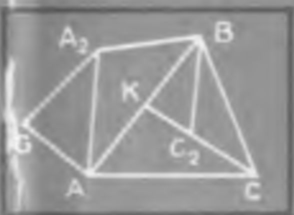
Ю. В. НЕСТЕРЕНКО, С. Н. ОЛЕХНИК,
М. К. ПОТАПОВ

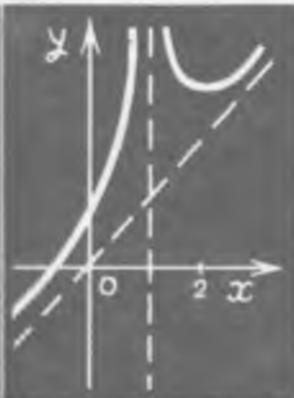
ЗАДАЧИ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

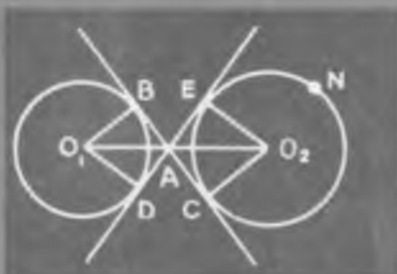
МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1980

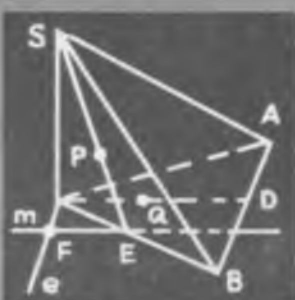
Ю. В. НЕСТЕРЕНКО, С. Н. ОЛЕХНИК,
М. К. ПОТАПОВ

ЗАДАЧИ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ









Ю. В. НЕСТЕРЕНКО, С. Н. ОЛЕХНИК,
М. К. ПОТАПОВ

ЗАДАЧИ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1980

22.1
Н 56
УДК 51

Нестеренко Ю. В., Олехник С. Н., Потапов М. К. Задачи вступительных экзаменов по математике. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980, 320 с.

Начиная с 1977 года, вступительные экзамены в ВУЗы начали проводиться по новой программе. В книге содержится более 150 вариантов задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах по математике в МГУ в течение последних лет (1977—1979 гг.), а также решения некоторых из этих вариантов.

Книга будет полезна школьникам старших классов, учителям средних школ, а также тем, кто готовится к вступительным экзаменам в вузы.

Н $\frac{20203-104}{053(02)-80}$ БЗ-25-9—80. 1702030000

СОДЕРЖАНИЕ

ОТ АВТОРОВ

Начиная с 1977 года, вступительные экзамены по математике в ВУЗы начали проводиться по новой программе.

В книге содержатся задачи, предлагавшиеся в 1977—1979 годах на вступительных экзаменах по математике в Московском государственном университете.

Книга состоит из двух частей. В первой из них собрано примерно 1000 задач. Они сгруппированы по факультетам, годам и вариантам так, как предлагались во время вступительных экзаменов.

В рамках каждого варианта задачи, как правило, расположены по возрастанию трудности. Заметим, что для получения положительной оценки на экзамене совсем не обязательно было решить все задачи. Обычно, двух — трех правильно решенных задач было достаточно, чтобы получить положительную оценку.

Вторая часть книги содержит решения задач по одному варианту на каждый факультет и год. Кроме того, там содержатся ответы к задачам остальных вариантов.

Мы считаем необходимым отметить, что все предлагавшиеся задачи являются продуктом коллективного труда многих сотрудников МГУ, и мы ни в коей мере не претендуем на их авторство. В условия некоторых задач мы внесли незначительные поправки.

Часть I

ЗАДАЧИ

В 1977—1979 годах в ВУЗы поступали как лица, изучавшие математику в средней школе по новой программе, так и лица, изучавшие математику по старой программе. Эти две категории абитуриентов сдавали экзамены отдельно. Часть задач была общей для них, но были и отличия. В приводимых ниже вариантах буква «Н», стоящая рядом с номером задачи, означает, что эта задача решалась только абитуриентами, изучавшими математику в школе по новой программе. Задачи, у которых рядом с номером стоит буква «С», решались только абитуриентами, изучавшими математику по старой программе. Задачи, у номеров которых отсутствуют буквы, были общими для двух этих категорий абитуриентов.

Естественно, что системы обозначений и терминология в задачах, предлагавшихся абитуриентам, изучавшим математику по разным программам, во время экзаменов отличались. Мы в основном придерживались обозначений и терминов, принятых в средней школе сейчас. Так, величина угла ABC обозначается $\widehat{ABC}$, величина отрезка AB обозначается $|AB|$, множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, обозначается $[a, b]$ (отрезок $[a, b]$), наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ обозначаются соответственно $\max\limits_{x \in [a, b]} f(x)$ и $\min\limits_{x \in [a, b]} f(x)$ и т. д. Но есть и некоторые отличия. Так, множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, $a < x \leqslant b$ и $a \leqslant x < b$, обозначаются соответственно (a, b), $(a, b]$ и $[a, b)$.

§ 1. МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

1977

Вариант 1.

1.Н. Найти все числа $a\,(a > 0)$, для каждого из которых

$$\int_0^a (2 - 4x + 3x^2)\,dx \leqslant a.$$

2. Длины боковых сторон трапеции равны 3 и 5. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия трапеции делит ее на две части, отношение площадей которых равно 5/11. Найти длины оснований трапеции.

3.Н. Доказать, что для функции $f(x)=\cos x\sin 2x$ справедливо неравенство

$$\min_{x\in[-\pi,\pi]} f(x) > -\frac{7}{9}.$$

4. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} y^3-9x^2+27x-27=0, \\ z^3-9y^2+27y-27=0, \\ x^3-9z^2+27z-27=0. \end{cases}$$

5. Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC, а другая проходит через точку C и середину ребра AB.

1.С. Решить неравенство

$$x\leqslant 3-\frac{1}{x-1}.$$

3.С. Решить уравнение

$$3^{1/2+\log_3\cos x}+6^{1/2}=9^{1/2+\log_9\sin x}.$$

Вариант 2.

1.Н. Найти все числа α, для каждого из которых

$$\int_1^2(\alpha^2+(4-4\alpha)x+4x^3)\,dx\leqslant 12.$$

2. Длина средней линии равнобочной трапеции равна 5. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия трапеции делит ее на две части, отношение площадей которых равно 7/13. Найти длину высоты трапеции.

3.Н. Доказать, что для функции $f(x)=\sin x\sin 2x$ справедливо неравенство

$$\max_{x\in[-\pi,\pi]} f(x)<0{,}77.$$

4. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2y^3+2x^2+3x+3=0, \\ 2z^3+2y^2+3y+3=0, \\ 2x^3+2z^2+3z+3=0. \end{cases}$$

5. Основанием пирамиды $SABC$ является равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, длина гипотенузы AB которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро пирамиды SC перпендикулярно плоскости основания, и его длина равна 2. Найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра AC, а другая проходит через точку C и середину ребра AB.

1.С. Решить неравенство

$$x+3<-\frac{1}{x+1}.$$

3.С. Решить уравнение

$$5^{1/2}+5^{1/2+\log_5 \sin x}=15^{1/2+\log_{15} \cos x}.$$

Вариант 3.

1.Н. Найти все числа $b\,(b>1)$, для каждого из которых

$$\int_1^b (b-4x)\,dx \geqslant 6-5b.$$

2. Длины боковых сторон трапеции равны 6 и 10. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия трапеции делит ее на две части, отношение площадей которых равно 5/11. Найти длины оснований трапеции.

3.Н. Доказать, что для функции $f(x)=\cos^3 x \sin x$ справедливо неравенство

$$\min_{x\in[-\pi,\,\pi]} f(x)>-7/18.$$

4. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} y^3-6x^2+12x-8=0, \\ z^3-6y^2+12y-8=0, \\ x^3-6z^2+12z-8=0. \end{cases}$$

5. Основанием пирамиды $HPQR$ является равносторонний треугольник PQR, длина стороны которого равна $2\sqrt{2}$. Боковое ребро HR перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 1. Найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку H и середину ребра QR, а другая проходит через точку R и середину ребра PQ.

1.С. Решить неравенство

$$x\leqslant 7-\frac{16}{x+1}.$$

3.С. Решить уравнение

$$2-6^{1/2+\log_6 \sin x}=2^{1/2+\log_2 \cos x}.$$

Вариант 4.

1.Н. Найти все числа q, для каждого из которых

$$\int_0^1 (q+(4-q)x+4q^2x^3)\,dx \leqslant \frac{17}{2}q-14.$$

2. Длина средней линии равнобочной трапеции равна 10. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия трапеции делит ее на две части, отношение площадей которых равно 7/13. Найти длину высоты трапеции.

3.Н. Доказать, что для функции $f(x)=\cos x\sin^2 x$ справедливо неравенство

$$\max_{x\in[-\pi,\,\pi]} f(x) < 0{,}39.$$

4. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} y^3+2x^2+6x+12=0,\\ z^3+2y^2+6y+12=0,\\ x^3+2z^2+6z+12=0. \end{cases}$$

5. Основанием пирамиды $HPQR$ является равнобедренный прямоугольный треугольник PQR, длина гипотенузы PQ которого равна $2\sqrt{2}$. Боковое ребро пирамиды HR перпендикулярно плоскости основания и его длина равна 1. Найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку H и середину ребра PR, а другая проходит через точку R и середину ребра PQ.

1.С. Решить неравенство

$$x+7 < -\frac{16}{x-1}.$$

3.С. Решить уравнение

$$3^{-1/2}+6^{-1/2+\log_6 \sin x} = 2^{-1/2+\log_2 \cos x}.$$

1978

Вариант 1.

1. Разность

$$\sqrt{|40\sqrt{2}-57|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$$

является целым числом. Найти это целое число.

2.Н. Найти все решения уравнения

$$\int_0^\alpha \cos(x+\alpha^2)\,dx = \sin\alpha,$$

принадлежащие отрезку [2, 3].

3. В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а длина отрезка PQ равна $2\sqrt{2}$. Вычислить радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2+2xy-7y^2 \geqslant \dfrac{1-a}{a+1}, \\ 3x^2+10xy-5y^2 \leqslant -2 \end{cases}$$

имеет решение.

5. Объем пирамиды $ABCD$ равен 5. Через середины ребер AD и BC проведена плоскость, пересекающая ребро CD в точке M. При этом отношение длины отрезка DM к длине отрезка MC равно 2/3. Вычислить площадь сечения пирамиды указанной плоскостью, если расстояние от нее до вершины A равно 1.

2.С. Найти все решения уравнения

$$4^{\cos 2x}+4^{\cos^2 x}=3,$$

принадлежащие отрезку [3/4, 1].

Вариант 2.

1. Разность

$$\sqrt{|12\sqrt{5}-29|}-\sqrt{12\sqrt{5}+29}$$

является целым числом. Найти это целое число.

2.Н. Найти все решения уравнения

$$\int_{-u}^{u} \cos(x+2u^2-u)\,dx = -\sin 2u,$$

принадлежащие отрезку [−3/2, −1/2].

3. В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C на стороны BC и AB опущены высоты AP и CQ. Вычислить длину стороны AC, если известно, что периметр треугольника ABC равен 15, периметр треугольника BPQ равен 9, а радиус окружности, описанной около треугольника BPQ, равен 9/5.

4. Найти все значения параметра b, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} 5x^2-4xy+2y^2 \geqslant 3, \\ 7x^2+4xy+2y^2 \leqslant \dfrac{2b-1}{2b+5} \end{cases}$$

имеет решение.

5. Дана пирамида $ABCD$. Через середины K и N ребер AB и CD пирамиды проведена плоскость, пересекающая ребра BC и AD соответственно в точках L и M. Найти объем пира-

миды $ABCD$, если площадь треугольника MNK равна 3, отношение объемов пирамид $ACDL$ и $ABCD$ равно 0,9, а расстояние от вершины D до плоскости $KLMN$ равно 3.

2.С. Найти все решения уравнения

$$\log_2|\operatorname{tg} x| + \log_4 \frac{\cos x}{2\cos x + \sin x} = 0,$$

принадлежащие отрезку [9/4, 3].

Вариант 3.

1. Разность

$$\sqrt{|20\sqrt{7} - 53|} - \sqrt{20\sqrt{7} + 53}$$

является целым числом. Найти это целое число.

2.Н. Найти все решения уравнения

$$\int_0^{2\beta} \sin(x - \beta^2)\,dx = \sin 2\beta,$$

принадлежащие отрезку [2, 3].

3. В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB. Известно, что площадь треугольника ABC равна 64, площадь четырехугольника $AQPC$ равна 48, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $16/\sqrt{3}$. Вычислить длину отрезка PQ.

4. Найти все значения параметра α, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} 5x^2 + 7xy + 2y^2 \geqslant \dfrac{3\alpha+1}{\alpha+2}, \\ 3x^2 + xy + y^2 \leqslant 1 \end{cases}$$

имеет решение.

5. В пирамиде $ABCD$ через середины K и N ребер AD и BC проведена плоскость, пересекающая ребро AB в точке M, а ребро CD в точке L. Площадь четырехугольника $KLMN$ равна 16, а отношение длины отрезка AM к длине отрезка MB равно 0,5. Вычислить расстояние от вершины A до плоскости $KLNM$, если объем многогранника $NACLK$ равен 8.

2.С. Найти все решения уравнения

$$9^{\sin^2 x} - 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\cos^2 x} = 6,$$

принадлежащие отрезку [—2, —3/2].

Вариант 4.

1. Разность

$$\sqrt{|24\sqrt{3} - 43|} - \sqrt{24\sqrt{3} + 43}$$

является целым числом. Найти это целое число.

2.Н. Найти все решения уравнения

$$\int_{\pi/2}^{v} \sin(x-v^2)\,dx = -\cos v,$$

принадлежащие отрезку $[-7/2, -5/2]$.

3. В остроугольном треугольнике ABC, длина стороны AC которого равна 6, на стороны BC и AB опущены высоты AP и CQ. Вычислить площадь четырехугольника $AQPC$, если известно, что площадь треугольника BPQ равна 1, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $9\sqrt{2}/4$.

4. Найти все значения параметра c, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} 3x^2-8xy-8y^2 \geqslant 2, \\ x^2-4xy+2y^2 \leqslant \dfrac{c+1}{1+2c} \end{cases}$$

имеет решение.

5. Дана пирамида $ABCD$. Через середины K и M ребер AB и CD пирамиды проведена плоскость, пересекающая ребра BC и AD соответственно в точках L и N. Расстояние от вершины B до этой плоскости равно 2. Диагонали четырехугольника $KLMN$ пересекаются в точке Q, причем отношение длины отрезка KQ к длине отрезка QM равно 0,2. Вычислить площадь четырехугольника $KLMN$, если известно, что объем пирамиды $BKMC$ равен 12.

2.С. Найти все решения уравнения

$$2\log_5|\operatorname{ctg} x| - \log_{1/5}\frac{\sin x}{5\sin x - 4\cos x} = 0,$$

принадлежащие отрезку $[3{,}3; 4]$.

1979

Вариант 1.

1. Найти все решения уравнения

$$1-5\sin x+2\cos^2 x = 0,$$

удовлетворяющие неравенству $\cos x \geqslant 0$.

2. Отрезок KL является диаметром некоторой окружности. Через его концы K и L проведены две прямые, пересекающие окружность соответственно в точках P и Q, лежащих по одну сторону от прямой KL. Найти радиус окружности, если $P\widehat{K}L = \pi/3$ и точка пересечения прямых KP и QL находится от точек P и Q на расстоянии, равном 1.

3.Н. Найти точки минимума функции $y(x) = x^3 - 2x|x-2|$, заданной на отрезке $[0, 3]$, и ее наибольшее значение на этом отрезке.

4. Решить неравенство

$$\frac{6}{2x+1} > \frac{1+\log_2(2+x)}{x}.$$

5. Основанием треугольной пирамиды $ABCD$ является треугольник ABC, в котором $\widehat{A}=\pi/2$, $\widehat{C}=\pi/6$, $|BC|=2\sqrt{2}$. Длины ребер AD, BD, CD равны между собой. Сфера радиуса 1 касается ребер AD, BD, продолжения ребра CD за точку D и плоскости ABC. Найти величину отрезка касательной, проведенной из точки A к сфере.

3.С. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2}{2x-y}+\dfrac{3}{x-2y}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2}{2x-y}-\dfrac{1}{x-2y}=\dfrac{1}{18}. \end{cases}$$

Вариант 2.

1. Найти все решения уравнения

$$2\cos 2x - 4\cos x = 1,$$

удовлетворяющие неравенству $\sin x \geqslant 0$.

2. В треугольнике PQR величина угла QPR равна $\pi/3$. Через вершины P и R проведены перпендикуляры к сторонам QR и PQ соответственно. Точка пересечения этих перпендикуляров находится от вершин P и R на расстоянии, равном 1. Найти величины сторон треугольника PQR.

3.Н. Найти точки максимума функции $y(x)=-5x^3+x|x-1|$, заданной на отрезке $[0, 2]$, и ее наименьшее значение на этом отрезке.

4. Решить неравенство

$$\frac{6-3^{x+1}}{x} > \frac{10}{2x-1}.$$

5. Основанием пирамиды является треугольник ABC, в котором $\widehat{A}=2\pi/3$, $|AB|=|AC|=1$. Вершина D пирамиды равноудалена от точек A и B. Сфера касается ребра CD, продолжений ребер AD, BD за точку D и плоскости ABC. Точка касания с плоскостью основания пирамиды и ортогональная проекция вершины D на эту плоскость лежат на окружности, описанной вокруг треугольника ABC. Найти величины ребер AD, BD, CD.

3.С. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3x-y}-\dfrac{5}{x-3y}=3, \\ \dfrac{1}{3x-y}+\dfrac{2}{x-3y}=\dfrac{3}{5}. \end{cases}$$

Вариант 3.

1. Найти все решения уравнения
$$4-5\cos x-2\sin^2 x=0,$$
удовлетворяющие неравенству $\sin x \geqslant 0$.

2. Отрезок AB является диаметром некоторой окружности. Через его концы A и B проведены две прямые, пересекающие окружность соответственно в точках C и D, лежащих по одну сторону от прямой AB. Точка O, в которой пересекаются эти прямые, равноудалена от концов диаметра AB. Найти радиус окружности, если $|CD|=1$ и $\widehat{OCD}=\pi/3$.

3.Н. Найти точки минимума функции $y(x)=4x^3-x|x-2|$, заданной на отрезке $[0, 3]$, и ее наибольшее значение на этом отрезке.

4. Решить неравенство
$$\frac{2+\log_3 x}{x-1}<\frac{6}{2x-1}.$$

5. Основанием пирамиды $PQRS$ является прямоугольный треугольник PQR, в котором гипотенуза QR равна 2 и катет PQ равен 1. Длины ребер PS, QS, RS равны между собой. Сфера радиуса $\sqrt{2}/2$ касается ребра RS, продолжений ребер PS, QS за точку S и плоскости PQR. Найти величину отрезка касательной, проведенной из точки Q к сфере.

3.С. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \dfrac{1}{2x-3y}+\dfrac{2}{3x-2y}=\dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{3}{2x-3y}-\dfrac{4}{3x-2y}=1. \end{cases}$$

Вариант 4.

1. Найти все решения уравнения
$$8\sin x+5=2\cos 2x,$$
удовлетворяющие неравенству $\cos x \geqslant 0$.

2. В треугольнике ABC величина угла BAC равна $\pi/6$. Через вершины A и C проведены перпендикуляры к сторонам BC и AB соответственно. Точка пересечения этих перпендикуляров находится от вершин A и C на расстоянии, равном 1. Найти величины сторон треугольника ABC.

3.Н. Найти точки максимума функции $y(x)=-x^3+3x|x-3|$, заданной на отрезке $[0, 4]$, и ее наименьшее значение на этом отрезке.

4. Решить неравенство
$$\frac{2^{x+1}-7}{x-1}<\frac{10}{3-2x}.$$

5. Основанием пирамиды является треугольник PQR, в котором $|PR|=2$, $\hat{Q}=\pi/4$, $\hat{R}=\pi/3$. Вершина S пирамиды равно-

удалена от точек P и Q. Сфера касается ребер PS, QS, продолжения ребра RS за точку S и плоскости PQR. Точка касания с плоскостью основания пирамиды и ортогональная проекция вершины S на эту плоскость лежат на окружности, описанной вокруг треугольника PQR. Найти величины ребер PS, QS, RS.

3.С. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}-\dfrac{10}{x-y}=1, \\ \dfrac{1}{x+y}-\dfrac{2}{x-y}=-\dfrac{3}{5}. \end{cases}$$

§ 2. ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

1977

Вариант 1.

1. Решить неравенство $2^{2x+1}-21\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3}+2\geqslant 0$.

2. В треугольнике, один из углов которого равен разности двух других, длина меньшей стороны равна 1, а сумма площадей квадратов, построенных на двух других сторонах, в два раза больше площади описанного около треугольника круга. Найти длину большей стороны треугольника.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin^2(-2x)-(3-\sqrt{2})\operatorname{tg}5y=\dfrac{3\sqrt{2}-1}{2}, \\ \operatorname{tg}^2 5y+(3-\sqrt{2})\sin(-2x)=\dfrac{3\sqrt{2}-1}{2}. \end{cases}$$

4. Города A, B, C, D, расположенные так, что четырехугольник $ABCD$ — выпуклый, соединены прямолинейными дорогами AB, BC, CD, AD и AC. Их длины соответственно равны 6, 14, 5, 15 и 15 км. Из одного из этих городов одновременно вышли три туриста, идущие без остановок с постоянными скоростями. Маршруты всех туристов различны, причем каждый из них состоит из трех дорог и проходит через все города. Первый и второй туристы перед прохождением третьих дорог своих маршрутов встретились в одном городе, а третий закончил маршрут на час раньше туриста, закончившего маршрут последним. Найти скорости туристов, если скорость третьего больше скорости второго и на 1/2 км/ч меньше скорости первого, причем скорости всех туристов заключены в интервале от 5 км/ч до 8 км/ч.

5.Н. Найти все значения параметра α, удовлетворяющего неравенствам $0\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$, при каждом из которых минимум функции $f(x)=3x^4+4x^3(\cos\alpha-\sin\alpha)-3x^2\sin 2\alpha$ на отрезке $-\sin\alpha\leqslant x\leqslant\cos\alpha$ принимает наименьшее значение.

5.С. В пирамиде $SABC$ прямая, пересекающая ребра AC и BS и перпендикулярная им, проходит через середину ребра BS. Грань ASB равновелика грани BSC, а площадь грани ASC в два раза больше площади грани BSC. Внутри пирамиды есть точка M, сумма расстояний от которой до вершин B и S равна сумме расстояний до всех граней пирамиды. Найти расстояние от точки M до вершины B, если $AC=\sqrt{6}$, а $BS=1$.

Вариант 2.

1. Решить неравенство $3^{4-3x}-35\left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x}+6\geqslant 0$.

2. В треугольнике, один из углов которого равен сумме двух других, длина меньшей стороны равна 2, а отношение площади треугольника к длине описанной около него окружности равно 1/4. Найти длину большей стороны треугольника.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\cos^2 4x+\dfrac{\sqrt{26}-2}{2}\operatorname{tg}(-2y)=\dfrac{\sqrt{26}-1}{4},\\ \operatorname{tg}^2(-2y)-\dfrac{\sqrt{26}-2}{2}\cos 4x=\dfrac{\sqrt{26}-1}{4}.\end{cases}$$

4. Пункты P, Q, R, S, расположенные так, что пункт R находится внутри треугольника PQS, соединены прямолинейными дорогами PQ, QS, SP, PR и QR. Их длины соответственно равны 400, 600, 300, 80 и 400 км. Из одного из этих пунктов одновременно выехали три автомобиля, едущие без остановок с постоянными скоростями. Маршруты всех автомобилей различны, причем каждый из них состоит из трех дорог и проходит через все пункты. Второй автомобиль перед проездом третьей дороги своего маршрута встретился с третьим в одном пункте, из которого они выехали по общей дороге. Первый и второй автомобили закончили свои маршруты в одном пункте, причем первый закончил свой маршрут на час позже автомобиля, закончившего маршрут раньше других. Найти скорости автомобилей, если скорость второго на 10 км/ч больше скорости первого, а скорости всех автомобилей заключены в интервале от 95 км/ч до 125 км/ч.

5.Н. Найти все значения параметра α, удовлетворяющего неравенствам $\pi/4\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$, при каждом из которых максимум функции

$$f(x)=x^4-2x^2\sin^2\alpha-2(1+\cos\alpha)^2$$

на отрезке $-(1+\cos\alpha)\leqslant x\leqslant 1+\cos\alpha$ принимает наименьшее значение.

5.С. В пирамиде $SABC$ грани ASC, BSC и ASB равновелики. Сумма расстояний от середины ребра BC до граней

ASB и ASC в полтора раза меньше высоты пирамиды, опущенной из вершины S. Внутри пирамиды есть точка M, полусумма расстояний от которой до вершин A, B и C равна сумме расстояний до всех граней пирамиды. Найти площадь полной поверхности пирамиды, если длина ребра AS равна $\sqrt{\frac{31}{11}}$.

Вариант 3.

1. Решить неравенство $4^{5+4x}-15\left(\frac{1}{4}\right)^{2+4x}+8\geqslant 0$.

2. В треугольнике, один из углов которого равен разности двух других, длина большей стороны равна 4, а сумма площади описанного около треугольника круга и площади построенного на меньшей стороне квадрата равна 20. Найти длину меньшей стороны треугольника.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin^2 3x+(4-\sqrt{3})\operatorname{ctg}(-7y)=2\sqrt{3}-3/4, \\ \operatorname{ctg}^2(-7y)+(4-\sqrt{3})\sin 3x=2\sqrt{3}-3/4. \end{cases}$$

4. Города A, B, C, D, расположенные так, что четырехугольник $ABCD$ — выпуклый, соединены прямолинейными дорогами AB, BC, CD, AD и BD. Их длины соответственно равны 15, 57, 19, 29 и 40 км. Из одного из этих городов выехали три велосипедиста, едущие без остановок с постоянными скоростями. Маршрут каждого велосипедиста состоит из трех дорог, проходит через все города и по длине не превышает 100 км. Третий велосипедист окончил свой маршрут на 5/8 часа раньше первого и на 2/5 часа позже второго. Найти скорости велосипедистов, если скорость второго больше скорости первого и на 1 км/ч меньше скорости третьего, причем скорости всех велосипедистов заключены в интервале от 15 км/ч до 19 км/ч.

5.Н. Найти все значения параметра α, удовлетворяющего неравенствам $-\pi/2\leqslant\alpha\leqslant 0$, при каждом из которых максимум функции

$$f(x)=-9x^4+12x^3(\cos\alpha+\sin\alpha)-9x^2\sin 2\alpha$$

на отрезке $-\cos\alpha\leqslant x\leqslant -\sin\alpha$ принимает наибольшее значение.

5.С. В пирамиде $SABC$ прямая, пересекающая ребра SC и AB и перпендикулярная им, проходит через середину ребра SC. Площадь грани ASC в два раза меньше площади грани ABC. На грани BSC есть точка M, сумма расстояний от которой до вершин S и C равна сумме расстояний до всех остальных граней пирамиды. Найти объем пирамиды, если $AB=2\sqrt{3}$, $AS=\sqrt{35}$.

Вариант 4.

1. Решить неравенство $5^{5-4x}-2\left(\frac{1}{5}\right)^{3-4x}-5\geqslant 0$.

2. Площадь треугольника, один из углов которого равен сумме двух других, равна площади квадрата, построенного на

меньшей стороне. Найти длину меньшей стороны треугольника, если длина описанной около него окружности равна 6.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos^2(6x)+(\sqrt{5}-1)\operatorname{ctg}(-9y)=\dfrac{2\sqrt{5}-1}{4}, \\ \operatorname{ctg}^2(-9y)+(\sqrt{5}-1)\cos(6x)=\dfrac{2\sqrt{5}-1}{4}. \end{cases}$$

4. Пункты K, L, M, N, расположенные так, что пункт N находится внутри треугольника KLM, соединены прямолинейными дорогами KL, LM, MK, NM и NL. Их длины соответственно равны 130, 140, 110, 90 и 80 км. Из одного из пунктов одновременно выехали три автомобиля, едущие без остановок с постоянными скоростями. Маршруты всех автомобилей различны, причем каждый из них состоит из трех дорог и проходит через все пункты. Первый автомобиль начал движение по одной дороге со вторым и, проехав не более четверти второй дороги своего маршрута, встретился с третьим автомобилем, ехавшим также по второй дороге своего маршрута. Второй автомобиль закончил свой маршрут на три часа раньше автомобиля, закончившего маршрут последним. Найти скорости автомобилей, если скорость первого в полтора раза меньше скорости третьего и на 10 км/ч меньше скорости второго, причем скорости всех автомобилей заключены в интервале от 35 км/ч до 65 км/ч.

5.Н. Найти все значения параметра α, удовлетворяющего неравенствам $-\pi/4\leqslant\alpha\leqslant 0$, при каждом из которых минимум функции

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^4+x^2\cos^2\alpha+(1-\sin\alpha)^2$$

на отрезке $-(1-\sin\alpha)\leqslant x\leqslant 1-\sin\alpha$ принимает наибольшее значение.

5.С. В пирамиде $SABC$ грани ASC и BSC равновелики, а сумма площадей граней ASB и ABC в три раза больше площади грани ASC. Радиус шара, вписанного в пирамиду, в восемь раз меньше суммы расстояний от центра шара до вершин A и B. Найти двухгранный угол, образованный гранями ASB и ABC.

1978

Вариант 1.

1. Решить неравенство

$$(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\geqslant 0.$$

2.Н. Найти точки минимума функции

$$\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}-\frac{x-3}{2}.$$

3.Н. Найти уравнение прямой, проходящей через точку с координатами $(1/2,\ 2)$, касающейся графика функции $y(x) = -x^2/2+2$ и пересекающей в двух различных точках график функции $y(x)=\sqrt{4-x^2}$.

4. Совокупность A состоит из различных натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит A.

5. Основанием пирамиды $ABCEH$ служит выпуклый четырехугольник $ABCE$, который диагональю BE делится на два равновеликих треугольника. Длина ребра AB равна единице, длины ребер BC и CE равны. Сумма длин ребер AH и EH равна $\sqrt{2}$. Объем пирамиды равен $1/6$. Найти радиус шара, имеющего наибольший объем среди всех шаров, помещающихся в пирамиде $ABCEH$.

2.С. Решить уравнение

$$(1+\operatorname{tg}^2 2x)\left(\sin\frac{21}{4}x\cos\frac{7}{4}x+\sin\frac{5}{4}x\cos\frac{x}{4}\right)=$$
$$=\sec^2 2x\left(\sin\frac{x}{4}\cos\frac{5}{4}x-\sin\frac{7}{4}x\cos\frac{21}{4}x\right).$$

3.С. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB угол B равен $\operatorname{arctg}\frac{8}{15}$. Окружность радиуса 1, вписанная в угол C, касается стороны CB в точке M и отсекает от основания отрезок KE. Найти площадь треугольника KMB, если известно, что $MB=15/8$ и что точки A, K, E, B следуют на основании AB в указанном порядке.

Вариант 2.

1. Решить неравенство

$$(x-3)\sqrt{x^2+x-2}\geqslant 0.$$

2.Н. Найти точки максимума функции

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{5-x}{2}.$$

3.Н. Найти уравнение прямой, проходящей через точку с координатами $(1,\ 3)$, касающейся графика функции $y(x) = 8\sqrt{x}-7$ и пересекающей в двух различных точках график функции $y(x)=x^2+4x-1$.

4. Совокупность A состоит из различных натуральных чисел. Количество чисел в A не меньше восьми. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 462. Для любых двух чисел из A их наименьшее общее кратное меньше 250. Произведение всех чисел из A, умноженное на 9, является кубом целого числа. Найти числа, из которых состоит A.

5. Основанием пирамиды $MBKHE$ служит выпуклый четырехугольник $MBKH$, в котором угол при вершине M равен $\pi/2$, угол, образованный диагональю BH и ребром BK, равен $\pi/4$, длина ребра MB равна единице. Площадь треугольника BKH в два раза больше площади треугольника MBH. Сумма длин ребер BE и HE равна $\sqrt{3}$. Объем пирамиды равен $1/4$. Найти радиус шара, имеющего наибольший объем среди всех шаров, помещающихся в пирамиде $MBKHE$.

2.С. Решить уравнение

$$\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\left(\sin 4x\cos 5x-\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5}{2}x\right)=$$
$$=\sec^2\frac{x}{2}\left(\sin\frac{5}{2}x\cos\frac{x}{2}-\sin 5x\cos 4x\right).$$

3.С. В равнобедренном треугольнике MPK с основанием MP угол P равен $\operatorname{arctg}\frac{5}{12}$. Окружность, вписанная в угол K, касается стороны KP в точке A и отсекает от основания отрезок HE. Найти площадь треугольника HAE, если известно, что центр окружности удален от вершины K на расстояние $13/24$ и $AP=6,5$.

Вариант 3.

1. Решить неравенство

$$(x+2)\sqrt{x^2-2x-3}\geqslant 0.$$

2.Н. Найти точки максимума функции

$$\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}x-7}{2}.$$

3.Н. Найти уравнение прямой, которая проходит через точку с координатами (5, 10), касается графика функции $y(x)=-\frac{x^2}{4}+2x+6$ и пересекает в двух различных точках график функции $y(x)=6+\sqrt{8x-x^2}$.

4. Совокупность A состоит из различных натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 390. Наибольший общий делитель любых двух чисел из A больше единицы. Произведение всех чисел из A не делится на 160 и не является четвертой степенью никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит A.

5. Основанием пирамиды $THPCK$ служит выпуклый четырехугольник $THPC$, который диагональю HC делится на два равновеликих треугольника. Длина ребра TH равна 4, $\operatorname{ctg}\widehat{HCP}=\sqrt{2}$. Сумма длин ребер TK и CK равна 4. Объем

пирамиды равен $5\frac{1}{3}$. Найти радиус шара, имеющего наибольший объем среди всех шаров, помещающихся в пирамиде $THPCK$.

2.С. Решить уравнение

$$(1+\operatorname{ctg}^2 x)\left(\sin\frac{3}{2}x\cos 2x-\sin\frac{x}{4}\cos\frac{9}{4}x\right)=$$
$$=\operatorname{cosec}^2 x\left(\sin\frac{9}{4}x\cos\frac{x}{4}+\sin 2x\cos\frac{3}{2}x\right).$$

3.С. Около треугольника AMB описана окружность, центр которой удален от стороны AM на расстояние 10. Продолжение стороны AM за вершину M отсекает от касательной к окружности, проведенной через вершину B, отрезок CB, равный 29. Найти площадь треугольника CMB, если известно, что угол ACB равен $\operatorname{arctg}\frac{20}{21}$.

Вариант 4.

1. Решить неравенство

$$(x-1)\sqrt{-x^2+x+6}\geqslant 0.$$

2.Н. Найти точки минимума функции

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2x-\frac{\sin 2x}{4}-\frac{1-\sqrt{3}x}{2}.$$

3.Н. Найти уравнение прямой, которая проходит через точку с координатами $(1/4,\ 0)$, касается графика функции $y(x)=3\sqrt{x}-5/2$ и пересекает в двух различных точках график функции $y(x)=x^2+6x$.

4. Совокупность A состоит из различных натуральных чисел. Количество чисел в A не меньше восьми. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 330. Никакие два числа из A не являются взаимно простыми. Сумма всех чисел из A равна 755. Произведение всех чисел из A не является четвертой степенью никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит A.

5. Основанием пирамиды $ABMCP$ служит выпуклый четырехугольник $ABMC$, в котором угол при вершине A равен $\pi/2$, угол, образованный диагональю CB и ребром BM, равен $\pi/6$, длина ребра AB равна единице. Площадь треугольника BMC в два раза больше площади треугольника ABC. Сумма длин ребер BP и CP равна $\sqrt{7}$. Объем пирамиды равен 3/4. Найти радиус шара, имеющего наибольший объем среди всех шаров, помещающихся в пирамиде $ABMCP$.

2.С. Решить уравнение

$$\sin^2 5x\left(\sin 7x\cos x-\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3}{2}x\right)=\frac{\sin\frac{3}{2}x\cos\frac{x}{2}+\sin x\cos 7x}{1+\operatorname{ctg}^2 5x}.$$

3.С. Около треугольника APK описана окружность радиуса 1. Продолжение стороны AP за вершину P отсекает от касательной к окружности, проведенной через вершину K, отрезок BK, равный 7. Найти площадь треугольника APK, если известно, что угол ABK равен $\operatorname{arctg}\frac{2}{7}$.

1979

Вариант 1.

1.Н. Найти точки экстремума функции

$$f(x)=x^3+6x^2-3x+3$$

на интервале (—5, 1/5).

2. Решить уравнение

$$5^{|4x-6|}=25^{3x-4}.$$

3. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке E. Прямая, проходящая через точку E и перпендикулярная к AB, пересекает сторону CD в точке M. Доказать, что EM — медиана треугольника CED, и найти ее длину, если $|AD|=8$ см, $|AB|=4$ см и $\widehat{CDB}=\alpha$.

4. Найти все целые корни уравнения

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\left(3x-\sqrt{9x^2+160x+800}\right)\right)=1.$$

5. Найти все действительные значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(a-x^2-\cos\frac{11\pi x}{4}\right)\sqrt{8-ax}=0$$

имеет на отрезке $[-2, 3]$ нечетное число различных корней.

1.С. Даны арифметическая и геометрическая прогрессии. В арифметической прогрессии первый член равен 3, разность равна 6. В геометрической прогрессии первый член равен 3, знаменатель равен $\sqrt{2}$. Выяснить, что больше: сумма первых шести членов арифметической прогрессии или сумма первых восьми членов геометрической прогрессии.

Вариант 2.

1.Н. Найти точки экстремума функции

$$f(x)=-x^3-3x^2+18x-2$$

на интервале (—4, 8/5).

2. Решить уравнение

$$3^{|3x-4|}=9^{2x-2}.$$

3. В окружность вписан четырехугольник $MNPQ$, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке F. Прямая, проходящая через точку F и середину стороны NP, пересекает сторону MQ в точке H. Доказать, что FH — высота треугольника MFQ, и найти ее длину, если $|PQ|=6$ см, $|NF|=5$ см и $\widehat{MQN}=\alpha$.

4. Найти все целые корни уравнения

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\left(3x-\sqrt{9x^2+80x-40}\right)\right)=1.$$

5. Найти все действительные значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(a-3x^2+\cos\frac{9\pi x}{2}\right)\sqrt{3-ax}=0$$

имеет на отрезке $[-1, 5]$ нечетное число различных корней.

1.С. Даны арифметическая и геометрическая прогрессии. В арифметической прогрессии первый член равен 6, разность равна 2. В геометрической прогрессии первый член равен 3, знаменатель равен $\sqrt{3}$. Выяснить, что больше: сумма первых восьми членов арифметической прогрессии или сумма первых шести членов геометрической прогрессии.

Вариант 3.

1.Н. Найти точки экстремума функции

$$f(x)=x^3-3x^2-12x-4$$

на интервале $(-6/5, 4)$.

2. Решить уравнение

$$25^{|1-2x|}=5^{4-6x}.$$

3. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке E. Прямая, проходящая через точку E и перпендикулярная к BC, пересекает сторону AD в точке M. Доказать, что EM — медиана треугольника AED, и найти ее длину, если $|AB|=7$ см, $|CE|=3$ см и $\widehat{ADB}=\alpha$.

4. Найти все целые корни уравнения

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(3x+\sqrt{9x^2+224x+1416}\right)\right)=1.$$

5. Найти все действительные значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(a-x^2+\cos\frac{13\pi x}{4}\right)\sqrt{8+ax}=0$$

имеет на отрезке $[-5, 2]$ нечетное число различных корней.

1.С. Даны арифметическая и геометрическая прогрессии. В арифметической прогрессии первый член равен 3, разность равна 3. В геометрической прогрессии первый член равен 5, знаменатель равен $\sqrt{2}$. Выяснить, что больше: сумма первых семи членов арифметической прогрессии или сумма первых шести членов геометрической прогрессии.

Вариант 4.

1.Н. Найти точки экстремума функции

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 + 9x + 1$$

на интервале $(-3/5, 5)$.

2. Решить уравнение

$$9^{|3x-1|} = 3^{8x-2}.$$

3. В окружность вписан четырехугольник $MNPQ$, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке F. Прямая, проходящая через точку F и середину стороны MN, пересекает сторону PQ в точке H. Доказать, что FH — высота треугольника PFQ, и найти ее длину, если $|MN| = 4$ см, $|MQ| = 7$ см и $\widehat{MPQ} = \alpha$.

4. Найти все целые корни уравнения

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\left(3x - \sqrt{9x^2 - 16x - 80}\right)\right) = 1.$$

5. Найти все действительные значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(a - 5x^2 - \cos\frac{15\pi x}{2}\right)\sqrt{5 + ax} = 0$$

имеет на отрезке $[-3, 1]$ нечетное число различных корней.

1.С. Даны арифметическая и геометрическая прогрессии. В арифметической прогрессии первый член равен 8, разность равна 7. В геометрической прогрессии первый член равен 1, знаменатель равен $\sqrt{3}$. Выяснить, что больше: сумма первых пяти членов арифметической прогрессии или сумма первых восьми членов геометрической прогрессии.

§ 3. ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

1977

Вариант 1.

1. Решить уравнение

$$\sin^2 x = 3/4.$$

2.Н. Найти площадь замкнутой фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 0, \qquad y = 20 - 2x^2 - 6x.$$

3.Н. Найти отрицательные члены последовательности

$$x_n = \frac{A^4_{n+4}}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

где A^4_{n+4} — число размещений, а P_{n+2} и P_n — числа перестановок.

4. Дана равнобедренная трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Отношение высоты трапеции к радиусу описанной окружности равно $\sqrt{2/3}$. Найти углы трапеции.

5. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) равна 1. На ребре AA_1 взята точка E так, что длина отрезка AE равна 1/3. На ребре BC взята точка F так, что длина отрезка BF равна 1/4. Через центр куба и точки E и F проведена плоскость α. Найти расстояние от вершины B_1 до плоскости α.

2.С. Найти все значения a, для каждого из которых числа x и y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x + y = a, \\ 2x - y = 3, \end{cases}$$

удовлетворяют также неравенству $x > y$.

3.С. Решить неравенство

$$\log_7 x - \log_x \left(\frac{1}{7}\right) \geqslant 2.$$

Вариант 2.

1. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x = 1/3.$$

2.Н. Найти площадь замкнутой фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 5x - x^2 + 14, \qquad y = 0.$$

3.Н. Сколько отрицательных членов в последовательности

$$x_n = C^4_{n+5} - \frac{195}{16}\,\frac{C^n_{n+3}}{n+1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

где C^4_{n+5}, C^n_{n+3} — числа сочетаний?

4. Длина окружности, описанной около равнобедренного треугольника, в 3 раза больше длины окружности, вписанной в этот треугольник. Найти углы треугольника.

5. Длина ребра куба $KLMNK_1L_1M_1N_1$ ($KK_1 \parallel LL_1 \parallel MM_1 \parallel NN_1$) равна 1. На ребре MM_1 взята точка A так, что длина отрезка AM равна 3/5. На ребре K_1N_1 взята точка B так, что длина отрезка K_1B равна 1/3. Через центр куба и точки A и B проведена плоскость α. Точка P — проекция вершины N на плоскость α. Найти длину отрезка BP.

2.С. Найти все значения b, для каждого из которых числа x и y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 2x+y=b+2, \\ x-y=b, \end{cases}$$

удовлетворяют также неравенству $x-y<0$.

3.С. Решить неравенство

$$2\log_5 \sqrt{x}-2 \geqslant \log_x\left(\frac{1}{5}\right).$$

Вариант 3.

1. Решить уравнение

$$\cos^2 x = 1/2.$$

2.Н. Найти площадь замкнутой фигуры, ограниченной линиями:

$$y=0, \quad y=24-2x-2x^2.$$

3.Н. Сколько положительных членов в последовательности

$$x_n=\frac{195}{4P_n}-\frac{A^3_{n+3}}{P_{n+1}} \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где A^3_{n+3} — число размещений, а P_n и P_{n+1} — числа перестановок?

4. Дана равнобедренная трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Площадь описанного круга в 12 раз больше площади вписанного круга. Найти углы трапеции.

5. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) равна 1. На ребре BC взята точка E так, что длина отрезка BE равна $1/4$. На ребре C_1D_1 взята точка F так, что длина отрезка FD_1 равна $2/5$. Через центр куба и точки E и F проведена плоскость α. Найти расстояние от вершины A_1 до плоскости α.

2.С. Найти все значения c, для каждого из которых числа x и y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x+7y=c, \\ 2x-\ y=5, \end{cases}$$

удовлетворяют также неравенству $x>y-2$.

3.С. Решить неравенство

$$\log_x\left(\frac{1}{4}\right)+\log_2\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant -2.$$

Вариант 4.

1. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg}^2 x = 3.$$

2.Н. Найти площадь замкнутой фигуры, ограниченной линиями:

$$y=3x+18-x^2, \qquad y=0.$$

3.Н. Сколько отрицательных членов в последовательности

$$x_n=C^4_{n+4}-\frac{143}{96}\frac{P_{n+5}}{P_{n+3}} \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где C^4_{n+4} — число сочетаний, а P_{n+5} и P_{n+3} — числа перестановок?

4. Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, в 4 раза меньше радиуса окружности, описанной около этого треугольника. Найти углы треугольника.

5. Длина ребра куба $KLMNK_1L_1M_1N_1$ $(KK_1\parallel LL_1\parallel MM_1\parallel NN_1)$ равна 1. На ребре KL взята точка A так, что длина отрезка AL равна 3/4. На ребре MM_1 взята точка B так, что длина отрезка MB равна 3/5. Через центр куба и точки A и B проведена плоскость α. Найти длину отрезка BP, где точка P — проекция вершины N на плоскость α.

2.С. Найти все значения a, для каждого из которых числа x и y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x-2y=2a, \\ 3x+5y=4, \end{cases}$$

удовлетворяют также неравенству $x+y>0$.

3.С. Решить неравенство

$$\log_x 3-4\geqslant 4\log_{1/3} x.$$

Вариант 5.

1. Решить уравнение

$$\sin^2 x=1/2.$$

2.Н. Найти площадь замкнутой фигуры, ограниченной линиями:

$$y=0, \qquad y=14-2x^2-12x.$$

3.Н. Найти положительные члены последовательности

$$x_n=\frac{63}{4P_n}-(n+1)\frac{A^2_{n+2}}{P_{n+1}} \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где A^2_{n+2} — число размещений, а P_n и P_{n+1} — числа перестановок.

4. Дана равнобедренная трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Отношение длины описанной окружности к длине вписанной окружности равно $2\sqrt{5}$. Найти углы трапеции.

5. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $(AA_1\parallel BB_1\parallel CC_1\parallel DD_1)$ равна 1. На ребре AB взята точка E так, что длина отрезка BE равна 2/5. На ребре CC_1 взята точка F так, что длина отрезка FC равна $2/3$. Через центр куба и точки E и F проведена плоскость α. Найти расстояние от вершины A до плоскости α.

2.С. Найти все значения b, для каждого из которых числа x и y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 3x+\ \ y=b, \\ \ \ x+2y=2b+1, \end{cases}$$

удовлетворяют также неравенству $x>3y$.

3.С. Решить неравенство

$$\log_{1/3}\left(\frac{1}{x}\right)+\log_x 3\geqslant 2.$$

Вариант 6.

1. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x=1.$$

2.Н. Найти площадь замкнутой фигуры, ограниченной линиями:

$$y=x-x^2+20,\qquad y=0.$$

3.Н. Сколько положительных членов в последовательности

$$x_n=C^2_{n+3}-\frac{48}{187}C^n_{n+4}\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где C^2_{n+3} и C^n_{n+4} — числа сочетаний?

4. Площадь круга, описанного около равнобедренного треугольника, в 36 раз больше площади круга, вписанного в этот треугольник. Найти углы треугольника.

5. Длина ребра куба $KLMNK_1L_1M_1N_1$ ($KK_1 \parallel LL_1 \parallel MM_1 \parallel NN_1$) равна 1. На ребре KL взята точка A так, что длина отрезка KA равна $1/4$. На ребре MM_1 взята точка B так, что длина отрезка M_1B равна $2/5$. Через центр куба и точки A и B проведена плоскость α. Точка P — проекция вершины K_1 на плоскость α. Найти длину отрезка AP.

2.С. Найти все значения c, для каждого из которых числа x и y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 3x-2y=1, \\ \ \ x+5y=2c, \end{cases}$$

удовлетворяют также неравенству $y>x+1$.

3.С. Решить неравенство

$$\log_3\sqrt{x}+2\geqslant\log_x\left(\frac{1}{3}\right).$$

1978

Вариант 1.

1. Решить уравнение

$$2\sin x+3\sin 2x=0.$$

2.Н. Исследовать на экстремум функцию

$$y(x)=\sqrt{2x^3-x+2}.$$

3.Н. Прямая l проходит через точки $A(1, 2, 3)$ и $B(4, 6, 9)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно прямой l.

4. Решить уравнение

$$\log_3(3^x-8)=2-x.$$

5.Н. Дана правильная треугольная пирамида $DABC$ (D — вершина, ABC — основание). Известно, что $|AB|=a$, $|AD|=b$. Пирамиду пересекает плоскость α, параллельная ребрам AD и BC. На каком расстоянии от ребра AD должна быть проведена плоскость α, чтобы площадь сечения пирамиды этой плоскостью была наибольшей?

6. Дана окружность с диаметром AB. Вторая окружность с центром в точке A пересекает первую окружность в точках C и D, а диаметр AB в точке E. На дуге CE, не содержащей точки D, взята точка M, отличная от точек C и E. Луч BM пересекает первую окружность в точке N. Известно, что $|CN|=a$, $|DN|=b$. Найти $|MN|$.

2.С. Руда содержит 40% примесей, а выплавленный из нее металл содержит 4% примесей. Сколько получится металла из 24 тонн руды?

3.С. Решить неравенство

$$\frac{2}{x+2}<\frac{1}{x-3}.$$

5.С. Дана правильная треугольная пирамида $DABC$ (D — вершина, ABC — основание). Известно, что $AB=a$, $AD=a\sqrt{2}$. Пирамиду пересекает плоскость, параллельная ребрам AD и BC и отстоящая на расстоянии d от ребра AD. Найти площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

Вариант 2.

1. Решить уравнение

$$2\cos 2x-3\cos x+2=0.$$

2.Н. Исследовать на экстремум функцию

$$y(x)=(2x-1)e^{3x}.$$

3.Н. Найти величину острого двугранного угла, образованного плоскостями

$$x+2y-z=1,\qquad 2x+y-z=2.$$

4. Решить уравнение

$$\log_7(6+7^{-x})=1+x.$$

5.Н. В основании треугольной пирамиды $NKLM$ лежит правильный треугольник KLM. Высота пирамиды, опущенная из вершины N, проходит через середину ребра LM. Известно, что $|KL|=a$, $|KN|=b$. Пирамиду пересекает плоскость β, параллельная ребрам KN и LM. На каком расстоянии от вершины N должна находиться плоскость β, чтобы площадь сечения пирамиды этой плоскостью была наибольшей?

6. Дана окружность с диаметром PQ. Вторая окружность с центром в точке Q пересекает первую окружность в точках S и T, а диаметр PQ в точке A, AB — диаметр второй окружности. На дуге SB, не содержащей точки T, взята точка C, отличная от точек S и B. Отрезок PC пересекает первую окружность в точке D. Известно, что $|SD|=n$, $|DC|=m$. Найти $|DT|$.

2.С. Из 38 тонн сырья второго сорта, содержащего 25% примесей, после переработки получается 30 тонн сырья первого сорта. Каков процент примесей в сырье первого сорта?

3.С. Решить неравенство

$$\frac{1}{1-x}<\frac{3}{x+3}.$$

5.С. В основании треугольной пирамиды $NKLM$ лежит правильный треугольник KLM. Высота пирамиды, опущенная из вершины N, проходит через середину ребра LM. Известно, что $KL=a$, $KN=a\sqrt{3}$. Пирамиду пересекает плоскость, параллельная ребрам KN и LM и отстоящая от вершины N на расстоянии d. Найти площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

Вариант 3.

1. Решить уравнение

$$3\cos x+2\sin 2x=0.$$

2.Н. Исследовать на экстремум функцию

$$y(x)=\sqrt{1-2x+3x^2}.$$

3.Н. Прямая l проходит через точки $C(3, -2, 1)$ и $D(-1, 2, 3)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно прямой l.

4. Решить уравнение

$$\log_2(2^x-7)=3-x.$$

5.Н. Дана правильная треугольная пирамида $BCDE$ (B — вершина, CDE — основание). Известно, что $|CD|=a$, $|BC|=b$. Пирамиду пересекает плоскость γ, параллельная ребрам BC и DE. На каком расстоянии от ребра DE должна быть проведена плоскость γ, чтобы площадь сечения пирамиды этой плоскостью была наибольшей?

6. Дана окружность с диаметром KL. Вторая окружность с центром в точке K пересекает первую окружность в точках M и N, а диаметр KL в точке A. На дуге AN, не содержащей точки M, взята точка B, отличная от точек A и N.

Луч LB пересекает первую окружность в точке C. Известно, что $|CN|=a$, $|CM|=b$. Найти $|BC|$.

2.С. Свежие фрукты содержат 72% воды, а сухие — 20% воды. Сколько сухих фруктов получится из 20 кг свежих фруктов?

3.С. Решить неравенство

$$\frac{3}{2-x}>\frac{1}{x+3}.$$

5.С. Дана правильная пирамида $BCDE$ (B — вершина, CDE — основание). Известно, что $CD=a$, $BC=a\sqrt{3}$. Пирамиду пересекает плоскость, параллельная ребрам BC и DE и отстоящая от ребра DE на расстоянии d. Найти площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

Вариант 4.

1. Решить уравнение

$$2\sin x+3\cos 2x-3=0.$$

2.Н. Исследовать на экстремум функцию

$$y(x)=1+2xe^{-\frac{1}{2}x}.$$

3.Н. Найти величину острого двугранного угла, образованного плоскостями

$$3x-y-2z=1,\qquad 2x+3y-z=3.$$

4. Решить уравнение

$$\log_6(5+6^{-x})=x+1.$$

5.Н. В основании треугольной пирамиды $PQRS$ лежит правильный треугольник QRS. Высота пирамиды, опущенная из вершины P, проходит через середину ребра RS. Известно, что $|PQ|=m$, $|QR|=n$. Пирамиду пересекает плоскость α, параллельная ребрам PQ и RS. На каком расстоянии от вершины Q должна находиться плоскость α, чтобы площадь сечения пирамиды этой плоскостью была наибольшей?

6. Дана окружность с диаметром BC. Вторая окружность с центром в точке C пересекает первую окружность в точках D и E, а диаметр BC в точке F, FK — диаметр второй окружности. На дуге EK, не содержащей точки D, взята точка L, отличная от точек E и K. Отрезок BL пересекает первую окружность в точке M. Известно, что $|ML|=m$, $|EM|=n$. Найти $|DM|$.

2.С. Из 40 тонн руды выплавляют 20 тонн металла, содержащего 6% примесей. Каков процент примесей в руде?

3.С. Решить неравенство

$$\frac{2}{x+3}<\frac{1}{2x-1}.$$

5.С. В основании треугольной пирамиды $PQRS$ лежит правильный треугольник QRS. Высота пирамиды, опущенная из вершины P, проходит через середину ребра RS. Известно, что $PQ = m\sqrt{2}$, $QR = m$. Пирамиду пересекает плоскость, параллельная ребрам PQ и RS и отстоящая от вершины Q на расстоянии d. Найти площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

Вариант 5.

1. Решить уравнение

$$5 \sin 2x - 2 \sin x = 0.$$

2.Н. Исследовать на экстремум функцию

$$y(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 3}.$$

3.Н. Прямая l проходит через точки $B(1, 0, -3)$ и $C(2, -1, 1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку B перпендикулярно прямой l.

4. Решить уравнение

$$\log_5 (5^x - 4) = 1 - x.$$

5.Н. Дана правильная треугольная пирамида $CDEF$ (C — вершина, DEF — основание). Известно, что $|CD| = m$, $|DE| = n$. Пирамиду пересекает плоскость β, параллельная ребрам CD и EF. На каком расстоянии от ребра CD должна быть проведена плоскость β, чтобы площадь сечения пирамиды этой плоскостью была наибольшей?

6. Дана окружность с диаметром QR. Вторая окружность с центром в точке Q пересекает первую окружность в точках P и S, а диаметр QR — в точке B. На дуге BS, не содержащей точки P, взята точка C, отличная от точек B и S. Луч RC пересекает первую окружность в точке D. Известно, что $|DS| = a$, $|DP| = b$. Найти $|DC|$.

2.С. В результате очистки сырья количество примесей в нем уменьшается от 20% в исходном сырье до 5% в очищенном. Сколько надо взять исходного сырья для получения 160 кг очищенного сырья?

3.С. Решить неравенство

$$\frac{5}{2-x} > \frac{3}{x+2}.$$

5.С. Дана правильная треугольная пирамида $CDEF$ (C — вершина, DEF — основание). Известно, что $CD = 2m$, $DE = m$. Пирамиду пересекает плоскость, параллельная ребрам CD и EF и отстоящая на расстоянии d от ребра CD. Найти площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

Вариант 6.

1. Решить уравнение

$$3 + 2 \sin x - 3 \cos 2x = 0.$$

2.Н. Исследовать на экстремум функцию

$$y(x)=(1-3x)e^{-2x}.$$

3.Н. Найти величину острого двугранного угла, образованного плоскостями

$$x-y+3z=2, \qquad -x-3y+z=2.$$

4. Решить уравнение

$$\log_2(7+2^{-x})=x+3.$$

5.Н. В основании треугольной пирамиды $QRST$ лежит правильный треугольник RST. Высота пирамиды, опущенная из вершины Q, проходит через середину ребра ST. Известно, что $|QR|=m$, $|ST|=n$. Пирамиду пересекает плоскость γ, параллельная ребрам QR и ST. На каком расстоянии от вершины Q должна находиться плоскость γ, чтобы площадь сечения пирамиды этой плоскостью была наибольшей?

6. Дана окружность с диаметром LM. Вторая окружность с центром в точке M пересекает первую окружность в точках N и Q, а диаметр LM — в точке B, BC — диаметр второй окружности. На дуге NC, не содержащей точки Q, взята точка D, отличная от точек N и C. Отрезок LD пересекает первую окружность в точке E. Известно, что $|EN|=n$, $|ED|=m$. Найти $|QE|$.

2.С. Из 22 кг свежих грибов получается 2,5 кг сухих грибов, содержащих 12% воды. Каков процент воды в свежих грибах?

3.С. Решить неравенство

$$\frac{2}{1-2x}<\frac{3}{x+5}.$$

5.С. В основании треугольной пирамиды $QRST$ лежит правильный треугольник RST. Высота пирамиды, опущенная из вершины Q, проходит через середину ребра ST. Известно, что $QR=3m$, $ST=m$. Пирамиду пересекает плоскость, параллельная ребрам QR и ST и отстоящая от вершины Q на расстоянии d. Найти площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

1979

Вариант 1.

1. Решить уравнение

$$\cos\frac{x}{2}=1+\cos x.$$

2.Н. Найти угол между векторами

$$\vec{a}=(6,\ -2,\ -3) \text{ и } \vec{b}=(5,\ 0,\ 0).$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 1/9, \\ y - x = 2. \end{cases}$$

4.Н. Найти координаты точек пересечения с осью Ox тех касательных к графику функции $y(x) = \frac{x+1}{x-3}$, которые образуют угол $3\pi/4$ с осью Ox.

5. В ромб $ABCD$, у которого $|AB| = l$ и $\widehat{BAD} = \alpha$, вписана окружность. Касательная к этой окружности пересекает сторону AB в точке M, а сторону AD — в точке N. Известно, что $|MN| = 2a$. Найти длины отрезков MB и ND.

6. В плоскости P дан равнобедренный треугольник ABC такой, что $|AB| = |BC| = l$, $|AC| = 2a$. Шар радиуса r касается плоскости P в точке B. Две скрещивающиеся прямые проходят через точки A и C и касаются шара. Угол между каждой из этих прямых и плоскостью P равен α. Найти расстояние между этими прямыми.

2.С. Седьмой член арифметической прогрессии равен 21, а сумма первых семи членов этой прогрессии равна 105. Найти первый член и разность этой прогрессии.

4.С. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 + x - 2} > x.$$

Вариант 2.

1. Решить уравнение

$$\sin\frac{x}{4} + \cos\frac{x}{2} = 1.$$

2.Н. Найти угол между векторами

$$\vec{b} = (2, -4, 5) \quad \text{и} \quad \vec{c} = (0, 2, 0).$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2^y}{5^x} = 200, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

4.Н. Определить координаты точек пересечения с осями координат тех касательных к графику функции $y(x) = \frac{2x-3}{x+3}$, у которых угловой коэффициент равен 9.

5. Дан равнобедренный треугольник KLM, в котором $|KL| = |LM| = l$, $\widehat{KLM} = \beta$. Окружность с центром на стороне KM касается сторон KL и LM. Касательная к этой окружности пересекает сторону KL в точке P, а сторону LM — в точке Q. Известно, что площадь треугольника PLQ равна S. Найти длину отрезка PQ.

6. Центр O шара радиуса r находится в плоскости P. В плоскости P взяты точки M и N ($|OM|=|ON|=m>r$, $|MN|=2b$, $b\neq m$). Через точки M и N проведены две прямые, касающиеся шара и не лежащие в одной плоскости. Точки касания расположены по одну сторону от плоскости P. Угол между каждой из этих прямых и плоскостью P равен β. Найти расстояние между этими прямыми.

2.С. Первый член геометрической прогрессии равен 3, а пятый член равен 12288. Найти знаменатель этой прогрессии и сумму первых пяти ее членов.

4.С. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2+5x+4}>x+2.$$

Вариант 3.

1. Решить уравнение

$$\cos\frac{x}{3}=2\cos\frac{x}{6}-1.$$

2.Н. Найти угол между векторами

$$\vec{c}=(-2,6,-3)\quad\text{и}\quad\vec{d}=(0,0,-3).$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}7^{x+1}\cdot 2^y=4,\\ y-x=3.\end{cases}$$

4.Н. Вычислить координаты точек пересечения с осью Ox тех касательных к графику функции $y(x)=\frac{3x-1}{x+8}$, которые образуют угол $\pi/4$ с осью Ox.

5. В ромб $CDEF$, у которого $\widehat{DCF}=\gamma$, вписана окружность радиуса r. Касательная к этой окружности пересекает сторону CD в точке A, а сторону CF — в точке B. Известно, что $|AD|=m$. Найти площадь треугольника ABC.

6. Плоскость P касается шара радиуса r в точке D. Точки D, E и F плоскости P не лежат на одной прямой и $|DE|=|DF|=n$, $|EF|=2d$. Две скрещивающиеся прямые пересекают плоскость P в точках E и F и касаются шара. Угол между каждой из этих прямых и плоскостью P равен γ. Найти расстояние между этими прямыми.

2.С. Разность арифметической прогрессии равна 6, а сумма первых десяти ее членов равна 340. Найти первый и десятый член прогрессии.

4.С. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-x-2}>x-1.$$

Вариант 4.

1. Решить уравнение

$$2\sin\frac{x}{2}=1-\cos x.$$

2.Н. Найти угол между векторами

$$\vec{b}=(-4,-6,2)\quad\text{и}\quad\vec{f}=(4,0,0).$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)^x\cdot 5^y=75,\\ x+y=1.\end{cases}$$

4.Н. Найти координаты точек пересечения с осями координат тех касательных к графику функции $y(x)=\frac{2x-2}{x+1}$, у которых угловой коэффициент равен 4.

5. Дан равнобедренный треугольник PQR, в котором $|PQ|=|QR|$, $\widehat{PQR}=\varphi$. Окружность радиуса r с центром на стороне PR касается сторон PQ и QR. Касательная к этой окружности пересекает сторону PQ в точке S, а сторону QR — в точке T. Известно, что $|ST|=2l$. Найти длины отрезков PS и RT.

6. Точки K, L и M лежат в плоскости P ($|KL|=|KM|=l$, $|LM|=2b$, $b\neq l$). Точка K — центр шара радиуса r, $r<l$. Через точки L и M проведены две прямые, касающиеся шара и не лежащие в одной плоскости. Точки касания находятся по одну сторону от плоскости P. Угол между каждой из этих прямых и плоскостью P равен β. Найти расстояние между этими прямыми.

2.С. Сумма первых шести членов геометрической прогрессии со знаменателем 1/3 равна 364/9. Найти первый и шестой члены прогрессии.

4.С. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2+2x-3}>x.$$

Вариант 5.

1. Решить уравнение

$$2\cos\frac{x}{4}-\cos\frac{x}{2}=1.$$

2.Н. Найти угол между векторами

$$\vec{a}=(3,-2,6)\quad\text{и}\quad\vec{c}=(0,-5,0).$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}5^{x-1}\cdot 7^y=1/7,\\ x-y=2.\end{cases}$$

4.Н. Определить координаты точек пересечения с осью 0… тех касательных к графику функции $y(x)=\frac{x+4}{x-5}$, которые обр… зуют угол $3\pi/4$ с осью Ox.

5. В ромб $EFGH$, у которого $\widehat{FEH}=\alpha$, вписана окру… ность радиуса r. Касательная к этой окружности пересека… сторону FG в точке A, а сторону GH — в точке D. Известн… что площадь треугольника AGD равна S. Найти длину от… резка AD.

6. Шар радиуса r касается плоскости P в точке B. Точк… B, C и D плоскости P не лежат на одной прямой и $|BC|=|BD|=m$, $|CD|=2a$. Две скрещивающиеся прямые прохо… дят через точки C и D и касаются шара. Угол между кажд… из этих прямых и плоскостью P равен α. Найти расстояни… между этими прямыми.

2.С. Первый член арифметической прогрессии равен 10, а сумма первых четырнадцати членов этой прогрессии равна 1050. Найти четырнадцатый член и разность прогрессии.

4.С. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-x-6}>x-2.$$

Вариант 6.

1. Решить уравнение

$$1-2\sin\frac{x}{6}=\cos\frac{x}{3}.$$

2.Н. Найти угол между векторами

$$\vec{a}=(4,\ -5,\ -2) \quad \text{и} \quad \vec{b}=(0,\ 0,\ 2).$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^y\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^x=63, \\ y+x=1. \end{cases}$$

4.Н. Вычислить координаты точек пересечения с осями координат тех касательных к графику функции $y(x)=\frac{3x-4}{x+7}$, у которых угловой коэффициент равен 25.

5. Дан равнобедренный треугольник MNP, в котором $|MN|=|NP|=l$, $\widehat{MNP}=\beta$. Окружность с центром на стороне MP касается сторон MN и NP. Касательная к этой окружности пересекает сторону MN в точке Q, а сторону NP — в точке R. Известно, что $|MQ|=n$. Найти площадь треугольника QNR.

6. Вне шара радиуса r с центром в точке O взяты точки K и L ($|OK|=|OL|=n$, $|KL|=2d$, $d\neq n$). Через точки K и L проведены две прямые, касающиеся шара и не лежащие в одной плоскости. Точки касания находятся по одну сторону от плоскости P, проходящей через точки O, K, L. Угол между каждой из этих прямых и плоскостью P равен γ. Найти расстояние между этими прямыми.

2.С. Знаменатель геометрической прогрессии равен 2, а сумма первых семи членов этой прогрессии равна 635. Найти первый и седьмой члены прогрессии.

4.С. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2+2x-8} > x-1.$$

§ 4. ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

1977

Вариант 1.

1. Из пункта A в пункт B доставлена почта. Сначала ее вез мотоциклист; проехав 2/3 расстояния от пункта A до пункта B, он передал почту ожидавшему его велосипедисту, который и доставил ее в пункт B (время, потребовавшееся на передачу почты, считается равным нулю). При этом почта была доставлена из пункта A в пункт B за промежуток времени, необходимый, чтобы проехать от пункта A до пункта B со скоростью 40 км/ч.

Известно, что если бы мотоциклист и велосипедист выехали из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу, то они встретились бы через промежуток времени, необходимый для проезда от пункта A до пункта B со скоростью 100 км/ч.

Найти скорость мотоциклиста, считая, что она больше скорости велосипедиста.

2.Н. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=x^2-2x+2, \quad y=x^2+4x+5, \quad y=1.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{1/\sqrt{5}}(6^{x+1}-36^x) \geqslant -2.$$

4. В выпуклом четырехугольнике длины диагоналей равны одному и двум метрам. Найти площадь четырехугольника, зная, что длины отрезков, соединяющих середины его противоположных сторон, равны.

5. Найти все решения уравнения

$$2-\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x=4\cos^2 3x,$$

удовлетворяющие неравенству

$$\cos(2x-\pi/4) > 0.$$

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины диагоналей, равна длине отрезка, соединяющего середины сторон AD и BC. Найти величину одного из углов, образованных прямыми AB и CD.

5. Найти все решения уравнения

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}x\right)=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right),$$

удовлетворяющие условию

$$\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)<0.$$

2.С. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{y-x+1}=1,\\ \sqrt{x-2y+3}=3y-2x-1.\end{cases}$$

1978

Вариант 1.

1. Решить уравнение

$$\sin 2x+\sin 6x=3\cos^2 2x.$$

2. Из пункта A в пункт B выехал грузовой автомобиль. Через 1 час из пункта A в пункт B выехал легковой автомобиль, который прибыл в пункт B одновременно с грузовым автомобилем. Если бы грузовой и легковой автомобили одновременно выехали из пунктов A и B навстречу друг другу, то они бы встретились через 1 час 12 минут после выезда.

Сколько времени провел в пути от A до B грузовой автомобиль?

3.Н. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, основания которых являются квадратами, а каждая из боковых граней имеет периметр 6 см. Найти среди них параллелепипед с наибольшим объемом и вычислить величину этого объема.

4. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC длина боковой стороны AB равна 2 см. Биссектриса угла BAD пересекает прямую BC в точке E. В треугольник ABE вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке M и стороны BE в точке H. Длина отрезка MH равна 1 см. Найти величину угла BAD.

5. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases}y+2=(3-x)^3,\\ (2z-y)(y+2)=9+4y,\\ x^2+z^2=4x,\end{cases}$$

удовлетворяющие условию $z\geqslant 0$.

3.С. Решить неравенство

$$\sqrt{2(5^x+24)}-\sqrt{5^x-7}\geqslant\sqrt{5^x+7}.$$

Вариант 2.

1. Решить уравнение

$$9\cos^4 x-\sin^4 x=2\sin^2 2x.$$

2. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Одновременно с ним из пункта B в пункт A выехал велосипедист, который встретил пешехода через 50 минут после своего выезда из B. Сколько времени потребовалось бы пешеходу для того, чтобы пройти весь путь из A в B, если известно, что велосипедист проделал бы тот же путь на 4 часа быстрее пешехода?

3.Н. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, объем каждого из которых равен 4 см^3, а основания являются квадратами. Найти среди них параллелепипед с наименьшим периметром боковой грани и вычислить величину этого периметра.

4. Из вершины B равнобедренного треугольника ABC на его основание AC опущена высота BD. Длина каждой из боковых сторон AB и BC треугольника ABC равна 8 см. В треугольнике BCD проведена медиана DE. В треугольник BDE вписана окружность, касающаяся стороны BE в точке K и стороны DE в точке M. Длина отрезка KM равна 2 см. Найти величину угла BAC.

5. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases}(2-x)(3x-2z)=3-z,\\ y^3+3y^2=x^3-3x+2,\\ z^2+y^2=6z,\end{cases}$$

удовлетворяющие условию $z\leqslant 3$.

3.С. Решить неравенство

$$\sqrt{13^x-5}\leqslant\sqrt{2(13^x+12)}-\sqrt{13^x+5}.$$

Вариант 3.

1. Решить уравнение

$$\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}=3\sin^2\frac{x}{2}.$$

2. Из пункта A в пункт B выехал мотоциклист. Через два часа из пункта A в пункт B выехал автомобиль, который прибыл в пункт B одновременно с мотоциклистом. Если бы автомобиль и мотоциклист одновременно выехали из пунктов A и B навстречу друг другу, то они бы встретились через 1 час 20 минут после выезда. Сколько времени провел в пути от A до B мотоциклист?

3.Н. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, у которых одна из боковых граней является квад-

2.С. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+y-1}=1, \\ \sqrt{x-y+2}=2y-2. \end{cases}$$

Вариант 2.

1. Две бригады землекопов, работая совместно, вырыли первую траншею за два дня. После этого они начали рыть вторую траншею (той же глубины и ширины), в пять раз длиннее первой, в следующем порядке: сначала работала только первая бригада, а затем ее сменила и докопала траншею вторая бригада, выполнив при этом в полтора раза меньший объем работы, чем первая бригада. Полностью вторая траншея была вырыта за 21 день.

За сколько дней вторая бригада смогла бы вырыть первую траншею, если известно, что объем работы, выполняемый первой бригадой за один день, больше объема работы, выполняемого за один день второй бригадой?

2.Н. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=-x^2+2x+2, \quad y=-x^2-4x-1, \quad y=3.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{1/\sqrt{6}}(5^{x+1}-25^x)\geqslant -2.$$

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали перпендикулярны, а длина отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD, равна одному метру. Найти длину отрезка, соединяющего середины сторон BC и AD.

5. Найти все решения уравнения

$$\cos\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{9}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{5}{8}\pi-\frac{3}{2}x\right),$$

удовлетворяющие условию

$$\sin\frac{3}{2}x<0.$$

2.С. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3y+1}=2, \\ \sqrt{2x-y+2}=7y-6. \end{cases}$$

Вариант 3.

1. Из пункта A в пункт B доставлен груз. От пункта A его везли в автофургоне, а потом переложили на ожидавший грузовик, причем грузовик проехал до пункта B расстояние в три раза меньшее, чем автофургон от пункта A до места перегрузки (время, потребовавшееся на перегрузку, считается равным нулю). При этом для доставки груза из пункта A в пункт B потребовалось время, равное времени проезда из пункта A в пункт B со скоростью 64 км/ч. Если бы автофургон и грузовик выехали из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу, то они встретились бы через промежуток времени, необходимый для проезда из пункта A в пункт B со скоростью 120 км/ч.

С какой скоростью ехал грузовик, если известно, что скорость автофургона не превосходит 75 км/ч?

2.Н. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=x^2-4x+5,\quad y=x^2+8x+17,\quad y=1.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{1/\sqrt{2}}(3^{x+2}-9^x)\geqslant -6.$$

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD, равна одному метру. Прямые BC и AD перпендикулярны. Найти длину отрезка, соединяющего середины диагоналей AC и BD.

5. Найти все решения уравнения

$$2+\cos\frac{3}{2}x+\sqrt{3}\sin\frac{3}{2}x=4\sin^2\frac{x}{4},$$

удовлетворяющие условию

$$\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)>0.$$

2.С. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x-y+5}=3,\\ \sqrt{x+y-5}=-2x+11.\end{cases}$$

Вариант 4.

1. Две бригады штукатуров, работая совместно, оштукатурили жилой дом за шесть дней. В другой раз они штукатурили клуб и выполнили втрое больший объем работы, чем на штукатурке жилого дома. В клубе они работали по очереди: сначала работала первая бригада, а затем ее сменила и довела до конца штукатурку клуба вторая бригада, причем первая бригада выполнила вдвое больший объем работы, чем вторая. Клуб они оштукатурили за 35 дней.

За сколько дней первая бригада смогла бы оштукатурить жилой дом, если известно, что вторая бригада потратила бы на это более четырнадцати дней?

2.Н. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=-x^2-2x+4,\quad y=-x^2+4x+1,\quad y=5.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{1/\sqrt{3}}(2^{x+2}-4^x)\geqslant -2.$$

ратом, а периметр нижнего основания равен 12 см. Найти среди них параллелепипед с наибольшим объемом и вычислить величину этого объема.

4. В параллелограмме $ABCD$ сторона AD имеет длину 6 см. Биссектриса угла ADC пересекает прямую AB в точке E. В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T. Длина отрезка KT равна 3 см. Найти величину угла BAD.

5. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} (x+3)^3 = 3-2y, \\ z^2+4y^2 = 8y, \\ (2z-x)(x+3) = 5x+16, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $z \geqslant 0$.

3.С. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{1}{2}(17^x-8)} \leqslant \sqrt{17^x+15} - \sqrt{\frac{1}{2}(17^x+8)}.$$

Вариант 4.

1. Решить уравнение

$$5\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 2x.$$

2. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист. Одновременно с ним из пункта B в пункт A выехал мотороллер, который встретил велосипедиста через 45 минут после выезда из B. Сколько времени потребовалось бы велосипедисту для того, чтобы проделать весь путь из A в B, если известно, что мотороллер проделал бы тот же путь на 2 часа быстрее велосипедиста?

3.Н. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, объем каждого из которых равен $\frac{1}{2}$ см^3, а одна из боковых граней является квадратом. Найти среди них параллелепипед с наименьшим периметром основания и вычислить величину этого периметра.

4. На окружности радиуса 12 см с центром в точке O лежат точки A и B. Прямые AC и BC касаются этой окружности. Другая окружность с центром в точке M вписана в треугольник ABC и касается стороны AC в точке K, а стороны BC в точке H. Расстояние от точки M до прямой KH равно 3 см. Найти величину угла AOB.

5. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2(y-2)(y-z) = z-2, \\ 4x^2+z^2 = 4z, \\ 8x^3+z = 3xy, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $z \leqslant 2$.

3.С. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{1}{2}(15^x+9)} \leqslant \sqrt{15^x+12} - \sqrt{\frac{1}{2}(15^x-9)}.$$

1979

Вариант 1.

1. Решить уравнение

$$\sin 2x = 1 + \sqrt{2}\cos x + \cos 2x.$$

2.Н. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = -2x^2 + 3x + 6 \quad \text{и} \quad y = x + 2.$$

3. От пристани A вниз по течению реки одновременно отплыли пароход и плот. Пароход, доплыв до пристани B, расположенной в 324 км от пристани A, простоял там 18 часов и отправился назад в A. В тот момент, когда он находился в 180 км от A, второй пароход, отплывший из A на 40 часов позднее первого, нагнал плот, успевший к этому времени проплыть 144 км. Считая, что скорость течения реки постоянная, скорость плота равна скорости течения реки, а скорости пароходов в стоячей воде постоянны и равны между собой, определить скорости пароходов и течения реки.

4. Из точки M, расположенной внутри остроугольного треугольника ABC, опущены перпендикуляры на стороны. Длины сторон и опущенных на них перпендикуляров соответственно равны a и k, b и m, c и n. Вычислить отношение площади треугольника ABC к площади треугольника, вершинами которого служат основания перпендикуляров.

5. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} y\sin x = \log_2\left|\dfrac{y\sin x}{1+3y}\right|, \\ (6y^2+2y)\left(4^{\sin^2 x}+4^{\cos^2 x}\right) = 25y^2+6y+1, \end{cases}$$

для которых $|y| \leqslant 1$.

2.С. Решить неравенство

$$\sqrt{x+3} > x+1.$$

Вариант 2.

1. Решить уравнение

$$\sin 2x + \cos 2x = 1 + \sqrt{6}\sin x.$$

2.Н. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 3x^2 - 4x + 2 \quad \text{и} \quad y = 20 - x.$$

3. Пункты A, B, C удалены от пункта M соответственно на 60, 55 и 56 км. Одновременно из этих пунктов в пункт M

вышли три пешехода: первый — из A, второй — из B, третий — из C. Первый прошел весь путь с постоянной скоростью и прибыл в M на 2 часа раньше второго и третьего, прибывших одновременно. Второй пешеход, пройдя 40 км с той же скоростью, что и первый, сделал остановку на 1 час. Остаток пути он прошел со скоростью, которая меньше скорости третьего пешехода на столько же, на сколько скорость третьего меньше скорости первого. Третий пешеход весь путь прошел с постоянной скоростью. Определить скорости первого и третьего пешеходов.

4. Из точки M, расположенной внутри остроугольного треугольника ABC, опущены перпендикуляры на стороны AB, BC и CA. Длины перпендикуляров соответственно равны l, m и n. Вычислить площадь треугольника ABC, если величины углов BAC, ABC и ACB соответственно равны α, β и γ.

5. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} (3-y^2)\cos^2 x = \log_3\left|\dfrac{8+y}{y(1-\sin^2 x)}\right|, \\ (y^2+8y)\left(3^{2+2\sin^4 x} + 3^{2\cos^4 x+\sin^2 2x-4}\right) = 2y^2+16y+64, \end{cases}$$

для которых $1 \leqslant y < 10$.

2.С. Решить неравенство

$$x+2 < \sqrt{x+14}.$$

Вариант 3.

1. Решить уравнение

$$\cos 2x - \sin 2x = 1 - \cos x - \sin x.$$

2.Н. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 5 - x^2 \quad \text{и} \quad y = 3 - x.$$

3. Пешеход, двигаясь с постоянной скоростью, в первый день прошел 35 км. Во второй день, двигаясь также с постоянной, но меньшей скоростью, он прошел 45 км, причем находился в пути на 3 часа больше, чем в первый день. В третий день он прошел 25 км со скоростью первого дня и еще 12 км со скоростью, которая меньше его скорости во второй день на столько же, на сколько его скорость во второй день меньше скорости в первый день. В третий день пешеход провел в пути на 2 часа меньше, чем во второй. Определить скорости пешехода в первый и во второй дни.

4. Площадь треугольника ABC равна S. Величины углов CAB, ABC и ACB соответственно равны α, β и γ. Определить длины высот треугольника.

5. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 4 - y + \sin^2 x = \log_2\left|\dfrac{y+7}{y}\cos x\right|, \\ (y^2+7y)\left(2^{2+\cos 2x} + 2^{-2\cos^2 x}\right) = 3y^2+14y+49, \end{cases}$$

для которых $0 \leqslant y \leqslant 1$.

2.С. Решить неравенство

$$x+4<\sqrt{x+46}.$$

Вариант 4.

1. Решить уравнение

$$\cos 2x=1-2\sin x+\sqrt{3}\sin 2x.$$

2.Н. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=-3x^2-4x+16 \quad \text{и} \quad y=2x+7.$$

3. В резервуар поступает вода из труб двух диаметров. В первый день, работая одновременно, большая и малая трубы подали 14 м³ воды. Во второй день была включена одна малая труба. Она проработала на 5 часов больше, чем в первый день, и подала также 14 м³ воды. В третий день вода подавалась столько же времени, сколько и во второй, причем сначала работали обе трубы и подали 21 м³ воды, а затем работала лишь большая труба, которая подала еще 20 м³. Считая производительность труб постоянной, определить сколько воды в час подает каждая труба.

4. Длины сторон остроугольного треугольника ABC соответственно равны a, b и c. Точка M находится внутри треугольника. Величины углов AMB, BMC и CMA равны между собой. Найти сумму длин отрезков AM, BM и CM.

5. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2y\cos x=\log_2\left|\dfrac{y+1}{y\cos x}\right|, \\ (y^2+y)\left(3^{2-\cos 2x}+3^{-2\sin^2 x}\right)=4y^2+2y+1, \end{cases}$$

для которых $|y|\leqslant 0{,}5$.

2.С. Решить неравенство

$$x-3<\sqrt{x+27}.$$

§ 5. БИОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

1977

Вариант 1.

1. Решить уравнение

$$\sqrt{6-4x-x^2}=x+4.$$

2. В выпуклом четырехугольнике $MNLQ$ углы при вершинах N и L — прямые, а величина угла при вершине M равна $\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}$. Найти длину диагонали NQ, если известно, что длина стороны LQ вдвое меньше длины стороны MN и на 2 м больше длины стороны LN.

3.Н. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $y = x^2 - 4x + 5$ и касательными к ней: в точке (1,2) $y = -2x + 4$ и в точке (4, 5) $y = 4x - 11$.

4. Решить уравнение

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{12}\right) - \sqrt{6}\sin\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{12}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{5} + \frac{2\pi}{3}\right) - 2\sin\left(\frac{3x}{5} + \frac{\pi}{6}\right).$$

5. Найти все те значения параметра s, при каждом из которых корни уравнений $x^2 + \frac{3x}{s} + 2s = 0$ и $x^2 + \frac{12x}{s} - s = 0$ не перемежаются, т. е. оба уравнений имеют по два корня и между двумя корнями одного из уравнений нет ни одного корня другого уравнения.

3.С. Две бригады рабочих начали работу в 8 часов. Сделав вместе 72 детали, они стали работать раздельно. В 15 часов выяснилось, что за время раздельной работы первая бригада сделала на 8 деталей больше, чем вторая. На другой день первая бригада делала в 1 час на одну деталь больше, а вторая бригада в 1 час на одну деталь меньше. Работу бригады начали вместе в 8 часов и, сделав 72 детали, снова стали работать раздельно. Теперь за время раздельной работы первая бригада сделала на 8 деталей больше, чем вторая, уже к 13 часам. Сколько деталей в 1 час делала каждая бригада?

Вариант 2.

1. Решить уравнение

$$\sqrt{1 + 4x - x^2} = x - 1.$$

2. В выпуклом четырехугольнике $MNLQ$ углы при вершинах N и L — прямые, а величина угла при вершине M равна $\operatorname{arctg} 3$. Найти площадь четырехугольника, если известно, что длина стороны NL вдвое больше длины стороны LQ и на 5 м больше длины стороны NM.

3.Н. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $y = x^2 - 2x + 2$ и касательными к ней: в точке (0,2) $y = 2 - 2x$ и в точке (3,5) $y = 4x - 7$.

4. Решить уравнение

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{6}\sin\left(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - 2\cos\left(\frac{x}{6} + \frac{2\pi}{3}\right).$$

5. Найти все те значения параметра s, при каждом из которых корни уравнений $x^2 + 4x + 4s = 0$ и $x^2 + 3x + 6s = 0$ не перемежаются, т. е. оба уравнения имеют по два корня и между двумя корнями одного из уравнений нет ни одного корня другого уравнения.

3.С. Объем грунта, который вынимает в 1 час первый экскаватор, меньше, чем вынимает в 1 час второй экскаватор. Оба экскаватора начали работать вместе и вырыли котлован объемом 240 м³. Потом первый экскаватор стал рыть второй котлован, а второй экскаватор продолжал рыть первый котлован. Через 7 часов после начала их работы объем первого котлована оказался на 480 м³ больше объема второго котлована. На другой день второй экскаватор вынимал в 1 час на 10 м³ больше, а первый в 1 час вынимал на 10 м³ меньше. Вырыв вместе котлован в 240 м³, первый экскаватор стал рыть другой котлован, а второй продолжал рыть первый. Теперь объем первого котлована стал на 480 м³ больше объема второго котлована уже через 5 часов после начала работы экскаваторов. Сколько м³ грунта в 1 час вынимает каждый экскаватор?

Вариант 3.

1. Решить уравнение

$$\sqrt{4-6x-x^2}=x+4.$$

2. В выпуклом четырехугольнике $PQRS$ углы при вершинах Q и R — прямые, а величина угла при вершине P равна $\pi/3$. Найти длину диагонали PR, если известно, что длина диагонали QS равна $2\sqrt{13}$ м, а длина стороны PQ равна 6 м.

3.Н. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $y=\frac{1}{2}x^2-2x+2$ и касательными к ней: в точке $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ $y=-x+1{,}5$ и в точке $(4,2)$ $y=2x-6$.

4. Решить уравнение

$$2\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{8}\right)-2\cos\left(\frac{x}{6}-\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{12}-\frac{\pi}{16}\right)+3\sin\left(\frac{x}{12}-\frac{\pi}{16}\right).$$

5. Найти все те значения параметра s, при каждом из которых все корни уравнений $x^2+\frac{8x}{s}-2s=0$ и $x^2+\frac{6}{s}x-s=0$ различны и перемежаются, т. е. оба уравнения имеют по два корня и между двумя корнями одного уравнения находится ровно один корень другого уравнения.

3.С. Объем воды, который перекачивает первый насос в 1 час, меньше, чем объем воды, перекачиваемой в 1 час вторым насосом. Оба насоса включили одновременно, и они начали наполнять бассейн. После того, как в нем стало воды 400 м³, первый насос переключили на наполнение второго бассейна, а второй насос продолжал наполнять первый бассейн. Через 58 часов после включения насосов объем воды в первом бассейне стал больше объема воды во втором бассейне на 700 м³. На другой день первый насос стал перекачивать в 1 час на 3 м³ воды меньше, а второй насос в 1 час на 3 м³ воды больше, и они перекачали вместе в первый бассейн 400 м³. После этого первый насос переключили на наполнение второго бассейна, а второй насос продолжал наполнять первый бассейн. Через 33 часа после включения обоих насосов в первом бассейне оказалось на 700 м³ воды больше, чем во втором. Сколько м³ воды в 1 час перекачивал каждый из насосов?

Вариант 4.

1. Решить уравнение

$$\sqrt{4+2x-x^2}=x-2.$$

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы при вершинах A и B — прямые, величина угла при вершине D равна $\pi/4$, длина стороны BC равна 1 м, длина диагонали BD равна 5 м. Найти площадь этого четырехугольника.

3.Н. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $y = \frac{1}{2}x^2-3x+4{,}5$ и касательными к ней: в точке (1,2) $y=4-2x$ и в точке $\left(4, \frac{1}{2}\right)$ $y=x-3{,}5$.

4. Решить уравнение

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=3\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{8}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{8}\right).$$

5. Найти все те значения параметра s, при каждом из которых все корни уравнений $x^2+3x+2s=0$ и $x^2+6x+5s=0$ различны и перемежаются, т. е. оба уравнения имеют по два корня и между двумя корнями одного уравнения находится ровно один корень другого уравнения.

3.С. По круговой ледяной дорожке стадиона длиной в 400 м стартовали одновременно из одной точки, но в противоположных направлениях, два конькобежца (разрядник и начинающий). Когда они встретились, начинающий мгновенно повернул и побежал вслед за разрядником. Разрядник догнал начинающего (обогнав его на круг) через 2 мин 5 с после старта. Если бы скорость разрядника была на 2 м/с больше, а скорость начинающего была на 2 м/с меньше, то эта вторая встреча произошла бы через 1 мин 15 с после старта. Найти скорости конькобежцев.

1978

Вариант 1.

1. Решить уравнение

$$\cos 2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+4\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5}{2}.$$

2.Н. Найти числа A и B такие, чтобы функция вида

$$f(x)=A\sin\pi x+B$$

удовлетворяла условиям

$$f'(1)=2 \quad \text{и} \quad \int_0^2 f(x)\,dx=4.$$

3. Дана окружность с центром в точке O и радиусом 2. Из конца отрезка OA, пересекающегося с окружностью в точке M, проведена касательная AK к окружности. Величина угла OAK равна $\pi/3$. Найти радиус окружности, касающейся отрезков AK, AM и дуги MK.

4. Решить неравенство

$$9^{\sqrt{x^2-3}}+3<3^{\sqrt{x^2-3}-1}\cdot 28.$$

5. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x|x+2a|+1-a=0$$

имеет единственное решение.

2.С. В реку впадает приток. Пароход отходит от пристани A на притоке, идет вниз по течению 80 км до реки, далее по реке вверх против течения до пристани B, затратив 18 часов на весь путь от A до B. Затем пароход возвращается обратно. Время обратного движения от B до A по тому же пути равно 15 часам. Собственная скорость парохода, т. е. скорость парохода в стоячей воде, равна 18 км/ч. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Каково расстояние от пристани A до пристани B и какова скорость притока?

Вариант 2.

1. Решить уравнение

$$\sin^2 2x-\cos^2 x+\frac{3}{4}=0.$$

2.Н. Найти числа A и B такие, чтобы функция вида

$$f(x)=A\cdot 3^x+B$$

удовлетворяла условиям

$$f'(0)=2 \quad \text{и} \quad \int_1^2 f(x)\,dx=12.$$

3. Радиус OM окружности с центром в точке O и хорда KP пересекаются в точке A. Длины отрезков OM и OA равны соответственно r и a. Величина угла KAM равна α (α меньше $\pi/2$). Найти радиус окружности, касающейся отрезков AK, AM и дуги MK.

4. Решить неравенство

$$\log_3^2(x-x^2+2)+3\log_{1/3}(x-x^2+2)+2\leqslant 0.$$

5. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2+4x-2|x-a|+2-a=0$$

имеет ровно два различных решения.

2.С. В озеро впадают две реки. Лодка отплывает от пристани A на первой реке, плывет 36 км вниз по течению до озера, далее 19 км по озеру (в озере нет течения) и 24 км по второй реке вверх против течения до пристани B, затратив 8 часов на весь путь от A до B. Из этих 8 часов 2 часа лодка плывет по озеру. Скорость течения первой реки на 1 км/ч больше, чем скорость течения второй реки. Найти скорости течения каждой реки. (Собственная скорость лодки, т. е. скорость лодки в стоячей воде, постоянна.)

Вариант 3.

1. Решить уравнение

$$2\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-3\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2.$$

2.Н. Найти числа A и B такие, чтобы функция вида

$$f(x)=A\sin 2x+B$$

удовлетворяла условиям

$$f'(0)=4 \quad \text{и} \quad \int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx=3.$$

3. Дана окружность с центром в точке O и радиусом r. Из точки A отрезка OA, пересекающегося с окружностью в точке M, проведена секущая к окружности, пересекающая окружность в точках K и P, при этом точка K лежит между точками A и P. Величина угла MAK равна $\pi/3$. Длина отрезка OA равна a. Найти радиус окружности, касающейся отрезков AM, AK и дуги MK.

4. Решить неравенство

$$4^{\sqrt{9-x^2}+1}+2<2^{\sqrt{9-x^2}}\cdot 9.$$

5. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x|x-2a|-1-a=0$$

имеет единственное решение.

2.С. В реку впадает приток. Пароход отходит от пристани A на притоке, идет вниз по течению 60 км до реки, далее по реке вниз по течению 65 км до пристани B. Затем по тому же пути пароход возвращается обратно, затратив 10 часов на весь обратный путь от B до A. На путь от пристани A до реки пароход тратит 3 часа 45 минут. Скорость течения реки ниже впадения в нее притока на 1 км/ч меньше скорости течения притока. Собственная скорость парохода, т. е. скорость парохода в стоячей воде, постоянна. Найти собственную скорость парохода.

Вариант 4.

1. Решить уравнение

$$\sin^4 x+5\cos 2x+4=0.$$

2.Н. Найти числа A и B такие, чтобы функция вида

$$f(x) = A \cdot 2^x + B$$

удовлетворяла условиям

$$f'(1) = 2 \quad \text{и} \quad \int_0^3 f(x)\,dx = 7.$$

3. Из точки M на окружности радиуса r проведены диаметр MK и хорда MP. Величина угла PMK равна α. Найти радиус окружности, касающейся отрезков MK, MP и дуги PK.

4. Решить неравенство

$$\log_3^2\left(x - \frac{2}{3}x^2\right) + \log_{1/3}\left(x - \frac{2}{3}x^2\right) \leqslant 2.$$

5. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 - 4x - 2|x - a| + 2 + a = 0$$

имеет ровно два различных решения.

2.С. В озеро впадают две реки. Лодка отплывает от пристани A на первой реке, плывет 24 км вниз до озера, далее 2 часа плывет по озеру (в озере нет течения) и затем 32 км по второй реке против течения до пристани B, затратив 8 часов на весь путь от A до B. Если бы лодка проплыла по озеру еще дополнительно 18 км, то на весь путь от A до B она затратила бы 10 часов. Скорость течения первой реки на 2 км/ч больше, чем скорость течения второй реки. Найти скорость течения каждой реки. (Собственная скорость лодки, т. е. скорость лодки в стоячей воде, постоянна.)

1979

Вариант 1.

1.Н. Найти все значения x, при каждом из которых касательные к графикам функций

$$y(x) = 3\cos 5x \quad \text{и} \quad y(x) = 5\cos 3x + 2$$

в точках с абсциссой x параллельны.

2. Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 2400 км, навстречу друг другу выезжают одновременно пассажирский и скорый поезда. Каждый из них идет с постоянной скоростью, и в некоторый момент времени они встречаются. Если бы оба поезда шли со скоростью скорого поезда, то их встреча произошла бы на три часа раньше фактического момента встречи. Если бы оба поезда шли со скоростью пассажирского поезда, то их встреча произошла бы на пять часов позже фактического момента встречи. Найти скорости поездов.

3. Около окружности радиуса R описана трапеция. Хорда, соединяющая точки касания окружности с боковыми сторонами трапеции, параллельна основаниям трапеции. Длина этой хорды равна b. Найти площадь трапеции.

4. Решить неравенство

$$\log_{x+1}(x^2+x-6)^2 \geqslant 4.$$

5. Найти все пары чисел x и y, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} (\sqrt{3}+1)(1+\cos(xy)\sin(xy)) = (\sqrt{3}+1)\sin^2(xy)+\cos(2xy), \\ x^2y^2-y^2+1=0, \\ \dfrac{1}{x^2}+y^2 \leqslant 6. \end{cases}$$

1.С. Решить уравнение

$$\cos 3x = 1-\sqrt{3}\sin 3x.$$

Вариант 2.

1.Н. Найти все значения x, при каждом из которых касательная к графику функции

$$y(x) = \cos 7x + 7\cos x$$

в точке с абсциссой x параллельна касательной к этому же графику в точке с абсциссой $\pi/6$.

2. Два насоса различной мощности, работая вместе, наполняют бассейн за четыре часа. Для наполнения бассейна наполовину первому насосу требуется времени на четыре часа больше, чем второму насосу для наполнения бассейна на три четверти. За какое время может наполнить бассейн каждый из насосов в отдельности?

3. Около окружности радиуса R описан параллелограмм. Площадь четырехугольника с вершинами в точках касания окружности и параллелограмма равна S. Найти длины сторон параллелограмма.

4. Решить неравенство

$$\log_{9x^2}(6+2x-x^2) \leqslant 1/2.$$

5. Найти все пары чисел x и y, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} \cos(xy)-3\sin(xy)\cos(xy) = 2(\cos y)\cos(2xy-y)-2\cos^2(xy-y), \\ x^2-xy+1=0, \\ x^4+2xy \leqslant 5. \end{cases}$$

1.С. Решить уравнение

$$\sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{2}-\cos 2x.$$

Вариант 3.

1.Н. Найти все значения x, при каждом из которых касательные к графикам функций

$$y(x) = 2 - 14\sin 3x \quad \text{и} \quad y(x) = 6\sin 7x$$

в точках с абсциссой x параллельны.

2. Двое рабочих работали одно и то же время и изготовили вместе (работая с постоянной производительностью и независимо один от другого) 150 деталей. Если бы оба рабочих работали с производительностью первого рабочего, то для изготовления 150 деталей им потребовалось бы времени на 1/2 часа меньше. Если бы оба рабочих работали с производительностью второго рабочего, то для изготовления 150 деталей им потребовалось бы времени на 3/4 часа больше. Сколько деталей изготовит второй рабочий за восьмичасовой рабочий день?

3. Около окружности радиуса R описана трапеция $ABCD$, длина меньшего основания BC которой равна a. Пусть E — точка касания окружности со стороной AB и длина отрезка BE равна b. Найти площадь трапеции.

4. Решить неравенство

$$\log_{x-3}(x^2 - 4x)^2 \leqslant 4.$$

5. Найти все пары чисел x и y, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} 2 + \sin(2xy) = 2\cos^2(xy) - \left(\sqrt{3} - 1\right)\cos(2xy), \\ x^2y^2 - x^2 + 1 = 0, \\ \quad 2x^2 + 5xy \leqslant 0. \end{cases}$$

1.С. Решить уравнение

$$\sqrt{2}\sin 5x = 2 - \sqrt{2}\cos 5x.$$

Вариант 4.

1.Н. Найти все значения x, при каждом из которых касательная к графику функции

$$y(x) = \sin 8x + 4\sin 2x$$

в точке с абсциссой x параллельна касательной к этому же графику в точке с абсциссой $\pi/10$.

2. Два велосипедиста выезжают одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу и, двигаясь каждый с постоянной скоростью, встречаются через $2\frac{2}{5}$ часа. Если бы первый велосипедист увеличил свою скорость на 50%, а второй велосипедист увеличил свою скорость на 20%, то на преодоление расстояния между пунктами A и B первому велосипедисту понадобилось бы времени на 2/3 часа больше, чем второму велосипедисту. За какое время преодолевает расстояние между пунктами A и B каждый велосипедист, двигаясь с первоначальной скоростью?

3. В треугольник ABC вписана окружность радиуса R, касающаяся стороны AC в точке D, стороны AB в точке E и стороны BC в точке F. Длина отрезка AD равна R, а длина отрезка DC равна a. Найти площадь треугольника BEF.

