ЭҲТИМОЛЛАР НАЗАРИЯСИ АСОСЛАРИ

Педагогика институтларининг студентлари учун ўқув қўлланма

◊

„ЎҚИТУВЧИ“ НАШРИЁТИ
ТОШКЕНТ — 1978

$Г \frac{20203-№141}{353(06)-78}$ 115 — 78

СЎЗ БОШИ

Бизнинг китобимиз педагогика институтлари студентлари учун эҳтимоллар назарияси бўйича ўқув қўлланма сифатида мўлжалланган. Унга авторларнинг техника олий ўқув юртлари студентларига, шунингдек, Москва Давлат сиртқи педагогика институтининг студентларига ўқиган лекциялари асос қилиб олинди.

Китобнинг мазмуни педагогика институтларининг эҳтимоллар назариясидан тузилган программасининг мажбурий қисмига тўла мувофиқ келади Материалларнинг жойланиш тартибига келсак, программа авторлари томонидан тақдим қилинган схемадан бироз чекиниш мумкин деб топдик. Биз китобимизга фойдали томонлари ўқитиш тажрибамизда тасдиқланган ва илгариги китобимизнинг тегишли бобида фойдаланилган лекцияларимизни асос қилиб олдик (қаранг: Р. С. Гутер и Б. В. Овчинский, Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта, Физматгиз, 1962). Шу китобдан бир қатор мисоллар ҳам олинди.

Китоб биринчи навбатда сиртдан ўқийдиган студентларга мўлжалланган. Биз студентларнинг китоб устида мустақил ишлашларини осонлаштириш мақсадида унга батафсил таҳлил қилинган кўпгина мисоллар киритишни лозим топдик. Яна шу мақсадни кўзда тутиб, ҳар бир бобнинг охирида ўз-ўзини текшириш учун саволлар ҳам берилган. Бу саволларнинг берилиши-дан асосий мақсад ўқувчи ўзи ўрганган материалининг асосий ғоявий мазмунини қанчалик тўғри тушунганлигини аниқлашдир. Биз „...теоремани исботланг“ ёки „...формулани келтириб чиқаринг“ типидаги саволларни иложи борича бермасликка ҳаракат қилдик.

Биз бу китобнинг ёзилишида Н. Я. Виленкиннинг муҳим ролини таъкидлаймиз ва унга миннатдорчилик билдирамиз, шунингдек, китобнинг қўлёзмасини эътибор билан ўқиган А. С. Солодовников ва И. М. Ягломга ва китоб редактори Ю. А. Гастевга қатор фойдали маслаҳатлари учун миннатдорчилик билдирамиз.

Авторлар

I БОБ

ҲОДИСА ВА ЭҲТИМОЛ

1-§. АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАР. ЭҲТИМОЛНИНГ КЛАССИК ТАЪРИФИ

Ҳодиса дейилганда юз бериши ёки юз бермаслиги мумкин бўлган ҳар қандай воқеани тушунамиз. Бу жумла биз тушунадиган математик таъриф маъносида аниқ таъриф бўла олмаслигини англаш қийин эмас, бироқ биз шу билан чекланишга мажбурмиз

Бу тушунчани ойдинлаштириш мақсадида баъзи-бир мисоллар келтирамиз. Масалан, танга ташлашда гербли томон тушиши, ўйин соққасини ташлашда у ёки бу очко (масалан, олти очко) тушиши, ўқ узилганда ўқнинг нишонга тегиши, олдиндан белгиланган ҳажмда газ молекулаларининг бўлиши ва бошқалар ҳодисадир.

Турли ҳодисаларни A, B, $C, \ldots$ ҳарфлари билан белгилаймиз.

Албатта юз берадиган ҳодиса *муқаррар ҳодиса* дейилади. Жумладан, одатдаги ўйин соққасини ташлаганда олти очкодан кўп очко тушмаслиги, фақат оқ шарлар солинган яшикдан олинган шарнинг оқ бўлиши ва ҳоказо муқаррар ҳодисалардир.

Аксинча, мутлақо юз бермайдиган ҳодиса *мумкин бўлмаган ҳодиса* дейилади. Карталар дастасидан тўрттадан ортиқ туз олиниши, фақат оқ ва қора шарлар солинган яшикдан қизил шар олиниши ва ҳоказо мумкин бўлмаган ҳодисаларга мисол бўлади.

A — бирор ҳодиса бўлсин. A ҳодисага *қарама-қарши ҳодиса* деб, A ҳодисанинг юз бермаслигидан иборат бўлган ҳодисани тушунамиз. Бу ҳодисани $\bar{A}$ орқали белгилаймиз. Масалан, карталар дастасидан олинган картанинг қизил холли бўлиши A ҳодиса бўлса, $\bar{A}$ ҳодиса олинган картанинг қора холли бўлишини билдиради.

A ва B ҳодисалардан бирининг юз бериши иккинчисининг юз беришини йўққа чиқарса, у ҳолда A ва B *биргаликда бўлмаган ҳодисалар* дейилади. Масалан, ўйин соққасини ташлашда мумкин бўлган исталган очконинг тушиши (A ҳодиса) бошқа сондаги очконинг тушиши (B ҳодиса) билан биргаликда эмас. Жуфт сондаги очко тушиши тоқ сондаги очко тушиши билан биргаликда эмас. Аксинча, жуфт сондаги очко тушиши (A ҳодиса) уч сонига каррали очко тушиши (B ҳодиса) билан биргаликда бўлади, чунки олти очко тушиши ҳам A ҳодиса, ҳам B ҳодиса юз беришини англатади, демак, бу ҳодисалардан бирининг юз бериши иккинчисининг юз беришини йўққа чиқармайди. A ва $\bar{A}$ ҳодисалар доимо биргаликда эмаслигини тушуниш қийин эмас.

$A, B, \ldots, L$ ҳодисалар тўпламини қарайлик. Агар ҳар бир синов натижасида бу ҳодисалардан ҳеч бўлмаганда биттаси юз берса, у ҳолда бу ҳодисаларни *ягона мумкин бўлган ҳодисалар* деб аташ қабул қилинган. Шунингдек, бу ҳодисалар, *ҳодисаларнинг тўла группасини* ташкил қилади дейилади. Масалан, ўйин соққасини ташлашда бир, икки, уч, тўрт, беш ва олти очколарнинг тушишидан иборат бўлган ҳодисалар тўла группа ташкил қилади.

Энди жуда муҳим тушунча — *ҳодисанинг эҳтимоли* тушунчасини ўрганишга киришишимиз мумкин.

Чекли сондаги $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалар системасини қараймиз ва унга қуйидаги шартларни қўямиз:

1. *Бу ҳодисалар жуфти-жуфти билан биргаликда эмас*, бошқача қилиб айтганда, исталган иккита A_i ва A_k ($i, k = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq k$) ҳодиса учун улардан бирининг юз бериши иккинчисининг юз беришини йўққа чиқаради.

2. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *ҳодисалар ягона мумкин бўлган ҳодисалар*, яъни уларнинг қайсидир бири албатта юз бериши лозим.

3. $A_1, A_2, \ldots A_n$ *ҳодисалар тенг имкониятли.* Бу шарт $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалардан бирортасининг бошқаларидан кўпроқ юз беришига ёрдам берадиган ҳеч қандай объектив сабаблар йўқлигини англатади.

Айтайлик, A ҳодиса берилган бўлиб, у A_i „элементар" ҳодисалардан баъзилари юз берганда юз берсин, бошқалари юз берганда эса юз бермасин. Бундай ҳолда биз A_i „элементар" ҳодисалардан юз бериши A ҳодисанинг юз беришига ҳам олиб келадиганларини A ҳодисага *қулайлик туғдиради* деб айтамиз.

Айтайлик, қаралаётган n та $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисадан m таси A ҳодисанинг юз беришига қулайлик туғдирсин. У ҳолда *A ҳодисанинг эҳтимоли деб, A ҳодисанинг юз беришига қулайлик туғдирувчи ҳодисалар сонининг тенг имкониятли барча ҳодисаларнинг жами сонига нисбатини айтилади.* Агар одатда қабул қилинганидек, A ҳодисанинг эҳтимолини $P(A)$ орқали белгиласак, у ҳолда таъриф бўйича қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Келтирилган таърифни мисолда тушунтирамиз. Ўйин соққасини ташлашни қарайлик ва бир, икки, уч, тўрт, беш ва олти очко тушишидан иборат ҳодисаларни мос равишда A_1, $A_2, \ldots$ A_6 орқали белгилайлик. Бу ҳодисалар юқорида қўйилган шартларнинг ҳаммасини қаноатлантиришини осонгина текшириб кўриш мумкин. Бундан

$$P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_6) = \frac{1}{6}$$

бўлиши келиб чиқади, чунки A_1, $A_2, \ldots,$ A_6 ҳодисаларнинг ҳар бирига фақат унинг ўзи қулайлик туғдиради, яъни бу ерда $m = 1$, $n = 6$.

Агар A ҳодиса жуфт сондаги очко тушишидан иборат бўлса, у ҳолда унга мос равишда икки, тўрт ва олти очколар тушишидан иборат бўлган A_2, A_4 ва A_6 ҳодисалар қулайлик туғдиради. Шу сабабли A ҳодиса учун $m = 3$ бўлиб,

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Айтайлик, B ҳодиса уч сонига каррали очколар тушишидан иборат бўлсин. У ҳолда B ҳодисага A_3 ва A_6 „элементар" ҳодисалар қулайлик туғдиради, демак, B ҳодиса учун $m = 2$ бўлади. Шу сабабли

$$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Юқорида келтирилган таъриф *эҳтимолнинг классик таърифи* деб юритилади. Бу таъриф жуда тушунарли ва содда бўлса-да, камчиликлардан холи эмас. Бу камчиликларга кейинроқ батафсил тўхталамиз (8-§ га қаранг). Ҳозир эса юқорида келтирилган таърифга асосланган ҳолда эҳтимолнинг айрим содда хоссаларини келтирамиз.

Энг аввало, исталган A ҳодисага қулайлик туғдирувчи ҳодисалар сони m ушбу $0 \leqslant m \leqslant n$ тенгсизликларни қаноатлантиришини пайқаш қийин эмас. Шунинг учун *исталган A ҳодисанинг эҳтимоли*

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

шартларни қаноатлантиради.

Сўнгра E орқали муқаррар ҳодисани белгилаймиз. Равшанки, унга ҳамма A_i „элементар" ҳодисалар қулайлик туғдиради, яъни E ҳодиса учун $m = n$ бўлиши лозим. Шу сабабли *муқаррар ҳодисанинг эҳтимоли бирга тенг*:

$$P(E) = 1.$$

Аксинча, агар U — мумкин бўлмаган ҳодиса бўлса, бу ҳолда $m = 0$ бўлиши бевосита таърифдан келиб чиқади, демак, *мумкин бўлмаган ҳодисанинг эҳтимоли нолга тенг*:

$$P(U) = 0.$$

Эҳтимол тушунчасини ойдинлаштириш мақсадида бир неча мисоллар қарайлик.

1-мисол. Яшикда ўлчамлари ва оғирлиги бир хил бўлган учта кўк, саккизта қизил ва тўққизта оқ шар бўлиб, шарлар яхшилаб аралаштирилган. Яшикдан бир марта шар олинганда, кўк, қизил ва оқ шар чиқиш эҳтимоли қанча?

Исталган шарнинг чиқишини тенг имкониятли деб ҳисоблаш мумкин бўлганлигидан, жами $n = 3 + 8 + 9 = 20$ та элементар ҳодисага эгамиз. Агар A, B, C орқали мос равишда кўк, қизил ва оқ шар чиқишидан иборат ҳодисаларни, m_1, m_2, m_3 орқали эса бу ҳодисаларга қулайлик туғдирувчи элементар ҳодисалар сонини белгиласак, у ҳолда $m_1 = 3$, $m_2 = 8$, $m_3 = 9$ бўлиши тушунарли. Шунинг учун

$$P(A) = \frac{3}{20} = 0,15;\ P(B) = \frac{8}{20} = 0,4;\ P(C) = \frac{9}{20} = 0,45.$$

2-мисол. Иккита танга бир вақтда ташланган. $m (m = 0,1,2)$ марта гербли томон тушиш эҳтимоли қанча?

Иккита тангани ташлаганда мумкин бўлган натижаларни текширайлик. Равшанки, уларни

Г Г, Г Р, Р Г, Р Р

схема бўйича тавсифлаш мумкин, бунда Г — гербли томон, Р—рақамли томон тушишини билдиради. Шундай қилиб, тўртта элементар ҳодиса бўлиши мумкин. Тангалар тўғри геометрик формага эга ва бир жинсли деб фараз қилиниши сабабли улардан бирортасининг бир томони иккинчи томонига нисбатан кўпроқ тушади деб тахмин қилишга асос йўқ. Шунинг учун бу тўртала ҳолни тенг имкониятли деб ҳисоблаш лозим. У ҳолда m марта гербли томон тушиш эҳтимолини P_m орқали белгилаб, қуйидагиларни осонгина ҳосил қиламиз:

$$P_0 = \frac{1}{4},\ P_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},\ P_2 = \frac{1}{4}.$$

3-мисол. Ёқларига 1, 2, 3, 4, 5, 6 очколар ёзилган иккита ўйин соққаси бир вақтда ташланади. Иккала соққада тушган очколар йиғиндисининг саккизга тенг бўлиш эҳтимоли қанча?

Мумкин бўлган жами ҳоллар сони $n = 6 \cdot 6 = 36$ та, чунки бир соққадаги исталган очко иккинчи соққадаги исталган очко билан бирга тушиши мумкин. Бу барча ҳоллар жуфти-жуфти билан биргаликда эмаслигига, тенг имкониятлигига ва тўла группа ташкил қилишига осонгина ишонч ҳосил қилиш мумкин. Масалада қўйилган саволга жавоб бериш учун очколар йиғиндиси саккизга тенг бўладиган ҳоллар сонини ҳисоблаш лозим. Бу ташланган соққаларда тушган очколар

$$2 + 6,\ 3 + 5,\ 4 + 4,\ 5 + 3 \quad \text{ёки} \quad 6 + 2$$

га тенг бўлганда рўй беради, бунда биринчи қўшилувчи биринчи соққада, иккинчи қўшилувчи эса иккинчи соққада тушган очколар сонини билдиради. Бундан кўринадики, иккала соққада тушган очколар йиғиндиси саккизга тенг бўлишидан иборат бўлган A ҳодисага $m=5$ та ҳол қулайлик туғдиради. Шунинг учун

$$P(A)=\frac{5}{36}.$$

2-§. МУРАККАБ ЭҲТИМОЛЛАР. ҚЎШИШ ВА КЎПАЙТИРИШ ТЕОРЕМАЛАРИ. ШАРТЛИ ЭҲТИМОЛЛАР

Берилган ҳодисага қулайлик туғдирувчи ҳолларни бевосита ҳисоблаш анча қийин бўлиши мумкин. Шунинг учун ҳодисанинг эҳтимолини аниқлашда уни бошқа соддароқ ҳодисалар комбинацияси кўринишида ифодалаш қулайроқдир. Бироқ бунда ҳодисани бошқа ҳодисаларнинг комбинацияси кўринишида ифодалашда ҳодисанинг эҳтимоли бўйсунадиган қоидаларни билиш керак бўлади. Параграфда номи тилга олинган теоремалар айни шу қоидалар туркумига киради.

Бу теоремаларнинг биринчиси бир неча ҳодисалардан камида бирининг юз бериш эҳтимолини ҳисоблашга имкон беради.

Қўшиш теоремаси. *A ва B биргаликда бўлмаган ҳодисалар бўлсин. Бу ҳодисалардан камида бирининг юз бериш эҳтимоли уларнинг эҳтимоллари йиғиндисига тенг, яъни*

$$P(A \text{ ёки } B)=P(A)+P(B). \tag{1}$$

Исботи. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалар n та тенг имкониятли жуфти-жуфти билан биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг тўла группаси бўлсин. Агар $P(A)=p_1=\frac{m_1}{n}$, $P(B)=p_2=\frac{m_2}{n}$ бўлса, у ҳолда бу n та элементар ҳодиса орасида A ҳодисага қулайлик туғдирувчи роса m_1 та, B ҳодисага қулайлик туғдирувчи роса m_2 та ҳодиса бўлади. A ва B ҳодисалар биргаликда бўлмагани учун A_i ҳодисалардан ҳеч бири A ва B нинг иккаласига ҳам қулайлик туғдириши мумкин эмас. A ва B ҳодисалардан камида бирининг юз беришидан иборат бўлган (A ёки B) ҳодисага A ҳодисага қулайлик туғдирувчи A_i ҳодисаларнинг ҳар бири, шунингдек, B ҳодисага қулайлик туғдирувчи A_i ҳодисаларнинг ҳар бири қулайлик туғдиради. Шунинг учун (A ёки B) ҳодисага қулайлик туғдирувчи элементар ҳодисаларнинг жами сони m_1+m_2 га тенг, бундан

$$P(A \text{ ёки } B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=p_1+p_2=P(A)+P(B)$$

келиб чиқади. Ана шуни исбот қилиш талаб қилинган эди*.

---

*$m_1+m_2 \leqslant n$ бўлгани сабабли $P(A)+P(B) \leqslant 1$ бўлишини қайд қиламиз.

Юқорида иккита ҳодиса учун таърифланган қўшиш теоремаси ихтиёрий чекли сондаги ҳодисалар учун ҳам тўғрилигини кўриш қийин эмас. Чунончи A, B, $C, \ldots, L$ *биргаликда бўлмаган ҳодисалар бўлса, у ҳолда*

$$P(A \text{ ёки } B \text{ ёки } C \text{ ёки } \ldots \text{ ёки } L) = P(A) + P(B) + P(C) + \ldots + P(L). \quad (2)$$

Масалан, ҳодисалар учта бўлган ҳолда $P(A$ ёки B ёки $C) = P[(A$ ёки $B)$ ёки $C] = P(A$ ёки $B) + P(C)$ тенгликни ёза оламиз, бундан эса қилинган даъвонинг тўғрилиги келиб чиқади. Қўшилувчилар сони кўп бўлган ҳолда математик индукция методидан фойдаланиш керак бўлади.

Қуйидаги даъво қўшиш теоремасидан келиб чиқадиган муҳим натижадир: *агар* $A_1, \ldots, A_n$ *ҳодисалар ягона мумкин бўлган ва биргаликда бўлмаган ҳодисалар бўлса, у ҳолда*

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1. \quad (3)$$

Ҳақиқатан ҳам, (A_1 ёки A_2 ёки ... ёки A_n) ҳодиса муқаррар бўлиб, 1-§ да кўрсатилганидек, унинг эҳтимоли бирга тенг. Хусусий ҳолда, агар A ва $\bar{A}$ ҳодисалар ўзаро қарама-қарши ҳодисаларни ифодаласа, у ҳолда

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1,$$

яъни иккита ўзаро қарама-қарши ҳодисанинг эҳтимоллари йиғиндиси бирга тенг.

Қўшиш теоремасини мисолларда кўрамиз.

1-мисол. Нишонга „аъло" баҳода ўқ узиш эҳтимоли 0,3 га, „яхши" баҳода ўқ узиш эҳтимоли эса 0,4 га тенг. Отилган ўқ учун „яхши" баҳодан кам баҳо олмаслик эҳтимоли қанча?

Агар A ҳодиса „аъло" баҳо олишни, B ҳодиса эса „яхши" баҳо олишни билдирса, у ҳолда

$$P(A \text{ ёки } B) = P(A) + P(B) = 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}7.$$

2-мисол. Ичида n та оқ, қизил ва қора шар бўлган яшикда k та оқ ва l та қизил шар бор. Яшикдан ранги қора бўлмаган шар олиш эҳтимоли қанча?

A ҳодиса олинган шарнинг оқ бўлишини, B ҳодиса эса унинг қизил бўлишини ифода қилсин. Олинган шарнинг қора рангли бўлмаслиги унинг оқ ёки қизил рангли бўлишини билдиради. Эҳтимолнинг таърифига кўра

$$P(A) = \frac{k}{n}, \qquad P(B) = \frac{l}{n}$$

бўлганлиги учун қора рангли бўлмаган шар чиқиш эҳтимоли қўшиш теоремасига кўра

$$P(A \text{ ёки } B) = P(A) + P(B) = \frac{k}{n} + \frac{l}{n} = \frac{k+l}{n}.$$

Бу масалани қуйидагича ҳам ечиш мумкин. C — қора рангли шар чиқишидан иборат ҳодиса бўлсин. Қора рангли шарлар сони $n-(k+l)$ га тенг бўлгани учун

$$P(C) = \frac{n-(k+l)}{n} = \frac{n-k-l}{n}.$$

Қора рангли бўлмаган шарнинг чиқиши C ҳодисага қарама-қарши $\overline{C}$ ҳодиса бўлади, шунинг учун қўшиш теоремасининг юқорида кўрсатилган натижасига кўра ўша

$$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{n-k-l}{n} = \frac{k+l}{n}$$

натижага эга бўламиз.

3-мисол. Пул-буюм лотереясида 1000 та билетли ҳар бир серияга 120 та пул ютуқ ва 80 та буюм ютуқ тўғри келади. Битта лотерея билетига бирор ютуқ чиқиш эҳтимоли қанча?

Агар A орқали пул ютуқ чиқишини, B орқали эса буюм ютуқ чиқишини белгиласак, у ҳолда эҳтимолнинг таърифига кўра

$$P(A) = \frac{120}{1000} = 0{,}12; \qquad P(B) = \frac{80}{1000} = 0{,}08.$$

Бизни қизиқтираётган ҳодиса (A ёки B) дан иборат, шунинг учун қўшиш теоремасидан

$$P(A \text{ ёки } B) = P(A) + P(B) = 0{,}12 + 0{,}08 = 0{,}20$$

келиб чиқади. Шундай қилиб, бирор ютуқ чиқиш эҳтимоли 0,2 га тенг.

Навбатдаги теоремага ўтишдан аввал муҳим янги тушунча—*шартли эҳтимол* тушунчаси билан танишиш лозим. Шу мақсадда қуйидаги мисолни кўрамиз.

Складда иккита заводда тайёрланган 400 та электр лампочкаси бор бўлиб, шу билан бирга ҳамма лампочкаларнинг 75 % и биринчи заводда, 25 % и эса иккинчи заводда тайёрланган бўлсин. Айтайлик, биринчи заводда тайёрланган лампочкаларнинг 83 % и стандарт талабига жавоб берсин, иккинчи завод учун эса бу процент 63 % га тенг бўлсин. Складдан тасодифан олинган лампочканинг стандарт талабларига жавоб бериш эҳтимолини аниқлайлик.

Стандарт лампочкаларнинг умумий сони биринчи заводда тайёрланган $400 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}83 = 249$ та ва иккинчи заводда тайёрланган $400 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}63 = 63$ та лампочкадан иборат, яъни 312 та эканини қайд қиламиз. Агар танланган лампочканинг стандарт бўлишини B ҳодиса десак, унинг юз беришига 400 та қолдан 312 таси қулайлик туғдиради, чунки ҳар бир лампочканинг чиқиши тенг имкониятли; у ҳолда

$$P(B)=\frac{312}{400}=0{,}78.$$

Бу эҳтимолни ҳисоблашда танланган лампочканинг қайси завод маҳсулоти эканлиги ҳақида ҳеч қандай тахмин қилганимиз йўқ. Агар шунга ўхшаш бирорта талаб қўйилса, бизни қизиқтираётган эҳтимолнинг ўзгариши равшан. Масалан, агар танланган лампочканинг биринчи заводда тайёрланганлиги (A ҳодиса) маълум бўлса, у ҳолда унинг стандарт бўлиш эҳтимоли 0,78 га эмас, балки 0,83 га тенг бўлади.

Бу турдаги эҳтимол, яъни *B ҳодисанинг A ҳодиса юз бериш шарти остидаги эҳтимоли унинг шартли эҳтимоли* дейилади ва $P_A(B)$ кўринишда белгиланади

Агар юқорида келтирилган мисолда A орқали танланган лампочканинг биринчи заводда тайёрланган бўлишини белгиласак, у ҳолда $P_A(B)=0{,}83$ тенгликни ёзишимиз мумкин.

Энди ҳодисаларнинг биргаликда юз бериш эҳтимолини ҳисоблашга доир муҳим теоремани таърифлашимиз мумкин.

Кўпайтириш теоремаси. *A ва B ҳодисаларнинг биргаликда юз бериш эҳтимоли бу ҳодисалардан бирининг эҳтимолини иккинчи ҳодисанинг биринчи ҳодиса юз бергандаги шартли эҳтимолига кўпайтмасига тенг:*

$$P(A \text{ ва } B)=P(A)\cdot P_A(B). \tag{4}$$

Бу ерда A ва B ҳодисаларнинг *биргаликда юз бериши* дейилганда уларнинг иккаласи ҳам, яъни ҳам A ҳодиса, ҳам B ҳодисанинг юз бериши тушунилади.

Исботи. Ҳар бири A ҳодисанинг, шунингдек, B ҳодисанинг юз беришига қулайлик туғдирадиган ёки қулайлик туғдирмайдиган n та $A_1, \ldots, A_n$ тенг имкониятли жуфти-жуфти билан биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг тўла группасини қарайлик.

Бу ҳодисаларнинг ҳаммасини қуйидагича тўртта группага ажратамиз. Биринчи группага $A_1, \ldots, A_n$ ҳодисалар ичида ҳам A ҳодисага, ҳам B ҳодисага қулайлик туғдирувчи ҳодисаларни киритамиз; иккинчи ва учинчи группаларга A_i ҳодисалар ичида бизни қизиқтираётган ҳодисалардан бирига қулайлик туғдирадиган ва иккинчисига қулайлик туғдирмайдиганларини киритамиз; масалан, иккинчи группага A ҳодисага қулайлик туғдирадиган, лекин B ҳодисага қулайлик туғдирмайдиган ҳодисалар, учинчи группага эса B ҳодисага қулайлик туғдирадиган лекин A ҳодисага қулайлик туғдирмайдиган ҳодисалар киритилади; ниҳоят, тўртинчи группага A_i ҳодисалар ичида A ҳодисага ҳам, шунингдек, B ҳодисага ҳам қулайлик туғдирмайдиганларини киритамиз.

$A_1, \dots, A_n$ ҳодисаларнинг номерланиши аҳамиятга эга бўлмаганлиги сабабли ажратилган группалар қуйидагича бўлади:

I группа: $A_1, A_2, \dots, A_k$;

II группа: $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_{k+l}$;

III группа: $A_{k+l+1}, A_{k+l+2}, \dots, A_{k+l+m}$;

IV группа: $A_{k+l+m+1}, \dots, A_n$.

Шундай қилиб, тенг имкониятли ва жуфти-жуфти билан биргаликда бўлмаган n та $A_1, A_2, \dots, A_n$ ҳодисалар орасида ҳам A ҳодисага, ҳам B ҳодисага қулайлик туғдирувчи k та ҳодиса, A ҳодисага қулайлик туғдирадиган, лекин B ҳодисага қулайлик туғдирмайдиган l та ҳодиса, B ҳодисага қулайлик туғдирадиган, лекин A ҳодисага қулайлик туғдирмайдиган m та ҳодиса, ва ниҳоят, A ҳодисага ҳам, B ҳодисага ҳам қулайлик туғдирмайдиган $n-(k+l+m)$ та ҳодиса бор.

Биз кўриб ўтган группаларнинг бирортасида (ҳатто бир нечтасида ҳам) битта ҳам ҳодиса бўлмай қолиши мумкинлигини қайд қиламиз. Бу ҳолда шу группадаги ҳодисалар сонини кўрсатувчи тегишли сон нолга тенг бўлади.

Ҳодисаларни юқорида кўрсатилгандек группаларга ажратишимиз дарҳол ушбу

$$P(A \text{ ва } B)=\frac{k}{n}, \quad P(A)=\frac{k+l}{n}, \quad P(B)=\frac{k+m}{n}$$

тенгликларни ёзишга имкон беради, чунки A ва B ҳодисаларнинг биргаликда юз беришига фақат I группадаги ҳодисалар қулайлик туғдиради. A ҳодисага қулайлик туғдирувчи ҳодисаларнинг жами сони биринчи ва иккинчи группалардаги ҳодисаларнинг умумий сонига, B ҳодисага қулайлик туғдирувчи ҳодисалар сони эса биринчи ва учинчи группалардаги ҳодисаларнинг жами сонига тенг.

Энди $P_A(B)$ эҳтимолни, яъни B ҳодисанинг A ҳодиса юз берганлиги шартида эҳтимолини ҳисоблаймиз. Бу ҳолда учинчи ва тўртинчи группаларга киритилган ҳодисалар ҳисобга олинмайди, чунки бу ҳодисаларнинг рўй бериши A ҳодисанинг юз беришига зиддир. Демак, мумкин бўлган барча ҳодисалар сони энди n та эмас, балки $k+l$ та бўлади. Булардан B ҳодисага биринчи группа ҳодисаларигина қулайлик туғдиради. Шунинг учун

$$P_A(B)=\frac{k}{k+l}$$

тенгликни ёза оламиз.

Теоремани исбот қилиш учун энди ушбу

$$\frac{k}{n}=\frac{k+l}{n}\cdot\frac{k}{k+l}$$

айний тенгликни ёзиб, ундаги учала касрни ҳам юқорида ҳисобланган эҳтимоллар билан алмаштириш кифоя. Биз исбот қилиниши талаб қилинган

$$P(A \text{ ва } B)=P(A)\cdot P_A(B)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Юқорида ёзилган айният $k+l\neq 0$ бўлгандагина маънога эга эканлиги ўз-ўзидан равшан. Бу эса A ҳодиса мумкин бўлмаган ҳодиса бўлмаган барча ҳолларда ўринли.

A ва B ҳодисалар тенг ҳуқуқли бўлгани учун уларнинг ўринларини алмаштириб, кўпайтириш теоремасининг бошқача формасини ҳосил қиламиз:

$$P(A \text{ ва } B)=P(B)P_B(A). \qquad (5)$$

Бу тенгликни, шунингдек, $P_B(A)=\frac{k}{k+m}$ эканини ҳисобга олиб ва $\frac{k}{n}=\frac{k+m}{n}\cdot\frac{k}{k+m}$ айниятдан фойдаланиб, юқоридаги йўл билан ҳосил қилиш ҳам мумкин эди.

$P(A$ ва $B)$ эҳтимол учун ҳосил қилинган иккита ифоданинг ўнг томонларини таққослаб, кўп ҳолларда фойдали бўлган

$$P(A)P_A(B)=P(B)P_B(A) \qquad (6)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Энди кўпайтириш теоремасини мисоллар орқали тушунтирамиз.

4-мисол. Корхона маҳсулотининг 96 % и яроқли (A ҳодиса) деб тан олинади. Ҳар 100 та яроқли маҳсулотдан 75 таси биринчи сортли (B ҳодиса) бўлар экан. Тасодифан олинган маҳсулотнинг биринчи сортли бўлиш эҳтимолини аниқланг.

Изланаётган эҳтимол A ва B ҳодисаларни биргаликда юз беришидан иборат бўлган (A ва B) ҳодисанинг эҳтимолидир. Шартга кўра $P(A)=0{,}96$ ва $P_A(B)=0{,}75$. Шунинг учун кўпайтириш теоремаси қуйидаги натижани беради:

$$P(A \text{ ва } B)=0\,96\cdot 0{,}75=0\,72.$$

5-мисол. Айрим ўқ узишда ўқнинг нишонга тегиш (A ҳодиса) эҳтимоли 0,2 га тенг. Агар портлатгичларнинг 2 % и портламай қолса (яъни 2 % ҳолда ўқ узилмай қолади), ўқнинг нишонга тегиш эҳтимоли қанча?

B ҳодиса ўқнинг отилишидан иборат ҳодиса, $\bar{B}$ эса унга қарама-қарши ҳодиса бўлсин. У ҳолда масала шартига кўра

$P(\overline{B})=0{,}02$ бўлиб, қўшиш теоремасининг натижасига мувофиқ, $P(\overline{B})=1-P(\overline{B})=1-0{,}02=0{,}98$. Сўнгра шартга кўра $P_B(A)=0{,}2$.

Ўқнинг нишонга тегиши A ва B ҳодисаларнинг биргаликда юз беришидан иборат бўлган ҳодисадир (ўқ отилади ва нишонга тегади). Шунинг учун кўпайтириш теоремасига асосан

$$P(A \text{ ва } B)=P(B)\,P_B(A)=0{,}196.$$

Агар *ҳодисаларнинг эрклилиги* тушунчасидан фойдалансак, кўпайтириш теоремасининг муҳим хусусий ҳолини ҳосил қиламиз.

Агар иккита ҳодисадан бирининг эҳтимоли иккинчисининг юз бериши ёки юз бермаслиги натижасида ўзгармаса, у ҳолда бу ҳодисалар эркли ҳодисалар дейилади.

Ўйин соққасининг такрор ташлашда у ёки бу очконинг тушиши, шунингдек, тангани такрор ташлашда унинг у ёки бу томонининг тушиши эркли ҳодисаларга мисол бўла олади, чунки тангани иккинчи марта ташлашда гербли томон тушиш эҳтимоли тангани биринчи ташлашда гербли томон тушган ёки тушмаганлигидан қатъи назар $\frac{1}{2}$ га тенг.

Шунга ўхшаш, оқ ва қора шарлар солинган яшикдан олинган биринчи шар унга қайта солинса, иккинчи марта олинган шарнинг оқ бўлиш эҳтимоли биринчи олинган шарнинг оқ ёки қора бўлишига боғлиқ эмас. Шунинг учун биринчи ва иккинчи марта шар олиш натижалари ўзаро эркли бўлади.

Аксинча, агар биринчи олинган шар яшикка қайта солинмаса, у ҳолда иккинчи марта шар олинишидаги натижа биринчи марта шар олиш натижасига боғлиқ равишда ўзгаради, чунки биринчи марта шар олиниш натижасига қараб яшикда шарларнинг состави ўзгаради. Бу ерда биз *боғлиқ ҳодисалар* мисолига эгамиз.

Шартли эҳтимоллар учун қабул қилинган белгилашлардан фойдаланиб, A ва B ҳодисаларнинг эрклилик шартини

$$P_A(B)=P_{\overline{A}}(B)=P(B)$$

ёки

$$P_B(A)=P_{\overline{B}}(A)=P(A)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Бу тенгликлардан фойдаланиб, эркли ҳодисалар учун кўпайтириш теоремасини қуйидаги формада келтиришимиз мумкин.

Агар A ва B ҳодисалар эркли бўлса, у ҳолда уларнинг биргаликда юз бериш эҳтимоли бу ҳодисалар эҳтимолларининг кўпайтмасига тенг:

$$P(A \text{ ва } B)=P(A)\cdot P(B) \qquad (7)$$

Ҳақиқатан ҳам, кўпайтириш теоремасининг дастлабки ифодасида A ва B ҳодисаларнинг эрклилигидан келиб чиқадиган $P_A(B)=P(B)$ тенгликни эътиборга олсак, исбот қилиниши талаб қилинган тенгликни ҳосил қиламиз.

Энди бир нечта $A, B, \ldots, L$ ҳодисаларни қараймиз. Агар $A, B, \ldots, L$ ҳодисалардан исталган бирининг юз бериш эҳтимоли бошқаларининг юз бериш ёки юз бермаслигига боғлиқ бўлмаса, у ҳолда бу ҳодисалар *биргаликда эркли* дейилади*.

Ҳодисалар биргаликда эркли бўлган ҳолда кўпайтириш теоремасини уларнинг ихтиёрий чекли сондагиси учун қуйидагича таърифлаш мумкин.

Биргаликда эркли бўлган $A, B, \ldots, L$ ҳодисаларнинг биргаликда юз бериш эҳтимоли шу ҳодисалар эҳтимолларининг кўпайтмасига тенг:

$$P(A \text{ ва } B \text{ ва } \ldots \text{ ва } L)=P(A)\cdot P(B)\ldots P(L). \tag{8}$$

Бу даъво ҳам индукция бўйича исбот қилинади.

6-мисол. Ишчи учта автомат-станокка хизмат кўрсатади. У тўхтаб қолган станокнинг олдига келиб, уни тузатиши лозим. Бир соат давомида биринчи станокнинг тўхтамаслик эҳтимоли 0,9 га тенг. Иккинчи ва учинчи станоклар учун бу эҳтимол мос равишда 0,8 ва 0,7 га тенг. Бир соат давомида ишчининг станокларнинг ҳеч бирини олдига келмаслик эҳтимолини аниқланг.

Агар станоклар бир-бирига боғлиқсиз ишлайди деб ҳисобласак, у ҳолда учала ҳодисанинг биргаликда юз бериш эҳтимоли кўпайтириш теоремасига асосан ушбу кўпайтмага тенг: $0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7=0{,}504$.

7-мисол. Самолётни винтовкадан узилган ўқ билан уриб тушириш эҳтимоли $p=0{,}004$. 250 та винтовкадан бир йўла ўқ узилганда душман самолётини уриб тушириш эҳтимоли қанча?

Битта ўқ узилганда самолётнинг уриб туширилмаслик эҳтимоли қўшиш теоремасига асосан $1-p=0{,}996$ га тенг. У ҳолда 250 та ўқ узилганда самолётнинг уриб туширилмаслик эҳтимолини ҳодисаларнинг биргаликда юз бериш эҳтимоли сифатида кўпайтириш теоремасига асосан ҳисоблаш мумкин. Бу эҳтимол $0{,}996^{250}$ га тенг. Сўнгра яна қўшиш теоремасидан фойдаланиб, самолётни уриб тушириш эҳтимолини қарама-қарши ҳодисанинг эҳтимоли сифатида топа оламиз:

$$1-(0{,}996)^{250}\approx 0{,}62.$$

Бундан кўринадики, айрим ўқ билан самолётни уриб тушириш эҳтимоли жуда кичик бўлса-да, 250 та винтовкадан бир

* $A, B, \ldots, L$ ҳодисаларнинг биргаликда эркли бўлиши учун уларнинг жуфт-жуфт эркли бўлиши кифоя қилмаслигини эслатиб ўтамиз.

йўла ўқ узилганда, самолётни уриб тушириш эҳтимоли сезиларли даражада қатта бўлади. Бу эҳтимол милтиқлар сонини орттирсак, янада ортади. Масалан, самолётни уриб тушириш эҳтимоли 500 та винтовкадан ўқ узилганда $1-0{,}996^{500}\approx 0{,}87$ га, 1000 та винтовкадан ўқ узилганда эса ҳатто $1-0{,}996^{1000}\approx$ $\approx 0{,}98$ га тенг бўлади.

8-мисол. Энди юқоридаги мисолни энг умумий ҳолда таҳлил қилишимиз мумкин. Бирор ҳодисанинг айрим синовда юз бериш эҳтимоли p га тенг бўлсин. Қуйидаги иккита масалани ҳал этайлик:

а) бу ҳодисанинг N та эркли синовда ҳеч бўлмаганда бир марта юз бериш эҳтимоли P қанча?

б) бу ҳодисанинг ҳеч бўлмаганда бир марта юз бериш эҳтимоли P ушбу $1-\varepsilon$ дан кичик бўлмаслиги учун нечта синов ўтказиш талаб қилинади?

Юқоридаги мисолда қилинган мулоҳазаларни такрорлаб:
а) масаланинг ечими

$$P=1-p^N$$

формула билан берилишини топамиз.

б) масалани ҳал қилиш учун $P\geqslant 1-\varepsilon$ тенгсизликни ечиш талаб қилинади. Бу тенгсизликни ечиб,

$$N\geqslant\frac{\ln\varepsilon}{\ln(1-p)}$$

ни ҳосил қиламиз.

Юқорида исбот қилинган кўпайтириш теоремаси қўшиш теоремасини бирмунча кенгайтириш, чунончи уни биргаликда бўлган ҳодисалар учун ҳам тарқатиш имконини беради. Агар A ва B ҳодисалар биргаликда бўлса, у ҳолда бу ҳодисалардан ҳеч бўлмаганда бирининг юз бериш эҳтимоли бу ҳодисалар эҳтимолларининг йиғиндисига тенг эмас. Масалан, ўйин соққасини ташлаганда жуфт сондаги очко тушиши A ҳодиса, учга каррали сондаги очко тушиши B ҳодиса бўлса, у ҳолда (A ёки B) ҳодисага 2, 3, 4 ва 6 очколарнинг тушиши қулайлик туғдиради, яъни

$$P(A \text{ ёки } B)=\frac{2}{3}.$$

Иккинчи томондан, $P(A)=\frac{1}{2}$ ва $P(B)=\frac{1}{3}$, яъни $P(A)+P(B)=\frac{5}{6}$. Шундай қилиб, бу ҳолда

$$P(A \text{ ёки } B)\neq P(A)+P(B).$$

Бу ердан кўринадики, ҳодисалар биргаликда бўлган ҳолда қўшиш теоремаси ўзгартирилиши лозим. Бу теоремани у биргаликда бўлган ҳодисалар учун ҳам, биргаликда бўлмаган ҳодисалар учун ҳам ўринли бўладиган қилиб таърифлаш мумкинлигини қуйида кўрамиз, демак, юқорида кўрилган қўшиш теоремаси энди янги теореманинг хусусий ҳоли бўлади.

Кенгайтирилган қўшиш теоремаси. *A ва B—ихтиёрий ҳодисалар бўлсин. Бу ҳодисалардан ҳеч бўлмаганда бирининг юз бериш эҳтимоли шу ҳодисалар эҳтимолларининг йиғиндисидан уларнинг биргаликда юз бериш эҳтимолининг айрилганига тенг,* яъни

$$P(A \text{ ёки } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ ва } B). \qquad (9)$$

Исботи. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ лар n та жуфти-жуфти билан биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг тўла группаси бўлсин. Агар $P(A) = \frac{m_1}{n}$ бўлса, у ҳолда A ҳодисага n та элементар ҳодисанинг m_1 таси қулайлик туғдиради. Айтайлик, шу m_1 та ҳодиса ичида k таси B ҳодисага қулайлик туғдирсин, m_1-k таси эса унга қулайлик туғдирмасин. У ҳолда n та элементар ҳодисадан роса k таси ҳам A ҳодисага, ҳам B ҳодисага қулайлик туғдиради. Шунинг учун, агар $P(B) = \frac{m_2}{n}$ бўлса, B ҳодисага қулайлик туғдирувчи m_2 та ҳодиса орасида A ҳодиса қулайлик туғдирувчи k та ҳодиса ва A ҳодисага қулайлик туғдирмайдиган $m_2 - k$ та ҳодиса бор.

(A ёки B) ҳодисага қулайлик туғдирувчи ҳамма элементар ҳодисалар ё A га, ёки B га, ёки ҳам A, ҳам B га қулайлик туғдириши лозим. Шундай қилиб, бундай ҳодисаларнинг жами сони

$$(m_1 - k) + (m_2 - k) + k = m_1 + m_2 - k$$

бўлиб, уларнинг эҳтимоли

$$P(A \text{ ёки } B) = \frac{m_1 + m_2 - k}{n} =$$

$$= \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} - \frac{k}{n} = P(A) + P(B) - P(A \text{ ва } B)$$

бўлади. Шуни исботлаш талаб қилинган эди.

(9) формулани юқорида қаралган, ўйин соққасини ташлашда тушган очколар сонига доир мисолга татбиқ қилиб,

$$P(A \text{ ёки } B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

натижани ҳосил қиламиз. Бу эса бевосита ҳисобланган натижа билан бир хилдир.

(1) формула (9) формуланинг хусусий ҳоли эканлиги равшан. Ҳақиқатан ҳам, агар A ва B ҳодисалар биргаликда бўлмаса, у ҳолда $k = 0$ бўлиб, бу ҳодисаларнинг биргаликда юз бериш эҳтимоли $P(A \text{ ва } B) = 0$ бўлади.

9-мисол. Электр занжирига иккита сақлагич кетма-кет уланган. Биринчи сақлагичнинг ишдан чиқиш эҳтимоли 0,6 га, иккинчи сақлагичнинг ишдан чиқиш эҳтимоли 0,2 га тенг. Бу сақлагичлардан ҳеч бўлмаганда бирининг ишдан чиқиши натижасида занжирда ток бўлмаслик эҳтимолини топинг.

Биринчи ва иккинчи сақлагичларнинг ишдан чиқишидан иборат бўлган A ва B ҳодисалар биргаликда бўлгани учун изланаётган эҳтимол (9) формула ёрдамида аниқланади:

$$P(A \text{ ёки } B) = 0{,}6 + 0{,}2 - 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}68.$$

3-§. ТЎЛА ЭҲТИМОЛ. БЕЙЕС ФОРМУЛАСИ

Мураккаб ҳодисаларнинг эҳтимолларини ҳисоблашда кўпинча қўшиш ва кўпайтириш теоремаларини бирга татбиқ қилишга тўғри келади. Дастлаб қуйидаги мисолни қараймиз.

1-мисол. Ташқи кўриниши бир хил, ичидаги оқ ва қора шарлар состави ҳар хил бўлган учта яшик бор. Биринчи яшикда m_1 та оқ ва n_1 та қора шарлар, иккинчи яшикда m_2 та оқ, n_2 та қора шарлар, учинчи яшикда эса m_3 та оқ ва n_3 та қора шарлар бўлсин. Яшиклардан бири таваккалига* танланиб, ундан битта шар олинади. Олинган шарнинг оқ бўлиш эҳтимолини топиш талаб қилинади.

Дастлаб шар биринчи яшикдан олинган деб тахмин қилайлик. Бундай тахмин H_1 ҳодисанинг юз беришини ёки H_1 *гипотезанинг амалга ошишини* англатади деб айтиш мумкин. Исталган яшикнинг танланиши тенг эҳтимолли бўлганлигидан бу гипотезанинг эҳтимоли $P_{H_1}(A) = \frac{1}{3}$ бўлади.

Шарларнинг состави ҳақида қилинган тахминга кўра биринчи яшикдан оқ шар олиш (A ҳодиса) эҳтимоли

$$P_{H_1}(A) = \frac{m_1}{m_1 + n_1}$$

бўлади.

Биринчи яшикнинг танланишидан ва ундан олинган шарнинг оқ бўлишидан иборат бўлган мураккаб ҳодисани қарайлик. Бундай ҳодисанинг эҳтимоли кўпайтириш теоремасига асосан

$$P(H_1 \text{ ва } A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{m_1}{m_1 + n_1}$$

бўлади (олдинги параграфнинг (4) формуласига қаранг).

Худди шунга ўхшаш, иккинчи яшикдан оқ шар олиш эҳтимоли H_2 ҳодиса (иккинчи яшикни танлаш) ва A ҳодиса (ундан оқ шар олиш) нинг биргаликда юз беришидан иборат

---

* Яъни ҳар бир яшикнинг танланиши тенг имкониятли.

мураккаб ҳодисанинг эҳтимолидир, натижада бу эҳтимол қуйидагига тенг:

$$P(H_2 \text{ ва } A) = P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{m_2}{m_2 + n_2}.$$

Учинчи яшик учун эса

$$P(H_3 \text{ ва } A) = P(H_3) \cdot P_{H_3}(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{m_3}{m_3 + n_3}$$

бўлади.

A ҳодиса шарни айнан қайси яшикдан олинишидан қатъи назар оқ шар олишдан иборат ҳодисани билдиради. У ҳолда H_1, H_2, H_3 ҳодисаларнинг биргаликда эмаслигидан (чунки фақат битта яшик танланади) фойдаланиб, A ҳодисанинг эҳтимолини ҳисоблаш учун қўшиш теоремасини татбиқ қила оламиз. Бу теорема қуйидаги натижани беради:

$$P(A) = P[H_1 \text{ ва } A) \text{ ёки } (H_2 \text{ ва } A) \text{ ёки } (H_3 \text{ ва } A)] =$$
$$= P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + P(H_3)P_{H_3}(A) =$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{m_1}{m_1 + n_1} + \frac{m_2}{m_2 + n_2} + \frac{m_3}{m_3 + n_3}\right).$$

Энди масалани умумий ҳолда таърифлаймиз. $H_1, H_2, \ldots, H_n$ биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг тўла группасини ташкил қилиб, A уларнинг ҳар бири, масалан, H_i юз берганда $P_{H_i}(A)$ шартли эҳтимол билан юз берсин. Бу ҳолда A ҳодисанинг юз бериш эҳтимоли қанчага тенг?

Юқорида қаралган мисолдаги каби кўпайтириш теоремасидан фойдаланиб, A ҳодисанинг H_1 ҳодиса билан биргаликда юз бериш эҳтимолини топамиз:

$$P(H_1 \text{ ва } A) = P(H_1)P_{H_1}(A). \qquad (1)$$

Шунга ўхшаш,

$$P(H_2 \text{ ва } A) = P(H_2)P_{H_2}(A),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (2)$$
$$P(H_n \text{ ва } A) = P(H_n)P_{H_n}(A).$$

Энди $H_1, H_2, \ldots, H_n$ ҳодисаларнинг биргаликда бўлмаганлигидан фойдаланиб, қўшиш теоремасига асосан A ҳодисанинг эҳтимолини топиш мумкин. (1) ва (2) тенгликларни қўшиб,

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n)P_{H_n}(A)$$

формулани ёки қисқача ёзсак,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P_{H_i}(A) \qquad (3)$$

ни ҳосил қиламиз.

(3) формула *тўла эҳтимол формуласи* дейилади.

Бундай ҳолларда $H_1, H_2, \ldots, H_n$ ҳодисаларни одатда *гипотезалар* дейилади. Юқорида қаралган 1- мисолда учта ($n=3$) ўзаро тенг эҳтимолли гипотеза бор эди:

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}.$$

2- мисол. Снаряд портлаганда катта, ўртача ва кичик парчалар ҳосил бўлиб, катта парчалар сони парчалар жами сонининг 0,1 қисмини, ўртача ва кичик парчалар эса мос равишда 0,3 ва 0,6 қисмини ташкил қилади. Катта парча танкка текканда унинг зирҳини 0,9 эҳтимол билан, ўртача ва кичик парчалар эса мос равишда 0,3 ва 0,1 эҳтимоллар билан тешади. Танк зирҳига теккан парчанинг зирҳни тешиш эҳтимолини топинг.

Мисолимизда учта гипотеза бўлиб, уларнинг эҳтимоллари мос равишда $P(H_1)=0{,}1$; $P(H_2)=0{,}3$; $P(H_3)=0{,}6$. Тўла эҳтимол формуласи (3) дан фойдаланиб, қуйидагини топамиз: $P(A)=0{,}1\cdot 0{,}9+0{,}3\cdot 0{,}3+0{,}6\cdot 0{,}1=0{,}24$.

Тўла эҳтимол формуласидан фойдаланиб, *Бейес формуласи* ёки *гипотезалар эҳтимоллари формуласи* деб аталувчи муҳим формулани ҳосил қилиш мумкин.

$H_1, H_2, \ldots, H_n$ ҳодисаларнинг тўла группаси берилган бўлиб, тажрибани ўтказишга қадар улардан ҳар бирининг $P(H_i)$ эҳтимоллари тайин қийматга эга бўлсин.

Тажриба натижасида бирор A ҳодиса юз берди деб фараз қиламиз. Бу янги маълумот—A ҳодисанинг юз бериши гипотезаларнинг дастлабки эҳтимолларини ўзгаришига олиб келиши мумкин.

Айтилган фикрни мисолда тушунтирамиз.

3- мисол. Яшикда учта оқ ва қора шар бўлиб, улар сонининг рангларга нисбатан тақсимоти номаълум бўлсин. Тажриба ўтказилишига қадар, яшикдаги шарлар ҳақида тўртта гипотеза қилиш мумкин:

1) 3 та оқ ва 0 та қора шар (H_1),
2) 2 та оқ ва 1 та қора шар (H_2),
3) 1 та оқ ва 2 та қора шар (H_3),
4) 0 та оқ ва 3 та қора шар (H_4).

Бу гипотезаларни тенг эҳтимолли деб ҳисоблаш мумкин, у ҳолда

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=P(H_4)=\frac{1}{4}.$$

Айтайлик, тажриба натижасида оқ шар олинган бўлсин (A ҳодиса). Бу ҳолда H_4 гипотезанинг эҳтимоли 0 га тенг бўлади. Қолган учта гипотезанинг эҳтимоллари ҳам ўзгаради, шу билан бирга энди уларни тенг эҳтимолли гипотезалар деб ҳисоблаб бўлмайди. Масалан, H_1 гипотезанинг эҳтимоли H_3 гипотезанинг эҳтимолидан катта бўлади.

Масалани умумий кўринишда қўяйлик: тажриба натижасида A ҳодиса юз берди деган тахминда H_i гипотезаларнинг эҳтимоллари тажрибадан сўнг қандай бўлади?

Тажриба ўтказилишига қадар $H_1, H_2, \ldots, H_n$ гипотезаларнинг эҳтимолларини мос равишда $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ орқали белгилаймиз:

$$P(H_i) = \alpha_i \qquad (i = 1,2,\ldots, n), \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Шу гипотезаларнинг A ҳодиса юз берган тажриба ўтказилгандан кейинги эҳтимолларини эса $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ орқали белгилаймиз:

$$P_A(H_i) = \beta_i \qquad (i = 1,2,\ldots, n),$$

бунда $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$, чунки $H_1, H_2, \ldots, H_n$ гипотезалар аввалгидек биргаликда бўлмаган ва ягона мумкин бўлган ҳодисалардир.

