Х.Р.Латипов, Ф.У.Носиров, Ш.И.Тожиев

# ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ СИФАТ НАЗАРИЯСИ ВА УНИНГ ТАТБИҚЛАРИ

Х. Р. ЛАТИПОВ, Ф. У. НОСИРОВ, Ш. И. ТОЖИЕВ

# ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ СИФАТ НАЗАРИЯСИ ВА УНИНГ ТАТБИҚЛАРИ

*Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги олий ўқув юртлари талабалари учун дарслик сифатида тавсия этган*

ТОШКЕНТ “ЎЗБЕКИСТОН” 2002

22.161.6
Л24

Тақризчилар: Россия Фанлар академияси ва Украина Миллий фанлар академияси академиги **Ю. А. Митропольский**, Алишер Навоий номидаги Самарқанд Давлат университетининг “Алгебра ва геометрия” кафедраси профессори, ф.-м.ф.д. **А. Р. Артиков**
А. Р. Беруний номидаги Тошкент Давлат техника университети “1-Олий математика” кафедраси доцентлари **А. Нарзиев, Р.Р. Абзалимов**

$Л\,\frac{1602070100-5}{351\,(04)\,2001}\,2002$

ISBN 5-640-03058-5

# Сўз боши

1991 йил 31 август мамлакатимиз тарихида буюк ва унутилмас сана бўлди, яъни Ўзбекистон мустақил давлат деб эълон қилинди. Шу қутлуғ ва муқаддас кундан бошлаб олий таълим соҳасида ҳам бир қатор ижобий ишлар амалга оширилди. Техника олий ўқув юртларида кўп босқичли таълим тизими жорий қилиниб, бакалавр ва магистр бўйича мутахассислар тайёрлаш йўлга қўйилди. Бу эса техника олий ўқув юрти ўқитувчиларидан жаҳон андозаларига тўла жавоб берадиган, мустақиллигимиз талаб ва эҳтиёжларига мос бакалавр ва магистр ўқув режаси, ўқув режага тўла мос келувчи ўқув дастурлари, олий касбий таълимнинг давлат стандартлари ҳамда "Миллий дастур" талаблари асосида дарслик ва ўқув-услубий адабиётлар яратишни тақозо этади.

Ушбу дарсликни ёзишда муаллифлар "Дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси"ни баён этиш, мавзуга оид мисол ва масалалар ечиш, техника ихтисосликларига мослаб ўқитиш хусусиятини ҳисобга олган ҳолда унинг физикага, механикага, электротехникага, биологияга, медицинага татбиқига эътибор берган ҳолда мисол ва масалаларни ечиш усулларини кўрсатишни ўз олдиларига мақсад қилиб қўйдилар. Ечилишлари билан берилган мисол ва масалалардан ташқари мустақил ечиш учун ҳам етарлича мисол-масалалар келтирилган.

Дарсликка муаллифларнинг бир неча йил давомида Абу Райхон Беруний номидаги Тошкент Давлат техника университети "Энергетика ва электроника", "Автоматика ва ҳисоблаш" техникаси факультетларининг иккинчи курс талабаларига "Дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси ва унинг татбиқлари" га доир ўқиган маъруза ва олиб борган амалий машғулотлари асос бўлди.

Бундан ташқари шу соҳага тегишли мавжуд адабиётлардан, жумладан, рус тилида ёзилган дарсликлардан фойдаланилди.

Ушбу дарсликни тайёрлашда ўзларининг қимматли маслаҳат ва ёрдамларини аямаганлари учун Украина миллий ФА академиги ва Россия ФА академиги Митропольский Юрий Алексеевичга, Ўзбекистон ФА академиги Нуъмон Юнусович Сатимовга, СамДУ нинг профессори ф.-м-ф-д Акмал Раббинович Артиковга, Тошкент ДТУнинг “Олий матматика” кафедраси доцентлари Р. Р. Абзалимовга ва А. Нарзиевга муаллифлар ўз миннатдорчиликларини билдирадилар.

Мазкур дарслик шу соҳада ўзбек тилида ёзилган дастлабки китоблардан бўлганидан хато ва камчиликлардан холи деб бўлмайди. Шу боис дарслик ҳақида билдирилган фикр ва мулоҳазаларни миннатдорчлик билан қабул қиламиз.

*Муаллифлар*

# КИРИШ

Дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси дифференциал тенгламалар ечимларининг (интеграл эгри чизиқлари)нинг текисликда ва кўп ўлчовли фазолардаги манзарасини геометрик тасвирлашни ўрганади.

Дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси асосчилари А. М. Ляпунов ва А. Пуанкаре ҳисобланадилар. А. М. Ляпунов сифат ва ҳаракат назариясига турли механик системаларнинг турғунлигини текшириш орқали, А. Пуанкаре эса сифат назарияси масалаларига назарий космогония (қуёш системасининг турғунлиги) дан келиб чиқиб ёндошди.

Дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси ва унинг татбиқлари соҳасида ўз даврининг буюк математиклари А.Пуанкаре, В. В. Степанов, В. В. Немицкий, С. Лефшец, А. М. Ляпунов, Ф. Трикоми, Э. А. Каддингтон, Н. Левинсон, Дж. Сансоне, Н. П. Еругин, А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, В. И. Арнольд, И. Г. Петровский, Л. С. Понтрягин ва бошқалар изланишлар олиб борганлар. Уларнинг илмий ишлари, дарсликлари бутун жаҳонга маълумдир.

Бундан ташқари Д. Эрроусмит, К. Плейс, В. В. Амелькин, А. П. Садовский ва бошқа олимларнинг махсус нуқталар назариясига бағишлаб ёзилган бир қанча қўлланмалари мавжуд.

Дифференциал тенгламаларнинг сифат назариясини ривожлантиришда ва унинг техникага татбиқларида олимлардан Л. И. Мандельштам, Л. И. Папалекси, А. А. Андронов, А. А. Боголюбов, Г. И. Марчук, Ю. А. Митропольский, В. А. Плисс, И. С. Куклес, Х. Р. Латиповлар муҳим ҳисса қўшдилар.

Юқорида номлари қайд этилган олимларнинг дарсликлари монография тарзида 1940—1980 йилларда чоп этилган ва улар дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси бўйича шуғулланувчи мутахассисларгагина тушунарли бўлиб, уларда дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси ва уларнинг татбиқларининг сўнгги ютуқлари ёритилмаган.

Сизларга тақдим қилинаётган ушбу дарслик қуйидаги ўзига хослиги билан мавжуд дарсликлар ва монографиялардан фарқ қилади:

— биринчидан, дарслик шу соҳада ўзбек тилида чоп этилаётган дастлабки дарсликлардандир. Шунингдек, юқорида қайд этилган ва мавжуд бўлган рус ва ўзбек тилида ёзилган дарсликлардан умуман фарқ қилиши билан;

— иккинчидан, дарслик ҳамма тушунадиган содда ва равон тарзда ёзилиши ва ўқувчиларни дифференциал тенгламалар сифат назариясининг энг содда усуллари ва унинг моделлари билан таништиради;

— учинчидан, биология, медицина, физика, электроэнергетика ва ҳоказо соҳаларга оид масалаларни ечишнинг дифференциал тенгламалар сифат назарияси усулларининг бошқа математик усулларидан афзаллиги кўрсатиб берилган. Дарсликда, ҳаётий ҳодисалар ва жараёнларни математик моделлаштиришда дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси усулларидан фойдаланиш тавсия қилинади. Тавсия қилинаётган усуллар табиат ва техникада учрайдиган ҳар хил масалалар ёрдамида кўрсатиб берилган;

— тўртинчидан, дарсликда текисликдаги махсус нуқталар назарияси ва уларнинг татбиқи баён этилган. Дифференциал тенгламалар сифат назариясининг бир қатор умумий теоремалари, биринчи ва иккинчи гуруҳ содда ва мураккаб махсус нуқталар турлари, фокус ва марказ бўлиш муаммоси, яъни даврий тебранишларнинг мавжудлиги масаласи, чексиз узоқлашган махсус нуқталарни ўрганиш усуллари ва бутун текисликда интеграл эгри чизиқларнинг манзарасини чизиш ўрганилади.

Дифференциал тенгламалар сифат назарияси бошқа фанларга нисбатан ёш фан бўлиб, бор адабиётларда уни яратган буюк олимлар ҳақида маълумотлар йўқ. Шуни эътиборга олиб дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси асосчиларидан А. Пуанкаре ва А. М. Ляпуновлар ҳақида қисқача маълумот беришни лозим топдик.

# АНРИ ПУАНКАРЕ

XIX аср иккинчи ярмининг буюк математиги, механиги, назариётчи физиги Анри Пуанкаре (1854—1912) 1854 йил 29 апрелда, Франциянинг қадимий шаҳарларидан бири бўлган Нансида шифокор оиласида дунёга келди. Пуанкарелар оиласида бир қанча машҳур кишилар вояга етди.

Пуанкареда математикага бўлган қизиқиш лицейда ўқиш даврининг тўртинчи йилидаёқ намоён бўлган эди. У элементар математика бўйича ўтказилган конкурсда биринчи мукофотни олиб, ўз қобилиятини намойиш этганди.

Пуанкаре оғзаки имтиҳонларни қандай топширганлиги ҳақида ҳозирга қадар ривоятлар юради.

Лиқ тўла зал ... Пуанкаре тутила-тутила, ҳар замон кўзларини юмиб, секин гапирмоқда. У қилаётган исботни тўхтатиб, янги исботни кўрсатишга рухсат сўрайди ва бир оздан сўнг: “Йўқ! Мен яхшиси ўзимнинг биринчи исботимга қайтаман. У қисқа ва жозибалидир”, деб хитоб қилади. Пуанкаре Политехника мактабига ўқишга кириш пайтида профессор Тиссонинг элементар математикадан берган саволига бирданига учта ҳар хил жавоблар келтириб юқори баҳо олишга муяссар бўлган.

А. Пуанкаре 1875 йилда Политехника мактабида, 1875-1879 йилларда Олий Тоғ мактабида ўқиди ва бу мактабни битиргач, бир қанча вақт Франциядаги конлардан бирида тоғ муҳандиси бўлиб ишлади. 1879 йилдан бошлаб у ўзининг вақтини илмий изланишга ва илм-фанга, ўқитувчиликка бағишлади. 1879-1881 йилларда Канн университетида ўқитувчилик қилди, 1881 йилда унга Париж университетининг доктори илмий даражаси берилди. Беш йилдан сўнг Анри Пуанкаре Париж университетининг математик физика ва эҳтимоллар назарияси профессори бўлиб ишлай бошлайди.

Анри Пуанкаре 1887 йилда, 33 ёшида Париж Фанлар академиясининг аъзолигига, 1908 йилда эса Франция Фанлар академиясининг аъзолигига сайланди.

Ўзининг 35 йиллик илмий-педагогик фаолиятида Анри Пуанкаре 500 дан ортиқ мемуарлар, 20 томдан ортиқ математик физикага доир асарлар, 10 дан ортиқ математика, астрономия, механика ва философияга оид монографиялар ёзди.

Анри Пуанкаре илмий ишларининг кўпчилик қисми дифференциал тенгламалар назариясига бағишланган.

Маълумки, дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси XIX асрнинг охирги чорагида пайдо бўлиб, бу назария А. Пуанкаре ва А. Ляпунов номлари билан боғлиқдир.

А. Пуанкаре ўз ишларида дифференциал тенгламаларнинг сифат назариясини яратди, интеграл эгри чизиқларни текисликда ва сферада жойлашиш манзарасини текширди, махсус нуқталарни классификациясини, интеграл эгри чизиқларнинг торда жойлашишини, уларнинг *n* ўлчовли фазодаги айрим хоссаларини ўрганди. А. Пуанкаре томонидан эришилган айрим натижалар фундаментал аҳамиятга эга бўлиб, улар кейинги илмий изланишлар учун асос бўлиб хизмат қилди ва қилмоқда.

А. Пуанкаренинг “Осмон механикасининг янги усуллари” номли уч томлик китоби ҳозирги кунда ҳам нафақат астроном-назариётчиларнинг балки физик ва механикларнинг ҳам ажойиб қўлланмасига айлангандир. Пуанкаре бу асарида дифференциал тенгламаларнинг асимптотик ва иккиланган даврий ечимлари назариясини ривожлантириб, уларни қатъий асослаб берди. Бу ишлари билан у, илгари маълум бўлмаган, янги даврий ва асимптотик ҳаракатларни кашф қилди, кичик параметрлар усули, қўзғалмас нуқта, вариация тенгламалари тушунчаларини киритди, моддий система ҳаракатининг турғунлик назариясига асос солган инвариантлар назариясини ишлаб чиқди.

А. Пуанкаре томонидан яратилган кичик параметрларни ўз ичига олувчи, чизиқли бўлмаган дифференциал тенгламалар системасининг даврий ечимлари манзарасини чизиш усули умумий механика, электро ва радиотехника, автоматика ва физиканинг бир қанча бўлимларида кенг талқинини топган.

Анри Пуанкаре фанга математиканинг барча соҳаларини биринчи даражали натижалар билан бойитган математик сифатида кириб келган олимдир. У осмон механикаси тарихида янги эра очган, топология ва нисбийлик назарияси бошловчиси, квант назарияси ижодкорларидан бири, ўз ишларида назарий ва математик физикани кенг қўллаган олимдир.

А. Пуанкаренинг илмий ишлари космогония, топология, эҳтимоллар назарияси, нисбийлик назарияси, чизиқлимас механика фанларини ривожланишида муҳим аҳамиятга эгадир.

А. Пуанкаре 1912 йил 17 июлда вафот этди.

## ЛЯПУНОВ АЛЕКСАНДР МИХАЙЛОВИЧ

Ляпунов Александр Михайлович 1857 йили 6 июн (25 май) Ярославл шаҳрида туғилди. Унинг отаси астроном бўлиб, қозон университетида, кейинчалик эса Демидов лицейида директор лавозимида ишлаган. Ляпунов бошлангич маълумотни отасидан ва (отасини ўлимидан сўнг) ўша даврнинг машҳур физиологи И. М. Сеченовнинг укаси бўлмиш Р. М. Сеченовдан олди. Ляпунов 1876 йили Нижний Новгород шаҳридаги гимназияни олтин медал билан тугатгандан сўнг, Петербург университети физика-математика факультетининг математика бўлимига ўқишга киради. 1885 йили Ляпунов "Эллипсоидли мувозанат кўринишдаги ҳаракат қилувчи суюқликнинг турғунлиги ҳақида" мавзусида магистрлик диссертациясини ёқлаб, приват-доцент унвонини олди ва шу йили Харьков университетининг механика кафедрасига мудир қилиб тайинланди. Дастлаб жуда кўп вақтни у маърузалар матнларини тайёрлашга сарфлаган бўлса, 1888 йилдан бошлаб унинг "чекланган озод даражали сонлардан тузилган механик системалар ҳаракатининг турғунлик назарияси" бўйича илмий ишлари матбуотда чиқа бошлади.

1892 йили Ляпунов "Ҳаракатнинг турғунлиги ҳақидаги умумий масала" номли ажойиб ишини эълон қилиб, шу йилиёқ Москвада ушбу ишни докторлик диссертацияси сифатида ҳимоя қилди. Унинг докторлик диссертациясига буюк олимлардан Н. Е. Жуковский ва Б. К. Млодзеевский оппонентлик қилдилар. Ляпуновнинг Харьков шаҳри давридаги фаолияти потенциал назария ва эҳтимоллар назариясига бағишланган бўлиб, бу даврда у ушбу назариялар бўйича юқори даражали натижаларга эришган эди.

Харьков университетидаёқ (1893 йили) Ляпунов оддий профессор унвонига сазовор бўлган. У математиканинг механика, математик физика, эҳтимоллар назарияси ва бошқа бўлимларидан маърузалар ўқиди.

А. М. Ляпунов ажойиб маърузачи, ўзининг тингловчиларига фаннинг энг юқори чўққиларини очиб бера оладиган, шунингдек талабаларнинг алоҳида ҳурматига сазовор бўлган профессорлардан бўлган. У маърузаларга ўзига талабчанликни сезган ҳолда тайёргарлик кўрар эди. У ёзган қўлланма ва ёзувларида маълумотларни юқори илмий даражадаги баён этилиши, шунингдек бошқа қўлланма ва дарсликларда бўлмаган айрим янги далиллардан иборат бўлишига катта аҳамият берар эди. Бу қўлланма ва ёзувларни мустақил илмий-услубий ишлар деб ҳисоблаш мумкин.

XIX асрнинг охири XX асрнинг бошларида А. М. Ляпуновнинг номи машҳур олим сифатида бутун дунёга танилди. 1900 йилда у амалий математика кафедраси бўйича Россия Фанлар академиясининг мухбир-аъзоси, 1901 йилда эса академиги қилиб сайланади.

1902 йилнинг баҳорида Ляпунов Петербургга келди. Шундан бошлаб у педагогик фаолиятини тўхтатиб, бутун вақтини илмий изланишларга бағишлади. У ўзи бошлаган Чебишев муаммосига қайтиб, масаланинг қўйилишини кенгайтириб уни ечишни охирига етказди. Ляпуновнинг Петербургдаги ишлари асосан осмон жисмлари назариясига бағишланган. Бу даврда у илмий муаммолар бўйича бутун дунёга машҳур бўлган Пуанкаре, Пикар, Корн, Коссера ва бошқа таниқли олимлар билан доимий равишда хатлар ёзиш орқали мулоқотда бўлди. 1908 йили Римда ўтказилган IV Халқаро математиклар илмий конгрессида қатнашди.

Ляпуновнинг фандаги улкан хизматлари тан олина бошланди. У Рим Фанлар академиясининг аъзоси, Париж Фанлар академиясининг мухбир-аъзоси, Петербург ва Қозон университетларининг, Харьков математиклар жамиятининг ва бошқа бир қатор илмий жамиятларнинг фахрий аъзоси қилиб сайланган. А. М. Ляпунов 1918 йил 3 ноябрда оламдан ўтган.

## I БОБ

# ТЕКИСЛИКДА МАХСУС НУҚТАЛАРНИ ТЕКШИРИШ

> Ўз вақтида физика математика ривожига қандай таъсир кўрсатган бўлса, инсон организми ҳам математика тараққиётига шундай таъсир кўрсатади.
>
> *РИЧАРД БЕЛЛМАН*

### 1-§. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Таъриф. Эркли ўзгарувчи $x$, номаълум функция $y$ ва унинг $y'$, $y''$, ... , $y^{(n-1)}$, $y^{(n)}$ ҳосилалари орасидаги боғланишни ифодалайдиган тенглама *дифференциал тенглама* дейилади ва у умумий кўринишда қуйидагича белгиланади:

$$F\left(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,y^{(n-1)},\ y^{(n)}\right)=0. \qquad (1.1)$$

(1.1) — $n$-тартибли *ошкормас оддий дифференциал тенглама* дейилади.

Агар (1.1) тенгламадан $y^{(n)}$ ни аниқлаш мумкин бўлса,

$$y^{(n)}=f\left(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}\right)$$

кўринишдаги тенглама $n$-тартибли *ошкор оддий дифференциал тенглама* дейилади.

Дифференциал тенгламалар номаълум функция сифатида фақат бир ўзгарувчили функция қатнашадиган оддий дифференциал тенгламаларга ва кўп аргументли функцияларнинг хусусий ҳосилалари қатнашадиган хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларга бўлинади.

Оддий дифференциал тенгламалар ичида энг соддаси биринчи тартибли дифференциал тенгламадир, у

$$F(x,\ y,\ y')=0 \quad \text{ёки} \quad y'=f(x,\ y) \qquad (1.2)$$

кўринишларнинг бири билан ифодаланади, бунда $f(x,\ y)$ — бирор $O_{xy}$ соҳада аналитик функция. (1.2) дифференциал тенгламанинг ўнг қисми, яъни $f\,(x,y)$ функция $Oxy$ текислигида бирор $G$ соҳадаги ҳар бир нуқтадан ўтувчи дифференциал тенгламанинг ечимларидан иборат интеграл эгри чизиқларга ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини аниқлайди.

Агар ечимларнинг ҳар бир нуқтасидаги бурчак коэффициентларининг йўналишини аниқласак, у ҳолда *йўналишлар майдонига* эга бўламиз.

Ушбу

$$f(x,\ y)=k \quad (k=\text{const}) \tag{1.3}$$

тенглама билан аниқланадиган чизиқлар тўплами (1.2) тенгламанинг *изоклинлари* дейилади. (1.3) чизиқ билан (1.2) тенгламанинг ечимини (яъни интеграл чизиқлари) кесишган нуқтасидан ўтказилган уринма $Ox$ ўқининг мусбат йўналиши билан ташкил этган бурчагининг тангенси $\operatorname{tg}\alpha=k$ га тенг бўлади. Агар $k=\frac{\pi}{2}$ бўлса, (1.2) тенглик маънога эга бўлмайди, шунинг учун (1.2) тенгламани

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x,y)} \tag{1.4}$$

кўринишда ёзиб оламиз. (1.4) тенглама учун $k=\frac{\pi}{2}$ бўлганда (1.3) тенглик маънога эга бўлади. Демак, изоклинларга кўра йўналишлар майдонини чизиш мумкин. Йўналишлар майдонига кўра дифференциал тенгламанинг интеграл эгри чизиқларини чизишимиз мумкин.

Ушбу

$$y'=\frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \tag{1.5}$$

дифференциал тенглама учун изоклин чизиқлари (агар уларни чизиш мумкин бўлса) қуйидагича аниқланади: $\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}=k$ ёки $Q(x,\ y)-kP(x,\ y)=0$, бунда $0\leq k<\infty$. Шунингдек, $L_0$: $Q(x,\ y)=0$ чизиқлар *изоклин ноли*, $L_\infty$ : $P(x,\ y)=0$ чизиқлар *изоклин чексизи* дейилади.

Бу изоклинларнинг кесишган нуқталарида (1.5) тенгламанинг ўнг қисми $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликдан иборат бўлади, яъни йўналишлар майдони аниқмас бўлиб қолади.

Агар $y(x)$ эгри чизиқ ўзининг ҳар бир нуқтасида йўналишлар майдонининг бирор векторига уриниб ўтса, $y(x)$

эгри чизиқ дифференциал тенгламанинг ечими бўлади (1-чизма).

Бизга маълумки, дифференциал тенглама чексиз кўп ечимга эга бўлади ва у

$$y=\varphi\ (x,\ C)$$

(бунда $C$=const) кўринишда ёзилади.

**1-мисол.** $y' = -\frac{2y}{x}$ дифференциал тенгламанинг ечимларидан иборат бўлган интеграл чизиқларни изоклин усули билан тақрибан чизинг.

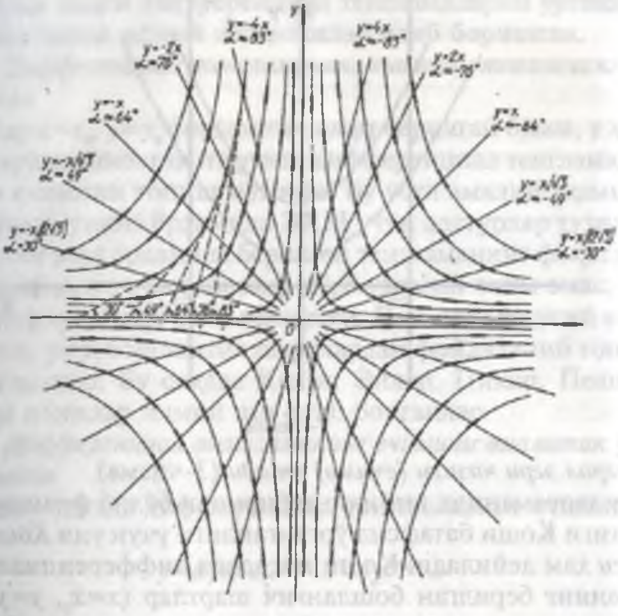
Ечиш. $-\frac{2y}{x} = k$ деб (бунда $k$=const), берилган тенгламанинг $y = -\frac{k}{2}x$ чизиқлари топилади, улар эса координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқлардан иборат бўлиб, йўналишлар майдони $y' = k = \operatorname{tg}\alpha$ тенглик билан аниқланади. $k$ га ҳар хил қийматлар бериб уларга мос изоклинларни топамиз. Қуйидаги жадвални тузамиз:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$ | 0 | $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\pm 1$ | $\pm\sqrt{3}$ | $\pm 2$ | $\pm 3$ | $\approx +\infty$ |
| $\alpha$ | 0 | $\pm 30^\circ$ | $\approx \pm 45^\circ$ | $\pm 60^\circ$ | $\pm 64^\circ$ | $\approx \pm 72^\circ$ | $\pm 90^\circ$ |
| $y = -\frac{k}{2}x$ | $y=0$ | $y = \pm\frac{x}{2\sqrt{3}}$ | $y = \mp\frac{1}{2}x$ | $y = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}x$ | $y = \mp x$ | $y = \mp\frac{3}{2}x$ | $x=0$ |

Жадвалда берилганларга кўра йўналишлар майдонини ва ундан фойдаланиб, берилган дифференциал тенгламанинг интеграл эгри чизиқларини тақрибан чизиб оламиз (1-чизма). Бунда бурчакнинг мусбат ёки манфий бўлишига қараб изоклинларнинг ўқи билан ташкил этган бурчаклари соат стрелкаси йўналишига қарама-қарши ёки соат стрелкаси йўналиши бўйича олинади.

**2-мисол.** Изоклин усули билан $y' = \frac{x}{2}$ тенгламанинг интеграл чизиқларини ясанг.

Ечиш. Берилган тенгламанинг изоклин чизиқлари оиласи $\frac{x}{2} = k$ ёки $x=2k$ лардан, яъни изоклин чизиқлар $Oy$ ўқига параллел тўғри чизиқлардан иборат бўлади (2-чизма). $k$=0 бўлса, $x$=0 ($Oy$ ўқи) изоклини ҳосил бўлиб,



1-чизма.

унинг ҳамма нуқталарида йўналишлар майдони $Ox$ ўқига параллел бўлади. $k=\frac{3}{2}$ да $x=3$ изоклинга эга бўламиз, унинг ҳамма нуқталарида йўналишлар майдони $Ox$ ўқи билан 45° ли бурчак ташкил этади; $k=-\frac{3}{2}$ да эса $x=-3$ изоклин ҳосил бўлиб, унинг ҳамма нуқталарида йўналишлар майдони $Ox$ ўқи билан $-45^\circ$ ли бурчак ташкил этади. Буларга кўра интеграл чизиқларни тақрибан чизишимиз мумкин (2-чизма).

**Теорема** (ягона ечим мавжудлиги ҳақида). *Агар $f(x, y)$ функция қуйидаги шартларни қаноатлантирса:*

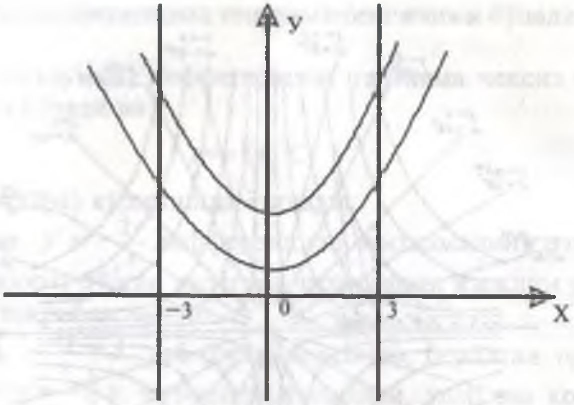
*а) $f(x, y)$ — $D$ ёпиқ соҳада узлуксиз;*

*б) $f(x, y) \leq M$ (бунда $M$ — ўзгармас мусбат сон);*

*в) $\frac{\partial f}{\partial y} \leq N$ (бунда $N$ — ўзгармас мусбат сон),*

*у ҳолда $D$ соҳага тегишли $x=x_0$, $y=y_0$ нуқтадан (1.2) тенгламанинг битта ва фақат битта*

$$y = j(x)$$

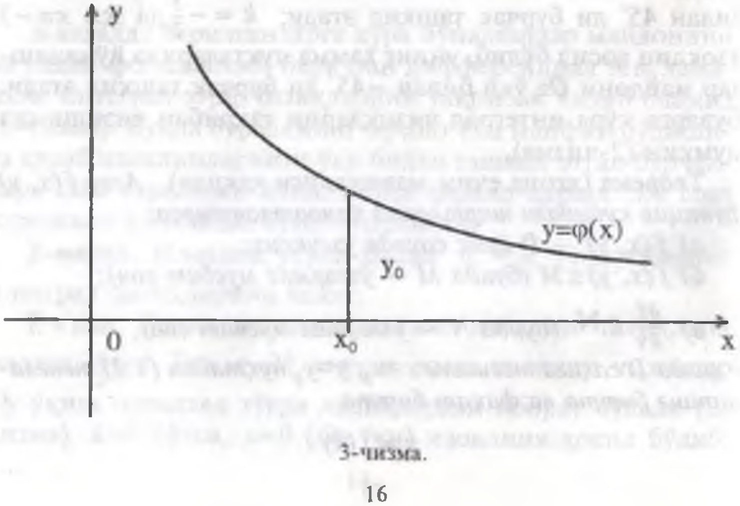


2-чизма.

*интеграл эгри чизиғи (ечими) ўтади* (3-чизма).

Бу теореманинг татбиқини биринчи бўлиб француз математиги Коши батафсил ўрганганлиги учун уни *Коши масаласи* ҳам дейилади. Коши масаласи дифференциал тенгламанинг берилган бошланғич шартлар ($x=x_0$, $y=y_0(x_0)$) ни қаноатлантирувчи хусусий ечимини излашдан иборатдир.

Оддий дифференциал тенгламаларни биринчилардан бўлиб А. Л. Эйлер татбиқий масалаларни ечишда, яъни осмон механикасига доир масалаларни ечишда ишлатган.



3-чизма.

Олимлар оддий дифференциал тенгламаларни ўрганишда уч йўналишда илмий изланишлар олиб боришган.

*1. Дифференциал тенгламанинг ечимини топишнинг сонли усули*

Агар $x=x_0$, $y=y_0$ бошланғич шарт берилган бўлса, у ҳолда шу шартни қаноатлантирувчи дифференциал тенгламанинг ягона ечимини топиш мумкин. Бу усул амалий аҳамиятга эга бўлиб, унинг ёрдамида ЭҲМ учун дастурлар тузилади. Лекин бу усул ёрдамида берилган тенгламанинг фақат $x=x_0$, $y=y_0$ бошланғич шартларига кўра умумий ечим эмас, балки битта хусусий ечими топилади. Иккинчи хусусий ечимни $x=x_1$, $y=y_1$ бошланғич шартлардан фойдаланиб топилади ва ҳоказо. Бу соҳада Коши, Эйлер, Пикар, Пеано ва бошқа олимлар илмий иш олиб борганлар.

*2. Дифференциал тенгламанинг ечимини аналитик усулда топиш*

Ушбу усулда дифференциал тенгламанинг ечимини

$$y=a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+... \qquad (1.6)$$

қатор кўринишида изланади ва $a_1$, $a_2$, ... $a_n$, ... номаълум коэффициентлар аниқланади. Сўнгра (1.6) қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи эканлиги аниқланади.

Бу усулнинг афзаллиги шундан иборатки, бунда ечимнинг кўринишини аниқлаш мумкин, лекин бу ечимнинг тоқлиги, жуфтлиги, даврийлиги ва геометрик чизмаси ҳақида фикр юрита олмаймиз. Бу усул билан Коши, Эйлер, Ляпунов, Голубев ва бошқа олимлар шуғулланганлар.

*3. Дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси*

Осмон механикаси масалаларини ечиш учун одатда оддий дифференциал тенгламалар тузилади ва бу тенгламаларнинг ечимини топиш керак бўлади.

Бизга маълумки, бундай, баъзи бир энг содда дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимлари ҳозиргача топилмаган. Бунга мисол қилиб, ушбу

$$\frac{dy}{dx} = R(x)y^2 + Q(x)y + P(x),$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \left(x^2 - n^2\right)y = 0$$

(бунда *n* — ҳақиқий сон) Риккати ва Бессел тенгламаларини олиш мумкин. Бундай тенгламаларни ўрганиш билан дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси шуғулланади.

Осмон механикаси масалаларини ечишга Пуанкаре бошқача ёндошди, яъни берилган дифференциал тенгламани интегралламасдан, унинг ўнг томонининг хоссалари бўйича ечимларини геометрик тасвирлаш масаласини қўйди.

Рус математиги А. Н. Ляпунов ҳаракатнинг турғунлиги масаласи билан шуғулланиб, худди шу турдаги масалага келди. Шунинг учун Пуанкаре ва Ляпунов дифференциал тенгламаларнинг сифат назариясининг асосчилари ҳисобланадилар. Француз математиги Дюлак, швед математиги Бендиксон, немис математиги Фроммер ва бошқалар дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси бўйича салмоқли натижаларга эришдилар.

Дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси радиотехника, автоматлаштириш, космогония соҳаларида кенг қўллана бошлаганлиги сабабли, XX асрнинг ўрталаридан бошлаб тез ривожлана бошлади.

Бу соҳада МДҲ математикларининг хизматлари катта.

### *Машқлар*

Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг изоклин ноли ва изоклин чексизи қандай чизиқлардан иборат эканлигини аниқланг.

1. $y' = \frac{x^2+y^2}{xy-1}$.
2. $y' = \frac{x^2+y^2-5}{(y-x)(3x+y-5)}$.
3. $y' = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2-1}$.
4. $y' = \frac{2y}{x^2-y^2-1}$.
5. $y' = \frac{-4x+2xy-8}{4x^2-y^2}$.
6. $y' = \frac{2+x-y^2}{2y(x-y)}$.
7. $y' = \frac{x^2-y^2-1}{xy+1}$.
8. $y' = \frac{9x^2+4y^2-36}{x-y^2}$.

## 2-§. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ МАХСУС ЕЧИМИ ВА МАХСУС НУҚТАЛАРИ

1-таъриф. Агар $y=f(x)$ функция учун $[a; b]$ кесмадаги барча $x$ ва $x_1$ ларда

$$|f(x)-f(x_1)| < k|x-x_1|$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи $k>0$ сони мавжуд бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a; b]$ кесмада Липшиц шартини қаноатлантиради дейилади.

Липшиц шарти $y'=f(x)$ дифференциал тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теоремада ҳам ишлатилади. Ҳар қандай узлуксиз дифференциалланувчи функция Липшиц шартини қаноатлантиради.

2-таъриф. Текисликнинг бирор соҳасидаги ҳар бир нуқтасида дифференциал тенглама ечимининг ягоналиги бузиладиган ечим *махсус ечим* дейилади.

Агар дифференциал тенглама биринчи тартибли бўлса, у ҳолда махсус ечимга ўтказилган уринма йўналиши бўйича махсус ечимнинг ҳар бир нуқтасидан яна битта интеграл эгри чизиқ ўтади. (1.2) тенгламанинг махсус ечим нуқталарида Липшиц шарти бажарилмайди.

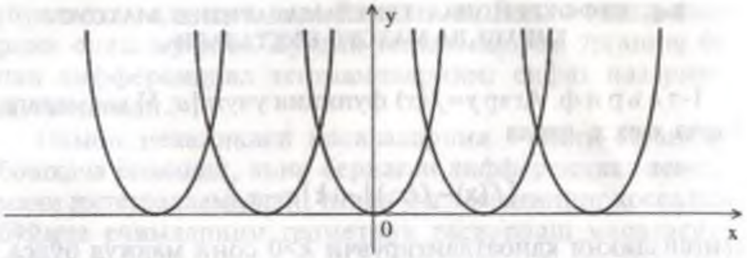
Махсус ечим дифференциал тенгламанинг умумий интегралини ҳосил қилувчи $F(x, y, C)=0$ интеграл эгри чизиқлар оиласининг ўрамасидан иборат бўлиб, у умумий ечимдаги $C$ нинг бирор қийматидан ҳосил бўлмайдиган ечимдир.

1-мисол. $y' = \sqrt{y}$ дифференциал тенгламанинг умумий интеграли $y = \frac{(x+C)^2}{4}$ параболалар оиласидан иборат. Махсус ечим $y=0$ ($Ox$ ўқи) шу оиланинг ўрамасидир (4-чизма).

2-мисол. Ушбу $x\sqrt{1+y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0$ дифференциал тенгламанинг махсус ечимини топинг.

Ечиш. Берилган дифференциал тенгламанинг иккала қисмини $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}}$ га кўпайтириб

$$\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = 0$$



4-чизма

ни ҳосил қиламиз. Буни интеграллаб қуйидаги умумий ечимга эга бўламиз:

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C \quad (C>0)$$

Ечимдан кўриниб турибдики, берилган дифференциал тенглама махсус ечимга эга эмас.

3-таъриф. Бирор эгри чизиқ тенгламаси

$$F(x,\ y)=0 \qquad (2.1)$$

берилган бўлсин. Агар (2.1) тенглама учун

$$\left.\frac{dF}{dx}\right|_{P_0}=0 \quad \text{ва} \quad \left.\frac{dF}{dy}\right|_{P_0}=0$$

тенглик бажарилса, $P_0(x_0,\ y_0)$ нуқта (2.1) тенглама билан берилган эгри чизиқнинг *махсус нуқтаси*, тенглик бажарилмаса, *оддий нуқтаси* дейилади.

Агар махсус нуқтада моддий нуқта тезлиги нолга тенг бўлса, у ҳолда махсус нуқта тинч ҳолатда (ёки мувозанат ҳолатда) дейилади.

Ҳосилага нисбатан ечилган биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг махсус нуқтаси қуйидагича топилади.

Ушбу

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \qquad (2.2)$$

дифференциал тенглама берилган бўлсин. (2.2) ни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x,y)}. \qquad (2.3)$$

Агар $P_0(x_0, y_0)$ нуқтанинг атрофида (2.2) ва (2.3) тенгламаларнинг ўнг қисмлари Липшиц шартини қаноатлантирмаса, $P_0(x_0, y_0)$ нуқта *махсус нуқта* бўлади.

Агар $P_0(x_0, y_0)$ нуқтанинг етарлича кичик атрофида бошқа махсус нуқталар мавжуд бўлмаса, $P_0(x_0, y_0)$ нуқта *яккаланган махсус нуқта* дейилади.

Агар дифференциал тенглама

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \quad \text{ёки} \quad \left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=P(x,y),\\ \frac{dy}{dt}&=Q(x,y)\end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

кўринишда бўлиб, $(x_0, y_0)$ нуқтада $P_0(x_0, y_0)=Q(x_0, y_0)=0$ бўлса, у ҳолда (2.4) тенглама $\frac{0}{0}$ кўринишдаги махсус нуқтага эга дейилади. (2.4) тенгламанинг махсус нуқталар сони

$$\left.\begin{aligned}P(x,y)&=0,\\ Q(x,y)&=0\end{aligned}\right\}$$

системанинг ечимлар сони билан аниқланади. Аниқланган махсус нуқталар (2.4) система учун *мувозанат нуқтаси* дейилади.

Геометрик нуқтаи назардан қараганда йўналишлар майдони махсус нуқтада аниқмас бўлиб қолади.

Махсус нуқтанинг физик маъноси шундан иборатки, агар (2.4) системадаги $\frac{dx}{dt}=V_x$, $\frac{dy}{dt}=V_y$ ларни координата ўқлардаги тезликларнинг проекциялари деб қарасак, у ҳолда тезлик

$$V=\sqrt{V_x^2+V_y^2}$$

га тенг бўлади. $V_x=0$, $V_y=0$ бўлганда махсус нуқтада $V$ тезлик нолга тенг бўлади. Шунинг учун бундай махсус нуқтага мувозанат нуқтаси дейилади.

**3-мисол.** Ушбу $y'=\frac{1}{y}$ тенгламани текширинг.

Ечиш. Берилган мисол учун $(x, y)$ текисликдаги ҳамма нуқталар махсусмас, чунки $Ox$ ўқидаги нуқталарда ($y=0$

бўлгани учун) берилган тенгламанинг ўнг қисми чексизликка айланади. Аммо

$$\frac{dx}{dy}=y$$

тенглама учун $Ox$ ўқидаги нуқталарда ўнг қисми нолга, яъни аниқ қийматга эга. Демак, $Ox$ ўқидаги нуқталарда $\frac{dx}{dy}=y$ тенглама учун Коши теоремаси шартлари бажарилади. $Ox$ ўқидаги ҳар бир $(x_0, 0)$ нуқталардан $x=\varphi(y)$ интеграл эгри чизиқлар ўтади.

Ҳақиқатан, $y'=\frac{1}{y}$ тенгламани интеграллаб $x=x_0$, $y_0(x_0)=0$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи қуйидаги

$$\frac{y^2}{2}=x+C_0 \quad \text{ёки} \quad y^2=2(x+C_0)$$

$\left(\text{бунда } C_0=\frac{y_0^2}{2}-x_0\right)$ ягона ечимни ҳосил қиламиз.

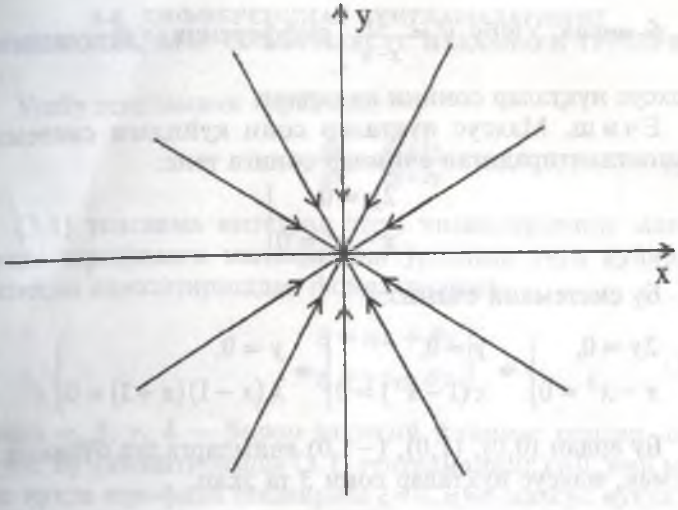
Демак, берилган тенглама махсус нуқтага эга эмас.

**4-мисол.** Ушбу $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ тенгламанинг махсус нуқталарини топинг.

Ечиш. Берилган тенглама учун $(x, y)$ текисликдаги $Oy$ ўқида ётувчи нуқталардан ташқари ҳамма нуқталарда Коши теоремаси шартлари бажарилади, шунинг учун бу нуқталар махсусмас нуқталардир. $Ox$ ўқида ётувчи нуқталарни текшириш учун берилган тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}.$$

Бу тенглама учун, $Ox$ ўқида ётувчи нуқталардан ташқари ҳамма нуқталарда Коши теоремаси шартлари бажарилади, шунинг учун бу нуқталар махсусмас нуқталардир. Энди $x=0$, $y=0$, яъни координаталар бошини кўриш қолди. Бу $(0, 0)$ нуқтада $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ ва $\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}$ тенгламаларнинг ўнг қисми $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликдан иборат ва бу нуқта атрофида тенгламалар Коши теоремасининг шартларини қаноатлантирмайди.



5-чизма

Шунинг учун координаталар боши (0, 0) берилган тенглама учун махсус нуқта бўлади. Бу (0, 0) нуқта $\frac{0}{0}$ типдаги яккаланган махсус нуқта дейилади.

Берилган тенгламани интеграллаб, (0, 0) махсус нуқтага йўналган ярим тўғри чизиқлар оиласи $y=Cx$ га эга бўламиз (5-чизма).

**5-мисол.** Ушбу $y'=-\frac{x}{y}$ тенгламанинг махсус нуқталарини топинг.

Ечиш. Бу тенглама учун координаталар боши $\frac{0}{0}$ типдаги яккаланган махсус нуқта бўлиб, тенгламанинг умумий ечими $x^2+y^2=C^2$ кўринишда бўлади. Ҳамма интеграл эгри чизиқлар ёпиқ, маркази координаталар бошида бўлган айланалар оиласидан иборат бўлади. Бу интеграл эгри чизиқлардан бирортаси (0, 0) махсус нуқтадан ўтмайди.

Бу мисоллардан кўриниб турибдики, махсус нуқтадан чексиз кўп интеграл эгри чизиқлар ўтиши мумкин экан (3-мисолга қаранг) ёки умуман ўтмаслиги ҳам мумкин экан (5-мисолга қаранг).

Дифференциал тенгламанинг махсус нуқталар сони берилган дифференциал тенгламанинг кўринишига боғлиқ.

**6-мисол.** Ушбу $y' = \frac{2y}{x-x^3}$ дифференциал тенгламанинг махсус нуқталар сонини аниқланг.

Ечиш. Махсус нуқталар сони қуйидаги системани қаноатлантирадиган ечимлар сонига тенг:

$$\left.\begin{array}{r} 2y = 0, \\ x - x^3 = 0 \end{array}\right\}$$

Бу системани ечамиз:

$$\left.\begin{array}{r} 2y = 0, \\ x - x^3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0, \\ x(1 - x^2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0, \\ x(x-1)(x+1) = 0 \end{array}\right\}$$

Бу ердан (0,0), (1,0), (–1,0) ечимларга эга бўламиз. Демак, махсус нуқталар сони 3 та экан.

### *Машқлар*

Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг махсус нуқталари сонини аниқланг.

1. $y' = \frac{x+2y}{y}$.
2. $y' = \frac{y-y^3}{x}$.
3. $y' = -\frac{x-3x^2}{y}$.
4. $y' = \frac{x}{x+2y}$.
5. $y' = -\frac{y(y-a)}{x(x-b)}$.
6. $y' = \frac{x+y}{x-y}$.
7. $y' = \frac{y+y(x-y)}{-x+x(x-y)}$.
8. $y' = \frac{y(1-y)}{x}$.
9. $y' = \frac{x(1-x)}{y}$.
10. $y' = \frac{y(1-y)}{x(1-x)}$.
11. $\frac{dy}{dx} = \frac{1-e^y}{1-e^x}$.
12. $\frac{dy}{dx} = \frac{1-e^y}{e^x-e^y}$.

## 3-§. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ ТЕКИСЛИКДАГИ СОДДА МАХСУС НУҚТАЛАРИ ТУРЛАРИ

Ушбу тенгламани қараймиз:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by}{cx+dy}. \tag{3.1}$$

(3.1) тенглама интеграл эгри чизиқларининг махсус нуқта атрофидаги манзарасини ўрганиш учун қуйидаги чизиқли алмаштиришдан фойдаланамиз:

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\alpha x+\beta y,\\ \eta&=\gamma x+\delta y\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

бунда $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ — бирор ҳақиқий ўзгармас сонлар, $\alpha\delta-\beta\gamma\neq0$. Бу алмаштиришда (3.1) тенгламанинг $x=0$, $y=0$ махсус нуқта атрофида текшириш $\xi=0$, $\eta=0$ махсус нуқта атрофида текширишга ўтади. (3.2) алмаштириш натижасида қуйидаги тенгламага эга бўламиз:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\gamma dx+\delta dy}{\alpha dx+\beta dy}=\frac{\gamma+\delta\dfrac{dy}{dx}}{\alpha+\beta\dfrac{dy}{dx}}=\frac{\gamma+\delta\dfrac{ax+by}{cx+dy}}{\alpha+\beta\dfrac{ax+by}{cx+dy}}=\frac{\gamma(cx+dy)+\delta(ax+by)}{\alpha(cx+dy)+\beta(ax+by)}.$$

Агар

$$\frac{\gamma(cx+dy)+\delta(ax+by)}{\alpha(cx+dy)+\beta(ax+by)}=\frac{\lambda_1(\gamma x+\delta y)}{\lambda_2(\alpha x+\beta y)} \tag{3.3}$$

бўлса, у ҳолда (3.2) алмаштиришдан сўнг (3.1) тенглама

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\lambda_1\eta}{\lambda_2\xi} \tag{3.4}$$

кўринишга келади. (3.3) айният бажарилиши учун

$$\begin{aligned}\gamma(cx+dy)+\delta(ax+by)&=\lambda_1(\gamma x+\delta y),\\ \alpha(cx+dy)+\beta(ax+by)&=\lambda_2(\alpha x+\beta y)\end{aligned}$$

тенгликлар ўринли бўлиши керак.

Бу тенгликларда $x$ ва $y$ олдидаги коэффициентларини тенглаштириб, $(\gamma, \delta)$ ва $(\alpha, \beta)$ параметрларга нисбатан бир жинсли бўлган иккита системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases}(c-\lambda_1)\gamma+a\delta=0,\\ d\gamma+(b-\lambda_1)\delta=0\end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases}(c-\lambda_2)\alpha+a\beta=0,\\ d\alpha+(b-\lambda_2)\beta=0.\end{cases} \qquad (3.5)$$

Агар $\lambda_1$ ва $\lambda_2$ лар

$$\begin{vmatrix} c-\lambda & d \\ a & b-\lambda \end{vmatrix}=0 \qquad (3.6)$$

ёки

$$\lambda^2-(b+c)\lambda+bc-ad=0 \qquad (3.6')$$

тенгламанинг илдизлари бўлса, у ҳолда (3.5) системалар нолга тенг бўлмаган ечимга эга бўладилар.

(3.6) ёки (3.6′) тенглама (3.1) тенгламанинг *характеристик тенгламаси*, $\lambda_1$ ва $\lambda_2$ сонлар эса характеристик тенгламанинг илдизлари дейилади.

Ушбу

$$\begin{cases}(c-\lambda_1)\gamma+a\delta=0,\\ (c-\lambda_2)\alpha+a\beta=0\end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases}d\gamma+(b-\lambda_1)\delta=0,\\ d\alpha+(b-\lambda_2)\beta=0\end{cases}$$

тенгликлар системасидан

а) агар $\lambda_1\neq\lambda_2$, бўлса, $\begin{vmatrix}\gamma & \delta\\ \alpha & \beta\end{vmatrix}\neq 0,$

б) агар $\lambda_1=\lambda_2$ бўлса, $\begin{vmatrix}\gamma & \delta\\ \alpha & \beta\end{vmatrix}=0$

бўлиши келиб чиқади.

а) ҳол декарт координаталар системасидан қийшиқ бурчакли системага ўтишдан иборат бўлган (3.2) айнимаган (номахсус) шакл алмаштиришга мос келади.

б) ҳол декарт координаталар системасининг айниган шакл алмаштиришга мос келиб, у берилган (3.1) тенгламанинг ўзига хос кўриниши билан тушунтирилади, бу ҳолда $a$, $b$, $c$, $d$ коэффициентлар (3.1) тенгламанинг характеристик тенгламаси дискриминанти

$$D=(b+c)^2-4(bc-ad)=0$$

билан боғланган бўладилар.

Қуйида характеристикаларнинг $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ва $\lambda_1 = \lambda_2$ бўлган ҳолларда сокинлик (ёки мувозанат) нуқтаси атрофида интеграл чизиқларнинг ҳолатлари (ўзини тутишлари) батафсил ўрганилади. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ бўлганда фазовий эгри чизиқлар (3.1) тенгламани бевосита интеграллаш орқали топилишини қайд қилиб ўтамиз:

$$\eta = C|\xi|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}. \qquad (3.7)$$

(3.6) характеристик тенгламанинг $\lambda_1$ ва $\lambda_2$ илдизлари қуйидагича бўлиши мумкин.

I. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ бўлган ҳолда ҳар иккала илдиз ҳақиқий ва ҳар хил бўлади. Аниқлик учун $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 1$ бўлсин, у ҳолда

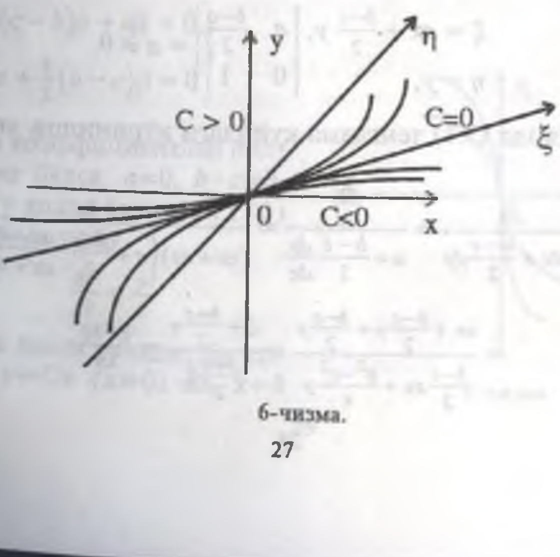
$$\frac{d\eta}{d\xi} = \pm C\frac{\lambda_1}{\lambda_2}|\xi|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1} \quad \text{ва} \quad \lim_{\xi \to \infty}\frac{d\eta}{d\xi} = 0.$$

Бу эса интеграл эгри чизиқлар $O\xi$ ўққа уриниб, координаталар бошига киришини билдиради. $\xi=0$ интеграл чизиқ ҳам махсус нуқта орқали ўтади (6-чизма).

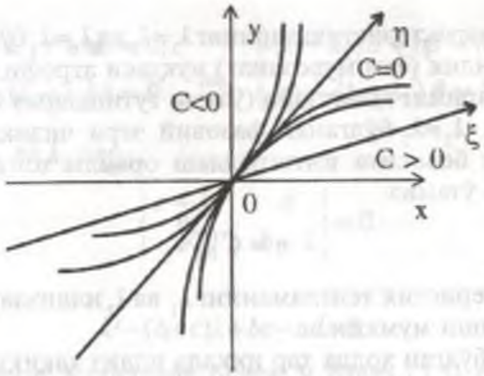
$0 < \frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 1$ бўлганда, ушбу

$$\xi = C|\eta|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$$

эгри чизиқлар оиласини қараймиз, бу эгри чизиқлар оиласи $\eta$ ўққа уриниб координаталар бошига кириши равшандир (7-чизма).



6-чизма.



7-чизма.

II. $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{b+c}{2} = \lambda_0$ бўлсин ($D=(b-c)^2+4ad=0$).

Бу ҳолда $\alpha$ ва $\beta$ коэффициентларни топиш учун битта тенгламага эгамиз:

$$\frac{c-b}{2}\alpha + a\beta = 0$$

( $d\alpha + \frac{b-c}{2}\beta = 0$ тенглама $D=0$ бўлгани учун айнан бажарилади). $a \neq 0$ бўлсин, у ҳолда $\alpha = a,\ \beta = \frac{1}{2}(b-c),$ $\gamma = 0,\ \delta = 1$ деб олиб, (3.1) тенгламани ўзгартирамиз. Бунинг учун қуйидаги айнимаган ўрнига қўйишдан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} \xi &= ax + \frac{b-c}{2}y, \\ \eta &= y, \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} a & \frac{b-c}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a \neq 0.$$

Натижада (3.1) тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dy}{adx + \frac{b-c}{2}dy} = \frac{\frac{dy}{dx}}{a + \frac{b-c}{2}\frac{dy}{dx}} = \frac{ax+by}{(cx+dy)\left(a + \frac{b-c}{2}\cdot\frac{ax+by}{cx+dy}\right)} =$$

$$= \frac{ax + \frac{b-c}{2}y + \frac{b-c}{2}y}{\frac{b-c}{2}ax + \frac{b^2-c^2}{4}y} = \frac{\xi + \frac{b+c}{2}\eta}{\frac{b+c}{2}\xi} = \frac{\xi + \lambda\eta}{\lambda\eta}.$$

Шундай қилиб, тенгламани

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\xi+\lambda_0\eta}{\lambda_0\xi}=\frac{1}{\lambda_0}+\frac{\eta}{\xi} \tag{3.8}$$

кўринишда ёзиш мумкин экан.

(3.8) тенглама $\eta=(\xi)$ функцияга нисбатан чизиқли дифференциал тенгламадир ва унинг умумий ечими ушбу формула бўйича топилади:

$$\eta(\xi,c)=e^{\int\frac{1}{3}d\xi}\left[c+\frac{1}{\lambda_0}\int e^{-\int\frac{d\xi}{\xi}}d\xi\right]=e^{\ln|\xi|}\left[c+\frac{1}{\lambda_0}\int e^{-\ln|\xi|}d\xi\right]=$$

$$=|\xi|\left(c\pm\frac{1}{\lambda_0}\ln|\xi|\right)=|\xi|\left(c\pm\frac{1}{\lambda_0}\ln|\xi|\right).$$

$\xi\to0$ га интилганда:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\pm\left(c\pm\frac{1}{\lambda_0}\ln|\xi|\pm\frac{1}{\lambda_0}\right)\to\infty.$$

Шундай қилиб, барча интеграл эгри чизиқлар оиласи $O(0;\ 0)$ махсус нуқтага киради, бунда улар бир хил йўналишда бўлиб, $O\eta$ ўққа уринадилар. $O\eta(\xi=0)$ ўқнинг иккала қисми ҳам махсус нуқтага кирувчи интеграл эгри чизиқлардир.

Қаралган ҳолда ($a\neq0$, $D=0$) махсус нуқта $\xi=0$, $\eta=0$ ва мос ҳолда $x=0$, $y=0$ махсус нуқта ҳам *тугун* бўлиб, бироқ бундай тугун *айнимаган* тугун бўлади (8-чизма).

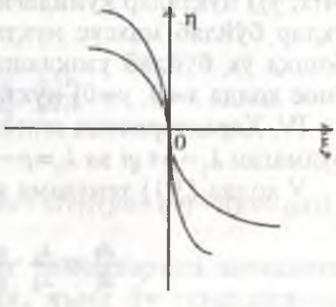
Агар $\alpha$ ва $\beta$ ларни аниқловчи ушбу системада ($D=0$ да):

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}(c-b)\alpha+a\beta=0,\\&d\alpha+\frac{1}{2}(b-c)\beta=0\end{aligned}\right|$$

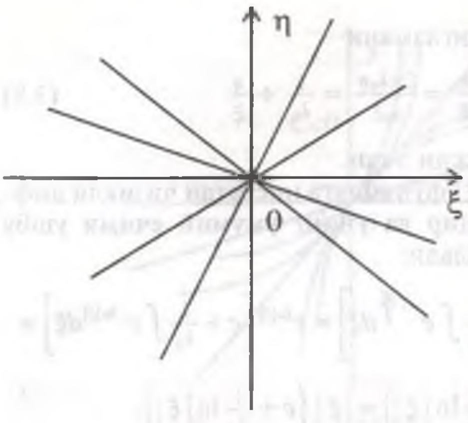
барча коэффициентлар нолга тенг бўлса: $a=0$, $b-c=0$, $d=0$, у ҳолда берилган (3.1) тенглама ушбу

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$$

содда ҳолга келади, бу ердан $y=Cx$ $(x\neq0)$ ва $x=0$



8-чизма.



9-чизма.

($y\neq 0$). Шундай қилиб, интеграл чизиқлар тўплами махсус нуқтага барча йўналишлар бўйича кирувчи мумкин бўлган барча тўғри чизиқлар оиласидан иборатдир. $\xi=0, \eta=0$ ($x=0$, $y=0$) нуқта ҳам тугун бўлади. Бундай махсус нуқтага *дикритик тугун* дейилади (9-чизма).

III. $\lambda_1\cdot\lambda_2<0$, $\lambda_1$ ва $\lambda_2$ илдизлар ҳақиқий ва турли ишорали бўлсин. $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=-k$ деб белгилаймиз, $k>0$ бўлсин, у ҳолда

$$\eta = C|\xi|^{-k} \quad \text{ёки} \quad \eta=\frac{C}{|\xi|^{k}}.$$

$C\neq 0$ бўлганда интеграл эгри чизиқ $O(0,\ 0)$ нуқта орқали ўтмайдиган $k$-тартибли гиперболалар оиласидан иборат бўлади.

Бироқ тўртта

$$\eta=0,\ (\xi\neq 0),\ \xi=0\ (\eta\neq 0) \tag{A}$$

интеграл эгри чизиқ $O(0,\ 0)$ махсус нуқтадан ўтади.

Интеграл эгри чизиқларни тасвирловчи $M(\xi,\ \eta)$ (ёки $M(x,\ y)$) нуқталар қуйидаги хоссага эгадир: дастлаб бирор ўқлар бўйлаб махсус нуқтага яқинлашади, сўнгра ундан бошқа ўқ бўйлаб узоқлашади. Бундай турдаги $\xi=0$, $\eta=0$ (мос ҳолда $x=0$, $y=0$) нуқта *эгар* дейилади (10-чизма).

IV. Характеристик тенгламанинг илдизлари соф мавҳум бўлмаган $\lambda_1=p+qi$ ва $\lambda_2=p-qi$ комплекс сонлар бўлсин.

У ҳолда (3.1) тенглама ушбу кўринишда бўлади:

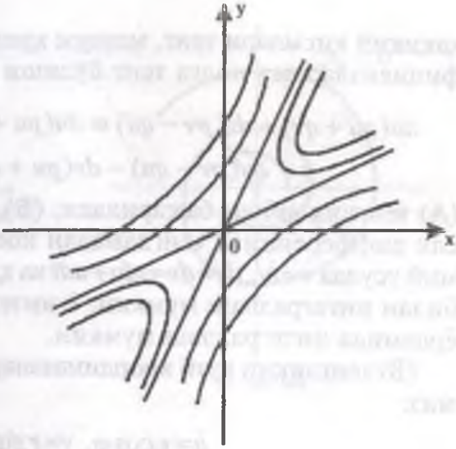
$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\cdot\frac{\eta}{\xi}=\frac{p+qi}{p-qi}\cdot\frac{\eta}{\xi}. \tag{3.9}$$

$\alpha$ ва $\beta$ ларнинг қийматларини

$$\begin{cases}(c-\lambda_2)\alpha + a\beta = 0,\\ d\alpha + (b-\lambda_2)\beta = 0\end{cases}$$

системадан топамиз, бу ерда $a\neq 0$, $\lambda_2 = p-qi$ $\lambda_1 = p+qi$ деб оламиз. Сўнгра

$$c-\lambda_1 = \bar{c} - \bar{\lambda}_2,$$
$$\bar{a} = a,\ \bar{d} = d,$$
$$b-\lambda = \bar{b} - \bar{\lambda}_2$$



10-чизма.

эканлигини назарда тутиб,

$$(c-\lambda_1)\gamma + a\delta = 0 \quad \text{ва} \quad d\gamma + (b-\lambda_1)\delta = 0$$

тенгликлар системасидан аниқланувчи $\gamma$ ва $\delta$ сонлар мос ҳолда $\alpha$ ва $\beta$ сонларга қўшма комплекс эканини кўрамиз:

$$\gamma = \bar{\alpha},\ \delta = \bar{\beta}.$$

Демак, (3.2) шакл алмаштириш қаралаётган ҳолда қуйидагича ёзилади:

$$\xi = \alpha x + \beta y,\ \eta = \bar{\alpha}x + \bar{\beta}y. \tag{3.10}$$

$x$ ва $y$ ҳақиқий координаталар бўлгани учун:

$$\eta = \bar{\xi}:\ \xi = u + iv,\ \ \eta = u - iv. \tag{3.11}$$

(3.11) ни (3.9) га қўямиз:

$$\frac{du-idv}{du+idv} = \frac{p+iq}{p-iq}\cdot\frac{u-iv}{u+iv}$$

ёки

$$(du-idv)[(pu+qv)+i(pv-qu)] = (du+idv)[(pu+qv)-i(pv-qu)].$$

Бу тенгликнинг чап ва ўнг томонларида комплекс қўшма $z=\bar{z}$ ифодалар турибди, яъни бу тенгликнинг ҳақиқий қисмлари тенг, мавҳум қисмлари олдидаги коэффициентлар эса нолга тенг бўлиши керак:

$$du(pu+qv)+dv(pv-qu)\equiv du(pu+qv)+dv(pv-qu), \quad \text{(A)}$$

$$du(pv-qu)-dv(pu+qv)=0. \quad \text{(B)}$$

(A) тенглик айнан бажарилади, (B) тенглик эса бир жинсли дифференциал тенгламадан иборат бўлиб, уни ё умумий усулда $v=tu$, $dv=dv=tdu+udt$ ва ҳ.к. ўрнига қўйиш усули билан интеграллаш мумкин, ё интегралловчи кўпайтувчи ёрдамида интеграллаш мумкин.

(B) тенгликни қутб координаталаридан фойдаланиб ечамиз:

$$u=r\cos\varphi,\ v=r\sin\varphi.$$

Қуйидагига эгамиз:

$$(pr\sin\varphi-qr\cos\varphi)(\cos\varphi dr-r\sin\varphi d\varphi)-$$

$$-(pr\cos\varphi+qr\sin\varphi)(\sin\varphi dr+r\cos\varphi d\varphi)=0.$$

Шакл алмаштиришлар ва соддалаштиришлардан сўнг

$$qdr+prd\varphi=0$$

ни ҳосил қиламиз, бундан

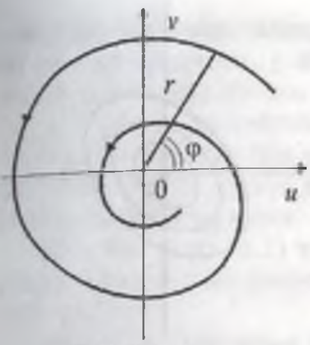
$$\frac{dr}{r}=-\frac{p}{q}d\varphi,\ \ln r=\ln C-\frac{p}{q}\varphi,\ r=Ce^{-\frac{p}{q}\varphi}. \quad (3.12)$$

(3.12) тенглик ($u$, $v$) текисликдаги $O(0, 0)$ махсус нуқтани чексиз кўп айланиб ўтувчи *логарифмик спирал*нинг тенгламасидир.

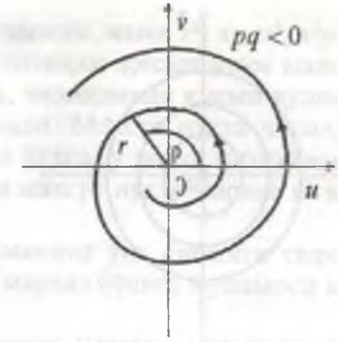
Агар $p$ ва $q$ бир хил ишорали бўлса, $\varphi$ ортиши билан спираллар $O(0, 0)$ махсус нуқтага яқинлаша боради, агар $p$ ва $q$ турли ишорали бўлса, спираллар $O(0, 0)$ махсус нуқтадан узоқлашадиган буралувчи бўлади (11, 12-чизмалар).

Бироқ, агар текширишлар 11, 12-чизмалардаги $\varphi$ бурчаксиз қараладиган бўлса, эгри чизиқларнинг йўналиши ҳақида фикр юритиб бўлмайди. Бироқ турғунлик назариясида (унда $\varphi=t$ деб олинса) биринчи эгри чизиқ "*турғунлик ҳолати*" га, иккинчи эгри чизиқ эса "*турғунмас ҳолат*" га мос келади.

($u$, $v$) ва ($x$, $y$) ўзгарувчилар орасидаги



11-чизма.



12-чизма.

$$\xi = u + iv = \alpha x + \beta y,$$
$$\eta = u - iv = \overline{\alpha} x + \overline{\beta} y$$

чизиқли боғланишга кўра $(u, v)$ текисликдаги логарифмик спираль $Oxy$ текислигида ҳам $x=0$, $y=0$ нуқта атрофида чексиз айланиб ўтувчи логарифмик спираль бўлади. Кўрилган турдаги $x=0$, $y=0$ махсус нуқтага *фокус* дейилади.

V. Характеристик тенгламанинг илдизлари $\lambda_1 = iq$, $\lambda_2 = -iq$ соф мавҳум бўлсин. Қаралаётган ҳол юқоридаги ҳолнинг $p=0$ деб олингандаги хусусий ҳолидир.

(3.12) тенглик

$$r= C(u^2+v^2=c^2)$$

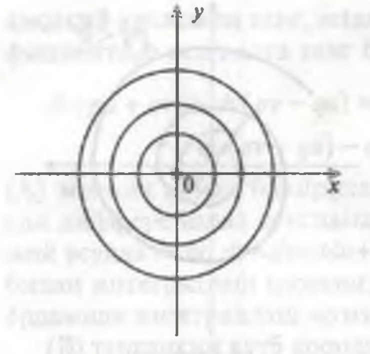
тенгликка, яъни маркази $(u, v)$ текисликда $O(0, 0)$ махсус нуқтада, радиуси С га тенг бўлган айланалар оиласи бўлиб, $(x, y)$ текисликда маркази $O(0, 0)$ нуқтада бўлган эллипслар оиласига ўтади (13, 14-чизмалар).

Ҳақиқатан ҳам, $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ деб олсак,

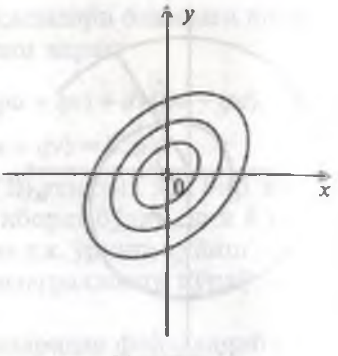
$$\begin{cases} r^2 = u^2 + v^2 = c^2, \\ r = |u + iv| = \left|(\alpha_1 x + \beta_1 y) + i(\alpha_2 x + \beta_2 y)\right| \end{cases}$$

тенгликлар системасидан:

$$(\alpha_1 x + \beta_1 y)^2 + (\alpha_2 x + \beta_2 y)^2 = c^2$$



13-чизма.



14-чизма.

ёки

$$\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)x^2+2\left(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2\right)xy+y^2\left(\beta_1^2+\beta_2^2\right)=c^2.$$

Ҳосил бўлган тенглама иккинчи тартибли эгри чизиқ — эллипсдан иборат бўлади, чунки унинг дискриминанти ($4AC-B^2$):

$$4\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)\left(\beta_1^2-\beta_2^2\right)-4\left(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2\right)^2=$$

$$=4\left(\alpha_1^2\beta_2^2+\alpha_2^2\beta_1^2-2\alpha_1\beta_1\beta_2\alpha_2\right)=4\left(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\right)^2$$

$\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0$ тенгликни қаноатлантирувчи ҳар қандай $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta_1$, $\beta_2$ ларда мусбат бўлади.

$\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1=0$ бўлганда (3.10) алмаштиришни бажариб бўлмайди, шунинг учун бунинг бўлиши мумкин эмас.

Бу ҳолда $O$ (0,0) махсус нуқтага *марказ* дейилади.

Юқоридагилардан қуйидаги хулоса чиқариш мумкин:

Агар (3.5) тенгламанинг $\lambda_1$ ва $\lambda_2$ илдизлари:

1) ҳақиқий ва бир хил ишорали бўлса, $O(0, 0)$ махсус нуқта, яъни координаталар боши *тугун*,

2) ҳақиқий ва турли ишорали бўлса, координаталар боши *эгар*,

3) комплекс (соф мавҳум эмас) сонлар бўлса, координаталар боши *фокус*,

4) соф мавҳум бўлса, координаталар боши *марказ* бўлади.

Бу кўрилган усуллар (3.1) дифференциал тенгламанинг ўнг қисми чизиқли бўлганда ўринли. Агар (3.1) тенгламанинг ўнг қисмига чизиқли бўлмаган, яъни $x^2$, $xy$, $x^4$, $x^2y$ ва бошқалар қўшилса, у ҳолда чизиқли қисми учун махсус нуқта тугун эгар бўлган ҳолда, чизиқлимас қисми қўшилса ҳам тугун, эгарлигича қолади. Махсус нуқта чизиқли қисми учун фокус ёки марказ бўлса, у ҳолда чизиқлимас қисми қўшилса, фокус бўлган махсус нуқта марказ ва аксинча бўлиши мумкин.

Шунинг учун (3.1) тенгламанинг ўнг қисмига чизиқлимас қўшилганда фокус ёки марказ бўлиш муаммоси келиб чиқади.

Агар (2.4) тенглама бир нечта махсус нуқталарга эга бўлса, у ҳолда бу махсус нуқталарнинг турини аниқлаш учун ҳар бир махсус нуқта учун $x - x_i = \bar{x}$, $y - y_i = \bar{y}$ $(x_i, y_i$ — махсус нуқта координаталари) алмаштириш ёрдамида координаталар бошини махсус нуқтага кўчирилади, сўнгра чизиқли қисми бўйича характеристик тенглама тузилади.

Шунингдек, бу махсус $P_0(x_0, y_0)$ нуқталарни турини аниқлаш учун қуйидаги кўринишдаги характеристика тенгламасини тузса ҳам бўлади:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_{P_0(x_0,y_0)} - \lambda & \left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{P_0(x_0,y_0)} \\ \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{P_0(x_0,y_0)} & \left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{P_0(x_0,y_0)} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Агар $\Delta \neq 0$, яъни $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ бўлса, $P_0(x_0, y_0)$ нуқта *оддий* махсус нуқта дейилади.

Оддий махсус нуқталар қуйидаги хоссаларга эга:

1) агар $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ бўлса, $P_0(x_0, y_0)$ махсус нуқта эгар туридаги махсус нуқта бўлади;

2) агар $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ бўлса, $P_0(x_0, y_0)$ махсус нуқта тугун туридаги махсус нуқта бўлади;

3) фокус ва марказ бўлган махсус нуқталар иккинчи гуруҳ махсус нуқталар, барча қолган махсус нуқталар биринчи гуруҳ махсус нуқталар дейилади.

Дифференциал тенгламаларнинг сифат назариясига индекс ҳақидаги тушунчани мувозанат ҳолатларининг жойланишига боғлиқ масалаларда А. Пуанкаре киритган. И. Бендиксон эса (2.4) тенгламадаги $P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ функциялар $Oxy$ текислигидаги бирор $D$ соҳада аналитик функция бўлган ҳол учун мувозанат ҳолатларда кесишувчи характеристикалар сони билан боғлиқ махсус нуқталарнинг индекси ҳақидаги умумий теоремани исбот қилиб берган.

$P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ кўпҳад бўлган ҳол учун И.Бендиксон чексиз узоқлашган махсус нуқталар индекси ҳақидаги тушунчани киритган ва чексиз узоқлашган ва текисликдаги ҳамма мувозанат ҳолатлар учун индекслар йиғиндиси 2 га тенглигини кўрсатган.

А. Пуанкаре эса $P$ туридаги ёпиқ сиртлардаги ҳамма оддий мувозанат ҳолатларнинг индекслар йиғиндиси унинг Эйлер характеристикасига, яъни $2-2P$ га тенглигини кўрсатган.

Икки ўлчовли ҳол учун индекслар назарияси В. В. Немицкий ва В. В. Степанов монографиясида, С. Лефшец, Э. А. Коддингтон ва И. Левинсон, А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин ва А. А. Майерларнинг китобларида, шунингдек А. Н. Берлинский, П. Т. Червичнийларнинг илмий ишларида баён этилган.

(2.4) тенгламадаги $P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ — $Oxy$ текислигидаги бирор $D$ соҳада ҳақиқий ўзгарувчили аналитик функциялар бўлсин ва умумий бўлувчига эга бўлмасин. Дифференциал тенгламанинг ҳар бир махсус нуқталари яккаланган бўлсин. $D$ соҳада синиқ чизиқ бўлмаган ва (2.4) тенгламанинг махсус нуқтасидан ўтмайдиган $C$ ёпиқ эгри чизиқ оламиз. Бундай чизиқни *давр* деб атаймиз. $C$ даврни бир марта мусбаг йўналишда (соат стрелкасига қарама-қарши) айланиш натижасида махражи $Q$ ни нолга айланишида ва $\frac{P}{Q}$ ифоданинг ишораси ўзгаришини кўрамиз.

$-\infty$ дан $+\infty$ гача оралиқдаги сакрашлар сони $h$. $+\infty$ дан $-\infty$ гача оралиқдаги сакрашлар сони $k$ бўлсин. $\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)$ сакрашларни биринчи тур, $\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)$ сакрашларни иккинчи тур деб белгилаймиз.

$j=\frac{k-h}{2}$ сонига $C$ даврнинг индекси дейилади ва уни $indC$ ёки $ind\,\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ каби белгиланади.

Шунингдек, (2.4) тенгламанинг характеристик тенгламасини илдизлари орқали эса

$$j(P_0)=\frac{\lambda_1\cdot\lambda_2}{|\lambda_1\cdot\lambda_2|}$$

сон орқали $P_0(x_0, y_0)$ махсус нуқтанинг индекси аниқланади. Эгар учун $j(P_0)=+1$, бошқа турдаги махсус нуқталар учун $j(P_0)=-1$.

Агар (3.6′) тенгликда $\delta=-(b+c)$, $\Delta=bc-ad$ белгилашларни киритсак, у ҳолда унинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\lambda^2+\delta\lambda+\Delta=0, \qquad (3.13)$$

бундан

$$2\lambda_{1,2}=-\delta\pm\sqrt{\delta^2-4\Delta}$$

ни ҳосил қиламиз.

Агар $\delta^2-4\Delta=0$ бўлса, у ҳолда (3.13) тенглик координаталар бошидан ўтувчи параболадан иборат бўлади (15-чизма).

Бундан ташқари қуйидаги ҳоллар ҳам бўлиши мумкин:

1) агар $\Delta<0$бўлса, $\lambda_{1,2}$ илдизлар ҳар хил ишорали бўлади, махсус нуқталар эгар бўлиб, улар чап ярим текисликда ётади;

2) агар $\Delta>0$ ва $\delta^2-4\Delta>0$ бўлса, махсус нуқта $\delta>0$ бўлганда турғун тугун, $\delta<0$ бўлганда турғунмас тугун бўлади;

15-чизма.

3) агар $\Delta>0$ ва $\delta^2$-$4\Delta<0$ бўлса, махсус нуқта $\delta>0$ бўлганда турғун фокус, $\delta<0$ бўлганда тургунмас фокус бўлади.

4) агар $\delta=0$, $\Delta>0$ бўлса, характеристик тенглама соф мавҳум илдизга эга бўлиб, махсус нуқталар марказ бўлади ва уларнинг маркази $Ox$ ўқининг устида ётади.

Қуйидаги масалаларни қараймиз.

**1-масала.** $m$ массали моддий нуқта $Ox$ ўқи бўйлаб тўғри чизиқли ҳаракат қилсин. Бу ҳаракатнинг тенгламаси, ушбу

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=f\left(t,x,\frac{dx}{dt}\right) \tag{3.14}$$

кўринишда бўлиб, бунда $f\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right)$ моддий нуқтага таъсир этувчи куч.

(3.14) тенгламани иккита биринчи тартибли тенгламалар системаси кўринишда ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=x_1,\\ \frac{dx_1}{dt}&=\frac{1}{m}f\left(t,x,x_1\right)\end{aligned}\right| \tag{3.15}$$

(3.15) система ечимининг манзарасини ўргансак, бу манзара (3.14) тенгламанинг ечими учун ҳам ўринли бўлади.

Фараз қилайлик, нуқтага қаршилик кўрсатувчи куч тезликка пропорционал бўлсин:

$$-a\frac{dx}{dt}$$

ва $-bx$ координаталар бошига тортувчи куч бўлсин. $a$ ва $b$ — ўзгармас коэффициентлар, $a\geq 0$, $b\geq 0$. Бу ҳолда (3.14) тенглама

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-a\frac{dx}{dt}-bx \tag{3.16}$$

ёки

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2h\frac{dx}{dt}+k^2x=0 \tag{3.17}$$

кўринишни олади, бунда $h=\frac{a}{2m}>0,\ k^2=\frac{b}{m}>0.$

(3.17) тенгламага мос система

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=x_1,\\ \frac{dx_1}{dt}&=-k^2x-2hx_1\end{aligned}\right| \tag{3.18}$$

ёки

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{-k^2x - 2hx_1}{x_1} \qquad (3.19)$$

тенгламадан иборат ва $x=0$, $x_1=0$ нуқта (3.18) система учун мувозанат нуқта бўлиб, у $\frac{0}{0}$ турдаги махсус нуқтадир. (3.18) ёки (3.19) учун характеристик тенглама тузамиз:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -k^2 & -2h-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ёки

$$\lambda^2 + 2h\lambda + k^2 = 0. \qquad (3.20)$$

Бундан $\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}$ га эга бўламиз.

Қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

1) $h=0$ бўлсин, у ҳолда $\lambda_1$ ва $\lambda_2$ соф мавҳум комплекс сон бўлиб, $x=0$, $x_1=0$ махсус нуқта марказ бўлади;

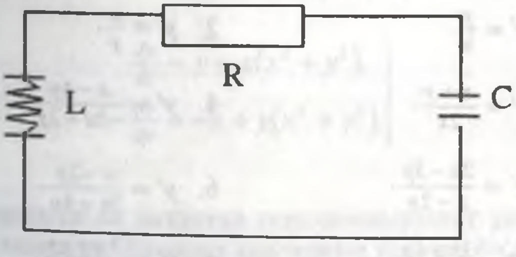
2) $h>0$ бўлсин, у ҳолда қуйидаги уч ҳолнинг бири бўлиши мумкин:

а) $h^2-k^2>0$ бўлса, у ҳолда $\lambda_1$ ва $\lambda_2$ илдизлар ҳақиқий ва иккаласи манфий бўлади. Шунинг учун $x=0$, $x_1=0$ махсус нуқта асимптотик турғун тугун бўлади.