4. Решить неравенство

$$\log_{(x-6)^2}(x^2-5x+9)\geqslant 1/2.$$

5. Найти все пары чисел x и y, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases}(3\cos(xy)-\sin(xy))\sin(xy)=2\cos(2xy+x)\cdot\cos x+2\sin^2(xy+x),\\ y^3-xy+1=0,\\ 4y^6-3xy+2\leqslant 0.\end{cases}$$

1.С. Решить уравнение

$$2\sin 3x=\sqrt{6}+2\cos 3x.$$

§ 6. ФАКУЛЬТЕТ ПОЧВОВЕДЕНИЯ

1977

Вариант 1.

1. Решить уравнение

$$2\sqrt{x+5}=x+2.$$

2.Н. Указать промежутки возрастания и убывания, а также точки максимума и минимума функции

$$f(x)=xe^{-3x}.$$

3. Решить уравнение

$$|\sin x|=\sin x+2\cos x.$$

4. Основание AB трапеции $ABCD$ вдвое длиннее основания CD и вдвое длиннее боковой стороны AD. Длина диагонали AC равна a, а длина боковой стороны BC равна b. Найти площадь трапеции.

5. Рота солдат прибыла на парад в полном составе прямоугольным строем по 24 человека в ряд. По прибытии оказалось, что не все солдаты могут участвовать в параде. Оставшийся для парада состав роты перестроили так, что число рядов стало на 2 меньше прежнего, а число солдат в каждом ряду стало на 26 больше числа новых рядов. Известно, что если бы все солдаты участвовали в параде, то роту можно было бы выстроить так, чтобы число солдат в каждом ряду равнялось числу рядов. Сколько солдат было в роте?

2.С. Решить уравнение

$$2\lg\left(x+\frac{1}{2}\right)-\lg(x-1)=\lg\left(x+\frac{5}{2}\right)+\lg 2.$$

Вариант 2.

1. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2+8}=2x+1.$$

2.Н. Указать промежутки возрастания и убывания, а также точки максимума и минимума функции

$$f(x)=(x+1)e^{2x}.$$

3. Решить уравнение

$$|\operatorname{tg} x|=\operatorname{tg} x-\frac{1}{\cos x}.$$

4. Длины основания CD, диагонали BD и боковой стороны AD трапеции $ABCD$ равны p. Длина боковой стороны BC равна q. Найти длину диагонали AC.

5. Бригады, состоящие из одинакового числа рабочих, получили на складе спецодежду. Каждый рабочий получил по два комплекта спецодежды, а каждой бригаде выдали на 20 комплектов больше, чем было бригад. Если бы бригад было на 4 больше и каждой бригаде выдавали бы по 12 комплектов, то спецодежды на складе не хватило бы. Сколько комплектов спецодежды было на складе?

2.С. Решить уравнение

$$\lg\left(x+\frac{4}{3}\right)-\lg\left(x-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\lg(x+6)-\frac{1}{2}\lg x.$$

Вариант 3.

1. Решить уравнение

$$4\sqrt{x+6}=x+1.$$

2.Н. Указать промежутки возрастания и убывания, а также точки максимума и минимума функции

$$f(x)=xe^{-3x}.$$

3. Решить уравнение

$$|\cos x|=\cos x-2\sin x.$$

4. Длины боковой стороны AD и основания CD трапеции $ABCD$ равны k, а длина основания AB равна $2k$. Длина диагонали AC равна l. Найти длину боковой стороны BC.

5. Для перевозки животных по железной дороге было выделено несколько вагонов. В пункте A в каждый вагон поместили по 12 животных. В пункте B часть животных была сдана. Оставшиеся животные были размещены поровну по вагонам, которых стало на 2 меньше. При этом оказалось, что число животных в каждом вагоне стало простым и число вагонов стало на 14 меньше числа животных в каждом из них. Сколько животных было отправлено из пункта A?

2.С. Решить уравнение

$$2\lg\left(\frac{1}{2}+x\right)=\lg(1-x)+\lg\left(\frac{3}{2}-x\right)+\lg 2.$$

Вариант 4.

1. Решить уравнение

$$\sqrt{5-x^2}=x-1.$$

2.Н. Указать промежутки возрастания и убывания, а также точки максимума и минимума функции

$$f(x)=(x-1)e^{3x}.$$

3. Решить уравнение

$$|\operatorname{ctg} x|=\operatorname{ctg} x+\frac{1}{\sin x}.$$

4. Длина диагонали BD трапеции $ABCD$ равна m, а длина боковой стороны AD равна n. Найти длину основания CD, если известно, что длины основания, диагонали и боковой стороны трапеции, выходящих из вершины C, равны между собой.

5. На празднике каждому ребенку было подарено по одинаковому количеству игрушек. Число игрушек, подаренных каждому ребенку, было на 9 меньше общего числа детей, присутствовавших на празднике. Если бы на празднике было 9 детей и каждому ребенку дарили бы на одну игрушку больше, чем раньше, то прежнего количества игрушек не хватило бы. Сколько игрушек было подарено, если известно, что число детей, присутствовавших на празднике, было нечетным?

2.С. Решить уравнение

$$\lg x-\frac{1}{2}\lg\left(x-\frac{1}{2}\right)=\lg\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\lg\left(x+\frac{1}{8}\right).$$

1978

Вариант 1.

1. Решить уравнение

$$\cos x=\cos 3x+2\sin 2x.$$

2. Решить неравенство

$$\log_2^2 x-3\log_2 x+2\geqslant 0.$$

3.Н. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=x^2+x$ и прямой $y=x+1$.

4. Плоскость прямоугольного треугольника, длины катетов которого равны 3 см и 4 см, образует с плоскостью P угол, величина которого равна α. Гипотенуза этого треугольника лежит в плоскости P. Найти величину угла, который образует меньший катет с плоскостью P.

5. Решить уравнение

$$\sqrt{x}\left(9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}}\right)=3^{2\sqrt{x^2-3}+1}-3^{\sqrt{x^2-3}+1}+6\sqrt{x}-18.$$

3.С. Имеется два слитка золота с серебром. Процентное содержание золота в первом слитке в два с половиной раза больше, чем процентное содержание золота во втором слитке. Если сплавить оба слитка вместе, то получится слиток, в котором будет 40% золота. Найти, во сколько раз первый слиток тяжелее второго, если известно, что при сплавке равных по весу частей первого и второго слитков получается слиток, в котором содержится 35% золота.

Вариант 2.

1. Решить уравнение

$$2\sin^2 2x+\sin^2 4x=5/4.$$

2. Решить неравенство

$$9^x-2\cdot 3^x<3.$$

3.Н. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\sqrt{x}$ и прямой $x-3y+2=0$.

4. Дан прямоугольник, длины сторон которого равны 1 см и 2 см. Меньшая сторона прямоугольника лежит на плоскости P, а диагональ прямоугольника образует с плоскостью P угол, величина которого равна α. Найти величину угла между плоскостью прямоугольника и плоскостью P.

5. Решить уравнение

$$x^2\log_6\sqrt{5x^2-2x-3}-x\log_{1/6}(5x^2-2x-3)=x^2+2x.$$

3.С. 40 кг раствора соли разлили в два сосуда так, что во втором сосуде чистой соли оказалось на 2 кг больше, чем в первом сосуде. Если во второй сосуд добавить 1 кг соли, то количество соли в нем будет в два раза больше, чем в первом сосуде. Найти вес раствора, находящегося в первом сосуде.

Вариант 3.

1. Решить уравнение

$$\sin^2 6x+5\sin^2 3x=2.$$

2. Решить неравенство

$$4^x-3\cdot 2^x<4.$$

3.Н. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\sqrt{x+1}$ и прямой $y=\frac{x}{3}+1$.

4. Основание равностороннего треугольника лежит в плоскости P, а боковая сторона этого треугольника образует с плоскостью P угол, величина которого равна α. Найти величину угла, который образует плоскость треугольника с плоскостью P.

5. Решить уравнение

$$x^2 \log_2 \frac{3+x}{10} - x^2 \log_{1/2}(2+3x) = x^2 - 4 + 2\log_{\sqrt{2}} \frac{3x^2+11x+6}{10}.$$

3.С. Имеется три слитка. Первый слиток весит 5 кг, второй — 3 кг и каждый из этих двух слитков содержит 30% меди. Если первый слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 56% меди, а если второй слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 60% меди. Найти вес третьего слитка и процент содержания меди в нем.

Вариант 4.

1. Решить уравнение

$$\sin 5x = \sin x + \sin 2x.$$

2. Решить неравенство

$$\log_3^2 x + \log_3 x \geqslant 2.$$

3.Н. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^2 - x$ и прямой $y = 3x$.

4. Плоскость равнобедренного треугольника образует с плоскостью P угол, величина которого равна β. Основание треугольника лежит в плоскости P. Величина угла при вершине треугольника равна α. Найти величину угла, который образует боковая сторона треугольника с плоскостью P.

5. Решить уравнение

$$2\sqrt{x}\cdot 4^x + 5\cdot 2^{x+1} + 2\sqrt{x} = 2^{2x+2} + 5\sqrt{x}\cdot 2^x + 4.$$

3.С. Имеется два сосуда, содержащие 4 кг и 6 кг раствора кислоты разных концентраций. Если их слить вместе, то получится раствор, содержащий 35% кислоты. Если же слить равные веса этих растворов, то получится раствор, содержащий 36% кислоты. Сколько килограмм кислоты содержится в каждом сосуде?

1979

Вариант 1.

1. Решить уравнение

$$2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} = 1.$$

2.Н. Найти наименьшее значение функции

$$y(x) = x + \frac{4}{(x-2)^2}$$

на отрезке [0,5].

3. Решить уравнение

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2}\sin 2x = (\sqrt{3}-1)\cos^2 x + 1.$$

4. В трапеции $ABCD$ отрезки AB и DC являются основаниями. Диагонали трапеции пересекаются в точке E. Найти площадь треугольника BCE, если $|AB|=30$ см, $|DC|=24$ см, $|AD|=3$ см и $\widehat{DAB}=\pi/3$.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0, \\ 3x^2-2y^2+5xy-17x-6y+20=0. \end{cases}$$

2.С. Решить неравенство

$$\frac{1}{\log_3(x^2-7x+12)} < \frac{1}{\log_3 20}.$$

Вариант 2.

1. Решить уравнение

$$\frac{2\lg x}{\lg x-1} = -\lg x + \frac{2}{\lg x-1}.$$

2.Н. Найти промежутки возрастания и убывания функции

$$y(x) = x + \frac{1}{x-1}.$$

3. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} 2x - 4\sin x\cos x + 1 = 4\sin^2 x.$$

4. Окружность касается сторон AB и AD прямоугольника $ABCD$ и проходит через вершину C. Сторону DC она пересекает в точке N. Найти площадь трапеции $ABND$, если $|AB|=9$ см и $|AD|=8$ см.

5. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} y^2-4xy+4y-1=0, \\ 3x^2-2xy-1=0, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $xy>0$.

2.С. Решить неравенство

$$2^{\sqrt{x^2-3x+3}} > 2^{\sqrt{x}}.$$

Вариант 3.

1. Решить уравнение

$$9^{\sqrt[3]{x}} - 2\cdot 3^{\sqrt[3]{x}} = 3.$$

2.Н. Найти наибольшее значение функции

$$y(x) = -\frac{1}{(x^2-1)^2}$$

на отрезке $[-1/2, 3]$.

3. Решить уравнение

$$4+2\sin^2 x=(3+\sqrt{3})\sin 2x+2(2-\sqrt{3})\cos^2 x.$$

4. В трапеции $ABCD$ отрезки AB и CD являются основаниями. Диагонали трапеции пересекаются в точке K. Найти площадь треугольника AKD, если $|AB|=27$ см, $|DC|=18$ см, $|AD|=3$ см, $|BC|=6\sqrt{2}$ см.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-2xy+2y^2+2x-8y+10=0, \\ 2x^2-7xy+3y^2+13x-4y-7=0. \end{cases}$$

2.С. Решить неравенство

$$\log_{0,3}(x^2+x+31)<\log_{0,3}(10x+11).$$

Вариант 4.

1. Решить уравнение

$$\frac{6\log_{32}^2 x-11\log_{32} x-2}{\log_{32} x-2}=2+\log_{32} x.$$

2.Н. Найти промежутки возрастания и убывания функции

$$y(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}.$$

3. Решить уравнение

$$4\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg} 2x}=5.$$

4. Окружность касается сторон AB и AD прямоугольника $ABCD$ и пересекает сторону DC в единственной точке F и сторону BC в единственной точке E. Найти площадь трапеции $AFCB$, если $|AB|=32$ см, $|AD|=40$ см и $|BE|=1$ см.

5. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2-3xy+6x-1=0, \\ y^2-xy-2=0, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $xy>0$.

2.С. Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+4}}>\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+3x+4}}.$$

§ 7. ГЕОГРАФИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

1977

Вариант 1.

1. Решить неравенство

$$2|x+1|>x+4.$$

2. В треугольнике ABC сторона AB имеет длину 3 м, высота CD, опущенная на сторону AB, имеет длину $\sqrt{3}$ м. Основание D высоты CD лежит на стороне AB, длина отрезка AD равна длине стороны BC. Найти длину стороны AC.

3.Н. Найти промежутки возрастания и убывания, а также точки максимума и минимума функции $y(x)=\frac{x}{\ln x}$.

4. Грузовик и гоночный автомобиль выехали одновременно из пункта A и должны прибыть в пункт C. Грузовик, двигаясь с постоянной скоростью, доехал до пункта C, проделав путь, равный 360 км. Гоночный автомобиль поехал по окружной дороге и сначала доехал до пункта B, расположенного в 120 км от пункта A, двигаясь со скоростью, вдвое большей скорости грузовика. После пункта B он увеличил свою скорость на 40 км/ч и проехал путь от пункта B до пункта C, равный 1000 км. Он прибыл в пункт C на 1 час 15 минут позднее грузовика. Если бы гоночный автомобиль весь свой путь от пункта A до пункта C ехал с той же скоростью, что и от пункта B до пункта C, то в пункт C он прибыл бы на 1 час позднее грузовика. Найти скорость грузовика.

5. Решить уравнение

$$2\sin(3x+\pi/4)=\sqrt{1+8\sin 2x\cos^2 2x}.$$

3.С. Решить уравнение

$$4^x-2^{x+1}=3.$$

Вариант 2.

1. Решить неравенство

$$3|x-1|\leqslant x+3.$$

2. В трапеции $ABCD$ длина основания AD равна 2 м, а длина основания BC равна 1 м. Длины боковых сторон AB и CD равны по 1 м. Найти длину диагонали трапеции.

3.Н. Найти промежутки возрастания и убывания, а также точки максимума и минимума функции

$$y(x)=\frac{x}{\ln^2 x}.$$

4. Парусник и пароход одновременно вышли из порта A и должны прибыть в порт D. Парусник, двигаясь с постоянной скоростью, прибыл в порт D, пройдя путь, равный 1200 км. Пароход заходил в порты B и C, причем до порта B, расположенного от порта A на расстоянии 480 км, он плыл со скоростью, вдвое большей скорости парусника. Затем он увеличил свою скорость на 4 км/ч и прошел путь между портами B и C, равный 1420 км, и далее путь между портами C и D, равный 1460 км. На стоянки в портах C и B он затратил 1 сутки. В порт D пароход прибыл на двое суток позднее парусника.

Если бы пароход плыл из порта A до порта B с той же скоростью, что и из порта B до порта D, то он прибыл бы в порт D на 1 сутки 20 часов позднее парусника. Найти скорость парусника.

5. Решить уравнение

$$\sqrt{3}\cos\frac{3}{4}x=\sqrt{\frac{3}{4}+6\sin^2\frac{x}{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{3\pi}{2}\right)}.$$

3.С. Решить уравнение

$$\log_2(x+3)+\log_2(x-1)=\frac{1}{\log_5 2}.$$

Вариант 3.

1. Решить неравенство

$$4|x+2|<2x+10.$$

2. В треугольнике ABC сторона AB имеет длину 6 м. Основание D высоты CD лежит на стороне AB. Длина отрезка AD равна 4 м, длина стороны BC равна 4 м. Найти длину высоты AE, которая опущена из вершины A на сторону BC.

3.Н. Найти промежутки возрастания и убывания, а также точки максимума и минимума функции

$$y(x)=\frac{x^2}{\ln x}.$$

4. Токарь и его ученик получили наряд на изготовление деталей. По нему ученик должен был изготовить 35 деталей, а токарь 90 деталей. Токарь и ученик начали работу одновременно. Сначала токарь сделал 30 деталей, обрабатывая в час вдвое больше деталей, чем ученик. Затем он стал обрабатывать в час на 2 детали больше и закончил свою работу на один час позже ученика. Если бы токарь и первые 30 деталей делал, обрабатывая в час столько же деталей, сколько при работе над оставшимися 60 деталями, он закончил бы работу на 30 минут позже ученика. Найти, сколько деталей в час обрабатывал ученик.

5. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{1-4\cos^2 3x}{8\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)}}=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right).$$

3.С. Решить уравнение

$$9^x-3^{x+1}=4.$$

Вариант 4.

1. Решить неравенство

$$3|x+1|\geqslant x+5.$$

2. В трапеции $ABCD$ длина меньшего основания BC равна 3 м, длины боковых сторон AB и CD равны по 3 м. Диагонали трапеции образуют между собой угол в $\pi/3$. Найти длину основания AD.

3.К. Найти промежутки возрастания и убывания, а также точки максимума и минимума функции

$$y(x)=\frac{1}{x\ln x}.$$

4. Имеется три насоса. Второй насос перекачивает за один час вдвое больше воды, чем первый, а третий насос перекачивает за 1 час на 8 куб. м больше, чем второй насос. Два бассейна вместимостью 600 куб. м и 1680 куб. м начали заполнять одновременно. Бассейн вместимостью 600 куб. м заполнил первый насос. В другой бассейн сначала одним вторым насосом накачали 240 куб. м, затем его без потери времени заменили третьим насосом, который и заполнил полностью этот бассейн. Второй бассейн был заполнен на 6 часов позднее, чем первый бассейн. Если бы второй бассейн с самого начала заполнял только третий насос, то он был бы заполнен на 5 часов позднее, чем первый бассейн. Сколько куб. м воды перекачивает за один час первый насос?

5. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{4\sin^2\left(\frac{3x}{4}-\frac{\pi}{4}\right)-1}{2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}}=2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right).$$

3.С. Решить уравнение

$$\log_3(x+4)+\log_3(x-1)=1+\frac{1}{\log_2 3}.$$

1978

Вариант 1.

1. Пароход, отчалив от пристани A, спустился вниз по течению реки на 60 км до устья впадающего в реку притока и поднялся вверх по притоку (против течения) на 20 км до пристани B. Весь путь от A до B пароход прошел за 7 часов. Скорость течения реки и скорость течения притока равны 1 км/ч. Найти собственную скорость парохода. (Собственная скорость — скорость в неподвижной воде.)

2.Н. Найти все значения x, при каждом из которых производная функции

$$y(x)=\sin x-\frac{2}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x$$

равна нулю.

3. В прямоугольном треугольнике ABC расположен прямоугольник $EKMP$ так, что сторона EK лежит на гипотенузе BC, а вершины M и P — на катетах AC и AB соответственно. Длина катета AC равна 3 см, а длина катета AB — 4 см. Найти длины сторон прямоугольника $EKMP$, если его площадь равна 5/3 см, а периметр меньше 9 см.

4. Решить неравенство

$$\sqrt{\log_9(3x^2-4x+2)}+1>\log_3(3x^2-4x+2).$$

5. Найти все значения параметра a, для каждого из которых существует только одно значение x, удовлетворяющее системе уравнений

$$\begin{cases} |x^2-5x+4|-9x^2-5x+4+10x|x|=0, \\ x^2-2(a-1)x+a(a-2)=0. \end{cases}$$

2.С. Решить уравнение

$$\cos x-2\cos 3x+\cos 5x=0.$$

Вариант 2.

1. От пристани A к пристани B, расположенной ниже по течению реки, отправился катер. Одновременно с ним из B в A (против течения) вышла моторная лодка. Дойдя до B, катер (не задерживаясь в B) повернул обратно и прибыл в A одновременно с моторной лодкой. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Найти собственные скорости (скорости в неподвижной воде) катера и моторной лодки, если известно, что у катера она была на 2 км/ч больше, чем у моторной лодки.

2.Н. Найти все значения x, при каждом из которых производная функции

$$y(x)=\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x$$

равна нулю.

3. В круговом секторе OAB, величина центрального угла которого равна $\pi/4$, расположен прямоугольник $KMPT$. Сторона KM прямоугольника лежит на радиусе OA, вершина P — на дуге AB, вершина T — на радиусе OB. Длина стороны KT на 3 см больше длины стороны KM. Площадь прямоугольника $KMPT$ равна 18 см². Найти длину радиуса.

4. Решить неравенство

$$\sqrt{8+2^{\sqrt{3-x}+1}-4^{\sqrt{3-x}}}+2^{\sqrt{3-x}+1}>5.$$

5. Найти все значения параметра a, для каждого из которых существует ровно два значения x, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} |x^2-7x+6|+x^2+5x+6-12|x|=0, \\ x^2-2(a-2)x+a(a-4)=0. \end{cases}$$

2.С. Решить уравнение

$$\cos 3x + \sin 2x - \cos x = 0.$$

Вариант 3.

1. Расстояние между пристанями A и B равно 48 км. Отчалив от пристани A в 9 часов, пароход проплыл вниз по течению реки до пристани B. Простояв у пристани B один час, пароход отправился в обратный рейс и прибыл в A в 17 часов того же дня. Скорость течения реки равна 2 км/ч. Найти собственную скорость (скорость в неподвижной воде) парохода, если известно, что на пути из A в B и из B в A она была одной и той же.

2.Н. Найти все значения x, при каждом из которых производная функции

$$y(x) = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$$

равна нулю.

3. В прямоугольном треугольнике ABC расположен прямоугольник $ADKM$ так, что его сторона AD лежит на катете AB, сторона AM — на катете AC, а вершина K — на гипотенузе BC. Длина катета AB равна 5 см, а длина катета AC — 12 см. Найти длины сторон прямоугольника $ADKM$, если его площадь равна $\frac{40}{3}$ см^2, а длина диагонали меньше 8 см.

4. Решить неравенство

$$\sqrt{\log_4\left(\frac{2x^2-3x+3}{2}\right)+1} > \log_2\left(\frac{2x^2-3x+3}{2}\right).$$

5. Найти все значения параметра a, для каждого из которых существует только одно значение x, удовлетворяющее системе уравнений

$$\begin{cases} |x^2+5x+4| - 9x^2 + 5x + 4 - 10x|x| = 0, \\ x^2 - 2(a+1)x + a(a+2) = 0. \end{cases}$$

2.С. Решить уравнение

$$\sin 3x - \sqrt{3}\cos 2x - \sin x = 0.$$

Вариант 4.

1. От пристани A к пристани B вниз по течению реки отправились одновременно моторная лодка и байдарка. Скорость течения реки равна 2 км/ч. Последнюю 1/10 часть пути от A до B моторная лодка плыла с выключенным мотором, и ее скорость относительно берега была равна скорости течения. На той части пути, где моторная лодка шла с работающим мотором, ее скорость была на 8 км/ч больше скорости байдарки.

К пристани B моторная лодка и байдарка прибыли одновременно. Найти собственную скорость (скорость в неподвижной воде) байдарки.

2.Н. Найти все значения x, при каждом из которых производная функции

$$y(x)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cos\frac{3x}{2}-2\cos\frac{x}{2}-\frac{2}{5}\cos\frac{5x}{2}$$

равна нулю.

3. В полукруге расположен прямоугольник $ABCD$ так, что его сторона AB лежит на диаметре, ограничивающем полукруг, а вершины C и D — на ограничивающей полукруг дуге. Длина радиуса полукруга равна 5 см. Найти длины сторон прямоугольника $ABCD$, если его площадь равна 24 см², а длина диагонали больше 8 см.

4. Решить неравенство

$$\sqrt{3-9^{\sqrt{2-x}}+2\cdot 3^{\sqrt{2-x}}}+2\cdot 3^{\sqrt{2-x}}>4.$$

5. Найти все значения параметра a, для каждого из которых существует ровно два значения x, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} |x^2+7x+6|+x^2-5x+6-12|x|=0, \\ x^2-2(a+2)x+a(a+4)=0. \end{cases}$$

2.С. Решить уравнение

$$\sin\frac{x}{2}-\sqrt{2}\sin\frac{3x}{2}+\sin\frac{5x}{2}=0.$$

1979

Вариант 1.

1.Н. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y(x)=x^3+3x^2-72x+90$$

на отрезке $[-5,5]$.

2. Решить уравнение

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

3. В треугольнике ABC известно, что $|AB|=6$, $|AB|=|BC|$. На стороне AB как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону BC в точке D так, что $|BD|:|DC|=2:1$. Найти длину основания треугольника AC.

4. В школьной газете сообщается, что процент учеников некоторого класса, повысивших во втором полугодии успеваемость, заключен в пределах от 2,9% до 3,1%. Определить минимально возможное число учеников в таком классе.

5. Найти все решения неравенства

$$\cos\frac{3}{2}-4x-x^2\geqslant 0,$$

лежащие в интервале $-\frac{21}{5}<x<0$.

1.С. Решить уравнение

$$4^{\log_9 x}-6\cdot 2^{\log_9 x}+2^{\log_3 27}=0.$$

Вариант 2.

1.Н. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y(x)=x^3-3x^2-105x+25$$

на отрезке $[-6,6]$.

2. Решить уравнение

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

3. На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу в точке D так, что $|AD|:|DB|=1:3$. Длина высоты, опущенной из вершины C прямого угла на гипотенузу, равна 3. Найти длину катета BC.

4. При подведении итогов соревнования вычислено, что процент числа членов бригады, перевыполнивших план, заключен в пределах от 92,5% до 93,5%. Определить минимально возможное число членов такой бригады.

5. Найти все решения неравенства

$$x^2+2x+\cos 5<0,$$

лежащие в промежутке $-2\leqslant x\leqslant -\frac{1}{3}$.

1.С. Решить уравнение

$$4^{\log_9 x}-5\cdot 2^{\log_9 x}+2^{\log_3 3}=0.$$

Вариант 3.

1.Н. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y(x)=2x^3+3x^2-120x+100$$

на отрезке $[-4,5]$.

2. Решить уравнение

$$\cos(x-\pi/3)-\cos(x-\pi/6)=\sin(x-\pi/4).$$

3. Длина стороны AB треугольника ABC равна 1. На стороне AB как на диаметре построена окружность, которая делит сторону AC точкой D пополам, а сторону BC точкой E в отношении $|BE|:|EC|=7:2$. Найти длину стороны AC.

4. В сообщении о лыжном кроссе сказано, что процент числа членов группы, принявших участие в кроссе, заключен в пределах от 96,8% до 97,2%. Определить минимально возможное число членов такой группы.

5. Найти все решения неравенства

$$\operatorname{tg}\frac{5}{2}+6x-x^2>0,$$

лежащие в промежутке $\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant 6$.

1.С. Решить уравнение

$$3\cdot 9^{\log_4 x}-10\cdot 3^{\log_4 x}+\log_2 8=0.$$

Вариант 4.

1.Н. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y(x)=2x^3-3x^2-36x+6$$

на отрезке $[-3,\ 2]$.

2. Решить уравнение

$$\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

3. На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу в точке D так, что $|AD|:|DB|=1:4$. Найти длину высоты, опущенной из вершины C прямого угла на гипотенузу, если известно, что длина катета BC равна 10.

4. В сообщении о реконструкции цеха указано, что в результате реконструкции процент высвободившихся рабочих заключен в пределах от 1,7% до 2,3%. Определить минимально возможное число рабочих, первоначально занятых в таком цехе.

5. Найти все решения неравенства

$$x^2-2x+\sin\frac{7}{2}\leqslant 0,$$

лежащие в интервале $-1/3<x<2$.

1.С. Решить уравнение

$$25^{\log_5 x}-6\cdot 5^{\log_5 x}+5^{1/2\log_5 4}=0.$$

§ 8. ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
(отделение геофизики)

1977

Вариант 1.

1. В бак может поступать вода через одну из двух труб. Через первую трубу бак можно наполнить на час быстрее, чем через вторую трубу. Если бы емкость бака была больше

на 2 м³, а пропускная способность второй трубы была бы больше на 4/3 м³/ч, то для наполнения бака через вторую трубу понадобилось бы столько же времени, сколько требуется для пропуска 2м³ воды через первую трубу. Какова емкость бака, если известно, что за время его наполнения через вторую трубу через первую трубу могло бы поступить 3 м³ воды?

2. Решить неравенство

$$x^2-|5x-3|-x<2.$$

3.Н. Найти все значения параметра a $(a>0)$, при каждом из которых площадь фигуры, ограниченной параболой $y(x)=$ $=(x^2+2ax+3a^2)/(1+a^4)$ и прямой $y=(a^2-ax)/(1+a^4)$, будет наибольшей.

4. В окружность с центром O вписан треугольник ABC $(\hat{A}>\pi/2)$. Продолжение биссектрисы AF угла A этого треугольника пересекает окружность в точке L, а радиус AO пересекает сторону BC в точке E. Пусть AH — высота треугольника ABC. Найти отношение площади треугольника OAL к площади четырехугольника $OEFL$, если известно, что $|AL|=4\sqrt{2}$, $|AH|=\sqrt{2\sqrt{3}}$ и $\widehat{AEH}=\pi/3$.

5. Найти все значения k, при каждом из которых существует хотя бы одно общее решение у неравенств

$$x^2+4kx+3k^2>1+2k \quad \text{и} \quad x^2+2kx\leqslant 3k^2-8k+4.$$

3.С. Решить уравнение

$$\sin^2(2+3x)+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)=\cos^2(2-5x)+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-6x\right).$$

Вариант 2.

1. Велосипедист проезжает половину расстояния от пункта A до пункта B на два часа быстрее, чем пешеход проходит треть расстояния от A до B. За время, требуемое велосипедисту на весь путь от A до B, пешеход проходит 24 км. Если бы скорость велосипедиста увеличилась на 7 км/ч, то за время, затрачиваемое пешеходом на прохождение 18 км, он смог бы покрыть путь от A до B и проехать еще 3 км. Найти скорость пешехода.

2. Решить неравенство

$$3x^2-|x-3|>9x-2.$$

3.Н. Найти все значения параметра a $(a>0)$, при каждом из которых площадь фигуры, ограниченной параболами $y(x)=(4a^2-2ax-x^2)/(1+a^4)$ и $y(x)=x^2/(1+a^4)$, будет наибольшей.

4. В окружность с центром O вписан треугольник BAC с тупым углом при вершине A. Точка P является серединой

большей из дуг, стягиваемых хордой BC. Радиус OA пересекает сторону BC в точке L, а хорда AP пересекает сторону BC в точке Q. Пусть AF — высота треугольника BAC. Найти отношение площади треугольника AOP к площади треугольника AQF, если известно, что длина биссектрисы угла A треугольника ALF равна $1/\sqrt{5}$, $|AP|=\sqrt{3}$ и $\widehat{OPA}=\pi/6$.

5. Найти все значения k, при каждом из которых каждое решение неравенства $x^2+3k^2-1 \geqslant 2k(2x-1)$ является решением неравенства $x^2+(2x-1)k+k^2>0$.

3.С. Решить уравнение

$$2\sin^2(5x+\pi/4)=1+\sin(3+2x)+2\sin^2(4x-3/2)\cos(6x+3/2).$$

Вариант 3.

1. Первая бригада разгрузила баржу. Вторая бригада, работая на 5 часов меньше первой, выгрузила бы треть всего груза. При повышении производительности труда каждой из бригад в три раза первой бригаде для разгрузки баржи потребовалось бы на один час больше времени, чем второй бригаде — на выгрузку половины всего груза. Если бы первая бригада свою почасовую выработку сократила на одну тонну, а вторая — увеличила на две тонны, то за время, затрачиваемое первой бригадой на разгрузку баржи с весом груза, уменьшенным на 2 т, вторая бригада могла бы разгрузить баржу с весом груза, увеличенным на 8 т. Найти вес груза на барже.

2. Решить неравенство

$$x^2+4 \geqslant |3x+2|-7x.$$

3.Н. Найти все значения параметра $a\,(a>0)$, при каждом из которых площадь фигуры, ограниченной параболами $y(x)=$ $=(2\sqrt[3]{a}\,x-x^2)/(1+a^3)$ и $y(x)=x^2/(1+a^3)$, будет наибольшей.

4. Около треугольника ABC ($\hat{A}>\pi/2$) описана окружность с центром O. Продолжение биссектрисы AL этого треугольника пересекает окружность в точке F. Обозначим через E точку пересечения радиуса AO со стороной BC. Пусть AH — высота треугольника ABC. Найти отношение площади четырехугольника $FOEL$ к площади треугольника AEL, если известно, что $|AH|=\sqrt{2}/2$, $|AF|=2\sqrt{3}$, $\widehat{AEH}=\pi/6$.

5. Найти все значения k, при каждом из которых любое число является решением хотя бы одного из неравенств:

$$x^2+5k^2+8k>2(3kx+2) \quad \text{и} \quad x^2+4k^2 \geqslant k(4x+1).$$

3.С. Решить уравнение

$$\cos(3+2x)+\sin 9x=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3x}{2}\right)-2\cos^2\left(\frac{3}{2}-5x\right).$$

Вариант 4.

1. Первый токарь выполнил заказ на выточку деталей. За это время второй токарь выточил бы 18 деталей, а работая на один час меньше, он выполнил бы половину того же заказа. Если бы часовая производительность первого токаря увеличилась на две детали, то за время, которое необходимо второму токарю на выточку 15 деталей, первый токарь мог бы выполнить заказ и сделать дополнительно 5 деталей. Найти число деталей в заказе.

2. Решить неравенство

$$|x-2| \leqslant 2x^2-9x+9.$$

3.Н. Найти все значения параметра $a\,(a>0)$, при каждом из которых площадь фигуры, ограниченной параболами $y(x)=$ $=2x^2/(1+a^3)$ и $y(x)=(x^2+9\sqrt[3]{a^2})/(1+a^3)$, будет наибольшей.

4. Около треугольника ABC $(\hat{A}>\pi/2)$ описана окружность с центром O. Точка F является серединой большей из дуг, стягиваемых хордой BC. Обозначим точку пересечения стороны BC с радиусом AO через E, а с хордой AF — через P. Пусть AH — высота треугольника ABC. Найти отношение площади четырехугольника $OEPF$ к площади треугольника APH, если известно, что радиус описанной окружности $R=2\sqrt{3}$, $|AE|=\sqrt{3}$ и $|EH|=3/2$.

5. Найти все значения k, при каждом из которых неравенство $\dfrac{x^2+k^2}{k\,(6+x)} \geqslant 1$ выполняется для всех x, удовлетворяющих условию $-1<x<1$.

3.С. Решить уравнение

$$\sin^2(\pi/4+7x)=\sin^2(12x+3)\cos(2x-3)+\cos^2(\pi/4+3+5x).$$

1978

Вариант 1.

1. Решить уравнение

$$-5\cos 4x=2\cos^2 x+1.$$

2.Н. Группу из 7 мальчиков и 8 девочек надо разбить на две команды так, чтобы в первой команде было 4 мальчика и 3 девочки. Сколькими способами это можно сделать?

3. Решить неравенство

$$\log_8 \log_{8/18}(x^2-4x+3) \leqslant 0.$$

4. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка K так, что $|AK|:|BK|=1:2$, а на стороне BC взята точка L так, что $|CL|:|BL|=2:1$. Пусть Q — точка пересечения прямых

AL и CK. Найти площадь треугольника ABC, если дано, что площадь треугольника BQC равна 1.

5. Пункт A стоит в поле на расстоянии 8 км от дороги. На дороге, которая является прямой линией, стоит пункт B. Скорость движения автомобиля по дороге в два раза больше, чем по полю. Известно, что если ехать из A по прямой до некоторой находящейся на дороге точки C, отличной от B, а затем по дороге до B, то при любом выборе точки C на это уйдет не меньше времени, чем потребуется, если ехать из A в B напрямик по полю. Чему равно расстояние от A до B?

2.С. Решить уравнение

$$|5x-13|-|6-5x|=7.$$

Вариант 2.

1. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} 2x+\sin 2x=\frac{8}{3}\operatorname{ctg} x.$$

2.Н. В распоряжении тренера хоккейной команды имеются два вратаря, шесть защитников и двенадцать нападающих. Сколькими способами он может скомплектовать команду, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих?

3. Решить неравенство

$$\log_{8/3}\log_{1/2}(x^2-x-6)\geqslant 0.$$

4. В треугольнике ABC, площадь которого равна 6, на стороне AB взята точка K, делящая эту сторону в отношении $|AK|:|BK|=2:3$, а на стороне AC — точка L, делящая AC в отношении $|AL|:|LC|=5:3$. Точка Q пересечения прямых CK и BL отстоит от прямой AB на расстоянии 1,5. Найти длину стороны AB.

5. Пункт A стоит в поле на некотором расстоянии от дороги. На дороге, которая является прямой линией, стоит пункт B так, что расстояние от A до B равно 10 км. Скорость движения автомобиля по дороге в три раза больше, чем по полю. Известно, что если ехать из A по прямой до некоторой находящейся на дороге точки C, отличной от B, а затем по дороге до B, то при любом выборе точки C на это уйдет не меньше времени, чем потребуется, если ехать из A в B напрямик по полю. Найти расстояние от пункта A до дороги.

2.С. Решить уравнение

$$|3x-8|-|3x-2|=6.$$

Вариант 3.

1. Решить уравнение

$$\cos 4x=\sin^2 x-3/4.$$

2.Н. Сколькими способами можно разместить 6 детей и 8 взрослых в автомобилях «Волга» и «Москвич», если в каждый автомобиль можно посадить 3 детей и 4 взрослых?

3. Решить неравенство

$$\log_{27/41} \log_5 (x^2 - 2x - 3) \geqslant 0.$$

4. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка K так, что $|AK| = 1$, $|KC| = 3$, а на стороне AB взята точка L так, что $|AL|:|LB| = 2:3$. Пусть Q — точка пересечения прямых BK и CL. Площадь треугольника AQC равна 1. Найти длину высоты треугольника ABC, опущенной из вершины B.

5. Пункт A стоит в поле на расстоянии 7,5 км от дороги. На дороге, которая является прямой линией, стоит пункт B. Скорость движения велосипедиста по дороге в четыре раза больше, чем по полю. Известно, что если ехать из A по прямой до некоторой находящейся на дороге точки C, отличной от B, а затем по дороге до B, то при любом выборе точки C на это уйдет не меньше времени, чем потребуется, если ехать из A в B напрямик по полю. Найти расстояние от A до B.

2.С. Решить уравнение

$$|16 - 9x| - |9x - 5| = 11.$$

Вариант 4.

1. Решить уравнение

$$\cos 2x = 2 \operatorname{tg}^2 x - \cos^2 x.$$

2.Н. На студенческую группу в 18 человек имеются 4 билета в цирк и 3 билета в кино. Сколькими способами можно распределить эти билеты?

3. Решить неравенство

$$\log_{12/11} \log_{1/2} (x^2 + 3x - 4) \leqslant 0.$$

4. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка L так, что $|AL| = 1$, $|BL| = 3$, а на стороне BC взята точка K, делящая эту сторону в отношении $|BK|:|KC| = 3:2$. Точка Q пересечения прямых AK и CL отстоит от прямой BC на расстоянии 1,5. Вычислить синус угла ABC.

5. Пункт A стоит в поле на некотором расстоянии от дороги. На дороге, которая является прямой линией, стоит пункт B так, что расстояние от A до B равно 20 км. Скорость движения автомобиля по дороге в четыре раза больше, чем по полю. Известно, что если ехать из A по прямой до некоторой находящейся на дороге точки C, отличной от B, а затем по дороге до B, то при любом выборе точки C на это уйдет не меньше времени, чем потребуется, если ехать из A в B

напрямик по полю. Найти расстояние от пункта A до дороги.

2.С. Решить уравнение

$$|7x-12|-|7x-11|=1.$$

1979

Вариант 1.

1. Найти все x, удовлетворяющие условию

$$\frac{a}{2a-x}=3.$$

2. Решить уравнение

$$1+\lg(1+x^2-2x)-\lg(1+x^2)=2\lg(1-x).$$

3. Найти все A, при каждом из которых уравнение

$$5\sin x+2\cos x=A$$

имеет решение.

4. Расстояние между двумя городами скорый поезд проходит на 4 часа быстрее товарного и на 1 час быстрее пассажирского. Известно, что скорость товарного поезда составляет 5/8 скорости пассажирского и на 50 км/ч меньше скорости скорого. Найти скорости товарного и скорого поездов.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина стороны AB равна $\frac{25}{64}$, длина стороны BC равна $12\frac{25}{64}$, длина стороны CD равна $6\frac{1}{4}$. Известно, что угол DAB острый, угол ADC тупой, причем синус угла DAB равен $\frac{3}{5}$, косинус угла ABC равен $-\frac{63}{65}$. Окружность с центром в точке O касается сторон BC, CD и AD. Найти длину отрезка OC.

6. Найти все неотрицательные x, при каждом из которых из неравенств

$$abx\geqslant 4a+7b+x,\quad a\geqslant 0,\ b\geqslant 0$$

следует неравенство $ab\geqslant 5$.

Вариант 2.

1. Найти все x, удовлетворяющие условию

$$\frac{a}{a-2x}=3.$$

2. Решить уравнение

$$2+\lg(1+4x^2-4x)-\lg(19+x^2)=2\lg(1-2x).$$

3. Найти все A, при каждом из которых уравнение

$$7\sin x+3\cos x=A$$

имеет решение.

4. Сплавляя два одинаковых по весу куска чугуна с разным содержанием хрома, получили сплав, в котором содержалось 12 кг хрома. Если бы первый кусок был в два раза тяжелее, то в сплаве содержалось бы 16 кг хрома. Известно, что содержание хрома в первом куске на 5% меньше, чем во втором. Найти процентное содержание хрома в каждом куске чугуна.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина стороны AB равна $\frac{5}{8}$, длина стороны BC равна $19\frac{33}{40}$, длина стороны AD равна $12\frac{4}{5}$. Известно, что угол DAB острый, синус угла DAB равен $\frac{3}{5}$, косинус угла ABC равен $-\frac{63}{65}$. Окружность с центром в точке O касается сторон BC, CD и AD. Найти длину отрезка OD.

6. Найти все неотрицательные x, при каждом из которых из неравенств

$$abx\geqslant 2a+9b+x,\quad a\geqslant 0,\quad b\geqslant 0$$

следует неравенство $ab\geqslant 4$.

Вариант 3.

1. Найти все x, удовлетворяющие условию

$$\frac{a}{2a-x}=2.$$

2. Решить уравнение

$$2+\lg(4+x^2+4x)-\lg(36+x^2)=2\lg(2+x).$$

3. Найти все A, при каждом из которых уравнение

$$4\sin x+9\cos x=A$$

имеет решение.

4. Бассейн заполняется водой через первую трубу на 5 часов быстрее, чем через вторую трубу, и на 30 часов быстрее, чем через третью трубу. Известно, что пропускная способность третьей трубы в 2,5 раза меньше пропускной способности первой трубы и на 40 м³/ч меньше пропускной способности второй трубы. Найти пропускные способности первой и третьей труб.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина стороны AD равна 7, длина стороны DC равна 5, длина стороны BC равна $5\frac{19}{20}$. Известно, что угол BAD острый, угол ABC тупой,

причем синус угла BAD равен $\frac{3}{5}$, косинус угла ADC равен $-\frac{3}{5}$. Найти радиус окружности, касающейся сторон AB, BC и AD.

6. Найти все неотрицательные x, при каждом из которых из неравенств

$$abx \geqslant 5a + 4b + x, \quad a \geqslant 0, \quad b \geqslant 0$$

следует неравенство

$$ab \geqslant 3.$$

Вариант 4.

1. Найти все x, удовлетворяющие условию

$$\frac{a}{a-2x} = 2.$$

2. Решить уравнение

$$1 + \lg(1 + x^2 + 2x) - \lg(6 + x^2) = 2\lg(1 + x).$$

3. Найти все A, при каждом из которых уравнение

$$2\sin x + 3\cos x = A$$

имеет решение.

4. Из пункта A в пункт B едет трактор. Радиус переднего колеса трактора меньше радиуса заднего колеса. На пути из A в B переднее колесо сделало на 200 оборотов больше, чем заднее. Если бы длина окружности переднего колеса была в $\frac{5}{4}$ раз больше, то на пути из A в B оно сделало бы на 80 оборотов больше, чем заднее колесо. Найти длины окружностей переднего и заднего колес трактора, если длина окружности заднего колеса на 1 м больше длины окружности переднего колеса.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина стороны AB равна $10\frac{3}{10}$, длина стороны AD равна 14, длина стороны CD равна 10. Известно, что угол DAB острый, причем синус угла DAB равен $\frac{3}{5}$, косинус угла ADC равен $-\frac{3}{5}$. Окружность с центром в точке O касается сторон AD, AB, BC. Найти длину отрезка BO.

6. Найти все неотрицательные x, при каждом из которых из неравенств

$$abx \geqslant 3a + 4b + x, \quad a \geqslant 0, \quad b \geqslant 0$$

следует неравенство $ab \geqslant 2$.

§ 9. ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
(отделение общей геологии)

1977

Вариант 1.

1. Решить неравенство

$$\frac{11\cdot 3^{x-1}-31}{4\cdot 9^{x}-11\cdot 3^{x-1}-5}\geqslant 5.$$

2. Два бегуна стартовали один за другим с интервалом в две минуты. Второй бегун догнал первого на расстоянии 1 км от точки старта, а пробежав от точки старта 5 км, он повернул обратно и встретился с первым бегуном. Эта встреча произошла через 20 минут после старта первого бегуна. Найти скорость второго бегуна.

3. Решить уравнение

$$\sin^2 1{,}5x+\sin^2(\pi/4-2{,}5x)=\sin^2 5{,}5x+\sin^2(\pi/4-6{,}5x).$$

4. В прямоугольном треугольнике ABC биссектриса BE прямого угла B делится центром O вписанной окружности в отношении $|BO|:|OE|=\sqrt{3}:\sqrt{2}$. Найти острые углы треугольника.

5.Н. Найти все значения параметра $a\,(a>0)$, при каждом из которых площадь фигуры, ограниченной параболой $y(x)=$ $=x^2-2x\sqrt[3]{\frac{a}{1+a^2}}+3$ и прямой $y=-3x\sqrt[3]{\frac{a}{1+a^2}}+3$, будет наибольшей.

5.С. Найти радиус шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна b, а угол между боковыми ребрами равен α.

Вариант 2.

1. Решить неравенство

$$\frac{4-7\cdot 5^{x}}{5^{2x+1}-12\cdot 5^{x}+4}\leqslant\frac{2}{3}.$$

2. Два лыжника стартовали на дистанции 10 км друг за другом с интервалом в 6 минут. Второй лыжник догнал первого в двух километрах от точки старта. Дойдя до поворота на отметке 5 км, второй лыжник повернул обратно и встретил первого на расстоянии 1 км от точки поворота. Найти скорость первого лыжника.

3. Решить уравнение

$$\cos 3x+\sin 7x=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5x}{2}\right)-2\cos^2\frac{9x}{2}.$$

4. В прямоугольном треугольнике ABC биссектриса AP острого угла A делится центром O описанной окружности в

отношении $|AO|:|OP|=(\sqrt{3}+1):(\sqrt{3}-1)$. Найти острые углы треугольника.

5.Н. Найти все значения параметра $a\,(a>0)$, при каждом из которых площадь фигуры, ограниченной параболой $y(x)=(1+a^2)^2\cdot x^2$ и прямой $y=a$, будет наибольшей.

5.С. В шар радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида. Угол между боковым ребром пирамиды и стороной основания равен α. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

Вариант 3.

1. Решить неравенство

$$\frac{2^{x+3}+11}{2^{2x+1}+2^x-15}\leqslant 3.$$

2. Два пловца стартовали один за другим в пятидесятиметровом бассейне на дистанции 100 метров. Второй пловец плыл со скоростью 1,5 м/с и догнал первого на отметке 21 метр, а затем, доплыв до противоположной стенки бассейна, повернул обратно и встретил первого пловца через 2/3 с после момента поворота. Найти интервал времени между моментами старта пловцов.

3. Решить уравнение

$$2\cos^2(\pi/4+3x)=1+\sin 4x+2\sin 5x\cdot\cos^2 x.$$

4. В треугольнике ABC биссектриса AP угла A делится центром O вписанной окружности в отношении $|AO|:|OP|=\sqrt{3}:2\sin\frac{5\pi}{18}$. Найти углы B и C, если известно, что угол A равен $\frac{5\pi}{9}$.

5.Н. Найти все значения параметра $p\,(p>0)$, при каждом из которых площадь фигуры, ограниченной параболой $y(x)=x^2+x\sqrt[3]{\frac{p}{1+p^2}}+1$ и прямой $y=2x\sqrt[3]{\frac{p}{1+p^2}}+1$, будет наибольшей.

5.С. Угол между основанием и боковой гранью правильной треугольной пирамиды равен α. Радиус шара, описанного около пирамиды, равен R. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

Вариант 4.

1. Решить неравенство

$$\frac{15-2\cdot 13^{x+1}}{6\cdot 13^{2x}-13^{x+1}+6}\geqslant 2.$$

2. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 70 км, выехал велосипедист, а через некоторое время —

мотоциклист, двигавшийся со скоростью 50 км/ч. Мотоциклист догнал велосипедиста на расстоянии 20 км от пункта A. Прибыв в пункт B, мотоциклист через 48 минут выехал обратно в пункт A и встретился с велосипедистом спустя 2 часа 40 минут после выезда велосипедиста из пункта A. Найти скорость велосипедиста.

3. Решить уравнение

$$\cos^2(\pi/4+5x)=\sin^2 x\cos 9x+\cos^2(\pi/4+4x).$$

4. В треугольнике ABC биссектриса AE относится к радиусу вписанной окружности как $\sqrt{2}:(\sqrt{2}-1)$. Найти углы B и C, если известно, что угол A равен $\pi/3$.

5.Н. Найти все значения параметра $p\,(p>0)$, при каждом из которых площадь фигуры, ограниченной параболой $y(x)=-(1+p^2)^2x^2+p$ и прямой $y=0$, будет наибольшей.

5.С. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно b. Радиус шара, описанного около пирамиды, равен R. Найти объем пирамиды.

1978

Вариант 1.

1. Решить уравнение

$$\sqrt{2}\sin x+\operatorname{ctg} x=0.$$

2. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист, а через четверть часа вслед за ним выехал автомобиль. На половине пути от A до B автомобиль догнал велосипедиста. Когда автомобиль прибыл в пункт B, велосипедисту оставалось проехать еще треть пути. За какое время велосипедист проехал путь от A до B, если известно, что скорости велосипедиста и автомобиля постоянны на всем пути от пункта A до пункта B?

3.Н. Найти наименьшее значение функции

$$y(x)=x\ln x-x\ln 5$$

на отрезке $[1,5]$.

4. В треугольнике ABC длина стороны AC равна 3, $\widehat{BAC}=\pi/6$ и радиус описанной окружности равен 2. Доказать, что площадь треугольника ABC меньше 3.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых существует хотя бы одно x, удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} x^2+(5a+2)x+4a^2+2a<0,\\ x^2+a^2=4.\end{cases}$$

3.С. Найти все x, удовлетворяющие неравенству

$$\log_x \frac{2x+2/5}{5(1-x)} > 0.$$

Вариант 2.

1. Решить уравнение

$$\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} x = 0.$$

2. Пешеход вышел из пункта A в пункт B. Через 3/4 часа из A в B выехал велосипедист. Когда велосипедист прибыл в пункт B, пешеходу оставалось пройти 3/8 всего пути. Сколько времени потратил пешеход на весь путь, если известно, что велосипедист догнал пешехода на половине пути из пункта A в пункт B и что скорости велосипедиста и пешехода постоянны?

3.Н. Найти наименьшее значение функции

$$y(x) = \frac{1}{2} x \ln x - x \ln 2$$

на отрезке [1,4].

4. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 4, $\widehat{CAB}$ равен $\pi/3$, а радиус описанной окружности равен 2,2. Доказать, что длина высоты, опущенной из вершины C на AB, меньше $11\sqrt{3}/5$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых существует хотя бы одно x, удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} x^2 + (2-3a)x + 2a^2 - 2a < 0, \\ ax = 1. \end{cases}$$

3.С. Найти все x, удовлетворяющие неравенству

$$\log_x \frac{4x+1}{6(x-1)} < 0.$$

Вариант 3.

1. Решить уравнение

$$\cos^2 x + \sin x - 1/4 = 0.$$

2. Пассажирский поезд вышел из пункта A в пункт B. Через три часа вслед за ним из A вышел скорый поезд. Скорый поезд догнал пассажирский на половине пути между пунктами A и B. В момент прибытия скорого поезда в пункт B пассажирский поезд прошел 13/16 расстояния от A до B. Сколько времени потратил пассажирский поезд на весь путь от A до B, если скорости движения пассажирского и скорого поездов постоянны?

3.Н. Найти наименьшее значение функции

$$y(x)=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{6}x\ln 9$$

на отрезке [1,3].

4. В треугольниие ABC длина стороны AB равна 5, $\widehat{CAB}$ равен $\pi/6$, радиус описанной окружности равен $2\sqrt{2}$. Доказать, что площадь треугольника ABC строго меньше $5\sqrt{2}$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых существует хотя бы одно x, удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} x^2-(3a+1)x+2a^2+2a<0, \\ x+a^2=0. \end{cases}$$

3.С. Найти все x, удовлетворяющие неравенству

$$\log_x\frac{3x+2}{4(1-x)}>0.$$

Вариант 4.

1. Решить уравнение

$$4\sin^2 x-4\cos x-1=0.$$

2. Пароход отплыл из порта A в порт B, через $7\frac{1}{2}$ часов вслед за ним из порта A вышел катер. На половине пути от A до B катер догнал пароход. Когда катер прибыл в B, пароходу осталось плыть 3/10 всего пути. Сколько времени потребовалось пароходу на весь путь от A до B, если скорости катера и парохода постоянны на протяжении всего плавания?

3.Н. Найти наименьшее значение функции

$$y(x)=2x\ln x-x\ln 49$$

на отрезке [1,7].

4. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 4, $\widehat{CAB}$ равен $\pi/6$, а радиус описанной окружности равен 3. Доказать, что длина высоты, опущенной из вершины C на сторону AB, меньше 3.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых существует хотя бы одно x, удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} x^2+\left(1-\frac{3}{2}a\right)x+\frac{a^2}{2}-\frac{a}{2}<0, \\ x=a^2-\frac{1}{2}. \end{cases}$$

3.С. Найти все x, удовлетворяющие неравенству

$$\log_x\frac{2x+5}{4(x-1)}<0.$$

Вариант 1.

1. Решить уравнение

$$|2x-3|=3-2x.$$

2. Решить уравнение

$$\log_2(x-1)+\log_2 x=1.$$

3. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2y}+\sqrt{12}\operatorname{ctg} x=4, \\ 2\sqrt{2y}-\sqrt{27}\operatorname{ctg} x=1. \end{cases}$$

4. Экскаваторщик получил задание выкопать две траншеи одинаковой глубины на различных участках строительной площадки. Экскаватор сначала вырыл первую траншею длиной 5 метров, потом доехал до второго участка и вырыл вторую траншею длиной 3 метра. Время, затраченное на прокладку первой траншеи, на 1 час 12 минут меньше, чем время, затраченное на переезд экскаватора и рытье второй траншеи. Если бы производительность экскаватора была в 4 раза меньше, то время, затраченное на прокладку первой траншеи, равнялось бы времени переезда экскаватора с одного места работы на другое. Определить длину траншеи, выкапываемой экскаватором за один час.

5. Основанием пирамиды $SABC$ является правильный треугольник, длина стороны которого равна $\sqrt{3}$. Основанием высоты, опущенной из вершины S, является точка O, лежащая внутри треугольника ABC. Расстояние от точки O до стороны AC равно 1. Синус угла OBA относится к синусу угла OBC как 2:1. Площадь грани SAB равна $\sqrt{5/6}$. Найти объем пирамиды.

6. Найти все значения α, при каждом из которых уравнение

$$x^2+\frac{6x}{\sqrt{\sin\alpha}}+\frac{9\sqrt{3}}{\cos\alpha}+36=0$$

имеет единственное решение.

Вариант 2.

1. Решить уравнение

$$4-5x=|5x-4|.$$

2. Решить уравнение

$$\log_2 x+\log_2(x+2)=1.$$

3. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} y+\sin x=5, \\ 4y+2\sin x=19. \end{cases}$$

4. Буровой установкой пробурили скважину в точке A глубиной 1800 метров, затем установку перевезли в точку B, где пробурили вторую скважину глубиной 750 метров. На бурение первой скважины было затрачено времени на один месяц больше, чем на перевозку установки и бурение второй скважины. Если бы скважину в точке A бурили с удвоенной скоростью, то время, затраченное на ее бурение, совпало бы со временем, необходимым на перевозку установки из A в B. Определить скорость бурения в метрах за месяц.

5. Основанием пирамиды $SABC$ является правильный треугольник, длина стороны которого равна $2\sqrt{3}$. Основанием высоты, опущенной из вершины S, является точка O, лежащая внутри треугольника ABC. Расстояния от точки O до сторон AB, BC и CA находятся в отношении $2:1:3$ соответственно. Площадь грани SBC равна $\sqrt{15/2}$. Найти длину высоты пирамиды.

6. Найти все значения α, при каждом из которых уравнение

$$x^2+\frac{2x}{\sqrt{\sin\alpha}}+\frac{1}{\cos\alpha}+2\sqrt{2}=0$$

имеет единственное решение.

Вариант 3.

1. Решить уравнение

$$|3x-5|=5-3x.$$

2. Решить уравнение

$$\log_2(x+1)+\log_2 x=1.$$

3. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3y+2\operatorname{tg} x=4, \\ 2y+3\operatorname{tg} x=1. \end{cases}$$

4. Ученик выходит из трамвая на остановке A и идет до школы пешком, затратив на это на 1 минуту больше, чем если бы он проехал дальше до остановки B и прошел пешком от B до школы. Если бы ученик шел от A до школы с удвоенной скоростью, то он пришел бы в школу за время, необходимое трамваю на путь от A до B. Определить скорость ученика, идущего пешком, если расстояние от A до школы 300 метров, от B до школы — 100 метров.

5. Основанием пирамиды $SABC$ является правильный треугольник, длина стороны которого равна 1. Основанием вы-

соты, опущенной из вершины S, является точка O, лежащая внутри треугольника ABC. Расстояние от точки O до стороны CA равно $\sqrt{3}/4$, а расстояние от O до AB относится к расстоянию от O до BC как $3:4$. Площадь грани SBC равна $\sqrt{61}/28$. Определить объем пирамиды.

6. Найти все значения α, при каждом из которых уравнение

$$x^2+\frac{6x}{\sqrt{\sin\alpha}}+\frac{3\sqrt{3}}{\cos\alpha}+12\sqrt{3}=0$$

имеет единственное решение.

Вариант 4.

1. Решить уравнение

$$7-4x=|4x-7|.$$

2. Решить уравнение

$$\lg x+\lg(x-3)=1.$$

3. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 4y+\sqrt{3}\cos x=-1/2, \\ 28y+4\sqrt{3}\cos x=1. \end{cases}$$

4. Самолет находился в испытательном полете по маршруту «замкнутый треугольник»

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & B. \\ \nwarrow & C & \swarrow \end{array}$$

На отрезке AB он летел со скоростью v км/ч, а на отрезках BC и CA со скоростью w км/ч. На полет от C до A было затрачено на два часа меньше, чем на полет от A до C по маршруту. Если бы на отрезке CA скорость самолета была в три раза меньше, то время на полет от C до A равнялось бы времени, затраченному на полет от A до B со скоростью v км/ч. Определить скорость w км/ч, если расстояние от B до C равно 800 км, а расстояние от C до A равно 500 км.

5. Основанием пирамиды $SABC$ является правильный треугольник, длина стороны которого равна 2. Основанием высоты, опущенной из вершины S, является точка O, лежащая внутри треугольника ABC. Известно, что синус угла OAB относится к синусу угла OAC как $2:3$, а синус угла OCB относится к синусу угла OCA как $4:3$. Площадь грани SAC равна $\sqrt{13}/3$. Найти длину высоты пирамиды.

6. Найти все значения α, при каждом из которых уравнение

$$x^2-\frac{2x}{\sqrt{\sin\alpha}}-\frac{1}{\cos\alpha}-2\sqrt{2}=0$$

имеет единственное решение.

§ 10. ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
(отделение политической экономии)

1977

Вариант 1.

1. Для разгрузки парохода выделено две бригады грузчиков. Если ко времени, за которое может самостоятельно разгрузить пароход первая бригада, прибавить время, за которое может самостоятельно разгрузить пароход вторая бригада, то получится 12 часов. Определить эти времена, если их разность составляет 45% времени, за которое обе бригады могут разгрузить пароход совместно?

2. Решить уравнение

$$8\sin^4 x+13\cos 2x=7.$$

3.Н. Найти наименьшее из расстояний от точки M с координатами $(0, -2)$ до точек (x, y) таких, что $y=\frac{16}{\sqrt{3}\,x^2}-2$, $x>0$.

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки E, F, H, G являются соответственно серединами отрезков AB, BC, CD, AD; O — точка пересечения отрезков EH и FG. Известно, что $|EH|=a$, $|FG|=b$, $\widehat{FOH}=\pi/3$. Найти длины диагоналей четырехугольника $ABCD$.

5.Н. Определить все a, для каждого из которых неравенство

$$25y^2+\frac{1}{100}\geqslant x-axy+y-25x^2$$

выполняется для любых пар чисел (x, y) таких, что $|x|=|y|$.

3.С. Найти все положительные числа x, y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x^{y+4x}=y^{6(y-x/3)}, \\ x^3=y^{-1}. \end{cases}$$

5.С. Найти все a, при каждом из которых неравенство

$$3-|x-a|>x^2$$

имеет хотя бы одно отрицательное решение.

Вариант 2.

1. Из двух пунктов A и B навстречу друг другу одновременно выезжают велосипедист и автобус. Время, затрачиваемое велосипедистом на проезд из A в B на 2 часа 40 минут больше времени, которое тратит автобус на проезд из B в A, а сумма этих времен в $5\frac{1}{3}$ раза больше времени, прошедшего от начала движения велосипедиста и автобуса до момента их встречи.

Определить, какое время велосипедист затрачивает на проезд из A в B, а автобус на проезд из B в A.

2. Решить уравнение

$$2\cos^4 x + 1 = 3\cos 2x.$$

3.Н. Найти наименьшее из расстояний от точки M с координатами $(2, 0)$ до точек графика функции $y(x)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{27(x-2)}}$.

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длины диагоналей AC и BD равны соответственно a и b. Точки E, F, G и H являются соответственно серединами сторон AB, BC, CD и DA. Площадь четырехугольника $EFGH$ равна S. Найти длины диагоналей EG и HF четырехугольника $EFGH$.

5.Н. Определить все a, для каждого из которых неравенство

$$16x^2 + axy - y \geqslant x - 16y^2 - \frac{1}{64}$$

выполняется для любых пар чисел (x, y) таких, что $|x| = |y|$.

3.С. Найти все положительные числа x, y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} y^{1/3} = x^{-2}, \\ (xy)^x \cdot x^{-y} = y^{\frac{28x-7y}{3}}. \end{cases}$$

5.С. Найти все a, при каждом из которых неравенство

$$2 > |x+a| + x^2$$

имеет хотя бы одно положительное решение.

Вариант 3.

1. Для прокладки траншеи выделены два экскаватора разных типов. Время, необходимое первому экскаватору для самостоятельной прокладки траншеи, на 3 часа меньше времени, необходимого второму экскаватору для самостоятельной прокладки траншеи. Сумма этих времен в $4\frac{4}{35}$ раза больше времени, необходимого для прокладки траншеи при совместной работе двух экскаваторов. Определить, сколько времени необходимо каждому экскаватору для самостоятельной прокладки траншеи.

2. Решить уравнение

$$4\sin^4 x + 7\cos 2x = 1.$$

3.Н. Найти наименьшее из расстояний от точки M с координатами $(0, 1)$ до точек графика функции $y(x) = 1 + \frac{1}{4\sqrt{3x^{3/2}}}$.

4. Пусть $EFGH$ — выпуклый четырехугольник, а K, L, M, N — точки, являющиеся соответственно серединами отрезков EF, FG, GH, HE; O — точка пересечения отрезков KM и LN.

Известно, что $\widehat{LOM} = \pi/2$, $|KM| = 3|LN|$, а площадь четырехугольника $KLMN$ равна S. Найти длины диагоналей четырехугольника $EFGH$.

5.Н. Определить все a, для каждого из которых неравенство

$$9x^2 - x + \frac{1}{36} \geqslant y - 9y^2 - axy$$

выполняется для любых пар чисел (x, y) таких, что $|x| = |y|$.

3.С. Найти все положительные числа x, y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x^{\frac{x+3y}{2}} = y^{12x-4y}, \\ y^3 = \frac{1}{xy}. \end{cases}$$

5.С. Найти все a, при каждом из которых неравенство

$$x^2 < 4 - |x+a|$$

имеет хотя бы одно отрицательное решение.

Вариант 4.

1. Из пункта A в пункт B выезжает автобус. Достигнув пункта B, он продолжает движение в том же направлении. В тот момент, когда автобус достиг пункта B, из пункта A выезжает автомобиль и движется в том же направлении, что и автобус. Время, необходимое автомобилю на путь из A в B, на 3 часа 20 минут меньше времени, необходимого автобусу на тот же путь. Найти эти времена, если сумма их в 1,5 раза больше времени, за которое автомобиль догонит автобус.

2. Решить уравнение

$$8\cos^4 x = 11\cos 2x - 1.$$

3.Н. Найти наименьшее из расстояний от точки M с координатами $(-1, 0)$ до точек (x, y) таких, что

$$y = \frac{27}{\sqrt{2(x+1)^2}}, \quad x > -1.$$

4. В выпуклом четырехугольнике $KLMN$ точки E, F, G, H являются соответственно серединами сторон KL, LM, MN, NK. Площадь четырехугольника $EFGH$ равна Q, $\widehat{HEF} = \pi/6$, $\widehat{EFH} = \pi/2$. Найти длины диагоналей четырехугольника $KLMN$.

5.Н. Определить все a, для каждого из которых неравенство

$$4x^2 + 4y^2 + axy \geqslant x + y - \frac{1}{16}$$

выполняется для любых пар чисел (x, y) таких, что $|x| = |y|$.

3.С. Найти все положительные числа x, y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} (xy)^y \cdot x^{6x} = y^x, \\ x^2 y = 1. \end{cases}$$

5.С. Найти все a, при каждом из которых неравенство

$$x^2 + |x - a| < 1$$

имеет хотя бы одно положительное решение.

1978

Вариант 1.

1. Решить уравнение

$$\log_{1-2x^2} x = \frac{1}{4} - \frac{3}{\log_2 (1-2x^2)^4}.$$

2. В плоскости дан квадрат с последовательно расположенными вершинами A, B, C, D и точка O. Известно, что $|OB| = |OD| = 13$, $|OC| = 5\sqrt{2}$ и что площадь квадрата больше 225. Найти длину стороны квадрата и выяснить, где расположена точка O — вне или внутри квадрата.

3. Найти все значения параметра b, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} bx + 2y = b + 2, \\ 2bx + (b+1)\,y = 2b + 4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

4. Груз вначале погрузили в вагоны вместимостью по 80 тонн, но один вагон оказался загружен не полностью. Тогда весь груз переложили в вагоны вместимостью по 60 тонн, однако понадобилось на восемь вагонов больше и при этом все равно один вагон остался не полностью загруженным. Наконец, груз переложили в вагоны вместимостью по 50 тонн, однако понадобилось еще на 5 вагонов больше, при этом все такие вагоны были загружены полностью. Сколько тонн груза было?

5.Н. Найти все значения параметра a, при каждом из которых функция

$$y(x) = 8ax - a\sin 6x - 7x - \sin 5x$$

возрастает и не имеет критических точек на всей прямой.

5.С. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$a(4 - \sin x)^4 - 3 + \cos^2 x + a > 0$$

выполняется для всех x.

Вариант 2.

1. Решить уравнение

$$\log_{2x^2-1}\left(x^2-\frac{2}{3}\right)=2-\frac{1}{\log_3(2x^2-1)}.$$

2. В плоскости дан квадрат с последовательно расположенными вершинами A, B, C, D и точка O, лежащая вне квадрата. Известно, что $|OA|=|OB|=5$ и $|DO|=\sqrt{13}$. Найти площадь квадрата.

3. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x+(9a^2-2)\,y=6a-2, \\ x+y=1 \end{cases}$$

не имеет ни одного решения.

4. Жидкость налита в бутыли вместимостью по 40 литров, при этом одна из бутылей оказалась не совсем полной. Если эту же жидкость перелить в бутыли вместимостью по 50 литров, то такие бутыли будут заполнены полностью, но при этом понадобится на 5 бутылей меньше. Если эту же жидкость разлить по бутылям вместимостью по 70 литров, то понадобится еще меньше на 4 бутыли, но опять одна бутыль будет не совсем полной. Сколько литров жидкости было?

5.Н. Найти все значения параметра a, при каждом из которых функция

$$y(x)=a\sin 7x+8ax+\sin 4x-5x$$

убывает и не имеет критических точек на всей прямой.

5.С. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$2a-4+a(3-\sin^2 x)^2+\cos^2 x<0$$

выполняется для всех x.

Вариант 3.

1. Решить уравнение

$$\log_{2-2x^2}(2-x^2-x^4)=2-\frac{1}{\log_{4/3}(2-2x^2)}.$$

2. В плоскости дан квадрат с последовательно расположенными вершинами A, B, C, D и точка O. Известно, что $|OA|=|OC|=10$, $|OD|=6\sqrt{2}$ и что длина стороны квадрата не превосходит 3. Найти площадь квадрата. Где расположена точка O — вне или внутри квадрата?

3. Найти все значения параметра c, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} -4x+cy=1+c, \\ (6+c)\,x+2y=3+c \end{cases}$$

не имеет ни одного решения.

4. Имеется некоторое количество проволоки. Если ее намотать на катушки, на которые умещается по 800 метров проволоки, то одна катушка будет намотана не полностью. То же самое произойдет, если пользоваться только катушками, на которые умещается по 900 метров проволоки, причем таких катушек понадобится на 3 меньше. Если же проволоку наматывать только на катушки, на которые умещается по 1100 метров, то таких катушек понадобится еще на 6 меньше, но при этом все такие катушки будут намотаны полностью. Сколько метров проволоки было?

5.Н. Найти все значения a, при каждом из которых функция

$$y(x)=5ax-\sin 8x-a\sin 3x-3x$$

возрастает и не имеет критических точек на всей прямой.

5.С. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$-5+5a+\sin^2 x+a(3-\cos x)^2>0$$

выполняется для всех x.

Вариант 4.

1. Решить уравнение

$$\log_{3-4x^2}(9-16x^4)=2+\frac{1}{\log_2(3-4x^2)}.$$

2. Пусть A, B, C, D — последовательные вершины квадрата, а точка O расположена внутри квадрата. Известно, что $|OC|=|OD|=\sqrt{10}$ и $|OB|=\sqrt{26}$. Найти площадь квадрата.

3. Найти все значения параметра d, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (2-d)x+d^2y=3d^2+2, \\ (2d-1)x+dy=d-1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

4. Группу людей попытались построить в колонну по 8 человек в ряд, но один ряд оказался не полным. Когда ту же группу людей перестроили по 7 человек в ряд, то все ряды оказались полными, а число рядов оказалось на 2 больше. Если бы тех же людей построить по 5 человек в ряд, то рядов было бы еще на 7 больше, причем один ряд был бы не полным. Сколько людей было в группе?

5.Н. Найти все значения параметра a, при каждом из которых функция

$$y(x)=a\sin 4x-10x+\sin 7x+4ax$$

убывает и не имеет критических точек на всей прямой.

5.С. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\sin^2 x-6+4a+a(5-\cos^4 x)^2<0$$

выполняется для всех x.

Вариант 1.

1. Решить уравнение

$$\sqrt{37-48\operatorname{ctg}x}=8\operatorname{ctg}x-5.$$

2.Н. В равнобедренном треугольнике ABC ($|AB|=|BC|=8$) точка E делит боковую сторону AB в отношении $3:1$ (считая от вершины B). Найти угол между векторами $\overrightarrow{CE}$ и $\overrightarrow{CA}$, если $|CA|=12$.

3. Из сосуда, до краев наполненного чистым глицерином, отлили 2 литра глицерина, а к оставшемуся глицерину долили 2 литра воды. После перемешивания снова отлили 2 литра смеси и долили 2 литра воды. Наконец, опять перемешали, отлили 2 литра смеси и долили 2 литра воды. В результате этих операций объем воды в сосуде стал на 3 литра больше объема оставшегося в нем глицерина. Сколько литров глицерина и воды оказалось в сосуде в результате проделанных операций?

4.Н. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y(x)=|x^2+2x-3|+\frac{3}{2}\ln x$$

на отрезке $\left[\frac{1}{2},\ 4\right]$.

5. Решить уравнение

$$\log_{3x+7}(9+12x+4x^2)+\log_{2x+3}(6x^2+23x+21)=4.$$

2.С. В треугольнике ABC высота BD равна 11,2, а высота AE равна 12. Точка E лежит на стороне BC и $BE:EC=5:9$. Найти длину стороны AC.

4.С. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2+2y^2-3x+5y=3, \\ 4{,}5x^2+3y^2-3x+8y=7. \end{cases}$$

Вариант 2.

1. Решить уравнение

$$\sqrt{10-18\cos x}=6\cos x-2.$$

2.Н. В прямоугольном треугольнике с катетами AB и BC ($|AB|=8$, $|BC|=6$) проведена прямая AD, делящая BC в отношении $|BD|:|DC|=4:5$. Найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

3. Имеется два бака: первый бак наполнен чистым глицерином, второй — водой. Взяли два трехлитровых ковша, зачерпнули первым полным ковшом глицерин из первого бака,

а вторым полным ковшом — воду из второго бака, после чего первый ковш влили во второй бак, а второй ковш влили в первый бак. Затем после перемешивания снова зачерпнули первым полным ковшом смесь из первого бака, вторым полным ковшом — смесь из второго бака, и влили первый ковш во второй бак, а второй ковш в первый бак. В результате половину объема первого бака занял чистый глицерин. Найти объемы баков, если известно, что их суммарный объем в 10 раз больше объема первого бака.

4.Н. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y(x)=|x^2+x-2|-\ln\frac{1}{x}$$

на отрезке $\left[\frac{1}{2},\ 2\right]$.

5. Решить уравнение

$$\log_{1-2x}(6x^2-5x+1)-\log_{1-3x}(4x^2-4x+1)=2.$$

2.С. Найти площадь равнобедренного треугольника, если высота, опущенная на основание, равна 10, а высота, опущенная на боковую сторону, равна 12.

4.С. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2+y^2+x-2y=1, \\ 5x^2+2{,}5y^2+3x-4y=4. \end{cases}$$

Вариант 3.

1. Решить уравнение

$$\sqrt{13-18\operatorname{tg} x}=6\operatorname{tg} x-3.$$

2.Н. В равнобедренном треугольнике ABC ($|AB|=|BC|=15$) точка E делит сторону BC в отношении 1:4 (считая от вершины B). Найти угол между векторами $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{AC}$, если $|AC|=20$.

3. Из сосуда, до краев наполненного чистым глицерином, отлили литр глицерина, а взамен долили литр воды. После перемешивания снова отлили литр смеси и долили литр воды. Наконец, перемешали, отлили литр смеси и долили литр воды. В результате этих операций количество воды в сосуде оказалось в семь раз больше по объему оставшегося в нем глицерина. Сколько литров глицерина и воды оказалось в сосуде в результате проделанных операций?

4.Н. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=-\frac{3}{2}\ln x-|x^2+2x-3|$$

на отрезке $\left[\frac{1}{2},\ 4\right]$.

5. Решить уравнение

$$\log_{2x+1}(5+8x-4x^2)+\log_{5-2x}(1+4x+4x^2)=4.$$

2.С. В треугольнике ABC высота $CD=7$, а высота $AE=6$. Точка E делит сторону BC так, что $BE:EC=3:4$. Найти длину стороны AB.

4.С. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2-4y^2-1{,}5x+y=0, \\ 3x^2-6y^2-2x+2y=0{,}5. \end{cases}$$

Вариант 4.

1. Решить уравнение

$$\sqrt{5-2\sin x}=6\sin x-1.$$

2.Н. В прямоугольном треугольнике с катетами BC и BA ($|BC|=4$, $|BA|=3$) проведена прямая DA, делящая сторону BC в отношении $|BD|:|DC|=3:5$. Найти угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$.

3. Имеется два бака: первый бак наполнен чистым глицерином, второй бак — водой. Взяли два двухлитровых ковша, зачерпнули полным первым ковшом глицерин из первого бака, полным вторым ковшом — воду из второго бака, после чего первый ковш влили во второй бак, а второй ковш — в первый бак. Затем перемешали, снова зачерпнули полным первым ковшом смесь из первого бака, полным вторым ковшом смесь из второго бака и влили первый ковш во второй бак, а второй ковш — в первый бак. В результате 40% объема первого бака занял чистый глицерин. Определить суммарный объем баков, если известно, что второй бак в четыре раза больше по объему первого бака.

4.Н. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y(x)=\ln\frac{1}{x}-|x^2+x-2|$$

на отрезке $\left[\frac{1}{2},\,2\right]$.

5. Решить уравнение

$$\log_{5x-1}(10x^2-7x+1)^4-\log_{2x-1}(25x^2-10x+1)=2.$$

2.С. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) высота $AE=12$, а основание $AC=15$. Найти площадь треугольника.

4.С. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x^2+y^2+4x-8y=-7, \\ 2x^2+0{,}4y^2+2x-3y=-1{,}6. \end{cases}$$

§ 11. ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
(отделение планирования и экономической кибернетики)

1977

Вариант 1.

1. Решить уравнение

$$\frac{\cos x}{(x+3/2)^2}=|\cos x|.$$

2. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист. В тот момент, когда он проехал 1/4 пути между A и B, из B в A выехал мотоциклист, который, прибыв в A, не задерживаясь, повернул обратно и одновременно с велосипедистом прибыл в B. Время движения мотоциклиста до первой встречи с велосипедистом равно времени движения мотоциклиста из A в B. Считая скорости мотоциклиста при движении из A в B и из B в A различными, найти, во сколько раз скорость мотоциклиста при движении из A в B больше скорости велосипедиста.

3.Н. Определить, при каких a система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=2(1+a), \\ (x+y)^2=14 \end{cases}$$

имеет в точности два решения.

4.Н. Рассматриваются всевозможные трапеции, вписанные в окружность радиуса R, такие, что центр окружности лежит внутри трапеции, а одно из оснований равно $R\sqrt{3}$. Найти боковую сторону той из этих трапеций, которая имеет наибольшую площадь.

5. В треугольной пирамиде $SA_1A_2A_3$ на сторонах основания A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 выбраны соответственно точки K_1, K_2, K_3 так, что

$$|A_1K_1|:|K_1A_2|=|A_2K_2|:|K_2A_3|=|A_3K_3|:|K_3A_1|=2.$$

Через середину ребра SA_1 параллельно основанию пирамиды проведена плоскость π, которая пересекает отрезки SK_1, SK_2, SK_3 в точках L_1, L_2, L_3 соответственно. Треугольник $L_1L_2L_3$ принят за верхнее основание прямой призмы, нижнее основание которой лежит в плоскости основания пирамиды. Найти объем призмы, если объем пирамиды $SA_1A_2A_3$ равен V.

3.С. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y^{1-\frac{2}{3}\log_x y}=x^{\frac{2}{3}}, \\ 1+\log_x\left(1-\frac{3y}{x}\right)=\log_x 4. \end{cases}$$

4.С. Определить, при каких a уравнение

$$\log_3 (9^x + 9a^3) = x$$

имеет ровно два решения.

Вариант 2.

1. Решить уравнение

$$(x-2)^2 |\cos x| = \cos x.$$

2. Из пункта A в пункт B по течению отплывает лодка. Одновременно с ней из B против течения отправляется катер, который, прибыв в A, не останавливаясь, следует обратно в B, а из B так же без остановки отправляется в A. На этом последнем участке маршрута катер опять встречает лодку, которая прошла к этому моменту 3/4 пути от A до B. Скорость лодки при движении по течению в 9 раз больше ее скорости при движении против течения. Во сколько раз скорость катера, движущегося по течению, больше скорости лодки, движущейся по течению?

3.Н. Определить, при каких a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a, \\ xy = a - 1/2 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

4.Н. Рассматриваются всевозможные трапеции, обе боковые стороны и меньшее основание которых равны a. Найти большее основание той из этих трапеций, которая имеет наибольшую площадь.

5. $SABC$ — треугольная пирамида, в основании которой лежит треугольник ABC. Точки L, M и N расположены соответственно на ребрах AB, BC и AC так, что

$$|AL|:|LB| = |BM|:|MC| = |CN|:|NA| = 2.$$

На отрезках SL, SM и SN помещены соответственно точки E, F и G так, что

$$|SE|:|EL| = |SF|:|FM| = |SG|:|GN| = 2.$$

Точка K лежит на основании ABC пирамиды. Объем пирамиды $SABC$ равен V. Найти объем пирамиды $KEFG$.

3.С. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y x^{\log_y x} = x^{5/2}, \\ \log_4 y \log_y (y - 3x) = 1. \end{cases}$$

4.С. Определить, при каких a уравнение

$$\log_2 (4^x - a) = x$$

имеет ровно два решения.

Вариант 3.

1. Решить уравнение

$$\frac{\sin x}{(x-4)^2}+|\sin x|=0.$$

2. Одну и ту же работу могут выполнить три бригады. Первая бригада выполняет 2/3 всей работы за некоторое время. Такое же время потребуется, если сначала третья бригада выполнит 1/3 часть всей работы, а затем вторая бригада выполнит 9/10 частей работы, оставшейся после третьей бригады. Производительность третьей бригады равна полусумме производительностей первой и второй бригад. Во сколько раз производительность второй бригады больше производительности третьей бригады?

3.Н. Определить, при каких a система уравнений

$$\begin{cases} (x-y)^2=2/3, \\ xy=5a-1/3 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

4.Н. Рассматриваются всевозможные трапеции, вписанные в окружность радиуса R, такие, что одно из оснований является диаметром этой окружности. Найти углы той из этих трапеций, которая имеет наибольшую площадь.

5. $SABCD$ — четырехугольная пирамида, в основании которой лежит параллелограмм $ABCD$. Точки K, L, M и N расположены соответственно на ребрах AB, BC, CD и DA так, что

$$|AK|:|KB|=|BL|:|LC|=|CM|:|MD|=|DN|:|NA|=1/3.$$

Через середину ребра SA проведена плоскость π, параллельная основанию пирамиды. Плоскость π пересекает отрезки SK, SL, SM и SN соответственно в точках E, F, G и H. Объем пирамиды $SABCD$ равен V. Точка P лежит на основании $ABCD$ пирамиды. Найти объем пирамиды $PEFGH$.

3.С. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2(2\log_{y^2}x+\log_{1/x}y)=3, \\ xy=27. \end{cases}$$

4.С. Определить, при каких a уравнение

$$x+\log_{1/2}(4^x+a^3)=0$$

имеет ровно два решения.

Вариант 4.

1. Решить уравнение

$$(x+1/2)^2|\sin x|+\sin x=0.$$

2. Три экскаватора копают котлован. Разность производительностей первого и третьего экскаваторов в 3 раза больше разности производительностей третьего и второго экскаваторов. Время, за которое первый экскаватор выполняет 4/5 всей работы, равно сумме времен, за которые второй экскаватор выполняет 1/15 всей работы, а третий экскаватор 9/28 работы, оставшейся после второго экскаватора. Во сколько раз производительность первого экскаватора больше производительности второго?

3.Н. Определить, при каких a система уравнений

$$\begin{cases} (x-y)^2 = 6a - 14, \\ x^2 + y^2 = 3(2+a) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

4.Н. Хорда AB равна радиусу окружности. Хорда CD, параллельная AB, проведена так, что площадь четырехугольника $ABCD$ максимальна. Найти угловую величину меньшей из дуг, стягиваемых хордой CD.

5. В основании пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Точки K, L, M и N лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD и DA квадрата, причем точки K и M делят стороны квадрата, на которых они лежат, пополам. Точка A_1 лежит на ребре SA и $|SA_1|:|A_1A| = 9$. Через точку A_1 проведена плоскость π параллельно основанию пирамиды, она пересекается с отрезками SK, SL, SM и SN соответственно в точках K_1, L_1, M_1 и N_1. Точка S_1 лежит на основании пирамиды $SABCD$. Объем пирамиды $SABCD$ равен V. Найти объем пирамиды $S_1K_1L_1M_1N_1$.

3.С. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2\log_{x^2} y + 3\log_{1/y} x = 2, \\ xy = 81. \end{cases}$$

4.С. Определить, при каких a уравнение

$$x + \log_{1/3}(9^x - 2a) = 0$$

имеет ровно два решения.

1978

Вариант 1.

1. Найти все корни уравнения

$$|x^2 + x - 1| = 2x - 1,$$

удовлетворяющие неравенству $x < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.Н. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке F. Известно, что $|AF|=|CF|=2$, $|BF|=1$, $|DF|=4$, $\widehat{BFC}=\pi/3$. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$.

3. Решить уравнение

$$3+\frac{1}{\log_{32}\frac{x}{2}}=\log_{\frac{x}{2}}\left(\frac{75x}{4}-\frac{11}{x}\right).$$

4. Имеется три сплава. Первый сплав содержит 30% никеля и 70% меди, второй — 10% меди и 90% марганца, третий — 15% никеля, 25% меди и 60% марганца. Из них необходимо приготовить новый сплав, содержащий 40% марганца. Какое наименьшее и какое наибольшее процентное содержание меди может быть в этом новом сплаве?

5.Н. Найти множество всех чисел a, при каждом из которых функция

$$f(x)=\sin 2x-8(a+1)\sin x+(4a^2+8a-14)x$$

является возрастающей на всей числовой прямой и при этом не имеет критических точек.

2.С. В прямоугольнике $ABCD$ сторона AB втрое длиннее стороны BC. Внутри прямоугольника лежит точка N, причем $AN=\sqrt{2}$, $BN=4\sqrt{2}$, $DN=2$. Найти косинус угла BAN и площадь прямоугольника $ABCD$.

5.С. Найти множество всех действительных чисел a, при каждом из которых неравенство

$$a^2+2a-\sin^2 x-2a\cos x>2$$

выполняется для любого числа x.

Вариант 2.

1. Найти все корни уравнения

$$1+x+|x^2-x-3|=0,$$

удовлетворяющие неравенству $x+\frac{\sqrt{14}}{3}>0$.

2.Н. В четырехугольнике $ABCD$ угол при вершине A имеет величину 120°, а диагональ AC является биссектрисой этого угла. Известно, что $|AC|=\frac{|AB|}{6}=\frac{|AD|}{5}$. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CD}$.

3. Решить уравнение

$$\log_{2x}\left(\frac{32}{x}-16x\right)=\frac{1}{\log_{16}(2x)}-3.$$

4. Имеется три сплава. Первый сплав содержит 70% олова и 30% свинца, второй — 80% олова и 20% цинка, третий — 50% олова, 10% свинца и 40% цинка. Из них необходимо приготовить новый сплав, содержащий 15% свинца. Какое наибольшее и какое наименьшее процентное содержание олова может быть в этом новом сплаве?

5.Н. Найти множество всех чисел b, при каждом из которых функция

$$f(x) = \sin 2x - 8(b+2)\cos x - (4b^2 + 16b + 6)x$$

является убывающей на всей числовой прямой и при этом не имеет критических точек.

2.С. В прямоугольнике $ABCD$ сторона AD вдвое длиннее стороны AB. Внутри прямоугольника расположена точка M, причем $AM = \sqrt{2}$, $BM = 2$, $CM = 6$. Определить косинус угла ABM и площадь прямоугольника $ABCD$.

5.С. Найти множество всех действительных чисел b, при каждом из которых неравенство

$$\cos^2 x + 2b \sin x - 2b < b^2 - 4$$

выполняется для любого числа x.

Вариант 3.

1. Найти все корни уравнения

$$2|x^2 + 2x - 5| = x - 1,$$

удовлетворяющие неравенству $x < \sqrt{2}$.

2.Н. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке O. Известно, что $|OB| = |OC| = 1$, $|OA| = 8$, $|OD| = 7$. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$.

3. Решить уравнение

$$\frac{1}{\log_{11}\left(\frac{x}{3}\right)} - 3 = \log_{\frac{x}{4}}\left(\frac{114}{x} - 9x\right).$$

4. Имеется три сплава. Первый сплав содержит 60% алюминия, 15% меди и 25% магния, второй — 30% меди и 70% магния, третий — 45% алюминия и 55% магния. Из них необходимо приготовить новый сплав, содержащий 20% меди. Какое наименьшее и какое наибольшее процентное содержание алюминия может быть в этом новом сплаве?

5.Н. Найти множество всех чисел a, при каждом из которых функция

$$f(x) = 8(2a+1)\cos x - \sin 2x + (16a^2 + 16a - 18)x$$

является возрастающей на всей числовой прямой и при этом не имеет критических точек.

2.С. В прямоугольнике $ABCD$ сторона AB втрое короче стороны BC. Внутри прямоугольника находится точка F, причем $BF=\sqrt{17}$, $CF=\sqrt{2}$, $DF=1$. Найти косинус угла DCF и площадь прямоугольника $ABCD$.

5.С. Найти множество всех действительных чисел a, при каждом из которых неравенство

$$a^2+a-\sin^2 x-2a\cos x>1$$

выполняется для любого числа x.

Вариант 4.

1. Найти все корни уравнения

$$|x^2+2x-4|+2x+6=0,$$

удовлетворяющие неравенству $x+\sqrt{18}<1$.

2.Н. В четырехугольнике $ABCD$ угол при вершине B имеет величину $\pi/2$, а диагональ BD является биссектрисой этого угла. Известно, что $\frac{|AB|}{2}=\frac{|BC|}{3}=\frac{|BD|}{4\sqrt{2}}$. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

3. Решить уравнение

$$\log_{3x}\left(31x-\frac{3}{x}\right)=\frac{1}{\log_{4/3}(3x)}+3.$$

4. Имеется три сплава. Первый содержит 45% олова и 55% свинца, второй — 10% висмута, 40% олова и 50% свинца, третий — 30% висмута и 70% свинца. Из них необходимо составить новый сплав, содержащий 15% висмута. Какое наибольшее и какое наименьшее процентное содержание свинца может быть в этом новом сплаве?

5.Н. Найти множество всех чисел b, при каждом из которых функция

$$f(x)=8(2b+2)\sin x-\sin 2x-(16b^2+32b-10)x$$

является убывающей на всей числовой прямой и при этом не имеет критических точек.

2.С. В прямоугольнике $ABCD$ сторона BC вдвое короче стороны CD. Внутри прямоугольника расположена точка E, причем $AE=\sqrt{2}$, $CE=3$, $DE=1$. Вычислить косинус угла CDE и площадь прямоугольника $ABCD$.

5.С. Найти множество всех действительных чисел b, при каждом из которых неравенство

$$\cos^2 x+2b\sin x-b^2<b-2$$

выполняется для любого числа x.

Вариант 1.

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4\sin y - 6\sqrt{2}\cos x = 5 + 4\cos^2 y, \\ \cos 2x = 0. \end{cases}$$

2.Н. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 48, а длина диагонали равна 10. На плоскости, в которой расположен прямоугольник, выбрана точка O так, что $|OB| = |OD| = 13$. Найти расстояние от точки O до наиболее удаленной от нее вершины прямоугольника.

3. Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года 5/6 некоторого количества денег положили в первый банк, а оставшуюся часть во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равной 670 денежным единицам, к концу следующего года 749 денежным единицам. Было подсчитано, что если бы первоначально 5/6 исходного количества денег положили во второй банк, а оставшуюся часть в первый банк, то по истечении одного года сумма вкладов в эти банки стала бы равной 710 денежным единицам. В предположении, что исходное количество денег первоначально целиком положено в первый банк, определить величину вклада по истечении двух лет.

4.Н. Найти все значения параметра a $(a \geqslant 1)$, при каждом из которых площадь фигуры, лежащей в полуплоскости $x \geqslant 0$ и ограниченной прямыми $y = 1$, $y = 2$ и кривыми $y = ax^2$, $y = \frac{1}{2}ax^2$, будет наибольшей. Найти эту площадь S.

5. Решить неравенство

$$\frac{\log_3 (x^2 - 4x - 11)^2 - \log_{11} (x^2 - 4x - 11)^3}{2 - 5x - 3x^2} \geqslant 0.$$

2.С. В трапеции $ABCD$ даны основания $AD = 8$ и $BC = 4$. На продолжении стороны BC выбрана такая точка M, что прямая AM отсекает от трапеции треугольник, площадь которого в 4 раза меньше площади трапеции. Найти длину отрезка CM.

4.С. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 4x + 2y = 1, \\ 3x^2 - 2y^2 - 6x - 4y = 5. \end{cases}$$

Вариант 2.

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 1 + 2\cos 2x = 0, \\ \sqrt{6}\cos y - 4\sin x = 2\sqrt{3}(1 + \sin^2 y). \end{cases}$$

2.Н. Дан квадрат $ABCD$, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Точка O выбрана в плоскости квадрата так, что $|OB|=10$, $|OD|=6$. Найти угол между вектором $\overrightarrow{OB}$ и вектором, направленным из точки O в наиболее удаленную от нее вершину квадрата.

3. Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года 3/5 некоторого количества денег положили в первый банк, а оставшуюся часть во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равна 590 денежным единицам, к концу следующего года 701 денежной единице. Было подсчитано, что если бы первоначально 3/5 исходного количества денег положили во второй банк, а оставшуюся часть в первый банк, то по истечении одного года сумма вкладов в эти банки стала бы равной 610 денежным единицам. Какова в этом случае была бы сумма вкладов в эти банки к концу второго года?

4.Н. Найти все значения параметра a ($a \geqslant 2$), при каждом из которых площадь фигуры, лежащей в полуплоскости $x \geqslant 0$ и ограниченной прямыми $y=1$, $y=2$ и кривыми $y=\sqrt{ax}$, $y=\frac{1}{2}\sqrt{ax}$, будет наибольшей. Найти эту площадь S.

5. Решить неравенство

$$\frac{\log_2 (x^2-2x-7)^2-\log_3 (x^2-2x-7)^6}{3x^2-13x+4} \leqslant 0.$$

2.С. В трапеции $ABCD$ даны основания $AD=12$ и $BC=8$. На продолжении стороны BC выбрана такая точка M, что $CM=2{,}4$. В каком отношении прямая AM делит площадь трапеции $ABCD$?

4.С. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2+2y^2+12x-4y=-8, \\ 2x^2-y^2+8x+2y=-9. \end{cases}$$

Вариант 3.

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2\sqrt{3}\cos x+6\sin y=3+12\sin^2 x, \\ 4\sqrt{3}\cos x+2\sin y=7. \end{cases}$$

2.Н. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 48, а длина диагонали равна 10. В плоскости прямоугольника $ABCD$ выбрана точка O так, что $|OB|=|OD|=\sqrt{61}$. Найти расстояние от точки O до ближайшей к ней вершины прямоугольника.

3. Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года треть некоторого количества денег положили в первый банк, а оставшуюся часть во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равной 380 денежным единицам, к концу следующего года 482 денежным единицам. Было подсчитано, что если бы первоначально треть исходного количества денег положили во второй банк, а оставшуюся часть в первый банк, то по истечении одного года сумма вкладов в эти банки стала бы равной 370 денежным единицам. В предположении, что исходное количество денег первоначально целиком положено во второй банк, определить величину вклада по истечении двух лет.

4.Н. Найти все значения параметра a ($1 \leqslant a \leqslant 4$), при каждом из которых площадь фигуры, лежащей в полуплоскости $x \geqslant 0$ и ограниченной прямыми $y=2$, $y=3$ и кривыми $y=ax^2$, $y=\frac{2}{3}ax^2$, будет наименьшей. Найти эту площадь S.

5. Решить неравенство

$$\frac{\log_5 (x^2-2x-14)^6-\log_3 (x^2-2x-14)^4}{2x^2-9x-5} \leqslant 0.$$

2.С. В трапеции $ABCD$ даны основания $AD=12$ и $BC=3$. На продолжении стороны BC выбрана такая точка M, что прямая AM отсекает от трапеции треугольник, площадь которого составляет три четверти площади трапеции. Найти длину отрезка CM.

4.С. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x^2-3y^2+10x-12y=17, \\ 2x^2+y^2+4x+4y=-2. \end{cases}$$

Вариант 4

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2(5+2\sqrt{6})\sin x+2\cos y=2\sqrt{2}\cos 2x-5\sqrt{2}-3\sqrt{3}, \\ 2(3+\sqrt{6})\sin x+2\cos y+3\sqrt{2}+\sqrt{3}=0. \end{cases}$$

2Н. Дан квадрат $ABCD$, длина стороны которого равна 8. Точка O выбрана в плоскости квадрата так, что $|OB|=10\sqrt{2}$, $|OD|=6\sqrt{2}$. Найти угол между вектором $\overrightarrow{OB}$ и вектором, направленным из точки O в ближайшую к ней вершину квадрата.

3. Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года четверть некоторого количества денег положили в первый банк, а оставшуюся часть во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равной 470 денежным единицам, к концу следующего года 553 денежным единицам. Было подсчитано, что если бы первоначально четверть исходного количества денег положили во второй банк, а оставшуюся часть в первый банк, то по истечении одного года сумма вкладов в эти банки стала бы равной 450 денежным единицам. Какова в этом случае была бы сумма вкладов в эти банки к концу второго года?

4.Н. Найти все значения параметра a $(2 \leqslant a \leqslant 5)$, при каждом из которых площадь фигуры, лежащей в полуплоскости $x \geqslant 0$ и ограниченной прямыми $y=2$, $y=3$ и кривыми $y=\sqrt{ax}$, $y=\frac{2}{3}\sqrt{ax}$, будет наименьшей. Найти эту площадь S.

5. Решить неравенство

$$\frac{\log_7 (x^2-4x-4)^2 - \log_2 (x^2-4x-4)^3}{3+x-2x^2} \geqslant 0.$$

2.С. В трапеции $ABCD$ даны основания $AD=16$ и $BC=9$. На продолжении BC выбрана такая точка M, что $CM=3{,}2$. В каком отношении прямая AM делит площадь трапеции $ABCD$?

4.С. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2-y^2-12x+4y=-11, \\ 4x^2+2y^2-16x-8y=-18. \end{cases}$$

§ 12. ФАКУЛЬТЕТ ПСИХОЛОГИИ

1977

Вариант 1.

1. Решить уравнение

$$3\,\mathrm{tg}^2 x - 8\cos^2 x + 1 = 0.$$

2Н. На графике функции $y(x)=x^3-3x^2-7x+6$ найти все точки, касательная в каждой из которых к этому графику отсекает от положительной полуоси Ox вдвое меньший отрезок, чем от отрицательной полуоси Oy. Определить длины отсекаемых отрезков.

3. Производительность первого автомобильного завода не превышает 950 машин в сутки. Производительность второго автомобильного завода первоначально составляла 95% от производительности первого завода. После ввода дополнительной линии второй завод увеличил производство машин в сутки на 23% от числа машин, выпускаемых в сутки на первом заводе, и стал их выпускать более 1000 штук в сутки. Сколько автомобилей за сутки выпускал каждый завод до реконструкции второго завода? Предполагается, что каждый завод в сутки выпускает целое количество машин.

4. В окружность радиуса 17 см вписан четырехугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны и находятся на расстоянии 8 см и 9 см от центра окружности. Найти длины сторон четырехугольника.

5.Н. Найти все a, при каждом из которых имеется хотя бы одна пара чисел (x, y), удовлетворяющая условиям:

$$\begin{cases} x^2+(y+3)^2<4, \\ y=2ax^2. \end{cases}$$

2.С. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (1+2\log_{|xy|}2)\cdot\log_{x+y}|xy|=1, \\ x-y=2\sqrt{3}. \end{cases}$$

5.С. При каждом a указать, для каких x выполняется неравенство

$$a^2-9^{x+1}-8\cdot 3^x\cdot a>0.$$

Вариант 2.

