$$R(u,\vartheta) = \frac{R(u,\vartheta) - R(-u,\vartheta)}{2} + \frac{R(-u,\vartheta) - R(-u,-\vartheta)}{2} + \\ + \frac{R(-u,-\vartheta) + R(u,\vartheta)}{2}$$

кўринишда ифодалаш мумкин, бу ерда биринчи каср учун 1-ҳолат, иккинчи каср учун 2-ҳолат ва учинчи каср учун 3-

ҳолат ўринли. Шу сабабли $R(\sin x,\cos x)$ ифодани юқоридагидек ёйиб, ҳар бир қисмига мос равишда $t = \cos x, t = \sin x$ ва $t = tgx$ алмаштиришларни қўллаб, берилган интегрални рационаллаштириш мумкин.

4-мисол. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$ ни ҳисобланг.

Ечиш. Бу интеграл учун 3-ҳолат ўринли, шунинг учун $t = \operatorname{tg}x$ алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4}dt = t - \frac{2}{t} - \frac{1}{3t^3} + C =$$

$$= \operatorname{tg}x - 2\operatorname{ctg}x - \frac{1}{3}ctg^3 x + C.$$

4. $J_1 = \int \cos mx \cos nx dx$, $J_2 = \int \sin mx \cos nx dx$ ва $J_3 = \int \sin mx \sin nx dx$ кўринишдаги интеграллар қуйидаги формулалар ёрдамида ҳисобланади:

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x],$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x],$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x].$$

Буларни берилган интегралларга мос равишда қўйиб ҳисоблаймиз:

$$J_1 = \frac{1}{2}\int[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]dx =$$

$$= \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C$$

Қолган иккитаси ҳам шу каби ҳисоюланади.

5-мисол. $\int \sin 5x \sin 3x dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш.

$$\int \sin 5x \sin 3x dx = \frac{1}{2}\int[-\cos 8x + \cos 2x]dx =$$

$$= -\frac{\sin 8x}{16} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

8-§. АЙРИМ ИРРАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯЛАРНИ ТРИГОНОМЕТРИК АЛМАШТИРИШЛАР ЁРДАМИДА ИНТЕГРАЛЛАШ

Биз 6-§ да батафсил кўрган

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx \qquad (1)$$

интегралга қайтамиз, бу ерда $a \neq 0, c - \frac{b^2}{4} \neq 0$. Бу параграфда тригометрик алмаштиришлар ёрдамида (1) интеграл 7-§ да кўрилган

$$\int R(\sin z, \cos z)dz \qquad (2)$$

интеграл кўринишига қандай қилиб келтирилиши кўрилади.

3-§ да $ax^2 + bx + c$ квадрат учҳад коэффициентларнинг ҳар хил қийматида $\sqrt{m^2t^2 + n^2}$, $\sqrt{m^2t^2 - n^2}$ ва $\sqrt{n^2 - m^2t^2}$ ифодалардан бирига келтирилишини кўрган эдик, шунинг учун умумийликни бузмаган ҳолда, (1) интеграл

$$\int R\left(t, \sqrt{m^2t^2 + n^2}\right)dt\,, \qquad (3)$$

$$\int R\left(t, \sqrt{m^2t^2 - n^2}\right)dt\,, \qquad (4)$$

$$\int R\left(t, \sqrt{n^2 - m^2t^2}\right)dt \qquad (5)$$

интегралларнинг бирига келтирилган, деб фараз қиламиз.

Агар (3) га $t = \frac{n}{m}\text{tg}z$ алмаштиришни, (4) га $t = \frac{n}{m}\sec z$ алмаштиришни ва (5) га $t = \frac{n}{m}\sin z$ алмаштиришни қўлласак, бу интеграллар (2) интеграл кўринишига келади.

Мисол. Ҳисобланг:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(a^2 - x^2\right)^3}}.$$

Ечиш. Бу (5) кўринишдаги интеграл, шунинг учун унга $x = a\sin z$ алмаштиришни қўллаймиз. У ҳолда

$$dx = a\cos z dz$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(a^2 - x^2\right)^3}} = \int \frac{a\cos z dz}{\sqrt{\left(a^2 - a^2\sin^2 z\right)^3}} = \int \frac{a\cos z dz}{a^3\cos^3 z} =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dz}{\cos^2 z} = \frac{1}{a^2}\text{tg}z + C = \frac{1}{a^2}\frac{\sin z}{\cos z} + C =$$

$$= \frac{1}{a^2}\frac{\sin z}{\sqrt{1 - \sin^2 z}} + C = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C.$$

Эслатма. Ҳар қандай узлуксиз функция учун бошланғич функция мавжуд бўлса ҳам (1-§ га қаранг), ҳар қандай бошланғич функция элементар функциялар орқали ифодаланавермайди. Бундай интеграллар жумласига

$$\int e^{-x^2}dx\,,\ \int \frac{\sin x}{x}dx\,,\ \int \frac{\cos x}{x}dx\,,$$

$$\int \sqrt{1 - k^2\sin^2 x}dx\,,\ \int \frac{dx}{\ln x}$$

ва ҳ.к. киради.

Бу турдаги интегралларни Лаплас, Лежандр ва Луивилль[1] кенг ўрганишган. Лежандрнинг ҳатто бундай функцияларнинг қийматлари жадвали ҳам мавжуд.

---

[1] Андриан Мари Лежандр (1752-1833) ва Жозеф Луивилль (1809-1882) – буюк фаранг математиклари.

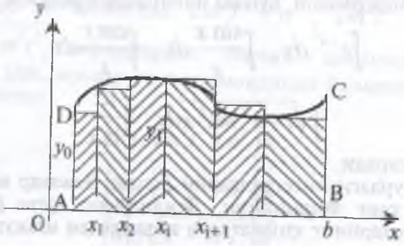
10-БОБ.
АНИҚ ИНТЕГРАЛ

1-§. ҚУЙИ ВА ЮҚОРИ ИНТЕГРАЛ ЙИҒИНДИЛАР

Соҳаларнинг юзаларини ҳисоблаш масаласи қадимдан инсониятни қизиқтириб келган. Кўпбурчакларнинг юзини ҳисоблашни қадимги Вавилон ва Миср олимлари бажара олишгани тарихдан маълум. Архимед[1] парабола сегментининг юзини ҳисоблай олган. Математик тарихнинг охирги изланишларидан маълумки, доира ва сектор юзини ҳисоблашни Ўрта осиёлик ватандошларимиз Ал-Хоразмий ва Берунийлар ҳам билганлар.

Биз бу бобда ўрганадиган асосий тушунчаларимиз ҳам юзаларни ҳисоблаш масаласидан келиб чиққан. Шу сабабли ҳозир биз чегараларидан бири эгри чизиқдан иборат бўлган эгри чизиқли трапеция, деб аталувчи соҳа юзасини ҳисоблаш масаласини кўрамиз.

Фараз қилайлик, бизга қуйидан Ox ўқининг $[a,b]$ кесмаси билан, ёнбошларидан $x=a$ ва $x=b$ тўғри чизиқлар билан ва юқоридан узлуксиз $y=f(x)$ функция графиги билан чегараланган соҳа берилган булсин.



97-расм

---

[1] Архимед (тахминан милоддан аввалги 287-212 йиллар) — буюк юнон олими.

$[a,b]$ кесмани ихтиёрий равишда

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

нуқталар билан n та бўлакка бўламиз ва

$$x_1 - x_0 = \Delta x_1, x_2 - x_1 = \Delta x_2, \ldots, x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$$

деб белгилаймиз.

$y=f(x)$ функция ҳар бир $[x_{i-1}, x_i]$ бўлакда узлуксиз бўлгани учун Вейерштрасс теоремасига кўра у шу оралиқда ўзининг энг кичик m_i ва энг катта M_i қийматларига эришади (функция $[a,b]$ оралиқда узлуксиз бўлгани учун унинг ҳар қандай бўлагида ҳам узлуксиз бўлади).

Қуйидаги

$$\underline{s_n} = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i, \quad (1)$$

$$\overline{s_n} = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i \quad (2)$$

йиғиндилар мос равишда 97-расмда акс эттирилган ички чизилган $AC_0N_1C_1N_2\ldots C_{n-1}N_nB$ ва ташқи чизилган $AK_0C_1K_1\ldots C_{n-1}K_{n-1}C_nB$ поғонасимон шаклларнинг юзаларига тенг. Улар мос равишда Дарбунинг[1] қуйи ва юқори йиғиндилари, деб аталади.

Узлуксиз $y=f(x)$ функциянинг $[a,b]$ оралиқдаги энг кичик ва энг катта қийматлари мос равишда m ва M бўлсин. У ҳолда

$$m_1 \ge m\,,\ m_2 \ge m\,,\ \ldots,\ m_n \ge m$$

ва

$$M_1 \le M\,,\ M_2 \le M\,,\ \ldots,\ M_n \le M$$

бўлгани учун

---

[1] Гастон Дарбу (1842-1917) — фаранг математиги.

$$\underline{s_n} = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \geq \sum_{i=1}^{n} m \Delta x_i = m \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = m(b-a), \quad (3)$$

$$\overline{s_n} = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M \Delta x_i = M \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = M(b-a). \quad (4)$$

Барча i ($i = 1,2,...,n$) лар учун $m_i \leq M_i$ эканлигидан

$$\underline{s_n} \leq \overline{s_n}\,. \quad (5)$$

Учта (3),(4) ва (5) тенгсизликларни бирлаштирсак:

$$m(b-a) \leq \underline{s_n} \leq \overline{s_n} \leq M(b-a) \quad (6)$$

Дарбу йиғиндилари қуйидаги хоссаларга эга:

1^0. Агар бўлиш нуқталарини оширсак, Дарбунинг қуйи йиғиндиси фақат ортиши, юқори йиғиндиси фақат камайиши мумкин.

Буни исбот қилиш учун танланган бўлиш нуқталарига битта $x^{'}$ нуқта қўшилган ҳоли билан кифояланамиз.

Фараз қилайлик, бу нуқта x_k ва x_{k+1} нуқталар орасида бўлсин:

$$x_k < x' < x_{k+1}.$$

Агар $\overline{m}_k$ ва $\overline{\overline{m}}_k$ мос равишда $y = f(x)$ функциянинг $[x_k, x']$ ва $[x', x_{k+1}]$ оралиқлардаги энг кичик қийматлари бўлса, у ҳолда $\underline{s_{n+1}}$ нинг k-ҳади

$$\overline{m}_k(x' - x_k) + \overline{\overline{m}}_k(x_{k+1} - x')$$

$\underline{s_n}$ нинг k-ҳадидан фарқ қилади. $[x_k, x']$ ва $[x', x_{k+1}]$ бўлаклар $[x_k, x_{k+1}]$ нинг қисмлари бўлгани учун $\overline{m}_k \geq m_k$, $\overline{\overline{m}}_k \geq m_k$ ва шу сабабли

$$\overline{m}_k(x' - x_k) \geq m_k(x' - x_k),\ \overline{\overline{m}}_k(x_{k+1} - x') \geq m_k(x_{k+1} - x')$$

бўлади. Агар бу тенгсизликларни бирлаштирсак:

$$\overline{m}_k(x' - x_k) + \overline{\overline{m}}_k(x_{k+1} - x') \geq m_k(x_{k+1} - x_k),$$

яъни $\underline{s_{n+1}} \geq \underline{s_n}$ экан. Юқори йиғинди учун исбот айнан шундай бажарилади.

2^0. Дарбунинг ҳар бир қуйи йиғиндиси ҳар қандай юқори йиғиндисидан катта эмас, ҳатто бу йиғинди бошқа бўлинишга тааллуқли бўлса ҳам.

Исботи. $[a,b]$ оралиқни ихтиёрий равишда бўлакларга бўлиб, бу бўлинишга мос келувчи Дарбу йиғиндиларини $\underline{s_n}$ ва $\overline{s_n}$ деб белгилайлик.

Энди, $[a.b]$ оралиқнинг бу бўлинмадан бошқа бўлинмасини олиб, унга мос келадиган Дарбу йиғиндиларини $\underline{S_n}^1$ ва $\overline{S_n^1}$, деб белгилайлик.

$\underline{S_n} \leq \overline{S_n^1}$ эканлигини исбот қилиш керак. Бунинг учун биринчи ва иккинчи бўлиниш нуқталарини бирлаштирамиз.

Натижада янги, учинчи бўлиниш ҳосил бўлади. Унга мос келувчи Дарбу йиғиндилари $\underline{S_n}^2$ ва $\overline{S_n^2}$ бўлсин.

Учинчи бўлинишни иккинчи бўлиниш нуқталарини биринчисига бирлаштириш натижасида ҳосил бўлгани учун 1^0-хоссага кўра $\underline{S_n} \leq \underline{S_n}^2$ бўлади. Худди шундай иккинчи ва учинчи бўлинишларни солиштириб, $\overline{S_n^2} \leq \overline{S_n^1}$ эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

Лекин $\underline{S_n}^2 \leq \overline{S_n^2}$, шу сабабли юқоридаги иккита тенгсизликдан $\underline{S_n} \leq \overline{S_n^1}$ эканлиги келиб чиқади. Шуни исбот қилиш керак эди.

Бу икки хоссадан Дарбунинг қуйи ва юқори йиғиндилари n нинг натурал қийматлари учун мос равишда монотон камаймайдиган ва монотон ўсмайдиган кетма-кетликларни ҳосил қилиши келиб чиқади. Шу сабабли Больцано-Вейерштрасс теоремасига кўра (4-боб, §2.7 га қаранг) бу кетма-кетликлар $n \to \infty$ да чекли $I_* \le I^*$ лимитларга эга. Аслида бу ерда фақат тенглик ўринли. Ҳақиқатан

$$\overline{s_n} - \underline{s_n} = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta x_i \ ,$$

Кантор теоремасининг натижасига кўра (5-боб, 3.6-§ га қаранг), ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $\Delta x_i < \delta$ бўлганда $M_i - m_i < \varepsilon$ бўлади. У ҳолда

$$\overline{s_{n_k}} - \underline{s_{n_k}} < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon (b - a).$$

Бундан $I_* = \lim\limits_{n \to \infty} \underline{s_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \overline{s_n} = I^*$ эканлиги келиб чиқади.

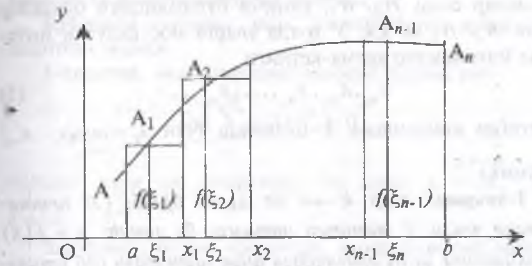
1-расмдан ҳам кўринадики, n орта борган сари $C_0 N_1 C_1 \ldots N_n$ ва $C_0 K_0 C_1 K_1 \ldots K_{n-1} C_n$ синиқ чизиқлар $C_0 C_n$ ёйга яқинлаша боради. Демак, ички чизилган ва ташқи чизилган соҳаларнинг юзи берилган эгри чизиқли трапециянинг юзига яқинлаша борар экан, яъни $S = I_* = I^*$ бўлар экан.

2-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ ТАЪРИФИ ВА МАВЖУДЛИК ШАРТЛАРИ

Яна юқорида кўрилган масалага қайтамиз. Ҳар бир $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ бўлакда мос равишда биттадан $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ нуқталар олиб, берилган функциянинг шу нуқталардаги $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n)$ қийматларини ҳисоблаймиз. Қуйидаги

$$s_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad (1)$$

йиғиндини тузиб олайлик. Бу йиғиндини $y = f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқдаги интеграл йиғиндиси деб аташади.



98-расм.

ξ_i нуқта $[x_{i-1}, x_i]$ бўлакдан ихтиёрий танлангани учун $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$ бўлади. Бундан $m_i \Delta x_i \le f(\xi_i)\Delta x_i \le M_i \Delta x_i$ ёки

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \ ,$$

яъни

$$\underline{s_n} \le s_n \le \overline{s_n} \ . \quad (2)$$

Бу тенгсизликнинг геометрик маъноси юзи s_n бўлган майдон ички ва ташқи чизилган синиқ чизиқлар орасида жойлашган синиқ чизиқ билан чегараланган эканлигини билдиради.

Йиғинди s_n $[a,b]$ оралиқни $[x_{i-1},x_i]$ бўлакларга бўлиш ва ξ_i нуқталарни танлаш услубига боғлиқ. Ҳар хил бўлинишларни қарайлик. Ҳар бир бўлинишда мос ξ_i нуқталарни танлаб, (1) кўринишдаги мос йиғиндиларни тузамиз. Натижада интеграл йиғиндилар кетма-кетлиги ҳосил бўлади. Уларни қуйидагича тартиблаймиз. Умумийликни бузмаган ҳолда, биринчи бўлинишда бўлаклар сони n_1, иккинчи бўлинишдаги бўлаклар сони $n_2 > n_1$, учинчи бўлинишдаги бўлаклар сони $n_3 > n_2$ ва ҳ.к. У ҳолда уларга мос келувчи интеграл йиғиндилар кетма-кетлиги

$$s_{n_1}, s_{n_2}, s_{n_3}, \ldots, s_{n_k}, \ldots \tag{3}$$

тартибда жойлашади. k-бўлиниш учун $\lambda_k = \max\limits_{i=1,n_k}|x_i - x_{i-1}|$ деймиз.

1-таъриф. *Агар $k \to \infty$ да $\lambda_k \to 0$ бўлиб, (3) кетма-кетлик чекли S лимитга интилса, бу лимит $y = f(x)$ функциянинг $[a,b]$ оралиқдаги аниқ интеграли деб аталади* ва

$$\int_a^b f(x)dx$$

тарзда белгиланади.

Демак, таърифга кўра

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda k \to 0} s_{nk} = \lim_{\lambda k \to 0} \sum_{i=1}^{nk} f(\xi_i^{(k)})\Delta x_i^{(k)}. \tag{4}$$

Бу ерда, a аниқ интегралнинг қуйи чегараси, b аниқ интегралнинг юқори чегараси дейилади.

1-таъриф қуйидаги таърифга эквивалент.

2-таъриф. *Агар ҳар қандай $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ топилсаки, $\lambda_k < \delta$ бўлганда $|s_{n_i} - s| < \varepsilon$ тенгсизлик ξ_i нуқталарни қандай танланишидан қатъи назар бажарилса, у ҳолда S $y = f(x)$ функциянинг $[a,b]$ оралиқдаги аниқ интеграли, деб аталади.*

Узлуксиз функциялар учун аниқ интегралнинг бу таърифи фаранг математиги Кошига тааллуқли, умумий ҳол учун, яъни ихтиёрий функция учун аниқ интеграл таърифини Б.Ф. Риман[1] киритган. Шу сабабли узлуксиз функция учун аниқ интеграл мавжуд бўлса, уни Коши маъносида интегралланувчи, агар ихтиёрий функция учун аниқ интеграл мавжуд бўлса, функцияни Риман маъносида интегралланувчи деймиз.

Қуйидаги теорема аниқ интегралнинг мавжудлик шартини беради:

1-теорема. *Аниқ интеграл мавжуд бўлиши учун*

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{n_k} \varepsilon_i \Delta x_i^{(k)} = 0, \tag{5}$$

бўлиши зарур ва етарлидир, бу ерда $\varepsilon_i = M_i - m_i$, $i = 1,2,\ldots,n_k$.

Зарурлиги. Фараз қилайлик, аниқ интеграл мавжуд бўлсин. У ҳолда таърифга кўра, ҳар қандай $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ топиладики, $\lambda_k < \delta$ бўлганда $|s_{n_k} - s| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади. Бундан

$$s - \varepsilon < s_{n_k} < s + \varepsilon \text{ ёки } s - \varepsilon < \underline{s}_{n_k} \le s_{n_k} \le \overline{s}_{n_k} < s + \varepsilon,$$

яъни

$$\lim_{\lambda_k \to 0} \underline{s}_{n_k} = \lim_{\lambda_k \to 0} \overline{s}_{n_k}$$

ёки

$$\lim_{\lambda_k \to 0}\left(\overline{s}_{n_k} - \underline{s}_{n_k}\right) = \lim_{\lambda_k \to 0} \sum_{i=1}^{n_k} (M_i - m_i)\Delta x_i^{(k)} = \lim_{\lambda_k \to 0} \sum_{i=1}^{n_k} \varepsilon_i \Delta x_i^{(k)} = 0.$$

---

[1] Б.Ф.Риман (1826-1866) – олмониялик буюк математик.

Етарлилиги. Энди (5) шарт ўринли бўлсин. Унда $I_* = I^* = I$ бўлади. Маълумки ((2) қаранг),

$$\underline{s_{n_k}} \le s_{n_k} \le \overline{s_{n_k}} \, .$$

бундан

$$0 \le s_{n_k} - \underline{s_{n_k}} \le \overline{s_{n_k}} - \underline{s_{n_k}} = \sum_{i=1}^{n_k} (M_i - m_i)\Delta x_i^{(k)}$$

У ҳолда (5) шартга биноан

$$\lim_{\lambda_k \to 0} s_{n_k} = \lim_{\lambda_k \to 0} \underline{s_{n_k}} = I \, ,$$

демак, аниқ интеграл мавжуд ва у I га тенг экан.

Теореманинг иккинчи қисмидан $[a,b]$ оралиқда узлуксиз бўлган ҳар қандай $y = f(x)$ функциянинг аниқ интеграли мавжуд бўлиши келиб чиқади.

2-теорема. $[a,b]$ *оралиқда чегараланган ва унда чекли узилиш нуқталарига эга бўлган* $y = f(x)$ *функция шу оралиқда интегралланувчидир.*

Исботи. Энг содда ҳол, яъни a ва b орасида фақат битта x_0 узилиш нуқтаси бўлган ҳол билан кифояланамиз. Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун x_0 нинг ε-атрофини олайлик. Бу атрофдан ташқарида функция узлуксиз бўлгани учун у ердаги нуқталарга Кантор теоремасининг натижасини қўллаш мумкин. Берилган ε учун ε-атрофнинг чап ва ўнг томонлари учун топилган δ ларнинг кичигини танлаб, уни яна δ билан белгилаймиз. Танланган δ ε-атрофнинг ташқарисидаги иккала оралиқ учун ярайди. Умумийликни бузмаган ҳолда $\delta < \varepsilon$ деб фараз қилиш мумкин. $[a,b]$ оралиқни ихтиёрий равишда бўлаклари узунлиги δ дан кичик бўладиган қилиб бўлайлик. Бу ерда бўлаклар учун 2-ҳол бўлиши мумкин:

1) бутунлай ε-атрофнинг ташқарисида жойлашган бўлаклар. Уларда функциянинг тебраниши $\omega_i < \varepsilon$ бўлади.

2) бутунлигича ε-атрофнинг ичида ёки бир қисми шу атрофда бўлган бўлаклар.

Теорема шартига кўра функция чегараланган бўлгани учун унинг ҳар қандай бўлакдаги тебраниши $[a,b]$ оралиқдаги Ω тебранишидан катта эмас.

ε-атроф ва унинг ташқариси учун мос равишда қуйидаги:

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} \quad \text{ва} \quad \sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''}$$

йиғиндиларни тузиб олайлик.

Иккинчи йиғинди учун

$$\sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''} < \varepsilon \sum_{i''} \Delta x_{i''} < \varepsilon(b-a) \, .$$

Биринчи йиғинди таркибига кирувчи бутунлай ε-атрофда ётувчи оралиқлар узунлиги 2ε дан кичик бўлиши аён, бир қисми ε-атрофнинг ташқарисида ётадиган оралиқлар сони иккитадан ошмайди, шу сабабли уларнинг узунликлари йиғиндиси 2δ дан ва демак, 2ε дан кичик. У ҳолда

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} < \Omega \sum_{i'} \Delta x_{i'} < \Omega \cdot 4\varepsilon.$$

Демак, $\Delta x_i < \delta$ учун

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i < \varepsilon[b - a + 4\Omega].$$

Бундан 1-теоремага асосан берилган функциянинг интегралланувчилиги келиб чиқади.

Агар функциянинг берилган оралиқдаги узилиш нуқталари сони чекли бўлмаса, функция интегралланувчи бўлмай қолиши мумкин.

Мисол. $\psi(x) = \begin{cases} 1, x - \textit{рационал}, \\ -1, x - \textit{иррационал} \end{cases}$ функция чегараланган: $|\psi(x)| = 1$, лекин у ҳар қандай $[a,b]$ ($a < b$) оралиқда интегралланувчи эмас.

Ҳақиқатан, агар интеграл йиғиндида ξ_i нуқта сифатида рационал сонларни олсак, у ҳолда

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \psi(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = b - a\,,$$

агар ξ_i нуқта сифатида иррационал сонларни олсак, у ҳолда

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \psi(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (-1) \cdot \Delta x_i = -(b-a)$$

бўлади. Бу интеграл йиғинди ξ_i нуқталарнинг танланишига қараб ҳар хил қийматлар қабул қилиши ва битта лимитга интилмаслигини кўрсатади, шу сабабли ψ функция $[a,b]$ да интегралланувчи эмас.

3-теорема. *$[a,b]$ да чегараланмаган функция шу оралиқда интегралланувчи бўлмайди.*

Исботи. Агар функция $[a,b]$ да чегараланмаган бўлса, у бирор $[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ бўлакда чегараланмаган бўлади. Танланадиган ξ_i нуқталарнинг шу бўлакка мос келувчи қийматини ξ_{i0} билан белгилаб, уни ўзгарувчи деб, қолган бўлакларга мос келувчи ξ_i ларни ўзгармас деб фараз қилайлик. У ҳолда интеграл йиғинди $[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ бўлакда чегараланмаган $f(\xi_{i_0})(x_{i_0} - x_{i_0-1})$ қўшилувчи ҳисобига чегараланмаган бўлади. Бундан функциянинг интегралланувчи эмаслиги келиб чиқади, чунки интегралланувчи функциянинг интеграл йиғиндиси ҳар қандай ξ_i учун чегараланган бўлади.

4-теорема. *Чегараланган монотон функция ҳар доим интегралланувчидир.*

Исботи. Фараз қилайлик, $y = f(x)$ функция монотон ўсувчи бўлсин. У ҳолда унинг $[x_{i-1}, x_i]$ оралиқдаги тебраниши

$$\omega_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

бўлади.

Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун қуйидаги:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$$

ни танлаймиз. Агар $\Delta x_i < \delta$ бўлса, у ҳолда

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i < \delta \sum_i \left[f(x_i) - f(x_{i-1})\right] = \delta\left[f(b) - f(a)\right] = \varepsilon$$

бўлади. Бундан ўз навбатида 1-теоремага кўра функциянинг интегралланувчилиги келиб чиқади.

Аниқ интегрални бевосита (4) формула билан ҳисоблаш анча мураккаб, чунки айрим функциялар учун интеграл йиғиндини лимитни ҳисоблаш мумкин бўладиган даражада ихчамлаб бўлмаслиги мумкин. Эслатиш лозимки, Архимед ўзининг масаласини шунга ўхшаш усулда ҳал қилган. Ҳисоблаш учун энг қулай усулни XVII асрга келиб Ньютон ва Лейбницлар топганлар. Уларнинг усули бошланғич функцияни топиш масаласига асосланади.

Фараз қилайлик, $[a,b]$ оралиқда узлуксиз бўлган $y = f(x)$ функция шу оралиқда интегралланувчи ва унинг $F(x)$ бошланғич функцияси мавжуд бўлсин.

$[a,b]$ кесмани ихтиёрий равишда

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

нуқталар билан n та бўлакка бўламиз ва

$$x_1 - x_0 = \Delta x_1, x_2 - x_1 = \Delta x_2, \ldots, x_n - x_{n-1} = \Delta x_n\,,$$

деб белгилаймиз. У ҳолда

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = F(x_n) - F(x_{n-1}) +$$

$$+ F(x_{n-1}) - \ldots - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) = \sum_{i=1}^{n}\left[F(x_i) - \right. \tag{6}$$

$$\left. - F(x_{i-1})\right] = \sum_{i=1}^{n} F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \to \int_a^b f(x)dx,$$

бу ерда биз $F(x)$ функцияга Лагранжнинг ўрта қиймат ҳақидаги теоремасини қўлладик.

Демак,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (7)$$

экан. Бу формула аниқ интегрални ҳисоблашнинг Ньютон-Лейбниц формуласи, деб аталади.

3-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ ХОССАЛАРИ

Биз шу пайтгача $[a,b]$ оралиқда $a<b$ деб, яъни x бу оралиқда Ox ўқининг мусбат йўналиши бўйлаб ўзгаради, деб тушуниб келдик. Агар шу оралиқда $a>b$ бўлса, x ўз қийматларини Ox ўқининг йўналишига тескари йўналишда, яъни камайиш тартибида қабул қилади, деб тушунамиз. Шу маънода $[a,b]$ ва $[b,a]$ кесмалар сонли тўплам сифатида бир хил бўлса ҳам ҳар хил йўналган кесмалар экан.

Юқорида аниқ интегралга таъриф берилганда $[a,b]$ оралиқда $a<b$ деб фараз қилинган. Тескари йўналган $[b,a]$ кесма учун ҳам аниқ интегралга ўша тартибда таъриф берса бўлади, фақат бўлиниш нуқталари

$$x_0 = a > x_1 > x_2 > \ldots > x_{n-1} > x_n = b$$

тартибда жойлашгани учун интеграл йиғиндида

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} < 0$$

бўлади. Шуни ҳисобига қуйидаги хосса ўринли:

1^0. Агар $y=f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у ҳолда у $[b,a]$ кесмада ҳам интегралланувчи бўлади ва улар

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

муносабатда бўладилар.

Бундан хусусан

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

эканлиги келиб чиқади.

2^0. Ўзгармас кўпайтувчини аниқ интеграл белгисидан ташқарига чиқариш мумкин:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

Исботи.

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{\max\Delta x_i \to 0}\sum_{i=1}^n kf(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= k\lim_{\max\Delta x_i \to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = k\int_a^b f(x)dx$$

3^0. Бир нечта функциянинг алгебраик йиғиндиларининг аниқ интеграли қўшилувчилар интегралининг йиғиндисига тенг (икки қўшилувчи бўлган ҳол билан чегараланамиз):

$$\int_a^b [f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx .$$

Исботи 2^0-хоссага ўхшаш бажарилади.

4^0. Агар $f(x)$ функция $[a,b]$, $[a,c]$ ва $[c,b]$ оралиқларнинг кичикларида интегралланувчи бўлса, у каттасида ҳам интегралланувчи бўлади ва

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (1)$$

тенглик ўринли бўлади.

Исботи. Умумийликни бузмаган ҳолда $a<c<b$, деб фараз қиламиз. У ҳолда теорема шартига кўра функция $[a,c]$ ва $[c,b]$ оралиқларда интегралланувчи бўлади.

$[a,b]$ ни бўлакларга шундай бўламизки, с нуқта бўлувчи нуқталардан бири бўлсин. У ҳолда

$$\sum_a^b \omega\Delta x = \sum_a^c \omega\Delta x + \sum_c^b \omega\Delta x$$

бўлади, бу ерда $\sum_a^c \omega\Delta x$ белги функциянинг $[a,c]$ оралиқдаги интеграл йиғиндисини билдиради. Агар бу тенгликда лимитга ўтсак, ўнг томонининг лимити мавжудлигидан чап томонининг ҳам лимити мавжудлиги, яъни функциянинг $[a,b]$ да интегралланувчи эканлиги ва (1) тенглик келиб чиқади.

5^0. Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда интегралланувчи ва манфий бўлмаса, $a<b$ бўлган ҳол учун

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 .$$

6^0. Агар $f(x), g(x)$ функциялар $[a,b]$ оралиқда интегралланувчи ва барча $x \in [a,b]$ лар учун $f(x) \leq g(x)$ бўлса, у ҳолда $a<b$ бўлган ҳол учун

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx .$$

Буни исбот қилиш учун 5^0-хоссани $g(x)-f(x)$ айирмага қўллаш кифоя.

7^0. $[a,b](a<b)$ оралиқда интегралланувчи ҳар қандай $f(x)$ функция учун

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

муносабат ўринли.

Бунинг исботи барча $x \in [a,b]$ учун $f(x) \leq |f(x)|$ эканлигидан ва 6^0-хоссадан келиб чиқади.

8^0. $[a,b](a<b)$ оралиқда интегралланувчи $f(x)$ функция учун шу оралиқда

$$m \leq f(x) \leq M \qquad (2)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

муносабат ўринли бўлади.

Бунинг исботи (2) га 6^0-хоссани қўллаш натижасида келиб чиқади.

9^0. Агар $[a,b]$ $(a<b)$ оралиқда интегралланувчи $f(x)$ функция учун шу оралиқда (2) тенгсизлик бажарилса, у ҳолда шундай μ, $m \leq \mu \leq M$ сон топиладики,

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

бўлади. Бу хосса ўрта қиймат хақидаги теорема, деб юритилади.

Бундай деб аталишига сабаб, агар функция узлуксиз бўлса, Вейерштрасс теоремасига кўра m, M функциянинг мос равишда энг кичик ва энг катта қийматлари бўлади. У ҳолда Больцано-Коши теоремасига кўра функция ўзининг оралиқ μ қийматини $[a,b]$ оралиқнинг қандайдир ички с нуқтасида қабул қилади, яъни

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a) .$$

4-§. ЮҚОРИ ЧЕГАРАСИ ЎЗГАРУВЧИ БЎЛГАН ИНТЕГРАЛ

Агар $y=f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у $[a,b]$ оралиқдан олинган ҳар қандай x

учун $[a,x]$ да ҳам интегралланувчи бўлади. Аниқ интегралнинг юқори чегараси b ни x га алмаштириб,

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad (1)$$

ифодага келамиз, бу ерда англашилмовчиликдан сақланиш мақсадида интеграл остидаги ўзгарувчини алмаштирдик. Бу ифода x нинг функцияси бўлиши аён. Бу функция учун қуйидаги хоссалар ўринли.

1^0. Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, $\Phi(x)$ функция шу оралиқда узлуксиз бўлади.

