ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ТОШКЕНТ ДАВЛАТ АГРАР УНИВЕРСИТЕТИ

Б.АБДАЛИМОВ, В.ВАҲОБОВ

ЭҲТИМОЛЛАР НАЗАРИЯСИ ВА МАТЕМАТИК СТАТИСТИКАНИНГ ИҚТИСОДИЙ МАСАЛАЛАРИГА ТАДБИҚЛАРИ

(УСЛУБИЙ ҚЎЛЛАНМА)

Тошкент 2009

Мазкур ўқув услубий қўлланма қишлоқ хўжалиги таълим йўналишларидаги талабаларга “Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика” фанини ўзлаштиришга ёрдам бериш мақсадида тайёрланди. Ушбу қўлланмада мавзулар бўйича қисқача назарий тушунчалар баён этилган бўлиб, намунавий мисол ва масалалар ечиб кўрсатилган ҳамда мустақил иш учун масалалар келтирилган. Мавзулар ва уларга оид масалаларни танлашда иқтисодиёт ва ижтимоий ҳаётдаги масалаларни киритишга ҳаракат қилинган. Мазкур ўқув услубий қўлланма намунавий ва ўқув дастурлари асосида ёзилган бўлиб, иқтисодиёт йўналишида таълим олувчи талабалар, магистрантлар, шунингдек, бу фанни мустақил ўрганувчилар фойдаланишлари мумкин.

МУАЛЛИФЛАР : Б.АБДАЛИМОВ, В.ВАҲОБОВ

ТАҚРИЗЧИЛАР:

А. АБДУШУКУРОВ - Ўзбекистон миллий университети “Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика” кафедраси мудири, профессор

С. ДЕҲҚОНОВ - Тошкент Давлат аграр университети “Бухгалтерия ҳисоби ва аудит” кафедраси доценти.

Тошкент Давлат аграр университети Қишлоқ хўжалигини механизациялаш факультети ўқув услубий кенгашининг 2008 йил 7 январ 3-сонли, университет ўқув услубий кенгашининг 2008 йил 1 апрел 4- сонли ҳамда Агроиқтисод факультети илмий кенгашининг 2009 йил 26 май №10 сонли йиғилишлари қарорлари билан чоп этишга тавсия қилинган.

СЎЗ БОШИ

Ҳозирда ер куррасидаги деярли барча ривожланган давлатлар шу жумладан, Ўзбекистон иқтисодиётида жуда катта ўзгаришлар бўлмоқда. Бу эса олий таълим тизимида юқори малакали кадрларни тайёрлашни долзарб масалалардан қилиб қўймоқда. Университетни тамомлаётган ҳар бир ёш мутахассис, жумладан, иқтисодчи, агроном, инженер техник муҳандис ва бошқалар чуқур иқтисодий билимларга эга бўлиши керак. Бунда статистик маълумотларни таҳлил қилиш асосида маҳсулотлар таннархи ва сифатини, рентабилликни, ишлаб чиқариш самарадорлигини, меҳнат унумдорлигини аниқловчи математик моделларни туза билишлик ва уни ечиш усулларини топиш катта амалий аҳамиятга эгадир.

Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика фани методлари ҳозирда халқ хўжалигининг барча тармоқларида, жумладан, иқтисодиётда кенг қўлланилмоқда. Бу эса ҳозирги замон иқтисодчисидан ушбу фан асосларини чуқур ўрганиб, иқтисодиётга қўллаш усулларини билишлик, жаҳон қишлоқ хўжалик иқтисодиёти, халқаро савдо, молиявий бозорлар, суғурта масалалари ва бошқа соҳалардаги тасодифий жараёнлар ва ҳодисаларни чуқур таҳлил қила олишликни талаб этади.

Қўлланма Б. Абдалимов ва В.Ваҳобовлар томонидан 2008 йили чоп этилган мазкур номли қўлланмани кирил алифбосида қайта ишланган ва тўлдирилган нашридан иборат бўлиб, у **2** қисм **13** та бобни ташкил этади. Унда эҳтимоллар назарияси ва математик статистика фанини асосий тушунчалари ва тасдиқлари ёритилган. Ҳар бир боб сўнггида мавзуга доир намунавий масалалар ҳамда мустақил ечиш учун мисоллар келтирилган.

Мазкур услубий қўлланма "Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика" фани бўйича Тошкент Давлат Аграр

Университети ўқув методик кенгашида тасдиқланган намунавий ва ўқув дастурлари асосида ёзилган.

Қўлланма кенг китобхонлар оммаси учун мўлжаллаб ёзилган бўлиб, ҳусусан барча олий ўқув юртларини иқтисод йўналишида машғулотлар олиб борувчи педагоглар фойдаланишлари мумкин. Шунингдек, мазкур қўлланма талабаларнинг эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан олган билимларидан фойдаланиб амалий масалаларини ечишларида ёрдам беради деб ўйлаймиз.

Муаллифлар ушбу қўлланма ҳақида танқидий ва тақризий фикрларни мамнуният билан қабул қиладилар ва келгусида эътиборга оладилар.

Муаллифлар.

1 - ҚИСМ
ЭҲТИМОЛЛАР НАЗАРИЯСИНИНГ АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАРИ ВА ТАСДИҚЛАРИ

1-БОБ. ҲОДИСАЛАР ВА УЛАРНИНГ ТУРЛАРИ ЭҲТИМОЛНИНГ ТАЪРИФЛАРИ

1.1. КОМБИНАТОРИКА ЭЛЕМЕНТЛАРИ

Комбинаторика (комбинаторик таҳлил) – дискрет математиканинг дискрет тўплам элементларини берилган коидалар асосида тўплаш ва жойлаштириш билан боғлиқ бўлган масалаларни ечиш усулларини ўрганувчи бўлимидир.

Қандайдир предметлардан ёки объектлардан (масалан, ҳарфлар, сонлар ва бошқалардан) ташкил топган гуруҳлар **бирлашмалар** ёки **комбинациялар** деб аталади. Ана шу бирлашмаларни ташкил этган предметларни **элементлар** дейилади.

Бирлашмалар асосан **3** хил бўлади: **ўрин алмаштириш (пермутацион-перестановка), ўринлаштириш (аррангемент-размещение) ва группалаштириш (комбинация-сочетания)**

1 дан **n** гача бўлган натурал сонлар кўпайтмаси “**n факториал**” деб аталади ва қисқача **n!** каби ёзилади: яъни **n!=1 2 3 ... n, (0!=1)**. Айрим ҳолларда **n!** ни ҳисоблашда қуйидаги тақрибий Стирлинг формуласидан фойдаланиш қулай бўлади.

$$n! \approx \sqrt{2np}\ n^n e^{-n}$$

1. Ўрин алмаштириш.

n та элементли ўрин алмаштириш деб, бир-биридан фақат элементларнинг тартиби билан фарқ қилувчи **n** та элементли бирлашмага айтилади ва улар сонини **Pn** билан белгиланади ҳамда қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$P_n=1\cdot2\cdot3\ldots(n-1)\cdot n=n! \qquad (1)$$

<u>1-мисол</u> **А, В, С** ҳарфларидан **3** тадан ҳарф олиб нечта рин алмаштириш тузиш мумкин?

<u>**Ечиш:**</u> Бундай **3** ҳарфли ўрин алмаштиришлар сони $_3$**=3!=1·2·3=6** та бўлиб, улар **АВС, АСВ, ВАС, ВСА, САВ, ВА** бўлади.

2. Ўринлаштиришлар

n та элементдан **m** тадан элемент олиб тузилган **ринлаштиришлар** деб, ҳар бирида **n** та элементдан **m** тадан либ тузилган шундай бирлашмаларга айтиладики, улар бир-иридан элементлари билан ёки элементларини жойлашиши артиби билан фарқ қилади.

n та элементдан **m** тадан олиб тузилган турли эинлаштиришлар сони A_n^m билан белгиланади ва қуйидаги ормула билан ҳисобланади:

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}=n\,(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1), \quad (2)$$

у ерда $0\le m\le n$ $A_n^1=n$, $A_n^0=1$.

<u>**2-мисол**</u> **А, В, С** ҳарфларидан **2** тадан ҳарф олиб нечта эинлаштиришлар тузиш мумкин?

<u>**Ечиш:**</u> **n=3 m=2** у ҳолда (2) формулага кўра A_3^2**=3·2= 6** ı. Яъни **АВ, ВА, АС, СА, ВС, СВ.**

3. Группалашлар

n та элементдан **m** тадан **(m≤n)** элемент олиб тузилган эуппалашлар деб, шундай бирлашмаларга айтиладики, унинг ıр бири бир-биридан ҳеч бўлмаганда битта элемент билан арқ қилади.

n та элементдан **m** тадан олиб тузилган группалашлар ıни C_n^m билан белгиланади ва қуйидаги формуладан ıиқланади:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (3)$$

3-мисол. Учта **A, B, C** ҳарфларидан иккитадан ҳарф олиб тузилган группалашлар сони топилсин ва улар ёзилсин.

Ечиш: n = 3, m = 2. У ҳолда (3) формулага кўра

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 1} = 3$$ та группалаш тузиш мумкин.

Улар **AB, AC, BC** бўлади.

1.2. Ҳодисалар ва уларнинг турлари. Элементар ҳодисалар фазоси. Тасодифий ҳодисалар устида амаллар

Эҳтимоллар назариясининг предмети оммавий бир жинсли тасодифий ҳодисалар бўйича сўнадиган қонуниятларни ўрганувчи фандир. Бу фаннинг дастлабки тушунчалари тажриба (синов) ва унинг натижалари ҳодисалардан иборатдир. Масалан, бир жинсли симметрик тангани бир марта ташлаш тажрибаси қаралаётган бўлсин. Бу тажрибани натижалари ё гербли ёки рақамли томон тушиш ҳодисаларидан иборат бўлади.

Ҳодисалар асосан уч хил: **тасодифий, муқаррар** ва **мумкин бўлмаган** ҳодисаларга бўлинади.

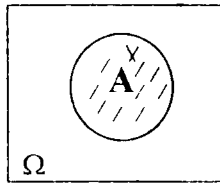
Тажриба натижасида (бирор шартлар мажмуи бажарилганда) рўй бериши ҳам рўй бермаслиги ҳам мумкин бўлган ҳодиса **тасодифий ҳодиса** дейилади. Тасодифий ҳодисаларни бош ҳарфлар, яъни **A, B, C, ...** билан белгиланади.

Масалан, бир дона тўлиқ мағизли чигитни етарли ҳароратга ва намликка эга бўлган тупроққа ва етарли чуқурликка экканда уни униб чиқиши ёки чиқмаслиги ҳодисалардан бири юз беради. Бинобарин, бу тасодифий ҳодиса бўлади.

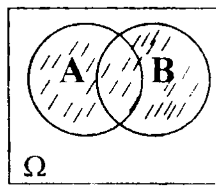
Тажриба натижасида албатта рўй берадиган ҳодиса **муқаррар,** мутлоқо рўй бермайдиган ҳодиса **мумкин бўлмаган ҳодиса** дейилади. Муқаррар ҳодиса **U** ҳарфи, мумикн бўлмаган ҳодиса эса **V** ҳарфи билан белгиланади.

Тажрибанинг ҳар бир яхлит натижаси (яъни бошқа ҳодисалар кўринишида ифодаланмайдиган ҳодиса) **элементар ҳодиса** деб аталади. Барча элементар ҳодисалар тўпламини $\Omega=\{\omega\}$ орқали белгилаймиз. $\Omega = \{\omega\}$ тўпламни **элементар ҳодисалар фазоси** деб аталади.

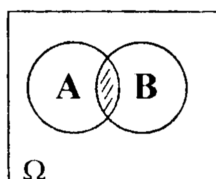
Ω нинг ихтиёрий **A** қисм тўплами **ҳодиса** деб аталади. Тажриба натижаси **A** га кирган бирор элементар ҳодисадан иборат бўлса, у ҳолда **A** ҳодиса рўй беради.



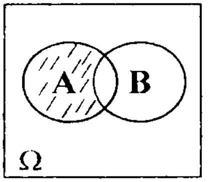
A ва **B** ҳодисанинг **йиғиндиси** $A \cup B$ деб ёки **A** ҳодисага, ёки **B** ҳодисага, ёки уларнинг иккаласига ҳам тегишли бўлган элементар ҳодисалардан иборат бўлган ҳодисага айтилади.



A ва **B** ҳодисаларнинг **кўпайтмаси** $A \cap B$ деб, **A** ва **B** ларнинг ҳар иккаласига тегишли элементар ҳодисалардан иборат бўлган ҳодисага айтилади.

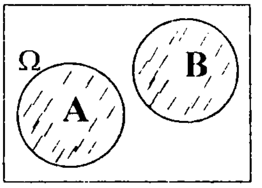


A ва **B** ҳодисаларнинг **айирмаси A - B** деб **A** га тегишли ва **B** га тегишли бўлмаган элементлар ҳодисалардан иборат бўлган ҳодисага айтилади.

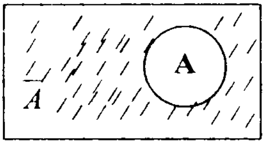


Ω тўпламни **муқаррар ҳодиса** деб аталади. Бўш тўплам ∅ ни- **мумкин бўлмаган ҳодиса** дейилади.

Агар **AB**=∅ бўлса, у ҳолда **A** ва **B** ҳодисалар **биргаликда бўлмаган ҳодисалар** дейилади ҳамда бу ҳолда **A** ∪ **B** нинг ўрнига **A + B** ёзилади.



Агар $A\overline{A} = \varnothing$ бўлса, у ҳолда $\overline{A}$ ҳодиса **A** ҳодисага **қарама қарши ҳодиса** дейилади.



Агар $A_n\ A_j = \varnothing$ ва $(i \neq j)$ ва $A_1 + A_2 + ... + A_n = \Omega$ бўлса, у ҳолда $A_1, A_2, ..., A_n$ ҳодисалар **тўла гуруҳини ташкил этади** дейилади.

Агар **A** ҳодисанинг рўй бериши натижасида **B** ҳодиса ҳам рўй берса, у ҳолда **A** ⊂ **B** деб ёзилади ва "**A ҳодиса B ҳодисани эргаштиради**" деб айтилади. Агар **A** ҳодиса **B** ҳодисани эргаштирса, у ҳолда **A** га кирган ҳар бир элементар ҳодиса **B** га ҳам тегишли бўлади.

Агар **A** = **B** бўлса, **A** ва **B** ҳодисалар **тенг кучли ҳодисалар** дейилади.

Агар **А** ва **В** ҳодисалар бир пайтда рўй бэриши мумкин бўлмаган ҳодисалар бўлса, **А** ва **В** биргаликда бўлмаган ҳодисалар, акс ҳолда эса биргаликдаги ҳодисалар дейилади.

Агар $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисаларнинг исталган бирининг рўй бериши бошқаларига қараганда кўпроқ имкониятга эга дейишга асос бўлмаса, улар тенг имкониятли ҳодисалар дейилади.

1.3. Эҳтимолнинг классик таърифи

Тажриба натижасида $e_1, e_2 \ldots, e_n$ тенг имкониятли элементар ҳодисалардан бирортаси албатта руй берадиган бўлиб, исталган иккитаси биргаликда рўй бермасин. Шу тажрибада бирор А ҳодисани кузатайлик.

Айтайликки, **А** ҳодиса $e_1, e_2 \ldots, e_n$ ҳодисалардан $e_{k1}, e_{k2} \ldots, e_{km}$ лари рўй берганда рўй берсин. У ҳолда $e_{k1}, e_{k2} \ldots, e_{km}$ ҳодисалар **А** га қулайлик туғдурувчи ҳодисалар дейилади. Фараз қилайлик, **n** та $e_1, e_2 \ldots, e_n$ ҳодисалардан m таси $(m < n)$ **А** ҳодиса рўй беришига қулайлик туғдирсин.

Т А Ъ Р И Ф . Ушбу $\frac{m}{n}$ сон **А** ҳодисанинг **эҳтимоли** дейилади ва $P(A)$ каби белгиланади: $\mathbf{P(A)}=\frac{m}{n}$

Ҳодисанинг эҳтимоли таърифга кўра куйидаги хоссаларга эга бўлади:

1) Ҳар қандай **А** ҳодисанинг эҳтимоли мусбат бўлиб, у ноль билан **1** орасида бўлади, яъни

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

2) Муқаррар ҳодисанинг эҳтимоли бирга тенг:

$$P(U) = 1$$

3) Мумкин бўлмаган ҳодисанинг эҳтимоли нольга тенг:

$$P(V) = 0$$

Масалан, корхона ишлаб чиқарадиган маҳсулотнинг ҳар **1000** тасидан **60** таси яроқсиз, тасодифан олинган маҳсулотнинг яроқсиз бўлиши эҳтимолини топиш талаб этилсин. Маълумки, бу ҳолда $n = 1000$, $m = 60$ бўлиб изланаётган эҳтимол

$$P(A) = \frac{60}{1000} = 0{,}06$$

бўлади.

1.4. Эҳтимолниг статистик таърифи. Нисбий частота.

Эҳтимолниг классик таърифида тажриба хаёлан ўтказилиб унинг барча элементар натижаларини (ҳодисаларини) тенг имкониятли деб қаралади. Аммо, амалиётда тажриба аслида ўтказилиб, унинг натижаларига боғлиқ ҳодисаларининг эҳтимолини ҳисоблаш керак бўлади. Бундай эҳтимоликларни статистик таъриф ёрдамида аниқланади.

Айтайлик, бирор тажрибалар кетма-кетлиги ўтказилаётган бўлиб, унда бирор **A** ҳодисани рўй бериш кузатилаётган бўлсин. Фараз килайлик, **N** марта тажриба ўтказилган бўлиб, унда **A** ҳодиса **M** марта рўй берган бўлсин.

Ушбу: $$\mathbf{W(A)} = \frac{M(A)}{N}$$

нисбатга ҳодисанинг **нисбий частотаси** дейилади.

Демак, **A** ҳодисанинг нисбий частотаси шу ҳодиса рўй берган тажрибалар сонини ўтказилган жами тажрибалар сони нисбатига айтилади. Кўрсатиш мумкинки:

$$N \to \infty \text{ да } \mathbf{W(A)} \to \mathbf{P(A)}$$

1.5. Геометрик эҳтимоллик.

Геометрик эҳтимоллик тажриба учун элементлар ҳодисалар сони чексиз (саноқли ёки саноқсиз) кўп бўлган ҳолларда ишлатилади. Геометрик эҳтимоллик қуйидагича аниқланади. Айтайлик, бирор **G** соҳага тасодифий равишда нуқта ташланмоқда, яъни нуқта **G** соҳанинг ихтиёрий жойига тенг имкониятли равишда тушиши мумкин, **G** соҳага таваккал ташлаган нуқтани **G** соҳанинг ичида жойлашган ихтиёрий g соҳага тушиш эҳтимоли ана шу g соҳа ўлчови (узунлиги, юзаси, ҳажми ва х.к.) га пропорционал бўлиб, унинг қаерда жойлашгани ва шаклига боғлиқ эмас. Шундай қилиб, нуқтанинг g соҳага тушиш эҳтимоли:

$$P(g) = \frac{g_{\text{соха ўлчови}}}{G_{\text{соха ўлчови}}}$$

1.6. Шартли эҳтимоллик.

Иккита **A** ва **B** ҳодисалар **ўзаро боғлиқ эмас** дейилади, агар улардан бирининг рўй бериш эҳтимоли иккинчисининг рўй бериш ёки бермаслигига боғлиқ бўлмаса. Акс ҳолда ҳодисалар **ўзаро боғлиқ** дейилади.

A ва **B** ўзаро боғлиқ ҳодисалар бўлсин. $\mathbf{P_B(A)}$ (ёки $\mathbf{P(A/B)}$) шартли эҳтимоллик деб, **B** ҳодиса рўй берганлиги аниқ бўлганида **A** ҳодисанинг рўй бериш эҳтимолига айтилади ва қуйидаги формула орқали топилади:

$$P(A\,/\,B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad \text{бунда } P(B)>0.$$

Бу формуладан $\mathbf{P(AB) = P(B)\ P(A/B)}$ келиб чиқади.

Агар **A, B** ҳодисалар ўзаро боғлиқ бўлмаса, у ҳолда $\mathbf{P(A/B)=P(A)}$ ва $\mathbf{P(B/A)=P(B)}$ бўлиб, охирги формуладан $\mathbf{P(AB) = P(A) \cdot P(B)}$ ҳосил бўлади.

1.7. Намунавий масалалар ечиш.

1-масала Тангани **2** марта ташлаш тажрибаси учун элементар ҳодисалар фазоси **(ЭҲФ)** яъни Ω тўплам топилсин.

Ечиш: Бу тажриба учун **ЭҲФ 4** та элементар ҳодисадан иборат бўлади, яъни Ω={**Щ**$_1$=gg, **Щ**$_2$=gp, **Щ**$_3$=pg, **Щ**$_4$=pp}. Бу ерда хусусан ω_1=gg элементар ҳодиса тангани биринчи ва иккинчи марта ташлаганда ҳам гербли томон тушиш ҳодисасини билдиради.

2-масала Учта бир хил ўлчамдаги карточкаларга **H, O, A** ҳарфлари ёзилган. Агар тажриба карточкаларни кетма-кет биттадан олиб бир қатор қилиб теришдан иборат бўлса, у ҳолда бу тажриба учун элементар ҳодисалар фазоси ёзилсин.

Ечиш: Бу тажриба учун **ЭҲФ** ни ташкил этувчи элементар ҳодисалар **3** та ҳарфдан олиб тузилган барча ўрин алмаштиришлар сонига тенг бўлади, яъни $P_3=3!=6$. Демак, Ω={ω_1=**HOA**, ω_2=**HAO**, ω_3=**ONA**, ω_4=**OAH**, ω_5=**AHO**, ω_6=**AOH**}.

3-масала. Ўйин соққаси (кубик)ни бир марта ташланганда **A** жуфт сондаги очко тушиш ҳодисасини эҳтимоли топилсин.

Ечиш. Бу тажриба учун элементар ҳодисалар фазаси Ω **6** та элементар ҳодисадан иборат бўлади, яъни **1, 2, 3, 4, 5, 6** очколардан бири тушиши мумкин. Булардан жуфт сондаги очколар **2, 4, 6** бўлади. Демак, **n = 6** **м = 3**. У ҳолда, эҳтимолни классик таърифига кўра $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ га тенг бўлади.

4-масала. Экилган **30** та кўчатдан **25** таси кўкарган бўлса, кўкарган кўчатлар нисбий частотаси топилсин.

Ечиш. Жами экилган кўчатлар сони **N = 30** га тенг. У ҳолда эҳтимолнинг статистик таърифига кўра,

$$W(A) = \frac{M}{N} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}.$$

5-масала. Томони **a** га тенг бўлган квадратга радиуси $r = \frac{a}{2}$ га тенг булган доира ички чизилган. Тасодифий равишда квадратнинг ичига ташланган нуқтани доира ичига тушиши эҳтимолини топинг.

Ечиш: Масаланинг шартига асосан: **G** - томони **а** га тенг бўлган квадрат. **G** ва **g** шакллар текисликда қаралаётганлиги учун ўлчов сифатида юза олинади. Демак, изланаётган эҳтимоллик:

$$P(g)=\frac{g\ \text{соха ўлчови}}{G\ \text{соха ўлчови}}=\frac{\text{юза } g}{\text{юза } G}=\frac{p\ .(a/2)^2}{a^2}=\frac{p}{4}$$

6-масала. Маслаҳат фирмаси иккита йирик корпорациядан иккита буюртма олишга ҳаракат қилмоқда. **А** ва **В** мос равишда **1**- ва **2**-корпорациядан буюртма олиш ҳодисалари бўлсин. Фирма экспертларининг фикрича, Биринчи корпорациядан буюртма олиш эҳтимоли **0,45** га тенг. Шунингдек, экспертлар агар фирма **1** - корпорациядан буюртма олса, у ҳолда **2** - корпорация ҳам уларга буюртма бериши эҳтимоли **0,9** га тенг деб ҳисоблайдилар. Маслаҳат фирмасининг иккала буюртмани ҳам олиш эҳтимолини топинг.

Ечиш: Шартга кўра **P(A)=0,45** ва **P(B/A)=0,9.** Маслаҳат фирмасининг иккала буюртмани ҳам олиш эҳтимоли **P(AB)** ни топиш керак. Ўзаро боғлиқ ҳодисалар кўпайтмасининг эҳтимолини топиш формуласига асосан

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)=0{,}45\cdot 0{,}9=0{,}405$$

Жавоб: 0,405.

7-масала. Агар барча маҳсулотнинг **4%** и сифатсиз, сифатли маҳсулотнинг **75%** и биринчи нав талабига жавоб бериши маълум бўлса, тасодифан олинган маҳсулотнинг **1** - навли бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечиш: А -"танланган маҳсулот сифатли", **В** – "танланган маҳсулот 1-навли" ҳодисалари бўлсин. Масала шартига кўра,

$$P(A)=1-0{,}04=0{,}96 \text{ ва } P(B/A)=0{,}75$$

Изланаётган эҳтимоллик:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = 0{,}96 \cdot 0{,}75 = 0{,}72$$

Жавоб: 0,72.

1.8. Мустакил иш учун мисоллар.

1. Йирик савдо компанияси уй-жой қурилиши ва уларни таъмирлаш учун қурилиш материаллари сотиш билан шуғулланади. Компанияда учта региондаги харидорларнинг рўйхати бор. Компания уларга товарлар катологини почта орқали юборади. Компания менежери юборилган таклифларга бирорта ҳам регионндан жавоб келмаслик эҳтимоли **0,25** га тенг деб ҳисоблайди. У ҳолда, ҳеч бўлмаганда битта региондан жавоб келиш эҳтимолини топинг.

Жавоб: 0,75.

2. Қутида **10** та шар бор: **7** та қора ва **3** та оқ. Яшиқдан тасодифий равишда бир шар олинди. Бу шар: **а)** оқ; **б)** қора бўлишини эҳтимолини топинг.

Жавоб: а) 3/10; б) 7/10.

3. Нишонга отишда текказишлар нисбий частотаси **0,6** бўлган. Агар мерган **12** марта нишонга теккиза олмаган бўлса, жами бўлиб неча марта ўқ отган?

Жавоб: 30.

4. Қутида **7** та қора ва **3** та оқ шар бор. Тасодифий равишда олинган иккита шарнинг қора бўлиш эҳтимоли нечага тенг?

Жавоб: 7/15.

5. Сифатли маҳсулотларнинг нисбий частотаси **0,9** га тенг бўлиб чиқди. Агар текширилган маҳсулотларнинг умумий сони **200** тага тенг бўлса, уларнинг орасидаги сифатлиларнинг сони нечта?

Жавоб: 180 маҳсулот.

6. Цехда **6** эркак ва 4 аёл ишлайди. Табелдаги тартиб рақами бўйича тасодифий равишда 7 киши танлаб олинди. Танлаб олинганлар орасида **3** аёл бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоб: 0,5.

7. Бўрондан сунг **40** чи ва **70** чи километрлар орасида телефон сими узилган. Узилиш **50** чи ва **55** чи километрлар орасида содир бўлганлигининг эҳтимолини топинг.

Жавоб: 1/6.

8. R радиусли катта доира ичига **r** радиусли кичик доира жойлаштирилган. Катта доира ичига тасодифан ташланган нуқта кичик доирага ҳам тушиши эҳтимолини топинг.

Жавоб: $r=r^2/R^2$.

9. Текисликда **а** томонли квадратлардан иборат чексиз тор чизилган. Текисликка тасодифий равишда **r** радиусли танга ташланган. Танга ҳеч қайси квадратнинг томонини кесиб ўтмаслик эҳтимолини топинг.

Жавоб: $r=(a-2r)^2/a^2$.

10. (Учрашув ҳақида масала) Икки **А** ва **В** шахс кундузги соат **2** ва **3** орасида маълум бир жойда учрашишга келишишдилар. Биринчи бўлиб келган иккинчисини **10** дақиқа давомида кутади ва агар у келмаса кетади. Агар бу икки шахснинг келиш вақтлари тасодифий бўлса, у ҳолда уларнинг учрашиш эҳтимолини топинг.

Жавоб: 11/36.

11. Молиявий кузатувчининг тахминига кўра, агар маълум муддатда фоиз меъёри пасайса, худди шу даврда акциялар бозорининг ўсиш эҳтимоли **0,8** га тенг. Кузатувчи шу даврда фоиз меъёри пасайиши эҳтимоли **0,4** га тенг деб ҳисоблайди. Олинган маҳсулотлардан фойдаланиб, айтилган даврда акциялар бозори ривожланган ҳолда фоиз меъёри пасайиши эҳтимолини топинг.

Жавоб: 0,32.

12. Кредит бўлими хизматчиси банкдан кредит олган фирмаларнинг **12%** ли касодга учрагани ва камида **5** йил давомида кредитларни қайтара олмасликларини билади. У яна шуни биладики, кредит олганларнинг ҳаммаси бўлиб **20%** ли касодга учраган. Агар банкнинг битта мижози касодга учраган бўлса, унинг банкка қарзини қайтариб бера олмаслиги эҳтимолини топинг.

Жавоб: 0,6.

13. Маълум бир товарнинг бозордаги улуши ошишининг сири янги истеъмолчиларни жалб қилиш ва уларни ишлаб туриш ёки сақлашдан иборат. Янги истеъмолчиларни сақлаш брант лоялтй (истеъмолчининг маълум товар белгиси ёки турига ихлос қўйиши) деб аталади ва бу бозорни ўрганишдаги энг маъсулиятли соҳалардан ҳисобланади. Янги турдаги товар ишлаб чиқараётганлар истеъмолчиларнинг товарни дархол қабул қилишлари ва брант лоялтйни яратиш камида олти ой вақт талаб қилиши эҳтимоли **0,02** га тенглигини биладилар. Шу билан бирга ишлаб чиқарувчи тасодифан танлаб олинган истеъмолчиларнинг янги товарни қабул қилиш эҳтимолои **0,05** га тенглигини билади. Фараз қилайлик, истеъмолчи ҳозиргина товар белгисини ўзгартирди. Унинг ана шу белгига ихлоси олти ой давомида сақланиб қолиши эҳтимолини топинг.

Жавоб: 0,4.

14. Инвестициялар бўйича кузатувчи акциялар ҳақида маълумотлар йиғади ва қуйидагиларни белгилаб боради: улар бўйича дивидентлар тўланганми; уни қизиқтираётган вақт давомида акцияларнинг нарҳи ошдими ёки йўқми. Йиғилган маълумотлар жадвалда келтирилган:

Дивидентлар	**Нарҳи ошган**	**Нарҳи ошмаган**	**Жами**
Тўланган	**34**	**78**	**112**
Тўланмаган	**85**	**49**	**134**
Жами	**119**	**127**	**246**

а) Агар **246** та акция ичидан биттаси тасодифий равишда танлаб олинган бўлса, унинг нарҳи ошган акциялардан бўлиш эҳтимолини топинг.

б) Агар акция тасодифий равишда танлаб олинган бўлса, у бўйича дивидентлар тўпланганлиги эҳтимолини топинг.

с) Агар акция тасодифий равишда танлаб олинган бўлса, унинг нарҳи ошган ва у бўйича дивидентлар тўпланган бўлиши эҳтимолини топинг.

е) Агар акция тасодифий равишда танлаб олинган бўлса, унинг нархи ошмаган ва у бўйича дивидентлар тўпланмаган бўлиши эҳтимолини топинг.

ф) Акциянинг нарҳи ошган бўлса, у бўйича дивидентлар тўланган бўлиши эҳтимолини топинг.

г) Агар акция бўйича дивидентлар тўпланмаган бўлса, унинг нарҳи ошиш эҳтимолини баҳоланг.

ҳ) Агар акция бўйича дивидентлар тўланмаган бўлса, ўрганилаётган даврда тасодифан олинган акциянинг барча кўрсаткичлари ёмонлашганлиги эҳтимолини аниқланг.

и) Тасодифий равишда танланган акциянинг ёки нарҳи ошган, ёки у бўйича дивидентлар тўланган, ёки ҳам нарҳи ошиб ҳам дивидент тўланган бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоб: а) 0,4837; б) 0,4553; д) 0,1382; е) 0,1992
ф) 0,2857; г) 0,6343; ҳ) 0,1992; и) 0,8008.

15. **А** ва **В** акциялар бир ҳил тармоқ томонидан чиқарилганлиги маълум. Эртаси кунига **А** акция нарҳининг ошиш эҳтимоли **0,2** га тенг. Эртаси кунига ҳам **А** ва **В** акцияларинг нарҳи ошиши эҳтимоли **0,12** га тенг. Айтайлик, сиз эртаси кунига **А** акциянинг нарҳи ошишини биласиз. У ҳолда **В** акциянинг ҳам нарҳи ошиши эҳтимоли қанча?

Жавоб: 0,6.

2-БОБ. АСОСИЙ ТЕОРЕМАЛАР.
2.1. ЭҲТИМОЛНИНГ ҚЎШИШ ВА КЎПАЙТИРИШ ТЕОРЕМАЛАРИ

Кўпгина масалаларни ечиш бир нечта ходисалар йиғиндиси ёки кўпайтмаси эҳтимолларини ҳисоблашга келтирилади. Бу эса қуйидаги теоремалардан фойдаланишни тақозо этади.

1- Т Е О Р Е М А. Агар **А** ва В биргаликда бўлмаган ҳодисалар бўлса,

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

бўлади.

2- Т Е О Р Е М А. Агар **А** ва **В** биргаликда бўлган ҳодисалар бўлса,

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$$

бўлади.

3- Т Е О Р Е М А. Агар **А** ва **В** боғлиқ бўлмаган (эркли) ҳодисалар бўлса,

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$$

бўлади.

4- Т Е О Р Е М А. Агар А ва **В** боғлиқ ҳодисалар бўлса,

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)$$

бўлади. Бу ерда **Р (В/А)** шартли эҳтимол.

2.2 ТЎЛА ЭҲТИМОЛ ФОРМУЛАСИ. БАЙЕС ФОРМУЛАСИ

Айтайлик, **А** ҳодиса **n** та жуфт-жуфти билан биргаликда бўлмаган $H_1, H_2, \ldots H_n$ ҳодисаларнинг биттаси ва фақат биттаси билан рўй бериши мумкин бўлсин. Яъни **А=АН₁+АН₂+... + АНₙ** бўлсин.У ҳолда,

$$P(A)=\sum_{к=1}^{n}P(H_к)\cdot P(A/H_к) \qquad (1)$$

бўлади. **(1)** - формула **тўла эҳтимол формуласи** дейилади.

Кўпинча **А** ҳодиса рўй берганлик шартида **Hi** ҳодисалардан бирини рўй бериш эҳтимолини ҳисоблаш зарурият туғилади. Бу эса қуйидаги келтирилган формула ёрдамида ҳисобланади. Яъни,

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)\cdot P(A/H_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(H_k)\cdot P(A/H_k)} \qquad (2)$$

(2) - формулани **Байес формуласи** дейилади.

2.3. Намунавий масалалар ечиш.

1-масала. Гулзорда **20** та қизил, **30** та бинафша ранг ва **40** та оқ рангли астра очилган. Агар кеч тушгандан сўнг битта гул узилган бўлса, унинг қизил ёки бинафша ранг бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечиш: Қизил **(А)** ёки бинафша ранг **(В)** астра узиш ҳодисалари биргаликда бўлмаган ҳодисалар, яъни $A\cdot B=\varnothing$. Изланаётган эҳтимоллик қизил ёки бинафша ранг астра узиш эҳтимолликларининг йиғиндисига тенг:

$$P=P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{20}{90}+\frac{30}{90}=\frac{5}{9}$$

3-масала. Биринчи ва иккинчи тўпдан отилганда, нишонга тегиш эҳтимоли мос равишда $p_1=0,7$; $p_2=0,8$ га тенг. Иккала тўпдан бир вақтда ўқ отилганда хеч бўлмаганда биттасининг нишонга тегиш эҳтимолини топинг.

Ечиш: Ҳар бир тўпдан отилган ўқнинг нишонга тегиш эҳтимоли иккинчисининг натижасига боғлиқ эмас, шунинг учун **А** (1-тўпнинг нишонга теккизиши) ва **В** (2-тўпнинг нишонга теккизиши) ҳодисалар ўзаро боғлиқ эмас. Демак, **АВ** (иккала тўп ҳам нишонга теккизди) ҳодисанинг эҳтимоли қуйидагича бўлади:

$$P(AB) = P(A)\,P(B) = 0,7\cdot 0,8 = 0,56.$$

Масала шартига кўра изланаётган эҳтимоллик:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)=0,7+0,8-0,56=0,94$$

Жавоб: 0,94.

3-масала. Иктисодчининг фикрига караганда, юқори иқтисодий ўсиш даврида Америка доллари курсининг ўсиш эҳтимоли 0,7, ўртача ўсиш даврида 0,4, паст кўрсаткичли ўсиш даврида 0,2 га тенг. Иқтисодий ўсиш даври кўрсаткичлари юқори, ўртача ва паст бўлиши эҳтимоллари мос равишда 0,3, 0,5 ва 0,2 га тенг бўлади. Айтайлик, ҳозир долларнинг нархи ўсмоқда. У ҳолда ҳозирги давр юқори кўрсаткичли иқтисодий ўсиш даври бўлиш эхтимоли қанча?

Ечиш: A – "долларнинг нархи ошмоқда" ҳодисаси бўлсин. Гипотеза (таҳмин)ларни эса қуйидагича аниқлаймиз:

H_1 – "юқори кўрсаткичли иқтисодий ўсиш"

H_2 – "ўртача кўрсаткичли иқтисодий ўсиш"

H_3 – "паст кўрсаткичли иқтисодий ўсиш"

Масала шартига кўра: $P(H_1)=0,3$, $P(H_2)=0,5$, $P(H_3)=0,2$. Шунингдек, маълумки, $P(A/H_1)=0,7$, $P(A/H_2)=0,5$, $P(A/H_3)=0,2$.

Демак, **Байес формуласига** асосан,

$$П(X_1/A=\frac{P(H_1)\cdot P\left(\frac{A}{H_1}\right)}{P(H_1)\cdot P\left(\frac{A}{H_1}\right)+P(H_2)\cdot P\left(\frac{A}{H_2}\right)+P(H_3)\cdot P\left(\frac{A}{H_3}\right)}=$$

$$=\frac{0,3\cdot 0,7}{0,3\cdot 0,7+0,5\cdot 0,4+0,2\cdot 0,2}=\mathbf{0,467}$$

Жавоб: 0,467.

4-масала. Икки яшикнинг ҳар бирида **10** тадан детал бор. Биринчи яшикда **8** та, иккинчи яшикда **7** та стандарт детал бор. Ҳар бир яшикдан таваккалига биттадан детал олинди. Олинган иккала деталнинг стандарт бўлиши эҳтимоли топилсин.

Ечиш. Биринчи яшикдан олинган детал стандарт детал бўлиш ҳодисаси **A**, иккинчи яшикдан олинганини стандарт детал бўлиши ҳодисасини B дейлик. Унда

$$P(A)=\frac{8}{10}=0{,}8 \quad , \; P(B)=\frac{7}{10}=0{,}7$$

бўлади. Равшанки $A\cdot B$ ҳодиса олинган иккала деталнинг стандарт бўлиши ҳодисадир. **A** ва **B** лар биргаликда бўлмаган ҳодисалар бўлгани учун

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$$

бўлади. Демак,

$$P(A\cdot B)=0{,}8\cdot 0{,}7=0{,}56$$

5-масала. Омборга **360** та маҳсулот келтирилди. Булардан **300** таси **1**-корхонада тайёрланган бўлиб, **250** таси яроқли маҳсулот; **40** таси **2** – корҳонада тайёрланган бўлиб, **30** таси яроқли; **20** таси **3** – корҳонада тайёрланган бўлиб, **10** таси яроқли маҳсулот. Омбордан таваккалига олинган махсулотнинг яроқли бўлиши эҳтимоли топилсин.

Ечиш: Таваккалига олинган маҳсулот учун қуйидаги ҳодисасилардан бири ўринли бўлади:

H_1 - маҳсулотни 1- корхонада тайёрланган бўлиши,

H_2 - маҳсулотни 2- корхонада тайёрланган бўлиши,

H_3 - маҳсулотни 3- корхонада тайёрланган бўлиши.

Уларнинг эҳтимоллари мос равишда қуйидагича бўлади:

$$P(H_1)=\frac{300}{360}=\frac{5}{6}, \quad P(H_2)=\frac{40}{360}=\frac{1}{9}\;, \; P(H_3)=\frac{20}{360}=\frac{1}{18}$$

Агар **A** олинган маҳсулотнинг яроқли бўлиши ҳодисаси бўлса, у ҳолда,

$$\mathbf{A=AH_1+AH_2+AH_3}$$

бўлади.

Масала шартга кўра,

$$P(A/H_1)=\frac{5}{6}\;, \; P(A/H_2)=\frac{3}{4}, \; P(A/H_3)=\frac{1}{2}$$

бўлади. У ҳолда тўла эҳтимол формуласига кўра изланаётган эҳтимол:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(A/H_2)\cdot P(A/H_2)+$$

$$+P(H_3)\cdot P(A/H_3)=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{2}=\frac{29}{36}$$

Демак,

$$P\ (A)=\frac{29}{36}.$$

Энди, юқорида келтирилган **5** – масаланинг шартида, таваккалига олинган маҳсулотнинг яроқли эканлиги маълум бўлса, унинг **1**- корхонада тайёрланган бўлиш эҳтимоли топилсин. Яъни **P (H₁/A) = ?**

Ечиш: Бу эҳтимолликни **Байес** формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}}{\frac{29}{36}}=\frac{25}{29}.$$

Демак,

$$P(H_1/A)=\frac{25}{29}.$$

2.4. Мустақил иш учун масалалар

1. Айтайлик, брокерлик фирмасига инвестициялар билан қизиқувчиларнинг **85%** и аксиялар сотиб олмайди, **33%** и эса облигациялар сотиб олмайди. Шу билан бирга, ана шу қизиқувчиларнинг **28%** и қимматбаҳо қоғозлар-акция ва облигациялар – сотиб олишни тўхтатадилар. Бир шахс фирманинг ишлари билан қизиқмоқда. Унинг ёки акция, ёки облигация ёхуд уларнинг иккаласини ҳам сотиб олиш эҳтимоли нечага тенг?

Жавоб: 0,72.

2. Фирмада ишлайдиган **550** ишчининг **380** таси олий, **412** таси ўрта махсус ва **357** таси ҳам олий ҳам ўрта махсус маълумотли. Тасодифий равишда танлаб олинган ишчининг ёки олий, ёхуд ўрта махсус, ёки ҳам олий, ҳам ўрта махсус маълумотли бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоб: 0,791.

3. Истеъмол бозорини ўрганиш учун истеъмолчилар орасидаги сўров ўтказилди. Саволлардан бири истеъмолчилар фойдаланадиган тиш пастасига тегишли эди. Агар аҳолининг **14%** и **A** турдаги, **9%** и **B** турдаги тиш пастасидан фойдаланиши маълум бўлса, тасодифий равишда танлаб олинган киши (у ҳозирда фақат битта пастадан фойдаланади, деб фараз қилинади) **A** ва **B** турдаги тиш пасталаридан биридан фойдаланиши эҳтимолини топинг.

Жавоб: 0,23.

4. Аэропортлар учун терминаллар қурувчи компаниянинг **A** мамлакат билан шартнома тузиш эҳтимоли **0,4** га, **B** мамлакат билан шартнома тузиш эҳтимоли **0,3** га тенг. Иккала мамлакат билан ҳам шартнома тузиш эҳтимоли **0,12** га тенг. Компаниянинг бу мамлакатларнинг ҳеч бўлмаганда биттаси билан шартнома тузиш эҳтимоли нечага тенг?

Жавоб: 0,58.

5. Баъзи катта дўконларда (супермаркетларда) унга кираётган харидорларнинг сонини аниқлаш учун яширин “электрон кўз” ўрнатилган. Агар иккита харидор универмагга кетма-кет кириб келса, “электрон кўз” нинг улардан биринчисини ҳисобга олиш эҳтимоли **0,98** га, иккинчисини ҳисобга олиш эҳтимоли **0,94** га, иккаласини ҳам ҳисобга олиш эҳтимоли **0,93** га тенг. Қурилманинг кетма-кет кириб келган икки харидорнинг ҳеч бўлмаганда биттасини ҳисобга олиш эҳтимолини топинг.

Жавоб: 0,99.