$P_{H_i}(A)$ шартли эҳтимолни p_i орқали, A ҳодисанинг тўла эҳтимолини эса P орқали белгилаймиз.

2- § даги кўпайтириш теоремасидан келиб чиқадиган (6) тенгликка асосан

$$P(H_i)P_{H_i}(A) = P(A)P_A(H_i),$$

тенгликни ёки қабул қилинган белгилашларга мувофиқ,

$$\alpha_i p_i = P\beta_i$$

тенгликни ёза оламиз. Бундан

$$\beta_i = \frac{\alpha_i p_i}{P}.$$

Бу формулага P тўла эҳтимолнинг (3) формуладаги ифодасини қўйиб,

$$\beta_i = \frac{\alpha_i p_i}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j p_j} = \frac{\alpha_i p_i}{\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_n p_n} \tag{4}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Ҳамма β_i-эҳтимолларнинг йиғиндиси бирга тенглигини осонгина текшириш мумкин.

H_i гипотезанинг тажрибадан кейинги эҳтимолининг ифодасини берувчи (4) формула бизга керак бўлган *Бейес формуласидир.*

Яна 3- мисолга қайтамиз. Қабул қилинган белгилашларга мувофиқ,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{1}{4}.$$

Сўнгра

$$p_1 = P_{H_1}(A) = 1, \quad p_2 = \frac{2}{3}, \quad p_3 = \frac{1}{3}, \quad p_4 = 0.$$

Узил-кесил натижани эса (4) формулага асосан топамиз:

$$P_A(H_1) = \frac{\frac{1}{4}\cdot 1}{\frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot 0} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + 0} = \frac{1}{2}.$$

Шунга ўхшаш,

$$P_A(H_2) = \frac{1}{3}, \qquad P_A(H_3) = \frac{1}{6}, \qquad P_A(H_4) = 0.$$

4- §. СИНОВЛАРНИ ТАКРОРЛАШ. БЕРНУЛЛИ СХЕМАСИ

Эҳтимолларни қўшиш ва кўпайтириш қоидалари ҳодисаларнинг анча мураккаб комбинациялари эҳтимолларини топишга имкон беради. Биз ҳозир танишадиган энг оддий, шу билан бирга анча кенг тарқалган схемалардан бири *эркли синовларнинг такрорланиш схемаси*, шунингдек, *Бернулли схемаси* деб аталувчи схемадир.

Бирор синов натижасида A ҳодиса юз бериши ёки юз бермаслиги мумкин бўлсин. A ҳодисанинг юз бериш эҳтимолини $P(A) = p$ орқали, унинг юз бермаслик эҳтимолини эса $P(\overline{A}) = 1 - p = q$ орқали белгилаймиз.

Кетма-кет ўтказиладиган иккита эркли синовнинг мумкин бўлган натижаларини қарайлик. Улар бу натижаларнинг эҳтимоллари ҳам келтирилган схема билан тавсифланади (1-жадвал). Энди A ҳодисанинг икки марта юз бериш эҳтимоли p^2 га, унинг бир марта юз бериш эҳтимоли (қайси синовда юз беришининг фарқи йўқ, яъни иккита синовда бир марта A ҳодиса ва бир марта $\overline{A}$ ҳодиса юз беради) $2pq$ га, A нинг бир марта ҳам юз бермаслик эҳтимоли q^2 га тенг бўлишини ҳисоблаш қийин эмас. Бу натижалар ягона мумкин бўлган ҳодисалар эканлиги равшан, шу билан бирга

$$p^2 + 2pq + q^2 = 1.$$

1-жадвал

Синовнинг натижалари	AA	$A\overline{A}$	$\overline{A}A$	$\overline{A}\,\overline{A}$
Эҳтимоллар	p^2	pq	qp	q^2

Юқорида юритилган мулоҳазани синовлар сони кўпроқ бўлган ҳолда ҳам қийинчиликсиз амалга ошириш мумкин.

Масалан, учта синовда A ҳодисанинг кетма-кет уч марта юз бериш эҳтимоли (бир хил ҳодисаларнинг биргаликда юз бериш эҳтимоли сифатида) p^3 га тенг. A ҳодисанинг қайси тартибда бўлса ҳам икки марта юз бериш эҳтимолини топиш учун унинг икки марта юз бериши $AA\bar{A}$, $A\bar{A}A$, $\bar{A}AA$ натижалардагина мумкин эканини қайд қиламиз. Бу ҳодисаларнинг ҳар бирини эҳтимоли p^2q га тенг, демак, A ҳодисанинг учта синовда икки марта юз бериш эҳтимоли $3p^2q$ га тенг. A ҳодисанинг учта синовда бир марта юз бериш эҳтимоли ва унинг учта синовда бир марта ҳам юз бермаслик эҳтимоли юқоридагидек ҳисобланади. Бу эҳтимоллар мос равишда $3pq^2$ га ва q^3 га тенг бўлади. Юқоридагидек, бу ҳолда ҳам

$$p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 = (p+q)^3 = 1.$$

Энди умумий масалани таърифлашимиз мумкин. *Ҳар бирида A ҳодисанинг юз бериш эҳтимоли ўзгармас бўлган n та эркли синов ўтказилади. Бу ўзгармас эҳтимол p бўлсин. A ҳодисанинг n та синовда роса m марта юз бериш эҳтимоли $P_{m,n}$ ни топиш талаб қилинади.*

Бундай масала, масалан, n та ўқ узилганда улардан m тасининг нишонга тегиш эҳтимолини ҳисоблашда, шунингдек, қуйида қараладиган бошқа кўпгина ҳолларда учрайди.

Аввало, иккита четки хусусий ҳол, яъни $P_{n,n}$ ва $P_{0,n}$ эҳтимолларни кўпайтириш теоремасига кўра (ҳодисаларнинг биргаликда юз бериш эҳтимоли сифатида) осонгина ҳисоблай оламиз:

$$P_{n,n} = p^n \qquad \text{ва} \qquad P_{0,n} = q^n.$$

Энди n та синовда A ҳодисанинг бирор тайин тартибда, масалан,

$$\underbrace{AA\ldots A}_{m\text{ та}} \qquad \underbrace{\bar{A}\ldots\bar{A}}_{n-m\text{ та}}$$

ҳолдагидек роса m та марта юз бериш эҳтимолини ҳисоблаймиз. Бу эҳтимолнинг p^mq^{n-m} га тенг эканлиги равшан. Шунингдек, A ҳодисанинг бошқа бирор тартибда роса m марта юз бериш эҳтимоли ҳам p^mq^{n-m} га тенг бўлади. n та элементдан A ҳодиса ҳар хил тартибда m марта учрайдиган қилиб тузиш мумкин бўлган барча схемалар сони n та элементдан m тадан группалашлар сони C_n^m га тенг бўлади.

Шунинг учун эҳтимолларни қўшиш теоремасидан фойдаланиб, ушбу формулани ҳосил қиламиз:

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}. \qquad (1)$$

Бу формуладан кўринадики, $P_{m,n}$ эҳтимоллар

$$(p+q)^n = p^n + np^{n-1}q + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}p^{n-2}q^2 + \dots +$$
$$+ C_n^m p^m q^{n-m} + \dots + q^n = 1$$

бином ёйилмасидаги айрим қўшилувчилардан иборат экан. Шу сабабли (1) формула *биномиал* формула дейилади.

Шундай қилиб, юқорида таърифланган масала тўла ҳал қилинди. Энди ҳосил қилинган формулани қуйидаги иккита мисолда кўрсатамиз.

1-мисол. Танга 6 марта ташланади. Гербли томоннинг 0,1,...,6 марта тушиш эҳтимоли қанча?

Бу ҳолда $p = q = \frac{1}{2}$. Юқорида ҳосил қилинган формуладан фойдаланиб, қуйидаги натижаларга келамиз:

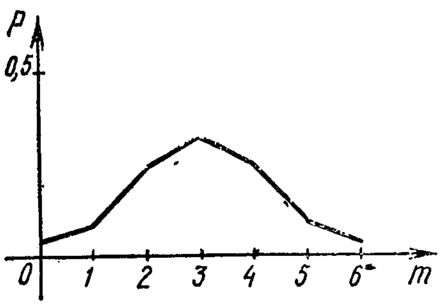
$$P_{0,6} = P_{6,6} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64},$$
$$P_{1,6} = P_{5,6} = C_6^1\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{32},$$
$$P_{2,6} = P_{4,6} = C_6^2\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{64},$$
$$P_{3,6} = C_6^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{15}{16}.$$

Абсциссалар ўқига m нинг қийматларини, ординаталар ўқига $P_{m,n}$ нинг қийматларини жойлаштириб, юқорида олинган натижаларни график орқали тасвирлаш мумкин (1-расм). Гербли томон тушишининг энг катта эҳтимолли сони $m = 3$ экани равшан, бироқ бу эҳтимол ўз-ўзича унча катта эмас.

2-мисол. Ёнилғи билан тўлдирилган резервуарга қарата саккизта ўқ узилади. Резервуарга биринчи ўқ текканда тешилади, иккинчи ўқ текканда эса ёнилғи ёна бошлайди. Агар узилган ўқнинг резервуарга тегиш эҳтимоли 0,2 га тенг бўлса, резервуарни ёндириб юбориш эҳтимоли қанча? Аввало, қарама-қарши ҳодисанинг эҳтимолини, яъни резервуарнинг ёнмаслик эҳтимолини топамиз. Бу ҳодиса резервуарга теккан ўқлар сони бирдан катта бўлмаганда юз беради ва унинг эҳтимоли

$$P_{0,8} + P_{1,8} = q^8 + C_8^1 pq^7$$

га тенг.



1-расм.

Бу ерда $p = 0{,}2$ ва $q = 0{,}8$ бўлганлиги сабабли

$$P_{0,8} + P_{1,8} = (0{,}8)^8 + 8 \cdot 0{,}2 \cdot (0{,}8)^7 \approx 0{,}503.$$

Бундан резервуарни ёндириб юбориш эҳтимоли

$$P = 1 - 0{,}503 = 0{,}497$$

га тенг бўлиши келиб чиқади.

m нинг ўсиши билан $P_{m,n}$ эҳтимолнинг аввал ўсиши, кейин эса m нинг бирор қийматидан бошлаб камайиши 1 - мисолда кўриниб турибди. Бу умумий ҳолда ҳам ўринли эканлигини кўрсатамиз ва m нинг шундай қийматини аниқлаймизки, унинг бу қийматида берилган n ва p учун $P_{m,n}$ эҳтимол энг катта бўлади.

Ёнма-ён турган иккита $P_{m,n}$ ва $P_{m+1,n}$ эҳтимолларни таққослаймиз:

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!} \times$$
$$\times p^m q^{n-m},$$

$$P_{m+1,n} = \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} p^{m+1} q^{n-m-1} =$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)(n-m)}{(m+1)!} p^{m+1} q^{n-m-1}.$$

Кейинги ҳаднинг олдинги ҳадга нисбати

$$\frac{P_{m+1,n}}{P_{m,n}} = \frac{n-m}{m+1} \frac{p}{q} \tag{2}$$

бўлади. Бу нисбатдаги иккинчи $\frac{p}{q}$ кўпайтувчи m га боғлиқ бўлмаган ўзгармас катталик. Биринчи $\frac{n-m}{m+1}$ кўпайтувчи эса m ўсиши билан камаяди, чунки m ўсганда унинг сурати камайиб, махражи ўсади. Бундан фойдаланиб, ушбу қатор тенгсизликларни ёза оламиз:

$$\frac{np}{q} = \frac{P_{1,n}}{P_{0,n}} > \frac{P_{2,n}}{P_{1,n}} > \ldots > \frac{P_{n,n}}{P_{n-1,n}} = \frac{p}{nq}.$$

Тажрибалар сони n ни $np > q$ ва $nq > p$ тенгсизликлар ўринли бўладиган даражада етарлича катта деб фараз қилсак, у ҳолда

$$\frac{P_{1,n}}{P_{0,n}} > 1 \text{ ва } \frac{P_{n,n}}{P_{n-1,n}} < 1$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

Шундай қилиб, $\frac{P_{m+1,n}}{P_{m,n}}$ нисбат m нинг кичик қийматларида бирдан катта бўлиб, кейин эса бирдан кичик бўлади.

Шундай μ бутун сонни танлаймизки, у учун $\frac{P_{\mu+1,n}}{P_{\mu,n}} > 1$, аммо m нинг барча $m > \mu$ қийматларида $\frac{P_{m+1,n}}{P_{m,n}} < 1$ тенгсизлик ўринли бўлсин. Бошқача қилиб айтганда,

$$m<\mu \text{ бўлганда } P_{m,n} < P_{m+1,n},$$
$$m=\mu \text{ бўлганда } P_{m,n} \leqslant P_{m+1,n},$$
$$m>\mu \text{ бўлганда } P_{m,n} > P_{m+1,n}.$$

$P_{\mu,n}$ эҳтимол $m=\mu$ да (берилган n учун) энг катта қийматга эга бўлиши равшан. Агар $P_{\mu+1,n} = P_{\mu,n}$ бўлса, бу эҳтимол m нинг иккита $m=\mu$ ва $m=\mu+1$ қийматларида энг катта қийматга эришади. Аввало μ ни бу охирги ҳолда аниқлаймиз. Бу ерда

$$\frac{P_{\mu+1,n}}{P_{\mu,n}} = \frac{n-\mu}{\mu+1} \cdot \frac{p}{q} = 1,$$

бундан эса

$$np - p\mu = \mu q + q$$

ни ҳосил қиламиз, демак, $\mu = np - q$.

Бинобарин, агар $np-q$ бутун сон бўлса, ҳодиса юз беришининг энг катта эҳтимолли сонлари $\mu = np - q$ ва $\mu+1 = np - q + 1 = (n+1)p$ бўлади.

Агар $np-q$ бутун сон бўлмаса, у ҳолда $\frac{P_{m+1,n}}{P_{m,n}}$ нисбат дарҳол бирдан катта қийматидан бирдан кичик қийматига ўтади. Фараз қилайлик, μ шундай бутун сон бўлсинки, унинг учун

$$\frac{P_{\mu,n}}{P_{\mu-1,n}} > 1 \text{ ва } \frac{P_{\mu+1,n}}{P_{\mu,n}} < 1$$

тенгсизликлар ўринли бўлсин. (2) формулага мувофиқ,

$$\frac{P_{\mu,n}}{P_{\mu-1,n}} = \frac{n-\mu+1}{\mu} \cdot \frac{p}{q} > 1.$$

Демак,

$$np - \mu p + p > \mu q, \text{ яъни } \mu < np + p.$$

Иккинчи томондан,

$$\frac{P_{\mu+1,n}}{P_{\mu,n}} = \frac{n-\mu}{\mu+1} \cdot \frac{p}{q} < 1$$

ёки

$$np - \mu p < q\mu + q,$$

демак, $\mu > np - q$.

Шундай қилиб, $np - q$ бутун сон бўлмаганда μ учун ушбу

$$np - q < \mu < np + p \tag{3}$$

тенгсизликлар ҳосил бўлиб, улар n та тажрибада A ҳодисанинг энг катта эҳтимолли юз бериш сони ётадиган чегараларни* кўрсатади.

Ҳосил қилинган формулалар татбиқ қилинадиган яна бир мисолни кўриб чиқамиз.

3-мисол. Ўйин соққаси кетма-кет тўққиз марта ташланади. Учга бўлинадиган очколар тушишининг энг катта эҳтимолли сони қанча?

Бу эҳтимолни, учга бўлинадиган очколар кўпи билан икки марта тушиш эҳтимолини, шунингдек, учга бўлинадиган очколар аниқ уч марта тушиш эҳтимолини ҳам ҳисоблаймиз.

Учга бўлинадиган очколар тушиш эҳтимоли $p = \frac{1}{3}$ га тенг. (3) тенгсизликка асосан ҳодисанинг энг катта эҳтимолли сони учун

$$9 \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{3} < \mu < 9 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$$

ни топамиз, бундан $\mu = 3$. (1) формулага асосан, ҳодисанинг роса уч марта юз бериш эҳтимоли:

$$P_{3,9} = C_9^3 \left(\frac{1}{3} \right)^3 \left(\frac{2}{3} \right)^6 = \frac{5376}{19683} \approx 0{,}278.$$

Учга бўлинадиган очколарнинг кўпи билан икки марта тушиш эҳтимоли эса йиғинди сифатида ҳосил қилиниши мумкин:

$$P = P_{0,9} + P_{1,9} + P_{2,9} = \left(\frac{2}{3} \right)^9 + C_9^1 \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^8 + C_9^2 \left(\frac{1}{3} \right)^2 \left(\frac{2}{3} \right)^7 \approx 0{,}378.$$

4-мисол. Корхонада ишлаб чиқарилган деталнинг брак бўлиш эҳтимоли 0,005 га тенг. 10000 та деталдан иборат партиядаги брак деталлар сони: а) роса 40 та, б) кўпи билан 70 та бўлиш эҳтимоли қанча?

---

* $np + p - (np - q) = p + q = 1$ бўлганлигидан $(np-q,\ np+q)$ интервалнинг узунлиги бирга тенг ва унда албатта роса битта бутун сон мавжуд.

Бу ерда $p = 0{,}005$, $q = 0{,}995$, $n = 10000$, $m = 40$ бўлгани учун биринчи саволга бевосита $P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}$ формула воситасида жавоб бера оламиз:

$$P(m = 40) = P_{40,\,10000} = C_{10000}^{40} (0{,}005)^{40} \cdot (0{,}995)^{9960} =$$

$$= \frac{10000!}{40!\ 9960!} (0{,}005)^{40} (0{,}995)^{9960}.$$

Иккинчи саволга жавоб бериш учун эҳтимолларни қўшиш теоремасидан фойдаланамиз. У ҳолда изланаётган эҳтимол қуйидаги йиғинди орқали ифодаланади:

$$P(0 \leqslant m \leqslant 70) = \sum_{m=0}^{70} P_{m,\ 10000} = \sum_{m=0}^{70} C_{10000}^{m} (0{,}005)^m \cdot (0{,}995)^{10000-m}.$$

Ҳақиқатан ҳам, агар брак деталлар кўпи билан 70 та бўлса, у ҳолда улар ё 0 та, ёки 1 та, ёки 2 та, ёки ..., ёки 70 та. Бу ҳодисаларнинг ҳаммаси биргаликда эмас.

Шундай қилиб, қўйилган иккала саволга жавоб бера олдик. Бироқ бу ерда талаб қилинадиган ҳисоблашларни бажариш амалда жуда оғир. Бу нарса бизни шуларга ўхшаш масалаларни тақрибий бўлса-да, лекин осонроқ ҳал қилишга имкон берадиган бошқача формулаларни излашга мажбур қилади. Бундай формулаларни кейинроқ (II бобга қаранг) кўрамиз.

5-§. ЭҲТИМОЛЛАРНИ ҲИСОБЛАШЛАРГА ДОИР МИСОЛЛАР

Бу параграфда биз олдинги параграфларда кўриб чиқилган теоремалар асосида ҳисобланадиган эҳтимолларга доир бир нечта мисоллар қараб чиқамиз. Кўпчилик ҳолларда мумкин бўлган турли имкониятларни комбинаторика формулаларига асосланиб тўғридан-тўғри ҳисоблаш керак бўлади.

1-мисол. Лотереяда жами n та билет бор бўлиб, улардан m таси ютуқли. k та билети бор кишига ҳеч бўлмаганда битта ютуқ чиқиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Аввал қарама-қарши ҳодисанинг, яъни битта ҳам билетга ютуқ чиқмаслик эҳтимолини ҳисоблаймиз. Ҳар бир билетга ютуқ чиқиши ёки чиқмаслиги олдиндан ёзиб қўйилган деб тасаввур қилайлик (1965 йилги ва кейинги йиллардаги китоб лотереясида шундай қилинган эди). n та билетдан k тасини танлашнинг жами сони C_n^k га тенг бўлиб, улар тенг имкониятлидир. Ютуқ чиқмайдиган билетлар сони $n - m$ та бўлгани учун бизни қизиқтираётган қарама-қарши ҳодиса — битта ҳам билетга ютуқ чиқмаслигига қулайлик туғдирувчи элементар ҳодисалар сони $n—m$ та элементдан k тадан тузиш мумкин бўлган группалашлар сони C_{n-m}^k га тенг.

Шундай қилиб, битта ҳам билетга ютуқ чиқмаслик эҳтимоли эҳтимолнинг таърифига кўра $C_{n-m}^k : C_n^k$ нисбатга тенг. Талаб қилинаётган ҳодиса—ҳеч бўлмаганда битта билетга ютуқ чиқиш эҳтимоли ҳозиргина кўриб чиқилган ҳодисага қарама-қарши бўлгани учун қўшиш теоремасининг натижасига кўра

$$P = 1 - \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$$

бўлади. Бу эса изланаётган эҳтимолдир.

2-мисол. Бир партия товар 100 та буюмдан иборат бўлиб, улар орасида бешта брак буюм бор. Агар маҳсулотни қабул қилиш шартларига кўра текшириладиган ҳар 50 та буюм орасида кўпи билан битта брак буюм бўлишига йўл қўйиладиган бўлса, бу партиянинг таваккалига танланган ярми текширилганда партиянинг қабул қилиниш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. A ҳодиса таваккалига олинган 50 та буюм орасида битта ҳам брак буюм бўлмаслигини билдирсин. 100 та буюмли партиядан 50 тасини C_{100}^{50} та ҳар хил усул билан олиш мумкин. Бу сонни барча мумкин бўлган тенг имкониятли ҳолларнинг жами сони деб қараш мумкин. Яроқли бўлган жами 95 та буюмдан 50 тасини C_{95}^{50} та турли усул билан танлаш мумкин. Бу сон A ҳодисага қулайлик туғдирувчи элементар ҳодисалар сони эканлиги равшан, чунки бундай группаларнинг ҳар бирида брак буюмлар йўқ. У ҳолда A ҳодисанинг эҳтимоли

$$P(A) = \frac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}}$$

бўлади.

Сўнгра, B ҳодиса орасида роса битта брак буюм бўлган 50 та буюмли партияни танлашни билдирсин. Агар ҳамма брак буюмлар номерланган деб ҳисобласак, ҳар бирида битта тайин номерли брак буюм бўлган группаларнинг жами сони C_{95}^{49} га тенг. Қайси номерли брак буюмнинг группага кирганлиги аҳамиятга эга бўлмаганлиги учун B ҳодисага қулайлик туғдирувчи ҳолларнинг жами сони $C_5^1 \cdot C_{95}^{49}$ га, B нинг эҳтимоли эса

$$P(B) = \frac{C_5^1 \cdot C_{95}^{49}}{C_{100}^{50}}$$

га тенг.

A ва B ҳодисалар биргаликда бўлмаганлиги учун изланаётган эҳтимол қўшиш теоремасига асосан ҳисобланади:

$$p = P(A \text{ ёки } B) = \frac{C_{95}^{50} + C_5^1 C_{95}^{49}}{C_{100}^{50}} \approx 0{,}181.$$

3-мисол. Юзта деталдан иборат партияда 30 та брак деталь бор. Таваккалига учта деталь олинади. Олинган деталлар орасида роса битта брак деталь бўлиш эҳтимоли қанча?

Ечилиши. Аввалги мисолдагидек мулоҳаза юритиб, мумкин бўлган тенг имкониятли ҳолларнинг жами сони C_{100}^3 га, эҳтимоли изланаётган ҳодисага қулайлик туғдирувчи ҳоллар сони эса $C_{30}^1 \cdot C_{70}^2$ га тенглигини топамиз. У ҳолда изланаётган эҳтимол:

$$P_{100,\,30}(3,\ 1) = \frac{C_{30}^1\, C_{70}^2}{C_{100}^3} \approx 0{,}448.$$

Кўриб чиқилган 2- ва 3-мисоллар бирор умумий схеманинг хусусий ҳоллари бўлиб, бу схемани турли терминларда баён қилиш мумкин. Бу схемани шарли яшиклар терминларида таърифлаш айниқса қулайдир. Кейинги мисолда ана шундай йўл тутилган.

4-мисол. Яшикда N та шар бўлиб, улардан M таси оқ, $N - M = L$ таси қора. Таваккалига n та шар олинади. Олинган n та шар орасида роса m та оқ шар бўлиш эҳтимоли $P_{N,M}(n,\ m)$ ни топиш талаб қилинади.

Ечилиши. Оқ шарлар 1, 2,..., M номерларга, қора шарлар эса $M+1$, $M+2$, ..., N номерларга эга бўладиган қилиб, барча шарларни тасаввуримизда номерлайлик. Исталган n та шарнинг чиқиши тенг имкониятли бўлиб, барча мумкин бўлган элементар ҳодисалар сони C_N^n га тенг.

Бизни қизиқтираётган ҳодисага олинган n та шар орасида роса m та оқ шар бўлган ҳоллар қулайлик туғдиради. Бундай ҳолларнинг жами сони C_M^m, чунки жами M та оқ шардан исталган m таси чиқиши мумкин. Энди қора шарларга келсак, улар $l = n - m$ та бўлиши керак, бундай группаларни танлаш усуллари сони эса $C_L^l = C_{N-M}^{n-m}$ га тенг. Оқ шарларнинг ҳар бир группаси қора шарларнинг ҳар бир группаси билан комбинацияланиши мумкинлигидан, эҳтимоли изланаётган ҳодисага қулайлик туғдирувчи ҳолларнинг жами сони $C_M^m \cdot C_L^l$ кўпайтмага тенг бўлади.

Демак, изланаётган эҳтимол

$$P_{N,M}(n,\ m) = \frac{C_M^m\, C_L^l}{C_N^n} = \frac{C_M^m\, C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}. \qquad (1)$$

3- ва 4- мисолларда ҳосил қилинган формулалар ҳақиқатан ҳам (1) формуланинг хусусий ҳоллари эканини осонгина кўриш мумкин. Группалашлар сони учун маълум ифодалардан фойдаланиб, (1) формулани қуйидаги кўринишда ёза оламиз:

$$P_{N,M}(n,\ m) = \frac{M!\,L!\,(N-n)!\,n!}{(M-m)!\,m!\,(n-m)!\,(L-l)!\,N!}. \qquad (2)$$

Барча $N-n$, $M-m$, $L-l$ айирмаларнинг мусбатлиги масала мазмунидан равшан.

Энди $P_{N,M}(n, 0)$ эҳтимолни, яъни олинган n та шарнинг ҳаммаси қора бўлиш эҳтимолини топамиз. (1) формулага кўра

$$P_{N,M}(n, 0)=\frac{C_M^0 C_{N-M}^n}{C_N^n}=\frac{L!(N-n)!}{(L-n)!N!}.$$

Бу натижани (2) формуладан дарҳол ҳосил қилиш мумкин, чунки бу ерда $m=0$, $l=n$.

5-мисол. Пачкадаги 12 та умумий дафтарнинг еттитаси катак дафтар, бештаси чизиқли дафтар. Таваккалига 6 та дафтар олинган. Олинган дафтарлар орасида катак дафтарлар сони ва чизиқли дафтарлар сони бир хил бўлиш эҳтимоли қанча?

Ечилиши. Бу мисолда юқорида таҳлил қилинган схемани пайқаш қийин эмас, шу сабабли тайёр натижадан фойдаланишимиз мумкин. Бу ерда $N=12$, $M=7$, $L=5$, $n=6$, $m=l=3$. (2) формулага кўра

$$P_{12,7}(6, 3)=\frac{7!\,5!\,6!\,6!}{3!\,4!\,3!\,2!\,12!}=\frac{25}{66}\approx 0{,}38.$$

6-мисол. Зачёт олиш учун ўқитувчи 50 та масала тайёрлади, улардан 10 таси эҳтимоллар назариясига доир, 20 таси дифференциал тенгламалар назариясига доир ва 20 таси интеграл ҳисоб назариясига доир. Студент зачёт топшириши учун у таваккалига олган биринчи масалани ечиши кифоя. Агар студент эҳтимоллар назариясидан олинган масалаларнинг 5 тасини, дифференциал тенгламалардан олинган масалаларнинг 15 тасини ва интеграл ҳисобдан олинган масалаларнинг 18 тасини еча олса, студентнинг зачёт топшира олиш эҳтимоли қанча?

Ечилиши. 50 та масаладан исталган бирининг олинишини тенг имкониятли деб ҳисоблаш лозимлиги равшан. У ҳолда масалани интеграл ҳисобдан олиш (H_1 гипотеза) ёки дифференциал тенгламалардан олиш (H_2 гипотеза) эҳтимоллари бир-бирига тенг:

$$P(H_1)=P(H_2)=0{,}4.$$

Масалани эҳтимоллар назариясидан олиш (H_3 гипотеза) эҳтимоли эса

$$P(H_3)=0{,}2$$

бўлади.

Агар олинган масаланинг ечилганлигини A ҳодиса десак, у ҳолда бу ҳодисанинг турли гипотезалардаги эҳтимоли қуйидагича бўлади:

$$P_{H_1}(A)=0{,}9, \qquad P_{H_2}(A)=0{,}75, \qquad P_{H_3}(A)=0{,}5.$$

Тўла эҳтимол формуласига асосан эса A ҳодисанинг эҳтимоли:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P_{H_i}(A) = 0{,}4 \cdot 0{,}9 + 0{,}4 \cdot 0{,}75 + 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}76.$$

7-мисол. Юқоридаги масала шартларида, студентнинг зачёт топширгани маълум бўлса, у эҳтимоллар назариясига доир масала ечган бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Гипотезалар эҳтимолларининг Бейес формуласидан фойдаланамиз. Биздан A ҳодиса юз берган деб тахмин қилинганда H_3 гипотезанинг эҳтимолини топиш талаб қилинади. 3-§ даги (4) формуладан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P_A(H_3) = \frac{P(H_3)P_{H_3}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}5}{0{,}76} = 0{,}132.$$

8-мисол. 52 картали тўлиқ дастадан таваккалига битта карта олинади. Ихтиёрий холли расмли („Корол", „Дама", ёки „Валет") ёки „қарға" карта олиш эҳтимоли қанча?

Ечилиши. Қарталар дастасида ҳаммаси бўлиб 12 та расмли қарта (ҳар бир холли қарталардан 3 тадан) бўлганлигидан расмли қарта олиш эҳтимоли $\frac{12}{52} = \frac{3}{13}$ га тенг бўлади. „Қарға" карта олиш эҳтимоли эса $\frac{1}{4}$ га тенг. Энди қўшиш теоремасидан фойдалансак кифоя. Бироқ қаралаётган ҳодисалар биргаликда эканлигини ҳисобга олиш лозим бўлгани учун кенгайтирилган қўшиш теоремасидан ва 2-§ даги (9) формуладан фойдаланиш зарур. Бунинг учун ҳодисаларнинг биргаликда юз бериш эҳтимоли, яъни расмли „қарға" карта олиш эҳтимолини топишимиз керак. Бундай қарталар эса учта, демак, тегишли эҳтимол 3/52 га тенг. Бинобарин, 2-§ даги (9) формулага асосан изланаётган эҳтимол учун

$$\frac{3}{13} + \frac{1}{4} - \frac{3}{52} = \frac{22}{52} = 0{,}423$$

қийматни ҳосил қиламиз.

9-мисол. Баскетболчининг тўпни тўрга тушириш эҳтимоли 0,6 га тенг. У тўпни 8 марта ташлаган. Тўпнинг тўрга роса 2 марта тушиш эҳтимолини топинг. Тўпнинг тўрга тушишининг энг катта эҳтимолли сонини ва унга мос эҳтимолни топинг.

Ечилиши. Тўпнинг тўрга роса икки марта тушиш эҳтимоли 4-§ даги (1) формулага асосан топилади. Бу ерда $n=8$; $p=0{,}6$; $q=0{,}4$; $m=2$. У ҳолда

$$P_{2,8} = C_8^2\,(0{,}6)^2 \cdot (0{,}4)^6 = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 0{,}36 \cdot 0{,}0041 \approx 0{,}041.$$

Тўпнинг тўрга тушишининг энг катта эҳтимолли сони μ учун 4-§ даги (3) тенгсизликка эга эдик, ундан

$$8 \cdot 0{,}6 - 0{,}4 < \mu < 8 \cdot 0{,}6 + 0{,}6$$

ёки

$$4{,}4 < \mu < 5{,}4$$

келиб чиқади, бундан эса $\mu = 5$. Бу сонга мос эҳтимол:

$$P_{5,8} = C_8^5 \cdot (0{,}6)^5 \cdot (0{,}4)^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} 0{,}078 \cdot 0{,}064 \approx 0{,}28.$$

Олдинги мисол бундан илгариги параграфда қаралган эркли синовларни такрорлашнинг Бернулли схемасига асосан ечилди. Бундан кейинги мисолларда нисбатан умумийроқ, чунончи синовларнинг мумкин бўлган натижалари иккитадан ортиқ бўлган ҳол қаралади.

10-мисол. Ўйин пилдироғи 6 та секторга ажратилган бўлиб, уларнинг ҳар бирига 1, 2, 3 рақамлардан бири ёзилган; бунда ҳар бир рақам икки мартадан такрорланади. Пилдироқ уч марта айлантириб қўйиб юборилади. Бунда тушган рақамлар йиғиндиси 6 га тенг бўлиш эҳтимоли қанча?

Ечилиши. Бу ерда Бернулли схемасига нисбатан умумийроқ схемага эгамиз, чунки ҳар бир синов натижасида учта ҳодисадан бири юз бериши мумкин. Бироқ ҳар бир синовда барча натижалар тенг имкониятли бўлганлиги учун масалани ечишни бизга яхши маълум бўлган усуллардан фойдаланишга келтира оламиз.

Ҳар бир синовда учта натижа олиш мумкин бўлиб (1, 2 ёки 3 тушиши мумкин), учала синов натижалари ўзаро эркли (ва демак, улар бир-бири билан исталганча комбинациялаша олади) бўлганлигидан мумкин бўлган барча элементар ҳодисалар жами сони $3^3 = 27$ га тенг. Энди бизни қизиқтираётган ҳодисага қулайлик туғдирувчи элементар ҳодисалар сонини аниқлаш қолади. Бунинг учун 6 сонини учта қўшилувчи йиғиндиси кўринишида нечта усул билан ифодалаш мумкинлигини аниқлаш керак.

Барча қўшилувчилар натурал сонлардир. Қўшилувчиларнинг тартибини ҳисобга олмасак, 6 сонини учта қўшилувчининг йиғиндиси шаклида фақат икки хил ифодалаш мумкин:

$$6 = 1 + 2 + 3, \qquad 6 = 2 + 2 + 2.$$

Булардан иккинчиси фақат битта ҳолда—пилдироқни уч марта қўйилганда, уларнинг ҳаммасида 2 тушган ҳолдагина мумкин. Биринчи ҳолга келсак, ундаги қўшилувчиларнинг ўринлари ихтиёрий равишда алмашиши мумкин. Демак, пилдироқни уч марта қўйилганда тушган очколар йиғиндиси 6 га тенг бўлиш ҳодисасига қулайлик туғдирувчи яна $P_3 = 6$ та элементар ҳодиса мавжуд. Шундай қилиб, бизни қизиқтираётган ҳодисага қулайлик туғдирувчи имкониятлар сони 7 та бўлиб, изланаётган эҳтимол эса 7/27 га тенг.

Ҳар бир синовдаги барча натижалар тенг эҳтимолли бўлгани учун масалани ечиш осон бўлди ва у асосан изланаётган ҳодисага қулайлик туғдирувчи имкониятлар сонини ҳисоблашга келтирилди. Кейинги мисолда бирор конкрет сондаги имкониятлар ва бирор конкрет сондаги синовлар учун умумий схема қаралади.

11-мисол. Айтайлик, ҳар бир синов натижасида учта A_1, A_2, A_3 ҳодисалардан бири мос равишда p_1, p_2, p_3 эҳтимоллар билан юз берсин. Учта синов ўтказилади. Мумкин бўлган ҳодисаларнинг ҳар бирини $k(k=0, 1, 2, 3)$ марта юз бериш эҳтимолини аниқланг.

Ечилиши. Аниқлик учун A_1 ҳодисанинг ҳар хил сон марта юз бериш эҳтимолини кузатамиз. Шу нуқтаи назардан A_2 ёки A_3 ҳодисаларнинг юз бериши биз учун аҳамиятга эга эмас ва синовнинг фақат иккита натижасини—A_1 ҳодиса юз беришини ёки юз бермаслигини қарашимиз мумкин. Бу натижаларнинг юз бериш эҳтимоллари мос равишда p_1 ва $q_1 = 1 - p_1 = p_2 + p_3$ га тенг бўлади, чунки A_1, A_2, A_3 ҳодисалар ҳар бир синовда тўла группа ҳосил қилади.

Бу ҳолда учта синовнинг мумкин бўлган натижаларини уларга мос эҳтимоллар билан биргаликда қуйидаги жадвал ёрдамида ёза оламиз:

2-жадвал

Мумкин бўлган натижалар	$A_1A_1A_1$	$A_1A_1\bar{A}_1$	$A_1\bar{A}_1A_1$	$\bar{A}_1A_1A_1$	$A_1\bar{A}_1\bar{A}_1$	$\bar{A}_1A_1\bar{A}_1$	$\bar{A}_1\bar{A}_1A_1$	$\bar{A}_1\bar{A}_1\bar{A}_1$
Эҳтимоллар	p_1^3	$p_1^2q_1$	$p_1^2q_1$	$p_1^2q_1$	$p_1q_1^2$	$p_1q_1^2$	$p_1q_1^2$	q_1^3

$A_1\bar{A}_1A_1$ комбинация, масалан, A_1 ҳодиса биринчи ва учинчи синовларда юз бериб, иккинчи синовда юз бермаганини кўрсатади, демак, иккинчи синовда ё A_2, ёки A_3 ҳодиса юз беради. Шундай қилиб, $A_1\bar{A}_1A_1$ комбинация ё $A_1A_2A_1$, ёки $A_1A_3A_1$ комбинациянинг юз беришига тенг кучли. Шунга ўхшаш, $\bar{A}_1A_1\bar{A}_1$ комбинация қуйидаги тўртта комбинациялардан бирининг юз беришига тенг кучли:

$$A_2A_1A_2, \quad A_2A_1A_3, \quad A_3A_1A_2, \quad A_3A_1A_3.$$

Учта синовда A_1 ҳодисанинг исталган сон марта юз бериш эҳтимоли келтирилган жадвалдан осонгина топилади:

$$\begin{aligned} P_3(0) &= P(\bar{A}_1\bar{A}_1\bar{A}_1) = q_1^3 = (p_2+p_3)^3, \\ P_3(1) &= P(A_1\bar{A}_1\bar{A}_1) + P(\bar{A}_1A_1\bar{A}_1) + P(\bar{A}_1\bar{A}_1A_1) = \\ &= 3p_1q_1 = 3p_1(p_2+p_3)^2, \\ P_3(2) &= P(\bar{A}_1A_1A_1) + P(A_1A_1\bar{A}_1) + P(A_1\bar{A}_1A_1) = 3p_1^2q_1 = \\ &= 3p_1^2(p_2+p_3), \\ P_3(3) &= P(A_1A_1A_1) = p_1^3. \end{aligned} \tag{3}$$

Юқоридаги мулоҳазаларни қолган ҳодисалар учун ҳам такрорлаш мумкинлиги равшан, демак, (3) формулага ўхшаш формулалар A_2 ва A_3 ҳодисаларнинг ихтиёрий сон марта юз бериш эҳтимоллари учун ҳам ўринли. Масалан, учта синовда A_2 ҳодисанинг икки марта юз бериш эҳтимоли

$$P_3(2) = 3p_2^2 q_2 = 3p_2^2(p_1 + p_3)$$

га, учта синовда A_3 ҳодисанинг бир марта юз бериш эҳтимоли эса

$$P_3(1) = 3p_3 q_3^2 = 3p_3(p_1 + p_2)^2$$

га тенг.

Синовлар сони ва ҳар бир синовдаги натижалар сони ихтиёрий бўлган умумийроқ масала кейинги параграфда қаралади.

12-мисол. t_0 моментда ишлаб турган станокнинг $t_0 + t$ моментгача тўхтамаслик эҳтимолини қуйидаги қўшимча маълумотларга асосан топинг:

1) изланаётган $P(t)$ эҳтимол фақат t вақт оралиғининг катталигига боғлиқ бўлиб, t_0 бошланғич моментга боғлиқ эмас;

2) станокнинг чексиз кичик Δt вақт оралиғида тўхтаб қолиш эҳтимоли Δt га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдор аниқлигида Δt га пропорционал, яъни бу эҳтимолни

$$a\Delta t + \alpha\Delta t$$

кўринишда ифодалаш мумкин, бу ерда a—пропорционаллик коэффициенти, α эса Δt билан бирга чексиз кичик миқдор (бошқача айтганда, $P(t)$ эҳтимол t нинг дифференциалланувчи функцияси деб фараз қилинади);

3) вақтнинг кесишмайдиган оралиқларида станокнинг тўхташи эркли ҳодисалардир.

Ечилиши. Айтайлик, t_0 моментда ишлаётган станокнинг $t + t_0$ моментгача тўхтамаслик эҳтимоли $P(t)$ бўлсин $t + t_0$ моментдан бошлаб давомийлиги Δt бўлган вақт оралиғини қарайлик. Бу вақт оралиғида станокнинг тўхтамаслик эҳтимоли 1) шартга кўра $P(\Delta t)$ га тенг, бу ҳодисага қарама-қарши ҳодисанинг эҳтимоли эса $1—P(\Delta t)$ га тенг. Иккинчи томондан, 2) шартга кўра, бу эҳтимол $a\Delta t + \alpha\Delta t$ га тенг, яъни

$$1 - P(\Delta t) = a\Delta t + \alpha\Delta t.$$

Энди $P(t + \Delta t)$ эҳтимолни аниқлаймиз. Бунинг учун бошланғич t вақт оралиғида ва кейинги Δt вақт оралиғида станокнинг тўхтамаслигидан иборат бўлган иккита ҳодиса биргаликда юз бериши керак. Бу вақт оралиқлари кесишмагани учун 3) шартга кўра станокнинг айтилган вақт оралиқларида тўхтамаслигидан иборат ҳодисалар эрклидир, ва демак, эҳтимолларни кўпайтириш теоремасига асосан:

$$P(t + \Delta t) = P(t)P(\Delta t).$$

Бу тенгликни ундан олдинги тенгликка асосан қуйидагича ёза оламиз:

$$P(t + \Delta t) = P(t)(1 - a\Delta t - \alpha\Delta t).$$

Бу тенгликдан

$$\frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = -aP(t) - \alpha P(t)$$

тенглик келиб чиқади. Бу ерда $\Delta t \to 0$ да лимитга ўтиб ва α нинг Δt билан бирга чексиз кичик миқдорлигини, яъни $\lim \alpha = 0$ эканини эътиборга олиб,

$$P'(t) = -aP(t)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Биз номаълум $P(t)$ функция учун биринчи тартибли ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенглама ҳосил қилдик. Бу тенгламани одатдаги усул билан ечиб, унинг умумий ечимини

$$P(t) = Ce^{-at}$$

кўринишда топамиз. Бошланғич шарт $P(0) = 1$ дан фойдаланиб, ихтиёрий ўзгармас C ни топсак, у $C = 1$ бўлади. Масаланинг узил-кесил ечимини

$$P(t) = e^{-at}$$

функция кўринишда ёзиш мумкин.

Кўрилган масала эҳтимоллар назариясининг ҳар хил соҳаларида кенг татбиқ қилинади.

6-§. БЕРНУЛЛИ СХЕМАСИНИ УМУМЛАШТИРИШ. ҚАЙТАРИЛМАЙДИГАН ТАНЛАНМА ҲАҚИДАГИ МАСАЛА

Олдинги параграфда синовларнинг иккитадан ортиқ натижалари ҳақида сўз юритганимизда Бернулли схемасини умумлаштирадиган мисол кўрганэдик (11-мисолга қаранг). Бироқ у ерда биз мумкин бўлган ҳодисалардан бирининг маълум бир сон марта юз бериш эҳтимоллари билан қизиққан эдик. Ҳозир бундай масалани энг умумий ҳолда қараймиз.

Айтайлик, ҳар бир синов натижасида s та $A_1, A_2, \ldots, A_s$ ҳодисалардан бири мос равишда $p_1, p_2, \ldots, p_s$, эҳтимоллар билан юз бериб, шу билан бирга $\sum\limits_{i=1}^{s} p_i = 1$ бўлсин. Шароитни ўзгартирмаган ҳолда тажрибани n марта такрорлаймиз. Бунда A_1 ҳодиса роса m_1 марта, A_2 ҳодиса роса m_2 марта,..., A_s ҳодиса роса m_s марта $(m_1 + m_2 + \ldots + m_s = n)$ юз бериш эҳтимолини топиш талаб қилинади. Бу эҳтимолни $P_n(m_1, m_2, \ldots, m_s)$ орқали белгилаймиз.

Юқорида қилганимиздек, n та синовнинг мумкин бўлган бирор натижасини биринчи, иккинчи, . . . синовларда қайси ҳодиса юз берганини кўрсатувчи ҳарфлар комбинацияси кўринишида ёзамиз. Масалан, $A_1A_3A_2A_1$ комбинация биринчи синовда A_1 ҳодиса, иккинчи синовда A_3 ҳодиса, учинчи синовда A_2 ҳодиса ва тўртинчи синовда яна A_1 ҳодисанинг юз берганини билдиради ва ҳ. к.

Бизни қизиқтираётган ҳодисага, масалан, „бош" комбинация деб аталувчи ушбу

$$\underbrace{A_1A_1 \ldots A_1}_{m_1 \text{ марта}} \quad \underbrace{A_2A_2 \ldots A_2}_{m_2 \text{ марта}} \ldots \underbrace{A_s \ldots A_s}_{m_s \text{ марта}},$$

комбинация қулайлик туғдиради. Бу комбинациянинг эҳтимоли эҳтимолларни кўпайтириш теоремасига кўра $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_s^{m_s}$ га тенг. Кўрсатилган „бош" комбинациядан ташқари, керакли ҳодисага қулайлик туғдирувчи „қўшимча" комбинациялар ҳам мавжуд. Булар шундай комбинацияларки, уларда A_1 ҳодиса албатта биринчи галда бўлмаса ҳам, лекин роса m_1 марта, A_2

ҳодиса албатта A_1 ҳодисадан кейин бўлмаса ҳам, лекин роса m_2 марта юз беради ва ҳ. к. Бунда $A_1, \ldots, A_s$ ҳодисаларнинг ҳар бири қанча лозим бўлса, шунча марта юз беришигина муҳимдир. Бундай „қўшимча“ комбинацияларнинг ҳар бирини эҳтимоли „бош“ комбинациянинг эҳтимоли каби $p_1^{m_1} p_1^{m_2} \ldots p_s^{m_s}$ га тенглиги равшан. n та синов натижасида A_1 ҳодиса роса m_1 марта, A_2 ҳодиса роса m_2 марта, ..., A_s ҳодиса роса m_s марта юз беришидан иборат бўлган ҳодиса юқорида тавсифланган „бош“ комбинациянинг ёки „қўшимча“ комбинациялардан баъзиларининг юз беришидан иборат хусусий ҳолларга ажралади. Бу барча хусусий ҳоллар жуфти-жуфти билан биргаликда бўлмаганлиги учун изланаётган эҳтимолни топишда қўшиш теоремасини қўлланиш мумкин. Юқорида кўрсатилганидек, ҳар бир хусусий ҳолнинг эҳтимоли $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_s^{m_s}$ га тенг. Энди бу хусусий ҳолларнинг сонини аниқлаймиз.

Бизни қизиқтираётган ҳодиса ажраладиган барча мумкин бўлган хусусий ҳоллар сони n та ҳарфдан тузиш мумкин бўлган барча („бош“ ва „қўшимча“) комбинациялардан иборат бўлиб, уларнинг ҳар бирида A_1 роса m_1 марта, A_2 роса m_2 марта, ... , A_s роса m_s марта такрорланади, яъни у такрорланувчи ўрин алмаштиришлар сонидир. Элементар алгебра* курсидан маълумки, бундай ўрин алмаштиришлар сони

$$\frac{n!}{m_1! m_2! \ldots m_s!}$$

га тенг.

Шундай қилиб, изланаётган эҳтимол:

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_s) = \frac{n!}{m_1! m_2! \ldots m_s!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_s^{m_s}. \qquad (1)$$

Бернулли схемаси учун 4-§ да ҳосил қилинган (1) формула юқоридаги формуланинг хусусий ҳоли эканлигини осонгина кўриш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, $s=2$ бўлсин, яъни синовнинг мумкин бўлган натижалари A_1 ва A_2, уларнинг эҳтимоллари эса p_1 ва p_2 бўлсин деб қабул қиламиз, у ҳолда юқорида исбот қилинган (1) формула n та синовда A_1 ҳодиса роса m_1 марта, A_2 ҳодиса роса m_2 марта юз бериш эҳтимолини беради:

$$P_n(m_1, m_2) = \frac{n!}{m_1! m_2!} p_1^{m_1} p_2^{m_2}.$$

Бироқ мумкин бўлган натижалар иккита бўлган ҳолда $p_1 + p_2 = 1$, яъни агар $p_1 = p$ бўлса у ҳолда $p_2 = 1 - p = q$. Сўнгра $m_1 = m$ бўлганда $m_2 = n - m_1 = n - m$ ни ҳосил қиламиз. Охирги формулада m_1, m_2, p_1, p_2 ни уларнинг кўрсатилган қийматлари билан алмаштириб,

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} \qquad (2)$$

* Масалан, қаранг: С. Т. Завало. „Элементарная алгебра“, 87-бет.

формулани ҳосил қиламиз. Бу эса Бернулли схемасидаги эҳтимол формуласи билан бир хилдир.

4-параграфда кўрсатилган эдики, $P_n(m)$ эҳтимолларни $(p+q)^n$ бином ёйилмасидаги айрим қўшилувчилар сифатида ҳосил қилиш мумкин эди. Шунга ўхшаш, $P_n(m_1, \ldots, m_s)$ эҳтимолларни ҳам $(p_1+ \ldots +p_s)^n$ полиномнинг полиномиал теорема бўйича йиғиндига ёйилмасидаги қўшилувчилар сифатида ҳосил қилиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, полиномиал теорема* бундай даъво қилади:

$$(p_1+p_2+ \ldots +p_s)^n = \sum_{m_1+m_2+\ldots+m_s=n} \frac{n!}{m_1!m_2! \ldots m_s!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_s^{m_s} .$$

(1) формула шу сабабли *полиномиал формула* дейилади.

(1) ва (2) эҳтимолларни бошқачароқ йўл билан ҳам ҳосил қилиш мумкин. n та бином кўпайтмасини тузайлик:

$$\varphi_n(\xi) = (p\xi+q)(p\xi+q) \ldots (p\xi+q)=(p\xi+q)^n. \qquad (3)$$

У ҳолда (2) эҳтимоллар (3) функцияни ξ параметрнинг даражалари бўйича ёйилмасидаги коэффициентлар сифатида ҳосил қилинади. ξ параметрнинг даражалари бўйича ёйилмасидаги коэффициентлари $P_n(m)$ эҳтимолларни берувчи $\varphi_n(\xi)$ функция $P_n(m)$ эҳтимолларни *ҳосил қилувчи функция* дейилади $P_\cdot(m_1, m_2, \ldots, m_s)$ полиномиал эҳтимоллар учун ҳосил қилувчи функцияни ушбу

$$\Psi_n(\xi_1\xi_2, \ldots, \xi_s) = (p_1\xi_1+p_2\xi_2+ \ldots +p_s\xi_s)^n \qquad (4)$$

кўринишда ёзиш мумкинлиги юқорида айтилганлардан равшандир.

Ҳосил қилувчи функциялардан фойдаланиш Бернулли схемасининг бошқа баъзи умумлаштиришларини ҳам қараб чиқишга имкон беради. Масалан, ҳар бир синовда A ҳодиса юз бериши ёки юз бермаслиги мумкин бўлсин, шу билан бирга унинг i-синовда юз бериш эҳтимоли $p_i-(i=1, \ldots n)$ га тенг бўлсин. Бу схема Бернулли схемасининг умумлаштирилиши бўлиб, у ерда барча i лар учун $p_i=p$ эди. Бу схема учун ҳосил қилувчи функция қуйидаги биномлар кўпайтмаси бўлишини пайқаш қийин эмас:

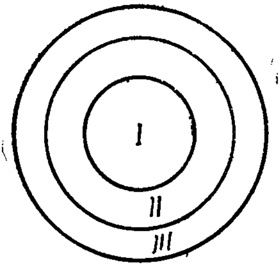
$$\varphi_n(\xi) = (p_1\xi+q_1)(p_2\xi+q_2) \ldots (p_n\xi+q_n) = \prod_{i=1}^{n}(p_i\xi+q_i). \qquad (5)$$

бу ерда $q_i=1-p_i$. Бу схемани муфассалроқ текширмаймиз.

(1) формуланинг татбиқ қилинишига доир бир нечта мисоллар кўрайлик.

1-мисол. Нишон I доира, II ва III ҳалқалардан иборат учта зонадан тузилган (2-расм). Ўқнинг I, II ва III зоналарга тегиш эҳтимоллари мос равишда $p_1=0{,}15$, $p_2=0{,}22$ ва $p_3=0{,}13$

* Ўша китобнинг 100—101-бетларига қаранг.



