3-50

Элементы прикладной математики

Я. Б. ЗЕЛЬДОВИЧ
А. Д. МЫШКИС

Я. Б. ЗЕЛЬДОВИЧ, А. Д. МЫШКИС

ЭЛЕМЕНТЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга является не систематическим учебником, а скорее, книгой для чтения. На простых примерах, взятых из физики, на различных математических задачах мы старались ввести читателя в круг идей и методов, широко распространенных сейчас в приложениях математики к физике, технике и некоторым другим областям. Некоторые из этих идей и методов (такие, как применение дельта-функции, принципа суперпозиции, получение асимптотических выражений и т. д.) еще недостаточно освещаются в распространенных математических учебниках для нематематиков, так что здесь наша книга может служить дополнением к этим учебникам. Нашей целью было пояснить основные идеи математических методов и общие закономерности рассматриваемых явлений. Напротив, формальные доказательства, рассмотрение исключений и усложняющих факторов по возможности опущены. Взамен этого мы в некоторых местах старались входить более подробно в физическую картину рассматриваемых процессов.

Первоначально мы предполагали включить в книгу уравнения математической физики (уравнения с частными производными, интегральные уравнения и т. д.). Однако это настолько расширило бы объем, что пришлось себя здесь ограничить. Может быть, мы вернемся к этой мысли в будущем.

Предполагается, что читатель владеет основами дифференциального и интегрального исчислений для функций одной переменной, включая разложение таких функций в степенные ряды, и может применять эти разделы высшей математики к решению физических задач. Достаточно (но не необходимо!), например, знакомство с книгой Я. Б. Зельдовича «Высшая математика для начинающих и ее приложения к физике», на которую мы будем иногда ссылаться, обозначая ее буквами ВМ (имеется в виду издание 3, «Наука», 1965). Более того, настоящая книга в какой-то степени может рассматриваться как продолжение ВМ. В немногих местах изложение близко книге А. Д. Мышкиса «Лекции по высшей математике» издание 2 («Наука», 1967). Тем не менее настоящая книга является совершенно самостоятельной, поскольку от читателя никаких специальных познаний, помимо только что указанных, не потребуется.

Содержание книги ясно из прилагаемого оглавления. Ее не обязательно читать подряд: читатель может знакомиться с интересующими его разделами независимо от других разделов и только в явно указываемых случаях из этих других разделов потребуются отдельные сведения. Поэтому для удобства в начале отдельных глав и параграфов указываются сведения из предыдущих глав, знакомство с которыми необходимо. Нумерация параграфов и формул производится в каждой главе самостоятельно, а при ссылках в пределах одной главы ее номер не указывается.

Мы будем благодарны читателям за любые замечания по содержанию и изложению материала книги. Несомненно, что на отдельных местах книги сказались различные навыки ее авторов, один из которых является физиком, а другой — математиком. Порой мы упорно тянули в разные стороны. Теперь сюда приложит свои усилия еще и читатель, так что все эти усилия будут складываться *). Подобный случай был разобран еще в известной басне Крылова, однако мы надеемся, что у нас результаты будут не столь плачевны.

Авторы выражают свою признательность К. А. Семендяеву, который прочитал рукопись книги и сделал ряд ценных замечаний.

Во втором издании весь текст пересмотрен, в него внесен ряд изменений и добавлений. Введены новые параграфы: XIII.4, XIII.9 и XIV.3. Кроме того, исправлены замеченные опечатки и другие мелкие погрешности.

---

*) Сложение сил по векторному закону изложено в гл. IX.

ГЛАВА I

НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Решение физической задачи, полученное в математических терминах, например в виде комбинации различных функций, производных, интегралов и т. п., нужно уметь «довести до числа», которое чаще всего и служит окончательным ответом. Для этого в различных разделах математики выработаны разнообразные численные методы. В элементарной математике рассматриваются, как правило, лишь методы точного решения поставленных задач — решения уравнений, геометрических построений и т. п. Это является ее слабой стороной, так как такое решение возможно в очень редких случаях (что приводит к резкому сокращению круга рассматриваемых задач), а если и возможно, то часто получается чрезвычайно громоздким. Даже такой сравнительно простой вопрос, как решение общих (с произвольными коэффициентами) алгебраических уравнений n-й степени, оказался в рамках элементарной математики при $n > 2$ непомерно сложным и громоздким, а при $n > 4$ и вовсе неразрешимым. И только систематическое применение методов приближенных вычислений на основе аппарата высшей математики дало возможность доводить до конца, и притом единообразным способом, решение широкого класса важных для приложений математических задач. Более того, развитие численных методов высшей математики и внедрение современной вычислительной техники привели к тому, что если какая-либо задача достаточно четко сформулирована математически, то (за исключением уж особо сложных случаев) она обязательно будет решена с достаточной для практики точностью. Таким образом, высшая математика дает не только идеи, лежащие в основе анализа физических явлений, но и численные методы, позволяющие довести решение конкретных задач физики и техники до конца.

Некоторые из этих методов указываются и в начальном курсе дифференциального и интегрального исчислений: например, простейшие методы вычисления производных и интегралов, вычисление значений функции с помощью рядов и т. п. В этой и в последующих главах (в частности, гл. II, III, VIII) мы остановимся на таких методах более подробно. Они не связаны непосредственно один с другим и потому с ними можно знакомиться независимо.

§ 1. Численное интегрирование

Когда та или иная практическая задача сведена к вычислению определенного интеграла, то можно сказать, что самая трудная часть дела уже позади. Если подынтегральная функция $f(x)$ такова, что можно выразить неопределенный интеграл $F(x)$ при помощи конечного числа элементарных функций, то величину определенного интеграла принципиально получить нетрудно, пользуясь формулой $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. При этом придется выполнять ряд арифметических действий для того, чтобы найти значения величин $F(b)$ и $F(a)$. На практике, однако, это может привести к существенным затруднениям, так как для неопределенного интеграла $F(x)$ может получиться очень сложная формула.

Указанный способ может оказаться и вовсе непригодным, если (а это случается нередко) не удается получить формулу для неопределенного интеграла.

Иногда рассматриваемый интеграл выражается через неэлементарные, но хорошо изученные функции, для которых составлены подробные таблицы (см., в частности, книгу Е. Янке и Ф. Эмде «Таблицы функций с формулами и кривыми», Физматгиз, 1962). К таким функциям относятся, например,

$$\int e^{-x^2}dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \int \frac{\cos x}{x}\,dx, \quad \int \frac{e^x}{x}\,dx,$$
$$\int \sin x^2 dx, \quad \int \cos x^2 dx$$

и т. д. Эти интегралы, не выражающиеся через элементарные функции, даже имеют специальные наименования: интеграл ошибок (см. гл. XIII), интегральный синус и т. д.

В других случаях интеграл удается вычислить, разлагая подынтегральную функцию в ряды того или иного вида. Например, для интеграла

$$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$$

соответствующий неопределенный интеграл не выражается через элементарные функции. Тем не менее, воспользовавшись рядом Маклорена для синуса

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots,$$

получаем

$$I=\int_0^1\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots\right)dx=1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}-\frac{1}{7\cdot 7!}+\ldots$$

Вычисляя последовательно члены полученного ряда, мы останавливаемся, когда достигаем выбранной разумной степени точности. Например, при вычислении с точностью до 0,001 достаточно ограничиться тремя первыми членами ряда, что даст значение $I=0{,}946$.

Некоторые определенные интегралы удается подсчитать точно с помощью методов теории функций комплексного переменного. Так, например, в § V.9 мы покажем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega x}{1+x^2}\,dx=\pi e^{-\omega}\quad(\omega>0), \tag{1}$$

хотя соответствующий неопределенный интеграл не выражается через элементарные функции.

Если и эти методы непригодны, то величину определенного интеграла можно подсчитать численно с помощью так называемых формул численного интегрирования, к которым мы сейчас переходим.

Простой и вместе с тем хороший способ (который был уже освещен в ВМ, ч. II, § 7) состоит в следующем: промежуток интегрирования разбиваем на несколько малых равных частей. Интеграл по каждому малому промежутку приближенно считаем равным произведению длины промежутка на среднее арифметическое значений подынтегральной функции в начале и в конце промежутка. Этот способ называется *способом трапеций*, потому что получается такой результат, как если бы в каждом малом промежутке дуга графика $y=f(x)$ заменялась на ее хорду, а площадь под этой дугой (величина интеграла) заменялась площадью получающейся трапеции с вертикальными основаниями (рис. 1).

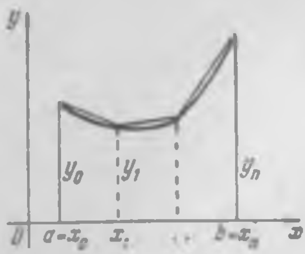

Рис. 1.

Соответствующая формула имеет вид (проверьте!)

$$\int_a^b y\,dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right), \qquad (2)$$

где для краткости обозначено $f(x_i)=y_i$.

Еще более эффективную формулу можно получить, если кривую $y=f(x)$ на малом интервале заменить параболой, т. е. графиком квадратичной зависимости. Разобьем промежуток интегрирования от $x=a$ до $x=b$ на четное число $2m$ равных промежутков. Границы промежутков пусть будут $x_0=a$, x_1, x_2, ..., $x_{2m}=b$ (рис. 2).

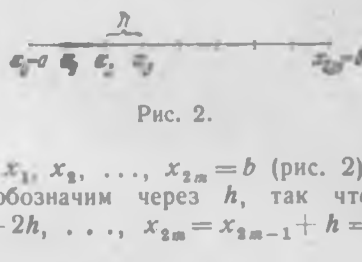

Рис. 2.

Длину одного промежутка обозначим через h, так что $x_1=x_0+h$, $x_2=x_1+h=x_0+2h$, ..., $x_{2m}=x_{2m-1}+h=$ $=x_0+2mh$.

Рассмотрим

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)\,dx,$$

т. е. вклад в исходный интеграл от первых двух промежутков. Кривую $y=f(x)$ на промежутке от $x=x_0$ до $x=x_2$ заменим параболой, проходящей через точки $(x_0;\ y_0)$, $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$, и площадь под кривой приближенно заменим площадью под параболой. Уравнение параболы имеет вид $y=mx^2+nx+l$. Коэффициенты m, n, l определяются из условия, что парабола проходит через три данные точки:

$$\begin{cases} y_0=mx_0^2+nx_0+l, \\ y_1=mx_1^2+nx_1+l, \\ y_2=mx_2^2+nx_2+l. \end{cases}$$

Однако это приводит к довольно длинным выкладкам.

Проще поступить так. Будем искать уравнение параболы в виде

$$y=A(x-x_0)(x-x_1)+B(x-x_0)(x-x_2)+C(x-x_1)(x-x_2). \tag{3}$$

Ясно, что справа в (3) стоит многочлен второй степени, так что (3) действительно есть уравнение параболы. Положим в (3) $x=x_0$, получим $y_0=C(x_0-x_1)(x_0-x_2)$, или $y_0=C2h^2$; полагая в (3) $x=x_1=x_0+h$, получим $y_1=-Bh^2$; наконец, полагая в (3) $x=x_2=x_0+2h$, получим $y_2=2Ah^2$. Отсюда

$$A=\frac{y_2}{2h^2}; \quad B=-\frac{y_1}{h^2}; \quad C=\frac{y_0}{2h^2}. \text{ *)} \tag{4}$$

Площадь под параболой есть

$$\int_{x_0}^{x_0+2h}[A(x-x_0)(x-x_1)+B(x-x_0)(x-x_2)+$$
$$+C(x-x_1)(x-x_2)]\,dx=A\frac{2}{3}h^3-B\frac{4}{3}h^3+C\frac{2}{3}h^3.$$

(При выполнении интегрирования удобно сделать замену переменной $x-x_1=s$; при этом надо учесть, что $x_0=x_1-h$, $x_2=x_1+h$.) Поэтому

$$\int_{x_0}^{x_2}f(x)\,dx\approx A\frac{2}{3}h^3-B\frac{4}{3}h^3+C\frac{2}{3}h^3.$$

---

*) Отметим, что совершенно аналогично решается следующая задача: найти многочлен степени n, принимающий заданные значения для $n+1$ значений x. Эта *интерполяционная задача* встречается при подборе эмпирических формул (см. § II. 4), при действиях с функциями, заданными таблично, и т. д.

Пользуясь (4), находим

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2). \tag{5}$$

Таким же способом можно подсчитать $\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx, \ldots$

$\ldots, \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x)\,dx$. Для интеграла по всему промежутку от $x=a$ до $x=b$ получим

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[(y_0+4y_1+y_2)+$$

$$+(y_2+4y_3+y_4)+\ldots+(y_{2m-2}+4y_{2m-1}+y_{2m})],$$

откуда

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[y_0+y_{2m}+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2m-2})+$$

$$+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2m-1})], \tag{6}$$

где $h=\frac{b-a}{2m}$. Эта формула называется *формулой Симпсона.*

Если переписать формулу (5) в виде

$$\frac{1}{2h}\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)\,dx \approx \frac{2}{3}y_1+\frac{y_0+y_2}{6},$$

то получим, что формула Симпсона основана на приближенной замене среднего значения $\bar{y}$ функции $y(x)$ на промежутке от x_0 до x_0+2h на

$$\bar{y} \approx \frac{2}{3}y_1+\frac{y_0+y_2}{6}. \tag{7}$$

Формула трапеций дала бы (проверьте!)

$$\bar{y} \approx \frac{1}{2}y_1+\frac{y_0+y_2}{4}. \tag{8}$$

Для проверки вида формул можно положить $y(x)\equiv k=\text{const}$, откуда и $\bar{y}=k$; тогда обе формулы становятся точными.

Из вывода формул следует, что формула (8) является точной для линейных функций (вида $y = mx + n$), а формула (7) — также и для квадратичных функций (вида $y = mx^2 + nx + l$). Интересно отметить, что формула (7) на самом деле является точной и для кубических функций ($y = mx^3 + nx^2 + lx + k$).

При разбиении промежутка на то же самое число частей формула Симпсона, как правило, значительно точнее формулы трапеций.

Рассмотрим примеры.

1. Найти $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$.

Разобьем промежуток интегрирования на две части и подсчитаем интеграл по формуле трапеций и по формуле Симпсона.

Находим необходимые значения подынтегральной функции

x	0	0,5	1
y	1	0,6667	0,5

Формула трапеций дает

$$I = \frac{1}{2}\left(\frac{1+0,5}{2} + 0,6667\right) = 0,7083.$$

Формула Симпсона дает

$$I = \frac{1}{6}(1 + 4 \cdot 0,6667 + 0,5) = 0,6944.$$

Так как $I = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2 = 0,6931$ (с точностью до четырех знаков), то формула Симпсона дала ошибку примерно 0,2%, а формула трапеций 2%.

2. Найти $I = \int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$. (Заметим, что $\int \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$ не берется в элементарных функциях.) Разбиваем промежуток так же, как и в примере 1, и находим необходимые значения подынтегральной функции

x	0	0,5	1
y	0	0,324	0,346

По формуле трапеций получаем $I = \frac{1}{2}\left(\frac{0,346}{2} + 0,324\right) = 0,248$. По формуле Симпсона $I = \frac{1}{6}(0,324 \cdot 4 + 0,346) = 0,274$. Точное значение (с тремя верными знаками) этого интеграла есть 0,272. Поэтому ошибка при подсчете по формуле трапеций составила около 10%, а по формуле Симпсона менее 1%.

Преимущество формулы Симпсона особенно сказывается при увеличении числа n интервалов разбиения. Можно показать, что при этом ошибка формулы трапеций убывает обратно пропорционально n^2, а ошибка формулы Симпсона — обратно пропорционально n^4 (в том случае, если производная третьего порядка от интегрируемой функции остается на интервале интегрирования конечной).

Приведенные примеры показывают, насколько быстро и просто численные методы позволяют находить интегралы. Часто даже в тех случаях, когда для интеграла можно получить точную формулу, его быстрее и легче найти численным интегрированием.

После смерти великого итальянского физика Энри́ко Фе́рми, построившего первый урановый котел, были опубликованы странички из его рабочей тетради. По ходу расчетов надо было вычислить интеграл. Ферми предпочел найти его численно, хотя интеграл можно было выразить через логарифмы и арктангенс.

Упражнения

1. Найти величины следующих интегралов по формуле Симпсона и по формуле трапеций, разбивая промежуток интегрирования на 4 части:

$$\text{а) } \int_1^3 \frac{dx}{x}, \quad \text{б) } \int_0^2 e^{-x^2} dx, \quad \text{в) } \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Вычисления вести в пределах точности логарифмической линейки. Значения показательной функции можно взять, например, из справочника по математике И. Н. Бронштейна и К. А. Семендяева.

2. Найти $\int_0^2 \frac{x\,dx}{e^x + 1}$ по формуле Симпсона, разбивая промежуток интегрирования на 4 части. Вычисления вести с четырьмя

знаками после запятой. Для контроля найти величину этого же интеграла, разбивая промежуток интегрирования на 6 частей.

3. Проверить непосредственно, что формула (8) является точной для многочленов первой степени, а формула (7) — для многочленов второй степени.

Указание. Проверить сначала точность этих формул для функции $y=x$, а формулы (7) — для функции $y=x^2$.

§ 2. Вычисление сумм при помощи интегралов

Рассмотрим суммы нескольких чисел, образованные по определенному закону, например,

$$S_6=1+2+3+4+5+6,$$

или

$$S_{96}=\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}+\ldots+\sqrt{99}+\sqrt{100},$$

или

$$S_{21}=1+\frac{1}{1,1}+\frac{1}{1,2}+\frac{1}{1,3}+\ldots+\frac{1}{2,9}+\frac{1}{3,0}.$$

Сумму обозначаем буквой S. Индекс, стоящий внизу у этой буквы, указывает на число членов в сумме. Каждую такую сумму можно записать более компактно, если удастся установить связь между величиной отдельного слагаемого в сумме и его номером. Так в первой сумме слагаемое a_n просто равно номеру n, который меняется от 1 до 6, а потому первая сумма равна

$$S_6=\sum_{n=1}^{6}a_n=\sum_{n=1}^{6}n.$$

Иногда бывает удобнее, чтобы номер начинался от нулевого; тогда надо обозначить $n-1=m$, т. е. $n=m+1$, что даст

$$S_6=\sum_{m=0}^{5}(m+1);$$

впрочем, здесь вместо m можно вновь писать n или любую другую букву, так как индекс суммирования является «немым», т. е. величина суммы не зависит от его обозначения. (В этом индекс суммирования аналогичен переменной интегрирования в определенном интеграле; ср. ВМ, ч. II, § 8.) Обратите внимание на то, что в последней сумме индекс меняется от 0 до 5, а число слагаемых в соответствии с этим равно *шести*.

Подобным образом, вторую из выписанных сумм можно записать так:

$$S_{96} = \sum_{p=5}^{100} \sqrt{p}.$$

Однако лучше, чтобы индекс менялся от 1 или от 0; для этого надо обозначить $p-4=m$ или $p-5=n$, что даст

$$S_{96} = \sum_{m=1}^{96} \sqrt{m+4} = \sum_{n=0}^{95} \sqrt{n+5}.$$

Третья сумма имеет вид

$$S_{21} = \sum_{n=0}^{20} \frac{1}{1+0,1n}.$$

Мы видим, что ее можно рассматривать как сумму значений функции $f(x) = \frac{1}{x}$, когда x принимает значения от $x=1$ до $x=3$ через 0,1 (этот подход полезен для дальнейшего). И в других случаях часто бывает удобно рассматривать заданную сумму как сумму значений некоторой функции $f(x)$ для x, меняющегося от некоторого $x=a$ до $x=b$ с постоянным интервалом $\Delta x = h$.

Выписанные суммы не так трудно вычислить, однако, если сумма состоит из большого числа членов, то ее вычисление становится утомительным. К тому же часто приходится сравнивать суммы, составленные по одному и тому же закону, но с разным числом членов. В этом случае желательно знать не только величину суммы при некотором конкретном числе ее членов, но и знать зависимость величины суммы от числа ее членов.

Во многих случаях можно приближенно находить суммы при помощи интегралов.

Вспомним, что изучение интегралов начинают с приближенного представления интеграла в виде суммы конечного числа членов. Затем устанавливают, что точное интегрирование многих функций с помощью неопределенных интегралов не представляет затруднений.

Запишем формулу трапеций, дающую приближенное выражение интеграла в виде суммы. Если промежуток интегрирования от $x=a$ до $x=b$ разбит на n равных промежутков длиной $\frac{b-a}{n}=h$ каждый, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\cdot\left[\frac{1}{2}f(a)+f(a+h)+\right.$$
$$\left.+f(a+2h)+\ldots+f(a+(n-1)h)+\frac{1}{2}f(a+nh)\right],$$

где $a+nh=b$.

Из этой формулы мы получаем следующее выражение для суммы:

$$f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(b)\approx$$
$$\approx\frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx+\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b). \qquad (9)$$

Отбрасывая в правой части (9) слагаемое $\frac{1}{2}f(a)+$ $+\frac{1}{2}f(b)$, что оправдано, если

$$\frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx \gg \frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b),$$

т. е. если число членов суммы велико и функция $f(x)$ меняется не слишком быстро, мы получим более грубую формулу:

$$f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(b)\approx\frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (10)$$

Если величина h мала, то можно воспользоваться приближенными формулами

$$\frac{1}{2}f(a)\approx\frac{1}{h}\int_{a-\frac{1}{2}h}^{a} f(x)\,dx, \quad \frac{1}{2}f(b)\approx\frac{1}{h}\int_{b}^{b+\frac{1}{2}h} f(x)\,dx.$$

Тогда из (9) получаем

$$f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(b)\approx$$

$$\approx\frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx+\frac{1}{h}\int_{a-\frac{1}{2}h}^{a} f(x)\,dx+\frac{1}{h}\int_b^{b+\frac{1}{2}h} f(x)\,dx,$$

или

$$f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(b)\approx\frac{1}{h}\int_{a-\frac{h}{2}}^{b+\frac{h}{2}} f(x)\,dx. \quad (11)$$

При выводе формул (10) и (11) мы исходили из формулы (9), а она получена из формулы трапеций, которая является приближенной. Поэтому хотя (9) и (11) точнее формулы (10), они, однако, тоже приближенные, а не точные формулы. При уменьшении величины h и соответствующем увеличении числа членов суммы точность формул возрастает.

Применим полученные формулы к вычислению сумм, приведенных в начале параграфа.

Для суммы $S_6=21$, $f(x)=x$, $h=1$. По формуле (10) получаем

$$\int_1^6 x\,dx=\frac{1}{2}x^2\Big|_1^6=17{,}5.$$

Ошибка составляет 17%. По формуле (9) находим

$$S_6\approx\int_1^6 x\,dx+\frac{1}{2}+\frac{6}{2}=21.$$

Наконец, по формуле (11) находим

$$S_6\approx\int_{0,5}^{6,5} x\,dx=\frac{(6,5)^2}{2}-\frac{(0,5)^2}{2}=21.$$

При применении формул (9) и (11) мы получили абсолютно точный результат. (В силу упражнения 3, это связано с тем, что в рассматриваемом примере функция $f(x)$ линейная.)

Для следующей суммы $S_{96}=\sqrt{5}+\sqrt{6}+\ldots+\sqrt{100}$ получаем, учитывая, что $f(x)=\sqrt{x}$, $h=1$, по формуле (10)

$$\int_{5}^{100}\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_{5}^{100}=\frac{2}{3}(1000-5\sqrt{5})=659{,}2.$$

По формуле (9) находим $S_{96}\approx 665{,}3$ и по формуле (11) находим $S_{96}\approx 665{,}7$. Значение суммы S_{96}, вычисленное непосредственно (с точностью до четырех значащих цифр), есть 665,3.