6. Шаҳар автотранспорти муаммоларини ўрганиш ва таҳлил қилиш ниятида ишга жамоат транспортида қатнайдиганлар орасида сўров ўтказилмоқчи. Тадқиқот олиб борилаётган жойда **75%** аҳоли ишга жамоат транспортида қатнайди. Агар уч киши сўровга рози бўлган бўлса, улардан ҳеч бўлмаганда биттасининг ишга жамоат транспортида қатнаш эҳтимоли нечага тенг?

Жавоб: 0,9844.

7. Фирманинг маркетинг бўлими маълум турдаги махсулотлар тўғрисида истеъмолчиларнинг фикрини билиш мақсадида сўров ўтказмоқда. Тадқиқот олиб борилаётган жойда **1%** аҳоли фирмани қизиқтирган махсулотларни истеъмол қилади ва уларга асосланган баҳо бера олади. Фирма тадқиқот ҳудудидаги аҳоли орасидан тасодифий равишда **10** нафарини танлаб олади. Улар ичида ҳеч бўлмаганда биттаси махсулотни асосли баҳолай олиш эҳтимоли қанча?

Жавоб: 0,6513.

8. Баҳорги мавсумга кийимларнинг янги коллекциясини тайёрлаётган моделер яшил, қора ва қизил ранглар жилосини танлаган. Унинг фикрича, баҳорда яшил рангларнинг модада бўлиши эҳтимоли **0,3** га, қора рангларники **0,2** га ва қизил рангларники **0,15** га тенг. Ранглар бир бирига боғлиқ бўлмаган ҳолда танланади, деб фараз қилган ҳолда коллекциядан рангларнинг ҳеч бўлмаганда биттаси тўғри танланганлигининг эҳтимолини топинг.

Жавоб: 0,524.

9. Иқтисодий ўсиш даврида мижознинг банкдан олган заёмини қайтармаслик эҳтимоли **0,04** га, иқтисодий танглик даврида эса **0,13** га тенг. Фараз қилайлик, иқтисодий ўсиш даври бошланиш эҳтимоли **0,65** га тенг. Тасодифий равишда танлаб олинган мижознинг қарзини қайтармаслик эҳтимоли нечага тенг?

Жавоб: 0,0715.

10. Иккита фирма акционерлик капиталларининг бирлаштириш жараёнида акцияларнинг контрол пакетини олаётган фирма аналитикларининг фикрича, қўшиб олинаётган фирма директорлар кенгашининг раиси истеъфога чиқса, бу бирлаштиришнинг фойда келтириш эҳтимоли **0,65** га тенг. Акс ҳолда, бу эҳтимол **0,3** га тенг экан. Раиснинг истеъфога чиқиш эҳтимоли **0,7** га тенг бўлса, бирлаштиришнинг фойда келтириш эҳтимолини топинг.

Жавоб: 0,545.

11. Кўчмас мулк агенти қурилишга мўлжалланган ер майдонини сотмоқчи. Унинг фикрича, агар регионда иқтисодий вазият ёмонлашмаса, бу ернинг яқин **6** ой ичида сотилиш эҳтимоли **0,99** га тенг. Агар иқтисодий вазият ёмонлашмаса, бу эҳтимоллик **0,5** гача камаяди. Иқтисодчининг фикрича кейинги **6** ой ичида иқтисодий вазиятнинг ёмонлашиш эҳтимоли **0,7** га тенг. Ер майдонининг яқин **6** ой ичида сотилиш эҳтимолини топинг.

Жавоб: 0,62.

12. Иқтисодчи-аналитик мамлакатдаги иқтисодий аҳволни шартли равишда "яхши", "ўртача", "ёмон" ҳолларга бўлади ва айни пайтда уларнинг эҳтимолликларини мос равишда **0,15, 0,70, 0,15** деб баҳолайди. Маълум бир иқтисодий индекс мамлакатдаги иқтисодий аҳвол "яхши" бўлганида **0,6** эҳтимоллик билан, "ўртача" бўлганида **0,3** эҳтимоллик билан ва "ёмон" бўлганида **0,1** эҳтимоллик билан ўсади. Айтайлик, айни пайтда ана шу индекс ўзгарди. Мамалакат иқтисодиёти яхши аҳволда, яъни кўтарилишда эканлигининг эҳтимоли нимага тенг?

Жавоб: 0,2857.

13. Нефт қувури қуриш мўлжалланган жойда нефт бор бўлиши эҳтимолини аниқлаш мақсадида қидирув экспедицияси тадқиқот олиб бормоқда. Аввалги тажрибаларга асосланиб, улар текширилаётган худудда нефт бўлиш эҳтимоллигини **0,4** билан баҳоламоқдалар. Қидирувнинг сўнгги босқичида сейсмик тест ўтказилади. Агар нефт ҳақиқатан мавжуд бўлса, тест **0,85** эҳтимоллик билан уни бор деб, агар нефт йўқ бўлса, **0,1** эҳтимоллик билан уни бор деб кўрсатиши мумкин. Сейсмик тест нефт борлигини кўрсатди. Ана шу худудда хақиқатан ҳам нефт бор бўлиши эҳтимоли қанча?

Жавоб: 0,85.

14. Аэропорт йўналишларининг **60%** и маҳаллий, **30%** и МДҲ давлатлари ва **10%** и чет эл йўналишларида. Маҳаллий йўналишдаги йўловчиларнинг **50%** и, МДҲ йўналишларининг **60%** ва халқаро йўналишдагиларнинг **90%** и тадбиркорлик ишлари билан саёҳат қилади. Аэропортга келган йўловчилардан биттаси тасодифий равишда танлаб олинади. Қуйидаги эҳтимолликларни ҳисобланг. У йўловчи

а) тадбиркор;

б) МДҲ дан тадбиркорлик ишлари билан келган;

с) маҳаллий йўналишда тадбиркорлик ишлари билан келган;

е) халқаро йўналишда келган тадбиркор.

Жавоб: а) 0,57; б) 0,5263; д) 0,3158; е) 0,1578.

15. Болтлар ишлаб чиқарадиган заводда биринчи ускуна **25%** иккинчиси **35%**, учинчиси эса **40%** маҳсулотни ишлаб чиқаради. Бу ускуналарда ишлаб чиқарилган болтларнинг сифатсиз эканлигининг эҳтимоллари мос равишда **5%**, **4%** ва **2%** ни ташкил этади. **а)** Тасодифий равишда танланган болтнинг сифатсиз бўлиши эҳтимоли қанча? **б)** Агар тасодифан танланган болт сифатсиз бўлса, унинг **1-**, **2-** ва **3-** ускунада ишлаб чиқарилганлиги эҳтимолларини топинг.

Жавоб: а) 0,0345; б) 125/345, 140/345, 80/345.

3 – БОБ. СИНОВЛАРНИНГ ТАКРОРЛАНИШИ.

3.1. БЕРНУЛЛИ ФОРМУЛАСИ (СХЕМАСИ)

Айтайлик, **n** та тажриба ўтказилган бўлиб, улар қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1)Тажрибалар ўзаро боғлиқ бўлмасин.

2) Ҳар бир тажриба натижасида ё **А** ҳодиса, ёки $\overline{A}$ (яъни **А** га карама – қарши ҳодиса) ҳодиса рўй берсин, $(A+\overline{A}=U)$.

3) **A** ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли **p** га ($p = Const$) тенг бўлсин: $P(A) = p$ (равшанки, бу ҳолда $P(\overline{A}) = 1 - p = q$ бўлади).

n та эркли тажрибада **A** ҳодисанинг **k** марта рўй бериш эҳтимолини $P_n(k)$ билан белгилаймиз. Бу эҳтимоллик учун ушбу

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad \textbf{(3)}$$

формула ўринли бўлади, бунда

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, 1! = 1, 0! = 0)$$

(3) - формулани **Бернулли формуласи** дейилади.

Амалий массалалар ечишда фойдаланиладиган Бернулли формуласи билан боғлиқ айирим формулаларни келтирамиз.

Фараз қилайлик, **n** та эркли тажрибалар кетма-кетлигида **A** ҳодисанинг рўй беришлар сони м бўлсин.

Унда **A** ҳодисани:

1) **k** дан кам марта рўй бериш ҳодисаси $\{0 \le м \le k-1\}$ нинг эҳтимоли

$$P_n\{0 \le м \le k-1\} = \sum_{m=0}^{k-1} P_n(m) \quad \textbf{(1*)}$$

бўлади.

2) **k** дан кўп марта рўй бериш ҳодисаси $\{k+1 \le м \le n\}$ нинг эҳтимоли

$$P_n\{k+1 \le м \le n\} = \sum_{m=k+1}^{n} P_n(m) \quad \textbf{(2*)}$$

бўлади.

3) Камида **k** марта рўй бериш ҳодисаси $\{k \le м \le n\}$нинг эҳтимоли

$$P_n\{k+1 \le м \le n\} = \sum_{m=k}^{n} P_n(m) \quad \textbf{(3*)}$$

бўлади.

4) Кўпи билан **k** марта рўй бериш ҳодисаси $\{0 \le м \le n\}$нинг эҳтимоли

$$P_n\{0 \le м \le n\} = \sum_{m=0}^{k} P_n(m) \qquad \textbf{(4*)}$$

бўлади.

5) Ками билан **k** $_1$ марта, кўпи билан **k$_2$** марта рўй бериш ҳодисаси $\{k_1 \le м \le k_2\}$ нинг эҳтимолиҳ

$$P_n\{k_1 \le м \le k_2\} = \sum_{m=k_1}^{k_2} P_n(m) \qquad \textbf{(5*)}$$

бўлади.

3.2. ПУАССОН ТЕОРЕМАСИ

Агар Бернулли схемасида $n \to \infty$ ва $p \to 0$ да $np \to л$ ўзгармас, $(л \succ 0)$ бўлса,

$$P_n(k) \to \frac{л^k}{k!} e^{-л} \qquad \textbf{(4)}$$

бўлади, ёки

$$P_n(k) \approx \frac{л^k}{k!} e^{-л} \qquad \textbf{(5)}$$

3.3. МУАВР – ЛАПЛАСНИНГ ЛОКАЛ ВА ИНТЕГРАЛ ТЕОРЕМАЛАРИ

Тажрибалар сони **n** ва унда **A** ҳодисаниг рўй беришлари сони **k** етарли катта бўлганда **(1*)-(5*)** кўринишдаги эҳтимолларни **Бернулли формуласи** билан ҳисоблаш мураккаблашади. Бундай ҳолларда қуйдаги теоремалардан ёки тақрибий формулалардан фойдаланилади.

1- Т Е О Р Е М А. ***(Муавр – Лапласнинг локал теоремаси).***

Агар Бернулли схемасида **n** етарлича катта бўлиб, ҳар бир синашда **А** ходисанинг рўй бериш эҳтимоли $p\ (0 \prec p \prec 1)$ ўзгармас бўлса, **n** та эркли синашда **А** ҳодисанинг роса **k** марта рўй бериш эҳтимоли.

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2ppp(1-p)}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

га тенг бўлади.

Бу ерда, $\varphi(x) = \frac{1}{2p} e^{\frac{-x^2}{2}}, \varphi(-x) = \varphi(x) -$ жуфт функция

x нинг мусбат қийматлари учун **φ(x)** функциянинг қийматлари иловадаги **3**- жадвалида келтирилган.

2- Т Е О Р Е М А. ***(Муавр – Лапласнинг интеграл теоремаси).***

Агар ҳар бир синашда **А** ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли **p** ўзгармас бўлиб, **0 < p < 1** бўлса, у ҳолда **n** синашда **А** ҳодисани **k_1** дан **k_2** мартагача рўй бериш эҳтимоли тақрибан қуйидагига тенг:

$$P_n\{k_1 \le м \le k_2\} \approx \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{\frac{k_1-np}{\sqrt{np(1-p)}}}^{\frac{k_2-np}{\sqrt{np(1-p)}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Бу ерда

$$\mathbf{\Phi(x)} = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_0^x e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

Лаплас функцияси дейилади.

Ф(-х) = - Ф(х) бўлгани учун **Ф(х) тоқ функция** бўлади. **Ф(х)** функциянинг қийматлари иловадаги **4** жадвалда берилган.

3.4. ЎЗАРО БОҒЛИҚ БЎЛМАГАН ТАЖРИБАЛАРДА НИСБИЙ ЧАСТОТАНИНГ ЎЗГАРМАС ЭҲТИМОЛЛИКДАН ЧЕТЛАНИШИ

Кўпинча амалий масалалар ечишда $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)$ эҳтимолликдан фойдаланишга тў\ри келади. Кўрсатиш мумкин бу эҳтимолик учун қуйидаги тақрибий тенглик ўринлидир.

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le e\right)\approx 2\,\Phi\left(e\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \qquad (8)$$

Бу ерда

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2p}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx \qquad (9)$$

3.5. Намунавий масалалар ечиш

1-масала. Маълум бир корхона махсулотларининг **5%** и сифатсиз. Тасодифан олинган **5** та маҳсулот ичида иккитасининг сифатсиз бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечиш: Тасодифан олинган махсулотларнинг сифатсиз бўлиш эҳтимоллиги **р = 0,05.** У ҳолда **Бернули фомуласига** асосан:

$$P_5(2)=p_5^2\ (0{,}05)^2\cdot(0{,}95)^{5-2}=\frac{5!}{2!3!}(0{,}05)^2\cdot(0{,}95)^3=0{,}02$$

2-масала. Иккита тенг кучли рақиб шахмат ўйнамоқда. Тўрт партиядан камида иккитасини ютиш эҳтимоли каттами ёки беш партиядан камида учтасини ютиш эҳтимолими?

Ечиш: Рақиблар тенг кучли бўлгани учун ютиш эҳтимоли **p=0,5.** Тўрт партиядан камида иккитасини ютиш эҳтимоллиги қуйидагича топилади:

$$\mathbf{P_4(2)+P_4(3)+P_4(4)=1-P_4(0)-P_4(1)=1}-C_4^0\left(\frac{1}{2}\right)^4-C_4^1\left(\frac{1}{2}\right)^4=$$

$$=\frac{11}{16}$$

$$\mathbf{P_5(3)+P_5(4)+P_5(5)}=C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^5+C_5^4\left(\frac{1}{2}\right)^5+C_5^5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{8}{16}$$

Демак, **11/16>8/16,** яъни тўрт партиядан камида иккитасини ютиш эҳтимоли каттароқ экан.

3-масала. Маҳсулот катта партиясининг **1%** и сифатсиз. Ҳеч бўлмаганда битта сифатсиз маҳсулот учратиш эҳтимоли **0,95** дан кичик бўлмаслиги учун тасодифий танланма ҳажми қандай бўлиши керак?

Ечиш: Маълумки, $\mathbf{n}\geq\frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)}$. Шартга кўра **P=0,95, p=0,01.** Демак, $\mathbf{n}\geq\frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}99}\approx \mathbf{296}$ яъни, танланма ҳажми камида **296** бўлган тақдирда текширув давомида камида битта сифатсиз маҳсулот учраши эҳтимоли **0,95** дан кам бўлмайди.

4-масала. Улгуржи омбор (база) **10** та дўконни таъминлайди. Дўконларнинг ҳар биридан келгуси кунга (қолганларига боғлиқ бўлмаган ҳолда) буюртма ташиш эҳтимоли **0,4** га тенг. Эҳтимоли энг катта бўлган бир кунлик буюртмалар сонини ва шу сонга буюртмаларни олиш эҳтимолини топинг.

Ечиш: Шартга кўра **n=10, p=0,4. (n+1) p =4,4.** Эҳтимоли энг катта бўлган буюртмалар сони **4,4** нинг бутун қисмига тенг:

$$\mu\left[(n+1)p\right]=4$$

У ҳолда **Бернулли формуласига** асосан тўртта буюртма олиш эҳтимоли

$$P_{10}(4)=C_{10}^{4}\cdot 0{,}4^4\cdot 0{,}6^6=0{,}251$$

бўлади.

Жавоб: $\mu=4$, $P_{10}(4)=0{,}251$.

5-масала. Дарслик **100 000** нусхада чоп этилган. Чоп этилган дарсликларнинг сифатсиз тикилган эканлигининг эхтимоли **0,0001** га тенг. Тиражнинг ичида сифатсиз тикилган китоблар сони роппа-роса **5** та бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечиш: Бу ҳолда **n=100 000, p =0,0001, m=5 n** катта, **p** эҳтимоллик эса кичкина бўлгани учун **Пуассон формуласидан** фойдаланамиз:

$$P_n(m)\approx\frac{л^m\, e^{-л}}{m!}$$

λ ни ҳисоблаймиз **λ= n.p=100000 · 0,0001=10.** У ҳолда,

$$P_{1000000}(5)\approx\frac{10^5\ e^{-10}}{5!}=\frac{10^5\cdot 0{,}000045}{120}=0{,}03575$$

Жавоб: $P_{1000000}(5)\approx 0{,}3575$.

6-масала. Агар **А** ҳодисанинг битта тажрибада рўй бериш эҳтимоли **0,2** га тенг бўлса, тажриба **400** марта ўтказилганида унинг айнан **80** маротаба рўй бериш эҳтимолини топинг.

Ечиш: Шартга кўра **n =400; к=80; p=0,2; q=0,8. Муавр-Лапласнинг локал теоремасидан** фойдаланамиз:

$$P_{400}(80)\approx\frac{1}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}\,\varphi\left(\frac{80-400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}\right)=\frac{1}{8}\,\varphi\ (0)$$

Иловадаги 3-жадвалдан φ**(x)** нинг **0** га мос қийматини топамиз: φ**(0)=0,3989.** У ҳолда

$$P_{400}(80)\approx\frac{1}{8}\cdot 0{,}3899=0{,}4986$$

бўлади.

7-масала. Тажриба вақтида ускунанинг ишдан чиқиш эҳтимоли **0,2** га тенг. **100** та тажриба ўтказилганда.

а) камида **75** та ускунанинг; **б)** кўпи билан **74** та ускунанинг; **д) 75** тадан **90** тагача ускунанинг ишдан чиқиш эҳтимолларини топинг?

Ечиш: Шартга кўра **n =100; p =0,8; q=0,2;**

а) камида **75** та ускунанинг ишдан чиқиш эҳтимоли:

$$\mathbf{P}\ \{75 \le m\} = \mathbf{P}\{75 \le m \le 100\} \approx \mathbf{\Phi}\left(\frac{100 - 0,8 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) -$$

$$\mathbf{\Phi}\left(\frac{75 - 0,05 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 0,2 \cdot 0,8}}\right) = \mathbf{\Phi(5) - \Phi(-1,25)}$$

Иловадаги **4**-жадвалдан $\Phi(\mathbf{x})$ функциясининг **x=1,25** ва **x=2** га мос қийматларини топамиз: **Ф(1,25)=0,3944; Ф(5)=0,5.** У ҳолда,

$$\mathbf{P}\ \{75 \le m\} \approx \mathbf{\Phi(5) - \Phi(-1,25) = \Phi(5) + \Phi(1,25) = 0,5 + 0,3944 = 0,8944}$$

бўлади.

б) Кўпи билан **74** та ускунанинг ишдан чиқиш эҳтимоли:

«Камида **75** та ускунанинг ишдан чиқиши» ва «кўпи билан **74** та ускунанинг ишдан чиқиши» ҳодисалари ўзаро тескари ҳодисалардир, шунинг учун улар эҳтимолликларининг йиғиндиси **1** га тенг. У ҳолда,

$$\mathbf{P}\ \{m \le 74\} = \mathbf{1 -\ P}\ \{75 \le m\} = \mathbf{1 - 0,8944 = 0,1056.}$$

д) 75 тадан **90** тагача ускунанинг ишдан чиқиш эҳтимоли:

$$\mathbf{P}\ \{75 \le m \le 90\} \approx \mathbf{\Phi}\left(\frac{90 - 0,8 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) -$$

$$\mathbf{\Phi}\left(\frac{75 - 0,05 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 0,2 \cdot 0,8}}\right) = \mathbf{\Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25)}$$

Иловадаги **4**-жадвалдан **Ф(x)** нинг **x=1,25** ва **x=2,5** га мос қийматларини топамиз:

$\Phi(1{,}25)=0{,}3944,\qquad \Phi(2{,}5)=0{,}4938.$

Демак, $P\ \{75 \le м \le 90\} \approx \mathbf{0{,}4938+0{,}3944=0{,}8882}$ экан.

Жавоб: $P\{75 \le m\} \approx \mathbf{0{,}8944}$; $P\{m \le 74\} \approx \mathbf{0{,}1056}$;

$P\ \{75 \le м \le 90\} \approx \mathbf{0{,}8882}.$

8-масала. Ҳодисанинг ўзаро боғлиқ бўлмаган тажрибаларнинг ҳар биридан рўй бериш эҳтимоли **0,8** га тенг. Ҳодисанинг камида **75** марта рўй беришни **0,9** эҳтимоллик билан кутиш мумкин бўлиши учун нечта тажриба ўтказиш керак бўлади?

Ечиш: Масала шартига кўра **p=0,8; q=0,2;** $P_n(75;n)=0{,}9$ **Муавр-Лапласнинг интеграл ТЕОРЕМАсидан** фойдаланамиз.

$$P_n(75;\ n)=P\{75 \le м \le n\} \approx \Phi\left(\frac{n-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{75-np}{\sqrt{npq}}\right)=0{,}9$$

$$0{,}9=\Phi\left(\frac{n-0{,}8n}{\sqrt{0{,}8\cdot 0{,}2\cdot n}}\right)-\Phi\left(\frac{75-0{,}8n}{\sqrt{0{,}8\cdot 0{,}2\cdot n}}\right)$$

$$0{,}9=\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)-\Phi\left(\frac{75-0{,}8n}{0{,}4\sqrt{n}}\right)$$

Албатта тажрибалар сони **n>75,** шунинг учун $\frac{\sqrt{n}}{2} > \frac{\sqrt{75}}{2} \approx \mathbf{4{,}33}$ **Лаплас интеграл функцияси** учун $\Phi(4) \approx 0{,}5$ бўлгани сабабли $\Phi(\sqrt{n}/2) \approx 0{,}5$ деб ҳисоблаш мумкин.

Демак, $0{,}9=0{,}5-\Phi\left(\frac{75-0{,}8n}{0{,}4\sqrt{n}}\right)$. Бундан $\left(\frac{75-0{,}8n}{0{,}4\sqrt{n}}\right)= -\ 0{,}4.$

$\Phi(x)$ - тоқ функция бўлгани учун $\Phi\left(-\frac{75-0{,}8n}{0{,}4\sqrt{n}}\right)=0.4.$

Иловада Лаплас интеграл функциясининг қийматлари келтирилган 4-жадвалдан **Ф(х)=0,4** тенгликни қаноатлантирувчи аргументнинг қийматини топамиз: **Ф(1,28)=0.4**

Натижада - $\frac{75-0{,}8n}{0{,}4\sqrt{n}}$=**1,28** ҳосил қиламиз. Бу тенгликдан **n** ни топсак ($\sqrt{n}$ га нисбатан квадрат тенглама ечсак) $\sqrt{n}$=**10** ёки тажрибалар сони **n=100** экани келиб чиқади.

Жавоб: n=100.

9-масала. Ўзаро боғлиқ бўлмаган **625** тажрибанинг хар биридан ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли **0,8** га тенг. Ҳодиса рўй бериши нисбий частотасининг унинг эҳтимолидан четлашиши абсолют қиймати бўйича **0,04** дан катта бўлмаслиги эҳтимолини топинг.

Ечиш: Масаланинг шартига асосан **n=625; p=0,8; q=0,2; ε=0,04.**

$$\mathbf{P}=\mathbf{P}\left\{\left|\frac{m}{625}-0{,}8\right|\le 0{,}04\right\}$$

эҳтимолликни топиш керак.

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|\le e\right\}\approx\mathbf{2}\cdot\mathbf{\Phi}\left(e\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

формулага асосан

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{m}{625}-0{,}8\right|\le 0{,}04\right\}=\mathbf{2}\cdot\mathbf{\Phi}\left(0{,}04\sqrt{\frac{625}{0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)=\mathbf{2\Phi(2{,}5)}.$$

Иловадаги Лаплас интеграл функциясининг қийматлари келтирилган **4**-жадвалдан **Ф(2,5)=0,4938** эканлигини топамиз.

Ва ниҳоят,

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{m}{625}-0{,}8\right|\le 0{,}04\right\}\approx\mathbf{2\cdot 0{,}4938=0{,}9876}.$$

Жавоб: 0,9876.

10-масала. Ўзаро боғлиқ бўлмаган тажрибаларнинг ҳар бирида ҳодисанинг рўй бэриш эҳтимоли **0,5** га тенг. Ҳодиса рўй бериши нисбий частотасининг унинг эҳтимолидан четлашиши абсолют қиймати бўйича **0,02** дан катта бўлмаслик эҳтимоли **0,7698** га тенг бўлиши учун нечта тажриба ўтказиш керак?

Ечиш: Шартга кўра **n=05; q=0,5; ε=0,02**

$$P\left\{\left|\frac{m}{n-0,5}\right|\le 0,02\right\}=\mathbf{0,7698}.$$

Масалани ечиш учун,

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|\le e\right\}\approx 2\cdot\Phi\left(e\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

формуладан фойдаланамиз.

$$2\cdot\Phi\left(0,02\sqrt{\frac{n}{0,5\cdot 0,5}}\right)=\mathbf{0,7698}$$

ёки

$$\Phi(0,04\sqrt{n})=0,3849.$$

Иловадаги **Лаплас интеграл** функциясининг қийматлари келтирилган **4**-жадвалдан **Φ(x)** функциясининг **0,3948** қийматига мос келган аргументини аниқлаймиз: **Φ(1,2)=0,3849**

Демак, **0,04** $\sqrt{n}$ **=1,2** ёки $\sqrt{n}$ **=30.**

Бундан **n=900.**

Жавоб: 900.

11-масала. Техника назорати бўлими **900** та маҳсулот сифатини текширмоқда. Маҳсулотнинг стандарт бўлиш эхтимоли **0,9** га тенг. **0,9544** эҳтимоллик билан стандарт маҳсулотлар сони ётадиган чегараларни топинг.

Ечиш: Шартга кўра **n=900; p=0,9; q=0,1**

$$P\left\{\left|\frac{m}{900}-0{,}9\right|\le e\right\}=\mathbf{0{,}9544}$$

Теорема натижасига асосан

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|\le e\right\}\approx 2\cdot\Phi\left(e\sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

бундан

$$2\cdot\Phi\left(e\sqrt{\frac{900}{0{,}9\cdot 0{,}1}}\right)=0{,}9544$$

ёки

$$\mathbf{\Phi(100\varepsilon)=0{,}4772.}$$

Иловадаги **Лаплас интеграл** функциясининг қийматлари келтирилган **4**-жадвалдан **Ф(х)** функциянинг **0,4772** қийматига мос келган аргументини аниқлаймиз **Ф(2)=0,4938. 100ε=2** ёки **ε=0,02.** Шундай қилиб, текширилган маҳсулотлар орасидаги ностандартларнинг нисбий частотаси учун **0,9544** эҳтимоллик билан қуйидаги тенгсизлик ўринли экан:

$$\left|\frac{m}{900}-0{,}9\right|\le 0{,}02$$

ёки

$$\mathbf{0{,}88\le\frac{m}{900}\le 0{,}92,}$$

бундан

$$\mathbf{792\le m\le 828.}$$

Ва ниҳоят, **900** та текширилганлар орасида стандарт маҳсуллотлар нисбий частотаси **0,9544** эхтимоллик билан **792≤m≤828.** Оралиқда ётар экан.

Жавоб: 792≤m≤828.

3.6. Мустақил иш учун масалалар

1. Қурилиш компаниясида ўтказилган аудиторлик текшируви пайтида аудитор тасодифий равишда **5** та ҳисоб варақасини танлайди. Агар ҳисоб варақаларининг 3% ида хатоларга йўл қўйилган бўлса, аудиторнинг

a. Факат битта ҳисоб варақасида ҳато топиш;

b. Ҳеч бўлмаганда битта ҳисоб варақасида ҳато топиш эҳтимолини топинг.

Жавоб: а) 0,1328; б) 0,1413.

2. Факультетдаги талабаларнинг ўртача **10%** и «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика» фани бўйича имтиҳонда қониқарсиз баҳо олар экан. Айтайлик, гуруҳда **20** та талаба бор.

а) иккита талабанинг имтиҳон топшира олмаслик эҳтимоли қанча?

б) тўртта талабанинг имтиҳон топшира олмаслик эҳтимоли қанча?

д) камида учта талабанинг имтиҳон топшира олмаслик эҳтимоли қанча?

е) имтиҳон топшира олмайдиган талабаларнинг кутилаётган ўртача сони қанча?

Жавоб: а) 0,270; б) 0,0898; д) 0,3231; е) 2.

3. Савдо агенти бир кунда ўрта ҳисобда **8** та доимий ҳаридорлар билан мулокатда бўлади. У тажрибасидан доимий ҳаридорнинг ҳарид қилиш эҳтимоли **0,1** га тенг эканини билади.

а) бир кун давомида **2** кишининг ҳарид қилиш эҳтимоли нечага тенг?

б) бир кун давомида ҳеч бўлмаганда **2** кишининг ҳарид қилиш эҳтимоли нечага тенг?

д) кун давомида ҳеч кимнинг ҳарид килмаслик эҳтимоли нечага тенг?

е) бир кун давомида кутиладиган ҳаридларнинг ўртача сони нечага тенг?

Жавоб: а) 0,1488; б) 0,1869; д)0,43; е) 4.

4.Автомат бир циклда **10** детал тайёрлайди. Бу деталлар ҳар бирининг сифатсиз бўлиши эҳтимоли **0,01** га тенг. Нечта циклдан сўнг ҳеч бўлмаганда битта сифатсиз детал чиқариш эҳтимоли **0,8** дан кичик бўлмайди?

Жавоб: $n \geq 16$.

5.Фабрикада тўқувчи **1000** та ип тўпини назорат қилади. Бир дақиқа давомида **1** та тўпдан ипнинг узилиш эҳтимоли **0,004.** Бир дақиқа давомида **5** та тўпдан ипнинг узилиш эҳтимолини топинг.

Жавоб: 0,1563.

6. Бир соат давомида иҳтиёрий абонентнинг коммутаторга қўнғирок қилиш эҳтимоли **0,01** га тенг. Телефон станциясининг **800** та абоненти бор. Бир соат давомида **5** та абонентнинг коммутаторга қўнғироқ қилиш эҳтимолини топинг.

Жавоб: $8^5e^{-8}/5 \approx 0{,}0916$.

7. Ишлаб чиқаришдаги **1%** маҳсулот сифатсиз чиқади. Текшириш учун тасодифий равишда олинган **1100** та маҳсулотдан **17** тасининг сифатсиз чиқиш эҳтимоли қанча?

Жавоб: $F(20/11)- F(-10/3) \approx 0{,}6826$.

8. Фермер хўжалигидаги **100** та соғин сигирнинг **5** таси кам сут беради. Таваккалига танланган **10** соғин сигирлар орасида биттадан ортиқ бўлмаган кам сут берувчи сигир бўлиш эҳтимоли топилсин.

9. Савдо дўконига **8** та харидор киришган бўлиб, уларнинг ҳар бирининг харид қилиш эҳтимоли бир хил ва у **0,3** га тенг бўлсин. **8** та харидордан **3** тасини харид қилиш эҳтимоли топилсин.

10. Корхона ишчиларининг ишга ўз вақтида етиб келиш эҳтимоли **0,9** га тенг. **5** та ишчидан ошиб борса **1** тасини ўз вақтида ишга етиб келмаслик эҳтимоли топилсин.

11. Арпа-дон уруғини униб чиқиши **90%** ни ташкил этади. Таваккал олинган **7** дона арпа донидан **5** тасининг униб чиқиш эҳтимоли топилсин.

12. Кичик корхонада маҳсулот тайёрлашда **6** та мотор ишлатилади. Ҳар бир моторни тушга бориб қизиб кетиш эҳтимоли **0,8** га тенг. Тушлик вақтида

а) **4** тала моторни қизиб кетиш эҳтимоли,

б) барча моторларни қизиб кетиш эҳтимоли,

с) бирорта ҳам моторни қизиб кетмаслик эҳтимоли топилсин.

13. Корхонада ишлаб чиқарилган маҳсулотларнинг ўртача **4 %** и яроқсиз бўлса, у ҳолда текшириш учун олинган **5** та маҳсулот орасида битта ҳам яроқсиз маҳсулот бўлмаслик эҳтимоли топилсин.

14. Табиий офат натижасида **50** та жамоа хўжалигидан **1** таси жиддий зарар кўрган. Шу вилоятда жойлашган **200** та фермер хўжалигидан **2** тадан ортиқ бўлмаган хўжаликнинг жиддий зарар кўриш эҳтимоли топилсин.

15. Савдогар ўз дўконида сотиш учун корхонада **5000** та сифатли электр лампочкасини олди. Уларни ҳар бирини корхонадан дўконга олиб келиш жараёнида шикастланиш эҳтимоли **0,0002** га тенг. Савдогарнинг **3** та лампочкадан (яроқсизланиш натижасида) зарар кўриш эҳтимоли топилсин.

16. Ҳаридорларнинг **36** размерли пойафзалга бўлган эҳтиёжининг эҳтимоли **0,3** га тенг. **2000** та ҳаридордан **575** таси шу размерли пойафзалга талабгор бўлиш эҳтимоли топилсин.

17. Савдо дўконидаги бирорта молни (товарни) сотилиш эҳтимоли **0,2** га тенг. Дўкондаги **400** дона молдан бир кунда **70** тадан **90** тагача сотилиш эҳтимоли топилсин.

18. Корхонада ишлаб чиқарилган махсулотнинг **75 %** ини биринчи сортли (навли) маҳсулот ташкил этади. Корхонада ишлаб чиқарилган **300** та маҳсулотдан биринчи сортлиги **219** тадан **234** тагача бўлиши эҳтимоли топилсин.

4 – БОБ. ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАР.
4.1. ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАР ВА УЛАРНИНГ ТУРЛАРИ

Кўпинча иқтисодий, техника, қишлоқ хўжалиги ва бошқа соҳаларга тегишли амалий масалаларни ечиш эҳтимоллари назариясининг тасодифий миқдорлар тушунчаси билан боғлангандир.

Тасодифий миқдор деб, аввалдан номаълум бўлган ва олдиндан инобатга олиб бўлмайдиган тасодифий сабабларга боғлиқ ҳолда, ҳамда синаш натижасида битта мумкин бўлган қиймат қабул қилувчи миқдорга айтилади. Масалан, экилган **10** та уруғдан униб чиққан уруғлар сони, маълум ёшдаги одамлар бўйининг узунлиги ва ҳоказолар тасодифий миқдорларга мисол бўла олади.

Тасодифий миқдорларни **X, Y, Z, ...** бош ҳарфлар билан, унинг мумкин бўлган қийматларини **x, y, z, . . .** кичик ҳарфлар билан белгиланади.

Амалиётда асосан **2** хилдаги тасодифий миқдорлар билан иш кўрилади: **Дискрет** ва **узлуксиз.**

Дискрет тасодифий миқдор (ДТМ) деб, айрим, ажралган қийматларни маълум эҳтимолликлар билан қабул қилувчи миқдорга айтилади. **ДТМ** нинг мумкин бўлган қийматлари сони чекли ёки чексиз бўлиши мумкин. **Узлуксиз тасодифий миқдор (УТМ)** деб, чекли ёки чексиз оралиқдаги барча қийматларни қабул қилиши мумкин бўлган миқдорга айтилади.

4.2. ДИСКРЕТ ТАСОДИФИЙ МИҚДОРНИНГ ТАҚСИМОТ ҚОНУНЛАРИ. БИНОМИАЛ, ПУАССОН, ГЕОМЕТРИК ВА ГИПЕРГЕОМЕТРИК ТАҚСИМОТ ҚОНУНЛАРИ

Агар **X** тасодифий миқдорнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари ҳамда шу қийматларни қабул қилиш эҳтимоллари маълум бўлса, **X** дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимоти берилган дейилади.

Дискрет тасодифий миқдорниг тақсимот қонунини аналитик, жадвал ва график усулларда бериш мумкин. Кўп ҳолларда **ДТМ** ни тақсимот қонунини жадвал усулида бериш қулай бўлади.

X (ДТМ) нинг x_i қийматини қабул қилиш эҳтимолини:

$$p_i = P(X = x_i)$$

билан белгилаймиз. У ҳолда **X ДТМ** нинг тақсимот қонуни қуйидаги жадвал кўринишида ифодаланади:

X_i	X_1	X_2	...	X_k
P_i	p_1	p_2	...	p_k

Бу ерда: $\sum_{i=1}^{k} P_i = 1$

БИНОМИАЛ ТАҚСИМОТ

Айтайлик, **X** тасодифий миқдор **0,1,2,……n,** қийматларни мос равишда

$$P_n(k) = P_n(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

эҳтимолликлар билан қабул қилсин. Бу ҳолда **X** тасодифий миқдорни **Биномиал тақсимот қонунга эга** дейилади. Биномиал тақсимот жадвал кўринишда қуйидагича ифодаланади:

$X = k$	0	1	...	k	...	n
$P_n(k)$	$(1-p)^n$	$C_n^1 p(1-p)^{n-1}$	...	$C_n^k P^k (1-p)^{n-k}$	...	P^n

ПУАССОН ТАҚСИМОТИ

Агар, **X** тасодифий миқдор $X = k$ **(k=0,1,2,...)** қийматларни мос равишда

$$P(X = k) \approx \frac{л^k}{k!} e^{-л} \qquad (\mathbf{k=0,1,2,...;}\ л \succ 0)$$

эҳтимолликлар билан қабул қилса, **X** тасодифий миқдори Пуассон тақсимот қонунига бўйсунади дейилади. Бу тақсимот қонуни жадвал кўринишида қуйидагича ифодаланади.

X	**0**	**1**	**2**	...	**k**	...
$P(X = k)$	$e^{-л}$	$лe^{-л}$	$\frac{л^2}{2} e^{-л}$		$\frac{л^k}{k!} e^{-л}$	...

ГЕОМЕТРИК ТАҚСИМОТ

Агар **X ДТМ k=0,1,2,...** қийматларни мос равишда $\mathbf{P_k=P(X=k)=q^{k-1}.p}$ эҳтимолликлар билан қабул қилса, у ҳолда **ДТМ** ни геометрик таксимот қонунга бўйсунади дейилади.

ГИПЕРГЕОМЕТРИК ТАҚСИМОТ

Агар **X ДТМ 0,1,2,..., мин (M,n)** қийматларни мос равишда

$$P_k = P(X = k) = \frac{C_M^K C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

эҳтимолликлар билан қабул қилса, у ҳолда **X ДТМ** ни гипергиометрик таксимот қонунга эга дейилади.

4.3. ДИСКРЕТ ТАСОДИФИЙ МИҚДОРНИНГ СОНЛИ ХАРАКТЕРИСТИКАЛАРИ

Тасодифий миқдор ўртача қийматининг сонли характеристикаси бўлиб, математик кутилиш ҳизмат қилади.

Дискрет тасодифий миқдорнинг математик кутилиши деб, унинг мумкин бўлган барча қийматларини мос эҳтимолларга кўпайтмалари йиғиндисига айтилади:

$$M(X)=x_1p_1+ x_2p_2+\ldots+x_np_n.$$

Агар тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари саноқли тўплам бўлса, у ҳолда

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

Бунда тенгликнинг ўнг томонида турган қатор абсолют яқинлашади деб фараз қилинади ва бунда P_i эҳтимоллар йиғиндиси бирга тенг.

Математик кутилиш қуйидаги хоссаларга эга :

1) $M(C) = C$, (C-const)
2) $M(CX) + CM(X)$, (C-const)
3) $M(X+Y) = M(X) \pm M(Y)$
4) $M(aX+в) = a\, M(X)+в$ ($a, в$-ўзгармас сонлар)
5) Агар **X** ва **Y** ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар бўлса,

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$$

бўлади.

Тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматларини математик кутилиш атрофида тарқоқлик характеристикаси бўлиб жумладан, дисперсия ва ўртача квадратик четланиш хизмат қилади.

X тасодифий миқдорнинг дисперсияси деб, четланиш квадратининг математик кутилишига айтилади.

$$D(X) = M[X - M(X)]^2$$

Дисперсияни

$$D(X) = M(X)^2 - [M(X)]^2$$

формула бўйича ҳисоблаш қулай.

Дисперсия ушбу хоссаларга эга :

1) $D(C)=0$, $(C = const)$

2) $D(CX) = C^2 D(X)$ $(C = const)$

3) Агар **X** ва **Y** ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар бўлса, $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$ бўлади.

4) $D(aX+б) = a^2 D(X)$ ($a, в$ -ўзгармас сонлар).

X **ДТМ** ни ўртача квадратик четланиши деб дисперсиядан олинган квадрат илдизга айтилади. $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$

4.4. Намунавий масалаларни ечиш

1-масала: Тўпдан нишонга қарата биринчи марта текгунча ўқ отилмоқда. Агар ҳар бир ўқни нишонга тегиш эҳтимоли **0,6** га тенг бўлса, ўқни нишонга учунчи марта отилганда тегиш эҳтимолини топинг.

Ечиш: Масала шартига кўра **p = 0,6 q = 1-p = 1-0,6 = 0,4 k=3**. У ҳолда изланаётган эҳтимоллик

$$P(X = k) = q^{k-1} \cdot p = (0,4)^2 \cdot 0,6 = 0,096.$$

2-масала: 550 та маҳсулотдан **20** таси яроқсиз. Таваккал отилган **5** та маҳсулотлар ичида **3** та яроқсиз маҳсулот бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечиш: Шартга кўра **N = 50 M = 20 n = 5 k = 3**

У ҳолда,

$$P(x = 3) = \frac{C_{20}^3 \cdot C_{30}^2}{C_{50}^5} = 0,234.$$

3-Масала. Экиладиган ҳар бир чигитнинг униб чиқиш эҳтимоли **0,8** га тенг бўлса, экилган учта чгитдан ўниб чиққан уруғлар сонини тақсимот қонуни топилсин.

Ечиш: Униб чиқадиган уруғлар сони **X** тасодифий миқдор бўлиб **у=0,1,2,3** қийматларини қабул қилиши мумкин. Бу қийматларнинг қабул қилиш эҳтимолини Бернулли формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$P_3\{X=0\}=C_3^0p^0(1-p)^3=(0,8)^0\cdot(0,2)^3=0,008,$$

$$P_3\{X=1\}=C_3^1p^0(1-p)^2=3\cdot(0,8)\cdot(0,2)^2=0,096,$$

$$P_3\{X=2\}=C_3^2p^2(1-p)=3\cdot(0,8)^2\cdot(0,2)=0,384,$$

$$P_3\{X=3\}=C_3^3p^3(1-p)^0=(0,8)^3\cdot(0,2)^0=0,512,$$

Демак,

X	**0**	**1**	**2**	**3**
p	**0,008**	**0,096**	**0,384**	**0,512**

Маълумки $\sum_{i=1}^{k} Pi=1$ бўлиши керак.

Ҳақиқатга ҳам

$$\sum Pi=0,008+0,096+0,384+0,512=1$$

4-масала. Қуйидаги тақсимот қонуни билан берилган **X** тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси, дисперсияси, ўртача квадратик четланишини топинг.

X	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
P	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,3**	**0,1**

Ечиш: X ва $\mathbf{X^2}$ тасодифий миқдорларнинг кутилмасини топамиз:

$$\mathbf{M(X)=1\cdot 0,1+2\cdot 0,2+3\cdot 0,3+4\cdot 0,3+5\cdot 0,1=3,1}$$

$$\mathbf{M(X^2)=1^2\cdot 0,1+2^2\cdot 0,2+3^2\cdot 0,3+4^2\cdot 0,3+5^2\cdot 0,1=10,9}$$

Бундан дисперсия формуласига асосан:

$$\mathbf{DX=MX^2-(MX)^2=10,9-(3,1)^2=1,29.}$$

X тасодифий миқдорнинг ўртача квадратик четлашиши:

$$\sigma\ \mathbf{(X)}=\sqrt{DX}=\sqrt{1,29}\ \mathbf{=1,1357.}$$

Жавоб: MX=3,1; ДХ=1,29; σ (X)=1,1357.