2- расм.

га тенг. Ўнта ўқ узилганда I зонага 6 та, II зонага 3 та, III зонага 1 та ўқ тегиш эҳтимоли қанча?

Ечилиши. Бу ҳолда мумкин бўлган натижалар сони $s=4$, чунки узилган ўқ нишоннинг зоналаридан бирига тегишидан ташқари у нишонга тегмаслиги ҳам мумкин. Ўқнинг турли зоналарга тегиш эҳтимоллари юқорида кўрсатилган. Ўқнинг нишонга тегмаслик эҳтимоли эса $p_4 = 1-(p_1+p_2+p_3) = 0{,}5$ бўлади. Масала шартига мувофиқ, $n=10$, $m_1=6$, $m_2=3$, $m_3=1$, $m_4=0$ деб олишимиз лозим. Энди (1) формулага асосан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P_{10}(6,\ 3,\ 1,\ 0) = \frac{10!}{6!\,3!\,1!\,0!}\,(0{,}15)^6\cdot(0{,}22)^3\cdot(0{,}13)^1\cdot(0{,}5)^0 =$$
$$= 840\cdot(0{,}15)^6\cdot(0{,}22)^3\cdot(0{,}13) \approx 0{,}000013.$$

2-мисол. Корхонада ишлаб чиқариш процессида диаметри йўл қўйиладиган чегарадан кичик, катта ёки йўл қўйиладиган чегаралар ичида бўлган деталь ҳосил бўлиш эҳтимоли мос равишда 0,05; 0,10 ва 0,85 га тенг. Умумий гуруҳдан таваккалига 100 та деталь ажратилган. Бу деталлар орасида диаметрлари йўл қўйиладиган чегарадан кичик бўлган 5 та деталь ва диаметрлари йўл қўйиладиган чегарадан катта бўлган 10 та деталь бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Бу ҳолда $p_1=0{,}05$, $p_2=0{,}10$, $p_3=0{,}85$, $m_1=5$, $m_2=10$, $m_3=85$. Шунинг учун (1) формулага асосан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P_{100}(5,\ 10,\ 85) = \frac{100!}{5!\ 10!\ 85!}\,(0{,}05)^5\cdot(0{,}10)^{10}\cdot(0{,}85)^{85}.$$

Бу ердаги ҳисоблашларни бажаришда логарифмлар жадвалларидан ва факториаллар логарифмлари жадвалларидан фойдаланиш қулайроқдир. Сўнгги ифодани логарифмлаймиз:

$$\lg P_{100}(5,\ 10,\ 85) = \lg 100! - \lg 5! - \lg 10! - \lg 85! +$$
$$+ 5\lg 0{,}05 + 10\lg 0{,}10 + 85\lg 0{,}5.$$

Факториаллар логарифмлари жадвалидан* қуйидагиларни топамиз:

$$\lg 100! = 157{,}9700, \qquad \lg 85! = 128{,}4498,$$
$$\lg 10! = 6{,}5598, \qquad \lg 5! = 2{,}0792.$$

* Қаранг: Л. М. Милн-Томсон и Л. Дж. Комри. „Четырехзначные математические таблицы“, Физматгиз, 1961, 36—37-бетлар.

Бундан ташқари, $5\lg 0{,}05 + 10\lg 0{,}10 = 5\lg 5 - 20$. Жадваллардан топилган барча қийматларни ўрнига қўйиб,

$$\lg P_{100}(5,\ 10,\ 85) = 2{,}3752$$

ни ҳосил қиламиз. Бундан эса

$$P_{100}(5,\ 10,\ 85) = 0{,}0237.$$

Шундай қилиб. юқоридаги айтилган сондаги деталларнинг бўлишини энг эҳтимолли деб ҳисоблаш табиий бўлса-да, лекин бу эҳтимолнинг ўзи жуда кичикдир.

Бу параграфнинг сўнггида Бернулли схемасининг умумлаштирилиши деб қараш мумкин бўлган яна битта масалани кўрамиз

Биз юқорида яшикдан у ёки бу рангли шарни олиш, карталар дастасидан карта олиш ва шуларга ўхшаш масалаларни, яъни умуман маълум бир белгига эга бўлган ёки эга бўлмаган буюмлар (предметлар) тўпламидан битта буюмни ажратиш ҳақидаги масалани қараб чиққан эдик. Бу ҳолда ўша белгига эга бўлган буюмни олиш эҳтимоли шу белгига эга бўлган ҳамма буюмларнинг жами буюмлар сонига нисбатига тенг бўлади.

Агар бир нечта буюм олинаётган, масалан, яшикдан бир нечта шар, карталар дастасидан бир нечта карта олинаётган бўлса, у ҳолда икки хил масала қўйиш мумкин. Улардан бири шундан иборатки, бунда буюмлар битталаб олинади ва ҳар сафар олинган буюм жойига қайтиб қўйилгач, кейингиси олинади (*қайтариладиган* ёки *такрорланадиган* танланма). Бу ҳолда ҳар бир олишда белгига эга бўлган ёки эга бўлмаган буюм чиқиш эҳтимоли ўзгармайди, чунки бу масалани Бернулли схемаси билан бир хил бўлган эркли синовларни такрорлаш ҳақидаги умумий масала деб қараш мумкин.

Агар буюмлар бир вақтда олинса ёки битталаб олинса-ю, лекин кейинги буюмни олишда олдинги олинган буюм қайта жойига қўйилмаса (*қайтарилмайдиган* танланма), у ҳолда иш бошқача бўлади. Бундай схема Бернулли схемаси билан бир хил бўлмайди, чунки белгига эга бўлган буюмни олиш эҳтимоли ҳар бир синовда олдинги синовларнинг натижаларига боғлиқ бўлади.

Қайтарилмайдиган танланма ҳақидаги умумий масалани қуйидагича таърифлаш мумкин: N та буюмлар тўплами мавжуд бўлиб, улардан M таси A хоссага эга. Тўпламдан n та буюм олинади, бунда олинган ҳар бир буюм жойига қайтарилмайди. Олинган буюмларнинг роса m таси A хоссага эга бўлиш эҳтимолини топиш талаб қилинади.

Бундай қўйилган масалани олдинги параграфдаги 4-мисолда қараб чиққан эдик. Унда яшикдан шарлар ажратиш ҳақида сўз юритилган бўлиб, изланаётган эҳтимол ушбу

$$P_{N,\,M}(n,\ m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \qquad (6)$$

формула ёки группалашларни уларнинг факториаллар орқали ифодаларига алмаштирилгандан сўнг,

$$P_{N,M}(n, m)=\frac{M!(N-M)!\,n!(N-n)!}{m!(M-n)!\,(n-m)!(N-M-n+m)!N!} \tag{7}$$

формула билан ифодаланиши кўрсатилган эди.

3-мисол. 36 картали дастадан бирин-кетин 4 та карта олинади. Олинган карталар орасида кўпи билан битта туз бўлиш эҳтимоли қанча?

Ечилиши. Юқорида айтилганларга кўра масала аниқ қўйилмаганлиги ва унинг етарлича аниқлик киритилишига боғлиқ равишда иккита ечими борлигини тушуниш қийин эмас. Шу сабабли масала шартида олинган картанинг дастага қайтариб қўйилиши ёки қўйилмаслиги айтилган бўлиши лозим. Ана шу иккала ҳолни қараб чиқамиз.

а) айтайлик, карталар биттала б олиниб, олинган ҳар бир карта кейинги картани олишдан олдин дастага қайтариб қўйилади. Бу ҳолда биномиал формуладан фойдаланишимиз мумкин. Битта синовда туз олиш эҳтимоли $p=\frac{1}{9}$ бўлади. Тўртта синов ўтказилаётган бўлиб, бизни қизиқтираётган ҳодиса олинган 4 та карта орасида 0 та ёки 1 та туз бўлишидан иборатдир. Изланаётган эҳтимолни биномиал формула ёрдамида топамиз:

$$P_1=C_4^0\left(\frac{1}{9}\right)^0\left(\frac{8}{9}\right)^4+C_4^1\left(\frac{1}{9}\right)^1\left(\frac{8}{9}\right)^3=\frac{8^4+4\cdot 8^3}{9^4}=\frac{2048}{2187}\approx 0{,}936.$$

б) энди олинган карталар дастага қайтарилмайди, ёки бошқача айтганда, улар бирданига олинади деб фараз қилайлик. Бу ҳолда биз Бернулли схемасидан фойдалана олмаймиз. Қўйилган саволга қайтарилмайдиган танланма учун ҳосил қилинган (6) формула жавоб беради. Бу ерда $N=36$, $M=2$, $n=4$. m га келсак, $m=0$ ва $m=1$ учун эҳтимолларни қўшишимиз лозим. (6) формулага кўра

$$P_2=\frac{C_4^0C_{32}^4}{C_{36}^4}+\frac{C_4^1C_{32}^3}{C_{36}^4}=\frac{C_{32}^4+4C_{32}^3}{C_{36}^4}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу ерга группалашларнинг қийматларини қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P_2=\frac{\frac{32!}{4!\,28!}+\frac{4\cdot 32!}{3!\,29!}}{\frac{36!}{4!\,32!}}=\frac{\frac{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{4\cdot 32\cdot 31\cdot 30}{1\cdot 2\cdot 3}}{\frac{36\cdot 35\cdot 34\cdot 33}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}}=$$

$$=\frac{32\cdot 31\cdot 30(29+16)}{36\cdot 35\cdot 34\cdot 33}=\frac{1240}{1309}\approx 0{,}947.$$

Қараб чиқилган бу мисолдан кўринадики, қайтариладиган ва қайтарилмайдиган танланмаларнинг эҳтимоллари, жуда оз бўлса-да, бир-биридан фарқ қилади. Бу фарқ танланма ҳажмига боғлиқ деб тахмин қилиш табиий, N қанча катта ёки танланма ҳажмининг берилган тўплам ҳажмига нисбати $n : N$ қанча кичик бўлса, биномиал формула бўйича ҳисобланган эҳтимол қайтарилмайдиган танланманинг эҳтимолига шунча яқин бўлиши лозим.

Бу тахминнинг тўғрилигига қуйидаги мулоҳаза билан ишонч ҳосил қилиш осон. (7) формулани қуйидагича қайта ёзиб оламиз:

$$P_{N,\,M}(n,\,m)=\frac{n!}{m!(n-m)!}\times$$

$$\times\frac{M(M-1)\dots(M-m+1)(N-M)(N-M-1)\dots(N-M-n+m+1)}{N(N-1)\dots(N-n+1)}.$$

Бу ерда иккинчи касрнинг сурат ва махражидаги кўпайтувчилар сони бир хил. Касрнинг сурат ва махражидаги ҳар бир кўпайтувчини бир хил N сонга бўлиб ва $\frac{M}{N}$ нисбатни p орқали белгилаб, қуйидаги муносабатни ҳосил қиламиз:

$$P_{N,\,M}(n,\,m)=\frac{n!}{m!(n-m)!}\times$$

$$\times\frac{p\left(p-\frac{1}{N}\right)\dots\left(p-\frac{m-1}{n}\right)(1-p)\left(1-p-\frac{1}{N}\right)\dots\left(1-p-\frac{n-m-1}{N}\right)}{1\cdot\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{N}\right)}. \quad (8)$$

Энди, агар тўпламнинг ҳажми N шундай ортиб борсаки, бунда A хоссага эга бўлган элементлар улуши, яъни $p=\frac{M}{N}$ нисбат ўзгармаса, у ҳолда (8) формуладан кўринадики, $P_{N,\,M}(n,\,m)$ нинг лимити

$$P(n,\,m)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$$

бўлади.

Шундай қилиб, чексиз катта тўплам учун қайтариладиган ёки қайтарилмайдиган танланма ажратишнинг фарқи бўлмас экан.

7-§. МАРКОВ ЗАНЖИРИ БЕРНУЛЛИ СХЕМАСИНИНГ УМУМЛАШМАСИ СИФАТИДА

Марков занжири олдинги параграфда кўрилган Бернулли схемасининг умумлаштирилган ҳолига нисбатан умумийроқ бўлган боғлиқ синовлар схемасини акс эттиради. Айтайлик, ҳар бир синов натижасида биргаликда бўлмаган A_1, A_2, ..., A_k ҳодисалардан бири юз бериши мумкин бўлсин. Юқоридагидан фарқли ўлароқ, бу ҳодисалардан ҳар бирининг ҳар бир синовда юз бериши ундан аввалги синовлар натижасига боғлиқ бўлсин. *Агар тайин синовда ҳар бир ҳодисанинг юз беришининг шартли эҳтимоллари ундан олдинги синовнинг натижаси билан бир қийматли аниқланса,* *у ҳолда бундай синовлар кетма-кетлиги Марков занжири дейилади**.

Энди шартли эҳтимолларни қўш индекс билан ифодалаш лозим бўлади. Масалан, p_{14} белги A_4 ҳодисанинг ундан олдинги синовда A_1 ҳодиса юз берганда юз беришининг шартли эҳтимолини билдиради.

Марков занжирини бошқача терминологияда тавсифлаш қулайроқдир. k та ҳолатнинг бирида бўлиши мумкин бўлган бирор физикавий системани кўз олдимизга келтирайлик: бу системанинг A_i ҳолатдан A_j ҳолатга ўтиш эҳтимоли берилган, шу билан бирга бундай ўтишлар вақтнинг тайин бир моментларида рўй бериши мумкин бўлсин. Бундай ҳолда системанинг у ёки бу ҳолатда бўлиши вақтнинг олдинги моментида у бу ҳолатларнинг қайси бирида бўлишига боғлиқ, демак, биз Марков занжири билан иш кўраётирмиз.

Системанинг i- ҳолатдан j- ҳолатга ўтиш эҳтимолини *ўтиш эҳтимоли* деб атаймиз. Олдинги терминлардан фойдаланиб, p_{ij} ни олдинги синовда A_i ҳодиса юз берган ҳолда кейинги синовда A_j ҳодиса юз беришининг шартли эҳтимоли деб айта оламиз.

Марков занжири барча мумкин бўлган ўтиш эҳтимолларининг берилиши билан тўла тавсифланади. Бу эҳтимолларни қуйидаги k- тартибли квадрат матрица кўринишида ёзиш табиийдир:

$$\pi_1 = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{k1} & p_{k2} & \dots & p_{kk} \end{Vmatrix}.$$

Бу матрица *ўтиш матрицаси* дейилади. Шунингдек, занжирни тўла тавсифлаш учун яна биринчи синовдаги турли натижаларнинг шартсиз эҳтимоллари ҳам берилиши лозим. Бироқ кетма-кет синовлар процессидаги эҳтимолларга бу шартсиз эҳтимоллар эмас, балки фақат ўтиш матрицаси билан бериладиган шартли эҳтимоллар таъсир қилади.

Ўтиш матрицасининг элементлари қаноатлантириши зарур бўлган шартларни осонгина аниқлаш мумкин. Аввало, бу элементларнинг ҳаммаси

$$0 \leqslant p_{ij} \leqslant 1 \qquad (1)$$

тенгсизликларни қаноатлантириши зарурлиги равшан. Сўнгра $A_1, A_2, \dots, A_k$ ҳодисалар ҳар бир синовда тўла группа таш-

---

* Аниқроқ айтганда, бу ерда Марков бир жинсли занжири ҳақида сўз боради, биз фақат ана шу ҳолни текширамиз. Умумийроқ ҳолда эса эҳтимол яна синов номерига ҳам боғлиқ бўлиши мумкин.

қилгани сабабли матрицанинг исталган сатридаги элементлар йиғиндиси бирга тенг бўлиши лозим:

$$\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1 \, (i=1, 2, \ldots, k). \tag{2}$$

Аксинча, элементлари (1) ва (2) шартларни қаноатлантирувчи ҳар қандай матрица бирор Марков занжирининг ўтиш матрицаси бўла олади.

Марков занжирларига доир баъзи-бир масалаларни қараб чиқамиз.

Бундай масалаларнинг биринчиси сифатида t-синовнинг натижаси маълум бўлган ҳолда $t+2$-синовнинг турли натижалари эҳтимолларини ҳисоблаймиз. Бунинг учун тўла эҳтимол формуласидан фойдаланиш етарлидир.

Ҳақиқатан ҳам, айтайлик, t-синовда A_i ҳодиса юз берган бўлсин. A_j ҳодисанинг $t+2$-синовдаги эҳтимолини ҳисоблаймиз. Бу ҳодиса $t+1$-синовнинг натижаларига боғлиқ равишда хусусий ҳолларга ажратади. Айтайлик, $t+1$-синовда A_1 ҳодиса юз берган бўлсин. Бу ҳодисанинг эҳтимоли p_{i1} га, бу натижадан кейин A_j ҳодисанинг $t+2$-синовда юз бериш эҳтимоли p_{1j} га тенг бўлади. Шундай қилиб t-синовда A_i ҳодиса $t+1$-синовда эса A_1 ҳодиса юз берганлиги шартида $t+2$-синовда A_j ҳодисанинг юз бериш эҳтимоли $p_{i1}p_{1j}$ кўпайтмага тенг. Шунга ўхшаш кўпайтмалар бошқа оралиқ натижалар учун ҳам ҳосил қилинади. Натижада қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P_{ij}(2) = p_{i1}p_{1j} + p_{i2}p_{2j} + \ldots + p_{ik}p_{kj} = \sum_{s=1}^{k} p_{is}p_{sj}. \tag{3}$$

Бу ерда $P_{ij}(2)$ ёзув A_i ҳодиса юз бергандан икки қадам кейин A_j ҳодисанинг юз бериш эҳтимолини билдиради. Умуман айтганда, (3) тўла эҳтимол формуласидир. (3) нинг ўнг томони π_1 матрица i-қаторини унинг j-устунига кўпайтмасидан иборат экани кўриниб турибди. Бундан келиб чиқадики, π_2 „икки қадамли ўтиш“ матрицаси π_1 ўтиш матрицасининг квадратига тенг экан:

$$\pi_2 = \pi_1 \cdot \pi_1 = \pi_1^2. \tag{4}$$

1-мисол. Марков занжирининг ўтиш матрицаси қуйидаги кўринишга эга:

$$\pi_1 = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{Vmatrix}.$$

Икки қадам ўтишнинг эҳтимоллари матрицасини аниқлаймиз. (4) формулага асосан, қуйидагини топамиз:

$$\pi_2 = \pi_1^2 = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{7}{18} & \frac{7}{18} & \frac{2}{9} \\ \frac{13}{36} & \frac{5}{12} & \frac{2}{9} \\ \frac{5}{18} & \frac{7}{18} & \frac{1}{3} \end{Vmatrix}.$$

Шунга ўхшаш масалани умумийроқ ҳолда ҳам қараш мумкин. t-синовда A_i ҳодиса юз берганлиги шартида $t+n$-синовда A_j ҳодисанинг юз бериш эҳтимолини аниқлаймиз. Бирор $t+m$ $(1 \leqslant m < n)$ оралиқ синовни киритиб, тўла эҳтимол формуласига кўра, (3) га ўхшаш

$$P_{ij}(n) = \sum_{s=1}^{k} P_{is}(m) P_{sj}(n-m) \tag{5}$$

формулани ҳосил қиламиз. Агар π_n орқали n та синовдан кейинги ўтиш матрицасини белгиласак, у ҳолда (5) формуладан

$$\pi_n = \pi_m \cdot \pi_{n-m} \qquad (0 < m < n) \tag{6}$$

муносабат келиб чиқади. Бундан эса унинг хусусий ҳоли сифатида $m=1$, $m=2$ бўлганда (4) тенглик ҳосил бўлади. Бундан ташқари, (6) дан, умуман,

$$\pi_n = \pi_1^n \tag{7}$$

келиб чиқади.

Ҳозир биз кўриб чиқадиган яна бир масала лимит эҳтимоллар ҳақидаги масаладир. Синовлар сони чексиз ортганда $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисаларнинг шартли эҳтимоллари қандай ўзгаради? Бу саволга қуйидаги теорема орқали жавоб берилади.

Лимит эҳтимоллар ҳақида А. А. Марков теоремаси. *Агар бирор t-синовда π_t ўтиш матрицасининг барча элементлари мусбат бўлса, у ҳолда ҳар бир A_j ҳодиса учун унинг юз беришининг лимит эҳтимоли мавжуд бўлади, яъни шундай p_j сон мавжудки, i га боғлиқ бўлмаган ҳолда ушбу*

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}(n) = p_j \tag{8}$$

тенглик ўринли бўлади.

Бу теореманинг исботи мураккаб бўлгани учун уни келтирмаймиз*. Бу ерда унинг фақат эҳтимолий маъносини тушунтирамиз. Бу эса физикавий системанинг бир ҳолатдан бошқа ҳолатга ўтиш терминологиясида қулайроқдир.

---

* Бу теореманинг исботини, масалан, Б. В. Гнеденконинг „Курс теории вероятностей“ дарслигидан топиш мумкин.

Марков теоремаси бундай терминологияда ўтишлар сони етарлича катта бўлганда системанинг ҳар бир A_j ҳолатда бўлиш эҳтимоли амалда система процесснинг бошида қандай ҳолатда бўлишига боғлиқ бўлмаслиги ва p_j лимит қийматдан жуда кам фарқ қилишини кўрсатади. Ана шу сабабли бу p_j миқдорни қадамлар сони етарлича катта бўлганда системанинг A_j ҳолатда бўлишининг шартсиз эҳтимоли деб қараш мумкин.

Агар p_j лимит эҳтимолларнинг мавжудлиги исбот қилинган бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{j=1}^{k} p_j = 1$ тенгликнинг тўғрилигини осонгина кўрсатиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам,

$$\sum_{j=1}^{k} p_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k} p_{ij}(n).$$

Ҳар қандай n да $\sum\limits_{j=1}^{k} p_{ij}(n) = 1$ тенглик ўринли бўлгани учун юқоридаги тенгликдан

$$\sum_{j=1}^{k} p_j = 1 \tag{9}$$

келиб чиқади. Бу эса p_j лимит эҳтимолларга синовлар сони етарлича катта бўлганда A_j ҳодисалар юз беришининг шартсиз эҳтимоллари сифатида юқоридаги қарашнинг тўғрилигини яна бир марта тасдиқлайди.

2- мисол. Марков занжири қуйидаги ўтиш матрицаси билан берилган:

$$\pi = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{Vmatrix}.$$

Бу занжир учун лимит эҳтимоллар ҳақидаги теореманинг тўғрилигини текширамиз. π матрицанинг ўзи теорема шартларини қаноатлантирмайди, чунки унда ноль элементлар мавжуд. Бироқ икки қадамли ўтиш матрицасида барча ўтиш эҳтимоллари нолдан фарқли. Ҳақиқатан ҳам,

$$\pi_2 = \pi^2 = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{Vmatrix},$$

Шундай қилиб, бу Марков занжири учун лимит эҳтимоллар ҳақидаги теорема шартлари бажарилади, ва демак лимит эҳтимоллар мавжуд. Энди бу лимит эҳтимолларнинг қийматларини аниқлаш қийин эмас.

Ишни бошланғич ўтиш матрицасининг бир нечта даражаларини ҳисоблашдан бошлаймиз.

$$\pi_4 = (\pi_2)^2 = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{16} & \frac{5}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{3}{8} & \frac{5}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{3}{8} \end{matrix} \right\|;$$

$$\pi_8 = (\pi_4)^2 = \left\| \begin{matrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{16} & \frac{5}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{3}{8} & \frac{5}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{3}{8} \end{matrix} \right\|^2 = \left\| \begin{matrix} \frac{43}{128} & \frac{85}{256} & \frac{85}{256} \\ \frac{85}{256} & \frac{43}{128} & \frac{85}{256} \\ \frac{85}{256} & \frac{85}{256} & \frac{43}{128} \end{matrix} \right\|.$$

Ҳосил қилинган бу натижалар лимит эҳтимолларни топиш учун етарлидир. Ҳақиқатан ҳам, ҳосил қилинган барча ўтиш матрицаларининг бош диагоналларида, дастлабки ўтиш матрицасидек, бир хил элементлар турганлигини қайд қиламиз. Агар бу фактни аниқланган деб ҳисобласак, у ҳолда барча мумкин бўлган натижаларнинг лимит эҳтимоллари ўзаро тенг бўлиши керак. Бундай эҳтимоллар фақат учта бўлганлигидан лимит эҳтимоллар $\frac{1}{3}$ га тенг бўлиши лозим. Бу нарса π_4 ва π_8 матрицаларнинг элементларини ўнли касрлар кўринишида ёзилганда янада тушунарли бўлади. Ҳақиқатан,

$$\pi_4 = \left\| \begin{matrix} 0{,}375 & 0{,}3125 & 0{,}3125 \\ 0{,}3125 & 0{,}375 & 0{,}3115 \\ 0{,}3125 & 0{,}3125 & 0{,}375 \end{matrix} \right\|, \quad \pi_8 = \left\| \begin{matrix} 0{,}336 & 0{,}332 & 0{,}332 \\ 0{,}332 & 0{,}336 & 0{,}332 \\ 0{,}332 & 0{,}332 & 0{,}336 \end{matrix} \right\|.$$

$\pi_{16} = \pi_8^2$ матрица

$$\pi_{16} = \left\| \begin{matrix} 0{,}33334 & 0{,}33332 & 0{,}33332 \\ 0{,}33332 & 0{,}33334 & 0{,}33332 \\ 0{,}33332 & 0{,}33332 & 0{,}33334 \end{matrix} \right\|$$

кўринишда бўлади, бу эса лимит эҳтимолларнинг қиймати ҳақида ҳеч қандай шубҳага ўрин қолдирмайди. Бироқ биз олиб борган бу ҳисоблашлар исбот қилиниши лозим бўлган фикримизнинг исботи бўла олмайди.

Энг аввало π_2^n ўтиш матрицаси ушбу кўринишда бўлишини исбот қиламиз:

$$\pi_{2n}=\left\|\begin{matrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{matrix}\right\|. \qquad (10)$$

Бинобарин, бу ерда $b_n=\frac{1-a_n}{2}$, чунки матрицадаги сатр элементлари йиғиндиси доимо бирга тенг бўлиши лозим. Биз ҳисоблаган π_2, π_4, π_8 матрицаларнинг кўриниши бу даъвонинг $n=1$, $n=2$, $n=3$ бўлган ҳолларда тўғрилигини тасдиқлайди.

Айтайлик, бирор n учун π_{2^n} ўтиш матрицаси (10) кўринишда бўлсин. Бу формуланинг $n+1$ учун тўғрилигини исботлаш учун (10) матрицани квадратга оширамиз:

$$\pi_{2^{n+1}}=\pi_{2^n}\cdot\pi_{2^n}=\left\|\begin{matrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{matrix}\right\|.$$

Ёзилган матрицаларни кўпайтириб чиқиб, кўпайтма матрицанинг диагоналидаги элементлар доимо $a_n^2+2b_n^2$ га, диагоналдан ташқаридаги элементлари эса $2a_nb_n+b_n^2$ га тенглигини топамиз. Шундай қилиб, $\pi_{2^{n+1}}$ матрица

$$\pi_{2^{n+1}}=\left\|\begin{matrix} a_{n+1} & b_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & a_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & b_{n+1} & a_{n+1} \end{matrix}\right\|$$

кўринишда бўлиб, бунда $a_{n+1}=a_n^2+2b_n^2$ ва $b_{n+1}=2a_nb_n+b_n^2$. Демак, (10) формула исталган n учун ўринли

Биз $b_n=\frac{1-a_n}{2}$ эканини айтган эдик. Бундан фойдаланиб, a_{n+1} ни a_n орқали ифодалаш мумкин:

$$a_{n+1}=a_n^2+2\left(\frac{1-a_n}{2}\right)^2=\frac{3a_n^2-2a_n+1}{2}.$$

Энди $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}$ эканини исбот қилиш қолади $a_n=\frac{1}{3}+\varepsilon_n$ деб, $\varepsilon_{n+1}=a_{n+1}-\frac{1}{3}$ айирмани қараб чиқамиз:

$$\varepsilon_{n+1}=a_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{3a_n^2-2a_n+1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{9a_n^2-6a_n+1}{6}=$$

$$=\frac{9\left(\frac{1}{3}+\varepsilon_n\right)^2-6\left(\frac{1}{3}+\varepsilon_n\right)+1}{6}=\frac{3}{2}\varepsilon_n^2.$$

Ҳосил қилинган тенгликни $n = 1, 2, 3, \ldots$ ларда татбиқ қилиб,

$$\varepsilon_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{2n-1} \varepsilon_1^{2n}$$

ни ҳосил қиламиз. Аммо $a_1 = 0$, шунинг учун $\varepsilon_1 = \frac{1}{3}$, ва демак,

$$\varepsilon_n = \frac{1}{3 \cdot 2^{2n-1}}.$$

Бундан эса $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ ва $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$ экани келиб чиқади.

Умуман, диагонал элементларнинг тенглигиданоқ, синовнинг барча натижалари учун лимит эҳтимолларнинг тенглиги, яъни

$$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$$

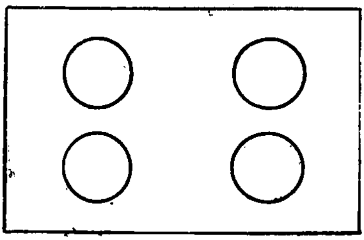
эканлиги келиб чиқади. Шу сабабли охирги исботни қилмаслик ҳам мумкин эди.

8-§. ЭҲТИМОЛНИНГ БОШҚА ТАЪРИФЛАРИ. ЭҲТИМОЛЛАР НАЗАРИЯСИНИНГ АКСИОМАЛАРИ

Эҳтимолнинг юқорида қараб чиқилган классик таърифини татбиқлар учун муҳим бўлган кўпчилик ҳолларда қўлланиб бўлмас экан.

Аввало, эҳтимолнинг классик таърифи учун чекли сондаги ягона мумкин бўлган тенг имкониятли ва биргаликда бўлмаган ҳодисаларни қараш талаб қилинади; лекин мумкин бўлган ҳолларнинг чекли сонда бўлишига ҳар доим ҳам эришиб бўлавермайди. Кўп ҳолларда эса қаралаётган ҳодисанинг тенг имкониятли ҳолларга ёйилишининг ўзи мумкин бўлмай қолади.

Кўрсатилган қийинчиликларнинг биринчисини баъзан *эҳтимолнинг геометрик таърифи* деб аталувчи таъриф ёрдамида бартараф қилиш мумкин бўлади. Бу таърифнинг моҳияти қуйидаги мисолда яққол кўринади.



3- расм.

1- мисол. Нефть базасининг майдони томонлари $a = 50$ *м* ва $b = 30$ *м* бўлган тўғри тўртбурчак шаклида. Майдонда ҳар бирининг диаметри 10 *м* бўлган цилиндрик нефть баклари бор (3-расм). Агар бомбанинг база майдонининг исталган нуқтасига тушиши бир хил эҳтимолли бўлса, у ҳолда база майдонига тушган бомбанинг бакларни портлатиш эҳтимоли қанча?

Аввало, „бирор соҳага нуқтанинг тушиш эҳтимоли" ҳақида қайси маънода аниқ гапириш мумкинлигини тушуниб олишга ҳаракат қилайлик.

Дастлаб энг оддийроқ ҳолларни қараб чиқамиз. Айтайлик, тўғри тўртбурчак ўзининг симметрия ўқлари ёрдамида тўртта тенг бўлакка бўлинган бўлсин. У ҳолда нуқтанинг бўлакларнинг ҳар бирига тушишини тенг имкониятли деб ҳисоблай оламиз. Бу ерда бўлаклар сони чекли бўлгани учун эҳтимолнинг классик таърифини қўлланиш мумкин ва нуқтанинг бу бўлакларнинг ҳар бирига тушиш эҳтимоли 1/4 га тенг. Шунга ўхшаш, агар тўғри тўртбурчак n та тенг бўлакка бўлинган бўлса, у ҳолда нуқтанинг ҳар бир бўлакка тушиш эҳтимоли шу бўлак юзининг бутун тўғри тўртбурчак юзига нисбатига тенг. Агар айтилган бўлаклар тенг бўлмасдан, балки т е н г д о ш, яъни улар бир хил юзларга эга бўлса, у ҳолда нуқтанинг бу бўлакларнинг ҳар бирига тушишини тенг эҳтимолли деб ҳисоблайверамиз. Шундай қилиб, агар тўғри тўртбурчак n та тенгдош бўлакка бўлинган бўлса, у ҳолда нуқтанинг бу бўлакларнинг ҳар бирига тушиш эҳтимоли $\frac{1}{n}$ га тенг.

Энди, тўғри тўртбурчак билан ў л ч о в д о ш соҳа олинса, яъни тўғри тўртбурчакни чекли сондаги шундай тенгдош бўлакларга бўлиш мумкин бўлсаки, айтилган соҳада бу бўлаклардан чекли сондагиси ётса, у ҳолда нуқтанинг шу соҳага тушиш эҳтимоли соҳа юзининг тўғри тўртбурчак юзига нисбатига тенг бўлиши тушунарлидир.

Агар соҳа ва тўғри тўртбурчак ў л ч о в д о ш бўлмаса (яъни соҳа юзининг тўғри тўртбурчак юзига нисбати иррационал сон бўлса), у ҳолда тўғри тўртбурчакни юқоридагидек бўлакларга ажратиш мумкин эмас. Бу шундан далолат берадики, нуқтанинг бундай соҳага тушиш эҳтимолини аниқлашда эҳтимолнинг классик таърифини татбиқ қила олмаймиз, чунки тўла группа ташкил қилувчи ч е к л и с о н д а г и тенг имкониятли ҳодисаларни ҳосил қила олмаймиз. Шу сабабли *эҳтимолнинг геометрик таърифи* деб аталувчи я н г и т у ш у н ч а киритамиз.

Айтайлик, D — бирор чекли соҳа бўлсин. Бу соҳага нуқта ташланади, бунда унинг соҳанинг тенг юзларга эга бўлган бўлакларига тушиши тенг имкониятли деб ҳисобланади. У ҳолда нуқтанинг D соҳада ётувчи исталган D_1 соҳага тушиш эҳтимоли деб D_1 соҳа юзининг D соҳа юзига нисбатига айтилади.

Бу эҳтимолни $P(D_1)$ орқали белгилаймиз. Таърифга кўра

$$P(D_1) = \frac{S_1}{S},$$

бу ерда, S D соҳанинг, S_1 эса D_1 соҳанинг юзи.

Бу янги таъриф эҳтимолнинг классик таърифига зид эмаслигига осонгина ишонч ҳосил қилиш мумкин: иккала таърифдан ҳам фойдаланиш мумкин бўлган ҳолларда улар эҳтимолнинг бир хил қийматини беради. Эҳтимолларни қўшиш ва кўпайтириш теоремаларини геометрик эҳтимол учун ҳам осонгина таърифлаш мумкин.

1) агар D_1 ва D_2 соҳалар D соҳага тегишли бўлиб, улар кесишмаса, у ҳолда нуқтанинг D_1 ёки D_2 соҳаларга тушиш эҳтимоли унинг D_1 соҳага ёки D_2 соҳага тушиш эҳтимоллари йиғиндисига тенг:

$$P(D_1 \text{ ёки } D_2) = P(D_1) + P(D_2).$$

D_1 ва D_2 соҳаларнинг кесишмаслик шарти ҳодисаларнинг биргаликда бўлмаслик шартига мувофиқ келади.

2) агар D_1 ва D_2 соҳалар умумий қисмга эга бўлса, у ҳолда нуқтанинг уларнинг умумий қисми D_3 га тушиш эҳтимоли унинг D_1 соҳага тушиш эҳтимолини у D_1 соҳага тушганлиги шартида D_2 соҳага тушишининг шартли эҳтимолига кўпайтмасига тенг бўлади. Буни бундай ёзамиз:

$$P(D_1 \text{ ва } D_2) = P(D_1) \cdot P_{D_1}(D_2).$$

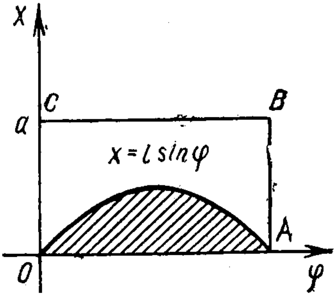
Ўқувчи бу иккала теоремани осонгина мустақил исботлаши мумкин.

Келтирилган теоремаларнинг биринчисидан фойдаланиб, 1-мисолдаги саволни осонлик билан ҳал қила оламиз. Бу ерда D соҳа тўғри тўртбурчакдан иборат бўлиб, унинг юзи $S = 1500\,м^2$; D_1, D_2, D_3 ва D_4 соҳалар эса ҳар бирининг юзи $25\,\pi м^2 \approx 78{,}5 м^2$ га тенг бўлган доиралардан иборат. Бу соҳалар кесишмаганлиги учун изланаётган P эҳтимол қуйидагига тенг:

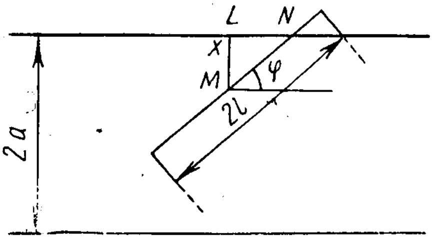
$$P = 4 \cdot \frac{78{,}5}{1500} \approx 0{,}21.$$

Геометрик эҳтимолни қараётганимизда биз баъзи бир янги фактларга дуч келамиз. Жумладан, классик таърифда муқаррар ҳодисанинг эҳтимоли бирга тенг деган даъво тўғри бўлибгина қолмасдан, балки ушбу тескари даъво ҳам тўғри: агар ҳодисанинг эҳтимоли бирга тенг бўлса, у ҳолда бу ҳодиса муқаррардир. Ҳақиқатан ҳам, $P(A) = 1$ тенглик $m = n$ эканлигини билдиради, яъни берилган A ҳодисага тўла группанинг барча A_i элементар ҳодисалари қулайлик туғдиради, демак, A ҳодиса албатта юз беради.

Геометрик эҳтимоллар учун эса бу тескари даъво ўринли бўлмас экан. Ҳақиқатан ҳам, қаралаётган D соҳада чекли сондаги нуқталарни, ёки ҳатто, бутун чизиқни ажратайлик. Қолган қисмнинг юзи бутун соҳа юзига тенг, шунинг учун нуқтанинг бу қисм соҳага тушиш эҳтимоли бирга тенг. Шунга қарамасдан, бу ҳодиса муқаррар эмас, чунки нуқта ажра-



4- расм.



5- расм.

тилган нуқталарга ёки чизиққа тушиши мумкин. Айнан шунга ўхшаш, нуқтанинг ажратилган нуқталарга тушиш эҳтимоли ҳам нолга тенг, бироқ бу ҳодиса юз бериши мумкин. Бундай ҳолларга биз кейинчалик ҳам (узлуксиз тасодифий миқдорларни ўрганишда) дуч келамиз.

2-мисол (Бюффон масаласи). Текисликда бир-биридан $2a$ масофада параллел тўғри чизиқлар ўтказилган. Текисликка узунлиги $2l$ ($l < a$) бўлган игна таваккалига ташланади. Игнанинг ўтказилган тўғри чизиқлардан бирортасини кесиб ўтиш эҳтимоли қанча?

Ечилиши. Игнанинг ўтказилган тўғри чизиқларга нисбатан вазияти унинг ўртасидан унга энг яқин тўғри чизиққача бўлган x масофа ҳамда игна ва шу тўғри чизиқлар ҳосил қилган φ бурчак билан аниқланади. Бу катталиклар ушбу $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant \varphi < \pi$ тенгсизликларни қаноатлантириши ўз-ўзидан равшан. Шунинг учун игнанинг вазиятини φOx текисликдаги $OABC$ тўғри тўртбурчакнинг (φ, x) нуқтаси билан аниқлаш мумкин (4- расм). Бу тўғри тўртбурчакнинг ўлчамлари юқорида кўрсатилган. Игнанинг таваккалига ташланиши ҳақидаги фикрни бу тўғри тўртбурчакнинг ихтиёрий нуқтасини танлаш тенг эҳтимолли эканлиги сифатида қараш мумкин.

Агар ташланган игна тўғри чизиқни кесиб ўтса, у 5- расмда кўрсатилгандек, томонлари $LM = MN\sin\varphi$ муносабат билан боғланган LMN тўғри бурчакли учбурчакни ҳосил қилади. $MN \leqslant l$ бўлгани учун $x \leqslant l\sin\varphi$ тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, игнанинг тўғри чизиқлардан бирортасини кесиб ўтгандаги вазияти $OABC$ тўғри тўртбурчакнинг шундай нуқталари билан характерланадики, у нуқталарнинг координаталари

$$x \leqslant l\sin\varphi$$

тенгсизликни қаноатлантиради.

Бундай нуқталар $x = l\sin\varphi$ синусоидадан пастда ётиши, яъни $OABC$ тўғри тўртбурчакда штрихланган соҳани қоплаши равшан (4- расм).

Демак, гап нуқтанинг штрихланган соҳага тушиш эҳтимолини топиш ҳақида бормоқда. Бу эҳтимол шу соҳа юзи $S_1 = \int_0^\pi l \sin \varphi d\varphi$ нинг бутун тўғри тўртбурчак юзи $S = \pi a$ га нисбатига тенг.

Шундай қилиб, изланаётган P эҳтимол қуйидагига тенг:

$$P = \frac{S_1}{S} = \frac{1}{\pi a}\int_0^\pi l \sin\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi a}\Big[-l\cos\varphi\Big]_0^\pi = \frac{2l}{\pi a}.$$

Эҳтимоллар назариясининг табиий-илмий ва техникавий масалалардаги турли татбиқларида *эҳтимолнинг статистик таърифи* деб номланувчи таърифдан фойдаланилади.

Фараз қилайлик, ҳар бирида бирор ҳодисанинг юз бериши ёки юз бермаслиги қайд қилинадиган синовларни шароитни ўзгартирмаган ҳолда чексиз кўп марта такрорлаш мумкин бўлсин (мисоллар: ўйин соққасини ёки тангани ташлаш, яшикдан шарлар (олинган шарларни қайта жойига қўйиш билан) олиш, нишонга ўқ узиш ва шунга ўхшашлар).

Айтайлик, синовлар сони n етарлича катта бўлганда бизни қизиқтираётган ҳодиса m марта юз берган бўлсин. $\mu = \frac{m}{n}$ нисбатни ҳодисанинг *частотаси* (баъзан *нисбий частотаси*) деб аташ қабул қилинган.

Баъзи бир ҳодисаларнинг юз беришини кузатишлар шуни кўрсатадики, бир қатор ҳолларда синовлар сони етарлича катта бўлганда ҳодиса частотасининг қиймати деярли ўзгармас бўлади, бунда унинг тебраниши синовлар сони қанча катта бўлса, шунча кам бўлади.

Масалан, бир нечта оилада, ёки ҳатто кичикроқ шаҳарда нисбатан қисқа вақт оралиғида янги туғилган чақалоқларнинг жинси бўйича тақсимоти ҳар қанча бўлиши мумкин. Агар аҳолиси кўп бўлган катта территорияни текширадиган бўлсак, бу ҳолда ўғил болалар ва қиз болалар туғилиш частоталарининг турғунлиги тўлиқ сезилади, шу билан бирга бу турғунлик турли территориялар учун тахминан бир хил бўлади.

Швед статистикаси маълумотларига кўра 1935 йилда қиз болалар туғилиш частотаси ойлар бўйича қуйидагича ўзгарган (3-жадвал):

3-жадвал

Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь	Бир йилда
0,486	0,489	0,490	0,471	0,478	0,482	0,462	0,484	0,485	0,491	0,482	0,473	0,482

Частотанинг бунга ўхшаш турғунлиги қаралаётган ҳодиса (ҳозирги ҳолда қиз боланинг туғилиши) тайин эҳтимолга эга, частота эса шу эҳтимол атрофида тебранади деб тахмин қилишга асос бўла олади. Бундай тахмин қилиш яна шунинг учун ҳам ўринлики, эҳтимолнинг классик таърифини қўллаш мумкин бўлган ҳолларда частоталарнинг ўзгариши тахминан шундай бўлади*.

Танганинг гербли томонининг тушиш** частотасини ўрганиш мақсадида экспериментлар ўтказилган бўлиб, уларнинг натижалари қуйидаги жадвалда (4-жадвал) келтирилган:

4-жадвал

Экспериментатор	Ташлашлар сони	Гербли томон тушиш сони	Частота
Бюффон	4 040	2 048	0,5080
Пирсон К	12 000	6 019	0,5016
Пирсон К	24 000	12 012	0,5005

Частотанинг кўрсатилган хоссаларидан фойдаланиб, *тажриба ўтказилаётган шароитларни ўзгартирмаганда атрофида ҳодисанинг юз бериш частотаси тебранадиган ва частотани характерлайдиган сонни шу ҳодисанинг эҳтимоли деб аталади.*

Келтирилган бу таъриф эҳтимолнинг *статистик таърифи* дейилади.

Бу таъриф ҳам эҳтимол тушунчаси татбиқ қилиниши мумкин бўлган барча ҳолларни қамраб ола олмайди. Бундан ташқари эҳтимолнинг сон қийматини бир қийматли аниқламайди, чунки частоталарнинг тебраниши айтилган бу сон учун анча катта чегаралар қолдиради.

Ҳозирги вақтда, эҳтимоллар назариясини қатъий қуришда *аксиоматик таърифдан* фойдаланиш қабул қилинган. Бу таърифга мувофиқ, тайин бир тўпламдан олинган ҳар бир ҳодисага бирор сон мос келтирилади, бунда бу мослик олдиндан кўрсатилган тайин хоссаларга эга бўлиши, яъни берилган аксиомаларни қаноатлантириши лозим.

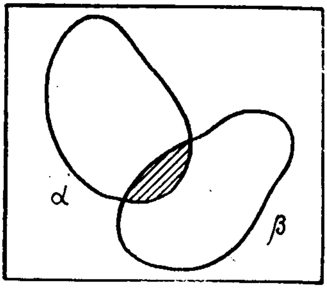
Таърифда келтириладиган аксиомалар хаёлан ўйлаб топилган эмас. Улар практикадан олинган бўлиб, эҳтимолнинг татбиқлар учун керак бўладиган ва классик таъриф учун юқорида аниқланган барча хоссаларини ўзида акс эттиради

Баён қилишни қулайлаштириш мақсадида ҳодисалар *йиғиндиси* ва *кўпайтмаси* таърифларини киритамиз.

---

* Бу ҳақда кейинроқ 11-§ да батафсил фикр юритилади.

** Бу ҳолга эҳтимолнинг классик таърифини қўлланиш мумкин.



6- расм.

A ва B ҳодисаларнинг йиғиндиси деб ё A ҳодисанинг, ёки B ҳодисанинг юз беришидан иборат бўлган янги C ҳодисага айтилади.*

Шундай қилиб, $C = A + B$ ёзув 2- § да қўлланилган (A ёки B) белгилашни алмаштиради.

Шунга ўхшаш, A ва B *ҳодисаларнинг кўпайтмаси деб A ва B ҳодисаларнинг биргаликда юз беришидан иборат бўлган C ҳодисага айтилади, демак, $C = AB$ ёзув (A ва B) белгилашни алмаштиради.*

Киритилган терминларни ойдинлаштириш мақсадида қуйидаги мисолни қараб чиқамиз.

Газли идишда α ва β соҳалар ажратилган бўлсин (6- расм). Агар бирор молекуланинг α соҳага тушиши A ҳодиса, унинг β соҳага тушиши B ҳодиса бўлса, у ҳолда $A + B$ йиғинди шу молекуланинг бу соҳалардан бирортасига, яъни $\alpha + \beta$ йиғиндига тушишини, AB кўпайтма эса молекуланинг α ва β соҳаларнинг умумий қисмига, яъни $\alpha\beta$ кесишмага тушишини билдиради.

Энди ҳодисаларнинг бирор тўпламини қарайлик. Бу тўплам қуйидаги хоссаларга эга бўлсин: бу тўпламга тегишли ҳар бир ҳодисага қарама-қарши ҳодиса ҳам шу тўпламга тегишли; тўпламга тегишли чекли ёки чексиз сондаги ҳодисалар йиғиндиси, кўпайтмаси яна шу тўпламга тегишли**. Шунингдек, бу тўплам муқаррар ҳодисани ҳам ўз ичига олиши шарт. Қаралаётган тўпламга тегишли ҳодисаларни *мумкин бўлган ҳодисалар* деб атаймиз. Мумкин бўлган ҳодисаларнинг бу тўпламида ҳар бир A ҳодисага $P(A)$ сонни мос қўювчи ва қуйидаги хоссаларга эга бўлган сонли функция аниқланган бўлсин:

1°. *Мумкин бўлган ҳар қандай A ҳодиса учун*

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

2°. *Агар E ҳодиса муқаррар бўлса, у ҳолда*

$$P(E) = 1.$$

3°. *Агар A ҳодиса B ҳодисани эргаштирса, яъни A ҳодисанинг юз беришидан B ҳодисанинг ҳам юз бериши келиб чиқса, у ҳолда*

$$P(A) \leqslant P(B).$$

* Иккала ҳодисанинг ҳам юз бериши мумкинлиги истисно қилинмайди.
** Бундай тўплам *Буль алгебраси* дейилади.

4°. *Агар A, B,... ҳодисалар жуфти-жуфти билан биргаликда бўлмаса, у ҳолда*

$$P(A+B+...)=P(A)+P(B)+...$$

5°. *Агар A, B, ... ҳодисалар биргаликда эркли бўлса, у ҳолда*

$$P(AB...)=P(A)P(B)... .$$

1° — 5° хоссалар *эҳтимолнинг аксиомалари* дейилади.

Эҳтимолнинг аксиомаларини қаноатлантирувчи P(A) функциянинг сонли *қиймати мумкин бўлган A ҳодисанинг эҳтимоли дейилади.*

Бу таърифни амалда татбиқ қилишда одатда қуйидагича иш тутилади. A_1, A_2, ... асосий „элементар ҳодисалар" тўплами ажратилади ва уларнинг ҳар бирига масаланинг мазмунига мувофиқ, тайин $P(A_i)=p_i$ эҳтимол мос келтирилади. Мумкин бўлган ҳодисалар тўплами элементар ҳодисаларнинг йиғиндилари ва кўпайтмалари комбинациялари кўринишида тузиш мумкин бўлган барча ҳодисалардан тузилади. Бу мумкин бўлган ҳодисаларнинг ҳар бирини эҳтимоли энди 1° — 5° аксиомалар ёрдамида элементар ҳодисаларнинг эҳтимолларидан топилади.

Элементар ҳодисанинг эҳтимолларига келадиган бўлсак, улар бирор математик мулоҳазалардан эмас, балки масаланинг мазмунига асосан олиниши лозим. Классик таъриф қўлланилиши мумкин бўлган ҳолларда элементар ҳодисалар сони n чекли ва уларнинг ҳар бирининг эҳтимоли $\frac{1}{n}$ га тенг бўлади, чунки бу ҳодисалар тенг имкониятли, уларнинг йиғиндиси эса муқаррар ҳодиса.

Эҳтимолни аксиоматик таърифлаш усули тўпламлар назарияси ва ҳақиқий ўзгарувчининг функциялари назарияси билан узвий боғлиқ. Ҳақиқатан ҳам, агар мумкин бўлган ҳодисалар тўпламини қарасак, ҳодисаларни юқорида аниқланган қўшиш ва кўпайтириш амалларига тўпламларни одатдаги қўшиш ва кесишиш операциялари мос келади. Бу ҳолда ҳодисанинг эҳтимолига тўпламнинг ўлчови мос келади. Ҳар бир ўлчовли тўпламга ноль ва бир (бир учун бутун соҳанинг ўлчови қабул қилинади) орасидаги ҳақиқий сонни мос келтирувчи сонли функция сифатида аниқланган ўлчов эса эҳтимолнинг юқорида санаб ўтилган барча аксиомаларини қаноатлантиради.

Эҳтимол тушунчасига бундай ёндошиш ва тўпламлар назарияси асосида эҳтимоллар назариясини қатъий аксиоматик қуришни биринчи марта А. Н. Колмогоров „Основные понятия теории вероятностей" китобида берган эди.

I БОБГА ДОИР ЎЗ-ЎЗИНИ ТЕКШИРИШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Эҳтимоллар назариясида „ҳодиса“ дейилганда нимани тушунилади?

2. Қандай ҳодисалар ўзаро қарама-қарши ҳодисалар дейилади? Биргаликда бўлмаган ҳодисалар деб қандай ҳодисаларга айтилади. Қарама-қарши ҳодисалар биргаликда бўлмаган ҳодисалар бўладими?

3. Биргаликда бўлмаган ҳодисалар қарама-қарши ҳодисалар бўлади дейиш мумкинми? Бундай даъво ҳеч бўлмаганда бирор ҳолда ўринлими? Агар ўринли бўлса, айнан қайси ҳолларда?

4. Ҳодисаларнинг тўла группаси деб нимага айтилади? Қандай ҳолларда „элементар ҳодисалар“ термини ишлатилади?

5. Эҳтимолнинг классик таърифини айтиб беринг?

6. Эҳтимолларни қўшиш теоремасидаги ҳодисаларнинг биргаликда бўлмаслик шарти теореманинг тўғрилиги учун зарурий шарт бўладими?