б) $h^2=k^2$ бўлса, $\lambda_1=\lambda_2=-h>0$ бўлиб, $x=0$, $x_1=0$ махсус нуқта турғун тугун бўлади.

в) $h^2-k^2<0$ бўлса, $\lambda_1$ ва $\lambda_2$ қўшма комплекс сонлардан иборат бўлиб, ҳақиқий қисми манфий бўлгани учун турғун фокус бўлади.

**2-масала**. Ушбу 16-чизмада



16-чизма.

электр заряд ҳаракат тенгламаси

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$$

ёки

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}\cdot q = 0$$

кўринишларнинг бири билан аниқланади.

Бунда $R$ — қаршилик, $C$ — манба, $L$ — индуктивлик, $q$ — электр заряди.

Агар $2h = \frac{R}{L}$, $R = \frac{1}{LC}$, $q = x$ белгилашларни киритсак, у ҳолда электр заряд ҳаракат тенгламаси

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + kx = 0$$

тенглама ёки

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -2yh - kx, \\ \frac{dx}{dt} &= y \end{aligned}\right|$$

система кўринишда бўлади. Текшириш 1-масаладаги каби давом эттирилади.

Текисликдаги махсус нуқталарнинг кўриб чиқилган турлари энг содда махсус нуқталар дейилади.

### *Машқлар*

Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг махсус нуқталарини топинг ва уларнинг турини аниқланг.

1. $y' = \frac{y}{x}$.
2. $y' = \frac{x}{y}$.
3. $y' = \frac{x+y}{2x}$.
4. $y' = \frac{x-4y}{-3x+2y}$.
5. $y' = \frac{2x-3y}{x-2y}$.
6. $y' = \frac{x-2y}{3x-4y}$.
7. $y' = \frac{3x+4y}{x-2y}$.
8. $y' = \frac{-x+ay}{ax+y}$.

9. $y' = \frac{2x+2y}{-2x-5y}$. 10. $y' = \frac{-y+y^2}{x}$.

11. $y' = \frac{\sin x}{y}$. 12. $y' = \frac{x}{\cos y}$.

13. $y' = \frac{x+y^2}{x+y}$. 14. $y' = -\frac{x^3}{y^3}$.

## 4-§. ФОКУС ЁКИ МАРКАЗ БЎЛИШ МУАММОСИ

Кундалик турмушимизда, табиатда содир бўлаётган ҳамма ҳодисалар — юрак уриши, товушлар, электромагнит тебранишлар, тўлқин тебранишлар, самовий жисмлар ҳаракати, космик кемалар ҳаракати, микроблар тарқалиш ҳаракати ва ҳ.к. лар тебранишлар билан боғлиқдир.

Одам организмининг барча аъзолари ўзига хос ритмларда (тебранишларда) бўлади. Суткали ва мавсумли ритмлар ва унинг параметрлари (давр узунлиги, амплитуда миқдори, частота ва тебраниш фазаси ва бошқалар) вақт ўтиши билан ўзгаради ва улар ўз вақтида одам организмининг тез соғайиши ва узоқ яшашини аниқлашда муҳим рол ўйнайди.

Бундай тебранишларнинг асосий турларидан бири даврий тебранишлар ҳисобланади. Чунки бу қаби тебранишларда махсус нуқтанинг марказ ёки фокус бўлиш муаммоси вужудга келади.

Бу муаммони аниқроқ тассавур қилиш учун қуйидаги мисолни кўрамиз.

**1-мисол.** Ушбу система берилган бўлсин:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + x\left(x^2 + y^2\right), \\ \frac{dy}{dt} &= -x + y\left(x^2 + y^2\right). \end{aligned}\right] \qquad (4.1)$$

Агар биринчи ва иккинчи тенгламаларнинг ўнг қисмларидаги чизиқли бўлмаган ҳадларини ташлаб ёзсак, у ҳолда қуйидаги системага эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=y\\ \frac{dy}{dt}&=-x\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

ёки

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}. \tag{4.3}$$

Бу дифференциал тенглама ечимлари $x^2+y^2=C$ айланалар оиласидан иборат, $O(0, 0)$ махсус нуқта, яъни координаталар боши (4.2) тенглама учун марказ туридаги махсус нуқта бўлади.

Энди берилган (4.1) системани қарайлик. Бу системани текшириш учун қутб координаталар системасига ўтамиз, яъни

$$\left.\begin{aligned}x&=\rho\cos\varphi,\\ y&=\rho\sin\varphi\end{aligned}\right\}$$

алмаштиришларни бажарамиз.

Бу тенгликлардан элементар шакл алмаштиришлар ёрдамида қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned}\rho^2&=x^2+y^2,\\ \varphi&=arctg\left(\frac{y}{x}\right).\end{aligned}\right\}$$

Булардан $\varphi'$ ва $\rho'$ ҳосилаларни топамиз:

$$\left.\begin{aligned}\rho\rho'&=xx'+yy',\\ \varphi'&=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)'}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{xy'-yx'}{\rho^2}.\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

(4.1) даги $x'$ ва $y'$ ларнинг ифодаларини (4.4) га қўямиз:

$$\rho\cdot\rho'=x[y+x(x^2+y^2)]+y[-x+y(x^2+y^2)]=$$
$$=x^2(x^2+y^2)+y^2(x^2+y^2)=\rho^4,$$

$$\rho^2\varphi'=x[-x+y(x^2+y^2)]-y[y+x(x^2+y^2)]=$$
$$=-x^2-y^2=-\rho^2.$$

Булардан қуйидаги системага эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \rho^3, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -1. \end{aligned}\right|$$

Бундан қуйидаги

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -\rho^3 \tag{4.5}$$

дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз. (4.5) да ўзгарувчиларни ажратамиз ва интеграллаймиз:

$$\rho^{-3} d\rho = -d\varphi, \ \frac{\rho^{-2}}{-2} = -\varphi + C_1, \ \frac{1}{\rho^2} = 2\varphi + C.$$

Бундан эса

$$\rho^2 = \frac{1}{2\varphi + C} \tag{4.6}$$

ечимга эга бўламиз.

(4.6) дан кўриниб турибдики $\varphi \to \infty$ бўлганда $\rho \to 0$, яъни бу ечимнинг графиги ўрама бўлиб, координаталар боши (4.1) система учун фокус туридаги махсус нуқталиги келиб чиқади.

Бу мисол шуни яққол кўрсатадики, (4.2) система учун марказ туридаги мувозанат ҳолати (4.1) система учун ёки марказ, ёки фокус туридаги мувозанат ҳолати бўлиши мумкин экан.

Марказ ёки фокус бўлиш муаммосини ечишнинг умумий усулини кўрамиз.

Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \tag{4.7}$$

дифференциал тенглама берилган бўлсин. Агар бу тенгламанинг махсус нуқтаси координаталар боши бўлмаса, у ҳолда 3-§ даги $x - x_i = \bar{x}$, $y - y_i = \bar{y}$ чизиқли алмаштириш ёрдамида махсус нуқтани координаталар бошига келтириб оламиз.

Шунинг учун умумийликка зарар етказмай туриб (4.7) тенглама учун координаталар боши махсус нуқта бўлган ҳолни қараймиз, яъни $P(0,0) = Q(0,0) = 0$.

$P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ функциялар аналитик функциялар бўлганлиги учун уларни Тейлор қаторига ёйиш формуласидан фойдаланамиз, унинг учун (4.7) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + \varphi(x,y)}{cx + dy + \psi(x,y)}. \tag{4.8}$$

Бу ерда $\varphi(x, y)$ ва $\psi(x, y)$ функциялар $x$ ва $y$ га нисбатан иккинчи ва ундан юқори тартибли ҳадлардан тузилган кўпҳадлар бўлиб, улар учун $\varphi(0, 0)= \psi(0, 0)=0$. (4.8) учун характеристик тенгламанинг илдизлари мавҳум бўлсин, яъни $\lambda_{1/2}=\pm i\beta$. Бу ҳолда (4.8) тенглама қуйидаги каноник кўринишга келади:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + X(x,y)}{y + Y(x,y)}$$

ёки

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + Y(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + X(x,y), \end{cases} \tag{4.9}$$

бу ерда $X(x, y)$ ва $Y(x, y)$ функциялар $x$ ва $y$ га нисбатан иккинчи ва ундан юқори тартибли ҳадлардан тузилган кўпҳадлардир.

Қуйидаги

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 \\ \varphi = arctg\,\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

алмаштиришлар ёрдамида қутб координаталар системасига ўтадиган бўлсак, (4.9) система қуйидаги кўринишга келади:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho\cdot\frac{x\cdot\dfrac{dx}{dt} + y\cdot\dfrac{dy}{dt}}{x\cdot\dfrac{dx}{dt} - y\cdot\dfrac{dy}{dt}}. \tag{4.10}$$

$\frac{dx}{dt}$ ва $\frac{dy}{dt}$ ларнинг (4.9) даги ифодаларини (4.10) га қўйсак ва $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ эканлигини эътиборга олсак ва баъзи бир шакл алмаштиришлар натижасида қуйидаги

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho^2 a_2(\varphi) + \rho^3 a_3(\varphi) + \ldots + \rho^n a_n(\varphi) + \ldots \qquad (4.11)$$

тенгламага келамиз, бу ерда $a_i(\varphi)$ лар даврий бўлган функциялар. (4.11) нинг ечимини қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$\rho = \alpha \cdot u_1(\varphi) + \alpha^2 \cdot u_2(\varphi) + \alpha^3 \cdot u_3(\varphi) + \ldots + \alpha^n \cdot u_n(\varphi) + \ldots \qquad (4.12)$$

Бу ерда $\alpha$ — етарлича кичик параметр бўлиб, бошланғич шартлар қуйидагилардан иборат: $u_1(\varphi)=1$, $u_i(0)=0$.

(4.12) ни $\varphi$ бўйича ва бошланғич шартни эътиборга олиб дифференциаллаймиз:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \alpha^2 \frac{du_2}{d\varphi} + \alpha^3 \frac{du_3}{d\varphi} + \ldots + \alpha^n \frac{du_n}{d\varphi} + \ldots \qquad (4.13)$$

(4.11), (4.12) ва (4.13) лардан фойдаланиб қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\alpha^2 \frac{du_2}{d\varphi} + \alpha^3 \frac{du_1}{d\varphi} + \ldots + \alpha^n \frac{du_n}{d\varphi} + \ldots =$$

$$= a_2[\alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \ldots + \alpha^n u_n + \ldots]^2 + a_3[\alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \ldots +$$

$$+ \alpha^n u_n + \ldots]^3 + \ldots + a_n[\alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \ldots + \alpha^n u_n + \ldots]^n + \ldots$$

Бу ердан $\alpha$ нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаб, қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{du_2}{d\varphi} = a_2 \cdot u_1^2 \\ &\frac{du_3}{d\varphi} = a_2 \cdot 2u_1 \cdot u_2 + a_3 u_1^3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{du_n}{d\varphi} = a_2 \sum_{i,j=1}^{i+j=2} u_i \cdot u_j + a_3 \sum_{i,j,k=1}^{i+j+k=3} u_i \cdot u_j \cdot u_k + \ldots + a_n \cdot u_1 \end{aligned}\right| \qquad (4.14)$$

Бу формулалар рекуррент формулалар бўлиб, $u_1$ нинг қиймати орқали $u_2$ топилади, $u_2$ нинг қиймати орқали $u_3$ топилади ва ҳоказо.

(4.14) системани интеграллаб, $u_2$, $u_3$, ... ларни топамиз:

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= \int_0^{\varphi} a_2 \cdot u_1^2 d\varphi \\ u_3 &= \int_0^{\varphi} (2a_2u_1u_2 + a_3u_1^3)\, d\varphi \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n &= \int_0^{\varphi} \left( a_2 \sum_{i,j=1}^{i+j=2} u_i u_j + a_3 \sum_{i,j,k=1}^{i+j+k=3} u_i u_j u_k + \ldots + a_n u_1 \right) d\varphi \end{aligned}\right| \quad (4.15)$$

(4.15) дан кўриниб турибдики, интеграл остидаги функциялар $\sin\varphi$ ва $\cos\varphi$ лардан иборат бўлгани учун даврий функциялардир, лекин уларнинг интеграллари даврий бўлиши ҳам мумкин, даврий бўлмасликлари ҳам мумкин.

**Пуанкаре-Ляпунов теоремаси**. Агар $u_2$, $u_3$, ... , $u_n$, ... *функциялар даврий бўлса, у ҳолда координаталар боши (4.8) дифференциал тенглама учун марказ туридаги махсус нуқта бўлади. Агар* $u_i(\varphi)$ *функциялар орасида ҳеч бўлмаганда бирортаси даврий бўлмаса, у ҳолда координаталар боши фокус туридаги махсус нуқта бўлади.*

Бу теорема ёрдамида баъзи бир тенгламалар учун $O(0, 0)$ махсус нуқта марказ бўлишини номаълум $x$ ва $y$ ларнинг олдидаги коэффициентлар бирор шартларни қаноатлантириши кўрсатилган.

Масалан,

$$y' = -\frac{x + ax^2 + (2b + \alpha)\, xy + cy^2}{y + bx + (2c + \beta)\, xy + dy}$$

тенглама учун координаталар боши марказ бўлишлигининг етарли ва зарурий шарти қуйидаги олтита ҳолдан бирортасининг бажарилишидир:

1) $\alpha=\beta=0$;
2) $a+c=\beta=0$;
3) $ak^3+(3b+\alpha)k^2+(3c+\beta)k-d=0,\ k=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{b+d}{a+c}$;
4) $a+c=0,\ b+d=0$;
5) $b+d=\alpha=\beta+5(a+c)=ac+2a^2+d^2=0,\ a+c\neq 0$;
6) $a_1+c_1=\beta_1=\alpha_1+5(b_1+d_1)=b_1d_1+2d_1^2+a_1^2=0,\ b+d\neq 0$.

Қуйидаги

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x+c_{30}x^3+c_{21}x^2y+c_{12}xy^2+c_{03}y^3}{y+b_{30}x^3+b_{21}x^2y+b_{12}xy^2+b_{03}y^3}$$

дифференциал тенгламада координаталар боши марказ бўлиши учун ушбу икки шартдан бири бажарилиши керак:

1) $c_{21}=c_{03}=0,\ b_{30}=b_{12}=0,$
2) $c_{21}+3c_{03}=0,\ b_{12}+3b_{20}=0,\ c_{03}=b_{30}.$

Бундан ташқари марказ бўлишликнинг баъзи бир етарли белгилари бор.

Мисол учун

$$y'=\frac{-x+f(x,y)}{y} \tag{4.16}$$

дифференциал тенглама учун $f(x,\ y)=f(x,\ -y)$ бўлса, яъни функция $y$ га нисбатан жуфт бўлса, у ҳолда (0, 0) нуқта марказ бўлади. $y$ ни $-y$ га алмаштирганимизда (4.16) тенглама ўзгаришсиз қолишини кўрамиз, демак интеграл чизиқлар $Ox$ ўқига нисбатан симметрик, бундан (0, 0) нуқта марказ эканлиги келиб чиқади.

Агар (4.16) тенгламада $f(x,\ y)$ $x$ га нисбатан тоқ функция бўлса, яъни $f(x,\ y)=-f(-x,\ y)$ бўлса, бу ҳолда ҳам (0, 0) нуқта марказ бўлади.

**2-мисол.** Ушбу

$$y'=\frac{-x+y(1-x^2-y^2)}{y+x(1-x^2-y^2)}$$

дифференциал тенгламани ечинг

Ечиш. Унга эквивалент бўлган қуйидаги системани ёзиб оламиз:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=y+x(1-x^2-y^2),\\ \frac{dy}{dt}&=-x+y(1-x^2-y^2).\end{aligned}\right|.$$

Бу системани 1-мисолдагидек қутб координаталар системасида ифодаласак, у ҳолда қуйидаги системага эга бўламиз:

$$\begin{cases}\rho' = \rho(1-\rho^2),\\ \varphi' = -1\end{cases}$$

ёки

$$\frac{d\varphi}{d\varphi} = -\rho(1-\rho^2).$$

Ўзгарувчиларни ажратиб интеграллаймиз:

$$\frac{d\varphi}{\rho(1-\rho^2)} = -d\varphi,$$

$$\frac{d\varphi}{\rho} + \frac{d\varphi}{2(1-\rho)} - \frac{d\varphi}{2(1+\rho)} = -d\varphi,$$

$$\ln(\rho) - \frac{1}{2}\ln(1-\rho) - \frac{1}{2}\ln(1+\rho) = -\varphi + \ln C.$$

Бундан

$$\ln\frac{\rho}{C\sqrt{1-\rho^2}} = -\varphi$$

ёки

$$\rho = C\sqrt{1-\rho^2}\,e^{-\varphi}.$$

Икки томонини квадратга кўтарамиз:

$$\rho^2 = C(1-\rho^2)e^{-2\varphi}$$

ёки

$$\rho^2 = \frac{1}{1-Ce^{-2\varphi}}.$$

Бу эса C≠0 бўлган ҳоллар учун координаталар боши ((0, 0) нуқта) берилган тенглама учун фокус туридаги махсус нуқталигини билдиради.

Хусусий ҳолда $C=0$ бўлса, $\rho^2=1$ тенглик ҳосил бўлиб, тенглама ечими $x^2+y^2=1$ айланадан иборат бўлади ва у ҳолда координаталар боши берилган тенглама учун марказ туридаги махсус нуқтага айланади.

### *Машқлар*

Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг махсус нуқталарини топинг ва уларнинг турини аниқланг.

1. $y' = \dfrac{x^2-x}{y}$.

2. $y' = \dfrac{1+y-x^2+y^2}{2xy}$.

3. $y' = \frac{x+y+xy}{x-y+x^2}$.   4. $y' = \frac{x+2y+x^2}{2x-y+y^2}$.

5. $y' = \frac{x+y+y^2}{-x-5y+xy}$.   6. $y' = \frac{2x+2y+xy}{-2x-5y+y^2}$.

## 5-§. ЧЕГАРАЛАНГАН СОҲАДА ХАРАКТЕРИСТИКАЛАРНИНГ ХАРАКТЕРИ ТЎҒРИСИДА ЛЕНДЕЛЕФ ЛЕММАСИ

Ушбу

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= X(x,y),\\ \frac{dy}{dt} &= Y(x,y)\end{aligned}\right| \tag{5.1}$$

дифференциал тенгламалар системасининг махсус нуқталар мавжуд бўлмаган чегараланган соҳадаги характеристикаларининг характерини кўриб чиқамиз.

Айтайлик, $M(x, y)$ ва $M_1(x_1, y_1)$ нуқталар иккита характеристикада ётсин, шу билан бирга улар орасидаги масофа $|M_1M| < \delta$ бўлсин, $\delta$ — етарлича кичик сон. $M$ — махсус нуқта бўлмагани учун $X(x, y)\neq 0$, $Y(x, y)\neq 0$ (17-чизма). Энди $X(x, y)$ ва $Y(x, y)$ ларни узлуксиз функциялар деб ҳисоблаб $M$ нуқтани бошқа исталган $M_1(x_1, y_1)$ нуқтада ҳам $X$ ва $Y$ функциялар нолдан фарқли $X(x, y)\neq 0$, $Y(x, y)\neq 0$, шу билан бирга $X(x, y)$ ва $Y(x, y)$ларнинг ишоралари бир хил бўладиган қилиб етарлича кичик $(M, \delta)$ оралиқ ичига оламиз.

Умумийликка зиён келтирмасдан,

$$\begin{cases} X(x,y) > 0, & X(x_1,y_1) > 0,\\ Y(x,y) > 0, & Y(x_1,y_1) > 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

деб ҳисоблаш мумкин. Бу $\frac{dx}{dt}$ ва $\frac{dy}{dt}$ тезликларнинг координата ўқларидаги проекциялари бир хил (мусбат) ишорали эканлигини билдиради, яъни $M$ ва $M_1$ нуқталар ўз характеристикалари бўйлаб бир йўналишда ҳаракат қиладилар.

Бу ҳол учун қуйидаги лемма ўринлидир.

**Лемма**. *Иккита характеристикада жойлашган иккита тасвирловчи $M$ ва $M_1$ нуқтани қараймиз. Ҳар қандай $\varepsilon>0$ кичик сон учун шундай $\delta>0$ топиладики, $t=t_0$ пайтда $|M_1M|<\delta$ ва исталган $t=t_1$ пайтда $|MM_1|<\varepsilon$ тенгсизликлар ўринли бўлади.*

Исботи. $x=x(t)$, $y=y(t)$ тенглама $M$ нуқта ҳаракатланадиган траектория тенгламаси, $x=x_1(t)$, $y=y_1(t)$ эса $M_1$ нуқта ҳаракатланадиган траектория тенгламаси бўлсин.

(5.1) ҳаракат дифференциал тенгламалар системасига кўра:

$$\begin{aligned} \frac{d(x_1-x)}{dt} &= X(x_1,y_1)-X(x,y), \\ \frac{d(y_1-y)}{dt} &= Y(x_1,y_1)-Y(x,y). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Липшиц шартини қўллаб

$$\left|\frac{d(x_1-x)}{dt}\right| \le \mathrm{N}\left(|x_1-x|+|y_1-y|\right),$$

$$\left|\frac{d(y_1-y)}{dt}\right| \le \mathrm{N}\left(|x_1-x|+|y_1-y|\right)$$

тенгсизликларни ҳосил қиламиз.

$\frac{d|p-q|}{dt} \le \left|\frac{d(p-q)}{dt}\right|$ эканлигини ҳисобга олиб,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(|x_1-x|+|y_1-y|\right) \le 2N\left(|x_1-x|+|y_1-y|\right)$$

тенгсизлик ўринли деган хулосага келамиз. Бу тенгсизликни $[t_0, t_1]$ оралиқда интеграллаб

$$\ln\left(|\mathrm{x}_1-\mathrm{x}|+|\mathrm{y}_1-\mathrm{y}|\right)\Big|_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}_1} \le 2N(\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_0)$$

ёки

$$\left(|\mathrm{x}_1-\mathrm{x}|+|\mathrm{y}_1-\mathrm{y}|\right)_{\mathrm{t}=\mathrm{t}_1} \le \left(|\mathrm{x}_1-\mathrm{x}|+|\mathrm{y}_1-\mathrm{y}|\right)_{\mathrm{t}=\mathrm{t}_0} \cdot \mathrm{e}^{2N(\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_0)}$$

ни ҳосил қиламиз. Исталган $\varepsilon>0$ сон учун

$\delta=\left(|\mathrm{x}_1-\mathrm{x}|+|\mathrm{y}_1-\mathrm{y}|\right)_{\mathrm{t}=\mathrm{t}_0} < \varepsilon \mathrm{e}^{-N(\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_0)}$ деб оламиз.

У ҳолда

$$\left(|x_1-x|+|y_1-y|\right)_{t=t_1} < \delta e^{2N(t_1-t_0)} = \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Демак, $|MM_1|_{t=t_1} < \varepsilon$, шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Лемма исботидан (5.1) тенгламалар системаси ечимлари мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теорема шартлари бажариладиган соҳада ўринли эканлиги келиб чиқади.

**1-теорема.** *Барча $t>t_0$ ёки $t<t_0$ ларда махсус нуқталарсиз ёпиқ чегараланган соҳада қоладиган Z характеристика ўзини қуйидаги икки ҳолатдан бири каби тутиши мумкин:*

*а) ёпиқ траектория бўлиши мумкин,*

*б) ёпиқ характеристикага спиралсимон яқинлашади.*

Исботи. $t_1, t_2, ..., t_n, ...$ моментлар кетма-кетлигини ва уларга мос $Z$ характеристикада жойлашган $M_1, M_2, ..., M_n$ нуқталар кетма-кетлигини қараймиз (18-чизма).

$Z$ эгри чизиқ ёпиқ чегараланган $S$ соҳада ётгани учун $\{M_n\}$ кетма-кетлик чегараланган ва математик анализдан маълумки, у камида битта $P$ лимит нуқтага эга бўлади.

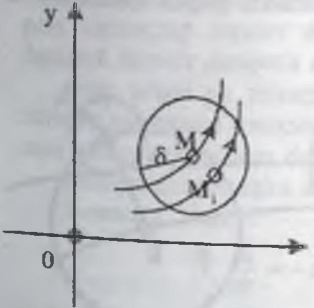
Бунда икки ҳол бўлиши мумкин:

а) $P$ лимит нуқта $Z$ характеристикада ётади;

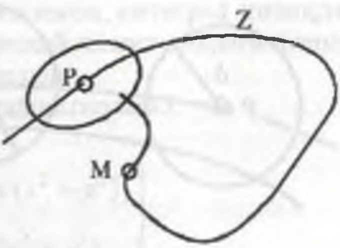
б) $P$ лимит нуқта $Z$ га тегишли бўлмайди.

а) ҳолни қараб чиқамиз. Маркази $P\in Z$ нуқтада, ихтиёрий $\rho$ радиусли доира ясаймиз. $Z$ характеристика доира орқали ўтади ва яна унга қайтади; акс ҳолда $P$ нуқта лимит нуқта бўлмас эди.

Бироқ, чексиз катта вақт оралиғида характеристика жуда кичик радиусли доира ичида бўла олмайди, чунки у ҳолда



17-чизма.



18-чизма.

$P$ нуқта сокинлик (ёки мувозанат) нуқтаси, яъни махсус нуқта бўлар эди. Шу вақтнинг ўзида тасвирловчи $M$ нуқта ҳар қанчалик кичик $\rho$ радиусли $(P, \rho)$ доирага у олдин кирган траекторияси бўйича кира олмайди, чунки $P$ нуқта атрофида ундан ташқарида $\rho_1 < \rho$ радиусли доира мавжуд бўлар ва $P$ нуқта лимит нуқта бўлмас эди.

Характеристика ўз-ўзини кесиш соҳасидан чиқа олмайди, чунки ўз-ўзини кесиш нуқтаси махсус нуқтадир. Демак, $Z$ траектория нуқтада туташади ва нуқта тасвирловчи ҳаракат ёпиқ характеристика бўлади.

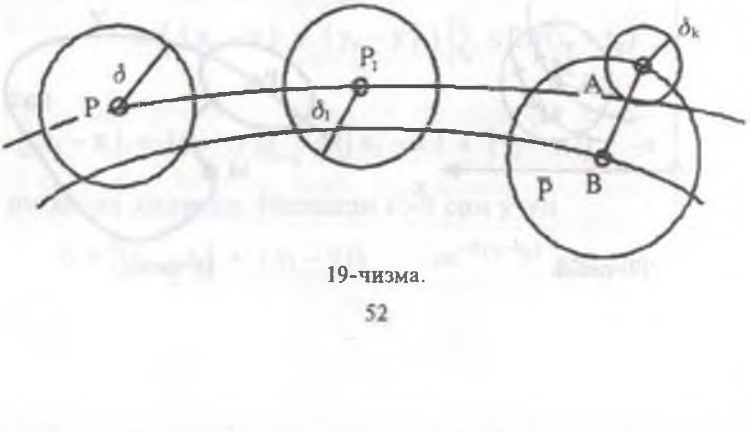
б) ҳолда $P$ нуқта $Z$ характеристикада ётмаган бўлса, у ҳолда $P$ нуқта орқали берилган дифференциал тенгламалар системасининг бошқа $K$ характеристикасини ўтказамиз (19-чизма).

$P$ лимит нуқтаси бўлгани учун, исталган $(P, \delta)$ доирада $Z$ характеристиканинг нуқталари бўлади.

Агар $t = t_1$ да маркази $P_1$ да бўлган $\delta_1$ радиусли доира ясасак, Ленделеф леммасига кўра унинг ичида ҳам $Z$ характеристиканинг нуқталари бўлиши керак. Демак, $K$ характеристика бутунлай лимит нуқталаридан иборат. У $S$ соҳадан чиқа олмайди, лимит нуқталарга яқинлаша олмайди, чунки акс ҳолда $Z$ характеристика ҳам ё $S$ соҳадан чиқиб кетарди, ёки лимит нуқталарга яқинлашар эди.

$K$ характеристиканинг ўзи $S$ соҳада қолгани сабабли унинг ўзи учун лимит нуқталар мавжуд бўлиши керакки, улар ҳам соҳада ётиши мумкин ёки унга тегишли бўлмаслиги мумкин.

$K$ характеристиканинг лимит нуқталари унинг ўзида ётишини исбот қиламиз. Тескарисини фараз қиламиз. $K$



19-чизма.

эгри чизиқнинг $\bar{P}$ лимит нуқтаси унда ётмасин. $\bar{P}$ нуқтани $\delta$ радиусли айлана билан ўраймиз ва $\bar{P}$ нуқтадан $K$ характеристикага $\overline{PA}$ перпендикуляр туширамиз. $\bar{P}$ нуқта $K$ характеристиканинг лимит нуқтаси (махсус эмас) бўлгани учун $K$ траектория бу доирага қайта-қайта киради ва чиқади. $Z$ эгри чизиқ ҳам $\overline{PA}$ перпендикулярни бирор $B$ нуқтада кесиб $(\bar{P}, \delta)$ доирага киради. Бироқ $\delta_1 < AB$ олиб ва $A$ нуқта атрофида $\delta_1$ радиусли айлана чизиб, $Z$ эгри чизиқнинг унга кирмаслигини, яъни $K$ эгри чизиқ унинг учун лимит эгри чизиқ бўлмаслигини кўрамиз, бу эса шартга зиддир. Шундай қилиб, ҳар қандай $\bar{P}$ лимит нуқта $K$ эгри чизиққа тегишлидир.

Демак, $K$ траектория ёпиқ, $Z$ траектория эса унга спиралсимон яқинлашади.

Шундай ёпиқ $K$ траектория *лимит давра* дейилади. Лимит давра тушунчасини Анри Пуанкаре киритган. Лимит давра техникада турли асбоб ва қурилмаларни лойиҳалашда муҳим рол ўйнайди. Техникада сўнмас тебранишлар шу лимит даврага мисол бўлади.

Таъриф. (5.1) мухтор дифференциал тенгламалар системасининг яккаланган даврий ечими *лимит давра* дейилади.

Лимит давралар турғун, бутунлай нотурғун, ярим турғун бўлиши мумкин.

Агар лимит даврага спиралсимон интеграл чизиқлар ичкаридан ва ташқаридан яқинлашсалар бундай лимит даврага *турғун лимит давра* дейилади.

Агар лимит даврага ичкаридаги спиралсимон интеграл чизиқлар яқинлашса ва ташқаридаги спиралсимон интеграл чизиқлар лимит даврадан узоқлашса (ёки аксинча) бундай лимит даврага *ярим турғун лимит давра* дейилади.

Агар ички ва ташқи спиралсимон интеграл чизиқлар лимит даврадан узоқлашса, бундай лимит даврага *бутунлай нотурғун лимит давра* дейилади.

Лимит давраларга мисоллар келтирамиз.

**1-мисол.** Ушбу

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x - y + x(x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} &= x - y + y(x^2 + y^2) \end{aligned}\right\}$$

дифференциал тенгламалар системасининг лимит даврасини аниқланг.

Ечиш. $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ алмаштириш ёрдамида берилган системани қутб координаталарда ифодалаймиз:

$$\frac{d\rho}{dt}=\cos\varphi-\rho\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}=-\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi+\rho^3\cos\varphi,$$

$$\frac{d\rho}{dt}\cdot\sin\varphi+\rho\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}=\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi+\rho^3\cos\varphi.$$

Бу тенгламалар системасидан $\frac{d\rho}{dt}$ ва $\frac{d\varphi}{dt}$ ларни топамиз:

$$\frac{d\rho}{dt}=-\rho(1-\rho^2),\ \frac{d\varphi}{dt}=1.$$

Қутб координаталар системасида берилган дифференциал тенгламалар системаси

$$\frac{d\rho}{d\varphi}=-\rho(1-\rho^2)$$

кўринишни олади. Бундан битта $\rho=1$ ёпиқ фазовий эгри чизиқ борлигини кўрамиз. Бошқа фазовий эгри чизиқлар учун $\rho>1$ соҳада $\varphi$ ўсувчи, $0<\rho<1$ да эса $\varphi$ камаювчидир.

Шундай қилиб, берилган тенгламалар системаси учун $O(0,\ 0)$ мувозанат ҳолат турғун фокус бўлиб, у маркази координаталар бошида ва радиуси бирга тенг бўлган турғунмас лимит даврага эга бўлади.

**2-мисол.** Қутб координаталарда $\frac{dr}{d\varphi}=(r-a)^2\sin^2\varphi$ дифференциал тенглама ёки

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dr}{dt}=(r-a)^2\sin^2\varphi,\\&\frac{d\varphi}{dt}=1\end{aligned}\right|$$

дифференциал тенгламалар системаси берилган бўлсин. Бу система учун $r=a$ эгри чизиқ характеристикадир. Бошқа ҳар қандай $r=r(\varphi)$ характеристика $(r-a)^2\sin^2\varphi>0$ бўлгани учун ўсувчи $r$ қутб радиусга эга бўлади. Айлана ярим турғун лимит даврадир (20-чизма).

**3-мисол.** Ушбу $\frac{dr}{d\varphi}=(a-r)\sin^2\varphi$ дифференциал тенглама учун $r=a$ турғун лимит даврадир, чунки $r>a$ бўлга-

20-чизма.

21-чизма.

нида $\frac{dr}{d\varphi} < 0$ бўлгани учун $r(\varphi)$ — камаювчи, $r<a$ да $\frac{dr}{d\varphi} > 0$ бўлгани учун $r(\varphi)$ — ўсувчи (21-чизма).

Лимит давраларни излаш масаласи дифференциал тенгламаларнинг сифат назариясида энг муҳим, шу билан бирга унинг энг мураккаб масалаларидан биридир.

2-теорема. *Ҳар қандай ёпиқ характеристика (лимит давра) ичида камида битта махсус нуқта мавжуддир.*

Исботи. Ёпиқ $Z_0$ характеристика ичида бирорта ҳам махсус нуқта йўқ деб фараз қиламиз. $Z_0$ характеристика

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x,y)}{X(x,y)} \tag{A}$$

дифференциал тенгламани қаноатлантиради. (A) тенглама билан бирга ушбу тенгламани ҳам ёзамиз:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Y(x,y)}{X(x,y)} \tag{B}$$

(B) тенгламанинг ечими (A) тенглама характеристикаларига, шу билан бирга $Z$ га ортогонал бўлган эгри чизиқлар оиласидан иборатдир.

$Z$ эгри чизиқ билан чегараланган соҳа ичида бирор бошқа $Z_1$ характеристикани оламиз. Бендиксон теоремасига мувофиқ $Z_1$ ё ёпиқ, ё ёпиқ характеристикага ўралган бўлади. $Z_1$ ичида $Z_2$ ($Z_1$ хоссага эга бўлган) характеристика ўтказамиз ва ҳоказо.

Равшанки, $Z_1$, $Z_2$, ... , $Z_n$ характеристикалар кетма-кетлиги лимит характеристика $K$ га интилади.

(A) тенгламанинг $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ эгри чизиқлар оиласининг ҳар бир эгри чизиғига мос (B) тенгламанинг характеристикалари бўлган $K_0, K_1, \dots, K_n$ ортогонал эгри чизиқлар оиласини ясаймиз. Бу оилаларнинг лимит характеристикалари бирор $K$ характеристика бўлади.

$Z_0K_0, Z_1K_1, \dots, Z_nK_n$ характеристикалар кетма-кетлигини қараб чиқиб, ўзаро киришиш ва торайиш натижасида, $Z$ ва $K$ лимит характеристикалар устма-уст тушади деган хулосага келамиз, бу эса фақат

$$\frac{Y(x,y)}{X(x,y)} = -\frac{X(x,y)}{Y(x,y)}$$

шартда, яъни $x^2(x, y)+y^2(x, y)=0$ ёки $X(x, y)=0$, $Y(x, y)=0$ да мумкиндир, яъни лимит нуқта махсус нуқтанинг худди ўзидир.

### *Машқлар*

Қуйидаги дифференциал тенгламалар лимит даврага эга бўлишини аниқланг:

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x+\varepsilon(1-x^2)y}{y}$. 2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x-y+y^2}{y-x+x^3}$.

3. $y' = \dfrac{-x+y\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)}{y+x\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)}$. 4. $y' = \dfrac{x+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\sqrt{x^2+y^2}}{-y+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\sqrt{x^2+y^2}}$.

## 6-§. МУМКИН БЎЛГАН УРИНМАЛАР ТЕНГЛАМАСИ

Ушбу

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= X(x,y),\\ \frac{dy}{dt} &= Y(x,y)\end{aligned}\right\} \qquad (6.1)$$

дифференциал тенгламалар системаси учун координаталар боши атрофида, лекин координаталар боши $O(0, 0)$ да бўлмаган ечими мавжудлиги ва у ягоналиги шартлари бажарилган деб фараз қилайлик. Сўнгра (6.1) системани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин дейлик:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X_n(x,y) + X(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= Y_n(x,y) + Y(x,y) \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

бу ерда $X_n(x, y)$, $Y_n(x, y)$ лар $n$-даражали бир жинсли, $X(x, y)$, $Y(x, y)$ лар эса координаталар боши атрофида $n$ га нисбатан юқорироқ даражали ҳадлардан иборат кўпҳадлар. (6.2) нинг ўнг томонларини Тейлор формуласи ёрдамида икки $x$ ва $y$ ўзгарувчи бўйича қатор ёйилмаси кўринишида ёзиш мумкин бўлсин. (6.1) системанинг ечимларидан иборат интеграл эгри чизиқлар координаталар бошига (яъни махсус нуқтага) кириши мумкин бўлган йўналишларни ўрганамиз.

Бунинг учун (6.1) системани қутб координаталарида ифодалаймиз:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2, \\ \varphi &= arctg\,\frac{y}{x}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

(6.3) ни $t$ бўйича дифференциаллаймиз:

$$rr' = xx' + yy', \ \varphi' = -\frac{x'y - y'x}{x^2+y^2} = -\frac{x'y - y'x}{r^2}.$$

Бундан

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r'}{\varphi'} = \frac{xx' + yy'}{xy' - xy'} \cdot r. \tag{6.4}$$

(6.4) даги $x'$ ва $y'$ ларнинг (6.2) системадаги қийматлари билан алмаштириб (улардан аввал қутб координаталарини киритиб олиб), қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\cos\varphi \cdot \mathrm{X_n}(\cos\varphi, \sin\varphi) + \sin\varphi \cdot \mathrm{Y_n}(\cos\varphi, \sin\varphi) + \mathrm{r}\xi(\mathrm{r},\varphi)}{\cos\varphi \cdot \mathrm{Y_n}(\cos\varphi, \sin\varphi) - \sin\varphi \cdot \mathrm{X_n}(\cos\varphi, \sin\varphi) + \mathrm{r}\eta(\mathrm{r},\varphi)} \cdot \mathrm{r} \tag{6.5}$$

бу ерда $\xi(r, \varphi)$, $\eta(r, \varphi)$ функциялар ушбу кўринишга эгадир:

$$\xi(r,\varphi)=\frac{X(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot\cos\varphi+Y(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot\sin\varphi}{r^{n+1}},$$
$$\eta(r,\varphi)=\frac{X(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot\sin\varphi-Y(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot\cos\varphi}{r^{n+1}}. \qquad (6.6)$$

Агар характеристика координаталар бошига аниқ уринма билан кирса, у ҳолда $\varphi\to\varphi_0$ да $r\to0$ бўлади. (22-чизма).

$r$ ўқни вертикал, $\varphi$ ни горизонтал ўққа йўналтириб, қутб координатларини декарт координатлари каби қараймиз. $r=0$ (6.5) тengламанинг ечимидир, демак, дастлабки (6.1) система учун эгри чизиқлар координатлар бошига $r=0$ йўналиш бўйлаб киради.

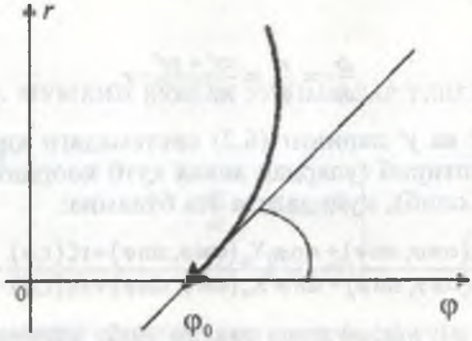
Агар бошқа характеристикалар координатлар бошига $\varphi_0$ бурчак остида кирсалар, у ҳолда $(0,\ \varphi_0)$ нуқта махсус нуқта бўлади ва $(0,\varphi_0)$ нуқтада (6.5) тенгламанинг сурат ва махражи нолга тенг бўлиши керак, яъни

$$\cos\varphi_0 X_n+\sin\varphi_0 Y_n=0,$$
$$\cos\varphi_0 Y_n-\sin\varphi_0 X_n=0.$$

Ушбу

$$\cos\varphi\cdot Y_n(\cos\varphi,\ \sin\varphi)-\sin\varphi\cdot X_n(\cos\varphi,\ \sin\varphi)=0 \qquad (6.7)$$

тенглама *мумкин бўлган уринмалар тенгламаси* дейилади. (6.2) система учун мумкин бўлган уринмалар тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:



22-чизма.

$$xY_n(x,\ y) - yX_n(x,\ y) = 0. \qquad (6.8)$$

Қуйидаги учта ҳолдан бири бўлиши мумкин:

а) Агар (6.7) тенглама ҳақиқий илдизларга эга бўлмаса, у ҳолда $r=0$ ўқда махсус нуқталар йўқ ва бирорта ҳам интеграл эгри чизиқ координаталар бошига кирмайди.

Масалан, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ тенглама учун (бу ерда $X_n = y, Y_n = -x$) мумкин бўлган уринмалар тенгламаси

$$x^2+y^2=0,\ \cos^2\varphi+\sin^2\varphi=0$$

ҳақиқий $\varphi_0$ илдизларга эга эмас, демак, бу оила интеграл эгри чизиқларнинг бирортаси ҳам координатлар бошига кирмайди.

б) (6.7) мумкин бўлган уринмалар тенгламаси ҳеч бўлмаганда битта ҳақиқий ечим $\varphi_0$ га эга бўлсин. Тенгламанинг иккала томонини $\cos^{n+1}$ га бўлсак, (6.7) тенглама $\mathrm{tg}\varphi$ га нисбатан $(n+1)$-даражали тенглама кўринишига келади. Демак, $n+1$ даража турли йўналишлар сонининг энг каттаси бўлиб, улар бўйлаб интеграл чизиқлар координаталар бошига кириши мумкин бўлади.

в) (6.7) мумкин бўлган уринмалар тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлсин:

$$xY_n - yX_n = 0 \qquad (6.9)$$

(Масалан, агар $x'=y,\ y'=$x бўлса). Агар (6.9) шарт бажарилса, у ҳолда $X_n$ ва $Y_n$ кўпҳадларнинг тузилишини аниқлаймиз. Айтайлик,

$$X_n(x,\ y) = a_{n0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + \ldots + a_{1,n-1}xy^{n-1} + a_{0n}y^n,$$

$$Y_n(x,\ y) = b_{n0}x^n + b_{n-1,1}x^{n-1}y + \ldots + b_{1,n-1}xy^{n-1} + b_{0n}y^n$$

бўлсин, у ҳолда

$$xY_n - yX_n = b_{n0}x^{n+1} - a_{n0}y^{n+1} +$$
$$+(b_{n-1,1} - a_{n0})x^n y + \ldots + (b_{0n} - a_{1,n-1})xy^n = 0$$

тенгликдан

$b_{n0}=0, a_{n0}=0 \ldots b_{n-k,k}=a_{n-k+1,k-1}$ (бунда $k=\overline{1,n}$) келиб чиқади.

Демак,

$$X_n(x,y) = a_{n0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + \ldots + a_{1,n-1}xy^{n-1},$$
$$Y_n(x,y) = b_{n0}x^n + b_{n-1,1}x^{n-1}y + \ldots + b_{1,n-1}xy^{n-1}.$$

Қаралаётган ҳолда дифференциал тенглама қутб координаталарида қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\cos\varphi X_n + \sin\varphi\, Y_n + r\xi(r,\varphi)}{\eta(r,\varphi)},$$

бироқ, $X_n\cos\varphi - X_n\sin\varphi = 0$ бўлгани учун $Y_n = \mathrm{tg}\varphi \cdot X_n$.

Демак,

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{X_n + r\cos\varphi \cdot \xi(r,\varphi)}{\cos\varphi\, r\eta(r,\varphi)} \tag{6.10}$$

тенгламанинг кўринишидан равшанки $r=0$ ўқда $X_n(\cos\varphi, \sin\varphi) = 0$, яъни

$$\cos^n\varphi\,(a_{n0} + a_{n-1,1}\,tg\varphi + \ldots + a_{1,n-1}\,tg^{n-1}\varphi) = 0$$

тенгламанинг илдизини ҳисобга олганда махсус нуқталар йўқ.

$\varphi \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ бўлгани учун $n-1$ йўналиш бўйича координатлар бошига биттадан ортиқ характеристика кириши мумкин ёки биророта ҳам характеристика кирмайди.

## 7-§. НОРМАЛ СОҲАЛАР

Қуйидаги

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y_n(x,y) + Y(x,y)}{X_n(x,y) + X(x,y)} \tag{7.1}$$

дифференциал тенглама берилган бўлсин. (7.1) тенгламада

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned} \tag{7.2}$$

алмаштириш бажарамиз. Натижада (7.1) тенглама

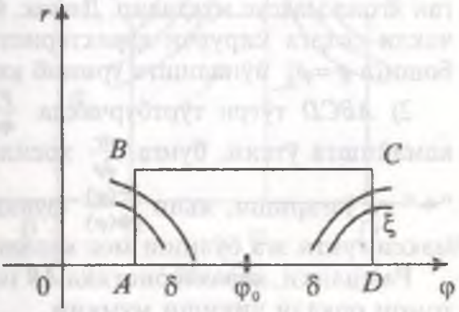
$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\cos\varphi \cdot X_n + \sin\varphi \cdot Y_n + r\xi(r,\gamma)}{\cos\varphi \cdot Y_n - \sin\varphi \cdot X_n + r\eta(r,\varphi)} \cdot r \tag{7.3}$$

кўринишга келади. Қуйидагича белгилаш киритамиз:

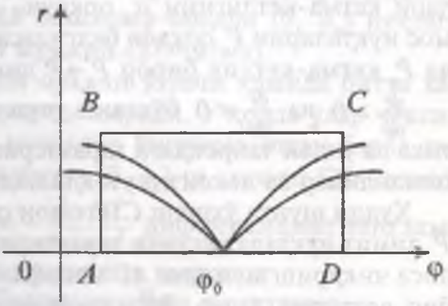
$$\begin{aligned} F(\varphi) &= \cos\varphi \cdot Y_n(\cos\varphi,\ \sin\varphi) - \sin\varphi X_n(\cos\varphi,\ \sin\varphi), \\ \Phi(\varphi) &= \cos\varphi \cdot X_n(\cos\varphi,\ \sin\varphi) + \sin\varphi X_n(\cos\varphi,\ \sin\varphi). \end{aligned} \tag{7.4}$$

Шунингдек, $\varphi=\varphi_0$ — мумкин бўлган уринмалар тенгламасининг илдизи бўлсин, яъни $F(\varphi_0)=0$. Умумий ҳолда $\Phi(\varphi_0)\neq 0$, деб фараз қиламиз. $\varphi_0$ нуқта атрофида баландлиги $r$ узунликка эга бўлган $ABCD$ тўғри тўртбурчак ясаймиз (23-чизма). $\delta$ ва $\xi$ сонларни шундай танлаб олинганки, $ABCD$ тўғри тўртбурчак ичида $F(\varphi)$ ва $\Phi(\varphi_0)\neq 0$ функцияларнинг илдизлари $\varphi_0$ бўлмасин. $\delta$ ва $\xi$ лар $\frac{dr}{d\varphi}$ нинг ишораси фақат $F(\varphi)$ ва $\Phi(\varphi)$ ларга боғлиқ бўладиган қилиб етарлича кичик олинган. Бундай олинган $ABCD$ тўғри тўртбурчакни нормал соҳа дейилади (24-чизма).

Қуйидаги ҳоллардан бири бўлиши мумкин:



23-чизма.



24-чизма.

1) $\frac{F(\varphi)}{\Phi(\varphi)}$ функция $\varphi_0$ нуқтада камайишдан ўсишга ўтсин, яъни $\varphi_0$ бу функциянинг минимуми бўлсин.

Бундай хоссага эга бўлган соҳага *биринчи тур нормал соҳа* дейилади.

Бу соҳада $AB$ томонда ҳосила $\frac{dr}{d\varphi}<0$ ва $CD$ томонда $\frac{dr}{d\varphi}>0$, чунки $\varphi_0$ дан чап томонда $\frac{dr}{d\varphi}$ функция камаяди, ўнг томонда эса ўсади.

Шундай қилиб, биринчи тур нормал соҳада $\frac{dr}{d\varphi}$ ҳосила $\varphi_0$

нуқтадан ўтишда ишорасини "$-$" дан "$+$" га ўзгартиради.

Бундай турдаги соҳа $r$ нинг камайиши билан интеграл эгри чизиқлар шу соҳага киради деб айтиш мумкин.

Биринчи турдаги нормал соҳага кирувчи барча характеристикалар $(0, \varphi_0)$ нуқтага киришини кўрсатамиз.

Масалан, $AB$ томони орқали кирган характеристикани кўриб чиқайлик.

У $AB$ орқали қайтиб чиқа олмайди, чунки $\frac{dr}{d\varphi} = 0$, характеристикада эса бурчак нуқта йўқ. $ABCD$ ичида $\frac{dr}{d\varphi} \neq 0$ бўлгани учун характеристика $ABCD$ тўғри тўртбурчакнинг $BC$ томони орқали ёки $CD$ томони орқали ($(0, \varphi_0)$ нуқтани четлаб) чиқа олмайди.

Характеристика $ABCD$ ичида чексиз узоқ қолмайди ҳам, чунки у ёпиқ ёки ёпиқ траекторияга уринма бўлиб қолар эди.

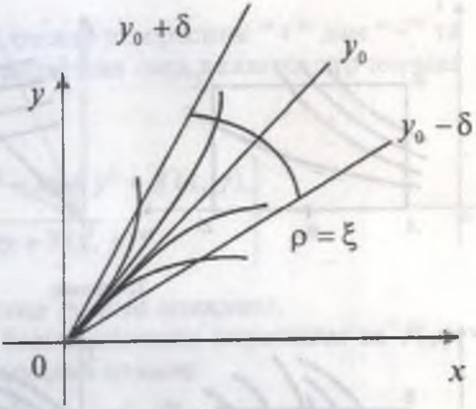
Шундай қилиб $(0, \varphi_0)$ нуқта характеристикалар кирадиган ягона махсус нуқтадир. Демак, биринчи тур тўғри бурчакли соҳага кирувчи характеристикалар координаталар бошига $\varphi=\varphi_0$ йўналишга уриниб кирадилар (25-чизма).

2) $ABCD$ тўғри тўртбурчакда $\frac{F(\varphi)}{\Phi(\varphi)}$ функция ўсишдан камайишга ўтсин, бунга $\frac{dr}{d\varphi}$ ҳосила ишорасини "$+$" дан "$-$" га ўзгариши, яъни $\frac{F(\varphi)}{\Phi(\varphi)}$ функциянинг $\varphi=\varphi_0$ нуқтада максимумга эга бўлиши мос келади.

Равшанки, характеристика $AB$ томон орқали кириб, $BC$ томон орқали чиқиши мумкин.

Агар характеристиканинг $AB$ томонини кесиш нуқталари кетма-кетлигини $\alpha_n$ орқали, $BC$ томонидаги уларга мос нуқталарни $P_n$ орқали белгиласак, у ҳолда $\alpha_n \to A$ бўлганда $P_n$ кетма-кетлик бирор $P_n \to P$ лимит нуқтага интилади. $\frac{dr}{d\varphi} > 0$ ва $\frac{dr}{d\varphi} \neq 0$ бўлгани учун ва $(\alpha_n, P_n)$ характеристика ва ундан чапроқдаги характеристикалар $ABCD$ га қайта олмайдилар ва чексизга узоқлашадилар.

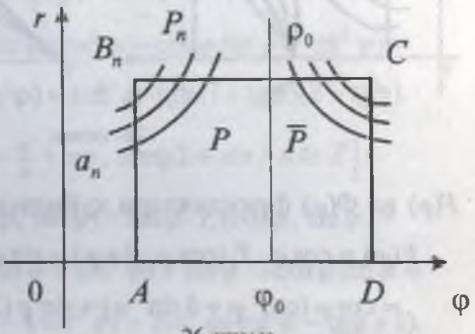
Худди шунга ўхшаш $CD$ томон орқали ўтувчи ва $BC$ ни $\overline{P}$ лимит нуқтада кесувчи характеристикалар тўғрисида хулоса чиқариш мумкин. $AD$ масофани кичиклаштириб, биз бир вактнинг ўзида $P\overline{P}$ масофани қисқартирамиз ва $BC$ тўғри чизиқда шундай $P_0$ нуқтани топамизки, $(0, \varphi_0)$ нуқтага кирувчи ягона характеристика шу $P_0$ нуқта орқали ўтади. *Oxy* текисликдаги секторда интеграл характеристикаларнинг мос ўтишлари 26-чизмада кўрсатилган.



25-чизма.

Бу қурилган соҳа *иккинчи тур нормал соҳа* дейилади.

3) $\frac{F(\varphi)}{\Phi(\varphi)}$ функция $\varphi_0$ нуқтадан ўтишида "+, +" ёки "–, –" ишораларда бўлсин. *ABCD* да $\frac{dr}{d\varphi}\neq 0$ эканлигини ҳисобга олиб $\frac{dr}{d\varphi}>0$ бўлганда бир-биридан ўзаро фарқ қилувчи икки ҳол бўлиши мумкин деган хулосага келамиз.



26-чизма.

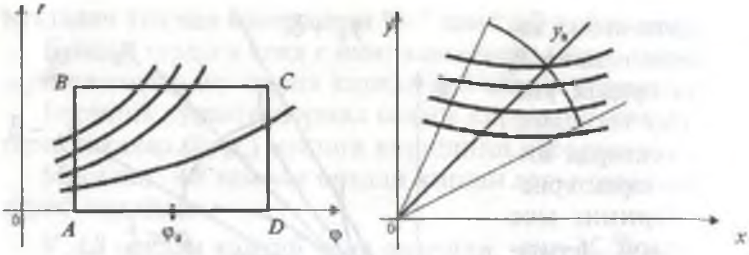
а) *ABCD* га бир томондан кирган характеристикалар унинг бошқа *CD* ва *AB* томонлар орқали (0, $\varphi_0$) нуқтага кирмай чиқиб кетиши мумкин (27-чизма).

б) *BC* ёки *CD* томон орқали ўтувчи камида битта характеристика (0, $\varphi_0$) нуқтага киради. У ҳолда улар чексиз кўп бўлади, чунки бу нуқтадан ўнгроқда ётган барча характеристикалар ҳам албатта (0, $\varphi_0$) га киради (28-чизма).

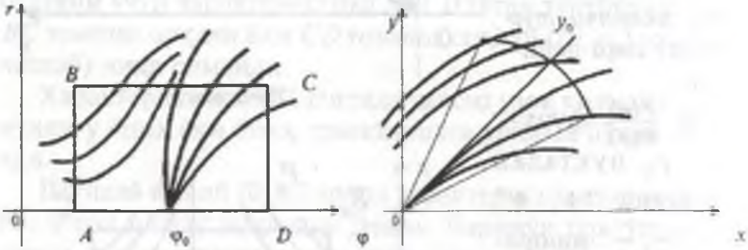
**1-мисол.** Ушбу $\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2+3y^2}{3x^2+y^2}$ дифференциал тенглама учун нормал соҳанинг турларини аниқланг.

Ечиш. Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$X_2=-(3x^2+y^2),\ Y_2=x^2+3y^2.$$



27-чизма.



28-чизма.

$F(\varphi)$ ва $\Phi(\varphi)$ функциялари қуйидаги кўринишни олади:

$$F(\varphi)=\cos\varphi\cdot Y_2(\cos\varphi,\ \sin\varphi)-\sin\varphi\cdot X_2(\cos\varphi,\ \sin\varphi)=$$

$$=\cos\varphi\,(\cos^2\varphi+3\sin^2\varphi)+\sin\varphi\,(3\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=$$

$$=(\sin\varphi+\cos\varphi)^3=\cos^3\varphi(tg\varphi+1)^3\,.$$

$$\Phi(\varphi)=\cos\varphi\cdot X_2(\cos\varphi,\ \sin\varphi)+\sin\varphi\cdot Y_2(\cos\varphi,\ \sin\varphi)=$$

$$=-\cos\varphi\,(3\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+\sin\varphi(\cos^2\varphi+3\sin^2\varphi)=$$

$$=\sin\varphi\cos^2\varphi-\cos\varphi\sin^2\varphi+3\,(\sin^3\varphi-\cos^3\varphi)=$$

$$=\cos^3\varphi(\mathrm{tg}\varphi-1)(3\mathrm{tg}^2\varphi+2\mathrm{tg}\varphi+3).$$

Натижада $\frac{F(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\frac{(\mathrm{tg}\varphi+1)^3}{(\mathrm{tg}\varphi-1)(3\mathrm{tg}^2\varphi+2\mathrm{tg}\varphi+3)}$ ни ҳосил қиламиз.

$\varphi_0$ махсус нуқта бўлгани ва у $\mathrm{tg}\varphi+1=0$ тенгламанинг илдизи бўлгани учун $\varphi_0=-\frac{\pi}{4}$ бўлади.

Бу нуқта атрофида ҳосила ишорасини “+” дан “−” га ўзгартиради, демак кўрилаётган соҳа иккинчи тур нормал соҳа бўлади.

2-мисол. Ушбу

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x^2 - xy + y^2 + X(x,\ y), \\ \frac{dy}{dt} &= 3xy + Y(x,\ y) \end{aligned}\right|$$

системанинг нормал соҳа турини аниқланг.

Ечиш. Қуйидаги белгилашларни киритамиз ва $F(\varphi)$, $\Phi(\varphi)$ функцияларни аниқлаб оламиз:

$$X_2 = x^2 - xy + y^2,\ Y_2 = 3xy$$

$$F(\varphi) = \cos\varphi \cdot Y_2(\cos\varphi,\ \sin\varphi) - \sin\varphi \cdot X_2(\cos\varphi,\ \sin\varphi) =$$

$$= \cos\varphi 3\cos\varphi\sin\varphi - \sin\varphi(\cos^2\varphi - \cos\varphi\sin\varphi + \sin^2\varphi) =$$

$$\cos^3\varphi \cdot \mathrm{tg}\varphi(2 + \mathrm{tg}\varphi - \mathrm{tg}^2\varphi) = \cos^3\varphi \cdot \mathrm{tg}\varphi(1 + \mathrm{tg}\varphi)(2 - \mathrm{tg}\varphi).$$

$$F(\varphi) = 0,\ \varphi_0\left\{\pi n,\ -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ arctg2 + \pi n \,/\, n \in Z\right\}.$$

$$\Phi(\varphi) = \cos\varphi \cdot X_2(\cos\varphi,\ \sin\varphi) + \sin\varphi \cdot Y_2(\cos\varphi,\ \sin\varphi) =$$

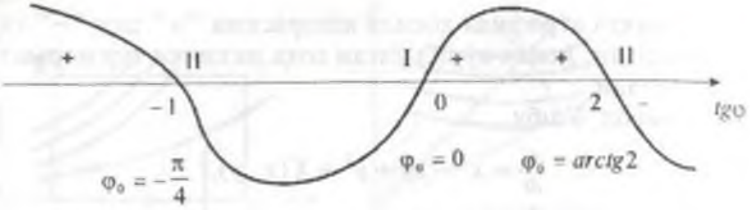
$$= \cos\varphi(\cos^2\varphi - \cos\varphi\sin\varphi + \sin^2\varphi) + \sin\varphi \cdot 3\cos\varphi\sin\varphi =$$

$$\cos(\cos^2\varphi - \cos\varphi\sin\varphi + 4\sin^2\varphi) = \cos^3\varphi(4\mathrm{tg}^2\varphi - \mathrm{tg}\varphi + 1).$$

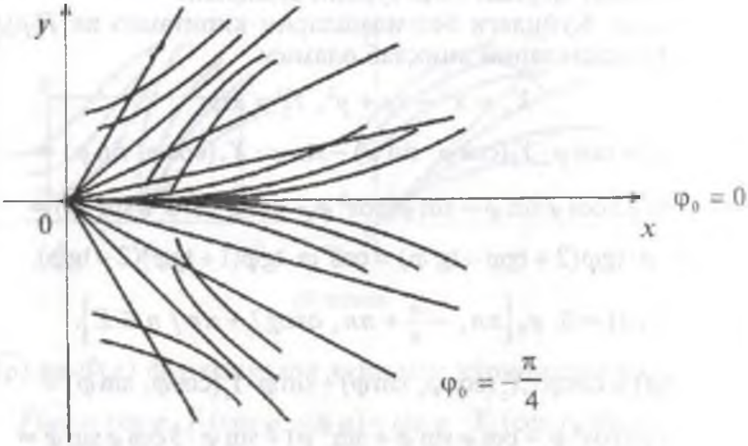
$\varphi_0$ нинг қуйидаги қийматлари билан чекланамиз: 0, $-\frac{\pi}{4}$, arctg2. Бу нуқталарнинг кичик атрофида $\cos\varphi$ мусбат, $\frac{F(\varphi)}{\Phi(\varphi)}$ функция ишораларини кўрсатилган нуқталар атрофида ўзгаришини кўрсатамиз:

$$\frac{F(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\frac{\mathrm{tg}\varphi(\mathrm{tg}\varphi + 1)(\mathrm{tg}\varphi - 2)}{4\mathrm{tg}^2\varphi - \mathrm{tg}\varphi + 1}$$

Бу касрнинг махражи исталган $\varphi$ ларда мусбат. Функциянинг ишоралари ўзгариши 29-чизмада кўрсатилган. Чизмага кўра $\varphi_0 = -\frac{\pi}{4}$ нуқта атрофида иккинчи тур нормал соҳа, $\varphi=0$ нуқта атрофида биринчи тур нормал соҳа, $\varphi_0$=arctg2 атрофи эса иккинчи тур нормал соҳа бўлади (30-чизма).



29-чизма.



30-чизма.

## 8-§. БРИО-БУКЕ ТЕНГЛАМАСИ

Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay + bx + f(x, y)}{x^m} \tag{8.1}$$

кўринишдаги тенглама *Брио-Буке тенгламаси* дейилади, бу ерда $m$ — ҳақиқий сон.

Ш. Брио ва Т. Буке машҳур француз математиги Кошининг шогирдлари бўлган. Уларнинг асосий илмий ишлари биринчи гуруҳ махсус нуқталар (тугун, эгар ва уларнинг комбинацияси) муаммоларига бағишланган. (8.1) тенгламадаги $f(x, y)$ функция аналитик, яъни Тейлор қаторига ёйиладиган ҳолни текширганлар. Сифат нуқтаи назардан бу тенгламани Бендиксон ўрганиб чиққан. Қуйида биз $a\neq 0$, $m>0$ деб ва $f(x, y)$ функция $x$ ва $y$ нинг биринчи даражалари иштирок этмаган аналитик функциядан иборат деб оламиз.

Унинг учун (8.1) тенгламани

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x^m}{ay+bx+f(x,y)}$$

шаклда ёзиб, $x=0$ бу тенгламанинг ечимларидан бири эканини кўрамиз, шу билан бирга $x\to 0$ да ва $|y\geq\delta|$ да ҳосила $\frac{dy}{dx}\to\infty$ га интилади. (8.1) тенглама $x=0$ ($y$ ўқи) тўғри чизиқдан бошқа вертикал уринмали характеристикаларга эга эмас.

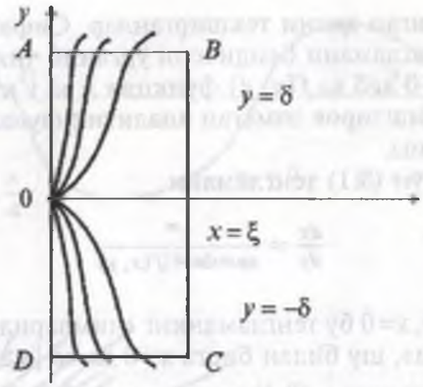
Дастлаб берилган тенгламанинг характеристикаларини ўнг ярим текисликда, сўнгра чап ярим текисликда текширамиз.

1. $a>0$ бўлган ҳол. $y=\delta>0$ дейлик. $x=0$ да сурат $a\delta+f(0,\delta)$ кўринишда бўлади, шу билан бирга $f(x, y)$ аналитик функция бўлиб, ёйилмаси 2-тартиблидан паст бўлмаган ҳадлардан иборат бўлгани учун $a(a\delta+f(x, y))>0$.

Кичик $x=\xi$ қийматда $a\delta+b\xi+f(\xi,\delta)$ ифода, узлуксизлиги туфайли, $a\delta+f(0,\delta)$ билан бир хил ишорага эга бўлади.

Агар $y=-\delta<0$ бўлса, у ҳолда $a(-a\delta+f(0, -\delta))<0$ бўлади.

$ABCD$ тўғри тўртбурчак ичига кирган барча интеграл эгри чизиқлар (31-чизмага қаранг) координаталар бошига киришини кўрсатамиз. Масалан, $AB$ томон орқали кирган интеграл характеристикаларни қарайлик. Бу характеристикаларнинг ҳеч бири $AB$ томон орқали чиқа олмайди, чунки $x=0$ характеристика бўлиб, (0, 0) нуқта эса (8.1) тенгламанинг яккаланган махсус нуқтасидир. $AB$ томон орқали кирган характеристикалар $ABCD$ тўғри тўртбурчакнинг қолган бошқа томонлари орқали чиқиб кета олмайдилар, чунки $x=0$ вертикал уринмага эга ягона характеристикадир. Характеристика, шунингдек, чексиз узоқ вақт $ABCD$ да қолиши ҳам мумкинмас, чунки акс ҳолда у ёпиқ характеристика бўлар ёки 2-теоремага кўра ўз ичида (0, 0)



31-чизма.

дан ташқари махсус нуқтани сақлаган ёпиқ характеристикага эга бўлишини билдиради ва бу эса (0, 0) нинг яккаланганлигига зиддир. Демак, *AB* томон орқали кирган барча характеристикалар (0, 0) нуқтага киради. Қаралаётган тўғри тўртбурчакнинг бошқа томонлари ҳам худди шундай текширилади.

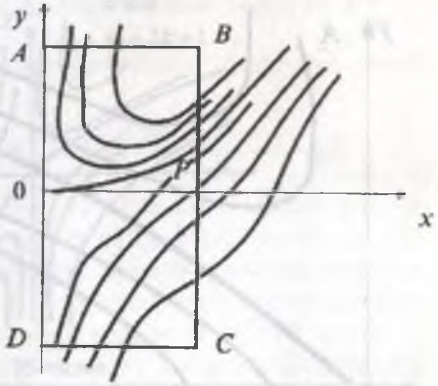
Шундай қилиб, *ABCD* га кирган барча характеристикалар махсус нуқта (0, 0) га киради. *ABCD* соҳа $a>0$ бўлган ҳолда биринчи турдаги нормал соҳа бўлади.

2. $a<0$ бўлган ҳол. Бу ҳолда $AB$ $(y=\delta)$ томонда $\frac{dy}{dx}<0$, $CD(y=-\delta)$ томонда эса $\frac{dy}{dx}>0$. Бу — *AB* ва *CD* орқали кирган характеристикалар (0, 0) махсус нуқтани четлаган ҳолда *BC* томон орқали чиқишини билдиради. $P\in BC$ нуқта *AB* орқали кирувчи, *BC* орқали чиқувчи ва *A* нуқта яқинлашувчи характеристика нуқталарининг лимит ҳолати бўлсин (32-чизма). $P\in BC$ нуқта *ABCD* га *CD* орқали кирувчи барча характеристикалар учун ҳам лимит нуқта бўлади (бу $\delta$ ни ихтиёрий танлаб олинганлигидан келиб чиқади).

Бу эса *ABCD* да иккинчи тур нормал соҳа мавжудлигини билдиради.

*ABCD* га кирувчи ва (0, 0) да тўхтовчи ягона характеристика мавжудлигини кўрсатамиз. Бундай характеристиканинг мавжудлиги *P* — махсус нуқта бўлмаганлигидан ва юқорида кўрсатилганидек, унга кирувчи характеристика

*ABCD* нинг бошқа томонларини кесиши мумкин эмаслиги, унинг ичида чексиз узоқ муддат қололмаслигидан келиб чиқади, яъни у координаталар бошига киради. Бундай характеристикалар иккита: $y=y(x)$ ва $\bar{y}=\bar{y}(x)$ ҳамда $\bar{y}-y>0$ деб фараз қилайлик.



32-чизма

$u(x)=\bar{y}-y$ функция $x>0$ да мусбат ва $u(0)=0$. Энди $u(x)$ функция қаноатлантирадиган дифференциал тенгламани тузамиз:

$$\frac{du}{dx}=\frac{d(\bar{y}-y)}{dx}=\frac{a\bar{y}+bx+f(x,\bar{y})-ay-bx-f(x,y)}{x^m}=$$

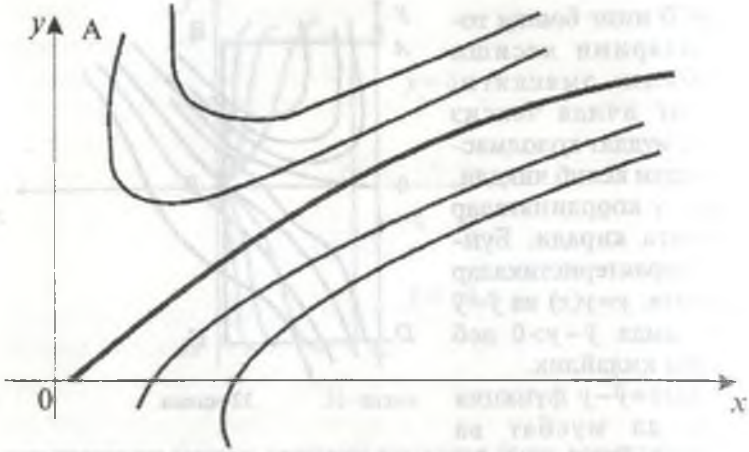
$$=\frac{a(\bar{y}-y)+f(x,\bar{y})-f(x,y)}{x^m}.$$

$f(x,\bar{y})-f(x,y)$ айирма $a_{\nu 0}x^{\nu}$ кўринишдаги ҳадларга эга эмас, шунинг учун $(\bar{y}-y)$ айирма $f(x,\bar{y})-f(x,y)$ айирманинг умумий кўпайтувчиси бўлади.

Демак,

$$\frac{du}{dx}=\frac{\bar{y}-y}{x^m}\Big(a+F(x,y,\bar{y})=\frac{u}{x^m}(a+F(x,y,\bar{y}))\Big),$$

бу ерда $F(x,y,\bar{y})$ функция озод ҳадга эга эмас. $u>0$ ва $a<0$ бўлгани учун $\frac{du}{dx}<0$ бўлади. Бироқ, $u=0$, $u(x)>0$ ифодалар бир томондан мусбат ва $\frac{du}{dx}<0$ ифода иккинчи томондан эса манфий, булар эса бир-бирига зиддир. Демак, $u(x)\equiv 0$ бўлишлигидан $\bar{y}=y$ тенгликка эга бўламиз. Шундай қилиб, координаталар боши, яъни махсус нуқтага ягона характеристика киради ва унинг ўнг томонидаги характеристика чизиқлари иккита гиперболик соҳалардан иборат соҳага ажратади. Бундай соҳалар гиперболик соҳалар, координаталар бошига кирувчи ягона битта гипербола эса *сепаратрисса* дейилади (33-чизма).



33-чизма.

Брио-Буке тенгламаси характеристикаларининг чап ярим текислигидаги ҳолатини кўриб чиқамиз. Бунда ҳаммаси бўлиб тўртта ҳол бўлиши мумкин:

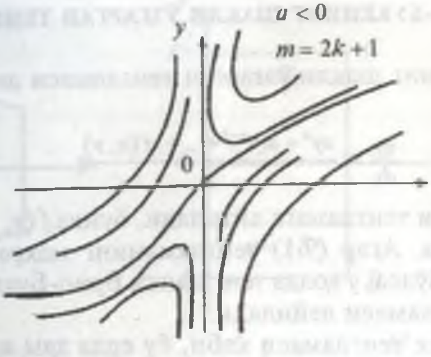
1) $a>0$, $m=2k+1$. $x=-x_1$ деб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{dy}{dx_1} = \frac{ay - b_1 x_1 + f(-x_1, y)}{x_1^m},$$

— бу тенглама характеристикаларининг ўнг ярим текислигидаги ҳолати билан бир хил бўлишини билдиради, яъни бу ҳолда чап соҳа ҳам биринчи турдаги нормал соҳа бўлади. Шундай қилиб, $a>0$ да барча характеристикалар координаталар бошига киради. Координаталар боши бу ҳолда тугун бўлади (34-чизма).

34-чизма.

2) $a<0$, $m=2k+1$. У ҳолда юқоридаги каби мулоҳазалар юритиб, чап томонда координаталар бошига ягона интеграл эгри чизиқ киришини аниқлаймиз, яъни координаталар боши тўртта сепаратриссали эгардан иборат бўлади (35-чизма).



35-чизма.

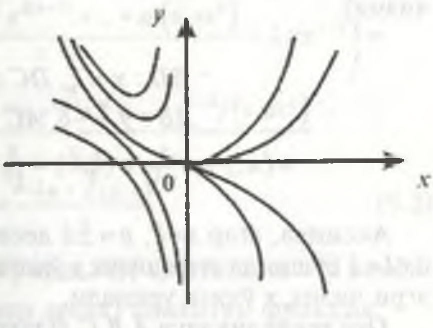
3) $a>0$, $m=2k$, $x<0$ бўлсин. Бу ҳолда $x=-x_1$ деб оламиз ва натижада:

$$\frac{dy}{dx_1} = \frac{-ay + bx_1 - f(-x_1, y)}{x_1^m}$$

тенгламага эга бўламиз. Шундай қилиб, $Ox_1y$ текислигининг ўнг соҳаси иккинчи тур нормал соҳадан иборат (фақат битта характеристика киради) бўлади. Демак, $Oxy$ текисликнинг чап соҳасига ҳам фақат битта характеристика киради (бу вақтда ўнг соҳада координаталар бошига чексиз кўп характеристикалар киради).

Бундай махсус нуқта *эгар-тугун* (чап эгар-тугун) дейилади (36-чизма).

4) $a<0$ $m=2k$ бўлсин. Бу ҳол учинчи ҳолга ўхшашдир. Фақат бу ҳолда ўнг томонда эгар-тугунга эга бўламиз.



36-чизма.

## 9-§. БРИО-БУКЕНИНГ ШАКЛИ ЎЗГАРГАН ТЕНГЛАМАСИ

Брио-Букенинг шакли ўзгарган тенгламаси деб

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ay^n+a_1y^{n-1}+...+xf(x,y)}{x} \tag{9.1}$$

кўринишдаги тенгламага айтилади, бунда $f(x, y)$ — аналитик функция. Агар (9.1) тенгламанинг махражи $x^\mu(\mu\neq1)$ кўринишда бўлса, у ҳолда тенгламага Брио-Букенинг умумлашган тенгламаси дейилади.

Брио-Буке тенгламаси каби, бу ерда ҳам $x=0$ характеристика бўлиб, униг учун $Oy$ тўғри чизиқ вертикал уринма бўлади. Бундай уринмага эга бошқа характеристикалар йўқ, чунки бу тенгламанинг ёпиқ характеристикаси ҳам, спирали ҳам йўқ.

$a>0$, $n=2k$, $0<x\leq\xi$, $y=\pm\delta$ қийматларда $\frac{dy}{dx}>0$ бўлгани учун интеграл эгри чизиқларнинг учинчи тур нормал соҳалардаги ҳолати муаммоси пайдо бўлади.

(9.1) тенгламанинг интеграл эгри чизиқлар ҳолатини ўрганиш учун $y=ux^\lambda$, $\lambda>0$ алмаштириш бажарамиз.

Бу алмаштириш $Oxy$ текисликнинг бирор соҳасини $Oxu$ текисликдаги соҳасига ўтказади ва аксинча. Шу ҳолни кўриб чиқамиз.

$Oxy$ текисликда $ABCD$ тўртбурчакни қараймиз (37-чизма).

$$BD: x=\xi,\ DC: y=\delta$$

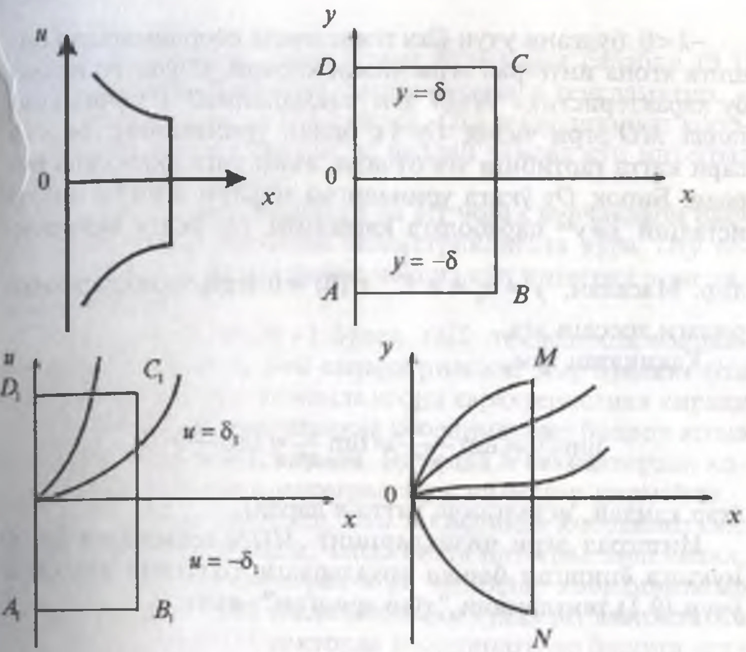
$$AB: y=-\delta,\ AC: x=0$$

$$u(x,y)=\frac{y}{x^\lambda},\ u(\xi,\delta)=\frac{\delta}{\xi^\lambda},\quad \lim_{x\to0}\frac{\delta}{x^\lambda}=\infty.$$

Аксинча, агар $x=\xi$, $u=\pm\delta$ десак, $y=\delta_1\cdot x^\lambda$. $x\to0$ да $y\to0$; $0<\lambda<1$ бўлганда эгри чизиқ $y$ ўқига уринади, агар $\lambda>1$ бўлса, эгри чизиқ $x$ ўқига уринади.

$Oxu$ текисликдаги $A_1B_1C_1D$ тўғри тўртбурчакка кирувчи барча интеграл эгри чизиқлар $Ou$ ўқни кесиб ёки унга уриниб, $Oxy$ текисликдаги координаталар боши $O(0, 0)$ га кирувчи интеграл эгри чизиқларга ўтади.

Агар $y=ux^\lambda$ алмаштиришни бажариб ва $\lambda<1$ деб олсак:



37-чизма.

$$\frac{dy}{dx}=x^{\lambda}\frac{du}{dx}+\lambda ux^{\lambda-1};\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^{\lambda}}\left(\frac{dy}{dx}-\lambda ux^{\lambda-1}\right).$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x^{\lambda}}\left(\frac{au^{n}x^{\lambda n}+a_1u^{n+1}x^{\lambda(n+1)}+\ldots+xf\left(x,ux^{\lambda}\right)}{x}-\lambda ux^{\lambda-1}\right)=$$

$$=\frac{-\lambda u+au^{n}x^{(n-1)\lambda}+a_1u^{n+1}x^{n\lambda}+\ldots+x^{1-\lambda}f\left(x,ux^{\lambda}\right)}{x}$$

ёки

$$\frac{du}{dx}=\frac{-\lambda u+F(y,u)}{x} \tag{9.2}$$

тенгламага эга бўламиз, бу ерда $F(y, u)$ функция $u$ га нисбатан (агар $\lambda=\frac{p}{q}$ тўғри каср десак) аналитик функция.