4.5. Мустақил иш учун масалалар

1. Бир корхона янги маҳсулот ишлаб чиқариш мақсадида корхонани таъмирлаш ва кенгайтиришни режалаштирган. Раҳбарият келажак аҳволни таҳлил қилган ҳолда, катта ва ўртача ҳаражатларни кўзда тутувчи икки лойихадан бирини танлаши зарур. Муаммо шундан иборатки, корхона ишлаб чиқармоқчи бўлган янги маҳсулотга талаб яхши ўрганилмаган. Талаб паст, ўртача ва юқори бўлиши мумкин. Эҳтимолликлар мос равишда **0,2; 0,5** ва **0,3** га тенг. **X** шартли минг пул бирлигидан даромадни билдирсин. Корхона катта ва ўртача ҳаражатли лойиҳалар учун қуйидаги даромадларни режалаштирган.

	Катта харажатлардаги даромад		Ўртача даромадлардаги даромад	
Талаб	**X**	**P(X)**	**X**	**(PX)**
Паст	**0**	**0,20**	**50**	**0,20**
Ўртача	**100**	**0,50**	**150**	**0,50**
Юқори	**300**	**0,30**	**200**	**0,30**

а) Икки турдаги лойиҳа учун кутилаётган ўртача даромадни ҳисобланг. Бўлажак даромадни максималлаштириш учун корхона қандай ечимни танлаши керак?

б) Икки турдаги лойиҳа учун даромад дисперсиясини ҳисобланг. Ноаниқликни минималлаштириш учун корхона қандай ечимни танлаши керак?

Жавоб: а) M(X)=145; 140; б) ДX=2725; 12400.

2. Таваккалга асосланган қандайдир бизнес учун даромад тахминан минг шартли пул бирлигига тенг ва қуйидаги тақсимот қонуни билан берилган:

Xi	-2000	-1000	0	1000	2000	3000
P(X=Xi)=Pi	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1

Изоҳ: **-2000, -1000** камомадни билдиради.

а) Бу бизнесдан эҳтимоли энг катта бўлган пул даромади нимага тенг?

б) Эҳтимоллик нуқтаи назаридан бу таваккалчилик ўзини оқлайдими? Тушунтириб беринг

д) Бизнесдан узоқ муддатга мўлжалланган ўртача даромад нимага тенг?

Жавоб: д) 800.

3. Савдо базасида ҳар бирининг нарҳи **100** шартли пул бирлигидан **10** та мотор сотишга тайёрлаб қўйилган. Агар уларнинг орасидан ҳеч бўлмаса битта носоз мотор чиқса, ҳаридорга партиянинг икки баробар миқдоридаги нарҳи қайтарилади. Ҳар бир моторнинг носоз бўлиш эҳтимоли **0,08** га тенг бўлса, сотувчининг кутилаётган даромадини топинг.

Жавоб:840 ш.п.б.

4. Нефт қидириш компанияси **10** та буюртма олди. Қидирувчининг муваффақиятли чиқиш эҳтимоли **0,1** га тенг. Айтайлик, ҳар бир қидирувни бир-бирига боғлиқ бўлмаган гуруҳлар олиб боради. Муваффақиятли қидирувларнинг математик кутилмаси ва дисперсиясини топинг.

Жавоб: M(X)=1;D(X)=0,9.

5. Семестр давомида ўқитувчилар талабалар тушунмаган мавзулар бўйича қўшимча дарслар олиб борадилар. Статистика фани ўқитувчиси белгиланган вақтда келадиган талабалар сони тасодифий миқдор эканини билган ҳолда бу дарсларнинг бир соатига ўртача **8** та талаба келаётганига эътибор берди. **Пуассон тақсимотидан** фойдаланган ҳолда қуйидаги саволларга жавоб беринг:

а) Маълум соатда статистикадан машғулотга роппа-роса **8** та талаба келиши эҳтимоли қанча?

б) Маълум ярим соатда статистикадан машғулотга роппа-роса **3** та талаба келиши эҳтимоли қанча?

Жавоб:а)0,1396;б)0,1954.

6. Ҳалқаро аеропортда турли рейсларнинг келиш вақти электрон таблода ёритилиб турилади. Бу маълумотлар экранда тасодифий равишда ва ўзаро боғлиқ бўлмаган ҳолда пайдо бўлади. Ўртача аеропортга соатига **10** та рейс келади.

а) Бир соат давомида таблода самолётларнинг келгани ҳақида маълумот бўлмаслиги эҳтимоли қанча?

б) Бир соат давомида камида **3** та самолёт келиши эҳтимоли қанча?

д) **15** дақиқа давомида бирорта ҳам самолёт келмаслиги эҳтимоли қанча?

е) **15** дақиқа давомида ҳеч бўлмаганда **1** та самолёт келиши эҳтимоли қанча?

Жавоб: а) 0,000045; б) 0,010245; д) 0,0521; е) 0,9179.

7. Ишлаб чиқарилаётган шиша идишларнинг тахминан **10%** и бирор ери ёрилгани сабабли сифатсиз саналиб, олиб ташланади. Агар тасодифий равишда 2 та идиш танлаб олинган бўлса, уларнинг ичидаги сифатсизларининг математик кутилмаси ва дисперсиясини топинг.

Жавоб: МХ=0,2; ДХ=0,18.

8. Фирма сотувчи **10** та компьютер таклиф қилмоқда. Улардан **4** тасининг носозлиги бор. Ҳаридор мавжуд носозликдан бехабар холда **5** та компьютер сотиб олади. Сотиб олинган компьютерлар ичида носози бўлмаслик эхтимоли қанча? Битта носоз компьютерни таъмирлаш **$50** га тушади. Таъмирлашга кетадиган умумий ҳаражат ўртачасининг математик кутилмаси ва дисперсиясини топинг.

Жавоб: 0,0238095; M(X)=100, D(X)=16,667.

5 – БОБ. ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАР ЭХТИМОЛЛАРИНИНГ ТАҚСИМОТ ФУНКЦИЯЛАРИ

5.1. ТАСОДИФИЙ МИҚДОРНИНГ ТАҚСИМОТ ФУНКЦИЯСИ

Узлуксиз тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни каби яъни жадвал кўринишида бериб бўлмайди, чунки узлуксиз тасодифий миқдор чекли ёки чексиз оралиқдаги ҳар бир қийматни қабул қилиши мумкин ва улар сони саноқсиздир. Шу сабабли узлуксиз тасодифий миқдорлар билан иш кўрилганда тақсимот ва зичлик (дифференциал) функция тушунчаларидан фойдаланилади.

Фараз қилайлик, **X** тасодифий миқдор **x** эса бирор ҳақиқий сон бўлсин. Маълумки $\{X < x\}$ ҳодисанинг эҳтимоли **X** тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси дейилади ва **F(x)** билан белгиланади:

$$F(x) = P\{X < x\}$$

Агар **X** тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси узлуксиз дифференцияланувчи бўлса, у ҳолда **X** тасодифий миқдорни **узлуксиз** дейилади.

Тақсимот функция қуйидаги ҳоссаларга эга :

1) Тақсимот функциянинг қиймати ноль билан бир орасида бўлади:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

2) **F(x)**- камаймайдиган функция, яни агар $x_1<x_2$ бўлса, у ҳолда,

$$F(x_1) \le F(x_2).$$

3) Қуйидаги муносабатлар ўринли:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0.$$

4) X тасодифий миқдорнинг (x_1, x_2) оралиққа тегишли қийматни қабул қилиш эҳтимоли:

$$P\{x_1 < X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

5) X узлуксиз тасодифий миқдорнинг тайин битта қийматни қабул қилиш эҳтимоли нольга тенг:

$$P(X=x_1) = 0.$$

5.2. УЗЛУКСИЗ ТАСОДИФИЙ МИҚДОРНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛ (ЗИЧЛИК) ФУНКЦИЯСИ

X тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси, яъни F(x) нинг хосиласи тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси ёки дифференциал функцияси дейилади ва уни $f(x)$ билан белгиланади:

$$f(x) = F'(x)$$

Зичлик функция қуйидаги хоссаларга эга :

1^0 $\forall x$ учун $f(x) \geq 0$ бўлади, чунки **F(x)** камаймайдиган функция

2^0 X узлуксиз тасодифий миқдорнинг $(a, в)$ оралиққа тегишли қийматни қабул қилиш эҳтимоли:

$$\int_a^b f(x)dx = P(a_1 < X < b_2)$$

3^0 Зичлик функциядан $(-\infty, +\infty)$ оралиқ бўйича олинган хосмас интеграл бирга тенг:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Хусусан, тасодифий миқдорнинг барча мумкин бўлган қийматлари $(a, в)$ оралиққа тегишли бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)\, dx = 1$$

4^0 Зичлик функция берилган бўлса, тақсимот функция қуйидаги тенглик орқали аниқланади:

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = F(x)$$

$\mathbf{F(X_P) = P}$ $(0 \le p \ge 1)$ тенглик билан аникланадиган $\mathbf{X_P}$ катталик тақсимотнинг **P** – тартибли квантили дейилади ва уни $\mathbf{MEDX = X_{0,5}}$ билан белгиланади.

Агар зичлик функция максимум нуқтага эга бўлса, $\mathbf{f(x)}$ максимумга эришадиган **x** аргументнинг киймати **тақсимот модаси** дейилади.

5.3. УЗЛУКСИЗ ТАСОДИФИЙ МИҚДОРНИНГ СОНЛИ ХАРАКТЕРИСТИКАЛАРИ

Мумкин бўлган қийматлари бутун **OX** ўққа тегишли бўлган **X** узлуксиз тасодифий миқдорнинг математик кутилиши:

$$\mathbf{M(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

тенглик билан аниқланади, бу ерда $f(\mathbf{x})$ – дифференциал функция, интеграл абсолют якинлашади, деб фараз қилинади.

Ҳусусан, агар барча мумкин бўлган кийматлар $(a, в)$ интервалга тегишли бўлса, у ҳолда

$$\mathbf{M(X)} = \int_{a}^{b} x\, f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

Математик кутилишнинг юқорида дискрет тасодифий миқдорлар учун кўрсатилган барча хоссалари узлуксиз тасодифий миқдорлар учун ҳам сақланади. Агар $\mathbf{Y=\varphi(X)}$ мумкин бўлган қийматлари бутун **OX** ўққа тегишли бўлган **X** тасодифий аргументнинг функцияси бўлса, у ҳолда

$$\mathbf{M}[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(\mathbf{x}) \mathbf{dx}.$$

Ҳусусан, агар **ХТМ** ни барча мумкин бўлган қийматлар ($a, в$) интервалга тегишли бўлса, у ҳолда

$$\mathbf{M}[\varphi(X)] = \int_{a}^{b} \varphi(x) f(\mathbf{x}) \mathbf{dx}.$$

Агар тақсимот эгри чизиғи **x=c** тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлса, у ҳолда

$$\mathbf{M(X)=C.}$$

Узлуксиз тасодифий миқдорнинг $M_0(X)$ модаси деб, унинг шундай мумкин бўлган қийматига айтиладики, бу қийматга дифференциал функциянинг максимуми мос келади.

Узлуксиз тасодифий миқдорнинг **$M_e(X)$ медианаси** деб, унинг

$$\mathbf{P(X< M_e(X)=P(X> M_e(X))}$$

тенглик билан аниқланиши мумкин бўлган қийматга айтилади.

Мумкин бўлган қийматлари **ОХ** га тегишли бўлган **Х** узлуксиз тасодифий миқдорнинг дисперсияси

$$\mathbf{D(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx$$

тенглик билан ёки бу тенгликка тенг кучли бўлган

$$\mathbf{D(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2$$

тенглик билан аниқланади.

Ҳусусан, агар **ХТМ** нинг барча мумкин бўлган қийматлари ($a, в$) интервалга тегишли бўлса, у ҳолда

$$\mathbf{D(X)} = \int_{a}^{b} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2$$

ёки

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x)dx$$

Дисперсия нинг юқорида дискрет миқдорлар учун кўрсатилган барча хоссалари узлуксиз миқдорлар учун ҳам сақланади.

Узлуксиз тасодифий миқдорнинг ўртача квадратик четланиши дискрет тасодифий миқдор учун таърифланганни каби таърифланади:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Агар $Y=\varphi(X)$ берилган X тасодифий аргументнинг функцияси, шу билан барча мумкин бўлган қийматлар бутун **OX** ўққа тегишли бўлса, у ҳолда

$$D[(\varphi(X))] = \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x) - M[\varphi(x)])^2 f(x)dx$$

ёки

$$D[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x)dx - [M[\varphi(x)]]^2.$$

Хусусан, барча мумкин бўлган қийматлари $(a, в)$ интервалга тегишли бўлса, у ҳолда

$$D[(\varphi(X))] = \int_a^b (\varphi(x) - M[\varphi(x)])^2 f(x)dx$$

ёки

$$D[\varphi(X)] = \int_a^b \varphi^2(x)dx - [M[\varphi(x)]]^2.$$

X узлуксиз тасодифий миқдорнинг k – тартибли бошланғич назарий моменти

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$$

тенглик билан аниқланади

X узлуксиз тасодифий миқдорнинг k – тартибли марказий моменти

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^k f(x)dx$$

тенглик билан аниқланади

Ҳусусан, агар барча мумкин бўлган қийматлар ($a, в$) интервалга тегишли бўлса, у ҳолда

$$\nu_k = \int_a^b x^k f(x)dx; \quad \mu_k = \int_a^b (x - M(X))^k f(x)dx$$

Равшанки, агар $k=1$ бўлса, у ҳолда $\nu = M(X)$, $\mu_1 = 0$; агар $k=2$ бўлса, у ҳолда $\mu_2 = D(X)$.

Марказий моментлар бошланғич моментлар орқали қуйидаги формулалар билан ифодаланади:

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4$$

5.4. УЗЛУКСИЗ ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАРНИНГ ТИПИК ТАҚСИМОТ ФУНКЦИЯЛАРИ

ТЕКИС ТАҚСИМОТ

Агар тасодифий миқдорнинг эҳтимол зичлиги $f(x)$ бирор оралиқда ўзгармас, оралиқнинг ташқарисида нольга тенг бўлса, тасодифий миқдор шу оралиқда текис тақсимланган дейилади. Демак, бу ҳолда

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{в-a}, & agar\ \ a < x \le в \quad bo'lsa,\\ 0 & agar\ x \le a,\ x > в \quad bo'lsa,\end{cases}$$

бўлиб, унинг тақсимот функцияси

$$F(x)=\begin{cases}0, & agar\quad x \le a \quad bo'lsa\\ \dfrac{x-a}{в-a}, & agar\ a < x < в\ bo'lsa\\ 1, & agar\quad x \ge в \quad bo'lsa\end{cases}$$

бўлади.

Бу конун бўйича тақсимланган тасодифий миқдор учун:

$$\mathbf{M(x)} = \frac{a+в}{2}$$

$$\mathbf{D(x)} = \frac{(в-a)^2}{12}$$

$$\sigma(x) = \frac{в-a}{2\sqrt{3}}$$

бўлади.

КЎРСАТКИЧЛИ ТАҚСИМОТ

Агар **УТМ** ни зичлик функцияси:

$$\mathbf{P(x)}=\begin{cases}0 & x \le 0 \quad бўлса,\\ \lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0 \quad бўлса\end{cases}$$

кўринишида бўлса, у ҳолда **ТМ** ни кўрсаткичли тақсимот қонунга эга дейилади, бу ерда **λ>0.** Кўрсаткичли тақсимотнинг математик кутилиши, дисперсияси ва ўртача квадратик четланиши мос равишда

$$\mathbf{M(x)} = \frac{1}{л}, \quad \mathbf{D(x)} = \frac{1}{\lambda^2}, \quad у(x) = \frac{1}{\lambda}$$

Амалиётда кенг қўлланиладиган тақсимот функцияларидан бири нормал тақсимотдир. Масалан, ҳар бир туп ғўзадаги пахталарнинг оғирлиги, маълум ёшдаги одамлар бўйининг узунлиги ёки вазни, станокда таёрланган деталларнинг ўлчами (узунлнин ёки диаметри) ва ҳоказолар нормал тақсимот қонунга бўйсунади.

НОРМАЛ ТАҚСИМОТ

Агар X тасодифий микдорнинг эҳтимол зичлиги ёки диффренциал функцияси ушбу

$$f(x) = \frac{1}{y\sqrt{2p}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2y^2}}, \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

(a, σ - ўзгармас ва $\sigma > 0$) кўринишга эга бўлса, у ҳолда X тасодифий миқдорни **нормал тақсимланган** дейилади.

Бу ҳолда тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси

$$Ф(x) = \frac{1}{2} + Ф\left(\frac{x-a}{д}\right)$$

бўлади, бунда

$$Ф(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Нормал тақсимот қонун учун $M(x)=a$, дисперсия $D(x)=\sigma^2$ ўртача квадратик четланиши $у(x) = у$ бўлади.

5.5. НОРМАЛ ТАҚСИМОТ БИЛАН БОҒЛИҚ ҲАМДА МАТЕМАТИК СТАТИСТИКАДА КЕНГ ҚЎЛЛАНИЛАДИГАН ТАҚСИМОТ ҚОНУНЛАР χ^2-ТАҚСИМОТ

$X_1, X_2, ... X_n$ – ўзаро боғлиқ бўлмаган тақсимланган тасодифий миқдорлар бўлсин. Улар ҳар бирининг математик кутилмаси нолга ва дисперсияси бирга тенг, яъни стандарт нормал тақсимланган тасодифий миқдорлар бўлсин: $MX_i = 0$, $DX_i = 1$, $(i = 1,n)$. У ҳолда улар квадратларининг йиғиндиси.

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{n} X_i^{\ 2}$$

эркинлик даражаси **k=n** тенг бўлган χ^2 ("x_i-квадрат") тақсимотга эга бўлади.

Агар берилган тасодифий миқдорлар чизиқли боғлиқ бўлса, у ҳолда эркинлик даражаси **k = n-1** бўлади. Мисол учун, агар

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = n\overline{X}$$

бўлса, бу тасодифий миқдоринг эркинлик даражаси **k = n-1** бўлади.

Умумий ҳол. $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ – нормал тақсимланган ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар бўлсин. Z_i тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси a_i га ва дисперсия y_i^2 га тенг. У ҳолда

$$X_i = \frac{Z_i - a_i}{y_i}$$

тенглик оркали аниқланган $X_1, X_2, \ldots, X_n$ тасодифий миқдорлар стандарт нормал тақсимотга эга . Улар квадратларининг йиғиндиси эркинлик даражаси **k=n** га тенг бўлган χ^2 («x_i **квадрат**») тақсимотга эга бўлади:

$$\chi^2=ч_n^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^{\ 2}$$

Эркинлик даражаси **n** га тенг бўлган x^2 тақсимотнинг **зичлик функцияси:**

$$f(x)=\begin{cases}0, \\ \dfrac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)}\exp(-x/2)\cdot x^{(n/2)-1}\end{cases}$$

бу ерда: $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}\cdot e^{-t}dt$ - гамма функция; ҳусусан

$$\Gamma(n+1)=n!$$

МАТЕМАТИК КУТИЛМА ДИСПЕРСИЯ ВА МОДАСИ

$$M\chi^2=n,\ D\chi^2=2n.\ \text{мод}\ \chi^2=n-2 \qquad (n\geq 2)$$

Кўриниб турибдики, “x_i – **квадрат** ” тақсимот битта параметр – эркинлик даражаси n билан аниқланар экан. Эркинлик даражаси ортиши билан “x_i – **квадрат** ” нормал тақсимотга якинланшиб боради.

СТЮДЕНТ ТАҚСИМОТИ

X_0, X_1, X_2, . . . , X_n – ўзаро боғлиқ бўлмаган стандарт нормал тақсимланган тасодифий миқдорлар бўлсин. Уларнинг ҳар бирининг математик кутилмаси нольга ва дисперсияси σ^2 га тенг. У ҳолда қуйидаги тасодифий миқдор:

$$T=\frac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\left(X_1^2+X_2^2+\ldots+_n^2\right)}}=\frac{X_0}{\sqrt{x_n^2/n}}$$

Эркинлик даражаси **n** га тенг бўлган **t** – тақсимот ёки **Стюдент тақсимотига** эга бўлади. **T** миқдор σ^2 га боғлиқ эмаслигини таъкидлаб ўтамиз.

Эркинлик даражаси **n** га тенг бўлган **t** – таксимот ёки **Стюдент таксимотининг зичлик функцияси:**

$$f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\sqrt{np}}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},$$

бу ерда: $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}\cdot e^{-t}dt$ - гамма функция.

МАТЕМАТИК КУТИЛМА, ДИСПЕРСИЯ ВА МОДАСИ:

$$MT=0(n>1); \qquad DT=\frac{n}{n-2}(n>2); \qquad mod_T=0$$

СТАНДАРТ НОРМАЛ ТАҚСИМОТ БИЛАН СОЛИШТИРИШ

Т нинг асимптотик тақсимоти стандарт нормал тақсимотга тенг, яъни $n\to\infty$ да t-тақсимот математик кутилмаси нольга, дисперсияси бирга тенг нормал тақсимотга яқинлашади.

Шундай қилиб, стандарт нормал тасодифий миқдорнинг эркинлик даражаси **n** га тенг бўлган χ^2 – тасодифий миқдордан квадрат илдизга нисбатан эркинлик даражаси **n** га тенг бўлган **Стюдент тақсимотига** бўйсунади.

F-ТАҚСИМОТ ЁКИ ФИШЕР-СНЕДЕКОР ТАҚСИМОТИ

$X_1, X_2, \ldots, X_{k1}, X_{k1+1}, \ldots, X_{k1+k2}$ – математик кутилмаси $a=0$ ва дисперсияси $\sigma^2<\infty$ бўлган ўзаро боғлиқ бўлмаган нормал тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги бўлсин. У ҳолда

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}\ (k_1;k_2)=\frac{\frac{1}{k_1}\left(X_1^2+X_2^2+\ldots+X_{k_1}^2\right)}{\frac{1}{k_2}\left(X_{k_1+1}^2+X_{k_1+2}^2+\ldots+X_{k_1+k_2}^2\right)}=\frac{X_{k_1}^2/k_1}{X_{k_2}^2/k_2}$$

тасодифий миқдор эркинлик даражалари $\mathbf{k_1}$ ва $\mathbf{k_2}$ бўлган **F**-ёки **Фишер-Снедекор тақсимотига** эга .

Эркинлик даражалари $\mathbf{k_1}$ ва $\mathbf{k_2}$ бўлган **Фишер-Снедекор тақсимотининг зичлик функцияси:**

$$f(x)=\begin{cases} 0, \\ \dfrac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)\cdot(k_1)^{k_1/2}\cdot(k_2)^{k_2/2}}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\cdot\dfrac{x^{(k_1-2)/2}}{(k_2+k_1x)^{(k_1+k_2)/2}} \end{cases}$$

ФИШЕР - СНЕДЕКОР ТАҚСИМОТИНИНГ МАТЕМАТИК КУТИЛМАСИ, ДИСПЕРСИЯСИ ВА МОДАСИ

$$MF=\frac{k_2}{k_2-2},\ (k_2>2);$$

$$DF=\frac{2k_2^2(k_1+k_2-2)}{k_1(k_2-2)^2(k_2-4)},\ (k_2>4);$$

$$\textit{мод}\ F=\frac{k_2(k_1-2)}{k_1(k_2+2)}$$

Шундай қилиб, эркинлик даражалари, $\mathbf{k_1}$ ва $\mathbf{k_2}$ бўлган иккита χ^2 – тасодифий миқдорнинг нисбати **F** - тақсимотга эга бўлади.

5.6. Намунавий масалаларни ечиш

1-масала. Компания менеджери тўртта турли лойиҳа учун **$ 150000** бюджетга эга . Менеджер нечта эркинлик даражасига эга ?

Ечиш: Айтайлик, X_i **(i=1, 2, 3, 4) i** – лойиҳага ажратилган маблағни билдирсин. Тўртта турли лойиҳанинг умумий бюджетни унинг ўрта арифметигини лойиҳалар сонига кўпайтирилганига тенг деб қараш мумкин ($X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 4\overline{X}$). У ҳолда битта лойиҳага тахминан **$ 150000/4=$37 500** маблағ ажратилади. Учта лойиҳага маблағ ажратилгандан сўнг менеджернинг тўртинчи лойиҳага қолган маблағларни ажратишдан бошқа иложи қолмайди, яъни

$$X_4=4\overline{X}-(X_1+X_2+X_3)=\$\,150000-(X_1+X_2+X_3).$$

Демак, менеджернинг эркинлик даражаси 3 га тенг.

2-масала. **X** тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси қуйидаги кўринишга эга (арксинус қонуни):

$$F(x)=\begin{cases} 1, agar \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{p}\arcsin\frac{x}{a}, \ agar \\ 0, agar \end{cases}$$

Қуйидагиларни аниқланг:

а) **X** тасодифий миқдорнинг $\left(-\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$ оралиққа тушиш эҳтимоли;

б) $X_{0.75}$ квантили;

с) **X** тасодифий миқдорнинг **f(x)** зичлик функцияси;

д) Тақсимотнинг мода ва медианасини топинг.

Ечиш:

а) **X** тасодифий миқдорнинг $\left(-\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$ оралиққа тушиш эҳтимоли қуйидагига тенг:

$$P\left(-\frac{a}{2}<X<\frac{a}{2}\right)=F\left(\frac{a}{2}\right)-F\left(-\frac{a}{2}\right)=\frac{2}{p}\arcsin\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.$$

б) Шартга кўра **p = 0,75;** $F(x_{0,75})$ = $\frac{1}{2}+\frac{1}{p}\arcsin\frac{x}{a}=0{,}75.$

Тенгламадан $x_{0,75}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ эканлиги келиб чиқади.

с) X тасодифий миқдорнинг **f(x)** зичлик функцияси қуйидагича:

1) (-a; a) оралиққа тегишли барча **x** лар учун

$$F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}\arcsin\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{p\sqrt{a^2-x^2}};$$

2) қолган **x** лар учун нольга тенг.

е) **f(x)** = $\frac{1}{p\sqrt{a^2-x^2}}$ функция максимумга эришмайди, шунинг учун арксинус тақсимот қонуни модага эга эмас .

Медианани топиш учун $F(x_{0,5})=0{,}5$ тенгламани ечамиз,

$$\text{яъни}\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{p}\arcsin\frac{x_{0,5}}{a}=0{,}5$$

ва

$$x_{0,5}=0.$$

Демак,

$$\textit{мед}\ X=0.$$

3-масала. X тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{агар}\quad x<0;\\ x/2, & \text{агар}\quad 0\le x\le 2;\\ 0, & \text{агар}\quad x>2.\end{cases}$$

Бу тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси, дисперсияси ва ўртача квадратик четланишини ҳисобланг.

Ечиш: Математик кутилиш таърифга асосан:

$$MX=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\ dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2dx=\frac{x^3}{6}\Bigg|_0^2=\frac{4}{3.}$$

Дисперсия ҳисоблаш формуласидан:

$$DX=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2 f(x)\ dx=\frac{1}{2}\int_0^2\left(x-\frac{4}{3}\right)^2 xdx=\frac{1}{2}\int_0^2\left(x^2-\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}\right)$$

$$xdx=\frac{1}{2}\int_0^2\left(x^3-\frac{8}{3}x^2+\frac{16}{9}x\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{8}{9}x^3+\frac{8}{9}x^2\right)\Bigg|=$$

$$=\frac{1}{2}\left(4-\frac{64}{9}+\frac{32}{9}\right)=\frac{2}{9}$$

Ўртача квадратик четланишни ҳисоблаймиз:

$$у(X)=\sqrt{DX}=\frac{\sqrt{2}}{3}\approx 0{,}47\ .$$

Жавоб: M(X)= $\frac{4}{3}$; $DX=\frac{2}{9}$; $у(x)=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

4-масала. Нормал тақсимланган **X** тасодифий миқдорнинг математик кутилиши ва дисперсияси мос равишда **10** ва **2** га тенг. Синаш натижасида **X** нинг (**12, 14**) да ётадиган қиймат қабул қилиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши: Ушбу формуладан фойдаланамиз:

$$P(б<X<в)=Ф\left(\frac{в-б}{у}\right)-Ф\left(\frac{б-а}{у}\right)$$

Бунга $б=12, в=14, а=10$ ва $у=2$ ни қўйиб, **P(12<X<14)** = *Ф*(**2**) - *Ф*(**1**) ни ҳосил қиламиз. Иловадаги 4-жадвалдан

Ф(**2**) = **0,4772**; *Ф*(**1**) = **0,3413** ни топамиз.

У ҳолда изланаётган эҳтимол: **P(12<X<14)=***Ф*(**2**)-*Ф*(**1**)=**0,4772--0,3413=0,1359** бўлади.

Жавоб: P (12<X<14) = 0,1359.

5.7. Мустақил иш учун масалалар

1.Ўлчов асбоби шкаласининг бўлим баҳоси **0,2** га тенг. Асбобнинг кўрсатиши энг яқин бутун бўлинмагача яҳлитланади. Асбобнинг кўрсатишини ўқишда:
а) **0,04** дан кичик; б) **0,05** дан ортиқ хато қилиниш эҳтимолини топинг.

Жавоби: а) $P(0 < X > 0{,}04) + P(0{,}16 < X < 0{,}20) = 0{,}4$:
б) $P(0{,}05 < X < 0{,}15) = 0{,}5$.

2. Бирор маршрутдаги автобуслар қатъий жадвал бўйича қатнайди. Ҳаракат интервали **5** мин. Бекатга келган йўловчи навбатдаги автобусни **3** мин дан кам кутиш эҳтимолини топинг.

Жавоби: $P(2 < X < 5) = 0{,}6$.

3. Нормал тақсимланган **X** тасодифий миқдорнинг математик кутилиши ва ўртача квадратик четланиши мос равишда **20** ва **5** га тенг. Синов натижасида **X** нинг (**15, 25**) да ётадиган қиймат қабул қилиш эҳтимолини топинг.

Жавоби: $P(15 < X < 25) = 0{,}6826$.

4. Автомат деталларни штамповка қилади. Деталларнинг нормал тақсимланган узунлиги **X** (лойиҳадаги узунлиги) контрол қилинади. **X** нинг математик кутилиши **50** мм. Тайёрланган деталларнинг узунлиги амалда **32** мм дан кичик эмас ва 68 мм дан катта эмас . Таваккалига олинган деталнинг узунлиги: а) **55** мм дан ортиқ; б) **40** мм дан кичик бўлиш эҳтимолини топинг.

Кўрсатма. Аввал $P(32 < X < 68) = 1$ тенгликдан σ ни топинг.

Жавоби: а) $P(55<X<68) = 0{,}0823$; б) $P(32<X<40) = 0{,}0027$.

5. **X** тасодифий миқдор $a = 10$ математик кутилиш ва ўртача квадратик четланиш билан нормал тақсимланган. Синов натижасида **X** нинг **0,9973** эҳтимол билан тушадиган интервалини топинг.

Жавоби: (-5;25).

6. Станок – автомат валчалар тайёрлайди, бунда валчаларнинг диаметрик **X** контрол қилинади. **X** ни $a = 10$ мм математик кутилиш ва $y = 0,1$ мм ўртач квадратик четланиш билан нормал тақсимланган тасодифий миқдор деб ҳисоблаб, тайёрланган валчаларнинг диаметрлари **0,9973** эҳтимол билан ётадиган интервални топинг.

Жавоби: (9,7; 10,3).

7. $\Phi(x) = 1 - e^{-0,4x}$ $(x \geq 0)$ интеграл функция билан берилган кўрсаткичли тақсимотнинг дисперсиясини ва ўртача квадратик четланишини топинг.

Жавоби: Д (X) = 6,25; σ (X) = 2,5.

6 – БОБ. КАТТА СОНЛАР ҚОНУНИ, ЭҲТИМОЛЛАР НАЗАРИЯСИНИНГ ЛИМИТ ТЕОРЕМАЛАРИ ВА МАРКОВ ЗАНЖИРИ

Амалиётда жуда катта сондаги тасодифий миқдорлар йиғиндиси билан иш кўришга тўғри келади. Бу эса қандай шартлар бажарилганда етарлича катта сондаги тасодифий миқдорлар йиғиндиси тасодифийлик ҳусусиятини йўқотиб у маълум қонунга бўйсунишини аниқлаш ва унинг ёрдамида муҳим амалий масалаларини ечишни тақозо этади. Бу шартлар умумий ном билан катта сонлар қонуни ҳамда марказий лимит теорема деб юритиладиган теоремаларда келтирилгандир. Булар жумласига **Чебишев, Бернулли, Ляпунов теоремалари** киради. Бу теоремаларни исботлашда қуйидаги тенгсизликлардан фойдаланилади.

6.1. ЧЕБИШЕВ ВА МАРКОВ ТЕНГСИЗЛИКЛАРИ

1 - Теорема. Чекли дисперсияга эга бўлган ихтиёрий тасодифий **X** миқдор ва ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун

$$P\{|X - M| \geq e\} \leq \frac{MX}{e^2} \qquad (1)$$

бўлади. Одатда (1) ни **Чебишев тенгсизлиги** дейилади.

МАРКОВ ТЕНГСИЗЛИГИ

Чекли математик кутилишга эга бўлган **X>0** микдор ва ихтиёрий $e>0$ сон учун

$$P(x \le e) \ge 1 - \frac{M(x)}{e} \qquad (2)$$

Амалий масалалар ечишда **Чебишев тенгсизлигини** қуйидаги хусусий холларидан фойдаланиш керак бўлади:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \le e\right\} > 1 - \frac{pq}{ne^2} \qquad (3)$$

$$P\{|m - np| \le e\} > 1 - \frac{npq}{e^2} \qquad (4)$$

Бу ерда **m** - **n** та эркли синашда **А** ҳодисани рўй беришлар сони; $\frac{m}{n}$ - нисбий частота (яъни, **n** та эркли синашда А ходисани ўртача рўй беришлар сони;), **n** – хар бир синашда А ходисани рўй бериш эхтимоли, q = 1 – **n** –А ходисани рўй бермаслик эҳтимоли.

6.2. ЧЕБИШЕВ ТЕОРЕМАСИ

Агар $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ - жуфт-жуфт эркли тасодифий миқдорларнинг кетма –кетлиги чекли дисперсияга эга бўлиб, улар битта ўзгармас сон билан чегараланган

$$DX_1 \le c, \quad DX_2 \le c, \dots, \quad DX_n \le c, \dots.$$

бўлса, $\forall e > 0$ учун

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} MX_k\right| < e\right\} \ge 1 - \frac{c}{ne^2} \qquad (5)$$

бўлади. Ёки (5) дан $n \to \infty$ да қуйидаги муносабат кели чиқади.

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} MX_k\right| < e\right\} = 1 \qquad (6)$$

6.3. МАРКАЗИЙ ЛИМИТ ТЕОРЕМА

3 – Теорема. Айтайлик, $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ - ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар кетма – кетлиги бўлиб, $\mathbf{M}\, x_k =$ a_k ва $Д\, x_k = \sigma_k^2$ лар мавжуд бўлсин. Агар бу кетма – кетлик учун

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^{n} DX_k\right)^{3/2}} \sum_{k=1}^{n} M\left|X_k - MX_k\right|^3 = 0$$

бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\frac{1}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - MX_k) < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-x}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

бўлади, яъни

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - MX_k)\right\}$$

тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни математик кутилиши ноль ва дисперсияси 1 бўлган нормал тақсимотга яқинлашади.

6.4. МАРКОВ ЗАНЖИРИ ВА УНИ ҚИШЛОҚ ХЎЖАЛИК МАСАЛАЛАРИНИ ЕЧИШГА ҚЎЛЛАНИЛИШИ

Боғлиқ бўлмаган тажрибалар кетма-кетлигини содда умумлашмаси Марков занжиридир. Бу назарияга XX – аср бошида улуғ рус олими А.А.Марков асос солган.

Ҳар бир $\Omega = \{1,2,3,...,S\}(S \geq 2)$ қийматлардан бирини қабул қилувчи X_0, X_1, X_2, ... , X_n, ... тасодифий миқдорлар кетма-кетлигини қараймиз.

Таъриф. Агар X_n тасодифий миқдорни $X_n = j$ қиймат қабул қилиш эхтимоли, ўзидан олдинги X_{n-1} тасодифий миқдорни i қиймат қабул қилиш қилишга боғлиқ бўлиб, ундан олдинги X_{n-2}, X_{n-3},..... тасодифий миқдорларни қандай қиймат қабул қилишга боғлиқ бўлмаса, бу тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги оддий Марков занжири ташкил этади дейилади, яъни:

$$P(X_n=j/X_0=1, X_1=m,\dots X_{n-2}=k, X_{n-1}=i)= P(X_n=j/X_{n-1}=i)=P_{ij}(n)$$

Агар $P_{ij}(n)$ ўтиш эҳтимоллиги n га боғлиқ бўлмаса

$$P(X_n=j/X_{n-1}=i)=P_{ij}$$

У холда X_0. X_1,..X_n,.. тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги бир жинсли оддий Марков занжирини ташкил этади.

Марков занжири ташкил қилувчи тасодифий жараённинг бошланғич ҳолат тақсимоти

$$P(X_0=i)=P_i^0, \quad \sum_{i=1}^{S} P_i^0 = 1, \qquad \pi = (P_1^0, P_2^0, ...P_s^0)$$

S ҳолатли бир жинсли оддий Марков занжирини ташкил этувчи жараёни бир қадамга ўтиш матрицаси $P=\left\| P_{ij} \right\|$ бўлиб, у қуйидаги хоссаларга эга бўлади:

1) $P_{ij} \geq 0$ барча i,j учун; 2) $\sum P_{ij} = 1$, ҳар бир сатр бўйича йиғиндиси бирга тенг бўлади, яъни i ҳолатдан 1,2,....S ҳолатлардан бирига ўтиш муқаррардир. Бу икки хоссага эга бўлган матрица стохастик (эхтимолли) матрица дейилади.

Бир жинсли оддий Марков занжири ташкил этувчи жараён бошланғич тақсимоти π ва бир қадамга ўтиш матрицаси Р=$\left|\,|P_{ij}|\,\right|$ орқали тўлиқ аниқланади.

Бу жараённи і ҳолатдан J ҳолатга к қадамга ўтказиш эҳтимоли.

$$P_{ij}^{(k)} = P(X_{n+k} = j / X_n = i)$$

Бир жинсли Марков занжирини к қадамга ўтиш матрицаси учун, тўла эҳтимол формуласига асосан қуйидаги тенглик (Колмагоров-Чепман тенгламаси) ўринли бўлади:

$$P(k) = P(L)P(k-L) = P^k$$

Демак, бир жинсли Марков занжири ташкил қилувчи тасодифий жараённи к қадамга ўтиш матрицаси бир қадамга ўтиш матрицасини к даражасига тенг.

Қандай шартда $P_{ij}^{(n)}$ яъни і ҳолатдан n қадамда j ҳолатга ўтиш эҳтимоли бошланғич і ҳолатга боғлик бўлмайди.

Марков теоремаси. Агар бирор n натурал сон учун P^n матрицанинг барча элементлари $P_{ij}^{(n)} > 0$ бўлса, қуйидаги лимит мавжуд бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = P_j$$

Бу лимит (эргодик теорема) бошланғич і ҳолатга боғлиқ бўлмайди.

Бу ерда, P_J финал (лимитик) эҳтимол. Бу финал эҳтимолликлар қуйидаги тенгламалар системасининг ечимидан иборат бўлади:

$$\left\{ \sum_{i=1}^{S} P_i P_{ij} = P_j \qquad \sum_{i=1}^{S} P_i = 1, \qquad j=1,2,3,\ldots,S \right. \qquad (1)$$

Бу эргодик теоремага кўра а) Т вақтда і ҳолатда ўртача бўлиши P_i Т;

б) і ҳолатга ўртача қайтиш (оралиғи)

$$m_{ii} = \frac{1}{p_i}\ _{ii} \quad \text{бўлади.} \qquad (2)$$

Марков занжири ташкил қиладиган жараёнлар бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган ҳоллар учун жуда яхши ўрганилган ва турли соҳаларда тадбиқларга эга.

1-мисол. Энди Марков занжирига қишлоқ хўжалигидан мисоллар келтирамиз. Икки ҳолатли Марков занжири ушбу бир қадамга ўтиш матрицаси билан берилган:

$P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ қуйидагиларни топиш талаб этилади:

1) p^8=? Саккиз қадамга ўтиш матрицасини;
2) Финал эҳтимолларни;
3) Ҳар бир ҳолатга ўртача қайтиш вақти топилсин.

$$P^2 = PP = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,52 & 0,48 \\ 0,36 & 0,64 \end{pmatrix}$$

$$P^4 = P^2 P^2 = \begin{pmatrix} 0,52 & 0,48 \\ 0,36 & 0,64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,52 & 0,48 \\ 0,36 & 0,64 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,443 & 0,557 \\ 0,417 & 0,583 \end{pmatrix}$$

$$P^8 = P^4 P^4 = \begin{pmatrix} 0,4281 & 0,5719 \\ 0,4274 & 0,5726 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,43 & 0,57 \\ 0,43 & 0,57 \end{pmatrix}$$

2) Финал эҳтимолларни (*) системасини ечиб топамиз.

$$\sum_{i=1}^{2} P_i P_{ij} = P_j \quad \sum_{j=1}^{2} P_j = 1$$

$$\begin{cases} 0.2p_1 + 0.6p_2 = p_1 \\ 0.8p_1 + 0.4p_2 = p_2 \end{cases} \quad \begin{cases} 0.8p_1 = 0.6 \\ 4p_1 = 3p_2 \end{cases} \quad p_1 + p_2 = 1 \quad 3p_2/4 + p_2 = 1 \quad 7p_2 = 4$$

$p_2=4/7\approx 0{,}57$ $\qquad p_1 = 3p_2/4=3/4\cdot 4/7=0{,}43$ ларни P^8 ни элементлари билан солиштирсак иккаласини ўзаро жуда яқин эканлигини $p_1\approx 0.43$, $p_2\approx 0.57$ топамиз. Ўртача 11 ҳолатдан 22 ҳолатга ўтиш қадами мос равишда қуйидагича бўлади:

3) $m_{11}=1/p_1=1/3\approx 2{,}33$, $\qquad m_{22}=1/p_2=1/4/7=7/4=1{,}75$.

<u>2-мисол</u>. Олма ҳосилдорлигини 2 йиллик даврга эга эканлигини кўп йиллик кузатишлар кўрсатмоқда. Бу жараённи $\Omega=\{E_1,E_2\}$ икки ҳолатли бир жинсли оддий Марков занжири ташкил қилади деб қараб ўрганиш мумкин. E_1-олма ҳосилдорлигини яхши бўлиши ҳодисаси, E_2-олма ҳосилдорлиги ёмон бўлиш ҳодисалари бўлсин. Агар P_{11}-ўтган йили ҳосилдорлик яхши бўлган бўлса, бу йил ҳам яхши бўлиш эҳтимоли; P_{21}-ўтган йили ҳосилдорлик ёмон бўлган бўлса, бу йил яхши бўлиш эҳтимоли; P_{22}-ўтган йили олма ҳосилдорлиги ёмон бўлган бўлса, бу йил ҳам ёмон бўлиш эҳтимоллари бўлса, бу бир жинсли Марков занжири ташкил қилувчи тасодифий жараённи бир қадамга ўтиш матрицаси қуйидагича бўлади.

$$P=\begin{pmatrix}0.3 & 0.7\\ 0.8 & 0.2\end{pmatrix}$$

Кўп йиллик кузатишлар шуни кўрсатадики P_{11} ва P_{21} доимо P_{11} P_{22} га қараганда катта бўлади. (1) формула ёрдамида финал эҳтимолларни топамиз:

$$\begin{matrix}P_1 & P_{11}+ & P_2 P_{12} & =P_1\\ P_1 & P_{21}+ & P_2 P_{22} & =P_2\end{matrix}\quad \begin{cases}0{,}3P_1+0{,}7P_2=P\\ 0{,}8P_1+0{,}2P_2=P_2\end{cases}\qquad P_1+P_2=1,\ 0{,}7P_2=0{,}7P_1\ \ P_1=P_2$$

келиб чиқади.

$P_1+\ P_2=1$ шартдан $2\ P_1=1$, финал эҳтимоллар $P_1=P_2=(1/2)$ келиб чиқади. Бундан (2) га асосан ўртача олма учун серхосил йил $m_{11}=(1/P_1)=(1/(1/2))=2$ йил бўлишлиги келиб чиқади. Демак, олманинг ҳосилдорлигини 2 йиллик даврийликка эга бўлган бир жинсли оддий Марков занжири ташкил этувчи тасодифий жараён деб қараш мумкин.