Для последней суммы $f(x)=\frac{1}{x}$, $h=0{,}1$. Поэтому по формуле (10) получаем

$$S_{21}\approx\frac{1}{0{,}1}\int_{1}^{3}\frac{dx}{x}=10\ln 3=10{,}99.$$

По формуле (9) находим $S_{21}\approx 11{,}66$ и по формуле (11) получаем $S_{21}\approx 11{,}51$. Значение суммы, вычисленное непосредственно, есть $S_{21}=11{,}66$ (с точностью до двух знаков после запятой).

В приведенных примерах формулы (9) и (11) дают вполне удовлетворительную точность, так что ими и следует пользоваться на практике. Грубая формула (10) может быть полезной для формулировки закона возрастания суммы при неограниченном увеличении числа ее членов. Однако при всех численных расчетах с определенным числом членов суммы надо пользоваться формулой (11), которая не сложнее (10), но значительно точнее *).

Во всех рассмотренных нами примерах отдельные слагаемые, входящие в состав суммы, имели одинаковые знаки.

Если слагаемые имеют разные знаки, то для вычисления суммы при помощи интеграла надо было бы рассматривать интеграл от функции, меняющей знак несколько раз на

---

*) Применение формулы (10) связано с очевидной систематической ошибкой, получающейся из-за отбрасывания двух слагаемых при выводе этой формулы. Если все слагаемые одинаковые, т. е. $f(x)=A=\text{const}$, а $(b-a)/h=n$, то рассматриваемая сумма равна $(n+1)A$ (почему?), тогда как формула (10) дает только nA (а формула (11) дает в этом случае точное значение).

промежутке интегрирования. Для таких интегралов формула трапеций дает очень плохие результаты. Поэтому полученные нами формулы годятся только для сумм, в которых все слагаемые имеют один знак, и неприменимы к суммам, у которых отдельные слагаемые имеют разные знаки*). В частности, полученные формулы неприменимы к суммам, в которых слагаемые меняют знак через один. Суммы такого рода называются *знакопеременными*. Примером знакопеременной суммы может служить

$$S_8=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}.$$

Как же находить такие суммы?

Если члены знакопеременной суммы убывают (или возрастают) по абсолютной величине, так что абсолютная величина каждого последующего члена меньше (или больше) абсолютной величины предыдущего члена, то можно применить следующий прием. Объединим попарно соседние положительные и отрицательные члены. После этого задача сводится к вычислению суммы, у которой знаки всех членов одинаковы.

Так, например,

$$S_8=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}=$$
$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)=$$
$$=\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{6\cdot7}+\frac{1}{8\cdot9}+\frac{1}{10\cdot11}.$$

Будем считать, что исходная знакопеременная сумма состоит из четного числа членов. Тогда если она начинается с положительного члена, то кончается отрицательным. Такую сумму можно записать в виде

$$S_{n+1}=f(a)-f(a+h)+f(a+2h)-f(a+3h)+\ldots-f(b), \quad (12)$$

где положено $b=a+nh$.

---

*) Впрочем, формулы можно применять, если сумма имеет вид левой части формул (9)—(11), причем функция $f(x)$ принимает значения разных знаков. Тогда при малом h знаки членов суммы будут сменяться очень редко.

Разность между двумя соседними членами этой суммы можно записать так:

$$f(a+kh)-f(a+(k+1)h)\approx -h\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a+\left(k+\frac{1}{2}\right)h}=$$

$$=-h\cdot f'\left(a+\left(k+\frac{1}{2}\right)h\right).$$

Это равенство приближенное, однако оно тем точнее, чем меньше h*).

Сумма (12) принимает вид

$$S_{n+1}\approx -h\left[f'\left(a+\frac{h}{2}\right)+f'\left(a+\frac{5}{2}h\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+f'\left(b-\frac{h}{2}\right)\right]. \qquad (13)$$

Применим к правой части формулу (11). Заметим, что в формуле (11) h представляет собой разность между соседними значениями независимой переменной. В формуле (13) эта разность равна $a+\left(k+\frac{1}{2}\right)h-\left[a+\left(k-\frac{3}{2}\right)h\right]=2h$. Поэтому, применяя формулу (11), мы должны вместо h взять $2h$; тогда получаем

$$S_{n+1}\approx -h\cdot\frac{1}{2h}\int\limits_{a+\frac{h}{2}-h}^{b-\frac{h}{2}+h} f'(x)\,dx=-\frac{1}{2}f(x)\Bigg|_{a-\frac{h}{2}}^{b+\frac{h}{2}}=$$

$$=\frac{f\left(a-\frac{h}{2}\right)-f\left(b+\frac{h}{2}\right)}{2}. \qquad (14)$$

*) Если обозначать $a+kh=x$ и поменять знаки, то последнее равенство можно переписать в виде $f(x+h)-f(x)\approx hf'\left(x+\frac{h}{2}\right)$. Легко оценить его точность: в самом деле, по формуле Тейлора

$$f(x+h)-f(x)=f'(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2+\frac{f'''(x)}{6}h^3+\ldots,$$

$$hf'\left(x+\frac{h}{2}\right)=h\left[f'(x)+f''(x)\frac{h}{2}+\frac{f'''(x)}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2+\ldots\right].$$

Таким образом, разложения различаются, лишь начиная с членов третьего порядка малости в сравнении с h.

Применим эту формулу для вычисления суммы

$$S_8=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}.$$

Здесь

$$f(x)=\frac{1}{x},\qquad a=4,\qquad b=11,\qquad h=1,$$

поэтому находим

$$S_8\approx\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3{,}5}-\frac{1}{11{,}5}\right)=0{,}0994.$$

Непосредственное суммирование дает $S_8=0{,}0968$. (Ошибка менее 3%.)

Если знакопеременная сумма имеет нечетное число членов, то, начинаясь с члена $f(a)$, она кончается членом $f(b)$ того же знака, что и $f(a)$. В этом случае мы сперва по формуле (14) найдем сумму без последнего члена $f(b)$, а затем добавим этот член:

$$S_{n+1}=f(a)-f(a+h)+f(a+2h)-\ldots+f(b)\approx$$
$$\approx\frac{1}{2}\left[f\left(a-\frac{h}{2}\right)-f\left(b-\frac{h}{2}\right)\right]+f(b).$$

Если h мало́, то для вычисления $f\left(b\pm\frac{h}{2}\right)$ можно ограничиться двумя первыми членами ряда Тейлора:

$$f(x)=f(b)+f'(b)\cdot(x-b)+\ldots$$

Полагая здесь $x=b-\frac{h}{2}$, найдем $f\left(b-\frac{h}{2}\right)\approx f(b)-\frac{h}{2}f'(b)$, а полагая $x=b+\frac{h}{2}$, найдем $f\left(b+\frac{h}{2}\right)\approx f(b)+\frac{h}{2}f'(b)$. Поэтому

$$f(b)-\frac{1}{2}f\left(b-\frac{h}{2}\right)\approx f(b)-\frac{1}{2}f(b)+\frac{1}{4}hf'(b)=$$
$$=\frac{1}{2}\left[f(b)+\frac{h}{2}f'(b)\right]\approx\frac{1}{2}f\left(b+\frac{h}{2}\right).$$

Окончательно сумма для случая нечетного числа членов равна

$$S_{n+1}\approx\frac{f\left(a-\frac{h}{2}\right)+f\left(b+\frac{h}{2}\right)}{2}. \tag{15}$$

Эта формула не менее точна, чем (14), с помощью которой она получена. Рассмотрим пример:

$$S_9 = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{12}.$$

По формуле (15) получаем $S_9 \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3.5} + \frac{1}{12.5}\right) = 0{,}1829$, непосредственное суммирование дает $S_9 = 0{,}1801$. Ошибка составляет примерно 1,5%. Отметим, что величина знакопеременной суммы, как это видно из формул (14) и (15), является величиной того же порядка, что и отдельные слагаемые. Поэтому добавление одного члена существенно меняет величину знакопеременной суммы. Так, в рассмотренном примере S_9 почти в два раза больше, чем S_8.

Отметим существенное различие между знакопеременной суммой и суммой с членами одного знака. Будем увеличивать число членов суммы так, что первый и последний члены не изменяются и не меняется закон образования суммы. Для этого будем уменьшать различие между соседними членами суммы, т. е. уменьшать величину h. Таким способом можно из суммы $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ получить суммы $1 + \frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,2} + \frac{1}{1,3} + \ldots + \frac{1}{3}$, или $1 + \frac{1}{1,01} + \frac{1}{1,02} + \ldots + \frac{1}{3}$.

Если все члены суммы имеют одинаковый знак, то величина суммы приблизительно пропорциональна числу членов. Это видно, например, из формулы (10). Действительно, перед интегралом в правой части (10) стоит множитель $\frac{1}{h}$, а величина h обратно пропорциональна числу членов суммы. Поэтому в описанном процессе величина суммы неограниченно возрастает вместе с ростом числа членов суммы.

В случае знакопеременной суммы с четным числом слагаемых ее величина при описанном увеличении числа членов приближается к определенному числу, не зависящему от количества членов суммы, а именно, к

$$S = \frac{f(a) - f(b)}{2}. \tag{16}$$

Это легко усмотреть из формулы (14), так как при большом числе членов h будет близко к нулю и потому $f\left(a - \frac{h}{2}\right) \approx$

$\approx f(a)$, $f\left(b+\frac{h}{2}\right)\approx f(b)$. Аналогично при нечетном числе слагаемых из формулы (15) в пределе получаем другое значение, а именно:

$$S=\frac{f(a)+f(b)}{2}. \qquad (17)$$

Заметим, что при малом числе слагаемых, т. е. когда величина h велика, упрощенные формулы (16) и (17) гораздо хуже формул (14) и (15). Рассмотрим пример. Пусть $S=1-2+3-4=-2$. По упрощенной формуле (16) получаем $S\approx-\frac{3}{2}$ (ошибка 25%), а формула (14) дает $S\approx\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(4+\frac{1}{2}\right)\right]=-2$, т. е. точный результат.

Выражения для сумм, которые были получены нами, являются приближенными, причем их точность увеличивается, когда соседние члены в сумме становятся более близкими друг к другу, т. е. когда уменьшается величина h.

Упражнения

1. Найти сумму $1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[3]{n}$, пользуясь формулой (11). Сравнить с величинами, найденными непосредственным суммированием для $n=3$; 4; 5.

2. Найти величину суммы

$$1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{20\sqrt{20}}.$$

3. Доказать, что формулы (9) и (11) абсолютно точны, если $f(x)$ — линейная функция; при этом члены суммы образуют арифметическую прогрессию.

§ 3. Численное решение уравнений

В практических вычислениях довольно часто приходится сталкиваться с численным решением уравнений вида

$$f(x)=0, \qquad (18)$$

где f — заданная функция. Такие уравнения могут быть алгебраическими или трансцендентными (т. е. неалгебраическими, например тригонометрическими и т. п.); как те, так и другие иногда называются «конечными» в отличие, на-

пример, от дифференциальных уравнений. Сейчас имеется большое число методов решения различных классов уравнений вида (18). Мы рассмотрим лишь три наиболее универсальных метода, широко применяемых и в других отделах математики.

Обычно начинают с нахождения грубого, совсем приближенного решения, так называемого *«нулевого приближения»*. Если решается физическая задача, то это грубое решение может быть известно из физического смысла задачи. Можно набросать график функции $f(x)$ и получить грубое решение, наметив точку пересечения этого графика с осью x.

Допустим, что такое грубое решение x_0 нам известно. Обозначим тогда точное решение, нам пока неизвестное, через $\bar{x} = x_0 + h$. Пользуясь формулой Тейлора, получим

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \ldots \tag{19}$$

Но левая часть должна равняться нулю; отбрасывая многоточие, т. е. члены высшего порядка малости, получаем

$$f(x_0) + hf'(x_0) \approx 0, \quad h \approx -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

т. е.

$$\bar{x} \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Если обозначить правую часть через x_1, т. е.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \tag{20}$$

то мы получаем «первое приближение» (таким образом, индекс равен номеру приближения). С ним можно проделать то же самое; это даст «второе приближение»

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

и т. д. Так как отбрасывание членов высшего порядка в формуле (19) равносильно замене графика функции $f(x)$ на касательную к нему при $x = x_0$, то геометрический смысл рассматриваемого метода состоит в последовательном построении касательных к графику и нахождении точек пересечения этих касательных с осью x (см. рис. 3). Очевидно,

$\approx f(a)$, $f\left(b+\frac{h}{2}\right)\approx f(b)$. Аналогично при нечетном числе слагаемых из формулы (15) в пределе получаем другое значение, а именно:

$$S=\frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{17}$$

Заметим, что при малом числе слагаемых, т. е. когда величина h велика, упрощенные формулы (16) и (17) гораздо хуже формул (14) и (15). Рассмотрим пример. Пусть $S=1-2+3-4=-2$. По упрощенной формуле (16) получаем $S\approx-\frac{3}{2}$ (ошибка 25%), а формула (14) дает $S\approx\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(4+\frac{1}{2}\right)\right]=-2$, т. е. точный результат.

Выражения для сумм, которые были получены нами, являются приближенными, причем их точность увеличивается, когда соседние члены в сумме становятся более близкими друг к другу, т. е. когда уменьшается величина h.

Упражнения

1. Найти сумму $1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[3]{n}$, пользуясь формулой (11). Сравнить с величинами, найденными непосредственным суммированием для $n=3$; 4; 5.

2. Найти величину суммы

$$1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{20\sqrt{20}}.$$

3. Доказать, что формулы (9) и (11) абсолютно точны, если $f(x)$ — линейная функция; при этом члены суммы образуют арифметическую прогрессию.

§ 3. Численное решение уравнений

В практических вычислениях довольно часто приходится сталкиваться с численным решением уравнений вида

$$f(x)=0, \tag{18}$$

где f — заданная функция. Такие уравнения могут быть алгебраическими или трансцендентными (т. е. неалгебраическими, например тригонометрическими и т. п.); как те, так и другие иногда называются «конечными» в отличие, на-

пример, от дифференциальных уравнений. Сейчас имеется большое число методов решения различных классов уравнений вида (18). Мы рассмотрим лишь три наиболее универсальных метода, широко применяемых и в других отделах математики.

Обычно начинают с нахождения грубого, совсем приближенного решения, так называемого *«нулевого приближения»*. Если решается физическая задача, то это грубое решение может быть известно из физического смысла задачи. Можно набросать график функции $f(x)$ и получить грубое решение, наметив точку пересечения этого графика с осью x.

Допустим, что такое грубое решение x_0 нам известно. Обозначим тогда точное решение, нам пока неизвестное, через $\bar{x}=x_0+h$. Пользуясь формулой Тейлора, получим

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1!}f'(x_0)+\ldots \tag{19}$$

Но левая часть должна равняться нулю; отбрасывая многоточие, т. е. члены высшего порядка малости, получаем

$$f(x_0)+hf'(x_0)\approx 0, \quad h\approx-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

т. е.

$$\bar{x}\approx x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Если обозначить правую часть через x_1, т. е.

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \tag{20}$$

то мы получаем «первое приближение» (таким образом, индекс равен номеру приближения). С ним можно проделать то же самое; это даст «второе приближение»

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

и т. д. Так как отбрасывание членов высшего порядка в формуле (19) равносильно замене графика функции $f(x)$ на касательную к нему при $x=x_0$, то геометрический смысл рассматриваемого метода состоит в последовательном построении касательных к графику и нахождении точек пересечения этих касательных с осью x (см. рис. 3). Очевидно,

$\approx f(a)$, $f\left(b+\frac{h}{2}\right)\approx f(b)$. Аналогично при нечетном числе слагаемых из формулы (15) в пределе получаем другое значение, а именно:

$$S=\frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{17}$$

Заметим, что при малом числе слагаемых, т. е. когда величина h велика, упрощенные формулы (16) и (17) гораздо хуже формул (14) и (15). Рассмотрим пример. Пусть $S=1-2+3-4=-2$. По упрощенной формуле (16) получаем $S\approx-\frac{3}{2}$ (ошибка 25%), а формула (14) дает $S\approx\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(4+\frac{1}{2}\right)\right]=-2$, т. е. точный результат.

Выражения для сумм, которые были получены нами, являются приближенными, причем их точность увеличивается, когда соседние члены в сумме становятся более близкими друг к другу, т. е. когда уменьшается величина h.

Упражнения

1. Найти сумму $1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[3]{n}$, пользуясь формулой (11). Сравнить с величинами, найденными непосредственным суммированием для $n=3$; 4; 5.

2. Найти величину суммы

$$1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{20\sqrt{20}}.$$

3. Доказать, что формулы (9) и (11) абсолютно точны, если $f(x)$ — линейная функция; при этом члены суммы образуют арифметическую прогрессию.

§ 3. Численное решение уравнений

В практических вычислениях довольно часто приходится сталкиваться с численным решением уравнений вида

$$f(x)=0, \tag{18}$$

где f — заданная функция. Такие уравнения могут быть алгебраическими или трансцендентными (т. е. неалгебраическими, например тригонометрическими и т. п.); как те, так и другие иногда называются «конечными» в отличие на-

пример, от дифференциальных уравнений. Сейчас имеется большое число методов решения различных классов уравнений вида (18). Мы рассмотрим лишь три наиболее универсальных метода, широко применяемых и в других отделах математики.

Обычно начинают с нахождения грубого, совсем приближенного решения, так называемого *«нулевого приближения»*. Если решается физическая задача, то это грубое решение может быть известно из физического смысла задачи. Можно набросать график функции $f(x)$ и получить грубое решение, наметив точку пересечения этого графика с осью x.

Допустим, что такое грубое решение x_0 нам известно. Обозначим тогда точное решение, нам пока неизвестное, через $\bar{x} = x_0 + h$. Пользуясь формулой Тейлора, получим

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \ldots \qquad (19)$$

Но левая часть должна равняться нулю; отбрасывая многоточие, т. е. члены высшего порядка малости, получаем

$$f(x_0) + hf'(x_0) \approx 0, \quad h \approx -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

т. е.

$$\bar{x} \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Если обозначить правую часть через x_1, т. е.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \qquad (20)$$

то мы получаем «первое приближение» (таким образом, индекс равен номеру приближения). С ним можно проделать то же самое; это даст «второе приближение»

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

и т. д. Так как отбрасывание членов высшего порядка в формуле (19) равносильно замене графика функции $f(x)$ на касательную к нему при $x = x_0$, то геометрический смысл рассматриваемого метода состоит в последовательном построении касательных к графику и нахождении точек пересечения этих касательных с осью x (см. рис. 3). Очевидно,

$\approx f(a)$, $f\left(b+\frac{h}{2}\right)\approx f(b)$. Аналогично при нечетном числе слагаемых из формулы (15) в пределе получаем другое значение, а именно:

$$S=\frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{17}$$

Заметим, что при малом числе слагаемых, т. е. когда величина h велика, упрощенные формулы (16) и (17) гораздо хуже формул (14) и (15). Рассмотрим пример. Пусть $S=1-2+3-4=-2$. По упрощенной формуле (16) получаем $S\approx-\frac{3}{2}$ (ошибка 25%), а формула (14) дает $S\approx\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(4+\frac{1}{2}\right)\right]=-2$, т. е. точный результат.

Выражения для сумм, которые были получены нами, являются приближенными, причем их точность увеличивается, когда соседние члены в сумме становятся более близкими друг к другу, т. е. когда уменьшается величина h.

Упражнения

1. Найти сумму $1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[3]{n}$, пользуясь формулой (11). Сравнить с величинами, найденными непосредственным суммированием для $n=3$; 4; 5.

2. Найти величину суммы

$$1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{20\sqrt{20}}.$$

3. Доказать, что формулы (9) и (11) абсолютно точны, если $f(x)$ — линейная функция; при этом члены суммы образуют арифметическую прогрессию.

§ 3. Численное решение уравнений

В практических вычислениях довольно часто приходится сталкиваться с численным решением уравнений вида

$$f(x)=0, \tag{18}$$

где f — заданная функция. Такие уравнения могут быть алгебраическими или трансцендентными (т. е. неалгебраическими, например тригонометрическими и т. п.); как те, так и другие иногда называются «конечными» в отличие, на-

пример, от дифференциальных уравнений. Сейчас имеется большое число методов решения различных классов уравнений вида (18). Мы рассмотрим лишь три наиболее универсальных метода, широко применяемых и в других отделах математики.

Обычно начинают с нахождения грубого, совсем приближенного решения, так называемого *«нулевого приближения»*. Если решается физическая задача, то это грубое решение может быть известно из физического смысла задачи. Можно набросать график функции $f(x)$ и получить грубое решение, наметив точку пересечения этого графика с осью x.

Допустим, что такое грубое решение x_0 нам известно. Обозначим тогда точное решение, нам пока неизвестное, через $\bar{x}=x_0+h$. Пользуясь формулой Тейлора, получим

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1!}f'(x_0)+\ldots \tag{19}$$

Но левая часть должна равняться нулю; отбрасывая многоточие, т. е. члены высшего порядка малости, получаем

$$f(x_0)+hf'(x_0)\approx 0, \quad h\approx-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

т. е.

$$\bar{x}\approx x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Если обозначить правую часть через x_1, т. е.

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \tag{20}$$

то мы получаем «первое приближение» (таким образом, индекс равен номеру приближения). С ним можно проделать то же самое; это даст «второе приближение»

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

и т. д. Так как отбрасывание членов высшего порядка в формуле (19) равносильно замене графика функции $f(x)$ на касательную к нему при $x=x_0$, то геометрический смысл рассматриваемого метода состоит в последовательном построении касательных к графику и нахождении точек пересечения этих касательных с осью x (см. рис. 3). Очевидно, что последовательные приближения быстро сходятся к искомому решению, если только нулевое приближение не лежало от него слишком далеко.

Этот метод называется *методом Ньютона* (или *методом касательных* в соответствии с его геометрическим смыслом). Удобство этого метода состоит в том, что при его применении приходится только вычислять значения функции $f(x)$ и ее производной и производить арифметические действия, что для функции, заданной формулой, не вызывает существенных затруднений.

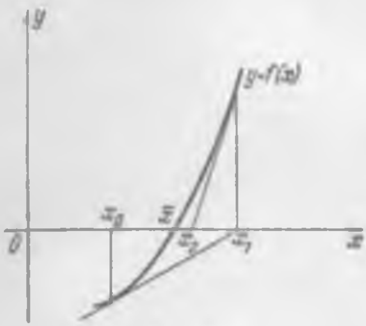

Рис. 3.

Рассмотрим пример. Пусть надо решить уравнение

$$x^3-3x-1=0. \quad (21)$$

Так как левая часть равна -3 при $x=1$ и равна 1 при $x=2$, то между $x=1$ и $x=2$ имеется корень уравнения, причем естественно, что этот корень ближе к 2, чем к 1. Поэтому примем $x_0=2$. Тогда формула (20) даст

$$x_1=2-\left(\frac{x^3-3x-1}{3x^2-3}\right)_{x=2}=1{,}889.$$

Аналогично получаем, вычисляя с тремя знаками после запятой,

$$x_2=1{,}879, \qquad x_3=1{,}879.$$

Таким образом, с данной точностью решение $\bar{x}=1{,}879$.