Исботи. x га $\Delta x = h$ орттирмани $x+h \in (a,b)$ бўладиган қилиб берсак:

$$\Phi(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt$$

ёки

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

тенгликка эга бўламиз.

Бу интегралга ўрта қиймат ҳақидаги теоремани (9^0-хоссани) қўлласак:

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \mu h \qquad (2)$$

ҳосил бўлади, бу ерда, $m \le m_1 \le \mu \le M_1 \le M$, m, M - функциянинг $[a,b]$ оралиқдаги ва m_1, M_1 — функциянинг $[x, x+h]$ оралиқдаги энг кичик ва энг катта қийматларидир.

Агар (2) да $h \to 0$ да лимитга ўтсак:

$$\Delta\Phi = \Phi(x+h) - \Phi(x) \to 0$$

бўлади. Демак, $\Phi(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда узлуксиз экан.

2^0. Агар $f(t)$ функция $t = x$ нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда шу нуқтада $\Phi(x)$ функция дифференциалланувчи ва $\Phi'(x) = f(x)$ бўлади.

Исботи. Аниқ интегралнинг 9^0-хоссасига берилган изоҳга кўра $[x, x+h]$ оралиқда шундай c нуқта топиладики,

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt = f(c)\cdot h \qquad (3)$$

тенгликни ёзиш мумкин. $f(t)$ функциянинг $t = x$ нуқтада узлуксизлигидан, агар (3) да $h \to 0$ да лимитга ўтсак, $c \to x$ ва

$$\Phi'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \lim_{c\to x} f(c) = f(x)$$

бўлади.

Демак, (1) интеграл $f(x)$ функциянинг бошланғичи экан. Шу сабабли, $x \in [a,b]$ лар учун

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C,$$

дейиш мумкин.

Агар $F(x)$ $f(x)$ функциянинг бошқа бирор бошланғичи бўлса, у ҳолда

$$\Phi(x) = F(x) + C$$

бўлади. Агар бу тенгликда $x = a$ десак:

$$0 = \Phi(a) = F(a) + C.$$

Бундан $C = -F(a)$. У ҳолда

$$\Phi(x) = F(x) - F(a).$$

Агар $x = b$ десак:

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (4)$$

Биз бу формулани §2 да интеграл йиғиндилар ёрдамида келтириб чиқариб, уни Ньютон-Лейбниц формуласи, деб атаган эдик.

Демак, аниқ интегрални ҳисоблаш учун аввал интеграл остидаги функциянинг бошланғичини 9-бобда кўриб чиқилган усулларнинг бири билан аниқлаб, кейин унга (4) формулани қўллаш керак экан. Шу маънода Ньютон-Лейбниц формуласини қуйидаги кўринишда ҳам ишлатишади:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a).$$

1-*мисол.*

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2-*мисол.*

$$\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x\Big|_0^\pi = 1 + 1 = 2.$$

5-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИ ҲИСОБЛАШ УСУЛЛАРИ

1. Аниқ интегралда ўзгарувчини алмаштириш.

Бизга $\int_a^b f(x)dx$ аниқ интеграл берилган бўлсин, бунда $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада узлуксиздир.

$x=\varphi(t)$ деб янги ўзгарувчи киритамиз, бунда $\varphi(t)$ ва унинг ҳосиласи $\varphi'(t)$ $[\alpha,\beta]$ кесмада узлуксиз бўлсин.

Фараз қилайлик, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ бўлсин. Бу шартлар бажарилганда қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (1)$$

Бу тенгликни исботлаш учун (1) формуланинг ўнг ва чап қисмларига Ньютон-Лейбниц формуласини қўллаймиз:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a{}^b = F(b) - F(a);$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\,/_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

Аниқ интегрални (1) формула бўйича хисоблаганда янги ўзгарувчидан эски ўзгарувчига қайтиш керак эмас, балки эски ўзгарувчининг чегараларини кейинги бошлангич функцияга қўйиш керак.

Мисол.

1. $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $x+1=t^2$ деб алмаштирсак, $x=t^2-1$, $dx=2tdt$ бўлади. Интеграллашнинг янги чегаралари $x=3$ бўлганда $t=2$, $x=8$ бўлганда $t=3$. У ҳолда:

$$\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} = \int_2^3 \frac{(t^2-1)2tdt}{t} = 2\int_2^3 (t^2-1)dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Big|_2^3 = 2\left(6 - \frac{2}{3}\right) = \frac{32}{3};$$

2. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $x=\sin t$ деб алмаштирсак, $dx=\cos tdt$, $1-x^2=\cos^2 t$ бўлади. Интеграллашнинг янги чегараларини аниқлаймиз: $x=0$ бўлганда $t=0$, $x=1$ бўлганда $t=\pi/2$.

У ҳолда

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 tdt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

3. Агар f жуфт ($f(-u) = f(u)$) бўлса, у ҳолда

$$\int_{-a}^{a} f(u)du = 2\int_{0}^{a} f(u)du .$$

Ҳақиқатан

$$\int_{-a}^{0} f(u)du = (u=-x) = -\int_{a}^{0} f(-x)dx =$$

$$= \int_{0}^{a} f(-x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(u)du$$

бўлгани учун

$$\int_{-a}^{a} f(u)du = \int_{-a}^{0} f(u)du + \int_{0}^{a} f(u)du =$$

$$= \int_{0}^{a} f(u)du + \int_{0}^{a} f(u)du = 2\int_{0}^{a} f(u)du.$$

4. Агар f тоқ ($f(-u) = -f(u)$) бўлса, у ҳолда

$$\int_{-a}^{a} f(u)du = 0 .$$

5. Агар f даври 2π бўлган даврий ($f(x+2\pi) = f(x)$) функция бўлса, у ҳолда

$$\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)dx = \int_{0}^{2\pi} f(u)du .$$

Ҳақиқатан,

$$\int_{2\pi}^{2\pi+\lambda} f(x)dx = (x = t+2\pi) = \int_{0}^{\lambda} f(t+2\pi)dt = \int_{0}^{\lambda} f(t)dt = -\int_{\lambda}^{0} f(t)dt$$

бўлгани учун

$$\int_{\lambda}^{2\pi+\lambda} f(x)dx = \int_{\lambda}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2\pi} f(x)dx + \int_{2\pi}^{2\pi+\lambda} f(x)dx = \int_{0}^{2\pi} f(x)dx .$$

6. $\int_{0}^{4\pi} \sin^3 tdt = \int_{0}^{2\pi} \sin^3 tdt + \int_{2\pi}^{4\pi} \sin^3 tdt = 2\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 tdt = 0$.

2. Аниқ интегрални бўлаклаб интеграллаш.

Фараз қилайлик, $u(x)$ ва $\upsilon(x)$ функциялар $[a, b]$ кесмада дифференциалланувчи функциялар бўлсин. У ҳолда: $(u\upsilon)' = u'\upsilon + u\upsilon'$.

Бу тенгликнинг иккала томонини a дан b гача бўлган оралиқда интеграллаймиз.

$$\int_{a}^{b} (u\upsilon)'dx = \int_{a}^{b} u'\upsilon dx + \int_{a}^{b} u'\upsilon dx . \qquad (2)$$

Лекин $\int (u\upsilon)'dx = u\upsilon + C$ бўлгани сабабли

$$\int (u\upsilon)'dx = u\upsilon \Big|_{a}^{b} .$$

Демак, (2) тенгликни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$u\upsilon \Big|_{a}^{b} = \int_{a}^{b} \upsilon du + \int_{a}^{b} ud\upsilon$$

$$\int_{a}^{b} ud\upsilon = u\upsilon \Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} \upsilon du \qquad (3)$$

Бу формула аниқ интегрални бўлаклаб интеграллаш формуласи дейилади.

Мисол.

1. $\int_{0}^{1} \mathrm{arctg}x dx$ интеграл ҳисоблансин.

$$\int_{0}^{1} \mathrm{arctg}x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \mathrm{arctg}x & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right| = x\mathrm{arctg}x \Big|_{0}^{1} -$$

$$- \int_{0}^{1} \frac{xdx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}1 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \Big|_{0}^{1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

2. $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx$ интеграл ҳисоблансин.

$$\int\limits_0^1 xe^{-x}dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{-x} \end{vmatrix} = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 e^{-x}dx =$$

$$= -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e};$$

Эслатма. Баъзи интегралларни ҳисоблашда бўлаклаб интеграллаш формуласини бир неча марта қўллаш мумкин.

6-§. ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАР

Чекли $[a,b)$ ярим интервалда берилган f функция ихтиёрий $b' < b$ учун $[a,b']$ оралиқда интегралланувчи ва b нуқта атрофида чегараланмаган бўлсин. У ҳолда f $[a,b)$ да ва демак, $[a,b]$ да хам Риман маъносида интегралланувчи эмас, чунки 2-§ даги 2-теоремага кўра функция берилган оралиқда интегралланувчи бўлиши учун у шу оралиқда чегараланган бўлиши зарур эди. Лекин қуйидаги:

$$\lim_{b' \to b} \int\limits_a^{b'} f(x)dx$$

чекли лимит мавжуд бўлиши мумкин. Агар шундай бўлса, бу лимитни f функциянинг $[a,b]$ оралиқдаги хосмас интеграли деб атаб, қуйидагича ёзамиз:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{b' \to b} \int\limits_a^{b'} f(x)dx. \qquad (1)$$

Бундай ҳолларда $\int\limits_a^b f(x)dx$ хосмас интеграл яқинлашади, акс ҳолда, у узоқлашади дейилади.

6.1. Чегаралари чексиз бўлган интеграллар

Фараз қилайлик, f функция $[a,\infty)$ ярим ўқда берилиб, ҳар қандай $a < b' < \infty$ учун $[a,b']$ оралиқда интегралланувчи бўлсин. Агар

$$\lim_{b' \to +\infty} \int\limits_a^{b'} f(x)dx \qquad (2)$$

чекли лимит мавжуд бўлса, уни f функциянинг $[a,\infty)$ ярим ўқдаги хосмас интеграли деймиз:

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b' \to +\infty} \int\limits_a^{b'} f(x)dx.$$

Бунда хосмас интеграл яқинлашади дейилади. Агар (2) лимит чекли бўлмаса, у ҳолда хосмас интеграл узоқлашади дейишади.

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_a^{b} f(x)dx$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{\infty} f(x)dx$$

кўринишдаги хосмас интеграллар ҳам айнан шундай таърифланади. Охирги тенгликда ўнг томонда турган интегралларнинг ҳар бири яқинлашувчи бўлса, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ яқинлашувчи бўлади.

1-*мисол.* $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ ни ҳисобланг.

Ечиш.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_0^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} \operatorname{arctg}x\Big|_0^b = \lim_{b \to +\infty} \operatorname{arctg}b = \frac{\pi}{2}.$$

2-*мисол.* $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ ни ҳисобланг.

Ечиш. Таърифга кўра

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x^\alpha}.$$

Агар $\alpha\neq 1$ бўлса,

$$\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_1^b=\frac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha}-1\right)$$

бўлади. Шунинг учун

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha}-1\right).$$

Бу ерда уч хил ҳолат юз бериши мумкин:

1) агар $\alpha>1$ бўлса, у ҳолда $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}$, яъни интеграл яқинлашади.

2) агар $\alpha<1$ бўлса, у ҳолда $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\infty$, яъни интеграл узоқлашади.

3) агар $\alpha=1$ бўлса, у ҳолда $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\ln x\Big|_1^{+\infty}=\infty$, яъни интеграл узоқлашади.

Кўпинча айрим масалаларда хосмас интегралнинг аниқ қийматини эмас, балки унинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи эканлигини билиш ва уни баҳолаш етарли бўлади. Қуйидаги теоремалар айнан шу мақсадга хизмат қилади:

1-теорема. *Агар барча* $x\geq a$ *лар учун*

$$0\leq f(x)\leq g(x)\qquad(3)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_a^{+\infty}g(x)dx\qquad(4)$$

интегралнинг яқинлашувчилигидан

$$\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx\qquad(5)$$

интегралнинг яқинлашувчилиги ва аксинча (5) нинг узоқлашувчилигидан (4) нинг узоқлашувчилиги келиб чиқади.

Исботи. (3) га биноан ҳар қандай $a<b<+\infty$ учун

$$\int\limits_a^{b}f(x)dx\leq\int\limits_a^{b}g(x)dx\qquad(6)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Агар (4) интеграл яқинлашса, у ҳолда (6) нинг ўнг томони юқоридан (4) интеграл қийматига тенг бўлган сон билан чегараланган бўлади. b нинг ортиши билан (6) нинг чап томони монотон камаймайдиган бўлгани учун унинг лимити мавжуд ва

$$\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^{b}f(x)dx\leq\int\limits_a^{+\infty}g(x)dx$$

бўлади. Теореманинг иккинчи қисми айнан шундай исбот қилинади.

Натижа. Агар $\int\limits_a^{+\infty}\left|f(x)\right|dx$ интеграл яқинлашса, у ҳолда $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ интеграл ҳам яқинлашади.

Бундай интегралларни абсолют яқинлашувчи интеграллар деб аташади.

3-*мисол.* $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^3}dx$ интегрални яқинлашишга текширинг.

Ечиш. Барча $x \in [1,+\infty)$ учун $\left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \le \left|\frac{1}{x^3}\right|$. Лекин

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\bigg|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

У ҳолда

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^3}\right|dx$$

интеграл яқинлашади. Демак, берилган интеграл абсолют яқинлашар экан.

2-теорема. *Агар (4) ва (5) интеграл остидаги функциялар мусбат ва*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = A > 0 \tag{7}$$

лимит мавжуд бўлса, у ҳолда (4) ва (5) интеграллар бир вақтда яқинлашади ёки узоқлашади.

Исботи. (7) нинг мавжудлигидан ихтиёрий мусбат $\varepsilon < A$ сон учун шундай $c \in [a,+\infty)$ топиладики, $c < x < +\infty$ лар учун

$$A-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < A+\varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. $g(x) > 0$ бўлгани учун

$$(A-\varepsilon)g(x) < f(x) < (A+\varepsilon)g(x) \quad (c < x < +\infty). \tag{8}$$

У ҳолда

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx$$

интегралнинг яқинлашувчилигидан $\int_c^{+\infty} g(x)dx$ интегралнинг яқинлашувчилиги ва $\int_c^{+\infty}(A+\varepsilon)g(x)dx$ интегралнинг яқинлашувчилиги келиб чиқади. Бундан 1-теоремага кўра $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ интеграл ва демак, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интеграл яқинлашади.

Тескариси (7) га монанд

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{A} > 0$$

тенгликка асосан айнан юқоридагилек исбот қилинади.

4-*мисол.* $\int_1^{\infty}\frac{x-1}{x}e^{-x}dx \approx \int_1^{\infty}e^{-x}dx < \infty$.

6.2. Узлукли функциянинг интеграли

Бизга $[a,c)$ ярим интервалда аниқланган ва узлуксиз, $x = c$ нуқтада эса ё аниқланмаган ё узлукли $y = f(x)$ функция берилган бўлсин. Бундай функция учун $\int_a^c f(x)dx$ интегрални интеграл йиғиндилар лимити сифатида таърифлаб бўлмайди, чунки бу лимит мавжуд бўлмаслиги мумкин.

Барча $a < b < c$ лар учун $\int_a^b f(x)dx$ мавжуд, шу сабабли $\int_a^c f(x)dx$ интегрални хосмас интеграл деб, қуйидагича тушуниш мумкин:

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{b\to c-0}\int_a^b f(x)dx.$$

Агар бу тенгликнинг ўнг томони мавжуд ва чекли бўлса, бу хосмас интеграл яқинлашувчи, акс ҳолда узоқлашувчи дейилади.

Агар $y = f(x)$ функция $[a,b]$ ораликнинг $x = a$ нуқтасида узлукли бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x)dx$ хосмас интегрални қуйидаги маънода тушунамиз:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{a'\to a} \int_a^b f(x)dx .$$

Агар $y = f(x)$ функция $[a,b]$ ораликнинг ички $x = c$ нуқтасида узлукли бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x)dx$ хосмас интегрални қуйидагича тушунамиз:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx ,$$

агар тенгликнинг ўнг томонидаги хосмас интеграллар бир вақтда яқинлашувчи бўлса, $\int_a^b f(x)dx$ хосмас интеграл ҳам яқинлашади ва агар ўнг томондаги интегралларнинг лоақал биттаси узоқлашса, $\int_a^b f(x)dx$ хосмас интеграл узоқлашади, деймиз.

5-мисол. $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ (α > 0 –ўзгармас сон) интеграл остидаги функция $x = 0$ нуқтада узлукли. Қуйидаги лимитни ҳисоблаймиз:

$$\lim_{\varepsilon\to0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to0} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to0} \frac{1}{1-\alpha}\left(1-\varepsilon^{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}, \alpha < 1, \\ \infty, \alpha > 1 \end{cases}$$

Агар α=1 бўлса,

$$\lim_{\varepsilon\to0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = -\lim_{\varepsilon\to0} \ln\varepsilon = +\infty ,$$

яъни берилган интеграл α≥1 лар учун узоқлашади ва α<1 бўлса, яқинлашади.

6-мисол. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Интеграл остидаги функция интеграллаш оралиғининг ички $x = 0$ нуқтасида узлукли, шунинг учун уни қуйидагича ифодалаб оламиз:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to-0} \int_{-1}^b \frac{dx}{x^2} + \lim_{a\to+0} \int_a^1 \frac{dx}{x^2} .$$

Бу ерда,

$$\lim_{b\to-0} \int_{-1}^b \frac{dx}{x^2} = -\lim_{b\to-0} \frac{1}{x}\Bigg|_{-1}^b = -\lim_{b\to-0}\left(\frac{1}{b}+1\right) = \infty ,$$

яъни биринчи интеграл [−1;0] ораликда узоқлашади ва

$$\lim_{a\to+0} \int_a^1 \frac{dx}{x^2} = -\lim_{a\to+0}\left(1-\frac{1}{a}\right) = \infty ,$$

яъни иккинчи интеграл [0;1] ораликда узоқлашади. Демак, берилган интеграл [−1;1] ораликда узоқлашувчи экан.

Агар берилган интегрални интеграл остидаги функциянинг узилиш нуқтасига эътибор бермай ҳисоблаганимизда, қуйидаги хато натижага келган бўлар эдик:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Bigg|_{-1}^1 = -(1+1)-2 .$$

Эслатма. Чегараларидан бири чексиз бўлган интеграллар учун келтирилган теоремаларнинг барчаси узлукли функцияларнинг хосмас интеграллари учун ҳам ўринли.

7-мисол. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ $(\alpha > 0)$ интеграл остидаги функция қуйи чегарада узлукли. Шунинг учун уни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx=\int_0^{1}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx+\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx$$

Биринчи интеграл остида мусбат функция турибди, шу сабабли у ё узоқлашади ёки яқинлашса ҳам абсолют яқинлашади. Маълумки, $x\in(0,1]$ лар учун

$$\frac{2}{\pi}x^{1-\alpha}\le\frac{\sin x}{x^{\alpha}}\le x^{1-\alpha}.$$

У ҳолда

α< 2 лар учун $\int_0^1\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx\le\int_0^1 x^{1-\alpha}dx<\infty$, яқинлашади,

α≥ 2 лар учун $\int_0^1\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx\ge\frac{2}{\pi}\int_0^1 x^{1-\alpha}dx=\infty$, узоқлашади.

Иккинчи интеграл (3-мисолга қаранг) $\alpha>0$ лар учун яқинлашади ва $\alpha>1$ лар учун фақат абсолют яқинлашади. Демак, берилган интеграл $0<\alpha\le 1$ лар учун шартли яқинлашади, $1<\alpha<2$ лар учун абсолют яқинлашади ва $\alpha\ge 2$ лар учун узоқлашар экан.

11-БОБ.
АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ ТАТБИҚЛАРИ. ТАҚРИБИЙ ҲИСОБЛАШ УСУЛЛАРИ

1-§. ТЕКИС ШАКЛЛАР ЮЗИНИ ҲИСОБЛАШ

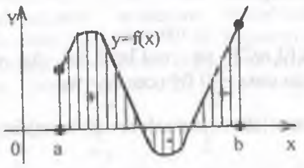
1.1. Декарт координаталар текислигида юзаларни ҳисоблаш

Аввалги бобдан маълумки, агар $[a, b]$ кесмада функция $f(x)\ge 0$ бўлса, у ҳолда $y=f(x)$ эгри чизиқ, OX ўқи ва $x=a$ ҳамда $x=b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзи

$$S=\int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

га тенг эди. Агар $[a, b]$ кесмада $f(x)\le 0$ бўлса, у ҳолда аниқ интеграл $\int_a^b f(x)dx\le 0$ бўлади. Абсолют қийматига кўра бу интегралнинг қиймати ҳам тегишли эгри чизиқли трапециянинг юзига тенг:

$$S=\left|\int_a^b f(x)dx\right| \tag{1'}$$



99-расм.

Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада ишорасини чекли сон марта ўзгартирса, у ҳолда интегрални бутун $[a, b]$ кесмада қисмий кесмачалар бўйича интеграллар йиғиндисига ажратамиз. $f(x)>0$ бўлган кесмаларда интеграл мусбат, $f(x)<0$ бўлган кесмаларда интеграл манфий бўлади. Бутун кесма бўйича олинган интеграл OX ўқидан юқорида ва пастда ётувчи шакллар юзининг тегишли алгебраик йиғиндисини беради (99-расм). Юзалар йиғиндисини одатдаги маънода ҳосил қилиш учун юқорида кўрсатилган кесмалар бўйича олинган интеграллар абсолют қийматлари йиғиндисини топиш ёки

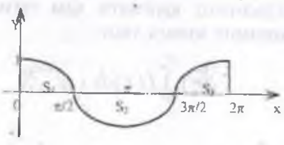
$$S=\int_a^b |f(x)|dx \qquad (1''')$$

интегрални ҳисоблаш керак.

Агар $y_1=f_1(x)$ ва $y_2=f_2(x)$ эгри чизиқлар ҳамда $x=a$ ва $x=b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзини ҳисоблаш керак бўлса, у ҳолда $f_1(x)\geq f_2(x)$ шарт бажарилган шаклнинг юзи қуйидагига тенг:

$$S=\int_a^b (f_1(x)-f_2(x))dx \qquad (2)$$

1-*мисол.* $y=\cos x$, $y=0$ чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзи ҳисоблансин, бунда $x\in[0,2\pi]$.



100-расм.

Ечиш. $x\in[0,\pi/2]$ ва $x\in[3\pi/2,2\pi]$ да $\cos x\geq 0$ ҳамда $x\in[\pi/2,3\pi/2]$ да $\cos x\leq 0$ бўлгани учун

$$S=\int_0^{2\pi}|\cos x|\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos x dx+\left|\int_{\pi/2}^{3\pi/2}(-\cos x)dx\right|+$$

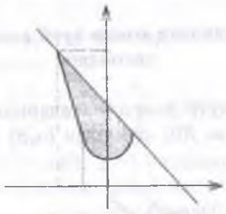
$$+\int_{3\pi/2}^{2\pi}\cos x dx=\sin x\,\Big|_0^{\pi/2}+|\sin x|\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2}+\sin x\,\Big|_{3\pi/2}^{2\pi}=\sin\frac{\pi}{2}-$$

$$-\sin 0+\left|\sin\frac{3\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\right|+\sin 2\pi-\sin\frac{3\pi}{2}=1+|-1-1|-(-1)=4$$

Демак, s=4(кв. бирлик) экан.

2-*мисол.* $y=x^2+1$ ва $y=3$-x чизиқлар билан чегараланган соҳанинг юзини ҳисобланг.

Ечиш. Шаклни ясаш учун аввал ушбу $\begin{cases} y=x^2+1 \\ y=3-x \end{cases}$ системани ечиб, чизиқларнинг кесишиш нуқталарини топамиз.



101-расм.

Бу чизиқлар A (−2;5) ва B (1;2) нуқталарда кесишади. У ҳолда

$$S=\int_{-2}^{1}(3-x)dx-\int_{-2}^{1}(x^2+1)dx=\int_{-2}^{1}(2-x-x^2)dx=$$

$$=(2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3})\Big|_2^1=(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3})-(-4-\frac{4}{2}+\frac{8}{3})=\frac{9}{2}(кв.бирл.).$$

Энди, тенгламаси $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ параметрик кўринишда берилган чизиқ билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзасини ҳисоблаймиз. Фараз қилайлик, бу тенгламалар $[a,\ b]$ кесмада бирор $y=f(x)$ функцияни аниқласин, бунда $t\in[\alpha,\beta]$ ва $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$.

У ҳолда эгри чизиқли трапециянинг юзини $S=\int_a^b ydx$ формула бўйича ҳисобланиш мумкин. Бу интегралда ўзгарувчини алмаштирамиз: $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)\,dt$, $y=f(x)=f(\varphi(t))=\psi(t)$.

Демак,

$$S=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt \qquad (3)$$

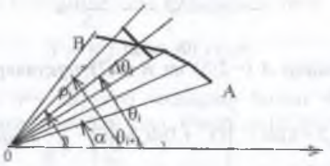
3-*мисол*. $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ эллипс билан чегараланган соҳанинг юзи ҳисоблансин.

Ечиш. Эллипснинг юқори ярим юзини ҳисоблаб, уни 2 га кўпайтирамиз. $-a\le x\le +a$ учун $-a=a\cos t$, $\cos t=-1$, $t=\pi$; $a=a\cos t$, $\cos t=1$, $t=0$

$$S=2\int_{\pi}^{0}b\sin t(-a\sin t dt)=-2ab\int_{\pi}^{0}\sin^2 t dt=\pi ab\,.$$

1.2. Текис шакллар юзини қутб координаталарда ҳисоблаш

AB эгри чизиқ қутб координаталарида $\rho=f(\theta)$ формула билан берилган ва $f(\theta)$ функция $[\alpha,\beta]$ кесмада узлуксиз бўлсин.



102-расм.

Ушбу $\rho=f(\theta)$ эгри чизиқ ва қутб ўқлари ҳамда α ва β бурчак ҳосил қилувчи иккита $\varphi=\alpha,\varphi=\beta$ нурлар билан чегараланган эгри чизиқли секторнинг юзини аниқлаймиз. Бунинг учун берилган юзани $\alpha=\theta_0,\theta=\theta_1,\ldots,\theta=\theta_i,\ldots,\theta_n=\beta$ нурлар билан n та ихтиёрий қисмга бўламиз. Ўтказилган нурлар орасидаги бурчакларни $\Delta\theta_1,\Delta\theta_2,\ldots,\Delta\theta_n$ билан белгилаймиз. θ_{i-1} билан θ_i орасидаги бирор $\overline{\theta_i}$ бурчакка мос нурнинг узунлигини $\overline{\rho_i}$ орқали белгилаймиз. Радиуси $\overline{\rho_i}$ ва марказий бурчаги $\Delta\theta_i$ бўлган доиравий секторни қараймиз. Унинг юзи $\Delta S_i=\frac{1}{2}\overline{\rho_i^2\Delta\theta_i}$ бўлади.

Ушбу йиғинди

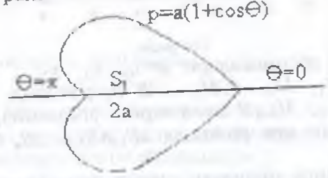
$$S_n=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\overline{\rho_i^2}\Delta\theta_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[f(\overline{\theta_i})]^2\Delta\theta_i$$

зинапоясимон секторнинг юзини беради.

Бу йиғинди $\alpha\le\theta\le\beta$ кесмада $\rho^2=[f(\theta)]^2$ функциянинг интеграл йиғиндиси бўлгани сабабли унинг лимити $max\Delta\theta_i\to 0$ да $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\theta$ аниқ интегралга тенг. Бу $\Delta\theta_i$ бурчак ичида қандай ρ_i нур олишимизга боғлиқ эмас. Демак, OAB секторнинг юзи:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\theta=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[f(0)]^2 d\theta\,. \tag{4}$$

4-*мисол*. $\rho=a(1+\cos\theta)$, $a>0$ кардиоида билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.



103-расм.

$$S=2S_1=2\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d0=\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\theta.$$

$$S=\int_{0}^{\pi}a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta=a^2\int_{0}^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta=$$

$$=a^2\int_{0}^{\pi}(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta)d\theta=a^2(\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+$$

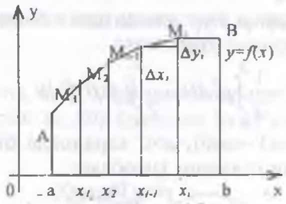
$$+\frac{1}{4}\sin 4\theta)|_0^{\pi}=\frac{3}{2}\pi a^2;S=\frac{3}{2}\pi a^2(кв.бирл.)$$

2-§. ЭГРИ ЧИЗИҚ ЁЙИНИНГ УЗУНЛИГИ

2.1. Ёй узунлигини декарт координаталар системасида ҳисоблаш

Тўғри бурчакли декарт координаталар текислигида эгри чизиқ $y=f(x)$ тенглама билан берилган бўлсин.

Бу эгри чизиқнинг $x=a$ ва $x=b$ вертикал тўғри чизиқлар орасидаги AB ёйининг узунлигини топамиз.



104-расм.

AB ёйда абсциссалари $a=x_0$, x_1, $x_2,\ldots$, $x_i,\ldots$, $x_n=b$ бўлган A, M_1, $M_2,\ldots$, $M_i,\ldots$, B нуқталарни оламиз ва AM_1, $M_1M_2,\ldots$, $M_{n-1}B$ ватарларни ўтказамиз, уларнинг узунликларини мос равишда $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ билан белгилаймиз.

AB ёй ичига чизилган синиқ чизиқнинг узунлиги $S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$ бўлгани учун AB ёйнинг узунлиги

$$S = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \tag{1}$$

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция ва унинг $f'(x)$ ҳосиласи $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлсин. У ҳолда

$$\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + (\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i})^2} \cdot \Delta x_i$$

ёки Лагранж теоремасига асосан

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i),$$

бунда $x_{i-1} < \xi_i < x_i$ бўлгани учун

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i$$

бўлади. Ички чизилган синиқ чизиқнинг узунлиги эса

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i \, .$$

Шартга кўра, $f(x)$ функция узлуксиз, демак, $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ функция ҳам узлуксиздир. Шунинг учун интеграл йиғиндининг лимити мавжуд ва у қуйидаги аниқ интегралга тенг:

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \, .$$

Демак, ёй узунлигини ҳисоблаш формуласи:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} dx \tag{2}$$

экан.

Энди эгри чизиқ тенгламаси

$$x=\varphi(t), \; y=\psi(t), \; \alpha \le t \le \beta \tag{3}$$

параметрик кўринишда берилган бўлсин, бунда $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ узлуксиз ҳосилали узлуксиз функциялар ва $\varphi'(t)$ берилган оралиқда нолга айланмайди.

Бу ҳолда (3) тенглама бирор $y=f(x)$ функцияни аниқлайди. Бу функция узлуксиз бўлиб, $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ узлуксиз ҳосилага эга. $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$ бўлсин. (2) интегралда $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)\,dt$ алмаштириш бажарамиз. У ҳолда

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + (\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)})^2} \cdot \varphi'(t) dt \quad \text{ёки} \quad S = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt \, . \tag{4}$$

Агар эгри чизиқ фазода

$$x=\varphi(t), \; y=\psi(t), \; z=\chi(t) \tag{5}$$

параметрик тенгламалар билан берилган ва $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ кесмада узлуксиз ҳамда узлуксиз ҳосилаларга эга бўлса, эгри чизиқ аниқ лимитларга эга бўлади ва у

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2}\,dt \qquad (6)$$

формула билан аниқланади.

2.2. Ёй узунлигини қутб координаталар системасида ҳисоблаш

Қутб координаталар системасида эгри чизиқнинг тенгламаси

$$\rho=f(\theta) \qquad (7)$$

бўлсин. Қутб координаталаридан Декарт координаталарига ўтиш формуласи: $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ ёки (7) дан фойдалансак:

$$x=f(\theta)\cos\theta,\ y=f(\theta)\sin\theta.$$

Бу тенгламаларга эгри чизиқнинг параметрик тенгламалари деб қараб, ёй узунлигини ҳисоблаш учун (4) формулани татбиқ қиламиз:

$$\frac{dx}{d\theta}=f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta,\quad \frac{dy}{d\theta}=f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta\,.$$

У ҳолда

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=(f'(\theta))^2+(f(\theta))^2=\rho'^2+\rho^2.$$

Демак,

$$S=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{\rho'^2+\rho^2}\,d\theta\,. \qquad (8)$$

1-*мисол.* $x^2+y^2=r^2$ айлана узунлиги ҳисоблансин.

Ечиш. Дастлаб айлананинг 1-чоракда ётган тўртдан бир қисмининг узунлигини ҳисоблаймиз. У ҳолда AB ёйнинг тенгламаси

$$y=\sqrt{r^2-x^2},\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}};$$

$$\frac{1}{4}S=\int_0^r\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=\int_0^r\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx=r\cdot\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^2=r\cdot\frac{\pi}{2};$$

Бутун айлананинг узунлиги: $S=2\pi r$;

2-*мисол.* $\rho=a\ (1+\cos\theta)$ кардиоиданинг узунлиги топилсин. Кардиоида қутб ўқига нисбатан симметрикдир. θ қутб бурчагини 0 дан π гача ўзгартириб, изланаётган узунликнинг ярмини топамиз (103-расм). (8) формуладан фойдаланамиз, бунда

$$\rho'=-a\sin\theta$$

$$S=2\cdot\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,d\theta=2a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta=$$

$$=4a\cdot\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=8a\cdot\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi}=8a\cdot1=8a.$$

3-*мисол.* $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $0\le t\le 2\pi$, эллипснинг узунлиги ҳисоблансин, бунда $a>b$.