3-мисол. Қишлоқ хўжалигида дарё сувларининг йиллик оқими миқдорини ўзгариб туриши муҳим роль ўйнайди. Бу жараённи тўртта $\Omega=\{1,2,3,4\}$ ҳолатда бўлади деб фараз қилиб, уларни қуйидагиларга ажратамиз: $1^{чи}$ ҳолат E_1 – энг кам сувли йил яъни қурғоқчилик келган йил, $2^{чи}$ E_2 - кам миқдорда сувли йил, $3^{чи}$ E_3 – ўртача сувли йил, $4^{чи}$ E_4 – сер сув бўлган йил бўлсин. Тажриба шуни кўрсатадики p_{11} =0,2 яъни ўтган йили дарёда энг кам сув бўлган бўлса, бу йил ҳам энг кам сув бўлиш эҳтимоли, p_{12} =0,4 ўтган йил энг кам сув бўлган бўлса, бу йил етарли миқдорда сув бўлиш эҳтимоли, p_{14} =0 ўтган йили энг кам сув бўлган жинсли Марков занжири ташкил қилувчи тасодифий жараённи бир қадамга ўтиш матрицаси қуйидагича бўлади:

$$P=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,4 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 & 0,4 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Бу ҳол учун (1) системани ечиб, финал эҳтимолларни топамиз. Натижада (2) га асосан ўртача қурғоқчилик 6-7 йилда бўлишлиги серёғин йил 12-13 йилда бўлишлиги келиб чиқади.

4-мисол. Қишлоқ хўжалиги экинларига солинадиган фосфорли ўғит молекуласини тўртта ҳолатли бир жинсли оддий Марков занжири ташкил этувчи $\Omega=\{1,2,3,4\}$ «Экологик система» сифатида ўрганамиз. E_1 – тупроқ, E_2 – ўсимлик, E_3 – ўсимликни истеъмол қилувчи ҳайвонлар, E_4 – шу майдонда етиштириладиган ҳосилдан сотиш учун тайёрланган барча маҳсулотлар бўлсин. Натижада қуйидаги ўтиш матрицасига эга бўламиз.

$$P=\begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{array} \\ \left\|\begin{array}{cccc} 0,6 & 0,3 & 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 & 0 \\ 0,75 & 0 & 0,2 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\| \end{array}$$

Оддий усул билан матрицаларни кўпайтириш қойдасига асосан p^2, p^3 ва p^4 ларни ҳисоблаймиз:

$$p^2=\left\|\begin{array}{cccc} 0,390 & 0.300 & 0.150 & 0.160 \\ 0,475 & 0.190 & 0.300 & 0.035 \\ 0.600 & 0,225 & 0,040 & 0.135 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\|, \quad p^4=\left\|\begin{array}{cccc} 0,34600 & 0,207750 & 0,154500 & 0,253150 \\ 0,455500 & 0.246100 & 0.140250 & 0,158150 \\ 0,364875 & 0,231750 & 0.159100 & 0,244275 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\|$$

Бундан масалан фосфор молекуласини E_4 ҳолатдан 4 қадамда E_4 ҳолатга ўтиш эҳтимоли $P_{44}^{(4)}=0.253150$.

Агар фосфор молекуласини қайси ҳолатдан бошланиши маълум бўлса; яъни тасодифий бўлса, P^0 бошланғич тақсимот $P^0=\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$ тенг имкониятли бўлади. Марков теоремасига асосан 4 қадамда ўтиш эҳтимоли

$$P^0\cdot P^4=(0,3012;0,1714;0,1135;0,4139)$$

Бундан фосфор молекуласининг қаралаётган «Экологик система» дан 4 қадамда чиқиш эҳтимоли $p^{(4)}$ (4)=0,4139 эканлиги келиб чиқади.

6.5. Намунавий масалалар ечиш

1-масала. Маълум бир омонат кассасига қўйилган жамғармалар миқдори **20000000** сўмга тенг. Тасодифий танланган жамғарманинг миқдори **100000** сўмдан кичик бўлиш эҳтимоли **0,8** га тенг бўлса, шу омонат кассасига пул қўйган мижозларнинг сони топилсин.

Ечиш: X тасодифий миқдор тасодифий равишда танланган жамғарманинг миқдори ва **n** эса омонат кассасига пул қўйган барча мижозларнинг сони бўлсин. Масаланинг шартига кўра:

$$MX=\frac{2000000}{n}; \qquad P(X<100000)=0{,}8$$

Марков тенгсизлигига кўра қуйидагиларни ҳосил киламиз:

$$P(X<100000)\geq 1-\frac{MX}{100000}:$$

$$0{,}8\geq 1-\frac{20000000}{n\cdot 100000}; \qquad 200\geq n\cdot 2 \qquad n\leq 1000,$$

Жавоб: n ≤ 1000.

2-масала. ("Уч сигма" қоидаси), Чебишев тенгсизлигидан фойдаланиб, тасодифий миқдор ўзининг математик кутилмасидан уч карра ўртача квадратик четлашишдан камроқ миқдорга фарқ қилиш эҳтимолини баҳоланг.

Ечиш: Масаланинг шартига асосан $\varepsilon = 3\cdot\sigma(X)$. Бу қийматни Чебишев тенгсизлигига қўйсак.

$$P\{|X-MX|\angle 3\cdot y(X)\}\geq 1-\frac{DX}{9\cdot(y(X))^2}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}.$$

Жавоб: $P\{|X-MX|\angle 3\cdot y(X)\}\geq \frac{8}{9}.$

3-масала. Ҳар бирининг дисперсияси **3** дан катта бўлмаган **1500** та боғлиқсиз тасодифий миқдорларнинг ўртача арифметик қиймати уларнинг математик кутилишларининг ўртача арифметигидан четлашиши **0,6** дан катта бўлмаслик эҳтимолини баҳоланг.

Ечиш: n та тасодифий миқдорнинг ўртача арифметик қиймати $\frac{1}{n}(X_1+X_2+\ldots+X_n)$ ҳам тасодифий миқдор бўлади. Бу тасодифий миқдорнинг математик кутилиши $\frac{1}{n}$ **($MX_1+MX_2+\ldots+MX_n$)** га тенг.

чебишев тенгсизлиги **P** $\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}MX_iMX_i\right|\angle e\right\}\geq 1-\frac{C}{ne^2}$

га асосан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P\left\{\left|\frac{1}{1500}\sum_{i=1}^{1500}X_i-\frac{1}{1500}\sum_{i=1}^{1500}MX_i\right|\angle 0,6\right\}\geq 1-\frac{3}{1500\cdot 0,6^2}=0,998$$

Жавоб: P = 0,998.

4-масала. Қурилма **10** та ўзаро боғлиқ бўлмаган элементдан ташкил топган. Ҳар бир элементнинг **t** вақтда ишдан чиқиш эҳтимоли **0,05** га тенг. Чебишев тенгсизлигидан фойдаланиб, ишдан чиққан элементлар сони ва уларнинг **t** вақт ичидаги ўртача сони (математик кутилмаси) орасидаги фарқ абсолют қиймати бўйича: **а) 2** дан кичик; **б) 2** дан кичик эмас бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечиш: а) X-t вақт ичида ишдан чиққан элементлар сони **n=10** ва **P=0,05** параметрли биномиал тақсимотга эга бўлган дискрет тасодифий миқдор. У ҳолда, **X=n·p=10. 0,05=0,5; ДX=npq10.0,05.0,95=0,475** Чебишев тенгсизлиги, яъни

$$P\{|X-MX|<e\}\geq 1-\frac{DX}{e^2} \text{ га}$$

MX=0,5; ДX=0,475 ва **ε=2** қийматларни қўйсак,

$$P\{|X-0,5|<2\}\geq 1-\frac{0,475}{2^2}=0,12$$

б) $|X-0,5|<2$ ва $|X-0,5|\geq 2$ ҳодисалар ўзаро қарама қарши бўлгани учун уларнинг эҳтимоллари йиғиндиси **1** га тенг. Демак,

$$P\{|X-0,5|>2\}\geq 1-0,12=0,88$$

Жавоб: а) $P\{|X-0,5|<2\}\geq 0,12$; б) $P\{|X-0,5|>2\}\leq 0,88$

5-масала. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги қуйидаги тақсимот қонуни билан берилган:

X_i	$-na$	0	na
Π_i	$\frac{1}{2n^2}$	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

Берилган кетма-кетликка Чебишев теоремасини қўллаш мумкинми?

Ечиш: Тасодифий миқдорлар кетма-кетлигига Чебишев теоремасини қўллаш учун уларнинг жуфт-жуфти билан ўзаро боғлиқ бўлмаслиги ва текис чегараланган дисперсияларга эга бўлиши етарлидир. Берилган тасодифий миқдорлар ўзаро боғлиқ бўлмаганлиги учун улар албатта жуфт-жуфти билан ўзаро боғлиқ бўлмайди, яъни Чебишев теоремасининг **1**-шарти ўринли бўлади.

Дисперсияларнинг текис чегараланганлик шартининг бажарилишини текширамиз. Аввал X_n ларнинг математик кутилмасини топамиз:

$$MX_n=(-na)\cdot\frac{1}{2n^2}+0\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+(na)\cdot\frac{1}{2n^2}$$

Демак, X_n тасодифий микдорларнинг дисперсиялари қуйидагига тенг:

$$ДX_n=MX_n^2-(MX)^2=(-na)^2\cdot\frac{1}{2n^2}+0^2\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+(na)^2\cdot\frac{1}{2n^2}-0^2=a^2$$

Шундай қилиб, берилган тасодифий миқдорлар ҳар бирининг дисперсияси a^2 сони билан текис чегараланган ва Чебишев теоремасининг 2-шарти ҳам ўринли. Демак, барча шартлар бажарилаётгани сабабли, берилган кетма-кетликка Чебишев теоремасини қўллаш мумкин.

Жавоб: Қўллаш мумкин.

6.5. Мустақил иш учун масалалар

1. Чебишев тенгсизлигидан фойдаланиб, тасодифий миқдор ўзининг математик кутилмасидан камида икки карра ўртача квадратик четлашишга фарқ қилиш эҳтимолини баҳоланг. **Жавоб:** $P\{|X-MX|\geq 2\cdot y\}\leq 1/4$.

2. Агар **ДХ=0,004** бўлса, Чебишев тенгсизлигидан фойдаланиб, $|X-MX|<0{,}2$ бўлиш эҳтимолини баҳоланг.

Жавоб: $P\{|X-MX|<0{,}2\}\geq 0{,}9$.

3. Агар $P\{|X-MX|<e\}\geq 0{,}9$ ва **ДХ=0,009** бўлса, Чебишев тенгсизлигидан фойдаланиб ε қийматини топинг.

Жавоб: ε = 0,3.

4. **А** ҳодисанинг ҳар бир тажрибада рўй бериш эҳтимоли **0,5** га тенг. Чебишев тенгсизлигидан фойдаланиб, **100** та ўзаро боғлиқ бўлмаган тажриба ўтказилганда, **А** ҳодисанинг рўй беришлари сони **Х** ни **40** дан **60** гача бўлган оралиққа тушиш эҳтимолини баҳоланг.

Жавоб: $P\{40<X<60\}\geq 0{,}75$.

5. Дискрет тасодифий миқдор қуйидаги тақсимот қонуни билан берилган:

X	**0,1**	**0,4**	**0,6**
P	**0,2**	**0,3**	**0,5**

Чебишев тенгсизлигидан фойдаланиб, $|X - MX| < \sqrt{0,4}$ бўлиш эҳтимолини баҳоланг.

Жавоб: $P\{|X - 0,44| < \sqrt{0,4}\} \geq 0,909$.

6. Тайёрланаётган маҳсулотларнинг ўртача узунлиги (математик кутилмаси) **90** см га тенг бўлган тасодифий миқдордан иборат. Унинг дисперсияси **0,0225** га тенг. Чебишев тенгсизлигидан фойдаланиб:

а) $|X - MX| < 0,4$ бўлиш эҳтимолини;

б) маҳсулотнинг узунлиги **89,7** дан **90,3** гача бўлган оралиқда бўлиш эҳтимолини баҳоланг.

Жавоб: а) $P \geq 0,86$; б) $P \geq 0,75$.

7. $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги қуйидаги тақсимот қонуни билан берилган:

X_i	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$
P_i	1/4	1/2	1/4

Бу кетма-кетликка Чебишев теоремасини қўллаш мумкинми?

Жавоб: Қўллаш мумкин: $MX_n=0$ ва $ДX_n=2$.

8. Аҳоли истиқомат қиладиган ҳудудда кундалик ўртача сув сарфи **50000** литрни ташкил этади. Шу жойда бир кунлик сув сарфи **120 000** литрдан ошмаслик эҳтимолини баҳоланг.

Жавоб: $П \geq 0,583$.

9. Картошканинг ўртача оғирлиги **100 гр.** Марков тенгсизлигидан фойдаланиб, тасодифий равишда олинган картошканинг оғирлиги **300 гр** дан ошмаслик эҳтимолини баҳоланг.

Жавоб: $P \geq 0,66$.

10. Бир дўкон савдо фаолиятининг таҳлили натижаларига кўра бир ойлик ўртача муомала харажатлари **300** шартли пул бирлигини ташкил этиши аниқланади. Кейинги ойда бу ҳужжатлар **280-320** пул бирлиги чегарасидан чиқмаслик эҳтимолини топинг. Ҳаражатлар дисперсияси **16** га тенг.

Жавоб: $P>0,96$.

11. 10 000 гектар ердаги ўртача ҳосилдорликни аниқлаш мақсадида **100** га лик майдоннинг ҳар биридан танланма учун **1** га дан олинган. Агар **100** га лик ҳар бир майдондаги дисперсия **2** ср дан ошмаса, ўртача танланма ҳосилдорлик бутун майдондаги хақиқий ўртачасидан кўпи билан **0,5** ср га фарқ қилиши эҳтимолини баҳоланг.

Жавоб: $P \geq 0,92$.

12. 10 000 га ердаги ўртача ҳосилдорликни аниқлаш мақсадида **200** га лик майдоннинг ҳар биридан танланма учун **1** га дан олинган. Агар **200** га лик ҳар бир танланма майдондаги дисперсия **2,5** ср дан ошмаса, **0,8** дан кам бўлмаган ишончлилик билан ўртача танланма ҳосилдорлик бутун майдондаги ҳақиқий ўртачасидан кўпи билан қанчага фарқ қилиши мумкин?

Жавоб: $\varepsilon=0,5$.

13. Деталлар **250** та қутига жойлаштирилган. Деталнинг ўртача массасини аниқлаш учун ҳар бир қутидан биттадан детал олинган. Агар бир қути бўйича ҳисобланган дисперсия **4** дан ошмаса, танланмадаги детал ўртача массасининг ҳақиқий ўртача массадан кўпи билан қанчага фарқ қилишини аниқланг. Ишончлилик **0,9** дан кам бўлмасин.

Жавоб: $\varepsilon=0,4$.

14. Бир завод маҳсулотининг ўртача **70%** и **1**-навли экани маълум. **10 000** та маҳсулот ичида биринчи навлиларнинг нисбий частотаси жойлашадиган чегарани **0,9** дан кам бўлмаган эҳтимоллик билан аниқланг.

Жавоб: $P(0,686<m/n<0,714) \geq 0,9$.

15. Заводда тайёрланаётган стержени узунлиги **X** эсодифий миқдор бўлиб, **М (X) = 90** см ва **Д (X) = 0, 0225** см а тенг. Стерженни узунлигини унинг математик утилишидан оғишини абсолют қийматини **0,4** см дан шмаслик эҳтимолини топинг.

$$P\{|X - MX| \geq e\} \leq \frac{DX}{e^2}$$

16. 6000 гектар майдондан олинган умумий ҳосил **72000** центнерга тенг. Шу майдонга тегишли **1** гектар ердан олинган ҳосилни **18** центнердан ошмаслик эҳтимоли топилсин.

$$P\ (x \leq e) \geq 1 - \frac{M\ (X)}{e}$$

17. Фермер ҳўжалигига тегишли ишчилар **1** ойда **1050** меҳнат куни ишлашган. Шу ҳўжалика тегишли тавакал олинган ишчини меҳнат кунини **35** кундан кўп бўлиш эҳтимоли **0,6** дан кичик бўлса, фермер ҳўжалигида қанча ишчи бор.

18. 1200 та ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар ҳар бирининг дисперсияси **3** дан ошмайди. Ва миқдорлар ўрта арифметик қийматини улар математик кутилишлари ўрта арифметик қийматидан оғишини **0,2** дан ошмаслик эҳтимоли топилсин.

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} MX_k\right| < e\right\} \geq 1 - \frac{D\ (x)}{ne^2}$$

19. Ўртача ҳосилдорликни аниқлаш учун ҳар гектаридан **13,4** центнер ҳосил олинган **400** гектар ер ажратилди. Агар танланма маълумотлар бўйича олинган ўртача квадратик четланиш **2** сентнерни ташкил этса ҳар гектар ердан аслида олинадиган ўртача ҳосилни **13,2** центнердан кам бўлмаслик эҳтимолини топинг.

20. Гўштга боқилаётган қорамоллар вазнини аниқлаш учун ўртача тирик вазни **415** кг ва ўртача квадратик четланиши **21** кг бўлган **1225** та қорамолни вазни текширилган. **0,9875** эҳтимолик билан қоромоллар ўртача вазни учун баҳо топилсин.

21. Университетида таълим олаётган талабаларни ўртача ёшини аниқлаш мақсадида **200** та талаба текширилган Агар талабалар ёши тасодифий миқдор бўлиб дисперсияси **6,25** га тенг бўлса танланма ўртача ёшни бош ўртача ёшдан оғишини абсолют қийматини **0,5** ёшдан ошмаслик эҳтимолини топинг.

7 – БОБ. ИККИ ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАР СИСТЕМАСИ

7.1 ИККИ ЎЛЧОВЛИ ТАСОДИФИЙ МИҚДОРНИНГ ТАҚСИМОТ ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИЯЛАРИ

Олдинги бобларда кўрилган тасодифий миқдорлар у хоҳ дискрет бўлсин, хоҳ узлуксиз бўлсин биргина қийматлар билан аниқланар эди, уларни бир ўлчовли тасодифий миқдорлар деб қараш мумкин.

Кўпгина масалаларда бир ўлчовли тасодифий миқдорларгина эмас, балки икки, уч ва ҳокозо ўлчовли тасодифий миқдорларни, яъни қабул қиладиган қийматлари $x=(x_1,x_2)$ ёки $x=(x_1, x_2, x_2)$ ва ҳоказо нуқталардан иборат бўлган тасодифий миқдорлар тақсимоти ва қонуниятларини ўрганишга тўғри келади. Биз асосан икки тасодифий миқдорлар системаси билан чегараланамиз.

Икки ўлчовли тасодифий миқдор **(X; Y)** орқали белгиланади. Бунда **X** ва **Y** тасодифий миқдорларнинг хар бири **“ташкил этувчилар”** ёки **“компоненталар “** деб, улар биргаликда қаралаётганда эса **“икки тасодифий миқдор системаси”** деб аталади.

(X; Y) икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси қуйидагича аниқланади:

$$F(x, y) = P\{X < x, Y < y\}$$

ва геометрик нуктаи назардан **(X; Y)** нуқтанинг учи **(x; y)** да бўлиб, ундан чапда ва пастда жойлашган чексиз квадратга тушиш эҳтимолини билдиради.

Тақсимот функциясининг хоссалари:

1. $0 \le F(x; y) \le 1.$

2. $F(x, y)$ иккала аргументи бўйича камаймайдиган функция:

$$\begin{matrix} F(x_2, y) \ge F(x_1, y), & & x_2 > x_1 & \\ & \text{агар} & & \text{бўлса.} \\ F(x, y_2) \ge F(x, y_1), & & y_2 > y_1 & \end{matrix}$$

3. $F(-\infty, y) = 0, \quad F(x, -\infty) = 0, \quad F(-\infty, -\infty), \quad F(\infty, \infty) = 1$

4. $F(x, \infty) = F_X(x), \quad F(\infty, y) = F_Y(y),$

$F_X(x)$, $F_Y(y)$ - мос равишда **X** ва **Y** ташкил этувчиларининг тақсимот функциялари.

5. **(X, Y)** тасодифий нуқтанинг учлари (x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2) да бўлган Д тўртбурчакка тушиш эҳтимоли қуйидагича аниқланади:

$$P\{X, Y) \in D\} = P\{x_1 \le X < x_2; y_1 \le Y < y_2\} =$$
$$= F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1 y_1)$$

Бу ерда, табиийки, $(x_1 < x_2,\ y_1 < y_2)$

Икки ўлчовли дискрет тасодифий миқдор деб ташкил этувчилари дискрет бўлган **(X; Y)** тасодифий миқдорлар системасига айтилади.

Икки ўлчовли узлуксиз тасодифий миқдор деб ташкил этувчилари узлуксиз бўлган **(X; Y)** тасодифий миқдорлар системасига айтилади.

Икки ўлчовли дискрет **тасодифий миқдор тақсимот қонуни** деб уларнинг қабул қилувчи қийматларни барча жуффтликлари (x_i, y_i) ва жуфтликларнинг эҳтимолликлари $n_{ij}=n(x_i; y_i)$ $(i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,m)$ кўрсатилган қуйидаги жадвалга айтилади.

Y \ X	x_1	…	x_i	…	x_n
y_1	$n(x_1;y_1)$	…	$n(x_i;y_1)$	…	$P(x_n;y_1)$
…	…	…	…	…	…
y_j	$P(x_1;y_j)$	…	$p(x_i;y_j)$	…	$P(x_n;y_j)$
…	…	…	…	…	…
y_m	$p(x_1;y_m)$	…	$p(x_i;y_m)$	…	$P(x_m;y_n)$

Бу ерда $p_{ij}=p(x_i; y_j)= P(X=x_i; Y=y_j)$, $(i=1, 2, \ldots, n;\ j=1, 2, \ldots, m;)$

Икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини билган ҳолда ҳар бир ташкил этувчисининг тақсимот қонунини топиш мумкин:

$$P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{n} p(x_i; y_j) \qquad (i = 1,2,\ldots, n;)$$

$$P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{n} p(x_i; y_j) \qquad (j = 1,2,\ldots, m;)$$

Узлуксиз тасодифий миқдорларни **F(x,y)** тақсимот функцияси ёки **f(x,y)** зичлик функцияси орқали аниқлаш мумкин.

(X,Y) икки ўлчовли узлуксиз тасодифий миқдорлар системас инининг $f(x, y)$ **зичлик функцияси** деб системанинг тақсимот функциясидан олинган иккинчи тартибли аралаш ҳосиласига айтилади.

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = F''_{xy}(x, y)$$

Зичлик функциясининг хоссалари:

1. $f(x, y) > 0$
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dxdy = 1$
3. $F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(u, v)\, dudv$;

бу ерда **F(x, y)** **(X, Y)** тасодифий миқдорлар системасининг тақсимот функцияси.

4. **(X, Y)** тасодифий нуқтанинг учлари $(x_1; y_1)$, $(x_1; y_2)$, $(x_2; y_1)$, $(x_2; y_2)$ $(x_1<x_2,\ y_1<y_2)$ нуқталарда бўлган Д тўртбурчакка тушиш эҳтимоли қуйидагича аниқланади:

$$P\{(X,Y) \in D\} = \iint\limits_{D} f(x, y)\, dxdy$$

Ташкил этувчиларнинг зичлик функциялари қуйидаги формулалардан топилади:

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy,$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx$$

X ва **Y** тасодифий миқдорлар **боғлиқсиз** дейилади, агар улардан ихтиёрий бирининг тақсимот қонуни иккинчи тасодифий миқдорнинг қандай қиймат қабул қилганига боғлиқ бўлмаса.

Икки тасодифий миқдор боғлиқсиз бўлишининг зарур ва етарли шарти қуйидагича:

Теорема: Икки **X** ва **Y** тасодифий миқдор боғлиқсиз бўлиши учун **(X, Y)**-икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг **F(X, Y)** тақсимот функцияси ташкил этувчилари тақсимот функцияларининг кўпайтмасига тенг бўлиши зарур ва етарлидир:

$$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$$

Бу теоремадан ушбу натижани олиш мумкин:

Натижа: Икки **X** ва **Y** тасодифий миқдор боғлиқсиз бўлиши учун **(X, Y)** –икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг **f(X, Y)** биргаликдаги зичлик функцияси ташкил этувчилари зичлик функцияларининг кўпайтмасига тенг бўлиши зарур ва етарлидир:

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

X ва **Y** ташкил этувчиларнинг математик кутилма ва дисперсиялари ҳамда **(X,Y)** тасодифий нуқтанинг ихтиёрий **Д** соҳага тушиш эҳтимолини топиш формулалари қуйидаги жадвалдан келтирилган:

X ва Y дискрет тасодифий миқдорлар	X ва Y узлуксиз тасодифий миқдорлар
$F(x,y)=\sum_{x_1<x}\sum_{y_1<y} p_{ij}$	$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dudv$
$MX=\sum_i\sum_j x_i\cdot p_{ij}$ $MY=\sum_i\sum_j y_j\cdot p_{ij}$	$MX=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x,y)\,dxdy$ $MY=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot f(x,y)\,dxdy$
$DX=\sum_i\sum_j (x_i-MX)^2\cdot p_{ij}$ $DY=\sum_i\sum_j (y_j-MY)^2\cdot p_{ij}$	$DX=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-MX)^2\cdot f(x,y)\,dxdy$ $DY=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y-MY)^2\cdot f(x,y)\,dxdy$
$P\{(X,Y)\in D\}=\sum_{(x_i,y_j)\in D} p_{ij}$	$P\{(X,Y)\in D\}=\int_D f(x,y)\,dxdy$

Ташкил этувчиларнинг дисперсияларини ҳисоблаш учун дисперсиянинг **$ДX=MX^2-(MX)^2$** хоссасини эътиборга олган ҳолда қуйидаги формуладан фойдаланиш ҳам мумкин:

$$DX=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x,y)\,dxdy-(MX)^2=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f_X(x)\,dx-(MX)^2$$

Қуйидаги катталикларга $y(X)=\sqrt{DX}$, $y(Y)=\sqrt{DY}$ - **X, Y** тасодифий миқдорларнинг **ўртача квадратик четлашиши (оғиши)** дейилади.

(MX, MY) нуқта **(X, Y)** икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг **сочилиш маркази** дейилади.

7.2 ДИСКРЕТ ВА УЗЛУКСИЗ ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАР СИСТЕМАСИ ТАШКИЛ ЭТУВЧИЛАРИНИНГ ШАРТЛИ ТАҚСИМОТ ҚОНУНЛАРИ

Дискрет тасодифий миқдорлар системасини ташкил этувчиларининг шартли тақсимот қонунлари

(X,Y) икки ўлчовли дискрет тасодифий миқдорни кўриб чиқамиз. Ташкил этувчиларнинг мумкин бўлган қийматлари қуйидагича бўлсин:

$$x_1, x_1, \ldots, x_n \; ; \; y_1, y_2, \ldots, y_m \quad (n \geq 2, m \geq 2)$$

У ҳолда, **X** ташкил этувчининг **Y**$=y_i$ шарти остидаги шартли тақсимоти қуйидагича аниқлаҳади:

$$\frac{X}{P\,(X/Y = y_j)} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p\,(x_1/y_j) & p\,(x_2/y_j) & \ldots & p\,(x_n/y_j) \end{pmatrix}$$

Бунда **п**(x_i / y_j) эҳтимолликлар (яъни, агар **Y** тасодифий миқдор y_j қийматни қабул қилганлиги маълум бўлса, **X** тасодифий миқдор x_i қийматни қабул қилиш эҳтимоли) шартли эҳтимоллик формуласига асосан ҳисобланади:

$$p\,(x_i/y_j) = \frac{p\,(x_i, y_j)}{p\,(y_j)}, \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

Y ташкил этувчининг шартли тақсимоти ҳам худди шу каби таърифланади ва **p**(y_j /x_i) шартли эҳтимолликлар қуйидаги тенгликдан топилади:

$$p\,(y_j/x_i) = \frac{p\,(x_i, y_j)}{p\,(x_i)}, \qquad (j = 1,2,\ldots,m)$$

Шартли тақсимот учун ҳам эҳтимолликларнинг йиғиндиси бирга тенг:

$$\sum_{i=1}^{n} p\,(x_i/y_j)=1,\,(j=1,2,\ldots,m)\quad;\quad \sum_{j=1}^{m} p\,(y_j/x_i)=1,\,(i=1,2,\ldots,n)\;.$$

Бу формулалардан ҳисоблаш натижаларини назорат қилиш учун фойдаланилади.

Узлуксиз тасодифий миқдорлар системаси ташкил этувчиларининг шартли тақсимот қонунлари

(X,Y) икки ўлчовли узлуксиз тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси **f(x, y)** бўлсин. Маълумки, **X** ва **Y** ташкил этувчиларнинг зичлик функциялари қуйидаги формулалардан топилади:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f\,(x,y)\;dy,\qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f\,(x,y)dx$$

X ташкил этувчининг берилган **Y=y** қийматдаги **φ(x/y)** шартли зичлиги деб **(X,Y)** системанинг **f(x, y)** биргаликдаги зичлик функциясининг **Y** ташкил этувчининг f_y **(y)** зичлик функциясига нисбатига айтилади:

$$\varphi(x/y)=\frac{f\,(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{f\,(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f\,(x,y)\,dx}.$$

Y ташкил этувчининг берилган **X = x** қийматдаги ш (y/x) шартли зичлиги ҳам шу каби таърифланади:

$$\text{ш}\,(y/x)=\frac{f\,(x,y)}{f_X(x)}=\frac{f\,(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f\,(x,y)\;dx}.$$

Оддий зичлик функциялари каби шартли зичлик функциялари ҳам қуйидаги хоссаларга эга :

$$\varphi(x/y) \geq 0,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x/y)dx = 1;\quad \varphi(y/x) \geq 0,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y/x)\ dy = 1.$$

7.3. КОВАРИАЦИЯ ВА КОРРЕЛЯЦИЯ КОЕФФИЦИЕНТЛАРИ. ЧИЗИҚЛИ РЕГРЕССИЯ ТЕНГЛАМАСИ

(X,Y) – икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг **ковариация коеффициенти** деб, қуйидаги математик кутилишга айтилади:

$$cov\ (X,Y) = M\ [(X - MX)\cdot(Y - MY)]$$

$$\text{ёки } cov\ (X,Y) = M\ (X\cdot Y) - MX\cdot MY.$$

Агар **(X,Y)** - икки ўлчовли дискрет тасодифий миқдор бўлса, ковариация коеффициент қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$cov\,(X, Y) = \sum_i \sum_j p_{ij}(x_i - MX)\cdot(y_j - MY) =$$

$$= \sum_i \sum_j p_{ij}\cdot x_i \cdot y_j - MX\,MY$$

Агар **(X,Y)** икки ўлчовли узлуксиз тасодифий миқдор бўлса, ковариация коеффициенти қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$cov\,(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - MX)\quad(y - MY)\ \ f\,(x, y)\ \ dxdy =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf\,(x, y)\ \ dxdy - MX - MY$$

Бу еда **f(x, y)** – **(X,Y)** икки ўлчовли узлуксиз тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси.

X ва **Y** тасодифий миқдорлар орасидаги чизиқли боғланиш даражасини **корреляция коеффициенти** оркали аникланади:

$$c\ (X, Y) = \frac{\operatorname{cov}\ (X, Y)}{\sqrt{DX \cdot Dy}}$$

Ҳар кандай иккита тасодифий миқдор учун $-1 \le c\ (X, Y) \le 1$. Агар **X** ва **Y** тасодифий миқдорлар ўзаро боғлиқ бўлмаса корреляция коеффициенти $c\ (X, Y) = 0$ ва бу ҳолда тасодифий миқдорлар **корреляцияланмаган** дейилади. Иккита ўзаро корреляцияланган тасодифий миқдорлар ўзаро боғлиқ бўлади, бироқ аксинчаси ўринли бўлмаслиги мумкин (яъни, тасодифий миқдорларнинг ўзаро боғлиқмаслигидан корреляция коеффициенти нолъга тенглиги келиб чиқади; корреляция коеффициенти нолъга тенглигидан уларнинг боғлик эмаслиги келиб чиқмайди; корреляция коеффициенти нолъдан фарқлилигидан уларнинг боғлиқ эканлиги келиб чиқади).

(X, Y) икки ўлчовли тасодифий миқдор бўлиб, унинг ташкил этувчилари **X** ва **Y** ўзаро боғлиқ бўлган тасодифий миқдорлар бўлсин. Улардан биттасини иккинчисининг чизиқли функцияси сифатида тасвирлаймиз: $Y \cong g\ (X) = aX + b$.

Y тасодифий миқдорнинг **X** тасодифий миқдорга **чизиқли ўртача квадратик регрессия** (ёки оддий чизиқли регрессияси) қуйидаги кўринишга эга :

$$g\ (x) = MY + c\frac{y_Y}{y_X}(x - MX)\ ,$$

Бу ерда **MX, MY** – математик кутилмалар, $y_X = \sqrt{DX}$, $y_y = \sqrt{DY}$ – ўртача квадратик четланишлар ва

$c = c\,(X, Y)$ - **X** ва **Y** тасодифий миқдорларнинг корреляция коэффициенти. Қуйидаги

$$b = c\frac{y_Y}{y_X} = \frac{cov(X, Y)}{DX}$$

коэффициентга **Y** тасодифий миқдорнинг **X** тасодифий миқдорга бўлган **регрессия коэффициенти** дейилади.

$$y - MX = c\frac{y_Y}{y_X}(x - MX)$$

тўғри чизиққа **регрессия тўғри чизиққа** дейилади.

$$y_Y^2(1 - c^2)$$

катталик **Y** тасодифий миқдорнинг **X** тасодифий миқдорга нисбатан **қолдиқ дисперсия** дейилади.Бу катталик **Y** нинг **g(x)=aX+b** чизикли функция билан алмаштирилганда йўл қўйилган хатоликнинг миқдорини билдиради. Корреляция коэффиценти $c = \pm 1$ бўлганида қолдик дисперсия нолъга тенг ва **Y, X** тасодифий миқдорлар орасида эса ўзоро чизикли ФУНКЦИОНАЛ боғликлик бор бўлади.

X тасодифий миқдорнинг **Y** тасодифий миқдорга бўлган регрессияси тенгламаси куйидагича бўлади:

$$x - MX = c\frac{y_X}{y_Y}(y - MY)$$

бу ерда

$$c\frac{y_X}{y_Y}\ \text{-X}$$

миқдорнинг **Y** миқдорга бўлган регрессия коэффиценти ва мос равишда $y_X^2(1 - c^2)$ катталик **X** миқдорнинг **Y** миқдорга нисбатан қолдиқ дисперсиясини билдиради.

Агар $c = \pm 1$ бўлса ,у ҳолда иккала

$$y - MX = c\frac{у_Y}{у_X}(x - MX) \quad ва$$

$$x - MX = c\frac{у_X}{у_Y}(y - MY)$$

регрессия чизиқлари устма-уст тушади.Тенгламалардан кўриниб турибдики, иккала регрессия чизиғи ҳам **(MX, MY)** нукта, яъни **(X,Y)** икки ўлчовли тасодифий микдорнинг сочилиш марказидан ўтади.

7.4 МАВЗУГА ДОИР НАМУНАВИЙ МАСАЛАЛАР

1-масала.(Икки ўлчовли дискрет тасодифий миқдор ташкил этувчиларнинг тақсимот қонунини топиш). Икки ўлчовли Дискрет тасодифий миқдор қуйидаги тақсимот қонуни билан берилган:

Y \ X	$x_1=2$	$x_2=5$	$x_3=10$
$y_1=1$	0,30	0,10	0,10
$y_2=4$	0,15	0,25	0,10

Ташкил этувчиларнинг тақсимот қонунларини ёзинг. Уларнинг миқдорий характеристикаларини ва сочилиш марказини топинг.

Ечиш: Устунлар бўйича эҳтимолликларни қўшиб чиқиб, **X** нинг қабул қиладиган кийматларнинг эҳтимолликларини топамиз:

$$P(x_1=2)=0{,}30+0{,}15=0{,}45$$
$$P(x_2=5)=0{,}10+0{,}25=0{,}35$$
$$P(x_3=10)=0{,}10+0{,}10=0{,}20$$

X ташкил этувчининг тақсимот қонуни у ҳолда қуйидагича бўлади:

X	$x_1=2$	$x_2=5$	$x_3=10$
P	0,45	0,35	0,20

X ташкил этувчисининг математик кутилиши, дисперсияси ва ўртача квадратик четлашишни топамиз:

$$MX=\sum_i\sum_j x_i\cdot P_{ij}=\sum_{i=1}^{3}x_i\cdot P\{X=x_i\}=$$

$$=2\cdot 0{,}45+5\cdot 0{,}35+10\cdot 0{,}20=4{,}65$$

$$DX=\sum_{i=1}^{3}x_i^2\cdot P\{X=x_i\}-(MX)^2=$$

$$=2^2\cdot 0{,}45+5^2\cdot 0{,}35+10^2\cdot 0{,}20-4{,}65^2=8{,}9275.$$

$$y(Y)=\sqrt{DX}=\sqrt{8{,}9275}=2{,}988$$

Сатрлар бўйича эҳтимолликларни қўшиб чиқиб. **Y** нинг қабул қиладиган қийматларининг эҳтимолликларини топамиз:

Р (й$_1$=1)=0,30+0,10+0,10=0,50;

Р (й$_2$=4)=0,15+0,25+0,10=0,50;

Y ташкил этувчининг тақсимот қонуни қуйидагича:

Y	$y_1=1$	$y_2=4$
P	0,50	0,50

Y ташкил этувчининг миқдорий характеристикалари ҳам **X** нинг характеристикалари каби ҳисобланади:

MY=2,5; ДY=2,25; σ(X)=0,15

Икки ўлчовли **(X,Y)** тасодифий миқдорнинг сочилиш маркази қуйидаги **(MX,MY)=(4,65; 2,5)** нуқтада ётади:

Жавоб:

P	0,45	0,35	0,20
X	$x_1=2$	$x_2=5$	$x_3=10$

Y	$y_1=1$	$y_2=4$
P	0,50	0,50

MX = 4,65; ДX = 8,93; σ(X) = 2,988; MY = 2,5; ДY = 2,25; σ(Y) = 1,5; (MX; MY) = (4,65; 2,5).

2-масала. (Тақсимот функцияси маълум бўлса, зичлик функциясини топиш). Икки ўлчовли **(X, Y)** тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси **Ф (х, у)** = $\sin x \cdot \sin y$ **(0 ≤ х ≤ π/2, 0 ≤ у ≤ р/2)** ва бошқа ҳолларда нольга тенг бўлса, унинг **f(х, у)** зичлик функциясини топинг.

Ечиш: Зичлик функциясининг таърифига асосан,

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}=F''_{xy}(x,y)\ .$$

Демак, тақсимот функциясидан **х** бўйича ҳусусий ҳосила олсак,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=\cos x\cdot\sin y.$$

Олинган натижадан **у** бўйича ҳусусий ҳосила оламиз ва изланган зичлик функциясини ҳосил қиламиз:

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}=\cos x\cdot\cos y.$$

Жавоб: (0 ≤ х ≤ р/2, 0 ≤ у ≤ р/2) да

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}=\cos x\cdot\cos y.$$

3-масала. (Ташкил этувчиларнинг тақсимот функциясини системанинг тақсимот функцияси орқали

топиш). **(X, Y)** - икки ўлчовли тасодифий миқдорлар системасининг **F(x, y)** тақсимот функцияси берилган:

$$F(x,y)=\begin{cases}1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}, & x\geq 0, y\geq 0;\\ 0, & x<0, y<0.\end{cases}$$

Ечиш: Икки ўлчовли тасодифий микдор таксимот функциясининг 4-хоссасига асосан $F(x,\infty)=F_X(x)$, $F(y,\infty)=F_y(y)$. Демак,

$$F_X(x)=(x,\infty)=\lim_{y\to\infty}F(x,y)=\lim_{y\to\infty}\begin{cases}1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}, & x\geq 0, y\geq\\ 0. & x<0, y<\end{cases}$$

$\lim\limits_{y\to\infty}(-2^{-y}+2^{-x-y})=0$ bo'lgani uchun

$$F_X(x)=\begin{cases}1-2^{-x}, & x\geq 0;\\ 0. & x<0.\end{cases}$$

Худди шу усул билан **Y** ташкил этувчисининг таксимот функциясини топамиз:

$$F_Y(y)=\begin{cases}1-2^{-y}, & y\geq 0;\\ 0. & y<0.\end{cases}$$

Жавоб: $F_X(x)=\begin{cases}1-2^{-x}, & x\geq 0;\\ 0. & x<0.\end{cases}$ $F_Y(y)=\begin{cases}1-2^{-y}, & y\geq 0;\\ 0. & y<0.\end{cases}$

4-масала. Икки ўлчовли дискрет тасодифий миқдор қуйидаги тақсимот қонунини билан берилган:

Y \ X	$x_1=2$	$x_2=5$	$x_3=8$
$y_1=0,4$	0,15	0,30	0,35
$y_2=0,8$	0,05	0,12	0,03

1) Ташкил этувчиларнинг тақсимот қонунларини топинг. **2) X** ташкил этувчининг **Y** ташкил этувчи $y_1=0{,}4$ қиймат қабул қилди деган шарт остидаги шартли тақсимот қонунини топинг. **3) Y** ташкил этувчининг **X** ташкил этувчи $x_1=5$ қиймат қабул қилди деган шарт остидаги шартли тақсимот қонунини топинг.

Ечиш: 1)Устунлар бўйич эҳтимолликларни қўшиб чиқиб **X** ташкил этувчининг тақсимот қонунини топамиз:

X	$x_1=2$	$x_2=5$	$x_3=8$
P	0,20	0,42	0,38.

Сатрлар бўйича эҳтимолликларни қўшиб чиқиб, **Y** ташкил этувчининг тақсимот қонунини топамиз:

Y	$y_1=0{,}4$	$y_2=0{,}8$
P	0,80	0,20.

2)ρ $(y_1=0{,}4)=0{,}8$ эканини эътиборга олиб, $p(x_i/y_j) = \dfrac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}$

$(i=1,\ 2,\dots,\ n)$ формуладан $j=1$ қийматда қуйидаги шартли эҳтимолликларни ҳисоблаймиз:

$$p(x_1/y_1) = p(x_1/y_1)\ /p(y_1) = 0{,}15/0{,}80 = 3/16;$$
$$p(x_2/y_1) = p(x_2/y_1)\ /p(y_1) = 0{,}30/0{,}80 = 3/8;$$
$$p(x_3/y_1) = p(x_3/y_1)\ /p(y_1) = 0{,}35/0{,}80 = 7/16.$$

ва ниҳоят, изланаётган шартли тақсимот қонуни қуйидагича:

X	2	5	8	
$P(X/y_1)$	3/16	3/8	7/16	бўлади.

Ҳисоб натижаларини текшириш мақсадида топилган эҳтимолликларни қўшиб чиқсак, уларнинг йиғиндиси **1** га тенг эканига ишонч ҳосил қиламиз.

3)$\rho(x_2=5)=0{,}42$ эканини эътиборга олиб, $p(y_j\ /x_i)=\dfrac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}$

$(j=1,2,\dots,\ m)$ формуладан $i=1$ қийматда қуйидаги шартли эҳтимолликларни ҳисоблаб, **Y** ташкил этувчининг тақсимот қонунини топамиз:

Y	**0,4**	**0,8**
P(Y/x_2)	**5/7**	**2/7**

Жавоб: Ташкил этувчиларнинг тақсимот қонунлари:

X	**x_1=2**	**x_2=5**	**x_3=8**
P	**0,20**	**0,42**	**0,38.**

Y	**y_1=0,4**	**й$_2$=0,8**
P	**0,80**	**0,20.**

Ташкил этувчиларнинг шартли тақсимот қонунлари:

X	**2**	**5**	**8**
P(X/y_1)	**3/16**	**3/8**	**7/16**

Y	**0,4**	**0,8**
P(Y/x_2)	**5/7**	**2/7**

5-масала. (X, Y) Икки ўлчовли тасодифий миқдор **($0 \le x \le \pi/2$, $0 \le y \le \pi/2$)**квадрат ичида $f(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \sin(x + y)$ зичлик функцияси билан берилган. Квадратдан ташқарида **f(x, y) = 0** га тенг. Тўғри **Y** ни **X** га ва тескари **X** ни **Y** га, регрессия тенгламасини топинг.