Интересно отметить, что в этом примере можно было написать и точное решение уравнения. Уже в XVI веке итальянский математик Кардано опубликовал формулу для решения кубического уравнения

$$x^3+px+q=0\,^{*}),$$

*) Общее уравнение третьей степени $ay^3+by^2+cy+d=0$ приводится к такому виду с помощью подстановки $y=x-\frac{b}{3a}$.

которая имеет вид

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Однако если в эту формулу подставить значения коэффициентов уравнения (21), то мы обнаружим, что под знаком кубических корней стоят мнимые числа $0{,}5\pm i\sqrt{0{,}75}$ и лишь сумма этих корней вещественна. Таким образом, надо еще извлекать корни из мнимых чисел (ср. § V.4), т. е. даже для приведенного простого примера метод Ньютона оказывается гораздо проще применения «точной» формулы. Что же тогда говорить об уравнениях четвертой степени, где точная формула настолько громоздка, что ее не выписывают даже в справочниках! Или об уравнениях выше четвертой степени, а также о подавляющем большинстве трансцендентных уравнений, где «точной» формулы совсем не существует! Для таких уравнений преимущество численных методов особенно очевидно.

Метод Ньютона принадлежит к числу *итерационных методов* (иначе говоря, *методов последовательных приближений*), в которых некоторый единообразный процесс последовательно повторяется («итерируется», от латинского «итерацио» — повторение), в результате чего получаются все более точные приближенные решения. В общем виде в применении к уравнению (18) метод итераций выглядит так: уравнение переписывается в равносильной форме

$$x=\varphi(x). \tag{22}$$

Затем выбирается некоторое значение $x=x_0$ в качестве нулевого приближения; последующие приближения вычисляются по формулам $x_1=\varphi(x_0)$, $x_2=\varphi(x_1)$, ..., вообще,

$$x_{n+1}=\varphi(x_n). \tag{23}$$

При этом может быть два случая:

1) процесс может *сходиться*, т. е. последовательные приближения стремятся к некоторому конечному пределу $\bar{x}$; в этом случае, переходя в формуле (23) к пределу при $n\to\infty$, видим, что $x=\bar{x}$ является решением уравнения (22);

2) процесс может *расходиться*, т. е. конечного предела построенных «приближений» существовать не будет; из

этого не следует, что и решения уравнения (22) не существует, просто могло оказаться, что процесс итераций выбран неудачно.

Поясним сказанное на простом примере уравнения, которое можно решить без всякой «науки»,

$$x = \frac{x}{2} + 1 \tag{24}$$

с очевидным решением $\bar{x} = 2$. Если положить $x_0 = 0$ и вычислять с точностью до 0,001, то получим

$$\begin{aligned} &x_1 = 1; \quad x_2 = 1{,}5; \quad x_3 = 1{,}75; \quad x_4 = 1{,}875; \quad x_5 = 1{,}938; \\ &x_6 = 1{,}969; \quad x_7 = 1{,}984; \quad x_8 = 1{,}992; \quad x_9 = 1{,}996; \\ &x_{10} = 1{,}998; \quad x_{11} = 1{,}999; \quad x_{12} = 2{,}000; \quad x_{13} = 2{,}000, \end{aligned}$$

т. е. процесс практически сошелся. Предел можно найти быстрее, если заметить, что в данном случае разности между последовательными приближениями образуют геометрическую прогрессию с первым членом $a = x_1 - x_0$ и знаменателем $q = \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0}$. Поэтому сумма всей прогрессии, т. е. $\bar{x} - x_0$, равна

$$\frac{a}{1-q} = \frac{x_1 - x_0}{1 - \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0}} = \frac{(x_1 - x_0)^2}{2x_1 - x_0 - x_2},$$

откуда

$$\bar{x} = x_0 + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2x_1 - x_0 - x_2} = \frac{x_1^2 - x_0 x_2}{2x_1 - x_0 - x_2}. \tag{25}$$

В более сложных примерах последовательные разности лишь напоминают геометрическую прогрессию; в этих примерах формула (25) не дает точного решения, но дает возможность «перескочить» через несколько приближений и получить приближенное значение решения, от которого можно вновь начать итерации.

Если уравнение (24) разрешить относительно x, стоящего в правой части, т. е. переписать в равносильной форме

$$x = 2x - 2 \tag{26}$$

и начать с $x_0 = 0$, то мы получим последовательно $x_1 = -2$; $x_2 = -6$; $x_3 = -14$ и т. д., т. е. процесс сходиться не

будет. Это можно было предвидеть, заме
вытекает равенство

$$x_{n+1}-x_n=\varphi(x_n)-\varphi(x_{n-}$$

т. е.

$$x_2-x_1=\varphi(x_1)-\varphi(x_0),$$
$$x_3-x_2=\varphi(x_2)-\varphi(x_1),$$
$$x_4-x_3=\varphi(x_3)-\varphi(x_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Стало быть, если значения функции $\varphi(x)$ ме
леннее, чем значения ее аргумента, то раст
последовательными приближениями будут все
меньше, а если значения функции $\varphi(x)$ меняю
чем значения ее аргумента, то расстояния
вательными приближениями будут все больш
и процесс разойдется. Так как скорость изме
$\varphi(x)$ по отношению к x равна $\varphi'(x)$, то м
что если

$$|\varphi'(x)|\leqslant k<1,$$

то процесс итераций сходится и притом то
меньше k; если же

$$|\varphi'(x)|>1,$$

то процесс расходится. Эти неравенства
няться для всех x либо, во всяком случ
мого корня $\bar{x}$ уравнения (22).

Мы видим, что уравнения (24) и (26)
сильны, но порождают различные итерацион
(Чтобы пояснить эту разницу, нет надобн
писывать уравнение (24) в виде (26); дост
что для получения последующего приближения
ставлять предыдущее приближение по перв
в правую часть уравнения (24), а по втор
в левую часть того же уравнения.) И в друг
уравнение (18) можно переписать в форм
способами, каждый из которых порождает
ный метод, причем одни из них могут
сходящимися и потому наиболее удобными
ленно сходящимися, а третьи — даже вовсе

этого не следует, что и решения уравнения (22) не существует, просто могло оказаться, что процесс итераций выбран неудачно.

Поясним сказанное на простом примере уравнения, которое можно решить без всякой «науки»,

$$x = \frac{x}{2} + 1 \tag{24}$$

с очевидным решением $\bar{x} = 2$. Если положить $x_0 = 0$ и вычислять с точностью до 0,001, то получим

$$\begin{aligned} &x_1 = 1; \quad x_2 = 1{,}5; \quad x_3 = 1{,}75; \quad x_4 = 1{,}875; \quad x_5 = 1{,}938; \\ &x_6 = 1{,}969; \quad x_7 = 1{,}984; \quad x_8 = 1{,}992; \quad x_9 = 1{,}996; \\ &x_{10} = 1{,}998; \quad x_{11} = 1{,}999; \quad x_{12} = 2{,}000; \quad x_{13} = 2{,}000, \end{aligned}$$

т. е. процесс практически сошелся. Предел можно найти быстрее, если заметить, что в данном случае разности между последовательными приближениями образуют геометрическую прогрессию с первым членом $a = x_1 - x_0$ и знаменателем $q = \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0}$. Поэтому сумма всей прогрессии, т. е. $\bar{x} - x_0$, равна

$$\frac{a}{1-q} = \frac{x_1 - x_0}{1 - \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0}} = \frac{(x_1 - x_0)^2}{2x_1 - x_0 - x_2},$$

откуда

$$\bar{x} = x_0 + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2x_1 - x_0 - x_2} = \frac{x_1^2 - x_0 x_2}{2x_1 - x_0 - x_2}. \tag{25}$$

В более сложных примерах последовательные разности лишь напоминают геометрическую прогрессию; в этих примерах формула (25) не дает точного решения, но дает возможность «перескочить» через несколько приближений и получить приближенное значение решения, от которого можно вновь начать итерации.

Если уравнение (24) разрешить относительно x, стоящего в правой части, т. е. переписать в равносильной форме

$$x = 2x - 2 \tag{26}$$

и начать с $x_0 = 0$, то мы получим последовательно $x_1 = -2$; $x_2 = -6$; $x_3 = -14$ и т. д., т. е. процесс сходиться не будет. Это можно было предвидеть, заметив, что из (23) вытекает равенство

$$x_{n+1}-x_n=\varphi(x_n)-\varphi(x_{n-1}),$$

т. е.

$$x_2-x_1=\varphi(x_1)-\varphi(x_0),$$
$$x_3-x_2=\varphi(x_2)-\varphi(x_1),$$
$$x_4-x_3=\varphi(x_3)-\varphi(x_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Стало быть, если значения функции $\varphi(x)$ меняются медленнее, чем значения ее аргумента, то расстояния между последовательными приближениями будут все меньше и меньше, а если значения функции $\varphi(x)$ меняются быстрее, чем значения ее аргумента, то расстояния между последовательными приближениями будут все больше и больше, и процесс разойдется. Так как скорость изменения значений $\varphi(x)$ по отношению к x равна $\varphi'(x)$, то мы получаем, что если

$$|\varphi'(x)|\leqslant k<1, \tag{27}$$

то процесс итераций сходится и притом тем быстрее, чем меньше k; если же

$$|\varphi'(x)|>1,$$

то процесс расходится. Эти неравенства должны выполняться для всех x либо, во всяком случае, вблизи искомого корня $\bar{x}$ уравнения (22).

Мы видим, что уравнения (24) и (26) полностью равносильны, но порождают различные итерационные процессы. (Чтобы пояснить эту разницу, нет надобности даже переписывать уравнение (24) в виде (26); достаточно заметить, что для получения последующего приближения надо подставлять предыдущее приближение по первому способу — в правую часть уравнения (24), а по второму способу — в левую часть того же уравнения.) И в других случаях уравнение (18) можно переписать в форме (22) многими способами, каждый из которых порождает свой итерационный метод, причем одни из них могут оказаться быстро сходящимися и потому наиболее удобными, другие — медленно сходящимися, а третьи — даже вовсе расходящимися.

Приведенное выше решение уравнения (21) можно теперь понять так: уравнение переписано в равносильной форме

$$x = x - \frac{x^3 - 3x - 1}{3x^2 - 3},$$

после чего применен метод итераций, начиная с значения $x_0 = 2$.

В общем виде метод Ньютона для уравнения (18) сводится к тому (см. (20) и далее), что это уравнение переписывается в равносильной форме

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \tag{28}$$

после чего применяется метод итераций. Эта форма могла бы показаться несколько искусственной: хотя и легко показать равносильность уравнений (18) и (28), т. е. из (18) вывести (28) и обратно, но не сразу видно, чем помогает знаменатель $f'(x)$. Однако легко проверить, что производная от правой части, т. е.

$$\left(x - \frac{f}{f'}\right)' = 1 - \frac{f'f' - ff''}{f'^2} = \frac{ff''}{f'^2},$$

обращается в нуль при $x = \bar{x}$, где $\bar{x}$ — решение уравнения (18). Значит (см. рассуждения, связанные с оценкой (27)), чем ближе последовательные приближения подходят к $\bar{x}$, тем быстрее сходится процесс. Более того, так как при выполнении оценки (27) итерации сходятся не медленнее, чем прогрессия со знаменателем k, то мы получаем, что метод Ньютона сходится быстрее геометрической прогрессии с любым знаменателем! *)

---

*) Скорость этой сходимости легко установить на следующем простом типичном примере. Пусть рассматриваются приближения по способу Ньютона к нулевому корню уравнения $x + x^2 = 0$. Эти приближения связаны друг с другом соотношением

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n + x_n^2}{1 + 2x_n} = \frac{x_n^2}{1 + 2x_n} < x_n^2.$$

Допустим, что $0 < x_0 < 1$; тогда мы последовательно получим

$$x_1 < x_0^2,\ x_2 < x_1^2 < x_0^4,\ x_3 < x_2^2 < x_0^8,\ \ldots,\ x_n < x_0^{2^n},\ \ldots$$

Можно показать, что и в общем случае скорость сходимости метода Ньютона имеет порядок a^{2^n} $(0 < a < 1)$

Перейдем теперь к описанию *метода малого параметра* (он же *метод возмущений*), который, как и метод итераций, представляет собой один из наиболее универсальных методов в прикладной математике. Поясним этот метод на простом примере.

Пусть требуется найти решение трансцендентного уравнения

$$e^{x-1} = 2 - x + \alpha \tag{29}$$

при малых $|\alpha|$. Заметим для этого, что при $\alpha = 0$ можно найти простым подбором решение: $x = 1$. Поэтому если решение уравнения (29), зависящее от α, искать разложенным в ряд по степеням α,

$$x = x_0 + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3 + \dots,$$

то, подставляя $\alpha = 0$, получим, что x_0 должно равняться 1. Подставим теперь разложение

$$x = 1 + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3 + \dots \tag{30}$$

в обе части уравнения (29) и воспользуемся известным разложением показательной функции в степенной ряд Маклорена; это даст

$$1 + \frac{a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3 + \dots}{1!} + \frac{(a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3 + \dots)^2}{2!} + \\ + \frac{(a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3 + \dots)^3}{3!} + \dots = \\ = 2 - (1 + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3 + \dots) + \alpha.$$

Раскрыв скобки и удерживая члены до α^3, получим

$$1 + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3 + \frac{a^2}{2}\alpha^2 + ab\alpha^3 + \frac{a^3}{6}\alpha^3 + \dots = \\ = 1 - a\alpha - b\alpha^2 - c\alpha^3 + \dots + \alpha.$$

Приравнивая в обеих частях коэффициенты при одинаковых степенях α, получим соотношения

$$a = -a + 1,$$
$$b + \frac{a^2}{2} = -b,$$
$$c + ab + \frac{a^3}{6} = -c,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

откуда последовательно найдем

$$a=\frac{1}{2},\quad b=-\frac{1}{16},\quad c=\frac{1}{192},\quad \ldots$$

Подставляя эти значения в (30), получаем искомое решение уравнения (29) в виде ряда

$$x=1+\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha^2}{16}+\frac{\alpha^3}{192}+\ldots, \tag{31}$$

хорошо сходящегося при небольших $|\alpha|$.

В общем случае метод малого параметра применяется следующим образом. Пусть формулировка некоторой задачи, помимо основных неизвестных величин, содержит некоторый параметр α, причем эта задача при $\alpha=0$ может быть более или менее легко решена (*невозмущенное решение*). Тогда решение задачи при α, близких к 0, во многих случаях можно получить разложенным по степеням α с той или иной степенью точности. При этом первый член разложения, не содержащий α, получается при $\alpha=0$, т. е. дает невозмущенное решение. Дальнейшие же члены дают поправки на «возмущение» решения; эти поправки имеют первый, второй и т. д. порядки малости по сравнению с α. Сами члены часто находятся по методу неопределенных коэффициентов, т. е. коэффициенты при α, α^2 и т. д. обозначаются какими-то буквами, которые определяются затем из условий задачи. Метод малого параметра дает хороший результат только при малых $|\alpha|$; при больших $|\alpha|$ метод может привести к принципиальным ошибкам, так как может получиться, что отбрасываемые (не выписываемые) члены более существенны, чем оставляемые.

Таким образом, метод малого параметра дает возможность, исходя из решения некоторых «узловых» задач, получить решение задач, формулировка которых близка к этим «узловым», если, конечно, изменение формулировки не влечет за собой принципиального, качественного изменения решения.

Во многих задачах уже вид члена первого порядка малости дает возможность сделать полезные выводы о зависимости решения от параметра при его малом изменении.

Метод малого параметра непосредственно связан с методом итераций, что мы продемонстрируем на примере уравнения (29). Прежде всего удобно, чтобы невозмущенное решение было нулевым; это достигается с помощью подстановки $x=1+y$, откуда

$$e^y = 1 - y + \alpha. \tag{32}$$

Для проведения итераций заметим, что если искомый корень $\bar{y}$ уравнения близок к 0, то уравнение удобно переписать в такой форме $y=\varphi(y)$, чтобы разложение $\varphi(y)$ по степеням y не содержало первой степени, а содержало только свободный член, члены с y^2, y^3 и т. д. В самом деле, тогда разложение $\varphi'(y)$ не будет содержать свободного члена и потому при y, близких к $\bar{y}$, а значит к 0, $|\varphi'(y)|$ будет принимать малые значения, откуда вытекает сходимость метода итераций. Поэтому в исходном уравнении надо все члены с y в первой степени перенести в левую часть, а все остальные члены — в правую часть, после чего уже проводить итерации.

В нашем примере, в уравнении (32), левая часть, т. е. e^y, в силу формулы Маклорена

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \ldots$$

содержит слагаемое y; значит, ее надо записать в виде

$$e^y = y + (e^y - y),$$

причем разложение скобки уже не содержит y в первой степени. Поэтому взамен (32) пишем

$$y + (e^y - y) = 1 - y + \alpha,$$

откуда, объединяя члены с y (но не раскрывая скобок!), приходим к уравнению

$$y = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}(e^y - y).$$

Это уравнение, равносильное (32), уже приспособлено к проведению итераций. После разложения правой части по степеням y получим

$$y = \frac{\alpha}{2} - \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{12} - \ldots \tag{33}$$

Теперь можно проводить итерации, начиная с $y_0=0$. Подставляя это значение в правую часть (33), найдем

$$y_1=\frac{\alpha}{2}. \tag{34}$$

Подставляя $y=y_1$ в правую часть (33), получим

$$y_2=\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha^2}{16}-\frac{\alpha^3}{96}-\ldots \tag{35}$$

Мы видим, что первое приближение (34) совпадает с точным решением (31) до членов первого порядка, второе приближение (35) — с точностью до членов второго порядка. Для построения третьего приближения можно подставить в правую часть (33) просто

$$y=\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha^2}{16};$$

тогда получится разложение, совпадающее с точным до членов третьего порядка включительно, так что при вычислениях можно учитывать только эти члены и т. д. Это дает возможность при вычислении каждой последующей итерации иметь дело лишь с конечными суммами.

Упражнения

1. Применить метод Ньютона к уравнению (21), начиная от значения $x_0=0$; $x_0=1$.

2. Переписав уравнение (21) в форме $x=\frac{x^3-1}{3}$, применить к нему метод итераций, начиная от значения $x_0=0$; 1; 2.

3. Найти решение уравнения $x^3+\alpha x-1=0$ при малых $|\alpha|$ по методу малого параметра.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

§ 1

1. По способу трапеций
а) 1,12; б) 0,88; в) 1,84.
По способу Симпсона
а) 1,10; б) 0,88; в) 1,85.

2. Разбивая промежуток интегрирования на 4 части, находим $\int\limits_0^2 \frac{x\,dx}{e^x+1}=0{,}6275$. Разбивая промежуток интегрирования на 6 частей, получаем также $\int\limits_0^2 \frac{x\,dx}{e^x+1}=0{,}6275$.

3. Рассмотрим формулу (8) для функции $y=x$ на промежутке от x_0 до x_0+2h. Здесь

$$\bar{y}=\frac{1}{2h}\int\limits_{x_0}^{x_0+2h} x\,dx=\frac{1}{2h}\,\frac{(x_0+2h)^2-x_0^2}{2}=\frac{4x_0h+4h^2}{4h}=x_0+h,$$

тогда как

$$\frac{1}{2}\,y_1+\frac{y_0+y_2}{4}=\frac{1}{2}\,(x_0+h)+\frac{x_0+(x_0+2h)}{4}=x_0+h.$$

Результаты совпадают, т. е. в данном случае формула является точной. Отсюда вытекает точность формулы (8) и для функции $y=ax$ ($a=\text{const}$), так как a служит общим множителем во всех слагаемых. Записав точное равенство (8) для $y=ax$ и $y=k$ (уже проверенное ранее) и сложив левые, а также правые части, получим справедливость равенства (8) и для функции $y=ax+k$. Аналогично рассматривается равенство (7).

§ 2

1. В нашем случае $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $h=1$, $a=1$, $b=n$. По формуле (11) получаем

$$S_n=\int\limits_{1/2}^{n+1/2}\sqrt[3]{x}\,dx=\int\limits_{1/2}^{n+1/2}x^{1/3}\,dx=\frac{3}{4}\,x^{4/3}\Big|_{1/2}^{n+1/2}=$$

$$=\frac{3}{4}\left[\sqrt[3]{\left(n+\frac{1}{2}\right)^4}-\sqrt[3]{\frac{1}{16}}\right],$$

или

$$S_n=\frac{3}{4}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt[3]{n+\frac{1}{2}}-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\right].$$

Для $n=3$ формула дает $S_3=3{,}34$, непосредственно находим $S_3=3{,}70$. Ошибка 11%.

Для $n=4$ по формуле получаем $S_4=4{,}93$, непосредственно находим $S_4=5{,}29$. Ошибка 7%. Для $n=5$ по формуле $S_5=6{,}64$, непосредственно находим $S_5=7{,}00$. Ошибка 5%.

2. По формуле (11) получаем $S=2{,}39$.

3. Пусть $f(x)=px+k$, т. е. сумма имеет вид

$$S_{n+1}=[pa+k]+[p(a+h)+k]+[p(a+2h)+k]+\ldots+[pb+k],$$

где $b=a+nh$. Получилась арифметическая прогрессия с первым членом $a_1=pa+k$ и разностью $d=ph$. Сумма такой прогрессии, как известно, равна

$$S_{n+1}=\frac{a_1+a_{n+1}}{2}\,(n+1)=\frac{(pa+k)+(pb+k)}{2}\,(n+1)=$$

$$=\left(p\,\frac{a+b}{2}+k\right)(n+1).$$

Применим, например, формулу (9). По этой формуле получаем значение

$$\frac{1}{h}\int_a^b (px+k)\,dx+\frac{1}{2}(pa+k)+\frac{1}{2}(pb+k)=$$

$$=\frac{1}{h}\left[p\frac{b^2-a^2}{2}+k(b-a)\right]+\left(p\frac{a+b}{2}+k\right)=$$

$$=\frac{b-a}{h}\left(p\frac{a+b}{2}+k\right)+\left(p\frac{a+b}{2}+k\right)=$$

$$=n\left(p\frac{a+b}{2}+k\right)+\left(p\frac{a+b}{2}+k\right)=\left(p\frac{a+b}{2}+k\right)(n+1),$$

что совпадает с точным значением для суммы.

§ 3

1. При $x_0=0$ получаем еще один корень $\overline{\overline{x}}=-0{,}347$ уравнения (21). При $x_0=1$ применение метода невозможно (знаменатель обращается в нуль).

2. При $x_0=0$ и $x_0=1$ получаем сходимость к корню $\overline{\overline{x}}$ из упражнения 1. При $x_0=2$ процесс итераций расходится.

3. Разложение решения имеет вид

$$x=\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{81}\alpha^3+\ldots$$

ГЛАВА II

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОПЫТА

В практической работе часто бывает, что зависимость между переменными величинами получается в результате опыта, измерений. Обычно в таком случае эта зависимость оказывается заданной при помощи таблицы, в которой для каждого значения x, при котором проводилось измерение, поставлено соответствующее, найденное путем измерения значение y. Поэтому мы рассмотрим в этой главе сначала общие правила действий с таблицами, а затем те новые моменты, которые возникают при обработке результатов опытов.