1. Решить уравнение

$$2\,\mathrm{tg}^2 x+4\cos^2 x=7.$$

2.Н. На графике функции $y(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-22x-28$ найти все точки, касательная в каждой из которых к этому графику пересекает положительные полуоси, отсекая от них равные отрезки.

3. Число деталей, изготовленных за смену первой бригадой, составляет 115% от числа деталей, изготовленных за смену второй бригадой. Продукцию двух бригад упаковали в 2 ящика. В первом ящике оказалось 2/3 деталей, изготовленных 1-й бригадой, и 1/7 часть деталей, изготовленных 2-й бригадой (следовательно, во втором ящике оказалось 1/3 деталей, изготовленных 1-й бригадой, и 6/7 частей деталей, изготовленных 2-й бригадой). Сколько в первом ящике деталей, изготовленных первой бригадой, и сколько деталей, изготовленных второй, если в первом ящике оказалось менее 1000 деталей, а во втором — более 1000 деталей?

4. В окружность радиуса 10 см вписан четырехугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны. Длины диагоналей равны соответственно 12 см и $10\sqrt{3}$ см. Найти длины сторон четырехугольника.

5.Н. Найти все a, при каждом из которых имеется хотя бы одна пара чисел (x, y), удовлетворяющая условиям:

$$\begin{cases} x^2+(y-2)^2<1, \\ y=ax^2. \end{cases}$$

2.С. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{|xy|}(x-y)=1, \\ 2\log_5|xy|\cdot\log_{|xy|}(x+y)=1. \end{cases}$$

5.С. При каждом a указать, для каких x выполняется неравенство

$$a^2-2\cdot 4^{x+1}-a\cdot 2^{x+1}>0.$$

Вариант 3.

1. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg}^2 x-8\sin^2 x=1.$$

2.Н. Точки M_1 и M_2 лежат на графике функции $y(x)=2x^3+3x^2-\frac{1}{2}x-1$ и имеют абсциссы, соответственно равные $-3/2$ и $3/2$. Найти все точки этого графика, в каждой из которых касательная к этому графику параллельна отрезку M_1M_2.

3. Число научно-технических книг в библиотеке равно 11/13 от числа художественных книг. При переезде библиотеки в другой город книги погрузили в два вагона. В первый вагон погрузили 1/15 часть научно-технических книг и 18/19 частей художественных книг. Во второй вагон погрузили 1/19 часть художественных книг и 14/15 частей научно-технических книг. Сколько книг каждого вида было в библиотеке, если в первом вагоне оказалось более 10000 книг, а во втором — менее 10000 книг?

4. В окружность радиуса 13 см вписан четырехугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны. Одна из диагоналей равна 18 см, расстояние от центра окружности до точки пересечения диагоналей равно $4\sqrt{6}$ см. Найти площадь четырехугольника.

5.Н. Найти все a, при каждом из которых имеется хотя бы одна пара чисел (x, y), удовлетворяющая условиям:

$$\begin{cases} x^2-y^2>1, \\ y=ax^2+1. \end{cases}$$

2.С. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{|x+y|}[4xy+(1+\sqrt{2})^2]=2, \\ x-y=2xy. \end{cases}$$

5.С. При каждом a указать, для каких x выполняется неравенство

$$4^{2x+1}a^2-65\cdot 4^{x-1}\cdot a+1>0.$$

Вариант 4.

1. Решить уравнение
$$9\operatorname{ctg}^2 x+4\sin^2 x=6.$$

2.Н. На графике функции $y(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-\frac{18}{5}x+\frac{14}{5}$ найти все точки, касательная в каждой из которых к этому графику перпендикулярна прямой $5x-3y+2=0$.

3. В первой коробке находилось некоторое количество красных шаров, а во второй — синих, причем число красных шаров составляло 15/19 от числа синих шаров. Когда из коробок удалили 3/7 красных шаров и 2/5 синих, то в первой коробке осталось менее 1000 шаров, а во второй — более 1000 шаров. Сколько шаров было первоначально в каждой коробке?

4. В окружность радиуса 6 см с центром в точке O вписан четырехугольник $ABCD$. Его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке K. Точки E и F являются соответственно серединами AC и BD. Длина отрезка OK равна 5 см, а площадь четырехугольника $OEKF$ равна 12 см^2. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

5.Н. Найти все a, при каждом из которых имеется хотя бы одна пара чисел (x, y), удовлетворяющая условиям:
$$\begin{cases} x^2-(y-a)^2>1, \\ y=x^2+1. \end{cases}$$

2.С. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \log_{|x-y|}\frac{xy}{2}=2, \\ x+y=xy+1. \end{cases}$$

5.С. При каждом a указать, для каких x выполняется неравенство
$$4^{x+1}\cdot a^2-33\cdot 2^x\cdot a+8>0.$$

1978

Вариант 1.

1. Решить уравнение
$$\left(\log_3\frac{3}{x}\right)\cdot(\log_2 x)-\log_3\frac{x^3}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}+\log_2\sqrt{x}.$$

2. Диагональ BD четырехугольника $ABCD$ является диаметром окружности, описанной около этого четырехугольника. Вычислить длину диагонали AC, если
$$|BD|=2,\ |AB|=1,\quad \overset{\frown}{ABD}:\overset{\frown}{DBC}=4:3.$$

3. Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист был на расстоянии 6 км позади них. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обогнал пешехода в тот момент, когда пешехода настиг мотоциклист?

4.Н. Найти множество всех таких пар чисел (a, b), для каждой из которых при всех x справедливо равенство

$$a(\cos x-1)+b^2=\cos(ax+b^2)-1.$$

5. Известно, что для некоторой квадратичной функции

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

выполнены неравенства

$$f(-1)<1, \quad f(1)>-1, \quad f(3)<-4.$$

Определить знак коэффициента a.

4.С. Найти наименьшее значение функции

$$f(x)=4x+\frac{9\pi^2}{4}+\sin x,$$

если $0<x<+\infty$.

Вариант 2.

1. Решить уравнение

$$\log_5\frac{x^3}{\sqrt{5}}=\frac{1}{2}+\frac{\log_5 x}{\log_3\frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

2. Сторона AD четырехугольника $ABCD$ является диаметром окружности, описанной около этого четырехугольника. Вычислить длину стороны BC, если

$$|AD|=6, \quad |BD|=3\sqrt{3}, \quad \widehat{BAC}:\widehat{CAD}=1:3.$$

3. По шоссе с постоянными скоростями движутся пешеход, а навстречу ему — велосипедист и мотоциклист. В тот момент, когда велосипедист и мотоциклист находились в одной точке, пешеход был на расстоянии 8 км от них. В тот момент, когда мотоциклист встретил пешехода, велосипедист отставал от мотоциклиста на 4 км. На сколько километров мотоциклист будет обгонять велосипедиста в тот момент, когда пешеход встретится с велосипедистом?

4.Н. Найти множество всех таких пар чисел (a, b), для каждой из которых при всех x справедливо равенство

$$a\cdot e^x+b=e^{ax+b}.$$

5. Известно, что для некоторой квадратичной функции

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

выполнены неравенства

$$f(-3) < -5, \quad f(-1) > 0, \quad f(1) < 4.$$

Определить знак коэффициента a.

4.С. Найти наибольшее значение функции

$$f(x) = \frac{10}{x^2 + 4\pi x + 41} + \cos x.$$

Вариант 3.

1. Решить уравнение

$$\log_3 \sqrt{x} - 2 = (\log_2 x) \cdot \left(\log_2 \frac{1}{x}\right) + \log_2 \frac{x^2}{4}.$$

2. Диагональ AC четырехугольника $ABCD$ является диаметром окружности, описанной около этого четырехугольника. Вычислить длину диагонали BD, если

$$|AC| = 4, \ |CD| = 2\sqrt{2}, \ \widehat{BAC} : \widehat{CAD} = 2:3.$$

3. Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда велосипедист и мотоциклист находились в одной точке, пешеход был на расстоянии 10 км впереди них. В тот момент, когда мотоциклист догнал пешехода, велосипедист отставал от них на 5 км. На сколько километров мотоциклист будет обгонять пешехода в тот момент, когда пешехода настигнет велосипедист?

4.Н. Найти множество всех таких пар чисел (a, b), для каждой из которых при всех x справедливо равенство

$$a \sin x + b = \sin(ax + b).$$

5. Известно, что для некоторой квадратичной функции

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

выполнены неравенства

$$f(-1) > -4, \quad f(1) < 0, \quad f(3) > 5.$$

Определить знак коэффициента a.

4.С. Найти наименьшее значение функции

$$f(x) = 2x + \frac{18\pi^2}{x} + \cos x,$$

если $0 < x < +\infty$.

Вариант 4.

1. Решить уравнение

$$2 \log_3 \frac{x^3}{27} - \frac{\log_3 \frac{1}{x}}{\log_3 \sqrt{x}} = 2.$$

2. Сторона BC четырехугольника $ABCD$ является диаметром окружности, описанной около этого четырехугольника. Вычислить длину стороны AB, если $|BC|=8$, $|BD|=4\sqrt{2}$, $\overset{\frown}{DCA}:\overset{\frown}{ACB}=2:1$.

3. Пешеход и велосипедист одновременно отправляются из одной точки по шоссе навстречу мотоциклисту; все трое движутся с постоянными скоростями. В тот момент, когда велосипедист встретил мотоциклиста, пешеход отставал от велосипедиста на 3 км. В тот момент, когда пешеход встретил мотоциклиста, велосипедист обогнал пешехода на 6 км. Какое расстояние было между пешеходом и мотоциклистом в момент отправления пешехода?

4.Н. Найти множество всех таких пар чисел (a, b), для каждой из которых при всех $x>0$ справедливо равенство

$$a\ln x+b=\ln(ax+b).$$

5. Известно, что для некоторой квадратичной функции

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

выполнены неравенства

$$f(-3)>3,\quad f(-1)<1,\quad f(1)>0.$$

Определить знак коэффициента a.

4.С. Найти наибольшее значение функции

$$f(x)=\frac{4}{x^2+3\pi x+23}+\sin x.$$

1979

Вариант 1.

1. Решить уравнение

$$\sqrt{3+4\sqrt{6}-(16\sqrt{3}-8\sqrt{2})\cos x}=4\cos x-\sqrt{3}.$$

2.Н. Найти все значения параметра b $(b>0)$, при каждом из которых площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=1-x^2$ и $y=bx^2$, будет равна числу c. При каких c задача имеет решение?

3. Решить неравенство

$$\frac{3}{|x+3|-1}\geqslant|x+2|.$$

4.Н. В треугольной пирамиде $ABCD$ длины всех ребер равны. Точка P равноудалена от вершин A и D, а от вершин B и C находится на расстоянии $\sqrt{3/2}$. Известно, что прямая PC

перпендикулярна высоте треугольника ACD, опущенной из вершины D. Вычислить объем пирамиды $ABCD$.

5. Найти все тройки целых чисел (u, v, w), для каждой из которых выполняется соотношение

$$3(u-3)^2+6v^2+2w^2+3v^2w^2=33.$$

2.С. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2\log_{1-x}(-xy-2x+y+2)+\log_{2+y}(x^2-2x+1)=6, \\ \log_{1-x}(y+5)-\log_{2+y}(x+4)=1. \end{cases}$$

4.С. В треугольной пирамиде $ABCD$ длины всех ребер равны. Точка M лежит вне пирамиды, причем

$$MD=\frac{1}{5}\sqrt{\frac{2}{3}},\quad MA=MB=MC=\sqrt{\frac{97}{75}}.$$

Вычислить объем пирамиды $ABCD$.

Вариант 2.

1. Решить уравнение

$$\sqrt{2+\sqrt{6}-(6\sqrt{2}-2\sqrt{3})\sin x}=2\sin x-\sqrt{2}.$$

2.Н. Найти все значения параметра b $(b>0)$, при каждом из которых площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=b\sqrt{x}$ и $y=2-\sqrt{x}$ и осью Oy, будет равна числу c. При каких c задача имеет решение?

3. Решить неравенство

$$\frac{4}{|x+1|-2}\geqslant|x-1|.$$

4.Н. В треугольной пирамиде $ABCD$ длины всех ребер равны. Точка M равноудалена от вершин A, B, C, причем $|MA|=|MB|=|MC|=2\sqrt{\frac{3}{2}}$. Известно, что отрезок MA перпендикулярен высоте треугольника BCD, опущенной из вершины B. Вычислить объем пирамиды $ABCD$.

5. Найти все тройки целых чисел (x, y, z), для каждой из которых выполняется соотношение

$$5x^2+y^2+3z^2-2yz=30.$$

2.С. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{1+x}(y^2-2y+1)+\log_{1-y}(x^2+2x+1)=4, \\ \log_{1+x}(2y+1)+\log_{1-y}(2x+1)=2. \end{cases}$$

4.С. В треугольной пирамиде $ABCD$ длины всех ребер равны. Точка P лежит внутри пирамиды и равноудалена от вершин A и D, а от вершин B и C находится на расстоянии $\sqrt{\frac{51}{50}}$. Известно, что расстояние от точки P до прямой AD равно $\frac{9}{5\sqrt{2}}$. Вычислить объем пирамиды $ABCD$.

Вариант 3.

1. Решить уравнение

$$\sqrt{9-6\sqrt{2}-(12-8\sqrt{2})\cos x}+2\sqrt{2}=2\sqrt{2}\cos x+1.$$

2.Н. Найти все значения параметра $p\,(p<0)$, при каждом из которых площади фигуры, ограниченной кривыми $y=x^2$ и $y=2+px^2$, будет равна числу q. При каких q задача имеет решение?

3. Решить неравенство

$$\frac{9}{|x-5|-3}\geqslant|x-2|.$$

4.Н. В треугольной пирамиде $ABCD$ длины всех ребер равны. Точка P равноудалена от вершин A и D, а от вершин B и C находится на расстоянии $\sqrt{\frac{11}{8}}$. Известно, что прямая PB перпендикулярна высоте треугольника ABC, опущенной из вершины C. Вычислить объем пирамиды $ABCD$.

5. Найти все тройки целых чисел $(p,\ q,\ s)$, для каждой из которых выполняется соотношение

$$4p^2+3q^2+5s^2-24q-1=0.$$

2.С. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\log_{3+x}(xy+x+3y+3)+0{,}5\log_{1+y}(x^2+6x+9)=3,\\ \log_{3+x}(0{,}5-y)+\log_{1+y}(3x+8)=1.\end{cases}$$

4.С. В треугольной пирамиде $ABCD$ длины всех ребер равны. Точка P лежит внутри пирамиды, причем

$$PA=PB=PC=3/5 \text{ и } PD=\frac{4}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Вычислить объем пирамиды $ABCD$.

Вариант 4.

1. Решить уравнение

$$\sqrt{9-4\sqrt{3}-(16-8\sqrt{3})\sin x}=4\sin x-3.$$

2.Н. Найти все значения параметра $a\,(a>0)$, при каждом из которых площадь фигуры, ограниченной осью Oy и кривими $y=\sqrt{x}$, $y=1-a\sqrt{x}$, будет равна числу b. При каких b задача имеет решение?

3. Решить неравенство

$$\frac{7}{|x-1|-3}\geqslant|x+2|.$$

4.Н. В треугольной пирамиде $ABCD$ длины всех ребер равны. Точка M равноудалена от вершин A, B, C пирамиды. Расстояние от точки M до плоскости ABC равно $\sqrt{5/3}$. Известно, что синус угла между прямой MC и высотой треугольника ABC, опущенной из вершины A, равен $2\sqrt{2}/3$. Вычислить объем пирамиды $ABCD$.

5. Найти все тройки целых чисел (x, y, z), для каждой из которых выполняется соотношение

$$2x^2+y^2+7z^2+2x^2y^2-42z+33=0.$$

2.С. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{2+x}(y^2-6y+9)+\log_{3-y}(x^2+4x+4)=4, \\ 2\log_{2+x}(4-y)-\log_{3-y}(2-2x)=1. \end{cases}$$

4.С. В треугольной пирамиде $ABCD$ длины всех ребер равны. Точка P лежит вне пирамиды, причем

$$PB=PC=\sqrt{\frac{97}{100}},\quad PA=PD.$$

Известно, что расстояние от точки P до прямой AD равно $\frac{1}{5\sqrt{2}}$. Вычислить объем пирамиды $ABCD$.

§ 13. ФИЛОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
(отделение структурной и прикладной лингвистики)

1977

Вариант 1.

1. В двух ящиках находится более 29 одинаковых деталей. Число деталей в первом ящике, уменьшенное на 2, более чем в 3 раза превышает число деталей во втором ящике. Утроенное число деталей в первом ящике превышает удвоенное число деталей во втором ящике, но менее, чем на 60. Сколько деталей в каждом ящике?

2.Н. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x=0,\quad y=\sin x,\quad y=\cos x,\quad x=\pi/2.$$

3. Найти наименьший положительный корень уравнения

$$\cos \pi x^2 = \cos \pi (x^2 + 2x + 1).$$

4.Н. Для каждого a определить число решений уравнения

$$\sqrt{2|x| - x^2} = a.$$

5. Дана пирамида $SABC$. Точки D и E лежат соответственно на ребрах SA и SB, причем $|SD|:|DA| = 1:2$ и $|SE|:|EB| = 1:2$. Через точки D и E проведена плоскость α, параллельная ребру SC. В каком отношении делит плоскость α объем пирамиды?

2.С. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 5 - 2\sqrt{6}, \\ x + y = \pi/4. \end{cases}$$

4.С. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + \log_2 y = y \log_2 3 + \log_2 x, \\ x \log_2 72 + \log_2 x = 2y + \log_2 y. \end{cases}$$

Вариант 2.

1. В двух бригадах вместе более 27 человек. Число членов первой бригады более чем в 2 раза превышает число членов второй бригады, уменьшенное на 12. Число членов второй бригады более чем в 9 раз превышает число членов первой бригады, уменьшенное на 10. Сколько человек в каждой бригаде?

2.Н. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x = \frac{\pi}{6}, \quad y = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad y = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x = \frac{\pi}{3}.$$

3. Найти наименьший положительный корень уравнения

$$\sin \pi x^2 = \sin \pi (x^2 + 2x).$$

4.Н. Для каждого a определить число решений уравнения

$$|x^2 - 2x - 3| = a.$$

5. В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Через середину ребра SA проведена плоскость α, параллельная грани SBC. В каком отношении плоскость α делит объем пирамиды?

2.С. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}. \end{cases}$$

4.С. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x\log_2 3+\log_2 y = y+\log_2 x, \\ x\log_3 12+\log_3 x = y+\log_3 y. \end{cases}$$

1978

Вариант 1.

1. Двум бригадам, общей численностью 18 человек, было поручено организовать в течение трех суток непрерывное круглосуточное дежурство по одному человеку. Первые двое суток дежурили члены первой бригады, распределив между собой это время поровну. Известно, что во второй бригаде три девушки, а остальные юноши, причем девушки дежурили по одному часу, а все юноши распределили между собой остаток дежурства поровну. При подсчете оказалось, что сумма продолжительностей дежурств каждого юноши второй бригады и любого члена первой бригады меньше девяти часов. Сколько человек в каждой бригаде?

2.Н. В Изумрудном городе автобусные билеты имеют шестизначные номера от 000001 до 999999. Школьники считают билет счастливым, если первые три его цифры нечетны и различны, вторые три цифры четны, причем цифры 7 и 8 не стоят рядом. Сколько всего существует различных номеров счастливых билетов?

3. Решить уравнение

$$5\sin x+6\sin 2x+5\sin 3x+\sin 4x=0.$$

4.Н. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=\sin^2 x+\cos x-1/2.$$

5. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность единичного радиуса. Известно, что $|AB|=\sqrt{2}$, $\widehat{ABE}=\pi/4$, $\widehat{EBD}=\pi/6$ и $|BC|=|CD|$. Чему равна площадь пятиугольника?

2.С. Число α подобрано так, что уравнение

$$\sqrt{x-\sqrt{3}}+\alpha^2x^2+2\alpha x(\sqrt{6}-\sqrt{3})=6\sqrt{2}-9$$

имеет решение. Найти это решение.

4.С. Решить уравнение

$$\log_3 (x^2-5x+6)^2=2^{-1}\log_{\sqrt{3}}\frac{x-1}{2}+\log_3|x-3|.$$

1979

Вариант 1.

Даны две непересекающиеся окружности. К ним проведены две общие касательные, которые пересекаются в точке A отрезка, соединяющего центры окружностей. Радиус меньшей окружности равен R. Расстояние от точки A до центра окружности большего радиуса равно $6R$. Точка A делит длину отрезка касательной, заключенного между точками касания, в отношении $1:3$. Найти площадь фигуры, ограниченной отрезками касательных и бо́льшими дугами окружностей, соединяющими точки касания.

2. Решить уравнение

$$\sin\left(2x+\frac{5}{2}\pi\right)-3\cos\left(x-\frac{7}{2}\pi\right)=1+2\sin x.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{1/2}(4-x)\geqslant\log_{1/2}2-\log_{1/2}(x-1).$$

4. Три автоматические линии выпускают одинаковую продукцию, но имеют разную производительность. Производительность всех трех одновременно действующих линий в 1,5 раза выше производительности первой и второй линий, работающих одновременно. Сменное задание для первой линии вторая и третья линии, работая одновременно, могут выполнить на 4 ч 48 мин быстрее, чем его выполняет первая линия; это же задание вторая линия выполняет на 2 ч быстрее по сравнению с первой линией. Найти время выполнения первой линией своего сменного задания.

5. Пусть m и n — натуральные числа, причем $\frac{m}{n}$ — правильная несократимая дробь. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{3n-m}{5n+2m}$, если известно, что она сократима?

Вариант 2.

1. Даны две непересекающиеся окружности радиусов R и $2R$. К ним проведены общие касательные, которые пересекаются в точке A отрезка, соединяющего центры окружностей. Расстояние между центрами окружностей равно $2R\sqrt{3}$. Найти площадь фигуры, ограниченной отрезками касательных, заключенными между точками касания и бо́льшими дугами окружностей, соединяющими точки касания.

2. Решить уравнение

$$\sin x+\sin 3x+4\cos^3 x=0.$$

3. Решить неравенство

$$2-\log_2(x^2+3x)\geqslant 0.$$

4. Двум токарям и ученику поручили выполнение срочной работы. Первый токарь может один выполнить всю работу за время на 3 часа большее, чем время, за которое второй

токарь и ученик, работая одновременно, выполняют ту же работу. Второй токарь, работая один, может выполнить всю работу за то же время, за которое ее выполняют первый токарь и ученик, работая одновременно. Время, затрачиваемое вторым токарем на самостоятельное выполнение всей работы, на восемь часов меньше удвоенного времени, затрачиваемого первым токарем на самостоятельное выполнение всей работы. За какое время будет выполнена вся работа двумя токарями и учеником, работающими одновременно?

5. Пусть m и n — натуральные числа, причем $\frac{m}{n}$ — правильная несократимая дробь. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{2n-m}{3n+2m}$, если известно, что она сократима?

Часть II

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

ВВЕДЕНИЕ

В дальнейшем при решении задач будут часто использоваться приводимые ниже определения и утверждения.

1. Уравнения с одним неизвестным. Пусть даны две функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ и область M есть пересечение областей существования этих функций.

Если нужно найти все числа α из области M, для каждого из которых справедливо числовое равенство $f(\alpha)=g(\alpha)$, то говорят, что нужно решить уравнение $f(x)=g(x)$ или что *дано уравнение* $f(x)=g(x)$. *Областью допустимых значений* (ОДЗ) *уравнения* $f(x)=g(x)$ называется общая часть (пересечение) областей определения функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$, т. е. ОДЗ — множество всех числовых значений неизвестного x, при каждом из которых имеет смысл (определены) и левая и правая части уравнения. Число α, принадлежащее ОДЗ уравнения, называется *корнем* или *решением уравнения* $f(x)=g(x)$, если при подстановке его вместо неизвестного x уравнение превращается в верное числовое равенство. *Решить уравнение* — это значит найти множество всех его корней. Отметим, что это множество может оказаться и пустым, в таких случаях обычно говорят, что уравнение не имеет корней.

Два уравнения называются *равносильными*, если совпадают множества их корней.

Два уравнения называются *равносильными на некоторой области A значений неизвестного x* (в частности на ОДЗ), если совпадают множества их корней, принадлежащих этой области.

Пусть даны два уравнения $f_1(x)=g_1(x)$ и $f_2(x)=g_2(x)$. Если любой корень первого уравнения является корнем второго уравнения, то второе уравнение называется *следствием* первого уравнения. Из определения равносильности уравнений следует, что вместо того, чтобы решать данное уравнение, можно решать уравнение, ему равносильное. Если же заменить уравнение его следствием, то множество всех решений нового уравнения будет содержать все корни исходного уравнения и помимо них может содержать еще некоторые числа, называемые *посторонними корнями* исходного уравнения. Поэтому, если в процессе решения от уравнения перешли к его следствию, то в конце решения необходима проверка, т. е. необходимо каждый из найденных корней подставить в исходное уравнение и отобрать те из них, которые обращают исходное уравнение в верное числовое равенство; те из них, при которых исходное уравнение превращается в неверное числовое равенство, нужно отбросить. Разумеется, переходить от данного уравнения к уравнению, множество корней которого содержит не все корни данного уравнения, не желательно, ибо при таком переходе возможна потеря корней данного уравнения, что недопустимо.

Приведем теперь некоторые утверждения о равносильности уравнений, а также утверждения о том, когда одно уравнение будет следствием другого.

Утверждения о равносильности уравнений.

1. Уравнения $f(x)=g(x)$ и $f(x)-g(x)=0$ равносильны.

2. Уравнения $f(x)=g(x)$ и $f(x)+\alpha=g(x)+\alpha$ равносильны для любого числа α.

3. Уравнения $f(x)=g(x)$ и $\alpha f(x)=\alpha g(x)$ равносильны для любого числа $\alpha\neq 0$.

4. Уравнения $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ и $f(x)=g(x)$ равносильны для любого фиксированного положительного и не равного единице числа a.

5. Пусть n — натуральное число и на некотором множестве M функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ неотрицательны. Тогда на этом множестве уравнения $f(x)=g(x)$ и $f^n(x)=g^n(x)$ равносильны.

6. Пусть фиксированное число a таково, что $a>0$ и $a\neq 1$, и на некотором множестве M функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ положительны; тогда на этом множестве M уравнения $f(x)=g(x)$ и $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ равносильны. В частности, если $b>0$, то уравнения $a^{h(x)}=b$ и $h(x)=\log_a b$ равносильны.

7. Пусть на множестве M, содержащемся в ОДЗ уравнения $f(x)=g(x)$, функция $y=\varphi(x)$ определена и не обращается в нуль ни в одной точке множества M. Тогда на множестве M уравнения $f(x)=g(x)$ и $f(x)\varphi(x)=g(x)\varphi(x)$ равносильны. Заметим, что множество M может совпадать с ОДЗ уравнения $f(x)=g(x)$.

Утверждения о том, когда одно уравнение является следствием другого.

1. Пусть n — натуральное число, тогда уравнение $f^n(x)=g^n(x)$ есть следствие уравнения $f(x)=g(x)$.

2. Если $a>0$ и $a\neq 1$, то уравнение $f(x)=g(x)$ есть следствие уравнения $\log_a f(x)=\log_a g(x)$.

3. Уравнение $f(x)=g(x)\varphi(x)$ есть следствие уравнения

$$f(x)/g(x)=\varphi(x).$$

Эти утверждения часто формулируют иначе.

1. При возведении в натуральную степень обеих частей уравнения можно приобрести посторонние корни (при этом не происходит потери корней).

2. При потенцировании обеих частей уравнения можно приобрести посторонние корни (потери корней не происходит).

3. При освобождении уравнения от знаменателя можно приобрести посторонние корни (потери корней не происходит).

Следовательно, в случае применения этих преобразований необходима проверка.

Пусть даны уравнения

$$f_1(x)=g_1(x),\ f_2(x)=g_2(x),\ \ldots,\ f_n(x)=g_n(x),\ \ldots,$$

притом уравнений или конечное число, или их бесконечно много.

Обозначим через Q область, являющуюся пересечением областей допустимых значений всех этих уравнений. Если нужно найти все числа α из области Q, каждое из которых является корнем хотя бы одного из этих уравнений, то говорят, что дана *совокупность уравнений*

$$f_1(x)=g_1(x), \quad f_2(x)=g_2(x), \ \ldots, \ f_n(x)=g_n(x), \ \ldots$$

и область Q называют областью *допустимых значений* (ОДЗ) этой *совокупности уравнений*. При этом, если уравнений бесконечно много, то говорят, что дана бесконечная совокупность уравнений. Число α из ОДЗ этой совокупности называется *корнем* (или *решением*) этой *совокупности*, если оно является корнем хотя бы одного уравнения совокупности. *Решить совокупность уравнений* — это значит найти множество ее корней. Если это множество окажется пустым, то говорят, что *совокупность уравнений не имеет корней*. Говорят, что *уравнение* $F(x)=G(x)$ *равносильно на области* M (в частности, на ОДЗ) *совокупности уравнений*

$$f_1(x)=g_1(x), \quad f_2(x)=g_2(x), \ \ldots, \ f_n(x)=g_n(x), \ \ldots,$$

если множество корней уравнения, принадлежащих области M, совпадает с множеством корней совокупности уравнений, принадлежащих множеству M.

Довольно часто встречаются уравнения $f(x)=0$, где $f(x)=p(g(x))$ — сложная функция, являющаяся суперпозицией двух функций $g(x)$ и $p(g)$, где $p(g)$ — квадратный трехчлен: $p(g)=ag^2+bg+c$. В таких случаях уравнение $f(x)=0$ записывают в виде $a(g(x))^2+b(g(x))+c=0$ и называют *квадратным уравнением относительно* $g(x)$. Для решения такого уравнения решают сначала квадратное уравнение

$$at^2+bt+c=0. \tag{1}$$

В случае, если дискриминант $D=b^2-4ac$ этого уравнения положителен, то уравнение (1) имеет два корня t_1 и t_2 и в этом случае уравнение $f(x)=0$ равносильно совокупности уравнений

$$g(x)=t_1 \quad \text{и} \quad g(x)=t_2.$$

Если $D=0$, то уравнение (1) имеет единственный корень $-\dfrac{b}{2a}$ и в этом случае уравнение $f(x)=0$ равносильно уравнению

$$g(x)=-\frac{b}{2a}.$$

Если же $D<0$, то уравнение (1), а значит и уравнение $f(x)=0$, не имеет решений.

Пусть дано уравнение, некоторые члены которого находятся под знаком абсолютной величины. Для решения таких уравнений обычно необходимо избавиться от знаков модуля. Так как по определению

$$|F(x)|=\begin{cases} F(x) & \text{на множестве, где } F(x)\geqslant 0, \\ -F(x) & \text{на множестве, где } F(x)<0, \end{cases}$$

то для освобождения от знаков абсолютных величин надо найти все точки числовой оси, в каждой из которых меняет знак хотя бы одна из функций, находящихся под знаком абсолютной величины. Затем на числовой прямой отмечаются все эти точки. Таким образом, числовая прямая разбивается на некоторое число промежутков. На каждом таком промежутке уравнение заменяется на другое уравнение, не содержащее знаков абсолютной величины и равносильное исходному уравнению на этом промежутке.

Каждое из полученных уравнений решается и из полученного множества решений отбираются числа, лежащие на промежутке, соответствующем этому уравнению. Они и будут корнями исходного уравнения на рассматриваемом промежутке. Наконец, для того чтобы выписать все корни исходного уравнения, собирают вместе (объединяют) все его корни, найденные на всех промежутках.

2. **Неравенства с одним неизвестным.** Пусть даны две функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ и пусть область M есть пересечение областей существования этих функций. Если требуется найти все числа α из области M, для каждого из которого справедливо числовое неравенство $f(\alpha)>g(\alpha)$, то в таких случаях говорят, что нужно *решить неравенство* $f(x)>g(x)$ или что *дано неравенство* $f(x)>g(x)$. *Областью допустимых значений* (ОДЗ) *неравенства* $f(x)>g(x)$ называется общая часть (пересечение) областей существования функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$. Число α, принадлежащее ОДЗ неравенства, называется *решением неравенства* $f(x)>g(x)$, если при подстановке его вместо неизвестного x неравенство превращается в верное числовое неравенство $f(\alpha)>g(\alpha)$. *Решить неравенство* — значит найти множество его решений. Отметим, что это множество может оказаться и пустым, в таких случаях обычно говорят, что *неравенство не имеет решений*. Два неравенства называются *равносильными*, если совпадают множества их решений. Два неравенства называются *равносильными на некоторой области* A, если множество всех решений (принадлежащих этой области) первого неравенства совпадает с множеством всех решений (также принадлежащих этой области) второго неравенства.

Утверждения о равносильности неравенств.

1. Неравенства $f(x)>g(x)$ и $f(x)-g(x)>0$ равносильны.

2. Неравенства $f(x)>g(x)$ и $f(x)+\alpha>g(x)+\alpha$ равносильны для любого числа α.

3. Неравенства $f(x)>g(x)$ и $\alpha f(x)>\alpha g(x)$ равносильны для любого положительного числа α.

4. Неравенства $f(x)>g(x)$ и $\alpha f(x)<\alpha g(x)$ равносильны для любого отрицательного числа α.

5. Неравенства $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ и $f(x)>g(x)$ равносильны для любого фиксированного числа a из промежутка $(1, +\infty)$.

6. Неравенства $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ и $f(x)<g(x)$ равносильны для любого фиксированного числа a из промежутка $(0, 1)$.

7. Пусть n — натуральное число и на некотором множестве A функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ неотрицательны. Тогда на этом множестве неравенства $f(x)>g(x)$ и $(f(x))^n>(g(x))^n$ равносильны.

8. Пусть a — фиксированное число из промежутка $(1, +\infty)$ и на некотором множестве A функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ положительны. Тогда на этом множестве равносильны неравенства $f(x)>g(x)$ и $\log_a f(x)>\log_a g(x)$.

9. Пусть a — фиксированное число из промежутка $(0, 1)$ и на некотором множестве A функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ положительны. Тогда на этом множестве равносильны неравенства $f(x) > g(x)$ и $\log_a f(x) < \log_a g(x)$.

10. Пусть на множестве M, содержащемся в ОДЗ неравенства $f(x) > g(x)$, функция $y=\varphi(x)$ положительна. Тогда на этом множестве равносильны неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x)\varphi(x) > g(x)\varphi(x)$.

Пусть дано m неравенств: $f_1(x) > g_1(x), \ldots, f_m(x) > g_m(x)$. Обозначим через Q область, являющуюся пересечением областей допустимых значений всех этих неравенств. Если нужно найти все числа α из области Q, каждое из которых является решением каждого из этих неравенств, то говорят, что дана *система m неравенств*

$$\begin{cases} f_1(x) > g_1(x), \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_m(x) > g_m(x) \end{cases}$$

и область Q называют *областью допустимых значений* (ОДЗ) этой *системы*. Число α из ОДЗ системы неравенств называется *решением* этой *системы*, если оно является решением каждого из неравенств системы. *Решить систему неравенств* — это значит найти множество всех ее решений. Если это множество окажется пустым, то говорят, что система неравенств не имеет решений.

Пусть дано k систем неравенств

$$\begin{cases} f_1(x) > g_1(x), \\ \ldots\ldots\ldots \\ h_1(x) > s_1(x), \end{cases} \ldots, \quad \begin{cases} f_k(x) > g_k(x), \\ \ldots\ldots\ldots \\ h_k(x) > s_k(x). \end{cases} \tag{2}$$

Обозначим через Q область, являющуюся пересечением областей допустимых значений всех этих систем. Если нужно найти все числа α из области Q, каждое из которых является решением хотя бы одной из этих систем, то говорят, что дана *совокупность k систем неравенств* и область Q называют *областью допустимых значений* (ОДЗ) этой *совокупности*. Число α из ОДЗ совокупности систем неравенств (2) называется *решением* этой *совокупности*, если оно является решением хотя бы одной системы неравенств из совокупности (2). *Решить совокупность систем неравенств* (2) — это значит найти множество ее решений. Заметим, что если каждая из k систем совокупности (2) состоит только из одного неравенства, то говорят, что дана *совокупность k неравенств*. Говорят, что *неравенство $f(x) > g(x)$ равносильно на области A совокупности систем неравенств* (2), если множество решений (принадлежащих этой области) неравенства $f(x) > g(x)$ совпадает с множеством решений (принадлежащих этой области) совокупности систем неравенств (2).

Пусть требуется решить неравенство

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n) > 0, \tag{3}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — фиксированные числа, среди которых нет равных, причем

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n.$$

Для решения таких неравенств применяется так называемый *метод интервалов*. Суть этого метода состоит в следующем. На числовую прямую наносят числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в порядке возрастания; в промежутке справа от наибольшего из них ставят знак плюс, в следующем за ним справа налево промежутке ставят знак минус, затем знак плюс, затем знак минус и т. д. (рис. 1). Тогда решением неравенства (3) будет объединение всех тех промежутков, в которых поставлен знак плюс.

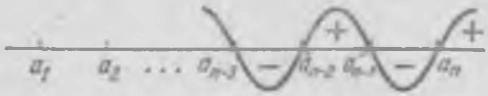


Рис. 1.

Для того чтобы с помощью метода интервалов решить неравенство

$$\frac{(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n)}{(x-\beta_1)\ldots(x-\beta_m)} > 0, \tag{4}$$

где все числа α_i, β_j различны, нужно нанести на числовую прямую все точки α_i и β_j и расставить в получившихся промежутках знаки так, как указано выше. Множество решений неравенства (4) будет объединением тех интервалов, где стоят знаки плюс. Довольно часто встречаются неравенства $f(x) > 0$, где $f(x) = p(g(x))$ — сложная функция, составленная из двух функций $g(x)$ и $p(g)$, где $p(g)$ — квадратный трехчлен: $p(g) = ag^2 + bg + c$. В таких случаях неравенство $f(x) > 0$ записывают в виде

$$a(g(x))^2 + b(g(x)) + c > 0 \tag{5}$$

и называют *квадратным неравенством относительно* $g(x)$. Неравенство (5) решают следующим образом: сначала находят дискриминант $D = b^2 - 4ac$ квадратного трехчлена $at^2 + bt + c$.

Возможны следующие четыре случая.

1. Если $a < 0$ и $D \leqslant 0$, то неравенство (5) не имеет решений.

2. Если $a < 0$, $D > 0$, а t_1 и t_2 — корни квадратного трехчлена $at^2 + bt + c$, причем $t_1 < t_2$, то неравенство (5) равносильно двойному неравенству

$$t_1 < g(x) < t_2.$$

3. Если $a > 0$, $D \geqslant 0$, а t_1 и t_2 — корни квадратного трехчлена $at^2 + bt + c$, причем $t_1 < t_2$ (если $D = 0$, то $t_1 = t_2$), то неравенство (5) равносильно совокупности неравенств

$$g(x) < t_1, \quad g(x) > t_2.$$

4. Если $a > 0$ и $D < 0$, то множество решений неравенства (5) совпадает с областью определения функции $y = g(x)$.

Пусть дано неравенство, некоторые члены которого находятся под знаком абсолютной величины. Для решения таких неравенств освобождаются от знаков абсолютных величин. Это делается так же, как и для уравнений. Отметим, что поскольку множество решений неравенства $f(x) \geqslant g(x)$ есть объединение множеств решений неравенства $f(x) > g(x)$ и уравнения $f(x) = g(x)$, то решение нестрогих неравенств сводится к решению строгих неравенств и уравнений.

3. Алгебраические уравнения и системы алгебраических уравнений. Пусть даны два многочлена $R(x, y)$ и $Q(x, y)$ относительно x и y. Говорят, что дано *алгебраическое уравнение*

$$R(x, y) = Q(x, y) \tag{6}$$

с двумя неизвестными x и y, если требуется найти все пары чисел (x_0, y_0), для каждой из которых справедливо числовое равенство $R(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0)$. Каждая такая пара чисел (x_0, y_0) называется *решением уравнения* (6). *Решить уравнение* (6) — это значит найти множество его решений.

Пусть даны два алгебраических уравнения с двумя неизвестными

$$R(x, y) = Q(x, y) \quad \text{и} \quad T(x, y) = S(x, y).$$

Эти уравнения называются *равносильными*, если совпадают множества их решений.

Справедливы следующие утверждения.

1. Уравнения $R(x, y) = Q(x, y)$ и $R(x, y) - Q(x, y) = 0$ равносильны.

2. Уравнения $R(x, y) = Q(x, y)$ и $R(x, y) + P(x, y) = Q(x, y) + P(x, y)$, где $P(x, y)$ — любой многочлен относительно x и y, равносильны.

3. Уравнения $R(x, y) = Q(x, y)$ и $\alpha R(x, y) = \alpha Q(x, y)$ равносильны для любого отличного от нуля числа α. Из этих утверждений, в частности, вытекает, что каждое алгебраическое уравнение с двумя неизвестными x и y можно заменить равносильным ему уравнением

$$P(x, y) = 0, \tag{7}$$

где $P(x, y)$ — многочлен относительно x и y (иногда говорят «привести к виду (7)»). Говорят, что *дана совокупность m алгебраических уравнений с двумя неизвестными x и y*

$$P_1(x, y) = 0, \quad P_2(x, y) = 0, \quad \ldots, \quad P_m(x, y) = 0, \tag{8}$$

где $P_1(x, y), \ldots, P_m(x, y)$ — многочлены относительно x и y, если требуется найти все пары чисел (x_0, y_0), каждая из которых является решением хотя бы одного из уравнений (8). Каждая такая пара чисел (x_0, y_0) называется *решением совокупности* (8). *Решить совокупность уравнений* (8) — это значит найти множество ее решений. Говорят, что *уравнение* (7) *равносильно совокупности уравнений* (8), если совпадают множества всех решений уравнения (7) и совокупности уравнений (8).

Пусть даны многочлены $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ относительно x и y. Говорят, что дана *система двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными x и y*

$$\begin{cases} P(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

если требуется найти все пары чисел (x_0, y_0), каждая из которых является решением каждого из уравнений (9). Пара чисел (x_0, y_0) называется *решением системы уравнений* (9), если одновременно справедливы два числовых равенства: $P(x_0, y_0) = 0$ и $Q(x_0, y_0) = 0$. *Решить систему уравнений* (9) — это значит найти множество ее решений.

Пусть дана еще одна система двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} R(x, y)=0, \\ S(x, y)=0, \end{cases} \tag{10}$$

где $R(x, y)$ и $S(x, y)$ — многочлены относительно x и y.

Две системы алгебраических уравнений (9) и (10) называются *равносильными*, если совпадают множества их решений. Говорят, что *дана совокупность k систем двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными*

$$\begin{cases} P_1(x, y)=0, \\ Q_1(x, y)=0, \end{cases} \ldots, \begin{cases} P_k(x, y)=0, \\ Q_k(x, y)=0, \end{cases} \tag{11}$$

где $P_i(x, y)$ и $Q_i(x, y)$ $(i=1, \ldots, k)$ — многочлены относительно x и y, если требуется найти все пары чисел (x_0, y_0), каждая из которых является решением хотя бы одной из систем уравнений (11). Каждая такая пара чисел (x_0, y_0) называется *решением совокупности систем уравнений* (11). *Решить совокупность систем уравнений* (11) — это значит найти множество ее решений. *Система уравнений* (9) *равносильна совокупности систем уравнений* (11), если совпадают множества их решений.

Утверждения о равносильности систем уравнений.

1. Если изменить порядок уравнений системы (9), то полученная система равносильна системе (9).

2. Если одно из уравнений системы (9) заменить на равносильное уравнение, то полученная система равносильна системе (9).

3. Если первое уравнение системы (9) заменить уравнением, равным сумме первого уравнения, умноженного на некоторое отличное от нуля число α, и второго уравнения, умноженного на некоторое число β, то полученная система уравнений равносильна системе (9); другими словами, для любых β и α $(\alpha \neq 0)$ две следующие системы уравнений равносильны:

$$\begin{cases} P(x, y)=0, \\ Q(x, y)=0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \alpha P(x, y)+\beta Q(x, y)=0, \\ Q(x, y)=0. \end{cases}$$

4. Пусть в системе уравнений (9) одно из уравнений записано в виде, где в левой части стоит одно из неизвестных, например, x в первой степени, а в правой части — многочлен относительно y. Тогда говорят, что неизвестное x выражено через неизвестное y. Если неизвестное x выражено из первого уравнения системы (9), то подставив во второе уравнение системы (9) вместо x этот многочлен от y, получим систему, равносильную системе (9); другими словами, равносильны следующие системы:

$$\begin{cases} x=R(y), \\ Q(x, y)=0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x=R(y), \\ Q(R(y), y)=0. \end{cases}$$

5. Если первое уравнение системы (9) равносильно совокупности k алгебраических уравнений:

$$P_1(x, y)=0, \ \ldots, \ P_k(x, y)=0,$$

то система (9) равносильна следующей совокупности k систем уравнений:

$$\begin{cases} P_1(x, y)=0, \\ Q(x, y)=0, \end{cases} \ldots, \begin{cases} P_k(x, y)=0, \\ Q(x, y)=0. \end{cases}$$

Отметим, что аналогичные определения и утверждения можно привести и для алгебраических уравнений с n неизвестными.

§ 1. МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

1977

Решение варианта 1.

1.Н. Преобразуем левую часть данного неравенства. По формуле Ньютона — Лейбница

$$\int_0^a (2-4x+3x^2)\,dx=(2x-2x^2+x^3)\Big|_0^a=2a-2a^2+a^3.$$

Таким образом, исходное неравенство можно переписать так: $2a-2a^2+a^3<a$, или $a(a-1)^2<0$. Учитывая условие $a>0$, получаем, что $a=1$.

Ответ: $a=1$.

2. Пусть $ABCD$ — данная трапеция (рис. 2), $|AB|=5$, $|CD|=3$, KL — средняя линия. Обозначим величины отрезков BC и AD через x и y соответственно. Так как в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность, то $x+y=|BC|+|AD|=|AB|+|CD|=8$. Поскольку KL — средняя линия трапеции, то $|KL|=\frac{|BC|+|AD|}{2}=4$.

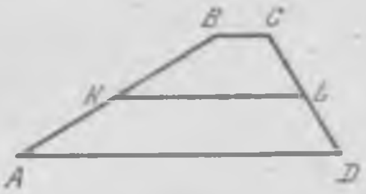


Рис. 2.

Если h — высота трапеции, то из теоремы о пропорциональных отрезках, отсекаемых параллельными прямыми, следует, что высоты трапеций $KBCL$ и $AKLD$ равны $h/2$. Для площадей этих трапеций теперь имеем:

$$S_{KBCL}=\frac{|BC|+|KL|}{2}\cdot\frac{|h|}{2}=\frac{x+4}{2}\cdot\frac{|h|}{2},$$

$$S_{AKLD}=\frac{|AD|+|KL|}{2}\cdot\frac{|h|}{2}=\frac{y+4}{2}\cdot\frac{|h|}{2}.$$

По условию $\frac{5}{11}=\frac{S_{KBCL}}{S_{AKLD}}$, т. е. $\frac{x+4}{y+4}=\frac{5}{11}$. После упрощений получаем уравнение $11x-5y=-24$. Система уравнений

$$\begin{cases} x+y=8, \\ 11x-5y=-24 \end{cases}$$

имеет единственное решение $x=1$, $y=7$.

Ответ: $|BC|=1$, $|AD|=7$.

3.Н. Найдем наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$. Для этого сначала преобразуем функцию к более удобному виду:

$$f(x) = 2\cdot\sin x\cdot\cos^2 x = 2\sin x\,(1-\sin^2 x) = 2\sin x - 2\sin^3 x.$$

Найдем теперь критические точки $f(x)$. Поскольку $f(x)$ дифференцируема в любой точке числовой прямой, то критические точки $f(x)$ есть решения уравнения $f'(x)=0$. Найдем $f'(x)$:

$$f'(x) = 2\cos x - 6\sin^2 x\cdot\cos x = 2\cos x\cdot(1-3\sin^2 x).$$

Решая на отрезке $[-\pi, \pi]$ уравнения $\cos x = 0$ и $1-3\sin^2 x = 0$, получаем критические точки

$$x_1 = \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = -\frac{\pi}{2}, \quad x_3 = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$x_4 = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_5 = \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_6 = -\pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}},$$

принадлежащие этому отрезку. Вычислим значения $f(x)$ в критических точках и на концах промежутка $[-\pi, \pi]$:

$$f(x_1) = f(x_2) = 0,$$

$$f(x_3) = f(x_5) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}},$$

$$f(x_4) = f(x_6) = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^3\right) = -\frac{4}{3\sqrt{3}}$$

$$f(-\pi) = f(\pi) = 0.$$

Наименьшим значением функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ будет наименьшее из этих чисел. Таким образом, $\min\limits_{x\in[-\pi,\pi]} f(x) = f(x_4) = -\frac{4}{3\sqrt{3}}$. Осталось проверить справедливость неравенства $-\frac{4}{3\sqrt{3}} > -\frac{7}{9}$. Ясно, что это неравенство будет выполнено, если будет выполнено неравенство $\sqrt{3} < 7/4$. Справедливость последнего неравенства вытекает из справедливости очевидного неравенства $3 < 49/16$. Значит, действительно справедливо неравенство

$$\min_{x\in[-\pi,\pi]} f(x) > -7/9.$$

4. Если ввести обозначение $f(t) = t^2 - 3t + 3$, то систему можно переписать в виде

$$y^3 = 9f(x), \quad z^3 = 9f(y), \quad x^3 = 9f(z).$$

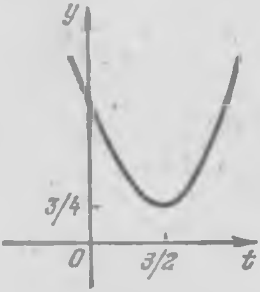


Рис. 3.

Первое решение. Функция $y = f(t)$ принимает наименьшее значение (рис. 3), равное $3/4$, в точке $t = 3/2$. Поэтому если (x_0, y_0, z_0) — решение данной системы, то

$$y_0^3 \geq \frac{27}{4}, \quad z_0^3 \geq \frac{27}{4}, \quad x_0^3 \geq \frac{27}{4}.$$

откуда следует, что $x_0 > 3/2$, $y_0 > 3/2$, $z_0 > 3/2$. В области $t > 3/2$ функция $f(t)$ монотонно возрастает. Таким образом, если (x_0, y_0, z_0) — решение данной системы, то все три числа x_0, y_0, z_0 лежат в области монотонного возрастания функции $f(t)$. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $x_0 \geqslant y_0$. Так как $x_0 > 3/2$ и $y_0 > 3/2$, то $f(x_0) \geqslant f(y_0)$. Из первых двух уравнений системы получаем, что $y_0^3 \geqslant z_0^3$, т. е. $y_0 \geqslant z_0$. Так как $y_0 > 3/2$ и $z_0 > 3/2$, то отсюда следует, что $f(y_0) \geqslant f(z_0)$, или $z_0^3 \geqslant x_0^3$, т. е. $z_0 \geqslant x_0$. Итак, получили цепочку неравенств $x_0 \geqslant y_0 \geqslant z_0 \geqslant x_0$, которая означает, что $x_0 = y_0 = z_0$.

2) Пусть $x_0 < y_0$. Так как $x_0 > 3/2$ и $y_0 > 3/2$, то $f(x_0) < f(y_0)$. Подобно первому случаю, находим, что $y_0^3 < z_0^3$, или $y_0 < z_0$. Отсюда следует, что $f(y_0) < f(z_0)$, или $z_0^3 < x_0^3$, $z_0 < x_0$. Опять получаем, что $x_0 = y_0 = z_0$.

Итак, показано, что любое решение системы (x_0, y_0, z_0) таково, что $x_0 = y_0 = z_0$. Поскольку любое решение системы (x_0, y_0, z_0) должно превращать все уравнения системы в верные числовые равенства, то, полагая $x_0 = y_0 = z_0 = t_0$, получаем, что все уравнения системы превратились в одно и то же равенство $(t_0 - 3)^3 = 0$, которое справедливо только при одном значении t_0, а именно, при $t_0 = 3$. Значит, система имеет единственное решение $(3, 3, 3)$.

Второе решение. Так как квадратный трехчлен $t^2 - 3t + 3$ положителен при всех t, то для любого решения (x_0, y_0, z_0) данной системы получаем, что $y_0^3 > 0$, $z_0^3 > 0$, $x_0^3 > 0$, или $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, $z_0 > 0$. Складывая все три уравнения, находим, что

$$(x_0 - 3)^3 + (y_0 - 3)^3 + (z_0 - 3)^3 = 0. \quad (1)$$

Возможны два случая: $x_0 \geqslant 3$ и $0 < x_0 < 3$.

1) Если $x_0 \geqslant 3$, то из последнего уравнения системы находим, что $9z_0^2 - 27z_0 \geqslant 0$. Так как $z_0 > 0$, то отсюда получаем, что $z_0 \geqslant 3$. Из второго уравнения получаем теперь, что $9y_0^2 - 27y_0 \geqslant 0$, откуда $y_0 \geqslant 3$. Из (1) теперь следует, что $x_0 = y_0 = z_0 = 3$. Итак, если (x_0, y_0, z_0) решение системы, то $x_0 = y_0 = z_0 = 3$. Проверкой убеждаемся, что действительно $(3, 3, 3)$ есть решение системы.

2) Если $x_0 < 3$, то, подобно первому случаю, находим, что $z_0 < 3$. Затем из второго уравнения получаем, что $y_0 < 3$. Итак, в этом случае одновременно $x_0 < 3$, $y_0 < 3$, $z_0 < 3$, что противоречит равенству (1). Значит доказано, что данная система имеет единственное решение $x_0 = y_0 = z_0 = 3$.

Ответ: $(3, 3, 3)$.

5. Первое решение. Обозначим через D середину ребра AB и через E — середину ребра BC. Проведем через точку C в плоскости ABC прямую l параллельно AB и через E также в плоскости ABC прямую m параллельно CD. Точку пересечения l и m обозначим через F (рис. 4). Так как $CD \parallel FE$, то величина угла между прямыми CD и SE равна величине угла между прямыми SE и EF. Так как ребро CS перпендикулярно плоскости ABC, то $CS \perp FE$. В то же время $FE \perp CF$ (CD — высота треугольника ABC, $FE \parallel CD$, $CF \parallel AB$), следовательно, прямая FE перпен-

дикулярна плоскости SCF, а значит, $FE \perp FS$. Итак, доказано, что треугольник SEF прямоугольный. Поэтому $\operatorname{tg}\widehat{SEF}=\frac{|FS|}{|FE|}$. Так как $|CE|=|EB|$ и $CF \parallel AB$, то $|FE|=\frac{1}{2}|CD|=\frac{\sqrt{3}}{4}|AB|=\sqrt{6}$, $|CF|=\frac{1}{2}|BD|=\frac{1}{4}|AB|=\sqrt{2}$. Из прямоугольного треугольника SCF (SC — перпендикуляр к плоскости ABC) находим: $|FS|=\sqrt{|CF|^2+|CS|^2}=\sqrt{2+4}=\sqrt{6}$. Таким образом, $\operatorname{tg}\widehat{SEF}=\sqrt{6}/\sqrt{6}=1$ и величина искомого угла равна $\pi/4$.

Поскольку $CD \parallel FE$, то прямая CD параллельна плоскости SEF, значит, расстояние между прямыми CD и SE равно расстоянию от CD до

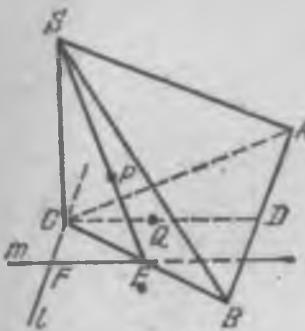


Рис. 4.

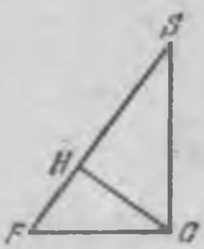


Рис. 5.

плоскости SEF. Отсюда также следует, что искомое расстояние равно расстоянию от точки C до плоскости SEF. Обозначим его через h. Тогда для объема пирамиды $SCFE$ получаем равенства

$$V_{SCFE}=\frac{1}{3}\cdot S_{CFE}\cdot|CS|=\frac{1}{6}|CF|\cdot|FE|\cdot|CS|=\frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$V_{SCFE}=\frac{1}{3}hS_{EFS}=\frac{1}{3}h\cdot\frac{1}{2}|FE|\cdot|FS|=\frac{1}{6}h(\sqrt{6})^2=h.$$

Отсюда следует, что $h=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Можно вычислить h и другим способом. Проведем в плоскости SCF через точку C прямую CH перпендикулярно SF (H лежит на SF, см. рис. 5). Так как прямая FE перпендикулярна плоскости SCF, то $CH \perp FE$. Следовательно, прямая CH перпендикулярна плоскости SEF, H — проекция точки C на плоскость SEF и $|CH|=h$. Из подобных треугольников CFH и CFS находим $\frac{|CH|}{|CS|}=\frac{|CF|}{|FS|}$ или $\frac{|CH|}{2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ и $h=|CH|=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Второе решение. Введем прямоугольную систему координат, приняв за начало координат точку C, за ось абсцисс прямую CF, за ось ординат — прямую CD, за ось аппликат — прямую CS, за единицу масштаба — отрезок, длина которого равна 1. В этой системе координат векторы $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{SE}$ имеют следующие координаты:

$$\overrightarrow{CD}=\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}|CB|,\ 0\right)=(0,\ 2\sqrt{6},\ 0),$$
$$\overrightarrow{SE}=\left(\frac{|AB|}{4},\ \frac{|CD|}{2},\ -|CS|\right)=(\sqrt{2},\ \sqrt{6},\ -2).$$

Поэтому

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{SE}})=\frac{(\overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{SE})}{|\overrightarrow{CD}||\overrightarrow{SE}|}=\frac{12}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Значит, искомый угол равен $\pi/4$. Пусть PQ (рис. 4) — общий перпендикуляр к прямым SE и CD ($P\in SE$, $Q\in CD$). Тогда существуют числа α и β такие, что $\overrightarrow{SP}=\alpha\cdot\overrightarrow{SE}$, $\overrightarrow{CQ}=\beta\overrightarrow{CD}$. Ясно, что $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{CQ}=$ $=-\alpha\overrightarrow{SE}-\overrightarrow{CS}+\beta\overrightarrow{CD}$, или в координатном виде $\overrightarrow{PQ}=(-\alpha\sqrt{2},\ -\alpha\sqrt{6}+$ $+\beta\cdot 2\sqrt{6},\ 2\alpha-2)$. Так как $PQ\perp CD$ и $PQ\perp SE$, то $(\overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{CD})=0$, $(\overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{SE})=0$. Эти два условия, записанные в координатах, дают следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} (-\alpha\sqrt{6}+\beta\cdot 2\sqrt{6})\,2\sqrt{6}=0, \\ -\alpha\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+(-\alpha\sqrt{6}+\beta\cdot 2\sqrt{6})\sqrt{6}+(2\alpha-2)\cdot(-2)=0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \alpha=2\beta, \\ -3\alpha+3\beta+1=0, \end{cases}$$

откуда $\alpha=2/3$, $\beta=1/3$. Таким образом,

$$\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{-2\sqrt{2}}{3},\ 0,\ -\frac{2}{3}\right)\quad\text{и}\quad|PQ|=\sqrt{\frac{8}{9}+\frac{4}{9}}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: величина угла равна $\pi/4$, искомое расстояние равно $2/\sqrt{3}$.

1.С. Перенесем все члены из правой части неравенства влево и приведем к общему знаменателю. Получим неравенство

$$\frac{x^2-4x+4}{x-1}\leq 0,\quad\text{или}\quad\frac{(x-2)^2}{x-1}\leq 0.$$

Этому неравенству удовлетворяет $x=2$, а в области $x\neq 2$ оно эквивалентно неравенству $\frac{1}{x-1}\leq 0$, или $x-1<0$. Последнему неравенству удовлетворяют все x из области $x<1$. Значит, исходное неравенство имеет решения: $x<1$ и $x=2$.

Ответ: $x<1$, $x=2$.

3.С. Область допустимых значений данного уравнения состоит из всех чисел x, одновременно удовлетворяющих неравенствам $\sin x>0$ и $\cos x>0$. В этой области данное уравнение равносильно такому:

$$\sqrt{3}\cos x+\sqrt{6}=3\sin x.$$

Получившееся уравнение можно переписать так:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

или, воспользовавшись формулой для синуса разности двух углов, в виде $\sin(x-\pi/6)=\sqrt{2}/2$. Последнее уравнение имеет две серии решений:

$$x=\pi/6+\pi/4+2\pi n,\ n\in Z,\qquad x=\pi/6+3\pi/4+2\pi m,\ m\in Z.$$

Из этих решений решениями исходного уравнения будут те, которые входят в ОДЗ исходного уравнения, т. е. те, которые удовлетворяют неравенствам $\cos x>0$ и $\sin x>0$. Легко видеть, что это будут только все числа из первой серии. Значит, исходное уравнение имеет одну серию решений: $x=\frac{5\pi}{12}+2\pi n,\ n\in Z$.

Ответ: $x=\frac{5\pi}{12}+2\pi n,\ n\in Z$.

Ответы к вариантам 2—4.

Вариант 2. 1.Н. $\alpha=3$. 2. $h=4$. 4. $(-1,\ -1,\ -1)$. 5. $\pi/3$; $2/\sqrt{3}$. 1.С. $x<-2$, $-2<x<-1$. 3.С. $\pi/6+2\pi k,\ k\in Z$.

Вариант 3. 1.Н. $b=2$. 2. 2; 14. 4. (2, 2, 2). 5. $\pi/4$; $1/\sqrt{3}$. 1.С. $x<-1$, $x=3$. 3.С. $\pi/12+2\pi k,\ k\in Z$.

Вариант 4. 1.Н. $q=4$. 2. $h=8$. 4. $(-2,-2,-2)$. 5. $\pi/3$; $1/\sqrt{3}$. 1.С. $x<-3$, $-3<x<1$. 3.С. $\pi/12+2\pi k,\ k\in Z$.

1978

Решение варианта 1.

1. Обозначим искомое число через x. Так как $(40\sqrt{2})^2=3200$ и $57^2=3249$, то $57>40\sqrt{2}$ и, следовательно,

$$x=\sqrt{57-40\sqrt{2}}-\sqrt{57+40\sqrt{2}}.$$

Возводя в квадрат обе части этого равенства, находим

$$x^2=57-40\sqrt{2}-2\sqrt{3249-3200}+57+40\sqrt{2}=100.$$

Это означает, что x есть одно из чисел: 10 или -10. Так как, очевидно, что $\sqrt{57+40\sqrt{2}}>\sqrt{57-40\sqrt{2}}$, то искомое число x меньше нуля. Следовательно, $x=-10$.

Ответ: $x=-10$.

2.Н. Вычислим интеграл, стоящий в левой части уравнения:

$$\int_0^{\alpha}\cos(x+\alpha^2)\,dx=\sin(x+\alpha^2)\Big|_0^{\alpha}=\sin(\alpha+\alpha^2)-\sin\alpha^2.$$

Исходное уравнение можно переписать теперь в виде

$$\sin(\alpha+\alpha^2)-\sin\alpha^2=\sin\alpha.$$

5*

Применяя известные формулы, перепишем это уравнение в виде

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\alpha^2\right)=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

или в виде

$$\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\alpha^2\right)-\cos\frac{\alpha}{2}\right)=0,$$

или в виде

$$-2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha^2}{2}\cdot\sin\frac{\alpha^2+\alpha}{2}=0.$$

Значит, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\sin\frac{\alpha}{2}=0,\quad \sin\frac{\alpha^2}{2}=0,\quad \sin\frac{\alpha^2+\alpha}{2}=0.$$

Уравнение $\sin\frac{\alpha}{2}=0$ имеет решения: $\alpha=2k\pi$, $k\in Z$. Уравнение $\sin\frac{\alpha^2}{2}=0$ имеет решения: $\alpha=\pm\sqrt{2n\pi}$, $n=0, 1, 2, \ldots$ Уравнение $\sin\frac{\alpha^2+\alpha}{2}=0$ равносильно бесконечной совокупности уравнений $\alpha^2+\alpha=2l\pi, l\in Z$. Дискриминанты этих уравнений равны $1+8l\pi$, и значит, при отрицательных целых l соответствующие уравнения решений не имеют. Если же l есть одно из чисел 0, 1, 2, ..., то уравнение $\alpha^2+\alpha=2l\pi$ имеет два корня $\alpha_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{8l\pi+1}}{2}$. Итак, уравнение $\sin\frac{\alpha^2+\alpha}{2}=0$ имеет решения

$$\alpha=\frac{-1\pm\sqrt{8l\pi+1}}{2},\qquad l=0, 1, 2, \ldots$$

Выберем теперь в найденных множествах решений совокупности числа, принадлежащие отрезку [2, 3]. Легко видеть, что ни одно из решений первого уравнения не принадлежит отрезку [2, 3], а из решений второго уравнения только одно лежит на этом отрезке: $\alpha=\sqrt{2\pi}$. Все числа вида $\alpha=\frac{-1-\sqrt{8l\pi+1}}{2}$ отрицательны и потому лежат вне отрезка [2, 3]. Из решений $\alpha=\frac{-1+\sqrt{8l\pi+1}}{2}$ отрезку [2, 3] принадлежат те и только те числа, которые удовлетворяют неравенствам

$$2\leqslant\frac{-1+\sqrt{8l\pi+1}}{2}\leqslant 3,$$

или неравенствам

$$5\leqslant\sqrt{8l\pi+1}\leqslant 7,$$

или неравенствам

$$\frac{3}{\pi}\leqslant l\leqslant\frac{6}{\pi}.$$

Ясно, что имеется только одно целое число, $l=1$, удовлетворяющее этим неравенствам. Соответствующее ему решение данного уравнения имеет вид $\alpha=\frac{-1+\sqrt{8\pi+1}}{2}$.

Ответ: $\sqrt{2\pi}$, $\frac{-1+\sqrt{8\pi+1}}{2}$.

3. Из прямоугольных треугольников ABP, BCQ находим (рис. 6):

$$\frac{|BP|}{|AB|}=\cos\widehat{B},\quad \frac{|BQ|}{|BC|}=\cos\widehat{B}.$$

Из этих равенств следует, что треугольники BPQ и ABC подобны (по двум сторонам и углу между ними), причем коэффициент подобия равен $\cos\widehat{B}$. (Заметим, что подобие треугольников BPQ и ABC можно доказать иначе. Из того, что треугольники APC и AQC прямоугольные, следует, что точки P, Q лежат на окружности, построенной на отрезке AC как на диаметре. Значит, вокруг четырехугольника $AQPC$ можно описать окружность. Поэтому $\widehat{AQP}+\widehat{ACP}=\pi$. Кроме того, очевидно, $\widehat{AQP}+\widehat{BQP}=\pi$. Из этих равенств следует, что $\widehat{ACP}=\widehat{BQP}$. Значит, треугольники BPQ и ABC подобны по двум углам.) Так как отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия, то

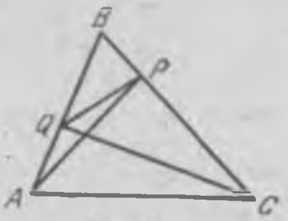


Рис. 6.

$$\cos^2\widehat{B}=\frac{S_{BPQ}}{S_{ABC}}=\frac{2}{18}=\frac{1}{9},$$

По условию треугольник ABC остроугольный, значит, $\cos\widehat{B}>0$ и, следовательно, $\cos\widehat{B}=1/3$. Из подобия этих же треугольников вытекает равенство $\frac{|PQ|}{|AC|}=\cos\widehat{B}=1/3$, откуда $|AC|=3|PQ|=6\sqrt{2}$. По теореме синусов

$$2R=\frac{|AC|}{\sin\widehat{B}}=\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{1-1/9}}=9,$$

откуда $R=9/2$.

Ответ: $R=9/2$.

4. Пусть a_0 есть то значение параметра a, при котором система имеет решение, и пусть (x_0, y_0) — ее решение. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{cases} -x_0^2-2x_0y_0+7y_0^2<1-\dfrac{2}{a_0+1}, \\ 3x_0^2+10x_0y_0-5y_0^2<-2. \end{cases}$$

Умножим первое неравенство на 2 и прибавим ко второму. Получим, что справедливо неравенство $x_0^2+6x_0y_0+9y_0^2<\frac{-4}{a_0+1}$, или $(x_0+3y_0)^2<\frac{-4}{a_0+1}$.

Отсюда вытекает, что $-\frac{4}{a_0+1} \geqslant 0$, т. е. что $a_0 < -1$. Итак, все искомые значения параметра лежат в области $a < -1$.

Докажем теперь, что для каждого a, удовлетворяющего неравенству $a < -1$, система имеет решение. Так как при $a < -1$ выполнено неравенство $-1 > \frac{1-a}{1+a}$, то достаточно доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} x^2+2xy-7y^2=-1, \\ 3x^2+10xy-5y^2=-2 \end{cases} \tag{1}$$

имеет решение. Каждое решение системы (1) будет также и решением данной системы неравенств. Решим теперь систему (1). Умножив первое уравнение на -2 и прибавив ко второму, получим уравнение $(x+3y)^2=0$, откуда $x=-3y$. Подставляя $-3y$ вместо x в любое из уравнений системы (1), получаем одно и тоже уравнение $4y^2=1$, которое имеет решения $y_1=1/2$, $y_2=-1/2$. Но тогда $x_1=-3/2$, $x_2=3/2$. Проверкой убеждаемся, что обе пары чисел $(-3/2,\ 1/2)$, $(3/2,\ -1/2)$ будут решениями системы (1), а значит, и данной системы неравенств (при $a<-1$).

Ответ: $a < -1$.

5. Пусть K — середина ребра AD, точка N — середина ребра BC (рис. 7). Прямые KM, AC лежат в плоскости ADC и не параллельны. Обозначим их точку пересечения через O. Так как точки O, N лежат в плоскости сечения и в плоскости ABC, то плоскость KMN пересечет плоскость ABC по прямой ON. Обозначим через L точку пересечения прямых ON и AB. Сечение пирамиды, заданной в условии плоскостью, есть четырехугольник $KMNL$. Требуется найти его площадь. Приведем два различных решения этой задачи.

Первое решение. Докажем сначала, что площади треугольников KMN и KLN равны, а затем вычислим площадь треугольника KMN. Проведем через точку K плоскость π параллельно двум скрещивающимся прямым AB и CD (для этого нужно провести прямые $KC_1 \parallel DC$ и $KB_1 \parallel AB$, плоскость C_1KB_1 будет искомой). Так как $CD \parallel \pi$, то все точки прямой CD равноудалены от π. Аналогично все точки прямой AB удалены на равные расстояния от π. Из равенства $|AK|=|KD|$ следует, что точки A, D равноудалены от плоскости π.

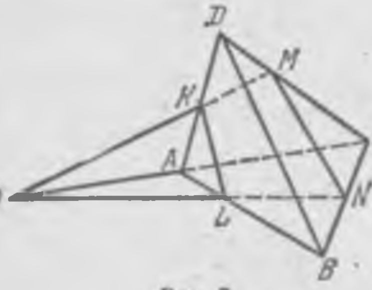


Рис. 7.

Таким образом, какие бы две точки на прямых AB и CD мы ни взяли, они будут находиться на равных расстояниях от плоскости π.

Докажем теперь, что если две точки R и S лежат по разные стороны от плоскости π на равных расстояниях от нее, то точка T пересечения RS с плоскостью π делит отрезок RS на равновеликие части (рис. 8). Действительно, так как треугольники RTR_1 и STS_1 прямоугольные, то $|RT| = \frac{|RR_1|}{\sin \widehat{RTR_1}} = \frac{|SS_1|}{\sin \widehat{STS_1}} = |ST|$, и требуемое утверждение доказано.

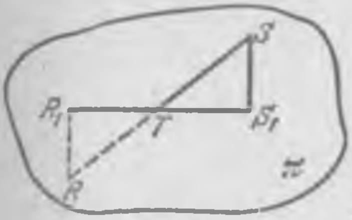


Рис. 8.

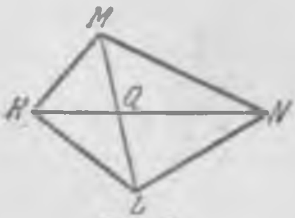


Рис. 9.

Из доказанных утверждений следует, что точки K, N и Q (точка Q — середина отрезка ML), лежащие в плоскости KMN, лежат также в плоскости π. Это означает, что середина Q отрезка ML лежит на прямой KN (рис. 9).

Из равенства $|MQ| = |QL|$ вытекает, что точки M, L равноудалены от прямой KN и, следовательно, $S_{KLN} = S_{KMN}$, т. е. $S_{KMNL} = 2S_{KMN}$. Для того чтобы вычислить S_{KMN}, сосчитаем двумя способами объем пирамиды $AKMN$. По условию точка A удалена от плоскости KMN на расстояние 1, так что

$$V_{AKMN} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot S_{KMN}.$$

С другой стороны, $V_{AKMN} = \frac{1}{3} h_N \cdot S_{AKM}$, где h_N — расстояние от точки N до плоскости ADC. Поскольку $|AK| = \frac{1}{2}|AD|$, то $S_{AKM} = \frac{1}{2} S_{ADM}$. Далее, $|DM| = \frac{2}{5}|DC|$, а значит, $S_{ADM} = \frac{2}{5} S_{ADC}$. Таким образом, $S_{AKM} = \frac{1}{5} S_{ADC}$. Ввиду того что $|CN| = \frac{1}{2}|CB|$, имеем $h_N = \frac{1}{2} h_B$ (здесь h_B — расстояние от точки B до плоскости ADC). Поэтому

$$V_{AKMN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} h_B \cdot \frac{1}{5} S_{ADC} = \frac{1}{10} V_{ABCD} = \frac{1}{2}.$$

Наконец, получаем: $S_{KMN} = 3V_{AKMN} = 3/2$ и $S_{KMNL} = 3$.

Второе решение. Рассматривая четырехугольную пирамиду $AKMNL$ и пользуясь тем, что точка A удалена от плоскости $KMNL$ на расстояние 1, находим

$$V_{AKMNL} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot S_{KMNL}.$$

С другой стороны, $V_{AKMNL} = V_{OMNA} - V_{OKLA}$. Объемы пирамид $OMNA$

и $OKLA$ можно вычислить по следующим формулам:

$$V_{OMNA}=\frac{1}{3}h_M\cdot S_{OAN},\quad V_{OKLA}=\frac{1}{3}h_K S_{OAL},$$

где h_M, h_K — расстояния от точек M, K соответственно до плоскости ABC. Ввиду того, что $|CM|=\frac{3}{5}|CD|$, $|AK|=\frac{1}{2}|AD|$, находим, что $h_M=\frac{3}{5}h_D$, $h_K=\frac{1}{2}h_D$, где h_D — расстояние от точки D до плоскости ABC.

Для того, чтобы вычислить площади треугольников OAN и OAL, нужно сосчитать отношения $\frac{|OA|}{|AC|}$ и $\frac{|AL|}{|AB|}$ (рис. 7). Воспользуемся для этой цели векторами. Обозначим через x, y такие числа, что $\overrightarrow{AO}=x\cdot\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{AL}=y\cdot\overrightarrow{AB}$. Раскладывая в плоскости ADC векторы $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{KO}$ по неколлинеарным векторам $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, получим: $\overrightarrow{MK}=\frac{2}{5}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{KO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+x\cdot\overrightarrow{CA}=$ $=x\cdot\overrightarrow{CD}+\left(\frac{1}{2}+x\right)\overrightarrow{DA}$. Если $\vec{a}$ — вектор в плоскости ADC, перпендикулярный прямой KM, то $(\vec{a},\overrightarrow{MK})=0$, $(\vec{a},\overrightarrow{KO})=0$. Из первого равенства находим: $(\vec{a},\overrightarrow{DA})=-\frac{4}{5}(\vec{a},\overrightarrow{CD})$, а тогда второе означает, что

$$0=x\cdot(\vec{a},\overrightarrow{CD})+\left(\frac{1}{2}+x\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)(\vec{a},\overrightarrow{CD})=\left(\frac{1}{5}x-\frac{2}{5}\right)\cdot(\vec{a},\overrightarrow{CD}).$$

Поскольку $(\vec{a},\overrightarrow{CD})\neq 0$, то $x=2$ или $\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{CA}$. Аналогично, раскладывая в плоскости ABC по неколлинеарным векторам $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{AB}$ векторы $\overrightarrow{OL}$ и $\overrightarrow{LN}$, получим

$$\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{AL}-\overrightarrow{AO}=y\cdot\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CA},$$
$$\overrightarrow{LN}=\overrightarrow{LB}+\overrightarrow{BN}=(1-y)\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})=\left(\frac{1}{2}-y\right)\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}.$$

Если $\vec{b}$ — вектор в плоскости ABC, перпендикулярный прямой LN, то $(\vec{b},\overrightarrow{OL})=0$, $(\vec{b},\overrightarrow{LN})=0$. Из первого равенства находим $(\vec{b},\overrightarrow{CA})=\frac{y}{2}\cdot(\vec{b},\overrightarrow{AB})$, и затем из второго

$$0=\left(\frac{1}{2}-y\right)\cdot(\vec{b},\overrightarrow{AB})-\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{2}(\vec{b},\overrightarrow{AB})=\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{4}y\right)\cdot(\vec{b},\overrightarrow{AB}).$$

Так как $(\vec{b},\overrightarrow{AB})\neq 0$, то $\frac{1}{2}-\frac{5}{4}y=0$, или $y=\frac{2}{5}$, $\overrightarrow{AL}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$. Поскольку $|AL|=\frac{2}{5}|AB|$ и $|CN|=1/2|CB|$, то $h_L=\frac{2}{5}h_B$, $h_N=\frac{1}{2}h_B$ (здесь h_L, h_B, h_N — расстояния соответственно от точек L, B, N до прямой AC).

Имеем

$$S_{OAL}=\frac{1}{2}|OA|h_L=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot|AC|\cdot\frac{2}{5}h_B=\frac{4}{5}S_{ABC},$$

$$S_{OAN}=\frac{1}{2}|OA|h_N=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot|AC|\cdot\frac{1}{2}h_B=S_{ABC}.$$

Таким образом,

$$V_{OMNA}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot h_D\cdot S_{ABC}=\frac{3}{5}V_{ABCD}=3,$$

$$V_{OKLA}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot h_D\cdot\frac{4}{5}S_{ABC}=\frac{2}{5}V_{ABCD}=2,$$

$$V_{AKMNL}=3-2=1 \text{ и } S_{KMNL}=3.$$

Ответ: площадь сечения равна 3.

2.С. Перепишем исходное уравнение в виде

$$4^{2\cos^2 x-1}+4^{\cos^2 x}=3.$$

Обозначив $4^{\cos^2 x}$ через t, будем иметь уравнение

$$\frac{1}{4}t^2+t=3.$$

Корни этого квадратного уравнения: $t_1=-6$, $t_2=2$. Значит, данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$4^{\cos^2 x}=-6,\quad 4^{\cos^2 x}=2.$$

Первое уравнение решений не имеет, так как число -6 не входит в область значений показательной функции. Второе уравнение равносильно уравнению $\cos^2 x=1/2$, которое в свою очередь равносильно совокупности двух уравнений

$$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Решения первого из этих уравнений есть $x=\pm\pi/4+2\pi k$, $k\in Z$, решения второго $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$.

Среди найденных чисел имеется только одно, лежащее на отрезке $[3/4, 1]$, а именно: $x=\pi/4$.

Ответ: $x=\pi/4$.

Ответы к вариантам 2—4.

Вариант 2. 1. -6. 2.Н. $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \frac{1-\sqrt{1+2\pi}}{2}$. 3. $\frac{24}{5}$. 4. $b<-\frac{5}{2}$. 5. $\frac{40}{3}$. 2.С. $\frac{3\pi}{4}$.

Вариант 3. 1. -10. 2.Н. $\sqrt{\frac{3}{2}\pi}$. 3. 8. 4. $\alpha>-2$. 5. $\frac{3}{5}$. 2.С. $-\frac{\pi}{2}$.

Вариант 4. 1. —8. 2.Н. $-\sqrt{2\pi}$, $\frac{1-\sqrt{1+14\pi}}{2}$. 3. 8. 4. $c > -\frac{1}{2}$. 5. 6. 2.С. $\frac{5\pi}{4}$.

1979

Решение варианта 1.

1. Данное уравнение равносильно такому: $1-5\sin x+2(1-\sin^2 x)=0$, или $2\sin^2 x+5\sin x-3=0$. Квадратное уравнение $2t^2+5t-3=0$ имеет корни $t_1=-3$, $t_2=1/2$. Значит, исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\sin x=-3 \quad \text{и} \quad \sin x=1/2.$$

Первое уравнение не имеет решений, так как при любом x справедливо неравенство $\sin x \geqslant -1$. Второе уравнение имеет две серии решений

$$x_1=\frac{\pi}{6}+2\pi n, \quad n\in Z, \quad x_2=\frac{5\pi}{6}+2\pi m, \; m\in Z.$$

Теперь отберем из этих решений те, которые удовлетворяют неравенству $\cos x\geqslant 0$. Для любого корня из первой серии: $\cos x_1=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}>0$, для любого корня из второй серии: $\cos x_2=\cos\frac{5\pi}{6}=\frac{-\sqrt{3}}{2}<0$. Значит, для любого корня из второй серии неравенство $\cos x\geqslant 0$ не выполнено, а для любого корня из первой серии — выполнено. Итак, условию задачи удовлетворяют только корни первой серии.

Ответ: $x=\pi/6+2\pi n$, $n\in Z$.

2. Из условия задачи следует, что точка S, в которой пересекаются прямые KP и LQ, отлична от точек P и Q. Значит, и точки P и Q различны. Рассмотрим два случая расположения точек P и Q на окружности (рис. 10 и 11).

Рис. 10.

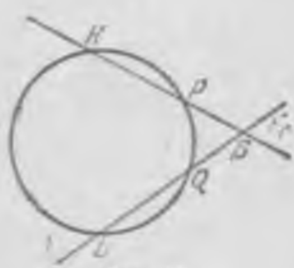


Рис. 11.

Докажем, что случай, изображенный на рис. 10, невозможен. Действительно, в этом случае углы PQL и PKL опираются на одну дугу. Значит, $\widehat{PQL}=\widehat{PKL}=\pi/3$. По условию треугольник PSQ равнобедренный, следовательно, $\widehat{SQP}=\widehat{PQL}=\pi/3$ и $\widehat{KSL}=\widehat{QSP}=\pi-2\cdot\pi/3=\pi/3$. Но угол KSL является внешним углом прямоугольного треугольника PSL (угол KPL

опирается на диаметр). Получаем противоречие: $\pi/3=\widehat{KSL}>\widehat{SPL}=\pi/2$. Рассмотрим теперь случай, изображенный на рис. 11. Так как четырехугольник $KPQL$ вписан в окружность, то $\widehat{PQL}=\pi-\widehat{PKL}$. Значит $\widehat{PQL}=2\pi/3$. Но тогда $\widehat{PQS}=\pi-\widehat{PQL}=\pi/3$. Треугольник PQS по условию равнобедренный. Следовательно, $\widehat{QPS}=\widehat{PQS}=\pi/3$ и $\widehat{PSQ}=\pi-2\cdot\pi/3=\pi/3$. Треугольники PSL и PKL прямоугольные, поскольку угол KPL опирается на диаметр. Таким образом, имеем:

$$|PL|=|PS|\operatorname{tg}\widehat{PSQ}=\operatorname{tg}\pi/3=\sqrt{3},$$

$$|KL|=\frac{|PL|}{\sin\widehat{PKL}}=\sqrt{3}:\frac{\sqrt{3}}{2}=2,$$

и, значит, радиус окружности равен $\frac{1}{2}|KL|=1$.

Ответ: радиус окружности равен 1.

3.Н. Рассмотрим функцию $y(x)$ отдельно на множествах $0\leqslant x\leqslant 2$ и $2<x\leqslant 3$.

а) Пусть x принадлежит множеству $0\leqslant x\leqslant 2$, тогда $|x-2|=-x+2$ и наша функция может быть записана в виде

$$y(x)=x^3-2x(-x+2)=x^3+2x^2-4x.$$

Отсюда следует, что она дифференцируема в каждой точке интервала $0<x<2$ и $y'(x)=3x^2+4x-4$.

Квадратное уравнение $3x^2+4x-4=0$ имеет корни $x_1=-2$, $x_2=2/3$, первый из которых не содержится в интервале $0<x<2$, а второй содержится. Легко видеть, что производная $y'(x)$ в точке $x=2/3$ равна нулю, на интервале $0<x<2/3$ отрицательна, на интервале $2/3<x<2$ положительна. Отсюда следует, что на множестве $0<x<2$ имеется единственная точка минимума $x=2/3$.

б) Пусть x принадлежит множеству $2<x\leqslant 3$, тогда $|x-2|=x-2$ и наша функция может быть записана в виде

$$y(x)=x^3-2x(x-2)=x^3-2x^2+4x.$$

Отсюда следует, что она дифференцируема в каждой точке интервала $2<x<3$ и $y'(x)=3x^2-4x+4$. Дискриминант квадратного трехчлена $3x^2-4x+4$ равен -32, значит, уравнение $3x^2-4x+4=0$ не имеет корней и, следовательно, на всем интервале $2<x<3$ производная $y'(x)$ положительна, т. е. функция $y(x)$ не имеет точек минимума на этом интервале.

Осталась неисследованной только одна внутренняя точка промежутка $0\leqslant x\leqslant 3$, а именно: $x=2$. На отрезке $2/3\leqslant x\leqslant 2$, как уже указывалось, функция $y(x)$ может быть представлена в виде многочлена $y(x)=x^3+2x^2-4x$. Производная этого многочлена положительна на множестве $x>2/3$. Значит, многочлен возрастает на множестве $x>2/3$ и, в частности, на множестве $2/3<x\leqslant 2$. Следовательно, данная функция $y(x)$ возрастает на множестве $2/3<x\leqslant 2$. Поэтому в любой окрестности точки $x=2$ есть точки, где $y(x)$ принимает значения меньшие, чем $y(2)$, и точка $x=2$ не есть точка минимума.

Функция $y(x)$ задается на отрезке $[0, 2]$ многочленом x^3+2x^2-4x, поэтому она непрерывна на отрезке $[0, 2]$ и дифференцируема на интервале $(0, 2)$, причем $y'(2/3)=0$. Значит, ее наибольшее значение на отрезке $[0, 2]$ равно большему из чисел $y(0)$, $y(2/3)$, $y(2)$. Аналогично наибольшее значение $y(x)$ на отрезке $[2, 3]$ равно большему из чисел $y(2)$ и $y(3)$. Поэтому наибольшее значение $y(x)$ на всем отрезке $[0, 3]$ равно большему из чисел $y(0)$, $y(2/3)$, $y(2)$ и $y(3)$. Таким оказывается $y(3)=21$.

Ответ: на данном отрезке функция имеет единственную точку минимума $x=2/3$, а наибольшее значение этой функции на этом отрезке равно 21.

4. Область допустимых значений данного неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условиям: $x > -2$, $x \neq -1/2$, $x \neq 0$. Таким образом, эта область состоит из трех промежутков: $-2 < x < -1/2$, $-1/2 < x < 0$, $0 < x < +\infty$. Рассмотрим данное неравенство на каждом из этих промежутков отдельно.

а) Пусть $-2 < x < -1/2$. Тогда, учитывая, что x отрицательно на этом интервале, получаем, что исходное неравенство равносильно неравенству

$$\log_2(2+x) > \frac{4x-1}{2x+1}. \tag{1}$$

Легко видеть, что на этом интервале справедливы неравенства

$$\log_2(2+x) < \log_2 3/2 < 1,$$
$$\frac{4x-1}{2x+1}=2-\frac{3}{2x+1} > 2.$$

Значит, неравенство (1), а вместе с ним и исходное неравенство, не имеет решений на интервале $-2 < x < -1/2$.

б) Пусть $-1/2 < x < 0$. Очевидно, что на этом интервале $1+\log_2(2+x) > 1+\log_2 3/2 > 0$ и, следовательно, правая часть исходного неравенства отрицательна. В то же время для любой точки x из рассматриваемого интервала $6/(2x+1) > 0$. Значит, для всех x из интервала $-1/2 < x < 0$ данное неравенство справедливо.

в) Пусть $x > 0$. На этом множестве исходное неравенство равносильно неравенству

$$\log_2(2+x) < \frac{4x-1}{2x+1}. \tag{2}$$

Очевидно, что на этом множестве справедливы неравенства:

$$\frac{4x-1}{2x+1}=2-\frac{3}{2x+1} < 2,$$
$$1 < \log_2(2+x).$$

Отсюда следует: 1) неравенство (2) не имеет решений на том множестве, где $\log_2(x+2) \geqslant 2$, т. е. неравенство (2) не имеет решений на множестве $x \geqslant 2$; 2) неравенство (2) не имеет решений на том множестве, где $\frac{4x-1}{2x+1} \leqslant 1$. Учитывая, что в рассматриваемом случае $x > 0$, получаем, что неравенство (2) не имеет решений на множестве $0 < x \leq 1$. Остается найти решения неравенства (2), принадлежащие интервалу $1 < x < 2$. Но на этом интервале

$$\log_2 (2+x) > \log_2 3,$$
$$\frac{4x-1}{2x+1} = 2 - \frac{3}{2x+1} < 2 - \frac{3}{5} = \frac{7}{5}.$$

Покажем теперь, что справедливо числовое неравенство

$$\log_2 3 > 7/5. \qquad (3)$$

Действительно, поскольку $3^5 > 2^7$, то $3 > 2^{7/5}$, откуда и очевидна справедливость неравенства (3). Итак, на интервале $1 < x < 2$

$$\log_2 (2+x) > \log_2 3 > 7/5 > \frac{4x-1}{2x+1}.$$

Значит, неравенство (2) не имеет решений на интервале $1 < x < 2$. Подводя итог, получаем, что множество решений исходного неравенства есть интервал $-1/2 < x < 0$.

Ответ: $-1/2 < x < 0$.

5. Пусть M — точка касания сферы с плоскостью ABC. Поскольку отрезки всех касательных, проведенных из точки A к сфере, равновелики, то для решения задачи достаточно найти $|AM|$. Обозначим через H основание высоты пирамиды, проведенной из вершины D. Поскольку $|AD| = |BD| = |CD|$ и равные наклонные имеют равные проекции, то $|AH| = |BH| = |CH|$. Это означает, что точка H является центром окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника ABC, т. е. H — середина отрезка BC (рис. 12).

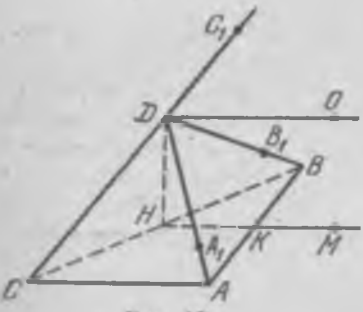


Рис. 12.

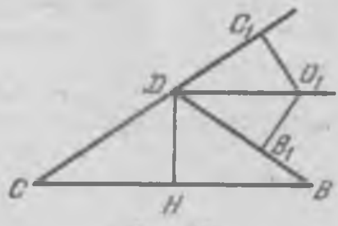


Рис. 13

Обозначим через A_1, B_1, C_1 точки касания сферы с прямыми AD, BD, CD соответственно. Из условия следует, что

$$\begin{aligned} |AA_1| &= |AD| - |DA_1|, \\ |BB_1| &= |BD| - |DB_1|, \qquad (4) \\ |CC_1| &= |CD| + |DC_1|. \end{aligned}$$

Так как отрезки касательных, проведенных из одной точки к сфере, равновелики, то $|DA_1| = |DB_1| = |DC_1|$, $|AM| = |AA_1|$, $|BM| = |BB_1|$. Из последних равенств и равенств (4) находим, что $|AM| = |AA_1| =$

$=|BB_1|=|BM|$. Это означает, что точка M лежит в плоскости ABC на серединном перпендикуляре к отрезку AB.

Далее, из равенств (4) следует, что

$$|CM|=|CC_1|>|CD|=|BD|>|BB_1|=|BM|.$$

Значит, точка M лежит на луче HK, где K — середина отрезка AB. Обозначим через O центр сферы и через O_1 — ортогональную проекцию точки O на плоскость BCD (рис. 13). Из равенства $|OB_1|=|OC_1|$ следует, что $|O_1C_1|=|O_1B_1|$ и по теореме о трех перпендикулярах $O_1C_1 \perp DC_1$, $O_1B_1 \perp BD$. Значит, точка O_1 равноудалена от сторон угла BDC_1, т. е. DO_1 — биссектриса угла C_1DB_1. Треугольник BCD равнобедренный, следовательно, DH — биссектриса угла CDB. Таким образом, получаем: $\widehat{HDO_1}=\frac{1}{2}\widehat{CDB}+\frac{1}{2}\widehat{BDC_1}=\frac{1}{2}(\widehat{CDB}+\widehat{BDC_1})=\frac{\pi}{2}$ или $HD \perp DO_1$. Так как прямая OO_1 перпендикулярна плоскости BCD, то $DH \perp OO_1$. Этим доказано, что прямая DH перпендикулярна плоскости OO_1D. Но плоскость ABC также перпендикулярна прямой DH. Значит, плоскости ABC и OO_1D параллельны.

Прямые DH и OM параллельны как два перпендикуляра к одной плоскости ABC. Значит, точки D, H, O, M лежат в одной плоскости. Эта плоскость пересекает параллельные плоскости ABC и OO_1D по двум прямым HM и DO. Значит, $HM \parallel DO$. Отсюда следует, что четырехугольник $HMOD$ параллелограмм и, в частности, $|DH|=|OM|$, $|HM|=|DO|$. Поскольку OM — радиус сферы, то $|DH|=|OM|=1$. Это дает возможность вычислить боковые ребра пирамиды:

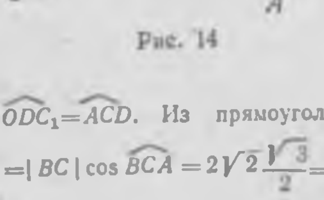


Рис. 14

$$|AD|=|BD|=|CD|=\sqrt{|CH|^2+|DH|^2}=\sqrt{3}.$$

Из прямоугольного треугольника ODC_1 находим: $|OD|=\dfrac{|OC_1|}{\sin\widehat{ODC_1}}$. Так как $DO \parallel HM$ и $HM \parallel AC$, то $DO \parallel AC$ и $\widehat{ODC_1}=\widehat{ACD}$. Из прямоугольного треугольника ABC находим: $|AC|=|BC|\cos\widehat{BCA}=2\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}$. Отсюда следует, что равнобедренный треугольник ADC является прямоугольным (так как $|AC|^2=|CD|^2+|AD|^2$) и, в частности, $\widehat{ACD}=\pi/4$. Но тогда $|OD|=\dfrac{|OC_1|}{\sin\pi/4}=\sqrt{2}$. Этим доказано, что $|HM|=\sqrt{2}$. Из треугольника HBM (рис. 14) по теореме косинусов находим

$$|BM|^2=|BH|^2+|HM|^2-2|BH||HM|\cdot\cos\widehat{BHM}=$$
$$=2+2-4\cos\pi/6=4-2\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)^2.$$

Так как $|AM|=|BM|$, то $|AM|=\sqrt{3}-1$.

Ответ: $\sqrt{3}-1$.

3.С. Обозначим $\dfrac{1}{2x-y}$ через u и $\dfrac{1}{x-2y}$ через v. В новых обозначениях данная система имеет вид

$$\begin{cases} 2u+3v=1/2, \\ 2u-v=1/18. \end{cases}$$

Решая эту систему линейных относительно u и v уравнений, находим $u=1/12$, $v=1/9$. Этим доказано, что все решения данной системы удовлетворяют равенствам

$$\begin{cases} 2x-y=12, \\ x-2y=9. \end{cases}$$

Этим равенствам удовлетворяет единственная пара чисел: $x_1=5$ и $y_1=-2$. Подставляя найденные числа в исходную систему, убеждаемся, что они составляют ее решение.

Ответ: $x=5$, $y=-2$.

Ответы к вариантам 2—4.

Вариант 2. 1. $\pm 2\pi/3+2\pi n$, $n\in Z$. 2. $|AB|=|BC|=|AC|=\sqrt{3}$. 3.Н. $x_{\max}=1/5$; наименьшее значение равно -38. 4. $0<x<1/2$. 5. $|AD|=|BD|=\sqrt{2}$; $|CD|=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$. 3.С. $x=1$, $y=2$.

Вариант 3. 1. $\pi/3+2\pi n$, $n\in Z$. 2. $R=1$. 3.Н. $x_{\min}=1/3$; наибольшее значение равно 105. 4. $1/2<x<1$. 5. $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$. 3.С. $x=4$, $y=2$.

Вариант 4. 1. $-\pi/6+2\pi n$, $n\in Z$. 2. $|AC|=1$; $|AB|=|BC|=\sqrt{3}/3$. 3.Н. $x_{\max}=1$; наименьшее значение равно -52. 4. $1<x<3/2$. 5. $|PS|=|QS|=\sqrt{3}+1$; $|RS|=\sqrt{2}$. 3.С. $x=-3$, $y=2$.

§ 2. ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

1977

Решение варианта 1.

1. Умножая обе части неравенства на 2^{2x+2} и, учитывая, что функция $y=2^{2x+2}$ положительна для всех x, получаем неравенство

$$4(2^{2x+1})^2+8\cdot 2^{2x+1}-21\geqslant 0, \qquad (1)$$

равносильное исходному неравенству. Обозначим 2^{2x+1} через y. Тогда неравенство (1) перепишется в виде

$$4y^2+8y-21\geqslant 0. \qquad (2)$$

Поскольку квадратный трехчлен $4y^2+8y-21$ имеет корни $y_1=-7/2$ и $y_2=3/2$, то множество решений неравенства (2) состоит из двух промежутков: $y\leqslant-7/2$ и $y\geqslant 3/2$. Значит, множество решений неравенства (1) будет объединением множества решений неравенства $2^{2x+1}\leqslant-7/2$ и множества решений неравенства $2^{2x+1}\geqslant 3/2$. Первое из этих неравенств не имеет решений, а множество решений второго есть промежуток $x\geqslant\frac{1}{2}\log_2 3-1$. Поэтому множество решений неравенства (1), а значит, и исходного неравенства, есть тот же самый промежуток.

Ответ: $x\geqslant\frac{1}{2}\log_2 3-1$.

2. Обозначим через α наименьший угол в треугольнике и через β — наибольший угол (рис. 15). Тогда третий угол равен $\pi-\alpha-\beta$. По условию задачи $\beta=\alpha+(\pi-\alpha-\beta)$. Отсюда следует, что $2\beta=\pi$ или $\beta=\pi/2$. Значит, треугольник прямоугольный. Катет, лежащий против угла α, равен по условию 1, значит второй катет равен $\operatorname{ctg}\alpha$, а гипотенуза—$1/\sin\alpha$. Поэтому сумма площадей квадратов, построенных на гипотенузе и большем катете, равна $\operatorname{ctg}^2\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha}$. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит в середине гипотенузы, и ее радиус равен $\frac{1}{2\sin\alpha}$, а площадь равна $\frac{\pi}{4\sin^2\alpha}$. Пользуясь условием задачи, имеем уравнение

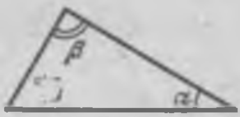


Рис. 15.

$$\operatorname{ctg}^2\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha}=\frac{\pi}{2\sin^2\alpha},$$

откуда $\cos^2\alpha=\frac{\pi}{2}-1$. Длина большей стороны треугольника равна

$$\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{2-\pi/2}}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2-\pi/2}}$.