Ечиш: X ташкил этувчининг математик кутилма ва дисперсиясини топамиз:

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x, y)\ dxdy = \frac{1}{2} \cdot \int_{0}^{p/2}\int_{0}^{p/2} x \cdot \sin(x + y)\ dxdy = \frac{p}{4}.$$

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x, y)\ dxdy - (MX)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_{0}^{p/2}\int_{0}^{p/2} x^2 \cdot \sin(x + y)\ dxdy - \left(\frac{p}{4}\right)^2$$

икки маротаба бўлаклаб интегралласак, $DX = \frac{p^2 + 8p - 32}{16}$.

Худди шунингдек, **Y** учун: **MY**$= \frac{\pi}{4}$

$$DY=\frac{p^2+8p-32}{16}.$$

Ковариация коеффициентини топамиз:

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xy\cdot f\,(x,y)dxdy-MX\cdot MY=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int_{0}^{p/2p}\int_{0}^{2}x\cdot y\cdot\sin\,(x+y)\;\;dxdy-\left(\frac{p}{4}\right)^2=\frac{p}{2}-1-\left(\frac{p}{4}\right)^2\approx-0{,}04605.$$

Демак, корреляция коеффициенти қуйидагига тенг бўлади :

$$c\,(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}\,(X,Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}}=\frac{\frac{p}{2}-1-\left(\frac{p}{4}\right)^2}{\frac{p^2+8p-32}{16}}=\frac{p^2-8p+16}{p^2+8p-32}=-0{,}245.$$

Y нинг **X** га тўғри регрессия чизиғининг коеффициентини топамиз:

$$b=c\frac{y_Y}{y_X}=\operatorname{cov}\,(X,Y)\;\;/DX=-0{,}2454.$$

У ҳолда $y-MX=c\dfrac{y_Y}{y_X}(x-MX)$ регрессия чизиғи қуйдагига тенг бўлади:

$$y-\frac{p}{4}=-0{,}2454\cdot\left(x-\frac{p}{4}\right)$$

ёки **y=-0,2454·x++0,9781.**

Y тасодифий миқдорни **X** тасодифий миқдорга нисбатан қолдиқ дисперсияси $y_Y^2(1-c^2)=0{,}17635.$

X нинг **Y** га тескари регрессия тенгламасини ҳам ҳудди шу каби топамиз. Аввало **X** ни **Y** га регрессия коеффициентини топамиз:

$$b_1 = c\frac{y_X}{y_Y} = \frac{\text{cov}\,(X, Y)}{DY} = -0{,}2454\,.$$

У ҳолда тескари регрессия тенгламаси

$$x - MX = c\frac{y_X}{y_Y}(\,y - MY)$$

формуласидан **x=-0,2454·й+0,9781** бўлади.

X тасодифий миқдорнинг **Y** тасодифий миқдорга нисбатан қолдиқ дисперсияси $y_X^2(\,1 - c^2) = 0{,}17635.$

Жавоб:Тўғри регрессия тенгламаси: **у=-0,2454·х+0,9781**.

Тескари регрессия тенгламаси: **х=-0,2454·у+0,9781**.

7.5 МУСТАҚИЛ ИШ УЧУН МАСАЛАЛАР

1-масала. Икки ўлчовли дискрет тасодифий миқдор қуйидаги тақсимот қонуни билан берилган.

Y \ X	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

Ташкил этувчиларнинг тақсимот қонуни топинг.

Жавоб: X 3 10 12 Y 4 5
P 0,27 0,43 0,30 P 0,55 0,45.

2-масала. (X, Y) икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг X ташкил этувчиси **X< ½** , **Y** ташкил этувчи эса **Y<1/3** қийматларини қабул қилиш эҳтимоллигини топинг. **(X, Y)** икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси қуйидагича аниқланган:

$$F\,(x, y) = \left(\frac{1}{p}\text{arctg}2x + \frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{p}\text{arctg}3y + \frac{1}{2}\right).$$

Жавоб: P{X < ½; Y < 1/3} = 9/16.

3-масала. (X, Y) икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг **f(x, y)** зичлик функцияси берилган:

$$f(x, y) = \frac{1}{\left(16 + x^2\right)\cdot\left(25 + y^2\right)}.$$

(X, Y) икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг **F (x, y)** тақсимот функциясини топинг.

Жавоб: $F(x, y) = \left(\frac{1}{4p}\operatorname{arctg}\frac{x}{4} + \frac{1}{8}\right)\cdot\left(\frac{1}{5p}\operatorname{arctg}\frac{y}{5} + \frac{1}{10}\right)$

4-масала. (X, Y) икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг ташкил этувчилари ўзаро боғлиқ эмас ва уларнинг зичлик функциялари қуйидагича:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 5\cdot e^{-5x}, & x > 0. \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0; \\ 2\cdot e^{-2y}, & y > 0. \end{cases}$$

системанинг тақсимот функцияси **F(x, y)** ни ва зичлик функцияси **f(x, y)** ни топинг.

Жавоб: $f(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \quad \text{yoki}\; y < 0 \\ 10\cdot e^{-5x-2y}, & x > 0. \quad y > 0 \end{cases}$

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & x < 0, \quad y < 0 \\ \left(1 - e^{-5x}\right)\cdot\left(1 - e^{-2y}\right), & x > 0, \text{yoki} > 0. \end{cases}$$

5-масала. Икки ўлчовли дискрет тасодифий миқдор берилган:

X / Й	3	6
10	0,25	0,10
14	0,15	0,05
18	0,32	0,13

X ташкил этувчининг **Y = 10** кийматни қабул қилгани шарти остидаги шартли тақсимот қонунини ва **Y** ташкил этувчининг **X = 6** қийматни қабул қилгани шарти остидаги шартли тақсимот қонуни топинг.

Жавоб: X 3 6 Y 10 14 18
P(X/10) 5/7 2/7. P(Y/6) 5/14 5/28 13/28.

6-масала. Қуйида берилган тақсимот қонуни билан аниқланган **(X, Y)** икки ўлчовли тасодифий миқдор ташкил этувчиларини сонли характеристикалари, ковариация ва корреляция коеффициентларини топинг.

Y \ X	-1	0	1
0	0,10	0,15	0,20
1	0,15	0,25	0,15

Жавоб: MX = 0,55, MY = 0,10, ДX = 0,2475, ДY = 0,59, *сов*(X, Y) = -0,055; ρ = (X, Y) ≈ -0,144.

2-ҚИСМ
МАТЕМАТИК СТАТИСТИКАНИНГ АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАРИ
8 – БОБ. ТАНЛАНМА МЕТОД
8.1. БОШ ВА ТАНЛАНМА ТЎПЛАМЛАР

Маълумки, математик статистикада статистик маълумотларни таҳлил қилиш билан илмий ва амалий хулосалар чиқаришнинг математик усуллари ўрганилади.

ТАНЛАНМА

Ўрганилиши лозим бўлган барча объектлар тўплами **бош тўплам** дейилади. Бош тўпламдан тасодифий равишда танлаб олинган объектлар тўплами **танланма тўплам** ёки, қисқача,

танланма дейилади. Тўпламдаги объектлар сонига шу тўпламнинг **ҳажми** дейилади. Бош тўпламнинг **ҳажми N**, танланма тўпламнинг **ҳажми n** билан белгиланади.

Масалан, корхонада ишлаб чиқарилган **10000** дона маҳсулотдан **100** донаси текшириш учун олинган бўлса, у ҳолда **P=10000, n=100** бўлади.

Бош тўпламни сон белгиси **X** (ҳар бир туп ғўзадаги очилган чаноқлар сони, фермадаги ҳар бир соғин сигирдан бир кунда соғиб олинадиган сут миқдори, кишлок хўжалик экинларидан жорий йилда олинадиган ўрта ҳосил, корхона ишчиларнинг ўртача маоши ва ҳакозолар) тасодифий миқдор бўлиб уни ўрганиш **X** сон белги бўйича ўтказилган кузатиш натижаларига асосланиб, танланмани статистик таксимотини тузишдан бошланади.

8.2. ТАНЛАНМАНИНГ СТАТИСТИК ТАҚСИМОТИ

Фараз қилайлик, бош тўпламни ўрганиш учун хажми **n** га тенг танланма тўплам олинган бўлсин. Бош тўпламни сон белгиси **X** тасодифий миқдор бўлиб унинг кузатилган қийматларнин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ билан белгилаймиз. Бунда x_1 киймат n_1 марта, x_2 киймат n_2 марта ва ҳоказо, x_k қиймат n_k марта кузатилаган бўлсин.

Одатда кузатилаган x_i қийматлар **вариантлар**, кузатишлар сони n_i лар эса **частоталари** дейилади. Вариантларнинг ўсиб бориш тартибида ёзилган кетма – кетлик вариацион қатор дейилади.

Ушбу $\frac{n_i}{n}$ $(i=1,2,\ldots,k)$ миқдорлар нисбий частоталар дейилади ва W_i каби белгиланади: $W_i = \frac{n_i}{n}$ $(i=1,2,\ldots,k)$

Вариантлар ва уларга мос частоталар ёки нисбий частоталардан тузилган ушбу жадвал **статистик** ёки **эмпирик** тақсимот дейилади.

x_i	x_1	x_2	. . .	x_k
x_i	x_1	x_2	. . .	n_k
w_i	w_1	w_2	. . .	w_k

Агар **X** сон белги узлуксиз ўзгарувчи вариантадан иборат бўлса, унда бу қийматлар интерваллар ёрдамида гурухларга бўлиниб ўрганилади. Интервалларнинг кенглиги

$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{k}$$

муносабатдан топилади, бунда x_{max}, x_{min} лар вариацион қаторнинг мос равишда энг катта ва энг кичик қийматлари, интерваллар сони **k** ни $k = 1+3{,}322\cdot \ln n$ **Стерджес формуласи** орқали аниқланади.

8.3. ТАҚСИМОТНИНГ ЭМПИРИК ФУНКЦИЯСИ

Айтайлик, ушбу $x_1, x_2, x_3, \ldots x_k$ варианталар берилаган бўлсин. Ихтиёрий **x** ҳақиқий сонни олайлик. Қуйидаги $x_i < x$ тенгсизликни қаноатлантирадиган вариантлар сонини $n(x)$ билан белгилаймиз. Равшанки, $\frac{n(x)}{n}$ **x** нинг функцияси бўлади. Уни танланманинг тақсимот функцияси ёки эмпирик тақсимот функцияси дейилади ва $F_n(x)$ каби белгиланади:

$$F_n(x) = P_n(X \le x) = \frac{n(x)}{n}$$

8.4. ПОЛИГОН ВА ГИСТОГРАММА

Ҳажми **n** бўлган танланманинг статистик тақсимот берилган бўлсин:

x	x_1	x_2	. . .	x_k
n	n_1	n_2	. . .	n_k
w	w_1	w_2	. . .	w_k

Бу ерда: x_i – вариантлар, n_i – мос частоталар, w_i- мос нисбий частоталар.

Координаталар текислигида $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \ldots, (x_k, n_k)$ нуқталарни ўзаро туташтирувчи синиқ чизиқ **частоталар полигони** дейилади.

Асослари **h** узунликдаги интерваллар, баландликлари $\frac{n_i}{n}$ га тенг тўгри тўртбурчаклардан иборат поғанавий шакл **частоталар гистограммаси** дейилади.

Асослари **h** узунликдаги интерваллар, баландликлари $\frac{w_i}{n}$ га тенг тўгри тўртбурчаклардан иборат поғанавий шакл **нисбий частоталар гистограммаси** дейилади.

8.5. Мавзуга доир намунавий масалалар

1-масала. Бош тўпламдан **n=16** ҳажмли танланма тўплам олинган. Бош тўпламни **X** сон белгисининг кузатилган қийматлари қуйидагича бўлган:

6, 4, 8, 9, 6, 6, 3, 9, 8, 3, 8, 8, 5, 3, 5, 7.

Бу маълумотларга асосланиб:

1)Танланмани статистик тақсимоти тузилсин;

2)Статистик тақсимотни полигони чизилсин.

Ечиш: Аввало вариацион қатор тузамиз:

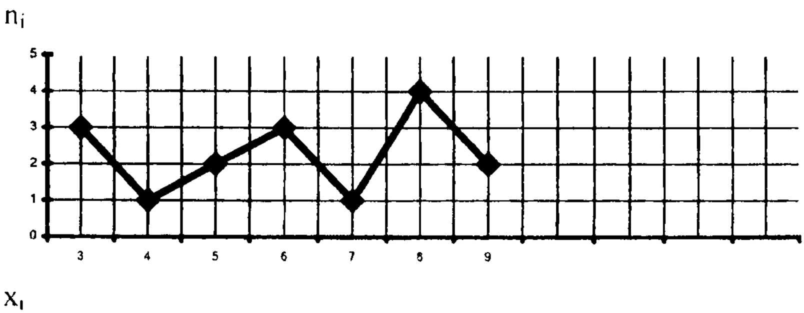
3, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9.

Демак, танланмани статистик тақсимоти:

x_i	3	4	5	6	7	8	9
n_i	3	1	2	3	1	4	2

$n = 3 + 1 + 2 + 3 + 1 + 4 + 2 = 16$

Бу статистик тақсимотни полигон чизиғи куйидагича бўлади:



2-масала. Келишув бўйича савдо қилувчи савдо дўконидан **1** кун давомида харид қилувчилардан тасодифий равишда **50** таси билан учрашиб улар харид қилган мол нархлари сўралганда (минг сўм ҳисобида) қуйидаги маълумотлар олинди:

2,4; 2,6; 2,7; 2,8; 2,8; 2,5; 2,5; 2,6; 2,6; 2,7; 2,4; 2,4; 2,5; 2,1; 2,6; 2,5; 2,5; 2,3; 2,6; 2,2; 2,4; 2,7; 2,5; 2,4; 2,6; 2,4; 2,4; 2,4; 2,6; 2,6; 2,5; 2,5; 2,3; 2,5; 2,6; 2,7; 2,3; 2,5; 2,8; 2,6; 2,5; 2,6; 2,4; 2,5; 2,9; 2,4; 2,7; 2,5; 2,5; 2,7.

Шу маълумотлар статистик таҳлил қилиниб мухим амалий ҳулосалар чиқарилсин, яъни бу маълумотларга асосланиб танланмани дискрет ва интервалли стасистик тақсимотлари ҳамда уларни полигон ва гистограммалари чизилсин:

Ечиш. 1) Савдо дўконидаги барча молларни бош тўплам дейлик. Бош тўпламдан ҳажми **n** бўлган танланма тўпламни ажратамиз. Бизнинг ҳолда **n = 50.**

Келтирилган маълумотларни ўрганиб, x_1**=2,1** қиймат n_1**=1** марта, x_2**=2,2** қиймат n_2**=1** марта, x_3**=2,3** қиймат $н_3$**=1** марта, x_4**=2,4** қиймат n_4**=10** марта, x_5**=2,5** қиймат n_5**=14** марта, x_6**=2,6** қиймат n_6**=11** марта, x_7**=2,7** қиймат n_7**=16** марта, x_8**=2,8** қиймат n_8**=13** марта, x_9**=2,9** қиймат n_9**=1** марта учрашини топамиз.

Демак, вариацион қатор

2,1; 2,2; 2,3; 2,4; 2,5; 2,6; 2,7; 2,8; 2,9

кўринишда бўлиб, уларнинг частоталари эса мос равишда

1, 1, 3, 10, 14, 11, 6, 3, 1

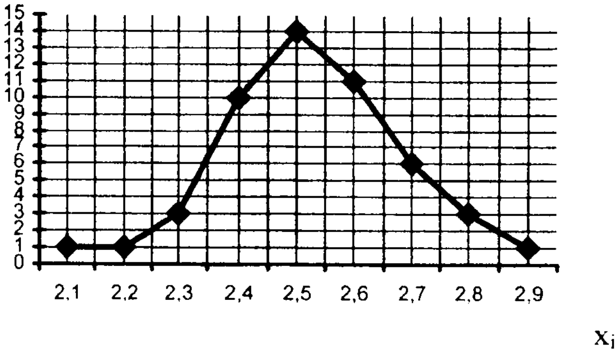
бўлади.

X тасодифий миқдорнинг дискрет тақсимотини тузамиз:

X	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
n_i	1	1	3	10	14	11	6	3	1

Бу тақсимотга кўра полигон чизамиз:

n_i



1-чизма

Натижада нисбий частоталар полигони ҳосил бўлди. Бундан савдогар молининг аксариятини [2,4; 2,7] оралиқдаги нархларда сотилганлиги кўринади.

Энди интервалли вариацион қатор тузамиз.

Аввало **к** ни $k = 1 + 3{,}322 \lg n$ формуладан аниқлаймиз:

$$k = 1 + 3{,}322 \cdot \ln 50 = 1 + 3{,}322 \cdot (\ln 10 + \ln 5) =$$
$$= 1 + 3{,}322 \cdot (1 + 0{,}699) \approx 6{,}64 \qquad \text{Demak } k = 7.$$

Интервал узунлиги **h**

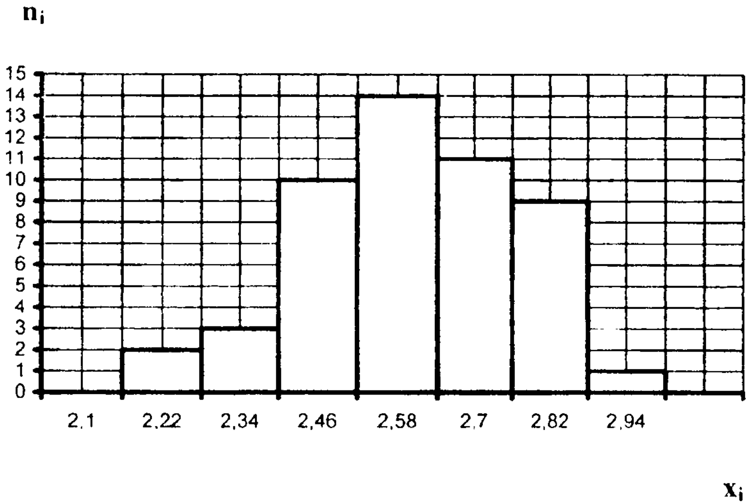
$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{k} = \frac{2{,}9 - 2{,}1}{6{,}64} \approx \frac{0{,}8}{6{,}64} \approx 0{,}12 \quad \text{bo'ladi}$$

У ҳолда интервалли вариацион қатор қуйидагича бўлади.

$x_i \div x_{i+1}$ **интерваллар**	n_i **интервалга тегишли варианталар**	$W = \frac{n_i}{n}$ **нисбий**

	сони	частотали
2,10-2,22	$n_1=2$	$W_1=2/50$
2,22-2,34	$n_2=3$	$W_2=3/50$
2,34-2,46	$n_3=10$	$W_3=10/50$
2,46-2,58	$n_4=14$	$W_4=14/50$
2,58-2,70	$n_5=11$	$W_5=11/50$
2,70-2,82	$n_6=9$	$W_6=9/50$
2,82-2,94	$n_7=1$	$W_7=1/50$

Текисликда тўгри бурчакли декарт координаталар системасини олиб, абсиссалар ўқида интервалларни, ординаталар ўқида нисбий частота зичлигини олиб, тақсимотнинг гистограммасини ясаймиз:



2-чизма

2-чизмадан гистограммани кузатар эканмиз, уни нормал қонунга яқин эканини кўрамиз. Бинобарин молларнинг кўрсатилган нархларда сотилиши нормал қонунга яқин дейиш мумкин.

8.6. Мустақил иш учун масалалар

1. Пахта майдонидан тасодифий равишда олинган **50** туп ғўзанинг ҳар биридан териб олинган пахта ҳосилининг оғирлиги (грамм ҳисобида) қуйидагича бўлган:

38,0	**51,5**	**48,3**	**33,2**	**40,2**	**49,2**	**34,6**	**32,0**	**27,5**	**30,0**
41,3	**43,2**	**42,0**	**30,3**	**48,0**	**43,0**	**36,6**	**39,6**	**38,2**	**56,0**
47,4	**53,8**	**45,6**	**33,2**	**38,2**	**39,0**	**35,0**	**40,5**	**45,0**	**44,4**
30,0	**35,7**	**43,5**	**42,1**	**42,0**	**37,7**	**42,8**	**50,3**	**44,6**	**46,3**
59,0	**46,0**	**37,8**	**45,0**	**36,1**	**44,3**	**51,7**	**44,5**	**48,5**	**36,4**

Шу статистик маълумотларни таҳлил қилинг.

1) Танланмани статистик тақсимоти тузилсин.

2) Статистик тақсимотни полигон ва гистограммаси чизилсин.

2. Ҳар соатда электр токи қувватини ўлчаш (квт ҳисобида) қуйидагича натижаларга олиб келди:

227	**219**	**215**	**230**	**232**	**223**	**220**	**222**	**218**	**219**
222	**221**	**227**	**226**	**206**	**209**	**211**	**215**	**218**	**220**
216	**220**	**220**	**221**	**225**	**224**	**212**	**217**	**219**	**220**

Шу статистик маълумотларни таҳлил қилинг.

1) Танланмани статистик тақсимоти тузилсин.

2) Статистик тақсимотни полигон ва гистограммаси чизилсин.

3. Савдо дўконида қуйидаги размерли оёқ кийимлари сотилган.

39	**40**	**41**	**40**	**42**	**43**	**38**	**41**
36	**39**	**38**	**40**	**41**	**42**	**41**	**39**
42	**41**	**41**	**98**	**40**	**39**	**40**	**43**
37	**38**	**42**	**39**	**41**	**41**	**42**	**39**

43 40 41 39 39 41 40 38

Шу статистик маълумотларни таҳлил қилинг.

1) Танланмани статистик тақсимоти тузилсин.

2) Статистик тақсимотни полигон ва гистограммаси чизилсин.

4-масала. Қуйидаги статистик қатор кўринишида берилган танланма учун частоталар полигонини қуринг:

x_i	1	4	5	7
n_i	20	10	14	6

5-масала. Қуйидаги статистик қатор кўринишида берилган танланма учун частоталар полигонини қуринг:

x_i	1	3	6	8	9
n_i	0	15	30	33	12

6-масала. Жадвалда бир ой давомида хусусий шахсларнинг банкка қўйган омонат хажми тақсимоти берилган. Тақсимот полигонини қуринг.

Омонат хажми (минг сўм)	**100**	**250**	**500**	**600**	**750**	**800**	**900**	**1000**
Омонатчилар сони	**1**	**2**	**5**	**8**	**17**	**21**	**18**	**8**

7-масала. Қуйидаги статистик тақсимотлар орқали берилган танланмалар учун эмпирик тақсимот функцияларини топинг:

а)

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

б)

x_i	2	5	7	8
n_i	1	3	2	4

д)

x_i	4	7	8
n_i	5	2	3

$$\textbf{Жавоб: a) } F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ 0.2, & 1 < x \le 4 \\ 0.5, & 4 < x \le 6 \\ 1, & x > 6 \end{cases}$$

8-масала. Жадвалда чорвачилик билан шуғулланадиган фермер хўжаликдаги сигирлар сутининг ёғлилик даражаси бўйича тақсимот берилган. Частоталар гистограммасининг қуринг.

Сут ёғлилиги,%	Сигирлар сони
3.45-3.55	1
3.55-3.65	1
3.65-3.75	3
3.75-3.85	4
3.85-3.95	7
3.95-4.05	5
4.05-4.15	2
4.15-4.25	1
4.25-4.35	1

9 – БОБ. СТАТИСТИК ТАҚСИМОТНИНГ ТАНЛАНМА ХАРАКТЕРИСТИКАЛАРИ

Кўпинча амалиётда танланма маълумотларга асосланиб бош тўплам сон белгисини муҳим характеристикаларини ҳисоблаш зарурияти туғилади.

Масалан, фермер хўжалиги ишчиларининг ўртача маоши ёки ўртача йиллик даромади, қишлоқ хўжалиги экинларидан (пахта, буғдой, шоли ва бошқалар) жорий йилда олинадиган ўртача ҳосил, ўрмон хўжалигида етиштирилган дарахтларнинг ўртача бўйи шаҳар туғруқхоналарида маълум бир давр ичида туғилган чақолоқларнинг ўртача вазни ёки шаҳар аҳолисининг бир кунлик ўртача нон истеъмоли каби хаётий масалаларни ечишда статистик тақсимотнинг танланма характеристикаларидан фойдаланилади.

Айтайлик, бош тўпламни **X** сон белгисига кўра ўртганиш учун хажми **n** га тенг бўлган танланма тўплам олинган бўлиб, унинг статистик тақсимоти тузилган бўлсин:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

бу ерда $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$

Статистик тақсимотнинг асосий танланма характеристикалари бўлиб, танланма ўртача қиймат, танланма дисперсия, танланма ўртача квадратик чекланиш, мода, медиана ва вариация коеффицентлари хизмат қилади.

9.1. ТАНЛАНМА ЎРТАЧА ҚИЙМАТ

Танланма ўртача қиймат деб, танланма тўплам белгисининг арифметик ўртача қийматига айтилади ва $\bar{x}_T$ билан белгиланади.

Агар **n** хажмли танланма белгисининг барча қийматлари $x_1,x_2,\ldots,x_n$ турлича бўлса, у ҳолда

$$\bar{x}_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i n_i = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \qquad (1)$$

Агар белгининг $x_1, x_2, \ldots, x_k$ кийматлари мос равишда n_1, $n_2, \ldots, n_k$ частоталарига эга ва $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ бўлса, у ҳолда танланма ўртача киймат

$$\bar{x}_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i n_i = \frac{1}{n}(x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k) \qquad (2)$$

формула ёрдамида топилади.

9.2. ТАНЛАНМА ДИСПЕРСИЯ

Танланма ўртача киймат статистик тақсимот ҳақида тўла маълумот бермайди. Кўпинча амалиётда кузатилган кийматларнинг $\bar{x}_T$ атрофида қандай жойлашганлигини билиш керак бўлади. Масалан, корхонадаги ишчиларнинг йиллик даромади ишчининг ўртача йиллик даромадидан қанчага фарқланишини билиш катта амалий аҳамиятга эгадир.

X_i кузатилган кийматларининг унинг $\bar{x}_T$ ўртача киймати атрофида сочилишини ҳарактерлаш мақсадида – танланма дисперсия киритилади.

Танланма дисперсия деб, белгининг кузатиладиган кийматларини уларнинг $\bar{x}_T$ ўртача кийматидан четланиши квадратларининг ўртача арифметик кийматига айтилади ва уни D_T билан белгиланади.

Агар n ҳажмли танланма белгисининг барча $x_1, x_2, \ldots x_k$ кийматлари мос равишда $n_1, n_2, \ldots n_k$ частоталарга эга бўлса, уҳолда танланма дисперсия

$$D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - (\bar{x}_T))^2 \qquad (3)$$

формуладан топилади.

Агар белгининг $x_1, x_2, \ldots x_k$ кийматлари турлича бўлса, у ҳолда танланма дисперсия :

$$D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x}_T)^2 \qquad (4)$$

9.3. ТАНЛАНМА ЎРТАЧА КВАДРАТИК ЧЕТЛАНИШ

Танланма ўртача квадратик четланиш деб, танланма дисперсиядан олинган квадрат илдизга айтилади ва σ_T билан белгиланади:

$$\sigma_T = \sqrt{D_T} \qquad (5)$$

9.4. МОДА

Энг катта частотага эга бўлган вариантанинг қийматига **мода** дейилади ва уни M_0 билан белгиланади.

9.5. МЕДИАНА

Статистик тақсимотни тенг икки қисмга бўладиган вариантанинг қийматига **медиана** дейилади ва уни m_e билан белгиланади.

$$m_e = \begin{cases} x_{k+1}, & \text{агар} \quad n = 2k+1 \quad \text{бўлса,} \\ \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1}), & \quad n = 2k \quad \text{бўлса,} \end{cases} \qquad (6)$$

9.6. ВАРИАЦИЯ ҚУЛОЧИ

$$R = X_{max} - X_{min}. \qquad (7)$$

9.7. ВАРИАЦИЯ КОЕФФИЦИЕНТИ

Турли танланмаларни улар қийматларининг ўртача қиймати атрофида тарқоқлигини таққослаш мақсадида вариация коеффициентидан фойдаланилади. Вариация коэффицентини V_T билан белгиланади:

$$V_T = \frac{y_T}{\overline{X}_T} \cdot 100\% \qquad (8)$$

9.8. Танланма ўртача қиймат ва танланма дисперсияни ҳисоблашнинг кўпайтмалар методи

А. Тенг узоқлашган вариантлар

Танланма тенг узоқлашган вариантлар ва мос частоталар тақсимоти кўринишида берилган бўлсин. Бу ҳолда танланма ўртача қийматни ва танланма дисперсияни ушбу формулалар бўйича

$$\overline{x}_T = M^*_1 h + C, \qquad D_T = [M^*_2 - (M^*_1)^2]\, h^2$$

кўпайтмалар методи билан топиш қулайдир, бу ерда **h** – қадам (иккита қўшни варианта орасидаги айирма); **C** – сохта ноль (энг катта частотага эга бўлган варианта);

$u_i = \frac{x_i - C}{h}$ - шартли варианта;

$M^*_1 = \frac{\sum n_i u_i}{n}$ - биринчи тартибли шартли момент;

$M^*_2 = \frac{\sum n_i u^2_i}{n}$ - иккинчи тартибли шартли момент.

Б. Тенг узоқликда бўлмаган вариантлар

Агар дастлабки вариантлар тенг узоқликда бўлмаса, у ҳолда танланманинг барча вариантлари ётадиган интервални узунлиги **h** бўлган бир нечта тенг қисмий интервалларга бўлинади (ҳар бир қисмий интервал камида **8-10** та вариантани ўз ичига олиши керак). Сўнгра қисмий интервалларнинг ўрталари топилади, ана шу қийматлар тенг узоқликдаги варианталар кетма – кетлигини ҳосил қилади. Ҳар бир интервал ўртасининг частотаси сифатида тегишли қисмий интервалга тушган частоталари йиғиндиси олинади.

Танланма дисперсияни ҳисоблашда группалаш натижасида юзага келган хатони камайтириш мақсадида (айникса, интерваллар сони кичик бўлганда) **Шеппард** тузатмаси киритилади, чунончи ҳисобланган дисперсиядан қисмий интервал узунлиги квадратининг ўн иккидан бири айрилади. Шундай килиб, дисперсия **Шеппард** тузатмасини эътиборга олганда

$$D'_T = D_T - \frac{1}{12}h^2$$

формула бўйича ҳисобланади.

9.9. Мавзуга доир намунавий масалалар

1- масала. Етиштирилган янги нав картошка ҳосилдорлигини ўрганиш мақсадида картошка майдонидан 50 тупи қазилган. Бу тупландаги картошкалар сони қуйидаги танланма тўпламни ташкил этган:

6 , 7 , 5 , 8 , 3 , 7 , 9 , 5 , 8 , 7 , 4 , 6 , 8 , 7 , 5 , 8 , 10, 6,
7 , 8 , 9 , 7 , 8 , 6 , 9 , 6 , 7 , 5 , 10 , 9 , 7 , 8 , 6, 11, 7, 5,
4 , 6 , 7 , 8 , 10 , 6 , 7 , 8 , 11 , 9 , 7 , 8 , 10 , 12 .

Бу маълумотларга асосланиб танланма тўпламнинг дискрет вариацион қаторини тузинг ва полигонини ясанг. Шунингдек вариацион қаторнинг муҳим танланма характеристикалари: танланма ўртача қиймати, танланма дисперсияси, ўртача квадратик четланиши, модаси, медианаси ва вариация коэффициенти топилсин?

Ечиш: **i** – чи тупдан олинган картошкалар сонини X_i (дона) оркали белгилайлик. Қазилган 50 тупнинг ҳар биридан олинган картошкалар сони X_i нинг қийматларини ўсиш тартибида ёзиб чиқамиз:

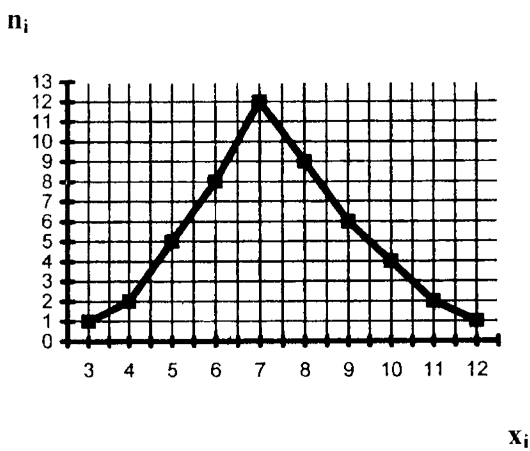
3 , 4 , 4 , 5 , 5 , 5 , 5 , 5 , 6 , 6 , 6 , 6 , 6 , 6 , 6 , 6 , 7 , 7 , 7 , 7 , 7 ,7, 7 , 7 , 7 , 7 , 7 , 7 , 8 , 8 , 8 , 8 , 8 , 8 , 8 , 8 , 9 , 9 , 9 , 9 , 9 , 9 , 10, 10 , 10 , 10 , 11 , 11 , 12 .

Ҳосил қилинган вариацион қатор ёрдамида танланманинг статистик тақсимотини тузамиз:

x_i	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n_i	1	2	5	8	12	9	6	4	2	1

Бу ерда $n = 50$.

Тузилган вариацион қаторнинг ёки статистик тақсимотнинг графигини, яъни полигон чизиғини чизамиз. Бунинг учун абциссалар ўқига x_i нинг қийматларини, ординаталар ўқига эса n_i ларнинг қийматларини қўямиз. Координаталар текислигидаги ҳар бир жуфт $(x_i; n_i)$ га мос нуқталарни туташтириш натижасида қуйидаги чизмага эга бўламиз:



Ушбу чизмага кўра ҳар бир тупдаги картошкалар сонини 7 та атрофида бўлишлигини сезиш мумкин.

Энди тузилган статистик тақсимот ёрдамида вариацион қаторнинг танланма характеристикаларини ҳисоблаймиз:

1)X_i нинг қийматлари такрорланиб келгани учун танланма ўртача қийматни (2) формула орқали топамиз:

$$\overline{X}_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i = \frac{1}{50}\cdot(1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 5\cdot 5 + 8\cdot 6 + 12\cdot 7 + 9\cdot\cdot -$$

$$8 + 6\cdot 9 + + 4\cdot 10 + 2\cdot 11 + 1\cdot 12) =$$

$$= \frac{1}{50}\cdot(3 + 8 + 25 + 48 + 84 + 72 + 54 + 40 + 22 + 12) = 7{,}06$$

2) Танланма дисперсияни

$$D_T = \overline{X}^2 - (\overline{X}_T)^2$$

Формула орқали ҳисоблаш қулайдир, бу ерда

$$\overline{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2$$

Бизнинг мисол учун,

$$\overline{X}^2 = \frac{1}{50}\cdot(1\cdot 3^2 + 2\cdot 4^2 + 5\cdot 5^2 + 8\cdot 6^2 + 12\cdot 7^2 + 9\cdot 8^2 + 6\cdot 9^2 + 4\cdot 10^2 +$$

$$2\cdot 11^2 + 1\cdot 12^2) = \frac{1}{50}.(1\cdot 9 + 2\cdot 16 + 5\cdot 25 + 8\cdot 36 + 12\cdot 49 + 9\cdot 64 + 6\cdot 81$$

$$+ 4\cdot 100 + 2\cdot 121 + 1\cdot 144) = \frac{1}{50}\cdot(9 + 32 + 125 + 288 + 588 + 576$$

$$+ 486 + 400 + 242 + 144) = = \frac{2890}{50} = 57.8.$$

Демак,

$$D_T = 57.8 - (7.06)^2 = 57.8 - 49.84 = 7.96.$$

3) Ўртача квадратик четланиш:

$$\sigma_T = \sqrt{D_T} = \sqrt{7.96} \approx 2.82\,.$$

4) Вариантанинг энг катта частотага эга бўлган қиймати **7** га тенг бўлгани учун мода: $M_0 = 7$.

5) Медианани топамиз: варианталар сони жуфт бўлганидан, яъни

$$2k = 10\ ,\quad k = 5$$

$$m_e = \frac{1}{2}(x_5 + x_6) = \frac{1}{2}(12 + 9) = 10.5.$$

6) Вариация кулочи:

$$R = X_{max} - X_{min} = 12 - 3 = 9.$$

7) Вариация коэффициентини

$$V_T = \frac{y_T}{\overline{X}_T} \cdot 100\% = \frac{2.82}{7.06} \cdot 100\% \approx 40\%.$$

2-масала. Танланма **5, 4, 4, 2, 5, 5, 4, 2, 4, 6, 5, 2, 4, 2, 6, 5, 2, 4, 5, 5, 4, 4, 5, 2, 2, 5, 5, 4, 2, 6** элементлардан ташкил топган. Танланманинг статистик тақсимоти, ўрта қиймати, танланма ва "тузатилган" дисперсияларини, танланма ва "тузатилган" ўртача квадратик четланишларини, танланманинг модаси, медианаси ҳамда кенглигини топинг.

Ечиш: Аввало вариацион қатор тузамиз:

2,2,2,2,2,2,2,2; 4,4,4,4,4.4,4,4,4; 5,5,5,5,5,5,5,5,5,5; 6,6,6;

У ҳолда танланманинг статистик тақсимоти қуйдагича бўлади:

X_i	2	4	5	6
n_i	8	5	10	3

Танланма ҳажми: $n = \sum_{i=1}^{4} n_i = 8 + 9 + 10 + 3 = 30.$

Танланма ўртача қиймат:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i = \frac{1}{30}(2 \cdot 8 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 3) = \frac{120}{30} = 4$$

Танланма дисперсия :

$$D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{X})^2 \cdot n_i = \frac{1}{30}\left((2-4)^2 \cdot 8 + (4-4)^2 \cdot 9 + \right.$$

$$\left. + (5-4)^2 \cdot 10 + (6-4)^2 \cdot 3 \right) = \frac{54}{30} = 1{,}8$$

У ҳолда "тузатилган" дисперсия :

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_T = \frac{30}{29} \cdot \frac{54}{30} = \frac{54}{29} = 1{,}862,$$

Танланма ва "тузатилган" ўртача квадратик четланишларни топамиз:

$$у_T = \sqrt{D_T} = \sqrt{1{,}8} = 1{,}341$$

ва

$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_T} = \sqrt{1{,}862} = 1{,}364.$$

Танланмада x_3 =**5** варианта энг кўп учрайди (**n_3 = 10**), шунинг учун танланманинг модаси $мод_T = 5$. Танланма ҳажми **n=30** - жуфт сон, шунинг учун танланманинг ўрта элементлари иккита: **X_{15}=4 X_{16}= 4**. Демак, танланманинг медианаси қуйидагига тенг:

$$med_T = \frac{X_{15} + X_{16}}{2} = 4.$$

Вариацион катор кенглиги энг катта ва энг кичик варианталар айирмасига тенг, яъни **R = $x_{max} - x_{min}$ = 6 – 2 =4.**

Жавоб: $\overline{X}$ **=4; D_T = 1,8; S^2 = 1,862; σ_T = 1,341; S =1,364;** $мод_T$**=5;** $мед_T$ **= 4; R = 4.**

3-масала. n=10 ҳажмли танланманинг берилган тақсимоти бўйича ўртача танланма қийматини топинг:

x_i	**1250**	**1270**	**1280**
n_i	**2**	**5**	**3**

Ечилиши. Дастлабки варианталар катта сонлар, шунинг учун шартли варианталарга ўтамиз: **$u_i = x_i$ – 1270.** Натижада шартли варианталар тақсимотини хосил қиламиз:

u_i	**-20**	**0**	**10**
n_i	**2**	**5**	**3**

Изланаётган ўртача танланма қийматни топамиз:

$$\bar{x}_T = C + \frac{\sum n_i u_i}{n} = 1270 + \frac{2\cdot(-20)+5\cdot 0+3\cdot 10}{10} = 1270 - 1 = 1269$$

4-масала. Стерженнинг узунлигини битта асбоб билан беш марта ўлчаш (систематик хатоларсиз) натижасида қуйидаги натижалар олинган (мм ҳисобида): **92; 94; 103; 105; 106. а)** стержен узунлигининг ўртача танланма қийматини топинг; **б)** асбоб хатолигининг танланма ва тузатилган дисперсияларини топинг.

Ечилиши. а) Танланма ўртача қийматни топамиз:

$$x_T = 92 + \frac{0+2+11+13+14}{5} = 92 + 8 = 100.$$

б) Танланма дисперсияни топамиз:

$$D_T = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_i)^2}{n} = \frac{(92-100)^2 + (94-100)^2 + (103-100)^2}{5} +$$

$$+ \frac{(105-100)^2 + (106-100)^2}{5} = 34.$$

Тузатилган дисперсияни топамиз:

$$S^2 = \frac{n}{n-1}\cdot D_T = \frac{5}{4}\cdot 34 = 42{,}5.$$

5-масала. n=10 ҳажмли танланманинг берилган тақсимоти бўйича танланма дисперсиясини топинг:

x_i	**186**	**192**	**194**
n_i	**2**	**5**	**3**

Ечилиши. Вариантлар – нисбатан катта сонлар, шунинг учун $u_i = x_i - 191$ шартли вариантларга ўтамиз (биз вариантлардан ўртача танланма қийматга энг яқин сон **C = 191** ни айирдик). Натижада шартли варианталар тақсимотини ҳосил қиламиз:

u_i	-5	1	3
n_i	2	5	3

Изланаётган танланма дисперсияни топамиз:

$$D_T = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} - \left[\frac{\sum n_i u_i}{n}\right]^2 = \frac{2\cdot 5^2 + 5\cdot 1^2 + 3\cdot 3^2}{10} -$$

$$-\left[\frac{2\cdot(-5) + 5\cdot 1 + 3\cdot 3}{10}\right]^2 = 8{,}2 - 0{,}16 = 8{,}04.$$

6-масала. n=100 ҳажмли танланманинг қуйида берилган тақсимоти бўйича танланма ўртача қиймат ва танланма дисперсияни кўпайтмалар методи билан топинг:

варианта x_i	**12**	**14**	**16**	**18**	**20**	**22**
частота n_i	**5**	**15**	**50**	**16**	**10**	**4**

Ечилиши. Ҳисоблашларни енгиллаштириш мақсадида

$$u_i = \frac{x_i - C}{h} = \frac{x_i - 16}{2}$$

шартли вариантага ўтамиз ва қуйидаги ҳисоблаш жадвалини тузамиз:

1	2	3	4	5	6
x_i	n_i	u_i	$n_i\ u_i$	$n_i\ u^2{}_i$	$n_i(u_i+1)^2$
12	5	-2	-10	20	5
14	15	-1	-15	15	-
16	50	0	-25	-	50
18	16	1	16	16	64
20	10	2	20	40	90
22	4	3	12	36	64
			48		
	n=100		$\sum n_i u_i = 23$	$\sum n_i u^2{}_i = 127$	$\sum n_i(u_i+1)^2 = 273$

$$M^*{}_1 = \frac{\sum n_i u_i}{n} = \frac{23}{100} = 0,23; \qquad M^*{}_2 = \frac{\sum n_i u^2{}_i}{n} = \frac{127}{100} = 1,27.$$

Буларга асосан $\bar{x}_T$ ва D_T ларни топамиз:

$$\bar{x}_T = M^*{}_1 h + C = 0,23\cdot 2 + 16 = 16,46;$$

$$D_T = [M^*{}_2 - (M^*{}_1)^2]h^2 = [1,27 - 0,23^2]\cdot 2^2 = 4,87.$$

7-масала. $n=100$ ҳажмли танланманинг берилган тақсимоти бўйича танланма ўртача қиймат ва танланма дисперсия ни кўпайтмалар методи билан топинг:

x_i	2	3	7	9	11	12,5	16	18	23	26	26
n_i	3	5	10	6	10	4	12	13	8	20	9

Ечилиши. 2 - 26 интервални узунлиги $h = 6$ бўлган қуйидаги тўртта қисмий интервалга бўламиз:

$$2-8; \quad 8-14; \quad 14-20; \quad 20-26.$$

Қисмий интервалларнинг ўрталарини янги y_i вариантaлар сифатида олиб тенг узоқликдаги варианталарни ҳосил қиламиз:

$$y_1 = 5; \quad y_2 = 11; \quad y_3 = 17; \quad y_4 = 23.$$

$y_1 = 5$ варианнтанинг n_1 частотаси сифатида биринчи интервалга тушган варианнталарнинг частоталари йиғиндисини оламиз:

$$n_1 = 3 + 5 + 10 = 18.$$

Қолган вариантaларнинг частоталарини ҳам шунга ўхшаш ҳисоблаб, тенг узоқликдаги вариантaлар тақсимотини ҳосил қиламиз:

y_i	5	11	17	23
n_i	18	20	25	37

Юқоридаги 6-чи масаладаги каби кўпайтмалар методи ёрдамида $\overline{Y}_T = 15{,}86$; $Д_T = 45{,}14$ ларни топамиз. **Шеппард тузатмасини** эътиборга олсак

$$D'_T = D_T - \frac{1}{12}h^2 = 45{,}14 - \frac{62}{12} = 42{,}14 \text{ бўлади.}$$

9.10. Мустақил иш учун масалалар

1-масала. Кузатилган **200** асбобнинг бузилмасдан (тўхтамасдан) ишлаш вақти қуйидагича:

Ишлаш вақти	25	75	125	175	225	275	325	375	425
Асбоблар сони	1	1	24	30	71	31	21	13	2

Шу маълумотларга асосан асбобларнинг ўртача ишлаш вақти, дисперсияси ва ўртача квадратик четланишини топинг.