Ечиш. (4) формуладан фойдаланамиз. Аввал ёй узунлигининг 1/4 қисмини ҳисоблаймиз.

$$\frac{S}{4}=\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}\,dt=\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2(1-\cos^2t)+b^2\cos^2t}\,dt=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\cos^2t}\,dt=a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a}\cos^2t}\,dt=$$

$$=a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\cos^2t}\,dt$$

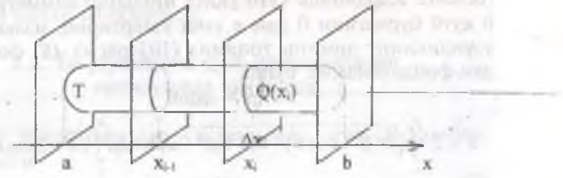
бунда $k=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}<1$. Демак, $S=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\cos^2t}\,dt\,.$

3-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ ЖИСМ ҲАЖМЛАРИНИ ҲИСОБЛАШГА ҚЎЛЛАНИЛИШИ

3.1. Жисм ҳажмини параллел кесимлар юзалари бўйича ҳисоблаш

Бирор T жисм берилган бўлсин. Бу жисмни OX ўққа перпендикуляр текислик билан кесишдан ҳосил бўлган ҳар қандай кесимнинг юзи маълум, деб фараз қиламиз. Бу ҳолда юза кесувчи текисликнинг вазиятига боғлиқ, яъни x нинг функцияси бўлади:

$$Q=Q\,(x)$$



105-расм.

$Q(x)$ ни узлуксиз функция деб фараз қилиб, берилган жисм ҳажмини аниқлаймиз.

$x=x_0=a$, $x=x_1$, $x=x_2,\ldots$, $x=x_n=b$ текисликларни ўтказамиз. Ҳар бир $x_{i-1}\le x\le x_i$ қисмий оралиқда ихтиёрий ξ_i нуқта танлаб оламиз ва i нинг ҳар бир қиймати учун ясовчиси x ўқига параллел бўлиб, йўналтирувчиси T жисмни $x=\xi_i$ текислик билан кесишдан ҳосил бўлган кесимнинг контуридан иборат бўлган цилиндрик жисм ясаймиз. Асосининг юзи $Q(\xi_i)$ ва баландлиги Δx_i бўлган бундай элементар цилиндрнинг ҳажми $Q(\xi_i)\Delta x_i$ га тенг. Ҳамма цилиндрларнинг ҳажми $v_n=\sum\limits_{i=1}^{n}Q(\xi_i)\Delta x_i$ бўлади.

Бу йиғиндининг $\max\Delta x_i\to 0$ даги лимити берилган жисмнинг ҳажми дейилади: $V=\lim\limits_{\max\Delta x_i\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}Q(\xi_i)\Delta x_i$.

V_n миқдор $[a,\ b]$ кесмада узлуксиз $Q\,(x)$ функциянинг интеграл йиғиндисидир, шунинг учун лимит мавжуд ва у

$$V=\int_a^b Q(x)dx \qquad (1)$$

аниқ интеграл билан ифодаланади.

Мисол. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоиднинг ҳажми ҳисоблансин.

Ечиш. Эллипсоидни OYZ текисликка параллел бўлиб ундан x масофа узоқликдан ўтган текислик билан кесганда ярим ўқлари

$b_1=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, $c_1=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ бўлган $\frac{y^2}{(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}})^2}+\frac{z^2}{(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}})^2}=1$

эллипс ҳосил бўлади. Бу эллипснинг юзи: $Q\,(x)=\pi b_1c_1=$ $=\pi bc\,(1-x^2/a^2)$.

Эллипсоиднинг ҳажми:

$$v=\pi bc\int_{-a}^{a}(1-\frac{x^2}{a^2})dx=\pi bc(x-\frac{x^3}{3a^2})\Big|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc(куб.бирл.).$$

3.2. Айланма жисмнинг ҳажми

$y=f\,(x)$ эгри чизиқ Ox ўқ ва $x=a$, $x=b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг OX ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмни қарайлик. Бу жисмни абсциссалар ўқига перпендикуляр текислик билан кесишдан ҳосил бўлган ихтиёрий кесим доира бўлади. Унинг юзи $Q=\pi y^2=\pi(f\,(x))^2$.

Ҳажмни ҳисоблашнинг (1) умумий формуласини татбиқ этиб, айланма жисмнинг ҳажмини ҳисоблаш формуласини ҳосил қиламиз:

$$v=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b(f(x))^2dx\,. \qquad (2)$$

Мисол. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипсни OX ва OY ўқлари атрофида айлантириш натижасида ҳосил қилинган жисмларнинг ҳажмларини ҳисобланг.

Ечиш. Эллипс тенгламасидан:

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2);\quad x^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2)$$

Эллипсни OX ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми:

$$V = 2V_1 = 2\pi \int_0^a y^2 dx = 2\pi \frac{b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2)dx = 2\pi \frac{b^2}{a^2}(a^2 x - \frac{x^3}{3})\Big|_0^a =$$

$$= 2\pi \frac{b^2}{a^2}(a^3 - \frac{a^3}{3}) = \frac{4}{3}\pi ab^2; \quad V = \frac{4}{3}\pi ab^2 (куб.бирл.).$$

Эллипсни OY ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми:

$$V = 2V_1 = 2\pi \int_0^b x^2 dy = 2\pi \frac{a^2}{b^2} \int_0^b (b^2 - y^2)dy = 2\pi \frac{a^2}{b^2}(b^2 y - \frac{y^3}{3})\Big|_0^b =$$

$$= 2\pi \frac{a^2}{b^2}(b^3 - \frac{b^3}{3}) = \frac{4}{3}\pi a^2 b; \quad V = \frac{4}{3}\pi a^2 b (куб.бирл.).$$

4-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ МЕХАНИКА МАСАЛАЛАРИГА ТАТБИҚИ

4.1. Ишни аниқ интеграл ёрдамида ҳисоблаш

Бирор F куч таъсири остида M моддий нуқта OS тўғри чизиқ бўйича ҳаракат қилсин, бунда кучнинг йўналиши ҳаракат йўналиши билан бир хил бўлсин. M нуқта $S=a$ ҳолатдан $S=b$ ҳолатга кўчганда F кучнинг бажарган ишини топамиз.

1) Агар F куч ўзгармас бўлса, у ҳолда A иш F куч билан ўтилган йўл узунлиги кўпайтмаси асосида ифодаланади:

$$A=F\ (b-a)$$

2) F куч моддий нуқтанинг жойлашган ўрнига қараб узлуксиз ўзгаради, яъни $[a,\ b]$ кесмада $F\ (S)$ узлуксиз функцияни ифодалайди, деб фараз қиламиз.$[a,\ b]$ кесмани узунликлари $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ бўлган n та ихтиёрий бўлакка бўламиз. Ҳар бир $[S_{i-1},\ S_i]$ қисмий кесмада ихтиёрий ξ_i нуқта танлаб олиб, $F\ (S)$ кучнинг ΔS_i йўлда бажарган ишини $F\ (\xi_i)\Delta S_i$ кўпайтма билан алмаштирамиз. Охирги ифода ΔS_i етарлича кичик бўлганда F кучнинг ΔS_i йўлда бажарган ишининг тақрибий қийматини беради.

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta S_i$$

йиғинди F кучнинг $[a,\ b]$ кесмада бажарган ишининг тақрибий ифодаси бўлади. Бу йиғиндининг $\max\Delta S_i \to 0$ даги лимити $F\ (S)$ кучнинг $S=a$ нуқтадан $S=b$ нуқтагача бўлган йўлда бажарган ишини ифодалайди:

$$A = \int_a^b F(S)dS. \qquad (1)$$

Мисол. Агар пружина 1 Н куч остида 1 см чўзилиши маълум бўлса, уни 4 см чўзиш учун қанча иш бажариш керак?

Ечиш. Гук қонунига кўра пружинани x м га чўзувчи куч $F=kx$; Агар $x=0{,}01$м ва $F=1$Н эканлигини ҳисобга олсак, у ҳолда $k=F/x=1/0{,}01=100$ келиб чиқади.

Демак, $F=100x$ экан. Бажарилган иш (1) формулага асосан

$$A = \int_0^{0,04} 100x dx = 50x^2 \Big|_0^{0,04} = 0{,}08(c)$$

бўлади.

4.2. Инерция моментини аниқ интеграл ёрдамида ҳисоблаш

XOY текислигида массалари $m_1, m_2, \ldots, m_n$ бўлган $P_1(x_1,\ y_1),\ P_1(x_2,\ y_2), \ldots,\ P_1(x_n,\ y_n)$ моддий нуқталар системаси берилган бўлсин. Механикадан маълумки, моддий нуқталар системасининг O нуқтага нисбатан инерция моменти:

$$J_0 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2)m_i = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 m_i\ , \qquad (2)$$

бу ерда, $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$.

Фараз қиламиз, эгри чизиқ моддий чизиқдан иборат бўлиб, у $y=f(x)$ тенглама билан берилган бўлсин ва $[a, b]$ кесмада $f(x)$ узлуксиз функция бўлсин. Эгри чизиқнинг чизиқли зичлиги γ га тенг бўлсин. Бу чизиқни узунликлари $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ бўлган n та бўлакка бўламиз, бунда $\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$, уларнинг массалари $\Delta m_1 = \gamma \Delta S_1$, $\Delta m_2 = \gamma \Delta S_2, \ldots, \Delta m_n = \gamma \Delta S_n$ бўлсин. Ёйнинг ҳар бир қисмида абсциссаси ξ_i ва ординатаси $\eta_i = f(\xi_i)$ бўлган нуқталар оламиз. Ёйнинг 0 нуқтага нисбатан инерция моменти:

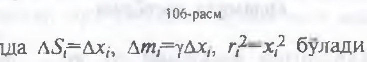
$$J_0 \approx \sum_{i=1}^{n} (\xi_i^2 + \eta_i^2) \gamma \Delta S_i \qquad (3)$$

бўлади. Агар $y=f(x)$ функция ва унинг ҳосиласи $f'(x)$ узлуксиз бўлса, у ҳолда $\Delta x_i \to 0$ да (3) йиғинди лимитга эга ва бу лимит моддий чизиқнинг инерция моментини ифодалайди:

$$J_0 = \gamma \int_a^b (x^2 + f^2(x)) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \qquad (4)$$

1. Узунлиги l бўлган ингичка бир жинсли таёқчанинг (стерженнинг) охирги учига нисбатан инерция моменти.

Таёқчани OX ўқ кесмаси билан устма-уст жойлаштирамиз $0 \le x \le l$



106-расм

Бу ҳолда $\Delta S_i = \Delta x_i$, $\Delta m_i = \gamma \Delta x_i$, $r_i^2 = x_i^2$ бўлади. (4) формула қуйидаги кўринишни олади:

$$J_{0c} = \gamma \int_0^l x^2 dx = \gamma \frac{l^3}{3}. \qquad (5)$$

Агар таёқчанинг массаси M берилган бўлса, у ҳолда $\gamma = M/l$ ва (5) формула қуйидаги кўринишда бўлади:

$$J_{0c} = \frac{1}{3} M l^2. \qquad (6)$$

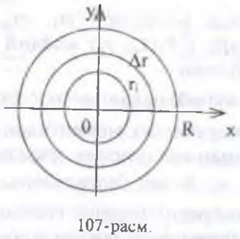
2. Радиуси r бўлган айлананинг марказга нисбатан инерция моменти.

Айлананинг барча нуқталари унинг марказидан бир хил масофада бўлгани ва массаси $m=2\pi r\gamma$ бўлгани учун айлананинг инерция моменти қуйидагича бўлади:

$$J_0 = mr^2 = \gamma 2\pi r r^2 = 2\pi r^3 \gamma \qquad (7)$$

3. Радиуси R бўлган бир жинсли доиранинг марказига нисбатан инерция моменти.

Доирани n та ҳалқаларга ажратамиз (107-расм). S-доира юзи бирлигининг массаси бўлсин. Битта халқани олиб қараймиз.



107-расм.

Бу ҳалқанинг ички радиуси r_i, ташқи радиуси $r_i + \Delta r_i$ бўлсин. Бу ҳалқанинг массаси $\Delta m_i = \delta 2\pi r_i \Delta r_i$ га тенг бўлади. Бу массанинг марказга нисбатан инерция моменти (7) формулага мувофиқ тақрибан қуйидагига тенг бўлади:

$$(\Delta J_0)_i \approx \delta 2\pi r_i \Delta r_i r_i^2 = \delta 2\pi r_i^3 \Delta r_i.$$

Бутун доиранинг инерция моменти:

$$J_0 \approx \sum_{i=1}^{n} \delta 2\pi r_i^3 \Delta r_i.$$

$\Delta r_i \to 0$ да лимитга ўтиб, доира юзининг марказга нисбатан инерция моментини ҳосил қиламиз:

$$J_0 = \delta 2\pi \int_0^R r^3 dr = \pi\delta \frac{R^4}{2} \qquad (8)$$

Агар доиранинг массаси M берилган бўлса, у ҳолда сирт зичлиги δ $\delta=\frac{M}{\pi R^2}$ бўлади. Бу қийматни (8) га қўйсак:

$$J_0=\frac{MR^2}{2}. \tag{9}$$

Эслатма. Асос радиуси R ва массаси M бўлган доиравий цилиндрнинг ўққа нисбатан инерция моменти (9) формула билан аниқланади.

4.3. Оғирлик марказининг координаталарини ҳисоблаш

ХОУ текислигида массалари m_1, m_2,..., m_n бўлган $P_1(x_1, y_1)$, $P_1(x_2, y_2)$,..., $P_1(x_n, y_n)$ моддий нуқталар системаси берилган бўлсин.

$x_i m_i$ ва $y_i m_i$ кўпайтмалар m_i массанинг *Ох* ва *Оу* ўқларига нисбатан статистик моментлари, деб аталади.

Берилган системанинг оғирлик марказининг координаталарини x_c ва y_c билан белгилайлик. У ҳолда механика курсидан маълумки, моддий системанинг оғирлик маркази қуйидаги формулалар орқали аниқланади:

$$x_c=\frac{x_1m_1+x_2m_2+\ldots+x_nm_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_im_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}, \tag{10}$$

$$y_c=\frac{y_1m_1+y_2m_2+\ldots+y_nm_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_im_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}. \tag{11}$$

1. Текис чизиқнинг оғирлик маркази. Тенгламаси $y=f(x)$, $a\leq x\leq b$ бўлган моддий чизиқ берилган бўлсин.

Бу моддий чизиқнинг чизиқли зичлиги, яъни чизиқнинг узунлик бирлигининг массаси γ бўлсин. Чизиқни узунликлари $\Delta s_1,\Delta s_2,\ldots,\Delta s_n$ бўлган n та бўлакларга бўламиз. Ҳар бир бўлакнинг массаси узунлигининг чизиқли зичлиги кўпайтмасига тенг: $\Delta m_i=\gamma\Delta s_i$. Ёйнинг ҳар бир Δs_i бўлагида абсциссаси ξ_i бўлган ихтиёрий нуқта оламиз. Агар (1) ва (2) формулаларга x_i лар ўрнига ξ_i ларни, m_i лар ўрнига $\gamma\Delta s_i$ ларни ва y_i лар ўрнига $f(\xi_i)$ ларни қўйсак, ёйнинг оғирлик маркази координаталари учун тақрибий формулаларни ҳосил қиламиз:

$$x_c\approx\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i\gamma\Delta s_i}{\sum_{i=1}^{n}\gamma\Delta s_i},\quad y_c\approx\frac{\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\gamma\Delta s_i}{\sum_{i=1}^{n}\gamma\Delta s_i}.$$

Агар $y=f(x)$ узлуксиз ва узлуксиз дифференциалланувчи функция бўлса, у ҳолда ҳар бир касрнинг сурати ва махражидаги йиғиндилар max$\Delta s_i\to 0$ бўлганда мос интеграл йиғиндиларнинг лимитига интилади. Шу сабабли лимитда ёйнинг оғирлик маркази координаталари учун қуйидаги формулаларга эга бўламиз:

$$x_c=\frac{\int_a^b x\,ds}{\int_a^b ds}=\frac{\int_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}dx}{\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx}, \tag{1'}$$

$$y_c=\frac{\int_a^b f(x)ds}{\int_a^b ds}=\frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx}{\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx} \tag{2'}$$

Мисол. Ох ўқидан юқорида жойлашган $x^2+y^2=a^2$ ярим айлананинг огирлик марказини топинг.

Агар доиранинг массаси M берилган бўлса, у ҳолда сирт зичлиги δ $\delta=\dfrac{M}{\pi R^2}$ бўлади. Бу қийматни (8) га қўйсак:

$$J_0=\frac{MR^2}{2}. \tag{9}$$

Эслатма. Асос радиуси R ва массаси M бўлган доиравий цилиндрнинг ўққа нисбатан инерция моменти (9) формула билан аниқланади.

4.3. Оғирлик марказининг координаталарини ҳисоблаш

ХОУ текислигида массалари $m_1, m_2, \ldots, m_n$ бўлган $P_1(x_1, y_1), P_1(x_2, y_2), \ldots, P_1(x_n, y_n)$ моддий нуқталар системаси берилган бўлсин.

$x_i m_i$ ва $y_i m_i$ кўпайтмалар m_i массанинг Ox ва Oy ўқларига нисбатан статистик моментлари, деб аталади.

Берилган системанинг оғирлик марказининг координаталарини x_c ва y_c билан белгилайлик. У ҳолда механика курсидан маълумки, моддий системанинг оғирлик маркази қуйидаги формулалар орқали аниқланади:

$$x_c=\frac{x_1m_1+x_2m_2+\ldots+x_nm_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_im_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i}, \tag{10}$$

$$y_c=\frac{y_1m_1+y_2m_2+\ldots+y_nm_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_im_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i}. \tag{11}$$

1. Текис чизиқнинг оғирлик маркази. Тенгламаси $y=f(x)$, $a\leq x\leq b$ бўлган моддий чизиқ берилган бўлсин.

Бу моддий чизиқнинг чизиқли зичлиги, яъни чизиқнинг узунлик бирлигининг массаси γ бўлсин. Чизиқни узунликлари $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$ бўлган n та бўлакларга бўламиз. Ҳар бир бўлакнинг массаси узунлигининг чизиқли зичлиги кўпайтмасига тенг: $\Delta m_i=\gamma\Delta s_i$. Ёйнинг ҳар бир Δs_i бўлагида абсциссаси ξ_i бўлган ихтиёрий нуқта оламиз. Агар (1) ва (2) формулаларга x_i лар ўрнига ξ_i ларни, m_i лар ўрнига $\gamma\Delta s_i$ ларни ва y_i лар ўрнига $f(\xi_i)$ ларни қўйсак, ёйнинг оғирлик маркази координаталари учун тақрибий формулаларни ҳосил қиламиз:

$$x_c\approx\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\gamma\Delta s_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma\Delta s_i},\quad y_c\approx\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\gamma\Delta s_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma\Delta s_i}.$$

Агар $y=f(x)$ узлуксиз ва узлуксиз дифференциалланувчи функция бўлса, у ҳолда ҳар бир касрнинг сурати ва махражидаги йиғиндилар $\max\Delta s_i\to 0$ бўлганда мос интеграл йиғиндиларнинг лимитига интилади. Шу сабабли лимитда ёйнинг оғирлик маркази координаталари учун қуйидаги формулаларга эга бўламиз:

$$x_c=\frac{\int_a^b x\,ds}{\int_a^b ds}=\frac{\int_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}dx}{\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx}, \tag{1'}$$

$$y_c=\frac{\int_a^b f(x)ds}{\int_a^b ds}=\frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx}{\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx}. \tag{2'}$$

Мисол. Ox ўқидан юқорида жойлашган $x^2+y^2=a^2$ ярим айлананинг оғирлик марказини топинг.

Ечиш. Берилган яримайлана *Оу* ўққа нисбатан симметрик бўлгани учун $x_c=0$. Шунинг учун ординатасини ҳисоблаймиз:

$$y=\sqrt{a^2-x^2},\ \frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},\ ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx,$$

$$y_c=\frac{\int\limits_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx}{\pi a}=\frac{a\int\limits_{-a}^{a}dx}{\pi a}=\frac{2a^2}{\pi a}=\frac{2a}{\pi}.$$

2. Текис шаклнинг оғирлик маркази. Фараз қилайлик, берилган соҳа $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, $x=a,x=b$ чизиқлар билан чегараланган текис бир жинсли, яъни зичлиги ўзгармас δ бўлган, моддий шакл бўлсин.

Бу шаклни $x=a,x=x_1,\ldots,x=x_n=b$ тўғри чизиқлар билан n та бўлакка бўламиз. Ҳар бир бўлакнинг массаси унинг юзи билан δ зичлиги кўпайтмасига тенг. Агар хар бир *i*-бўлакни асоси Δx_i ва баландлиги $f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)$, (бу ерда $\xi_i=\frac{x_{i-1}+x_i}{2}$,) бўлган тўғри тўртбурчак билан алмаштирсак, ҳар бир бўлак массаси тахминан

$$\Delta m_i=\delta\left[f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)\right]\Delta x_i\ \ (i=1,2,\ldots,n)$$

бўлади. Бу бўлакнинг оғирлик маркази тахминан тўғритўртбурчакнинг марказида бўлади:

$$(x_i)_c=\xi_i,\ (y_i)_c=\frac{f_2(\xi_i)+f_1(\xi_i)}{2}.$$

У ҳолда берилган шаклнинг оғирлик маркази тахминан қуйидаги нуқтада бўлади:

$$x_c\approx\frac{\sum\xi_i\delta\left[f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)\right]\Delta x_i}{\sum\delta\left[f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)\right]\Delta x_i},$$

$$y_c\approx\frac{\frac{1}{2}\sum[f_2(\xi_i)+f_1(\xi_i)]\delta\left[f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)\right]\Delta x_i}{\sum\delta\left[f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)\right]\Delta x_i}.$$

Агар $\Delta x_i\to 0$ да лимитга ўтсак:

$$x_c=\frac{\int\limits_a^b x\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx}{\int\limits_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx},\ y_c=\frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b\left[f_2^2(x)-f_1^2(x)\right]dx}{\int\limits_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx}.$$

Мисол. $y^2=ax$ параболани $x=a$ тўғри чизиқ билан кесиш натижасида ҳосил бўлган сегментнинг оғирлик маркази координаталарини топинг.

Ечиш. $f_2(x)=\sqrt{ax}$, $f_1(x)=-\sqrt{ax}$. У ҳолда

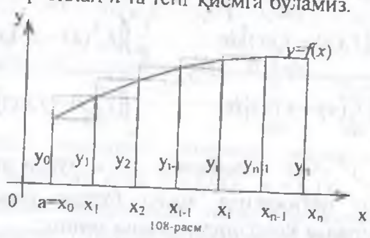
$$x_c=\frac{2\int\limits_0^a x\sqrt{ax}dx}{2\int\limits_0^a\sqrt{ax}dx}=\frac{2\sqrt{a}\frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_0^a}{2\sqrt{a}\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^a}=\frac{\frac{4}{5}a^3}{\frac{4}{3}a^2}=\frac{3}{5}a,\ y_c=0.$$

5-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИ ТАҚРИБИЙ ҲИСОБЛАШ

Ҳар қандай узлуксиз функциянинг бошланғич функциясини чекли элементар функциялар ёрдамида ифодалаб бўлмайди. Шу сабабли бундай аниқ интегралларни Ньютон-Лейбниц формуласидан фойдаланиб ҳисоблаб бўлмайди. Бундай ҳолларда тақрибий ҳисоблаш усулларидан фойдаланилади. Аниқ интегрални интеграл йиғиндиларнинг лимити сифатидаги таърифидан ва аниқ интегралнинг геометрик маъносидан келиб чиққан бир нечта усулни кўриб ўтамиз.

5.1. Тўғри тўртбурчаклар усули

Фараз қилайлик, $y=f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлсин. Ушбу $\int_a^b f(x)dx$ аниқ интегрални ҳисоблаш талаб қилинган бўлсин. $[a, b]$ кесмани $a=x_0, x_1, x_2,..., x_i,..., x_n=b$ нуқталар билан n та тенг қисмга бўламиз.



108-расм

Ҳар бир бўлакнинг узунлиги: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. $f(x)$ функциянинг $x_0, x_1, x_2,..., x_i,..., x_n$ нуқталардаги қийматини $y_0, y_1, y_2,..., y_i,..., y_n$ орқали белгилаймиз, яъни $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1),..., y_i=f(x_i),..., y_n=f(x_n)$ бўлсин.

Қуйидаги йиғиндиларни тузамиз:

$$y_0\Delta x + y_1\Delta x + ... + y_i\Delta x + ... + y_{n-1}\Delta x = \sum_{i=1}^{n-1} y_i\Delta x$$

$$y_1\Delta x + y_2\Delta x + ... + y_i\Delta x + ... + y_n\Delta x = \sum_{i=1}^{n} y_i\Delta x$$

Бу йиғиндилардан ҳар бири $f(x)$ функция учун интеграл йиғинди бўлади ва шунинг учун уларни $\int_a^b f(x)dx$ интегралнинг тақрибий қийматлари сифатида қабул қилиш мумкин:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + ... + y_i + ... + y_{n-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i \qquad (1)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + ... + y_i + ... + y_n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (2)$$

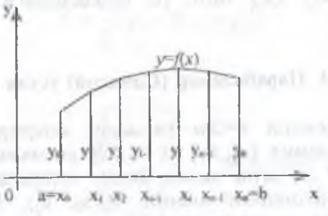
Бу формулалар орқали ҳисоблаш усулини — тўғри тўртбурчаклар усули деб аташади.

Агар $f(x)$ мусбат ва ўсувчи функция бўлса, у ҳолда (1) формула ички тўртбурчаклардан тузилган поғонали шаклнинг юзини ифодалайди, (2) формула эса ташқи тўртбурчаклардан тузилган поғонали шаклнинг юзини ифодалайди.

Интегрални тўғри тўртбурчаклар усули билан ҳисоблашда йўл қўйилган хато n сони қанча катта бўлса, шунча кичик бўлади. Тўғри тўртбурчаклар формуласининг абсолют хатоси $M_1\frac{(b-a)^2}{4n}$ дан катта эмас, бу ерда, M_1 — $|f'(x)|$ нинг $[a, b]$ кесмадаги энг катта қийматидир.

5.2. Трапециялар усули

$[a, b]$ кесмани аввалги усулда бўлиб, Δx хусусий интервалга мос келувчи $y=f(x)$ чизиқнинг ҳар бир ёйини бу ёйнинг четки нуқталарини туташтирувчи ватар билан алмаштирамиз. Бу геометрик нуқтаи назардан берилган эгри чизиқли трапециянинг юзини n та тўғри чизиқли трапециялар юзларининг йиғиндиси билан алмаштирилганини билдиради.



109-расм

Бундай шаклнинг юзи эгри чизиқли трапециянинг юзини тўғри тўртбурчаклардан тузилган поғонали фигуранинг юзига қараганда анча аниқ ифодалаши геометрик жиҳатдан равшандир.

Бу трапециялардан биринчисининг юзи $\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x$, иккинчисининг юзи $\frac{y_1+y_2}{2}\Delta x$ ва ҳоказо, бўлгани сабабли

$$\int_a^b f(x)dx \approx (\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x + \frac{y_1+y_2}{2}\Delta x + ... + \frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta x + ...$$

$$+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x) = \Delta x(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1})$$

ва $\Delta x = (b-a)/n$ эканлигини эсласак,

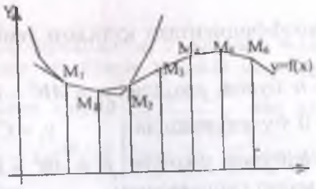
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}) \qquad (3)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Бу формула билан ҳисоблашни трапециялар усули деймиз. n сони қанча катта бўлса ва демак, $\Delta x=(b-a)/n$ қадам қанча кичик бўлса, (3) тақрибий тенгликнинг ўнг томонида ёзилган йиғинди шунча катта аниқлик билан интеграл қийматини беради. Трапециялар формуласининг абсолют хатоси $M_2\frac{(b-a)^3}{12n^2}$ дан катта эмас, бу ерда M_2 - $|f''(x)|$ нинг $[a, b]$ кесмадаги энг катта қийматидир.

5.3. Параболалар (Симпсон) усули

$[a, b]$ кесмани $n=2m$ та жуфт миқдордаги тенг қисмларга бўламиз. $[x_0, x_1]$ ва $[x_1, x_2]$ кесмаларга мос ва берилган $y=f(x)$ эгри чизиқ билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзини $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ учта нуқтадан ўтувчи ва симметрия ўқи $OУ$ ўққа параллел бўлган иккинчи даражали парабола билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзи билан алмаштирамиз.



110-расм.

Бундай эгри чизиқли трапеция параболик трапеция дейилади. Ўқи $OУ$ ўққа паралел бўлган параболанинг тенгламаси $y = Ax^2 + Bx + C$ кўринишда бўлади. A, B. C коэффициентлар параболанинг берилган уч нуқта орқали ўтиш шартидан бир қийматли равишда аниқланади. Шунга ўхшаш параболаларни кесмаларнинг бошқа жуфтлари учун ҳам ясаймиз. Шундай ясалган параболик трапециялар юзаларининг йиғиндиси интегралнинг тақрибий қийматини беради.

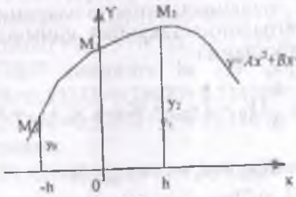
Дастлаб битта параболик трапециянинг юзини ҳисоблаймиз.

Лемма. Агар эгри чизиқли трапеция $y=Ax^2+Bx+C$ парабола, OX ўқ ва оралиғи $2h$ га тенг бўлган 2та ордината ўқига параллел тўғри чизиқлар билан чегараланган бўлса, у ҳолда унинг юзи

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \qquad (4)$$

га тенг.

Исботи.



111-расм.

A, B, C коэффициентлар қуйидаги тенгламалардан аниқланади:

$$\begin{array}{ll} \text{агар } x_0 = h \text{ булса, у холда} & y_0 = Ah^2 - Bh + C \\ \text{агар } x_1 = 0 \text{ булса, у холда} & y_1 = C \\ \text{агар } x_2 = h \text{ булса, у холда} & y_2 = Ah^2 + Bh + C \end{array} \qquad (5)$$

(5) тенгламалар системасидан:

$$A = \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2), \; C = y_1, \; B = \frac{1}{2h}(y_2 - y_0)$$

бўлади. Энди параболик трапециянинг юзини аниқ интеграл ёрдамида аниқлайлик:

$$S = \int_{-h}^{h}(Ax^2 + Bx + C)dx = (A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx)|_{-h}^{h} = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C);$$

Лекин $2Ah^2 + 6C = y_0 + 4y_1 + y_2$. Демак, $S = h/3(y_0 + 4y_1 + y_2)$ бўлади.

Бу леммадан фойдаланиб, қуйидаги тақрибий тенгликларни ёза оламиз:

$$\int_{x0}^{x2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$\int_{x2}^{x4} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\int_{x2m-2}^{x2m} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m})$$

Параболик трапецияларнинг юзаларини қўшиб, изланаётган интегралнинг тақрибий қийматини берувчи ифодани ҳосил қиламиз:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 2\{y_{2m} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) + \qquad (6)$$

$$+ 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}))$$

бу ерда, $h = (b - a)/2m$.

Бу Симпсон формуласидир.

Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада 4-тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлса, у ҳолда Симпсон формуласининг абсолют хатоси $M_4 \frac{(b-a)^4}{2880n^4}$ дан катта бўлмайди, бунда M_4 -- $|f^{(5)}(x)|$ нинг $[a, b]$ кесмадаги энг катта қийматидир.

Мисол. Ушбу $J = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ интеграл тақрибий ҳисоблансин.

Ечиш. Аввал берилган интегралнинг аниқ қийматини Ньютон-Лейбниц формуласи бўйича ҳисоблаб олайлик:

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x||_0^1 = \ln 2 \approx 0,69315.$$

[0,1] кесмани 10 та тенг бўлакка бўламиз: Δx=0,1.

Қуйидаги жадвални тузамиз:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
yi	1	0,90909	0,83333	0.76923	0.71429	0,66667
i	0	6	7	8	9	10
x_i	0	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
yi	1	0,62500	0,58824	0,55556	0,52632	0,5

Аввал тўғри тўртбурчаклар усулини қўллаб, (1) формула бўйича: J≈0,1(1+0,90909+0,83333+0,76923+ +0,71429+0,66667+0,625+0,58824+0,55556+0,52632)=0,1· ·7,18773=0,71877 натижага ва (2) формула бўйича: J≈0,1(0,90909+0,83333+0,76923+0,71429+0,66667+0,625+ +0,58824+0,55556+0,52632+0,5)=0,1*6,68773=0,66877. натижага келамиз.

Энди, йўл қўйилган хатони баҳолаймиз:

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

[0,1] кесмада $|f'(x)| \leq 1$. Шунинг учун M_1=1. У ҳолда олинган натижанинг хатоси $M_1 \frac{(b-a)^2}{4n} = \frac{1}{40} = 0{,}025$ катталикдан ортмайди:

$$|0{,}69315-0{,}66877|=0{,}02438<0{,}025.$$

Агар трапециялар усулини қўлласак, қуйидаги натижани оламиз:

$$J \approx 0{,}1(\frac{1+0{,}5}{2}+0{,}90909+0{,}83333+\ldots+0{,}52632)=0{,}69377.$$

У ҳолда йўл қўйилган хатолик қуйидагича баҳоланади:

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f''(x) = -\frac{2}{(1+x)^3}.$$

[0,1] кесмада $|f''(x)| \leq 2$. Демак, M_2=2.

У ҳолда олинган натижанинг хатоси

$$M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2} = \frac{2}{12 \cdot 100} = \frac{1}{600} \approx 0{,}001667$$

катталикдан ортиқ бўлмайди.

$$|0{,}69315-0{,}69377|=0{,}00062<0{,}001667.$$

Энди, Симпсон формуласидан фойдаланамиз: n=2m=10, $\frac{b-a}{3n} = \frac{1}{30}$ бўлганда (6) формула бўйича қуйидаги натижани оламиз:

$$J \approx 1/30(1+0{,}5+4(0{,}90909+0{,}76923+0{,}66667+0{,}58824+$$
$$+0{,}52632)+2*(0{,}83333+0{,}71429+0{,}625+0{,}55556))=$$
$$=1/30*(1{,}5+4*3{,}45955+2*2{,}72818)=0{,}693146$$

Олинган натижанинг хатосини баҳолайлик:

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f'''(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}, \quad f^4(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$$

[0,1] кесмада $|f^{(5)}(x)| \leq 24$. Шунинг учун, M_4=24.