7. Бирор A ҳодисанинг маълум эҳтимоли бўйича $\overline{A}$ қарама-қарши ҳодисанинг эҳтимоли қандай топилади?

8. Шартли эҳтимол нима?

9. Қачон ҳодисалар эркли дейилади? Эркли ва эрксиз ҳодисаларга мисоллар келтиринг.

10. Эркли ва эрксиз ҳодисалар учун кўпайтириш теоремалари орасидаги фарқ нимада?

11. $P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A)$ тенгликни асосланг. Бу тенгликнинг эҳтимолий маъноси нимадан иборат? Бу ерда ишлатилган белгилашларни тушунтиринг.

12. Эҳтимолларни қўшиш ва кўпайтириш теоремаларини бир нечта ҳодисалар учун ўтказиш мумкинми? Улар қандай таърифланади?

13. Эҳтимолларни қўшиш теоремаси биргаликда бўлган ҳодисалар учун ўринлими? У қандай таърифланади? Биргаликда бўлмаган ҳодисалар учун қўшиш теоремаси бу теореманинг хусусий холи деб ҳисоблаш мумкинми? Уни қандай исбот қилиш мумкин?

14. „Тўла эҳтимол“ нима? Тўла эҳтимол формуласи қайси ҳолларда татбиқ қилинади?

15. Бейес формуласи нимага хизмат қилади? У қайси ҳолларда татбиқ қилиниши мумкин?

16. Эҳтимолларнинг биномиал формуласи нима ва у нима учун шундай деб аталади?

17. Бернулли схемасида ҳодиса юз бериши энг катта эҳтимолий сони μ қандай оралиқда жойлашган?

18. Қайтариладиган ва қайтарилмайдиган танланмалар орасидаги фарқ нимадан иборат? Тўпламнинг ҳажмини чексиз орттирилганда қайтарилмайдиган танланманинг эҳтимоли қандай ўзгаради? Эҳтимолнинг бундай ҳолатини ҳисобламасиз ва лимитга ўтмай туриб ҳам кутиш мумкинми?

19. Қайтарилмайдиган танлашма ҳақидаги масалани нима учун Бернулли схемасининг умумлаштирилиши деб қараш мумкин? Бундай масалаларнинг фарқи ва уйғунлиги нимада?

20. Қайси формула эҳтимолларнинг полиномиал формуласи дейилади? Полиномиал формула нимани ифода қилади ва нега шундай деб аталади?

21. Биномиал формула полиномиал формуланинг хусусий ҳоли эканини исботланг.

22. Эҳтимолларнинг биномиал формуласи учун ҳосил қилувчи функциянинг ифодасини ёзинг.

23. Марков занжири нима? Марков занжирини нима учун Бернулли схемасининг умумий холи деб қараш мумкин?

24. Ўтиш эҳтимоли ва ўтиш матрицаси деб нимага айтилади? p_{ij} ўтиш эҳтимоллари қандай шартларни қаноатлантириши керак?

25. Лимит эҳтимоллар ҳақидаги Марков теоремаси нимадан иборат? p_j лимит эҳтимолларни физикавий нуқтаи назардан қандай талқин қилиш мумкин?

26. Нима учун эҳтимолнинг классик таърифи етарли эмас? Ҳодисаларнинг тўла группаси чексиз бўлган ҳолга мисоллар келтиринг.

27. Эҳтимолнинг геометрик таърифи нима? Унинг қўлланилишига доир мисоллар келтиринг.

28. Эҳтимолнинг статистик таърифи нима? Физикадан ва табиатшуносликнинг бошқа соҳаларидан статистик қонуниятларга мисоллар келтиринг.

29. Ҳодисаларнинг йиғиндиси ва кўпайтмаси деб нимага айтилади?

30. Эҳтимоллар назариясини аксиоматик қуришнинг мазмуни нимадан иборат?

II БОБ

АСИМПТОТИК ФОРМУЛАЛАР

9-§. МУАВР—ЛАПЛАСНИНГ ЛОКАЛ ТЕОРЕМАСИ

Биз яна синовларни такрорлаш ҳақидаги масалани қараймиз (4-§ га қаранг). n та ўзаро эркли синовлар серияси ўтказилаётган бўлиб, уларнинг ҳар бирида A ҳодисанинг юз бериш эҳтимоли p га тенг. A ҳодисанинг n та синовда роса m марта юз бериш эҳтимоли учун *асимптотик формулани*, яъни синовлар сони етарлича катта бўлганда исталганча кичик нисбий хато берувчи (амалий ҳисоблашларда қулай бўлган) тақрибий формулани топамиз. Қўйилган бу масала *Муавр—Лапласнинг локал лимит теоремаси* деб аталувчи теорема ёрдамида ҳал қилинади.

Локал лимит теорема. *Агар ҳар бир синовда A ҳодисанинг юз бериш эҳтимоли ўзгармас ва p га тенг бўлса, у ҳолда n та синов сериясида A ҳодисанинг роса m марта юз бериш эҳтимоли*

$$P_{m,n}=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{x^2}{2}}(1+\varepsilon_n) \tag{1}$$

кўринишда ифодаланиши мумкин, бу ерда $q=1-p$, $x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ *ҳамда n, m ва $n-m$ чексиз ўсганда* $\varepsilon_n\to 0$.

Етарлича катта n лар учун (1) формуладан

$$P_{m,n}\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{2}$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Бу тақрибий формуланинг нисбий хатоси n чексиз ортганда нолга интилади. $P_{m,n}$ эҳтимолни ҳисоблаш учун (2) формулани татбиқ қилиш

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

функциянинг қийматларини билишни талаб қилади. Бу функция* жуда муҳим бўлгани сабабли унинг учун махсус жадваллар тузилган бўлиб, улар иловада берилган. $\varphi(x)$ жуфт функция эканлиги равшан.

Теореманинг исботи. Катта сонларнинг факториаллари учун асимптотик ифода берувчи *Стирлинг формуласидан* фойдаланамиз**. У қуйидаги кўринишга эга:

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+\alpha_n), \tag{3}$$

бу ерда n чексиз ортганда α_n катталик нолга интилади. $P_{m,n}$ эҳтимол учун 4-§ да ҳосил қилинган (1) ифодани қараймиз:

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!}p^m q^{n-m}.$$

Бу ерда факториалларни Стирлинг формуласи асосида алмаштирамиз. У ҳолда

$$P_{m,n} = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+\alpha_n)p^m q^{n-m}}{m^m e^{-m}\sqrt{2\pi m}(1+\alpha_m)(n-m)^{n-m}e^{-n+m}\sqrt{2\pi(n-m)}(1+\alpha_{n-m})}$$

ёки

$$1+\alpha'_n = \frac{1+\alpha_n}{(1+\alpha_m)(1+\alpha_{n-m})}$$

деб белгиласак,

$$P_{m,n} = \frac{n^n p^m q^{n-m}}{m^m(n-m)^{n-m}}\sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}}(1+\alpha'_n). \tag{4}$$

n ва $n-m$ сонлар n билан бирга чексиз ўсади***. У ҳолда α_n, α_m, α_{n-m} лар нолга интилади, демак, $1+\alpha'_n \to 1$ ва $\alpha'_n \to 0$.

(4) тенгликнинг ўнг томондаги биринчи кўпайтувчини $\frac{1}{H}$ орқали белгилаймиз, яъни

$$\frac{1}{H} = \frac{n^n p^m q^{n-m}}{m^m(n-m)^{n-m}} = \left(\frac{np}{m}\right)^m\left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m}$$

деб фараз қиламиз.

Энди ушбу

$$\frac{m-np}{\sqrt{npq}} = x$$

белгилашни киритамиз. У ҳолда

$$m = np + x\sqrt{npq},$$

$$n-m = n-np-x\sqrt{npq} = nq - x\sqrt{npq}.$$

---

* Бу функция кейинги параграфда тўлароқ қаралади.

** Стирлинг формуласининг исботини математик анализнинг тўлиқроқ курсларидан топиш мумкин. Масалан, Г. М. Фихтенгольц. Дифференциал ва интеграл ҳисоб курси" 2-том.

*** Агар m сон n билан бирга ўсмаса, у ҳолда p чекли бўлганда $P_{m,n}$ эҳтимолнинг нолга интилишини тушуниш осон.

n ва $n-m$ лар учун x орқали юқорида ҳосил қилинган ифодалардан фойдалансак, H миқдор учун ушбу ифодани ҳосил қиламиз:

$$H=\left(\frac{n}{np}\right)^m\left(\frac{n-m}{nq}\right)^{n-m}=\left(1+x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)^m\left(1-x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)^{n-m}.$$

H учун ҳосил қилинган ифодани логарифмлаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\ln H=m\ln\left(1+x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)+(n-m)\ln\left(1-x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right),$$

ёки яна m ва $n-m$ ларнинг юқоридаги ифодасидан фойдалансак,

$$\ln H=(np+x\sqrt{npq})\ln\left(1+x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)+(nq-x\sqrt{npq})\ln\left(1-x\sqrt{\frac{l}{nq}}\right). \quad (5)$$

x нинг тайин қийматини танлаймиз (бу m ва n орасидаги бирор тайин боғланишнинг танланишини англатади) ва n ни шундай катта деб фараз қиламизки, натижада

$$\left|x\sqrt{\frac{q}{np}}\right|<\frac{1}{2} \text{ ва } \left|x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right|<\frac{1}{2}$$

бўлсин. Бундай қилиш мумкин, чунки n махражда қатнашмоқда. (5) формулада қатнашаётган логарифмлар учун мос равишда

$$t=x\sqrt{\frac{q}{np}} \quad \text{ва} \quad t=x\sqrt{\frac{p}{nq}}$$

деб фараз қилиб, $|t|<1$ бўлганда яқинлашувчи бўлган ушбу

$$\ln(1+t)=t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3-\dots$$

қатордан фойдаланиш мумкин. У ҳолда қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned}\ln\left(1+x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)&=x\sqrt{\frac{q}{np}}-\frac{x^2}{2}\frac{q}{np}+\rho_1,\\ \ln\left(1-x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)&=-x\sqrt{\frac{p}{nq}}-\frac{x^2}{2}\frac{p}{nq}+\rho_2.\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

(6) қаторларнинг ρ_1 ва ρ_2 қолдиқ ҳадларини баҳолаймиз. Уларнинг биринчиси учун

$$\rho_1=\frac{1}{3}\left(x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)^3-\frac{1}{4}\left(x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)^4+\dots$$

ифодани топамиз. Демак,

$$|\rho_1|<\frac{1}{3}\left|x\sqrt{\frac{q}{np}}\right|+\frac{1}{4}\left|x\sqrt{\frac{q}{np}}\right|^4+\dots.$$

Бу тенгсизликнинг ўнг томонидаги бирдан кичик бўлган сонли кўпайтувчиларни ташлаб юбориш билан биз тенгсизликни кучайтирамиз, холос. У ҳолда тенгсизликнинг ўнг томонида махражи

$$q^*=\left|x\sqrt{\frac{q}{np}}\right|<\frac{1}{2}$$

бўлган геометрик прогрессия ҳосил бўлади. Шунинг учун

$$|\rho_1| < \left| x \sqrt{\frac{q}{np}} \right|^3 \cdot \frac{1}{1-q^*} < 2\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{x^3}{n^{3/2}}.$$

Шунга ўхшаш, иккинчи қаторнинг қолдиқ ҳади ρ_2 учун қуйидаги баҳони ҳосил қиламиз:

$$|\rho_2| < 2\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{x^3}{n^{3/2}}.$$

Агар A орқали $2\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{3}{2}}$ ва $2\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{2}{3}}$ сонларнинг энг каттасини белгиласак, у ҳолда иккала қолдиқ учун ушбу умумий баҳони ёза оламиз:

$$|\rho_1| < A\frac{x^3}{n^{3/2}}, \quad |\rho_2| < A\frac{x^3}{n^{3/2}}. \tag{7}$$

$\ln H$ учун ҳосил қилинган (5) ифодага (6) қаторларни қўйсак,

$$\ln H = (np + x\sqrt{npq})\left(x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{x^2}{2}\frac{q}{np} + \rho_1\right) +$$
$$+ (nq - x\sqrt{npq})\left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x^2}{2}\frac{p}{nq} + \rho_2\right)$$

ни ҳосил қиламиз. Бу ерда содда алгебраик алмаштиришлар бажариб, қуйидагини топамиз:

$$\ln H = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2}\left(-q\sqrt{\frac{q}{np}} + p\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) + \rho_1(np + x\sqrt{npq}) -$$
$$- \rho_2(nq - x\sqrt{npq}) = \frac{x^2}{2} + \delta_n.$$

Бу ерда

$$\delta_n = \frac{x^3}{2}\left(-q\sqrt{\frac{q}{np}} + p\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) + \rho_1(np + x\sqrt{npq}) - \rho_2(nq - x\sqrt{npq})$$

деб белгиладик.

Йиғиндининг абсолют миқдорининг маълум хоссасидан ва ρ_1, ρ_2 миқдорлар учун ҳосил қилинган (7) тенгсизликлардан фойдаланиб δ_n миқдорни баҳолаймиз:

$$|\delta_n| < \frac{|x|^3}{2}\left|-q\sqrt{\frac{q}{np}} + p\sqrt{\frac{p}{nq}}\right| + A\frac{|x^3|}{n^{3/2}}|np + x\sqrt{npq}| +$$
$$+ A\frac{|x^3|}{n^{3/2}}|nq - x\sqrt{npq}|.$$

Ҳамма ҳадлардан $\frac{|x^3|}{\sqrt{n}}$ кўпайтувчини қавсдан ташқарига чиқарамиз ва юқоридаги тенгсизликни

$$|\delta_n| < \frac{|x^3|}{\sqrt{n}}\left\{\left|\frac{1}{2}\left(-q\sqrt{\frac{q}{p}}\right)\right| + A\left|p + \frac{x\sqrt{pq}}{n}\right| + A\left|q - \frac{x\sqrt{pq}}{n}\right|\right\}$$

кўринишда ёзамиз.

Бу тенгсизликда $\frac{x\sqrt{pq}}{n}$ кўринишдаги барча ҳадлар исталган тайин сондан кичик қилиниши мумкин, чунки n чексиз ортади. Шунинг учун катта қавс ичидаги ифода x ва n га боғлиқ бўлмасдан, балки фақат p ва q га боғлиқ бўлган тайин B сондан катта бўла олмайди. Демак, биз

$$|\delta_n| < B\frac{|x^3|}{\sqrt{n}} \tag{8}$$

муносабатни ёза оламиз. Шундай қилиб,

$$\ln H = \frac{x^2}{2} + \delta_n$$

бўлиб, бу ерда δ_n миқдор (8) тенгсизлик билан баҳоланади. Бундан

$$H = e^{\frac{x^2}{2}+\delta_n} = e^{\frac{x^2}{2}(1+\gamma_n)}$$

келиб чиқади, бу ерда $\gamma_n = e^{\delta_n} - 1$. $n \to \infty$ да (8) тенгсизликка асосан $\delta_n \to 0$ экани равшан, у ҳолда $n \to \infty$ да $\gamma_n \to 0$.

Биз $P_{m,n}$ эҳтимол учун ҳосил қилинган (4) ифодадаги биринчи кўпайтувчини ўргандик. Энди иккинчи кўпайтувчини текшириш лозим. Унда илдиз остидаги ифоданинг бир қисмини алоҳида ёзиб оламиз:

$$\frac{n}{m(n-m)}.$$

Бу ердаги m ва $n-m$ ни уларнинг x орқали ифодаси билан алмаштириб,

$$\frac{n}{m(n-m)} = \frac{n}{(np+x\sqrt{npq})(nq-x\sqrt{npq})} = \frac{1}{n\left(p+x\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)\left(q-x\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)}$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Қавсларни очиб, бу касрнинг махражини қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$n\left[pq + x(q-p)\sqrt{\frac{pq}{n}} - x^2\frac{pq}{n}\right] = npq\left(1 + x\frac{q-p}{\sqrt{npq}} - \frac{x^2}{n}\right) = npq(1+\beta_n),$$

бу ерда $\beta = x\frac{q-p}{\sqrt{npq}} - \frac{x^2}{2}$ бўлиб, тайин x учун $n \to \infty$ да $\beta_n \to 0$ бўлади. Шундай қилиб,

$$\frac{n}{m(n-m)} = \frac{1}{npq(1+\beta_n)}. \tag{10}$$

Ҳосил қилинган (9) ва (10) тенгликларни (4) тенгликка қўйиб, $P_{m,n}$ эҳтимол учун

$$P_{m,n} = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{1+\gamma_n} \cdot \frac{1+\alpha'_n}{\sqrt{2\pi np\cdot q(1+\beta_n)}}$$

ёки

$$1+\varepsilon_n = \frac{1+\alpha'_n}{(1+\gamma_n)\sqrt{1+\beta_n}}$$

белгилашни киритиб, узил-кесил

$$P_{m,n}=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}(1+\varepsilon_n)$$

муносабатни ҳосил қиламиз.

Тайин чекли интервалдан олинган ҳар қандай тайин x учун $n\to\infty$ да барча бутун $m=np+x\sqrt{npq}$ лар учун α_n, β_n ва γ_n нинг хоссасидан $\varepsilon_n\to 0$ экани келиб чиқади.

1-мисол. 4-параграфда келтирилган 4-мисолни охиригача ечиш учун (2) формуладан фойдаланишимиз мумкин. Бу мисолда, агар ҳар бир деталнинг брак бўлиш эҳтимоли 0,005 га тенг бўлса, 10000 деталли партияда роса 40 та брак деталь бўлиш эҳтимолини топиш талаб қилинган эди.

Бу ерда $p=0{,}005$, $q=0{,}995$, $n=10\,000$, $m=40$. Шунинг учун $\sqrt{npq}=\sqrt{10\,000\cdot 0{,}005\cdot 0{,}995}\approx 7{,}05$.

$$x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=\frac{40-10\,000\cdot 0{,}005}{7{,}05}=-1{,}42.$$

$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ функция жуфт эканлигидан фойдаланиб, унинг $x=1{,}42$ даги қийматини топамиз. Жадвалдан $\varphi(1{,}42)=0{,}1456$ ни топамиз. Шундай қилиб

$$P_{40,10000}\approx\frac{0{,}1456}{7{,}05}\approx 0{,}0206.$$

Аниқ формула бўйича ҳисобласак, $P_{40,10000}=0{,}0197$ натижани оламиз. Бу ҳолда тақрибий формуламиз 0,0009 хатони, яъни тахминан 4,5 процент хатони беради. Бироқ, бундай хато ҳисоблашни анча осонлаштиради.

2-мисол. Ҳар бирида A ҳодисанинг юз бериш эҳтимоли $p=0{,}5$ га тенг бўлган 10000 та синов ўтказилади. A ҳодиса юз беришининг энг катта эҳтимолли сонининг эҳтимолини топиш талаб қилинади.

4-§ да қилинган мулоҳазалардан кўринадики, ҳодиса юз беришининг энг катта эҳтимолли сони $m=pn=5000$ бўлади. Шундай қилиб,

$$p=0{,}5,\ q=0{,}5,\ n=10\,000,\ m=5000,\ \sqrt{npq}=\sqrt{10\,000\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}=50.$$

$$x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=0,\ \varphi(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}=0{,}3989.$$

Ҳосил қилинган сон маълумотлар

$$P_{5000,10\,000}=\frac{0{,}3989}{50}=0{,}007978$$

эҳтимолни беради.

Юқорида кўрсатилганидек, A ҳодиса юз беришининг энг катта эҳтимолли сони $m = 5000$ эди, бироқ унинг аниқ шу сон марта юз бериш эҳтимоли жуда кичик. Таққослаш мақсадида m нинг бошқа қийматлари учун олдинги шартлар асосида қуйидаги $P_{m,n}$ эҳтимолларни келтирамиз:

$$P_{4950,10000} = P_{5050,10\,000} = 0{,}004894 \qquad (x = 1),$$

$$P_{4900,10000} = P_{5100,10\,000} = 0{,}001108 \qquad (x = 2).$$

3-мисол. Ўйин соққаси 1200 марта ташланади. Олти очко тушишининг энг катта эҳтимолли сонининг эҳтимолини аниқланг.

Бизни қизиқтираётган ҳодиса—олти очконинг тушиш эҳтимоли ҳар бир синовда $p = \frac{1}{6}$ га тенг. 4- § даги (9) тенгсизликдан кўринадики, ҳодиса юз беришининг энг катта эҳтимолли сони $m = np = 200$ бўлади. Олдинги мисолдагидек ёза оламиз:

$$p = \frac{1}{6}, \quad q = \frac{5}{6}, \qquad n = 1200, \qquad m = 200.$$

У ҳолда

$$\sqrt{npq} = \sqrt{1200 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \frac{5\sqrt{10}}{3} \approx 5{,}28,$$

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = 0, \ \varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0{,}3989.$$

Бу ердан изланаётган эҳтимолни топамиз:

$$P_{200,1200} = \frac{0{,}3989}{5{,}28} = 0{,}0757.$$

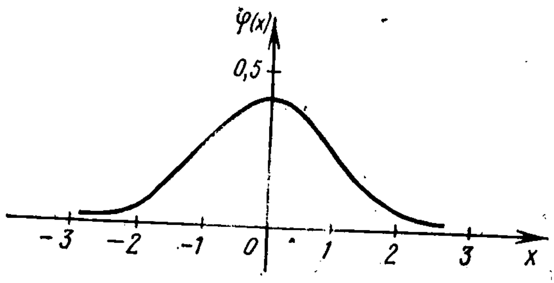
Таққослаш мақсадида $m = 210$ да, яъни $x = \frac{210 - 200}{5{,}28} = 1{,}9$ бўлганда $\varphi(x) = 0{,}0656$ бўлишини айтиб ўтамиз, бундан олти очконинг 210 марта тушиш эҳтимоли

$$P_{210,1200} = \frac{0{,}0656}{5{,}28} \approx 0{,}0124.$$

10-§. НОРМАЛ ТАҚСИМОТ ФУНКЦИЯСИ

9- параграфдаги мисолларни текширишда $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ функциядан фойдаланишга тўғри келди. Бу функция *нормал тақсимот эҳтимолининг зичлиги* дейилади. Бундай номнинг сабаби кейинроқ тушунтирилади (16- § га қаранг).

$y = \varphi(x)$ функциянинг графигини чизамаз. $\varphi(x)$ функция жуфт бўлгани учун унинг графиги Oy ўққа нисбатан симметрик. $x \to \pm\infty$ да бу эгри чизиқ Ox ўқдан иборат горизонтал асимптотага эга. Бу функция $x = 0$ да максимумга эришиб, бу



7- расм.

максимум $\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}3989$ дан иборат. $\varphi(x)$ функциянинг графиги 7- расмда келтирилган бўлиб, ўқлардаги масштаблар қулайлик мақсадида ҳар хил қилиб олинган.

Бу эгри чизиқ ва Ox ўқ билан чегараланган юз бирга тенг:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 1.$$

Бунга ишонч ҳосил қилиш учун ушбу интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Бу ерда

$$I = \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

деб олайлик.

D интеграллаш соҳаси xOy текисликнинг биринчи чорагидан иборат бўлган

$$I_1 = \iint_D e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

икки каррали хосмас интегрални ҳисоблаб,

$$I_1 = \iint_D e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{\infty} dx\left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dy\right) =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right)dx = I^2,$$

ни ҳосил қиламиз, чунки ички интеграл x га боғлиқ эмас ва унинг қиймаси интеграллаш ўзгарувчисининг белгиланишини алмаштириш билан ўзгармайди.

Иккинчи томондан, ўша икки каррали интегрални қутб координаталар системасига ўтиш ёрдамида ҳисобласак:

$$x = \rho\cos\varphi,$$
$$y = \rho\sin\varphi$$

дан маълум

$$x^2 + y^2 = \rho^2,$$
$$dxdy = \rho\, d\rho d\varphi$$

муносабатларни ҳосил қиламиз. Демак,

$$I_1 = \iint\limits_D e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2}\rho d\rho = -\frac{\pi}{2}e^{-\frac{1}{2}\rho^2}\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Ҳосил қилинган натижаларни таққослаб

$$I^2 = \frac{\pi}{2}$$

ни ҳосил қиламиз, бундан эса

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Шунинг учун

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}2I = 1.$$

$\varphi(x)$ функциядан 0 дан x гача олинган интеграл, яъни

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

функция $\varphi(x)$ дан ҳам каттароқ роль ўйнайди. Бу функция *нормал тақсимот функцияси* дейилади. Баъзан уни *Лаплас функцияси* ёки *эҳтимол интеграли* номи билан ҳам юритилади.

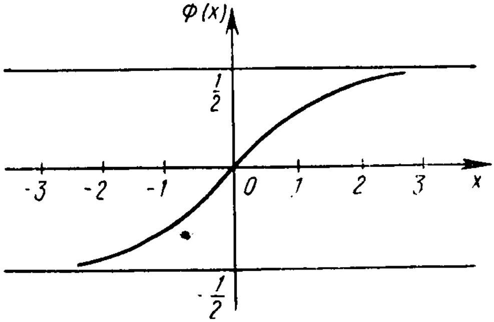
$\Phi(x)$ функция тоқ функциядир. Ҳақиқатан ҳам, $t = -x$ алмаштириш бажариб,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{-x} e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau = -\Phi(x)$$

ни ҳосил қиламаз. Шунинг учун $y = \Phi(x)$ эгри чизиқ координаталар бошига нисбатан симметрикдир.

$$\lim_{x\to-\infty}\Phi(x) = -\frac{1}{2},$$
$$\lim_{x\to+\infty}\Phi(x) = \frac{1}{2}$$

бўлганлигидан бу эгри чизиқ иккита горизонтал асимптотага эга.



8- расм.

$x=0$ бўлганда $\Phi(0)=0$. Координаталар боши эгри чизиқнинг букилиш нуқтаси бўлиб хизмат қилади, бу нуқтага ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти $k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\approx 0{,}3989$.

$y=\Phi(x)$ функциянинг графиги 8- расмда тасвирланган.

Баъзи ҳолларда $\Phi(x)$ функция ўрнига

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

тенглик билан аниқланадиган $F(x)$ функция қаралади. Бу функциялар орасида

$$F(x)=\Phi(x)+\frac{1}{2}$$

муносабатнинг мавжудлиги ўз-ўзидан равшан.

$\varphi(x)$ ва $\Phi(x)$ функциялар катта аҳамиятга эга бўлиб,улар учун тўлиқ жадваллар тузилгандир. Бу жадваллар иловада келтирилган. $\varphi(x)$ функция жуфт, $\Phi(x)$ функция эса тоқ бўлганлиги сабабли жадвалларда аргументнинг мусбат қийматларигина берилган.

11- §. ПУАССОН ТЕОРЕМАСИ

n та синовда ҳодисанинг m марта юз бериш эҳтимоли $P_{m,n}$ учун 9- § да асимптотик формула ҳосил қилдик. Бу формула бир хил n лар учун p сон (ҳодисанинг айрим синовда юз бериш эҳтимоли) яримга қанча яқин бўлса, шунча яхши натижа беради. Бироқ анча кичик p ларда (яъни кам юз берувчи ҳодисалар қаралаётганда) бу формула берадиган хато сезиларли даражада бўлади.

Ҳар бирида ҳодисанинг юз бериш эҳтимоли $\frac{\lambda}{n}$ га тенг бўлган n та синов сериясидан иборат ҳолни текширамиз. Бу ерда λ —бирор ўзгармас катталик*. Ана шу ҳолда $P_{m,n}$ эҳтимол учун янги тақрибий формула келтириб чиқарамиз. Қуйидаги теорема ўринлидир.

Пуассон теоремаси. *n та синовли сериянинг ҳар бирида A ҳодисанинг юз бериш эҳтимоли $\frac{\lambda}{n}$ га тенг бўлсин. У ҳолда бу серияда A ҳодисанинг m марта юз бериш эҳтимоли n етарлича катта бўлганда ушбу*

$$P_{m,n} \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}*$$

тақрибий формула билан ифодаланади.

Исботи. 4-§ да кўрганимиздек (1) формула

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}$$

экани бизга маълум. Бу ерда $p = \frac{\lambda}{n}$ деймиз, у ҳолда

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m},$$

ёки алгебраик алмаштиришлардан сўнг,

$$P_{m,n} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)(n-m)\ldots 1 \cdot \lambda^m}{m!(n-m)(n-m-1)\ldots 1 \cdot n^m} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{\lambda^m}{m!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-m}.$$

Энди m ўзгармас бўлиб, $n \to \infty$ да $P_{m,n}$ нинг лимитини топамиз. $\left(1 - \frac{1}{n}\right), \ldots, \left(1 - \frac{m-1}{n}\right)$ ва $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-m}$ кўпайтувчиларнинг лимитлари бирга тенг бўлиб,

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

бўлганлиги сабабли

$$\lim_{n \to \infty} P_{n,m} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

келиб чиқади. Бундан эса (1) тақрибий тенглик келиб чиқади.

1-мисол. Ишчи аёл 300 та урчуққа хизмат кўрсатади. τ вақт оралиғида ҳар бир урчуқда йигирилаётган ипнинг узилиш эҳтимоли 0,005 га тенг. Узилишларнинг энг катта эҳтимолли сонини ва бу соннинг эҳтимолини топинг.

Узилишларнинг энг катта эҳтимолли сони $\mu^* = np = 4$ бўлади. 4 та узилиш эҳтимолининг аниқ қиймати:

$$P_{4,800} = C_{800}^4 (0,005)^4 (0,995)^{796}.$$

---

* λ коэффициентнинг аниқ эҳтимолий маънога эга эканлигини кейинги бобда кўрамиз (16-§ га қаранг).

$\lambda = np = 4$ бўлганда Пуассон формуласидан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P_{4,800} \approx \frac{4^4}{4} e^{-4} = \frac{256}{24} 0,0183 = 0,1954.$$

Аниқ формула бўйича ҳисоблаш эса 0,1945 натижани беради, демак, Пуассон формуласидан фойдаланилганда қилинадиган хато 0,009 га тенг. Бу ҳол учун Муавр — Лапласнинг локал лимит теоремаси

$$P_{4,800} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 800 \cdot 0,005 \cdot 0,995}} e^{-\frac{x^2}{2}} \approx 0,2000$$

натижани беради, чунки бу ҳолда $x = 0$, яъни қилинган хато 0,055 га тенг. Кўриниб турибдики, бу хато Пуассон формуласидан фойдаланилгандаги хатодан олти марта каттадир.

2-мисол Бир соат давомида ихтиёрий абонентнинг коммутаторга телефон қилиш эҳтимоли 0,01 га тенг. Телефон станцияси 300 абонентга хизмат қилади. Бир соат давомида роса 4 та абонентнинг телефон қилиш эҳтимоли қанча?

Бу ерда яна Пуассон формуласидан фойдаланамиз.

$$n = 300, \ m = 4, \qquad \lambda = np = 3.$$

У ҳолда изланаётган эҳтимол қуйидагига тенг:

$$P_{4,800} \approx \frac{3^4}{4!} e^{-3} \approx 0,169.$$

12-§. МУАВР—ЛАПЛАСНИНГ ИНТЕГРАЛ ТЕОРЕМАСИ. БЕРНУЛЛИ ТЕОРЕМАСИ

9-§ да қараб чиқилган мисоллар шуни кўрсатадики, n етарлича катта бўлганда A ҳодисанинг тайин сон марта юз бериш эҳтимоли жуда ҳам кичик бўлади. Амалий татбиқларда бизни одатда ҳодисанинг бирор тайин сон марта юз бериши эмас, балки унинг юз бериш сони бирор чегараларда бўлиш эҳтимоли қизиқтиради. 4-§ нинг 4-мисолида кўрсатилганидек, бу эҳтимолни қўшиш йўли билан ҳосил қилиш мумкин, бироқ, бу усул жуда катта ҳисоблаш ишлари бажаришни талаб қилади.

Биз ҳозир қараб чиқадиган *интеграл лимит теорема*, бу эҳтимолни ҳисоблашни 9-§ да $P_{m,n}$ эҳтимолни ҳисоблашда кўрсатилган локал теоремага ўхшаш анча осонлаштиради.

Муавр—Лапласнинг интеграл теоремаси. *Агар A ҳодисанинг ҳар бир айрим синовда юз бериш эҳтимоли p га тенг бўлса, у ҳолда синовлар сони n чексиз ортганда, A ҳодисанинг юз бериш сони m нинг ушбу*

$$t_0 < \frac{m - np}{\sqrt{npq}} < t_1 \tag{1}$$

(бу ерда $q=1-p$) *тенгсизликни қаноатлантириш эҳтимолининг лимити*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t_0}^{t_1} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \qquad (2)$$

интегралдан иборат бўлади.

Исботи. Юқорида кўрсатилганидек, изланаётган эҳтимолни m нинг (1) тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматлари учун барча эҳтимолларни қўшиш йўли билан ҳосил қилиш мумкин:

$$P\left(t_0<\frac{m-np}{\sqrt{npq}}<t_1\right)=\sum_m P_{m,n}. \qquad (3)$$

m нинг (1) тенгсизликларни қаноатлантирувчи қийматларини

$$m=np+x\sqrt{npq} \qquad (4)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда x ифода t_0 ва t_1 орасида ётувчи қийматларни қабул қилади. (4) тенгликдан кўринадики, n чексиз ортганда m ҳам чексиз ортади.

(4) формула m ни x орқали ифодалайди, демак, (3) йиғиндини x нинг (t_0, t_1) оралиқдаги баъзи қийматлари учун ҳам тарқатиш мумкин. Синовлар сони n бир хил бўлиб, m қийматдан $m+1$ қийматга ўтилганда x нинг орттирмасини ҳисоблаймиз Айтайлик,

$$m+1=np+(x+\Delta x)\sqrt{npq} \qquad (5)$$

бўлсин, (5) тенгликдан (4) тенгликни айириб

$$1=\Delta x\sqrt{npq}$$

ёки

$$\Delta x=\frac{1}{\sqrt{npq}}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу ифодадан фойдаланиб, $P_{m,n}$ эҳтимолнинг ифодасини (9- § даги (2) формулага қаранг)

$$P_{m,n}\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\Delta x \qquad (6)$$

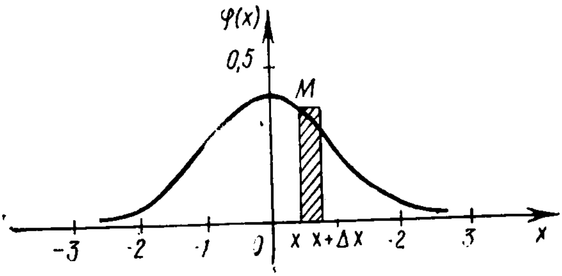
кўринишда ёза оламиз.

$P_{m,n}$ эҳтимол учун (6) кўринишдаги ифода оддий геометрик маънога эга. Ҳақиқатан ҳам,

$$y=\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

(нормал тақсимот эҳтимолининг зичлиги) эгри чизиқни чизамиз.

(4) формуладан фойдаланиб, берилган n, m, p ва q учун x ни ҳисоблаб, $y=\varphi(x)$ эгри чизиқда x абсциссали M нуқ-



9- расм.

тани ясаймиз (9- расм). Кейин эса $\Delta x = \frac{1}{\sqrt{npq}}$ ни танлаб, тўғри тўртбурчак ясаймиз (у 9- расмда штрихланган). Бу тўғри тўртбурчакнинг юзи $\varphi(x)\,\Delta x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Delta x$ га тенг бўлади. Шундай қилиб, (6) формулага кўра $P_{m,n}$ эҳтимол 9- расмда штрихланган тўғри тўртбурчак юзи билан тақрибан ифодаланади.

(6) ифодани (3) йиғиндига қўямиз. У ҳолда (1) тенгсизликнинг эҳтимоли тақрибан қуйидаги йиғинди билан ифодаланади:

$$P\left(t_0 < \frac{m}{\sqrt{npq}} < t_1\right) \approx \sum_i \varphi(x_i)\,\Delta x. \qquad (7)$$

(7) тенгликнинг ўнг томонидаги йиғинди (t_0, t_1) оралиқни узунликлари $\Delta x = \frac{1}{\sqrt{npq}}$ га тенг бўлган оралиқчаларга бўлиб, $\varphi(x)$ функция учун тузилган интеграл йиғиндидан иборат. Бу йиғиндининг n чексизликка интилгандаги лимити (2) интегралга тенг, чунки бу ҳолда $\Delta x = \frac{1}{\sqrt{npq}}$ нолга интилади.

Бу ҳолда (7) тақрибий тенгликнинг хатоси нолга интилишини кўрсатиш мумкин*.

Шундай қилиб, n чексиз ортганда (1) тенгсизликнинг эҳтимоли (2) интегралга интилади. Шунинг учун n нинг катта қийматларида

$$P\left(t_0 < \frac{m-np}{\sqrt{npq}} < t_1\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_0}^{t_1} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \qquad (8)$$

---

* (7) тенгликнинг ўнг томонидаги йиғиндининг интегралга яқинлашишининг аниқ исботи эҳтимоллар назариясининг тўлароқ курсларида берилади. Масалан қаранг: Б. В. Гнеденко, „Курс теории вероятностей".

муносабатни ёза оламиз. Энди

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t_0}^{t_1} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{t_1} e^{-\frac{x^2}{2}}dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{t_0} e^{-\frac{x^2}{2}}dx =$$
$$= \Phi(t_1) - \Phi(t_0)$$

эканини қайд қиламиз.

Хусусий ҳолда, агар $t_0 = -t_1$ бўлса, у ҳолда

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-t_1}^{t_1} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \Phi(t_1) - \Phi(-t_1) = 2\Phi(t_1). \qquad (9)$$

$\Phi(x)$ функциянинг қийматларини жадвалдан топиш мумкин. Бу эса бизни қизиқтираётган тенгсизликнинг изланаётган эҳтимолининг тақрибий қийматларини осонгина топиш имконини беради.

1-мисол. 4-§ даги 4-мисолнинг иккинчи қисмини қараб чиқишга қайтамиз. Унда агар ҳар бир деталнинг брак бўлиш эҳтимоли 0,005 га тенг бўлса, 10000 та деталли партияда кўпи билан 70 та брак деталь бўлиш эҳтимолини топиш талаб қилинган эди.

Бу ерда $p = 0{,}005$, $q = 0{,}995$, $n = 10\,000$, $\sqrt{npq} \approx 7{,}05$, $np = 50$. Шунинг учун эҳтимоли бизни қизиқтираётган $0 \leqslant m \leqslant 70$ тенгсизлик

$$-50 \leqslant m - np \leqslant 20 \text{ ёки}$$
$$-7{,}09 \leqslant \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leqslant 2{,}84$$

тенгсизликка тенг кучли.

Исбот қилинган теоремага асосан:

$$P\left(-7{,}09 \leqslant \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \leqslant 2{,}84\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-7{,}09}^{2{,}84} e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

(8) тенгликдан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P = \Phi(2{,}74) - \Phi(-7{,}09) = \Phi(2{,}74) + \Phi(7{,}09) =$$
$$= 0{,}4977 + \frac{1}{2} = 0{,}9977.$$

Шундай қилиб, брак деталлар сонининг 70 тадан ортиқ бўлмаслик эҳтимоли 1 дан жуда кам фарқ қилади.

2-мисол. Ўйин соққасини 8000 марта ташлаганда 6 очко тушиш частотасининг $p = \frac{1}{6}$ эҳтимолидан фарқи $\frac{1}{80}$ дан кичик бўлиш эҳтимоли P ни топамиз.

Бизни

$$\left|\frac{m}{8000} - \frac{1}{6}\right| < \frac{1}{80}$$

тенгсизликнинг эҳтимоли қизиқтиради, бу ерда m—олти очко тушиш сони, $p=\frac{1}{6}$, $q=\frac{5}{6}$, $n=8\,000$.

Келтирилган тенгсизликни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$-100<m-8000\cdot\frac{1}{6}<100.$$

Бу тенгсизлик ушбу тенгсизликка тенг кучли:

$$-\frac{100}{\sqrt{8000\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}}<\frac{m-8000\cdot\frac{1}{6}}{\sqrt{npq}}<\frac{100}{\sqrt{8000\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}}.$$

Бундан $t_0=-3$ ва $t_1=3$ келиб чиқади. Шу сабабли (9) формулага кўра изланаётган эҳтимол

$$P=2\Phi(3)=2\cdot0{,}49865=0{,}9973$$

бўлади (иловадаги, $\Phi(x)$ нинг қийматлари жадвалига қаранг).

3-мисол. Айрим ўқ узишда ўқнинг нишонга тегиш эҳтимоли 0,63 га тенг. Нишонга камида 10 та ўқни 0,9 га тенг эҳтимол билан теккизиш учун нечта ўқ узиш керак?

Нишонга камида 10 та ўқ теккизиш талаби

$$10\leqslant m<+\infty$$

тенгсизликка тенг кучли бўлиб, бу тенгсизликнинг юқори чегараси аниқланмаган. Бу тенгсизликни бизга керакли шаклда ёзиб оламиз у ҳолда

$$\frac{10-0{,}63\,n}{\sqrt{n\cdot0{,}63\cdot0{,}37}}<\frac{m-0{,}63\,n}{\sqrt{n\cdot0{,}63\cdot0{,}37}}<+\infty.$$

Бундан

$$t_0=\frac{10-0{,}63\,n}{\sqrt{0{,}23\,n}}\quad\text{ва}\quad t_1=+\infty$$

келиб чиқади. Ҳозирги ҳолда $P\left(t_0<\frac{m-np}{\sqrt{npq}}<t_1\right)$ эҳтимол 0,9 га тенг. Иккинчи томондан, (8) формулага кўра

$$P(t_0<x<t_1)=\Phi(t_1)-\Phi(t_0)$$

ни ҳосил қиламиз. $t_1=+\infty$ ва $\Phi(\infty)=0{,}5$ бўлганлиги сабабли $\Phi(t_0)=0{,}4000$ бўлади. Бундан $\Phi(x)$ функция қийматлари жадвалидан фойдаланиб, $t_0=-1{,}28$ ни топамиз ва унинг ёрдамида n ни топиш учун ушбу

$$\frac{10-0{,}63\,n}{\sqrt{0{,}23\,n}}=-1{,}28$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Бу тенгламани ечиб ва камида 10 та ўқни нишонга теккизиш эҳтимоли n нинг ортиши билан ортиши мумкинлигини эътиборга олиб, узил-кесил

$$n \geqslant 20$$

натижани ҳосил қиламиз.

8-§ да кўрсатилган эдики, бирор ҳодисалар юз беришларининг кузатилаётган частоталари уларнинг эҳтимолидан синовлар сони амалда қанча катта бўлса, шунча кам фарқ қилиши кўрсатилган эди. Энди бу масалани назарий жиҳатдан тушунтира оламиз.

Айтайлик, ҳар бирида бирор A ҳодисанинг юз бериш эҳтимоли p га тенг бўлган n та ўзаро эркли синов ўтказилаётган бўлсин. Агар биз A ҳодиса юз берган синовлар сонини m десак, у ҳолда $\frac{m}{n}$ нисбат A ҳодисанинг **частотасини** англатади. Қуйидаги теорема ўринлидир.

Бернулли теоремаси. *Ҳар қандай $\varepsilon > 0$ сон учун*

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг эҳтимоли n чексиз ортганда бирга интилади.

Бошқача қилиб айтганда, синовлар сони етарлича катта бўлганда, ҳодисанинг юз бериш частотаси унинг эҳтимолидан жуда кам фарқ қилиш эҳтимоли бирга исталганча яқиндир.

Исботи. Бизни қизиқтираётган тенгсизлик ушбу

$$-\varepsilon < \frac{m-np}{n} < \varepsilon$$

тенгсизликка тенг кучлидир. Бу тенгсизликнинг иккала томонини $\sqrt{\frac{n}{pq}}$ га кўпайтириб, уни бизга зарур бўлган

$$-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} < \frac{m-np}{\sqrt{npq}} < \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$$

кўринишга келтирамиз. Шундай қилиб,

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = P\left\{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} < \frac{m-np}{\sqrt{npq}} < \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Бу эҳтимол интеграл лимит теоремага асосан

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

интегралга яқин, бу ерда $\alpha = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$.

n чексизликка интилганда $\alpha \to \infty$ га эга бўламиз. Шу сабабли бизни қизиқтираётган тенгсизликнинг эҳтимоли

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

интегралга интилади. Бу интегралнинг бирга тенглигини 10-§ да кўрсатган эдик. Теорема исботланди.

Бернулли теоремаси катта сонлар қонуни деб аталадиган қонуннинг хусусий ҳолларидан биридир. Бу қонуннинг баъзи бир бошқа формалари IV бобда қаралади (23-§ га қаранг).

II БОБГА ДОИР ЎЗ-ЎЗИНИ ТЕКШИРИШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Эҳтимоллар назариясининг асимптотик формулалари қандай мақсадларга хизмат қилади?
2. Асимптотик формуланинг қайси хатоси синовлар сони чексиз ортганда нолга интилади—нисбий хатоми ёки абсолют хатоми?
3. Муавр—Лапласнинг локал теоремаси татбиқига мисол келтиринг.
4. Муавр—Лаплас теоремасининг шартлари Пуассон теоремасининг шартларидан нима билан фарқ қилади? Ҳодисанинг тайин сон марта юз бериш эҳтимоли Пуассон формуласи ёрдамида ҳисобланиши мумкин бўлган мисоллар келтиринг.
5. Нима учун Пуассон қонуни кам юз берувчи ҳодисалар қонуни деб аталади?
6. Муавр—Лапласнинг интеграл лимит теоремаси қандай аҳамиятга эга? У қандай масалаларда татбиқ қилинади? Локал ва интеграл теоремалар татбиқ қилинадиган масалалар орасидаги фарқ нималардан иборат?
7. Бернулли теоремаси нимадан иборат?
8. Бернулли теоремасига асосланиб, синовлар сони чексиз ортганда ҳодисанинг юз бериш частотаси унинг эҳтимолига интилади деб айтиш мумкинми?
9. Бернулли теоремасининг татбиқ қилинишига доир мисоллар келтиринг.
10. Олдинги бобнинг 4-§ ида ҳодиса юз беришининг энг катта эҳтимолли сони учун олинган баҳо Бернулли теоремасига мувофиқ келадими?

III БОБ

ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАР

13-§. ТАСОДИФИЙ МИҚДОР ВА УНИНГ ТАҚСИМОТ ҚОНУНИ

Тасодифий миқдор тушунчаси эҳтимоллар назариясининг марказий тушунчаларидан биридир. *Тасодифий миқдор дейилганда, тасодифга боғлиқ ҳолда у ёки бу қийматларни қабул қилувчи миқдорлар тушунилади.* Унинг аниқроқ таърифи бир оз кейинроқ берилади.

Тасодифий миқдорларга баъзи-бир мисоллар келтирамиз.

1. *Ўйин соққаси ташланганда тушадиган очколар сони.* Бу тасодифий миқдор 1, 2, ..., 6 қийматлардан бирини қабул қилиши мумкин.

2. *n та эркли синовда A ҳодисанинг юз бериш сони.* Бу тасодифий миқдор n та синов натижасида 0, 1, 2, ... n, қийматлардан бирини қабул қилиши мумкин.

3. *Биринчиси нишонга теккунга қадар отиладиган ўқлар сони.* Бу тасодифий миқдор исталган бутун мусбат қийматлар қабул қила олади.

4. *Нишон марказидан унга отилган ўқ теккан жойгача бўлган масофа.* Умуман айтганда, бу тасодифий миқдор исталган мусбат қийматларни ёки нолни қабул қила олади.

Чекли сон ёки турли қийматларнинг чексиз кетма-кетлигини қабул қилувчи тасодифий миқдор дискрет тасодифий миқдорлардир.

Юқоридаги тасодифий миқдорлар ичида 1, 2, 3-мисоллардаги миқдорлар дискрет тасодифий миқдорлардир.

*Бирор интервалдаги (оралиқдаги) барча қийматларни қабул қилувчи тасодифий миқдорлар узлуксиз тасодифий миқдор дейилади**. Бундай тасодифий миқдорларга 4-мисолдаги тасодифий миқдор мансубдир (ўз-ўзидан равшанки, дискрет ҳам бўлмаган, узлуксиз ҳам бўлмаган тасодифий миқдорлар ҳам мавжуд, бироқ ундай тасодифий миқдорларни ўрганиш бизнинг вазифамизга кирмайди).

---

* Бу таъриф тўлиқ эмас. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг янада тўлиқ таърифи 15-§ да келтирилади.

Ҳозирча биз *дискрет* тасодифий миқдорларни қараб чиқиш билан чегараланамиз. Тасодифий миқдорни характерлаш учун, аввало унинг мумкин бўлган қийматларини кўрсатиш керак. Бироқ бу ҳали етарли эмас: яна бу тасодифий миқдорнинг қийматлари қандай частота билан қабул қилиниши ҳам маълум бўлиши керак. Бу частота унинг ҳар бир қийматининг эҳтимоли билан характерланади. Бошқача қилиб айтганда, X тасодифий миқдор учун фақат унинг $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ қийматларини эмас, балки X тасодифий миқдорнинг x_i қийматни қабул қилишидан иборат бўлган ҳодиса эҳтимоллари

$$p_i = P(X = x_i) \qquad (i = 1,\ 2,\ 3, \dots)$$

ни ҳам кўрсатиш керак.

Агар X нинг мумкин бўлган барча қийматлари кўрсатилган бўлса, у ҳолда $X = x_i$ лар биргаликда бўлмаган ҳодисаларгина бўлиб қолмай, балки ягона мумкин бўлган ҳодисалар ҳамдир, демак, берилган p_i эҳтимоллар йиғиндиси бирга тенг бўлиши шарт.

Тасодифий миқдорнинг қийматлари билан шу қийматларга мос эҳтимоллар орасидаги боғланишни аниқлайдиган муносабат тасодифий миқдорнинг *тақсимот қонуни* деб аталади. Дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини жадвал кўринишда ёзиш қулайроқдир (1-жадвал),

1-жадвал

x_1	x_2	...	x_a	...
p_1	p_2	...	p_n	...

Бу ерда $\sum\limits_i p_i = 1$. Қийматлар сони чекли ҳам, чексиз ҳам бўлиши мумкин. Иккинчи ҳолда эҳтимоллар қатори $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i$ яқинлашувчи бўлиб унинг йиғиндиси бирга тенг бўлиши шартдир.

Баъзи ҳолларда тақсимот қонунни график ҳолда тасвирлаш қулайдир. Шу мақсадда абсциссалар ўқи бўйлаб X тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари, ординаталар ўқи бўйлаб эса бу қийматларга мос эҳтимоллар жойлаштирилади. Ҳосил қилинган нуқталарни туташтирувчи синиқ чизиқ *тақсимот кўпбурчаги* дейилади.

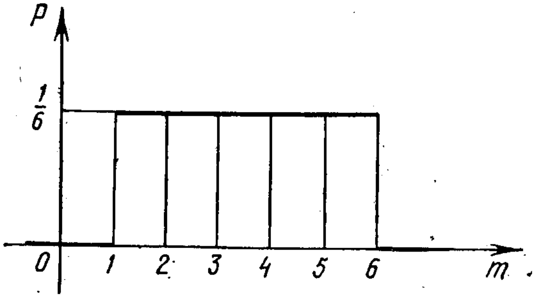
Тасодифий миқдорларнинг тақсимот қонунларига мисоллар келтирамиз.

1-мисол. X—ўйин соққаси ташланганда тушадиган очколар сони бўлсин. Унинг мумкин бўлган 1, 2, ... 6 қийматлари тенг эҳтимоллидир. Шунинг учун тақсимот қонун 2-жадвал кўринишига эга бўлади.

Бу тасодифий миқдорнинг тақсимот кўпбурчаги 10-расмда тасвирланган.

2-жадвал

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



10-расм.

2-мисол. Фараз қилайлик, X ҳар бир отишнинг нишонга тегиш эҳтимоли p га тенг бўлганда, биринчиси нишонга теккунга қадар отишлар сони бўлсин.

Бу ҳолда X тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари барча 1, 2, 3, ... натурал сонлардир.

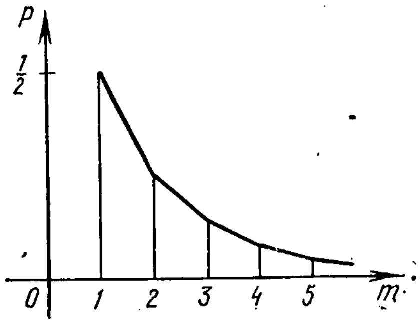
$X=1$ бўлиш эҳтимоли p га тенглиги равшан. Агар $X=2$ бўлса, бу биринчи ўқ нишонга тегмасдан иккинчи ўқ унга текканини билдиради ва $X=2$ нинг эҳтимоли ҳодисаларнинг биргаликда юз бериш эҳтимоли сифатида pq га тенг бўлади ($q=1-p$). Шунга ўхшаш, $X=n$ нинг эҳтимоли $q^{n-1}p$ га тенглигини топамиз. Демак, бу ҳолда тақсимот қонун қуйидаги жадвал кўринишида берилади (3-жадвал).

3-жадвал

x_i	1	2	3	4	...	n	...
p_i	p	pq	pq^2	pq^3	...	pq^{n-1}	...