2-масала. Фермерлик хўжалигида картошка ҳосилдорлиги таҳлили асосида қуйидаги маълумотлар олинди:

Ҳосилдорлик, ц / га	Майдон, га
18	10
20	20
21	30

Танланманинг ўртачаси, “тузатилган” ўртача квадратик четланиши, модаси, медианаси ва кенглигини топинг.

Жавоб: $\bar{X} = 20$ ц; $C \approx 1{,}1$ ц;
мод$_T^*$ = 21; мед$_T$ = 20,5; P=20.

3-масала. Жадвалда тасодифан танлаб олинган **100** та талабанинг бўйи узунлиги (см. ларда) берилган. Танланма асосида талабалар бўйининг ўртачаси ва дисперсиясини топинг.

(К ў р с а т м а: X_i сифатида интервалларнинг ўрта қийматлари олинсин)

Бўйи	154 - 158	158 - 162	162 - 166	166 - 170	170 - 174	174 - 178	178 - 182
Талабалар сони	10	14	26	28	12	8	2

Жавоб: $\bar{X} = 166$; Д$_T$ = 33,44.

4-масала. Юк ташиш билан шуғулланадиган корхонанинг ҳафталик ташилган юклар ҳажми (тоннада) қуйидагича: **398, 412, 560, 474, 544, 690, 587, 600, 613, 457, 504, 477, 530, 641, 359, 566, 452, 633, 474, 499, 580, 606, 344, 455, 505, 396, 347, 441, 390, 632, 400, 582.** Ҳафталик ташилган юкнинг ўртачаси, ўртача квадратик четланиши ва кенглигини топинг.

5-масала. Маълум ҳудудда жойлашган корхоналарнинг маҳсулотларига бўлган талаб таҳлил қилиниб, натижалар қуйидаги жадвалда жамланди:

Маҳсулотга бўлган талаб, %	Корхоналар сони
50,0 гача	4
50,1 - 60,0	8
61,1 - 70,0	9
70,1 - 80,0	11
80,1 - 90,0	28
91,1 - 100,0	32
100,1 - 110,0	25
110,1 - 120,0	21
120,1 - 130,0	10
130,1 - 140,0	9
140,1 дан зиёд	3

Танланма учун ўртача, ўртача квадратик четланиш, медиана ва модани топинг. Гистограмма қуринг.

(К ў р с а т м а: Вариантлар сифатида интервалларнинг ўрта қийматини олинг.)

10- БОБ. ТАҚСИМОТ ПАРАМЕТРЛАРИНИНГ СТАТИСТИК БАҲОЛАРИ

10.1. СТАТИСТИК БАҲОЛАР ВА УЛАРНИНГ ТУРЛАРИ

Айтайлик, бош тўпламнинг бирор миқдорий кўрсаткичини баҳолаш талаб қилинсин. Назарий мулоҳазалардан ана шу кўрсаткичнинг қандай тақсимотга эга эканлиги маълум бўлсин. Табиий равишда бу тақсимотни аниқлайдиган параметрларни баҳолаш масаласи келиб чиқади. Одатда кузатиш натижалари, яъни танланма кийматларидан бошқа маълумот бўлмайди.

• Номаълум параметрнинг **статистик ёки эмпирик баҳоси** деб тасодифий миқдорнинг кузатилган қийматлари (танланма) нинг функциясига айтилади.

• Ихтиёрий хажмдаги танланма учун математик кутилмаси баҳоланаётган параметрга тенг бўлган статистик баҳо **силжимаган баҳо** дейилади.

• Математик кутилмаси баҳоланаётган параметрга тенг бўлмаган баҳо **силжиган баҳо** дейилади.

• Энг кичик дисперсиясига (берилган ҳажмдаги танланма учун) эга бўлган статистик баҳо **эффектив баҳо** дейилади.

• Катта ҳажмдаги танламалар билан иш кўрилганда баҳога асослилик талаби қўйилади. $n \to \infty$ да баҳоланаётган параметрга эҳтимоллик бўйича яқинлашувчи статистик баҳога **асосли баҳо** дейилади.

• Битта миқдорий катталик билан аниқланадиган статистик баҳо **нуқтавий баҳо** дейилади.

• Баҳоланаётган параметрни қоплайдиган интервалнинг чегараларини билдирувчи икки миқдорий катталик билан аниқланадиган статистик баҳо **интервал баҳо** дейилади.

10.2. НУҚТАВИЙ БАҲОЛАР

Фараз қилайлик, бош тўплам нормал тақсимланган бўлиб, унинг номаълум параметрлари **a** ва σ^2 учун статистик баҳолар топиш талаб қилинсин.Бунинг учун бош тўпламдан ҳажми **n** га тенг бўлган танланма олинади.Айтайлик бош тўплам **X** сон белгининг кузатилган қийматлари $x_1, x_2, \dots x_k$ бўлсин.Танланманинг статистик тақсимотини тузамиз:

x_i	x_1	x_2	....	x_k
n_i	n_1	n_2	....	n_k

Бу ерда $\sum n_i = n$

1) Бош тўпламни ўртача киймати учун силжимаган баҳо бўлиб, танланма ўртача киймат ҳизмат килади.

$$\hat{a} = \overline{X}_T = \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i \cdot n_i}{n}$$

2) Бош тўплам дисперсияси учун силжиган баҳо бўлиб, танлама дисперсияси хизмат қилади.

$$\hat{\sigma}^2 = D_T = \sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \overline{X}_T\right)^2 \cdot n_i$$

3) Бош тўплам дисперсияси учун силжимаган баҳо бўлиб, тузатилган танланма дисперсияси хизмат қилади, яъни,

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_T$$

4) Бош тўплам модасининг баҳоси сифатида танланмада энг катта частотага эга вариант қиймати **танланма мода** олинади.

5) Бош тўплам медианасининг баҳоси сифатида $X_1 \le X_2 \le \ldots \le X_n$ вариацион қаторнинг ўртасига тўғри келадиган варианта, яъни **танланма медиана** олинади.

6) **M** – бош тўпламнинг бизни қизиқтирган хоссага эга бўлган элементлари сонининг **N** – бош тўплам элементларининг умумий сонига нисбати **бош улуш** (ёки бош тўпламдаги шу хосса эга бўлган элементлар частотаси) дейилади: $P = \frac{M}{N}$

Бош улушниг нуктавий баҳоси сифатида **танланма улуш**, яъни танланмадаги бизни қизиқтирган хоссага эга бўлган элементлар сони **m** нинг танланма элементларининг умумий сони **n**, яъни танланма ҳажмига нисбати (яъни танланмадаги шу ҳосса эга бўлган элементлар частотаси) $\omega = \frac{m}{n}$ ҳизмат қилади.

Танланма ўрта қийматнинг танланма тақсимоти. Катта сонлар қонуни ва марказий лимит теоремадан агар бош тўплам нормал тақсимот қонунига бўйсунса, у ҳола танланма ўрта қиймат $\overline{X}$ ҳам нормал тақсимот қонунига бўйсуниши келиб чиқади. Танланманинг ҳажми етарлича катта бўлганида бош тўплам қандай тақсимот қонунига эга бўлишидан қатъий назар танланма ўрта қиймат $\overline{X}$ барибир нормал тақсимот қонунига бўйсунар экан.

Шундай қилиб, агар бош тўплам а бош математик кутилиш ва σ^2 дисперсия га эга бўлса, у ҳолда танламанинг ўрта қиймати

$$\overline{X} \sim N\left(a; \frac{y^2}{n}\right)$$ бўлар экан. Демак,

$$P\{б < \overline{X} < \beta\} = Ф\left(\frac{в - б}{y/\sqrt{n}}\right) - Ф\left(\frac{б - a}{y/\sqrt{n}}\right);$$

$$P\{|\overline{X} - a| < e\} = 2Ф\left(\frac{e}{y/\sqrt{n}}\right)$$

10.3. ИНТЕРВАЛЛИ БАҲОЛАР

Айтайлик, θ - номаълум параметр, $\overline{\theta}$ эса танланма маълумотлари бўйича топилган статистик характеристика, яъни θ нинг баҳоси бўлсин. Ушбу

$$|и - \overline{и}| < д$$

шартдаги д сон и **баҳонинг аниқлиги** дейилади.

$$|и - \overline{и}| < д$$

тенгсизликни амалга оширадиган эҳтимол

$$P\{|и - \overline{и}| < д\} = д$$

га **ишончлилик эҳтимоли** дейилади.

Қуйидаги $(\text{и}-\text{у}, \bar{\text{и}}+\text{д})$ интервал эса **ишончлилик интервали** дейилади.

Танланма аниқлигини баҳолашда қуйидаги уч ҳол бўлиши мумкин:

1) Баҳонинг аниқлиги д берилади, γ эҳтимолни топиш керак бўлади; **2)** γ эҳтимол берилади, д ни топиш керак бўлади. **3)** Баҳонинг аниқлиги д ва γ эҳтимоли берилган бўлиб, танланма ҳажми **n** ни топиш керак бўлади.

10.4. Бош тўпламни номаълум математик кутилиши ва ўртача квадратик четланиши учун ишонч интерваллари

1) Бош тўпламни номаълум математик кутилиши a учун ишонч интервали бўлиб (у -маълум бўлганда):

$$\bar{X}_\gamma - t_\gamma \frac{\text{у}}{\sqrt{n}} < a < \bar{X}_\gamma + t_\gamma \frac{\text{у}}{\sqrt{n}}$$

Интервал хизмат қилади. Бу ерда t_γ ни қийматини берилган γ бўйича $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ тенгликдан ҳамда Лаплас функциясининг қийматилар жадвалидан аниқланади.

2) Бош тўпламни номаълум математик кутилиши a учун ишонч интервали бўлиб **(σ-номаълум бўлса)**

$$\bar{X}_T - t(n,\gamma)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{X}_T + t(n,\gamma)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}, S = \frac{n}{n-1}D_T$$

интервали ҳизмат қилади **t(n,** γ**)** ни қиймати **n** ва γ лар бўйича иловадаги **5**- жадвалдан олинади.

3) Бош тўпламни номаълум ўртача квадратик четланиши у учун γ ишончлилик билан қоплайдиган ишонч интервали

$$S\,(1-q(n,\gamma)) < \text{у} < S\,(1+q(n,\gamma))$$

бўлади. Бу ерда q (n, γ) – ни кийматини берилган н ва γ лар бўйича иловадаги **6** – жадвалдан олинади.

10.5. Мавзуга доир намунавий масалалар

1-масала. X бош тўплам маълум **σ=0,40** параметр билан нормал тақсимланган. Агар **n=20,** $\overline{X}$ **=6,34** бўлса, **γ=0,99** ишончлилик билан *а* параметр учун ишонч оралиғини топинг.

Ечиш: $$\overline{X}_T - \frac{ty}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + \frac{ty}{\sqrt{n}}$$

ишонч оралиғини топиш талаб қилинмоқда. Бу формулада **т** дан бошқа ҳамма катталиклар маълум т ни аниқлаймиз.

$$Ф(t)=\frac{г}{2}=\frac{0,99}{2}=0,495$$

бўлгани учун Лапласнинг интеграл функциясининг қийматлари келитирилган илованинг **4**-жадвалидан **t=2,58** ни топамиз. Демак.

$$σ=\frac{ty}{\sqrt{n}}=\frac{2,58 \cdot 0,40}{\sqrt{20}} \approx 0,23$$

$$\left(\overline{X}-\frac{ty}{\sqrt{n}};\overline{X}+\frac{ty}{\sqrt{n}}\right)$$

ишонч оралиғининг чегараларини аниқлаймиз.

Жавоб: 6,34-0,23=6,11 ва 6,34+0.23=6,57.

Шундай қилиб, **(6,11; 6,57)** ишонч оралиғи **а** параметрни **0,99** ишончлилик билан қоплайди ва баҳонинг аниқлиги **0,23** га тенг бўлади.

Жавоб: (6,11; 6,57).

2-масала. Агар нормал тақсимланган бош тўпламнинг ўртача квадратик оғиши **σ=1,2** маълум бўлса, **0,975** ишончлилик билан бош тўплам математик кутилмаси α нинг танланма ўрта қиймати бўйича баҳосининг аниқлиги δ =**0,3** га тенг бўладиган минимал танланма ҳажмини топинг.

Ечиш: Бош тўплам математик кутилмасининг ўрта қиймат орқали баҳосининг аниқлигини билдирувчи ифодадан фойдаланамиз:

$$\delta = \frac{ty}{\sqrt{n}}$$

Бу тенгликдан **n** нинг қийматини аниқлаймиз: **n**=$\left(\frac{t \cdot y}{\delta}\right)^2$ шартга кўра γ=**0,975** ёки **Ф(t)**=$\frac{\gamma}{2} = \frac{0,975}{2} = 0,4875$.

Лапласнинг интеграл функцияси қийматлари келтирилган илованинг **4**-жадвалидан **t=2,24** эканини топамиз. Топилган қийматни ҳисобга олиб қуйидагини ҳосил киламиз.

$$n=\left(\frac{t \cdot y}{\delta}\right)^2 = \left(\frac{2,24 \cdot 1,2}{0,3}\right)^2 = (8,96)^2 = 80,2816 \approx 81$$

Жавоб: n=81.

3-масала. Жамғарма бозорининг аналитиги маълум бир акцияларнинг ўртача даромадлилигини ўрганмоқда. **15** кунлик тасодифий танланма ўртача квадратик оғиши **S=3,5%** ўртача (йиллик) даромадлилик $\overline{x}$ =**10,37%** га тенг эканини кўрсатди. Акцияларнинг даромадлилигини нормал тақсимот қонунига бўйсунади деган фаразда. Аналитик қизиқаётган акциялар тури учун **95%** ли ишонч оралиғини топилсин.

Ечиш: Бош тўплам ўртача квадратик оғиши σ номаълум бўлгани учун

$$P\left(\overline{X}_T - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{X}_T + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \gamma$$

формуладан фойдаланамиз.

Иловадаги **5**-жадвалдан $t_\gamma = t(\gamma;\, n) = t(0{,}95;\, 15) = 2{,}15$ ни топамиз. У ҳолда изланаётган $\left(\overline{X} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}};\, \overline{X} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$ ишонч оралиғи.

$$\overline{X} \pm t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} = 10{,}37 \pm 2{,}15 \frac{3{,}5}{\sqrt{15}} = 10{,}37 \pm 1{,}94 \Rightarrow (8{,}43;12{,}31)$$

бўлади.

Демак, аналитик **95%** ишонч билан уни қизиқтирган акцияларнинг ўртача йиллик даромадлилиги **(8,43%; 12,31%)** оралиғида ётар экан.

Жавоб: (8,43; 12,31).

4-масала. Корхона кофени **100** граммлик банкаларга қадоқлайдиган автомат қурилма ишлаб турибди. Агар тўлдирилаётган банканинг ўртача оғирлиги **100** граммдан фарқ қилса, қурилма ўртача оғирликни ўзгартириш учун ишлаб турган ҳолатида қайта созланади. Агар оғирлик дисперсияси берилган қийматдан ошиб кетса, қурилма қайта созлаш учун тўхтатилади. Вақти-вақти билан кофели банкалар ўртача оғирлиги ва ундан оғишларни текшириш учун тасодифий равишда **30** та кофели банка танлаб олинди ва силжимаган дисперсиянинг баҳоси **S=18,540** бўлсин. Бош тўплам дисперсияси учун **95%** ли ишонч оралиғини ясанг. (Бош тўплам нормал тақсимланган деб фараз қилинади).

Ечиш: Иловадаги №6-жадвалдан **n=30** танланма ҳажми ва $\gamma=0{,}95$ ишончлиликка мос **q** нинг қийматини топамиз. $q(30;0{,}95)=0{,}28$. $q<1$ бўлгани учун бош тўплам дисперсияси учун ишонч оралиғи.

$s\cdot(1-q)<\sigma<s(1+q)$ формулага кўра

$$18{,}54\cdot(1-0{,}28)<\sigma<18{,}54\cdot(1+0{,}28)$$

$13{,}348<\sigma<23{,}731$ бўлади

Жавоб: (13,348; 23,731).

5-масала. Айтайлик маълум бир маҳсулотни хуш кўрадиган истеъмолчилар улушини баҳолаш керак бўлсин. Тасодифий **500** та истеъмолчидан **370** таси бизни қизиқтираётган маҳсулотни харид қилган бўлса:

а) Ушбу маҳсулотни харид қилган истеъмолчилар улуши учун **99%** лик ишонч интервалини қурилсин. **б)** Бош тўплам улушининг танланма улушидан фарқи **4%** дан ошмаслик эҳтимолини топилсин.

Ечиш: **а)** Истеъмолчилар улушининг нуқтавий баҳоси бўлиб уларнинг нисбий частотаси хизмат қилади: **ω=370/555=0,74.** Истеъмолчилар улуши учун ишончлилик даражаси **γ=0,99** бўлган **(n_1; n_2)** ишонч интервалини аниқлаймиз. **n** етарлича **(n>100)** катта бўлгани учун

$$P_1=\omega-t_\gamma\sqrt{\frac{\text{щ}(1-\text{щ})}{n}};\qquad P_2=\omega+t_\gamma\sqrt{\frac{\text{щ}(1-\text{щ})}{n}};$$

$\Phi(t_\gamma)=\frac{\text{г}}{2}=0,495$ тенгламадан ва Лапласнинг интеграл функциясининг қийматлари келтирилган илованинг 4-жадвалдан фойдаланиб t_γ қийматини топамиз: $t_\gamma=2,58$. Баҳолаш аниқлигини топамиз.

$$\delta=\text{т}_\gamma\sqrt{\frac{\text{щ}(1-\text{щ})}{n}}=0,495\sqrt{\frac{0,74\cdot 0,26}{500}}=0,495\cdot 0,0196=0,0097.$$

Демак, изланаётган ишонч интервали :

$$0,74\cdot 0,0097<n<0,74+0,0097$$

$$0,7303<n<0,7497$$

бўлади.

б) Масаланинг шартидан келиб чиққан ҳолда, қуйидагича ёзиб оламиз.

$$|\text{щ}-p|<\sigma=t_\gamma\sqrt{\frac{\text{щ}(1-\text{щ})}{n}}=0,04$$

Бундан $t_\gamma=\frac{0,04}{\sqrt{\frac{щ(1-щ)}{n}}}=\frac{0,04}{0,0196}=2,0408.$ У ҳолда сўралган

эҳтимоллик:

$$P\left(|щ-p|<\delta\right)=2\Phi\left(\delta/\sqrt{\frac{щ(1-щ)}{т}}\right)=2\,Ц\,(т_\gamma)=2\cdot 0,4793=0,9586$$

га тенг бўлади.

Жавоб: а) (0,7303; 0,7497); б) 0,9586.

6-масала Ушбу берилган сатистик тақсимот бўйича бош тўпламнинг математик кутилиши а ва дисперсияси σ^2 лар учун силжимаган баҳолар ва а учун 95 % кафолат билан қоплайдиган ишонч интервали қурилсин:

x_i	2	4	6
n_i	3	4	3

n=10

Ечиш:

1) $a=\overline{X}_T=(2\cdot3+4\cdot4+6\cdot3)/10=40/10=4$

2) $Д_T=(4\cdot3+16\cdot4+36\cdot3)-4^2=(12+64+108)/10-16=18,4-16=2,4$

3) $S^2=(n/n\text{-}1)Д_T=(10/9)\cdot2,4=2,6;\quad S=1,6$

4) $n=10,\ \gamma=0.95$

бўлгани учун иловадаги 5-жадвалдан

t (10;0,95)=2,26 ни топамиз. Демак, а учун ишонч интервали қуйидагича бўлади.

$$4-2,26\cdot1,6/\sqrt{10}<a<4+2,26\cdot1,6/\sqrt{10},$$

$$4-1,86<a<4+1,86,$$

$$2,14<a<5,86$$

10.6. Мустақил иш учун масалалар

1. Алоқа компанияси шаҳарлараро сўзлашувлар учун якшанба кунлари имтиёзли тўловлар белгиланган. Бу компания имтиёзли сўзлашувларнинг ўртача вақтини баҳоламоқчи. **50** та тасодифий қўнғироқдан иборат танланма шуни кўрсатадики, сўзлашувларнинг ўртача вақти **x=14,5** минут ва уларнинг ўртача квадратик четлашиши **s=5,6** минутга тенг. Якшанба кунидаги имтиёзли сўзлашувларнинг ўртача вақти учун **95 %** ишонч интервалини қуринг.

2. Суғурта компанияси беморларнинг шифокорлик хатоси туфайли узатган даволарининг ўртача пул миқдорини баҳоламоқчи. Компания тасодифий равишда танлаб олинган **165** даволар бўйича ўтказилган таҳлили натижасида даволарнинг ўртача пул миқдори **x=16,530** ва ўртача квадратик четлашиши **s=5,542** га тенг эканлигини аниқлади. Даволарнинг ўртача пул миқдори учун **95%** ли ишонч интервалларини қуринг.

Жавоб: (15,68437; 17,37763), (15,4186; 17,6414).

3. Батарекалар ишлаб чиқарувчи корхона батарекаларнинг ўртача ишлаш вақтини баҳоламоқчи. Тасодифан танланган **12** батарека учун ўртача хизмат вақти **x=34,2** соат ва ўртача квадратик четлашиши **s=5,9** соатга тенглиги маълум бўлди. Батарекаларнинг ўртача хизмат вақти учун **95%** лик ишонч интервалини қуринг.

4. Автотранспорт компанияси пойтахтдан шимолий регионларга бўлган юк транзитининг ўртача вақтини баҳоламоқчи. Тасодифий танланган **20** та товар партиясининг таҳлилидан маълум бўладики, юкнинг ўртача транзит вақти **x=2,6** кун ва ўртача квадратик четлашиши **s=0,4** кунни ташкил этар экан. Юкнинг ўртача транзит вақти учун **99%** ли ишонч интервалини қуринг.

Жавоб: (2,34; 2,86).

5. Янги турдаги экскурция хизматини ташкил қилаётган туристик фирма бу хизмат ҳақида одамларнинг фикрини билиш мақсадида тасодифан танланган **12** та одамни сўров қилди. Натижа сўров ўтказилганларнинг **28%** и учун янги турдаги экскурция хизмати маъқул келганлигини кўрсатди. Туристик фирма мижозлари орасида янги хизмат туридаги фойдаланиладиганлар улуши учун **95%** ли ишонч интрвалини қуринг.

Жавоб: (0,158; 0,309).

6. Янги ҳаво йўналишини очган авикомпания шу йўналишдан хизмат юзасидан фойдаланадиган пассажирларнинг улушини баҳоламоқчи. Шу йўналишда тасодифий танланган **347** пассажирдан **121** таси тадбиркор эканлиги аниқланди. Йўналишдан хизмат ишлари учун фойдаланадиган одамларнинг улуши учун **99%**ли ишонч интервалини қуринг.

Жавоб: (0,536; 0,623).

7. Бош тўпламдан олинган **n=16** ҳажмли танланманинг нормал тақсимланган миқдорий белгининг тузатилган ўртача квадратик четланиши $S^2 = 1$ топилган. S бош ўртача квадратик четланишни **0,95** ишончлилик қоплайдиган ишончли интервални топинг.

8. Буғдой донининг оқсилини аниқлаганда қуйидаги маълумотлар олинган: $\bar{x}_T$ = **14,80%.** Танланма ўртачасининг нисбий хатоси $S_{\bar{x}}$ = **0,20%**, n= **4** . Бош ўртача учун **95** фоизли ва **99** фоизли ишончли интервалларни топинг.

9. Деталларнинг узунликлари нормал тақсимланган тасодифий миқдор бўлсин. Агар бош ўртача квадратик четланиш у =**0,5** мм бўлиб, ишончли эҳтимолларни y маълум бўлса, математик кутилиш α ни у = **0,25** баҳо аниқликда қопловчи энг кичик танланма ҳажмини топинг.

а) γ **= 0,95** *б)* γ **= 0,99** **в)** γ **= 0,999**

Кўрсатма: $n = \dfrac{t^2 \cdot \delta^2}{y^2}$ формуладан фойдаланиш керак.

10. Бош тўплам нормал тақсимланган. n = **10** ҳажмли танланма бўйича «тузатилган» ўртача квадратик четланиш **S** = **0,16** топилган. Бош ўртача квадратик четланиш S ни **0,999** ишончлилик билан қоплайдиган ишончли интервални топинг.

11–БОБ. СТАТИСТИК ГИПОТЕЗАЛАРНИ ТЕКШИРИШ

11.1. Статистик гипотезалар. Статистик критерия. Критик соҳа. Критик нуқталар

Номаълум тақсимотнинг кўриниши ҳақида ёки маълум тақсимотнинг параметрлари ҳақидаги гипотезага **статистик гипотеза** дейилади. Масалан, бош тўплам нормал тақсимот қонунига эга - статистик гипотезадир.

Олға сурилган гипотезани нолинчи (асосий) гипотеза дейилади ва уни **Но** билан белгиланади. **Конкурент (альтернатив)** гипотеза деб нолинчи гипотезага зид бўлган $\mathbf{H_1}$ гипотезага айтилади.

Фақат битта тахминни ўз ичига олган гипотезага **оддий гипотеза** дейилади. Чекли ёки чексиз сондаги оддий гипотезаларга **мураккаб гипотеза** дейилади.

Гипотезани текшириш натижасида икки тур хатога йўл қўйилади. **Биринчи тур хато.** Бунда тўғри гипотеза рад қилинади. **Иккинчи тур хатода** нотўғри гипотеза қабул қилинади.

Биринчи тур хатонинг эҳтимоли **қийматдорлик даражаси** дейилади ва α билан белгиланади. Кўпинча α сифатида **0,01** ёки **0,05** олинади. Иккинчи тур хатонинг эҳтимолини β билан белгиланади.

Статистик критерий деб, гипотезани текшириш учун хизмат қиладиган **F** тасодифий миқдорга айтилади.

Кузатиладиган (эмпирик) киймат. F_{kuz} деб, критерийнинг танланмалар бўйича ҳисобланган қийматига айтилади.

Критик соха деб критерийнинг нолинчи гипотеза рад килинадиган қийматлар тўпламига айтилади.

Критик нуқталар (чегаралар) K_{kr} деб, критик соҳани гипотезанинг қабул қилиниш соҳасидан ажратиб турадиган нуқталарга айтилади.

11.2. Иккита нормал бош тўплам дисперсия ларини тенглиги хақидаги гипотезани текшириш

Айтайлик, X ва Y бош тўпламлар олинган n_1 ва n_2 ҳажмли эркли танланмалар бўйича S^2_x ва S^2_y тузатилган танланма дисперсиялар топилган. Берилган α қийматдорлик даражасида тузатилган дисперсиялар бўйича ушбу H_0:Д(х)=Д(у) нолинчи гипотизани текшириш талаб этилади. Амалда дисперсия ларни таққоалаш масаласи приборлар, асбоблар, ўлчаш методларининг аниқлигини баҳолаш талаб этилганда юзага келади.

H_0 гипотезани текшириш қоидаси.

Берилган α қийматдорлик даражасида H_0 нолинчи гипотезани конкурент гипотеза H_1:Д(х)>Д(у)бўлганда текшириш учун:

1. $F_{kuz}=S^2_{katta}/ S^2_{kichchik}$ ҳисобланади.

2. **Фишер - Снедекор** тақсимотини критик нуқталарй жадвалидан $F(\alpha,k_1 = n_1-1,\ k_2 = n_2-1)$ критик нуқтани топиш лозим.

3. F_{kuz} ва F_{kr} таққосланади

Агар $F_{kuz} < F_{kr}$ бўлса H_0-гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $F_{kuz} > F_{kr}$ бўлса, H_0-гипотезани рад этилади.

11.3. ИККИТА НОРМАЛ БОШ ТЎПЛАМ ЎРТА ҚИЙМАТЛАРИ ТЕНГЛИГИ ҲАҚИДАГИ ГИПОТЕЗАНИ ТЕКШИРИШ

Айтайлик, **X** ва **Y** бош тўпламлар нормал тақсимланган бўлиб, уларнинг дисперсиялари бир хил, аммо ўрта қийматлари ҳар хил бўлсин. Берилган α қийматдорлик даражасида **H_0** яъни **$H_0: M(x)=M(y)$**, гипотезани, **$H_1: M(x)$ $M(y)$** конкуриент гипотезага нисбатан текшириш талаб етилади. Текшириш икки босқичда амалга оширилади. **Бунинг учун :**

1. **X** ва **Y** тўпламлардан ҳажмлари n_1 ва n_2 га тенг бўлган танланмалар олинади. Бу танланма маълумотларга асосланиб

X_T, Y_T, S^2_x, S^2_y лар ҳисобланади. **Биринчи босқич.** Аввало **H_0:Д(х)=Д(у)** гипотеза текшириб кўрилади. Бунинг учун:

2. $F_{kuz} = S^2_{katta} / S^2_{kichchik}$ ҳисобланади.

3. **Фишер - Снедекор** тақсимотини критик нуқталари жадвалидан

$F(\alpha,\ n_1-1,\ n_2-1)$ ни қиймати топилади.

4. Агар $F_{kuz} < F_{kr}$ бўлса H_0 -гипотезани рад этишга асос йўқ бўлади. Агар $F_{kuz} < F_{kr}$ бўлса, H_0 -гипотезани рад этилади. **Иккинчи боскич.** **H_0:Д(х)=Д(у)** ўринли деган шартда **$H_0: M(X)= M(Y)$** гипотезани текширишга киришилди

Бунинг учун

1) $$T_{kuz} = \frac{(X_T - Y_t)}{\sqrt{(n_1-1)\cdot S_x^2 + (n_2-1)\cdot S_y^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}$$

ҳисобланади.

2) Стюдент тақсимотининг критик нуқталари жадвалидан яъни иловадаги 7- жадвалдан

$$t_{kp}(\alpha,\ k= n_1 + n_2 - 2)$$

топилади. Агар $|T_{kuz}| < t_{kp}$ - бўлса H_0 гипотезани рад етишга асос йўқ. $T_{kuz} > t_{kp}$ -бўлса, H_0 гипотезани рад етилади.

11.4. БОШ ТЎПЛАМНИНГ НОРМАЛ ТАҚСИМЛАНГАНЛИГИ ҲАҚИДАГИ ГИПОТЕЗАНИ ПИРСОН КРИТЕРИЯСИ БИЛАН ТЕКШИРИШ

Олдинги **11.2** ва **11.3** пунктларда биз бош тўплам белгиси **X** нормал тақсимланган деб ҳисоблаб унинг параметрларини баҳолаш ҳамда иккита **X** ва **Y** бош тўпламлар нормал тақсимланган бўлса, уларнинг дисперсиялари ва математик кутилишларини таққослаш қоидалари билан танишдик.

Агар белгининг тақсимот қонуни номаълум, лекин у тайин кўринишга эга (масалан, нормал қонунга эга) деб тахмин қилишга асос бор бўлса, у холда ушбу нолинчи **«Бош тўплам нормал конун бўйича тақсимланган»** деган гипотезани текширилади.

Номаълум тақсимотнинг таҳмин қилинаётган қонуни ҳақидаги гипотезани махсус танланган тасодифий миқдор **мувофиқлик критерийси** ёрдамида текширилди.

Мувофиқлик критерийси деб, номаълум тақсимотнинг тахмин қилинаётган қонуни ҳақидаги гипотезани текшириш критерийсига айтилади. **X^2 (хі-квадрат) К.Присон, Колмогоров, Симирновларнинг** мувофиқлик критерийлари мавжуд бўлиб, биз **Пирсон критерийси** ёрдамида бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани текшириш қоидаси билан танишамиз.

Пирсон критерийси берилган қийматдорлик даражасида гипотезанинг кузатиш маълумотлари билан мувофиқ келишини ёки мувофиқ келмаслигини аниқлайди.

Фараз қилайлик, Бош тўплам нормал тақсимланган деган тахминда n_i назарий частоталари хисобланган бўлсин. α

қийматдорлик даражасида **«Бош тўплам нормал тақсимланган»** деган гипотезани текшириш талаб қилинади.

Айтайлик, эмпирик тақсимот тенг узоқликдаги вариантлар кетма-кетлиги ва уларга мос частоталар кўринишида берилган бўлсин.

$$\begin{array}{cccc} x_i & x_1 & x_2 \ldots\ldots & x_k \\ n_i & n_1 & n_2 \ldots\ldots & n_k \end{array}$$

X бош тўпламни нормал тақсимланганлигини текшириш уч босқичда ўтказилади:

1-босқичда назарий частоталар ҳисобланилади. Бунинг учун

1. $\overline{X}_T$ ва σ_T лар топилади

2. $n_i^1 = \dfrac{n \cdot h}{y_T}\varphi(z_i)$, $z_i = \dfrac{X_i - \overline{X_T}}{y_T}$, $\varphi(z_i) = \dfrac{1}{\sqrt{2p}} e^{-\frac{z^2}{2}}$

лар ҳисобланилади.

Яъни, қуйидаги 1-жадвал тўлдирилади:

i	x_i	$z_i = x_i - \overline{X}_T / \sigma_T$	$\varphi(z_i)$	n'_i
1	x_1	z_1	$\varphi(z_1)$	n'_1
2	x_2	z_2	$\varphi(z_2)$	n'_2
...	...	...	....	....
k	x_k	z_k	$\varphi(z_k)$	n'_k

2- босқичда X_{kuz} -ни қиймати ҳиобланилади. Бунинг учун қуйидаги 2-жадвал тузилади

I	n_i	n^1_i	$n_1 - n^1_1$	$(n_i - n^1_i)^2$	$(n_i - n^1_i)^2 / n^1_i$
1	n_1	n^1_1	$n_2 - n^1_2$	$(n_1 - n^1_1)^2$	$(n_i - n^1_i)^2 / n^1_i$
2	n_2	n^1_2	$n_i - n^1_i$	$(n_2 - n^1_2)^2$	$(n_2 - n^1_2)^2 / n^1_2$
..	...	...	....	....	....
K	n_k	n^1_k	$n_k - n^1_k$	$(n_k - n^1_k)^2$	$(n_k - n^1_k)^2 / n^1_k$
Σ					$x^2_{kuz} = \Sigma(n_i - n^1_i)^2 / n^1_i$

3-босқичда X^2_{kuz} билан X^2_{kr} ни таққосланилади. X^2_{kr} $(\alpha, k=i-3)$ни қиймати иловадаги 7 жадвалдан олинади.

Агар $x^2_{kuz} \leq x^2_{kr}$ бўлса, H_0 гипотезани рад этишга асос йўк бўлади. Аксинча, $x^2_{kuz} > x^2_{kr}$ бўлса, H_0 рад этилади.

11.5. Мавзуга доир намунавий масалалар

1 - масала: X, Y нормал бош тўпламлардан олинган $n_1=12$ ва $n_2=15$ ҳажмли эркли танланмалар бўйича $S^2_x=11,41$ ва $S^2_y=6,52$ тузатилган танланма дисперсиялар топилган.$\alpha=0,05$ қийматдорлик даражасида H_0:Д(x) = Д(y) гипотезани H_1:Д(x)>Д(y) гипотезага нисбатан текшириш талаб қилинади.

Ечиш: 1) F_{kuz}=11,41/6052=1,75

2) Иловадаги 8 жадвалдан $F_{kr}(0,05, 11, 14) = 2,57$ критик нуктани топамиз. $F_{kuz} < F_{kr}$ бўлгани учун H_0 гипотезани рад етишга асос йўқ.

2 - масала: X ва Y нормал бош тўпламлардан олинган $n_1=5$ ва $n_2=6$ ҳажмли танланмалар бўйича $\overline{X}_т=3,3$, $\overline{Y}_т=2,48$ ва $S^2_x=0.25$, $S^2_y=0.108$ топилган бўлсин.$\alpha=0,05$ қийматдорлик даражасда H_0:M(x) = M(Y) гипотезани H_1:M(x)≠M(Y) гипотезага нисбатан текшириш талаб этилади.

Ечиш: 1) $S^2_x = 0.25$ ва $S^2_y = 0.108$ ҳар хил бўлгани учун бош дисперсиялар тенглиги ҳақидаги гипотеза **Фишер-Снедекор** критериясидан фойдаланиб текширилади.

1) $F_{kuz} = 0{,}25/0{,}108 = 2{,}31$. 2) $F_{kr} = (0{,}05,\ 4{,}5) = 5{,}19$.

3) $F_{kuz} < F_{kr}$ демак бош дисперсиялар тенглиги ҳақидаги тахмин ўринли. Энди ўрта қийматларни таққослаймиз.

$T_{kuz} = (3{,}3-2{,}48/\sqrt{4} \cdot 0{,}25+5 \cdot 0{,}108)\ \sqrt{30}\ (5+6-2)/5+6) = 3{,}22$, (иловадаги 7-жадвалдан) $t_{kr}\ (0{,}05;9) = 2{,}26$ яъни $T_{kuz} > t_{kr}$ демак H_0 гипотеза ўринли эмас . Танланма ўртача қийматлар муҳим фарқланади.

3 - масала: Пирсон критерийсидан фойдаланиб бош тўпламни $\alpha=0.05$ қийматдорлик даражасида нормал тақсимланганлиги ҳақидаги H_0 гипотезани ушбу $n=50$ хажмли танланманинг эмпирик тақсимотига кўра текширинг.

x_i	2	4	6	8	10
n_i	5	10	20	10	5
z_i	-2	-1	0	1	2

Ечиш: 1) $\overline{X}_T$ ва y_T ларни кўпайтмалар методи ёрдамида топамиз.

$$Z_i = \frac{X_i - c}{h} = \frac{X_i - 20}{2}.$$

к к

$$\overline{X_T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} z_i n_i = 6 + \frac{1}{50}(-10-10+10+10) = 6$$

$$D_T = h^2\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} z_i n_i - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} z_i n_i\right)^2\right] = 4\left[\frac{1}{50}(20+10+10+20)-0\right] =$$

$$= 4\cdot\frac{60}{50} = \frac{24}{5} = 4.4 \qquad yT = \sqrt{4,8} \approx 2,2$$

Энди, $n^1_i = 50\cdot 2/2,2\varphi(z_i)$ назарий частоталарни ҳисоблаймиз. Бунинг учун ушбу жадвални тўлдирамиз:

i	x_i	z_i	$\varphi(z_i)$	n^1_i
1	2	-1.81	0.0775	n^1_1=3.5
2	4	-0.90	0.2661	n^1_2=12.0
3	6	0	0.3989	n^1_3=18.1
4	8	0.90	0.2661	n^1_4=12.0
5	10	1.81	0.0775	n^1_5=3.5
				49.1

X^2_{kuz} ни қийматини топиш учун ушбу 2-жадвални тўлдирамиз.

i	n_i	n^1_i	$n_i - n^1_i$	$(n_i - n^1_i)^2$	$(n_i - {}^1_i)^2 / n^1_i$
1	5	3.5	1.5	2.25	0.64
2	10	12.0	-2	4	0.33
3	20	18.1	1.9	3.61	0.20
4	10	12.0	-2	4	0.33
5	5	3.5	1.5	2.25	0.64
Σ					X^2_{kuz} =2.14

Иловадаги 7-жадвалдан α=0,05 и=5 бўлгани учун
X^2_{kr} (α,k= i-3)=X^2_{kr} (0,05, k=5-3)=6 ни топамиз.

Хулоса: $X^2_{kuz} < X^2_{cr}$ бўлгани учун H_0 ни рад этишга асос йўқ, яъни бош тўплам нормал тақсимланган деган гипотеза ўринли.

11.6. Мустақил иш учун масалалар

1. (Икки бўш тўплам дисперсияси ҳақидаги гипотезани текшириш) Инвестицион компания хизматчиси иккита **А** ва **В** инвестицияси лойиҳаларини таҳлил қилмоқда. **А** инвестиция **15** йил муддатга мўлжалланган бўлиб, ундан бу вақт давомида йилга **15,6%** фойда кутилмоқда. **В** инвестиция **12** йил муддатга мўлжалланган бўлиб, ундан йилига **15,6%** фойда кутилмоқда. Бу икки инвестициялардан тушадиган йиллик фойданинг ("тузатилган") дисперсиялари **4,6** ва **342**га тенг **А** ва **В** инвестициядан хулосага асос борми? Инвестициялардан тушадиган йиллик фойда нормал тақсимланган деб фараз қилинади.

2. (Икки бўш тўплам дисперсияси маълум бўлган ҳолда тўпламлар ўртачалари ҳақидаги гипотезани текшириш). Фабрикада кофени **100** гр, идишларга қадоқлаш учун икки автомат ускунадан фойдаланилар экан. Кўп йиллик кузатишлар натижасида бошқарувчи бу икки ускуна учун стандарт четлашиш (бош тўпламнинг ўртача квадратик четлашиши)ни баҳолаган: **1**-ускуна учун **0,02гр** (σ_1) ва 2-ускуна учун **0,04 гр.** (σ_2). Биринчи ускунада қадоқланган n_1=**30** дона кофе идиш танланиб улардаги кофенинг ўртача массаси x_1=**101** гр.га тенглиги аниқланди. Иккинчи ускуна учун худди шундай ҳажми n_2=**25** тенг танланма олиниб, ўртача масса x_2=**98** гр. эканлиги аниқланди. Бу икки ускунада қадоқланаётган кофенинг ўртача массалари ҳар хил дейишимизга асос борми?

3. (Икки бўш тўплам дисперсияси номаълум бўлган ҳолда тўпламлар ўртачалари ҳақидаги гипотезани текшириш). Батарекалар ишлаб чиқариш фабрикасида иккита ишлаб чиқариш конвеери ўрнатилган экани топилган.

Батареkаларнинг ўртча хизмат вақтини аниқлаш учун ҳар бир конвеердан танланма олиниб. Биринчи конвеердан олинган **12** та батарека учун ўртача хизмат вақти $x=34,2$ ва $s=5,9$ соат ("тузатилган" ўртача квадратик четлашиш) экан. Иккинчи конвеердан олинган **10** та батарейка учун ўртача хизмат вақти $x=28,7$ соат ва $s=6,1$соат экан. Ҳар хил конвеердан ишлаб чиқарилган батарейкаларнинг ўртача хизмат вақти ҳар хил дейишимизга асос борми?

4. (Тақсимот қонуни ҳақидаги гипотезани текшириш). **Бюффон** тангани $n=4040$ маротаба ташланганда танга $k_1=2048$ маротаба "герб" ва $k_2=1992$ маротаба "рақам" томони билан тушган. Бу маълумотлар танга "тўғри" (яъни танга бир жинсли, симметрик ва уни ташлаганда "герб" томони билан тушиш эҳтимоли $p=1/2$ га тенг) деган H_0 гипотизага зид бўладими? $\alpha=0,05$ деб қабул қилинг.

Жавоб:Зид келмайди.

5. (Нормал тақсимот ҳақидаги гипотезани текшириш) **X** миқдорий аломатнинг статистик тақсимоти қуйидаги жадвалда келтирилган.

3,0-3,6	3,6-4,2	4,2-4.8	4,8-5,2	5,4-6,6	6,0-6,6	6,6-7,2
2	8	35	43	22	15	5

Маълумотлар **X** бош тўплам тақсимотининг нормаллиги ҳақидаги гипотезани қаноатлантирадими?

(Ишончлилик даражаси $\alpha=0,01$)

Жавоб: Қаноатлантиради.