У ҳолда йўл қўйилган хатолик

$$M_4 \frac{(b-a)^5}{2880\ 10^4} = \frac{24}{2880 \cdot 10000} \approx 0{,}000008$$

катталикдан ортиқ бўлмайди.

$$|0{,}69315-0{,}693146|=0{,}000004<0{,}000008.$$

Учала натижани аниқ қиймат билан таққослаганда Симпсон формуласи қолган иккита формуладан анча аниқ экан, деган хулосага келиш мумкин.

12-БОБ.
КЎП ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБИ

1-§. БОШЛАНҒИЧ ТУШУНЧАЛАР

Функцияга, шу жумладан, кўп ўзгарувчили функцияга 5-бобнинг 1-§ ида таъриф берган эдик.

Бу бобда биз кўп ўзгарувчили функциянинг дифференциал ҳисобини қуриш билан шуғулланамиз. Асосий маълумотлар икки ўзгарувчининг функцияси учун берилади. Уларни ўзгарувчилари сони иккидан катта бўлган ҳол учун бевосита айний равишда ўтказиш қийин эмас.

Кўп ҳолатларда бирор миқдор бошқа бир нечта эркин ўзгарувчиларга боғлиқ бўлади. Масалан, учбурчакнинг юзи S унинг асоси a ва баландлиги h нинг қийматларига боғлиқ, яъни

$$S=\frac{1}{2}ah\,.$$

Тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажми V бир-бирига боғлиқ бўлмаган қирраларнинг функциясидир:

$$V=abc.$$

Электр токи ажратадиган иссиқлик миқдори Q кучланиш E, ток кучи J ва вақт t нинг функциясидир:

$$Q=0{,}24Jet.$$

Бирор жисмнинг физик ҳолатини ўргансак, унинг нуқтадан нуқтага ўтиш жараёнида айрим хусусиятларини ўзгариши кузатиш мумкин. Булар масалан: зичлиги, ҳарорати, электр потенциали ва ҳ.к. лар. Бошқача қилиб айтганда, бу миқдорлар нуқтанинг, яъни унинг x, y, z координаталарининг функцияси бўлади. Агар жисмнинг физик ҳолати вақт ўтиши билан ўзгарса, бу эркин ўзгарувчиларга t вақт ҳам қўшилади. Бу ҳолда биз тўртта эркин ўзгарувчининг функциясини кузатаётган бўламиз.

Иккита эркин x, y ўзгарувчиларнинг f функциясини символик тарзда

$$z=f(x,y)$$

кўринишда ёзиш қабул қилинган.

Кўп ўзгарувчининг функциялари худди бир ўзгарувчининг функциялари каби аналитик усулда, яъни формулалар ёрдамида, жадвал усулда ва график усулда берилиши мумкин. Масалан:

$$z=x^2-xy+y^3;\quad z=\frac{tg(x+y)}{x^2+y^2}.$$

Функциянинг жадвал кўриниши физика, механика, тиббиёт ва техниканинг тажриба ўтказиш билан боғлиқ бўлган барча йўналишларида кенг ишлатилади.

Функциянинг геометрик тасвири унинг графиги дейилади. Масалан, икки ўзгарувчининг функцияси графиги уч ўлчовли фазода сиртни ифодалайди. 3-бобнинг 3-§ ида кўрилган 2-тартибли сиртлар: сфера, эллипсоид, эллиптик параболоид ва гиперболик параболоидлар мос равишда

$$x^2+y^2+z^2=r^2,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q},z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}$$

функцияларнинг графигига мисол бўла олади.

Эркли x, y ўзгарувчиларнинг f функцияси маъносини сақловчи қийматлари жуфтликларининг тўплами f функциянинг аниқланиш соҳаси бўлади. XOY координаталар текислигида бу тўпламлар бирор текис соҳани ифодалайди. Масалан, $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ функциянинг аниқланиш соҳаси илдиз остидаги ифодага манфий бўлмаган қиймат берувчи (x,y) жуфтликлар тўплами: $x^2+y^2\le 1$ доира бўлади ёки $z=\ln(x+y)$ функциянинг аниқланиш соҳаси: $y>-x$, яъни $y=-x$ тўғри чизиқнинг тепасидаги яримтекислик бўлади.

Эслатма. Эркли ўзгарувчилари сони учтадан ошиқ бўлган функциянинг аниқланиш соҳасини ҳам, графигини ҳам фазода ифодалаб бўлмайди. Уларни биз абстракт маънода тушунамиз.

Энди, R_2 текислигига қайтсак. Бу текисликда бирор (x_0, y_0) нуқта берилган бўлсин.

Қуйидаги

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<a^2 \ (a>0)$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи (x, y) нуқталар тўпламини маркази (x_0, y_0) нуқтада бўлган a радиусли очиқ доира деймиз.

$$|x-x_0|<a, \ |y-y_0|<b \ (a,b>0), \tag{1}$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи (x, y) нуқталар тўпламини очиқ тўртбурчак, деб атаймиз.

Агар (1) да $a=b$ бўлса, унинг маркази (x_0, y_0) нуқтада бўлган очиқ квадрат деймиз.

Маркази (x_0, y_0) нуқтада, радиуси $\varepsilon>0$ бўлган ҳар қандай очиқ доира ёки томони 2ε бўлган ҳар қандай квадрат (x_0, y_0) нуқтанинг ε-атрофи дейилади.

Агар

$$(x_1, y_1), \ (x_2, y_2), \ (x_3, y_3), \ \ldots$$

нуқталар кетма-кетлиги берилган бўлса, ўзгарувчи (x_k, y_k) нуқта шу кетма-кетлик бўйлаб ўзгаради деймиз.

Агар $k\to\infty$ да (x_k, y_k) ўзгарувчи нуқталар орасидаги масофа нолга интилса, яъни $k\to\infty$ да

$$\sqrt{(x_k-x_0)^2+(y_k-y_0)^2}\to 0 \tag{2}$$

бўлса, $\{(x_k, y_k)\}$ кетма-кетлик ёки ўзгарувчи (x_k, y_k) нуқта $k\to\infty$ да (x_0, y_0) нуқтага интилади деймиз.

Буни

$$(x_k, y_k)\to(x_0, y_0) \ (k\to\infty)$$

кўринишда ёзамиз.

Табиий (2) муносабат

$$x_k\to x_0, \ y_k\to y_0 \ (k\to\infty) \tag{3}$$

муносабатларнинг бир вақтда бажарилишига тенг кучли.

(2) муносабатни яна: ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун шундай N сон топиладики, барча $k>N$ лар учун (x_k, y_k) нуқта маркази (x_0, y_0) да бўлган ε радиусли очиқ доира ичида бўлади, деб тушуниш мумкин.

(3) муносабатни эса: ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун шундай N сон топиладики, барча $k>N$ лар учун (x_k, y_k) нуқта маркази (x_0, y_0) да бўлган 2ε томонли очиқ квадратда бўлади деб тушунамиз.

Бу иккала мулоҳазани бирлаштириб, ҳар қандай $\varepsilon>0$ учун шундай N сон топиладики, барча $k>N$ лар учун (x_k, y_k) нуқта (x_0, y_0) нуқтанинг ε-атрофида бўлади дейиш мумкин.

2-§. ФУНКЦИЯНИНГ ЛИМИТИ

Фараз қилайлик, (x_0, y_0) нуқтанинг ўзида бўлмаса ҳам, унинг бирор атрофида аниқланган $z=f(x, y)$ функция берилган бўлсин.

1-таъриф. *Агар (x_0, y_0) нуқтага интилувчи ҳар қандай (x_k, y_k) кетма-кетлик учун*

$$\lim_{\substack{x_k\to x_0 \\ y_k\to y_0}} f(x_k, y_k)=A \tag{1}$$

бўлса, у ҳолда A сон $z=f(x, y)$ функциянинг $(x, y)\to(x_0, y_0)$ даги лимити дейилади.

Лимитга «ε,δ» тилида хам таъриф бериш мумкин.

2-таъриф. *Агар ҳар қандай $\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta>0$ сон топилсаки,*

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \tag{2}$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча (x, y) *лар учун*

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon \qquad (3)$$

муносабат ўринли бўлса, A сон $z = f(x, y)$ *функциянинг* $(x, y) \to (x_0, y_0)$ *даги лимити дейилади.*

Ўз навбатида бу икки таъриф қуйидаги таърифга эквивалент: A сон $z = f(x, y)$ функциянинг $(x,y) \to (x_0, y_0)$ даги лимити дейилади, агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун (x_0, y_0) нуқтанинг шундай δ-атрофи мавжуд бўлсаки, бу атрофнинг (x_0, y_0) дан бошқа барча нуқталари учун (3) тенгсизлик ўринли бўлса.

Фараз қилайлик, $\bar{\omega} = (\omega_x, \omega_y)$ узунлиги ($|\bar{\omega}|^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 = 1$) бир бўлган вектор ва $t>0$ – бирор скаляр бўлсин. Қуйидаги

$$\left(x_0 + t\omega_x, y_0 + t\omega_y\right) \ (t>0)$$

нуқталар (x_0, y_0) дан $\bar{\omega}$ вектор йўналишида чиққан нурни ҳосил қилади.

Ҳар бир $\bar{\omega}$ учун t ўзгарувчининг

$$f(x_0 + t\omega_x, y_0 + t\omega_y) \ (0 < t < \delta)$$

функциясини кўриш мумкин, бу ерда δ-етарлича кичик сон.

Агар

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} f(x_0 + t\omega_x, y_0 + t\omega_y)$$

лимит мавжуд бўлса, уни f функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги $\bar{\omega}$ йўналиш бўйича лимити деймиз.

1-*мисол.*

$$f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$$

функция текисликнинг (0,0) нуқтасидан бошқа барча нуқталарида аниқланган. $x^3 \le \left(x^2 + y^2\right)^{3/2}$ ва $y^3 \le \left(x^2 + y^2\right)^{3/2}$ бўлгани учун

$$|f(x,y)| \le \frac{2\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}}{x^2 + y^2} = 2\left(x^2 + y^2\right)^{1/2}$$

бўлади. Шу сабабли агар $x \to 0, y \to 0$ бўлса, $f(x, y) \to 0$ бўлади, яъни

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0 .$$

2-*мисол.*

$$\varphi(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

функция текисликнинг (0,0) нуқтасидан бошқа барча нуқталарида аниқланган.

Ўзгармас k сон учун $y = kx$ тўғри чизиқлар бўйлаб

$$\varphi(x, kx) = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}.$$

Бу ердан кўринадики, k нинг ҳар хил қийматлари учун функциянинг (0,0) нуқтадаги ҳар хил йўналишлар бўйича лимитлари ҳар хил.

3-*мисол.* $f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^2}$ функциянинг $y = kx$ тўғри чизиқлар бўйлаб (0,0) нуқтадаги лимити нолга тенг:

агар $x \to 0$ бўлса, $f(x, kx) = \dfrac{kx^3}{x^4 + k^2x^2} = \dfrac{kx}{x^2 + k^2} \to 0.$

Лекин бу функция (0,0) нуқтада лимитга эга эмас, чунки $y = x^2$ десак:

$$f(x,x^2)=\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2} \text{ ва } \lim_{x\to 0} f(x,x^2)=\frac{1}{2}.$$

Функциянинг $x, y \to \infty$ даги лимити тушунчасини хам киритса бўлади: ҳар қандай $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $N>0$ сон топилсаки, $|x| > N, |y| > N$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи барча x, y лар учун f функция аниқланган бўлиб,

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлса, A сон f функциянинг $x, y \to \infty$ даги лимити дейилади ва қуйидагича ёзилади:

$$\lim_{x\to\infty, y\to\infty} f(x,y)=A.$$

Агар f функция (x_0, y_0) нуқтанинг ўзида бўлмаса ҳам, унинг бирор атрофида аниқланган бўлса ва ҳар қандай $N>0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, (x_0, y_0) нуқтанинг δ-атрофидаги барча (x, y) лар учун

$$|f(x,y)|>N$$

бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x\to X_0, y\to Y_0} f(x,y)=\infty$$

деймиз.

Қуйидаги муносабатлар ўринли:

$$\lim_{x\to X_0, y\to Y_0}[f(x,y)+g(x,y)]=\lim_{x\to X_0, y\to Y_0} f(x,y)\pm \lim_{x\to X_0, y\to Y_0} g(x,y), \quad (4)$$

$$\lim_{x\to X_0, y\to Y_0}[f(x,y)\cdot g(x,y)]=\lim_{x\to X_0, y\to Y_0} f(x,y)\cdot \lim_{x\to X_0, y\to Y_0} g(x,y), \quad (5)$$

агар $\lim\limits_{x\to X_0, y\to Y_0} g(x,y)\neq 0$ бўлса,

$$\lim_{x\to X_0, y\to Y_0}\frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\frac{\lim\limits_{x\to X_0, y\to Y_0} f(x,y)}{\lim\limits_{x\to X_0, y\to Y_0} g(x,y)} \quad (6)$$

Бу муносабатлар $x, y \to \infty$ да ҳам ўринли.

Бир ўзгарувчили функциянинг лимити ҳақидаги барча теоремалар (5-боб, 2.2-§ га қаранг) кўп ўзгарувчининг функцияси учун ҳам ўринли.

3-§. УЗЛУКСИЗ ФУНКЦИЯЛАР

Бизга (x_0, y_0) нуқтада ва унинг бирор атрофида аниқланган $z = f(x, y)$ функция берилган бўлсин.

Агар x ва y лар мос равишда Δx ва Δy орттирмалар олса, у ҳолда қуйидаги айирмани

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$$

$z = f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги тўла орттирмаси деймиз.

Агар (x_0, y_0) нуқтада

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0 \quad (1)$$

бўлса, $z=f(x,y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада узлуксиз дейилади. (1) ни яна қуйидагича ёзса бўлади:

$$\lim_{\Delta x\to 0, \Delta y\to 0}[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)]=0$$

ёки

$$\lim_{x\to x0, y\to y0} f(x,y)=f(x_0, y_0). \quad (1')$$

2-§ даги (4)-(6) муносабатлардан бевосита қуйидаги теорема келиб чиқади.

1-теорема. (x_0, y_0) *нуқтада узлуксиз бўлган* f *ва* g *функцияларнинг йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва агар* $g(x_0, y_0)\neq 0$ *бўлса, бўлинмаси ҳам шу нуқтада узлуксиз бўлади.*

Бу теоремадан x ва y ларнинг ҳар қандай кўпҳади текисликнинг ихтиёрий нуқтасида узлуксиз эканлиги келиб чиқади.

(x, y) нинг кўпҳадлари нисбати $P/Q\ (x, y)$ нинг рационал функцияси дейилади. P/Q рационал функция $Q\ (x, y)=0$ бўладиган нуқталардан бошқа барча нуқталарда узлуксиз бўлади.

Қуйилаги теорема мураккаб функциянинг узлуксиз бўлишлик шартини берали:

2-теорема. $f(x,y,z)$ *функция* R_3 *арифметик фазонинг* (x_0,y_0,z_0) *нуқтасида* (x,y,z) *нуқталар бўйича*

$$x=\varphi(u,\vartheta),\ y=\psi(u,\vartheta),\ z=\chi(u,\vartheta)$$

функциялар R_2 *арифметик фазонинг* (u_0,ϑ_0) *нуқтасида* (u,ϑ) *нуқталар бўйича узлуксиз бўлсин.* Агар

$$x_0=\varphi(u_0,\vartheta_0),\ y_0=\psi(u_0,\vartheta_0),\ z_0=\chi(u_0,\vartheta_0)$$

бўлса, у ҳолда

$$F(u,\vartheta)=f[\varphi(u,\vartheta),\ \psi(u,\vartheta),\ \chi(u,\vartheta)]$$

функция (u_0,ϑ_0) нуқтада (u,ϑ) лар бўйича узлуксиз бўлади.

Теореманинг исботи (1) муносабатдан келиб чиқали:

$$\lim_{(u,\vartheta)\to\left(U_0,\vartheta_0\right)} F(u,\vartheta)=\lim_{\substack{\varphi(u,\vartheta)\to x_0\\ \psi(u,\vartheta)\to Y_0\\ \chi(u,\vartheta)\to Z_0}} f[\varphi(u,\vartheta),\psi(u,\vartheta),\chi(u,\vartheta)]=$$

$$=f(x_0,y_0,z_0)=f[\varphi(u_0,\vartheta_0),\psi(u_0,\vartheta_0),\chi(u_0,\vartheta_0)]=F(u_0,\vartheta_0).$$

3-теорема. (x_0,y_0) *нуқтада узлуксиз ва шу нуқтада нолга тенг бўлмаган* $z=f(x,y)$ *функция* (x_0,y_0) *нуқтанинг бирор атрофида* $f(x_0,y_0)$ *нинг ишорасини сақлайди.*

Бу теореманинг исботи 5-бобнинг 2.2-§ даги 3-теореманинг исботидек бажарилади.

4-§. ХУСУСИЙ ОРТГИРМАЛАР ВА ҲОСИЛАЛАР

Эркли y ўзгарувчини ўзгартирмай, x га Δx орттирма берсак, берилган $z=f(x,y)$ функциянинг олган

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$$

орттирмасини унинг x бўйича хусусий орттирмаси, деб атаймиз. Худди шунингдек, агар x ни ўзгартирмай y га Δy орттирма берсак, натижада функциянинг олган

$$\Delta_y z=f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

орттирмаси унинг y бўйича хусусий орттирмаси, дейилади.

Аввалги параграфда киритилган тўла орттирмани хусусий орттирмалар орқали қуйидагича ифодаласа булади:

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)+f(x,y+\Delta y)-$$
$$-f(x,y)=\Delta_x f(x,y+\Delta y)+\Delta_y f(x,y).$$

Бу тенгликдан куринадики, умуман $\Delta z=\Delta_x z+\Delta_y z$ бўлавермайди. Масалан, $z=x^2y$ функция учун

$$\Delta_x z=(x+\Delta x)^2y-x^2y=\left(2x\Delta x+\Delta x^2\right)y,$$
$$\Delta_y z=x^2(y+\Delta y)-x^2y=x^2\Delta y,$$
$$\Delta z=(x+\Delta x)^2(y+\Delta y)-x^2y=(2x\Delta x+\Delta x^2)y+$$
$$(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2)\Delta y\neq\Delta_x z+\Delta_y z.$$

Агар

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

лимит мавжуд бўлса, уни $z=f(x,y)$ функциянинг (x,y) нуқтадаги x бўйича хусусий ҳосиласи, деб атаб, $z'_x, f'_x, \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial x}$ куринишда белгилаймиз.

Айнан шундек, агар

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

лимит мавжуд бўлса, уни $z=f(x,y)$ функциянинг (x,y) нуқтадаги y бўйича хусусий ҳосиласи, деб атаб, $z'_y, f'_y, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}$ кўринишда белгилаймиз.

Хусусий орттирмаларнинг таърифидан z'_x хусусий ҳосилани $y=const$ деб қилинган фаразда функциядан x бўйича олинган оддий ҳосила, z'_y хусусий ҳосилани $x=const$ деб қилинган фаразда функциядан y бўйича олинган оддий ҳосила, деб тушуниш кераклиги келиб чиқади.

Бундан хусусий ҳосилаларни ҳисоблаш қоидалари бир ўзгарувчининг функциясини дифференциаллаш қоидалари билан бир хил бўлиши келиб чиқади.

1-*мисол.* $z=x^2\cos(xy)$ функциянинг хусусий ҳосилаларини ҳисобланг.

Ечиш. $z'_x=2x\cos(xy)-x^2y\sin(xy)$, $z'_y=-x^3\sin(xy)$.

2-*мисол.* $z=x^y$. $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ топилсин.

Ечиш. $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$.

Эслатма. Эркли ўзгарувчилари сони иккитадан ошиқ бўлган функциялар учун ҳам хусусий ҳосилалар айнан шундай киритилади.

3-*мисол.* $u=x^2+y^2-zt^3$.

Ечиш.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial u}{\partial z}=-t^3,\ \frac{\partial u}{\partial t}=-3zt^2.$$

5-§. ТЎЛА ДИФФЕРЕНЦИАЛ ВА УНИНГ ТАҚРИБИЙ ҲИСОБЛАРДА ҚЎЛЛАНИШИ

Бизга бирор (x,y) нуқтада узлуксиз хусусий ҳосилалари мавжуд бўлган $z=f(x,y)$ функция берилган бўлсин. Бу функциянинг тўла орттирмасини унинг хусусий ҳосилалари орқали ифодалаймиз. Маълумки,

$$\Delta z=[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)]+ \\ +[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]. \qquad (1)$$

Квадрат қавслар ичидаги ифодаларга Лагранж теоремасини қўлласак:

$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=\Delta y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, \qquad (2)$$

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)=\Delta x\frac{\partial f(\bar{x},y+\Delta y)}{\partial x}, \qquad (3)$$

бу ерда $\bar{y}\in(y,y+\Delta y)$ ва $\bar{x}\in(x,x+\Delta x)$.

(2) ва (3) ларни (1) га қўйсак:

$$\Delta z=\Delta x\frac{\partial f(\bar{x},y+\Delta y)}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}. \qquad (4)$$

Шартга кўра хусусий ҳосилалар узлуксиз бўлгани учун

$$\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\frac{\partial f(\bar{x},y+\Delta y)}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \qquad (5)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}. \qquad (6)$$

Агар γ_1 ва γ_2 лар Δx ва Δy ларга нисбатан чексиз кичик миқдорлар булса, у ҳолда (5), (6) ларни қуйидагича ёзса бўлади:

$$\frac{\partial f(\bar{x},y+\Delta y)}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\gamma_1, \qquad (5')$$

$$\frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+\gamma_2. \qquad (6')$$

У ҳолда (4) қуйидаги кўринишни олади:

$$\Delta z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y. \qquad (7)$$

Тенгликнинг ўнг томонидаги охирги иккита қўшилувчилар йиғиндиси $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдор, чунки $\left|\frac{\Delta x}{\Delta r}\right| \le 1$, $\left|\frac{\Delta y}{\Delta r}\right| \le 1$ ва шартга кўра γ_1 ва γ_2 лар чексиз кичик миқдорлар бўлгани учун

$$\frac{\gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y}{\Delta r} = \gamma_1 \frac{\Delta x}{\Delta r} + \gamma_2 \frac{\Delta y}{\Delta r} \underset{\Delta r \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Шу сабабли биринчи иккита қўшилувчининг йиғиндиси ўнг томоннинг Δx ва Δy ларга нисбатан чизиқли қисми бўлади. Агар $f_x'(x,y) \ne 0, f_y'(x,y) \ne 0$ бўлса, бу икки қўшилувчи тўла орттирманинг асосий қисми булади.

Таъриф. *Тўла орттирмаси бирор* (x,y) *нуқтада* Δx *ва* Δy *ларга нисбатан чизиқли ифода ва* Δr *га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдорлар йиғиндиси кўринишида ифодаланадиган ҳар қандай* $z = f(x,y)$ *функция шу нуқтада дифференциалланувчи ва бу ифоданинг асосий қисми функциянинг тўла дифференциали, деб аталади.* Тўла дифференциал dz ёки df кўринишда белгиланади.

Демак, агар $z = f(x,y)$ функция берилган нуқтада узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у шу нуқтада дифференциалланувчи бўлиб, унинг тўла дифференциали

$$dz = f_x'(x,y)\Delta x + f_y'(x,y)\Delta y$$

бўлар экан.

У ҳолда (7) ни

$$\Delta z = dz + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y$$

кўринишда ёки тақрибан

$$\Delta z \approx dz \qquad (8)$$

деб ёзиш мумкин.

Бир ўзгарувчининг функциясида Δx ни dx га алмаштириш мумкин эканлиги кўрилган эди. Худди шундек, бу ерда ҳам Δx ва Δy ларни мос равишда dx ва dy ларга алмаштирамиз:

$$dz = f_x'(x,y)dx + f_y'(x,y)dy.$$

Агар функция бирор (x,y) нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда (7) дан унинг шу нуқтада узлуксиз эканлиги келиб чиқади. Лекин акси ҳамиша тўғри бўлавермайди.

1-*мисол.* $z = |x|(y+1)$ функция (0,0) нуқтада узлуксиз, лекин унинг бу нуқтада $\frac{\partial z}{\partial x}$ хусусий ҳосиласи мавжуд эмас, яъни бу функция (0,0) нуқтада дифференциалланувчи эмас.

Бир ўзгарувчининг функцияси бирор нуқтада дифференциалланувчи бўлиши учун унинг шу нуқтада ҳосиласи мавжуд бўлиши зарур ва етарли бўлса, кўп ўзгарувчиларнинг функцияси учун бу етарли эмас.

Теорема. *Функция бирор нуқтада дифференциалланувчи бўлиши учун унинг шу нуқтада хусусий ҳосилалари мавжуд бўлиши зарур ва агар бу хусусий ҳосилалар узлуксиз бўлса етарли ҳамдир.*

Исботи. Теореманинг биринчи қисми қуйидагича исбот қилинади:

Агар f функция бирор (x,y) нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда таърифга кўра унинг тўла орттирмаси қуйидагича ифодаланади:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\Delta r). \qquad (9)$$

Агар бу тенгликда $\Delta y = 0$ десак:

$$\Delta_x z = A\Delta x + o(\Delta x)$$

тенглик ҳосил бўлади. Буни Δx га бўлиб лимитга ўтсак:

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}$$

муносабатга келамиз. Айнан шундек мулоҳаза билан $B = \frac{\partial z}{\partial y}$ эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

2-*мисол.* Координаталар текисликларида нолга тенг ва R_3 нинг бошқа нуқталарида 1 га тенг бўлган функциянинг координаталар бошида нолга тенг бўлган хусусий ҳосилалари мавжуд бўлса ҳам бу функция (0,0,0) нуқтада узулишга эга ва шу сабабли бу нуқтада дифференциалланувчи эмас. Демак, хусусий ҳосилаларнинг мавжудлиги функциянинг дифференциалланувчилиги ва ҳатто узлуксизлиги учун старли эмас экан.

Агар f функция бирор (x, y) нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда (8) муносабат ўринли бўлади. Уни қуйидагича ёзиб оламиз:

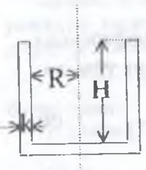
$$\Delta z \approx f'_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$$

ёки

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy. \quad (10)$$

(8) ва (10) ларнинг тақрибий ҳисобларга қўлланишини кўрайлик.

Масала. Ўлчамлари: ички цилиндр радиуси R, ички цилиндр баландлиги H ва девор қалинлиги k бўлган айланма цилиндрни тайёрлаш учун қанча хом ашё кетишини аниқланг.



112-расм

Ечиш. 1) *Аниқ ечими.* Сўралган хажм ϑ ташқи цилиндр ҳажмидан ички цилиндр ҳажмини айирмасига тенг. Ташқи цилиндрнинг радиуси $R+k$, баландлиги $H+k$ бўлгани учун

$$\vartheta = \pi(R+k)^2(H+k) - \pi R^2 H$$

ёки

$$\vartheta = \pi\left(2RHk + R^2k + Hk^2 + 2Rk^2 + k^3\right). \quad (11)$$

2) Тақрибий ечими. Ички цилиндр ҳажмини f десак, $f = \pi R^2 H$, яъни R ва H ўзгарувчиларнинг функциясига эга бўламиз. Агар R ва H га бир хил k орттирма берсак, функция қиймати сўралган ҳажмга тенг бўлган орттирма олади: $\vartheta = \Delta f$.

У ҳолда (10) га асосан

$$\vartheta \approx \frac{\partial f}{\partial R}\Delta R + \frac{\partial f}{\partial H}\Delta H$$

бўлади. Лекин

$$\frac{\partial f}{\partial R} = 2\pi RH, \quad \frac{\partial f}{\partial H} = \pi R^2, \quad \Delta R = \Delta H = k$$

бўлгани учун

$$\vartheta \approx \pi\left(2RHk + R^2k\right) \quad (12)$$

бўлади. Агар (11) ва (12) ларни солиштирсак, улар $\pi\left(Hk^2 + 2Rk^2 + k^3\right)$ миқдорга фарқ қилишини кўриш мумкин.

Бу фарқ рақамларда қандай акс этишини кўриш учун R=4 см, H=20 см, k=0,1 см бўлсин, деб фараз қилайлик.

(11) га асосан

$$\vartheta = \pi\left(2\cdot4\cdot20\cdot0{,}1 + 4^2\cdot0{,}1 + 20\cdot0{,}1^2 + 2\cdot4\cdot0{,}1^2 + 0{,}1^3\right) = 17{,}881\pi.$$

(12) га асосан эса

$$\vartheta \approx \pi\left(2\cdot4\cdot20\cdot0{,}1 + 4^2\cdot0{,}1\right) = 17{,}6\pi.$$

Демак, тақрибий ҳисоб учун ёзилган (12) формула 0,3π дан кичик хатолик билан натижа берар экан. Бу хатолик ўлчам миқдорининг $100\cdot\frac{0{,}3\pi}{17{,}881\pi}$% ини, яъни 2% идан кичик миқдорини ташкил этади.

(8) га кўра абсолют қийматлари бўйича етарлича кичик Δx ва Δy лар учун функциянинг тўла орттирмасини тўла дифференциалга тақрибан алмаштириш мумкин:

$$\Delta z \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y.$$

Бундан

$$|\Delta z| \le \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right||\Lambda x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right||\Delta y|. \qquad (13)$$

Миқдорларнинг максимал абсолют хатоликларини мос равишда $|\Delta^* x|$, $|\Delta^* y|$ ва $|\Delta^* z|$ билан белгиласак, охирги тенгсизликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$|\Delta^* z| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right||\Delta^* x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right||\Delta^* y|. \qquad (14)$$

Мисоллар.

1. Агар $u = x + y + z$ бўлса, у ҳолда

$$|\Delta * u| = |\Delta * x| + |\Delta * y| + |\Delta * z|.$$

2. Агар $z = xy$ бўлса, $|\Delta * z| = |x||\Delta * y| + |y||\Delta * x|$ бўлади.

3. Агар $z = \frac{x}{y}$ бўлса, у ҳолда

$$|\Delta * z| = \left|\frac{1}{y}\right||\Delta * x| + \left|\frac{x}{y^2}\right||\Delta * y|.$$

4. Тўғри бурчакли ABC учбурчакнинг катети $b = 121{,}56м$, бир бурчаги $A = 25^0 21'40''$, бундан ташқари катетни аниқлашдаги максимал абсолют хатолик $|\Delta * b| = 0{,}05м$, A бурчакни аниқлашдаги максимал абсолют хатолик $|\Delta * A| = 12''$. Учбурчакнинг a катетини $a = btgA$ формула билан ҳисоблашда йўл қўйиладиган максимал абсолют хатоликни топинг.

Ечиш. (14) формулага биноан

$$|\Delta * a| = |tgA||\Delta * b| + \frac{|b|}{\cos^2 A}|\Delta * A|.$$

Агар тригонометрик функциялар жалвалидан фойдаланиб ва $|\Delta * A| = 12''$ ни радианларда ифодалаб, ўрнига қўйсак:

$$|\Delta * a| = tg25^0 21'40'' \cdot 0{,}05 + \frac{121{,}56 \qquad 12}{\cos^2 25^0 21'40'' \; 206265} =$$
$$= 0{,}0237 + 0{,}0087 = 0{,}0324м$$

Бирор миқдорнинг Δx хатолигини бу миқдорнинг тақрибий x қийматига бўлган нисбати шу миқдорнинг нисбий хатолиги деб аталади. Агар бу хатоликни δx билан белгиласак, $\delta x = \frac{\Delta x}{x}$ бўлади.

x миқдорнинг максимал нисбий хатолиги деб, максимал абсолют хатолигини x нинг абсолют қийматига бўлган нисбатига айтамиз:

$$|\delta * x| = \frac{|\Lambda * x|}{|x|}. \qquad (15)$$

Агар (14) ни $|z| = |f(x,y)|$ га бўлсак:

$$\frac{|\Delta * z|}{|z|} = \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f}\right||\Delta * x| + \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f}\right||\Delta * y|, \qquad (16)$$

лекин бу ерда

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f} = \frac{\partial}{\partial x}\ln|f|, \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f} = \frac{\partial}{\partial y}\ln|f|.$$

Шу сабабли (16) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$|\delta * z| = \left|\frac{\partial}{\partial x}\ln|f|\right||\Delta * x| + \left|\frac{\partial}{\partial y}\ln|f|\right||\Delta * y|. \qquad (17)$$

Бу тенгликнинг ўнг томонига (14) ни қўлласак:

$$|\delta * z| = |\Delta * \ln|f||. \qquad (18)$$

(18) дан тақрибий ҳисоблашларда кенг қўлланалиган қуйидаги қоидалар келиб чиқади:

1. Агар $z = xy$ бўлса, 2-мисолга кўра

$$|\delta^* z| = \frac{|y||\Delta^* x|}{|xy|} + \frac{|x||\Delta^* y|}{|xy|} = \frac{|\Delta^* x|}{|x|} + \frac{|\Delta^* y|}{|y|} = |\delta^* x| + |\delta^* y|.$$

2. $z = \dfrac{x}{y}$ бўлсин. У ҳолда 3-мисолга кўра

$$|\delta^* z| = |\delta^* x| + |\delta^* y|.$$

4-*мисол*. Агар маятникнинг узунлиги l, оғирлик кучининг тезланиши g бўлса, маятникнинг тебраниш даври

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

формула бўйича ҳисобланади.

Агар $\pi \approx 3{,}14$ (0,005 аниқлик билан), $l = 1$м (0,01 м аниқлик билан), $g = 9{,}8\ {}^{м}\!/_{c^2}$ (0,02 ${}^{м}\!/_{c^2}$ аниқлик билан десак, бу формулада ҳисобланган натижада йўл қўйилган нисбий хатоликни топинг.