$\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i$ қаторнинг йиғиндисини топамиз. 3-жадвалга кўра:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} pq^{n-1} = p(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}+\ldots).$$



11-расм.

Қавс ичидаги қатор $0 < q < 1$ махражли геометрик прогрессия бўлиб, унинг йиғиндиси $\frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$ дан иборат, демак,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1.$$

Бу тасодифий миқдорнинг тақсимот кўпбурчаги $p = q = \frac{1}{2}$ бўлган ҳол учун 11-расмда тасвирланган.

14-§. ТАҚСИМОТ ФУНКЦИЯ ВА ЭҲТИМОЛЛАР ЗИЧЛИГИ

Тасодифий миқдорларнинг тақсимот қонунини ҳар доим ҳам жадвал ёрдамида бериш мумкин бўлавермайди. Масалан, агар биз узлуксиз тасодифий миқдор (ўтган параграфда таърифланган маънода) ҳақида фикр юритаётган бўлсак, у ҳолда унинг барча қийматларини санаб чиқиш мумкин эмас. Шунинг учун уни дискрет тасодифий миқдорни характерлаганимиздек, айрим қийматларнинг эҳтимоллари билан эмас, балки тасодифий миқдор маълум бир интервалдаги қийматларни қабул қилиши, яъни $\alpha < X < \beta$ кўринишдаги тенгсизликларнинг эҳтимоллари билан характерланади. Шуни айтиш керакки, бундай характеристикалар фақат тасодифий миқдорлар учунгина эмас, балки бошқа объектлар учун ҳам фойдалидир.

Бундан кейин биз тасодифий миқдорнинг x дан кичик қийматларни қабул қилиш эҳтимоли тўғрисида, яъни $-\infty < X < x$ тенгсизликнинг эҳтимоли ҳақида сўз юритамиз. Бу $P(X < x)$ эҳтимол x нинг функцияси эканлиги равшан; у функцияни $F(x)$ билан белгилаймиз:

$$F(x) = P(X < x).$$

$F(x)$ функция *тақсимотнинг интеграл қонуни* ёки *тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси* деб аталади.

Агар тасодифий миқдорнинг қийматларини сон ўқининг нуқталари билан тасвирласак ва x абсциссали нуқтани N ҳарфи билан белгиласак, у ҳолда $F(x)$ функция тасодифий миқдорнинг қиймати бўлган M нуқтанинг N нуқтадан чапроқда бўлиши эҳтимолидан иборат бўлади.

Тақсимот функциянинг баъзи хоссаларини аниқлаймиз.

Фараз қилайлик, X тасодифий миқдор бўлиб, x_1 ва x_2 лар $x_1 < x_2$ шартни қаноатлантирувчи иккита ихтиёрий нуқта бўлсин. $F(x)$ тақсимот функциянинг бу нуқталардаги қийматларини таққослаймиз. $X<x_1$ ҳодисанинг юз беришидан $X<x_2$ ҳодисанинг юз бериши келиб чиққанлиги учун

$$P(X < x_1) \leqslant P(X < x_2)$$

муносабатнинг ўринли бўлиши равшан. Тақсимот функциянинг таърифига кўра эса

$$F(x_1) \leqslant F(x_2)$$

тенгсизлик келиб чиқади.

Шундай қилиб, тақсимот функция ҳар қандай тасодифий миқдор учун *монотон камаймас* функциядир,

Сўнгра $F(-\infty)=0$ ва $F(+\infty)=1$ бўлиши равшан. Бу ердан

$$F(+\infty)-F(-\infty)=1$$

тенгликнинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

$F(x)$ функция монотон ва 0 ва 1 орасида чегараланган бўлганлиги учун $y=F(x)$ функция иккита горизонтал асимптотага эга $x \to -\infty$ да $y=0$ ва $x \to +\infty$ да $y=1$.

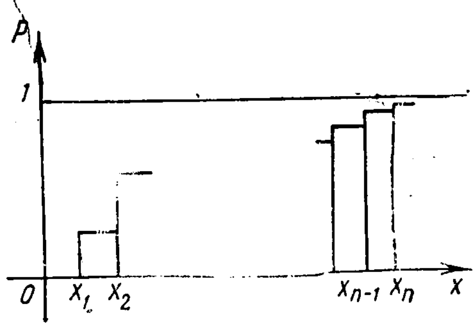
Тақсимот функциянинг санаб ўтилган хоссалари унинг бутун ҳақиқий ўқдаги ҳолатини етарлича ойдинлаштиради. Бу айтилганларга яна, агар тасодифий миқдорнинг барча қийматлари (a, b) интервалга тегишли бўлса, a нуқтанинг чап томонида $F(x)\equiv 0$, b нуқтанинг ўнг томонида эса $F(x)\equiv 1$ бўлишини айтиш қолади.

Тақсимот функцияни исталган типдаги—узлуксиз, шунингдек, дискрет типдаги тасодифий миқдорлар учун ҳам ёзиш мумкин эканини қайд қилиб ўтамиз.

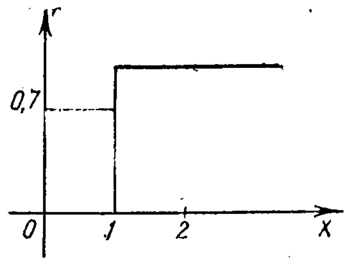
Дискрет тасодифий миқдор учун тақсимот функция ушбу кўринишда бўлади:

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x) = \sum_{x_i < x} p_i,$$

бу ерда қўшиш x_i нинг $x_i < x$ шартни қаноатлантирувчи барча қийматлари учун бажарилади. X нинг иккита кетма-кет қийматлари орасида $F(x)$ ўзгармасдир. x аргумент тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган x_i қийматидан ўтганда $F(x)$ функция сакраб, $p_i = P(X = x_i)$ қийматга ўсади, демак, x_i нуқта $F(x)$ функциянинг биринчи тур узилиш нуқтаси бўлади. Шун-



12- расм.



13- расм.

дай қилиб, дискрет тасодифий миқдор учун тақсимот функция поғонавий функциядир. Унинг кўриниши 12-расмда келтирилган.

Тақсимот функция тузишга доир баъзи мисолларни қараб чиқамиз.

1-мисол. X тасодифий миқдор битта ўқ узишда нишонга тегиш сони бўлиб, бунда ўқнинг нишонга тегиш эҳтимоли 0,3 га тенг.

X нинг мумкин бўлган қийматлари иккита: 0 ва 1 экани равшан. Унинг тақсимот қонуни 1-жадвал кўринишдаги жадвал ёрдамида ёзилиши мумкин. Бундан унинг тақсимот функцияси ушбу тенгсизликлар билан берилиши келиб чиқади:

$$F(x)=\begin{cases} -\infty < x \leqslant 0 & \text{бўлса, } 0, \\ 0 < x \leqslant 1 & \text{бўлса, } 0{,}7, \\ 1 < x < \infty & \text{бўлса, } 1. \end{cases}$$

Тақсимот функциянинг графиги 13-расмда кўрсатилган.

2-мисол. Нуқта [0; 1] кесмага таваккалига (мўлжалга олинмасдан) ташланяпти. Кесмага тушган нуқтанинг абсциссаси X тасодифий миқдор бўлсин (нуқта [0, 1] кесмага албатта тушади деб қаралади).

Бу ҳолда биз барча қийматлари [0, 1] кесмага тегишли бўлган узлуксиз тасодифий миқдорга эга бўламиз. Шунинг учун $x \leqslant 0$ да $F(x)=0$ бўлади, чунки $X < x$ тенгсизлик бу ҳолда бўлиши мумкин эмас. Аксинча, $x \geqslant 1$ да эса $X < x$ тенгсизлик муқаррардир, демак, бу ҳолда $F(x)=1$.

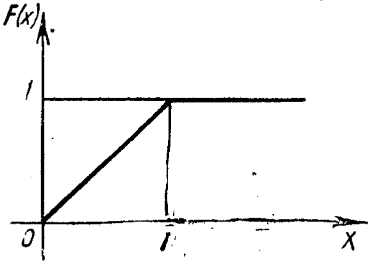
Энди x сон $0 < x < 1$ тенгсизликни қаноатлантирсин. Нуқта кесмага таваккалига ташланаётганлиги сабабли абсциссанинг барча қийматлари тенг эҳтимоллидир. Эҳтимолнинг 8-§ да берилган геометрик таърифига кўра нуқтанинг бирор интервалга тушиш эҳтимоли шу интервалнинг узунлигига пропорционалдир. Ҳозирги ҳолда эса бу эҳтимол шу оралиқнинг узунлигига тенг, чунки [0, 1] кесманинг узунлиги бирга тенг.

Шундай қилиб, $P(X < x)$ эҳтимол $(0, x)$ ораликнинг узунлигига тенг, яъни

$$F(x) = P(X < x) = x.$$

Шундай қилиб, қаралаётган X тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясини узил-кесил

$$F(x) = \begin{cases} -\infty < x < 0 & \text{бўлса, } 0; \\ 0 \leqslant x \leqslant 1 & \text{бўлса, } x; \\ 1 < x < +\infty & \text{бўлса, } 1 \end{cases}$$



14- расм.

кўринишда ёза оламиз. Унинг графиги 14-расмда тасвирланган.

Энди қуйидаги масалани кўриб чиқамиз.

1-масала. X тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясини билган ҳолда унинг $\alpha < X < \beta$ тенгсизликларни қаноатлантириш эҳтимолини топамиз.

Эҳтимолларни қўшиш теоремасига кўра

$$P(X < \beta) = P(X < \alpha) + P(\alpha \leqslant X < \beta)$$

муносабатни ёзамиз. Бу ердан

$$P(\alpha \leqslant X < \beta) = P(X < \beta) - P(X < \alpha).$$

Тақсимот функциянинг таърифидан фойдаланиб,

$$P(\alpha \leqslant X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) \qquad (1)$$

тенгликни ёза оламиз.

(1) тенгликдан $P(X = \alpha)$ эҳтимолни топишда фойдаланиш мумкин. Бунинг учун $\beta \to \alpha$ даги лимитни қараб чиқиш кифоя, чунки $\beta \to \alpha$ да $[\alpha, \beta]$ кесма α нуқтага интилади ва X миқдор α билан устма-уст тушади.

Демак,

$$P(X = \alpha) = \lim_{\beta \to \alpha} P(\alpha \leqslant X < \beta) = \lim_{\beta \to \alpha} [F(\beta) - F(\alpha)].$$

Агар $F(x)$ функция узлуксиз бўлса, охирги лимит нолга тенг. Демак,

$$P(X = \alpha) = 0$$

бўлади, яъни *тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси узлуксиз бўлса, у ҳолда тасодифий миқдорнинг олдиндан берилган қийматни қабул қилиш эҳтимоли нолга тенг.*

$$P(\alpha \leqslant X < \beta) = P(X = \alpha) + P(\alpha < X < \beta),$$

бўлганлигидан, (1) тенглик ўрнига ушбу

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) \tag{2}$$

тенгликни ҳам ёзиш мумкин.

Ўқувчининг диққатини қуйидаги фактга алоҳида қаратамиз. Маълумки, мумкин бўлмаган ҳодисанинг эҳтимоли нолга тенг. Ҳодисаларнинг тўла группаси чекли сондаги ҳодисалардан тузилган ҳолда эҳтимолнинг классик таърифида қуйидаги тескари даъво ҳам ўринли: эҳтимоли ноль бўлган ҳодиса мумкин бўлмаган ҳодисадир. Бу тескари даъво узлуксиз тасодифий миқдор учун тўғри эмас. Ҳозиргина биз олдиндан танланган α сон учун $X = \alpha$ бўлишининг эҳтимоли ноль бўлишини кўрган бўлсак-да, бу ҳодиса мумкин бўлмаган ҳодиса бўла олмайди. Бунга ўхшаш ҳолга биз 8-§ да геометрик эҳтимолни қараётганимизда дуч келган эдик.

Тақсимот функцияси узлуксиз ва дифференциалланувчи бўлган X узлуксиз тасодифий миқдорни текширамиз. Тақсимот функциянинг ҳосиласи

$$\varphi(x) = F'(x)$$

ҳам муҳим роль ўйнайди. Бу $\varphi(x)$ функцияни *X тасодифий миқдор тақсимотининг дифференциал қонуни ёки эҳтимоллар зичлиги дейилади.*

Бу функциянинг эҳтимолий маъносини осонгина кўрсатиш мумкин. Ҳосиланинг таърифидан

$$\varphi(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \tag{3}$$

эканц келиб чиқади. (3) ифоданинг сурати X тасодифий миқдорнинг x ва $x + \Delta x$ лар орасидаги қийматларни қабул қилиш эҳтимоли эканини юқорида кўрган эдик:

$$F(x + \Delta x) - F(x) = P(x < X < x + \Delta x).$$

Шундай қилиб, (3) тенглик ўрнига ушбу

$$\varphi(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} \tag{4}$$

тенгликни ёза оламиз, яъни *X тасодифий миқдорнинг x нуқтадаги эҳтимоллар зичлиги x нинг $(x, x + \Delta x)$ оралиққа тушиш эҳтимолининг Δx га нисбатининг Δx нолга интилгандаги лимитига тенг.*

Эҳтимоллар зичлигининг ролини янада чуқурроқ англатиш мақсадида юқоридаги масалага ўхшаш бўлган яна битта масалани қараб чиқамиз.

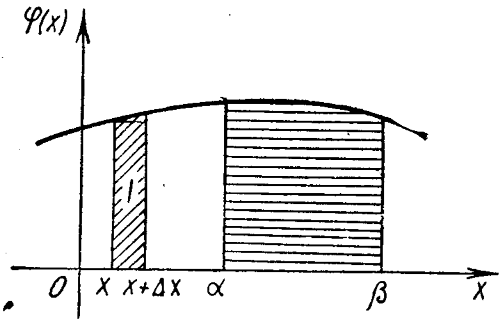
2-масала. X тасодифий миқдорнинг эҳтимоллар зичлигини билган ҳолда X нинг $\alpha < X < \beta$ тенгсизликларни қаноатлантириш эҳтимолини топамиз.

(2) тенгликдан ва интеграл ҳисобдан маълум бўлган Ньютон—Лейбниц формуласидан фойдаланиб, ушбу тенгликни ёза оламиз:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} F'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)dx.$$

(5) формулага осонгина геометрик маъно бериш мумкин. Тақсимот зичлиги $y = \varphi(x)$ нинг графигини чизамиз (15-расм). (4) дан кўринадики, Δx га нисбатан юқори тартибли чексиз миқдор аниқлигида

$$P(x < X < x + \Delta x) \approx \varphi(x)\Delta x$$



15- расм.

тақрибий тенглик ўринли. Ҳосил қилинган кўпайтма оғма чизиқлар билан штрихланган тўғри тўртбурчакнинг юзи орқали геометрик тасвирланади (15-расм). Тасодифий миқдорнинг (α, β) оралиқнинг ичидаги қийматларни қабул қилиш эҳтимоли шу қисмнинг устида жойлашган ва юқоридан $y = \varphi(x)$ функциянинг графиги билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзи орқали тасвирланади. (5) формуланинг геометрик маъноси ана шундан иборатдир. $y = \varphi(x)$ эгри чизиқ доимо Ox ў қ н и н г ю қ о р и с и д а ётишини қайд қиламиз. Ҳақиқатан ҳам, юқорида кўрсатганимиздек, $F(x)$ тақсимот функция монотон камаймас функция, у ҳолда бундай функция ҳосиласининг манфий бўла олмаслиги дифференциал ҳисобдан маълум, яъни $\varphi(x) \geqslant 0$.

(5) тенгликдан ва тақсимот функциянинг хоссаларидан

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1 \tag{6}$$

экани ҳам келиб чиқади.

Тақсимотнинг интеграл қонуни ифодасини унинг дифференциал қонуни орқали осонгина ифодалаш мумкин. Тақсимотнинг интеграл қонуни унинг дифференциал қонунининг бошланғич функцияси бўлиб, у $x \to -\infty$ да нолга айланади. Шунинг учун

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt. \tag{7}$$

3-мисол. 2-мисолда қараб чиқилган X тасодифий миқдор эҳтимолининг тақсимот зичлигини топамиз.

Тақсимот зичлигининг таърифига кўра осонгина топамиз:

$$\varphi(x)=\begin{cases}-\infty<x<0 & \text{бўлса, } 0,\\ 0<x<1 & \text{бўлса, } 1,\\ 1<x<+\infty & \text{бўлса, } 0.\end{cases}$$

$x=0$ ва $x=1$ нуқталарда $\varphi(x)$ функция мавжуд эмас. Бу нуқталарда тақсимотнинг интеграл қонуни бўлган $F(x)$ функциянинг графиги синишга эга (14-расмга қаранг).

4-мисол. Тақсимотнинг кўрсаткичли дифференциал қонуни ушбу кўринишда берилган:

$$\varphi(x)=\begin{cases}x<0 & \text{бўлса, } 0,\\ x\geqslant 0 & \text{бўлса, } Ae^{-\lambda x},\end{cases}$$

бу ерда A ва λ — ўзгармас катталиклар. λ ни берилган деб ҳисоблаб, A ни топамиз ва тақсимот функцияни аниқлаймиз. (6) формулага кўра

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=\int_{0}^{\infty}Ae^{-\lambda x}\,dx=-\frac{A}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{A}{\lambda}=1,$$

яъни $A=\lambda$. Энди (7) формулага асосан $x>0$ бўлганда

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt=\lambda\int_{-\infty}^{x}e^{-\lambda t}\,dt=-e^{-\lambda t}\Big|_{0}^{x}=1-e^{-\lambda x}$$

ни ҳосил қиламиз.

$x\leqslant 0$ бўлганда $F(x)=0$ бўлиши равшан. Ўқувчига дифференциал ва интеграл қонунларнинг графикларини мустақил чизишни тавсия қиламиз. 3-мисолдагига ўхшаш, бу ерда ҳам $F(x)$ функциянинг графиги координата бошида бурчак нуқтага эга.

5-мисол. Электрон лампанинг ишлаш вақти X тасодифий миқдор бўлсин. Ишлаётган лампанинг унча катта бўлмаган вақт ичида ишдан чиқиш эҳтимоли унинг кейинги ишлаш вақтига тақрибан пропорционал эканлиги ва лампанинг аввал қанча ишлаганлигига боғлиқ бўлмаслиги тажриба ёрдамида аниқланган. X тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясини топамиз.

Лампанинг камида x кун ишлаши A ҳодиса, унинг x ва $x+\Delta x$ кунлар орасида ишдан чиқиши эса B ҳодиса бўлсин. Биз қуйидагига эгамиз:

$$P(A)=P(X\geqslant x)=1-P(X<x)=1-F(x),$$

$$P(B)=P(x<X<x+\Delta x)=F(x+\Delta x)-F(x).$$

Биз ишлаётган лампани кузата бошлаганимиз учун тажриба натижасида $P(B)$ эҳтимол эмас, балки $P_A(B)$ шартли эҳтимол аниқланади. У ҳолда кўпайтириш теоремаси натижасидан фойдаланамиз:

$$P(A)\,P_A(B) = P(B)\,P_B(A)$$

ва агар B ҳодиса юз берган бўлса, A ҳодиса ҳам албатта юз беришини, яъни $P_B(A) = 1$ эканини қайд қиламиз. Шунинг учун

$$P_A(B) = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{1 - F(x)}.$$

Агар Δx етарлича кичик бўлса, ушбу тенгликни ёза оламиз:

$$P_A(B) \approx \frac{\varphi(x)\,\Delta x}{1 - F(x)}, \tag{8}$$

Бу ерда $\varphi(x) = F'(x)$ — тақсимот зичлиги. Иккинчи томондан, шартга кўра $P_A(B)$ эҳтимол учун ушбу

$$P_A(B) \approx k\Delta x \tag{9}$$

(k — пропорционаллик коэффициенти) тақрибий тенглик ўринли. (8) ва (9) тақрибий тенгликларни таққослаб ва уларнинг хатоликлари $\Delta x \to 0$ да нолга интилишини эътиборга олиб,

$$\frac{\varphi(x)}{1 - F(x)} = k \quad \text{ёки} \quad \varphi(x) = k - kF(x)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Охирги тенгликни дифференциаллаб, изланаётган эҳтимоллар зичлиги учун ушбу

$$\varphi'(x) = -k\varphi(x)$$

дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламани интеграллаш эса $\varphi(x) = Ce^{-kx}$ (C — ихтиёрий ўзгармас) ечимни беради. Ўзгармас катталик C ни топиш учун бизнинг масаламизда $X \geqslant 0$ бўлганлигидан $x < 0$ да $\varphi(x) = 0$ эканини қайд қиламиз. 3-мисолнинг ечимига кўра $C = k$ эканини аниқлаймиз. Шунинг учун ёза оламиз:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x < 0 & \text{бўлса,} \quad 0; \\ x \geqslant 0 & \text{бўлса,} \quad ke^{-kx}; \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} x < 0 & \text{бўлса,} \quad 0; \\ x \geqslant 0 & \text{бўлса.} \quad 1 - e^{-kx}. \end{cases}$$

k коэффициент тажриба ёрдамида топилиши керак. Уни 0,01 га тенг деб оламиз (вақтни кунлар билан ўлчаганда) ва 1) электрон лампа камида 30 кун ишлаш эҳтимолини; 2) унинг 30- ва 40-кунлар орасида бузилиш эҳтимолини ҳисоблаймиз.

Биринчи савол қуйидагича ҳал қилинади:

$$P_1 = 1 - F(30) = 1 - (1 - e^{-0,3}) = e^{-0,3} \approx 0,74.$$

Иккинчи эҳтимол учун эса ушбу натижани ҳосил қиламиз:

$$P_2 = \int_{30}^{40} \varphi(x)dx = F(40) - F(30) = e^{-0,3} - e^{-0,4} \approx 0,74 - 0,67 = 0,07.$$

15-§. ДИСКРЕТ ВА УЗЛУКСИЗ ТАҚСИМОТЛАРНИНГ АСОСИЙ МИСОЛЛАРИ

Тақсимот функция ва эҳтимоллар зичлигининг олдинги параграфда берилган тушунчаларидан фойдаланиб, узлуксиз тасодифий миқдорга энди аниқ таъриф бериш мумкин.

Агар тасодифий миқдорнинг $F(x)$ тақсимот функцияси бутун сон ўқида узлуксиз бўлиб, тақсимот зичлиги $\varphi(x) = F'(x)$ мавжуд ва деярли ҳамма ерда узлуксиз (нуқталарнинг дискрет тўпламидагина узилишга эга бўлиши мумкин) бўлса, у ҳолда бундай тасодифий миқдор узлуксиз дейилади. Шу билан бирга $\varphi(x)$ зичлик функция биринчи тур узилиш нуқталарига ҳам, чексиз узилиш нуқталарига ҳам эга бўлиши мумкин.

Мазкур параграфда узлуксиз ва дискрет тасодифий миқдорларнинг кўпроқ учрайдиган типлари келтирилади ва уларнинг татбиқ қилинишига доир мисоллар кўрсатилади.

I. Эҳтимолнинг текис тақсимоти. Эҳтимоллар зичлиги (a, b) оралиқда ўзгармас бўлиб, унинг ташқарисида эса нолга тенг бўлсин. Агар бу ўзгармасни A десак, 14-параграфдаги (6) формулага асосан:

$$\int_a^b A dx = 1,$$

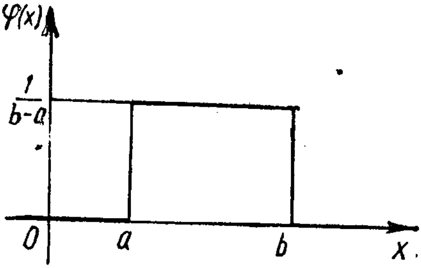
бу ердан $A = \frac{1}{b-a}$.

Шунинг учун текис тақсимотнинг зичлик функцияси ушбу формула билан берилади (16-расм):

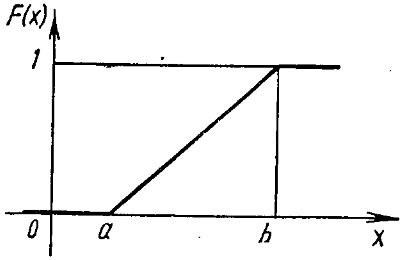
$$\varphi(x) = \begin{cases} -\infty < x < a & \text{бўлса,} \quad 0, \\ a < x < b & \text{бўлса,} \quad \frac{1}{b-a}, \\ b < x < +\infty & \text{бўлса,} \quad 0. \end{cases} \qquad (1)$$

$x = a$ ва $x = b$ нуқталарда $\varphi(x)$ функция узилишга эга. Олдинги параграфнинг (7) формуласидан фойдаланиб тақсимотнинг интеграл қонунини топамиз. Агар $x \leqslant a$ бўлса, у ҳолда

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = 0.$$



16- расм.



17- расм.

Барча $a < x < b$ лар учун:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{a} \varphi(t)\,dt + \int_{a}^{x} \varphi(t)\,dt = 0 + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{x-a}{b-a},$$

чунки $a < t < b$ учун $\varphi(t) = \frac{1}{b-a}$. Ниҳоят, агар $x \geqslant b$ бўлса,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{a} \varphi(t)\,dt + \int_{a}^{b} \varphi(t)\,dt + \int_{b}^{x} \varphi(t)\,dt =$$

$$= 0 + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\,dt + 0 = 1.$$

Шундай қилиб, текис тақсимотнинг интеграл қонуни ушбу формула билан аниқланади (17-расм):

$$F(x) = \begin{cases} -\infty < x \leqslant a & \text{бўлса,} \quad 0, \\ a < x < b & \text{бўлса,} \quad \dfrac{x-a}{b-a} \\ b \leqslant x < +\infty & \text{бўлса,} \quad 1. \end{cases}$$

Бу функция ҳамма жойда узлуксиз. 14-§ да текис тақсимотнинг хусусий ҳолини кўрган эдик (2-мисолга қаранг).

II. Коши қонуни. X тасодифий миқдорнинг тақсимот зичлиги

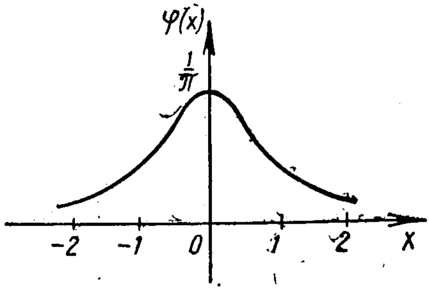
$$\varphi(x) = \frac{A}{1+x^2}$$

формула билан берилган бўлсин. Юқоридагига ўхшаш, A катталик ушбу

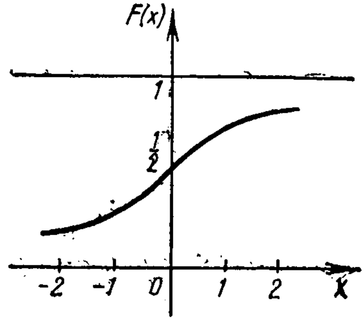
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A}{1+x^2}\,dx = A \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi A = 1$$

муносабатдан аниқланади. Бу ердан $A = \frac{1}{\pi}$. Шундай қилиб, Коши қонуни ушбу кўринишни олади (18-расм);

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}. \qquad (2)$$



18- расм.



19- расм.

14- § даги (7) формулага асосланиб, тақсимот функцияни топамиз (19-расм):

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt=\int_{-\infty}^{x}\frac{dt}{\pi(1+t^2)}=\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}t\Big|_{-\infty}^{x}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}x+\frac{1}{2}.$$

Мисол сифатида Коши қонуни бўйича тақсимланган тасодифий миқдорнинг $(-1, 1)$ оралиққа тегишли қийматларни қабул қилиш эҳтимолини топамиз. Ўтган параграфнинг (2) формуласига кўра:

$$P(-1<x<1)=F(1)-F(-1)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{1}{2}.$$

III. Арксинус қонуни. Тақсимот зичлиги қуйидагича берилган бўлсин:

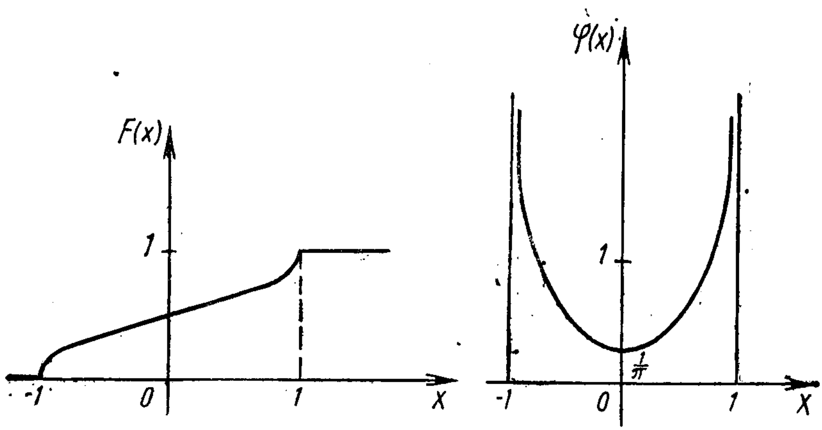
$$\varphi(x)=\begin{cases}-\infty<x<-1 & \text{бўлса, } 0,\\ -1<x<1 & \text{бўлса, } \dfrac{A}{\sqrt{1-x^2}},\\ 1<x<+\infty & \text{бўлса, } 0.\end{cases}$$

Аввал A катталикни топамиз:

$$\int_{-1}^{1}\frac{A}{\sqrt{1-x^2}}dx=A\arcsin x\Big|_{-1}^{1}=\pi A=1,$$

яъни $A=\frac{1}{\pi}$. Энди тақсимот функциянинг ифодасини топамиз:

$$F(x)=\begin{cases}-\infty<x<-1 \text{ бўлса, } 0,\\ -1<x<1 \quad \text{бўлса, } \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{\pi}\arcsin x+\frac{1}{2},\\ 1<x<+\infty \quad \text{бўлса, } 1.\end{cases}$$



20- расм.

$\varphi(x)$ ва $F(x)$ функцияларнинг графиклари 20- расмда тасвирланган. $\varphi(x)$ функция $x=-1$ ва $x=1$ нуқталарда чексиз узилишга эга.

IV. Биномиал тақсимот. Ҳар бирида A ҳодисанинг юз бериш эҳтимоли p га тенг бўлган n та эркли синов сериясини қарайлик. X тасодифий миқдор ҳодисаларнинг юз бериш сони бўлсин. X дискрет бўлиб, унинг мумкин бўлган қийматлари 0, 1, 2, ... манфий бўлмаган бутун сонлардан иборат.

X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни бизга маълум бўлган (4-параграфга қаранг) ва $X=m$ тенгликнинг эҳтимолини аниқловчи

$$P_{m,n}=C_n^m p^m q^{n-m} \tag{3}$$

формула билан берилади. 4-параграфда кўрсатилганидек, бу ифода $(p+q)^n$ бином ёйилмасининг ҳадидан иборат. Шунинг учун X *тасодифий миқдор биномиал тақсимот қонунига бўйсунади* дейилади.

Биномиал тақсимотнинг татбиқ қилинишига доир мисолларни олдинги параграфларда кўрган эдик.

V. Нормал тақсимот қонун (*Гаусс қонуни*). Практикада учрайдиган тасодифий миқдорлар бўйсунадиган тақсимот қонунлар орасида кўпроқ нормал тақсимот қонун билан иш кўришга тўғри келади. Бу қонун учун $\varphi(x)$ эҳтимоллар зичлиги ушбу

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \tag{4}$$

формула билан берилади. Бу функция учун 14-параграфдаги (6) формула билан ифода қилинган шартнинг бажарилишини текширамиз, чунки у мусбатдир. Бунинг учун $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$

интегралда $\frac{x-a}{\sigma}=t$, $dx=\sigma dt$ деб, ўзгарувчиларни алмаштирамиз у ҳолда:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

10-параграфда кўрсатилганидек, бу интеграл бирга тенг.

9-параграфдаги синовларни такрорлаш ҳақидаги масалада асимптотик формулани қараётганимизда нормал тақсимот қонуннинг хусусий ҳоли ($a=0$, $\sigma=1$) билан танишган эдик. 10-параграфда $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ функция тўла ўрганилиб, унинг ўша ерда графиги ҳам чизилган эди (7-расм).

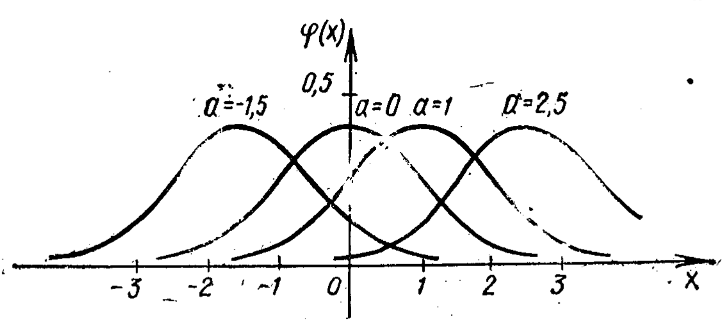
(4) функциянинг графигини чизиш учун аввало a ва σ параметрларнинг геометрик маъносини аниқлаймиз. Бу параметрларнинг эҳтимолий маъносини аниқлашни эса кейинроққа қолдирамиз.

(4) формуладан кўринадики, $x=a$ бўлганда $y=\varphi(x)$ функция максимумга эришади ва унинг максимал қиймати

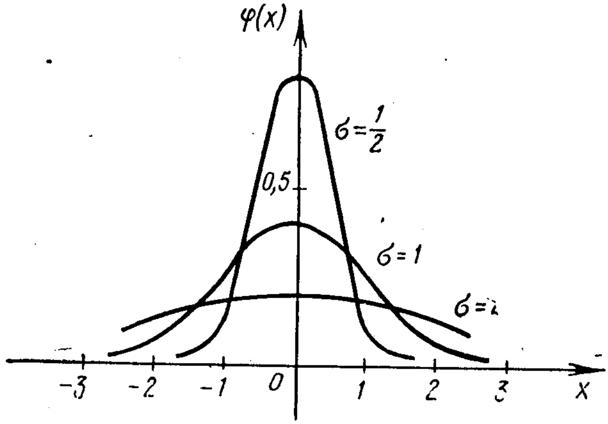
$$y_{max}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

дан иборат. σ миқдорнинг ортиши билан функциянинг максимал қиймати камаяди. Абсциссалар ўқи ва бу эгри чизиқ билан чегараланган бутун юз бирга тенг бўлганлиги учун σ нинг ортиши билан эгри чизиқ Ox ўқ бўйлаб гўёки чўзилади. Аксинча, σ камайиши билан у горизонтал йўналишда қисилиб, максимум қиймати атрофида юқорига қараб чўзилади.

21-расмда $y=\varphi(x)$ нормал қонунларнинг σ ўзгармаганда a нинг ҳар хил қийматлари учун графиклари берилган. Аксинча, 22-расмда $a=0$ бўлганда σ нинг ҳар хил қийматлари учун $y=\varphi(x)$ функцияларнинг графиклари берилган.



21-расм.



22- расм.

Нормал тақсимот қонуннинг бундай тез-тез учратилиш сабаби қуйидагича изоҳланади. Агар тасодифий миқдорнинг қабул қиладиган қийматлари ҳар бирини алоҳида олганда бу тасодифий миқдорга нисбатан кам таъсир қиладиган жуда катта сондаги факторларга боғлиқ бўлса, у ҳолда қаралаётган тасодифий миқдор нормал тақсимот қонунга бўйсунади деб тақрибан ҳисоблаш мумкин. Бу фикрнинг ҳақиқатан ҳам тўғрилигини тасдиқлайдиган барча шартларнинг аниқ баёни 23-параграфда қаралади.

Мисол сифатида снарядларнинг сочилиши ҳақидаги масалани кўрсатиш мумкин. Тўпдан нишонни ўзгартирмасдан ва бошқа ҳамма шароитларни сақлаган ҳолда снаряд отиляпти. Снарядларнинг ҳаммаси бир тўғри чизиққа тушади ва уларнинг сочилиши симметрик, яъни нишонга олиш нуқтасидан нарига ва берига тушиши тенг эҳтимолли деб фараз қилинади. Снаряд тушган нуқтанинг координатаси X тасодифий миқдор деб олинади. Снаряд тушган нуқтанинг нишонга олинган нуқтадан четланиши жуда кўп факторларга боғлиқ бўлиши равшан: бундай факторлар атмосфера шароитларининг ўзгаришидан, снаряд формасининг ўзгаришидан, заряднинг (порохнинг) ҳар хил оғирликда бўлишидан ва ҳоказолардан иборатдир. Демак, юқорида айтилганга кўра, X тасодифий миқдорнинг нормал тақсимот қонунга тақрибан бўйсуниши шарт деб айта оламиз. Ҳақиқатан ҳам, тақсимот қонуннинг нормал қонунга мос келишини тажрибалар натижаси тасдиқлайди. Энди нормал тақсимот қонунга биномиал қонуннинг яқинлашиши ҳақидаги фактни (9- § ва 12- § га қаранг) ҳам тушунтира оламиз. Гап шундаки, синовлардаги ижобий натижаларнинг жами сони кўп сондаги айрим ижобий натижалар йиғиндиси бўлиб, уларнинг ҳар бири бу жами сонга ўз-ўзича жуда кам таъсир қилади.

14-параграфда қаралган 1- ва 2-мисолларга ўхшаш бўлган қуйидаги масалани кўриб чиқиш билан нормал тақсимот қонунни текширишга якун ясаймиз.

3-масала. X_1 тасодифий миқдор

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

эҳтимоллар зичлигига эга бўлган нормал қонун бўйича тақсимланган. X тасодифий миқдорнинг $\alpha < X < \beta$ тенгсизликларни қаноатлантириш эҳтимоли топилсин.

14-§ даги (5) формуладан фойдаланиб,

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)}{2\sigma^2}} dx$$

натижани оламиз. Охирги интеграл Лаплас интегралига осонгина келтирилади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\frac{x-a}{\sigma} = t, \quad dx = \sigma\,dt$$

деб олайлик. У ҳолда

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \qquad (5)$$

$\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)$ ва $\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$ қийматлар иловада келтирилган жадвалдан топилади. $a=0$ ва $\sigma=1$ бўлганда биз ушбу содда натижага эга бўламиз: $P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$.

a нуқтага нисбатан симметрик бўлган интервал учун (5) формула соддалашади. $\beta = a+\gamma$ ва $\alpha = a-\gamma$ бўлсин; у ҳолда

$$P(a-\gamma < X < a+\gamma) = \Phi\left(\frac{\gamma}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\gamma}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\gamma}{\sigma}\right). \qquad (6)$$

Баъзи-бир сонли ҳисоблашларни бажарайлик. Дастлаб, $\alpha=a$ ва $\beta = a+\sigma$ деб оламиз. У ҳолда (5) формула

$$P(a < X < a+\sigma) = \Phi(1) - \Phi(0) = 0{,}3413$$

натижани беради.

Худди шунга ўхшаш қуйидагиларни топамиз:

$$P(a+\sigma < X < a+2\sigma) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0{,}4772 - 0{,}3413 = 0{,}1359;$$

$$P(a+2\sigma < X < a+3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(2) = 0{,}49865 - 0{,}4772 = 0{,}02145.$$

Агар $\alpha = a - 3\sigma$ ва $\beta = a + 3\sigma$ десак, у ҳолда

$$P(a - 3\sigma < X < a + 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0{,}9973.$$

Охирги натижа *нормал тақсимот қонунга бўйсунувчи тасодифий миқдорнинг* $(a - 3\sigma;\ a + 3\sigma)$ *интервалдан ташқарига чиқмаслигини бирга яқин* $(\approx 0{,}9973)$ *эҳтимол билан айтиш мумкинлигини кўрсатади*. Бу даъво *уч сигма қоидаси* деб юритилади.

VI. Пуассон тақсимот қонуни. Пуассон қонуни ҳам нормал тақсимот қонуни каби эҳтимоллар назариясининг турли татбиқларида жуда кўп учрайди. 11-§ да кўрганимиздек, кичик p эҳтимолларда Пуассон қонуни тақсимотнинг биномиал қонуни учун асимптотик қонун сифатида ҳосил қилиниши мумкин. Шу сабабга кўра Пуассон қонунини кўп ҳолларда *кам юз берувчи* (*сийрак*) ҳодисалар қонуни деб аталади.

X — манфий бўлмаган бутун қийматлар қабул қилувчи дискрет тасодифий миқдор бўлсин. Агар $X=m$ тенгликнинг эҳтимоли ушбу

$$P_m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \tag{7}$$

формула билан аниқланса, у ҳолда биз X *миқдор Пуассон қонуни бўйича тақсимланган* деймиз.

Ушбу

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m = e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

муносабатнинг тўғрилигини осонгина текшириш мумкин. Оммавий хизмат кўрсатиш масалаларига оид кўплаб мисоллар Пуассон қонунига бўйсунувчи тасодифий миқдорларга олиб келади.

Мисол сифатида телефон станциясининг ишлашини кўрсатамиз. Баъзи-бир шартлар бажарилганда t вақт оралиғида станцияга m та чақириқ келиш эҳтимоли

$$P_m(t) = \frac{(at)^m}{m!} e^{-at} \tag{8}$$

формула билан ҳисобланишини исботлаш мумкин.

Агар $at = \lambda$ деб олсак, у ҳолда (8) формула X тасодифий миқдорнинг *Пуассон қонуни бўйича тақсимланганлигини* кўрсатади.

16-§. ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАРНИНГ СОНЛИ ХАРАКТЕРИСТИКАЛАРИ. МАТЕМАТИК КУТИЛИШ ВА ДИСПЕРСИЯ

Юқорида, агар тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни маълум бўлса, уни қандай ўрганиш мумкинлиги билан танишдик. Бир қатор ҳолларда практикада қўйилган масалаларни ҳал қилиш учун тасодифий миқдорларнинг баъзи-бир сонли характеристикаларини қараб чиқиш билан чегараланиш мумкин. Бундай характеристикаларнинг таърифлари тасодифий миқдорларнинг тақсимот қонунлари ёрдамида берилади. Ҳатто тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни баъзан номаълум бўлиб, шу сабабли уни тўлиқ ўрганиш мумкин бўлмай қолади, лекин тасодифий миқдорнинг бу сонли характеристикаларини билиш унга доир баъзи масалаларни ҳал қилишга имкон беради.

Тасодифий миқдорларнинг ҳозир биз танишадиган асосий сонли характеристикалари унинг *математик кутилиши* (ёки *ўртача қиймати*) ва дисперсиясидир.

Айтайлик, X – қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари $x_1 \ldots, x_n$ дан иборат дискрет тасодифий миқдор бўлиб, уларнинг ҳар бирини мос равишда $p_1, p_2, \ldots, p_n$ эҳтимоллар билан қабул қилсин, демак,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

X тасодифий миқдорнинг *математик кутилиши* деб ушбу

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i \qquad (1)$$

тенглик билан аниқланувчи $M(X)$ (баъзан $E(X)$ кўринишда ҳам белгиланади) сонга айтилади.

Дискрет тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари сони чексиз бўлиши ҳам мумкин. Бу ҳолда эҳтимоллар йиғиндиси қатордан (бирга яқинлашувчи) иборат бўлади ва математик кутилишни таърифлаш учун

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} x_ip_i \qquad (2)$$

қатордан фойдаланилади. Математик кутилиш мавжуд бўлиши учун (2) қаторни абсолют яқинлашувчи деб фараз қилинади.*

---

* Агар (2) қатор абсолют яқинлашувчи бўлмаганда эди,тасодифий миқдорнинг математик кутилиши унинг қийматларининг жойланиш тартибига боғлиқ бўлар эди. Бу боғлиқлиги эса биз истисно қилмоқчимиз, чунки математик кутилиш тўла аниқланган сон бўлиши керак.

Шундай қилиб, *дискрет тасодифий миқдорнинг математик кутилиши (ёки ўртача қиймати) деб, унинг мумкин бўлган қийматларини шу қийматларга мос эҳтимолларга кўпайтмаларининг йиғиндисига айтилади.*

Математик кутилишнинг ифодаси қуйидаги механикавий маънога эга. $\sum_i p_i = 1$ эканини эътиборга олиб, (1) ни қуйидагича ёзамиз:

$$M(X) = \frac{\sum x_i p_i}{\sum p_i}. \tag{8}$$

(8) дан тасодифий миқдорнинг математик кутилиши $M(X)$: абсциссалари X нинг мумкин бўлган қийматларидан иборат нуқталар системаси оғирлик марказининг абсциссаси, бу нуқталарга қўйилган массалар эса шу қийматларга мос эҳтимолларга тенг эканлиги келиб чиқади.

Баъзи мисолларни қараб чиқамиз.

1-мисол. Ўйин соққасини ташлаганда тушадиган очколар сонидан иборат бўлган X тасодифий миқдорнинг математик кутилишини топамиз (13-§ даги 1-мисолга қаранг).

Бу ерда X тасодифий миқдор 1 дан 6 гача қийматларнинг ҳар бирини 1/6 эҳтимол билан қабул қилади. Демак,

$$M(X) = \sum_{n=1}^{6} n \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1+6}{2} \cdot 6 = 3{,}5.$$

Шундай қилиб, математик кутилиш 3,5 га тенг бўлиб, бу сон X нинг қабул қилинадиган қийматларидан бирортасига ҳам тенг эмас.

2-мисол. Биринчи нишонга теккунга қадар узилган ўқлар сони X тасодифий миқдор бўлсин, бунда ҳар бир ўқ узишда ўқнинг нишонга тегиш эҳтимоли p га тенг (13-§, 2-мисолга қаранг). $M(X)$ ни топамиз.

13-§ даги 2-мисолни ечганда X тасодифий миқдорнинг 1, 2, ..., n, ... қийматларни мос равишда $p, pq, \ldots, pq^{n-1}, \ldots$ ($q = 1 - p$) эҳтимоллар билан қабул қилиши мумкинлигини кўрсатган эдик. У ҳолда қуйидагига эга бўламиз:

$$M(X) = \sum_{n=1}^{\infty} npq^{n-1} = p\sum_{n=1} nq^{n-1}.$$

Охирги йиғиндини ҳисоблаш учун

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots = \frac{1}{1-q} \quad (|q| < 1)$$

геометрик прогрессия ҳадларининг йиғиндиси формуласидан фойдаланамиз ва бу тенгликнинг иккала қисмини q бўйича дифференциаллаймиз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = 1+2q+3q^2+\ldots+nq^{n-1}+\ldots=\frac{1}{(1-q)^2}.$$

Натижада

$$M(X)=\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}$$

ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, нишонни мўлжалга олиш учун талаб қилинадиган ўқларнинг ўртача сони $\frac{1}{p}$ га тенг. Бу сон отишлар серияси сони катта бўлганда, ўртача нечта ўқ узиш талаб қилинишини кўрсатади. У шунингдек, зарур снарядлар сонини аниқлаш учун бошланғич маълумот бўлиши ҳам мумкин.

3-мисол. Ҳаммасига ютуқ чиқадиган N та лотерея бўлиб, улардан m_1 тасига x_1 сўмдан, m_2 тасига x_2 сўмдан, ..., m_n тасига x_n сўмдан ютуқ чиқади. Барча билетларни сотишдан йиғилган пул ҳамма ютуқларнинг йиғиндисига тенг бўлиши учун билетнинг нархи a қанча бўлиши керак?

Бу шарт

$$Na=m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n$$

бўлишини кўрсатади, бу ерда $N=m_1+m_2+\ldots+m_n$. Демак,

$$a=\frac{m_1}{N}x_1+\frac{m_2}{N}x_2+\ldots+\frac{m_n}{N}x_n.$$

Битта билетга чиқиши мумкин бўлган ютуқни англатувчи X тасодифий миқдорни қараймиз. Бу тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари x_1, x_2, ..., x_n бўлади. Бундай ҳар бир қийматнинг эҳтимоли $p_i=\frac{m_i}{N}$ бўлишини ҳисоблаш қийин эмас. Билетнинг нархи a учун ҳосил қилинган ифодани тасодифий миқдорнинг

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} p_ix_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{N}x_i$$

математик кутилиши ифодаси билан солиштириб, билетнинг изланаётган нархи a ютуқлар йиғиндисининг математик кутилишига тенг эканлигини кўрамиз:

$$a=M(X).$$

Узлуксиз тасодифий миқдорнинг ҳар бир алоҳида қийматининг эҳтимоли нолга тенг бўлганлиги учун, математик кутилишнинг (1) ёки (2) таърифлари узлуксиз тасодифий миқдор учун яроқсиздир.

Эҳтимоллар зичлиги $\varphi(x)$ бўлган узлуксиз X тасодифий миқдорнинг математик кутилиши деб,

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,\varphi(x)\,dx \tag{4}$$

интегралга айтилади.

(4) формула (1) формуланинг интеграл кўринишидир. Ҳақиқатан ҳам, тасодифий миқдорнинг $(x;\ x+dx)$ оралиқдаги барча қийматларини тақрибан x га тенг деб ҳисоблаш мумкин. Бундай қийматларнинг эҳтимоллари эса 14- § да кўрсатилганидек, $\varphi(x)\,dx$ га тенг. Шунинг учун x_i қийматлар x билан, p_i эҳтимоллар $\varphi(x)dx$ билан, йиғинди эса интеграл билан алмаштирилади.

Дискрет тасодифий миқдор учун қилинганидек, узлуксиз тасодифий миқдорнинг математик кутилишига ҳам механикавий маъно бериш мумкин. Бунинг учун 14- параграфдаги

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx=1$$

тенгликдан фойдаланиб, (4) формулани

$$M(X)=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx} \tag{5}$$

кўринишда ёзиш кифоя. (5) формуладан кўринадики, математик кутилиш $y=\varphi(x)$ функциянинг (эҳтимоллар зичлиги) графиги ва абсциссалар ўқи билан чегараланган бир жинсли текис фигура оғирлик марказининг абсциссасига тенгдир.

Энди тақсимот қонунлари 15- § да ўрганилган дискрет ва узлуксиз тасодифий миқдорларнинг математик кутилишларини аниқлаймиз.

1. Биномиал тақсимот. Агар ҳар бир алоҳида синовда A ҳодисанинг юз бериш эҳтимоли p га тенг бўлса, n та синовли сёрияда A ҳодиса юз бериш сонининг математик кутилишини ҳисоблаймиз.

4- ва 15- § лардан маълумки, A ҳодисанинг юз бериш сонини англатувчи X тасодифий миқдор биномиал тақсимот қонунга бўйсунади: у $m=0,\ 1,\ 2,\ldots$, қийматларни $P_{m,n}=C_n^m p^m q^{n-m}$ эҳтимоллар билан қабул қилади. Бошқача қилиб айтганда, тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни қуйидаги жадвал билан берилади (4- жадвал):

4- жадвал

x_i	0	1	2	...	m	...	n
p_i	q^n	npq^{n-1}	$\frac{n(n-1)}{1-2}p^2q^{n-2}$	...	$C_n^m p^m q^{n-m}$	...	p^n

Математик кутилишнинг таърифига асосан:

$$M(X) = 0 \cdot q^n + 1 \cdot npq^{n-1} + 2\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} p^2q^{n-2} + \ldots +$$
$$+ m \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m} p^m q^{n-m} + \ldots + nq^n.$$

np ни қавсдан ташқарига чиқариб ва тегишли қисқартиришларни бажариб топамиз:

$$M(X) = np\Big[q^{n-1} + (n-1)pq^{n-2} + \ldots + \frac{(n-1)\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (m-1)} \times$$
$$\times p^{m-1}q^{n-m} + \ldots + (n-1)p^{(n-1)}\Big].$$

Ўрта қавс ичида турган ифода $(p+q)^{n-1}$ биномнинг ёйилмаси бўлиб, у бирга тенг, чунки $p+q=1$. Шунинг учун

$$M(X) = np \tag{6}$$

бўлади.

Маълумки, A ҳодиса рўй беришининг энг катта эҳтимолли сони учун 4- § да

$$np - q < \mu < np + p \tag{7}$$

баҳони олган эдик. (6) ва (7) ни таққослаб, μ A ҳодисанинг юз бериш сонининг математик кутилишидан бирдан кичик сонга фарқ қилувчи бутун сон эканини кўрамиз.

II. Пуассон қонуни. Пуассон қонуни бўйича тақсимланган, яъни $0, 1, \ldots, m, \ldots$ қийматларни

$$P_m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

эҳтимоллар билан қабул қилувчи X дискрет тасодифий миқдорни қарайлик. Унинг тақсимот қонунини ушбу жадвал кўринишда ёзамиз (5-жадвал):

5-жадвал

x_i	0	1	2	...	m	...
P_i	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda}{1} e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$	...

Математик кутилиш учун қуйидагига эга бўламиз:

$$M(X)=0\cdot e^{-\lambda}+1\cdot\frac{\lambda}{1}e^{-\lambda}+2\cdot\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}+\ldots+m\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}+\ldots=$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\ldots+\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}+\ldots\right).$$

Бироқ қавс ичидаги қатор e^{λ} функциянинг Маклорен қаторига ёйилмасидан иборатлиги маълум. Шунинг учун математик кутилиш $\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}$ га ёки

$$M(X)=\lambda \tag{8}$$

га тенг.