6.(Нормал тақсимот ҳақидаги гипотезани текшириш) χ^2 критериясидан фойдаланиб ($\alpha=0,05$) ҳажми **100** га тенг қуйида келтирилган танланма бош тўпламнинг нормаллиги ҳақидаги гипотезага мувофиқми?

Интервал номери	Интервал чэга ралари		Частота
I	X_i	X_{iQ1}	n_i
1	-20	-10	20
2	-10	0	47
3	0	10	80
4	10	20	89
5	20	30	40
6	30	40	16
7	40	50	8
8			n_i=100

Жавоб: Мувофиқ.

7. **X** ва**Y** нормал бош тўпламларда олинган $n_1 = 11$ ва $n_2=14$ хажмли иккита эркли тўпламлар бўйича тузатилган танланма дисперсиялар $S^2_x = 0,76$ ва $S^2_y = 0,38$ топилган бўлсин. $\alpha = 0,05$ қиматдорлик даражасида бош дисперсия ларнинг тенглиги ҳақидаги H_0:D(X) = D(Y)нольинчи гипотезани конкурент гипотеза H_1 : D(X) > D(Y) бўлганда текширинг.

8. Икки станок - автоматнинг аниқлигини таққослаш учун иккита намуна (танланма) олинган бўлиб, уларнинг ҳажмлари $n_1 = 10$ ва $n_2 = 8$. Олинган буюмларнинг текширилаётган ўлчамини ўлчаш натижасида қуйдаги натижалар олинган:

X_i : 1,08 1,10 1,12 1,14 1,15 1,25 1,36 1,38 1,40 1,42

Y_i : 1,11 1,12 1,18 1,22 1,33 1,35 1,36 1,38

Агар қийматдорлик даражаси α=0,01 ва конкурент гипотеза сифатида H_1 : D(X) $\neq$ D(Y) ни олинса, станоклар бир хил аниқликка эга **Ho: D(X)= D(Y)** деб ҳисоблаш мумкинми

9. Вилоятнинг иккита **X** ва **Y** туманида (хар бирида **50** та магазиндан) жамлашган озиқ - овқат магазинларининг буюм алмаштириши текширилган. Бу туманлар учун товар

айирбошлашни олдин маълум - **78,9** ва **78, 68** минг сўм, ўртача квадратик четлашишни баҳолари мос равишда **7,22** ва **7, 79** минг сўм бўлсин. α = **0,05** қийматдорлик даражасида тажрибаларнинг математик кутулишлари маълум деб **Ho: D(X) = D(Y)** нольинчи гипотеза $\mathbf{H_1}$**:D(X)** $\neq$ **D(Y)** алтернатив гипотезага нисбатан текширилсин.

12– БОБ. КОРРЕЛЯЦИОН БОҒЛАНИШЛАР

12.1. ФУНКЦИОНАЛ, СТАТИСТИК ВА КОРРЕЛЯЦИОН БОҒЛАНИШЛАР

Кўп масалаларда ўрганилаётган **Y** тасодифий миқдорнинг битта ёки бир нечта бошқа миқдорларга боғлиқлигини аниқлаш ва баҳолаш талаб қилинади. Аввал **Y** нинг битта тасодифий (ёки тасодифий бўлмаган) **X** миқдорга, кейин эса бир нечта миқдорларга боғлиқлигини текширамиз.

Иккита тасодифий миқдор функционал боғланиш билан ё статистик деб аталадиган бошқа тур боғланиш билан боғланган бўлиши, ёки ўзаро боғланмаган бўлиши мумкин.

Статистик боғланиш деб, шундай боғланишга айтиладики, унда миқдорлардан бирининг ўзгариши иккинчисининг тақсимоти ўзгаришига олиб келади. Хусусан, статистик боғлиқлик миқдорлардан бирининг ўзгариши иккинчисининг ўртача қийматини ўзгаришида кўринади; бу ҳолда статистик боғланиш **корреляцион боғланиш** деб аталади.

X тасодифий миқдор билан функционал эмас , балки корреляцион боғланган **Y** тасодифий миқдорга мисол келтирамиз. Айтайлик, **Y** дон ҳосили, **X** – ўғитлар миқдори бўлсин. Майдони бир хил бўлган участкалардан бир хил миқдорда ўғит солинганда ҳам ҳар хил ҳосил олинади, яъни **Y** миқдор **X** миқдорнинг функцияси эмас . Бу тасодифий факторлар (ёғингарчилик, ҳаво ҳарорати ва бошқалар) таъсири билан тушунтирилади. Шунга қарамасдан, тажриба кўрсатадики, ўртача ҳосил ўғитлар миқдорининг функциясидир, яъни **Y** миқдор **X** билан корреляцион боғланиши билан боғланган.

12.2. ШАРТЛИ ЎРТАЧА ҚИЙМАТЛАР. КОРРЕЛЯЦИОН БОҒЛИҚЛИК

Шартли ўртача қиймат $\overline{y_x}$ **деб Y** нинг **X=x** қийматга мос қийматларнинг арифметик ўртача қийматига айтилади.

Агар ҳар бир **x** қийматга шартли ўртача қийматнинг битта қиймати мос келса, у ҳолда, равшанки, шартли ўртача қиймат **x** нинг функциясидир; бу ҳолда **Y** тасодифий миқдор **X** миқдорга **корреляцион боғлиқ** дейилади.

Y нинг **X** га корреляцион боғлиқлиги деб, $\overline{y_x}$ шартли ўртача қийматининг **x** га функционал боғлиқлигига айтилади:

$$\overline{y_x} = f(x). \qquad (1)$$

(1) тенглама **Y** нинг **X** га **регрессия тенгламаси** дейилади. **f(x)** функция **Y** нинг **X** га регрессияси, унинг графиги эса **Y** нинг **X** га **регрессия чизиғи** дейилади.

$\overline{x_y}$ шартли ўртача қиймат ва **X** нинг **Y** га корреляцион боғлиқлиги шунга ўхшаш аниқланади.

$\overline{x_y}$ **шартли ўртача қиймат деб, X** нинг **Y = y** га мос қийматларнинг арифметик ўртача қийматига айтилади.

X нинг **Y** га **корреляцион боғлиқлиги деб,** $\overline{x_y}$ шартли ўртача қийматнинг **y** га боғлиқлигига айтилади:

$$\overline{x_y} = \varphi(y) \qquad (2)$$

(2) тенглама **X** нинг **Y** га **регрессия тенгламаси** дейилади. $\varphi(y)$ функция **X** нинг **Y** га регрессияси, унинг графиги эса **X** нинг **Y** га **регрессия чизиғи** дейилади.

12.3 КОРРЕЛЯЦИЯ НАЗАРИЯСИНИНГ ИККИ АСОСИЙ МАСАЛАСИ

Корреляция назариясининг биринчи масаласи корреляцион боғланиш **формасини аниқлаш,** яъни **регрессия функциясининг** кўринишини (чизиқли, квадратик, кўрсткичли ва хоказо) топишдан иборатдир. Регрессия функциялари кўпчилик ҳолларда чизиқли бўлади. Агар $f(x)$ ва $\varphi(y)$ регрессия функцияларининг иккаласи ҳам чизиқли бўлса, у ҳолда **корреляция чизиқли,** акс ҳолда эса **ночизиқли** дейилади. Равшанки, чизиқли корреляцияда иккала регрессия чизиғи ҳам тўғри чизиқлардир.

Корреляция назариясининг иккинчи масаласи – корреляцион боғланишнинг зичлигини (кучини) аниқлашдир. Y нинг X га корреляцион боғлиқлигининг зичлиги Y нинг қийматларини $\overline{y}_x$ шартли ўртача қиймат атрофида тарқоқлигининг катталиги бўйича баҳоланади.

12.4. РЕГРЕССИЯ ТЎҒРИ ЧИЗИҒИ ТАНЛАНМА ТЕНГЛАМАСИ ПАРАМЕТРЛАРИНИ ГРУППАЛАНМАГАН МАЪЛУМОТЛАР БЎЙИЧА ТОПИШ

Агар X га Y сон белгилар чизиқли корреляцион боғланиш билан боғланган бўлса, у ҳолда иккала регрессия чизиғи ҳам, тўғри чизиқлар бўлади. Бу тўғри чизиқларнинг тенгламаларини топиш учун, n та синов ўтказилган бўлиб, натижада, n та сон жуфти, яъни (x_1,y_1) , (x_2, y_2), ..., (x_i, y_i) лар топилган бўлсин. Маълумки, бу маълумотларга асосан, Y нинг X га регрессия тўғри чизиғининг тенгламаси $y = c_{yx}x + b$ **(1)** кўринишида бўлади. Бу ерда c_{yx} = - Y нинг X га танланма регрессия коеффицентидир.

c_{yx} ва b параметрларни энг кичик квадратлар методи ёрдамида қуйидаги формуладан топилади:

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

n – танланма хажми,

$\overline{x}_T, \overline{y}_T$ - танланма ўртача қийматлар

y_x, y_y - танланма ўртача квадратик четланишлар.

12.6. ТАНЛАНМА КОРРЕЛЯЦИЯ КОЕФФИЦИЕНТИ ВА УНИНГ ХОССАЛАРИ

Кичик ҳажмли танланмалар учун корреляция коефициенти қуйидагича ҳисобланади:

$$c_{xy} = \frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x}) \cdot (y_k - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2 \sum_{k=1}^{n}(y_k - \overline{y})^2}}, \qquad (1)$$

Бу ерда

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k$$

Кўп ҳолда c_{xy}ни (1) формулага караганда бирмунча соддароқ бўлган Ушбу

$$c_{xy} = \frac{n\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k}{\sqrt{\left[n\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2\right]\left[n\sum_{k=1}^{n} y_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)^2\right]}} \qquad (2)$$

формуладан топилади.

Группаланган маълумотлар бўйича танланма корреляция коеффициенти ушбу формуладан топилади:

$$r_T = \frac{\sum n_{xy} x_i y_i - n\bar{x}_T \bar{y}_T}{n y_x y_y} \qquad (3)$$

c_{xy} - корреляция коеффициенти қуйидаги хоссаларга эга :

1) $-1 \le c_{xy} \le 1$,

2) Агар X ва Y лар бир – бирига боғлиқ бўлмаган равишда ўзгарса, $c_{xy} = 0$ бўлади.

3) Агар X ва Y лар орасида боғланиш қанчалик кучли бўлса, c_{xy} нинг қиймати шунчалик катта бўлади.

4)Агар X ва Y лар орасида боғланиш чизиқли бўлса $|c_{xy}| = 1$ бўлади.

c_{xy} қиймати	**Боғланиш характери**	**Боғланиш талқини**
$c_{xy} = 0$	**Мавжуд эмас**	-
$-1 < c_{xy} < 1$	**Тескари**	**X ортганда Y камаяди ва аксинча**
$0 < c_{xy} < 1$	**тўғри**	**X ортганда Y ортади**
$\|c_{xy}\| = 1$	**Функционал**	**X нинг хар бир қийматига Y нинг ягона қиймати мос келади.**

ρ_{xy} нинг қийматига кўра боғлинишнинг кучи қуйидаги жадвалда берилган:

C_{xy} нинг қиймат лари оралиғи	[0,1;0,3]	[0,3;0,	[0,5;0,7]	[0,7;0,9]	[0,9;1]
Боғланиш кучи	**Бўш**	**Ўрта миёна**	**Сезиларли**	**Юқори**	**Жуда ҳам юқори**

12.7 ТАНЛАНМА КОРРЕЛЯЦИЯ КОЕФИЦИЕНТИНИ ҲИСОБЛАШНИНГ ТЎРТ МАЙДОН УСУЛИ

Агар **X** ва **Y** сон белгилар бўйича кузатиш натижалари корреляцион жадвал ёрдамида берилган бўлса, у ҳолда танланма корреляция коеффициентини **12.6** да келтирилган **(3)** формула бўйича ҳисоблаш учун

$$U_i = \frac{x_i - c_1}{h_1} \quad \text{ва} \quad V_i = \frac{y_i - c_2}{h_2}$$

шартли варианталарга ўтиш кулай бўлади. Бу ҳолда танланма корреляция коеффиценти ушбу,

$$r_T = \frac{\sum n_{uv} UV - n\overline{U}_T \overline{V}_T}{n y_u y_v} \qquad (1)$$

формула бўйича ҳисобланади. Бу ерда

$$\overline{U_T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} U_i n_i \qquad \overline{V_T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} H_i n_i \ ,$$

$$y_U = \sqrt{\overline{U}^2 - \overline{U}^2{}_T} \qquad y_V = \sqrt{\overline{V}^2 - \overline{V}^2{}_T}$$

$$\overline{U}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} U_i^2 n_i \quad \overline{V}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} V_i^2 n_i$$

$$\bar{U}, \bar{V}, \bar{y}_u, \bar{y}_v$$

катталикларни кўпайтмалар методи ёрдамида ҳисоблаш мумкин.

$\sum n_{uv}UV$ ни тўрт майдон усули ёрдамида ҳисобланади.

12.8. ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ КОРРЕЛЯЦИЯ

Агар регрессия графиги $\overline{y_x} = f(x)$ ёки $\overline{x_y} = \varphi(y)$ эгри чизиқ билан тасвирланадиган бўлса, корреляция эгри чизиқли дейилади.

Масалан, **Y** нинг **X** га регрессия функциялари қуйидаги кўринишларда бўлиши мумкин:

$\overline{y_x} = ax^2 + bx + c$ (иккинчи тартибли параболик корреляция);

$\overline{y_x} = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (учинчи тартибли параболик корреляция);

$\overline{y_x} = \dfrac{a}{x} + b$ (гиперболик корреляция).

Эгри чизиқли корреляция назарияси чизиқли корреляция назарияси қайси масалаларни ҳал қилса, шу масалаларни (корреляцион боғланиш шакли ва зичлигини аниқлаш) ҳал қилади.

Регрессия тенгламасининг номаълум параметрлари энг кичик квадратлар усули билан изланади. Эгри чизиқли корреляция зичлигини баҳолаш учун танланма корреляцион нисбатлар хизмат қилади.

Ишнинг моҳиятини аниқлаш мақсадида иккинчи тартибли параболик корреляция билан чекланамиз, бунда **n** та кузатиш (танланма) маълумотлари худди шундай корреляция ўринли деб аташга имкон беради деб хисоблаймиз. Бу ҳолда **Y** нинг **X** га танланма регрессия тенгламаси ушбу кўринишда бўлади:

$$\overline{y_x} = Ax^2 + Bx + C \qquad (*)$$

Бу ерда **A, B, C** – номаълум параметрлар.

Энг кичик квадратлар усулидан фойдаланиб, номаълум параметрларга нисбатан чизиқли тенгламалар системаси ҳосил қилинади:

$$\left.\begin{array}{l}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} n_x x^2\right)A + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} n_x x^3\right)B + \left(\sum n_x x^2\right)C = \sum n_x \overline{y}_x x^2 \\ \left(\sum n_x x^3\right)A + \left(\sum n_x x^2\right)B + \left(\sum n_x x\right)C = \sum n_x \overline{y}_x x \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} n_x x^2\right)A + \left(\sum n_x x\right)B + nC = \sum\limits_{i=1}^{n} n_x \overline{y}_x\end{array}\right\} (**)$$

Бу системадан топилган **A,B,C** параметрлар (*) га қўйилади, натижада изланаётган регрессия тенгламаси ҳосил қилинади.

12.9. ТАНЛАНМА КОРРЕЛЯЦИОН НИСБАТ

Танламада белгилар орасидаги чизиқли корреляцион боғланиш зичлигини баҳолаш учун, танланма корреляция коэффициенти хизмат қилади. Ночизиқли корреляцион боғланиш зичлигини баҳолаш учун, қуйидаги янги йиғма характеристикалар киритилади:

$з_{yx}$ – Y нинг **X** га танланма корреляцион нисбати;

$з_{xy}$ – X нинг **Y** га танланма корреляцион нисбати.

Y нинг **X** га танланма корреляцион нисбати деб, группалараро ўртача квадратик четланишнинг умумий ўртача квадратик четланишга нисбатига айтилади.

ёки, бошқача белгиласак,

$$з_{xy} = \frac{у_{gr\ aro}}{у_{um}}$$

i	X_i	Y_i	X_i^2	XY_i	Y_i^2
1	149	79	22201	11771	6241
2	153	77	23409	11781	5929
3	157	86	24649	12874	6724
4	161	87	25921	14007	7569
5	165	88	27225	14520	7744
6	169	89	28561	15041	7921
7	173	92	29929	15916	8464
8	177	96	31329	16992	9216
9	181	97	32761	17557	9409
10	185	99	34225	18315	9801
$\sum$	1670	886	280210	148774	79018

$$з_{yx} = \frac{у_{\bar{y}_x}}{у_y}$$

Бу ерда

$$у_{\bar{y}_x} = \sqrt{D_{га.ар}} = \sqrt{\frac{\sum n_x\left(\bar{y}_x - \bar{y}\right)^2}{n}}$$

$$у_y = \sqrt{D_{y_m}} = \sqrt{\frac{\sum n_y\left(y - \bar{y}\right)^2}{n}}$$

Бу ерда **n**- танланма хажми (барча частоталар йиғиндиси);
n_x-X белги х қийматининг частотаси;
n_y- **Y** белги **у** қийматининг частотаси;
$\bar{y}$ - **Y** белгининг умумий ўртача қиймати

$\overline{y}_x$ - белгининг шартли ўртача қиймати.

X нинг **Y** га танланма корреляцион нисбати шунга ўхшаш

i	X_i	Y_i	X_i^2	XY_i	Y_i^2

аниқланади:

$$з_{xy} = \frac{\overline{yx_y}}{y_x}.$$

12.10. Мавзуга доир намунавий масалалар

1-масала: Қуйидаги жадвалда келтирилган **n=10** жуфт **(x,y)** маълумотларга, асосланиб, одамнинг бўйи **X** билан кўкрак қафаси **Y** орасидаги боғланишнинг танланма регрессия тенгламаси ва корреляция коффициенти аниқлансин.

X **(см)**

бўйини узунлиги **149 163 157 161 165 169 173 177 181 185**

Y **(см)**

кўкрак қафасини кенглиги **79 77 82 87 88 89 92 96 97 99**

Ечиш: *а в* ва r_T ларни ҳисоблашларни энгиллаштириш мақсадида ушбу ёрдамчи жадвални тузамиз.

1	149	79	22201	11771	6241
2	153	77	23409	11781	5929
3	157	86	24649	12874	6724
4	161	87	25921	14007	7569
5	165	88	27225	14520	7744
6	169	89	28561	15041	7921
7	173	92	29929	15916	8464
8	177	96	31329	16992	9216
9	181	97	32761	17557	9409
10	185	99	34225	18315	9801
$\sum$	1670	886	280210	148774	79018

Бу жадвалдан ва юқорида **12.4** да келтирилган (2) ва (3) формулалар ёрдамида $c_{yx} = 0,615$, $в = 14,105$ ларни топамиз.

Демак, кўкрак қафаси кенглиги билан бўй орасида боғланиш $y = 0,615x + 14,105$ кўринишда бўлади.

Бу боғланишни (кучини) корреляция коеффисенти $r_T = \dfrac{y_x}{y_y \cdot c_{yx}}$ формулага кўра $r_T = 0,98$ бўлади.

Демак, боғланиш яхши.

<u>2 – Масала.</u> Ушбу 1-корреляцион жадвалда берилган маълумотлар бўйича танланма корреляция коеффицентини ва **Y** ни **X** га регрессия тўғри чизиғининг танланма тенгламасини тўрт майдон усули билан топинг.

1-жадвал.

Y \ X	10	20	30	40	50	60	n_y
15	5	7	-	-	-	-	12
25	-	20	23	-	-	-	43
35	-	-	30	47	2	-	79
45	-	-	10	11	2	6	47
55	-	-	-	9	7	3	19
n_x	5	27	63	67	29	9	n=200

Ечилиши: Шартли вариантларга ўтамиз: $U = \dfrac{x - c_1}{h_1} = \dfrac{x-40}{10}$ (s_1 сохта ноль сифатида энг катта частотага эга бўлган **x =40** варианта олинди; h_1 қадам иккита қўшни варианта орасидаги айирмага тенг: **20-10=10**) ва $V = \dfrac{y - c_2}{h_2} = \dfrac{y - 35}{10}$ (s_2

сохта ноль сифатида энг катта частотага эга бўлган **у=35** варианта олинди; h_2 қадам иккита қўшни варианта орасидаги айирмага тенг: **25-15=10).**

Шартли варианталар бўйича корреляцион жадвал тузамиз. Бу амалда бундай бажарилади: биринчи устунда энг катта частотага эга бўлган варианта **(35)** ўрнига нольнинг тепасига кетма-кет **-1, -2,** нольнинг тагига **1,2** ёзилади. Биринчи сатрда энг катта частотага эга бўлган варианта **(40)** ўрнига , нольдан чапда кетма-кет **-1, -2, -3,** нольдан ўнгда **1, 2** ёзилади. Қолган барча маълумотлар дастлабки корреляцион жадвалдан кўчириб ёзилади. Натижада шартли варианталар бўйича **2-** корреляцисн жадвални ҳосил қиламиз.

2-жадвал.

v \ u	-3	-2	-1	0	1	2	n_v
-2	5	7	-	-	-	-	12
-1	-	20	20	-	-	-	43
0	-	-	30	47	2	-	79
1	-	-	10	11	20	6	47
2	-	-	-	9	7	3	19
n_u	5	27	63	67	29	9	n=200

$\bar{u}$, $\bar{v}$, σ_u, σ_v каттликларни кўпайтмаларни методи билан

топиш мумкин; аммо u_i ва v_i лар кичик бўлгани учун $\bar{u}$ ва $\bar{v}$ ни ўртача қиймат таърифига асосланиб, σ_u ва σ_v ни эса ушбу формулалардан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$\sigma_y = \sqrt{\overline{u^2} - (\bar{u})^2}\ ,\quad \sigma_в = \sqrt{\overline{v^2} - (\bar{v})^2}$$

$\bar{u}$ ва $\bar{v}$ ни топамиз:

$$\bar{u} = \frac{\sum n_u u}{n} = \frac{5\cdot(-3)+27\cdot(-1)+63\cdot(-2)+29\cdot 1+9\cdot 2}{200} = -0{,}425$$

$$\bar{v} = \frac{\sum n_v v}{n} = \frac{12\cdot(-2)+43\cdot(-1)+47\cdot 1+19\cdot 2}{200} = 0{,}09;$$

Ёрдамчи $\overline{(u)}^2$ микдорни, кейин эса σ_y ни ҳисоблаймиз:

$$\overline{u^2} = \frac{5\cdot 9+27\cdot 1+63\cdot 4+29\cdot 1+9\cdot 4}{200} = 1{,}405;$$

$$\sigma_y = \sqrt{\overline{u^2} - \overline{(u)}^2} = \sqrt{1{,}405 - 0{,}425^2} = 1{,}106.$$

Шунга ўхшаш $\sigma_в$ = **1,209** ни ҳосил қиламиз.

$\sum n_{uv}uv$ ни тўрт майдон усули билан топамиз, бунинг учун 3- хисоблаш жадвалини тузамиз.

3-жадвал.

	-3	-2	-1	0	1	2	I	II
-2	5|6—	7|4—	-		-	-	58	-
-1	-	20|2—	23|1—		-	-	63	-
0							III	IV
1	-	-	10|-1—		20|1—	6|2—	-10	32
2	-	-	-		7|2—	3|4—	-	26
I	30	68	23	II	-	-	121	-
III	-	-	-10	IV	34	24	-10	58

Якуний катаклардаги сонларни қўҳамиз.

$\sum n_{uv} uv = 121 - 10 + 58 = 169$ Бу маълумотларга асосланиб иланаётган корреляция коеффицентини топамиз:

$$r_T = \frac{\sum n_{uv} uv - n\overline{uv}}{n y_u y_x} = \frac{169 - 200 \cdot (-0,425) \cdot 0,09}{200 \cdot 1,106 \cdot 1,209} = 0,603$$

Шундай килиб, **p_T=0,603**.

Енди **Y** ни **X** га регрессия тугри чизигининг танланма тенгламасини топамиз: Бунинг учун **X_T, Y_T**, y_X, y_Yларни ҳисоблаймиз:

$$\overline{X}_T = C_1 + h_1 \overline{U}_T = 40 + 10 \cdot (-0.425) = 37,75$$
$$\overline{Y}_T = C_2 + h_{21} \overline{V}_T = 35 + 10\ (0.09) = 35,9$$
$$\sigma_x = h_1 \sigma_u = 10 \cdot 1,106 = 11,06$$
$$y_y = h_2 y_v = 10 \cdot 1,206 = 12,06$$

У ҳолда

$$Y - \overline{Y}_T = r_T \frac{y_y}{y_x} (x - x_1)$$

изланаётган регрессия тенгламаси

$$Y - 35,9 = 0,603 \frac{12,09}{11,06} (x - 35,75), \qquad Y = 0,659x + 12,34$$

бўлади.

3-Масала: Ушбу корреляцион жадвалдаги маълумотлар бўйича **Y** нинг **X** га $\overline{y_x} = Ax^2 + Bx + C$ кўринишдаги танланма регрессия тенгламасини топинг.

1-жадвал.

	1	1,1	1,2	n_y
6	8	2	-	10
7	-	30	-	30
7,5	-	1	9	10
n_x	8	33	9	N=50
$\overline{y_y}$	6	6,73	7,5	

2- жадвал.

X	n_x	$\overline{y_x}$	$n_x x$	$n_x x^2$	$n_x x^3$	$n_x x^4$	$n_x \overline{y_x}$	$n_x \overline{y_x} x$	$n_x \overline{y_x} x^2$
1	8	6	8	8	8	8	48	48	48
11	33	6,7	36,3	39,9	43,9	48,3	222	244,3	268,7
12	9	7,5	10,8	12,9	15,5	18,6	67,5	81	97,2
$\sum$	50	-	55,1	60,8	67,4	74,9	337,5	373,3	413,9

2-жадвалнинг пастки сатридаги сонларни (йиғиндиларни) (**) га қўйиб, система ҳосил қиламиз:

$$79{,}98A + 67{,}48B + 60{,}89C = 413{,}93$$
$$67{,}48A + 60{,}89B + 55{,}10C = 373{,}30$$
$$60{,}89A + 55{,}10B + 50C = 337{,}59$$

Бу системани ечиб, қуйидагиларни топамиз:

$$A = 1{,}94, \quad B = 2{,}98, \quad C = 1{,}10.$$

Изланаётган регрессия тенгламасини ёзамиз:

$$\overline{y_x} = 1.94x^2 + 2.98x + 1.10$$

Бу тенглама бўйича ҳисобланган шартли ўртача қийматлар корреляцион жадвалдаги шартли ўртача қийматлардан сал фарк қилишга осонгина ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Масалан, $x_1=1$ да: жадвал бўйича $y_1=6$; тенглама бўйича $y_1=94 + 2{,}98 + 1{,}10 = 6{,}02$. Шундай қилиб, топилган тенглама кузатиш (танланма) маълумотлари билан яхши мос келади.

4-Масала. Корреляцион жадвал маълумотлари бўйича η_{yx} ни топинг.

	10	20	30	n_y
15	4	28	6	38
25	6	-	6	12
n_x	10	28	12	n=50
$\overline{y}_x$	21	15	20	

Ечилиши. Умумий ўртача кийматни топамиз:

$$\bar{y} = \frac{\sum n_y y}{n} = \frac{38 \cdot 15 + 12 \cdot 25}{50} = 17{,}4$$

Умумий ўртача квадратик четланишни топамиз.

$$y_y = \sqrt{\frac{\sum n_y (y - \bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{38\ (15 - 17{,}4)^2 + 12\ (25 - 17{,}4)^2}{50}} = 4{,}27$$

Группааро ўртача квадратик четланишни топамиз:

$$y\overline{y}_x = \sqrt{\frac{\sum n_x (\bar{y} - \bar{y})^2}{50}} =$$

$$.= \sqrt{\frac{10(21-17,4)^2+28(15-17,4)^2+12(20-16,4)^2}{50}} = 2,73$$

Изланаётган корреляцион нисбат:

$$з_{ух} = \frac{у\bar{у}_х}{у_у} = \frac{2,73}{4,27} = 0,64$$

1211. Мустақил иш учун масалалар

1.Туристик фирма денгизбўйи курорти худудидаги меҳмонхоналардан ўринлар таклиф этмокда. Фирма менежерини меҳмонхона оммабоплигининг меҳмонхона биносининг денгиз соҳилидан узоқ-яқинлигига қандай боғлиқлиги қизиқтирар экан. Шу мақсадда шаҳарнинг **14** та меҳмонхонаси таҳлил қилиниб қуйидагилар аниқланади. Йил давомида меҳмонхона ўринларининг бандлиги ва меҳмонхона биносидан денгиз соҳилигача бўлган масофалар ушбу жадвалда келтирилган.

масофа, км	**0,1**	**0,1**	**0.2**	**0,3**	**0,4**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,7**	**0,8**	**0,8**	**0,9**	**0,9**
Бандлиги, %	**92**	**95**	**96**	**90**	**89**	**86**	**90**	**83**	**85**	**80**	**778**	**76**	**72**	**75**

Берилган маълумотлар асосида корреллограмма чизинг ва ҳосил бўлган график ёрдамида боғланиш характерини аниқланг. Чизиқли регрессия тенгламасини тузинг ва тенглама коэффициентларига изоҳ беринг.

2.Автомашиналар прокати билан шуғулланадиган компанияни автомашина босиб ўтган йўл (пробег) **X** ва унга хизмат кўрсатишнинг ойлик харажатлари Y орасидаги боғлиқлик қизиқтиради. Шу мақсадда 15 дона автомашина танлаб олинади ва натижалар ушбу жадвалда келтирилди.

X	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Y	13	16	15	20	19	21	26	24	30	32	30	35	34	40	39

Берилган маълумотлар асосида корреллограмма чизинг ва ҳосил бўлган график ёрдамида боғланиш характерини аниқланг. Чизиқли регрессия тенгламасини тузинг ва тенглама коеффициентларига изоҳ беринг.

2.Радиоаппаратура савдоси билан шуғуланадиган компания маълум бир русумдаги видеомагнитафон учун турли ҳудудларда турли нарх белгилади. Қуйида келтирилган маълумотлар 8 та ҳудуд бўйича сув русумдаги видеомагнитафонларнинг сотилиш ҳажми ва нархлари берилган.

Сотув ҳажми (дона)	420	380	350	400	440	380	450	420
Нархи (минг сўм)	5.5	6	6.5	6	5	5.6	4.5	5

Берилган маълумотлар асосида корреллограмма чизинг ва ҳосил бўлган график ёрдамида боғланиш характерини аниқланг. Чизиқли регрессия тенгламасини тузинг ва тенглама коеффициентларига изоҳ беринг.

4. Университет ётоқхонасида яшовчи 10 талаба тасодифан танлаб олинди ва сўров ўтказилди. Мақсад талабаларнинг охирги сессия натижалари бўйича ўртача балининг ҳафта давомида мустақил ўқиш учун сарфланган вақтига таҳлил қилиш еди:

Ўртача балл	4,6	4,6	3,8	4,2	4,3	3,8	4	3,1	3,9
Вақт (соат)	25	22	9	15	15	30	20	30	10

Берилган маълумотлар асосида коррелограмма чизинг ва ҳосил бўлган график ёрдамида боғланиш характерини аниқланг. Чизиқли регрессия тенгламасини тузинг ва тенглама коеффициентларига изоҳ беринг.

5.Фирма ўзининг янги ювиш воситасининг реклама компаниясини ўтказди: дўконларда харидорларга ювиш воситасининг мақсадга мувофиқлигини аниқлаш мақсадида ҳафталик сотув ҳажми ва реклама ҳаражатларини таҳлил қилди:

Сотув ҳажми (минг сўм)	72	76	78	70	68	80	82	65	62	90
Реклама харажатлари (минг сўм)	5	8	6	5	3	9	12	4	3	10

Берилган маълумотлар асосида коррелограмма чизинг ва ҳосил бўлган график ёрдамида боғланиш характерини аниқланг. Чизиқли регрессия тенгламасини тузинг ва тенглама коеффициентларига изоҳ беринг.

6. 10 та шахтада бир смена давомида кўмир қазиб олиш кўрсаткичлари таҳлили натижалари қуйидаги жадвалда келтирилган. Бир ишчи томонидан қазиб олинган кўмир ўртача ҳажми Y(t) ва пласт қалинлиги **X** (m).

Шахта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	8	11	12	9	8	8	9	9	8	12
Y	5	10	10	7	5	6	6	5	6	8

Берилган маълумотлар асосида корреллограмма чизинг ва ҳосил бўлган график ёрдамида боғланиш характерини аниқланг. Чизиқли регрессия тенгламасини тузинг ва тенглама коеффициентларига изоҳ беринг.

7. Қуйидаги корреляцион жадвалда келтирилган маълумотлар асосида **Y=Y(X)** **ва** **X=X(Y)** регрессия тангламаларини тузинг.

Жавоб: y_x=1,92$_x$+101,6; x_y=0,12y+3,7.

8. Қуйидаги корреляцион жадвалда келтирилган маълумотлар асосида **Y=Y(X)** , **ва** **X=X(Y)** регрессия тангламаларини тузинг.

X / Y	18	23	28	33	38	43	48	n_y
125	-	1	-	-	-	-	-	1
150	1	2	5	-	-	-	-	8
175	-	3	2	12	-	-	-	17
200	-	-	1	8	7	-	-	16
225	-	-	-	-	3	3	-	6
250	-	-	-	-	-	1	1	2
n_x	1	6	8	20	10	4	1	N=50

Жавоб: y_x=4x+57,8; x_y=0,19y-3,1.

9. Сосна дарахти диаметри билан унинг баландлиги орасидаги боғланиш қуйидагича берилган:

баландлиги, м	**(X)**	**17,5**	**18,5**	**19,5**	**20,5**
Диаметри, м	**(Y)**	**25,56**	**27,68**	**30,70**	**33,20**

Дарахт баландлиги билан диаметри орасида тўғри чизиқли боғланиш бор деб, баландлик билан диаметр орасидаги боғланишни топилсин.

10. ДТ - 64 тракторининг бир сезонда ишлаши (гектар ер ишлаши) ва ёнилғи сарфлаши (минг кг) қуйдаги жадвалда берилган.

Ҳайдалган ер га(X)	**Ёнилғи сарфи минг кг (Y)**	**Ҳайдалган ер га(X)**	**Ёнилғи сарфи минг кг (Y)**
624	8500	1426	15500
834	9500	1540	16500
856	10500	1600	17500
1040	11500	1740	18500
1100	1200	1918	19500
1260	1300	2014	20500
1266	14500		

Тракторнинг ишлаш қуввати ва ёнилғи сарфлаши орасидаги тўғри чизиқли боғланишни регресия тенгламасини ҳамда коррелясия коеффициентини топинг.

11. Тошкент **(X)** ва Самарқанд **(Y)** шаҳарларида феврал ойидаги ҳаво харорати **40** йил мобайнида кузатилганда ушбу маълумотлар олинган.

X(т)	**Й(с)**	**X**	**Й**	**X**	**Й**	**X**	**Й**	**X**	**Й**
12,0	10,8	13,9	10,1	15,0	13,8	17,2	13,9	18,1	16,0
12,0	11,3	14,2	10,0	15,0	16,0	16,9	14,8	18,4	17,8
12,0	12,0	14,0	10,0	15,5	13,9	16,9	15,0	19,2	15,0
12,0	13,0	14,0	12,0	15,9	14,7	17,0	16,0	19,3	16,1
12,8	10,9	13,9	12,4	16,0	13,0	16,8	17,0	20,0	17,0
13,8	10,0	15,0	11,0	15,9	15,0	17,5	16,0	20,1	17,7
13,1	11,5	14,9	13,0	16,0	16,0	18,0	14,0	14,0	14,8
13,0	13,0	14,9	14,2	16,9	12,9	18,0	14,8	14,0	15,2

Феврал ойи учун **X** ва **Y** шаҳарлар ҳаво хароратининг ўртачасини, ўртача квадратик четланишини **X** ва **Y** орасидаги бог'ланишнинг танланма коррелясия коффициентини, Y нинг X га чизиқли регрессия тенгламасини топинг. Y ва X орасидаги бог'лиқлигини характерлаб беринг.

12. Қуйидаги жадвалда арпа ог'ирлиги X(мг) ва ундан ёғ миқдори Y (%) берилган

X	11,0	19,9	15,0	16,1.	18,0	25, 6	10,2	19,2	21,6	16,4
Y	1,2	5,1	2,3	3,1	4,2	5,2	0,9	3,2	4,1	2,1

X ва Y миқдорлар орасидаги боғланишни регрессия чизиғи тенгламаси ва корреляция коеффициентини топинг.

13.Қуйдаги жадвалда қанд лавлаги оғирлиги X (гр) ва ундаги қанд миқдори Y (%) берилган:

X (гг)	416	566	716	910	1410	766	316	490	870	441
Y (%)	17,1	16,3	17,0	14,01	13,5	12,8	16,0	18, 0	17,8	17,0

Бу миқдорлар орасидаги боғланишнинг корреляция коеффициенти ва регресия чизиғининг танланма тенгламасини тузинг.

14. Буғдойдан олинган ўртача ҳосилдорлик Y (с. га) билан ерни чуқур ҳайдаш X (см) ўртасидаги боғланишни кузатиш тажриба натижалари қуйидагича бўлса:

Ҳайдалган ер чуқурлиги, см	7	8	9	10	11	12
1 га олинган ўртача хосилдорлик (с)	8,1	8, 2	8,3	9, 1	10,3	18,8

Бу икки миқдор орасидаги боғ'ланишнинг корреляция коеффициенти топилсин.

15. Қуйидаги берилган маълумотларга кўра эркаклар бўйи ва кўкрак қафаси КЕНГлиги орасидаги боғ'лиқлиги, регрессия чизиг'и тенгламаси ва корреляcия коеффиcиенти топилсин.

Бўйи см(х)	Коғкрак қафаси КЕНГлиги, см. (й)
149	79
153	77
157	82
161	87
165	88
169	89
173	92
177	96
181	97
185	99
1670	886

16. Қуйдаги корреляцион жадвалларда келтирилган маълумотлар бўйича Й нинг Х га ва Х нинг Й га регрессия тўг'ри чизиқларининг танланма тенгламаларини топинг.

1)

Й/Х	5	10	15	20	25	30	35	40	нй
100	2	1	—	—	—	—	—	-	3
120	3	4	3	—	—	—	—	-	10
140	—	—	5	10	8	—	—	-	23
160	—	—	-	1	—	6	1	1	9
180	—	-	-	-	-	—	4	1	5
$н_х$	5	5	8	11	8	6	5	2	н=50

Й/Х	18	23	28	33	38	43	48	нй
125	—	1	—	—	—	—	—	1
150	1	2	5	—	—	—	—	8
175	—	3	2	12	—	—	—	17

2)

200	–	–	1	8	7	–	–	16
225	–	–	–	–	3	3	–	6
250	–	–	–	–	–	1	1	2
$н_х$	1	6	8	20	10	4	1	н=50

3)

Й/Х	5	10	15	20	25	30	35	$н_х$
100	–	–	–	–	–	6	1	7
120	–	–	–	–	–	4	2	6
140	–	–	8	10	5	–	–	23
160	3	4	3	–	–	–	–	10
180	2	1	–	1	–	–	–	4

17.Жамоа хўжаликларида хайдалган ер чуқурлиги билан бугдойдан олинган ўртача ҳосил ушбу жадвалда келтирилган Ерни чуқурлиги билан ўртача олинган ҳосил орасидаги боғланишнинг регрессия танланма тенгламаси ва корреляция коеффисиенти топилсин.

Ерни чуқурлиги , см						
$х_и$	7	**8**	9	**10**	**11**	**12**
Ўртача ҳосил, га/с						
$й_и$	**8,1**	**8,3**	**8,2**	**9,1**	**10,3**	**10,8**

18. Ҳар бир га ерга солинган ўгит миқдори Х(тонна)билан ҳар бир гектар ердан олинган ҳосилдорликЙ(с) натижалари ушбу жадвалда келтирилган. Й ни Х га регрессия танланма тенгламаси ва корелясия коеффисиенти топилсин.

Солинган ўгит миқдори , Х га/т										
$х_и$	**6**	**11**	**11**	7	**8**	**10**	**12**	**6**	**10**	**9**

Олинган ҳосилдорлик, Й га/с										
$й_и$	27	32	33	30	30	33	34	29	31	32

19. Дарахтни бўйи билан унинг диаметри орасидаги богланишни ўрганиш натижасида олинган кузатиш натижалари ушбу жадвалда келтирилган.
Й ни Х га регрессия танланма тенгламаси ва корелясия коеффисиенти топилсин.

13-БОБ.БИР ФАКТОРЛИ ДИСПЕРСИОН ТАХЛИЛ

13.1. ГРУППАВИЙ ЎРТАЧА ҚИЙМАТЛАРНИ ТЕНГЛИГИ ҲАҚИДАГИ H_0:$M(x_1)$=$M(x_2)$=....=$M(x_p)$ ГИПОТЕЗАНИ ТЕКШИРИШ

Нормал тақсимланган **Х** миқдорий белгига **F** фактор таъсир кўрсатаётган бўлиб, у **р** та F_1 , F_2 ,....., F_p даражаларга эга бўлиб ҳар бир даражада **k** тадан синов ўтказилган. Кузатиш натижалари x_{ij} сонлар ушбу жадвалда келтирлган бўлсин:

Синов номери	фактор даражалари			
и	F_1	F_2	...	F_p
1	X_{11}	x_{12}	....	x_{1p}
2	X_{21}	x_{22}	....	x_{2p}
.	.	.	.	.
q	$x_{гp1}$	$x_{гp2}$	....	$x_{гp*p}$

Масаланинг қўйилиши: Группавий бош дисперсия лар номаъ лум бўлсада, лекин улар бир хил дэга н фаразда группавий ўртача қийматларини тенглиги ҳақидаги: H_0:$M(x_{гр1})$ =$M(x_{гр1})$=....=$M(x_{гр*р})$ нольинчи гипотезани α=0,05 қийматдорлик даражасида текшириш талаб қилинади.
Бу масалани Ечиш учун қуйидаги катталиклар киритилади:

к

$P_j = \sum_{i=1}^{p} x^2_{ij}$ - **X** белгининг **F** даражада кузатилган қийматлари

квадратлари йигиндиси ,

2) $P_j = \sum_{i=1}^{q} x^2_{ij}$ - эса белгининг **F** даражада кузатилган

қиймат лари йигиндиси

3) Умумий ва фактор йигиндиларини ушбу формулалар ёрдамида ҳисобланади.

$$S_{умум} = \sum_{j=1}^{p} P_j - \frac{1}{qp}\left[\sum_{j=1}^{p} P_j\right]^2$$

$$S_{факт} = \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{p} R_j^2 - \frac{1}{qp}\left[\sum_{j=1}^{p} R_j\right]^2$$

Агар белгининг кузатилган қийматлари нисбатан катта сонлар бўлса, ҳисоблашларни энгиллаштириш мақсадида шартли $У_{ij} = x_{ij} - S$ вариантларга ўтиш қулай бўлади.. Бу ерда S - сифатида умумий ўртача қиймат, яъни

$X = 1/p\ (\bar{X}_{гр1} + \bar{X}_{гр2} + \ldots + \bar{X}_{гр.р})$ олинади.

Бу ҳолда $S_{умум}$ ва $S_{фак}$ – йиғиндилар

$$S_{умум} = \sum_{j=1}^{p} Q_j - \frac{1}{qp}\left[\sum_{j=1}^{p} T_j\right]^2,$$

$$S_{фак} = \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{p} T_j^2 - \frac{1}{qp}\left[\sum_{j=1}^{p} T_j\right]^2$$

Бу ерда

$$Q_j = \sum^{q} y_{ij}^2,\ T_j = \sum^{q} y_{ij},$$

I=1 i=1

4) Фактор ва қолдиқ дисперсия лар топилади

$S^2_{фак}=S_{фак}/p-1$, $S^2_{қолдиқ}=S_{қолдиқ}/p(q-1)$

$S_{қолдиқ}=S_{умум}-S_{фак}$

5) Ниҳоят фактор ва қолдиқ дисперсия лар **Фишер - Снедекор** критерияси бўйича таққосланади. Яъни,

1) $F_{кузк}S^2_{фак}/S^2_{қолдиқ}$, 2)$F_{кр}(\alpha, k_1=p-1; k_2=p(q-1)$ лар аниқланади.

Агар $F_{куз}<F_{кр}$ бўлса, H_0 гипотеза рад этишга асос йўқ.