Агар $x^{\frac{1}{q}}=x$ ўрнига қўйишни бажарсак, (9.2) нинг ўнг томони $u$ ва $x_1$ бўйича аналитик функция эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Бу тенгламага Брио-Букенинг асосий тенгламасига татбиқ қилинган назария ўринлидир.

$-\lambda<0$ бўлгани учун $Oxu$ текисликда координаталар бошига ягона интеграл эгри чизиқ киради. Савол туғилади: бу характеристика $MON$ дан чиқмайдими? $\lambda$ кичиклашганда $MO$ эгри чизиқ $Oy$ ўқ билан уринишнинг борган сари катта тартибига эга бўлади, яъни унга яқинлаша боради. Бироқ $Oy$ ўқига уринадиган маълум эгри чизиқлар исталган $x=y^{2n}$ параболага қараганда $Oy$ ўқига яқинроқдир. Масалан, $y = x_1 = e^{-\frac{1}{y^2}}$, $x_1(0) = 0$ эгри чизиқлар юқоридаги хоссага эга.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\lim_{y\to 0}\frac{x_1}{x} = \lim\frac{e^{-\frac{1}{y^2}}}{y^{2n}} = \lim_{z\to\infty}\frac{z^n}{e^z} = \lim_{z\to\infty}\frac{n!}{e^z} = 0$$

(ҳар қандай, исталганча катта $n$ ларда).

Интеграл эгри чизиқларнинг $MON$ сектордаги ва $O$ нуқтага ёпишган бошқа соҳалардаги ҳолатини аниқлаш учун (9.1) тенгламани “тўнкарилган”, яъни

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{ay^n + a_1y^{n-1} + ... + xf(x, y)}$$

тенглама кўринишда ёзиб, сўнгра $x=\bar{y}$, $y=\bar{x}$ алмаштириш бажарилиб, координата ўқлари вазифасини алмаштирамиз:

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{\bar{y}}{a\bar{x}^n + a_1\bar{x}^{n-1} + ... + \bar{y}f(\bar{y}, \bar{x})}.$$

$\bar{y}=\bar{u}\cdot\bar{x}$, $v\geq n$ ўрнига қўйишни бажарсак:

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{x}} = \frac{1}{\bar{x}^v}\left[\frac{d\bar{u}}{d\bar{v}} - v\bar{u}\bar{x}^{v-1}\right] =$$

$$= \frac{1}{\bar{x}^v}\left[\frac{\bar{u}\bar{x}^v}{a\bar{x}^w + a_1x^{w+1} + ... + \bar{u}\bar{x}^v f(\bar{y}, \bar{x})} - v\bar{u}\bar{x}^{v-1}\right] =$$

$$= \frac{\bar{u}}{\bar{x}^v}\cdot\frac{1 - v(a\bar{x}^{n-1} + a\bar{x}^n + ... + \bar{u}\bar{x}^{v-1}f(\bar{y}, \bar{x}))}{a + a_1\bar{x} + ... + \bar{u}f(\bar{y}, \bar{x})\cdot\bar{x}^{v-n}}. \qquad (9.3)$$

(9.3) тенгламадан $\bar{x}=0$ ва $\bar{u}=0$ тўғри чизиқлар характеристика эканлиги келиб чиқади.

$\bar{x}=0$ да $a+a_1\bar{x}+\ldots$ нолга тенг бўлмагани сабабли (9.3) тенглама Брио-Буке тенгламаси туридаги тенгламадир.

1) Агар $a>0$ ва $n=2k+1$ бўлса, $O\bar{x}\bar{u}$ текисликнинг координаталар бошига ўнгдан ва чапдан чексиз кўп интеграл эгри чизиқлар киради.

$\bar{x}=y$, $\bar{y}=x$ алмаштириш I ва III чорак бурчаклари биссектрисаларига нисбатан симметриклигига кўра $Oxy$ текисликнинг (0, 0) нуқтасига чексиз кўп интеграл эгри чизиқлар киради.

2) Агар $a<0$, $n=2k+1$ бўлса, $O\bar{x}\bar{u}$ текисликда координаталар боши $\bar{u}=0$, $\bar{x}=0$ сепаратриссали эгар бўлади. $O\bar{x}\bar{u}$ текисликда ҳам ўнг томонда ягона характеристика киради ва бинобарин, $Oxy$ текисликда координаталар бошига ягона интеграл эгри чизиқ киради. Бу ҳолда $MON$ сектордан координаталар бошига интеграл эгри чизиқлар кирмайди.

3) $a>0$ ва $n=2k$ бўлса, $O\bar{x}\bar{u}$ текисликда координаталар боши эгар-тугун бўлади, чапда битта интеграл эгри чизиқ, ўнгда чексиз кўп интеграл эгри чизиқлар координаталар бошига киради. $O\bar{x}\bar{u}$ текисликда ҳам худди шу вазиятга эга бўламиз, яъни $MON$ секторда координаталар бошига чексиз кўп интеграл эгри чизиқлар киради.

4) $a<0$ ва $n=2k$ бўлса, бу ҳолда, аксинча, ўнгда битта, чапда чексиз кўп эгри чизиқлар координаталар бошига киради. $O\bar{x}\bar{u}$ текисликда ҳам худди шундай бўлади.

Ушбу

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ay+f(x,y)}{\varphi(x)}$$

тенглама Брио-Буке оддий тенгламасининг умумлашган кўринишидир, бу ерда ўнг томон қуйидаги шартни қаноатлантиради:

1) $a\neq 0$, 2) $|f(x_2,\, y_2)-f(x_1,\, y_1)|\leq N|y_2-y_1|$,

3) $\varphi(x)$ функция $x=0$ нуқтанинг атрофида аниқланган, шу билан бирга $\varphi(0)=0$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx}{\varphi(x)}=\infty$ (интеграл узоқлашувчи).

Бу шартларда берилган дифференциал тенгламанинг характеристикалари Брио-Буке тенгламаси характеристикалари каби бўлади.

## 10-§. ИНТЕГРАЛ ЭГРИ ЧИЗИҚЛАРНИНГ НОРМАЛ СОҲАЛАРДАГИ ҲОЛАТЛАРИ

Қуйидаги дифференциал тенгламани қараймиз:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Y_n(x,y)+Y(x,y)}{X_n(x,y)+X(x,y)}, \tag{10.1}$$

бу ерда $X_n(x, y)$, $Y_n(x, y)$ лар $n$-даражали бир жинсли тенгламалар, $X(x, y)$, $Y(x, y)$— ҳақиқий ўзгарувчининг аналитик функциялари. $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ ўрнига қўйиш орқали (10.1) тенгламани қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$\frac{d\rho}{d\varphi}=\rho\,\frac{\cos\varphi X_n(\cos\varphi,\sin\varphi)+\sin\varphi Y_n(\cos\varphi,\sin\varphi)+\rho\xi(\rho,\varphi)}{\cos\varphi Y_n(\cos\varphi,\sin\varphi)-\sin\varphi X_n(\cos\varphi,\sin\varphi)+\rho\eta(\rho,\varphi)}.$$

(10.1) тенглама учун $y=ux$ алмаштириш бажарилганда:

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}\cdot\frac{Y_n(1,u)-uX_n(1,u)+xf(x,u)}{X_n(1,u)+xf_1(x,u)} \tag{10.2}$$

тенгламага эга бўламиз.

$Y_n(1, u) - uX_n(1, u)=0$ тенглама илдизлари билан

$$F(\varphi)=\cos\varphi Y_n(\cos\varphi,\ \sin\varphi)-\sin\varphi X_n(\cos\varphi,\ \sin\varphi)=0$$

мумкин бўлган урунмалар тенгламаси орасида ўзаро боғланиш мавжуд.

Ҳақиқатан ҳам,

$$Y_n(1,u)-uX_n(1,u)=Y_n(1,\operatorname{tg}\varphi)-\operatorname{tg}\varphi X_n(1,\operatorname{tg}\varphi)=$$
$$=\frac{\cos\varphi Y_n(\cos\varphi,\ \sin\varphi)-\sin\varphi X_n(\cos\varphi,\ \sin\varphi)}{\cos^{n+1}\varphi}=\frac{F(\varphi)}{\cos^{n+1}\varphi},$$

бу ерда $\varphi\neq\frac{\pi}{2}$ деб оламиз. (Агар $\varphi=\frac{\pi}{2}$ бўлса, $x=\bar{y}$, $y=\bar{x}$ ўрнига қўйиш ёрдамида янги $\varphi\neq\frac{\pi}{2}$ ни ҳосил қиламиз $(\varphi=0)$).

Шундай қилиб, $F(\varphi)=0$ тенгламанинг $\varphi=\varphi_0$ илдизи $Y_n(1, u)-uX_n(1, u)=0$ тенгламанинг $u_0=\operatorname{tg}\varphi_0$ илдизини аниқлайди. Нормал соҳанинг шартларидан бири

$$\Phi(\varphi_0)=\cos\varphi_0 X_n(\cos\varphi_0,\ \sin\varphi_0)+\sin\varphi_0 Y_n(\cos\varphi_0,\ \sin\varphi_0)\neq 0$$

шартнинг бажарилишидан иборат.

$\varphi_0$ нуқтада $Y_n = \frac{\sin\varphi_0}{\cos\varphi_0} X_n$ эканлигини ҳисобга олсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\Phi(\varphi_0) = \frac{X_n(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)}{\cos\varphi_0} \neq 0.$$

$\Phi(\varphi_0)$ аналитик функция бўлгани учун, $\varphi_0$ нуқта атрофида

$$\Phi(\varphi) = \frac{1}{\cos\varphi} X_n(\cos\varphi, \sin\varphi) \neq 0$$

тенгсизлик сақланади, яъни $X_n(\cos\varphi, \sin\varphi) \neq 0$ бўлади ва қуйидаги тенгликни ёза оламиз:

$$\frac{Y_n(1,u) - X_n(1,u)}{X_n(1,u)} = \frac{F(\varphi)}{X_n(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos^{n+1}\varphi} = \frac{F(\varphi)}{\Phi(\varphi)\cos^{n+2}\varphi},$$

$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ қийматларида $\cos^{n+2}\varphi > 0$ бўлади.

Фараз қилайлик, $u = \bar{u}$ илдиз

$$Y_n(1, u) - uX_n(1, u) = 0$$

тенгламанинг "$k$" каррали илдизи бўлсин. У ҳолда бу тенгламанинг чап томонини қуйидаги шаклда ёзиш мумкин:

$$Y_n(1, u) - uX_n(1, u) = (u - \bar{u})^k R_n(u), \; R(\bar{u}) \neq 0$$

ва

$$\frac{Y_n(1,u) - uX_n(1,u)}{X_n(1,u)} = \frac{R(u)(u - \bar{u})^k}{X_n(1,u)} = \frac{F(\varphi)}{\Phi(\varphi)} \cdot \frac{(\varphi - \varphi_0)^k}{\cos^{n+2}\varphi}.$$

Бунда қуйидаги ҳоллардан бири бўлиши мумкин.

1) Илгари кўрсатилгандек, агар $\frac{F(\varphi)}{\Phi(\varphi)}$ функция $\varphi_0$ нуқтадан ўтишида ўса бориб ишорасини "—" дан "+" га ўзгартирса, қаралаётган соҳа биринчи тур нормал соҳадан иборат бўлади. Охирги тенгликдан, агар $k$ тоқ ($k=2b+1$) ва $u=\bar{u}$ нуқтада $R(u)X_n(1, u)>0$ бўлса, қаралаётган соҳа биринчи тур нормал соҳа бўлиши келиб чиқади.

2) Агар $\frac{F(\varphi)}{\Phi(\varphi)}$ функция $\varphi_0$ нуқтадан ўтишида камайиб, ишорасини "+" дан "−" га ўзгартирса, иккинчи тур соҳага эга бўламиз, бунда $k$ тоқ ва $\frac{R(\bar{u})}{X_n(1,\bar{u})} < 0$ бўлади.

3) Агар $k=2n$ ва $\frac{R(\overline{u})}{X_n(1,\overline{u})} \neq 0$ бўлса, у ҳолда учинчи тур нормал соҳага эга бўламиз.

$$\frac{du}{dx} = \frac{R(u)(u-\overline{u})^k + xf(x,u)}{x(X_n(1,u)+xf_1(x,u))}$$

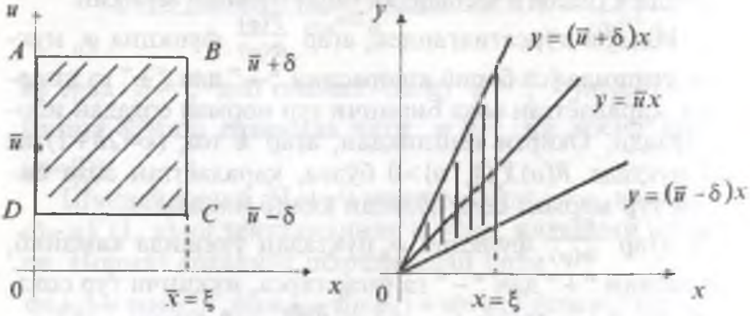
тенгламада $u=\bar{u}=u_1$ алмаштириш бажариб ва $R(\bar{u})\neq 0$, яъни $R(\bar{u}+u_1)=a+a_1u_1+a_2u_1^2+\ldots$ эканлигини ҳисобга олсак, ушбу тенгламага эга бўламиз:

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{au_1^k+\ldots+xf(x,\overline{u}+u_1)}{x(X_n(1,\overline{u}+u_1)+f_1(x,\overline{u}+u_1))},$$

бу Брио-Буке тенгламасидир. $a>0$ ва $k=2n+1$ да қаралаётган соҳа биринчи тур нормал соҳа бўлади, яъни координаталар бошига ўнгдан чексиз кўп интеграл эгри чизиқлар киради, $a<0$ ва $k=2n+1$ бўлганда эса мазкур соҳа иккинчи тур нормал соҳа бўлади, яъни координаталар бошига ўнгдан ягона интеграл эгри чизиқ киради, қолганлари эса унга яқинлашади, сўнгра ундан узоқлашади.

$a\neq 0$ ва $k=2n$ (жуфт) бўлганда, яъни $\frac{F(\varphi)}{\Phi(\varphi)}$ функцияси $\varphi_0$ дан ўтишда ўз ишорасини ўзгартирмаган ҳолда мазкур соҳа учинчи тур нормал соҳа бўлади.

Бу ҳолда соҳанинг бир қисмидан чексиз кўп интеграл эгри чизиқлар координаталар бошига киради, соҳанинг қолган қисмидан эса чексиз кўп интеграл эгри чизиқлар координаталар бошига яқинлашиб, сўнгра ундан узоқлашади. Шундай қилиб, биз текшираётган (10.1) тенглама интеграл



38-чизма.

эгри чизиқлари ҳолатининг Брио-Буке тенгламаси интеграл эгри чизиқлар ҳолати билан тўла мослигини аниқладик. 38-чизмада *Oxy* текисликда (0, $\bar{u}$) нуқтага ёпишган нормал соҳалар (*ABCD* тўғри тўртбурчак) билан *Oxy* текисликдаги (0,0) нуқта орасидаги мослик келтирилган (38-чизма).

## 11-§. ИНТЕГРАЛ ЭГРИ ЧИЗИҚЛАРНИНГ КООРДИНАТАЛАР БОШИ АТРОФИДА ВА ТУРЛИ НОРМАЛ СОҲАЛАР ОРАСИДАГИ ҲОЛАТИ

Координаталар боши атрофида дифференциал тенгламаларнинг интеграл эгри чизиқлари (ечимлари) ҳолати қуйидаги учта турда бўлади:

1) Бир учи билан координаталар бошига кирувчи, иккинчи учи билан атроф чегарасидан чиқувчи параболик траекториялар (39(1)-чизма).

2) Иккала учи билан атроф чегарасидан чиқувчи гиперболик ёки эгар траекториялар (39(2)-чизма).

3) Иккала учи билан махсус нуқтага кирувчи эллиптик траекториялар (39(3)-чизма).

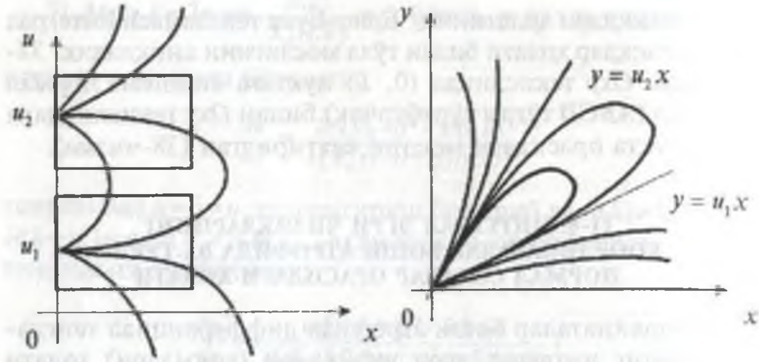
Эгри чизиқларнинг турли нормал соҳалар орасидаги ҳолатларини кўриб чиқамиз.

1) Қўшни соҳалар биринчи тур нормал соҳалар бўлсин. Мазкур ҳолда мумкин бўлган иккита уринма йўналишлари орасида эллиптик соҳа жойлашган бўлиб, унга учинчи тур траекториялари дейилади (40-чизма).

2) Қўшни соҳалар иккинчи тур нормал соҳалар бўлсин. Мазкур ҳолда ҳар бири (фақат биттаси) $\bar{u}_1$ ва $\bar{u}_2$ махсус нуқталарга кирадиган интеграл эгри чизиқлар орасида гиперболик траекториялар жойлашган бўлиб, унга иккинчи тур траекториялар дейилади (41-чизма).

Интеграл эгри чизиқларнинг бошқа нормал соҳалар комбинациялари орасидаги ҳолатлари шунга ўхшаш ўрганилади.

39-чизма.



40-чизма.

Мисоллар кўрамиз.

**1-мисол.** Ушбу $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y^2}{4y+x^2}$ дифференциал тенгламанинг нормал соҳа турини аниқланг.

Е ч и ш. Берилган дифференциал тенглама битта (0, 0) махсус нуқтага эга. $y=ux$, $dy=xdu+udx$ алмаштиришни бажарамиз. Натижада берилган тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\left(\frac{dy}{dx} - u\right) - \frac{1}{x}\left(\frac{x+u^2x^2}{4ux+x^2} - u\right) =$$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{1+xu^2}{4u+x} - u\right) = \frac{1-4u^2+x(u^2-u)}{x(4u+x)}.$$

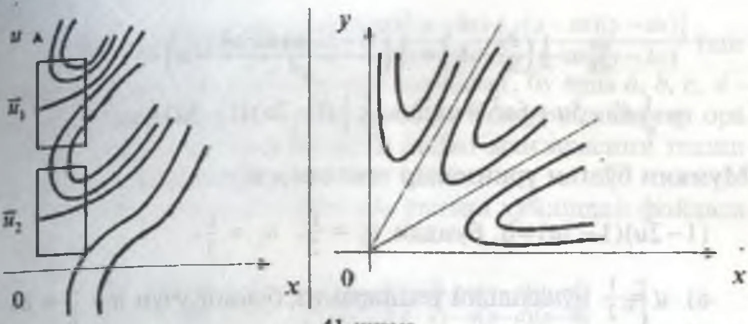
Бу ерда $Y_n(1,\ u) - uX_n(1,\ u) = 1-4u^2$.

Мумкин бўлган уринмалар тенгламаси:

$$1-4u^2 = 0,\ u_1 = -\frac{1}{2},\ u_2 = \frac{1}{2},\ y = -\frac{1}{2}x,\ y = \frac{1}{2}x.$$

$u = \frac{1}{2}$ йўналишни текширамиз, унинг учун $\overline{u} = u - \frac{1}{2}$ ёки $u = \overline{u} + \frac{1}{2}$ ўрнига қўйишдан фойдаланамиз. Натижада берилган тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{d\overline{u}}{dx} = \frac{1-4\left(\overline{u}+\frac{1}{2}\right)^2 + x\left[\left(\overline{u}+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\overline{u}+\frac{1}{2}\right)\right]}{x\left[4\left(\overline{u}+\frac{1}{2}\right)+x\right]} = \frac{-4\overline{u}-4\overline{u}^2+x\left(\overline{u}-\frac{1}{4}\right)}{x(2+4\overline{u}+x)}.$$



41-чизма.

Бундан, $a=-4<0$, $k=1$.

Демак, $u=\frac{1}{2}$ йўналиш бўйича координаталар бошига кирувчи ягона интеграл эгри чизиқ ўтади, яъни $u=\frac{1}{2}$ атрофи иккинчи тур нормал соҳадир.

$u=-\frac{1}{2}$ йўналиш бўйича ҳам шундай бўлади. Шундай қилиб, (0, 0) махсус нуқта эгар бўлади.

**2-мисол.** Ушбу $\frac{dy}{dx}=\frac{xy-y^3}{x^6}$ дифференциал тенгламанинг нормал соҳа турини аниқланг.

Ечиш. Берилган дифференциал тенглама битта (0, 0) махсус нуқтага эга. $y=ux$, $dy=udx+xdu$ алмаштиришни бажарсак, берилган тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}\left(\frac{dy}{dx}-u\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{x^2u-u^3x^3}{x^6}-u\right)=\frac{u\left(1-u^2x-x^4\right)}{x^5}.$$

Бу Брио-Буке тенгламаси бўлиб, мазкур ҳолда $u$ олдидаги коэффициент 1 га тенг, $n=5$ бўлгани учун (0, 0) нуқта атрофида биринчи тур нормал соҳа бўлиб, (0, 0) нуқтага чексиз кўп интеграл эгри чизиқлар киради, яъни махсус нуқта тугундир.

**3-мисол.** Ушбу $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-5xy+6y^2}{x^4}$ дифференциал тенгламанинг нормал соҳа турини аниқланг.

Ечиш. Берилган дифференциал тенглама битта (0, 0) махсус нуқтага эга. $y=ux$, $dy=udx+xdu$ алмаштиришни бажарамиз:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\left(\frac{dy}{dx} - u\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{x^2 - 5x^2u + 6x^2u^2}{x^4} - u\right) =$$

$$= \frac{1}{x^3}(1 - 5u + 6u^2 - ux^2) = \frac{1}{x^3}\left[(1 - 2u)(1 - 3u) - ux^2\right].$$

Мумкин бўлган уринмалар тенгламаси:

$(1-2u)(1-3u)=0$, бундан $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{3}$.

а) $u = \frac{1}{2}$ йўналишни текширамиз, бунинг учун $u - \frac{1}{2} = \overline{u}$, $u = \overline{u} + \frac{1}{2}$ ўрнига қўйишдан фойдаланамиз:

$$\frac{d\overline{u}}{dx} = \frac{1}{x^3}\left[(1 - 2\overline{u} - 1)\left(1 - 3\overline{u} - \frac{3}{2}\right) - \left(\overline{u} + \frac{1}{2}\right)x^2\right] =$$

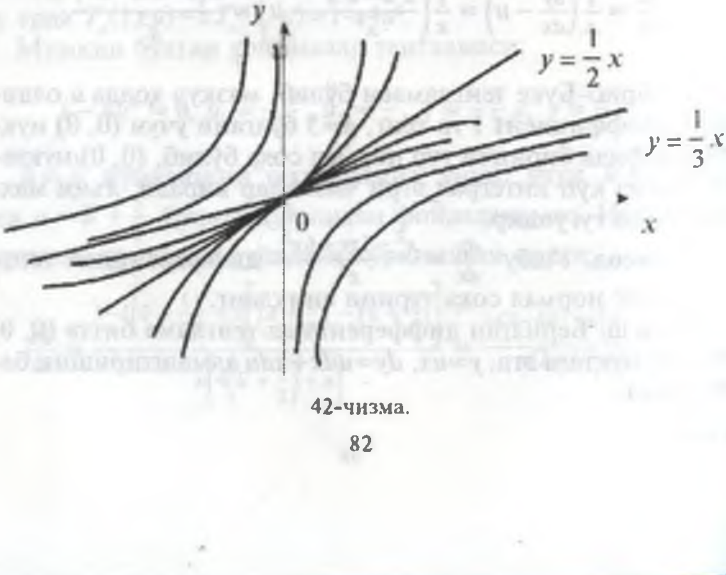
$$= \frac{1}{x^3}\left[\overline{u} + 6\overline{u}^2 - \left(\overline{u} + \frac{1}{2}\right)x^2\right].$$

Бу ерда $a=1>0$, $k=3$ — координаталар бошига чексиз кўп интеграл эгри чизиқлар киради.

б) $u = \frac{1}{3}$ бўлганда координаталар бошига ягона интеграл эгри чизиқ киришини кўриш осон, яъни бу ҳолда (0, 0) махсус нуқта эгар-тугундир. Дарҳақиқат,

$$\overline{u} + \frac{1}{3} = u, \quad \frac{d\overline{u}}{dx} = \frac{-\overline{u} + 6\overline{u}^2 - \left(\overline{u} = \frac{1}{3}\right)x^2}{x^3},$$

бу ерда $a=-1<0$, $k=3$ бўлгани учун иккинчи тур нормал соҳага эга бўламиз (42-чизма).



42-чизма.

**4-мисол.** Ушбу $\frac{dy}{dx}=\frac{x(y-ax)\left[(y-bx)+y(y-cx)(y-dx)\right]}{x(y-cx)(y-dx)-y(y-ax)(y-bx)}$ тенгламанинг нормал соҳа турини аниқланг, бу ерда $a$, $b$, $c$, $d$ — жуфт-жуфти билан турли сонлар. Коэффициентлар орасидаги турли муносабатларда сифат манзарасини текшириш талаб қилинади.

Ечиш. $y=ux$, $dy=udx+xdu$ ўрнига қўйишдан фойдаланамиз:

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}\left(\frac{du}{dx}-u\right)=\frac{1}{x}\left[\frac{(u-a)(u-b)+u(u-c)(u-d)}{(u-c)(u-d)-u(u-a)(u-b)}-u\right]=$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{(u-a)(u-b)(u^2+1)}{(u-c)(u-d)-u(u-a)(u-b)},$$

бундан, мумкин бўлган уринмалар тенгламаси:

$$(u-a)(u-b)=0,\ u_1=a,\ u_2=b.$$

Аввал $u=a$ йўналишни текширамиз, $y=ax$ ва $u=\bar{u}+a$ ўрнига қўйишни бажарсак:

$$\frac{d\bar{u}}{dx}=\frac{(\bar{u}+a-b)\,\bar{u}\,((u+a)^2+1)}{x\,(\bar{u}+a-c)(\bar{u}+a-d)-\bar{u}\,(\bar{u}+a)(\bar{u}+a-b)}.$$

Махражда $x$ олдидаги коэффициент $(a\text{-}c)(a\text{-}d)$ га тенг. Суратда $\bar{u}$ олдидаги коэффициент $(a\text{-}b)(a^2+1)$ га тенг. $a>b$, $a>c$, $a>d$ деб, қаралаётган соҳа биринчи тур нормал соҳа эканлигини кўрамиз, яъни координаталар бошига чексиз кўп интеграл эгри чизиқлар киради.

Энди $y=bx$ ва $u=\bar{u}+b$ ўрнига қўйишни бажарамиз:

$$\frac{d\bar{u}}{dx}=\frac{\bar{u}(\bar{u}+b-a)((u+b)^2+1)}{x\left[(\bar{u}+b-c)(\bar{u}+b-d)-(\bar{u}+b)\bar{u}(\bar{u}+b-a)\right]}.$$

Суратда $(b\text{-}a)(b^2+1)<0$, махражда ўрта қавслар ичидаги озод ҳад $(b\text{-}c)(b\text{-}d)$ га тенг. Агар $b>c$, $b>d$ деб олсак, у ҳолда нормал соҳага ягона интеграл эгри чизиқ киради.

Ушбу тенглама берилган бўлсин:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Y_n(x,y)+Y(x,y)}{X_n(x,y)+X(x,y)},\qquad(11.1)$$

бу ерда $X_n(x,\ y)$ ва $Y_n(x,\ y)$ лар $n$-тартибли бир жинсли кўпҳадлар, $X(x,\ y)$ ва $Y(x,\ y)$ — ёйилмалари $(n+1)$ даражадан паст бўлмаган ҳадлардан бошланадиган аналитик функциялар. $y=ux$ ўрнига қўйиш орқали (11.1) тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx}&=\frac{1}{x}\left(\frac{dy}{dx}-u\right)=\frac{1}{x}\left[\frac{Y_n(1,u)+x\overline{Y}}{X_n(1,u)+x\overline{X}}-u\right]=\\&=\frac{1}{x}\cdot\frac{Y_n(1,u)-uX_n(1,u)+x(\overline{Y}-x\overline{X})}{X_n(1,u)+xX},\end{aligned}\tag{11.2}$$

бу ерда $\overline{X}=\frac{1}{x^n}X(x,\ ux),\ \overline{Y}=\frac{1}{x^n}Y(x,\ ux).$

Мумкин бўлган уринмалар тенгламасини тузамиз:

$$Y_n(1,\ u)-uX_n(1,\ u)=0\,,\tag{11.3}$$

бунда $X_n(1,\ u)\neq 0$ деб фараз қиламиз. Акс ҳолда $Y_n(1,\ u)=0$ га эга бўлар эдик ва (11.1) тенгламанинг ўнг томонлари биз фараз қилганимиздек, $n$-тартибли ҳадлардан бошланмасди.

$Y_n(x,\ y)=uX_n(x,\ y)$, $y=ux$ тенгликдан:

$$Y_n(x,y)=yP_{n-1}(x,y),\ X_n(x,y)=xP_n(x,y),\tag{11.4}$$

шу билан бирга

$$X_n(1,\ u)=\frac{Y_n(x,ux)}{x^n u}=\frac{yP_{n-1}(x,ux)}{u}=\frac{x\cdot x^{n-1}}{x^n}P_{n-1}(1,\ u)=P_{n-1}(1,\ u),$$

яъни "$u$" га нисбатан $(n-1)$-даражали кўпҳадга эга бўлдик.

Агар $Y_n(x,\ y)-uX_n(1,\ u)=0$ бўлса, (11.1) тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлади:

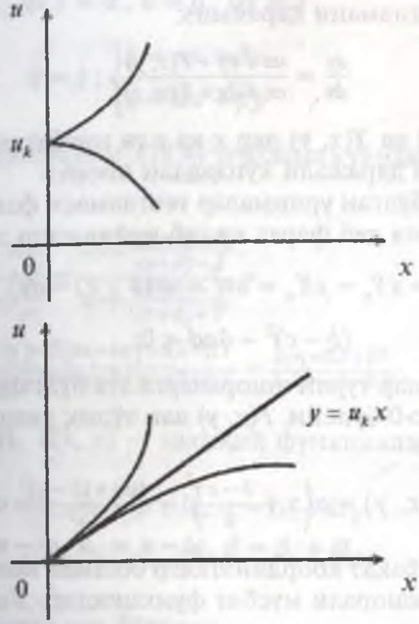
$$\frac{du}{dx}=\frac{\overline{Y}_n-u\overline{X}}{X_n(1,\ u)+x\overline{X}}.\tag{11.5}$$

(11.5) тенглама учун $x=0$ ечим бўлмайди, шунинг учун ҳар бир $(0,\ u)$ нуқта орқали ягона характеристика ўтади.

Ушбу

$$\left.\begin{aligned}&P_{n-1}(1,\ u)=0,\\&\overline{Y}(1,\ u)-u\overline{X}(1,\ u)=0\end{aligned}\right\}$$

тенгламалар системасини қаноатлантирадиган "$u$" нуқталаргина бундан истисно бўлиши мумкин.



43-чизма.

Масалан, агар *Oxy* текисликда $x=0$, $u=u_k$ нуқтага ўнгда иккита характеристика кирса, у ҳолда *Oxy* текисликда ҳам (0, 0) нуқтага $y=u_k x$ йўналишда иккита характеристика киради (43-чизма).

## 12-§. ИККИНЧИ ГУРУҲ МАХСУС НУҚТАЛАР УЧУН ЛЯПУНОВ ТЕОРЕМАСИ

Юқорида сурат ва махражи чизиқли иккиҳад йиғиндисидан иборат бўлган дифференциал тенглама марказ ва фокус кўринишидаги махсус нуқталарга эга бўлиши кўрсатилган эди. Бу махсус нуқталар, шунингдек, марказ ва фокус махсус нуқта дифференциал тенглама сурат ва махражи чизиқли бўлмаганда ҳам пайдо бўлиши мумкин.

Одатда марказ, фокус ва марказ-фокус туридаги махсус нуқталар биринчи гуруҳга мансуб бўлган тугун ва эгардан фарқли равишда иккинчи гуруҳ махсус нуқталар дейилади.

Ушбу тенгламани қараймиз:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+Y(x,y)}{cx+dy+X(x,y)}, \tag{12.1}$$

бунда $X(x, y)$ ва $Y(x, y)$ лар $x$ ва $y$ га нисбатан иккинчи ва ундан юқори даражали кўпҳаддан иборат.

Мумкин бўлган уринмалар тенгламаси фақат комплекс илдизларга эга деб фараз қилиб қуйидагига эга бўламиз:

$$F=xY_n-yX_n=ax^2+xy(b-c)-dy^2=0$$

$$(b-c)^2+4ad<0; \tag{12.2}$$

бу $a$ ва $d$ сонлар турли ишораларга эга бўлгандагина ўринли бўлади. $a>0$ бўлсин. $F(x, y)$ дан тўлиқ квадратлар ажратамиз:

$$F(x,\ y)=a\left(x+\frac{b-c}{a}\right)^2-\frac{4ad+(b-c)^2}{4a^2}\cdot y^2,$$

яъни $F(x, y)$ фақат координаталар бошида нолга тенг бўладиган аниқ ишорали мусбат функциядир. Ушбу

$$\xi=\alpha x+\beta y,\quad \eta=\gamma x+\delta y \tag{12.3}$$

ўрнига қўйиш ёрдамида (11.1) тенгламани 10-§ да талаб қилингандай каноник кўринишга келтирамиз ва (12.1) тенглама

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\lambda_1\eta+Y_1(\xi,\eta)}{\lambda_2\xi+X_1(\xi,\eta)} \tag{12.4}$$

кўринишга эга бўлишини талаб қиламиз, бу ерда $\lambda_1=p+iq$, $\lambda_2=p-iq$ лар

$$\lambda^2-(b+c)\lambda+ad-bc=0,\quad (b-c)^2+4ad<0$$

характеристик тенгламанинг илдизлари (бу талаб эгри чизиқларга уринмаларнинг мавжуд эмаслиги шарти билан бир хилдир).

$\alpha,\ \beta,\ \delta,\ \gamma$ коэффициентлар ушбу тенгламалар системаларини қаноатлантиради:

$$\begin{cases}(c-\lambda_1)\gamma+\alpha\delta=0,\\ d\gamma+(b-\lambda_1)\delta=0\end{cases}\quad \text{ва}\quad \begin{cases}(c-\lambda_2)\alpha+a\beta=0,\\ d\alpha+(b-\lambda_2)\beta=0\end{cases} \tag{12.5}$$

бу ерда $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$ да $\gamma = \overline{\alpha}$, $\delta = \overline{\beta}$, бу эса

$$\overline{\eta} = \xi; \begin{cases} \xi = \alpha x + \beta y, \\ \eta = \overline{\alpha} x + \overline{\beta} y \end{cases} \tag{12.6}$$

эканлигини билдиради. (12.4) тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$\frac{d\eta}{\partial\xi} = \frac{\overline{\alpha} + \overline{\beta}\frac{dy}{dx}}{\alpha + \beta\frac{dy}{dx}} = \frac{\overline{\alpha} + \overline{\beta}\cdot\frac{ax+by+Y}{cx+dy+X}}{\alpha + \beta\cdot\frac{ax+by+Y}{cx+dy+Y}} =$$

$$= \frac{\overline{\alpha}(cx+dy) + \overline{\beta}(ax+by) + \overline{\alpha}X + \overline{\beta}Y}{\alpha(cx+dy) + \beta(ax+by) + \alpha X + \beta Y} = \frac{\lambda_1\eta + \overline{\alpha}X + \overline{\beta}Y}{\lambda_2\xi + \alpha X + \beta Y}, \tag{12.7}$$

бу ерда $X(x, y)$, $Y(x, y)$ — ҳақиқий функциялар.

Энди

$$\begin{aligned} &\xi = u + iv, \ \lambda_1 = p + iq, \ \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \\ &\eta = u - iv, \ \lambda_2 = p - iq, \ \beta = \beta_1 + i\beta_2 \end{aligned} \tag{12.8}$$

десак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned} u + iv = \xi = (\alpha_1 + i\alpha_2)x + (\beta_1 + i\beta_2)y, \\ u - iv = \eta = (\alpha_1 - i\alpha_2)x + (\beta_1 - i\beta_2)y \end{aligned} \tag{12.9}$$

яъни

$$u = \alpha_1 x + \beta_1 y, \ \ v = \alpha_2 x + \beta_2 y,$$
$$u = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \ \ v = \frac{1}{2}i(\eta - \xi).$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{i\,(d\eta - d\xi)}{d\eta + d\xi} = \frac{i\left(\frac{d\eta}{d\xi} - 1\right)}{\frac{d\eta}{d\xi} + 1} = \frac{i\left(\frac{\lambda_1\eta + \overline{\alpha}X + \overline{\beta}Y}{\lambda_2\xi + \alpha X + \beta Y} - 1\right)}{\frac{\lambda_1\eta + \overline{\alpha}X + \overline{\beta}Y}{\lambda_2\xi + \alpha X + \beta Y} + 1} =$$

$$= \frac{i\left[(p + iq)(u - iv) - (p - iq)(u + iv) + (\overline{\alpha} - \alpha)X^{*} + (\overline{\beta} - \beta)Y^{*}\right]}{(p + iq)(u - iv) + (p - iq)(u + iv) + (\overline{\alpha} + \alpha)X^{*} + (\overline{\beta} + \beta)Y^{*}} =$$

$$= \frac{2(pv - qu) + i\left(-2i\alpha_2X^{*} - 2i\beta_2Y^{*}\right)}{2(qv + pu) + 2\alpha_1X^{*} + 2\beta_1Y^{*}} = \frac{pv - qu + \alpha_2X^{*} + \beta_2Y^{*}}{qv + pu + \alpha_1X^{*} + \beta_1Y^{*}},$$

бу ерда

$$X^*(u,v) = X\big(x(u,v),\ y(u,v)\big),$$
$$Y^*(u,v) = Y\big(x(u,v),\ y(u,v)\big)$$

(12.9) га кўра $u$ ва $v$ ўзгарувчиларнинг ҳақиқий функциялари.

Қуйидагича белгилаймиз:

$$U(u,\ v) = \alpha_1 X^* + \beta_1 Y^*;\ V(u,\ v) = \alpha_2 X^* + \beta_2 Y^*.$$

У ҳолда қуйидаги кўринишдаги дифференциал тенгламага эга бўламиз:

$$\frac{dv}{du} = \frac{pv - qu + V(u,v)}{qv + pu + U(u,v)}. \qquad (12.10)$$

(12.10) тенгламани қутб координаталарида ёзиб оламиз:

$$\begin{aligned} u &= \rho\cos\varphi,\ du = \cos\varphi d\rho - \rho\sin\varphi d\varphi \\ v &= \rho\sin\varphi,\ dv = \sin\varphi d\rho + \rho\cos\varphi d\varphi \end{aligned} \qquad (12.11)$$

$$\frac{\sin\varphi d\rho + \rho\cos\varphi d\varphi + p\rho\sin\varphi - q\rho\cos\varphi + V(\rho\cos\varphi.\ \rho\sin\varphi)}{\cos\varphi d\rho - \rho\cos\varphi d\varphi + q\rho\sin\varphi + p\rho\cos\varphi + U(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)}$$

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{-p\rho^2 - \rho\left(\sin\varphi V + \cos\varphi U\right)}{q\rho + \left(\sin\varphi U - \cos\varphi V\right)},$$

ёки

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -\rho\frac{p\rho + V\sin\varphi + U\cos\varphi}{q\rho + U\sin\varphi - V\cos\varphi} = -\frac{p + V_1}{q + U_1}\rho, \qquad (12.12)$$

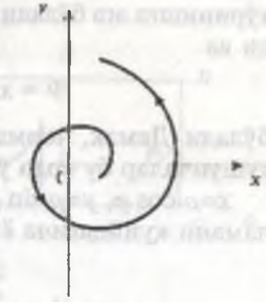
бу ерда

$$U_1 = \frac{1}{\rho}(U\sin\varphi - V\cos\varphi),\ V_1 = \frac{1}{\rho}(V\sin\varphi + U\cos\varphi)$$

функциялардан $\rho$ нинг бирдан кичик бўлмаган ҳади иштирок этади, чунки берилган $X(x,\ y)$ ва $Y(x,\ y)$ функциялар иккинчи даражадан кичик бўлмаган ҳадлардан бошланар эдилар, $u$ ва $v$ ўзгарувчилар эса $x$ ва $y$ га нисбатан чизиқли боғлиқдир.

Демак, (12.12) тенглама ўнг томонининг ишораси $\rho$ нинг кичик қийматларида, яъни махсус нуқта атрофида $\frac{p}{q}$ нисбатга боғлиқ бўлади.

44-чизма.



45-чизма.

Бунда қуйидаги ҳоллардан бири бўлиши мумкин.

1) Агар $\frac{p}{q} > 0$ бўлса, у ҳолда $\frac{d\rho}{d\varphi} < 0$ бўлади ва $\rho(\varphi)$ функция $\varphi$ ўсиши билан камаяди, бу эса спиралсимон эгри чизиқлар махсус нуқтага йўналганлигини билдиради. Бу ҳолда махсус нуқта турғун фокус бўлади (44-чизма).

2) Агар $\frac{p}{q} < 0$ бўлса, аксинча, турғунмас фокусга эга бўламиз (45-чизма).

Шундай қилиб, агар характеристик тенглама комплекс илдизларга эга бўлса, чизиқли бўлмаган ҳадларнинг бўлиши махсус нуқтани турини ўзгартирмайди.

3) $p=0$ бўлсин. Бу ҳолда (12.10) тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\frac{dv}{du} = \frac{-u + V(u,v)}{v + U(u,v)}. \qquad (12.13)$$

Умумийликка зиён келтирмасдан, $u$ ва $v$ координаталарни одатдаги $x$ ва $y$ декарт координаталари деб ҳисоблаймиз ва (12.13) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + Y(x,y)}{y + X(x,y)}. \qquad (12.14)$$

(12.14) дифференциал тенглама А. М. Ляпунов тенгламаси дейилади.

Бу тенглама учун мумкин бўлган уринмалар тенгламаси

$$F = xY_1 - yX_1 = -x^2 - y^2 = 0$$

кўринишга эга бўлади ва (0,0) дан бошқа ечимга эга бўлмайди ва

$$\Phi = xX_1 + yY_1 = xy - xy = 0$$

бўлади. Демак, нормал соҳалар ҳақида илгари киритилган тушунчалар бу ерда ўринли эмас.

$x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ қутб координаталарига ўтиб, тенгламани қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho^2 \cdot \frac{\Phi(\rho,\varphi)}{\rho\Psi(\rho,\varphi)}. \qquad (12.15)$$

Агар $X(x, y)$ ва $Y(x, y)$ функциялар аналитик бўлса, $\Phi(\rho, \varphi)$, $\Psi(\rho, \varphi)$ функциялар ҳам аналитик бўлади.

Етарлича кичик $\rho_0>0$ танлаб олиб, $\rho<\rho_0$ бўлганда $\Phi$ ва $\Psi$ функциялар чегараланмаган, шу билан бирга $\rho\Psi(\rho, \varphi)$ — кичик миқдор деган хулосага келамиз, шунинг учун

$$\left|\frac{\Phi(\rho,\varphi)}{1-\rho\Psi(\rho,\varphi)}\right| < A = \text{const}. \qquad (12.16)$$

Демак, $\frac{d\rho}{d\varphi}$ ҳосила ҳам кичик миқдордир. $O\rho\varphi$ координаталар бошига ёндошган ва (0, 0) дан ташқари бошқа махсус нуқталарга эга бўлмаган $OABC$ тўғри тўртбурчак оламиз (46-чизма). $OA$ томон орқали кирувчи характеристика, $O\varphi$ нинг ўзи характеристика бўлгани сабабли, $OC$ орқали чиқа олмайди. Бендиксон теоремасига кўра у ичкарида чексиз узоқ қололмайди ҳам. Энди етарлича кичик $\rho$ да характеристика $AB$ орқали чиқа олмаслигини кўрсатамиз. Характеристика $AB$ ни координаталари $(\rho_0, \overline{\varphi})$ бўлган бирор $Q$ нуқтада кесиб ўтсин. $\rho(\overline{\varphi})-\rho(0)$ айирмага Лагранжнинг чекли орттирмалар формуласини қўллаб,

$$\rho(\overline{\varphi}) - \rho(0) = \rho'(\varphi_{\text{ўр}}) \cdot \overline{\varphi}, \; (0 < \varphi_{\text{ўр}} < \overline{\varphi}) \qquad (12.17)$$

ни ҳосил қиламиз. Бироқ,

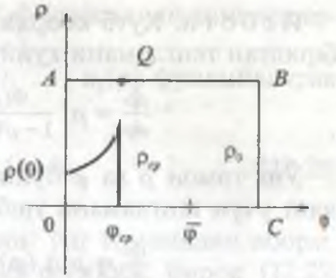
$$\overline{\rho}(\varphi_{\text{ўр}}) = \rho^2(\varphi_{\text{ўр}})\,\frac{\Phi(\varphi_{\text{ўр}}, \rho(\varphi_{\text{ўр}}))}{\rho(\varphi_{\text{ўр}})\Psi(\varphi_{\text{ўр}}, \rho(\varphi_{\text{ўр}}))-1}.$$

Айтайлик, $\rho(0) \le \frac{1}{2}\rho_0$, $\overline{\varphi} < 2\pi$ ($OC = 2\pi$ — десак) бўлсин. $\rho(\varphi_{\text{ўр}}) < \rho_0$, $\rho(\overline{\varphi}) = \rho_0$ тенгсизликка ва (12.16) га кўра (12.17) да:

$$\frac{1}{2}\rho_0 \le \rho_0 - \rho(0) =$$

$$= \rho(\overline{\varphi}) - \rho(0) < A\rho_0^2 \cdot 2\pi,$$

яъни $2\pi A\rho_0 > \frac{1}{2}$, бунинг бўлиши мумкин эмас, чунки етарлича кичик $\rho_0$ да, яъни *OABC* тўғри тўртбурчакни $O\varphi$ ўққа нисбатан қисганда чап томон исталганча кичик қилиб олиниши мумкин.



46-чизма.

Демак, характеристикалар *BC* томон орқали киради. Бу ерда қуйидаги ҳоллар рўй бериши мумкин.

1) $\rho(0)=\rho(2\pi)$, яъни характеристика ёпиқ эгри чизиқдан иборат ва махсус нуқта чизиқли бўлмаган ҳадлар бўлганда марказ бўлади;

2) $\rho(0)>\rho(2\pi)$ — характеристика координаталар бошига, унинг атрофида буралиб (спиралсимон) яқинлашади;

3) $\rho(0)<\rho(2\pi)$ — характеристика координаталар бошидан, унга нисбатан буралиб, узоқлашади.

Кейинги икки ҳол махсус нуқта фокус эканлигини англатади.

Шундай қилиб агар характеристик тенгламанинг илдизлари соф мавҳум сонлар бўлса, у ҳолда чизиқли бўлмаган ҳадларни қўшганда махсус нуқта марказ ўз ҳолича қолиши ҳам мумкин, фокусга айланиши ҳам мумкин экан.

Мантиқан яна бир ҳолни — координаталар боши марказ-фокус бўлган ҳолни кўриш мумкин.

(12.15) тенгламада $\Phi(\rho, \varphi)$, $\Psi(\rho, \varphi)$ функциялар $\varphi$ аргументга нисбатан даврий функциялардир, шунинг учун *OABC* тўғри тўртбурчакнинг *OC* узунлиги $2\pi$ га тенг бўлганда, унинг бутун манзарасини кўриш етарлидир.

Энди А. М. Ляпунов теоремасини кўрамиз.

**Теорема.** *Агар*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + Y(x, y)}{y + X(x, y)} \tag{12.18}$$

*дифференциал тенгламада X(x, y), Y(x, y) функциялар x ва y ларга нисбатан иккинчи даражасидан паст бўлмаган тартибли аналитик функциялар бўлса, координаталар боши ё фақат марказ, ё фақат фокус бўлади.*

Исботи. Қутб координаталар системасини киритиб, берилган тенгламани қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho^2 \, \frac{\Phi(\rho, \varphi)}{1 - \rho\Psi(\rho, \varphi)}. \tag{12.19}$$

Ўнг томон $\rho$ ва $\varphi$ бўйича аналитик функциядир, шунинг учун тенгламани ушбу шаклда ёзамиз:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho^2 a_2(\varphi) + \rho^3 a_3(\varphi) + \ldots , \tag{12.20}$$

бу ерда $a_i(\varphi)$ — даври $2\pi$ га тенг даврий функциялар. (12.20) тенгламанинг ечими $\rho(\varphi)$ ни қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$\rho(\varphi) = \alpha u_1(\varphi) + \alpha^2 u_2(\varphi) + \ldots + \alpha^n u_n(\varphi) + \ldots \tag{12.21}$$

бунда $\alpha$ — кичик параметр. $u_i(\varphi)$ функциялар қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

$$u_1(\varphi) \equiv 1, \;\; u_i(0) = 0, \; i \geq 2 . \tag{12.22}$$

Равшанки, барча $u_i(\varphi)$ функциялар даврий бўлса, координаталар боши марказ бўлади, агар уларни ҳеч бўлмаганда бири даврий бўлмаса, координаталар боши фокус бўлади. (12.21) ни (12.20) га қўямиз:

$$\begin{gathered}\alpha^2 u_2^1 + \alpha^3 u_3^1 + \ldots + \alpha^n u_n^1 + \ldots = (\alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \ldots)^2 a_2(\varphi) + \\ +(\alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \ldots)^3 a_3(\varphi) + \ldots\end{gathered} \tag{12.23}$$

(12.23) тенгламанинг чап ва ўнг томонларидаги $\alpha$ нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни ўзаро тенглаб қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned}&u_2^1 = u_1^2 a_2 , \\ &u_3^1 = a_2 2u_1 u_2 + u_1^2 a_3 = (u_1 u_2 + u_2 u_1) a_2 + u_1^2 a_3 = a_2 \sum_{i+j} u_i u_j + u_1^3 a_3 , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &u_n^1 = a_2 \sum_{i_1 + i_2 = n} u_{i_1} u_{i_2} + a_3 \sum_{i_1 + i_2 + i_3 = n} u_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} + \ldots + a_n u_1^n .\end{aligned} \tag{12.24}$$

Шундай қилиб, ҳар бир $u_{k+1}(\varphi)$ функция олдингиси орқали аниқланади: $u_1(\varphi), \ldots , u_k(\varphi)$.

Фараз қилайлик, $u_1(\varphi)$, $u_2(\varphi)$, ... , $u_k(\varphi)$ функцияларни аниқлаган бўлайлик. У ҳолда

$$u_k(\varphi) = \int_0^{\varphi} \Phi_{k-1}(\varphi)d\varphi , \tag{12.25}$$

бу ерда $\Phi_{k-1}(\varphi)$ ифода (12.24) нинг ўнг томонидан иборат. $\Phi_{k-1}(\varphi)$ функция даврий бўлиши мумкин, бироқ (12.25) интегралнинг даврий бўлиши шарт эмас.

Қуйидагича

$$u_{k-1}(\varphi + 2\pi) = u_{k-1}(\varphi)$$

бўлиши мумкин, бироқ (12.25) формула бўйича ҳисобланган кейинги функциялар даврий бўлмайди.

Шундай қилиб, марказга эга бўлишимиз учун (12.25) интеграл билан аниқланувчи чексиз кўп $u_k(\varphi)$ функциялар даврий функциялар бўлиши керак.

Акс ҳолда махсус нуқта фокус бўлади. Теорема исбот бўлди.

Демак, дифференциал тенгламанинг чизиқли қисмига $x$ ва $y$ га нисбатан юқори даражали қисм қўшилса, (0, 0) махсус нуқта марказ ёки фокус бўлиш муаммосини юқорида кўрилган усуллардан ташқари бир неча усуллар билан ҳал қилиш мумкин.

*I. Симметрия усули.*

Дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси иккинчи тартибли

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \tag{12.26}$$

дифференциал тенглама тавсифлайдиган турли механикага оид масалаларга бевосита татбиқ этилади. (12.26) тенгламада

$$\frac{dx}{dt} = y, \; \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt}; \; \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = y\cdot\frac{dy}{dx}$$

белгилашларни киритиб, уни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y}. \tag{12.27}$$

$f(x, y)=ax+\varphi(x, y)$ бўлсин деб фараз қиламиз, бу ерда $a>0$, $\varphi(x, y)$ эса $x$ ва $y$ га нисбатан иккинчи ва ундан юқорироқ даражадан иборат ҳадлардан бошланади. У ҳолда характеристик тенглама соф мавҳум илдизларга эга бўлади ва координаталар боши Ляпунов теоремасига кўра ё марказ, ё фокус бўлади.

Қуйидаги тасдиқ ўринлидир. Агар $f(x, y)$ функция

а) "$y$" ўзгарувчи бўйича жуфт ёки;

б) "$x$" ўзгарувчи бўйича тоқ бўлса, координаталар боши марказ бўлади.

а) $f(x, -y)=f(x, y)$

$$y_1=-y;\quad \frac{dy_1}{dx}=-\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x,y)}{y}\Rightarrow\frac{-dy_1}{dy}=\frac{f(x,-y_1)}{-y_1}\Rightarrow\frac{dy_1}{dx}=\frac{f(x,y_1)}{y_1},$$

яъни $y$ ва $y_1$ ўзгарувчилар бўйича тенгламалар бир хил бўлади, демак, характеристикалар $Oy$ ўқни симметрик нуқталарда кесади, яъни интеграл эгри чизиқлар ёпиқ эгри чизиқлар бўлади.

б) $f(-x, y)=-f(x, y),\ -x=x_1$

$$\frac{dy}{dx_1}=-\frac{dy}{dx}=-\frac{f(x,y)}{y}=\frac{f(-x_1,y)}{y}=\frac{f(x_1,y)}{y},$$

яъни интеграл эгри чизиқлар $Ox$ ўқни симметрик нуқталарда кесади ва бу ҳолда ҳам, интеграл эгри чизиқлар ёпиқ бўлади.

Фокусни аниқлаш учун қуйидаги тасдиқ ўринлидир.

в) Агар

$$A(x,y)=\frac{f(x,y)+f(-x,y)}{y}$$

функция айнан нолга тенг бўлмаса ва маркази координаталар боши бўлган бирор атрофида ишорасини сақласа ёки;

г) $B(x,\ y)=\dfrac{f(x,\ y)-f(x,\ -y)}{y}$ функция айнан нолга тенг бўлмаса ва маркази координаталар бошида бўлган бирор атрофида ўзгармас ишорали функция бўлса, у ҳолда $(0,\ 0)$ махсус нуқта фокус бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, 1) айтайлик $A(x, y)>0$ бўлсин.

Ушбу

$$\frac{d\overline{y}}{dx} = \frac{f(x,\overline{y})}{\overline{y}} - \frac{1}{2}A(x,y) = \frac{f(x,\overline{y}) - f(-x,\overline{y})}{2y}$$

ёрдамчи тенгламани қараймиз.

$F(x,\ y) = f(x,\ \overline{y}) - f(-x,\ \overline{y})$ функция $x$ бўйича тоқ: $F(-x,\ y) = -F(x,\ y)$ ва демак, берилган тенглама учун (0, 0) координаталар боши марказ бўлади.

Ушбу

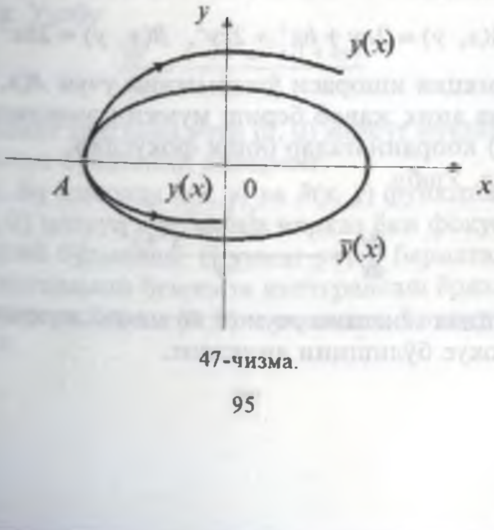
$$\frac{dy}{dx} \geq \frac{d\overline{y}}{dx} \qquad (f(x,\ y) \geq F(x,\ \overline{y}))$$

тенгсизликдан берилган тенгламанинг $A$ нуқтадан соат стрелкаси ҳаракати бўйича чиқадиган $y(x)$ интеграл характеристикаси $\overline{y}(x)$ интеграл характеристикага нисбатан ўсувчи, $A$ нуқтага соат стрелкаси ҳаракати бўйича кирувчи $y(x)$ характеристика $\overline{y}(x)$ ёпиқ траектория ичига киради. Демак, $y(x)$ интеграл характеристика ёпиқ эгри чизиқ бўлмайди ва бу ҳолда координаталар боши фокусдан иборат бўлади (47-чизма).

2) $B(x,\ y) \geq 0$ бўлсин, у ҳолда

$$\frac{d\overline{y}}{dx} = \frac{f(x,\overline{y})}{\overline{y}} - \frac{1}{2}B(x,\ \overline{y}) = \frac{f(x,\overline{y}) + f(x,-\overline{y})}{2\overline{y}} = \frac{\Phi(x,\overline{y})}{2\overline{y}}$$

ёрдамчи дифференциал тенглама учун $\Phi(x,\ \overline{y})$ функция "$\overline{y}$" бўйича жуфт бўлади, демак, $\overline{y}(x)$ ёпиқ эгри чизиқ бўлади, ҳар бир $\frac{dy}{dx} \geq \frac{d\overline{y}}{dx}$ нуқтасида бўлгани учун $y(x)$ эгри чизиқ эса, равшанки, ёпиқ бўлмаган эгри чизиқ бўлади.



47-чизма.

Қуйидаги мисолларни кўрамиз.

**1-мисол.** Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-x + (1 - x^2 - y^2)y}{y}$$

дифференциал тенглама учун (0, 0) махсус нуқтанинг марказ ёки фокус бўлишини аниқланг.

Ечиш. Берилган тенглама учун қуйидаги ёрдамчи функцияларни ёзиб оламиз:

$$A(x,\ y) = \frac{f(x, y) - (x, -y)}{y} = 2(1 - x^2 - y^2)$$

ва

$$B(x,\ y) = \frac{f(x,\ y) - (x_1, -y)}{y} = 2\left(1 - x^2 - y^2\right).$$

Бу функциялар $x^2+y^2<1$ атрофида ишора сақлайдилар, $x^2+y^2=1$ айланада нолга айланадилар ва $x^2+y^2=1$ айлана ташқарисида ишорасини ўзгартирадилар.

Демак, координаталар боши фокусдан иборат, $x^2+y^2=1$ эгри чизиқ лимит давра бўлиб, унинг ички ва ташқи томонларида фокуснинг турғунлиги турлича бўлади.

**2-мисол.** Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + ay^2 + bx^2y + cy^4}{y}$$

дифференциал тенглама учун (0, 0) махсус нуқтанинг марказ ёки фокус бўлишини аниқланг.

Ечиш. Берилган тенглама учун ёрдамчи функцияларни ёзиб оламиз:

$$A(x,\ y) = 2ay + bx^2 + 2cy^3,\ \ B(x,\ y) = 2bx^2\,.$$

$B(x,\ y)$ функция ишораси ўзгармагани учун $A(x,\ y)$ функция бўйича аниқ жавоб бериш мумкин эмаслигига қарамай) (0, 0) координаталар боши фокусдир.

**3-мисол.** Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + x^2y^3\sin^2\dfrac{1}{x^2+y^2}}{y}$$

дифференциал тенглама учун (0, 0) махсус нуқтанинг марказ ёки фокус бўлишини аниқланг.

Ечиш. Ёрдамчи функцияларни ёзиб оламиз:

$$A(x, y) = 2x^2y^2 \sin^2 \frac{1}{x^2 + y^2};$$

$$B(x, y) = 2x^2y^2 \sin^2 \frac{1}{x^2+y^2} \left(x^2 + y^2 \neq \frac{1}{k\pi}\right)$$

$x^2 + y^2 = \frac{1}{k\pi}$ эгри чизиқлар $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ тенгламани қаноатлантиради ва у ўз ичига фокусни олган лимит даврадан иборат бўлади.

**4-мисол.** Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + \alpha^2x^2 + \alpha^3x^3 + ... + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + ...}{y}$$

дифференциал тенглама учун (0, 0) махсус нуқтанинг марказ ёки фокус бўлишини аниқланг.

Ечиш. Ёрдамчи функцияни ёзиб оламиз:

$$B(x, y) = 2\beta_1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \beta_{2k+1} y^{2k}.$$

Иккинчи қўшилувчи

$$|y| < \sqrt{\lim_{k \to \infty} \left|\frac{\beta_{2k+3}}{\beta_{2k+1}}\right|}$$

интервалда яқинлашувчи қатор бўлади. Мазкур интервал мавжуд деб, координаталар боши фокус деган хулосага келамиз. Унинг турғун ёки турғун эмаслиги $\beta_1$ коэффициентнинг ишораси билан аниқланади.

**5-мисол.** Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-x + ax^2)(1 + by)}{y}$$

дифференциал тенглама учун (0, 0) махсус нуқтанинг марказ ёки фокус бўлишини аниқланг.

Ечиш. Бу мисолда $A(x, y)$ ва $B(x, y)$ функциялар ёрдамида $O(0, 0)$ махсус нуқтанинг марказ ёки фокус эканлигини аниқлаб бўлмайди. Шунинг учун, берилган дифференциал тенгламани бевосита интеграллаш ёрдамида ечамиз. Унинг учун берилган тенгламанинг ўзгарувчиларини ажратамиз:

$$\frac{ydy}{1+by} = (-x + ax^2)dx$$

ва чап томонни $\left(-\frac{1}{|b|}, \frac{1}{|b|}\right)$ интервалда текис яқинлашувчи даражали қаторга ёйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y(1 - by + b^2y^2 - b^3y^3 + \dots)\,dy = (-x + ax^2)dx.$$

Уни ҳадма-ҳад интегралласак:

$$x^2 + y^2 + F(x,\ y) = C$$

га эга бўламиз, бу ерда $F(x,\ y)$ функция $x$, $y$ нинг учинчи даражадан кам бўлмаган тартибли аналитик функциясидир. Бу тенглик голоморф интеграл бўлгани учун Ляпунов теоремасига кўра берилган дифференциал тенглама учун (0, 0) махсус нуқта марказ бўлади.

*II. u ва v функция ёрдамида (0, 0) махсус нуқтанинг марказ ёки фокус бўлишини аниқлаш.*

**1-теорема**. (*u* функция ҳақидаги теорема).

*Ўнг томони аналитик бўлган ушбу*

$$\frac{dy}{dx} = H(x, y) \tag{12.28}$$

*дифференциал тенглама учун*:

*1) (0, 0) махсус нуқта иккинчи тур махсус нуқта бўлсин;*

*2) шундай u(x) дифференциалланувчи функция мавжуд бўлсинки,*

$$u(0) = 0,\ u'(0) = 0,\ u''(0) > 0.$$
$$H(x, y) = F(x, y)\cdot u'(x) = F_1(u, y)\cdot u'; \tag{12.29}$$

*3)* (12.28) *тенгламага кўра тузилган*

$$\frac{dy}{du} = F_1(u, y) \tag{12.30}$$

*дифференциал тенглама учун координаталар боши унинг яккаланган махсус нуқтаси ва бошқа махсус нуқталари бўлмаса, у ҳолда (0, 0) махсус нуқта марказ бўлади.*

Исботи. (12.29) хоссага кўра $u(x)$ функция $x$=0 нуқтада мусбат минимумга эга. (12.28) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\frac{dy}{du}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{du}=H(x,y)\cdot\frac{1}{u'(x)}=F(x,y)=F(u,y)\,.$$

*Oxy* текисликда координаталар боши фокус бўлсин деб фараз қилайлик. У ҳолда *AC* ёйга ўнг ярим текислик *Ouv* жойлашган $A_1C_1$ ёй мос келади (чунки $u>0$, 48-чизма).

*CE* ёйга ҳам ўнг ярим текисликда бирор $C_1E_1$ ёй мос келади, яъни $C_1$ нуқта (12.30) тенгламанинг махсус бурчак нуқтаси бўлади, бунинг бўлиши мумкин эмас, чунки бу тенглама $u=0$, $y=0$ яккаланган махсус нуқтасидан бошқа махсус нуқтага эга эмас (48-чизма).

Демак, (0, 0) махсус нуқта марказ бўлади. Бу ҳолга мисоллар кўрамиз.

**6-мисол.** Ушбу

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^3}{y};\;\; u=x^2$$

дифференциал тенглама учун (0, 0) махсус нуқта марказ ёки фокус бўлишини аниқланг.

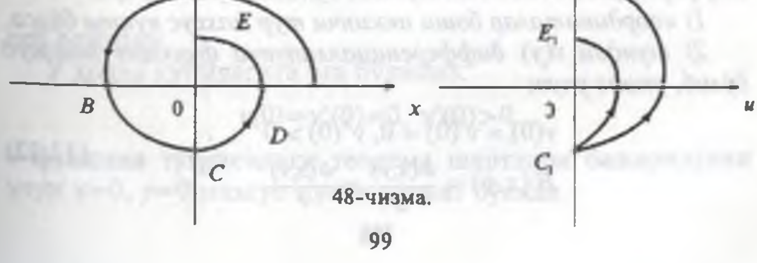
Ечиш. Берилган тенгламани (12.28) дифференциал тенгламанинг ўнг томони кўринишига келтирамиз:

$$H(x,y)=-\frac{x^3}{y}=-\frac{x^2\cdot 2x}{2y}=-\frac{u\cdot u'}{2y}.$$

У ҳолда берилган тенгламанинг (11.30) кўринишидаги тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\frac{dy}{du}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{u'(x)}=-\frac{u\cdot u'}{2y\cdot u'}=-\frac{u}{2y}=F_1(u,\ y).$$

Бу тенгламанинг ечими $\frac{1}{2}u^2+y^2=C$. Демак, $u=\theta$, $y=0$ нуқта марказ, у ҳолда $x=0$, $y=0$ ҳам марказ бўлади. Бу



48-чизма.

берилган тенгламани бевосита интеграллаш орқали тасдиқланади:

$$\frac{x^4}{4}+\frac{y^2}{2}=C.$$

**7-мисол.** Ушбу

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x+ax^2+yf(x)}{y}$$

дифференциал тенгламадаги $f(x)$ функциянинг шундай умумий кўринишини топингки, координаталар боши марказ бўлсин.

Ечиш. $u(x)$ функция сифатида ушбу интегрални оламиз:

$$u(x)=\int_0^x (x+ax^2)dx=\frac{x^2}{2}+\frac{ax^3}{3}$$

$$u'(x)=x+ax^2;\ u(0)=0,\ u'(0)=0,\ u''(0)=1>0\,.$$

$f(x)=u'(x)\cdot\varphi(u(x))$ (бу ерда $\varphi(t)$ — ихтиёрий функция) деб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{u'(1+y\varphi(u))}{y}=F_1(u,y)u'\,.$$

*u* функция тўғрисидаги теорема шартлари бажарилади, демак

$$f(x)=(x+ax^2)\varphi\left(\frac{x^2}{2}+\frac{ax^3}{3}\right)$$

бўлганда координаталар боши фокус бўлади.

2-теорема. (*v* функция ҳақидаги теорема). *Агар ўнг томони аналитик функция бўлган*

$$\frac{dy}{dx}=H(x,y) \tag{12.31}$$

*дифференциал тенглама шундай бўлсаки, унинг учун:*

*1) координаталар боши иккинчи тур махсус нуқта бўлса,*

*2) шундай $v(y)$ дифференциалланувчи функция мавжуд бўлиб, унинг учун:*

$$v(0)=v'(0)=0,\ v''(0)>0$$

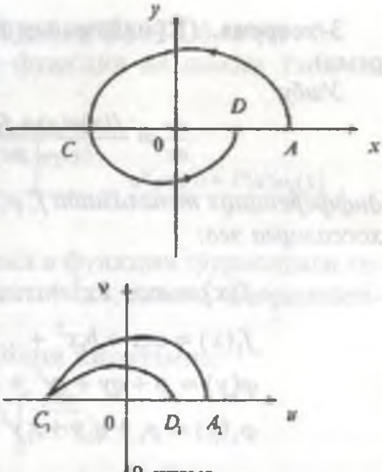
$$H(x,y)=\frac{\Phi(x,y)}{v'(y)}=\frac{\Phi(x,v)}{v'} \tag{12.32}$$

*бўлса,*

*3)* (12.31) *дифференциал тенгламага кўра тузилган*

$$\frac{dv}{dx} = \Phi_1(x,\ v) \qquad (12.33)$$

*дифференциал тенглама учун координаталар бошидан (унинг яккаланган махсус нуқтасидан) ташқари бошқа махсус нуқталари мавжуд бўлмаса, координаталар боши — $x=0$, $y=0$ нуқта марказ бўлади.*



49-чизма.

Исботи. $v(x)$ функция тўғрисидаги теорема исботи худди $u(x)$ функция тўғрисидаги теорема исботи кабидир ва у 49-чизмада тасвирланган. Қуйидаги мисолни кўрамиз.

**8-мисол.** Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-x+ax^2)(1+by)}{y}$$

дифференциал тенглама учун (0, 0) махсус нуқта турини аниқланг.

Ечиш. (12.31) тенгламанинг ўнг томонидаги $H(x,\ y)$ функцияни ёзиб оламиз:

$$H(x,y) = \frac{(-x+ax^2)(1+by)}{y} = \frac{-x+ax^2}{\frac{y}{1+by}} = \frac{H(x,y)}{v'},$$

бу ерда

$$v(y) = \int_0^y \frac{vdv}{1+by};\quad v'(y) = \frac{y}{1+by},\quad v''(y) = \frac{y}{(1+by)^2}$$

деб олинган.

У ҳолда қуйидагига эга бўламиз:

$$v(0)=v'(0)=0,\ v''(0)>0.$$

$v$ функция тўғрисидаги теорема шартлари бажарилгани учун $x=0$, $y=0$ махсус нуқта марказ бўлади.

**3-теорема.** (Кўпайтмалар йиғиндиси тўғрисидаги теорема).

*Ушбу*

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)\varphi(y)+f_1(x)\varphi_1(y)}{y} \tag{12.34}$$

*дифференциал тенгламада $f, \varphi, f_1$ ва $\varphi_1$ функциялар қуйидаги хоссаларга эга:*

$$f(x)=ax+bx^2+\dots, \quad a^2+a_1^2\neq 0,$$
$$f_1(x)=a_1x+b_1x^2+\dots, \quad b^2+b_1^2\neq 0,$$
$$\varphi(y)=p+qy+ry^2+\dots, \quad p^2+q_1^2\neq 0,$$
$$\varphi_1(y)=p_1+q_1y+r_1y^2+\dots, \quad q^2+q_1^2\neq 0,$$

*шу билан бирга $ap+a_1p_1=-k<0$.*

Бу (12.34) тенглама ушбу шаклда тасвирланиши мумкинлигини билдиради:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-kx+Q(x,\ y)}{y}, \tag{12.35}$$

бу ерда $Q(x, y)$ — камида $x$ ва $y$ га нисбатан иккинчи даражали ҳадлардан бошланади. Координаталар боши иккинчи тур махсус нуқта бўлади. Қуйидаги теорема ўринлидир.

**Теорема.** *Координаталар боши марказ бўлиши учун қуйидаги шартлардан бири бажарилиши етарлидир:*

$$1)\ f_1(x)=f(x)F\left(\int_0^x f(x)dx\right) \tag{12.36}$$

ёки

$$2)\ \varphi_1(y)=\varphi(y)\Phi\left(\int_0^y \frac{ydy}{\varphi(y)}\right), \tag{12.37}$$

*бу ерда $F(x)$ ва $\Phi(z)$ — аналитик функциялар.*

Исботи. 1) Қуйидаги функцияни киритамиз:

$$u(x)=\int_0^x f(x)dx\ ,\quad u'=f(x).$$

Равшанки, $u(0)=0$, $u'(0)=f(0)=0$, $u''(x)=f'(x)$, $u''(0)\neq 0$.

Бундай киритилган $u(x)$ функция ва шакли ўзгартирилган (11.35) тенглама

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)\varphi(y)+f(x)F\left(\int\limits_0^x f(x)dx\right)\varphi_1(y)}{y}=\frac{u'(\varphi(y))+F(u)\varphi_1(y)}{y},$$

кўринишда бўлиб, бу тенглама *u* функция тўғрисидаги теорема шартларини қаноатлантиради, демак, координаталар боши марказ бўлади.

2) Энди қуйидаги функцияни киритамиз:

$$v(y)=\int\limits_0^y \frac{ydy}{\varphi(y)},$$

$$v'(y)=\frac{y}{\varphi(y)},\ v''(y)=\frac{1}{\varphi(y)}-\frac{y\varphi'(y)}{\varphi^2(y)},$$

$$v(0)=0\,,\ \ v'(0)=0\,,\ \ v''(0)=\frac{1}{\varphi(0)}\neq 0\,.$$

Бундай киритилган $v(y)$ функция ва шакли ўзгартирилган (12.35) тенглама

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)\varphi(y)+f_1(x)\varphi(y)\Phi\left(\int\limits_0^y \frac{y}{\varphi(y)}dy\right)}{y}=$$

$$=\frac{\varphi(y)}{y}\left[f(x)+f_1(x)\Phi(v)\right]=\frac{f(x)+f_1(x)\Phi(v)}{v'}.$$

кўринишда бўлиб, у *v* функция тўғрисидаги теорема шартларини қаноатлантиради. Демак, координаталар боши марказ бўлади.

*III. Умумлаштирилган симметрия усули.*

**Теорема**. *Ушбу*

$$\frac{dy}{dx}=H(x,y) \tag{А}$$

*дифференциал тенглама учун координаталар боши марказ бўлиши учун қуйидаги шартлар бажарилиши етарлидир:*

$$1)\ H(x,\ \ y)=\frac{\Phi(u,v)\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dx}}{\frac{dv}{dy}-\Phi(u,v)\frac{du}{dy}}, \tag{Б}$$

*бу ерда $\Phi(u, v)$— координаталар боши атрофида (координаталар боши кирмаслиги ҳам мумкин) узлуксиз дифференциалланувчи функция;*

*2) $u(x, y)$ ва $v(x, y)$ — икки марта дифференциалланувчи функциялар қуйидаги хоссаларга эга:*

*а) ё $u(x, y)$ функция координаталар боши атрофида ишорасини ўзгартирмайди ва $y \cdot v(x, y)>0$,*

*б) ё $v(x, y)$ функция координаталар боши атрофида ишорасини ўзгартирмайди ва $x \cdot u(x, y)>0$, $u(0, y)=v(x, 0)=0$.*

*(А) тенгламага кўра тузилган*

$$\frac{dv}{du}=F(u,v) \tag{B}$$

*дифференциал тенглама ҳам яккаланган (0, 0) махсус нуқтага эга бўлиб, ундан бошқа махсус нуқталарга эга бўлмайди.*

**Исботи.** Аввало, бу теорема $u$ ва $v$ функциялар тўғрисидаги теоремаларнинг умумлаштирилгани эканини қайд қилиб ўтамиз. Ҳақиқатан,

$u(x, y)=u(x)$ деб олиб,

$H(x, y)=\Phi(u, v)\ u'(x)$ ни топамиз.

$u(x, y)=x$, $v(x, y)=v(y)$ деб

$H(x,y)=\dfrac{\Phi(u,v)}{v}$ ни аниқлаймиз.

Ушбу

$$\begin{cases} u=u(x,\ y), \\ v=v(x,\ y) \end{cases}$$

ўрнига қўйиш айнимаган, яъни бир қийматли ёндошишга йўл қўяди деб фараз қилиб,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

га эга бўламиз. $\dfrac{dv}{du}$ ни топамиз:

$$\frac{dv}{du}=\frac{\dfrac{\partial v}{\partial x}dx+\dfrac{\partial v}{\partial y}dy}{\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy}=\frac{\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}}=$$

$$=\frac{\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}H(x,y)}{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}H(x,y)}=\frac{\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\Phi(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}-\Phi(u,v)\frac{\partial u}{\partial y}}}{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\Phi(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}-\Phi(u,v)\frac{\partial u}{\partial y}}}=$$

$$=\frac{\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\Phi(u,v)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\Phi(u,v)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}}=\Phi(u,v),$$

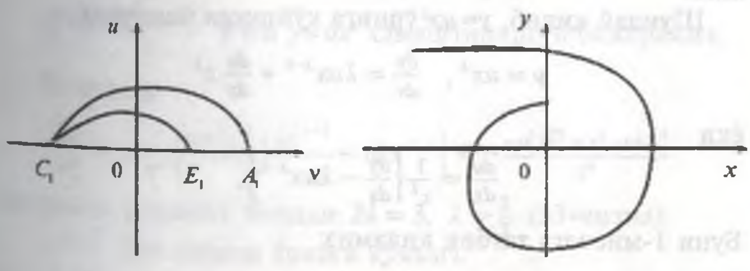
яъни $F_1(u,\ v)=\Phi(u,\ v)$.

*u* функция ҳақидаги теореманинг (3) шартига кўра

$$\frac{dv}{du}=\Phi(u,v)$$

тенглама яккаланган махсус нуқтадан иборат бўлган (0, 0) нуқтадан бошқа махсус нуқталарга эга эмас.

Агар (0, 0) нуқта *Oxy* текисликда фокус деб фараз қилинса, (2) хоссага кўра ва функциялар учун *Ouv* текисликда бурчак нуқта пайдо бўлади (50-чизма). Бироқ бундай бўлиши мумкин эмас, чунки $\frac{dv}{du}=\Phi(u,v)$ тенглама координаталар бошидан ташқари ҳеч қандай махсус нуқталарга эга эмас. Демак, (0, 0) махсус нуқта *Oxy* текисликда марказ бўлади ва ҳоказо (50-чизма).



50-чизма.

## 13-§. ФРОММЕР УСУЛИ

Илгари кўрилган тенгламаларда $y=ux$ ўрнига қўйиш Брио-Буке тенгламасининг турли кўринишларга олиб келди. Бироқ, шундай тенгламалар мавжудки, бу ўрнига қўйиш мазкур кўринишга олиб келмайди. Буни қуйидаги мисолларда кўрсатамиз.

**1-мисол.** $\frac{dy}{dx}=\frac{-y^3+x^4}{x^5}$ тенглама учун $y=ux$ ўрнига қўйишни бажарсак:

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}\left[\frac{-u^3x^3+x^4}{x^5}-u\right]=\frac{-u^3-ux^2+x}{x^3}$$

тенглама Брио-Буке кўринишдаги тенглама эмас. Гап шундаки, $y=ux$ ўрнига қўйиш ёрдамида махсус нуқта турини аниқлаш фақат биринчи гуруҳнинг энг содда турлари (тугун, эгар) ни аниқлашдагина мақсадга олиб келади. Келтирилган мисолда эса, (0, 0) махсус нуқта махсус нуқталарнинг анча мураккаб турига мансубдир. Немис математиги Фроммер томонидан махсус усул ишлаб чиқилган бўлиб, муаллифнинг бир қатор хатолари бартараф этилгач, ҳозирги замон сифат назариясида бу усул жуда кўп ишлатилмоқда.

$y=ux^{\lambda}$ ўрнига қўйишни кўрамиз, бу ерда $\lambda>0$ исталган ҳақиқий сон бўлиши мумкин. Бу ўрнига қўйиш қуйидагидан иборатдир: шундай $\lambda$ ни топиш керакки, тегишли шакл алмаштиришлардан сўнг Брио-Буке тенгламасига келайлик.