Шундай қилиб, биз Пуассон тақсимот қонунига кирган λ параметрнинг эҳтимолий маъносини топдик: λ *параметр тасодифий миқдорнинг математик кутилишига тенг.*

III. Текис тақсимот. Айтайлик, X узлуксиз тасодифий миқдор эҳтимолларнинг текис тақсимот қонунига бўйсунсин. 15-§ да кўрсатилганидек, бу ҳолда тақсимот зичлиги ушбу кўринишда бўлади:

$$\varphi(x)=\begin{cases}-\infty<x<a & \text{бўлса,}\quad 0,\\ a<x<b & \text{бўлса,}\quad \dfrac{1}{b-a},\\ b<x<+\infty & \text{бўлса,}\quad 0.\end{cases}$$

(4) формуладан фойдаланиб математик кутилиш учун ушбуни ҳосил қиламиз:

$$M(X)=\int_a^b\frac{x}{b-a}\,dx=\frac{a+b}{2}. \tag{9}$$

Бу ердан кўринадики, $(a,\ b)$ *оралиқда текис тақсимланган тасодифий миқдорнинг математик кутилиши шу оралиқнинг марказида бўлади.*

IV. Нормал тақсимот. X узлуксиз тасодифий миқдор Гаусс тақсимот қонунига бўйсунади, яъни унинг тақсимот зичлиги

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

кўринишга эга. Математик кутилиш учун (4) формула ушбу натижани беради:

$$M(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx.$$

Интегрални ҳисоблаш учун $t=\frac{x-a}{\sigma}$ алмаштириш бажарамиз. У ҳолда

$$M(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma t+a)e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma dt=$$

$$=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \tag{10}$$

Ҳосил қилинган интеграллардан биринчиси интеграл остидаги функция тоқ бўлганлиги сабабли нолга тенг. Иккинчи қўшилувчи 10-параграфда кўрсатилганидек, a га тенг:

$$a\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=a.$$

Демак,

$$M(X)=a \tag{11}$$

Шундай қилиб, нормал тақсимот қонундаги a параметрнинг эҳтимолий маъносини аниқладик: *a параметр тасодифий миқдорнинг математик кутилишига тенг.*

Энди математик кутилишнинг баъзи хоссаларини қараб чиқамиз.

1-теорема. *Ўзгармас миқдорнинг математик кутилиши шу миқдорнинг ўзига тенг:*

$$M(C)=C.$$

Исботи. C ўзгармас миқдорни фақат битта қийматни бирга тенг эҳтимол билан қабул қилувчи дискрет тасодифий миқдор деб қараш мумкин. Шунинг учун

$$M(C)=C\cdot 1=C.$$

2-теорема. *Ўзгармас кўпайтувчини математик кутилиш белгисидан ташқарига чиқариш мумкин.*

Исботни дискрет ва узлуксиз тасодифий миқдорлар учун алоҳида-алоҳида келтирамиз, (1) таърифдан фойдаланиб, дискрет тасодифий миқдор учун ушбу

$$M(CX)=\sum_{i=1}^{n}Cx_ip_i=C\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=CM(X)$$

натижани ҳосил қиламиз.

(4) формулага асосан узлуксиз тасодифий миқдорлар учун ушбу

$$M(CX)=\int_{-\infty}^{+\infty}Cx\varphi(x)dx=C\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx=CM(X)$$

натижани оламиз.

Шундай қилиб, тасодифий миқдорнинг ўртача қийматини характерловчи сонли характеристикалардан бири—математик кутилиш билан танишдик.

Бироқ тасодифий миқдорнинг ўртача қийматинигина билиш билан унинг қийматларининг қандай жойлашганлигини кўз олдимизга келтира олмаймиз. Масалан, $+1$ ва -1 қийматларнинг ҳар бирини 0,5 га тенг эҳтимол билан қабул қилувчи тасодифий миқдор учун ҳам, $+100$ ва -100 қийматларнинг ҳар бирини худди шундай эҳтимоллар билан қабул қилувчи тасодифий миқдор учун ҳам математик кутилиш бир хил ва нолга тенг, шунга қарамасдан бу миқдорларнинг умумий математик кутилишига нисбатан сочилиши тамомила ҳар хил.

Тасодифий миқдорни унинг ўртача қийматидан четланишини характерлаш учун, яъни бу миқдор қийматларининг сочилишини характерлаш учун унинг бошқа сонли характеристикаси—*дисперсияси* ёки *сочилиши* киритилади.

Биринчи қарашда сочилишни характерлаш учун тасодифий миқдор билан унинг ўртача қиймати орасидаги айирмани олиш табиийдек туюлса ҳам ундан фойдаланиш мумкин бўлмайди, чунки бу айирманинг ўзи ҳам тасодифий миқдордир. Агар бу тасодифий миқдорнинг математик кутилишини олсак, у ҳолда математик кутилишнинг хоссаларига кўра ҳар қандай X тасодифий миқдор учун:

$$M[X-M(X)]=M(X)-M[M(X)]=0,$$

демак, бундай характеристика ҳам бефойдадир.

Ўртача қийматдан у томонга ҳамда бу томонга четланишлар, яъни манфий ва мусбат четланишлар ўзаро мувозанатда бўлганлигидан юқоридаги ўртача қиймат нолга тенг бўлади. Бундай ҳолдан сақланиш учун бу четланишларнинг ўзларини эмас, балки уларнинг квадратлари (бу квадратларнинг барчаси манфий эмас) қаралади ва сочилишнинг характеристикаси учун шу четланишлар квадратларининг ўртача қиймати олинади.

X тасодифий миқдорнинг дисперсияси ёки сочилиши деб, шу тасодифий миқдор ва унинг математик кутилиши орасидаги айирма квадратининг математик кутилишига айтилади:

$$D(X)=M[X-M(X)]^2. \tag{12}$$

Қисқалик учун $M(X)=\bar{x}$ белгилашни киритиб, (12) ўрнига

$$D(X)=M(X-\bar{x})^2$$

тенгликни ёзишимиз мумкин, яъни X тасодифий миқдорнинг дисперсияси $(X-\bar{x})^2$ тасодифий миқдорнинг математик кутилишига тенг.

Айтайлик, X миқдор $x_1, x_2, \ldots, x_n$ қийматларни $p_1, p_2, \ldots, p_n$ эҳтимоллар билан қабул қилувчи дискрет тасодифий миқдор бўлсин. $X=x_i$ ва $X-\bar{x}=x_i-\bar{x}$ ҳодисалар тенг кучли бўлганлиги учун уларнинг эҳтимоллари тенгдир. Шунинг учун $(X-\overline{x})^2$ тасодифий миқдор $(x_i-\overline{x})^2$ қийматни p_i ($i=1, 2, \ldots, n$) эҳтимол билан қабул қилади*. Шу сабабли дискрет тасодифий миқдорнинг дисперсиясини ҳисоблаш формуласи ушбу кўринишда бўлади:

$$D(X)=\sum_i (x_i-\overline{x})^2 p_i. \qquad (13)$$

Айнан шунга ўхшаш, узлуксиз тасодифий миқдор учун

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\overline{x})^2\varphi(x)\,dx. \qquad (14)$$

формулани ёза оламиз.

Кўпинча $D(X)$ белгилаш ўрнига $\sigma^2(X)$ белгилаш қабул қилинади. $\sigma=\sqrt{D(X)}$ катталик *ўртача квадратик четланиш* ёки *стандарт* дейилади.

3-мисол. Икки мерганнинг ҳар бири бир мартадан ўқ узганда оладиган очколари сони 6- ва 7-жадвалларда берилган тақсимот қонунларига бўйсунади:

6-жадвал

x_i	1	2	3
p_i	0,3	0,2	0,5

7-жадвал

x_i	1	2	3
p_i	0,1	0,6	0,3

Ҳар бир мерган оладиган очколар сонининг математик кутилишини топамиз. Биринчи мерган учун:

$$M(X_1)=1\cdot 0{,}3+2\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}5=2{,}2.$$

Иккинчи мерган учун:

$$M(X_2)=1\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}6+3\cdot 0{,}3=2{,}2.$$

Шундай қилиб, иккала мерган биттадан ўқ узганда олинган очколар сонининг математик кутилиши бир хил. Энди X_1 ва X_2 тасодифий миқдорларнинг дисперсияларини топамиз. Биринчи мерган учун:

$$D(X_1)=(1-2{,}2)^2\cdot 0{,}3+(2-2{,}2)^2\cdot 0{,}2+(3-2{,}2)^2\cdot 0{,}5=0{,}76.$$

Иккинчи мерган учун:

$$D(X_2)=(1-2{,}2)^2\cdot 0{,}1+(2-2{,}2)^2\cdot 0{,}6+(3-2{,}2)^2\cdot 0{,}3=0{,}36.$$

* Бу $(x_i-\overline{x})^2$ қийматлар ҳар хил бўлганда тўғри. Агар $(x_i-\overline{x})^2$ ва $(x_j-\overline{x})^2$ қийматлар тенг бўлса, у ҳолда бу қиймат p_i+p_j эҳтимол билан қабул қилиниб, (13) формула ўз кучини сақлайди.

Демак, иккала мерганнинг ҳам оладиган очколари сони учун ўртача қиймат бир хил бўлса-да, биринчи натижанинг сочилиши иккинчи натижа сочилишидан катта экан. Шундай қилиб, иккинчи мерганнинг узган ўқлари бир-бирига яқин тушади, яъни унинг отиш натижалари турғунроқдир.

Умуман шуни қайд қилиш мумкинки, дисперсия қанча кичик бўлса, тасодифий миқдорнинг қийматлари унинг математик кутилиши орқали шунча яхши характерланади.

Тасодифий миқдорлар йиғиндисининг математик кутилиши қўшилувчилар математик кутилишларининг йиғиндисига тенглигидан* фойдаланиб, дисперсияни ҳисоблаш учун (12) формулага нисбатан қулайроқ бўлган формулани ҳосил қилиш мумкин. Бунинг учун (12) формулани қуйидагича ўзгартириб ёзамиз:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = M[X^2 - 2XM(X) + M(X))^2].$$

Кўрсатилган хоссага кўра охирги ифодани математик кутилишларнинг йиғиндиси кўринишида ёзиш мумкин. $M(X)$ нинг ўзгармас сон эканлигини ва 1-теоремага кўра унинг математик кутилиши ўзига тенглигини ҳам қайд қилиб ўтамиз. Шунинг учун

$$D(X) = M(X^2) - 2M(X) \cdot M(X) + (M(X))^2$$

ёки узил-кесил

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 \qquad (15)$$

Шундай қилиб, *X тасодифий миқдорнинг дисперсияси бу тасодифий миқдор квадратининг математик кутилиши билан ўзининг математик кутилишининг квадрати орасидаги айирмага тенг экан.*

(15) формулага татбиқининг мисоли сифатида 3-мисолдаги биринчи мерганнинг отишлари натижасининг дисперсиясини ҳисоблаймиз. $M(X_1) = 2{,}2$ эди. X_1^2 нинг математик кутилиши эса

$$M(X_1^2) = 1^2 \cdot 0{,}3 + 2^2 \cdot 0{,}2 + 3^2 \cdot 0{,}5 = 5{,}6$$

бўлади. Бу ердан олдинги натижа билан бир хил бўлган натижага келамиз:

$$D(X_1) = 5{,}6 - (2{,}2)^2 = 0{,}76.$$

Энди дисперсиянинг баъзи бир хоссаларини қараб чиқамиз.

3-теорема. *Ўзгармас миқдорнинг дисперсияси нолга тенг:*

$$D(C) = 0.$$

Ҳақиқатан ҳам,

$$D(C) = M(C - M(C))^2 = M(C - C)^2 = 0.$$

---

* Математик кутилишнинг бу хоссасининг аниқ формулировкасини ва исботини қуйида, 21-§ дан қаранг.

Бундай бўлиши табиий, чунки ўзгармас миқдорнинг математик кутилиши ўзига тенг ва бу ҳолда ҳеч қандай сочилишнинг бўлиши мумкин эмас.

4-теорема. *Ўзгармас кўпайтувчини уни квадратга ошириб дисперсия белгисидан ташқарига чиқариш мумкин*:

$$D(CX) = C^2 D(X). \tag{16}$$

Исботи. (15) формуладан

$$D(CX) = M(C^2X^2) - (M(CX))^2 = C^2[M(X^2) - (M(X)^2)] = C^2 D(X).$$

Шундай қилиб,

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

Шуни исбот қилиш талаб қилинган эди.

Энди аввал кўрилган тақсимот қонунлар бўйича тақсимланган тасодифий миқдорларнинг дисперсияларини ҳисоблаймиз.

I. Биномиал тақсимот. Биномиал қонун бўйича тақсимланган тасодифий миқдорнинг дисперсиясини ҳисоблаш учун тасодифий миқдорлар йиғиндисининг дисперсияси ҳақидаги теоремадан* фойдаланамиз. n та синовли серияда A ҳодисанинг юз бериш сони X тасодифий миқдор бўлиб, A ҳодисанинг ҳар бир синовда юз бериш эҳтимоли p га тенг бўлсин. Агар i-синовда A ҳодисанинг юз бериш сонини X_i десак, у ҳолда

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

X_i миқдор i-синовда A ҳодиса юз берганда 1 қийматни, у юз бермаганда эса 0 қийматни қабул қилувчи тасодифий миқдордир. Ҳар бир X_i тасодифий миқдор учун тақсимот қонун ушбу жадвал орқали берилади:

X_i	0	1
p	$q = 1 - p$	p

X_i нинг математик кутилиши:

$$M(X_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p.$$

Бундан математик кутилишнинг юқорида кўрсатилган хоссасидан фойдаланиб, $M(X) = np$ натижани осонгина оламиз (бу натижа юқорида мураккаброқ усулда ҳосил қилинган эди).

---

*. Бу теорема қуйидагича: ўзаро эркли тасодифий миқдорлар йиғиндисининг дисперсияси қўшилувчилар дисперсияларининг йиғиндисига тенг. Бу теореманинг аниқ формулировкаси ва исботи 21-§ да келтирилади.

X_i нинг дисперсияси:

$$D(X_i) = (0-p)^2q + (1-p)^2p = pq(p+q) = pq$$

га тенг ((13) формулага қаранг). Бу ердан йиғиндининг дисперсияси ҳақидаги теоремага кўра

$$D(X) = npq. \tag{17}$$

II. Пуассон қонуни. Пуассон қонуни бўйича тақсимланган дискрет тасодифий миқдор 0, 1, 2, ..., m, ... қийматларни $P_m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$ эҳтимоллар билан қабул қила олади. Юқорида ҳисоблаганимиздек, $M(X) = \lambda$ эди. Энди $M(X^2)$ ни аниқлаймиз. (2) формулага асосан

$$M(X^2) = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 P_m = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\lambda^m}{(m-1)!}.$$

Охирги қаторнинг йиғиндисини топиш учун

$$\lambda e^{\lambda} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^m}{(m-1)!}$$

ёйилмадан фойдаланамиз. Бу тенгликни λ бўйича дифференциаллаб,

$$\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda} = \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}$$

ни, уни λ га кўпайтириб эса

$$\sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\lambda^m}{(m-1)!} = \lambda e^{\lambda} (\lambda + 1)$$

ни ҳосил қиламиз, демак, X^2 нинг математик кутилиши $M(X^2) = \lambda^2 + \lambda$ бўлади.

Шундай қилиб, Пуассон қонуни бўйича тақсимланган X тасодифий миқдорнинг дисперсияси (15) формулага асосан:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda, \tag{18}$$

яъни бу ҳолда *дисперсия математик кутилишга тенг.*

III. Текис тақсимот. (a, b) оралиқда текис тақсимланган X тасодифий миқдор

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\infty < x < a & \text{бўлса,} \quad 0, \\ a < x < b & \text{бўлса,} \quad \dfrac{1}{b-a}, \\ b < x < +\infty & \text{бўлса,} \quad 0 \end{cases}$$

эҳтимоллар зичлигига ва $M(X)=\frac{a+b}{2}$ математик кутилишга эга. Дисперсияни ҳисоблаш учун $M(X^2)$ ни топамиз. (4) формулага асосан

$$M(X^2)=\int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

Демак, текис тақсимланган тасодифий миқдорнинг дисперсияси

$$D(X)=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}. \qquad (19)$$

Бу ҳолда ўрта квадратик четланиш (стандарт)

$$\sigma=\frac{b-a}{2\sqrt{3}} \qquad (20)$$

бўлишини айтиб ўтамиз.

Шундай қилиб, (a, b) *оралиқда текис тақсимланган тасодифий миқдор учун ўрта квадратик четланиш* оралиқ узунлигининг $\frac{1}{\sqrt{2}}=0{,}288675$ ига тенг.

IV. Нормал тақсимот. Гаусс қонуни бўйича тақсимланган узлуксиз X тасодифий миқдорнинг эҳтимоллар зичлиги

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

бўлиб, $M(X)=a$ эди. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг дисперсияси учун ҳосил қилинган (14) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$D(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Интегрални ҳисоблаш учун $\frac{x-a}{\sigma}=z$ деб оламиз. У ҳолда

$$D(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}z^2\sigma^2e^{-\frac{z^2}{2}}dx=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}z^2e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

Охирги интегрални бўлаклаб интеграллаш усули билан осонгина ҳисоблаш мумкин. Бунинг учун

$$z=u, \qquad ze^{-\frac{z^2}{2}}dz=dv$$

деб оламиз. Бу ердан $du=dz$, $v=-e^{-\frac{z^2}{2}}$. Демак,

$$D(X)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left[-ze^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz\right].$$

Интегралланган ҳаднинг нолга айланишини, иккинчи қўшилувчи эса

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}$$

бўлишини осонгина кўриш мумкин. Шунинг учун

$$D(X) = \sigma^2. \qquad (21)$$

Биз Гаусс қонунидаги иккинчи параметрнинг ҳам эҳтимолий маъносини аниқладик: σ^2 *миқдор X тасодифий миқдорнинг дисперсиясига тенг.*

17-§. ДИСКРЕТ ТАҚСИМОТНИНГ АНИҚМАСЛИК ДАРАЖАСИ. ЭНТРОПИЯ ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Дискрет тасодифий миқдорни қараймиз ва унинг навбатдаги қийматни қабул қилишини „синов" деб тушунамиз. Синов натижасини олдиндан айтишга, яъни тасодифий миқдор қабул қиладиган қийматни олдиндан айтишга уриниб кўрамиз. Қаралаётган миқдор тасодифий бўлганлигидан синовнинг натижаси баъзи-бир аниқмасликларга эга бўлади, албатта, бироқ тақсимот қонунни билганимиз ҳолда олдиндан айтишнинг (прогнознинг) ишончлилигини (турғунлигини) бирор даражада баҳолашимиз мумкин.

Бу мақсад учун бизга маълум бўлган сонли характеристикалар—математик кутилиш ва дисперсиядан фойдаланишга уриниш табиийдир. Бироқ маълум бўлишича тасодифий миқдорнинг қийматини олдиндан айтиш учун бу характеристикалар бефойда экан. Бунга қуйидаги мисол орқали ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Қуйидаги тақсимот қонунларга эга бўлган иккита тасодифий миқдор берилган бўлсин:

x	0	1
p	0,5	0,5

y	$\frac{1}{3}$	2
p	0,9	0,1

Бу тасодифий миқдорларнинг математик кутилишлари ва дисперсияларини ҳисоблаймиз Ўтган параграфдаги формулаларга кўра:

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5; \qquad M(Y) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}9 + 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}5.$$

Шундай қилиб, уларнинг математик кутилишлари бир хилдир. Шунга ўхшаш, уларнинг дисперсиялари ҳам тенг, ҳақиқатан ҳам,

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 0^2 \cdot 0{,}5 + 1^2 \cdot 0{,}5 - 0{,}5 = 0{,}25,$$

$$D(Y) = M(Y^2) - [M(Y)]^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 0{,}9 + 2^2 \cdot 0{,}1 - 0{,}5^2 = 0{,}25.$$

Бироқ, интуитив ҳолда тушунарлики, Y тақсимот қонунида аниқмаслик жуда кичик ва етарлича катта ишонч билан синов натижаси $Y = \frac{1}{3}$ қиймат бўлишини олдиндан айтиш мумкин. Демак, математик кутилишни ҳам, дисперсияни ҳам тақсимот аниқмаслигининг ўлчови сифатида ишлатиш мумкин эмас.

Дискрет тақсимотнинг аниқмаслик ўлчови бўла оладиган сонли характеристика *тақсимот қонуннинг энтропиясидир.* Энтропия тушунчаси 1948—1950 йилларда К. Шеннон томонидан киритилган бўлиб, унинг номи эса бу характеристика билан илгари статистик физикада система ҳолатининг функцияси сифатида ишлатиладиган энтропия тушунчаси орасида чуқур ўхшашлик мавжудлиги натижасида келиб чиққан.

Дискрет тақсимотнинг энтропияси $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ деб фараз қилинганда ушбу

$$H(p_1, p_2, \ldots, p_n) = -(p_1 \log p_1 + p_2 \log p_2 + \ldots + p_n \log p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \qquad (1)$$

формула билан аниқланади.

(1) формуладан кўриниб турибдики, энтропия тасодифий миқдор қабул қиладиган қийматларга боғлиқ бўлмай, балки бу қийматларнинг эҳтимолларигагина боғлиқдир. Дискрет тасодифий миқдорнинг фақатгина ҳақиқатан ҳам мумкин бўлган қийматларини қараш билан барча p_i эҳтимоллар $p_i \neq 0$ деб ҳисоблай оламиз, яъни H функция доимо аниқлангандир. У ёки бу махсус сабабларга кўра $p_i = 0$ бўладиган қийматларни ҳам қарашга тўғри келган ҳолларда эса уларга мос кўпайтмани нолга тенг деб қабул қилинади:

$$p_i \log p_i = 0.$$

(1) формуладаги логарифмларнинг асослари ихтиёрий танлаб олиниши мумкин; фақат ҳар хил тақсимотларнинг энтропияларини таққослаганда улар бир хил асосда ҳисобланишига эришишга ҳаракат қилиш зарур. Энтропия тушунчаси марказий бўлган ахборотлар назариясида эса логарифмларнинг асоси учун 2 сонни олиш қабул қилинган.

(1) формуланинг структураси айнан шундай танланиш сабабини тушунтиришга ҳаракат қилишдан аввал юқорида келтирилган тақсимотларнинг энтропиясини ҳисоблаймиз. Ҳисоблаш қулайроқ бўлиши учун логарифмларни натурал логарифмлар деб ҳисоблаймиз.

X тасодифий миқдор энтропияси учун:

$$H(0,5;\ 0,5) = -2 \cdot 0,5 \cdot \ln 0,5 = 0,6931.$$

Y тасодифий миқдор тақсимотининг энтропияси учун:

$$H(0,9;\ 0,1) = -0,9 \cdot \ln 0,9 - 0,1 \cdot \ln 0,1 = 0,1054 \cdot 0,9 + \\ + 2,3026 \cdot 0,1 = 0,3251,$$

яъни X тасодифий миқдор тақсимотининг энтропияси Y тасодифий миқдор тақсимоти энтропиясидан икки мартадан кўпроқ ортиқдир. Бундай муносабат берилган тақсимотларнинг аниқмаслиги ҳақидаги интуитив тасаввур билан тўла мос келади.

Келгусида керак бўладиган ушбу мисолни қараб чиқамиз.

1-мисол. Битта синовда ҳодисанинг юз бериш эҳтимоли p га тенг. p нинг қандай қийматида синовнинг натижаси энг катта аниқмасликка эга бўлади?

Агар тасодифий миқдор ҳодисанинг берилган синовда юз бериш сони бўлса, бу тасодифий миқдор ушбу

x_i	0	1
p_i	$1-p$	p

схема билан тасвирланади. (1) формулага кўра бу схеманинг энтропияси қуйидагича бўлади:

$$H = -(1-p)\log(1-p) - p \cdot \log p.$$

Ҳисоблашни енгиллатиш учун логарифмларни натурал деб оламиз, яъни

$$H = -(1-p)\ln(1-p) - p\ln p$$

деб қабул қиламиз ва бу функциянинг максимумини топамиз. Бу функциянинг ҳосиласи:

$$\frac{dH}{dp} = \ln(1-p) + 1 - \ln p - 1 = \ln(1-p) - \ln p.$$

$\frac{dH}{dp}$ ни нолга тенглаб, $\ln(1-p) = \ln p$ ни топамиз, бундан $p = 1 - p = \frac{1}{2}$ ни топамиз. $\frac{d^2H}{dp^2} = -\frac{1}{1-p} - \frac{1}{p} < 0$ бўлганлигидан, $p = \frac{1}{2}$ да H миқдор максимумга эга бўлади.

Энди тақсимот аниқмаслигининг ўлчови сифатида (1) функциянинг танланишини тушунтиришга ҳаракат қиламиз.

Аниқмаслик даражаси энг аввало синовларнинг мумкин бўлган натижалари сонига, яъни тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари сони n га боғлиқ. Тайин қилинган n да энг катта аниқмаслик даражаси синовларнинг барча натижалари тенг эҳтимолли бўлган тақсимотга, яъни тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган барча қийматларининг эҳтимоллари ўзаро тенг бўлган ҳолга мос келади деб ҳисоблаш табиий

$$p_i = \frac{1}{n} \quad (i = 1,2, \ldots, n) \quad \text{(1-мисолга қаранг).}$$

Шундай тақсимотнинг аниқмаслигини $L(n)$ орқали белгилаймиз. Фараз қилайлик, биз биринчиси k та, иккинчиси m та тенг эҳтимолли қийматларга эга бўлган иккита ҳар хил тасодифий миқдорларга эга бўлайлик. Бу биринчи ҳолда k та ҳар хил тенг эҳтимолли натижалар, иккинчи ҳолда эса m та тенг эҳтимолли натижалар мавжудлигини билдиради. Агар тасодифий миқдорлар эркли бўлса, у ҳолда барча мумкин бўлган қийматлар жуфтликларини қараб, улар учун биз km та тенг эҳтимолли натижалар мавжудлигини топамиз.

Мумкин бўлган барча жуфтларни қарашдан ҳосил қилинган янги схеманинг аниқмаслиги алоҳида схемалар аниқмасликларининг йиғиндисига тенг деб ҳисоблаш табиийдир.

L—функция терминологиясида бу дарҳол $L(n)$ функция сифатида логарифмик функциядан фойдаланиш тушунчасига олиб келувчи ушбу

$$L(km) = L(k) + L(m) \tag{2}$$

шартни билдиради. Шунинг учун $L(n) = \log n = -\log \frac{1}{n}$ ни қабул қилиш мумкин. Охирги алмаштириш натижалар сони ўрнига ҳар хил натижаларнинг эҳтимолларига ўтиш учун қабул қилинган.

Шундай қилиб, n та тенг эҳтимолли натижаларга эга бўлган тажрибанинг умумий аниқмаслиги $\log n$ га тенг деб фараз қилдик. Аммо бизнинг ҳолда ҳар бир алоҳида натижанинг эҳтимоли $p = \frac{1}{n}$ бўлганлиги учун ҳар бир натижа

$$H_n = \frac{\log n}{n} = -\frac{1}{n}\log\frac{1}{n} = -p\log p$$

га тенг бўлган аниқмаслик олиб киради деб ҳисоблаш табиийдир. Энди қийматлари тенг эҳтимолли бўлмаган тасодифий миқдорлар учун p эҳтимол билан қабул қилинадиган ҳар бир алоҳида қиймат сон қиймати $-p\log p$ га тенг бўлган аниқмаслик олиб киради деб қабул қилиш қолди, холос ($p \leqslant 1, p\log p < 0$

бўлганлиги учун мусбат миқдор олиш мақсадида минус ишора қўйилган). Тасодифий миқдорнинг барча мумкин бўлган қийматлари бўйича ҳосил қилинган ифодаларни қўшиб, (1) формулага келамиз.

Юқорида келтирилган мулоҳазалар ҳеч нарсани исбот қилолмайди, балки тақсимот аниқмаслигининг ўлчови учун (1) формуланинг танланишини тушунтириши мумкин. Аслида эса баъзи-бир табиий фаразларда (1) функция ягонадир. Бу қуйидаги теоремадан келиб чиқади.

Ягоналик теоремаси. *Фараз қилайлик, $H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ функция $p_k \geqslant 0$ ва $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ шартларни қаноатлантирувчи $\{p_k\}$ системалар тўпламида ихтиёрий n учун аниқланган ва барча аргументлари бўйича узлуксиз бўлиб, қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:*

1. *Берилган n учун $p_k = \frac{1}{n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ да $H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ функция энг катта қийматга эришади;*

2. *Агар A ва B лар $\{p_k\}$ ва $\{p'_k\}$ эҳтимоллар билан характерланувчи ўзаро эркли * иккита дискрет тасодифий миқдор бўлса, у ҳолда*

$$H(AB) = H(A) + H(B); \tag{3}$$

3. *Тасодифий миқдорнинг қийматларига битта ёки ихтиёрий чекли сондаги мумкин бўлмаган қийматларни қўшганда H функциянинг қиймати ўзгармайди, яъни*

$$H(p_1, p_2, \ldots, p_n, 0) = H(p_1, p_2, \ldots, p_n). \tag{4}$$

У ҳолда

$$H(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \lambda \sum_{k=1}^{n} p_k \log p_k, \tag{5}$$

бу ерда λ — мусбат ўзгармас сон. λ нинг қийматларини логарифмлар асоси ҳисобига исталганча ўзгартириш, ёки аксинча λ ни ўзгартириб, ихтиёрий асосли логарифмлар системасини танлаш мумкинлиги равшандир.

Исботи. А. Я. Хинчинга мансуб бўлган бу теореманинг исботини келтирмаймиз

Дискрет тақсимотнинг энтропиясини ҳисоблашга яна битта мисол келтирамиз.

2-мисол. Иккита нишонга ўқ отилмоқда. Биринчи нишонга ҳар бирининг тегиши $\frac{1}{2}$ эҳтимолга эга бўлган иккита ўқ узилди. Иккинчи нишонга тегиш эҳтимоли $\frac{1}{3}$ га тенг учта ўқ узилди. Ҳар бир нишон учун отишнинг қайси натижаси аниқроқ бўлишини топамиз:

$$P_{m,n} = \frac{n!}{n!\,(n-m)!} p^m q^{n-m}$$

---

* Тасодифий миқдорларнинг эрклилиги ҳақида IV бобнинг 18-§ ида батафсил сўзланади (122 ва 125-бетларга қаранг).

биномиал тақсимот қонунидан фойдаланиб, биринчи ва иккинчи нишонларга теккан ўқлар сонининг тақсимот қонунларини ёзамиз.

$p = q = \frac{1}{2}$ бўлганда биринчи нишон учун қуйидагиларни топамиз:

$$P_{0,2}=\frac{2!}{0!\,2!}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4},\quad P_{1,2}=\frac{2!}{1!\,1!}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}.$$

$$P_{2,2}=\frac{2!}{2!\,0!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{4}.$$

Иккинчи нишон учун эса $p=\frac{1}{3}$, $q=\frac{2}{3}$. Шунинг учун

$$P_{0,3}=\frac{3!}{0!\,3!}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27},\qquad P_{1,3}=\frac{3!}{1!\,2!}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9},$$

$$P_{2,3}=\frac{3!}{2!\,1}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{2}{9},\qquad P_{3,3}=\frac{3!}{3!\,0!}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{27}.$$

Шундай қилиб, тақсимот қонунлар қуйидагича бўлади:

x	0	1	2
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

x	0	1	2	3
p	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

Биринчи тақсимот учун энтропия (яна натурал логарифмларни олдик):

$$H_1=-\left(\frac{1}{4}\ln\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\ln\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}\ln 2\approx 1{,}04.$$

Бу миқдор иккинчи тақсимот учун қуйидагича бўлади:

$$H_2=-\left(\frac{1}{27}\ln\frac{1}{27}+\frac{2}{9}\ln\frac{2}{9}+\frac{4}{9}\ln\frac{4}{9}+\frac{8}{27}\ln\frac{8}{27}\right)=$$

$$=\frac{7}{3}\ln 3-2\ln 2\approx 1{,}18.$$

Биринчи нишонга отиш натижаси иккинчи нишонга отиш натижасига нисбатан каттароқ аниқликка эга деб ҳисоблаш лозим, чунки $H_2>H_1$.

Айрим ҳолларда дискрет тақсимотнинг энтропияси билан бир қаторда узлуксиз тасодифий миқдорнинг энтропияси ҳам қаралади. x узлуксиз тасодифий миқдорнинг энтропияси деб, (1) формулага ўхшаш ушбу

$$H(X)=-\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\log\varphi(x)\,dx \tag{6}$$

формула билан аниқланувчи катталикка айтилади, бу ерда $\varphi(x)$ X миқдорнинг эҳтимоллар зичлиги бўлиб, логарифм аввалгидек, ихтиёрий асосда олинади. Иккита мисол қараймиз.

3-мисол. Узлуксиз тасодифий миқдор (a, b) оралиқда текис тақсимланган. Шу тасодифий миқдорнинг энтропиясини топамиз.

Текис тақсимланган тасодифий миқдорнинг эҳтимоллар зичлиги ушбу

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\infty < x < a \text{ бўлса, } 0, \\ a < x < b \text{ бўлса, } \dfrac{1}{b-a}, \\ b < x < +\infty \text{ бўлса, } 0 \end{cases}$$

кўринишда эканлиги 15-§ дан маълум. Шунинг учун (6) формулага асосан текис тақсимланган тасодифий миқдорнинг энтропияси қуйидагига тенг бўлади:

$$H(X) = -\int_a^b \frac{1}{b-a} \ln \frac{1}{b-a} dx = \frac{\ln(b-a)}{b-a} x \Big|_a^b = \ln(b-a).$$

Дискрет тақсимот ҳолдаги сингари, (a, b) интервалдаги қийматларни қабул қилувчи узлуксиз тасодифий миқдорлар ичида текис тақсимланган тасодифий миқдор максимал энтропияга эга бўлишини исботлаш мумкин. Юқорида кўрганимиздек, бу максимал энтропия

$$H_{max} = \ln(b-a) \tag{7}$$

бўлади.

Барча мумкин бўлган ҳақиқий қийматларни қабул қилиши мумкин бўлган тасодифий миқдорлар учун юқоридаги хулосани айтиш мумкин эмас.

4-мисол. Математик кутилиши $\bar{x} = 0$ ва дисперсияси σ^2 бўлган нормал қонун бўйича тақсимланган X тасодифий миқдор берилган. Бу тасодифий миқдорнинг энтропиясини ҳисоблаймиз ва уни шу дисперсияга эга бўлган текис тақсимотнинг энтропияси билан таққослаймиз.

Математик кутилиши $\bar{x} = 0$ бўлган нормал тақсимотнинг эҳтимоллар зичлиги

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

бўлади. Бу ердан нормал тақсимотнинг энтропиясини топамиз:

$$H_{\text{норм}} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \left[\ln \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} - \frac{x^2}{2\sigma^2}\right] dx.$$

Бу интегрални иккита қўшилувчига ажратамиз:

$$H_{\text{норм}} = \frac{\ln\sqrt{2\pi\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx + \frac{1}{2\sigma^2\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Маълумки (15- ва 16-параграфларга қаранг),

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = 1; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2.$$

Шунинг учун

$$H_{\text{норм}} = \ln\sqrt{2\pi\sigma^2} + \frac{1}{2}$$

ёки бошқачароқ ёзсак,

$$H_{\text{норм}} = \ln(\sigma\sqrt{2\pi e}). \tag{8}$$

Энди (7) ва (8) энтропияларни таққослаймиз, бунинг учун (7) энтропияни дисперсия орқали ифодалаймиз. Текис тақсимотнинг дисперсияси

$$\sigma_{\text{текис}} = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

бўлишини 16- параграфда ҳисоблаган эдик, бу ердан $b - a = \sigma\sqrt{12}$. Бу қийматни (7) формулага қўйиб, σ дисперсияли текис тақсимотнинг энтропиясини топамиз:

$$H_{\text{текис}} = \ln(\sigma\sqrt{12}).$$

$2\pi e \approx 17 > 12$ бўлганлиги учун

$$H_{\text{норм}} > H_{\text{текис}}$$

тенгсизликнинг тўғрилиги келиб чиқади, яъни *нормал тақсимот қонун шундай дисперсияли текис тақсимот қонунга нисбатан кўпроқ аниқмасликка эга*

III БОБГА ДОИР ЎЗ-ЎЗИНИ ТЕКШИРИШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Дискрет тасодифий миқдор нима?

2. Дискрет тасодифий миқдор тақсимот қонунининг таърифини беринг. Мисоллар келтиринг.

3. Қуйидаги тасодифий миқдорлар дискрет тасодифий миқдорлар бўладими:

а) нишонга ўқ узишда урилган очколар сони;

б) нишоннинг марказидан ўқнинг нишонга теккан нуқтасигача бўлган масофа;

в) бирор асбобдаги маълум электрон лампанинг ишлаш вақтининг давомийлиги;

г) берилган вақт оралиғида маълум асбобда ишламай қолган лампалар сони;

д) маълум асбобдаги маълум электрон лампанинг ишламай қолиш моменти?

4. Тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси деб нимага айтилади?

5. Тақсимот функцияни ҳам дискрет, ҳам узлуксиз тасодифий миқдорлар учун таърифлаш мумкинми ёки фақат дискрет ёки фақат узлуксиз тасодифий миқдорлар учун таърифлаш мумкинми?

6. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг аниқ таърифини келтиринг.

7. Тасодифий миқдорнинг эҳтимоллар зичлиги деб нимага айтилади? Бу функциянинг эҳтимолий маъноси қандай?

8 Дискрет тасодифий миқдор учун эҳтимоллар зичлигини таърифлаш мумкинми?

9. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг эҳтимоллар зичлиги билан тақсимот функцияси ўзаро қандай боғланган?

10. X тасодифий миқдорнинг чекли (α, β) оралиққа тушиш эҳтимоли унинг $F(x)$ тақсимот функцияси орқали қандай ифодаланади?

11. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг чекли (α, β) оралиққа тушиш эҳтимоли унинг $\varphi(x)$ эҳтимоллар зичлиги орқали қандай ифодаланади?

12. (a, b) оралиқда текис тақсимланган тасодифий миқдорнинг эҳтимоллар зичлиги ва тақсимот функцияси қандай кўринишга эга?

13. Пуассон қонуни бўйича тақсимланган тасодифий миқдор узлуксиз ёки дискрет бўла оладими?

14. Тасодифий миқдор нормал тақсимот қонунининг зичлигини график тасвирланг. Нормал қонун параметрларининг геометрик маъносини аниқланг.

15. Тасодифий миқдор нормал қонун бўйича тақсимланган. $k = 1, 2, 3$ бўлганда $a - k\sigma < X < a + k\sigma$ тенгсизликларнинг эҳтимолларини топинг.

16. Дискрет тасодифий миқдорнинг математик кутилиши деб нимага айтилади? Математик кутилиш нимани характерлайди?

17. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг математик кутилиши деб нимага айтилади?

18. Тасодифий миқдорларнинг математик кутилишларини топишга мисоллар келтиринг. Келтирилган ҳар бир мисолингизда математик кутилишнинг физикавий маъносини тушунтиринг.

19. Тасодифий миқдор дисперсиясининг таърифини беринг. Дисперсия тасодифий миқдорнинг қандай хоссаларини характерлайди?

20. Биномиал қонун бўйича тақсимланган тасодифий миқдорнинг математик кутилиши ва дисперсияси нимага тенг?

21. Пуассон қонуни бўйича тақсимланган тасодифий миқдорнинг математик кутилиши ва дисперсиясини ҳисобланг.

22. Нормал тақсимот қонуннинг a ва σ параметрларининг эҳтимолий маъносини аниқланг.

23. Дискрет тақсимотнинг энтропияси қандай аниқланади?

IV БОБ

КЎП ЎЛЧОВЛИ ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАР ВА ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАР СИСТЕМАЛАРИ

18-§. ИККИ ЎЛЧОВЛИ ТАСОДИФИЙ МИҚДОР. ТАҚСИМОТ ФУНКЦИЯ ВА ЭҲТИМОЛЛАР ЗИЧЛИГИ

Олдинги бобда кўриб ўтилган тасодифий миқдорлар турли сон қийматлар қабул қилган ва тўғри чизиқ нуқталари билан геометрик тасвирланган эди. Кўп ҳолларда мураккаброқ табиатли, текисликнинг нуқталари орқали геометрик тасвирланувчи тасодифий миқдорларга дуч келамиз. Улар *икки ўлчовли тасодифий миқдорлар* деб аталади.

Агар ўққа тутилаётган жойни текис соҳа деб қаралса, снаряднинг тушиш нуқтаси икки ўлчовли тасодифий миқдорга мисол бўла олади. Шунга ўхшаш, микроскоп остида кузатилаётган текис броун ҳаракатида заррачанинг вақтнинг белгиланган моментидаги ҳолати икки ўлчовли тасодифий миқдордир.

Қаралаётган текисликда координаталар системасини киритиб, икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг қиймати бўлган ҳар бир нуқтани иккита сон—унинг координаталари билан характерлай оламиз. Ўз навбатида ҳар бир координата одатдаги (бир ўлчовли) тасодифий миқдор бўлади. Шунинг учун икки ўлчовли тасодифий миқдорни иккита бир ўлчовли тасодифий миқдор системаси деб қараш мумкин.

Икки ўлчовли тасодифий миқдорларни бундан буён ўрганишимизда юқоридаги иккала имкониятдан қайси бири қулайроқ бўлса, шунисидан фойдаланамиз. Баъзи ҳолларда текисликнинг M нуқтасини, бошқа ҳолларда эса унинг иккита (X, Y) координаталарини қараймиз.

Чекли сондаги ёки чексиз кетма-кетлик ҳосил қилувчи ҳар хил қийматлар қабул қилувчи икки ўлчовли тасодифий миқдор *дискрет тасодифий миқдор* дейилади. Икки ўлчовли дискрет тасодифий миқдорни тўла характерлаш учун мумкин бўлган қийматлар тўпламини (текислик нуқталарини) ва ҳар бир қийматнинг эҳтимолини—*тақсимот қонунини* кўрсатиш кифоя.

Тақсимот қонун икки йўлли жадвал ёрдамида тасвирланиши мумкин (1- жадвалга қаранг). Бу ерда горизонтал бўйлаб икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг абсциссалари қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар, вертикал бўйлаб эса унинг ординаталарининг қийматлари ёзилган. Жадвалнинг катаклари га икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг текисликнинг берилган нуқтасига тушишига мос тегишли эҳтимоли ёзилган.

Масалан, $P(x_i, y_j)$ эҳтимол икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг қиймати (x_i, y_j) координатали нуқта бўлишини англатади. Агар икки ўлчовли тасодифий миқдорни юқорида кўрсатилганидек, иккита бир ўлчовли (X, Y) тасодифий миқдорлар тўплами деб қарасак, у ҳолда $P(x_i, y_j)$ эҳтимол $(X = x_i)$ ва $(Y = y_j)$ ҳодисаларнинг биргаликда юз бериш эҳтимолидир.

1-жадвал

Y \ X	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n	Σ
y_1	$P(x_1, y_1)$	$P(x_2, y_1)$	...	$P(x_i, y_1)$	...	$P(x_n, y_1)$	$P(y_1)$
y_2	$P(x_1, y_2)$	$P(x_2, y_2)$	...	$P(x_i, y_2)$	...	$P(x_n, y_2)$	$P(y_2)$
...	...	...	...	...	...	...	...
y_j	$P(x_1, y_j)$	$P(x_2, y_j)$	...	$P(x_i, y_j)$	...	$P(x_n, y_j)$	$P(y_j)$
...	...	...	...	...	...	...	...
y_m	$P(x_1, y_m)$	$P(x_2, y_m)$	...	$P(x_i, y_m)$	...	$P(x_n, y_m)$	$P(y_m)$
Σ	$P(x_1)$	$P(x_2)$	...	$P(x_i)$	...	$P(x_n)$	1

Жадвалда келтирилган барча $X = x_i$, $Y = y_j$ комбинацияларни ягона мумкин бўлган комбинациялар деб қараб,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j) = 1 \qquad (1)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

$P(x_i, y_j)$ эҳтимоллар жадвалига эга бўлган ҳолда X тасодифий миқдорнинг Y тасодифий миқдор қандай қиймат қабул қилишидан қатъи назар x_i қийматни қабул қилиш эҳтимолини топиш мумкин.

Қўшиш теоремасига асосан

$$P(x_i) = P(X = x_i) = P(x_i, y_1) + P(x_i, y_2) + \ldots + P(x_i, y_m) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j). \qquad (2)$$

Шундай қилиб, $P(X = x_i)$ эҳтимолларни топиш учун жадвалнинг i-устунидаги $P(x_i, y_j)$ эҳтимолларни қўшиш лозим. Ана шу эҳтимоллар жадвалнинг охирги сатрига ёзилган.

Шунга ўхшаш, Y тасодифий миқдорнинг X нинг қийматларидан қатъи назар $Y = y_j$ қийматни қабул қилиш эҳтимоли j-сатрдаги эҳтимолларни қўшиш билан ҳосил қилинади:

$$P(y_j) = P(Y = y_i) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_j). \qquad (3)$$

Бу эҳтимоллар жадвалнинг охирги устунини ташкил қилади. (1) формуладан кўринадики, охирги устундаги шунингдек, охирги сатрдаги эҳтимоллар йиғиндиси бирга тенг бўлиши лозим, пастки ўнг бурчакка ана шу бир ёзилган.

Яна $X = x_i$ бўлиш шартида Y тасодифий миқдорнинг $Y = y_j$ қиймат қабул қилишининг шартли эҳтимолини ҳам топамиз. Бу шартли эҳтимолни $P_{X=x_i}(Y = y_j)$, ёки қисқароқ қилиб $P(y_j/x_i)$ кўринишда белгилаймиз. Кўпайтириш теоремасига мувофиқ,

$$P(x_i, y_j) = P(x_i)\, P(y_j/x_i),$$

бундан изланаётган шартли эҳтимолнинг қийматини ҳосил қиламиз:

$$P(y_j/x_i) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)}. \qquad (4)$$

Агар $X = x_i$ қийматни ўзгартирмасдан $y_j (j = 1, 2, \ldots, m)$ қийматларни ўзгартирсак, у ҳолда $P(y_1/x_i)$, $P(y_2/x_i), \ldots, P(y_m/x_i)$ эҳтимоллар Y тасодифий миқдорнинг биргина $X = x_i$ қийматда $y_1, y_2, \ldots, y_m$ қийматларни қабул қилиш эҳтимолларини билдиради, $\{y_j\}$ қийматлар ва уларга мос келувчи $\{P(y_j / x_i)\}$ эҳтимоллар тўпламини Y нинг $X = x_i$ ўзгармас бўлгандаги *шартли тақсимот қонуни* деб аташ табиийдир. $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ ўзгарганда унга мос шартли тақсимот қонуни ҳам ўзгаради.

Тайин x_i даги $P(y_j/x_i)$ шартли эҳтимоллар йиғиндиси бирга тенглигини осонгина кўрсатиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, (4) формуладан фойдаланиб,

$$\sum_{j=1}^{m} P(y_j/x_i) = \sum_{j=1}^{m} \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)} = \frac{\sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j)}{P(x_i)}$$

ни ҳосил қиламиз, чунки касрнинг махражи i индексга боғлиқ эмас. Бироқ ҳосил қилинган касрнинг сурати (2) формулага кўра унинг махражига тенг. Шундай қилиб,

$$\sum_{j=1}^{m} P(y_j/x_i) = 1. \tag{5}$$

X нинг берилган қийматлари учун Y нинг шартли тақсимот қонунига нисбатан айтилган барча фикрларни берилган Y учун X тасодифий миқдорга ҳам тўлиқ кўчириш мумкин. X тасодифий миқдорнинг $Y=y_j$ бўлиш шартида $X=x_i$ қийматни қабул қилишининг $P(x_i, /y_j)$ шартли эҳтимоли

$$P(x_i/y_j) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)} \tag{6}$$

формула билан топилади. $\{x_i\}$ қийматлар $\{P(x_i/y_j)$ эҳтимоллар билан биргаликда X нинг $Y=y_j$ ўзгармас бўлгандаги *шартли тақсимот қонунини* ташкил қилади. Шартли эҳтимоллар йиғиндиси (6) ва (3) формулаларга мувофиқ бирга тенг:

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i/y_j) = 1. \tag{7}$$

Агар ҳар бир мумкин бўлган $X=x$ ва $Y=y$ қийматлар жуфти учун

$$P(x,y) = P(x)P(y) \tag{8}$$

тенглик ўринли бўлса, *X ва Y тасодифий миқдорлар эркли (боғлиқ бўлмаган)* деб аталишини қайд қилиб ўтамиз.

Текисликнинг бирор G соҳасидаги барча қийматларни қабул қилувчи икки ўлчовли тасодифий миқдор *узлуксиз икки ўлчовли тасодифий миқдор* дейилади. Аммо бу таъриф 15- параграфда қилинганидек, аниқлаштиришни талаб этади. Икки ўлчовли тасодифий миқдор узлуксиз бўлиши учун қўшимча равишда унинг узлуксиз эҳтимоллар зичлигига эга бўлиши талаб қилинади.

14- § да бир ўлчовли X тасодифий миқдорнинг x нуқтадаги эҳтимоллар зичлигини

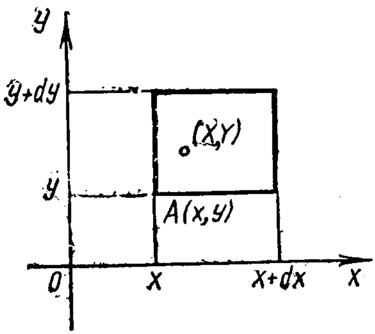
$$P(x < X < x + dx) \approx \varphi(x)\,dx \tag{9}$$

шартни қаноатлантирувчи $\varphi(x)$ функция сифатида аниқлаган эдик. Шунга ўхшаш, *икки ўлчовли (X, Y) тасодифий миқдорнинг зичлик функциясини исталган (x, y) нуқтада*

$$P(x < X < x + dx,\ y < Y < y + dy) \approx \varphi(x, y)\,dx\,dy \tag{10}$$

шартни қаноатлантирувчи $\varphi(x, y)$ функция сифатида аниқланади, бунда (10) тенглик $dxdy$ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдор аниқлигида бажарилади.

Геометрик жиҳатдан $\varphi(x, y)dx\,dy$ кўпайтма тасодифий миқдорнинг $dxdy$ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдор аниқлигида тўғри тўртбурчакка (23- расм) тушиш эҳтимолини ифода қилади.



23- расм.

Икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг бирор G соҳага тушиш эҳтимоли эҳтимоллар зичлиги таърифидан

$$P(M \in G) = \iint_G \varphi(x, y)\,dx\,dy \qquad (11)$$

га тенг бўлиши келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, G соҳани тўртбурчакларга ажратиб ва уларнинг ҳар бирига (10) формулани татбиқ қилиб, изланаётган эҳтимолни қўшиш теоремасига асосан тақрибан икки каррали интеграл йиғинди кўринишида ёза оламиз. Тўғри тўртбурчакларнинг юзини нолга интилтириб, лимитга ўтиш (11) формулани беради. Агар тасодифий миқдорнинг барча мумкин бўлган қийматлари G соҳага тегишли бўлса, у ҳолда

$$\iint_G \varphi(x,y)\,dxdy = 1 \qquad (12)$$

бўлиши равшан.

Агар G соҳа бутун текислик билан устма-уст тушса, бу тенглик ўринлидир, демак, исталган икки ўлчовли тасодифий миқдор учун

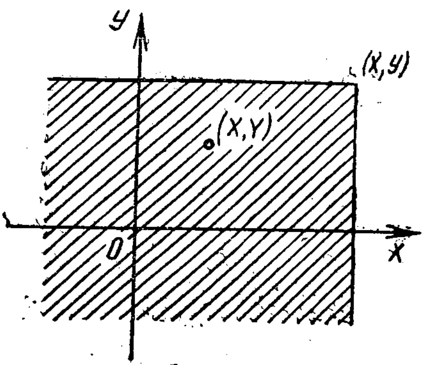
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y)\,dx\,dy = 1 \qquad (13)$$

тенгликни ёзиш мумкин.

Икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг эҳтимоллар зичлигини *тақсимотнинг дифференциал қонуни* деб ҳам аталади. Икки ўлчовли тасодифий миқдор учун *тақсимотнинг интеграл қонунини* ёки *икки ўлчовли тақсимот функциясини* олдинги бобда бир ўлчовли тасодифий миқдор учун қилинганидек аниқлаш мумкин.

Икки ўлчовли тасодифий миқдор тақсимот функциясининг (x, y) нуқтадаги қиймати деб, тасодифий миқдорнинг шу нуқтадан чапга ва ундан пастга тушиш, яъни бу нуқтанинг координаталари $X<x$, $Y<y$ тенгсизликларни қаноатлантириш эҳтимолига айтилади:

$$P(x, y) = P(X < x,\ Y < y) \qquad (14)$$



24- расм.

Бу эса 24- расмда кўрсатилган. Таърифдан ва (11) формуладан

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} \varphi(u, v)\, du\, dv \quad (15)$$

бўлиши келиб чиқади.