3. Введем обозначения $\sin(-2x)=u$, $\operatorname{tg}5y=v$. Тогда систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} u^2-(3-\sqrt{2})\,v=\dfrac{3\sqrt{2}-1}{2}, \\ v^2+(3-\sqrt{2})\,u=\dfrac{3\sqrt{2}-1}{2}. \end{cases} \qquad (3)$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем систему

$$\begin{cases} u^2-(3-\sqrt{2})\,v=\dfrac{3\sqrt{2}-1}{2}, \\ u^2-v^2-(3-\sqrt{2})(v+u)=0, \end{cases}$$

равносильную системе (3). Перепишем эту систему в виде

$$\begin{cases} u^2-(3-\sqrt{2})\,v=\dfrac{3\sqrt{2}-1}{2}, \\ (u+v)\,(u-v-3+\sqrt{2})=0. \end{cases}$$

Последняя система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} u^2-(3-\sqrt{2})\,v=\dfrac{3\sqrt{2}-1}{2}, \\ v=-u, \end{cases} \qquad \begin{cases} u^2-(3-\sqrt{2})\,v=\dfrac{3\sqrt{2}-1}{2}, \\ v=u-3+\sqrt{2}. \end{cases}$$

Решим первую систему. Подставляя $(-u)$ вместо v в первое уравнение, получаем уравнение

$$u^2+(3-\sqrt{2})\,u-\frac{3\sqrt{2}-1}{2}=0,$$

которое имеет корни $u_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $u_2=\dfrac{-6+\sqrt{2}}{2}$. Таким образом, первая система имеет решения

$$\begin{cases} u_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ v_1=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2=\dfrac{-6+\sqrt{2}}{2}, \\ v_2=\dfrac{6-\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Решим вторую систему. Подставляя $u-3+\sqrt{2}$ вместо v в первое уравнение, получаем уравнение

$$u^2-(3-\sqrt{2})\,(u-3+\sqrt{2})-\frac{3\sqrt{2}-1}{2}=0,$$

или

$$u^2-(3-\sqrt{2})\,u+\frac{23-15\sqrt{2}}{2}=0.$$

Последнее уравнение не имеет корней, так как его дискриминант D отрицателен:

$$D=(3-\sqrt{2})^2-2\,(23-15\sqrt{2})=24\sqrt{2}-35<0.$$

Значит, все решения системы (3) исчерпываются решениями первой системы. Поэтому система, данная в условии, равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \sin(-2x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \operatorname{tg} 5y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin(-2x)=\dfrac{-6+\sqrt{2}}{2}, \\ \operatorname{tg} 5y=\dfrac{6-\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Вторая система решений не имеет, так как $\dfrac{-6+\sqrt{2}}{2}<-1$. Решая первую систему, получаем

$$-2x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z, \text{ или } x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{8}-\frac{\pi n}{2},\ n\in Z;$$

$$5y=-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi k,\quad k\in Z, \text{ или } y=-\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi k}{5},\quad k\in Z.$$

Ответ: $x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; $y=-\dfrac{1}{5}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\pi k}{5}$, $k\in Z$.

4. Обозначим скорости туристов через v_1 км/ч, v_2 км/ч и v_3 км/ч соответственно их номерам. Тогда $v_1 > v_2$, $v_1 - v_3 = 1/2$, $5 \leqslant v_j \leqslant 8$, $j = 1, 2, 3$.

1) Заметим сначала, что если у каких-либо туристов совпадают первые два отрезка пути, то должны полностью совпадать и их маршруты. Ведь по условию каждый маршрут состоит из трех отрезков и проходит через все четыре города (рис. 16). По условию все маршруты различны. Значит, можно сделать вывод, что у любых двух туристов пути отличаются уже после прохождения первых двух дорог.

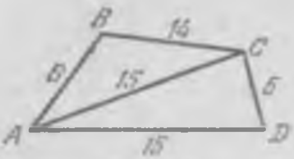


Рис. 16.

2) Если туристы вышли из города A, то (см. пункт 1)) кто-нибудь из них должен идти по диагонали AC, но тогда он не сможет пройти через все четыре города (его маршрут состоит только из трех отрезков). Следовательно, туристы не могли выйти из города A. По аналогичным причинам не могли они выйти и из города C. Итак, туристы вышли из города B или из города D.

3) По условию первый и второй туристы встретились перед прохождением третьих дорог, поэтому (см. пункт 1)) первый и второй туристы вышли по разным дорогам и встретились в противоположной вершине четырехугольника. Так как $v_1 > v_2$, то длина пути первого туриста до встречи со вторым равна $|AB| + |AD| = 21$, а длина пути второго до той же встречи равна $|BC| + |CD| = 19$. Получаем уравнение $\frac{21}{v_1} = \frac{19}{v_2}$.

4) Второй отрезок пути третьего туриста совпадает с AC (см. пункт 1)), а длина всего пути равна или

$$|BC| + |CA| + |AD| = 44$$

или

$$|AB| + |AC| + |CD| = 26.$$

В первом случае путь третьего туриста самый длинный. Поскольку $v_1 > v_2$, то первый турист пришел раньше третьего. Длина пути второго туриста не превосходит 34 км, значит, время его пути не больше $\frac{34}{v_2}$, а время третьего туриста равно $\frac{44}{v_3}$. Имеем

$$\frac{44}{v_3} = \frac{44}{v_1 - 1/2} > \frac{44}{v_1} = \frac{44 \cdot 19}{21 \cdot v_2} > \frac{34}{v_2}.$$

Итак, в первом случае третий турист должен придти в конечный пункт последним, но это противоречит условию задачи. Следовательно, длина пути третьего туриста равна не 44 км, а 26 км.

5) Предположим, что туристы вышли из города B. Тогда путь первого — $BADC$, путь второго — $BCDA$, путь третьего — $BACD$. Длины путей равны соответственно 26 км, 34 км, 26 км, а времена, затраченные на всю дорогу — $\frac{26}{v_1}$ ч, $\frac{34}{v_2}$ ч, $\frac{26}{v_3}$ ч. Из пункта 3) следует, что первый турист

закончил маршрут раньше второго $\left(\frac{26}{v_1} < \frac{34}{v_2}\right)$. Пользуясь условием, находим $\frac{34}{v_2} = 1 + \frac{26}{v_3}$; так как $v_2 \leqslant 8$, то $\frac{34}{v_2} \leqslant \frac{8+26}{v_2}$, или $v_3 \leqslant v_2$, что противоречит условию.

Итак, туристы вышли из города D, путь первого — $DABC$, второго — $DCBA$, третьего — $DCAB$. Длины путей равны соответственно 35 км, 25 км, 26 км, а времена на всю дорогу — $\frac{35}{v_1}$ ч, $\frac{25}{v_2}$ ч, $\frac{26}{v_3}$ ч. Из пункта 3) следует, что последним пришел первый турист $\left(\frac{35}{v_1} > \frac{25}{v_2}\right)$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{35}{v_1} = 1 + \frac{26}{v_3}, \\ v_1 - v_3 = 1/2, \end{cases}$$

откуда $\frac{35}{v_1} = 1 + \frac{26}{v_1 - 1/2}$, или $v_1^2 - \frac{19}{2} v_1 + \frac{35}{2} = 0$. Корни этого уравнения равны 7 и 5/2. По условию скорости расположены в промежутке от 5 до 8 километров, значит второй корень не подходит. Следовательно, $v_1 = 7$, $v_3 = v_1 - \frac{1}{2} = 6\frac{1}{2}$, $v_2 = \frac{19}{21} \cdot v_1 = \frac{19}{3}$. Легко проверить, что найденные значения скоростей удовлетворяют всем условиям задачи.

Ответ: $v_1 = 7$ км/ч, $v_2 = 6\frac{1}{3}$ км/ч, $v_3 = 6\frac{1}{2}$ км/ч.

5.Н. Обозначим через $\varphi(\alpha)$ наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[-\sin\alpha, \cos\alpha]$ при фиксированном α. Найдем $\varphi(\alpha)$. Имеем:

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2(\cos\alpha - \sin\alpha) - 6x\sin 2\alpha.$$

Решая уравнение $f'(x) = 0$, находим корни производной:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \sin\alpha, \quad x_3 = -\cos\alpha.$$

Рассмотрим два случая.

1) Если $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}$, то $\sin\alpha \leqslant \cos\alpha$ и корни x_1, x_2, x_3 расположатся так, как на рис. 17. Имеем следующее распределение знаков производной:

интервал	$(-\sin\alpha, 0)$	$(0, x_2)$	$(x_2, \cos\alpha)$
знак $f'(x)$	+	−	+

Отсюда следует, что $\varphi(\alpha) = \min(f(-\sin\alpha), f(x_2))$. Но

$$f(x_2) - f(-\sin\alpha) = f(\sin\alpha) - f(-\sin\alpha) = 8\sin^3\alpha(\cos\alpha - \sin\alpha) \geqslant 0,$$

значит,

$$\varphi(\alpha)=f(-\sin\alpha)=3\sin^4\alpha-4\sin^3\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)-6\sin^3\alpha\cos\alpha=$$
$$=7\sin^4\alpha-10\sin^3\alpha\cos\alpha.$$

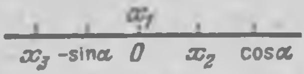


Рис. 17.

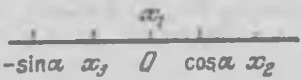


Рис. 18.

2) Если $\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, то $\sin\alpha\geqslant\cos\alpha$ и расположение корней производной будет таким, как на рис. 18. Для знаков производной имеем таблицу

интервал	$(-\sin\alpha,\ x_3)$	$(x_3,\ 0)$	$(0,\ \cos\alpha)$
знак	$-$	$+$	$-$

Следовательно, $\varphi(\alpha)=\min(f(x_3),\ f(\cos\alpha))$. Но

$$f(x_3)-f(\cos\alpha)=f(-\cos\alpha)-f(\cos\alpha)=-8\cos^3\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)\geqslant 0,$$

значит,

$$\varphi(\alpha)=f(\cos\alpha)=3\cos^4\alpha+4\cos^3\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)-6\sin\alpha\cos^3\alpha=$$
$$=7\cos^4\alpha-10\sin\alpha\cos^3\alpha.$$

Итак,

$$\varphi(\alpha)=\begin{cases}7\sin^4\alpha-10\sin^3\alpha\cos\alpha, & \text{если } \alpha\in[0,\ \pi/4],\\ 7\cos^4\alpha-10\sin\alpha\cos^3\alpha, & \text{если } \alpha\in[\pi/4,\ \pi/2].\end{cases}$$

Отсюда следует, что $\varphi(\alpha)=\varphi(\pi/2-\alpha)$ для $\alpha\in[0,\ \pi/4]$ и достаточно найти минимум функции $\varphi(\alpha)=7\sin^4\alpha-10\sin^3\alpha\cos\alpha$ на отрезке $[0,\ \pi/4]$. Имеем

$$\varphi'(\alpha)=28\sin^3\alpha\cos\alpha-30\sin^2\alpha\cos^2\alpha+10\sin^4\alpha=$$
$$=2\sin^2\alpha\cos^2\alpha(5\operatorname{tg}^2\alpha+14\operatorname{tg}\alpha-15).$$

Все нули производной $\varphi'(\alpha)$, лежащие на промежутке $0<\alpha<\pi/4$, являются корнями уравнения $5\operatorname{tg}^2\alpha+14\operatorname{tg}\alpha-15=0$. Решая его, находим $\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{-7+2\sqrt{31}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha_2=\frac{-7-2\sqrt{31}}{5}$. Так как для α из промежутка $0<\alpha<\pi/4$ значения функции $\operatorname{tg}\alpha$ положительны и не превосходят 1, то находим единственный нуль $\varphi'(\alpha)$, удовлетворяющий неравенствам $0<\alpha<\pi/4$, а именно: $\alpha_1=\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{31}-7}{5}$. На интервале $0<\alpha<\alpha_1$ производная $\varphi'(\alpha)$ отрицательна, на интервале $\alpha_1<\alpha<\pi/4$ — положительна. Значит $\alpha=\alpha_1$ — точка минимума. Из непрерывности $\varphi(\alpha)$ на промежутке $0\leqslant\alpha\leqslant\pi/4$ и монотонности на интервалах $(0,\ \alpha_1)$, $(\alpha_1,\ \pi/4)$ следует, что наименьшее значение $\varphi(\alpha)$ на промежутке $0\leqslant\alpha\leqslant\pi/4$ равно

$\varphi(\alpha_1)$. Такое же значение принимается в точке $\pi/2-\alpha_1$, принадлежащей промежутку $\pi/4 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt{31}-7}{5}$, $\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt{31}-7}{5}$.

5.С. Пусть E — середина ребра BS (рис. 19). По условию задачи на прямой AC существует точка F такая, что $FE \perp AC$ и $FE \perp BS$. Обозначим через π плоскость, проходящую через прямую EF и перпендикулярную BS. Такая плоскость существует. Для доказательства достаточно через точку E провести любую прямую EG, перпендикулярную к BS и отличную от EF. Тогда плоскость EFG будет перпендикулярна BS по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

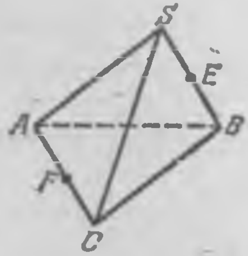


Рис. 19.

Обозначим через A' и C' соответственно ортогональные проекции точек A и C на плоскость π (рис. 20). Заметим, что точки A' и C' различны. Иначе $AC \perp \pi$ и, значит, $AC \parallel BC$, т. е. точки A, B, C, S лежат в одной плоскости. Это невозможно. По теореме о трех перпендикулярах $A'C' \perp EF$, т. е. треугольники $A'FE$ и $C'FE$ прямоугольные. Далее, величина отрезка $A'E$ равна длине высоты треугольника ASB, проведенной из вершины A (рис. 21). Аналогично, величина отрезка $C'E$ равна длине высоты треугольника BSC, проведенной из вершины C. Но треугольники ASB и BSC имеют общее основание BS и равные площади.

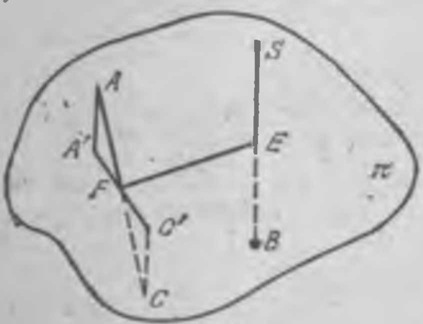


Рис. 20.

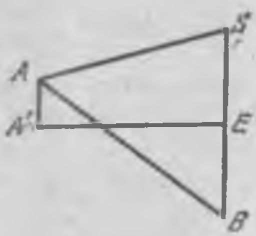


Рис. 21.

Значит, равны их высоты, проведенные из вершин A и C соответственно, а потому и отрезки $A'E$ и $C'E$ равны. Прямоугольные треугольники $A'FE$ и $C'FE$ имеют общий катет FE и равные гипотенузы. Следовательно, они равны и $A'F=C'F$. Прямоугольные треугольники $AA'F$ и $CC'F$ равны по катету и острому углу ($A'F=C'F$ по доказанному и $\angle AFA'=\angle CFC'$ как вертикальные углы). Это означает, что $AF=CF$, т. е. точка F есть середина отрезка AC.

Докажем, что $BC=AS$ и $AB=CS$. Из прямоугольных треугольников CFE и AFE по теореме Пифагора находим

$$CE=\sqrt{CF^2+FE^2},\quad AE=\sqrt{AF^2+FE^2},$$

откуда, учитывая, что $AF=CF$, получаем, что $CE=AE$. Таким образом, у треугольников ASB и BSC, имеющих общее основание BS, равны площади и проведенные из вершин A и C медианы. Обозначим через L и N соответственно основания высот, проведенных из точек A и C в треугольниках ASB и BSC (рис. 22). Так как площади этих треугольников равны, то $AL=CN$ (этим фактом ранее уже пользовались). Прямоугольные треугольники ALE и CNE равны по катету и гипотенузе, значит, $LE=EN$. Так как точки A и C лежат по разные стороны от плоскости π, то точки L и N лежат по разные стороны от точки E. Отсюда следует, что $BL=SN$ и $SL=BN$. Этим доказано, что прямоугольные треугольники ABL и CNS, ALS и CNB равны (по двум катетам), откуда $AB=CS$, $BC=AS$. Доказанное означает, что треугольники ASC и ABC равны (по трем сторонам). Обозначим объем пирамиды через V и площадь треугольника BSC через a. Тогда площади треугольников ASB, ASC, ABC равны соответственно a, $2a$, $2a$.

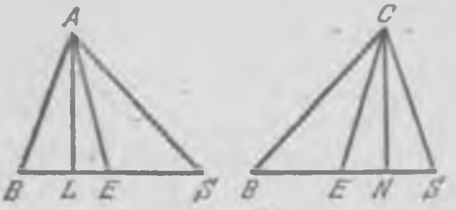


Рис. 22.

Обозначим через A_1, B_1, C_1, S_1 ортогональные проекции точки M на грани, противоположные вершинам A, B, C, S соответственно. Тогда из доказанного выше вытекает равенство

$$V=\frac{1}{3}MA_1\cdot a+\frac{1}{3}MB_1\cdot 2a+\frac{1}{3}MC_1\cdot a+\frac{1}{3}MS_1\cdot 2a,$$

или

$$MA_1+2MB_1+MC_1+2MS_1=\frac{3V}{a}.$$

Воспользовавшись данным в условии равенством $MB+MS=MA_1+MB_1+$ $+MC_1+MS_1$, отсюда получим:

$$MB+MB_1+MS+MS_1=\frac{3V}{a}.$$

Обозначим через h_B и h_S высоты пирамиды, проведенные из вершин B и S. Тогда $V=\frac{1}{3}h_B\cdot 2a$ и $V=\frac{1}{3}h_S\cdot 2a$, откуда $h_B=h_S=\frac{3V}{2a}$ и h_B+ $+h_S=\frac{3V}{a}$. Итак,

$$MB+MB_1+MS+MS_1=h_B+h_S. \tag{4}$$

Но в то же время, очевидно, выполнены неравенства

$$MB+MB_1\geqslant h_B,\quad MS+MS_1\geqslant h_S. \tag{5}$$

Из (4) и (5) теперь вытекает, что

$$MB+MB_1=h_B,\quad MS+MS_1=h_S,$$

т. е. точка M является пересечением высот пирамиды, проведенных из точек B и S.

Из доказанного следует, что $BM \perp AC$ и $SM \perp AC$. Отсюда на основании признака перпендикулярности прямой и плоскости вытекает, что прямая AC перпендикулярна плоскости BSM и, в частности, прямой BS. Кроме того, по условию $AC \perp FE$. С помощью признака перпендикулярности прямой и плоскости заключаем, что прямая AC перпендикулярна плоскости BSF. Таким образом, $AC \perp FS$. Прямоугольные треугольники ASF и CSF равны по двум катетам. Следовательно, $AS=CS$. Ввиду доказанного ранее это означает, что $BC=AS=CS=AB$. Кроме этого доказано, что точка M лежит в плоскости BSF. Действительно, плоскости BSM и BSF по доказанному перпендикулярны прямой AC. Значит, они параллельны. Поскольку эти плоскости имеют общую прямую BS, то отсюда следует, что они совпадают.

Обозначим FE через x. Тогда из прямоугольного треугольника FES по теореме Пифагора находим

$$FS=\sqrt{FE^2+\frac{1}{4}BS^2}=\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}$$

и

$$S_{ASC}=\frac{1}{2}AC\cdot FS=\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}.$$

Применяя теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику FEC, получаем

$$CE=\sqrt{FE^2+\frac{1}{4}AC^2}=\sqrt{x^2+\frac{3}{2}}$$

и

$$S_{BSC}=\frac{1}{2}BS\cdot CE=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+\frac{3}{2}}.$$

Здесь использовано то, что в равнобедренном треугольнике BSC медиана CE является высотой. По условию площадь грани ASC вдвое больше площади грани BSC. Получаем уравнение

$$\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}=\sqrt{x^2+\frac{3}{2}}.$$

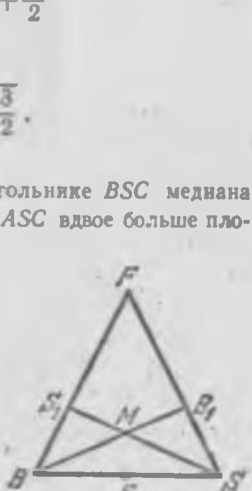


Рис. 23.

Решая его, находим $x=3/2$. Прямоугольные треугольники BSS_1 и SBB_1 равны (рис. 23) по гипотенузе и катету ($SS_1=h_S=h_B=BB_1$). Следовательно, $\angle B_1BS=\angle S_1SB$, а это означает, что треугольник BMS равнобедренный. Но тогда

$$BM=\frac{BE}{\cos\angle MBE}=\frac{1}{2\sin\angle BSF}.$$

Из прямоугольного треугольника FES находим, что $\operatorname{tg}\angle BSF=\frac{FE}{ES}=3$, откуда

$$\sin\angle BSF=\frac{\operatorname{tg}\angle BSF}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\angle BSF}}=\frac{3}{\sqrt{10}} \text{ и } BM=\frac{1}{2\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}}=\frac{\sqrt{10}}{6}.$$

Ответ: $\sqrt{10}/6$.

Ответы к вариантам 2—4.

Вариант 2. 1. $x\leqslant\log_3\left(\frac{3}{\sqrt[3]{5}}\right)$. 2. $\frac{8}{\sqrt{16-\pi^2}}$. 3. $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; $y=-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. 4. $v_1=110$ км/ч, $v_2=120$ км/ч, $v_3=100$ км/ч. 5.Н. $\alpha=\pi/3$. 5.С. $2\sqrt{3}$.

Вариант 3. 1. $x\geqslant\log_4\left(\frac{\sqrt[4]{3}}{4}\right)$. 2. $2\sqrt{5-\pi}$. 3. $x=(-1)^k\frac{\pi}{9}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$; $y=-\frac{1}{7}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi n}{7}$, $n\in Z$. 4. $v_1=16$ км/ч, $v_2=17{,}5$ км/ч, $v_3=18{,}5$ км/ч. 5.Н. $\alpha_1=-\operatorname{arctg}\frac{7+2\sqrt{31}}{15}$, $\alpha_2=\operatorname{arcctg}\frac{7+2\sqrt{31}}{15}$. 5.С. $\sqrt{15}$.

Вариант 4. 1. $x\leqslant\log_5\frac{5}{\sqrt[4]{2}}$. 2. $\frac{6}{\pi\sqrt{5}}$. 3. $x=\pm\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$; $y=-\frac{1}{9}\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi n}{9}$, $n\in Z$. 4. $v_1=40$ км/ч, $v_2=50$ км/ч, $v_3=60$ км/ч. 5.Н. $\alpha=-\frac{\pi}{6}$. 5.С. $2\arcsin\left(\frac{2}{3}\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right)$.

1978

Решение варианта 1.

1. Область допустимых значений данного неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условию $x^2-x-2\geqslant 0$, и значит, состоит из двух промежутков: $x\leqslant -1$ и $x\geqslant 2$. Точки $x=-1$, $x=2$ удовлетворяют неравенству, так как в них левая часть обращается в нуль. На множестве A, состоящем из двух промежутков $x<-1$ и $x>2$, функция $y(x)=\sqrt{x^2-x-2}$ положительна, значит, на этом множестве исходное неравенство равносильно неравенству $x-1\geqslant 0$. Множество решений последнего неравенства, содержащихся в A, состоит только из одного промежутка $x>2$. Значит, множество всех решений исходного неравенства состоит из точки $x=-1$ и промежутка $x\geqslant 2$.

Ответ: $x=-1$, $x\geqslant 2$.

2.Н. По теореме Ферма все точки минимума функции

$$f(x)=\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}-\frac{x-3}{2}$$

должны удовлетворять уравнению $f'(x)=0$ (так как $f(x)$ имеет производную в каждой точке числовой прямой). Найдем $f'(x)$:

$$f'(x)=\sqrt{3}\cdot\left(-\sin\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}+\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}.$$

Решая уравнение $f'(x)=0$, т. е. решая уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{2}\right)=-\frac{1}{2}$, находим, что $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$, $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$, или $x=4\pi n$, $n\in Z$, $x=-4\pi/3+4\pi k$, $k\in Z$.

Точки минимума содержатся в найденных совокупностях. Для их нахождения воспользуемся достаточными условиями существования экстремума. Множество решений неравенства $f'(x)>0$ или $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{2}\right)>\frac{1}{2}$ состоит из бесконечной совокупности промежутков

$$-\frac{\pi}{3}+2\pi k<\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{3}+2\pi k,\qquad k\in Z.$$

Отсюда следует, что неравенство $f'(x)>0$ выполняется во всех точках интервалов

$$-\frac{4\pi}{3}+4\pi k<x<4\pi k,\qquad k\in Z,$$

и только в них. Это означает, что во всех точках интервалов

$$4\pi(k-1)<x<-\frac{4\pi}{3}+4\pi k,\qquad k\in Z,$$

и только в них выполнено неравенство $f'(x)<0$.

Таким образом, при переходе через точки вида $x=-\frac{4\pi}{3}+4\pi k$ производная $f'(x)$ меняет знак с «минуса» на «плюс», а через точки вида $x=4\pi k$ с «плюса» на «минус». Следовательно, точки $x=-\frac{4\pi}{3}+4\pi k$, $k\in Z$, есть точки минимума, а точки $x=4\pi k$, $k\in Z$,— точки максимума.

Ответ: $-\frac{4\pi}{3}+4\pi k$, $k\in Z$.

3.Н. Обозначим через (α,β) точку, в которой прямая касается графика функции $f(x)=-x^2/2+2$. Тогда угловой коэффициент прямой равен $f'(\alpha)=-\alpha$, а ее уравнение можно записать в виде

$$y=\beta-\alpha(x-\alpha).$$

Прямая по условию проходит через точку $(1/2,\ 2)$, значит, должно выполняться равенство $2=\beta-\alpha\cdot(1/2-\alpha)$, или $\beta+\alpha^2-\alpha/2=2$. Воспользуемся тем, что точка (α,β) лежит на графике функции $f(x)$ и найдем еще одно условие: $\beta=-\alpha^2/2+2$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \beta+\alpha^2-\frac{\alpha}{2}=2, \\ \beta=-\frac{\alpha^2}{2}+2, \end{cases}$$

находим две точки касания: (0, 2), (1, 3/2). Касательные к графику $f(x)$ в этих точках имеют уравнения $y=2$ и $y=3/2-1\cdot(x-1)$, или $y=-x+5/2$. Найдем количество точек, в которых каждая из найденных прямых пересекает график функции $y(x)=\sqrt{4-x^2}$. Система

$$\begin{cases} y=\sqrt{4-x^2}, \\ y=2 \end{cases}$$

имеет единственное решение (0, 2). Значит, первая прямая имеет только одну общую точку с графиком функции $y(x)=\sqrt{4-x^2}$. Решаем вторую систему

$$\begin{cases} y=\sqrt{4-x^2}, \\ y=-x+5/2. \end{cases} \qquad (1)$$

Подставляя $-x+5/2$ вместо y в первое уравнение, получаем систему

$$\begin{cases} -x+5/2=\sqrt{4-x^2}, \\ y=-x+5/2, \end{cases} \qquad (2)$$

равносильную предшествующей системе (1). Множество решений первого уравнения системы содержится в промежутке $-\infty<x\leqslant 5/2$. На этом промежутке обе части уравнения неотрицательны, и поэтому оно равносильно на этом промежутке уравнению $(-x+5/2)^2=4-x^2$. Полученное уравнение имеет два корня

$$x_1=\frac{5-\sqrt{7}}{4}$$

и

$$x_2=\frac{5+\sqrt{7}}{4},$$

содержащиеся в множестве $x\leqslant 5/2$. Значит, первое уравнение системы (2) имеет два корня x_1 и x_2, и потому система (2), а значит и система (1), имеют два решения:

$$x_1=\frac{5-\sqrt{7}}{2}; \quad y_1=\frac{5+\sqrt{7}}{2}; \quad x_2=\frac{5+\sqrt{7}}{2}, \quad y_2=\frac{5-\sqrt{7}}{2}.$$

Следовательно, вторая прямая пересекает график функции $y(x)=\sqrt{4-x^2}$ в двух различных точках.

Ответ: $y=-x+5/2$.

4. Так как каждое из чисел, принадлежащих A, должно делить $210=2\cdot3\cdot5\cdot7$, то все числа из A состоят только из простых сомножителей 2, 3, 5, 7, входящих в эти числа, в степени не выше первой. По условию произведение всех чисел делится на $1920=2^7\cdot3\cdot5$. Ввиду сказанного, это означает, что среди чисел, составляющих A, должно быть по крайней мере семь четных чисел. Но существует только восемь четных чисел, удовлетворяющих указанным выше условиям на простые делители,

а именно:

$$2,\quad 2\cdot3=6,\quad 2\cdot5=10,\quad 2\cdot7=14,\quad 2\cdot3\cdot5=30,$$
$$2\cdot3\cdot7=42,\quad 2\cdot5\cdot7=70,\quad 2\cdot3\cdot5\cdot7=210.$$

Если число 2 входит в A, то любой другой элемент A обязан делиться на 2, ведь по условию любые два числа из A имеют общий делитель, отличный от 1. Значит в этом случае $A=\{2, 6, 10, 14, 30, 42, 70, 210\}$ (число элементов в A не меньше 8). Но легко видеть, что произведение всех выписанных чисел есть полный квадрат $2^8\cdot3^4\cdot5^4\cdot7^4$, а это запрещено условием. Следовательно, число 2 не принадлежит A, и тогда числа 6, 10, 14, 30, 42, 70, 210 содержатся в A. По условию множество A не может исчерпываться только этими числами. Пусть N — одно из нечетных чисел, принадлежащих A. Так как наибольший общий делитель чисел 6 и N отличен от 1, то N должно делиться на 3 (оно ведь нечетно и не может поэтому делиться на 2). Аналогично N должно делиться и на 5, и на 7. Значит, N делится на $3\cdot5\cdot7$. Так как простые числа 3, 5, 7 входят в N в степени не выше первой, то $N=3\cdot5\cdot7$ и других нечетных чисел в A быть не может.

Ответ: $A=\{6, 10, 14, 30, 42, 70, 105, 210\}$.

5. Поскольку (рис. 24) треугольники ABE и BCE равновелики, то объем пирамиды $ABEH$ вдвое меньше объема пирамиды $ABCEH$, т. е. $V_{ABEH}=1/12$. С другой стороны, если h_B — расстояние от точки B до плоскости AEH, то $V_{ABEH}=\frac{1}{3}h_B\cdot S_{AEH}$. Значит, $h_B\cdot S_{AEH}=\frac{1}{4}$. Пользуясь тем, что $h_B\leqslant|AB|=1$ и $S_{AEH}=\frac{1}{2}|AH|\cdot|EH|\sin\widehat{AHE}\leqslant\frac{1}{2}|AH|\cdot|EH|$, а также неравенством между средним геометрическим и средним арифметическим $\sqrt{|AH|\cdot|EH|}\leqslant\frac{|AH|+|EH|}{2}$, получаем, что

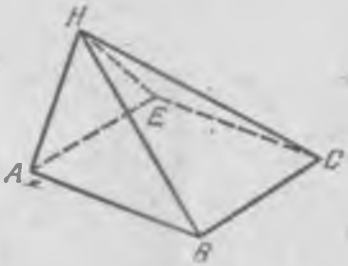


Рис. 24.

$$\frac{1}{4}=h_B\cdot S_{AEH}\leqslant|AB|\cdot\frac{1}{2}\cdot|AH|\cdot|EH|\sin\widehat{AHE}\leqslant$$
$$\leqslant1\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{|AH|+|EH|}{2}\right)^2=1\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

Отсюда следует, что все выписанные неравенства в действительности являются равенствами, т. е.:

1) $h_B=|AB|=1$. Это означает, что ребро AB перпендикулярно плоскости AEH;

2) $\sin\widehat{AHE}=1$, или $\widehat{AHE}=\pi/2$;

3) $\sqrt{|AH|\cdot|EH|}=\frac{|AH|+|EH|}{2}$, или $(|AH|-|EH|)^2=0$, откуда $|AH|=|EH|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Из прямоугольного треугольника AHE находим

$$|AE|=\sqrt{|AH|^2+|EH|^2}=\sqrt{1/2+1/2}=1.$$

Получилось, что треугольник ABE равнобедренный: $|AB|=1=|AE|$. Пусть D — середина отрезка BE (рис. 25). Так как треугольники BAE

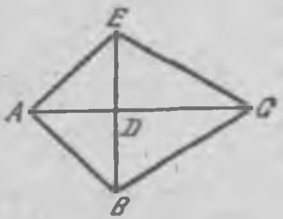


Рис. 25.

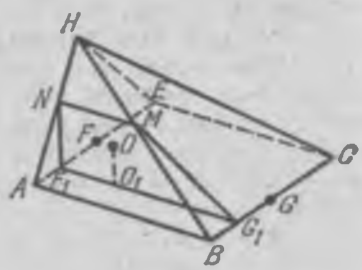


Рис. 26.

и BCE равнобедренные, то AD и CD — высоты в соответствующих треугольниках. Значит, $S_{BAE}=\frac{1}{2}|AD|\cdot|BE|$, $S_{BCE}=\frac{1}{2}|CD|\cdot|BE|$. По условию треугольники BAE и BCE равновелики, следовательно, $|AD|=|CD|$. В прямоугольных треугольниках ADE и EDC катет ED общий и $|AD|=|CD|$, поэтому $|AE|=|EC|$. Таким образом, четырехугольник $ABCE$ — ромб. Ранее доказано, что ребро AB перпендикулярно плоскости AHE, в частности, $AB\perp AE$. Значит, $ABCE$ — квадрат, причем величины его сторон равны 1. Так как $AB \parallel EC$ и AB перпендикулярна плоскости AHE, то треугольники ABH и ECH прямоугольные. В них $|AB|=|EC|$ и $|AH|=|EH|$, следовательно, $|BH|=|CH|$.

Пусть шар радиуса r с центром в некоторой точке O расположен в пирамиде $ABCEH$. Проведем через точку O плоскость π перпендикулярно ребру AE (рис. 26). Выясним, какой многоугольник получается в сечении пирамиды $ABCEH$ плоскостью π. Обозначим через F середину отрезка AE. Так как прямая AB перпендикулярна плоскости AHE, то плоскости AHE и $ABCE$ перпендикулярны. Треугольник AHE, как доказано ранее, равнобедренный, поэтому HF — высота в треугольнике AHE. Из перпендикулярности прямых HF, AE вытекает, что HF — перпендикуляр к плоскости $ABCE$, т. е. F есть проекция точки H на плоскость $ABCE$. Это означает, что проекции всех точек боковых граней пирамиды $ABCEH$ на плоскость основания принадлежат четырехугольнику $ABCE$. Перпендикуляр к плоскости $ABCE$, проведенный через точку O, пересечет какую-либо из боковых граней (O лежит внутри пирамиды $ABCEH$). Поскольку эта точка пересечения и точка O имеют одинаковую проекцию на плоскость основания, то O_1 — проекция O на плоскость основания — принадлежит квадрату $ABCE$. По построению прямая AE перпендикулярна плоскости π. Значит, плоскость π перпендикулярна плоскости $ABCE$. А так как OO_1 перпендикулярна плоскости $ABCE$, то вся прямая OO_1 лежит в плоскости π. Итак, плоскость π пересекает плоскость основания пирамиды по прямой, проходящей через точку O_1. Кроме того, эта прямая должна быть перпендикулярна ребру AE (ведь ребро AE перпендикулярно плоскости π). Обозначим точки, в которых она пересекает ребра AE и BC, через F_1 и G_1 соответственно. Пусть G — середина отрезка BC. Треугольник BHC равнобедренный, поэтому $BC \perp HG$. Так как $AE \parallel BC$, то $AE \perp HG$. Ранее доказано, что $AE \perp HF$. Отсюда следует, что плоскость HFG перпендикулярна прямой AE и потому плоскости HFG и π параллельны. Отсюда следует, что прямые, по которым плоскость π пересекает плоскости BHC и AHE, параллельны соответственно прямым HG и HF. Если M, N — точки, в которых плоскость π пересекает боковые ребра пирамиды, принадлежащие граням BHC и AHE соответственно, то сечение пирамиды плоскостью π есть четырехугольник F_1G_1MN (рис. 26 и рис. 27), в котором $|F_1G_1|=1$, $\widehat{NF_1G_1}=\widehat{HFG}=\pi/2$, $\widehat{MG_1F_1}=\widehat{HGF}$. Особо отметим, что точки M и N совпадут, если точка O лежит в плоскости HFG. Продолжим отрезки F_1N и G_1M до пересечения их в точке H_1 (рис. 27). В прямоугольных треугольниках $H_1F_1G_1$ и HFG имеем $|F_1G_1|=|FG|$ и $\widehat{MG_1F_1}=\widehat{HGF}$. Поэтому $|H_1F_1|=|HF|=|EF|\operatorname{tg}\pi/4=1/2$

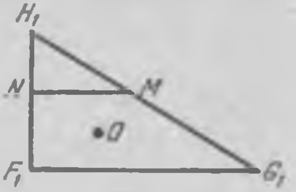


Рис. 27.

$$\text{и } |H_1G_1|=\sqrt{|H_1F_1|^2+|F_1G_1|^2}=\sqrt{1/4+1}=\sqrt{5}/2.$$

Плоскость π пересечет шар по кругу радиуса r, и этот круг будет лежать в треугольнике $H_1F_1G_1$. Если h_1, h_2, h_3 — расстояния от точки O до прямых F_1G_1, F_1H_1, H_1G_1 соответственно, то $r<h_j$ $(j=1, 2, 3)$ и поэтому $S_{F_1H_1G_1}=S_{OF_1G_1}+S_{OF_1H_1}+S_{OH_1G_1}=$

$$=\frac{1}{2}h_1|F_1G_1|+\frac{1}{2}h_2|F_1H_1|+\frac{1}{2}h_3|H_1G_1|\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}(|F_1G_1|+|F_1H_1|+|H_1G_1|)\cdot r=\frac{3+\sqrt{5}}{4}\cdot r.$$

Но $S_{F_1H_1G_1}=\frac{1}{2}|F_1G_1|\cdot|F_1H_1|=1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. Следовательно, $\frac{3+\sqrt{5}}{4}\cdot r<\frac{1}{4}$, или $r<\frac{1}{3+\sqrt{5}}=\frac{3-\sqrt{5}}{4}$.

Докажем теперь, что шар радиуса $r=\frac{3-\sqrt{5}}{4}$ можно поместить в пирамиду $ABCEH$. Пусть K — центр окружности, вписанной в $\triangle HFG$, и r_0 — радиус этой окружности. Тогда, как и ранее,

$$\frac{1}{4}=S_{FHG}=\frac{1}{2}r_0(|FG|+|FH|+|HG|)=\frac{3+\sqrt{5}}{4}\cdot r_0,$$

т. е. $r_0=\frac{3-\sqrt{5}}{4}$. Проверим, что шар с центром в точке K и радиусом

$r_0=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}$ помещается в пирамиде $ABCEH$. Для этого достаточно доказать, что расстояния от точки K до граней пирамиды не меньше r_0.

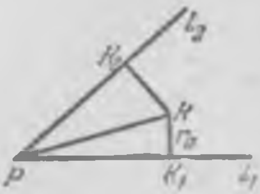


Рис. 28.

Так как плоскость HFK перпендикулярна плоскостям $ABCE$, BHC, AEH, то расстояния от K до этих плоскостей соответственно равны расстояниям от K до прямых FG, HG, HF, т. е. r_0. Проведем через точку K плоскость перпендикулярно ребру AB. Она пересечет плоскости $ABCE$ и ABH по прямым l_1, l_2. Угол между ними будет равновелик углу HAE (плоскость AHE также перпендикулярна ребру AB), и потому $\widehat{l_1 l_2}=\pi/4$. Если K_1, K_2 — проекции точки K на l_1 и l_2 соответственно (рис. 28), то $|KK_1|=r_0=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}$, а $|KK_2|$ — расстояние от точки K до плоскости ABH. Пусть P — точка пересечения прямых l_1 и l_2. Ясно, что

$$\operatorname{tg}\widehat{KPK_1}=\frac{|KK_1|}{|PK_1|}=\frac{3-\sqrt{5}}{4}:\frac{1}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Далее из прямоугольных треугольников KPK_1 и KPK_2 находим

$$\frac{|KK_2|}{\sin\widehat{KPK_2}}=|PK|=\frac{|KK_1|}{\sin\widehat{KPK_1}},$$

или

$$\frac{|KK_2|}{|KK_1|}=\frac{\sin\widehat{KPK_2}}{\sin\widehat{KPK_1}}=\frac{\sin(\pi/4-\widehat{KPK_1})}{\sin\widehat{KPK_1}}=$$

$$=\frac{\sin\pi/4\cos\widehat{KPK_1}-\cos\pi/4\sin\widehat{KPK_1}}{\sin\widehat{KPK_1}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\operatorname{tg}\widehat{KPK_1}}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{4}>1.$$

Аналогично доказывается, что расстояние от точки K до плоскости HEC больше, чем $\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}$.

Ответ: $\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}$.

2.С. Область допустимых значений данного уравнения состоит из точек, удовлетворяющих неравенству $\cos 2x\neq 0$, или неравенствам $x\neq\dfrac{\pi}{4}(2m+1)$, $m\in Z$. В этой области $1+\operatorname{tg}^2 2x=\sec^2 2x$, причем функция $y=1+\operatorname{tg}^2 2x$, очевидно, нигде не обращается в нуль. Отсюда следует, что данное уравнение равносильно на своей ОДЗ уравнению

$$\sin\frac{21}{4}x\cos\frac{7}{4}x+\sin\frac{5}{4}x\cos\frac{x}{4}=\sin\frac{x}{4}\cos\frac{5}{4}x-\sin\frac{7}{4}x\cos\frac{21}{4}x$$

или уравнению

$$\sin\frac{21}{4}x\cos\frac{7}{4}x+\cos\frac{21}{4}x\sin\frac{7}{4}x=\sin\frac{x}{4}\cos\frac{5}{4}x-\cos\frac{x}{4}\sin\frac{5}{4}x.$$

Пользуясь формулами для синуса суммы и разности двух углов, последнее уравнение можно переписать в виде

$$\sin 7x=\sin(-x). \tag{3}$$

Перенесем правую часть уравнения (3) налево, воспользуемся тем, что $\sin(-x)=-\sin x$, а также формулой для суммы синусов двух углов. Тогда уравнение (3) преобразуется к виду

$$2\sin 4x\cos 3x=0.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\sin 4x=0,\quad \cos 3x=0$$

и потому имеет следующие серии решений: $x=\pi n/4$, $n\in Z$, $x=\pi/6+\pi k/3$, $k\in Z$. Итак, множество решений уравнения (3) имеет вид

$$x=\pi n/4,\quad n\in Z;\quad x=\pi/6+\pi k/3,\quad k\in Z.$$

Отберем теперь из найденных чисел те, которые содержатся в ОДЗ исходного уравнения, т. е. удовлетворяют неравенствам $x\neq\pi/4+\pi m/2$, $m\in Z$. Из первой серии решений уравнения (3) в ОДЗ исходного уравнения лежат только точки $x=\pi n/4$ с четными значениями n ($n=2l$), т. е. точки $x=\pi l/2$, $l\in Z$. Все точки второй серии решений содержатся в ОДЗ данного уравнения.

Ответ: $x=\pi l/2$, $l\in Z$; $x=\pi/6+\pi k/3$, $k\in Z$.

3.С. Обозначим через O центр окружности. Тогда радиус OM, проведенный в точку M касания окружности и стороны CB, будет перпендикулярен CB. Из прямоугольного треугольника OMB (рис. 29) находим:

$$\operatorname{tg}\angle OBM=\frac{OM}{MB}=\frac{1}{15/8}=\frac{8}{15}.$$

Отсюда следует, что $\operatorname{tg}\angle OBM=\operatorname{tg}\angle ABM$. Поскольку точки O и A лежат

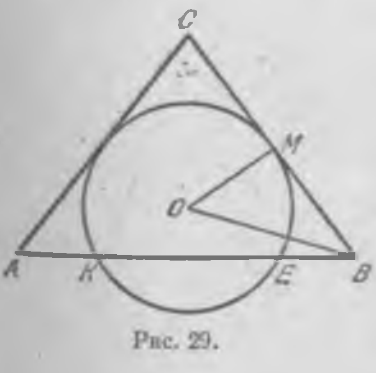


Рис. 29.

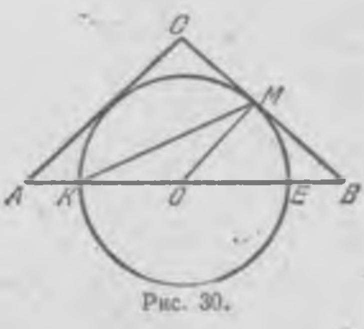


Рис. 30.

по одну сторону относительно прямой BC, то из последнего равенства следует, что $\angle OBM=\angle ABM$ и, значит, точка O лежит на отрезке AB. Правильный чертеж изображен на рис. 30. Имеем $S_{KMB}=S_{OMB}+S_{KMO}$. Так как $OM \perp MB$, то

$$S_{OMB}=\frac{1}{2}\, OM\cdot MB=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{15}{8}=\frac{15}{16}.$$

В треугольнике KMO стороны OK и OM равны радиусу окружности, т. е. 1. Следовательно,

$$S_{KMO}=\frac{1}{2}\, OK\cdot OM\sin\angle KOM=\frac{1}{2}\sin\angle KOM.$$

Ясно, что

$$\sin\angle KOM=\sin\angle BOM=\cos\angle OBM=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\angle OBM}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{64}{225}}}=\frac{15}{17}.$$

В формуле $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$ перед квадратным корнем взяли знак $+$, поскольку величина угла OBM, равная $\operatorname{arctg}\frac{8}{15}$, лежит в промежутке между 0 и $\pi/2$. Итак, $S_{KMO}=\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{17}=\frac{15}{34}$ и $S_{KMB}=\frac{15}{34}+\frac{15}{16}=\frac{375}{272}$.

Ответ: $S_{KMO}=\frac{375}{272}$.

Ответы к вариантам 2—4.

Вариант 2. 1. $x=-2$, $x=1$, $x\geqslant 3$. 2.Н. $\pi/12+\pi n$, $n\in Z$. 3.Н. $y=2x+1$. 4. $A=\{1, 2, 3, 7, 11, 14, 22, 77\}$. 5. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$. 2.С. $x=\frac{\pi}{12}(2k+1)$, $k\in Z$; $x=\frac{\pi n}{3}$, $n\neq 3(2m+1)$, $n\in Z$, $m\in Z$. 3.С. $\frac{3}{13}$.

Вариант 3. 1. $-2\leqslant x\leqslant -1$, $x\geqslant 3$. 2.Н. $\pi(4n+2)$, $n\in Z$. 3.Н. $y=-x+15$. 4. $A=\{15, 30, 39, 65, 78, 130, 195, 390\}$. 5. $2-\sqrt{2}$. 2.С. $x=\frac{\pi}{12}+\pi k$, $k\in Z$; $x=\frac{2\pi}{3}(1+3n)$, $n\in Z$; $x=\frac{2\pi}{3}(2+3m)$, $m\in Z$. 3.С. 210.

Вариант 4. 1. $x=-2$, $1\leqslant x\leqslant 3$. 2.Н. $\pi/4+\pi k$, $k\in Z$. 3.Н. $y=x-1/4$. 4. $A=\{6, 15, 30, 33, 66, 110, 165, 330\}$. 5. $\frac{1}{2\sqrt{3}}$. 2.С. $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi m}{4}$, $m\in Z$; $x=\frac{\pi(2k+1)}{2}$, $k\in Z$. 3.С. $\frac{28}{53}$.

1979

Решение варианта 1.

1.Н. Поскольку функция $f(x)$ дифференцируема на всем интервале $(-5, 1/5)$, то искомые точки экстремума содержатся среди корней уравнения $f'(x)=0$, лежащих в этом интервале. Вычислив производную $f'(x)=3x^2+12x-3$, находим корни уравнения $f'(x)=0$: $x_1=-2-\sqrt{5}$, $x_2=$

$=-2+\sqrt{5}$. Легко проверить, что $x_2 > 1/5$, а x_1 принадлежит интервалу $(-5, 1/5)$. Итак, единственная точка, которая может быть точкой экстремума, есть $x_1=-2-\sqrt{5}$. Так как на интервале $(-5, x_1)$ выполнено неравенство $f'(x) > 0$, а на интервале $(x_1, 1/5)$ неравенство $f'(x) < 0$, то точка $x_1 = -2-\sqrt{5}$ действительно является точкой экстремума (точкой максимума).

Ответ: $-2-\sqrt{5}$.

2. Данное уравнение равносильно такому: $5^{|4x-6|}=5^{6x-8}$, или

$$|4x-6|=6x-8. \tag{1}$$

Для решения уравнения (1) разобьем числовую прямую на два множества: $x \geqslant 3/2$ и $x < 3/2$. На множестве $x < 3/2$ имеем: $|4x-6|=6-4x$, поэтому уравнение (1) можно переписать в виде $6-4x=6x-8$. Последнее уравнение имеет единственный корень $x_1=7/5$, принадлежащий множеству $x < 3/2$. Значит, на множестве $x < 3/2$ уравнение (1) имеет единственный корень $x_1=7/5$. На множестве $x \geqslant 3/2$ имеем: $|4x-6|=4x-6$, поэтому уравнение (1) можно переписать в виде $4x-6=6x-8$. Последнее уравнение имеет единственный корень $x_2=1$, который не принадлежит множеству $x \geqslant 3/2$. Значит, на множестве $x \geqslant 3/2$ уравнение (1) не имеет решений.

Объединяя решения, найденные на множествах $x \geqslant 3/2$ и $x < 3/2$, получаем, что уравнение (1), а значит и равносильное ему исходное уравнение, имеет единственный корень $x=7/5$.

Ответ: $x=7/5$.

3. Обозначим через K точку пересечения прямых AB и EM (рис. 31). Поскольку углы CDB и CAB опираются на одну дугу, то $\widehat{CAB}=\widehat{CDB}=\alpha$. Из равенств $\widehat{DCE}+\widehat{CDB}=\pi/2$, $\widehat{KEA}+\widehat{CAB}=\pi/2$ следует, что $\widehat{DCE}=\widehat{KEA}=\widehat{CEM}$. Но это означает, что треугольник CEM равнобедренный, т. е. $|CM|=|EM|$. Далее, $\widehat{MED}=\pi/2-\widehat{CEM}=\pi/2-(\pi/2-\alpha)=\alpha=\widehat{CDB}$. Итак, треугольник EMD — равнобедренный, или $|DM|=|EM|$. Этим доказано, что $|CM|=|DM|$, или что EM — медиана треугольника CED.

Рис. 31.

Из прямоугольного треугольника ABE находим $|AE|=|AB|\cos\widehat{CAB}=4\cos\alpha$. Далее из прямоугольного треугольника AED по теореме Пифагора получаем $|ED|=\sqrt{|AD|^2-|AE|^2}=\sqrt{64-16\cos^2\alpha}=4\sqrt{4-\cos^2\alpha}$ и, наконец,

$$|EM|=\frac{1}{2}|CD|=\frac{1}{2}\,\frac{|ED|}{\cos\alpha}=$$

$$=2\sqrt{\frac{4}{\cos^2\alpha}-1}=2\sqrt{4\operatorname{tg}^2\alpha+3}.$$

Ответ: $|EM|=2\sqrt{4\operatorname{tg}^2\alpha+3}$ см.

4. Пусть x — целый корень данного уравнения. Тогда существует некоторое целое число n такое, что справедливо равенство

$$\frac{\pi}{8}\left(3x-\sqrt{9x^2+160x+800}\right)=2\pi n,$$

или

$$\sqrt{9x^2+160x+800}=3x-16n.$$

Возведя это равенство в квадрат, приходим к равенству

$$x(3n+5)=8n^2-25. \qquad (2)$$

Преобразуем правую часть этого равенства следующим образом:

$$8n^2-25=8\left(n^2-\frac{25}{9}\right)-\frac{25}{9}=\frac{8}{9}(3n+5)(3n-5)-\frac{25}{9}.$$

Из равенства (2) можно получить теперь следующее:

$$8(3n+5)(3n-5)-9x(3n+5)=25.$$

Поскольку x и n есть целые числа, то последнее равенство означает, что $3n+5$ является делителем числа 25, т. е. $3n+5$ есть одно из чисел ± 1, ± 5, ± 25. Непосредственной проверкой убеждаемся, что это возможно только если n равняется одному из чисел $n_1=-10$, $n_2=-2$, $n_3=0$. Соответствующие значения x находятся из равенства (2): $x_1=-31$, $x_2=-7$, $x_3=-5$. Итак, все целые корни исходного уравнения содержатся среди чисел $x_1=-31$, $x_2=-7$ и $x_3=-5$. Подставляя эти числа в исходное уравнение, убеждаемся, что ему удовлетворяют только x_1 и x_2. Значит исходное уравнение имеет два целых корня: $x_1=-31$ и $x_2=-7$.

Ответ: $x_1=-31$, $x_2=-7$.

5. Точка $x=0$ будет в приводимом ниже решении играть особую роль. Поэтому отдельно исследуем те значения параметра a, при каждом из которых уравнение будет иметь корень $x=0$. Подставляя $x=0$ в уравнение, видим, что имеется только одно такое значение параметра, именно $a=1$. Уравнение при $a=1$ имеет вид

$$\left(1-x^2-\cos\frac{11\pi x}{4}\right)\sqrt{8-x}=0. \qquad (3)$$

Поскольку множитель $\sqrt{8-x}$ не обращается в нуль на отрезке $[-2, 3]$, то уравнение (3) на этом отрезке равносильно такому:

$$x^2+\cos\frac{11\pi x}{4}=1. \qquad (4)$$

Функция, стоящая в левой части этого уравнения, четная. Значит, уравнение (4) на отрезке $[-2, 2]$ будет иметь нечетное число корней (если $x_0\neq 0$ — корень уравнения (4), то $-x_0$ также его корень; кроме того, имеется корень $x=0$). На множестве $[2, 3]$ уравнение (4) корней не имеет, так как на этом множестве

$$x^2+\cos\frac{11\pi x}{4}\geq 4-1=3.$$

Итак, при $a=1$ исходное уравнение имеет нечетное число корней на отрезке $[-2, 3]$. Значит, $a=1$ удовлетворяет условию задачи.

Отметим теперь еще раз, что при $a\neq 1$ все корни исходного уравнения отличны от нуля.

Исследуем еще значение параметра $a=0$. При $a=0$ исходное уравнение имеет вид

$$x^2+\cos\frac{11\pi x}{4}=0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) на отрезке $[-2, 2]$ имеет четное число корней. Это следует из четности функции, стоящей в левой части уравнения (5), поскольку вместе с корнем x_0 уравнение будет иметь и корень $-x_0$. На множестве $(2, 3]$ уравнение (5) корней не имеет, так как на этом множестве $x^2+\cos\frac{11\pi x}{4}\geqslant 4-1=3>0$. Итак, при $a=0$ исходное уравнение имеет четное число корней на отрезке $[-2, 3]$. Значит, $a=0$ не удовлетворяет условию задачи.

Теперь исследуем значения параметра a такие, что $a\neq 0$ и $a\neq 1$. При любом таком a исходное уравнение имеет корень $x_1=\frac{8}{a}$. Выясним, при каких значениях a этот корень попадает на отрезок $[-2, 3]$. Очевидно, что это будет при тех a, которые удовлетворяют двойному неравенству $-2\leqslant\frac{8}{a}\leqslant 3$. Ясно, что среди положительных a это будут те, которые удовлетворяют условию $a\geqslant\frac{8}{3}$, а среди отрицательных a те, которые удовлетворяют условию $a\leqslant -4$. Теперь очевидно, что надо рассмотреть три области изменения параметра: 1) $a\leqslant -4$, 2) $-4<a<\frac{8}{3}$, $a\neq 1$, $a\neq 0$, 3) $a\geqslant\frac{8}{3}$.

1) Пусть $a\leqslant -4$. Тогда исходное уравнение имеет на отрезке $[-2, 3]$ корень $x_1=\frac{8}{a}$. Рассмотрим теперь уравнение

$$x^2+\cos\frac{11\pi x}{4}=a. \qquad (6)$$

При $a\leqslant -4$ уравнение (6) корней не имеет, так как $x^2+\cos\frac{11\pi x}{4}\geqslant\cos\frac{11\pi x}{4}\geqslant -1$. Итак, исходное уравнение при любом $a\leqslant -4$ имеет только один корень $x_1=\frac{8}{a}$. Значит, все $a\leqslant -4$ удовлетворяют условию задачи.

2) Пусть $-4<a<8/3$, $a\neq 1$, $a\neq 0$. В этом случае множитель $\sqrt{8-ax}$ не обращается в нуль на отрезке $[-2, 3]$. Значит, на $[-2, 3]$ исходное уравнение равносильно уравнению (6).

Уравнение (6) на отрезке $[-2, 2]$ имеет четное число корней (или не имеет их вовсе). Это следует из четности функции, стоящей в левой части уравнения (6), так как вместе с корнем x_0 уравнение будет иметь корень $-x_0$. На множестве $(2, 3]$ уравнение (6) корней не имеет, поскольку на этом множестве $x^2+\cos\frac{11\pi x}{4}\geqslant x^2-1\geqslant 4-1=3>\frac{8}{3}$. Итак, при указанных значениях параметра a исходное уравнение либо не имеет корней на отрезке $[-2, 3]$, либо имеет их четное число. Следовательно, все эти значения a не удовлетворяют условию задачи.

6*

3) Пусть $a \geqslant \frac{8}{3}$. Тогда исходное уравнение имеет на отрезке $[-2, 3]$ корень $x_1 = \frac{8}{a}$. Отметим, что из корней уравнения (6) корнями исходного уравнения будут только те, которые удовлетворяют условию $8 - ax \geqslant 0$, т. е. те, которые удовлетворяют условию: $x \leqslant \frac{8}{a}$. Теперь задача может быть переформулирована так: в области $a \geqslant \frac{8}{3}$ найти все значения a, при каждом из которых уравнение (6) имеет на промежутке $\left[-2, \frac{8}{a}\right)$ четное число различных корней.

Рассмотрим несколько случаев.

а) Пусть $a = 4$, тогда уравнение (6) имеет вид

$$x^2 + \cos\frac{11\pi x}{4} = 4. \tag{7}$$

В этом случае множество, на котором исследуется уравнение (7), таково: $[-2, 2)$. На множестве $(-2, 2)$ уравнение (7) имеет четное число корней. Но точка $x = -2$ также удовлетворяет уравнению (7). Это легко установить подстановкой. Следовательно, при $a = 4$ на промежутке $\left[-2, \frac{8}{a}\right)$ уравнение (6) имеет нечетное число корней. Значит, $a = 4$ не удовлетворяет условию задачи.

б) Пусть $a > 4$. В этом случае $\frac{8}{a} < 2$ и, так как на $[-2, 2]$ уравнение (6) имеет четное число корней, условию задачи будут удовлетворять те a, при каждом из которых уравнение (6) имеет четное число корней (или не имеет их вовсе) на множестве $\left[\frac{8}{a}, 2\right]$. Докажем, что на множестве $\left[\frac{8}{a}, 2\right]$ уравнение (6) не имеет корней. Отсюда будет следовать, что все $a > 4$ удовлетворяют условию задачи. Поскольку $x = 2$ не является корнем уравнения (6) ($a \neq 4$) и $a - x^2 - \cos\frac{11\pi x}{4} \geqslant \frac{8}{x} - x^2 - \cos\frac{11\pi x}{4}$, то достаточно доказать, что на множестве $(0, 2)$ справедливо неравенство $\frac{8}{x} - x^2 - \cos\frac{11\pi x}{4} > 0$. Если $\frac{18}{11} < x < 2$, то $\frac{9\pi}{2} < \frac{11\pi x}{4} < \frac{11\pi}{2}$ и $\cos\frac{11\pi x}{4} < 0$. Значит на этом множестве $\frac{8}{x} - x^2 - \cos\frac{11\pi x}{4} > \frac{8}{x} - x^2 > 0$. (Последнее неравенство выполнено, поскольку $x < 2$.) Если $0 < x \leqslant \frac{18}{11}$, то, пользуясь монотонным убыванием функции $y = \frac{8}{x} - x^2$ на множестве $x > 0$, находим, что $\frac{8}{x} - x^2 \geqslant \frac{8 \cdot 11}{18} - \left(\frac{18}{11}\right)^2 > \frac{44}{9} - 3 > 1$ и, значит, $\frac{8}{x} - x^2 - \cos\frac{11\pi x}{4} > 1 - \cos\frac{11\pi x}{4} \geqslant 0$. Итак, все $a > 4$ удовлетворяют условию задачи.

в) Пусть $\frac{8}{3} \leqslant a < 4$. В этом случае $\frac{8}{a} > 2$ и подобно пункту б) достаточно найти все a, при которых уравнение (6) на множестве $\left(2, \frac{8}{a}\right)$ имеет четное число различных корней (или не имеет их вовсе). Как и в пункте б), докажем, что при всех a, удовлетворяющих неравенствам $\frac{8}{3} \leqslant a < 4$, уравнение (6) на множестве $\left(2, \frac{8}{a}\right)$ не имеет корней. Поскольку на множестве $\left(2, \frac{8}{a}\right)$ выполнено неравенство $a < \frac{8}{x}$ и, следовательно, $a - x^2 - \cos\frac{11\pi x}{4} < \frac{8}{x} - x^2 - \cos\frac{11\pi x}{4}$, то достаточно доказать, что на множестве (2, 3) выполнено неравенство $\frac{8}{x} - x^2 - \cos\frac{11\pi x}{4} < 0$. Если $2 < x < \frac{26}{11}$, то $\frac{11\pi}{2} < \frac{11\pi x}{4} < \frac{13\pi}{2}$ и $\cos\frac{11\pi x}{4} > 0$. Значит, на этом множестве $\frac{8}{x} - x^2 - \cos\frac{11\pi x}{4} < \frac{8}{x} - x^2 < 0$. (Последнее неравенство выполнено, поскольку $x > 2$.) Если $\frac{26}{11} \leqslant x < 3$, то, пользуясь монотонным убыванием функции $y = \frac{8}{x} - x^2$ на множестве $x > 0$, находим, что $\frac{8}{x} - x^2 \leqslant \frac{8 \cdot 11}{26} - \left(\frac{26}{11}\right)^2 < \frac{44}{13} - 5 < -1$ и, значит, $\frac{8}{x} - x^2 - \cos\frac{11\pi x}{4} < -1 - \cos\frac{11\pi x}{4} \leqslant 0$. Итак, все a из области $\frac{8}{3} \leqslant a < 4$ удовлетворяют условию задачи.

Собирая вместе все a, удовлетворяющие условию задачи, получаем ответ.

Ответ: $a \leqslant -4$, $a = 1$, $8/3 \leqslant a < 4$, $a > 4$.

1.С. Общий член a_n данной арифметической прогрессии по известной формуле может быть записан так: $a_n = 3 + 6(n-1)$. Поэтому $a_6 = 3 + 6 \cdot 5 = 33$. Сумма первых шести членов арифметической прогрессии равна

$$\frac{a_1 + a_6}{2} \cdot 6 = \frac{3 + 33}{2} \cdot 6 = 108.$$

По известной формуле сумма первых восьми членов данной геометрической прогрессии равна

$$\frac{3 - 3(\sqrt{2})^8}{1 - \sqrt{2}} = 45(\sqrt{2} + 1).$$

Сравним числа 108 и $45(\sqrt{2}+1)$. Так как $\sqrt{2} > 7/5$, то $45(\sqrt{2}+1) > 45(7/5+1) = 108$.

Ответ: Сумма первых восьми членов геометрической прогрессии больше суммы первых шести членов арифметической прогрессии.

Ответы к вариантам 2—4.

Вариант 2. 1.Н. $-1-\sqrt{7}$. 2. $8/7$. 3. $\sqrt{61\sin^2\alpha - 25}$ см. 4. -13; -59. 5. $a \leqslant -3$, $a = -1$, $3/5 \leqslant a < 3$, $a > 3$. 1.С. Сумма первых восьми членов арифметической прогрессии меньше суммы первых шести членов геометрической прогрессии.

Вариант 3. 1.Н. $1+\sqrt{5}$. 2. $\frac{3}{5}$. 3. $\frac{\sqrt{49-9\,\mathrm{tg}^2\alpha}}{2\sin\alpha}$ см. 4. -7; -13. 5. $a\leqslant-4$, $a=-1$, $8/5\leqslant a<4$, $a>4$. 1.С. Сумма первых семи членов арифметической прогрессии меньше суммы первых шести членов геометрической прогрессии.

Вариант 4. 1.Н. $2+\sqrt{7}$. 2. 2/7. 3. $\sqrt{49-16\sin^2\alpha}\cdot\cos\alpha$ см. 4. -3; -21. 5. $a\leqslant-5$, $a=1$, $5/13\leqslant a<5$, $a>5$. 1.С. Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии больше суммы первых восьми членов геометрической прогрессии.

§ 3. ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

1977

Решение варианта 1.

1. Данное уравнение можно переписать в виде $\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{3}{4}$, или $\cos 2x=-1/2$. Решая последнее уравнение, находим $2x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$, или $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$.

Возможно и другое решение. Исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений $\sin x=\sqrt{3}/2$ и $\sin x=-\sqrt{3}/2$. Решая каждое из них и объединяя множества их решений, получим ответ задачи.

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$.

2.Н. Решая квадратное уравнение $2x^2+6x-20=0$, находим точки $x_1=-5$, $x_2=2$, в которых парабола $y=-2x^2-6x+20$ пересекает ось OX. Ветви параболы направлены вниз (рис. 32). Необходимо найти площадь заштрихованной фигуры. Имеем

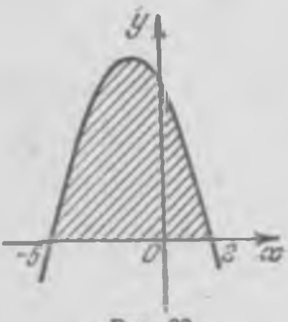


Рис. 32.

$$S=\int_{-5}^{2}(-2x^2-6x+20)\,dx=$$
$$=\left(-\frac{2x^3}{3}-3x^2+20x\right)\Bigg|_{-5}^{2}=$$
$$=-16/3-12+40-\frac{250}{3}+75+100=343/3.$$

Ответ: $S=343/3$.

3.Н. Воспользуемся следующими формулами для числа размещений и числа перестановок: $A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$, $P_n=n!$.

Тогда
$$x_n=\frac{(n+4)!}{n!\,(n+2)!}-\frac{143}{4\cdot n!}=\frac{(n+4)\,(n+3)}{n!}-\frac{143}{4\cdot n!}=\frac{4n^2+28n-95}{4\cdot n!}.$$

Отсюда следует, что для искомых значений n должно выполняться неравенство $4n^2+28n-95<0$. Квадратное уравнение $4x^2+28x-95=0$ имеет корни $x_1=-19/2$, $x_2=5/2$. Так как множество решений неравенства $4x^2+28x-95<0$ есть интервал $-19/2<x<5/2$, то нужно найти все натуральные числа, лежащие в этом интервале. Таких чисел только два: 1 и 2. Значит, последовательность x_n имеет только два отрицательных члена x_1 и x_2, причем

$$x_1=\frac{4\cdot 1^2+28\cdot 1-95}{4\cdot 1!}=-\frac{63}{4}, \qquad x_2=\frac{4\cdot 2^2+28\cdot 2-95}{4\cdot 2!}=-\frac{23}{8}.$$

Ответ: $-63/4$, $-23/8$.

4. Обозначим вершины данной трапеции последовательно буквами A, B, C, D так, чтобы отрезки AD и BC были ее основаниями, причем $|AD|>|BC|$ (рис. 33). Обозначим через α величину угла BAD. Тогда $0<\alpha<\pi/2$. Так как трапеция по условию равнобедренная, то $\widehat{CDA}=\widehat{BAD}=\alpha$, $\widehat{BCD}=\widehat{ABC}=\pi-\alpha$.

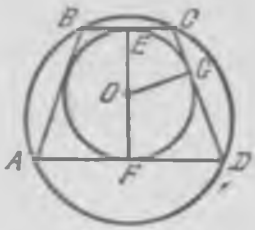


Рис. 33.

Выразим двумя способами через α и радиусы R (описанной) и r (вписанной) окружностей величину отрезка BD. Это даст уравнение относительно α и тогда будут найдены все углы трапеции.

Так как угол BAD вписан в большую окружность и опирается на дугу BD, то $|BD|=2R\sin\widehat{BAD}=2R\sin\alpha$.

Соединим центр O вписанной окружности с точками касания этой окружности со сторонами BC, CD и AD. На рисунке эти точки обозначены буквами E, G и F соответственно. Так как радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной, то $OE\perp BC$ и $OF\perp AD$. Прямые BC и AD параллельны, значит, $OF\perp BC$. Поскольку через точку O можно провести единственный перпендикуляр к прямой BC, то это означает, что прямые OE и OF совпадают, или, что точки E, O, F лежат на одной прямой. Кроме того, отсюда следует, что длина высоты EF трапеции равна $2r$. Из условия задачи $\frac{2r}{R}=\sqrt{\frac{2}{3}}$, или $R=\sqrt{6}\,r$. Тогда $|BD|=2\sqrt{6}\,r\sin\alpha$.

Так как окружность с центром O касается сторон BC, CD, AD, то прямые BO, CO, DO являются биссектрисами соответственно углов ABC, BCD, CDA. Поэтому

$$|BC|=|BE|+|EC|=r\operatorname{ctg}\frac{\widehat{ABC}}{2}+r\operatorname{ctg}\frac{\widehat{BCD}}{2}=2r\operatorname{ctg}\frac{\pi-\alpha}{2}=2r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

$$|CD|=|CG|+|GD|=r\operatorname{ctg}\frac{\widehat{BCD}}{2}+r\operatorname{ctg}\frac{\widehat{CDA}}{2}=$$

$$=r\operatorname{ctg}\frac{\pi-\alpha}{2}+r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=r\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{2r}{\sin\alpha}.$$

Применяя к треугольнику BCD теорему косинусов, получаем

$$|BD|^2=|BC|^2+|CD|^2-2\,|BC|\cdot|CD|\cos\widehat{BCD}=$$

$$=4r^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{4r^2}{\sin^2\alpha}-8r^2\,\frac{\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}\cos(\pi-\alpha)=$$

$$=4r^2\left[\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{2\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right]=4r^2\left(1+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right).$$

Приравнивая выражения для $|BD|^2$, приходим к уравнению $1+\frac{1}{\sin^2\alpha}=6\sin^2\alpha$, или $6\sin^4\alpha-\sin^2\alpha-1=0$. Последнее уравнение равносильно совокупности двух уравнений $\sin^2\alpha=-1/3$, $\sin^2\alpha=1/2$.

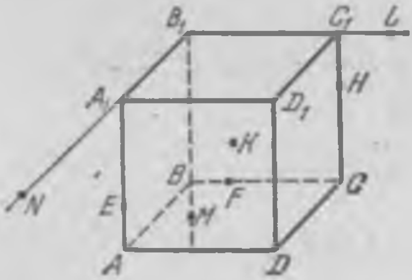


Рис. 34.

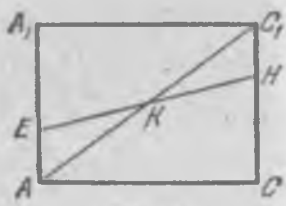


Рис. 35.

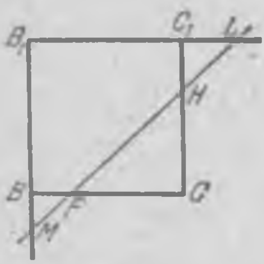


Рис. 36.

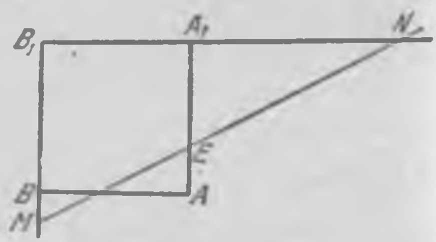


Рис. 37.

Первое из них корней не имеет. Второе уравнение равносильно уравнению $\frac{1-\cos 2\alpha}{2}=\frac{1}{2}$, или $\cos 2\alpha=0$. Последнее уравнение на промежутке $0<\alpha<\pi/2$ имеет единственное решение $\alpha=\pi/4$.

Ответ: $\widehat{BAD}=\widehat{CDA}=\pi/4$, $\widehat{BCD}=\widehat{ABC}=3\pi/4$.

5. Первое решение. Обозначим через K центр куба и через L, M, N точки пересечения плоскости α с прямыми B_1C_1, B_1B, B_1A_1 соответственно (рис. 34). Найдем величины отрезков $|B_1L|$, $|B_1M|$, $|B_1N|$. Точка K есть середина отрезка AC_1 и потому принадлежит плоскости AA_1C_1C. Прямые EK и CC_1 лежат в этой плоскости. Обозначим их точку

пересечения через H (рис. 35). Плоскость α пересечет ребро куба CC_1 в точке H. В треугольниках AKE и C_1KH имеем $|AK|=|KC_1|$, $\widehat{EKA}=\widehat{C_1KH}$, $\widehat{EAK}=\widehat{HC_1K}$. Следовательно, $|C_1H|=|AE|=1/3$. Плоскости α и BB_1C_1C пересекаются по прямой FH и, значит, точки L, M есть точки пересечения FH с прямыми B_1C_1 и B_1B соответственно (рис. 36). Прямо-

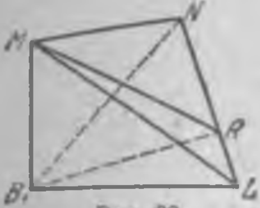


Рис. 38.

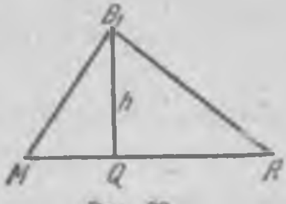


Рис. 39.

угольные треугольники C_1HL, HFC и MBF подобны ($\widehat{C_1HL}=\widehat{CHF}$ и $\widehat{CFH}=\widehat{BFM}$), значит,

$$\frac{|C_1L|}{|CF|}=\frac{|C_1H|}{|CH|}, \quad \frac{|BM|}{|CH|}=\frac{|BF|}{|CF|}.$$

Отсюда

$$|C_1L|=\frac{|C_1H|\cdot|CF|}{|CH|}=\frac{1/3\cdot 3/4}{2/3}=\frac{3}{8},$$

$$|BM|=\frac{|BF|\cdot|CH|}{|CF|}=\frac{1/4\cdot 2/3}{3/4}=\frac{2}{9}.$$

Таким образом, $|B_1L|=1+3/8=11/8$, $|B_1M|=1+2/9=11/9$. Поскольку плоскости α и BB_1A_1A пересекаются по прямой ME, то N есть точка пересечения прямых ME и B_1A_1. Обозначим $|B_1N|$ через x, тогда $|A_1N|=x-1$ (рис. 37). Из подобия треугольников MB_1N и EA_1N получаем, что $\frac{|A_1N|}{|B_1N|}=\frac{|A_1E|}{|B_1M|}$. Так как $|A_1E|=1-|AE|=2/3$, то $\frac{x-1}{x}=\frac{2/3}{11/9}$, откуда $x=11/5$. Следовательно, $|B_1N|=11/5$. Искомое расстояние будет равняться высоте пирамиды $MNLB_1$, опущенной из вершины B_1. Проведем из точки B_1 перпендикуляр B_1R на прямую NL (рис. 38). Так как прямая MB_1 перпендикулярна прямым NB_1 и LB_1, то MB_1 перпендикулярна плоскости LB_1N. Это означает, что прямые MB_1 и LN перпендикулярны. Из перпендикулярности прямых LN и MB_1, LN и B_1R следует, что прямая LN перпендикулярна плоскости MRB_1. Поэтому плоскости MRB_1 и MNL перпендикулярны. Это же означает, что высота пирамиды $MNLB_1$, проведенная из вершины B_1, будет лежать в плоскости MRB_1 и будет являться высотой h треугольника MRB_1 (рис. 39).

Из прямоугольного треугольника B_1NL находим:

$$|NL|=\sqrt{|B_1N|^2+|B_1L|^2}=\sqrt{\frac{121}{25}+\frac{121}{64}}=\frac{11}{40}\sqrt{89}.$$

Далее $\frac{|B_1R|}{|B_1L|}=\sin\widehat{B_1LR}=\frac{|B_1N|}{|NL|}$, откуда

$$|B_1R|=\frac{|B_1L|\cdot|B_1N|}{|NL|}=\frac{\frac{11}{8}\cdot\frac{11}{5}}{\frac{11}{40}\cdot\sqrt{89}}=\frac{11}{\sqrt{89}}.$$

Из прямоугольного треугольника MB_1R находим:

$$|MR|=\sqrt{|MB_1|^2+|B_1R|^2}=\sqrt{\frac{121}{81}+\frac{121}{89}}=\frac{11}{9}\sqrt{\frac{170}{89}}.$$

Так как

$$\frac{h}{|MB_1|}=\sin\widehat{B_1MR}=\frac{|B_1R|}{|MR|},$$

то

$$h=\frac{|MB_1|\cdot|B_1R|}{|MR|}=\frac{\frac{11}{9}\cdot\frac{11}{\sqrt{89}}}{\frac{11}{9}\cdot\sqrt{\frac{170}{89}}}=\frac{11}{\sqrt{170}}.$$

Второе решение. Обозначим через Q ортогональную проекцию точки B_1 на плоскость α. Введем в пространстве систему координат, поместив начало координат в точку B и направив ось x по лучу BA, ось y по лучу BC, ось z по лучу BB_1 и взяв за единицу масштаба отрезок, длина которого равна 1. Тогда точки E, F, K, B_1 будут иметь следующие

Рис. 40.

координаты: $E(1,\ 0,\ 1/3)$, $F(0,\ 1/4,\ 0)$, $K(1/2,\ 1/2,\ 1/2)$, $B_1(0,\ 0,\ 1)$. Поскольку векторы $\overrightarrow{KE}$ и $\overrightarrow{KF}$ не коллинеарны и точка Q лежит в плоскости α (рис. 40), то существуют числа a и b такие, что $\overrightarrow{KQ}=a\overrightarrow{KE}+b\overrightarrow{KF}$ и $\overrightarrow{QB_1}=\overrightarrow{KB_1}-\overrightarrow{KQ}=\overrightarrow{KB_1}-a\overrightarrow{KE}-b\overrightarrow{KF}$. Поскольку $\overrightarrow{KE}=(1/2,\ -1/2,\ -1/6)$, $\overrightarrow{KF}=(-1/2,\ -1/4,\ -1/2)$, $\overrightarrow{KB_1}=(-1/2,\ -1/2,\ 1/2)$, то

$$\overrightarrow{QB_1}=\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b,\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}b,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{6}a+\frac{1}{2}b\right).$$

Вектор $\overrightarrow{QB_1}$ ортогонален векторам $\overrightarrow{KE}$ и $\overrightarrow{KF}$, поэтому

$$0=(\overrightarrow{KE},\ \overrightarrow{QB_1})=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}b\right)-$$
$$-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}a+\frac{1}{2}b\right)=-\frac{1}{12}-\frac{19}{36}a+\frac{1}{24}b,$$

$$0=(\overrightarrow{KF},\ \overrightarrow{QB_1})=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b\right)-$$
$$-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}b\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}a+\frac{1}{2}b\right)=\frac{1}{8}+\frac{1}{24}a-\frac{9}{16}b.$$

Решая эту систему относительно a, b, находим $a=-12/85$, $b=18/85$. Тогда $\overrightarrow{QB_1}=(-55/170,\ -88/170,\ 99/170)$ и искомое расстояние равно

$$|QB_1|=\sqrt{\left(\frac{55}{170}\right)^2+\left(\frac{88}{170}\right)^2+\left(\frac{99}{170}\right)^2}=\frac{11}{170}\sqrt{5^2+8^2+9^2}=\frac{11}{\sqrt{170}}.$$

Ответ: $\dfrac{11}{\sqrt{170}}$.

2.С. Решая данную систему уравнений, находим

$$x=\frac{a+3}{3},$$

$$y=\frac{2a-3}{3}.$$

Следовательно, искомые значения параметра a являются решениями неравенства

$$\frac{a+3}{3}>\frac{2a-3}{3}.$$

Этому неравенству удовлетворяют все a из области $a<6$.

Ответ: $a<6$.

3.С. Область допустимых значений данного неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условиям $x>0$, $x\neq 1$. В этой области неравенство равносильно такому:

$$\log_7 x+\frac{1}{\log_7 x}\geqslant 2. \qquad (1)$$

Обозначив $\log_7 x$ через t, неравенство (1) можно переписать в виде

$$t+\frac{1}{t}\geqslant 2,$$

или

$$\frac{(t-1)^2}{t}\geqslant 0. \qquad (2)$$

Решения неравенства (2) имеют вид $t>0$. Следовательно, данное в условии задачи неравенство равносильно на своей ОДЗ такому: $\log_7 x>0$. Последнему неравенству удовлетворяют все x из области $x>1$. Все они лежат в ОДЗ исходного неравенства.

Ответ: $x>1$.

Ответы к вариантам 2—6.

Вариант 2. 1. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. 2.Н. $\frac{243}{2}$. 3.Н. 2. 4. $\arccos\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$, $\pi - 2\arccos\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$. 5. $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1121}{170}}$. 2.С. $b < 0$. 3.С. $x > 1$.

Вариант 3. 1. $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. 2.Н. $\frac{343}{3}$. 3.Н. 4. 4. $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. 5. $\frac{6}{\sqrt{170}}$. 2.С. $c < 70$. 3.С. $x > 1$.

Вариант 4. 1. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. 2.Н. $\frac{243}{2}$. 3.Н. 3. 4. $\arccos\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, $\pi - 2\arccos\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$. 5. $\sqrt{\frac{551}{850}}$. 2.С. $a > -3$. 3.С. $x > 1$.

Вариант 5. 1. $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. 2.Н. $\frac{512}{3}$. 3.Н. $\frac{39}{4}$, $\frac{15}{8}$. 4. $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$. 5. $\frac{3}{\sqrt{170}}$. 2.С. $b < -\frac{2}{3}$. 3.С. $x > 1$.

Вариант 6. 1. $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. 2.Н. $\frac{243}{2}$. 3.Н. 4. 4. $\arccos\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\pi - 2\arccos\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. 5. $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1379}{85}}$. 2.С. $c > \frac{23}{2}$. 3.С. $x > 1$.

1978

Решение варианта 1.

1. Преобразуем левую часть уравнения:

$$2\sin x + 3\sin 2x = 2\sin x + 6\sin x\cos x = 2\sin x\,(1 + 3\cos x).$$

Отсюда следует, что данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\sin x = 0, \quad \cos x = -1/3.$$

Первое уравнение имеет решения: $x = \pi n$, $n \in Z$. Второе уравнение имеет решения: $x = \pm\arccos(-1/3) + 2\pi k$, $k \in Z$. Все найденные числа образуют множество решений данного уравнения.

Ответ: $x = \pi n$, $n \in Z$; $x = \pm\arccos(-1/3) + 2\pi k$, $k \in Z$.

2.Н. Поскольку дискриминант квадратного трехчлена $2x^2 - x + 2$ отрицателен ($D = -15$), то при любом x справедливо неравенство $2x^2 - x + 2 > 0$ и, значит, область определения функции $y(x) = \sqrt{2x^2 - x + 2}$ совпадает с множеством всех действительных чисел. Вычислим производную $y'(x)$, пользуясь известными правилами:

$$y'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2x^2 - x + 2}}\cdot(2x^2 - x + 2)' = \frac{4x - 1}{2\sqrt{2x^2 - x + 2}}.$$

Так как функция дифференцируема в каждой точке числовой прямой, то по теореме Ферма ее точки экстремума должны содержаться среди решений уравнения $y'(x)=0$, или

$$\frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x+2}}=0.$$

Это уравнение имеет единственный корень $x=1/4$. Докажем, что точка $x=1/4$ действительно является точкой экстремума. На множестве $x<1/4$ справедливо неравенство $\frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x+2}}<0$, или $y'(x)<0$, а на множестве $x>1/4$ выполнено неравенство $\frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x+2}}>0$, или $y'(x)>0$. Пользуясь теоремой о достаточном условии экстремума, заключаем, что $x=1/4$ является точкой минимума. Значение в этой точке равно $y\left(\frac{1}{4}\right)=\sqrt{\frac{15}{8}}$. Вычисления можно было бы упростить, если заметить, что из монотонности функции $\sqrt{x}$ следует, что точки экстремума функции $y(x)$ совпадают с соответствующими точками функции $2x^2-x+2$, т. е. все исследование достаточно провести для функции $f(x)=2x^2-x+2$.

Ответ: имеется единственная точка экстремума (минимума) $x=1/4$; $y_{\min}=\sqrt{15/8}$.

3.Н. Из условия задачи следует, что вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты (3; 4; 6). Так как искомая плоскость перпендикулярна этому вектору, то ее уравнение можно записать в виде

$$3x+4y+6z+d=0, \qquad (1)$$

где d — некоторое число. Плоскость проходит через точку A, значит, координаты точки A после подстановки в уравнение (1) должны обратить его в верное числовое равенство. Имеем $3\cdot1+4\cdot2+6\cdot3+d=0$, откуда $d=-29$. Итак, уравнение искомой плоскости имеет вид

$$3x+4y+6z-29=0.$$

Ответ: $3x+4y+6z-29=0$.

4. Потенцируя данное уравнение, получаем уравнение

$$3^x-8=3^{2-x}. \qquad (2)$$

Умножая это уравнение на 3^x, получим уравнение

$$3^{2x}-8\cdot3^x=3^2,$$

равносильное уравнению (2). Обозначив 3^x через t, это уравнение можно переписать в виде $t^2-8t-9=0$. Корнями полученного квадратного уравнения являются числа $t_1=-1$, $t_2=9$. Значит, уравнение (2) равносильно совокупности уравнений

$$3^x=-1, \quad 3^x=9.$$

Первое уравнение этой совокупности корней не имеет, так как -1 не принадлежит множеству значений показательной функции. Второе уравнение имеет единственный корень $x_1=2$. Итак, уравнение (2) имеет единственный корень $x_1=2$. Все корни исходного уравнения содержатся среди корней уравнения (2), ибо при потенцировании уравнения нельзя было потерять корни, но можно приобрести посторонние. Поэтому ни одно число, отличное от 2, не является корнем исходного уравнения. Подставляя $x=2$ в исходное уравнение, находим, что левая и правая его части обращаются в нуль, т. е. $x=2$ является его корнем.

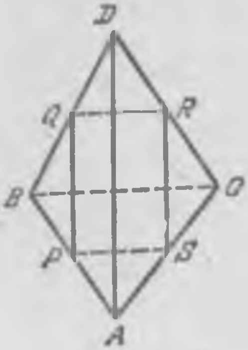


Рис. 41.

Ответ: $x=2$.

5.Н. Обозначим через P, Q, R, S точки пересечения плоскости α с прямыми AB, BD, CD и AC соответственно (рис. 41). Так как $\alpha \parallel AD$ и $\alpha \parallel BC$, то

$$PQ \parallel AD \parallel RS, \quad QR \parallel BC \parallel PS. \qquad (3)$$

Это значит, что четырехугольник $PQRS$ — параллелограмм. Поскольку пирамида правильная, то проекция AD на плоскость ABC проходит через вершину A и центр правильного треугольника ABC, т. е. перпендикулярна BC. По теореме о трех перпендикулярах это означает, что ребра AD и BC перпендикулярны. Из (3) теперь следует, что $PQRS$ — прямоугольник. Обозначим $|AP|$ через x и выразим через x площадь $S(x)$ прямоугольного сечения $PQRS$. Из подобия треугольников PBQ и ABD вытекает, что $\frac{|PQ|}{|AD|}=\frac{|BP|}{|AB|}$, или $\frac{|PQ|}{b}=\frac{a-x}{a}$. Поэтому $|PQ|=\frac{b}{a}(a-x)$. По условию треугольник ABC — правильный. Из параллельности прямых PS и BC следует, что треугольник APS также правильный, т. е. $|PS|=|AP|=x$. Таким образом,

$$S(x)=|PQ|\cdot|PS|=\frac{b}{a}(a-x)\cdot x=\frac{b}{a}(ax-x^2). \qquad (4)$$

Для того чтобы найти сечение максимальной площади, нужно найти точку на отрезке $[0,\ a]$, в которой функция $S(x)$ принимает наибольшее значение.

Производная $S'(x)=\frac{b}{a}(a-2x)$ обращается в нуль в единственной точке $a/2$. Значит, $S(x)$ принимает наибольшее значение в точке $a/2$ или на концах отрезка $[0,\ a]$. Поскольку $S(0)=S(a)=0$ и $S\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{4}=\frac{ab}{4}$, то площадь сечения будет наибольшей, если $x=a/2$, т. е. плоскость α проходит через середину отрезка AB. Вычислим теперь расстояние от ребра AD до плоскости α в предположении, что $|AP|=x$ — некоторое число из промежутка $0<x<a$. Обозначим через K середину отрезка BC, через L, M — точки пересечения отрезков KD и QR, KA и PS соответст-

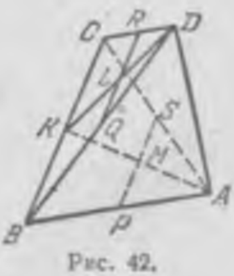


Рис. 42.

венно (рис. 42). Так как прямая LM есть пересечение плоскостей α и AKD и $\alpha \| AD$, то прямые LM и AD параллельны. Прямые KD и KA перпендикулярны BC (медианы в равнобедренных треугольниках, проведенные к основаниям, являются высотами). По признаку перпендикулярности прямой и плоскости заключаем, что прямая BC перпендикулярна плоскости AKD. Но $PS \| BC$, следовательно, прямая PS, а потому и плоскость α, перпендикулярны плоскости AKD. Это означает, что проекция AD на плоскость α совпадает с прямой LM и расстояние от AD до плоскости α (обозначим его через d) равно расстоянию между параллельными прямыми AD и LM. Выразим

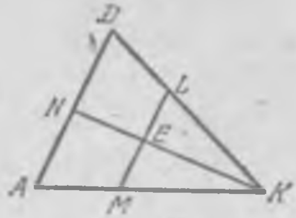


Рис. 43.

это расстояние через x. Для удобства вынесем сечение AKD пирамиды на рис. 43. Пусть KN—высота в треугольнике AKD, E—точка пересечения KN и LM. Тогда $|NE| = d$. Из подобия треугольников APM и ABK (рис. 42) следует, что

$$\frac{|AM|}{|AK|} = \frac{|AP|}{|AB|} = \frac{x}{a} \quad \text{и} \quad \frac{|NE|}{|NK|} = \frac{|AM|}{|AK|} = \frac{x}{a},$$

откуда $d = \frac{x}{a}|NK|$. Вычислим $|NK|$. Из равнобедренного треугольника BDC находим: $|DK| = \sqrt{|BD|^2 - |BK|^2} = \sqrt{b^2 - a^2/4}$. Так как треугольник ABC—правильный, то $|AK| = |AB| \frac{\sqrt{3}}{2} = a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Применяя к треугольнику ADK теорему косинусов, получаем $b^2 - \frac{a^2}{4} = b^2 + \frac{3}{4}a^2 - 2b\frac{a\sqrt{3}}{2}\cos\hat{A}$, откуда $\cos\hat{A} = \frac{a}{b\sqrt{3}}$, $\sin\hat{A} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{3b^2}}$ и $|NK| = |AK| \cdot \sin\hat{A} = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{3b^2}} = \frac{a}{2b}\sqrt{3b^2 - a^2}$. Таким образом,

$$d = \frac{x}{a} \cdot \frac{a}{2b}\sqrt{3b^2 - a^2} = \frac{x}{2b}\sqrt{3b^2 - a^2}. \qquad (5)$$

Подставляя сюда $x = \frac{a}{2}$, находим $d_{max} = \frac{a}{4b}\sqrt{3b^2 - a^2}$.

Ответ: $\frac{a}{4b}\sqrt{3b^2 - a^2}$.

6. На рис. 44 изображена конфигурация, описанная в условии задачи. Докажем, что треугольники CNM и DNM подобны. Для этого достаточно доказать, что $\widehat{CNM} = \widehat{DNM}$ и $\widehat{CMN} = \widehat{NDM}$. Так как AB—диаметр, то треугольники ACB и ADB прямоугольные. Они имеют общую гипотенузу AB и равновеликие катеты (AC и AD—радиусы окружности с центром в точке A). Поэтому $|BC| = |BD|$. Углы CNB и DNB вписаны в первую окружность и опираются на дуги этой окружности, стягиваемые равновеликими хордами BC и BD. Значит, $\widehat{CNB} = \widehat{DNB}$, или $\widehat{CNM} = \widehat{DNM}$. Так

как угол $\widehat{CMN}$ — внешний в треугольнике CMB, то $\widehat{CMN}=\widehat{BCM}+\widehat{MBC}$. Углы NBC и CDN — вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу. Значит, $\widehat{MBC}=\widehat{NBC}=\widehat{CDN}$. Пусть K — точка пересечения прямой CA со второй окружностью. Тогда $KC \perp BC$ и $KM \perp CM$ (CK — диаметр второй окружности). Отсюда следует, что $\widehat{BCM}=\widehat{CKM}=\widehat{CDM}$ (последние два угла вписаны во вторую окружность и опираются на дугу $\overset{\frown}{CM}$). Итак, $\widehat{CMN}=$ $=\widehat{BCM}+\widehat{MBC}=\widehat{CDM}+\widehat{CDN}=\widehat{NDM}$. Этим доказано, что треугольники CNM и DNM подобны. Из подобия следует равенство $\frac{|MN|}{|ND|}=\frac{|CN|}{|MN|}$. Отсюда $|MN|^2=|CN|\cdot|ND|=a\cdot b$ и $|MN|=$ $=\sqrt{ab}$.

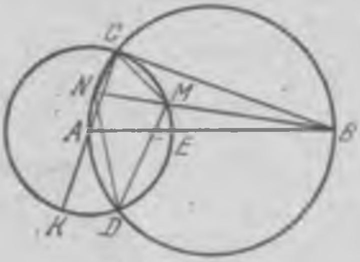


Рис. 44.

Ответ: $|MN|=\sqrt{ab}$.

2.С. Обозначим через x количество тонн металла, выплавленного из 24 тонн руды. В нем содержится 4% примесей и 96% чистого металла. Поэтому чистого металла будет выплавлено $0{,}96x$ тонн. Это количество по условию должно составлять 60% от 24 тонн руды. Так что получаем уравнение $0{,}96x=0{,}6\cdot 24$, откуда $x=15$.

Ответ: 15 тонн.

3.С. Перенося правую часть неравенства налево и приводя слагаемые к общему знаменателю, после тождественных преобразований получим неравенство

$$\frac{x-8}{(x+2)(x-3)}<0, \tag{6}$$

равносильное исходному. С помощью метода интервалов (рис. 45) находим множество всех решений неравенства (6): $x<-2$, $3<x<8$.

Ответ: $x<-2$, $3<x<8$.

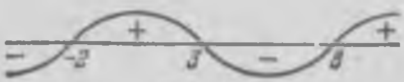


Рис. 45.

5.С. Будем пользоваться формулами (5), (4), выведенными в решении задачи 5.Н. Из условия задачи следует, что в (5) нужно взять b равным $a\sqrt{2}$. Тогда из (5)

$$d=\frac{x}{2b}\cdot\sqrt{3b^2-a^2}=\frac{x}{2\sqrt{2}a}\sqrt{6a^2-a^2}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}x,$$

или $x=\frac{2\sqrt{10}}{5}d$. Значит, плоскость пересечет ребро AB в точке P такой, что $AP=\frac{2\sqrt{10}}{5}d$.

По формуле (4) теперь находим:

$$S=\frac{b}{a}(ax-x^2)=\sqrt{2}\left(\frac{2\sqrt{10}}{5}ad-\frac{8}{5}d^2\right)=\frac{4}{\sqrt{5}}ad-\frac{8\sqrt{2}}{5}d^2.$$

Ответ: $S=\frac{4}{\sqrt{5}}ad-\frac{8\sqrt{2}}{5}d^2.$

Ответы к вариантам 2—6.

Вариант 2. 1. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;\quad x=\pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi k,\quad k\in Z.$ 2.Н. $y_{\min}=y\left(\frac{1}{6}\right)=-\frac{2}{3}\sqrt{e}.$ 3.Н. $\arccos\frac{5}{6}.$ 4. $x=0.$ 5.Н. $\frac{\sqrt{3}a}{8b}\sqrt{4b^2-3a^2}.$ 6. $\frac{m^2}{n}.$ 2.С. 5%. 3.С. $x>1,\ -3<x<0.$ 5.С. $\frac{4\sqrt{3}}{9}d(3a-4d).$

Вариант 3. 1. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;\quad x=(-1)^k\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)+\pi k,\ k\in Z.$ 2.Н. $y_{\min}=y\left(\frac{1}{3}\right)=\sqrt{\frac{2}{3}}.$ 3.Н. $2x-2y-z+9=0.$ 4. $x=3.$ 5.Н. $\frac{a}{4b}\sqrt{3b^2-a^2}.$ 6. $\sqrt{ab}.$ 2.С. 7 кг. 3.С. $x<-3,\ -\frac{4}{7}<x<2.$ 5.С. $\frac{3}{2}d(a\sqrt{2}-d\sqrt{3}).$

Вариант 4. 1. $x=\pi n,\quad n\in Z;\quad x=(-1)^k\arcsin\frac{1}{3}+\pi k,\quad k\in Z.$ 2. Н. $y_{\max}=y\left(\frac{1}{5}\right)=1+\frac{2}{5e}.$ 3.Н. $\arccos\frac{5}{14}.$ 4. $x=0.$ 5.Н. $\frac{\sqrt{3}n}{8m}\sqrt{4m^2-3n^2}.$ 6. $\frac{m^2}{n}.$ 2.С. 53%. 3.С. $x<-3,\ \frac{1}{2}<x<\frac{3}{5}.$ 5.С. $\frac{8}{15}d(m\sqrt{15}-d4\sqrt{2}).$

Вариант 5. 1. $x=\pi n,\quad n\in Z;\quad x=\pm\arccos\frac{1}{5}+2\pi k,\quad k\in Z.$ 2.Н. $y_{\min}=y\left(\frac{3}{4}\right)=\sqrt{\frac{15}{8}}.$ 3.Н. $x-y+4z+11=0.$ 4. $x=1.$ 5.Н. $\frac{n}{4m}\sqrt{3m^2-n^2}.$ 6. $\sqrt{ab}.$ 2.С. 190. 3.С. $x<-2,\ -\frac{1}{2}<x<2.$ 5.С. $\frac{8d}{11}(m\sqrt{11}-4d).$

Вариант 6. 1. $x=\pi n,\quad n\in Z;\quad x=(-1)^k\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)+\pi k,$ $k\in Z.$ 2.Н. $y_{\min}=y\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{3}{2e}.$ 3.Н. $\arccos\frac{5}{11}.$ 4. $x=0.$ 5.Н. $\frac{\sqrt{3}n}{8m}\sqrt{4m^2-3n^2}.$ 6. $\frac{m^2}{n}.$ 2.С. 90%. 3.С. $-5<x<-\frac{7}{8},\ x>\frac{1}{2}.$ 5.С. $\frac{12d}{11}(\sqrt{11}m-4d).$

Решение варианта 1.

1. Воспользовавшись формулой для косинуса половинного угла, данное уравнение можно преобразовать к виду

$$\cos\frac{x}{2}=2\cos^2\frac{x}{2},$$

или

$$\cos\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{2}-1\right)=0.$$

Отсюда следует, что исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\cos\frac{x}{2}=0,\quad \cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}.$$

Решая их, находим следующие серии решений: $x=\pi(2n+1)$, $n\in Z$, $x=\frac{2\pi}{3}+4\pi k$, $k\in Z$, $x=-\frac{2\pi}{3}+4\pi m$, $m\in Z$.

Ответ: $x=\pi(2n+1)$, $n\in Z$; $x=\frac{2\pi}{3}+4\pi k$, $k\in Z$; $x=-\frac{2\pi}{3}+4\pi m$, $m\in Z$.

2.Н. Воспользуемся координатным представлением скалярного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, а также формулой $(\vec{a}, \vec{b})=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$. Имеем $(\vec{a}, \vec{b})=6\cdot5+(-2)\cdot0+(-3)\cdot0=30$, $|\vec{a}|=\sqrt{6^2+(-2^2)+(-3)^2}=7$, $|\vec{b}|=5$. Таким образом, $30=7\cdot5\cdot\cos\varphi$, откуда $\cos\varphi=\frac{6}{7}$. Поскольку величина угла между двумя векторами принадлежит отрезку $[0, \pi]$, то находим, что $\varphi=\arccos\frac{6}{7}$.

Ответ: $\arccos\frac{6}{7}$.

3. Прологарифмируем первое уравнение системы по основанию 3. Тогда исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} x+y\log_3 2=-2, \\ y-x=2. \end{cases}\tag{1}$$

Заменив первое уравнение суммой первого и второго уравнений, получим систему

$$\begin{cases} y(1+\log_3 2)=0, \\ y-x=2, \end{cases}\tag{2}$$

равносильную системе (1). Поскольку $1+\log_3 2=\log_3 6\neq 0$, то очевидно, что система (2) имеет единственное решение: $x_1=-2$, $y_1=0$. Так как система (2) равносильна исходной системе, то исходная система также имеет единственное решение: $x_1=-2$, $y_1=0$.