Шундай қилиб, $y=ux^{\lambda}$ ўрнига қўйишни бажарсак,

$$y=ux^{\lambda}\,,\quad \frac{dy}{dx}=\lambda ux^{\lambda-1}+\frac{du}{dx}x^{\lambda}$$

ёки

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x^{\lambda}}\left[\frac{dy}{dx}-\lambda ux^{\lambda-1}\right].$$

Буни 1-мисолга татбиқ қиламиз:

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x^{\lambda}}\left[\frac{-u^3x^{3\lambda}+x^4}{x^5}-\lambda ux^{\lambda-1}\right]=\frac{-u^3x^{2\lambda}+x^{4-\lambda}-\lambda ux^4}{x^5}.$$

$(\lambda, l)$ текисликда “характеристик синиқ чизиқ” деб аталувчи чизиқни ясаймиз, бу ерда $l$ суратдаги $x$ нинг даражалари кўрсаткичнинг қийматлари. Ҳосил бўлган кесишиш нуқталари ичида бизни энг қуйи нуқта (51-чизмага қаранг) қизиқтиради, унинг координаталари

$$2\lambda = 4 - \lambda, \ \lambda = \frac{4}{3}$$

тенглама билан аниқланади. $\lambda = \frac{4}{3}$ ни тенгламага қўямиз:

$$\frac{du}{dx} = \frac{-u^3x^{\frac{8}{3}} + x^{\frac{8}{3}} - \frac{4}{3}ux^4}{x^5} = \frac{-u^3 + 1 - \frac{4}{3}ux^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{7}{3}}}.$$

Сўнгра $u - 1 = \overline{u}$ ўрнига қўйишни бажариб

$$\frac{d\overline{u}}{dx} = -\frac{\overline{u}\left[(\overline{u}+1)^2 + (\overline{u}+1) + 1\right] - \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}}(\overline{u}+1)}{x^{\frac{7}{3}}}$$

тенгламага эга бўламиз. Натижада Брио-Букенинг иккинчи тур тенгламасини ҳосил қилдик, бу ерда $a_0 < 0$ ва $\frac{7}{3}$ — тоқ. Шунинг учун чап ва ўнг томондан махсус нуқтага биттадан характеристика киради. $Oy$ ўқининг ярим ўқлари ҳам характеристикалар бўлади. Изоклин ноли $\frac{dy}{dx} = 0$, $y = x^{\frac{4}{3}}$ парабола бўлади. Демак, $(x=0, y=0)$ минимум нуқтаси бўлади (52-чизма).

**2-мисол.** Ушбу дифференциал тенглама

$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^3 + yx^3}{x^6}$ учун $y = ux^{\lambda}$ алмаштиришни бажарамиз.

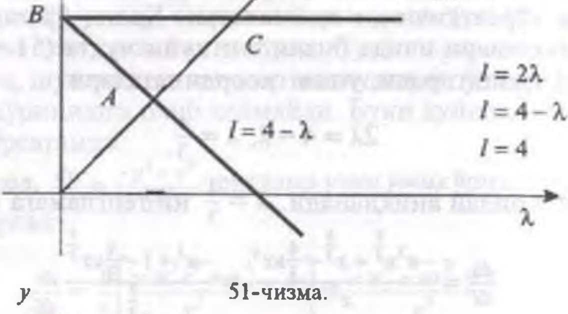
Натижада

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^{\lambda}}\left(\frac{-u^3x^{3\lambda} + ux^{\lambda+3}}{x^6} - u\lambda x^{\lambda-1}\right) = -\frac{-u^3x^{2\lambda} + x^3 - u\lambda x^5}{x^6}$$

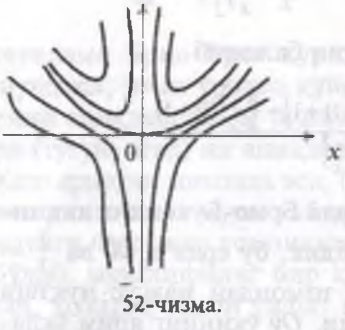
ни ҳосил қиламиз, бундан $2\lambda = 3$, $\lambda = \frac{3}{2}$ (53-чизма).

$\lambda = \frac{3}{2}$ қийматини ўрнига қўямиз:

$$\frac{du}{dx} = \frac{(-u^3 + u)x^3 - \frac{3}{2}ux^5}{x^6} = \frac{-u^3 + 4 - \frac{3}{2}ux^2}{x^3} = \frac{4(1-u)(1+u) - \frac{3}{2}ux^2}{x^3}.$$



51-чизма.



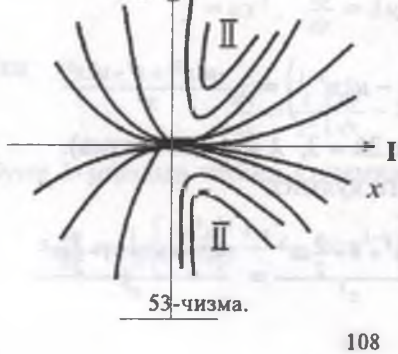
52-чизма.

Бундан равшанки, $u=0$ нуқта ўнг ва чап томонда жойлашган биринчи тур нормал соҳани аниқлайди, $\overline{u} = u + 1$ ва $\overline{u} = u - 1$ нуқталар ўнг томонда ва $x$ ўққа симметрик жойлашган иккинчи тур нормал соҳани аниқлайди. Бу ҳолда эгар-тугун турдаги мураккаб махсус нуқтага эга бўламиз (54-чизма).

Энди эгриликнинг тартиби ва ўлчови ҳақидаги тушунчани киритамиз.

Ушбу

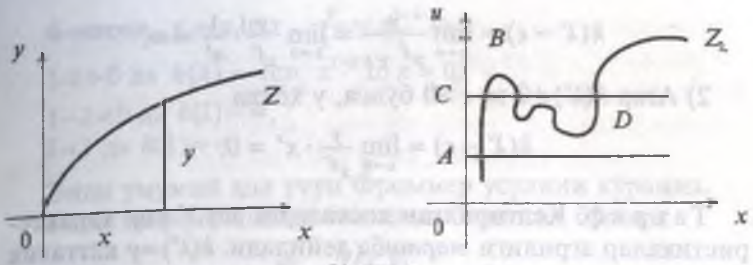
$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x,y)}{X(x,y)}, \; X(0,0) > 0, \, Y(0,0) > 0$$



53-чизма.

тенгламанинг бирор $Z$ характеристикаси (0, 0) махсус нуқтага кирсин. $\frac{y}{x^{\lambda}} = u(x, \lambda)$ нисбатни қараймиз, бу ерда $\lambda \geq 0$ ва $\lim\limits_{x \to \infty} u(x, y)$ мавжуд.

*Охи* текисликда $Z$ характеристикага



54-чизма.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^\lambda}\cdot\frac{Y(x,\ ux^\lambda) - \lambda ux^{\lambda-1}\cdot X(x,\ ux^\lambda)}{X(x,\ ux^\lambda)}$$

тенглама билан аниқланадиган $Oxy$ текисликдаги $Z_\lambda$ характеристика мос келади.

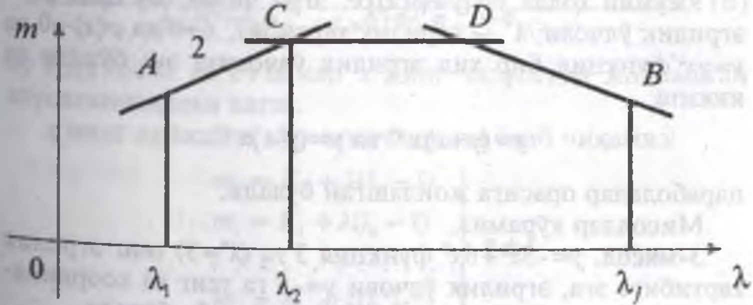
$A$ ва $B$ лар функциянинг ўзгариш лимит нуқталари бўлсин. $x=0$ нуқтанинг мусбат атрофида $\frac{du}{dx}$ ҳосила ишора сақлагани учун $Z_\lambda$ эгри чизиқ $A$ ва $B$ орасида жойлашган $CD \parallel Ox$ тўғри чизиқни чексиз кўп марта кеса олмайди (55-чизма).

Демак, чекли ёки чексиз $\lim\limits_{x\to 0} u(x,\ y)$ лимит мавжуд:

$$\lim_{x\to 0} u(x,\ \lambda) = \lim_{x\to 0} \frac{y}{x^\lambda} = k(\lambda).$$

$k(\lambda)$ катталик қуйидаги хоссаларга эга:

1) Агар $xk(\lambda^*)\neq 0$ ва $\varepsilon>0$ бўлса, у ҳолда



55-чизма.

$$k(\lambda^* - \varepsilon) = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x^{\lambda^*} + \varepsilon} = \lim_{x\to 0} \frac{y}{x^{\lambda^*}} \cdot \frac{1}{x^{\varepsilon}} = \infty.$$

2) Агар $k(\lambda^*)\neq 0$ ва $\varepsilon>0$ бўлса, у ҳолда

$$k(\lambda^* - \varepsilon) = \lim_{x\to 0} \frac{y}{x^{\lambda^*}} \cdot x^{\varepsilon} = 0.$$

Таъриф. Келтирилган хоссаларга эга $\lambda^*$ сон характеристикалар эгрилиги *тартиби* дейилади. $k(\lambda^*)=\gamma$ катталик эса координаталар бошига кирувчи харктеристикалар эгрилиги *ўлчови* дейилади.

Агар $Z_\lambda$ характеристика координаталар бошига кирса, унинг эгрилиги ўлчови $k(\lambda)=0$ ва $\lambda>\lambda^*$ бўлади. $\lambda>\lambda^*$ бўлганда $k(\lambda)=\infty$, бу эса характеристиканинг координаталар бошидан *и* ўқи бўйича узоқлашишини билдиради.

1) $Z$ эгри чизиқлар координаталар бошига эгриликнинг нол ўлчови билан кирсин ва $\lambda^*=\infty$ бўлсин. Бу исталган $\lambda$ учун $\lim\limits_{x\to 0} \frac{y}{x^{\lambda}} = 0$ эканлигини билдиради.

Демак, характеристика $x$ ўқига ҳар қандай $y_1=x^{\lambda}$ параболага нисбатан яқинроқ ёпишади. $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ эгри чизиқ бундай характеристикага мисол бўлади.

2) Харакатеристика координаталар бошига ($x\to 0$, $y\to 0$) $\lambda^*=0$ эгрилик тартиби билан кирсин.

У ҳолда эгрилик ўлчови:

$$k(0) = \lim_{x\to 0} \frac{y}{x^{\lambda}} = \infty.$$

Бу эса эгри чизиқ $Oy$ ўқига исталган $y_1=x^{\lambda}$ (бунда $0<\lambda<1$) параболага нисбатан яқинроқ ёпишишини билдиради.

Умумий ҳолда $y=[\gamma+\varphi(x)]x^{\lambda^*}$ эгри чизиқ (бу ерда $\varphi$ — эгрилик ўлчови, $\lambda^*$ — эгрилик тартиби), $x\to 0$ да $\varphi(x)\to 0$ ва $y=\gamma x^{\lambda^*}$функция бир хил эгрилик ўлчовига эга бўлади ва иккита

$$y=(\gamma+\varepsilon)x^{\lambda^*} \text{ ва } y=(\gamma-\varepsilon)x^{\lambda^*}$$

параболалар орасига жойлашган бўлади.

Мисоллар кўрамиз.

**3-мисол.** $y=-5x^3+6x^7$ функция 3 га ($\lambda^*=3$) тенг эгрилик тартибига эга, эгрилик ўлчови $y=-5$ га тенг ва координаталар боши атрофида $y=-5x^3$ парабола каби бўлади.

**4-мисол.** $y = x\ln x, \quad \frac{y}{x^{\lambda}} = x^{1-\lambda}\ln x$

$1\text{-}\lambda>0$ да $k(\lambda) = \lim\limits_{x\to 1+0} x^{1-\lambda}\ln x = 0,$

$1-\lambda<0$ да $k(\lambda)=\infty,$

$\lambda=1$ да $k(1)=\infty.$

Энди умумий ҳол учун Фроммер усулини кўрамиз.

Ушбу дифференциал тенглама берилган бўлсин:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x,y)}{X(x,y)}, \qquad \text{(A)}$$

бу ерда $Y(x, y)$ ва $X(x, y)$ функциялар

$$\begin{cases} Y(x,\ y) = \alpha_0 y^{\ln} x^{K_0} + \alpha_1 y^{l\,n-1} x^{K_1} + \ldots + \alpha_n y^{l_0} x^{K_0} + \varphi(x,\ y), \\ X(x,\ y) = \beta_0 y^{qS} x^{P_0} + \beta_1 y^{qS-1} x^{P_1} + \ldots + \beta_n y^{q0} x^{PS} + \psi(x,\ y) \end{cases} \qquad \text{(Б)}$$

кўринишдаги аналитик функциялардир, бу ерда $\varphi(x, y)$ ва $\psi(x, y)$ — аналитик функциялар, шу билан бирга $\varphi(0, 0)=0$, $\psi(0, 0)=0$. Сўнгра $Y(x, y)$ ва $X(x, y)$ функциялар $\gamma x^m(l_0=0$ ёки $P_0=0)$ ёки $y^r(K_0=0$ ёки $P_0=0)$ кўринишдаги озод ҳадларга эга деб фараз қилинади, даража кўрсаткичлари $K_i$, $P_i$ ўсади, $l_{n-i}$, $q_{s-i}$ камаяди (кўрсатилган функцияларда ҳадларни гуруҳлаб бунга ҳар доим эришиш мумкин).

$y=ux^{\lambda}$ ўрнига қўйишни бажарамиз:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^{\lambda}}\left[\frac{dy}{dx} - u\lambda x^{\lambda-1}\right] =$$

$$= \frac{1}{x^{\lambda}}\left[\frac{Y(x,ux^{\lambda}) - u\lambda x^{\lambda-1}X(x,ux^{\lambda})}{X(x,ux^{\lambda})}\right] =$$

$$= \frac{\alpha_0 x^{k_0+\lambda(\ln-1)}u^{\ln} + \ldots + \alpha_n x^{k_n+\lambda(l_0-1)} - \lambda u'\left[\beta_0 x^{p_0+\lambda q_s-1}\right] + x^{a+\lambda b}\varepsilon(x,u)}{\beta_0 x^{p_0+q_s\lambda}u^{q_s} + \ldots + \beta_s x^{p_s+q_0\lambda}u^{q_0} + x^{c+d\lambda}\eta(x,u)} \qquad \text{(B)}$$

бу ерда $a+b\lambda$ ва $c+b\lambda$ лар $x$ нинг чапроғида жойлашган кўрсаткичлардан катта.

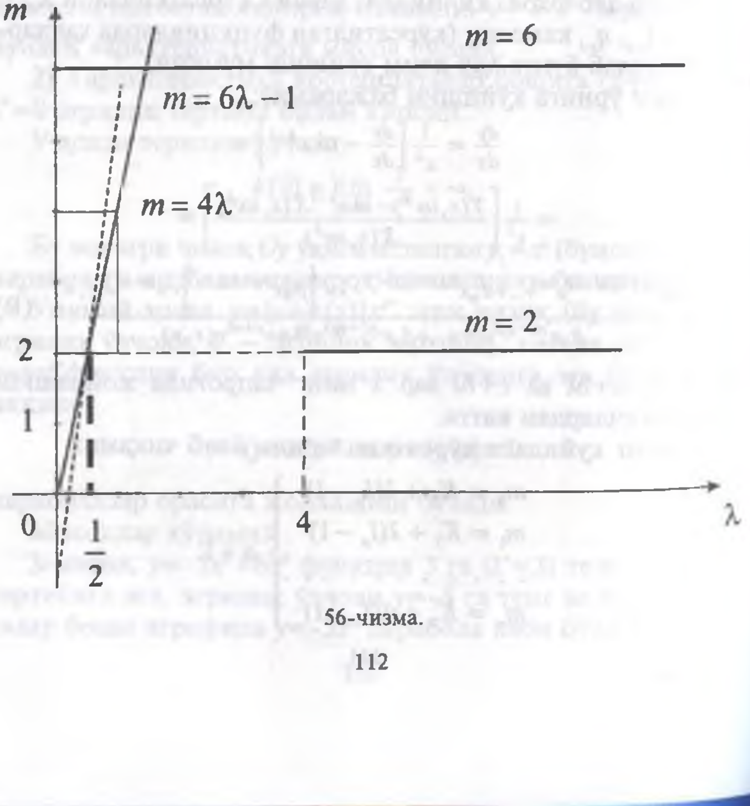
$x$ нинг қуйидаги кўрсаткичларини ёзиб чиқамиз:

$$\left.\begin{aligned} m_0 &= K_0 + \lambda(l_n - 1) \\ m_1 &= K_1 + \lambda(l_n - 1) \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ m_n &= K_n + \lambda(l_0 - 1) \end{aligned}\right|\ n+1$$

$$\left.\begin{array}{l} m_{n+1} = P_0 + \lambda q_s - 1 \\ m_{n+2} = P_1 + \lambda q_{s-1} - 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ m_{n+s+1} = P_s + \lambda q_0 - 1 \end{array}\right\} (s+1)$$

$(\lambda,\ m)$ текисликда характеристикалардан тузилган синиқ чизиқни ясаймиз (56-чизма), бу ерда абсциссалар ўқи бўйлаб $\lambda$, ординаталар ўқи бўйлаб эса $m$ ҳарфи даражалари қўйилган. Биринчи $n+1$ та тўғри чизиқлар гуруҳи ўзаро устма-уст тушмайди, бироқ кейинги $s+1$ та тўғри чизиқларнинг айрим гуруҳлари билан устма-уст тушиши мумкин, бу эса махсус ҳол ҳисобланади.

$K_p$, $P_i$ ва $l_{n-1}$, $q_{s-i}$ коэффициентларнинг хоссалари туфайли характеристик синиқ чизиқ қаварик бўлади ва унинг учларининг энг қуйиси ё биринчи чизиқнинг охири (A) да, ё охирги чизиқнинг боши (B) да бўлади, ёки $A$ ва $B$ лар бир хил баландликда бўлади.



56-чизма.

$\lambda=\lambda_x$ ординатаси $m_x$ энг кичик бўлган учнинг абсциссасига мос келсин. У ҳолда сурат ва махражни $x^{m_x}$ га қисқартириб, суратда камида иккита ҳад $x$ кўпайтувчига эга бўлмаслигига эришамиз, махражда эса $x$ ни бирор $\mu$ даражасида кўпайтувчи шаклда ёзиш мумкин:

$$\frac{du}{dx}=\frac{Mu^{\rho}+Nu^{l}+\ldots+H(x,u)}{x^{\mu}E(x,u)}.$$

Бу тенглама Брио-Буке кўринишдаги умумлашган тенгламадир.

**5-мисол.** Ушбу

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y^5+3x^6y}{2y^6+2x^3}$$

дифференциал тенглама учун (0, 0) махсус нуқтанинг турини аниқланг.

Ечиш. Ушбу ўрнига қўйишни бажарамиз:

$$y=ux^{\lambda},\ \frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}x^{\lambda}+\lambda ux^{\lambda-1}.$$

Берилган тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x^{\lambda}}\left(\frac{dy}{dx}-\lambda ux^{\lambda-1}\right)=\frac{1}{x^{\lambda}}\left(\frac{2u^5x^{4\lambda}+3x^{6+\lambda}u}{2u^6x^{6\lambda}+2x^3}-\lambda ux^{\lambda-1}\right)=$$

$$=\frac{2u^5x^{4\lambda}+3x^6u-\lambda 2u^7x^{6\lambda-1}-2\lambda ux^2}{2u^6x^{6\lambda}+2x^3}. \qquad \text{(A)}$$

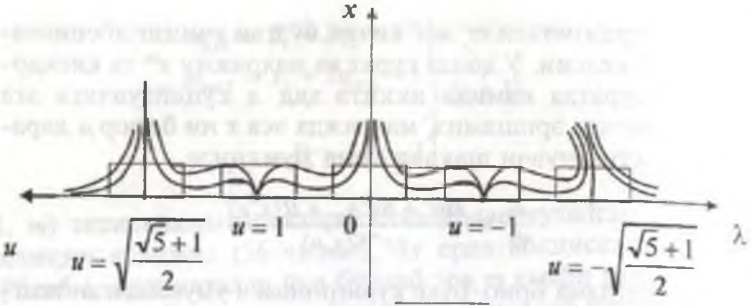
Суратда $x$ нинг даражаларидан иборат

$$m=4\lambda,\ m=6,\ m=6\lambda-1,\ m=2$$

бўлган тўғри чизиқ кесмаларидан тузилган синиқ чизиқни ясаймиз. Синиқ чизиқнинг энг қуйи учига $\lambda=\frac{1}{2}$ мос келади (57-чизма).

Дастлаб, (A) га $\lambda=\frac{1}{2}$ ни қўйиб уни текширамиз. $y=ux^{\frac{1}{2}}$ деб, ўрнига қўйишни бажариб

$$\frac{du}{dx}=\frac{2u^5x^2+3x^6u-u^7x^2-ux^2}{2u^6x^3+2x^3}=\frac{-(u-2u^5+u^7)+3x^4u}{2x(u^6+1)}$$



57-чизма.

ни ҳосил қиламиз. Натижада Брио-Буке туридаги тенгламани ҳосил қилдик.

$-(u^7+2u^5+u)$ кўпҳад қуйидаги кўпайтувчиларга ажралади:

$$-(u^7-2u^5+u)=$$

$$=-u(u-1)(u+1)\times\left(u-\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\right)\left(u+\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\right)\left(u^2+\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right).$$

Кетма-кет қуйидагича ўрнига қўйишни бажарамиз:

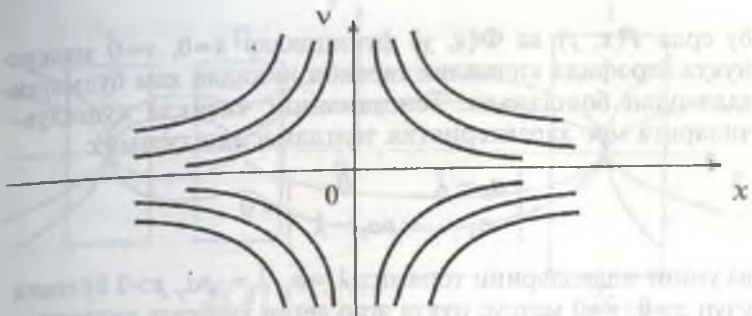
1) $\bar{u}=u$; 2) $\bar{u}=u$-1; 3) $\bar{u}=u+1$;

4) $\bar{u}=u-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$; 5) $\bar{u}=u+\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$

ва $\bar{u}$ нинг биринчи даражаси олдидаги коэффициентларнинг ишораларини аниқлаймиз, яъни 1), 4) ва 5) ҳолларда коэффициентлар манфий, 2) ва 3) ҳолларда эса мусбат эканлигини аниқлаймиз. Демак, *Oxu* текисликда (0, 0), $\left(0,\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\right)$, $\left(0,-\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\right)$ махсус нуқталарга иккинчи тур нормал соҳалар ($a_0<0$, $k=2m+1$) мос келади, (0, 1), (0, −1) махсус нуқталарга эса биринчи тур нормал соҳалар мос келади (58-чизма).

Ушбу тенглама берилган бўлсин:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2f_1(x,y)+yx^pf_2(x,y)+x^{2p}f_3(x,y)}{yf_4(x,y)+x^pf_5(x,y)},$$



58-чизма.

бу ерда $f_k(x, y)$ — аналитик функциялар ($k=\overline{1,5}$). Бу тенгламада $y=ux^p$ ўрнига қўйишни бажарсак, натижада юқорида қўрилган турдаги тенгламага эга бўламиз, яъни $a_k=f_k(0, 0)$ деб белгилаймиз ва қуйидаги ўрнига қўйишни бажарамиз:

$$y = vx^p, \ \frac{dy}{dx} = x^p \frac{dv}{dx} + pvx^{p-1} =$$

$$= \frac{v^2x^{2p}f_1(x, vx^p) + vx^{2p}f_2(x, vx^p) + x^{2p}f_3(x, vx^p)}{x^pvf_4(x, vx^p) + x^pf_5(x, vx^p)}.$$

Касрнинг сурат ва махражини $x^p$ га, сўнгра тенгламанинг иккала қисмини $x^{p-1}$ га қисқартирамиз:

$$x\frac{dv}{dx} + pv = \frac{v^2xf_1(x, vx^p) + vxf_2(x, vx^p) + xf_3(x, vx^p)}{vf_4(x, vx^p) + f_5(x, vx^p)}.$$

Бу ердан

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}\left[\frac{-pvf_5(x, \ vx^p) - pv^2f_4(x, \ vx^p) + xf_3(x, \ vx^p)}{f_5(x, \ vx^p) + vf_4(x, \ vx^p)} + \right.$$

$$\left. + \frac{vf_2(x, \ vx^p) + v^2xf_1(x, \ vx^p)}{f_5(x, \ vx^p) + vf_4(x, \ vx^p)}\right].$$

$a_3 \neq 0$, $a_5 \neq 0$ деб оламиз ва охирги тенгламани ушбу кўринишда ёзиб оламиз:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{a_3x - pa_5v + F(x, v)}{a_5x + \Phi(x, \ v)},$$

бу ерда $F(x, y)$ ва $\Phi(x, y)$ функциялар $x=0$, $v=0$ махсус нуқта атрофида кичиклик тартиби иккидан кам бўлмаган ҳадлардан бошланади. Тенгламанинг чизиқли қўшилувчиларига мос характеристик тенгламасини тузамиз:

$$\begin{vmatrix} a_5 - \lambda & 0 \\ a_3 & -pa_5 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ва унинг илдизларини топамиз: $\lambda_1 = a_5$, $\lambda_2 = -pa_5$. $p>0$ бўлгани учун $x=0$, $v=0$ махсус нуқта эгар деган хулосага келамиз.

Чизиқлаштирилган

$$\frac{dv}{dx} = \frac{a_3x - pa_5v}{a_5x}$$

тенгламанинг сепаратриссалари $x=0$ ва $v = \frac{a_3x}{a_5(p+1)}$ тўғри чизиқлардан иборат бўлади.

Мисол тариқасида юқорида кўрилган ушбу тенгламани қараймиз:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^3 + 3yx^6}{2y^6 + 3yx^3}. \tag{A}$$

(A) тенглама учун $y=vx^3$ ўрнига қўйишни бажариб

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}x^3 + 3vx^2 = \frac{2v^5x^{15} + 3vx^9}{2v^6x^{18} + 2x^3}$$

ни ҳосил қиламиз.

Тегишли қисқартиришлар ва содда шакл алмаштиришлардан сўнг

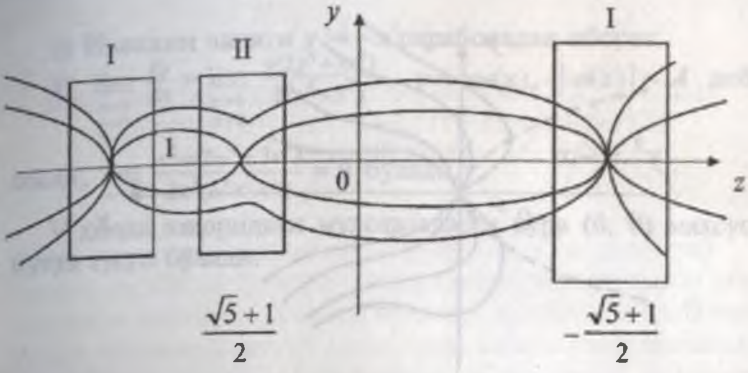
$$\frac{dv}{dx} = \frac{-6v + 3vx^4 + 2v^5x^{10} - 6v^6 - x^{15}}{2x(1 + v^6x^{15})} \tag{Б}$$

ни ҳосил қиламиз. Чизиқли қисми учун $\frac{dv}{dx} = -\frac{3v}{x}$ тенгламанинг ечими гиперболик типдаги $v=cx^{-3}$ ва $x=0$ эгри чизиқлар оиласи бўлади (59-чизма).

Агар (A) тенгламани

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y^6 + 2x^3}{2y^5 + 3yx^6} \tag{B}$$

кўринишда ёзилса ва (B) тенглама учун



59-чизма.

$$x = zy^2; \quad \frac{dx}{dy} = 2yz + y^2 \cdot \frac{dz}{dy}$$

ўрнига қўйишлар бажарилса, баъзи шакл алмаштиришлардан сўнг қуйидаги тенгламани ҳосил қилишимизни айтиб ўтиш фойдадан ҳоли эмас:

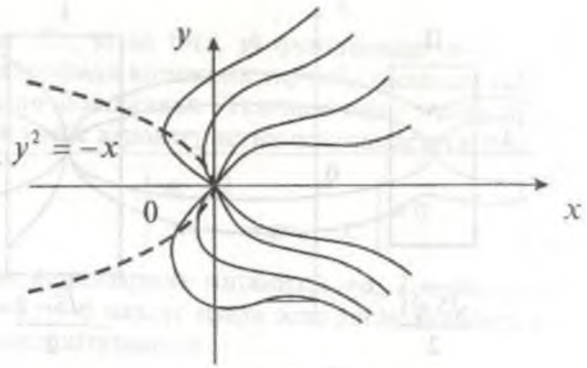
$$\frac{dz}{dy} = \frac{2(z^3 - 2z + 1) - 6y^8 z^7}{y(2 + 3y^8 z^6)} =$$

$$= \frac{2(z-1)\left(z + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(z + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - 6y^8 z^7}{y\,(2 + 3y^8 z^6)}. \quad (\text{Г})$$

$(0, 1), \left(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right), \left(0, -\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ нуқталар $Oyz$ текисликдаги махсус нуқталар бўлади ва

1) $\bar{z} = z - 1$, 2) $\bar{z} = z + \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, 3) $\bar{z} = z + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

шакл алмаштиришлардан сўнг $\bar{z}$ нинг биринчи даражаси олдидаги коэффициентларнинг ишораларига қараб (0, 1) ва $\left(0, -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ нуқталарга биринчи тур нормал соҳалар мос келишини, $\left(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ нуқтага эса иккинчи тур нормал соҳа мос келиши аниқланади. (Г) тенглама $y$ ўзгарувчига нис-



60-чизма.

батан жуфт эканини ҳисобга олиб характеристикаларнинг текисликдаги манзарасига эга бўламиз (60-чизма). $\lim\limits_{y\to 0} \frac{x}{y^2} = \lim\limits_{y\to 0} z$ тенгликдан $z=1,\ \frac{\sqrt{5}-1}{2},\ -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ бўлганда $x$ ва $y^2$ ўзгарувчилар биринчи (иккинчи) тартибли чексиз кичик миқдор бўлади. Бу (0, 0) махсус нуқта $Oxy$ текисликда тугун бўлишини билдиради, буни (А) тенгламанинг характеристикасини ясаш билан ҳам тасдиқлаш мумкин.

Берилган (А) тенгламанинг характеристикаларига кўра $y=\varphi(x,\ c)$ эгри чизиқлар оиласини ясаш учун ушбу лимит муносабатдан фойдаланамиз:

$$\lim_{x\to 0} \frac{y}{x^3} = \lim_{x\to 0} v(x) = \infty .$$

Бу интеграл эгри чизиқлар оиласи учдан кичиклик тартибига эга бўлишини ёки $x=0$ атрофида кичик функция бўлмаслигини билдиради.

Яна шуни қайд қиламизки,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(2y^4 + 3x^6)}{2(y^6 + x^3)}$$

тенглама қуйидаги хоссаларга эга:

1) Тенглама $y$ га нисбатан жуфт.

2) Ҳосила $(x > 0,\ y > 0)$, $(x < 0,\ y > \sqrt{-x})$, $(x < 0,\ \sqrt{-x} < y < 0)$ соҳаларда мусбат, $(x > 0,\ y < 0)$ ва $(x < 0, 0 < y < \sqrt{-x})$, $(x < 0,\ y < -\sqrt{-x})$ соҳаларда манфий ва $y=0$ да нолга тенг бўлади.

3) Изоклин чизиғи $y^2 = -x$ параболадан иборат.

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{y(2y^4+3x^6)}{2(y^6+x^3)}$, $y = x\omega(x)$, $|\omega(x)| < A$ деб олсак, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^5\omega(2\omega^4+3x^2)}{2x^3(\omega^6x^3+1)} = 0$ бўлади.

У ҳолда юқоридаги мулоҳазаларга кўра (0, 0) махсус нуқта тугун бўлади.

## II БОБ

# ЧЕКСИЗЛИКДАГИ МАХСУС НУҚТАЛАР ВА УЛАР АТРОФИДА ИНТЕГРАЛ ЧИЗИҚЛАРНИНГ МАНЗАРАСИ

Биринчи бобда дифференциал тенгламаларнинг интеграл чизиқларини (ечимларини) геометрик нуқтаи назардан *Oxy* текислигида ўрганган эдик. Бу кўрилган текислик чексизликдаги махсус нуқталарни ўз ичига олмайди. Аммо проектив текисликлар чексизликдаги махсус нуқталарни ўз ичига олади. Масалан, сфера (текислиги) бунга мисол бўлади.

Дифференциал тенгламалар ечимларининг манзарасини ўрганишда турли усуллардан фойдаланиш мумкин. Бу бобда А. Пуанкаре ва М. Бендиксон усуллари билан танишамиз.

### 1-§. ПУАНКАРЕ СФЕРАСИ

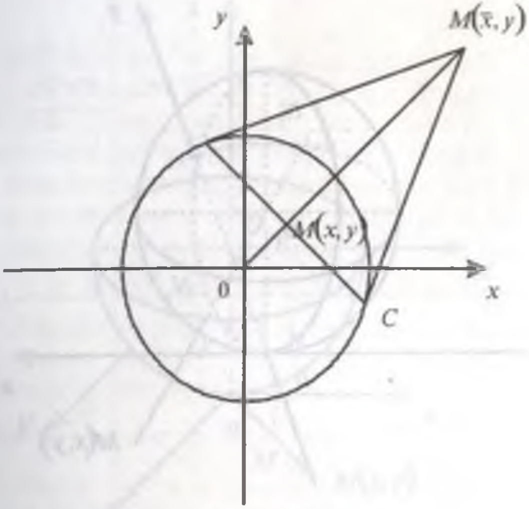
Ушбу

$$x = \frac{\bar{x}}{\bar{x}^2+\bar{y}^2}, \quad y = \frac{\bar{y}}{\bar{x}^2+\bar{y}^2}; \quad \bar{x} = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \bar{y} = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad (1.1)$$

Бендиксон шакл алмаштиришлари мавжуд бўлиб, у *Oxy* текислигидан чексиз узоқлашган махсус нуқталарни $O\bar{x}\bar{y}$ текислигида аниқлаб беради.

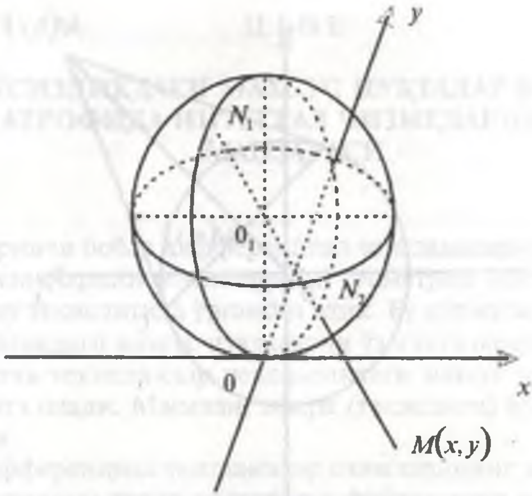
Геометрик жиҳатдан бундай алмаштиришлар тескари радиуслар билан шакл алмаштиришлар деб ҳам аталади (61-чизма).

Аммо, бу (1.1) шакл алмаштириш содда бўлиб кўринса-да, $O\bar{x}\bar{y}$ текислигида юқори тартибли мураккаб махсус нуқталарга олиб келади. Бундай махсус нуқталарни ўрганиш жуда мураккаб бўлгани учун Бендиксон усули кам самаралидир. Шунинг учун унинг ўрнига ғоясига кўра анча мураккаб, лекин анча содда ечимга олиб келувчи Пуанкаре шакл алмаштиришларидан фойдаланиш анча қулайдир. Унинг геометрик маъноси қуйидагидан иборат.



61-чизма.

Фараз қилайлик, $D$ текислик ва унда $M(x, y)$ нуқта берилган бўлсин. $D$ текисликка параллел бўлган текислик билан иккита яримсферага ажратилган сферани қараб чиқамиз. У экватор текислиги деб аталади (62-чизма). Агар сфера марказини $M(x, y)$ нуқта билан тўғри чизиқ орқали туташтирсак, у сферани $N_1N_2$ диаметрнинг турли учларида ётган икки $N_1$ ва $N_2$ нуқтада кесиб ўтади. $D$ текисликдаги ҳар қандай тўғри чизиқ шу сферанинг катта доирасига проекцияланади. Текислик характеристикалари сферанинг тегишли характеристикаларига ўтади, бунда махсус нуқталарнинг турлари (тугунлар, эгарлар, фокуслар ва ҳ.к.) шакл алмаштириш натижасида сақланади. Бироқ сферада экваторда ётувчи янги махсус нуқталар пайдо бўлиши мумкин. Улар $Q(x, y)=0$ ва $P(x, y)=0$ эгри чизиқларнинг кесишиш нуқталари бўла олмайдилар, лекин координаталар бошидан чексиз узоқлашганда характеристикаларнинг ҳолати билан белгиланадилар. Шундай қилиб, экваторга текисликнинг чексиз узоқлашган нуқталари аксланади. Бундай ҳодиса *гномоник* проекция, сферанинг ўзи эса *Пуанкаре сфераси* деб аталади. Демак, Пуанкаре шакл алмаштиришининг геометрик маъноси $Oxy$ текисликни унга координаталар бошида уринувчи сферага акслантиришдан



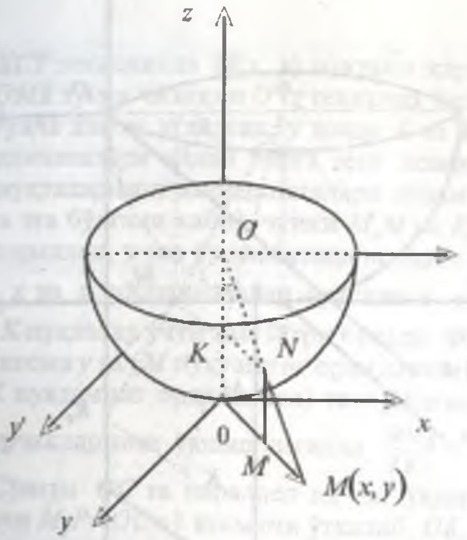
62-чизма.

иборат. Биз $Oxy$ текисликда интеграл эгри чизиқларнинг манзараси ҳақида сферанинг қуйи ярим шарини $O_1$ нуқтадан қараб (63-чизма) ва қуйи ярим шарни қуйи нуқтага уринма текисликка ортогонал проекциялаб аниқ тасаввурга эга бўлишимиз мумкин. Шундай қилиб, $Oxy$ текисликдаги ҳар бир $M(x, y)$ нуқтага қуйи ярим сферадаги $N(x', y', z')$ нуқта мос келади, охиргисига эса координаталари $N(x', y', z')$ нуқтаники каби $x'$ ва $y'$ бўлган $M'(x', y')$ нуқта мос келади. $Oxy$ текисликда жойлашган ҳамма $M'(x', y')$ нуқталар $x^2+y^2=1$ Пуанкаре доираси айланаси нуқталари ярим сфера экватори нуқталарига $Oxy$ текисликнинг чексиз узоқлашган нуқталарига мос келади. Шундай қилиб, $Ox'y'$ текислик $Oxy$ текисликнинг бирор қисми, Пуанкаре доирасининг ичига олинган қисми ҳисобланади. $M(x, y)$ нуқталарни $M'(x', y')$ нуқталарга ўтказувчи формулалар осон чиқарилади. 63-чизмадан қуйидагига эга бўламиз:

$$OM = OO_1, \ \mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}\alpha; \ OM' = KH = O_1N\sin\alpha = \sin\alpha.$$

Булардан

$$OM' = \frac{OM}{\sqrt{1+(OM)^2}}$$



63-чизма.

га эга бўламиз. $OM'$ ва $OM$ ларни $Ox$ ва $Oy$ ўқларга проекциялаб ва $(OM)^2=x^2+y^2$ ни билган ҳолда

$$x' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}},\ y' = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \qquad (1.2)$$

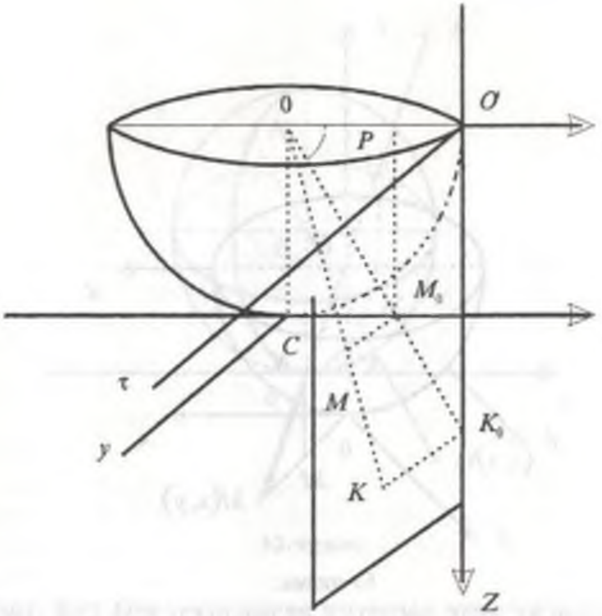
ни ҳосил қиламиз. Аммо бу формулалар амалий жиҳатдан унча қулай эмас, чунки у илдизга эга. Шунинг учун А. Пуанкаре бошқа формулалардан, хусусан

$$x = \frac{1}{z},\ \ y = \frac{t}{z} \qquad (1.3)$$

формулалардан фойдаланишни таклиф этади.

Бу формулани келтириб чиқариш мавжуд математикага оид адабиётларда ва шу жумладан А. Пуанкаренинг асарларида ҳам йўқлиги учун, уни биз келтириб чиқарамиз.

Ярим сферанинг энг четки ўнг $O'$ нуқтасидан учта ўзаро перпендикуляр тўғри чизиқлар ўтказамиз: ярим сферага $O'$ нуқтада уринувчи $O'z$ тик чизиқни, $O'z$ чизиқ текислигига перпендикуляр ва $O'$ нуқта ва ярим сферанинг маркази $O$ орқали ўтувчи $O'z$ горизонтал чизиқ бўлсин (64-чизма). Бу уч тўғри чизиқ, учта ўзаро перпендикуляр



64-чизма.

текисликни аниқлайди: горизонтал $O'x_1\tau$, фронтал $O'y_1\tau$ ва ён $O'\tau z$. Бундан ташқари чизмадаги $O'x\tau$ га параллел ва ярим сферанинг энг қуйи $C$ нуқтасига уринувчи $Oxy$ текислик мавжуд. $Oxy$ текисликда $Cx$ ўқида жойлашган $M_0$ нуқтани қараймиз, бунда бу нуқтанинг $x$ абсциссаси $x_0$ га тенг (агар $C$ нуқтани бошланғич нуқта деб қабул қилинса), $y$ ординатаси эса нолга тенг. $OM_0K_0$ тўғри чизиқни $O$ ва $M_0$ нуқталардан бу тўғри чизиқнинг $O'\tau z$ текислик билан қуйи ярим ўқи $Ox$ билан кесишиш нуқтаси $K_0$ орқали ўтказиб, шу тарзда $O\tau z$ текисликда $K_0$ нуқтани аниқлаймиз, бунда шу нуқтанинг $z$ координатаси $K_0O'$ кесмага тенг.

$O'OK_0$ учбурчакдан

$$K_0O' = OO'\,\mathrm{tg}\alpha \quad \text{ёки} \quad Z=\mathrm{tg}\alpha$$

ни ҳосил қиламиз. Шунингдек $OM_0C$ учбурчакдан:

$$CM_0' = OC\,\mathrm{ctg}\alpha, \text{ яъни } x = \mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}.$$

Демак, $x = \frac{1}{z}$ га эга бўламиз.

Энди $XCY$ текисликда $M(x, y)$ нуқтани қараб чиқамиз. Агар биз $OMK$ тўғри чизиқни $O'\tau z$ текислик билан $K$ нуқтада кесишгунча давом этдирсак, у ҳолда $K$ ва $K_0$ нуқталарнинг координаталари айнан бирга тенг эканини кўрамиз ($M$ ва $M_0$ нуқталарнинг координаталари айнан битта $x$ координатага эга бўлгани каби), чунки $M_0M$ ва $K_0K$ кесмалар $Oy$ ўқига параллел, у эса ўз навбатида $o\tau$ ўқига параллел.

Демак, $x$ ва $y$ координаталар орасидаги $y = \frac{1}{z}$ боғланиш $M$ ва $K$ нуқталар учун ҳам тўғри бўлади. Фараз қилайлик, $M_0M$ кесма $y$ га ($M$ нуқтанинг ординатаси), $K_0K$ кесма эса $\tau$ га ($K$ нуқтанинг ординатаси) тенг бўлсин. $OMM_0$ ва $OKK_0$ учбурчакларнинг ўхшашлигидан $\frac{MM_0}{KK_0} = \frac{OM_0}{OK_0}$ га эга бўламиз. Сўнгра $OC$ га параллел ва $OX_i$ ўқни $P$ нуқтада кесиб ўтувчи $M_0P= OC=1$ кесмани ўтказиб, $OK_0O'$ ва $OPM_0$ учбурчакларнинг ўхшашлигидан

$$\frac{MM_0}{KK_0} = \frac{PM_0}{O'K_0}, \quad \text{яъни} \quad \frac{y}{\tau} = \frac{1}{z}$$

тенгликка эга бўламиз. Бундан $y = \frac{\tau}{z}$. Шундай қилиб, $Oxy$ текисликдаги $M$ нуқтанинг $x$ ва $y$ координаталари билан $z$ ва $\tau$ координаталар (унинг тасвири $O\tau z$ текисликда) ўртасида боғланиш мавжуд экан, яъни (1.3) алмаштиришни ҳосил қилдик:

$$x = \frac{1}{z}, \; y = \frac{\tau}{z}, \tag{1.3}$$

шакл алмаштириш $Oxy$ текисликнинг ҳамма нуқталарини ўз ичига олади (бундан $Oy$ ўқида ётган нуқталар мустасно). Бу нуқталарни ўрганиш учун бошқа шакл алмаштириш киритилади:

$$x = \frac{\mu}{z}, \; y = \frac{1}{z}, \tag{1.4}$$

бу шакл алмаштириш, агар $Ox$ ва $Oy$ ўқларнинг ўринлари алмаштирилса, (1.3) каби ҳосил қилинади. $O'\tau z$ текисликда характеристикаларни тадқиқ қилиш амалий жиҳатдан ноқулай бўлгани учун бу характеристикаларни Пуанкаренинг қуйи ярим сферасига проекциялаймиз. Шундай қилиб, $x$ ва $y$ координаталардан Пуанкаре доирасидаги аввал $x$ ва $\tau$ координаталарга ўтамиз, кейин $x'$ ва $y'$ координаталарга ўтамиз. $Oxy$, $O'\tau z$ ва $Ox'y$ текисликлардаги ва ярим сферадаги характеристикаларнинг ва алоҳида нуқталарнинг топологик манзараси устма-уст тушгани учун, биз Пуанкаре доираси $Ox'y'$ текислиги характеристикаларини қараб чиқиш билан бирга (1.3) ёки (1.4) шакл алмаштиришлардан фойдаланамиз.

## 2-§. ЭКВАТОРДАГИ МАХСУС НУҚТАЛАРНИНГ ЖОЙЛАШИШИ ТЎҒРИСИДА

Ушбу дифференциал тенглама

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q(x,\ y)}{P(x,\ y)} \tag{2.1}$$

ёки унга эквивалент бўлган

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\sum\limits_{i+j=0}^{2}a_{ij}x^iy^j=P(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt}=\sum\limits_{i+j=0}^{2}b_{ij}x^iy^j=Q(x,y) \end{cases} \tag{2.2}$$

системани қараймиз, бунда $a_{ij}$, $b_{ij}$ — ўзгармас коэффициентлар.

(2.2) системага (1.3) алмаштиришни қўллаб

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt}&=-z^2P\left(\frac{1}{z},\ \frac{\tau}{z}\right), \\ \frac{d\tau}{dt}&=-\tau zP\left(\frac{1}{z},\ \frac{\tau}{z}\right)+zQ\left(\frac{1}{z},\ \frac{\tau}{z}\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

ни ҳосил қиламиз. (2.3) дан $t$ вақтни йўқотсак:

$$\frac{dz}{d\tau}=\frac{-z}{\dfrac{Q\left(\frac{1}{z},\ \frac{\tau}{z}\right)}{P\left(\frac{1}{z},\ \frac{\tau}{z}\right)}-\tau} \tag{2.4}$$

тенгламага эга бўламиз.

Агар (2.4) тенгламада $Q\left(\frac{1}{z},\ \frac{\tau}{z}\right)=\tau P\left(\frac{1}{z},\ \frac{\tau}{z}\right)$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $z=0$ тенглама билан аниқланган экватор характеристика бўлади ва экваторда ётувчи махсус нуқталар сони

$$Z = 0, \quad \frac{Q\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right)}{P\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right)} = \tau \tag{2.5}$$

тенгликларни қаноатлантирувчи нуқталар сони орқали топилади.

Шунингдек, (2.2) системага (1.4) алмаштиришни қўллаб

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = -z^2 Q\left(\dfrac{\mu}{z}, \dfrac{1}{z}\right), \\ \dfrac{d\mu}{dt} = -\mu z Q\left(\dfrac{\mu}{z}, \dfrac{1}{z}\right) + zP\left(\dfrac{\mu}{z}, \dfrac{1}{z}\right) \end{cases} \tag{2.6}$$

ни ҳосил қиламиз. (2.6) дан $t$ вақтни йўқотсак:

$$\frac{dz}{d\mu} = \frac{-z}{\dfrac{P\left(\frac{\mu}{z}, \frac{1}{z}\right)}{Q\left(\frac{\mu}{z}, \frac{1}{z}\right)} - \mu} \tag{2.7}$$

тенгламага эга бўламиз.

Агар

$$Z = 0, \quad \frac{P\left(0, \frac{1}{z}\right)}{Q\left(0, \frac{1}{z}\right)} = \mu \tag{2.8}$$

шарт бир пайтда бажарилса, у ҳолда $y$ ўқи охирларида ётувчи махсус нуқталар мавжуд. Янги $zdt_1 = dt$ вақтни киритиб ва унинг учун аввалги белгилашларни қолдириб, қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = -\sum\limits_{i+j=0}^{2} a_{ij} z^{2-i-j} \tau^j, \\ \dfrac{d\tau}{dt} = -\sum\limits_{i+j=0}^{2} a_{ij} z^{2-i-j} \tau^{j+1} + \sum\limits_{i+j=0}^{2} b_{ij} z^{2-i-j} \tau^j. \end{cases} \tag{2.9}$$

Экватордаги махсус нуқталарнинг координаталари $\tau_k = \tau$ бўлсин. $\tau = u + \tau_k$ кўчириш ёрдамида ушбу системани ҳосил қиламиз:

$$
\begin{gathered}
\frac{dz}{dt} = -Z[a_{20} + a_u\tau_K + a_{02}\tau_K^2 + (a_{10} + a_{01}\tau)z + (a_{11} + 2a_{02}\tau_K) + \\
+a_{00}z^2 + a_{01}zu + a_{02}u^2], \\
\frac{du}{dt} = -\{[a_{02}\tau_K^3 + (a_{11} - b_{02})\tau_K^2 + (a_{20} - b_{11})\tau_K - b_{20}] + \\
+[a_{01}\tau_K^2 + (a_{10} - b_{01})\tau_K - b_{20}]z + \\
+[3a_{02}\tau_K^2 + 2(a_{11} - b_{02})\tau_K + (a_{20} - b_{11})]u - (b_{00} - a_{00}\tau_K)z^2 - \\
-(b_{01} - a_{10} - 2a_{01}\tau_K)zu - (b_{02} - a_{11} - 3a_{02}\tau_K)u^2 + \\
+a_{00}z^2u + a_{01}zu^2 + a_{02}u^3\}.
\end{gathered}
\tag{2.10}
$$

$y$ ўқидан чексиз узоқлашган махсус нуқталарни аниқлаш учун $\mu = \nu + \mu_K$ кўчиришни бажариб, қуйидаги системага эга бўламиз:

$$
\begin{gathered}
\frac{dz}{dt} = -z[b_{02} + b_{11}\mu_K + b_{20}\mu_K^2 + (b_{01} + b_{10}\mu_K)z + \\
+(b_{11} + 2b_{20}\mu_K)\nu + b_{00}\nu z + b_{20}\nu^2], \\
\frac{d\nu}{dt} = -\{[b_{20}\mu_K^3 - (a_{20} - b_{11})\mu_K^2 - (a_{11} - b_{02})\mu_K - a_{02}] - \\
-[a_{01} + (a_{10} - b_{01})\mu_K - b_{10}\mu_K]z + \\
+[3b_{20}\mu_K^2 - 2(a_{20} - b_{11})\mu_K - (a_{11} - b_{02})]\nu - (a_{00} - b_{00}\mu_K)z^2 - \\
-(a_{10} - b_{01} - 2b_{10}\mu_K)\nu z - (a_{20} - b_{11} - 3b_{20}\mu_K)\nu^2 + b_{00}z^2\nu + \\
+b_{10}z\nu^2 + b_{20}\nu^3\}.
\end{gathered}
\tag{2.11}
$$

(2.10) системанинг иккинчи тенгламасида қавсларни очиб чиқилса, у $\tau_K$ га нисбатан учинчи даражали кўпҳаддан иборат бўлади. Уни $\Phi_3(\tau_K)$ билан белгилаймиз. $\Phi_3(\tau_K)=0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизлари экватордаги махсус нуқталарнинг координаталарини беради:

$$
\Phi_3(\tau_K) = a_{02}\tau_K^3 + (a_{11} - b_{02})\tau_K^2 + (a_{20} - b_{11})\tau_K - b_{20}, \tag{2.12}
$$

бунда $\tau_K = \frac{y}{x}$.

*y* ўқдан чексиз узоқлашган махсус нуқталарга мос келувчи экватордаги нуқталар ҳам худди юқоридагига ўхшаш топилади:

$$\Phi_3(\mu_K) = b_{20}\mu_K^3 + (a_{20} - b_{11})\mu_K^2 + (a_{11} - b_{20})\mu_K - a_{02}, \qquad (2.13)$$

бунда $\mu_K = \frac{y}{x}$.

(2.10) система характеристик тенгламасининг илдизлари қуйидагига тенг:

$$\begin{aligned} &\lambda_1(\tau_K) = -(a_{02}\tau_K^2 + a_{11}\tau_K + a_{20}) = -P_2(1, \tau_K), \\ &\lambda_2(\tau_K) = -[3a_{02}\tau_K^2 + 2(a_{11} - b_{20})\tau_K + (a_{20} - b_{11})] = -\Phi_3'(\tau_K) \end{aligned} \qquad (2.14)$$

$\mu_K=0$ нуқта атрофини ўрганиш учун улар шунга ўхшаш ҳосил қилинади:

$$\begin{aligned} &\lambda_1(\mu_K) = -(b_{20}\mu_K^2 + b_{11}\mu_K + b_{02}) = -Q_2(\mu_K, 1), \\ &\lambda_2(\mu_K) = -[3b_{20}\mu_K^2 + 2(a_{20} - b_{11})\mu_K + (a_{11} - b_{02})] = -\Phi_3(\mu_K), \end{aligned} \qquad (2.15)$$

бу ерда $\Phi_3'(\tau_K)[\Phi_3'(\mu_K)]$ ҳосилалар $\Phi_3(\tau_K)[\Phi_3(\mu_K)]$ функцияларнинг $\tau_K(\mu_K)$ ўзгарувчи бўйича ҳосиласи.

Хусусан, $\tau_K=0$ нуқта махсус нуқта бўлиши учун $b_{20}=0$ бўлиши керак. У ҳолда

$$\lambda_1 = -a_{20}, \lambda_2 = b_{11} - a_{20};$$

$\mu_K=0$ нуқта махсус нуқта бўлиши учун $a_{20}=0$ бўлиши керак. У ҳолда

$$\lambda_1 = -b_{02}, \lambda_2 = a_{11} - b_{02}.$$

(2.12) тенглама учун $\tau_K = \Phi_K - \frac{(a_{11} - b_{02})}{3a_{02}}$ ўрнига қўйишни бажарсак, у ҳолда қуйидагига эга бўламиз:

$$\Psi_K^3 + P\Psi_K + q = 0,$$

бу ерда

$$P = \frac{-(a_{11} - b_{02})^2 + 3a_{02}(a_{20} - b_{11})}{3a_{02}^2},$$

$$q = \frac{2(a_{11} - b_{02})^3 - 9a_{02}(a_{11} - b_{02})(a_{20} - b_{11}) - 27b_{20} \cdot a_{02}^2}{27a_{02}^3}.$$

Дискриминант қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\Delta(\tau_K) = \frac{\left[2(a_{11}-b_{02})^3 - 9a_{02}(a_{11}-b_{02})(a_{20}-b_{11}) - 27b_{20}\cdot a_{02}^2\right]^2}{2916\,a_{02}^6} + \\ + \frac{4\left[3a_{02}(a_{20}-b_{11})-(a_{11}-b_{02})^2\right]^3}{2916\,a_{02}^6}. \tag{2.16}$$

Шунга ўхшаш (2.13) тенглама учун қуйидагига эга бўламиз:

$$\mu_K = Q_K + \frac{a_{20}-b_{11}}{3b_{20}},$$

$$Q_K^3 + pQ_K + q = 0,$$

бунда

$$P = -\frac{(a_{20}-b_{11})^2 + 3b_{20}(a_{11}-b_{02})}{3b_{20}^2},$$

$$q = -\frac{2(a_{20}-b_{11})^3 - 9b_{20}(a_{20}-b_{11})(a_{11}-b_{02}) + 27a_{02}b_{20}^2}{27b_{20}^3}.$$

Дискриминант қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\Delta(\mu_K) = \frac{\left[2(a_{20}-b_{11})^3 + 9b_{20}(a_{20}-b_{11})(a_{11}-b_{02}) + 27a_{02}b_{02}^2\right]^2}{2916\,a_{20}^6} + \\ - \frac{4\left[(a_{20}-b_{11})^2 + 3b_{20}(a_{11}-b_{02})^2\right]^3}{2916\,a_{20}^6}. \tag{2.17}$$

(2.12) ва (2.13) тенгламаларни бошқа мулоҳазалар бўйича ҳам ҳосил қилишимиз мумкин. Ҳақиқатан, (2.1) тенгламани

$$Q(x,y)dx - P(x,y)dy = 0 \tag{2.18}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

$x = \frac{x_1}{z}$, $y = \frac{y_1}{z}$ алмаштиришни киритамиз, бундан $\tau = \frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}$, $\mu = \frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1}$.

Бу алмаштиришдан сўнг (2.18) тенглама

$$z\overline{P}dy_1 - z\overline{Q}\,dx_1 + \left(x_1\overline{Q} - y_1\overline{P}\right)dz = 0\,, \qquad (2.19)$$

кўринишга келади, бу ерда

$$\overline{Q}\left(\frac{x_1}{z}, \frac{y_1}{z}\right) = \frac{1}{z^2}\,(b_{00}z^2 + b_{10}zx_1 + b_{10}zy_1 + b_{11}x_1y_1 + b_{20}x_1^2 + b_{02}y_1^2)\,,$$

$$\overline{P}\left(\frac{x_1}{z}, \frac{y_1}{z}\right) = \frac{1}{z^2}\,(a_{00}z^2 + a_{10}zx_1 + a_{10}zy_1 + a_{11}x_1y_1 + a_{20}x_1^2 + a_{02}y_1^2)\,.$$

(2.19) дифференциал тенглама уч ўлчовли фазода Пфафф тенгламаси бўлади ва махсус нуқталар қуйидаги

$$z = 0,\;\; x_1\overline{Q} - y_1\overline{P} = 0\,,$$

муносабатдан, яъни

$$a_{02}y_1^3 + (a_{20} - b_{11})x_1^2y_1 + (a_{11} - b_{02})y_1^2x_1 - b_{20}x_1^3 = 0 \qquad (2.20)$$

тенгламадан топилади. (2.20) тенгламадан $\tau$ ва $\mu$ нинг қийматларини назарга олиб (2.12) ва (2.13) тенгламаларни ҳосил қиламиз.

Пфафф тенгламаси учи координаталар бошида бўлган конуслардан иборат уч ўлчовли фазодаги сиртлар оиласини ифодалайди. Улар $z=0$ интеграл сиртни фақат махсус чизиқларда, яъни (2.12) ёки (2.13) га эквивалент бўлган (2.20) шарт ўринли бўладиган махсус чизиқларда кесиб ўтади ёки уринади. (2.20) шарт геометрик жиҳатдан бошланғич нуқтадан ўтувчи $z=0$ текисликдаги учта, иккита ёки битта тўғри чизиқни ифодалайди. (2.19) тенглама билан аниқланувчи сиртларнинг $Ox$ ўқ яқинидаги ҳолатини текшириш учун уларнинг $x_1^2 = y_1^2 = 1$ цилиндр билан кесимини қараб чиқамиз (яъни бу цилиндр сиртидаги интеграл эгри чизиқларни қараб чиқамиз). (2.19) тенгламада

$$x_1 = \cos\varphi,\;\; y_1 = \sin\varphi$$

деб олиб, уни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\sin\varphi\, P\left(\dfrac{\cos\varphi}{z}, \dfrac{\sin\varphi}{z}\right) - \cos\varphi\, Q\left(\dfrac{\cos\varphi}{z}, \dfrac{\sin\varphi}{z}\right)}{\cos\varphi\, P\left(\dfrac{\cos\varphi}{z}, \dfrac{\sin\varphi}{z}\right) + \sin\varphi\, Q\left(\dfrac{\cos\varphi}{z}, \dfrac{\sin\varphi}{z}\right)}\,. \qquad (2.21)$$

Фараз қилайлик,

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= Q_0(x,y)+Q_1(x,y)+Q_2(x,y), \\ P(x,y) &= P_0(x,y)+P_1(x,y)+P_2(x,y), \end{aligned} \tag{2.22}$$

бўлсин, бунда $Q_0$, $Q_1$ ва $Q_2$ мос равишда $Q(x, y)$ функциянинг нолинчи, биринчи ва иккинчи ўлчовли ҳадларини, $P_0$, $P_1$ ва $P_2$ эса $P(x, y)$ функциянинг нолинчи, биринчи ва иккинчи ўлчовли ҳадларини ўз ичига олади.

(2.21) тенглама оддий шакл алмаштиришлардан сўнг қуйидаги кўринишга келтирилиши мумкин:

$$z\frac{d\varphi}{dz}=\frac{(\sin\varphi P_0-\cos\varphi Q_0)z^2+(\sin\varphi P_1-\cos\varphi Q_1)z+\sin\varphi P_2-\cos\varphi Q_2}{(\cos\varphi P_0-\sin\varphi Q_0)z^2+(\cos\varphi P_1-\sin\varphi Q_1)z+\cos\varphi P_2-\sin\varphi Q_2}. \tag{2.23}$$

Бу ерда $Q_0$, $Q_1$, $Q_2$, $P_0$, $P_1$, $P_2$ функциялар (2.22) формулаларга кўра аниқланади, бунда $x$ ва $y$ аргументлар мос равишда $\sin\varphi$ ва $\cos\varphi$ га алмаштирилган.

(2.21) тенгламанинг махсус нуқталари $z=0$ текисликда

$$z=0,\ \sin\varphi P_2-\cos\varphi Q_2=0$$

муносабатлардан аниқланишини сезиш осон.

(2.21) тенгламанинг характеристикалари $x_1^2+y_1^2=1$ цилиндр сиртидаги интеграл эгри чизиқлар цилиндрнинг қуйи асоси айланасидаги ($z=0$) махсус нуқталар (2.1) тенгламанинг чексиз узоқлашган махсус нуқталарига мос келади.

Қуйи асоси $z=0$ ва юқори асоси $z=1$ бўлган $x_1^2+y_1^2=1$ цилиндрни бирлик цилиндр деб атаймиз.

$x=\frac{x_1}{z}$, $y=\frac{y_1}{z}$ формуладан $x=\frac{\cos\varphi}{z}$, $y=\frac{\sin\varphi}{z}$ бирлик цилиндрнинг ён сиртидаги (2.23) тенгламанинг характеристикаларига $x_1^2+y_1^2=1$ бирлик доирадан ташқарида жойлашган $Oxy$ текисликдаги (2.1) тенгламанинг характеристикалари мос келиши келиб чиқади. Бирлик доиранинг ичида жойлашган (2.1) тенгламанинг қолган характеристикалари Пфафф (2.19) тенгламаси конус интеграл сиртларининг бирлик цилиндрнинг юқори асоси билан кесишиш чизиғига мос тушади. ($z=1$) бўлганда (2.19) тенглама (2.1) га ўтади, $x=\frac{x_1}{z}$ ва $y=\frac{y_1}{z}$ ўтиш формуласи эса $x_1=x$, $y_1=y$ ни беради.

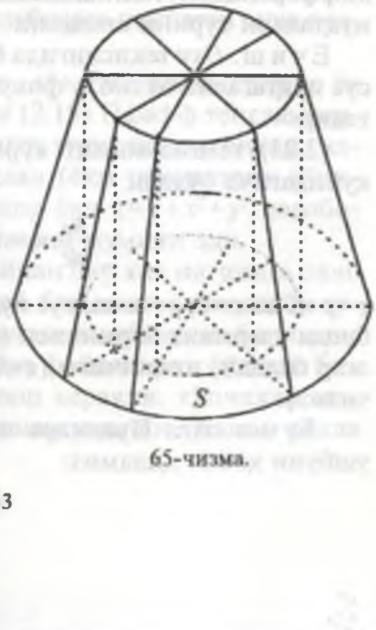
Шундай қилиб, (2.1) тенгламанинг $x_1^2+y_1^2=1$ доира ичида жойлашган характеристикалари бирлик цилиндрнинг юқори асосида, қолганлари эса унинг ён сиртида тасвирланади, бунда цилиндрнинг пастки асоси айланасига (2.1) тенгламанинг чексиз узоқлашган нуқталари мос келади. Характеристикаларни цилиндрнинг юқори асосида ва ён сиртида тасвирлаш амалий жиҳатдан ноқулай бўлгани учун биз цилиндрнинг ён томонида жойлашган характеристикаларни бирлик цилиндрни унинг юқори асоси айланаси бўйича кесиб ўтувчи $x^2+y^2=(z\text{-}2)^2$ конусга ортогонал равишда (яъни цилиндрнинг ён сиртига ортогонал радиус векторлар йўналиши бўйича) проекциялаймиз (65-чизма). Цилиндрнинг юқори асоси билан, ундаги характеристикалари билан бирга $z=0$ текисликка ортогонал проекциялаймиз. Натижада (2.1) тенгламанинг $x_1^2+y_1^2=1$ бирлик доиранинг ҳам ички томонида, ҳам ташқи томонида жойлашган ҳамма характеристикалари $S$ доира ичидаги $(x^2+y^2=4)$ битта текисликда тасвирланади, бунда бу доиранинг айланасига (2.1) тенгламанинг чексиз узоқлашган ихтиёрий махсус нуқталари мос келади ва бинобарин, бу айлана Пуанкаре доирасининг экваторига мос келади. Умуман, цилиндрнинг ён сиртидан конус сиртига, бундан эса $Oxy$ текисликка ўтиш бизга керак, чунки бундай ўтишда характеристикаларнинг топологик структураси ва махсус нуқталарнинг турлари сақланади.

**1-мисол.** Ушбу

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+xy}{x-y^2}$$

дифференциал тенгламанинг чексиз узоқлашган махсус нуқталари турини аниқланг.

Ечиш. $Oxy$ текисликда битта $O(0, 0)$ махсус нуқтага эга бўламиз ва у махсус нуқта тугундан иборат. Бу мисол учун (2.23) тенглама кўриниши қуйидагича бўлади:



65-чизма.

$$\frac{d\varphi}{dz}=-\frac{\sin\varphi}{z^2}.$$

$z=\varphi=0$ ва $z=0$, $\varphi=\pi$ махсус нуқталар очиқ эгар-тугундан иборат, бунда биз $z>0$ (доира ичида) нуқталарнигина қараб чиққанимиз учун $N_1(0,\ 0)$ нуқта эгар бўлади, $N_2(0,\ \pi)$ эса тугун бўлади.

Мисолимизга $x=\frac{1}{z}$, $y=\frac{\tau}{z}$ Пуанкаре шакл алмаштиришларини қўллаб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\frac{d\tau}{dz}=-\frac{\tau(1+\tau^2)}{z(z+\tau^2)}.$$

Бу тенглама учун координаталар боши эгар-тугун туридаги махсус нуқта бўлади (бунга Фроммер-Куклес усули ёрдамида осон ишонч ҳосил қилиш мумкин). Ўнгдан координаталар бошига чексиз кўп характеристикалар киради, чапдан эса фақат $\tau=0$ ярим ўқ киради.

Пуанкаре доирасининг ўнг қисми $z>0$ га, чап қисми эса $z<0$ га мос келади, бу ҳоллар 66-чизмада тасвирланган.

**2-мисол.** Ушбу

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+xy}{x-y-y^2}$$

дифференциал тенгламанинг чексиз узоқлашган махсус нуқталари турини аниқланг.

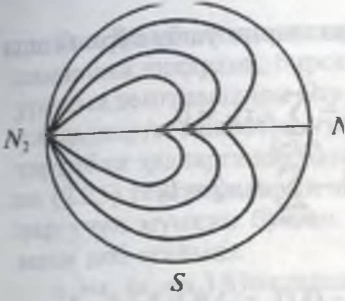
**Ечиш.** *Oxy* текислигида берилган тенглама битта махсус нуқтага эга бўлиб, у фокус туридан иборат махсус нуқтадир.

(2.23) тенгламанинг кўриниши бизнинг мисол учун қуйидагича бўлади:

$$\frac{d\varphi}{dz}=-\frac{z+\sin\varphi}{z^2}.$$

$z=\varphi=0$ ва $z=0, \varphi=\pi$ махсус нуқталар очиқ эгар-тугун бўлиб, бунда уларнинг биринчиси ($z=0$, $\varphi=0$) $S'$ соҳага нисбатан эгар бўлади, иккинчиси ($z=0$, $\varphi=\pi$) эса тугун бўлади (67-чизма).

Бу мисолга Пуанкаре шакл алмаштиришни қўллаб, ушбуни ҳосил қиламиз:



66-чизма.

67-чизма.

$$\frac{d\tau}{dz} = -\frac{(1+\tau^2)(z+\tau)}{z^2(1-\tau)-\tau^2 z}.$$

Бу тенглама учун координаталар боши эгар-тугун бўлишига ишонч ҳосил қилиш осон ва бунда унга чапдан чексиз кўп характеристикалар киради, ўнгдан эса у фақат битта характеристикага эга (уларнинг ҳаммаси $d=1$ эгрилик тартибига ва $\gamma=1$ ўлчовга эга, яъни аналитик жиҳатдан бундай тасвирланиши мумкин: $\tau=z+O(z)$).

Охирги икки мисолда (2.23) тенгламага ўтиш ёрдамида тадқиқ қилиш Пуанкаре услубига нисбатан соддароқ бўлди, бироқ бундай ҳолларни камдан-кам деб ҳисоблаш мумкин.

Одатда Пуанкаре шакл алмаштиришлари (2.23) тенгламага олиб келувчи бошқа услубларга нисбатан анча содда тенгламаларга олиб келади.

Шуни айтиб ўтиш керакки, $x_1^2+y_1^2=1$ цилиндрнинг ён сиртида (2.23) тенглама ўрнига (2.19) Пфафф тенгламасининг конус сиртларининг бошқа текисликлар билан, масалан, $(z-1)^2=x^2+y^2$ конус билан (ёки параметрик кўринишда $x=(z-1)\cos\varphi$, $y=(z-1)\sin\varphi$ ёки $z=1+x^2+y^2$ параболоид билан кесимини қараб чиқиш мумкин эди.

Бу услубларнинг ҳаммаси айнан бир хил натижага олиб келади, шу билан бирга шундай бир махсус мисоллар тузиш мумкинки, уларда кўрсатилган услублардан бирининг қўлланилиши бошқалардан кўра фойдалироқ бўлади. Бироқ яна бир бор таъкидлаб ўтиш керакки, кўпчилик мисоллар учун Пуанкаре шакл алмаштириши яна ҳам содда ечимларга олиб келади.

$\Phi_3(\tau_K)=0$ ва $\Phi_3(\mu_K)=0$ тенгламаларни ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$\Phi_3(\tau_K) = \sum_{i+j=2} a_{ij}\,\tau_K^{j+1} - \sum_{i+j=2} b_{ij}\tau_K^j = 0,$$

$$\Phi_3(\mu_K) = \sum_{i+j=2} b_{ij}\,\mu_K^{j+1} - \sum_{i+j=2} a_{ij}\mu_K^j = 0,$$

ёки

$$\Phi_3(\tau_K) = \tau P_2(1,\ \tau_K) - Q_2(1,\ \tau_K) = 0,$$

$$\Phi_3(\mu_K) = \mu Q_2(\mu_K,\ 1) - P_2(\mu_K,\ 1) = 0.$$

$$\Phi_3(\tau_K) = \sum_{i+j=2} a_{ij}\,\tau_K^{j+1} - \sum_{i+j=2} b_{ij}\tau_K^j,$$

$$\Phi_3(\mu_K) = \sum_{i+j=2} b_{ij}\,\mu_K^{j+1} - \sum_{i+j=2} a_{ij}\mu_K^j,$$

ёки

$$\Phi_3(\tau_K) = \tau_K P_2(1,\ \tau_K) - Q_2(1,\ \tau_K) = 0, \tag{2.24}$$

$$\Phi_3(\mu_K) = \mu_K Q_2(\mu_K,\ 1) - P_2(\mu_K,\ 1) = 0. \tag{2.25}$$

Улар Бендиксоннинг мумкин бўлган уринмаларининг кўриниши ўзгартирилган тенгламаларини ифодалайди.

Ҳақиқатан, агар $\tau_K = \frac{y}{x}$, $\mu_K = \frac{x}{y}$ эканини назарда тутилса,

$$\Phi_3\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} P_2\left(1,\ \frac{y}{x}\right) - Q_2\left(1,\ \frac{y}{x}\right) = 0,$$

$$\Phi_3\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y} Q_2\left(\frac{x}{y},\ 1\right) - P_2\left(\frac{x}{y},\ 1\right) = 0$$

ни ҳосил қиламиз. Бу тенгламалардан биринчисини $x^3$ га, иккинчисини $y^3$ га кўпайтириб, ушбу тенгламаларни ҳосил қиламиз:

$$x^3\Phi_3\left(\frac{y}{x}\right) = yP_2(x,\ y) - xQ_2(x,\ y) = 0,$$

$$y^3\Phi_3\left(\frac{x}{y}\right) = xQ_2(x,\ y) - yP_2(x,\ y) = 0.$$

Биз Бендиксоннинг мумкин бўлган уринмалари тенгламасини чиқардик, бироқ фарқи шундаки, мумкин бўлган уринма тенгламалари $Oxy$ текисликда одатда қуйи тартибли ҳадларга нисбатан тузилади, чексизликда эса юқори тартибли ҳадларга нисбатан тузилади. Шунинг учун (2.24) ва (2.25) тенгламаларни чексиз узоқлашган махсус нуқталар учун мумкин бўлган Бендиксон уринмалари тенгламаси деб атаймиз.

$\tau_K=\tau_0$ $(\mu_K=\mu_0)$ йўналишларни $\Phi_3(\tau_0)=0$ $(\Phi_3(\mu_0)=0)$ бўлганда (2.1) тенглама учун чексизликдаги характеристик йўналиш деб атаймиз.

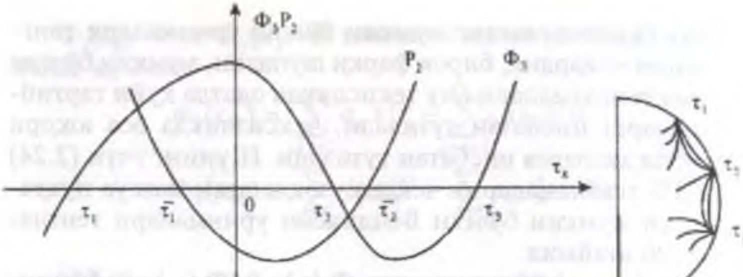
Эслатма. Бу мулоҳазалар $Q(x, y)$ ва $P(x, y)$ кўпҳадлар $n$-даражали бўлганда тўғри.

**1-теорема**. *Агар* $\Phi_3(\tau_K)=0$ $(\Phi_3(\mu_K)=0)$ *тенглама учта оддий илдизга эга бўлса, у ҳолда Пуанкаре сфераси экваторида махсус нуқталар қуйидагича бўлиши мумкин: 1) учта тугун; 2) иккита тугун ва битта эгар; 3) иккита эгар ва битта тугун.*

Исботи. Теоремани исботлаш учун ўқлари $\tau_{K3}(\mu_K)$ ва $\Phi_3(\tau_k)$, $P_2(1, \tau_K)$ $(\Phi_3(\mu_k)$, $Q_2(\mu_K, 1))$ бўлган тўғри бурчакли координаталар текислигини қараб чиқамиз.

Агар $\Phi_3(\tau_K)$ ва $(\Phi_3(\mu_K)=0)$ ва $P_2(1, \tau_k)=0$ $(Q_2(\mu_k, 1)=0$ бўлса, у ҳолда $Q(x, y)=0$, $P(x, y)=0$ эгри чизиқлар чексизликда махсус нуқталарда кесишади.

Демак, $\lambda_1(\tau_k)=-P(1, \tau_k)=0$ ва $Q(x, y)=0$, $P(x, y)=0$ шартлар изоклинларнинг чексизликда чексиз узоқлашган махсус нуқталарда кесишишига мос келади. Экватордаги $\lambda_1(\tau_K)=0$ шарт бажариладиган махсус нуқталар сифат жиҳатидан янги табиатга эга (бу ҳақда илгари эслатган эдик). Шунинг учун $\lambda_1(\tau_K)\neq 0$ ни қараб чиқамиз. $\lambda_1(\tau_K)=-\Phi_3(\tau_K)=0$ шарт $\Phi_3(\tau_K)=0$ эгри чизиқнинг $\tau_K$ ўққа уринишига мос келади, яъни тегишли $\tau_K$ нуқтага карралилигига мос келади. Юқорида айтиб ўтганимиздек, $\Phi_3(\tau_K)=0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизлари экваторнинг махсус нуқталарининг координаталарини беради. Фараз қилайлик $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau_3$ лар бу тенгламанинг оддий илдизлари бўлсин. $\bar{\tau}_1$, $\bar{\tau}_2$ эса $P_2(1, \tau_K)=0$ тенгламанинг истаган илдизлари бўлсин. $\Phi_3(\tau_K)$ функциянинг ҳолати $a_{02}$ ва $\Delta(\tau_K)$ нинг ишораларига боғлиқ. Агар $\Delta(\tau_K)=0$ бўлса, функция битта максимумга ва битта минимумга эга: $a_{02}>0$ бўлганда у аввал максимумгача ортади,



А) $\Delta(\tau_k)<0,\ a_{02}>0$

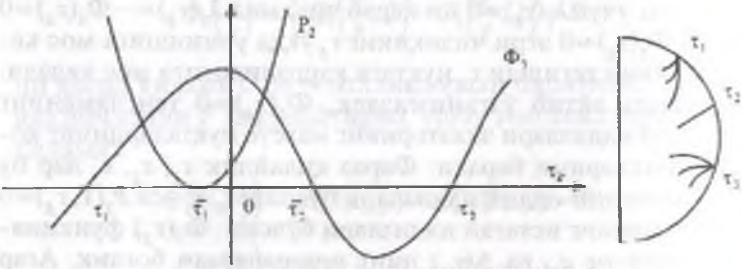
68-чизма.