§ 1. Таблицы и разности

Нам очень часто приходится рассматривать функции, заданные с помощью таблицы. Это могут быть математические таблицы, например таблицы логарифмов, синусов, квадратов и т. п. Это могут быть физические таблицы, взятые из каких-либо справочников, например таблицы зависимости температуры кипения той или иной жидкости от давления и т. п. Наконец, зависимость между переменными величинами может получиться в виде не вполне обработанных результатов опыта, измерений. Во всех этих случаях численные значения зависимой переменной задаются с помощью таблицы при определенных численных значениях независимой переменной. Функции, заданные таким образом, могут входить в дальнейшие операции, в частности, может потребоваться эти функции дифференцировать или интегрировать. Могут понадобиться значения функции при промежуточных, не выписанных в таблице, значениях независимой переменной (*задача интерполяции*) или при значениях независимой переменной, лежащих за пределами таблицы (*задача экстраполяции*) *).

Мы будем считать для простоты, что независимая переменная x принимает значения, образующие арифметическую прогрессию, т. е. $x=x_0$, $x=x_1=x_0+h$, $x=x_2=x_0+2h, \ldots$ $\ldots, x=x_n=x_0+nh$; эти значения аргумента будем условно называть «*целыми*», а h — называть *шагом* таблицы. Соответствующие значения функции, помещенные в таблице, обозначим через $y_0=y(x_0)$, $y_1=y(x_1)$, $\ldots$, $y_n=y(x_n)$.

Приращения переменной x все одинаковые и равны h. Приращения переменной y, вообще говоря, различные. Они называются *первыми разностями* (более подробно *разностями первого порядка*) и обозначаются через

$$\delta y_{1/2}=y_1-y_0,\ \delta y_{1+1/2}=y_2-y_1,\ \delta y_{2+1/2}= \\ =y_3-y_2,\ \ldots,\ \delta y_{n-1/2}=y_n-y_{n-1},$$

так как их естественно сопоставлять «*полуцелым*» значениям x, т. е. серединам между соседними «*целыми*» значениями аргумента:

$$x_{1/2}=x_0+h/2,\quad x_{1+1/2}=x_0+3h/2,\ \ldots,\ x_{n-1/2}= \\ =x_0+(n-1/2)\,h\ ^{**}).$$

От этих разностей можно опять брать разности, в результате чего получатся *вторые разности*, определенные вновь для «целых» значений x:

$$\delta^2 y_1=\delta y_{1+1/2}-\delta y_{1/2},\quad \delta^2 y_2=\delta y_{2+1/2}-\delta y_{1+1/2},\ \ldots,\ \delta^2 y_{n-1}= \\ =\delta y_{n-1/2}-\delta y_{n-3/2}$$

(двойка сверху здесь означает порядок разности, а не показатель степени) и т. д.

---

*) Слова «интерполяция» и «экстраполяция» происходят от латинских корней «интер» — внутри, «экстра» — снаружи, «полюс» — точка.

**) Иногда разность $y_{k+1}-y_k$ сопоставляется не значению $x=x_{k+1/2}$, а значению $x=x_k$. Тогда она обычно обозначается Δy_k, т. е. $\Delta y_k=\Delta y\,|_{x=x_k}=y_{k+1}-y_k$. При таком обозначении, как у нас, т. е. $y_{k+1}-y_k=\delta y_{k+1/2}=\delta y\,|_{x=x_{k+1/2}}$, разности называются *центральными*.

Приведем в качестве примера отрывок из таблицы десятичных логарифмов с вычисленными разностями, которые умножены на 10^5.

Таблица 1

k	0	1/2	1	3/2	2	5/2	3	7/2
x_k	10,0	10,05	10,1	10,15	10,2	10,25	10,3	10,35
y_k	1,00000		1,00432		1,00860		1,01284	
$10^5\delta y_k$		432		428		424		419
$10^5\delta^2 y_k$			—4		—4		—5	
$10^5\delta^3 y_k$				0		—1		2

k	4	9/2	5	11/2	6	13/2	7
x_k	10,4	10,45	10,5	10,55	10,6	10,65	10,7
y_k	1,01703		1,02119		1,02531		1,02938
$10^5\delta y_k$		416		412		407	
$10^5\delta^2 y_k$	—3		—4		—5		
$10^5\delta^3 y_k$		—1		—1			

Малость и почти постоянство вторых разностей в приведенном примере указывают на плавность хода изменения функции, на отсутствие случайных «выпадов» из этого хода. Такая закономерность может проявляться в разностях более высокого порядка и всегда свидетельствует о «правильности» хода изменения функции (ср. упражнение 2). Конечно, если шаг не мал, а также вблизи точек разрыва и т. п., разности могут и не быть малыми, но обычно в них проявляется та или иная закономерность.

Разности широко применяются при интерполяции. Пусть требуется найти значение y при некотором значении x, заключенном между табличными значениями x_k и x_{k+1}. Самый простой способ — *линейная интерполяция* — состоит в приближенной замене изучаемой функции на линейную функцию, причем так, чтобы обе функции совпадали при $x=x_k$ и при $x=x_{k+1}$ (рис. 4); геометрически это означает замену дуги $\smile AB$ неизвестного нам графика, показанного на рис. 4 штрихами, на хорду AB, соединяющую две его известные точки A и B. Обозначим $x-x_k=s$. Так как линейная функция выражается уравнением первой степени, то искомое значение y зависит от s по формуле

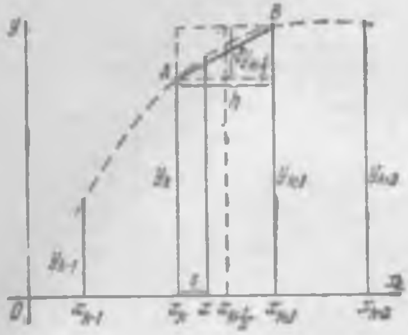

Рис. 4.

$$y=a+bs, \tag{1}$$

где a и b — некоторые коэффициенты. Из условий при x_k и x_{k+1} получаем

$$y_k=a, \quad y_{k+1}=a+bh,$$

откуда

$$\delta y_{k+1/2}=y_{k+1}-y_k=bh.$$

Выражая отсюда a и b и подставляя в (1), получаем окончательно формулу для линейной интерполяции

$$y=y_k+\delta y_{k+1/2}\frac{s}{h}. \tag{2}$$

(Выведите эту формулу из подобия треугольников на рис. 4.) Формулой (2) можно пользоваться, если изучаемая функция на интервале от x_k до x_{k+1} мало отличается от линейной, т. е. если h достаточно мало́ *). При $k=0$ и $s<0$ формула (2) осуществляет линейную экстраполяцию рассматриваемой функции в сторону $x<x_0$, а при $k=n-1$ и $s>h$ — в сторону $x>x_n$. Конечно, при экстраполяции нельзя далеко уходить от табличных значений x, так как принятый нами линейный закон изменения функции оправдывается лишь на малом интервале изменения x.

Формулу линейной интерполяции (2), как и последующие формулы, можно переписать в виде, не содержащем разностей. Подставляя в (2) выражение $\delta y_{k+\frac{1}{2}}=y_{k+1}-y_k$,

*) Из более точной формулы (4) нетрудно вывести, что при малом h ошибка при линейной интерполяции имеет порядок h^2, так как такой порядок имеют вторые разности.

получим равносильную формулу

$$y=y_k+\frac{y_{k+1}-y_k}{h}s=\left(1-\frac{s}{h}\right)y_k+\frac{s}{h}y_{k+1}.$$

Хорошо видно, что при изменении s от 0 до h коэффициент при y_k меняется от 1 до 0, а коэффициент при y_{k+1} — от 0 до 1; таким образом, при $s=0$ получается $y=y_k$, а при $s=h$ получается $y=y_{k+1}$.

Бóльшую точность дает *квадратичная интерполяция*, при которой изучаемая функция приближенно заменяется на квадратичную функцию, причем так, чтобы обе функции совпадали при $x=x_k$, x_{k+1} и x_{k+2} (это в других обозначениях было проделано в § 1.1 при выводе формулы Симпсона). Указанную квадратичную функцию удобно искать в виде

$$y=a+bs+cs(s-h). \tag{3}$$

Согласно условию

$$y_k=a,\quad y_{k+1}=a+bh,\quad y_{k+2}=a+b\cdot 2h+c\cdot 2h^2,$$

откуда

$$\delta y_{k+\frac{1}{2}}=y_{k+1}-y_k=bh,\quad \delta y_{k+\frac{3}{2}}=y_{k+2}-y_{k+1}=$$
$$=2ch^2+bh,\quad \delta^2 y_{k+1}=\delta y_{k+\frac{3}{2}}-\delta y_{k+\frac{1}{2}}=2ch^2.$$

Выражая отсюда a, b, c и подставляя в (3), получаем *формулу Ньютона* для квадратичной интерполяции

$$y=y_k+\delta y_{k+\frac{1}{2}}\frac{s}{h}+\frac{\delta^2 y_{k+1}}{2}\frac{s}{h}\left(\frac{s}{h}-1\right). \tag{4}$$

Как и выше, эту формулу можно использовать также для экстраполяции.

Формула (4) не совсем симметрична: в ней использованы значения y_k, y_{k+1} и y_{k+2}, тогда как x расположен между x_k и x_{k+1}. Если обратить направление оси x и подобным же образом использовать значения y_{k+1}, y_k и y_{k-1}, то взамен (4) мы получим формулу

$$y=y_{k+1}+\left(-\delta y_{k+\frac{1}{2}}\right)\frac{h-s}{h}+\frac{\delta^2 y_k}{2}\frac{h-s}{h}\left(\frac{h-s}{h}-1\right), \tag{5}$$

несимметричную уже в другую сторону. Взяв теперь полусумму правых частей формул (4) и (5), получим симметричную *формулу Бесселя*

$$y = \frac{y_k + y_{k+1}}{2} + \delta y_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{s}{h} - \frac{1}{2}\right) + \frac{\delta^2 y_k + \delta^2 y_{k+1}}{4}\,\frac{s}{h}\left(\frac{s}{h} - 1\right),$$

обладающую высокой точностью. Мы предоставим читателю преобразовать формулы Ньютона и Бесселя так, чтобы y оказался выраженным непосредственно через «узловые» значения y_k, а не через их разности.

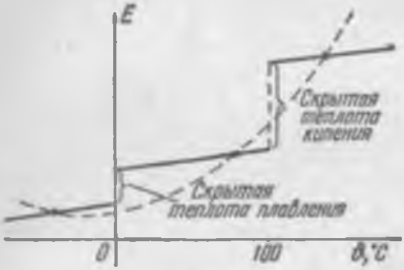

Рис. 5.

Подобным образом можно было бы вывести интерполяционные формулы еще более высокой степени. Однако, так как точность экспериментальных данных ограничена, равно как и точность применяемых таблиц функций, то обычно применение разностей слишком высокого порядка не оправдано. В большинстве случаев (за исключением измерений и вычислений, проводимых с особо высокой точностью) бывает достаточно вторых или даже только первых разностей.

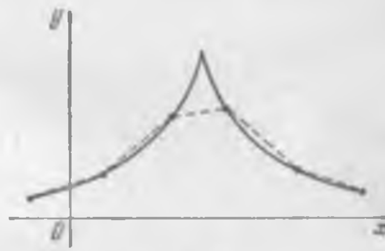

Рис. 6.

Если изучаемая функция разрывна, то интерполяцию можно проводить только на интервалах, не содержащих точек разрыва; если не обратить на это внимания, то интерполяция может дать совершенно неправильное представление о действительном поведении функции. Так, на рис. 5 показана зависимость внутренней энергии, которой обладает единица массы воды при нормальном давлении, от температуры*).

*) Чаще пользуются так называемой *энтальпией* (*теплосодержанием*) $H = E + pV$, где p — давление, а V — объем. Теплоемкость при постоянном давлении равна как раз производной от H по ϑ.

Эта зависимость имеет разрывы при перемене фазового состояния, т. е. замерзании или испарении воды. Там же пунктиром показан результат квадратичной интерполяции в случае, если выбранные «узловые» точки отвечают различным фазам; видно, что эта интерполяция искажает реальную картину. Аналогичное искажение получается при разрыве производной (т. е. при изломе графика) у изучаемой функции. Так, на рис. 6 пунктиром показан результат линейной интерполяции при наличии «острого» максимума; хорошо видна ошибка, получающаяся вблизи этого максимума.

Упражнения

1. Пусть $y_0=1{,}00$; $y_1=1{,}25$; $y_2=1{,}65$; $y_3=2{,}34$. Найти $y_{3/2}$ по формулам (2), (4), (5) и по формуле Бесселя.

2. Проверить, что если таблица составлена для многочлена степени n, то разности порядка n постоянны, а разности порядка $n+1$ равны нулю.

Указание. Рассмотреть сначала первые разности от функции $y=x^n$.

§ 2. Интегрирование и дифференцирование функций, заданных таблично

Интегрирование функций, заданных таблично, ничем не замечательно. Ведь и раньше при численном интегрировании функций, заданных формулами, мы сперва составляли таблицу подынтегральной функции (см. § 1.1).

При вычислении производной функции, заданной таблицей, следует иметь в виду, что лучший способ найти производную $y'(x)$ по двум значениям функции — это взять такие значения справа и слева на равном расстоянии от того значения x, для которого мы хотим подсчитать величину производной

$$y'(x) \approx \frac{y\left(x+\frac{h}{2}\right)-y\left(x-\frac{h}{2}\right)}{h}.$$

Таким образом, если даны значения y для значений x, расположенных через равные промежутки (т. е. в арифметической прогрессии), то удобно вычислять производные в серединах промежутков. Другими словами, если значения y были заданы для «целых» значений x (см. § 1), то значения y' будут подсчитаны для «полуцелых» значений x. По значениям y' можно таким же способом найти производную от y', т. е. y''. При этом значения y'' получатся снова для целых значений x. Можно выразить y'' непосредственно через y:

$$y''(x) \approx \frac{y'\left(x+\frac{h}{2}\right)-y'\left(x-\frac{h}{2}\right)}{h} \approx$$

$$\approx \frac{\frac{y(x+h)-y(x)}{h}-\frac{y(x)-y(x-h)}{h}}{h} = \frac{y(x+h)-2y(x)+y(x-h)}{h^2}.$$

(Эта формула была получена также в ВМ, ч. IV, § 2.)

Указанные сейчас формулы удобно записать в обозначениях § 1:

$$y'_{k+\frac{1}{2}} = y'\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) = y'\left(x_k+\frac{h}{2}\right) \approx \frac{y(x_k+h)-y(x_k)}{h} = \frac{\delta y_{k+\frac{1}{2}}}{h};$$

это равенство и является обоснованием того, что разность $y_{k+1}-y_k$ мы относили значению $x=x_{k+\frac{1}{2}}$. Аналогично

$$y''_k \approx \frac{\delta^2 y_k}{h^2}.$$

Приведем пример (таблица 2) *).

Таблица 2

x	y	y'	y''
1,00	1,6487	0,846	
1,10	1,7333	0,888	0,42
1,20	1,8221	0,934	0,46
1,30	1,9155	0,983	0,49
1,40	2,0138	1,032	0,49
1,50	2,1170		

*) В таблице не выписаны полуцелые значения аргумента, а значения производной сдвинуты на полшага вверх.

Если нужны значения y' для других x, то их можно получить интерполяцией. В частности, для целых x получаем с помощью интерполяции

$$y'_k \approx \frac{1}{2}\left(y'_{k-\frac{1}{2}} + y'_{k+\frac{1}{2}}\right) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{y_k - y_{k-1}}{h} + \frac{y_{k+1} - y_k}{h}\right) = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}.$$

Таким образом, можно сразу определять значения y' для целых x по значениям y при целых x справа и слева (см. таблицу 3).

Таблица 3

x	y	y'
1,00	1,6487	
1,10	1,7333	0,867
1,20	1,8221	0,911
1,30	1,9155	0,960
1,40	2,0138	1,002
1,50	2,1170	

Однако при таком способе мы, во-первых, получим значений производных на одно меньше, чем при первом способе, во-вторых, мы получаем меньше сведений о поведении производной на концах промежутка. Так, в таблице 2 мы знаем производную при $x = 1,05$ (около начала промежутка $x = 1$) и при $x = 1,45$ (около конца промежутка $x = 1,5$), а в таблице 3 лишь при $x = 1,1$ и при $x = 1,4$, т. е. при значениях аргумента, более удаленных от концов промежутка. Наконец, при вычислении значений y' для нецелых (в частности, для полуцелых) значений x с помощью интерполяции значения, полученные из таблицы 2, оказываются достовернее значений, полученных из таблицы 3, так как наклон кривой более точно передают маленькие хорды, чем большие. Поэтому первый способ предпочтителен.

Очень важные, принципиальные вопросы возникают в связи с ограниченной точностью и ошибками, присущими каждому измерению.

При вычислении интеграла каждое отдельное измеренное значение y умножается на величину Δx. Поэтому при увеличении числа отдельных измеренных значений функции y коэффициент, с которым в выражение интеграла входит каждое отдельное значение, уменьшается обратно пропорционально числу промежутков Δx.

Следовательно, уменьшается и ошибка в интеграле, происходящая за счет ошибок при каждом отдельном измерении величины y.

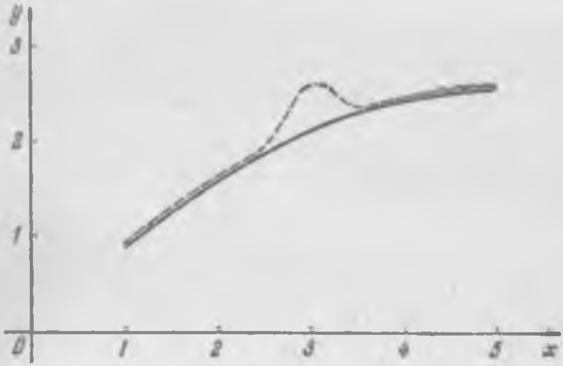

Рис. 7.

При вычислении производной разность двух значений y делится на Δx. Чем меньше промежуток Δx, т. е. чем меньше знаменатель, тем бóльшую ошибку в величину производной вносит данная ошибка в каждом измеренном значении y. Поэтому производная функции, заданной экспериментальными значениями, оказывается известной с меньшей точностью, чем сама эта функция.

Разницу между дифференцированием и интегрированием поясним примером.

На рис. 7 изображены две кривые — одна нарисована сплошной линией, а другая пунктиром. Сплошная кривая — это график функции $y = x - 0{,}1x^2$, а пунктирная — график функции $y_1 = x - 0{,}1x^2 + 0{,}5 \cdot e^{-8(x-3)^2}$. Из рисунка видно, что одна кривая заметно отличается от другой лишь в небольшом промежутке изменения x.

На рис. 8 показаны графики $I(x)=\int_0^x y\,dx$ и $I_1(x)=\int_0^x y_1\,dx$ (пунктирная кривая). Мы видим, что отличие между кривыми $y(x)$ и $y_1(x)$ дает небольшую добавку в интеграл $I_1(x)$, заметную на графике лишь при $x>2{,}8$. В целом кривые $I(x)$ и $I_1(x)$ отличаются мало.

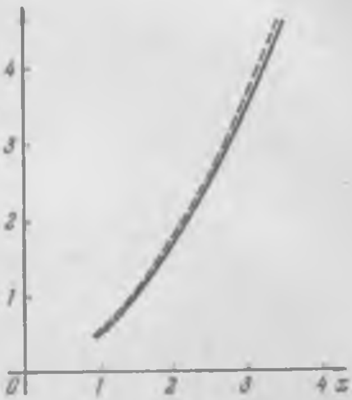

Рис. 8.

На рис. 9 показаны графики производных $y'(x)$ и $y'_1(x)$. Мы видим, что небольшое изменение функции в малом промежутке вызвало в этом промежутке большие изменения производной. Еще сильнее разнятся вторые производные. Их графики изображены на рис. 10, где масштаб по оси y взят в два раза меньше, чем на рис. 7—9.

В случае, когда кривая получена из опыта, небольшое изменение хода кривой на каком-либо промежутке может быть результатом ошибки отдельного опыта. Из предыдущего примера видно, что на величине интеграла такие отдельные ошибки сказываются незначительно, а на величину производной (и особенно высших производных) они влияют сильно.

Для того чтобы получить надежные значения производной, нужно сперва подобрать формулу, хорошо описывающую опытные данные, а затем находить производную, пользуясь этой формулой.

Так как формула строится с учетом всех опытных данных, то значение производной при каждом значении x будет найдено по формуле с учетом всех данных, а не только двух-трех ближайших. Поэтому естественно ожидать, что случайные ошибки в отдельных измерениях меньше скажутся на величине производной.

Подбор формулы, описывающей результаты опыта, вообще является существенной частью обработки экспери-

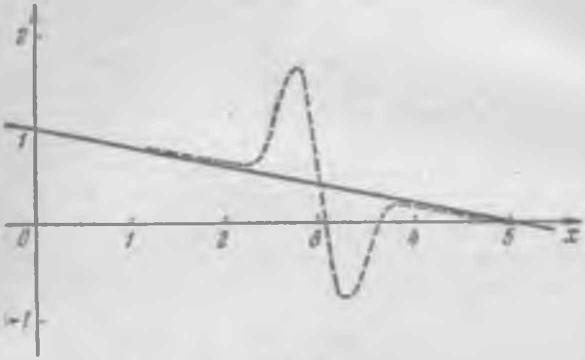

Рис. 9.

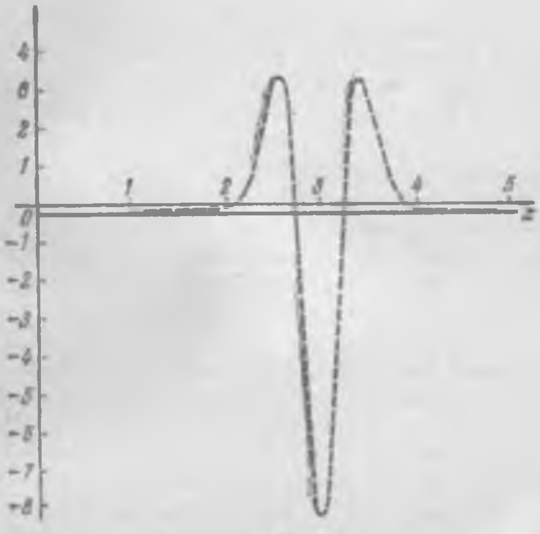

Рис. 10.

ментальных данных. Задаче подбора формулы по данным опыта посвящены два следующих параграфа.

Упражнение

В условиях упражнения 2 к § 1 подсчитайте значения y' для полуцелых значений x, приняв $\Delta x = h = 0{,}5$. Проинтерполируйте результат линейно, а также по формулам (4) и (5) на целые значения x.

§ 3. Подбор формул по данным опыта по методу наименьших квадратов

Подбор формул по экспериментальным данным называют *подбором эмпирических формул*. На самом деле, конечно, формула тем лучше, чем больше теоретических представлений вложено в нее, чем в меньшей степени она является эмпирической. В действительности нужно сперва задаться видом формулы, а затем, пользуясь результатами опыта, определять значения различных постоянных величин, входящих в нее.

Перед тем как приступить к подбору формулы, полезно нанести опытные данные на график, после чего на глаз, от руки провести через полученные точки наиболее правдоподобную кривую. При этом сразу выявляются те данные, в которых можно подозревать большие ошибки. Очень важно при проведении кривой, кроме экспериментальных точек, использовать общие соображения о том, как должна вести себя кривая при значениях аргумента, весьма близких к нулю, при больших значениях аргумента, проходит ли кривая через начало координат, пересекает ли координатные оси, касается ли их и т. п.

Итак, пусть эта предварительная работа проделана, выбран вид формулы и нужно определить значения входящих в формулу постоянных величин.

Как это сделать?

Рассмотрим наиболее простой пример.