Ответ: $x=-2$, $y=0$.

4.Н. Найдем точки, в которых касательные к графику функции $y(x)=\frac{x+1}{x-3}$ образуют угол $3\pi/4$ с осью Ox. Их абсциссы являются корнями уравнения $y'(x)=\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$. По формуле для производной отношения двух функций $y'(x)=-\frac{4}{(x-3)^2}$. Так как $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}=-1$, то получаем уравнение $-\frac{4}{(x-3)^2}=-1$, которое имеет два корня: $x_1=5$ и $x_2=1$. Ординаты точек касания находим из условия, что они принадлежат графику функции $y(x)=\frac{x+1}{x-3}$, т. е. $y_1=y(x_1)=\frac{5+1}{5-3}=3$, $y_2=y(x_2)=$ $=\frac{1+1}{1-3}=-1$. Теперь можно написать уравнения касательных: $y-3=$ $=-1\cdot(x-5)$ и $y+1=-1\cdot(x-1)$, или $y=-x+8$ и $y=-x$. Поскольку ось Ox имеет уравнение $y=0$, то координаты точек пересечения ее с первой и второй прямыми удовлетворяют соответственно системам уравнений

$$\begin{cases} y=-x+8, \\ y=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-x, \\ y=0. \end{cases}$$

Значит, первая прямая пересекает ось Ox в точке с координатами (8, 0), вторая — в точке с координатами (0, 0).

Ответ: (8, 0), (0, 0).

5. Обозначим $|AM|$ через x и $|AN|$ через y. Применим к треугольнику AMN (рис. 46) теорему косинусов. Тогда $4a^2=x^2+y^2-2xy\cos\alpha$. Обозначим через O центр окружности и через E, F, G — точки касания окружности со сторонами BC, AB, AD соответственно. Так как радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной, то $OE\perp BC$, $OG\perp AD$. Но $AD\parallel BC$, следовательно, $OG\perp BC$. Из точки O можно провести только один перпендикуляр к прямой BC. Значит, прямые OE и OG совпадают, т. е. точки E, O, G лежат на одной прямой. Прямые EG и AD перпендикулярны, поэтому

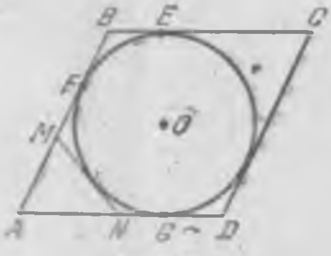


Рис. 46.

$|EG|=|AB|\sin\alpha=l\sin\alpha$ и $|OE|=|OF|=|OG|=\frac{1}{2}\cdot l\cdot\sin\alpha$. Точка O лежит на биссектрисе угла BAD, поэтому

$$|AG|=|AF|=\frac{|OF|}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{l\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=l\cos^2\frac{\alpha}{2}=l\cdot\frac{1+\cos\alpha}{2}.$$

Отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равновелики, следовательно,

$2a=|MN|=|MF|+|NG|=|AF|-x+|AG|-y=l(1+\cos\alpha)-x-y.$

Итак, получаем, что x и y удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2-2xy\cos\alpha=4a^2, \\ x+y=l(1+\cos\alpha)-2a. \end{cases}$$

Перепишем первое уравнение этой системы в виде

$$(x+y)^2-2xy(1+\cos\alpha)=4a^2.$$

Подставляя в него $l(1+\cos\alpha)-2a$ вместо $x+y$, получим уравнение

$$-2xy(1+\cos\alpha)=-l^2(1+\cos\alpha)^2+4al(1+\cos\alpha).$$

Поскольку $\alpha\neq\pi$, то правую и левую части этого уравнения можно еще разделить на $1+\cos\alpha$. Получим, что x и y удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x+y=l(1+\cos\alpha)-2a, \\ xy=\frac{1}{2}l^2(1+\cos\alpha)-2al. \end{cases}$$

Это означает, что они являются корнями квадратного уравнения

$$t^2+(2a-l(1+\cos\alpha))t+\frac{1}{2}l^2(1+\cos\alpha)-2al=0.$$

Решая его, находим:

$$t_{1,2}=\frac{l(1+\cos\alpha)-2a\pm\sqrt{4a^2+4al(1-\cos\alpha)-l^2\sin^2\alpha}}{2}.$$

Поскольку длины искомых отрезков BM и ND равны $l-x$ и $l-y$, то получаем ответ задачи.

Заметим, что приведенное решение задачи годится для любых значений α из промежутка $0<\alpha<\pi$. Кроме того, условия задачи не позволяют, вообще говоря, однозначно определить величину отрезка MB. Можно только утверждать, что один из искомых отрезков равен найденному выражению со знаком «плюс» перед корнем, а второй — выражению со знаком «минус» перед корнем.

Ответ: $|MB|=d_1$, $|ND|=d_2$; $|MB|=d_2$, $|ND|=d_1$, где

$$d_1=\frac{l(1-\cos\alpha)+2a+\sqrt{4a^2+4al(1-\cos\alpha)-l^2\sin^2\alpha}}{2},$$

$$d_2=\frac{l(1-\cos\alpha)+2a-\sqrt{4a^2+4al(1-\cos\alpha)-l^2\sin^2\alpha}}{2}.$$

6. Обозначим через A_1, C_1 точки касания шара с прямыми, проведенными через A и C соответственно. Пусть A_2 и C_2 — ортогональные проекции точек A_1 и C_1 на плоскость P (рис. 47). Поскольку отрезки касательных к шару, проведенных из одной точки, равновелики, то $|AA_1|=|AB|=l$, $|CC_1|=|CB|=l$. Из прямоугольных треугольников CC_1C_2 и AA_1A_2 находим: $|A_1A_2|=l\sin\alpha$, $|C_1C_2|=l\sin\alpha$. Отсюда следует, что $|A_1A_2|=|C_1C_2|$. Поскольку $A_1A_2\perp P$, $C_1C_2\perp P$, то $A_1A_2\parallel C_1C_2$ и, значит, $A_1A_2C_2C_1$ — параллелограмм и, более того, — прямоугольник, так как $C_1C_2\perp A_2C_2$. Из тех же прямоугольных треугольников $|AA_2|=l\cos\alpha$, $|CC_2|=l\cos\alpha$. Обозначим через O центр шара. Так как прямые A_1A_2 и OB перпендикулярны плоскости P (OB — радиус, проведенный в точку касания), то $A_1A_2\parallel OB$ и, значит, точки A_1, A_2, O, B лежат в одной плоскости. Вынесем на чертеж отдельно сечение этой плоскостью шара и плоскости P (рис. 48). Если D —

основание перпендикуляра, опущенного из точки A_1 на прямую OB, то

$$|A_2B| = |A_1D| = \sqrt{|A_1O|^2 - |OD|^2} = \sqrt{r^2 - (|OB| - |A_1A_2|)^2} =$$
$$= \sqrt{r^2 - (r - l\sin\alpha)^2} = \sqrt{2rl\sin\alpha - l^2\sin^2\alpha}.$$

Совершенно аналогично доказывается, что $|C_2B| = \sqrt{2rl\sin\alpha - l^2\sin^2\alpha}$. Значит, точки A_2 и C_2 лежат на окружности радиуса $\sqrt{2rl\sin\alpha - l^2\sin^2\alpha}$ с центром в точке B.

Как доказано выше, точка A_2 кроме того лежит на окружности радиуса $l\cos\alpha$ с центром в точке A, и точка C_2 лежит на окружности радиуса $l\cos\alpha$ с центром в точке C. Эти три окружности будем в дальнейшем обозначать: окружность B, окружность A и окружность C в соответствии с названиями их центров.

Поскольку треугольник ABC равнобедренный, то его высота BE, проведенная из вершины B, будет перпендикуляром к отрезку AC, проведенным через его середину. Окружность B симметрична относительно прямой BE, окружности A и C при этой же симметрии переходят друг в друга. Отсюда следует, что точки пересечения окружностей B и A симметричны точкам пересечения окружностей B и C относительно прямой BE.

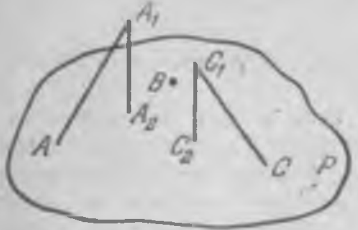


Рис. 47.

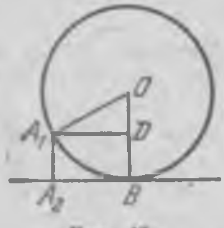


Рис. 48.

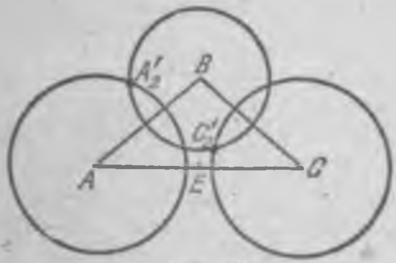


Рис. 49.

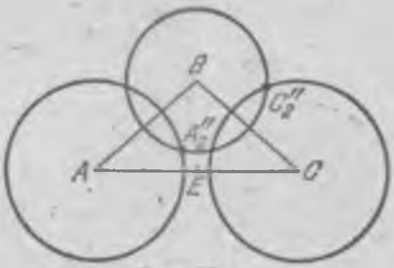


Рис. 50.

Предположим, что точки A_2 и C_2 симметричны относительно прямой BE. Тогда $A_2C_2 \perp BE$ и, значит, $A_2C_2 \parallel AC$. Поскольку $A_1A_2C_2C_1$ — прямоугольник, то $A_1C_1 \parallel A_2C_2$. Отсюда следует, что $A_1C_1 \parallel AC$. Но тогда прямые AA_1 и CC_1 лежат в одной плоскости, что противоречит условию задачи.

Итак, точки A_2 и C_2 не симметричны относительно прямой BE. На рис. 49 и 50 изображены возможные два случая расположения точек A_2, C_2. При этом положения точек A_2 и C_2 обозначены соответственно A_2', A_2'' и C_2', C_2''.

Докажем, что расстояния между прямыми AA_1 и CC_1 в этих двух случаях одинаковы. Плоскость OBE перпендикулярна плоскости P. Из доказанного выше следует, что точки A и C, A_2' и C_2'', A_2'' и C_2' симметричны относительно плоскости OBE. Обозначим через A_1', A_1'', C_1', C_1'' точки, соответствующие A_1, C_1 в случаях, изображенных на рис. 49 и 50. Поскольку $A_1'A_2' \parallel OBE$, $C_2''C_1'' \parallel A_1'A_2'$, $|A_1'A_2'| = |C_2''C_1''|$ и точки A_2', C_2'' симметричны относительно плоскости OBE, то точки A_1' и C_1'' также симметричны относительно плоскости OBE. Аналогично точки A_1'' и C_1' симметричны относительно этой же плоскости. Этим доказано, что прямые AA_1' и CC_1'', AA_1'' и CC_1' симметричны относительно плоскости OBE. Но тогда расстояние между AA_1' и CC_1' равно расстоянию между прямыми CC_1'' и AA_1''. В дальнейшем для определенности будем считать, что точки A_2, C_2 расположены так же, как точки A_2', C_2' (рис. 49).

Проведем через точку A прямую, параллельную прямой CC_1. Отложим на ней точку F так, чтобы отрезки AF и CC_1 были сонаправлены и равновелики (рис. 51). Плоскость AA_1F параллельна прямой CC_1 (по признаку параллельности прямой и плоскости, так как $CC_1 \parallel AF$). Поэтому расстояние между прямыми AA_1 и CC_1 будет равно расстоянию между прямой CC_1 и плоскостью AA_1F или расстоянию между точкой C_1 и плоскостью AA_1F. Обозначим это расстояние через h_{C_1}. Если h_A — расстояние от точки A до плоскости FA_1C_1, то для $V_{AA_1C_1F}$ — объема пирамиды AA_1C_1F — имеем два выражения:

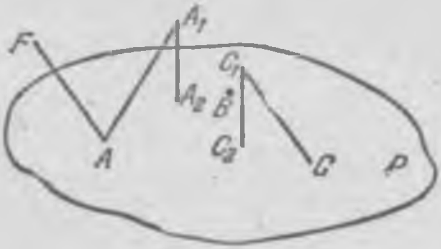


Рис. 51.

$$V_{AA_1C_1F} = \frac{1}{3} h_{C_1} \cdot S_{AA_1F} = \frac{1}{3} h_A S_{FA_1C_1},$$

где S_{AA_1F}, $S_{FA_1C_1}$ — площади соответствующих треугольников. Из последнего равенства получаем

$$h_{C_1} = h_A \cdot \frac{S_{FA_1C_1}}{S_{AA_1F}}. \tag{1}$$

Остается найти h_A, $S_{FA_1C_1}$ и S_{AA_1F}. Четырехугольник ACC_1F — параллелограмм ($|AF| = |CC_1|$, и $AF \parallel CC_1$). Следовательно, $CA \parallel C_1F$. Ранее было доказано, что $A_2C_2 \parallel A_1C_1$. По признаку параллельности двух плоскостей (ранее было доказано, что прямые AC и A_2C_2 не параллельны) заключаем, что плоскости ABC и FA_1C_1 параллельны. Но тогда

$$h_A = |A_1A_2| = l \sin\alpha. \tag{2}$$

Теперь найдем площадь треугольника FAA_1. Поскольку треугольник FAA_1

равнобедренный, то

$$S_{FAA_1}=\frac{1}{2}|FA_1|\cdot\sqrt{|AA_1|^2-1/4|FA_1|^2}.$$

Обозначим через G проекцию точки F на плоскость ABC. Так как $FG \parallel A_1A_2$ и $|FG|=|A_1A_2|$, т. е. так как FGA_2A_1 — параллелограмм, то $|FA_1|=|GA_2|$. Плоскости AFG и CC_1C_2 — параллельны ($AF \parallel CC_1$, $FG \parallel C_1C_2$). Плоскость ABC пересекает их по прямым AG и CC_2. Значит, $AG \parallel CC_2$ (рис. 52). В треугольниках AA_2B и CC_2B соответствующие стороны равновелики. Значит,

$$\widehat{A_2AB}=\widehat{C_2CB},\quad \widehat{A_2BA}=\widehat{C_2BC}. \qquad (3)$$

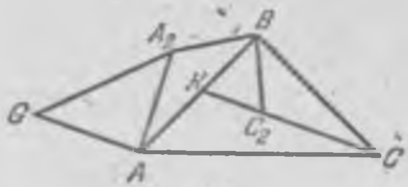


Рис. 52.

Обозначим через K точку пересечения прямых CC_2 и AB. Тогда

$$\widehat{GAA_2}+\widehat{A_2AB}=\widehat{GAB}=\widehat{AKC}. \qquad (4)$$

Последнее равенство следует из того, что $AG \parallel CC_2$. Далее, так как угол AKC есть внешний угол треугольника KBC, то

$$\widehat{AKC}=\widehat{ABC}+\widehat{C_2CB}. \qquad (5)$$

Из равенств (4) и (5) следует, что $\widehat{GAA_2}=\widehat{ABC}$. Но тогда

$$|GA_2|=2|AA_2|\sin\left(\frac{1}{2}\widehat{GAA_2}\right)=2|AA_2|\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{|AC|}{|AB|}=$$

$$=l\cos\alpha\cdot\frac{2a}{l}=2a\cos\alpha,$$

и

$$S_{AA_1F}=a\cos\alpha\sqrt{l^2-a^2\cos^2\alpha}. \qquad (6)$$

Для того, чтобы найти $S_{FA_1C_1}$, заметим, что в треугольниках FA_1C_1 и GA_2C_2 соответствующие стороны равновелики. Значит, $S_{FA_1C_1}=S_{GA_2C_2}$. Пользуясь вторым из равенств (3), имеем

$$\widehat{A_2BC_2}=\widehat{A_2BA}+\widehat{ABC_2}=\widehat{C_2BC}+\widehat{ABC_2}=\widehat{ABC}. \qquad (7)$$

Поскольку треугольники A_2BC_2 и ABC равнобедренные, то из равенства (7) следует, что они подобны. Поэтому

$$\frac{|A_2C_2|}{|AC|}=\frac{|A_2B|}{|AB|}.$$

Таким образом,

$$|A_2C_2|=\frac{|AC|\,|A_2B|}{|AB|}=\frac{2a}{l}\sqrt{2rl\sin\alpha-l^2\sin^2\alpha}.$$

Обозначим через h высоту треугольника GA_2C_2, опущенную из вершины A_2. Тогда

$$\sqrt{|GA_2|^2-h^2}+\sqrt{|A_2C_2|^2-h^2}=|GC_2|,$$

или

$$\sqrt{4a^2\cos^2\alpha-h^2}+\sqrt{\frac{8a^2r}{l}\sin\alpha-4a^2\sin^2\alpha-h^2}=2a.$$

Перепишем полученное уравнение так:

$$\sqrt{\frac{8a^2r}{l}\sin\alpha-4a^2\sin^2\alpha-h^2}=2a-\sqrt{4a^2\cos^2\alpha-h^2}. \qquad (8)$$

Возведя обе части уравнения (8) в квадрат, после преобразований получим

$$h=\frac{2a}{l}\sqrt{2rl\sin\alpha-(r^2+l^2)\sin^2\alpha}.$$

Это дает:

$$S_{OA_1C_1}=\frac{1}{2}\,|GC_1|\cdot h=\frac{2a^2}{l}\sqrt{2rl\sin\alpha-(r^2+l^2)\sin^2\alpha}. \qquad (9)$$

Из равенств (1), (2), (6) и (9) находим:

$$h_{C_1}=l\sin\alpha\,\frac{2a^2\sqrt{2rl\sin\alpha-(r^2+l^2)\sin^2\alpha}}{la\cos\alpha\sqrt{l^2-a^2\cos^2\alpha}}=$$

$$=\frac{2a\operatorname{tg}\alpha\sqrt{2rl\sin\alpha-(r^2+l^2)\sin^2\alpha}}{\sqrt{l^2-a^2\cos^2\alpha}}.$$

Ответ: $\dfrac{2a\operatorname{tg}\alpha\sqrt{2rl\sin\alpha-(r^2+l^2)\sin^2\alpha}}{\sqrt{l^2-a^2\cos^2\alpha}}$.

2.С. Обозначим первый член данной прогрессии через a_1 и разность ее через d. Тогда седьмой член a_7 прогрессии равен a_1+6d, так что

$$a_1+6d=21. \qquad (10)$$

Сумма первых семи членов арифметической прогрессии равна $\frac{a_1+a_7}{2}\cdot 7$, поэтому

$$\frac{a_1+21}{2}\cdot 7=105. \qquad (11)$$

Из равенства (11) $a_1=9$, затем из равенства (10) находим, что $d=2$.

Ответ: первый член прогрессии равен 9, разность равна 2.

4.С. Корни квадратного трехчлена x^2+x-2 равны $x_1=-2$, $x_2=1$. Поэтому область допустимых значений данного неравенства является объединением двух множеств: $x\leqslant-2$ и $x\geqslant 1$.

Для x из множества $x\leqslant-2$ левая часть неравенства неотрицательна, а правая отрицательна. Значит, все x из множества $x\leqslant-2$ являются решениями данного неравенства.

Обе части данного неравенства определены и неотрицательны на множестве $x\geqslant 1$. Значит, на множестве $x\geqslant 1$ это неравенство равносильно такому:

$$x^2+x-2 > x^2.$$

Решения последнего неравенства есть $x > 2$. Все они принадлежат множеству $x \geqslant 1$ и, значит, являются решениями данного неравенства.

Следовательно, искомое множество решений является объединением множеств $x \leqslant -2$ и $x > 2$.

Ответ: $x \leqslant -2$, $x > 2$.

Ответы к вариантам 2—6.

Вариант 2. 1. $x=4\pi n$, $n \in Z$; $x=(-1)^m \cdot \frac{2\pi}{3}+4\pi m$, $m \in Z$. 2.Н. $\arccos\left(-\frac{4}{\sqrt{45}}\right)$. 3. $x=-2$, $y=3$. 4.Н. $(0, 47)$; $(0, 11)$; $\left(-\frac{47}{9}, 0\right)$; $\left(-\frac{11}{9}, 0\right)$. 5. $|PQ|=l\cos^2\frac{\beta}{2}-\frac{2S}{l\sin\beta}$. 6. $\frac{2b \operatorname{tg}\beta\sqrt{r^2-m^2\sin^2\beta}}{\sqrt{m^2-b^2\cos^2\beta}}$. 2.С. $q=8$; $S_8=14043$. 4.С. $x \leqslant -4$, $x > 0$.

Вариант 3. 1. $x=12\pi m$, $m \in Z$; $x=3\pi+6\pi n$, $n \in Z$. 2.Н. $\arccos\frac{3}{7}$. 3. $x=-1$, $y=2$. 4.Н. $(0, 21)$; $(0, 1)$. 5. $\left(\frac{2r}{\sin\gamma}-m\right)\left(r-\frac{r^2}{m}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)$. 6. $\frac{2d\operatorname{tg}\gamma\sqrt{2rn\sin\gamma-(r^2+n^2)\sin^2\gamma}}{\sqrt{n^2-d^2\cos^2\gamma}}$. 2.С. $a_1=7$; $a_{10}=61$. 4.С. $x \leqslant -1$, $x > 3$.

Вариант 4. 1. $x=2\pi n$, $n \in Z$; $x=\pi+4\pi m$, $m \in Z$. 2.Н. $\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{14}}\right)$. 3. $x=-1$, $y=2$. 4.Н. $(0-2)$; $(0, 14)$; $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$; $\left(-\frac{7}{2}, 0\right)$. 5. $|PS|=d_1$, $|RT|=d_2$; $|PS|=d_2$, $|RT|=d_1$, где $d_1=b+\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+\sqrt{b^2+2br\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-r^2}$, $d_2=b+\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-\sqrt{b^2+2br\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-r^2}$. 6. $\frac{2b\operatorname{tg}\beta\sqrt{r^2-l^2\sin^2\beta}}{\sqrt{l^2-b^2\cos^2\beta}}$. 2.С. $a_1=27$; $a_6=1/9$. 4.С. $x \leqslant -3$, $x > 3/2$.

Вариант 5. 1. $x=2\pi+4\pi n$, $n \in Z$; $x=2\pi m$, $m \in Z$. 2.Н. $\arccos\frac{2}{7}$. 3. $x=1$, $y=-1$. 4.Н. $(0, 0)$; $(0, 12)$. 5. $|AD|=r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\frac{S}{r}$. 6. $\frac{2a\operatorname{tg}\alpha\sqrt{2rm\sin\alpha-(r^2+m^2)\sin^2\alpha}}{\sqrt{m^2-a^2\cos^2\alpha}}$. 2.С. $a_{14}=140$, $d=10$. 4.С. $x \leqslant -2$, $x > 10/3$.

Вариант 6. 1. $x=6\pi n$, $n \in Z$; $x=3\pi+12\pi m$, $m \in Z$. 2.Н. $\arccos(-2/\sqrt{45})$. 3. $x=-1$, $y=2$. 4.Н. $(0,128)$; $(0,288)$; $(-128/25, 0)$. 5. $S=\frac{1}{2}l(l-n)\sin\beta \times \left(1+\frac{l}{2n}\sin\beta\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)$. 6. $\frac{2d\operatorname{tg}\gamma\sqrt{r^2-n^2\sin^2\gamma}}{\sqrt{n^2-d^2\cos^2\gamma}}$. 2.С. $a_1=5$; $a_7=320$. 4.С. $x \leqslant -4$, $x > 9/4$.

§ 4. ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

1977

Решение варианта 1.

1. Обозначим через S км расстояние между пунктами A и B; пусть x км/ч — скорость мотоциклиста, а y км/ч — скорость велосипедиста.

Путь $\frac{2}{3}S$ км мотоциклист проехал за $\frac{2}{3}\cdot\frac{S}{x}$ часов, а путь $\frac{1}{3}S$ км велосипедист проехал за $\frac{1}{3}\cdot\frac{S}{y}$ часов. Почта из A в B была доставлена за $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{S}{x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{S}{y}\right)$ часов, и это время по условию задачи должно равняться $S/40$ часов. Поэтому имеем первое уравнение

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{S}{x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{S}{y}=\frac{S}{40}.$$

Если бы мотоциклист и велосипедист выехали навстречу друг другу, то они встретились бы через $\frac{S}{x+y}$ часов, и это время по условию задачи должно равняться $S/100$ часам. Поэтому имеем второе уравнение

$$\frac{S}{100}=\frac{S}{x+y}.$$

Для нахождения x и y получили после деления правой и левой частей каждого из уравнений на S ($S\neq 0$) систему

$$\begin{cases}\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{40},\\ \frac{1}{100}=\frac{1}{x+y}.\end{cases}$$

Из второго уравнения $y=100-x$. Подставляя $100-x$ вместо y в первое уравнение системы, получим уравнение

$$\frac{2}{3x}+\frac{1}{3(100-x)}=\frac{1}{40},$$

которое имеет корни

$$x_1=80,\quad x_2=100/3.$$

Значит, система имеет два решения:

$$x_1=80,\quad y_1=20;\qquad x_2=100/3,\quad y_2=200/3.$$

Так как по условию задачи скорость мотоциклиста больше скорости велосипедиста, то условию задачи удовлетворяет только одно решение системы, а именно: $x_1=80$, $y_1=20$. Следовательно, скорость мотоциклиста равна 80 км/ч.

Ответ: 80 км/ч.

2.Н. Поскольку $x^2-2x+2=(x-1)^2+1$ и $x^2+4x+5=(x+2)^2+1$, то графики функций $y=x^2-2x+2$ и $y=x^2+4x+5$ являются параболами, ветви которых направлены вверх, а вершины находятся соответственно в точках $A(1, 1)$ и $B(-2, 1)$ (рис. 53). Из системы уравнений

$$\begin{cases} y=x^2-2x+2, \\ y=x^2+4x+5 \end{cases}$$

находим координаты точки C — точки пересечения этих парабол:

$$x_C=-\frac{1}{2}, \quad y_C=4\frac{1}{4}.$$

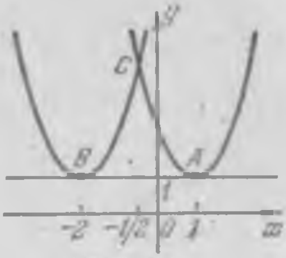


Рис. 53.

Искомая фигура BCA состоит из двух частей:

а) из фигуры, лежащей под кривой $y=x^2+4x+5$ и над прямой $y=1$ на промежутке от -2 до $-1/2$;

б) из фигуры, лежащей под кривой $y=x^2-2x+2$ и над прямой $y=1$ на промежутке от $-1/2$ до 1.

Площадь первой фигуры вычисляется так:

$$S_1=\int_{-2}^{-1/2}(x^2+4x+5-1)\,dx=\int_{-2}^{-1/2}(x+2)^2\,dx=\left.\frac{(x+2)^3}{3}\right|_{-2}^{-1/2}=\frac{9}{8}.$$

Площадь второй фигуры вычисляется так:

$$S_2=\int_{-1/2}^{1}(x^2-2x+2-1)\,dx=\int_{-1/2}^{1}(x-1)^2\,dx=$$

$$=\left.\frac{(x-1)^3}{3}\right|_{-1/2}^{1}=0-\left(-\frac{9}{8}\right)=\frac{9}{8}.$$

Так как искомая площадь $S=S_1+S_2$, то $S=\frac{9}{8}+\frac{9}{8}=2\frac{1}{4}$.

Ответ: $2\frac{1}{4}$.

3. Исходное неравенство равносильно двойному неравенству $0<6^{x+1}-36^x\leqslant\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-2}$, или, что одно и то же, системе неравенств

$$\begin{cases} 6^{x+1}-36^x>0, \\ 6^{x+1}-36^x\leqslant\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-2}. \end{cases} \quad (1)$$

Обозначив 6^x через y, эту систему можно переписать так:

$$\begin{cases} 6y-y^2>0, \\ 6y-y^2\leqslant 5. \end{cases} \quad (2)$$

Множество решений первого неравенства есть промежуток $0<y<6$. Множество решений второго неравенства состоит из двух промежутков: $y\leqslant 1$ и $y\geqslant 5$. Таким образом, решениями системы (2) являются все y из областей $0 < y \leqslant 1$ и $5 \leqslant y < 6$. Значит, система (1) равносильна совокупности двух двойных неравенств

$$0 < 6^x \leqslant 1, \quad 5 \leqslant 6^x < 6,$$

или, что одно и то же, совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} 6^x > 0, \\ 6^x \leqslant 1, \end{cases} \quad \begin{cases} 6^x \geqslant 5, \\ 6^x < 6. \end{cases}$$

Множество решений первой системы есть промежуток $-\infty < x \leqslant 0$, множество решений второй — промежуток $\log_6 5 \leqslant x < 1$. Значит, множество решений исходной системы состоит из двух промежутков: $-\infty < x \leqslant 0$, $\log_6 5 \leqslant x < 1$.

Ответ: $x \leqslant 0$, $\log_6 5 \leqslant x < 1$.

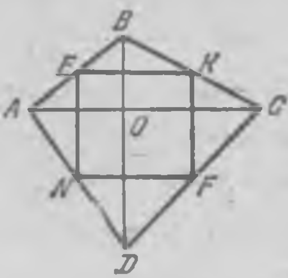


Рис. 54.

4. Пусть $ABCD$ — данный в условии задачи четырехугольник (рис. 54). Обозначим через E, K, F, N середины сторон AB, BC, CD и AD соответственно. Тогда EN — средняя линия треугольника ABD и, значит, $EN \parallel BD$. Аналогично доказывается, что $KF \parallel BD$, $EK \parallel AC$ и $NF \parallel AC$. Это означает, что $EN \parallel KF$ и $EK \parallel NF$, т. е. четырехугольник $NEKF$ — параллелограмм. По свойству параллелограмма $|EK| = |NF|$, $|EN| = |KF|$, и по условию $|EF| = |NK|$. Отсюда следует, что $\widehat{EKF} = \widehat{KFN}$; значит, четырехугольник $NEKF$ — прямоугольник. Ранее доказано, что $EN \parallel BD$ и $EK \parallel AC$, поэтому $BD \perp AC$.

Если O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, то площади треугольников ABC и ADC равны соответственно $\frac{1}{2}|AC| \cdot |BO|$ и $\frac{1}{2}|AC| \cdot |OD|$. Площадь S четырехугольника $ABCD$ равна сумме площадей треугольников ABC и ADC, т. е.

$$S = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BO| + \frac{1}{2}|AC| \cdot |OD| = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD| = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1.$$

Ответ: 1 м².

5. Воспользовавшись тем, что $2\cos^2 3x = 1 + \cos 6x$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x = \cos(2x + \pi/6)$, перепишем данное уравнение в виде

$$2 - 2\cos(2x + \pi/6) = 2 + 2\cos 6x. \tag{3}$$

Уравнение (3) равносильно такому:

$$\cos 6x + \cos(2x + \pi/6) = 0,$$

или уравнению

$$2\cos\left(4x + \frac{\pi}{12}\right) \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) = 0.$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\cos\left(4x+\frac{\pi}{12}\right)=0 \quad и \quad \cos\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)=0.$$

Эти уравнения имеют решения соответственно $x=\frac{5\pi}{48}+\frac{\pi k}{4}$, $k\in Z$, и $x=\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. Найденные серии решений составляют множество решений исходного уравнения.

Теперь выберем из них те, которые удовлетворяют условию $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)>0$. Пусть $x=\frac{5\pi}{48}+\frac{\pi k}{4}$, тогда $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=$ $=\cos\left(\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}\right)$. Легко видеть, что условию задачи удовлетворяют следующие подмножества первой серии решений исходного уравнения, получающиеся при $k=4m$ и $k=4m+1$: $x=\frac{5\pi}{48}+$ $+\frac{4\pi m}{4}=\frac{5\pi}{48}+\pi m$, $m\in Z$; $x=\frac{5\pi}{48}+\frac{\pi(4m+1)}{4}=\frac{17\pi}{48}+\pi m$, $m\in Z$. Пусть $x=\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}$, тогда $\cos(2x-\frac{\pi}{4})=\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\pi n-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\pi n\right)=$ $=\cos\frac{\pi}{3}\cos\pi n-\sin\frac{\pi}{3}\sin\pi n=(-1)^n\cdot\frac{1}{2}$. Условию задачи удовлетворяют решения, соответствующие четным значениям n, т. е., полагая $n=2l$, получим, что условию задачи удовлетворяет следующее подмножество второй серии решений исходного уравнения: $x=\frac{7\pi}{24}+\pi l$, $l\in Z$. Значит, ответ к задаче дают следующие три серии решений: $x=\frac{5\pi}{48}+\pi m$, $m\in Z$; $x=\frac{17\pi}{48}+\pi n$, $n\in Z$; $x=\frac{7\pi}{24}+\pi l$, $l\in Z$.

Ответ: $x=\frac{5\pi}{48}+\pi m$, $m\in Z$; $x=\frac{17\pi}{48}+\pi n$, $n\in Z$; $x=\frac{7\pi}{24}+\pi l$, $l\in Z$.

2.С. Возведя обе части каждого из уравнений данной системы в квадрат, получим систему

$$\begin{cases} x+y-1=1, \\ x-y+2=4y^2-8y+4. \end{cases} \tag{4}$$

Все решения исходной системы являются решениями системы (4), но не обязательно все решения системы (4) будут решениями исходной системы, поэтому после нахождения решений системы (4) из них надо отобрать те, которые будут решениями исходной системы.

Из первого уравнения системы (4) $x=2-y$. Подставим $2-y$ вместо x во второе уравнение. Получим квадратное уравнение

$$2y^2-3y=0,$$

корни которого $y_1=0$, $y_2=3/2$. Значит, система (4) имеет два решения:

$$x_1=2,\quad y_1=0;\qquad x_2=1/2,\quad y_2=3/2.$$

Непосредственная проверка показывает, что единственным решением исходной системы является пара чисел $x_2=1/2$, $y_2=3/2$.

Ответ: $x=1/2$, $y=3/2$.

Ответы к вариантам 2—4.

Вариант 2. 1. 6 дней. 2.Н. 9/4. 3. $x<\log_5 2$, $\log_5 3<x<1$. 4. 1 м. 5. $\frac{3\pi}{4}+\frac{4}{3}\pi l$, $l\in Z$; $\frac{13}{12}\pi+\frac{4}{3}\pi m$, $m\in Z$; $\frac{-7\pi}{18}+\frac{4}{3}\pi k$; $k\in Z$. 2.С. $x=0$, $y=1$.

Вариант 3. 1. 48 км/ч. 2.Н. 18. 3. $x<0$, $\log_3 8<x<2$. 4. 1 м. 5. $\frac{2}{3}\pi+4\pi k$, $k\in Z$; $\frac{4\pi}{3}+4\pi m$, $m\in Z$; $\frac{11}{3}\pi+4\pi l$, $l\in Z$. 2.С. $x=5$, $y=1$.

Вариант 4. 1. 10 дней. 2.Н. 9/4. 3. $x<0$, $\log_2 3<x<2$. 4. $\pi/2$. 5. $\pi(4l+1)$, $l\in Z$; $\frac{\pi}{2}+4\pi m$, $m\in Z$; $\frac{3}{2}\pi+4\pi k$, $k\in Z$. 2.С. $x=2$, $y=2$.

1978

Решение варианта 1.

1. Применив формулу сложения синусов, исходное уравнение запишем так:

$$2\sin 4x\cos 2x=3\cos^2 2x,$$

или

$$\cos^2 2x\,(3-4\sin 2x)=0,$$

откуда получаем, что исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\sin 2x=3/4 \text{ и } \cos^2 2x=0.$$

Решения первого уравнения: $x=\frac{(-1)^m}{2}\arcsin\frac{3}{4}+\frac{\pi m}{2}$, $m\in Z$; решения второго уравнения: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$. Их объединение и дает множество решений исходного уравнения.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; $x=\frac{(-1)^m}{2}\arcsin\frac{3}{4}+\frac{\pi m}{2}$, $m\in Z$.

2. Обозначим через x км/ч скорость грузового автомобиля, а через S км — расстояние между пунктами A и B. Расстояние от A до B грузовой автомобиль проехал за $\frac{S}{x}$ часов, а легковой автомобиль — за $\left(\frac{S}{x}-1\right)$ часов. Следовательно, скорость легкового автомобиля равна $\frac{S}{\frac{S}{x}-1}$ км/ч. Если бы автомобили одновременно выехали из пунктов A и B навстречу друг другу, то из условия, что они встретятся через $1\frac{1}{5}$ часа, получаем уравнение

$$1\frac{1}{5}\left(x+\frac{S}{\frac{S}{x}-1}\right)=S.$$

Поскольку $x > 0$, то, поделив это уравнение на x, получим равносильное ему уравнение

$$\frac{6}{5}\left(1+\frac{\frac{S}{x}}{\frac{S}{x}-1}\right)=\frac{S}{x}.$$

Обозначая $\frac{S}{x}$ через t, приходим к уравнению

$$5t^2-17t+6=0,$$

которое имеет корни $t_1=3$ и $t_2=2/5$. Из условия задачи следует, что грузовик провел в пути от A до B больше одного часа, следовательно, условию задачи удовлетворяет только $t_1=3$.

Ответ: 3 часа.

3.Н. Обозначим через x см длину стороны основания параллелепипеда. Так как периметр боковой грани равен 6 см, то высота параллелепипеда равна $\frac{6-2x}{2}=3-x$ см, а его объем равен $x^2(3-x)$ см^3. Задача свелась к тому, чтобы найти точки, в которых функция $V(x)=x^2(3-x)$ принимает наибольшее значение на множестве $0 < x < 3$. Производная функции $V(x)$ равна

$$V'(x)=(3x^2-x^3)'=6x-3x^2=3x(2-x).$$

На интервале $0 < x < 2$ производная $V'(x)$ положительна, значит, $V(x)$ на этом интервале возрастает. На интервале $2 < x < 3$ производная $V'(x)$ отрицательна, следовательно, на этом множестве $V(x)$ убывает. Так как функция $V(x)$ непрерывна в точке $x=2$, то из сказанного выше следует, что она в точке $x=2$ принимает наибольшее значение на множестве $0 < x < 3$.

Итак, наибольший объем имеет параллелепипед, в основании которого лежит квадрат с длиной стороны, равной 2 см. Его объем равен 4 см^3.

Ответ: параллелепипед, сторона основания которого имеет длину 2 см, а боковое ребро имеет длину 1 см; искомый объем равен 4 см^3.

4. Пусть $ABCD$ — трапеция, удовлетворяющая условию задачи (рис. 55). Обозначим через α угол BAE. По условию $\widehat{BAE}=\widehat{EAD}$. Так как $BC \parallel AD$, то $\widehat{AEB}=\widehat{EAD}=\widehat{BAE}$, т. е. треугольник ABE равнобедренный. Это значит, что биссектриса BK угла ABE, на которой лежит центр O вписанной окружности, является также высотой треугольника ABE. Пусть M и H — точки касания окружности со сторонами AB и BC соответственно. Из прямоугольного треугольника ABK находим, что $|AK|=|AB|\cos\alpha=2\cos\alpha$. Центр окружности O лежит на биссектрисе угла BAK, значит, $|MO|=|HO|=|KO|=|AK|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=$

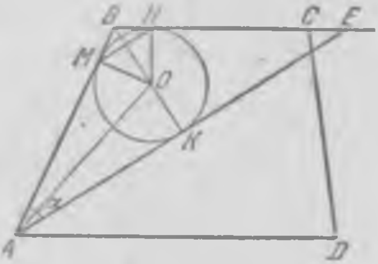


Рис. 55.

$= 2\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$. Так как $OM\perp AB$, $OH\perp BE$, $BK\perp AE$, то $\widehat{BOM}=\widehat{BAK}=$ $=\alpha$, $\widehat{BOH}=\widehat{BEK}=\alpha$. Следовательно, $\triangle MHO$ равнобедренный и поэтому $|MH|=2|OM|\sin\alpha=4\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$. Так как $|MH|=1$, то получим уравнение $1=4\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$. Обозначим $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$ через x, тогда $\sin\alpha=$ $=\frac{2x}{1+x^2}$, $\cos\alpha=\frac{1-x^2}{1+x^2}$, и уравнение перепишется в виде $1=$ $=\frac{8x^2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, или $9x^4-6x^2+1=0$. Отсюда $x^2=\frac{1}{3}$, или $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Так как α — угол в треугольнике, то $0<\alpha<\pi$ и $x=\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}>0$; значит, $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Решая уравнение $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, с учетом неравенства $0<\alpha<\pi$ находим: $\alpha/2=\pi/6$, откуда $\alpha=\pi/3$; следовательно, $\widehat{BAD}=2\pi/3$.

Ответ: $\widehat{BAD}=2\pi/3$.

5. Пусть (x_0, y_0, z_0) — решение системы, удовлетворяющее условию $z\geqslant 0$. Тогда справедливы числовые равенства

$$\begin{cases} y_0+2=(3-x_0)^2, \\ 2z_0y_0-y_0^2+4z_0-2y_0=9+4y_0, \\ x_0^2-4x_0=-z_0^2. \end{cases} \qquad (1)$$

Выделив во втором равенстве полный квадрат относительно y_0, а в третьем относительно x_0, перепишем эти равенства в виде

$$\begin{cases} (3-x_0)^2=y_0+2, \\ (y_0+3-z_0)^2=z_0^2-2z_0, \\ (x_0-2)^2=4-z_0^2. \end{cases}$$

Отсюда ясно, что должны быть справедливы неравенства $z_0^2-2z_0\geqslant 0$ и $4-z_0^2\geqslant 0$. Кроме того, $z_0\geqslant 0$. Итак, если (x_0, y_0, z_0) — решение исходной системы, удовлетворяющее условию $z\geqslant 0$, то должны выполняться неравенства

$$\begin{cases} z_0(z_0-2)\geqslant 0, \\ -2\leqslant z_0\leqslant 2, \\ z_0\geqslant 0. \end{cases}$$

Этим неравенствам удовлетворяют только два числа: $z_0=0$ и $z_0=2$; но тогда из равенств (1) получаем, что либо $x_0=4$, $y_0=-3$, $z_0=0$, либо $x_0=2$, $y_0=-1$, $z_0=2$. Легко видеть, что как тройка чисел $x_0=4$, $y_0=-3$, $z_0=0$, так и тройка чисел $x_0=2$, $y_0=-1$, $z_0=2$ удовлетворяет исходной системе уравнений и условию $z\geqslant 0$. Значит, исходная система имеет два решения, удовлетворяющие условию $z\geqslant 0$, а именно: $(4, -3, 0)$ и $(2, -1, 2)$.

Ответ: $(4, -3, 0)$; $(2, -1, 2)$.

3.С. Область допустимых значений неравенства определяется из условия $5^x-7\geqslant 0$, т. е. состоит из промежутка $\log_5 7\leqslant x<+\infty$. Исходное неравенство равносильно неравенству

$$\sqrt{2(5^x+24)}\geqslant\sqrt{5^x+7}+\sqrt{5^x-7}.$$

Так как обе части этого неравенства неотрицательны, то после возведения в квадрат получим неравенство

$$2(5^x+24)\geqslant 5^x+7+5^x-7+2\sqrt{5^{2x}-49},$$

равносильное на ОДЗ исходному неравенству. Последнее неравенство можно переписать так:

$$24\geqslant\sqrt{5^{2x}-49}.$$

Так как обе части этого неравенства неотрицательны на ОДЗ, то после возведения в квадрат получим неравенство

$$576\geqslant 5^{2x}-49,$$

равносильное исходному на ОДЗ.

Решение последнего неравенства есть промежуток $-\infty<x\leqslant 2$. Из этих чисел решениями исходного неравенства будут лишь те, которые попадают в ОДЗ исходного неравенства, т. е. в промежуток $\log_5 7\leqslant x<+\infty$. Значит, множество всех решений исходного неравенства есть отрезок $\log_5 7\leqslant x\leqslant 2$.

Ответ: $\log_5 7\leqslant x\leqslant 2$.

Ответы к вариантам 2—4.

Вариант 2. 1. $x=\pm\pi/4+\pi n$, $n\in Z$. 2. 5 час. 3.Н. Параллелепипед, сторона основания которого равна 2 см, боковое ребро — 1 см; искомый периметр равен 6 см. 4. $\pi/6$. 5. (2, —3, 3); (1, 0, 0). 3.С. $\log_{13} 5\leqslant x\leqslant 1$.

Вариант 3. 1. $x=2\pi n$, $n\in Z$. 2. 4 часа. 3.Н. Параллелепипед, стороны основания которого равны 4 см и 2 см, объем — 32 см^3. 4. $\pi/3$. 5. (—2, 1, 2); (—4, 2, 0). 3.С. $\log_{17} 8\leqslant x\leqslant 1$.

Вариант 4. 1. $x=\pm\pi/4+\pi n$, $n\in Z$. 2. 3 часа. 3.Н. Параллелепипед, стороны основания которого равны 1 см и 0,5 см, боковое ребро — 1 см; искомый периметр равен 3 см. 4. $\frac{2}{3}\pi$. 5. (—1, 2, 2); (0, 1, 0). 3.С. $\log_{15} 9\leqslant$ $\leqslant x\leqslant 1$.

1979

Решение варианта 1.

1. Воспользовавшись формулами $\sin 2x=2\sin x\cos x$ и $1+\cos 2x=2\cos^2 x$, преобразуем данное уравнение к виду

$$2\sin x\cos x=\sqrt{2}\cos x+2\cos^2 x,$$

или

$$2\sqrt{2}\cos x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\right)=0,$$

или

$$2\sqrt{2}\cos x\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\right)=0.$$

Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\cos x=0, \quad \sin(x-\pi/4)=1/2.$$

Множество решений первого уравнения есть $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$. Решая второе уравнение, находим, что $x-\pi/4=(-1)^n\pi/6+\pi n$, $n\in Z$, откуда $x=\frac{\pi}{4}+$ $+(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$; $x=\frac{\pi}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$.

2.Н. Графики функций $y=-2x^2+3x+6$ и $y=x+2$ изображены на рис. 56. Заштрихованная фигура на этом рисунке ограничивается этими линиями. Площадь ее необходимо найти. Координаты точек пересечения A и B можно найти, решив систему уравнений

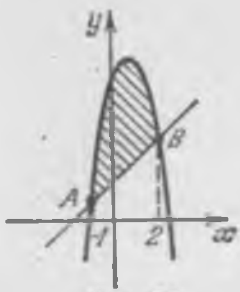


Рис. 56.

$$\begin{cases} y=-2x^2+3x+6, \\ y=x+2. \end{cases}$$

Подставляя $x+2$ вместо y в первое уравнение, получаем систему

$$\begin{cases} x^2-x-2=0, \\ x+2=y, \end{cases}$$

равносильную предыдущей.

Поскольку корни квадратного уравнения последней системы равны $x_1=-1$ и $x_2=2$, то решения системы

$$x_1=-1, \quad y_1=1; \qquad x_2=2, \quad y_2=4.$$

Итак, точка A имеет координаты $(-1, 1)$, точка B — координаты $(2, 4)$. Вычисляем искомую площадь:

$$S=\int_{-1}^{2}((-2x^2+3x+6)-(x+2))\,dx=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)\,dx=$$

$$=2\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-1}^{2}=2\left(-\frac{8}{3}+2+4-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)=9.$$

Ответ: 9.

3. Обозначим скорости пароходов через x км/ч, а скорость реки — через y км/ч. Время, прошедшее от момента отплытия плота от пристани A до того момента, когда его нагнал второй пароход, равно $\frac{144}{y}$ ч. Второй пароход до момента встречи с плотом находился в пути $\frac{144}{x+y}$ ч (он плыл по течению и, значит, его скорость относительно берегов равна $(x+y)$ км/ч). Из условия задачи следует, что справедливо равенство

$$\frac{144}{y}-\frac{144}{x+y}=40. \tag{1}$$

За время $\frac{144}{y}$ ч первый пароход успел проплыть 324 км по течению со скоростью $(x+y)$ км/ч относительно берегов, простоять у пристани B 18 ч и проплыть 324 км — 180 км = 144 км против течения реки, двигаясь относительно берегов со скоростью $(x-y)$ км/ч. Следовательно, имеет место равенство

$$\frac{144}{y}=\frac{324}{x+y}+18+\frac{144}{x-y}. \qquad (2)$$

Итак, для нахождения x и y имеем систему уравнений (1) и (2). Из первого уравнения находим: $x=\frac{5y^2}{18-5y}$. Подставляя $\frac{5y^2}{18-5y}$ вместо x во второе уравнение, разделив предварительно обе части его на 18, получим уравнение

$$\frac{8}{y}=\frac{18-5y}{y}+1+\frac{4(18-5y)}{5y^2-9y}.$$

Освобождаясь в этом уравнении от знаменателя, получаем уравнение: $10y^2-33y+9=0$. Это квадратное уравнение имеет два корня: $y_1=3/10$ и $y_2=3$. Соответствующие значения x равны: $x_1=3/110$, $x_2=15$. Следовательно, система имеет два решения: $x_1=3/110$, $y_1=3/10$; $x_2=15$, $y_2=3$. Из условия задачи следует, что $x>y$. Этому неравенству удовлетворяет только второе решение системы.

Ответ: скорости пароходов 15 км/ч, скорость реки 3 км/ч.

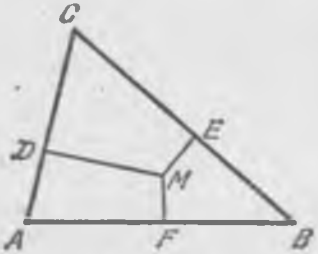


Рис. 57

4. Обозначим основания перпендикуляров буквами D, E, F (рис. 57). Тогда

$$S_{DEF}=S_{DEM}+S_{EFM}+S_{FMD}=$$
$$=\frac{1}{2}|DM||EM|\sin\widehat{DME}+\frac{1}{2}|EM||FM|\sin\widehat{FME}+$$
$$+\frac{1}{2}|FM||DM|\sin\widehat{FMD}=\frac{1}{2}|DM||EM|\sin\hat{C}+$$
$$+\frac{1}{2}|EM||FM|\sin\hat{B}+\frac{1}{2}|FM||DM|\sin\hat{A}.$$

Далее:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|AC||AB|\sin\hat{A}=\frac{1}{2}|AB||BC|\sin\hat{B}=\frac{1}{2}|AC||BC|\sin\hat{C}.$$

Из этих соотношений находим

$$\sin\hat{A}=\frac{2S_{ABC}}{|AC||AB|},\quad \sin\hat{B}=\frac{2S_{ABC}}{|AB||BC|},\quad \sin\hat{C}=\frac{2S_{ABC}}{|AC||BC|}.$$

Подставляя эти выражения в формулу для S_{DEF}, получаем

$$S_{DEF}=\left(\frac{|DM||EM|}{|AC||BC|}+\frac{|EM||FM|}{|BC||AB|}+\frac{|FM||DM|}{|AB||AC|}\right)\cdot S_{ABC}=$$
$$=\left(\frac{mk}{ab}+\frac{nk}{ac}+\frac{mn}{bc}\right)\cdot S_{ABC}=\frac{mkc+nkb+mna}{abc}\cdot S_{ABC},$$

откуда $\dfrac{S_{ABC}}{S_{DEF}}=\dfrac{abc}{mkc+nkb+mna}$.

Ответ: $\dfrac{abc}{mkc+nkb+mna}$.

5. Из второго уравнения системы выразим y через x. Для краткости обозначим $4^{\sin^2 x}+4^{\cos^2 x}$ через a. Тогда второе уравнение системы можно переписать в виде

$$(25-6a)\,y^2+(6-2a)\,y+1=0. \qquad (1)$$

Докажем, что для любого решения системы не может выполняться равенство $25-6a=0$.

Если это равенство имеет место, т. е. если $a=25/6$, то из уравнения (1) находим, что $y=3/7$. Но тогда, используя первое уравнение системы, получаем, что

$$-\frac{3}{7}<y\sin x=\log_2\left|\frac{y\sin x}{1+3y}\right|=\log_2\left|\frac{3\sin x}{16}\right|<\log_2\frac{3}{16}<-2.$$

Очевидно, что получилось противоречие, которое и означает, что для любого решения системы равенство $25-6a=0$ выполняться не может.

Решая теперь (1) как квадратное уравнение относительно y, находим его корни:

$$y_{1,2}=\frac{-(3-a)\pm\sqrt{a^2-16}}{25-6a}.$$

Поскольку

$$a^2-16=(4^{\sin^2 x}+4^{\cos^2 x})^2-16=4^{2\sin^2 x}+4^{2\cos^2 x}-8=(4^{\sin^2 x}-4^{\cos^2 x})^2,$$

то

$$y_1=\frac{2\cdot 4^{\sin^2 x}-3}{25-6\,(4^{\sin^2 x}+4^{\cos^2 x})},\quad y_2=\frac{2\cdot 4^{\cos^2 x}-3}{25-6\,(4^{\sin^2 x}+4^{\cos^2 x})}.$$

Приведенные рассуждения показывают, что исходная система равносильна совокупности двух систем, которые назовем соответственно I и II:

$$\begin{cases} y\sin x=\log_2\left|\dfrac{y\sin x}{1+3y}\right|, \\ y=\dfrac{2\cdot 4^{\sin^2 x}-3}{25-6\left(4^{\sin^2 x}+4^{\cos^2 x}\right)}, \end{cases} \qquad \begin{cases} y\sin x=\log_2\left|\dfrac{y\sin x}{1+3y}\right|, \\ y=\dfrac{2\cdot 4^{\cos^2 x}-3}{25-6\left(4^{\sin^2 x}+4^{\cos^2 x}\right)}. \end{cases}$$

Решим сначала первую систему. Пользуясь вторым уравнением, находим

$$\frac{1+3y}{y}=3+\frac{1}{y}=3+\frac{25-6\left(4^{\sin^2 x}+4^{\cos^2 x}\right)}{2\cdot 4^{\sin^2 x}-3}=$$
$$=\frac{16-6\cdot 4^{\cos^2 x}}{2\cdot 4^{\sin^2 x}-3}=\frac{2\cdot 4^{\cos^2 x}\left(2\cdot 4^{\sin^2 x}-3\right)}{2\cdot 4^{\sin^2 x}-3}=2\cdot 4^{\cos^2 x}.$$

Здесь использован тот факт, что для решений системы выполнено условие $y\neq 0$, ибо иначе в первом уравнении не будет иметь смысла $\log_2\left|\dfrac{y\sin x}{1+3y}\right|$.

Подставляя теперь $2\cdot 4^{\cos^2 x}$ вместо $\dfrac{1+3y}{y}$ в правую часть первого уравнения системы, находим, что

$$\log_2\left|\frac{y\sin x}{1+3y}\right|=\log_2|\sin x|-\log_2\left|\frac{1+3y}{y}\right|=$$
$$=\log_2|\sin x|-\log_2\left(2\cdot 4^{\cos^2 x}\right)=\log_2|\sin x|-1-2\cos^2 x.$$

Пользуясь условием задачи $|y|<1$, первым уравнением системы, а также очевидными неравенствами

$$\log_2|\sin x|\leqslant 0 \text{ и } \cos^2 x\geqslant 0, \qquad (2)$$

получаем, что

$$-1\leqslant y\sin x=\log_2|\sin x|-1-2\cos^2 x\leqslant -1. \qquad (3)$$

Теперь ясно, что все неравенства (2) и (3) в действительности являются равенствами, и должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} y\sin x=-1, \\ \log_2|\sin x|=0, \\ \cos x=0 \end{cases}$$

или, что все равно, условия:

$$\begin{cases} y\sin x=-1, \\ |\sin x|=1. \end{cases}$$

Если $\sin x=-1$, т. е. если $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$, то $y=1$. Подставляя найденные значения x и y во второе уравнение системы I, получаем неверное равенство $1=-1$. Если $\sin x=1$, т. е. если $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$, то $y=-1$. Подставляя найденные значения x и y в оба уравнения системы I, убеждаемся, что они им удовлетворяют. Итак, система (I) имеет бесконечное множество решений:

$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, \quad n\in Z, \\ y=-1. \end{cases}$$

Решим теперь систему II. Пользуясь вторым уравнением системы, подобно предыдущему находим, что

$$\frac{1+3y}{y}=2\cdot 4^{\sin^2 x}.$$

Подставляя теперь $2\cdot 4^{\sin^2 x}$ вместо $\frac{1+3y}{y}$ в правую часть первого уравнения, так же как и ранее, находим, что

$$y\sin x=\log_2|\sin x|-1-2\sin^2 x.$$

Воспользуемся теперь условием $|y|\leqslant 1$, а также неравенствами

$$\log_2|\sin x|\leqslant 0, \quad \sin^2 x\geqslant 0. \tag{4}$$

Как и ранее, получим, что

$$-1\leqslant y\sin x=\log_2|\sin x|-1-2\sin^2 x\leqslant -1,$$

откуда следует, что для решений системы II должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} y\sin x=-1, \\ \log_2|\sin x|=0, \\ \sin x=0. \end{cases}$$

Но последние два из этих равенства не могут выполняться одновременно. Таким образом, система II решений не имеет.

Ответ: система имеет бесконечно много решений (x, y), где $x=\frac{\pi}{2}+$ $+2\pi n$, $y=1$, $n\in Z$.

2.С. Область допустимых значений этого неравенства есть промежуток $-3\leqslant x<+\infty$. Разобьем этот промежуток на два множества: $-3\leqslant x<-1$ и $-1\leqslant x<+\infty$ и будем решать исходное неравенство отдельно на каждом из этих множеств.

а) Пусть $-3\leqslant x<-1$. На всем этом промежутке левая часть исходного неравенства неотрицательна, а правая отрицательна. Значит, весь этот промежуток входит в множество решений исходного неравенства.

б) Пусть $-1\leqslant x<+\infty$, тогда обе части исходного неравенства неотрицательны на этом множестве и исходное неравенство равносильно на этом множестве неравенству $x+3>(x+1)^2$, или $x^2+x-2<0$. Множество решений последнего неравенства есть интервал $-2 < x < 1$. В множестве $-1 \leq x < +\infty$ содержится только промежуток $-1 \leq x < 1$, который и является множеством решений исходного неравенства в области $-1 \leq x < +\infty$. Объединяя решения, найденные на множествах $-3 \leq x < -1$ и $-1 \leq x < +\infty$, получаем, что множество решений исходного неравенства есть промежуток $-3 \leq x < 1$.

Ответ: $-3 \leq x < 1$.

Ответы к вариантам 2—4.

Вариант 2. 1. $x=\pi k$, $k \in Z$; $x=\frac{\pi}{4}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in Z$. 2.Н. 62,5. 3. $V_1=5$ км/ч, $V_2=4$ км/ч. 4. $\frac{(l\sin\gamma+m\sin\alpha+n\sin\beta)^2}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$. 5. (x, y), где $x=\pi n$, $y=1$, $n \in Z$. 2.С. $-14 \leq x < 2$.

Вариант 3. 1. $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in Z$; $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in Z$. 2.Н. 4,5. 3. $V_1=5$ км/ч, $V_2=4{,}5$ км/ч. 4. $h_a=\frac{\sqrt{2S\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}{\sin\alpha}$, $h_b=\frac{\sqrt{2S\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}{\sin\beta}$, $h_c=\frac{\sqrt{2S\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}{\sin\gamma}$. 5. (x, y), где $x=\pi n$, $y=1$, $n \in Z$. 2.С. $-46 \leq x < 3$.

Вариант 4. 1. $x=\pi k$, $k \in Z$; $x=-\frac{\pi}{3}+(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in Z$. 2. 32. 3. Скорость подачи воды большой трубой равна 5 м^3/ч, а скорость подачи воды малой трубой равна 2 м^3/ч. 4. $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+2\sqrt{3}S}$, где $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $2p=a+b+c$. 5. (x, y), где $x=2\pi n$, $y=\frac{1}{2}$, $n \in Z$. 2.С. $-27 \leq x < 9$.

§ 5. БИОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

1977

Решение варианта 1.

1. Возведя обе части данного уравнения в квадрат, получим уравнение $6-4x-x^2=(x+4)^2$, или

$$x^2+6x+5=0. \qquad (1)$$

Корни исходного уравнения содержатся среди корней уравнения (1). Но не обязательно все корни уравнения (1) будут корнями исходного уравнения. Поэтому после нахождения корней уравнения (1) надо отобрать те из них, которые будут корнями данного уравнения.

Уравнение (1) имеет корни $x_1=-1$ и $x_2=-5$. Проверка показывает, что только $x_1=-1$ будет корнем исходного уравнения.

Ответ: $x=-1$.

2. Из условия задачи следует, что угол NMQ острый. Пусть QK — высота треугольника MNQ (рис. 58). По условию $LN \perp MN$ и $LN \perp LQ$, следовательно, $MN \parallel LQ$ и $LN \parallel QK$, т. е. четырехугольник $KNLQ$ — параллелограмм. Тогда $|QK|=|LN|$ и $|NK|=|LQ|$. Имеем, пользуясь условием задачи:

$$|QK|=|LN|=|LQ|-2, \quad |KM|=|NM|-|NK|=2|LQ|-|LQ|=|LQ|.$$

В прямоугольном треугольнике QKM отрезки QK и KM являются катетами, следовательно, $\frac{|QK|}{|KM|}=\operatorname{tg}\widehat{QMK}=\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$ или $\frac{|LQ|-2}{|LQ|}=\frac{2}{3}$. Из последнего равенства находим, что $|LQ|=6$. Из прямоугольного треугольника NLQ, наконец, находим $|NQ|$:

$$|NQ|=\sqrt{|LN|^2+|LQ|^2}=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}.$$

Ответ: $|NQ|=2\sqrt{13}$ м.

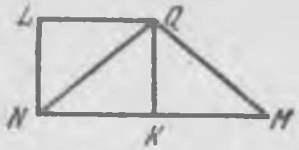


Рис. 58.

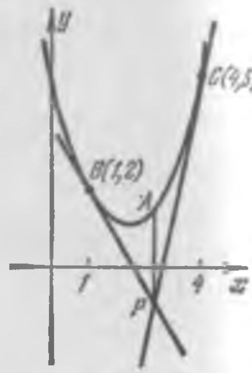


Рис. 59.

3.Н. Графиком функции $y=x^2-4x+5$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Пусть B и C — точки, в которых прямые $y=-2x+4$ и $y=4x-11$ касаются параболы (рис. 59). Из системы уравнений

$$\begin{cases} y=-2x+4, \\ y=4x-11 \end{cases}$$

находим координаты точки P — точки пересечения касательных к параболе: $x=5/2$, $y=-1$. Фигура $BPCA$, площадь которой необходимо найти, состоит из двух частей:

а) из фигуры BPA, лежащей под кривой $y=x^2-4x+5$ и над прямой $y=-2x+4$ на промежутке от 1 до 5/2 и

б) из фигуры APC, лежащей под кривой $y=x^2-4x+5$ и над прямой $y=4x-11$ на промежутке от 5/2 до 4.

Площадь первой фигуры вычисляется так:

$$S_1=\int_1^{5/2}((x^2-4x+5)-(-2x+4))\,dx=$$

$$=\int_1^{5/2}(x^2-2x+1)\,dx=\int_1^{5/2}(x-1)^2\,dx=\left.\frac{(x-1)^3}{3}\right|_1^{5/2}=\frac{9}{8}-0=\frac{9}{8}.$$

Площадь второй фигуры вычисляется так:

$$S_2=\int\limits_{5/2}^{4}((x^2-4x+5)-(4x-11))\,dx=\int\limits_{5/2}^{4}(x^2-8x+16)\,dx=$$

$$=\int\limits_{5/2}^{4}(x-4)^2\,dx=\frac{(x-4)^3}{3}\Bigg|_{5/2}^{4}=0-\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}\right)^3=\frac{9}{8}.$$

Так как искомая площадь $S=S_1+S_2$, то $S=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$.

Ответ: $2\frac{1}{4}$.

4. Умножив обе части уравнения на $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, перепишем его в виде

$$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{12}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{12}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\left(\frac{x}{5}+\frac{2\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{3x}{5}+\frac{\pi}{6}\right)\right).\quad(2)$$

Применим к левой части уравнения формулу для косинуса суммы двух углов, а к правой части формулу для разности синусов двух углов. Тогда уравнение (2) перепишется в виде

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{5}-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{2}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{5}\right)\cos\left(\frac{2x}{5}+\frac{5\pi}{12}\right),$$

или, поскольку $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{5}\right)=\cos\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{4}\right)$, в виде

$$\cos\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{2x}{5}+\frac{5\pi}{12}\right).$$

Последнее уравнение можно преобразовать так:

$$\cos\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{4}\right)\left(1-\frac{2}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{2x}{5}+\frac{5\pi}{12}\right)\right)=0;$$

отсюда следует, что оно равносильно совокупности двух уравнений

$$\cos\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{4}\right)=0,\quad \cos\left(\frac{2x}{5}+\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Первое уравнение имеет серию решений $x=\frac{5\pi}{4}+5\pi k$, $k\in Z$. Решая второе уравнение, находим, что $\frac{2x}{5}+\frac{5\pi}{12}=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$. Отсюда следует, что второе уравнение имеет две серии решений: $x=-\frac{5\pi}{12}+5\pi n$, $n\in Z$; $x=-\frac{5\pi}{3}+5\pi m$, $m\in Z$. Значит, исходное уравнение имеет три серии решений: $x=\frac{5\pi}{4}+5\pi k$, $k\in Z$; $x=-\frac{5\pi}{12}+5\pi n$, $n\in Z$; $x=-\frac{5\pi}{3}+5\pi m$, $m\in Z$.

Ответ: $x=\frac{5\pi}{4}+5\pi k,\ k\in Z;\ \ x=-\frac{5\pi}{12}+5\pi n,\ n\in Z;\ x=-\frac{5\pi}{3}+5\pi m,$ $m\in Z.$

5. Обозначим через x_1, x_2 корни уравнения $x^2+\frac{3}{s}x+2s=0$ и через x_3, x_4 корни уравнения $x^2+\frac{12}{s}x-s=0$. При этом будем считать, что $x_1<x_2$ и $x_3<x_4$. Дискриминант первого уравнения равен $\frac{9-8s^3}{s^2}$, дискриминант второго равен $\frac{144+4s^3}{s^2}$. Отсюда следует, что для того, чтобы оба уравнения имели по два корня, параметр s должен удовлетворять нераьенствам

$$\begin{cases}\dfrac{9-8s^3}{s^2}>0,\\ \dfrac{144+4s^3}{s^2}>0,\end{cases}\tag{3}$$

т. е. лежать в промежутках $-\sqrt[3]{36}<s<0,\ 0<s<\frac{\sqrt[3]{9}}{2}$.

Обозначим $f(x)=x^2+\frac{3}{s}x+2s$. Условие задачи не будет выполнено, если между точками x_3, x_4 лежит ровно один корень уравнения $f(x)=0$, а второй корень лежит вне множества $x_3\leqslant x\leqslant x_4$. В этом случае числа $f(x_3)$, $f(x_4)$ отличны от нуля и имеют разные знаки, т. е. $f(x_3)f(x_4)<0$. Поэтому условие задачи будет выполнено в том и только в том случае, когда выполнено неравенство $f(x_3)f(x_4)\geqslant 0$. Так как $x_3^2=s-\frac{12}{s}x_3$ и $x_4^2=s-\frac{12}{s}x_4$, то $f(x_3)=s-\frac{12}{s}x_3+\frac{3}{s}x_3+2s=3s-\frac{9}{s}x_3$ и $f(x_4)=3s-\frac{9}{s}x_4$. Тогда $f(x_3)f(x_4)=\left(3s-\frac{9}{s}x_3\right)\left(3s-\frac{9}{s}x_4\right)=9s^2-27(x_3+x_4)+\frac{81}{s^2}x_3x_4$. По формулам Виета $x_3+x_4=-\frac{12}{s}$, $x_3x_4=-s$, так что

$$f(x_3)\,f(x_4)=9s^2+27\cdot\frac{12}{s}-\frac{81}{s^2}\cdot s=9s^2+\frac{243}{s}.$$

Решая неравенство

$$9s^2+\frac{243}{s}\geqslant 0,$$

получаем, что множество его решений есть два промежутка: $s\leqslant -3$ и $s>0$. Учитывая, что s должны удовлетворять системе (3), получаем, что условию задачи удовлетворяют значения s, лежащие в промежутках

$$-\sqrt[3]{36}<s\leqslant -3,\quad 0<s<\frac{\sqrt[3]{9}}{2}.$$

Ответ: $-\sqrt[3]{36}<s\leqslant -3,\quad 0<s<\frac{\sqrt[3]{9}}{2}.$

3.С. Пусть первая бригада делала в час x деталей, а вторая бригада — y деталей, тогда за один час они вместе делали $x+y$ деталей и 72 детали сделали за $\frac{72}{x+y}$ часов. Следовательно, раздельно в первый день они работали $7-\frac{72}{x+y}$ часов. За это время первая бригада сделала $\left(7-\frac{72}{x+y}\right)x$ деталей, а вторая бригада сделала $\left(7-\frac{72}{x+y}\right)y$ деталей, и из условия задачи вытекает, что

$$\left(7-\frac{72}{x+y}\right)x-\left(7-\frac{72}{x+y}\right)y=8.$$

Во второй день первая бригада делала в час $x+1$ деталь, а вторая бригада делала в час $y-1$ деталь. Так как обе бригады в час делали опять $x+y$ деталей, то 72 детали они сделали за $\frac{72}{x+y}$ часов и раздельно работали $5-\frac{72}{x+y}$ часов. За это время первая бригада сделала $\left(5-\frac{72}{x+y}\right)(x+1)$ деталей, а вторая бригада сделала $\left(5-\frac{72}{x+y}\right)(y-1)$ деталей, и из условия задачи вытекает, что

$$\left(5-\frac{72}{x+y}\right)(x+1)-\left(5-\frac{72}{x+y}\right)(y-1)=8.$$

Отметим еще, что условию задачи будут удовлетворять те x и y, для которых будет выполнено неравенство $x>y$. Итак, для нахождения x и y получили смешанную систему

$$\left\{\begin{array}{l} x>y, \\ \left(7-\frac{72}{x+y}\right)(x-y)=8, \\ \left(5-\frac{72}{x+y}\right)(x-y+2)=8. \end{array}\right. \qquad (4)$$

Обозначим $\frac{72}{x+y}=z$, $x-y=u$, тогда система (4) запишется в виде

$$\left\{\begin{array}{l} u>0, \\ (7-z)\,u=8, \\ (5-z)(u+2)=8. \end{array}\right. \qquad (5)$$

Перепишем эту систему так:

$$\left\{\begin{array}{l} 7u=8+uz, \\ 5u+10-2z=8+uz, \\ u>0. \end{array}\right.$$

Отсюда ясно, что эта система равносильна системе

$$\left\{\begin{array}{l} 7u=8+uz, \\ 5u+10-2z=7u, \\ u>0. \end{array}\right.$$

Из второго уравнения $z=5-u$. Подставляя $5-u$ вместо z в первое уравнение, получаем уравнение $7u=8+u(5-u)$, которое имеет два корня:

$u_1=2$ и $u_2=-4$. Условию $u>0$ удовлетворяет лишь один корень $u_1=2$. Поэтому система (5) имеет одно решение: $u_1=2$, $v_1=3$. Значит, для нахождения x и y получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x-y=2, \\ \dfrac{72}{x+y}=3. \end{cases}$$

Решение этой системы: $x_1=13$, $y_1=11$. Легко видеть, что эти x и y удовлетворяют условию задачи. Следовательно, первая бригада делала в один час 13 деталей, а вторая — 11 деталей.

Ответ: первая бригада делала в один час 13 деталей, а вторая — 11 деталей.

Ответы к вариантам 2—4.

Вариант 2. 1. $x=3$. 2. 600 м². 3.Н. 9/4. 4. $\pi+\dfrac{3\pi n}{2}$, $n\in Z$; $(-1)^{k+1}\times$ $\times\dfrac{3\pi}{10}+\dfrac{6}{5}\pi k$, $k\in Z$. 5. $0\leqslant s<\dfrac{3}{8}$, $s\leqslant -3$. 3.С. 100 м³; 140 м³.

Вариант 3. 1. $x=-1$. 2. $2\sqrt{21}$ м. 3.Н. 9/8. 4. $-\dfrac{\pi}{12}+(-1)^{n+1}\cdot$ $\dfrac{4\pi}{3}+4\pi k$ $k\in Z$; $-\dfrac{5\pi}{4}+12\pi n$, $n\in Z$. 5. $-2<s<0$. 3.С. 28 м³/ч; 22 м³/ч.

Вариант 4. 1. $x=3$. 2. $\dfrac{15}{2}$ м². 3.Н. 9/8. 4. $-\dfrac{7\pi}{6}+4\pi n$, $n\in Z$; $-\dfrac{5\pi}{18}+\dfrac{8}{3}\pi l$, $l\in Z$; $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{8}{3}\pi m$, $m\in Z$. 5. $0<s<1$. 3.С. 10 м/с; 6 м/с.

1978

Решение варианта 1.

1. Используя формулу для косинуса двойного угла $\cos 2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=$ $=1-2\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$, исходное уравнение перепишем в виде

$$2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-4\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+3/2=0. \tag{1}$$

Так как квадратное уравнение $2y^2-4y+3/2=0$ имеет корни $y_1=3/2$ и $y_2=1/2$, то уравнение (1) равносильно совокупности уравнений

$$\sin(x+\pi/3)=3/2, \quad \sin(x+\pi/3)=1/2.$$

Первое уравнение решений не имеет, так как $|\sin\alpha|\leqslant 1$ для любого действительного α. Решения второго уравнения есть $x=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$. Значит, эти и только эти x являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $(-1)^n\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$.

2.Н. Найдем производную функции $f(x)$:

$$f'(x)=(A\sin\pi x+B)'=A\pi\cos\pi x.$$

Из условия $f'(1)=2$ получаем соотношение $A\pi\cos\pi=2$, откуда $A=-2/\pi$. Применяя формулу Ньютона—Лейбница, имеем:

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 (A\sin\pi x+B)\,dx=A\int_0^2 \sin\pi x\,dx+B\int_0^2 dx=$$

$$=A\left(-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right)\Big|_0^2+Bx\Big|_0^2=2B.$$

Значит, $2B=4$, откуда $B=2$.

Ответ: $A=-2/\pi$, $B=2$.

3. Назовем фигуру, ограниченную отрезками AM, AK и дугой MK, криволинейным треугольником (рис. 60). Обозначим через P точку касания отрезка OA с окружностью, вписанной в этот криволинейный треугольник, через L—точку касания дуги MK с этой окружностью, а через O'—ее центр. По условию эта окружность касается прямых OA и AK, следовательно, ее центр—точка O'—лежит на биссектрисе угла OAK. Значит, $\widehat{OAO'}=\pi/6$. Центры двух рассматриваемых окружностей—точки O и O'—и точка L лежат на одной прямой, поэтому $|OO'|=2+r$, где через r обозначен радиус окружности, вписанной в криволинейный треугольник AKM. Треугольники APO' и OKA прямоугольные, поэтому

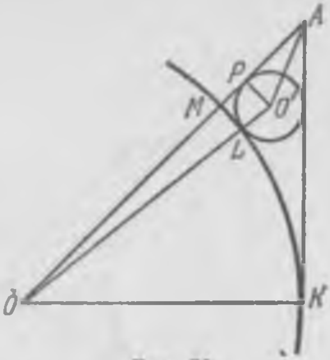


Рис. 60.

$$|AP|=\frac{|PO'|}{\operatorname{tg}\widehat{PAO'}}=\frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}=r\sqrt{3},\quad |OA|=\frac{|OK|}{\sin\widehat{OAK}}=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}. \quad (2)$$

Из прямоугольного треугольника OPO' находим, что

$$|OP|=\sqrt{|OO'|^2-|PO'|^2}=\sqrt{(2+r)^2-r^2}=2\sqrt{1+r}. \quad (3)$$

Из равенства $|OA|=|OP|+|AP|$, используя равенства (2) и (3), получаем уравнение относительно r:

$$\frac{4}{\sqrt{3}}=2\sqrt{1+r}+r\sqrt{3},$$

или

$$4-3r=2\sqrt{3}\sqrt{1+r}. \quad (4)$$

Возведя последнее уравнение в квадрат, получим уравнение

$$9r^2-36r+4=0,$$

которое имеет два корня

$$r_1=2-\frac{4\sqrt{2}}{3} \quad \text{и} \quad r_2=2+\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Так как при возведении в квадрат могли появиться посторонние решения, то необходимо сделать проверку. Проверка показывает, что $r_1=2-\frac{4\sqrt{2}}{3}$ является единственным корнем уравнения (4). Следовательно, искомый радиус $r=2-\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Ответ: $2-\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

4. Обозначим $3^{\sqrt{x^2-3}}$ через z, тогда получим квадратное неравенство

$$z^2-\frac{28}{3}z+3<0,$$

множество решений которого есть интервал $1/3<z<9$. Поэтому исходное неравенство равносильно двойному неравенству

$$\frac{1}{3}<3^{\sqrt{x^2-3}}<9,$$

которое равносильно двойному неравенству

$$-1<\sqrt{x^2-3}<2,$$

или, что одно и то же, системе неравенств

$$\begin{cases} -1<\sqrt{x^2-3}, \\ \sqrt{x^2-3}<2. \end{cases} \tag{5}$$

Область допустимых значений этой системы состоит из двух промежутков: $-\infty<x\leqslant-\sqrt{3}$ и $\sqrt{3}\leqslant x<+\infty$. Очевидно, что первое неравенство системы выполняется для любого x из этой ОДЗ. Так как обе части второго неравенства системы на ОДЗ неотрицательны, то это неравенство на ОДЗ равносильно неравенству $x^2-3<4$, решения которого есть интервал $-\sqrt{7}<x<\sqrt{7}$. Следовательно, решениями системы неравенств (5), а значит и решениями исходного неравенства, являются два промежутка: $-\sqrt{7}<x\leqslant-\sqrt{3}$ и $\sqrt{3}\leqslant x<\sqrt{7}$.

Ответ: $-\sqrt{7}<x\leqslant-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}\leqslant x<\sqrt{7}$.

5. Найдем сначала при каждом значении a все решения, а затем отберем из них те, которые дают ответ этой задачи. Для каждого фиксированного a будем искать решения данного уравнения сначала в области $x<-2a$, а потом в области $x\geqslant-2a$.

1) Пусть $x<-2a$. На этом множестве $|x+2a|=-(x+2a)$ и поэтому данное уравнение можно переписать в виде

$$x^2+2ax+a-1=0. \tag{6}$$

Найдем дискриминант D_1 получившегося квадратного уравнения (6):

$$D_1=4a^2-4a+4=4\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+3>0.$$

Следовательно, квадратное уравнение (6) при каждом фиксированном значении a имеет два корня:

$$x_1 = -a + \sqrt{a^2 - a + 1} \quad \text{и} \quad x_2 = -a - \sqrt{a^2 - a + 1}.$$

Выясним, лежат ли они в области $x < -2a$. Корень x_1 лежит в этой области тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$-a + \sqrt{a^2 - a + 1} < -2a,$$

или равносильное ему неравенство

$$\sqrt{a^2 - a + 1} < -a. \tag{7}$$

Неравенство (7) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} -a > 0, \\ a^2 - a + 1 < a^2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a < 0, \\ a > 1. \end{cases}$$

Последняя система неравенств решений не имеет; значит, ни при каком значении параметра a число x_1 не лежит в области $x < -2a$. Корень x_2 лежит в рассматриваемой области тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$-a - \sqrt{a^2 - a + 1} < -2a,$$

или равносильное ему неравенство

$$a < \sqrt{a^2 - a + 1}. \tag{8}$$

Найдем теперь все значения параметра a, при которых выполнено неравенство (8). Ясно, что неравенству (8) удовлетворяют все a из области $a < 0$. В области же $a \geqslant 0$ неравенство (8) равносильно неравенству $a^2 < a^2 - a + 1$ и, значит, имеет решения $0 \leqslant a < 1$. Итак, множество решений неравенства (8) есть промежуток $a < 1$. Таким образом, в области $x < -2a$ исходное уравнение при $a \geqslant 1$ не имеет решений, при $a < 1$ имеет единственное решение $x_2 = -a - \sqrt{a^2 - a + 1}$.

2) Пусть $x \geqslant -2a$. На этом множестве $|x + 2a| = x + 2a$ и поэтому исходное уравнение можно переписать в виде

$$x^2 + 2ax + 1 - a = 0. \tag{9}$$

Найдем дискриминант D_2 получившегося квадратного уравнения:

$$D_2 = 4a^2 + 4a - 4 = 4(a^2 + a - 1).$$

Ясно, что уравнение (9) не имеет решений, если $D_2 < 0$, т. е. если $a^2 + a - 1 < 0$. Значит, уравнение (9) не имеет решений для a из промежутка $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < a < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. Если a не принадлежит этому интервалу, то квадратное уравнение (9) имеет корни

$$x_3 = -a + \sqrt{a^2 + a - 1}, \quad x_4 = -a - \sqrt{a^2 + a - 1},$$

причем $x_3 = x_4$ при $a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ и $a = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$. Выясним теперь, при каких значениях параметра a найденные корни лежат в области $x \geqslant -2a$. Для этого нужно решить неравенства $x_3 \geqslant -2a$ и $x_4 \geqslant -2a$. Неравенство

$$-a+\sqrt{a^2+a-1} \geqslant -2a \qquad (10)$$

равносильно неравенству

$$\sqrt{a^2+a-1} \geqslant -a,$$

или совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} a^2+a-1 \geqslant 0, \\ -a < 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -a \geqslant 0, \\ a^2+a-1 \geqslant a^2. \end{cases}$$

Множество решений первой системы имеет вид $a \geqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, вторая система решений не имеет. Значит, множество решений неравенства (10) есть промежуток $a \geqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, и только при этих значениях параметра a корень x_3 лежит в области $x \geqslant -2a$.

Неравенство

$$-a-\sqrt{a^2+a-1} \geqslant -2a$$

равносильно неравенству

$$\sqrt{a^2+a-1} \leqslant a,$$

или системе неравенств

$$\begin{cases} a^2+a-1 \geqslant 0, \\ a \geqslant 0, \\ a^2+a-1 \leqslant a^2. \end{cases}$$

Множество решений полученной системы неравенств есть отрезок $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leqslant a \leqslant 1$. Только при этих значениях параметра a корень x_4 принадлежит области $x \geqslant -2a$. Таким образом, при $a < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ данное уравнение в области $x \geqslant -2a$ решений не имеет. Если $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, то уравнение в рассматриваемой области имеет единственное решение $x_3 = x_4 = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. При значениях a, лежащих в области $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < a \leqslant 1$, исходное уравнение в рассматриваемой области имеет два различных корня x_3 и x_4. Если же $a > 1$, то исходное уравнение имеет единственный корень x_3.

Полученные результаты удобно собрать в следующей таблице:

Значения a	Решения данного уравнения
$a < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$	x_2
$a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$x_2, \quad x_3 = x_4 \qquad (x_2 < x_3)$
$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < a < 1$	$x_2, \quad x_3, \ x_4 \qquad (x_3 \neq x_4)$
$a = 1$	$x_3 = 0, \quad x_4 = -2$
$a > 1$	x_3

Таким образом, искомые значения a образуют два промежутка: $a < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и $a > 1$.

Дадим еще одно («геометрическое») решение задачи. Перепишем данное уравнение в виде

$$x \cdot |x + 2a| = a - 1 \tag{11}$$

и при фиксированном значении параметра a нарисуем на плоскости с координатами (x, y) график функции $y = x\,|x + 2a|$.

Рассмотрим несколько случаев.

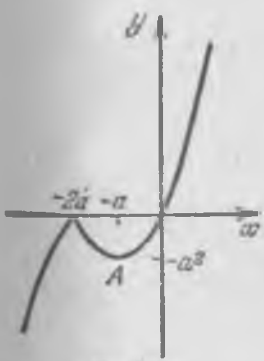


Рис. 61.

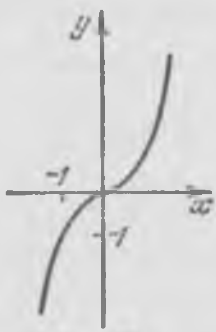


Рис. 62.

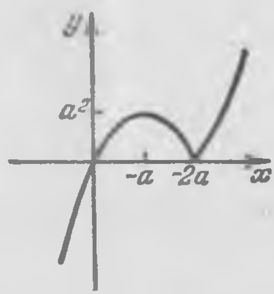


Рис. 63.

1) $a > 0$. В этом случае $-2a < 0$ и график функции $y = x\,|x + 2a|$ изображен на рис. 61. Вершина параболы — точка A — имеет координаты $(-a, -a^2)$. Отсюда видно, что прямая $y = a - 1$ пересекает график в одной точке, если $a - 1 > 0$ или $a - 1 < -a^2$ и, значит, уравнение (11) имеет единственное решение, если $a - 1 > 0$ и $a - 1 < -a^2$. Первое неравенство имеет решения $a > 1$, второе $\frac{-\sqrt{5}-1}{2} < a < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Из решений второго неравенства

в область $a>0$ попадают только значения из промежутка $0<a<$ $<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

2) $a=0$. В этом случае $y=x|x|$. График этой функции изображен на рис. 62. Прямая $y=-1$ пересекает этот график в единственной точке и, значит, уравнение имеет единственное решение $x=-1$.

3) $a<0$. В этом случае $-2a>0$ и график функции $y=x|x+2a|$ изображен на рис. 63. В рассматриваемом случае число $a-1$ отрицательно и, значит, прямая $y=a-1$ пересекает график функции $y=x|x+2a|$ в одной точке, т. е. уравнение (11) имеет единственное решение при всех a из рассматриваемой области.

Итак, искомое множество значений параметра a имеет вид $a<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $a>1$.

Ответ: $a<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $a>1$.

2.С. Обозначим через v км/ч скорость притока, а через y км/ч — расстояние по реке от места впадения притока в реку до пункта B. На движение вниз по притоку пароход затратил $\frac{80}{v+18}$ ч, а на движение по реке до пристани B затратил $\frac{y}{15}$ ч. Так как на этот путь пароход всего затратил 18 ч, то

$$\frac{80}{v+18}+\frac{y}{15}=18. \tag{12}$$

На обратное движение пароход затратил: по реке $\frac{y}{21}$ ч, а по притоку $\frac{80}{18-v}$ ч, что составляет 15 ч, следовательно,

$$\frac{y}{21}+\frac{80}{18-v}=15. \tag{13}$$

Из равенства (12): $y=15\left(18-\frac{80}{v+18}\right)$, т. е. $y=30\frac{9v+122}{v+18}$. Подставляя $30\frac{9v+122}{v+18}$ вместо y в равенство (13), получаем уравнение для нахождения v:

$$\frac{10}{7}\cdot\frac{9v+122}{v+18}+\frac{80}{-v+18}=15. \tag{14}$$

Так как по условию задачи $0<v<18$, то это уравнение равносильно уравнению $v^2+64v-132=0$, которое имеет два корня: $v_1=2$ и $v_2=-66$. В промежуток $0<v<18$ попадает лишь один из них, а именно: $v_1=2$. Значит, скорость притока 2 км/ч. Поскольку расстояние между пристанями A и B равно $S=80+y$, т. е. $S=80+30\frac{9v+122}{v+18}$, то, подставляя в это равенство $v=2$, получаем, что $S=290$ км.

Ответ: расстояние от пристани A до пристани B равно 290 км; скорость притока 2 км/ч.

Ответы к вариантам 2—4.

Вариант 2. 1. $\pi n \pm \arccos \sqrt{\frac{3+\sqrt{21}}{8}}$, $n \in Z$. 2.Н. $A = \frac{2}{\ln 3}$; $B = 12 - \frac{12}{\ln^2 3}$. 3. $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\sqrt{r^2 + ar \sin \alpha}}{\sin \frac{\alpha}{2}} - a \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - 2 \right)$. 4. $0 < x < 1$.

5. $a < -7/3$, $a > -2$. 2.С. 2,5 км/ч; 1,5 км/ч.

Вариант 3. 1. $-\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in Z$. 2.Н. $A = 2$; $B = \frac{3}{2\pi}$.

3. $\frac{a\sqrt{3} + r - \sqrt{4r^2 + 2ar\sqrt{3}}}{3}$. 4. $-3 < x < -2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2} < x < 3$.

5. $-1 < a < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 2.С. 14 км/ч.

Вариант 4. 1. $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$. 2.Н. $A = \frac{1}{\ln 2}$; $B = \frac{7}{3}\left(1 - \frac{1}{\ln 2}\right)$.

3. $2r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \left(1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)$. 4. $1/2 < x < 1$. 5. $a < 2$, $a > 7/3$. 2.С. 2,5 км/ч; 1,5 км/ч.

1979

Решение варианта 1.

1.Н. Как известно, тангенс угла наклона касательной к графику функции $y(x)$ в точке с абсциссой x_0 равен $y'(x_0)$. Поэтому все искомые значения x будут корнями уравнения

$$(3 \cos 5x)' = (5 \cos 3x + 2)', \qquad (1)$$

или

$$-15 \sin 5x = -15 \sin 3x.$$

Последнее уравнение можно переписать в равносильном виде:

$$\sin 5x - \sin 3x = 0.$$

Пользуясь формулой для разности синусов углов, находим:

$$2 \sin x \cos 4x = 0.$$

Таким образом, уравнение (1) равносильно совокупности двух уравнений

$$\sin x = 0 \quad \text{и} \quad \cos 4x = 0.$$

Решая их, находим две серии решений: $x = \pi n, n \in Z$; $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$, $k \in Z$.

Ответ: $x = \pi n$, $n \in Z$; $x = \pi/8 + \frac{\pi k}{4}$, $k \in Z$.

2. Обозначим скорости пассажирского и скорого поездов соответственно через $v_п$ км/ч и $v_с$ км/ч. Тогда время, прошедшее от момента выхода поездов из начальных пунктов до их встречи, равно $\frac{2400}{v_п + v_с}$ часов. Если бы оба поезда ехали со скоростью $v_с$, то время в пути составило бы $\frac{2400}{2v_с}$

часов. Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{2400}{v_п+v_с}-\frac{2400}{2v_с}=3. \tag{2}$$

Аналогично составляется второе уравнение

$$\frac{2400}{2v_п}-\frac{2400}{v_п+v_с}=5. \tag{3}$$

Приводя дроби к общему знаменателю, после упрощений получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{v_с-v_п}{v_с(v_п+v_с)}=\dfrac{1}{400}, \\ \dfrac{v_с-v_п}{v_п(v_п+v_с)}=\dfrac{1}{240}. \end{cases}$$

Почленно разделив второе уравнение системы на первое, находим, что $\frac{v_с}{v_п}=\frac{5}{3}$, или $v_с=\frac{5}{3}v_п$. Подставив $\frac{5}{3}v_п$ вместо $v_с$ во второе уравнение

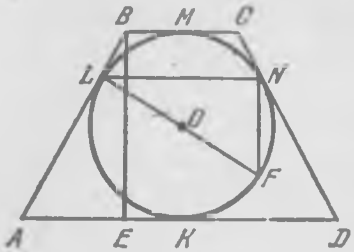


Рис. 64.

системы, получаем, что $v_п=60$. Но тогда $v_с=100$.

Ответ: скорость пассажирского поезда равна 60 км/ч, скорость скорого 100 км/ч.

3. Обозначим вершины трапеции буквами A, B, C, D так, чтобы отрезок AD был большим основанием, а отрезки AB и CD были боковыми сторонами. Точки касания окружности со сторонами трапеции обозначим соответственно через K, L, M и N. По условию $LN \parallel AD$ (рис. 64). Найдем S — площадь трапеции $ABCD$: $S=\frac{|AD|+|BC|}{2}\cdot h$, где h — высота трапеции. Поскольку четырехугольник $ABCD$ описан вокруг окружности, то $|AD|+|BC|=|AB|+|CD|$ и поэтому

$$S=\frac{|AB|+|CD|}{2}\cdot h. \tag{4}$$

Если O — центр окружности, то $OM \perp BC$ и $OK \perp AD$ (радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной). Поскольку $AD \parallel BC$, то $OK \perp BC$. Но через точку O можно провести только один перпендикуляр к BC. Значит, точки O, M, K лежат на одной прямой и $|MK|=2R$. Кроме того, MK — высота трапеции. Таким образом, $h=2R$. Опустим из точки B перпендикуляр BE на AD, а через точку L проведем диаметр LF. Тогда $LF \perp AB$ и $LN \perp BE$ (так как $AD \perp BE$ и $AD \parallel LN$). Отсюда следует, что $\widehat{ABE}=\widehat{FLN}$ (как углы с взаимно перпендикулярными сторонами) и, значит, прямоугольные треугольники ABE и FLN подобны. Из подобия следует, что $\frac{|AB|}{|BE|}=\frac{|LF|}{|LN|}$, или $\frac{|AB|}{2R}=\frac{2R}{b}$. Таким образом, $|AB|=\frac{4R^2}{b}$. Совершению аналогично доказывается, что $|CD|=\frac{4R^2}{b}$. Подставляя найденные значения $|AB|$, $|CD|$, h в равенство (4), находим, что $S=\frac{4R^2}{b}\cdot 2R=\frac{8R^3}{b}$.

Ответ: $S=\frac{8R^3}{b}$.

4. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} x+1>1, \\ (x^2+x-6)^2 \geqslant (x+1)^4 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 0<x+1<1, \\ 0<(x^2+x-6)^2 \leqslant (x+1)^4. \end{cases}$$

Решим сначала первую систему. Второе неравенство этой системы равносильно каждому из следующих неравенств:

$$(x^2+x-6)^2-(x+1)^4 \geqslant 0,$$
$$(x^2+x-6-(x+1)^2)(x^2+x-6+(x+1)^2) \geqslant 0,$$
$$(-x-7)(2x^2+3x-5) \geqslant 0,$$
$$(x+7)(x-1)\left(x+\frac{5}{2}\right) \leqslant 0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов (рис. 65), получаем, что его решениями являются два промежутка: $-\infty<x\leqslant-7$ и $-5/2\leqslant x\leqslant 1$. Решения первого неравенства системы есть промежуток $0<x<+\infty$. Значит, решения первой системы есть промежуток $0<x\leqslant 1$. Теперь решим вторую систему. Неравенство $(x^2+x-6)^2 \leqslant (x+1)^4$ равносильно неравенству

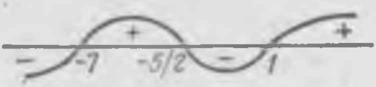


Рис. 65.

$$(x+7)(x-1)\left(x+\frac{5}{2}\right) \geqslant 0.$$

Множество решений этого неравенства есть два промежутка: $-7\leqslant x\leqslant -5/2$, $1\leqslant x<+\infty$. Множество решений неравенства $0<x+1<1$ есть промежуток $-1<x<0$. Неравенство $(x^2+x-6)^2>0$ справедливо для всех x, кроме тех, для которых $x^2+x-6=0$, т. е. кроме $x=2$ и $x=-3$. Теперь очевидно, что вторая система неравенств решений не имеет. Множеством решений исходного неравенства является объединение множеств решений первой и второй системы, т. е. промежуток $0<x\leqslant 1$.

Ответ: $0<x\leqslant 1$.

5. Обозначим произведение xy через t. Тогда первое уравнение системы можно переписать в виде

$$\left(\sqrt{3}+1\right)(1+\cos t\sin t)=\left(\sqrt{3}+1\right)\sin^2 t+\cos 2t, \tag{5}$$

или, что равносильно, в виде

$$\left(\sqrt{3}+1\right)(\sin^2 t+\cos^2 t+\cos t\sin t)=\left(\sqrt{3}+1\right)\sin^2 t+\cos^2 t-\sin^2 t.$$

Поскольку, очевидно, решения уравнения удовлетворяют условию $\cos t\neq 0$, то, разделив обе части последнего уравнения на $\cos^2 t$, получим уравнение

$$\left(\sqrt{3}+1\right)(1+\operatorname{tg} t)=1-\operatorname{tg}^2 t, \tag{6}$$

также равносильное уравнению (5). Обозначив $\operatorname{tg} t$ через z, уравнение (6) можно переписать в виде

$$z^2+(\sqrt{3}+1)z+\sqrt{3}=0.$$

Поскольку это квадратное уравнение имеет корни $z_1=-1$, $z_2=-\sqrt{3}$, то уравнение (5) равносильно совокупности двух уравнений

$$\operatorname{tg} t=-1, \quad \operatorname{tg} t=-\sqrt{3},$$

откуда

$$t=-\frac{\pi}{4}+\pi n, \quad n\in Z; \quad t=-\frac{\pi}{3}+\pi k, \quad k\in Z. \tag{7}$$

Пусть теперь t_0—одно из найденных чисел. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} xy=t_0, \\ x^2y^2-y^2+1=0. \end{cases}$$

Подставляя t_0 вместо xy во второе уравнение, находим, что $y=\pm\sqrt{1+t_0^2}$; далее из первого уравнения находим, что

$$x=\pm\frac{t_0}{\sqrt{1+t_0^2}}.$$

Итак, все числа x, y, удовлетворяющие двум уравнениям данной в условии задачи системы, имеют вид

$$\begin{cases} x=\pm\dfrac{t_0}{\sqrt{1+t_0^2}}, \\ y=\pm\sqrt{1+t_0^2}, \end{cases} \tag{8}$$

где t_0—одно из чисел (7), причем в этих формулах нужно одновременно брать знаки $+$ или знаки $-$. Непосредственной подстановкой легко проверяется, что все числа, найденные по формулам (8), где t_0—любое из чисел (7), удовлетворяют первым двум уравнениям системы.

Следовательно, осталось выбрать из чисел (7) те числа t_0, для которых x и y, найденные по формулам (8), удовлетворяют неравенству данной системы, или, что то же самое, найти в множестве чисел (7) числа, являющиеся решениями неравенства

$$\frac{1+t^2}{t^2}+1+t^2<6. \tag{9}$$

Это неравенство равносильно неравенству

$$\frac{t^4-4t^2+1}{t^2}<0.$$

Поскольку корни квадратного трехчлена z^2-4z+1 равны $2+\sqrt{3}$ и $2-\sqrt{3}$, то последнее неравенство равносильно двойному неравенству

$$2-\sqrt{3}<t^2<2+\sqrt{3},$$

или

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}<|t|<\sqrt{2+\sqrt{3}}. \tag{10}$$

Легко проверить, что числа $t_1=-\pi/4$ и $t_2=-\pi/3$ (см. (7)) удовлетворяют неравенству (10). Если же $n\neq 0$, или $k\neq 0$, то справедливы неравенства:

$$\left|-\frac{\pi}{4}+\pi n\right|\geqslant\pi|n|-\frac{\pi}{4}\geqslant\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}>\frac{2\pi}{3}>2>\sqrt{2+\sqrt{3}},$$

$$\left|-\frac{\pi}{3}+\pi k\right|\geqslant\pi\cdot|k|-\frac{\pi}{3}\geqslant\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}>2>\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Итак, из всех чисел (7) только два числа $t_1=-\pi/4$ и $t_2=-\pi/3$ удовлетворяют неравенству (10), а значит, и неравенству (9). Соответствующие значения x, y легко находятся теперь по формулам (8); они и дают ответ задачи.

Ответ: $x_1=-\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+16}}$, $y_1=\frac{\sqrt{\pi^2+16}}{4}$; $x_2=\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+16}}$, $y_2=-\frac{\sqrt{\pi^2+16}}{4}$; $x_3=-\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+9}}$, $y_3=\frac{\sqrt{\pi^2+9}}{3}$; $x_4=\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+9}}$, $y_4=-\frac{\sqrt{\pi^2+9}}{3}$.

1.С. Данное уравнение можно переписать в следующем равносильном виде

$$\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x=\frac{1}{2},$$

или, пользуясь формулой для синуса суммы двух углов, в виде

$$\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}.$$

Отсюда $3x+\pi/6=\pi/6+2\pi n$, $n\in Z$, или $3x+\pi/6=5\pi/6+2\pi k$, $k\in Z$. Следовательно, получаем две серии решений: $x=\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$; $x=\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$, $k\in Z$.

Ответ: $x=\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$; $x=\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$, $k\in Z$.

Ответы к вариантам 2—4.

Вариант 2. 1.Н. $x=\frac{\pi}{4}n$, $n\in Z$; $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in z$. 2. 16 ч; $\frac{16}{3}$ ч. 3. Длина каждой стороны параллелограмма равна $\frac{4R^2}{S}$. 4. $0<x<1/3$, $2\leqslant x<1+\sqrt{7}$, $-1/3<x<0$, $1-\sqrt{7}<x\leqslant-1$. 5. $x_1=-\frac{\sqrt[3]{4-\pi}}{\sqrt[3]{4}}$, $y_1=-\frac{\pi}{2\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{4-\pi}}$; $x_2=-\sqrt[3]{1-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}$, $y_2=-\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}{\sqrt[3]{1-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}}$.