Ечиш. Бу хатоликни топиш учун (18) ни қўллаймиз. Бунинг учун

$$\ln T = \ln 2 + \ln\pi + \frac{1}{2}\ln l - \frac{1}{2}\ln g$$

ни ҳисоблаб оламиз.

Шартга кўра $\Delta^*\pi = 0{,}005, \Delta^* l = 0{,}001 м, \Delta^* g = 0{,}02\ {}^{м}\!/_{c^2}$.

Шунинг учун

$$\Delta^* \ln T = \frac{\Delta^*\pi}{\pi} + \frac{\Delta^* l}{2l} + \frac{\Delta^* g}{2g} = \frac{0{,}005}{3{,}14} + \frac{0{,}01}{2} + \frac{0{,}02}{2 \cdot 9{,}8} = 0{,}0076.$$

Демак, йўл қўйилган максимал нисбий хатолик

$$\delta^* T = 0{,}0076 = 0{,}76\%$$

экан.

6-§. МУРАККАБ ФУНКЦИЯНИНГ ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛАРИ. ТЎЛА ҲОСИЛА. МУРАККАБ ФУНКЦИЯНИНГ ТЎЛА ДИФФЕРЕНЦИАЛИ

Агар

$$z = F(u, \vartheta) \tag{1}$$

тенгламада u ва ϑ лар эркли x ва y ўзгарувчиларнинг функциялари бўлса,

$$u = \varphi(x, y),\ \vartheta = \psi(x, y), \tag{2}$$

у ҳолда (1) ва ларнинг мураккаб функцияси бўлади. Уни ва лар орқали қуйидагича ифодаласа ҳам бўлади:

$$z = F(\varphi(x, y), \psi(x, y)). \tag{3}$$

Фараз қилайлик, , $\varphi(x, y)$ ва $\psi(x, y)$ функциялар барча аргументлари бўйича узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин. (3) дан фойдаланмасдан, (1) ва (2) тенгламалар орқали $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ хусусий ҳосилаларни топайлик.

y ни ўзгармас деб, x га Δx орттирма берайлик. У ҳолда (2) га кўра, u ва ϑ лар ҳам $\Delta_x u, \Delta_x \vartheta$ орттирмалар олади. (1) га асосан $z = F(u, \vartheta)$ ҳам 5-§, (7) формула орқали ифодаланувчи Δz орттирма олади:

$$\Delta z = \frac{\partial F(u, \vartheta)}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial F(u, \vartheta)}{\partial \vartheta}\Delta_x \vartheta + \gamma_1 \Delta_x u + \gamma_2 \Delta_x \vartheta.$$

Бу тенгликнинг ҳар бир ҳадини Δx га бўламиз:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial \vartheta}\frac{\Delta_x \vartheta}{\Delta x} + \alpha_1 \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \alpha_2 \frac{\Delta_x \vartheta}{\Delta x}.$$

Агар $\Delta x \to 0$ бўлса, $\Delta_x u \to 0$, $\Delta_x \vartheta \to 0$ ва $\alpha_1 \to 0$, $\alpha_2 \to 0$. Охирги тенгликда $\Delta x \to 0$ бўлганда лимитга ўтамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial x}. \tag{4}$$

Энди, айнан шундек мулоҳаза юритиб (x ни ўзгармас деб, y га Δy орттирма берсак):

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \tag{5}$$

тенгликка эга бўламиз.

Эслатма. Аргументларнинг саноги кўп бўлганда ҳам хусусий ҳосилалар шунга ўхшаш топилади.

Мисол: $w=u^2\vartheta-t^3$ бўлиб, $u=x-y$; $\vartheta=x\leftarrow y$; $t=x+y$ бўлсин.

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}=2u\vartheta+u^2y-3t^2=$$

$$=2(x-y)xy-(x-y)^2y-3(x+y)^2,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=2u\vartheta(-1)-u^2x-3t^2=$$

$$=-2(x-y)xy-(x-y)^2x-3(x+y)^2.$$

Агар $z=F(x,y,u,\vartheta)$ функция берилган бўлиб, y, u, ϑ лар ўз навбатида фақат x нинг функциялари бўлса, яъни $y=f(x)$, $u=\varphi(x)$, $\vartheta=\psi(x)$, у ҳолда z фақат битта x ўзгарувчининг функцияси бўлиб қолади ва ундан оддий dz/dx ҳосилани топиш масаласини қўйиш мумкин. У ҳолда

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial x},$$

бу ерда $\frac{dx}{dx}=1,\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{dy}{dx},\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{du}{dx},\frac{\partial \vartheta}{\partial x}=\frac{d\vartheta}{dx}$ эканлигини эътиборга олсак,

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\frac{d\vartheta}{dx} \tag{6}$$

ҳосил бўлади. Бу ҳосилани тўла ҳосила, деб атаймиз.

Мисол. $z=\sqrt{x^3+y}; y=\sin 2x$.

Ечиш.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y}};\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{x^3+y}};\frac{dy}{dx}=2\cos 2x$$

У ҳолда

$$\frac{dz}{dx}=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y}}+\frac{1}{2\sqrt{x^3+y}}\cdot 2\cos 2x=\frac{3x^2+2\cos 2x}{2\sqrt{x^3+\sin 2x}}$$

бўлади.

Энди, (1) ва (2) тенгликлар билан аниқланувчи мураккаб функциянинг тўла дифференциалини топайлик. Бунинг учун (4) ва (5) ларни тўла дифференциалнинг

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{7}$$

формуласига қўйсак:

$$dz=\left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)dy.$$

Ифодаларда ўрин алмаштиришлар бажарсак:

$$dz=\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial \vartheta}{\partial x}dy\right)+\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\left(\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial \vartheta}{\partial y}dx\right) \tag{8}$$

Агар

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=du,\quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x}dx+\frac{\partial \vartheta}{\partial y}dy=d\vartheta$$

эканлигини эсласак, у ҳолда (8) ни қуйидагича ёзса бўлади:

$$dz=\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial \vartheta}d\vartheta \tag{9}$$

ёки

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial \vartheta}d\vartheta. \tag{10}$$

Тўла дифференциалнинг (7) ва (10) ифодаларини солиштирсак, уларнинг умумий кўриниши бир хил эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Тўла дифференциалнинг бу хусусияти дифференциал кўринишининг инвариантлиги, деб аталади.

7-§. ОШКОРМАС ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛАСИ

Аввал битта эркли ўзгарувчининг ошкормас функциясидан ҳосила олишни кўриб чиқамиз.

Теорема. *x нинг узлуксиз функцияси*

$$F(x, y)=0 \tag{1}$$

ошкормас тенглама билан берилган бўлсин. Агар (1) тенгламани қаноатлантирадиган (x, y) нуқтани ўз ичига олган бирор D соҳада $F(x, y)$, $F_x'(x, y)$, $F_y'(x, y)$ лар узлуксиз бўлиб, $F_y'(x, y)\neq0$ бўлса, у ҳолда

$$y_x^{|} = -\frac{F_x^{|}(x,y)}{F_y^{|}(x,y)} \tag{2}$$

бўлади.

Исбот. x нинг бирор қийматида $F(x, y)=0$ бўлсин. x га Δx орттирма берсак, y Δy орттирма олади. У ҳолда (1) га асосан

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y)=0$$

бўлади.

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x, y)=0$$

айирмани хусусий ҳосилалар орқали ифодалаймиз:

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x+y)=$$

$$=\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y=0$$

Бундан

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y=0$$

ҳосил бўлади. Буни иккала томонини Δx га бўлиб, Δy $y/\Delta x$ ни топамиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}+\alpha_1}{\frac{\partial F}{\partial y}+\alpha_2}.$$

Агар $\Delta x\to0$ бўлганда лимитга ўтсак ва $\alpha_1\to0$ ва $\alpha_2\to0$, ҳамда $\partial F/\partial y\neq0$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \tag{3}$$

бўлади.

Мисол.

$$x^2+\cos(x+y^2)=0. \quad y_x'=?$$

$$y_x^{|}=-\frac{2x-\sin(x+y^2)}{-2y\sin(x+y^2)}=\frac{2x-\sin(x+y^2)}{2y\sin(x+y^2)}$$

Энди, икки аргументли ошкормас кўринишда берилган $F(x, y, z)=0$ функциядан $\partial z/\partial x$ ва $\partial z/\partial y$ хусусий ҳосилаларни топамиз. $\partial z/\partial x$ ни топиш пайтида y ни ўзгармас деб ва (3) формуладан фойдалансак,

$$\partial z/\partial x=-F_x'/F_z'$$

бўлади. Айнан шунга ўхшаш мулоҳазалар билан

$$\partial z/\partial y=-F_y'/F_z'$$

формулани ҳосил қиламиз.

Мисол.

$$e^z+x^2y+z+5=0. \quad F(x, y, z)=e^z+x^2y+z+5$$

$$F_x'=2xy;\ F_y'=x^2;\ F_z'=e^z+1.$$

Демак,

$$z_x^{|}=-\frac{2xy}{e^z+1}, \quad z_y=-\frac{x^2}{e^z+1}.$$

8-§. УРИНМА ТЕКИСЛИК. ДИФФЕРЕНЦИАЛНИНГ ГЕОМЕТРИК МАЪНОСИ

Фараз қилайлик, S сирт текисликнинг бирор соҳасида узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлган

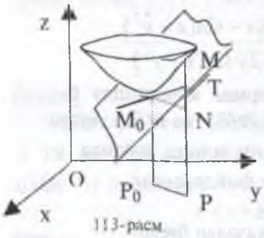
$$z = f(x,y) \tag{1}$$

функциянинг геометрик акси бўлсин.

S сиртга унинг бирор $M_0(x_0, y_0, z_0), z_0 = f(x_0, y_0)$ нуқтасида ўтказилган уринма текислик деб, тенгламаси

$$Z - z_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (X - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (Y - y_0) \tag{2}$$

кўринишда бўлган Π текисликка айтамиз, бу ерда, X, Y, Z ўзгарувчи координаталар, $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0; \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$ — f функция хусусий ҳосилаларининг $P_0(x_0, y_0)$ нуқтадаги қийматлари.



113-расм

Фараз қилайлик, $P(x, y)$ текисликнинг берилган нуқтасига яқин бирор нуқта бўлсин. $P(x, y)$ нуқтадан z ўқига параллел ўтган тўғри чизиқ Π текисликни T нуқтада, S сиртни M нуқтада кесади. M нуқтанинг аппликатаси

$$z = f(x, y),$$

Т нуқтанинг аппликатаси эса

$$z = f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0).$$

M ва T нуқталар орасидаги масофа

$$|MT| = \left| f(x,y) - f(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) \right| \tag{3}$$

бўлса, P ва P_0 нуқталар орасидаги масофа

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Шартга кўра f функция (x_0, y_0) нуқтада узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлгани учун у шу нуқтада дифференциалланувчилир. Шунинг учун (3) нинг ўнг томони нолга ρ дан кўра тезроқ интилади, яъни

$$|MT| \underset{\rho \to 0}{=} o(\rho).$$

Бу хусусият фақат уринма текислигига хос, чунки агар шу хусусиятга тенгламаси

$$Z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

бўлган бошқа Π' текислик ҳам эга булса, у ҳолда ρ→0 бўлганда

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + o(\rho)$$

бўлади ва шу сабабли f функция (x_0, y_0) нуқтада дифференциалланувчи бўлиб,

$$a = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0, b = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$$

бўлади, яъни $\Pi' = \Pi$ бўлади.

Демак, S сирт ўзининг $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ нуқтасида уринма текисликка эга бўлиши учун, f функция P_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлиши зарур ва етарли экан.

(2) нинг ўнг томони f функциянинг P_0 нуқтадаги дифференциали, чап томони эса Π уринма текисликнинг аппликатасининг орттирмасидир.

Демак, f функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги $(x - x_0, y - y_0)$ орттирмаларга мос келувчи тўла дифференциали геометрик нуқтаи назардан $z = f(x, y)$ сиртга (x_0, y_0) нуқтада ўтказилган уринма текислик аппликатасининг орттирмасини берар экан.

Эслатма. Агар $z = f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтада хусусий ҳосилалари мавжуд бўлса ҳам, лекин шу нуқтала дифференциалланувчи бўлмаса, у ҳолда (2) текисликни $z = f(x,y)$ сиртга (x_0, y_0) нуқтада ўтказилган уринма текислик, деб аташдан маъно йўқ, чунки $\rho \to 0$ да $f(x,y) - Z$ айирма нолга ρ дан тезроқ интилмайди. Масалан, x ва y ўқларида нолга ва текисликнинг бошқа нуқталарида бирга тенг бўлган $z = f(x,y)$ функция учун $f_x'(0,0) = f_y'(0,0) = 0$ ва шу сабабли (2) тенглама $Z=0$ бўлади, лекин x ва y ўқларидан ташқаридаги барча (x,y) нуқталарда $f(x,y) - Z = f(x,y) - 0 = 1$.

Таъриф. *Уринма текисликка уриниш нуқтасида перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ нормал тўғри чизиқ дейилади. Унинг тенгламаси қуйидагича бўлади:*

$$\frac{x - x_0}{f_x'(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y'(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Агар сиртнинг тенгламаси $F(x, y, z)=0$ ошкормас кўринишда берилган бўлса, маълумки хусусий ҳосилалар

$$f_x'(x_0, y_0) = -\frac{F_x'(x_0, y_0, z_0)}{F_z'(x_0, y_0, z_0)}; \quad f_y'(x_0, y_0) = -\frac{F_y'(x_0, y_0, z_0)}{F_z'(x_0, y_0, z_0)}$$

бўлиб, уринма текисликнинг тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$z - z_0 = -(x - x_0)\frac{F_x'(x_0, y_0, z_0)}{F_z'(x_0, y_0, z_0)} - (y - y_0)\frac{F_y'(x_0, y_0, z_0)}{F_z'(x_0, y_0, z_0)}$$

ёки

$$(z-z_0)\ F_z'(x_0,y_0,z_0)+(x-x_0)\ F_x'(x_0,y_0,z_0)+(y-y_0)\ F_y'(x_0,y_0,z_0)=0$$

ёки қисқача

$$(x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x_0} + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{x_0} + (z - z_0)\frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{x_0} = 0.$$

Нормал тўғри чизиқ тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x_0}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{x_0}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{x_0}}.$$

Мисол. $x^2 + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$ айланма эллипсоидга шундай уринма текислик ўтказилсинки, у $x+y-z=0$ текисликка параллел бўлсин.

Ечиш. $\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x_0} = 2x_0,\ \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{x_0} = y_0,\ \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{x_0} = 2z_0$

бўлгани сабабли уринма текислик $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтада

$$2x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0$$

бўлади. Унинг $x+y-z=0$ текисликка параллеллигидан фойдаланамиз:

$$\frac{2x_0}{1} = \frac{y_0}{1} = \frac{2z_0}{-1}.$$

Бунга M_0 нуқтанинг эллипсоидда ётиш шарти $x_0^2+y_0^2/2+z_0^2=1$ ни қўшамиз ва биргаликда ечиб, $M_0^{(1)}(1/2, 1, -1/2)$ ва $M_0^{(2)}(-1/2, -1, 1/2)$ ларни топамиз. Бу нуқталарнинг координаталарини уринма текислик тенгламасига қўйиб, иккита текисликни топамиз:

$$x+y-z=2 \text{ ва } x+y-z=-2.$$

9-§. БИРЖИНСЛИ ФУНКЦИЯЛАР

Таъриф. *Агар f функциянинг ҳар бир аргументини t га кўпайтирганда f функция t^k кўпайтувчига эга бўлиб қолса, яъни*

$$f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z) \qquad (1)$$

бўлса, бирор D соҳада аниқланган $f(x, y, z)$ функция k — даражали биржинсли функция дейилади.

Мисоллар:

1. $3x^2 - 2xy + 5y^2$ иккинчи даражали биржинсли кўпҳаддир, чунки

$$3(tx)^2 - 2(tx)(ty) + 5(ty)^2 = 3t^2x^2 - 2t^2xy +$$
$$+ 5t^2y^2 = t^2(3x^2 - 2xy + 5y^2)$$

2. $x\cdot\frac{\sqrt{x^4+y^4}}{x-y}\cdot\ln\frac{x}{y}$ иккинчи даражали биржинсли функциядир. Ҳақиқатан

$$(tx)\cdot\frac{\sqrt{(tx)^4+(ty)^4}}{tx-ty}\cdot\ln\frac{tx}{ty}=t^2\left(x\cdot\frac{\sqrt{x^4+y^4}}{x-y}\cdot\ln\frac{x}{y}\right).$$

Биржинслилик кўрсаткичи k бутун сон бўлиши шарт эмас, у ихтиёрий ҳақиқий сон бўлиши мумкин.

3. $x^\pi\cdot\sin\frac{y}{x}+y^\pi\cdot\cos\frac{y}{x}$ функция π-даражали биржинсли функция. Буни текширишни ўқувчининг ўзига ҳавола қиламиз.

Фараз қилайлик, бизга k-даражали биржинсли $f(x,y,z)$ функция берилган бўлсин. У ҳолда (1) тенглик ўринли бўлади. Агар бу тенгликда $t=\frac{1}{x}$ десак:

$$f\left(\frac{1}{x}\cdot x,\frac{1}{x}\cdot y,\frac{1}{x}\cdot z\right)=f\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{x}\right)^k f(x,y,z)=\frac{1}{x^k}f(x,y,z)$$

ёки бундан

$$f(x,y,z)=x^k\cdot f\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right) \qquad (2)$$

келиб чиқади. (2) тенглик k-даражали биржинсли $f(x,y,z)$ функциянинг умумий кўриниши, деб аталади.

Биржинслилик кўрсаткичи $k=0$, яъни $f(x,y,z)$ функция 0-даражали биржинсли функция бўлса, у ҳолда уни соддагина қилиб биржинсли функция, деб атаймиз.

Демак, биржинсли функция учун

$$f(tx,ty,tz)=f(x,y,z)=f\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right) \qquad (3)$$

муносабат ўринли бўлар экан.

Энди фараз қилайлик, k-даражали биржинсли $f(x,y,z)$ функция очиқ D соҳада барча аргументлари бўйича узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. D соҳадан ихтиёрий равишда бирор (x_0,y_0,z_0) нуқта танласак, (1) га асосан ҳар қандай $t>0$ учун

$$f(tx_0,ty_0,tz_0)=t^k f(x_0,y_0,z_0)$$

тенглик ўринли булади.

Бу тенгликни t бўйича дифференциалласак (тенгликнинг чап томони мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидаси бўйича, ўнг томони эса даражали функцияни дифференциаллаш формуласига кўра бажарилади):

$$f_x{}'(tx_0,ty_0,tz_0)\cdot x_0+f_y{}'(tx_0,ty_0,tz_0)\cdot y_0+$$
$$+f_z{}'(tx_0,ty_0,tz_0)\cdot z_0=kt^{k-1}\cdot f(x_0,y_0,z_0).$$

Агар бу ерда, $t=1$ десак, қуйидаги формулага келамиз:

$$f_x{}'(x_0,y_0,z_0)\cdot x_0+f_y{}'(x_0,y_0,z_0)\cdot y_0+$$
$$+f_z{}'(x_0,y_0,z_0)\cdot z_0=k\cdot f(x_0,y_0,z_0).$$

Демак, D соҳанинг ихтиёрий (x,y,z) нуқтаси учун

$$\begin{aligned}&f_x{}'(x,y,z)\cdot x+f_y{}'(x,y,z)\cdot y+\\&+f_z{}'(x,y,z)\cdot z=k\cdot f(x,y,z)\end{aligned} \qquad (4)$$

тенглик ўринли экан. Бу тенгликни Эйлер формуласи, деб аташади.

Биз ҳозир бу тенгликни ихтиёрий барча аргументлари буйича узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлган k-даражали биржинсли $f(x,y,z)$ функция қаноатлантиришини кўрсатдик. Тескарисини, яъни (4) Эйлер формуласини қаноатлантирувчи хусусий ҳосилалари билан узлуксиз бўлган ҳар қандай функция k-даражали биржинсли функция бўлиши зарурлигини кўрсатиш мумкин.

10-§. ЮҚОРИ ТАРТИБЛИ ҲОСИЛАЛАР ВА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАР

10.1. Юқори тартибли ҳосилалар

Агар $z = f(x, y)$ функция[1] бирор очиқ D соҳада аргументларининг бирортаси бўйича хусусий ҳосилага эга бўлса, у ҳосила ўз навбатида яна ўша ўзгарувчиларнинг функцияси бўлиб, шу ўзгарувчилар бўйича хусусий ҳосилага эга бўлиши мумкин. Бу ҳосилалар $z = f(x, y)$ функция учун иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар бўлади.

Агар биринчи ҳосила, масалан, x бўйича олинган бўлса, у ҳолда ундан x, y лар бўйича олинган ҳосилалар қуйидагича белгиланади:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Айрим ҳолларда иккинчи ҳосилалар учун

$$z_{x^2}'' = (z_x')_x', \quad z_{xy}'' = (z_x')_y'$$

белгилашлар ҳам ишлатилади.

Агар биринчи ҳосила y бўйича олинган бўлса, у ҳолда иккинчи ҳосилалар қуйидагича белгиланади:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z_{yx}'', \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z_{y^2}''.$$

Учинчи, тўртинчи ва ҳ.к. юқори тартибли ҳосилалар айнан шундай киритилади.

Ҳар хил ўзгарувчилар бўйича олинган юқори тартибли

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} \dots$$

хусусий ҳосилалар аралаш ҳосилалар дейилади.

---

[1] Биз бу ерда ҳам тушуниш осон булиши учун икки эркли узгарувчи булган ҳол билан чегараланамиз.

1-мисол. $z = x^4 y^3$. Учинчи тартибгача барча хусусий ҳосилаларни топинг.

Ечиш. $z_x' = 4x^3 y^3$, $z_{xx}'' = 12x^2 y^3$, $z_{xy}'' = 12x^3 y^2$, $z_{xxx}''' = 24xy^3$,

$z_{xxy}''' = 36x^2 y^2$, $z_{xyx}''' = 36x^2 y^2$, $z_{xyy}''' = 24x^3 y$,

$z_y' = 3x^4 y^2$, $z_{yx}'' = 12x^3 y^2$, $z_{yy}'' = 6x^4 y$, $z_{yxx}''' = 36x^2 y^2$,

$z_{yxy}''' = 24x^3 y$, $z_{yyx}''' = 24x^2 y$, $z_{yyy}''' = 6x^4$.

2-мисол. $z = arctg\,\frac{x}{y}$. Иккинчи тартибгача барча хусусий ҳосилаларни ҳисобланг.

Ечиш. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

10.2. Аралаш ҳосилалар ҳақидаги теорема

Юқоридаги иккала мисолда ҳам айрим аралаш ҳосилалар ўзаро тенг эканлигини кузатган эдик. Лекин бундан ҳар доим шундай бўлаверади, дейиш хато бўлади. Бунга мисол сифатида

$$x^2 + y^2 > 0 \text{ лар учун } f(x, y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad f(0,0) = 0$$

функцияни кўрайлик.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cdot\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)$$ ($x^2+y^2>0$ лар учун) ва

$$f_x'(0,0)=0.$$

Агар x га нол қиймат берсак, y нинг ихтиёрий қиймати учун $f_x'(0,y)=-y$ бўлади. Буни y бўйича дифференциаллаcак $f_{xy}''(0,y)=-1$ га эга бўламиз. Хусусан $(0,0)$ нуқтада ҳам $f_{xy}''(0,0)=-1$ бўлади.

Айнан шундек мулоҳазалар билан $f_{yx}''(0,0)=1$ эканлигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

Демак, берилган функция учун $f_{xy}''(0,0)\neq f_{yx}''(0,0)$ экан.

Аралаш ҳосилаларнинг тенглиги ҳақидаги фикрларни Эйлер ва Клеронинг[1] ишларида ҳам учратиш мумкин, лекин бунинг қатъий исботини 1873 йилда Шварц[2] берган.

Қуйидаги теорема аралаш хусусий ҳосилаларнинг тенг бўлиш шартларини беради.

Теорема. *Агар: 1) $f(x,y)$ функция бирор очиқ D соҳада аниқланган; 2) шу соҳада биринчи f_x' ва f_y', иккинчи аралаш f''_{xy} ва f''_{yx} хусусий ҳосилаларга эга ва ниҳоят 3) f''_{xy} ва f''_{yx} хусусий ҳосилалар x,y ларнинг функцияси сифатида D соҳанинг бирор (x_0,y_0) нуқтасида узлуксиз бўлса, у ҳолда шу нуқтада*

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0) \qquad (1)$$

бўлади.

---

[1] Алексис Клод Клеро (1713-1765) — буюк фаранг математиги.

[2] Карл Герман Армандуа Шварц (1843-1921) — олмон математиги.

Исботи. Ҳақиқатан ихтиёрий $\Delta x,\Delta y$ орттирмалар учун

$$\begin{aligned}
&\Delta_x\left[\Delta_y f(x_0,y_0)\right]=\Delta_x\left[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\right]=\\
&\quad=\left[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)\right]-\\
&\left[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\right]=\left[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-\right.\\
&\left.-f(x_0,y_0+\Delta y)\right]-\left[f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)\right]=\\
&=\Delta_y\left[f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)\right]=\Delta_y\left[\Delta_x f(x_0,y_0)\right].
\end{aligned} \qquad (2)$$

Ёрдамчи

$$\varphi(x,y_0)=f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)$$

функцияни киритайлик. Умумийликни бузмаган ҳолда $\Delta x>0$ деб, бу функцияга $\left(x_0,x_0+\Delta x\right)$ оралиқ учун Лагранж теоремасини қўлласак (теореманинг 1-шартига кўра, f_x' хусусий ҳосила мавжуд бўлгани учун бунга ҳаққимиз бор):

$$\begin{aligned}
&\Delta_x\left[\Delta_y f(x_0,y_0)\right]=\Delta_x\varphi(x_0,y_0)=\varphi(x_0+\Delta x,y_0)-\\
&\quad-\varphi(x_0,y_0)=\varphi'(x_0+\theta\Delta x,y_0)\cdot\Delta x=\\
&\Delta x\cdot\left[f_x'(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y)-f_x'(x_0+\theta\Delta x,y_0)\right],
\end{aligned} \qquad (3)$$

бу ерда $0<\theta<1$.

Энди, теореманинг 2-шартига кўра f_{xy} хусусий ҳосила мавжуд бўлгани учун охирги тенгликка яна Лагранж теоремасини қўллаш мумкин. У ҳолда:

$$\Delta_x\left[\Delta_y f(x_0,y_0)\right]=\Delta x\cdot\Delta y\cdot f''_{xy}\left(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta_1\Delta y\right), \qquad (4)$$

бу ерда $0<\theta_1<1$.

Теореманинг 3-шартига кўра f''_{xy} аралаш ҳосила (x_0,y_0) нуқтада узлуксиз бўлгани учун (4) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\Delta_x\left[\Delta_y f(x_0,y_0)\right]=\Delta x\cdot\Delta y\cdot[f''_{xy}\left(x_0,y_0\right)+\varepsilon], \qquad (5)$$

бу ерда $\Delta x,\Delta y\to 0$ бўлганда $\varepsilon\to 0$ бўлади.

(5) да $\Delta x,\Delta y\to 0$ бўлганда лимитга ўтсак:

$$\lim \frac{\Delta_x\left[\Delta_y f(x_0,y_0)\right]}{\Delta x\Delta y} = f''_{xy}(x_0,y_0). \qquad (6)$$

Айнан шундек мулоҳазалар билан

$$\psi(x_0,y) = f(x_0+\Delta x, y) - f(x_0,y)$$

ёрдамчи функцияни қўллаган ҳолда

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta_y\left[\Delta_x f(x_0,y_0)\right]}{\Delta x\Delta y} = f''_{yx}(x_0,y_0) \qquad (7)$$

муносабатга келамиз.

У ҳолда (2) тенгликка асосан (6) ва (7) лардан (1) келиб чиқади.

1-эслатма. Индукция усули ёрдамида бу теоремани фақат дифференциаллаш тартиби билангина фарқ қиладиган исталган тартибли аралаш хусусий ҳосилаларга қўллаш мумкин. Масалан,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial^2 x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]\right\} = \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial^2 x}.$$

2-эслатма. Юқоридаги мисолда кўрилган функция учун теореманинг шарти бажарилмаяпти, чунки функциянинг аралаш ҳосилалари (0,0) нуқтада узлуксиз эмас. Шу сабабли бу функциянинг аралаш хусусий ҳосилалари тенг эмас.

10.3. Юқори тартибли дифференциаллар

Бирор D соҳада 1-тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлган $z = f(x,y)$ функция берилган бўлсин. У ҳолда унинг тўла дифференциали деб,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

ифодага айтган эдик. Бундан кўринадики, dz ҳам x, y ларнинг функцияси бўлади. Агар f иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлса, dz биринчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлади. Шу сабабли

унинг тўла дифференциали $d(dz)$ тўғрисида гапириш мумкин. Уни f нинг иккинчи тартибли тўла дифференциали деб, $d^2 z$ кўринишда белгилаймиз. Демак,

$$d^2 z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx +$$

$$+ d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dy\right)dx +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Айнан шундек, иккинчи тартибли дифференциалнинг дифференциалини учинчи тартибли дифференциал, деб атаб, $d^3 z$ кўринишда белгилаймиз ва ҳ. к. $(n-1)$ - тартибли дифференциалнинг тўла дифференциалини n - тартибли дифференциал деб, $d^n z$ кўринишда белгилаймиз.

n -тартибли дифференциал мавжуд бўлиши учун f n -тартибгача барча узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлиши зарур. Кейинги тартибли дифференциалларни ёзиш қадам сайин оғирлашиб боради. Бу ишни енгиллаштириш мақсадида қуйидагича иш тутилади:

Биринчи дифференциалда z ни шартли равишда қавс ташқарисига чиқарамиз

$$dz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)\cdot z.$$

Агар иккинчи тартибли дифференциалда ҳам z ни шартли равишда қавс ташқарисига чиқарсак,

$$d^2 z = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2\right)\cdot z. \qquad (8)$$

қавс ичидаги ифода худди биринчи дифференциалдаги қавс ичидаги ифоданинг квадратига ўхшайди. Агар (8) даги қавс ичидаги ифодани шартли равишда

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2$$

га тенг деб олсак, у ҳолда

$$d^2z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2\cdot z$$

ни ҳосил қиламиз.

Айнан шундек, индукция усулини қўллаб, ихтиёрий n учун шартли

$$d^nz=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n\cdot z \tag{9}$$

тенгликка келамиз.

Агар берилган $z=f(x,y)$ функция n-тартибгача барча узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда (9) га бином формуласини қўллаб, қуйидаги кўринишга келиш мумкин:

$$d^nz=\sum_{i=1}^{n}C_n^{n-i}\frac{\partial^n}{\partial x^{n-i}\partial y^i}dx^{n-i}dy^i\cdot z=\sum_{i=1}^{n}C_n^{n-i}\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-i}\partial y^i}dx^{n-i}dy^i\,.$$

Энди агар, $z=f(x,y)$ мураккаб функция бўлса, яъни бу ерда,

$$x=\varphi(t_1,t_2)\,,\ \ y=\psi(t_1,t_2)$$

бўлса, у ҳолда биринчи дифференциал ўз кўринишини сақласа ҳам иккинчи дифференциал ўз кўринишини сақламаслиги мумкин, чунки энди dx,dy лар ўзгармас бўлмаслиги мумкин.

Берилган функциянинг иккинчи дифференциалини ҳисоблайлик:

$$\begin{aligned}d^2z&=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot dx+d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot dy+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot d(dx)+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot d(dy)=\\&=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2\cdot z+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot d^2x+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot d^2y.\end{aligned} \tag{10}$$

(10) тенгликдан ҳам кўринадики, умуман айтганда, тартиби бирдан юқори бўлган дифференциаллар учун инвариантлик хусусияти ўринли эмас экан.

Агар хусусан x,y лар t_1,t_2 ларнинг чизиқли функциялари бўлса, яъни

$$x=a_1t_1+b_1t_2\,,\ \ y=a_2t_1+b_2t_2$$

бўлса, у ҳолда

$$dx=a_1dt_1+b_1dt_2=a_1\Delta t_1+b_1\Delta t_2\,,$$
$$dy=a_2dt_1+b_2dt_2=a_2\Delta t_1+b_2\Delta t_2\,,$$

яъни dx,dy лар t_1,t_2 ларга боғлиқ эмас. Бундан, агар эркли x,y ўзгарувчиларни t_1,t_2 ларнинг чизиқли ифодалари билан алмаштирилса, барча юқори тартибли дифференциаллар кўриниши инвариант булиши келиб чиқади.

10.5. Тейлор формуласи

Фараз қилайлик, $z=f(x,y)$ функция бирор (x_0,y_0) нуқта атрофида n-тартибгача барча узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. x_0 ва y_0 ларга шундай Δx ва Δy орттирмалар берайликки, (x_0,y_0) ва $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизиқ кесмаси (x_0,y_0) нуқтанинг қаралаётган атрофидан ташқарига чиқиб кетмасин. Бу кесма тенгламаси қуйидагича:

$$x=x_0+t\Delta x\,,\ \ y=y_0+t\Delta y\ \ (0\le t\le 1)$$

бўлади. У ҳолда $z=f(x,y)$ функция бу кесма бўйлаб битта t ўзгарувчининг функцияси бўлиб қолади:

$$f(x,y)=f\left(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y\right)=F(t)\,. \tag{11}$$

Бундан

$$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=F(1)-F(0)\,. \tag{12}$$

$F(t)$ нинг t_0=0 нуқта атрофида Маклорен формуласи бўйича ёйилмасидан фойдаланамиз:

$$F(t)=F(0)+\frac{F'(0)}{1!}t+\ldots+\frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1}+\frac{F^{(n)}(\theta)}{n!}t^{n}\ (0<\theta<t).$$

Агар бу ерда $t=1$ десак,

$$\Delta f(x_0,y_0)=F(1)-F(0)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{F^{(k)}(0)}{k!}+\frac{F^{(n)}(\theta)}{n!},\ 0<\theta<t, \quad (13)$$

тенгликка эга бўламиз.