Предположим, что y пропорционально x, т. е. ищем формулу вида $y = kx$. Задача сводится к определению коэффициента k. Каждый опыт дает определенное значение k, именно

$$k_n = \frac{y_n}{x_n},$$

где x_n, y_n — значения величин x, y, полученные в n-м опыте. Индекс n у величины k показывает, что это — значение, соответствующее n-му опыту. Из значений k_n можно образовать среднее, положив

$$\bar{k} = \frac{\sum_{n=1}^{p} k_n}{p},$$

где p — общее число опытов. Мы получаем формулу $y = \bar{k}x$.

Отметим, что это — самый простой, но не самый лучший способ выбора величины k. В самом деле, пусть x есть величина, характеризующая условия опыта, которую мы задаем точно, а y есть результат опыта, причем этот результат содержит в себе некоторую ошибку измерения. Допустим, что и при малых и при больших значениях y ошибка измерения Δy примерно одинакова. Тогда ошибка в величине k_n, равная $\frac{\Delta y_n}{x_n}$, тем больше, чем меньше x_n. Следовательно, определяя величину k, лучше ориентироваться на опыты с большими x_n.

Поставим задачу о нахождении того значения k, при котором функция $y = kx$ наилучшим образом соответствует опытным данным. (Смысл нечеткого выражения «наилучшим образом» станет ясен из дальнейшего.) За меру отклонения функции от экспериментальных данных для n-го опыта выберем величину $(y_n - kx_n)^2$. Почему берется именно величина $(y_n - kx_n)^2$, а не $y_n - kx_n$? Ясно, что оба знака уклонения kx_n от y_n нехороши: плохо, если k таково, что $y_n < kx_n$, но также нехорошо, если k таково, что $y_n > kx_n$. Если бы за меру отклонения мы взяли величину $y_n - kx_n$, а затем стали находить сумму отклонений в нескольких опытах, то мы могли бы получить весьма малую величину за счет взаимного уничтожения отдельных слагаемых большой величины, но разных знаков. Это, однако, вовсе не говорило бы о том, что взятая функция $y = kx$ хороша. Если же за меру отклонения взять $(y_n - kx_n)^2$, то такого взаимного уничтожения не произойдет, так как все величины $(y_n - kx_n)^2$ положительны. Отметим, что вместо $(y_n - kx_n)^2$ в принципе можно было бы взять $|y_n - kx_n|$, $(y_n - kx_n)^4$ и т. д. Однако при этом дальнейшие вычисления значительно усложнились бы.

В качестве меры общей ошибки S в описании опытных данных функцией $y = kx$ возьмем сумму мер отклонений для всех опытов, т. е.

$$S=\sum_{n=1}^{p}(y_n-kx_n)^2. \qquad (6)$$

Метод определения констант, входящих в формулу, из требования, чтобы общее отклонение S было наименьшим, называется *методом наименьших квадратов*.

Заметим, что если одна величина $y_n-kx_n=10$, т. е. при каком-то одном $x=x_n$ формула дает ошибку в 10 единиц, то в величину S это внесет 100 единиц. С другой стороны, наличие 10 ошибок по 1 единице каждая внесет в S всего 10 единиц. Поэтому ясно, что на величину S сильнее всего влияют самые большие ошибки, а малые ошибки, даже если они встречаются часто, влияют мало. Метод наименьших квадратов нацелен на уменьшение самых больших отклонений.

Для того чтобы найти $k=\bar{\bar{k}}$, при котором S наименьшее, решим уравнение $\frac{dS}{dk}=0$. Пользуясь (6), находим

$$\frac{dS}{dk}=2\sum_{n=1}^{p}(y_n-kx_n)(-x_n)=0,$$

откуда

$$2k\sum_{n=1}^{p}x_n^2-2\sum_{n=1}^{p}x_ny_n=0,$$

что дает

$$k=\bar{\bar{k}}=\frac{\sum\limits_{n=1}^{p}x_ny_n}{\sum\limits_{n=1}^{p}x_n^2}=\frac{x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_py_p}{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_p^2}. \qquad (7)$$

Если в каждом опыте получается точно $y_n=kx_n$, то из формулы (7) получаем

$$\bar{\bar{k}}=\frac{x_1\cdot kx_1+x_2\cdot kx_2+\ldots+x_p\cdot kx_p}{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_p^2}=k.$$

Если для различных опытов величина $k_n=\frac{y_n}{x_n}$ различна, то, подставляя в (7) вместо y_n его значение k_nx_n, получим

$$\bar{\bar{k}}=\frac{k_1x_1^2+k_2x_2^2+\ldots+k_px_p^2}{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_p^2}. \qquad (8)$$

образовать среднее, положив

$$\bar{k} = \frac{\sum_{n=1}^{p} k_n}{p},$$

где p — общее число опытов. Мы получаем формулу $y = \bar{k}x$.

Отметим, что это — самый простой, но не самый лучший способ выбора величины k. В самом деле, пусть x есть величина, характеризующая условия опыта, которую мы задаем точно, а y есть результат опыта, причем этот результат содержит в себе некоторую ошибку измерения. Допустим, что и при малых и при больших значениях y ошибка измерения Δy примерно одинакова. Тогда ошибка в величине k_n, равная $\frac{\Delta y_n}{x_n}$, тем больше, чем меньше x_n. Следовательно, определяя величину k, лучше ориентироваться на опыты с большими x_n.

Поставим задачу о нахождении того значения k, при котором функция $y = kx$ наилучшим образом соответствует опытным данным. (Смысл нечеткого выражения «наилучшим образом» станет ясен из дальнейшего.) За меру отклонения функции от экспериментальных данных для n-го опыта выберем величину $(y_n - kx_n)^2$. Почему берется именно величина $(y_n - kx_n)^2$, а не $y_n - kx_n$? Ясно, что оба знака уклонения kx_n от y_n нехороши: плохо, если k таково, что $y_n < kx_n$, но также нехорошо, если k таково, что $y_n > kx_n$. Если бы за меру отклонения мы взяли величину $y_n - kx_n$, а затем стали находить сумму отклонений в нескольких опытах, то мы могли бы получить весьма малую величину за счет взаимного уничтожения отдельных слагаемых большой величины, но разных знаков. Это, однако, вовсе не говорило бы о том, что взятая функция $y = kx$ хороша. Если же за меру отклонения взять $(y_n - kx_n)^2$, то такого взаимного уничтожения не произойдет, так как все величины $(y_n - kx_n)^2$ положительны. Отметим, что вместо $(y_n - kx_n)^2$ в принципе можно было бы взять $|y_n - kx_n|$, $(y_n - kx_n)^4$ и т. д. Однако при этом дальнейшие вычисления значительно усложнились бы.

В качестве меры общей ошибки S в описании опытных данных функцией $y = kx$ возьмем сумму мер отклонений для всех опытов, т. е.

$$S = \sum_{n=1}^{p} (y_n - kx_n)^2. \tag{6}$$

Метод определения констант, входящих в формулу, из требования, чтобы общее отклонение S было наименьшим, называется *методом наименьших квадратов*.

Заметим, что если одна величина $y_n - kx_n = 10$, т. е. при каком-то одном $x = x_n$ формула дает ошибку в 10 единиц, то в величину S это внесет 100 единиц. С другой стороны, наличие 10 ошибок по 1 единице каждая внесет в S всего 10 единиц. Поэтому ясно, что на величину S сильнее всего влияют самые большие ошибки, а малые ошибки, даже если они встречаются часто, влияют мало. Метод наименьших квадратов нацелен на уменьшение самых больших отклонений.

Для того чтобы найти $k = \bar{\bar{k}}$, при котором S наименьшее, решим уравнение $\frac{dS}{dk} = 0$. Пользуясь (6), находим

$$\frac{dS}{dk} = 2 \sum_{n=1}^{p} (y_n - kx_n)(-x_n) = 0,$$

откуда

$$2k \sum_{n=1}^{p} x_n^2 - 2 \sum_{n=1}^{p} x_n y_n = 0,$$

что дает

$$k = \bar{\bar{k}} = \frac{\sum\limits_{n=1}^{p} x_n y_n}{\sum\limits_{n=1}^{p} x_n^2} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_p y_p}{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2}. \tag{7}$$

Если в каждом опыте получается точно $y_n = kx_n$, то из формулы (7) получаем

$$\bar{\bar{k}} = \frac{x_1 \cdot kx_1 + x_2 \cdot kx_2 + \ldots + x_p \cdot kx_p}{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2} = k.$$

Если для различных опытов величина $k_n = \frac{y_n}{x_n}$ различна, то, подставляя в (7) вместо y_n его значение $k_n x_n$, получим

$$\bar{\bar{k}} = \frac{k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \ldots + k_p x_p^2}{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2}. \tag{8}$$

Среди величин $k_1, k_2, \ldots, k_p$, полученных в различных опытах, есть наибольшая величина k_{max} и наименьшая k_{min}. Если заменить в правой части (8) все k_i на k_{max}, то дробь только возрастет и мы получим

$$\bar{\bar{k}} < \frac{k_{max}x_1^2 + k_{max}x_2^2 + \ldots + k_{max}x_p^2}{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2} = k_{max}.$$

Совершенно аналогично доказывается, что $\bar{\bar{k}} > k_{min}$.

Таким образом, величина $\bar{\bar{k}}$, найденная из условия минимума S, удовлетворяет неравенствам $k_{min} < \bar{\bar{k}} < k_{max}$, т. е. действительно является средней из всех значений $k_1, k_2, \ldots, k_p$, однако это среднее составляется по более сложному правилу, нежели

$$\bar{k} = \frac{k_1 + k_2 + \ldots + k_p}{p}.$$

В формуле (8) каждая величина k_n входит в числитель с множителем x_n^2. Этот множитель называют *весом* *).

Ясно, что чем больше вес x_n^2, тем сильнее влияет на величину $\bar{\bar{k}}$ измерение, соответствующее значению $x = x_n$. Это подтверждает высказанную ранее мысль о том, что измерения с большими x_n важнее для правильного определения k.

Если нет оснований предполагать, что $y = 0$ при $x = 0$, то наиболее простой является формула $y = kx + b$. В этом случае также можно применить метод наименьших квадратов. Величина S для этого случая дается формулой

$$S = \sum_{n=1}^{p} (y_n - kx_n - b)^2. \tag{9}$$

---

*) Название «вес» происходит от следующей механической аналогии. Представим себе шкалу, на которой откладываются расстояния $k_1, k_2, \ldots, k_p$, и в соответствующих точках шкалы помещаются грузы. Если все эти грузы одинаковые, то центр тяжести такой системы (весом самой шкалы пренебрегаем) находится в точке шкалы $\bar{k} = \frac{k_1 + k_2 + \ldots + k_p}{p}$. Если же в точку k_1 поместить груз веса x_1^2, в точку k_2 — груз веса x_2^2, ..., в точку k_p — груз веса x_p^2, то положение центра тяжести дается формулой (8). Таким образом, эта формула соответствует представлению о разной значимости, разном весе различных наблюдений.

Надо выбрать числа k и b так, чтобы величина S была наименьшей.

Для этого поступим так. Если бы b было уже найдено, то в правой части (9) можно было бы изменять только k, поэтому должно было бы быть *)

$$\frac{\partial S}{\partial k}=2\sum_{n=1}^{p}(y_n-kx_n-b)(-x_n)=0.$$

С другой стороны, если бы уже было найдено k, то должно было бы быть

$$\frac{\partial S}{\partial b}=-2\sum_{n=1}^{p}(y_n-kx_n-b)=0.$$

Эти два условия дают нам следующую систему уравнений для определения чисел k и b:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{n=1}^{p}x_ny_n-k\sum_{n=1}^{p}x_n^2-b\sum_{n=1}^{p}x_n=0,\\ \sum_{n=1}^{p}y_n-k\sum_{n=1}^{p}x_n-bp=0.\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

Из системы уравнений (10) нетрудно найти числа k и b. С этой целью обозначим для краткости

$$\sigma_1=\sum_{n=1}^{p}x_n,\qquad \sigma_2=\sum_{n=1}^{p}x_n^2,\qquad r_0=\sum_{n=1}^{p}y_n,\qquad r_1=\sum_{n=1}^{p}x_ny_n.$$

Тогда систему (10) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned}\sigma_2k+\sigma_1b=r_1,\\ \sigma_1k+pb=r_0.\end{aligned}\right\}$$

Решая ее, получим

$$k=\frac{pr_1-r_0\sigma_1}{p\sigma_2-\sigma_1^2},\qquad b=\frac{r_0\sigma_2-r_1\sigma_1}{p\sigma_2-\sigma_1^2}.$$

---

*) При рассмотрении функции от нескольких переменных производная по одной из этих переменных при зафиксированных остальных обозначается с помощью буквы ∂, а не d (ср., например, ВМ, ч. III, § 12). Подробнее об этом мы поговорим в гл. IV.

На описанный метод можно смотреть также с иной точки зрения.

Задавшись формой линейной зависимости

$$y = kx + b$$

между рассматриваемыми величинами x и y, мы получаем два неизвестных параметра k и b. В результате измерений мы приходим к соотношениям между этими параметрами

$$\left.\begin{aligned} kx_1 + b &= y_1, \\ kx_2 + b &= y_2, \\ &\dots\dots\dots \\ kx_p + b &= y_p, \end{aligned}\right\}$$

т. е. к системе из p уравнений с двумя неизвестными. Такая система является переопределенной, так как в принципе достаточно двух уравнений, чтобы найти эти неизвестные. Однако учитывая, что физические величины x и y замеряются с определенной погрешностью, мы получаем, что в случае двух измерений (т. е. при $p = 2$) на значения k и b могут существенно влиять случайные ошибки измерений, так что при этом точность результата останется неясной. Поэтому уменьшение числа уравнений, содержащих такие случайные факторы, опасно. Напротив, чем больше измерений, т. е. чем в большей степени система переопределена, тем лучше, так как тогда случайные ошибки отдельных измерений погашают друг друга, и решение, найденное по методу наименьших квадратов, становится более достоверным.

Не представляет труда обобщить метод наименьших квадратов для случая более сложных зависимостей между величинами x и y. Следует отметить, однако, что метод наименьших квадратов часто приводит к довольно громоздким вычислениям. В случаях, когда искомые параметры входят в участвующие зависимости нелинейно, метод приводит к системе нелинейных уравнений, и вычислительные трудности особенно возрастают. Поэтому в практической работе зачастую более эффективными оказываются графические методы подбора формул, которые мы рассмотрим в следующем параграфе.

Упражнения

1. Подобрать формулу вида $y=kx$ методом наименьших квадратов в случае следующих данных опыта:

а)

x	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
y	0,40	0,50	0,90	1,28	1,60	1,66	2,02	2,40

б)

x	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25
y	0,16	0,18	0,80	0,60	1,08

в)

x	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0
y	0,69	1,44	2,08	2,74	3,52

Нанести на график в каждом из трех случаев табличные точки и прямую, полученную по методу наименьших квадратов. (Графики строить на миллиметровой бумаге.)

2. По данным следующей таблицы подобрать числа k и b для формулы $y=kx+b$ методом наименьших квадратов:

x	−0,20	0,20	0,40	0,60	0,70	0,80
y	0,96	1,40	1,56	1,74	1,92	2,04

3. Пусть даны две точки $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$ Будем по этим данным подбирать числа k и b для уравнения прямой $y=kx+b$ методом наименьших квадратов. Показать, что при этом получим абсолютно точный результат.

§ 4. Графический способ подбора формул

Напомним, что уравнение прямой линии имеет вид $y=kx+b$, причем числа k и b имеют простой геометрический смысл (см., например, ВМ, ч. I, § 4): b есть величина отрезка, отсекаемого прямой на оси y, а k есть тангенс угла α наклона прямой к оси x (рис. 11).

Пусть предполагается, что величины y и x связаны линейно, т. е. $y=kx+b$. Нанесем экспериментальные точки на график. Наложив на график прозрачную линейку и передвигая ее, нетрудно получить такую прямую, к которой экспериментальные точки лежат ближе всего (рис. 12).

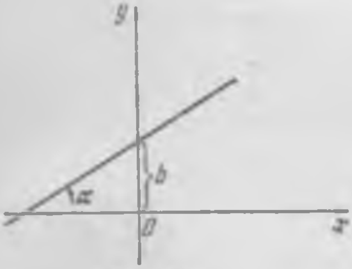

Рис. 11.

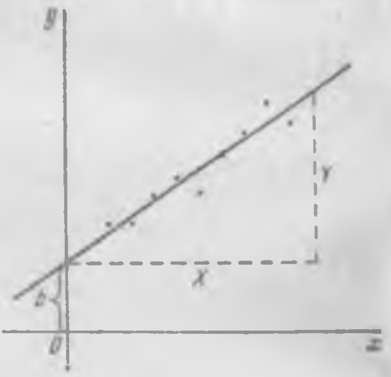

Рис. 12.

Проведя эту прямую, мы определяем из чертежа b и

$$k=\frac{Y}{X}.$$

Большое преимущество графического способа связано с его наглядностью. Если экспериментальные точки ложатся на прямую, за исключением отдельных выпавших точек, то эти точки наглядно выделяются и видно, какие точки следует проверить. Если экспериментальные точки в целом не лежат на прямой, то это также видно из графика. В этом случае зависимость между величинами x, y имеет более сложный вид, нежели $y=kx+b$. Кроме этого, при применении графического способа не нужны сравнительно длинные расчеты, связанные с методом наименьших квадратов, в которые всегда может вкрасться вычислительная ошибка.

Прямая линия занимает исключительное положение в графическом подборе формул. Никакая другая линия не может быть так просто и вместе с тем так надежно проведена по данным точкам. Всякий, кто в практике лабораторной работы сравнивал определение чисел k и b в уравнении прямой по графику с определением их по методу наименьших квадратов, знает, что различие всегда весьма невелико.

Как же подобрать, пользуясь графиком, константы, входящие в формулу, если эта формула имеет более сложный вид, нежели $y=kx+b$?

Рассмотрим пример.

Пусть исследуется зависимость между температурой T проволоки и силой i постоянного тока, текущего по этой проволоке. Ясно, что изменение направления тока не меняет величины T, т. е. $T(-i)=T(i)$. Поэтому зависимость вида $T=ai+b$ не годится. Будем искать формулу вида $T=ai^2+b$. График функции $T(i)$ есть парабола, а провести на глаз параболу трудно. Поэтому введем новую переменную $z=i^2$, тогда $T=az+b$, так что в координатах z, T искомая зависимость изображается прямой линией. При этом значение температуры $b=T_0$ при отсутствии тока можно считать известным, так что остается определить коэффициент a при i^2.

При большой силе тока, когда достигаются высокие температуры, сопротивление проволоки нельзя считать постоянным. Поэтому тепловая мощность (количество тепла, выделяющееся в единицу времени), равная $W=Ri^2$, в действительности не просто пропорциональна i^2, так как меняется R. В уравнении теплового баланса

$$W=Ri^2=\alpha S(T-T_0),$$

где α — коэффициент теплоотдачи, а S — поверхность проволоки, при больших температурах коэффициент α также непостоянен. Однако равенство температур для токов i и $-i$ по-прежнему имеет место. Поэтому естественно добавить в формулу $T=ai^2+b$, которая теперь может оказаться неточной, член ci^4 (а не ci^3).

Итак, ищем формулу в виде $T=ci^4+ai^2+b$.

Заметим, что $T=b$ при $i=0$, так что b не отличается от температуры окружающей среды, а потому известно (см. выше). Перепишем формулу так:

$$\frac{T-b}{i^2}=ci^2+a.$$

Вводя новые переменные $x=i^2$, $y=\frac{T-b}{i^2}$, получаем $y=cx+a$, т. е. x и y связаны линейной зависимостью. Построив график в координатах x, y, легко определить числа a и c.

Таким образом, общая идея графического метода состоит в том, что надо ввести новые переменные так, чтобы в этих переменных интересующая нас зависимость становилась линейной.

Приведем еще несколько примеров.

Часто встречается такая зависимость между x и y, когда заведомо известно, что при $x=0$ должно быть $y=0$, но опытные данные на графике не ложатся на прямую. В этом случае может оказаться справедливой формула

$$y=ax+bx^2.$$

Разделим все члены на x, получим $\frac{y}{x}=a+bx$. Положив $\frac{y}{x}=z$, получаем линейную зависимость z от x

$$z=a+bx.$$

Другая формула, которая может оказаться годной для этого случая, это $y=ax^n$. Как определить показатель степени n? Для этого прологарифмируем обе части формулы:

$$\lg y=n\lg x+\lg a.$$

Вводя новые переменные $z=\lg y$, $t=\lg x$, получим линейную зависимость

$$z=\lg a+nt.$$

Закон радиоактивного распада описывается формулой $n=n_0e^{-\omega t}$, где n — число атомов, еще не распавшихся к моменту времени t, n_0 — общее число атомов, ω — вероятность распада. Логарифмируя обе части формулы, получим

$$\ln n=\ln n_0-\omega t.$$

Следовательно, мы получим прямую линию в координатах t, $y=\ln n$. (Подробнее о радиоактивном распаде см. ВМ, ч. V, § 3.)

При исследовании зависимости какой-либо величины x от температуры очень часто получается формула вида

$$x = Be^{-\frac{A}{kT}}.$$

Такая формула получается в тех случаях*), когда x зависит от тех молекул (или электронов), энергия которых больше величины A; величина k — постоянная Больцмана $\left(k = 1{,}4\cdot 10^{-16}\,\frac{эрг}{град}\right)$.

Логарифмируя, получим $\ln x = \ln B - \frac{A}{k}\frac{1}{T}$. Зависимость становится линейной, если рассматривать величины $y = \frac{1}{T}$ и $z = \ln x$, действительно, $z = \ln B - \frac{A}{k}y$.

Во всех рассмотренных нами примерах мы после выбора вида формулы вводили новые переменные так, чтобы зависимость между этими новыми переменными была линейной. Может, однако, случиться, что в новых переменных экспериментальные точки не будут ложиться на прямую. Это означает, что вид формулы выбран неудачно, следует подбирать формулу другого вида.

Пусть проделан ряд опытов, в которых при значениях аргумента x_1, x_2, ..., x_p получены значения функции y_1, y_2, ..., y_p. Пусть значения аргумента расположены в порядке возрастания $x_1 < x_2 < \ldots < x_p$. Определение ожидаемого из опыта значения y при значении x, лежащем внутри исследованного промежутка изменения аргумента ($x_1 < x < < x_p$), составляет задачу интерполяции (ср. начало § 1).

Интерполяцию легко и просто произвести, если подобрана эмпирическая формула. При этом если формула подобрана хорошо, то интерполяция обычно дает хорошие результаты, редко приводит к большим ошибкам. Значительно труднее другая задача: найти, какое значение y следует ожидать из опыта при некотором значении x, лежащем вне исследованного на опыте промежутка изменения аргумента, например при $x > x_p$. Определение такого значения по данным опыта составляет задачу экстраполяции.

---

*) Несколько таких случаев рассмотрено в ВМ, ч. VII.

Решение задачи об экстраполяции в каждом конкретном случае требует глубокого понимания существа изучаемого явления, такую задачу нельзя решать формально, пользуясь подобранной формулой.

Например, если по экспериментальным данным подобрана формула вида $y=a+bx+cx^2+px^3$, причем она очень хорошо описывает результаты опыта, то, как правило, члены cx^2, px^3 вводятся в формулу, чтобы описать отклонение экспериментальных точек от прямой в том промежутке изменения x, где производились измерения. При этом члены cx^2 и px^3 обычно носят характер малых поправок к главному члену $a+bx$.