1.С. $x=\frac{\pi}{12}+(-1)^n\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$.

Вариант 3. 1.Н. $x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5}$, $k\in Z$; $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi l}{2}$, $l\in Z$. 2. 160 деталей. 3. $aR\left(1+\frac{R^2}{b(a-b)}\right)$. 4. $3<x\leq\frac{5+\sqrt{7}}{2}$, $4<x\leq\frac{9}{2}$. 5. $x_1=\frac{\sqrt{\pi^2+36}}{6}$, $y_1=\frac{-\pi}{\sqrt{\pi^2+36}}$; $x_2=\frac{-\sqrt{\pi^2+36}}{6}$, $y_2=\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+36}}$; $x_3=\frac{\sqrt{\pi^2+16}}{4}$, $y_3=\frac{-\pi}{\sqrt{\pi^2+16}}$; $x_4=\frac{-\sqrt{\pi^2+16}}{4}$, $y_4=\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+16}}$. 1.С. $x=\frac{\pi}{20}+\frac{2\pi k}{5}$, $k\in Z$.

Вариант 4. 1.Н. $x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5}$, $k\in Z$; $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$. 2. 6 ч; 4 ч. 3. $S=\frac{1}{2}\frac{R^3(a+R)^3}{(a-R)(a^2+R^2)}$. 4. $x\leq 1$, $3\leq x<5$, $x>7$. 5. $x_1=-\frac{\pi}{2\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4-\pi}}$, $y_1=-\frac{\sqrt[3]{4-\pi}}{\sqrt[3]{4}}$; $x_2=\frac{\operatorname{arctg} 2}{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} 2-1}}$, $y_2=\sqrt[3]{\operatorname{arctg} 2-1}$. 1.С. $x=\frac{\pi}{12}+(-1)^n\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$.

§ 6. ФАКУЛЬТЕТ ПОЧВОВЕДЕНИЯ

1977

Решение варианта 1.

1. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим уравнение

$$4(x+5)=x^2+4x+4. \tag{1}$$

Все корни исходного уравнения являются корнями уравнения (1), но не обязательно все корни уравнения (1) будут корнями исходного уравнения. Поэтому после нахождения корней уравнения (1) из них надо отобрать те, которые будут корнями исходного уравнения. Квадратное уравнение (1) имеет два корня $x_1=4$ и $x_2=-4$. Проверка показывает, что $x_1=4$ является корнем исходного уравнения, а $x_2=-4$ не является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x=4$.

2. Поскольку функции $y=x$ и $y=e^{-3x}$ имеют производную в любой точке x из промежутка $(-\infty, +\infty)$, то данная функция дифференцируема в каждой точке и по правилу нахождения производной произведения $f'(x)=(xe^{-3x})'=x'e^{-3x}+x(e^{-3x})'=e^{-3x}-3xe^{-3x}=e^{-3x}(1-3x)$. Так как $e^{-3x}>0$ для любого действительного числа x, то $f'(x)$ положительна при $x<1/3$, отрицательна при $x>1/3$ и равна нулю при $x=1/3$. Следовательно, на интервале $(-\infty, 1/3)$ функция $f(x)$ возрастает, на интервале $(1/3, +\infty)$ убывает, и так как она непрерывна в точке $x=1/3$, то точка $x=1/3$ является точкой максимума.

Ответ: точка $x=1/3$ — точка максимума; на промежутке $(-\infty, 1/3)$ функция возрастает, на промежутке $(1/3, +\infty)$ убывает.

3. Первое решение. Для освобождения от знака абсолютной величины разобьем числовую ось на две области: первую, в которой $\sin x\geq 0$,

и вторую, в которой $\sin x < 0$. В первой области $|\sin x| = \sin x$ и исходное уравнение переписывается так: $\sin x = \sin x + 2\cos x$, или $\cos x = 0$. Решения последнего уравнения есть $x = \pi/2 + \pi m$, $m \in Z$. Из этих значений x надо выбрать те, которые лежат в рассматриваемой области, т. е. там, где $\sin x \geqslant 0$. Легко видеть, что такими значениями x будут лишь $x = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$. Во второй области $|\sin x| = -\sin x$ и исходное уравнение перепишется так: $-\sin x = \sin x + 2\cos x$, или $\sin x + \cos x = 0$. Переписав это уравнение в виде $\sqrt{2}\sin(x + \pi/4) = 0$, находим его решение $x = -\pi/4 + \pi l$, $l \in Z$. Из этих значений в рассматриваемой области лежат лишь $x = -\pi/4 + 2\pi k$, $k \in Z$. Следовательно, решениями исходного уравнения будут

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in Z; \qquad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Второе решение. Возведя в квадрат обе части уравнения, получим уравнение

$$\sin^2 x = \sin^2 x + 4\sin x\cos x + 4\cos^2 x,$$

или $\cos x(\sin x + \cos x) = 0$. Это уравнение равносильно совокупности двух уравнений $\cos x = 0$ и $\sin x + \cos x = 0$. Первое уравнение имеет решения $x = \pi/2 + \pi k$, $k \in Z$, второе уравнение имеет решения $x = -\pi/4 + \pi l$, $l \in Z$. Поскольку при возведении в квадрат могли появиться лишние корни, необходимо сделать проверку. Непосредственная подстановка показывает, что решениями исходного уравнения будут лишь $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$, и $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$; $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in Z$.

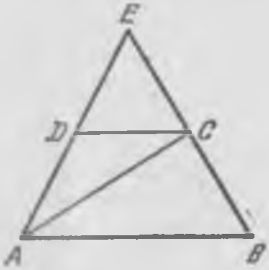


Рис. 66.

4. Продолжим боковые стороны BC и AD (рис. 66) до пересечения их в точке E. Получим треугольник BAE. Так как $|CD| = \frac{1}{2}|AB|$, то из подобия треугольников CED и BEA получаем, что $|CE| = \frac{1}{2}|BE| = |BC| = b$ и $|DE| = \frac{1}{2}|AE| = |AD| = \frac{1}{2}|AB|$, откуда $|AB| = |AE|$. Следовательно, треугольник BAE равнобедренный и AC его медиана. Но в равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является высотой, поэтому площадь треугольника BAE можно вычислить так:

$$S_{BAE} = \frac{1}{2}|AC||BE| = \frac{1}{2}\cdot a\cdot 2b = ab.$$

Так как CD является медианой в треугольнике ACE и так как высоты треугольников ECD и DCA равновелики, то и их площади равны. Далее, так как площадь треугольника ECA равна половине площади треугольника ABE, то площадь треугольника CDE равна $\frac{1}{4}ab$. Площадь трапеции

$ABCD$ равна разности площадей треугольников ABE и DCE, т. е. площадь трапеции равна $ab-\frac{1}{4}ab=\frac{3}{4}ab$.

З а м е ч а н и е. Площадь треугольника CDE можно было бы вычислить с помощью теоремы об отношении площадей подобных многоугольников: так как коэффициент подобия треугольников CDE и BAE равен $\frac{1}{2}$, то $S_{CDE}=\frac{1}{4}S_{BAE}=\frac{ab}{4}$ и $S_{ABCD}=ab-\frac{1}{4}ab=\frac{3}{4}ab$.

Ответ: $\frac{3}{4}ab$.

5. Обозначим через x число рядов в роте при прибытии роты на парад. Численность роты равна $24x$ солдат. После перестройки роты рядов стало $x-2$, а число солдат в новом ряду стало $26+(x-2)$. Для парада осталось $(x-2)(24+x)$ солдат. Число солдат, не участвовавших в параде:

$$24x-(x-2)(24+x)=-x^2+2x+48. \qquad (2)$$

Корни квадратного трехчлена $-x^2+2x+48$ есть $x_1=-6$ и $x_2=8$. Значит, выражение (2) положительно при $-6<x<8$. Так как x — число рядов, то x — число натуральное и потому $1\leqslant x\leqslant 7$. Нам надо из промежутка $1\leqslant x\leqslant 7$ выбрать такие натуральные x, чтобы выражение $A=24x$ являлось бы полным квадратом. Имеем соответственно: $A=24$ при $x=1$, $A=48$ при $x=2$, $A=72$ при $x=3$, $A=96$ при $x=4$, $A=120$ при $x=5$, $A=144$ при $x=6$, $A=168$ при $x=7$. Среди этих чисел A только число 144 является полным квадратом: $144=12^2$. Следовательно, $x=6$ и численность роты равна $24\cdot 6=144$ человека.

Ответ: 144 человека.

2.С. Область допустимых значений уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих условиям $x+1/2>0$, $x-1>0$, $x+5/2>0$, т. е. ОДЗ есть промежуток $1<x<+\infty$. На этой области исходное уравнение равносильно уравнению

$$\lg((x+1/2)^2)=\lg(2(x+5/2)(x-1)).$$

Потенцируя его, получаем уравнение $(x+1/2)^2=2(x+5/2)(x-1)$, равносильное исходному на области $1<x<+\infty$. Последнее уравнение имеет два корня $x_1=3/2$ и $x_2=-7/2$. Из них в область $1<x<+\infty$ входит только $x_1=3/2$. Значит, исходное уравнение имеет единственный корень $x_1=3/2$.

Ответ: $x_1=3/2$.

Ответы к вариантам 2—4.

Вариант 2. 1. $x=1$. 2.Н. $x=-3/2$ — точка минимума; на промежутке $(-\infty, -3/2)$ функция убывает, на промежутке $(-3/2, +\infty)$ функция возрастает. 3. $x=5\pi/6+2\pi k$, $k\in Z$. 4. $\sqrt{4p^2-q^2}$. 5. 44. 2.С. $x=2$.

Вариант 3. 1. $x=19$. 2.Н. $x=1/5$ — точка максимума; на промежутке $(-\infty, 1/5)$ функция возрастает, на промежутке $(1/5, +\infty)$ функция убывает. 3. $x=\pi/4+\pi(2k+1)$, $k\in Z$; $x=2\pi m$, $m\in Z$. 4. $\sqrt{4R^2-l^2}$. 5. 60. 2.С. $x=\frac{1}{2}$.

Вариант 4. 1. $x=2$. 2.Н. $x=2/3$ — точка минимума; на промежутке $(-\infty, 2/3)$ функция убывает, на промежутке $(2/3, +\infty)$ функция возрастает. 3. $x=2\pi/3+2\pi k$, $k \in Z$. 4. $\sqrt{m^2+n^2}/2$. 5. 22. 2.С. $x=1$.

1978

Решение варианта 1.

1. Перенесем члены уравнения из правой части в левую и преобразуем разность косинусов в произведение. Тогда исходное уравнение примет вид

$$2\sin 2x \sin x - 2\sin 2x = 0,$$

откуда следует, что исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\sin 2x = 0 \quad \text{и} \quad \sin x = 1.$$

Решения первого уравнения $x=\pi n/2$, $n \in Z$. Решения второго уравнения $x=\pi/2+2\pi m$, $m \in Z$. Так как все решения второго уравнения содержатся в множестве решений первого уравнения, то все решения исходного уравнения можно записать в виде $x=\pi n/2$, $n \in Z$.

Ответ: $x=\pi n/2$, $n \in Z$.

2. Обозначив $\log_2 x$ через y, перепишем данное неравенство в виде $y^2-3y+2 \geqslant 0$. Множество решений этого неравенства состоит из двух промежутков: $-\infty < y \leqslant 1$ и $2 \leqslant y < +\infty$. Следовательно, исходное неравенство равносильно совокупности двух неравенств

$$\log_2 x \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \log_2 x \geqslant 2.$$

Множество решений первого неравенства есть промежуток $0 < x \leqslant 2$, множество решений второго — промежуток $4 \leqslant x < +\infty$. Объединение этих множеств и дает множество всех решений исходного неравенства. Значит, множество всех решений исходного неравенства состоит из двух промежутков: $0 < x \leqslant 2$, $4 \leqslant x < +\infty$.

Ответ: $0 < x \leqslant 2$, $4 \leqslant x < +\infty$.

3.Н. Решая уравнение $x^2+x=x+1$, находим абсциссы ($x_1=-1$, $x_2=1$) точек пересечения графиков параболы $y=x^2+x$ и прямой $y=x+1$ (рис. 67).

Фигура, площадь S которой необходимо найти, лежит под прямой $y=x+1$ и над параболой $y=x^2+x$ на промежутке от -1 до 1, поэтому

$$S=\int_{-1}^{1}((x+1)-(x^2+x))\,dx=\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx=\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{4}{3}.$$

Ответ: 4/3.

4. Обозначим вершины треугольника буквами A, B, C так, что C — вершина прямого угла и CB — меньший катет (рис. 68). Проведем через точку C плоскость, перпендикулярную прямой AB. Обозначим через D точку пересечения этой плоскости с прямой AB, а через K — основание перпендикуляра, опущенного из точки C на плоскость P. Треугольник CKD — прямоугольный, так как отрезок CK перпендикулярен плоскости P, а DK лежит в плоскости P. Поскольку CD и DK перпендикулярны прямой AB, то угол CDK является углом между плоскостью P и плоскостью

треугольника ABC и, следовательно, $\widehat{CDK}=\alpha$. Необходимо найти $\widehat{CBK}$. Так как CD перпендикулярен AB, то из подобия прямоугольных треугольников CDA и ABC имеем отношение $\frac{|CD|}{|CA|}=\frac{|BC|}{|AB|}$, откуда $|CD|=$ $=\frac{|CA|\cdot|BC|}{|AB|}=\frac{4\cdot3}{5}=\frac{12}{5}$. Из прямоугольного треугольника CDK находим: $|CK|=|CD|\sin\alpha=\frac{12}{5}\sin\alpha$, а из прямоугольного треугольника CBK

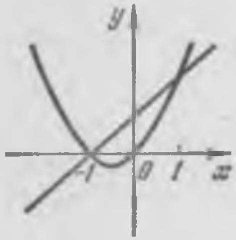


Рис. 67.

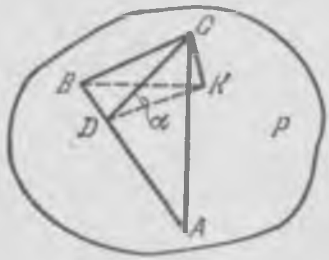


Рис. 68.

имеем $\frac{|CK|}{3}=\sin\widehat{CBK}$, откуда $\sin\widehat{CBK}=\frac{4}{5}\sin\alpha$ и потому $\widehat{CBK}=$ $=\arcsin\left(\frac{4}{5}\sin\alpha\right)$.

Ответ: $\arcsin\left(\frac{4}{5}\sin\alpha\right)$.

5. Область допустимых значений уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих условиям $x^2-3\geqslant0$, $x\geqslant0$, т. е. ОДЗ есть промежуток $\sqrt{3}\leqslant x<+\infty$. Запишем исходное уравнение в виде

$$\sqrt{x}\left(9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}}\right)=3\left(9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}}\right)+6(\sqrt{x}-3),$$

или

$$(\sqrt{x}-3)\left(9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}}-6\right)=0.$$

Это уравнение равносильно на ОДЗ исходного уравнения совокупности уравнений

$$\sqrt{x}-3=0 \quad \text{и} \quad 9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}}-6=0. \qquad (1)$$

Решение первого уравнения есть $x=9$. Это число входит в ОДЗ исходного уравнения и, значит, является единственным решением первого уравнения совокупности (1) на множестве $\sqrt{3}\leqslant x<+\infty$. Для решения второго уравнения обозначим $3^{\sqrt{x^2-3}}$ через y, тогда второе уравнение совокупности (1) запишется в виде

$$y^2-y-6=0.$$

Последнее уравнение имеет два решения: $y_1=-2$ и $y_2=3$. Это означает, что второе уравнение совокупности (1) равносильно на ОДЗ исходного уравнения совокупности уравнений

$$3^{\sqrt{x^2-3}}=-2 \quad \text{и} \quad 3^{\sqrt{x^2-3}}=3.$$

Уравнение $3^{\sqrt{x^2-3}}=-2$ решений не имеет. Уравнение $3^{\sqrt{x^2-3}}=3$ равносильно на ОДЗ исходного уравнения уравнению $\sqrt{x^2-3}=1$, или уравнению $x^2-3=1$. Последнее уравнение имеет два корня: $x_2=2$ и $x_3=-2$. Из этих чисел только $x_2=2$ входит в ОДЗ исходного уравнения и потому является единственным решением второго уравнения совокупности (1) на множестве $3\leqslant x<+\infty$. Объединяя решения на множестве $\sqrt{3}\leqslant x<+\infty$ первого и второго уравнений совокупности (1), получаем, что множество решений исходного уравнения состоит из двух чисел: $x_1=9$ и $x_2=2$.

Ответ: $x_1=9$, $x_2=2$.

3.С. Пусть в одном грамме второго слитка x грамм золота, тогда в одном грамме первого слитка — $2{,}5x$ грамм золота. Если сплавить по одному грамму из каждого слитка, то получим слиток весом в 2 грамма, в котором золота будет $3{,}5x$ грамм. По условию $3{,}5x$ грамм составляет 35% от 2 грамм, поэтому $3{,}5x=\frac{35}{100}\cdot 2$, откуда $x=0{,}2$. Итак, в одном грамме второго слитка 0,2 грамм золота, а в одном грамме первого слитка 0,5 грамм золота.

Пусть вес первого слитка y грамм, а вес второго слитка z грамм, тогда в первом слитке будет $0{,}5y$ грамм золота, а во втором — $0{,}2z$ грамм золота. Если сплавить оба слитка вместе, то получим слиток весом $y+z$ грамм, в котором золота будет $0{,}5y+0{,}2z$ грамм. По условию $0{,}5y+0{,}2z$ грамм составляет 40% от $y+z$ грамм, поэтому

$$0{,}5y+0{,}2z=\frac{40}{100}(y+z).$$

Из этого уравнения находим, что $y=2z$. Это означает, что первый слиток в два раза тяжелее второго.

Ответ: первый слиток в 2 раза тяжелее второго.

Ответы к вариантам 2—4.

Вариант 2. 1. $x=\frac{\pi}{12}(6k\pm 1)$, $k\in Z$. 2. $-\infty<x<1$. 3.Н. $\frac{1}{6}$. 4. $\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}\sin\alpha}{2}\right)$. 5. $x_1=-\frac{13}{5}$, $x_2=-2$, $x_3=3$. 3.С. 15 кг.

Вариант 3. 1. $x=\frac{\pi}{18}(6k\pm 1)$, $k\in Z$. 2. $-\infty<x<2$. 3.Н. $\frac{1}{6}$. 4. $\arcsin\left(\frac{2\sin\alpha}{\sqrt{3}}\right)$. 5. $x_1=1$, $x_2=2$. 3.С. 10 кг; 69%.

Вариант 4. 1. $x=\frac{\pi}{9}(6k\pm 1)$, $k\in Z$; $x=\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. 2. $0<x\leqslant\frac{1}{9}$, $3\leqslant x<+\infty$. 3.Н. $\frac{32}{3}$. 4. $\arcsin\left(\cos\frac{\alpha}{2}\sin\beta\right)$. 5. $x_1=1$, $x_2=4$. 3.С. 1,64 кг; 1,86 кг.

Решение варианта 1.

1. Обозначим $2^{\sqrt{x}}$ через t. Тогда данное уравнение можно переписать так:

$$t-2\cdot t^{-1}=1.$$

Это уравнение равносильно уравнению

$$\frac{t^2-t-2}{t}=0,$$

которое имеет два корня: $t_1=2$, $t_2=-1$. Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$2^{\sqrt{x}}=2 \quad \text{и} \quad 2^{\sqrt{x}}=-1.$$

Первое уравнение равносильно уравнению $\sqrt{x}=1$ и имеет единственный корень $x_1=1$. Второе уравнение решений не имеет, так как -1 не входит в область изменения показательной функции. Значит, исходное уравнение имеет единственный корень $x_1=1$.

Ответ: $x=1$.

2.Н. Данная функция является дробно-рациональной, поэтому она дифференцируема в каждой точке прямой за исключением точки $x=2$. Для производной получаем выражение

$$y'(x)=1-\frac{8}{(x-2)^2}.$$

Из этого выражения следует, что при $x<2$ выполнено неравенство $y'(x)>0$. Таким образом, данная функция монотонно возрастает на множестве $x<2$. Следовательно, наименьшее значение на множестве $[0, 2)$ равно $y(0)=1$.

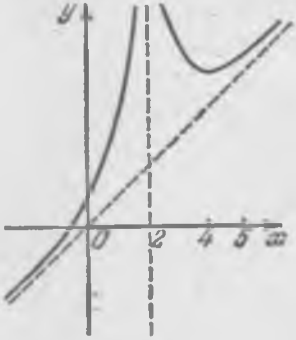


Рис. 69.

Уравнение $y'(x)=0$, или $1-\frac{8}{(x-2)^2}=0$ имеет единственный корень $x=4$. В области $2<x<4$ справедливо неравенство $y'(x)<0$, в области $x>4$ — неравенство $y'(x)>0$. Так как функция $y(x)$ непрерывна в точке $x=4$, то отсюда следует, что:

1) в области $2<x\leqslant 4$ функция $y(x)$ монотонно убывает;

2) в области $4\leqslant x$ функция $y(x)$ монотонно возрастает;

3) точка $x=4$ является точкой минимума.

Доказанные факты означают, что наименьшее значение $y(x)$ в области $x>2$ равно $y(4)=5$. Поскольку точка $x=4$ содержится в множестве $(2, 5]$, то $y(4)$ будет также и наименьшим значением $y(x)$ в области $(2, 5]$.

Таким образом, наименьшее значение $y(x)$ на отрезке $[0, 5]$ равняется меньшему из чисел $y(0)$, $y(4)$, т. е. равно $y(0)=1$.

Приведем график функции $y(x)$, хотя это и не требуется (рис. 69).

Ответ: $y_{\min}=y(0)=1$.

3. Данное уравнение заменим равносильным ему уравнением

$$(1+\sqrt{3})\sin x\cos x=(\sqrt{3}-1)\cos^2 x+\sin^2 x+\cos^2 x.$$

Очевидно, что решения этого уравнения удовлетворяют условию $\cos x\neq 0$; поэтому, разделив обе части его на $\cos^2 x$, получим уравнение

$$(1+\sqrt{3})\operatorname{tg} x=\sqrt{3}+\operatorname{tg}^2 x,$$

или

$$\operatorname{tg}^2 x-(\sqrt{3}+1)\operatorname{tg} x+\sqrt{3}=0,$$

равносильное исходному.

Квадратное уравнение $z^2-(\sqrt{3}+1)z+\sqrt{3}=0$ имеет корни $z_1=1$, $z_2=\sqrt{3}$. Поэтому данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\operatorname{tg} x=1 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} x=\sqrt{3}.$$

Решая эти простейшие уравнения, получаем ответ задачи.

Ответ: $x=\pi/4+\pi n,\ n\in Z;\ x=\pi/3+\pi k,\ k\in Z.$

4. Легко найти высоту трапеции (рис. 70): $h=|AD|\cdot\sin\widehat{DAB}=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Обозначим искомую площадь треугольника BCE (S_{BCE}) через x и площадь треугольника ABE (S_{ABE}) через y. Тогда

$$x+y=S_{ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot 30=\frac{45\sqrt{3}}{2}.$$

Углы EAB и ECD равновелики как накрест лежащие при параллельных прямых AB и DC и секущей AC. По той же причине равновелики углы EBA и EDC. Таким образом, треугольники ABE и CDE подобны (по двум углам). Коэффициент подобия равен $\frac{|CD|}{|AB|}=\frac{24}{30}=\frac{4}{5}$. Следовательно,

$$S_{EDC}=\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot S_{ABE}=\frac{16}{25}y.$$

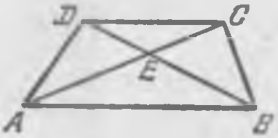


Рис. 70.

Легко видеть, что

$$x+\frac{16}{25}y=S_{BCE}+S_{EDC}=S_{BDC}=\frac{1}{2}h\cdot|CD|=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot 24=18\sqrt{3}.$$

Таким образом, получили систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{45\sqrt{3}}{2}, \\ x+\dfrac{16}{25}y=18\sqrt{3}. \end{cases}$$

Выражая y через x из первого уравнения и подставляя найденное выражение во второе уравнение, после простых вычислений находим, что $x=10\sqrt{3}$.

Ответ: $10\sqrt{3}$ см^2.

5. П е р в о е   р е ш е н и е. Перепишем первое уравнение системы так:

$$10x^2-(2y+38)x+5y^2-6y+41=0.$$

Если (x_0, y_0) — решение данной системы уравнений, то квадратное уравнение

$$10x^2-(2y_0+38)x+5y_0^2-6y_0+41=0$$

имеет корень $x=x_0$. Значит, дискриминант D этого уравнения неотрицателен. Так как

$$D=(2y_0+38)^2-40\cdot(5y_0^2-6y_0+41)=-4\cdot 49(y_0-1)^2,$$

то из неравенства $-4\cdot 49\cdot(y_0-1)^2\geqslant 0$ находим, что $y_0=1$. Это значит, что x_0 является корнем уравнения

$$10x^2-40x+40=0,$$

т. е. $x_0=2$. Итак, если система уравнений имеет решение (x_0, y_0), то $x_0=2$, $y_0=1$. Подставляя найденные числа в уравнения системы, убеждаемся, что действительно система уравнений имеет решение (2, 1).

В т о р о е   р е ш е н и е. Преобразуем многочлен, стоящий в левой части первого уравнения данной системы, следующим образом:

$$10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=$$
$$=10\left(x^2-2\cdot\frac{y+19}{10}x+\left(\frac{y+19}{10}\right)^2\right)+5y^2-6y+41-10\left(\frac{y+19}{10}\right)^2=$$
$$=10\left(x-\frac{y+19}{10}\right)^2+\frac{1}{10}(49y^2-98y+49)=10\left(x-\frac{y+19}{10}\right)^2+\frac{49}{10}(y-1)^2.$$

Отсюда следует, что каждое решение данной системы уравнений является решением системы

$$\begin{cases} x-\dfrac{y+19}{10}=0, \\ y-1=0. \end{cases}$$

Последняя система уравнений имеет единственное решение $x_0=2$, $y_0=1$. Подстановкой в уравнения исходной системы убеждаемся, что пара чисел $x_0=2$, $y_0=1$ действительно является ее решением.

Т р е т ь е   р е ш е н и е. Преобразуем многочлен, стоящий в левой части второго уравнения данной системы:

$$3x^2-2y^2+5xy-17x-6y+20=$$
$$=3\left(x^2+2\cdot\frac{5y-17}{6}x+\left(\frac{5y-17}{6}\right)^2\right)-2y^2-6y+20-3\left(\frac{5y-17}{6}\right)^2=$$
$$=3\left(x+\frac{5y-17}{6}\right)^2-\frac{1}{12}(49y^2-98y+49)=\frac{1}{12}((6x+5y-17)^2-(7y-7)^2)=$$
$$=\frac{1}{12}(6x+12y-24)(6x-2y-10)=(x+2y-4)(3x-y-5).$$

Теперь понятно, что данная система уравнений равносильна следующей совокупности систем уравнений

$$\begin{cases} 10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0, \\ x+2y-4=0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} 10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0, \\ 3x-y-5=0. \end{cases}$$

Каждая из этих систем имеет единственное решение $x_0=2$, $y_0=1$. Значит, исходная система имеет единственное решение $x_0=2$, $y_0=1$.

Заметим, что эту задачу можно решить и другими способами.

Ответ: $x=2$, $y=1$.

2.С. Перенесем члены неравенства из левой части в правую, затем приведем к общему знаменателю и преобразуем числитель с помощью формулы для логарифма частного. В результате получим неравенство

$$\frac{\log_3 \dfrac{x^2-7x+12}{20}}{\log_3 (x^2-7x+12)\cdot\log_3 20} > 0,$$

равносильное исходному. Так как $\log_3 20 > 0$, то это неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} \log_3 \dfrac{x^2-7x+12}{20} > 0, \\ \log_3 (x^2-7x+12) > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \log_3 \dfrac{x^2-7x+12}{20} < 0, \\ \log_3 (x^2-7x+12) < 0. \end{cases}$$

Первая система неравенств равносильна системе

$$\begin{cases} x^2-7x+12 > 20, \\ x^2-7x+12 > 1. \end{cases}$$

Очевидно, что множество решений первого неравенства этой системы содержится в множестве решений второго неравенства. Поэтому система равносильна неравенству $x^2-7x+12 > 20$. Квадратный трехчлен x^2-7x-8 имеет корни $x_1=-1$, $x_2=8$; поэтому множество решений первой системы состоит из двух промежутков: $-\infty < x < -1$ и $8 < x < +\infty$. Вторая система неравенств равносильна системе

$$\begin{cases} 0 < \dfrac{x^2-7x+12}{20} < 1, \\ 0 < x^2-7x+12 < 1, \end{cases}$$

или системе

$$\begin{cases} x^2-7x+12 > 0, \\ x^2-7x+12 < 1. \end{cases}$$

Решая эти квадратные неравенства, получаем, что множество решений первого неравенства состоит из двух промежутков $-\infty<x<3$ и $4<x<+\infty$, а множество решений второго — интервал $\dfrac{7-\sqrt{5}}{2} < x < \dfrac{7+\sqrt{5}}{2}$. Значит, множество решений второй системы неравенств состоит из двух промежутков: $\dfrac{7-\sqrt{5}}{2} < x < 3$, $4 < x < \dfrac{7+\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $x < -1$, $\dfrac{7-\sqrt{5}}{2} < x < 3$, $4 < x < \dfrac{7+\sqrt{5}}{2}$, $x > 8$.

Ответы к вариантам 2—4.

Вариант 2. 1. $x=\dfrac{1}{100}$. 2.Н. Функция возрастает на промежутках $-\infty < x < 2$ и $2 < x < +\infty$, функция убывает на промежутках $0 < x < 1$

и $1 < x < 2$. 3. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n$, $n \in Z$; $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$; $k \in Z$. 4. 40 см². 5. $x = 1$, $y = 1$. 2.С. $0 \leqslant x < 1$, $x > 3$.

Вариант 3. 1. $x = 1$. 2.Н. $y_{\max} = y(3) = -\frac{1}{64}$. 3. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; $x = \frac{\pi}{6} + \pi m$, $m \in Z$. 4. $\frac{54\sqrt{2}}{5}$ см². 5. $x = 2$, $y = 3$. 2.С. $-1{,}1 < x < 4$, $x > 5$.

Вариант 4. 1. $x = 2$. 2.Н. Функция возрастает на промежутках $-\infty < x < -1$ и $-1 < x < 0$, функция убывает на промежутках $0 < x < 1$ и $1 < x < +\infty$. 3. $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} n$, $n \in Z$; $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} m$, $m \in Z$. 4. 1180 см². 5. $x = 1$, $y = 2$. 2.С. $-4 \leqslant x < -2$, $x > 0$.

§ 7. ГЕОГРАФИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

1977

Решение варианта 1.

1. Первое решение. Для освобождения от знака абсолютной величины разделим числовую ось на две области $x + 1 \geqslant 0$ и $x + 1 < 0$, т. е. $x \geqslant -1$ и $x < -1$, и будем решать данное неравенство отдельно в каждой из этих областей. В области $x \geqslant -1$ имеем $|x+1| = x+1$, поэтому исходное неравенство переписывается так: $2(x+1) > x+4$, или $x > 2$. Любое число x из промежутка $2 < x < +\infty$ лежит в области $x \geqslant -1$, следовательно, все x из промежутка $2 < x < +\infty$ являются решениями исходного неравенства.

В области $x < -1$ имеем $|x+1| = -(x+1)$, поэтому исходное неравенство перепишется так: $-2(x+1) > x+4$, или $x < -2$. Любой x из промежутка $-\infty < x < -2$ лежит в области $x < -1$, следовательно, все эти x являются решениями исходного неравенства. Объединяя найденные множества, получаем, что исходному неравенству удовлетворяют все x из двух областей $-\infty < x < -2$ и $2 < x < \infty$ и только они.

Второе решение. Все x из области $x < -4$, очевидно, удовлетворяют данному неравенству. На множестве $x \geqslant -4$ обе части неравенства неотрицательны, значит, оно равносильно на этом множестве неравенству $4(x+1)^2 > (x+4)^2$, или неравенству $x^2 > 4$. Последнему неравенству на множестве $x \geqslant -4$ удовлетворяют все x из двух промежутков $-4 \leqslant x < -2$, $2 < x < +\infty$. Объединяя найденные решения, получаем, что множество решений исходного неравенства состоит из двух промежутков: $-\infty < x < -2$, $2 < x < +\infty$.

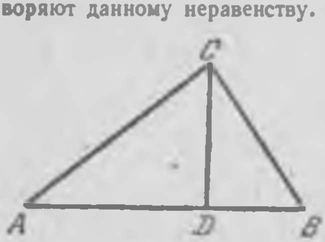


Рис. 71.

Ответ: $-\infty < x < -2$, $2 < x < +\infty$.

2. Обозначим длину отрезка AD через x (рис. 71), тогда длина отрезка DB равна $3 - x$. Из прямоугольного треугольника BDC имеем $|BC|^2 =$

$=|BD|^2+|DC|^2$, или, так как $|BC|=|AD|=x$, то $x^2=(3-x)^2+3$, откуда $x=2$, т. е. $|AD|=2$. Из прямоугольного треугольника ADC имеем $|AC|^2=|AD|^2+|DC|^2$, откуда $|AC|=\sqrt{7}$.

Ответ: $\sqrt{7}$.

3.Н. Областью определения функции $y(x)=\frac{x}{\ln x}$ является множество всех положительных, отличных от 1, чисел. Другими словами, область определения состоит из двух промежутков $0<x<1$ и $1<x<+\infty$. В любой точке области определения эта функция имеет производную. Исследуем сначала поведение функции на промежутке $0<x<1$. Найдем производную функции $y(x)$:

$$y'(x)=\left(\frac{x}{\ln x}\right)'=\frac{(x)'\ln x-x(\ln x)'}{\ln^2 x}=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}.$$

Легко видеть, что в любой точке промежутка $0<x<1$ производная функции $y(x)$ отрицательна, и потому функция на этом промежутке убывает. Так как производная не обращается в нуль на этом промежутке, то на нем нет точек максимума и минимума.

Теперь исследуем поведение функции на промежутке $1<x<+\infty$. Легко видеть, что производная

$$y'(x)=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}$$

обращается в нуль в точке $x=e$, отрицательна на промежутке $1<x<e$ и положительна на промежутке $e<x<+\infty$. Значит, функция $y(x)$ убывает на промежутке $1<x<e$, возрастает на промежутке $e<x<+\infty$ и, так как она непрерывна в точке $x=e$, то имеет в точке $x=e$ минимум.

Ответ: функция убывает на промежутках $0<x<1$ и $1<x<e$, возрастает на промежутке $e<x<+\infty$, имеет точку минимума $x=e$.

4. Обозначим скорость грузовика через x км/ч, тогда скорость гоночного автомобиля на участке AB равна $2x$ км/ч, а на участке BC равна $(2x+40)$ км/ч. Гоночный автомобиль на путь между пунктами A и C затратил $\left(\frac{120}{x}+\frac{1000}{2x+40}\right)$ часов, а грузовик проехал свой путь за $\frac{360}{x}$ ч. Так как время движения грузовика на 5/4 ч меньше времени движения гоночного автомобиля, то

$$\frac{120}{2x}+\frac{1000}{2x+40}-\frac{360}{x}=\frac{5}{4}.$$

Если бы гоночный автомобиль весь свой путь от пункта A до пункта C ехал со скоростью $(2x+40)$ км/ч, то ему для этого понадобилось бы $\frac{1120}{2x+40}$ часов, что по условию на один час больше времени движения грузовика. Поэтому

$$\frac{1120}{2x+40}-\frac{360}{x}=1.$$

Итак, для нахождения x получили систему двух уравнений с одним неизвестным:

$$\begin{cases} \frac{120}{2x}+\frac{1000}{2x+40}-\frac{360}{x}=\frac{5}{4}, \\ \frac{1120}{2x+40}-\frac{360}{x}=1. \end{cases}$$

Для ее решения достаточно решить, например, первое уравнение, и отобрать из найденных решений числа, удовлетворяющие второму уравнению. Переписав первое уравнение в виде

$$x^2-140x+4800=0,$$

находим его корни $x_1=80$ и $x_2=60$. Подставляя x_1 и x_2 во второе уравнение, получаем, что ему удовлетворяет лишь x_2. Следовательно, скорость грузовика равна 60 км/ч.

Ответ: 60 км/ч.

5. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим уравнение

$$4\sin^2(3x+\pi/4)=1+8\sin 2x\cos^2 2x. \qquad (1)$$

Все корни исходного уравнения являются корнями уравнения (1), но не обязательно все корни уравнения (1) будут корнями исходного уравнения. Поэтому после нахождения корней уравнения (1) из них надо отобрать те, которые будут корнями исходного уравнения. Применяя известные формулы имеем

$$\sin^2(3x+\pi/4)=\frac{1-\cos(6x+\pi/2)}{2}=\frac{1}{2}(1+\sin 6x),$$

$$8\sin 2x\cos^2 2x=4\cos 2x(2\sin 2x\cos 2x)=4\cos 2x\sin 4x=2(\sin 6x+\sin 2x).$$

Поэтому уравнение (1) можно переписать так:

$$2+2\sin 6x=1+2\sin 6x+2\sin 2x, \text{ или } \sin 2x=1/2. \qquad (2)$$

Последнее уравнение имеет две серии решений:

$$x=\frac{\pi}{12}+\pi n, \quad n\in Z; \qquad x=\frac{5\pi}{12}+\pi k, \quad k\in Z.$$

Так как уравнение (2) равносильно уравнению (1), то надо проверить, все ли его решения будут решениями исходного уравнения.

Подставляя найденные значения x в правую часть исходного уравнения, получаем число 2. Для $x=\frac{\pi}{12}+\pi n$, $n\in Z$, левая часть исходного уравнения равна

$$2\sin(3x+\pi/4)=2\sin(\pi/2+3\pi n)=2\cos\pi n.$$

Если n — четное число, то $2\cos\pi n=2$, если n — нечетное число, то $2\cos\pi n=-2$. Значит, из первой серии решениями исходного уравнения являются лишь числа

$$x=\pi/12+2\pi m, \quad m\in Z.$$

Для $x=\frac{5\pi}{12}+\pi k$, $k\in Z$, левая часть исходного уравнения равна

$$2\sin(3x+\pi/4)=2\sin(3\pi/2+3\pi k)=-2\cos\pi k.$$

Если k — четное число, то $-2\cos\pi k=-2$, если k — нечетное число, то $-2\cos\pi k=2$. Следовательно, из второй серии решениями исходного уравнения являются лишь числа $x=\frac{5\pi}{12}+(2l+1)\pi$, $l\in Z$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{12}+2\pi m$, $m\in Z$; $x=\frac{5\pi}{12}+(2l+1)\pi$, $l\in Z$.

3.С. Обозначив 2^x через y, получаем квадратное уравнение $y^2-2y-3=0$. Оно имеет два корня $y_1=3$ и $y_2=-1$. Это означает, что исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$2^x=3 \quad \text{и} \quad 2^x=-1.$$

Уравнение $2^x=3$ имеет единственное решение $x=\log_2 3$. Уравнение $2^x=-1$ решений не имеет, так как 2^x положительно для любого действительного числа x. Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x=\log_2 3$.

Ответ: $x=\log_2 3$.

Ответы к вариантам 2—4.

Вариант 2. 1. $0\leqslant x\leqslant 3$. 2. $\sqrt{3}$ м. **3.Н.** Функция возрастает на промежутках $e^2<x<+\infty$ и $-\infty<x<1$, убывает на промежутке $1<x<e^2$, имеет точку минимума $x=e^2$. 4. 10 км/ч. 5. $\pm\frac{4\pi}{3}+8\pi k+4\pi$, $k\in Z$. **3.С.** $x=2$.

Вариант 3. 1. $-3<x<1$. 2. $3\sqrt{3}$ м. **3.Н.** Функция возрастает на промежутке $\sqrt{e}<x<+\infty$, убывает на промежутках $0<x<1$ и $1<x<\sqrt{e}$, имеет точку минимума $x=\sqrt{e}$. 4. 5 деталей. 5. $x=\pi k$, $k\in Z$. **3.С.** $x=\log_3 4$.

Вариант 4. 1. $x\geqslant 1$, $x\leqslant -2$. 2. 6 м. **3.Н.** Функция возрастает на промежутке $0<x<\frac{1}{e}$, убывает на промежутках $\frac{1}{e}<x<1$ и $1<x<\infty$, имеет точку максимума $x=1/e$. 4. 20 м^3. 5. $x=\pi+4\pi k$, $k\in Z$. **3.С.** $x=2$.

1978

Решение варианта 1.

1. Обозначим через x км/ч собственную скорость парохода. Тогда по реке пароход шел со скоростью $(x+1)$ км/ч, а по притоку со скоростью $(x-1)$ км/ч. На путь по реке пароход затратил $\frac{60}{x+1}$ часов, а на путь по притоку $\frac{20}{x-1}$ часов. Весь путь он прошел за 7 часов, значит,

$$\frac{60}{x+1}+\frac{20}{x-1}=7.$$

Освобождаясь в этом уравнении от знаменателей, получаем уравнение $7x^2-80x+33=0$, корни которого $x_1=11$ и $x_2=3/7$. Скорость парохода не может быть меньше 1 км/ч, так как пароход двигался по притоку против течения, скорость которого равняется 1 км/ч. Следовательно, собственная скорость парохода 11 км/ч.

Ответ: собственная скорость парохода 11 км/час.

2.Н. Найдем производную данной функции:

$$y'(x)=\left(\sin x-\frac{2}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x\right)'=$$
$$=(\sin x)'-\frac{2}{3}(\sin 3x)'+\frac{1}{5}(\sin 5x)'=\cos x-2\cos 3x+\cos 5x.$$

Для решения задачи надо найти все x, удовлетворяющие уравнению

$$\cos x-2\cos 3x+\cos 5x=0. \qquad (1)$$

Применив формулу сложения косинусов, уравнение (1) запишем так:

$$2\cos 3x\cos 2x-2\cos 3x=0.$$

Отсюда получаем, что уравнение (1) равносильно совокупности двух уравнений

$$\cos 3x=0 \quad \text{и} \quad \cos 2x=1.$$

Решения первого уравнения $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$. Решения второго уравнения $x=\pi k$, $k\in Z$. Их объединение и дает множество решений уравнения (1), т. е. искомое множество чисел.

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$; $x=\pi k$, $k\in Z$.

3. Обозначим длину отрезка KE через x (рис. 72). Так как $S_{EKMP}=|KE||MK|=5/3$, то $|MK|=\frac{5}{3x}$. Из подобия прямоугольных треугольников MKC и BAC вытекает, что $\frac{|KC|}{|MK|}=\frac{|AC|}{|AB|}$, откуда $|KC|=\frac{|AC||MK|}{|AB|}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{3x}=\frac{5}{4x}$. Из подобия прямоугольных треугольников BEP и BAC следует, что $\frac{|BE|}{|PE|}=\frac{|AB|}{|AC|}$, откуда, так как $|PE|=|MK|$, имеем $|BE|=\frac{|AB||PE|}{|AC|}=\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{3x}=\frac{20}{9x}$. Так как $|BC|=5$ и $|BC|=|BE|+|EK|+|KC|$, то для нахождения x получаем уравнение $\frac{20}{9x}+x+\frac{5}{4x}=5$, которое имеет два корня $x_1=25/6$ и $x_2=5/6$. Значит, либо $|KE|=25/6$, либо $|KE|=5/6$. Если $|KE|=5/6$, то $|MK|=2$ и периметр прямоугольника $EKMP$ равен $5\frac{2}{3}$. Если $|KE|=25/6$, то $|MK|=2/5$ и периметр прямоугольника равен 137/15. Поскольку условию задачи удовлетворяет лишь прямоугольник, периметр которого меньше 9, то стороны прямоугольника равны 2 и 5/6.

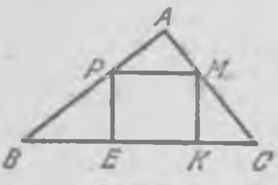


Рис. 72.

Ответ: стороны прямоугольника равны 2 см и $\frac{5}{6}$ см.

4. Поскольку $\log_3(3x^2-4x+2)=2\log_9(3x^2-4x+2)$, то, обозначив $\log_9(3x^2-4x+2)$ через y, перепишем исходное неравенство в виде

$\sqrt{y}+1>2y$, или в виде

$$\sqrt{y}>2y-1. \qquad (2)$$

Отрицательные значения y, очевидно, не удовлетворяют этому неравенству. Для y из промежутка $0\leqslant y<1/2$ правая часть неравенства (2) отрицательна, а левая неотрицательна: значит, все эти y будут решениями неравенства (2). Для $y\geqslant 1/2$ обе части неравенства (2) неотрицательны, поэтому после возведения в квадрат получим неравенство

$$y>(2y-1)^2, \qquad (3)$$

равносильное неравенству (2) на множестве $y\geqslant 1/2$. Решениями квадратного неравенства (3) будут все y из промежутка $1/4<y<1$. Из них условию $y\geqslant 1/2$ удовлетворяют только y из промежутка $1/2\leqslant y<1$. Все эти y будут решениями неравенства (2) на множестве $y\geqslant 1/2$. Объединяя найденные решения, получаем, что решениями неравенства (2) будут все y из промежутка $0\leqslant y<1$. Поэтому исходное неравенство равносильно двойному неравенству

$$0\leqslant \log_9(3x^2-4x+2)<1.$$

Потенцируя его, приходим к двойному неравенству

$$1\leqslant 3x^2-4x+2<9, \qquad (4)$$

или к системе неравенств

$$\begin{cases} 3x^2-4x+2\geqslant 1, \\ 3x^2-4x+2<9, \end{cases}$$

равносильной исходному неравенству. Множество решений первого неравенства этой системы состоит из двух промежутков $1\leqslant x<+\infty$ и $-\infty<x\leqslant 1/3$. Множество решений второго неравенства системы состоит из промежутка $-1<x<7/3$. Следовательно, множество решений системы, а значит, и множество решений исходного неравенства состоит из двух промежутков $-1<x\leqslant 1/3$ и $1\leqslant x<7/3$.

Ответ: $-1<x\leqslant 1/3$, $1\leqslant x<7/3$.

5. Решим первое уравнение системы. Для этого освободимся сначала от знака абсолютной величины. Поскольку $x^2-5x+4=0$ при $x=1$ и $x=4$, то разобьем числовую ось на промежутки $x\leqslant 0$, $0<x\leqslant 1$, $1<x\leqslant 4$, $x>4$ и найдем решения первого уравнения системы в каждом из этих промежутков.

1) Пусть $x\leqslant 0$, тогда $|x^2-5x+4|=x^2-5x+4$, $|x|=-x$, и первое уравнение системы запишется в виде

$$-18x^2-10x+8=0.$$

Это уравнение имеет корни $x_1=-1$ и $x_2=4/9$. В рассматриваемый промежуток входит только $x_1=-1$. Значит, на промежутке $x\leqslant 0$ первое уравнение системы имеет один корень $x_1=-1$.

2) Пусть $0<x\leqslant 1$, тогда $|x^2-5x+4|=x^2-5x+4$, $|x|=x$, и первое уравнение системы запишется в виде

$$2x^2-10x+8=0.$$

Это уравнение имеет корни $x_3=1$ и $x_4=4$, из которых в рассматриваемый промежуток входит только $x_3=1$. Значит, на промежутке $0<x\leqslant 1$ первое уравнение системы имеет один корень $x_3=1$.

3) Пусть $1<x\leqslant 4$, тогда $|x^2-5x+4|=-(x^2-5x+4)$, $|x|=x$, и первое уравнение системы равносильно тождеству $0=0$, т. е. удовлетворяется при любом значении x из промежутка $1<x\leqslant 4$. Значит, любое значение x из промежутка $1<x\leqslant 4$ является решением первого уравнения системы.

4) Пусть $4<x<+\infty$, тогда $|x^2-5x+4|=x^2-5x+4$, $|x|=x$, и первое уравнение системы запишется в виде

$$2x^2-10x+8=0.$$

Это уравнение имеет корни $x_5=1$ и $x_6=4$, ни один из которых не входит в рассматриваемый промежуток. Значит, на промежутке $4<x<+\infty$ первое уравнение системы не имеет решений. Собирая вместе все найденные выше решения, получаем, что решениями первого уравнения являются $x=-1$ и все x из промежутка $1\leqslant x\leqslant 4$. Второе уравнение системы имеет два корня $x_7=a$ и $x_8=a-2$.

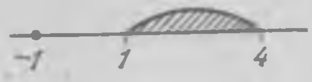


Рис. 73.

На числовой оси (рис. 73) отметим решения первого уравнения. Очевидно, что для любого a решения второго уравнения связаны соотношением $x_8=x_7-2$. Рассмотрим теперь, при каких значениях a система будет совместна; для этого будем рассматривать различные значения a, двигаясь по оси слева направо.

Для любого $a<-1$ оба корня второго уравнения лежат левее любого корня первого уравнения, и потому система несовместна. Если $a=-1$, то, поскольку x_8 будет левее точки $x=-1$, система имеет единственное решение $x_7=-1$. Для любого a из промежутка $-1<a<1$ число x_7 лежит между корнями первого уравнения, а x_8 лежит левее корня первого уравнения, равного -1. Значит, система не будет совместна. Если $a=1$, то, очевидно, система имеет два решения $x_7=1$ и $x_8=-1$. Для любого a из промежутка $1<a<3$ система будет совместна. Ее решение есть только $x_7=a$, так как x_8 будет лежать между числами -1 и 1. Если a из промежутка $3\leqslant a\leqslant 4$, то система имеет два решения $x_7=a$ и $x_8=a-2$, так как оба эти числа лежат на промежутке $[1, 4]$. Если a из промежутка $4<x\leqslant 6$, то система совместна, ее решение есть только $x_8=a-2$, так как x_7 будет находиться правее отрезка $[1, 4]$. Если $a>6$, то система несовместна, так как $x_7>6$ и $x_8>4$. Поскольку нас интересуют лишь те a, для каждого из которых система имеет единственное решение, то из предыдущего вытекает, что условию задачи удовлетворяют $a=-1$, а также любые a из двух промежутков $1<a<3$ и $4<a\leqslant 6$.

Замечание. Последние рассуждения можно провести иначе. Найдем сначала все a, при которых хотя бы одна из точек x_7, x_8 принадлежит множеству $M=\{-1\}\cup[1, 4]$. Ясно, что это будет, если: или $a=-1$, или $1\leqslant a\leqslant 4$, или $a-2=-1$, или $1\leqslant a-2\leqslant 4$, т. е. при $a=-1$ и $1\leqslant a\leqslant 6$. Из найденного множества нужно исключить все значения a, при которых обе точки x_7, x_8 принадлежат M. Это будет, если выполняется одно из

условий:

$$\begin{cases} a-2=-1, \\ 1\leqslant a\leqslant 4 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 1\leqslant a\leqslant 4, \\ 1\leqslant a-2\leqslant 4, \end{cases}$$

т. е. при $a=1$ и $3\leqslant a\leqslant 4$.

Ответ: $a=-1$, $1<a<3$, $4<a\leqslant 6$.

2.С. Это уравнение решено в задаче 2.Н настоящего варианта.

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$; $x=\pi k$, $k\in Z$.

Ответы к вариантам 2—4.

Вариант 2. 1. 9 км/ч; 7 км/ч. 2.Н. $x=\frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$; $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$. 3. $3\sqrt{13}$ см. 4. $-1\leqslant x<3$. 5. $a=1$, $a=2$, $5\leqslant a\leqslant 6$. 2.С. $x=\frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$; $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$.

Вариант 3. 1. 14 км/ч. 2.Н. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; $x=(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$. 3. 4 см; $\frac{10}{3}$ см. 4. $-1<x\leqslant 1/2$, $1\leqslant x<5/2$. 5. $a=1$, $-3<a<-1$, $-6\leqslant a<-4$. 2.С. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; $x=(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$.

Вариант 4. 1. 8 км/ч. 2.Н. $x=\frac{2k}{3}\pi$, $k\in Z$; $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$. 3. 3 см; 8 см. 4. $1\leqslant x<2$. 5. $a=-1$, $a=-2$, $-6\leqslant a\leqslant -5$. 2.С. $x=\frac{2k}{3}\pi$, $k\in Z$; $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$.

1979

Решение варианта 1.

1.Н. Для того чтобы найти наибольшее или наименьшее значения функции на отрезке $[-5, 5]$, достаточно вычислить значения функции в концах отрезка, а также в критических точках, принадлежащих интервалу $(-5, 5)$. Среди полученных чисел нужно выбрать наибольшее или наименьшее. Критические точки найдем, решая уравнение $y'(x)=0$, или $3x^2+6x-72=0$. Корни полученного квадратного уравнения $x_1=4$, $x_2=-6$. Из них только первый принадлежит интервалу $(-5, 5)$. Имеем $y(-5)=400$, $y(5)=-70$, $y(4)=-86$. Следовательно, наибольшее значение равно 400, а наименьшее -86.

Ответ: наибольшее значение равно 400, наименьшее равно -86.

2. Применяя к левой части уравнения формулу для разности синусов, получим уравнение

$$2\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right),$$

или

$$\left(1+2\sin\frac{5\pi}{12}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Так как $\sin\frac{5\pi}{12} > 0$, то $1+2\sin\frac{5\pi}{12} \neq 0$, и значит, исходное уравнение равносильно такому:

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Отсюда находим, что $x+\pi/4=\pi/2+\pi n$, $n \in Z$, т. е. $x=\pi/4+\pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $x=\pi/4+\pi n$, $n \in Z$.

3. Из условия задачи следует, что $|BC|=6$ и $|CD|=6-|BD|$ (рис. 74). Поэтому $\frac{|BD|}{6-|BD|}=2$. Отсюда $|BD|=4$ и $|CD|=2$. Так как угол ADB опирается на диаметр окружности, то $AD \perp BC$. Применяя теперь к прямоугольным треугольникам ABD и ADC теорему Пифагора, имеем

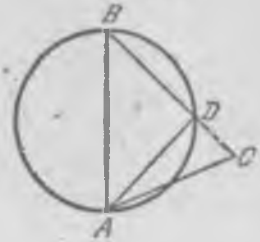


Рис. 74.

$|AB|^2-|BD|^2=|AD|^2$, $|AC|^2-|CD|^2=|AD|^2$, откуда

$$|AB|^2-|BD|^2=|AC|^2-|CD|^2,$$

или

$$36-16=|AC|^2-4.$$

Отсюда находим, что $|AC|=2\sqrt{6}$.

Ответ: $2\sqrt{6}$.

4. Пусть n — число учеников в том классе, о котором сообщается в газете, m — число учеников этого класса, повысивших успеваемость. Тогда процент учеников, повысивших успеваемость, равен $\frac{m}{n}\cdot 100$. По условию задачи

$$2{,}9 < \frac{m}{n}\cdot 100 < 3{,}1. \qquad (1)$$

Из неравенства (1) следует, что $m \neq 0$ (т. е. $m \geq 1$) и что $n \geq \frac{1000}{31}m$. Поскольку очевидно, что $\frac{1000}{31}n \geq \frac{1000}{31} > 32$, то $n \geq 33$. Итак, в классе, о котором сообщается в газете, учеников не меньше, чем 33. Теперь надо выяснить, какое минимальное число учеников все-таки может быть в классе. Легко видеть, что если в классе будет 33 ученика и один из них повысит успеваемость, т. е. если $n=33$ и $m=1$, то такая пара чисел удовлетворяет неравенству (1). Значит, в классе, о котором сообщается в газете, минимально возможное число учеников — 33.

Ответ: 33.

5. Корни квадратного трехчлена $x^2+4x-\cos\frac{3}{2}$ есть $x_1=-2+\sqrt{4+\cos\frac{3}{2}}$ и $x_2=-2-\sqrt{4+\cos\frac{3}{2}}$. Поэтому множество решений данного неравенства имеет вид $x_2 < x < x_1$. В этом множестве нужно выбрать точки, принадлежащие интервалу $-\frac{21}{5} < x < 0$. Так как $0 < \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}$,

то $\cos\frac{3}{2} > 0$ и, значит, $x_1 > 0$. Покажем, что точка x_2 принадлежит интервалу $-\frac{21}{5} < x < 0$. Неравенство $x_2 < 0$ очевидно. Для доказательства неравенства $-\frac{21}{5} < x_2$ воспользуемся тем, что $\frac{\pi}{3} < \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $\cos\frac{3}{2} < \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Тогда $x_2 = -2 - \sqrt{4+\cos\frac{3}{2}} > -2 - \sqrt{4+\frac{1}{2}} = -2 - \frac{3}{2}\sqrt{2}$. Осталось проверить справедливость неравенства $-2-\frac{3}{2}\sqrt{2} > -\frac{21}{5}$, или, что равносильно, неравенства $\sqrt{2} < \frac{22}{15}$. Последнее неравенство справедливо, так как $\left(\frac{22}{15}\right)^2 = \frac{484}{225} > 2$. Итак, $-\frac{21}{5} < x_2 < 0$ и искомое множество имеет вид $x_2 \leqslant x < 0$.

Ответ: $-2-\sqrt{4+\cos\frac{3}{2}} \leqslant x < 0$.

1.С. Обозначив $2^{\log_9 x}$ через y, данное уравнение можно переписать в виде

$$y^2 - 6y + 8 = 0.$$

Полученное уравнение имеет корни $y_1 = 2$, $y_2 = 4$. Значит, исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$2^{\log_9 x} = 2 \quad \text{и} \quad 2^{\log_9 x} = 4.$$

Первое уравнение равносильно уравнению $\log_9 x = 1$, которое имеет корень $x_1 = 9$. Второе уравнение равносильно уравнению $\log_9 x = 2$, которое имеет корень $x_2 = 81$. Значит, исходное уравнение имеет два корня $x_1 = 9$ и $x_2 = 81$.

Ответ: $x_1 = 9$, $x_2 = 81$.

Ответы к вариантам 2—4.

Вариант 2. 1.Н. $y_{max} = 350$, $y_{min} = -497$. 2. $-\pi/4 + \pi k$, $k \in Z$. 3. $|BC| = 6$. 4. 14. 5. $1-\sqrt{1-\cos 5} < x \leqslant -1/3$. 1.С. $x_1 = 1$, $x_2 = 9$.

Вариант 3. 1.Н. $y_{max} = 500$, $y_{min} = -204$. 2. $\pi/4 + \pi n$, $n \in Z$. 3. $|AC| = 2/3$. 4. 32. 5. $\frac{1}{4} \leqslant x < 3 + \sqrt{9+\operatorname{tg}\frac{5}{2}}$. 1.С. $x_1 = 4$, $x_2 = 1/4$.

Вариант 4. 1.Н. $y_{max} = 50$, $y_{min} = -62$. 2. $3\pi/4 + \pi k$, $k \in Z$. 3. $h = 2\sqrt{5}$. 4. 44. 5. $1-\sqrt{1-\sin\frac{7}{2}} \leqslant x < 2$. 1.С. $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

§ 8. ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
(отделение геофизики)

1977

Решение варианта 1.

1. Обозначим через x м³ емкость бака. Пусть за 1 час через первую трубу поступает y м³ воды, а через вторую — z м³. Из условия, что через

первую трубу бак можно наполнить на час быстрее, чем через вторую трубу, получаем уравнение

$$\frac{x}{z}-\frac{x}{y}=1. \qquad (1)$$

Если бы пропускная способность второй трубы была $\left(z+\frac{4}{3}\right)$ м³/ч, то для наполнения бака емкостью $(x+2)$ м³ понадобилось бы $\frac{x+2}{z+4/3}$ ч, что по условию равно $2/y$ ч; следовательно, имеем уравнение

$$\frac{x+2}{z+4/3}=\frac{2}{y}. \qquad (2)$$

Вторая труба наполняет бак за $\frac{x}{z}$ ч. За это время через первую трубу могло бы поступить $\frac{x}{z}y$ м³ воды; по условию получаем уравнение

$$\frac{xy}{z}=3. \qquad (3)$$

Из уравнения (1) $\frac{xy}{z}=x+y$, откуда, с учетом уравнения (3), $y=3-x$. Из уравнения (3) $z=\frac{xy}{3}$, откуда, воспользовавшись равенством $y=3-x$, получаем: $z=\frac{x(3-x)}{3}$. Подставляя $3-x$ вместо y и $\frac{x(3-x)}{3}$ вместо z во второе уравнение, получаем уравнение для нахождения x:

$$\frac{x+2}{\frac{x(3-x)}{3}+\frac{4}{3}}=\frac{2}{3-x}.$$

Это уравнение равносильно уравнению $x^2+3x-10=0$, которое имеет два корня: $x_1=2$ и $x_2=-5$. Так как объем бака положителен, то условию задачи отвечает лишь $x_1=2$. Значит, емкость бака равна 2 м³.

Ответ: 2 м³.

2. Для освобождения от знака абсолютной величины разобьем числовую ось на две области: первую, в которой $5x-3\geq 0$, и вторую, в которой $5x-3<0$, и будем искать решения исходного неравенства в каждой из этих областей отдельно.

В первой области $|5x-3|=5x-3$ и исходное неравенство перепишется так: $x^2-5x+3-x<2$. Решения этого неравенства образуют интервал $3-\sqrt{8}<x<3+\sqrt{8}$. Из найденного множества в рассматриваемую область $\left(x\geq\frac{3}{5}\right)$ попадает промежуток $\frac{3}{5}\leq x<3+\sqrt{8}$. Все эти x и будут решениями исходного неравенства в первой области.

Во второй области $|5x-3|=-(5x-3)$ и исходное неравенство перепишется так: $x^2+4x-5<0$. Множество решений этого неравенства есть интервал $-5<x<1$. Из этого множества в рассматриваемую область $(x<3/5)$ попадает интервал $-5<x<3/5$. Все эти x и будут решениями исходного неравенства во второй области. Поскольку множество решений исходного неравенства является объединением множеств решений в первой и во второй областях, т. е. объединением двух промежутков $-5 < x < 3/5$ и $3/5 \le x < 3+\sqrt{8}$, то это множество есть интервал $-5 < x < 3+\sqrt{8}$.

Ответ: $-5 < x < 3+\sqrt{8}$.

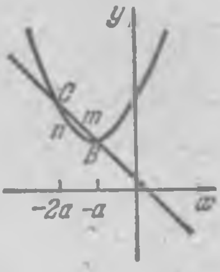


Рис. 75.

3.Н. Пусть a — фиксированное положительное число. Координаты точек пересечения данных параболы и прямой удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2+2ax+3a^2}{1+a^4}, \\ y=\dfrac{a^2-ax}{1+a^4}. \end{cases}$$

Приравнивая правые части уравнений, приходим к равенству $x^2+3ax+2a^2=0$, откуда $x_1=-a$, $x_2=-2a$. Тогда $y_1=\dfrac{2a^2}{1+a^4}$ и $y_2=\dfrac{3a^2}{1+a^4}$. Итак, прямая пересекает параболу в двух точках: $B\left(-a, \dfrac{2a^2}{1+a^4}\right)$ и $C\left(-2a, \dfrac{3a^2}{1+a^4}\right)$ (рис. 75). Вычислим площадь $S(a)$ фигуры $CmBn$. Имеем

$$S(a)=\int\limits_{-2a}^{-a}\left(\frac{a^2-ax}{1+a^4}-\frac{x^2+2ax+3a^2}{1+a^4}\right)dx=$$

$$=\frac{-1}{1+a^4}\int\limits_{-2a}^{-a}(x^2+3ax+2a^2)\,dx=\frac{-1}{1+a^4}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3ax^2}{2}+2a^2x\right)\Bigg|_{-2a}^{-a}=\frac{a^3}{6(1+a^4)}.$$

Надо найти значение a, при котором функция $S(a)$ принимает наибольшее значение на множестве $a>0$. Функция $S(a)$ дифференцируема в каждой точке и

$$S'(a)=\frac{1}{6}\cdot\frac{3a^2\cdot(1+a^4)-4a^3\cdot a^3}{(1+a^4)^2}=\frac{a^2(3-a^4)}{(1+a^4)^2}.$$

Уравнение $S'(a)=0$ имеет в области $a>0$ единственный корень $a_1=\sqrt[4]{3}$. На интервале $0<a<\sqrt[4]{3}$ производная $S'(a)$ положительна, в промежутке $\sqrt[4]{3}<a<+\infty$ производная $S'(a)$ отрицательная. Следовательно, функция $S(a)$ возрастает на промежутке $0<a<\sqrt[4]{3}$ и убывает на промежутке $\sqrt[4]{3}<a<+\infty$. Так как функция $S(a)$ непрерывна в точке $a=\sqrt[4]{3}$, то она в этой точке принимает наибольшее значение. Это значит, что при $a=\sqrt[4]{3}$ данная фигура имеет наибольшую площадь.

Ответ: $a=\sqrt[4]{3}$.

4. Пусть ABC — данный треугольник (рис. 76). Для определенности будем считать, что $|AC|>|AB|$. Тогда $\widehat{AOB}<\widehat{COA}$ и $\widehat{CAO}=\dfrac{\pi-\widehat{COA}}{2}<$ $<\dfrac{\pi-\widehat{AOB}}{2}=\widehat{OAB}$. Так как $\cos\widehat{CAH}=\dfrac{|AH|}{|CA|}<\dfrac{|AH|}{|AB|}=\cos\widehat{HAB}$, то

$\widehat{CAH} > \widehat{HAB}$. Из доказанного следует, что

$$\widehat{OAB} > \frac{1}{2}\widehat{CAB} > \widehat{HAB}. \qquad (4)$$

Так как $\widehat{FAB} = \frac{1}{2}\widehat{CAB}$, то неравенство (4) означает, что точка F лежит между точками E и H. Обозначим через K точку, отличную от A, в которой прямая AO пересекает окружность. Углы AKC и ABC опираются на одну и ту же дугу, следовательно, $\widehat{AKC} = \widehat{ABC}$. Угол ACK прямой, так как опирается на диаметр. Поэтому

$$\widehat{CAK} = \pi/2 - \widehat{AKC} = \pi/2 - \widehat{ABC} = \widehat{BAH}.$$

По условию прямая AF — биссектриса угла CAB, значит,

$$\widehat{EAF} = \widehat{FAH} = \frac{1}{2}\widehat{EAH} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \widehat{AEH}\right) = \frac{\pi}{12}.$$

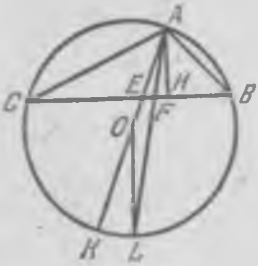


Рис. 76.

Так как треугольник OAL равнобедренный, то высота его, опущенная из вершины O на сторону AL, по величине равна $\frac{1}{2}|AL|\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$, и поэтому

$$S_{OAL} = \frac{1}{2}|AL|\cdot\frac{1}{2}|AL|\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = 8\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}.$$

Из прямоугольных треугольников EAH и FAH находим, что

$$|EA| = \frac{|AH|}{\sin\widehat{AEH}} = \frac{|AH|}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2|AH|}{\sqrt{3}},$$

$$|AF| = \frac{|AH|}{\sin\widehat{AFH}} = \frac{|AH|}{\cos\widehat{FAH}} = \frac{|AH|}{\cos\frac{\pi}{12}},$$

так что

$$S_{EAF} = \frac{1}{2}|EA||AF|\cdot\sin\widehat{EAF} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}|AH|\cdot\frac{|AH|}{\cos\frac{\pi}{12}}\cdot\sin\frac{\pi}{12} = 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}.$$

Далее,

$$S_{OEFL} = S_{OAL} - S_{EAF} = 6\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}.$$

Находим искомое отношение:

$$\frac{S_{OAL}}{S_{OEFL}} = \frac{8\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}{6\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}} = \frac{4}{3}.$$

Ответ: 4/3.

5. Условие задачи можно переформулировать следующим образом: найти все значения k, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 4kx + 3k^2 - 2k - 1 > 0, \\ x^2 + 2kx - 3k^2 + 8k - 4 < 0 \end{cases} \qquad (5)$$

имеет хотя бы одно решение. При фиксированном значении k корни квадратного трехчлена $x^2+2kx-3k^2+8k-4$ есть $x_1=-k+2|k-1|$ и $x_2=-k-2|k-1|$, поэтому множество решений второго неравенства системы (5) есть отрезок

$$-k-2|k-1|\leqslant x\leqslant -k+2|k-1|. \qquad (6)$$

Найдем все значения k, при которых система (5) не имеет решений. Обозначим квадратный трехчлен $x^2+4kx+3k^2-2k-1$ через $f(x)$. Если система (5) не имеет решений, то выполнены неравенства

$$f(x_1)\leqslant 0, \quad f(x_2)\leqslant 0; \qquad (7)$$

в противном случае хотя бы одно из чисел x_1 или x_2 было бы решением системы (5). С другой стороны, если выполнены неравенства (7), то числа x_1, x_2, а значит, и все множество (6) лежат между корнями (включая корни) квадратного трехчлена $f(x)$. Это значит, что для каждого решения x_0 второго неравенства системы (5) выполнено неравенство $f(x_0)\leqslant 0$, т. е. система (5) не имеет решений.

Итак, система (5) не имеет решений тогда и только тогда, когда одновременно выполнены неравенства (7). Легко видеть, что

$$f(x_1)=4k^2-4k|k-1|-10k+3,$$
$$f(x_2)=4k^2+4k|k-1|-10k+3.$$

Поскольку в этих выражениях перед $4k|k-1|$ стоят знаки $+$ и $-$, то система неравенств (7) равносильна системе

$$\begin{cases} 4k^2-4k(k-1)-10k+3\leqslant 0, \\ 4k^2+4k(k-1)-10k+3\leqslant 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -6k+3\leqslant 0, \\ 8k^2-14k+3\leqslant 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Множество решений первого неравенства системы (8) есть промежуток $1/2\leqslant k<+\infty$, множество решений второго неравенства системы (8) есть отрезок $1/4\leqslant k\leqslant 3/2$; поэтому множество всех решений системы (8) есть промежуток $1/2\leqslant k\leqslant 3/2$.

Таким образом, система (5) не имеет решений тогда и только тогда, когда k принадлежит промежутку $1/2\leqslant k\leqslant 3/2$. Значит, если $k<1/2$ или $k>3/2$ и только в этом случае, система (5) имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $k<1/2$, $k>3/2$.

3.С. Воспользовавшись формулами для синуса и косинуса половинного угла $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$, перепишем данное уравнение в виде

$$\frac{1-\cos(4+6x)}{2}+\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+4x\right)}{2}=\frac{1+\cos(4-10x)}{2}+\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-12x\right)}{2},$$

или, после простых преобразований, в виде

$$\sin 12x-\sin 4x=\cos(4-10x)+\cos(4+6x). \qquad (9)$$

Применим к обеим частям получившегося уравнения формулы суммы и разности одноименных тригонометрических функций. Тогда уравнение (9) перепишется в виде

$$2\sin 4x\cos 8x=2\cos(4-2x)\cos 8x,$$

откуда видно, что оно равносильно совокупности двух уравнений

$$\cos 8x=0 \quad \text{и} \quad \sin 4x=\cos(4-2x). \qquad (10)$$

Первое уравнение имеет решения $x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{8}$, $k\in Z$. Второе уравнение можно переписать в виде $\cos\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)-\cos(4-2x)=0$, или

$$-2\sin\left(x+2-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}-2\right)=0.$$

Отсюда следует, что оно равносильно совокупности двух уравнений

$$\sin\left(x+2-\frac{\pi}{4}\right)=0 \quad \text{и} \quad \sin\left(3x-\frac{\pi}{4}-2\right)=0.$$

Решения первого из них есть $x=\frac{\pi}{4}-2+\pi n$, $n\in Z$, решения второго — $x=\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}+\frac{\pi m}{3}$, $m\in Z$. Множество решений исходного уравнения является объединением множеств решений уравнений совокупности (10), т. е. исходное уравнение имеет решения: $x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{8}$, $k\in Z$; $x=\frac{\pi}{4}-2+\pi n$, $n\in Z$; $x=\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}+\frac{\pi m}{3}$, $m\in Z$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{8}$, $k\in Z$; $x=\frac{\pi}{4}-2+\pi n$, $n\in Z$; $x=\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}+\frac{\pi m}{3}$, $m\in Z$.

Ответы к вариантам 2—4.

Вариант 2. 1. 6 км/ч. 2. $x<\frac{4-\sqrt{19}}{3}$, $x>\frac{4+\sqrt{19}}{3}$. 3.Н. $a=\sqrt[3]{4}$. 4. 10. 5. $k<\frac{9-\sqrt{17}}{32}$. 3.С. $x=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{4}+\frac{k\pi}{6}$, $k\in Z$; $x=\frac{3}{8}+\frac{l\pi}{4}$, $l\in Z$; $x=\frac{\pi}{8}+\frac{3}{8}+\frac{m\pi}{2}$, $m\in Z$.

Вариант 3. 1. 72 т. 2. $x\leqslant-5-\sqrt{13}$, $x\geqslant-2+\sqrt{2}$. 3.Н. $a=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. 4. 5. 5. $k\leqslant 0$, $k=1$. 3.С. $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{6}$, $k\in Z$; $x=\frac{3}{7}-\frac{\pi}{14}+\frac{2\pi l}{7}$, $l\in Z$; $x=3-\frac{3\pi}{2}+2\pi m$, $m\in Z$.

Вариант 4. 1. 30 деталей. 2. $x\geqslant\frac{5+\sqrt{3}}{2}$, $x\leqslant\frac{4-\sqrt{2}}{2}$. 3.Н. $a=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. 4. 22. 5. $x\geqslant\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$. 3.С. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; $x=-\frac{1}{4}+\frac{\pi l}{12}$, $l\in Z$; $x=\frac{\pi}{24}-\frac{1}{4}+\frac{\pi m}{6}$, $m\in Z$.

Решение варианта 1.

1. Используя формулы $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ и $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$, перепишем данное уравнение в виде

$$10\cos^2 2x + \cos 2x - 3 = 0.$$

Квадратное уравнение $10y^2 + y - 3 = 0$ имеет корни $y_1 = 1/2$ и $y_2 = -3/5$. Поэтому исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\cos 2x = 1/2 \text{ и } \cos 2x = -3/5.$$

Первое уравнение имеет две серии решений: $x = \pi/6 + \pi k$, $k \in Z$, $x = -\pi/6 + \pi n$, $n \in Z$; второе — также две серии: $x = \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{5}\right) + \pi m$, $m \in Z$; $x = -\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{5}\right) + \pi l$, $l \in Z$. Объединение найденных серий и составит множество решений данного уравнения.

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$; $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{5}\right) + \pi n$, $n \in Z$.

2.Н. Четыре мальчика из семи можно выбрать C_7^4 способами; три девочки из восьми можно выбрать C_8^3 способами. Отсюда следует, что требуемое разбиение на две команды можно осуществить $C_7^4 \cdot C_8^3$ способами. Имеем

$$C_7^4 \cdot C_8^3 = \frac{7!}{4!\,3!} \cdot \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot \frac{6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 35\cdot 56 = 1960.$$

Ответ: 1960 способами.

3. Данное неравенство равносильно двойному неравенству

$$0 < \log_{9/16}(x^2 - 4x + 3) \leqslant 1,$$

или

$$1 > x^2 - 4x + 3 \geqslant 9/16.$$

Последнее неравенство можно переписать в виде следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 < 1, \\ x^2 - 4x + 3 \geqslant 9/16. \end{cases}$$

Множество решений первого неравенства этой системы есть промежуток $2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$; множество решений второго неравенства состоит из двух промежутков: $x \leqslant 3/4$ и $13/4 \leqslant x$. Так как $2 - \sqrt{2} < 3/4$ и $13/4 < 2 + \sqrt{2}$, то множество решений системы неравенств, а значит и исходного неравенства, состоит из двух промежутков: $2 - \sqrt{2} < x \leqslant 3/4$ и $13/4 \leqslant x < 2 + \sqrt{2}$.

Ответ: $2 - \sqrt{2} < x \leqslant 3/4$, $13/4 \leqslant x < 2 + \sqrt{2}$.

4. Проведем через точку L прямую LM параллельно прямой CK (рис. 77). Из подобия треугольников MBL и KBC следует, что $\frac{|BM|}{|BK|} = \frac{|BL|}{|BC|} = \frac{1}{3}$, откуда $|BM| = \frac{1}{3}|BK| = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}|AB| = \frac{2}{9}|AB|$ и $|AM| = \frac{7}{9}|AB|$. Из

подобия треугольников AKQ и AML находим:

$$\frac{|AQ|}{|AL|}=\frac{|AK|}{|AM|}=\frac{\frac{1}{3}|AB|}{\frac{7}{9}|AB|}=\frac{3}{7} \quad \text{и} \quad |QL|=\frac{4}{7}|AL|.$$

Кроме того, имеем следующие равенства:

$$S_{BQC}=S_{BQL}+S_{QLC}=$$
$$=\frac{1}{2}|BL||QL|\sin\widehat{BLQ}+\frac{1}{2}|LC||QL|\sin\widehat{QLC}=$$
$$=\frac{4}{7}\left(\frac{1}{2}|BL||AL|\sin\widehat{BLQ}+\frac{1}{2}|LC||AL|\sin\widehat{QLC}\right)=$$
$$=\frac{4}{7}(S_{ABL}+S_{ALC})=\frac{4}{7}S_{ABC}.$$

Значит, $S_{ABC}=\frac{7}{4}S_{BQC}=\frac{7}{4}$.

Ответ: 7/4.

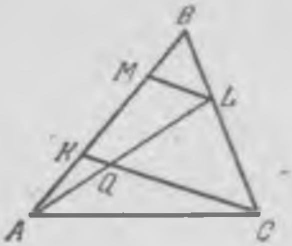


Рис. 77.

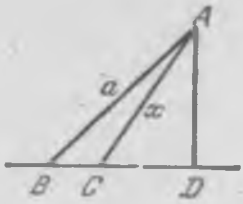


Рис. 78.

5. Обозначим через a км расстояние между пунктами A и B (ясно, что $a \geqslant 8$), через v км/ч — скорость движения автомобиля по полю и через D — точку на дороге, наименее удаленную от пункта A (рис. 78). Тогда $AD \perp BD$ и $|AD|=8$ км. Очевидно, что, если точки B и D совпадают, т. е. если $|AB|=8$ км, то условия задачи выполнены. Значит, $|AB|=8$ км является одним из ответов к задаче. В дальнейшем будем считать, что точки B и D различны, т. е. $a>8$, и пункт B лежит по левую сторону от прямой AD, если смотреть из точки D в поле по направлению к пункту A (рис. 78). Ясно, что последнее предположение не умаляет общности рассуждения, так как любые два расположения пункта B на дороге, симметричные относительно прямой AD, одновременно или удовлетворяют условию задачи или не удовлетворяют. Пусть точка C лежит на отрезке BD и отлична от точки B. Обозначим через x км расстояние между точками A и C. Тогда $8 \leqslant x < a$ и время, за которое автомобиль проедет путь ACB, равно

$$\frac{|AC|}{v}+\frac{|BC|}{2v}=\frac{x}{v}+\frac{\sqrt{a^2-64}-\sqrt{x^2-64}}{2v}.$$

По условию для всех x из промежутка $8 \leqslant x < a$ справедливо неравенство

$$\frac{x}{v}+\frac{\sqrt{a^2-64}-\sqrt{x^2-64}}{2v} \geqslant \frac{a}{v}, \tag{1}$$

или, что равносильно, неравенство

$$2(x-a)+\sqrt{a^2-64}\geqslant\sqrt{x^2-64}. \qquad (2)$$

Докажем, что если при некотором a ($a>8$) множество решений неравенства (2) содержит промежуток $8\leqslant x<a$, то находящийся на дороге пункт B, удаленный от пункта A на расстояние a км, удовлетворяет условию задачи. Пусть $|AB|=a$ удовлетворяет сформулированному выше условию. Если точка C лежит на прямой BD левее точки B (точка C_1 на рис. 79), то $|AC|>|AB|$ и, значит, поездка по пути ACB займет больше времени, чем по пути AB. Если точка C лежит на отрезке BD и отлична от B (рис. 78), то для $x=|AC|$ будет выполнено неравенство $8\leqslant x<a$ и, по предположению, справедливо неравенство (2). Тогда справедливо и неравенство (1). Но это означает, что поездка по пути ACB займет не меньше времени, чем по пути AB. Если точка C лежит на прямой BD правее точки D (точка C_2 на рис. 79), то $|AC|>|AD|$ и $|BC|>|BD|$. Следовательно, поездка по пути ACB в этом случае займет времени больше, чем поездка по пути ADB и, значит, по доказанному ранее, больше, чем поездка по пути AB. Значит, сформулированное выше утверждение доказано.

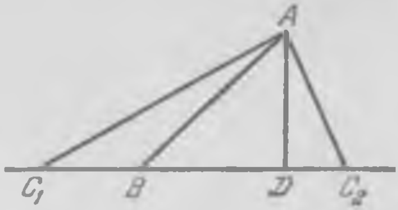


Рис. 79.

Итак, условию задачи удовлетворяют те и только те из точек B, отличных от D, для которых при $a=|AB|$ множество решений неравенства (2) содержит промежуток $8\leqslant x<a$. Пусть a—любое фиксированное число такое, что $a>8$. Найдем решения неравенства (2), содержащиеся в области $8\leqslant x<a$. В этой области неравенство (2) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 2(x-a)+\sqrt{a^2-64}\geqslant 0, \\ (2(x-a)+\sqrt{a^2-64})^2\geqslant x^2-64. \end{cases}$$

Полученную систему неравенств можно после тождественных преобразований заменить равносильной ей системой, которая имеет вид

$$\begin{cases} x\geqslant a-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-64}, \\ (x-a)(3x-5a+4\sqrt{a^2-64})\geqslant 0. \end{cases}$$

Последняя система неравенств на множестве $8\leqslant x<a$ равносильна системе

$$\begin{cases} x\geqslant a-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-64}, \\ 3x-5a+4\sqrt{a^2-64}\leqslant 0, \end{cases}$$

которую можно переписать в виде двойного неравенства

$$a-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-64}\leqslant x\leqslant\frac{5a}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{a^2-64}. \qquad (3)$$

Для искомых значений a весь промежуток $8\leqslant x<a$ должен содержаться в множестве (3). Следовательно, искомые значения параметра a являются

решениями системы неравенств

$$\begin{cases} a-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-64}\leqslant 8, \\ a\leqslant\frac{5a}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{a^2-64}, \\ a>8. \end{cases}$$

Эта система после преобразований может быть переписана так:

$$\begin{cases} 2a-16\leqslant\sqrt{a^2-64}, \\ 2\sqrt{a^2-64}\leqslant a, \\ a>8. \end{cases} \tag{4}$$

На множестве $a>8$ левые и правые части первого и второго неравенств (4) неотрицательны, поэтому система (4) равносильна системе

$$\begin{cases} (2a-16)^2\leqslant a^2-64, \\ 4(a^2-64)\leqslant a^2, \\ a>8, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 3a^2-64a+320\leqslant 0, \\ 3a^2-256\leqslant 0, \\ a>8. \end{cases} \tag{5}$$

Множество решений первого неравенства системы (5) есть промежуток $8\leqslant a\leqslant 40/3$, а множество решений второго — промежуток $-16/\sqrt{3}\leqslant \leqslant a\leqslant 16/\sqrt{3}$. Поэтому множество решений системы (5), а значит, и множество решений задачи, есть промежуток $8<a\leqslant 16/\sqrt{3}$. Добавляя сюда найденное ранее значение $a=8$, получаем ответ задачи.

Ответ: $8\text{ км}\leqslant|AB|\leqslant\frac{16}{\sqrt{3}}$ км.

2.С. Для освобождения от знака абсолютной величины разобьем числовую ось на три области: первую, в которой $x\geqslant 13/5$, вторую, в которой $6/5<x<13/5$, и третью, в которой $x\leqslant 6/5$.

В первой области $|5x-13|=5x-13$, $|6-5x|=-(6-5x)$, и поэтому исходное уравнение перепишется так:

$$5x-13+(6-5x)=7.$$

Это уравнение решений не имеет, значит, и исходное уравнение не имеет решений на множестве $x\geqslant 13/5$.

Во второй области $|5x-13|=-(5x-13)$ и $|6-5x|=-(6-5x)$, поэтому исходное уравнение перепишется так:

$$-5x+13+6-5x=7.$$

Полученное уравнение имеет решение $x=6/5$. Это значение x не попадает в рассматриваемую область и, значит, не является решением исходного уравнения.

В третьей области $|5x-13|=-(5x-13)$ и $|6-5x|=6-5x$, поэтому исходное уравнение запишется так:

$$-5x+13-6+5x=7.$$

Этому уравнению удовлетворяют все x из промежутка $(-\infty, +\infty)$. Следовательно, решением исходного уравнения являются все x из третьей области, т. е. все $x \leqslant 6/5$.

Ответ: $x \leqslant 6/5$.

Ответы к вариантам 2—4.

Вариант 2. 1. $\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n \in Z; \quad \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3}+\pi m, \quad m \in Z$. 2.Н. $2C_6^3 C_{12}^3=6600$. 3. $\frac{1-3\sqrt{3}}{2} \leqslant x<-2,\ 3<x<\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$. 4. 6,4. 5. $\frac{20\sqrt{2}}{3} \leqslant a \leqslant 10$. 2.С. $x \leqslant 2/3$.

Вариант 3. 1. $\pm \frac{\pi}{6}+\pi n, \quad n \in Z; \quad \pm \frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{3}{4}\right)+\pi k, \quad k \in Z$. 2.Н. $C_6^3 C_8^4$. 3. $-2 \leqslant x<1-\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5} \leqslant x<4$. 4. 3/2. 5. $15/2 \leqslant a \leqslant 2\sqrt{15}$. 2.С. $x \leqslant 5/9$.

Вариант 4. 1. $\pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3}+\pi n,\ n \in Z$. 2.Н. $C_{18}^4 C_{14}^3$. 3. $\frac{-3-\sqrt{29}}{2}<x<\frac{-3-3\sqrt{3}}{2},\ \frac{-3+3\sqrt{3}}{2}<x<\frac{-3+\sqrt{29}}{2}$. 4. 11/16. 5. $5\sqrt{15} \leqslant a \leqslant 20$. 2.С. $x \leqslant 11/7$.

1979

Решение варианта 1.

1. Если $a=0$, то уравнение, очевидно, решений не имеет. Пусть a — фиксированное число, отличное от нуля. Тогда данное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{1}{2a-x}=\frac{3}{a},$$

или $2a-x=\frac{a}{3}$, откуда $x=\frac{5a}{3}$.

Ответ: если $a=0$, то нет x, удовлетворяющих условию задачи; если $a \neq 0$, то $x=\frac{5a}{3}$.

2. Область допустимых значений данного уравнения есть промежуток $-\infty<x<1$. В этой области уравнение равносильно уравнению

$$1+2 \lg (1-x)-\lg (1+x^2)=2 \lg (1-x),$$

или уравнению $1+x^2=10$. Последнее уравнение имеет два корня $x_1=-3$, $x_2=3$, из которых в ОДЗ данного уравнения входит только $x_1=-3$.

Ответ: $x=-3$.

3. Так как $\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$, то найдется угол φ, для которого $\cos \varphi=\frac{5}{\sqrt{29}}$, $\sin \varphi=\frac{2}{\sqrt{29}}$. Например, $\varphi=\arccos \frac{5}{\sqrt{29}}$. Тогда

$$5 \sin x+2 \cos x=\sqrt{29}(\cos \varphi \sin x+\sin \varphi \cos x)=\sqrt{29} \sin (x+\varphi),$$

и данное уравнение можно переписать так:

$$\sin (x+\varphi)=\frac{A}{\sqrt{29}}. \qquad (1)$$

Уравнение (1) имеет решения тогда и только тогда, когда $\left|\frac{A}{\sqrt{29}}\right| < 1$, т. е. когда $-\sqrt{29} < A < \sqrt{29}$.

Ответ: $-\sqrt{29} < A < \sqrt{29}$.

4. Обозначим скорость товарного поезда через x км/ч. Тогда из условия задачи следует, что скорости пассажирского и скорого поездов равны соответственно $\frac{8}{5}x$ км/ч и $(x+50)$ км/ч. Если расстояние между городами равно S км, то время, за которое товарный, пассажирский и скорый поезда пройдут это расстояние, равно соответственно $\frac{S}{x}$ ч, $\frac{S}{\frac{8}{5}x}$ ч, $\frac{S}{x+50}$ ч. Из условия задачи вытекает теперь справедливость равенств:

$$\begin{cases} \frac{S}{x} - \frac{S}{x+50} = 4, \\ \frac{5S}{8x} - \frac{S}{x+50} = 1. \end{cases}$$

Полученную систему уравнений можно переписать так:

$$\begin{cases} \frac{50S}{x(x+50)} = 4, \\ \frac{S(250-3x)}{8x(x+50)} = 1. \end{cases}$$

Разделив почленно первое уравнение системы на второе, получим уравнение

$$\frac{400}{250-3x} = 4,$$

откуда $x = 50$.

Ответ: скорости товарного и скорого поездов равны соответственно 50 км/ч и 100 км/ч.

5. Из условия задачи вытекает, что

$$\sin\widehat{ABC} = \sqrt{1-\left(-\frac{63}{65}\right)^2} = \frac{16}{65},$$

$$\cos\widehat{DAB} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

Тогда

$$\sin(\widehat{ABC}+\widehat{DAB}) = \frac{16}{65}\cdot\frac{4}{5} + \left(-\frac{63}{65}\right)\cdot\frac{3}{5} = -\frac{5}{13}.$$

Это означает, в частности, что $\widehat{ABC}+\widehat{DAB} > \pi$ и прямые AD и BC пересекаются в некоторой точке K (рис. 80). Далее, $\widehat{AKB} = \pi - \widehat{KAB} - \widehat{KBA} = \pi - (\pi - \widehat{DAB}) - (\pi - \widehat{ABC}) = \widehat{ABC} + \widehat{DAB} - \pi$ и $\sin\widehat{AKB} = -\sin(\widehat{ABC}+\widehat{DAB}) = 5/13$. Из треугольника AKB по теореме синусов

$\frac{|KB|}{\sin\widehat{KAB}}=\frac{|AB|}{\sin\widehat{AKB}}$, откуда $|KB|=|AB|\cdot\frac{\sin\widehat{KAB}}{\sin\widehat{AKB}}=\frac{25}{64}\cdot\frac{3/5}{5/13}=\frac{39}{64}$. Значит, $|KC|=|KB|+|BC|=\frac{39}{64}+12\frac{25}{64}=13$. Применяя теорему синусов к треугольнику KCD, получаем равенство

$$\frac{|CD|}{\sin\widehat{AKB}}=\frac{|KC|}{\sin\widehat{KDC}},$$

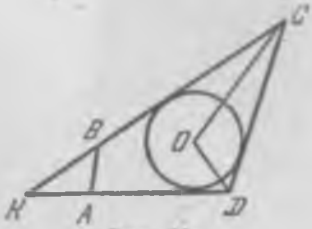


Рис. 80.

откуда

$$\sin\widehat{KDC}=\frac{|KC|}{|CD|}\sin\widehat{AKB}=\frac{13}{25/4}\cdot\frac{5}{13}=\frac{4}{5}.$$

Так как по условию $\widehat{KDC}>\pi/2$, то $\cos\widehat{KDC}=-\sqrt{1-(4/5)^2}=-3/5$. Применяя теорему синусов к треугольнику OCD, получим равенство

$$\frac{|OC|}{\sin\widehat{ODC}}=\frac{|CD|}{\sin\widehat{DOC}},$$

откуда

$$|OC|=|CD|\cdot\frac{\sin\widehat{ODC}}{\sin\widehat{DOC}}. \tag{2}$$

Так как центр окружности O лежит на пересечении биссектрис углов KDC и BCD, то

$$\sin\widehat{ODC}=\sin\left(\frac{1}{2}\widehat{KDC}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\widehat{KDC}}{2}}=\sqrt{\frac{1+3/5}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\sin\widehat{DOC}=\sin(\pi-\widehat{ODC}-\widehat{OCD})=\sin\frac{\widehat{ADC}+\widehat{BCD}}{2}=$$

$$=\sin\left(\frac{2\pi-\widehat{DAB}-\widehat{ABC}}{2}\right)=\sin\left(\frac{\widehat{DAB}+\widehat{ABC}}{2}\right)=$$

$$=\cos\frac{1}{2}\widehat{AKB}=\sqrt{\frac{1+\cos\widehat{AKB}}{2}}.$$

Поскольку $\cos\widehat{AKB}=\sqrt{1-\sin^2\widehat{AKB}}=\sqrt{1-(5/13)^2}=12/13$, то $\sin\widehat{DOC}=\sqrt{\frac{1+12/13}{2}}=5/\sqrt{26}$. Из (2) теперь находим, что $|OC|=\frac{25}{4}\times\frac{2/\sqrt{5}}{5/\sqrt{26}}=\sqrt{\frac{65}{2}}$.

Ответ: $|OC|=\sqrt{\frac{65}{2}}$.

6. Пусть x удовлетворяет условию задачи. Если $x=0$, то имеется единственная пара чисел (a, b), удовлетворяющая неравенствам

$$abx\geqslant 4a+7b+x, \tag{3}$$
$$a\geqslant 0,\ b\geqslant 0, \tag{4}$$

а именно: $a=0$, $b=0$. Но для этой пары не выполнено неравенство $ab \geqslant 5$. Следовательно, $x > 0$. Неравенство (3) можно переписать в виде

$$a(bx-4) \geqslant 7b+x. \tag{5}$$

Пусть b — любое число, удовлетворяющее неравенству $b > 4/x$. Условие задачи означает, что для каждого числа a, удовлетворяющего условиям $a \geqslant 0$ и (5), т. е. для каждого a такого, что $a \geqslant \frac{7b+x}{bx-4}$, должно быть выполнено неравенство $a \geqslant 5/b$. Это возможно только в том случае, когда

$$\frac{7b+x}{bx-4} \geqslant \frac{5}{b}$$

или, поскольку $b > \frac{4}{x} > 0$, когда

$$b(7b+x) \geqslant 5(bx-4).$$

Последнее неравенство можно переписать в виде

$$7b^2-4bx+20 \geqslant 0. \tag{6}$$

Итак, для каждого b из области $b > \frac{4}{x}$ должно быть выполнено неравенство (6).

Дискриминант D квадратного трехчлена $7t^2-4tx+20$ равен $16x^2-560$. Поэтому, если $D=16x^2-560 \leqslant 0$, т. е. если $0 < x \leqslant \sqrt{35}$ (здесь уже учтено условие $x > 0$), то неравенство (6) выполнено при всех b. Абсцисса вершины параболы, соответствующей трехчлену $7t^2-4tx+20$, лежит в точке $2x/7$. Так как при $x > \sqrt{35}$ справедливы неравенства $\frac{2x}{7} > \frac{4}{x}$ и $D > 0$, то не при всех b из области $b > \frac{4}{x}$ выполнено (6) $\left(\text{например, при } b=\frac{2x}{7}\right)$.

Итак, все искомые значения x лежат в области

$$0 < x \leqslant \sqrt{35}. \tag{7}$$

Пусть x — любое число из области (7). Докажем, что оно удовлетворяет условию задачи. Пусть пара чисел (a, b) удовлетворяет неравенствам (3), (4). Тогда $a > 0$ и $b > 0$. Если b лежит в области $0 < b \leqslant \frac{4}{x}$, то $bx-4 \leqslant 0$ и, ввиду того, что $a > 0$ и $7b+x \geqslant 0$, не выполняется неравенство (5), т. е. неравенство (3). Значит, $b > \frac{4}{x}$. Если $0 < a < 5/b$, то ввиду (5) получаем, что

$$\frac{7b+x}{bx-4} < \frac{5}{b},$$

или $7b^2-4bx+20 < 0$. Но это невозможно, так как при x из области (7) дискриминант квадратного трехчлена $7t^2-4tx+20$ неположителен. Следовательно, $a \geqslant 5/b$, или $ab \geqslant 5$.

Ответ: $0 < x \leqslant \sqrt{35}$.

Ответы к вариантам 2—4.

Вариант 2. 1. Если $a=0$, то нет x, удовлетворяющих условию задачи; если $a \neq 0$, то $x=a/3$. 2. $x=-9$. 3. $-\sqrt{58} \leqslant A \leqslant \sqrt{58}$. 4. 5%; 10%. 5. $6/\sqrt{5}$. 6. $0 < x \leqslant \sqrt{32}$.

Вариант 3. 1. Если $a=0$, то нет x, удовлетворяющих условию задачи; если $a \neq 0$, то $x=3a/2$. 2. $x=8$. 3. $-\sqrt{97} \leqslant A \leqslant \sqrt{97}$. 4. 60 м³/ч; 24 м³/ч. 5. 103/65. 6. $0 < x \leqslant \sqrt{60}$.

Вариант 4. 1. Если $a=0$, то нет x, удовлетворяющих условию задачи; если $a \neq 0$, то $x=a/4$. 2. $x=2$. 3. $-\sqrt{13} \leqslant A \leqslant \sqrt{13}$. 4. 2 м; 3 м. 5. $103\sqrt{17}/130$. 6. $0 < x \leqslant \sqrt{96}$.

§ 9. ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
(отделение общей геологии)

1977

Решение варианта 1

1. Перенесем правую часть данного неравенства влево и приведем все члены неравенства к общему знаменателю. В результате получим неравенство

$$\frac{11\cdot 3^{x-1}-31-20\cdot 9^x+55\cdot 3^{x-1}+25}{4\cdot 9^x-11\cdot 3^{x-1}-5} \geqslant 0, \qquad (1)$$

равносильное исходному. Обозначив 3^x через y, неравенство (1) можно переписать в виде

$$\frac{60y^2-66y+18}{12y^2-11y-15} \leqslant 0,$$

или

$$\frac{(y-1/2)(y-3/5)}{(y+3/4)(y-5/3)} \leqslant 0. \qquad (2)$$

Пользуясь методом интервалов (рис. 81), находим множество решений неравенства (2): $-3/4 < y \leqslant 1/2$, $3/5 \leqslant y < 5/3$. Таким образом, исходное неравенство равносильно совокупности двух двойных неравенств:

$$-\frac{3}{4} < 3^x \leqslant \frac{1}{2} \text{ и } \frac{3}{5} \leqslant 3^x < \frac{5}{3}.$$

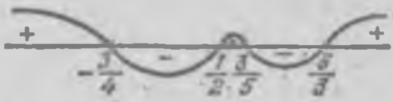


Рис. 81.

Множество решений первого неравенства есть промежуток $-\infty < x \leqslant \log_3 \frac{1}{2}$, множество решений второго — промежуток $\log_3 \frac{3}{5} \leqslant x < \log_3 \frac{5}{3}$. Значит, множество решений исходного неравенства есть два промежутка: $-\infty < x \leqslant \log_3 \frac{1}{2}$, $\log_3 \frac{3}{5} \leqslant x < \log_3 \frac{5}{3}$.

Ответ: $x \leqslant \log_3 \frac{1}{2}$, $\log_3 \frac{3}{5} \leqslant x < \log_3 \frac{5}{3}$.

2. Обозначим через x км/ч скорость первого бегуна, а через y км/ч скорость второго бегуна. Первый бегун пробежал 1 км за $\frac{1}{x}$ ч, а второй — за $\frac{1}{y}$ ч. По условию задачи второй бегун затратил на 1 км на 2 мин меньше времени, чем первый, следовательно,

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{30}. \qquad (3)$$

К моменту второй встречи первый бегун, находясь в пути 20 мин, пробежал $\frac{1}{3}x$ км. Значит, второй бегун к этому моменту пробежал $\left(10-\frac{1}{3}x\right)$ км. Так как он бежал 18 мин, то справедливо равенство

$$10-\frac{1}{3}x=\frac{18}{60}y. \qquad (4)$$

Из уравнения (3) находим, что $x=\frac{30y}{30+y}$. Подставляя $\frac{30y}{30+y}$ вместо x в уравнение (4), получаем после преобразований уравнение

$$y^2+30y-1000=0.$$

Последнее уравнение имеет два корня $y_1=20$, $y_2=-50$. Так как скорость бегуна положительна, то $y=20$.

Ответ: скорость второго бегуна равна 20 км/ч.