кейин минимумгача камаяди ва яна ўсади; $a_{02}<0$ бўлганда у аввал максимумгача камаяди, сўнгра минимумгача ортади ва яна камаяди. $a_{02}>0$ бўлганда $P_2(1,\ \tau_K)=0$ функция минимумга эга, $a_{02}<0$ бўлганда эса максимумга эга. Сифат нуқтаи назаридан қараганда $\Phi_3(\tau_0)$ ва $P_2(1, \tau_K)$ функциялар қуйидаги уч хил жойлашувда бўлиши мумкин:

Биз оддий махсус нуқталарни қараб чиқаётганимиз учун уларнинг турини $\tau=\tau_K(\tau>\tau_K)$ учун махсус нуқталар атрофидаги $\lambda_1(\tau_k)$ ва $\lambda_2(\tau_k)$ нинг ишорасига кўра аниқлаш мумкин. А) жойлашув учун (68-чизма) учта тугунга, Б) жойлашув учун (69-чизма) иккита тугун ва эгарга, В) жойлашув учун (70-чизма) иккита эгар ва тугунга эга бўламиз.

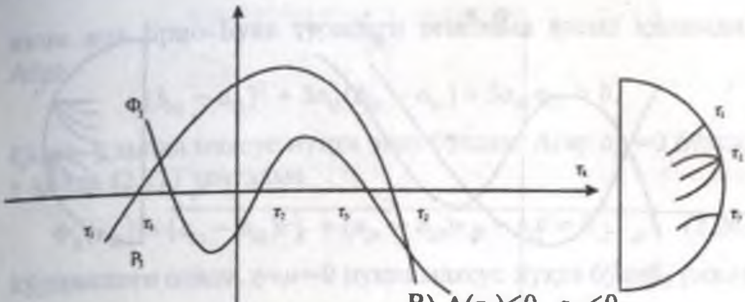
2-теорема. *Агар $\Phi_3(\tau_K)=0$ ($\Phi_3(\mu_K)=0$) тенглама битта оддий ва каррали илдизга эга бўлса, у ҳолда экваторда биргаликда:*

*1) тугун ва эгар-тугун ёки 2) эгар ва эгар-тугун мавжуд бўлади.*



Б) $\Delta(\tau_k)<0,\ a_{02}>0$

69-чизма.



В) $\Delta(\tau_k)<0$, $a_{02}<0$

70-чизма.

Исботи. $\Delta(\tau_K)=0$ бўлганда (2.12) тенглама учта ҳақиқий илдизга эга бўлади, улардан бири каррали. Агар $\Delta(\tau_K)=0$, $p=0$, $q=0$ бўлса, у ҳолда тенглама уч каррали $\tau_K = \frac{b_{02}-a_{11}}{3a_{02}}$ илдизга эга бўлади. Фараз қилайлик, масалан, $\tau_2$ — (2.12) тенгламанинг икки каррали илдизи бўлсин, у ҳолда $\Phi_3(\tau_K)=0$ бўлиб, (2.10) системани ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$z\frac{du}{dz}=\frac{(a_{11}+3a_{02}\tau_2-b_{02})u^2+R(z,u)}{P_2(1,\tau_2)+R_2(z,u)},$$

бунда

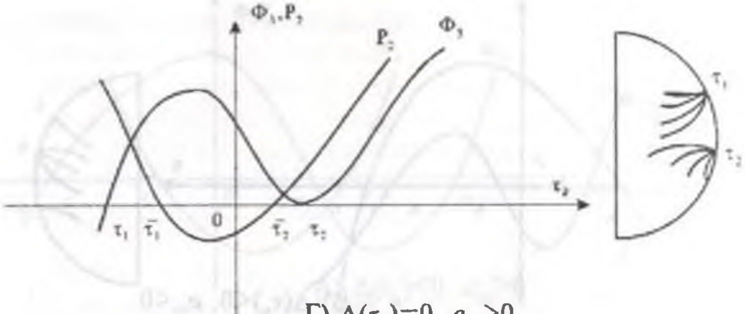
$$R_1(z,u)=\left[a_{02}\tau_2^2+(a_{10}-b_{01})\tau_2-b_{10}\right]z-(b_{00}-a_{00}\tau_2)z^2-$$
$$-(b_{01}-a_{10}-2a_{02}\tau_2)zu-(b_{02}-a_{11}-3a_{02}\tau_2)u^2+a_{00}z^2u.$$

$$R_1(z,u)=(a_{10}+a_{01})z+(a_{11}+2a_{02}\tau_2)u+a_{00}z^2+$$
$$+a_{01}zu+a_{02}u^2,\ a_{11}+3a_{02}\tau_2-b_{02}\neq 0.$$

Охирги дифференциал тенглама Брио-Буке туридаги тенгламадан иборат, бунда $z=u=0$ махсус нуқта эгар тугун бўлади.

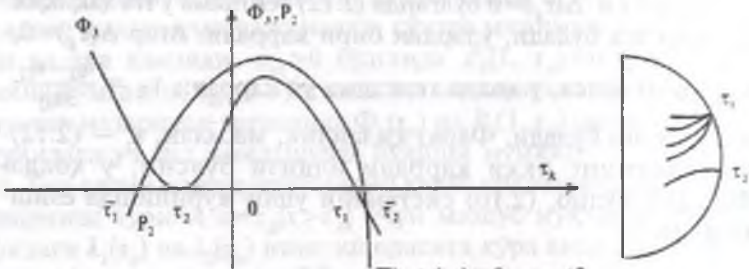
Бинобарин, Г) ҳолда (71-чизма) тугун ва эгар-тугунга, Д) ҳолда (72-чизма) эгар ва эгар-тугунга эга бўламиз.

(2.12) тенглама битта ҳақиқий илдизга (оддий ёки уч каррали) эга бўладиган ҳолда бу махсус нуқта ёки тугун, ёки эгар бўлишини кўрсатиш осон. Оддий илдиз ҳолда бу



Г) $\Delta(\tau_k)=0,\ a_{02}>0$

71-чизма.



Д) $\Delta(\tau_k)=0,\ a_{02}<0$

72-чизма.

(2.14) характеристик тенгламанинг кўринишидан келиб чиқади. Фараз қилайлик $\Phi_3(\tau_K)=0$ тенглама $\tau_K = \frac{b_{02}-a_{11}}{3a_{02}}$ уч каррали илдизга эга бўлсин, у ҳолда (2.11) система баъзи шакл алмаштиришлардан сўнг

$$z\frac{du}{dz} = \frac{9a_{02}^3u^3+R_3(z,u)}{[(b_{02}-a_{11})^2+3a_{11}(b_{02}-a_{11})+3a_{02}a_{20}+R_4(z,u_{02})]a}$$

кўринишни олади, бу ерда

$$R_3(z,u)=[a_{01}(b_{02}-a_{11})^2+3a_{02}(a_{10}-b_{01})(b_{02}-a_{11})-9a_{02}^2b_{10}]\times$$
$$\times z-[9a_{02}^2b_{00}-3a_{02}a_{00}(b_{02}-a_{11})]z^2-[9a_{02}^2(b_{01}-a_{10})-6a_{02}a_{01}\times$$
$$\times(b_{02}-a_{11})]zu+9a_{02}^2a_{00}zu^2+9a_{02}^2a_{01}zu+9a_{02}^3u^3,\ R_4(z,u)=$$
$$=[9a_{02}a_{10}+3a_{01}(b_{02}-a_{11})]z+[9a_{02}a_{11}+6a_{02}(b_{02}-a_{11})]u+$$
$$+9a_{02}a_{00}z^2+9a_{02}a_{01}zu+9a_{02}^2u^2,$$

яъни яна Брио-Буке туридаги тенглама ҳосил қилинди. Агар

$$(b_{02}-a_{11})^2+3a_{11}(b_{02}-a_{11})+3a_{02}a_{20}>0$$

бўлса, у ҳолда махсус нуқта эгар бўлади. Агар $a_{02}=0$ бўлса, у ҳолда (2.12) тенглама

$$\Phi_2(\tau_K)=(a_{11}-b_{02})\tau_K^2+(a_{20}-b_{11})\tau_K-b_{02}=0 \qquad (2.26)$$

кўринишни олади. $z=\mu=0$ нуқта махсус нуқта бўлиб, унинг учун

$$\lambda_1(0)=-b_{02},\ \lambda_2(0)=(a_{11}-b_{02}). \qquad (2.27)$$

(2.13) характеристик тенгламанинг илдизлари қуйидагича ёзилади:

$$\begin{aligned}\lambda_1(\tau_K)&=-(a_{11}\tau_K+a_{20})=-P_1(1,\tau_K),\\ \lambda_2(\tau_K)&=-\left[2(a_{11}-b_{02})\tau_K+(a_{20}-b_{11})\right]=-\Phi_2'(\tau_K),\end{aligned} \qquad (2.28)$$

бунда $\Phi_2'(\tau_K)$ функция $\Phi_2(\tau_K)$ функциядан $\tau_K$ ўзгарувчи бўйича олинган ҳосиладан иборат.

Фараз қилайлик,

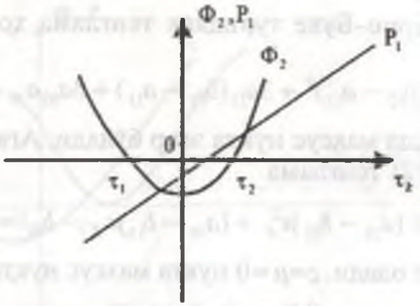
$$\delta(\tau_K)=(a_{20}-b_{11})^2+4b_{20}(a_{11}-b_{02})$$

бўлсин. $\Phi_2(\tau_K)$, $P_1(1,\tau_K)$ ва $\tau_K$ учбурчакли декарт координаталарга эга текисликни қараб чиқамиз.

Махсус нуқталарнинг турларини, умумий ҳолдаги каби, характеристик тенгламаларнинг илдизлари $\tau=\tau_K(\tau>\tau_K)$ учун махсус нуқталарнинг атрофидаги ишораларига кўра аниқлаш мумкин.

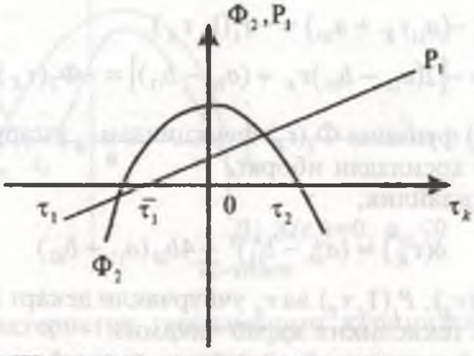
Е) жойлашиш учун (73-чизма) $\tau_1$, $\tau_2$ махсус нуқталар — тугун, $\mu_1$ — эгар, Ж) учун (74-чизма) $\tau_1$, $\tau_2$ — эгар, $\mu_1$ — тугун бўлади.

Агар $a_{11}=0$ бўлса, у ҳолда $z=0$, $\mu_1=0$ махсус нуқталар доим айниган тугун, улардан бири эса $\Phi_2(\tau_K)=0$ тенгламада тугун, бошқасида эса эгар бўлади. Фараз қилайлик, $\delta(\tau_K)=0$ бўлсин, у ҳолда экваторда эгар-тугун ва эгар биргаликда мавжуд, агар $q_{11}=0$ бўлса, у ҳолда эгар-тугун ва охиргиси тугун бўлади. $\delta(\tau_K)<0$ бўлганда $\mu_1=z=0$ нуқта — эгар $(b_{02}(a_{11}\text{-}b_{02})>0)$ ёки тугун $(b_{02}(a_{11}\text{-}b_{02})<0)$ бўлади, $a_{11}=b_{02}\neq 0$ да эса эгар бўлади.



Е) $\delta(\tau_k)>0,\ (a_{11}-b_{02})>0,\ b_{02}>0$

73-чизма.



Ж) $\delta(\tau_k)>0,\ (a_{11}-b_{02})<0,\ a_{11}>0$

74-чизма.

Фараз қилайлик, $a_{11}=b_{02}\neq 0$ ва $a_{10}$-$b_{11}\neq 0$ бўлсин, у ҳолда (2.26) тенглама $\tau_1=\frac{b_{10}}{(a_{10}-b_{11})}$ илдизга эга. Характеристик тенгламаларнинг илдизлари $\lambda_1(\tau_K)\cdot\lambda_2(\tau_K)=a_{11}b_{20}+a_{20}(a_{20}-b_{11})$ кўринишга эга. Агар $a_{11}b_{20}>a_{20}(b_{11}-a_{20})$ бўлса, у ҳолда $\tau_1$ махсус нуқта тугун, $\mu_1$ эса эгар бўлади; агар $a_{11}b_{20}<a_{20}(b_{11}-a_{20})$ бўлса, у ҳолда уларнинг иккаласи ҳам эгар. $a_{20}=b_{20}=a_{11}=b_{11}=0$ бўлган ҳолда $\lambda_1(\mu_1)=b_{02}$, $\lambda_2(\mu_2)=-b_{02}$, $\lambda_1(\tau_1)=-a_{02}$, $\lambda_2(\tau_2)=-a_{20}$, $\lambda_1(\tau_2)=-a_{20}$, $\lambda_2(\tau_2)=a_{20}$ га эга бўламиз, яъни $\tau_1$ — тугун, $\tau_2$ эса эгар бўлади.

## 3-§. ЧЕКСИЗЛИКДАГИ МАХСУС НУҚТА ТУРИ

Чексизликдаги махсус нуқта турини, яъни (2.24) (ёки (2.25)) тенглама айнан қаноатлантирадиган турини қараб чиқамиз. Махсус турнинг мавжуд бўлиши учун зарур ва етарли шарт (1.2) системанинг коэффициентларига нисбатан

$$a_{20} = b_{11}, \ a_{11} = b_{02}, \ b_{20} = a_{02} = 0$$

муносабатнинг бажарилишидир. У ҳолда Пуанкаре сферасида (1.3) шакл алмаштириш учун

$$\frac{d\tau}{dz} = \frac{-b_{10} - (b_{01} - a_{10})\tau + a_{01}\tau^2 - b_{00} + a_{00}z\tau}{a_{20} + a_{11}\tau + a_{01}z\tau + a_{00}z^2 + a_{10}z} \tag{3.1}$$

га эга бўламиз. Бу ҳолда $P_2(1, \tau) = f_1(1, \tau)$, $Q_2(1, \tau) = \tau f_1(1, \tau)$, бунда $f_1(1, \tau) = a_{20} + a_{11}\tau$.

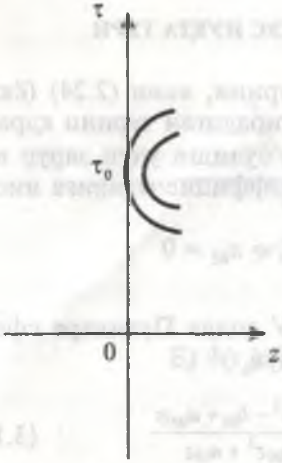
Худди шунга ўхшаш (1.4) шакл алмаштириш учун

$$\frac{d\mu}{dz} = \frac{-a_{01} - a_{00}z - (a_{10} - b_{01})\mu + b_{20}z\mu + b_{10}\mu^2}{a_{11} + a_{20}\mu + b_{01}z + b_{00}z^2 + b_{10}\mu z}. \tag{3.2}$$

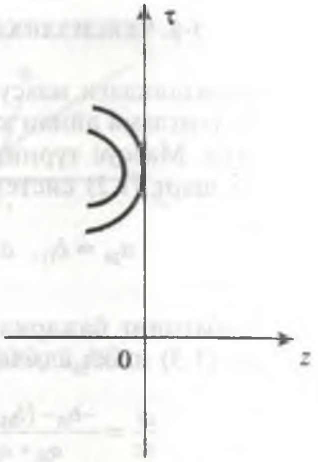
Бу ҳолда $P_2(\mu, 1) = \mu f_1(\mu, 1)$, $Q_2(\mu, 1) = f_1(\mu, 1)$, бунда $f_1(\mu, 1) = = a_{11} + a_{20}\mu$.

Агар $a_{11} \neq 0$ ва $a_{20} + a_{11}\tau = 0$, $b_{11} + (b_{01} - a_{10})\tau - a_{01}\tau^2 = 0$ тенгламалар биргаликда бўлмаса ёки бошқача айтганда $\Omega = a_{01}a_{20}^2 + a_{20}a_{11}(b_{01} - a_{10}) - a_{11}^2 b_{10} \neq 0$ бўлса, у ҳолда (3.1) тенгламанинг характеристикаси экватордаги $z = 0$, $\tau = \tau_0 = -\frac{a_{10}}{a_{11}}$ нуқтага уринади. Бунда икки ҳол бўлиши мумкин: а) $a_{11}\Omega > 0$ ва б) $a_{11}\Omega < 0$.

Бу ҳолларнинг биринчисида $z$, $\tau$ текисликда характеристикалар $z = 0$ ўққа $\tau = \tau_0$ нуқтада уринади, шу билан бирга ундан ўнг томонда жойлашади (яъни $x > 0$ ярим текисликда) (75-чизма). Иккинчи ҳолда у уриниш нуқтасидан чапда жойлашади (76-чизма). Пуанкаре доирасида бундай манзарага эга бўламиз: экваторнинг ҳамма нуқталари (ҳозир характеристика бўлмаган) оддий нуқталар бўлади ва бинобарин, экваторнинг ҳар бир нуқтаси орқали битта ва фақат битта характеристика ўтади. Бироқ, экваторда $\varphi$ нинг иккита қийматига мос келувчи иккита $N_1$ ва $N_2$



75-чизма.



76-чизма.

нуқта мавжуд, бунда $tg\varphi = \tau_0 = -\frac{a_{20}}{a_{11}}$. Улардан бирида ($\varphi=\varphi_0$) характеристика Пуанкаре доирасига ички томондан уринади, иккинчисида эса ($\varphi=\varphi_0=\pi$) ташқи томондан уринади, ёки аксинча, а) ёки б) тенгсизлик ўринли ёки ўринли эмаслигига боғлиқ (77-чизма).

Биринчи ҳолдаги уриниш нуқтасини ёлғон эгар, иккинчи ҳолдагисини — ёлғон марказ деб, ёки олдий қилиб квазиомахсус нуқталар деб атаймиз. Агар $a_{11}=0$ бўлса, у ҳолда (3.1) тенглама ўрнига (3.2) тенгламани қараб чиқамиз ва яна ўша натижага келамиз, фақат фарқи шундаки, $a_{11}$ ни $a_{20}$ га алмаштирамиз.

77-чизма.

Агар берилган (1.2) система иккинчи даражали бўлган камида битта ҳадга эга бўлса, у ҳолда иккита $a_{11}$ ва $a_{20}$ коэффициентлардан ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли бўлиши равшан. Фараз қилайлик, $\Omega=0$ бўлсин, у ҳолда $z=0$, $\tau=\tau_0$ нуқта Пуанкаре сферасидаги тегишли тенглама учун махсус нуқта бўлади. Бу ерда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

а) $z=0, \tau=\tau_0$ нуқта эгар бўлади, яъни у орқали бир нечта характеристика (сепаратриссалар) ўтади. Бу, Пуанкаре сферасида экваторни кесиб ўтувчи ёки унга ўнг томонида ҳам, чап томонида ҳам $z=0$, $\tau=\tau_0$ нуқталарга мос келувчи нуқталарда уринувчи бир нечта характеристикалар мавжуд демакдир;

б) $z=0, \tau=\tau_0$ нуқта тугун бўлади. Экваторни кесиб ўтувчи ёки уни берилган нуқтада Пуанкаре доирасини ўнг томонда ҳам, чап томонда ҳам кесувчи ёки уринувчи чексиз кўп характеристикалар мавжуд;

в) $z=0$, $\tau=\tau_0$ нуқта иккинчи гуруҳнинг махсус нуқтаси (марказ ёки фокус); бинобарин, экваторни берилган нуқтада кесиб ўтувчи ёки унга уринувчи битта ҳам характеристика йўқ.

Бу энг оддий ҳоллар қатори анча мураккаб ҳоллар — экваторнинг махсус нуқталари эгар-тугундан иборат бўлган ҳоллар бўлиши мумкин.

Ўринли бўлиши мумкин бўлган ҳамма ҳолларни муфассал таҳлил қилиб чиқамиз.

1. Ушбу

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Y_n(x,y)+Y_{n+1}(x,y)}{X_n(x,y)+X_{n+1}(x,y)} \tag{3.3}$$

тенгламани қараб чиқамиз, бу ерда $Y_n(x, y)$, $Y_{n+1}(x, y)$ ва $X_n(x, y)$, $X_{n+1}(x, y)$ — ҳақиқий $x$, $y$ ўзгарувчиларга нисбатан мос равишда $n$, $n+1$-даражали бир жинсли кўпҳадлар.

Агар (3.3) тенглама учун чексизликда махсус турга эга бўлсак, у ҳолда $Y_{n+1}(x, y)=yf_n(x, y)$, $X_{n+1}(x, y)=xf_n(x, y)$ бўлади, бунда $f_n(x, y)$ — $n$-даражали бир жинсли кўп ҳад. (3.3) тенгламанинг махсус нуқталарини топамиз:

$$Y_{n+1}(x, y)=yf_n(x, y)=0,\ X_{n+1}(x, y)=xf_n(x, y)=0.$$

Бундан

$$xY_n(x, y)-yX_n(x, y)=0. \tag{3.4}$$

(3.4) тенглама текисликнинг четки қисми учун мумкин бўладиган уринмалар тенгламасини ифодалайди. Демак, координаталар бошидан фарқли махсус нуқталар (3.4) тенглама билан аниқланувчи нуқталарда жойлашади.

Фараз қилайлик, (3.4) тенгламанинг ечими

$$y_i = k_i x_i\,,\ \ i = 1, 2, \ldots, n+1 \tag{3.5}$$

бўлсин, у ҳолда

$$x_i = -\frac{X_n(1, k_i)}{f_n(1, k_i)}. \tag{3.6}$$

(1.3) ўрнига қўйиш (3.3) тенгламани

$$\frac{d\tau}{dz} = \frac{Y_n(1, \tau) - \tau X_n(1, \tau)}{zX_n(1, \tau) + f_n(1, \tau)} \tag{3.7}$$

кўринишга келтирилади.

Агар (3.4) тенглама фақат мавҳум илдизларга эга бўлса, у ҳолда биринчидан, *Oxy* текисликда ягона махсус нуқта — координаталар боши, иккинчидан, экваторда фақат $f_n(1, \tau) = 0$ тенгламанинг илдизларига мос келувчи махсус нуқталар бўлади.

Экватордаги махсус нуқталар (3.4) тенгламанинг нурларида бўлади (яъни $\tau = k_i$) ва $f_n(1,\ \tau) = 0$ қўшимча шарт билан аниқланади. Бироқ бундай нуқталар учун бу (3.5) ва (3.6) формулалардан кўриниб турганидек $x_i$ ва $y_i$ чексизликка айланади.

Шуни айтиб ўтиш керакки, $f_n(1,\ \tau) = 0$ бўлганда функция $X_n(1,\ \tau) \neq 0$ чунки акс ҳолда $Y_n(1,\ \tau) = 0$ ва (3.3) тенгламанинг ўнг қисми $y = \tau_x$ га қисқаради, бунда $\tau = k_i$. $X_n(1,\ \tau) = 0$, $f_n(1,\ \tau) \neq 0$ бўлган ҳолда $\frac{d\tau}{dz}$ ҳосила нолга айланади. Бу ҳолда экваторда ҳеч қандай турдаги махсус нуқталар бўлмайди. Шундай қилиб, *Oxy* текисликдаги алоҳида махсус нуқталар чексизликка интилганда ва фақат шундагина экваторда махсус нуқталар пайдо бўлар экан.

**2.** Аввал $x = y = 0$ координаталар боши (1.1) тенглама учун махсус нуқта бўлган ҳолни қараб чиқамиз. Чексизликда махсус турга эга бўлсак, у ҳолда (1.1) тенгламани ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b_{10}x + b_{01}y + yf_1(x, y)}{a_{10}x + a_{01}y + xf_1(x, y)}, \tag{3.8}$$

бунда

$$f_1(x, y) = a_{20}x + a_{11}y.$$

Фараз қилайлик, характеристик тенгламанинг $\lambda_1$ ва $\lambda_2$ илдизлари ҳақиқий ва турли бўлсин. Бу ҳолда (3.8) тенглама ушбу

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda_1 y + yf_1(x, y)}{\lambda_2 x + xf_1(x, y)} \tag{3.9}$$

каноник кўринишга келтирилади. (3.9) тенглама координаталар бошидан фарқли махсус нуқталар $M_2\left(-\frac{\lambda_1}{a_{20}}, 0\right)$, $M_3\left(0, -\frac{\lambda_1}{a_{11}}\right)$ га эга бўлади. Координаталар боши учун чизиқли қисмидан тузилган детерминанти $\Delta=(0, 0)=-\lambda_1 \cdot \lambda_2$ кўринишга эга, $M_2$ ва $M_3$ нуқталар эса мос равишда $\Delta(M_2)=\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)$, $\Delta M_3=-\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)$ кўринишга эга. Уларнинг нисбати эса:

$$\frac{\Delta(M_2)}{\Delta(M_3)} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Бундан, агар $M_1(0, 0)$ координаталар боши тугун бўлса, у ҳолда $M_2$ ва $M_3$ нуқталардан бири тугун, иккинчиси эса эгар; агар координаталар боши эгар бўлса, у ҳолда $M_2$ ва $M_3$ нуқталарнинг иккаласи тугун бўлади.

(3.1) ва (3.2) тенгламалар мос равишда қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{d\tau}{dz} = \frac{-(\lambda_1-\lambda_2)\tau}{a_{20} + a_{11}\tau + \lambda_2 z},$$

$$\frac{d\mu}{dz} = \frac{-(\lambda_2-\lambda_1)\mu}{a_{11} + a_{20}\mu + \lambda_1 z}.$$

Шундай қилиб, экваторда махсус нуқталар фақат $a_{20}=0$ бўлганда (чексизликка $\tau=0$ йўналиш бўйича кетадиган $M_2$ нуқта тури каби) ёки $a_{11}=0$ бўлганда (чексизликка $\mu=0$ йўналиш бўйича кетадиган $M_3$ нуқта тури каби) бўлишини кўрамиз. Бинобарин, экваторнинг махсус нуқталари (агар улар мавжуд бўлса), текисликнинг охирги қисмидаги махсус нуқталар каби табиатга эга бўлади. Агар $a_{11}a_{20}\neq 0$ бўлса, экваторда махсус нуқталар бўлмайди. Шундай қилиб, қаралаётган ҳолда тугун, тугун ва эгар биргаликда мавжуд бўлади, шу билан бирга нуқталардан бири экваторда бўлиши мумкин.

Ж. ҲОЖИЕВ, А. С. ФАЙНЛЕЙБ

# АЛГЕБРА ВА СОНЛАР НАЗАРИЯСИ КУРСИ

*Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги университетларнинг математика ва механика-математика факультетлари талабалари учун дарслик сифатида рухсат этган*

ТОШКЕНТ — "ЎЗБЕКИСТОН" — 2001

**1-мисол.** Ушбу

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+y(x-y)}{-x+x(x-y)}$$

дифференциал тенгламанинг чексизликдаги махсус нуқталари турини аниқланг.

**Ечиш.** Текисликда берилган тенглама қуйидаги махсус нуқталарга эга бўлади: $M_1(0,0)$ — эгар, $M_2(0,1)$ ва $M_3(0,1)$ — тугунлар. Пуанкаре сферасида берилган тенглама

$$\frac{d\tau}{dz}=\frac{2\tau}{-1+\tau+z}$$

кўринишда бўлади. Экваторда $\tau=1$ нур бўйлаб квазимахсус нуқталарга эга бўламиз (78-чизма).

Фараз қилайлик, (3.9) тенгламада $a_{11}=0,\ a_{20}<0,\ \lambda_2>\lambda_1>0$ бўлсин ва $Oxy$ текисликда $M_1(0,0),\ M_2\left(\frac{-\lambda_2}{a_{10}},\ 0\right)$ махсус нуқталар — тугун; $M_3$ — эгар чексизликка кетсин. Пуанкаре сферасида қуйидаги

$$\frac{d\mu}{dz}=\frac{-(\lambda_2-\lambda_1)\mu}{\lambda_1 z+a_{20}\mu}$$

тенгламага эга бўламиз. $z=\mu=0$ махсус нуқта — эгар бўлади (79-чизма).

$a_{11}=0,\ a_{20}<0,\ \lambda_2>0,\ \lambda_1<0$ бўлганда $M_1(0,0)$ махсус нуқталар — эгар, $M_2\left(\frac{-\lambda_2}{a_{20}},\ 0\right)$ — тугун, $M_3$ — тугун чексизликка

78-чизма.

79-чизма.

кетади. Экваторда $z=\mu=0$ махсус нуқта — тугун бўлади (80-чизма).

3. Энди $\lambda_1=\lambda_2\neq 0$ деб фараз қиламиз. (3.8) тенглама бундай кўринишни олади:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+kx+yf_1(x,y)}{x+xf_1(x,y)}. \qquad (3.10)$$

80-чизма.

Агар координаталар боши махсус нуқтадан ташқари ва $a_{11}\neq 0$ бўлса, у ҳолда $M_2\left(0,-\frac{1}{a_{11}}\right)$ махсус нуқта мавжуд бўлади. Пуанкаре сферасида қуйидаги тенгламаларга эга бўламиз:

$$\frac{d\tau}{dz}=\frac{-k}{a_{20}+z+a_{\mu}\tau},$$

$$\frac{d\mu}{dz}=\frac{k\mu^2}{a_{11}+a_{20}\mu+z+k\mu z}.$$

Агар $ka_{11}\neq 0$ бўлса, у ҳолда экваторда фақат квазимахсус нуқталар бўлади. Бундай ҳолда (3.10) тенглама учун координаталар боши чегаравий тугун бўлади, $M_2\left(0,-\frac{1}{a_{11}}\right)$ нуқта эса очиқ эгар-тугун бўлади. $a_{11}=0$, $k\neq 0$ ҳолида $M_2$ нуқта (эгар-тугун) $\mu=0$ йўналиш бўйича экваторга ўтади. Агар бу ҳолда яна $k=0$ бўлса, у ҳолда (3.10) тенглама $y'=\frac{y}{x}$ кўринишни олади, $M_1(0,0)$ махсус нуқта — махсус тугун, яъни $Oxy$ текисликда ҳам, чексизликда ҳам махсус турга эга бўламиз.

**2-мисол.** Ушбу

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+y^2}{x+xy}$$

дифференциал тенгламанинг чексизликдаги махсус нуқталари турини аниқланг.

Ечиш. $M_1(0,\ 0)$ координаталар боши — чегаравий тугун, $M_2(0,\ -1)$ махсус нуқта очиқ эгар-тугун. Экваторда $\tau=-1$ нур бўйлаб квазимахсус нуқталарга эга бўламиз (81-чизма).

81-чизма.

82-чизма.

**3-мисол.** Ушбу

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+xy}{x+x^2}$$

дифференциал тенгламанинг чексизликдаги махсус нуқталари турини аниқланг.

Ечиш. *Oxy* текислигининг координаталар боши махсус нуқта $M_1(0,\ 0)$ — чегаравий тугун мавжуд. Пуанкаре сферасида

$$\frac{d\mu}{dz}=\frac{\mu^2}{\mu+z+\mu z}$$

тенгламага эга бўламиз. $\mu=z=0$ махсус нуқта очиқ эгар-тугун бўлади (82-чизма).

**4.** $\lambda_1=0,\ \lambda_2\neq 0$ бўлган ҳол аввалгига ўхшаш текширилади. Бу ҳолда (3.8) тенглама

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\lambda_2 y+yf_1(x,y)}{xf_1(x,y)}$$

кўринишни олади. Бу тенглама учун координаталар боши махсус нуқта — эгар-тугун бўлади, иккинчи махсус нуқта $M_2\left(0,\ \frac{-\lambda_2}{a_{11}}\right)$ эса чегаравий тугун бўлади. Агар $a_{11}>0$ бўлса, у ҳолда охиргиси экваторга ўтади.

**5.** Фараз қилайлик $\lambda_1=\lambda_2=0$ бўлсин. У ҳолда (3.8) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{kx+yf_1(x,y)}{xf_1(x,y)}.$$

Фроммер усули ёрдамида, координаталар боши — ёпиқ эгар-тугун бўлишига ишонч ҳосил қиламиз. Эгрилик тартиби $\delta = \frac{1}{2}$, эгрилик ўлчови $r = \pm\sqrt{-2k / a_{11}}$ ($k<0$ деб ҳисоблаймиз, акс ҳолда $x$ ни $-x$ га алмаштирган бўлардик). Сферада қуйидаги тенгламаларга эга бўламиз:

$$\frac{d\tau}{dz} = \frac{-k}{a_{20} + a_{11}\tau},$$

$$\frac{d\mu}{dz} = \frac{k\mu^2}{a_{11} + a_{20}\mu + k\mu z}.$$

Агар $a_{11}=0$ бўлса, у ҳолда $M_1\left(0, \frac{k}{a_{20}}\right)$ махсус нуқта махсус тугун бўлади. Координаталар боши $M_1(0, 0)$ — ёпиқ эгар-тугундир, экваторда $\tau=0$ нур бўйлаб квазимахсус нуқталар мавжуд (83-чизма).

**6.** Фараз қилайлик, $\lambda_1$ ва $\lambda_2$ илдизлар комплекс илдизлар бўлсин, яъни $\lambda_1=\alpha+i\beta$, $\lambda_2=\alpha-i\beta$. У ҳолда, биринчидан координаталар боши ягона махсус нуқта бўлиши келиб чиқади. Бу ҳолда (3.8) тенглама бундай кўринишни олади:

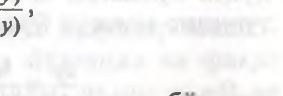
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta x + \alpha y + yf_1(x, y)}{\alpha x - \beta y + xf_1(x, y)},$$

бунда $\beta \neq 0$
Пуанкаре сферасида қуйидаги тенгламаларга эга бўламиз:

$$\frac{d\tau}{dz} = \frac{-\beta\,(1 + \tau^2)}{a_{20} - a_{11}\tau + z(\alpha - \beta\tau)},$$

$$\frac{d\mu}{dz} = \frac{\beta(1 + \mu^2)}{a_{11} - a_{20}\mu + z(\alpha + \beta\mu)},$$

яъни экваторда фақат квазимахсус нуқталар мавжуд.



83-чизма.

**4-мисол.** Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + yx}{y + x^2}$$

дифференциал тенглама $Oxy$ текислигида координаталар бошидан иборат битта $M_1(0, 0)$ махсус нуқта эга бўлиб, у марказ бўлади (84-чизма).

84-чизма.

85-чизма.

**5-мисол.** Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + xy}{x - y + x^2}$$

дифференциал тенглама $Oxy$ текислигида координаталар бошидан иборат битта $M_1(0,\ 0)$ махсус нуқта эга бўлиб, у фокус бўлади (85-чизма), Пуанкаре сферасида квазимахсус нуқталарга эга бўламиз.

**7.** Координаталар боши (1.1) тенглама учун махсус нуқта бўлмаган ҳол. (1.1) тенглама чексизликда махсус турнинг мавжуд бўлишида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + yf_1(x, y)}{a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + xf_1(x, y)} \tag{3.11}$$

кўринишни олади. $a_{20}x + a_{11}y = a_{11}\overline{y}$ $(a_{11} \neq 0)$ ўрин алмаштириш (3.11) тенгламани асл кўринишга келтиради, фақат фарқи $f_1(x,\ y) = \overline{a}_{11}y$ бўлади. Шундай қилиб,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + a_{11}y^2}{a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy}, \tag{3.12}$$

бу ерда қулайлик учун янги коэффициентлар ва ўзгарувчи ўрнига эски коэффициентларни ва ўзгарувчиларни ёздик.

Нол изоклини — парабола ($Ox$ ўқига параллел эмас), чексизлик изоклини — гипербола (асимптоталари координата ўқларига параллел). Бу эгри чизиқлар бир-бири билан учта, иккита ёки битта нуқтада кесишиши мумкин, шу билан бирга улар баъзан қўшилиб кетиши мумкин. Кесишиш нуқталари мавжуд бўлганда ($Oxy$ текислигидаги махсус нуқталар) юқорида қараб чиқилган ҳамма ҳолларни қараб чиқамиз.

*Oxy* текислигидаги махсус нуқталар фақат нол изоклини мавҳум парабола бўлган ҳолдагина бўлмайди, яъни $b_{10}=0$ ва $b_{01}^2$-$4b_{00}a_{11}<0$ да бўлмайди, ёки у чексизлик изоклинининг асимптоталаридан бири бўлмаганда. Пуанкаре сферасида қуйидаги тенгламага эга бўламиз:

$$\frac{d\tau}{dz}=-\frac{b_{10}+b_{00}z+(b_{01}-a_{10})\tau+a_{01}\tau^2+a_{00}z\tau}{a_{10}z+a_{11}\tau^2+a_{00}z+a_{01}z\tau}. \qquad (3.13)$$

$b_{10}=0$ бўлганда унинг учун координаталар боши махсус нуқта бўлади ва характеристик тенгламанинг илдизлари

$$2\lambda_{1,2}=-(b_{01}-2a_{10})\pm\sqrt{b_{01}^2-4a_{11}b_{00}}$$

кўринишни олади. $a_{20}x+a_{11}y=a_{10}\overline{x}$ $(a_{20}\neq0)$ ўрнига қўйиш (3.11) тенгламани яна асл кўринишига олиб келади, фақат фарқ $f_1(x,\ y)=a_{20}\overline{x}$ да бўлади, яъни

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b_{00}+b_{10}x+b_{01}y+a_{20}xy}{a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2}.$$

Бу тенглама учун текисликда махсус нуқталар чексизлик изоклинлари мавҳум парабола бўлганда ва фақат шундагина махсус нуқталар бўлмайди, яъни $a_{01}=0$ ва $a_{10}^2-4a_{20}a_{00}<0$ бўлганда ёки у нол изоклиннинг асимптоталаридан бирига айланганда.

Пуанкаре сферасида ушбу тенгламага эгамиз:

$$\frac{d\mu}{dz}=-\frac{a_{01}+a_{00}z+(a_{10}-b_{01})\mu+b_{00}z\mu+b_{10}\mu^2}{b_{01}z+b_{00}z^2+b_{10}\mu z+a_{20}\mu}. \qquad (3.14)$$

$a_{01}=0$ бўлганда унинг учун координаталар боши махсус нуқта бўлади ва характеристик тенгламанинг илдизлари

$$2\lambda_{1,2}=-(a_{10}-2b_{01})\pm\sqrt{a_{10}^2-4a_{00}a_{20}}$$

кўринишни олади. Шундай қилиб, қуйидаги теорема ўринли:

***Экватордаги махсус нуқталар иккинчи гуруҳга тегишли бўлиши учун текисликда махсус нуқталар бўлмаслиги зарур ва етарлидир.***

**6-мисол.** Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{1 + x^2}$$

дифференциал тенглама *Oxy* текисликда махсус нуқтага эга эмас, аммо бу тенглама Пуанкаре сферасида қуйидаги тенгламага эга бўлади:

$$\frac{d\mu}{dz} = -\frac{z}{\mu}$$

Бу тенглама учун координаталар боши махсус нуқта бўлиб, у марказ бўлади (86-чизма).

**7-мисол.** Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + y^2}{1 + xy}$$

дифференциал тенглама ҳам *Oxy* текисликда махсус нуқталарга эга эмас. Бу тенглама Пуанкаре сферасида қуйидаги кўринишдаги тенгламага ўтади:

$$\frac{d\tau}{dz} = \frac{-z + z\tau}{\tau + z^2}.$$

Махсус нуқта $M_1(0, 0)$ — марказ бўлади (86-чизма).

**8-мисол.** Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y - 1}{x^2 - x + 1}$$

дифференциал тенглама *Oxy* текислигида махсус нуқталарга эга эмас ва берилган тенглама Пуанкаре сферасида қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\frac{d\mu}{dz} = \frac{-z - \mu z}{z - 1 - z^2}.$$

Махсус нуқталар $z = \mu = 0$ — фокус, бироқ марказ ва фокуслар туридаги махсус нуқталар чексизликда топологик жиҳатдан эквивалентидир, шунинг учун мазкур ҳолда интеграл чизиқларнинг манзараси 87-чизмадаги каби бўлади.

Шуни айтиб ўтиш керакки, юқорида келтирилган теорема чексизликдаги махсус тур ҳолидагина ўринли, акс ҳолда *Oxy* текисликда махсус нуқталар бўлмаган ҳолда,

86-чизма.

87-чизма.

экваторда эса тугун туридаги махсус нуқта бўлиши мумкин.

**9-мисол.** Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - \frac{a^2}{2}}{p - x^2 - y^2}$$

дифференциал тенглама, агар $p < a$ бўлса, текисликда махсус нуқталарга эга бўлмайди ва берилган тенглама Пуанкаре сферасида

88-чизма.

$$\frac{d\tau}{dz} = \frac{-\tau + az^2 + p^2z^2\tau - \tau^3}{z(-1 + p^2z - \tau^2)}$$

тенгламага ўтади.
Махсус нуқта $z=\tau=0$ — тугун бўлади (88-чизма).

# III БОБ

# БУТУН ТЕКИСЛИКДА ХАРАКТЕРИСТИКАЛАРНИНГ ТЎЛИҚ МАНЗАРАСИ

## 1-§. ТЎРТТА МАХСУС НУҚТАГА ЭГА БЎЛГАН ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМАНИНГ ИСБОТИ

Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q_2(x, y)}{P_2(x, y)} \tag{1.1}$$

дифференциал тенглама берилган бўлсин, бунда $P_2(x, y)$ ва $Q_2(x, y)$ — $x$ ва $y$ ларга нисбатан иккинчи даражадан юқори бўлмаган даражали кўпҳадлар.

Фараз қилайлик, (1.1) тенглама $Oxy$ текислигида иккитаси $Ox$ ўқида ва иккитаси $Oy$ ўқида ётувчи тўртта махсус нуқтага эга бўлсин.

У ҳолда (1.1) тенгламани чизиқли айнимаган алмаштириш ёрдамида қуйидаги кўринишга келтириш мумкин:

$$\frac{dy}{dx} = K\,\frac{ec(x-a)(x-b) + ab(y-e)(y-c) + d_1xy - abec}{ec(x-a)(x-b) + ab(y-e)(y-c) + d_2xy - abec} \tag{1.2}$$

бунда $-\infty < K + \infty$, $d_1 \neq d_2$, $a$, $b$, $c$, $e$ — ўзгармас сонлар. (1.2) дифференциал тенглама тўртта: $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(0, e)$, $(0, c)$ махсус нуқталарга эга.

Бу махсус нуқталар тўртбурчак учларида жойлашгани кўриниб турибди, шунинг учун бу махсус нуқталар атрофида характеристикаларнинг манзараси қандай бўлишини текширамиз.

Агар (1.2) тенгламанинг махсус нуқталари тўртбурчакнинг учларидан иборат бўлса, у ҳолда бундай жойлашган тўртта махсус нуқталар учлардан иборат тўртбурчакни қавариқ, акс ҳолда ботиқ деб атаймиз. Ботиқ бўлган ҳолда махсус нуқталардан биттаси учбурчакнинг ичида жойлашган бўлиб, у қолган махсус нуқталар ёрдамида аниқланади, шунинг учун уни ички, қолганларини ташқи махсус нуқталар деб атаймиз.

(1.2) дифференциал тенглама учун $x-a=x_1$, $x-b=x_2$, $y-c=y_1$, $y-e=y_2$ кўчиришни бажариб қуйидаги тўртта тенгламага эга бўламиз (бунда ҳосил бўлган янги $x_1$, $x_2$, $y_1$ ва $y_2$ ўзгарувчиларни эски $x$, $y$ лар билан алмаштириб ёзамиз):

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= K\,\frac{ec(a-b)x-a\left[b(e+c)-d_1\right]y+Q_2(x,y)}{ec(a-b)x-a\left[b(e+c)-d_2\right]y+P_2(x,y)},\\
\frac{dy}{dx} &= K\,\frac{ec(b-a)x-b\left[a(e+c)-d_1\right]y+Q_2(x,y)}{ec(b-a)x-b\left[a(e+c)-d_2\right]y+P_2(x,y)},\\
\frac{dy}{dx} &= K\,\frac{c\left[d_1-e(a+b)\right]x+ab(c-e)y+Q_2(x,y)}{c\left[d_2-e(a+b)\right]x+ab(c-e)y+P_2(x,y)},\\
\frac{dy}{dx} &= K\,\frac{e\left[d_1-c(a+b)\right]x+ab(e-c)y+Q_2(x,y)}{e\left[d_2-c(a+b)\right]x+ab(e-c)y+P_2(x,y)},
\end{aligned} \tag{1.3}$$

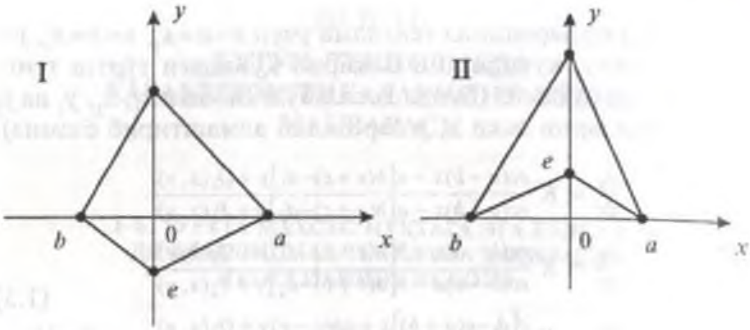
бу ерда

$$Q_2(x,y)=ecx^2+aby^2+d_1xy, \quad P_2(x,y)=ecx^2+aby^2+d_2xy.$$

Бу (1.3) тенгламаларнинг чизиқли қисмлари учун уларга мос $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$, $\Delta_4$ детерминантларни тузамиз ва мумкин бўлган нисбатларни аниқлаймиз:

$$\begin{aligned}
&\frac{\Delta_1}{\Delta_2}=-\frac{a}{b}, \quad \frac{\Delta_1}{\Delta_3}=-\frac{e(a-b)}{b(c-e)}, \quad \frac{\Delta_1}{\Delta_4}=\frac{c(a-b)}{b(c-e)},\\
&\frac{\Delta_2}{\Delta_3}=-\frac{e(b-a)}{a(c-e)}, \quad \frac{\Delta_2}{\Delta_4}=\frac{c(b-a)}{a(e-c)}, \quad \frac{\Delta_3}{\Delta_4}=-\frac{c}{e}.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

(1.4) даги $a$, $b$, $e$, $c$ ларнинг ишораларига қараб улар қавариқ ва ботиқ тўртбурчаклар ташкил этиши мумкин (89, I, II-чизмалар). $\frac{\Delta_i}{\Delta_j}$ нисбатнинг ишораларига қараб қуйидаги хулосаларга келамиз: қавариқ тўртбурчак ташкил этган махсус нуқталарнинг қарама-қарши учларидан ўтган характеристикалар манзараси бир хил бўлиб, бир томонда ётгани учун эса икки хил бўлади. Бундан, агар махсус нуқталар ботиқ тўртбурчак ташкил этса, у ҳолда унинг учта учидан ўтган характеристикалар манзараси бир хил бўлади, ички нуқтасидан ўтган характеристикалар манзараси бошқача бўлади. Демак, агар ташқи учта учи — эгармас бўлса, у ҳолда ички нуқта — эгар ёки аксинча бўлади.



89-чизма.

**1-теорема.** *Агар (1.2) тенглама тўртта махсус нуқтага эга бўлса ва улар қавариқ тўртбурчак ташкил этса, иккита қарама-қарши учларидаги махсус нуқталар — эгар туридаги, қолган иккита махсус нуқта — эгармас туридаги махсус нуқталар; агар улар ботиқ тўртбурчак ташкил этса, у ҳолда ташқи учта махсус нуқталар — эгар туридаги, ички битта нуқта — эгармас туридаги махсус нуқта ёки аксинча бўлади.*

Бу теоремадан кўриниб турибдики, (1.2) тенглама тўртта эгарга ёки тўртта эгармас махсус нуқтага эга бўлаолмайди.

Биз биринчи бобнинг 12-§ да Ляпунов теоремасини — дифференциал тенглама битта махсус нуқтага эга бўлганда фокус ёки марказ бўлишини — исбот қилган эдик. Энди дифференциал тенглама тўртта махсус нуқтага эга бўлганда, улардан иккитаси марказ ёки фокус бўлган ҳол учун Пуанкаре — Ляпунов теоремасини исбот қиламиз.

**2-теорема.** *Агар (1.2) дифференциал тенглама тўртта махсус нуқтага эга бўлса, у ҳолда уларнинг иккитасидан ортиғи иккинчи гуруҳ махсус нуқтаси бўлаолмайди.*

Исбот. 1-теоремага кўра қавариқ тўртбурчак бўлганда ҳар доим иккитаси эгар ва қолган иккитаси эгармас бўлишлиги ва улар иккинчи гуруҳ махсус нуқталар бўлиши мумкинлиги кўриниб турибди. Махсус нуқталар ботиқ тўртбурчак ташкил этган шартда, уларнинг учта учи эгармас махсус нуқталар бўлиши ҳақидаги теоремани исбот қиламиз.

Фараз қиламиз, $c>e>0$, $a>0$, $b>0$ бўлганда $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(c, 0)$ махсус нуқталар ботиқ тўртбурчак ташкил этсин ва улар эгармас туридаги махсус нуқта бўлсин (96-чизма). Бу махсус нуқталар мос характеристик тенгламаларининг дискриминантларини ҳисоблаймиз, натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$
\begin{aligned}
&D_1=[ec(a-b)-Kab(e+c)+Kad_1]^2-4Kaec(a-b)(d_1-d_2),\\
&D_2=[ec(b-a)-Kab(e+c)+Kad_1]^2-4Kbec(b-a)(d_1-d_2), \quad (1.5)\\
&D_3=[Kab(c-e)-ce(a+b)+cd_2]^2-4Kabc(c-e)(d_2-d_1).
\end{aligned}
$$

Исботлашни қуйидагича бошлаймиз: ҳамма махсус нуқталар эгармас — иккинчи гуруҳ махсус нуқталар бўлсин деб фараз қиламиз.

Бунда иккита ҳол бўлиши мумкин.

Биринчи ҳол: $a>0$, $c>e>0$, $b<0$, $d_2<0$, $K>0$.

(1.5) тенгламада $b$ ни $-b$, $d_2$ ни $-d_2$ билан алмаштириб натижа мусбат бўлсин деб фараз қиламиз.

У ҳолда

$$
\begin{aligned}
&D_1=[ec(a+b)+Kab(e+c)+Kad_1]^2-4Kaec(a+b)(d_1+d_2)<0,\\
&D_2=[-ec(a+b)+Kab(e+c)-Kad_1]^2-\\
&-4Kbec(a+b)(d_1+d_2)<0, \qquad (1.6)\\
&D_3=[Kab(c-e)+ce(a-b)+cd_2]^2-4Kabc(c-e)(d_2+d_1)<0
\end{aligned}
$$

га эга бўламиз. Энди (1.6) система учун бир вақтда $D_1<0$ ва $D_3<0$ бўлаолмаслигини исбот қиламиз. Унинг учун $D_1$ дан $d_1$ бўйича хусусий ҳосила оламиз:

$$\frac{\partial D_1}{\partial d_1}=2[ec(a+b)+Kab(e+c)+Kad_1]Ka-4Kaec(a+b)=0.$$

$d_1$ ўзгарувчига нисбатан $D_1$ минимумга эга бўлишини кўрсатишимиз мумкин. Стационар нуқтанинг қиймати

$$Kad_1=ec(a+b)-Ka(e-c) \qquad (1.7)$$

ни $D_1$ га қўйиб,

$$D_1=4aec(a+b)[b(e+c)-d_2]<0$$

ни ҳосил қиламиз, бундан

$$b(e+c)<d_2. \qquad (1.8)$$

Энди $D_3$ дан $d_2$ ўзгарувчи бўйича хусусий ҳосила оламиз:

$$\frac{\partial D_3}{\partial d_1} = 2[Kab(c-e) + ce(a+b) + cd_2]c - 4Kabc(c-e) = 0.$$

$d_2$ ўзгарувчига нисбатан $D_3$ минимумга эга эканлигини осонгина кўрсатишимиз мумкин. Стационар нуқтанинг қиймати

$$cd_2 = Kab(c-e) - ce(a-b) \tag{1.9}$$

ни $D_3$ га қўйиб,

$$D_3 = 4Labc(c-e)[e(a-b) - d_2] < 0$$

ни ҳосил қиламиз, бундан

$$e(a\text{-}b) < d_1. \tag{1.10}$$

(1.7) ва (1.10), (1.8) ва (1.9) формулаларга асосан мос равишда қуйидагиларга эга бўламиз:

$$Kae(a\text{-}b) < ec(a+b) - Kab(e+c), \tag{1.11}$$

$$cb(e+c) < Kab(c-e) - ce(a-b). \tag{1.12}$$

Бу тенгликларнинг чап ва ўнг қисмларини ўзаро қўшиб,

$$Kae(a+b) + cb(c-e) < 0$$

ни ҳосил қиламиз, бунинг эса бўлиши мумкин эмас, чунки шартга кўра $c>e$.

Иккинчи ҳол: $c>e>0$, $a>0$, $b<0$, $d_2>0$, $k<0$ бўлсин. (1.5) системадаги $b$ ни $-b$, $k$ ни $-k$ билан алмаштирамиз, натижада ҳосил бўлган ифода мусбат деб фараз қиламиз. Юқоридаги биринчи ҳолдаги усул каби (1.6) системадаги $D_2<0$ ва $D_3<0$ бир вақтда бўлиши мумкин эмаслигини исбот қилиш мумкин. $c>e$ шартга кўра $Kae(a+b)+ca(c-e)<0$ тенгсизлик нотўғрилиги келиб чиқади.

Бошқа ботиқ тўртбурчакларнинг жойланиши ҳақида ҳам юқоридаги каби теоремалар исботланади.

## 2-§. (1.1) ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАНИНГ БИРОР МАХСУС НУҚТАСИ МАРКАЗ ТУРИГА ЭГА БЎЛГАН ҲОЛ УЧУН ЧЕКЛАНГАН ТЕКИСЛИКДАГИ СИФАТ МАНЗАРАСИ

Агар (1.1) тенглама камида битта марказ туридаги махсус нуқтага эга бўлса, у ҳолда уни қуйидаги кўринишга келтириш мумкин:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x+ax^2+(2b+\alpha)xy+cy^2}{y+bx^2+(2c+\beta)xy+dy^2}. \qquad (2.1)$$

$x=x_1\cos\varphi-y_1\sin\varphi$, $y=x_1\sin\varphi+y_1\cos\varphi$ алмаштириш ёрдамида (2.1) тенгламани қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$\frac{dy_1}{dx_1}=-\frac{x_1+a_1x_1^2+(2b_1+\alpha_1)x_1y_1+c_1y_1^2}{y_1+b_1x_1^2+(2c_1+\beta_1)x_1y_1+d_1y_1^2}, \qquad (2.2)$$

бунда

$$\begin{gathered}
a_1=a\cos^3\varphi+(3b+\alpha)\cos^2\varphi\sin\varphi+(3c+\beta)\cos\varphi\sin^2\varphi+d\sin^3\varphi,\\
b_1=b\cos^3\varphi+(3c-\alpha-b)\cos^2\varphi\sin\varphi+(d-2b-\alpha)\cos\varphi\sin^2\varphi-c\sin^3\varphi,\\
c_1=c\cos^3\varphi+(d-2b-\alpha)\cos^2\varphi\sin\varphi+(\alpha-2c-\beta)\cos\varphi\sin^3\varphi+b\sin^3\varphi,\\
d_1=d\cos^3\varphi-(3c+\beta)\cos^2\varphi\sin\varphi+(3b+\alpha)\cos\varphi\sin^2\varphi-a\sin^3\varphi,\\
\alpha_1=\alpha\cos\varphi+\beta\sin\varphi, \qquad (A)\\
\beta_1=\alpha\sin\varphi+\beta\sin\varphi.
\end{gathered}$$

Бизга маълумки, (2.1) тенгламанинг (0, 0) махсус нуқтаси марказ бўлиши учун қуйидаги олтита ҳолдан бири бажарилиши зарур:

1. $\alpha=\beta=0.$
2. $a+c=\beta=0.$
3. $aK^3+(3b+\alpha)K^2+(3c+\beta)K-d=0,\quad K=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{(b+d)}{(a+c)}.$
4. $a+c=0,\ b+d=0.$ (2.3)
5. $b+d=\alpha=\beta+5(a+c)=ac+2a^2+d^2=0,\ a+c\neq 0.$
6. $a_1+c_1=\beta_1=\alpha_1+5(b_1+d_1)=b_1d_1+2d_1^2+a_1^2=0,\ b+d\neq 0.$

(2.1) дифференциал тенглама учун махсус нуқта марказ бўлишнинг коэффициентлар шарти билан кўпчилик математиклар шуғулланганлар, амалиётда Фроммер-Сахарниковларнинг (2.3) коэффициентлар шартидан фойдаланиш қулайдир.

Фараз қиламиз, марказ бўлиш шарти (2.3) бажарилсин. (2.1) тенгламанинг характеристикалари манзарасини тўлиқ текширамиз. Махсус нуқталар сони тўртта, учта ва иккита бўлган ҳолларини тўлиқ текширамиз ва уларга мос сифат манзарасини чизамиз.

*Марказ бўлишининг биринчи ҳоли:* $\alpha=\beta=0$.

Бу ҳолда (2.1) тенглама

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x+ax^2+2bxy+cy^2}{y+bx^2+2cxy+dy^2} \tag{2.4}$$

кўринишга келади. Координаталар системасини мос бурчакка буриш натижасида (2.4) тенгламани қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$\frac{dy_1}{dx_1}=-\frac{x_1+a_1x_1^2+c_1y_1^2}{y_1+b_1x_1^2+d_1y_1^2} \tag{2.5}$$

(2.5) тенглама қуйидаги махсус нуқталарга эга:

$$M_1(0,0),\quad M_2\left(-\frac{1}{a_1},\,0\right),$$

$$M_3\left[\frac{-(4c_1^2+d_1^2)+d_1\sqrt{d_1^2+8c_1^2-4a_1c_1}}{2(a_1d_1^2+4c_1^3)},\ \frac{d_1(c_1-a_1)-c_1\sqrt{d_1^2+8c_1^2-4a_1c_1}}{a_1d_1^2+4c_1^3}\right],$$

$$M_4\left[\frac{-(4c_1^2+d_1^2)+d_1\sqrt{d_1^2+8c_1^2-4a_1c_1}}{2(a_1d_1^2+4c_1^3)},\ \frac{d_1(c_1-a_1)+c_1\sqrt{d_1^2+8c_1^2-4a_1c_1}}{a_1d_1^2+4c_1^3}\right].$$

(2.5) тенглама учун $x_1=x_0+\xi$, $y_1=y_0+\eta$ алмаштиришни бажарсак,

$$\frac{d\eta}{d\xi}=-\frac{(1+2a_1x_0)\xi+2c_1y_0\eta+a_1\xi^2+c_1\eta^2}{2c_1y_0\xi+(1+2c_1x_0+2d_1y_0)\eta+2c_1\xi\eta+d_1\eta^2}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу тенгламанинг характеристик тенгламаси илдизлари:

$$\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{4c_1^2y_0^2-4a_1c_1x_0^2-4a_1d_1x_0y_0-2(a_1+c_1)x_0-2d_1y_0-1}.$$

$M_2$, $M_3$ ва $M_4$ махсус нуқталар учун мос равишда

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a_1-2c_1}{a_1}}, \tag{2.6}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{d_1^2+8c_1^2-4a_1c_1}}{a_1d_1^2+4c_1^3}}\ \sqrt{c_1\sqrt{d_1^2+8c_1^2-4a_1c_1}+d_1(a_1-c_1)} \tag{2.7}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{d_1^2+8c_1^2-4a_1c_1}}{a_1d_1^2+4c_1^3}}\ \sqrt{c_1\sqrt{d_1^2+8c_1^2-4a_1c_1}-d_1(a_1-c_1)} \tag{2.8}$$

илдизларга эга бўламиз.

Агар $d_1^2+8c_1^2-4a_1c>0$ ва $a_1d_1(a_1d_1^2+4c_1^2)\neq 0$ бўлса, у ҳолда (2.5) тенглама тўртта махсус нуқтага эга бўлади. Бу тўртта махсус нуқталар учун қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

1) $a_1>0,\ c_1>0,\ d_1>0,\ a_1<2c_1,\ a_1d_1^2+4c_1^3>0$;

2) $a_1>0,\ c_1>0,\ d_1<0,\ a_1<2c_1,\ a_1d_1^2+4c_1^3>0$;

3) $a_1<0,\ c_1<0,\ d_1>0,\ a_1>2c_1,\ a_1d_1^2+4c_1^3<0$;

4) $a_1<0,\ c_1<0,\ d_1<0,\ a_1>2c_1,\ a_1d_1^2+4c_1^3>0$;(2.9)

5) $a_1<0,\ c_1>0,\ d_1<0,\ a_1<2c_1,\ a_1d_1^2+4c_1^3>0$;

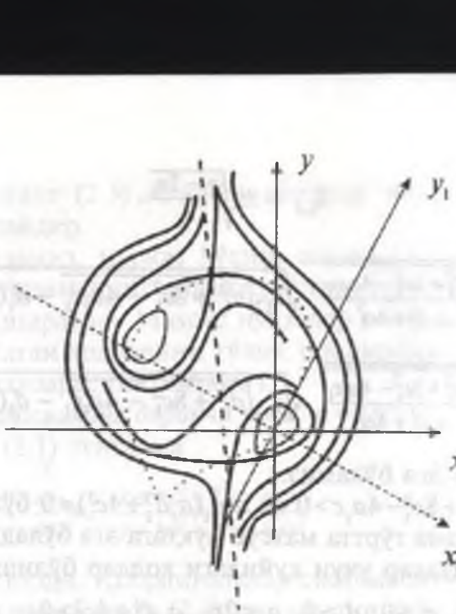
6) $a_1<0,\ c_1>0,\ d_1>0,\ a_1<2c_1,\ a_1d_1^2+4c_1^3>0$;

7) $a_1>0,\ c_1<0,\ d_1>0,\ a_1>2c_1,\ a_1d_1^2+4c_1^3<0$;

8) $a_1>0,\ c_1<0,\ d_1<0,\ a_1>2c_1,\ a_1d_1^2+4c_1^3<0$.

1—4 ҳоллар учун тенгламанинг махсус нуқталари қавариқ тўртбурчакни ташкил этиб, иккита қарама-қарши учларидан иборат $M_1$, $M_2$ нуқталар марказ, бошқа иккитаси — $M_3$, $M_4$ нуқталар эгар бўлади. 5—8 ҳоллар учун тенгламанинг махсус нуқталари ботиқ тўртбурчак ташкил этади ва ички $M_1$ учидан иборат махсус нуқта марказ, қолган $M_2$, $M_3$, $M_4$ махсус нуқталар эгар бўлади.

$a_1>0, c_1>0, d_1>0, a_1<2c_1, d_1^2+4c_1^2>0$ бўлган ҳол учун (2.5) тенгламанинг характеристикалари сифат манзараси 90-чизмада тасвирланган. Изоклин ноли маркази $\left(-\frac{1}{2a_1}, 0\right)$ нуқтада бўлган эллипсдан, изоклин чексизи эса $\left(-\frac{1}{2a_1}, 0\right)$ нуқтада кесишувчи иккита тўғри чизиқдан иборатдир.



90-чизма.

$a_1>0$, $c_1<0$, $d_1>0$, $a_1<2c_1$, $a_1d_1^2+4c_1^2<0$ ҳол учун, характеристикаларнинг сифат манзараси 91-чизмада тасвирланган бўлиб, бунда изоклин ноли маркази $\left(-\frac{1}{2a_1},\ 0\right)$ нуқтада бўлган гипербола, изоклин чексизи эса $\left(-\frac{1}{2a_1},\ 0\right)$ нуқтада кесишувчи иккита тўғри чизиқдан иборатдир.

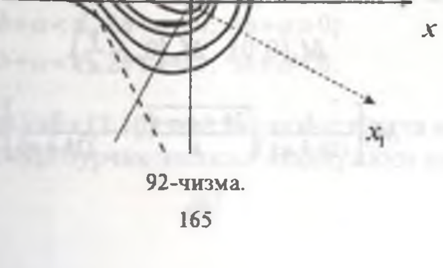
91-чизма.

Агар $a_1^2+bc_1^2=4a_1c_1$ ва $a_1(a_1d_1^2+4c_1^3)\neq 0$ бўлса, у ҳолда (2.5) тенглама иккита оддий $M_1(0,0)$, $M_2\left(\frac{1}{a_1},\ 0\right)$ ва битта икки каррали $M_3\left[-\frac{4c_1^2+d_1^2}{2(a_1d_1^2+4c_1^3)}+\frac{d(a_1-c_1)}{a_1d_1^2+4c_1^3}\right]$ махсус нуқталарга эга бўлади. $M_2$ ва $M_3$ махсус нуқталар учун мос равишда характеристик тенгламанинг илдизлари:

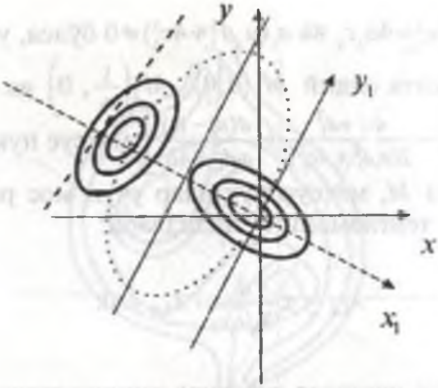
$$\lambda_{1,2}=\pm\frac{d_1}{2\sqrt{a_1c_1}},\ \lambda_{3,4}=0.$$

Учта махсус нуқталар учбурчак ташкил этади. Битта учи $M_1$ дан иборат махсус нуқта марказ, иккинчи учи $M_2$ — эгар ва учинчи учи $M_3$ — айнаган эгар бўлади.

$c_1>0$, $a_1>2c_1$, $d_1>0$, $a_1d_1^2+4c_1^3>0$ ҳол учун (2.5) тенгламанинг характеристикалари сифат манзараси 92-чизмада тасвирланган бўлиб, бунда изоклин ноли маркази $\left(-\frac{1}{2a_1},\ 0\right)$ нуқтада бўлган эллипсдан, изоклин чексизи эса $\left(-\frac{1}{2a_1},\ 0\right)$ нуқтада кесишувчи иккита тўғри чизиқдан иборат бўлиб, улардан биттаси: $2c_1x_1+dy_1+1=0$ тенгламага эга бўлгани $\left[\frac{1}{2(c_1-a_1)},\ \frac{1}{4(c_1-a_1)c_1}\right]$ нуқтада эллипсга уринади.



92-чизма.



93-чизма.

Агар $d_1^2+bc_1-4a_1c_1<0$ ва $a_1(a_1d_1^2+4c_1^3)\neq 0$ бўлса, у ҳолда (2.5) тенглама иккита $M_1(0,\ 0)$ ва $M_2\left(-\frac{1}{a_1},\ 0\right)$ оддий махсус нуқталарга эга бўлади. $M_2$ махсус нуқта учун:

$$\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{a_1-2c_1}{a_1}}.$$

Агар $a_1(a_1-2c_1)<0$ бўлса, у ҳолда (2.5) тенглама иккита марказга (93-чизма), агар $a_1(a_1-2c_1)>0$ бўлса, у ҳолда марказ ва эгарга эга бўлади.

$a_1d_1^2+4c_1^3=0,\ d_1^2+bc_1^2-4a_1c_1>0$ бўлган ҳол учун иккита оддий махсус нуқта, яъни $M_1$ — марказ, $M_2\left(\frac{d_1^2}{4c_1^3},\ 0\right)$ — эгар бўлади.

*Марказ бўлишининг иккинчи ҳоли:* $a+c=\beta=0$.

Бу ҳолда (2.1) тенглама

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x+(2b+\alpha)xy}{y+bx^2+dy^2} \tag{2.10}$$

кўринишга келади. (2.10) тенглама учун махсус нуқталар

$$M_1(0,0),\ \ M_2\left(0,\ -\frac{1}{d}\right)$$

$$M_3\left[\frac{1}{(2b+\alpha)}\sqrt{\frac{2b+\alpha-d}{b}},\ -\frac{1}{(2b+\alpha)}\right],$$

$$M_4\left[\frac{1}{(2b+\alpha)}\sqrt{\frac{2b+\alpha-d}{b}},\ -\frac{1}{(2b+\alpha)}\right]$$

бўлади. (2.10) тенглама учун $x=x_0+\xi$, $y=y_0+\eta$ алмаштиришни бажарсак,

$$\frac{d\eta}{d\xi}=-\frac{\left[1+(2b+\alpha)y_0\right]\xi+(2b+\alpha)x_0\eta+(2b+\alpha)\xi\eta}{2bx_0\xi+(1+2dy_0)\eta+b\xi^2+d\eta^2}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу тенглама $M_1$ махсус нуқта учун характеристик тенгламанинг илдизлари

$$2\lambda_{1,2}=-\alpha x_0\pm\sqrt{\alpha^2x^2-4[1+(2d+2b+\alpha)y_0+2(2b+\alpha)(dy_0^2-bx_0^2)]}$$

кўринишда бўлади. $M_2$, $M_3$ ва махсус нуқталар учун эса мос равишда

$$\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{2b+\alpha-d}{d}},\tag{2.11}$$

$$2\lambda_{1,2}=\frac{1}{(2b+\alpha)}\sqrt{\frac{2b+\alpha-d}{b}}\quad[-\alpha\pm\sqrt{-\alpha+8b(2b+\alpha)}],\tag{2.12}$$

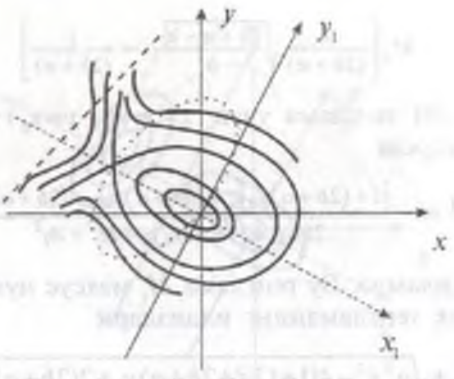
$$2\lambda_{1,2}=\frac{1}{(2b+\alpha)}\sqrt{\frac{2b+\alpha-d}{b}}\quad[\alpha\pm\sqrt{-\alpha+8b(2b+\alpha)}]\tag{2.13}$$

кўринишларда бўлади.

Агар $b(2b+\alpha-d)>0$ ва $d(2b+\alpha)\neq0$ бўлса, у ҳолда (2.10) тенглама тўртта махсус нуқтага эга бўлади. Бу тўртта махсус нуқталар учун қуйидаги ҳоллардан бири бўлиши мумкин:

1) $b>0$, $d>0$, $2b+\alpha>d$;
2) $b<0$, $d<0$, $2b+\alpha<d$;
3) $b>0$, $d<0$, $2b+\alpha>d$, $2b+\alpha>0$;
4) $b<0$, $d>0$, $2b+\alpha<d$, $2b+\alpha<0$; (2.14)
5) $b>0$, $2b+\alpha>d$, $2b+\alpha<0$, $3b+\alpha>0$;
6) $b>0$, $2b+\alpha>d$, $2b+\alpha<0$; $3b+\alpha<0$;
7) $b<0$, $2b+\alpha<d$, $2b+\alpha>0$; $3b+\alpha>0$;
8) $b<0$, $2b+\alpha<d$, $2b+\alpha>0$; $3b+\alpha<0$.

1, 2-ҳоллар учун (2.10) тенгламанинг тўртта махсус нуқтаси қаварик тўртбурчак ташкил этади, икки қарама-қар-



94-чизма.

ши учларида ётувчи $M_1$, $M_2$ — марказ, иккита бошқаси $M_3$, $M_4$ — эгар туридаги махсус нуқталар бўлади. 3—8-ҳолларда ботиқ тўртбурчак ташкил этади, 3, 4-ҳоллар учун $M_1$ — марказ, $M_2$, $M_3$, $M_4$ — эгар, ёки 5—8-ҳоллар учун $M_1$ — марказ, $M_3$, $M_4$ — тугун, $M_2$ — эгар туридаги махсус нуқталар бўлади.

1—4-ҳоллар учун 90, 91-чизмаларда, $b>0$, $2b+d>d$, $2b+\alpha<0$ ҳол учун эса 95-чизмада характеристикаларнинг сифат манзараси тасвирланган.

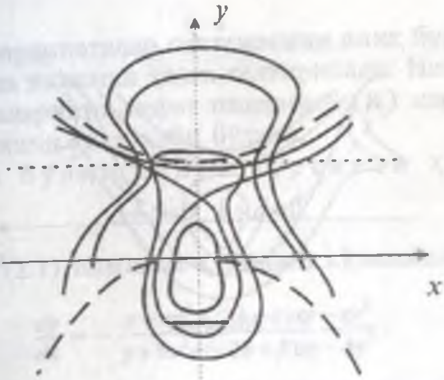
Изоклин ноли $x=0$, $y=-\frac{1}{2b+\alpha}$ иккита тўғри чизиқдан иборат бўлиб, иккинчиси (2.10) тенгламанинг характеристикасидан иборат, изоклин чексизи эса, маркази $\left(0,-\frac{1}{2}d\right)$ нуқтада бўлган гиперболадир.

Агар $b(2b+\alpha)>0$, $d=0$ бўлса, у ҳолда (2.10) тенглама учта оддий махсус нуқтага эга бўлади:

$$M_1(0,0), M_3\left[\frac{1}{\sqrt{b(2b+\alpha)}},-\frac{1}{(2b+\alpha)}\right], M_4\left[-\frac{1}{\sqrt{b(2b+\alpha)}},-\frac{1}{(2b+\alpha)}\right].$$

Бу нуқталар учбурчак ташкил этади, битта учи бўлмиш $M_1$ — марказ, бошқа иккитаси $M_3$ ва $M_4$ — эгар туридаги махсус нуқталар бўлади.

$d=0$, $b>0$, $2b+\alpha>0$ бўлган ҳолнинг сифат манзараси 96-чизмада тасвирланган. Изоклин чексизи — параболадан иборат.



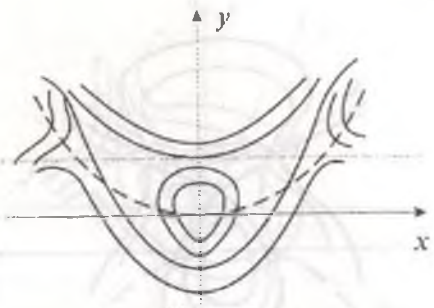
95-чизма.

Агар $b(2b+\alpha-d)<0$, $d\neq0$ бўлса, у ҳолда (2.10) тенглама иккита оддий $M_1(0, 0)$ ва $M_2\left(0, -\frac{1}{d}\right)$ махсус нуқталарга эга бўлади. Бу нуқталар учун қуйидаги ҳоллардан бири бўлиши мумкин:

1) $b<0$, $d>0$, $2b+\alpha>d$, $3b+\alpha<0$;
2) $b<0$, $d>0$, $2b+\alpha>d$, $3b+\alpha>0$;
3) $b>0$, $d<0$, $2b+\alpha<d$, $3b+\alpha>0$;
4) $b>0$, $d<0$, $2b+\alpha<d$, $3b+\alpha<0$;
5) $b<0$, $d<0$, $2b+\alpha>d$, $2b+\alpha>0$, $3b+\alpha>0$; (2.15)
6) $b<0$, $d<0$, $2b+\alpha>d$, $2b+\alpha>0$, $3b+\alpha<0$;
7) $b<0$, $d<0$, $2b+\alpha>d$, $2b+\alpha<0$, $3b+\alpha<0$;
8) $b>0$, $d>0$, $2b+\alpha<d$, $2b+\alpha>0$, $3b+\alpha>0$;
9) $b>0$, $d>0$, $2b+\alpha<d$, $2b+\alpha<0$, $3b+\alpha<0$;
10) $b>0$, $d>0$, $2b+\alpha<d$, $2b+\alpha<0$, $3b+\alpha<0$.

1—4-ҳоллар учун (2.10) тенглама иккита марказ, 5—10-ҳоллар учун эса марказ ва эгар туридаги махсус нуқталарга эга бўлади. Бу ҳолларнинг сифат манзараси 93, 94-чизмаларда тасвирланган.

Агар $2b+\alpha=d\neq0$ ва $b\neq0$ бўлса, у ҳолда (2.10) тенглама битта $M_1(0, 0)$ оддий махсус нуқтага эга бўлиб, учта махсус нуқта битта нуқтага жойлашган бўлади. Бу ҳолда $M_1$ —



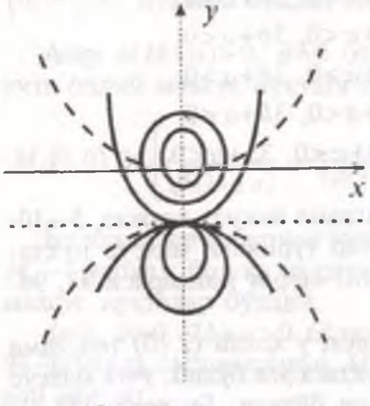
96-чизма.

марказ, $M_2\left(0, -\frac{1}{d}\right)$ — ёпиқ эгар-тугун туридаги махсус нуқталар бўлади. Изоклин ноли $x = 0$, $y = -\frac{1}{d}$ тўғри чизиқлардан иборат бўлиб, ундан $y = -\frac{1}{d}$ тўғри чизиқ характеристика бўлади. Агар $bd>0$ бўлса, изоклин чексизи эллипс, агар $bd<0$ бўлса, гипербола бўлади.

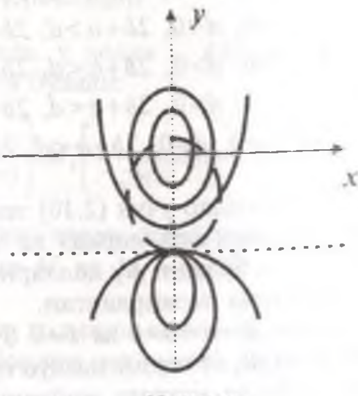
Бу ҳолларнинг сифат манзараси 97, 98-чизмаларда тасвирланган.

Марказ бўлишининг учинчи ҳоли:

$$aK^3(3b+\alpha)K^2+(3c+\beta)K-d=0, \quad K=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{(b+d)}{(a+c)}.$$



97-чизма.



98-чизма.

Бу ҳол координаталар системасини аниқ бурчакка буриш ёрдамида иккинчи ҳолга келтирилади. Натижада характеристикаларнинг сифат назарияси ($A_2$) марказ бўлишининг иккинчи ҳоли каби бўлади.

Марказ бўлишининг тўртинчи ҳоли:

$$a+c=0, \ b+d=0.$$

Бу ҳолда (2.1) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + ax^2 + (2b + a)xy - ay^2}{y + bx^2 + (-2b + \beta)xy - by^2}. \tag{2.16}$$

Координаталар системасини унга мос бурчакка буриш ёрдамида (2.16) тенгламани қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{x_1 + (2b_1 + \alpha_1)x_1y_1}{y_1 + b_1x_1^2 + \beta_1x_1y_1 - b_1y_1^2}. \tag{2.17}$$

(2.17) тенгламанинг махсус нуқталари

$$M_1(0,0), \ M_2\left(0, \frac{1}{b_1}\right),$$

$$M_3\left[\frac{\beta_1 + \sqrt{\beta_1^2 + 4b_1(3b_1 + \alpha_1)}}{2b_1(2b_1 + \alpha_1)}, -\frac{1}{2b_1 + \alpha_1}\right],$$

$$M_4\left[\frac{\beta_1 - \sqrt{\beta_1^2 + 4b_1(3b_1 + \alpha_1)}}{2b_1(2b_1 + \alpha_1)}, -\frac{1}{2b_1 + \alpha_1}\right]$$

кўринишда бўлади. (2.17) тенгламада $x_1 = x_0 + \xi$, $y_1 = y_0 + \eta$ алмаштиришни бажарсак,

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{[1 + (2b_1 + \alpha_1)y_0]\xi + (2b_1 + \alpha_1)x_0\eta + (2b_1 + \alpha_1)\xi\eta}{(2b_1x_0 + \beta_1y_0)\xi + (1 + \beta_1x_0 - 2b_1y_0)\eta + b_1\xi^2 + \beta_1\xi\eta - b_1\eta^2}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу тенгламанинг характеристик тенглама илдизлари:

$$2\lambda_{1,2} = -(\alpha_1x_0 - \beta_1y_0) \pm \sqrt{(\alpha_1x_0 - \beta_1y_0)^2 - 4\Delta_1},$$

бу ерда

$$\Delta_1 = 1 + \beta_1x_0 + \alpha_1y_0 - 2b_1(2b_1 + \alpha_1)(x_0^2 + y_0^2).$$

$M_2$, $M_3$ ва $M_4$ махсус нуқталарга мос равишда

$$2\lambda_{1,2} = \frac{1}{b}, \left(\beta_1 + \sqrt{\omega}\right), \tag{2.18}$$

$$\begin{gathered}2\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2b_1(2b_1+\alpha_1)}\Big\{[\alpha_1(\beta_1 + \sqrt{\omega}) + 2\beta_1 b_1] \mp \\ \mp \sqrt{[\alpha_1(\beta_1 + \sqrt{\omega}) + 2\beta_1 b_1]^2 + 8b_1(2b_1 + \alpha_1)(\beta_1 + \sqrt{\omega})\sqrt{\omega}}\Big\};\end{gathered} \tag{2.19}$$

$$\begin{gathered}2\lambda_{1,2} = \frac{1}{2b_1(2b_1+\alpha_1)}\Big\{[\alpha_1(\beta_1 + \sqrt{\omega}) + 2\beta_1 b_1] \mp \\ \mp \sqrt{[\alpha_1(\beta_1 + \sqrt{\omega}) + 2\beta_1 b_1]^2 - 8b_1(2b_1 + \alpha_1)(\beta_1 - \sqrt{\omega})\sqrt{\omega}}\Big\}\end{gathered}$$

ларни ҳосил қиламиз, бу ерда $\omega=\beta_1^2+4b_1(3b_1+\alpha_1)$.