(11) тенгликдан фойдаланиб, $F(t)$ функциянинг ҳосилаларини ҳисоблайлик:

$$F'(t)=\frac{\partial f(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial f(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)}{\partial y}\cdot\Delta y.$$

Агар бу ерда $t=0$ десак,

$$F'(0)=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cdot\Delta y=df(x_0,y_0)$$

бўлади. Айнан шундек,

$$F''(0)=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\cdot\Delta x^2+2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\cdot\Delta x\Delta y+$$

$$+\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\cdot\Delta y^2=d^2 f(x_0,y_0),$$

$$F'''(0)=d^3 f(x_0,y_0),\ \ldots,\ F^{(n-1)}(0)=d^{n-1}f(x_0,y_0).$$

Буларни (13) га қўйсак,

$$\Delta f(x_0,y_0)=\frac{df(x_0,y_0)}{1!}+\ldots+\frac{d^{n-1}f(x_0,y_0)}{(n-1)!}+ \quad (14)$$

$$+\frac{1}{n!}d^n f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)$$

га эга бўламиз.

(14) формула $z=f(x,y)$ функция учун Тейлор формуласи деб аталади. Унинг хусусий ҳосилалар бўйича ифодаси анча мураккаб. Хусусий $n=1$ ва $n=2$ бўлган ҳоллар учун бу формула қуйидагича кўринишда бўлади:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0))}{\partial x}(x-x_0)+$$

$$+\frac{\partial f(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0))}{\partial y}(y-y_0);$$

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0))}{\partial x^2}(x-x_0)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 f(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0))}{\partial y^2}(y-y_0)^2\right]. \quad (15)$$

11-§. ЮКСАКЛИК СИРТЛАРИ

Бизга R_3 фазонинг бирор D соҳасида аниқланган

$$u=f(x,y,z) \quad (1)$$

функция берилган бўлсин. Бунда D соҳада скаляр майдон берилган дейилади. Агар масалан, u бу ерда $M(x,y,z)$ нуқтанинг ҳароратини билдирса, ҳароратларнинг скаляр майдони; агар D бирор газ ёки суюқлик билан тўлдирилган бўлиб, u унинг босимини билдирса, босимларнинг скаляр майдони берилган дейилади ва ҳ. к.

Бирор ўзгармас c сон учун D соҳанинг

$$f(x,y,z)=c \quad (2)$$

тенгликни қаноатлантирадиган нуқталари тўплами R_3 да бирор сиртни беради. Агар c га бошқа қиймат берсак, бошқа сирт ҳосил бўлади. c га ҳар хил қийматлар бериш натижасида ҳосил бўладиган бундай сиртларни юксаклик сиртлари, деб аташади.

1-*мисол*. Берилган

$$u=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}$$

скаляр майдон учун юксаклик сиртлари яримўқлари мос равишда $2\sqrt{c}$, $3\sqrt{c}$, $4\sqrt{c}$ бўлган

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=c$$

эллипсоидлар бўлади.

Агар f x, y нинг функцияси бўлса, у ҳолда

$$u=f(x,y)$$

скаляр майдоннинг юксаклик сиртлари Oxy координаталар текислигидаги

$$f(x,y)=c$$

чизиқлардан иборат бўлади. Шунинг учун бундай ҳолда уларни юксаклик чизиқлари, деб атаймиз.

2-*мисол.* Берилган

$$z=1-x^2-y^2$$

скаляр майдоннинг юксаклик чизиқлари тенгламалари

$$1-x^2-y^2=c$$

бўлган чизиқлардан иборат бўлади. Булар маълумки, маркази координаталар бошида бўлган $\sqrt{1-c}$ радиусли концентрик айланалардир. Хусусан, c=0 бўлганда $x^2+y^2=1$ айлана ҳосил бўлади.

12-§. ЙЎНАЛИШ БЎЙИЧА ҲОСИЛАЛАР

Фараз қилайлик, $\bar{\omega}=(\omega_x,\omega_y)$ ихтиёрий бирлик вектор бўлсин. У ҳолда 2-§ да берилган йўналиш бўйича лимитнинг таърифига асосан, f функциянинг (x,y) нуқтадаги $\bar{\omega}$ йўналиш бўйича ҳосиласи деб,

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t\omega_x,y+t\omega_y)-f(x,y)}{t}=\frac{\partial f}{\partial\bar{\omega}} \qquad (3)$$

лимитга (агар у мавжуд бўлса) айтамиз. Агар t мусбат қийматлар қабул қилиб, нолга интилса, уни f функциянинг t бўйича t=0 нуқтадаги ўнг ҳосиласи деб, агар t манфий қийматлар қабул қилиб, нолга интилса, уни f функциянинг t бўйича t=0 нуқтадаги чап ҳосиласи деб атаймиз.

Айтиш жоизки, f функциядан x нинг мусбат йўналиши бўйича олинган ҳосила унинг x бўйича олинган ўнг хусусий ҳосиласига, x нинг манфий йўналиши бўйича олинган ҳосила x бўйича олинган чап хусусий ҳосиласининг тескари ишора билан олинган қийматига тенг бўлади.

Теорема. *Агар f функция (x,y,z) нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда унинг ихтиёрий бирлик вектор $\bar{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ йўналишида ҳосиласи мавжуд ва у қуйидаги формула ёрдамида аниқланади:*

$$\frac{\partial f}{\partial\bar{n}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\,, \qquad (4)$$

бу ерда, хусусий ҳосилалар (x,y,z) нуқтада ҳисобланган ва α,β,γ лар $\bar{n}$ векторнинг мос равишда x,y,z ўқлар билан ҳосил қилган бурчакларидир.

Исботи. Йўналиш бўйича ҳосиланинг (3) таърифига ва тўла ҳосила формуласига (6-§, (6) формулага қаранг) кўра:

$$\frac{\partial f}{\partial\bar{n}}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t\cos\alpha,y+t\cos\beta,z+t\cos\gamma)-f(x,y,z)}{t}=$$

$$=\left[\frac{d}{dt}f(x+t\cos\alpha,y+t\cos\beta,z+t\cos\gamma)\right]_{t=0}=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\,.$$

Теореманинг акси ўринли эмас, яъни функциянинг ҳар қандай йўналиш бўйича ҳосилалари мавжудлигидан унинг дифференциалланувчилиги келиб чиқмайди. Масалан, $y=x^2$ параболанинг нуқталарида бир, ундан ташқаридаги нуқталарда нолга тенг бўлган функция дифференциалланувчи эмас, лекин унинг ихтиёрий йўналиш бўйича ҳосиласи мавжуд.

Агар $x = \varphi(s), y = \psi(s), z = \chi(s) -$ Γ силлиқ чизиқнинг тенгламалари бўлса, бу ерда, параметр s — ёй узунлиги, у ҳолда

$$\frac{dx}{ds} = \varphi'(s), \ \frac{dy}{ds} = \psi'(s), \ \frac{dz}{ds} = \chi'(s)$$

миқдорлар Γ га ўтказилган уринма векторнинг йўналтирувчи косинуслари бўлади. Шунинг учун

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\varphi'(s) + \frac{\partial f}{\partial y}\psi'(s) + \frac{\partial f}{\partial z}\chi'(s) = \frac{d}{ds} f(\varphi(s), \psi(s), \chi(s)),$$

бу ерда, f дифференциалланувчи функция, уринма вектор йўналишида олинган ҳосила бўлади. Уни яна Γ бўйлаб олинган ҳосила, деб ҳам аташади.

13-§. ГРАДИЕНТ

D соҳанинг ҳар бир (x, y, z) нуқтаси учун f нинг (x, y, z) нуқтадаги градиенти, деб аталувчи

$$gradf = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

векторни киритамиз. У ҳолда (4) формуланинг ўнг томонини $gradf$ ва $\vec{n}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси кўринишида ифодаласа бўлади:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = (gradf, \vec{n}).$$

Скаляр кўпайтманинг хоссасига кўра

$$(gradf, \vec{n}) = np_{\vec{n}}(gradf)$$

бўлгани учун

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = np_{\vec{n}}(gradf) \qquad (1)$$

бўлади, яъни f функциянинг (x, y, z) нуқтадаги $\vec{n}$ вектор йўналиши бўйича олинган ҳосиласи унинг шу нуқтадаги градиентини $\vec{n}$ йўналишга бўлган проекциясига тенг экан.

Бундан ҳар қандай бирлик $\vec{n}$ вектор учун

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} =\left|(gradf, \vec{n})\right| \le |gradf| \qquad (2)$$

эканлиги келиб чиқади. Агар $gradf = 0$ бўлса, у ҳолда барча $\vec{n}$ йўналишлар бўйича $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = 0$ бўлади. Агар $gradf \ne 0$ бўлса, у ҳолда $gradf$ бўйлаб йўналган бирлик $\vec{n}_0 = (\cos\alpha_0, \cos\beta_0, \cos\gamma_0)$ вектор йўналишидан бошқа барча йўналишлар учун (2) да қатъий тенгсизлик ўринли бўлади. Агар $\vec{n} = \vec{n}_0$ бўлса, у ҳолда

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}_0} = |gradf|$$

бўлади. Демак,

$$\cos\alpha_0 = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\beta_0 = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}, \qquad (3)$$

$$\cos\gamma_0 = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}.$$

Бу билан биз градиентнинг қуйидаги хоссасини исботладик:

1-хосса. Функциянинг берилган нуқтадаги ҳосиласи максимум қийматига фақат градиент бўйлаб йўналган

$\vec{n}$ йўналиш бўйича эришади. Бу қиймат $|gradf|$ га тенгдир.

Векторларнинг перпендикулярлик шартидан қуйидаги хосса келиб чиқади:

2-хосса. f функциянинг $gradf$ га перпендикуляр бўлган йўналиш бўйича олинган ҳосиласи нолга тенг.

3-хосса. f функциянинг бирор (x_0, y_0, z_0) нуқтадаги градиенти $gradf$ $f(x, y, z) = C$ юксаклик сиртига шу нуқтада ўтказилган уринма текисликка перпендикуляр бўлади.

Ҳақиқатан тенгламаси ошкормас $f(x,y,z)=C$ кўринишда берилган сиртга ўтказилган уринма тенгламаси

$$(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_0 + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_0 + (z-z_0)\frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_0 = 0$$

эди (8-§, (4) формулага қаранг). Бу тенгламадан кўринадики, унинг нормал вектори

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_0, \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_0; \frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_0\right) = gradf$$

бўлади.

Мисол. $u = x^2 + y^2 + z^2$ функциянинг M $(1,1,1)$ нуқтадаги градиенти ва шу градиент йўналишидаги ҳосиласини ҳисобланг.

Ечиш. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 2z$ бўлгани учун $M\,(1,1,1)$ нуқтадаги градиент

$$gradu = (2,2,2)$$

бўлади. Бундан

$$|gradu| = 2\sqrt{3}.$$

Энди (3) формула ёрдамида градиентнинг йўналтирувчи косинусларини топамиз:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

У ҳолда

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3},$$

яъни

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = |gradu|.$$

14-§. ЁПИҚ ТЎПЛАМ

Агар шундай $M > 0$ сон мавжуд бўлсаки, барча $x \in A$ лар учун $|x| \le M$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $A \subset R_n$ тўплам чегараланган дейилади.

A тўплам ёпиқ дейилади, агар A га тегишли бўлган $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ кетма-кетликнинг $x_0 \in R_n$ нуқтага яқинлашишидан $x_0 \in A$ бўлиши келиб чиқса.

Бундан бўш тўплам ва R_n фазоларнинг ёпиқ эканлиги келиб чиқади, лекин R_n тўплам сифатида чегараланмаган.

Бутун R_n фазода узлуксиз $F(x_1,\dots,x_n)$ функция берилган бўлсин. У ҳолда ихтиёрий ўзгармас C сон учун

$$F(x_1,\dots,x_n) = C \tag{1}$$

тенгликни қаноатлантирувчи барча $x = (x_1,\dots,x_n)$ нуқталар тўплами B ёпиқдир.

Ҳақиқатан, агар B бўш тўплам бўлса, яъни (1) ни қаноатлантирувчи бирорта ҳам нуқта бўлмаса, у ҳолда B ёпиқ бўлишини юқорида кўрдик. Энди фараз қилайлик, B бўш бўлмасин ва $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ унинг бирор $x_0 \in R_n$ нуқтага интилувчи кетма-кетлиги бўлсин. У ҳолда кетма-кетлик элементлари (1) ни қаноатлантиради, яъни $F(x^k) = C$ бўлади. Агар F нинг R_n фазода, шу жумладан, $x_0 \in R_n$ нуқтада ҳам узлуксиз эканлигини эсласак,

$$\lim_{k \to \infty} F(x^k) = F(x_0) = C$$

келиб чиқади, яъни $x_0 \in B$. Демак, B ёпиқ тўплам экан.

Айнан шундай мулоҳазалар билан ихтиёрий C сон ва R_n фазода узлуксиз $F(x_1, \ldots, x_n)$ функция учун

$$F(x_1, \ldots, x_n) \leq C$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча нуқталар тўплами ёпиқ тўплам бўлишини исботлаш мумкин.

Мисол. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ эллипсоид ва $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq r^2$ шар юқорида айтилган фикрларга асосан ёпиқ тўпламдирлар.

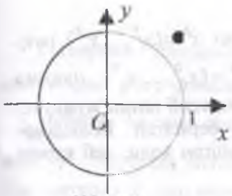
Фараз қилайлик, A ва x_0 мос равишда R_n нинг ихтиёрий тўплами ва элементи бўлсин. Бу ерда бир-бирини тўлдирувчи учта ҳол бўлиши мумкин:

1) Маркази x_0 нуқтада бўлиб, бутунлай A тўпламга тегишли бўлган V_{x_0} шар мавжуд. Бу ҳолда x_0 нуқтани A тўпламнинг ички нуқтаси деймиз.

2) Маркази x_0 нуқтада бўлиб, бирорта ҳам нуқтаси A тўпламга тегишли бўлмаган V_{x_0} шар мавжуд. Бу ҳолда x_0 нуқтани A тўпламнинг ташқи нуқтаси деймиз.

3) Маркази x_0 нуқтада бўлган ҳар қандай V_{x_0} шарнинг A тўпламга тегишли бўлган ва бўлмаган нуқталари мавжуд. Бундай x_0 нуқталарни чегаравий нуқталар, деб атаймиз.

Барча нуқталари ички бўлган тўплам очиқ тўплам дейилади.



114-расм.

A тўпламнинг барча чегаравий нуқталари тўпламини унинг чегараси, деб атаб, $\Gamma = \partial A$ кўринишда белгилаймиз. Ҳар қандай тўпламнинг чегараси ёпиқ тўпламдир.

A тўпламнинг барча ташқи нуқталаридан тузилган тўплам очиқ тўпламдир.

A тўпламнинг чегаравий нуқталари A га тегишли ҳам, тегишли бўлмаслиги ҳам мумкин. Масалан:

$A \subset R_2$ тўплам 114-расмда тасвирланган тўплам бўлсин, яъни $x \leq 0$ лар учун $x^2 + y^2 \leq 1$, $x > 0$ лар учун $x^2 + y^2 < 1$ ва $x = y = 1$. A тўпламнинг ички қисми A' маркази координаталар бошида ва радиуси бир бўлган доиранинг ичи, Γ — $x^2 + y^2 = 1$ айлананинг нуқталари ва (1,1) нуқталардан тузилган тўплам, A тўпламнинг ташқи қисми A'' бирлик айлананинг ташқарисидаги (1,1) нуқтадан бошқа барча нуқталаридан тузилган тўпламдир. Бу ерда айлананинг ўнг ярим қисми Γ чегаранинг қисми бўлса ҳам, A тўпламга тегишли эмас. Шу сабабли A ёпиқ тўплам ҳам, очиқ тўплам ҳам эмас.

Демак, ҳар қандай $A \subset R_n$ тўплам учун R_n фазони

$$R_n = A' + \Gamma + A''$$

йиғинди кўринишида тасвирлаш мумкин экан.

15-§. ЁПИҚ ЧЕГАРАЛАНГАН СОҲАДА УЗЛУКСИЗ ФУНКЦИЯ

Фараз қилайлик, $A \subset R_n$ чегараланган ёпиқ тўплам ва унда узлуксиз бўлган $f(x)$ (бу ерда, $x = (x_1, \ldots, x_n)$) функция берилган бўлсин.

Лемма. Ҳар қандай чегараланган $x^k=(x_1^k,\dots,x_n^k)$ нуқталар кетма-кетлигидан бирор $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$ нуқтага яқинлашувчи қисм кетма-кетлик ажратиб олиш мумкин.

Бу леммани 4-боб, 2.7-§ да берилган Больцано-Вейерштрасс теоремасининг умумлашган ҳоли, деб қараш мумкин.

Исботи. $\{x^k\}$ кетма-кетлик чегараланган бўлгани учун шундай $M>0$ сон мавжудки, барча $j=1,\dots,n$; $k=1,2,\dots$ лар учун

$$\left|x_j\right|\le\left|x^k\right|\le M$$

бўлади, яъни x^k нуқталарнинг координаталари ҳам чегараланган бўлади. Биринчи координаталар чегараланган $\{x_1^k\}$ кетма-кетликни ҳосил қилади. Шу сабабли Больцано-Вейерштрасс теоремасига кўра, ундан бирор x_1^0 сонга яқинлашувчи $\{x_1^{k_{l_1}}\}$ қисм кетма-кетлик ажратиб олиш мумкин. Иккинчи координаталар орасидан танланган натурал k_{l_1} ларга мос келувчиларини ажратиб оламиз. Натижада чегараланган $\{x_2^{k_{l_1}}\}$ кетма-кетлик ҳосил бўлади. Бу кетма-кетликдан ҳам бирор x_2^0 га яқинлашувчи $\{x_2^{k_{l_2}}\}$ қисм кетма-кетлик ажратиб олиш мумкин. $\{k_{l_2}\}$ кетма-кетлик $\{k_{l_1}\}$ нинг қисм кетма-кетлиги бўлгани учун бир вақтда $x_1^{k_{l_1}}\to x_1^0$, $x_2^{k_{l_2}}\to x_2^0$ бўлади. Бу жараённи давом эттириб, n-қадамда шундай $x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0$ сонларни ҳосил қиламизки, бир вақтнинг ўзида

$$x_1^{k_{l_1}}\to x_1^0,\ x_2^{k_{l_2}}\to x_2^0,\ \dots,\ x_n^{k_{l_n}}\to x_n^0$$

бўлади. Энди лемма исбот бўлиши учун $x^0=\left(x_1^0,\dots,x_n^0\right)$, дейиш кифоя.

1-теорема. *Чегараланган ёпиқ $A\subset R_n$ тўпламда аниқланган $f(x)$ функция шу тўпламда чегаралангандир.*

Исботи. Аксини фараз қилайлик, яъни $f(x)$ функция A тўпламда чегараланмаган бўлсин. У ҳолда ҳар бир натурал k сон учун

$$\left|f(x^k)\right|>k\ \ (k=1,2,\dots)\qquad(1)$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи $x^k\in A$ нуқта топилади. A тўплам чегараланган бўлгани учун $\{x^k\}$ кетма-кетлик ҳам чегараланган бўлади, шу сабабли леммага асосан ундан бирор x^0 нуқтага яқинлашувчи $\{x^{k_l}\}$ қисм кетма-кетлик ажратиб олиш мумкин. Шартга кўра, A тўплам ёпиқ бўлгани учун $x^0\in A$ бўлади. f функция A тўпламда, шу жумладан, x^0 нуқтада ҳам узлуксиз бўлгани учун

$$\lim_{l\to\infty}f(x^{k_l})=f(x^0)\qquad(2)$$

бўлади. Бу (1) тенгсизликка зиддир. Шунинг учун f чегараланган ёпиқ A тўпламда фақат чегараланган бўлиши мумкин.

2-теорема. *Чегараланган ёпиқ $A\subset R_n$ тўпламда узлуксиз $f(x)$ функция шу тўпламда ўзининг энг кичик ва энг катта қийматларига эришади.*

Исботи. Биринчи теоремага кўра берилган шартларда $f(x)$ функция A тўпламда чегараланган ва демак, у юқоридан бирор K сон билан чегаралангандир:

$$f(x)\le K\ \ (x\in A).$$

У ҳолда f нинг A тўпламда аниқ юқори чегараси мавжуд:

$$\sup_{x\in A}f(x)=M\ .\qquad(3)$$

M сон қуйидаги хусусиятга эга: ҳар қандай k сон учун A тўпламда шундай $x^k = \left(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k\right)$ нуқта топиладики, унинг учун

$$M - \frac{1}{k} < f(x^k) \le M \quad (k = 1,2,\ldots)$$

муносабатлар ўринли бўлади.

$\{x^k\}$ кетма-кетлик чегараланган ёпиқ A тўпламга тегишли бўлгани учун чегаралангандир:

$$\left|x^k\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left|x_i^k\right|^2} \le K_1 \ (k = 1,2,\ldots),$$

ва шу сабабли ундан бирор x^0 нуқтага яқинлашувчи $\left\{x^{k_l}\right\}$ қисм кетма-кетлик ажратиб олиш мумкин. Шартга кўра, A тўплам ёпиқ бўлгани учун $x^0 \in A$ бўлади. f функция A тўпламда, шу жумладан, x^0 нуқтада ҳам узлуксиз бўлгани учун

$$\lim_{l \to \infty} f(x^{k_l}) = f(x^0)$$

бўлади.

Ҳар бир $k = 1,2,\ldots$ учун

$$M - \frac{1}{k_l} < f(x^{k_l}) \le M$$

муносабатлар ўринли эканлигини эсласак ва уларда $k \to \infty$ да лимитга ўтсак,

$$M \le f(x^0) \le M$$

га, яъни

$$f(x^0) = M$$

тенгликка келамиз. Демак, (3) аниқ юқори чегарага $x^0 \in A$ нуқтада эришилар экан.

Теореманинг иккинчи қисми айнан шундек исбот қилинади.

3-теорема. *Чегараланган ёпиқ $A \subset R_n$ тўпламда берилган ҳар қандай $f(x)$ функция текис узлуксиздир.*

Исботи. Аксини фараз қилайлик, яъни шундай $\varepsilon > 0$ мавжудки, ҳар қандай $\delta > 0$ сон учун

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} < \delta$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in A$ нуқталар топиладики, улар учун

$$|f(x) - f(y)| \ge \varepsilon$$

бўлади.

Энди $k \to \infty$ да нолга интилувчи δ_k сонлар кетма-кетлигини кўрайлик. Ҳар бир δ_k учун $x^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k) \in A$, $y^k = (y_1^k, \ldots, y_n^k) \in A$ нуқталар топиладики, улар учун

$$\left|x^k - y^k\right| < \delta_k$$

бўлса ҳам, лекин

$$\left|f(x^k) - f(y^k)\right| \ge \varepsilon \tag{4}$$

бўлади.

$\{x^k\}$ кетма-кетлик чегараланган ёпиқ A тўпламга тегишли бўлгани учун чегараланган, шу сабабли ундан бирор x^0 нуқтага яқинлашувчи $\left\{x^{k_l}\right\}$ қисм кетма-кетлик ажратиб олиш мумкин. Шартга кўра A ёпиқ тўплам бўлгани учун $x^0 \in A$ бўлади.

$k \to \infty$ да $\left|x^{k_l} - y^{k_l}\right| \to 0$ бўлгани учун $\left\{y^{k_l}\right\}$ кетма-кетлик ҳам x^0 га яқинлашади, чунки

$$\left|y^{k_l} - x^0\right| = \left|y^{k_l} - x^{k_l} + x^{k_l} - x^0\right| \le \left|y^{k_l} - x^{k_l}\right| + \left|x^{k_l} - x^0\right|.$$

Шартга кўра f функция A тўпламда узлуксиз бўлгани учун x^0 нуқтада ҳам узлуксиздир. Шу сабабли

$$\lim_{l \to \infty} f(x^{k_l}) = \lim_{l \to \infty} f(y^{k_l}) = f(x^0).$$

Агар (4) да $k \to \infty$ да лимитга ўтсак,

$$\varepsilon \le \lim_{k \to \infty} \left|f(x^{k_l}) - f(y^{k_l})\right| = \left|f(x^0) - f(x^0)\right| = 0$$

келиб чиқади, бу эса қилинган фаразга зид, чунки $\varepsilon > 0$ эди.

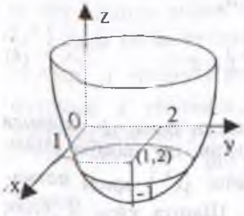
16-§. КЎП ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ЭКСТРЕМУМЛАРИ

Очиқ бирбоғламли $D \subset R_n$ соҳада $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ функция ва бирор $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D$ нуқта берилган бўлсин.

1-таъриф. *Агар* $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D$ *нуқтанинг шундай* V_{x^0} *атрофи мавжуд бўлсаки, барча* $x \in V_{x^0}$ *нуқталар учун*

$$f(x) \le f(x^0) \ \ (f(x) \ge f(x^0)) \qquad (1)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда x^0 *нуқта* $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ *функциянинг локал максимуми (минимуми) дейилади.*



115-расм

Локал максимум ва локал минимум нуқталар функциянинг локал экстремумлари деб аталади.

1-*мисол.* $z = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1$ функция $x^0 = (1,2)$ нуқтада минимумга эришади (115-расмга қаранг).

Ҳақиқатан $f(1,2) = -1$, $(x-1)^2$ ва $(y-2)^2$ ифодалар $x \ne 1$, $y \ne 2$ лар учун ҳамиша мусбат бўлгани учун

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 - 1 > -1,$$

яъни $f(x, y) > f(1,2)$.

2-*мисол.* $z = \frac{1}{2} - \sin(x^2 + y^2)$ функция (0,0) нуқтада, яъни координаталар бошида максимумга эришади (116-расмга қаранг).

Ҳақиқатан $f(0,0) = 1/2$. $0 < x^2 + y^2 < \pi/6$ доиранинг барча нуқталари учун

$$\sin(x^2 + y^2) > 0.$$

Шу сабабли

$$f(x, y) = \frac{1}{2} - \sin(x^2 + y^2) < \frac{1}{2},$$

яъни $f(x, y) < f(0,0)$.

Агар $x_i = x_i^0 + \Delta x_i^0$, $i = 1,2,\ldots,n$ десак, у ҳолда

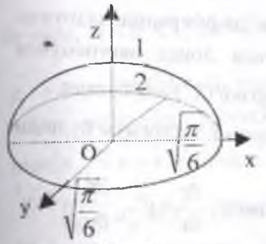
$$f(x) - f(x^0) = f(x_1^0 + \Delta x_1^0, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \Delta f$$

бўлади. Шунга асосан юқоридаги таърифни қуйидагича талқин қилса ҳам бўлади:

2-таъриф. *Агар* $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D$ *нуқтанинг етарлича кичик атрофининг барча нуқталари учун*

$$\Delta u < 0 \ \ (\Delta u > 0)$$

бўлса, у ҳолда x^0 *нуқта* $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ *функциянинг локал максимуми (минимуми), дейилади.*



116-расм.

1-теорема *(экстремумнинг зарурий шарти). Агар* $u = f(x)$ *функция* x^0 *нуқтада локал экстремумга эришса ва шу нуқтада* $u = f(x)$ *функциянинг барча хусусий ҳосилалари мавжуд бўлса, у ҳолда бу ҳосилалар* x^0 *нуқтада нолга тенг бўлади:*

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} = 0, \ i = 1, \ldots, n. \qquad (2)$$

Исботи. Ихтиёрий $k \in \{1, \ldots, n\}$ учун $x_i = x_i^0$, $i \ne k$, десак, $u = f(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0)$ функция битта x_k ўзгарувчининг функцияси бўлиб қолади. Бу функция шартга кўра, $x_k = x_k^0$ нуқтада экстремумга эришади. Шу сабабли бир ўзгарувчили функция экстремуми мавжудлигининг зарурий шартига кўра (7-боб, 2.1-§, Ферма теоремасига қаранг) унинг ҳосиласининг $x_k = x_k^0$ нуқтадаги қиймати нолга тенг бўлади. Бу ҳосила $u = f(x)$ функциянинг x_k ўзгарувчи бўйича олинган хусусий ҳосиласидир. Демак,

$$\frac{\partial f\left(x_1^0,\ldots,x_k^0,\ldots,x_n^0\right)}{\partial x_k} = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k} = 0 .$$

Натижа. Агар x^0 нуқтада дифференциалланувчи $u = f(x)$ функция шу нуқтада локал экстремумга эришса, у ҳолда $df(x^0) = 0$ ва $gradf(x^0) = 0$ бўлади.

Эслатма. (1) шарт x^0 нуктанинг экстремум бўлиши учун етарли эмас.

Масалан, $z = xy^4$ функциянинг $\frac{\partial z}{\partial x} = y^4$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 4xy^3$ хусусий ҳосилалари (0,0) нуқтада нолга тенг бўлса-да, бу нуқтанинг ихтиёрий атрофида $\Delta z = xy^4 - 0 = xy^4$ орттирма қийматлари манфий ҳам, мусбат ҳам бўлиши мумкин, яъни (0,0) нуқта экстремум нуқта эмас.

Бундан буён, агар $u = f(x)$ функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи бўлса ва бу нуқтада (1) шарт бажарилса, бундай нуқталарни стационар нуқталар деб атаймиз.

Фараз қилайлик, x^0-стационар нуқта, яъни $df(x^0) = 0$ ва $u = f(x)$ функция барча ўзгарувчилари бўйича иккинчи тартибгача узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда $u = f(x)$ функциянинг x^0 нуқта атрофида Тейлор формуласи бўйича ёйилмаси қуйидагича бўлади:

$$\Delta f(x^0) = df(x^0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x^0 + \theta\Delta x) = \frac{1}{2}d^2 f(x^0 + \theta\Delta x) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f''_{x_i x_j}\left(x^0 + \theta\Delta x\right)\Delta x_i \Delta x_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(f''_{x_i x_j}\left(x^0\right) + \varepsilon_{ij}\right)\Delta x_i \Delta x_j =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(x^0)\Delta x_i \Delta x_j + \frac{\rho^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}\frac{\Delta x_i}{\rho}\cdot\frac{\Delta x_j}{\rho} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(x^0)\Delta x_i \Delta x_j + \frac{\rho^2}{2}\alpha(\Delta x),$$

бу ерда, $0 < \theta < 1$, $\Delta x = \left(\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n\right)$, $\rho = |\Delta x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2}$ ва $\rho \to 0$ да $\alpha\left(\Delta x\right) \to 0$, чунки шартга кўра иккинчи тартибли ҳосилалар узлуксиз бўлгани учун $\rho \to 0$ да $\max_{i,j}\left|\varepsilon_{ij}\right| = \varepsilon \to 0$ бўлади. Агар

$$a_{ij} = a_{ji} = f''_{x_i x_j}(x^0),\ \xi_i = \Delta x_i,\ \xi = \left(\xi_1,\ldots,\xi_n\right)$$

белгилашлар киритсак, охирги тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\Delta f(x^0) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j + \frac{\rho^2}{2}\alpha(\xi). \qquad (3)$$

Демак, $\Delta f(x^0)$ орттирманинг ишорасини $\xi = \left(\xi_1,\ldots,\xi_n\right)$ га нисбатан

$$A(\xi) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \qquad (4)$$

квадратик форма белгилар экан.

2-теорема *(экстремумнинг етарли шартлари). 1) Агар барча $\xi \neq 0$ лар учун $A(\xi) > 0$, яъни қатъий мусбат аниқланган бўлса, у ҳолда f функция x^0 нуқтада локал минимумга эришади.*

2) Агар барча $\xi \neq 0$ лар учун $A(\xi) < 0$, яъни қатъий манфий аниқланган бўлса, у ҳолда f функция x^0 нуқтада локал максимумга эришади.

3) Агар барча ξ лар учун ё $A(\xi) \leq 0$ ёки $A(\xi) \geq 0$ ва шундай $\xi \neq 0$ мавжуд бўлсаки, унинг учун $A(\xi) = 0$ бўлса, у ҳолда f функциянинг x^0 нуқтада локал экстремумга эришиш масаласи очиқ қолади, яъни қўшимча текширишларга муҳтож.

4) Агар шундай ξ' ва ξ'' лар мавжуд бўлсаки, улар учун $A(\xi') > 0$ ва $A(\xi'') < 0$ бўлса, у ҳолда f функция x^0 нуқтада локал экстремумга эришмайди.

Исботи. 1) (3) тенгликни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\Delta f(x^0) = \frac{\rho^2}{2}\Big[\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\xi_i}{\rho}\frac{\xi_j}{\rho} + \alpha(\xi)\ \Big] =$$

$$= \frac{\rho^2}{2}\Big[\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_i\eta_j + \alpha(\xi)\ \Big] = \frac{\rho^2}{2}\big[A(\eta) + \alpha(\xi)\big], \quad (5)$$

бу ерда $\eta_i = {\xi_i}/{\rho}$, $i = 1, \ldots, n$, алмаштириш бажарилди.

$$|\eta| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}}{\rho} = 1$$

эканлигидан, ҳар қандай ξ учун η нуқта n-ўлчамли бирлик шар сиртида ётади. $A(\eta)$ функция чегараланган ёпиқ бўлган бу сиртда узлуксиз ва шартга кўра мусбат бўлгани учун бу сиртнинг бирор нуқтасида мусбат бўлган ўзининг энг кичик $m > 0$ қийматига эришади. $\rho = |\xi| \to 0$ да $\alpha(\xi) \to 0$ бўлганидан етарлича кичик δ > 0 учун ва $|\xi| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча ξ лар учун $|\alpha(\xi)| < m$ бўлади. У ҳолда барча ξ, $|\xi| < \delta$ лар учун

$$\Delta f(x^0) = f(x^0 + \xi) - f(x^0) =$$

$$= \frac{\rho^2}{2}\big[A(\eta) + \alpha(\xi)\big] \geq \frac{\rho^2}{2}\big[m + \alpha(\xi)\big] \geq 0$$

ва демак, f функция x^0 нуқтада локал минимумга эришади.