Юқорида айтганимиздек, икки ўлчовли тасодифий миқдорни ифодалайдиган нуқтанинг X ва Y координаталарини иккита тасодифий миқдор деб қараш мумкин. Умуман айтганда, X ва Y тасодифий миқдорлар эркли бўлмайди.

Агар x ва y қийматлар қандай бўлмасин $X<x$ ва $Y<y$ тенгсизликларнинг ўринли бўлишидан иборат ҳодисалар ўзаро эркли бўлса, X ва Y тасодифий миқдорлар ўзаро эркли дейилади.*

Агар X ва Y тасодифий миқдорларни эркли деб фараз қилинса, у ҳолда (X, Y) тасодифий миқдорни ўрганиш анча осонлашади. Ҳақиқатан ҳам, X тасодифий миқдор $\varphi_1(x)$ эҳтимоллар зичлигига ва

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_1(u)\, du$$

тақсимот функциясига, Y тасодифий миқдор эса $\varphi_2(y)$ эҳтимоллар зичлигига ва

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} \varphi_2(v)\, dv$$

тақсимот функциясига эга бўлиб, Y миқдор X га боғлиқ бўлмасин. У ҳолда

$$x < X < x + dx, \quad y < Y < y + dy$$

ҳодисанинг эҳтимолини кўпайтириш теоремасига асосан эҳтимоллар кўпайтмаси сифатида ҳосил қилиш мумкин:

$$P(x < X < x + dx,\ y < Y < y + dy) = P(x<X<x+dx) \times \times P(y < Y < y + dy).$$

Ҳосил қилинган ифодани (10) билан таққослаб,

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\, \varphi_2(y) \quad (16)$$

* Дискрет тасодифий миқдорлар учун бу таъриф 122- бетда берилганини эслатиб ўтамиз.

ни ҳосил қиламиз. Шунга ўхшаш, тақсимот функция учун

$$F(x,\ y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}\varphi_1(u)\,\varphi_2(v)dudv=\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi_1(u)\,du\int\limits_{-\infty}^{y}\varphi_2(v)\,dv$$

ёки

$$F(x,\ y)=F_1(x)\cdot F_2(y) \tag{17}$$

ни ҳосил қиламиз.

(16) ва (17) формулалар икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг координаталари эркли бўлгандагина ўринли бўлишини яна бир марта таъкидлаб ўтамиз. Агар икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг эҳтимоллар зичлиги ва тақсимотининг интеграл қонунини мос равишда (16) ва (17) кўринишдаги кўпайтма шаклида ифодалаш мумкин бўлса, у ҳолда бундан унинг координаталари эркли бўлишини тушуниш қийин эмас.

1- мисол. Икки ўлчовли тасодифий миқдор юзи Q га тенг бўлган G соҳада текис тақсимланган. Унинг эҳтимоллар зичлигини аниқлаймиз.

Бу ҳолда эҳтимоллар зичлигини ўзгармас деб ҳисоблаш мумкинлиги таърифдан кўриниб турибди. $\varphi(x,\ y)=A$ бўлсин. У ҳолда (12) формулага кўра

$$\iint\limits_{Q} A\,dx\,dy=1.$$

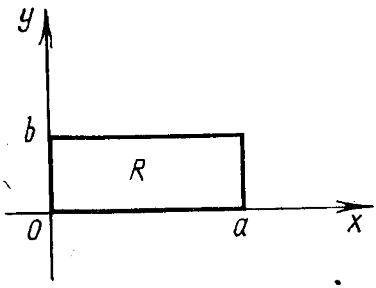
Икки каррали интегралларнинг маълум хоссасига асосан

$$\iint\limits_{G} dxdy=Q,\qquad \text{у ҳолда } A=\frac{1}{Q}.$$

2- мисол. Икки ўлчовли тасодифий миқдор бутун текисликда

$$\varphi(x,\ y)=\frac{A}{(1+x^2)\,(1+y^2)} \tag{18}$$

(Коши қонунининг аналоги) зичлик билан тақсимланган. Икки ўлчовли $F(x,y)$ тақсимот функцияни ва M нуқтанинг 25- расмда кўрсатилган R тўғри тўртбурчакка тушиш эҳтимолини топамиз:.



25- расм.

Аввало A миқдорни аниқлаймиз. (13) формулага асосан

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,\ y)\,dxdy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{A\,dx\,dy}{(1+x^2)\,(1+y^2)}=$$

$$=A\,\mathrm{arc\,tg}\,x\Big|_{-\infty}^{+\infty}\ \mathrm{arc\,tg}\,y\Big|_{-\infty}^{+\infty}=1,$$

яъни $A\pi^2=1$, бундан $A=\frac{1}{\pi^2}$. Шундай қилиб, (18) эҳтимоллар зичлиги

$$\varphi(x,\ y)=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$$

кўринишда бўлиши лозим.

(15) формулага асосан тақсимот функция учун қуйидагини топамиз:

$$F(x, y)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\frac{dudv}{(1+u^2)(1+v^2)}=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{x}\frac{du}{1+u^2}\int_{-\infty}^{y}\frac{dv}{1+v^2}=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{arc\,tg} x+\frac{\pi}{2}\right)\left(\operatorname{arc\,tg} y+\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\operatorname{arc\,tg} y}{\pi}+\frac{1}{2}\right).$$

M нуқтанинг R тўғри тўртбурчакка тушиш эҳтимоли (11) формула ёрдамида топилади:

$$P(M\in R)=\frac{1}{\pi^2}\int_0^a\int_0^b\frac{dudv}{(1+u^2)(1+v^2)}=\frac{1}{\pi}\int_0^a\frac{dy}{1+u^2}\int_0^b\frac{dv}{1+v^2}=\frac{\operatorname{arc\,tg} a\operatorname{arc\,tg} b}{\pi^2}.$$

Бу мисолда M нуқтанинг координаталари бўлган X ва Y тасодифий миқдорларнинг эркинлигини пайқаш қийин эмас. Ҳақиқатан ҳам, эҳтимоллар зичлиги кўпайтма кўринишида ифодаланади:

$$\varphi(x, y)=\frac{1}{\pi(1+u^2)}\cdot\frac{1}{\pi(1+y^2)}=\varphi_1(x)\,\varphi_2(y).$$

3-мисол. Икки ўлчовли тасодифий миқдор координаталар текислигининг биринчи чорагида $(0\leqslant x<+\infty,\ 0\leqslant y<+\infty)$ $\varphi(x, y)=Ae^{-x-y}$ эҳтимоллар зичлиги билан тақсимланган. Икки ўлчовли тақсимот функцияни ва M нуқтанинг 25-расмда тасвирланган ўша R тўғри тўртбурчакка тушиш эҳтимолини топамиз.

$x<0$ ёки $y<0$ бўлганда $\varphi(x, y)$ таърифга кўра айнан нолга тенг бўлганлиги учун (13) формула

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}Ae^{-x-y}dxdy=1$$

кўринишни олади. Бу ердан қуйидагини топамиз:

$$A\int_0^{\infty}e^{-x}dx\int_0^{\infty}e^{-y}dy=Ae^{-x}\Big|_0^{\infty}e^{-y}\Big|_0^{\infty}=A=1.$$

Энди (15) формула ушбу натижани беради:

$$F(x, y)=\int_0^x\int_0^y e^{-u-v}\,dudv=\left[-e^{-u}\Big|_0^x\right]\cdot\left[-e^{-v}\right]_0^y=(1-e^{-x}(1-e^{-y}).$$

M нуқтанинг R тўғри тўртбурчакка тушиш эҳтимоли қуйидагича бўлади:

$$P(M\in R)=\int_0^a\int_0^b e^{-u-v}dudv=\left[-e^{-u}\right]_0^a\cdot\left[-e^{-v}\right]_0^b=$$

$$=(1-e^{-a})\,(1-e^{-b}).$$

19-§. ИККИ ЎЛЧОВЛИ ТАСОДИФИЙ МИҚДОРНИНГ НОРМАЛ ТАҚСИМОТИ

Нормал тақсимот қонуни юқорида бир ўлчовли ҳолда кўрганимиздек, икки ўлчовли тасодифий миқдорлар учун ҳам катта аҳамиятга эга. Шу сабабли нормал қонунни қараб чиқиш учун махсус параграф ажратдик.

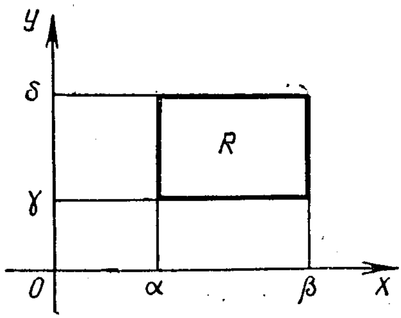
Ишни икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг X ва Y координаталари эркли, нормал тақсимланган ва ҳар бири мос равишда a ва b ўртача қийматларга ҳамда мос равишда σ_x ва σ_y дисперсияларга эга бўлган ҳолдан бошлаймиз. X ва Y нинг эрклилигига асосан (X, Y) нуқтанинг тақсимот зичлигини кўпайтма кўринишида ифодалаш мумкин:

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}}\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-b)^2}{2\sigma_y^2}}$$

ёки

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}-\frac{(y-b)^2}{2\sigma_y^2}}. \qquad (1)$$

(1) формула икки ўлчовли нормал тақсимот қонунни энг содда формада ифодалайди. Текисликнинг (a, b) координатали нуқтаси одатда *нормал тақсимотнинг маркази* ёки *сочилиш маркази* деб аталади.



26- расм.

1-мисол. Икки ўлчовли тасодифий миқдор $a = b = 0$ бўлган (1) нормал қонун бўйича тақсимланган. Унинг 26-расмда тасвирланган R $(\alpha < x < \beta,$ $\gamma < y < \delta)$ тўғри тўртбурчакка тушиш эҳтимолини аниқланг.

Олдинги параграфнинг (11) формуласига кўра

$$P(M \in R) = P(\alpha < X < \beta, \quad \gamma < Y < \sigma) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\int_\alpha^\beta\int_\gamma^\delta e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}dxdy =$$

$$= \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_\alpha^\beta e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}dx \cdot \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\int_\gamma^\sigma e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}dy.$$

Ҳосил қилинган интегралларнинг ҳар бирини Лаплас функцияси орқали ифодалаш мумкин. $\frac{x}{\sigma_x} = t$ деб белгилаб,

$$\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha}{\sigma_x}}^{\frac{\beta}{\sigma_x}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi\left(\frac{\beta}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma_x}\right)$$

ни ҳосил қиламиз. Иккинчи интегрални ҳам шунга ўхшаш алмаштириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(M \in R) = \left[\Phi\left(\frac{\beta}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma_x}\right)\right]\left[\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{\gamma}{\sigma_y}\right)\right]. \qquad (2)$$

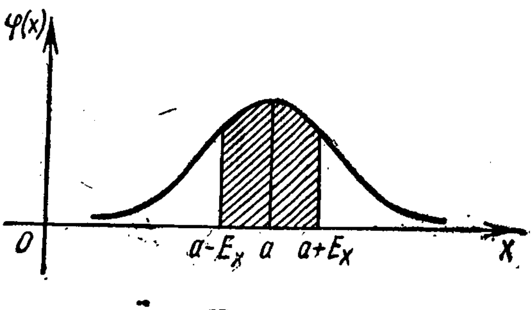
(2) тенгликни бевосита 14-§ даги формулалардан ва кўпайтириш теоремасидан фойдаланиб ҳам ҳосил қилиш мумкин эди.

Кўп ҳолларда икки ўлчовли тасодифий миқдорлар учун нормал тақсимотнинг (1) зичлигини ундаги дисперсиянинг ўрнига бошқа сонли характеристикани киритиб, бошқачароқ формада ёзилади.

Бир ўлчовли X тасодифий миқдор математик кутилиши a ва дисперсияси σ_x^2 бўлган нормал қонун бўйича тақсимланган бўлсин. Шундай E_x катталикни топайликки, X тасодифий миқдорнинг a дан четланишининг E_x дан ортиқ бўлмаслик эҳтимоли, яъни X нинг $(a - E_x,\ a + E_x)$ интервалга тушиш эҳтимоли яримга тенг бўлсин (27-расмга қаранг). Бошқача айтганда, тасодифий миқдор тенг эҳтимол билан $(a - E_x,\ a + E_x)$ интервалда ёки ундан ташқарида бўлади. Бу E_x *катталик эҳтимолий* ёки *ўртача четланиш* деб аталади.

E_x катталик X нинг сочилишини характерлаши равшан, шунинг учун у σ_x^2 дисперсия билан боғланган бўлиши лозим. Ана шу боғланишни топамиз. E_x нинг таърифидан келиб чиқадики,

$$P(-E_x < X - a < E_x) = \frac{1}{2}$$



27-расм.

ёки

$$P(a-E_x<X<E_x+a)=\frac{1}{2}.$$

Лаплас функциясидан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(a-E_x<X<a+E_x)=2\Phi\left(\frac{E_x}{\sigma_x}\right)=\frac{1}{2}.$$

Бундан $\Phi\left(\frac{E_x}{\sigma_x}\right)=0{,}25$. Лаплас функциясининг қийматлари жадвалидан

$$E_x=0{,}6745\,\sigma_x \tag{3}$$

ни топамиз. (3) нинг ўрнига кўпинча

$$E_x=\rho\sqrt{2}\,\sigma_x \tag{4}$$

қилиб ёзилади. Бу ерда $\rho=0{,}4969$.

(1) ифодада дисперсиялар ўрнига E_x ва E_y ўртача четланишларни киритиб, нормал тақсимот эҳтимоллар зичлигининг ушбу ифодасини ҳосил қиламиз:

$$\varphi(x,\ y)=\frac{\rho^2}{\pi E_x E_y}\,e^{-\rho^2\left[\frac{(x-a)^2}{E_x^2}+\frac{(y-b)^2}{E_y^2}\right]}. \tag{5}$$

(5) ифода кўпинча Гаусс тақсимот қонунининг *каноник формаси* деб аталади.

Қисқалик учун $\frac{\rho^2}{\pi E_x E_y}=A$ деб белгилаб ва $a=b=0$ деб қабул қилиб,

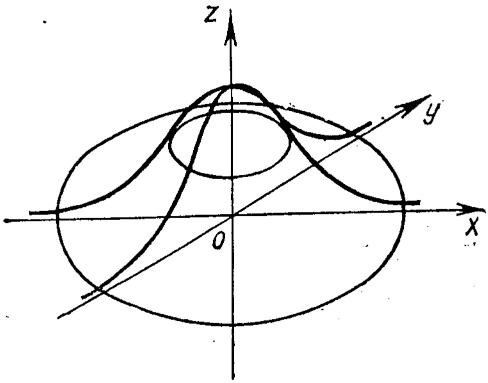
$$z=Ae^{-\rho^2\left[\frac{x^2}{E_x^2}+\frac{y^2}{E_y^2}\right]} \tag{6}$$

сиртнинг формасини ўрганамиз.

Исталган x ва y учун $z>0$, демак, сирт доимо xOy текислик устида жойлашган, $x=y=0$ нуқтада $z=\varphi(x,\ y)$ функция A га тенг бўлган максимумга эга. Сиртни кейинги текширишлар учун унинг $yOz(x=0)$ ва $xOz(y=0)$ текисликлар билан кесимларини қараймиз. У ҳолда мос равишда қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$x=0\quad \text{бўлганда}\quad z=Ae^{-\rho^2\frac{y^2}{E_y^2}},$$

$$y=0\quad \text{бўлганда}\quad z=Ae^{-\rho^2\frac{x^2}{E_x^2}}.$$



28- расм.

Бу кесимлар тақсимотнинг нормал эгри чизиқларини ифода қилади (28-расм). $z = H$ деб олиб, xOy текисликка параллел кесимларни ҳосил қиламиз, у ҳолда

$$H = Ae^{-\rho^2\left(\frac{x^2}{E_x^2} + \frac{y^2}{E_y^2}\right)}.$$

Бу тенгликни логарифмлаб ва

$$\rho^2 \ln \frac{A}{H} = K^{2*}$$

деб белгилаб,

$$\frac{x^2}{E_x^2} + \frac{y^2}{E_y^2} = K^2$$

ёки

$$\frac{x^2}{(KE_x)^2} + \frac{y^2}{(KE_y)^2} = 1 \qquad (7)$$

ни ҳосил қиламиз.

(7) тенглама H камайганда ярим ўқлари E_x ва E_y эҳтимолий четланишларга пропорционал ўсувчи ўхшаш эллипслар оиласини аниқлайди. Бу эллипслар *сочилиш эллипслари* дейилади. $K = 0$, яъни $H = A$ бўлганда эллипс нуқтага айланади. $K = 1$ бўлганда ҳосил бўладиган эллипс *сочилишнинг бирлик эллипси;* $K = 4$ бўлганда ҳосил бўладиган эллипс эса *сочилишнинг тўлиқ эллипси* дейилади. Уларнинг тенгламалари қуйидагича:

$$\frac{x^2}{E_x^2} + \frac{y^2}{E_y^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{16E_x^2} + \frac{y^2}{16E_y^2} = 1.$$

Хусусий ҳолда, ўртача хатоликлар бир хил ($E_x = E_y$) бўлса, сочилиш эллипслари айланага айланади. Бу ҳолда сочилиш *доиравий сочилиш* деб аталади.

Сочилиш эллипсларининг бош ўқлари, (1) тенгламадан кўриниб турганидек, координата ўқларига параллеллигини қайд қилиб ўтиш муҳимдир.

2-мисол. Икки ўлчовли тасодифий миқдор текисликда (5) каноник формадаги Гаусс қонунига мувофиқ нормал тақсимланган. Унинг (7) тенглама билан берилган α_k сочилиш эллипсига тушиш эҳтимолини аниқлайлик.

---

* $A > H$, яъни $\frac{A}{H} > 1$ ва $\ln \frac{A}{H} > 0$ эканини қайд қиламиз.

Маълумки, бу эҳтимол қуйидагига тенг:

$$P(M \in \alpha_K) = \frac{\rho^2}{\pi E_x E_y} \iint\limits_{\alpha_K} e^{-\rho^2\left(\frac{x^2}{E_x^2} + \frac{y^2}{E_y^2}\right)} dxdy. \tag{8}$$

(8) интегрални ҳисоблаш учун янги

$$u = \frac{\rho x}{E_x}, \qquad v = \frac{\rho y}{E_y}$$

ўзгарувчиларни киритамиз. Бу тенгликларга мос равишда

$$x = \frac{uE_x}{\rho}, \qquad y = \frac{vE_y}{\rho}$$

ни ҳосил қиламиз.

x ва y нинг топилган қийматларини (7) тенгламага қўйиб,

$$u^2 + v^2 = K^2\rho^2$$

ни топамиз, бу тенглик α_K сочилиш эллипси $K\rho$ радиусли C_K доирага ўтганини билдиради. Сўнгра $dxdy = \frac{E_xE_y}{\rho^2}$; демак, (8) интеграл

$$P(M \in \alpha_K) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{C_K} e^{-(u^2 + v^2)}\, dudv$$

кўринишни олади. Ҳосил қилинган интегрални қутб координаталарга алмаштирамиз. $u = r\cos\vartheta$, $v = r\sin\vartheta$ деб $u^2 + v^2 = r^2$, $dudv = rdrdv$ ни топамиз. Шу сабабли

$$P(M \in \alpha_K) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \int\limits_0^{K\rho} e^{-r^2} rdr = -2\int\limits_0^{K\rho} e^{-r^2}\frac{1}{2}\, d(-r^2).$$

Бу интегрални ҳисоблаб, сочилиш эллипсига тушиш учун формулани ҳосил қиламиз:

$$P(M \in \alpha_K) = 1 - e^{-K^2\rho^2}. \tag{9}$$

Жумладан, (9) формуладан б и р л и к сочилиш эллипсига ва т ў л и қ сочилиш эллипсига тушиш эҳтимолларини топиш учун ҳам фойдаланиш мумкин. Юқорида айтилганидек, улар мос равишда $K=1$ ва $K=4$ қийматлар билан характерланади. Демак, (9) формулага асосан қуйидагиларни топамиз:

$$P(M \in \alpha_1) = 1 - e^{-\rho^2} = 0{,}2034.$$

$$P(M \in \alpha_2) = 1 - e^{-16\rho^2} = 0{,}9737,$$

чунки $\rho = 0{,}4769$.

3- м и с о л. Доиравий сочилишга эга бўлган ($E_x = E_y = E$) нормал қонун бўйича тақсимланган икки ўлчовли тасодифий миқдорни текширамиз. Текисликнинг тасодифий нуқтасидан координаталар бошида ётиши мумкин деб қаралувчи сочилиш марказигача бўлган масофа бир ўлчовли тасодифий миқдордир:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} \geqslant 0.$$

R тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясини ва эҳтимоллар зичлигини, шунингдек, унинг математик кутилишини аниқлаймиз.

R тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясини

$$F(r) = P(R < r)$$

деб белгилаб, (9) формула ёрдамида

$$P(R < r) = 1 - e^{-K^2\rho^2}$$

ни топамиз. (7) тенгламадан $EK = r$, яъни $K = \frac{r}{E}$ экани келиб чиқади. Шундай қилиб,

$$F(r) = 1 - e^{-\left(\rho\frac{r}{E}\right)^2}. \tag{10}$$

Эҳтимоллар зичлигини топиш учун (10) формулани r бўйича дифференциаллаш кифоя, у ҳолда

$$\varphi(r) = 2r\frac{\rho^2}{E^2}e^{-\rho^2\frac{r^2}{E^2}} \tag{11}$$

ни ҳосил қиламиз.

Энди R тасодифий миқдорнинг математик кутилишини топиш мумкин:

$$M(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} r\varphi(r)dr$$

бўлади. Бунга $\varphi(r)$ учун ҳосил қилинган (11) ифодани қўйиб ва $r < 0$ да $\varphi(r) = 0$ эканини эътиборга олиб,

$$M(R) = \int_0^\infty 2\frac{\rho^2}{E^2}r^2e^{-\rho\frac{2r^2}{E^2}}dr$$

ни ҳосил қиламиз. Бу интегрални бўлаклаб интеграллаймиз:

$$r = u, \quad 2r\frac{\rho^2}{E^2}e^{-r^2\frac{\rho^2}{E^2}}dr = dv. \text{ У ҳолда } du = dr, \; v = -e^{-r^2\frac{\rho^2}{E^2}}$$

ва

$$M(R) = -re^{-r^2\frac{\rho^2}{E^2}}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-r^2\frac{\rho^2}{E^2}}dr.$$

Биринчи қўшилувчи нолга тенг. Қолган интегралда $r\frac{\rho}{E} = \frac{t}{\sqrt{2}}$ деб олсак,

$$M(R) = \frac{E}{\rho\sqrt{2}}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

ни ҳосил қиламиз. Лекин бу интегрални 10-§ да ҳисоблаган эдик. У ерда олинган натижадан ва (4) формуладан фойдаланиб, узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

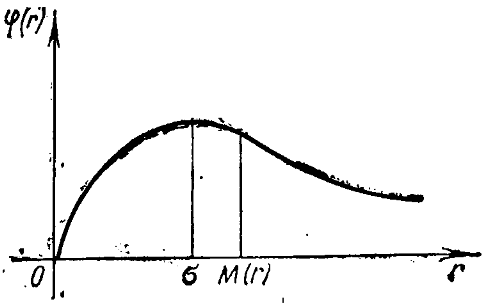
$$M(R) = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1{,}253\,\sigma.$$

Тақсимот функциянинг графигини ясаш учун r нинг эҳтимоллар зичлигининг максимал қийматига мос келувчи қийматини топамиз*:

$$\varphi'(r) = 2\frac{\rho^2}{E^2}e^{-\rho^2\frac{r^2}{E^2}}\left(1 - 2r^2\frac{\rho^2}{E^2}\right).$$

* Тасодифий миқдорнинг эҳтимоллар зичлигининг максимал қийматига мос келувчи қиймати *мода* деб аталади.

$\varphi'(r) = 0$ тенглама $r = \frac{E}{\rho\sqrt{2}} = \sigma$ илдизга эга ((4) формулага қаранг). Етарли шартларни ўрганиш кўрсатадики, $r = \sigma$ бўлганда эҳтимоллар зичлиги максимумга эга бўлади. $\varphi(r)$ функциянинг графиги 29-расмда кўрсатилган.



29- расм.

Ҳозирга қадар икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг сочилиш эллипсининг ўқлари координаталар ўқларига параллел бўлган хусусий ҳолини ўрганиш билан чегараландик.

Умуман, эҳтимоллар тақсимотининг зичлиги

$$\varphi(x, y) = Re^{-Q(x, y)} \qquad (12)$$

формула билан берилган икки ўлчовли тасодифий миқдор нормал қонун бўйича тақсимланган дейилади, бу ерда $Q(x, y)$ ифода $u = x - a$, $v = y - b$ ўзгарувчиларга нисбатан *мусбат аниқланган квадратик форма*, a, b—сочилиш марказининг координаталари.

Квадратик форма деб, алгебрада иккинчи даражали бир жинсли кўпҳад аталишини эслатиб ўтамиз. Аргументнинг барча қийматларида фақат мусбат қийматлар қабул қилувчи квадратик форма *мусбат аниқланган квадратик форма* дейилади. Олий алгебра курсида мусбат аниқланган квадратик формани

$$Q(x, y) = \frac{(x-a)^2}{2A^2} - r\frac{(x-a)(y-b)}{AB} + \frac{(y-b)^2}{2B^2}$$

кўринишда тасвирлаш мумкинлиги исбот қилинади, бу ерда A, B—бирор мусбат сонлар, r сон эса $-1 \leqslant r \leqslant +1$ шартни қаноатлантиради.

(12) формуладаги R коэффициент эҳтимоллар зичлигидан олинган интегралнинг бирга тенглиги шартидан топилади $|r| \neq 1$ деб фараз қилиб ҳамда A ва B сонлар ўрнига янги σ_1 ва σ_2 катталикларни

$$A = \sigma_1\sqrt{1-r^2}, \qquad B = \sigma_2\sqrt{1-r^2}$$

формулалар ёрдамида киритиб, сўнгра нормалловчи R коэффициентни ҳисоблаб, икки ўлчовли нормал тақсимотнинг эҳтимоллар зичлигини

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r)^2}\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right]} \qquad (13)$$

кўринишда ёзамиз. σ_1, σ_2 ва r параметрларнинг эҳтимолий маъноси ҳақида кейинги параграфда сўз боради.

Мусбат ўзгармас миқдорнинг даража кўрсаткичидаги ўртача қавсни нолга тенглаб, аввалгидек, маркази (a, b) нуқтада бўлган *сочилиш эллипсининг* тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2} = K,$$

бироқ бу ерда унинг ўқлари $r \neq 0$ бўлгандагина **координаталар ўқларига параллел бўлмайди.**

20-§. ИККИТА ТАСОДИФИЙ МИҚДОР СИСТЕМАСИНИНГ СОНЛИ ХАРАКТЕРИСТИКАЛАРИ

Икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг сонли характеристикаларини уни иккита бир ўлчовли тасодифий миқдорлар системаси сифатида қараб киритиш қулайроқдир.

Аввало $\varphi(x, y)$ икки ўлчовли тақсимот зичлигини билган ҳолда X тасодифий миқдорнинг тақсимот зичлигини қандай топиш мумкинлигини кўрсатамиз. Шунга ўхшаш масала, X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини икки ўлчовли маълум тақсимот қонун бўйича топиш 18-§ да (X, Y) дискрет тасодифий миқдорга нисбатан кўриб чиқилган эди.

Агар $\varphi(x, y)$ зичликни Y миқдорнинг мумкин бўлган барча қийматлари бўйича (яъни, умуман айтганда $-\infty$ дан $+\infty$ гача) интегралласак, у ҳолда қўшиш теоремасига асосан X тасодифий миқдорнинг $(x, x+dx)$ интервалдаги қийматларни қабул қилиш эҳтимоллари зичлигини ҳосил қиламиз. Бу зичликни $\varphi_1(x)$ орқали белгилаб, қуйидагини ёза оламиз:

$$\varphi_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x, y)dy. \tag{1}$$

Айнан шунга ўхшаш, Y тасодифий миқдорнинг эҳтимоллар зичлиги

$$\varphi_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x, y)dx \tag{2}$$

бўлади.

(1) ва (2) формулалар 18-§ да икки ўлчовли дискрет тасодифий миқдорлар учун чиқарилган (1) ва (2) формулаларга мос келиб, бу формулалар у ердаги йиғиндиларни интегралларга алмаштирилганлиги билан фарқ қилади.

X ва Y тасодифий миқдорларнинг эҳтимоллари зичликларини билган ҳолда тегишли тақсимотларнинг интеграл қонунларини ёзиш қийин эмас. Уларни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$F_1(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi_1(u)du=\int_{-\infty}^{x}du\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u, v)dv, \tag{3}$$

$$F_2(y)=\int_{-\infty}^{y}\varphi_2(v)dv=\int_{-\infty}^{y}dv\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u, v)du. \tag{4}$$

Шунингдек, шартли тақсимот қонунларини 18-§ да дискрет тасодифий миқдорлар учун қилинганига ўхшаш киритиш мумкин. X нинг $(x, x+dx)$ интервалда бўлиш шартида Y нинг $(y, y+dy)$ интервалда бўлишининг эҳтимоллар зичлигини $\varphi(y/x)$ орқали белгилаймиз. Айнан шундай маънога $\varphi(x/y)$ белгилаш ҳам эга бўлади. У ҳолда кўпайтириш теоремасига кўра қуйидагини топамиз:

$$\varphi(x,\ y)dxdy=\varphi_1(x)dx\varphi(y/x)dy=\varphi_2(y)dy\varphi(x/y)dx.$$

Эҳтимоллар зичлиги учун ҳосил қилинган (1) ва (2) формулалардан фойдаланиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\varphi(y/x)=\frac{\varphi(x,\ y)}{\varphi_1(x)}=\frac{\varphi(x,\ y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,\ y)dy},\tag{5}$$

$$\varphi(x/y)=\frac{\varphi(x,\ y)}{\varphi_2(y)}=\frac{\varphi(x,\ y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,\ y)dx}.\tag{6}$$

(5) ва (6) формулалар билан ифодаланган $\varphi(y/x)$, $\varphi(x/y)$ миқдорлар *шартли эҳтимоллар зичлиги* деган номга эга.

1-мисол. $M(X,\ Y)$ тасодифий нуқта ярим ўқлари координата ўқлари билан устма-уст тушувчи ва a, b га тенг бўлган эллипснинг исталган нуқтасига бир хил эҳтимол билан тушади. X ва Y тасодифий миқдорларнинг эҳтимоллар зичлигини, шунингдек, $\varphi(y/x)$ ва $\varphi(x/y)$ шартли эҳтимоллар зичлигини топиш талаб қилинади.

18-§ даги 2-мисолда келтириб чиқарганимиздек, G соҳада текис тақсимланган узлуксиз тасодифий миқдорнинг эҳтимоллар зичлиги ўзгармас бўлиб, $M\in G$ бўлганда $\varphi(x,\ y)=\frac{1}{Q}$ эди, бунда $Q\, G$ соҳанинг юзини билдиради. Интеграл ҳисобдан маълумки, ярим ўқлари a ва b бўлган эллипснинг юзи $Q=\pi ab$ эди. Шунинг учун бу мисолда икки ўлчовли эҳтимоллар зичлиги қуйидагича бўлади:

$$\varphi(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}<1 & \text{да } \dfrac{1}{\pi ab},\\[2mm] \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}>1 & \text{да } \quad 0.\end{cases}$$

Агар бунда x ўзгарувчи $-a\leqslant x\leqslant a$ кесмада ўзгарса, у ҳолда ҳар бир x да y нинг мос ўзгариш соҳаси

$$-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\leqslant y\leqslant b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

кесма бўлади.

X тасодифий миқдорнинг эҳтимоллар зичлигини $|x|<a$ қўшимча шартда (1) формулага асосан ҳосил қилиш мумкин:

$$\varphi_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,\ y)dy=\int\limits_{-\frac{a}{b}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\frac{1}{\pi ab}dy=\frac{2}{\pi a^2}\sqrt{a^2-x^2}.$$

$|x|>a$ бўлганда $\varphi_1(x)\equiv 0$ бўлади.

Шунга ўхшаш, $|y| \leqslant b$ бўлганда Y тасодифий миқдорнинг эҳтимоллар зичлиги топилади:

$$\varphi_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y)dx = \int_{-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} \frac{1}{\pi ab} dx = \frac{2}{\pi b^2}\sqrt{b^2-y^2}.$$

$|y| > b$ учун юқоридагидек, $\varphi_2(y) \equiv 0$ бўлади.

Энди $\varphi(y/x)$ шартли эҳтимоллар зичлигини топамиз. (5) формулани татбиқ қиламиз: агар $|x| < a$ ва $|y| \leqslant \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ бўлса,

$$\varphi(y/x) = \frac{\varphi(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y)dx} = \frac{\frac{1}{\pi ab}}{\frac{2}{\pi a^2}\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a}{2b\sqrt{a^2-x^2}};$$

агар $|x| \geqslant a$ ёки $|y| > \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ бўлса, у ҳолда $\varphi(y/x) \equiv 0$ бўлади. Шунга ўхшаш ҳисоблашларни бажариб, $|y| < b$ ва $|x| < \frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$ бўлганда

$$\varphi(x/y) = \frac{b}{2a\sqrt{b^2-y^2}}$$

натижани, бу иккита шартдан ҳеч бўлмаганда бири бажарилмаганда эса $\varphi(x/y) \equiv 0$ натижани топамиз.

Энди $M(X, Y)$ миқдор $\varphi(x, y)$ эҳтимоллар зичлигига эга бўлган икки ўлчовли тасодифий миқдор бўлсин. X ва Y тасодифий миқдорларнинг ҳар бирининг математик кутилишлари ва дисперсияларини қараб чиқамиз.

X ва Y тасодифий миқдорларнинг математик кутилишлари 16-§ даги таърифларга мувофиқ,

$$M(X) = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi_1(x)dx, \quad M(Y) = \bar{y} = \int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi_2(y)dy$$

формулалар бўйича топилади. (1) ва (2) формулалардан фойдаланиб, бу математик кутилишларни $\varphi(x, y)$ икки ўлчовли эҳтимоллар зичлиги орқали ифодалаш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} M(X) &= \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x, y)dx\,dy, \\ M(Y) &= \bar{y} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi(x, y)dx\,dy. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

(7) формулалар билан аниқланувчи $(\bar{x}, \bar{y})$ координатали M нуқта икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг *сочилиш марказини* характерлайди, бу нуқтанинг атрофида $M(X, Y)$ тасодифий нуқталар сочилгандир. Ўқлар бўйича сочилиш ўлчовлари эса бир ўлчовли тасодифий миқдорларнинг дисперсиялари билан берилади:

$$\left.\begin{aligned} D(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})^2 \varphi_1(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})^2 \varphi(x, y)dxdy, \\ D(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (y-\bar{y})^2 \varphi_2(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (y-\bar{y})^2 \varphi(x, y)dxdy. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Бир ўлчовли ҳолдагига ўхшаш, интеграл остидаги функцияларни қўшилувчиларга ажратиб, дисперсиялар учун ҳисоблашларни осонлаштирадиган бироз бошқачароқ ифодалар ҳосил қилиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} D(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x, y)\, dx\, dy - \bar{x}^2, \\ D(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \varphi(x, y) dx\, dy - \bar{y}^2. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Математик кутилишлар ва дисперсияларни ҳисоблашни (8) ва (9) формулаларга мувофиқ битта схемага бирлаштириш мумкин. Шу мақсадда тасодифий миқдорлар системасининг марказий моменти тушунчасини киритамиз.

(X, Y) тасодифий миқдорлар системасининг k, s тартибли марказий моменти деб, X^kY^s кўпайтманинг математик кутилишига айтилади. Узлуксиз тасодифий миқдорларнинг k, s *тартибли марказий моменти*

$$\mu_{k,\,s} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})^k (y-\bar{y})^s \varphi(x, y) dx\, dy \quad (10)$$

формула бўйича ҳисобланади, бу ерда k, s—манфий бўлмаган бутун сонлар.

$k+s$ йиғинди *марказий моментнинг тартиби* деб аталади. Масалан, $k+s=1$ бўлган барча k, s тартибли моментлар биринчи тартибли, $k+s=2$ бўлган барча k, s тартибли моментлар эса иккинчи тартибли моментлар дейилади. Биз ана шундай моментларни қараб чиқиш билан чекланамиз.

(7) формуладан кўринадики, *биринчи тартибли марказий моментлар нолга тенгдир.* Ҳақиқатан ҳам, k, s лар манфий бўлмаган бутун сонлар бўлганлигидан фақат турли иккита

биринчи тартибли: 1,0 тартибли ва 0,1 тартибли марказий моментлар мавжуд:

$$\mu_{1,0}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\bar{x})\varphi(x,\ y)dxdy$$

ва

$$\mu_{0,1}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(y-\bar{y})\varphi(x,\ y)dxdy.$$

$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,\ y)dxdy$ (18-§ даги (4) формулага қаранг) бўлганлиги сабабли

$$\mu_{1,0}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x,\ y)dxdy-\bar{x},$$

бу эса $\bar{x}$ нинг таърифига кўра нолга тенг ((7) формулага қаранг). Айни шу сабабга кўра $\mu_{1,0}=0$.

Дисперсияларнинг (8) таърифи кўрсатадики, $D(X)$ ва $D(Y)$ дисперсиялар мос равишда 2,0 ва 0,2 тартибли марказий моментлардан иборатдир. Иккинчи тартибли аралаш марказий момент, яъни 1,1 тартибли момент алоҳида аҳамият касб этади. Уни X ва Y тасодифий миқдорларнинг *корреляцион моменти* ёки *боғланиш моменти* дейилади ва K_{xy} билан белгиланади. (10) таърифга мувофиқ,

$$K_{xy}=\mu_{1,1}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\bar{x})(y-\bar{y})\varphi(x,\ y)dxdy \qquad (11)$$

га эга бўламиз.

(11) интегрални қўшилувчиларга ёйиб ва биринчи тартибли марказий моментларнинг нолга тенглигини эътиборга олиб, корреляцион момент учун бошқача ифода ҳосил қилиш мумкин. Чунончи:

$$K_{xy}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x(y-\bar{y})\varphi(x,y)dx\,dy-\bar{x}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(y-\bar{y})\varphi(x,y)dxdy=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\varphi(x,y)dx\,dy-\bar{y}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x,\ y)dxdy-\bar{x}\mu_{0,1}.$$

Бундан узил-кесил

$$K_{xy}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\,\varphi(x,y)dxdy-\bar{x}\,\bar{y} \qquad (12$$

ифодани ҳосил қиламиз.

2-мисол. $M(X, Y)$ нуқта $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ квадратнинг ичида $\varphi(x, y) = 0{,}5 \sin(x+y)$, унинг ташқарисида эса $\varphi(x, y) = 0$ эҳтимоллар зичлиги билан тақсимланган.

а) $F(x, y)$ икки ўлчовли тақсимот функцияни;

б) X ва Y тасодифий миқдорларнинг $M(X)$, $M(Y)$ математик кутилишларини, яъни сочилиш марказининг координаталарини;

в) $D(X)$ ва $D(Y)$ дисперсияларни;

г) K_{xy} корреляцион моментни топамиз.

Ечилиши. а) 18-§ даги (5) формулага асосан

$$F(x, y) = P(X < x, \ Y < y) = \frac{1}{2}\int_0^x \int_0^y \sin(u+v)\,du\,dv =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^x [-\cos(u+v)]_{v=0}^{v=y} du = \frac{1}{2}\int_0^x [\cos u - \cos(u+y)]\, du =$$

$$= \frac{1}{2}[\sin u - \sin(u+y)]_{u=0}^{u=x} = \frac{1}{2}[\sin x - \sin(x+y) + \sin y];$$

б) $M(X)$ математик кутилиш қуйидаги формулага асосан топилади:

$$M(X) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x+y)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left[\cos x - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right] dx.$$

$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ тенгликдан фойдаланиб ва бўлаклаб интеграллаб, $M(X) = \frac{\pi}{4}$ ни топамиз. Шунга ўхшаш, $M(Y)$ учун қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M(Y) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} y \sin(x+y)\,dx\,dy = \frac{\pi}{2}.$$

Демак, ҳозирги ҳолда сочилиш маркази $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ нуқта, яъни квадратнинг маркази бўлади.

в) дисперсияларни ҳисоблашда (9) формулалардан фойдаланамиз:

$$D(X) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x+y)\,dx\,dy - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\left[\cos x - \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]dx - \frac{\pi^2}{16}.$$

б) пунктдагидек, $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ тенгликни эътиборга олиб ва икки марта бўлаклаб интеграллаб,

$$D(X) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{16} - 2 \approx 0{,}187$$

ни топамиз, Y тасодифий миқдорнинг дисперсияси ҳам шундай қийматга эга бўлади;

г) энди K_{xy} корреляцион моментни ҳисоблаймиз. (12) формулага асосан:

$$K_{xy} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xy \sin(x+y)\,dx\,dy - \frac{\pi^2}{16}.$$

Юқорида татбиқ қилинган усуллар ёрдамида

$$K_{xy} \approx -0{,}045$$

натижани ҳосил қиламиз.

Энди тасодифий миқдорлар орасидаги боғланишни характерлашда корреляцион моментнинг аҳамиятини тўлароқ қараб чиқамиз. Унинг роли аввало қуйидаги теорема билан аниқланади.

1-теорема. *Агар X ва Y тасодифий миқдорлар эркли бўлса, у ҳолда уларнинг корреляцион моменти нолга тенг:*

$$K_{xy} = 0.$$

Исботи. Теорема умумий ҳолда ҳам тўғри бўлса-да, унинг исботини узлуксиз тасодифий миқдорлар бўлган ҳол учун келтирамиз. 18-§ да кўрсатилган эдики, агар X ва Y тасодифий миқдорлар эркли бўлса, у ҳолда (X, Y) икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг эҳтимоллар зичлиги кўпайтма кўринишида тасвирланиши мумкин:

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\,\varphi_2(y).$$

Бу тенгликдан фойдаланиб, корреляцион моментнинг ифодасини қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\overline{x})(y-\overline{y})\varphi(x, y)\,dxdy =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\overline{x})\varphi_1(x)dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (y-\overline{y})\varphi_2(y)dy.$$

Бироқ бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегралларнинг ҳар бири мос равишда X ва Y тасодифий миқдорларнинг биринчи тартибли марказий моментларидир, шу сабабли улар нолга тенг. Ҳақиқатан ҳам,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\overline{x})\varphi_1(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi_1(x)dx - \overline{x}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x)dx = \overline{x} - \overline{x} = 0,$$

чунки биринчи интеграл X тасодифий миқдорнинг математик кутилиши, эҳтимоллар зичлигидан олинган интеграл эса бирга тенг.

Шундай қилиб, тасодифий миқдорларнинг эркли бўлиши учун уларнинг корреляцион моментлари нолга тенг бўлиши зарур экан. Бироқ тескари теорема тўғри эмас ва корреляцион моментнинг нолга тенг бўлиши тасодифий миқдорнинг эркли бўлиши учун етарли бўлмайди. Бунга айрим мисолларда ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Кўп ҳолларда X ва Y тасодифий миқдорлар орасидаги боғланишни характерлаш учун корреляцион момент ўрнига корреляцион моментнинг дисперсиялар кўпайтмасидан олинган квадрат илдизга нисбатига тенг бўлган ушбу

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} = \frac{K_{xy}}{\sigma_y \sigma_x} \tag{13}$$

ўлчамсиз миқдордан фойдаланилади.

Бу нисбат *корреляция коэффициенти* дейилади. Корреляция коэффициенти абсолют катталиги бўйича бирдан катта бўла олмаслиги, яъни доимо

$$-1 \leqslant r_{xy} \leqslant +1 \tag{14}$$

тенгсизликларни қаноатлантириши кейинги параграфда кўрсатилади.

Корреляция коэффициентининг (13) таърифи ва 1-теоремадан қуйидаги теорема дарҳол келиб чиқади.

2-теорема. *Агар X ва Y тасодифий миқдорлар эркли бўлса, у ҳолда уларнинг корреляция коэффициенти нолга тенг бўлади.*

Бундан ташқари, корреляция коэффициентининг тасодифий миқдорлар орасидаги боғланишни характерлашдаги аҳамиятини тўлароқ очиб берадиган яна бир теорема ўринлидир.

3-теорема. *Агар X ва Y тасодифий миқдорлар чизиқли боғлиқ, яъни улар орасида $Y = aX + b$ муносабат мавжуд бўлса, у ҳолда корреляция коэффициентининг абсолют қиймати бирга тенг. Янада батафсилроқ айтадиган бўлсак, $a > 0$ да $r_{xy} = +1$ бўлиб, $a < 0$ да $r_{xy} = -1$ бўлади.*

Исботи. Математик кутилишнинг кейинги параграфда исботланадиган қуйидаги хоссасидан яна бир марта фойдаланамиз: тасодифий миқдорлар йиғиндисининг математик кутилиши қўшилувчиларнинг математик кутилишлари йиғиндисига тенг.

Корреляция моментининг қуйидагига тенглигини қайд қиламиз:

$$K_{xy} = M[(X - \bar{x})(Y - \bar{y})] = M[(X - \bar{x})(aX + b - \bar{y})].$$

Математик кутилишнинг ҳозиргина кўрсатилган хоссасига кўра

$$\bar{y} = M(Y) = M(aX + b) = aM(X) + b = a\bar{x} + b;$$

шу сабабли корреляцион момент учун қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$K_{xy} = M[(X - \bar{x})(aX + b - a\bar{x} - b)] = M[(X - \bar{x})\, a\, (X - \bar{x})] =$$
$$= aM(X - \bar{x})^2 = aD(X) = a\sigma_x^2.$$

Y нинг дисперсиясини топамиз:

$$D(Y) = \sigma_y^2 = M(Y - \bar{y})^2 = M(aX + b - a\bar{x} - b)^2 =$$
$$= a^2 M(X - \bar{x})^2 = a^2 D(X) = a^2\sigma_x^2,$$

бундан $\sigma_y = |a|\sigma_x$. Шундай қилиб,

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{a\sigma_x^2}{\sigma_x |a| \sigma_x} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} +1, & \text{агар } a > 0 \text{ бўлса;} \\ -1, & \text{агар } a < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Бу билан теорема исботланди.

Тасодифий миқдорлар орасидаги боғланишлар ҳақида бир қанча умумий фикрларни айтиб ўтамиз. Тасодифий миқдорларнинг тўлиқ эрклилиги, ёки аксинча, улар орасидаги функционал боғланиш боғлиқликнинг „энг четки қутблари" бўлиши равшан. Агар тасодифий миқдорлар эркли бўлса, у ҳолда улардан бирининг қийматларини билиш иккинчи тасодифий миқдор ҳақидаги маълумотларга ҳеч қандай таъсир қилмайди. Аксинча, агар тасодифий миқдорлар орасида функционал боғланиш мавжуд бўлса, у ҳолда улардан бирининг қабул қилган қиймати иккинчисининг қабул қиладиган қийматини бир қийматли аниқлайди.

Тасодифий миқдорлар орасидаги боғланишларнинг бошқача кўриниши ҳам мавжудки, бунда улардан бирининг қиймат-

(ларини билиш иккинчисининг қийматларини бир қийматли, яъни бирга тенг эҳтимол билан) аниқламайди, балки унинг тақсимот қонунигина аниқлайди. Бундай боғланишни *корреляцион* ёки *стохастик боғланиш* деб аташ қабул қилинган. Уни икки ўлчовли дискрет тасодифий миқдор мисолида осонгина кўрсатиш мумкин. Чунончи 18-§ да биз икки ўлчовли дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини икки йўлли жадвал кўринишида берган эдик ва $P(y_j/x_i)$ ёки мос равишда $P(x_i/y_i)$ шартли эҳтимоллар билан аниқланувчи шартли тақсимот қонунларни кўриб ўтган эдик. X тасодифий миқдорнинг тайин бир қийматини танлаш Y тасодифий миқдор учун тайин бир тақсимот қонунини беради.

Корреляция коэффициенти тасодифий миқдорлар орасидаги корреляцион боғланишни сонли характерлайди. Агар улар эркли бўлса, корреляция коэффициенти нолга тенг. r нинг $0 < |r| < 1$ оралиқлардаги қийматларида эса тасодифий миқдорлар орасида корреляцион боғланиш бор бўлиб, бу боғланиш $|r|$ миқдор бирга қанча яқин бўлса, шунча „маҳкам" бўлади. $|r| = 1$ қиймат эса тасодифий миқдорлар орасида $Y = aX + b$ кўринишдаги функционал боғланишга мос келади.

Шуни назарда тутиш керакки, r нинг қиймати тасодифий миқдорлар орасидаги боғланишнинг чизиқли боғланишдан четланишини кўрсатади. X ва Y тасодифий миқдорлар орасидаги функционал боғланишнинг бошқа кўринишларида корреляция коэффициенти жуда кичик ёки ҳатто нолга тенг бўлиб қолиши мумкин.

Энди ўтган параграфнинг охирида кўриб чиқилган икки ўлчовли нормал тақсимотнинг умумий ҳолига қайтамиз. Эҳтимоллар зичлиги 19-§ даги (12) формула ёрдамида берилган тасодифий миқдорнинг иккинчи тартибли моментларини ҳисоблаб қуйидагиларни топамиз:

$$D(X) = \sigma_1^2; \qquad D(Y) = \sigma_2^2; \qquad K_{xy} = r\,\sigma_1\sigma_2.$$

Бу билан нормал тақсимот эҳтимоллар зичлигининг умумий ифодасига кирган коэффициентларнинг эҳтимолий маънолари ойдинлашади: σ_1 ва σ_2 лар X ва Y тасодифий миқдорларнинг дисперсиялари. r эса улар орасидаги корреляциянинг коэффициенти экан.

Йўл-йўлакай r корреляция коэффициентининг аҳамиятини ҳам айтиб ўтамиз: агар X ва Y эркли бўлса, у ҳолда $r = 0$ бўлиб, сочилиш эллипсининг ўқлари координаталар ўқларига параллел бўлади. Текширишда Y миқдор X нинг чизиқли функцияси бўлган ҳолни қараб ўтмаслик $|r| = 1$ қийматни қараб ўтмасликка мос келади.

21-§. ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАРНИНГ МАТЕМАТИК КУТИЛИШИ ВА ДИСПЕРСИЯЛАРИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМАЛАР

Олдинги параграфларда бизга математик кутилиш ва дисперсиянинг ҳали исбот қилинмаган баъзи хоссаларидан фойдаланишга тўғри келди. Энди ана шу теоремаларни исботлашга кириша оламиз.

1-теорема. *Иккита тасодифий миқдор йиғиндисининг математик кутилиши математик кутилишлар йиғиндиси-га тенг:*

$$M(X+Y=)\,M(X)+M(Y). \qquad (1)$$

Исботи. X ва Y тасодифий миқдорлар дискрет ёки узлуксиз бўлган ҳолларни алоҳида-алоҳида қараб ўтамиз.

Ишни дискрет тасодифий миқдорлар бўлган ҳолдан бошлаймиз. У ҳолда математик кутилиш таърифига кўра бундай ёза оламиз:

$$M(X+Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i+y_j)\,p_{ij},$$

бу ерда p_{ij} $X=x_i$ ва $Y=y_j$ бўлиш эҳтимолларини билдиради. Йиғиндини алоҳида қўшилувчиларга ажратиб ёзсак:

$$M(X+Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}x_i+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}y_j=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}p_{ij}\right)x_i+\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}p_{ij}\right)y_j. \qquad (2)$$

18-§ да кўрсатилганидек, $\sum\limits_{j=1}^{n}p_{ij}=P_i$ йиғинди Y тасодифий миқдор қандай қиймат қабул қилишидан қатъи назар X тасодифий миқдор x_i қиймат қабул қилиш эҳтимолини ифодалайди. Худди шунингдек, $\sum\limits_{i=1}^{m}p_{ij}=P_j$ йиғинди X нинг қийматларидан қатъи назар $Y=y_j$ тенгликнинг эҳтимолидир.

Шундай қилиб, (2) нинг ўнг томонидаги биринчи қўшилувчи

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}p_{ij}\right)x_i=\sum_{i=1}^{m}P_ix_i=M(X),$$

иккинчи қўшилувчи эса

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}p_{ij}\right)y_j=\sum_{j=1}^{n}P_jy_j=M(Y)$$

бўлади. Яна (2) формулага мурожаат қилиб топамиз:

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y).$$

Шуни исбот қилиш талаб қилинган эди.

Энди X ва Y — узлуксиз тасодифий миқдорлар бўлсин. Таърифга биноан:

$$M(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)\varphi(x, y)\,dxdy=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xdx\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x, y)dy+\int_{-\infty}^{+\infty}ydy\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x, y)\,dx. \qquad (3)$$

Аммо олдинги параграфда кўрсатганимиздек (20-§ даги (1) ва (2) формулаларга қаранг),

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x, y)dy=\varphi_1(x) \text{ ва } \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x, y)\,dx=\varphi_2(y)$$

интеграллар мос равишда X ва Y тасодифий миқдорларнинг эҳтимоллари зичликларини ифода қилади. Шунга кўра (3) тенгликнинг ўнг томонидаги қўшилувчилар қуйидагиларга тенг:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}xdx\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x, y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi_1(x)dx=M(X),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}ydy\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x, y)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}y\varphi_2(y)dy=M(Y).$$

Бу ердан узлуксиз тасодифий миқдорлар учун (1) тенглик келиб чиқади.