Агар $\omega>0$ ва $b_1(2b_1+\alpha_1)\neq 0$ бўлса, у ҳолда (2.17) тенглама тўртта махсус нуқтага эга бўлади.

Бу нуқталар биргаликда бўлиши учун қуйидаги ҳоллардан бири бўлиши керак:

1) $b_1>0$, $(2b_1+\alpha_1)>0$;
2) $b_1<0$, $(2b_1+\alpha_1)<0$;
3) $b_1<0$, $\beta_1>0$, $3b_1+\alpha_1>0$;
4) $b_1<0$, $\beta_1>0$, $3b_1+\alpha_1>0$, $3b_1+\alpha_1<0$;
5) $b_1<0$, $\beta_1<0$, $3b_1+\alpha_1>0$;
6) $b_1<0$, $\beta_1<0$, $2b_1+\alpha_1>0$, $3b_1+\alpha_1<0$;
7) $b_1>0$, $\beta_1>0$, $2b_1+\alpha_1<0$, $3b_1+\alpha_1>0$;
8) $b_1>0$, $\beta_1>0$, $3b_1+\alpha_1<0$;
9) $b_1>0$, $\beta_1<0$, $2b_1+\alpha_1>0$; $3b_1+\alpha_1>0$;
10) $b_1>0$, $\beta_1<0$, $3b_1+\alpha_1<0$.

1—10-ҳолларнинг ҳаммасида (2.17) тенгламанинг тўртта махсус нуқталари ботиқ тўртбурчакни ташкил этади. 1, 2-ҳолларда $M_1$ — марказ, $M_2$, $M_3$ ва $M_4$ — эгар туридаги махсус нуқталар бўлади. Қолган ҳолларнинг ҳаммасида марказ, иккита тугун ва эгар туридаги махсус нуқталарга эга бўламиз.

Бу ҳолларнинг сифат манзараси 91, 95-чизмаларда тасвирланган.

Агар $\omega=0$ ва $b_1(2b_1+\alpha_1)\neq 0$ бўлса, у ҳолда (2.17) тенглама иккита $M_1(0,\ 0)$, $M_2\left(\frac{1}{b}\right)$ оддий махсус нуқтага ва иккитаси биттасининг устига тушувчи

$$M_3\left[\frac{\beta_1}{2b_1(2b_1+\alpha_1)},\ -\frac{1}{2b_1+\alpha_1}\right]$$

махсус нуқтага эга бўлади.

$M_1$ ва $M_2$ махсус нуқталар учун мос равишда

$$\lambda_1=\frac{\beta_1}{2b_1}, \qquad \lambda_2=-\frac{\beta_1}{2b_1},$$

$$\lambda_1=0, \qquad \lambda_2=-\frac{\beta_1}{2b_1}$$

ларга эга бўламиз.

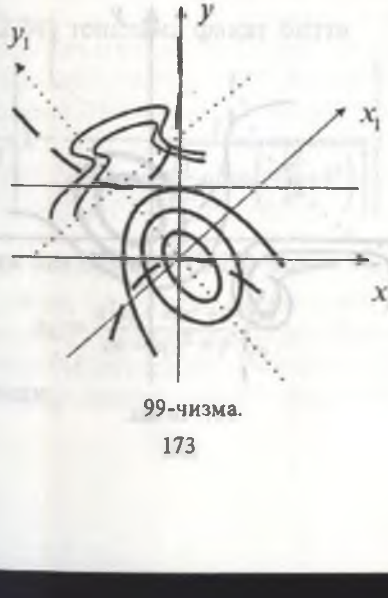
Агар $\omega=0$ ва $b_1(2b_1+\alpha_1)\neq 0$ бўлса, у ҳолда (2.17) тенгламанинг учта махсус нуқтаси учбурчак ташкил этади ва битта учи $M_1$ — марказ, иккинчи учи $M_2$ — лимит тугун туридаги махсус нуқталар бўлади.

$b_1>0$, $\beta_1>0$, $2b_1+\alpha_1<0$ га мос сифат манзара 99-чизмада тасвирланган. Изоклин ноли $x_1=0$, $y_1=-\frac{1}{2b_1+\alpha_1}$ тўғри чизиқлар бўлиб, улардан $y_1$ — характеристикадир.

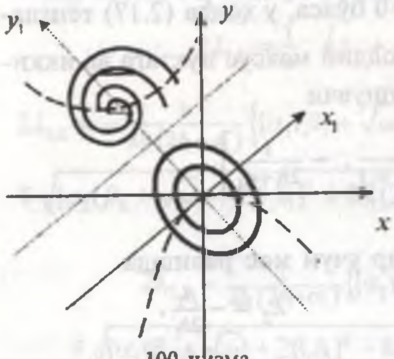
Изоклин чексизи маркази

$$\left[-\frac{\beta_1}{\beta_1^2+4b_1^2},\ \frac{2b_1}{\beta_1^2+4b_1^2}\right]$$

нуқтада ётувчи тенг томонли гиперболадан иборат.



99-чизма.



100-чизма.

Агар $\omega<0$ ва $\beta_1 b_1 \neq 0$ бўлса, у ҳолда (2.17) тенглама $M_1(0,\ 0)$, $M_2\left(0,\ \frac{1}{b_1}\right)$ иккита оддий махсус нуқтага эга бўлади. $M_1$ махсус нуқта шартга кўра марказ; $M_2$ махсус нуқта эса (2.18) га кўра қўпол фокус бўлади.

$b_1>0$, $\beta_1>0$, $2b_1+\alpha_1>0$ ҳоллар учун сифат манзара 100-чизмада тасвирланган.

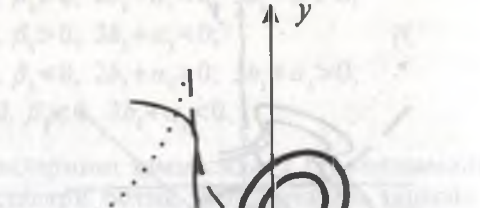
Агар $\omega<0$ ва $\beta_1 \neq 0$ бўлса, у ҳолда $M_1$ махсус нуқта марказ бўлади. Махсус нуқталарнинг иккитаси мос равишда марказ бўлишнинг сифат манзараси 101-чизмада тасвирланган.

Марказ бўлишининг бешинчи ҳоли:

$$b + d = \alpha = \beta + 5a + 5c = ac + 2a^2 + d^2 = 0,\ \ a + c \neq 0.$$

Бу ҳолда (2.1) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + ax^2 + 2bxy - \dfrac{y^2(2a^2 + b^2)}{a}}{y + bx^2 + xy(a^2 + 3b^2) - by^2}. \tag{2.21}$$



101-чизма.

Бу тенгламанинг изоклин ноли ва изоклин чексизи мос равишда:

$$
\begin{aligned}
&x + ax^2 + 2bxy - \frac{y^2(2a^2 + b^2)}{a} = 0, \\
&y + bx^2 + \frac{xy(a^2 + 3b^2)}{a} - by^2 = 0.
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

(2.22) системани ечиб, (2.21) тенглама махсус нуқталарининг координаталарини топамиз. Улардан бирининг координаталари (0, 0) кўринишда бўлиб, қолган нуқталарнинг координаталари

$$
x = \frac{a^2x + b(a^2 + b^2)y^2}{ab - a(a^2 + b^2)y}, \tag{2.23}
$$

$$
y^3 - \frac{3b}{2(a^2+b^2)}y^2 - \frac{ab}{2(a^2+b^2)^3} = 0 \tag{2.24}
$$

тенгламалардан топилади. Дастлаб (2.24) тенгламани ечамиз. Унинг учун $y = z + \frac{b}{2(a^2 + b^2)}$ алмаштиришни бажариб қуйидагига эга бўламиз:

$$
z^3 - \frac{3b^2}{4(a^2 + b^2)^2}z - \frac{b(2a^2 + b^2)}{4(a^2 + b^2)^3} = 0. \tag{2.25}
$$

Бу тенгламанинг дискриминанти

$$
\Delta = \frac{a^2b^2}{16(a^2 + b^2)} > 0
$$

бўлгани учун (2.24) тенглама фақат битта

$$
y_0 = \frac{b}{2(a^2 + b^2)}\left\{1 - \frac{2}{\sin\left[2arctg\sqrt[3]{\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{b^2}{a^2}+b^2\right)}\right]}\right\} \tag{2.26}
$$

ҳақиқий илдизга эга бўлади. (2.23) эса

$$
x_0 = \frac{a^2y_0 + b(a^2 + b^2)y_0^2}{ab - a(a^2 + b^2)y_0} \tag{2.27}
$$

кўринишда бўлади.

Демак, (2.21) тенглама учун қаралаётган марказ бўлишининг $A_5$ ҳолида (2.21) тенглама фақат иккита $M_1(0,\ 0)$ ва $M_2\ (x_0,\ y_0)$ махсус нуқталарга эга бўлади. (2.21) тенгламада $x=x_0+\xi$, $y=y_0+\eta$ алмаштиришни бажарсак

$$\frac{d\eta}{d\xi}=-\frac{(1+2at_0+2by_0)\xi+2\left(bx_0-\frac{2a^2+b^2}{a}y_0\right)\eta+2b\xi\eta-\frac{2a^2+b^2}{a}\eta^2}{\left(2bx_0+\frac{a^2+3b^2}{a}y_0\right)\xi+\left(1+\frac{a^2+3b^2}{a}x_0-2by_0\right)\eta+b\xi^2+\frac{a^2+3b^2}{a}\xi\eta-b\eta^2}$$

ни ҳосил қиламиз. Унинг характеристик тенгламасининг илдизлари:

$$2\lambda_{1,2}=5(a^2+b^2)y_0\pm\sqrt{25(a^2+b^2)^2y_0^2-4\Delta_2}\ ,$$

бунда

$$\Delta_2=a^2+3a(a^2+b^2)x_0+2a^2(a^2+b^2)x_0^2+$$
$$+4ab(a^2+b^2)x_0y_0+(4a^4+10a^2b^2+6b^4)y_0^2.$$

$x_0$, $y_0$ ларнинг қийматларини ўрнига қўйиб, $\lambda_1$ ва $\lambda_2$ ҳақиқий ва бир хил ишорали эканига ишонч ҳосил қиламиз. Демак, $M_2$ нуқта тугун бўлади.

**Мисол.** Ушбу

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x+4x^2-4xy-9y^2}{y-2x^2+7xy+2y^2} \qquad (2.28)$$

дифференциал тенгламани текширинг ва сифат манзарасини чизинг.

Ечиш. (2.21) тенглама билан солиштирамиз, бизни мисолимиз учун $a=4$, $b=-2$, $c=-9$, $d=2$, $\alpha=0$, $\beta=25$. (2.28) тенглама учун марказ бўлишининг бешинчи шарти бажарилаётир, яъни

$$b+d=\alpha=\beta+5(a+c)=ac+2a^2+d^2=0,\ \ a+c\neq 0.$$

(2.28) тенглама иккита $M_1(0,\ 0)$ ва $M_2\left(-\frac{12}{25},\ -\frac{1}{5}\right)$ махсус нуқталарга эга. $M_1$ махсус нуқта шартга кўра марказ, $M_2$ махсус нуқта учун характеристик тенгламанинг илдизлари $\lambda_1\approx$-8,55, $\lambda_2\approx$-31,45 бўлгани учун $M_2$ — турғун тугун туридаги махсус нуқта бўлади. (2.28) тенглама характеристикаларининг сифат манзараси 101-чизмада тасвирланган.

(2.21) тенгламада $b=0$ бўлса, у ҳолда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + ax^2 - 2ay^2}{y + a^2xy}$$

тенгламага эга бўламиз. Бу тенглама иккита $M_1$ (0, 0) ва $M_2\left(-\frac{1}{a}, -\frac{1}{5}\right)$ махсус нуқталарга эга бўлади. $x = x_1 - \frac{1}{a}$ кўчиришни бажариб қуйидаги тенгламага эга бўламиз:

$$\frac{dy}{dx_1} = \frac{x_1 - ax_1^2 + 2ay^2}{ax_1y}.$$

$a<0$ да Фроммер усулини қўллаб, $x=y=0$ махсус нуқтанинг ёпиқ эгар-тугун туридаги махсус нуқта эканлигига ишонч ҳосил қилишимиз мумкин. Демак, $b=0$ ва $a<0$ да марказ бўлишининг ($A_5$) ҳоли марказ ва ёпиқ эгар-тугун биргаликда бўлар экан. Бу ҳолнинг сифат манзараси 97, 98-чизмаларда тасвирланган.

Марказ бўлишининг олтинчи ҳоли:

$$a_1 + c_1 = \beta_1 = \alpha_1 + 5b_1 + 5d_1 = b_1d_1 + 2d_1^2 + a_1^2 = 0{,}8 + d \neq 0.$$

Бу усул координата ўқларини маълум бурчакка буриш ёрдамида ($A_5$) ҳолга келтирилади. Шунинг учун бу ҳолга мос характеристикаларнинг сифат манзараси бешинчи ҳолдаги каби тасвирланади.

Шундай қилиб қуйидаги теоремалар ўринли.

***1-теорема.*** *Агар (2.1) тенглама тўртта махсус нуқтага эга бўлиб, улардан биттаси марказ туридаги махсус нуқта бўлса, у ҳолда қуйидаги учта ҳолдан бири биргаликда бўлиши мумкин: а) иккита марказ ва иккита эгар, б) марказ ва учта эгар, в) марказ, эгар ва иккита тугун.*

***2-теорема.*** *Агар (2.1) тенглама учта махсус нуқтага эга бўлиб, улардан биттаси марказ туридаги махсус нуқта бўлса, у ҳолда қуйидаги учта ҳолдан бири биргаликда бўлиши мумкин: а) марказ ва иккита эгар, б) марказ, очиқ эгар-тугун ва лимит тугун, в) марказ, айниган эгар ва эгар.*

***3-теорема.*** *Агар (2.1) тенглама иккита махсус нуқтага эга бўлиб, улардан биттаси марказ туридаги махсус нуқта бўлса, у ҳолда қуйидаги бешта ҳолдан бири биргаликда бўли-*

*ши мумкин: а) иккита марказ, б) марказ ва "қўпол" фокус, в) марказ ва эгар, г) марказ ва тугун, д) марказ ва ёпиқ эгар-тугун.*

## 3-§. (1.1) ТЕНГЛАМА МАРКАЗ ТУРИДАГИ МАХСУС НУҚТАГА ЭГА БЎЛГАН ҲОЛ УЧУН ЧЕКСИЗ УЗОҚЛАШГАН МАХСУС НУҚТАЛАРНИНГ ЖОЙЛАШИШИ

(2.1) тенгламани қуйидаги система кўринишда ёзишимиз мумкин:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + bx^2 + (2c+\beta)xy + dy^2, \\ \frac{dy}{dt} &= -x - ax^2 - (2b+\alpha)xy - cy^2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Бу тенгламанинг чексизликдаги махсус нуқталарини ўрганиш учун 2-бобдаги (2.10) системадан фойдалансак, у ҳолда $x$ ўқидан чексиз узоқлашган нуқталарнинг экватордаги нуқга атрофи учун қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} &\frac{dz}{dt} = -z[b+(2c+\beta)\tau_K + d\tau_K^2 + \tau_K z + (2c+\beta+2d\tau_K)u + uz + du^2], \\ &\frac{du}{dt} = -\{a+(3b+\alpha)\tau_K + (3c+\beta)\tau_K^2 + d\tau_K^3 + (1+\tau_K^2)z + [(3b+\alpha)+ \\ &+2(3c+\beta)\tau_K + 3d\tau_K^2] + (3c+\beta+3d\tau_K)u^2 + du^3 + zu^2 + 2\tau_K zu\}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Чексиз узоқлашган махсус нуқталар учун

$$\Phi_3(\tau_K) = d\tau_K^3 + (3c+\beta)\tau_K^2 + (3b+\alpha)\tau_K + a = 0 \tag{3.3}$$

кўринишда бўлади. (3.2) системанинг характеристик тенгламаси илдизлари қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{aligned} \lambda_1(\tau_K) &= -\left[b + (2c+\beta)\tau_K + d\tau_K^2\right], \\ \lambda_2(\tau_K) &= -\left[(3b+\alpha) + 2(3c+\beta)\tau_K + 3d\tau_K^2\right]. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Худди шунга ўхшаш $y$ ўқидан чексиз узоқлашган нуқталарнинг экватордаги нуқта атрофи учун қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= -z[c+(2b+\alpha)\mu_K + a\mu_K^2 + \mu_K z + (2b+\alpha+2a\mu_K)\nu + \nu z + a\nu^2],\\
\frac{d\nu}{dt} &= d + (3c+\beta)\mu_K + (3b+\alpha)\mu_K^2 + a\mu_K^3 + (1+\mu_K^2)z +\\
&\quad + [3c+\beta+2(3b+\alpha)\mu_K + 3a\mu_K^2]\nu + [3b+\alpha+3a\mu_K]\nu^2 +\\
&\quad + 2\mu_K z\nu + a\nu^3 + z\nu^2.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Чексиз узоқлашган махсус нуқталар

$$\Phi_3(\mu_K) = a\mu_K^3 + (3b+\alpha)\mu_K^2 + (3c+\beta)\mu_K + d = 0 \tag{3.6}$$

тенгламадан аниқланади. (3.5) системанинг характеристик тенгламаси илдизлари

$$\begin{aligned}
\lambda_1(\mu_K) &= c + (2b+\alpha)\mu_K + a\mu_K^2,\\
\lambda_2(\mu_K) &= (3c+\beta) + 2(3b+\alpha)\mu_K + 3a\mu_K^2
\end{aligned} \tag{3.7}$$

га тенг.

(3.3) тенглама учун:

$$p = \frac{3d(3b+\alpha)-(3c+\beta)^2}{3d^2},$$

$$q = \frac{2(3c+\beta)^3 - 9d(3c+\beta)(3b+\alpha) + 27d^2a}{27d^3},$$

$$\Delta(\tau_K) = \frac{4a(3c+\beta)^3 - (3c+\beta)^2(3b+\alpha)^2 - 18ad(3c+\beta)(3b+\alpha) +}{108d^4}$$

$$\frac{+\,4d(3b+\alpha)^2 + 27a^2d^2}{108d^4}. \tag{3.8}$$

Шунга ўхшаш (3.6) тенглама учун

$$p = \frac{3a(3c+\beta)-(3b+\alpha)^2}{3d^2},$$

$$q = \frac{2(3b+\alpha)^3 - 9a(3b+\alpha)(3c+\beta) + 27a^2d}{27d^3},$$

$$\Delta(\mu_K) = \frac{4d(3b+\alpha)^3 - (3c+\beta)^2(3b+\alpha)^2 - 18ad(3c+\beta)(3b+\alpha) +}{108d^4}$$

$$\frac{+\,4d(3c+\beta)^2 + 27d^2a^2}{108d^4} \tag{3.9}$$

ни ҳосил қиламиз. Чексизликдаги махсус нуқталарни $N_K(0, \tau_K)$ ва $N_N(0, \mu_K)$ орқали белгилаймиз.

Фараз қилайлик, (2.1) тенглама *Oxy* текислигида тўртта махсус нуқтага эга бўлган ҳолда, биринчи тўртта ҳол учун $(A_m)$ — марказ бўлсин (бунда $m=1,4$).

*Марказ бўлишнинг $(A_1)$ ҳоли*

Бу ҳол учун (3.3) тенглама

$$\tau^3 + 3\frac{c_1}{d_1}\tau^2 + \frac{a_1}{d_1} = 0$$

кўринишни олади. Бу тенгламанинг дискриминанти

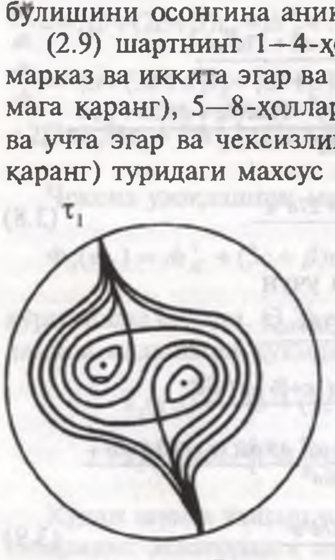
$$\Delta(\tau_K) = \frac{a_1(a_1d_1^2 + 4c_1^3)}{4d_1^4}$$

кўринишда бўлади. (3.4) тенгламанинг характеристик тенгламаси илдизларини қуйидаги кўринишга келтириш мумкин:

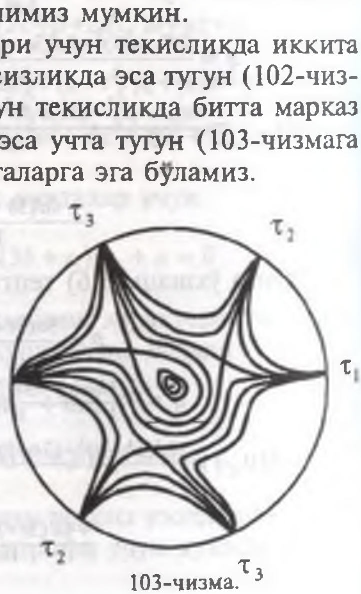
$$\lambda_1(\tau_K)\lambda_2(\tau_K) = 3\tau_K^2(2c_1 + d_1\tau_K)^2.$$

Агар $a_1(a_1d_1^2+4c_1^3)<0$ бўлса, $N_1$, $N_2$, $N_3$ махсус нуқталар тугун, $a_1(a_1d_1^2+4c_1^3)>0$ бўлса, фақат $N_1$ махсус нуқта тугун бўлишини осонгина аниқлашимиз мумкин.

(2.9) шартнинг 1—4-ҳоллари учун текисликда иккита марказ ва иккита эгар ва чексизликда эса тугун (102-чизмага қаранг), 5—8-ҳоллар учун текисликда битта марказ ва учта эгар ва чексизликда эса учта тугун (103-чизмага қаранг) туридаги махсус нуқталарга эга бўламиз.



102-чизма.



103-чизма.

*Марказ бўлишнинг ($A_2$) ҳоли.*

(3.3) тенглама қуйидаги илдизларга эга:

$$\tau_1 = 0, \quad \tau_2 = \sqrt{-\frac{3b+\alpha}{d}}, \quad \tau_3 = \sqrt{-\frac{3b+\alpha}{d}}.$$

Дискриминант

$$\Delta(\tau_K) = \frac{(3b+\alpha)^3}{27d^3}$$

га тенг. (2.14) шартнинг 1, 2, 6, 7-ҳолларида $\Delta(\tau_K)>0$; 3, 4, 5, 8-ҳолларида $\Delta(\tau_K)<0$ бўлишини осонгина кўришимиз мумкин. Агар $\alpha=-3b$ бўлса, у ҳолда $\Delta(\tau_K)=0$, $p=0$, $q=0$ бўлади.

(3.3) тенглама қуйидаги илдизларга эга бўлади:

$$\lambda_1(\tau_K) = -(b + d\tau_K^2), \quad \lambda_2(\tau_K) = -[(3b+\alpha) + 3d\tau_K^2]. \qquad (3.10)$$

Фараз қилайлик, $\Delta(\tau_K)<0$ бўлсин. $\tau_1$, $\tau_2$ ва $\tau_3$ ларни кетма-кет (3.10) тенгламага қўямиз, натижада

$$\begin{cases} \lambda_1(\tau_1) = -b, \\ \lambda_2(\tau_1) = -(3b+\alpha), \end{cases} \qquad (3.11)$$

$$\begin{cases} \lambda_1(\tau_2) = (2b+\alpha), \\ \lambda_2(\tau_2) = 2(3b+\alpha), \end{cases} \qquad (3.12)$$

$$\begin{cases} \lambda_1(\tau_3) = (2b+\alpha), \\ \lambda_2(\tau_3) = 2(3b+\alpha) \end{cases} \qquad (3.13)$$

ларни ҳосил қиламиз.

(2.14) шартнинг 3, 4-ҳоллари учун $M_1$ — марказ, $M_2$, $M_3$, $M_4$ — эгар, $N_1$, $N_2$, $N_3$ — тугунлар; 5—8-ҳоллар учун $M_1$ — марказ, $M_2$ — эгар, $M_3$, $M_4$ — тугунлар, $N_1$ — тугун, $N_2$, $N_3$ — эгар туридаги махсус нуқталар бўлади. Уларнинг сифат манзараси 104-чизмада тасвирланган.

1, 2-ҳоллар учун $M_1$, $M_2$ — марказ, $M_3$, $M_4$ — эгар, $N_1$ — тугун, 6, 7-ҳоллар учун $M_1$ — марказ, $M_2$ — эгар, $M_3$, $M_4$ — тугунлар, $N_1$ — эгар.

Агар $\alpha=-3$ бўлса, у ҳолда (2.10) тенгламанинг текисликдаги махсус нуқталари қуйидагича бўлади:

$$M_1(0,0),\ \ M_2\left(0,-\frac{1}{d}\right),$$

$$M_3\left[-\frac{1}{b}\sqrt{-\frac{b+d}{b}},\ \frac{1}{b}\right],$$

$$M_4\left[\frac{1}{b}\sqrt{-\frac{b+d}{b}},\ \frac{1}{b}\right].$$

Бу махсус нуқталарга мос характеристик тенгламаларнинг илдизлари:

$$\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{b+d}{d}}, \tag{3.14}$$

$$2\lambda_{1,2}=-\frac{1}{b}(3b\pm b)\sqrt{-\frac{b+d}{d}}, \tag{3.15}$$

$$2\lambda_{1,2}=-\frac{1}{b}(-3b\pm b)\sqrt{-\frac{b+d}{d}} \tag{3.16}$$

кўринишларда бўлади. Агар $d\neq 0$ ва $b(b+d)<0$ бўлса, у ҳолда (2.10) тенглама тўртта махсус нуқтага эга бўлади. Қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

$$\begin{aligned}&1)\, b<0,\ \ b+d>0,\ \ d>0;\\&2)\, b>0,\ \ b+d<0,\ \ d<0.\end{aligned} \tag{3.17}$$

(3.3) тенглама $\tau_1=\tau_2=\tau_3=0$ уч каррали илдизга эга бўлади. Характеристик тенгламанинг илдизлари

104-чизма.

105-чизма.

$$\lambda_1(\tau_K) = -b, \quad \lambda_2(\tau_K) = 0$$

кўринишда бўлади. (3.17) шартга кўра $M_1$ — марказ, $M_2$ — эгар, $M_3$, $M_4$ — тугунлар, $N_1$ — эгар туридаги махсус нуқталарга эга бўламиз. Унинг сифат манзараси 105-чизмада тасвирланган.

*Марказ бўлишининг ($A_3$) ҳоли.*

Бу ҳол координаталар системасини маълум бурчакка буриш ёрдамида ($A_2$) ҳолга келтирилади. Демак, ($A_3$) ҳолнинг сифат манзараси ($A_2$) ҳолдаги каби бўлади.

*Марказ бўлишнинг ($A_4$) ҳоли.*

(3.3) тенгламанинг илдизлари:

$$\tau_1 = 0; \quad \tau_2 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4b\,(3b+\alpha)}}{2b}; \quad \tau_3 = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 + 4b\,(3b+\alpha)}}{2b}.$$

Дискриминант

$$\Delta(\tau_K) = -\frac{(3b+\alpha)}{108b^4}\left[\beta^2 + 4b(3b+\alpha)\right] < 0$$

кўринишда бўлади. Характеристик тенгламанинг илдизлари:

$$\begin{aligned} \lambda_1(\tau_K) &= -(b + \beta\tau_K - b\tau_K^2), \\ \lambda_2(\tau_K) &= -[(3b+\alpha) + 2\beta\tau_K - 3b\tau_K^2] \end{aligned} \tag{3.18}$$

кўринишда бўлади. Кетма-кет (3.17) нинг қийматларини (3.18) га қўямиз ва (2.20) дан фойдаланиб, махсус нуқталарнинг турини бутун текисликда аниқлаймиз:

$$\begin{aligned} \lambda_1(\tau_1) &= -b, \\ \lambda_2(\tau_1) &= -(3b+\alpha). \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} &\lambda_1(\tau_2) = (2b+\alpha), \\ &\lambda_2(\tau_2) = \frac{1}{2b\sqrt{\beta^2 + 4b\,(3b+\alpha)}\left[\beta + \sqrt{\beta^2 + 4b(3b+\alpha)}\right]}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} &\lambda_1(\tau_3) = (2b+\alpha), \\ &\lambda_2(\tau_3) = \frac{1}{2b\,\sqrt{\beta^2 + 4b\,(3b+\alpha)}\left[\beta - \sqrt{\beta^2 + 4b(3b+\alpha)}\right]}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

(2.20) тенгламанинг 1, 2-ҳоллари учун текисликда марказ ва учта эгар, чексизликда эса учта тугунга, 3—10-ҳоллар учун текисликда битта марказ, иккита тугун ва эгарга, чексизликда эса битта тугун ва иккита эгар туридаги махсус нуқталарга эга бўламиз.

1 ва 5-ҳоллар учун $(A_1)$ марказ бўлишининг сифат манзараси мос ҳолда 102- ва 103-чизмаларда, 6 ва 7-ҳоллар учун $(A_2)$ марказ бўлишининг сифат манзараси мос ҳолда 104 ва 105-чизмаларда тасвирланган.

Қуйидаги теорема ўринлидир.

**Теорема.** *Агар (2.1) тенглама текисликдаги тўртта махсус нуқтага эга ва улардан биттаси марказ туридаги махсус нуқта бўлса, у ҳолда бутун текисликда қуйидаги тўртта ҳоллардан бирида махсус нуқталар биргаликда бўлишлари мумкин:*

*1) текисликда марказ ва учта эгар ва чексизликда учта тугун;*

*2) текисликда марказ, эгар ва иккита тугун ва чексизликда тугун ва иккита эгар;*

*3) текисликда иккита марказ ва иккита эгар ва чексизликда тугун;*

*4) текисликда марказ, эгар ва иккита тугун ва чексизликда эгар туридаги махсус нуқталар бўлади.*

## 4-§. МАХСУС НУҚТАЛАР СОНИ ТЎРТТАДАН КАМ БЎЛГАН ҲОЛ

*Марказ бўлишининг $(A_1)$ ҳоли.*

Агар $a_1(a_1d_1^2+4c_1^3)\neq 0$, $d_1^2+bc_1^2=4a_1c_1$ бўлса, у ҳолда (1.15) тенглама иккита $M_1(0,0)$, $M_2\left(-\frac{1}{a_1},\ 0\right)$ оддий махсус нуқтага ва битта устма-уст тушувчи

$$M_3\left[-\frac{4c_1^2+d_1^2}{2(a_1d_1^2+4c_1^3)},\ \frac{d_1(a_1-c_1)}{a_1d_1^2+4c_1^3}\right]$$

махсус нуқтага эга бўлади.

Бу учта махсус нуқта биргаликда бўлиши учун қуйидаги ҳоллардан бири бўлиши мумкин:

1) $a_1>0,\ c_1>0,\ a_1d_1^2+4c_1^3>0,\ d_1>0;$
2) $a_1>0,\ c_1>0,\ a_1d_1^2+4c_1^3>0,\ d_1<0;$
3) $a_1<0,\ c_1<0,\ a_1d_1^2+4c_1^3<0,\ d_1>0;$
4) $a_1<0,\ c_1<0,\ a_1d_1^2+4c_1^3<0,\ d_1<0.$

$\Delta(\tau_K)=\dfrac{a_1(a_1d_1^2+4c_1^3)}{4d_1^4}>0$ бўлгани учун (3.3) тенглама ягона

$$\tau_1=\frac{1}{d_1}\left\{\frac{\sqrt[3]{\left[\dfrac{1}{2\sqrt{a_1(4c_1^3+a_1d_1^2)}}-\dfrac{2c_1^3+a_1d_1^2}{2d_1^2}\right]^2\ldots+c_1^2-c_1}}{\sqrt[3]{\left[\dfrac{1}{2\sqrt{a_1(4c_1^3+a_1d_1^2)}}-\dfrac{2c_1^3+a_1d_1^2}{2d_1^2}\right]^2}}\right\}$$

ечимга эга бўлади. Махсус нуқталар қуйидагича бўлиши мумкин: текисликда $M_1$ — марказ, $M_2$ — эгар, $M_3$ — айниган эгар, чексизликда $N_1$ — тугун (106-чизма).

*Марказ бўлишининг ($A_2$) ҳоли.*

Агар $d=0$, $b(2b+\alpha)>0$ бўлса, у ҳолда (2.10) тенглама учта оддий махсус нуқтага эга бўлади:

$$M_1(0,0),\quad M_3\left[\frac{1}{\sqrt{b(2b+\alpha)}},\ \frac{1}{(2b+\alpha)}\right],$$

$$M_4\left[-\frac{1}{\sqrt{b(2b+\alpha)}},\ -\frac{1}{(2b+\alpha)}\right].$$

(3.4) ва (3.7) характеристик тенгламанинг илдизлари мос равишда

$$\lambda_1(\tau_1)=-b,$$
$$\lambda_2(\tau_1)=-(3b+\alpha);$$
$$\lambda_1(\mu_1)=0,\ \lambda_2(\mu_1)=0$$

кўринишда бўлади. Бу ҳолда текисликда $M_1$ — марказ, $M_3$, $M_4$ — эгар, чексизликда эса $N_1(0,\tau_1)$ — тугун, $N_1(0,\mu_1)$

106-чизма.

107-чизма.

— ёпиқ эгар-тугун туридаги махсус нуқталар биргаликда бўлади. Унинг сифат манзараси 107-чизмада тасвирланган.

*Марказ бўлишининг ($A_3$) ҳоли.* Бу ҳол координаталар системасини маълум бурчакка буриш ёрдамида ($A_2$) ҳолга келтирилади.

*Марказ бўлишининг ($A_4$) ҳоли.* Агар $\beta_1^2 = -4b_1(3b_1+\alpha_1)$, $b_1(2b_1+\alpha_1) \neq 0$ бўлса, у ҳолда (2.17) тенглама иккита $M_1(0,0)$, $M_2\left(0, \frac{1}{b_2}\right)$ оддий махсус нуқтага ва битта устма-уст тушувчи

$$M_3\left[\frac{\beta_1}{2b_1(2b_1+\alpha_1)}, -\frac{1}{(2b_1+\alpha_1)}\right]$$

махсус нуқталарга эга бўлади. (3.3) тенглама

$$\tau_1 = 0, \ \tau_2 = \tau_3 = \frac{\beta_1}{2b_1}$$

илдизларга эга бўлади. Буларга мос характеристик тенгламанинг илдизлари қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\lambda_1(\tau_1) = -b_1, \qquad \lambda_2(\tau_1) = -(3b_1 + \alpha_1);$$
$$\lambda_1(\tau_1) = 2b_1 + \alpha_1, \quad \lambda_2(\tau_1) = 0.$$

Бу махсус нуқталар биргаликда қуйидагича бўлади, текисликда $M_1$ — марказ, $M_2$ — лимит тугун, $M_3$ — очиқ эгар-тугун; чексизликда $N_1$ — эгар ва $N_2$ — очиқ эгар-тугун. Бу ҳолнинг сифат манзараси 108-чизмада тасвирланган.

Бу ҳоллар учун қуйидаги теорема ўринлидир.

**1-теорема.** *Агар (2.1) тенглама текисликда учта махсус нуқтага эга бўлиб ва улардан биттаси марказ туридаги махсус нуқта бўлса, у ҳолда бутун текисликда қуйидаги учта ҳолдан бирида махсус нуқталар биргаликда бўлишлари мумкин:*

*1) текисликда марказ, лимит тугун, очиқ эгар-тугун ва чексизликда эгар ва очиқ эгар-тугун;*

108-чизма.

*2) текисликда марказ ва иккита эгар ва чексизликда тугун ва ёпиқ эгар-тугун;*

*3) текисликда марказ, эгар ва айниган эгар ва чексизликда тугун.*

Агар $a_1 = -\frac{4c_1^3}{d_1^2}$ бўлса, у ҳолда марказ бўлишнинг ($A_1$) ҳолида (2.5) тенгламанинг характеристик тенгламаси илдизлари:

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{4c_1^3 + \frac{2d_1^2}{2c_1}}$$

бўлгани учун текисликда $M_1(0, 0)$ — марказ, $M_2\left(\frac{d_1^2}{4c_1^3}, 0\right)$ — эгар туридаги махсус нуқталарга эга бўлади.

$$\tau^3 + \frac{3c_1}{d_1}\tau^2 - \frac{4c_1^3}{d_1^3} = 0$$

тенглама битта $\tau_1 = \frac{c_1}{d_1}$ оддий ва иккита $\tau_{2,3} = -\frac{2c_1}{d_1}$ каррали илдизга эга. Бутун текисликда марказ, эгар, тугун ва очиқ эгар-тугун туридаги махсус нуқталар биргаликда бўлади. Бу ҳолнинг сифат манзараси 109-чизмада тасвирланган.

*Марказ бўлишининг ($A_2$) ҳоли.*

Агар $b(2b+\alpha-d)<0$ ва $d\neq 0$ бўлса, у ҳолда (2.10) тенглама иккита $M_1(0, 0)$ ва $M_2\left(0, -\frac{1}{d}\right)$ оддий махсус нуқталарга эга бўлади.

109-чизма.

Бу иккита махсус нуқталар учун қуйидаги ҳоллардан бири бўлиши мумкин:

1) $b<0$ $d>0$, $2b+\alpha>d$, $3b+\alpha<0$;

2) $b<0$ $d>0$, $2b+\alpha>d$, $3b+\alpha>0$;

110-чизма.

111-чизма.

3) $b>0,\ d<0,\ 2b+\alpha<d,\ 3b+\alpha>0;$

4) $b>0,\ d<0,\ 2b+\alpha<d,\ 3b+\alpha<0;$

5) $b<0,\ d<0,\ 2b+\alpha>d,\ 3b+\alpha>0,\ 3b+\alpha>0;$

6) $b<0,\ d<0,\ 2b+\alpha>d,\ 3b+\alpha>0,\ 3b+\alpha<0;$

7) $b<0,\ d<0,\ 2b+\alpha>d,\ 3b+\alpha<0,\ 3b+\alpha<0;$

8) $b>0,\ d>0,\ 2b+\alpha<d,\ 3b+\alpha>0,\ 3b+\alpha>0;$

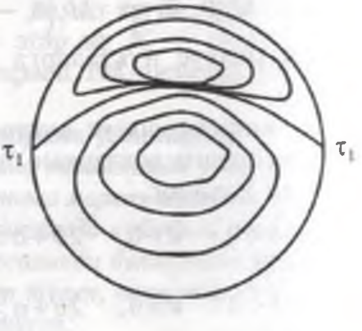
9) $b>0,\ d>0,\ 2b+\alpha<d,\ 3b+\alpha<0,\ 3b+\alpha>0;$

10) $b>0,\ d>0,\ 2b+\alpha<d,\ 3b+\alpha<0,\ 3b+\alpha<0.$

1, 3-ҳоллар учун иккита марказ, тугун ва иккита эгар (110-чизма); 2, 4-ҳоллар учун иккита марказ ва эгар (111-чизма); 5, 10-ҳоллар учун марказ, иккита эгар ва иккита тугун (103-чизма); 6—9-ҳоллар учун марказ, эгар ва тугун (112-чизма)га эгамиз.

Агар $2b+\alpha=d\neq0$, $\mathrm{b}\neq0$ бўлса, у ҳолда (2.10) тенглама битта $M_1(0,\ 0)$ оддий марказ туридаги ва битта устма-уст

112-чизма.



113-чизма.

114-чизма.

115-чизма.

тушувчи $M_2\left(0, -\frac{1}{d}\right)$ ёпиқ эгар-тугун туридаги махсус нуқталарга эга бўлади. $b>0$, $2b+\alpha<0$, $3b+\alpha<0$ ҳол учун экваторда ягона махсус нуқтага эга бўламиз ва у $\tau_1$ — эгар бўлади (113-чизма).

Агар $b<0$, $2b+\alpha>0$, $3b+\alpha<0$ бўлса, у ҳолда марказ, ёпиқ эгар-тугун, тугун ва иккита эгар туридаги махсус нуқталарга эга бўламиз (114-чизма).

Агар $\omega<0$ ва $b\neq0$ бўлса, (2.1) тенглама иккита $M_1(0, 0)$ ва $M_2\left(0, \frac{1}{b}\right)$ оддий махсус нуқталарга эга бўлади. (3.3) тенглама $\tau_1=0$ ҳақиқий илдизга эга эканлигини осонгина аниқлаш мумкин.

$M_2$ ва $N_1$ лар учун характеристик тенгламанинг илдизлари мос равишда қуйидагича бўлади:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2b}(\beta + \sqrt{\omega}), \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2b}(\beta - \sqrt{\omega});$$

$$\lambda_1(\tau_1) = -b, \qquad \lambda_2(\tau_1) = -(3b+\alpha).$$

Қуйидаги махсус нуқталар биргаликда мавжуд бўлиши мумкин: агар $\omega<0$, $\beta b\neq0$ бўлса, у ҳолда $M_1$ — марказ, $M_2$ — қўпол фокус ва $N_1$ — эгар; агар $\omega<0$, $b\neq0$, $\beta=0$ бўлса, у ҳолда $M_1$, $M_2$ — марказ ва $N_1$ — эгар (115, 116-чизмалар).

*Марказ бўлишининг ($A_2$) ҳолида*

$$\Delta(\tau_K) = -\frac{(a^2+b^2)^3}{27a^2b^4}$$

116-чизма.

117-чизма.

бўлгани учун текисликда марказ ва тугун, чексизликда иккита эгар ва тугун туридаги махсус нуқталарга эга бўламиз.

Агар $b=0$ бўлса, у ҳолда экваторда қуйидаги махсус нуқталарга эга бўламиз: $z=0,\ \tau_1=1$; $z=0,\ \tau_2=-1$; $z=\mu_1=0$. $N_1(0,\tau_1)$ ва $N_2(0,\tau_2)$ махсус нуқталар учун

$$\lambda_1(\tau_K)\lambda_2(\tau_K)=-2a^2\tau_K^2$$

бўлади, шунинг учун $N_1(0,\tau_1)$ ва $N_2(0,\tau_2)$ махсус нуқталар эгар бўлади. (117-чизма).

$N_3(0,\mu_1)$ махсус нуқта учун

$$\lambda_1(\mu_1)\lambda_2(\mu_1)=-2a^2$$

га эга бўламиз, демак $N_3(0,\mu_1)$ — тугун бўлади.

Агар $b=0$ бўлса, у ҳолда текисликда марказ ва ёпиқ эгар-тугунга, чексизликда иккита эгар ва тугунга эга бўламиз.

Бу ҳоллар учун қуйидаги теорема ўринлидир.

**2-теорема.** *Агар (2.1) тенглама текисликда иккита махсус нуқтага эга бўлиб ва улардан биттаси марказ туридаги махсус нуқта бўлса, у ҳолда бутун текисликда қуйидаги тўққизта ҳоллардан бирида махсус нуқталар биргаликда бўлишлари мумкин:*

*1) текисликда марказ, эгар, чексизликда тугун ва очиқ эгар тугун;*

*2) текисликда иккита марказ, чексизликда тугун ва иккита эгар;*

*3) текисликда иккита марказ, чексизликда эгар;*

*4) текисликда марказ, қўпол фокус, чексизликда эгар;*

*5) текисликда марказ, эгар, чексизликда тугун;*

*6) текисликда марказ, ёпиқ эгар-тугун, чексизликда эгар;*

*7) текисликда марказ, эгар, чексизликда иккита тугун ва эгар;*

*8) текисликда марказ, ёпиқ эгар тугун, чексизликда иккита эгар ва тугун;*

*9) текисликда марказ, тугун, чексизликда иккита эгар ва тугун.*

Марказ бўлишининг ($A_2$) ҳолида $b=d=0$ бўлса, у ҳолда текисликда ягона $M_1(0, 0)$ махсус нуқтага эга бўламиз. Экваторда эса $z=\tau_1=0$ ва $z=\mu_1=0$ иккита махсус нуқтага эга бўламиз.

Уларга мос Пуанкаре сферасида қуйидаги дифференциал тенгламалар бўлади:

$$\frac{du}{dz}=\frac{z+du+zu^2}{zu^2},\ \frac{dv}{dz}=\frac{z+dv^2+zv^2}{zv(d+z)}.$$

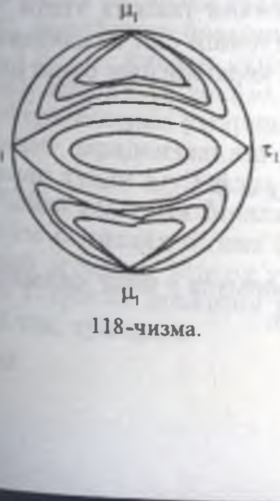
$z=\tau_1=0$ махсус нуқта эгар, $z=\mu_1=0$ — тугун туридаги махсус нуқта бўлади (118-чизма).

Агар $d=0$ ва $3b+\alpha=0$ бўлса, у ҳолда текисликда ягона махсус нуқта мавжуд бўлади.

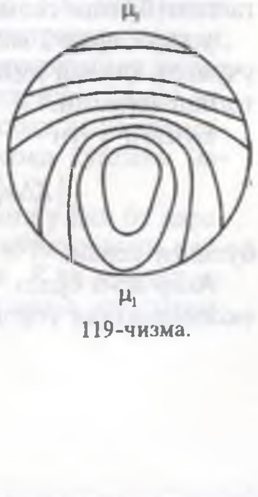
Бу ҳолда (2.10) тенглама қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x-bxy}{y+bx^2},$$

яъни чексизликдаги махсус турга эга бўламиз, шунинг учун $z=0$ экватор характеристика бўлаолмайди. Махсус йўналиш $\mu_1=0$ бўлади (119-чизма).



118-чизма.



119-чизма.

## 5-§. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ СИФАТ НАЗАРИЯСИ ТАТБИҒИГА ДОИР МАСАЛАЛАР

Аҳоли ўсиши ва камайиши қонунининг математик моделини биринчи бўлиб 1798 йили Англия олими Мальтус тузган ва у қуйидагича ифодаланади:

$$\frac{dy}{dx} = Ky, \qquad (K - const) \tag{5.1}$$

бунда $y$ — аҳолини ўсиш тезлиги, $K$ — туғилиш ва ўлиш коэффициентлар айирмасига тенг.

Бу тенглама шуни билдирадики, $y$ нинг ўзгариш тезлиги $K$ га нисбатан пропорционалдир. Пропорционаллик коэффициенти $K$ (агар $y$ ўсувчи бўлса $K>0$, агар $y$ камаювчи бўлса $K<0$ бўлиб, одатда соддалик учун $y>0$ деб қараймиз) кўп ҳолларда жараёнларни текширишда биринчи яқинлашиш сифатида қабул қилинади. (5.1) тенгламани ўзгарувчиларни ажратиб, қуйидагича ечамиз:

$$\frac{dy}{y} = Kdx, \quad \ln|y| = Kx + \ln c, \quad y = ce^{Kx}.$$

$y(x_0)=y_0$ бошланғич шартда

$$y = y_0 e^{K(x-x_0)} \tag{5.2}$$

ечимни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, (5.1) нинг ечими экспонентадан иборат бўлади, яъни ечим кўрсаткичли функциядир.

Ечим учун шу нарса характерлики, агар ўзгарувчи айирмаси $\Delta x$ га тенг бўлган арифметик прогрессиянинг ҳадлари бўлса, у ҳолда $y$ нинг мос қийматлари махражи $e^{K\Delta x}$ га тенг бўлган геометрик прогрессияни ташкил этади.

$y$ ҳар сафар 2 марта ўзгариши (ўсиши ёки камайиши) учун $\Delta x$ қандай қийматлар олиши кераклигини осонгина топиш мумкин.

Бунинг учун

$$|K\Delta x| = \ln 2\,, \text{яъни } \Delta x = \frac{\ln 2}{|K|} \tag{5.3}$$

бўлиши керак.

Агар $K>0$ бўлса, у ҳолда (4.3) формула $y$ нинг қиймати экспоненциал ўсишини кўрсатади.

Бу ҳолат, масалан очиқ муҳитда бактерияларнинг (уларнинг сони жуда кўп бўлмаганда) кўпайиши жараёнини текширганда намоён бўлади. Уларнинг кўпайиши бир-бирига боғлиқ бўлмаган ҳолда кечади деб қабул қилсак ("Органик ўсиш қонуни" деб аталувчи бу жараён барча занжир реакциялари учун хосдир), бактерияларнинг маълум бирликда олинган миқдори $u$ нинг ўсиш тезлиги бу миқдорга пропорционалдир, яъни

$$\frac{du}{dt} = Ku, \quad u = u_e e^{K(t-t_0)}.$$

Жамғарма кассасига қўйилган маблағнинг узлуксиз ўсиши масаласи ва шу каби бошқа масалалар ҳам худди шундай ўрганилади. Агар K<0 бўлса, (5.2) формула $y$ нинг экспоненциал камайишини кўрсатади. Бу нарса, масалан радиоактив бўлиниш жараёнини ўрганишда намоён бўлади.

Агар радиоактив модданинг турли қисмлари бир-бирига боғлиқ бўлмаган ҳолда парчаланади деб фараз қилинса, у ҳолда радиоактив модданинг ҳали парчаланмаган қисми массасининг камайиш тезлиги бу массанинг ўзгараётган қийматига пропорционал бўлади, яъни

$$\frac{dm}{dt} = -p \cdot m, \quad m = m_0 e^{-p(t-t_0)}.$$

Хусусан, шуни қайд қиламизки, (5.3) формулага кўра $\Delta t = \frac{\ln 2}{p}$ вақт ичида $m$ нинг қиймати 2 марта камаяди; бу "ярим бўлиниш даври"дир. Масалан, радий моддаси учун бу давр тахминан $1{,}8 \cdot 10^3$ йилга тенг; бошқача айтганда, агар радий захираси тўлдириб турилмаса, $1{,}8 \cdot 10^3$ йилдан сўнг, радийнинг бошланғич миқдорининг ярми қолади, яна $1{,}8 \cdot 10^3$ йилдан сўнг бошланғич миқдорнинг чорак қисми қолади ва ҳоказо. Баландлик ўзгариши билан атмосфера босими ўзгариши, қаршилик орқали конденсаторнинг зарядсизланиш жараёни ва бошқа кўпгина масалалар худди шу усулда ўрганилади.

Баъзи ҳолларда қаралаётган тенгламани у ёки бу даражадаги соддалик билан (5.1) тенглама кўринишига келтириш мумкин. Мисол учун қаршилиги $R$ ва индуктивлиги $L$ бўлган занжирга ўзгармас кучланиш $u$ ни улаганда, $i$ ток қуйидаги

$$L\frac{di}{dt}+Ri=u \tag{5.4}$$

тенгламани қаноатлантириши физикада исботланган. (5.4) чизиқли бир жинсли бўлмаган тенглама бўлиб, уни интеграллаш усуллари тегишли адабиётларда берилган. Лекин бу тенгламани қуйидагича соддалаштириш мумкин:

$$L\frac{di}{dt}=-Ri+u=-R\left(i-\frac{u}{R}\right),$$

$$\frac{d\left(i-\frac{u}{R}\right)}{dt}=-\frac{R}{L}\left(i-\frac{u}{R}\right),$$

бундан эса

$$i-\frac{u}{R}=\left(i_0-\frac{u}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)},$$

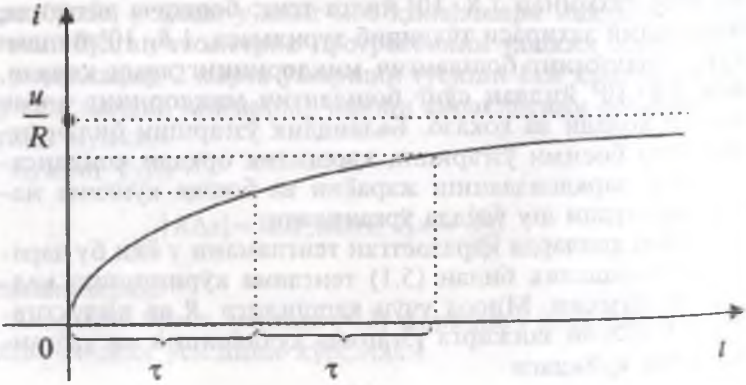
$$i=\frac{u}{R}+\left(i_0-\frac{u}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}.$$

Агар бошлангич вақтда, уни биз $t=0$ деб оламиз, занжирда ток бўлмаса, тенглама янада соддароқ кўринишга келади:

$$t_0=0,\ i_0=0 \text{ ва}$$

$$i=\frac{u}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right). \tag{5.5}$$

Ҳосил қилинган боғлиқлик графиги қуйидагичадир:



Кўрамизки, $t \to \infty$ бўлганда ток қиймати экспоненциал ҳолда $\frac{u}{R}$ — чегаравий стационар қийматга яқинлашиб боради. Агар ток берилиши жараёнида, $t \to \infty$ да $\frac{di}{dt} \to 0$ ва шунинг учун

$$Ri = u, \quad i = \frac{u}{R}$$

бўлиши (яъни бу ҳолда ток тикланади ва бутун кучланиш $R$ қаршиликни енгишга сарф бўлади) назарга олинса, бу қийматни осонгина (5.5) ёки (5.4) тенгламанинг ўзидан топиш мумкин. Токнинг лимит қийматидан четланиши

$$\tau = \frac{\ln 2}{\frac{R}{L}} = \frac{L}{R} \ln 2$$

вақт ичида икки марта камаяди. (5.2) нинг асосида $e$ сони ҳосил бўлиши — $e$ сонининг математика ва унинг татбиқларидаги муҳимлигини билдиради.

Дифференциал тенгламалар сифат назариясининг биология, медицина ва бошқа фанларга татбиқига доир масалаларни кўрамиз.

**1-масала.** Икки турдаги ўхшаш ҳайвонлар озуқа чекланган ўрмонда яшасин. Уларнинг бир-бири билан рақобат курашининг натижалари қуйидагича бўлиши мумкин:

а) биринчи тур сақланади, иккинчи тур йўқолади;

б) иккинчи тур сақланади, биринчи тур йўқолади;

в) иккала тур сақланади;

г) иккала тур йўқолади;

Юқорида ҳар бир натижалар қаралаётган $x$ ва $y$ турларнинг ўзгариш турғунлик ҳолатига мос келади. Шунинг учун $x$ ва $y$ кўпайишнинг математик моделини қуйидаги дифференциал тенгламалар системаси кўринишида ёзиш мумкин:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(b_{10} - b_{20}x - b_{11}y), \\ \frac{dy}{dt} = y(a_{01} - a_{11}x - a_{02}y), \end{cases}$$

бунда $a_{01}$, $a_{11}$, $a_{02}$, $b_{10}$, $b_{20}$, $b_{11}$ — мусбат сонлар.

$\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dt}$ кўринишдаги $x$ кўпайиш учта қўшилувчидан иборат: $b_{10}$ — кўпайиш тезлиги, $(-b_{20}x)$ — мос равишда тур ичидаги рақобат; $(-b_{11}y)$ — мос равишда турлараро рақобат. Берилган система фақат $x \geq 0$ ва $y \geq 0$ бўлгандагина маънога эга.

Математик нуқтаи назардан бу системани $Oxy$ текислигида ўрганиш мумкин. Берилган тенглама

$$A_1(0,0)\,,\; A_2\left(0,\, \frac{a_{10}}{a_{02}}\right),$$

$$A_3\left(\frac{b_{10}}{b_{20}}\,,\, 0\right),\; A_4\left[\frac{(b_{10}a_{02}-a_{01}b_{11})}{(b_{20}a_{02}-a_{11}b_{11})}\,,\; \frac{(b_{20}a_{01}-a_{10}b_{11})}{(b_{20}a_{02}-a_{11}b_{11})}\right]$$

махсус нуқталарга эга.

Агар

$$b_{20}a_{02} < b_{11}a_{11},\;\; b_{10}a_{02} < a_{01}b_{11},\;\; b_{20}a_{01} < b_{10}a_{11} \qquad \text{(A)}$$

шартлар бажарилса, махсус нуқталар ботиқ тўртбурчак ташкил этади.

Агар

$$b_{20}a_{02} > b_{11}a_{11},\;\; b_{10}a_{02} > a_{01}b_{11},\;\; b_{20}a_{01} > b_{10}a_{11} \qquad \text{(B)}$$

шартлар бажарилса, махсус нуқталар қаварик тўртбурчак ташкил этади.

Махсус нуқталарнинг турини аниқлаш учун қуйидаги алмаштиришни бажарамиз:

$$x=u+x_0,\; y=v+y_0,$$

бунда $x_0$ ва $y_0$ махсус нуқталарнинг координаталари, $u$ ва $v$ — янги ўзгарувчилар. Натижада берилган система қуйидаги кўринишни олади:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= [(b_{10}-2b_{20}x_0-b_{11}y)u-b_{11}x_0v]-b_{20}u^2-b_{11}uv, \\ \frac{dv}{dt} &= [-a_{11}y_0u+(a_{01}-a_{11}x_0-2a_{02}y_0)v]-a_{11}uv-a_{02}v^2. \end{aligned}\right\}$$

Махсус нуқталар учун характеристик тенгламанинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\lambda^2-[(b_{10}-2b_{20}x_0-b_{11}y_0)+(a_{01}-a_{11}x_0-2a_{02}y_0)]\lambda+$$
$$+[(b_{10}-2b_{20}x_0-b_{11}y_0)(a_{01}-a_{11}x_0-2a_{02}y_0)-b_{11}a_{11}x_0y_0]=0.$$

$A_1, A_2, A_3, A_4$ махсус нуқталар учун характеристик тенгламанинг илдизлари мос равишда қуйидагича бўлади:

$$\lambda_1 = b_{10}, \; \lambda_2 = a_{01}$$

$$\lambda_1 = \frac{(b_{10}a_{02} - b_{11}a_{01})}{a_{02}}, \; \lambda_2 = -a_{01}$$

$$\lambda_1 = \frac{(b_{20}a_{01} - b_{10}a_{11})}{b_{20}}, \; \lambda_2 = -b_{10}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\frac{b_{20}b_{11}a_{01} + b_{10}a_{11}a_{02} - b_{20}a_{01}a_{02} - b_{20}b_{10}a_{02} \pm \sqrt{b_{20}^2b_{11}^2a_{01}^2 +}}{b_{20}a_{02} - b_{11}a_{11}}$$

$$\frac{+2b_{20}b_{10}^2a_{02}^2a_{11} + 2b_{10}b_{20}a_{02}a_{11}b_{11}a_{01} - 2b_{20}^2b_{10}a_{02}^2a_{01} - 4b_{20}b_{11}^2a_{01}^2a_{11} +}{b_{20}a_{02} - b_{11}a_{11}}$$

$$\frac{+2b_{20}^2b_{11}a_{01}^2a_{02} - 4b_{11}b_{10}^2a_{11}^2a_{02} + a_{11}^2b_{10}^2a_{02}^2 + a_{02}^2b_{20}^2a_{01}^2 + b_{20}^2b_{10}^2a_{02}^2 -}{b_{20}a_{02} - b_{11}a_{11}}$$

$$\frac{-2b_{20}^2b_{11}a_{01}b_{10}a_{02} - 2b_{10}b_{20}a_{01}a_{11}a_{02}^2 + 4b_{10}b_{11}^2a_{01}a_{11}^2}{b_{20}a_{02} - b_{11}a_{11}}.$$

Агар берилган система учун (B) шарт бажарилса, у ҳолда иккита эгар ва иккита тугунга (улардан бири турғун, иккинчиси турғунмас) эга бўламиз.

Агар берилган система учун (A) шарт бажарилса, у ҳолда битта эгар ва учта тугунга (улардан бири турғунмас, иккитаси турғун бўлган) эга бўламиз.

Агар берилган система учун ички турлараро рақобатни ҳисобга олинмаса, у ҳолда система қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{dx}{dt} = x\,(b_{10} - b_{11}y), \; \frac{dy}{dt} = -y\,(a_{01} - a_{11}x).$$

Бу система $A_1(0,\ 0)$ — эгар ва $A_4\left(\frac{b_{10}}{b_{11}},\ \frac{a_{00}}{a_{11}}\right)$ — марказ туридаги махсус нуқталарга эга бўлади. $A_4$ махсус нуқтанинг марказ туридаги махсус нуқта бўлишининг коэффициентлар шартини Фроммер ва Сахарниковлар исбот қилганлар.

Берилган дифференциал тенгламалар системасига кўра қуйидаги хулосаларни айтиш мумкин:

1. $x \geq 0$, $y \geq 0$ координата ўқлари системанинг ечимлари бўлади.

2. Координата ўқларида ётган махсус нуқталар иккинчи гуруҳ махсус нуқталари (фокус, марказ ва уларнинг комбинациялари) бўла олмайдилар. Бундан ботиқ тўртбурчакнинг учларидаги махсус нуқталарнинг тўрттаси ҳам биринчи гуруҳ махсус нуқталари бўлиб, улардан ичкиси эгар, ташқи учта нуқта тугунлар бўлади.

Демак, тебраниш жараёни мавжуд бўлмайди, яъни ҳайвонларнинг битта тури тез йўқолади.

3. Тўртбурчак қаварик бўлган ҳолда координата ўқларида ётган махсус нуқталар

$$A_2\left(0,\ \frac{a_{01}}{a_{02}}\right),\ A_3\left(\frac{b_{10}}{b_{20}},\ 0\right)$$

фақат эгар бўлади, $A_1(0,\ 0)$ махсус нуқта турғунмас тугун бўлиб, $A_4$ махсус нуқта эса

$$A_4\left[\frac{(b_{10}a_{02}-a_{01}b_{11})}{(b_{20}a_{02}-a_{11}b_{11})},\ \frac{(b_{20}a_{01}-a_{10}b_{11})}{(b_{20}a_{02}-a_{11}b_{11})}\right]$$

тугун, фокус ёки марказ бўлиши мумкин. Бу махсус нуқталар бир вақтда иккита эгар, тугун ва марказ ёки иккита эгар, тугун ва фокус бўлаолмайдилар.

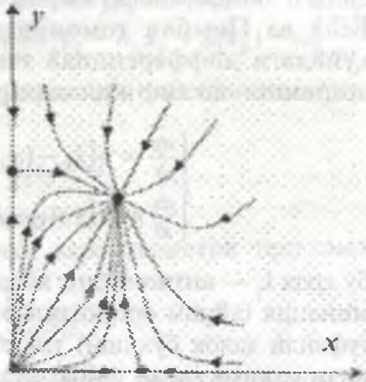
Демак, юқоридаги хулосаларга кўра махсус нуқталар ботиқ бўлганда ҳайвонлар туридан бирининг йўқолиш тезлиги махсус нуқталарнинг қаварик бўлиш ҳолига нисбатан кўпроқ бўлади. Буни қуйидагича тушуниш керак: қаварик тўртбурчакнинг юзи ботиқ тўртбурчакнинг юзидан катта (яъни бу қаварик тўртбурчакдаги озуқа ботиқ тўртбурчакдаги озуқадан кўп эканлигини билдиради).

Бу масалани аниқ мисолда тушунтирамиз.

**1-мисол.** Ушбу

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(6-2x-3y)}{x(4-4x-y)}$$

дифференциал тенглама берилган. Бу тенглама $A_1(0,\ 0)$, $A_2(0,\ 2)$, $A_3(1,\ 0)$, $A_4\left(\frac{3}{5},\ \frac{8}{5}\right)$ махсус нуқталарга эга ва (А) шарт бажарилгани учун бу нуқталарни бирлаштиришдан ҳосил бўлган тўртбурчак ботиқ бўлади. Бу ҳолда $A_1$ турғунмас тугун, $A_2$ ва $A_3$ — эгар, $A_4$ эса — турғун тугун бўлади. Берилган тенгламанинг интеграл эгри чизиқлар манзараси 120-чизмада тасвирланган.



120-чизма.

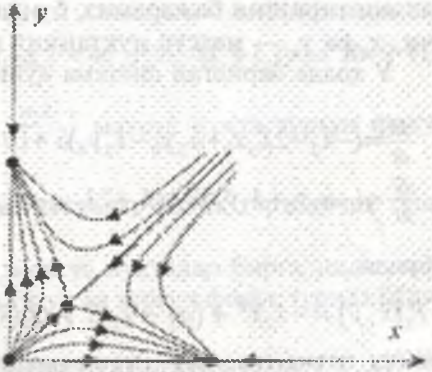
**2-мисол.** Ушбу

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(2-2x-y)}{x(2-x-2y)}$$

дифференциал тенглама берилган. Бу тенглама $A_1(0,\ 0)$, $A_2(0,\ 2)$, $A_3(2,\ 0)$, $A_4\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ махсус нуқталарга эга. Берилган тенглама учун (B) шарт бажарилади, шунинг учун учлари махсус нуқтада ётувчи қавариқ тўртбурчак ташкил этади. $A_1$ — турғунмас тугун, $A_2$ ва $A_3$ — турғун тугун, $A_4$ — эгар бўлади. Берилган тенгламанинг интеграл эгри чизиқлари манзараси 121-чизмада тасвирланган.

**2-масала.** Инсон иммунологик системасининг асосий функцияси организмни тирик жониворлардан ва ўзларида генетик бегона ахборотлар белгиларини олиб юрувчи моддалар (бактериялар, вируслар, аллергенлар, хужайралар ва ҳоказо)дан сақлашдан иборат. Бу бегона ахборотлар антигенлар деб аталади. Инсон организми иммунологик системасининг функцияси антигенларни аниқлаш ва организмни ҳимоя қилишдан иборатдир.

Инсон организмида содир бўладиган касалликлар билан унинг соғайиши, яъни антигенларни ишлаб чиқариш ора-



121-чизма.

сидаги боғланишлар биринчи бўлиб Америка олимлари Белл ва Пимбли томонидан ўрганилган, хусусан улар қуйидаги дифференциал тенгламалар системасини текширишни таклиф қиладилар:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y\left[\lambda_1 - (\alpha_1 - \lambda_1)x + \lambda_1 y\right], \\ \dfrac{dx}{dt} = x\left[-\lambda_2 - \lambda_2 x + (\alpha_2 - \lambda_2)y\right] \end{cases}$$

бу ерда $\lambda_1$ — антигеннинг кўпайиш тезлиги, $\alpha_1$ — унинг элиминация (айрим организмларнинг турлича табиий сабаблар туфайли ҳалок бўлиши) тезлиги, $\lambda_2$ — анти жисмлар (организмда антигенлар пайдо бўлиш билан юзага келадиган ва уларнинг таъсирини йўқотадиган моддалар) емирилиш тезлиги, $\alpha_2$ — анги жисмлар ишлаб чиқарилиш тезлиги.

Моделда анти жисмлар ва антигеннинг ўзаро таъсири фақаттгина антигеннинг элиминациясини келтириб қолмасдан иммунологик системанинг стимуляциясига ва шунга кўра антител ишлаб чиқарилишига олиб келади.

Берилган система тўртта махсус нуқтага эга:

$$A_1(0,\ 0),\ \ A_2(0,\ -1),\ \ A_3(-1,\ 0)\ \text{ва}\ \ A_4\left(\frac{\alpha_2\lambda_1}{R},\ \ \frac{\alpha_1\lambda_2}{R}\right),$$

бу ерда $R=\alpha_1\alpha_2-\alpha_2\lambda_1-\alpha_1\lambda_2$.

Махсус нуқталарнинг турини аниқлаш учун

$$x = \bar{x} + x_0,\ \ y = \bar{y} + y_0$$

алмаштиришни бажарамиз, бунда $\bar{x}$ ва $\bar{y}$ — янги ўзгарувчи, $x_0$ ва $y_0$ — махсус нуқтанинг координаталари.

У ҳолда берилган система қуйидаги кўринишни олади:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= (-\lambda_2 - 2\lambda_2 x_0 + \alpha_2 y_0 - \lambda_2 y_0)\bar{x} + (\alpha_2 x_0 - \lambda_2 x_0)\bar{y} + P_2(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{d\bar{y}}{dt} &= (-\alpha_1 y_0 + \lambda_1 y_0)\bar{x} + (\lambda_1 + 2\lambda_1 y_0 - \alpha_1 x_0 + \lambda_1 x_0)\bar{y} + Q_2(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned}\right|, \text{(A)}$$

бунда

$$P_2(\bar{x}, \bar{y}) = -\lambda_2 \bar{x}^2 + (\alpha_2 - \lambda_2)\bar{x}\ \bar{y}, Q_2(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda_1 \bar{y}^2 + (\alpha_1 - \lambda_1)\bar{x}\ \bar{y}.$$

$(x_0, y_0)$ махсус нуқта учун характеристик тенглама кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\begin{vmatrix} (-\lambda_2 - 2\lambda_2 x_0 + \alpha_2 y_0 - \lambda_2 y_0) - \omega & (\alpha_2 x_0 - \lambda_2 x_0) \\ \cdot\ (-\alpha_1 y_0 + \lambda_1 y_0) & (\lambda_1 + 2\lambda_1 y_0 - \alpha_1 x_0 + \lambda_1 x_0) - \omega \end{vmatrix} = 0$$

$A_1(0,\ 0)$ махсус нуқта учун характеристик тенгламанинг илдизлари

$$\omega_1 x_1 = \lambda_1,\ \omega_2 x_2 = -\lambda_2$$

бўлгани учун махсус нуқта эгар бўлади.

$A_2(-1,\ 0)$ махсус нуқта учун характеристик тенгламанинг илдизлари

$$\omega_1 = \lambda_2,\ \omega_2 = \alpha_1$$

бўлгани учун махсус нуқта турғунмас тугун бўлади.

$A_3(0,\ -1)$ махсус нуқта учун характеристик тенгламанинг илдизлари

$$\omega_1 = -\alpha_2,\ \omega_2 = -\lambda_1$$

бўлгани учун махсус нуқта турғун тугун бўлади.

$A_4\left(\frac{\alpha_2\lambda_1}{R},\ \frac{\alpha_1\lambda_2}{R}\right)$ махсус нуқта учун характеристик тенгламанинг илдизлари

$$\omega_{1.2} = \frac{\lambda_1\lambda_2(\alpha_1 - \alpha_2)}{R} \mp \sqrt{\lambda_1\lambda_2}\,\frac{\sqrt{\lambda_1\lambda_2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 - 4\alpha_1\alpha_2^2[\alpha_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)]}}{R}$$

кўринишда бўлади.

Бу ерда қуйидаги ҳоллардан бири бўлиши мумкин.

I. Агар

$\alpha_1 < \alpha_2,\ \alpha_2 > \lambda_1 + \lambda_2,\ \lambda_1\lambda_2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 < 4\alpha_1\alpha_2^2[\alpha_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)]$ ва $R > 0$ (B)

бўлса, у ҳолда $A_4\left(\frac{\alpha_2\lambda_1}{R},\ \frac{\alpha_1\lambda_2}{R}\right)$ махсус нуқта турғун фокус бўлади (122-чизма).

$A_1$, $A_2$, $A_3$ ва $A_4$ махсус нуқталар ботиқ тўртбурчак ташкил этади.

Демак, $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ махсус нуқталар биргаликда эгар, турғун тугун, турғунмас тугун ва турғун фокус турида бўлиши мумкин экан.

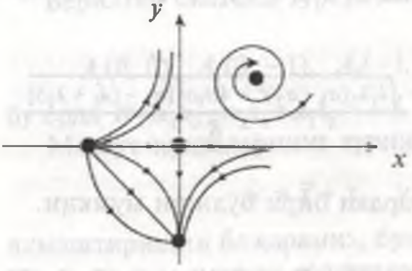
(B) шартда $\alpha_2 > \alpha_1$ бўлгани учун, анти жисмлар ишлаб чиқариш тезлиги, унинг бартараф қилишга кетган сарф-дан юқори бўлади. Бу ҳолда анти жисмлар ва антиген қоришмаси $A_4$ махсус нуқта атрофида вақт ўтиши билан сўнувчи тебраниш вужудга келади, аммо системанинг ечими нолга тенг бўлмайди. Бу ҳолда антигенларни инсон организмидан тўлиқ чиқариб бўлмайди.

$\alpha_1>\lambda_1+\lambda_2$ шарт шуни билдирадики, яъни анти жисмлар ишлаб чиқариш тезлиги, антиген кўпайиши ва анти жисмлар камайиши тезликлари йиғиндисидан катта бўлади (122-чизма).

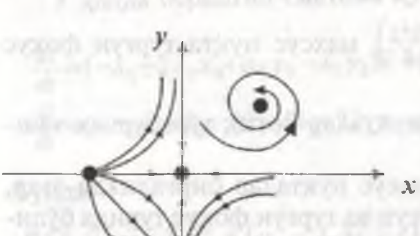
**II.** Агар $\alpha_1>\alpha_2$, $\alpha_2>\lambda_1+\lambda_2$, $\lambda_1\lambda_2(\alpha_1-\alpha_2)^2<4\alpha_1\alpha_2^2[\alpha_2-(\lambda_1+\lambda_2)]$ ва $R>0$ шарт бажарилса, у ҳолда $A_4$ махсус нуқта турғунмас фокус бўлади.

Бу ҳолда I ҳолга қарама-қарши вазиятга, яъни вақт ўтиши билан ўсувчи тебранишга эга бўламиз ва касалликнинг натижаси ўлим билан тугаши мумкин (123-чизма).

**III.** Агар $\alpha_1<\alpha_2$, $\alpha_2>\lambda_1+\lambda_2$, $\lambda_1\lambda_2(\alpha_1-\alpha_2)^2>4\alpha_1\alpha_2^2[\alpha_2-(\lambda_1+\lambda_2)]$ ва $R>0$ шарт бажарилса, у ҳолда $A_4$ махсус нуқта турғун тугун бўлади. Бу ҳолда анти жисмлар ва антиген қоришмаси нолга интилади. Бу ҳолда инсон баданидаги антиген тўлиқ чиқариб ташланади (яъни тузалиш содир бўлади) (124-чизма).



122-чизма.



123-чизма.

**IV.** Агар $\alpha_1>\alpha_2$, $\alpha_2>\lambda_1+\lambda_2$, $\lambda_1\lambda_2(\alpha_1-\alpha_2)^2<$ $<4\alpha_1\alpha_2^2[\alpha_2-(\lambda_1+\lambda_2)]$ ва $R>0$ шарт бажарилса, у ҳолда $A_4$ махсус нуқта турғунмас тугун бўлади. Бу ҳолда инсон баданининг заҳарланиши тез ўсувчи бўлади ва касаллик натижаси ўлим билан тугаши мумкин (125-чизма).

**V.** Агар $\alpha_1=\alpha_2$ бўлса, у ҳолда характеристик тенгламанинг илдизи қуйидаги кўринишда бўлади:

124-чизма.

125-чизма.

$$\omega_{1,2} = \mp \frac{2\alpha_2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\sqrt{-\alpha_2[\alpha_2-(\lambda_1+\lambda_2)]}}{R}, \ R = \alpha_2[\alpha_2-(\lambda_1+\lambda_1)]$$

Бунда иккита ҳолдан бири бўлиши мумкин.

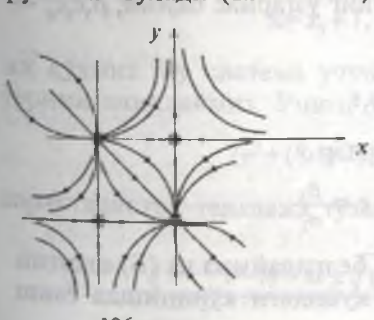
а) Агар $[\alpha_2-(\lambda_1+\lambda_2)]<0$ бўлса, у ҳолда $A_4$ махсус нуқта эгар бўлади. Тўртта махсус нуқта қавариқ тўртбурчак ташкил этади. Шунинг учун биргаликда иккита эгар ва иккита тугун бўлади. Касаллик ўлим билан тугайди (126-чизма).

б) Агар $[\alpha_2-(\lambda_1+\lambda_2)]>0$ бўлса, у ҳолда характеристик тенглама илдизларининг кўриниши қуйидагича бўлади:

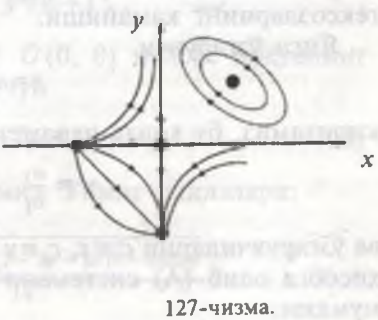
$$\omega_{1,2} = \mp 2i\alpha_2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\cdot\sqrt{\alpha_2[\alpha_2-(\lambda_1+\lambda_2)]}.$$

Бу ҳолда (А) система учун марказ ёки фокус бўлиш муаммоси вужудга келади. (А) система марказга эга бўлиши учун коэффициентларнинг шартларидан фойдаланиб $A_4$ махсус нуқтани марказ бўлади деб оламиз, яъни унинг атрофини ўровчи чизиқлар айланалардан иборат.

Бу ҳолда тебраниш даврий бўлади, демак касаллик сурункали бўлади (127-чизма).



126-чизма.



127-чизма.

**3-масала.** (Фотосинтез жараёнининг сифат манзарасини текшириш). $c_3$ триозофосфат ва $c_6$ гексозофосфат қоришмасида юзага келадиган фотосинтез (ўсимликларда ёруғлик таъсирида анорганик моддалардан органик моддалар ҳосил бўлиш) жараёнининг энг оддий математик моделини тасвирловчи қуйидаги

$$\left.\begin{aligned} \frac{dc_3}{dt} &= \alpha_1 c_3^2 - \alpha_2 c_3 c_6 + \alpha_3; \\ \frac{dc_6}{dt} &= \beta_1 c_3^2 - \beta_2 c_6^2 - \beta_3 c_3 c_6 \end{aligned}\right| \qquad \text{(А)}$$

дифференциал тенгламалар системасини қарайлик, бу ерда $\alpha_i$, $\beta_i$ ($i=1, 2, 3$) — ўзгармас параметрлар бўлиб, улар

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0; \beta_2 = \frac{1}{7}\beta_1, \beta_3 = \frac{6}{7}\beta_1, \\ &\beta_1 - \beta_2 - \beta_3 = 0; \alpha_3 < \frac{1}{7}\alpha_1 \end{aligned}\right| \qquad \text{(Б)}$$

шартни қаноатлантиради.

(А) системанинг ўнг томонидаги ҳар бир қўшилувчи қуйидаги маънони билдиради: $\alpha_i c_3^2$ — иккита ҳодисанинг тезликлар айирмаси (биринчиси $CO_2$ водород донори иштирокида нуклеопротеид ва рибулезлардан триозларнинг пайдо бўлиши ва иккинчиси — фруктозодифосфат пайдо бўлиш ҳисобига трирозанинг камайиши); $\alpha_1$ — $CO_2$ нинг ҳаводаги концентрацияси ва ёруғлик интенсивлигига боғлиқ ўзгармас коэффициент; $\alpha_1 c_3 c_6$ — рибулезлар ва тетрозлар пайдо бўлишида, яъни тризофосфатнинг гексозофосфат билан реакцияси даврида тризофосфатнинг камайиши; $\alpha_3$ — нафас олиш жараёнида полисахаридлар гидролизи ҳисобига триозларнинг ўзгармас оқими; $\beta_3 c_3 c_6$ — гексозларнинг камайиши.