2) айнан шундек исбот қилинади.

Энди, 3) ни исботлайлик. $A(\xi)$ форма $\xi^0 \neq 0$ нуқтада нолга айлансин. У ҳолда ҳар қандай $\xi = \kappa\xi^0$ лар учун ҳам $A(\xi)$ нинг биржинсли эканлигидан $A(\xi) = A(\kappa\xi^0) = \kappa^2 A(\xi^0) = 0$ келиб чиқади. Кўрсатилган ξ лар учун $\Delta f(x^0) = \frac{1}{2}\rho^2\alpha(\xi)$. Лекин $\alpha(\xi)$ нинг ишораси номаълум, шу сабабли f функциянинг x^0 нуқтада локал экстремумга эришишини билиб бўлмайди.

Энди фараз қилайлик, шундай ξ' ва ξ'' лар мавжуд бўлсинки, улар учун $A(\xi') > 0$ ва $A(\xi'') < 0$ тенгсизликлар ўринли бўлсин. Бу тенгсизликлар $\eta' = {\xi'}/{\rho}$ ва $\eta'' = {\xi''}/{\rho}$ нуқталарда ҳам бажарилади. Шу жумладан, етарлича кичик ρ учун $A(\eta') + \alpha(\xi') > 0$, $A(\eta'') + \alpha(\xi') < 0$ бўлади, яъни x^0 нуқтанинг етарлича кичик атрофида шундай x' ва x'' нуқталар мавжудки, бу нуқталарда $f(x') > f(x^0)$ ва $f(x'') < f(x^0)$ бўлади. Демак, бу нуқтада экстремум йўқ экан.

Икки ўзгарувчининг функцияси бўлган ҳол учун квадратик формага юқоридаги теоремада қўйилган талабларни a_{ij} коэффициентлар орқали ифодаловчи Сильвестр[1] шартлари, деб аталувчи мезонлар мавжуд: агар $a_{11} > 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$ бўлса, $A(\xi) > 0$ ва агар $a_{11} < 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$ бўлса, $A(\xi) < 0$ бўлади. Агар a_{ij} коэффициентлар f функциянинг иккинчи ҳосилаларини x^0 нуқтадаги қийматлари эканлигини эсласак, у ҳолда 2-теореманинг қисмларини қуйидагича тавсирласа бўлади:

1') агар $f''_{x_1x_1}(x^0) > 0$, $f''_{x_1x_1}(x^0) \cdot f''_{x_2x_2}(x^0) - \left[f''_{x_1x_2}(x^0)\right]^2 > 0$ бўлса, f функция $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0\right)$ нуқтада локал минимумга эришади.

2') агар $f''_{x_1x_1}(x^0) < 0$, $f''_{x_1x_1}(x^0) \cdot f''_{x_2x_2}(x^0) - \left[f''_{x_1x_2}(x^0)\right]^2 > 0$ бўлса, f функция $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0\right)$ нуқтада локал максимумга эришади.

3') агар $f''_{x_1x_1}(x^0) \cdot f''_{x_2x_2}(x^0) - \left[f''_{x_1x_2}(x^0)\right]^2 < 0$ бўлса, квадратик форманинг ишораси бир хил бўлмайди, шу сабабли $\Delta f(x^0)$ орттирманинг ишораси ҳам бир хил бўлмайди. Демак, $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0\right)$ нуқтада экстремум йўқ.

4') агар $f''_{x_1x_1}(x^0) \cdot f''_{x_2x_2}(x^0) - \left[f''_{x_1x_2}(x^0)\right]^2 = 0$ бўлса, $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0\right)$ нуқтада экстремумнинг бор ёки йўқлик масаласи очиқ қолади.

---

[1] Ж.Ж.Сильвестр (1814-1897) — инглиз математиги.

3-*мисол.* $z = x^3 - 3xy + y^2$ функциянинг локал экстремумларини топинг.

Ечиш. Аввал стационар нуқталарини топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -3x + 2y, \quad \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ -3x + 2y = 0 \end{cases}$$

Системани ечсак, $x^1 = (0,0)$ ва $x^2 = (\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ нуқталар ҳосил бўлади. Иккинчи ҳосилаларни ҳисоблайлик:

$$f''_{xx}(x^1) = 6x\Big|_{x=x^1} = 0, \; f''_{yy}(x^1) = 2, \; f''_{xy}(x^1) = -3,$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 = -9 < 0$$

$$f''_{xx}(x^2) = 6x\Big|_{x=x^2} = 9 > 0, \; a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 = 9 > 0.$$

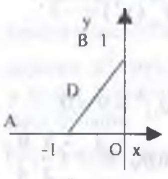
Демак, $x^1 = (0,0)$ нуқтада экстремум йўқ, $x^2 = (\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ нуқта эса локал минимум экан.

17-§. ФУНКЦИЯНИНГ ЭНГ КАТТА ВА ЭНГ КИЧИК ҚИЙМАТЛАРИНИ ТОПИШ

Бирор ёпиқ чегараланган $D \subset R_n$ соҳада узлуксиз дифференциалланувчи $u = f(x)$ функция берилган бўлсин. Маълумки (15-§, 2-теорема), бу функция D соҳада ўзининг энг катта ва энг кичик қийматларига эришади. Бу қийматларга эришиладиган нуқталар соҳа ичида ҳам, чегарасида ҳам бўлиши мумкин. Агар бундай нуқта соҳа ичида бўлса, $u = f(x)$ функция бу нуқтада локал экстремумга эришади. Шу сабабли функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топиш учун унинг ҳамма стационар нуқталарини аниқлаб, функциянинг бу нуқталардаги қийматларини функциянинг чегарадаги қийматлари билан солиштириш керак. Бу қийматларнинг энг каттаси функциянинг энг катта қиймати, энг кичиги эса функциянинг энг кичик қиймати бўлади.

4-*мисол.* $z=x^2+y^2-2x+y-1$ функциянинг $x=0, y=0,$ $y=x+1$ тўғри чизиқлар билан ўралган ёпиқ соҳадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

Ечиш. $z_x'=2x-2,\ z_y'=2y+1,\ x_0=1, y_0=-\frac{1}{2},\ \left(1,-\frac{1}{2}\right)\notin D$ у, яъни соҳа ичида экстремал нуқталар йўқ, уларни соҳа чегарасидан излаймиз.



117-расм.

1) AOда: $y=0$, $x\in[-1,0]$ бўлгани учун $z=x^2-2x-1$, $z'=2x-2$, $x=1\notin[-1,0]$, демак, стационар нуқтаси йўқ, $z(-1)=2$, $z(0)=-1$.

2) OBда: $x=0$, $y\in[0,1]$, $z=y^2+y-1$, $z'=2y+1$, $y=-\frac{1}{2}\notin[0,1]$, яна оралиқ ичида стационар нуқталар йўқ, $z(0)=-1, z(1)=1$.

3) ABда: $y=x+1$, $z=2x^2+x+1$, $z'=4x+1$, $-\frac{1}{4}\in(-1,0)$-стационар нуқта, $z\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{8}$, $z(-1)=2, z(0)=1$.

Бу қийматларни солиштирсак: $z_{\max}(A)=2$, $z_{\min}(O)=-1$ ни ҳосил қиламиз.

18-§. ШАРТЛИ ЭКСТРЕМУМЛАР

R_2 да $u=x^2+y^2$ функцияни кўрайлик. Геометрик нуқтаи назардан бу функция координаталар бошидан $M(x,y)$ нуқтагача бўлган масофани билдиради. Шу

маънода унинг энг катта қиймати йўқ. Агар уни тенгламаси $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b>a)$ бўлган эллипснинг $M(x,y)$ нуқталари учун текширсак, бу масофа икки $B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$ нуқталарда энг катта қийматларга эришади.

Демак, берилган функция бутун R_2 текисликда энг катта қийматга эришмаса ҳам, $M(x,y)$ нуқта эллипсда ётибди деган қўшимча шартда икки нуқтада энг катта қийматини қабул қиляпти.

Бу ҳолат функциянинг аргументлари қўшимча шартларни қаноатлантирганда, унинг экстремумларини топиш масаласига олиб келади. Бу масала шартли экстремумлар масаласи, деб аталади.

Яна бир масала кўрайлик. Майдони $2a$ бўлган темир тунукадан энг катта ҳажмли параллелепипед шаклидаги ёпиқ жавон тайёрлаш керак бўлсин.

Бу жавоннинг ўлчамларини мос равишда x, y, z десак, унинг ҳажми

$$\vartheta = xyz$$

бўлиб, тўла сирти $xy+yz+xz=2a$ бўлади. Бу шартли экстремум масаласидир, бу ерда, x, y, z ўзгарувчилар қўшимча $xy+yz+xz=2a$ шарт билан боғланган.

n ўзгарувчининг $u=f(x)$ функцияси берилган бўлсин, бу ерда $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Шу функциянинг экстремумларини, унинг аргументлари қўшимча

$$\varphi_i(x)=0,\ i=1,2,\dots,m,\ (m<n) \tag{1}$$

муносабатлар билан боғланган, деган фаразда топиш талаб этилган бўлсин. (1) тенгликларни боғловчи тенгламалар, деб атаймиз.

Таъриф. *Агар* M_0 *нинг шундай атрофи мавжуд бўлсаки, бу атрофнинг (1) боғловчи тенгламаларни қаноатлантирадиган* M *нуқталари учун*

$$f(M) \le f(M_0) \ \ (f(M) \ge f(M_0))$$

тенгсизлик ўринли бўлса, (1) тенгликларни қаноатлантирувчи $M_0\left(x_1^0,\dots,x_m^0\right)$ *нуқтани локал шартли максимум (минимум) нуқта, деб атаймиз.*

Локал шартли максимум ва минимум нуқталарни локал шартли экстремумлар, деб атаймиз.

Юқорида кўрилган масаладаги $B_1(0,b)$ нуқта локал шартли максимум нуқтадир, чунки эллипснинг бошқа барча M нуқталари учун

$$f(M) \le f(B_1).$$

Лагранж бу масалани ҳал қилиш учун қуйидаги усулни таклиф этган. Ёрдамчи

$$F(x,\lambda_1,\dots,\lambda_m) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x)$$

функция тузиб оламиз. Бу функцияни Лагранж шаънига Лагранж функцияси ва $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ ларни Лагранж кўпайтувчилари, деб аташган.

Агар M_0 нуқта f функциянинг локал шартли экстремуми бўлса, у ҳолда у F нинг локал экстремуми бўлади, шу сабабли экстремумнинг зарурий шартига кўра, F дан олинган барча хусусий ҳосилалар бу нуқтада нолга тенг бўлади, яъни

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} = 0.$$

(1) ва (2) тенгламалар $m+n$ та $x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m$ номаълумларга нисбатан $m+n$ та тенгламалар системасини ташкил этади. Бу системанинг ечимларини F функциянинг стационар нуқталари, деб атаймиз. Табиийки, стационар нуқталарнинг ҳаммаси ҳам локал шартли экстремум бўлавермайди. Буни аниқлаш масаласини умумий ҳол учун очиқ қолдирамиз.

1-*мисол.* $z = x^2 + y^2$ функциянинг $\left(x-\sqrt{2}\right)^2 + \left(y-\sqrt{2}\right)^2 \le 9$ доирадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

Ечиш. Аввал функциянинг стационар нуқталарини топамиз: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$. Бундан $x=0$, $y=0$. $(0{,}0) \in D$. Бу нуқтада функция энг кичик қийматга эришади: $z_{\min}(0{,}0) = 0$.

Энди функцияни чегарада, яъни $\left(x-\sqrt{2}\right)^2 + \left(y-\sqrt{2}\right)^2 = 9$ айланада текширамиз. Бунинг учун Лагранж функциясини тузиб оламиз:

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda\left[\left(x-\sqrt{2}\right)^2 + \left(y-\sqrt{2}\right)^2 - 9\right].$$

Унинг хусусий ҳосилалари $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2\lambda\left(x-\sqrt{2}\right)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2x + 2\lambda\left(y-\sqrt{2}\right)$ бўлади. x, y ва λ ларни аниқлаш учун қуйидаги ситемани тузиб оламиз:

$$\begin{cases} x + \lambda\left(x-\sqrt{2}\right) = 0, \\ y + \lambda\left(y-\sqrt{2}\right) = 0, \\ \left(x-\sqrt{2}\right)^2 + \left(y-\sqrt{2}\right)^2 = 9. \end{cases}$$

Бу система иккита ечимга эга:

$$x = y = 5\sqrt{2}/2, \lambda = -5/3, z = 25;$$

$$x = y = -\sqrt{2}/2, \lambda = -1/3, z = 1.$$

Демак, функция энг катта қийматига $\left(5\sqrt{2}/2; 5\sqrt{2}/2\right)$ нуқтада эришади: $z_{\max} = 25$.

19-§. ЭНГ КИЧИК КВАДРАТЛАР УСУЛИ

Фараз қилайлик, тажриба натижасида кузатилган ўзгарувчи x ва y миқдорларнинг n та қийматлари қуйидаги жадвал кўринишида олинган бўлсин:

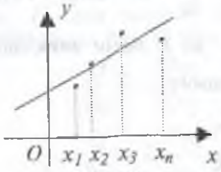
x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Шу жадвалдан фойдаланиб, x ва y миқдорлар орасидаги

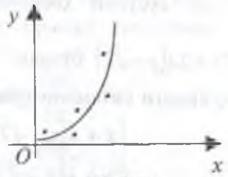
$$y = f(x) \qquad (1)$$

функционал боғланишни аниқлаш талаб қилинган бўлсин.

(1) функциянинг кўринишини XOY текисликда координаталари (x_i, y_i) бўлган нуқталарнинг жойлашишига қараб танлаймиз. Масалан, бу нуқталар 118-расмдагидек жойлашган бўлса, (1) ни чизиқли $y = ax + b$ функция кўринишида, агар 119-расмдагидек жойлашган бўлса, $y = ax^b$ кўринишда излаймиз.



118-расм



119-расм

Танланган $y = f(x, a, b, c, ...)$ функциядаги номаълум $a, b, c, ...$ коэффициентларни шундай танлаш керакки, натижада бу функция кузатилаётган жараённи тўлақонли ифодаласин.

Бу масалани ҳал қилиш учун энг кичик квадратлар усули, деб аталувчи усул кенг қўлланиб келинади. Бу усул тажриба натижасида олинган y_i қийматларга нисбатан биз танлаган функция натижасида йўл қўйилган хатоликни баҳоловчи

$$S(a, b, c, \ldots) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - f(x_i, a, b, c, \ldots)\right]^2 \qquad (2)$$

ифодани минималлаштиришга асосланади.

$a, b, c, ...$ параметрларнинг қийматларини шундай танлаймизки, бу қийматларда (2) йиғинди энг кичик қийматга эга бўлсин. Бу билан қўйилаётган масала (2) функциянинг энг кичик қийматини топиш масаласига келтирилади.

(2) функциянинг минимум нуқталарини унинг стационар нуқталари орасидан қидирамиз. Стационар нуқталарни аввалги параграфнинг 1-теоремасига кўра,

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \; \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \; \frac{\partial S}{\partial c} = 0, \ldots \qquad (3)$$

ёки

$$\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - f(x_i, a, b, c, \ldots)\right] \frac{\partial f(x_i, a, b, c, \ldots)}{\partial a} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - f(x_i, a, b, c, \ldots)\right] \frac{\partial f(x_i, a, b, c, \ldots)}{\partial b} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - f(x_i, a, b, c, \ldots)\right]\frac{\partial f(x_i, a, b, c, \ldots)}{\partial c} = 0 \qquad (4)$$

. . . .

тенгламалар системасининг ечими сифатида аниқлаймиз.

Бу параграфда биз шу усулни икки ҳол учун кўриб чиқамиз.

1. $y = ax + b$ бўлсин. У ҳолда (2) ифода қуйидаги кўринишда бўлади:

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (ax_i + b)\right]^2 .$$

Бундан

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (ax_i + b)\right]x_i = 0 ,$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (ax_i + b)\right] = 0 ,$$

$$\left.\begin{aligned} a\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} + b\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i , \\ a\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i + b\cdot n &= \sum_{i=1}^{n} y_i . \end{aligned}\right| \qquad (5)$$

Ҳосил бўлган (5) системанинг асосий детерминанти

$$\Delta = n\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i<j}\left(x_i - x_j\right)^2$$

бўлади. Демак, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = c$ бўлган ҳолдан бошқа барча ҳолларда $\Delta \neq 0$ бўлади, яъни (5) система аниқ ечимларга эга. Агар $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = c$ бўлса, у ҳолда биз қидираётган функциямиз тенгламаси $x = c$ бўлади.

2. Аппроксимациаловчи функцияни $y = ax^2 + bx + c$ кўринишда қидирайлик. Унда (4) система

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \left(ax_i^2 + bx_i + c\right)\right]x_i^2 &= 0, \\ \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \left(ax_i^2 + bx_i + c\right)\right]x_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \left(ax_i^2 + bx_i + c\right)\right] &= 0, \end{aligned}\right|$$

ёки

$$\left.\begin{aligned} a\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i , \\ a\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i , \\ a\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i + c\cdot n &= \sum_{i=1}^{n} y_i , \end{aligned}\right| \qquad (6)$$

кўринишда бўлади.

Мисол. Тажриба натижаси қуйидаги жадвалдан иборат бўлсин:

x	1	2	3	5
y	3	4	2,5	0,5

Ечиш. (1) функцияни $y = ax + b$ кўринишда излайлик. У ҳолда a ва b коэффициентларни топиш учун (5) система ишлатилади. Бу ситеманинг коэффициентларини топиб олайлик:

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 39 ,\ \sum_{i=1}^{4} x_i = 11 ,\ \sum_{i=1}^{4} x_i y_i = 21 ,\ \sum_{i=1}^{4} y_i = 10 .$$

Демак, (5) система

$$\left.\begin{aligned} 39a + 11b &= 21, \\ 11a + 4b &= 10 \end{aligned}\right\}$$

кўринишда бўлади. Бу системани ечиб, $a = -26/35$, $b = 159/35$ ни топамиз.

13-БОБ.
ВЕКТОР-ФУНКЦИЯНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБИ

1-§. ВЕКТОР-ФУНКЦИЯНИНГ ЛИМИТИ ВА ҲОСИЛАСИ

Координаталар бошидан чиқиб, охири $A(x,y,z)$ нуқтада бўлган $\overrightarrow{OA}=\vec r$ векторни радиус-вектор деб атаймиз.

Бу векторнинг ортлар бўйича ёйилмаси

$$\vec r = x\vec i + y\vec j + z\vec k \tag{1}$$

бўлади. Агар унинг проекциялари бирор t параметрнинг функциялари бўлса,

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t)\,, \tag{2}$$

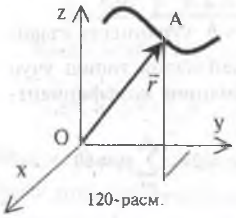
у ҳолда (1) ни қуйидагича:

$$\vec r=\varphi(t)\vec i+\psi(t)\vec j+\chi(t)\vec k \tag{1'}$$

ёки

$$\vec r=\vec r(t) \tag{1''}$$

кўринишда ёзиш мумкин.



120-расм.

Параметр t ўзгарса, x, y, z лар ҳам ўзгариб, A нуқта фазода бирор чизиқ чизади. Бу чизиқни (1) нинг годографи, деб атаймиз. (1′) ёки (1″) тенглама чизиқнинг вектор тенгламаси дейилади. Бу тенгламалар ёрдамида t нинг ҳар бир қиймати учун чизиқ нуқтасининг мос координаталари аниқланади.

Агар t параметр ўзгарса, $\vec r$ вектор ҳам йўналиши бўйича, ҳам миқдоран ўзгаради. Шу сабабли уни скаляр t аргументнинг вектор-функцияси, деб аташади.

Агар

$$\lim_{t\to t_0}\varphi(t)=\varphi_0\,,\ \lim_{t\to t_0}\psi(t)=\psi_0\,,\ \lim_{t\to t_0}\chi(t)=\chi_0$$

бўлса, у ҳолда $\vec r_0=\varphi_0\vec i+\psi_0\vec j+\chi_0\vec k$ вектор $\vec r=\vec r(t)$ векторнинг $t\to t_0$ даги лимити дейилади ва

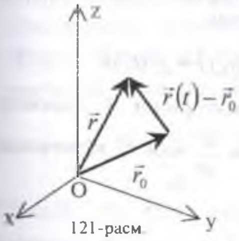
$$\lim_{t\to t_0}\vec r(t)=\vec r_0$$

кўринишда белгиланади. Бундан

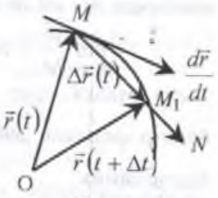
$$\lim_{t\to t_0}\left|\vec r(t)-\vec r_0\right|=\lim_{t\to t_0}\sqrt{[\varphi(t)-\varphi_0]^2+[\psi(t)-\psi_0]^2+[\chi(t)-\chi_0]^2}=0$$

$$\lim_{t\to t_0}|\vec r(t)|=|\vec r_0|$$

тенгликлар келиб чиқади.



121-расм



122-расм.

Фараз қилайлик, эгри чизиқнинг M нуқтасига t параметрнинг t_0 қиймати мос келсин ва t параметрга Δt орттирма берайлик. У ҳолда

$$\vec r(t+\Delta t)=\varphi(t+\Delta t)\vec i+\psi(t+\Delta t)\vec j+\chi(t+\Delta t)\vec k$$

вектор ҳосил бўлади. У эгри чизиқда бирор M_1 нуқтани аниқлайди (122-расмга қаранг). Шу векторнинг орттирмасини топайлик:

$$\Delta\vec r=\vec r(t+\Delta t)-\vec r(t)=[\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)]\vec i+$$
$$+[\psi(t+\Delta t)-\psi(t)]\vec j+[\chi(t+\Delta t)-\chi(t)]\vec k$$

122-расмда бу $MM_1=\Delta\vec r(t)$ вектордир.

Вектор функция орттирмасининг аргумент орттирмасига нисбати $\frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}$ ни кўрайлик. Бу вектор $\Delta\vec{r}(t)$ векторга коллениар, чунки уни $1/\Delta t$ га кўпайтириш натижасида ҳосил бўлади. Бу векторни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}=\frac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}\cdot\vec{i}+\frac{\psi(t+\Delta t)-\psi(t)}{\Delta t}\cdot\vec{j}+$$

$$+\frac{\chi(t+\Delta t)-\chi(t)}{\Delta t}\cdot\vec{k}.$$

Агар $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$ функциялар t_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда охирги тенгликда $\Delta t\to 0$ да лимитга ўтсак,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\varphi'(t_0)\vec{i}+\psi'(t_0)\vec{j}+\chi'(t_0)\vec{k}$$

ҳосил бўлади. Уни $\vec{r}=\vec{r}(t)$ векторнинг t параметр бўйича ҳосиласи, деб атаймиз ва $\frac{d\vec{r}}{dt}$ ёки $\vec{r}\,'$ кўринишда белгилаймиз.

Демак,

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{r}\,'=\varphi'(t_0)\vec{i}+\psi'(t_0)\vec{j}+\chi'(t_0)\vec{k} \tag{2}$$

ёки

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k} \tag{2'}$$

экан. Энди бу векторнинг йўналишини аниқлайлик. Агар $\Delta t\to 0$ да M_1 нуқта эгри чизиқ бўйлаб M нуқтага яқинлашишини эътиборга олсак, $\overline{MM_1}$ ватар-вектор лимитда эгри чизиққа M нуқтада ўтказилган уринма бўйлаб йўналишига ишонч ҳосил қиламиз. Демак, $\frac{d\vec{r}}{dt}$ вектор эгри чизиққа M нуқтада ўтказилган уринма

бўйлаб йўналар экан. Унинг узунлиги қуйидаги формула бўйича аниқланади:

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}\,.$$

Аналитик геометриядан маълумки, йўналтирувчи вектори $\vec{a}=\{m,n,p\}$ бўлиб, $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нуқтадан ўтган тўғри чизиқ тенгламаси

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

эди. (2') вектор уринма бўйлаб йўналган эди, шу сабабли у уринманинг йўналтирувчи векторига коллениар бўлади, яъни (2') вектор проекциялари уринманинг йўналтирувчи вектори проекцияларига пропорционал бўлади. У ҳолда (1) эгри чизиққа унинг $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нуқтасида ўтказилган уринманинг тенгламаси

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{dx}{dt}\right|_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{dy}{dt}\right|_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{dz}{dt}\right|_{M_0}} \tag{3}$$

бўлади, бу ерда махражлардаги ифодалар ҳосилаларнинг $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нуқтадаги қийматларидир.

Уриниш нуқтасида уринмага перпендикуляр ўтган тўғри чизиқ фазовий эгри чизиқнинг шу нуқтадаги нормали деб аталади. Фазовий эгри чизиқнинг бу нуқтадаги бундай нормаллари чексиз кўп бўлади, уларнинг барчаси бир текисликда ётади. Шу сабабли бу текисликни нормал текислик дейишади.

Текисликнинг тўғри чизиққа перпендикулярлик шартидан нормал текисликнинг тенгламаси

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{M_0}(x-x_0)+\left.\frac{dy}{dt}\right|_{M_0}(y-y_0)+\left.\frac{dz}{dt}\right|_{M_0}(z-z_0)=0 \tag{4}$$

кўринишда бўлиши келиб чиқади.

Мисол. $x = a\sin^2 t$, $y = b\sin t\cos t$, $z = c\cos^2 t$ эгри чизиқнинг $t = \pi/4$ нуқтадаги уринмаси ва нормал текислигини топинг.

Ечиш. Эгри чизиқнинг $t = \pi/4$ га мос келувчи нуқтаси $M_0\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$, чунки $x_0 = a\sin^2\frac{\pi}{4} = a\cdot\frac{1}{2} = \frac{a}{2}$,

$y_0 = b\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{b}{2}$, $z_0 = c\cos^2\frac{\pi}{4} = c\cdot\frac{1}{2} = \frac{c}{2}$.

Ҳосилаларини топамиз:

$$\dot{x} = a\sin 2t\ ,\ \dot{y} = b\cos 2t\ ,\ \dot{z} = -c\sin 2t\ ,$$

бундан $\dot{x}_0 = a$, $\dot{y}_0 = 0$, $\dot{z}_0 = -c$. У ҳолда уринмаси

$$\frac{x - a/2}{a} = \frac{y - b/2}{0} = \frac{z - c/2}{-c}$$

ва нормал текислиги

$$a\left(x - \frac{a}{2}\right) - c\left(z - \frac{c}{2}\right) = 0 \text{ ёки } ax - cz - \frac{a^2 - c^2}{2} = 0$$

бўлади.

Фараз қилайлик, параметр t бирор $[a,b]$ оралиқда ўзгарсин. У ҳолда (1) радиус-вектор ўз Г годографида $A(\varphi(a),\psi(a),\chi(a))$ нуқтадан $B(\varphi(b),\psi(b),\chi(b))$ нуқтагача $A\bar{B}$ ёйни чизади, яъни бу эгри чизиқда йўналишни аниқлайди. *A* нуқта *Г* нинг бош нуқтаси, *B* эса *Г* нинг охирги нуқтаси бўлади. *Г* нинг силжувчи нуқтаси ўз ҳаракати давомида яна аввалги ҳолатига қайтиши мумкин, яъни $t_1, t_2 \in [a,b], t_1 < t_2$ лар учун $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$, $\psi(t_1) = \psi(t_2)$, $\chi(t_1) = \chi(t_2)$ бўлиши мумкин. Бу ҳолда *Г* ни ўзаро кесишувчи, агар *A* ва *B* нуқталар устма-уст тушса, ёпиқ эгри чизиқ, деб атаймиз.

Агар $t = \lambda(\tau), c \le \tau \le d$ десак, бу ерда $\lambda(\tau)$-ҳосиласи $[c,d]$ да нолдан фарқли бўлган узлуксиз дифференциалланувчи функция, у ҳолда икки ҳол бўлиши мумкин:

1) $\lambda'(\tau) > 0$, бунда $\lambda(c) = a$, $\lambda(d) = b$,
2) $\lambda'(\tau) < 0$, бунда $\lambda(c) = b$, $\lambda(d) = a$

бўлади.

Биринчи ҳолда *Г* нинг йўналиши ўзгармайди, иккинчи ҳолда эса, *Г* нинг йўналиши тескарисига ўзгаради.

Агар $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \ne 0$, яъни (2) га асосан барча $t \in [c,d]$ лар учун

$$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2 > 0$$

бўлса, у ҳолда Г ни силлиқ эгри чизиқ деб атаймиз.

2-§. ВЕКТОР-ФУНКЦИЯЛАРНИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАШ ҚОИДАЛАРИ

Бу параграфда асосан келажакда биз учун зарур бўладиган вектор-функцияларни дифференциаллаш қоидалари кўрилади. Қуйида бу қоидалар оддий функцияларнинг дифференциаллаш қоидаларини ўзи эканлиги исбот қилинади.

1^0. Векторлар йиғиндисининг ҳосиласи қўшилувчи векторлар ҳосиласининг йиғиндисига тенг.

Ҳақиқатан, агар

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_1(t) &= \varphi_1(t)\vec{i} + \psi_1(t)\vec{j} + \chi_1(t)\vec{k} \\ \vec{r}_2(t) &= \varphi_2(t)\vec{i} + \psi_2(t)\vec{j} + \chi_2(t)\vec{k} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

векторлар берилган бўлса, уларнинг йиғиндиси

$$\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t) = [\varphi_1(t) + \varphi_2(t)]\vec{i} + [\psi_1(t) + \psi_2(t)]\vec{j} + [\chi_1(t) + \chi_2(t)]\vec{k}$$

бўлади. У ҳолда (2) га асосан

$$\frac{d[\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)]}{dt} =$$

$$[\varphi_1(t)+\varphi_2(t)]'\bar{i}+[\psi_1(t)+\psi_2(t)]'\bar{j}+[\chi_1(t)+\chi_2(t)]'\bar{k}$$

ёки

$$\frac{d[\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2(t)]}{dt}=[\varphi'_1(t)+\varphi'_2(t)]\bar{i}+[\psi'_1(t)+\psi'_2(t)]\bar{j}+$$

$$+[\chi'_1(t)+\chi'_2(t)]\bar{k}=\left[\varphi'_1(t)\bar{i}+\psi'_1(t)\bar{j}+\chi'_1(t)\bar{k}\right]+$$

$$\left[\varphi'_2(t)\bar{i}+\psi'_2(t)\bar{j}+\chi'_2(t)\bar{k}\right]=\vec{r}'_1+\vec{r}_2.$$

Демак,

$$\frac{d[\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2(t)]}{dt}=\frac{d\vec{r}_1}{dt}+\frac{d\vec{r}_2}{dt} \tag{2}$$

экан.

2^0. Векторларнинг скаляр кўпайтмасини ҳосиласи қуйидаги формула билан ифодаланади:

$$\frac{d[\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t)]}{dt}=\frac{d\vec{r}_1}{dt}\vec{r}_2+\vec{r}_1\frac{d\vec{r}_2}{dt}. \tag{3}$$

Исботи. Агар векторлар (1) кўринишда берилган бўлса, у ҳолда уларнинг скаляр кўпайтмаси

$$\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t)=\varphi_1\varphi_2+\psi_1\psi_2+\chi_1\chi_2$$

бўлади. Шу сабабли,

$$\frac{d(\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2)}{dt}=\varphi'_1\varphi_2+\varphi_1\varphi'_2+\psi'_1\psi_2+\psi_1\psi'_2+\chi'_1\chi_2+\chi_1\chi'_2=$$

$$=(\varphi'_1\varphi_2+\psi'_1\psi_2+\chi'_1\chi_2)+(\varphi_1\varphi'_2+\psi_1\psi'_2+\chi_1\chi'_2)=$$

$$=(\varphi'_1\bar{i}+\psi'_1\bar{j}+\chi'_1\bar{k})(\varphi_2\bar{i}+\psi_2\bar{j}+\chi_2\bar{k})+$$

$$+(\varphi_1\bar{i}+\psi_1\bar{j}+\chi_1\bar{k})(\varphi'_2\bar{i}+\psi'_2\bar{j}+\chi'_2\bar{k})=\frac{d\vec{r}_1}{dt}\vec{r}_2+\vec{r}_1\frac{d\vec{r}_2}{dt}.$$

3^0. Агар $\vec{e}$ бирлик вектор бўлса, у ҳолда унинг ҳосиласи $\vec{e}$ га перпендикуляр вектор бўлади.

Ҳақиқатан, агар $\vec{e}$ бирлик вектор бўлса, у ҳолда

$$\vec{e}\,\vec{e}=1$$

бўлади. Агар бу тенгликни t бўйича дифференциалласак,

$$\vec{e}\cdot\frac{d\vec{e}}{dt}+\frac{d\vec{e}}{dt}\cdot\vec{e}=0 \text{ ёки } 2\vec{e}\cdot\frac{d\vec{e}}{dt}=0,$$

яъни

$$\vec{e}\cdot\frac{d\vec{e}}{dt}=0$$

бўлади. Бу эса $\vec{e}$ ва $\frac{d\vec{e}}{dt}$ векторларнинг перпендикулярлигини билдиради.

4^0. Агар $f(t)$ — скаляр функция, $\vec{r}(t)$ — вектор-функция бўлса, у ҳолда

$$\frac{d[f(t)\vec{r}(t)]}{dt}=\frac{df}{dt}\vec{r}+f\frac{d\vec{r}}{dt}$$

бўлади.