Если же, пользуясь такой формулой, мы будем производить экстраполяцию y для больших, далеких от исследованных на опыте, значений x, то члены cx^2 и px^3 начнут играть главную роль, что, однако, может совершенно не соответствовать существу явления. Положение вещей напоминает сказку Андерсена, в которой тень, отделившись от человека, начинает жить самостоятельно, делает карьеру и, наконец, заставляет самого человека служить себе.

Если при неограниченном возрастании x величина y приближается к определенному значению y_∞, то бывает полезно отыскать это значение. Такая задача называется экстраполяцией на бесконечность. При ее решении часто оказывается целесообразным ввести новую независимую переменную z, которая оставалась бы конечной при $x=\infty$, например $z=\frac{1}{x}$. После такого перехода интервал (по z), на который производится экстраполяция, будет уже конечным.

Рассмотрим пример.

Пусть в длинном заряде взрывчатого вещества с одного конца при помощи капсюля вызвана детонация (взрыв), которая начинает распространяться по длине заряда. Ясно, что при весьма большой длине заряда действие его на какую-либо преграду перестает зависеть от длины заряда. Действительно, когда мы увеличиваем длину достаточно длинного заряда, то мы увеличиваем количество взрывчатого вещества, находящегося далеко от преграды, а потому оказывающего весьма малое действие. Пусть, например, через y обозначена максимальная толщина стальной стенки, которую

разрушает заряд длины x. На графике рис. 13 нанесены опытные данные. Из рисунка видно, что с ростом x величина y приближается к определенному значению y_∞. Однако определить по графику это значение y_∞ нельзя.

Как же найти его? Предположим, что при больших x формула имеет вид $y=y_\infty-\frac{a}{x}$. Введя новую переменную $z=\frac{1}{x}$, получаем $y=y_\infty-a\cdot z$. Теперь y_∞ соответствует значению $z=0$. Построив данные опыта в координатах z, y *), мы можем на глаз определить предполагаемое значение y при $z=0$ (рис. 14).

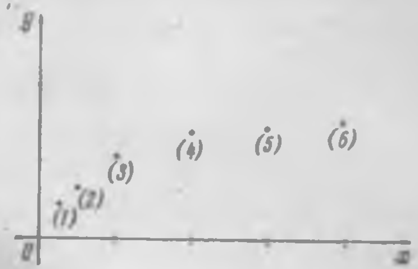

Рис. 13.

Формула $y=y_\infty-\frac{a}{x}$ справедлива лишь для достаточно больших x. При $x=\frac{a}{y_\infty}$ она дает $y=0$, а если $x<\frac{a}{y_\infty}$, то получаем даже $y<0$, что совершенно бессмысленно. Поэтому на рис. 14 точки, полученные из опыта, лежат не на прямой, а на кривой, однако в координатах z, y можно эту кривую экстраполировать на $z=0$, что соответствует $x=\infty$.

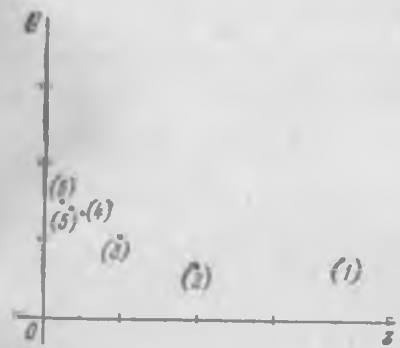

Рис. 14.

Из физического смысла задачи ясно еще, что должно быть $y=0$ при $x=0$. Наиболее простая формула, отражающая оба известных нам свойства функции y ($y=0$ при $x=0$ и y неограниченно приближается к значению y_∞, если x неограниченно

*) На графиках рис. 13 и 14 точки, соответствующие друг другу, снабжены одинаковыми номерами.

возрастает), имеет вид

$$y = \frac{y_\infty x}{x+b}. \tag{11}$$

Как определить, пользуясь экспериментальными данными, постоянные y_∞ и b?

Для этого перепишем формулу так:

$$\frac{1}{y} = \frac{x+b}{y_\infty x}, \text{ или } \frac{1}{y} = \frac{1}{y_\infty} + \frac{b}{y_\infty} \cdot \frac{1}{x}.$$

Поэтому можно надеяться, что если мы будем строить на графике $\frac{1}{y}$ в зависимости от $\frac{1}{x}$, то получим прямую линию и определим $\frac{1}{y_\infty}$ и $\frac{b}{y_\infty}$. Даже если точки будут плохо ложиться на прямую, то все равно экстраполяция по такому графику надежнее, чем по графику рис. 14, так как формула (11) построена с учетом двух (а не одного, как раньше) свойств функции $y(x)$.

Упражнения

1. По данным следующей таблицы подобрать формулу вида $y = ax^2 + b$:

x	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
y	1,20	1,10	2,35	3,05	4,40	5,50

Решить задачу двумя способами:

а) методом наименьших квадратов,

б) графически.

2. Графическим способом подобрать формулу вида $y = ax^2 + bx$, если результаты опыта таковы:

x	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
y	0	1,7	3,1	3,8	3,9	3,8	3,0

3. По данным таблицы

x	1	2	3	4
y	0,5	1,4	2,5	4

подобрать формулу вида $y = Ax^b$. (Применить графический способ.)

4. Результаты измерений дали следующее:

x	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
y	1,66	1,58	1,50	1,44	1,37	1,30	1,22	1,17

Кроме того, известно следующее:

а) при неограниченном увеличении x величина y неограниченно приближается к нулю;

б) при $x = 0$ величина y имеет вполне определенное значение. Этим условиям удовлетворяют, например, такие простые формулы:

$$y = \frac{1}{B + Cx} \quad \text{и} \quad y = Ae^{-kx}.$$

Подобрать значения параметров, входящих в эти формулы. Пользуясь формулами, получить значения y при $x = 1,25$; $x = 3,75$; $x = -1$; $x = -2$; $x = -3$.

Сравнить результаты.

5. Результаты опыта дали следующее:

x	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0	5,0
y	1,6	1,7	2,0	2,3	2,4	2,5

Известно, кроме того, что при неограниченном возрастании x величина y неограниченно приближается к некоторому значению y_∞. Найти это предельное значение двумя способами:

а) подбирая формулу вида $y = A + \frac{B}{x}$;

б) подбирая формулу вида $y = \frac{ax}{x + b}$.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

§ 1

1. По формуле (2) $y_{5/2}=1,45$; по формуле (4) $y_{5/2}=1,41$; по формуле (5) $y_{5/2}=1,43$; по наиболее точной формуле Бесселя $y_{5/2}=1,42$.

2. Если $y_i=y|_{x=x_i}=x_i^n$, а $\Delta x=h$, то по формуле бинома Ньютона

$$\delta y_{i+1/2}=\delta y|_{x=x_i+h/2}=(x_i+h)^n-x_i^n=nhx_i^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}h^2x_i^{n-2}+\ldots$$

Обозначив $x_i+h/2=x_i'$, получим

$$\delta y\Big|_{x=x_i'}=nh\left(x_i'-\frac{h}{2}\right)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}h^2\left(x_i'-\frac{h}{2}\right)^{n-2}+\ldots$$

Раскрыв в правой части скобки, мы видим, что в этом примере разности образуют последовательность значений многочлена степени $n-1$. То же будет для функции $y=ax^n$ ($a=\mathrm{const}$), так как при образовании разностей коэффициент a служит общим множителем. Заметив, что при сложении функций их разности также складываются, мы заключаем, что для любого многочлена степени n разности образуют последовательность значений некоторого многочлена степени $n-1$. Значит, вторые разности образуют последовательность значений многочлена степени $n-2$ и т. д., а n-е разности — последовательность значений многочлена нулевой степени, т. е. константы. Поэтому разности $(n+1)$-го порядка в этом случае равны нулю.

§ 2

$y'_{1/2}=0,50$; $y'_{3/2}=0,80$; $y'_{5/2}=1,38$. По линейной интерполяции $y'_1=0,65$; $y'_2=1,09$. По формуле (4) $y'_1=0,62$. По формуле (5) $y'_2=1,06$.

§ 3

1. а) $y=1,18x$; б) $y=0,78x$; в) $y=1,75x$.

2. $y=1,03x-1,19$.

3. Уравнение прямой имеет вид $y=kx+b$. Числа k и b определяются из условий $y=y_1$ при $x=x_1$ и $y=y_2$ при $x=x_2$. Получаем систему уравнений

$$kx_1+b=y_1,$$
$$kx_2+b=y_2,$$

из которой находим

$$k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2},\quad b=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1-x_2}. \qquad (12)$$

Покажем, что такие же значения k и b мы получим, применяя метод наименьших квадратов.

В нашем случае $S=(y_1-kx_1-b)^2+(y_2-kx_2-b)^2$.

Поэтому

$$\left.\frac{\partial S}{\partial k}\right|_{b=\text{пост}} = -2\,[(y_1-kx_1-b)\,x_1+(y_2-kx_2-b)\,x_2],$$

$$\left.\frac{\partial S}{\partial b}\right|_{k=\text{пост}} = -2\,[(y_1-kx_1-b)+(y_2-kx_2-b)].$$

Приравнивая эти производные нулю, получаем систему уравнений

$$(y_1-kx_1-b)\,x_1+(y_2-kx_2-b)\,x_2=0,$$
$$y_1-kx_1-b+y_2-kx_2-b=0.$$

Решая систему, находим те же значения (12).

Впрочем, совпадение результатов можно вывести и из того простого соображения, что через любые две точки можно провести одну прямую линию.

§ 4

1. Для применения метода наименьших квадратов составляем сумму $S=\sum_{k=1}^{4}(y_k-ax_k^2-b)^2$. Действуя дальше обычным способом, находим $a=0,48$; $b=1,23$, т. е. искомая формула $y=0,48x^2+1,23$.

Для того чтобы решить задачу графически, вводим новую переменную $t=x^2$, тогда $y=at+b$. В координатах (t, y) получаем прямую линию. Нанеся точки $(t_k=x_k^2;\ y_k)$ на график, находим $a=0,49$; $b=1,35$, т. е.

$$y=0,49x^2+1,35.$$

2. Полагаем $\frac{y}{x}=z$, тогда $z=ax+b$. Построив точки в координатах $(x;\ z)$, найдем $a=-1,02$, $b=4$, так что $y=-1,02x^2+4x$.

3. В этом случае по осям координат надо откладывать соответственно $\lg x$ и $\lg y$. Получим $A=0,5$; $b=1,5$; $y=0,5x^{1,5}$.

4. Графическим способом находим $y=\frac{1}{0,56+0,07x}$; $y=1,74e^{-0,1x}$. Значения y, найденные по первой и по второй из этих формул

при нескольких указанных значениях, сведены в следующую таблицу:

x	Значение y по первой формуле	Значение y по второй формуле
1,25	1,54	1,54
3,75	1,22	1,20
-1	2,01	2,00
-2	2,38	2,12
-3	2,86	2,35

Смысл последнего расчета состоит в следующем: интерполяция, как упоминалось в тексте, редко приводит к большим ошибкам, в нашем случае обе формулы при $x = 1{,}25$ и при $x = 3{,}75$ дают весьма близкие результаты; экстраполяция, наоборот, мало надежна. Из таблицы видно, что чем дальше отстоит x от табличных, тем сильнее разнятся значения y, полученные по разным формулам. Отметим еще, что при $x = -8$ первая формула вообще теряет смысл, а при $x < -8$ первая формула дает $y < 0$, а вторая $y > 0$.

5. а) $y_\infty = 2{,}8$; б) $y_\infty = 2{,}9$.

ГЛАВА III

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ИНТЕГРАЛАХ И РЯДАХ

§ 1. Несобственные интегралы

При обычном определении интеграла (см., например, ВМ, ч. II, § 8) считается, что интервал интегрирования конечен и что подынтегральная функция на нем не обращается в бесконечность. Такие интегралы называются *интегралами в собственном смысле слова* или, коротко, *собственными*. Если хотя бы одно из этих двух условий не выполнено, то интеграл называется *несобственным*. Такие интегралы встречаются уже в простых задачах интегрального исчисления (см., например, ВМ, ч. III, § 16; ч. IV, § 7; ч. VI, § 2). Здесь мы рассмотрим эти интегралы более подробно.

Рассмотрим сначала интеграл вида

$$I = \int_a^\infty f(x)\,dx, \tag{1}$$

где нижний предел a и подынтегральная функция $f(x)$ при $a \leqslant x < \infty$ предполагаются конечными. Такой интеграл является несобственным из-за того, что его верхний предел бесконечен; как говорят, он *имеет особенность* на верхнем пределе.

Допустим, что интеграл (1) получился при решении некоторой физической задачи и переменная x имеет непосредственный физический смысл (длина, время и т. п.). Тогда реально x изменяется не до бесконечности, а до какого-то очень большого, но конечного предела, который мы обозначим через N, т. е. взамен (1) надо рассмотреть интеграл

$$I_N = \int_a^N f(x)\,dx. \tag{2}$$

Может оказаться, что интеграл (2), хотя и зависит от N, но при достаточно больших N практически не меняется. Тогда это значение принимается за значение интеграла (1); более точно, тогда принимается

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_a^N f(x)\,dx,$$

а интеграл (1) называется *сходящимся*. Из равенства

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^N f(x)\,dx + \int_N^\infty f(x)\,dx$$

видно, что основной вклад в сходящийся интеграл дает его «конечная» («собственная») часть, тогда как вклад особенности при достаточно большом N как угодно мал. Другими словами, в случае сходимости интеграла (1) можно «реальный» интеграл (2) при большом N, которое часто бывает точно и не известно, заменять на «предельный» интеграл (1), который обычно проще в теоретических исследованиях.

Если значение интеграла (1) с ростом N не «устанавливается», а стремится к бесконечности или колеблется, не имея определенного предела, то интеграл (1) называется *расходящимся*. В этом случае значение интеграла (2) при больших N существенно зависит от N и заменить (2) на (1) нельзя. Тогда может возникнуть вопрос о более детальной характеристике поведения интеграла (2) при возрастании N, т. е. о получении *асимптотических формул* для этого интеграла. (Кстати, такой вопрос возникает и для сходящихся интегралов (1), так что установить лишь факт сходимости или расходимости и даже найти численное значение в случае сходимости часто оказывается недостаточным.)

Из сказанного следует, что факт сходимости или расходимости интеграла (1) зависит только от поведения функции $f(x)$ «в особенности интеграла», т. е. при $x \to \infty$.

Наиболее часто этот факт распознается при помощи сравнения $f(x)$ со степенной функцией $\frac{C}{x^p}$, от которой интеграл легко берется. Рассмотрим интеграл

$$I=\int_{x_0}^{\infty}\frac{C}{x^p}\,dx \quad (C=\text{const}), \tag{3}$$

где x_0 — любое положительное число (если взять x_0 отрицательным, то интеграл будет иметь особенность также и при $x=0$, где подынтегральная функция обращается в бесконечность). Этот интеграл легко взять:

$$\int_{x_0}^{\infty} Cx^{-p}\,dx=\left.\frac{Cx^{-p+1}}{-p+1}\right|_{x_0}^{\infty}=-C\left.\frac{1}{(p-1)\,x^{p-1}}\right|_{x_0}^{\infty}=$$
$$=\frac{C}{(p-1)\,x_0^{p-1}}-\frac{C}{(p-1)\,\infty^{p-1}}. \tag{4}$$

Здесь приходится различать два случая. Именно, если $p>1$, то $p-1>0$, $\infty^{p-1}=\infty$ и последний член в правой части (4) равен нулю. Значит, в этом случае интеграл (3) сходится. Если же $p<1$, то $\infty^{p-1}=\frac{1}{\infty^{1-p}}=0$ и потому последний член в (4) равен бесконечности. Значит, в этом случае интеграл (3) «расходится к бесконечности», т. е. соответствующий интеграл I_N, взятый от x_0 до N, стремится к бесконечности при возрастании N. Выражение для I_N получится, если в правую часть (4) подставить N вместо ∞ (и в других случаях выражение для I_N, если соответствующий неопределенный интеграл берется, получается весьма просто). Хорошо видно, что в этом выражении для больших N главным членом при $p>1$ будет первый, а при $p<1$ — второй.

При $p=1$ интеграл (3) равен

$$\int_{x_0}^{\infty}\frac{C}{x}\,dx=C\ln x\Big|_{x_0}^{\infty}=C\ln\infty-C\ln x_0=\infty,$$

т. е. интеграл также расходится к бесконечности. Итак, интеграл (3) сходится при $p>1$ и расходится при $p\leqslant 1$.

На основе этого результата мы можем заключить, например, что интеграл

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[4]{x^2+1}}\,dx, \tag{5}$$

имеющий особенность на верхнем пределе, расходится к бесконечности, так как при больших x подынтегральная функция

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+1}} = \frac{1}{x^{2/3}}\,\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^{-2}}} \tag{6}$$

«асимптотически» равна $\frac{1}{x^{2/3}}$, т. е. в данном случае $p = \frac{2}{3} < 1$. Напротив, интеграл

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx \tag{7}$$

сходящийся, так как подынтегральная функция асимптотически, при $x \to \infty$, равна $\frac{1}{x^{3/2}}$, т. е. в данном случае $p = \frac{3}{2} > 1$. Интеграл

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \tag{8}$$

также сходящийся, так как подынтегральная функция при $x \to \infty$ стремится к нулю быстрее любой степени x. Во всех этих примерах соответствующие неопределенные интегралы не выражаются через элементарные функции, так что установить сходимость при помощи вычисления неопределенного интеграла было бы затруднительно.

Нетрудно получить асимптотические выражения трех последних интегралов, взятых от 0 до N, при увеличении N. Для расходящегося интеграла вида (1) применяется следующий прием: подбирается функция $f_1(x)$, от которой интеграл берется просто, причем асимптотически (при $x \to \infty$)

почти равная $f(x)$; тогда в правой части равенства

$$\int_a^N f(x)\,dx = \int_a^N f_1(x)\,dx + \int_a^N [f(x) - f_1(x)]\,dx$$

первый интеграл (главный член) легко исследуется, а второй может оказаться сходящимся при $N \to \infty$ или же к нему можно применить тот же прием. Для интеграла (5) естественно принять $f_1(x) = x^{-2/3}$, т. е. написать

$$\int_0^N \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1}} = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1}} + \int_a^N \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1}} =$$

$$= C_1 + \int_a^N \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx + \int_a^N \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) dx =$$

$$= C_1 + 3\sqrt[3]{N} - 3\sqrt[3]{a} + \int_a^N \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) dx. \qquad (9)$$

Здесь мы перешли от $\int_0^N$ к $\int_a^N$, где a — какое-либо положительное число (хотя это в данном примере необязательно), чтобы избежать несобственного интеграла $\int_0^N x^{-2/3}\,dx$, имеющего особенность на нижнем пределе. Можно проверить, что последний интеграл в (9) при $N \to \infty$ сходящийся и потому при больших N все выражение (9) имеет асимптотическое представление $3\sqrt[3]{N} + C +$ бесконечно малая, где C — некоторая постоянная. Чтобы найти значение постоянной C, надо воспользоваться равенством

$$C \approx \int_0^N \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1}} - 3\sqrt[3]{N}$$

для некоторого N, причем интеграл в правой части подсчитать по одной из формул численного интегрирования.

Аналогично исследуется асимптотическое поведение интегралов (7) и (8). Для сходящегося интеграла часто оказывается полезным преобразование

$$\int_a^N f(x)\,dx = \int_a^\infty f(x)\,dx - \int_N^\infty f(x)\,dx.$$

Для интеграла (7) получаем

$$\int_0^N \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} - \int_N^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}(1+x^{-3})^{-1/2}\,dx \approx$$

$$\approx \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} - \int_N^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx = D - \frac{2}{\sqrt{N}},$$

где постоянную D, равную значению интеграла (7), можно подсчитать, как C в предыдущем абзаце.

К интегралу (8) применяем интегрирование по частям:

$$\int_0^N e^{-x^2}\,dx = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx - \int_N^\infty e^{-x^2}\,dx = E + \int_N^\infty \frac{1}{2x}\,de^{-x^2} =$$

$$= E - \frac{1}{2N}e^{-N^2} + \frac{1}{2}\int_N^\infty \frac{e^{-x^2}}{x^2}\,dx \approx E - \frac{1}{2N}e^{-N^2}.$$

Постоянная E, т. е. значение интеграла (8), как мы увидим в § IV.7, равна $\sqrt{\pi}/2$.

В качестве другого примера рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_0^\infty \sin x\,dx. \tag{10}$$

В данном случае интеграл по конечному промежутку

$$I_N = \int_0^N \sin x\,dx = -\cos x\,\Big|_0^N = 1 - \cos N. \tag{11}$$

При возрастании N $\cos N$ колеблется и не имеет определенного предела. Значит, интеграл (10) расходящийся, причем «колебательным» способом.

Легко проверить, что введение под знак интеграла (
затухающего множителя $e^{-\alpha x}$ ($\alpha = \text{const} > 0$) приводит к сх
дящемуся интегралу

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin x \, dx.$$

Можно доказать, что сходится и интеграл более общего ви

$$\int_0^\infty f(x) \sin x \, dx,$$

где $f(x)$ — любая монотонно убывающая функция, стре
щаяся к нулю при $x \to \infty$.

Несобственные интегралы отличного от (1) вида расс
триваются аналогично (1). Например, пусть дан интегр

$$\int_a^b f(x) \, dx, \qquad (1$$

для которого пределы интегрирования конечны, но под
тегральная функция при $x \to a$ обращается в бесконечност
т. е. интеграл имеет особенность при $x = a$. Тогда особе
ность «отрезают», т. е. рассматривают взамен (12) интегр

$$\int_{a+\varepsilon}^b f(x) \, dx, \qquad (1$$

где ε — малое положительное число. Если при достаточ
малом ε интеграл (13) практически перестает зависеть от
то интеграл (12) называют сходящимся и полагают

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) \, dx.$$

В этом случае от интеграла (13) (который часто появляет
при решении физической задачи, так как все физическ
величины конечны) можно перейти к более простому инт
гралу (12), т. е. вкладом особенности в интеграл (12) мож

пренебречь. Если же интеграл (13) при малых ε существенно зависит от ε, т. е. при $\varepsilon \to 0$ он не имеет конечного предела, а стремится к бесконечности или колеблется, не имея определенного предела, то интеграл (12) называется расходящимся; в этом случае переходить от (13) к (12) нельзя.

Факт сходимости или расходимости несобственного интеграла вида (12) обычно устанавливают, сравнивая подынтегральную функцию $f(x)$ со степенной функцией $\frac{C}{(x-a)^p}$, также равной бесконечности при $x=a$ и легко интегрируемой. Мы предоставляем читателю проверить, что несобственный интеграл

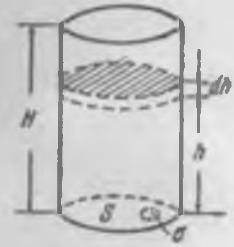

Рис. 15.

$$\int_a^b \frac{C}{(x-a)^p}\,dx \qquad (C=\mathrm{const}) \qquad (14)$$

сходится при $p<1$ и расходится при $p \geqslant 1$.