2-теорема. *Иккита тасодифий миқдор кўпайтмасининг математик кутилиши бу миқдорлар математик кутилишлари кўпайтмаси билан уларнинг корреляцион моменти йиғиндисига тенг.*

Исботи. Корреляцион моментнинг таърифига биноан:

$$K_{xy}=M[(X-\bar{x})(Y-\bar{y})],$$

бу ерда $\bar{x}=M(X)$, $\bar{y}=M(Y)$. Қавсларни очиб ва исбот қилинган 1-теоремадан фойдаланиб, топамиз*.

$$K_{xy}=M(XY)-\bar{x}M(Y)-\bar{y}M(X)+\overline{xy}=M(XY)-\overline{xy},$$

бу ердан

$$M(XY)=M(X)\,M(Y)+K_{xy} \qquad (4)$$

экани келиб чиқади.

Эркли тасодифий миқдорлар учун корреляцион моментнинг нолга тенглиги сабабли (4) тенгликдан қуйидаги теореманинг тўғрилиги бевосита келиб чиқади.

---

* Ўзгармас кўпайтувчини математик кутилиш белгиси олдига чиқариш мумкинлиги 16-§ да исботланган эди.

3-теорема. *Иккита эркли тасодифий миқдор кўпайтмасининг математик кутилиши уларнинг математик кутилишлари кўпайтмасига тенг:*

$$M(XY) = M(X)\,M(Y). \tag{5}$$

Энди исбот қилинган теоремалар ёрдамида корреляция коэффициенти учун олдинги параграфда кўрсатилган тенгсизликларни исботлай оламиз.

4-теорема. *Иккита тасодифий миқдорнинг корреляция коэффициенти абсолют қиймат бўйича бирдан катта бўла олмайди:*

$$-1 \leqslant r_{xy} \leqslant +1. \tag{6}$$

Исботи. Математик кутилишлари мос равишда $\bar{x}$ ва $\bar{y}$, дисперсиялари эса σ_x^2 ва σ_y^2 бўлган иккита X ва Y тасодифий миқдорлар берилган бўлсин. X ва Y тасодифий миқдорлар орқали

$$Z = \sigma_y X - \sigma_x Y \tag{7}$$

тенглик билан аниқланувчи янги Z тасодифий миқдор тузамиз. Z тасодифий миқдорнинг математик кутилишини ва дисперсиясини топамиз. Математик кутилишнинг хоссаларига биноан:

$$\bar{z} = M(Z) = M(\sigma_y X - \sigma_x Y) = \sigma_y \bar{x} - \sigma_x \bar{y}.$$

Сўнгра,

$$D(Z) = M(Z - \bar{z})^2 = M[(\sigma_y X - \sigma_x Y) - (\sigma_y \bar{x} - \sigma_x \bar{y})]^2.$$

Математик кутилиш белгиси остидаги ифодани квадратга ошириб ва математик кутилишнинг хоссаларидан яна фойдаланиб, топамиз:

$$D(Z) = \sigma_z^2 = \sigma_y^2 M(X - \bar{x})^2 - 2\sigma_x\sigma_y M[(X - \bar{x})(Y - \bar{y})] + \\ + \sigma_x^2 M(Y - \bar{y})^2.$$

Дисперсиянинг ва корреляцион моментнинг таърифларидан фойдаланиб, ҳосил қилинган тенгликни

$$\sigma_z^2 = \sigma_y^2 \sigma_x^2 - 2\sigma_x\sigma_y K_{xy} + \sigma_x^2 \sigma_y^2$$

ёки узил-кесил

$$\sigma_z^2 = 2\sigma_x^2 \sigma_y^2 - 2\sigma_x\sigma_y K_{xy}$$

кўринишда ёза оламиз. Ҳар қандай тасодифий миқдорнинг дисперсияси манфий эмаслиги сабабли охирги ифодадан қуйидагини топамиз:

$$\sigma_x \sigma_y - K_{xy} \geqslant 0,$$

бу ердан

$$K_{xy} \leqslant \sigma_x\sigma_y. \tag{8}$$

(7) тасодифий миқдор ўрнига янги

$$Z = \sigma_y X + \sigma_x Y$$

тасодифий миқдорни киритиб ва у билан ҳам юқоридагидек амалларни бажариб, (8) тенгсизликнинг ўрнига

$$K_{xy} \geqslant -\sigma_x \sigma_y \qquad (9)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. (8) ва (9) тенгсизликлардан эса

$$-\sigma_x \sigma_y \leqslant K_{xy} \leqslant \sigma_x \sigma_y$$

тенгсизлик ёки айнан шунинг ўзи бўлган

$$|K_{xy}| \leqslant \sigma_x \sigma_y \qquad (10)$$

тенгсизлик келиб чиқади.

Энди (10) тенгсизликнинг ҳам иккала қисмини $\sigma_x \sigma_y$ мусбат сонга бўлиш ва корреляция коэффициентининг таърифидан фойдаланишгина қолди:

$$|r_{xy}| = \frac{|K_{xy}|}{\sigma_x \sigma_y} \leqslant 1,$$

ана шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Энди тасодифий миқдорлар йиғиндисининг дисперсияси ҳақидаги теоремани қараб чиқамиз.

5-теорема. *Эркли тасодифий миқдорлар йиғиндисининг дисперсияси қўшилувчилар дисперсиялари йиғиндисига тенг:*

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y). \qquad (11)$$

Исботи. 16-§ даги (15) формуладан фойдаланамиз:

$$D(X+Y) = M(X+Y)^2 - [M(X+Y)]^2.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги қавсларни очиб, топамиз:

$$D(X+Y) = M(X^2 + 2XY + Y^2) - [M(X) + M(Y)]^2.$$

Энди йиғиндининг математик кутилиши ҳақидаги 1-теоремадан ва эркли тасодифий миқдорлар кўпайтмасининг математик кутилиши ҳақидаги 3-теоремадан фойдаланишимиз лозим. Ана шу теоремаларга биноан топамиз:

$$D(X+Y) = M(X^2) + 2M(X)M(Y) + M(Y^2) - (M(X))^2 - $$
$$- 2M(X)M(Y) - (M(Y))^2 = M(X^2) - (M(X))^2 +$$
$$+ M(Y^2) - (M(Y))^2.$$

Шундай қилиб,

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

1-ва 5-теоремаларнинг ифодаланишидаги мавжуд фарққа ўқувчининг диққатини жалб қиламиз. 1-теоремада ихтиёрий тасодифий миқдорларнинг йиғиндиси ҳақида сўз борганда, 5-теорема эркли тасодифий қўшилувчилар учунгина ўринли бўлади. Исбот давомида бу ҳолнинг қайси жойда ишлатилганлиги кўрсатиб ўтилди.

22-§. КЎП ЎЛЧОВЛИ ТАСОДИФИЙ МИҚДОР ВА ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАР СИСТЕМАСИ. ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАРНИ ЙИҒИШ. ТАҚСИМОТ ҚОНУНЛАРНИНГ КОМПОЗИЦИЯСИ

Икки ўлчовли тасодифий миқдорлар ҳақида 18—20-§ да ўрганганимиз кўп ўлчовли тасодифий миқдорлар ҳақида анча етарли тасаввур бера олади. Шунинг учун баъзи бир умумий таърифларни ва мисолларни келтириш билан чегараланишимиз мумкин.

Кўп ўлчовли тасодифий миқдор дейилганда қийматлари n ўлчовли фазонинг нуқталарини ифодаловчи, ёки айнан шунинг ўзи, *n-ўлчовли векторни ифодаловчи тасодифий миқдорни тушунамиз.* Кўп ўлчовли тасодифий миқдор баъзан *тасодифий вектор* деб аталади. n та ўзгарувчининг

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n) \quad (1)$$

функцияси тасодифий векторнинг n-ўлчовли тақсимот функцияси деб аталади. 18-§ да икки ўлчовли эҳтимоллар зичлиги тушунчаси киритилганига ўхшаш *n-ўлчовли тасодифий вектор тақсимотининг эҳтимоллар зичлиги* тушунчасини ҳам киритиш мумкин.

n-ўлчовли тасодифий миқдорнинг қиймати бўлган $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ нуқта координаталарининг ўзлари ҳам тасодифий миқдорлардир. Шунинг учун n-ўлчовли тасодифий миқдорни икки ўлчовли тасодифий миқдор каби n та тасодифий миқдор системаси деб қараш мумкин.

Жумладан, бу тасодифий миқдорлар эркли ва уларнинг ҳар бири математик кутилиши a_k, дисперсияси σ_k^2 бўлган нормал тақсимот қонун бўйича тақсимланган бўлса, у ҳолда нормал тақсимот қонуннинг n-ўлчовли эҳтимоллар зичлиги

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n} e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k-a_k}{\sigma_k}\right)^2} \quad (2)$$

формула билан аниқланади. Координаталари $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ бўлган нуқта кўп ўлчовли тасодифий миқдорнинг *сочилиш маркази* дейилади.

20-§ да қаралган математик кутилиш, дисперсия ва марказий момент тушунчалари кўп ўлчовли тасодифий миқдорларга ҳам осонгина кўчирилади.

Бундан кейин бизни тасодифий миқдорлар йиғиндиси, айниқса эркли тасодифий миқдорлар йиғиндиси қизиқтиради. 21-§ даги 1- ва 5-теоремалар тасодифий миқдорлар йиғиндисининг математик кутилишини ва дисперсиясини ҳар бир қўшилувчининг тегишли сонли характеристикалари бўйича топиш имконини беради.

Бироқ қатор ҳолларда кўпроқ нарса талаб қилинади: тасодифий миқдорлар йиғиндисининг тақсимот қонунини қўшилувчиларнинг тақсимот қонунлари бўйича аниқлаш лозим. Бундай масала *тақсимот қонунларнинг композицияси* деб аталади.

Тасодифий миқдорлар дискрет ва узлуксиз бўлган ҳоллар учун тақсимот қонунларининг композициясини қараймиз. Айтайлик, X ва Y мумкин бўлган қийматлари тўпламлари мос равишда $\{x_i\}$ ва $\{y_j\}$ бўлган иккита эркли дискрет тасодифий миқдор бўлсин. Уларнинг $Z = X + Y$ йиғиндиси қийматлари тўплами $\{x_i + y_j\}$ $(i, j = 1, 2, 3, \ldots)$ бўлган тасодифий миқдордир. Бу тўпламни $\{z_k\}$ орқали белгилаймиз ва $Z = z_k$ тенгликнинг эҳтимолини аниқлаймиз.

Фараз қилайлик, X тасодифий миқдор $X = x_i$ қийматни қабул қилди. У ҳолда $Z = z_k$ тенглик ўринли бўлиши учун Y тасодифий миқдор $Y = z_k - x_i$ қиймат қабул қилиш зарур. Агар бу айирма Y нинг мумкин бўлган қийматлари тўпламига кирмаса, у ҳолда $X = x_i$ шартда $Z = z_k$ тенглик бўлиши мумкин эмас, яъни у ноль эҳтимолга эга: $P(Z = z_k) = 0$.

Агар $Y = z_k$ тенглик мумкин бўлса, у ҳолда $X = x_i$ шартда $Z = z_k$ тенгликнинг эҳтимоли ҳодисаларнинг биргаликда юз бериш эҳтимоли сифатида топилади:

$$P(X = x_i) \cdot P(Y = z_k - x_i), \tag{3}$$

чунки X ва Y қўшилувчиларнинг қийматлари эркли.

X тасодифий миқдорнинг ҳар хил қийматлари биргаликда бўлмаганлиги сабабли $Z = z_k$ тенгликнинг эҳтимоли (3) кўринишдаги кўпайтмаларни қўшиш теоремасига асосан йиғиш йўли билан олиниши мумкин. Шундай қилиб,

$$P(Z = z_k) = \sum_i P(X = x_i)\, P(Y = z_k - x_i), \tag{4}$$

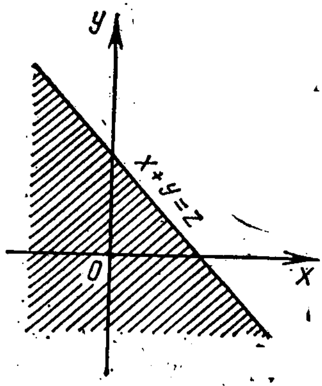
бу ерда йиғинди берилган z_k бўйича x_i нинг барча мумкин бўлган қийматлари бўйича олинади. Айнан шунга ўхшаш,

$$P(Z = z_k) = \sum_j P(Y = y_j)\, P(X = z_k - y_j) \tag{5}$$

тенгликнинг ўринли бўлишини кўрсатиш мумкин. (4) ва (5) формулалар тасодифий миқдорлар йиғиндисининг тақсимот қонунини қўшилувчиларнинг тақсимот қонунлари орқали ифода қилади, яъни дискрет тақсимот қонунларнинг композициясини ифодалайди.

Энди X ва Y лар эҳтимоллар зичликлари мос равишда $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(y)$ узлуксиз тасодифий миқдорлар бўлган ҳолга ўтамиз. $Z = X + Y$ йиғиндининг эҳтимоллар зичлигини топамиз.

$\varphi(x, y)$ орқали (X, Y) иккита тасодифий миқдор системасининг икки ўлчовли эҳтимоллар зичлигини белгилаймиз. У



30- расм.

ҳолда $Z < z = x + y$ тенгсизликнинг эҳтимолини икки ўлчовли тақсимот функцияси ёрдамида

$$P(Z < x + y) = F(z) = \iint_G \varphi(x,y)\,dx\,dy$$

кўринишда ёза оламиз. Бу ерда G соҳа (x,y) текисликнинг $z = x + y$ чизиқ билан чегараланган соҳаси (30-расмга қаранг). Бу икки каррали интегрални ҳисоблаб, топамиз:

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} \varphi(x,\ y)dy.$$

X ва Y тасодифий миқдорлар эркли деб фараз қилинган эди. Шунинг учун $\varphi(x,\ y)$ икки ўлчовли эҳтимоллар зичлиги қуйидаги кўпайтмага тенг:

$$\varphi(x,y) = \varphi_1(x)\,\varphi_2(y).$$

Бу қийматни $F(z)$ нинг ифодасига қўямиз. У ҳолда

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} \varphi_1(x)\,\varphi_2(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x)dx \int_{-\infty}^{z-x} \varphi_2(y)\,dy.$$

Ички интегралда $y = u - x$ деб, интеграллаш ўзгарувчисини алмаштирамиз. У ҳолда $dy = du$ бўлиб, $y = z - x$ бўлганда $u = z$ бўлади, яъни

$$\int_{-\infty}^{z-x} \varphi_2(y)\,dy = \int_{-\infty}^{z} \varphi_2(u - x)du.$$

Демак,

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x)dx \int_{-\infty}^{z} \varphi_2(u - x)\,du = \int_{-\infty}^{z} du \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x)\,\varphi_2(u - x)dx.$$

Охирги ифода интеграллашнинг ўринларини алмаштириш билан ҳосил қилинди.

Шундай қилиб, тақсимот функцияси учун узил-кесил

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x)\,\varphi_2(u - x)\,dx \right) du \qquad (6)$$

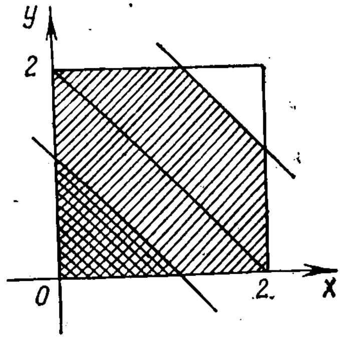
ифодани ҳосил қилдик. Агар Z тасодифий миқдорнинг дастлабки эҳтимоллар зичлигини $\varphi(z)$ орқали белгиласак, у ҳолда тақсимот функциянинг ифодаси, маълумки,

$$\varphi(z) = F'(z)$$

кўринишда бўлиши лозим. (6) формулани z бўйича дифференциаллаб топамиз:

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x)\, \varphi_2(z-x)\, dx. \qquad (7)$$

Эҳтимоллар зичлигининг (7) формуласи дискрет тасодифий миқдорлар учун ҳосил қилинган (4) формулани эслатади. Худди ана шундай йўл билан (5) формулага ўхшаш формулани ҳосил қилиш мумкин. Бу формула



31- расм.

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(z-y)\varphi_2(y)\, dy \qquad (8)$$

кўринишда бўлади. $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(y)$ функциялардан (7) ёки (8) формулалар ёрдамида ҳосил қилинган $\varphi(z)$ функция шу функцияларнинг мос равишда x ёки y ўзгарувчига нисбатан *ўрамаси* деб аталади.

Мисол. X ва Y тасодифий миқдорлар эркли ва (0, 2) интервалда текис тақсимланган. $Z = X + Y$ йиғиндининг тақсимот зичлигини топамиз.

Ишнинг моҳиятини яхшироқ тушунтириш учун геометрик мулоҳазалардан фойдаланамиз. (X, Y) тасодифий миқдорлар системаси $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$ квадратда тақсимланган (31-расмга қаранг). Шунинг учун z тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари $0 \leqslant z \leqslant 4$ оралиқда бўлади. $0 < z \leqslant 2$ бўлган ҳолда $Z < z$ тенгсизликнинг эҳтимоли чап пастки икки қайта штрихланган учбурчакка тушиш эҳтимолига тенг. Бу учбурчакнинг юзи $\frac{z^2}{2}$ га, бутун квадратнинг юзи эса 4 га тенг бўлганлиги сабабли бу эҳтимол $\frac{z^2}{8}$ га тенг.

Агар $-2 < z \leqslant 4$ бўлса, $Z < z$ тенгсизликнинг эҳтимоли бутун штрихланган фигурага тушиш эҳтимолига тенг. Бу эҳтимол

$$1 - \frac{(4-z)^2}{8}$$

га тенг.

$Z < 0$ ва $Z > 4$ қийматларнинг мумкин эмаслигини эътиборга олиб, $Z = X + Y$ йиғиндининг тақсимот функциясини қуйидагича ёза оламиз:

$$F(z)=\begin{cases}-\infty<z\leqslant 0 & \text{да} \quad 0,\\ 0<z\leqslant 2 & \text{да} \quad \frac{z^2}{8},\\ 2<z\leqslant 4 & \text{да} \quad 1-\frac{(4-z)^2}{8},\\ 4<z<+\infty & \text{да} \quad 1.\end{cases}$$

(9) функцияни z бўйича дифференциаллаб, эҳтимоллар зичлигини топамиз:

$$\varphi(z)=\begin{cases}-\infty<z<0 & \text{да} \quad 0,\\ 0<z<2 & \text{да} \quad \frac{z}{4},\\ 2<z<4 & \text{да} \quad \frac{4-z}{4},\\ 4<z<+\infty & \text{да} \quad 0.\end{cases} \tag{10}$$

(10) тақсимот қонун *Симпсон тақсимот қонунининг* хусусий ҳолидир. Унинг ифодасини формал равишда, ўраманинг (7) ва (8) формулалари ёрдамида ҳам ҳосил қилиш мумкин эди. Ҳақиқатан ҳам, X ва Y тасодифий миқдорлар учун

$$\varphi_1(x)=\varphi_2(y)=\begin{cases}-\infty<x, \quad y<0 & \text{да} \quad 0,\\ 0<x, \quad y<2 & \text{да} \quad \frac{1}{2},\\ 2<x, \quad y<+\infty & \text{да} \quad 0.\end{cases}$$

эҳтимоллар зичлигига эгамиз. (7) формулага биноан:

$$\varphi(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(x)\varphi_2(z-x)\,dx=\int_0^2\varphi_1(x)\varphi_2(z-x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\varphi_2(z-x)\,dx.$$

Агар $z<0$ бўлса, $z-x<0$ бўлади, ва демак, $\varphi_2(z-x)=0$, яъни $\varphi(z)=0$. Сўнгра, $0<z<2$ бўлса, $\varphi(z-x)$ функция $0<z-x<2$, ёки шунинг ўзи $z-2<x<z$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи барча x лар учун нолдан фарқли бўлади. Бундан эса агар $0<z<2$ бўлса, у ҳолда

$$\varphi(z)=\frac{1}{2}\int_0^z\frac{1}{2}\,dx=\frac{z}{4}$$

бўлиши келиб чиқади. $2<z<4$ бўлганда эса

$$\varphi(z)=\frac{1}{2}\int_{z-2}^{2}\frac{1}{2}\,dx=\frac{1}{4}\left(2-(z-2)\right)=\frac{4-z}{4}.$$

Ниҳоят, $z>4$ бўлганда $z-x>2$ бўлиб, бундан $\varphi_2(z-x)=0$ ва $\varphi(z)=0$ бўлиши келиб чиқади. Шундай қилиб, биз яна (10) формулаларни ҳосил қилдик.

Эҳтимоллар назариясининг турли татбиқлари учун қуйидаги теорема билан ифодаланувчи факт муҳимдир.

Теорема. *Агар иккита X ва Y тасодифий миқдорлар нормал қонун бўйича тақсимланган бўлса, у ҳолда уларнинг $Z=X+Y$ йиғиндиси ҳам нормал тақсимлангандир.*

Бу теоремани йиғиндининг тақсимот қонунини ўраманинг (7) ёки (8) формулалари ёрдамида ҳисоблаш билан исботлаш мумкин. Бунга биз тўхталиб ўтирмаймиз.

23- §. КАТТА СОНЛАР ҚОНУНИ ВА УНИНГ УМУМЛАШМАЛАРИ А. М. ЛЯПУНОВНИНГ МАРКАЗИЙ ЛИМИТ ТЕОРЕМАСИ

Катта сонлар қонуни термини билан биз 12-§ даёқ Бернулли теоремасини таърифлаганда дуч келган эдик. Бу теоремада сўз синовлар сони етарлича катта бўлганда бирор ҳодисанинг рўй бериш частотаси унинг эҳтимолидан исталганча кам фарқ қилиши ҳақида борган эди. Умуман, катта сонлар қонуни дейилганда унга анча кенг маъно бериб, ҳар бирининг алоҳида-алоҳида таъсири жуда кам бўлган ва сони чексиз ортадиган ҳодисаларга боғлиқ бўлган ҳодисанинг юз беришини бирга яқин эҳтимол билан тасдиқлайдиган теоремаларни аташ табиийдир.

Бундай теоремаларнинг исботлари асосида 1845—1846 йилларда П. Л. Чебишев исботлаган муҳим тенгсизлик ётади.

Чебишев тенгсизлиги. *X тасодифий миқдор чекли математик кутилиш ва чекли дисперсияга эга бўлсин. У ҳолда исталган $\varepsilon>0$ учун X нинг ўзининг математик кутилишидан четланиши ε дан кичик бўлиш эҳтимоли 1 дан $\frac{D(x)}{\varepsilon^2}$ дан катта бўлмаған миқдорга фарқ қилади*:

$$P\{|X-M(X)|<\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \tag{1}$$

Исботи. (1) тенгсизлик Чебишевнинг бошқа тенгсизлигининг натижасидир: *агар X тасодифий миқдор фақат манфий бўлмаган қийматларнигина қабул қилиши мумкин бўлиб, чекли математик кутилишга эга бўлса, у ҳолда унинг бирдан кичик бўлмаган қийматларни қабул қилиш эҳтимоли шу тасодифий миқдорнинг математик кутилишидан катта эмас*:

$$P(X\geqslant 1)\leqslant M(X). \tag{2}$$

Ҳақиқатан ҳам, X—дискрет тасодифий миқдор бўлсин. У ҳолда $P(X\geqslant 1)$ эҳтимол X нинг бирдан катта бўлган айрим қийматларни қабул қилиш эҳтимоллари йиғиндисига тенг, яъни

$$P(X \geqslant 1) = \sum_{x_i \geqslant 1} P(X = x_i).$$

Агар ўнг томондаги ҳар бир қўшилувчини уларга мос x_i қийматларга кўпайтирсак, у ҳолда тенгликнинг ўнг томони ортади, чунки $x_i \geqslant 1$. Биз

$$\sum_{x_i \geqslant 1} P(X = x_i) \leqslant \sum_{x_i \geqslant 1} x_i P(X = x_i)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бу тенгсизликнинг ўнг томонидаги йиғиндини қийматлари манфий эмас деб қараётган X тасодифий миқдорнинг барча мумкин бўлган қийматлари бўйича тарқатсак, бунда тенгсизлик фақат кучаяди. Демак,

$$P(X \geqslant 1) \leqslant \sum_i x_i P(X = x_i) = M(X),$$

чунки охирги йиғинди таърифга кўра X нинг математик кутилиши билан бир хилдир.

Шундай қилиб, биз қуйидаги тенгликлар ва тенгсизликлар кетма-кетлигини ҳосил қилдик:

$$P(X \geqslant 1) = \sum_{x_i \geqslant 1} P(X = x_i) \leqslant \sum_{x_i \geqslant 1} x_i P(X = x_i) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_i x_i P(X = x_i) = M(X). \qquad (3)$$

Бу эса (2) тенгсизликни дискрет тасодифий миқдор бўлган ҳол учун исботлайди.

Энди X эҳтимоллар зичлиги $\varphi(x)$ бўлган узлуксиз тасодифий миқдор бўлсин. X нинг қийматлари манфий эмас деб қилган фаразимизга асосан $-\infty < x < 0$ бўлганда $\varphi(x) \equiv 0$ айният ўринлидир. Дискрет тасодифий миқдор учун ёзилган (3) тенгликлар ва тенгсизликлар кетма-кетлигига ўхшаш тенгсизликлар кетма-кетлигини ундаги йиғиндиларни интеграллар билан алмаштириб, бу ҳол учун ҳам ёза оламиз:

$$P(X \geqslant 1) = \int_1^{+\infty} \varphi(x) dx \leqslant \int_1^{+\infty} x \varphi(x) dx \leqslant \int_0^{+\infty} x \varphi(x) dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi(x) dx = M(X). \qquad (4)$$

(4) формула (2) тенгсизликни узлуксиз тасодифий миқдор учун ҳам исботлайди.

Энди биз (1) тенгсизликни текширишга қайта оламиз. У ерда ёзилган $|X-M(X)|<\varepsilon$ тенгсизлик ўрнига унга тескари бўлган $|X-M(X)|\geqslant\varepsilon$ тенгсизликни оламиз. Бу тенгсизлик

$$\frac{[X-M(X)]^2}{\varepsilon^2}\geqslant 1$$

тенгсизликка тенг кучли эканлигини кўриш қийин эмас. $\frac{[X-M(X)]^2}{\varepsilon^2}$ тасодифий миқдор манфий бўлмаган қийматларнигина қабул қилади, шунинг учун унга (2) тенгсизликни қўллаш мумкин. У ҳолда

$$P\{|X-M(X)|\geqslant\varepsilon\}=P\left\{\frac{[X-M(X)]^2}{\varepsilon^2}\geqslant 1\right\}\leqslant$$

$$\leqslant M\left\{\frac{[X-M(X)]^2}{\varepsilon^2}\right\}=\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Охирги тенглик $\frac{1}{\varepsilon^2}$ ўзгармас кўпайтувчини математик кутилиш белгисидан ташқарига чиқариш ва дисперсиянинг таърифидан фойдаланиш натижасида ҳосил қилинди.

Шундай қилиб,

$$P\{|X-M(X)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

тенгсизликни ҳосил қилдик. Бундан эса аввалги тенгсизликка қайтиб, исбот қилиниши лозим бўлган

$$P\{|X-M(X)|<\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Чебишевнинг (1) тенгсизлиги Бернулли теоремасини исбот қилишни осонлаштиради (76-бетга қаранг). Бунинг учун бу тенгсизликни $\frac{m}{n}$ (m—бирор ҳодисанинг n та синовда юз бериш сони) тасодифий миқдорга қўллаш кифоя. Ҳақиқатан ҳам, агар ҳар бир синовда ҳодисанинг юз бериш эҳтимоли p га тенг бўлса, у ҳолда $M(m)=np$, $D(m)=npq$ эканини 16-§ да кўрсатган эдик. Аммо бу ҳолда

$$M\left(\frac{m}{n}\right)=p,\quad D\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{npq}{n^2}=\frac{pq}{n}.$$

Шунинг учун

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=P\left\{\left|\frac{m}{n}-M\left(\frac{m}{n}\right)\right|<\varepsilon\right\}\geqslant 1-\frac{D\left(\frac{m}{n}\right)}{\varepsilon^2}=1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Бу ердан эса $n\to\infty$ да $\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon$ тенгсизликнинг эҳтимоли бирга интилиши келиб чиқади.

Бернулли теоремаси бошқа умумий теоремаларнинг хусусий ҳоли эканини кўрсатиб ўтган эдик. Катта сонлар қонунининг асосий формаси сифатида одатда катта сонлар қонуни сўзининг тор маъносида катта сонлар қонуни деб аталадиган Чебишев теоремасини ҳисоблаш қабул қилинган.

Чебишев теоремаси (*Чебишев формасидаги катта сонлар қонуни*). *X_1, X_2, ..., X_n, ... жуфт-жуфт эркли, бир хил a математик кутилишга ва битта ўзгармас C сон билан чегараланган дисперсияларга эга бўлган тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги бўлсин:*

$$M(X_1) = \ldots = M(X_n) = \ldots = a,$$
$$D(X_1) < C,\ D(X_2) < C,\ \ldots,\ D(X_n) < C,\ \ldots$$

у ҳолда исталган мусбат ε учун

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right\} = 1 \qquad (5)$$

муносабат ўринли бўлади.

Бошқача қилиб айтганда, агар чегараланган дисперсияларга эга бўлган тасодифий миқдорларнинг ҳаммаси бир хил математик кутилишга эга бўлса, у ҳолда n етарлича катта бўлганда бу тасодифий миқдорларнинг ўрта арифметиги уларнинг математик кутилишидан бирга жуда яқин эҳтимол билан исталганча кам фарқ қилади.

Чебишев теоремасининг маъносини қуйидаги мисол билан ойдинлаштириш мумкин. Бирор a ўзгармас физикавий катталикни ўлчаш талаб қилинсин. Ҳар бир алоҳида ўлчашнинг натижаси X_i тасодифий миқдордир. $M(X_i) = a$ деб фараз қилиш ўлчаш натижасининг математик кутилиши ўлчанаётган катталикка тенглигини, яъни ўлчашлар систематик хатолардан холи эканини англатади. $D(X_i) < C$ шарт эса бажарилаётган ўлчаш бирор гарантияли аниқликка эга бўлишини билдириб, унинг натижасида ўлчаш натижаларининг тасодифий тарқоқлиги чексиз орта олмайди.

Ана шу шартларда Чебишев теоремаси ўлчашлар сони етарлича катта бўлганда олинган натижаларнинг ўрта арифметиги ўлчанаётган миқдордан исталганча кам фарқ қилишини бирга жуда яқин эҳтимол билан тасдиқлайди. Бу билан ўлчашларнинг натижаларини аниқроқ олиш учун физикада одатда тавсия қилинадиган усулнинг тўғрилиги маъқулланади: битта физикавий катталикни кўп марталаб ўлчанади ва унинг қиймати учун ўлчаш натижаларининг ўрта арифметиги олинади.

Чебишев теоремасининг исботи. $\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$ тасодифий миқдорни қараймиз. Математик кутилишнинг хоссасига асосан

$$M\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right) = \frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n} = a.$$

Бу тасодифий миқдорга (1) тенгсизликни қўллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P\left\{\left|\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}-a\right|<\varepsilon\right\}=P\left\{\left|\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-M\left(\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}\right)\right|<\varepsilon\right\}\geqslant 1-\frac{D\left(\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}=$$

$$=1-\frac{D(X_1)+D(X_2)+\dots+D(X_n)}{n^2\varepsilon^2}\geqslant 1-\frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Ҳосил қилинган бу тенгсизлик теоремани исботлайди, чунки ундан n чексиз ортганда талаб қилинаётган тенгсизликнинг эҳтимоли бирга исталганча яқин бўлиши кўриниб турибди.

Бернулли теоремаси Чебишев теоремасининг хусусий ҳоли эканлигини кўриш қийин эмас. Бунинг учун кузатилаётган ҳодисанинг i-синовда юз бериши ёки юз бермаслигига қараб мос равишда 1 ёки 0 қиймат қабул қилувчи m_i тасодифий миқдорларни кўриб чиқиш кифоя. У ҳолда n та синовда ҳодисанинг m марта юз бериш сони

$$m=m_1+m_2+\dots+m_n$$

бўлади, 16-§ да кўрсатилганидек, $M(m_i)=p D(m_i)=pq$ ва

$$\left|\frac{m_1+m_2+\dots+m_n}{n}-p\right|=\left|\frac{m}{n}-p\right|$$

бўлади. Демак, Чебишев теоремасида қараладиган тенгсизлик Бернулли теоремасидаги тенгсизликка ўтади.

Иккинчи томондан, барча тасодифий миқдорларнинг бир хил математик кутилишга эга бўлиши шартидан воз кечиб, бошқа умумийроқ теоремани ҳам исбот қилиш мумкин. Ҳатто, дисперсияларнинг фақат жуда тез ортмаслигини талаб қилиб, уларнинг чегараланганлигидан ҳам воз кечиш мумкин. Чунончи қуйидаги умумийроқ теорема ўринли бўлади.

Марков теоремаси. *$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ чекли $M(X_i)=a_i$ математик кутилишларга ва чекли $D(X_i)=d_i$ дисперсияларга эга бўлган ҳамда жуфт-жуфти билан эркли тасодифий миқдорлар бўлиб,*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d_1+d_2+\dots+d_n}{n}=0 \tag{6}$$

бўлсин. У ҳолда исталган мусбат ε сон учун

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}-\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\right|<\varepsilon\right\}=1 \tag{7}$$

муносабат ўринли бўлади.

Марков теоремасининг исботи ҳам олдинги Чебишев теоремасининг исботига ўхшаш, (1) тенгсизликни $\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}$ тасодифий миқдорга татбиқ қилиб, сўнгра d_i дисперсиялар қаноатлантирадиган (6) шартдан фойдаланишга келтирилади. Ўқувчига бу ерда талаб қилинадиган барча ҳисоблашларни мустақил бажаришни, шунингдек, Чебишев теоремаси Марков теоремасидан хусусий ҳол сифатида келиб чиқишига ишонч ҳосил қилишни тавсия қиламиз.

Катта сонлар қонунининг учала формасида ҳам тегишли тенгсизликларнинг эҳтимоллари n чексиз ортганда бирга интилиши даъво қилинди. Бироқ бу нарса синовларнинг жуда катта сериясида $\frac{m}{n}$ частота эҳтимолдан жуда кичик эҳтимол билан бўлса-да, сезиларли даражада четлашиши мумкинлигини истисно қилмайди.

Бошқача қилиб айтганда, масалан, Бернулли теоремасидан n чексиз ортганда ҳодиса юз беришининг $\frac{m}{n}$ частотаси p эҳтимолга интилади, деган хулосани чиқариш мумкин эмас. Бундай даъво мутлақо нотўғри бўлур эди. Бироқ Бернулли теоремасига қараганда ҳам кучлироқ даъвони кўрсатиш мумкин экан.

Бернулли теоремасини, шунингдек, катта сонлар қонунининг бошқа формалари—Чебишев ва Марков теоремаларини ҳам бундай кучайтириш *кучайтирилган катта сонлар қонуни* номини олган. Шундай теоремалардан бирини келтирамиз.

Борель теоремаси. *n та синовда A ҳодисанинг юз бериш сони m бўлиб, ҳар бир синовда A нинг юз бериш эҳтимоли ўзгармас ва P га тенг бўлсин. У ҳолда $\frac{m}{n}$ частотанинг p эҳтимолга интилиш эҳтимоли бирга тенг, яъни*

$$P\left\{\lim \frac{m}{n}=p\right\}=1. \tag{8}$$

Борель теоремасининг исботини биз келтирмаймиз. Бу исботни, шунингдек, кучайтирилган катта сонлар қонунининг бошқа бир қатор формалари-нинг (Колмогоров, Хинчин, Кантелли теоремалари ва бошқалар) исботини (1) Чебишев тенгсизлигини умумлаштирадиган ажойиб тенгсизликдан фойдаланиб ҳосил қилиш мумкинлигинигина кўрсатамиз.

Колмогоров тенгсизлиги. *Агар $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ ўзаро эркли тасодифий миқдорлар чекли дисперсияларга эга бўлса, у ҳолда*

$$\left|\sum_{i=1}^{k} X_i - M(X_i)\right| < \varepsilon \; (k=1,2, \dots, n) \tag{9}$$

тенгсизликларнинг биргаликда ўринли бўлиш эҳтимоли

$$1-\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i).$$

сондан кичик эмас.

Ҳозирга қадар гап тасодифий миқдорлар йиғиндисининг сонли характеристикалари ҳақида борди. Шунингдек, маълум шартлар бажарилганда тасодифий миқдорлар йиғиндисининг тақсимот қонунларини аниқлашга имкон берадиган теоремалар ҳам маълум. Бундай теоремалар *эҳтимоллар назариясининг лимит теоремалари* деб аталади.

Аслини олганда бундай турдаги теоремаларни биз аввалроқ кўрган эдик: масалан, II бобда кўриб ўтилган асимптотик теоремалар тақсимотнинг лимит қонунлари ҳақидаги теоремалар сифатида талқин қилиниши мумкин.

Масалан, эркли синовлар такрорланишининг Бернулли схемасига (4-§ га қаранг) қайтайлик ва i-синовда A ҳодисанинг юз беришини ёки юз бермаслигини билдирувчи m_i тасодифий миқдорларни қарайлик. Уларни биз 15-§ даёқ киритган эдик (92-бетга қаранг). У ерда m_i миқдор 1 қийматни p эҳтимол билан, 0 қийматни эса $q = 1 - p$ эҳтимол билан қабул қилиш кўрсатилган эди. n та синовда A ҳодисанинг m марта юз бериш сони эркли тасодифий миқдорлар йиғиндиси бўлади:

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n.$$

Ана шу шартлар бажарилганда Муавр—Лапласнинг 12-§ да исботланган интеграл лимит теоремаси синовлар сони чексиз ортганда m тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни нормал қонунга интилишини англатади*. Шунга ўхшаш аҳамиятга Пуассон қонуни ҳам эга бўлиб, у бошқа шартлар бажарилганда лимит тақсимот қонун Пуассон қонуни бўлишини кўрсатади.

Кўп ҳолларда биз кўриб ўтган ва яхши ўрганилган кам сондаги қонунлар лимит тақсимот қонунлар сифатида олинади.

Тасодифий миқдорлар йиғиндисининг тақсимот қонуни интиладиган бундай лимит қонун кўпинча *нормал тақсимот қонун* бўлар экан.

Эҳтимоллар назариясининг лимит теоремалари орасида А. М. *Ляпуновнинг марказий лимит теоремаси* муҳим роль ўйнайди. Бу теорема тасодифий миқдорлар йиғиндиси тақсимот қонунининг қўшилувчилар сони чексиз ортганда нормал тақсимот қонунга интилишининг етарли шартларини ифодалайди. Ана шу теоремани келтирамиз.

А. М. Ляпуновнинг марказий лимит теоремаси. *$X_1, X_2, \dots, X_n$ лар чекли $M(X_i) = a_i$ математик кутилишларга ва $D(X_i) = d_i$ дисперсияларга эга бўлган эркли тасодифий миқдорлар бўлсин. Агар чекли*

$$M|X_i - a_i|^3 = k_i$$

---

* Муавр—Лаплас теоремасида аслида $\frac{m - np}{\sqrt{npq}}$ нормалланган четланишнинг тақсимот қонуни қаралган эди. Бироқ бу миқдорлардан бирининг нормал тақсимланганлигидан иккинчисининг ҳам нормал тақсимланганлиги келиб чиқишини исботлаш қийин эмас.

учинчи тартибли моментлар мавжуд бўлса ва n чексиз ортганда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}k_i}{\left(\sum_{i=1}^{n}d_i\right)^{3/2}}=0 \tag{11}$$

шарт бажарилса, у ҳолда

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-a}{\left(\sum_{i=1}^{n}d_i\right)^{1/2}}<x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \tag{12}$$

муносабат ўринлидир. (11) шарт *Ляпунов шарти* деб аталади*.

Бу теоремани исботлаш учун А. М. Ляпунов *характеристик функциялар методи* деб аталувчи янги методни ишлаб чиқди. Ҳозирги вақтда характеристик функциялар методи фақат эҳтимоллар назариясидагина эмас, балки математиканинг қатор бошқа соҳаларида ҳам муҳим аҳамият касб этмоқда, бироқ уни бу ерда кўриб ўтиш жуда кўп жой, вақт ва меҳнат талаб қилган бўлар эди. Шу сабабли юқорида айтилганлар билангина чекланамиз.

IV БОБГА ДОИР ЎЗ-ЎЗИНИ ТЕКШИРИШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Икки ўлчовли тасодифий миқдор нима?
2. Икки ўлчовли дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини тавсифланг.
3. Эҳтимолларнинг шартли тақсимоти нима?
4. Икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси ва эҳтимоллар зичлиги қандай аниқланади?
5. Икки ўлчовли тасодифий миқдор қандай ҳолда нормал қонун бўйича тақсимланган дейилади?
6. Икки ўлчовли тасодифий миқдорларнинг сочилиш маркази деб нимага айтилади?
7. Иккита тасодифий миқдор системасининг математик кутилиши ва дисперсияси қандай аниқланади?
8. Иккита тасодифий миқдор системасининг биринчи ва иккинчи тартибли марказий моментлари қандай эҳтимолий маънога эга?
9. Иккита тасодифий миқдор системасининг корреляцион моменти нимани характерлайди?
10. Корреляция коэффициенти нима? Унинг ўзгариш чегаралари қандай бўлади?

---

* Биз баён қилишни соддалаштириш мақсадида Ляпунов шартини бир оз тор шаклда келтирдик. Кейинчалик бу шарт Линдеберг томонидан янада енгиллаштирилган эди. Сўнгра Феллер бу янги шарт етарлигина бўлиб қолмасдан, балки зарурий шарт ҳам эканини исботлади.

11. Иккита эркли тасодифий миқдорнинг корреляция коэффициенти нимага тенг? Тасодифий миқдорлар чизиқли боғланган бўлган ҳолда корреляция коэффициенти нимага тенг?

12. Корреляция коэффициентининг нолга тенглигидан тасодифий миқдорлар эркли деб хулоса чиқариш мумкинми?

13. Тасодифий миқдорлар йиғиндисининг математик кутилиши ва дисперсияси ҳақидаги теоремаларнинг шартлари бир хилми?

14. Кўп ўлчовли тасодифий миқдорлар нима?

15. Иккита дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунлари бўйича улар йиғиндисининг тақсимот қонунини қандай топиш мумкин?

16. Иккита узлуксиз тасодифий миқдор бўлган ҳол учун тақсимот қонунларнинг композициясига мисол келтиринг.

17. Катта сонлар қонуни деб нимага айтилади?
Бу ном қандай маънога эга?

18. Чебишев формасидаги катта сонлар қонуни нимадан иборат?

19. Эҳтимоллар назариясининг лимит теоремалари қандай аҳамиятга эга?

20. Тақсимот қонунларидан қайси бири кўпроқ лимит қонун сифатида учраб туради?

21. Муавр—Лаплас теоремасини эҳтимоллар назариясининг лимит теоремаси сифатида қандай талқин қилиш мумкин?

22. Ляпуновнинг марказий лимит теоремаси нимадан иборат?

Нормал тақсимотнинг эҳтимоллар зичлиги ва Лаплас функциясининг жадваллари

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \text{ ва } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
0,00	0,3989	0,0000	0,40	0,3683	0,1554	0,80	0,2897	0,2881
01	3989	0040	41	3668	1591	81	2874	2910
02	3989	0080	42	3653	1628	82	2850	2939
03	3988	0120	43	3637	1664	83	2827	2967
04	3968	0160	44	3621	1700	84	2803	2995
05	3984	0199	45	3605	1736	85	2780	3023
06	3982	0239	46	3589	1772	86	2756	3051
07	3980	0279	47	3572	1808	87	2732	3078
08	3977	0319	49	3555	1844	88	2709	3106
09	3973	0359	48	3538	1879	89	2685	3133
0,01	0,3970	0,0398	0,50	0,3521	0,1915	0,90	0,2661	0,3159
11	3965	0438	51	3503	1950	91	2637	3186
12	3961	0478	52	3485	1985	92	2613	3212
13	3956	0517	53	3467	2019	93	2589	3238
14	3951	0557	54	3448	2054	94	2565	3264
15	3945	0596	55	3429	2088	95	2541	3289
16	3939	0636	56	3410	2123	96	2516	3315
17	3932	0675	57	3391	2157	97	2492	3340
18	3925	0714	58	3372	2190	98	2468	3365
19	3918	0753	59	3352	2224	99	2444	3389
0,20	0,3910	0,0793	0,60	0,3332	0,2257	1,00	0,2420	0,3413
21	3902	0832	61	3312	2291	01	2396	3438
22	3994	0871	6	3292	2324	02	2371	3461
23	3885	0910	63	3271	2357	03	2347	3485
24	3876	0948	64	3251	2389	04	2323	3508
25	3867	0 87	65	3230	2422	05	2299	3531
26	3857	1026	66	3209	2454	06	2275	3554
27	3847	1064	67	3187	2486	07	2251	3577
28	3836	1103	68	3166	2517	08	2227	3599
29	3825	1141	69	3144	2549	09	2203	3621
0,30	0,3814	0,1179	0,70	0,3123	0,2580	1,10	0,2179	0,3643
31	3802	1217	71	3101	2611	11	2155	3665
32	3790	1255	72	3079	2642	12	2131	3686
33	3778	1293	73	3056	2673	13	2107	3708
34	3765	1331	74	3034	2703	14	2083	3729
35	3752	1368	75	3011	2734	15	2059	3749
36	3739	1406	76	2989	2764	16	2036	3770
37	3725	1443	77	2966	2794	17	2012	3790
38	3712	1480	78	2943	2823	18	1989	3810
39	3697	1517	79	2920	2852	19	1965	3830

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
1,20	0,1942	0,3849	1,70	0,0940	0,4554	2,40	0,0224	0,4918
21	1919	3869	71	0925	4564	42	0213	4922
22	1895	3888	72	0909	4573	44	0203	4927
23	1872	3907	73	0898	4582	46	0194	4931
24	1849	3925	74	0878	4591	48	0184	4934
25	1826	3944	75	0863	4599	50	0175	4938
26	1804	3962	76	0848	4608	52	0167	4941
27	1781	3980	77	0833	4616	54	0158	4945
28	1758	3997	78	0818	4625	56	0151	4948
29	1736	4015	79	0804	4633	58	0143	4951
1,30	0,1714	0,4032	1,80	0,0790	0,4641	2,60	0,0136	0,4953
31	1691	4049	81	0775	4649	62	0129	4956
32	1669	4066	82	0761	4656	64	0122	4959
33	1647	4082	83	0748	4664	66	0116	4961
34	1626	4099	84	0734	4671	68	0110	4963
35	1604	4115	85	0721	4678	70	0104	4965
36	1582	4131	86	0707	4686	72	0099	4967
37	1561	4147	87	0694	4693	74	0093	4969
38	1539	4162	88	0681	4699	76	0088	4971
39	1518	4177	89	0669	4706	78	0084	4973
1,40	0,1497	0,4192	1,90	0,0656	0,4713	0,80	0,0079	0,4974
41	1476	4207	91	0644	4719	82	0075	4976
42	1456	4222	92	0632	4726	84	0071	4977
43	1435	4236	93	0620	4732	86	0067	4979
44	1415	4251	94	0608	4738	88	0063	4980
45	1394	4265	95	0596	4744	90	0,0060	0,4981
46	1374	4279	96	0584	4750	92	0056	4982
47	1354	4292	97	0573	4756	94	0053	4984
48	1334	4306	98	0562	4761	96	0050	4985
49	1315	4319	99	0551	4767	98	0047	4986
1,50	0,1295	0,4332	2,00	0,0540	0,4772			
51	1276	4345	02	0519	4783	3,00	0,00443	0,49865
52	1257	4357	04	0498	4793	3,10	00327	49903
53	1238	4370	06	0478	4803	3,20	00238	49931
54	1219	4382	08	0459	4812	3,30	00172	49952
55	1200	4394	10	0440	4821	3,40	00123	49966
56	1182	4406	12	0422	4830	3,50	00087	49977
57	1163	4418	14	0404	4838			
58	1145	4429	16	0387	4846			
59	1127	4441	18	0,0371	4854			
1,60	0,1109	0,4452	2,20	0355	0,4861	3,60	00061	49984
61	1092	4463	22	0339	4868	3,70	00042	49989
62	1074	4474	24	0325	4875	3,80	00029	49993
63	1057	4484	26	0310	4881	3,90	00020	49995
64	1040	4495	28	0297	4887	4,00	0,0001338	0,499968
65	1023	4505	30	0288	4893	4,50	0000160	499997
66	1006	4515	32	0270	4898	5,00	0000015	49999997
67	0989	4525	34	0258	4904			
68	0973	4535	36	0246	4909			
69	0957	4545	38	0235	4913			

ТАВСИЯ ҚИЛИНАДИГАН АДАБИЁТ

1. Бернштейн С. Н., „Теория вероятностей", ГИТТЛ, 1946.
2. Вентцель Е. О., „Теория вероятностей", „Наука", 1964.
3. Гливенко В. И., „Курс теории вероятностей", ГОНТИ, 1939.
4. Гнеденко Б. В., „Курс теории вероятностей", „Наука", 1965.
5. Гончаров В. Л., „Теория вероятностей", Оборонгиз, 1939,
6. Феллер В. „Введение в теорию вероятностей её приложения" „МИР", 1964.
7. Яглом А. М., Яглом И. М., „Вероятность и информация", физматгиз 1960.

МАСАЛАЛАР ТЎПЛАМЛАРИ

1. Гюнтер Н. М. и Кузьмин Р. О., Сборник задач по высшей математике, том III, ГИТТЛ, 1947.
2. Володин Б. Г., Ганин М. П. и др. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций, под редакцией А. А. Свешникова. „Наука", 1965.

МУНДАРИЖА

„Ўқитувчи“ нашриёти 1978 йилда олий ўқув юртлари учун физика ва математикага доир қуйидаги ўқув қўлланмаларни нашр этади.

Бақанина А. П. — **Физикадан масалалар тўплами.** 25,0 нашр. л. Тиражи 10 000. Баҳоси 85 т.

Кикоин И. К., Кикоин А. К. — **Молекуляр физика.** 33,0 нашр. л. Тиражи 10 000. Баҳоси 1 с. 20 т.

Королев Ф. А. — **Физика курси.** 40,0 нашр. л. Тиражи 15 000. Баҳоси 1 с. 40 т.

Маллин Р. Х. — **Классик электродинамика,** II қ. 12,0 нашр. л. Тиражи 10 000. Баҳоси 50 т.

Отажонов Р. К. — **Геометрик ясаш методлари,** 4-нашри. 28,0 нашр. л. Тиражи 10 000. Баҳоси 1 с. 10 т.

Бакельман И. Я. — **Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра.** 17,0 нашр. л. Тиражи 15 000. Баҳоси 60 т.

Ягудаев Б. Я. — **Сонли функциялар.** 5,0 нашр. л. Тиражи 10 000. Баҳоси 10 т.

Гутер Р. С., Янпольский А. Р. — **Дифференциал тенгламалар.** 17,0 нашр. л. Тиражи 10 000. Баҳоси 60 т.

ҲУРМАТЛИ КИТОБХОНЛАР!

„Ўқитувчи“ нашриёти Сизлар учун республикамизнинг етук олимлари, илғор ўқитувчилари томонидан яратилган, шунингдек, рус тилидан таржима қилинган дарсликлар, ўқув ва методик қўлланмалар нашр этади.

Бизнинг ўқув адабиётимиз билан тўлароқ танишишда Сизга нашриётнинг 1978 йил учун аннотацияли плани ёрдам беради. Уни китоб магазинларидан топишингиз мумкин.

ИБ №628

На узбекском языке

РАФАИЛ САМОЙЛОВИЧ ГУТЕР
БОРИС ВЛАДИМИРОВИЧ ОВЧИНСКИЙ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие для студентов педагогических институтов

Перевод с русского издания изд-ва „Просвещение", М., 1967

Издательство „Ўқитувчи"
Ташкент — 1978

Таржимон *Х. Ботиров*
Редактор *Ў. Хусанов*
Бадиий редактор *Е. Соин*
Техредактор *Т. Грешникова*
Корректор *М. Абдунабиева*

Теришга берилди 8/VIII-1977 й. Босишга рухсат этилди 15/III-1978 й. Формат 60×90$^1/_{16}$. № 3 тип. қоғози. Кегель 10 шпонсиз. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л. 10,5. Нашр. л. 9,46. Тиражи 20000. Зак. № 100. Баҳоси 35 т.

„Ўқитувчи" нашриёти. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома 137-77.

Нашриётлар, полиграфия ва китоб савдоси ишлари область бошқармасининг Морозов номли босмахонаси, Самарқанд, У. Турсунов кўчаси, 82. 1978 й.

Типография имени Морозова областного управления по делам издательств полиграфии и книжной торговли. Самарканд, ул. У. Турсунова, 82.