Аксинча $F_{куз}>F_{кр}$ бўлса, H_0 - рад этилади.

Қишлоқ хўжалигида екинларидан юқори ҳосил олишда асосий фактор **F** ўғит бўлиб унинг даражалари ўғит турларидир. Ўғит турларини ҳосилдорликка таъсири муҳим ёки муҳим эмас лигини аниқлашда бир факторли дисперсион таҳлил усулидан фойдаланилади.

13.2.Синовлар сони турли даражаларда бир ҳил эмас

Агар синовлар сони F_1даражада q_1 га F_2 даражада q_2 га, ..., F_p даражада q_nга тенг бўлса, у ҳолда четланишлар квадратларининг умумий йиғиндисини синовлар сони барча даражаларда бир ҳил бўлган ҳолдаги каби ҳисобланади.Четланишлар квадратларнинг фактор йиғиндисини ушбу формуладан топилади:

$$S_{Fakt}=\frac{T_1^2}{q_1}+\frac{T_2^2}{q_2}+\ldots+\frac{T_p^2}{q_p}-\frac{\left[\sum_{j=1}^{p}T_j\right]^2}{n}$$

бу ерда $n=q_1+q_2+\ldots+q_p$-синовлар жами сони.

Қолган ҳисоблашлар синовлар сони бир ҳил бўлган ҳолдаги каби олиб борилади.

$$S_{қолд}=S_{умум}-S_{факт}$$

$$s^2_{Fakt}=\frac{S_{Fakt}}{p-1},\; s^2_{qold}=\frac{S_{qold}}{n-p}$$

Намунавий масалаларга олинади.

2-масала. F факторнинг биринчи даражасида **4** та,иккинчи даражасида **4** та, учинчи даражасида **3** та ва тўртинчи даражасида **2** та, жами **13** та синов ўтказилган.Дисперсион анализ методи билан **0,05** қийматдорлик даражасида группавий ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нольинчи гипотезани текширинг. Танланмалар дисперсия лари бир ҳил бўлган нормал тўпламлардан олинган деб фараз қилинади. Синов натижалари қуйидаги жадвалда келтирилган.

Синов номерлари	**Фактор даражалари**			
i	F_1	F_2	F_3	F_4
1	**1,38**	**1,41**	**1,32**	**1,31**
2	**1,38**	**1,42**	**1,33**	**1,33**
3	**1,42**	**1,44**	**1,34**	-
4	**1,42**	**1,45**	-	-
$X_{грj}$	**1,40**	**1,43**	**1,33**	**1,32**

Ечилиши.Ҳисоблашларни енгиллаштириш учун, $y_{ij}=x_{иж}$**-138** шартли вариантга ўтамиз ва ушбу ҳисоблаш жадвалини тузамиз.

Синов номери	Фактор даражалари								Якуний устун
i	F_1		F_2		F_3		F_4		
	y_{i1}	y^2_{i1}	y_{i2}	y^2_{i2}	y_{i3}	y^2_{i3}	y_{i4}	y^2	
1	0	0	3	9	-6	36	-7	49	
2	0	0	4	16	-5	25	-5	25	
3	4	16	6	36	-4	16	-	-	
4	4	16	7	49	-	-	-	-	
$C_j = \sum y^2_{ij}$ $T_j = \sum y_{ij}$	8	32	20	100	-15	77	-12	7 4	$\sum S_j = 293$ $\sum T_j = -9$
T^2_j	64		400		22 5		14 4		

Жадвалнинг якуний устуни ва пастки сатрдан фойдаланиб четланишлар квадратларининг умумий ва фастор йиғиндиларини топамиз:

$$S_{умум} = \sum S_j - \frac{\left[\sum S_j\right]^2}{n} = 293 - \frac{9^2}{13} = 293 - 6{,}23 = 286{,}77$$

$$S_{факт} = \frac{T_1^2}{q_1} + \frac{T_2^2}{q_2} + \frac{T_3^2}{q_3} + \frac{T_4^2}{q_4} - \frac{\left[\sum T_j\right]^2}{n} =$$

$$= \frac{64}{4} + \frac{400}{4} + \frac{225}{3} + \frac{144}{2} - 6{,}23 = 256{,}77$$

Четланишлар квадратларининг қолдиқ йиғиндисини топамиз:

$S_{колд} = S_{умум} - S_{факт} = 286{,}77 - 256{,}77 = 30$

Фактор ва қолдиқ дисперсия ларни топамиз:

$$S^2_{факт} = \frac{S_{факт}}{p-1} = \frac{256,77}{4-1} = \frac{256,77}{3} = 85,59$$

$$S^2_{колд} = \frac{S_{колд}}{n-p} = \frac{30}{13-4} = \frac{30}{9} = 3,33$$

Фактор ва қолдиқ дисперсия ларни **F** критерий ёрдамида таққослаймиз.

Бунинг учун аввал критерийининг кузатилган қийматини ҳисоблаймиз:

$$F_{кузат} = \frac{s_{факт}}{s^2_{колд}} = \frac{85,59}{3,33} = 25,7$$

Суратнинг озодлик даражалари сони **k_1=p-1=4-1=3**, махражники эса **k_2=p(q-1)=13-4=9** ва қийматдорлик даражаси $б = 0,05$ эканлигини ҳисобга олиб,иловадаги **8** - жадвалдан **$F_{кр}$=(0/05;3;9)=3,86** критик нуқтани топамиз. $F_{кузат} > F_{кр}$ бўлгани учун группавий ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нольинчи гипотезани рад етамиз. Бошқача айтганда,группавий ўртача қиймаларнинг фарқи муҳим.

13.3. Мавзуга доир намунавий масалалар

1-масала. Айтайлик **4** та бир хил майдонга **3** хил ўгит турини таъсир еттириш натижасида олинган ўртача ҳосил ушбу жадвалда келтирлгандек бўлсин.

Тажриба сони	Ўғит турлари		
	F_1- азот	F_2 фосфор	F_3 калий
1	38	20	21
2	36	24	22
3	35	26	31
4	31	30	34

α=**0,05** қийматдорлик даражасида барча группавий ўртача қийматларни тенглиги ҳақидаги асосий гипотезани текшириш талаб етилади.

Ечиш: Ҳисоблашларни энгиллаштириш мақсадида барча кузатиш натижаларидан группавий ўртача қийматларини ўртачасини айириб ушбу ёрдамчи жадвални тузамиз. Бизнинг мисол учун

$$\bar{X}=1/3\ (\bar{X}_{гр.1}+X_{гр.2}+\bar{X}_{гр.3})=29$$
$$Y_{ij}=x_{ij}-29$$

Тажриба сони	F_1		F_2		F_3		Якуний устун
	y_{ij}	y^2_{i1}	y_{ij}	y^2_{i2}	y_{ij}	y^2_{i3}	
1	9	81	-9	81	-8	64	
2	7	49	-5	25	-7	49	
3	6	34	-3	9	2	4	
4	2	4	1	1	5	25	
$q_j=\sum y^2_{ij}$		170		116		142	$\sum q_j=428$
$T_j=\sum y_{ij}$	24		-16		-8		$\sum T_j=0$
T^2_j	576		256		64		$\sum T_j=896$

Бу жадвалга кўра,

$$S_{умум} = \sum_{j=1}^{p} S_j - \frac{\left[\sum_{j=1}^{p} T_j\right]^2}{pq} = 428 - 0 = 428$$

$$S_{факт} = \frac{\sum_{j=1}^{p} T_j^2}{q} - \frac{\left[\sum_{j=1}^{p} T_j\right]^2}{pq} = \frac{896}{4} - 0 = 224$$

Фактор ва қолдиқ дисперсия ларни топамиз:

$$S^2_{фак} = S_{фак}/(p-1) = 224/2 = 112$$

$$S^2_{қолдиқ} = S_{қолдиқ}/p(q-1) = 209/9 = 22{,}67$$

у ҳолда

$$F_{куз} = S^2_{фак}/S^2_{қолдиқ} 112/22{,}67 = 4{,}94$$ **бўлади.**

$k_1=p-1=2$; $k_2=p(q-1)=9, \alpha=0{,}05$ эканлигини ҳисобга олиб Фишер- Снедекор тақсимотининг критик нуқталари иловадаги **8** - жадвалидан $F_{кр}(\alpha;\ k_1;\ k_2)=F_{кр}(0{,}05:\ 2{,}9)=4{,}26$ критик нуқтани топамиз. $F_{куз}>F_{кр}$ бўлгани учун группавий ўртача қийматларининг тенглиги ҳақидаги нольинчи гипотеза рад етилади, яъни ўғит турларининг хосилдорликка таъсири муҳим.

13.4. Мустақил иш учун масалалар.

1-масала. F факторнинг бешта даражасининг ҳар бирида **4** тадан синов ўтказилган. Дисперсион анализ методи билан **0,05** қийматдорлик даражасида $\overline{X}_{rij}$ группавий ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нольинчи гипотезани текшириш талаб қилинади. Танланмалар дисперсия лари бир хил бўлган нормал тўпламлардан олинган деб тахмин қилинади. Синов натижалари қуйидаги жадвалларда келтирилган.

Синов номерлари	Фактор даражалари			
i	F_1	F_2	F_3	F_4
1	36	56	52	39
2	47	61	57	57
3	50	64	59	63
4	58	66	58	61
5	67	66	79	65
X_{rij}	51,6	62,6	61,0	57,0

Кўрсатма. $y_{ij} = x_{ij} = - 58$ деб олинг.

Жавоби. $S_{умум} = 1850,55$; $S_{факт} = 360,15$; $S_{колд} = 1490,40$; $S^2_{факт} = 120$; $S^2_{колд} = 93$; $F_{кузат} = 1,29$; $F_{кр}(0,05,\ 3;\ 16) = 3,24$ группавий ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нольинчи гипотезани рад етишга асос йўқ.

Синов номерлари	Фактор даражалари					
i	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
1	100	92	74	68	64	69
2	101	102	87	80	83	71
3	126	104	88	83	83	80
4	128	115	93	87	84	80
5	133	119	94	96	90	81
6	141	122	101	97	96	82
7	147	128	102	106	101	86
8	148	146	105	127	111	99
X_{rpj}	128	116	93	93	89	81

2-масала. **F** факторнинг олтита даражасининг ҳар бирида **8** тадан синов ўтказилган. Дисперсион анализ методи билан **0,01** қийматдорлик даражасида $\overline{X}_{rij}$ группавий ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нольинчи гипотезани текшириш талаб қилинади. Танланмалар дисперсия лари бир хил бўлган нормал тўпламлардан олинган деб тахмин қилинади. Синов натижалари қуйидаги жадвалларда келтирилган.

Кўрсатма. $y_{ij} = x_{ij}$ **-100** деб олинг.

Жавоби. $S_{умум} = 21567,48$; $S_{факт} = 11945,60$; $S_{колд} = 9622$; $S^2_{факт} = 2389$; $S^2_{колд} = 229$; $F_{кузат} = 10,43$; $F_{кр}(0,01,\ 5;\ 42) = 2,44$ группавий ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нольинчи гипотезани рад қилинади.

3-масала. **F** факторнинг учта даражасининг ҳар бирида **4** тадан синов ўтказилган. Дисперсион анализ методи билан **0,05** қийматдорлик даражасида $\overline{X}_{грj}$ группавий ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нольинчи гипотезани текшириш талаб қилинади. Танланмалар дисперсия лари бир хил бўлган нормал тўпламлардан олинган деб тахмин қилинади. Синов натижалари қуйидаги жадвалларда келтирилган.

Синов номерлари	**Фактор даражалари**		
i	F_1	F_2	F_3
1	**25**	**30**	**21**
2	**32**	**24**	**22**
3	**31**	**26**	**34**
4	**30**	**20**	**31**
$X_{грj}$	**32**	**25**	**27**

Кўрсатма. $y_{ij} = x_{ij} = -\ 28$ деб олинг.

Жавоби. $S_{умум} = 296$; $S_{факт} = 104$; $S_{колд} = 192$; $S^2_{факт} = 52$;

$S^2_{колд} = 21{,}3$; $F_{кузат} = 2{,}44$; $F_{кр}(0{,}05,\ 2;\ 9) = 4{,}26$ группавий ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нольинчи гипотезани рад етишга асос йўқ.

4-масала. F факторнинг тўртта даражасининг ҳар бирида 7 тадан синов ўтказилган. Дисперсион анализ методи билан 0,05 қийматдорлик даражасида $\overline{X}_{грj}$ группавий ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нольинчи гипотезани текшириш талаб қилинади. Танланмалар дисперсия лари бир хил бўлган нормал тўпламлардан олинган деб тахмин қилинади. Синов натижалари қуйидаги жадвалларда келтирилган.

Синов номерлари	Фактор даражалари			
i	F_1	F_2	F_3	F_4
1	51	52	56	54
2	59	58	56	58
3	53	66	58	62
4	59	69	58	64
5	63	70	70	66
6	69	72	74	67
7	72	74	78	69
$X_{грj}$	60.9	65.9	64.3	62.9

Кўрсатма. $y_{ij} = x_{ij} = -63$ деб олинг.

Жавоби. $S_{умум} = 1539$; $S_{факт} = 95$; $S_{колд} = 1444$; $S^2_{факт} = 31.67$;

$S^2_{колд} = 67.17$ группавий ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нольинчи гипотезани рад етишга асос йўқ.

5-масала F факторнинг тўртта даражасининг ҳар бирида 4 тадан синов ўтказилган. Дисперсион анализ методи билан 0,05 қийматдорлик даражасида $\overline{X}_{гij}$ группавий ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нольинчи гипотезани текшириш талаб қилинади. Танланмалар дисперсия лари бир хил бўлган нормал тўпламлардан олинган деб тахмин қилинади. Синов натижалари қуйидаги жадвалларда келтирилган.

Синов номерлари	Фактор даражалари		
i	F_1	F_2	F_3
1	27	24	22
2	23	20	21
3	29	26	36
4	29	30	37
$X_{грj}$	28	25	29

Кўрсатма. $y_{ij} = x_{ij} = - 27$деб олинг.

Жавоби. $S_{умум} = 334$; $S_{факт} = 32$; $S_{колд} = 302$; $S^2_{факт} = 16$; $S^2_{колд} = 33.56$; группавий ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нольинчи гипотезани рад етишга асос йўқ.

6-масала. F факторнинг биринчи даражасида **5** та,иккинчи даражасида **3** та, учинчи даражасида **2** та, тўртинчи даражасида **3** та ва бешинчи даражасида **1** та, жами **14** та синов ўтказилган. Дисперсион анализ методи билан **0,05** кийматдорлик даражасида группавий ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нольинчи гипотезани текширинг. Танланмалар дисперсия лари бир ҳил бўлган нормал тўпламлардан олинган деб фараз қилинади. Синов натижалари қуйидаги жадвалда келтирилган.

Синов номерлари	Фактор даражалари				
i	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
1	7,3	5,4	6,4	7,9	7,1
2	7,6	7,1	8,1	9,5	
3	8,3	7,4		9,5	
4	8,3				

5	8,4				
$X_{грj}$	7,98	6,63	7,25	9,0	7,1

Кўрсатма. $y_{ij} = 10x_{ij} - 78$ деб олинг.

Жавоби. $S_{умум} = 1570,43$; $C_{факт} = 932,66$; $S_{колд} = 637,77$; $S^2_{факт} = 233,16$; $S^2_{колд} = 70,86$; $F_{кузат} = 3,29$; $F_{кр}(0,05,\ 4;\ 9) = 3,63$. Группавий ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нольинчи гипотезани рад етишга асос йўқ.

7-масала. **F** факторнинг биринчи даражасида **4** та,иккинчи даражасида **6** та, учинчи даражасида **3** та, жами **13** та синов ўтказилган. Дисперсион анализ методи билан **0,01** қийматдорлик даражасида группавий ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нольинчи гипотезани текширинг. Танланмалар дисперсия лари бир ҳил бўлган нормал тўпламлардан олинган деб фараз қилинади. Синов натижалари қуйидаги жадвалда келтирилган.

Синов номерлари	Фактор даражалари		
i	F_1	F_2	F_3
1	37	60	
2	47	86	100
3	40	67	98
4	60	92	
5		95	
6		98	
$X_{грj}$	46	83	89

Кўрсатма. $y_{ij} = x_{ij} - 73$ деб олинг.

Жавоби. $S_{умум} = 6444$; $S_{факт} = 4284$; $S_{колд} = 2160$; $S^2_{факт} = 2142$; $S^2_{колд} = 216$; $F_{кузат} = 9,92$; $F_{кр}(0,01,\ 2,\ 10) = 7,56$. Нолинчи гипотеза рад қилинади. Группавий ўртача қийматларнинг фарқи муҳим.

Синов номерлари	Фактор даражалари		
i	F_1	F_2	F_3
1	30.56	43,44	31,36
2	32,66	47,51	36,20
3	34,78	53,80	36,38
4	35,50		42,20
5	36,63		
6	40,20		
7	42,28		
$X_{грj}$	36,09	48,25	36,54

8-масала. **F** факторнинг биринчи даражасида 7 та, иккинчи даражасида **3** та, учинчи даражасида **4** та, жами **14** та синов ўтказилган. Дисперсион анализ методи билан **0,01** қийматдорлик даражасида группавий ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нольинчи гипотезани текширинг. Танланмалар дисперсия лари бир ҳил бўлган нормал тўпламлардан олинган деб фараз қилинади. Синов натижалари қуйидаги жадвалда келтирилган.

Кўрсатма. $y_{ij} = 100x_{ij} - 3900$ деб олинг.

Жавоби. $S_{умум} = 5463442$; $S_{факт} = 3399389$; $S_{колд} = 2064053$; $S^2_{факт} = 1699694$; $S^2_{колд} = 187641$; $F_{кузат} = 9,06$; $F_{кр}(0,01,\ 2,\ 11) = 7,21$. Нольинчи гипотеза рад қилинади. Группавий ўртача қийматларнинг фарқи муҳим.

9-масала. **F** факторнинг биринчи даражасида 7 та, иккинчи даражасида **5** та, учинчи даражасида **8** та, ва тўртинчи даражасида **6** та, жами **26** та синов ўтказилган. Дисперсион анализ методи билан **0,05** қийматдорлик даражасида группавий ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нольинчи гипотезани текширинг. Танланмалар дисперсия лари бир ҳил бўлган нормал тўпламлардан олинган деб фараз қилинади. Синов натижалари қуйидаги жадвалда келтирилган.

Синов номерлари	**Фактор даражалари**			
i	F_1	F_2	F_3	F_4
1	**1600**	**1580**	**1460**	**1510**
2	**1610**	**1640**	**1550**	**1520**
3	**1650**	**1640**	**1600**	**1530**
4	**1680**	**1700**	**1620**	**1570**
5	**1700**	**1750**	**1640**	**1600**
6	**1700**		**1660**	**1680**
7	**1800**		**1740**	
8			**1820**	
$X_{грj}$	**1677**	**1662**	**1638**	**1568**

Кўрсатма. $y_i = x_{ij} - 1630$ деб олинг. 1- еслатмадан фойдаланинг.

Жавоби. $S_{умум} = 192788$; $S_{факт} = 45507$; $S_{колд} = 147281$; $S^2_{факт} = 15169$; $S^2_{колд} = 6695$; $F_{кузат} = 2,27$; $F_{кр}(0,05, 3, 22) = 3,05$. Группавий ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нольинчи гипотезани рад етишга асос йўқ

ILOVALAR

1-jadval

e^{-x} funksiyasining qiymatlari

x	$exp(-x)$	x	$exp(-x)$	x	$exp(-x)$	x	$exp(-x)$
0,00	1,000	0,40	0,670	0,80	0,449	3,0	0,0498
0,02	0,980	0,42	0,657	0,82	0,440	3,2	0,0408
0,04	0,961	0,44	0,644	0,84	0,432	3,4	0,0334
0,06	0,942	0,46	0,631	0,86	0,423	3,6	0,0273
0,08	0,923	0,48	0,619	0,88	0,415	3,8	0,0224
0,10	0,905	0,50	0,607	0,90	0,407	4,0	0,0183
0,12	0,887	0,52	0,595	0,92	0,399	4,2	0,0150
0,14	0,869	0,54	0,583	0,94	0,391	4,4	0,0123
0,16	0,852	0,56	0,571	0,96	0,383	4,6	0,0101
0,18	0,835	0,58	0,560	0,98	0,375	4,8	0,0082
0,20	0,819	0,60	0,549	1,00	0,368	5:0	0,0067
0,22	0,803	0,62	0,538	1,20	0,301	5,2	0,0055
0,24	0,787	0,64	0,527	1,40	0,247	5,4	0,0045
0,26	0,771	0,66	0,517	1,60	0,202	5,6	0,0037
0,28	0,756	0,68	0,507	1,80	0,165	5,8	0,0030
0,30	0,741	0,70	0,497	2,00	0,135	6,0	0,0025
0,32	0,726	0,72	0,487	2,20	0,111	6,2	0,0020
0,34	0,712	0,74	0,477	2,40	0,091	6,4	0,0017
0,36	0,698	0,76	0,468	2,60	0,074	6,6	0,0014
0,38	0,684	0,78	0,458	2,80	0,061	6,8	0,0011
0,40	0,670	0,80	0,449	3,00	0,050	7,0	0,0009

2-jadval

$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$ **funksiya qiymatlari**

m	$\lambda=0.1$	$\lambda=0.2$	$\lambda=0.3$	$\lambda=0.4$	$\lambda=0.5$	$\lambda=0.6$
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488
1	0.0905	0.1638	0.2222	0.2681	0.3033	0.3293
2	0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	0.0758	0.0988
3	0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126	0.0198
4		0.0001	0.0002	0.0007	0.0016	0.0030
5				0.0001	0.0002	0.0004

m	$\lambda=0.7$	$\lambda=0.8$	$\lambda=0.9$	$\lambda=1.0$	$\lambda=2.0$	$\lambda=3.0$
0	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679	0.1353	0.0498
1	0.3476	0.3595	0.3659	0.3679	0.2707	0.1494
2	0.1217	0.1438	0.1647	0.1879	0.2707	0.2240
3	0.0284	0.0383	0.0494	0.0613	0.1804	0.2240
4	0.0050	0.0077	0.0111	0.0153	0.0902	0.1680
5	0.0007	0.0012	0.0020	0.0031	0.0361	0.1008
6	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0120	0.0504
7				0.0001	0.0034	0.0216
8					0.0009	0.0081
9					0.0002	0.0027
10						0.0008
11						0.0002
12						0.0001

m	$\lambda=4.0$	$\lambda=5.0$	$\lambda=6.0$	$\lambda=7.0$	$\lambda=8.0$	$\lambda=9.0$
0	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001
1	0.0733	0.0337	0.0149	0.0064	0.0027	0.0011
2	0.1465	0.0842	0.0446	0.0223	0.0107	0.0050
3	0.1954	0.1404	0.0892	0.0521	0.0286	0.0150
4	0.1954	0.1755	0.1339	0.0912	0.0572	0.0337
5	0.1563	0.1755	0.1606	0.1277	0.0916	0.0607
6	0.1042	0.1462	0.1606	0.1490	0.1221	0.0911
7	0.0595	0.1044	0.1377	0.1490	0.1396	0.1171
8	0.0298	0.0653	0.1033	0.1304	0.13.96	0.1318
9	0.0132	0.0363	0.0688	0.1014	0.1241	0.1318
10	0.0053	0.0181	0.0413	0.0710	0.0993	0.1186
11	0.0019	0.0082	0.0225	0.0452	0.0722	0.0970
12	0.0006	0.0034	0.0113	0.0264	0.0481	0.0728
13	0.0002	0.0013	0.0052	0.0142	0.0296	0.0504
14	0.0001	0.0005	0.0022	0.0071	0.0169	0.0324
15		0.0002	0.0009	0.0033	0.0090	0.0194
16		0.0001	0.0003	0.0015	0.0045	0.0109
17			0.0001	0.0006	0.0021	0.0058

3-*jadval*

Laplas funksiyasining qiymatlari $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	0.3989	0.3989	0.3988	0.3986	0.3984	0.3982	0.3980	0.3977	0.3973
0.1	0.3970	0.3965	0.3961	0.3956	0.3951	0.3945	0.3939	0.3932	0.3925	0.3918
0.2	0.3910	0.3902	0.3894	0.3885	0.3876	0.3867	0.3857	0.3847	0.3836	0.3825
0.3	0.3814	0.3802	0.3790	0.3778	0.3765	0.3752	0.3739	0.3725	0.3712	0.3697
0.4	0.3683	0.3668	0.3653	0.3637	0.3621	0.3605	0.3589	0.3572	0.3555	0.3538
0.5	0.3521	0.3503	0.3485	0.3467	0.3448	0.3429	0.3410	0.3391	0.3372	0.3352
0.6	0.3332	0.3312	0.3292	0.3271	0.3251	0.3230	0.3209	0.3187	0.3166	0.3144
0.7	0.3123	0.3101	0.3079	0.3056	0.3034	0.3011	0.2989	0.2966	0.2943	0.2920
0.8	0.2897	0.2874	0.2850	0.2827	0.2803	0.2780	0.2756	0.2732	0.2709	0.2685
0.9	0.2661	0.2637	0.2613	0.2589	0.2565	0.2541	0.2516	0.2492	0.2468	0.2444
1.0	0.2420	0.2396	0.2371	0.2347	0.2323	0.2299	0.2275	0.2251	0.2227	0.2203
1.1	0.2179	0.2155	0.2131	0.2107	0.2083	0.2059	0.2036	0.2012	0.1989	0.1965
1.2	0.1942	0.1919	0.1895	0.1872	0.1849	0.1826	0.1804	0.1781	0.1758	0.1736
1.3	0.1714	0.1691	0.1669	0.1647	0.1626	0.1604	0.1582	0.1561	0.1539	0.1518
1.4	0.1497	0.1476	0.1456	0.1435	0.1415	0.1394	0.1374	0.1354	0.1334	0.1315
1.5	0.1295	0.1276	0.1257	0.1238	0.1219	0.1200	0.1182	0.1163	0.1145	0.1127
1.6	0.1109	0.1092	0.1074	0.1057	0.1040	0.1023	0.1006	0.0989	0.0973	0.0957
1.7	0.0940	0.0925	0.0909	0.0893	0.0878	0.0863	0.0848	0.0833	0.0818	0.0804
1.8	0.0790	0.0775	0.0761	0.0748	0.0734	0.0721	0.0707	0.0694	0.0681	0.0669
1.9	0.0656	0.0644	0.0632	0.0620	0.0608	0.0596	0.0584	0.0573	0.0562	0.0551
2.0	0.0540	0.0529	0.0519	0.0508	0.0498	0.0488	0.0478	0.0468	0.0459	0.0449
2.1	0.0440	0.0431	0.0422	0.0413	0.0404	0.0395	0.0387	0.0379	0.0371	0.0363
2.2	0.0355	0.0347	0.0339	0.0332	0.0325	0.0317	0.0310	0.0303	0.0297	0.0290
2.3	0.0283	0.0277	0.0270	0.0264	0.0258	0.0252	0.0246	0.0241	0.0235	0.0229
2.4	0.0224	0.0219	0.0213	0.0208	0.0203	0.0198	0.0194	0.0189	0.0184	0.0180
2.5	0.0175	0.0171	0.0167	0.0163	0.0158	0.0154	0.0151	0.0147	0.0143	0.0139
2.6	0.0136	0.0132	0.0129	0.0126	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110	0.0107
2.7	0.0104	0.0101	0.0099	0.0096	0.0093	0.0091	0.0088	0.0086	0.0084	0.0081
2.8	0.0079	0.0077	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0067	0.0065	0.0063	0.0061
2.9	0.0060	0.0058	0.0056	0.0055	0.0053	0.0051	0.0050	0.0048	0.0047	0.0046
3.0	0.0044	0.0043	0.0042	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036	0.0035	0.0034
3.1	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026	0.0025	0.0025
3.2	0.0024	0.0023	0.0022	0.0022	0.0021	0.0020	0.0020	0.0019	0.0018	0.0018
3.3	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014	0.0013	0.0013
3.4	0.0012	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010	0.0010	0.0009	0.0009
3.5	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0006
3.6	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004
3.7	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
3.8	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
3.9	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001

$\varphi(x)=\varphi(-x)$; $x\geq 4$ lar uchun: $\varphi(x)=0$

Laplas integral funksiyasining qiymatlari

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2704	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3888
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264	1,26	0,3962
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289	1,27	0,3980

$\Phi(-x) = -\Phi(x)$; $x > 5$ lar uchun: $\Phi(x) = 0,5$.

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,28	0.3997	1,61	0.4463	1,94	0.4738	2.54	0.4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0.4744	2.56	0,4948
1,30	0.4032	1,63	0.4484	1,96	0.4750	2.58	0,4951
1,31	0.4049	1.64	0.4495	1,97	0,4756	2.60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2.62	0,4956
1,33	0.4082	1.66	0.4515	1,99	0,4767	2,64	0.4959
1,34	0,4099	1,67	0.4525	2,00	0,4772	2.66	0.4961
1,35	0,4115	1.68	0,4535	2,02	0,4783	2.68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0.4965
1,37	0,4147	1.70	0,4554	2,06	0,4803	2.72	0,4967
1.38	0.4162	1.71	0,4564	2,08	0.4812	2.74	0.4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2.10	0,4821	2.76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0.4582	2.12	0,4830	2.78	0.4973
1,41	0.4207	1.74	0,4591	2,14	0,4838	2.80	0,4974
1,42	0.4222	1.75	0.4599	2.16	0,4846	2.82	0,4976
1,43	0.4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2.84	0.4977
1,44	0.4251	1.77	0,4616	2,20	0,4861	2.86	0,4979
1,45	0,4265	1.78	0.4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1.79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0.4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2.28	0.4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1.82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0.4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0.4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0.4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3.20	0,49931
1,53	0,4370	1.86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2.40	0,4918	3.60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1.89	0.4706	2,44	0,4927	4.00	0,499968
1,57	0,4418	1.90	0.4713	2.46	0,4931	4,25	0,499989
1,58	0.4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	4,50	0,499997
1,59	0.4441	1,92	0.4726	2,50	0,4938	4.75	0,499999
1,60	0,4452	1.93	0,4732	2,52	0,4941	5,00	0,500000

$\Phi(-x) = -\Phi(x)$; $x > 5$ lar uchun: $\Phi(x) = 0,5$.

5-*jadval*

Styudent kriteriysining t qiymatlari $t_\gamma = t_\gamma = (\gamma, n)$

n \ γ	0.90	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0.90	0,95	0,99	0,999
5	2,131	2,776	4,604	8,61	20	1,729	2,093	2,861	3,883
6	2,015	2,570	4,032	6,86	25	1,711	2,064	2,797	3,745
7	1,943	2,446	3,707	5,96	30	1,699	0,045	2,756	3,659
8	1,894	2,364	3,499	5,41	35	1,688	2,032	2,729	3,600
9	1,859	2,306	3,355	5,04	40	1,683	2,023	2,708	4,558
10	1,833	2,262	3,249	4,78	45	1,679	2,016	2,692	3,527
11	1,812	2,228	3,169	4,59	50	1,675	2,009	2,679	3,502
12	1,795	2,201	3,106	4,44	60	1,671	2,001	2,662	3,464
13	1,782	2,178	3,054	4,32	70	1,666	1,996	2,649	3,439
14	1,770	2,160	3,012	4,22	80	1,664	1,991	2,640	3,418
15	1,761	2,144	2,976	4,14	90	1,662	1,987	2,633	3,403
16	1,753	2,131	2,946	4,07	100	1,660	1,984	2,627	3,392
17	1,745	2,119	2,921	4,02	120	1,657	1,980	2,617	3,374
17	1,739	2,109	2,898	3,97	∞	1,645	1,960	2,576	3,291
19	1,734	2,101	2,878	3,92					

6-*jadval*

$q = q\ (\gamma, n)$ qiymatlari

n \ γ	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,221
17	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

7 jadval

Styudent taqsimotining kritik qiymatlari

Erkinlik darajasi k	Ishonchlik darajasi α (ikkiyoqlama test)					
	0.1	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001
1	6.31	12.71	31.82	63.66	318.29	636.58
2	2.92	4.30	6.96	9.92	22.33	31.60
3	2,35	3.18	4.54	5.84	10.21	12.92
4	2.13	2.78	3.75	4.60	7.17	8.61
5	2.02	2.57	3.36	4.03	5.89	6.87
6	1.94	2.45	3.14	3.71	5.21	5.96
7	1,89	2,36	3.00	3,50	4,79	5,41
8	1.86	2.31	2.90	3,36	4.50	5.04
9	1.83	2,26	2.82	3.25	4,30	4.78
10	1.81	2.23	2.76	3.17	4.14	4.59
11	1,80	2.20	2.72	3.11	4.02	4.44
12	1,78	2.18	2.68	3,05	3.93	4.32
13	1.77	2,16	2.65	3.01	3.85	4.22
14	1.76	2.14	2,62	2.98	3.79	4.14
15	1,75	2.13	2.60	2.95	3.73	4.07
16	1.75	2.12	2.58	2.92	3.69	4.01
17	1.74	2.11	2.57	2.90	3.65	3.97
18	1.73	2.10	2,55	2.88	3.61	3.92
19	1.73	2.09	2.54	2.86	3.58	3.88
20	1.72	2.09	2.53	2.85	3.55	3.85
21	1.72	2.08	2.52	2.83	3.53	3.82
22	1.72	2,07	2.51	2.82	3.50	3.79
23	1.71	2.07	2.50	2.81	3.48	3.77
24	1,71	2.06	2.49	2.80	3.47	3.75
25	1,71	2.06	2.49	2.79	3.45	3.73
26	1.71	2.06	2.48	2,78	3.43	3.71
27	1.70	2,05	2.47	2,77	3.42	3.69
28	1.70	2,05	2.47	2.76	3,41	3.67
29	1,70	2,05	2.46	2,76	3.40	3.66
30	1,70	2.04	2.46	2.75	3.39	3.65
40	1,68	2.02	2.42	2,70	3.31	3.55
60	1,67	2,00	2.39	2,66	3.23	3,46
120	1,66	1.98	2,36	2,62	3.16	3,37
∞	1.64	1,96	2.33	2,58	3,09	3,29
	0.05	0,025	0.01	0,005	0.001	0.0005
	Ishonchlilik darajasi α (biryoqlama test)					

Fisher taqsimotining kritik qiymatlari

(k_1 – katta dispersiyaning erkinlik darajasi)
(k_2 – kichik dispersiyaning erkinlik darajasi)

Ishonchlilik darajasi α=0,01												
	k_1											
k_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6083	6107
2	98.50	99.00	99.16	99.25	99.30	99.33	99.36	99.38	99.39	99.40	99.41	99.42
3	34.12	30.82	29,46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27,34	27.23	27.13	27.05
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.45	14.37
5	16.26	13.27	12.06	11,39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.96	9.89
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79	7.72
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.54	6.47
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5,81	5.73	5.67
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4,94	4.85	4.77	4.71
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.46	4.40
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.22	4.16
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	4.02	3.96
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.80
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4,00	3.89	3.80	3.73	3.67
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3,69	3.62	3.55
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52	3,46

Ishonchlilik darajasi α=0,05												
	k_1											
k_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19,38	19.40	19.40	19.41
3	10.13	9.55	9.28	9,12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8,79	8.76	8.74
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91
5	6,61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.70	4.68
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4,10	4.06	4.03	4.00
7	5.59	4.74	4.35	4,12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57
8	5.32	4.46	4,07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28
9	5,12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3,18	3.14	3.10	3.07
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2,98	2,94	2.91
11	4,84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2,83	2.77	2,71	2.67	2.63	2.60
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2,65	2.60	2.57	2.53
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2,54	2.49	2.46	2.42
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2,61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38

χ^2 taqsimotning kritik qiymatlari

$\chi^2_{\alpha,k}$ qiymati $P\{\chi^2_k > \chi^2_{\alpha,k}\} = \alpha$ shartdan topiladi
χ^2_k erkinlik darajasi — k ga teng «xi-kvadrat» taqsimot

Erkinlik darajasi k	Ishonchlilik darajasi α					
	0,01	0.025	0.05	0.95	0.975	0.99
1	6,635	5.024	3.841	0.00393	0.00098	0.00016
2	9.210	7.378	5.991	0.10259	0.05064	0.02010
3	11,345	9.348	7.815	0.35185	0.21579	0.11483
4	13,277	11.143	9.488	0.71072	0.48442	0.29711
5	15.086	12.832	11.070	1.145	0.831	0.554
6	16.812	14.449	12.592	1.635	1.237	0.872
7	18.475	16.013	14.067	2,167	1.690	1.239
8	20.090	17.535	15.507	2.733	2.180	1.647
9	21.666	19.023	16.919	3.325	2.700	2.088
10	23.209	20.483	18,307	3.940	3,247	2.558
11	24,725	21.920	19.675	4,575	3.816	3,053
12	26,217	23.337	21.026	5.226	4.404	3.571
13	27.688	24.736	22.362	5.892	5.009	4.107
14	29.141	26.119	23.685	6.571	5.629	4.660
15	30.578	27.488	24,996	7,261	6,262	5.229
16	32.000	28.845	26.296	7.962	6.908	5.812
17	33.409	30.191	27.587	8.672	7.564	6.408
18	34.805	31.526	28.869	9.390	8,231	7.015
19	36.191	32,852	30,144	10.117	8,907	7.633
20	37.566	34,170	31.410	10.851	9.591	8,260
21	38,932	35.479	32.671	11.591	10,283	8,897
22	40.289	36.781	33.924	12.338	10.982	9.542
23	41.638	38.076	35.172	13.091	11.689	10.196
24	42,980	39.364	36.415	13.848	12,401	10.856
25	44,314	40.646	37.652	14,611	13,120	11.524
26	45.642	41.923	38.885	15.379	13.844	12.198
27	46.963	43.195	40.113	16.151	14.573	12.878
28	48.278	44.461	41,337	16.928	15.308	13.565
29	49.588	45.722	42.557	17.708	16.047	14.256
30	50.892	46.979	43.773	18.493	16.791	14.953

10-jadval

$y = \ln(x)$ funksiyasining qiymatlari

x	ln(x)	x	ln(x)	x	ln(x)	x	ln(x)	x	ln(x)
0,001	-6,908	0,200	-1,609	0,400	-0,916	0,600	-0,511	0,800	-0,223
0,005	-5,298	0,205	-1,585	0,405	-0,904	0,605	-0,503	0,805	-0,217
0,010	-4,605	0,210	-1,561	0,410	-0,892	0,610	-0,494	0,810	-0,211
0,015	-4,200	0,215	-1,537	0,415	-0,879	0,615	-0,486	0,815	-0,205
0,020	-3,912	0,220	-1,514	0,420	-0,868	0,620	-0,478	0,820	-0,198
0,025	-3,689	0,225	-1,492	0,425	-0,856	0,625	-0,470	0,825	-0,192
0,030	-3,507	0,230	-1,470	0,430	-0,844	0,630	-0,462	0,830	-0,186
0,035	-3,352	0,235	-1,448	0,435	-0,832	0,635	-0,454	0,835	-0,180
0,040	-3,219	0,240	-1,427	0,440	-0,821	0,640	-0,446	0,840	-0,174
0,045	-3,101	0,245	-1,406	0,445	-0,810	0,645	-0,439	0,845	-0,168
0,050	-2,996	0,250	-1,386	0,450	-0,799	0,650	-0,431	0,850	-0,163
0,055	-2,900	0,255	-1,366	0,455	-0,787	0,655	-0,423	0,855	-0,157
0,060	-2,813	0,260	-1,347	0,460	-0,777	0,660	-0,416	0,860	-0,151
0,065	-2,733	0,265	-1,328	0,465	-0,766	0,665	-0,408	0,865	-0,145
0,070	-2,659	0,270	-1,309	0,470	-0,755	0,670	-0,400	0,870	-0,139
0,075	-2,590	0,275	-1,291	0,475	-0,744	0,675	-0,393	0,875	-0,134
0,080	-2,526	0,280	-1,273	0,480	-0,734	0,680	-0,386	0,880	-0,128
0,085	-2,465	0,285	-1,255	0,485	-0,724	0,685	-0,378	0,885	-0,122
0,090	-2,408	0,290	-1,238	0,490	-0,713	0,690	-0,371	0,890	-0,117
0,095	-2,354	0,295	-1,221	0,495	-0,703	0,695	-0,364	0,895	-0,111
0,100	-2,303	0,300	-1,204	0,500	-0,693	0,700	-0,357	0,900	-0,105
0,105	-2,254	0,305	-1,187	0,505	-0,683	0,705	-0,350	0,905	-0,100
0,110	-2,207	0,310	-1,171	0,510	-0,673	0,710	-0,342	0,910	-0,094
0,115	-2,163	0,315	-1,155	0,515	-0,664	0,715	-0,335	0,915	-0,089
0,120	-2,120	0,320	-1,139	0,520	-0,654	0,720	-0,329	0,920	-0,083
0,125	-2,079	0,325	-1,124	0,525	-0,644	0,725	-0,322	0,925	-0,078
0,130	-2,040	0,330	-1,109	0,530	-0,635	0,730	-0,315	0,930	-0,073
0,135	-2,002	0,335	-1,094	0,535	-0,625	0,735	-0,308	0,935	-0,067
0,140	-1,966	0,340	-1,079	0,540	-0,616	0,740	-0,301	0,940	-0,062
0,145	-1,931	0,345	-1,064	0,545	-0,607	0,745	-0,294	0,945	-0,057
0,150	-1,897	0,350	-1,050	0,550	-0,598	0,750	-0,288	0,950	-0,051
0,155	-1,864	0,355	-1,036	0,555	-0,589	0,755	-0,281	0,955	-0,046
0,160	-1,833	0,360	-1,022	0,560	-0,580	0,760	-0,274	0,960	-0,041
0,165	-1,802	0,365	-1,008	0,565	-0,571	0,765	-0,268	0,965	-0,036
0,170	-1,772	0,370	-0,994	0,570	-0,562	0,770	-0,261	0,970	-0,030
0,175	-1,743	0,375	-0,981	0,575	-0,553	0,775	-0,255	0,975	-0,025
0,180	-1,715	0,380	-0,968	0,580	-0,545	0,780	-0,248	0,980	-0,020
0,185	-1,687	0,385	-0,955	0,585	-0,536	0,785	-0,242	0,985	-0,015
0,190	-1,661	0,390	-0,942	0,590	-0,528	0,790	-0,236	0,990	-0,010
0,195	-1,635	0,395	-0,929	0,595	-0,519	0,795	-0,229	0,995	-0,005
0,200	-1,609	0,400	-0,916	0,300	-1,204	0,800	-0,223	1,000	0,000

ФОЙДАЛАНГАН АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ.

1.Б.Абдалимов, «Олий математика» Дарслик, Тошкент, Ўқитувчи нашриёти, 1994 йил.

2.В.Е.Гмурман «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика» Москва, 1977 йил.

3.В.Е.Гмурман «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан масалалар ечишга доир қўлланма», Тошкент, Ўкитувчи. 1980 йил.

4.А.И.Карасаев, З.М.Аксютина, Т.И.Савельева Курс высшей математики для экономических Вузов часть 2 Москва «Высшая школа» 1982 год.

5.Н.Ш.Никитина, «Математическая статистика для экономистов» Москва – Новосибирск ИНФРА – М – НГТУ, 2001 год.

6. «Сборник задач по теорией вероятности и математической статистике» под редакцией А.А Свешникова. Москва, "Наука".1977 год.

7. И .Ш. Кремер « Теория вероятности и математической статистике» учебник для Вузов, Москва, "ЮНИТИ", 2001 год.

8.А.С.Расулов, Г.М.Раимова, Х.К.Саримсоқова, «Эхтимоллар назарияси ва математик статистика» Ўқув қўлланма,Тошкент 2006 йил.

9. Б.В.Гнеденко «Курс теорий вероятностей» М, «Наука», 1994 г.

10. Дж. Кемени, Дж. Снелл. «Конечные цепи Маркова» М, «Наука», 1970 г.

11. Ф.С. Робертс. «Дискретные математические модели с предложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам» М, «Наука», 1986 г.

Мундарижа

Босишга рухсат берилди 15.06.09. Бичими (60x84) 1/16. Шартли босма табоғи 12.75.
Нашриёт босма табоғи 12.75. Адади 500 нусха. Бахоси келишилган нархда

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот кўмитасининг 21-0941 сонли гувохномаси асосида ТошДАУ нашр тахририяти бўлимининг **РИЗОГРАФ** аппаратида чоп этилди.