Янги ўзгарувчи

$$\tau = \alpha_1 \tau$$

киритамиз, бу ҳолда параметрлар

$$\gamma = \frac{\alpha_3}{\alpha_1}, \ \varepsilon = \frac{\beta_3}{\alpha_1}$$

ва ўзгарувчиларни $c_3 \equiv x$, $c_6 \equiv y$ белгилаймиз ва (Б) шартни ҳисобга олиб (А) системани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = x^2 - (1+\gamma)xy + \gamma; \\ &\frac{dy}{dt} = \frac{1}{7}\varepsilon\,(7x^2 - y^2 - 6xy), \end{aligned}\right| \qquad \text{(В)}$$

бу ерда $\varepsilon > 0,\ 0 < \gamma < \frac{1}{7}$.

$Oxy$ текислигидаги махсус нуқталарни

$$\left.\begin{aligned} &x^2 - (1+\gamma)xy + \gamma = 0; \\ &\tfrac{1}{7}\varepsilon(7x^2 - y^2 - 6xy) = 0 \end{aligned}\right| \qquad \text{(Г)}$$

тенгламалар системасидан топамиз.

(Г) тенгламалар системасидаги иккинчи тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$(x-y)(7x+y)=0.$$

Агар $y=-7x$ бўлса, у ҳолда

$$x^2 + (1+\gamma)7x^2 + \gamma > 0\,.$$

бўлади, яъни бу ҳолда (Г) система ечимга эга бўлмайди.

Агар $y=x$ бўлса, у ҳолда

$$-\gamma x^2+\gamma=0$$

бўлади, бундан $x=\pm 1$, яъни бу ҳолда (Г) система ечимга эга бўлади. Шундай қилиб, текисликда (А) система учун $A\,(1,\ 1)$, $B\,(-1,\ -1)$ нуқталар мувозанат нуқталари бўлади.

$A\,(1,\ 1)$ махсус нуқтани текширамиз. Унинг учун (А) системага

$$x=x_1+1,\ y=y_1+1$$

ни қўямиз. Бу система учун $O\,(0,\ 0)$ махсус нуқтанинг турини аниқлаймиз. Унинг учун

$$7\gamma^2+(8\varepsilon+7\gamma-7)\lambda+16\varepsilon\gamma=0 \qquad \text{(Д)}$$

характеристик тенглама тузамиз. Унинг илдизлари:

$$\lambda_{1,2} = \frac{7-7\gamma-8\varepsilon \pm \sqrt{(7-7\gamma-8\varepsilon)^2 - 448\varepsilon\gamma}}{14}.$$

Келгусида аниқлик учун

$$\left.\begin{aligned} 7-7\gamma-8\varepsilon > 0; \\ (7-7\gamma-8\varepsilon)^2 - 448\varepsilon\gamma < 0 \end{aligned}\right\} \qquad (\text{Е})$$

тенгсизликлар ўринли деб фараз қиламиз.

(Е) тенгсизликлар системаси, масалан, $\varepsilon = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{10}$ қийматларида бажарилади. (Е) шарт бажарилганда (Д) характеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиқий қисми мусбат бўлган комплекс сонлар бўлади. Шунинг учун $A\,(1,\ 1)$ мувозанат ҳолат турғунмас фокус бўлади.

Худди шунга ўхшаш $B\,(-1,\ -1)$ махсус нуқта учун текширишни бажариб, бу нуқтанинг турғун фокус эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. $B$ махсус нуқта учун характеристик тенгламанинг илдизлари

$$\lambda_{1,2} = \frac{7\gamma + 8\varepsilon - 7 \pm i\sqrt{448\varepsilon\gamma - (7-7\gamma-8\varepsilon)^2}}{14}$$

комплекс сондан иборатдир.

Энди (В) системанинг фазовий ҳаракат ҳолатини $(x,\ y)$ текисликнинг ҳаммасида текширамиз.

Унинг учун (В) системадан $dt$ ни чиқариб, ушбу

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varepsilon\,(7x^2 - 6xy - y^2)}{7\,[x^2 - (1+\gamma)xy + \gamma]} \qquad (3)$$

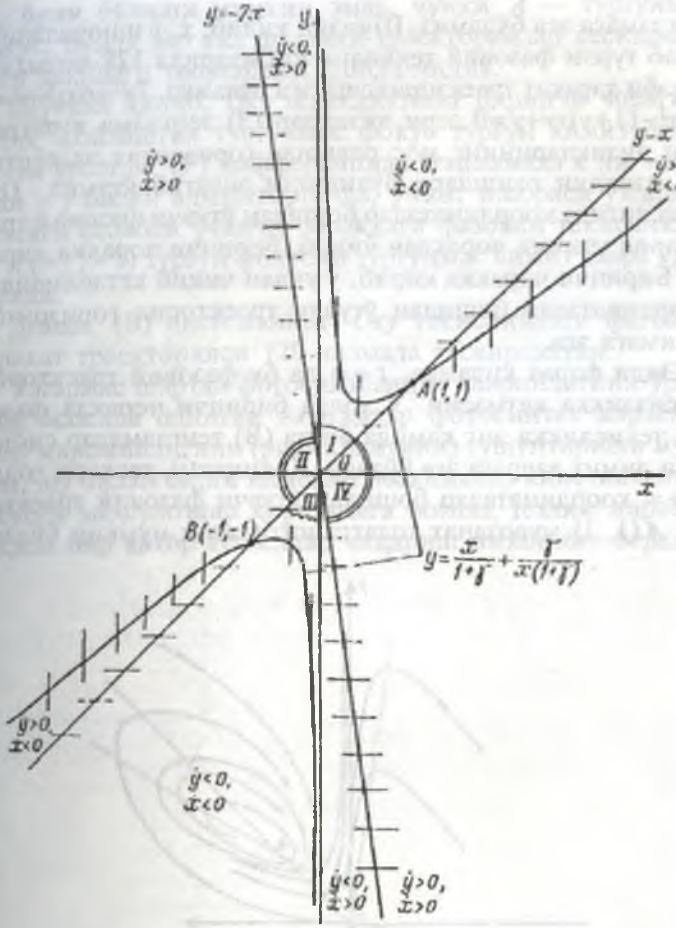
дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламадан $7x^2 - 6xy - y^2 = 0$ тенглама билан аниқланувчи нуқталар тўпламида (В) системанинг фазовий траекториялари горизонтал уринмаларга эга бўлади (бунда $\frac{dy}{dx} = 0$ ).

$7x^2 - 6xy - y^2 = 0$ тенгламани $y = x$, $y = -7x$ иккита тўғри чизиқ тенгламаси кўринишда ёзиш мумкин.

Бу тўғри чизиқлар фазовий текисликни тўртта чоракка бўлади (128-чизма).

I, III чоракда $\dot{y} = \frac{dy}{dx} < 0$ бўлгани учун фазовий ҳаракат траекторияси юқоридан пастга йўналган бўлади. II, IV чоракларда $\dot{y} > 0$ бўлгани учун фазовий ҳаракат траекторияси пастдан юқорига йўналган бўлади.

Эгри чизиқнинг



128-чизма.

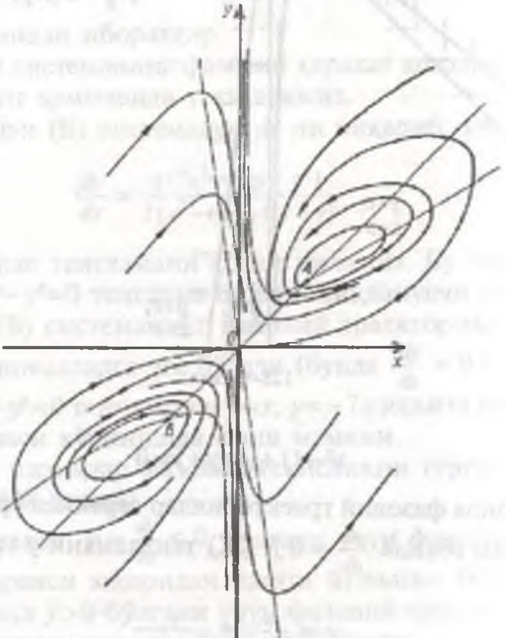
$$x^2-(1+\gamma)xy+y=0 \qquad (\text{Ж})$$

нуқталарида фазовий траекториялар вертикал уринмаларга эга бўлади (бунда $\frac{dx}{dy}=0$ ). (Ж) тенгламани у га нисбатан ечиб,

$$y=\frac{x}{1+\gamma}+\frac{\gamma}{(1+\gamma)x} \qquad (\text{Н})$$

тенгламага эга бўламиз. Шундай қилиб, $\dot{x}$, $\dot{y}$ ишораларига қараб турли фазовий текислик қисмларида 128-чизмадаги каби ҳаракат траекториясига эга бўламиз. $7x^2-6xy-y^2=0$ ва $x^2-(1+\gamma)xy+\gamma=0$ эгри чизиқлар (3) тенглама интеграл эгри чизиқларининг мос равишда горизонтал ва вертикал изоклин оғишлари бўлишини эслатиб ўтамиз. $Oxy$ текислигида координаталар бошидан ўтувчи фазовий траектория учинчи чоракдан чиқиб, биринчи чоракка киради. Биринчи чоракка кириб, у ундан чиқиб кетаолмайди. Координаталар бошидан ўтувчи траектория горизонтал уринмага эга.

Энди фараз қиламиз, $t\to\infty$ да бу фазовий траектория чексизликка кетмасин. У ҳолда биринчи чоракда фазовий текисликка энг камида битта (В) тенгламалар системаси лимит даврага эга бўлади. Ҳақиқатан, тескари ҳолда $t\to+\infty$ координаталар бошидан ўтувчи фазовий траектория $A(1,\ 1)$ мувозанат ҳолатга интилиши мумкин бўлар-



129-чизма.

ди, буни бўлиши мумкин эмас, чунки $A$ — турғунмас фокус. Бунда ҳар хил фазовий траекториялар кесишмаслиги ҳақидаги теоремадан фойдаландик.

Шундай қилиб, $Oxy$ текисликнинг биринчи чорагида тўлиқ жойлашган турғунмас фокус турғун лимит даврa билан ўралган. (F) дифференциал тенгламада $x$ ни $-x$ ва $y$ ни $-y$ билан алмаштирганда, унинг ишораси ўзгармаганлиги сабабли учинчи чоракдаги фазовий текисликдаги $B(-1, -1)$ турғун фокусни турғунмас лимит давра ўраб туради.

Демак, (B) системанинг $Oxy$ текисликдаги фазовий ҳаракат траекторияси 129-чизмада тасвирланган.

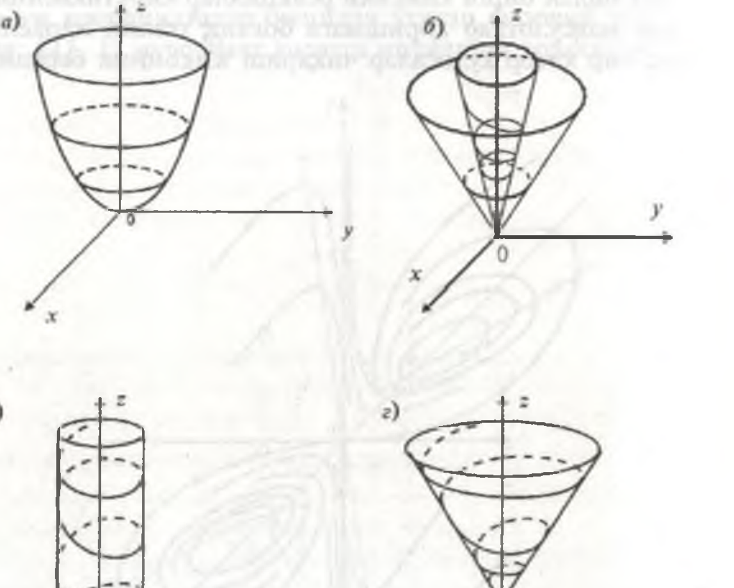
Ўзгармас шартда фотосинтезнинг даврийлигини ўрганиш асосида олинган натижалар фотосинтез жараёнининг маромийлигини (ритмийлигини) тушунтириши мумкин, шу билан бирга кимёвий реакциялар кинетикасини, хусусан маҳсулотлар қоришмага боғлиқ тезлик жараёни ҳақида бир қатор хулосалар чиқариш имконини беради.

# IV БОБ

# ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ ХАРАКТЕРИСТИКАЛАРИНИНГ УЧ ЎЛЧОВЛИ ФАЗОДАГИ ҲОЛАТЛАРИ

Жуфт ўлчовли фазодан тоқ ўлчовли фазога ўтилганда дифференциал тенгламалар системасининг характеристик ҳолатлари манзараси кескин ўзгаради. Уч ўлчовли фазодаги характеристикалар текисликдаги характеристикаларга нисбатан умуман бошқачадир.

Бизга маълумки, *Oxy* текисликда, агар битта характеристика махсус нуқтага спиралсимон тарзда кирса, у ҳолда қолган ҳамма характеристикалар ҳам шу тарзда махсус



130-чизма.

нуқтага киради. Агар бирор характеристика махсус нуқтага маълум уринма бўйича кирса, у ҳолда спиралсимон характеристика умуман бўлмайди.

Уч ўлчовли фазода бир вақтда махсус нуқтага характеристикалар маълум уринма бўйича, спиралсимон ва ёпиқ ҳолатларда кириши мумкин.

Уч ўлчовли фазода махсус нуқтанинг марказ бўлиш тушунчасини етарлича тўғри деб бўлмайди. Фақат ҳамма характеристикалар махсус нуқта атрофида ёпиқ бўлса, у ҳолда махсус нуқтани марказ деб ҳисоблаш мумкин.

Агар махсус нуқта атрофида чексиз кўп ёпиқ характеристикалар, шунингдек у ёки бу сиртларда жойлашган бошқа характеристикалар спиралсимон бўлса, у ҳолда махсус нуқтани марказ деб ҳисоблаш мумкин (130-чизма). Шунингдек, ҳамма характеристикаларнинг бирор координаталар текислигидаги проекциялари ёпиқ бўлганда ҳам махсус нуқтани марказ деб айтиш мумкин (бу марказ таърифини А. Пуанкаре берган), улар 130-а, б, в, г чизмаларда тасвирланган.

## 1-§. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИНГ УЧ ЎЛЧОВЛИ ($n$=3) ФАЗОДАГИ СОДДА МУВОЗАНАТ ҲОЛАТЛАРИ

Ушбу

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1x + a_2y + a_3z + P(x,\ y,\ z), \\ \frac{dy}{dt} &= b_1x + b_2y + b_3z + Q(x,\ y,\ z), \\ \frac{dz}{dt} &= c_1x + c_2y + c_3z + R(x,\ y,\ z) \end{aligned}\right| \qquad (1.1)$$

дифференциал тенгламалар системаси берилган бўлсин, бунда $P(x,\ y,\ z)$, $Q(x,\ y,\ z)$ $R\ (x,\ y,\ z)$ — бирор $D$ соҳада аналитик функциялар.

Ушбу

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=a_1x+a_2y+a_3z\\ \frac{dy}{dt}&=b_1x+b_2y+b_3z\\ \frac{dz}{dt}&=c_1x+c_2y+c_3z\end{aligned}\right| \qquad (1.2)$$

системани (1.1) тенгламанинг қисқартирилган тенгламалар системаси деб атаймиз.

Фараз қилайлик, $(x_0, y_0, z_0)$ — (1.2) системанинг мувозанат ҳолати бўлсин.

Агар

$$\begin{vmatrix} a_1-\lambda & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2-\lambda & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3-\lambda \end{vmatrix}=0 \qquad (1.3)$$

характеристик тенглама илдизга эга бўлмаса (комплекс соннинг ҳақиқий қисми нолга тенг бўлганда), у ҳолда бу мувозанат ҳолатни оддий деб атаймиз.

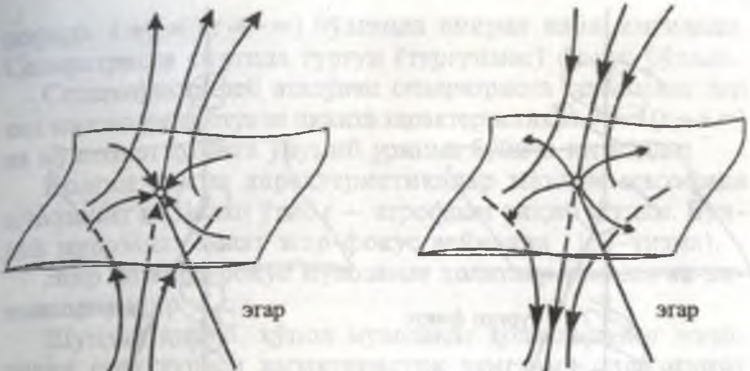
$\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ илдизларнинг комплекс ўзгарувчи текислигида жойлашишига қараб қуйидаги ҳоллардан бири бўлиши мумкин.

1. (1.3) характеристик тенгламанинг ҳамма илдизлари ҳақиқий бўлиб, бир хил ишорали бўлмасин. У ҳолда мувозанат ҳолатидан сепаратрисса деб аталувчи бирор сирт ўтади.

Шундай $\varepsilon>0$ сонини топиш мумкинки, шу сиртда ётувчи ҳамма характеристикалар $\varepsilon$ — мувозанат ҳолати атрофига киришда $t\to+\infty$ $(t\to-\infty)$ бўлганда маълум уринма бўйича интилади. Бу сепаратрисса сиртида турғун (турғунмас) тугунга эга бўламиз.

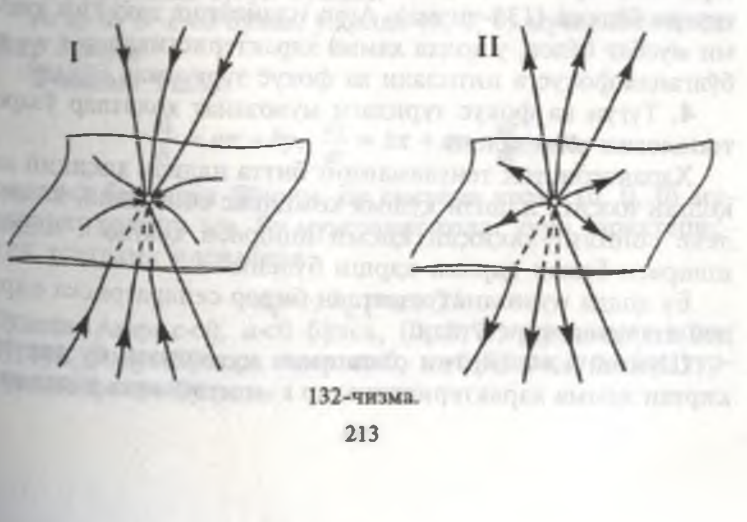
Сепаратрисса сиртининг ҳар хил томонларида ётувчи иккита характеристика $t\to-\infty$ $(t\to+\infty)$ да мувозанат ҳолатга умумий маълум уринма бўйича интилсин. Бу иккита характеристика сепаратриссалар дейилади. Бошқа ҳамма характеристикалар мувозанат ҳолатдан маълум масофада узоқлашган ҳолда ўтадилар.

Шундай $\varepsilon>0$ атрофни кўрсатиш мумкинки, бу характеристикалар мувозанат ҳолатдаги $\varepsilon$ — атрофга киради ва бу $\varepsilon$ — атрофдан чиқиб кетади. Бундай мувозанат ҳолат эгар дейилади (131-чизма).



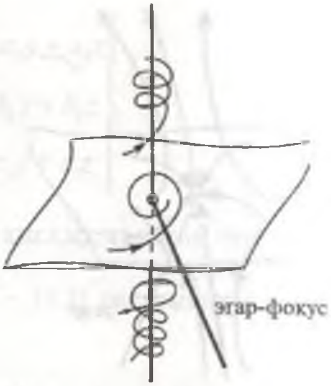
131-чизма.

2. (1.3) характеристик тенгламанинг ҳамма илдизлари ҳақиқий ва бир хил ишорали бўлсин. Бу ҳолда шундай $\varepsilon>0$ ни топиш мумкинки, ҳамма характеристикалар $\varepsilon$ — мувозанат ҳолат атрофида, унга $t\to+\infty$ ($t\to-\infty$) бўлганда маълум уринма бўйича интилади. Бундай мувозанат ҳолатни тугун дейилади. Агар характеристик тенгламаларнинг илдизлари манфий бўлса, бу ҳолда характеристикалар $t\to+\infty$ да тугунга интилади, шунинг учун бундай мувозанат ҳолатга турғун тугун дейилади (132-чизма, I). Агар характеристик тенгламанинг ҳамма илдизлари мусбат бўлса, у ҳолда $t\to-\infty$ да ҳамма характеристикалар мувозанат ҳолатдан узоқлашади, бундай мувозанат ҳолатга турғунмас тугун дейилади (132-чизма, II).



132-чизма.

133-чизма.



134-чизма.

**3.** Характеристик тенгламанинг битта илдизи ҳақиқий ва қолган иккитаси қўшма комплекс сон бўлиб, комплекс соннинг ҳақиқий қисми ишораси ҳақиқий илдиз ишораси билан бир хил бўлсин.

Бу ҳолда шундай $\varepsilon>0$ олиш мумкинки, $\varepsilon$ — мувозанат ҳолат атрофига кирувчи ҳамма характеристикалар $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$) да мувозанат ҳолатга интилади.

Лекин, бу характеристикалардан иккитаси мувозанат ҳолатга маълум умумий уринма бўйича интилади, қолган ҳамма характеристикалар спиралдан иборат бўлади. Бундай мувозанат ҳолат фокус дейилади. Агар комплекс илдизнинг ҳақиқий қисми манфий бўлса, у ҳолда ҳамма характеристикалар $t \to +\infty$ бўлганда фокусга интилади ва фокус турғун бўлади (133-чизма). Агар илдизнинг ҳақиқий қисми мусбат бўлса, у ҳолда ҳамма характеристикалар $t \to -\infty$ бўлганда фокусга интилади ва фокус турғунмас бўлади.

**4.** Тугун ва фокус туридаги мувозанат ҳолатлар ўзаро топологик эквивалент.

Характеристик тенгламанинг битта илдизи ҳақиқий ва қолган иккита илдизи қўшма комплекс сон бўлиб, комплекс соннинг ҳақиқий қисми ишораси ҳақиқий илдиз ишораси билан қарама-қарши бўлсин.

Бу ҳолда мувозанат ҳолатдан бирор сепаратрисса сирт деб аталувчи сирт ўтади.

Шундай $\varepsilon>0$ сиртни олишимиз мумкинки, бу сиртга кирган ҳамма характеристикалар $\varepsilon$ — мувозанат ҳолат атрофида $t\to+\infty$ $(t\to-\infty)$ бўлганда спирал каби интилади. Сепаратрисса сиртида турғун (турғунмас) фокус бўлади.

Сепаратрисса деб аталувчи сепаратрисса сиртининг ҳар хил томонларида ётувчи иккита характеристика $t\to-\infty$ $(t\to+\infty)$ да мувозанат ҳолатга умумий уринма бўйича интилади.

Қолган ҳамма характеристикалар маълум масофада мувозанат ҳолатдан ўтиб $\varepsilon$ — атрофдан чиқиб кетади. Бундай мувозанат ҳолат эгар-фокус дейилади (133-чизма).

Эгар ва эгар-фокус мувозанат ҳолатлар топологик эквивалентидир.

Шундай қилиб, кўпол мувозанат ҳолатларнинг топологик структураси характеристик тенглама илдизининг ҳақиқий қисми ишораси орқали аниқланишини кўрдик.

Юқоридаги тасдиқларга доир мисоллар келтирамиз.

**1-мисол.** Ушбу

$$\frac{dx}{dt}=ax,\ \ \frac{dy}{dt}=by,\ \ \frac{dz}{dt}=cz$$

система берилган бўлсин. Бу система ягона (0, 0, 0) мувозанат ҳолатга эга.

Бу мувозанат ҳолат учун характеристик тенглама илдизлари

$$\lambda_1=a,\ \lambda_2=b,\ \lambda_3=c$$

бўлади. Агар $a<0$, $b<0$, $c<0$ бўлса, у ҳолда (0, 0, 0) мувозанат ҳолат турғун тугун бўлади.

Агар $a>0$, $b>0$, $c>0$ бўлса, у ҳолда (0, 0, 0) мувозанат ҳолат турғунмас тугун бўлади.

Агар $a\cdot b\cdot c<0$ бўлса, у ҳолда (0, 0, 0) мувозанат ҳолат эгар бўлади.

**2-мисол.** Ушбу

$$\frac{dx}{dt}=ax-by,\ \ \frac{dy}{dt}=bx+ay,\ \ \frac{dz}{dt}=cz$$

система берилган бўлсин. Бу система ягона (0, 0, 0) мувозанат ҳолатга эга. Бу мувозанат ҳолат учун характеристик тенглама илдизлари

$$\lambda_1=c,\ \lambda_{2,3}=a\pm i2b$$

бўлади. Агар $c<0$, $a<0$ бўлса, (0, 0, 0) мувозанат ҳолат турғун фокус бўлади. Агар $c>0$, $a>0$ бўлса, у ҳолда турғунмас фокус бўлади.

Агар $a \cdot c<0$ бўлса, (0, 0, 0) мувозанат ҳолат эгар-фокус бўлади.

Агар $a=0$ бўлса, у ҳолда

$$\lambda_1=c, \lambda_{2,3}=a\pm i2b$$

илдизга эга бўламиз. Бу ҳолда (0, 0, 0) мувозанат ҳолат Пуанкаре теоремасига кўра марказ бўлади. Агар (0, 0, 0) мувозанат ҳолат оддий бўлса, у ҳолда унинг тури (1.1) ва (1.2) қисқартирилган дифференциал тенгламалар системаси учун бир хил бўлади. Бу ҳолни характеристик тенгламанинг ҳақиқий илдизи нолга тенг бўлганда ҳам бир хил бўлади дейиш нотўғри.

Ушбу

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + xf_1(x,\ y,\ z), \\ \frac{dy}{dt} &= -x + yf_1(x,\ y,\ z), \\ \frac{dz}{dt} &= zf_1(x,\ y,\ z) \end{aligned}\right| \tag{1.4}$$

система берилган бўлсин, бунда $f_1(x,\ y,\ z)=Ax+By+Cz$ ($A$, $B$ ва $C$ — ўзгармас сонлар). Берилган (1.4) система ягона (0, 0, 0) мувозанат ҳолатга эга.

(0, 0, 0) мувозанат ҳолат учун характеристик тенглама илдизлари:

$$\lambda_1=0,\ \lambda_{2,3}=\pm i.$$

Агар (1.4) системани $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$ цилиндрик координаталарда ифодаласак:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{d\varphi} &= -rf_1(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z), \\ \frac{dz}{d\varphi} &= -rf_1(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z) \end{aligned}\right| \tag{1.5}$$

системага эга бўламиз. Унинг ечими

$$r = \frac{1}{A\sin\varphi - B\cos\varphi + CC_1\varphi + C_2} \tag{1.6}$$

кўринишда бўлади, бунда $C_1$ ва $C_2$ лар интеграллаш ўзгармаслари. Агар $C_1 \cdot C\neq 0$ бўлса, у ҳолда (1.6) дан кўриниб турибдики, ечим спиралсимон чизиқдан иборат бўлади. (0, 0, 0) мувозанат ҳолат берилган система учун оддий бўлмаган фокус бўлади.

## 2-§. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИНГ (*n*=3) ХАРАКТЕРИСТИКАЛАРИНИ ЧЕКСИЗЛИКДА ТЕКШИРИШ

Ушбу

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sum_{i=0}^{n} P_i(x,\ y,\ z), \\ \frac{dy}{dt} &= \sum_{i=0}^{n} Q_i(x,\ y,\ z), \\ \frac{dz}{dt} &= \sum_{i=0}^{n} R_i(x,\ y,\ z) \end{aligned}\right| \tag{2.1}$$

дифференциал тенгламалар системаси берилган бўлсин, бунда $P_i(x, y, z)$, $Q_i(x, y, z)$ ва $R_i(x, y, z)$ — бир жинсли $i$-даражали кўпҳадлар.

$$u=\tau x,\ v=\tau y,\ \omega=\tau z \tag{2.2}$$

алмаштиришларда (бунда $u$, $v$, $\omega$ — янги ўзгарувчилар) мос равишда $u=1$, $v=1$, $\omega=1$ деб олинса, (2.2) дан қуйидаги алмаштиришларни ҳосил қиламиз:

$$x=\frac{1}{\tau},\ y=\frac{v}{\tau},\ z=\frac{\omega}{\tau}, \tag{2.3}$$

$$x=\frac{u}{\tau},\ y=\frac{1}{\tau},\ z=\frac{\omega}{\tau}, \tag{2.4}$$

$$x=\frac{u}{\tau},\ y=\frac{v}{\tau},\ z=\frac{1}{\tau}. \tag{2.5}$$

(2.3) алмаштириш фақат $Oyz$ текислигига мос чексиз узоқлашган мувозанат ҳолатлардан ташқари ҳамма уч ўлчовли фазодаги чексиз узоқлашган мувозанат ҳолатларини аниқлайди. Бу мувозанат ҳолатларни ўрганиш учун (2.4) алмаштиришдан фойдаланамиз, бу алмаштириш фақат $Oxz$ текислигига мос чексиз узоқлашган мувозанат ҳолатлардан ташқари ҳамма мувозанат ҳолатларни ўз ичига олади. Бу мувозанат ҳолатларини ўрганиш учун (2.5) алмаштиришни бажарамиз. Шундай қилиб, (2.3), (2.4) ва (2.5) алмаштиришлар ёрдамида уч ўлчовли фазодаги ҳамма чексиз узоқлашган мувозанат ҳолатларни ўрганилади.

(2.2) алмаштиришда кетма-кет $u=1$, $v=1$ ва $\omega=1$ деб олсак, (2.1) система қуйидаги кўринишни олади:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} &= -\tau\sum_{i=0}^{n}\tau^{n-i}P_i(1,\ v,\ \omega),\\ \frac{dv}{dt} &= \sum_{i=0}^{n}\tau^{n-i}\Phi_i(1,\ v,\ \omega),\\ \frac{d\omega}{dt} &= \sum_{i=0}^{n}\tau^{n-i}\Psi_i(1,\ v,\ \omega), \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

бунда

$$\left.\begin{aligned} \Phi_i(1,\ v,\ \omega) &= Q_i(1,\ v,\ \omega) - vP_i(1,\ v,\ \omega),\\ \Psi_i(1,\ v,\ \omega) &= R_i(1,\ v,\ \omega) - \omega P_i(1,\ v,\ \omega). \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} &= -\tau\sum_{i=0}^{n}\tau^{n-i}Q_i(u,\ 1,\ \omega),\\ \frac{du}{dt} &= \sum_{i=0}^{n}\tau^{n-i}\Phi_i(u,\ 1,\ \omega),\\ \frac{d\omega}{dt} &= \sum_{i=0}^{n}\tau^{n-i}\Psi_i(u,\ 1,\ \omega), \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

бунда

$$\left.\begin{aligned} \Phi_i(u,\ 1,\ \omega) &= P_i(u,\ 1,\ \omega) - uQ_i(u,\ 1,\ \omega),\\ \Psi_i(u,\ 1,\ \omega) &= R_i(1,\ v,\ \omega) - \omega Q_i(u,\ 1,\ \omega). \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} &= -\tau\sum_{i=0}^{n}\tau^{n-i}R_i(u,\ v,\ 1),\\ \frac{du}{dt} &= \sum_{i=0}^{n}\tau^{n-i}\Phi_i(u,\ v,\ 1),\\ \frac{dv}{dt} &= \sum_{i=0}^{n}\tau^{n-i}\Psi_i(u,\ v,\ 1), \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

бунда

$$\left.\begin{aligned}\Phi_i(u,\ v,\ 1) &= P_i(u,\ v,\ 1) - uR_i(u,\ v,\ 1),\\ \Psi_i(u,\ v,\ 1) &= Q_i(u,\ v,\ 1) - vR_i(u,\ v,\ 1).\end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

(2.6), (2.8) ва (2.10) лардан кўриниб турибдики, $\tau=0$ га мос умумий ҳолда сфера сирти дифференциал тенгламалар системасининг ечими бўлади.

(2.7), (2.9) ва (2.11) системалар кўриниши (2.6), (2.8) ва (2.10) дифференциал тенгламалар системасининг тузилишга қараб умумий қонуниятга бўйсунишини кўрсатади.

Агар охирги (2.6) тенгламани

$$A_1 = \begin{pmatrix} P_i & Q_i & R_i \\ Q_i & P_i & R_i \end{pmatrix}$$

алмаштириш билан солиштирсак, (2.8) дифференциал тенгламалар системасини юзага келтиради.

Ўз навбатида

$$A_2 = \begin{pmatrix} Q_i & P_i & R_i \\ R_i & P_i & Q_i \end{pmatrix}$$

алмаштириш, агар (2.8) билан солиштирсак, (2.10) дифференциал тенгламалар системасини юзага келтиради.

Бу ҳолда $u$, $v$ ва $\omega$ лар мос ҳолда $(1,\ v,\ \omega)$, $(u,\ 1,\ \omega)$ ва $(u,\ v,\ 1)$ қийматлар қабул қилади.

$\tau=0$ мувозанат ҳолатнинг турини аниқлаш учун, $v=v_0$, $\omega=\omega_0$ деб $v=\alpha+v_0$, $w=\beta+\omega_0$ $(u=\alpha+v_0\ \omega=\beta+\omega_0,\ u=\alpha+v_0\ v=\beta+v_0)$ алмаштиришларни бажарсак, (2.6), (2.8) ва (2.10) системалар учун характеристик тенгламаларни ҳосил қиламиз ва унинг илдизлари кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1(v_0,\ \omega_0) &= -P_n(1,\ v_0,\ \omega_0)\\ 2\lambda_{2,3}(v_0,\ \omega_0) &= \left(\frac{\partial\Phi_n}{\partial v}\right)_{v=v_0} + \left(\frac{\partial\Phi_n}{\partial\omega}\right)_{\omega=\omega_0} \pm\\ &\pm\sqrt{\left[\left(\frac{\partial\Phi_n}{\partial v}\right)_{v=v_0} + \left(\frac{\partial\Phi_n}{\partial\omega}\right)_{\omega=\omega_0}\right]^2 - 4\left(\frac{D(\Phi_n,\ \Psi_n)}{D(v,\ \omega)}\right)_{\substack{v=v_0\\ \omega=\omega_0}}}\end{aligned}\right|, \tag{2.12}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1(u_0,\ \omega_0) = -Q_n(u_0,\ 1,\ \omega_0) \\ 2\lambda_{2,3}(u_0,\ \omega) = \left(\frac{\partial\Phi_n}{\partial\omega}\right)_{\omega=\omega_0} + \left(\frac{\partial\Psi_n}{\partial u}\right)_{u-u_0} \pm \\ \pm\sqrt{\left[\left(\frac{\partial\Phi_n}{\partial\omega}\right)_{\omega=\omega_0} + \left(\frac{\partial\Psi_n}{\partial u}\right)_{u=u_0}\right]^2 - 4\left(\frac{D(\Phi_n,\ \Psi_n)}{D(\omega,\ u)}\right)_{\substack{\omega=\omega_0\\ u=u_0}}} \end{array}\right\}, \tag{2.13}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1(u_0,\ v_0) = -R_n(u_0,\ v_0,\ 1) \\ 2\lambda_{2,\,3}(u_0,\ v_0) = \left(\frac{\partial\Phi_n}{\partial u}\right)_{u=u_0} + \left(\frac{\partial\Psi_n}{\partial v}\right)_{v=v_0} \pm \\ \pm\sqrt{\left[\left(\frac{\partial\Phi_n}{\partial u}\right)_{u=u_0} + \left(\frac{\partial\Psi_n}{\partial v}\right)_{v=v_0}\right]^2 - 4\left(\frac{D(\Phi_n,\ \Psi_n)}{D(u,\ v)}\right)_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}}} \end{array}\right\}, \tag{2.14}$$

бунда

$$\left(\frac{D(\Phi_n,\ \Psi_n)}{D(v,\ \omega)}\right)_{\substack{v=v_0\\ \omega=\omega_0}} = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial\Phi_n}{\partial v}\right)_{v=v_0} & \left(\frac{\partial\Phi_n}{\partial\omega}\right)_{\omega=\omega_0} \\ \left(\frac{\partial\Psi_n}{\partial v}\right)_{v=v_0} & \left(\frac{\partial\Psi_n}{\partial\omega}\right)_{\omega=\omega_0} \end{vmatrix} \tag{2.15}$$

$$\left(\frac{D(\Phi_n,\ \Psi_n)}{D(u,\ \omega)}\right)_{\substack{u=u_0\\ \omega=\omega_0}} = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial\Phi_n}{\partial u}\right)_{u=u_0} & \left(\frac{\partial\Phi_n}{\partial\omega}\right)_{\omega=\omega_0} \\ \left(\frac{\partial\Psi_n}{\partial u}\right)_{u=u_0} & \left(\frac{\partial\Psi_n}{\partial\omega}\right)_{\omega=\omega_0} \end{vmatrix} \tag{2.16}$$

$$\left(\frac{D(\Phi_n,\ \Psi_n)}{D(u,\ v)}\right)_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}} = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial\Phi_n}{\partial u}\right)_{u=u_0} & \left(\frac{\partial\Phi_n}{\partial v}\right)_{v=v_0} \\ \left(\frac{\partial\Psi_n}{\partial u}\right)_{u=u_0} & \left(\frac{\partial\Psi_n}{\partial v}\right)_{v=v_0} \end{vmatrix} \tag{2.17}$$

(2.13), (2.14) ва (2.15) ифодалардаги $\lambda_2$ ва $\lambda_3$ илдизлар $\lambda_1$ илдиз билан аниқланувчи фазодаги мувозанат ҳолат характери $\tau=0$ текисликдаги, яъни сфера сиртидаги мувозанат ҳолатни аниқланувчи характеристик тенгламанинг илдизлари ҳам бўлади. (2.12), (2.13) ва (2.14) лардан кўриниб турибдики, $\lambda_2$ ва $\lambda_3$ илдизлар мусбат ва манфий, ҳақиқий ва комплекс бўлишлари мумкин. Демак, оддий мувозанат ҳолат чексизликда тугун, фокус, эгар ва эгар-фокус бўлиши мумкин. Шу билан бирга сфера сиртида мос ҳолда мувозанат ҳолат тугун, фокус ва эгар бўлади. Агар сфера сиртида тугун ёки фокус бўлса, у ҳолда фазода мувозанат ҳолат тугун (фокус) ёки эгар (эгар-фокус) бўлади ва бу ҳолда сфера сирти сепаратрисса сирти бўлиб қолади. Агар сфера сиртида эгар бўлса, у ҳолда фазода ҳам мувозанат ҳолат эгар бўлади ва сепаратрисса сирти сфера ичидан ўтади. Сепаратриссалар сфера сирти устида ётади.

Энди характеристик тенгламалар илдизларининг геометрик маъносини чексизликдаги ҳолатини тушунтирамиз.

Агар қуйидаги шартлардан бирортаси бажарилса:

1) $\lambda_1(v_0, \omega_0) = -P(1, v_0, \omega_0) = 0,$

2) $\left(\frac{\partial\Phi_n}{\partial v}\right)_{v=v_0} + \left(\frac{\partial\Psi_n}{\partial\omega}\right)_{\omega=\omega_0} = 0$

ва (2.15) якобиан мусбат бўлса, у ҳолда (2.6) система билан аниқланувчи мувозанат ҳолат оддиймас бўлади. Бу ҳолда $\lambda_2$ ва $\lambda_3$ илдизлар соф мавҳум ва текисликда кўрилган марказ ёки фокус бўлиш муаммоси каби бу ҳолда алоҳида текширишни талаб қиладиган муаммо вужудга келади.

3) $\left(\frac{D(\Phi_n, \Psi_n)}{D(v, \omega)}\right)_{\substack{v=v_0\\ \omega=\omega_0}} = 0$

бўлган ҳолда $\lambda_2$ ва $\lambda_3$ илдизлардан бири нолга тенг. Бу шарт қуйидаги тенгликни билдиради:

$$\frac{\left(\frac{\partial\Phi_n}{\partial v}\right)_{v=v_0}}{\left(\frac{\partial\Phi_n}{\partial\omega}\right)_{\omega=\omega_0}} = \frac{\left(\frac{\partial\Psi_n}{\partial v}\right)_{v=v_0}}{\left(\frac{\partial\Psi_n}{\partial\omega}\right)_{\omega=\omega_0}}.$$

Бу эса $\Phi_n(1, v, \omega)=0$ ва $\Psi_n(1, v, \omega)=0$ эгри чизиқлар умумий нуқтада уринишини, яъни

$$\left.\begin{aligned} \Phi_n(1, v, \omega) = 0, \\ \Psi_n(1, v, \omega) = 0 \end{aligned}\right\}$$

система каррали илдизга эга бўлишини билдиради.

Чексиз узоқлашган мувозанат ҳолатларнинг координаталари қуйидаги

$$\left.\begin{aligned} Q_n(1, v, \omega) - vP_n(1, v, \omega) = 0, \\ R_n(1, v, \omega) - \omega P_n(1, v, \omega) = 0 \end{aligned}\right] \qquad (2.19)$$

системадан аниқланиши айтилган эди.

Агар оддиймас мувозанат ҳолат бўлиш шартининг биринчиси бажарилса: $\lambda_1(1, v, \omega)=0$, у ҳолда (2.1) системадаги $P_n(x, y, z)$, $Q_n(x, y, z)$ ва $R_n(x, y, z)$ сиртлар чексиз узоқлашган мувозанат ҳолатда кесишади. (2.18) шарт мувозанат ҳолат каррали эканлигини билдиради.

$\lambda_1(v_0, \omega_0)=-P_n(1, v_0, \omega_0)$ учун мувозанат ҳолат уч ўлчовли фазодаги мувозанат ҳолат билан бир хил бўлади. $\lambda_1(v_0, \omega_0)\neq 0$ мувозанат ҳолат учун янги табиатли сифатга эга бўлган, ўзига хос асимптотик характеристика ҳолатга мос келади.

Мувозанат ҳолат тури билан характеристик тенглама илдизларининг характери орасидаги боғланишни аниқлаш учун қуйидаги белгилашларни киритамиз:

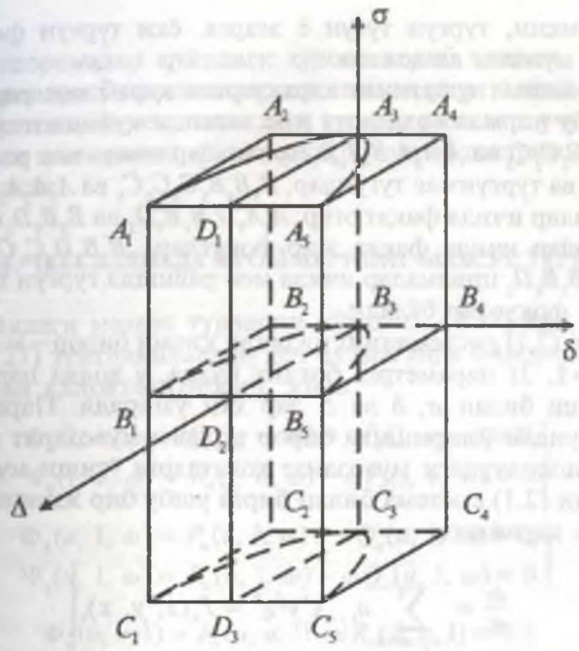
$$\sigma = -P_n(1, v_0, \omega_0), \quad \delta = \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial v}\right)_{v=v_0} + \left(\frac{\partial \Psi_n}{\partial \omega}\right)_{\omega=\omega_0}, \qquad (2.20)$$
$$\Delta = \left(\frac{D(\Phi_n, \Psi_n)}{D(v, \omega)}\right)_{\substack{v=v_0 \\ \omega=\omega_0}}.$$

У ҳолда (2.12) характеристик тенгламанинг илдизлари

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1(v_0, \omega_0) = \sigma \\ 2\lambda_{2,3}(v_0, \omega_0) = \delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4\Delta} \end{aligned}\right]. \qquad (2.21)$$

кўринишда бўлади.

Фазода $\sigma$, $\delta$ ва $\Delta$ тўғри бурчакли координаталарни қараймиз ва фазодаги соҳаларга у ёки бу мувозанат ҳолатлар



135-чизма.

мос келишини кўрсатамиз. $\delta^2-4\Delta=0$ тенглама уч ўлчовли $\sigma$, $\delta$ ва $\Delta$ фазода ясовчиси аппликата ўқига параллел бўлган параболик цилиндрдан иборат (135-чизма).

Агар $\lambda_2$ ва $\lambda_3$ илдизлар комплекс бўлса, у ҳолда чексизликда мувозанат ҳолат фокус ёки эгар-фокус турида бўлади. Бу шартни $\sigma$, $\delta$, $\Delta$ фазодаги ёки $\delta-4\Delta<0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар, яъни параболик цилиндр ичида ётувчи нуқталар бўлади. $\delta=0$, $\Delta>0$ бўлганда, текислик нуқталари мос ҳолда мувозанат ҳолатлар системасининг чизиқли қисми учун марказ ёки оддий мувозанат ҳолат тури бўлади.

Агар $\Delta<0$ бўлса, $\lambda_2$ ва $\lambda_3$ ҳақиқий ва ҳар хил ишорали бўлади, яъни мувозанат ҳолат эгар турида бўлади. Агар $\delta^2-4\Delta<0$ ва $\Delta>0$ бўлса, $\sigma\delta>0$ бўлганда тугун туридаги мувозанат ҳолатга, $\sigma\delta<0$ бўлганда эгар туридаги мувозанат ҳолатга эга бўламиз. $\delta^2-4\Delta<0$ илдизлари тенг бўлган ҳолда тугунлар, эгарлар ва фокуслар (эгар-фокус) чегараларига мос келади. Бунда эгар турғун ёки турғунмас тугунга ўтиши мумкин, турғун тугун ё эгарга, ёки турғун фокусга ўтиши мумкин ва ҳоказо.

Мувозанат ҳолатнинг характерига қараб мос равишда у ёки бу нормал соҳаларга мос келиши қуйидагича: $B_1B_2B_3C_1C_2C_3$ ва $A_3A_4A_5B_3B_4B_5$ призмалар ичида мос равишда турғун ва турғунмас тугунлар, $B_3B_4B_5C_3C_4C_5$ ва $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$ призмалар ичида фақат эгар, $A_1A_3D_1B_1B_3D_2$ ва $B_3B_5D_2C_3C_5D_3$ призмалар ичида фақат эгар-фокуслар, $B_1B_3D_2C_1C_2D_3$ ва $A_3A_5D_1B_3B_5D_2$ призмалар ичида мос равишда турғун ва турғунмас фокуслар бўлади.

Агар (2.1) системанинг чизиқли қисми бирор $-\infty<k_i<+\infty$ ($i=1$, 2) параметрга боғлиқ бўлса, у ҳолда параметр ўзгариши билан $\sigma$, $\delta$ ва $\Delta$ лар ҳам ўзгаради. Параметрнинг бундай ўзгаришида бирор турдаги мувозанат ҳолатлар бошқа турдаги мувозанат ҳолатларга ўтиши мумкин.

Энди (2.1) система билан бирга ушбу бир жинсли системани қараймиз:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\sum_{i+j+k=n} a_{ijk}x^iy^jz^k=P_n(x,\ y,\ x),\\ \frac{dy}{dt}&=\sum_{i+j+k=n} b_{ijk}x^iy^jz^k=Q_n(x,\ y,\ x),\\ \frac{dz}{dt}&=\sum_{i+j+k=n} c_{ijk}x^iy^jz^k=R_n(x,\ y,\ x).\end{aligned}\right| \qquad (2.22)$$

**Теорема**. *(2.22) система мувозанат ҳолатларининг чексизликдаги топологик структураси (2.1) система мувозанат ҳолатларининг чексизликдаги топологик структураси билан бир хил бўлади.*

Ҳақиқатан, чексизликда характеристикаларнинг ҳолати юқори тартибли ҳадларига боғлиқдир. Шунинг учун $\tau=0$, $v=v_0$, $\omega=\omega_0$ мувозанат ҳолат учун (2.1) системанинг характеристик тенгламасининг илдизлар структураси (2.12) каби бўлади. Бу илдизлар $\tau=0$, $v=v_0$, $\omega=\omega_0$ мувозанат ҳолат турини аниқлайди ва (2.22) системани, шунингдек (2.6) ва (2.22) системаларнинг чексизликдаги характеристик йўналишлари, катталиклари ва характерлари бир хил ва бу дифференциал тенгламалар системаси айнан тенглиги келиб чиқади, шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Бу теоремадан қуйидаги хулоса келиб чиқади. Бирор дифференциал тенгламалар системаси учун оддий мувозанат ҳолатнинг чексизликдаги турини аниқлаш учун системадаги ҳадларнинг фақат юқори тартиблиларини олиш керак экан.

## 3-§. ЧЕКСИЗЛИКДА ФРОММЕРНИНГ МАХСУС ТУРИ.

Қуйидаги махсус турларни кўрамиз. (2.17) ёки (2.19), ёки (2.21) тенгламалардан ҳеч бўлмаганда бирортаси $i=n$ да айнан қаноатлантирсин, яъни

$$\left.\begin{aligned}\Phi_n(1, v, \omega) &= Q_n(1, v, \omega) - vP_n(1, v, \omega) \equiv 0,\\ \Psi_n(1, v, \omega) &= R_n(1, v, \omega) - \omega P_n(1, v, \omega) \equiv 0.\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\Phi_n(u, 1, \omega) &= P_n(u, 1, \omega) - vQ_n(u, 1, \omega) \equiv 0,\\ \Psi_n(u, 1, \omega) &= R_n(u, 1, \omega) - \omega Q_n(u, 1, \omega) \equiv 0.\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\Phi_n(u, v, 1) &= P_n(u, v, 1) - vR_n(u, v, 1) \equiv 0,\\ \Psi_n(u, v, 1) &= Q_n(u, v, 1) - vR_n(u, v, 1) \equiv 0\end{aligned}\right\}$$

бўлсин. Бунда икки ҳол бўлиши мумкин:

1) (2.17) ёки (2.19) ёки (2.21) тенгламалар системасидаги иккала тенгламани $i=n$ да айнан қаноатлантирсин. Бу ҳолни чексизликда тўлиқ махсус тур деб атаймиз;

2) (2.17) ёки (2.19) ёки (2.21) тенгламалар системасидаги битта тенглама $i=n$ да айнан қаноатлантирсин. Бу ҳолни чексизликда тўлиқмас махсус тур деб атаймиз.

Чексизликдаги тўлиқ махсус тур бўлишлигининг зарурий ва етарли шарти берилган системанинг ўнг қисми

$$\left.\begin{aligned}P_n(x, y, z) &= xf_{n-1}(x, y, z)\\ Q_n(x, y, z) &= yf_{n-1}(x, y, z)\\ R_n(x, y, z) &= zf_{n-1}(x, y, z)\end{aligned}\right\}, \qquad (3.1)$$

системанинг бажарилишидан иборатдир, бунда $f_{n-1}(x, y, z)$ — $x$, $y$, $z$ га нисбатан $(n-1)$-даражали бир жинсли кўпҳад.

Янги ўзгарувчи $dt=\tau^{-1}d\tau$ киритиб ва дастлабки белгилашларни қолдирган ҳолда (2.13) алмаштириш учун қуйидаги системага эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\tau}{dt} &= -f_{n-1}(1,\ v,\ \omega) - \sum_{i=0}^{n-1} \tau^{n-i} P_i(1,\ v,\ \omega) \\
\frac{dv}{dt} &= \Phi_{n-1}(1,\ v,\ \omega) + \sum_{i=0}^{n-2} \tau^{n-1-i} \Phi_i(1,\ v,\ \omega) \\
\frac{d\omega}{dt} &= \Psi_{n-1}(1,\ v,\ \omega) + \sum_{i=0}^{n-2} \tau^{n-1-i} \Psi_i(1,\ v,\ \omega)
\end{aligned}\right| \tag{3.2}$$

бу ерда

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_{n-1}(1,\ v,\ \omega) &= Q_{n-1}(1,\ v,\ \omega) - vP_{n-1}(1,\ v,\ \omega) \\
\Psi_{n-1}(1,\ v,\ \omega) &= R_{n-1}(1,\ v,\ \omega) - \omega P_{n-1}(1,\ v,\ \omega) \\
\Phi_i(1,\ v,\ \omega) &= Q_i(1,\ v,\ \omega) - vP_i(1,\ v,\ \omega) \\
\Psi_i(1,\ v,\ \omega) &= R_i(1,\ v,\ \omega) - \omega P_i(1,\ v,\ \omega)
\end{aligned}\right| \tag{3.3}$$

Худди шунга ўхшаш (2.14) ва (2.15) алмаштиришлар учун:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\tau}{dt} &= -f_{n-1}(u,1,\omega) - \sum_{i=0}^{n-1} \tau^{n-i} Q_i(u,1,\omega) \\
\frac{du}{dt} &= \Phi_{n-1}(u,1,\omega) + \sum_{i=0}^{n-2} \tau^{n-1-i} \Phi(u,\ 1,\ \omega) \\
\frac{d\omega}{dt} &= \Psi_{n-1}(u,\ 1,\ \omega) + \sum_{i=0}^{n-2} \tau^{n-1-i} \Psi_i(u,\ 1,\ \omega)
\end{aligned}\right| \tag{3.4}$$

бунда

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_{n-1}(u, 1, \omega) &= P_{n-1}(u, 1, \omega) - uQ_{n-1}(u, 1, \omega) \\
\Psi_{n-1}(u, 1, \omega) &= R_{n-1}(u, 1, \omega) - \omega Q_{n-1}(u, 1, \omega) \\
\Phi_i(u, 1, \omega) &= P_i(u, 1, \omega) - uQ_i(u, 1, \omega) \\
\Psi_i(u, 1, \omega) &= R_i(u, 1, \omega) - \omega Q_i(u, 1, \omega)
\end{aligned}\right| \tag{3.5}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\tau}{dt} &= -f_{n-1}(u, \upsilon, 1) - \sum_{i=0}^{n-1} \tau^{n-i} R_i(u, \upsilon, 1) \\
\frac{du}{dt} &= \Phi_{n-1}(u, \upsilon, 1) + \sum_{i=0}^{n-2} \tau^{n-1-i} \Phi_i(u, \upsilon, 1) \\
\frac{d\upsilon}{dt} &= \Psi_{n-1}(u, \upsilon, 1) + \sum_{i=0}^{n-2} \tau^{n-1-i} \Psi_i(u, \upsilon, 1)
\end{aligned}\right| \tag{3.6}$$

бу ерда

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{n-1}(u,\upsilon,1) &= P_{n-1}(u,\upsilon,1)-uR_{n-1}(u,\upsilon,1)\\ \Psi_{n-1}(u,\upsilon,1) &= Q_{n-1}(u,\upsilon,1)-\upsilon R_{n-1}(u,\upsilon,1)\\ \Phi_i(u,\upsilon,1) &= P_i(u,\upsilon,1)-uR_i(u,\upsilon,1)\\ \Psi_i(u,\upsilon,1) &= Q_i(u,\upsilon,1)-\upsilon R_i(u,\upsilon,1)\end{aligned}\right\} \quad (3.7)$$

(3.2), (3.4) ва (3.6) системалар учун $\tau=0$ характеристика бўлмаслигини осонгина кўриш мумкин.

Агар

$$\left.\begin{aligned}f_{n-1}(1,\ v,\ \omega)=0,&\left[f_{n-1}(u,\ 1,\ \omega)=0, f_{n-1}(u,\ v,\ 1)=0\right]\\ \Phi_{n-1}(1,\ v,\ \omega)=0,&\left[\Phi_{n-1}(u,\ 1,\ \omega)=0, \Phi_{n-1}(u,\ v,\ 1)=0\right]\end{aligned}\right\} \quad (3.8)$$

тенгламалар системаси биргаликда бўлмаса, у ҳолда сфера сиртида мувозанат ҳолат мавжуд бўлмаслиги мумкин.

Агар (3.8) система биргаликда бўлса, у ҳолда (3.2), (3.4) ва (3.6) системалар учун сфера сиртида мувозанат ҳолат бўлиши мумкин.

Фараз қилайлик, (3.2) система учун $\tau=0$, $v=v_0$, $\omega=\omega_0$ мувозанат ҳолат бўлсин. У ҳолда қуйидаги ҳоллардан бири бўлиши мумкин:

1) $\tau=0$, $v=v_0$, $\omega=\omega_0$ нуқта эгар бўлади, яъни мувозанат ҳолатдан бирор сепаратрисса сирти ўтади.

Сфера сирти сепаратрисса сирти ҳам бўлиб қолиши мумкин ва унда турғун (турғунмас) тугун бўлади. Қолган ҳамма характеристикалар мувозанат ҳолатдан маълум масофада узоқлашган ҳолда ўтади. Шундай $\varepsilon>0$ атрофни кўрсатиш мумкинки, мувозанат ҳолат $\varepsilon$ — атрофига кирган характеристикалар ундан чиқиб кетадилар.

Сепаратрисса сирти сферанинг ичида бўлса, сфера сиртида ётувчи характеристикалар мувозанат ҳолатдан маълум масофада ўтадилар.

2) $\tau=0$, $v=v_0$, $\omega=\omega_0$ нуқта тугун бўлсин. Шундай $\varepsilon>0$ ни олиш мумкинки, ҳамма характеристикалар мувозанат ҳолат бўлган $\varepsilon$ — атрофга $t\to+\infty$ $(t\to-\infty)$ да маълум уринма бўйича мувозанат ҳолатга интилади;

3) $\tau=0$, $v=v_0$, $\omega=\omega_0$ нуқта фокус бўлсин. Шундай $\varepsilon>0$ ни олиш мумкинки, $\varepsilon$ — мувозанат ҳолат атрофига кирган ҳамма сепаратриссалар $t\to+\infty$ $(t\to-\infty)$ да маълум урин-

ма бўйича интилмаган ҳолда, яъни ҳамма характеристикалар спиралдан иборат бўлади;

4) $\tau=0$, $v=v_0$, $\omega=\omega_0$ нуқта эгар-фокус бўлсин. Мувозанат ҳолатдан сепаратрисса сирти ўтади. Шундай $\varepsilon>0$ ни олиш мумкинки, $\varepsilon$ — мувозанат ҳолат атрофига ($t\to+\infty$ ($t\to-\infty$) бўйича мувозанат ҳолатга интилган) кирган ҳамма характеристикалар спиралдан иборат бўлиб, сепаратрисса сиртида турғун (турғунмас) фокус бўлади. Қолган ҳамма характеристикалар мувозанат ҳолатдан маълум масофадан ўтадилар.

Бу ҳоллар билан бирга анча мураккаб ҳоллар, яъни характеристик тенгламанинг ҳақиқий илдизлари нолга тенг бўлган ҳоллар мавжуд.

Юқорида тўлиқмас махсус тур бўлиш шарти айтиб ўтилган эди. (2.7), (2.9) ёки (2.11) тенгламалар системасидаги бирорта тенглама учун $i=n$ да айнан қаноатлантирсин, масалан,

$$\Phi_n(1,\ v,\ \omega)\equiv 0,\ \ \Psi_n(1,\ v,\ \omega)\not\equiv 0\,.$$

У ҳолда (2.6) система қуйидаги кўринишни олади:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\tau}{dt}&=-\tau\left[f_{n-1}(1,\ v,\ \omega)+\tau\sum_{i=0}^{n-1}\tau^{n-i-1}P_i(1,\ v,\ \omega)\right]\\
\frac{dv}{dt}&=\tau\left[f_{n-1}(1,\ v,\ \omega)+\tau\sum_{i=0}^{n-2}\tau^{n-2-i}\Phi_i(1,\ v,\ \omega)\right]\\
\frac{d\omega}{dt}&=\Psi_n(1,\ v,\ \omega)+\tau\sum_{i=0}^{n-1}\tau^{n-i-1}\Psi_i(1,\ v,\ \omega)
\end{aligned}\right\}\qquad(3.9)$$

бу ерда

$$\Phi_i(1,\ v,\ \omega)=Q_i(1,\ v,\ \omega)-vP_i(1,\ v,\ \omega),$$
$$\Psi_i(1,\ v,\ \omega)=R_i(1,\ v,\ \omega)-\omega P_i(1,\ v,\ \omega).$$

Худди шунингдек, (2.14) ва (2.15) алмаштиришлар учун берилган система қуйидаги кўринишни олади:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\tau}{dt} &= -\tau\left[ f_{n-1}(u,\,1,\,\omega) + \tau\sum_{i=0}^{n-1}\tau^{n-1-i}Q_i(u,\,1,\,\omega)\right]\\
\frac{du}{dt} &= \tau\left[\Phi_{n-1}(u,\,1,\,\omega) + \tau\sum_{i=0}^{n-2}\tau^{n-2-i}\Phi_i(u,\,1,\,\omega)\right]\\
\frac{d\omega}{dt} &= \Psi_n(u,\,1,\,\omega) + \tau\sum_{i=0}^{n-1}\tau^{n-i-1}\Psi_i(u,\,1,\,\omega)
\end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

бу ерда

$$\begin{aligned}
\Phi_i(u,\,1,\,\omega) &= P_i(u,\,1,\,\omega) - uQ_i(u,\,1,\,\omega),\\
\Psi_i(u,\,1,\,\omega) &= R_i(u,\,1,\,\omega) - \omega Q_i(u,\,1,\,\omega).
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\tau}{dt} &= -\tau\left[ f_{n-1}(u,\,v,\,1) + \tau\sum_{i=0}^{n-1}\tau^{n-i-1}R_i(u,\,v,\,1)\right]\\
\frac{du}{dt} &= \tau\left[\Phi_{n-1}(u,\,v,\,1) + \tau\sum_{i=0}^{n-2}\tau^{n-2-i}\Phi_i(u,\,v,\,1)\right]\\
\frac{dv}{dt} &= \Psi_n(u,\,v,\,1) + \tau\sum_{i=0}^{n-1}\tau^{n-i-1}\Psi_i(u,\,v,\,1)
\end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

бу ерда

$$\begin{aligned}
\Phi_i(u,\,v,\,1) &= P_i(u,\,v,\,1) - uR_i(u,\,v,\,1),\\
\Psi_i(u,\,v,\,1) &= Q_i(u,\,v,\,1) - vR_i(u,\,v,\,1).
\end{aligned}$$

$\tau=0$ сфера сиртида интеграл чизиқ бўлиб, мувозанат ҳолат координаталари қуйидаги тенгламалар системасидан аниқланади:

$$\begin{aligned}
&f_{n-1}(1,\,v,\,\omega) = 0,\ \ \Phi_{n-1}(1,\,v,\,\omega) = 0,\ \ \Psi_{n-1}(1,\,v,\,\omega) = 0;\\
&f_{n-1}(u,\,1,\,\omega) = 0,\ \ \Phi_{n-1}(u,\,1,\,\omega) = 0,\ \ \Psi_{n-1}(u,\,1,\,\omega) = 0;\\
&f_{n-1}(u,\,v,\,1) = 0,\ \ \Phi_{n-1}(u,\,v,\,1) = 0,\ \ \Psi_{n-1}(u,\,v,\,1) = 0.
\end{aligned}$$

Ушбу тенгламалар системасини қараймиз:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= P_n(x,\,y,\,z) + P_{n+1}(x,\,y,\,z)\\
\frac{dy}{dt} &= Q_n(x,\,y,\,z) + Q_{n+1}(x,\,y,\,z)\\
\frac{dz}{dt} &= R_n(x,\,y,\,z) + R_{n+1}(x,\,y,\,z)
\end{aligned}\right| \tag{3.12}$$

бунда $P_n(x, y, z)$, $Q_n(x, y, z)$, $R_n(x, y, z)$, $P_{n+1}(x, y, z)$, $Q_{n+1}(x, y, z)$ ва $R_{n+1}(x, y, z)$ — $x, y, z$ ҳақиқий ўзгарувчиларга нисбатан мос ҳолда $n$ ва $(n+1)$-даражали бир жинсли кўпҳадлар.

Агар (3.12) система учун чексизликда тўлиқ махсус тур бўлса, у ҳолда (3.1) шарт бажарилиши керак. (3.12) системанинг мувозанат ҳолат координаталарини қуйидаги системадан топамиз:

$$\left.\begin{aligned} P_n(x, y, z) + xf_n(x, y, z) = 0 \\ Q_n(x, y, z) + yf_n(x, y, z) = 0 \\ R_n(x, y, z) + zf_n(x, y, z) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

бундан

$$\left.\begin{aligned} yP_n(x,\ y,\ z) - xQ_n(x,\ y,\ z) = 0 \\ zP_n(x,\ y,\ z) - xR_n(x,\ y,\ z) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

(3.14) система чекли фазо қисми учун махсус уринма бўлиш тенгламасини билдиради. Демак, (3.14) система координаталар бошидан фарқли мувозанат ҳолат характеристик йўналишларининг жойланишини аниқлайди.

Фараз қилайлик,

$$y_i = \alpha_i x_i,\ z_i = \beta_i x_i,\ \ (i = 1,\ 2,\ \dots,\ n+1) \tag{3.15}$$

(3.14) системанинг ечими бўлсин, у ҳолда

$$x_i = -\frac{P_n(1,\ \alpha_i,\ \beta_i)}{f_n(1,\ \alpha_i,\ \beta_i)}. \tag{3.16}$$

Бу ҳол учун (3.2) система қуйидаги кўринишни олади:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} &= -f_n(1,\ v,\ \omega) - \tau P_n(1,\ v,\ \omega) \\ \frac{dv}{dt} &= Q_n(1,\ v,\ \omega) - vP_n(1,\ v,\ \omega) \\ \frac{d\omega}{dt} &= R_n(1,\ v,\ \omega) - \omega P_n(1,\ v,\ \omega) \end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

Агар (3.14) система фақат мавҳум илдизга эга бўлса, у ҳолда координаталар боши ягона мувозанат ҳолат бўлади ва сфера сиртида мувозанат ҳолат бўлмайди.

Сфера сиртидаги мувозанат ҳолат $(\alpha_r, \beta_r)$ характеристик йўналишларда ётади ва у қўшимча $f_n(1, v, \omega)=0$ шарт орқали аниқланади. Аммо $x_r$, $y_r$, $z_r$ нуқталар учун (3.15) ва (3.16) тенгликларга асосан улар чексизликка ўтади.

$f_n(1, v, \omega)=0$ бўлганда функция $P_n(1, v, \omega)\neq 0$, акс ҳолда $Q_n(1, v, \omega)=0$, $R_n(1, v, \omega)=0$ бўлар эди ва (3.12) системанинг ўнг қисми $(y-\alpha_r x)$, $(z-\beta_r x)$ умумий кўпайтувчига эга бўлар эди. Шундай қилиб қуйидаги теорема ўринли.

**Теорема.** *Мувозанат ҳолат чекли фазо қисмидан чексизликка ўтган ҳолда ва фақат шу ҳолда сфера сиртида пайдо бўлади.*

## 4-§. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИНГ ХАРАКТЕРИСТИКАЛАРИНИ ТЎЛИҚ ТЕКШИРИШ

Дифференциал тенгламалар сифат назариясининг асосий масалаларидан бири характеристикаларнинг ҳолатларини тўлиқ ўрганиш ҳисобланади. Бу масала текисликда дифференциал тенгламалар системасининг ўнг қисми иккинчи даражали кўпҳад бўлган ҳол учун ҳам тўлиқ ечилмаган.

Ушбу

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sum_{i+j+k=0}^{2} a_{ijk}x^i y^j z^k \\ \frac{dy}{dt} &= \sum_{i+j+k=0}^{2} b_{ijk}x^i y^j z^k \\ \frac{dz}{dt} &= \sum_{i+j+k=0}^{2} c_{ijk}x^i y^j z^k \end{aligned}\right| , \tag{4.1}$$

система берилган бўлсин, бунда $a_{ijk}$, $b_{ijk}$, $c_{ijk}$ — ўзгармас коэффициентлар. (4.1) система учун Фроммернинг тўлиқ махсус тури ўринли бўлсин, яъни (2.7), (2.9) ва (2.11) шартларни (4.1) тенглама айнан қаноатлантирсин. Сифат нуқтаи назардан тўлиқ махсус тур энг бой ва турли-тумандир. Масалан, иккинчи гуруҳ махсус нуқталар (марказ ва фокус) Пуанкаре сферасининг экваторида махсус тур бўлмагандагина пайдо бўлади.

Бу ҳолда (4.1) система

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a_{100}x + a_{010}y + a_{001}z + x\,(a_{200}x + a_{110}y + a_{101}z)\\ \frac{dy}{dt} &= b_{100}x + b_{010}y + b_{001}z + y\,(a_{200}x + a_{110}y + a_{101}z)\\ \frac{dz}{dt} &= c_{100}x + c_{010}y + c_{001}z + z\,(a_{200}x + a_{110}y + a_{101}z)\end{aligned}\right\} \qquad (4.2)$$

кўринишни олади. (4.2) система оддий ва каррали илдизга эга бўлмасин.

Қуйидаги

$$x = x_1,\;\; y = y_1,\;\; z = \alpha x + \beta y + \gamma z,\;\; \gamma \neq 0 \qquad (4.3)$$

алмаштиришни бажарамиз.

$\alpha$, $\beta$ ва $\gamma$ коэффициентларни шундай танлаб оламизки, қуйидаги тенглик ўринли бўлсин:

$$\begin{aligned}\frac{dz_1}{dt} &= \alpha[a_{100}x + a_{010}y + a_{001}z + x(a_{200}x + a_{110}y + a_{101}z)] +\\ &+ \beta[b_{100}x + b_{010}y + b_{001}z + y(a_{200}x + a_{110}y + a_{101}z)] +\\ &+ \gamma[c_{100}x + c_{010}y + c_{001}z + z(a_{200}x + a_{110}y + a_{101}z)] =\\ &= \lambda(\alpha x + \beta y + \gamma z) + (\alpha x + \beta y + \gamma z)(a_{200}x + a_{110}y + a_{101}z).\end{aligned}$$

Бунинг учун $\alpha$, $\beta$ ва $\gamma$ лар

$$\left.\begin{aligned}\alpha(a_{100} - \lambda) + \beta b_{100} + \gamma c_{100} &= 0\\ \alpha a_{010} + \beta(b_{010} - \lambda) + \gamma c_{010} &= 0\\ \alpha a_{001} + \beta b_{001} + \gamma(c_{001} - \lambda) &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (4.4)$$

тенгламалар системасини қаноатлантириши керак. (4.4) система нолмас ечимга эга бўлиши учун

$$\begin{vmatrix} (a_{100} - \lambda) & b_{100} & c_{100}\\ a_{010} & (b_{010} - \lambda) & c_{010}\\ a_{001} & b_{001} & (c_{001} - \lambda)\end{vmatrix} = 0 \qquad (4.5)$$

бўлиши зарурдир.

(4.5) тенглама $\lambda$ га нисбатан учинчи даражали тенгламадан иборат бўлиб, у ҳеч бўлмаганда битта ҳақиқий илдизга эга бўлади. Бу илдизларни қийматини (4.4) системага қўйиб, $\alpha$, $\beta$ ва $\gamma$ ларни топамиз.

(4.2) системани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= A_1x + A_2y + A_3z + x(D_1x + D_2y + D_3z)\\ \frac{dy}{dt} &= B_1x + B_2y + B_3z + y(D_1x + D_2y + D_3z)\\ \frac{dz}{dt} &= C_3z + z(D_1x + D_2y + D_3z)\end{aligned}\right| \tag{4.6}$$

бунда қулайлик учун янги ўзгарувчи ўрнига эски ўзгарувчи олинган.

(4.6) системани қулай кўринишга келтирамиз. Унинг учун

$$x_1 = x + mz, \quad y_1 = y + nz, \quad z_1 = z \tag{4.7}$$

янги ўзгарувчи киритамиз.

Агар $m$ ва $n$ лар

$$\left.\begin{aligned}m(A_1 - C_3) + nA_2 = A_3\\ mB_1 + n(B_2 - C_3) = B_3\end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

системани қаноатлантирса, (4.6) система қуйидаги кўринишга келади:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= A_1x + A_2y + x(D_1x + D_2y + D_4z)\\ \frac{dy}{dt} &= B_1x + B_2y + y(D_1x + D_2y + D_4z)\\ \frac{dz}{dt} &= C_3z + z(D_1x + D_2y + D_4z)\end{aligned}\right|, \tag{4.9}$$

бунда

$$D_4 = D_3 - mD_1 - nD_2.$$

Ушбу

$$y(A_1x + A_2y) - x(B_1x + B_2y) = 0 \tag{4.10}$$

тенглама $Oxy$ текисликдаги мумкин бўлган уринма тенгламасидир. Демак, бу тенглама билан аниқланадиган мувозанат ҳолат (координаталар бошидан бошқа) нурда ётар экан.

Фараз қилайлик,

$$y_i = k_i x_i \ (i=1,\ 2) \tag{4.11}$$

(4.10) тенгламанинг ечими бўлсин. У ҳолда

$$k_{1,2} = \frac{-(A_1 - B_2) \pm \sqrt{(A_1 - B_2)^2 + 4 B_1 A_2}}{2A_2}. \tag{4.12}$$

(4.9) система қуйидаги мувозанат ҳолатларга эга бўлади:

$$\begin{gathered} M_1(0,\ 0,\ 0),\ M_2\left(0,\ 0,\ -\frac{C_3}{D_4}\right), \\ M_3\left(-\frac{A_1 + A_2 k_1}{D_1 + D_2 k_1},\ -\frac{k_2(A_1 + A_2 k_1)}{D_1 + D_2 k_1},\ 0\right), \\ M_4\left(-\frac{A_1 + A_2 k_2}{D_1 + D_2 k_2},\ -\frac{k_2(A_1 + A_2 k_2)}{D_1 + D_2 k_2},\ 0\right) \end{gathered} \tag{4.13}$$

Бу мувозанат ҳолатларга мос равишда алмаштиришларни бажариб, улар учун қуйидаги характеристик тенгламаларнинг илдизларига эга бўламиз:

$$\lambda_1(M_1) = C_3,\ 2\lambda_{2,3}(M_1) = (A_1 + B_2) \pm \sqrt{(A_1 - B_2)^2 + 4A_2 B_1}, \tag{4.14}$$

$$\lambda_1(M_2) = -C_3,\ 2\lambda_{2,3}(M_2) = (A_1 + B_2 - 2C_3) \pm \sqrt{(A_1 - B_2)^2 + 4A_2 B_1}, \tag{4.15}$$

$$\begin{gathered} \lambda_1(M_3) = \frac{\varphi_1(k_1)}{D_1 + D_2 k_1}, \\ \lambda_{2,3}(M_3) = \frac{\varphi_2(k_1) \pm \sqrt{\varphi_3^2(k_1) + 4(A_2 D_1 - A_1 D_2)\varphi_4(k_1)}}{2(D_1 + D_2 k_1)}, \end{gathered} \tag{4.16}$$

$$\begin{gathered} \lambda_1(M_4) = \frac{\varphi_1(k_2)}{D_1 + D_2 k_2}, \\ \lambda_{2,3}(M_4) = \frac{\varphi_2(k_2) \pm \sqrt{\varphi_3^2(k_2) + 4(A_2 D_1 - A_1 D_2)\varphi_4(k_2)}}{2(D_1 + D_2 k_2)}, \end{gathered} \tag{4.17}$$

бунда

$$\varphi_1(k_1) = D_1(C_3 - A_1) + (C_3 D_2 - A_2 D_1 - A_1 D_2)k_1 - D_2 A_2 k_1^2$$

$$\varphi_2(k_1) = B_2 D_1 - 2A_1 D_1 + (B_2 D_2 - 3A_2 D_1 - 2A_1 D_2)k_1 - 3k_1^2 A_2 D_2,$$

$$\varphi_3(k_1) = -B_2D_1 + (2A_1D_2 - B_2D_2 - A_2D_1)k_1 + A_2D_2k_1^2,$$

$$\varphi_4(k_1) = B_1D_1 + (B_1D_2 - A_1D_1)k_1 - A_2D_1k_1^2,$$

$$\varphi_1(k_2) = D_1(C_2 - A_1) + (C_3D_2 - A_2D_1 - A_1D_2)k_2 - D_2A_2k_2^2,$$

$$\varphi_2(k_2) = B_2D_1 - 2A_1D_1 + (B_2D_2 - 3A_2D_1 - 2A_1D_2)k_2 - 3k_2^2A_2D_2,$$

$$\varphi_3(k_2) = -B_2D_1 + \left(2A_1D_2 - B_2D_2 - A_2D_1\right)k_2 + A_2D_2k_2^2,$$

$$\varphi_4(k_2) = B_1D_1 + \left(B_1D_2 - A_1D_1\right)k_2 - A_2D_1k_2^2. \qquad (4.18)$$

Бутун фазода (чексизлик билан бирга) тўртта оддий мувозанат ҳолатлар бўлишининг зарурий шарти қуйидагилардан иборатдир:

$$\begin{aligned} &C_3D_4(D_1 + D_2K_i) \neq 0, \\ &(A_1 - B_2)^2 + 4B_1A_2 > 0. \end{aligned} \qquad (4.19)$$

Агар (4.19) система тўртта оддий мувозанат ҳолатга эга бўлса, у ҳолда унинг учун қуйидаги теорема ўринлидир.

**Теорема.** *(4.19) система бутун фазода иккитадан ортиқ фокусларга (эгар-фокуслар) эга бўлиши мумкин эмас.*

Ҳақиқатан, (4.19) система тўртта фокусга эга бўлсин, у ҳолда қуйидаги шартлар бажарилиши керак:

$$\left.\begin{aligned} (A_1 - B_2)^2 + 4B_1A_1 < 0, \\ \varphi_3^2(k_1) + 4(A_2D_1 - A_1D_2)\varphi_4(k_1) < 0, \\ \varphi_3^2(k_2) + 4(A_2D_1 - A_1D_2)\varphi_4(k_2) < 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4.20)$$

(4.19) тенгсизликдан кўриниб турибдики, бу ҳолда (4.19) система иккита $M_1$, $M_2$ мувозанат ҳолатларга эга.

*Хулоса.* (4.19) система энг камида иккита эгар (тугун) турдаги мувозанат ҳолатларга эга бўлади.

**Мисол.**

Ушбу

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{2}x - y + x(D_1x + D_2y - z) \\ \frac{dy}{dt} &= x - \frac{1}{4}y + y(D_1x + D_2y - z) \\ \frac{dz}{dt} &= z + z(D_1x + D_2y - z) \end{aligned}\right|$$

система иккита $M_1(0, 0, 0)$ ва $M_2(0, 0, 1)$ мувозанат ҳолатларга эга. Улардан $M_1(0, 0, 0)$ — турғунмас фокус, $M_2(0, 0, 1)$ — турғун фокус бўлади.

Энди характеристик тенгламанинг илдизларига қараб характеристик чизиқ ҳолатларини кўриб чиқамиз.

**1.** Фараз қилайлик, характеристик тенгламанинг $\lambda_1(0)$, $\lambda_2(0)$ ва $\lambda_3(0)$ илдизлари координаталар боши учун ҳақиқий ва ҳар хил бўлсин. У ҳолда (4.21 система

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda_1 x + xf_1(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda_2 y + yf_1(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} &= \lambda_3 z + zf_1(x, y, z) \end{aligned}\right| \qquad (4.21)$$

кўринишга келади, бунда $f_1(x, y, z) = a_{200}x + a_{100}y + a_{101}z$.