Рассмотрим для примера задачу об истечении жидкости из цилиндрического сосуда, в дне которого проделано отверстие площади σ (рис. 15). Высота h уровня жидкости зависит от времени t, т. е. $h=h(t)$. Если жидкость не вязкая и силами поверхностного натяжения можно пренебречь, то скорость v истечения жидкости из сосуда с достаточной точностью описывается законом Торричелли

$$v=\sqrt{2gh}.$$

Поэтому объем, вытекший за время dt, равен

$$\sigma v\,dt=\sigma\sqrt{2gh}\,dt.$$

С другой стороны, тот же объем равен $-S\,dh$ (надо учесть, что h убывает и потому $dh<0$). Приравнивая оба выражения, получим, что

$$\sigma\sqrt{2gh}\,dt=-S\,dh, \quad \text{т. е.} \quad dt=-\frac{S}{\sigma\sqrt{2g}}\frac{dh}{\sqrt{h}}.$$

Чтобы получить полное время истечения, надо произвести интегрирование:

$$T = -\frac{S}{\sigma\sqrt{2g}}\int_H^0 \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{S}{\sigma\sqrt{2g}}\left.\frac{h^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right|_H^0 = \frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad (15)$$

Реально истечение происходит не до $h=0$, а до $h=\varepsilon$, где ε — некоторая величина, сравнимая с шероховатостями дна или с толщиной смачивающей пленки, т. е. формулу (15) надо было бы писать в виде

$$T = -\frac{S}{\sigma\sqrt{2g}}\int_H^\varepsilon \frac{dh}{\sqrt{h}}. \quad (16)$$

Однако так как несобственный интеграл (15) получился сходящимся $\Big($это показали вычисления (15), да к тому же рассматриваемый интеграл — это интеграл вида (14) при $p=\frac{1}{2}\Big)$, то интеграл (16) можно заменить на (15). Как видим, в данном примере ε нам не было точно известно, но оно и несущественно, так как для сходящегося интеграла важно только знать, что ε мало́.

При численном интегрировании (ср. § 1.1) несобственные интегралы требуют особенного внимания. Часто заданный интеграл представляют в виде суммы собственного, полученного исключением интервала около особенности из интервала интегрирования, и несобственного, взятого по интервалу около особенности. Первый находят численно, а во втором применяется разложение в какой-либо ряд или просто подынтегральная функция приближенно заменяется на какую-либо другую функцию (например, степенную), от которой интеграл взять легко. В качестве примера вычислим $\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$. Здесь подынтегральная функция неограниченно возрастает при приближении x к 0 и при приближении x к π. Разобьем промежуток интегрирования на три части: от 0 до $\frac{\pi}{6}$, от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{5\pi}{6}$ и от $\frac{5\pi}{6}$ до π. В первом промежутке можно считать, что

$\sin x \approx x$, так как x невелико. Поэтому

$$\int\limits_0^{\pi/6} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} \approx \int\limits_0^{\pi/6} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^{\pi/6} = 2\sqrt{\frac{\pi}{6}} = 1{,}45\,^{*)}.$$

В третьем промежутке, т. е. при $\frac{5\pi}{6} < x < \pi$, воспользуемся формулой $\sin x = \sin(\pi - x)$, и так как величина $\pi - x$ мала, то $\sin(\pi - x) \approx \pi - x$. Окончательно в этом промежутке $\sin x \approx \pi - x$. Получаем

$$\int\limits_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} \approx \int\limits_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\pi - x}} = -2\sqrt{\pi - x}\Big|_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} = 2\sqrt{\frac{\pi}{6}} = 1{,}45.$$

Интеграл по среднему промежутку подсчитаем по формуле Симпсона, разбивая этот промежуток на две части. Получим

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} \approx \frac{\pi}{9}[1{,}41 + 4\cdot 1 + 1{,}41] = 2{,}38.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} \approx 1{,}45 + 2{,}38 + 1{,}45 = 5{,}28.$$

Точное значение этого интеграла (с двумя десятичными знаками) есть 5,25.

---

*) Для большей точности здесь можно применить разложение в ряд

$$\int\limits_0^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = \int\limits_0^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-1/2} dx =$$

$$= \int\limits_0^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{x}}\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots\right)^{-1/2} dx =$$

$$= \int\limits_0^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{x}}\left(1 + \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{160} + \ldots\right) dx = \sqrt{\alpha}\left(2 + \frac{\alpha^2}{30} + \frac{\alpha^4}{720} + \ldots\right).$$

Однако при применяемой степени точности вычислений поправка ничтожна (получится 1,46); полезным является только то, что мы узнаем о степени достоверности полученного результата.

Упражнение

Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$, проводя вычисления в пределах точности логарифмической линейки.

§ 2. Интегрирование быстроменяющихся функций

При численном интегрировании полезно уметь заранее оценить порядок величины интеграла. Из геометрического смысла интеграла

$$I = \int\limits_a^b y(x)\,dx$$

сразу вытекает очевидная оценка

$$I < \int\limits_a^b y_{max}\,dx = y_{max}(b-a),$$

где y_{max} — наибольшее значение подынтегральной функции $y(x)$ на промежутке интегрирования. Если эта функция положительна и мало меняется на промежутке интегрирования, то можно принять $y \approx y_{max}$, т. е.

$$I \lesssim y_{max}(b-a) \tag{17}$$

(эта оценка уже встречалась в ВМ, ч. III, § 16).

Отметим сразу же, что оценкой (17), как и дальнейшими оценками этого параграфа, неудобно пользоваться для знакопеременных функций $y(x)$. В этом случае промежуток интегрирования можно разбить на несколько частей так, чтобы внутри каждого из полученных промежутков $y(x)$ сохраняла знак, после чего оценить интегралы по этим промежуткам. Однако суммарная оценка будет удовлетворительной, только если вклад интегралов одного знака существенно превосходит вклад интегралов противоположного знака.

Поэтому мы впредь в этом параграфе будем считать подынтегральную функцию положительной на интервале интегрирования.

Если функция $y(x)$ на промежутке интегрирования, оставаясь положительной, очень быстро убывает, а b сравнительно велико, то оценка (17) может привести к большим ошибкам. В самом деле, пользуясь оценкой (17), мы заменяем функцию ее максимальным значением. Однако если функция изменяется быстро, то ее значения близки к максимальному только в малой части области интегрирования. В качестве примера рассмотрим $I=\int\limits_0^b e^{-x}\,dx\ (b>0)$. Максимальное значение подынтегральная функция на промежутке интегрирования получает при $x=0$; это максимальное значение равно 1. Оценка (17) дает $I\approx b$. Однако в данном примере для интеграла легко получить точную формулу: $I=1-e^{-b}$. Составим таблицу зависимости точного значения величины I от b:

b	0	0,1	0,2	0,5	1	2	3	5	10
I	0	0,095	0,18	0,39	0,63	0,86	0,95	0,993	0,99996

Из таблицы видно, что пока b мало́ (при этом функция в области интегрирования изменяется мало), оценка (17) неплоха. Однако если b велико, то приближение $I\approx b$ становится очень плохим.

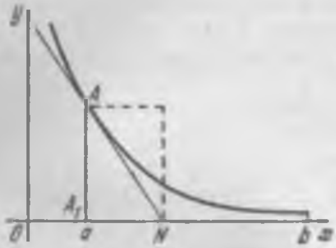

Рис. 16.

Пусть функция $y(x)$ на всем промежутке интегрирования быстро убывает. Тогда максимальное значение функции достигается на левом конце промежутка, т. е. при $x=a$. (Отметим, что отсюда не следует равенства $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}=y'(a)=0$; см. рис. 16.) Так как для быстрозатухающей функции $y(x)$ интеграл $I=\int\limits_a^b y\,dx$ не может существенно изменяться при увеличении b, то грубая оценка интеграла I не должна включать b, мы как бы полагаем $b=\infty$. Естественно считать, что в этом случае интеграл приближенно равен произведению $y_{\max}=y(a)$ на некоторую не зависящую от b длину Δx промежутка интегрирования. Эта длина должна быть тем меньше, чем быстрее убывает функция, т. е. чем больше

$|y'(a)|$. Величину Δx такой же размерности, что и x, можно построить, исходя из величин $y(a)$ и $|y'(a)|$, единственным способом

$$\Delta x = \frac{y(a)}{|y'(a)|} m,$$

где m — безразмерный коэффициент пропорциональности. После этого получаем

$$I \approx y(a)\,\Delta x = \frac{y^2(a)}{|y'(a)|} m. \qquad (18)$$

Если функция $y(x)$ возрастает на промежутке интегрирования, то она достигает максимума на правом конце промежутка, т. е. при $x = b$. В этом случае формула (18) принимает вид

$$I \approx \frac{y^2(b)}{y'(b)} m.$$

Типичным примером быстроменяющейся функции может служить показательная функция $y = Ce^{-kx}$ $(C > 0;\ k > 0)$. Выберем значение m в формуле (18) из условия, чтобы формула (18) была абсолютно точна для $\int\limits_a^\infty Ce^{-kx}\,dx$.

Так как $y = Ce^{-kx}$, $y' = -kCe^{-kx}$, то $y(a) = Ce^{-ka}$, $|y'(a)| = kCe^{-ka}$, поэтому формула (18) дает

$$I = m\frac{C^2e^{-2ka}}{Cke^{-ka}} = m\frac{Ce^{-ka}}{k} = \frac{m}{k}\,y(a).$$

Точное значение рассматриваемого интеграла есть

$$I = \int\limits_a^\infty Ce^{-kx}\,dx = -\frac{C}{k}e^{-kx}\Big|_a^\infty = \frac{1}{k}\,y(a).$$

Сравнивая результаты, находим $\frac{m}{k}y(a) = \frac{1}{k}y(a)$, откуда $m = 1$. Поэтому формула (18) принимает вид

$$I \approx \frac{y^2(a)}{|y'(a)|}. \qquad (19)$$

Эта формула в случае бесконечного промежутка для быстроменяющихся функций другого вида, а также в случае конечного промежутка, вообще говоря, не является точной, однако дает неплохие результаты.

Для того чтобы выяснить наглядный геометрический смысл оценки (19), поступим следующим образом. Проведем к кривой $y=y(x)$ касательную в точке A (рис. 16) и найдем длину отрезка A_1N. Уравнение касательной есть $y-y(a)=$ $=y'(a)(x-a)$; полагая в нем $y=0$, получим точку пересечения касательной с осью x. Это дает $x=a-\frac{y(a)}{y'(a)}$, или, замечая, что $y'(a)<0$, так как $y(x)$ — убывающая функция, получаем $x=a+\frac{y(a)}{|y'(a)|}$. Поэтому

$$A_1N=a+\frac{y(a)}{|y'(a)|}-a=\frac{y(a)}{|y'(a)|}=\Delta x.$$

Оценка интеграла по формуле (19) соответствует замене площади под кривой $y=y(x)$ площадью прямоугольника, изображенного на рис. 16.

Пример. Найдем по формуле (19) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^8}$. Здесь $y=\frac{1}{x^8}$, $y'=-\frac{8}{x^9}$, поэтому $y(1)=1$, $|y'(1)|=8$,

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^8}\approx\frac{1}{8}=0{,}125.$$

Точное значение этого интеграла есть $I=\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^8}=-\frac{1}{7x^7}\Big|_1^\infty=$ $=\frac{1}{7}=0{,}143$. Ошибка составляет 13%.

Часто встречается другой вид интегралов, у которых подынтегральная функция $y(x)$ достигает максимума при $x=x_m$ где-то внутри промежутка интегрирования (рис. 17, a). При этом в точке максимума $y'(x)=0$. Можно разбить интеграл на два интеграла от a до x_m и от x_m до b. Тогда в каждом из них подынтегральная функция достигает максимума на краю промежутка. Может показаться, что задача сведена к предыдущей. В действительности это не так, разбиение интеграла на два ничего не дает, так как при $x=x_m$

все равно $y'=0$ и оценка (19) неприменима. Значит, это действительно новый случай и надо по-другому выделять из всего промежутка интегрирования необходимую его часть Δx. Идея заключается в том, что в этом случае величина Δx определяется значением $y''(x_m)$, т. е. определяется величиной кривизны в точке максимума. Из чертежа ясно, что чем круче кривая, тем меньше следует брать Δx. Размерность второй производной совпадает с размерностью величины $\frac{y}{x^2}$. Поэтому величина той же размерности, что и Δx, получается

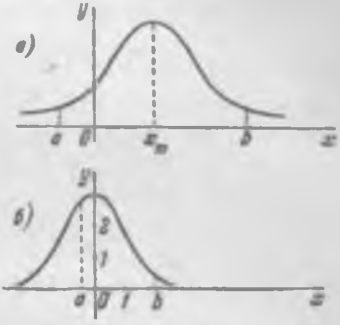

Рис. 17.

из величин $y(x_m)$ и $y''(x_m)$ так: $\Delta x = l\sqrt{\frac{y(x_m)}{|y''(x_m)|}}$ *). (Мы пишем $|y''(x_m)|$, а не $y''(x_m)$, потому что $y''(x_m)<0$, так как при $x=x_m$ функция $y(x)$ имеет максимум.) Величина l есть безразмерный коэффициент. Для интеграла получаем оценку

$$I \approx y(x_m)\cdot\Delta x = l\cdot y(x_m)\sqrt{\frac{y(x_m)}{|y''(x_m)|}} = l\sqrt{\frac{y^3(x_m)}{|y''(x_m)|}}. \qquad (20)$$

---

*) К выражению такого вида для Δx мы можем прийти еще так: разложим $y(x)$ в ряд Тейлора вблизи максимума, т. е. по степеням $x-x_m$, и возьмем два первых члена, которые не обращаются в нуль. Получим $y(x)=y(x_m)+\frac{1}{2}(x-x_m)^2\cdot y''(x_m)$. Найдем значение разности $x-x_m=\Delta x$, при которой обращается в нуль это приближенное выражение для $y(x)$:

$$y(x_m)+\frac{1}{2}(x-x_m)^2\cdot y''(x_m)=0,$$

откуда

$$\Delta x = x-x_m=\sqrt{-\frac{2y(x_m)}{y''(x_m)}}=\sqrt{\frac{2y(x_m)}{|y''(x_m)|}}.$$

Соответственно приближенное значение для I получается равным

$$I\approx\int_{x_m-\Delta x}^{x_m+\Delta x}\left[y(x_m)+\frac{1}{2}(x-x_m)^2y''(x_m)\right]dx=\frac{4}{3}y(x_m)\Delta x=\sqrt{\frac{32}{9}\frac{y^3(x_m)}{|y''(x_m)|}}.$$

Значение коэффициента l определим из условия, чтобы формула (20) была абсолютно точна для $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\,dx$, где

$$y(x)=Ce^{-kx^2},\quad k>0,\quad C>0.$$

(График функции $y=Ce^{-kx^2}$ для случая $C=3$, $k=0{,}5$ изображен на рис. 17, *б*.)

В этом случае $x_m=0$, $y(x_m)=C$, $y''(x_m)=-2Ck$. По формуле (20) находим

$$I=l\sqrt{\frac{C^2}{2Ck}}=\frac{lC}{\sqrt{2k}}. \tag{21}$$

Чтобы найти точное значение интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Ce^{-kx^2}dx$, выполним в нем замену переменной по формуле $z=x\sqrt{k}$, $dz=\sqrt{k}\,dx$. Получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Ce^{-kx^2}dx=\frac{C}{\sqrt{k}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz.$$

Величина интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz$ может быть найдена точно: в § IV.7 мы покажем, что этот интеграл равен $\sqrt{\pi}$. Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Ce^{-kx^2}dx=C\sqrt{\frac{\pi}{k}}.$$

Сравнивая эту формулу с (21), находим

$$\frac{lC}{\sqrt{2k}}=C\sqrt{\frac{\pi}{k}},$$

откуда $l=\sqrt{2\pi}$. Формула (20) принимает вид

$$I\approx\sqrt{2\pi\frac{y^3(x_m)}{|y''(x_m)|}}. \tag{22}$$

Таким образом, для двух типов быстроменяющихся функций мы получили две формулы (19) и (22), причем коэффициенты в этих формулах подобраны так, что формулы точны для интегралов по бесконечному промежутку от типичных функций: формула (19) точна для $\int\limits_a^\infty Ce^{-kx}\,dx$, а формула (22) — для $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Ce^{-kx^2}\,dx$. При другом выборе типичных функций формулы содержали бы другие коэффициенты. Определим, например, значение коэффициента l из условия, чтобы формула (20) была точна для $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{C}{1+kx^2}\,dx, C>0, k>0$. $\Bigl($Читатель легко убедится сам, что функция $y=\frac{C}{1+kx^2}$ имеет максимум при $x_m=0.\Bigr)$ Так как $y=\frac{C}{1+kx^2}$, $y''=2Ck\frac{3kx^2-1}{(1+kx^2)^3}$, то (20) дает

$$I=l\sqrt{\frac{C^3}{2Ck}}=\frac{lC}{\sqrt{2k}}.$$

Для того чтобы вычислить интеграл точно, положим

$$\sqrt{k}\,x=z,$$
$$dz=\sqrt{k}\,dx,$$

тогда

$$I=\frac{C}{\sqrt{k}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{1+z^2}=\frac{C\pi}{\sqrt{k}}.$$

Поэтому $\frac{lC}{\sqrt{2k}}=\frac{C\pi}{\sqrt{k}}$, откуда $l=\pi\sqrt{2}$. В этом случае мы получаем формулу

$$I\approx\pi\sqrt{\frac{2y^3(x_m)}{|y''(x_m)|}}.$$

Однако предпочтение отдается именно формулам (19) и (22). Причина этого заключается в следующем. Оказывается, что если получать быстроменяющиеся функции путем возведения в степень n какой-либо данной функции $f(x)$, для которой $|f(x)| < f(x_m)$ при $x \neq x_m$, то при достаточно больших n относительная погрешность формул (19) и (22) становится как угодно малой.

Поясним сказанное двумя примерами.

1. Будем интегрировать последовательные степени функции $u = \frac{1}{1+x}$ в пределах от $x = 0$ до $x = \infty$. Для этого обозначим $u_n = u^n = \frac{1}{(1+x)^n}$; это — быстроменяющиеся функции первого типа с максимумом на краю, причем чем больше показатель степени n, тем круче спадает функция u_n при увеличении x от 0. Найдем $I^{(n)} = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^n}$ при помощи формулы (19).

Так как $u_n' = \frac{-n}{(1+x)^{n+1}}$, то $|u_n'(0)| = n$, а потому приближенное значение этого интеграла есть

$$I^{(n)}_{\text{прибл}} = \frac{1}{n}.$$

Точное значение рассматриваемого интеграла есть

$$I^{(n)}_{\text{точн}} = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^n} = \frac{1}{-n+1} \cdot \frac{1}{(1+x)^{n-1}} \Big|_0^\infty = \frac{1}{n-1}.$$

Отношение

$$\frac{I^{(n)}_{\text{прибл}}}{I^{(n)}_{\text{точн}}} = \frac{n-1}{n}.$$

Так как дробь $\frac{n-1}{n}$ тем ближе к единице, чем больше n, то при весьма больших n получаем

$$\frac{I^{(n)}_{\text{прибл}}}{I^{(n)}_{\text{точн}}} \approx 1,$$

что и утверждалось. При выборе в формуле (18) $m \neq 1$ значение m осталось бы в правой части последней формулы, т. е. при больших n мы получили бы систематическую ошибку.

2. Пусть $z = \frac{1}{1+x^2}$, причем $-\infty < x < \infty$. Образуем быстроменяющиеся функции $z_n = z^n = \frac{1}{(1+x^2)^n}$. Это функции второго типа, с максимумом внутри области (в данном случае $x_m = 0$). Найдем приближенно величину $I^{(n)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$, пользуясь формулой (22). Получим $I^{(n)}_{\text{прибл}} = \sqrt{\frac{\pi}{n}}$. Интеграл $I^{(n)}$ можно вычислить точно, при этом он оказывается равным

$$I^{(n)}_{\text{точн}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2)}\,\pi\ ^{*}).$$

Отношение

$$\frac{I^{(n)}_{\text{прибл}}}{I^{(n)}_{\text{точн}}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2)}{\sqrt{\pi n}\,1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}. \tag{23}$$

Подсчитаем значения правой части (23) для нескольких значений n. При $n = 2$ получаем 0,797. При $n = 4$ получаем 0,904; при $n = 6$ получаем 0,938; при $n = 8$ получаем 0,962; наконец, при $n = 10$ получаем 0,978. Таким образом, при увеличении n значение правой части в формуле (23) приближается к 1 **).

Перейдем к общему случаю. Рассмотрим $y = [f(x)]^n$, где $f(x)$ — убывающая функция. Пусть $\ln f(x) = \varphi(x)$, тогда $f(x) = e^{\varphi(x)}$. Поэтому

$$y = e^{n\varphi(x)}. \tag{24}$$

Величина интеграла $I = \int\limits_a^b y\,dx$ определяется главным образом значениями подынтегральной функции в той области, где y не слишком сильно отличается от своего максимального значения.

---

*) Докажите это, интегрируя равенство

$$\left[\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}\right]' = -\frac{2n-3}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-2}{(1+x^2)^n}.$$

**) Более строго это можно доказать с помощью формулы Стирлинга (см. упражнение к § 3).

Ясно, что y достигает максимума одновременно с $\varphi(x)$, т. е. при одном и том же значении $x = x_m$. Для того чтобы y уменьшилось в e раз по сравнению с y_{max}, нужно, чтобы $n\varphi(x)$ было на единицу меньше, чем $n\varphi(x_m)$, т. е. чтобы было $n\varphi(x) = n\varphi(x_m) - 1$, откуда

$$\varphi(x) = \varphi(x_m) - \frac{1}{n}.$$

Чем больше n, тем меньше $\varphi(x)$ отличается от $\varphi(x_m)$. Поэтому чем больше n, тем точнее замена $\varphi(x)$ первыми двумя не равными нулю членами ее разложения в ряд Тейлора. Записав два члена разложения, получим $\varphi(x) = \varphi(x_m) + (x - x_m)\varphi'(x_m)$ (для функции, имеющей максимум на границе) либо $\varphi(x) = \varphi(x_m) + \frac{1}{2}(x - x_m)^2 \varphi''(x_m)$ (для функции, имеющей максимум внутри промежутка).

В первом случае, пользуясь формулой (24), находим

$$y = e^{n\varphi(x_m) + n(x - x_m)\varphi'(x_m)} = Ae^{-b(x - x_m)},$$

где положено $A = e^{n\varphi(x_m)}$, $b = -n\varphi'(x_m) = n|\varphi'(x_m)|$.

Во втором случае получаем

$$y = e^{n\varphi(x_m) + \frac{1}{2} n (x - x_m)^2 \cdot \varphi''(x_m)} = Ae^{-c(x - x_m)^2},$$

где положено $c = -\frac{1}{2} n\varphi''(x_m) = \frac{1}{2} n |\varphi''(x_m)|$.

Таким образом, функция $y(x)$ может быть приближенно заменена либо функцией, для которой абсолютно точна формула (19), либо функцией, для которой абсолютно точна формула (22), притом эта замена тем точнее, чем больше n.

Будем предполагать для простоты, что $x_m = 0$. Тогда для построения быстро убывающей функции можно было бы от $f(x)$ перейти не к $[f(x)]^n$, а к $f(nx)$. Однако при таком переходе обе части формулы (19) или соответственно (22) просто делятся на n, т. е. относительная ошибка обеих формул не меняется. Это связано с тем, что при указанном переходе относительная доля вклада в интеграл больших и малых значений функции $f(x)$ сохраняется неизменной (тогда как при переходе от $f(x)$ к $[f(x)]^n$ доля малых значений с ростом n стремится к нулю).