3. Применяя формулу для косинуса двойного угла $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, данное уравнение можно переписать в виде

$$-\cos 3x-\cos\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)=-\cos 11x-\cos\left(\frac{\pi}{2}-13x\right),$$

или

$$\cos 11x-\cos 3x=\sin 5x-\sin 13x.$$

Применяя формулы для разности синусов и косинусов, приводим уравнение к виду

$$-2\sin 7x\cdot\sin 4x=-2\sin 4x\cdot\cos 9x.$$

Полученное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\sin 4x=0 \quad \text{и} \quad \sin 7x=\cos 9x.$$

Первое уравнение имеет серию решений $x=\pi k/4$, $k\in Z$. Второе уравнение можно преобразовать так:

$$\sin 7x-\sin(\pi/2-9x)=0,\ 2\sin(8x-\pi/4)\cdot\cos(\pi/4-x)=0.$$

Следовательно, второе уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\sin(8x-\pi/4)=0 \quad \text{и} \quad \cos(\pi/4-x)=0,$$

первое из которых имеет серию решений $x=\frac{\pi}{32}+\frac{\pi n}{8}$, $n\in Z$, а второе —

серию решений $x=\frac{3\pi}{4}+\pi m,\ m\in Z$. Таким образом, исходное уравнение имеет три серии решений: $x=\frac{\pi k}{4},\ k\in Z$; $x=\frac{\pi}{32}+\frac{\pi n}{8},\ n\in Z$; $x=\frac{3\pi}{4}+\pi m$, $m\in Z$. Легко видеть, что третья серия решений содержится в первой.

Ответ: $x=\frac{\pi k}{4},\ k\in Z$; $x=\frac{\pi}{32}+\frac{\pi n}{8},\ n\in Z$.

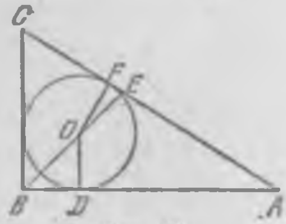


Рис. 82.

4. Данный треугольник и вписанная в него окружность изображены на рис. 82. Обозначим через D и F точки касания окружности со сторонами AB и AC соответственно. Так как BE — биссектриса угла B, то $\widehat{OBD}=\pi/4$ и $\widehat{OEF}=\pi-\widehat{C}-\widehat{OBC}=\frac{3\pi}{4}-\widehat{C}$. Из прямоугольных треугольников OBD и OEF находим

$$|OD|=|BO|\sin\frac{\pi}{4},\quad |OF|=|OE|\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\widehat{C}\right).$$

Следовательно,

$$|BO|\sin\frac{\pi}{4}=|OE|\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\widehat{C}\right),$$

откуда

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{4}=\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\widehat{C}\right),$$

или

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\widehat{C}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Так как $0<\widehat{C}<\pi/2$, то или $\frac{3\pi}{4}-\widehat{C}=\frac{\pi}{3}$, или $\frac{3\pi}{4}-\widehat{C}=\frac{2\pi}{3}$. Отсюда либо $\widehat{C}=5\pi/12$, либо $\widehat{C}=\pi/12$. Значит, возможны два случая: либо $\widehat{C}=5\pi/12$, и тогда $\widehat{A}=\pi/12$, либо $\widehat{C}=\pi/12$, и тогда $\widehat{A}=5\pi/12$. В обоих случаях острые углы треугольника равны $\pi/12$ и $5\pi/12$.

Ответ: $\pi/12$, $5\pi/12$.

5.Н. Пусть a — некоторое фиксированное положительное число. Вычислим площадь $S(a)$, ограниченную параболой $y=x^2-2x\sqrt[3]{\frac{a}{1+a^2}}+3$ и прямой $y=-3x\sqrt[3]{\frac{a}{1+a^2}}+3$. Координаты точек, в которых пересекаются эти парабола и прямая, являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} y=x^2-2x\sqrt[3]{\frac{a}{1+a^2}}+3,\\ y=-3x\sqrt[3]{\frac{a}{1+a^2}}+3.\end{cases}$$

Приравнивая правые части уравнений этой системы, получаем квадратное уравнение

$$x^2+x\sqrt[3]{\frac{a}{1+a^2}}=0.$$

Отсюда вытекает, что парабола и прямая пересекаются в точках с абсциссами $x_1=-\sqrt[3]{\frac{a}{1+a^2}}$ и $x_2=0$. При этом $x_1<x_2$. Легко видеть (рис. 83), что фигура, площадь $S(a)$ которой надо найти, лежит под прямой $y=-3x\sqrt[3]{\frac{a}{1+a^2}}+3$ и над параболой $y=x^2-2x\sqrt[3]{\frac{a}{1+a^2}}+3$ на промежутке от x_1 до x_2, поэтому

$$S(a)=\int\limits_{-\sqrt[3]{\frac{a}{1+a^2}}}^{0}\left(\left(-3x\sqrt[3]{\frac{a}{1+a^2}}+3\right)-\left(x^2-2x\sqrt[3]{\frac{a}{1+a^2}}+3\right)\right)dx=$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}-\sqrt[3]{\frac{a}{1+a^2}}\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\sqrt[3]{\frac{a}{1+a^2}}}^{0}=\frac{a}{6(1+a^2)}.$$

Для того чтобы найти положительное a, при котором площадь фигуры принимает наибольшее значение, исследуем функцию $S(a)$. В каждой точке области $0<a<+\infty$ функция $S(a)$ имеет производную

$$S'(a)=\frac{1\cdot(1+a^2)-a\cdot 2a}{6(1+a^2)^2}=\frac{1-a^2}{6(1+a^2)^2}. \qquad (5)$$

Из (5) следует, что на интервале $0<a<1$ производная $S'(a)$ положительна, а на интервале $1<a<+\infty$ производная $S'(a)$ отрицательна. Значит, функция $S(a)$ монотонно возрастает на интервале $0<a<1$, монотонно убывает на интервале $1<a<+\infty$; так как, кроме того, $S(a)$ непрерывна в точке $a=1$, то ее наибольшее значение достигается при $a=1$.

Ответ: $a=1$.

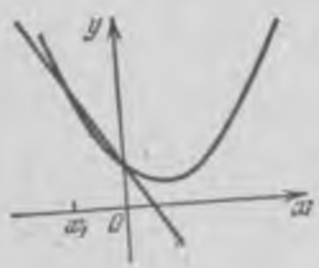


Рис. 83.

Рис. 84.

5.С. Обозначим через A, B, C вершины треугольника, лежащего в основании, через D — вершину пирамиды и через O — центр шара, описанного вокруг пирамиды (рис. 84). Тогда $AB=BC=AC=b$, $\angle ADC=\alpha$. Обо-

значим через E ортогональную проекцию центра шара на плоскость ABC. Так как наклонные AO, BO, CO равны по величине и равны радиусу шара, то равны их проекции на плоскость ABC. Следовательно, $AE=BE=CE$. Это означает, что точка E является центром окружности, описанной вокруг треугольника ABC. По условию треугольник ABC правильный, поэтому точка E является его центром. Из условия, что пирамида правильная, следует, что точка D также проектируется в центр треугольника ABC, т. е. в точку E. Значит точки O, E, D лежат на одной прямой.

Из равностороннего треугольника ABC и равнобедренного треугольника ADC находим соответственно

$$CE=\frac{2}{3}\cdot\frac{b\sqrt{3}}{2}=\frac{b\sqrt{3}}{3},\qquad CD=\frac{\frac{1}{2}AC}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{b}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Треугольник DEC прямоугольный, поэтому

$$\sin\angle CDE=\frac{CE}{CD}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}.$$

В равнобедренном треугольнике DOC стороны DO и OC равны радиусу сферы. Значит, искомая величина DO равна

$$DO=\frac{CD}{2\cos\angle CDE}=\frac{b}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\frac{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}}}.$$

На рис. 84 центр сферы изображен внутри пирамиды. При некоторых значениях α точка O может находиться и вне пирамиды. Приведенное решение не использует тот факт, что точка O лежит на отрезке DE.

Ответ: $r=\dfrac{b}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\frac{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}}}.$

Ответы к вариантам 2—4.

Вариант 2. 1. $x>\log_5 2$, $\log_5\frac{2}{5}<x\leqslant\log_5\frac{4}{5}$. 2. 10 км/ч. 3. $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{6}$, $k\in Z$; $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. 4. $\pi/6$, $\pi/3$. 5.Н. $a=\sqrt{3}$. 5.С. $S=-4R^2\sin 4\alpha$.

Вариант 3. 1. $x<\log_2\frac{5}{2}$, $x\geqslant\log_2\frac{7}{8}$. 2. 1 с. 3. $\frac{\pi k}{5}$, $k\in Z$; $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$. 4. $\pi/18$, $7\pi/18$. 5.Н. $p=1$. 5.С. $S=12\sqrt{3}R^2\frac{\cos\alpha(1+\cos\alpha)}{1+3\cos^2\alpha}$.

Вариант 4. 1. $x\leqslant\log_{13}\frac{1}{2}$, $\log_{13}\frac{2}{3}<x<\log_{13}\frac{3}{2}$. 2. 25 км/ч. 3. πk, $k\in Z$; $\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{9}$, $n\in Z$. 4. $\pi/12$, $7\pi/12$. 5.Н. $p=\sqrt{3}$. 5.С. $V=\frac{\sqrt{3}}{16}\cdot\frac{b^4}{R^3}\times$ $\times(4R^2-b^2)$.

корнями. Объединяя множества решений, содержащихся в областях $x \geqslant 3/2$ и $x < 3/2$, получаем, что множество всех решений исходного уравнения есть промежуток $-\infty < x \leqslant 3/2$.

Второе решение. Ясно, что корни уравнения должны удовлетворять неравенству $3-2x \geqslant 0$, или $x \leqslant 3/2$. В области $x \leqslant 3/2$ обе части данного уравнения неотрицательны, поэтому оно равносильно уравнению $(2x-3)^2 = (3-2x)^2$, которое справедливо для любого действительного x. Значит, все числа x из области $-\infty < x \leqslant 3/2$ будут корнями исходного уравнения.

Ответ: $-\infty < x \leqslant 3/2$.

2. Область допустимых значений данного уравнения состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям $x-1 > 0$ и $x > 0$, т. е. ОДЗ есть промежуток $1 < x < +\infty$. На ОДЗ исходное уравнение равносильно уравнению $\log_2 (x-1) x = 1$, или уравнению $x^2 - x = 2$. Последнее уравнение имеет два корня $x_1 = 2$ и $x_2 = -1$. Из них в ОДЗ входит только x_1, значит, $x_1 = 2$ является единственным корнем исходного уравнения.

Ответ: $x = 2$.

3. Обозначая $\operatorname{ctg} x$ через z, получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2}\, y + \sqrt{12} z = 4, \\ 2\sqrt{2}\, y - \sqrt{27} z = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Система (1) имеет единственное решение $y = \sqrt{2}$, $z = 1/\sqrt{3}$. Корни уравнения $\operatorname{ctg} x = 1/\sqrt{3}$ таковы: $x = \pi/3 + \pi k$, $k \in Z$. Следовательно, исходная система уравнений имеет бесконечное множество решений (x, y), где $x = \pi/3 + \pi k$, $y = \sqrt{2}$, $k \in Z$.

Ответ: (x, y), где $x = \pi/3 + \pi k$, $y = \sqrt{2}$, $k \in Z$.

4. Обозначим через x м длину траншеи, выкапываемой экскаватором за один час. Тогда на рытье первой траншеи экскаватор затратил $5/x$ часов, а на рытье второй траншеи — $3/x$ часов. По условию время, затраченное экскаватором на переезд с одного места работы на другое, в четыре раза больше времени, затраченного экскаватором на рытье первой траншеи, т. е. равно $20/x$ часам. Так как время, в течение которого экскаватор прокладывал первую траншею, на 6/5 часа меньше времени, затраченного на переезд и рытье второй траншеи, то имеем уравнение

$$\frac{5}{x} = \frac{20}{x} + \frac{3}{x} - \frac{6}{5}.$$

Последнее уравнение имеет единственный корень $x = 15$. Значит, экскаватор выкапывает за один час траншею длиной в 15 м.

Ответ: 15 м.

5. Обозначим через α величину угла ABO (рис. 86). Так как треугольник ABC правильный, то $\widehat{OBC} = \pi/3 - \alpha$ и, ввиду условия, справедливо равенство

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(\pi/3 - \alpha)} = 2.$$

Последнее уравнение равносильно уравнению $\sin\alpha = \sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha$, или уравнению $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}/2$. Угол α лежит в интервале $0 < \alpha < \pi/3$, значит, $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Обозначим через K основание перпендикуляра, опущенного в плоскости ABS из точки S на прямую AB. Тогда площадь треугольника ABS равна $\frac{1}{2}|KS||AB|$ и равна по условию $\sqrt{5/6}$. Следовательно,

$$|SK| = \frac{2\sqrt{5/6}}{|AB|} = \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

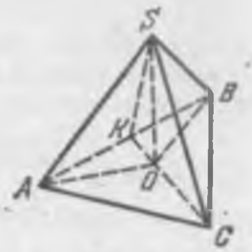


Рис. 86.

Так как

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}|AB||OB|\sin\alpha = \frac{1}{2}|AB||OB|\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2\sqrt{7}}|OB|,$$

$$S_{OBC} = \frac{1}{2}|BC||OB|\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{1}{2}|BC||OB|\frac{1}{2}\sin\alpha = \frac{3}{4\sqrt{7}}|OB|,$$

$$S_{AOC} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot|AC| = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$S_{AOB} + S_{OBC} + S_{AOC} = S_{ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

то имеем равенство $\dfrac{3}{2\sqrt{7}}|OB| + \dfrac{3}{4\sqrt{7}}|OB| + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$, откуда $|OB| = \dfrac{\sqrt{21}}{9}$. По теореме о трех перпендикулярах $OK \perp AB$. Значит, $|OK| = |OB|\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{21}}{9}\cdot\sqrt{\dfrac{3}{7}} = \dfrac{1}{3}$. Из прямоугольного треугольника SOK находим:

$$|SO| = \sqrt{|SK|^2 - |OK|^2} = \sqrt{\frac{10}{9} - \frac{1}{9}} = 1.$$

Теперь получаем, что $V = \dfrac{1}{3}S_{ABC}\cdot|SO| = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\cdot 1 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $\sqrt{3}/4$.

6. Прежде всего отметим, что коэффициенты данного уравнения определены лишь для тех значений параметра α, которые удовлетворяют условиям $\cos\alpha \neq 0$ и $\sin\alpha > 0$. Для любого α, удовлетворяющего этим условиям, данное квадратное уравнение имеет единственное решение только в том случае, когда его дискриминант

$$D = \frac{36}{\sin\alpha} - \frac{36\sqrt{3}}{\cos\alpha} - 4\cdot 36$$

равен нулю.

Решение варианта 1.

1. Область допустимых значений исходного уравнения есть множество всех x, кроме $x=\pi k$, где $k\in Z$. На этой области функция $y=\sin x$ отлична от нуля. Поэтому, умножив данное уравнение на $\sin x$, получим новое уравнение

$$\sqrt{2}\sin^2 x+\cos x=0,$$

равносильное исходному на его ОДЗ. Последнее уравнение можно переписать в виде

$$\sqrt{2}\cos^2 x-\cos x-\sqrt{2}=0. \qquad (1)$$

Квадратное уравнение $\sqrt{2}t^2-t-\sqrt{2}=0$ имеет корни $t_1=\sqrt{2}$ и $t_2=-\sqrt{2}/2$. Поэтому исходное уравнение равносильно на своей ОДЗ совокупности двух уравнений

$$\cos x=\sqrt{2} \text{ и } \cos x=-\sqrt{2}/2.$$

Первое уравнение этой совокупности решений не имеет, так как $\sqrt{2}$ не входит в область значений функции $y=\cos x$. Второе уравнение имеет решения $x=\pm 3\pi/4+2\pi n$, $n\in Z$. Все они входят в ОДЗ исходного уравнения. Значит, все эти решения являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $x=\pm 3\pi/4+2\pi n,\quad n\in Z$.

2. Обозначим через x и y время в минутах, которое понадобилось соответственно велосипедисту и автомобилю для того, чтобы проехать путь от пункта A до пункта B. На половину пути от A до B велосипедист затратил $x/2$ минут, а автомобиль — $y/2$ минут. По условию на полпути от A до B они находились одновременно, хотя автомобиль выехал на 15 минут позже. Значит, справедливо равенство

$$\frac{y}{2}+15=\frac{x}{2}. \qquad (2)$$

К моменту прибытия автомобиля в пункт B велосипедист находился в пути уже $(y+15)$ минут и проехал за это время 2/3 расстояния от A до B, т. е. затратил на этот путь $\frac{2}{3}x$ минут. Следовательно,

$$y+15=\frac{2}{3}x. \qquad (3)$$

Получили систему двух уравнений (2) и (3) с двумя неизвестными x и y. Умножая уравнение (2) на 2 и вычитая из него уравнение (3), получаем уравнение $15=x-\frac{2}{3}x$, откуда $x=45$.

Ответ: 45 минут.

3.Н. Первое решение. Функция $y(x)=x\ln x-x\ln 5$ определена в области $x>0$ и всюду в этой области имеет производную. По правилам нахождения производной

$$y'(x)=(x\ln x-x\ln 5)'=\ln x+1-\ln 5=\ln\left(\frac{xe}{5}\right).$$

Производная обращается в нуль в единственной точке $x_0=\frac{5}{e}$. Так как $1<e<5$, то эта точка лежит внутри отрезка $[1, 5]$. Для нахождения наименьшего значения достаточно вычислить значения $y(1)$, $y(5)$, $y(5/e)$ и выбрать из них наименьшее. Имеем

$$y(1)=-\ln 5, \quad y(5)=0, \quad y\left(\frac{5}{e}\right)=\frac{5}{e}\ln\frac{5}{e}-\frac{5}{e}\ln 5=-\frac{5}{e}.$$

Докажем, что

$$5/e > \ln 5. \tag{4}$$

Поскольку $e<3$, то $5/e>5/3$, значит, для доказательства неравенства (4) достаточно доказать неравенство $\ln 5<5/3$, которое можно переписать в виде $\ln 5^3<\ln e^5$. Отсюда вытекает, что для доказательства неравенства (4) достаточно доказать неравенство $5^3<e^5$. Поскольку $e>2{,}7$, то очевидна справедливость цепочки неравенств

$$e^5>2{,}7^2\cdot 2{,}7^2\cdot 2{,}7=7{,}29\cdot 7{,}29\cdot 2{,}7>50\cdot 2{,}7=135>5^3,$$

и неравенство (4) тем самым доказано. Значит, $-\frac{5}{e}<-\ln 5<0$, т. е. наименьшее значение функции на отрезке $[1, 5]$ равно $-5/e$.

Второе решение. Функция $y(x)=x\ln x-x\ln 5$ определена в области $0<x<+\infty$ и всюду в этой области имеет производную. По правилам нахождения производной

$$y'(x)=(x\ln x-x\ln 5)'=\ln x+1-\ln 5=\ln\frac{xe}{5}.$$

Производная обращается в нуль в единственной точке $x_0=5/e$. При $0<x<5/e$ производная y' отрицательна, а при $x>5/e$ положительна. Следовательно, функция $y(x)=x\ln x-x\ln 5$ убывает на интервале $(0, 5/e)$ и возрастает на промежутке $5/e<x<+\infty$. Так как данная функция непрерывна в точке $x=5/e$, то из доказанного следует, что во всех точках области $0<x<+\infty$, отличных от $5/e$, функция принимает значения большие, чем $y(5/e)$.

Так как $1<e<5$, то точка $x=5/e$ лежит внутри отрезка $[1, 5]$. Следовательно, наименьшее значение данной функции на отрезке $[1, 5]$ равно наименьшему значению этой функции на всей области определения, т. е. равно

$$y\left(\frac{5}{e}\right)=-\frac{5}{e}.$$

Ответ: $y_{\min}=-5/e$.

4. По теореме синусов $|BC|=2R\sin\widehat{BAC}=2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=2$, где R — радиус описанной окружности (рис. 85). Так как AB — хорда, то ее длина не больше диаметра, т. е. $|AB|\leqslant 2R=4$. Покажем, что $|AB|<4$. Если $|AB|=4$, то $\widehat{ACB}=\pi/2$ и должно выполняться равенство $|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2$. Но оно не выполняется, так как $4^2\neq 3^2+2^2$. Значит,

$|AB| < 4$. Тогда

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|AB||AC|\cdot\sin\widehat{BAC} < \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot\frac{1}{2}=3.$$

Требуемое утверждение доказано.

5. Среди $|a| > 2$ нет ни одного значения a, удовлетворяющего условию задачи, ибо при любом таком a уравнение $x^2+a^2=4$ не имеет решений. При $a=2$, а также при $a=-2$ уравнение $x^2+a^2=4$ имеет единственное решение $x=0$, которое не удовлетворяет неравенству. Значит, $a=2$ и $a=-2$ также не удовлетворяют условию задачи. Итак, если есть a, удовлетворяющие условию задачи, то они таковы, что $|a| < 2$ и для любого такого a уравнение $x^2+a^2=4$ имеет два корня

Рис. 85.

$$x_1=-\sqrt{4-a^2} \quad \text{и} \quad x_2=\sqrt{4-a^2}.$$

Рассмотрим теперь квадратный трехчлен

$$Q(x)=x^2+(5a+2)x+4a^2+2a;$$

он имеет дискриминант $D=(3a+2)^2$. Если $a=-2/3$, то $D=0$ и квадратный трехчлен $Q(x)$ ни для одного x не может быть отрицательным. Значит, $a=-2/3$ не удовлетворяет условию задачи. Если $a\neq-2/3$, то $D>0$ и квадратный трехчлен $Q(x)$ имеет два различных корня. Значит, при $a\neq-2/3$ квадратный трехчлен принимает отрицательные значения для любых x, расположенных между корнями трехчлена $Q(x)$.

Итак, если есть число a, удовлетворяющее условию задачи, то оно таково, что $|a|<2$, $a\neq-2/3$ и хотя бы одно из чисел x_1 и x_2 лежит между корнями трехчлена $Q(x)$. Отметим, что корни квадратного трехчлена $Q(x)$ удобно записать в виде

$$x_3=\frac{-(5a+2)-|3a+2|}{2}, \qquad x_4=\frac{-(5a+2)+|3a+2|}{2};$$

тогда очевидно, что $x_3<x_4$.

Теперь вопрос задачи можно переформулировать так: при каких значениях параметра a, удовлетворяющих условиям $|a|<2$ и $a\neq-2/3$, хотя бы одно из чисел x_1 и x_2 лежит между числами x_3 и x_4. Ясно, что искомое множество значений является объединением множеств решений из области $|a|<2$ и $a\neq-2/3$ двух систем неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{-(5a+2)-|3a+2|}{2} < -\sqrt{4-a^2}, \\ -\sqrt{4-a^2} < \dfrac{-(5a+2)+|3a+2|}{2}, \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \dfrac{-(5a+2)+|3a+2|}{2} < \sqrt{4-a^2}, \\ \sqrt{4-a^2} < \dfrac{-(5a+2)+|3a+2|}{2}. \end{cases} \tag{6}$$

Решим на области $|a|<2$ и $a\neq-2/3$ отдельно систему (5) и систему (6).

На множестве $-2 < a < -2/3$ система (5) может быть переписана в виде

$$\begin{cases} -a < -\sqrt{4-a^2}, \\ -\sqrt{4-a^2} < -4a-2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \sqrt{4-a^2} < a, \\ 4a+2 < \sqrt{4-a^2}. \end{cases}$$

Очевидно, что эта система неравенств на множестве $-2 < a < -2/3$ решений не имеет, так как на этом множестве левая часть первого неравенства неотрицательна, в то время как правая часть отрицательна.

На множестве $-2/3 < a < 2$ система (5) может быть переписана в виде

$$\begin{cases} -4a-2 < -\sqrt{4-a^2}, \\ -\sqrt{4-a^2} < -a, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \sqrt{4-a^2} < 4a+2, \\ a < \sqrt{4-a^2}. \end{cases} \tag{7}$$

На рассматриваемом множестве обе части первого неравенства положительны, и поэтому оно равносильно неравенству $4-a^2 < 16a^2+16a+4$, или $17a^2+16a > 0$. Последнее неравенство имеет решения $a > 0$ и $a < -16/17$, и, значит, множество решений первого неравенства системы (7), содержащихся в промежутке $-2/3 < a < 2$, имеет вид

$$-\frac{2}{3} < a < -\frac{16}{17} \quad \text{и} \quad 0 < a < 2. \tag{8}$$

Второму неравенству системы (7) удовлетворяют все a из области $-2/3 < a < 0$, так как в этой области левая часть неравенства отрицательна, правая же положительна. В области $0 \leqslant a < 2$ обе части второго неравенства системы (7) неотрицательны, и значит, оно равносильно неравенству $a^2 < 4-a^2$, или $a^2 < 2$. Множество решений последнего неравенства, содержащихся в области $0 \leqslant a < 2$, имеет вид $0 \leqslant a < \sqrt{2}$. Итак, множество всех решений второго неравенства системы (7), содержащихся в области $-\frac{2}{3} < a < 2$, есть промежуток

$$-\frac{2}{3} < a < \sqrt{2}. \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует, что множество решений системы (5) из области $|a| < 2$ и $a \neq -2/3$ является объединением двух промежутков

$$-\frac{2}{3} < a < -\frac{16}{17} \quad \text{и} \quad 0 < a < \sqrt{2}. \tag{10}$$

Решим теперь систему (6). На множестве $-2 < a < -2/3$ ее можно переписать в виде

$$\begin{cases} -a < \sqrt{4-a^2}, \\ \sqrt{4-a^2} < -4a-2. \end{cases}$$

корнями. Объединяя множества решений, содержащихся в областях $x \geq 3/2$ и $x < 3/2$, получаем, что множество всех решений исходного уравнения есть промежуток $-\infty < x \leq 3/2$.

Второе решение. Ясно, что корни уравнения должны удовлетворять неравенству $3-2x \geq 0$, или $x \leq 3/2$. В области $x \leq 3/2$ обе части данного уравнения неотрицательны, поэтому оно равносильно уравнению $(2x-3)^2 = (3-2x)^2$, которое справедливо для любого действительного x. Значит, все числа x из области $-\infty < x \leq 3/2$ будут корнями исходного уравнения.

Ответ: $-\infty < x \leq 3/2$.

2. Область допустимых значений данного уравнения состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям $x-1 > 0$ и $x > 0$, т. е. ОДЗ есть промежуток $1 < x < +\infty$. На ОДЗ исходное уравнение равносильно уравнению $\log_2 (x-1)x = 1$, или уравнению $x^2 - x = 2$. Последнее уравнение имеет два корня $x_1 = 2$ и $x_2 = -1$. Из них в ОДЗ входит только x_1, значит, $x_1 = 2$ является единственным корнем исходного уравнения.

Ответ: $x = 2$.

3. Обозначая $\operatorname{ctg} x$ через z, получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2}\,y + \sqrt{12}z = 4, \\ 2\sqrt{2}\,y - \sqrt{27}z = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Система (1) имеет единственное решение $y = \sqrt{2}$, $z = 1/\sqrt{3}$. Корни уравнения $\operatorname{ctg} x = 1/\sqrt{3}$ таковы: $x = \pi/3 + \pi k$, $k \in Z$. Следовательно, исходная система уравнений имеет бесконечное множество решений (x, y), где $x = \pi/3 + \pi k$, $y = \sqrt{2}$, $k \in Z$.

Ответ: (x, y), где $x = \pi/3 + \pi k$, $y = \sqrt{2}$, $k \in Z$.

4. Обозначим через x м длину траншеи, выкапываемой экскаватором за один час. Тогда на рытье первой траншеи экскаватор затратил $5/x$ часов, а на рытье второй траншеи — $3/x$ часов. По условию время, затраченное экскаватором на переезд с одного места работы на другое, в четыре раза больше времени, затраченного экскаватором на рытье первой траншеи, т. е. равно $20/x$ часам. Так как время, в течение которого экскаватор прокладывал первую траншею, на 6/5 часа меньше времени, затраченного на переезд и рытье второй траншеи, то имеем уравнение

$$\frac{5}{x} = \frac{20}{x} + \frac{3}{x} - \frac{6}{5}.$$

Последнее уравнение имеет единственный корень $x = 15$. Значит, экскаватор выкапывает за один час траншею длиной в 15 м.

Ответ: 15 м.

5. Обозначим через α величину угла ABO (рис. 86). Так как треугольник ABC правильный, то $\widehat{OBC} = \pi/3 - \alpha$ и, ввиду условия, справедливо равенство

$$\frac{\sin \alpha}{\sin (\pi/3 - \alpha)} = 2.$$

Последнее уравнение равносильно уравнению $\sin\alpha=\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha$, или уравнению $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}/2$. Угол α лежит в интервале $0<\alpha<\pi/3$, значит, $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Обозначим через K основание перпендикуляра, опущенного в плоскости ABS из точки S на прямую AB. Тогда площадь треугольника ABS равна $\frac{1}{2}|KS||AB|$ и равна по условию $\sqrt{5/6}$. Следовательно,

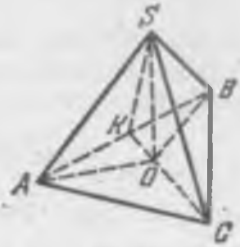


Рис. 86.

$$|SK|=\frac{2\sqrt{5/6}}{|AB|}=\frac{\sqrt{10}}{3}.$$

Так как

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}|AB||OB|\sin\alpha=\frac{1}{2}|AB||OB|\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3}{2\sqrt{7}}|OB|,$$

$$S_{OBC}=\frac{1}{2}|BC||OB|\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{2}|BC||OB|\frac{1}{2}\sin\alpha=\frac{3}{4\sqrt{7}}|OB|,$$

$$S_{AOC}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot|AC|=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$S_{AOB}+S_{OBC}+S_{AOC}=S_{ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{4},$$

то имеем равенство $\frac{3}{2\sqrt{7}}|OB|+\frac{3}{4\sqrt{7}}|OB|+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$, откуда $|OB|=\frac{\sqrt{21}}{9}$. По теореме о трех перпендикулярах $OK\perp AB$. Значит, $|OK|=|OB|\sin\alpha=\frac{\sqrt{21}}{9}\cdot\sqrt{\frac{3}{7}}=\frac{1}{3}$. Из прямоугольного треугольника SOK находим:

$$|SO|=\sqrt{|SK|^2-|OK|^2}=\sqrt{\frac{10}{9}-\frac{1}{9}}=1.$$

Теперь получаем, что $V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot|SO|=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot1=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $\sqrt{3}/4$.

6. Прежде всего отметим, что коэффициенты данного уравнения определены лишь для тех значений параметра α, которые удовлетворяют условиям $\cos\alpha\neq0$ и $\sin\alpha>0$. Для любого α, удовлетворяющего этим условиям, данное квадратное уравнение имеет единственное решение только в том случае, когда его дискриминант

$$D=\frac{36}{\sin\alpha}-\frac{36\sqrt{3}}{\cos\alpha}-4\cdot36$$

равен нулю.

На рассматриваемом множестве левые и правые части обоих неравенств полученной системы положительны. Поэтому она равносильна системе

$$\begin{cases} a^2 < 4-a^2, \\ 4-a^2 < 16a^2+16a+4, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a^2 < 2, \\ 17a^2+16a > 0. \end{cases}$$

Множество решений последней системы неравенств имеет вид $-\sqrt{2} < a < -\frac{16}{17}$ и $0 < a < \sqrt{2}$. Часть этого множества, содержащаяся в области $-2 < a < -2/3$, имеет вид

$$-\sqrt{2} < a < -16/17.$$

На множестве $-2/3 < a < 2$ система (6) может быть переписана в виде

$$\begin{cases} -4a-2 < \sqrt{4-a^2}, \\ \sqrt{4-a^2} < -a. \end{cases} \quad (11)$$

На множестве $0 < a < 2$ второе неравенство полученной системы, а значит, и система (6), решений не имеет. Действительно, правая часть этого неравенства на рассматриваемом множестве отрицательна, а левая неотрицательна.

На множестве $-2/3 < a \leqslant 0$ обе части второго неравенства системы (11) неотрицательны, и значит, оно равносильно неравенству $4-a^2 < a^2$, или $a^2 > 2$. Это неравенство не имеет решений в области $-2/3 < a \leqslant 0$.

Итак, на множестве $-2/3 < a < 2$ система (6) решений не имеет и множество всех решений системы (6) из области $|a| < 2$ и $a \neq -2/3$ имеет вид

$$-\sqrt{2} < a < -16/17. \quad (12)$$

Объединяя (10) и (12), находим требуемое множество значений параметра a: $-\sqrt{2} < a < -16/17$ и $0 < a < \sqrt{2}$.

Ответ: $-\sqrt{2} < a < -16/17$, $0 < a < \sqrt{2}$.

3.С. Поскольку свойства логарифмов зависят от основания, то рассмотрим два случая: а) $x > 1$ и б) $0 < x < 1$.

а) Пусть $x > 1$, тогда для этих x исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{2x+2/5}{5(1-x)} > 1. \quad (13)$$

Неравенство (13) равносильно неравенству

$$\frac{2x+2/5}{5(1-x)} - 1 > 0,$$

которое можно переписать так:

$$\frac{7x-23/5}{5(1-x)} > 0.$$

Решая это неравенство методом интервалов, получаем, что его решения есть промежуток $23/35 < x < 1$. Этот промежуток не имеет общих точек с областью $x > 1$. Значит, в случае а) исходное неравенство не имеет решений.

б) Пусть $0 < x < 1$, тогда для этих x исходное неравенство равносильно двойному неравенству

$$0 < \frac{2x + 2/5}{5(1-x)} < 1.$$

Это двойное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{2x+2/5}{5(1-x)} > 0, \\ \dfrac{7x-23/5}{5(1-x)} < 0. \end{cases}$$

Решая каждое из этих неравенств методом интервалов, получаем, что множество решений первого неравенства есть промежуток $-1/5 < x < 1$, а множество решений второго — два промежутка: $x > 1$ и $x < 23/35$. Значит, множество решений системы есть промежуток $-1/5 < x < 23/35$. Из этого промежутка в область $0 < x < 1$ попадает лишь промежуток $0 < x < 23/35$. Это и есть множество решений исходного неравенства.

Ответ: $0 < x < 23/35$.

Ответы к вариантам 2—4.

Вариант 2. 1. $(-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi m$, $m \in Z$. 2. 2 часа. 3.Н. $-\frac{2}{e}$. 5. $-1 < a < \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, $1 < a < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. 3.С. $\frac{2}{7} < x < +\infty$.

Вариант 3. 1. $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. 2. 16 часов. 3.Н. $-\frac{1}{e}$. 5. $-2 < a < 0$. 3.С. $0 < x < \frac{2}{7}$.

Вариант 4. 1. $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. 2. 25 часов. 3.Н. $-\frac{14}{e}$. 5. $-\frac{1}{2} < a < 1$. 3.С. $x > 4{,}5$.

1979

Решение варианта 1.

1. Первое решение. Для освобождения от знака абсолютной величины разобьем числовую ось на две области: первую, в которой $2x-3 \geqslant 0$, т. е. $x \geqslant 3/2$, и вторую, в которой $2x-3 < 0$, т. е. $x < 3/2$. В области $x \geqslant 3/2$ имеем $|2x-3| = 2x-3$, и исходное уравнение можно переписать так: $2x-3 = 3-2x$. Последнее уравнение имеет корень $x_1 = 3/2$, лежащий в области $x \geqslant 3/2$, и поэтому $x_1 = 3/2$ является корнем исходного уравнения. В области $x < 3/2$ имеем $|2x-3| = -(2x-3)$, и исходное уравнение можно записать так: $-(2x-3) = 3-2x$. Последнее уравнение справедливо для любого действительного x. Значит, все числа x из области $x < 3/2$ удовлетворяют исходному уравнению, т. е. являются его

Значит, искомые значения параметра α — это те и только те значения α, которые удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin\alpha} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos\alpha} - 4 = 0, \\ \sin\alpha > 0, \\ \cos\alpha \neq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Полученное уравнение в области, определяемой неравенствами $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha \neq 0$, равносильно уравнению

$$\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha - 4\sin\alpha\cos\alpha = 0,$$

или уравнению

$$\sin(\pi/6 - \alpha) - \sin 2\alpha = 0.$$

Последнее уравнение можно переписать так:

$$2\sin(\pi/12 - 3\alpha/2)\cos(\pi/12 + \alpha/2) = 0.$$

Отсюда следует, что оно имеет две серии решений: $\alpha = \pi/18 + 2\pi k/3$, $k \in Z$; $\alpha = 5\pi/6 + 2\pi n$, $n \in Z$. Теперь из этих чисел надо отобрать те, которые удовлетворяют условиям $\cos\alpha \neq 0$ и $\sin\alpha > 0$. Легко видеть, что все найденные числа удовлетворяют условию $\cos\alpha \neq 0$. Далее, так как для любого $n \in Z$

$$\sin(5\pi/6 + 2\pi n) = \sin 5\pi/6 > 0,$$

то все числа $\alpha = 5\pi/6 + 2\pi n$, $n \in Z$, удовлетворяют условиям (2). Теперь разобьем первую серию решений на три серии, полагая $k = 3m$, $k = 3m + 1$, $k = 3m + 2$. Получим: $\alpha = \pi/18 + 2\pi m$, $\alpha = 13\pi/18 + 2\pi m$, $\alpha = 25\pi/18 + 2\pi m$, $m \in Z$. Поскольку для любого $m \in Z$

$$\sin(\pi/18 + 2\pi m) = \sin\pi/18 > 0,$$
$$\sin(13\pi/18 + 2\pi m) = \sin 3\pi/18 > 0,$$
$$\sin(25\pi/18 + 2\pi m) = \sin(\pi + 7\pi/18) < 0,$$

то все числа $\alpha = \pi/18 + 2\pi m$ и $\alpha = 13\pi/18 + 2\pi m$, $m \in Z$, удовлетворяют условиям (2), а никакое из чисел $\alpha = 25\pi/18 + 2\pi m$, $m \in Z$, не удовлетворяет условиям (2). Подводя итог, получаем, что условию задачи удовлетворяют только числа $\alpha = 5\pi/6 + 2\pi n$, $n \in Z$; $\alpha = \pi/18 + 2\pi m$, $m \in Z$; $\alpha = 13\pi/18 + 2\pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $\alpha = 5\pi/6 + 2\pi n$, $n \in Z$; $\alpha = \pi/18 + 2\pi m$, $m \in Z$; $\alpha = 13\pi/18 + 2\pi k$, $k \in Z$.

Ответы к вариантам 2—4.

Вариант 2. 1. $x \leqslant 4/5$. 2. $x = 1$. 3. (x, y), где $x = (-1)^n \pi/6 + \pi n$, $y = 9/2$, $n \in Z$. 4. 150 м. 5. 3/2. 6. $3\pi/4 + 2\pi n$, $n \in Z$; $\pi/12 + 2\pi k$, $k \in Z$.

Вариант 3. 1. $x \leqslant 5/3$. 2. $x = 1$. 3. (x, y), где $x = -\pi/4 + \pi n$, $y = 2$, $n \in Z$. 4. 3 км/ч. 5. $\sqrt{3}/24$. 6. $\pi/9 + 2\pi k$, $k \in Z$; $\dfrac{7\pi}{9} + 2\pi m$, $m \in Z$; $\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi l$, $l \in Z$.

Вариант 4. 1. $x \leqslant 7/4$. 2. $x = 5$. 3. (x, y), где $x = \pm 5\pi/6 + 2\pi n$, $y = 1/4$, $n \in Z$. 4. 900 км/ч. 5. 2. 6. $\alpha = 7\pi/12 + 2\pi k$, $k \in Z$.

§ 10. ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
(отделение политической экономии)

1977

Решение варианта 1.

1. Пусть первая бригада может самостоятельно разгрузить пароход за x часов, а вторая — за y часов. Тогда

$$x+y=12. \tag{1}$$

Первая бригада делает за один час $\frac{1}{x}$ часть всей работы, а вторая — $\frac{1}{y}$ часть всей работы. Поэтому, работая вместе, они за один час делают $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ часть всей работы. Значит, работая вместе, они затратят на всю работу $\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ часов. Пусть для определенности первая бригада работает медленнее, т. е. пусть $x>y$. Тогда $x-y$ часов есть 45% от $\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ часов, или

$$x-y=\frac{45}{100}\cdot\frac{xy}{x+y}. \tag{2}$$

Из уравнения (1) находим, что $y=12-x$. Подставляя $12-x$ вместо y в уравнение (2), получаем уравнение относительно x:

$$x-12+x=\frac{9}{20}\cdot\frac{x(12-x)}{12},$$

которое можно переписать так:

$$3x^2+124x-960=0.$$

Это уравнение имеет два корня $x_1=-48$ и $x_2=20/3$. По условию задачи $x>0$. Значит, $x=20/3$, а тогда $y=16/3$. Значит, первая бригада может разгрузить пароход за $6\frac{2}{3}$ часа, а вторая — за $5\frac{1}{3}$ часа.

Ответ: $6\frac{2}{3}$ часа, $5\frac{1}{3}$ часа.

2. Применив формулу $\cos 2x=1-2\sin^2 x$, перепишем исходное уравнение в виде

$$8\sin^4 x+13-26\sin^2 x=7.$$

Обозначим $\sin^2 x$ через y, тогда для y получим квадратное уравнение $4y^2-13y+3=0$, корни которого $y_1=3$ $y_2=1/4$. Значит, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\sin^2 x=3 \quad \text{и} \quad \sin^2 x=1/4.$$

Уравнение $\sin^2 x=3$ решений не имеет, так как числа $\pm\sqrt{3}$ не входят в область значений функции $y=\sin x$. Уравнение $\sin^2 x=1/4$ в свою очередь равносильно совокупности уравнений $\sin x = 1/2$ и $\sin x = -1/2$. Значит, множество решений исходного уравнения есть объединение множеств решений уравнений $\sin x = 1/2$ и $\sin x = -1/2$. Решения первого уравнения есть $x = (-1)^n \pi/6 + \pi n$, $n \in Z$. Решения второго: $x = (-1)^{m+1} \pi/6 + \pi m$, $m \in Z$. Эти решения можно объединить, записав их так: $x = \pm \pi/6 + \pi k$, $k \in Z$. Итак, решения исходного уравнения: $x = \pm \pi/6 + \pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $x = \pm \pi/6 + \pi k$, $k \in Z$.

3.Н. Квадрат расстояния от точки M с координатами $(0, -2)$ до точки A с координатами (x, y) вычисляется так: $|AM|^2 = (x-0)^2 + (y+2)^2$. Так как по условию координаты точки $A(x, y)$ связаны равенством $y = \frac{16}{\sqrt{3}\, x^3} - 2$, то

$$|AM|^2 = x^2 + \left(\frac{16}{\sqrt{3}\, x^3}\right)^2 = x^2 + \frac{256}{3x^6}.$$

Теперь ясно, что квадрат искомой величины равен наименьшему значению функции

$$f(x) = x^2 + \frac{256}{3x^6}$$

на множестве $0 < x < +\infty$. Функция $f(x)$ в каждой точке этой области имеет производную. Найдем ее: $f'(x) = \left(x^2 + \frac{256}{3} x^{-6}\right)' = 2x - 512x^{-7} = \frac{2(x^8 - 256)}{x^7} = \frac{2(x^8 - 2^8)}{x^7}$. Отсюда следует, что на промежутке $0 < x < 2$ производная $f'(x)$ отрицательна, а на промежутке $2 < x < +\infty$ производная $f'(x)$ положительна. Значит, функция $f(x)$ убывает на промежутке $0 < x < 2$ и возрастает на промежутке $2 < x < +\infty$; кроме того, функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = 2$. Следовательно, наименьшее значение $f(x)$ на множестве $0 < x < +\infty$ равно $f(2)$, т. е. равно $5\frac{1}{3}$.

Значит, искомое расстояние есть $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

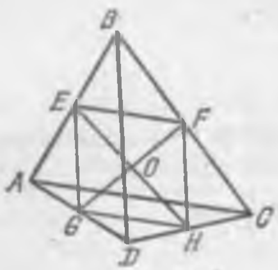


Рис. 87.

4. Так как точки F и H являются серединами сторон BC и CD (рис. 87), то FH есть средняя линия треугольника BCD и потому $FH \parallel BD$ и $|FH| = \frac{1}{2}|BD|$. Аналогично EG — средняя линия треугольника ABD и потому $EG \parallel BD$. Из этих условий получаем, что $EG \parallel FH$. Аналогично получаем, что $EF \parallel GH$ и $|EF| = \frac{1}{2}|AC|$. Значит, четырехугольник $EFHG$ — параллелограмм, у которого угол между диагоналями равен $\pi/3$ и длины диагоналей равны a и b.

Рассмотрим треугольник OFH (рис. 87). По теореме косинусов

$$|FH|^2 = |OF|^2 + |OH|^2 - 2|OF||OH| \cos \widehat{FOH}.$$

Так как $|FH|=\frac{1}{2}|BD|$, то $\frac{1}{4}|BD|^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-2\cdot\frac{ab}{4}\cos\frac{\pi}{3}$, откуда $|BD|=\sqrt{a^2+b^2-ab}$. Теперь рассмотрим треугольник EOF. Учитывая, что $\widehat{EOF}=\frac{2\pi}{3}$, $|EF|=\frac{1}{2}|AC|$, и применяя теорему косинусов, получим, что $|AC|=\sqrt{b^2+a^2+ab}$.

Ответ: длины диагоналей четырехугольника равны $\sqrt{a^2+b^2-ab}$ и $\sqrt{a^2+b^2+ab}$.

5.Н. Пусть a — некоторое число, удовлетворяющее условию задачи. Это значит, что если в данном неравенстве заменить всюду y на x или всюду y на $-x$, то получившиеся относительно x неравенства будут выполняться при любом x. Итак, при любом x справедливы неравенства

$$(a+50)\,x^2-2x+\frac{1}{100}\geqslant 0, \qquad (3)$$

$$(50-a)\,x^2+\frac{1}{100}\geqslant 0. \qquad (4)$$

Очевидно, что при $a=-50$ множество решений неравенства (3) не совпадает со всей числовой прямой. Значит, $a\neq -50$. Поскольку множество решений неравенства (3) совпадает со всей числовой прямой, то дискриминант трехчлена, стоящего в его левой части, не может быть положительным. Следовательно, $4-\frac{4}{100}(50+a)\leqslant 0$, откуда $a\geqslant 50$. Так как множество решений неравенства (4) также совпадает со всей числовой прямой, то $a\leqslant 50$. Итак, если a — число, удовлетворяющее условию задачи, то $a=50$. При $a=50$ исходное неравенство имеет вид

$$25y^2+\frac{1}{100}\geqslant x-50xy+y-25x^2.$$

Его можно переписать так:

$$(5x+5y)^2-2\,(5x+5y)\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{100}\geqslant 0,$$

или

$$\left(5x+5y-\frac{1}{10}\right)^2\geqslant 0. \qquad (5)$$

Неравенство (5) выполняется при любых значениях x и y. Следовательно, $a=50$ является единственным решением задачи.

Ответ: $a=50$.

3.С. Из второго уравнения находим, что $y=x^{-3}$. Подставляя x^{-3} вместо y в первое уравнение, получаем уравнение

$$x^{4x+x^{-3}}=x^{-15\,(x^{-3}-x/3)}. \qquad (6)$$

Очевидно, что $x_1=1$ есть решение этого уравнения. На множестве $x>0$ и $x\neq 1$ уравнение (6) равносильно уравнению $4x+x^{-3}=-15\,(x^{-3}-x/3)$, или уравнению $x^4=16$, имеющему корни $x_2=2$ и $x_3=-2$. На множестве $x>0$ и $x\neq 1$ содержится только один из них, а именно: $x_2=2$. Поэтому на множестве $x>0$ уравнение (3) имеет только два корня: $x_1=1$ и $x_2=2$.

Значит, исходная система имеет на множестве $x>0$ и $y>0$ два решения: $x_1=1$, $y_1=1$; $x_2=2$, $y_2=1/8$.

Ответ: $(1, 1)$; $(2, 1/8)$.

5.С. Пусть a — некоторое фиксированное число. Данное неравенство можно переписать в виде $|x-a|<3-x^2$. Отсюда следует, что оно равносильно двойному неравенству $-(3-x^2)<x-a<3-x^2$, или равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x-a<3-x^2, \\ -(3-x^2)<x-a. \end{cases}$$

Следовательно, задача может быть переформулирована так: определить те a, при каждом из которых множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2+x-3-a<0, \\ x^2-x-3+a<0, \\ \quad x<0 \end{cases} \tag{7}$$

содержит хотя бы одно число. Дискриминанты квадратных трехчленов $x^2+x-3-a$ и $x^2-x-3+a$ равны соответственно $13+4a$ и $13-4a$. Поэтому для того, чтобы первое и второе неравенства системы (7) имели решения, надо, чтобы были выполнены неравенства $13+4a>0$ и $13-4a>0$, т. е. $-\frac{13}{4}<a<\frac{13}{4}$. В дальнейшем будем считать, что a удовлетворяет этим неравенствам.

Обозначим через x_1, x_2 и x_3, x_4 корни квадратных трехчленов $x^2+x-3-a$ и $x^2-x-3+a$ соответственно. При этом будем считать, что $x_1<x_2$, $x_3<x_4$. Так как множества решений первого и второго неравенств системы (7) имеют вид $x_1<x<x_2$ и $x_3<x<x_4$, то система (7) будет иметь решение тогда и только тогда, когда $x_1<0$ и $x_3<0$, или когда

$$\frac{-1-\sqrt{13+4a}}{2}<0 \quad \text{и} \quad \frac{1-\sqrt{13-4a}}{2}<0.$$

Первое неравенство выполнено для всех a из множества $-\frac{13}{4}<a<\frac{13}{4}$. Второе неравенство равносильно на этом множестве неравенству $1<\sqrt{13-4a}$, или неравенству $1<13-4a$. Множество решений последнего неравенства есть промежуток $a<3$.

Итак, система (7) имеет хотя бы одно решение, если параметр a принадлежит множеству $-\frac{13}{4}<a<3$ и только в этом случае.

Ответ: $-\frac{13}{4}<a<3$.

Ответы к вариантам 2—4.

Вариант 2. 1. 4 ч; $\frac{4}{3}$ ч. 2. $x=\pi k$, $k\in Z$. 3.Н. $\frac{1}{3}$. 4. $\frac{1}{2}\times\sqrt{a^2+b^2-2\sqrt{a^2b^2-16S^2}}$; $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+2\sqrt{a^2b^2-16S^2}}$. 5.Н. 32. 3.С. $\left(\frac{2}{3}, \frac{9}{4}\right)$; $(1, 1)$. 5.С. $-\frac{9}{4}<a<2$.

Вариант 3. 1. $7\frac{1}{2}$ ч; $10\frac{1}{2}$ ч. 2. $x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. 3.Н. $\frac{5}{12}$. 4. $|EG|=|FH|=2\sqrt{\frac{5S}{3}}$ 5.Н. 18. 3.С. (1, 1). 5.С. $-4<a<\frac{17}{4}$.

Вариант 4. 1. $\frac{20}{3}$ ч; $\frac{10}{3}$ ч. 2. $x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$, $x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in Z$. 3.Н. $13\frac{1}{2}$. 4. $2\sqrt{Q}\sqrt[4]{3}$, $4Q/\sqrt[4]{3}$. 5.Н. 8. 3.С. (1, 1); (1/2, 4). 5.С. $-1<a<5/4$.

1978

Решение варианта 1.

1. Область допустимых значений данного уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих одновременно условиям $1-2x^2>0$, $1-2x^2\neq 1$, $x>0$, т. е. ОДЗ имеет вид $0<x<\sqrt{2}/2$. Так как на ОДЗ

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\log_{1-2x^2}(1-2x^2),\qquad \frac{3}{\log_2(1-2x^2)^4}=\frac{3}{4}\log_{1-2x^2}2,$$

то данное уравнение равносильно на ОДЗ такому:

$$\log_{1-2x^2}x=\frac{1}{4}\log_{1-2x^2}(1-2x^2)-\frac{3}{4}\log_{1-2x^2}2.$$

Умножая обе части последнего уравнения на 4 и потенцируя, получаем уравнение

$$8x^4=1-2x^2, \tag{1}$$

равносильное исходному уравнению на его ОДЗ. Уравнение $8\cdot z^2+2z-1=0$ имеет корни $z_1=-1/2$, $z_2=1/4$. Значит, уравнение (1) равносильно совокупности двух уравнений

$$x^2=-1/2 \quad \text{и} \quad x^2=1/4.$$

Первое уравнение не имеет корней, а второе имеет корни $x_1=1/2$ и $x_2=-1/2$. Таким образом, множество решений уравнения (1) состоит из этих двух чисел. Из них только x_1 входит в ОДЗ исходного уравнения. Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x_1=1/2$.

Ответ: $x=1/2$.

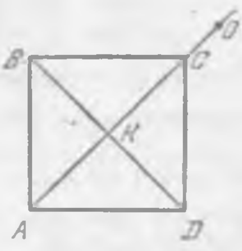


Рис. 88.

2. Так как $|OB|=|OD|$, то точка O лежит на перпендикуляре к середине отрезка BD, т. е. на прямой AC (рис. 88). Обозначим через K точку пересечения диагоналей квадрата. Из условия следует, что $|OB|>|OC|$; значит, точка O лежит по одну сторону с точкой C относительно перпендикуляра к середине отрезка BC. Отсюда следует, что точка O лежит на луче KC. Обозначим $|KO|$ через x и $|AB|$ через y. Так как $|KC|=y\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $|OC|=5\sqrt{2}$, то

$$\left|x-y\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=5\sqrt{2}. \tag{2}$$

Применяя к прямоугольному треугольнику KOD теорему Пифагора, получаем $|OD|^2=|KO|^2+|KD|^2$, или

$$169=x^2+\frac{1}{2}y^2. \tag{3}$$

Предположим, что $x\geq y\frac{\sqrt{2}}{2}$; тогда $x^2\geq\frac{1}{2}y^2$ (заметим, что числа x, y неотрицательны) и $169=x^2+\frac{1}{2}y^2\geq\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y^2=y^2$, т. е. площадь квадрата не превосходит 169. Это противоречит условию. Следовательно, $x<$ $<y\frac{\sqrt{2}}{2}$, т. е. $|KO|<|KC|$ и точка O лежит внутри квадрата. Из (2) и (3) теперь получаем

$$\begin{cases} y\frac{\sqrt{2}}{2}-x=5\sqrt{2}, \\ x^2+\frac{1}{2}y^2=169. \end{cases}$$

Выражая x из первого уравнения и подставляя во второе, после упрощений получаем:

$$y^2-10y-119=0.$$

Это квадратное уравнение имеет корни $y_1=-7$, $y_2=17$. Так как y есть длина отрезка, то $y>0$ и, значит, $y=17$.

Ответ: длина стороны квадрата равна 17; точка O лежит внутри квадрата.

3. Из первого уравнения находим $y=\frac{b+2-bx}{2}$. Подставляя это выражение во второе уравнение, находим, что исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} y=\frac{b+2-bx}{2}, \\ b(b-3)x=(b+2)(b-3). \end{cases} \tag{4}$$

Если $b=0$, то система (4) несовместна. Если $b=3$, то система (4) имеет бесконечно много решений вида $x=a$, $y=\frac{5-3a}{2}$, где a — любое число. Если $b\neq 0$ и $b\neq 3$, то система (4) имеет единственное решение $x=\frac{b+2}{b}$, $y=0$. Следовательно, данная система имеет хотя бы одно решение при любом b, кроме $b=0$.

Ответ: $-\infty<b<0$, $0<b<+\infty$.

4. Обозначим через n количество вагонов вместимостью 50 тонн, в которые был загружен весь груз. Тогда вес груза равен $50n$ тонн.

Вагонов вместимостью 60 тонн было использовано $n-5$. Так как в них был помещен весь груз и один вагон оказался не полностью загруженным, то

$$60(n-5)>50n \quad \text{и} \quad 60(n-6)<50n.$$

Из этих неравенств следует, что $300 < 10n < 360$, или $30 < n < 36$. Поскольку n — целое число, то

$$31 \leqslant n \leqslant 35. \qquad (5)$$

Вагонов вместимостью 80 тонн при погрузке было использовано $n-13$. Подобно предыдущему, получаем, что $80(n-13) > 50n$ и $80(n-14) < 50n$, или $\frac{104}{3} < n < \frac{112}{3}$. Так как $\frac{104}{3} = 34\frac{2}{3}$, $\frac{112}{3} = 37\frac{1}{3}$, а n — целое число, то

$$35 \leqslant n \leqslant 37. \qquad (6)$$

Из (5) и (6) теперь следует, что $n = 35$. Значит, вес груза равен $50 \cdot 35 = 1750$ тонн.

Ответ: 1750 тонн.

5.Н. При любом фиксированном a данная функция дифференцируема в каждой точке прямой. Если функция $y(x)$ возрастает, то в каждой точке x выполнено неравенство $y'(x) \geqslant 0$. Если, кроме того, $y(x)$ не имеет критических точек, то при любом x должно быть выполнено соотношение $y'(x) \neq 0$. Таким образом, если функция $y(x)$ удовлетворяет условию задачи, то при всех x должно быть выполнено неравенство $y'(x) > 0$. С другой стороны, если при всех x выполнено неравенство $y'(x) > 0$, то функция, очевидно, не имеет критических точек и возрастает.

Так как $y'(x) = 8a - 6a\cos 6x - 7 - 5\cos 5x$, то задачу теперь можно переформулировать: найти все значения параметра a, при каждом из которых для любого x выполнено неравенство

$$6a\cos 6x + 5\cos 5x < 8a - 7. \qquad (7)$$

Подставляя в (7) $x = 0$, получим, что $6a + 5 < 8a - 7$, или $a > 6$. Таким образом, искомые значения параметра a лежат в области $a > 6$. Если $a > 6$, то $6a + 5 < 8a - 7$ и при любом x имеем

$$6a\cos 6x + 5\cos 5x \leqslant 6|a| + 5 = 6a + 5 < 8a - 7,$$

т. е. неравенство (7) выполнено при всех x.

Ответ: $a > 6$.

5.С. Пусть a удовлетворяет условию задачи. Так как данное неравенство должно выполняться при всех x, то оно должно выполняться и при $x = \pi/2$, т. е. должно быть выполнено неравенство

$$\left(4 - \sin\frac{\pi}{2}\right)^4 \cdot a - 3 + \cos^2\frac{\pi}{2} + a > 0,$$

или $82a - 3 > 0$. Таким образом, все значения a, удовлетворяющие условию задачи, лежат в области $a > 3/82$.

Пусть теперь $a > 3/82$. При каждом значении x выполнены неравенства $\cos^2 x \geqslant 0$, $4 - \sin x \geqslant 3$ и $(4 - \sin x)^4 \geqslant 81$. Так как $a > 0$, то из этих неравенств вытекает, что

$$a(4 - \sin x)^4 - 3 + \cos^2 x + a \geqslant 81a - 3 + a = 82a - 3 > 0.$$

Значит, все a из области $a > 3/82$ удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $a > 3/82$.

Ответы к вариантам 2—4.

Вариант 2. **1.** $x = \pm\sqrt{3}/2$. **2.** 2. **3.** $a = -2/3$. **4.** 850 литров. **5.Н.** $a < 1/15$ **5.С.** $a < 3/11$.

Вариант 3. 1. $x=\pm 1/2$. 2. 4; точка O—вне квадрата. 3. $c=-4$. 4. 25300 м. 5.Н. $a>11/2$. 5.С. $a>5/13$.

Вариант 4. 1. $x=\pm 1/2$. 2. 32. 3. $-\infty<d<-1$, $-1<d<1$, $1<d<+\infty$. 4. 119 человек. 5.Н. $a<3/8$. 5.С. $a<5/29$.

1979

Решение варианта 1.

1. Обозначим $\operatorname{ctg} x$ через z, тогда данное уравнение можно переписать так:

$$\sqrt{37-48z}=8z-5. \tag{1}$$

Возводя обе части уравнения (1) в квадрат, получим уравнение

$$16z^2-8z-3=0,$$

которое имеет два корня $z_1=3/4$ и $z_2=-1/4$. Поскольку при возведении в квадрат могли появиться лишние корни, то необходимо проверить, будут ли корни z_1 и z_2 корнями уравнения (1). Проверка показывает, что уравнение (1) имеет единственный корень $z_1=3/4$. Отсюда следует, что исходное уравнение равносильно уравнению $\operatorname{ctg} x=3/4$, а потому имеет решения: $x=\operatorname{arcctg}\frac{3}{4}+\pi n$, $n\in Z$.

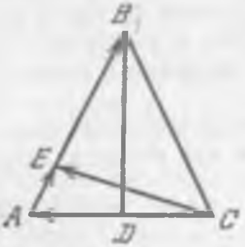


Рис. 89.

Ответ: $x=\operatorname{arcctg}\frac{3}{4}+\pi n$, $n\in Z$.

2.Н. Поскольку

$$\cos\widehat{ACE}=\frac{(\overrightarrow{CE},\ \overrightarrow{CA})}{|\overrightarrow{CE}|\cdot|\overrightarrow{CA}|},$$

то для получения ответа надо найти $|\overrightarrow{CE}|$ и скалярное произведение $(\overrightarrow{CE},\ \overrightarrow{CA})$. Легко видеть (рис. 89), что $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE}$ и что $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. Поэтому, пользуясь свойствами скалярного произведения, имеем: $(\overrightarrow{CE},\ \overrightarrow{CA})=$ $=\left(\overrightarrow{CA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CA}\right)=(\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CA})+\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{CA}|\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CA}})$. Опуская высоту BD в треугольнике ABC, получаем прямоугольный треугольник ABD, в котором $\cos\widehat{BAD}=\frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$. Поскольку величина угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$ равна $\pi-\widehat{BAD}$, то $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CA}})=-3/4$. Значит, $(\overrightarrow{CE},\ \overrightarrow{CA})=144+\frac{1}{4}\cdot 12\cdot 8\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=126$. Далее по теореме косинусов имеем: $|\overrightarrow{EC}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{AE}|^2-2|\overrightarrow{AC}|\,|\overrightarrow{AE}|\cos\widehat{CAE}=144+4-2\cdot 12\cdot 2\times$ $\times\frac{3}{4}=112$. Теперь получаем, что

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CE}})=\frac{126}{\sqrt{112\cdot 12}}=\frac{3\sqrt{7}}{8}.$$

Значит, $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CE}}) = \arccos \frac{3\sqrt{7}}{8}$.

Ответ: $\arccos \frac{3\sqrt{7}}{8}$.

3. Обозначим через V л объем сосуда. После отливания 2 л глицерина и доливания 2 л воды глицерин занимает $\frac{V-2}{V}$ часть сосуда. После того как отлили 2 л смеси, глицерина стало $(V-2)\frac{V-2}{V}$ литров, и после доливания воды глицерин занимает $\frac{(V-2)^2}{V^2}$ часть сосуда. После третьей операции глицерин займет $\left(\frac{V-2}{V}\right)^3$ часть сосуда. Таким образом, количество глицерина в сосуде станет равным $V\left(\frac{V-2}{V}\right)^3$, а воды — $V\left(\frac{V-2}{V}\right)^3+3$. Поэтому

$$V\left(\frac{V-2}{V}\right)^3 + V\left(\frac{V-2}{V}\right)^3 + 3 = V.$$

Получившееся уравнение относительно V можно переписать так: $V^3-9V^2+24V-16=0$, или $(V-1)(V-4)^2=0$, откуда ясно, что либо $V=1$, либо $V=4$. Так как по условию $V>2$, то $V=4$. Следовательно, в результате проделанных операций глицерина оказалось в сосуде $V\left(\frac{V-2}{V}\right)^3 = \frac{1}{2}$ л, а воды 3,5 л.

Ответ: глицерина 0,5 л, воды 3,5 л.

4.Н. Квадратный трехчлен x^2+2x-3 имеет корни $x_1=-3$, $x_2=1$. Из них только $x_2=1$ лежит на отрезке $[1/2, 4]$. Найдем наибольшие и наименьшие значения $y(x)$ на отрезках $[1/2, 1]$ и $[1, 4]$. На множестве $0<x\leqslant 1$ справедливо неравенство $x^2+2x-3\leqslant 0$. Значит $|x^2+2x-3| = -x^2-2x+3$ и $y(x) = -x^2-2x+3+\frac{3}{2}\ln x$. Функция $f(x) = -x^2-2x+3+\frac{3}{2}\ln x$ определена на множестве $x>0$ и имеет производную в каждой точке этого множества, причем

$$f'(x) = -2x-2+\frac{3}{2x} = -\frac{4x^2+4x-3}{2x} = -\frac{(2x-1)(2x+3)}{2x}.$$

Отсюда следует, что справедливо неравенство $f'(x)<0$. Так как $f(x)$ непрерывна при $x=1/2$ и $x=1$, то она убывает на отрезке $[1/2, 1]$. Поскольку на этом отрезке функции $y(x)$ и $f(x)$ совпадают, то данная функция $y(x)$ монотонно убывает на отрезке $[1/2, 1]$. Поэтому

$$\min_{x\in[1/2,\,1]} y(x) = y(1) = 0, \quad \max_{x\in[1/2,\,1]} y(x) = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4}-\frac{3}{2}\ln 2.$$

На множестве $x\geqslant 1$ справедливо неравенство $x^2+2x-3\geqslant 0$. Значит, $|x^2+2x-3| = x^2+2x-3$ и $y(x) = x^2+2x-3+\frac{3}{2}\ln x$. Функция $g(x) =$

$= x^2+2x-3+\frac{3}{2}\ln x$ определена на множестве $x>0$ и имеет производную в каждой точке этого множества, причем

$$g'(x)=2x+2+\frac{3}{2x}=\frac{4x^2+4x+3}{2x}=\frac{(2x+1)^2+3}{2x}.$$

Отсюда следует, что на множестве $x>0$ справедливо неравенство $g'(x)>0$. Следовательно, функция $g(x)$ возрастает на множестве $x>0$ и, в частности, на отрезке $[1, 4]$. Так как на этом отрезке функции $y(x)$ и $g(x)$ совпадают, то данная функция $y(x)$ монотонно возрастает на отрезке $[1, 4]$. Поэтому

$$\min_{x\in[1,\,4]} y(x)=y(1)=0, \qquad \max_{x\in[1,\,4]} y(x)=y(4)=21+3\ln 2.$$

Итак, наибольшее значение функции $y(x)$ на отрезке $[1/2, 4]$ равно большему из чисел $y(1/2)$ и $y(4)$, т. е. $y(4)=21+3\ln 2$. Наименьшее значение функции $y(x)$ на отрезке $[1/2, 4]$ равно $y(1)=0$.

Ответ: $\max\limits_{x\in[1/2,\,4]} y(x)=21+3\ln 2, \quad \min\limits_{x\in[1/2,\,4]} y(x)=0.$

5. Поскольку $9+12x+4x^2=(2x+3)^2$, а $6x^2+23x+21=(3x+7)(2x+3)$, то область допустимых значений исходного уравнения состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям $2x+3>0$, $2x+3\neq 1$, $3x+7>0$, $3x+7\neq 1$, т. е. ОДЗ состоит из двух промежутков: $-3/2<x<1$ и $1<$ $<x<+\infty$. На ОДЗ исходное уравнение равносильно уравнению

$$2\log_{3x+7}(2x+3)+\log_{2x+3}(3x+7)+1=4. \qquad (2)$$

Обозначим $\log_{3x+7}(2x+3)$ через z. Тогда уравнение (2) можно переписать в виде

$$2z+\frac{1}{z}=3. \qquad (3)$$

Уравнение (3) равносильно уравнению $2z^2-3z+1=0$, и потому имеет корни $z_1=1/2$ и $z_2=1$. Следовательно, исходное уравнение на своей ОДЗ равносильно совокупности двух уравнений

$$\log_{3x+7}(2x+3)=\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \log_{3x+7}(2x+3)=1.$$

Первое уравнение равносильно на ОДЗ такому: $2x+3=\sqrt{3x+7}$. Обе части последнего уравнения определены и положительны на ОДЗ, поэтому оно равносильно на этой области уравнению $(2x+3)^2=3x+7$. Последнее уравнение имеет два корня: $x_1=-1/4$ и $x_2=-2$, из которых только $x_1=-1/4$ лежит в ОДЗ исходного уравнения. Второе уравнение равносильно на ОДЗ такому: $2x+3=3x+7$. Последнее уравнение имеет корень $x_3=-4$, не лежащий в ОДЗ исходного уравнения. Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x_1=-1/4$.

Ответ: $x=-1/4$.

2.С. Обозначим длину отрезка AC через x (рис. 90). Из прямоугольного треугольника AEC по теореме Пифагора находим

$$EC=\sqrt{AC^2-AE^2}=\sqrt{x^2-144}.$$

По условию $BE : EC = 5:9$, значит,

$$BC = BE + EC = \frac{14}{9} EC = \frac{14}{9}\sqrt{x^2 - 144}.$$

Площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2} BD \cdot AC$ и одновременно $\frac{1}{2} AE \cdot BC$, так что

$$BD \cdot AC = AE \cdot BC,$$

или

$$11{,}2 \cdot x = 12 \cdot \frac{14}{9}\sqrt{x^2 - 144}.$$

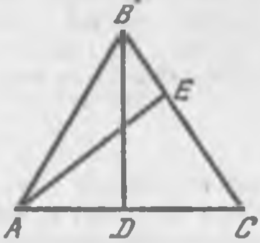


Рис. 90.

Последнее уравнение можно переписать в виде

$$3x = 5\sqrt{x^2 - 144}. \qquad (4)$$

Возведя уравнение (4) в квадрат, получим, что $x^2 = 225$, откуда либо $x = 15$, либо $x = -15$. Подстановкой в уравнение (4) убеждаемся, что ему удовлетворяет только $x = 15$. Итак, длина стороны AC равна 15.

Ответ: 15.

4.С. Заменяя второе уравнение системы суммой первого уравнения, умноженного на 3, и второго, умноженного на —2, получим, что исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 3x + 5y = 3, \\ y = 5 - 3x, \end{cases}$$

или системе

$$\begin{cases} 3x^2 + 2(5 - 3x)^2 - 3x + 5(5 - 3x) = 3, \\ y = 5 - 3x. \end{cases} \qquad (5)$$

Первое уравнение системы (5) имеет два корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = 12/7$. Поэтому система (5) имеет два решения: $x_1 = 2$, $y_1 = -1$ и $x_2 = 12/7$, $y_2 = -1/7$.

Ответ: $(2, -1)$, $\left(\frac{12}{7}, -\frac{1}{7}\right)$.

Ответы к вариантам 2—4.

Вариант 2. 1. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. 2.Н. $\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}$. 3. 10 л. 4.Н. $\min f = 0$; $\max f = 4 + \ln 2$. 5. $x = 1/4$. 2.С. 75. 4.С. $(-1, 2)$; $(7/9, 10/9)$.

Вариант 3. 1. $x = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi k$, $k \in Z$. 2.Н. $\arccos\frac{3}{\sqrt{14}}$. 3. $\frac{1}{4}$ глицерина, $\frac{7}{4}$ воды. 4.Н. $\min f = -3\ln 2 - 21$; $\max f = 0$. 5. $x_1 = 1$; $x_2 = 1/2$. 2.С. $6\sqrt{2}$. 4.С. $(1, 1/2)$; $(-3, 5/2)$.

Вариант 4. 1. $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. 2.Н. $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$. 3. 25 л. 4.Н. $\min f = -\ln 2 - 4$; $\max f = 0$. 5. $x_1 = 2$; $x_2 = 7/10$. 2.С. 75. 4.С. $(1, 4)$; $(-5/9, 64/9)$.

§ 11. ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
(отделение планирования и экономической кибернетики)

1977

Решение варианта 1.

1. Правая часть уравнения и знаменатель левой части неотрицательны. Поэтому решение данного уравнения должно удовлетворять неравенству $\cos x \geqslant 0$. Но $|\cos x| = \cos x$ для таких x, и поэтому задача может быть переформулирована так: найти решения уравнения

$$\frac{\cos x}{(x+3/2)^2} = \cos x, \qquad (1)$$

удовлетворяющие условию $\cos x \geqslant 0$. Область допустимых значений уравнения (1) состоит из всех x, кроме $x = -3/2$. Уравнение (1) равносильно на своей ОДЗ совокупности уравнений

$$\cos x = 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{(x+3/2)^2} = 1.$$

Первое уравнение этой совокупности имеет серию решений $x = \pi/2 + \pi m$, $m \in Z$, второе уравнение имеет два корня $x_1 = -1/2$ и $x_2 = -5/2$. Выясним теперь, какие из найденных решений удовлетворяют условиям $\cos x \geqslant 0$ и $x \neq -3/2$ (они и будут решениями исходного уравнения). Ясно, что любое из решений $x = \pi/2 + \pi m$, $m \in Z$, удовлетворяет этим условиям, так как $\pi/2 + \pi m$ не равно $3/2$ ни для одного целого m. Так как $0 < 1/2 < \pi/2$, то $\cos(-1/2) = \cos 1/2 > 0$. Значит, $x = -1/2$ удовлетворяет условиям $\cos x \geqslant 0$ и $x \neq -3/2$, т. е. является корнем исходного уравнения. Так как $-\pi < -5/2 < -\pi/2$, то $\cos(-5/2) < 0$ и $x = -5/2$ не является корнем исходного уравнения. Итак, исходное уравнение имеет решения: $x = -1/2$ и $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $x = -1/2$; $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$.

2. Обозначим через S км расстояние между пунктами A и B, через u км/ч — скорость мотоциклиста на пути из B в A, через v км/ч — скорость велосипедиста, через x — искомое отношение скорости мотоциклиста на пути из A в B к скорости велосипедиста. Тогда скорость мотоциклиста на пути из A в B равна $x \cdot v$ км/ч.

На движение из пункта A в пункт B мотоциклист потратил $\frac{S}{x \cdot v}$ часов. По условию задачи ровно такое же время прошло между моментом выезда мотоциклиста из пункта B и моментом первой встречи с велосипедистом. За это время велосипедист проехал $\frac{S}{x \cdot v} \cdot v$ км, а мотоциклист $\frac{S}{x \cdot v} \cdot u$ км. Поскольку в момент выезда мотоциклиста из пункта B расстояние между ним и велосипедистом равнялось $\frac{3}{4} S$ км, то справедливо равенство $\frac{S}{x \cdot v} \cdot v + \frac{S}{x \cdot v} \cdot u = \frac{3}{4} S$, или, поскольку $v > 0$, $S > 0$, равенство

$$\frac{1}{x} + \frac{u}{vx} = \frac{3}{4}. \qquad (2)$$

Мотоциклист находился в пути $\left(\frac{S}{u}+\frac{S}{xv}\right)$ часов. За это время велосипедист проехал $\frac{3}{4}S$ км. Поэтому $\left(\frac{S}{u}+\frac{S}{xv}\right)v=\frac{3}{4}S$, или

$$\frac{v}{u}+\frac{1}{x}=\frac{3}{4}. \qquad (3)$$

Из уравнения (3)

$$\frac{u}{v}=\frac{4x}{3x-4}.$$

Подставляя $\frac{4x}{3x-4}$ вместо $\frac{u}{v}$ в уравнение (2), имеем уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{4}{3x-4}=\frac{3}{4},$$

или $9x^2-40x+16=0$. Это квадратное уравнение имеет корни $x_1=4$ и $x_2=4/9$. Из условия задачи ясно, что скорость мотоциклиста на пути из A в B больше скорости велосипедиста, т. е. $x>1$. Значит, $x=4$.

Ответ: скорость мотоциклиста при движении из A в B в 4 раза больше скорости велосипедиста.

3.Н. Пусть a — искомое значение параметра и (x_0, y_0) — решение системы. Легко видеть, что пары чисел $(-x_0, -y_0)$, (y_0, x_0), $(-y_0, -x_0)$ также будут решениями системы. Решения (x_0, y_0) и $(-x_0, -y_0)$ различны, так как в противном случае $x_0=0$ и $y_0=0$, и тогда пара чисел (x_0, y_0) не удовлетворяет второму уравнению системы. Решения (x_0, y_0) и $(-y_0, -x_0)$ также различны. В противном случае $x_0+y_0=0$ и опять не удовлетворяется второе уравнение системы. По условию система имеет в точности два решения, значит, решения $(-x_0, -y_0)$ и $(-y_0, -x_0)$ должны совпадать, т. е. должно выполняться равенство $y_0=x_0$. Подставляя x_0 вместо y_0 во второе уравнение системы, получаем уравнение $4x_0^2=14$, которое имеет два корня $x_0'=\sqrt{7/2}$ и $x_0''=-\sqrt{7/2}$. Значит, если при данном a (x_0, y_0) — решение исходной системы, то либо $x_0=y_0=\sqrt{7/2}$, либо $x_0=y_0=-\sqrt{7/2}$. В обоих случаях, подставляя (x_0, y_0) в первое уравнение системы, получим, что $2(1+a)=7/2+7/2$, т. е. получим, что $a=5/2$. Значит, если a — искомое значение параметра, то оно может принимать только значение 5/2. При $a=5/2$ исходная система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} x^2+y^2=7, \\ (x+y)^2=14. \end{cases} \qquad (4)$$

Умножим первое уравнение системы (4) на 2 и вычтем результат из второго уравнения системы (4). Получим систему

$$\begin{cases} x^2+y^2=7, \\ -(x-y)^2=0, \end{cases} \qquad (5)$$

равносильную системе (4).

Система (5) равносильна системе

$$\begin{cases} y=x, \\ 2x^2=7, \end{cases}$$

которая имеет в точности два решения $(\sqrt{7/2}, \sqrt{7/2})$, $(-\sqrt{7/2}, -\sqrt{7/2})$. Значит, действительно, $a=5/2$ и только оно удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a=5/2$.

4.Н. Пусть $ABCD$ — данная трапеция (рис. 91), $|AD|=R\sqrt{3}$, O — центр круга. Из равнобедренного треугольника AOD находим, что $\frac{1}{2}|AD|=$ $=R\sin\left(\frac{1}{2}\widehat{AOD}\right)$, откуда $\sin\left(\frac{1}{2}\widehat{AOD}\right)=\frac{|AD|}{2R}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно,

Рис. 91.

$\widehat{AOD}=\frac{2\pi}{3}$. Так как четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, то $\hat{B}+\hat{D}=\pi$. Но по условию $BC \parallel AD$, значит, $\hat{B}+\hat{A}=\pi$. Таким образом, $\hat{A}=\hat{D}$ и

$$\widehat{BAO}=\hat{A}-\widehat{OAD}=\hat{D}-\widehat{ODA}=\widehat{CDO}.$$

Треугольники ABO и DCO равнобедренные, следовательно, $\widehat{AOB}=\pi-2\widehat{BAO}$, $\widehat{COD}=\pi-2\widehat{CDO}$. Учитывая доказанное выше, получаем, что $\widehat{AOB}=\widehat{COD}$. Обозначим $\widehat{AOB}$ через φ. Тогда $\widehat{COD}=\varphi$ и $\widehat{BOC}=2\pi-2\varphi-$ $-\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}-2\varphi$. Имеем

$$S_{ABCD}=S_{AOB}+S_{BOC}+S_{COD}+S_{AOD}=$$
$$=\frac{1}{2}R^2\sin\varphi+\frac{1}{2}R^2\sin\left(\frac{4\pi}{3}-2\varphi\right)+\frac{1}{2}R^2\sin\varphi+\frac{1}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{3}=$$
$$=\frac{1}{2}R^2\left(2\sin\varphi+\sin\left(\frac{4\pi}{3}-2\varphi\right)+\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Из условия задачи вытекает, что $0<\widehat{BOC}<\pi$, но тогда угол φ удовлетворяет неравенству $\frac{\pi}{6}<\varphi<\frac{2\pi}{3}$. Найдем точки, в которых функция

$$S(\varphi)=\frac{1}{2}R^2\left(2\sin\varphi+\sin\left(\frac{4\pi}{3}-2\varphi\right)+\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

принимает наибольшее значение на множестве $\frac{\pi}{6}<\varphi<\frac{2\pi}{3}$. Функция $S(\varphi)$ дифференцируема в каждой точке, причем

$$S'(\varphi)=\frac{1}{2}R^2\left(2\cos\varphi-2\cos\left(\frac{4\pi}{3}-2\varphi\right)\right)=$$
$$=2R^2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{3\varphi}{2}\right).$$

Если φ лежит на промежутке $\frac{\pi}{6}<\varphi<\frac{2\pi}{3}$, то

$$\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}-\frac{\varphi}{2}<\frac{7\pi}{12},$$

т. е. $\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\varphi}{2}\right)>0$. Для этих же значений φ справедливо неравенство $-\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}-\frac{3\varphi}{2}<\frac{5\pi}{12}$. Отсюда следует, что $S'(\varphi)$ на промежутке $\frac{\pi}{6}<\varphi<\frac{2\pi}{3}$ обращается в нуль в единственной точке, удовлетворяющей равенству $\frac{2\pi}{3}-\frac{3\varphi}{2}=0$, т. е. в точке $\varphi=\frac{4\pi}{9}$. Кроме того, на множестве $\frac{\pi}{6}<\varphi<\frac{4\pi}{9}$ справедливо неравенство $S'(\varphi)>0$, а на множестве $\frac{4\pi}{9}<\varphi<\frac{2\pi}{3}$ неравенство $S'(\varphi)<0$. Так как $S(\varphi)$ непрерывна в точке $\varphi=\frac{4\pi}{9}$, то она монотонно возрастает на множестве $\frac{\pi}{6}<\varphi\leqslant\frac{4\pi}{9}$ и монотонно убывает на множестве $\frac{4\pi}{9}\leqslant\varphi<\frac{2\pi}{3}$. Итак, $S(\varphi)$ принимает наибольшее значение в точке $\varphi=\frac{4\pi}{9}$.

Из равнобедренного треугольника AOB теперь находим:

$$|AB|=2R\sin\left(\frac{1}{2}\widehat{AOB}\right)=2R\sin\frac{2\pi}{9}.$$

Ответ: $2R\sin\frac{2\pi}{9}$.

5. Обозначим через F, R и N точки пересечения плоскости π с ребрами SA_1, SA_2 и SA_3 соответственно (рис. 92). Плоскость SK_1K_2 пересекает параллельные плоскости FNR и $A_1A_2A_3$ по прямым L_1L_2 и K_1K_2 соответственно. Значит, $L_1L_2 \| K_1K_2$. Аналогично доказывается, что $L_2L_3 \| K_2K_3$ и $L_3L_1 \| K_3K_1$. Отсюда следует, что треугольники $L_1L_2L_3$ и $K_1K_2K_3$ подобны, причем коэффициент подобия равен $\frac{|L_1L_2|}{|K_1K_2|}$. Треугольники SL_1L_2 и SK_1K_2 подобны ($L_1L_2 \| K_1K_2$), значит, $\frac{|L_1L_2|}{|K_1K_2|}=\frac{|SL_1|}{|SK_1|}$. Плоскость SA_1A_2 пересекает параллельные плоскости FNR и $A_1A_2A_3$ по прямым FR и A_1A_2, значит, $FR \| A_1A_2$. По теореме об отрезках, отсекаемых на сторонах угла параллельными прямыми, заключаем, что $\frac{|SL_1|}{|SK_1|}=\frac{|SF|}{|SA_1|}=\frac{1}{2}$.

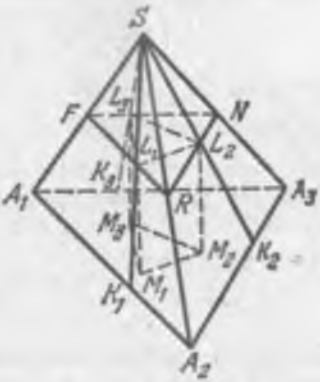


Рис. 92.

Итак, коэффициент подобия треугольников $L_1L_2L_3$ и $K_1K_2K_3$ равен $\frac{1}{2}$. Поэтому $S_{L_1L_2L_3}=\frac{1}{4}S_{K_1K_2K_3}$. Найдем теперь отношение $\frac{S_{K_1K_2K_3}}{S_{A_1A_2A_3}}$.

Легко видеть, что

$$S_{K_1A_2K_2}=\frac{1}{2}|K_1A_2|\cdot|K_2A_2|\sin\widehat{K_1A_2K_2}=$$

$$=\frac{1}{9}|A_1A_2|\cdot|A_2A_3|\cdot\sin\widehat{K_1A_2K_2}=\frac{2}{9}S_{A_1A_2A_3}.$$

Аналогично $S_{K_2A_3K_3}=S_{K_3A_1K_1}=\frac{2}{9}S_{A_1A_2A_3}$. Поэтому $S_{K_1K_2K_3}=S_{A_1A_2A_3}-$ $-3\cdot\frac{2}{9}S_{A_1A_2A_3}=\frac{1}{3}S_{A_1A_2A_3}$ и, значит, $S_{L_1L_2L_3}=\frac{1}{12}S_{A_1A_2A_3}$.

Если H — высота пирамиды $A_1A_2A_3S$, то высота призмы равна $\frac{1}{2}H$ $\left(\text{плоскость } FRN \text{ параллельна плоскости } A_1A_2A_3 \text{ и } |SF|=\frac{1}{2}|SA_1|\right)$. Следовательно, объем призмы равен

$$v=\frac{1}{2}H\cdot S_{L_1L_2L_3}=\frac{1}{24}H\cdot S_{A_1A_2A_3}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}H\cdot S_{A_1A_2A_3}=\frac{1}{8}V.$$

Ответ: $\frac{1}{8}V$.

3.С. Пусть (x_0, y_0) — решение данной системы уравнений. Тогда справедливы равенства

$$y_0^{1-\frac{2}{5}\log_{x_0}y_0}=x_0^{\frac{2}{5}},\quad 1+\log_{x_0}\left(1-\frac{3y_0}{x_0}\right)=\log_{x_0}4.$$

Из справедливости этих равенств вытекает, что $x_0>0$, $x_0\neq 1$, $y_0>0$, $x_0>3y_0$. Прологарифмировав первое равенство по основанию x_0 и пропотенцировав второе, получим, что справедливы равенства

$$\left(1-\frac{2}{5}\log_{x_0}y_0\right)\log_{x_0}y_0=\frac{2}{5},\qquad x_0-3y_0=4. \tag{6}$$

Обозначив $\log_{x_0}y_0$ через z, из первого равенства (6) получаем уравнение

$$\frac{2}{5}z^2-z+\frac{2}{5}=0.$$

Последнее квадратное уравнение имеет корни $z_1=2$ и $z_2=1/2$. Таким образом, каждое решение исходной системы уравнений является решением одной из систем

$$\begin{cases} x-3y=4, \\ \log_x y=2, \end{cases}\qquad \begin{cases} x-3y=4, \\ \log_x y=1/2. \end{cases} \tag{7}$$

Из второго уравнения первой системы (7) находим, что $y=x^2$. Подставляя x^2 вместо y в первое уравнение, получаем уравнение

$$x-3x^2=4.$$

Но это квадратное уравнение корней не имеет. Значит, первая из систем (7) не имеет решений. Решим вторую систему (7). Из второго уравнения находим, что $x=y^2$. Подставляя y^2 вместо x в первое уравнение, получаем уравнение

$$y^2-3y-4=0.$$

Это уравнение имеет два корня: $y_1=4$ и $y_2=-1$. Тогда $x_1=3y_1+4=16$ и $x_2=3y_2+4=1$. Числа $x_1=16$, $y_1=4$ удовлетворяют второму уравнению системы. Числа $x_2=1$, $y_2=-1$ не удовлетворяют второму уравнению. Значит, вторая система (7) имеет единственное решение $x_1=16$, $y_1=4$.

Следовательно, если исходная система уравнений имеет решение, то этим решением может быть только пара чисел $x_1=16$, $y_1=4$. Подставляя эти числа в уравнения системы, видим, что они действительно образуют ее решение.

Ответ: $x=16$, $y=4$.

4.С. Пусть a — некоторое фиксированное число. Область допустимых значения данного уравнения состоит из всех чисел x, удовлетворяющих неравенству

$$9^x+9a^3>0.$$

Значит, если $a\geqslant 0$, то ОДЗ совпадает с множеством всех действительных чисел, если $a<0$, то ОДЗ есть множество $x>\log_9(-9a^3)$.

На ОДЗ данное уравнение равносильно уравнению

$$9^x+9a^3=3^x.$$

Обозначив 3^x через t, получим квадратное уравнение

$$t^2-t+9a^3=0. \tag{8}$$

Дискриминант полученного уравнения равен $1-36a^3$. Поэтому если $1-36a^3<0$, т. е. если $a>\frac{1}{\sqrt[3]{36}}$, то квадратное уравнение (8) не имеет корней. Не имеет их тогда и исходное уравнение. Если $a=\frac{1}{\sqrt[3]{36}}$, то уравнение (8) имеет единственный корень $t_1=1/2$. Это значит, что исходное уравнение равносильно на своей ОДЗ уравнению

$$3^x=\frac{1}{2},$$

которое имеет единственный корень $x_0=\log_3\frac{1}{2}$. Не проверяя, входит или нет этот корень в ОДЗ исходного уравнения, приходим к выводу, что при $a=\frac{1}{\sqrt[3]{36}}$ исходное уравнение имеет не более одного корня. Если $a<\frac{1}{\sqrt[3]{36}}$, то уравнение (8) имеет два корня $t_1=\frac{1-\sqrt{1-36a^3}}{2}$ и $t_2=\frac{1+\sqrt{1-36a^3}}{2}$. Значит, в этом случае исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$3^x=\frac{1-\sqrt{1-36a^3}}{2} \quad \text{и} \quad 3^x=\frac{1+\sqrt{1-36a^3}}{2}. \tag{9}$$

При $a\leqslant 0$ выполнено неравенство $\frac{1-\sqrt{1-36a^3}}{2}\leqslant 0$ и первое уравнение (9) решений не имеет. Тогда исходное уравнение равносильно на своей

ОДЗ второму уравнению (9), которое имеет единственное решение $x = \log_3 \frac{1+\sqrt{1-36a^3}}{2}$. Следовательно, при $a \leqslant 0$ исходное уравнение имеет не более одного решения. Если a удовлетворяет неравенствам $0 < a < \frac{1}{\sqrt[3]{36}}$, то совокупность уравнений (9) имеет корни

$$x_1 = \log_3 \frac{1-\sqrt{1-36a^3}}{2} \quad \text{и} \quad x_2 = \log_2 \frac{1+\sqrt{1-36a^3}}{2}.$$

В этом случае ОДЗ исходного уравнения совпадает с множеством всех действительных чисел и, значит, уравнение имеет в точности два корня x_1 и x_2.

Ответ: $0 < a < \frac{1}{\sqrt[3]{36}}$.

Ответы к вариантам 2—4.

Вариант 2. 1. $x=1$; $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in Z$. 2. $\frac{32}{9}$. 3.Н. $a=\frac{1}{4}$. 4.Н. $2a$. 5. $\frac{4}{81}V$. 3.С. $x=4$, $y=16$. 4.С. $-1/4 < a < 0$.

Вариант 3. 1. $x=5$; $x=\pi k$, $k \in Z$. 2. 6/5. 3.Н. $a=1/30$. 4.Н. $\pi/3$, $2\pi/3$. 5. $\frac{5}{64}V$. 3.С. (9, 3); (1/27, 729). 4.С. $0 < a < \sqrt[3]{1/4}$.

Вариант 4. 1. $x=-3/2$; $x=\pi k$, $k \in Z$. 2. 3. 3.Н. $a=7/3$. 4.Н. $5\pi/9$. 5. $\frac{81}{2000}V$. 3.С. $x=3$, $y=27$. 4.С. $-1/8 < a < 0$.

1978

Решение варианта 1.

1. Квадратный трехчлен x^2+x-1 имеет корни $x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ и $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, причем, как легко видеть, $x_2 > \frac{\sqrt{3}}{3}$. Будем решать данное уравнение отдельно в областях $-\infty < x \leqslant \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$. В области $-\infty < x \leqslant \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ квадратный трехчлен x^2+x-1 неотрицателен, так что $|x^2+x-1|=x^2+x-1$ и данное уравнение можно переписать в виде $x^2+x-1=2x-1$, или $x^2-x=0$. Полученное уравнение имеет два корня $x_3=0$, $x_4=1$, ни один из которых не лежит в области $-\infty < x \leqslant \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Значит, исходное уравнение не имеет корней в области $-\infty < x \leqslant \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

В области $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$ квадратный трехчлен x^2+x-1 отрицателен, так что $|x^2+x-1| = -(x^2+x-1)$ и данное уравнение можно переписать в виде $-x^2-x+1=2x-1$, или $x^2+3x-2=0$. Это квадратное уравнение имеет два корня $x_5=\frac{-3-\sqrt{17}}{2}$, $x_6=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$, из которых, как легко проверить, только корень x_6 принадлежит множеству $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$. Итак, исходное уравнение имеет в множестве $x<\frac{\sqrt{3}}{3}$ только один корень $\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$.

Ответ: $\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$.

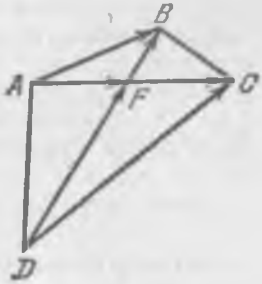


Рис. 93.

2.Н. Пусть φ — искомый угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ (рис. 93), тогда

$$\cos\varphi=\frac{(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{DC})}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{DC}|}.$$

Пользуясь свойствами скалярного произведения векторов и условиями задачи, вычислим $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{DC}|$ и $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{DC})$. Так как $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB}$ и $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FC}$, то

$$(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{DC})=(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB},\ \overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FC})=$$
$$=(\overrightarrow{AF},\ \overrightarrow{DF})+(\overrightarrow{AF},\ \overrightarrow{FC})+(\overrightarrow{FB},\ \overrightarrow{DF})+(\overrightarrow{FB},\ \overrightarrow{FC})=$$
$$=|\overrightarrow{AF}|\,|\overrightarrow{DF}|\cos\widehat{BFC}+|\overrightarrow{AF}|\,|\overrightarrow{FC}|\cos 0^\circ+$$
$$+|\overrightarrow{FB}|\,|\overrightarrow{DF}|\cos 0^\circ+|\overrightarrow{FB}|\,|\overrightarrow{FC}|\cos\widehat{BFC}=13,$$
$$|\overrightarrow{AB}|^2=(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB},\ \overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB})=|\overrightarrow{AF}|^2+|\overrightarrow{FB}|^2+2(\overrightarrow{AF},\ \overrightarrow{FB})=$$
$$=|\overrightarrow{AF}|^2+|\overrightarrow{FB}|^2+2|\overrightarrow{AF}|\cdot|\overrightarrow{BF}|\cos\widehat{BFC}=7,$$
$$|\overrightarrow{DC}|^2=(\overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{DC})=(\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FC},\ \overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FC})=|\overrightarrow{DF}|^2+|\overrightarrow{FC}|^2+2(\overrightarrow{DF},\ \overrightarrow{FC})=$$
$$=|\overrightarrow{DF}|^2+|\overrightarrow{FC}|^2+2|\overrightarrow{DF}|\,|\overrightarrow{FC}|\cos\widehat{BFC}=28.$$

Теперь получаем, что $\cos\varphi=\frac{13}{\sqrt{7}\sqrt{28}}=\frac{13}{14}$.

Ответ: 13/14.

3. Область допустимых значений данного уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих одновременно следующим условиям: $x>0$, $x\neq 2$, $\frac{75x}{4}-\frac{11}{x}>0$, т. е. ОДЗ состоит из двух промежутков $\sqrt{\frac{44}{75}}<x<2$ и $2<x<+\infty$. Так как на ОДЗ

$$3+\frac{1}{\log_{32}\frac{x}{2}}=3+\log_{\frac{x}{2}}32=\log_{\frac{x}{2}}(4x^3),$$

то исходное уравнение равносильно на своей ОДЗ уравнению

$$\log_{\frac{x}{2}}(4x^3)=\log_{\frac{x}{2}}\left(\frac{75x}{4}-\frac{11}{x}\right),$$

или уравнению

$$4x^4-75x^2+11=0. \qquad (1)$$

Квадратное уравнение $4z^2-75z+11=0$ имеет корни $z_1=4$ и $z_2=11/16$. Значит, уравнение (1) равносильно совокупности двух уравнений

$$x^2=4 \quad \text{и} \quad x^2=\frac{11}{16}.$$

Это означает, что уравнение (1) имеет четыре корня:

$$x_1=2, \quad x_2=-2, \quad x_3=\frac{\sqrt{11}}{4}, \quad x_4=-\frac{\sqrt{11}}{4}.$$

Только один из них, а именно, $x_3=\sqrt{11}/4$, содержится в ОДЗ исходного уравнения. Таким образом, исходное уравнение имеет единственный корень $x=\sqrt{11}/4$.

Ответ: $\sqrt{11}/4$.

4. Пусть для приготовления сплава, содержащего 40% марганца, взяли x кг первого сплава, y кг второго сплава и z кг третьего сплава. При этом получится $(x+y+z)$ кг нового сплава, в котором будет $(0{,}9y+0{,}6z)$ кг марганца, поэтому

$$0{,}9y+0{,}6z=0{,}4\,(x+y+z),$$

или

$$4x=5y+2z. \qquad (2)$$

В новом сплаве будет $(0{,}7x+0{,}1y+0{,}25z)$ кг меди, а в одном килограмме нового сплава меди будет $M=\frac{0{,}7x+0{,}1y+0{,}25z}{x+y+z}$ кг. Из (2) следует, что $x=\frac{5y+2z}{4}$, и поэтому $M=\frac{13y+8z}{30y+20z}$. Поскольку для приготовления нового сплава можно брать различное число килограмм первого, второго и третьего сплавов, то y и z могут принимать любые неотрицательные значения, причем y и z одновременно не могут равняться нулю. Если $y=0$, $z\neq 0$, то $M=8/20=2/5$; если $y\neq 0$ и $z=0$, то $M=13/30$. Если $y\neq 0$, $z\neq 0$, то

$$M=\frac{13+8\frac{z}{y}}{30+20\frac{z}{y}}=\frac{2}{5}+\frac{1}{30+20\frac{z}{y}}.$$

Поскольку $\frac{z}{y}>0$, то легко видеть, что в этом случае будут справедливы неравенства

$$\frac{2}{5}<\frac{2}{5}+\frac{1}{30+20\frac{z}{y}}<\frac{2}{5}+\frac{1}{30}=\frac{13}{30}.$$

Значит, наименьшее процентное содержание меди может быть равно $\frac{2}{5} \cdot 100\% = 40\%$, а наибольшее процентное содержание меди может быть равно $\frac{13}{30} \cdot 100\% = 43\frac{1}{3}\%$.

Ответ: 40%; $43\frac{1}{3}\%$.

5.Н. При любом фиксированном a данная функция дифференцируема в каждой точке прямой. Если функция $f(x)$ возрастает, то в каждой точке x выполнено неравенство $f'(x) \geqslant 0$. Если, кроме того, $f(x)$ не имеет критических точек, то при любом x должно быть выполнено соотношение $f'(x) \neq 0$. Таким образом, если функция $f(x)$ удовлетворяет условию задачи, то при всех x должно быть выполнено неравенство $f'(x) > 0$. С другой стороны, если при всех x выполнено неравенство $f'(x) > 0$, то функция, очевидно, не имеет критических точек и возрастает.

Ввиду того, что

$$f'(x) = 2\cos 2x - 8(a+1)\cos x + (4a^2 + 8a - 14),$$

задачу теперь можно переформулировать так: найти все значения параметра a, при каждом из которых для любого x выполнено неравенство

$$\cos 2x - 4(a+1)\cos x + (2a^2 + 4a - 7) > 0.$$

Так как $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, то задача может быть переформулирована так: найти все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $2t^2 - 1 - 4(a+1)t + (2a^2 + 4a - 7)$ или функции $g(t) = t^2 - 2(a+1)t + a^2 + 2a - 4$ на отрезке $[-1, 1]$ положительно. Производная $g'(t) = 2t - 2(a+1)$ обращается в нуль в точке $t_0 = a + 1$. Поэтому m — наименьшее значение $g(t)$ на отрезке $[-1, 1]$ — будет равно:

$$m = \begin{cases} g(-1) = a^2 + 4a - 1, & \text{если } a + 1 \leqslant -1, \\ g(a+1) = -5, & \text{если } -1 < a + 1 < 1, \\ g(1) = a^2 - 5, & \text{если } a + 1 \geqslant 1. \end{cases}$$

Так как наименьшее значение функции $g(t)$ на отрезке $[-1, 1]$ должно быть положительно, то значения параметра a, удовлетворяющие условию задачи, лежат в двух промежутках: $a \leqslant -2$ и $a \geqslant 0$. Если $a \leqslant -2$, то наименьшее значение $g(t)$ на отрезке $[-1, 1]$ равно $a^2 + 4a - 1$ и искомые значения параметра a удовлетворяют неравенству $a^2 + 4a - 1 > 0$. Если $a \geqslant 0$, то наименьшее значение $g(t)$ на отрезке $[-1, 1]$ равно $a^2 - 5$ и искомые значения параметра a удовлетворяют неравенству $a^2 - 5 > 0$. Таким образом, множество искомых значений a есть объединение решений двух систем неравенств

$$\begin{cases} a \leqslant -2, \\ a^2 + 4a - 1 > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} a \geqslant 0, \\ a^2 - 5 > 0. \end{cases}$$

Множество решений первой системы есть промежуток $-\infty < x < -2 - \sqrt{5}$, множество решений второй — промежуток $a > \sqrt{5}$. Значит, искомое множество значений a состоит из двух промежутков: $a < -2 - \sqrt{5}$, $a > \sqrt{5}$.