(4.21) система координаталар бошидан ташқари қуйидаги мувозанат ҳолатларга эга:

$$M_2\left(0, 0, -\frac{\lambda_3}{a_{101}}\right), \quad M_3\left(0, -\frac{\lambda_2}{a_{110}}, 0\right), \quad M_4\left(-\frac{\lambda_1}{a_{200}}, 0, 0\right).$$

$M_2$, $M_3$, $M_4$ мувозанат ҳолатлар учун характеристик тенглама мос равишда қуйидагича бўлади:

$$\begin{aligned} &\bar{\lambda}_1(M_2) = -\lambda_3, \; \bar{\lambda}_2(M_2) = (\lambda_1 - \lambda_3), \; \bar{\lambda}_3(M_2) = (\lambda_2 - \lambda_3), \\ &\bar{\lambda}_1(M_3) = -\lambda_2, \; \bar{\lambda}_2(M_3) = (\lambda_1 - \lambda_2), \; \bar{\lambda}_3(M_3) = (\lambda_3 - \lambda_2), \qquad (4.22) \\ &\bar{\lambda}_1(M_4) = -\lambda_1, \; \bar{\lambda}_2(M_4) = (\lambda_2 - \lambda_1), \; \bar{\lambda}_3(M_4) = (\lambda_3 - \lambda_1). \end{aligned}$$

Координаталар боши турғун тугун бўлсин ($\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$), у ҳолда $M_2$ — турғунмас тугун, $M_3$, $M_4$ лар эгар бўлади.

Агар координаталар боши эгар бўлса, $M_2$ — эгар, $M_3$ ва $M_4$ — тугун бўлади. Бу ҳол учун (2.16), (2.18) ва (2.20) тенгламалар қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} &= -a_{200} - \lambda_1 \tau - a_{110} \upsilon - a_{101} \omega \\ \frac{d\upsilon}{dt} &= (\lambda_2 - \lambda_1)\upsilon \\ \frac{d\omega}{dt} &= (\lambda_3 - \lambda_4)\omega \end{aligned}\right| \qquad (4.23)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\tau}{dt} &= -a_{110} - \lambda_2\tau - a_{200}u - a_{101}\omega\\ \frac{du}{dt} &= (\lambda_1 - \lambda_2)u\\ \frac{d\omega}{dt} &= (\lambda_3 - \lambda_1)\omega\end{aligned}\right\} \qquad (4.24)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\tau}{dt} &= -a_{101} - \lambda_3\tau - a_{200}u - a_{110}v\\ \frac{du}{dt} &= (\lambda_1 - \lambda_3)u\\ \frac{dv}{dt} &= (\lambda_2 - \lambda_3)v\end{aligned}\right\} \qquad (4.25)$$

Булардан, мувозанат ҳолат сфера сиртида фақат $a_{200}=0$ (бир хил турли ва $M_4$ нуқта чексизликка $v=0$, $\omega=0$ йўналиш бўйича узоқлашганда) ёки $a_{100}=0$ (бир хил турли ва $M_3$ нуқта чексизликка $u=0$, $\omega=0$ йўналиш бўйича узоқлашганда) ёки $a_{101}=0$ бўлганда (бир хил турли ва $M_2$ нуқта чексизликка $u=0$, $v=0$ йўналиш бўйича узоқлашганда) мавжуд бўлишини кўришимиз мумкин.

Демак, фазонинг бирор чекланган қисмидаги мувозанат ҳолати тури чексизликдаги мувозанат ҳолати тури билан бир хил бўлар экан.

Агар $a_{200} \cdot a_{110} \cdot a_{101} \neq 0$ бўлса, у ҳолда сфера сиртида мувозанат ҳолат бўлмайди.

**2.** Характеристик тенгламанинг $\lambda_1$ ва $\lambda_2$ илдизлари ҳақиқий, ҳар хил ва бир хил ишорали, $\lambda_3=0$ бўлсин. У ҳолда (4.2) система қуйидаги кўринишга келтирилади:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \lambda_1 x + x(a_{200}x + a_{110}y + a_{101}z)\\ \frac{dy}{dt} &= \lambda_2 x + y(a_{200}x + a_{110}y + a_{101}z)\\ \frac{dz}{dt} &= a_{101}z^2 + z(a_{200}x + a_{110}y + a_{101}z)\end{aligned}\right\} \qquad (4.26)$$

(4.26) системада $m=2$ бўлса, у ҳолда олдинги мавзуда координаталар боши эгар-тугун эканлигини кўрган эдик.

(4.26) система координаталар бошидан ташқари қуйидаги мувозанат ҳолатларга эга:

$$M_3\left(0,\ -\frac{\lambda_2}{a_{110}},\ 0\right),\ M_4\left(-\frac{\lambda_1}{a_{200}},\ 0,\ 0\right).$$

Булар учун характеристик тенгламанинг илдизлари мос равишда қуйидагича бўлади:

$$\begin{aligned}&\bar{\lambda}_1(M_3)=-\lambda_2,\quad \bar{\lambda}_2(M_3)=(\lambda_1-\lambda_2),\quad \bar{\lambda}_3(M_3)=-\lambda_2\,,\\&\bar{\lambda}_1(M_4)=-\lambda_1,\quad \bar{\lambda}_2(M_4)=-(\lambda_1-\lambda_2),\quad \bar{\lambda}_3(M_4)=-\lambda_1\,.\end{aligned}\qquad(4.27)$$

(4.22) га асосан, агар $M_3$ тугун бўлса, у ҳолда $M_4$ эгар бўлади, ва аксинча.

Бутун фазода эгар-тугун, тугун ва эгар ($M_4$ — эгар, $M_3$ — тугун) мавжуд бўлади. Охирги икки нуқта турини ўзгартирмаган ҳолда сфера сиртига ўтиши мумкин.

Характеристик тенгламанинг $\lambda_1$ ва $\lambda_2$ илдизлари ҳақиқий ва қарама-қарши ишорали бўлсин. Аниқлик учун $\lambda_1>0$, $\lambda_2<0$ деб олайлик. Бу ҳолда координаталар боши эгар туридаги мувозанат ҳолат бўлади. У ҳолда $M_3\left(0,\ -\frac{\lambda_2}{a_{110}},\ 0\right)$ — турғун тугун, $M_4\left(-\frac{\lambda_1}{a_{200}},\ 0,\ 0\right)$ — турғунмас тугун бўлади.

**3.** Характеристик тенгламанинг илдизлари $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, $\lambda_3=0$ ва аниқлик учун $\lambda<0$ бўлсин. (4.2) системани қуйидаги каноник кўринишда ёзиб оламиз:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-x+x(a_{200}x+a_{110}y+a_{101}z)\\\frac{dy}{dt}&=\alpha x-y+y(a_{200}x+a_{110}y+a_{101}z)\\\frac{dz}{dt}&=a_{101}z^2+z(a_{200}x+a_{110}y+a_{101}z)\end{aligned}\right\}\qquad(4.28)$$

бунда $\alpha\geq0$.

Бу ҳолда координаталар боши эгар-тугун бўлади. Координаталар бошидан ташқари система $\left(0,\ \frac{1}{a_{110}},\ 0\right)$ мувозанат ҳолатга эга. Бу мувозанат ҳолат учун характеристик тенгламанинг илдизлари

$$\lambda_{1,2}=1,\ \lambda_3=\frac{1-a_{110}}{a_{110}}$$

бўлади. Бундан кўриниб турибдики, (1-$a_{110}$) нинг ишорасига қараб мувозанат ҳолат тугун ёки эгар бўлиши мумкин.

Агар $a_{110}=1$ бўлса, у ҳолда $\lambda_{1,2}=1$, $\lambda_3=0$ бўлади ва иккита эгар-тугунга эга бўламиз.

Агар $a_{110}>1$ бўлса, $\left(0,\ \frac{1}{a_{110}},\ 0\right)$ — тугун бўлади.

4. Характеристик тенгламанинг илдизлари қўшма комплекс, яъни

$$\lambda_1 = a + ib,\ \lambda_2 = a - ib,\ \lambda_3 = 0$$

бўлсин. У ҳолда (4.2) система қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - by + xf_1(x,y,z) \\ \frac{dy}{dt} &= bx + ay + yf_1(x,y,z) \\ \frac{dz}{dt} &= a_{101}z^2 + zf_1(x,y,z). \end{aligned}\right| \qquad (4.29)$$

Бу ҳолда бутун фазода координаталар боши ягона мувозанат ҳолатга эга бўлиб, у эгар-фокус туридаги мувозанат ҳолат бўлади.

5. Характеристик тенгламанинг илдизлари

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = ib,\ \lambda_3 = -ib$$

бўлсин. У ҳолда (4.2) система қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + xf_1(x,\ y,\ z), \\ \frac{dy}{dt} &= -x + yf_1(x,\ y,\ z), \\ \frac{dz}{dt} &= zf_1(x,\ y,\ z). \end{aligned}\right| \qquad (4.30)$$

Бу ҳолда фазода координаталар боши ягона мувозанат ҳолатга эга бўлади. (4.30) системанинг цилиндрик координаталар системасидаги кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\varphi} &= -rf_1(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z), \\ \frac{dz}{d\varphi} &= -zf_1(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z). \end{aligned} \qquad (4.31)$$

Унинг ечими эса

$$r = \frac{1}{a_{100}\sin\varphi - a_{010}\cos\varphi - ca_{001}\varphi + c_1} \tag{4.32}$$

кўринишда бўлиб, у ($ca_{001} \neq 0$) спирал эгри чизиқдан иборат бўлади. Мувозанат ҳолат оддиймас фокус бўлади. Агар $ca_{001}=0$ ($c=0$ ёки $a_{001}=0$) бўлса, у ҳолда $c_1$ нинг исталган қийматларида $x^2+y^2-c_2^2z=0$ конусларда ёпиқ ечимларга эга бўламиз, яъни координаталар боши марказ бўлади.

**6.** (4.1) система учун координаталар боши мувозанат ҳолат бўлмасин. $a_{200}x+a_{110}y+a_{101}z=a_{110}\bar{y}$ ($a_{110} \neq 0$) алмаштириш (4.2) системани $f_1(x, y, z)=a_{110}\bar{y}$ билан фарқ қиладиган дастлабки системага келади.

Демак, система қуйидаги кўринишни олади:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{000} + a_{100}x + a_{010}y + a_{001}z + a_{110}yx, \\ \frac{dy}{dt} &= b_{000} + b_{100}x + b_{010}y + b_{001}z + a_{110}y^2, \\ \frac{dz}{dt} &= c_{000} + c_{100}x + c_{010}y + c_{001}z + a_{110}yz \end{aligned}\right\} \tag{4.33}$$

бунда ихчамлик учун янги коэффициентлар ва ўзгарувчилар ўрнига дастлабки ўзгарувчилар ёзилди.

Чексизликда берилган система

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\tau}{dt} = -a_{100}\tau - a_{110}\upsilon - [a_{000}\tau^2 + (a_{010}\upsilon + a_{001}\omega)\tau], \\ &\frac{d\upsilon}{dt} = b_{100} + b_{000}\tau + (b_{010} - a_{100})\upsilon + b_{001}\omega - a_{010}\upsilon^2 - a_{001}\upsilon\omega - a_{101}\tau\upsilon, \\ &\frac{d\omega}{dt} = c_{100} + c_{000}\tau + c_{010}\upsilon + (c_{001} - a_{100})\omega - a_{000}\upsilon - a_{010}\upsilon\omega - a_{001}\omega^2 \end{aligned}\right\} \tag{4.34}$$

кўринишни олади. Агар $b_{100}=c_{100}=0$ бўлса, у ҳолда (4.34) система учун координаталар боши мувозанат ҳолат бўлади ва унинг учун характеристик тенгламанинг илдизлари:

$$\lambda^3 + a\lambda^2 - b\lambda - c = 0 \tag{4.35}$$

бўлади, бунда

$$\begin{gathered}
a = (3a_{100} - b_{010} - c_{001}),\\
b = [b_{010}c_{001} - c_{010}b_{001} + b_{000}a_{110} - 2a_{110}(c_{001} + b_{010}) + 4a_{100}^2],\\
c = a_{100}[b_{010}c_{001} - a_{100}(b_{010} + c_{001} + a_{100}^2)] -\\
- a_{110}[b_{000}(c_{001} - a_{100}) - b_{001}c_{000}] - c_{010}b_{001}a_{100}.
\end{gathered} \tag{4.36}$$

(4.35) тенглама учун

$$\lambda = \omega - \frac{a}{3}$$

алмаштиришни бажарамиз. Натижада

$$\omega^2 + p\omega + q = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз, бунда

$$p = -\frac{a^2}{3} + b, \quad q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c.$$

Дискриминант:

$$\begin{gathered}
\Delta = \frac{1}{4}\left\{\frac{2}{27}(3a_{100} - b_{010} - c_{001})^3 - \frac{1}{3}(3a_{100} - b_{010} - c_{001}) \times\right.\\
\left.\times [b_{010}c_{001} - c_{010}b_{001} + b_{000}a_{110} - 2a_{110}(c_{001} + b_{010}) + 4a_{110}^2]\right\}^2 +\\
+ \frac{1}{27}\left\{-\frac{1}{3}(3a_{100} - b_{010} - c_{001})^2 +\right.\\
+ [b_{010}c_{001} - c_{010}b_{001} + b_{000}a_{110} -\\
\left.- 2a_{110}(c_{001} + b_{010}) + 4a_{110}^2]\right\}^3.
\end{gathered} \tag{4.37}$$

(4.37) дискриминант учун $\Delta>0$, $\Delta<0$ ва $\Delta=0$ ҳоллар бўлиши мумкин, натижада ҳамма турдаги мувозанат ҳолатларни ҳосил қиламиз.

Характеристиканинг сифат ҳолати жуфт ўлчовли фазодан тоқ ўлчовли фазога ўтганда фарқ қилиши мавжуд.

Иккинчи гуруҳ (марказ ва фокус) мувозанат ҳолат текисликда бўлиши мумкин, аммо Пуанкаре сферасининг экваторида фақат чексизликда махсус тур бўлганда ва текисликда бирорта ҳам мувозанат ҳолат мавжуд бўлмаганда бўлиши мумкин. Бу фикр уч ўлчовли фазо учун шарт эмас.

Ушбу

$$a_{200}x + a_{110}y + a_{101}z = a_{200}\bar{x}$$

алмаштириш (4.2) системани фақат

$$f_2(x, y, z) = a_{200}\bar{x} \quad (a_{200} \neq 0)$$

фарқи билан ҳосил қилади, яъни

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{000} + a_{100}x + a_{010}y + a_{001}z + a_{200}x^2, \\ \frac{dy}{dt} &= b_{000} + b_{100}x + b_{010}y + b_{001}z + a_{200}xy, \\ \frac{dz}{dt} &= c_{000} + c_{100}x + c_{010}y + c_{001}z + a_{200}xz. \end{aligned}\right| \quad (4.38)$$

Чексизликда эса қуйидаги система ҳосил бўлади:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} &= -b_{010}\tau - a_{110}u^2 - b_{000}\tau^2 - (b_{100}u + b_{001}\omega)\tau, \\ \frac{du}{dt} &= a_{010} + a_{000}\tau + (a_{100} - b_{010})u + a_{001}\omega - b_{000}u\tau - b_{100}u^2 + b_{001}u\omega, \\ \frac{d\omega}{dt} &= c_{010} + c_{000}\tau + c_{100}u + (c_{001} - b_{010})\omega - b_{000}\tau\omega - b_{100}u\omega - b_{001}\omega^2. \end{aligned}\right|$$

(4.39)

Агар $a_{010} = c_{010} = 0$ бўлса, у ҳолда координаталар боши (4.39) система учун мувозанат ҳолат бўлади.

Ушбу

$$a_{200}x + a_{110}y + a_{101}z = a_{101}\bar{z} \quad (a_{101} \neq 0)$$

алмаштириш (4.2) системани фақат

$$f_1(x, y, z) = a_{101}\bar{z} \quad (a_{101} \neq 0)$$

фарқи билан ҳосил қилади, яъни

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{000} + a_{100}x + a_{010}y + a_{001}z + a_{101}xz, \\ \frac{dy}{dt} &= b_{000} + b_{100}x + b_{010}y + b_{001}z + a_{101}yz, \\ \frac{dz}{dt} &= c_{000} + c_{100}x + c_{010}y + c_{001}z + a_{101}z^2. \end{aligned}\right| \quad (4.40)$$

Чексизликда эса қуйидаги система ҳосил бўлади:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} &= -c_{001}\tau - a_{101}u - (c_{100} + c_{010}\upsilon)\tau, \\ \frac{du}{dt} &= a_{001} + a_{000}\tau + (a_{100} - c_{001})u + (a_{010} - c_{010})\upsilon - c_{000}u\tau - \\ &\quad (c_{100}u + c_{010}\upsilon)u, \\ \frac{d\upsilon}{dt} &= b_{001} + b_{000}\tau + (b_{100} - c_{1000})u + (b_{010} - c_{001})\upsilon - c_{000}\tau\upsilon - \\ &\quad (c_{100}u + c_{010}\upsilon)\upsilon. \end{aligned}\right\} \quad (4.41)$$

Агар $a_{001}=b_{001}=0$ бўлса, у ҳолда координаталар боши (4.41) система учун мувозанат ҳолат бўлади.

Агар (4.21) система учун $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda\neq 0$ бўлса, $M_2\left(0,\ 0,\ -\frac{\lambda}{a_{101}}\right)$, $M_3\left(0,\ -\frac{\lambda}{a_{110}},\ 0\right)$ ва $M_4\left(-\frac{\lambda}{a_{200}},\ 0,\ 0\right)$ мувозанат ҳолатлар эгар-тугун турида бўлади. $x=0$, $y=0$ ва $z=0$ текисликларида $0^+$ характеристикалар ётади, қолган характеристикалар эгарсимон бўладилар. $M_1(0,\ 0,\ 0)$ мувозанат ҳолат дикретик тугун бўлади.

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda=0$ ҳол учун $M_3$ ва $M_4$ мувозанат ҳолатлар мураккаб, яъни нолли илдиз бўлгани учун эгар-тугун турида бўладилар.

Агар $\lambda_1>\lambda_2>0$ бўлса, у ҳолда $M_1$ — тугун, $M_2$ — эгар. Бир вақтда тугун, эгар ва иккита эгар-тугунга эга бўламиз.

$\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3\neq 0$ бўлсин. (4.21) система $M_1(0,\ 0,\ 0)$ ва $M_2\left(0,\ 0,\ -\frac{\lambda}{a_{101}}\right)$ мувозанат ҳолатларга эга бўлиб, улардан $M_2$ — эгар-тугун бўлади. Биргаликда тугун ва эгар-тугун бўлади.

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ бўлган ҳолда ягона $(0,\ 0,\ 0)$ мувозанат ҳолатга эга бўламиз ва дикретик тугун бўлади. Қуйидаги теорема ўринлидир.

**Теорема.** *(4.2) система учун чексизликда тўлиқ махсус тур бўлса, у ҳолда бутун фазода қуйидаги мувозанат ҳолатлар биргаликда бўлишлари мумкин:*

*1) иккита тугун ва иккита эгар; 2) эгар-тугун, тугун ва эгар; 3) эгар туридаги мувозанат ҳолат ва иккита тугун; 4) эгар-тугун ва тугун; 5) эгар-тугун ва эгар; 6) иккита эгар-тугун; 7) оддиймас фокус; 8) дикретик тугун ва учта эгар-тугун; 9) тугун, эгар ва иккита эгар-тугун; 10)* *иккита тугун ва иккита эгар-тугун; 11) тугун ва эгар-тугун; 12) айнан тугун; 13) оддиймас эгар-фокус; 14) абсолют марказ.*

### *Машқлар*

Қуйидаги дифференциал тенгламаларни тўлиқ текширинг.

$$1.\quad \left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -ax - x^3 \\ \frac{dy}{dt} &= -2x - 2y \\ \frac{dz}{dt} &= -y + bz \end{aligned}\right|, \quad a,\ b - const \qquad 2.\quad \left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + 2y + z \\ \frac{dy}{dt} &= y + z \\ \frac{dz}{dt} &= 3z \end{aligned}\right|$$

$$3.\quad \left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - by \\ \frac{dy}{dt} &= bx + ay \\ \frac{dz}{dt} &= cz \end{aligned}\right|\ a,\ b,\ c - const. \qquad 4.\quad \left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -7x - 4y - 6z \\ \frac{dy}{dt} &= -3x - 2y - 3z \\ \frac{dz}{dt} &= 3x + 2y + 2z \end{aligned}\right|$$

$$5.\quad \left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x - ax^3 \\ \frac{dy}{dt} &= y \\ \frac{dz}{dt} &= bz \end{aligned}\right|, \ a \neq 0,\ b \neq 0 \qquad 6.\quad \left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - y \\ \frac{dy}{dt} &= x + z \\ \frac{dz}{dt} &= cz \end{aligned}\right|, \ c \neq 0$$

## 5-§. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ СИФАТ НАЗАРИЯСИ МАХСУС КУРСИ БЎЙИЧА ТАЛАБАЛАРГА ҚЎЙИЛАДИГАН БАҲО МЕЗОНИ

Семестр давомида талабалар учун 29 соат маъруза ва 33 соат амалий машғулот дарслари ўтказилади. Бу дарсларда олган билимларини мустаҳкамлаш ва назорат қилиш мақсадида талабалар билан ўқитувчи биринчи микросессияда тест назорати ўтказади, иккинчи микросессияда эса лаборатория ишини қабул қилади. Семестр охирида талабалар якуний ёзма иш ёзадилар.

Юқорида кўрсатилган машғулотлар бўйича талабалар рейтинг баллари тўплайдилар. Талаба семестр давомида бу махсус курс бўйича максимал 38 балл тўплаши мумкин. Бу баллар назорат турига қараб қуйидагича тақсимланади:

— семестр давомида бу махсус курсдан ўқилган маъруза ва амалий машғулотларда тўлиқ ва актив қатнашган талабаларга ўқитувчи энг юқори — 10 балл қўйиши мумкин;

— лаборатория ишининг назарий саволларига тўлиқ жавоб ёзган ва мисолларни чизмалари билан аниқ бажарган талабага бу ишни ҳимоя қилгандан сўнг энг юқори — 8 балл қўйилади;

— тест назоратининг назарий ва амалий саволларига тўлиқ ва тўғри жавоб берган талабага энг юқори — 8 балл қўйилади;

— назарий ва амалий саволлардан тузилган якуний ёзма иш топшириғини тўғри ва тўлиқ ечган талабага энг юқори — 12 балл қўйилади;

Натижада семестр давомида талаба энг кўпи билан 38 балл йиғиши мумкин. Синов ёки имтиҳон баҳолари талабаларнинг тўплаган балига кўра қуйидаги мезонда қўйилади:

| | |
|---|---|
| “икки” — 0 баллдан | 20,9 баллгача, |
| “ўрта” — 21 баллдан | 26,6 баллгача, |
| “яхши” — 26,7 баллдан | 32,3 баллгача, |
| “аъло” — 32,4 баллдан | 38 баллгача. |

Қуйида лаборатория иш вариантлари, тест саволлари ва якуний ёзма иш билетларидан намуналар келтирамиз:

### 1. Оралиқ ёзма иш вариантларидан намуналар

*1-вариант*

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ дифференциал тенгламанинг чексиз узоқлашган махсус нуқталарининг турини аниқланг ва чизмасини чизинг.

2. $\frac{dy}{dx} = x - y$ дифференциал тенгламанинг изоклинларини ясанг.

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin ny}{\cos nx}$ тенгламанинг махсус нуқталарини топинг.

4. Пуанкаре алмаштиришининг геометрик маъносини тушунтириб беринг.

5. $\frac{dy}{dx} = K\frac{y(y-a)}{x(x-b)}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $K \neq 0$ дифференциал тенгламанинг махсус нуқталарини топинг ва уларнинг турини аниқлаб чизмасини чизинг.

### *2-вариант*

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$ дифференциал тенгламанинг чексиз узоқлашган махсус нуқталарининг турини аниқланг ва чизмасини чизинг.

2. $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ дифференциал тенгламанинг изоклинларини ясанг.

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos my}{\cos mx}$ тенгламанинг махсус нуқталарини топинг.

4. Лимит давра деб нимага айтилади ва у қандай топилади?

5. $\frac{dy}{dx} = K\frac{y(y-1)}{x}$, $K \neq 0$ дифференциал тенгламанинг махсус нуқталарини топинг ва уларнинг турини аниқлаб чизмасини чизинг.

### *3-вариант*

1. Махсус нуқталарнинг классификацияси ҳақидаги Пуанкаре теоремасини $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ бўлган ҳол учун исбот қилинг.

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{e^x - e^y}$ тенгламанинг нечта махсус нуқтаси бор ва улар қандай жойлашган?

3. $y' = \frac{1 + y - x^2 + y^2}{2xy}$ тенгламанинг ноль ва чексиз изоклинларини топинг ва чизмасини чизинг.

4. Ноль изоклин ва чексиз изоклинларнинг маъносини тушунтириб беринг.

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{y - y^3}{x - x^3}$ тенгламанинг махсус нуқталарини характерини текширинг. Чизмасини чизинг.

*4-вариант*

1. Махсус нуқталарнинг турғунлигини аниқлаш ҳақидаги теорема.

2. $y' = \dfrac{-4x+2xy-8}{4x^2-y^2}$ тенгламанинг нечта махсус нуқтаси бор ва улар қандай жойлашган?

3. $y' = \dfrac{x^2-(y-2)^2}{x^2-y}$ тенгламанинг ноль ва чексиз изоклинларини топинг ва чизмасини чизинг.

4. Махсус нуқталарнинг классификацияси ҳақидаги Пуанкаре теоремасини $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ бўлган ҳол учун исбот қилинг.

5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+y^2-1}{-2xy}$ тенгламанинг махсус нуқталарини характерини текширинг. Чизмасини чизинг.

*5-вариант*

1. Махсус нуқталарнинг классификацияси ҳақидаги Пуанкаре теоремасини $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ бўлган ҳол учун исбот қилинг.

2. $y' = \dfrac{x^2-(y-2)^2}{x^2-y}$ тенгламанинг нечта махсус нуқтаси бор ва улар қандай жойлашган?

3. $y' = \dfrac{x-y+y^2}{x}$ тенгламанинг ноль ва чексиз изоклинларини топинг ва чизмасини чизинг.

4. Махсус нуқталарнинг турғунлигини аниқлаш ҳақидаги теорема.

5. $y' = \dfrac{-x+(1-x^2-y^2)}{y+(1-x^2-y^2)}$ тенгламанинг махсус нуқталарини характерини текширинг ва чизмасини чизинг.

*6-вариант*

1. Ноль изоклин ва чексиз изоклинларнинг маъносини тушунтириб беринг.

2. $y' = \dfrac{3-\sqrt{x^2+8y}}{\ln(1-y+y^2)}$ тенгламанинг нечта махсус нуқтаси бор ва улар қандай жойлашган?

3. $y' = \frac{-4x+2xy-8}{4x^2-y^2}$ тенгламанинг ноль ва чексиз изоклинларини топинг ва чизмасини чизинг.

4. Махсус нуқталарнинг классификацияси ҳақидаги Пуанкаре теоремасини $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ бўлган ҳол учун исбот қилинг.

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2-1}{-2xy}$ тенгламанинг махсус нуқталарини характерини текширинг ва чизмасини чизинг.

## II. Якуний ёзма иш вариантларидан намуналар

*1-вариант*

1. Дифференциал тенгламанинг ечими ва интеграли тушунчаси.

2. Пуанкаре теоремасини келтиринг.

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x+4y}{2x+y}$ тенгламанинг махсус нуқтаси турини аниқланг ва чизмасини чизинг.

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{y(2-x)}{x(x+y-3)}$ тенгламанинг нолли ва чексиз изоклинларининг тенгламасини ёзинг ва чизмасини чизинг.

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{-y+y^2}{x}$ тенгламани тўлиқ текширинг ва чизмасини чизинг.

*2-вариант*

1. Дифференциал тенгламанинг хусусий ва умумий ечимлари.

2. Махсус нуқта атрофидаги интеграл эгри чизиқлар манзарасини чизинг.

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{-4x+y}{x-y}$ тенгламанинг махсус нуқтаси турини аниқланг ва чизмасини чизинг.

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{y(1-x)}{x(x+y-2)}$ тенгламанинг нолли ва чексиз изоклинларининг тенгламасини ёзинг ва чизмасини чизинг.

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2-y}$ тенгламани тўлиқ текширинг ва чизмасини чизинг.

*3-вариант*

1. Дифференциал тенглама умумий ва хусусий ечимларининг геометрик маъноси.

2. $P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ ларнинг $x$ ва $y$ га нисбатан даражаси бирдан юқори кўпҳад бўлганда махсус нуқтанинг тури қандай аниқланади?

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{-x+8y}$ тенглама махсус нуқтасининг турини аниқланг ва чизмасини чизинг.

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{-4x+2xy-8}{4x^2-y^2}$ тенгламанинг нолли ва чексиз изоклинларининг тенгламасини ёзинг ва чизмасини чизинг.

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{x-x^2}{y}$ тенгламани тўлиқ текширинг ва чизмасини чизинг.

*4-вариант*

1. Дифференциал тенглама ечими мавжудлиги ва унинг ягоналиги ҳақидаги Коши теоремаси.

2. Лимит давра тушунчаси ва унинг физик маъноси.

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2x+3y}$ тенглама махсус нуқтасининг турини аниқланг ва чизмасини чизинг.

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{2+x-y^2}{-2(x-y)y}$ тенгламанинг нолли ва чексиз изоклинларининг тенгламасини ёзинг ва чизмасини чизинг.

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{x-3x^2}{-y}$ тенгламани тўлиқ текширинг ва чизмасини чизинг.

*5-вариант*

1. Дифференциал тенгламанинг махсус нуқтаси деб нимага айтилади ва уни қандай топилади?

2. Марказ ёки фокус бўлиш муаммоси ва уни ечишнинг симметрия усули.

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{-3x+2y}{-2x+y}$ тенглама махсус нуқтасининг турини аниқланг ва чизмасини чизинг.

4. $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y-x^2+y^2}{2xy}$ тенгламанинг нолли ва чексиз изоклинларининг тенгламасини ёзинг ва чизмасини чизинг.

5. $\frac{dy}{dx}=\frac{x-x^3}{y}$ тенгламани тўлиқ текширинг ва чизмасини чизинг.

### *6-вариант*

1. Дифференциал тенгламанинг йўналишлар майдони деб нимага айтилади?

2. Чексиз узоқлашган махсус нуқталар. Пуанкаре алмаштиришлари.

3. $\frac{dy}{dx}=\frac{3x+4y}{x+2y}$ тенглама махсус нуқтасининг турини аниқланг ва чизмасини чизинг.

4. $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-(y-2)^2}{x^2-y}$ тенгламанинг нолли ва чексиз изоклинларининг тенгламасини ёзинг ва чизмасини чизинг.

5. $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y-y^3}$ тенгламани тўлиқ текширинг ва чизмасини чизинг.

### *7-вариант*

1. Дифференциал тенглама изоклини деб нимага айтилади?

2. Чексиз узоқлашган махсус нуқталарнинг турлари қандай аниқланади?

3. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+3y}{2x+y}$ тенглама махсус нуқтасининг турини аниқланг ва чизмасини чизинг.

4. $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2-2}{x-y}$ тенгламанинг нолли ва чексиз изоклинларининг тенгламасини ёзинг ва чизмасини чизинг.

5. $\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{1+x^2}$ тенгламани тўлиқ текширинг ва чизмасини чизинг.

*8-вариант*

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$ дифференциал тенгламанинг махсус нуқталари қандай топилади?

2. Пуанкаре сферасида дифференциал тенгламанинг характеристикалари қандай топилади?

3. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{8x-3y}$ тенглама махсус нуқтасининг турини аниқланг ва чизмасини чизинг.

4. $\frac{dy}{dx}=\frac{-y+y^2}{y-x^2}$ тенгламанинг нолли ва чексиз изоклинларининг тенгламасини ёзинг ва чизмасини чизинг.

5. $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{1+xy}$ тенгламани тўлиқ текширинг ва чизмасини чизинг.

*9-вариант*

1. Дифференциал тенглама умумий ва хусусий ечимларининг геометрик маъноси.

2. Махсус нуқтанинг тури ва унинг турғунлиги қандай аниқланади?

3. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+3y}{3x+y}$ тенглама махсус нуқтасининг турини аниқланг ва чизмасини чизинг.

4. $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y^2}{x}$ тенгламанинг нолли ва чексиз изоклинларининг тенгламасини ёзинг ва чизмасини чизинг.

5. $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{1+xy}$ тенгламани тўлиқ текширинг ва чизмасини чизинг.

*10-вариант*

1. Дифференциал тенгламанинг изоклинлари деб нимага айтилади?

2. Махсус нуқталар қаварик ва ботиқ тўртбурчаклар ташкил этган ҳолдаги теорема.

3. $\frac{dy}{dx}=\frac{5x+4y}{2x+3y}$ тенглама махсус нуқтасининг турини аниқланг ва чизмасини чизинг.

4. $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{x-y+y^2}$ тенгламанинг нолли ва чексиз изоклинларининг тенгламасини ёзинг ва чизмасини чизинг.

5. $\frac{dy}{dx}=\frac{y-y^2}{x-x^2}$ тенгламани тўлиқ текширинг ва чизмасини чизинг.

### III. Тест саволларидан намуналар

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{x^2+y^2}$ дифференциал тенглама характеристик тенгламасининг илдизларини аниқланг:

1) $\lambda_1=\lambda_2=0$, 2) $\lambda_{1,2}=\pm 1$, 3) $\lambda_{1,2}=2\pm 13$, 4) $\lambda_{1,2}=4$.

2. Қандай махсус нуқта учун тебранишнинг амплитудаси ўзгармас бўлади?

1) тугун, 2) эгар-тугун, 3) фокус, 4) марказ?

3. $y'=\frac{-y+y^2}{x}$ тенгламанинг махсус нуқтаси (0, 0) қандай турга эга:

1) марказ, 2) фокус, 3) тугун, 4) эгар?

4. Қандай махсус нуқта ҳамиша турғун:

1) фокус, 2) марказ, 3) эгар, 4) эгар-тугун?

5. $y'=\frac{\sin x}{y}$ тенгламанинг махсус нуқтаси қандай турга эга:

1) марказ, 2) эгар, 3) фокус, 4) тугун?

6. Ушбу $\frac{dx}{dt}=x$, $\frac{dy}{dt}=y$, $\frac{dz}{dt}=z$ дифференциал тенгламалар системасининг характеристик тенгламаси илдизларини топинг:

1) $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=2$, 2) $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=0$, 3) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=$ $=0$, 4) $\lambda_{1,2,3}=1$.

7. Қандай махсус нуқта учун тебранишнинг амплитудаси ўзгарувчан бўлади:

1) эгар, 2) тугун, 3) фокус, 4) марказ?

8. Ушбу $y'=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2-1}$ дифференциал тенгламанинг ноль изоклинаси қандай чизиқдан иборат:

1) гипербола, 2) эллипс, 3) тўғри чизиқ, 4) парабола?

9. Характеристик тенглама илдизлари қандай бўлганда махсус нуқта эгар-тугун бўлиши мумкин:

1) $\lambda_1=\lambda_2\neq 0$, 2) $\lambda_1=a, \lambda_2=b$, 3) $\lambda_{1,2}=\pm i$, 4) $\lambda_{1,2}=0$?

10. Даврий тебранишларни қайси турдаги махсус нуқта аниқлайди:

1) эгар, 2) фокус, 3) тугун, 4) марказ?

11. Тебранишнинг ўсиши ёки камайишини қайси турдаги махсус нуқта аниқлайди:

1) марказ, 2) эгар, 3) тугун, 4) фокус?

12. Характеристик тенгламанинг илдизлари $\lambda_1$ ва $\lambda_2$ қандай бўлганда лимит давра бўлиши мумкин:

1) $\lambda_1=0, \lambda_2=a$, 2) $\lambda_{1,2}=a\pm i\beta$, 3) $\lambda_1=a, \lambda_2=b$, 4) $\lambda_{1,2}=\pm i$ ?

13. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y^2}{x+y}$ тенгламанинг махсус нуқтаси (0, 0) қандай турга эга:

1) тугун, 2) эгар, 3) марказ, 4) фокус?

14. $\frac{dy}{dx}=-\frac{x^3}{y^3}$ тенгламанинг махсус нуқтаси (0, 0) қандай турга эга:

1) эгар, 2) фокус, 3) тугун, 4) марказ?

15. Синусоида эгри чизиғига қандай турдаги махсус нуқта мос келади:

1) эгар-тугун, 2) тугун, 3) эгар, 4) марказ?

16. $y'=\frac{e^y-e^x}{y}$ тенгламанинг нечта махсус нуқтаси бор:

1) иккита, 2) учта, 3) йўқ, 4) битта?

17. Қуйидаги $\frac{dx}{dt}=1-x^2$, $\frac{dy}{dt}=y$, $\frac{dz}{dt}=z$ дифференциал тенгламалар системасининг нечта махсус нуқтаси бор:

1) битттa, 2) йўқ, 3) иккита, 4) учта?

18. $y'=\frac{e^y-e^x}{e^x-e^y}$ тенгламанинг характеристик йўналишларини $y=kx$ алмаштириш ёрдамида аниқланг:

1) $y_{1,2}=\pm x$, 2) $y_{1,2}=x\pm y$, 3) $y_1=0, y_2=x, y_3=-x$, 4) $y_{1,2}=\pm 4x$.

19. $\frac{dy}{dx}=\frac{1-y^2}{1-x^2}$ тенгламанинг нечта махсус нуқтаси бор:
1) иккита, 2) учта, 3) йўқ, 4) тўртта?

20. Қайси эгри чизиқ $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{xy-1}$ тенгламанинг чексиздаги изоклинаси бўлади:
1) тўғри чизиқ, 2) айлана, 3) йўқ, 4) гипербола?

21. Косинусоида эгри чизиғига қандай турдаги махсус нуқта мос келади:
1) эгар, 2) фокус, 3) тугун, 4) марказ?

22. $y'=\frac{e^y-e^x}{e^x-e^y}$ тенгламанинг нечта махсус нуқтаси бор:
1) битта, 2) иккита, 3) учта, 4) йўқ?

23. $y'=\frac{-x+(1-x^2-y^2)}{y+(1-x^2-y^2)}$ тенгламанинг лимит давралари сони нечта:
1) йўқ, 2) иккита, 3) учта, 4) битта?

24. $y'=\frac{x-ye^y}{y}$ тенгламанинг нечта махсус нуқтаси бор:
1) йўқ, 2) чексиз кўп, 3) битта, 4) иккита?

25. $y'=\frac{(x-y)(1-y)}{y(x-y)}$ тенгламанинг махсус нуқталар сонини аниқланг.
1) учта, 2) битта, 3) иккита, 4) йўқ.

26. $y'=-\frac{x^4}{y^4}$ тенгламанинг махсус нуқтаси турини аниқланг.
1) марказ, 2) тугун, 3) фокус, 4) эгар.

27. $y'=\frac{y-ye^x}{x}$ тенгламанинг нечта махсус нуқтаси бор:
1) учта, 2) тўртта, 3) йўқ, 4) иккита?

28. $y'=\frac{\mathrm{tg}\,y}{x}$ тенгламанинг нечта махсус нуқтаси бор:
1) битга, 2) иккита, 3) чексиз кўп, 4) йўқ?

29. $y' = \frac{1-e^y}{x-x^2}$ тенгламанинг нечта махсус нуқтаси бор:

1) битта, 2) учта, 3) иккита, 4) йўқ?

30. $\frac{dx}{dt} = x$, $\frac{dy}{dt} = y$, $\frac{dz}{dt} = z(1-z)$ тенгламалар системаси нечта махсус нуқтага эга:

1) битта, 2) иккита, 3) учта, 4) тўртта?

## IV. Лаборатория иш вариантларидан намуналар

Қуйидаги дифференциал тенгламаларни ечинг ва сифат манзарасини чизинг

*1-вариант*

1. $y' = \frac{3x+4y}{2x+y}$,
2. $y' = \frac{-y+y^2}{x}$.

*2-вариант*

1. $y' = \frac{-4x+y}{x-y}$,
2. $y' = \frac{y(2-x)}{x(x+y-3)}$.

*3-вариант*

1. $y' = \frac{x+y}{-x+8y}$,
2. $y' = \frac{y(1-x)}{x(x+y-2)}$.

*4-вариант*

1. $y' = \frac{x}{2x+3y}$,
2. $y' = \frac{x}{y^2-y}$.

*5-вариант*

1. $y' = \frac{-3x+2y}{-2x+y}$,
2. $y' = \frac{\sin x}{y}$.

*6-вариант*

1. $y' = \frac{x}{y}$,
2. $y' = \frac{x+y^2}{x+y}$.

*7-вариант*

1. $y' = -\frac{3x+4y}{x+2y}$,
2. $y = \frac{x-x^2}{y}$.

*8-вариант*

1. $y' = \frac{2x+3y}{2x+y}$,
2. $y' = \frac{-4x+2xy-8}{4x^2-y^2}$.

*9-вариант*

1. $y' = \frac{2x+y}{8x-3y}$,
2. $y' = \frac{3-\sqrt{x^2+8y}}{\ln\left(1-y+y^2\right)}$.

*10-вариант*

1. $y' = \frac{x+3y}{3x+y}$,
2. $y' = \frac{2+x-y^2}{-2(x-y)\cdot y}$.

### *11-вариант*

1. $y' = \frac{5x + 4y}{2x + 3y}$,

2. $y' = \frac{x - 3x^2}{-y}$.

### *13-вариант*

1. $y' = \frac{4x + 3y}{x + 2y}$,

2. $y' = \frac{x - x^3}{y}$.

### *15-вариант*

1. $y' = \frac{2x + 8y}{3x - 2y}$,

2. $y' = \frac{x^2 + y^2 - 1}{-2xy}$.

### *17-вариант*

1. $y' = \frac{x + 5y}{7x + 3y}$,

2. $y' = \frac{x^2 + y^2 - 2}{x - y}$.

### *19-вариант*

1. $y' = \frac{3x + 3y}{5x + 8y}$,

2. $y' = \frac{x(1 - y)}{y(x + y - 2)}$.

### *21-вариант*

1. $y' = \frac{-x - 3y}{x - 5y}$,

2. $y' = \frac{-y + y^2}{y - x^2}$.

### *12-вариант*

1. $y' = \frac{4x + 5y}{5x + 4y}$,

2. $y' = \frac{\cos x}{\cos y}$.

### *14-вариант*

1. $y' = \frac{x + y}{x + 4y}$,

2. $y' = \frac{x(x + y - 2)}{y(1 - x)}$.

### *16-вариант*

1. $y' = \frac{2x + 3y}{x + 4y}$,

2. $y' = \frac{1 + y - x^2 + y^2}{2xy}$.

### *18-вариант*

1. $y' = \frac{-x + 4y}{4x - y}$,

2. $y' = \frac{x^2 - (y - 2)^2}{x^2 - y}$.

### *20-вариант*

1. $y' = \frac{8x + y}{3x + y}$,

2. $y' = -\frac{\sin 2x}{\sin 2y}$.

### *22-вариант*

1. $y' = \frac{x - 6y}{-5x + 2y}$,

2. $y' = \frac{x - y + y^2}{x}$.

### *23-вариант*

1. $y' = \frac{-8x - 5y}{6x + 3y}$,

2. $y' = \frac{\cos x}{y}$.

### *24-вариант*

1. $y' = \frac{-2x + y}{x - 2y}$,

2. $y' = \frac{\cos 2x}{\cos 2y}$.

### *25-вариант*

1. $y = \frac{2x + y}{5x + y}$,

2. $y' = \frac{x}{y - y^3}$.

### *26-вариант*

1. $y' = \frac{x + 2y}{x}$,

2. $y' = -\frac{2xy}{x^2 + y^2 - 1}$.

### *27-вариант*

1. $y' = \frac{x - 2y}{3x - 4y}$,

2. $y' = \frac{x}{x - y + y^2}$.

### *28-вариант*

1. $y' = \frac{2x - 3y}{x - 2y}$,

2. $y' = -\frac{\sin 3x}{\sin 3y}$.

### *29-вариант*

1. $y' = \frac{x - 4y}{-3x + 2y}$,

2. $y' = \frac{\cos 2y}{\cos 2x}$.

### *30-вариант*

1. $y' = \frac{2x + 3y}{2y}$,

2. $y' = \frac{y - 4y^2}{-x}$.

## ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР НАЗАРИЯСИ БЎЙИЧА ИЛМИЙ ИШЛАР ОЛИБ БОРГАН АЙРИМ ДУНЁ МАТЕМАТИКЛАРИ ҲАҚИДА ҚИСҚАЧА МАЪЛУМОТЛАР

1. Алимухамедов Мазит Ифатович (1904—1972) — Қозон Давлат педагогика институтининг профессори, физика-математика фанлари доктори. Илмий ишлари дифференциал тенгламаларнинг сифат назариясига бағишланган.
2. Андреев Алексей Федерович — Физика-математика фанлари доктори, профессор. Асосий илмий ишлари биринчи ва иккинчи тур махсус нуқталарнинг бир-биридан фарқ қилиш муаммосига бағишланган.
3. Андронов Александр Александрович (1901-1952) — Академик. Тебранишлар назарияси ва автоматик ростлаш назарияси соҳасида ижод этган. Автотебранишларнинг математикавий аппаратини қурган, назарий радиотехниканинг қатор масалалари ва муаммоларини ҳал қилган.
4. Арнольд Игорь Владимирович — Собиқ СССР Фанлар Академиясининг академиги, математика ва механика йўналиши бўйича илмий ишлар олиб борган. Унинг асосий илмий ишлари дифференциал тенгламалар ва ҳаракат турғунлиги назариясига бағишланган.
5. Баутин Николай Николаевич — Физика-математика фанлари доктори, профессор. Асосий илмий ишлари дифференциал тенгламалар ва унинг татбиқига бағишланган. Дифференциал тенгламаларнинг даврий ечимларини аниқлаш билан ҳам шуғулланган.
6. Беллман Ричард — Америка олими. Асосий илмий изланишлари биология, тиббиёт фанларига математик усулларнинг татбиғига бағишланган.
7. Белых Леонид Никитич — Собиқ совет математиги. Асосий илмий ишлари биология, тиббиётда содир бўладиган жараёнларнинг математик анализ моделларини тузишдан иборат.
8. Бендиксон Ж. — Швейцария математиги. Асосий илмий ишлари дифференциал тенгламалар назариясига, яъни индекслар назариясига ва биринчи ва иккинчи тур махсус нуқталарнинг бир-биридан фарқ қилиш муаммоларига бағишланган.
9. Бессель Ф.В. (1784—1846) — Немис математиги. Дифференциал тенгламалар назарияси, математик физика, астрономия муаммолари ва интерполяция назариясида тадқиқотлар олиб борган.
10. Боголюбов Николай Николаевич — Академик. Дифференциал тенгламалар, вариацион қатор ва уларнинг физика ҳам механикага татбиқи билан шуғулланади.

11. Братковский Ю.Т. — Поляк математиги бўлиб, у собиқ иттифоқда таҳсил олган. Асосий илмий ишлари натижалари дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси билан боғлиқдир.
12. Брио ва Буке Жан Клод (1819—1885) — Француз математиклари. Коши шогирдлари. Асосий ишлари биринчи тартибли дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси ва эллиптик функциялар, геометрия, сонлар назариясига оид. Дифференциал тенгламалар ечимининг аналитик кўриниши масалалари билан шуғулланганлар.
13. Брюно Александр Дмитриевич — Физика-математика фанлари доктори, профессор. Унинг асосий илмий ишлари дифференциал тенгламалар назарияси ва унинг татбиғига бағишланган.
14. Вито Вольтера (1860—1940) — Италия математиги. Асосий тадқиқотлари дифференциал ва интеграл тенгламалар назарияси, функционал анализ ва математиканинг табиий фанларга татбиғи соҳасида. Биология назариясини математика ёрдамида ўрганишга асос солган. Бу назария унинг “Математическая теория борьбы за существование” китобида баён этилган.
15. Голубев Владимир Васильевич (1884—1954) — Физика-математика фанлари доктори, профессор. Дифференциал тенгламалар, механика, қисман фан тарихи соҳаларида тадқиқот олиб борган.
16. Гук Роберт (1635—1703) — Инглиз табиатшуноси, кўп қиррали амалиётчи олим, архитектор. Гук қонуни қаттиқ жисм деформацияси билан қаттиқ жисмга қўйилган механик куч орасидаги чизиқли боғланишни ўрнатади.
17. Гукухара — Япония математиги. Унинг илмий ишларининг натижалари дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси ва унинг татбиғига доир бўлиб, асосан биринчи тур махсус нуқталарнинг бир-биридан фарқ қилиш муаммосини очиб берган.
18. Дюлак Н. — Француз математиги. Асосий тадқиқотлари марказ ва фокус орасидаги фарқ, чегаравий цикллар ва қаторлар назариясига бағишланган.
19. Еругин Николай Павлович (1907—1985) — Белорус Фанлар Академиясининг академиги. Унинг асосий илмий ишлари ҳаракат турғунлик назариясига, дифференциал тенгламалар сифат назариясига ва дифференциал тенгламаларнинг аналитик назариясига бағишланган.
20. Колмогоров Андрей Николаевич (1903—1987) —Академик. У эҳтимоллар назарияси, функциялар, дифференциал тенгламалар, топология ва информация назариялари бўйича илмий мактаб раҳбаридир. Унинг илмий ишлари функциялар назарияси, математика, логика, топология, дифференциал тенгламалар ва информация назариясига бағишланган.
21. Коши Огюстен Луи (1789—1857) — Француз математиги. Комплекс аргументли функциялар назариясининг асосчиси, дифференциал тенглама ва математик физика соҳаларида муҳим илмий ишлари мавжуд, математик анализни мантиқий асослаб берган.
22. Куклес Исаак Самойлович (1905—1977) — Ўзбекистон Фанлар Академиясининг мухбир аъзоси. Унинг илмий ишлари дифференциал тенгламалар сифат назариясига бағишланган. Куклес И. С. томонидан биринчи бўлиб Ўрта Осиёда дифференциал тенгламалар сифат назарияси бўйича илмий мактаб ташкил этилган.

23. Лаврентьев Михаил Алексеевич (1900—1980) — Академик, йирик давлат арбоби. Илмий фаолияти комплекс ўзгарувчи функциялари, вариацион ҳисоб, математик физика, дифференциал тенгламалар, гидромеханика ва математика тарихига оид.
24. Ленделеф — Дания математиги. Унинг асосий илмий ишлари дифференциал тенгламалар назариясига бағишланган.
25. Лефшец С. — Америка математиги. Унинг илмий ишлари дифференциал тенгламалар назариясига бағишланган. Унинг дифференциал тенгламалар назариясига доир “Геометрическая теория дифференциальных уравнений” китоби рус тилида чоп этилган.
26. Липшиц Рудольф (1832—1903) — Немис математиги. У олим сифатида дифференциал тенгламалар назарияси ва интеграллар назариялари бўйича машҳурдир.
27. Лиувилль Жозеф (1809—1882) — Француз математиги. Унинг алгебраик функцияларни интеграллаш назарияси, дифференциал тенгламалар назарияси, математик физика, дифференциал геометрия, трансцендент сонлар назарияси мавзуларига оид 400 дан ортиқ ишлари чоп этилган.
28. Ляпунов Александр Михайлович (1857—1918) — Рус математиги, академик. Механик системанинг турғунлиги ва мувозанат шартларини аниқлаган, математик физиканинг қатор масалаларини текширган, эҳтимоллар назариясида янги текшириш усулини тақдим этган. Махсус нуқталарнинг турғунлик назарияси асосчиси.
29. Марчук Гурий Иванович — Машҳур математик ва физик, собиқ СССР Фанлар Академиясининг академиги. Асосий илмий ишлари ҳисоблаш ва математиканинг татбиқига бағишланган.
30. Матвеев Николай Михайлович — Физика-математика фанлари доктори, профессор. Асосий илмий-услубий ишлари оддий дифференциал тенгламалар назариясига бағишланган.
31. Митропольский Юрий Алексеевич — Собиқ СССР Фанлар Академияси академиги, Украина миллий Фанлар Академиясининг академиги. Унинг асосий илмий ишлари дифференциал тенгламалар ва тебранишлар назариясига бағишланган.
32. Немицкий Виктор Владимирович — Физика-математика фанлари доктори, профессор. “Качественная теория дифференциальных уравнений” монографиясининг муаллифи. Унинг илмий изланишлари турғунлик назарияси ва топологияга бағишланган.
33. Риккати Ф. (1675—1754) — Италия математиги. Дифференциал тенгламалар назарияси соҳасида тадқиқотлар олиб борган.
34. Риккати В. (1707—1775) — Италия математиги. Ф. Риккатининг ўғли. Гиперболик функцияларни киритган ва уларнинг хоссаларини ўрганган.
35. Рентген Вильгельм (1845—1923) — Немис физиги. 1895 йилда рентген нурларини кашф қилган ва уларнинг хоссаларини ўрганган. Кристаллар хоссаларини ва магнетизм назариясини ўрганган. Нобель мукофотининг совриндори (1901).
36. Пеано Дж. (1858—1932) — Италия математиги. Асосий илмий ишлари дифференциал тенгламалар назарияси, интеграл тенгламалар, тўпламлар назарияси ва қаторлар назариясига бағишланган.

37. Пенлеве П. (1863—1933) — Француз математиги. 1917 ва 1925 йилларда Франциянинг Бош вазири. Бир неча бор вазир, шунингдек, ҳарбий вазир (1917, 1925—1929 й.) лавозимларида ишлаган. Унинг илмий ишлари дифференциал тенгламалар назариясидаги махсус нуқталар классификациясига бағишланган. Олтита дифференциал тенглама Пенлеве номи билан аталади. Айрим ишлари дифференциал тенгламаларнинг аналитик назариясига тегишли.
38. Петровский Иван Георгиевич (1900—1973) — Академик, йирик давлат арбоби. Дифференциал ва интеграл тенгламалар, комплекс ўзгарувчи функциялари, математик физика, топология, алгебраик геометрия, фан тарихи соҳаларида ишлаган. 1951 йилдан то умрининг охиригача МГУ нинг ректори бўлиб ишлаган.
39. Пикар Эмиль (1856—1941) — Француз математиги. Асосий ишлари дифференциал тенгламалар, аналитик функциялар, алгебраик функцияларда уларнинг алгебраик чизиқлар ва сиртлар назариясига татбиқи, группалар назарияси, кетма-кет яқинлашиш усулига оид. Комплекс ўзгарувчили функциялар назариясида Пикарнинг кичик ва катта деб аталувчи иккита теоремаси маълум.
40. Плейс К. — Англия математиги. Унинг асосий илмий ишлари дифференциал тенгламалар сифат назарияси ва унинг татбиқига бағишланган.
41. Плисс Виктор Александрович — Собиқ СССР Фанлар Академиясининг мухбир аъзоси. Унинг асосий ишлари дифференциал тенгламалар ва турғунлик назариялари, ҳамда тебранишлар назариясига бағишланган.
42. Понтрягин Лев Семёнович (1908—1988) — Академик. Топология, дифференциал тенгламалар, функционал анализ, оптимал жараёнлар назарияси, функциялар назарияси соҳаларига оид ишлари мавжуд.
43. Пуанкаре Анри (1854—1912) — Француз математиги. Дифференциал тенгламалар, автоморф функциялар, топология ва математик физика, нисбийлик назарияси, математика философияси соҳаларида ишлаган.
44. Пфафф Иоганн Фридрих (1765—1825) — Немис математиги. Петербург академиясининг фахрий аъзоси (1798). Илмий ишлари дифференциал тенгламалар назарияси ва геометрияга бағишланган.
45. Сансоне Дж. — Италия математиги. Асосий илмий ишлари дифференциал тенгламалар назарияси ва турғунлик назариясига бағишланган. Унинг рус тилида уч томлик “Дифференциал тенгламалар назарияси” бўйича китоби бор.
46. Сибирский Константин Сергеевич (1926—1982) — Молдова Фанлар Академиясининг академиги. Асосий илмий ишлари дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси ва алгебраик инвариантларга бағишланган.
47. Степанов Вячеслав Васильевич (1889—1950) — Машҳур математик. Илмий тадқиқотлари функциялар назарияси ва дифференциал тенгламалар назариясига оид. Унинг шарафига “Степановнинг деярли даврий функциялари” деб аталган функциялар синфи мавжуд. Дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси мактаби асосчиларидан бири. Дарсликлар муаллифи.

48. Тихонов Андрей Николаевич — Академик. Топология, функционал анализ, математик физика, геофизика, дифференциал тенгламалар, электромагнит майдонлар назарияси, ҳисоблаш математикаси ва бошқа соҳаларда ишлайди.
49. Фроммер Макс — Немис математиги. Асосий илмий ишлари дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси, яъни биринчи тур (эгар, тугун ва уларнинг комбинациялари) махсус нуқталарнинг бир-биридан фарқ қилиш муаммолари ва қандай шартлар коэффициентлар учун бажарилганда даврий ечимлар мавжуд бўлишига бағишланган.
50. Хояси Т. — Япония математиги ва механиги. Илмий ишлари натижалари дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси ва унинг тебранишлар назариясига татбиғига бағишланган.
51. Эйлер Леонард (1707—1783) — Рус олими, академик (асли Швейцариялик) математик анализ, алгебра, геометрия, механика, астрономия, техниканинг деярли ҳамма соҳаларида ниҳоят муҳим натижаларга эришган ва элементар математикадан дарслик ва қўлланмалар ёзган.
52. Эрроусмит Д. — Англия математиги. Асосий илмий ишлари дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси ва унинг татбиғига бағишланган.

## ДАРСЛИКДА УЧРАЙДИГАН АЙРИМ МАТЕМАТИК ТЕРМИНЛАРНИНГ ИЗОҲЛИ ЛУҒАТИ

Аналитик функция — комплекс ўзгарувчили функциялар назариясининг асосий тушунчаси. Агар $z=x+iy$ комплекс ўзгарувчининг бир қийматли $\omega=f(z)$ функцияси маркази $z_0$ нуқтада, радиуси $r>0$ бўлган бирор $|z-z_0|<r$ доирада аниқланган бўлиб,

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots$$

даражали қатор билан тасвирланадиган бўлса (бу қатор Тейлор қаторидан иборат бўлиши шарт), $f(z)$ функция $z=z_0$ нуқтада **А.ф.** дейилади. Агар $f(z)$ функция комплекс ўзгарувчилар текислигининг бирор $D$ соҳасининг ҳар бир нуқтасида **А.ф.** бўлса, бу функция $D$ соҳада **А.ф.** дейилади. $z_0$ нуқтадаги **А.ф.** бу нуқтанинг бирор атрофида ҳам шунга ўхшаш таърифланади, лекин бунда даражали қаторнинг $f(z)$ га доирада эмас, балки $|x-x_0|<r$ интервалда яқинлашиши талаб қилинади.

$D$ соҳадаги **А.ф.** $D$ соҳанинг ҳар бир $z_0$ нуқтасида чекли ҳосилага эга:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z};$$

аксинча ҳам ўринли: агар $f'(z)$ ҳосила $D$ соҳада мавжуд ва чекли бўлса, у ҳолда $f(z)$ $D$ соҳада **А.ф.** дир, шунинг учун бир қийматли **А.ф.** тушунчаси гомоморф функция тушунчаси билан бир хилдир.

Асимптота — эгри чизиқнинг нуқтаси чексиз узоқлашганда у бирор тўғри чизиққа яқин булиб яқинлашса, бу тўғри чизиқ эгри чизиқнинг асимптотаси дейилади.

Антиген — организм учун ёт модда.

Антитела — анти жисмлар, организмда антигенлар пайдо бўлиши билан юзага келадиган ва уларнинг таъсирини йўқотадиган моддалар.

Биология — ҳаёт ва тирик табиат ҳақидаги фанлар мажмуаси.

Бифуркация — иккига айрилиш, эгри чизиқнинг (қон томири, йўл ва ҳоказо) икки ёққа, икки тармоққа айрилиб кетиши.

Бифуркационное значение параметров — шундай параметрдан иборатки бу параметрнинг қийматларида махсус нуқта тури ўзгаради.

Бифуркуационная кривая — бирор соҳада ётган бир турдаги махсус нуқта билан бошқа соҳада ётган иккинчи тур махсус нуқтани ажратиб турувчи эгри чизиқ.

Внутривидовая — турлараро, турлар ичидаги, турлар орасидаги.

Глобал текшириш — берилган дифференциал тенгламани тўлиқ текшириш, яъни бир нечта махсус нуқталар атрофида характеристик эгри чизиқлар манзарасини тўлиқ чизиш.

Дикретик тугун — бу шундай махсус нуқтаки, унда ўзининг уринмасига эга бўлган интеграл эгри чизиқ махсус нуқтага яқинлашади (ёки узоқлашади).

Дифференциал тенглама — номаълум функциялар, уларнинг ҳар қандай тартибли ҳосилалари ва эркли ўзгарувчиларни ўз ичига олган тенгламалар. **Д.т.** XVII асрда механика ва табииёт фанларининг баъзи бўлимлари эҳтиёжига қараб пайдо бўлган.

Изоклин — шундай чизиқки, унинг ҳар бир нуқтасида $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ дифференциал тенгламанинг ўнг қисми ўзгармас бўлади.

Иммунная система — инсон иммунологик системасининг вазифаси организмни ўзида генетик бегона информацияларни сақловчи тирик заркунандалар ва моддалар (бактериялар, вируслар, ҳужайралар ва бошқалар) дан асрашдир.

Иммунология — иммунитет назарияси ва тажрибаси билан шуғулланадиган фан бўлиб, организмнинг касал юқтирмаслиги ва касалликларга қарши курашишидан иборат.

Индекс — бир хил символлар билан белгиланган ифодаларни фарқлантириб турадиган сон, ҳарф ёки бошқа белги.

Качественная теория — дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси — дифференциал тенгламаларнинг ечимларини ўзини топмасдан, бу ечимларнинг хоссаларини ўрганиш. Кўп ҳолларда ечимларни ошкор кўринишда топиб бўлмагани учун, дифференциал тенгламаларнинг **С.и.** катта аҳамиятга эга.

Коши масаласи — дифференциал тенгламалар назариясининг асосий масалаларидан бири бўлиб, уни биринчи марта француз математиги Коши батафсил ўрганган.

Бирор дифференциал қонун ва маълум бошланғич ҳолат билан характерланадиган жараёнлар Коши масаласига олиб келади. **К.м.** дифференциал тенгламанинг берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини излашдан иборатдир.

Латентная форма болезни — сиртдан билинмайдиган яширин касаллик кўриниши.

Летальный исход болезни — ўлим билан тугаш, оқибатда ўлиш.

Лимфоциты — ҳужайрадаги антигенларни аниқлаш.

Лимит давра — ёпиқ эгри чизиқ бўлиб, унинг ичида ва ташқарисида спиралсимон эгри чизиқлар яқинлашади (ёки узоқлашади).

Лимит тугун — шундай махсус нуқтаки, иккита ўзининг уринмасига эга бўлган интеграл эгри чизиқлар оиласига эга бўлган интеграл эгри чизиқлар махсус нуқтага яқинлашади (ёки узоқлашади).

Локал текшириш — битта махсус нуқта атрофида характеристик эгри чизиқлар манзарасини чизиш.

Межвидовая конкуренция — турлараро рақобат, турлар ўртасидаги рақобат.

Нуқтанинг атрофи. 1°. Сонлар ўқидаги **Н.а.** — берилган $a$ нуқтани ўз ичига олган ҳар қандай интервал [очиқ оралиқ]. Хусусий ҳолда маркази $a$ нуқтада бўлган $(a\text{-}\delta,\ a+\delta)$ очиқ оралиқ $a$ нуқтанинг $\delta$ атрофи дейилади ($\delta>0$ сони $\delta$ атрофнинг радиусидир).

2°. $n$ ўлчовли фазодаги **Н.а.** — $n$ ўлчовли фазонинг берилган нуқтани ўз ичига олган ҳар қандай соҳаси. Хусусий ҳолда $\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+\ldots+(x_n-x_n^0)^2}<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $M(x_1,$ $x_2, \ldots, x_n)$ нуқталар тўплами $M_0(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ нуқтанинг шар шаклидаги атрофи бўлади, бу атрофнинг маркази ўша $M_0$ нуқта ва радиуси $\delta>0$ бўлади.

$$|x_1-x_1^0|<\delta_1,\ |x_2-x_2^0|<\delta_2,\ \ldots,\ |x_n-x_n^0|<\delta_n$$

тенгсизликлар системасини қаноатлантирувчи нуқталар тўплами $M_0$ (барча $\delta_i$ лар мусбат) нуқтанинг параллеленипедиал атрофи бўлади, бу атроф яриминтервал деб ҳам аталади.

Оддий нуқта. 1°. $F(x, y)=0$ тенглама билан берилган эгри чизиқнинг **О.н.** — нинг хусусий ҳосилалари бир вақтда нолга айланмайдиган $M_0(x_0,$ $y_0)$ нуқтадир.

2°. $y'=f(x,\ y)$ дифференциал тенгламанинг **О.н.** шундай $M_0(x_0,\ y_0)$ нуқтадирки, унинг атрофида $y(f_0)=y_0$ шартни қаноатлантирувчи ягона ечим мавжуд.

3°. Бир қийматли аналитик функциянинг О.н. — функциянинг аналитиклиги бузилмайдиган нуқтадир.

Особая точка — Махсус нуқта. 1°. $F(x, y)=0$ тенглама билан берилган эгри чизиқнинг **М.н.** — $P_0(x_0, y_0)$ нуқта бўлиб, унда

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{P_0}=0 \quad \text{ва} \quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{P_0}=0.$$

$F(x, y)=0$ тенгламада $x$, $y$ ўзгарувчилардан ҳеч бири умуман айтганда $P_0$ нуқтанинг ҳар қандай кичик атрофида ҳам иккинчисининг функцияси сифатида ифодаланган бўлиши мумкин эмас. Агар $F$ нинг иккинчи хусусий ҳосилаларидан баъзилари $P_0$ нуқтада бир вақтда нолга айланмаса, эгри чизиқнинг $P_0$ нуқта атрофида қандай бўлиши кўпинча қуйидаги $\Delta$ нинг ишораси билан аниқланади:

$$\Delta=\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{P_0}\cdot\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{P_0}-\left.\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right)^2\right|_{P_0}.$$

Агар $\Delta>0$ бўлса, **М.н.** яккаланган нуқта бўлади (масалан, $y^2-x^3+x^2=0$ эгри чизиқ учун координаталар боши бўлади); агар $\Delta<0$ бўлса, эгри чизиқ бу нуқтада ўзини-ўзи кесади (масалан, $x^2-y^2=0$ эгри чизиқ координаталар бошида ўзини-ўзи кесади); агар $\Delta=0$ бўлса, **М.н.** нинг характери ҳақидаги масалани янада чуқуррок текшириш зарур.

Дифференциал тенгламалар назариясидаги **М.н.** — шундай $P_0$ нуқтаки, бу нуқтада $\frac{dv}{dx}=\frac{A(x, y)}{B(x, y)}$ тенглама ўнг томонининг сурат ва махражи бир вақтда нолга айланади.

Популяция — махсус бир хил кўринишдаги кўпайишлар (ёки камайишлар) тўплами.

Седло — Эгар — дифференциал тенгламанинг махсус нуқтаси. Махсус нуқтага кирувчи интеграл эгри чизиқлар орасида гипербола типидаги интеграл эгри чизиқлар бўлади, булар Э. шаклидаги гиперболик параболоиднинг юксаклик чизиқлари каби жойлашади. Шунинг учун дифференциал тенглама махсус нуқтасининг бу тури эгар деб аталган.

Спираль — текисликдаги эгри чизиқ бўлиб, бирор тайин $O$ нуқтани кўп марта айланиб, ҳар айланганда бу нуқтага яқинлашади ёки ундан узоқлашади. Агар $O$ нуқтани қутб координаталари системасининг қутби деб олинса, у ҳолда **С.** нинг бу координаталар системасидаги тенгламасини $\rho=f(\varphi)$ кўринишда ёзиш мумкин ва ҳар қандай $\varphi$ учун $f(\varphi+2\pi)>f(\varphi)$ ёки $f(\varphi+2\pi)<f(\varphi)$ тенгсизлик ўринли бўлади. Энг кўп маълум бўлган **С.** лар: Архимед **С.**, логарифмик **С.**, Корню **С.** ёки клотоида, параболик **С.**, гиперболик **С.**, интеграл синус ва интеграл косинус **С.**, кохлеоида.

Турғун махсус нуқта — моддий нуқта $t\to+\infty$ да берилган махсус нуқтага яқинлашса, у ҳолда бу махсус нуқта турғун дейилади.

Уринма — $l$ эгри чизиққа $M$ нуқтада ўтказилган **У.** — эгри чизиқнинг иккинчи $M'$ нуқтаси $M$ нуқтага чексиз яқинлашганда $MM'$ кесувчи эгаллайдиган $t$ тўғри чизиқнинг лимит ҳолатига айтилади. Ҳар қандай узлуксиз эгри чизиқ ҳам уринмага эга бўлавермайди.

Агар текис эгри чизиқнинг тўғри бурчакли координаталардаги тенгламаси $y=f(x)$ кўринишда бўлса, у ҳолда абсциссаси $x_0$ бўлган $M$ нуқтадаги **У.** тенгламаси бундай ёзилади:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0),$$

бунда $f'(x_0)$ ҳосила **У.** нинг бурчак коэффициентидир. $S$ сиртнинг $M$ нуқтасидаги **У.** деб, $M$ нуқтадан ўтувчи ва $S$ га $M$ нуқтадан ўтказилган уринма текисликда ётувчи ихтиёрий тўғри чизиққа айтилади.

Устойчивость — Турғунлик. Дифференциал тенгламалар ечимларининг турғунлиги — дифференциал тенгламалар сифат назариясининг муҳим тушунчаси бўлиб, механика ва техникадаги татбиқларида катта аҳамиятга эга.

Фокус — Дифференциал тенгламалар сифат назариясида **Ф.** — дифференциал тенгламалар махсус нуқталарининг бир тури: бу нуқтадан ўтувчи барча интеграл эгри чизиқлар ўрамалари сони чексиз бўлган спираллардан иборатдир.

Центр — Марказ (махсус нуқта). Дифференциал тенгламалар назариясида **М.** (махсус нуқта) — шундай махсус нуқтаки, барча интеграл эгри чизиқлар бу нуқтанинг атрофида ёпиқ эгри чизиқ бўлиб, бу нуқтани ўз ичига олади.

## ЛОТИН АЛИФБОСИ

| Ҳарф-лар | Номи | Ҳарф-лар | Номи | Ҳарф-лар | Номи | Ҳарф-лар | Номи |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *A a* | а | *H h* | ха (аш) | *N n* | эн | *U u* | у |
| *B b* | бэ | *I i* | и | *O o* | о | *V v* | вэ |
| *C c* | пэ | *J j* | йот (жи) | *P p* | пэ | *W w* | дубль-вэ |
| *D d* | дэ | *K k* | ка | *Q q* | ку | *X x* | икс |
| *E e* | э | *L l* | эл | *R r* | эр | *Y y* | игрек |
| *F f* | эф | *M m* | эм | *S s* | эс | *Z z* | зет |
| *G g* | гэ (жэ) | | | *T t* | тэ | | |

## ЮНОН АЛИФБОСИ

| Ҳарф-лар | Номи | Ҳарф-лар | Номи | Ҳарф-лар | Номи | Ҳарф-лар | Номи |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A α | альфа | H η | эта | N ν | ни (ню) | T τ | тау |
| B β | бета | Θ θ ϑ | тэта | Ξ ξ | кси | Υ υ | ипсилон (юпсилон) |
| Γ γ | гамма | J ι | иота | O o | омикрон | Φ φ | фи |
| D Δ | дельта | K | каппа | Π π | пи | X χ | хи |
| E ε | эпсилон | L λ | ламбда | P ρ | ро | Ψ ψ | пси |
| Z ζ | дзета (зета) | M μ | ми (мю) | Σ σ | сигма | Ω ω | омега |

## АДАБИЁТЛАР

1. Амелькин В. В., Садовский А. П. “Математические модели и дифференциальные уравнения”. Минск, Высшая школа, 1982.

2. Амелькин В. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П. “Нелинейные колебания в системах второго порядка”. Минск,. Изд. БГУ, 1982.

3. Андреев В. С. “Теория нелинейных электрических цепей”. М., Связь, 1972.

4. Андреев А. Ф. “Исследование поведения интегральных кривых в окрестности особой точки”. Вестник ЛГУ, № 8, 1955.

5. Андронов А. А, Витт А. А., Хайкин С. Э. “Теория колебаний”. М., Физматгиз, 1959.

6. Андронов А. А, Леонтович Е. А., Гордон Г. Е. “Качественная теория динамических систем второго порядка”. М., 1966.

7. Баутин Н. Н. “О числе предельных циклов, появляющихся при изменении коэффициентов из состояния равновесия типа фокуса или центра”. ДАН. 1939. Т. XXXIV, № 7.

8. Белюстина Л. Н. “Об условиях Фроммера существования центра”. П.М.М. Вып. 5. 1948.

9. Белых Л. Н. “Анализ математических моделей в иммунологии”. М., Наука, 1988.

10. Беллман Р. “Математические методы в медицине”. М., Мир, 1987.

11. Bell G. “Mathematical model of clonal selection and antibody production”. II.-J. Theor. Biol., 1970.

12. Bell G., Perelson A., Pimbley G. “Theoretical immunology”. N.Y. Marcel Dekker, 1978.

13. Bell G., Perelson A. “An Historical introduction to Theoretical immunology”.

14. Воробьев А. П. “К вопросу вокруг особой точки типа узел”. ДАН. Беларусь, Т. IV. № 9. 1960.

15. Голубев В. В. “Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений”. М., 1941.

16. Качественные и аналитические методы в динамике систем. Изд. СамГУ им. А. Навои. Самарканд, 1987.

17. Кондингтон Э. А., Левинсон Н. “Теория обыкновенных дифференциальных уравнений”. М., ИЛ. 1958.

18. Куклес И. С. “О необходимых и достаточных условиях существования центра”. ДАН. Т. 42. № 4. 1944.

19. Куклес И. С. “О методе Фроммера исследования окрестности особой точки”. ДАН. Т. 117. № 3. 1957.

20. Kleine enzvklopadie. Mathematik Leipzig, 1967.

21. Латипов Х. Р. “Об одной теореме А. Н. Берлинского”. ДАН. РУз. № 7., 1960.

22. Латипов Х. Р. “Исследование бесконечно удаленных особых точек для одного дифференциального уравнения”. г. Самарканд, 1961.

23. Латипов Х. Р. “Некоторые теоремы о сожительстве особых точек”. Изд. АН. РУз. № 7, 1961.

24. Латипов Х. Р. “Качественное исследование характеристики одного класса дифференциальных уравнений в целом”. Т., ФАН. 1993.

25. Латипов Х. Р. “Анри Пуанкаре и наука”. Изд. ТашГТУ им. А.Р.Беруни, 1996.

26. Латипов Х. Р., Абдукадыров Т.А. “О приложении качественных методов к некоторым задачам естествознания”. Материалы международной научной конференции, посвященной 1200-летию Ахмада ибн Мухаммада ал-Фергани. 28—30 сентября Ташкент, 1998г.

27. Латипов Х. Р., Груз Д. М. “Некоторые вопросы структуры окрестности особой точки в трехмерном пространстве”. Вопросы современной физики и математики. Ташкент, Изд-во АН УзССР, 1962, С. 164—172.

28. Latipov H. R. “The quality characteristik research of some differential equationқ as a whole”. XII th International conference on nonlinear oscillationқ. Cracow, Poland, 1990.

29. Лефшец С. “Геометрическая теория дифференциальных уравнений”. ИЛИ, 1961.

30. Ляпунов А. М. “Общая задача об устойчивости движения”. М.-Л., ГТТИ, 1950.

31. Мандельштам Л.И. “Лекции по теории колебаний”. М., Наука, 1972.

32. “Математика XIX века”. М., Наука, 1978.

33. Матвеев Н. М. “Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений”. Высшая школа, 1967.

34. Марчук Г. И. “Математические модели в иммунологии”. М.,Наука, 1985.

35. Мышкис А. Д. “Лекции по математике”. М.,Наука, 1964.

36. Немицкий В. В., Степанов В. В. “Качественная теория дифференциальных уравнений”. Москва, 1949.

37. Понтрягин Л. С. “Обыкновенные дифференциальные уравнения”. М., Наука, 1974.

38. Пуанкаре А. “О кривых определяемых дифференциальными уравнениями”. М. Л., 1947.

39. Pimbley G. “Bifurcation behavior of periodic solutons of third order simulated immune response problem”. Arch.Rat.Mech.Anal., 1976, v.64, 169—192.

40. Pimbley G. “Periodic solutions of predator — prey equations simulating an immune responce” I Math. Bioқci., 1974, v.20, p.27—51.

41. Савелов А. А. “Плоские кривые”. Москва, 1960.

42. Сахарников Н. А. “Об условиях Фроммера существования центра”. П.М.М., Вып. 5. 1948.

43. **Свирежев Ю. М., Елизаров Е. Я.** “Математическое моделирование биологических систем”. Сб. Проблемы космической биологии XX. М., Наука, 1972.

44. **Сибирский К. С.** “Об условиях наличия центра и фокуса”. Уч.зап. Кишиневск. университета, 11. 1954.

45. **Сибирский К. С.** “Введение в алгебраическую теорию инвариантов дифференциальных уравнений”. Кишинев, 1982.

46. **Степанов В. В.** “Курс дифференциальных уравнений”. Москва, 1945.

47. **Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.** “Дифференциальные уравнения”. М., Наука, 1980.

48. **Фроммер М.** “Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер”. УМН. Вып 9. 1941.

49. **Хояси Т.** “Нелинейные колебания в физических системах”. М., Мир, 1966.

50. **Эльсгольц Л. Э.** “Дифференциальные уравнения”. Москва, Гостехиздат, 1957.

51. **Эрроусмит Д., Плейс К.** “Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями”. М., Мир, 1986.

# МУНДАРИЖА

## *IV БОБ.* ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ ХАРАКТЕРИСТИКАЛАРИНИНГ УЧ ЎЛЧОВЛИ ФАЗОДАГИ ҲОЛАТЛАРИ

**Латипов Х.Р. ва бошқ.**

Л24 Дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси ва унинг татбиқлари: Олий ўқув юртлари талабалари учун дарслик /Муаллифлар: Х.Р. Латипов, Ф.У. Носиров, Ш.И.Тожиев. — Т.: “Ўзбекистон”, 2002.—271 б.

I.I.2 Муаллифдош.

ISBN 5-640-03058-5

Мазкур дарслик дифференциал тенгламалрнинг сифат назарияси ва унинг татбиқларини баён қилишга бағишланган. Биология, медицина ва бошқа фанларга доир масалаларни дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси усулларидан фойдаланиб ечишга доир масалалар қаралган. Дифференциал тенгламалар сифат назариясининг бир қатор умумий теоремалари, даврий тебранишларнинг мавжудлиги масаласи, чексиз узоқлашган махсус нуқталарни ўрганиш усуллари ва бир қатор бошқа масалалар ўрганилади. олинган билимларни мустаҳкамлаш ва мустақил ечиш учун 200 дан ортиқ мисол ва масалалар берилган.

Китоб дифференциал тенгламалар назарияси ўрнаиладиган барча олий ўқув юртлари талабаларига мўлжалланган. Ундан ёш ўқитувчилар, муҳандислар, аспирантлар ҳам фойдаланишлари мумкин.

**ББК 22.161.6я73**

$$\text{Л}\,\frac{1602070100-5}{351\,(04)\,2001}\,2002$$

*Х.Р. Латипов, Ф.У. Носиров, Ш.И. Тожиев*

## ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ СИФАТ НАЗАРИЯСИ ВА УНИНГ ТАТБИҚЛАРИ

“Ўзбекистон” нашриёти 700129, Тошкент, Навоий кўчаси, 30.

Муҳаррир *А. Холмухамедов*. Бадиий муҳаррир *У. Солиҳов*
Тех. муҳаррир *Т. Харитонова*. Мусаҳҳиҳ *Н. Умарова*
Компьютерда тайёрловчи *Э. Ким*

Теришга берилди 17.09.2001. Босишга рухсат этилди04.04.2002.
Бичими 84х108$^{1}/_{32}$. “Таймс” гарнитурасида офсет босма усулида
босилди. Шартли бос.т. 15,12. Нашр т. 14,39. 1500 нусхада чоп
этилди. Буюртма №63. Баҳоси шартнома асосида.

“Ўзбекистон” нашриёти, 700129, Тошкент, Навоий кўчаси, 30.
Нашр № 172-2001

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитаси Тошкент китоб-журнал фабрикасида босилди.
700194, Тошкент, Юнусобод даҳаси, Муродов кўчаси, 1-уй.