Исботи. Агар $\vec{r}(t)$ (1′) кўринишда берилган бўлса, у ҳолда

$$f(t)\vec{r}(t)=f(t)\varphi(t)\bar{i}+f(t)\psi(t)\bar{j}+f(t)\chi(t)\bar{k}$$

бўлади. Бу тенгликни дифференциалласак:

$$\frac{d[f(t)\vec{r}(t)]}{dt}=\left(\frac{df}{dt}\varphi+f\frac{d\varphi}{dt}\right)\bar{i}+\left(\frac{df}{dt}\psi+f\frac{d\psi}{dt}\right)\bar{j}+$$

$$+\left(\frac{df}{dt}\chi+f\frac{d\chi}{dt}\right)\bar{k}==\frac{df}{dt}\left(\varphi\bar{i}+\psi\bar{j}+\chi\bar{k}\right)+$$

$$+f\left(\frac{d\varphi}{dt}\bar{i}+\frac{d\psi}{dt}\bar{j}+\frac{d\chi}{dt}\bar{k}\right)=\frac{df}{dt}\bar{r}+f\frac{d\bar{r}}{dt}.$$

5^0. Ўзгармас кўпайтувчидан ҳосила олинмайди:

$$\frac{d(a\cdot\vec{r})}{dt}=a\frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Бу хоссанинг исботи 4^0 –хоссадан келиб чиқади.

6^0. Вектор кўпайтманинг ҳосиласи қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$\frac{d[\vec{r}_1\times\vec{r}_2]}{dt}=\frac{d\vec{r}_1}{dt}\times\vec{r}_2+\vec{r}_1\times\frac{d\vec{r}_2}{dt}. \tag{4}$$

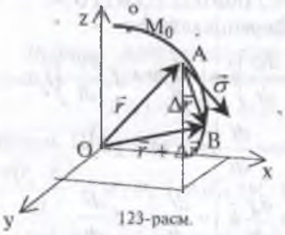
Бунинг исботи 2^0-хосса каби бажарилади.

3-§. ВЕКТОРНИНГ ЁЙ БЎЙЛАБ ҲОСИЛАЛАРИ. ЭГРИЛИК ВА БОШ НОРМАЛ

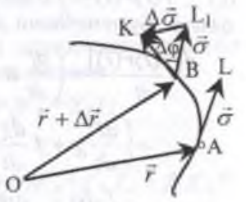
Фазовий эгри чизиқда силжувчи $A(x,y,z)$ нуқта ва бирор ўзгармас $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нуқта берилган бўлсин (123-расмга қаранг). Агар $A(x,y,z)$ нуқта ўз ҳолатини ўзгартирса, у ҳолда $M_0\bar{A}=s$ ёй узунлиги ҳам ўзгаради, ва аксинча, ёй узунлиги s ўзгарса, A нуқтанинг ҳолати ҳам, яъни унинг x,y,z координаталари ҳам ўзгаради. Демак, A. нуқтанинг x,y,z координаталарини s нинг функцияси деб қараш мумкин экан:

$$x=\varphi(s)\,,\;\; y=\psi(s)\,,\;\; z=\chi(s)\,. \tag{1}$$

Бу тенгликларни кўрилаётган эгри чизиқнинг параметрик тенгламаси, s ни эса параметр деб қараш мумкин.



123-расм.



124-рисм.

У ҳолда $\overline{OA}=\bar{r}$ векторни

$$\bar{r}=\varphi(s)\bar{i}+\psi(s)\bar{j}+\chi(s)\bar{k} \tag{1}$$

ёки

$$\bar{r}=\bar{r}(s) \tag{1'}$$

кўринишда ифодалаш мумкин.

Худди 1-§ дагидек мулоҳазалар билан $\frac{d\bar{r}}{ds}$ ҳосила-вектор S нинг ўсиш йўналишида эгри чизиққа A нуқтада ўтказилган уринма бўйлаб йўналишини

кўрсатиш мумкин, лекин бу ерда $\left|\frac{d\bar{r}}{ds}\right|=1$ бўлади. Уни $\vec{\sigma}$ деб белгилаймиз:

$$\frac{d\bar{r}}{ds}=\vec{\sigma}\,. \tag{2}$$

Агар $\bar{r}$ вектор (1) кўринишда берилган бўлса, у ҳолда 1-§ нинг (2) формуласига кўра,

$$\vec{\sigma}=\frac{d\varphi}{ds}\bar{i}+\frac{d\psi}{ds}\bar{j}+\frac{d\chi}{ds}\bar{k} \tag{3}$$

ва

$$\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\chi}{ds}\right)^2}=1$$

бўлади.

$\frac{d\bar{r}}{ds}$ вектор-функциянинг ҳосиласини $\bar{r}$.вектор-функциянинг иккинчи ҳосиласи деб атаб, $\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}$ кўринишда белгилаймиз. Бу ҳосиланинг геометрик маъносини аниқлайлик.

(2) формулага асосан

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}=\frac{d}{ds}\left(\frac{d\bar{r}}{ds}\right)=\frac{d\bar{\sigma}}{ds}\,,$$

демак, биз $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\bar{\sigma}}{\Delta s}$ ни топишимиз керак экан. Бунинг учун 124-расмга қарайлик. Унда $\left|\overline{AB}\right|=\Delta s$, $\overline{AL}=\bar{\sigma}$, $\overline{BK}=\vec{\sigma}+\Delta\bar{\sigma}$. В нуқтадан $\overline{BL}=\vec{\sigma}$ вектор ўтказайлик. ΔBKL_1 дан

$$\overline{BK}=\overline{BL_1}+\overline{L_1K}$$

ёки

$$\vec{\sigma}+\Lambda\vec{\sigma}=\vec{\sigma}+\overline{L_1K}$$

эканлиги келиб чиқади. Демак, $\overline{L_1K} = \Delta\bar{\sigma}$ экан. Юқорида биз $\bar{\sigma}$ бирлик вектор бўлиб, унинг йўналиши ўзгармаслигини кўрсатган эдик, шу сабабли $|\bar{\sigma}| = |\bar{\sigma} + \Delta\bar{\sigma}|$ бўлади. Демак, ΔBKL_1 тенгёнли экан.

Шу учбурчакнинг учидаги $\Delta\varphi$ бурчаги эгри чизиқнинг A нуқтасида ўтказилган уринмасининг A нуқтадан B нуқтасига ўтишдаги бурилиш нуқтасига тенг. ΔBKL_1 дан

$$|L_1K| = |\Delta\bar{\sigma}| = 2|\bar{\sigma}|\left|\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\right| = 2\left|\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\right|$$

ни топамиз. Агар бу тенгликнинг иккала томонини Δs га бўлиб юборсак:

$$\left|\frac{\Delta\bar{\sigma}}{\Delta s}\right| = 2\left|\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta s}\right| = \left|\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\right|\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$$

ҳосил бўлади. Бу тенгликнинг иккала томонида $\Delta s \to 0$ да лимитга ўтсак, чап томонида

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\bar{\sigma}}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\bar{\sigma}}{ds}\right|,$$

ўнг томонида эса 1-ажойиб лимитни қўллагандан сўнг

$$\left|\frac{d\bar{\sigma}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right| \tag{4}$$

ҳосил бўлади. Агар биз кўраётган чизиғимиз силлиқ бўлса, у ҳолда (4) нинг ўнг томонидаги лимит мавжуд бўлади.

1-таъриф. *Уринманинг A нуқтадан B нуқтага ўтиш жараёнидаги бурилиш бурчаги* $\Delta\varphi$ *нинг* $\overline{AB}$ *ёй узунлиги* Δs *га бўлган нисбатининг абсолют қиймати эгри чизиқнинг* $\overline{AB}$ *ёйига мос келувчи ўртача эгрилиги деб аталади.*

Демак,

$$\textit{ўртача эгрилик} = \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$$

экан.

2-таъриф. *Ўртача эгриликнинг* $\Delta s \to 0$ *даги лимити эгри чизиқнинг A нуқтасидаги эгрилиги деб аталади.*

Агар эгриликни K ҳарфи билан белгиласак.

$$K = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$$

бўлади.

Айлананинг эгрилиги $K = 1/R$ га тенг. Шу сабабли, $R = 1/K$ ни эгри чизиқнинг эгрилик радиуси деб аталади.

$\bar{\sigma}$ бирлик вектор бўлгани учун унинг ҳосиласи $\frac{d\bar{\sigma}}{ds}$ 2-§ даги 3-хоссага кўра, $\bar{\sigma}$ га перпендикуляр бўлади.

Демак, $\frac{d\bar{\sigma}}{ds}$ вектор узунлиги эгри чизиқ эгрилигига тенг ва йўналиши уринмага перпендикуляр экан.

3-таъриф. *Эгри чизиқнинг бирор нуқтасида* $\frac{d\bar{\sigma}}{ds}$ *векторга коллениар ўтган вектор эгри чизиқнинг шу нуқтадаги бош нормали деб аталади.* Бу йўналишнинг бирлик векторини $\vec{n}$ билан белгилаймиз.

У ҳолда (4) га асосан

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = K\vec{n}$$

дейиш мумкин. Бу ерда $K = 1/R$ эканлигини эсласак:

$$\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \frac{d\bar{\sigma}}{ds} = \frac{\bar{n}}{R} \tag{5}$$

тенглик ҳосил бўлади. Бундан хусусан

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\right)^2 \tag{6}$$

тенглик келиб чиқади.

Лекин

$$\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \frac{d^2x}{ds^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{ds^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{ds^2}\vec{k}$$

бўлгани учун

$$\frac{1}{R}=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2} \qquad (6')$$

дейиш мумкин. Бу формула тенгламаси ёйнинг узунлигига нисбатан параметрик кўринишда берилган ҳар қандай эгри чизиқнинг эгрилигини топиш имкониятини беради.

Агар эгри чизиқ тенгламаси ихтиёрий t параметр бўйича берилган бўлса:

$$\vec{r}=\vec{r}(t),$$

ёй узунлиги S ни t параметрнинг функцияси сифатида қараш мумкин. У ҳолда

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} \qquad (7)$$

бўлади. Бундан, $\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right|=1$ эканлигини эътиборга олсак:

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \qquad (8)$$

тенглик келиб чиқади. Бу тенгликнинг иккала тарафини дифференциаллаб, сўнг иккига бўлиб юборсак:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} \qquad (9)$$

ҳосил бўлади. (7) дан

$$\frac{d\vec{r}}{ds}=\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{1}{\frac{ds}{dt}}$$

келиб чиқади. Бу тенгликни S бўйича дифференциалласак:

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}-\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{\frac{d^2s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}$$

ва натижани (6) га қўйсак:

$$\frac{1}{R^2}=\left[\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}-\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{\frac{d^2s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}\right]^2=$$

$$=\frac{\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2-2\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}+\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^6}$$

ҳосил бўлади. Агар бу ерга $\frac{ds}{dt}$ ва $\frac{d^2s}{dt^2}$ лар ўрнига (8) ва (9) тенгликлардан аниқланган $\vec{r}(t)$ нинг ҳосилалари орқали ифодаларини қўйсак:

$$\frac{1}{R^2}=\frac{\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^2\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2-\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2}{\left\{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2\right\}^3} \qquad (10)$$

Охирги тенгликни

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2\vec{b}^2-\left(\vec{a}\vec{b}\right)^2$$

айниятдан фойдаланиб, қуйидаги

$$K^2=\frac{1}{R^2}=\frac{\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]^2}{\left\{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2\right\}^3} \qquad (11)$$

кўринишда ёзиб олса бўлади.

Мисол. $\vec{r}=5t\vec{i}+12\vec{j}\cos t+12\vec{k}\sin t$ эгри чизиқнинг эгрилигини топинг.

Ечиш. Аввал ҳосилаларини топиб оламиз:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = 5\bar{i} - 12\bar{j}\sin t + 12\bar{k}\cos t\,,$$

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -12\bar{j}\cos t - 12\bar{k}\sin t\,.$$

У ҳолда

$$\frac{d\bar{r}}{dt}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & -12\sin t & 12\cos t \\ 0 & -12\cos t & -12\sin t \end{vmatrix} = 144\bar{i} + 60\bar{j}\sin t - 60\bar{k}\cos t\,.$$

Бундан

$$\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right| = \sqrt{144^2 + 3600\sin^2 t + 3600\cos^2 t} =$$

$$= \sqrt{20736 + 3600} = 156$$

$$\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| = \sqrt{25 + 144\sin^2 t + 144\cos^2 t} = \sqrt{169} = 13.$$

Агар буларни (11) га қўйсак:

$$K = \frac{1}{R} = \frac{156}{13^3} = \frac{156}{2197}$$

бўлади.

Агар хусусан эгри чизиқ ясси бўлса, масалан, Oxy текислигида ётувчи эгри чизиқ бўлса, у ҳолда унинг параметрик тенгламалари

$$x = \varphi(t)\,,\; y = \psi(t)\,,\; z = 0$$

ёки вектор тенгламаси

$$\bar{r} = \varphi(t)\bar{i} + \psi(t)\bar{j}$$

кўринишда бўлади. У ҳолда

$$\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,,$$

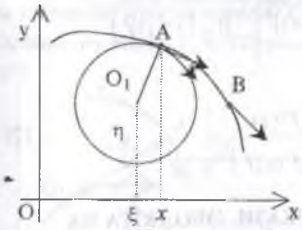
$$\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right| = \begin{vmatrix} \varphi'(t) & \psi'(t) \\ \varphi''(t) & \psi''(t) \end{vmatrix} = \left|\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)\right|$$

бўлгани учун (11) формулага кўра, эгрилик

$$K = \frac{\left|\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)\right|}{\left[(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2\right]^{3/2}}$$

бўлади.

Эслатма. Ясси эгри чизиқнинг бош нормали шу эгри чизиқ ётган текисликда ётади.



125-расм.

Энди фараз қилайлик, ясси эгри чизиқ тенгламаси икки марта узлуксиз дифференциалланувчи $y = f(x)$ функция билан берилган бўлсин. Унинг A нуқтадаги эгрилигини топайлик (125-расм).

Эгри чизиқнинг A ва B нуқталардаги уринмаларининг Ox ўқининг мусбат йўналиши билан ташкил этган бурчаклари мос равишда φ_1 ва φ_2 бўлсин.

Агар $B(x + \Delta x, y + \Delta y)$ десак, у ҳолда

$$tg\varphi_1 = f'(x)\,,\; tg\varphi_2 = f'(x + \Delta x)\,,$$

$$\alpha = \overset{\frown}{\varphi_1\varphi_2} = \left|arctgf'(x) - arctgf'(x + \Delta x)\right|$$

бўлади. Энди $\overset{\smile}{AB}$ ёй узунлигини топамиз (11-боб, 2-§ га қаранг):

$$\Delta s = |\overset{\smile}{AB}| = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + (f'(u))^2}\,du\,.$$

Шунинг учун эгриликнинг таърифига кўра

$$K = \lim_{\Delta x \to 0} \left| \frac{arctgf'(x) - arctgf'(x+\Delta x)}{\int\limits_{x}^{x+\Delta x} \sqrt{1+\left(f'(u)\right)^2}\,du} \right| =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left| \frac{\dfrac{f''(x+\Delta x)}{1+\left(f'(x+\Delta x)\right)^2}}{\sqrt{1+\left(f'(x+\Delta x)\right)^2}} \right| = \frac{|f''(x)|}{\left(1+\left(f'(x)\right)^2\right)^{3/2}}.$$

Демак,

$$K = \left| \frac{f''(x)}{\left(1+\left(f'(x)\right)^2\right)^{3/2}} \right|. \qquad (12)$$

4-§. ЭГРИЛИК МАРКАЗИ. ЭВОЛЮТА ВА ЭВОЛЬВЕНТА

Таъриф. *Ясси эгри чизиқнинг A нуқтасида эгри чизиқнинг ботиқлик тарафига ўтказилган бош нормалида A нуқтадан $R = 1/K$ масофада ётувчи O_1 нуқта эгри чизиқнинг A нуқтадаги эгрилик маркази дейилади.*

Айлананинг маркази эгрилик маркази билан устма-уст тушади.

Ясси Γ эгри чизиқнинг барча эгрилик марказларининг γ геометрик ўрни Γ нинг эволютаси, Γ нинг ўзи эса γ ни эвольвентаси дейилади.

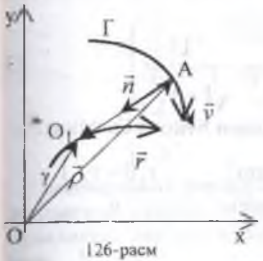
Тенгламаси икки маротаба узлуксиз дифференциалланувчи $y = f(x)$ функция орқали берилган Γ эгри чизиқнинг γ эволютасининг тенгламасини тузайлик.

Юқорида биз бундай эгри чизиқнинг эгрилигини (12) формула ёрдамида аниқланишини кўрган эдик. Демак,

$$\frac{1}{R} = \frac{|f''(x)|}{\left[1+\left(f'(x)\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{f''(x) signf''(x)}{\left[1+\left(f'(x)\right)^2\right]^{3/2}} \qquad (1)$$

катталик эгрилик маркази Γ дан қанча масофада жойлашганини билдирувчи миқдор бўлади.

Фараз қилайлик, Γ эгри чизиқнинг $A(x, f(x))$ нуқтасига мос келувчи эгрилик маркази O_1 нинг координаталари (ξ, η) бўлсин. Бу марказ (126, 127-расмларга қаранг)



126-расм

127-расм

$$\vec{\rho} = \vec{r} + R\vec{n} \qquad (2)$$

вектор билан аниқланади, бу ерда $\vec{r}$ -A нуқтанинг радиус-вектори, $\vec{n}$ -Γ нинг ботиқлик тарафига ўтказилган бош нормалнинг бирлик вектори. Γ эгри чизиқнинг вектор тенгламаси

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}\,.$$

Бундан

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dx} = \vec{i} + y'_x \vec{j}\,, \quad \frac{d^2\vec{r}}{dx^2} = 0\vec{i} + y''_x \vec{j}\,.$$

Бош нормал уринма $\vec{v}$ векторга перпендикуляр бўлгани учун унинг бирлик вектори

$$\vec{n} = \pm\left(\frac{-y'_x}{\sqrt{1+y'^2_x}}, \frac{1}{\sqrt{1+y'^2_x}} \right)$$

бўлади. Бу ерда қавс олдидаги ишорани $\vec{n}$ Γ нинг ботиқлик тарафига қараб йўналадиган қилиб, яъни $\left(\vec{n}, \frac{d^2\vec{r}}{dx^2}\right)$ скаляр кўпайтма ишораси мусбат бўладиган қилиб танланади:

$$\left(\vec{n}, \frac{d^2\vec{r}}{dx^2}\right) = \pm\frac{\ddot{y}_x}{\sqrt{1+\dot{y}_x^2}} = \ddot{y}_x\left(sign\ddot{y}_x\right)\left(1+\dot{y}_x^2\right)^{-1/2}.$$

Демак,

$$\vec{n} = sign\ddot{y}_x\cdot\left(\frac{-\dot{y}_x}{\sqrt{1+\dot{y}_x^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+\dot{y}_x^2}}\right) \qquad (3)$$

экан. (2) тенгликни проекциялари бўйича ёзайлик:

$$\xi = x + \frac{\left(1+\dot{y}_x^2\right)^{3/2}}{\ddot{y}_x sign\ddot{y}_x}\cdot\frac{-\dot{y}_x sign\ddot{y}_x}{\left(1+\dot{y}_x^2\right)^{1/2}} = x - \frac{\dot{y}_x\left(1+\dot{y}_x^2\right)}{\ddot{y}_x},$$

$$\eta = y + \frac{\left(1+\dot{y}_x^2\right)^{3/2}}{\ddot{y}_x sign\ddot{y}_x}\cdot\frac{sign\ddot{y}_x}{\left(1+\dot{y}_x^2\right)^{1/2}} = y + \frac{1+\dot{y}_x^2}{\ddot{y}_x}. \qquad (4)$$

Демак,

$$\vec{\rho} = \left(x - \frac{\dot{y}_x\left(1+\dot{y}_x^2\right)}{\ddot{y}_x}, y + \frac{1+\dot{y}_x^2}{\ddot{y}_x}\right)$$

экан. У ҳолда эволюта γ га O_1 нуқтада ўтказилган уринма тенгламаси

$$\frac{d\vec{\rho}}{dx} = \dot{\xi}_x\vec{i} + \dot{\eta}_x\vec{j} = \left(-3\dot{y}_x^2 + \frac{\dot{y}_x\left(1+\dot{y}_x^2\right)\dddot{y}_x}{\ddot{y}_x^2}\right)\vec{i} +$$

$$+\left(\dot{y}_x + \frac{2\dot{y}_x\ddot{y}_x^2 - \left(1+\dot{y}_x^2\right)\dddot{y}_x}{\ddot{y}_x^2}\right)\vec{j}$$

бўлади.

Эвольвентанинг $A(x, f(x))$ нуқтасидаги бош нормали $\vec{n}$ эволюта учун $O_1(\xi,\eta)$ нуқтасидаги уринма бўлади. Ҳақиқатан бунга ишонч ҳосил қилиш учун $\frac{d\vec{\rho}}{dx}$ ни $\vec{v}$ га перпендикуляр эканлигини кўрсатиш кифоя:

$$\left(\vec{v}, \frac{d\vec{\rho}}{dx}\right) = 1\cdot\left(-3\dot{y}_x^2 + \frac{\dot{y}_x\left(1+\dot{y}_x^2\right)\dddot{y}_x}{\ddot{y}_x^2}\right) +$$

$$+\dot{y}_x\cdot\left(\dot{y}_x + \frac{2\dot{y}_x\ddot{y}_x^2 - \dddot{y}_x - \dot{y}_x^2\dddot{y}_x}{\ddot{y}_x^2}\right) =$$

$$= -3\dot{y}_x^2 + \frac{\dot{y}_x\left(1+\dot{y}_x^2\right)\dddot{y}_x}{\ddot{y}_x^2} + \dot{y}_x^2 + \frac{2\dot{y}_x\ddot{y}_x^2 - \dot{y}_x\left(1+\dot{y}_x^2\right)\dddot{y}_x}{\ddot{y}_x^2} = 0.$$

Эволютанинг муҳим хоссаларидан яна бири бу: эвольвента эгрилик радиусининг орттирмаси ишораси аниқлигида эволюта мос ёй узунлигининг орттирмасига тенг:

$$R_2 - R_1 = \pm\left|\sigma_2 - \sigma_1\right|.$$

Агар ясси Γ эгри чизиқ $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ параметрик тенгламалар билан берилган бўлса, унинг эволютасининг тенгламаси

$$\xi = x - \dot{y}_t\frac{\dot{x}_t^2 + \dot{y}_t^2}{\dot{x}_t\ddot{y}_t - \dot{y}_t\ddot{x}_t}, \quad \eta = y + \dot{x}_t\frac{\dot{x}_t^2 + \dot{y}_t^2}{\dot{x}_t\ddot{y}_t - \dot{y}_t\ddot{x}_t} \qquad (5)$$

бўлади.

Мисол. $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ циклоиданинг эволютаси топилсин.

Ечиш. Бунинг учун (5) формуладан фойдаланамиз.

$$\dot{x}_t = 1 - \cos t, \ \ddot{x}_t = \sin t, \ \dot{y}_t = \sin t, \ \ddot{y}_t = \cos t.$$

$$\dot{x}_t^2 + \dot{y}_t^2 = \left(1 - \cos t\right)^2 + \sin^2 t = 2\left(1 - \cos t\right),$$

$$x_t' y_t'' - y_t' x_t'' = (1-\cos t)\cos t - \sin^2 t = \cos t - 1 .$$

У ҳолда

$$\xi = t - \sin t - \sin t \cdot \frac{2(1-\cos t)}{\cos t - 1} = t - \sin t + 2\sin t = t + \sin t ,$$

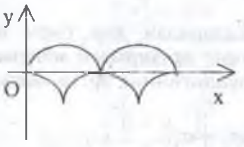
$$\eta = 1 - \cos t + (1-\cos t)\cdot\frac{2(1-\cos t)}{\cos t - 1} =$$

$$= 1 - \cos t - 2 + 2\cos t = -1 + \cos t.$$

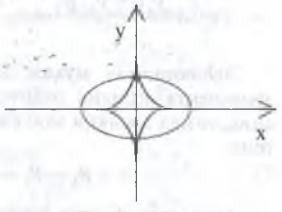
Агар бу ерда $t = \tau + \pi$ десак, тенгламалар

$$\xi - \pi = \tau - \sin\tau , \ \eta + 2 = 1 - \cos\tau$$

кўринишга келади, яъни циклоиданинг эволютаси яна циклоида бўлар экан (128-расмга қаранг).



128-расм.



129-расм.

2-*мисол.* $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ эллипснинг эволютасини топинг.

Ечиш. $x_t' = -a\sin t$, $y_t' = b\cos t$, $x_t'' = -a\cos t$, $y_t'' = -b\sin t$.

У ҳолда

$$\xi = a\cos t - b\cos t \cdot \frac{a^2 + (b^2 - a^2)\cos^2 t}{ab} = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t ,$$

$$\eta = b\sin t - a\sin t \cdot \frac{(a^2 - b^2)\sin^2 t + b^2}{ab} = -\frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t .$$

Бу астроиднинг параметрик тенгламасидир. Демак, эллипснинг эволютаси астроид бўлар экан (129-расмга қаранг).

5-§. ЭРГАШУВЧИ УЧЁҚЛИК. БИНОРМАЛ ВА БУРАЛМА

Фазовий $\vec r = \vec r(t)$ эгри чизиқнинг ихтиёрий $M(x,y,z)$ нуқтасида учта ўзаро перпендикуляр бирлик векторлар қуриш мумкин. Булардан иккитаси: уринма вектор $\vec v = \frac{d\vec r}{dt}$ ва бош нормал $\vec n$ ни юқорида кўрдик. Уларнинг вектор кўпайтмаси

$$\vec\tau = \vec v \times \vec n$$

эгри чизиқнинг M нуқтасидаги бинормали дейилади.

Демак, $\vec v, \vec n, \vec\tau$ учлик 130-расмда кўрсатилгандек йўналган бўлар экан.

130-расм.

$\vec v$ ва $\vec n$ векторлардан ўтган текисликни ёпишувчи текислик $\vec n$ ва $\vec\tau$ векторлардан ўтган текисликни нормал текислик, ва $\vec\tau$ ва $\vec v$ векторлардан ўтган текисликни тўғриловчи текислик деб атаймиз.

Фазовий эгри чизиқнинг M нуқтасида вужудга келадиган бундай текисликлардан тузилган учёқликни эргашувчи учёқлик деб атаймиз.

Агар эгри чизиқ ясси бўлса, унинг ёпишган текислиги у ётган текислик билан устма-уст тушади. Агар бу эгри чизиқ ясси бўлмаса, у ҳолда унинг икки M ва L нуқталарининг ёпишган текисликлари ўзаро иккиёқли бурчак ташкил этади. Бу бурчак катталигини φ билан белгилайлик.

Таъриф. *Агар*

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\varphi}{\Delta s} = N$$

лимит мавжуд бўлса, уни эгри чизиқнинг M нуқтадаги буралмаси, деб атаймиз, бу ерда Δs - $\breve{ML}$ ёйнинг узунлиги.

Бу иккиёқли бурчак катталиги φ — M ва L нуқталардаги бинормаллар орасидаги бурчакка тенг, шу сабабли, кўпинча бу бурчакни бинормалнинг бурилиш бурчаги деб ҳам аташади.

Бинормалнинг $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ ҳосиласини топайлик. 2-§ даги 6-хоссага кўра,

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds}=\frac{d(\vec{v}\times\vec{n})}{ds}=\frac{d\vec{v}}{ds}\times\vec{n}+\vec{v}\times\frac{d\vec{n}}{ds}, \tag{1}$$

лекин $\frac{d\vec{v}}{ds}=\frac{\vec{n}}{R}$ эди (3-§ қаранг). Шу сабабли

$$\frac{d\vec{v}}{ds}\times\vec{n}=\frac{1}{R}\vec{n}\times\vec{n}=0.$$

У ҳолда

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds}=\vec{v}\times\frac{d\vec{n}}{ds} \tag{2}$$

бўлади. Бундан вектор кўпайтманинг таърифига биноан $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ вектор уринма $\vec{v}$ векторга перпендикуляр эканлиги келиб чиқади. $\vec{\tau}$ - бирлик вектор бўлгани учун 2-§ даги 3-хоссага кўра, $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ вектор $\vec{\tau}$ га ҳам перпендикулярдир. Демак, $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ вектор ҳам $\vec{v}$ ҳам $\vec{\tau}$ векторларга перпендикуляр бўлгани учун $\vec{n}$ га коллинеар бўлади. Қуйидаги белгилашни киритайлик:

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right|=\frac{1}{|T|}.$$

У ҳолда

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds}=\frac{1}{T}\vec{n}, \tag{3}$$

деб ёзиш мумкин. Умуман $\frac{1}{T}=N$ эканлигини кўрсатиш қийин эмас.

Агар эгри чизиқ ясси бўлса, буралма нолга тенг бўлади, чунки бу ҳолда ёпишма текислик ўз ҳолатини ўзгартирмайди. Агар эгри чизиқ ясси бўлмаса, буралма бу чизиқнинг ясси чизиқдан қанчага четланганлигини билдиради. Шу сабабли T ни эгри чизиқнинг буралма радиуси деб аташади.

(2) ва (3) формулаларга кўра,

$$\frac{1}{T}\vec{n}=\vec{v}\times\frac{d\vec{n}}{ds}.$$

Бу тенгликнинг иккала тарафини $\vec{n}$ га скаляр кўпайтирсак, у ҳолда

$$\frac{1}{T}\vec{n}\circ\vec{n}=\vec{n}\circ\left(\vec{v}\times\frac{d\vec{n}}{ds}\right)=-\vec{n}\circ\left(\frac{d\vec{n}}{ds}\times\vec{v}\right) \tag{4}$$

бўлади. Энди $\vec{n}=R\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ эканлигини эсласак, унда

$$\frac{d\vec{n}}{ds}=R\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}+\frac{dR}{ds}\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}.$$

Буни $\vec{n}$ га вектор кўпайтирсак:

$$\vec{n}\times\frac{d\vec{n}}{ds}=R\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\times\left(R\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}+\frac{dR}{ds}\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right)=$$

$$=R^2\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\times\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right)+R\frac{dR}{ds}\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\times\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right)=R^2\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\times\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right).$$

Агар $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{ds}$ эканлигини эсласак, (4) дан

$$\frac{1}{T}=-R^2\frac{d\vec{r}}{ds}\circ\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\times\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right) \tag{5}$$

келиб чиқади.

Фараз қилайлик, вектор $\vec{r}$ ихтиёрий t параметрнинг функцияси бўлсин. У ҳолда

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

дейиш мумкин. Бу тенгликни t бўйича дифференциаллайлик:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d}{ds}\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds}{dt}+\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Охирги тенгликни t бўйича яна бир маротаба дифференциаллайлик:

$$\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}=\frac{d}{ds}\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right)\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}2\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}+$$

$$+\frac{d}{ds}\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3+$$

$$+3\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Буларни (5) формула бўйича аралаш кўпайтирамиз. Ифодани соддалаштиргандан сўнг бу кўпайтма қуйидаги кўринишга келади:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\times\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right)=\frac{d\vec{r}}{ds}\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\times\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^6. \qquad (6)$$

Агар бу ерда

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 \text{ ёки } \left(\frac{ds}{dt}\right)^6=\left\{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2\right\}^3$$

эканлигини эътиборга олсак, (6) ни қуйидагича ёзса бўлади:

$$\frac{d\vec{r}}{ds}\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\times\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right)=\frac{\frac{d\vec{r}}{dt}\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\times\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right)}{\left\{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2\right\}^3}.$$

Буни ва R^2 нинг 4-§ нинг (11) формуласидаги ифодасини (6) га олиб бориб қўйсак,

$$\frac{1}{T}=-\frac{\frac{d\vec{r}}{dt}\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\times\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right)}{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^2} \qquad (7)$$

формулани ҳосил қиламиз.

Бу формула параметрик тенгламаси ихтиёрий t параметр билан берилган эгри чизиқнинг буралмасини топиш имконини беради.

Бу параграф якунида Серре-Френе формулалари деб аталувчи $\vec{v},\vec{n},\vec{\tau}$ векторларнинг ҳосилаларини ифодаловчи қуйидаги тенгликларни кўрайлик:

$$\frac{d\vec{v}}{ds}=\frac{\vec{n}}{R},\ \frac{d\vec{\tau}}{ds}=\frac{\vec{n}}{T},\ \frac{d\vec{n}}{ds}=-\frac{\vec{v}}{R}-\frac{\vec{\tau}}{T}.$$

Буларнинг, масалан, охиргисини исбот қилайлик. Бунинг учун

$$\vec{n}=\vec{\tau}\times\vec{v}$$

тенгликни s бўйича дифференциаллайлик:

$$\frac{d\vec{n}}{ds}=\frac{d\vec{\tau}}{ds}\times\vec{v}+\vec{\tau}\times\frac{d\vec{v}}{ds}=\frac{\vec{n}}{T}\times\vec{v}+\vec{\tau}\times\frac{\vec{n}}{R}=$$

$$=\frac{1}{T}\vec{n}\times\vec{v}+\frac{1}{R}\vec{\tau}\times\vec{n}=-\frac{\vec{\tau}}{T}-\frac{\vec{v}}{R}.$$

Бу ерда

$$\vec{n}\times\vec{v}=-\vec{\tau}\ ,\ \vec{\tau}\times\vec{n}=-\vec{v}$$

эканлиги эътиборга олинди.

МУНДАРИЖА

12-БОБ. КЎП ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБИ

13-БОБ. ВЕКТОР-ФУНКЦИЯНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБИ

ДАВРОН РАҲИМОВ

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

I

Тошкент – 2003

Нашр учун масъул Н.Ҳалилов
Таҳририят мудири М.Миркомилов
Муҳаррир Д. Саъдуллаева
Бадиий муҳаррир Ҳ.Қутлуқов
Мусаҳҳиҳа О.Меденова

Босишга рухсат этилди 15.01.2003 й. Бичими $84x108^{1}/_{32}$.Офсет қоғози. Шартли босма табоғи 35,0. Нашр табоғи 34,5. Адади 100 Буюртма___.

«ЎАЖБНТ» Маркази,
Тошкент, Мустақиллик майдони, 5.

Андоза нусхаси Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг «ЎАЖБНТ» Марказида тайёрланди.