Ответ: $a < -2 - \sqrt{5}$, $a > \sqrt{5}$.

2.С. Обозначим $\angle BAN$ через φ, а длину AD через x (рис. 94). Тогда $\angle NAD=\pi/2-\varphi$ и $AB=3x$. Применяя теорему косинусов к треугольникам BAN и DAN, получаем:

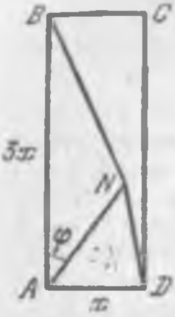


Рис. 94.

$$BN^2=AB^2+AN^2-2AB\cdot AN\cos\varphi,$$
$$ND^2=AD^2+AN^2-2AD\cdot AN\sin\varphi,$$

или

$$32=9x^2+2-6\sqrt{2}x\cos\varphi,$$
$$4=x^2+2-2\sqrt{2}x\sin\varphi.$$

Из первого уравнения $\cos\varphi=\dfrac{3x^2-10}{2\sqrt{2}x}$, из второго — $\sin\varphi=\dfrac{x^2-2}{2\sqrt{2}x}$. Используя основное тригонометрическое тождество, имеем

$$\left(\frac{3x^2-10}{2\sqrt{2}x}\right)^2+\left(\frac{x^2-2}{2\sqrt{2}x}\right)^2=1.$$

После упрощений получаем уравнение

$$5x^4-36x^2+52=0. \qquad (3)$$

Квадратный трехчлен $5t^2-36t+52$ имеет корни $t_1=2$ и $t_2=26/5$. Значит, полученное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$x^2=2 \quad \text{и} \quad x^2=26/5.$$

Таким образом, уравнение (3) имеет четыре корня

$$x_1=\sqrt{2},\ x_2=-\sqrt{2},\ x_3=\sqrt{\frac{26}{5}},\ x_4=-\sqrt{\frac{26}{5}}.$$

Величина отрезка AD положительна. Поэтому $x\neq x_2$ и $x\neq x_4$. Если $x=\sqrt{2}$, то $\sin\varphi=0$, т. е. $\varphi=0$ и точка N лежит на стороне AB. Но по условию задачи точка N лежит внутри прямоугольника. Равенство $\varphi=0$ противоречит этому условию. Значит, $x=\sqrt{26/5}$ и

$$\cos\varphi=\frac{3\cdot\dfrac{26}{5}-10}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\dfrac{26}{5}}}=\frac{7}{\sqrt{65}}.$$

Поскольку S — площадь прямоугольника $ABCD$ — равна $3x^2$, то $S=78/5$.

Ответ: $\cos\angle BAN=7/\sqrt{65}$, $S=78/5$.

5.С. Ввиду того что $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ и множество значений функции $t=\cos x$ есть промежуток $-1\leqslant t\leqslant 1$, задачу можно переформулировать следующим образом: найти все действительные значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение квадратного трехчлена

$$t^2-2at+a^2+2a-3$$

на отрезке $-1\leqslant t\leqslant 1$ положительно. Абсцисса вершины параболы $y=t^2-2at+a^2+2a-3$ равна a. Поэтому m — наименьшее значение функции y

на отрезке $-1 \leqslant t \leqslant 1$ — равно:

$$m=\begin{cases} y(-1)=a^2+4a-2, & \text{если } a\leqslant -1,\\ y(a)=2a-3, & \text{если } -1<a<1,\\ y(1)=a^2-2, & \text{если } a\geqslant 1.\end{cases}$$

Так как наименьшее значение функции y на отрезке $[-1, 1]$ должно быть положительно, то искомые значения параметра a из области $a\leqslant -1$ удовлетворяют неравенству $a^2+4a-2>0$. Искомые значения параметра a из области $-1<a<1$ удовлетворяют неравенству $2a-3>0$.

Искомые значения параметра a из области $a\geqslant 1$ удовлетворяют неравенству $a^2-2>0$. Таким образом, множество искомых значений a есть объединение решений трех систем неравенств:

$$\begin{cases} a\leqslant -1,\\ a^2+4a-2>0,\end{cases}\qquad \begin{cases} -1<a<1,\\ 2a-3>0,\end{cases}\qquad \begin{cases} a\geqslant 1,\\ a^2-2>0.\end{cases}$$

Множество решений первой системы есть промежуток $-\infty<a<-2-\sqrt{6}$, вторая система не имеет решений, множество решений третьей системы — промежуток $\sqrt{2}<a<+\infty$. Значит, искомое множество значений a состоит из двух промежутков: $-\infty<a<-2-\sqrt{6}$, $\sqrt{2}<a<+\infty$.

Ответ: $a<-2-\sqrt{6}$, $a>\sqrt{2}$.

Ответы к вариантам 2—4.

Вариант 2. 1. $1-\sqrt{5}$. 2.Н. $2/\sqrt{7}$. 3. $\sqrt{7}/2$. 4. 75%; 55%. 5.Н. $b<-3-\sqrt{3}$, $b>-1+\sqrt{3}$. 2.С. $3/\sqrt{10}$; 20. 5.С. $b<-2-\sqrt{8}$, $b>2$.

Вариант 3. 1. $(\sqrt{113}-5)/4$. 2.Н. $3/\sqrt{130}$. 3. $\sqrt{33}/3$. 4. 15%; 40%. 5.Н. $a<-1-\sqrt{6}/2$, $a>\sqrt{3/2}$. 2.С. $9/\sqrt{130}$; 39/5. 5.С. $a<-(3+\sqrt{13})/2$, $a>(1+\sqrt{5})/2$.

Вариант 4. 1. $-2-\sqrt{2}$. 2.Н. $2/\sqrt{5}$. 3. $\sqrt{3}/2$. 4. 62,5%; 55%. 5.Н. $b<(-3-\sqrt{7})/2$, $b>(-1+\sqrt{7})/2$. 2.С. $7/\sqrt{85}$; 34/5. 5.С. $b<-(3+\sqrt{17})/2$, $b>2$.

1979

Решение варианта 1.

1. Обозначим $\cos x$ через u и $\sin y$ через v. Тогда $\cos 2x=2\cos^2 x-1=2u^2-1$, $\cos^2 y=1-\sin^2 y=1-v^2$ и данную систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} 4v^2+4v-6\sqrt{2}u-9=0,\\ 2u^2-1=0.\end{cases}\tag{1}$$

Из второго уравнения системы (1) находим $u_1=1/\sqrt{2}$, $u_2=-1/\sqrt{2}$. Подставляя $u_1=1/\sqrt{2}$ в первое уравнение системы (1), получаем

$$4v^2+4v-15=0.\tag{2}$$

Уравнение (2) имеет корни $v_1=3/2$, $v_2=-5/2$. Это значит, что пары чисел $(1/\sqrt{2}, 3/2)$, $(1/\sqrt{2}, -5/2)$ будут решениями системы (1). Подставляя $u_2=-1/\sqrt{2}$ в первое уравнение системы (1), получаем

$$4v^2+4v-3=0,$$

откуда $v_3=1/2$, $v_4=-3/2$. Значит, система (1) имеет еще два решения $(-1/\sqrt{2},\ 1/2)$, $(-1/\sqrt{2},\ -3/2)$. Итак, множество решений исходной системы уравнений является объединением множеств решений следующих четырех систем уравнений:

$$\begin{cases}\cos x=1/\sqrt{2},\\ \sin y=3/2,\end{cases}\quad \begin{cases}\cos x=1/\sqrt{2},\\ \sin y=-5/2,\end{cases}\quad \begin{cases}\cos x=-1/\sqrt{2},\\ \sin y=1/2,\end{cases}\quad \begin{cases}\cos x=-1/2,\\ \sin y=-3/2.\end{cases}\qquad (3)$$

Так как числа $3/2$, $-5/2$, $-3/2$ не принадлежат области значений функции $z=\sin y$, то первая, вторая и четвертая системы из (3) не имеют решений. Следовательно, множество решений исходной системы уравнений совпадает с множеством решений системы

$$\begin{cases}\cos x=-1/\sqrt{2},\\ \sin y=1/2,\end{cases}$$

откуда следует, что исходная система имеет решения $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$; $y=(-1)^m\cdot\frac{\pi}{6}+\pi m$, $m\in Z$.

Ответ: $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z;\ y=(-1)^m\cdot\frac{\pi}{6}+\pi m,\ m\in Z.$

2.Н. Для определенности будем считать, что $|AB|<|AD|$ (рис. 95). Так как $|AB|\cdot|AD|=48$ и $|AD|^2+|AB|^2=|BD|^2=100$, то $|AD|=8$, $|AB|=6$. Поскольку $|OB|=|OD|=13>|BD|$, то точка O лежит вне круга с диаметром BD и потому вне прямоугольника. Пусть она находится по ту же сторону от диагонали BD, что и точка A. Тогда требуется найти $|OC|$. Обозначим $\widehat{OBD}$ через β и $\widehat{DBC}$ через α. Имеем

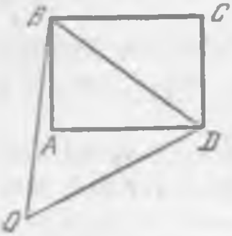


Рис. 95.

$$\cos\alpha=\frac{|BC|}{|BD|}=\frac{4}{5},$$

$$\sin\alpha=\frac{|CD|}{|BD|}=\frac{3}{5}.$$

Из равнобедренного треугольника OBD находим, что

$$\cos\beta=\frac{\frac{1}{2}|BD|}{|OB|}=\frac{5}{13},\quad \text{тогда}\quad \sin\beta=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}.$$

Далее,

$$\cos\widehat{OBC}=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}-\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}=-\frac{16}{65}.$$

Применяя к треугольнику OBC теорему косинусов, получаем

$$|OC|^2=|OB|^2+|BC|^2-2|OB||BC|\cos\widehat{OBC}=$$

$$=169+64-2\cdot13\cdot8\cdot\left(\frac{-16}{65}\right)=\frac{1421}{5},$$

откуда $|OC|=7\sqrt{\frac{29}{5}}$.

Ответ: $7\sqrt{\frac{29}{5}}$.

3. Обозначим через x денежных единиц первоначальную сумму денег, через α (%) — процент, на который возрастет сумма за год в первом банке, а через β (%) — процент, на который возрастет сумма за год во втором банке. К концу первого года сумма вклада в первом банке стала равной $\frac{5}{6}x\left(1+\frac{\alpha}{100}\right)$, во втором банке $\frac{1}{6}x\left(1+\frac{\beta}{100}\right)$, а к концу второго года соответственно $\frac{5}{6}x\left(1+\frac{\alpha}{100}\right)^2$ и $\frac{1}{6}x\left(1+\frac{\beta}{100}\right)^2$. Из условия, что сумма вкладов к концу первого года составляет 670 денежных единиц, а к концу второго года — 749 денежных единиц, имеем:

$$\frac{5}{6}x\left(1+\frac{\alpha}{100}\right)+\frac{1}{6}x\left(1+\frac{\beta}{100}\right)=670, \qquad (4)$$

$$\frac{5}{6}x\left(1+\frac{\alpha}{100}\right)^2+\frac{1}{6}x\left(1+\frac{\beta}{100}\right)^2=749. \qquad (5)$$

Если во второй банк положить $\frac{5}{6}x$ денежных единиц, а в первый банк $\frac{1}{6}x$ денежных единиц, то сумма вкладов к концу первого года составила бы $\frac{5}{6}x\left(1+\frac{\beta}{100}\right)+\frac{1}{6}x\left(x+\frac{\alpha}{100}\right)$, что равнялось бы 710 денежным единицам. Поэтому

$$\frac{5}{6}x\left(1+\frac{\beta}{100}\right)+\frac{1}{6}x\left(1+\frac{\alpha}{100}\right)=710. \qquad (6)$$

Уравнения (4) и (6) перепишем так:

$$\begin{cases} 5\left(1+\frac{\alpha}{100}\right)+\left(1+\frac{\beta}{100}\right)=\frac{6\cdot 670}{x}, \\ \left(1+\frac{\alpha}{100}\right)+5\left(1+\frac{\beta}{100}\right)=\frac{6\cdot 710}{x}. \end{cases}$$

Решая получившуюся систему уравнений, найдем, что

$$1+\frac{\alpha}{100}=\frac{660}{x}, \quad 1+\frac{\beta}{100}=\frac{720}{x}.$$

Подставляя $\frac{660}{x}$ вместо $1+\frac{\alpha}{100}$ и $\frac{720}{x}$ вместо $1+\frac{\beta}{100}$ в уравнение (5), приходим к уравнению

$$\frac{5}{6}x\left(\frac{660}{x}\right)^2+\frac{1}{6}x\left(\frac{720}{x}\right)^2=749,$$

имеющему единственный корень $x=600$; но тогда $1+\frac{\alpha}{100}=\frac{660}{600}=1{,}1$. Если исходное количество денег x положить на два года в первый банк, то к концу второго года величина вклада составит

$$x\left(1+\frac{\alpha}{100}\right)^2=600\cdot 1{,}1^2=726$$

денежных единиц.

Ответ: 726 денежных единиц.

4.Н. На рис. 96 изображены данные кривые при фиксированном значении a и прямые $y=1$, $y=2$. Нужно определить значения параметра a ($a \geqslant 1$), при каждом из которых площадь заштрихованной фигуры $ABCD$ будет наибольшей. Координаты точек A и D являются решениями систем уравнений

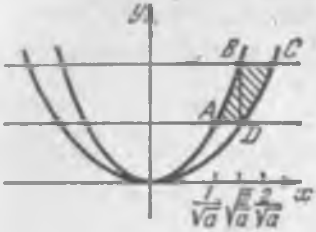


Рис. 96.

$$\begin{cases} y=ax^2, \\ y=1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y=\frac{1}{2}ax^2, \\ y=1 \end{cases}$$

соответственно. Координаты точек B и C будут решениями систем уравнений

$$\begin{cases} y=ax^2, \\ y=2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y=\frac{1}{2}ax^2, \\ y=2 \end{cases}$$

соответственно. С учетом того, что абсциссы всех точек A, B, C, D по условию должны быть неотрицательными, находим:

$$A(1/\sqrt{a},\ 1), \quad D(\sqrt{2/a},\ 1), \quad B(\sqrt{2/a},\ 2), \quad C(2/\sqrt{a},\ 2).$$

Точки D и B имеют одинаковые абсциссы, поэтому заштрихованная фигура состоит из двух частей:

а) фигуры, лежащей под кривой $y=ax^2$ и над прямой $y=1$ на промежутке от $\sqrt{\frac{1}{a}}$ до $\sqrt{\frac{2}{a}}$,

б) фигуры, лежащей над кривой $y=\frac{1}{2}ax^2$ и под прямой $y=2$ на промежутке от $\sqrt{\frac{2}{a}}$ до $\frac{2}{\sqrt{a}}$.

Для площади S заштрихованной фигуры имеем выражение:

$$S=\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{\sqrt{2/a}}(ax^2-1)\,dx+\int\limits_{\sqrt{2/a}}^{2/\sqrt{a}}\left(2-\frac{1}{2}ax^2\right)dx=$$

$$=\left(\frac{ax^3}{3}-x\right)\Bigg|_{1/\sqrt{a}}^{\sqrt{2/a}}+\left(2x-\frac{ax^3}{6}\right)\Bigg|_{\sqrt{2/a}}^{2/\sqrt{a}}=\frac{1}{a}\left(\frac{10}{3}-2\sqrt{2}\right).$$

Функция $\frac{1}{a}\left(\frac{10}{3}-2\sqrt{2}\right)$ в области $a \geqslant 1$ монотонно убывает. Поэтому ее наибольшее значение в этой области достигается при $a=1$ и равно оно $\frac{10}{3}-2\sqrt{2}$.

Ответ: $a=1$, $S=\frac{10}{3}-2\sqrt{2}$.

5. Область допустимых значений данного неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условиям $x^2-4x-11>0$ и $2-5x-3x^2 \neq 0$, т. е. является объединением трех промежутков: $-\infty<x<-2$, $-2<x<2-\sqrt{15}$, $2+\sqrt{15}<x<+\infty$. Поскольку в этой области

$$\log_{11}(x^2-4x-11)^3=\frac{3\log_5(x^2-4x-11)}{\log_5 11}$$

и

$$\log_5 (x^2-4x-11)^2 = 2\log_5 (x^2-4x-11),$$

то исходное неравенство равносильно на своей ОДЗ такому:

$$\left(2-\frac{3}{\log_5 11}\right)\cdot\frac{\log_5 (x^2-4x-11)}{-2+5x+3x^2}\leqslant 0. \qquad (7)$$

Из справедливости неравенства $121 < 125$ следует, что $11^2 < 5^3$, или $11 < 5^{3/2}$. Отсюда $\log_5 11 < \frac{3}{2}$ и $2-\frac{3}{\log_5 11} < 0$. Поэтому неравенство (7) равносильно такому:

$$\frac{\log_5 (x^2-4x-11)}{3x^2+5x-2}\geqslant 0.$$

Последнее неравенство равносильно на ОДЗ исходного неравенства совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} 3x^2+5x-2>0, \\ x^2-4x-11\geqslant 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x^2+5x-2<0, \\ x^2-4x-11\leqslant 1. \end{cases}$$

Множество решений первой системы состоит из двух промежутков:

$$-\infty < x < -2, \quad 6\leqslant x < +\infty. \qquad (8)$$

Все эти числа лежат в ОДЗ исходного неравенства. Множество решений второй системы есть интервал $-2 < x < 1/3$. Из этих чисел в ОДЗ исходного неравенства попадают только числа из промежутка

$$-2 < x < 2-\sqrt{15}. \qquad (9)$$

Объединяя множества (8) и (9), получаем, что множество всех решений исходного неравенства состоит из трех промежутков: $-\infty < x < -2$, $-2 < x < 2-\sqrt{15}$, $6\leqslant x < +\infty$.

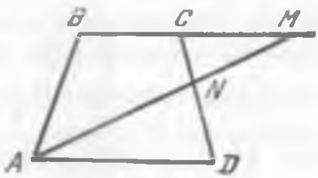


Рис. 97.

Ответ: $-\infty < x < -2$, $-2 < x < 2-\sqrt{15}$, $6\leqslant x < +\infty$.

2.С. Обозначим точку пересечения прямой AM со стороной CD через N (рис. 97). Пусть h — высота треугольника AND, а H — высота трапеции $ABCD$. Площадь трапеции равна $\frac{8+4}{2}\cdot H = 6H$, площадь треугольника AND равна $\frac{1}{2}\cdot 8h = 4h$. Так как по условию площадь треугольника AND в 4 раза меньше площади трапеции, то $6H = 16h$, откуда $\frac{H}{h}=\frac{8}{3}$. Треугольники AND и CNM подобны по трем углам ($\angle AND = \angle CNM$ как вертикальные; $\angle MCN = \angle ADN$ и $\angle CMN = \angle NAD$ как накрестлежащие при параллельных прямых). Из подобия этих треугольников получаем, что $\frac{AD}{h}=\frac{CM}{H-h}$, откуда $CM = AD\cdot\frac{H-h}{h} = 8\cdot\left(\frac{H}{h}-1\right)=\frac{40}{3}$.

Ответ: $CM = 40/3$.

4.С. Умножим первое уравнение на 2 и сложим со вторым, тогда получим систему уравнений, равносильную исходной:

$$\begin{cases} 7x^2-14x=7, \\ 3x^2-2y^2-6x-4y=5, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x^2-2x-1=0, \\ 3x^2-2y^2-6x-4y=5. \end{cases} \qquad (10)$$

Умножим первое уравнение системы (10) на 3 и вычтем из второго. Получим в результате систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-2x-1=0, \\ -2y^2-4y+3=5, \end{cases} \qquad (11)$$

равносильную исходной. Первое уравнение системы (11) имеет корни $x_1 = 1+\sqrt{2}$, $x_2=1-\sqrt{2}$. Второе уравнение имеет единственный корень $y=-1$. Следовательно, исходная система уравнений имеет два решения: $x_1=1+\sqrt{2}$, $y_1=-1$; $x_2=1-\sqrt{2}$, $y_2=-1$.

Ответ: $x_1=1+\sqrt{2}$, $y_1=-1$; $x_2=1-\sqrt{2}$, $y_2=-1$.

Ответы к вариантам 2—4.

Вариант 2. 1. $x=(-1)^n\dfrac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$; $y=\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi m$, $m\in Z$. 2.Н. $\arcsin\dfrac{14}{5\sqrt{24}}$. 3. 749 денежных единиц. 4.Н. $a=2$, $S=7/2$. 5. $x<-2$, $1+\sqrt{8}<x<4$, $x>4$. 2.С. 1/2. 4.С. $x_1=-2+\sqrt{2/7}$, $y_1=1+3\sqrt{2/7}$; $x_2=-2-\sqrt{2/7}$, $y_2=1-3\sqrt{2/7}$.

Вариант 3. 1. $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$; $y=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$. 2.Н. $\sqrt{\dfrac{17}{5}}$. 3. 507 денежных единиц. 4.Н. $a=4$; $S=\dfrac{13\sqrt{2}-10\sqrt{3}}{6}$. 5. $x<-3$, $1+\sqrt{15}<x<5$, $x>5$. 2.С. $\dfrac{4}{5}$. 4.С. $x_1=-1+\sqrt{2}$, $y_1=-2$; $x_2=-1-\sqrt{2}$, $y_2=-2$.

Вариант 4. 1. $x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; $y=\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi m$, $m\in Z$. 2.Н. $\arcsin\dfrac{2}{5\sqrt{5}}$. 3. 507 денежных единиц. 4.Н. $a=5$; $S=\dfrac{19}{12}$. 5. $x<-1$, $-1<x<2-\sqrt{8}$, $x\geqslant 5$. 2.С. 8/15. 4.С. $x_1=2$, $y_1=2+\sqrt{3}$; $x_2=2$, $y_2=2-\sqrt{3}$.

§ 12. ФАКУЛЬТЕТ ПСИХОЛОГИИ

1977

Решение варианта 1.

1. Область допустимых значений данного уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих неравенствам: $x\neq\pi/2+\pi k$, $k\in Z$. Функция $y(x)=\cos^2 x$ отлична от нуля на этом множестве. Умножая данное уравнение на $\cos^2 x$

и используя формулу $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, получим уравнение

$$8\cos^4 x + 2\cos^2 x - 3 = 0, \qquad (1)$$

равносильное исходному на его ОДЗ. Биквадратное уравнение $8t^4 + 2t^2 - 3 = 0$ имеет два корня $t_1 = \sqrt{2}/2$ и $t_2 = -\sqrt{2}/2$. Поэтому уравнение (1) равносильно совокупности двух уравнений

$$\cos x = \sqrt{2}/2 \quad \text{и} \quad \cos x = -\sqrt{2}/2.$$

Первое уравнение этой совокупности имеет две серии решений:

$$x = \pi/4 + 2\pi n, \quad n \in Z; \qquad x = -\pi/4 + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

Второе уравнение также имеет две серии решений:

$$x = 3\pi/4 + 2\pi p, \quad p \in Z; \qquad x = -3\pi/4 + 2\pi q, \quad q \in Z.$$

Все найденные корни принадлежат ОДЗ исходного уравнения. Поэтому все они образуют искомое множество решений исходного уравнения. Очевидно, что это множество можно записать в виде одной серии решений: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in Z$.

2.Н. Уравнение касательной к графику функции $y(x)$ в точке с координатами $(x_0, y(x_0))$ имеет, как известно, вид

$$y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0).$$

Это же уравнение можно записать в виде $y = kx + b$, где $k = y'(x_0)$, $b = y(x_0) - y'(x_0)x_0$. Касательная пересекает ось OX в точке с координатами $\left(-\frac{b}{k}, 0\right)$ и ось Oy в точке с координатами $(0, b)$. Таким образом, получаем систему условий, которым должны удовлетворять абсциссы искомых точек:

$$-\frac{b}{k} > 0, \quad b < 0, \quad 2\cdot\left(-\frac{b}{k}\right) = -b.$$

Учитывая, что $b < 0$, последнее уравнение можно переписать в виде $k = 2$, а всю систему условий в эквивалентном виде $k = 2$, $b < 0$, или, что то же самое, в виде

$$\begin{cases} y'(x_0) = 2, \\ y(x_0) - y'(x_0)x_0 < 0. \end{cases}$$

Так как $y'(x) = 3x^2 - 6x - 7$, то абсциссы искомых точек удовлетворяют уравнению $3x^2 - 6x - 9 = 0$. Его корни $x_1 = 3$ и $x_2 = -1$. Проверим для найденных значений x выполнение условия $b < 0$. Имеем $y(3) - y'(3)\cdot 3 = -15 - 2\cdot 3 = -21 < 0$, $y(-1) - y'(-1)\cdot(-1) = 9 > 0$. Таким образом, есть только одна точка, удовлетворяющая условию задачи. Ее координаты $x_0 = 3$, $y_0 = y(3) = -15$. Длины отрезков, отсекаемые касательной в точке $(3, -15)$ на осях OX и OY, равны соответственно значениям выражений $-\frac{b}{k} = \frac{y(x_0)}{y'(x_0)} - x_0$ и $-b = y'(x_0)x_0 - y(x_0)$ в этой точке, т. е. равны 21/2 и 21.

10*

Ответ: единственная точка касания — точка с координатами (3, —15); длины отрезков 21/2 и 21.

3. Обозначим через x количество машин, производимых в сутки первым заводом. Тогда второй завод до реконструкции производил в сутки $\frac{95x}{100}$ машин, а после ввода дополнительной линии стал выпускать $\frac{95x}{100}+\frac{23x}{100}$ машин. Из условий задачи следует система неравенств

$$\begin{cases} x \leqslant 950, \\ \frac{95x}{100}+\frac{23x}{100} > 1000. \end{cases}$$

Множество решений этой системы есть промежуток $854\frac{82}{117} < x \leqslant 950$. Так как числа $\frac{23x}{100}$ и $\frac{95x}{100}$ должны быть целыми, то x должно делиться на 100 и быть из указанного промежутка, поэтому $x = 900$. Следовательно, первый завод выпускает в сутки 900 автомобилей, а второй завод до реконструкции выпускал $\frac{95}{100}\cdot 900 = 855$ автомобилей.

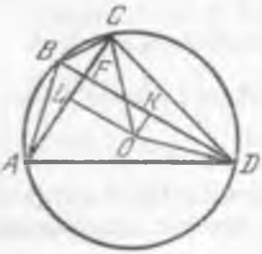


Рис. 98.

Ответ: 900 и 855.

4. Пусть $ABCD$ — данный в условии задачи четырехугольник (рис. 98). Проведем диагонали AC и BD. Пусть для определенности диагональ AC находится от центра окружности O на расстоянии 9 см. Треугольник ABD вписан в окружность, поэтому центр этой окружности лежит на перпендикуляре, восстановленном из середины K отрезка BD. Треугольник ACD вписан в окружность, поэтому центр этой окружности лежит на перпендикуляре, восстановленным из середины L отрезка AC. Из прямоугольного треугольника OKD получаем, что $|KD| = \frac{1}{2}|BD| = \sqrt{|OD|^2-|OK|^2}$, а из прямоугольного треугольника OCL имеем $|LC| = \frac{1}{2}|AC| = \sqrt{|OC|^2-|OL|^2}$. Так как $|OD| = |OC| = R = 17$ см, а расстояния от центра до диагоналей есть $|OL|$ и $|OK|$ и по условию эти расстояния равны 9 см и 8 см, то

$$|KD| = \sqrt{17^2-8^2} = 15 \text{ см}, \quad |LC| = \sqrt{17^2-9^2} = \sqrt{208} \text{ см}.$$

Значит, длины диагоналей таковы: $|BD| = 30$ см, $|AC| = 2\sqrt{208}$ см. Пусть F — точка пересечения диагоналей. Так как диагонали, по условию, взаимно перпендикулярны, то четырехугольник $OKFL$ — прямоугольник. Значит, $|LF| = |OK|$, $|FK| = |OL|$. Но тогда $|CF| = |CL| - |OK|$, $|AF| = |AL| + |OK|$, $|DF| = |DK| + |OL|$, $|BF| = |BK| - |OL|$. Отсюда следует, что точка F разбивает одну из диагоналей BD на отрезки, длины которых равны 24 см и 6 см, а другую диагональ AC на отрезки, длины которых равны $(\sqrt{208}-8)$ см и $(\sqrt{208}+8)$ см. Так как треугольники AFB, BFC,

CFD и AFD прямоугольные, то длины сторон четырехугольников равны:

$$|DC|=\sqrt{24^2+(\sqrt{208}-8)^2}=\sqrt{848-16\sqrt{208}}\text{ см},$$
$$|AD|=\sqrt{24^2+(\sqrt{208}+8)^2}=\sqrt{848+16\sqrt{208}}\text{ см},$$
$$|BC|=\sqrt{6^2+(\sqrt{208}-8)^2}=\sqrt{308-16\sqrt{208}}\text{ см},$$
$$|AB|=\sqrt{6^2+(\sqrt{208}+8)^2}=\sqrt{308+16\sqrt{208}}\text{ см}.$$

Ответ: длины сторон равны $\sqrt{848+16\sqrt{208}}$ см, $\sqrt{848-16\sqrt{208}}$ см, $\sqrt{308+16\sqrt{208}}$ см, $\sqrt{308-16\sqrt{208}}$ см.

5.Н. Очевидно, что система имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда имеет хотя бы одно решение неравенство

$$x^2+(2ax^2+3)^2<4, \tag{2}$$

полученное подстановкой в данное неравенство $2ax^2$ вместо y.

Обозначим через $f(t)$ функцию $t+(2at+3)^2$. Неравенство (2) будет иметь решение только в том случае, когда наименьшее значение функции $f(t)$ на множестве $t\geqslant 0$ будет меньше четырех. Вычислим это значение $f(t)$.

При $a=0$ имеем $f(t)=t+9$ и наименьшее значение $f(t)$ на множестве $t\geqslant 0$ равно 9, что больше 4. Следовательно, $a=0$ не отвечает условию задачи.

Если $a\neq 0$, то график функции $f(t)=t+(2at+3)^2=4a^2t^2+(12a+1)t+9$ представляет собой параболу, ветви которой направлены вверх, и абсцисса вершины равна $t_0=-\frac{12a+1}{8a^2}$. Если $t_0\leqslant 0$, т. е. если $12a+1\geqslant 0$, $a\neq 0$, то на множестве $t\geqslant 0$ функция $f(t)$ монотонно возрастает и, значит, ее наименьшее значение на этом множестве равно $f(0)=9>4$. Таким образом, все искомые значения параметра a лежат в области $12a+1<0$. В этом случае точка t_0 лежит в области $t\geqslant 0$ и наименьшее значение $f(t)$ равно

$$f(t_0)=4a^2\cdot\left(-\frac{12a+1}{8a^2}\right)^2-\frac{(12a+1)^2}{8a^2}+9=-\frac{24a+1}{16a^2}.$$

Итак, все искомые значения параметра a являются решениями системы неравенств

$$\begin{cases} 12a+1<0, \\ -\dfrac{24a+1}{16a^2}<4. \end{cases} \tag{3}$$

Система (3) равносильна системе

$$\begin{cases} 12a+1<0, \\ 64a^2+24a+1>0. \end{cases}$$

Квадратный трехчлен $64a^2+24a+1$ имеет корни $a_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{16}$, причем $\frac{-3-\sqrt{5}}{16}<-\frac{1}{12}$, а $\frac{-3+\sqrt{5}}{16}>-\frac{1}{12}$. Следовательно, множество решений системы (3), а значит, и множество значений параметра a, удовлетворяющих условию задачи, есть промежуток $a < \frac{-3-\sqrt{5}}{16}$.

Ответ: $a < \frac{-3-\sqrt{5}}{16}$.

2.С. Пусть (x_0, y_0) — решение данной системы уравнений. Тогда справедливы равенства:

$$(1+2\log_{|x_0y_0|}2)\cdot\log_{x_0+y_0}|x_0y_0| = 1, \qquad (4)$$
$$x_0 - y_0 = 2\sqrt{3}.$$

Откуда вытекает, что x_0 и y_0 удовлетворяют условиям $0 < x_0+y_0 \neq 1$, $|x_0y_0| \neq 1$, но тогда $\log_{x_0+y_0}|x_0y_0| = \frac{1}{\log_{|x_0y_0|}(x_0+y_0)}$, и потому равенство (4) можно переписать так:

$$1+2\log_{|x_0y_0|}2 = \log_{|x_0y_0|}(x_0+y_0);$$

отсюда

$$4|x_0y_0| = x_0+y_0.$$

Значит, каждое решение исходной системы уравнений является решением системы уравнений

$$\begin{cases} 4|xy| = x+y, \\ x-y = 2\sqrt{3}. \end{cases} \qquad (5)$$

Подставляя $x-2\sqrt{3}$ вместо y в первое уравнение системы (5), получим уравнение

$$4\left|x\left(x-2\sqrt{3}\right)\right| = 2x-2\sqrt{3}. \qquad (6)$$

Так как левая часть уравнения (6) неотрицательна при любом x, то все решения уравнения (6) удовлетворяют условию $2x-2\sqrt{3} \geqslant 0$, или $x \geqslant \sqrt{3}$. Для освобождения от знака абсолютной величины в уравнении (6) разобьем область $x \geqslant \sqrt{3}$ на два промежутка $\sqrt{3} \leqslant x < 2\sqrt{3}$ и $2\sqrt{3} \leqslant x < +\infty$ и будем решать уравнение отдельно в каждом из этих промежутков.

В области $\sqrt{3} \leqslant x < 2\sqrt{3}$ справедливо неравенство $x\left(x-2\sqrt{3}\right) < 0$. На этом множестве уравнение (6) можно переписать в виде

$$-2x\left(x-2\sqrt{3}\right) = x-\sqrt{3},$$

или

$$2x^2-\left(4\sqrt{3}-1\right)x-\sqrt{3} = 0.$$

Получившееся квадратное уравнение имеет корни $x_1 = \frac{3+2\sqrt{3}}{2}$ и $x_2 = \sqrt{3}-2$, из которых в область $\sqrt{3} \leqslant x < 2\sqrt{3}$ попадает только $x_1 = \frac{3+2\sqrt{3}}{2}$. Значит, в области $\sqrt{3} \leqslant x < 2\sqrt{3}$ уравнение (6) имеет единственный корень x_1.

В области $x \geqslant 2\sqrt{3}$ справедливо неравенство $x(x-2\sqrt{3}) \leqslant 0$; на этом множестве уравнение (6) можно переписать в виде

$$2x(x-2\sqrt{3}) = x-\sqrt{3},$$

или

$$2x^2-(4\sqrt{3}+1)x+\sqrt{3}=0.$$

Это квадратное уравнение имеет корни $x_3=\frac{-3+2\sqrt{3}}{2}$ и $x_4=2+\sqrt{3}$. Из них в область $x \geqslant 2\sqrt{3}$ попадает только $x_4=2+\sqrt{3}$. Значит, в области $x \geqslant 2\sqrt{3}$ уравнение (6) имеет единственный корень $x_4=2+\sqrt{3}$. Итак, уравнение (6) имеет два корня: $x_1=\frac{2\sqrt{3}+3}{2}$ и $x_4=2+\sqrt{3}$. Из второго уравнения системы (5) теперь находим $y_1=\frac{3-2\sqrt{3}}{2}$ и $y_4=$ $=2-\sqrt{3}$. Значит, система уравнений (5) имеет два решения (x_1, y_1) и (x_4, y_4), и потому все решения исходной системы уравнений содержатся среди пар чисел (x_1, y_1) и (x_4, y_4), где $x_1=\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$, $y_1=\frac{3-2\sqrt{3}}{2}$; $x_4=2+\sqrt{3}$, $y_4=2-\sqrt{3}$. Так как $x_4 \cdot y_4=1$, то пара чисел (x_4, y_4) не удовлетворяет первому уравнению системы (1). Подставляя числа x_1 и y_1 в оба уравнения исходной системы, убеждаемся, что пара чисел (x_1, y_1) является ее решением.

Ответ: $\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{2}, \frac{3-2\sqrt{3}}{2}\right)$.

5.С. Если $a=0$, то данное неравенство имеет вид $-9^{x+1}>0$ и не выполняется ни для одного x.

Пусть a — некоторое число, отличное от нуля. Обозначив 3^x через y, исходное неравенство можно переписать так:

$$9t^2+8at-a^2<0. \tag{7}$$

Квадратный трехчлен $9t^2+8at-a^2$ имеет корни $t_1=-a$, $t_2=\frac{1}{9}a$. Если a — положительное число, то $t_1<t_2$ и множество решений неравенства (7) имеет вид $-a<t<\frac{1}{9}a$. Это значит, что при каждом положительном a исходное неравенство равносильно двойному неравенству $-a<3^x<\frac{1}{9}a$ а, следовательно, множество его решений есть промежуток $-\infty<x<$ $<\log_3\left(\frac{1}{9}a\right)$. Если a — отрицательное число, то $t_2<t_1$ и множество решений неравенства (7) имеет вид $\frac{1}{9}a<t<-a$. Это значит, что при каждом отрицательном a исходное неравенство равносильно двойному неравенству $\frac{1}{9}a<3^x<-a$ и, следовательно, множество его решений есть промежуток $-\infty<x<\log_3(-a)$.

Ответ: при $a=0$ неравенство не выполняется ни для одного x; при $a>0$ неравенство выполняется для $x<-2+\log_2 a$; при $a<0$ неравенство выполняется для $x<\log_2(-a)$.

Ответы к вариантам 2—4.

Вариант 2. 1. $\pm\pi/3+\pi k,\ k\in Z$. 2.Н. $(-3,\ 11)$. 3. В первом ящике 644 детали, сделанных 1-й бригадой и 120 деталей, сделанных 2-й бригадой. 4. $(\sqrt{240}+\sqrt{20})$ см, $(\sqrt{240}-\sqrt{20})$ см, $(\sqrt{80}+\sqrt{60})$ см, $(\sqrt{80}-\sqrt{60})$ см. 5.Н. $a>\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$. 2.С. $x=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$, $y=\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$. 5.С. При $a>0$ неравенство справедливо при всех $x<\log_2 a-2$; при $a<0$ неравенство справедливо при всех $x<\log_2(-a)-1$; при $a=0$ неравенство невозможно ни при каких x.

Вариант 3. 1. $\pm\pi/6+\pi k,\ k\in Z$. 2.Н. $(-3/4,\ -1/4)$; $(1/2,\ -1/4)$. 3. 9405, 11 115. 4. $18\sqrt{161}$ см^2. 5.Н. $\dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}<a<\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}$. 2.С. $x_1=\dfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{5+4\sqrt{2}}\right)$, $y_1=\dfrac{1}{2}\left(-1-\sqrt{2}+\sqrt{5+4\sqrt{2}}\right)$;

$x_2=\dfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{5+4\sqrt{2}}\right)$, $\qquad y_2=\dfrac{1}{2}\left(-1-\sqrt{2}-\sqrt{5+4\sqrt{2}}\right)$.

5.С. При $a\leqslant 0$ неравенство справедливо при всех x; при $a>0$ неравенство справедливо при всех $x>\log_4\dfrac{1}{a}$, а также при всех $x<\log_4\dfrac{1}{16a}$.

Вариант 4. 1. $\pm\pi/3+\pi k,\ k\in Z$. 2.Н. $(-1,\ 76/15)$; $(3,\ -8)$. 3. 1575, 19[illegible]5. 4. $12\sqrt{15}$. 5.Н. $a>7/4$. 2.С. $(1,\ 1/2)$; $(1/2,\ 1)$. 5.С. При $a\leqslant 0$ неравенство справедливо при всех x; при $a>0$ неравенство справедливо при всех $x>3-\log_2 a$, а также при $x<-2-\log_2 a$.

1978

Решение варианта 1.

1. Областью допустимых значений данного уравнения является множество $0<x<+\infty$. На ОДЗ исходное уравнение равносильно уравнению

$$(1-\log_3 x)\log_2 x-3\log_3 x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_2 x.$$

Перейдем в этом уравнении к логарифмам по основанию 3. Получим уравнение

$$(1-\log_3 x)\frac{\log_3 x}{\log_3 2}-3\log_3 x=\frac{1}{2}\cdot\frac{\log_3 x}{\log_3 2},$$

равносильное исходному на его ОДЗ. Последнее уравнение можно переписать так:

$$\log_3 x\left(\frac{1}{2}-\log_3 x-3\log_3 2\right)=0.$$

Теперь очевидно, что на множестве $0<x<+\infty$ исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\log_3 x = 0 \quad \text{и} \quad \log_3 x - \frac{1}{2} + 3\log_3 2 = 0.$$

Первое уравнение имеет единственный корень $x_1 = 1$, второе уравнение также имеет единственный корень $x_2 = 3^{\frac{1}{2} - 3\log_3 2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$. Оба эти числа лежат в ОДЗ исходного уравнения и, следовательно, являются его решениями.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

2. Так как BD диаметр окружности, то

$$\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = \pi/2.$$

Обозначим $\widehat{ABD}$ (рис. 99) через x, тогда из прямоугольного треугольника ABD получаем, что $\cos x = \frac{|AB|}{|BD|}$. По условию $|BD| = 2$, $|AB| = 1$, значит, $\cos x = 1/2$, и так как x — внутренний угол прямоугольного треугольника ABD, то $x = \frac{\pi}{3}$.

Тогда $\widehat{DBC} = \frac{3}{4}\widehat{ABD} = \frac{\pi}{4}$. Вписанные углы ACD и ABD опираются на одну и ту же дугу AED, значит, $\widehat{ACD} = \widehat{ABD} = \pi/3$. Из треугольника ADC по теореме синусов получаем, что

$$\frac{|AC|}{\sin \widehat{ADC}} = \frac{|AD|}{\sin \widehat{ACD}},$$

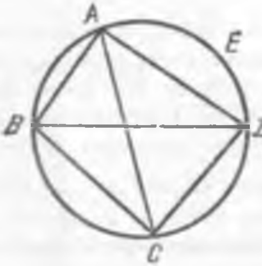


Рис. 99.

откуда $|AC| = \frac{|AD| \sin \widehat{ADC}}{\sin \widehat{ACD}}$. Так как $|AD| = |AB| \operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ и $\widehat{ADC} = \pi - \widehat{ABD} - \widehat{DBC} = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, то

$$|AC| = \frac{\sqrt{3}\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6}).$$

Ответ: $|AC| = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$.

3. П е р в о е р е ш е н и е. Обозначим через $V_м$ км/ч скорость мотоциклиста, через $V_в$ км/ч — скорость велосипедиста, через $V_п$ км/ч — скорость пешехода. Пусть с момента встречи пешехода и велосипедиста до встречи мотоциклиста и пешехода прошло t_1 ч, а с момента встречи пешехода и велосипедиста до встречи мотоциклиста и велосипедиста прошло t_2 ч. За время t_1 мотоциклист проехал $V_м t_1$ км, а пешеход прошел $V_п t_1$ км.

Из условия задачи имеем уравнение

$$V_м t_1 - V_п t_1 = 6.$$

С момента встречи мотоциклиста и пешехода до встречи мотоциклиста и велосипедиста прошло $(t_2 - t_1)$ ч. За это время мотоциклист проехал $V_м (t_2 - t_1)$ км, а пешеход прошел $V_п (t_2 - t_1)$ км, и так как пешеход отстал на 3 км, то имеем еще одно уравнение

$$V_м (t_2 - t_1) - V_п (t_2 - t_1) = 3.$$

Из условия, что велосипедист обогнал пешехода на 3 км, получаем уравнение

$$V_в t_2 - V_п t_2 = 3.$$

Итак, получили систему уравнений

$$\begin{cases} V_м t_1 - V_п t_1 = 6, \\ V_м (t_2 - t_1) - V_п (t_2 - t_1) = 3, \\ V_в t_2 - V_п t_2 = 3. \end{cases}$$

Надо найти, на сколько километров велосипедист обогнал пешехода в тот момент, когда пешехода настиг мотоциклист. Так как это произошло через t_1 ч, то за это время велосипедист проехал $V_в t_1$ км, а пешеход прошел $V_п t_1$ км. Следовательно, искомое расстояние x равно $(V_в t_1 - V_п t_1)$ км. Из первого уравнения системы $(V_м - V_п) t_1 = 6$, а из второго уравнения системы $(V_м - V_п)(t_2 - t_1) = 3$, откуда $\frac{t_1}{t_2 - t_1} = 2$. т. е. $t_2 = \frac{3}{2} t_1$. Из последнего уравнения системы $V_b - V_п = \frac{3}{t_2}$, поэтому $x = V_в t_1 - V_п t_1 = (V_b - V_п) t_1 = \frac{3}{t_2} \cdot t_1 = 2$ (км).

Второе решение. Обозначим через $V_м$ км/ч — скорость мотоциклиста, через $V_в$ км/ч — скорость велосипедиста, через $V_п$ км/ч — скорость пешехода. Время, за которое велосипедист обогнал пешехода на 3 км, равно $\frac{3}{V_в - V_п}$. Из условия задачи следует, что это же время равно $\frac{9}{V_м - V_п}$, откуда $\frac{3}{V_в - V_п} = \frac{9}{V_м - V_п}$, или $\frac{V_в - V_п}{V_м - V_п} = \frac{1}{3}$. Мотоциклист догнал пешехода за время $\frac{6}{V_м - V_п}$. Следовательно, за это время велосипедист обогнал пешехода на $\frac{6}{V_м - V_п}(V_в - V_п) = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$ (км).

Ответ: 2 км.

4.Н. Пусть (a, b) — пара чисел, удовлетворяющих условию задачи. Так как данное равенство справедливо при любом x, то, в частности, оно верно при $x = \pi$ и при $x = 2\pi$. Это значит, что числа a, b удовлетворяют равенствам

$$-2a + b^2 = \cos(\pi a + b^2) - 1, \quad (1)$$

$$b^2 = \cos(2\pi a + b^2) - 1. \quad (2)$$

Из равенства (2), так как $\cos(2\pi a+b^2)\leqslant 1$, следует, что $b^2\leqslant 0$. Этому условию удовлетворяет только $b=0$, но тогда $\cos 2\pi a=1$, т. е. a — целое число.

Равенство (1) теперь имеет вид $1-2a=\cos\pi a$. Так как $-1\leqslant\cos\pi a\leqslant 1$, то $-1\leqslant 1-2a\leqslant 1$, или $0\leqslant a\leqslant 1$. В промежутке $0\leqslant a\leqslant 1$ имеется только два целых числа: $a=0$ и $a=1$.

Итак, условию задачи могут удовлетворять только следующие пары чисел: $a=0$, $b=0$ и $a=1$, $b=0$. Если $a=0$, $b=0$, то данное в условии равенство, очевидно, будет выполняться при всех x. При $a=1$, $b=0$ данное в условии равенство также выполняется при всех x.

Следовательно, обе пары чисел $a=0$, $b=0$ и $a=1$, $b=0$ удовлетворяют условию задачи.

Ответ: (0, 0); (1, 0).

5. Так как $f(-1)=a-b+c$, $f(1)=a+b+c$, $f(3)=9a+3b+c$ и так как по условию $f(-1)<1$, $f(1)>-1$ и $f(3)<-4$, то справедливы неравенства

$$\begin{cases} a-b+c<1,\\ a+b+c>-1,\\ 9a+3b+c<-4.\end{cases}$$

Перепишем эти неравенства, умножив второе из них на (-2):

$$\begin{cases} a-b+c<1,\\ -2a-2b-2c<2,\\ 9a+3b+c<-4.\end{cases} \qquad (3)$$

Поскольку все эти неравенства справедливы, то складывая почленно правые и левые части всех неравенств, получим, что справедливо неравенство $8a<-1$. Отсюда вытекает, что коэффициент a имеет отрицательный знак.

Ответ: $a<0$.

4.С. Запишем данную функцию в виде

$$f(x)=\frac{(2x-3\pi)^2}{x}+12\pi+\sin x.$$

Очевидно, при всех $x>0$ справедливо неравенство

$$f(x)\geqslant 0+12\pi-1=12\pi-1.$$

В то же время $f(3\pi/2)=0+12\pi-1=12\pi-1$. Значит, наименьшее значение данной функции при рассматриваемых значениях x равно $12\pi-1$.

Ответ: $12\pi-1$.

Ответы к вариантам 2—4.

Вариант 2. 1. $x=\sqrt[3]{5/9}$. 2. $\frac{3}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$. 3. 8 км. 4.Н. (1, 0). 5. $a<0$. 4.С. $\frac{10}{41-4\pi^2}+1$.

Вариант 3. 1. $x_1=1$, $x_2=\frac{27}{\sqrt{2}}$. 2. $\sqrt{2}+\sqrt{6}$. 3. 10 км. 4.Н. (0, 0); (1, 0); (—1, 0). 5. $a>0$. 4.С. $12\pi-1$.

Вариант 4. 1. $x=\frac{9}{\sqrt{5}}$. 2. $2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$. 3. 6 км. 4.Н. (1, 0). 5. $a>0$. 4.С. $\frac{16}{92-9\pi^2}+1$.

1979

Решение варианта 1.

1. Обозначим $\cos x$ через t. Тогда данное уравнение можно переписать так:

$$\sqrt{3+4\sqrt{6}-(16\sqrt{3}-8\sqrt{2})\,t}=4t-\sqrt{3}. \qquad (1)$$

Очевидно, все решения уравнения (1) должны удовлетворять неравенству $4t-\sqrt{3}\geqslant 0$, т.е. лежать в области $t\geqslant\sqrt{3}/4$.

Каждый корень уравнения (1) будет также корнем уравнения

$$3+4\sqrt{6}-(16\sqrt{3}-8\sqrt{2})\,t=16t^2-8\sqrt{3}t+3, \qquad (2)$$

полученного возведением в квадрат обеих частей уравнения (1). Уравнение (2) можно переписать так:

$$4t^2+2(\sqrt{3}-\sqrt{2})\,t-\sqrt{6}=0. \qquad (3)$$

Уравнение (3) имеет два корня: $t_1=\sqrt{2}/2$ и $t_2=-\sqrt{3}/2$. Корень t_2 не лежит в области $t\geqslant\sqrt{3}/4$ и, значит, не удовлетворяет уравнению (1).

Подставим $t_1=\sqrt{2}/2$ в уравнение (1). Левая часть уравнения равна

$$\sqrt{3+4\sqrt{6}-8\sqrt{6}+8}=\sqrt{(2\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}=2\sqrt{2}-\sqrt{3},$$

правая часть также равна $2\sqrt{2}-\sqrt{3}$. Значит, число $t_1=\sqrt{2}/2$ является единственным корнем уравнения (1), и потому исходное уравнение равносильно уравнению

$$\cos x=\sqrt{2}/2.$$

Последнее уравнение, а значит, и исходное уравнение имеет решения $x=\pm\pi/4+2\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: $x=\pm\pi/4+2\pi n$, $n\in Z$.

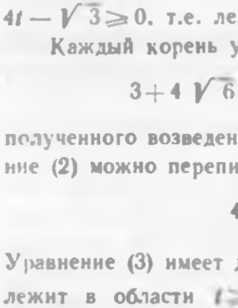


Рис. 100.

2.Н. Пусть b — некоторое фиксированное положительное значение параметра. Для этого b найдем абсциссы точек пересечения графиков функций $y(x)=bx^2$ и $y(x)=1-x^2$ (рис. 100). Они будут корнями уравнения $bx^2=1-x^2$. Решая его, находим $x_1=-\frac{1}{\sqrt{b+1}}$, $x_2=\frac{1}{\sqrt{b+1}}$. Площадь S, ограниченная кривыми $y=1-x^2$ и $y=bx^2$, вычисляется следующим образом:

$$S=\int\limits_{-1/\sqrt{b+1}}^{1/\sqrt{b+1}}((1-x^2)-bx^2)\,dx=\left(x-\frac{b+1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-1/\sqrt{b+1}}^{1/\sqrt{b+1}}=\frac{4}{3}\,\frac{1}{\sqrt{b+1}}.$$

Так как это выражение по условию должно быть равно числу c, то из соотношения $\frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{b+1}}=c$ находим, что $b=\frac{16}{9c^2}-1$. Задача имеет решение тогда и только тогда, когда число c удовлетворяет системе неравенств

$$\begin{cases} \frac{16}{9c^2}-1>0, \\ c>0, \end{cases} \tag{4}$$

ибо первое неравенство должно выполняться, так как по условию $b>0$, а второе неравенство есть следствие того, что площадь фигуры должна быть положительна. Решения системы (4) есть интервал $0<c<4/3$. Итак, задача имеет решение только для c из интервала $0<c<4/3$; тогда искомое значение b есть $\frac{16}{9c^2}-1$.

Ответ: $0<c<\frac{4}{3}$, $b=\frac{16}{9c^2}-1$.

3. Для освобождения от знаков абсолютных величин разобьем числовую ось на промежутки

$$-\infty<x<-3, \quad -3\leqslant x<-2, \quad -2\leqslant x<+\infty$$

и будем решать исходное неравенство на каждом из этих промежутков отдельно.

Если $-\infty<x<-3$, то $x+3<0$ и $x+2<0$. Значит, $|x+3|=-(x+3)$, $|x+2|=-(x+2)$ и исходное неравенство имеет вид

$$\frac{3}{-x-3-1}\geqslant -x-2.$$

Последнее неравенство равносильно неравенству

$$\frac{(x+5)(x+1)}{x+4}\geqslant 0. \tag{5}$$

Решая неравенство (5) с помощью метода интервалов, находим, что множество всех его решений состоит из двух промежутков: $-5\leqslant x<-4$ и $-1\leqslant x<+\infty$. Из этих чисел в области $-\infty<x<-3$ лежат числа из промежутка $-5\leqslant x<-4$. Значит, в области $-\infty<x<-3$ множество всех решений исходного неравенства есть промежуток $-5\leqslant x<-4$.

Если $-3\leqslant x<-2$, то $x+3\geqslant 0$ и $x+2<0$. Значит, $|x+3|=x+3$, $|x+2|=-(x+2)$ и исходное неравенство имеет вид

$$\frac{3}{x+3-1}\geqslant -(x+2). \tag{6}$$

Неравенство (6) может быть записано в виде

$$\frac{3+(x+2)^2}{x+2}\geqslant 0,$$

откуда, очевидно, что оно не имеет решений в области $-3\leqslant x<-2$. Значит, исходное неравенство не имеет решений в области $-3\leqslant x<-2$.

Если $-2 \leqslant x < +\infty$, то $x+3 > 0$ и $x+2 \geqslant 0$. Значит, $|x+3| = x+3$, $|x+2| = x+2$ и исходное неравенство имеет вид

$$\frac{3}{x+3-1} \geqslant x+2.$$

Это неравенство равносильно неравенству

$$\frac{x^2+4x+1}{x+2} \leqslant 0. \qquad (7)$$

Квадратный трехчлен x^2+4x+1 имеет корни $x_1 = -2-\sqrt{3}$, $x_2 = -2+\sqrt{3}$. С помощью метода интервалов находим, что множество всех решений неравенства (7) состоит из двух промежутков: $-\infty < x \leqslant -2-\sqrt{3}$, $-2 < x \leqslant -2+\sqrt{3}$. Из этого множества в область $-2 \leqslant x < +\infty$ попадает лишь промежуток $-2 < x \leqslant -2+\sqrt{3}$. Значит, в области $-2 \leqslant x < +\infty$ множество всех решений исходного неравенства есть промежуток $-2 < x \leqslant -2+\sqrt{3}$. Объединяя решения, найденные на областях $-\infty < x < -3$, $-3 \leqslant x < -2$, $-2 \leqslant x < +\infty$, находим, что множество всех решений исходного неравенства состоит из двух промежутков: $-5 \leqslant x < -4$ и $-2 < x \leqslant -2+\sqrt{3}$.

Ответ: $-5 \leqslant x < -4$, $-2 < x \leqslant -2+\sqrt{3}$.

4.Н. Опустим из точки B высоту пирамиды и обозначим через E основание этой высоты (рис. 101). Обозначим через K, L, M середины ребер AC, BC, AD соответственно. Треугольники BDC и ABC равносторонние, значит, $DL \perp BC$ и $AL \perp BC$. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости заключаем, что прямая BC перпендикулярна плоскости ALD. По условию точка P равноудалена от вершин пирамиды B и C. Значит, точка P лежит в плоскости ALD. Аналогично доказывается, что плоскость BMC перпендикулярна ребру AD и точка P лежит в плоскости BMC. Итак, точка P лежит на пересечении плоскостей ALD и BMC. Точки L и M принадлежат двум плоскостям ALD и BMC. Значит, эти плоскости пересекаются по прямой LM и точка P лежит на этой прямой.

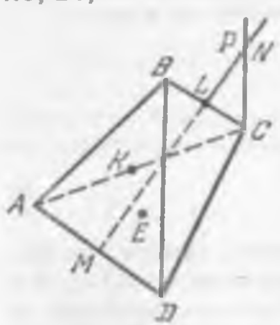


Рис. 101.

Отрезок DK есть высота треугольника ACD, опущенная из вершины D. Так как треугольник ACD правильный, то его центр — точка E — лежит на медиане CM. Плоскость MBC содержит перпендикуляр BE к плоскости ACD. Поэтому плоскость MBC перпендикулярна плоскости ACD. Отсюда следует, что перпендикуляр, восстановленный из точки C к плоскости ACD, лежит в плоскости MBC. Обозначим точку пересечения этого перпендикуляра и прямой ML через N.

Докажем, что точка P совпадает с точкой N. По построению прямая CN перпендикулярна плоскости KDC. В частности, она перпендикулярна прямой KD. По условию прямые PC и KD также перпендикулярны. Если точки N и P различны, то по признаку перпендикулярности прямой и плоскости заключаем, что прямая KD перпендикулярна плоскости CPN, т. е. плоскости CLM. Но тогда прямая KD должна быть перпендикулярна прямой CM, что неверно (угол между этими прямыми равен $2\pi/3$). Итак, точки P и N совпадают. В дальнейшем вместо N будем писать P.

Обозначим величину ребра пирамиды через a. Тогда $|BC|=a$, $|CM|=|BM|=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Для удобства рассуждений вынесем сечение пирамиды плоскостью CMB на отдельный рисунок (рис. 102). Из прямоугольного треугольника CLM по теореме Пифагора находим, что $|LM| = \sqrt{|CM|^2-|CL|^2}=\sqrt{\frac{3}{4}a^2-\frac{1}{4}a^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$

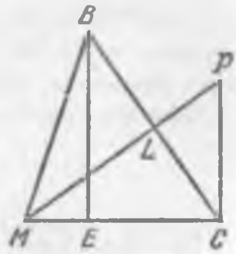


Рис. 102.

Тогда $\operatorname{tg}\widehat{CML}=\frac{|CL|}{|LM|}=\frac{a\cdot 2}{2\cdot a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $|PC|=|CM|\operatorname{tg}\widehat{CML}=$ $=\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{6}}{4}$. По условию $|PC|=\sqrt{\frac{3}{2}}$, значит, $a=2$. Так как $|ME|=\frac{1}{3}|CM|=\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, то из прямоугольного треугольника BME получаем: $|BE|=\sqrt{|BM|^2-|ME|^2}=\sqrt{3-\frac{1}{3}}=$ $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. Объем пирамиды равен

$$V=\frac{1}{3}S_{ACD}\cdot|BE|=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Заметим, что эту задачу можно также решить и с помощью векторов.

Ответ: $2\sqrt{2}/3$.

5. Пусть $(u_0,\ v_0,\ w_0)$ — тройка чисел, удовлетворяющая условию задачи; тогда

$$3(u_0-3)^2+6v_0^2+2w_0^2+3v_0^2w_0^2=33, \tag{8}$$

откуда следует, в частности, что $3(u_0-3)^2\leqslant 33$, т. е. $(u_0-3)^2\leqslant 11$. Поскольку $(u_0-3)^2$ является квадратом целого числа u_0-3, то $(u_0-3)^2$ равно либо 0, либо 1, либо 4, либо 9. Перепишем равенство (8) в виде

$$3(u_0-3)^2+(w_0^2+2)(3v_0^2+2)=37.$$

Если $(u_0-3)^2=0$, то $(w_0^2+2)(3v_0^2+2)=37$. Так как w_0^2+2 и $3v_0^2+2$ целые числа, большие 1, а 37 — простое число, то последнее равенство выполняться не может. Значит, $(u_0-3)^2\neq 0$.

Если $(u_0-3)^2=1$, то $(w_0^2+2)(3v_0^2+2)=34$. Поскольку $w_0^2+2\geqslant 2$, $3v_0^2+2\geqslant 2$ и w_0^2+2, $3v_0^2+2$ — целые числа, то либо

$$\begin{cases} w_0^2+2=2, \\ 3v_0^2+2=17, \end{cases} \tag{9}$$

либо

$$\begin{cases} w_0^2+2=17, \\ 3v_0^2+2=2. \end{cases} \qquad (10)$$

Из второго равенства (9) находим, что $v_0^2=5$, что невозможно, поскольку v_0 — целое число. Из первого равенства (10) находим, что $w_0^2=15$, что также невозможно, поскольку w_0 — целое число. Значит, $(u_0-3)^2\neq 1$.

Если $(u_0-3)^2=4$, то $(w_0^2+2)(3v_0^2+2)=25$, откуда следует, что

$$\begin{cases} w_0^2+2=5, \\ 3v_0^2+2=5. \end{cases} \qquad (11)$$

Из первого равенства (11) находим, что $w_0^2=3$, что невозможно. Значит, $(u_0-3)^2\neq 4$.

Если $(u_0-3)^2=9$, т. е. если $u_0=6$ или $u_0=0$, то $(w_0^2+2)(3v_0^2+2)=10$. Так как $w_0^2+2\geqslant 2$ и $3v_0^2+2\geqslant 2$, то отсюда следует, что либо

$$\begin{cases} w_0^2+2=5, \\ 3v_0^2+2=2, \end{cases} \qquad (12)$$

либо

$$\begin{cases} w_0^2+2=2, \\ 3v_0^2+2=5. \end{cases} \qquad (13)$$

Из первого равенства (12) следует, что $w_0^2=3$, что невозможно. Из равенств (13) получаем, что либо $w_0=0$, $v_0=1$, либо $w_0=0$, $v_0=-1$. Следовательно, исходному соотношению удовлетворяют четыре тройки чисел (6, 1, 0); (6, —1, 0); (0, 1, 0); (0, —1, 0).

Ответ: (6, 1, 0); (6, —1, 0); (0, 1, 0); (0, —1, 0).

2.С. Данная система уравнений может быть переписана так:

$$\begin{cases} 2\log_{1-x}((1-x)(y+2))+\log_{2+y}(x-1)^2=6, \\ \log_{1-x}(y+5)-\log_{2+y}(x+4)=1. \end{cases} \qquad (14)$$

Если (x_0, y_0) — решение системы (14), то справедливы неравенства: $1-x_0>0$, $1-x_0\neq 1$, $y_0+2>0$, $2+y_0\neq 1$, $y_0+5>0$, $x_0+4>0$, т. е. если (x_0, y_0) — решение системы (14), то число y_0 удовлетворяет условиям $y_0>-2$, $y_0\neq -1$, а число x_0 — условиям $-4<x_0<1$, $x_0\neq 0$. Поэтому будем искать решения системы (14) среди пар чисел (x, y), удовлетворяющих соотношениям $-4<x<1$, $x\neq 0$, $y>-2$, $y\neq -1$.

Первое уравнение системы равносильно на своей ОДЗ уравнению

$$\log_{1-x}(y+2)+\log_{y+2}(1-x)=2.$$

Обозначив $\log_{1-x}(y+2)$ через z, последнее уравнение можно переписать так:

$$z+\frac{1}{z}=2.$$

Это уравнение имеет единственный корень $z=1$. Значит, первое уравнение системы равносильно в рассматриваемой области уравнению

$$\log_{1-x}(y+2)=1,$$

или уравнению $y=-x-1$. Следовательно, система (14) равносильна на рассматриваемой области системе

$$\begin{cases} y=-x-1, \\ \log_{1-x}(y+5)-\log_{2+y}(x+4)=1. \end{cases} \tag{15}$$

Подставляя $(-x-1)$ вместо y во второе уравнение системы (15), получим уравнение:

$$\log_{1-x}(4-x)-\log_{1-x}(x+4)=1.$$

Последнее уравнение равносильно на рассматриваемой области уравнению $\log_{1-x}(4-x)=\log_{1-x}(1-x)(x+4)$, или уравнению

$$4-x=(1-x)(x+4).$$

Это уравнение имеет два корня: $x_1=-2$ и $x_2=0$. Из первого уравнения системы (15) находим $y_1=1$ и $y_2=-1$. Из найденных пар чисел в рассматриваемую область входит только пара $x_1=-2$, $y_1=1$. Она и является единственным решением исходной системы.

Ответ: $x=-2$, $y=1$.

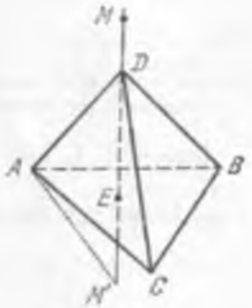


Рис. 103.

4.С. Обозначим через E центр грани ABC (рис. 103). Так как наклонные MA, MB, MC равны, то проекция точки M на плоскость ABC равноудалена от вершин A, B, C. Это значит, что проекция точки M совпадает с точкой E или точка M лежит на прямой DE. Вообще говоря, возможны два случая: точки M и D лежат по разные стороны от плоскости ABC (на чертеже $M\equiv M'$) и точки M и D лежат по одну сторону от плоскости ABC.

В первом случае

$$AM'<AE+EM'<ED+EM'=DM',$$

что неверно, так как $\sqrt{\frac{97}{75}}>1>\frac{1}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Рассмотрим второй случай. Тогда

$$ME=MD+ED. \tag{16}$$

Обозначим величину ребра пирамиды $ABCD$ через a. Имеем

$$AE=\frac{2}{3}\,\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$ED=\sqrt{AD^2-AE^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}=a\sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$ME=\sqrt{AM^2-AE^2}=\sqrt{\frac{97}{75}-\frac{a^2}{3}}.$$

Подставляя эти выражения в равенство (16), получаем уравнение для определения a:

$$\sqrt{\frac{97}{75}-\frac{a^2}{3}}=\frac{1}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}+a\sqrt{\frac{2}{3}}. \qquad (17)$$

Возведя обе части этого уравнения в квадрат и преобразовав, получим уравнение

$$a^2+\frac{4}{15}a-\frac{19}{15}=0,$$

которое имеет два корня: $a_1=1$ и $a_2=-\frac{19}{15}$. Подстановкой убеждаемся, что уравнению (17) удовлетворяет только корень $a_1=1$. Значит, ребро пирамиды равно 1, но тогда его объем равен

$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot ED=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{12};$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{12}$.

Ответы к вариантам 2—4.

Вариант 2. 1. $x=(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$. 2.Н. $b=\sqrt{\frac{8}{3c}}-1$; $0<c<\frac{8}{3}$. 3. $-1-\sqrt{8}\leqslant x<-3$, $1<x\leqslant 3$. 4.Н. $\frac{16}{3}\sqrt{2}$. 5. (1, 5, 0); (1, —5; 0); (— 1, 5; 0); (— 1, — 5, 0). 2.С. $x=-\frac{2}{5}$, $y=\frac{2}{5}$. 4.С. $\frac{4}{3\sqrt{2}}$.

Вариант 3. 1. $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$. 2.Н. $p=\frac{128}{9q^2}-1$; $0<q<\frac{8\sqrt{2}}{3}$. 3. $8<x\leqslant 5+\sqrt{18}$, $-1\leqslant x<2$. 4.Н. $\frac{1}{6\sqrt{2}}$. 5. (1, 4, 3); (1, 4, — 3); (—1, 4, 3); (— 1, 4, — 3). 2.С. $x=-\frac{5}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$. 4.С. $\frac{1}{6\sqrt{2}}$.

Вариант 4. 1. $x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+k\pi$, $k\in Z$. 2.Н. $a=\frac{1}{\sqrt{3b}}-1$; $0<b<\frac{1}{3}$. 3. $-2-\sqrt{7}\leqslant x<-2$, $4<x\leqslant 5$. 4.Н. $\frac{4}{3\sqrt{2}}$. 5. (1, 0, 1); (— 1, 0, 1); (1, 0, 5); (— 1, 0, 5) 2.С. $x=-\frac{5}{3}$, $y=\frac{5}{3}$. 4.С. $\frac{1}{6\sqrt{2}}$.

§ 13. ФИЛОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
(отделение структурной и прикладной лингвистики)

1977

Решение варианта 1.

1. Обозначим через x число деталей в первом ящике, а через y число деталей во втором ящике. Тогда согласно условию имеет место система неравенств

$$\begin{cases} x+y>29, \\ x-2>3y, \\ 3x-2y<60. \end{cases}$$

Перепишем эту систему в виде

$$\begin{cases} x > 29-y, \\ x > 3y+2, \\ 20+\dfrac{2}{3}y > x. \end{cases} \qquad (1)$$

Отсюда следует, что справедливы неравенства

$$20+\frac{2}{3}y > 29-y, \qquad (2)$$

$$20+\frac{2}{3}y > 3y+2. \qquad (3)$$

Неравенство (2) можно переписать в виде $y > \frac{27}{5}$, а неравенство (3) в виде $y < \frac{54}{7}$. Так как $\frac{54}{7}=7\frac{5}{7}$, $\frac{27}{5}=5\frac{2}{5}$ и y — натуральное число, то y равен либо 6, либо 7. Если y равен 6, то система неравенств (1) перепишется в виде

$$\begin{cases} x > 23, \\ x > 20, \\ x < 24. \end{cases}$$

Ясно, что нет натуральных чисел x, удовлетворяющих ей. Значит, $y=7$. Тогда система (1) перепишется в виде

$$\begin{cases} x > 22, \\ x > 23, \\ x < 24\dfrac{2}{3}, \end{cases}$$

откуда вытекает, что существует единственное натуральное число $x=24$, ей удовлетворяющее. Следовательно, в первом ящике 24 детали, а во втором ящике 7 деталей.

Ответ: в первом ящике 24 детали, а во втором ящике 7 деталей.

2.Н. Графики функций $y(x)=\sin x$ и $y(x)=\cos x$ пересекаются в точках, абсциссы которых удовлетворяют уравнению $\sin x=\cos x$. Эти точки имеют вид $\pi/4+\pi k$, $k \in Z$, и промежутку $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ принадлежит только одна из них: $x=\pi/4$. Фигура, площадь которой нам необходимо найти, состоит из двух частей (рис. 104):

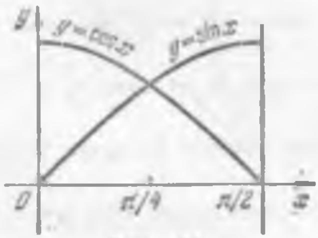


Рис. 104.

а) фигуры, лежащей под кривой $y(x)=\cos x$ и над кривой $y(x)=\sin x$ на промежутке от 0 до $\pi/4$; площадь ее обозначим через $S_а$;

б) фигуры, лежащей под кривой $y(x)=\sin x$ и над кривой $y(x)=\cos x$ на промежутке от $\pi/4$ до $\pi/2$; площадь ее обозначим через $S_б$.

Итак,

$$S_а = \int_0^{\pi/4} (\cos x-\sin x)\,dx = (\sin x+\cos x)\Big|_0^{\pi/4} = \sqrt{2}-1,$$

$$S_б = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x)\,dx = (-\cos x - \sin x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = -1 + \sqrt{2}.$$

Поскольку искомая площадь $S = S_а + S_б$, то $S = 2\sqrt{2} - 2$.

Ответ: $2\sqrt{2} - 2$.

3. Исходное уравнение равносильно уравнению

$$2\sin\left(\frac{\pi}{2}(2x+1)\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}(2x^2+2x+1)\right) = 0,$$

которое равносильно совокупности уравнений

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(2x+1)\right) = 0 \quad \text{и} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}(2x^2+2x+1)\right) = 0. \qquad (4)$$

Решения первого уравнения есть $x = \frac{2k-1}{2}$, $k \in Z$. Наименьшее положительное из них получается при $k = 1$: $x_1 = \frac{1}{2}$.

Решая второе уравнение, получаем, что

$$\frac{\pi}{2}(2x^2+2x+1) = \pi m, \qquad m \in Z,$$

или

$$2x^2 + 2x + 1 - 2m = 0, \qquad m \in Z. \qquad (5)$$

Значит, корни второго из уравнений (4) есть корни бесконечной совокупности уравнений (5). Найдем дискриминант каждого уравнения совокупности (5): $D = 16m - 4$. Так как $D < 0$ при каждом $m \leqslant 0$, то при любом $m \leqslant 0$ соответствующее уравнение из совокупности (5) не имеет решений. При любом $m \geqslant 1$ соответствующее уравнение из совокупности (5) имеет два корня: $x'_m = \frac{-1-\sqrt{4m-1}}{2}$ и $x''_m = \frac{-1+\sqrt{4m-1}}{2}$. Ясно, что $x'_m < 0$, $x''_m > 0$. Наименьший среди корней x''_m будет тот, который получается при $m = 1$; он равен $x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. Меньшее из двух чисел x_1 и x_2, т. е. из чисел $\frac{1}{2}$ и $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, и будет наименьшим положительным корнем исходного уравнения. Поскольку $\frac{\sqrt{3}-1}{2} < \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$, то искомый корень есть $x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

4.Н. При $a < 0$ уравнение, очевидно, решений не имеет. Пусть a — фиксированное неотрицательное число. Тогда данное уравнение равносильно уравнению $2|x| - x^2 = a^2$, или уравнению

$$|x|^2 - 2|x| + a^2 = 0. \qquad (6)$$

Дискриминант квадратного трехчлена $z^2 - 2z + a^2$ равен $4 - 4a^2$. Поэтому при $a > 1$ квадратное уравнение

$$z^2 - 2z + a^2 = 0 \qquad (7)$$

не имеет решений, а значит, не имеет решений и уравнение (6).

Если $a = 1$, то уравнение (7) имеет единственный корень $z = 1$, и тогда уравнение (6) равносильно уравнению $|x| = 1$ и имеет два корня: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

Если $0 \leqslant a < 1$, то уравнение (4) имеет корни $z_1 = 1 + \sqrt{1-a^2}$, $z_2 = 1 - \sqrt{1-a^2}$. Следовательно, в этом случае уравнение (6) равносильно совокупности двух уравнений

$$|x| = 1 + \sqrt{1-a^2} \text{ и } |x| = 1 - \sqrt{1-a^2}. \qquad (8)$$

Так как числа z_1, z_2 неотрицательны, то первое уравнение совокупности уравнений (8) имеет два решения $x_{1,2} = \pm\left(1 + \sqrt{1-a^2}\right)$, а второе уравнение — два решения $x_{3,4} = \pm\left(1 - \sqrt{1-a^2}\right)$. При этом, если $a \neq 0$, т. е. если $0 < a < 1$, то все эти числа различны. Если же $a = 0$, то $x_3 = x_4 = 0$.

Ответ: если $a < 0$, то нет решений; если $a = 0$, то 3 решения; если $0 < a < 1$, то 4 решения; если $a = 1$, то 2 решения; если $a > 1$, то нет решений.

5. Пусть $ABCS$ — данная в условии задачи пирамида (рис. 105). Обозначим через K и F точки, в которых плоскость α пересекает прямые CA и CB соответственно. Прямые DK и CS лежат в плоскости ACS. Если они пересекаются, то их точка пересечения принадлежит одновременно прямой CS и плоскости α, а это противоречит условию задачи: плоскость α параллельна ребру SC. Значит, $KD \parallel CS$ и точка K лежит на ребре CA. Аналогично доказывается, что $FE \parallel CS$ и точка F лежит на ребре BC.

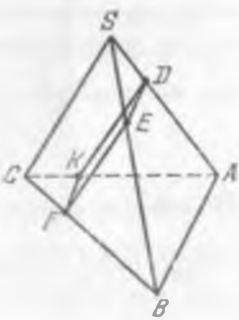


Рис. 105.

Из доказанного выше следует, что треугольники BFE и AKD подобны соответственно треугольникам CBS и ACS. Поэтому

$$\frac{|BF|}{|BC|} = \frac{|FE|}{|CS|} = \frac{|BE|}{|BS|} = \frac{2}{3}, \qquad (9)$$
$$\frac{|AK|}{|AC|} = \frac{|KD|}{|CS|} = \frac{|AD|}{|AS|} = \frac{2}{3}.$$

Так как $FE \parallel CS$ и $KD \parallel CS$, то $FE \parallel KD$. А из (9), в частности, следует, что $|FE| = |KD|$. Значит, четырехугольник $EDKF$ — параллелограмм.

Многогранник $ABFKDE$ составлен из трех пирамид: $EKFB$, $EKDB$, $AKBD$. Поэтому его объем V_1 равен

$$V_1 = V_{EKFB} + V_{EKDB} + V_{AKBD}.$$

Пирамиды $EKFB$ и $EKDB$ имеют общую вершину B. Площади их оснований EKF и EKD равны (EK — диагональ параллелограмма $EDKF$). Поэтому $V_{EKFB} = V_{EKDB}$ и

$$V_1 = 2V_{EKFB} + V_{AKBD}.$$

Обозначим через V объем пирамиды $ABCS$, через h_S и h_D — расстояния от точек S и D до плоскости ABC соответственно. Так как $|AD|:|AS| = \frac{2}{3}$, то $h_D = \frac{2}{3} h_S$. Имеем

$$V_{AKBD} = \frac{1}{3} S_{AKB} \cdot h_D = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |AB| \cdot |AK| \cdot \sin \widehat{BAC} \cdot h_D =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |AB| \cdot \frac{2}{3} |AC| \sin \widehat{BAC} \cdot \frac{2}{3} h_S =$$
$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot h_S = \frac{4}{9} V.$$

Обозначим через h_A и h_K расстояния от точек A и K до плоскости BCS соответственно. Так как $|CK|:|CA| = \frac{1}{3}$, то $h_K = \frac{1}{3} h_A$. Поэтому

$$V_{BKFE} = \frac{1}{3} S_{FBE} \cdot h_K = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |BF| \cdot |BE| \sin \widehat{CBS} \cdot \frac{1}{3} h_A =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} |BC| \cdot \frac{2}{3} |BS| \cdot \sin CBS \cdot \frac{1}{3} h_A =$$
$$= \frac{4}{27} \cdot \frac{1}{3} S_{CBS} \cdot h_A = \frac{4}{27} V.$$

Итак, $V_1 = 2 \cdot \frac{4}{27} V + \frac{4}{9} V = \frac{20}{27} V$. Тогда $V_{EFKDSC} = \frac{7}{27} V$ и искомое отношение равно $\frac{7}{20}$.

Ответ: 7/20.

2.С. Данная система уравнений, очевидно, равносильна системе

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 5 - 2\sqrt{6}, \\ x + y = \frac{\pi}{4}. \end{cases} \qquad (10)$$

Так как

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \frac{\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\frac{\pi}{4}}{\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\frac{\pi}{4}},$$

то система (10) равносильна системе

$$\begin{cases} \dfrac{\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}} = 5 - 2\sqrt{6}, \\ x + y = \frac{\pi}{4}. \end{cases} \qquad (11)$$

Уравнение $\frac{z - \sqrt{2}/2}{z + \sqrt{2}/2} = 5 - 2\sqrt{6}$ имеет единственный корень $z = \sqrt{3}/2$;

значит, система (11) равносильна системе

$$\begin{cases} \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ x+y=\frac{\pi}{4}. \end{cases} \tag{12}$$

Первое уравнение системы (12) имеет две серии решений: $x_1=\pi/8+\pi/12+\pi n$, $n\in Z$; $x_2=\pi/8-\pi/12+\pi m$, $m\in Z$. Тогда из второго уравнения $y_1=\pi/8-\pi/12-\pi n$, $n\in Z$; $y_2=\pi/8+\pi/12+\pi m$, $m\in Z$.

Ответ: $x_1=\frac{5\pi}{24}+\pi n$, $y_1=\frac{\pi}{24}-\pi n$, $n\in Z$; $x_2=\frac{\pi}{24}+\pi m$, $y_2=\frac{5\pi}{24}-\pi m$, $m\in Z$.

4.С. Пусть (x_0, y_0) — решение данной системы. Тогда справедливы равенства

$$\begin{gathered} x_0+\log_2 y_0=y_0\log_2 3+\log_2 x_0, \\ x_0\log_2 72+\log_2 x_0=2y_0+\log_2 y_0. \end{gathered} \tag{13}$$

Складывая почленно эти равенства, получаем после приведения подобных членов, что справедливо равенство

$$x_0(4+2\log_2 3)=y_0(2+\log_2 3),$$

или равенство $y_0=2x_0$. Подставляя $2x_0$ вместо y_0 в равенство (13), получаем, что справедливо равенство

$$x_0+\log_2(2x_0)=2x_0\log_2 3+\log_2 x_0,$$

откуда находим, что $x_0=\frac{1}{2\log_2 3-1}$; но тогда $y_0=\frac{2}{2\log_2 3-1}$. Итак, если данная система имеет решение, то это решение есть пара чисел (x_0, y_0), где $x_0=\frac{1}{2\log_2 3-1}$, $y_0=\frac{2}{2\log_2 3-1}$. Подставляя найденную пару чисел в оба уравнения данной системы уравнений, убеждаемся, что она действительно составляет ее решение.

Ответ: $x=\frac{1}{2\log_2 3-1}$, $\quad y=\frac{2}{2\log_2 3-1}$.

Ответы к варианту 2. **1.** В первой бригаде 11 человек; во второй — 17 человек. **2.Н.** $\frac{8}{3}\sqrt{3}-4$. **3.** $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$. **4.Н.** При $a<0$ нет решений; при $a=0$ два решения; при $0<a<4$ четыре решения; при $a=4$ три решения; при $a>4$ два решения. **5.** $\frac{11}{5}$. **2.С.** $x_1=\frac{7\pi}{24}+\pi n$, $y_1=-\frac{\pi}{24}+\pi n$, $n\in Z$; $x_2=\frac{\pi}{24}+\pi k$, $y_2=-\frac{7\pi}{24}+\pi k$, $k\in Z$. **4.С.** $x=\frac{1}{2-\log_2 3}$, $y=\frac{2}{2-\log_2 3}$.

1978

Решение варианта 1.

1. Обозначим через x число членов в первой бригаде, тогда во второй бригаде было $18-x$ человек, причем из них $(15-x)$ — юношей. Продолжительность дежурства любого члена первой бригады равна $\frac{48}{x}$ часов, а продолжительность дежурства каждого юноши второй бригады равна $\frac{24-3}{15-x}$ часам. По условию задачи

$$\frac{21}{15-x}+\frac{48}{x}<9.$$

Проделав очевидные преобразования, перепишем это неравенство так:

$$\frac{(x-8)(x-10)}{x(15-x)}<0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов, получим, что оно удовлетворяется для x из промежутков $-\infty<x<0$, $8<x<10$ и $15<x<+\infty$. Так как x (число членов бригады) — целое положительное число и так как из условия следует, что $x<15$, то условию задачи удовлетворяет только одно число $x=9$.

Ответ: в бригадах было по 9 человек.

2.Н. Прежде всего отметим, что четных цифр пять: это 0, 2, 4, 6, 8; нечетных цифр также пять: это 1, 3, 5, 7, 9. Пусть номер счастливого билета имеет вид $\overline{abcdef}$, где a, b, c, d, e и f одна из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; при этом на месте цифры a может стоять любая из пяти нечетных цифр 1, 3, 5, 7, 9, на месте цифры b может стоять любая из оставшихся четырех нечетных цифр, а на месте цифры c — любая из трех оставшихся цифр.

Таких комбинаций будет $5\cdot4\cdot3$. Так как на месте любой цифры d, e, f может быть любая из пяти четных цифр 0, 2, 4, 6, 8, то число всевозможных таких комбинаций будет $5\cdot5\cdot5$. Следовательно, всего чисел, у которых первые три цифры нечетные и отличные друг от друга, а последние три четные, есть $5\cdot4\cdot3\cdot5\cdot5\cdot5=7500$.

Но среди этих чисел есть такие, у которых на третьем месте стоит цифра 7, а на четвертом месте цифра 8. Подобно предыдущему, можно подсчитать, что таких чисел будет $4\cdot3\cdot5\cdot5=300$. Значит, счастливых билетов будет $7500-300=7200$.

Ответ: 7200.

3. Перепишем уравнение в виде

$$5(\sin x+\sin 3x)+6\sin 2x+\sin 4x=0.$$

Применив формулу суммы синусов к первому слагаемому и формулу синуса двойного угла к третьему слагаемому, перепишем исходное уравнение так:

$$10\sin 2x\cos x+6\sin 2x+2\sin 2x\cos 2x=0.$$

Это уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\sin 2x=0 \quad \text{и} \quad 5\cos x+3+\cos 2x=0.$$

Первое уравнение имеет серию решений $x=\pi n/2$, $n\in Z$. Применив формулу косинуса двойного угла, второе уравнение перепишем так:

$$5\cos x+3+2\cos^2 x-1=0.$$

Это квадратное относительно $\cos x$ уравнение. Оно равносильно совокупности уравнений:

$$\cos x = -1/2 \quad \text{и} \quad \cos x = -2.$$

Уравнение $\cos x = -1/2$ имеет решения $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. Уравнение $\cos x = -2$ решений не имеет. Следовательно, все решения исходного уравнения есть $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

4.Н. Первое решение. Данная функция имеет период 2π, поэтому ее наибольшее и наименьшее значения совпадают соответственно с наибольшим и наименьшим значениями $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Найдем критические точки $f(x)$. Так как $f(x)$ дифференцируема в каждой точке, то критические точки будут корнями уравнения $f'(x) = 0$. Поскольку $f'(x) = (\sin^2 x + \cos x - 1/2)' = 2 \sin x \cos x - \sin x$, то для нахождения критических точек имеем уравнение

$$2 \sin x \cos x - \sin x = 0.$$

Это уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\sin x = 0 \quad \text{и} \quad \cos x = 1/2.$$

Первое уравнение на интервале $(-\pi, \pi)$ имеет единственный корень $x_1 = 0$. Второе уравнение на этом же интервале имеет два корня: $x_2 = -\pi/3$ и $x_3 = \pi/3$. Вычислим значения $f(x)$ в критических точках:

$$f(x_1) = f(0) = \frac{1}{2}, \quad f(x_2) = f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4};$$

$$f(x_3) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}.$$

Вычислим еще значения $f(x)$ в концах отрезка $[-\pi, \pi]$:

$$f(-\pi) = f(\pi) = -\frac{3}{2}.$$

Значит, наибольшее значение $f(x)$ равно $\frac{3}{4}$, наименьшее значение $f(x)$ равно $\left(-\frac{3}{2}\right)$.

Второе решение. Пользуясь основным тригонометрическим тождеством $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, можно написать, что

$$f(x) = \sin^2 x + \cos x - \frac{1}{2} = 1 - \cos^2 x + \cos x - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Теперь очевидно, что при всех x функция $f(x)$ не превосходит $\frac{3}{4}$ и принимает значение $\frac{3}{4}$, например, при $x=\frac{\pi}{3}$ $\left(\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\right)$. Следовательно, наибольшее значение $f(x)$ равно $\frac{3}{4}$. Функция $\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2$ принимает наибольшее значение $\left(\frac{3}{2}\right)^2$, например, в точке $x=\pi$ $(\cos\pi=-1)$, и поэтому наименьшее значение $f(x)$ равно $\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{3}{2}$.

Ответ: $\max f(x)=\frac{3}{4}$, $\quad \min f(x)=-\frac{3}{2}$.

5. Так как $|AB|=2R\sin\widehat{AEB}$, где R — радиус окружности (рис. 106), то $\sin\widehat{AEB}=\frac{|AB|}{2R}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Поэтому либо $\widehat{AEB}=\frac{\pi}{4}$, либо $\widehat{AEB}=\frac{3\pi}{4}$.

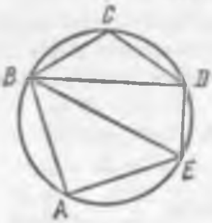


Рис. 106.

Случай, когда $\widehat{AEB}=\frac{3\pi}{4}$, невозможен, так как тогда $\widehat{AEB}+\widehat{ABE}=\pi$, что противоречит теореме о сумме углов треугольника.

Следовательно, $\widehat{AEB}=\pi/4$, но тогда $\widehat{BAE}=$ $=\pi-(\widehat{ABE}+\widehat{AEB})=\pi/2$; значит, BE — диаметр окружности и $|BE|=2$. Кроме того, треугольник ABE равнобедренный, в нем $|AE|=|AB|=\sqrt{2}$.

Поскольку треугольник BDE вписан в окружность и одна из его сторон есть диаметр этой окружности, то он прямоугольный. Поэтому $\widehat{BED}=\pi/2-\widehat{EBD}=\pi/3$, но тогда $|ED|=|BE|\sin 30^\circ=1$, $|BD|=$ $=\sqrt{|BE|^2-|ED|^2}=\sqrt{3}$. По условию $|BC|=|CD|$. Это означает, что дуги BC и CD, стягиваемые хордами BC и CD, равновелики. Поскольку угол BED опирается на дугу BCD, то $\widehat{BDC}=\frac{1}{2}\widehat{BED}=\frac{\pi}{6}$ и, значит, $|CD|=|BC|=|ED|=1$. Искомая площадь пятиугольника $ABCDE$ равна

$$S_{ABCDE}=S_{ABE}+S_{EBD}+S_{DBC}=$$

$$=\frac{1}{2}|AB|\cdot|AE|+\frac{1}{2}|BD|\cdot|ED|+\frac{1}{2}|BD|\cdot|CD|\sin\widehat{BDC}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 1\cdot\sin\frac{\pi}{6}=1+\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $1+\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

2.С. Пусть x_0 — действительное число, являющееся решением данного уравнения. Тогда справедливо равенство

$$\sqrt{x_0-\sqrt{3}}+a^2x_0^2+2ax_0(\sqrt{6}-\sqrt{3})-6\sqrt{2}+9=0. \qquad (1)$$

Ясно, что $x_0\neq 0$, так как из условия задачи следует, что $x_0\geqslant\sqrt{3}$.

Равенство (1) можно переписать в виде

$$\alpha^2+2\alpha\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{x_0}\right)+\frac{\sqrt{x_0-\sqrt{3}}+9-6\sqrt{2}}{x_0^2}=0,$$

или, выделив полный квадрат относительно α, так:

$$\left(\alpha+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{x_0}\right)^2+\frac{\sqrt{x_0-\sqrt{3}}}{x_0^2}=0.$$

Отсюда ясно, что справедливы одновременно два равенства:

$$\alpha=-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{x_0} \quad \text{и} \quad \sqrt{x_0-\sqrt{3}}=0.$$

Из второго равенства получаем, что $x_0=\sqrt{3}$, но тогда из первого равенства $\alpha=1-\sqrt{2}$. Легко видеть, что при найденном значении $\alpha=1-\sqrt{2}$ число $x_0=\sqrt{3}$ действительно есть корень исходного уравнения.

Ответ: $\sqrt{3}$.

4.С. Область допустимых значений исходного уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих условиям $x^2-5x+6\neq 0$, $x-3\neq 0$ и $x-1>0$, т. е. ОДЗ исходного уравнения состоит из трех промежутков: $1<x<2$, $2<x<3$ и $3<x$. Перейдем в логарифмах к основанию 3, тогда исходное уравнение на своей ОДЗ равносильно уравнению

$$\log_3|x-2|+\log_3|x-3|=\log_3\frac{x-1}{2}+\log_3|x-3|,$$

или уравнению

$$\log_3|x-2|=\log_3\frac{x-1}{2}.$$

На ОДЗ исходного уравнения последнее урапнение равносильно уравнению

$$|x-2|=\frac{x-1}{2}. \qquad (2)$$

Найдем решения уравнения (2), содержащиеся в промежутках а) $x\leqslant 2$, б) $2<x$.

а) Пусть $x\leqslant 2$, тогда $|x-2|=-(x-2)$ и уравнение (2) запишется так: $-x+2=\frac{x-1}{2}$. Его корень $x_1=\frac{5}{3}$. Поскольку $x_1=\frac{5}{3}$ принадлежит промежутку $x\leqslant 2$ и содержится в ОДЗ исходного уравнения, то $x_1=\frac{5}{3}$ является решением исходного уравнения.

б) Пусть $2<x$, тогда $|x-2|=x-2$ и уравнение (2) запишется так: $x-2=\frac{x-1}{2}$. Его корень $x_2=3$ не принадлежит ОДЗ исходного уравнения. Следовательно, на этом промежутке исходное уравнение решений не имеет. Значит, исходное уравнение имеет единственный корень $x_1=5/3$.

Ответ: $x=5/3$.

Решение варианта 1.

1. Пусть O_1 — центр меньшей окружности, O_2 — центр большей окружности. Обозначим через B, D, E, C точки, в которых данные прямые касаются окружностей (рис. 107). Так как радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной, то $O_1B \perp BC$, $O_2C \perp BC$ и, значит, треугольники O_1BA и O_2CA прямоугольные. Они подобны (вертикальные углы O_1AB и O_2AC равновелики), причем из условия следует, что коэффициент подобия равен $\frac{1}{3}$. Поэтому $|O_2C| = 3R$. Но

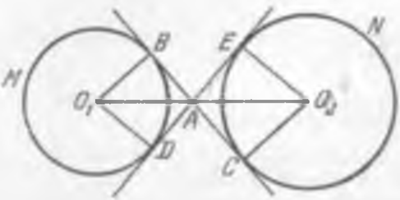


Рис. 107.

тогда $\sin \widehat{O_2AC} = \frac{|O_2C|}{|O_2A|} = \frac{1}{2}$, т. е. $\widehat{O_2AC} = \frac{\pi}{6}$. Кроме того, $|AC| = |AO_2| \cos \frac{\pi}{6}$, $|AB| = |O_1A| \cos \frac{\pi}{6}$, $|O_1A| = \frac{R}{\sin \frac{\pi}{6}}$. Легко видеть, что

$$S_{O_2AC} = \frac{1}{2} |O_2A| \, |AC| \sin \widehat{O_2AC} = \frac{1}{2} 6R \cdot 6R \cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{9}{2} \sqrt{3} R^2,$$

$$S_{O_1BA} = \frac{1}{2} |O_1A| \, |AB| \sin \widehat{O_1AB} = \frac{1}{2} \frac{R}{\sin \frac{\pi}{6}} \cdot \frac{R}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} R^2.$$

Аналогично доказывается, что треугольники O_2EA и O_1DA прямоугольные, причем $\widehat{O_2AE} = \widehat{O_1AD} = \frac{\pi}{6}$ и, значит, $S_{O_2AE} = S_{O_2AC} = \frac{9}{2} \sqrt{3} R^2$, $S_{O_1AD} = S_{O_1BA} = \frac{\sqrt{3}}{2} R^2$.

Искомая площадь является суммой площадей четырех треугольников O_1BA, O_1DA, O_2CA, O_2EA и двух секторов, опирающихся на дуги ENC и BMD. Так как $\widehat{EO_2C} = \widehat{EO_2A} + \widehat{CO_2A} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3}$ и $\widehat{BO_1D} = \widehat{BO_1A} + \widehat{DO_1A} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3}$, то центральные углы, опирающиеся на дуги ENC и BMD, равны $\frac{4\pi}{3}$ и, значит, площади большего и меньшего секторов равны соответственно $\frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} (3R)^2$ и $\frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} R^2$. Таким образом, искомая площадь равна

$$S = 2 \cdot \frac{9}{2} \sqrt{3} R^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} R^2 + \frac{2\pi}{3} 9R^2 + \frac{2\pi}{3} R^2 = 10R^2 \left(\sqrt{3} + \frac{2}{3} \pi \right).$$

Ответ: $S = 10R^2 \left(\sqrt{3} + \frac{2}{3} \pi \right)$.

2. Используя формулы приведения, перепишем уравнение в виде

$$\cos 2x + 3\sin x = 1 + 2\sin x.$$

Используя формулу для косинуса двойного угла $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, получим, что исходное уравнение равносильно уравнению

$$2\sin x\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

и, значит, равносильно совокупности двух уравнений

$$\sin x = 0 \quad \text{и} \quad \sin x = \frac{1}{2}.$$

Решения этих уравнений есть соответственно $x = \pi k$, $k \in Z$, и $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. Следовательно, множество всех решений исходного уравнения есть $x = \pi k$, $k \in Z$; $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $x = \pi k$, $k \in Z$; $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

3. Область допустимых значений неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условиям: $4 - x > 0$ и $x - 1 > 0$, т. е. ОДЗ является интервалом $1 < x < 4$. На этом интервале исходное неравенство равносильно неравенству $(4 - x)(x - 1) \leqslant 2$. Решения последнего неравенства есть два промежутка: $-\infty < x \leqslant 2$ и $3 \leqslant x < +\infty$. Из этих решений в интервале $1 < x < 4$ содержатся лишь x из двух промежутков: $1 < x \leqslant 2$ и $3 \leqslant x < 4$. Значит, множество всех решений исходного неравенства состоит из двух промежутков: $1 < x \leqslant 2$ и $3 \leqslant x < 4$.

Ответ: $1 < x \leqslant 2$, $3 \leqslant x < 4$.

4. Обозначим через x ч, y ч, z ч время, за которое соответственно первая, вторая и третья линии могут выполнить сменное задание первой линии. Тогда за 1 ч они могут выполнить соответственно $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ часть сменного задания для первой линии. Производительность всех трех одновременно действующих линий в 1,5 раза больше производительности первой и второй линий, работающих одновременно, поэтому

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1{,}5\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right). \qquad (1)$$

За один час вторая и третья линии, работая одновременно, выполнят $\frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ часть сменного задания для первой линии. Значит, для того чтобы выполнить все сменное задание для первой линии им потребуется $\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$ ч, причем по условию задачи

$$\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = x - \frac{24}{5}. \qquad (2)$$

Из условия задачи также следует, что

$$y = x - 2. \qquad (3)$$

Из уравнения (2) находим: $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x-\frac{24}{5}}$. Подставляя $\frac{5}{5x-24}$ вместо $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ в левую часть уравнения (1), а также $x-2$ вместо y в правую часть уравнения (1), получаем уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{5}{5x-24}=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}\right). \qquad (4)$$

После преобразований уравнение (4) можно переписать в виде

$$\frac{5x^2-43x+24}{x(x-2)(5x-24)}=0,$$

откуда получаем, что уравнение (4) имеет два корня: $x_1=8$ и $x_2=3/5$. Из условия задачи следует, что $x>2$. Значит, условию задачи удовлетворяет лишь $x_1=8$.

Ответ: первая линия выполнит свое сменное задание за 8 ч.

5. Так как $\frac{m}{n}$ — правильная дробь, то $m<n$ и потому $(3n-m)$ — натуральное число. Пусть $p\,(p>1)$ — натуральное число, на которое можно сократить дробь $\frac{3n-m}{5n+2m}$. Это значит, что натуральные числа $3n-m$ и $5n+2m$ делятся на p, т. е. существуют натуральные числа N и M такие, что

$$3n-m=pN \quad \text{и} \quad 5n+2m=pM.$$

Отсюда следует, что

$$11n=p(2N+M), \qquad 11m=p(3M-5N),$$

т. е. числа $11n$ и $11m$ делятся на p. Так как дробь $\frac{m}{n}$ — несократимая, т. е. числа n и m не имеют общих деталей, то 11 делится на p. Поскольку $p>1$ и 11 — простое число, то отсюда следует, что $p=11$.

Ответ: 11.

Ответы к варианту 2. 1. $\frac{5}{6}R^2(2\sqrt{3}+5\pi)$. 2. $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$; $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. 3. $-4\leqslant x<-3$, $0<x\leqslant 1$. 4. 2 часа. 5. 7.

Юрий Валентинович Нестеренко
Слав Николаевич Олехник
Михаил Константинович Потапов

ЗАДАЧИ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

М., 1980 г., 320 стр. с илл.

Редактор *А. А. Могилевский*
Техн. редакторы *Е. В. Морозова, В. Н. Кондакова*
Корректор *Н. Б. Румянцева*

ИБ № 11794

Сдано в набор 31.03.80. Подписано к печати 23.07.80. Бумага $60\times90^1/_{16}$. тип. № 3. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 20. Уч.-изд. л. 21,15. Тираж 300 000 экз. (1-й завод 1—200000). Заказ № 1521. Цена книги 75 коп.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-54, Валовая, 28

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15