Упражнения

1. Найти величину интеграла $I=\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{1+e^x}$, разбив его на сумму двух интегралов: $I=\int\limits_0^3 \frac{x\,dx}{1+e^x}+\int\limits_3^\infty \frac{x\,dx}{1+e^x}$. Первый интеграл вычислить по формуле Симпсона, а второй по формулам настоящего параграфа. Вычисления вести в пределах точности логарифмической линейки.

2. Найти величину интеграла $I=\int\limits_0^\infty \sqrt{x}\,e^{-x^2}\,dx$, разбив его на сумму двух интегралов: $I=\int\limits_0^a \sqrt{x}\,e^{-x^2}\,dx+\int\limits_a^\infty \sqrt{x}\,e^{-x^2}\,dx$, и находя первый интеграл по формулам § 1.1, а второй — по формулам § 2. Рассмотреть случаи $a=1$; 2. Вычисления вести с тремя знаками после запятой.

3. Оценить величину интеграла $\int\limits_N^\infty e^{-x^2}dx$, рассмотренного на стр. 74.

§ 3. Формула Стирлинга

В качестве интересного примера применения формул § 2 мы сейчас получим удобную формулу для приближенного вычисления величины $n!=n(n-1)(n-2)\ \ldots\ 3\cdot 2\cdot 1$ при больших значениях n. Эта формула будет очень полезна при изучении теории вероятностей. С помощью интегрирования по частям легко установить (см., например, ВМ, ч. IV, § 7), что при целом положительном n справедливо равенство

$$\int\limits_0^\infty x^n e^{-x}\,dx=n!.$$

Оценим этот интеграл по способу предыдущего параграфа.

В нашем случае $y=x^n e^{-x}$, $y'=(nx^{n-1}-x^n)\,e^{-x}$. Приравнивая нулю первую производную, получим два значения $x=0$ и $x=n$. Нетрудно убедиться, что при $x=n$ функция *сходящимся*, а сумма его полагается равной S. Таким образом, в случае сходимости можно от частной суммы с большим номером переходить к полной сумме ряда и обратно, т. е. вклад особенности в полную сумму ряда не является существенным, он как угодно мал при большом n;

2) частная сумма может стремиться к бесконечности или может колебаться, не имея определенного предела. В этом случае ряд (25) называется *расходящимся*.

Простейший пример сходящегося ряда дает сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n + \ldots \ (|q| < 1). \quad (27)$$

В данном примере, как известно,

$$S_n = a\,\frac{1-q^n}{1-q},$$

и так как при больших n степенью q^n можно пренебречь, то в пределе получаем сумму ряда (27)

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}.$$

Ряд $1 + 1 + 1 + \ldots$ — это пример ряда, расходящегося к бесконечности, а ряд $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ — это пример ряда, расходящегося «колебательным образом», так как его частные суммы последовательно равны 1, 0, 1, 0, 1, ... и не имеют определенного предела.

Так как у сходящегося ряда частные суммы с большими номерами почти одинаковы, то его члены с большими номерами почти равны нулю; более точно: если ряд (25) сходится, то его «общий член» a_n с возрастанием номера стремится к нулю. Однако и у расходящегося ряда общий член может стремиться к нулю: например, так будет для расходящегося к бесконечности ряда

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

(То, что этот ряд расходится, можно показать так: $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.) Следовательно, только по этому признаку нельзя установить сходимость ряда. Тем не менее, если зависимость общего члена a_n от номера n нам известна и имеет не очень сложный вид, то сходимость или расходимость ряда (25) обычно бывает нетрудно установить на основании других признаков, которые мы вскоре укажем. Если же такой простой зависимости установить не удается, то просто вычисляют члены один за другим, и если они выходят за пределы принятой точности вычисления, причем нет основания ожидать, что дальнейшие члены дадут в сумму существенный вклад, то все дальнейшие члены отбрасывают, ряд объявляют сходящимся, а его сумму равной частной сумме вычисленных членов.

Первый признак сходимости ряда (25), так называемый *признак Даламбера*, основан на аналогии с суммой бесконечной геометрической прогрессии (27). Для «чистой» прогрессии (27) отношение каждого последующего члена к предыдущему есть величина постоянная (равная знаменателю q прогрессии). Допустим теперь, что для ряда (25) отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

последующего члена к предыдущему уже не постоянно, но стремится к некоторому пределу q с возрастанием номера. Тогда для больших n это отношение приблизительно равно q и, как и ряд (27), ряд (25) сходится, если $|q| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, ряд (25) расходится, если $|q| > 1$. И только если $|q| = 1$, то по признаку Даламбера нельзя установить, сходится ли ряд (25), так что приходится применять другие признаки.

Рассмотрим, например, ряд

$$\frac{a}{1^p}+\frac{a^2}{2^p}+\frac{a^3}{3^p}+\ldots+\frac{a^n}{n^p}+\ldots \qquad (28)$$

Применяя признак Даламбера, найдем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a^{n+1}}{(n+1)^p}:\frac{a^n}{n^p}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p}=a.$$

Таким образом, при $|a| < 1$ ряд (28) сходится со скоростью геометрической прогрессии, а при $|a|>1$ — расходится; при $a=\pm 1$ признак Даламбера к ряду (28) неприменим.

Рассмотрим теперь более сильный *интегральный признак Коши*, применимый к ряду с положительными членами. Допустим, что известно выражение общего члена a_n ряда (25) в виде функции от номера n, т. е. $a_n=f(n)$, причем функция $f(n)$ положительна и убывает с ростом n. Тогда в силу формулы (I.9) в качестве приближенного значения для частной суммы (26) можно принять

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=f(1)+f(2)+\ldots+f(n)\approx$$
$$\approx\int_1^n f(x)\,dx+\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{2}f(n). \tag{29}$$

Таким образом, если интеграл

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \tag{30}$$

сходится, то правая часть (29) при $n\to\infty$ остается конечной, т. е. ряд (25) сходится. Если же интеграл (30) расходится к бесконечности, то и ряд (25) расходится.

Рассмотрим, например, ряд

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots, \tag{31}$$

который получается из ряда (28) при $a=1$, когда признак Даламбера не действует. Чтобы применить интегральный признак Коши, надо рассмотреть интеграл

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}.$$

Этот интеграл был рассмотрен в § 1 (формула (3)), где мы показали, что он сходится при $p>1$ и расходится при $p\leqslant 1$. Значит, и ряд (31) сходится при $p>1$ и расходится при $p\leqslant 1$. В частности, при $p=1$ получаем так называемый *гармонический ряд*

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\infty.$$

Что касается рядов с членами произвольного знака, то здесь часто применяется *признак Лейбница*, согласно которому ряд

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \ldots \qquad (32)$$

(все a_i считаются положительными, так что знаки двух соседних слагаемых противоположны) сходится, если

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$$
$$\ldots > a_n > \ldots \to 0. \qquad (33)$$

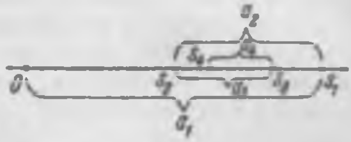

Рис. 19.

В самом деле, если на некоторой вспомогательной оси изобразить (рис. 19) частные суммы ряда (32), то из условия (33) вытекает, что переход от S_1 к S_2, от S_2 к S_3, от S_3 к S_4 и т. д. имеет вид затухающих колебаний, т. е. эти частные суммы стремятся к определенному пределу.

Таким образом, например, ряд

$$1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \ldots \qquad (34)$$

сходится при любом $p > 0$.

Если, как в предыдущем признаке, члены ряда (32) имеют вид $f(n)$, то приближенное значение его суммы можно подсчитать по методам § 1.2. О способах уточнения этого значения будет сказано ниже.

Сходящиеся ряды с членами произвольного знака (не обязательно «знакочередующиеся», как (32)) бывают двух типов:

1) может оказаться, что сходятся как «положительная часть» исходного ряда (т. е. ряд, составленный из одних положительных членов исходного ряда), так и его «отрицательная часть». Тогда исходный ряд называется *абсолютно сходящимся*, так как сходится и ряд, составленный из абсолютных величин его членов;

2) может оказаться, что и положительная и отрицательная части исходного ряда расходятся к бесконечности, но сам ряд сходится из-за компенсации этих бесконечностей. Такой ряд называется *неабсолютно сходящимся*, так как ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Например, вспоминая о ряде (31), мы заключаем, что ряд (34) при $p>1$ абсолютно сходящийся, а при $0<p\leqslant 1$ неабсолютно сходящийся.

Со сходящимися рядами можно производить такие же действия, как и с конечными суммами, так как практически сумма сходящегося ряда просто равна его частной сумме с достаточно большим номером. Не совсем очевидное осложнение возникает при перестановке членов сходящегося ряда. Именно, на сумме абсолютно сходящегося ряда такая перестановка не сказывается, но неабсолютно сходящийся ряд может после перестановки членов изменить свою сумму или даже стать расходящимся, так как такая перестановка может изменить или даже нарушить «компенсацию бесконечностей», о которой было сказано выше. Рассмотрим, например, сходящийся ряд

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\ldots \tag{35}$$

и переставим в нем члены так, чтобы за двумя положительными следовал один отрицательный:

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\\ +\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\ldots \tag{36}$$

Частная сумма S_{3n} с номером $3n$ этого ряда состоит из группы положительных слагаемых

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}$$

и группы отрицательных слагаемых

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{4}}-\ldots-\frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Но первая сумма превосходит

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{8}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n-2}}+\frac{1}{\sqrt{4n}},$$

и потому общая сумма

$$S_{2n} > \frac{1}{\sqrt{2n+2}} + \frac{1}{\sqrt{2n+4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4n-2}} + \frac{1}{\sqrt{4n}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right).$$

В силу оценки (I.11) правая часть приближенно равна

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{n+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{2}\left(\sqrt{2n+\frac{1}{2}} - \sqrt{n+\frac{1}{2}}\right) =$$
$$= \sqrt{2n}\left(\sqrt{2+\frac{1}{2n}} - \sqrt{1+\frac{1}{2n}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Итак, из двух рядов (35) и (36), различающихся лишь порядком членов, первый сходится, а второй расходится к бесконечности.

Если мы хотим, как это часто делают на практике, заменить сумму ряда на частную сумму нескольких его первых членов, то для этого ряд должен не просто сходиться, а быстро сходиться, чтобы, взяв небольшое число членов, мы почти исчерпали полную сумму, получив ее с хорошей точностью. Для медленно сходящихся рядов (ими, в частности, обычно оказываются неабсолютно сходящиеся ряды) приходится остаток ряда не отбрасывать, а оценивать по методам § 1.2.

Как для сходящихся, так и для расходящихся рядов бывает существенно найти асимптотический закон изменения частной суммы в процессе увеличения ее номера. Это можно сделать с помощью методов § 1.2, т. е. с помощью применения формул (I.9), (I.11), (I.14) или (I.15), хотя при этом получается определенная ошибка. Ограничимся для простоты рядами с положительными членами. Обычно частная сумма ряда имеет вид

$$f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(a+nh),$$

где число членов возрастает за счет увеличения n, а величина h остается неизменной. Так, например, из суммы

$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ получается сумма

$$S_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

или

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}.$$

В таком случае, как правило, абсолютная величина ошибки не уменьшается с увеличением числа членов суммы.

Рассмотрим примеры.

1. $S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$. Согласно (I.11) получим

$S_n \approx \int\limits_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^2} = 2 - \frac{1}{n+\frac{1}{2}}$. По формуле (I.9) находим

$$S_n \approx \int\limits_1^n \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2} = 1,5 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} = 1,5 - \frac{2n-1}{2n^2}.$$

Известно, что при неограниченном увеличении n значение S_n неограниченно приближается к числу $S = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,665$. (Здесь мы не доказываем этого факта.) Для весьма больших n формула (I.11) дает $S_n = 2$ (ошибка 20%), формула (I.9) дает $S_n = 1,5$ (ошибка 10%).

Отметим, что в этом случае легко уточнить расчет. Причина довольно значительной ошибки заключается в том, что первые члены суммы изменяются быстро, следовательно, на промежутке интегрирования, соответствующем расстоянию между двумя последовательными членами суммы, функция $f(x)$ изменяется сильно, а поэтому формула трапеций дает плохой результат.

Поэтому можно найти сумму нескольких первых членов непосредственным сложением, а к оставшейся сумме применить приближенные формулы.

В нашем примере найдем сначала сумму первых трех членов непосредственно:

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} = 1 + 0,25 + 0,111 = 1,361.$$

Пусть

$$S'_{n-3}=\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}.$$

По формуле (I.11) находим $S'_{n-3}\approx 0{,}286-\dfrac{1}{n+\frac{1}{2}}$, по формуле (I.9) находим $S'_{n-3}\approx 0{,}281-\dfrac{2n-1}{2n^2}$. Поэтому

$$S_n\approx 1{,}647-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$$

по (I.11) и

$$S_n\approx 1{,}642-\frac{2n-1}{2n^2}$$

по (I.9). При неограниченном увеличении n формула (I.11) дает $S\approx 1{,}647$, формула (I.9) дает $S\approx 1{,}642$. В каждом случае ошибка меньше 2%.

2. Рассмотрим сумму убывающей геометрической прогрессии

$$S_n=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots+\frac{1}{z^{n-1}},$$

где $z>1$. Точная формула, как известно, такова:

$$S_n=\frac{1-\frac{1}{z^n}}{1-\frac{1}{z}}=\frac{z-\frac{1}{z^{n-1}}}{z-1},$$

откуда при неограниченном росте n находим $S=\dfrac{z}{z-1}$. По формуле (I.11) получаем

$$S_n\approx\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\frac{dx}{z^x}=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}e^{-x\ln z}dx=$$

$$=\frac{1}{\ln z}\left[e^{\frac{1}{2}\ln z}-e^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln z}\right]=\frac{\sqrt{z}}{\ln z}\left(1-\frac{1}{z^n}\right).$$

При неограниченном росте n находим $S\approx\dfrac{\sqrt{z}}{\ln z}$. Из приведенной ниже таблицы видно, что при z, близком к единице, обе формулы дают близкие результаты:

z	1,2	1,5	2,0	3,0	6,0	20,0
$\frac{z}{z-1}$	6,00	3,00	2,00	1,5	1,20	1,05
$\frac{\sqrt{z}}{\ln z}$	6,00	3,01	2,04	1,57	1,36	1,49

Если же $z \gg 1$, то соседние члены прогрессии сильно отличаются и поэтому приближенная формула дает плохие результаты.

В некоторых случаях сумма может неограниченно возрастать при увеличении числа членов, несмотря на то, что члены суммы уменьшаются (это случаи расходимости соответствующих бесконечных рядов).

Рассмотрим примеры.

1. $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

По формуле (I.11) получаем

$$S_n \approx \int\limits_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\,\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = 2\sqrt{n+\frac{1}{2}} - 2\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

По формуле (I.9) получаем

$$S_n \approx \int\limits_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}} = 2\sqrt{n} - 1{,}5 + \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

При больших n получаем из (I.11)

$$S_n \approx 2\sqrt{n} - 1{,}41,$$

а из (I.9) $S_n \approx 2\sqrt{n} - 1{,}50$. (При этом мы отбрасываем член, пропорциональный $\frac{1}{\sqrt{n}}$.)

Более точная формула (она получается непосредственным сложением нескольких первых членов) такова:

$$S_n \approx 2\sqrt{n} - 1{,}466.$$

2. Во многих вопросах встречается сумма

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

При больших n, пользуясь формулой (I.11), находим $S_n \approx \ln n + \ln 2 = \ln n + 0{,}69$, а пользуясь (I.9), находим $S_n \approx \ln n + 0{,}50$. Предел разности $S_n - \ln n$ при неограниченном увеличении n обозначается буквой C и называется *постоянной Эйлера*. Таким образом, можно написать формулу $S_n = \ln n + C + \alpha_n$, где $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому асимптотически точная формула имеет вид $S_n \approx \ln n + C$. Мы получили весьма грубые приближенные значения для постоянной Эйлера, однако при помощи формул (I.9) и (I.11) можно получить более точное значение C, суммируя непосредственно несколько первых членов. Оказывается, что $C = 0{,}5772\ldots$

Теперь рассмотрим суммы, члены которых растут с увеличением n. Величина такой суммы неограниченно возрастает с увеличением числа членов, т. е. с ростом n. При увеличении n возможны два случая.

1. Ошибка приближенных формул (I.9) и (I.11) с увеличением n уменьшается (по абсолютной величине) или хотя и увеличивается, но медленнее, чем сама сумма, так что относительная ошибка уменьшается. Этот случай получается, если члены суммы возрастают медленнее геометрической прогрессии, например, как степени.

2. Относительная ошибка (а тем более и абсолютная) с увеличением n не уменьшается.

Второй случай получается тогда, когда члены суммы возрастают в геометрической прогрессии, т. е. когда сумма имеет вид $S_n = a + ay + ay^2 + ay^3 + \ldots + ay^{n-1}$, где $|y| > 1$, а также если члены суммы растут быстрее прогрессии, например $S_n = y + y^4 + y^9 + \ldots + y^{n^2}$. В этом случае последний член составляет основную часть всей суммы. Например, для случая суммы $S_n = y + y^4 + y^9 + \ldots + y^{n^2}$ мы приводим таблицу значений величины $\frac{S_n}{y^{n^2}}$ $(y = 2)$:

n	1	2	3	4	5
2^{n^2}	2	16	512	65 536	33 500 000
S_n	2	18	530	66 066	33 600 000
$\frac{S_n}{2^{n^2}}$	1	1,12	1,03	1,01	1,003

Из таблицы видно, что при больших n величина всей суммы практически определяется величиной одного последнего члена.

Аналогичная картина имеет место и для возрастающей геометрической прогрессии.

Действительно, в формуле

$$S_n = 1 + z + \ldots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1} \qquad (|z| > 1)$$

пренебрежем единицей по сравнению с z^n, тогда получим

$$S_n \approx \frac{z^n}{z-1}.$$

Поэтому

$$\frac{S_n}{z^{n-1}} \approx \frac{z^n}{z^{n-1}(z-1)} = \frac{z}{z-1} = \text{const}$$

(при достаточно больших n). Значит, в этом случае доля вклада последнего члена приближается к постоянному числу, а при больших $|z|$ эта доля близка к 1. Ясно, что в этом случае нет надобности в формулах суммирования. Действительно, для того чтобы получить величину суммы с хорошей степенью точности, достаточно найти сумму двух-трех последних членов.

Формулы суммирования полезны тогда, когда отношение суммы к последнему члену возрастает с увеличением n. Тогда формула дает возможность сократить вычисления при больших n. При этом всегда осуществляется случай 1, т. е. относительная ошибка формул (I.9) и (I.11) обязательно уменьшается. Приведем пример.

Из элементарной алгебры известна формула

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

Применим к сумме S_n приближенную формулу (I.11). Получим

$$S_n \approx S_n' = \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{4}.$$

Абсолютная ошибка равна $S_n' - S_n = \frac{n}{12}$ и, следовательно, растет с увеличением n. Относительная ошибка

$$\frac{S_n'-S_n}{S_n} = \frac{n}{12\left(\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\right)} \approx \frac{n}{12\frac{n^3}{3}} = \frac{1}{4n^2}.$$

Она быстро уменьшается с увеличением n.

Рассмотрим сумму

$$S_n^{(p)} = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p \; (p > -1).$$

Применив формулу (I.10), мы получим

$$S_n^{(p)} \approx \int_1^n x^p\,dx = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1}.$$

Таким образом, при больших n справедлива простая, хотя и грубая формула

$$S_n^{(p)} \approx \frac{n^{p+1}}{p+1} \; ^{*)}.$$

Упражнения

1. Уточнить значение постоянной Эйлера C (см. стр. 101), найдя непосредственно сумму пяти первых членов, десяти первых членов.

2. Пусть дана сумма

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

такая, что

$$0 < u_1 < u_2 < u_3 < \ldots < u_n.$$

Образуем сумму

$$\sigma_n = 1 + \frac{u_{n-1}}{u_n} + \frac{u_{n-2}}{u_n} + \ldots + \frac{u_1}{u_n}.$$

Ясно, что члены этой суммы убывают. Как ведет себя σ_n с увеличением n, если S_n есть возрастающая сумма первого типа; второго типа?

---

*) В случае, когда p — целое положительное, элементарная алгебра позволяет написать точную формулу для $S_n^{(p)}$ (в частности, мы пользовались такой формулой для $p=2$). Однако при больших p формулы становятся громоздкими, поэтому приведенная грубая формула может оказаться полезной и для целых положительных p.

§ 5. Интегралы, зависящие от параметра

Рассмотрим интеграл вида

$$I = \int_a^b f(x, \lambda)\, dx, \tag{37}$$

где под знак интеграла, помимо переменной интегрирования x, входит *параметр* (произвольная постоянная) λ, т. е. величина, которая в процессе интегрирования считается постоянной, но вообще может принимать различные значения. Тогда и результат интегрирования, вообще говоря, зависит от λ, т. е. $I = I(\lambda)$. Такие интегралы часто встречаются в приложениях, когда интегрируемая функция включает в себя какие-либо массы, размеры и т. п., которые в процессе интегрирования являются постоянными.

Приведем простые примеры:

$$\int_0^1 (x^2 + \lambda x)\, dx = \frac{1}{3} + \frac{\lambda}{2}; \quad \int_0^1 \sin \alpha x\, dx = \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha};$$

$$\int_0^1 (s+1)\, x^s\, dx = 1 \ (s > -1).$$

При рассмотрении собственных интегралов имеют место те же свойства, что и при рассмотрении конечных сумм функций. Так, мы знаем, что производная от суммы функций равна сумме производных. Подобным образом производная от интеграла (37) по параметру равна интегралу от производной по этому параметру:

$$\frac{dI}{d\lambda} = \int_a^b \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda}\, dx;$$

здесь под знаком интеграла стоит производная от функции $f(x, \lambda)$ по λ, взятая при фиксированном x. Аналогичное правило выполняется при интегрировании по параметру:

$$\int_\alpha^\beta I(\lambda)\, d\lambda = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x, \lambda)\, d\lambda \right) dx.$$

Для проверки этих простых правил надо было бы выписать их для интегральных сумм, а затем перейти в пределе от сумм к интегралам, однако мы не станем здесь этим подробно заниматься.

Для несобственных интегралов, зависящих от параметров, могут возникнуть осложнения, связанные прежде всего с возможностью их расходимости. Наиболее просто обстоят дела для «правильно сходящихся» несобственных интегралов; так, интеграл вида

$$I(\lambda) = \int_a^\infty f(x, \lambda)\, dx, \tag{38}$$

где сама функция f конечна, называется ***правильно сходящимся***, если он ***мажорируется*** сходящимся интегралом, не зависящим от параметра, т. е. если $|f(x, \lambda)| \leqslant F(x)$, где $\int_a^\infty F(x)\, dx < \infty$. Например, интеграл

$$\int_1^\infty \frac{\sin \lambda x}{x^2}\, dx$$

правильно сходящийся, так как

$$\left| \frac{\sin \lambda x}{x^2} \right| \leqslant \frac{1}{x^2}, \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx = 1 < \infty.$$

Свойства правильно сходящихся интегралов такие же, как собственных интегралов.

При изучении неправильно сходящихся, а также расходящихся интегралов вида (38) часто поступают следующим образом: отрезают особенность, т. е. переходят к собственному интегралу

$$I_N(\lambda) = \int_a^N f(x, \lambda)\, dx,$$

после чего рассматривают асимптотическое поведение этого интеграла при $N \to \infty$. Этим бывает возможно оправдать действия над несобственными и даже расходящимися интегралами.

Очень важно, что результат выполнения различных действий — вычитания, дифференцирования по параметру и т. д.—